Лекция 6.
Методы целочисленного и дискретного линейного программирования

Целочисленное программирования объединяет методы, которые ориентированы на решение задач математического программирования, где все или некоторые переменные приобретают целые значения. Если при этом целевая функция и все ограничения является линейными, то задача является задачей целочисленного линейного программирования.

На практике часто возникают задачи выбора оптимальных решений дискретного характера. При этом различают задачи комбинаторного типа, допустимое множество которых имеет конечное количество точек, задачи целочисленного программирования, где переменные приобретают целочисленные значения, и задачу частично дискретного программирования, в которых лишь часть переменных приобретает дискретные значения.

Примерами задач целочисленного программирования являются:

1) задачи с неделимостями (задача о ранце, задача выбора средств доставки);
2) экстремальные комбинаторные (задача об оптимальном назначении, задача коммивояжера);
3) с разрывными целевыми функциями (транспортная задача с фиксированными доплатами);
4) задачи на бессвязных и невыпуклых областях и другие.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача об оптимальных назначениях

Есть *n* видов работ и *n* кандидатов (исполнителей) для их выполнения. Считается, что каждый из кандидатов $i=\overline{1,n}$ может выполнять любую работу $j=\overline{1,n}$, при этом c_{ij} – расходы, связанные с назначением *i*-го кандидата на *j*-ий вид работы. Необходимо распределить кандидатов на выполнение работ таким образом, чтобы каждый из кандидатов получил единственное назначение, каждая из работ получила единственного исполнителя и суммарные расходы, связанные с назначениями, были минимальными.

Это типичная комбинаторная задача. Ее решением является некоторая перестановка чисел $1,\ldots,n$. Число перестановок равняется $n!$, поэтому при больших *n* развязать эту задачу путем прямого перебора всех возможных перестановок невозможно. Однако рассматриваемую задачу можно записать в виде ЗЛП из целочисленными переменными.

Действительно, пусть $x_{ij}=1$, если *i*-ий исполнитель назначается на *j*-ю работу, и x_{ij} в противоположном случае. Тогда математическая модель задачи об оптимальных назначениях приобретает такой вид:

Найти матрицу $X=\left(x_{ij}\right)$, $\left(i,j\right)=\overline{1,n}$,которая минимизирует целевую функцию

$$z=\min_{x\in X}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\right\},$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum_{j}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i}^{n} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}).$$

Задача о ранце

Путешественник, собираясь в поход, должен сложить в ранец некоторые из *n* предметов, которые могут ему понадобиться. При этом считается, что известная полезность c_j одного предмета *j*-го наименования, а также, что в походе могут быть нужными несколько одинаковых предметов. Ранец имеет *m* ограничений по своим характеристикам (объем, линейные размеры, вес і т.п.). Пусть a_{ij} – *i*-я характеристика ($i = \overline{1,m}$) предмета *j*-го наименования ($j = \overline{1,n}$), b_i – максимальное значение *i*- ї характеристики ранца. Необходимо определить, какие предметы и в каком количестве следует загрузить в ранец, чтобы их суммарная полезность была максимальной.

Если через x_j обозначить количество предметов *j*-го наименования, которое планируется для загрузки в ранец, то математическая формулировка этой задачи приобретает вид:

$$z = \min_{x \in X} \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\},$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Рассмотренная задача есть полностью целочисленной ЗЛП.

Задача выбора средств доставки

Пусть для перевозки *p* видов грузов можно использовать суда *n* типов, причем a_k – количество груза *k*-го вида, g_j – количество судов типа *j*, $j = \overline{1,n}$, c_j – расходы, связанные с использованием одного судна *j*-го типа. Каждое судно имеет *m* емкостей (палубы, трюмы и т.д.), d_{ij} – грузоподъемность емкости *i*, $i = \overline{1,m}$ на судне типа *j*. Необходимо выбрать наиболее экономный комплекс средств доставки грузов и план загрузки судов.

Обозначим через x_j, количество судов j-го типа, что планируется для перевозок, y_{ik} – количество груза k-го вида, $k=\overline{1,p}$, который подлежит загрузке в емкость i. Тогда задача формально сводится к выбору переменных x_j, и y_{ik}, что сводят на минимум

$$z=\min_{x\in X}\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right\},$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}-\sum_{k=1}^{p} y_{ik}\geq 0,\quad i=\overline{1,m},$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik}=a_k,\quad k=\overline{1,p},$$
$$0\leq x_i\leq g_i,\quad x_j\in\mathbb{Z},\quad j=\overline{1,n},$$
$$y_{ik}\geq 0,\quad i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,p}.$$

В этой задаче на переменные y_{ik} условие целочислености не накладывается, потому это частично целочисленная задача.

Транспортная задача с фиксированными доплатами

Данная задача отличается от обычной ТЗ тем, что расходы на перевозку однородного груза из пункта A_i в пункт B_j определяется так :

$$\tilde{c}_{ij}\left(x_{ij}\right)=\begin{cases} 0, & \text{если}\quad x_{ij}=0,\\ c_{ij}x_{ij}+d_{ij}, & \text{если}\quad x_{ij}>0,\end{cases}$$

где c_{ij} – расходы на перевозку единицу груза; d_{ij} – фиксированная доплата за аренду транспортных средств.

С такими предположениями функция суммарных расходов имеет разрывы, что значительно усложняет ее минимизацию. Поэтому вводят дополнительные бинарные переменные (приобретают два значения: 0 или 1), которые дают возможность устранить разрывы функции расходов и возвести начальную задачу к частично целочисленной.

Обобщая приведенные примеры, можно получить такую модель задачи целочисленного программирования:

$$
\begin{gathered}
f(x) = \max_{x \in X} \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\}, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \quad i = \overline{1, r}, \\
x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1, n}.
\end{gathered}
\tag{6.1}
$$

Самый простой, интуитивный метод решения ЗЦЛП заключается в округлении значений переменных в оптимальном решении нецелочисленной задачи к целым значениям. Однако целочисленное решение, полученное таким путем, может оказаться недопустимым или допустимым, но неоптимальным, что имеет место, например, в такой задаче:

$$
\begin{gathered}
f(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3, \\
\begin{cases}
2x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \\
4x_1 - 3x_2 \le 2, \\
-3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3,
\end{cases} \\
x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1, n}.
\end{gathered}
$$

Решением этой ЦЗЛП $\overline{x}^*$ = (2; 2; 5). Если же развязать соответствующую ЗЛП одним из известных методов, то получим $\overline{x}^*$ = (0,5; 0; 4,5). Заметим, что никакие варианты округления полученного решения не дают даже допустимого решения ЦЗЛП, не говоря уже об оптимальном.

Округление полностью оправдано, когда идет речь о массовом выпуске однородной продукции, в отличие от тех задач, где рассматривают мелкосерийное уникальное оборудование, сложные технические комплексы и др., для которых требование целочислености принципиально. Существует и другая причина несостоятельности округления. Чаще всего целочисленные переменные выражают количество неделимых объектов (людей, машин, единиц продукции). Но возможны и другие типы целочисленных переменных. Так, решение о финансировании некоторого проекта подается некой булевой переменной *x*, что может приобретать одного из двух значений:

$$
x = \begin{cases}
1, & \textit{когда проэкт принимается}; \\
0, & \textit{когда проэкт не принимается}.
\end{cases}
$$

Методы решения задач целочисленного линейного программирования

Для решения ЗЦЛП применяются такие основные группы методов:

1) графический;
2) методы отрезания (метод Гомори, метод Дальтона-Ллевелина);
3) комбинаторные методы (метод веток и пределов);
4) методы решения задач, которые основываются на теории графов.

Метод Гомори

Идея метода такова. Решение задачи (6.1) сводится к решению законченной последовательности ЗЛП без требования : $P_0,\dots,P_{k-1},P_k,\dots,P_N$, каждая из которых получается из предыдущей приобщением к ее ограничениям дополнительного линейного неравенства (отрезание), которое формируется так.

Пусть задача P_{k-1} развязана симплексным методом и ее решение $X_{k-1}=\left(\lambda_1,\dots,\lambda_r,0,\dots,0\right)^T$, а система уравнений-ограничений, которая отвечает ему, имеет вид

$$x_i+\sum_{j=r=1}^{n}\alpha_{ij}x_j=\lambda_i,\quad i=\overline{1,r}, \tag{6.2}$$

где $\lambda_i, i=\overline{1,r}$ – не все целые числа.

Обозначим: $\{a\}=\ a-[a]$ – дробная часть числа *a*.

Найдем

$$\{\lambda_s\}=\max_i\{\lambda_i\}_{i=1}^r,$$

$$\gamma_s=\frac{\{\lambda_s\}_{s=1}^r}{1-\{\lambda_s\}_{s=1}^r}.$$

Тогда для решения полностью целочисленной задачи образуется сечение (I сечение Гомори) в виде неравенства

$$\{\lambda_s\}-\sum_{j=r=1}^{n}\{\alpha_{sj}\}x_j\le 0, \tag{6.3}$$

а для решения частично целочисленной задачи образуют сечение (II сечение Гомори) в виде неравенства

$$\{\lambda_s\}-\sum_{j=r+1}^{n}\{\beta_{sj}\}x_j\le 0, \tag{6.4}$$

где для x_j, что не подлежат требованию целочислености

$$\beta_{sj}=\begin{cases}\alpha_{sj}, & \text{\textit{если}}\quad \alpha_{sj}\ge 0\\ \gamma_s\left|\alpha_{sj}\right|, & \text{\textit{если}}\quad \alpha_{sj}<0,\end{cases}$$

а для x_j, что подлежат требованию целочислености

$$\beta_{sj} = \begin{cases} \{\alpha_{sj}\}, & если \quad \{\alpha_{sj}\} \le \{\lambda_s\}, \\ \gamma_s(1-\{\alpha_{sj}\}), & если \quad \{\alpha_{sj}\} > \{\lambda_s\}. \end{cases}$$

Контрольный пример 1

Развязать ЦЗЛП:

$$f(X) = \max_{x \in X}\{3x_1 + 4x_2\},$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 12x_1 + 7x_2 \le 84, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1,2}.$$

Решение

Здесь $X = (x_1, x_2)^T$. Введя балансные переменные $x_3, x_4 \ge 0$, возведем задачу к каноническому виду:

$$f(X) = \max_{x \in X}\{3x_1 + 4x_2\},$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 12x_1 + 7x_2 + x_4 = 84, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1,4}.$$

Заметим, что в случае дробных правых частей системы уравнений-ограничений требование целочислености следует оставлять лишь относительно переменных x_1 и x_2.

Составим симплекс-таблицу и превратим ее к получению решения без требования целочислености (таблица 6.1).

Таблица 6.1 – Симплекс-таблица

Базис	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	18	2	3	1	0
x_4	84	12	7	0	1
$f(X')$	0	-3	-4	0	0
x_2	6	2/3	1	1/3	0
x_4	42	22/3	0	-7/3	1
$f(X')$	24	-1/3	0	4/3	0
x_2	24/11	0	1	6/11	-1/11
x_1	63/11	1	0	-7/22	3/22
$f(X')$	285/11	0	0	27/22	1/22

Полученное решение имеет дробные координаты $\lambda_1 = {}^{24}\!/_{11}$ и $\lambda_2 = {}^{63}\!/_{11}$. Найдем и сравним их дробные части: $\{\lambda_1\} = {}^{2}\!/_{11}$, $\{\lambda_2\} = {}^{8}\!/_{11}$, $\{\lambda_1\} < \{\lambda_2\}$.

Сечение Гомори (6.3) выполним за вторым уравнением: ${}^{8}\!/_{11} - {}^{15}\!/_{22}\,x_3 - {}^{3}\!/_{22}\,x_4 \le 0$.

Сбалансируем это неравенство переменной $x_5 \ge 0$ и введем уравнение ${}^{8}\!/_{11} - {}^{15}\!/_{22}\,x_3 - {}^{3}\!/_{22}\,x_4 + x_5 = 0$ в систему уравнений-ограничений (таблица 6.2).

Таблица 6.2 – Симплекс-таблица I сечения Гомори

x_2	24/11	0	1	6/11	-1/11	0
x_1	63/11	1	0	-7/22	3/22	0
x_5	8/11	0	0	-15/22	-3/22	1
f(X')	-285/11	0	0	-27/22	-1/22	0
x_2	8/3	0	1	1	0	-2/3
x_1	5	1	0	-1	0	1
x_4	16/3	0	0	5	1	-22/3
f(X')	25(2/3)	0	0	1	0	1/3

Опять полученное решение имеет дробные координаты $\lambda_1 = {}^{8}\!/_{3}$ и $\lambda_1 = {}^{16}\!/_{3}$. Найдем и сравним их дробные части: $\{\lambda_1\} = {}^{2}\!/_{3}$, $\{\lambda_4\} = {}^{1}\!/_{3}$, $\{\lambda_4\} < \{\lambda_2\}$.

Перерез Гоморре (6.4) выполним, используя первое уравнение: ${}^{1}\!/_{3}\,x_5 \ge {}^{2}\!/_{3}$.

Сбалансируем это неравенство переменной $x_6 \ge 0$ и введем полученное уравнение в систему уравнений-ограничений (таблица 6.3).

Таблица 6.3 – Симплекс-таблица II сечения Гомори

x_2	8/3	0	1	1	0	-2/3	0
x_1	5	1	0	-1	0	1	0
x_4	16/3	0	0	5	1	-22/3	0
	2/3	0	0	0	0	1/3	-1
x_2	4	0	1	1	0	0	-2
x_1	3	1	0	-1	0	0	3
x_4	20	0	0	5	1	0	-22
x_5	2	0	0	0	0	1	-3
f(X')	25	0	0	1	0	0	1

Получено целочисленное решение:

$$X'_{\text{опт}} = (3, 4, 0, 20, 2, 0)^T,$$
$$f\left(X'_{\text{опт}}\right) = 25.$$

Для данной задачи целочисленное решение будет:

$$X_{\text{опт}} = (3,4)^T,$$
$$f_{\max} = 25.$$

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называют целочисленными задачами линейного программирования?
2. Формализация каких экономических задач дает задачи целочисленного программирования?
3. Как условие целочислености влияет на допустимое множество решений ЗЛП?
4. Какие методы применяют для решения задач целочислености программирование?
5. Сформулируйте главную идею методов отрезания.

Рекомендуемая литература

1. Гершгорн А.С. Математическое программирование и его применение в экономических расчетах / А.С. Гершгорн. – М.: Экономика, 1968. – 356 с.
2. Грешилов А.А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях / А.А. Грешилов. – М.: Радио и связь, 1991. – 245 с.
3. Деордица Ю.С. Исследование операций в планировании и управлении: Учебное пособие / Ю.С. Деордица, Ю.М. Нефедов. – К.: Вища школа, 1991. – 270 с.
4. Жильцов О.Б. Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій): Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильців, В.Р. Кулян, О.О. Юнькова; За ред. О.О.Юнькової. – К.: МАУП, 2006. – 184 с.
5. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. – М.: Прогресс, 1975. – 621 с.
6. Карасев А.И. Математические методы и модели в планировании: Учебное пособие. – М.: Экономика, 1987. – 314 с.
7. Кузнецов А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А.В. Кузнецов. – М.: Высшая школа, 1978.
8. Сергиенко И.В. Математические модели и методи решения задач дискретной оптимизации / И.В. Сергиенко. – К .: Наукова думка, 1988.