ЛЕКЦИЯ №4.
Симплексный метод решения задач линейного программирования

Одним из наиболее используемых методов задач линейного программирования (ЗЛП) нахождения их решений есть симплекс-метод, который не зависит ни от количества неизвестных, ни от числа и вида ограничений.

Рассмотрим ЗЛП, записанную в канонической форме.

$$z = \max_{x\in X}\left\{c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n\right\},$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0, \quad b_i \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \quad i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Если ввести векторы $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $A_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$, $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$, $j = \overline{1,n}$, то задачу можно записать в векторном виде

$$z = \max_{x\in X}\left\{C \cdot X\right\},$$
$$\begin{cases} x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n = A_0, \\ x_j > 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{4.2}$$

где $C \cdot X$ – скалярное произведение векторов C и X.

Определение 1. Планом задачи называется вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компоненты которого удовлетворяют условию (4.1).

Определение 2. План $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется опорным, если векторы A_j, $j = \overline{1,n}$, которые отвечают положительным компонентам x_j плана *X*, образуют линейно независимую систему. Каждый опорный план содержит не более чем *m* положительных компонент.

Определение 3. Опорный план называется невырожденным, если он содержит ровно *m* положительных компонент. Если опорный план содержит меньше m положительных компонент, то такой опорный план называется вырожденным.

Определение 4. Оптимальным планом, или решением ЗЛП называется план, который оптимизирует линейную форму (4.1). Другими словами, X_0 – оптимальный план ЗЛП, если для любого плана X выполняется условие $z(X_0) \le z(X)$ для задачи на **min**, $z(X_0) \ge z(X)$ – для задачи на **max**.

Симплексный метод, или метод последовательного улучшения плана, заключается в последовательном переходе от одного опорного плана к другому так, что значение линейной формы все время уменьшается (для задачи на **min**) и увеличивается (для задачи на **max**). Число опорных планов задачи конечно. За конченное число шагов метод дает возможность найти оптимальный план (если он существует) или удостовериться, что линейная форма на множестве планов неограниченна.

Отметим, что симплекс-метод требует наличия только уравнений в ограничении (4.2).

Для работы метода должен быть известен начальный опорный план.

Поиск начального опорного решения

Если в исходной задаче достаточно много ограничений, то для определения начального базиса, т.е. проверки линейной независимости векторов, нужно вычислять определители матриц с достаточно большой размерностью, что вместе с определением матрицы B^{-1}, обратной к базисной матрице B, нуждается в значительном объеме вычислений. Поэтому на практике обычно удобнее начинать вычисление из опорного решения, которому отвечает единичный базис $B = E$ (то есть система уравнений-ограничений, возведенная к единичному базису, дает возможность указать исходный опорный план задачи).

Если такого опорного решения в задаче нет, то по определенным правилам ее сводят к другому виду, который имеет очевидное опорное решение с единичным базисом.

Если задача имеет симметричную форму, то дополнительные (балансные) переменные, которые превращают неравенства в уравнение, используют в качестве базисных. Балансовые переменные входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами.

Для ограничений типа «≥» нужны как дополнительные, так и искусственные переменные. Дополнительная переменная, которая дает возможность превратить неравенство в строгое равенство, в этом случае имеет знак «-», т.е. соответствующая ей компонента опорного плана отрицательна. В таком случаи, искусственная переменная используется в качестве базисной.

Допустим, что ранг матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ равняется m, т.е. все ограничения задачи линейно независимы.

Пусть известно любое опорное решение $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$ этой задачи, которое имеет m положительных и $n - m$ нулевых координат. Векторы, отвечающие ненулевым координатам, линейно независимы и образуют исходный базис.

Чтобы начать вычисление за симплекс-методом, нужно определить какое-то опорное решение, то есть найти минимальный набор линейно независимых векторов, которым отвечают положительные значения управляемых переменных, а потом перейти к другому базису, заменив один из базисных векторов каким-то из небазисных. Меняя по одному вектору, можно перебрать все возможные комбинации линейно независимых векторов, то есть определить все вершины допустимой области. Чтобы поиск был направленным, нужно иметь определенную оценку каждого из небазисных векторов, за которой можно определять самый перспективный из них, введение которого к базису гарантировало бы наибольший рост (падение) значений целевой функции сравнительно с другими небазисными векторами. Тогда вершины, в которых значение целевой функции меньше (больше), чем исходное, не рассматривают.

Обозначим z_j как скалярное произведение векторов $\bar{c}$ и A_j: $z_j = (\bar{c}, A_j)$, где – m-измеримый вектор, составленный из коэффициентов целевой функции при базисных переменных, причем порядок их записи отвечает порядку векторов в базисе, A_j – небазисный вектор. В качестве оценки каждого небазисного вектора берут так называемую симплекс-разницу:

$$\Delta_j = (\bar{c}, A_j) - c_j = z_j - c_j, \qquad (4.1)$$

где $z_j = (\bar{c}, A_j)$, $j = \overline{1,n}$; c_j – коэффициенты целевой функции при соответствующих небазисных переменных.

Доказаны такие теоремы.

Теорема 4.1. Если для какого-то фиксированного вектора A_j выполняется условие $\Delta_j = z_j - c_j < 0$, то решение ЗЛП $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, отвечающие данной угловой точке, не оптимальное для задачи максимизации, и можно построить такое множество планов, что для каждого из них значение целевой функции больше, чем в данной угловой точке.

Аналогичная теорема правдива и для задачи минимизации.

Теорема 4.2. Если для какого-то фиксированного вектора A_j выполняется условие $\Delta_j = z_j - c_j > 0$, то решение ЗЛП $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, отвечающие данной угловой точке, не оптимальное для задачи минимизации, и можно построить такое множество планов, что для каждого из них значение целевой функции меньше, чем в данной угловой точке.

Условие оптимальности решения можно формулировать так.

Теорема 4.2. Если для какого-то опорного плана ЗЛП $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ все симплексные разницы Δ_j неположительные ($\Delta_j \le 0$), то X – оптимальное решение задачи *минимизации*. Если же все симплексные разницы неотъемлемы ($\Delta_j \ge 0$) для какого-то опорного плана $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то X – оптимальное решение задачи максимизации.

Следовательно, значение симплексных разниц Δ_j – это оценки плана, и именно за ними определяют порядок введения к базису новых векторов.

Вектор, который вводят к базису, называется *ведущим*. Однако введение каждого нового вектора к базису нуждается в выведении какого-то из образующих текущий базис. Это значит, что для базисных векторов также должен быть признак, по которому можно определить вектор, нуждающийся в выведении без вреда для дальнейшего поиска окончательного решения. Этот вектор определяют за индексом положительной координаты ведущего вектора, который образует наименьшее отношение с соответствующей координатой вектора $A_0 = b$. Как именно вычислить это отношение, будет показано в алгоритме метода.

Если на определенном этапе поиска оптимального решения ЗЛП окажется, что для какого-то небазисного вектора не выполняется условие оптимальности, однако этот вектор не содержит ни одной положительной координаты, то это значит, что соответствующая целевая функция неограниченна на множестве допустимых решений и ЗЛП не имеет оптимального решения.

Алгоритм симплекс-метода

1) Разложить по первоначальному базису все небазисные векторы, то есть найти все коэффициенты x_{kj}, $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ по формуле:

$$(x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{mj})^T = B^{-1}(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})^T ,$$

где B – базисная матрица.

Для вектора A_0 разложение известно: его компоненты совпадают с ненулевыми компонентами заданного опорного решения, т.е. $x_{i0} = x_s^{(i)}$, где s – номера m положительных координат исходного опорного решения.

2) Для каждого j, $j = \overline{1, n}$ вычислить оценку, симплекс-разницу:

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum c_{s_k} x_{kj} - c_j ,$$

где c_j – коэффициенты при неизвестных переменных x_j в целевой функции; c_{s_k} – коэффициенты целевой функции при базисных переменных (всего m); x_{kj} – компоненты соответствующего вектора A_j.

Если все коэффициенты c_{s_k} объединить в m-измеримый вектор, а коэффициенты x_{kj} обозначить как вектор-столбец A_j, то симплекс-разницу Δ_j можно записать через скалярное произведение векторов в виде .

$$\Delta_j = (\bar{c}, A_j) - c_j$$

Если все $\Delta_j \geq 0$, то процесс решения задачи максимизации завершен. Рассмотренное опорное решение оптимальное, а оптимум целевой функции можно определить из соотношения

$$z_{\max} = \left(\bar{c}, A_j\right).$$

Если есть $\Delta_j < 0$, то переходим к следующему шагу.

3) Выяснить, или существует хотя бы одна такая отрицательная оценка Δ_j, для которой координаты x_{kj} вектора A_j в заданном базисе отрицательны. Если такая оценка есть, то процесс решения задачи завершен, и целевая функция задачи не ограничена (сверху) на допустимом множестве, в ином случае – переходим к следующему шагу.

4) Выбрать наименьшую оценку Δ_r из $\Delta_j < 0$; вычислить отношения $\theta_s = \dfrac{x_{s0}}{x_{sr}}$ для всех k, для которых $x_{kr} > 0$, и найти минимальное из этих отношений:

$$\min_s \{\theta_s\}.$$

5) Перейти к новому опорному решению, базис которого образуется заменой вектора в предыдущем базисе вектором A_s. Координаты всех векторов $A_0, A_1, ..., A_n$ в новом базисе вычисляют по таким формулам:

$$x'_{rj} = \theta_j = \frac{x_{rj}}{x_{rs}},$$
$$x'_{rj} = x_{kj} - \theta_j x_{ks}, \qquad .$$
$$j = \overline{0, n}, \quad k = \overline{1, m}, \quad k \neq r.$$

6) Перейти к выполнению итерации 2 и, если нужно, выполнить дальнейшие вычисления относительно нового базиса.

Замечание. Каждый переход к новому базису (а, следовательно, к новой вершине допустимого множества решений ЗЛП) называется шагом или, чаще, итерацией симплекс-метода. Доказано, что за конечное количество шагов (итераций) процесс вычислений закончится или на итерации 2, когда найденное решение оптимальное, или на итерации 3, когда будет выявлено, что оптимального решения не существует.

Решают задачи ЛП с помощью симплексных таблиц.

Контрольный пример 4.1

Найти $z = \max_{x \in X} \{7x_1 + 5x_2\}$ при таких ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ \qquad x_2 \leq 5, \\ x_1 \qquad \leq 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

Решение

Введем дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 и сведем систему ограничений к канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_6 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

или в эквивалентной векторной форме: $x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 + x_5 A_5 + x_6 A_6 = A_0$, где

$$A_1=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ A_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\ A_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ A_6=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\ A_0=\begin{pmatrix}19\\13\\5\\6\end{pmatrix}.$$

$$z = 7x_1 + 5x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6.$$

В целевую функцию дополнительные переменные входят с нулевыми коэффициентами, потому z остается без изменений.

Векторы A_3, A_4, A_5, A_6, что образуют единичную матрицу четырехмерного пространства избираем за базис. Тогда компонентами начального опорного плана (допустимого базисного решения) являются коэффициенты расписания вектора A_0 за единичными векторами базиса

$$x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 = A_0.$$

$$x_3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_4\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_5\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19\\13\\5\\6\end{pmatrix}.$$

то есть начальный опорный план: $X'_0 = (\underbrace{x_1=0;\ x_2=0;}_{\text{свободные переменные}}\ \underbrace{x_3=19;\ x_4=13;\ x_5=5;\ x_6=6}_{\text{базисные переменные}})$.

Значение целевой функции $z\left(X_0'\right) = C_б A_0 = 0$, где $C_б$ – матрица-строчка из коэффициентов целевой функции при базисных неизвестных. Начальные данные задачи ЛП заносим в симплекс-таблицу (итерация 0):

Итерация	Базис	$C_Б$	A_0	$C_1=7$	$C_2=5$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	Симплексное отношение
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
0	A_3	0	19	2	3	1	0	0	0	19/2=9,5
	A_4	0	13	2	1	0	1	0	0	13/2=6,5
	A_5	0	5	0	1	0	0	1	0	∞
	A_6	0	6	1	0	0	0	0	1	6/1=6
$\Delta_j = C_Б A_j - C_j$			$\Delta_0=0$	-7	-5	0	0	0	0	
1	A_3	0	7	0	3	1	0	0	-2	7/3=2,33
	A_4	0	1	0	1	0	1	0	-2	1/1=1
	A_5	0	5	0	1	0	0	1	0	5/1=5
	A_1	7	6	1	0	0	0	0	1	∞
$\Delta_j = C_Б A_j - C_j$			$\Delta_0=42$	0	-5	0	0	0	7	
2	A_3	0	4	0	0	1	-3	0	4	4/4=1
	A_2	5	1	0	1	0	1	0	-2	∞
	A_5	0	4	0	0	0	-1	1	2	4/2=2
	A_1	7	6	1	0	0	0	0	1	6/1=6
$\Delta_j = C_Б A_j - C_j$			$\Delta_0=47$	0	0	0	5	0	-3	
3	A_6	0	1	0	0	¼	-¾	0	1	
	A_2	5	3	0	1	½	-½	0	0	
	A_5	0	2	0	0	-½	½	1	0	
	A_1	7	5	1	0	-¼	¾	0	0	
$\Delta_j = C_Б A_j - C_j$			$\Delta_0=50$	0	0	¾	11/4	0	0	

Комментарии к симплексной таблице

Вычислим оценки свободных неизвестных по формуле:

$$\Delta_j = C_Б A_j - c_j ,$$

где A_j – вектор-столбец; c_j – коэффициенты возле неизвестными x_j в целевой функции *z*:

$$\Delta_0 = C_Б A_0 = 0 \cdot 19 + 0 \cdot 13 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 = 0$$
$$\Delta_1 = C_Б A_1 - c_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 7 = -7$$
$$\Delta_2 = C_Б A_2 - c_2 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 5 = -5$$
$$\Delta_3 = C_Б A_3 - c_3 = 0$$
$$\Delta_4 = C_Б A_4 - c_4 = 0$$
$$\Delta_5 = C_Б A_5 - c_5 = 0$$
$$\Delta_6 = C_Б A_6 - c_6 = 0$$

Оценки Δ_j заносим в последнюю индексную строку.

Для текущей задачи на **max** условием оптимальности опорного плана является неотъемлемость оценок Δ_j. В данном случае две оценки отрицательные (то есть план X_0 не является оптимальным). Наибольшая из них по абсолютной величине отвечает вектору столбцу A_1, который выбираем за направляющий, то есть $j_0 = 1$. Для определения направляющей строки находим минимальное симплексное отношение:

$$\min_{\alpha_{ij_0}>0}\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ij_0}}\right\} = \min_{\alpha_{i1}>0}\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}}\right\} = \min_{\alpha_{i1}>0}\left\{\frac{19}{2};\frac{13}{2};\infty;\frac{6}{1}\right\} = 6 = \frac{\beta_4}{\alpha_{41}}, \quad i = 4.$$

Минимальное симплексное отношение отвечает четвертой строке, которую и определяем направляющей. Элемент α_{41}, что расположен на пересечении направляющей строки и столбца, является расчетным (или генеральным).

Поскольку начальный опорный план X_0' не является оптимальным, то переходим к новому опорному плану путем заполнения новой симплексной таблицы (итерация 1).

Вектор A_1 вводим в новый базис, а вектор A_6 выводим из базиса. Таким образом, новый базис складывают векторы A_3, A_4, A_5, A_1; базисные неизвестные: x_3, x_4, x_5, x_1; свободные неизвестные: x_2, x_6.

Заполняем новую симплекс-таблицу в соответствии с правилами перехода к следующей симплексной таблице:

1) Заполняем строку, которая отвечает направляющей строке в предыдущей таблице. Для этого направляющую строку предыдущей симплексной таблицы делим на расчетный элемент $\alpha_{41} = 1$.

2) Заполняем столбец $j_0 = 1$, отвечающий направляющему столбцу в предыдущей симплексной таблице, нулями кроме $\alpha_{41}' = 1$.

$$\alpha_{ij_0}' = \begin{cases} 0, & i \neq i_0, \\ 1, & i = i_0. \end{cases}$$

3) Другие элементы симплексной таблицы вычисляются по правилу треугольника:

$$\begin{cases} \beta_i' = \beta_i - \dfrac{\alpha_{ij_o} \cdot \beta_{i_o}}{\alpha_{i_o j_o}}, \\ \alpha_{ij}' = \alpha_{ij} - \dfrac{\alpha_{ij_o} \cdot \alpha_{o\,ij}}{\alpha_{i_o j_o}}. \end{cases}$$

4) Заполняем последнюю строку; подсчитаем оценки свободных неизвестных:

$$\Delta_j = C_Б \cdot A_j - c_j,$$
$$\Delta_0 = C_Б \cdot A_0.$$

После заполнения итерации 1 видим, что существует отрицательная оценка $\Delta_2 = -5$, т.е. новый опорный план $X_1' = (x_1 = 6, x_2 = 0, x_3 = 7, x_4 = 1, x_5 = 5, x_6 = 0)$ не является оптимальным, хоть он и лучше предыдущего, поскольку $z(X_1') = 42 > z(X_0') = 0$.

Переходим к следующему опорному плану (итерация 2). Вектор A_2, который отвечает неизвестной x_2 ($\Delta_2 = -5$) введем в базис. Столбец A_2 определим направляющим, $j_0 = 2$. Для определения направляющей строки находим:

$$\min_{\alpha_{ij_0}>0}\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ij_0}}\right\} = \min_{\alpha_{i2}>0}\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{i2}}\right\} = \min_{\alpha_{i2}>0}\left\{\frac{7}{3};\frac{1}{1};\frac{5}{1};\infty\right\} = 1 = \frac{\beta_2}{\alpha_{22}},$$

поэтому $\alpha_{i0\,j0} = \alpha_{22} = 1$ – расчетный элемент.

Минимальное симплексное отношение выполняется для второй строки симплекс таблицы, $j_0 = 2$. Отделяем направляющие строку и столбец. Расчетный элемент находится на пересечении направляющей строки и направляющего столбца, $\alpha_{22} = 1$. Вектор A_4 выводим из базиса. Таким образом, новый базис складывают векторы $A_3,\ A_2,\ A_5,\ A_1$; базисные неизвестные: $x_3,\ x_2,\ x_5,\ x_1$; свободные неизвестные: $x_4,\ x_6$.

Заполняем симплекс-таблицу (итерация 2) соответственно правилами перехода к следующей симплексной таблице. Итерация 2 приводит к новому опорному плану $X_2' = (x_1 = 6, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 4, x_6 = 0)$, которому отвечает значение целевой функции $z(X_2') = 47$.

Новый план X_2' является лучше, чем предыдущий X_1', поскольку $z(X_2') = 47 > z(X_1') = 42$. Но и этот опорный план не является оптимальным, об этом говорит отрицательная оценка свободной неизвестной x_6, $\Delta_6 = -3$. Потому находим новый опорный план. По известным правилам переходим к новой симплексной таблице (итерация 3).

Новый базис (итерация 3) складывают векторы $A_6,\ A_2,\ A_5,\ A_1$. Вычислим оценки свободных неизвестных. Все оценки $\Delta_j \ge 0$. Это значит, что план $X_3' = (x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2, x_6 = 1)$ является оптимальным и целевая функция при этом достигает своего наибольшего значения $z'_{\max} = \Delta_0 = z(X_3') = 50$. Таким образом,

$$X'_{\text{опт}} = (5, 3, 0, 0, 2, 1),$$
$$z'_{\max} = 50.$$

Для начальной задачи:

$$X_{\text{опт}} = (5, 3),$$
$$z_{\max} = 50.$$

Двойственность в линейном программировании

Двойственной задачей называется вспомогательная задача линейного программирования, которая формулируется по определенным правилам непосредственно из условий исходной (прямой) задачи.

Существует тесная взаимосвязь не только между условиями прямой и двойственной задач, но и между их решениями. Последнее значит, что, решив одну из пары задач (например, с помощью симплексного метода), мы получим непрямую, но достаточную информацию о решении двойственной задачи. Потому в случаях, когда двойственная задача может быть решена за меньшее количество итераций, чем прямая, целесообразно решать именно двойственную задачу, а потом, применив соотношение двойственности, перейти к решению исходной (прямой) задачи.

Другое важное применение теории двойственности заключается в том, что она составляет основу ряда методов анализа линейных моделей на чувствительность. Составление двойственных задач наведено в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Общая форма модели двойственной модели наведена

Исходная (прямая) задача	Двойственна задача
1. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,l}$.	$1'$. $y_i \ge 0, \quad i=\overline{1,l}, \quad l \le m$ ..
2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=\overline{l+1,m}$.	$2'$. $y_i - произвольные, \quad i=\overline{l+1,m}$.
3. $x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,s}, \quad s \le n$.	$3'$. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i \ge c_j, \quad j=\overline{1,s}$.
4. $x_j - произвольные, \quad j=\overline{s+1,n}$.	$4'$. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i = c_j, \quad j=\overline{s+1,m}$.
5. $Z=\max\limits_{x\in X}\left\{\sum_{j=1}^{n} c_jx_j\right\}$.	$5'$. $T=\min\limits_{y\in Y}\left\{\sum_{i=1}^{m} b_iy_i\right\}$.

Общие правила построения двойственной пары

1. Каждому i-му ограничению исходной (прямой) задачи отвечает переменная y_i двойственной задачи и, наоборот, каждому j-му ограничению двойственной задачи отвечает переменная x_j исходной задачи.

2. Матрицы A (ограничений 1-2) и A' (ограничений 3'-4') взаимно транспонированы. Следовательно, строкой коэффициентов a_{ji} в j-ом ограничении двойственной задачи есть столбец коэффициентов при x_j в ограничениях 1-2 исходной задачи, и наоборот.

3. Свободные члены ограничений одной из задач являются коэффициентами при соответствующих переменных в целевой функции другой задачи. При этом максимизация изменяется на минимизацию, и наоборот.

4. В исходной задаче неравенства стоит записывать со знаком «≤» при максимизации и со знаком «≥» при минимизации.

5. Каждому i-ому неравенству исходной задачи отвечает в двойственной задаче условие неотъемлемости $y_i \geq 0$, а равенству – переменная y_i без ограничений на знак (“произвольная”). Напротив, неотъемлемой переменной $x_j \geq 0$ отвечает в двойственной задаче j-е неравенство, а произвольной переменной – равенство.

Согласно приведенным правилам можно сформулировать важную особенность ЗЛП – симметричность отношения двойственности, которая заключается в том, что задача двойственная к двойственной совпадает с прямой ЗЛП.

Контрольные вопросы

1. Что называют планом задачи?
2. Что называют допустимым планом задачи?
3. Какой допустимый план называют опорным?
4. Какой план называют оптимальным?
5. Сформулируйте главную идею симплексного метода решения ЗЛП.
6. Отметьте последовательность вычислений за симплекс-методом.
7. Как определяют оптимальное решение ЗЛП в симплексном методе?
8. Какой признак того, что ЗЛП не имеет оптимального решения?
9. Как определить начальное опорное решение ЗЛП?
10. Какая роль балансовых переменных в решении ЗЛП?