

Лабораторная работа №1

Тема: Основные понятия математического программирования.

Цель работы: Приобретение практических навыков для построения математической модели задачи математического программирования.

Постановка задачи

Составить математическую модель задачи.

1) Цех выпускает валы и втулки. На производство одного вала рабочий тратит 0,3 часа, одной втулки – 0,2 часа. От реализации одного вала предприятие получает прибыль 8 грн., а от реализации одной втулки – 6 грн. Цех должен выпустить не менее 100 валов и не менее 200 втулок. Сколько валов и сколько втулок должен выпустить цех, чтобы получить наибольшую прибыль, если общее время работы составляет 160 чел.-часы?

2) Торговое предприятие для продажи товаров трех видов использует такие ресурсы: время и площадь торговых залов. Затраты ресурсов на продажу одной партии товаров каждого вида поданы в таблице 1.1. Прибыль, полученную от реализации одной партии товаров первого вида, составляет 5 тыс. грн., второго вида – 8 тыс. грн., третьего вида, – 6 тыс. грн. Определить оптимальную структуру товарооборота, которая обеспечивает торговое предприятие максимальной прибылью.

Таблица 1.1

| Ресурсы | Вид товара | | | Объем ресурса |
|-------------------------|------------|-----------|------------|---------------|
| | <i>I</i> | <i>II</i> | <i>III</i> | |
| Время, чел.-часов | 0,5 | 0,7 | 0,6 | 320 |
| Площадь, м ² | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 95 |

3) Предприятие выпускает изделия трех видов. Месячная программа выпуска составляет 2000 изделия первого вида, 1800 – второго, 1500 – третьего. Для выпуска изделий используют материалы, ежемесячные расходы на которые не могут превышать 61000 кг. На одно изделие I-го вида тратится 8 кг материала, II-го – 40 кг, III – 11 кг. Оптовая цена одного изделия первого вида – 7 грн., второго – 8 грн., третьего – 9 грн. Составить оптимальный план выпуска изделий, который обеспечивает предприятию максимальную прибыль.

4) Мебельная фабрика изготавливает столы, стулья, тумбы и книжные шкафы, используя доски двух видов, причем фабрика имеет 500 м² досок первого вида и 1000 м² досок второго вида. Трудовые ресурсы составляют 700 чел.-часов. В таблице 1.2 приведены нормативы расходов каждого вида ресурсов на изготовление одного изделия и прибыль от реализации единицы изделия.

Таблица 1.2

| Ресурсы | Затраты на одно изделие | | | |
|--|-------------------------|--------|-------|---------------|
| | Столы | Стулья | Тумбы | Книжные шкафы |
| Доски I вида, m^2 | 5 | 1 | 9 | 12 |
| Доски II вида, m^2 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| Трудовые ресурсы, чел.-часов. | 3 | 2 | 5 | 10 |
| Прибыль от реализации одного изделия, грн. | 12 | 5 | 15 | 10 |

5) Для перевозки груза используют машины типов *A* и *B*. Грузоподъемность машин каждого типа – 3 т. За один рейс машина *A* тратит 1,5 кг смазочных материалов и 50 л бензина, а машина *B* – 2 кг и 30 л, соответственно. На базе есть 35 кг смазочных материалов и 900 л бензина. Расходы на эксплуатацию машины *A* составляют 800 грн., *B* – 500 грн. Необходимо перевезти 60 т груза. Сколько нужно машин типа *A* и *B*, чтобы эксплуатационные расходы были минимальны?

6) Правительством страны выделяется 100 тыс. грн. на разработку альтернативных источников энергии. Для конкурса из ста заявлений отобрано 6 проектов, оценка которых подана в таблице 1.3.

Таблица 1.3

| № проекта | Классификация проекта | Отдача проекта на вложенную ден. ед. | Максимальное количество средств на проект (тыс. грн.) |
|-----------|-----------------------|--------------------------------------|---|
| 1 | Солнечная энергия | 4,4 | 22 |
| 2 | Ветреная энергия | 3,8 | 18 |
| 3 | Синтетическое топливо | 4,1 | 25 |
| 4 | Угольная энергия | 3,5 | 15 |
| 5 | Ядерная энергия | 5,1 | 10 |
| 6 | Геотермальная энергия | 3,2 | 15 |

Согласно условиям конкурса, на разработку проектов с использованием солнечной энергии будет выделено не меньше, чем 30 % инвестиций, а ядерный проект будет профинансирован не меньше чем на 50 %. Составить оптимальный вариант, который бы обеспечивал максимум отдаче инвестиций.

7) Для изготовления изделий №1 и №2 есть 200 кг металла. Для изготовления одного изделия №1 тратится 3 кг металла, а для изделия №2 – 5 кг. Составить план производства, которое обеспечивает получение наибольшей прибыли от продажи изделий, если отпускная

стоимость одного изделия №1 составляет 4 грн., изделия №2 – 3 грн., причем изделий №1 нужно изготовить не менее 20 штук, а изделий №2 – не больше 40 штук.

8) Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели A_1, A_2, A_3 использует три вида сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы использования сырья каждого вида на производство одной тонны карамели поданы в таблице 1.4. Известны также общее количество сырья каждого вида и прибыль от реализации 1 тонны карамели данного вида.

Таблица 1.4

| Вид сырья | Нормы расходов сырья, т, на 1 т карамели | | | Объем сырья, т |
|---|--|-------|-------|----------------|
| | A_1 | A_2 | A_3 | |
| Сахарный песок | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 1000 |
| Патока | 0,4 | 0,4 | 0,3 | 800 |
| Фруктовое пюре | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 150 |
| Прибыль от реализации 1 т продукции, грн. | 2160 | 2300 | 2500 | |

Необходимо составить план производства карамели, который обеспечивает максимальную прибыль.

9) Производственная мощность сборочного цеха составляет 150 изделия типа A и 400 изделия типа B за сутки. Технический контроль пропускает за сутки 250 изделий обоих типов. Изделие типа A дороже изделия типа B . Составить такой план выпуска готовой продукции, чтобы предприятие получило наибольшую прибыль.

10) Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинга бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изоментола. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: марок A – 2:3:5:2, B – 3:1:2:1 и C – 2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина: A – 1200 грн., B – 1000 грн., C – 1500 грн. Определить пропорции смешивания компонентов, при которых будет достигнута максимальная стоимость всей продукции.

11) На звероферме выращивают черно-бурых лис и песцов, для которых заготавливают корм трех видов. Количество корма каждого вида, которую должны ежедневно получать звери, общее количество корма каждого вида, которая может быть использована фермой, и прибыль от реализации одной шкуры лисы и песца поданы в таблице 1.5.

Таблица 1.5

| Вид корма | Количество единиц корма, которую ежедневно должны получать звери | | Общее количество корма |
|-------------------------------|--|-------|------------------------|
| | лисица | песец | |
| I | 2 | 3 | 360 |
| II | 4 | 1 | 480 |
| III | 6 | 7 | 852 |
| Прибыль на одно изделие, грн. | 32 | 25 | |

Определить сколько лис и песцов необходимо вырастить, чтобы прибыль от реализации их шкур была максимальной.

12) Для перевозки груза в трех направлениях могут быть использованы корабли трех типов. Производительность кораблей c_{ij} (производительность i -го вида кораблей на j -ом направлении $(i, j) = \overline{1, 3}$) при использовании их на разных линиях подана в таблице 1.6. Определить, какие корабли, на какой линии и в течение какого времени необходимо использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку кораблей с учетом возможного времени их эксплуатации.

Таблица 1.6

| Вид кораблей, i | Производительность кораблей, млн. т-км за сутки, c_{ij} | | | Общее время эксплуатации кораблей, сутки |
|-------------------------------|---|------|------|--|
| | 1 | 2 | 3 | |
| I | 9 | 15 | 12 | 300 |
| II | 7 | 16 | 14 | 300 |
| III | 13 | 13 | 5 | 300 |
| Общий объем перевозки, млн. т | 4000 | 5400 | 4300 | |

13) На трех группах оборудования необходимо изготовить изделия четырех видов. Установлен план производства: изделий типа A – 2000 шт., B – 1000 шт., C – 200 шт., D – 250 шт. Данные о себестоимости каждого изделия, трудоемкости и фонде рабочего времени подано в таблице 1.7. Составить план загрузки оборудования, при котором минимизируется себестоимость изготовленных изделий.

Таблица 1.7

| Оборудование | Себестоимость одного изделия, грн. | | | | Время на изготовление одного изделия, мин. | | | | Фонд времени, мин. |
|--------------|------------------------------------|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|--------------------|
| | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>B</i> | <i>Г</i> | <i>A</i> | <i>Б</i> | <i>В</i> | <i>Г</i> | |
| I | 1,5 | 2,4 | 0,9 | 1,4 | 4,0 | 8,0 | 2,4 | 4,0 | 35000 |
| II | 1,8 | 1,2 | 1,0 | 1,7 | 2,5 | 1,2 | 1,0 | 1,7 | 164000 |
| III | 2,7 | 5,4 | 6,0 | 5,6 | 3,5 | 1,5 | 1,0 | 1,2 | 22000 |

14) Распределить четыре сорта топлива, в количестве 70, 40, 50 и 40 т соответственно каждого сорта, между пятью агрегатами, потребности которых составляют 20, 40, 70, 50 и 60 т соответственно. Задана матрица теплотворной способности:

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

где t_{ij} – теплотворная способность i -го сорта топлива при использовании его в j -ом агрегате. Найти оптимальное распределение топлива между агрегатами, при котором будет достигнуто максимальное количество теплоты от всего запаса топлива.

15) В заводской лаборатории создается антифрикционный сплав (оловянный баббит), который должен содержать олова не меньше 15%, сурьмы – не меньше 15%, свинца – 70%. Есть четыре сплава, процентный состав и цены которых приведены в таблице 1.8. Рассчитать количество элементов для сплава каждого вида, необходимое для 1 кг смеси, которая бы обеспечила минимальные затраты.

Таблица 1.8

| Элементы | Сплав | | | |
|--------------------|-------|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Олово | 12 | 20 | 12 | 20 |
| Сурьма | 12 | 18 | 18 | 14 |
| Свинец | 76 | 62 | 70 | 66 |
| Цена за 1 кг, грн. | 3,5 | 5,2 | 4,0 | 4,6 |

16) Для утепления помещений используют четыре агрегата, каждый из которых может работать на любом из пяти сортов топлива, в количестве 100, 120, 80, 90 и 160 т. Потребности в

топливе каждого из агрегатов соответственно равняются 90, 130, 150 и 170 т. Задана матрица теплотворной способности:

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 10 & 12 & 9 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 7 \\ 8 & 12 & 6 & 9 & 8 \\ 10 & 9 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix},$$

где t_{ij} – теплотворная способность i -го сорта топлива при использовании его в j -ом агрегате. Найти оптимальное распределение топлива между агрегатами, при котором будет достигнуто максимальное количество теплоты от всего запаса топлива.

17) При продаже двух видов товаров (A и B) торговое предприятие использует четыре вида ресурсов. Нормы затрат ресурсов на 1 ед. товара, объемы ресурсов приведены в таблице 1.9. Доход от реализации 1 ед. товара A составляет 2 грн., товара B – 3 грн.

Таблица 1.9

| Ресурсы | Нормы расходов ресурсов на 1 ед. тов. | | Запас ресурсов |
|---------|---------------------------------------|---|----------------|
| | A | B | |
| 1 | 2 | 2 | 12 |
| 2 | 1 | 2 | 8 |
| 3 | 4 | 0 | 16 |
| 4 | 0 | 4 | 12 |

Определить оптимальный план реализации товаров, который обеспечивает для торгового предприятия максимальную прибыль.

18) На трех складах оптовой базы находится однородный груз в количестве 200, 80 и 100 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина, каждый из которых получает соответственно 130, 50, 70, 90 ед. груза. Тарифы перевозки единицы груза из каждого склада во все магазины задаются матрицей:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план, при котором общая стоимость перевозки будет минимальной.

19) Собранный урожай зерна трех сельскохозяйственных артелей должен быть перевезен на три элеватора, при этом элеватор A_1 имеет мощность 100 тыс. тон, элеватор A_2 –

80 тыс. тон; элеватор A_3 – 90 тыс. тон. Определить план перевозки зерна на элеваторы, который минимизирует транспортные расходы, приведенные в таблице 1.10.

Таблица 1.10

| С/х артель | Затраты на перевозку 1 т зерна на элеваторы, грн. | | | Запасы зерна, тис. т. |
|------------|---|-------|-------|-----------------------|
| | A_1 | A_2 | A_3 | |
| B_1 | 12,5 | 24,0 | 18,4 | 80 |
| B_2 | 28,3 | 14,5 | 25,7 | 90 |
| B_3 | 15,7 | 20,6 | 16,3 | 100 |

20) Есть три участка земли, на которых могут быть засеяны кукуруза, пшеница, ячмень, просо. Площадь каждой из участков соответственно равняется 700, 280 и 320 гектар. Необходимо засиять соответственно под культуры: кукурузы – 440 га, пшеницы – 230 га, ячменю – 210 га и проса – 320 га. Урожайность каждой из культур задается матрицей:

$$y_{ij} = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 18 & 24 \\ 45 & 28 & 22 & 18 \\ 50 & 22 & 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определить количество гектаров каждой культуры, которое необходимо засеять на каждый из участков, чтобы общий сбор зерна был максимален.

21) Предприятию задан план выпуска продукции B_1 и B_2 , и время работы оборудования двух типов A_1 и A_2 . Составить математическую модель оптимального графика работы оборудования, при котором себестоимость изготовленной продукции была бы минимальной, а план выпуска продукции выполнен. Производительность оборудования за единицу времени, стоимость работы за единицу времени, план выпуска продукции и фонд времени задано таблицей 1.11.

Таблица 1.11

| Вид оборудования | Выпуск продукции за единицу времени | | Стоимость работы за единицу времени | | Фонд рабочего времени |
|------------------------|-------------------------------------|-------|-------------------------------------|-------|-----------------------|
| | B_1 | B_2 | B_1 | B_2 | |
| A_1 | 2 | 2 | 1 | 5 | 175 |
| A_2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 160 |
| План выпуска продукции | 950 | 1200 | | | |

22) В суточный рацион входят два продукта питания A_1 и A_2 , причем продукта A_1 не больше 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта A_1 составляет 10 грн., а A_2 – 15 грн. Содержимое питательных веществ в продуктах приведено в таблице 1.12.

Таблица 1.12

| Питательные вещества | Минимальная норма потребления | Содержимое питательных веществ в единице продукции | |
|----------------------|-------------------------------|--|-------|
| | | A_1 | A_2 |
| A | 120 | 0,2 | 0,2 |
| B | 160 | 0,4 | 0,2 |

Определить оптимальный рацион, стоимость которого будет наименьшей.

23) Составить суточный рацион минимальной себестоимости для откорма свиней (причем в состав рациона должно входить не больше 2,5 кг ячменя). Кормовых единиц за сутки потребляется минимум 2,4 кг, протеина – 200 г. Исходные данные для решения задачи приведены в таблице 1.13.

Таблица 1.13

| Вид кормов | Содержимое питательных веществ у 1 кг кормов | | Цена 1 кг кормов, грн. |
|------------|--|------------|------------------------|
| | Кормовые единицы, кг | Протеин, г | |
| Комбикорм | 1 | 100 | 0,9 |
| Ячмень | 1,2 | 80 | 0,3 |

24) Торговая организация планирует реализацию за двумя товарными группами. Фонды за этими товарами составляют соответственно 60 и 16 тыс. грн. Уровень расходов, связанных с хранением товаров первой группы – 2%, второй – 1%, уровни прибыли составляют соответственно 3% и 2%. Предельно допустимые расходы, связанные с сохранением товаров, составляют 1,4 тыс. грн. Учитывая закупки товаров вне выделенных фондов составить план товарооборота, при котором торговая организация получит максимальную прибыль.

25) Для перевозки груза используют автомашины типов A и B . Грузоподъемность машин каждого типа – 3 т. За один рейс машина A тратит 1,5 кг смазочных материалов и 50 л бензина, а машина B – соответственно 2 кг и 30 л. На базе есть 35 кг смазочных материалов и 900 л бензина. Расходы на эксплуатацию машины A составляют 8 грн., B – 5 грн. Нужно перевезти 60 т груза. Сколько нужно использовать машин типов A и B , чтобы эксплуатационные расходы были минимальными?

26) Составить план посева зерновых культур (с учетом урожайности участков), который максимизирует прибыль. Площадь первого участка равняется 500 гектар, второго – 400 гектар, третьего – 600 гектар, четвертого – 500 гектар. Начальные данные приведены в таблице 1.14.

Таблица 1.14

| Зерновые культуры | | Рожь | Пшеница | Ячмень |
|--------------------------------------|-----|------|---------|--------|
| Урожайность участка, ц/га | I | 22 | 30 | 31 |
| | II | 25 | 32 | 28 |
| | III | 20 | 25 | 25 |
| | IV | 18 | 28 | 23 |
| Посевные площади, га | | 250 | 1400 | 350 |
| Закупочные цены, грн | | 7 | 6,5 | 4,3 |
| Затраты на 1 гектар по участках, грн | | 45 | 45 | 48 |
| | | 50 | 48 | 47 |
| | | 38 | 40 | 45 |
| | | 38 | 45 | 40 |

27) Из четырех составов необходимо вывезти картофель в пять торговых точек. Закрепить поставщиков за торговыми точками так, чтобы общая сумма расходов на перевозку была минимальной. Начальные данные приведены в таблице 1.15.

Таблица 1.15

| Состав (поставщик) | Стоимость перевозки 1т грузу потребителям, грн | | | | | Масса груза, т |
|--------------------|--|-------|-------|-------|-------|----------------|
| | B_1 | B_2 | B_3 | B_4 | B_5 | |
| A_1 | 4 | 2 | 3 | 6 | 1 | 50 |
| A_2 | 5 | 3 | 4 | 2 | 6 | 160 |
| A_3 | 3 | 4 | 7 | 3 | 2 | 70 |
| A_4 | 2 | 6 | 5 | 4 | 3 | 100 |
| Объем перевозки, т | 80 | 100 | 90 | 50 | 60 | 380 |

28) Для изготовления изделий №1 и №2 есть 100 кг металла. На изготовление изделия №1 тратится 2 кг металла, а на изделие № 2 – 4 кг металла. Составить план производства, который обеспечивает получение наибольшей прибыли от продажи изделий, если отпускная стоимость одного изделия №1 составляет 3 грн., а изделию №2 – 2 грн., причем изделий №1 нужно изготовить не больше 40 штук, а изделий № 2 – 20 штуки.

29) Предприятию задан план выпуска продукции B_1 и B_2 , и время работы оборудования двух типов A_1 и A_2 . Составить математическую модель оптимального графика работы оборудования, при котором себестоимость изготовленной продукции была бы минимальной и план выпуска продукции выполнен. Производительность оборудования за единицу времени, стоимость работы за единицу времени, план выпуска продукции и фонд времени задано таблицей 1.16.

Таблица 1.16

| Вид оборудования | Выпуск продукции за единицу времени | | Стоимость работы за единицу времени | | Фонд рабочего времени, ч |
|------------------------|-------------------------------------|-------|-------------------------------------|-------|--------------------------|
| | B_1 | B_2 | B_1 | B_2 | |
| A_1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 92 |
| A_2 | 7 | 5 | 4 | 5 | 92 |
| План выпуска продукции | 1500 | 1300 | | | |

30. Для пошива курток и халатов швейный цех имеет 96 м ткани. На пошив одной куртки расходы составляют 3 м ткани, на пошив одного халата – 2 м ткани. Отпускная стоимость куртки – 50 грн., а халата – 20 грн. Определить оптимальный план производства за ассортиментом, который обеспечивает наибольшую выручку от реализации готовых изделий, если курток нужно изготовить не больше 20 штук, а халатов – не больше 34 штук.

Содержание отчёта

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Составить математическую формулировку задачи.
4. Построить математическую модель задачи.
5. Определить вид полученной математической модели.
6. Исследовать модель на статичность / динамичность, стохастичность / детерминированность.
7. Выводы.

Рекомендуемая литература

1. Ашманов С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. – М. : Наука, 1991. – 448 с.
2. Вильямс Н.Н. Параметрическое программирование в экономике / Н.Н. Вильямс. – М.: Статистика, 1976. – 516 с.
3. Грешилов А.А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях / А.А. Грешилов. – М.: Радио и связь, 1991. – 245 с.
4. Деордица Ю.С. Исследование операций в планировании и управлении: Учебное пособие / Ю.С. Деордица, Ю.М. Нефедов. – К.: Вища школа, 1991. – 270 с.

5. Зайченко О.Ю. Дослідження операцій : збірник задач / О.Ю. Зайченко, Ю.П. Зайченко. – К.: Видавничий Дім «Слово», 2007. – 472 с.
6. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій : підручник, 7-е видання, перероблене і доповнене / Ю.П. Зайченко. – К.: Видавничий Дім «Слово», 2006. – 816 с.
7. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. – М.: Прогресс, 1975. – 621 с.
8. Лесин В.В. Основы методов оптимизации: учебное пособие для вузов / В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец. – 3-е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2011. – 352 с.