ЛЕКЦИЯ №9.
Элементы теории матричных игр

Элементарные приемы решения игр 2×2, 2×n, m×2

Самая простая матричная игра – это игра, в которой каждый из игроков имеет две стратегии. Матрица A игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если точки равновесия нет, то решением игры являются смешанные стратегии:

$$X = (x_1, x_2),$$
$$Y = (y_1, y_2).$$

В соответствии с основной теоремой теории игр, применения оптимальной стратегии $X = (x_1, x_2)$ обеспечивает для игрока A получение выигрыша при любых стратегиях игрока B. Если игрок A применяет свою оптимальную стратегию, а игрок B при этом использует одну из чистых стратегий, то величина выигрыша игрока A останется неизменной. Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v. \end{cases} \tag{9.1}$$

Поскольку $x_1 + x_2 = 1$, то решение системы (9.1) такое:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{9.2}$$

Подставляя значение x_1 и x_2 в одно из уравнений (9.1) получаем

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{9.3}$$

Составляя аналогичную систему уравнений, можно найти оптимальную стратегию для игрока B:

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{9.4}$$

Контрольный пример 9.1

Найти решение игры, заданной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Решение игры с матрицей 2×2 можно найти графически с помощью следующих построений. На осе абсцисс отложим отрезок, длина которого равняется единице. Левый конец отрезка (точка $x = 0$) отвечает стратегии A_1 , правый – стратегии A_2. Промежуточные точки x отвечают некоторым смешанным стратегиям (x_1, x_2), где $x_1 = 1 - x$, $x_2 = x$. На концах избранного отрезка проведем прямые, перпендикулярные оси абсцисс, на них будем откладывать выигрыши при соответствующих чистых стратегиях.

Если игрок B применяет стратегию B_1, то выигрыш при использовании чистых стратегий A_1 и A_2 составляет соответственно a_{11} и a_{21}. Отложим эти точки на прямых и соединим полученные точки прямой B_1B_2. Если игрок A применяет смешанную стратегию, то его выигрышу отвечает некоторая точка M, которая лежит на этой прямой (рис. 9.1).

Аналогично можно построить прямую B_2B_2, которая отвечает стратегии B_2 игрока B (рис. 9.2). Ломаная B_1KB_2 – нижняя граница выигрыша, получаемого игроком A. Точка K, в которой он максимален, определяет цену игры и ее решение. Для нахождения оптимальной стратегии игрока B воспользуемся формулами

$$y_1 = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1}, \qquad y_2 = \frac{LB_1}{LB_2 + LB_1}.$$

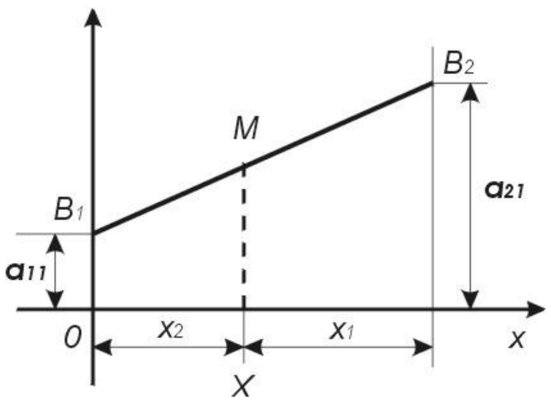

Рисунок 9.1

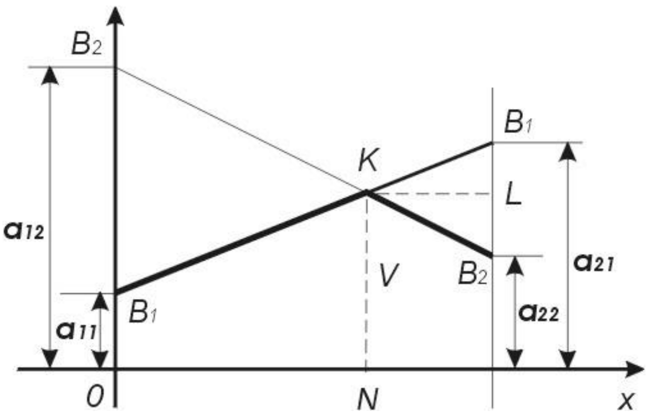

Рисунок 9.2

В правдивости этих соотношений можно убедиться, если в формулы, которые выражают y_1 и y_2, подставить вместо LB_2 и LB_1 их значения. Имеем:

$$LB_2 = v - a_{22}; \qquad LB_1 = a_{21} - v.$$

Выражая *v* из (9.3), получаем значение y_1 и y_2, что совпадает с (9.4):

$$X = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$
$$Y = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$
$$v = \frac{5}{3}.$$

Можно рассмотреть задачу минимизации верхней границы выигрыша для игрока *B*, поменяв местами при решении игроков *A* и *B*.

Используя геометрическую интерпретацию, можно найти решение игр, заданных матрицей $2 \times n$. Каждой из *n* стратегий игрока B соответствует прямая. Построив эти прямые, находят нижнюю границу выигрыша. Точка *K*, которая лежит на нижней границе, для которой величина выигрыша наибольшая, определяет цену игры и ее решение. При этом определяются активные стратегии игрока *B* (соответствующие им прямые пересекаются в точке *K*): по геометрическим соображениям можно найти значение v_j, которые отвечают активным стратегиям игрока *B*.

Аналогично может быть решена игра с матрицей $m \times 2$, только в этом случае строят верхнюю границу выигрыша и на ней определяют минимум.

Необходимо отметить, что геометрические построения есть смысл использовать для определения активных стратегий игроков. Дальше решение игры можно получить с помощью формул (9.2)-(9.4). Формулы (9.2)-(9.4) можно использовать, потому что из соответствующей матрицы исключаются все стратегии, кроме активных. Она содержит две строки и два столбца.

Контрольный пример 9.2

Найти решение игры, заданной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Прямые на рис. 9.3 соответствуют стратегиям игрока *B*. Ломаная B_3KB_4 отвечает нижней границе выигрыша. Оптимальные стратегии игрока *B* – третья и четвертая. По формулам (9.1)-(9.4):

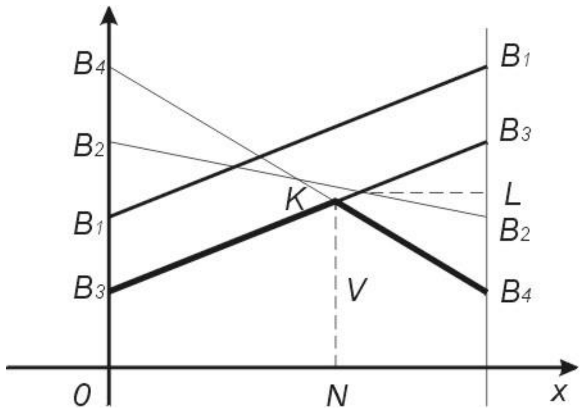

Рисунок 9.3

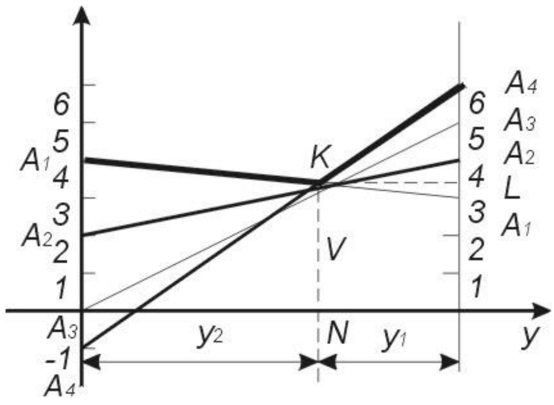

Рисунок 9.4

находим решение игры:

$$X = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

$$Y = \left(0, 0, \frac{16}{25}, \frac{2}{5}\right),$$

$$v = 2\frac{1}{5}.$$

Следовательно, игрок A применяет стратегию A_1 с вероятностью 0,4, а стратегию A_2 – с вероятностью 0,6. При этом его выигрыш в среднем составит 2,2 единицы.

Возведение матричной игры к задаче линейного программирования. Эквивалентность матричной игры и ЗЛП

Пусть совместимое применение *i*-ой стратегии одного игрока и *j*-ой стратегии второго приводит к наступлению события (i, j), $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, которое имеет числовую оценку a_{ij} – выигрыш первого игрока с таким же проигрышем второго.

Матрица выигрышей $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ задает матричную игру двух игроков с нулевой суммой. Если нижняя цена игры $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ равняется верхней цене игры $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$, а именно

$$\alpha = \beta = a_{i_0 j_0} = v,$$

то игра решается в чистых стратегиях: i_0 – оптимальная стратегия первого игрока, j_0 – второго.

Если же $\alpha \neq \beta$, то применяются смешанные стратегии $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ первого игрока и $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$ второго. Здесь x_j и y_i – вероятности, с которыми принимаются *i*-а стратегия первым игроком и *j*-я вторым.

Для оптимальных смешанных стратегий выполняются соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge v, \quad i = \overline{1,m},$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \tag{9.5}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le v, \quad j = \overline{1,n},$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1, \tag{9.6}$$
$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m},$$

где v – цена игры.

Чтобы решить соотношения (9.5)-(9.6) их возводят к ЗЛП.

Выполним замену переменных по формулам:

$$t_j = \frac{x_j}{v},$$
$$u_i = \frac{y_i}{v}, \tag{9.7}$$
$$j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Поскольку $\sum_j t_j = \sum_j \frac{x_j}{v} = \frac{1}{v}$ и $\sum_i u_i = \sum_i \frac{y_i}{v} = \frac{1}{v}$, то вместо (9.5) и (9.6) можно записать взаимно двойственные ЗЛП $z = \frac{1}{v}$:

$$z = \min_t \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j \right\},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \ge 1, \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.8}$$
$$t_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

$$w = \max_u \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i \right\},$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \le 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{9.9}$$
$$u_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

После нахождения решений T^* и U^* задач (9.8) и (9.9) нужно за формулами (9.7) перейти к оптимальным стратегиям X^* и Y^*.

От соотношений (9.5) и (9.6) можно перейти к ЗЛП и без замены переменных (9.7). Для этого следует в неравенствах (9.5)-(9.6) перейти с помощью балансовых переменных к уравнениям, одно из них признать целевой функцией, а из последних исключить величину *v*.

Контрольный пример 9.3

Определить нижнюю и верхнюю цену для игры, заданной матрицей выигрышей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Минимальные значения a_{ij} в строках матрицы *A* равняются 0, 2, -1. Максимальное значение из них – 2. Следовательно, α – нижняя цена игры, которой отвечает матрица *A*, и равняется 2.

Для определения β (верхней цены игры) найдем максимальные значения элементов в столбиках матрицы. По столбикам соответственно имеем: 3, 2, 4, 5. Следовательно, $\beta = 2$.

Таким образом, $\alpha = \beta = v$ – цена игры. Решение этой игры заключается в выборе игроком *A* стратегии A_2, при этом его выигрыш не меньший 2; для игрока *B* оптимальной является стратегия B_2, которая позволяет ограничить его проигрыш этим самым числом.

Контрольный пример 9.4

Игрок *A* разработал систему стратегий на период 60 суток с учетом возможного поведения игрока *B*. Задана матрица оценок деятельности, которая содержит оценки прибыли, как результат взаимодействия соответствующих стратегий игрока *A* и поведения игрока *B*:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Необходимо построить модель матричной “игры”; определить, или имеет игра точку равновесия; если точки равновесия нет, решить игру в смешанных стратегиях; определить судьбу времени деятельности игрока *A* при каждой стратегии.

Решение

Пусть игрок *A* имеет 3 возможные стратегии; игрок *B* – имеет 4 возможные стратегии. За условием задачи матрица игры имеет вид (таблица 9.1).

Таблиця 9.1

A_i \ B_i	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	3	2	5	2
A_2	2	4	6	4	2
A_3	3	5	4	6	3
β_j	7	5	6	6	3 \ 5

Нижняя цена игры: $\alpha = \max_i \alpha_i = 3$.

Верхняя цена игры: $\beta = \min_j \beta_j = 5$.

Следовательно, для игрока A максимальной стратегией является A_3, при которой ему обеспеченный "выигрыш" не меньший 3, для игрока B – минимальной стратегией является B_2, которая обеспечивает ему "проигрыш" не больше 5. Игра не имеет точки равновесия, поскольку $\alpha < \beta$.

Решим игру в смешанных стратегиях.

Для определения оптимальной стратегии игрока A построим следующую задачу линейного программирования:

$$z = \min_t \{t_1 + t_2 + t_3\},$$
$$\begin{cases} 7t_1 + 2t_2 + 3t_3 \ge 1, \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \ge 1, \\ 2t_1 + 6t_2 + 4t_3 \ge 1, \\ 5t_1 + 4t_2 + 6t_3 \ge 1, \end{cases}$$
$$t_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Двойственная задача для определения оптимальной стратегии игрока B формулируется так:

$$w = \max_u \{u_1 + u_2 + u_3 + u_4\},$$
$$\begin{cases} 7u_1 + 3u_2 + 2u_3 + 5u_4 \le 1, \\ 2u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 4u_4 \le 1, \\ 3u_1 + 5u_2 + 4u_3 + 6u_4 \le 1, \end{cases}$$
$$u_i \ge 0, \quad i = \overline{1,\ 4}.$$

В таблице 9.2 приведено решение задачи для игрока B. С помощью дополнительных переменных u_5, u_6, u_7 неравенства превратим в уравнение. Начальный базис образуют единичные векторы B_5, B_6, B_7.

Таблиця 9.2

i	*Б*	$C_б$	U_0	1	1	1	1	0	0	0
				U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
1	U_5	0	1	7	3	2	5	1	0	0
2	U_6	0	1	2	4	6	4	0	1	0
3	U_7	0	1	3	**5**	4	6	0	0	1
m+1	w_j - C_j		0	-1	-1	-1	-1	0	0	0
1	U_5	0	2/5	**26/5**	0	-2/5	7/5	1	0	-3/5
2	U_6	0	1/5	-2/5	0	14/5	16/5	0	1	-4/5
3	U_2	1	1/5	3/5	1	4/5	6/5	0	0	1/5
m+1	w_j - C_j		1/5	-2/5	0	-1/5	1/5	0	0	1/5
1	U_1	1	1/13	1	0	-1/13	7/26	5/26	0	-3/26
2	U_6	0	3/13	0	0	**36/13**	43/13	1/13	1	-11/13
3	U_2	1	2/13	0	1	11/13	27/26	-3/26	0	7/26
m+1	w_j - C_j		3/13	0	0	-3/13	21/13	2/13	0	2/13
1	U_1	1	1/12	1	0	0	13/36	7/36	1/36	-5/36
2	U_3	1	1/12	0	0	1	43/36	1/36	13/36	-11/36
3	U_2	1	1/12	0	1	0	1/36	-5/36	-11/36	19/36
m+1	w_j - C_j		1/4	0	0	0	7/12	1/12	1/12	1/12

Оптимальный план задачи для игрока B имеет вид:

$$U^* = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0\right),$$

$$\max\{w\} = \frac{1}{v} = \frac{1}{4},$$

$$v = 4.$$

Учитывая условие (9.7), получим оптимальную стратегию для игрока B:

$$Y^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right).$$

Оптимальный план задачи определения стратегии игрока A (двойственной задачи) получим, применяя двойственный симплекс метод и используя оценки $(m+1)$-й строки последней симплексной таблицы, которые находятся в столбиках B_5, B_6, B_7:

$$t_1 = \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12},$$

$$t_2 = \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12},$$

$$t_3 = \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12}.$$

Таким образом: $T^* = \left(\frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}\right)$. Поскольку $x_i = t_i \cdot v$, то $X^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Определим судьбу времени деятельности игрока A за каждой стратегией: $t = 60$, тогда на первую стратегию приходится $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ дней;

на вторую стратегию приходится $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ дней;

на третью стратегию приходится $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ дней.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение теории игры.
2. Что такое платежная матрица?
3. При каких условиях игры эта игра называется парной?
4. В какие случаях есть смысл использовать геометрические построения?
5. Какая игра называется игрой с нулевой суммой?
6. Какова цель теории игры?
7. Что такое внезапный ход?
8. Что такое цена игры?
9. Как называется раздел теории исследования операции, который изучает модели конфликтных ситуаций?
10. Какие действия называются стратегиями?