ЛЕКЦИЯ №3.
Анализ моделей задач линейного программирования на чувствительность

Анализ моделей задач линейного программирования на чувствительность: цель и задачи

После получения оптимального решения задачи ЛП часто возникает потребность выявить чувствительность этого решения к определенным изменениям параметров исходной модели. Например, в задаче о распределении ресурсов является интересным вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение увеличения или уменьшения спроса, изменение запасов ресурсов, а также рыночных цен на товары. При таком анализе всегда рассматривается некоторая совокупность линейных оптимизационных моделей, которая предоставляет модели динамичность, свойственную реальным процессам. Отсутствие методов, позволяющих выявить влияние возможных изменений параметров модели на оптимальное решение, может привести к тому, что полученное статичное решение устареет еще к своей реализации. В рамках анализа на чувствительность решаются три таких задачи:

1) анализ на чувствительность к изменению правых частей ограничений;
2) анализ степени дефицитности ресурсов;
3) анализ решения ЗЛП на чувствительность к изменению коэффициентов целевой функции.

Первая задача анализа на чувствительность: анализ на чувствительность к изменению правых частей ограничений

Данная задача позволяет дать ответ на вопрос: на сколько целесообразно увеличивать или сокращать запасы ресурсов?

Особенно важным является анализ таких двух аспектов.

1) На какую величину нужно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции?
2) На какую величину можно уменьшить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции?

Поскольку величина запаса каждого из ресурсов фиксируется в правых частях ограничений, то этот вид анализа часто называют анализом на чувствительность к изменению правых частей.

Перед тем, как ответить на поставленные вопросы, классифицируем ограничение линейной модели на связывающие (активные) и несвязывающие (неактивные). В геометрической интерпретации предельная прямая, которая отвечает связывающему ограничению, проходит через оптимальную точку.

Если некоторое ограничение является связующим, то соответствующе ему ограничение следует отнести к разряду дефицитных ресурсов, поскольку он тратится полностью. Ресурс, с которым ассоциирует несвязывающие ограничение, стоит отнести к разряду недефицитных ресурсов (то есть имеющихся в некотором излишке). Таким образом, в ходе анализа модели на чувствительность к изменению правых частей ограничений определяются такие величины:

1) Предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, что позволяет улучшить найденное раньше оптимальное решение.

2) Предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, который не изменяет найденного ранее значения целевой функции. Информация, полученная в последнем случае, особенно полезна, когда излишки недефицитного ресурса могут быть использованы для других целей.

Может возникнуть вопрос или стоит проанализировать влияние на оптимум увеличения объема ресурсов, которые есть в излишке и сокращения объема дефицитных ресурсов. Ответ на первую часть вопроса является очевидным, потому что в этом случае мы попробовали бы сделать и без того избыточный ресурс еще более избыточным, что никак не повлияет на полученное ранее решение. Вторая часть вопроса заслуживает особенного внимания, поскольку при возможных недопоставках дефицитного ресурса важно знать, как это отразится на результатах решения задачи.

Вторая задача анализа на чувствительность: оценка дефицитности ресурсов

В рамках анализа за второй задачей на чувствительность с помощью методов линейного программирования удается ответить на вопрос: увеличение объема которого из ресурсов является наиболее выгодным? Для этого вводится характеристика ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса, который выражается через соответствующее увеличение оптимального значения целевой функции. Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса i через y_i. Величину y_i определим из отношения:

$$y_i = \frac{\Delta z_i}{\Delta b_i}, \tag{3.1}$$

где Δb_i – прирост запаса *i*-го ресурса $i = \overline{1, m}$, Δz_i – прирост целевой функции, предопределенный увеличением *i*-го ресурсу на величину Δb_i.

Аналогично определяется ценность единицы любого другого ресурса.

Третья задача анализа на чувствительность: анализ на чувствительность к изменению коэффициентов целевой функции

Третья задача на чувствительность позволяет ответить на вопрос: в каких пределах является допустимым изменение коэффициентов целевой функции?

Изменение коэффициентов целевой функции влияет на наклон прямой, которая описывает эту функцию в принятой системе координат. Идентификация конкретной угловой точки в качестве оптимума зависит в первую очередь от наклона этой прямой. Это значит, что вариация коэффициентов целевой функции может привести к изменению совокупности связывающих ограничений и, следовательно, статусу того или иного ресурса (то есть сделать недефицитный ресурс дефицитным и наоборот). Таким образом, в рамках анализа модели на чувствительность к изменениям коэффициентов целевой функции могут исследоваться следующие вопросы:

1) Каким является диапазон изменения (увеличение или уменьшение) того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

2) Насколько стоит изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Контрольный пример 3.1

Выполнить анализ на чувствительность оптимального решения задачи производственного планирования с двумя продуктами и тремя видами сырья, математическая модель которого имеет вид:

$$z(x_1,\ x_2) = \max_{x \in X} \{12x_1 + 10x_2\},$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 590, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 560, \\ 4x_1 + x_2 \le 680, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Решение

Найдем оптимальное решение задачи графическим методом.

В координатной плоскости x_1Ox_2 построим границу каждой полуплоскости неравенств-ограничений данной задачи, нумеруя их в порядке записи и указывая направление каждой полуплоскости.

Предельные прямые полуплоскостей проходят через такие точки:

(1) $2x_1 + 3x_2 = 590$, A_1 (0, 196.67), A_2 (295, 0);

(2) $3x_1 + 2x_2 = 560$, B_1 (0, 280), B_2 (186.67, 0);

(3) $4x_1 + x_2 = 680$, C_1 (0, 680), C_2(170, 0);

(4) $x_1 = 0$ – ось координат Ox_2;

(5) $x_2 = 0$ – ось координат Ox_1.

Многоугольник решений на рис. 3.1 заштрихован (пятиугольник $OABCD$).

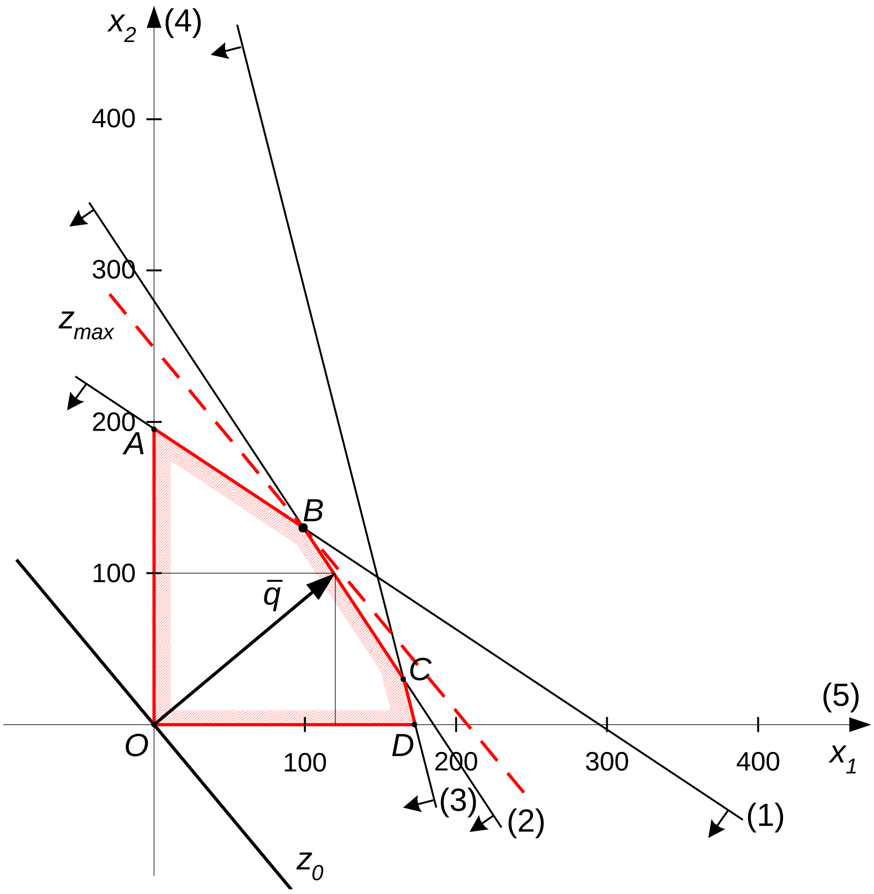

Рисунок 3.1 – Графический метод решения ЗЛП

Строим вектор-градиент $\bar{q}$, начало вектора лежит в точке (0, 0), конец – в точке (12, 10). Передвигаясь линиями уровня в направлении $\bar{q}$ находим, что $z_{\max}$ содержится в точке *B*.

Вычисляем оптимальные значения.

Для вычисления $z_{\max}$ находим координаты точки *B*. Точка *B* – сечение предельных прямых I и II:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 590, \\ 3x_1 + 2x_2 = 560, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{590 - 3x_2}{2}, \\ 3\dfrac{590 - 3x_2}{2} + 2x_2 = 560, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{590 - 3x_2}{2}, \\ -5x_2 = -650, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 100, \\ x_2 = 130. \end{cases}$$

Следовательно, точка $B(100,130)$. $z_{\max} = 12 \cdot 100 + 10 \cdot 130 = 2500$.

Таким образом, оптимальный план производства: изготовить продукции вида I – 100 ед. и продукции вида II – 130 ед. Суммарная прибыль от их реализации 2500 д. ед.

Выполним анализ на чувствительность полученного оптимального решения задачи.

За первой задачей на чувствительность проклассифицируем ограничения. Прямая, которая отвечает связывающему ограничению, проходит через оптимальную точку *B*. На рис. 3.1 связывающими являются ограничения (1) и (2), т.е. ограничения, лимитирующие запасы сырья S_1 и S_2. Следовательно, в заданной задаче сырье S_1 и S_2 является дефицитными ресурсами, S_3 – недефицитный ресурс.

Проанализируем ресурс S_1 (рис. 3.2).

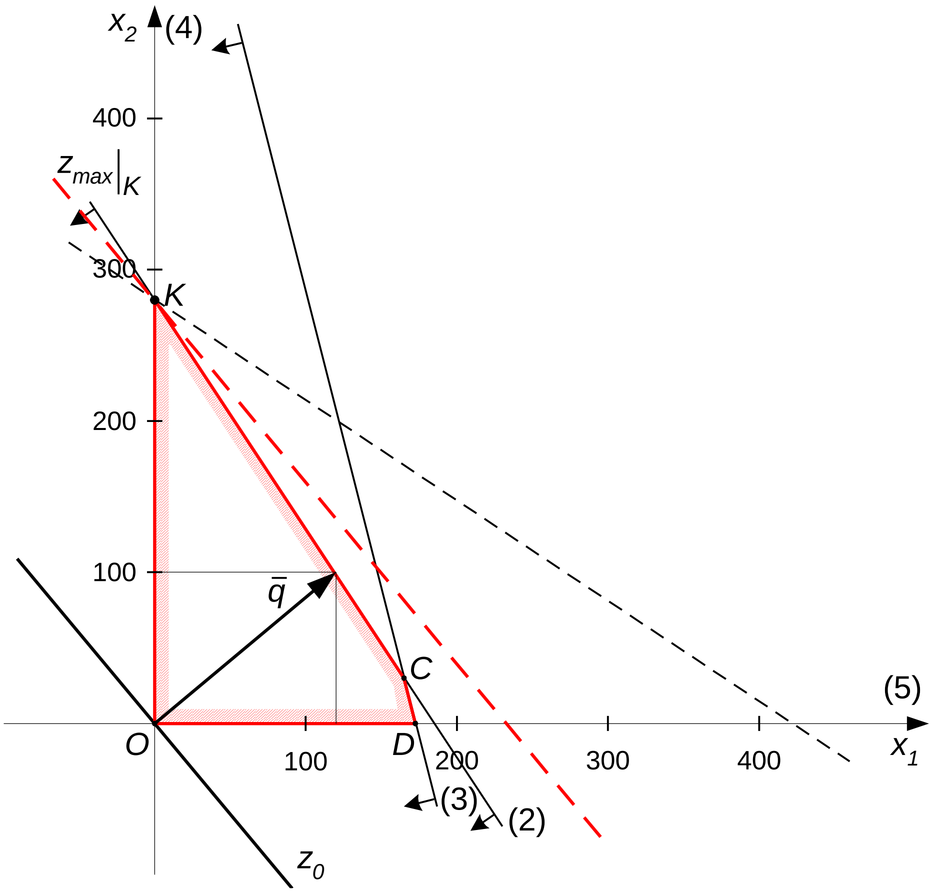

Рисунок 3.2 – Определение максимально допустимого увеличения запаса ресурса S_1

Рис. 3.2 иллюстрирует ситуацию, когда рассматривается вопрос о целесообразности увеличения запаса дефицитного ресурса (1) (исходного продукта S_1). Из рис. 3.2 видно, что при увеличении запаса этого ресурса прямая (1) (или отрезок *AB*) перемещается вверх параллельно сама к себе, постепенно изменяя пространство допустимых решений к многоугольнику *OKCD*. При этом новой оптимальной точкой становится точка *К*, в которой пересекаются прямые (2) и (4).

В точке *К* ограничение (1) (для ресурса S_1) становится избыточным, поскольку никакой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не повлияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение. Таким образом, объем ресурса S_1 не стоит увеличивать сверх предела, отвечающему точке, где ограничение (1) становится избыточным. Определим этот предельный уровень следующим образом.

Установим координаты точки *К*, в которой пересекаются прямые (2) и (4), то есть определим решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 = 560. \end{cases}$$

В итоге получим $x_1 = 0$ и $x_2 = 280$.

Подставляя координаты точки K в левую часть ограничения (1), определяем максимально допустимый запас ресурса S_1:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 280 = 840 \text{ ед.}$$

Подставляя координаты точки K в целевую функцию, определяем прибыль от реализации продукции при использовании максимально допустимого запаса ресурса S_1:

$$z_{\max}\big|_K = 12 \cdot 0 + 10 \cdot 280 = 2800.$$

Проанализируем ресурс S_2 (рис. 3.3).

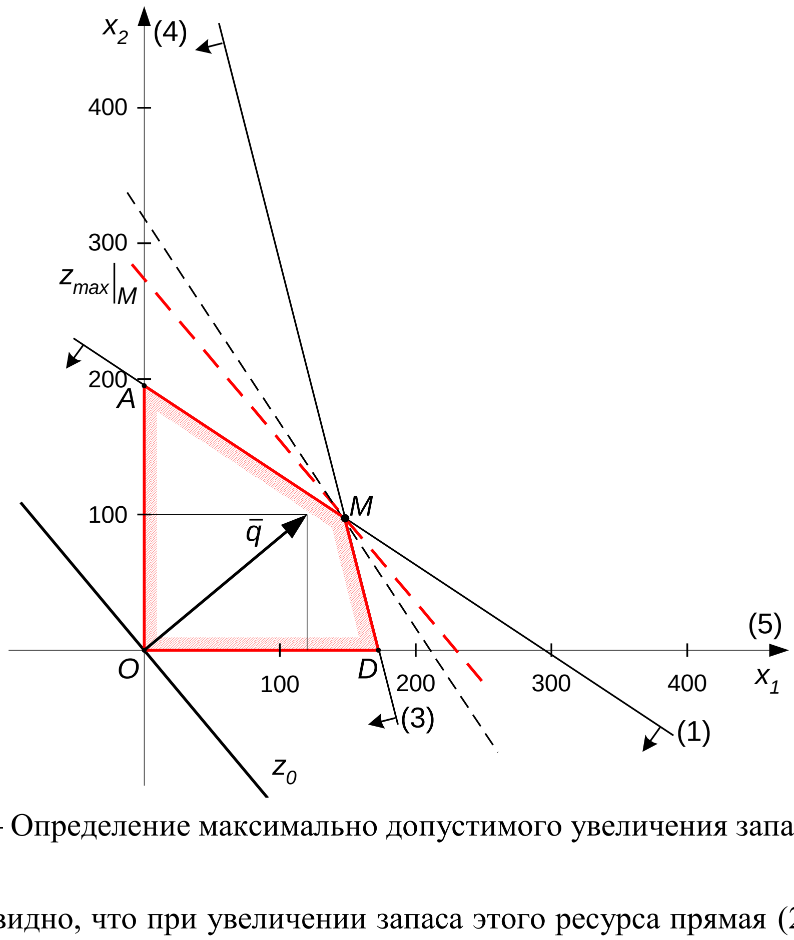

Рисунок 3.3 – Определение максимально допустимого увеличения запаса ресурса S_2

Из рис. 3.3 видно, что при увеличении запаса этого ресурса прямая (2) (или отрезок *BC*) перемещается вверх параллельно сам к себе, постепенно “взимая” в точку *M* треугольник *BCM*. Стороны *BM* и *CM* этого треугольника являются продолжениями прямых, которые отвечают ограничениям (1) и (3). В точке *M* ограничения (1) и (3) становятся связывающими, оптимальному решению при этом отвечает точка *M*, а пространством (допустимых) решений становится многоугольный *OAMD*. В точке М ограничение (2) (для ресурса S_2) становится избыточным, поскольку никакой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не повлияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение. Таким образом, объем ресурса S_2 не стоит увеличивать сверх предела, отвечающему точке, в которой ограничение (2) становится избыточным.

Этот предельный уровень определяется так. Во-первых, устанавливаются координаты точки *M*, в которой пересекаются прямые (1) и (3), то есть определяется решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 590, \\ 4x_1 + x_2 = 680, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 590, \\ 5x_2 = 500, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 145, \\ x_2 = 100. \end{cases}$$

В итоге получим $x_1 = 145$ и $x_2 = 100$. Дальше, подставляя координаты точки *M* в левую часть ограничения (2), определяем максимально допустимый запас ресурса S_2:

$$3 \cdot 145 + 2 \cdot 100 = 635.$$

Подставляя координаты точки *M* в целевую функцию, определяем прибыль от реализации продукции при использовании максимально допустимого запаса ресурса S_2.

$$z_{\max}\big|_M = 12 \cdot 145 + 10 \cdot 100 = 2740.$$

Рассмотрим теперь вопрос об уменьшении правой части несвязывающего ограничения. Ограничение (3) фиксирует предельный уровень запаса сырья S_3 (рис. 3.4).

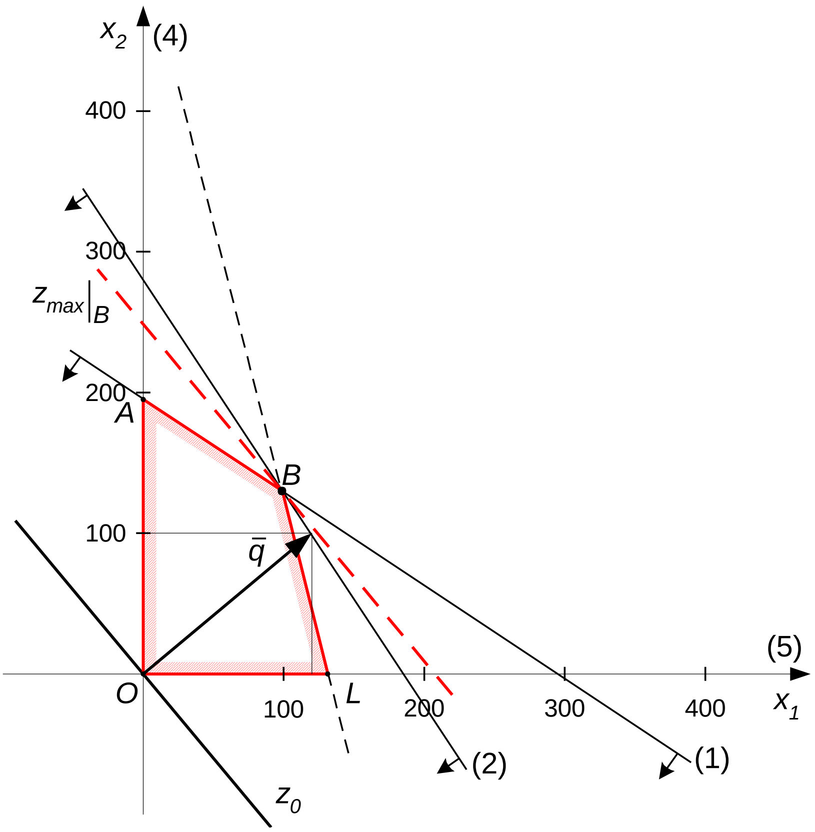

Рисунок 3.4 – Определение максимально допустимого уменьшения запаса ресурса S_3

На рис. 3.4 видно, что, не изменяя оптимального решения, прямую (3) (CD) можно опускать книзу к пересечению с оптимальной точкой $B(100,130)$.

В этом случае правую часть ограничения можно уменьшать до тех пор, пока прямая (3) не приобретет вида $4x_1 + x_2 = 4 \cdot 100 + 130 = 530$, что позволяет записать это ограничение как: $4x_1 + x_2 = 530$. Этот результат показывает, что уменьшение запаса сырья S_3 к величине 530 ед. не повлияет на оптимальность ранее полученного решения.

Результаты проведенного анализа занесем в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты первой задачи анализа на чувствительность

Ресурс	Тип ресурса	Запаси ресурса, ед.	Измененные запаси ресурса, ед.	Максимальная смена запаса ресурса, ед., Δb_i	Максимальная смена прибыли от реализации, д. е., Δz_i
S_1	дефицитный	590	840	+ 250	+ 300
S_2	дефицитный	560	635	+ 75	+ 240
S_3	недефицитный	680	530	- 150	0

За второй задачей на чувствительность, воспользовавшись данными таблицы 3.1, вычислим ценность дополнительной единицы ресурса для каждого из ограничений. Для ограничения (1) получим $y_1 = \frac{300}{250} = 1,2$ д. е./ед. сырья S_1. Аналогично определяется ценность единицы любого другого ресурса (результаты расчета поданы в таблице 3.2).

Таблица 3.2 – Результаты второй задачи анализа на чувствительность

Ресурс	Тип ресурсу	Максимальная смена запаса ресурса, ед., Δb_i	Максимальная смена прибыли от реализации, д. е., Δz_i	Ценность дополнительного ресурса, д. е./ед., y_i
S_1	дефицитный	+ 250	+ 300	1,2
S_2	дефицитный	+ 75	+ 240	3,2
S_3	недефицитный	- 150	0	0

Значения величин y_i свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь стоит направить на увеличение запаса ресурса 2 (продукт S_2) и только потом – на увеличение ресурса 1 (продукт S_1). Относительно недефицитного ресурса, то его объем, как и следовало ожидать, увеличивать нецелесообразно.

За третьей задачей на чувствительность определим, в каких пределах является допустимым изменение коэффициентов целевой функции. Обозначим через c_1 и c_2 прибыли фирмы от продажи 1 ед. соответственно продукции вида I и продукции вида II. Тогда целевую функцию можно подать в таком виде:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \,.$$

Проиллюстрируем изменение угла функции на рис. 3.5.

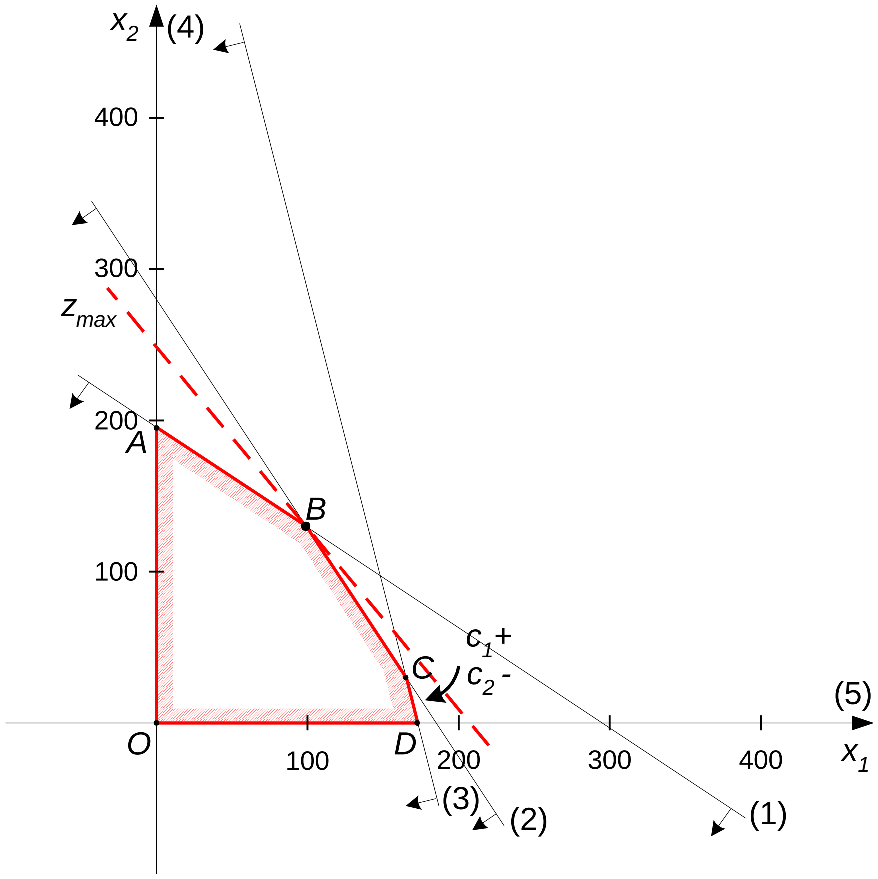

Рисунок 3.5 – Определение предельных значений коэффициентов целевой функции

На рис. 3.5 видно, что при увеличении c_1 или уменьшении c_2 прямая, описывающая целевую функцию, вращается вокруг точки B по часовой стрелке. Если же c_1 уменьшается или c_2 увеличивается, то эта прямая вращается против часовой стрелки (рис. 3.6). Таким образом, точка B будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой z не выйдет за пределы, обусловленные наклонами прямых для ограничений (1) и (2).

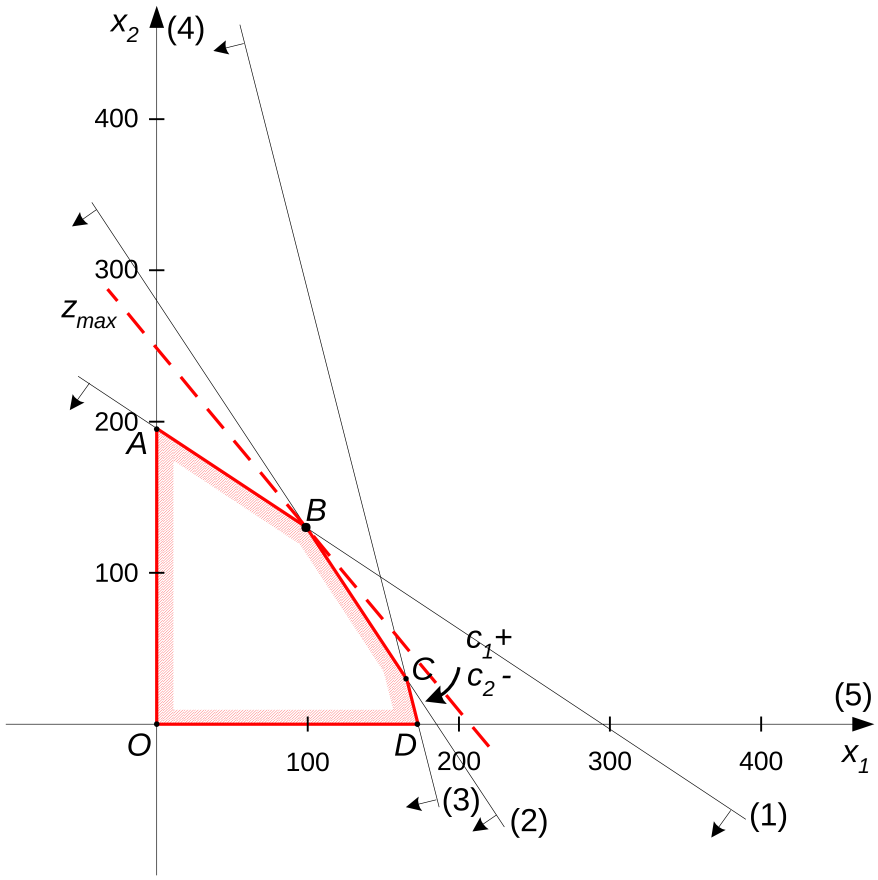

Рисунок 3.6 – Определение предельных значений коэффициентов целевой функции

Как только наклон прямой *z* станет ровным наклону прямой ограничения (1), получим альтернативные оптимальные угловые точки *B* и *A*. Аналогично, если наклон прямой *z* станет ровным наклону прямой для ограничения (2), будем иметь две альтернативных оптимальных угловых точки *B* и *C*. Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует достижении оптимального значения *z* при разных значениях переменных. Как только наклон прямой *z* выйдет за пределы отмеченного выше интервала для c_1 получим некоторое новое оптимальное решение (точку *A* или точку *C*).

Чтобы проиллюстрировать процедуру вычислений, рассмотрим, каким образом можно найти допустимый интервал изменения c_1, при котором точка *B* остается оптимальной. Исходное значение коэффициента $c_2 = 10$ оставим неизменным. Из рис. 4.5 видно, что значение c_1 можно увеличивать до тех пор, пока прямая *z* не совпадет с прямой (2), или уменьшать, пока прямая z не совпадет с прямой (1). Эти предельные значения коэффициента c_1 можно определить из равенства наклонов прямой *z* и прямой (2) (максимальное значение c_1) и равенства наклонов прямой *z* и прямой (1) (минимальное значение c_1).

Поскольку тангенс угла наклона для прямой z равняется $\frac{10}{c_1}$, а для прямых (1) и (2), соответственно, $\frac{3}{2}$ и $\frac{2}{3}$, то минимальное значение c_1 определим из равенства: $\frac{10}{c_1}=\frac{3}{2}$, $c_{1\min}=\frac{20}{3}$. Максимальное значение: $\frac{10}{c_1}=\frac{2}{3}$, $c_{1\min}=15$.

Следовательно, интервал изменения коэффициента c_1, в котором точка B, как и раньше, остается единственной оптимальной точкой, определяется неравенством $20/3<c_1<15$. При $c_1=20/3$ оптимальными угловыми точками будут B и A. Как только коэффициент c_1 станет меньшим за $20/3$, оптимум сместится в точку A. Аналогичную интерпретацию можно подать и в том случае, когда коэффициент $c_1=15$. В этом случае оптимальными угловыми точками будут B и C. При $c_1>15$ оптимум сместится в точку C.

Заметим, что при $c_1<20/3$, ресурс S_2 будет недефицитным, ресурс S_1 останется дефицитным; при $c_1>15$, ресурс S_1 будет недефицитным, а ресурс S_3 станет дефицитным.

Аналогичный анализ можно выполнить и для коэффициента c_2, зафиксировав при этом c_1 на уровне $c_1=12$ д. е./ед. Получим, что интервал изменения коэффициента c_2, в котором точка B остается единственной оптимальной точкой, определяется неравенством $8<c_2<18$.

Будем считать, что коэффициенты целевой функции совпадают с соответствующими коэффициентами одного из связывающих ограничений, или является пропорциональными им. Например, пусть в заданной задаче о распределении сырья суммарная прибыль предприятия описывается функцией $z=3x_1+2x_2$. В этом случае линии уровня целевой функции будут параллельными к прямой ограничения (2). Таким образом, оптимальному решению будет отвечать бесконечное множество точек, которые принадлежат отрезку BC.

Контрольные вопросы

Верно или неверно?

1. В задаче линейного программирования с двумя переменными целевая функция может приобретать одинаковое значение в двух разных экстремальных точках.
2. Оптимальное решение ЗЛП (если он является законченным) всегда можно найти, зная все экстремальные точки пространства решений.
3. Пространство допустимых решений задачи ЛП можно изменить, исключив избыточные ограничения.
4. Пространство допустимых решений задачи ЛП можно изменить, исключив несвязывающие ограничения.
5. Изменения уровня запаса дефицитного ресурса всегда влияют на оптимальные значения как целевой функции, так и переменных.
6. Изменения коэффициентов целевой функции всегда приводят к изменению оптимальных значений переменных.

7. Переменные линейных оптимизационных моделей, построенных для решения практических задач, могут быть не ограничены в знаке.

8. Вид производственной деятельности, которая не считается в заданных условиях выгодным, может стать прибыльным, если потребности в ограниченных ресурсах, необходимых для его реализации, будут уменьшены.