Лекция 1.
Основные понятия математического программирования. Построение математической модели задачи математического программирования.

Для изучения сложных процессов и явлений, когда проведение экспериментов нуждается значительных расходов или вообще невозможно, применяют моделирование. *Модель* – это специально созданный объект, на котором воссозданы определенные характеристики исследуемого объекта с целью его изучения, а моделирование – способ отражения рассмотренных характеристик исследуемого объекта.

Поскольку математические методы не могут применяться непосредственно к исследуемому объекту, то необходимым является построение адекватной этому объекту *математической модели*. Под ***математической моделью*** объекта (явления, системы) будем понимать некоторую искусственную систему (физическую или абстрактную), которая упрощенно отбивает структуру и основные закономерности развития реального объекта так, что ее изучение подает информацию о состоянии и поведении самого исследуемого объекта.

В экономической науке издавна используют модели. Одна из первых экономических моделей – модель воссоздания Ф. Кене – была создана в 1758 г. Усовершенствование экономико-математических моделей обусловило дальнейшее развитие моделирования в экономике. Ни одна современная экономическая теория не обходится без математического описания разных экономических явлений и процессов.

Один из практически важнейших вопросов экономики – построение хозяйственного плана на разных уровнях экономической системы, от цеха ко всему хозяйству страны. Складывания наилучшего в определенное понимание, или, как говорят, оптимального, плана – важная проблема в жизни общества: одни и те же расходы могут давать разный экономический эффект в зависимости от принятых экономических решений.

Работу любого предприятия можно характеризовать определенными объективными и технологическими показателями оборудования, которые обычно нельзя изменять в процессе производства. Эти показатели называются неуправляемыми переменными, или параметрами. Те же показатели, которые зависят от субъективных решений (например, объем сырья, запущенного в обработку, или количество конечной продукции, запланированной к выпуску), называются управляемыми переменными.

Цель производства, сформулированная в виде функционального соотношения, которое включает у себя как управляемые переменные, так и параметры, называется целевой ***функцией***.

Чтобы сложить наилучший план ведения хозяйства, нужно оптимизировать целевую функцию, то есть добрать такие значения управляемых переменных, для которых целевая функция приобретает максимальное (если речь идет о прибыли) или минимальное (если идет речь о себестоимости продукции) значение.

Однако невозможно запустить в производство больше сырья, чем есть на предприятии, и нельзя выпустить больше продукции, чем дают возможность имеющиеся сырьевые, технологические, финансовые или другие ресурсы. Иначе говоря, наилучший план следует определять на ограниченном множестве управляемых переменных, которое называется ***допустимым множеством решений***.

Выражены через управляемые переменные целевая функция и ограничение образуют математическую модель задачи оптимизации. Любой набор значений переменных, который удовлетворяет ограничение, определяет ***допустимый план***, а тот из них, на котором достигается максимум (минимум) целевой функции, называется ***оптимальным планом***.

Рассмотрим некоторые задачи планирования и управления, математические модели которых сводятся к оптимизационным задачам, или так называемым задачам математического программирования.

Определение наилучшего состава смеси. Иногда такую задачу называют задачей о выборе диеты. Пусть известное содержимое питательных веществ в разных продуктах питания, а также калорийность единицы каждого вида продуктов. Нужно добрать рацион – набор и количество продуктов – так, чтобы каждое питательное вещество содержалось в нем в нужном количестве, и суммарная калорийность диеты была минимальной.

К задачам о смесях положено и такая. Бензины разных марок получают смешиванием разных нефтепродуктов. При этом нужно максимально точно придерживаться заданных показателей качества бензина (октанового числа, степени очистки и прочее), но исходные нефтепродукты имеют разные технические и экономические характеристики (например, северная и южная нефти существенно отличаются за качественным составом), и от того, какие нефтепродукты смешать, зависит рентабельность производства.

В этой задаче нужно построить такой план смешивания нефтепродуктов, которое обеспечивает максимальную рентабельность производства и дает возможность получать бензины заданных сортов в нужных объемах.

Задача об оптимальном плане выпуска продукции. Пусть предприятие выпускает продукцию заданного ассортимента. Расходы определенного вида ресурсов на выпуск одного изделия из отмеченного ассортимента, а также полные объемы имеющихся ресурсов фиксированы. Прибыль, получаемая предприятием от изготовления и реализации единицы каждого вида продукции, известна и постоянна. Предприятию нужно сложить план выпуска продукции, который является технологически осуществимым при имеющихся ресурсах всех видов, удовлетворяет заданные ограничения относительно выпуска каждого вида продукции и в то же время гарантирует наибольшую общую прибыль.

Оптимизация межотраслевых потоков. Пусть каждая из нескольких отраслей хозяйства производит только один специфический вид продукции, и каждый вид продукции используют (в частности, в нулевом количестве) в производстве во всех других отраслях. Нужно найти такие возможные в заданных условиях объемы производства каждой отрасли и такой план выпуска конечной продукции, чтобы максимизировать общую стоимость изготовленного конечного продукта.

Транспортная задача. В самом простом варианте она возникает, когда речь идет о рациональной перевозке какого-то однородного продукта от производителей к потребителям. Предусмотрено, что потребителям безразлично, откуда, из каких пунктов производства приходит продукт, если бы его объем был должным. Однако от того, насколько рационально пункты потребления прикреплены к пунктам производства, существенно зависит объем транспортной работы. Поэтому естественно возникает задача о самой рациональной перевозке груза, когда потребности удовлетворяются, а расходы на транспортировку минимальные.

Самая простая задача размещения. Пусть в известных пунктах уже есть или можно разместить предприятия, которые производят какой-то продукт, потребляемый в других известных пунктах. Известные расходы на производство единицы продукта и возможный максимальный объем производства во всех пунктах производства, а также расходы на транспортировку с пунктов производства до пунктов потребления. Нужно так разместить новые предприятия, определить объемы производства в них и план перевозок, чтобы суммарные расходы на производство и транспортировку всего нужного объема продукта были минимальны.

Эту задачу можно возвести к обычной транспортной, в которой к расходам на транспортировку прибавлена затрата на производство в пункте отправления.

Другие виды оптимизационных задач:

1) управление запасами (с увеличением запасов увеличиваются расходы на сохранение, однако с уменьшениями запасов увеличиваются расходы через возможный их недостаток);

2) распределение ресурсов (для определенных наборов работ нужно так распределить ресурсы, чтобы достать наибольшую прибыль от выполнения этих работ или минимизировать потери, связанные с неполным обеспечением ресурсами);

3) ремонт и замена оборудования (рабочее оборудование со временем изнашивается, устаревает и подлежит замене, поэтому желательно определить наилучшие сроки обновительного ремонта и момент замены оборудования модернизированным);

4) массовое обслуживание (в организациях, которые обслуживают очереди заказов или требований, например, на телефонных станциях, в ремонтных мастерских, билетных кассах и тому подобное; задание заключается в том, чтобы минимизировать суммарные ожидаемые потери от несвоевременного обслуживания заказов или простоев оборудования);

5) календарное планирование (дает возможность сложить такое расписание загрузки оборудования, чтобы суммарная длительность комплекса завершенных работ была минимальной);

6) сеточное планирование и управление (в случае выполнения работ на сложных и высоко стоимостных объектах, когда нужно согласовывать сроки завершения отдельных комплексов работ и моменты запуска операций всего комплекса);

7) выбор маршрута (проектируя коммуникации или трубопроводы, нужно как можно лучше размещать их, чтобы оптимизировать потоки в сетях);

8) комбинированные задач и (содержат в то же время несколько типичных задач).

Разработка моделей и их типы. Рассмотрим подробнее формализацию моделей. За степенью соответствия оригинала их разделяют на *изоморфные*, которые строго отвечают оригиналу (их используют обычно для простых систем), и *гомоморфные*, что отбивают лишь определенные свойства оригинала (математические модели).

Математические модели строят в такой последовательности:

1) изучают и анализируют причинно-следственные связки;

2) используют аналогии;

3) проводят эксперименты (если это возможно) для выявления существенных переменных.

Управляемые переменные (значение которых можно изменять в определенных пределах) обозначим $x_1, x_2, \dots x_n$ и объединим их в вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Неуправляемые переменные (параметры), значение которых нельзя изменять, запишем как вектор $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$. Размерности этих векторов могут быть разными, то есть $n \neq m$.

Пусть функция $E = f(x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_m)$, что зависит от управляемых и неуправляемых переменных, – показатель качества или эффективности системы.

Набор функций $g_i\left(\bar{x},\bar{y}\right)$, $i=\overline{1,m}$, определяет соотношение между показателями функционирования системы, а неравенства $g_i\left(\bar{x},\bar{y}\right)\le b$, $i=\overline{1,m}$, задают ограничение на все имеющиеся в системе ресурсы.

Тогда в самом общем виде задачу оптимизации можно сформулировать так: *найти такое значение вектора* $\bar{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, *для которого целевая функция* $E = f\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ *достигает экстремального (максимального или минимального) значения и при этом удовлетворяются все ограничения на управляемые переменные.*

Формально эту задачу можно подать так: найти

$$extr\left\{E\right\} = f\left(\bar{x},\bar{y}\right), \tag{1.1}$$

при условии

$$g_i\left(\bar{x},\bar{y}\right)\le b, \quad i=\overline{1,m}, \tag{1.2}$$

Для нахождения оптимального решения задачи (1.1)-(1.2) применяют разные методы теории оптимальных решений, или так называемого математического программирования.

Математическое программирование – раздел математики, которая содержит теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, то есть задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. В отличие от классической теории экстремальных задач, которые являются частью математического анализа, математическое программирование касается задач, у которых являются существенными ограничения на область изменения переменных.

В зависимости от вида целевой функции и ограничений экономико-математические модели разделяют на такие виды:

1) если функции $f\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ и $g_i\left(\bar{x},\bar{y}\right)$, $i=\overline{1,m}$, линейные относительно $\bar{x}$, то имеем задачу ***линейного программирования***;

2) если хотя бы одна из этих функций нелинейная относительно $\bar{x}$, то имеем задачу ***нелинейного программирования***;

3) в ***динамическом программировании*** целевая функция $f\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ имеет специальную структуру (является суммой или произведением функций, которые зависят от разных аргументов);

4) ***стохастическое программирование*** применяют тогда, когда вектор неуправляемых переменных случаен (в таких задачах рассматривают математическое ожидание целевой функции в случае вероятностных ограничений);

5) если на управляемые переменные наложено ограничение целостности (переменные $\bar{x}$ – целые или натуральные числа), то применяют методы ***дискретного программирования***;

6) ***эвристическое программирование*** применяют тогда, когда строгими методами не удается получить оптимальное решение, а с помощью эвристических подходов можно найти решение, близкое к оптимальному.

Дальше наведем подробные постановки поданных задач и основные методы их решения.

Контрольный пример 1.1

Предприятие изготовляет четыре вида продукции B_1, B_2, B_3, B_4. Для функционирования производства используются трудовые ресурсы в объеме 100 человеко-смен, полуфабрикаты – 260 кг, оборудование (станки) – 370 человеко-смен. Нормы расходов ресурсов и прибыль от реализации продукции поданы в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Начальные данные

Название ресурса	Виды продукции				Объем ресурса
	B_1	B_2	B_3	B_4	
Трудовые ресурсы (человеко-смены)	3	4	1	2	100
Полуфабрикаты	4	10	4	6	260
Оборудование	8	7	10	4	370
Прибыль	40	50	100	80	

Составить план производства продукции, которая обеспечивает максимальную прибыль при дополнительных условиях: 1) количество единиц продукции третьего вида втрое больше от количества единиц продукции первого вида; 2) продукции первого вида необходимо изготовить не менее чем 25 единиц; 3) третьего вида – не более чем 30 единиц; 4) количество единиц продукции второго вида относится к количеству единиц продукции третьего вида как 1: 3.

Решение

Сложим математическую модель задачи.

Введем переменные. Обозначим через $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – план изготовления продукции вида B_1, B_2, B_3, B_4 соответственно.

Целевая функция. Суммарная прибыль будет представлять:

$$f(\bar{x}) = 40x_1 + 50x_2 + 100x_3 + 80x_4 .$$

Ограничение:

а) на трудовые ресурсы: $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \le 100$;

б) на полуфабрикаты: $4x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 6x_4 \le 260$;

в) на оборудование: $8x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 4x_4 \le 370$.

Условия неотъемлемости: $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,4}$.

Дополнительные условия из комплектации: $3x_1 - x_3 = 0$.

Предельные условия и условия комплектации: $x_1 \ge 25$;

$x_3 \ge 0$;

$3x_2 = x_3$.

Таким образом, математическая модель задачи имеет такой вид:

$$f(\bar{x}) = \max_{x \in X} \{40x_1 + 50x_2 + 100x_3 + 80x_4\},$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \le 100, \\ 4x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 6x_4 \le 260, \\ 8x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 4x_4 \le 370, \\ 3x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 \ge 25, \\ x_3 \le 30, \\ 3x_2 = x_4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое модель экономических явлений?
2. Определите составные элементы общей математической модели.
3. Что такое управляемые переменные модели?
4. Что такое параметры модели?
5. Определите составные элементы модели математического программирования.
6. Определите понятия допустимого множества решений задачи математического программирования и опишите способы ее определения.
7. Опишите способы определения целевой функции в задачах математического программирования.
8. Дайте общую характеристику задач математического программирования.
9. По каким признакам классифицируют задачи математического программирования.
10. Отметьте основные классы задач математического программирования.
11. Приведите примеры самых простых экономических задач, для решения которых целесообразно применять математическое программирование.

Рекомендуемая литература

1. Вильямс Н.Н. Параметрическое программирование в экономике / Н.Н. Вильямс. – М.: Статистика, 1976. – 516 с.
2. Гершгорн А.С. Математическое программирование и его применение в экономических расчетах / А.С. Гершгорн. – М.: Экономика, 1968. – 356 с.
3. Грешилов А.А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях / А.А. Грешилов. – М.: Радио и связь, 1991. – 245 с.
4. Деордица Ю.С. Исследование операций в планировании и управлении: Учебное пособие / Ю.С. Деордица, Ю.М. Нефедов. – К.: Вища школа, 1991. – 270 с.
5. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. – М.: Прогресс, 1975. – 621 с.