ЛЕКЦИЯ №5.
Транспортная задача линейного программирования (ТЗЛП)

Транспортная задача является одной из основных специальных моделей линейного программирования. Это объясняется тем, что на транспорте, в снабженческо-сбытовых и торговых организациях, в любой отрасли народного хозяйства важное значение имеет снижение транспортных расходов на перевозку грузов. В результате практической важности этой задачи и специфики ограничений, для ее развязывания разработан более простой, чем в общем случае, вариант симплексного метода (метод потенциалов).

Постановка транспортной задачи

Пусть на m пунктах снабжения $A_1, A_2, \ldots, A_m$ сосредоточенно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц некоторого однородного груза. Этот груз необходимо перевезти у n пунктов потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$, причем в каждый из них нужно завезти соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц этого груза. Стоимость перевозки c_{ij} единицы груза с пункта A_i к пункту B_j считается заданной. Надо составить такой план перевозки, чтобы общая стоимость его была бы минимальной.

При выполнении условия баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{5.1}$$

математическая модель транспортной задачи является такой:

$$z = \min_{x \in X} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right\}, \tag{5.2}$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{5.3}$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Планом транспортной задачи (5.2)-(5.3) называется набор величин x_{ij}, который удовлетворяет условия (5.3).

План транспортной задачи обозначается через $X = \left(x_{ij}\right)_{m \times n}$, величины x_{ij} называются перевозками.

План транспортной задачи называется оптимальным, если он минимизирует целевую функцию z.

Теорема. Если план $X^* = \left(x_{ij}^*\right)_{m\times n}$ является оптимальным, то ему соответствуют $m+n$ чисел U_i^* и V_j^*, что удовлетворяют условиям:

$$U_i^* + V_j^* = c_{ij}, \quad x_{ij}^* \geq 0,$$

$$c_{ij} - U_i^* + V_j^* \geq 0, \quad x_{ij}^* = 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n},$$

Числа U_i^* и V_j^* называют потенциалами *i*-го поставщика и *j*-го потребителя.

Процедура решения задачи содержит два этапа:

1) построение опорного решения;

2) улучшения решения.

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

1) Проверить условие баланса (5.2). Если условие баланса выполняется, то ТЗ является задачей *закрытого типа*. Для дальнейшего ее решения перейти к пункту 2.

2) Построить начальный опорный план транспортной задачи методом северо-западного угла или методом минимального стоимостей перевозок $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$.

При этом число заполненных клеток таблицы должно равняться числу линейно независимых уравнений системы (5.3), т.е. $m+n-1$. Если число заполненных клеток меньше чем $m+n-1$, то начальный план задачи называется вырожденным и для дальнейшего решения необходимо заполнить нулевыми (фиктивными) перевозками незаполненные клетки, доводя таким образом количество заполненных клеток до $m+n-1$. Клетку для заполнения фиктивной перевозкой выбирают так, чтобы система (5.3) имела решение, при условии, что одну или несколько неизвестных определяют произвольно.

3) Для полученного начального опорного плана вычислить потенциалы поставщиков и потребителей U_i и V_i, такие, чтобы выполнялось условие (для заполненных клеток распределительной таблицы):

$$U_i + V_j = c_{ij}. \tag{5.4}$$

4) Вычислить оценки S_{ij} для всех свободных клеток за формулой:

$$S_{ij} = c_{ij} - \left(U_i + V_j\right). \tag{5.5}$$

Если все оценки S_{ij} неотъемлемы, т.е. $S_{ij} \geq 0$, то полученный план является оптимальным.

5) Если план не является оптимальным, т.е. существуют свободные клетки, для которых $S_{ij} < 0$, то решение можно улучшить, осуществив переход к новому опорному плану с меньшей

стоимостью перевозок. Этот переход осуществляется путем перераспределения поставок с помощью построения замкнутой цепочки для наиболее перспективной свободной клетки.

Для нового плана транспортной задачи повторяют пункты 3-5 алгоритма.

Вычисления, связанные с решением ТЗ, выполняют в транспортных таблицах. Начальная транспортная таблица содержит информацию о поставщиках продукции (в первом столбце), их запасах (в последнем), о потребителях продукции (в первой строке), их потребности (в последнем), а также о стоимости перевозок c_{ij}, записанную в правом верхнем углу внутренних клеток таблицы. В центре $m+n-1$ клетки записывают значение перевозок x_{ij} (такие клетки называют занятыми или заполненными). Другие клетки оставляют свободными.

Опишем на примере два самых распространенных и чаще всего применяемых метода построения начального решения ТЗ.

Контрольный пример 5.1

Из трех овощных баз A_1, A_2, A_3 доставляют овощи в пять торговых точек B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Необходимо закрепить базы за торговыми точками так, чтобы общая сумма затрат на перевозку была минимальной. Известная матрица тарифов перевозки $C=\left(c_{ij}\right)_{3\times 5}$, где c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза с *i*-ой базы, $i=\overline{1,3}$ к *j*-ой торговой точке, $j=\overline{1,5}$. Числовые данные задачи занесены в таблицу 5.1.

Таблица 5.1 – Начальные данные

Базы	Торговые точки					Объем вывоза, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	3	5	4	2	40
A_2	6	2	3	1	7	150
A_3	3	5	2	6	4	100
Объем поставок, т	20	80	90	60	40	

Решение

Проверим условие баланса:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 40+150+100=290,$$

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 20+80+90+60+40=290.$$

Следовательно, имеем транспортную задачу закрытого типа.

Построим начальный опорный план методом “**северо-западного угла**”.

В клетку (A_1, B_1) транспортной таблицы помещаем перевозку $x_{11} = \min\{40, 20\} = 20$. Потребности первого потребителя удовлетворены полностью, поэтому первый столбик из дальнейшего рассмотрения исключается. Остаток груза первого поставщика ($40 - 20 = 20$ ед.) с учетом потребностей второго потребителя помещаем в клетку (A_1, B_2), $x_{12} = \min\{20, 80\} = 20$. В этом случае запас первого поставщика исчерпан. Переходим к распределению груза второго поставщика. В клетку (A_2, B_2) помещаем необходимое количество груза $x_{22} = \min\{150, 60\} = 60$. В этом случае потребности второго потребителя удовлетворены полностью. Второй столбик из дальнейшего рассмотрения исключается. Остаток груза от второго поставщика с учетом потребностей третьего потребителя помещаем в клетку (A_2, B_3), то есть $x_{23} = \min\{90, 90\} = 90$. Потребности третьего потребителя обеспечены полностью. Третий столбик из дальнейшего рассмотрения исключается. В этом случае запас второго поставщика исчерпан. Переходим к распределению запаса груза третьего поставщика. В клетку (A_3, B_4) помещаем необходимое количество груза $x_{23} = \min\{100, 60\} = 60$. Потребности четвертого потребителя удовлетворены полностью. Остаток груза от третьего поставщика с учетом потребностей пятого потребителя помещаем в клетку (A_3, B_5), т.е. $x_{35} = \min\{40, 40\} = 40$.

Таблица 5.2 – Опорный план методом северо-западного угла

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 **20**	3 **20**	5	4	2	**40**
A_2	6	2 **60**	3 **90**	1	7	**150**
A_3	3	5	2	6 **60**	4 **40**	**100**
Потребности	**20**	**80**	**90**	**60**	**40**	

При таком плане расходы представляют:

$$z_0 = z(X_0) = 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 90 + 6 \cdot 60 + 4 \cdot 40 = 140 + 60 + 120 + 270 + 360 + 160 = 1110$$

ед.

Заметим, что в этом методе не рассматривают матрицу транспортных расходов *C*. Поэтому начальное базисное решение ТЗ, построенное методом северо-западного угла, обычно далеко от оптимального. Следующий метод опирается на информацию о транспортных расходах и дает начальное решение, которое чаще всего более близкое к оптимальному.

Построим начальный опорный план методом **минимальной стоимости**.

Наименьшую стоимость перевозки имеет клетка (A_2, B_4), $c_{24} = 1$. Потому в данную клетку помещаем количество груза $x_{24} = \min\{150, 60\} = 60$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения четвертый столбик. Опять определяем клетку с наименьшей стоимостью $c_{15}=c_{22}=c_{33}=2$. Поместим, например, необходимое количество груза в клетку (A_1,B_5), $x_{15}=\min\{40,40\}=40$. После этого исключаем из рассмотрения первую строку и пятый столбик. В клетку (A_2,B_2) помещаем количество груза $x_{22}=\min\{150-60,80\}=80$, и исключаем из дальнейшего рассмотрения второй столбик. В клетку (A_3,B_3) помещаем количество груза $x_{33}=\min\{100,90\}=90$, и исключаем из дальнейшего рассмотрения третий столбик. В оставшейся матрице стоимостей наименьшую стоимость имеет клетка (A_3,B_1), $c_{31}=3$. Загружаем ее грузом $x_{31}=\min\{100-90,20\}=10$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения третью строку. На последнем этапе рассмотрим единственные невычеркнутые первый столбик и вторая строка, для которых имеем общую свободную клетку (A_2,B_1) с тарифом $c_{21}=6$. В эту клетку помещаем остаток груза $x_{21}=\min\{150-60-80,20-10\}=10$. В результате полного распределения грузов получаем такой начальный план (таблица 5.3).

Таблица 5.3 – Опорный план методом минимальной стоимости

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	3 **0**	5	4	2 **40**	**40**
A_2	6 **10**	2 **80**	3	1 **60**	7	**150**
A_3	3 **10**	5	2 **90**	6	4	**100**
Потребности	**20**	**80**	**90**	**60**	**40**	

При таком плане расходы представляют:

$$z_0=z(X_0)=2\cdot40+6\cdot10+2\cdot80+1\cdot60+3\cdot10+2\cdot90=80+60+160+60+30+180=570 \text{ ед.}$$

Предлагаемый метод – модификация метода северо-западного угла. Он также дает возможность определить допустимое базисное решение. Хотя применение матрицы транспортных расходов делает это решение достаточно близким к оптимальному, но оптимальный определяют за методом потенциалов.

Практическое использование **метода потенциалов** решения транспортной задачи рассмотрим на примерах.

Для задачи контрольного примера 1 найдем оптимальное решение методом потенциалов. Как начальный базисный возьмем решение, полученное методом минимальной стоимости.

Число заполненных клеток транспортной таблицы не удовлетворяет условию $(m+n-1)=(3+5-1)=7$. Имеем вырожденный план. Поэтому в одну из свободных клеток занесем число 0 и будем считать такую клетку заполненной. Занесем фиктивную перевозку в клетку (1,2) с наименьшим тарифом $c_{12} = 3$. План будет опорным, поскольку из заполненных клеток нельзя сложить замкнутую цепочку. Воспользуемся упрощенной транспортной таблицей.

Для занятых (базисных) клеток (1,2), (1,5), (2,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3) вычислим потенциалы U_i, V_j, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,5}$ в соответствии с (5.4). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} U_1 + V_2 = 3, \\ U_1 + V_5 = 2, \\ U_2 + V_1 = 6, \\ U_2 + V_2 = 2, \\ U_2 + V_4 = 1, \\ U_3 + V_1 = 3, \\ U_3 + V_3 = 2. \end{cases}$$

Она состоит из семи уравнений и содержит восемь неизвестных U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. Пусть $U_1 = 0$, тогда $U_2 = -1$, $U_3 = -4$, $V_1 = 7$, $V_2 = 3$, $V_3 = 6$, $V_4 = 2$, $V_5 = 2$.

Занесем эти данные в таблицу 5.4.

Таблица 5.4 – Оптимизация опорного плана методом потенциалов (1)

a_i \ b_j	**20**	**80**	**90**	**60**	**40**	
40	7	3 **0**	5	4	2 **40**	$U_1 = 0$
150	6 – **10**	2 **80**	3 +	1 **60**	7	$U_2 = -1$
100	3 + **10**	5	2 – **90**	6	4	$U_3 = -4$
	$V_1 = 7$	$V_2 = 3$	$V_3 = 6$	$V_4 = 2$	$V_5 = 2$	

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых $U_i + V_j > c_{ij}$:

(1,3): $0 + 6 > 5$; $S_{13} = 5 - (0 + 6) = -1$;

(2,3): $-1 + 6 > 3$; $S_{23} = 3 - (-1 + 6) = -2$;

$\min\{-1, -2\} = -2$.

Выбираем минимальную оценку свободной клетки (2,3): 3.

Для этого в перспективную клетку (2,3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

Цикл приведен в таблице (2,3 → 2,1 → 3,1 → 3,3).

Из грузов x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. $\lambda = \min\{10, 90\} = 10$. Прибавляем 10 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 10 из x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план (таблица 5.5).

Таблица 5.4 – Оптимизация опорного плана методом потенциалов (2)

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	3 **0**	5	4	2 **40**	**40**
A_2	6	2 **80**	3 **10**	1 **60**	7	**150**
A_3	3 **20**	5	2 **80**	6	4	**100**
Потребности	**20**	**80**	**90**	**60**	**40**	

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы U_i и V_j по занятым клеткам таблицы, в которых $U_i + V_j = c_{ij}$:

$$\begin{cases} U_1 + V_2 = 3, \\ U_1 + V_5 = 2, \\ U_2 + V_2 = 2, \\ U_2 + V_3 = 3, \\ U_2 + V_4 = 1, \\ U_3 + V_1 = 3, \\ U_3 + V_3 = 2. \end{cases}$$

Пусть $U_1 = 0$, тогда $U_2 = -1$, $U_3 = -2$, $V_1 = 5$, $V_2 = 3$, $V_3 = 4$, $V_4 = 2$, $V_5 = 2$. Занесем эти данные в таблицу 5.5.

Таблица 5.5 – Оптимизация опорного плана методом потенциалов (3)

a_i \ b_j	**20**	**80**	**90**	**60**	**40**	
40	7	3 **0**	5	4	2 **40**	$U_1 = 0$
150	6	2 **80**	3 **10**	1 **60**	7	$U_2 = -1$
100	3 **20**	5	2 **80**	6	4	$U_3 = -2$
	$V_1 = 5$	$V_2 = 3$	$V_3 = 4$	$V_4 = 2$	$V_5 = 2$	

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию $U_i + V_j \le c_{ij}$.

Минимальные затраты составят: $z_{\min} = 2 \cdot 40 + 2 \cdot 80 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 60 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 80 = 550$.

Анализ оптимального плана.

Из 1-ой базы необходимо весь груз направить в 5-ю торговую точку.

Из 2-ой базы необходимо груз направить в 2-ю торговую точку (80), в 3-ю точку (10), в 4-ю точку (60).

Из 3-ей базы необходимо груз направить в 1-ю торговую точку (20), в 3-ю точку (80).

Транспортные задачи, в которых нарушается условие баланса (5.1) называют транспортными задачами с неправильным балансом (транспортные задачи открытого типа, расширенные ТЗЛП). Решают такие задачи методом потенциалов, возводя их предварительно к соответствующей задаче с правильным балансом. Для этого вводят фиктивный пункт снабжения или потребления в зависимости от дефицита запасов или потребностей. Стоимость перевозок в фиктивных пунктах считают ровной нулю (чтобы не изменялась общая стоимость перевозок).

Замечание. Любую открытую ТЗ можно возвести к закрытой введениям фиктивного производителя A_{m+1}, когда спрос превышает предложение, или фиктивного потребителя B_{n+1}, когда предложение превышает спрос. При этом объем продукции фиктивных участников перевозок составляет

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i ,$$

или

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

При этом в матрицу стоимостей C добавляют строку с элементами $c_{m+1\,j}=0$, $j=\overline{1,n}$, если введен фиктивный производитель, или столбец с элементами $c_{i\,n+1}=0$, $i=\overline{1,m}$, если введен фиктивный потребитель.

Замечание. При нахождении начального базисного решения расширенных ТЗЛП методом минимального элемента (или другим методом, который учитывает себестоимость перевозок) в первую очередь нужно выбирать клеточки для загрузки среди реальных производителей и потребителей, а клеточки фиктивного столбика (строки) – в последнюю очередь. Это позволит получить план более близкий к оптимальному. Этой же цели можно достичь, положив

$$c_{m+1\,j} > \max_{i,j}\left\{c_{ij}, c_{i\,n+1}\right\} > \max_{i,j}\left\{c_{ij}\right\},$$

соответственно.

Контрольный пример 5.2

Пусть транспортная задача задана матрицей перевозок $c_{ij}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 6 & 7\\ 2 & 5 & 8 & 1\end{pmatrix}$, запасами $a_1=60$, $a_2=40$, и потребностями $b_1=20$, $b_2=30$, $b_3=45$, $b_4=15$.

Решение

Проверим условие баланса:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 60+40=100,$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 20+30+45+15=110.$$

Условие баланса не выполняется, потому дана транспортная задача открытого типа. Поскольку $\sum_{i=1}^{2} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$, то введем фиктивный пункт снабжения с запасами, что равняются разницы $110-100=10$ и нулевыми стоимостями перевозок.

Найдем начальный опорный план методом минимального элемента матрицы. При этом в расчетах фиктивный пункт не будем учитывать, потому что все стоимости в нем наименьшие (нули), и на общую стоимость они не влияют.

Остаток после заполнения основных клеточек заносим к соответствующим клеточкам фиктивного пункта. В нашем примере в конце незаполненной осталась клетка (3,3), в которой размещаем остаток 10 ед (таблица 5.6).

Таблиця 5.6 – Опорный план для ТЗ с нарушением условия баланса

a_i \ b_j	20	30	45	15	
60	3	4 - **30**	6 + **30**	7	$U_1 = 0$
40	2 **20**	5 +	8 - **5**	1 **15**	$U_2 = 2$
10	0	0	0 **10**	0	$U_3 = -6$

$V_1 = 0$ $V_2 = 4$ $V_3 = 6$ $V_4 = -1$

По заполненным клеткам находим потенциалы U_i и V_j.

Вычислим оценки S_{ij} для всех свободных клеток.

$$S_{11} = 3-(0+0) = 3; S_{14} = 7-(0-1) = 8; S_{31} = 0-(0-6) = 6; S_{32} = 0-(4-6) = 2; S_{34} = 0-(-1-6) = 7.$$

Решение, найденное методом наименьшей стоимости, не является оптимальным, причем условие оптимальности нарушается лишь для клетки (2,2): $S_{22} = -1 < 0$.

Строим для этой клетки цикл (замкнутая цепочка) непосредственно в предыдущей таблице. Цикл складывают клетки (2,2), (1,2), (1,3), (2;3). Делаем сдвиг на число $\lambda = \min\{30, 5\} = 5$. В результате сдвига достанем таблицу 5.7.

Таблица 5.7 – ТЗ с нарушением условия баланса

a_i \ b_j	20	30	45	15	
60	3	4 **25**	6 **35**	7	$U_1 = 0$
40	2 **20**	5 **5**	8	1 **15**	$U_2 = 1$
10	0	0	0 **10**	0	$U_3 = -6$

$V_1 = 1$ $V_2 = 4$ $V_3 = 6$ $V_4 = 0$

По заполненным клеткам находим потенциалы

$$U_1 = 0; U_2 = 1; U_3 = -6; V_1 = 1; V_2 = 4; V_3 = 6; V_4 = 0 \ .$$

Вычислим оценки S_{ij} для всех свободных клеток.

$$S_{11}=3-(1+0)=2; S_{14}=7-0=7; S_{23}=8-(6+1)=1;$$

$$S_{31}=0-(1-6)=\ 5; S_{32}=0-(4-6)=2; S_{34}=0-(0-6)=6.$$

Опорное решение последней таблицы является оптимальным ($S_{ij}\geq 0$). Следовательно, решением расширенной задачи является набор величин

$$X^*=\begin{pmatrix} 0 & 25 & 35 & 0 \\ 20 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому решением начальной задачи является набор величин

$$X_{\text{опт}}=\begin{pmatrix} 0 & 25 & 35 & 0 \\ 20 & 5 & 0 & 15 \end{pmatrix},$$

$$z_{\min}=4\cdot 25+6\cdot 35+2\cdot 20+5\cdot 5+1\cdot 15=390.$$

Пункт B_3 недополучает 10 единицы груза.

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называют транспортными?
2. Какие ТЗ называют закрытыми, а которые открытыми?
3. Как перейти от открытой ТЗ к закрытой?
4. Какой план ТЗ называют невырожденным, а который вырожденным?
5. Какие методы применяют для построения начального опорного решения ТЗ?
6. Как строят начальное решение ТЗ методом северо-западного угла?
7. Как строят начальное решение ТЗ методом минимальной стоимости?
8. Какой метод применяют для построения оптимального решения ТЗ?
9. Как определяют потенциалы пунктов снабжения и потребления?
10. Какой признак оптимального решения ТЗ?