Лекция 8.
Методы динамического программирования

В задачах динамического программирования учитывается фактор времени или последовательность операций. Решение их сводится к поэтапному процессу принятия решений.

Метод функциональных уравнений

Основное функциональное уравнение Беллмана является математической формулировкой принципа оптимальности динамического программирования. Оптимальное поведение имеет свойство: какие бы не были начальные состояние и решение, следующие решения должны отображать оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате предыдущего решения.

Согласно этому принципу задачу решают, начиная с последнего этапа. Потом переходят к предпоследнему, отбрасывая все возможные варианты решений, которые противоречат уже отобранному решению, и так далее, пока не будет найдено оптимальное решение начального этапа.

Для применения схемы динамического программирования нужно, чтобы были выполнены такие предпосылки:

1) процесс поиска оптимального решения следует рассматривать как многошаговый процесс принятия решений;

2) внутренние параметры задачи должны быть неизменными от шага к шагу, но их должно быть несколько, чтобы обеспечить альтернативность решений;

3) оптимальные решения текущего шага не влияют на решения, полученные на предыдущих шагах;

4) оптимальное решение текущего шага зависит лишь от текущих условий задачи, но не зависит от решений, которые повлекли именно такие условия, т.е. не зависит от предыстории процесса.

Именно последний пункт обеспечивает реализацию принципа оптимальности Беллмана, который заключается в том, что на каждом шагу ищут неизолированное оптимальное решение, с целью обеспечить оптимальность решений на следующих шагах. Формально этот принцип реализуют, строя на каждом шагу условные оптимальные решения, которые обеспечивают наибольшую суммарную эффективность, начиная с текущего шага, при условии, что известное состояние, которое образовалось к началу текущего шага.

Задача об использовании рабочей силы

Постановка задачи

Исполнителю работ нужно определить оптимальную численность работников в каждый из n месяцев. Производственные задания для каждого месяца известны. Допустим, что для выполнения определенного вида работ j-го месяца нужно m_j работников, $j=\overline{1,n}$. Если бы была возможность нанимать и освобождать работников без дополнительных расходов, то можно бы было каждый месяц иметь их ровно m_j. Однако реально для изменения численности работников нужны определенные расходы, в проходящем (x_j) и предыдущем(x_{j-1}) месяцах;

их задают функцией $f_j\left(x_j - x_{j-1}\right)$. Знак ее аргумента определяет тип расходов: если $x_j \geq x_{j-1}$, то $f_j\left(x_j - x_{j-1}\right)$ – это расходы, связанные с наёмом работников, а в случае $x_j \leq x_{j-1}$ – у увольнением.

Если по определенным причинам не выполнены нормы относительно численности работников в проходящем месяце, то предприятие имеет убытки $g_j\left(x_j - m_j\right)$, где m_j – “идеальная” численность, даже если выполнение работ обеспечено сверхнормативным трудом. И только когда $x_j = m_j$, затраты нулевые, т.е. $g_j\left(0\right) = 0$.

Чтобы определить оптимальную численность персонала, нужно минимизировать целевую функцию

$$z = \min_{x_j \in X}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[f_j\left(x_j - x_{j-1}\right) + g_j\left(x_j - m_j\right)\right]\right\},$$

при условии, что $x_j \geq 0$, $x_0 = m_0$.

Замечание. Если заданы начальные условия, то задачу динамического программирования решают в обратном направлении, а если конечные, то в прямом. Наконец, если задано и начальные, и конечные условия, то ее можно решать в любом направлении.

Задачи управления запасами

Эти задачи возникают в случае планирования работы системы снабжения на n периодов с переменным спросом. Расходы на выполнение заказа на определенный вид ресурсов в каждом периоде зависят от общего объема заказа этого ресурса и его остатков от предыдущих периодов. Кроме того, расходы на сохранение излишков ресурсов зависят от разницы между наличным количеством ресурса и объемом спроса на него в этом периоде. Задача заключается в том, чтобы найти такие объемы заказов соответствующего ресурса, чтобы общие расходы на его хранение были минимальными.

Такие задачи не имеют аналитического решения, но их можно решать методами динамического программирования.

Много задач оптимального планирования и управления запасами можно подать в виде графа. Каждому состоянию системы отвечает какая-то вершина графа, а переход от одного состояния системы к другому интерпретируют направленными дугами, каждой из которых поставлено в соответствие расходов, нужные для выполнения такого перехода. Тогда задача оптимального планирования заключается в поиске кратчайшего пути в сети.

Задача об оптимальной загрузке оборудования.

Постановка задачи

Из c станков x обрабатывают деталь I и $c-x$ деталь II. Годовая прибыль производства деталей I равняется $f\left(x\right)$, а деталей II – $\varphi\left(c-x\right)$. Ежегодно амортизируется α частей станков, которые обрабатывают детали I и β частей станков, которые обрабатывают детали II ($0 \leq \alpha$,

$\beta < 1$). Нужно составить план загрузки станков, который будет обеспечивать наибольшую прибыль за *n* лет.

Решение

Подсчитаем суммы

$$f(0)+\varphi(c),\ f(1)+\varphi(c-1),\ldots,\ f(c)+\varphi(0),$$

и выберем

$$F_1(c) = \max_{0\le x\le c}\left\{ f(x)+(c-x)\right\}, \qquad (8.1)$$

что является наибольшей прибылью за год.

На второй год останется αx станков, которые обрабатывают деталь I, и $b(c-x)$ станков, которые обрабатывают деталь II ($a = 1-\alpha$, $b = 1-\beta$).

Наибольшая прибыль за второй год будет $F_1(ax+b(c-x))$, а за два года вместе

$$F_2(c) = \max_{0\le x\le c}\left\{ f(x)+\phi(c-x)+F_1(ax+b(c-x))\right\}. \qquad (8.2)$$

Равенство (8.2) устанавливает связь между функциями $F_2(c)$ и $F_1(c)$.

Рассматривая *n*-шаговый процесс, приходим к основному функциональному уравнению Беллмана:

$$F_n(c) = \max_{0\le x\le c}\left\{ f(x)+\phi(c-x)+F_{n-1}(ax+b(c-x))\right\}. \qquad (8.3)$$

что устанавливает связь между $F_n(c)$ и $F_{n-1}(c)$. Равенства (8.1) – (8.3) дают возможность последовательно вычислить: $F_1(c), F_2(c), \ldots, F_n(c)$. Значение $F_n(c)$ дает прибыль за *n* лет.

Следовательно, решение сводится к *n* одномерным задачам.

Отметим, что прибыль, которая получается на каждом этапе, определяется двумя факторами: наличием станков (ресурсов) на начальном этапе, который характеризует состояние некоторой системы параметров, и их распределением, что определяет наше поведение.

Задача о распределении капитальных вложений

Постановка задачи

Пусть x – объем капитальных вложений, которые нужно распределить между двумя предприятиями с разной прибыльностью. Объем капитальных средств в, вложенных в первое предприятие, за год дает прибыль $g(y) = \alpha y$. Часть капитальных средств $x-y$, вложенных во второе предприятие, за год дает прибыль $h(x-y) = \beta(x-y)$. На конец года средства, вложенные в первое предприятие, составляют $\cdot\, a(y)=\lambda y$, а во второе – $h(x-y)=\beta(x-y)$. После окончания каждого года средства, которые остались, опять распределяют между предприятиями.

Нужно определить такое распределение, чтобы общая прибыль за три года была максимальной.

Решение

Определим y_2 – объем средств, вложенных в первое предприятие на протяжении третьего года, а потом y_1, y_0 – вложение соответственно второго и первого годов.

Если x_2 – количество ресурсов, полученных на начало третьего периода, то прибыль от обоих предприятий – это сумма $g(y_2)+h(x_2-y_2)$. Нужно определить условия, при которых эта сумма будет максимальной, то есть развязать задачу

$$f_1(x_2)=\max_{0\le y_2\le x_2}\left\{g(y_2)+h(x_2-y_2)\right\}. \qquad (8.4)$$

Дальше находим y_1. Рассмотрим двухшаговый процесс – последний и предпоследний этапы. В этот промежуток нужно как можно лучше использовать ресурсы x_1, не принимая во внимание распределение ресурсов на предыдущем (первом) этапе. Максимальная общая прибыль на последних двух этапах составляет

$$f_2(x_1)=\max_{0\le y_1\le x_1}\left\{g(y_1)+h(x_1-y_1)+f_1\left[a(y_1)+b(x_1-y_1)\right]\right\}, \qquad (8.5)$$

где $g(y_1)+h(x_1-y_1)$ – прибыль на предпоследнем этапе, $f_1[a(y_1)+b(x_1-y_1)]$ – максимальная прибыль на последнем этапе, когда общее количество ресурсов x_2 состоит из остальных остатков обоих предприятий.

Нужно выбрать такое y_1 из отрезка $[0;x_1]$, чтобы значение было максимальным.

Аналогично первому этапу:

$$f_3(x)=\max_{0\le y\le x}\left\{g(y)+h(x-y)+f_2\left[a(y)+b(x-y)\right]\right\}. \qquad (8.6)$$

Следовательно, найдена оптимальная стратегия: $y=x$, $y_1=x_1$, $y_2=x_2$. Если придерживаться ее, то наибольшая общая прибыль на всех этапах будет представлять $f_3(x)$.

Контрольный пример 8.1

Решить задачу динамического программирования о распределении вложений суммой 160 тыс. грн. на расширение производства между четырьмя предприятиями с максимизацией суммарного прироста выпуска продукции. Значения прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1 – Начальные данные

Сумма вложений, тыс. грн.	Предприятие			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
	Прирост выпуска продукции, тыс. грн.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
40	33	11	78	65
80	56	43	73	43
120	13	67	76	66
160	21	76	33	45

Решение

Пусть имеем четыре предприятия между которыми распределяется 160 тыс. грн.

Составим план распределения вложений, который максимизирует общий прирост выпуска продукции $f_n(c)$.

По вычислительной схеме динамического программирования рассмотрим случай $n=1$, то есть когда все ресурсы выделяются на реконструкцию одного предприятия:

$$f_1(x) = \max_{x \in X} \left\{ g_1(x) \right\} = g_1(x) .$$

В соответствии с формулой в зависимости от начальной суммы *c*, получим с учетом данных значения $f_1(c)$, которые заносим в таблицу 8.2.

Таблица 8.2

$x_1^*(c)$	$f_1(c)$
40	33
80	56
120	13
160	21

Пускай теперь $n=2$, то есть денежные ресурсы распределяют между двумя предприятиями, тогда

$$f_2(c) = \max_{0 \le x \le c} \left\{ g_2(x) + f_1(c-x) \right\} .$$

Найдем значение функции $f_2(x)$ для всех допустимых комбинаций *c* и *x* (таблица 8.3).

Таблица 8.3

$c \backslash x$	0	40	80	120	160	$f_2(c)$	$x_2^*(c)$
40	0+33	11+0	0+0	0+0	0+0	33	0
80	0+56	11+33	43+0	0+0	0+0	56	0

12	0+13	11+56	43+33	67+0	0+0	76	80
160	0+21	11+13	43+56	67+33	76+0	100	120

Расчет значений $f_3(c)$ приведен в таблице 8.4. Здесь использованы формулы (8.4)-(8.6), полученные из функционального уравнения Беллмана для данной задачи

$$f_3(c) = \max_{0\le x\le c}\left\{g_3(x) + f_2(c-x)\right\}.$$

Таблица 8.4

x / c	0	40	80	120	160	$f_3(c)$	$x_3^*(c)$
40	0+33	78+0	0+0	0+0	0+0	78	40
80	0+56	78+33	73+0	0+0	0+0	111	40
120	0+76	78+56	73+33	76+0	0+0	134	40
160	0+100	78+76	73+56	76+33	33+0	154	40

Аналогично находим значение $f_4(c)$ (таблица 8.5):

$$f_4(c) = \max_{0\le x\le c}\left\{g_4(x) + f_3(c-x)\right\}.$$

Таблица 8.5

x / c	0	40	80	120	160	$f_4(c)$	$x_4^*(c)$
40	0+78	65+0	0+0	0+0	0+0	78	0
80	0+111	65+78	43+0	0+0	0+0	143	40
120	0+134	65+111	43+78	66+0	0+0	176	40
160	0+154	65+134	43+111	66+78	45+0	199	40

Составляем общую таблицу на основе таблиц 8.2-8.5:

Таблица 8.6

c	$x_1^*(c)$	$f_1(c)$	$x_2^*(c)$	$f_2(c)$	$x_3^*(c)$	$f_3(c)$	$x_4^*(c)$	$f_4(c)$
40	40	33	0	33	40	78	0	78
80	80	56	0	56	40	111	40	143
120	120	13	80	76	40	134	40	176
160	160	21	120	100	40	154	40	199

Из таблицы (8.6) видно, что наибольший прирост выпуска продукции, который могут дать четыре предприятия при распределении между ними 160 тыс. грн. ($c = 160$) составляет 199 тыс. грн. ($f_4(160) = 199$). При этом предприятию №4 средства выделяются в сумме 40 тыс. грн. ($x_4^*(160) = 40$), а 120 тыс. грн. распределяют между тремя предприятиями.

Наибольший прирост выпуска продукции, который могут дать три предприятия, при распределении этой суммы ($c=120$), составляет 134 тыс. грн. ($f_3(120)=134$). При этом предприятию №3 средства выделяются в сумме 40 тыс. грн. ($x_3^*(120)=40$), а 80 тыс. грн. распределяют между двумя предприятиями.

Наибольший прирост выпуска продукции, который могут дать два предприятия, при распределении этой суммы ($c=80$) составляет 56 тыс. грн. ($f_2(80)=56$). При этом предприятию №2 средства не выделяются ($x_2^*(80)=0$), а 80 тыс. грн. предоставляют предприятию №1.

Следовательно, максимальный прирост выпуска продукции на четырех предприятиях при распределении между ними 160 тыс. грн. составит 199 тыс. грн. и будет получен если:

предприятию №4 средства выделяются в сумме 40 тыс. грн.;

предприятию №3 средства выделяются в сумме 40 тыс. грн.;

предприятию №2 средства не выделяются;

предприятию №1 средства выделяются в сумме 80 тыс. грн.

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называют задачами динамического программирования?
2. Какой принцип положен в основу методов решения задач динамического программирования?
3. Какой вид имеет целевая функция в задаче динамического программирования?
4. Каким требованиям удовлетворяют задачи, решаемые методами динамического программирования?
5. Какая главная идея метода решения задач динамического программирования?
6. По каким признакам определяют направление решения задач динамического программирования?
7. Приведите примеры задач динамического программирования.

Рекомендуемая литература

1. Акулич Н.Г. Руководство к решению задач по линейному и нелинейному программированию / Н.Г. Акулич. – М: Наука, 1990. – 345 с.
2. Зуховицкий С.И. Линейное и выпуклое программирование / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М. : Наука, 1967, С. 29-34.
3. Калихман И.А. Сборник задач по математическому программированию / И.А. Калихман. – М: Высшая школа, 1975, С. 42-59.
4. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование : учеб. пособие. / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко – М : Высшая школа, 1980. – С. 44-51.
5. Кузнецов А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию /А.В. Кузнецов. – М. : Высшая школа, 1978. – 423 с.