ЛЕКЦИЯ №2.
Методы линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП)

Рассмотрим задачу оптимизации, для которой делаются предположения о характере целевой функции и виде ограничений. Достаточно распространенным является случай, когда целевая функция является линейной, а ограничения задаются в виде линейных уравнений или неравенств. В таком случае задачи решаются с помощью методов линейного программирования.

Такие задания достаточно часто встречаются на практике, например, при решении проблем, связанных с распределением ресурсов, планированием производства, организацией работы транспорта и т.д. Это и понятно, потому что во многих заданиях практики "расходы" и "прибыль" линейно зависят от количества закупленных или утилизируемых средств (например, от количества закупленных единиц; оплата перевозок проводится пропорционально весу перевезенных грузов и т.д.).

Понятно, нельзя считать, что все типы зависимостей, которые встречаются на практике, линейны. Можно ограничиться более скромным утверждением, что линейные (и близкие к линейным) зависимости встречаются достаточно часто.

В общем виде задача линейного программирования формулируется так. Найти вектор $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$, который удовлетворяет условиям

$$
\begin{gathered}
f(X) = \max_{x \in X} \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\}, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,k}, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{k+1,m}, \\
x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

При минимизации формы $f\left(x\right)$ форму $\left(-f\left(x\right)\right)$ максимизируют, поэтому можно рассматривать лишь задачу на максимум.

Обозначим $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$, $B = \left(b_1, \ldots, b_m\right)^T$, $C = \left(c_1, \ldots, c_n\right)$ и запишем задачу (2.1) в векторной форме:

$$
\begin{gathered}
f\left(X\right) = \max_{X} \left\{CX\right\}, \\
AX \le B, \\
X \ge 0.
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Обозначив многоугольное множество точек X, которые удовлетворяют уравнению и неравенству-ограничению, через G. ЗЛП можно записать в форме:

$$\max_{X \in G} \left\{ CX \right\},$$
$$G = \left\{ X : AX \overset{=}{\underset{\leq}{}} B, X \geq 0 \right\}. \tag{2.3}$$

Если ЗЛП содержит только уравнения-ограничения, то задача задана в канонической форме:

$$\max_{X \in G} \left\{ CX \right\},$$
$$G = \left\{ X : AX = B, X \geq 0 \right\}. \tag{2.4}$$

Если ЗЛП содержит только неравенства-ограничения, то она задана в симметричной форме:

$$\max_{X \in G} \left\{ CX \right\},$$
$$G = \left\{ X : AX \leq B, X \geq 0 \right\}. \tag{2.5}$$

Общую, каноническую, или симметричную форму ЗЛП легко свести к двум другим формам.

Вектор $X \in G$ называется планом задачи. Всякое решение, которое удовлетворяет условию (2.1), называется допустимым (допустимым планом). План *X*, который максимизирует линейную форму *CX*, называется решением задачи, или оптимальным планом. Векторы-столбцы матрицы *A* называются векторами условий, а *B* – вектором ограничений ЗЛП.

Графический метод решения ЗЛП

Графический метод на практике применяется, как правило, только для случая задачи с двумя неизвестными ($n = 2$). Рассмотрим его суть на примере.

Пусть система ограничений задачи линейного программирования задана системой линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Целевая функция задана линейной функцией

$$z(x_1,\ x_2) = \max_{x_1 x_2 \in X} \left\{ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 \right\}. \tag{2.7}$$

Необходимо найти наибольшие и наименьшее значение линейной функции z при заданных ограничениях.

Построим на координатной плоскости область G, которая является решением системы неравенств (2.6). Это будет некоторый многоугольник. Построим вектор $\overline{q}\left(c_1, c_2\right)$ и прямую, перпендикулярную к этому вектору, которую называют опорной. При перемещении опорной прямой параллельно самой к себе в положительном направлении вектора значение целевой функции будет расти (поскольку растут x_1 и x_2), а при перемещении в противоположном направлении – спадать. Допустим, что при таком перемещении в положительном направлении прямая первый раз вошла в область G в некоторой точке $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$. Тогда в этой точке целевая функция достигает своего минимума. При дальнейшем перемещении в том же направлении прямая выйдет из области G в некоторой точке $M_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$. В этой точке целевая функция достигает своего максимума. Если в одном из случаев (или на входе в область G, или на выходе из нее) прямая совпадет с одним из ребер многоугольника G, то точек экстремума в этом случае бесконечно много.

Понятно, что при увеличении измеримости задания графический метод становится слишком сложным и тяжелым для практической реализации.

Алгоритм графического метода решения ЗЛП

1. Строим многоугольник решений. Он состоит из пересечения отдельных полуплоскостей решений системы (2.6). В силу ограничений $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, многоугольник решений содержится в первом квадранте.

2. Строим вектор $\overline{q} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}; \dfrac{\partial z}{\partial x_2}\right) = \left(c_1; c_2\right)$ самого быстрого роста целевой функции, вектор-градиент функции z.

3. Проводим произвольную линию уровня $z = c \in \text{const}$. Все линии уровня параллельны между собой и перпендикулярны к вектору $\overline{q}$.

4. Находим оптимальную точку, которая за одной из основных теорем линейного программирования размещена в вершине многоугольника решений. При параллельном переносе линии уровня в направлении вектора, значения целевой функции z растет. Находим вершину многоугольника, в которой z приобретает наибольшее значение.

Для поиска точки минимума нужно линии уровня сдвигать в направлении, противоположном к $\overline{q}$.

Линии уровня, что проходят через оптимальные вершины многоугольника решений, называют оптимальными.

С помощью вектора $\overline{q}$ можно на одном рисунке одновременно найти **max** и **min**, то есть решить одновременно две задачи при одной и той же системе ограничений.

5. Вычисляем оптимальные значения. Для этого находим координаты вершин **max** и **min**, как общее решение уравнений соответствующих предельных прямых, которые пересекаются в оптимальных вершинах. Найденные координаты подставляем в форму (2.7) и вычисляем $z_{\max}$ и $z_{\min}$.

Практическое использование графического метода рассмотрим на конкретных примерах.

Контрольный пример 2.1

Найти больше всего и наименьшее значение функции $z = x_1 + x_2$ при таких ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Решение

В координатной плоскости x_1Ox_2 построим границу каждой полуплоскости неравенств-ограничений данной задачи, нумеруя их в порядке записи и указывая направление каждой полуплоскости.

Предельные прямые полуплоскости проходят через такие точки:

(I) $-2x_1 + 3x_2 = 9$, $A_1(0,3)$, $A_2(-3,1)$;

(II) $x_1 - 2x_2 = 2$, $B_1(0,-1)$, $B_2(2,0)$;

(III) $x_1 + x_2 = 8$, $C_1(4,4)$, $C_2(5,3)$;

(IV) $x_1 = 0$ – ось координат Ox_1;

(V) $x_2 = 0$ – ось координат Ox_2.

Чтобы узнать с какой стороны от предельной прямой содержится полуплоскость решений, достаточно взять контрольную точку (любую точку вне прямой), и координаты ее подставить в неравенство. Если неравенство удовлетворяется, то полуплоскость решений находится со стороны контрольной точки, если нет – в противоположном от нее.

Удобно за контрольную точку избирать (если это возможно) начало координат. Так, например, первая, вторая и третья полуплоскости расположена с одной стороны от предельной прямой, которая включает начало координат. Многоугольник решений на рис. 2.1 заштрихован (пятиугольник $OA_1A_3B_3B_2$).

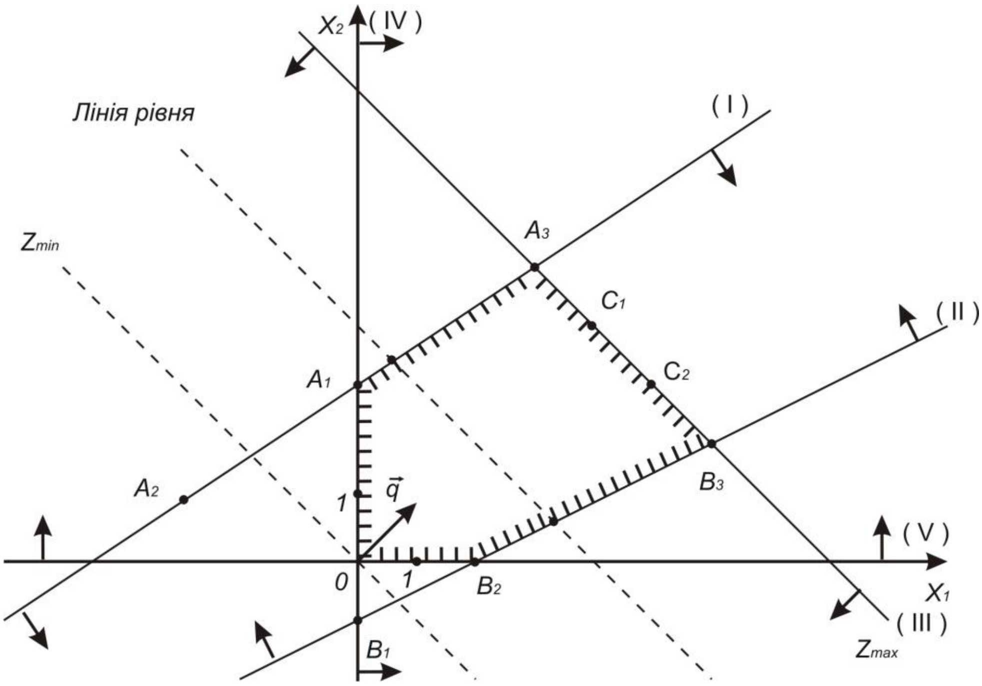

Рисунок 2.1 – Графический метод решения ЗЛП

Строим вектор-градиент $\overline{q}$, начало вектора находится в точке (0,0), конец – в точке (1,1). Передвигаясь линиями уровня в направлении $\overline{q}$ находим, что $z_{\max}$ содержится на отрезке A_3B_3, $z_{\min}$ – в точке (0,0).

Вычисляем оптимальные значения.

$$z_{\min} = z(0) = 0 + 0 = 0.$$

Для вычисления $z_{\max}$ в целевую функцию необходимо подставить координаты любой точки отрезка A_3B_3. Найдем например, координаты точки A_3. Точка A_3 – сечение предельных прямых I и III:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 + x_2 = 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - x_2, \\ -2(8 - x_2) + 3x_2 = 9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - x_2, \\ x_2 = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 5. \end{cases}$$

Следовательно, точка максимума $A_3(3,5)$. Соответственно, максимальное значение целевой функции:

$$z_{\max} = 3 + 5 = 8.$$

Контрольный пример 2.2

Вычислить наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x_1 + 2x_2$ при таких ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Решение

Строим область ограничений, которая будет состоять из пересечения четырех полуплоскостей. Предельные прямые проходят через точки:

(I) $x_1 + 2x_2 = 4$, $A_1(0,2)$, $A_2(4,0)$;

(II) $2x_1 + 2x_2 = 4$, $B_1(0,4)$, $B_2(2,0)$;

(III) $x_1 = 0$ – ось координат Ox_1;

(IV) $x_2 = 0$ – ось координат Ox_2.

Все полуплоскости решений направлены от начала координат (точка (0,0) не удовлетворяет оба неравенства). Многоугольник решений неограничен (рис. 2.2).

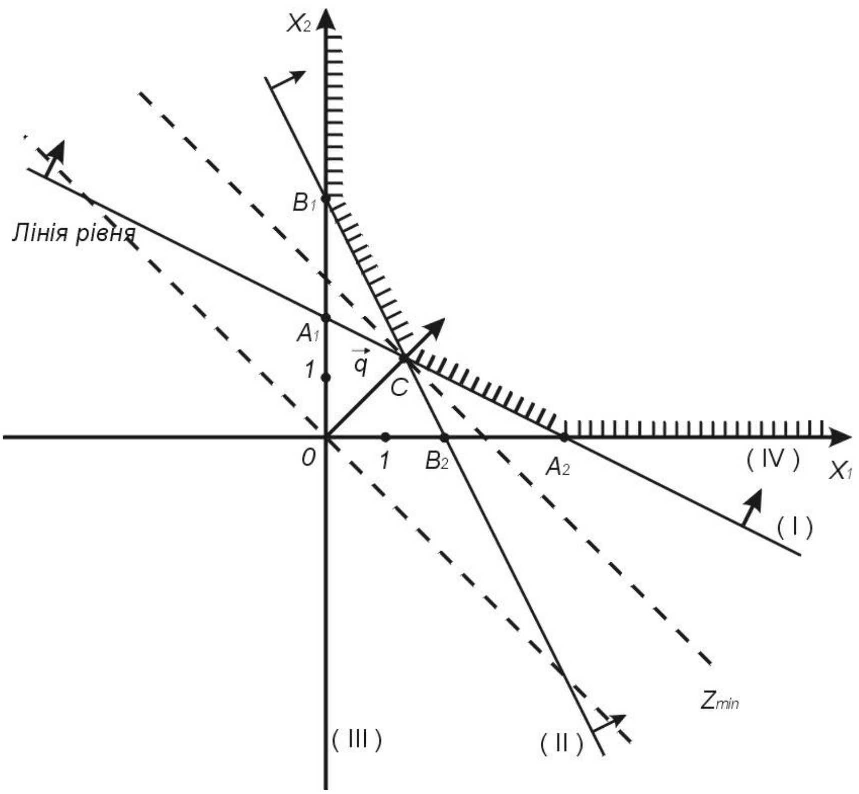

Рисунок 2.2 – Неограниченный многоугольник решений ЗЛП

Вектор $\overline{q} = (2,2)$ указывает на то, что $z_{\max}$ не существует ($z_{\max} \to +\infty$), $z_{\min}$ находится в точке C. Точка C – точка сечения предельных прямых I и II:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 4; \end{cases} |\times(-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 4x_2 = -8, \\ 2x_1 + x_2 = 4; \end{cases} |+ \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{4}{3}, \\ x_1 = 4 - 2x_2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}, \\ x_2 = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, точка $C\left(\frac{4}{2},\frac{4}{3}\right)$, наименьшее значение целевой функции определяется так:

$$z_{\min}(C)=2\cdot\frac{4}{3}+2\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$$

Замечание. Могут быть задачи, при которых нет ни минимума, ни максимума.

Особенный случай применения графического метода решения ЗЛП

При $n>2$ графически можно развязать задачу в канонической форме

$$f(X)=\max_{x\in X}(\min)\left\{\sum_{j=1}^{n}c_j x_j\right\},$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{2.8}$$
$$x_j\geq 0,\quad j=\overline{1,n},$$

если выполняется равенство $m=n-2$.

Действительно, сведем к единичному базису систему уравнений ограничений ЗЛП (2.6):

$$a'_{i1}x_1+a'_{i2}x_2+x_{i+2}=b'_i,\qquad i=\overline{1,m}. \tag{2.9}$$

Из системы (2.9) имеем

$$x_{i+2}=b'_i-a'_{i1}x_1-a'_{i2}x_2,\qquad i=\overline{1,m}. \tag{2.10}$$

Подставим (2.10) в выражение для линейной формы задачи (2.8). Получим

$$f(X')=c'_1x_1+c'_2x_2+C,$$
$$X'=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \tag{2.11}$$
$$C=\sum_{i=1}^{m}c_{i+2}b'_i,$$
$$c'_k=c_k-\sum_{i=1}^{m}c_{i+2}a'_{ik},\quad k=\overline{1,2}.$$

Учитывая, что $x_j\geq 0$, $j=\overline{1,n}$, то вместо (2.8) можно записать

$$f(X)=\max_{x\in X}(\min)\left\{c_1'x_1+c_2'x_2+c\right\},$$
$$\begin{cases} a_{i1}'x_1+a_{i2}'x_2\le b_i', & i=\overline{1,m},\\ x_j\ge 0, & j=\overline{1,2}.\end{cases} \qquad (2.12)$$

Поскольку $c\in\text{const}$, задача (2.12) имеет вид задачи (2.6)-(2.7), решается графическим методом, и дает решение $X'_{\text{опт}}=\left(x_{10},x_{20}\right)^T$.

Для нахождения решения задачи (2.8) следует воспользоваться формулой (2.10).

Контрольный пример 2.3

Решить задачу графическим методом:

$$f(X)=\max_{x\in X}\left\{-3x_1+3x_2+x_3-2x_5\right\},$$
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=14,\\ 4x_1-x_2-2x_3+x_4+x_5=5,\\ 2x_1-\ x_2-x_3\ \ +x_5=1,\\ x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.\end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы уравнений-ограничений этой задачи и сведем ее к единичному базису (используя метод Гаусса) так, чтобы свободные члены были положительными:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 14\\ 4 & -1 & -2 & 1 & 1 & 5\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 14\\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 14\\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 18\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 15\end{array}\right).$$

От последней расширенной матрицы перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=14,\\ 3x_1+2x_2\ \ +x_4=18,\\ 3x_1+\ x_2\ \ +x_5=15,\end{cases}$$

которая для базисных переменных дает выражения

$$\begin{cases} x_3=14-x_1-2x_2,\\ x_4=18-3x_1-2x_2,\\ x_5=15-3x_1-x_2.\end{cases}$$

Подставим значение x_3, x_4, x_5 в целевую функцию. Получим

$$f = -3 - x_1 + 3x_2 + 14 - x_1 - 2x_2 - 30 + 6x_1 + 2x_2 = 2x_1 + 3x_2 - 16.$$

Отбросив базисные переменные $x_j \ge 0$, $j = \overline{3,5}$ в системе уравнений ограничений, получим вспомогательную ЗЛП:

$$f(X) = \max_{x \in X} \{2x_1 + 3x_2 - 16\},$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

В координатной плоскости x_1Ox_2 построим область ограничений последней задачи (рис. 2.3), линию уровня $2x_1 + 3x_2 - 16 = z_0$, и найдем точку максимума $X'_{\text{опт}} = (1) \cap (2)$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 = 18, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

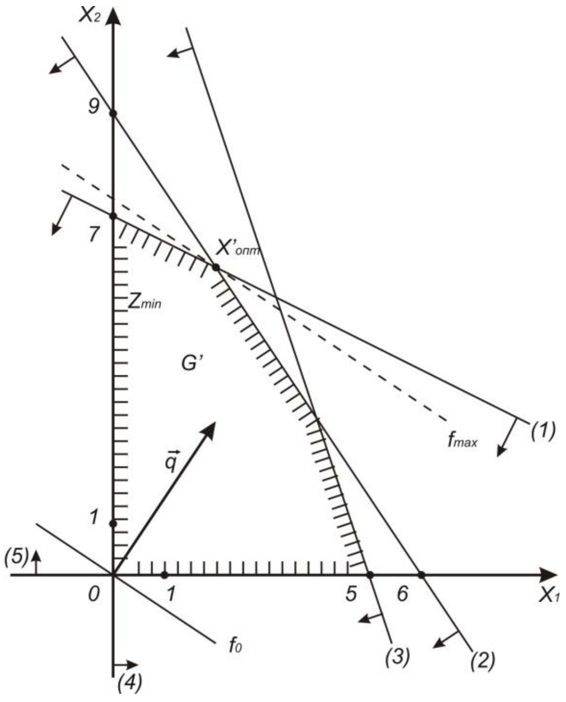

Рисунок 2.3 – Графическое решение ЗЛП

Следовательно, решение вспомогательной задачи:

$$X'_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$f_{\max} = 6.$$

Найдем базисные переменные:

$$x_3 = 14 - 2 - 2 \cdot 6 = 0,$$
$$x_4 = 18 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 6 = 0,$$
$$x_5 = 15 - 3 \cdot 2 - 6 = 3.$$

Таким образом, решение данной задачи (G, f) будет:

$$X'_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T,$$
$$f_{\max} = 6.$$

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называют задачами линейного программирования?
2. Что называют допустимым решением(планом) ЗЛП?
3. Какое допустимое решение называют опорным?
4. Какое решение(план) ЗЛП называют оптимальным?
5. В каких формах можно записать ЗЛП?
6. Какую форму называют общей, канонической, симметричной? В чем отличие между ними?
7. Дайте геометрическую интерпретацию ЗЛП.
8. Какая точка допустимого множества решений называется угловой?
9. При каких условиях является целесообразным применение геометрического метода решения ЗЛП?
10. Отметьте последовательность построений за геометрическим методом решения ЗЛП.