Лекция 9.
Элементы теории матричных игр

Элементарные приемы развязывания игр 2×2, 2×n, m×2

Самая простая матричная игра – это игра, в которой каждый из игроков имеет две стратегии. Матрица *A* игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если точки равновесия нет, то решением игры являются смешанные стратегии:

$$X = (x_1, x_2),$$
$$Y = (y_1, y_2).$$

В соответствии с основной теоремой теории игр, применения оптимальной стратегии $X = (x_1, x_2)$ обеспечивает для игрока *A* получение выигрыша при любых стратегиях игрока *B*. Если игрок *A* применяет свою оптимальную стратегию, при этом игрок *B* может использовать одну из чистых стратегий, то величина выигрыша игрока *A* останется неизменной. Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v. \end{cases} \tag{9.1}$$

Поскольку $x_1 + x_2 = 1$, то решение системі (9.1) такое:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{9.2}$$

Подставляя значение x_1 и x_2 в одно из уравнений (9.1) получаем

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{9.3}$$

Составляя аналогичную систему уравнений, можно найти оптимальную стратегию для игрока *B:*

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{9.4}$$

Контрольный пример 9.1

Найти решение игры, заданной матрицей

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Решение игры с матрицей 2×2 можно найти графически с помощью следующих построений. На осе абсцисс отложим отрезок, длина которого равняется единице. Левый конец отрезка (точка $x=0$) отвечает стратегии A_1 , правый – стратегии A_2 . Промежуточные точки x отвечают некоторым смешанным стратегиям (x_1, x_2), где $x_1 = 1 - x$, $x_2 = x$. На концах избранного отрезка проведем прямые, перпендикулярные оси абсцисс, на них будем откладывать выигрыши при соответствующих чистых стратегиях.

Если игрок B применяет стратегию B_1, то выигрыш при использовании чистых стратегий A_1 и A_2 составляет соответственно a_{11} и a_{21}. Отложим эти точки на прямых и соединим полученные точки прямой B_1B_1. Если игрок A применяет смешанную стратегию, то его выигрышу отвечает некоторая точка М, который лежит на этой прямой (рис. 9.1).

Аналогично можно построить прямую B_2B_2, которая отвечает стратегии B_2 игрока B (рис. 9.2). Ломаная B_1KB_2 – нижняя граница выигрыша, получаемого игроком A. Точка K, в которой он максимален, определяет цену игры и ее решение. Для нахождения оптимальной стратегии игрока B воспользуемся формулами

$$y_1 = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1}, \qquad y_2 = \frac{LB_1}{LB_2 + LB_1}.$$

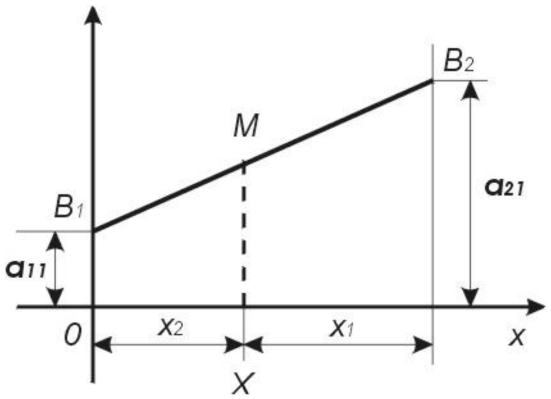

Рисунок 9.1

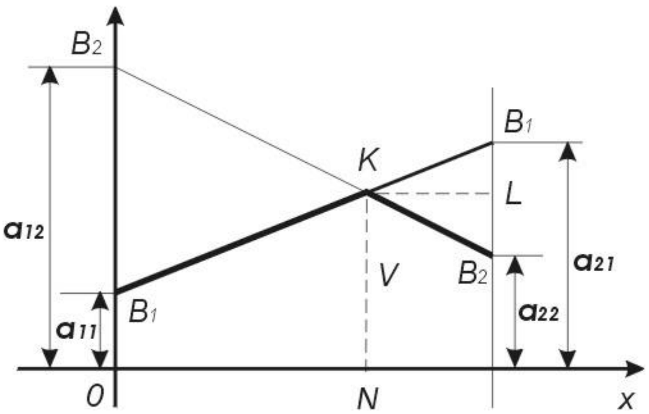

Рисунок 9.2

В правдивости этих соотношений можно убедиться, если в формулы, которые выражают y_1 и y_2, подставить вместо LB_2 и LB_1 их значения. Имеем:

$$LB_2 = v - a_{22}; \qquad LB_1 = a_{21} - v.$$

Выражая *v* из (9.3), получаем значение y_1 и y_2, что совпадают с (9.4):

$$X = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$
$$Y = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$
$$v = \frac{5}{3}.$$

Можно рассмотреть задачу минимизации верхней границы выигрыша для игрока В, поменяв местами при решении игроков *A* и *B*.

Используя геометрическую интерпретацию, можно найти решение игр, заданных матрицей $2 \times n$. Каждой из *n* стратегий игрока B соответствует прямая. Построив эти прямые, находят нижнюю границу выигрыша. Точка *К*, которая лежит на нижней границе, для которой величина выигрыша наибольшая, определяет цену игры и ее решение. При этом определяются активные стратегии игрока *B* (соответствующие им прямые пересекаются в точке *К*): по геометрическим соображениям можно найти значение v_j, которые отвечают активным стратегиям игрока *B*.

Аналогично может быть развязанная игра с матрицей $m \times 2$, только в этом случае строят верхнюю границу выигрыша и на ней определяют минимум.

Необходимо отметить, что геометрические построения есть смысл использовать для определения активных стратегий игроков. Дальше решение игры можно получить с помощью формул (9.2)-(9.4).Формулы(9.2)-(9.4) можно использовать, потому что из соответствующей матрицы исключаются все стратегии, кроме активных, она содержит две строки и два столбца.

Контрольный пример 9.2

Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Прямые на рис. 9.3 соответствуют стратегиям игрока *B*. Ломаная B_3KB_4 отвечает нижней границе выигрыша. Оптимальные стратегии игрока *B* – третья и четвертая. По формулам (9.1)-(9.4):

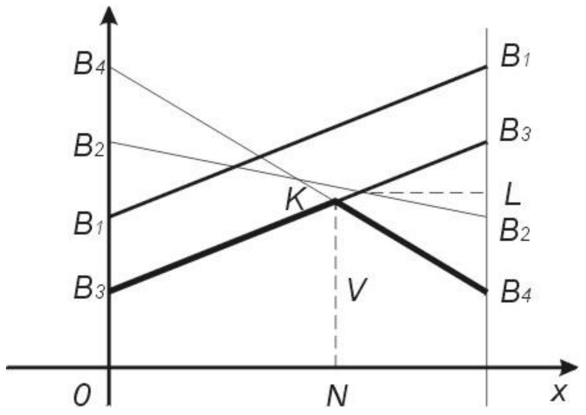

Рисунок 9.3

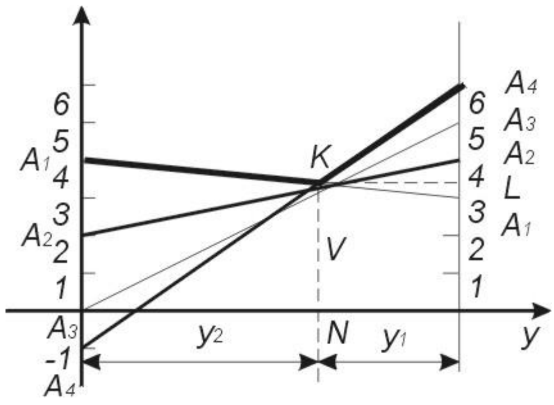

Рисунок 9.4

находим решение игры:

$$X = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

$$Y = \left(0, 0, \frac{16}{25}, \frac{2}{5}\right),$$

$$v = 2\frac{1}{5}.$$

Следовательно, игрок A применяет стратегию A_1 с вероятностью 0,4, а стратегию A_2 – с вероятностью 0,6. При этом его выигрыш в среднем составит 2,2 единицы.

Возведение к ЗЛП матричной игры. Эквивалентность матричной игры и ЗЛП

Пусть совместимое применение i-ой стратегии одного игрока и j-ой стратегии второго приводит к наступлению события (i, j), $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, которое имеет числовую оценку a_{ij} – выигрыш первого игрока с таким же проигрышем второго.

Матрица выигрышей $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ задает матричную игру двух игроков с нулевой суммой. Если нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ равняется верхней цене игры $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$, а именно

$$\alpha = \beta = a_{i_0 j_0} = v,$$

то игра решается в чистых стратегиях: i_0 – оптимальная стратегия первого игрока, j_0 – второго.

Если же $\alpha \neq \beta$, то применяются смешанные стратегии $X = (x_1,..., x_m)^T$ первого игрока и $Y = (y_1,..., y_n)^T$ второго. Здесь x_i и y_j – вероятности, с которыми принимаются i-та стратегия первым игроком и j-ая вторым.

Для оптимальных смешанных стратегий выполняются соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq v, \quad i=\overline{1,m},$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \tag{9.5}$$
$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq v, \quad j=\overline{1,n},$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1, \tag{9.6}$$
$$y_i \geq 0, \quad i=\overline{1,m},$$

где v – цена игры.

Чтобы решить соотношения (9.5)-(9.6) их возводят к ЗЛП.

Выполним замену переменных по формулам:

$$t_j = \frac{x_j}{v},$$
$$u_i = \frac{y_i}{v}, \tag{9.7}$$
$$i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Поскольку $\sum_j t_j = \sum_j \frac{x_j}{v} = \frac{1}{v}$ и $\sum_i u_i = \sum_i \frac{y_i}{v} = \frac{1}{v}$, то вместо (9.5) и (9.6) можно записать взаимно двойственные ЗЛП $z = \frac{1}{v}$:

$$z = \min_t \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j \right\},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \geq 1, \quad i=\overline{1,m}, \tag{9.8}$$
$$t_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n}.$$

$$w = \max_u \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i \right\},$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \leq 1, \quad j=\overline{1,n}, \tag{9.9}$$
$$u_i \geq 0, \quad i=\overline{1,m}.$$

После нахождения решений T^* и U^* задач (9.8) и (9.9) нужно найти и за формулами (9.7) перейти к оптимальным стратегиям X^* и Y^*.

От соотношений (9.5) и (9.6) можно перейти к ЗЛП и без замены переменных (9.7). Для этого следует в неравенствах (9.5)-(9.6) перейти с помощью балансовых переменных к уравнениям, одно из них признать целевой функцией, а из последних исключить величину v.

Контрольный пример 9.3

Определить нижнюю и верхнюю цену для игры, заданной матрицей выигрышей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Минимальные значения a_{ij} в строках матрицы A равняются соответственно 0, 2, -1. Максимальное значение из них равняется 2. Следовательно, α – нижняя цена игры, которой отвечает матрица A, и равняется 2.

Для определения β (верхней цены игры) найдем максимальные значения элементов в столбиках матрицы. По столбикам соответственно имеем: 3, 2, 4, 5. следовательно, $\beta = 2$.

Таким образом $\alpha = \beta = v$ – цена игры. Решение этой игры заключается в выборе игроком A стратегии A_2, при этом его выигрыш не меньший 2; для игрока B оптимальной является стратегия B_2, которая позволяет ограничить его проигрыш этим самым числом.

Контрольный пример 9.4

Игрок A разработал систему стратегий на период 60 суток с учетом возможного поведения игрока B. Задана матрица оценок деятельности, которая содержит оценки прибыли, как результат взаимодействия соответствующих стратегий игрока A и поведения игрока B:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Необходимо построить модель матричной “игры”; определить, или имеет “игра” точку равновесия; если точки равновесия нет, развязать “игру” в смешанных стратегиях; определить судьбу времени деятельности игрока A за каждой стратегией.

Решение

Пусть игрок *A* имеет 3 возможные стратегии; игрок *B* – имеет 4 возможные стратегии. За условием задачи матрица игры имеет вид (таблица 9.1).

Таблиця 9.1

A_i \ B_i	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	3	2	5	2
A_2	2	4	6	4	2
A_3	3	5	4	6	3
β_j	7	5	6	6	3 / 5

Нижняя цена игры: $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = 3$.

Верхняя цена игры: $\beta = \min\limits_j \beta_j = 5$.

Следовательно, для игрока *A* максимальной стратегией является A_3, при которой ему обеспеченный “выигрыш” не меньший 3, для игрока *B* – минимальной стратегией является B_2, которая обеспечивает ему “проигрыш” не больше 5. Игра не имеет точки равновесия, поскольку $\alpha < \beta$.

Решим игру в смешанных стратегиях.

Для определения оптимальной стратегии игрока *A* имеем такую задачу линейного программирования:

$$z = \min_t \{t_1 + t_2 + t_3\},$$
$$\begin{cases} 7t_1 + 2t_2 + 3t_3 \ge 1, \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \ge 1, \\ 2t_1 + 6t_2 + 4t_3 \ge 1, \\ 5t_1 + 4t_2 + 6t_3 \ge 1, \end{cases}$$
$$t_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Двойственная задача для определения оптимальной стратегии игрока *B* формулируется так:

$$w = \max_u \{u_1 + u_2 + u_3 + u_4\},$$
$$\begin{cases} 7u_1 + 3u_2 + 2u_3 + 5u_4 \le 1, \\ 2u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 4u_4 \le 1, \\ 3u_1 + 5u_2 + 4u_3 + 6u_4 \le 1, \end{cases}$$
$$u_i \ge 0, \quad i = \overline{1,\ 4}.$$

В таблице 9.2 приведено решение задачи для игрока *B*. С помощью дополнительных переменных u_5, u_6, u_7 неравенства превратим в уравнение. Начальный базис образуют единичные векторы B_5, B_6, B_7.

Таблиця 9.2

i	*Б*	$C_б$	U_0	1	1	1	1	0	0	0
				U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
1	U_5	0	1	7	3	2	5	1	0	0
2	U_6	0	1	2	4	6	4	0	1	0
3	U_7	0	1	3	5	4	6	0	0	1
m+1	w_j - C_j		0	-1	-1	-1	-1	0	0	0
1	U_5	0	2/5	26/5	0	-2/5	7/5	1	0	-3/5
2	U_6	0	1/5	-2/5	0	14/5	16/5	0	1	-4/5
3	U_2	1	1/5	3/5	1	4/5	6/5	0	0	1/5
m+1	w_j - C_j		1/5	-2/5	0	-1/5	1/5	0	0	1/5
1	U_1	1	1/13	1	0	-1/13	7/26	5/26	0	-3/26
2	U_6	0	3/13	0	0	36/13	43/13	1/13	1	-11/13
3	U_2	1	2/13	0	1	11/13	27/26	-3/26	0	7/26
m+1	w_j - C_j		3/13	0	0	-3/13	21/13	2/13	0	2/13
1	U_1	1	1/12	1	0	0	13/36	7/36	1/36	-5/36
2	U_3	1	1/12	0	0	1	43/36	1/36	13/36	-11/36
3	U_2	1	1/12	0	1	0	1/36	-5/36	-11/36	19/36
m+1	w_j - C_j		1/4	0	0	0	7/12	1/12	1/12	1/12

Оптимальный план задачи для игрока B имеет вид:

$$u^* = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0\right),$$

$$\max\{w\} = \frac{1}{v} = \frac{1}{4},$$

$$v = 4.$$

Учитывая условие (9.7), получим оптимальную стратегию для игрока *B*:

$$Y^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right).$$

Оптимальный план задачи определения стратегии игрока *A* (двойственной задачи) получим, применяя двойственный симплекс метод и используя оценки $(m+1)$-й строки последней симплексной таблицы, которые находятся в столбиках B_5, B_6, B_7:

$$t_1 = \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12},$$

$$t_2 = \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12},$$

$$t_3 = \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12}.$$

Таким образом: $T^* = \left(\frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}\right)$. Поскольку $x_i = t_i \cdot v$, то $X^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Определим судьбу времени деятельности игрока A за каждой стратегией: $t = 60$, тогда

на первую стратегию приходится $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ дней;

на вторую стратегию приходится $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ дней;

на третью стратегию приходится $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ дней.

Рекомендуемая литература

1. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование.- : Учебное пособие. – М: Высшая школа, 1980. с. 278-290.

2. Калихман И.А. Сборник задач по математическому программированию. – М: Высшая школа, 1975, с. 169-186.

3. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – М: Наука, 1967, с. 170-187.

4. Кузнецов А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1978.