— Cours de Mathématiques —

Niveau terminale

RYAN BOUCHOU

Sommaire

1 Les ensembles

1 Éléments généraux

Définition: Ensemble

*Un ensemble est une collection d'objets appelés **éléments**, qui peuvent être en nombre fini ou non.*

Un ensemble peut se définir de deux manières :

- En donnant la liste explicite et exhaustive de ses éléments. (Raisonnablement dans le cas des ensembles finis)
  Exemple: $E = \{6, 8, D, \%\}$
- Par compréhension : lorsque les éléments vérifient une propriété particulière.
  Exemple: $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0\}$ $i.e$ $Rac(X^2 + X + 1)$

On note $\emptyset$ l'ensemble vide, ne contenant donc aucun élément. Par ailleurs, un certain nombre d'ensembles de références sont nécessaires ; à savoir: $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ On définit pour la suite E et F des ensembles quelconques, ainsi que $n \in \mathbb{N}^*$

2 Opérations ensemblistes

- Appartenance: $x \in E$ si x appartient à E
- Inclusion: $E \subset F$ si E est inclus dans F ; i.e, E est un sous-ensemble de F
- Réunion: $E \cup F$ est l'ensemble des éléments appartenant à E ou F
- Intersection: $E \cap F$ est l'ensemble des éléments appartenant à E et à F
- Exclusion: $E \backslash F$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F
- Différence symétrique: $E \triangle F$ est l'ensemble des éléments qui sont uniquement dans E et uniquement dans F. Autrement dit, $E \triangle F = (E \cup F) \backslash (E \cap F)$

Par ailleurs, on note P(E) **les parties de E**, l'ensemble des sous-ensembles de E.

⚠ Si $B = \{1, 7, 8\}$ Attention à la différence entre $\{1\} \subset B$ et $\{1\} \in P(B)$

3 Cardinalité

Définition: Cardinal

*On note Card(E), |E| ou encore #E, le nombre d'éléments de E. On l'appelle **cardinal** de E.*

Définition: Ensembles deux à deux disjoints

Si $E_1, ..., E_n$ sont deux à deux disjoints, alors $\forall i, j \in [1..n]$ et $i \neq j, Card((E_i \cap E_j)) = 0$

Propriété

Si $E_1, ..., E_n$ sont deux à deux disjoints et finis, alors $Card(E_1 \cup ... \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} Card(E_i)$

4 Produit cartésien

On appelle produit cartésien de n ensemble $E_1, ..., E_n$, l'ensemble

$$E_1 \times ... \times E_n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n\}$$

dont les éléments sont des n_uplets. On parle alors de couple, triplet, quadruplets etc...
Si l'un des E_i est vide alors, le produit cartésien l'est aussi. Enfin, si $E_1 = ... = E_n = E$ alors on note leur produit cartésien E^n

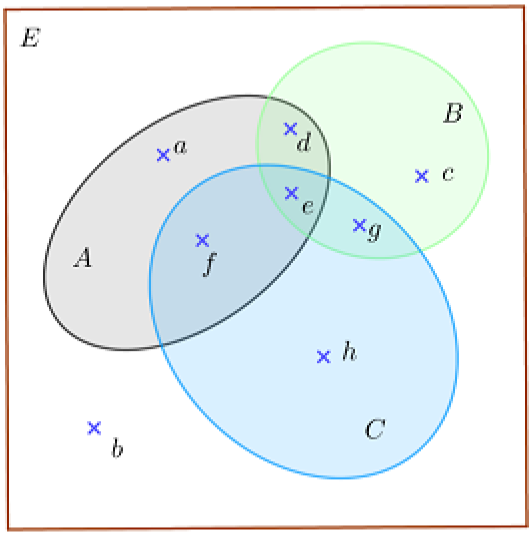
Propriété

Soient $E_1, ..., E_n$ des ensembles finis.
$Card(E_1 \times ... \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} Card(E_i)$

Exercices

Exercices 1

On considère le diagramme de Venn suivant, avec A,B,C trois parties d'un ensemble E; et a,b,c,d,e,f,g,h des éléments de E.



Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:

- $g \in A \cap \bar{B}$
- $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$
- $g \in \bar{A} \cup \bar{B}$
- $f \in C \backslash A$
- $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
- $\{h, b\} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

Exercice 2

Soient A , B , C trois ensembles tels que A ∪ B = B ∩ C . Montrer que A ⊂ B ⊂ C .

Exercice 3

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Pour X ⊂ E , on note X^c le complémentaire de X dans E . Démontrer les lois de Morgan suivantes :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **2.** $(A^c)^c = A$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ **4.** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Exercice 4

Écrire l'ensemble des parties de E=a,b,c,d.

Exercice 5

On considère l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer qu'il ne peut pas s'écrire comme un produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On considère $\sum_1 = \{0, 1\}$ et $\sum_2 = \{a, b, c, d, e\}$. On souhaite composer des mots de passes composé d'un chiffre et de 8 lettres. Quel est le nombre de mdp possibles ?
Quel est le nombres de mots de passes si on s'autorise à avoir un ou deux chiffres ?

2 Dénombrement

On considère dans cette partie un ensemble E de cardinal fini n et $0 \leq k \leq n$:

1 k_Arrangements

Définition: Arrangement

On appelle k_liste ou k_Arrangements un k_ uplet d'éléments de E tous différents.

On assimile un k_Arrangement au nombre d'issues lors d'un tirage sans remise de k éléments dans un ensemble à n éléments.

Propriété

Le nombre de k_Arrangements vaut $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Propriété

Le nombre de permutations de E vaut $n!$

2 Combinaisons

Définition: k_Combinaison

Partie de E à k éléments.

On assimile le nombre de k-combinaison au nombre d'issues d'un tirage avec remise de k éléments dans un ensemble de cardinal n.

Propriété

Le nombre de k-combinaisons de E est $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Symétrie des coefficients binomiaux: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Exercice 7

On considère une course de karting comprenant n pilotes. Déterminer le nombre de podium possibles (on classera les 3 premiers).

Exercice 8

On considère une course de karting comprenant n pilotes. Malheureusement, tous ne peuvent pas s'élancer sur la grille de départ en même temps. Déterminer le nombre de possibilités de sélectionner les k premiers qui partiront en premiers.

3 Triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstrations

→ **Méthode combinatoire**

→ **Méthode algébrique**

Propriété

Pour n un entier natural, on a :$\sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstrations

→ **Méthode combinatoire**

→ **Méthode algébrique**

Propriété

Le nombre de parties d'en ensemble à n éléments vaut 2^n

Exercice - Spécialité NSI

On pourra aborder ici quelques notions sur les Langages

On considère $\sum_1 = \{0, 1\}$ et $\sum_2 = \{a, b, c, d, e\}$. On souhaite composer des mots de passes à partir du langage engendré par $L = \sum_1^+ . \sum_2^+$; dont on restreindra leur taille à un entier n>1. On notera L' le langage subséquent.

- **Cas où n=2**
  Préciser la partie de L, notée L', qui nous intéresse ici à l'aide d'une description ensembliste par compréhension.
  Même question avec un produit cartésien. Donner alors le cardinal de cet ensemble.
- **Cas où n>1**
  On considère u un mot de L'. Préciser sa décomposition et les caractéristiques de celles-ci.
  Donner le cardinal de L' en fonction de n, et des autres données de l'exercice.

3 TD

Limites et continuité

On considère dans tout ce qui suit une fonction f de $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$

1 Rappels de cours

1.1 Voisinage

Analogie avec les suites et la condition "à partir d'un certain rang".

Définition: Voisinage de a $\in \mathbb{R}$

On dit que f vérifie une propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a ssi $\exists\ \varepsilon > 0 : f$ vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

Définition: Voisinage de a $= \infty$

On dit que f vérifie une propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de $+\infty$ ssi $\exists\ M \in \mathbb{R} : f$ vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap [M, +\infty[$

On notera $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a. Dans $\mathbb{R}, \{[a-\eta, a+\eta], \eta \in \mathbb{R}\}$ forme une base de $\mathcal{V}(a)$. Ce faisant, tout voisinage de a peut s'écrire sous cette forme.

2 Limites

2.1 Question de cours

On considère un réel l. Traduisez les assertions suivantes:

- f tend vers l en a.
- f tend vers l en $+\infty$.
- f tend vers $+\infty$ en a.
- f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

2.2 Démonstrations

Proposition

Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

1. Démontrer la propriété précédente.
2. Démontrer le théorème d'unicité de la limite.

2.3 Exercices

1. Démontrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en l'infini
2. Montrer que $\sqrt{x^2+1} - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
3. La fonction $f = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$, avec $\ell > 0$. Démontrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, $f(x) > 0$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Définition: Sinus et cosinus hyperbolique

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions sh : $x \to \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et ch : $x \to \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

2.4 Autour de e^x

1. Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

$$\mathbf{1}. \begin{cases} e^x e^y &= 10 \\ e^{x-y} &= \frac{2}{5} \end{cases} \qquad \mathbf{2}. \begin{cases} e^x - 2e^y &= -5 \\ 3e^x + e^y &= 13 \end{cases}$$

$$\mathbf{3}. \begin{cases} 5e^x - e^y &= 19 \\ e^{x+y} &= 30 \end{cases}$$

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

3. Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$$

4. Montrer que, pour tout $x \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} ch(kx) = \frac{ch(nx/2)sh\Big((n+1)x/2\Big)}{sh(x/2)}.$$

2.5 Retour sur les limites..

1. Montrer que: $\lim_{x \to l} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l, \ f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
2. *Variante* - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. Montrer qu'elle ne peut pas avoir de limite infinie en $+\infty$
3. Déterminer les limites des fractions rationnelles suivantes:

$$\mathbf{1}. \ \frac{X^2 - X + 1}{7X^3} \ en \ +\infty \qquad \mathbf{2}. \ \frac{X^2 + 4e^X}{e^X} \ en \ +\infty$$

$$\mathbf{3}. \ x^{\frac{1}{1-x}} \ en \ 1 \qquad \mathbf{4}. \ \lim_{x \to 0^+} \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-3) \right)$$

Exercice 4 Formalisme des ensembles

Question 1 Cours

- $\pi \ldots \mathbb{Q}$
- $8.5 \ldots \mathbb{R}$
- $\{6\} \ldots \mathbb{Z}$
- $(7, -9, 5.8) \ldots \ \ldots\ldots\ldots$
- $\mathbb{Q} \ldots \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \ldots \mathbb{Z}$
- $\mathbb{R} \ldots \mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}^* \ldots \mathbb{R}$

Question 2 Cours

Rappeler la définition d'un ensemble formulé par compréhension

Question 3

- Donner l'ensemble des entiers naturels pairs
- Donner l'ensemble des entiers relatifs impairs
- Donner l'ensemble des entiers relatifs dont le reste de leur division par 3 vaut 2
- Soit $(n, S) \in \mathbb{N}^2$. Donner l'ensemble des n_uplets dont la somme de leurs éléments vaut S.

Question 4

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4\}$. Donner les ensembles $A \cap B, A \cup B$ et $A \times B$

Question 5

Déterminer deux 3_uplets de 0,1. Combien en existe-t-il au total?

Question 6

Soient $A = [0, 2]$ et $B =]1.5, 3]$. Donner les ensembles $A \cap B, A \cup B$

Question 7

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Pour X⊂E, on note X^c le complémentaire de X dans E. Démontrer les lois de Morgan suivantes :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **2**. $(A^c)^c = A$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ **4**. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

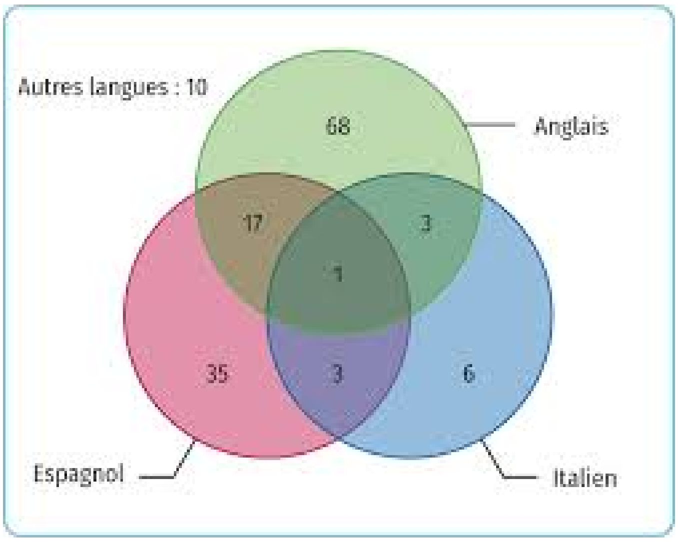
Exercice 5 Propriétés sur les ensembles

Question 1

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4\}$. Donner $\#A, \#B, \#A \cup B$

Question 2

On réalise un sondage sur un ensemble d'individus afin de connaître les langages qu'ils maîtrisent. On reporte les résultats sur le diagramme de Venn suivant:



Pour chacune des questions, on donnera une notation ensembliste afin de traduire l'énoncer.

- Donner le nombre total de personnes interrogées.
- Donner le nombre d'individus qui parlent Anglais, Espagnol et Italien.
- Donner le nombre d'individus qui parlent Espagnol et Italien seulement.
- Donner le nombre d'individus qui parlent (Anglais et Italien) ou (Anglais et Espagnol)

Question 3

Soient A et B deux ensembles finis et disjoints. On sait que Card(A∪B)=23 et Card(A×B)=132. Déterminer Card(A) et Card(B) sachant que Card(A)<Card(B).

Exercice 6 Dénombrement

Question 1

- Combien y-a-t-il de podiums possibles?
- Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier?
- Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie?
- On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles?

Question 2

Un cadenas possède un code à 3chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

- Combien y-a-t-il de codes possibles?
- Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?
- Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?
- Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

- Combien y-a-t-il de codes possibles?

- Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?
- Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

7 Bibliographie