Fiche : Algèbre de Boole

On définit $\mathbb{B} = \{V; F\}$ (i.e l'ensemble des valeurs booléennes), ainsi que les fonctions suivantes:

$$+ = \begin{pmatrix} \mathbb{B}\times\mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ (V,V) & \mapsto & V \\ (V,F) & \mapsto & V \\ (F,V) & \mapsto & V \\ (F,F) & \mapsto & F \end{pmatrix} \quad \times = \begin{pmatrix} \mathbb{B}\times\mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ (V,V) & \mapsto & V \\ (V,F) & \mapsto & F \\ (F,V) & \mapsto & F \\ (F,F) & \mapsto & F \end{pmatrix} \quad \bar{\bullet} = \begin{pmatrix} \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ V & \mapsto & F \\ F & \mapsto & V \end{pmatrix}$$

Ce faisant, $(\mathbb{B}, +, \times, \bar{\bullet})$ est appelé **Algèbre de Boole**.

Remarque

> *$\bar{\bullet}$ est un opérateur unaire semblable à la conjugaison dans $\mathbb{C}$. De plus, $+, \times, \bar{\bullet}$ sont des lois internes sur la sémantique des formules propositionnelles. On les distingue des opérateur $\vee, \wedge, \neg$ qui font sens syntaxiquement sur $\mathbb{F}_p(\mathcal{Q})$ l'ensemble des formules propositionnelles construit par induction à partir d'un ensemble de symboles $\mathcal{Q}$, appelés **variables propositionnelles**.*

Propriété Soit $(\mathbb{B}, +, \times, \bar{\bullet})$, alors on a les propriétés suivantes:

- → $+$ et $\times$ sont associatives, commutatives et distributives l'une par rapport à l'autre
- → $+$ admet pour élément neutre **F**
- → $\times$ admet pour élément neutre **V**
- → **V** est absorbant pour $+$
- → **F** est absorbant pour $\times$
- → $\bar{\bullet}$ est involutive

Démonstrations: En utilisant les définitions ou en réalisant des tables de vérité.

Propriété Soit $a, b \in \mathbb{B}$,

$$\overline{(a+b)} = \bar{a} \times \bar{b} \text{ et } \overline{(a \times b)} = \bar{a} + \bar{b}$$

Remarque

> *L'implémentation en C de $+, \times, \bar{\bullet}$ correspond à `&&`, `||`, `!`*