MECA0011 – Projet transversal
Écoulements irrotationnels

Groupe 68
LEWIN Sacha
WALTREGNY-DENGIS Anton
MAKEDONSKY Aliocha

10 avril 2020

1 Questions générales

1.1 De quel(s) principe(s) fondamental(aux) découle l'équation résolue dans ce projet, à savoir $\Delta\psi = 0$, Ψ étant la fonction de courant ?

Le laplacien de la fonction de courant découle de la conservation de la masse exprimée par les équations de *Navier-Stokes*.
On introduit $\mathbf{A}$ un vecteur potentiel pour lequel l'équation de continuité des écoulements stationnaires et incompressibles est vérifiée. L'équation de la conservation de la masse nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0$$

En ce qui concerne le régime stationnaire on a :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0$$

Et pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

(en 2D : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$).

Le vecteur vitesse s'exprime donc $\mathbf{U} = \dfrac{\rho_0}{\rho}(\nabla \wedge \mathbf{A})$. À nouveau, nous avons en 2D pour la fonction de courant : la composante horizontale de vitesse $u = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ et la composante verticale de vitesse $v = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$. On choisit $\mathbf{A}$ solénoïdal (divergence nulle) car il n'est pas défini de façon univoque, tel que $\mathbf{A} = (0, 0, \psi)$. Nous avons donc :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}\psi(x, y) = 0 \\ \dfrac{\rho_0}{\rho}\mathbf{U} = \nabla \wedge \mathbf{A} = (\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0) \end{cases}$$

Il faut maintenant imposer l'irrotationnalité de l'écoulement :

$$\nabla \wedge \boldsymbol{U} = \mathbf{0} = \mathbf{\Omega} = \nabla \wedge \left(\frac{\rho_0}{\rho} (\nabla \wedge \mathbf{A}) \right)$$

En 2D, l'équation de courant est : $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \psi}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{-\partial \psi}{\partial x}) = 0$ ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$ car on travaille dans le plan Oxy).

Au final, nous avons donc bien que le laplacien de la fonction de courant est nul :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Delta \psi = 0$$

Nous avons donc l'équation de Laplace qui se base sur l'écoulement irrotationnel et sur la continuité des régimes stationnaires et incompressibles d'un fluide.

1.2 Dans le cadre de ce projet, comment se traduit numériquement la résolution de l'équation $\Delta\psi = 0$? (La réponse doit être brève, max 3 phrases)

Pour résoudre numériquement l'équation $\Delta\psi = 0$, nous allons nous baser sur une méthode de discrétisation spatiale avec une grille 2D de nœuds, en utilisant la méthode des différences finies.
Les pas vertical et horizontal étant égaux (i.e. $\Delta x = \Delta y$), le laplacien se discrétise tel que :

$$\Delta f|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}}{\Delta x^2} = b$$

La résolution de cette équation se fait donc via un système de n équations, une pour chaque noeud, du type Aψ = b.

1.3 Pour un écoulement irrotationnel, quelles sont les hypothèses nécessaires et suffisantes pour avoir une charge uniforme dans l'écoulement ? Justifiez.

Pour avoir une charge uniforme dans l'écoulement, il faut que l'écoulement soit stationnaire. C'est à dire que les composantes de vitesse de l'écoulement soient indépendantes du temps.

Ensuite, selon le théorème de Kelvin : "Pour un fluide parfait, barotrope et soumis a un champ de force conservateur, la circulation du champ de vitesse autour d'une courbe arbitraire et fermée, qui se meut avec le fluide, demeure constante." Il faut donc que le fluide soit parfait, barotrope et soumis à un champ de force conservateur. Vu que le fluide parfait est en

écoulement irrotationnel, nous avons $\Omega = \nabla \wedge \vec{U} = \vec{0}$ (le rotationnel de la vitesse est nul).
La charge est donc bien uniforme dans l'écoulement.

En dernier lieu, le fluide doit être incompressible. En effet, la continuité est imposée par le fait qu'il est barotrope et que la densité de chaque particule ne varie pas au cours du temps.

2 Ecoulement autour d'un tube de Prandtl

2.1 L'écoulement autour d'un tube de Prandtl peut être modélisé à l'aide d'une superposition d'une source et d'un écoulement uniforme. Quelle caractéristique de l'écoulement permet de repérer la limite du corps ? Illustrez la limite du corps à l'aide d'une figure.

La limite du corps peut être repérée grâce à une ligne de courant particulière, qui suit donc le contour du tube de Prandtl (courbe rouge sur la figure). Cette ligne s'obtient avec la fonction de courant $\Delta\psi$ pour une valeur de ψ égale à 0.25, ce qui est observable sur la figure ci-dessous.

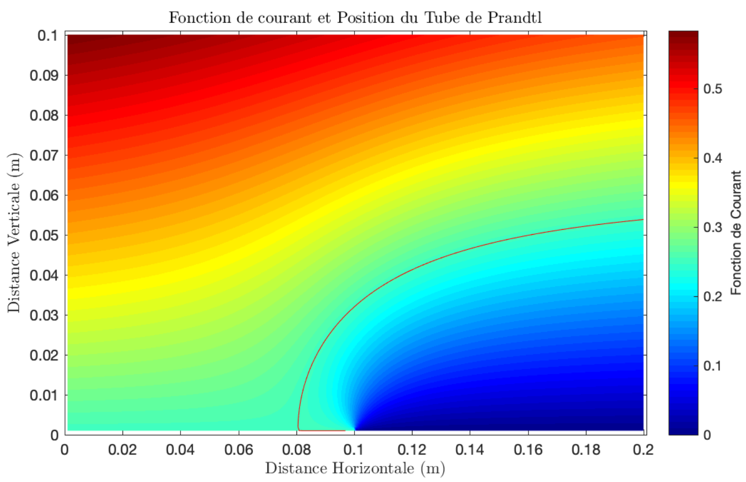

Fig.1 : Fonction de courant et contour du tube de Prandtl

2.2 Quelle pression est censée être mesurée par le tube de mesure perpendiculaire à l'écoulement ? Sur le domaine de calcul proposé, à quelle distance horizontale (mesurée selon l'axe x) depuis la source la sonde de pression doit-elle être positionnée ?

La pression mesurée par le tube vertical perpendiculaire à l'écoulement du fluide est la pression infinie p_∞, dont la formule est :

$$p_\infty = C - \frac{U_\infty^2}{2}\rho = -8000\text{Pa}$$

avec C la constante arbitraire qui est ici choisie nulle.
La pression mesurée à l'intérieur du tube central qui est parallèle à l'écoulement du fluide est la pression totale p.
Nous pouvons ensuite calculer l'inconnue a du système d'équations ci-dessous :

$$a = \frac{100 + 101}{2} 0,001 = 0.1005m$$

Et en résolvant le système d'équations suivant nous trouverons à quelle distance horizontale de l'origine se trouve la sonde de pression :

$$\begin{cases} u = U_\infty + \dfrac{Q}{2\pi} \dfrac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ v = \dfrac{Q}{2\pi} \dfrac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ p - p_\infty = 0 \\ U^2 = U_\infty^2 \end{cases}$$

La distance horizontale entre l'origine et la sonde de pression doit être $x = 0.0906m$. Et comme la source de pression est positionnée à $a = 0.1005m$ de l'origine, la sonde de pression doit être à $0.1005 - 0.0906 = 9,9.10^{-3}$m de la source.

2.3 Grâce à une figure, mettez clairement en évidence l'isobare qui permet de repérer les endroits où la prise de pression peut être positionnée ainsi que la limite du tube de Prandtl. Discutez brièvement cette figure (5 lignes maximum).

La courbe en rouge représente le tube de Prandtl. La droite verticale est l'isobare où la pression est p_∞. On constate que cette droite est perpendiculaire à l'écoulement, qui est par conséquent bien uniforme. Cette droite verticale est située à environ $x = 0,091m$. Cela correspond avec la valeur calculée au point 2.2 de $x = 0.0906m$. L'intersection entre les deux courbes est l'endroit le plus propice à la prise de pression.

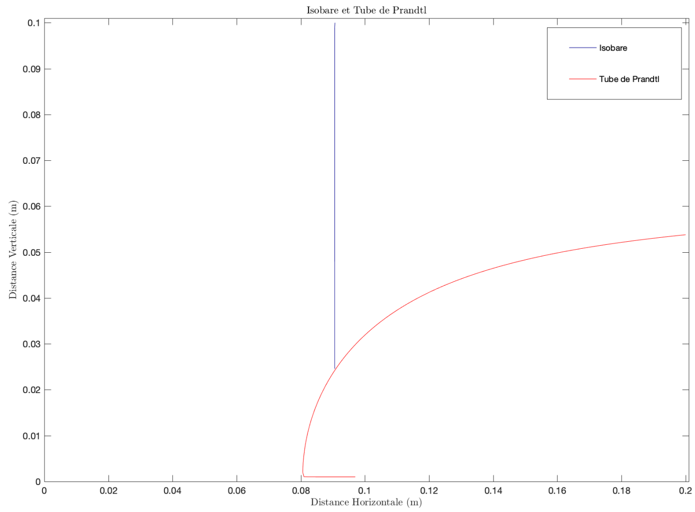

Fig.2 : Isobare et tube de Prandtl

2.4 Démontrez ici mathématiquement la position et la forme de l'isobare. Discutez ensuite brièvement le résultat mathématique vis-à-vis du résultat numérique.

On veut démontrer la forme de l'isobare $p = p_\infty$.
L'énoncé du projet nous donne :

$$u = U_\infty + \frac{Q}{2\pi}\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$v = \frac{Q}{2\pi}\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$p = C - \rho\frac{u^2+v^2}{2}$$

Par substitution de u et de v dans l'équation de p, on a :

$$\Rightarrow p = C - \frac{\rho}{2}\left[\left(U_\infty + \frac{Q}{2\pi}\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{2\pi}\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow p = C - \frac{\rho}{2}\left[U_\infty^2 + 2\frac{QU_\infty}{2\pi}\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2}\frac{(x-a)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{Q^2}{4\pi^2}\frac{(y-b)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow p = C - \frac{\rho}{2}\left[U_\infty^2 + \frac{QU_\infty}{\pi}\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2}\frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow p = C - \frac{\rho U_\infty^2}{2} + \frac{\rho QU_\infty}{2\pi}\frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2}\left(x - a + \frac{Q}{4\pi U_\infty}\right)$$

Et puisque nous sommes dans le cas de l'isobare $p = p_\infty = C - \frac{\rho U_\infty^2}{2}$, on obtient :

$$\Rightarrow 0 = \frac{\rho Q U_\infty}{2\pi} \frac{1}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \left(x - a + \frac{Q}{4\pi U_\infty} \right)$$
$$\Leftrightarrow x = a - \frac{Q}{4\pi U_\infty}$$

On retrouve bien ici une droite verticale dont l'équation est : $x = a - \frac{Q}{4\pi U_\infty}$
Au point précédent nous avons déjà calculé $a = 0,1005$ qu'on peut donc remplacer ici, et on obtient $x = 0,0905528$m. On a donc,

$$a - x = 0,1005 - 0,0905528 = 9,9472 \cdot 10^{-3} m$$

Et ce résultat est très proche du résultat obtenu au point 2.3 pour la distance horizontale entre la source et l'isobare représentée par une droite verticale.

3 Ecoulement autour d'un îlot

3.1 Pour le premier îlot, quelles sont les valeurs de traînée, portance et circulation ? Discutez en 5 lignes maximum vos résultats.

Les valeurs de la portance, la traînée et la circulation sont proches de 0 toutes les 3. Vu la symétrie de l'écoulement autour de l'îlot et donc la répartition uniforme et symétrique des vitesses sur celui-ci, on peut en déduire que la circulation Γ est en effet nulle. Ceci implique donc que la portance est nulle également, par la loi de *Kutta-Joukowsky* qui exprime une proportionnalité directe entre la circulation et la portance. Enfin, comme nous sommes dans le cas d'un fluide parfait en écoulement irrotationnel, la traînée est également bien nulle.

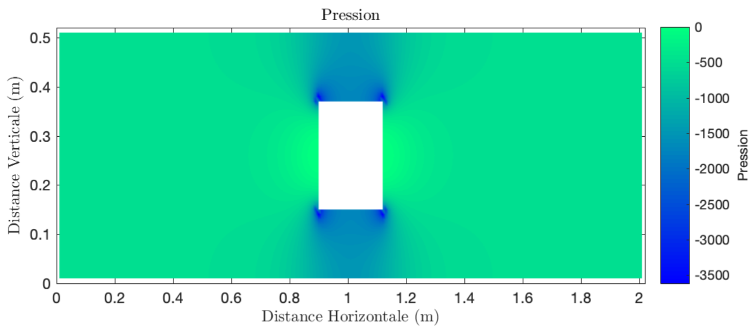

Fig.3 : Pression autour du premier îlot

Îlot 1	Valeurs
Traînée [N/m]	$1.8474 \cdot 10^{-13}$
Portance [N/m]	$2.2737 \cdot 10^{-13}$
Circulation [m$^2/s$]	$7.0777 \cdot 10^{-16}$

3.2 Pour le second îlot, quelles sont les valeurs de traînée, portance et circulation ? Discutez brièvement (5 lignes maximum) vos résultats, en comparant notamment au cas précédent.

La traînée est également nulle car on a encore un fluide parfait en écoulement irrotationnel. La circulation est maintenant non nulle car la répartition des vitesses sur l'îlot n'est plus uniforme, l'écoulement est désormais asymétrique. Une fois de plus grâce à la loi de *Kutta-Joukowsky*, nous pouvons en déduire que la portance est non nulle. Celle-ci est positive (vers le haut) car la pression sur l'îlot est plus basse sur la face supérieure que sur la face inférieure, et la portance est dans la direction de la zone de surpression vers la zone de dépression, donc du bas vers le haut.

Les valeurs diffèrent de celles obtenus au point 3.1 puisque les conditions aux limites des 2 îlots sont différentes.

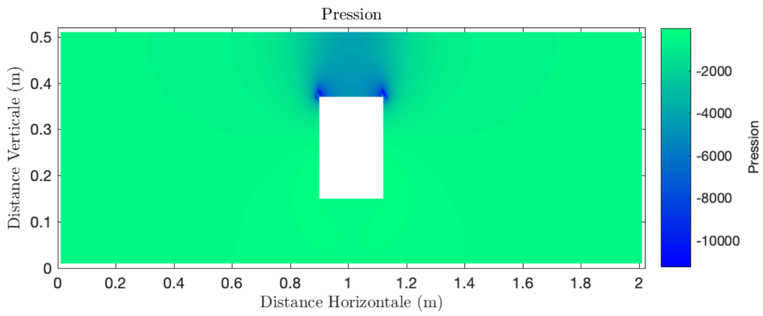

Fig.4 : Pression autour du deuxième îlot

Îlot 2	Valeurs
Traînée [N/m]	-1.1369 $\cdot 10^{-13}$
Portance [N/m]	1231
Circulation [m$^2/s$]	1.046