Введение в обучение с подкреплением

Тема 3: Марковские процессы

Лектор: Кривошеин А.В.

RL: общие понятия

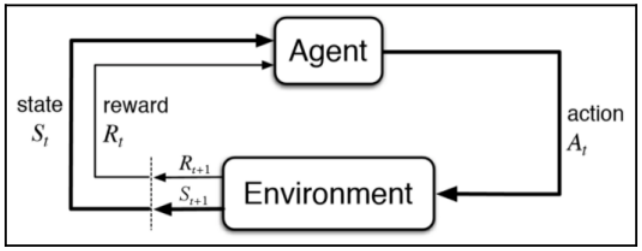
Суть RL:

научить обучаемого агента предпринимать "хорошие" последовательности действий в ходе взаимодействия со средой для эффективного достижения цели.

Цель агента: *поиск стратегии поведения, дающей максимальный доход.*

Схема взаимодействия:

обучаемый агент действует в окружающей его среде, среда реагирует на действия агента.



Обозначения:

$\mathcal{S}$ — множество состояний, S_t — состояние в момент времени t,

$\mathcal{A}$ — множество действий, A_t — действие в момент времени t,

$\mathcal{R}$ — множество вознаграждений, R_t — вознаграждение в момент времени t.

Взаимодействие агента со средой — это **дискретный случайный процесс**: $S_0, A_0, R_1, S_1, A_1, \ldots$

Конкретная реализация этого процесса — это **траектория** взаимодействия агента со средой.

Дискретный марковский процесс

Рассмотрим **частный случай** общей постановки задачи RL.

Агента нет. А среда меняет своё состояние в дискретные моменты времени.

Пусть $\mathcal{S} = \{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$ — конечное (либо счётное) множество состояний среды,

а набор $\{p_i\}_{i \in S}$ задаёт вероятности появления того или иного состояния в начальный момент времени $t = 0$.

Дискретный процесс смены состояний — это последовательность случайных величин

$S_0, S_1,\ \ldots, S_t,\ \ldots,$ каждая из которых отвечает за состояние среды в момент времени t.

Этот процесс называют **марковским** (англ. Markov chain), если

$\mathbb{P}(S_{t+1} = s_{t+1} | S_t = s_t,\ \ldots, S_0 = s_0) = \mathbb{P}(S_{t+1} = s_{t+1} | S_t = s_t)$, где $s_0,\ \ldots, s_{t+1} \in \mathcal{S}$.

Иными словами, вероятность перехода среды в новое состояние s_{t+1}

зависит только от текущего состояния s_t

и не зависит от прошлых состояний среды.

Кроме того, будем рассматривать **стационарные** марковские процессы, то есть вероятность перехода среды из текущего состояния в новое состояние не меняется со временем.

Для полного описания **стационарной марковской среды** достаточность задать:

1. матрицу вероятностей $\{p_{i,j}\}_{i,j \in \mathcal{S}}$, где $p_{i,j}$ задаёт вероятность перехода среды из состояния i в состояние j,

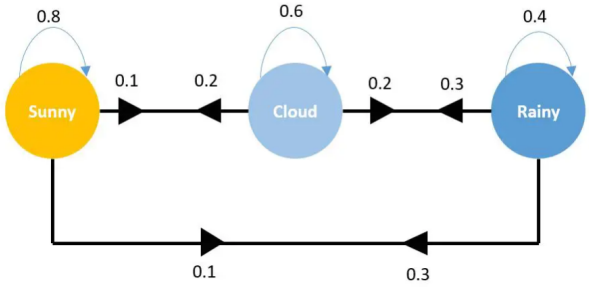
   то есть $p_{i,j} = \mathbb{P}(S_{t+1} = j | S_t = i)$, $\sum_{j \in \mathcal{S}} p_{i,j} = 1$, для каждого $i \in \mathcal{S}$;

2. вектор вероятностей $\{p_i\}_{i \in S}$, где p_i задаёт вероятность нахождения среды в состоянии i

   в начальный момент времени $t = 0$.

Дискретный марковский процесс: пример

Рассмотрим пример, моделирующий погоду на день в некотором городе. Выделим три состояния погоды: солнечно, облачно, идёт дождь. Переходы из одного состояния в другое моделируются с помощью следующей схемы.



Матрица вероятностей перехода между состояниями имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Марковский процесс вознаграждения

Добавим в рассмотренный выше процесс агента, который наблюдает переходы между состояниями среды и получает вознаграждения, не совершая при этом действий.

Этот процесс называют **марковским процессом вознаграждений** (МПВ, англ. Markov's reward process).

Для задания **дискретного** МПВ надо определить следующие понятия.

1. Конечное (или счётное) множество состояний среды $\mathcal{S}$.

2. Модель среды или дискретный стационарный марковский процесс смены состояний S_0, S_1, S_2 ....

Для этого достаточно задать вероятности переходов между состояниями

$p(s' \mid s) := \mathbb{P}(S_{t+1} = s' \mid S_t = s) \in [0, 1]$, где $s, s' \in S$, причём $\sum_{s' \in S} p(s' \mid s) = 1$.

3. Вознаграждение за пребывание в каждом состоянии.

В детерминированном случае достаточно задать функцию $r : \mathcal{S} \to \mathcal{R} \subset \mathbb{R}$, определяющую значения $r(s)$.

В стохастическом случае надо задать набор распределений вероятностей $p(r \mid s) := \mathbb{P}(R_{t+1} = r \mid S_t = s)$.

При этом под $r(s)$ удобно понимать математическое ожидание вознаграждения за пребывание в состоянии s:

$r(s) = \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s]$.

Под **конечным МПВ** будем понимать МПВ, где множества состояний $\mathcal{S}$ и вознаграждений $\mathcal{R}$ конечны.

Далее, по умолчанию, будем рассматривать именно конечные МПВ.

Марковский процесс вознаграждения

Траекторией эпизодического МПВ является реализация случайных величин

$$S_0, R_1, S_1, R_2, \ldots R_T, S_T, \quad \text{где либо } S_T \in \mathcal{S}_+, \text{ либо } T = T_{\max}.$$

Здесь $\mathcal{S}_+$ множество терминальных состояний, а $T_{\max}$ — это максимальное число дискретных шагов.

Траекторией бесконечного МПВ является реализация последовательности случайных величин

$$S_0, R_1, S_1, R_2, \ldots$$

В этой записи можно понимать и эпизодический МПВ с терминальными состояниями. Можно считать, что при попадании в терминальное состояние среда с вероятностью 1 переходит из этого состояния в него же, а агент получает нулевое вознаграждение.

Доход агента G_t — это взвешенная сумма всех полученных вознаграждений с момента времени t и до конца процесса или до бесконечности, то есть

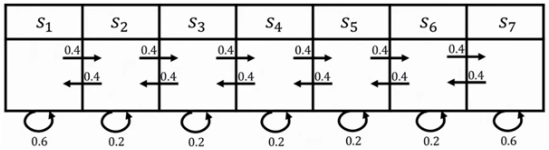
$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}.$$

Здесь $\gamma \in [0, 1]$ коэффициент обесценивания. Важно заметить, что в этом обозначении вознаграждения начинают накапливаться с R_{t+1}.

МПВ: пример

Доход : $G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \ldots$

Пример. Рассмотрим пример с 7-ю состояниями, где вероятности смены состояний задаются схемой



Вознаграждения зададим следующим образом

$r(s_1) = -1, \quad r(s_7) = 10, \quad r(s_i) = 0$ при $i = 2, 3, 4, 5, 6.$

Пусть $\gamma = \frac{1}{2}$. Для примера найдём доходы для нескольких 4-шаговых эпизодов с различными траекториями:

$s_4, s_5, s_6, s_7: \quad G_0 = 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{1}{8} = 1.25,$

$s_4, s_5, s_4, s_3: \quad G_0 = 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} = 0,$

$s_4, s_3, s_2, s_1: \quad G_0 = 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{8} = -0.125.$

Вероятностное пространство и случайная величина

Напомним определение и некоторые свойства **математического ожидания случайных величин**.

Формально, сначала определяется **вероятностное пространство** $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

X — множество **элементарных событий** (у нас это совокупность всевозможных траекторий конечного МПВ);

$\mathbb{A}$ — **сигма-алгебра** событий (в нашем случае $\mathbb{A} = 2^X$);

$\mathbb{P}$ — **вероятность**, заданная на сигма-алгебре (то есть мера со свойством $\mathbb{P}(X) = 1$).

В случае конечного МПВ вероятность $\mathbb{P}$ будет задана, если будет **задана вероятность появления каждой траектории**.

Для этого достаточно задать:

вероятности переходов между состояниями $\{p(s' \mid s)\}_{s',s\in\mathcal{S}}$,

вероятности $\{p(s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ появления состояний в начальный момент времени $t = 0$,

вероятности $\{p(r \mid s)\}_{r\in\mathcal{R},\, s\in\mathcal{S}}$, вознаграждений за пребывание в каждом из состояний.

Тогда вероятность появления некоторой траектории τ с конкретным набором состояний и вознаграждений вида:

$\tau = (s_0, r_1, s_1, \ldots, r_T, s_T)$ будет равна $\mathbb{P}(\tau) = p(s_0)\, p(r_1 \mid s_0)\, p(s_1 \mid s_0)\, p(r_2 \mid s_1)\, p(s_2 \mid s_1) \ldots p(r_T \mid s_{T-1})\, p(s_T \mid s_{T-1})$.

Случайная величина — это (измеримое) отображение $\xi : X \to \mathbb{R}$.

В случае конечного МПВ случайная величина задаётся на совокупности траекторий.

В частности, вознаграждение R_t, доход G_t, состояние S_t — это случайные величины (формально состояния, конечно, не обязаны быть числами, но все состояния можно проиндексировать и заменить состояния индексами).

Например, для траектории τ вида $\tau = (s_0, r_1, s_1, \ldots, r_T, s_T)$ эти случайные величины принимают значения:

$R_t(\tau) = r_t$, $S_t(\tau) = s_t$, $G_t(\tau) = r_{t+1} + \gamma\, r_{t+2} + \ldots + \gamma^{T-t-1}\, r_T$.

Математическое ожидание

Математическое ожидание — это интеграл от случайной величины по мере $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{E}[\xi] = \int_X \xi \, d\,\mathbb{P}.$$

Свойства математического ожидания — это свойства интеграла по мере (линейность, аддитивность и т.д.).

Пусть ξ — дискретная случайная величина, принимающая конечный набор значений $x_1, \ldots, x_N$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_N$, то есть $\mathbb{P}(\xi = x_i) = p_i$. Тогда математическое ожидание ξ имеет вид

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{i=1}^{N} x_i \, p_i.$$

Пусть η ещё одна дискретная случайная величина, принимающая конечный набор значений $y_1, \ldots, y_M$.

Условное математическое ожидание случайной величины ξ при условии, что $\eta = y_k$ определяется равенством

$$\mathbb{E}[\xi \,|\, \eta = y_k] = \sum_{i=1}^{N} x_i \, \mathbb{P}(\xi = x_i \,|\, \eta = y_k) = \sum_{i=1}^{N} x_i \, \frac{\mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_k)}{\mathbb{P}(\eta = y_k)}.$$

Математическое ожидание: примеры

Рассмотрим конечный МПВ. Найдём вероятность события, что начальное состояние равно s, то есть $S_0 = s$. Для этого надо просуммировать вероятности появления всех траекторий, у которых начальное состояние равно s

$$\mathbb{P}(S_0 = s) = \sum_{\tau \in X:\, S_0(\tau)=s} \mathbb{P}(\tau) = \sum_{r_1 \in \mathcal{R}} \sum_{s_1 \in \mathcal{S}} \dots \sum_{s_{T-1} \in \mathcal{S}} \sum_{r_T \in \mathcal{R}} \sum_{s_T \in \mathcal{S}} p(s)\, p(r_1 \mid s)\, p(s_1 \mid s_0) \dots p(r_T \mid s_{T-1})\, p(s_T \mid s_{T-1}) = p(s).$$

Аналогичным образом можно показать, что, например,

$\mathbb{P}(S_{t+1} = s' \mid S_t = s)$ действительно равно $p(s' \mid s)$,

а $\mathbb{P}(R_{t+1} = r \mid S_t = s)$ действительно равно $p(r \mid s)$.

Далее, можно также вычислять математические ожидания от вознаграждений при условии, что среда находится в некотором заданном состоянии:

$$r(s) = \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s] = \sum_{r \in \mathcal{R}} r\ \mathbb{P}(R_{t+1} = r \mid S_t = s) = \sum_{r \in \mathcal{R}} r\ p(r \mid s).$$

МПВ: ценности состояний

Функция ценности состояния $v(s)$ определяется как ожидаемый доход по всем возможным траекториям при старте из состояния s:

$$v(s) := \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \,\middle|\, S_t = s\right] = \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s] = r(s) + \gamma \mathbb{E}[G_{t+1} \mid S_t = s].$$

Целый ряд методов RL использует функции ценности для нахождения оптимальных стратегий. Поэтому важно уметь вычислять их или оценивать.

Для вычисления функции ценности состояний в рамках МПВ можно предложить два метода.

Первый метод основан на том, чтобы сформировать много траекторий и усреднить доходы, полученные из каждого состояния. Для реализации этого метода модель среды (то есть знание вероятностей перехода между состояниями) не требуется. Более того, не требуется даже, чтобы среда была марковской.

Второй метод позволяет получить точное решение, но для этого среда должна быть марковской и модель среды должны быть точно известна. Этот метод основан на том, чтобы сформировать уравнения, в которых участвуют искомые величины $v(s)$.

МПВ: вычисление ценности состояний

Перепишем определение функции ценности состояний в виде уравнения относительно значений $v(s)$:

$$v(s) = \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s] = r(s) + \gamma \mathbb{E}[G_{t+1} \mid S_t = s]$$
$$= r(s) + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s' \mid s)\, v(s'), \quad s \in \mathcal{S}.$$

Последний переход верен по следующим причинам: пусть $\mathcal{G}$ является множеством всех возможных доходов, тогда

$$\mathbb{E}[G_{t+1} \mid S_t = s] = \sum_{g \in \mathcal{G}} g\, \mathbb{P}(G_{t+1} = g \mid S_t = s) =$$

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} g\, \frac{\mathbb{P}(G_{t+1} = g, S_t = s)}{\mathbb{P}(S_t = s)} = \sum_{g \in \mathcal{G}} g \sum_{s' \in \mathcal{S}} \frac{\mathbb{P}(G_{t+1} = g, S_{t+1} = s', S_t = s)}{\mathbb{P}(S_t = s)} =$$

$$\sum_{s' \in \mathcal{S}} \sum_{g \in \mathcal{G}} g\, \frac{\mathbb{P}(G_{t+1} = g, S_{t+1} = s', S_t = s)}{\mathbb{P}(S_{t+1} = s', S_t = s)}\, \frac{\mathbb{P}(S_{t+1} = s', S_t = s)}{\mathbb{P}(S_t = s)} =$$

$$\sum_{s' \in \mathcal{S}} \sum_{g \in \mathcal{G}} g\, \mathbb{P}(G_{t+1} = g \mid S_{t+1} = s', S_t = s)\, \mathbb{P}(S_{t+1} = s' \mid S_t = s) = \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[G_{t+1} \mid S_{t+1} = s', S_t = s]\, p(s' \mid s)$$

Осталось заметить, что в силу марковости среды (будущее зависит лишь от текущего состояния), верно

$$\mathbb{E}[G_{t+1} \mid S_{t+1} = s', S_t = s] = \mathbb{E}[G_{t+1} \mid S_{t+1} = s'] = v(s').$$

МПВ: вычисление ценности состояний

Итак, функция ценности состояний $v(s)$ удовлетворяет уравнению:

$$v(s) = r(s) + \gamma \sum_{s' \in S} p(s' \mid s)\, v(s'), \quad s \in \mathcal{S}.$$

Это уравнение для ценности состояний $v(s)$ можно записать в матричном виде, положив

$V = (v(s_1),\ \ldots,\ v(s_N))^T$,

$R = (r(s_1),\ \ldots,\ r(s_N))^T$,

$P = \{p(s' \mid s)\}_{s,s' \in S}$.

Тогда

$V = R + \gamma P V$ или $(I - \gamma P) V = R$. **Точное решение :** $V = (I - \gamma P)^{-1} R$.

Для больших размерностей обращение матрицы может быть вычислительно не устойчивым и не эффективным.

Итеративный способ. Пусть $V_0(s) = 0$ для всех s. Для $k \in \mathbb{N}$ полагаем,

$V_{k+1} := R + \gamma P V_k$.

Решение считается полученным, если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняется оценка $\|V_{k-1} - V_k\| < \varepsilon$ при заданном $\varepsilon > 0$.

МПВ: вычисление ценности состояний

Гарантия сходимости итеративного метода следует из **принципа сжимающих отображений**. Пусть оператор T действует на векторах со значениями ценностей состояний $V = (v(s_1),\ \ldots,\ v(s_N))$ по правилу

$T(V) := R + \gamma\, P\, V.$ Итерации имеют вид : $V_{k+1} = T(V_k).$

Если $\gamma < 1$, то **оператор T является сжимающим** в max-норме $\|V\| = \max_s |v(s)|$.
Действительно, рассмотрим два вектора

$V = (v(s_1),\ \ldots,\ v(s_N))$ и $W = (w(s_1),\ \ldots,\ w(s_N))$ и проведём оценку

$$\|T(V) - T(W)\| \le \|\gamma\, P(V - W)\| \le$$

$$\gamma \max_s \sum_{s' \in S} p(s' \mid s) \left| v(s') - w(s') \right| \le$$

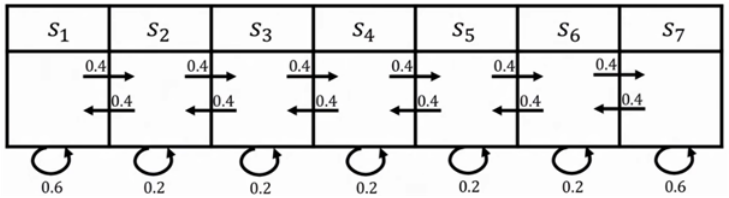
$$\gamma\, \|V - W\|, \text{ так как } \sum_{s' \in S} p(s' \mid s) = 1 \text{ для любого } s.$$

Тогда теорема о сжимающем отображении гарантирует сходимость итеративной последовательности приближений V_k к неподвижной точке оператора T, то есть к вектору V удовлетворяющему равенству $T(V) = V$, а это и есть искомое решение.

$T(V) = R + \gamma\, P\, V = V$

МПВ: пример

Пример. Рассмотрим пример с 7-ю состояниями, где вероятности смены состояний задаются схемой:



Вознаграждения зададим следующим образом

$r(s_1) = -1,\ \ r(s_7) = 10,\ \ r(s_i) = 0$ при $i = 2, 3, 4, 5, 6.$

Пусть $\gamma = \frac{1}{2}$. Найдём функцию ценности состояний по точному методу:

```
In[9]:= R = {-1, 0, 0, 0, 0, 0, 10};
        P = {{0.6, 0.4, 0, 0, 0, 0, 0}, {0.4, 0.2, 0.4, 0, 0, 0, 0}, {0, 0.4, 0.2, 0.4, 0, 0, 0}, {0, 0, 0.4, 0.2, 0.4, 0, 0},
            {0, 0, 0, 0.4, 0.2, 0.4, 0}, {0, 0, 0, 0, 0.4, 0.2, 0.4}, {0, 0, 0, 0, 0, 0.4, 0.6}};
        gamma = 0.5;
        Inverse[IdentityMatrix[7] - gamma P].R
Out[•]= {-1.52799, -0.347969, -0.037869, 0.177559, 0.836883, 3.58841, 15.311}
```