Введение в обучение с подкреплением

Тема 8: TD методы с разделённой стратегией

Лектор: Кривошеин А.В.

Q-learning

Q-learning — метод TD-обучения **с разделённой стратегией,** основанный на оценивании Q-функции, как и SARSA.

Но SARSA занимается приближением Q-функции конкретной стратегии q_π,

а Q-learning сразу занимается **приближением оптимальной ценности действий** q_*.

Чтобы получить формулу обновления оценки Q-функции, напомним связь V-функции и Q-функции, записав эту связь для оптимальной стратегии

$$q_*(s, a) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{s' \in S} p(s', r \mid s, a)\,(r + \gamma\, v_*(s')).$$

При этом тот факт, что стратегия оптимальна, означает: $v_*(s) = \max_a q_*(s, a)$.

Следовательно, уравнение оптимальности Беллмана для Q-функции имеет вид:

$$q_*(s, a) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{s' \in S} p(s', r \mid s, a)\left(r + \gamma \max_a q_*(s', a)\right) \quad \text{или} \quad q_*(s, a) = \mathbb{E}\left[R_{t+1} + \gamma \max_{a'} q_*(S_{t+1}, a') \,\middle|\, S_t = s, A_t = a\right].$$

Оценку математического ожидания случайной величины $R_{t+1} + \gamma \max_{a'} q_*(S_{t+1}, a')$ можно получить путём усреднения фактически полученных значений этой величины для многих траекторий. Тогда обновление оценки оптимальной Q-функции можно получить в виде:

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\left[R_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(S_{t+1}, a') - Q(S_t, A_t)\right]$$

Q-learning

Базовая идея метода Q-learning: в ходе взаимодействия агента со средой для каждой полученной четвёрки значений S_t, A_t, R_{t+1}, S_{t+1} обновлять значения Q-функции по формуле

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\left[R_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(S_{t+1}, a') - Q(S_t, A_t)\right].$$

При этом не важно по какой стратегии генерируются эти четвёрки значений S_t, A_t, R_{t+1}, S_{t+1}. Агент может пользоваться некоторой исследовательской стратегией, формула обновления всё равно будет приближать оптимальную Q-функцию.

Сравним эту формулу обновления с обновлением по методу SARSA:

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha[R_{t+1} + \gamma\, Q(S_{t+1}, A_{t+1}) - Q(S_t, A_t)].$$

В **SARSA** цель обновления формировалась с помощью текущей стратегии, так как надо выбрать действие A_{t+1}.
В **Q-learning** цель обновления **не зависит** от используемой стратегии, а формируется с помощью лучшей текущей оценки Q-функции.

Это и позволяет сделать Q-learning методом обучения **с разделённой стратегией**. То есть генерировать траектории можно по исследовательской стратегии, формируя при этом оценки Q-функции для другой стратегии.

Q-learning, псевдокод

Приведём псевдокод алгоритма Q-learning для оценки оптимальной Q-функции q_*. Фиксируем размер шага обучения $\alpha > 0$, а также $\gamma \in (0, 1)$.

---

1. Инициализировать:

значения $Q(s, a) = 0$ для всех состояний $s \in S$ и действий $a \in \mathcal{A}$,

задать поведенческую стратегию

2. Q-learning

Повторять для каждого эпизода:

Выбрать начальное состояние s

Повторять:

Выбрать a, следуя поведенческой стратегии

Наблюдать r, s'

Обновить оценку

$$Q(s, a) := Q(s, a) + \alpha\left[R + \gamma \max_a Q(s', a) - Q(s, a)\right]$$

$s := s'$

Если s заключительное состояние, то выйти из цикла.

Вернуть стратегию π на основе найденой Q-функции.

Условия сходимости алгоритма **Q-learning**: поведенческая стратегия с потенциально бесконечным числом посещения каждой пары (s, a) + условия Роббинса-Монро на убывание величины шага обучения.

Q-learning: особенности

Обсудим выбор поведенческой стратегии.

Если в ходе взаимодействия со средой агент просто обучается, то поведенческая стратегия может быть любой, лишь бы она обеспечивала выбор каждой пары (s, a) потенциально бесконечное число раз (например, равновероятный выбор действий).

Если в ходе взаимодействия надо обучаться и одновременно показывать всё более лучшие результаты взаимодействия со средой, то в качестве поведенческой стратегии можно выбрать ε-жадную стратегию относительно Q. Она также обеспечивает выбор каждой пары (s, a) потенциально бесконечное число раз, но чаще будет выбираться действие с наибольшей оценкой.

Преимуществом Q-learning является то, что обучаться можно на любом наборе сгенерированных траекторий.

Недостатком Q-learning является тот факт, что при обучении на конечном наборе данных оценки Q-функции будут смещёнными, а именно завышенными относительно истинных.

Конечно, в процессе обучения смещение будет убывать к нулю. Однако, в начале обучения завышение оценок $Q(s, a)$ может приводить к тому, что те действия a, которые агент считает лучшими, такими не являются.
Кроме того, вместе с бутстреппингом, завышенные оценки будут распространяться и в более ранние пары, внося смещение в их оценки.

Q-learning: особенности

Продемонстрируем эффект завышенных оценок на примере среды с одним состоянием s и некоторым набором действий, возвращающих в состояние s.

Пусть вознаграждения формируются реализацией случайной величины с нормальным распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Тогда истинные оптимальные ценности всех действий $q_*(s, a) = 0$.

Однако, оценки $Q(s, a)$ по методу Q-learning будет завышены относительно нуля:
проведём симуляцию для 4 действий на 100000 эпизодах, выбор действия равновероятен.

```
Episodes = 100 000; SeedRandom[42]; Acts = 4;
Q = Table[0, Acts];  Num = Table[0, Acts];
For[i = 1, i < Episodes, i++,
 Rew = Table[RandomVariate[NormalDistribution[]], {k, 1, 4}];
 k = RandomChoice[Range[Acts]];
 Num[[k]] = Num[[k]] + 1;
 Q[[k]] = Q[[k]] + (Rew[[k]] + 0.9 Max[Q] - Q[[k]]) / Num[[k]];]
Q
```

```
{0.948804, 0.935933, 0.933287, 0.944938}
```

Конечно же чем больше данных доступно, тем меньше будет это смещение. В пределе смещение исчезнет.

```
For[i = 1, i < Episodes, i++,
 Rew = Table[RandomVariate[NormalDistribution[]], {k, 1, 4}];
 k = RandomChoice[Range[Acts]];
 Num[[k]] = Num[[k]] + 1;
 Q[[k]] = Q[[k]] + (Rew[[k]] + 0.9 Max[Q] - Q[[k]]) / Num[[k]];]
Q
```

```
{0.887875, 0.881954, 0.872695, 0.882199}
```

Q-learning: особенности

Если же истинные значения ценностей различны, то завышение оценок может помешать сразу выявить самое ценное действие.

Проведём симуляцию для 2 действий a_1, a_2 на 10000 эпизодах, выбирая действия по ε-жадной стратегии.

За действие a_1 вознаграждение всегда $R = 0$, $q_*(s, a) = 0$.

За действие a_2 вознаграждение $R \sim \mathcal{N}(-0.2, 1)$, $q_*(s, a) = -0.2$.

```
Episodes = 10000; SeedRandom[14]; Acts = 2;
Q = Table[0, Acts]; Num = Table[0, Acts];
For[i = 1, i < Episodes, i++,
 Rew = {0, RandomVariate[NormalDistribution[]] - 0.2};
 If[RandomReal[] > 0.01 ,
      k = First@Flatten[Position[Q, Max[Q]]],
      k = RandomChoice[Range[Acts]]];
 Num[[k]] = Num[[k]] + 1;
 Q[[k]] = Q[[k]] + (Rew[[k]] + 0.9 Max[Q] - Q[[k]])/Num[[k]];]
Print["Оценки ценности действий:
Q(s,a1)=", Q[[1]], "
Q(s,a2)=", Q[[2]]]
```

```
Оценки ценности действий:
Q(s,a1)=0.0497841
Q(s,a2)=0.353094
```

С увеличением объёма данных истинно ценное действие будет обнаружено.

```
For[i = 1, i < 350000, i++,
 Rew = {0, RandomVariate[NormalDistribution[]] - 0.2};
 If[RandomReal[] > 0.01 ,
     k = First@Flatten[Position[Q, Max[Q]]],
     k = RandomChoice[Range[Acts]]];
 Num[[k]] = Num[[k]] + 1;
 Q[[k]] = Q[[k]] + (Rew[[k]] + 0.9 Max[Q] - Q[[k]])/Num[[k]];]
Print["Оценки ценности действий:
Q(s,a₁)=", Q[[1]], "
Q(s,a₂)=", Q[[2]]]
```

```
Оценки ценности действий:
Q(s,a₁)=0.0379957
Q(s,a₂)=0.0362189
```

Expected SARSA

Рассмотрим гибрид методов Q-обучения и SARSA называемый **Expected SARSA**. Пусть траектория взаимодействия агента со средой формируется по некоторой поведенческой стратегии π_b. Рассмотрим ещё одну стратегию π (она может и совпадать с π_b) и правило обновления:

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\left[R_{t+1} + \gamma \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a \mid S_{t+1})\, Q(S_{t+1}, a) - Q(S_t, A_t)\right]$$

В этом правиле цель обновления формируется по-новому.

Вместо максимума $\max_a Q(S_{t+1}, a)$ как в **Q-learning** или

вместо текущей оценки $Q(S_{t+1}, A_{t+1})$, где A_{t+1} формируется по стратегии π_b, как в **SARSA**,

для формирования цели обновления используется усреднение оценок $Q(S_{t+1}, a)$ по возможным действиям с вероятностями выбора этих действий в рамках стратегии π.

Что же оценивает Q-функция с таким правилом обновления? Напомним уравнение Беллмана для функции ценности действий стратегии π и запишем его с помощью математического ожидания:

$$q_\pi(s, a) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{s' \in S} p(s', r \mid s, a)\left(r + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(a' \mid s')\, q_\pi(s', a')\right) = \mathbb{E}\left[R_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(a' \mid S_{t+1})\, q_\pi(S_{t+1}, a') \,\middle|\, S_t = s, A_t = a\right].$$

Expected SARSA

Таким образом, Expected SARSA с указанным выше правилом обновления оценивает функцию ценности действий $q_\pi(s, a)$. При этом не важно откуда получаются отсчёты для правила обновления, усреднение проводится по всем возможным будущим вознаграждениям R_{t+1} и состояниям S_{t+1}.

То есть Expected SARSA можно запускать как метод с единой стратегией и как метод с разделённой стратегией, где поведенческая стратегия для генерации траектории более исследовательская, а целевая стратегия — это ε-жадная или жадная стратегия.

Известно, что дисперсия оценок по методу Expected SARSA меньше, чем дисперсия оценок по методу SARSA из-за того, что в SARSA цель обновления формируется по текущей оценке $Q(S_{t+1}, A_{t+1})$ и для разных действий может быть большой разброс оценок, а в Expected SARSA высчитывается ожидание по целевой стратегии.

Однако, Expected SARSA, чуть более вычислительно затратно, чем SARSA.

Expected SARSA, псевдокод

Приведём псевдокод для метода Expected SARSA с единой ε-жадной стратегией.

---

1. Инициализировать:

значения $Q(s, a) = 0$ для всех состояний $s \in \mathcal{S}$ и действий $a \in \mathcal{A}$,

стратегию π определить ε-жадно относительно Q-функции

2. Expected SARSA

Повторять для каждого эпизода:

Выбрать начальное состояние s

Повторять:

Выбрать a, следуя ε-жадной стратегии относительно Q-функции

Наблюдать r, s'

Обновить оценку

$$Q(s, a) := Q(s, a) + \alpha\left[R + \gamma \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a \mid s')\, Q(s', a) - Q(s, a)\right]$$

$s := s'$

Если s заключительное состояние, то выйти из цикла.

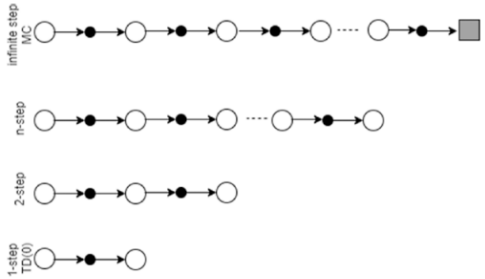
Уменьшить ε.

Вернуть стратегию π на основе найденой Q-функции.

Условия сходимости аналогичны условиям сходимости для метода SARSA (GLIE + условия Роббинса-Монро).

TD: n-шаговые методы

TD метод является 1-шаговым методом, а метод МК является ∞-шаговым методом.



Можно естественным образом привести n-шаговый алгоритм SARSA и Expected SARSA с единой стратегией, $n \geq 1$.
Цель обновления для n-шагового SARSA на k-ой итерации будет иметь вид:

$G_{t:t+n} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \ldots + \gamma^{n-1} R_{t+n} + \gamma^n Q_k(S_{t+n}, A_{t+n})$, если $0 \leq t < T - n$,

$G_{t:t+n} = G_t$, если $t \geq T - n$.

Чтобы обновить оценку для текущей пары (S_t, A_t) надо подождать n шагов, сформировать цель обновления и

$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha (G_{t:t+n} - Q(S_t, A_t))$. При $n = 1$ это обновление соответствует обычному SARSA.

TD: n-шаговые методы

Приведём псевдокод n-шагового SARSA с единой ε-жадной стратегией, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < \gamma \leq 1$, а также $n \geq 1$.

---

1. Инициализировать: значения $Q(s, a) = 0$ для всех состояний $s \in \mathcal{S}$ и действий $a \in \mathcal{A}$,

2. n-шаговый SARSA

Повторять для каждого эпизода:

Выбрать и сохранить начальное состояние S_0, $T = \infty$

Выбрать действие A_0 ε-жадно относительно Q-функции и сохранить

Повторять для $t = 0, 1, 2, \ldots$:

Если $t < T$, то:

Сделать действие A_t, наблюдать и сохранить вознаграждение R_{t+1} и новое состояние S_{t+1}

Если S_{t+1} заключительно, то: $T = t + 1$

Иначе: Выбрать и сохранить действие A_{t+1} ε-жадно относительно Q-функции

$\tau := t - n + 1$ (момент времени n шагов назад, для которого будем обновлять оценку)

Если $\tau \geq 0$:

$$G = \sum_{i=\tau+1}^{\min(\tau+n,T)} \gamma^{i-\tau-1} R_i$$

Если $\tau + n < T$, то $G := G + \gamma^n Q(S_{\tau+n}, A_{\tau+n})$

Обновить оценку $Q(S_\tau, A_\tau) := Q(S_\tau, A_\tau) + \alpha[G - Q(S_\tau, A_\tau)]$

Если $\tau = T - 1$, то выйти из цикла.

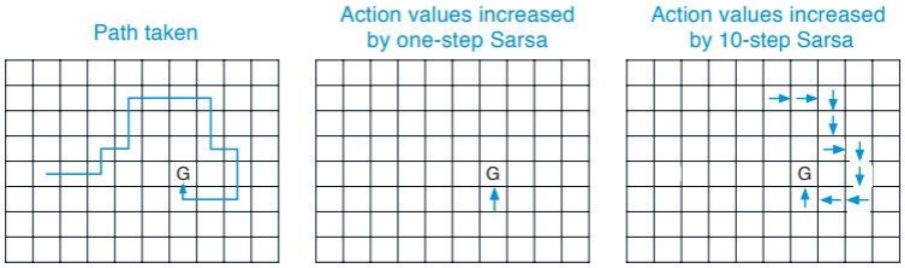
Уменьшить ε

TD: n-шаговые методы

Условия для сходимости n-шагового SARSA аналогичны SARSA:

GLIE + условия Роббинса-Монро на шаг обучения.

Ниже демонстрируется сравнение 1-шагового и 10-шагового SARSA



Стрелки на рисунках указывают, какие ценности действий были изменены в случае одного и второго методов. Одношаговый метод повышает ценность лишь одного последнего действия. n-Шаговый SARSA обновляет ценности последних n действий, что повышает эффективность обучения в рамках одного эпизода.