Formelsamling i MAT1013 Matematikk 1T

Innhold

Tall og algebra 2
Geometri 5
Sannsynlighet 8
Funksjoner 10

Tall og algebra

Potenser

Video

Definisjoner

$$a^n \overset{def}{=} \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ ganger}} \qquad a^{-n} \overset{def}{=} \frac{1}{a^n} \qquad a^0 \overset{def}{=} 1$$

Regneregler

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(a^n\right)^m = a^{m\cdot n}$$

Tall på standardform

Video

Et tall a er skrevet på standardform dersom

$a = \pm k \cdot 10^n$ $\quad 1 \le k < 10$ og n er et helt tall

Kvadratrøtter

Video

Definisjon

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \qquad a \ge 0$

Regneregler

Multiplikasjonsregelen $\quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad a \ge 0$ og $b \ge 0$

Divisjonsregelen $\quad \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}} \qquad a \ge 0$ og $b > 0$

N-te-røtter

Video

Definisjon

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad a \geq 0 \text{ dersom } n \text{ er et partall.}$$

Regneregler

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad a > 0$ og n er et naturlig tall.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ $\quad a > 0$, $n > 0$ og m og n er hele tall.

Multiplikasjonsregelen $\quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Divisjonsregelen $\quad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Bokstavregning

Video

Tall multiplisert med parentes.

$$a \cdot (c + d) = ac + ad$$

Multiplikasjon av to parenteser.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Kvadratsetningene

Video

Første kvadratsetning

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Andre kvadratsetning

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Konjugatsetningen (tredje kvadratsetning)

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Andregradslikninger

Video

***abc*-formelen**

Andregradslikningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \geq 0$$

Nullpunktmetoden

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

der x_1 og x_2 er løsningene av den generelle andregradslikningen $ax^2 + bx + c = 0$.

Vekstfaktor

Video

Når du skal øke en verdi med p %, blir vekstfaktoren $1 + \dfrac{p}{100}$.

Når du skal redusere en verdi med p %, blir vekstfaktoren $1 - \dfrac{p}{100}$.

I begge tilfeller må du multiplisere gammel verdi med vekstfaktoren for å få ny verdi.

Logaritmer

Video

Definisjon

Logaritmen (den briggske logaritmen) til et positivt tall er eksponenten i den potens av 10 som gir tallet

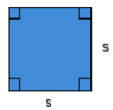
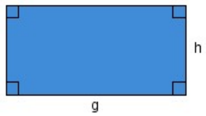
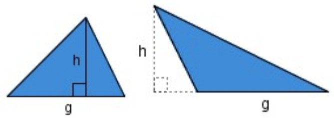
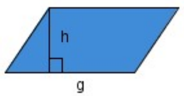
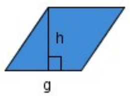
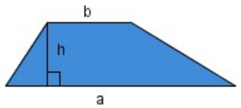
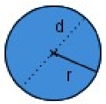
$$10^{\lg a} \overset{def}{=} a$$

Regneregel

$$\lg a^x = x \cdot \lg a$$

Geometri

Arealformler

Kvadrat	Rektangel	Trekant
 $A=s^2$	 $A=g\cdot h$	Video  $A=\frac{g\cdot h}{2}$
Parallellogram  $A=g\cdot h$	**Rombe**  $A=g\cdot h$	**Trapes**  $A=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$
Sirkel  $A=\pi r^2$ $d=2r$		

Pytagoras setning

Video

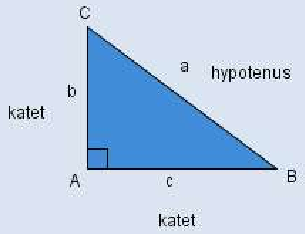
Den lengste siden i en rettvinklet trekant kaller vi **hypotenus**.
Dette er siden som står «motsatt» av den rette vinkelen.

De to korteste sidene kaller vi **kateter**.

Pytagoras` setning:

$$\text{hypotenus}^2=\text{katet}^2+\text{katet}^2$$

$$a^2=b^2+c^2$$



Trigonometri

Video

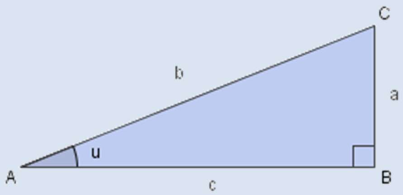
La trekant ABC være rettvinklet slik figuren viser.

Vi definerer da

$$\sin u=\frac{\text{motstående katet}}{\text{hytpotenus}}=\frac{a}{b}$$

$$\cos u=\frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hytpotenus}}=\frac{c}{b}$$

$$\tan u=\frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}}=\frac{a}{c}$$



Generell definisjon

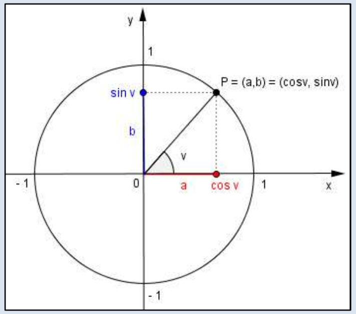
Plasser vinkel v i et koordinatsystem sammen med enhetssirkelen. Se figuren til høyre.

La P være skjæringspunktet mellom vinkelens venstre vinkelbein og enhetssirkelen.

Vi får

$$\cos v = \text{førstekoordinaten til } P$$

$$\sin v = \text{andrekoordinaten til } P$$



Vi får også at

$$\sin v=\sin(180°-v)$$

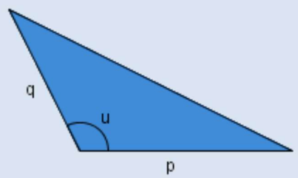
$$\cos v=-\cos(180°-v)$$

Arealsetningen

La u være vinkelen mellom to sider p og q i en trekant.

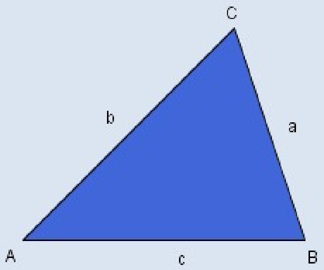
Arealet av trekanten er gitt ved formelen

$$T=\frac{1}{2}\cdot p\cdot q\cdot \sin u$$



Trigonometri – fortsettelse

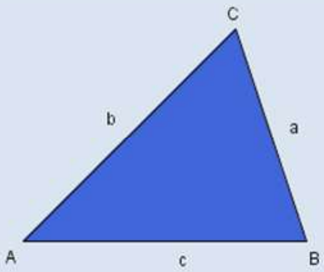
Sinussetningen



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Forholdet mellom sinus til en vinkel og lengden av motstående side er lik for alle vinklene i trekanten.

Cosinussetningen (den utvidete pytagoreiske setning)



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

I en trekant er kvadratet av en side alltid lik summen av kvadratene av de to andre sidene minus to ganger produktet av disse sidene og cosinus til deres mellomliggende vinkel.

Vi kan altså også skrive setningen på følgende to andre måter

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Sannsynlighet

Definisjon

Video

Dersom vi gjentar et forsøk mange nok ganger, vil **den relative frekvensen for et utfall nærme seg ett bestemt tall**. Dette tallet sier vi er **sannsynligheten** for utfallet.

Vi bruker bokstaven P for sannsynlighet etter **probability**, som er det engelske ordet for sannsynlighet.

Ved sannsynlighet gjelder

- Sannsynligheten for hvert enkelt utfall er **et tall mellom 0 og 1** (0 % og 100 %)
- Sannsynligheten for alle utfallene er **til sammen lik 1** (100 %)

Addisjon av sannsynligheter

Video

Den generelle addisjonssetningen for sannsynligheter

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap \mathrm{B})$$

$A \cup B$ består av de utfall som er med i **enten** A **eller** B **eller i både** A **og** B
$A \cup B$ leser vi som «**A union B**»

$A \cap B$ består av alle utfall som er med i **både** A **og** B
$A \cap B$ leser vi som «**A snitt B**»

Uniform sannsynlighet

I en uniform sannsynlighetsmodell er alle utfall like sannsynlige. Sannsynligheten for en hendelse A er gitt ved

$$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{\text{antall gunstige utfall for } A}{\text{antall mulige utfall}}$$

Komplementære hendelser

For alle hendelser gjelder at

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$\overline{A}$ betyr «ikke A».

Produktsetningen

Video

Uavhengige hendelser

To hendelser er **uavhengige** hvis en opplysning om at den ene har inntruffet ikke endrer sannsynligheten for at den andre skal inntreffe.

For to **uavhengige hendelser,** A og B er

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$A \cap B$ leser vi som «***A* snitt *B***». Det innebærer at **både** *A* **og** *B* inntreffer.

Avhengige hendelser

Sannsynligheten for at *B* inntreffer når vi vet at *A* har inntruffet skriver vi som $P(B|A)$ og leses som «sannsynligheten for *B* gitt *A*». Vi kaller det for betinget sannsynlighet.

Sannsynligheten for at to hendelser, **både** *A* **og** *B* skal inntreffe, er

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Setningene gjelder også for en **serie** av hendelser.

Funksjoner

Definisjon

Video

Generelt sier vi at y **er en funksjon av** x dersom **hver verdi av** x **gir nøyaktig en verdi av** y **.**

For å vise at y er en funksjon av x, skriver vi ofte $y(x)$ (som vi leser « y av x »).

Lineære funksjoner

Video

En **lineær funksjon** er en funksjon som kan skrives på formen

$f(x) = ax + b$ der a og b er konstante tall.

Det er også vanlig å bruke bokstaven y for en generell funksjon.

Da brukes vanligvis skrivemåten

$$y = ax + b$$

Her er det underforstått at y er en funksjon av x .

Ettpunktsformelen

Video

Likningen for en rett linje gjennom punktet (x_1, y_1) med stigningstall a er gitt ved

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Stigningstallet a er gitt ved:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Nullpunkt

Med et **nullpunkt** til en funksjon f , mener vi et punkt på grafen hvor **andrekoordinaten er lik null**. Det er med andre ord et punkt hvor **grafen til funksjonen skjærer** x **- aksen**.

I nullpunktet er $f(x) = 0$.

Andregradsfunksjoner

Video

En funksjon der funksjonsuttrykket inneholder et andregradsledd, det vil si et ledd med x^2, kalles en andregradsfunksjon. Alle slike funksjoner kan skrives på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Grafen til en andregradsfunksjon kallar vi en **parabel**.

Polynomfunksjoner

Video

En **polynomfunksjon** er en funksjon med ett eller flere ledd der hvert ledd består av en konstant multiplisert med x^n, der n er et ikke-negativt heltall. Den høyeste eksponenten i uttrykket gir oss **graden til polynomfunksjonen**.

$f(x) = 2x^3 + x - 4$ er **en tredjegradsfunksjon**, fordi den høyeste eksponenten i uttrykket er tre.

$g(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ er **en fjerdegradsfunksjon**, fordi den høyeste eksponenten i uttrykket er fire.

Andre funksjonstyper

Video

Rasjonal funksjon	$f(x) =$ en brøk der telleren og nevneren er polynomer	
Potensfunksjon	$f(x) = a \cdot x^b$	a og b er konstante tall
Eksponentialfunksjon	$f(x) = a \cdot b^x$	a og b er konstante tall

Video

Ekstremalpunkter

Med ekstremalpunkter til en funksjon mener vi punkter hvor funksjonen har en maksimalverdi eller en minimalverdi innenfor et begrenset område.

I ekstremalpunkter er $f'(x) = 0$.

Vekstfart

Video

Den gjennomsnittlige vekstfarten for en funksjon $f(x)$ når x vokser fra x_1 til x_2, er lik **stigningstallet til sekanten** gjennom punktene $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Den momentane vekstfarten for en funksjon $f(x)$ i punktet x er lik stigningstallet til tangenten til grafen i dette punktet.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Den momentane vekstfarten, $f'(x)$, i et punkt kalles også **den deriverte** i et punkt.

Derivasjonsregler

Konstant funksjon	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Lineær funksjon	$f(x) = k \cdot x$	$f'(x) = k$
Potensfunksjon	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Potensfunksjon multiplisert med konstant	$f(x) = k \cdot x^n$	$f'(x) = k \cdot (x^n)' = k \cdot n \cdot x^{n-1}$
Summer og differanser	$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Funksjonsdrøfting

Video

Når **grafen stiger**, er **den deriverte positiv**. Det motsatte gjelder også. Hvis **den deriverte er positiv,** så **stiger grafen.**

Når **grafen synker**, er **den deriverte negativ**. Det motsatte gjelder også. Hvis **den deriverte er negativ,** så **synker grafen.**

Når grafen har **topp- eller bunnpunkt**, er **den deriverte lik null**.