RWTHAACHEN

Prof. Dr. Maria Westdickenberg
Pontdriesch 14-16
52062 Aachen

Tel.: +49 241 80-94599
Sekr.: +49 241 80 94927
maria@math1.rwth-aachen.de

B. Sc.
WiSe 2021

16.02.2022
Dauer: 90 Minuten

Klausur: Höhere Mathematik I

Aufgabe 1 **[2+2+2+2+2+2=12 Punkte]**

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Sollte Ihre Antwort „falsch“ lauten, geben Sie eine Begrüdung, beispielsweise in Form eines Gegenbeispiels an. In diesem Fall gäbe es je einen Punkt für die Antwort und einen Punkt für das Gegenbeispiel beziehungsweise die Begründung. Sollte Ihre Antwort „richtig“ lauten, gäbe es 2 Punkte für die Antwort.
Es gibt keinen Punktabzug für falsche Antworten.

Frage	**Antwort**
Wenn die Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sind, so ist die Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $c_n := a_n \cdot b_n$ ebenfalls monoton wachsend.	
Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, so ist f auch monoton.	
Für alle Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A, B \neq \emptyset$ gilt $\sup(A \cup B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.	
Die Summe zweier rationaler Zahlen ist rational.	
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ist konvergent.	
Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $\mathrm{Kern}(\underline{\underline{A}}) = \{\underline{0}\}$. Dann ist $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ für jedes $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.	

Lösung

(a) FALSCH: Sei $a_n = n^2, b_n := \frac{-1}{n}$. Dann ist $c_n = -n$ nicht monoton wachsend. **[2]**

(b) FALSCH: **[1]**

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Nur zu sagen, die Funktion soll unstetig sein genügt als Argument nicht. Zwar muss jedes Gegenbeispiel eine Unstetigkeit besitzen, aber nicht jede unstetige Funktion ist auch ein Gegenbeispiel.

(c) FALSCH: Sei $A = (-2, -1,), B = (1, 2)$. Dann gilt $\sup(A \cup B) = 2 > -1 + 2 = \sup(A) + \sup(B)$ **[2]**

(d) RICHTIG **[2]**

(e) RICHTIG **[2]**

(f) RICHTIG **[2]**

Aufgabe 2 **[5+5+7+4=21 Punkte]**

Es sei die Funktion $f : (-\infty, 5] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 0, \\ 1+x^2 & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 2+4\sqrt{x} & \text{für } 1 < x \leq 5. \end{cases}$$

Hinweis: Es kann hilfreich sein, die Funktion zu skizzieren.

(a) Untersuchen Sie in welchen Punkten die Funktion stetig ist.

(b) Untersuchen Sie in welchen Punkten die Funktion differenzierbar ist.

(c) Bestimmen Sie das globale Minimum und Maximum von f, sofern diese existieren.

(d) Bestimmen Sie, ob die Funktion auf den folgenden Intervallen

$$(i)\ (-\infty, 0], \qquad (ii)\ (1,5], \qquad (iii)\ [-1, \frac{1}{2}]$$

konvex ist.

Lösung

(a) Die Funktion f ist zunächst stetig auf $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,5]$ als Komposition stetiger Funktionen. **[1]**
Wichtig ist, dass hier offene Intervallgrenzen stehen! Prüfe die Stellen $x = 0$ und $x = 1$ noch:
f ist stetig in $x = 0$ mit $f(0) = 1$, **[1]**
da der links- und rechtsseitige Grenzwert mit dem Funktionswert $f(0)$ übereinstimmen.

$$\lim_{x \nearrow 0} x + 1 = 1 = \lim_{x \searrow 0} 1 + x^2. \qquad \textbf{[1]}$$

f ist nicht stetig in $x = 1$, **[1]**
denn linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert sind nicht gleich.

$$\lim_{x \nearrow 1} 1 + x^2 = 2 \neq 6 = \lim_{x \searrow 1} 2 + 4\sqrt{1}. \qquad \textbf{[1]}$$

(b) f ist auf den Intervallen $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,5]$ als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. **[1]**
(Alternative: Auf $(-\infty, 0)$ ist f differenzierbar mit $f'(x) = 1$. Auf $(0,1)$ ist f differenzierbar mit $f'(x) = 2x$. Auf $(1,5]$ differenzierbar mit $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.)

Prüfe noch die Stellen $x = 0$ und $x = 1$:

- $x = 0$:
  Mit $f(0) = 1$ folgt für den linksseitigen Grenzwert

  $$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x}{x} = 1 \qquad \textbf{[1]}$$

  und für den rechtsseitigen Grenzwert

  $$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1 + x^2 - 1}{x} = \lim_{x \searrow 0} x = 0. \qquad \textbf{[1]}$$

  Da die beiden Grenzwerte nicht übereinstimmen, ist f in $x = 0$ nicht differenzierbar. **[1]**

- $x = 1$: In $x = 1$ ist die Funktion nicht stetig, somit ist sie in $x = 1$ auch nicht differenzierbar. **[1]**
  Alternative gibt auch nur 1 Punkt: Mit $f(1) = 2$ folgt für den linksseitigen Grenzwert
$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1 + x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} x + 1 = 2$$
  und für den rechtsseitigen Grenzwert
$$\lim_{x \searrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{2 + 4\sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{4\sqrt{x}}{x - 1} = \infty.$$
  Da die beiden Grenzwerte nicht übereinstimmen, ist f in $x = 1$ nicht differenzierbar.
  Es genügt nicht aus die Grenzwerte der Ableitung zu überprüfen, sprich $\lim_{x \nearrow x_0} f'(x) = \lim_{x \searrow x_0}$. Betrachtet man zu Beispiel die Funktion $f(x) = \sin(1/x)x^2, x \neq 0$ und $f(x) = 0, x = 0$, so ist diese Funktion zwar differenzierbar, aber $\lim_{x \to 0} f'(x)$ existiert nicht. Alternativ kann man auch die gegebene Funktion im Punkt $x_0 = 1$ betrachten. Hier sind die beiden Grenzwerte der Ableitung gleich und dennoch ist die Funktion nicht differenzierbar.

(c) Prüfe das hinreichende Kriterium für die Existenz von kritischen Punkten.

- Untersuche f auf dem Intervall $(\infty, 0)$: $f'(x) = 1 \neq 0$. Also hat f keine kritischen Punkte in diesem Intervall. **[1]**
- Untersuche f auf dem Intervall $(0, 1)$: $f'(x) = 2x = 0$ ist erfüllt für $x = 0 \notin (0, 1)$. Also hat f keine kritischen Punkte in diesem Intervall. **[1]**
- Untersuche f auf dem Intervall $(1, 5]$: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ hat keine Nullstellen. Also hat f keine kritischen Punkte im diesem Intervall. **[1]**
  Betrachte noch die Verbindungsstelle $x = 0$:
$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 2x, & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases} > 0$$
  hier ist kein VZW. Da f stetig im Punkt $x = 0$ ist, liegt somit auch keine Extremstelle in $x = 0$, vor. **[1]**
  In $x = 1$ liegt auch keine Extremstelle vor, denn
$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } 0 < x < 1 \\ \frac{2}{\sqrt{x}}, & \text{für } 1 < x < 5. \end{cases} > 0$$
  und $\lim_{x \nearrow 1} f(x) < \lim_{x \searrow 1} f(x)$. **[1]**
  In $x = 5$ liegt ein globales Maximum, denn $f'(x) > 0$ auf allen Intervallen und $f(5) = 2 + 4\sqrt{5} \geq f(x)\ \forall x \in (-\infty, 5]$. **[1]**
  Ein globales Minimum liegt nicht vor, da $\lim_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$. **[1]**
  Alternative Lösung für die (c):
  Für $x \in (-\infty, 0)$ gilt: $f'(x) = 1 > 0$. **[1]**
  Für $x \in (0, 1)$ gilt: $f'(x) = 2x > 0$. **[1]**
  Für $x \in (1, 5]$ gilt: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$. **[1]**
  Da f stetig auf $(-\infty, 1]$ und $(1, 5]$ ist, gilt also
  $\max_{x \in (-\infty, 0]} f(x) = f(0) = 1$, **[1]**
  $\max_{x \in (0, 1]} f(x) = f(1) = 2$, **[1]**
  $\max_{x \in (1, 5]} f(x) = f(5) = 2 + 4\sqrt{5}$,
  also folgt: $\max_{x \in (-\infty, 5]} f(x) = \max\{1, 2, 2 + 4\sqrt{5}\} = 2 + 4\sqrt{5}$ **[1]**
  Des Weiteren gilt $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
  Daher gibt es kein globales Minimum. **[1]**

Zum einen ist es hier relevant, dass die Funktion in den Punkten 0 und 1 nicht differenzierbar ist, daher kann dort nicht über die Ableitung argumentiert werden.
Des Weiteren wäre es falsch zu sagen, die Funktion ist auf dem Intervall $(0, 1]$ und auf dem Intervall $(1, 5]$ monoton wachsend und daher muss Sie auch auf $(0, 5]$ monoton wachsend sein. Da die Funktion nicht stetig im Punkt 1 ist, muss zusätzlich das Argument $f(1) < \lim_{x\searrow 1} f(x)$ angeführt werden.
Es reicht insbesondere auch nicht aus zu zeigen, dass keine kritischen Punkte (im Sinne von $f'(x) = 0$) existieren und anschließend $f(0), f(1)$ und $f(5)$ zu vergleichen. Auch hier ist die Unstetigkeitsstelle relevant und es muss zusätzlich $\lim_{x\searrow 1} f(x)$ betrachtet werden. Wenn man über Monotonie argumentiert, ist das nicht notwendig.

(d)
- $(-\infty, 0]$:
  Es ist zu zeigen, dass für alle $x, y \in (-\infty, 0]$ und $0 < t < 1$ gilt:
  $$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$
  Hier gilt für $f(x) = 1 + x$:
  $$\begin{aligned} f((1-t)x + ty) &= (1-t)x + ty + 1 = 1 - t + (1-t)x + t(1+y) \\ &= (1-t)(1+x) + t(1+y) = (1-t)f(x) + tf(y). \end{aligned}$$ **[1]**

  Somit ist die Funktion auf dem Intervall $(-\infty, 0]$ konvex. **[1]**
  (Alternativ: f ist auf diesem Intervall stetig und da $f'' = 1 > 0$ **[1]**
  ist die Funktion konvex. **[1]**
  ohne Argumentation der Stetigkeit: LEDIGLICH 1 Punkt).
- Da auf $(1, 5]$ die Funktion stetig ist und $f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^3}} < 0$, ist die Funktion dort nicht konvex. **[1]**
- $[-1, \frac{1}{2}]$: f ist nicht konvex. Setze z.B $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ und $t = \frac{1}{2}$, dann ergibt sich
  $$\begin{aligned} &f\left((1-0,5)\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = f(0) = 1 \\ &\not\leq \frac{7}{8} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$ **[1]**

Auch hier muss beachtet werden, dass f in den Punkten 0 und 1 nicht differenzierbar ist. Daher kann nicht gesagt werden $f''(x) = 0$ für alle $x \in (-\infty, 0]$.
Wenn eine Funktion auf $(a.b)$ und auf (b, c) konvex ist, so muss Sie nicht auf (a, c) konvex sein (siehe c) - die Umkehrung gilt schon. Also wenn eine Funktion auf (a, c) konvex ist, so ist Sie auch auf jedem Teilintervall konvex.

Aufgabe 3 **[6+3+6+9=24 Punkte]**

Hinweis: Das Konvergenzverhalten der harmonischen und der alternierenden harmonischen Reihe sind aus der Vorlesung bekannt und können in dieser Aufgabe ohne Beweis verwendet werden.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 - k + 1 = n^3 + n^2 + n$$

gilt.

(b) Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass die Bedingung $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nicht hinreichend ist, damit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$\text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n!}$$

(d) Bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x-1)^n$$

konvergiert. Geben Sie Ihr Ergebnis als Intervall an.

Lösung

(a) Sei $A(n) : \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - k + 1 = n^3 + n^2 + n$ für $n \in \mathbb{N}$.

<u>(IA)</u> n=1:

$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 - k + 1 = \sum_{k=1}^{1} 3k^2 - k + 1 = 3 \cdot 1^3 - 1 + 1 = 3 = 1^3 + 1^2 + 1 = n^3 + n^2 + n \qquad \textbf{[1]}$$

<u>(IS)</u>: Zeige nun $A(n+1)$ unter der Vorrausetzung, dass $A(n)$ gilt. **[1]**

Dazu gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 3k^2 - k + 1 &= \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - k + 1 + 3(n+1)^2 - (n+1) + 1 && \textbf{[1]} \\
&\overset{A(n)}{=} n^3 + n^2 + n + 3(n+1)^2 - (n+1) + 1 && \textbf{[1]} \\
&= n^3 + n^2 + n + 3n^2 + 6n + 3 - n - 1 + 1 \\
&= n^3 + 4n^2 + 6n + 3 \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\
&= (n+1)^3 + (n+1)^2 + n + 1, && \textbf{[1]}
\end{aligned}$$

also ist $A(n+1)$ wahr.

Dann gilt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. **[1]**

Hier ist es wichtig, bei dem Schritt, in dem man A(n) bzw. die Induktionsvoraussetzung nutzt, dies auch kenntlich zu machen, also die Begründung anzugeben.

(b) Betrachte die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. **[1]**

Aus dem Kommentar nach Korollar 7.1.5 weiß man, dass diese Reihe divergiert. **[1]**

Gleichzeitig ist $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. **[1]**

(c) i) Definiere $a_n := \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Dann ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wende das Wurzelkriterium (Satz 7.2.2) an. **[1]**

Mit Formel (4.3.2) erhält man

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\right)^{-1} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1} \qquad \textbf{[1]}$$

Da

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} < 1 \qquad \textbf{[1]}$$

gilt, konvergiert die Reihe.

ii) Definiere $b_n := \frac{2^n+1}{n!}$.

Dann ist $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit dem Quotientenkriterium (Satz 7.2.1) erhält man **[1]**

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{2^{n+1}+1}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n+1} = \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\frac{1}{n+1} = \frac{2+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}\frac{1}{n+1} \qquad \textbf{[1]}$$

Da

$$\frac{2+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot 0 = 0 < 1 \qquad \textbf{[1]}$$

gilt, konvergiert die Reihe.

Auch hier ist es wichtig, nicht nur einfach das Kriterium anzuwenden, sondern es auch zu benennen. i) Bei der Grenzwertbetrachtung darf man nicht erst, dass in den Klammern betrachten und dann das Resultat mit n potenzieren und erneut n gegen unendlich schicken, sondern man muss alle n gleichzeitig betrachten.

(d) Definiere $a_n := \frac{2^n}{n}(x-1)^n$.

Für $x = 1$ ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit konvergiert die Reihe. **[1]**

Sei nun $x \neq 1$. Wende nun das Quotientkriterium (Satz 7.2.1) an. Halte dafür fest, dass $a_n \neq 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. **[1]**

Nun ist

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{2^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}\frac{n}{2^n(x-1)^n}\right| = \left|\frac{2n(x-1)}{n+1}\right| = 2\frac{n}{n+1}|x-1| \\ &= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)|x-1| \xrightarrow{n\to\infty} 2|x-1| \end{aligned} \qquad \textbf{[2]}$$

und somit konvergiert die Reihe, wenn $2|x-1| < 1$, also wenn $|x-1| < \frac{1}{2}$, gilt und sie divergiert, wenn $|x-1| > \frac{1}{2}$.

Betrachte nun die Fälle, in denen $|x-1| = \frac{1}{2}$ ist, also wenn $x = \frac{1}{2}$ oder wenn $x = \frac{3}{2}$ ist.

- $x = \frac{1}{2}$: In diesem Fall vereinfacht sich die Reihe zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \qquad [\mathbf{1}]$$

  und diese Reihe konvergiert als alternierende harmonische Reihe. **[1]**

- $x = \frac{3}{2}$: In diesem Fall vereinfacht sich die Reihe zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{3}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad [\mathbf{1}]$$

  und damit divergiert diese als harmonische Reihe. **[1]**

Zusammengefasst erhält man, dass die Potenzreihe konvergiert für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ und divergiert für alle anderen $x \in \mathbb{R}$. **[1]**

Im Vergleich zur Aufgabe 3c sind hier die Beträge relevant, da die Folge, über die summiert wird, im Allgemeinen nicht positiv ist. Wenn das Wurzelkriterium angewendet wird, ist der extra Fall x =0 nicht notwendig.

Aufgabe 4 **[9+5+6=20 Punkte]**

Es sei

$$f(x) := x^2 + \sin(x).$$

(a) Sie wollen die Lösung von $f'(x) = 0$ mit der Sekantenmethode auf $[-2\pi, 0]$ approximieren. Setzen Sie $I_0 := [-2\pi, 0]$ und berechnen Sie den ersten Schritt. Geben Sie insbesondere das zweite Intervall I_1, das die Methode liefert, an.

(b) Sie wollen die Lösung von $f'(x) = 0$ mit dem Newtonsche Verfahren und Startwert $x_0 = 0$ approximieren. Bestimmen Sie, ob das Newtonsche Verfahren geeignet ist. Falls nicht, warum nicht? Falls ja, berechnen Sie den zweiten Wert x_1.

(c) Zeigen Sie, dass f' keine zweite Nullstelle besitzt.

Lösung

(a) $f(x) = x^2 + \sin(x),\ f' = 2x + \cos(x)$ **[1]**

Definiere $g(x) :\ = f'(x)$

$$g(-2\pi) = -4\pi + \cos(-2\pi) < 0,\ g(0) = \cos(0) = 1 > 0 \quad \textbf{[2]}$$

$$\Rightarrow g(-2\pi) \cdot g(0) < 0 \quad \textbf{[1]}$$

$$\alpha := -2\pi - g(-2\pi)\frac{0-(-2\pi)}{g(0) - g(-2\pi)} = -2\pi - (-4\pi + 1)\frac{0-(-2\pi)}{1-(-4\pi+1)} = \frac{-1}{2} \quad \textbf{[2]}$$

Nun gilt

$$g(\alpha) = -1 + \cos\left(\frac{-1}{2}\right) < 0$$

, da auf $(-\pi, 0)$ gilt: $|\cos(x)| < 1$. **[2]**

Das Intervall nach dem ersten Schritt ist gegeben durch: $[\frac{-1}{2}, 0]$ **[1]**

(b) f ist offensichtlich in C^2 und $f''(0) = 2 \neq 0$, damit ist das Newtonverfahren anwendbar. **[1]**

Das Verfahren ist also geeignet da die Voraussetzung erfüllt ist. Es war nicht danach gefragt wie gut oder schnell es eine Nullstelle approximiert.

Definiere:

$$x_{n+1} :\ = x_n - \frac{g(x_n)}{g_n'(x_n)} \quad \text{für} \quad g(x_n), g'(x_n) \neq 0 \quad \textbf{[2]}$$

$$g(x_0) = 1 \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0 - \frac{1}{2 - \sin(0)} = -\frac{1}{2} \quad \textbf{[2]}$$

(c) Verwende den Mittelwertsatz: **[2]**

Es gilt $f''(x) = 2 - \cos(x) > 0$. **[1]**

Sei x_0 eine Nullstelle von $f'(x)$, dann gilt

$$\frac{f'(x_0) - f'(x)}{x_0 - x} = f''(\xi) > 0. \quad \textbf{[1]}$$

Daraus folgt $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$ und $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$, sodass es keine zweite Nullstelle geben kann. **[2]**

Der Zwischenwertsatz ist für diese Aufgabe nicht nützlich, da es nur Existenz, aber nicht Eindeutigkeit zeigen kann. Falls man mit Monotonie begründen will, dann braucht man strenge Monotonie, es gibt monotone Funktionen mit mehreren Nullstellen.

Aufgabe 5 **[9+5+9=23 Punkte]**

(a) Es sei

$$\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns, Kern($\underline{\underline{A}}$), und bestimmen Sie die Dimension des Bildes, Bild($\underline{\underline{A}}$).

Es sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum reeller Polynome vom Grad $k \leq 2$ vereinigt mit dem Nullpolynom.

(b) Sei $U := \{p \in \mathcal{P}_2 : p(0) = 0\}$. Zeigen Sie, dass U ein Teilraum von $\mathcal{P}_2$ ist.

(c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Polynome

$$p_1(x) := (1-a)x^2 + 2x + 4, \quad p_2(x) := (2-a)x + 2, \quad p_3(x) := x^2 + x + (1-a)$$

linear unabhängig in $\mathcal{P}_2$?

Lösung

(a) (1) Zunächst bestimmen wir den Kern von $\underline{\underline{A}}$: Wir bestimmen also alle $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{0}$. **[1]**
Als erweiterte Matrix ergibt sich dann

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \quad \textbf{[2]}$$

Die letzte Gleichung ist trivialerweise erfüllt und die ersten beiden Gleichungen ergeben

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ -3x_2 - 5x_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= -x_2 - 2x_3, \\ x_2 &= -\frac{5}{3}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= -\left(-\frac{5}{3}x_3\right) - 2x_3 = -\frac{1}{3}x_3, \\ x_2 &= -\frac{5}{3}x_3, \end{cases} \quad \textbf{[2]}$$

wobei $x_3 \in \mathbb{R}$ ein freier Parameter ist. Somit ist die Lösungsmenge bzw. der Kern $K_{\underline{\underline{A}}}$ von $\underline{\underline{A}}$ gegeben durch

$$K_{\underline{\underline{A}}} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}c \\ -\frac{5}{3}c \\ c \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} d \\ 5d \\ -3d \end{pmatrix} \middle| \, d \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}. \quad \textbf{[1]}$$

Da $\underline{v} := (1, 5, -3)^T \neq \underline{0}$ ist, ist $\{\underline{v}\}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ und daher auch schon eine Basis von $K_{\underline{\underline{A}}}$. **[1]**

(2) Für die Dimension des Bildes $B_{\underline{\underline{A}}}$ von $\underline{\underline{A}}$ gilt nach der Dimensionsformel (Satz 8.2.4):

$$\dim(B_{\underline{\underline{A}}}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(K_{\underline{\underline{A}}}) = 3 - 1 = 2. \quad \textbf{[2]}$$

(b) Zunächst ist $\mathcal{P}_2$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und per Definition ist $U \subseteq \mathcal{P}_2$. Ferner gilt: **[1]**

- Sei $r := 0 \in \mathcal{P}_2$ das Polynom, das konstant Null ist. Dann ist $r(0) = 0$ und somit $r \in U$. **[1]**

- Seien $p, q \in U$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha \cdot p + \beta \cdot q \in \mathcal{P}_2$, da $\mathcal{P}_2$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Zudem gilt **[1]**
$$(\alpha \cdot p + \beta \cdot q)(0) = \alpha \cdot p(0) + \beta \cdot q(0) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$
sodass $\alpha \cdot p + \beta \cdot q \in U$ folgt. **[1]**

Damit ist U ein Teilraum von $\mathcal{P}_2$ (Definition 8.1.2). **[1]**

(c) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha_1 \cdot \big[(1-a)x^2 + 2x + 4\big] + \alpha_2 \cdot \big[(2-a)x + 2\big] + \alpha_3 \cdot \big[x^2 + x + (1-a)\big] = 0 \qquad [\mathbf{1}]$$
$$\Leftrightarrow \big[4\alpha_1 + 2\alpha_2 + (1-a)\alpha_3\big] \cdot 1 + \big[2\alpha_1 + (2-a)\alpha_2 + \alpha_3\big] \cdot x + \big[(1-a)\alpha_1 + \alpha_3\big] \cdot x^2 = 0. \qquad [\mathbf{1}]$$

Da die Monome $\{1, x, x^2\}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind, folgt daraus **[1]**

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + (1-a)\alpha_3 & = 0, \\ 2\alpha_1 + (2-a)\alpha_2 + \alpha_3 & = 0, \\ (1-a)\alpha_1 + \alpha_3 & = 0. \end{cases} \qquad (1)\ [\mathbf{1}]$$

Um dieses Gleichungssystem zu vereinfachen, schreiben wir es in eine erweiterte Matrix und benutzen das Gaußsche Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1-a & 0 \\ 2 & 2-a & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \frac{1}{4}(1-a)\cdot R_1]{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & \frac{1}{2}(1+a) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(a-1) & \frac{1}{4}(3+2a-a^2) & 0 \end{array}\right) \qquad [\mathbf{1}]$$
$$\xrightarrow[R_3 \to (-4)\cdot R_3]{R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & \frac{1}{2}(1+a) & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a-4 & 0 \end{array}\right) \qquad (2)\ [\mathbf{1}]$$

Unter Verwendung der Rückwärtselimination hat das Gleichungssystem in (1) damit genau dann eine eindeutige Lösung, und zwar $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$, wenn alle Einträge auf der Hauptdiagonalen der Matrix im linken Teil von (2) von Null verschieden sind, also wenn **[1]**

$$\begin{cases} 4 & \neq 0, \\ 1-a & \neq 0, \\ a^2 - 3a - 4 & \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & \neq 1, \\ (a-4)(a+1) & \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 4\} \qquad [\mathbf{1}]$$

gilt. Folglich sind die drei gegebenen Polynome genau dann linear unabhängig in $\mathcal{P}_2$, wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 4\}$ ist. **[1]**

Viel Erfolg!