



ساختمان داده و الگوریتم‌ها

۴ تیرماه ۱۴۰۱

استاد: مهدی صفرنژاد

گردآورندگان: محمدرضا دویران، زهره عباسی، کسری امانی

بررسی و بازبینی: کهد آیینی

مهلت امتحان: ساعت ۱۸:۰۰

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

امتحان پایانترم

سوالات (۱۰۰ نمره)

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

به موارد زیر توجه کنید.

- مدت امتحان ۱۵۰ دقیقه است.
- امیدواریم که تا این جای کلاس با تفکر الگوریتمی آشنا شده باشید و با همین تفکر به سوالات پاسخ دهید.
- ۱. (۱۰ نمره) با استفاده از مجموعه‌های مجزا، الگوریتمی ارائه دهید که وجود دور در گراف را تشخیص دهد.
- ۲. (۱۰ نمره) تعریف: یک گراف جهت‌دار را قویاً همبند (Strongly Connected) می‌نامیم، در صورتی که از هر رأس به هر رأس دیگر مسیری وجود داشته باشد.
الگوریتمی از مرتبه $O(V + E)$ ارائه دهید که قویاً همبند بودن یک گراف جهت‌دار را بررسی کند.
- ۳. (۱۵ نمره) الگوریتمی ارائه دهید که کوتاه‌ترین مسیر از راس s به راس t را در یک گراف با یال‌های وزن‌دار که تنها وزن یک یال منفی است، پیدا کند.
(راهنمایی: ابتدا وجود دور با طول منفی در گراف را بررسی کنید، سپس کوتاه‌ترین مسیر را پیدا کنید.)
- ۴. (۱۰ نمره) گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ و دو راس s و d از آن را در نظر بگیرید. تمام مسیرهای متفاوت موجود از s به d را در G پیدا کنید و پیچیدگی زمانی راه خود را محاسبه کنید.
- ۵. (۱۵ نمره) گراف ساده و بدون وزن G داده شده است. هر یال از این گراف با یکی از رنگ‌های آبی یا قرمز رنگ شده است. الگوریتمی ارائه دهید که کوتاه‌ترین مسیر ساده بین راس ۱ تا n را به طوری که هر دو یال متوالی دارای رنگ‌های متفاوت باشند، پیدا کند.
- ۶. (۱۰ نمره) برای تبدیل یک عبارت پیشوندی به عبارت معادل پسوندی الگوریتمی بازگشتی ارائه دهید.
- ۷. (۱۰ نمره) در مرتبه زمانی خطی ($O(n)$) روشی ارائه دهید که زیرآرایه‌های یک آرایه با مجموع اعداد صفر را به دست آورد.

۸. (۲۰ نمره) تعریف: به خانواده‌ای از Hash Function ها ϵ -universal می‌گوییم که به ازای هر دو کلید k_1 و k_2 که از خانواده کلیدها انتخاب کنیم، احتمال برخورد این دو کلید حداکثر برابر ϵ باشد. نشان دهید که در هر خانواده از ϵ -universal hash functions از مجموعه متناهی U (خانواده کلیدها) به مجموعه متناهی Q (که $|Q| = m$ و m همان اندازه جدول درهم‌سازی می‌باشد) عبارت زیر همواره برقرار است:

$$\epsilon \geq 1/|Q| - 1/|U|$$

موفق باشید.