



# ساختمان داده و الگوریتم‌ها

۴ تیرماه ۱۴۰۱

استاد: مهدی صفرنژاد

گردآورندگان: محمدرضا دویران، زهره عباسی، کسری امانی

بررسی و بازبینی: کهد آیینی

مهلت امتحان: ساعت ۱۸:۰۰

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

امتحان پایانترم

## سوالات (۱۰۰ نمره)

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

به موارد زیر توجه کنید.

- مدت امتحان ۱۵۰ دقیقه است.
- امیدواریم که تا این جای کلاس با تفکر الگوریتمی آشنا شده باشید و با همین تفکر به سوالات پاسخ دهید.
- ۱. (۲۰ نمره) با استفاده از مجموعه‌های مجزا، الگوریتمی ارائه دهید که وجود دور در گراف را تشخیص دهد.
- ۲. (۱۵ نمره) تعریف: یک گراف جهت‌دار را قویاً همبند (Strongly Connected) می‌نامیم، در صورتی که از هر رأس به هر رأس دیگر مسیری وجود داشته باشد.  
الگوریتمی از مرتبه  $O(V + E)$  ارائه دهید که قویاً همبند بودن یک گراف جهت‌دار را بررسی کند.
- ۳. (۱۵ نمره) الگوریتمی ارائه دهید که کوتاه‌ترین مسیر از راس  $s$  به راس  $t$  را در یک گراف با یال‌های وزن‌دار که تنها وزن یک یال منفی است، پیدا کند.  
(راهنمایی: ابتدا وجود دور با طول منفی در گراف را بررسی کنید، سپس کوتاه‌ترین مسیر را پیدا کنید.)
- ۴. (۱۵ نمره) گراف جهت‌دار  $G = (V, E)$  و دو راس  $s$  و  $d$  از آن را در نظر بگیرید. تمام مسیرهای متفاوت موجود از  $s$  به  $d$  را در  $G$  پیدا کنید و پیچیدگی زمانی راه خود را محاسبه کنید.
- ۵. (۲۰ نمره) گراف ساده و بدون وزن  $G$  داده شده است. هر یال از این گراف با یکی از رنگ‌های آبی یا قرمز رنگ شده است. الگوریتمی ارائه دهید که کوتاه‌ترین مسیر ساده بین راس ۱ تا  $n$  را به طوری که هر دو یال متوالی دارای رنگ‌های متفاوت باشند، پیدا کند.
- ۶. (۱۵ نمره) برای تبدیل یک عبارت پیشوندی به عبارت معادل پسوندی الگوریتمی بازگشتی ارائه دهید.
- ۷. (۱۵ نمره) در مرتبه زمانی خطی ( $O(n)$ ) روشی ارائه دهید که زیرآرایه‌های یک آرایه با مجموع اعداد صفر را به دست آورد.

۸. (۲۰ نمره) تعریف: به خانواده‌ای از Hash Function ها  $\epsilon$ -universal می‌گوییم که به ازای هر دو کلید  $k_1$  و  $k_2$  که از خانواده کلیدها انتخاب کنیم، احتمال برخورد این دو کلید حداکثر برابر  $\epsilon$  باشد. نشان دهید که در هر خانواده از  $\epsilon$ -universal hash functions از مجموعه متناهی  $U$  (خانواده کلیدها) به مجموعه متناهی  $Q$  (که  $|Q| = m$  و  $m$  همان اندازه جدول درهم‌سازی می‌باشد) عبارت زیر همواره برقرار است:

$$\epsilon \leq 1/|Q| - 1/|U|$$

موفق باشید.