



ساختمان داده و الگوریتم‌ها

۲۵ فروردین ۱۴۰۱

استاد: مهدی صفرنژاد

گردآورندگان: محمدرضا دویران، زهره عباسی، کسری امانی

بررسی و بازبینی: کهد آیینی

مهلت ارسال: ساعت ۱۲

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

امتحان پایانترم

سوالات (۱۰۰ نمره)

به موارد زیر توجه کنید.

• مدت امتحان ۱۶۰ دقیقه است و ۲۰ دقیقه نیز برای آماده‌سازی فایل نهایی پاسخ شما و آپلود آن در نظر گرفته شده است.

• دقت فرمایید که بعد از ساعت ۱۲، امکان ارسال پاسخ‌ها وجود نخواهد داشت.

• امیدواریم که تا این جای کلاس با تفکر الگوریتمی آشنا شده باشید و با همین تفکر به سوالات پاسخ دهید.

۱. (۲۰ نمره) پیچیدگی توابع بازگشتی زیر را تحلیل کنید:

• $T(n) = \lambda T(\sqrt{n}) + \log^3 n$

•

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 5 \\ T(\frac{n}{5}) + T(\frac{n}{5}) + n & \text{Otherwise} \end{cases}$$

•

$$\begin{cases} T(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + 3n \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

۲. (۱۵ نمره) مجموعه‌ای از n توپ داریم که داخل هر کدام از آن‌ها یک عدد نوشته شده است. به ما اجازه‌ی باز کردن توپ‌ها داده نشده است اما دستگاهی داریم که اگر دو توپ را به آن نشان دهیم به ما می‌گوید عدد داخل آن‌ها یکسان است یا خیر. الگوریتمی از $O(n \log n)$ ارائه دهید که مشخص کند آیا بین اعداد توپ‌ها، عددی وجود دارد که با عدد حداقل نصف توپ‌های دیگر برابر باشد یا خیر و اگر وجود دارد مجموعه‌ی توپ‌هایی که حاوی آن عدد هستند، پیدا کنید. درستی پیچیدگی زمانی الگوریتم خود را ثابت کنید.

۳. (۱۵ نمره) فرض کنید به روال‌های متداول یک پشته، روال سومی به نام MULTIPOP اضافه می‌کنیم که متود آن به صورت $MULTIPOP(S, K)$ فراخوانی می‌شود و K عنصر روی پشته‌ی S را POP می‌کند. (اگر پشته K عضو یا کمتر دارد، خالی خواهد شد.)

• با استفاده از pseudocode این روال را طوری پیاده کنید که مرتبه زمان اجرای آن نسبت به تعداد عملیات‌های POP خطی باشد.

• ثابت کنید که هزینه اجرای هر دنباله‌ای از سه روال PUSH, POP, MULTIPOP روی پشته‌ای که در ابتدا خالی است، کران بالای $O(n)$ دارد و هزینه سرشکن اجرای هر روال $O(1)$ خواهد بود.

۴. (۱۵ نمره) یک هرم کمینه با n عنصر متمایز از اعداد و یک عدد x داده شده است. الگوریتمی با زمان $O(k)$ ارائه دهید که مشخص کند آیا k امین کوچکترین عنصر موجود در هرم از x کوچکتر است یا خیر.

۵. (۱۵ نمره) فرض کنید دو عنصر a و b از یک درخت دودویی جستجو داده شده‌اند. الگوریتمی ارائه دهید که بزرگترین عنصر در مسیر دو عنصر داده شده را بیابد. توجه کنید که این مسیر شامل خود a و b هم می‌شود. پیچیدگی زمانی الگوریتم نیز باید از $O(h)$ باشد و h همان ارتفاع درخت است.

۶. (۲۰ نمره) فرض کنید برای پیاده‌سازی الگوریتم RANDOMIZED QUICKSORT از متود $\text{RANDOM}(a, b)$ استفاده شده است که یک عدد صحیح تصادفی در بازه $[a, b]$ بازمی‌گرداند. با استفاده از Θ notation بیان کنید که در بدترین و بهترین حالت با اجرای الگوریتم مرتب‌سازی، این متود چند بار فراخوانی خواهد شد. موفق باشید.