



ساختمان داده و الگوریتمها

۰۴ تیرماه ۱۴۰۱

استاد: مهدی صفرنژاد

گردآورندگان: محمدرضا دویران، زهره عباسی، کسری امانی

بررسی و بازبینی: کهد آیینی

مهلت امتحان: ساعت ۶:۰۰

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

امتحان پایانترم

سوالات (۱۰۰ نمره)

به موارد زیر توجه کنید.

- مدت امتحان ۱۵۰ دقیقه است.
- امیدواریم که تا این جای کلاس با تفکر الگوریتمی آشنا شده باشید و با همین تفکر به سوالات پاسخ دهید.
- ۱. (۲۰ نمره) به موارد زیر پاسخ دهید:
 - با استفاده از مجموعه‌های مجزا الگوریتمی ارائه دهید که بتوان پایین‌ترین جد مشترک دو راس u و v را در درخت T پیدا کرد.
 - با استفاده از مجموعه‌های مجزا، الگوریتمی ارائه دهید که وجود دور در گراف را تشخیص دهد.
- ۲. (۱۵ نمره) تعریف: یک گراف جهت‌دار را قویا همبند (Strongly Connected) می‌نامیم در صورتی که از هر راس به هر راس دیگر مسیری وجود داشته باشد.
الگوریتمی از مرتبه $O(V + E)$ ارائه دهید که قویا همبند بودن یک گراف جهت‌دار را بررسی کند.
- ۳. (۱۵ نمره) الگوریتمی ارائه دهید که کوتاه‌ترین مسیر از راس s به راس t را در یک گراف با یال‌های وزن‌دار که تنها وزن یک یال منفی است، پیدا کند. ابتدا وجود دور با طول منفی در گراف را بررسی کنید، سپس کوتاه‌ترین مسیر را پیدا کنید.
- ۴. (۱۵ نمره) به موارد زیر پاسخ دهید:
 - گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ و دو راس s و d از آن را در نظر بگیرید. تمام مسیرهای متفاوت موجود از s به d را در G پیدا کنید و پیچیدگی زمانی راه خود را محاسبه کنید.
 - گراف ساده و بدون وزن G داده شده است. هر یال از این گراف با یکی از رنگ‌های آبی یا قرمز رنگ شده است. الگوریتمی ارائه دهید که کوتاه‌ترین مسیر ساده بین راس ۱ تا n را به طوری که هر دو یال متوالی دارای رنگ‌های متفاوت باشند، پیدا کند.
- ۵. (۱۵ نمره) به موارد زیر پاسخ دهید:
 - برای تبدیل یک عبارت پیشوندی به عبارت معادل پسوندی الگوریتمی بازگشتی ارائه دهید.
 - الگوریتمی غیربازگشتی برای تبدیل یک عبارت پسوندی به یک عبارت پیشوندی ارائه دهید.

۶. (۲۰ نمره) تعریف: به خانواده‌ای از Hash Function ها ϵ -universal می‌گوییم که به ازای هر دو کلید k_1 و k_2 که از Universe کلیدها انتخاب کنیم، احتمال Collision این دو کلید حداکثر برابر ϵ باشد. نشان دهید که در هر خانواده از ϵ -universal hash functions از مجموعه U (Universe کلیدها) به مجموعه Q (هر دو متناهی) عبارت زیر همواره برقرار است:

$$\epsilon \leq 1/|Q| - 1/|U|$$

موفق باشید.