FUNCIONES VECTORIALES

DEFINICIÓN. Una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo recorrido es un subconjunto del espacio n-dimensional R^n se denomina función vectorial de una variable real. Es decir, una función de la forma

$$F\colon\ D \subseteq R \ \to\ R^n$$

Así, una función vectorial en el espacio y en la variable t $F\colon\ D \subseteq R \ \to\ R^3$, viene dada por

$$F(t) = f(t)\, i + g(t)\, j + h(t)\, k$$

Donde $f(t), g(t), h(t)$ son funciones reales en la variable t.

Por ejemplo.

$$F(t) = (\ 2t + 1)\ i + 3t\ \ j + (\ t - 3)\ k$$

En el espacio n-dimensional R^n la función vectorial tiene la forma

$$F(t) = \ \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots\dots\dots.., f_n(t)\rangle$$

Las funciones vectoriales se designarán con letras mayúsculas cursivas tales como F, G, X, Y, etc., o mediante letras minúsculas cursivas negritas f, g, etc. El valor de una función F en t se designa, corrientemente, por F(t).

La función vectorial asigna a cada escalar t , un vector del espacio vectorial en el cual esta definida la función, así para la función

$$F(t) = (\ 2t + 1)\ i + 3t\ \ j + (\ t - 3)\ k$$

Cuando t= 2 ,

$$F(2) = (\ 2(2) + 1)\ i + 3(2)\ \ j + (\ 2 - 3)\ k$$

$$F(2) = 5\ i + 6\ \ j -\ k$$

Cuando t = 4 ,

$$F(4) = (\ 2(4) + 1)\ i + 3(4)\ \ j + (\ 4 - 3)\ k$$

$$F(4) = 9\ i + 12\ \ j +\ \ k$$

El dominio de una función vectorial es el conjunto de números reales correspondiente a la intersección de los dominios de las funciones que son componentes del vector que define la función así.

Ejemplo.

$$F(t) = (\ 2t + 1)\ i + 3t^2\ \ j + (\ t - 3)\ k$$

Los dominios de las funciones componentes son.

$$f(t) =\ \ 2t + 1, cuyo\ dominio\ es\ \ Domf\ = R$$

$$g(t) =\ \ 3t^2, cuyo\ dominio\ es\ \ Domg = R$$

$$h(t) =\ \ t - 3, cuyo\ dominio\ es\ \ Domh = R$$

luego el dominio de la función vectorial es.

$$DomF =\ Domf \cap Dom\ g\ \ \cap Dom\ h$$

$$DomF =\ R \cap R\ \ \cap R\ \ = R$$

Ejemplo. Sea la función vectorial $F(t) = (\ 2t + 1)\ i + e^{2t}\ \ j + Ln(\ t - 3)\ k$

Los dominios de las funciones componentes son.

$$f(t) =\ \ 2t + 1, cuyo\ dominio\ es\ \ Domf\ = R$$

$$g(t) =\ \ e^{2t}, cuyo\ dominio\ es\ \ Domg = R$$

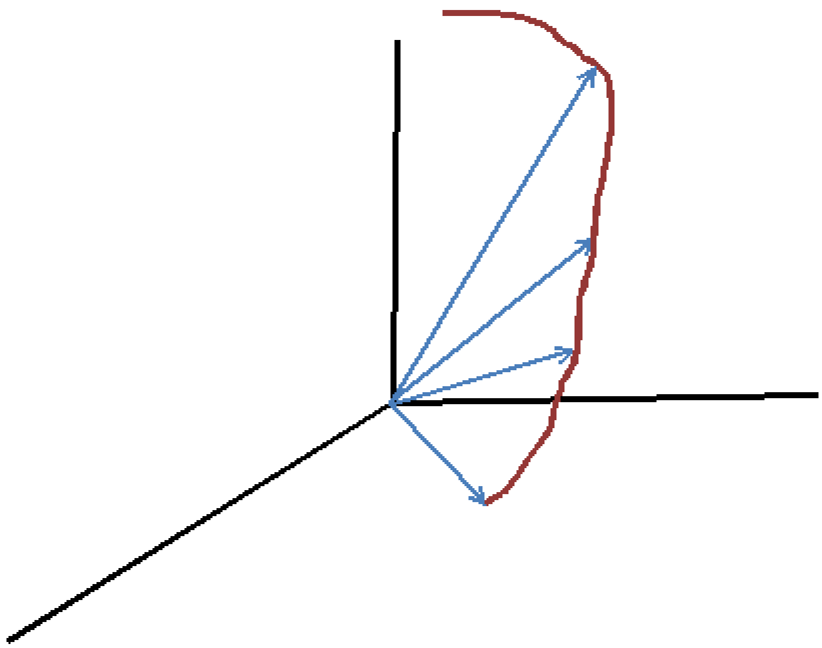
$$h(t) =\ Ln(\ t - 3), cuyo\ dominio\ es\ \ Domh = (\ 3\ , \infty\ )$$

luego el dominio de la función vectorial es.

$$DomF =\ Domf \cap Dom\ g\ \ \cap Dom\ h$$

$$DomF =\ R \cap R\ \ \cap (\ 3\ , \infty\ )\ \ = (\ 3, \infty)$$

Para graficar una función vectorial se le asigna valores al parámetro t, y se evalúan las funciones componentes de la función vectorial. Se grafican los vectores resultantes y luego se unen los extremos de los vectores mediante una línea curva.

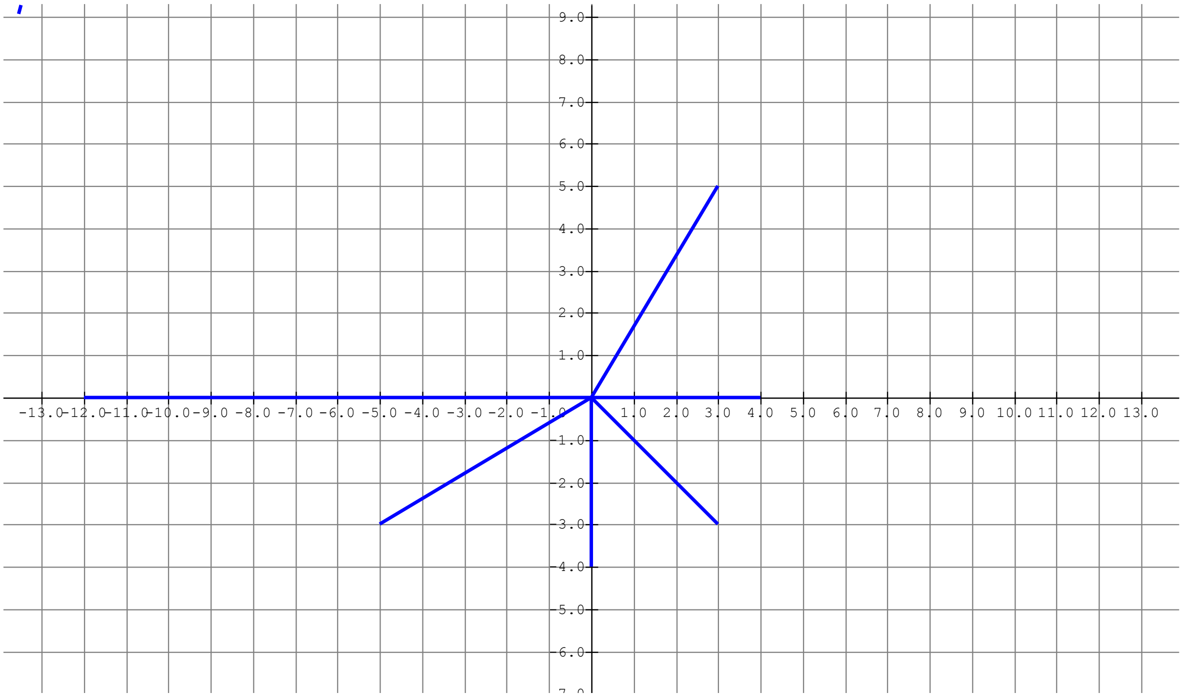


Por ejemplo, graficar la función vectorial $R(t) = (4 - t^2)i + (t^2 + 4t)j$

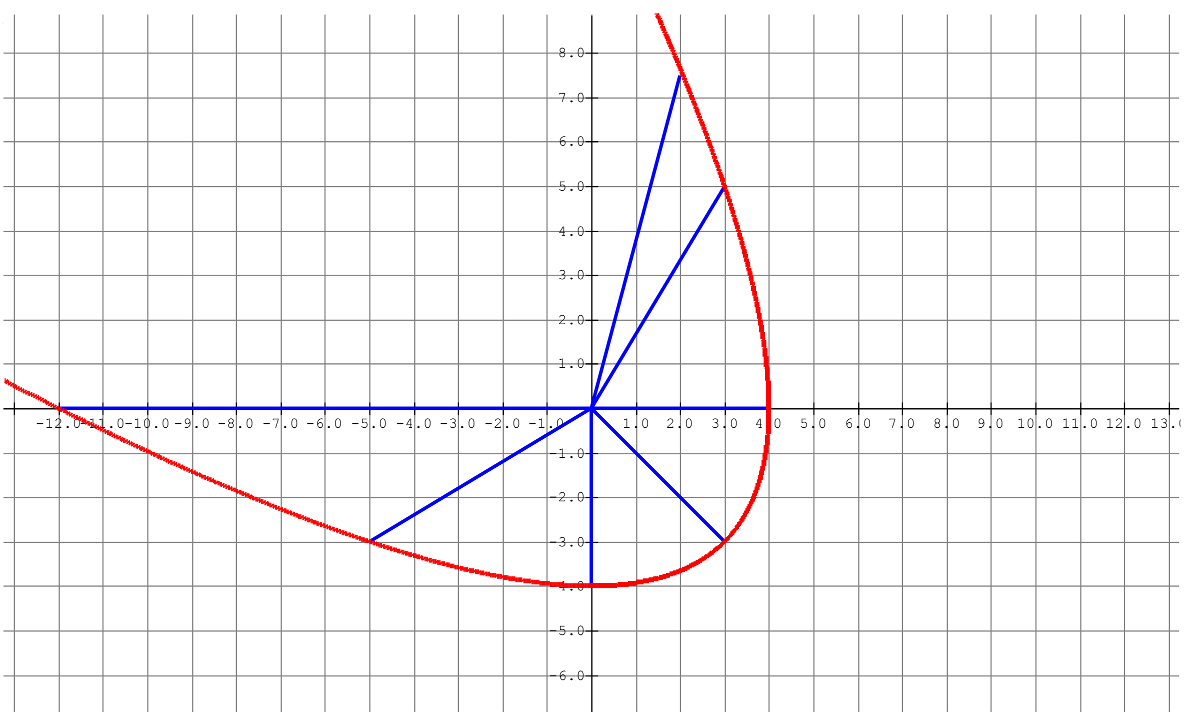
Elaboramos una tabla de datos

t	x	y
-4	-12	0
-3	-5	-3
-2	0	-4
-1	3	-3
0	4	0
1	3	5
2	0	12

Ubicamos los vectores en el plano

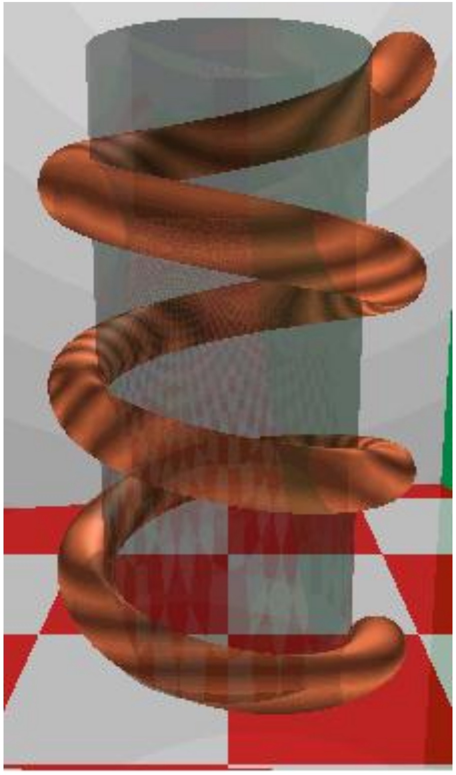


Unimos los extremos de los vectores mediante una línea curva y se obtiene la grafica de la función vectorial



Las funciones de la forma $R(t) = a\,Cost\,i + a\,Sent\,j + bt\,k$ se llama una **HELICE CIRCULAR** y para graficarla se procede de la siguiente manera.

1) Se grafica el circulo de radia a en el plano xy
2) Se proyecta el cilindro sobre el eje z
3) Sobre las paredes del cilindro se grafica la curva que representa la hélice dependiendo de los valores que va tomando la componente algunas hélices son.



Determine el dominio de las siguientes funciones vectoriales y realice su grafica.

1) $R(t) = \frac{1}{t}i + \sqrt{4-t}$j
2) $R(t) = (t+1)t + (t^2-1)j + (t-1)k$
3) $R(t) = Cost\ j + Sent\ j + 2t\ k$
4) $R(t) = (t+1)\ i + \ (t-2)\ j$
5) $R(t) = 3Cost\ i + 3\ Sent\ j + 2t\ k$

Se pueden realizar las operaciones definidas entre vectores con funciones vectoriales.

Dadas las funciones vectoriales F y G y las funciones reales f y g.

1) La suma de las funciones vectoriales F y G , denotada por F + G es la función definida por

$$(F + G\ )(t) = F(t) + G(t)$$

2) La Resta de las funciones vectoriales F y G , denotada por F - G es la función definida por

$$(F - G\ )(t) = F(t) - G(t)$$

3) El producto punto de las funciones vectoriales F y G , denotada por F · G es la función definida por

$$(F \cdot G\ )(t) = F(t) \cdot G(t)$$

4) El producto cruz o vectorial de las funciones vectoriales F y G , denotada por F x G es la función definida por

$$(F \times G\ )(t) = F(t) \times G(t)$$

5) El producto de la función f(t) por la función vectorial F , denotada por fF es la función definida por

$$(fF)(t) = f(t)F(t)$$

6) La función compuesta función vectorial F y la función g, denotada por F ∘ G es la función definida por

$$(F^{\circ}g)(t) = F(g(t))$$

Ejemplo dadas las funciones vectoriales

$$F(t) = 3t\,i + (\,2t + 2)j + 4t\,k$$
$$G(t) = (3t - 1)i + (\,t + 1)j + 2\,k$$

Y la función real:

$$f(t) = t^2$$

Encontrar:

A) $(\,F \ + G\,)(t)$

$$(\,F + G\,)(t) = F(t) + G(t)$$

$$(\,F + G)(t) = \ (3t\,i + (\,2t + 2)j + 4t\,k) + \big((3t - 1)i + (\,t + 1)j + 2\,k\big)$$

$$(\,F + G)(t) = \ (6t - 1)i + (\,3t + 3)j + (4t + 2)\,k$$

B) $(\,F - G\,)(t)$

$$(\,F - G\,)(t) = F(t) - G(t)$$

$$(\,F - G)(t) = \ (3t\,i + (\,2t + 2)j + 4t\,k) - \big((3t - 1)i + (\,t + 1)j + 2\,k\big)$$

$$(\,F + G)(t) = \ i + (\,t + 1)j + (4t - 2)\,k$$

C) $(\,F \ \cdot G\,)(t)$

$$(\,F \cdot G\,)(t) = F(t) \cdot G(t)$$

$$(\,F \cdot G)(t) = \ (3t\,i + (\,2t + 2)j + 4t\,k) \cdot \big((3t - 1)i + (\,t + 1)j + 2\,k\big)$$

$$(\,F \cdot G)(t) = \ 3t(3t - 1) + (2t + 2)(t + 1) + (4t)(2)$$

$$(F \cdot G)(t) = \; 9t^2 - 3t + 4t^2 + 4t + 2 + 8t$$

$$(F \cdot G)(t) = \; 13t^2 + 9t + 2$$

D) $(F \circ f)(t)$

$$(F \circ f)(t) = F(f(t))$$

$$(F \circ f)(t) = F(t^2)$$

$$(F \circ f)(t) = 3t^2 \, i + (2t^2 + 2)j + 4t^2 \, k$$

ACTIVIDAD.

A) DADAS LAS FUNCIONES VECTORIALES

$$F(t) = (2t+1)i + (t-2)j + (t+1)k$$

$$G(t) = (2t-1)i + (t+3)j + (t+2)k$$

Y las funciones de valores reales $f(t) = t+1$; $g(t) = t^2 + 3t$

Determine

a) $(F+G)(t)$ b) $(F-G)(t)$ c) $(F \times G)(t)$ d) $(G \circ f)(t)$ e) $(F \circ g)(t)$

B) DADAS LAS FUNCIONES VECTORIALES

$$F(t) = (2t^2+1)i + (t-2)j + (t^2+1)k$$

$$G(t) = (2t^2-1)i + (t+3)j + (t+2)k$$

Y las funciones de valores reales $f(t) = t+1$; $g(t) = t^2 + 3t$

Determine

a) $((F+G)\circ f)(t)$ b) $\big((F-G)\circ g\big)(t)$ c) $\big((F+G) \times G\big)(t)$ d) $(G \circ f)(t)$ e) $(F \circ g)(t)$ e) $\big((F+G) \cdot (G-F)\big)(t)$