* **函数**：将一个对象转化为另一个对象的规则。
  + 起始对象称为输入，来自**定义域**集合。
  + 返回对象称为输出，来自**上域**集合；上域是可能输出的集合，**值域**是实际输出的集合。
* 一个函数必须给每一个有效的输入指定**唯一**的输出。
* **垂线检验**：如果你有某个图像并想知道它是否是函数的图像, 你就看看是否任何的垂线和图像相交多于一次。多余一次则不是函数的图像，否则是函数的图像。
* 从一个函数出发，使得对于在值域中的任何，都只有唯一的满足。也就是说，不同的输入对应不同的输出。则可以定义**反函数**：
  + 的定义域与的值域相同；
  + 的值域与的定义域相同；
  + 的值就是满足的。
* 如果，那么。
* **水平线校验**：如果每一条水平线和函数的图像相交至多一次，那么这个函数就有一个反函数。如果即使只有一条水平线和图像相交多于一次，那么这个函数就没有反函数。
* 求反函数：在图像上画一条的直线，将这条直线假想为一个双面的镜子，反函数就是原始函数的镜面反射。
* 限制定义域
* 如果一个函数的定义域可以被限制，使得有反函数，那么：
  + 对于值域中的所有，都有；
  + ，仅当在限制的定义域中才成立。
* ，是与的**复合函数**。
* 通常情况下，
* =>
* 对定义域里的所有有，则是**偶函数**。
* 对定义域里的所有有，则是**奇函数**。
  + 如果是奇函数，在其定义域内，则。
* 一个函数可能是奇函数或者偶函数，但是大多数函数都是非奇非偶的。
  + 零函数（）是既奇又偶的。
* 偶函数的图像关于轴具有镜面对称性。
* 奇函数的图像关于原点具有的点对称性。
* 两个奇函数之积是偶函数，偶函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积是奇函数。
* 形如的函数叫做线性函数。（图像是直线）
  + 斜率是，截距是
* 点斜式：如果已知直线经过点，斜率为，则它的方程为
* 如果一条直线通过点和，则它的斜率等于
* **多项式**：
  + 其中是的**系数**。
  + 非系数的最大的幂指数叫做多项式的**次数**。
* 到的图像：

Diagram, engineering drawing

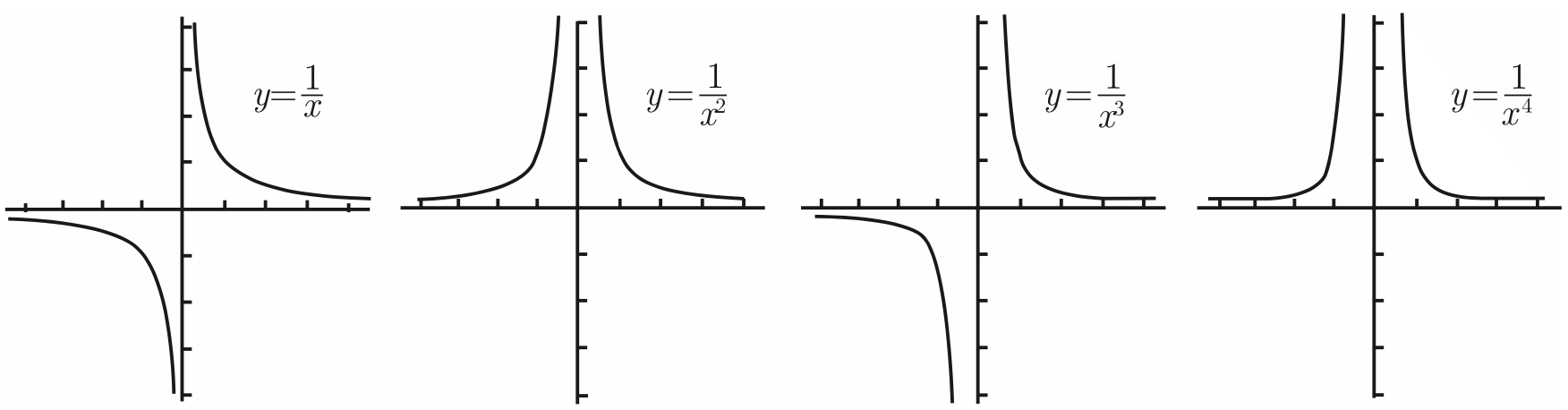
Description automatically generated

* 多项式的图像一般很难画出来，不过多项式的图像左右两端的走势是由**首项系数**（最高次数的项的系数）决定的。

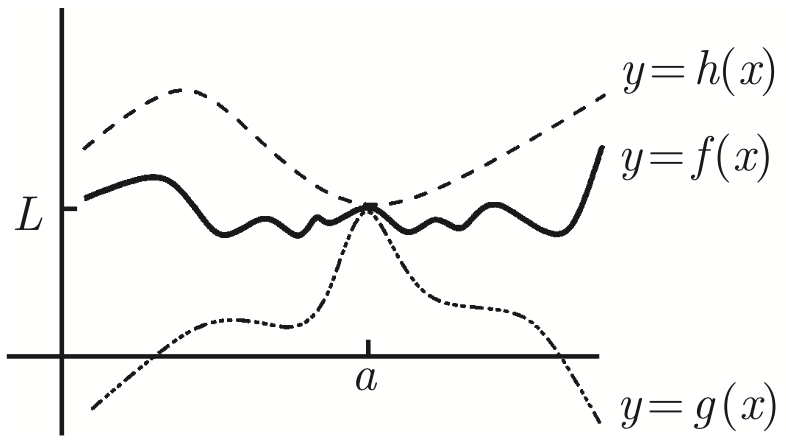
Diagram, schematic

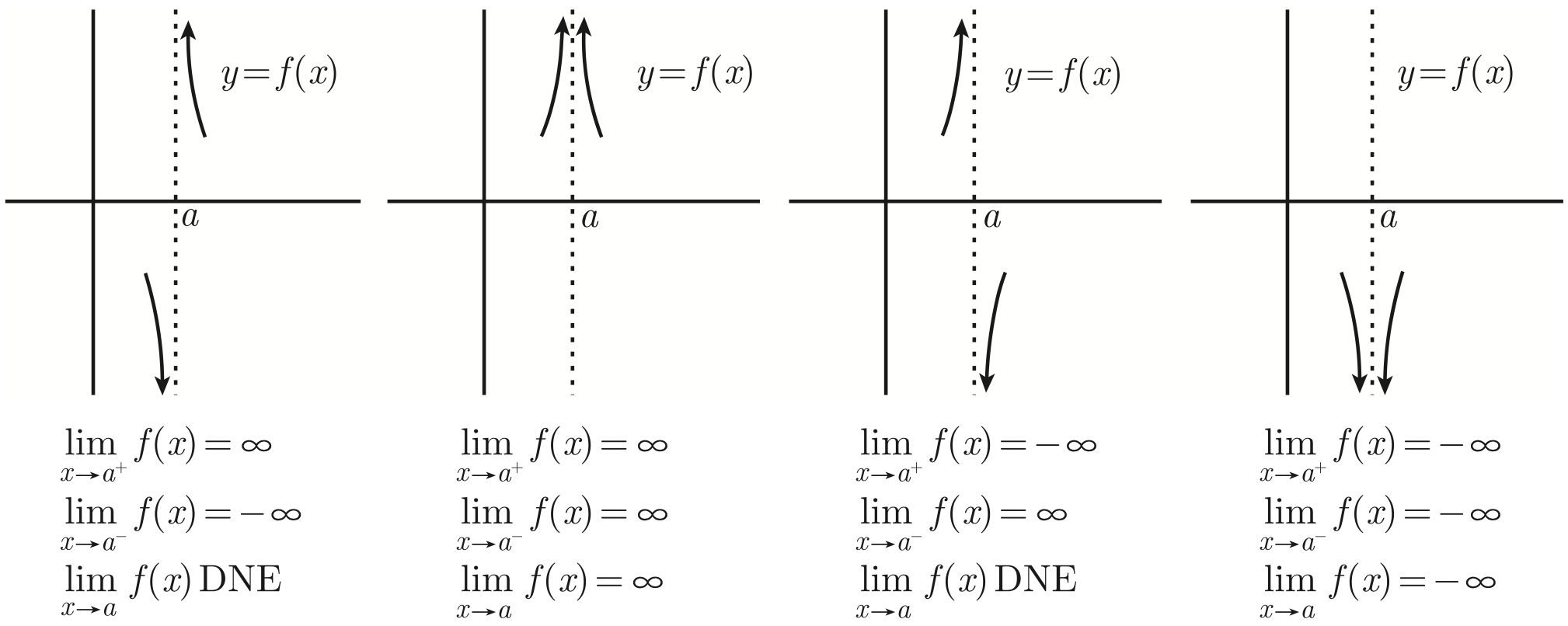
Description automatically generated

* 二次函数：
  + 的解：，其中
  + ，有两个不同的解；，有一个解；，实数范围内无解。
* 有理函数：，和为多项式的函数。
  + 时，有理函数就是多项式
  + 时，有理函数就是

**

三明治定理 (又称作夹逼定理) 说的是, 如果一个函数 f 被夹在函数 g 和 h 之 间,当x → a时,这两个函数g和h都收敛于同一个极限L,那么当x → a时, f 也收敛于极限 L.

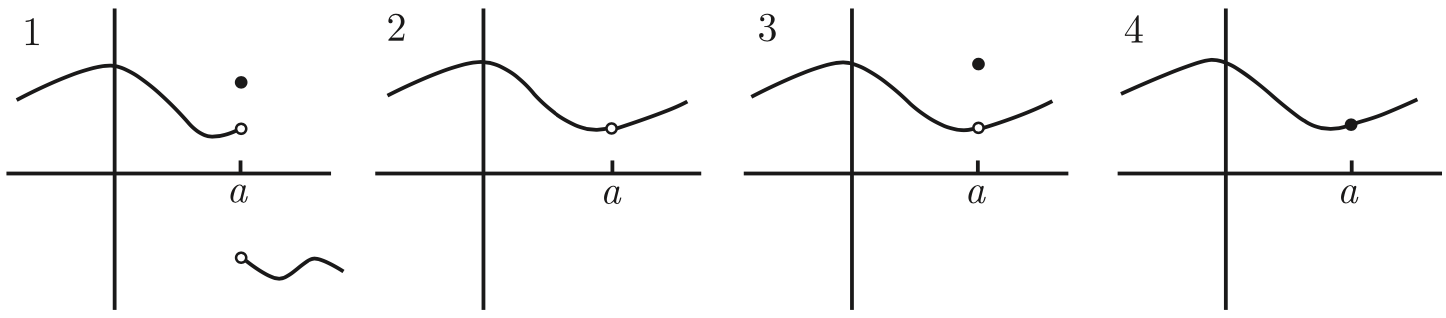




**连续性**

|  |
| --- |
| 如果，函数**在点处连续**。 |

* 双侧极限存在且有限的。
* 函数在点处有定义，即存在且有限的。
* 以上两个量相等，即。



|  |
| --- |
| 函数在其定义域中的所有的点都连续，则它是**连续的**。如果定义域包括一个带有左端点和（或）右端点的闭区间，在那里需要函数的单侧连续性。 |

* 函数在中的每一点都连续。
* 函数在点处右连续，即。
* 函数在点处左连续，即。

Chart, line chart

Description automatically generated

|  |
| --- |
| **介值定理**：如果在上连续，并且且，那么在区间上至少有一个点，使得。代之以且，同样成立。 |

Chart, scatter chart, box and whisker chart

Description automatically generated

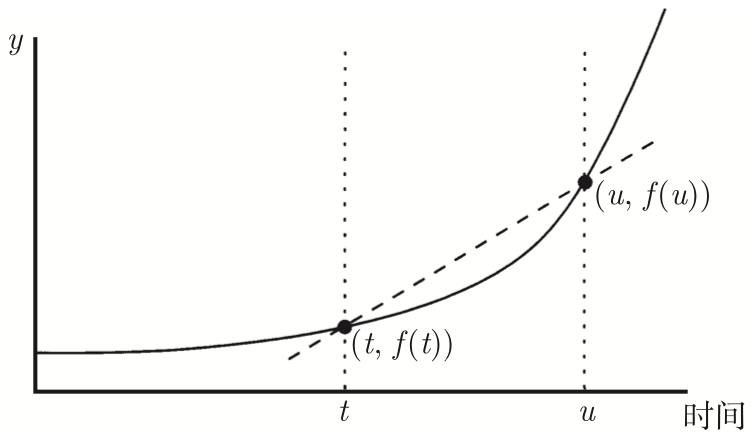
|  |
| --- |
| **最大值与最小值定理**：如果在上连续，那么在上至少有一个最大值和一个最小值。 |

Chart, line chart

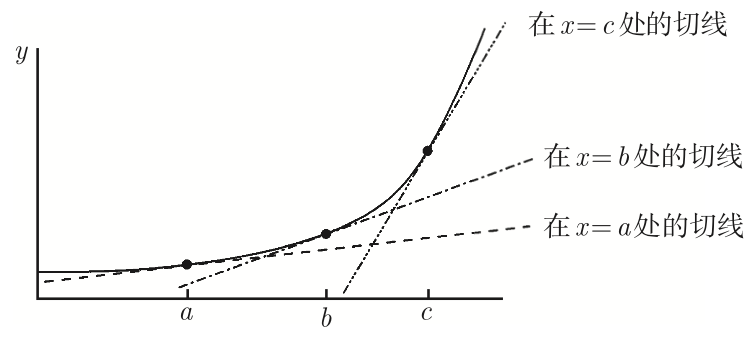
Description automatically generated

**可导性**

位移和速度：要计算在时刻的速度，就是求位移关于时间的曲线在时刻处的**切线斜率**。



切线的斜率取决于点的值，通过点的切线的斜率是的一个函数，这个函数称为**的导数（）**，即对关于变量**求导**得到函数**。**



如果极限存在，有，在这种情况下，在点**可导**。如果对于特定的，极限不存在，那么的值就没有在导函数的定义域中，即在点**不可导**。

|  |
| --- |
| 导函数 意味着中的一个小的变化产生了大约倍的中的变化。 |

|  |
| --- |
| 是关于的导数，如果，那么和的含义相同。  不是一个分数，它表示当时，分数的极限。 |

|  |
| --- |
| 导数的导数，称为**二阶导**。记作： 、 、 、。  三阶导，记作： 、 、 、。  阶导，可以表示为的形式，其中。 |

|  |
| --- |
| 在的导数存在，则左右导数都存在且等于导数值。即：。 |

|  |
| --- |
| 如果一个函数在上可导，那么它在上连续。  **可导函数必连续，但是连续函数不一定总是可导的。** |

**求解微分**

|  |
| --- |
| 如果是常数，则 |

|  |
| --- |
| **函数的常数倍**：在求导后，用常数乘以该函数的导数即可。 |

|  |
| --- |
| **函数和与函数差**：对每一部分求导，然后再相加或相减即可。 |

|  |
| --- |
| **乘积法则**   1. 如果，那么 2. 如果，则   **乘积法则（三个变量）**如果，则 |

|  |
| --- |
| **商法则**   1. 如果，那么 2. 如果，那么 |

|  |
| --- |
| ，，其中  **链式求导法则**   1. 如果，那么 2. 如果是的函数，并且是的函数，则   链式求导法则可以多次运用，例如： |

|  |
| --- |
|  |

乘积（）法则的直观理解

Text

Description automatically generated with medium confidenceA picture containing diagram

Description automatically generated

|  |
| --- |
| **分段函数的导数**  检查一个分段函数在分段连接点上是否可导，需要检验分段在**连接点上极限相等**（以证明连续性）以及分段的**导数在连接点上相等**，**可导还要求导数在连接点上的左右极限有限且相等**。  如果有两个以上的分段，则必须在所有的连接点上检验连续性和可导性。  **在点是否连续的？**  左极限：，右极限：  ，在点处连续。  **在点是否可导的？**  左导数：，右导数：  ，在点处可导。 |
|  |