参数曲线和曲面基础

王坤峰 教授
信息科学与技术学院

2020/11/10

内容

- 曲线曲面参数表示
- 位置矢量、切矢量、法矢量、曲率和挠率
- 插值、拟合、逼近和光顺
- 参数曲线的代数和几何形式
- 连续性
- 参数曲面基本概念

曲线曲面参数表示

- 表示方法
  - 显式表示

$$y=f(x)$$

  - 隐式表示

$$f(x,y)=0$$

  - 参数表示

平面曲线：$P(t)=[x(t), y(t)]$

空间曲线：$P(t)=[x(t), y(t), z(t)]$

- 显式或隐式表示存在下述问题：

1. 与坐标轴相关；
2. 可能出现斜率为无穷大的情形(如垂线)；
3. 不便于计算机编程。

参数表示实例

- 直线

$$P(t)=P_1+(P_2-P_1)t \quad t\in[0,1]$$

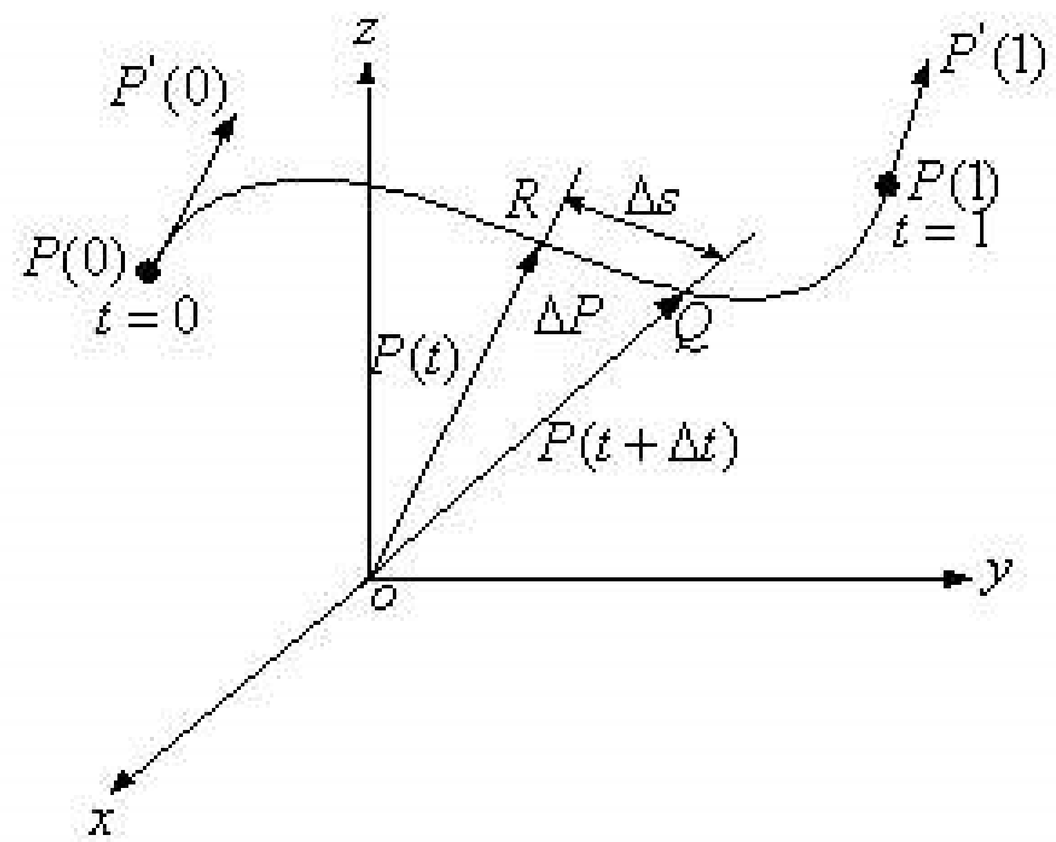
- 圆

$$P(t)=\left[\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right] \qquad t\in[0,1]$$

- 参数表示的优点

1. 便于处理斜率无穷大的情形，不会因此而中断计算。
2. 规格化的参数变量$t \in [0, 1]$，使其相应的几何分量是有界的，而不必考虑边界问题。
3. 对曲线、曲面进行变换，可对其参数方程直接进行几何变换。
4. 便于把低维空间中曲线、曲面扩展到高维空间。
5. 易于用矢量和矩阵表示几何分量，简化了计算。
6. 有更大的自由度来控制曲线、曲面的形状。

位置矢量、切矢量、法矢量



- 位置矢量

$$P(t)=[x(t), y(t), z(t)]$$

- 切矢量(切向量)
  - 将弧长s作为参数，则$T=\frac{dP}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta s}$是单位切矢量
  - 单位切矢量的计算
    - 根据弧长微分公式有：$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$

$$(ds/dt)^2=(dx/dt)^2+(dy/dt)^2+(dz/dt)^2=\left|P'(t)\right|^2$$

$$\frac{ds}{dt}=\left|P'(t)\right|\geq 0$$

– 于是有

$$\frac{dP}{ds}=\frac{dP}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{P^{'}(t)}{\left|P^{'}(t)\right|}$$

即为单位切矢量。

- 法矢量
  - 与 $\dfrac{dT}{ds}$ 平行的法矢称为曲线在该点的主法矢量N
  - 矢量积 $B=T\times N$ 是第三个单位矢量，它垂直于T和N。把平行于矢量B的法矢称为曲线的副法矢量

$$B=\frac{P'(t)\times P''(t)}{\left|P'(t)\times P''(t)\right|}$$

$$N=B\times T=\frac{(P'(t)\times P''(t))\times P'(t)}{\left|(P'(t)\times P''(t))\times P'(t)\right|}$$

- T、N和B构成了曲线上的活动坐标架
- N、B构成的平面称为法平面
- N、T构成的平面称为密切平面
- B、T构成的平面称为从切平面

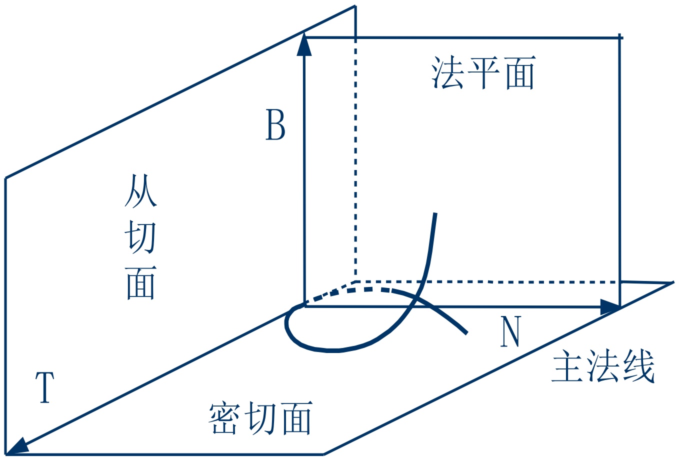


图3.1.2 曲线的法矢

曲率和挠率

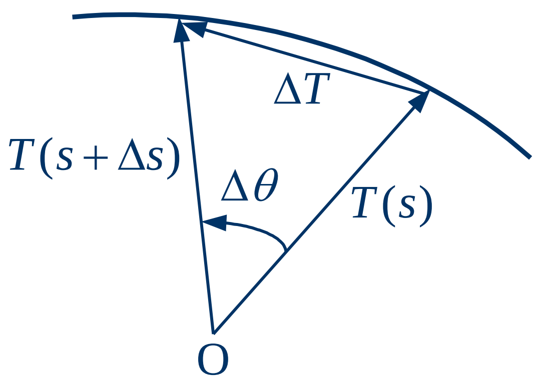
- 曲率

$$\kappa = \lim_{\Delta s} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$$

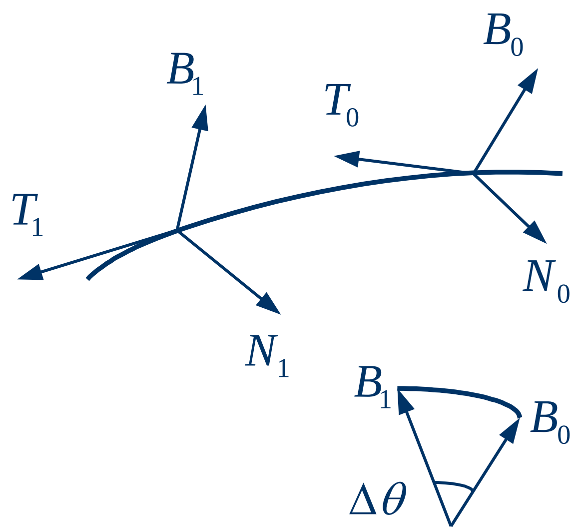
  - 其几何意义是曲线的单位切矢对弧长的转动率 $\left| \frac{dT}{ds} \right|$
  - 曲率k的倒数 $\rho = \frac{1}{\kappa}$ 称为曲率半径

- 挠率
  - 挠率τ的绝对值等于副法线方向(或密切平面)对于弧长的转动率 $\left| \frac{dB}{ds} \right|$

$$|\tau| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|$$



（a）



（b）

$$\kappa = \frac{\left|P'(t)\times P''(t)\right|}{\left|P'(t)\right|^3}$$

$$\tau = \frac{(P'(t), P''(t), P'''(t))}{(P'(t)\times P''(t))^2}$$

插值、拟合、逼近和光顺

- 插值
  - 给定一组有序的数据点P_i，i=0, 1, …, n，构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为对这些数据点进行插值，所构造的曲线称为插值曲线。
- 线性插值
  - 假设给定函数$f(x)$在两个不同点x_1和x_2的值，用一个线性函数

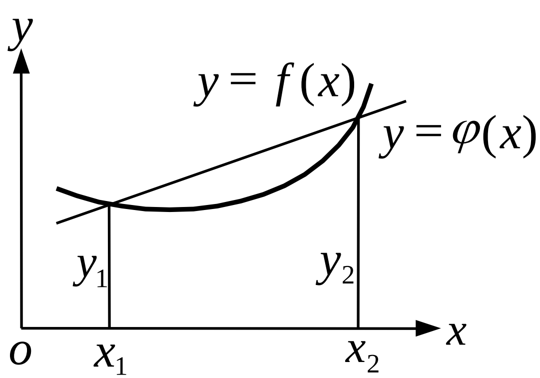
$$y=ax+b$$

近似代替，称为线性插值函数。

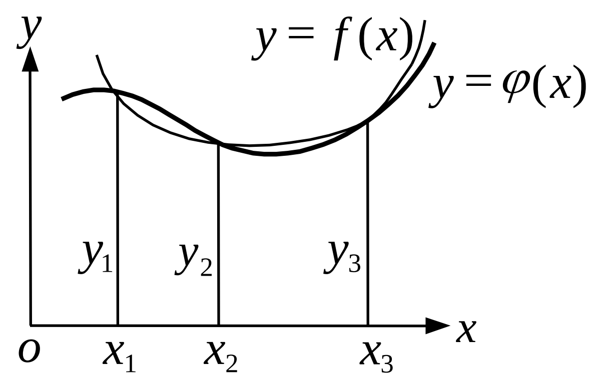
- 抛物线插值
  - 已知在三个互异点x_1,x_2,x_3,的函数值为y_1,y_2,y_3 ,要求构造一个函数

$$\varphi(x)=ax^2+bx+c$$

使抛物线$\varphi(x)$在结点x_1,x_2,x_3处与$f(x)$在 x_1,x_2,x_3处的值相等。



(a)



(b)

- 拟合
  - 构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点(但未必通过这些点)，所构造的曲线为拟合曲线。
- 逼近
  - 在计算数学中，逼近通常指用一些性质较好的函数近似表示一些性质不好的函数。在计算机图形学中，逼近继承了这方面的含义，因此插值和拟合都可以视为逼近。

- 光顺
  - 光顺(*Fairing*)指曲线的拐点不能太多。
  - 对平面曲线而言，相对光顺的条件是：
    1. 具有二阶几何连续性(G^2);
    2. 不存在多余拐点和奇异点;
    3. 曲率变化较小。

参数曲线的代数和几何形式

- 代数形式(3次)

$$\begin{cases} x(t) = a_{3x}t^3 + a_{2x}t^2 + a_{1x}t + a_{0x} \\ y(t) = a_{3y}t^3 + a_{2y}t^2 + a_{1y}t + a_{0y} \\ z(t) = a_{3z}t^3 + a_{2z}t^2 + a_{1z}t + a_{0z} \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

- 矢量形式

$$P(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \qquad t \in [0,1]$$

- 几何形式
  - 将$P(0)$、$P(1)$、$P'(0)$和$P'(1)$简记为P_0、P_1、P'_0和P'_1，代入 $P(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0 \qquad t\in[0,1]$ 得

$$\begin{cases} a_0=P_0 \\ a_1=P_0' \\ a_2=-3P_0+3P_1-2P'_0-P_1' \\ a_3=2P_0-2P_1+P_0'+P_1' \end{cases}$$

$$P(t)=(2t^3-3t^2+1)P_0+(-2t^3+3t^2)P_1+(t^3-2t^2+t)P_0'+(t^3-t^2)P_1' \qquad t\in[0,1]$$

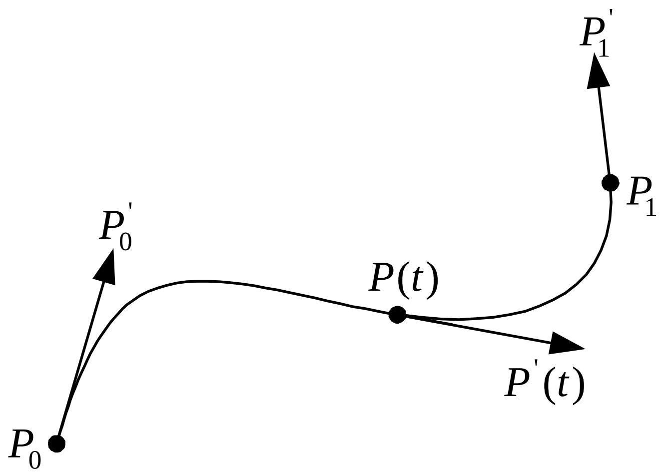
– 令

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$
$$F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$
$$G_0(t) = t^3 - 2t^2 + t$$
$$G_1(t) = t^3 - t^2$$

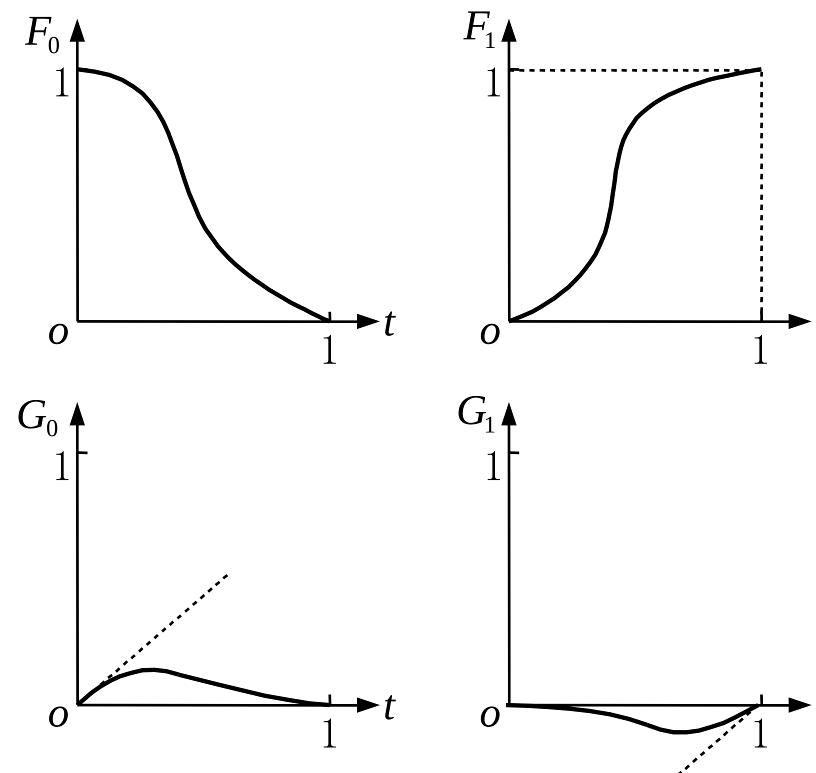
– 于是

$$P(t) = F_0 P_0 + F_1 P_1 + G_0 P_0^{'} + G_1 P_1^{'} \qquad t \in [0,1]$$

– 上式是三次*Hermite* (*Ferguson*)曲线的几何形式.
– P_0、P_1、P'_0和P'_1是几何系数
– F_0、F_1、G_0和G_1称为调和函数



P_1'
P_1
P_0'
$P(t)$
$P'(t)$
P_0



F_0
1
o
1
t
F_1
1
o
1
t
G_0
1
o
1
t
G_1
1
o
1
t

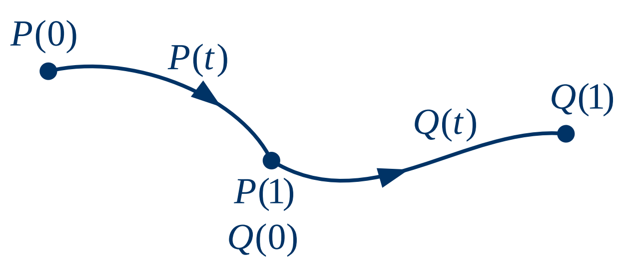
连续性

- 曲线间连接的光滑度有两种度量：
  1. 参数连续性
     - 组合参数曲线在连接处具有直到n阶连续导矢，即n阶连续可微，这类光滑度称之为C^n或n阶参数连续性。
  2. 几何连续性
     - 组合曲线在连接处满足不同于C^n的某一组约束条件，称为具有n阶几何连续性，简记为G^n。

- 结论
  - 若要求在结合处达到G^0连续或C^0连续，即两曲线在结合处位置连续。
  - 若要求在结合处达到G^1连续，就是说两条曲线在结合处在满足G^0连续的条件下，并有公共的切矢量。

$$Q'(0)=\alpha P'(1)$$

  - 当a＝1时，G^1连续就成为C^1连续。



$$\Phi(t)=\begin{cases} V_0+\dfrac{V_1-V_0}{3}t, & 0\le t\le 1 \\ V_0+\dfrac{V_1-V_0}{3}+(t-1)\dfrac{2(V_1-V_0)}{3}, & 1\le t\le 2 \end{cases}$$

$$\Phi'(1^-)=\frac{1}{3}(V_1-V_0)$$

$$\Phi'(1^+)=\frac{2}{3}(V_1-V_0)$$

- 若要求在结合处达到C^2连续，就是说两条曲线在结合处在满足G^2连续的条件下，并有相同的曲率。
- C^1连续保证G^1连续，C^2连续能保证G^2连续，但反过来不行。
- 也就是说C^n连续的条件比G^n连续的条件要苛刻。

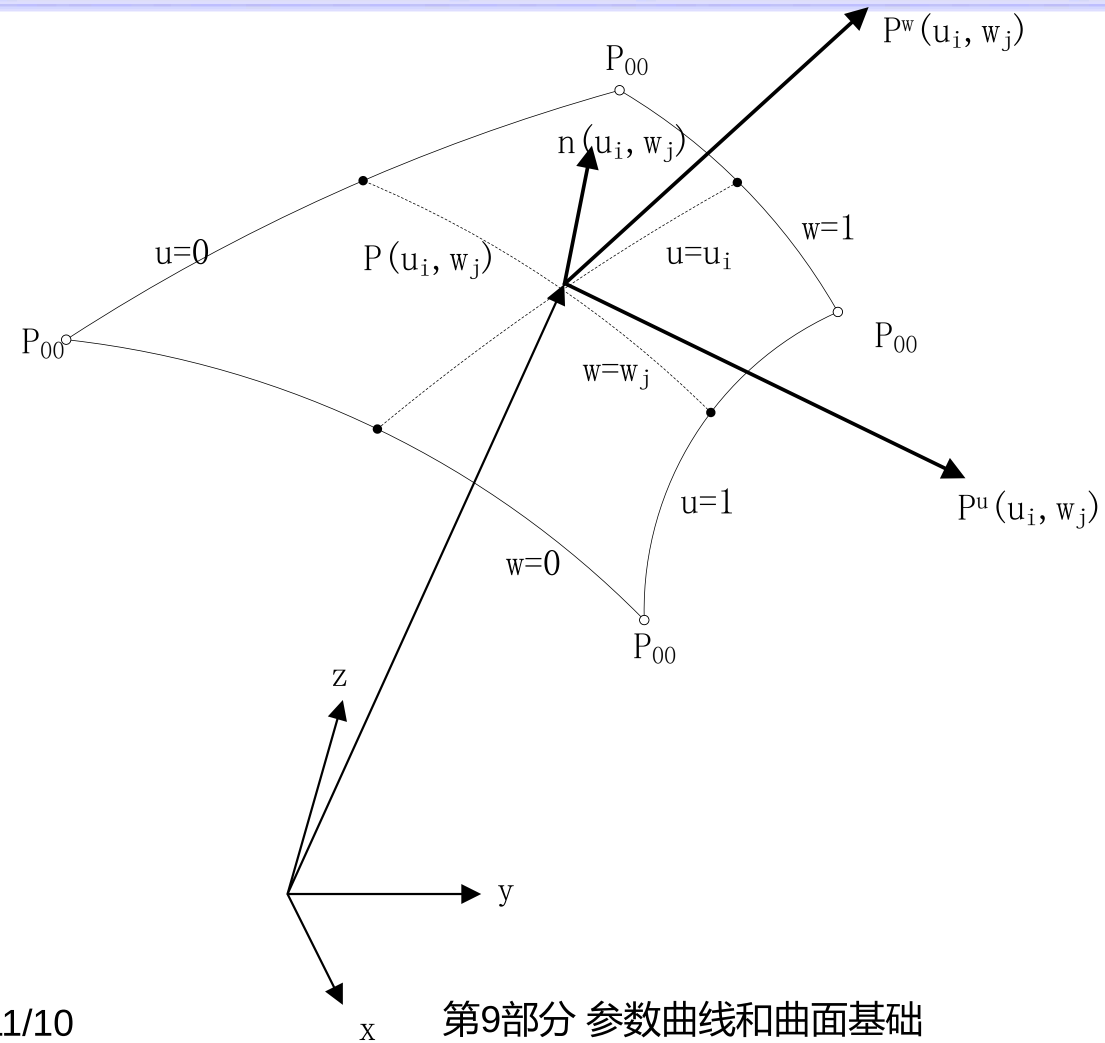
参数曲面

一张定义在矩形域上的参数曲面可以表示为

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u.v), \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,1] \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

可记为

$$P(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$


$P^w(u_i, w_j)$
P_{00}
$n(u_i, w_j)$
w=1
u=0
$P(u_i, w_j)$
$u=u_i$
P_{00}
P_{00}
$w=w_j$
u=1
$P^u(u_i, w_j)$
w=0
P_{00}
z
y
x

- 参数曲面上的点

$$P(u_0,v_0)$$

- 参数曲面上一点的切向量

$$\frac{\partial P(u,v)}{\partial u}\Big|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} \quad \frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\Big|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$$

- 参数曲面上一点的法向量

$$\frac{\partial P(u,v)}{\partial u}\Big|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} \times \frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\Big|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$$