Métodos computacionales para la clasificación de Polítopos de Fano Suaves y Aditivos

Fabián Levicán
Profesor guía: Pedro Montero

PUCV
Valparaíso, Chile

V-Encuentro de Teoría de Números, 2022

§1. Polítopos y variedades tóricas

Definiciones

Sean M, N retículos duales con espacios vectoriales asociados $M_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}}$ de dimensión $d \in \mathbb{N}$.

Un politopo es un subconjunto $P \subset M_{\mathbb{R}}$ tal que $P = Conv(S)$, donde $S \subset M_{\mathbb{R}}$ es finito. En este caso, decimos que S es una $\mathcal{V}$-representación de P. En adelante estudiamos polítopos reticulares ($S \subset M$) y de dimensión completa ($dim(P) = d$).

Sean $0 \neq u \in N_{\mathbb{R}}, b \in \mathbb{R}$. El hiperplano afín $H_{u,b}$ es el subconjunto

$$\{m \in M_{\mathbb{R}} : \quad \langle u, m \rangle = b\}.$$

El semiespacio cerrado $H_{u,b}^{+}$ es el subconjunto

$$\{m \in M_{\mathbb{R}} : \quad \langle u, m \rangle \geq b\}.$$

Definiciones

Una cara de P es un subconjunto $Q \subset P$ tal que

$$Q = H_{u,b} \cap P, \quad P \subset H_{u,b}^{+}.$$

Una faceta es una cara de codimensión 1, y una arista (resp., vértice) es una de dimensión 1 (resp., 0).

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un polítopo. Si existe una colección finita $(H_{u_i,b_i}^{+})_{1 \leq i \leq s}$ de semiespacios tales que

$$P = \bigcap_{i=1}^{s} H_{u_i,b_i}^{+},$$

entonces decimos que la colección $(u_i, -b_i)_{1 \leq i \leq s} \subset N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ es una $\mathcal{H}$-representación de P.

Teorema de representación de Minkowski-Weyl

Teorema [Minkowski, Weyl]

Sean $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un polítopo, y V (resp., $\mathcal{F}$) el conjunto de sus vértices (resp., facetas). Entonces,

i) $V \subset M_{\mathbb{R}}$ es la única $\mathcal{V}$-representación minimal de P.

ii) Existen $\mathcal{H}$-representaciones de P.

iii) Para cada faceta $F \subset \mathcal{F}$, existen únicos H_F, H_F^+ asociados a F. Si escribimos

$$H_F = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \quad \langle u_F, m \rangle = -a_F\},$$
$$H_F^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \quad \langle u_F, m \rangle \geq -a_F\},$$

entonces $(u_F, a_F) \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ es único (módulo multiplicación por $\lambda \in \mathbb{R}^+$).

Teorema de representación de Minkowski-Weyl

Teorema [Minkowski, Weyl] (Continuación)

iv) La colección $(u_F, a_F)_{F\in\mathcal{F}} \subset N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ es la única (módulo multiplicación por $(\lambda_F)_{F\in\mathcal{F}} \subset \mathbb{R}^+$) $\mathcal{H}$-representación minimal de P. Es posible escoger u_F primitivo y $a_F \in \mathbb{Z}$.

Se puede demostrar que la intersección (finita, acotada) de semiespacios cerrados es un polítopo, luego el teorema anterior implica que todo polítopo se puede representar de dos maneras equivalentes.

Sean $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un polítopo tal que $0 \in int(P)$, y $\mathcal{F}$ el conjunto de sus facetas. El polítopo dual o polar de P es el polítopo *(¡no necesariamente reticular!)* $P^{\circ} \subset N_{\mathbb{R}}$ dado por la $\mathcal{V}$-representación $((1/a_F)u_F)_{F\in\mathcal{F}} \subset N_{\mathbb{R}}$.

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un polítopo tal que $0 \in int(P)$.

P es muy amplio si para cada vértice $m \in P$ el semigrupo $S_{P,m} = \mathbb{N}(P \cap M - m)$ es saturado en M.

Los polítopos muy amplios tienen "suficientes puntos", lo que implica que el abanico generado por los vértices de P° corresponde, a través de la construcción de variedades tóricas, a una variedad proyectiva.

Sea X una variedad algebraica normal y completa. Recordemos que X es de Gorenstein Fano si el divisor anticanónico $-K_X$ es Cartier y amplio.

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un polítopo. Decimos que P es un polítopo reflexivo si P° también es un polítopo reticular.

Teorema [Cox, Theorem 8.3.4]

Sean X_{Σ} una variedad algebraica de Gorenstein Fano tórica, y $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un polítopo reflexivo. Entonces, el polítopo asociado al divisor anticanónico $-K_{X_{\Sigma}}$ es reflexivo, y X_P es de Gorenstein Fano.

Polítopos de Fano suaves

Sea X una variedad algebraica de Gorenstein Fano. Recordemos que X es de Fano suave si X es suave.

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un polítopo. Decimos que P es suave si para cada vértice v y aristas $E_1, \dots, E_n$ de P tales que

$$v \in E_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

los vectores primitivos e_i en las aristas E_i son una base de M. Decimos que P es de Fano suave si P es reflexivo y suave.

Existe una correspondencia entre los polítopos suaves y las variedades proyectivas tóricas suaves, ¡luego también entre los polítopos de Fano suaves y las variedades de Fano tóricas suaves!

Clasificación

Hay finitas clases de equivalencia de polítopos reflexivos, pero los números crecen muy rápido (16, 4319, 473 millones, ...) [Kreuzer, Skarke]

Es más interesante, entonces, estudiar polítopos de Fano suaves (5, 18, 124, ...) [Batyrev], [Sato], [Öbro].

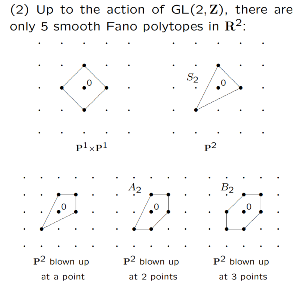


Figure: Polítopos de Fano suaves para $d = 2$

Fuente: La Conferencia Fano, Debarre, 2002.

§2. Acciones aditivas

Sean K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0, X una variedad algebraica irreducible de dimensión n sobre K, y $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$.

Una acción aditiva sobre X es una acción (efectiva, regular) del grupo commutativo unipotente $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ en X con una órbita abierta. Decimos que X es aditiva (resp., únicamente aditiva) si admite una acción aditiva (resp., si admite una acción aditiva única módulo isomorfismo con una acción normalizada).

Clasificación de acciones aditivas sobre $\mathbb{P}^2$ [Hassett, Tschinkel, 1999]

Existen dos estructuras aditivas distintas sobre $\mathbb{P}^2$, y están dadas por las siguientes expresiones para todos $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{G}_a^2, x = [x : y : z] \in \mathbb{P}^2$:

$$\tau(a)(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \rho(a)(x) = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 + \frac{1}{2}a_1^2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un polítopo muy amplio, y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de sus facetas.

Decimos que P está inscrito en un rectángulo si existe un vértice $v_0 \in P$ tal que:

i) Los vectores primitivos en las aristas $(E_i)_{1 \leq i \leq d}$ de P cuyo punto inicial es v_0 forman una base $(e_i)_{1 \leq i \leq d} \subset M_{\mathbb{R}}$ de M.

ii) Para toda $F \in \mathcal{F}$ e $i \in \{1, \ldots, dim(M)\}$, si $v_0 \notin F$, entonces $\langle -u_F, e_i \rangle \geq 0$.

Teorema [Arzhantsev, Romanskevich, 2017]

La variedad proyectiva X_P es aditiva si y sólo si P está inscrito en un rectángulo.

Algoritmo de existencia

Algorithm 1 Algorithm to decide if a Fano polytope given by both its minimal $\mathcal{V}$ and inward $\mathcal{H}$-representations is additive or not.

Precondition: $P \subset M_{\mathbb{R}}$ is a Fano polytope. $V[|I|][d]$ is a minimal $\mathcal{V}$-representation of P. $H[|J|][d]$ is a minimal inward $\mathcal{H}$-representation of P.
Postcondition: The algorithm returns True if P is additive, and False if not.

```
VF ← A zero array of dimension |I| × |J|.
for 0 ≤ j < |J| do                                        ▷ Fill in VF.
    IndicesInFacet ← Argmin_{0≤i<|I|}{⟨H[j], V[i]⟩}
    for i ∈ IndicesInFacet do
        VF[i, j] ← 1
    end for
end for
for 0 ≤ i < |I| do                                        ▷ Check each vertex.
    if CheckVertex(H, VF, i) then
        Return True.
    end if
end for
Return False.
```

Función CheckVertex

Algorithm 2 Function to check if a vertex satisfies the condition described in [Arzhantsev, Romanskevich, 2017] or not.

Precondition: $H[|J|][d]$, $VF[|I|][|J|]$, i are as in Algorithm 1.

Postcondition: The function returns True if $V[i]$ satisfies the condition described in [Arzhantsev, Romanskevich, 2017], and False if not.

Edges $\leftarrow$ FindEdgesFromVertex(V, VF, i)
for $0 \leq j < |J|$ **do**
  if $VF[i][j] == 0$ **then**
    for $0 \leq k < \#$ Edges **do**
      if $\langle \text{Edges}[k], H[j] \rangle > 0$ **then**
        Return False.
      end if
    end for
  end if
end for
Return True.

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un polítopo muy amplio, y sea $\mathcal{P} = (p_i)_{1\le i\le s}$ una $\mathcal{H}$-representación primitiva ordenada* de P.

Para cada $i \in \{1,\ldots,s\}$, definamos

$$\mathfrak{R}_i := \{x \in M : \quad \langle p_i, x\rangle = -1, \quad \forall j \in \{1,\ldots,s\} \setminus \{i\}, \quad \langle p_j, x\rangle \ge 0\}.$$

Una raíz de Demazure es un elemento del conjunto $\cup_{i=1}^{s} \mathfrak{R}_i \subset M$.

Teorema [Dzhunusov, 2020]

Sea $\mathcal{P}^* = (p_i^*)_{1\le i\le s} \subset N_{\mathbb{R}}$ el dual de $\mathcal{P}$ (en el sentido del álgebra lineal). Si X_P es completa y aditiva, entonces X_P es únicamente aditiva si y sólo si para cada $i \in \{1,\ldots,d\}$ se tiene $\mathfrak{R}_i = \{-p_i^*\}$.

Algoritmo de unicidad

Algorithm 3 Algorithm to decide if the projective variety associated to an additive Fano polytope given by its minimal inward $\mathcal{H}$-representation admits a unique additive action or not.

Precondition: $\varepsilon > 0$ is a small tolerance. $P \subset M_{\mathbb{R}}$ is an additive Fano polytope. X_P is the projective variety associated to P. $H[d][|J|]$ is a minimal inward $\mathcal{H}$-representation of P. *Note: H is the transpose of its homonym in Algorithm 1!*

Postcondition: The algorithm returns True if X_P admits a unique additive action, and False if not.

PossibleBases ← Subsets(H, d)
for $B \in$ PossibleBases **do**
  if $|det(B)| \geq \varepsilon$ **then** ▷ If B is a basis.
    SortedH ← Sort$^*(H, B)$
    $R \leftarrow$ SortedH$[:, d:]$ ▷ Slice vectors in H that are not in B.
    $R \leftarrow B^{-1}R$ ▷ Change of basis.
    if IsNegative(R) **then**
      for $0 \leq i < d$ **do**
        $B^* \leftarrow (B^{-1})^t$ ▷ Linear algebraic dual of B.
        $S_0 \leftarrow B^*[:, i]$ ▷ A priori solution.
        $M \leftarrow$ DefineLPModel(Maximise, $x = (x_j)_{0 \leq j < d}$, $f(x)$, A, b)
        $S_1 \leftarrow$ LPSolve(M)
        if $\|S_1 - S_0\| \geq \varepsilon$ **then**
          Return False.
        end if
      end for

§3. Resultados

Resultados

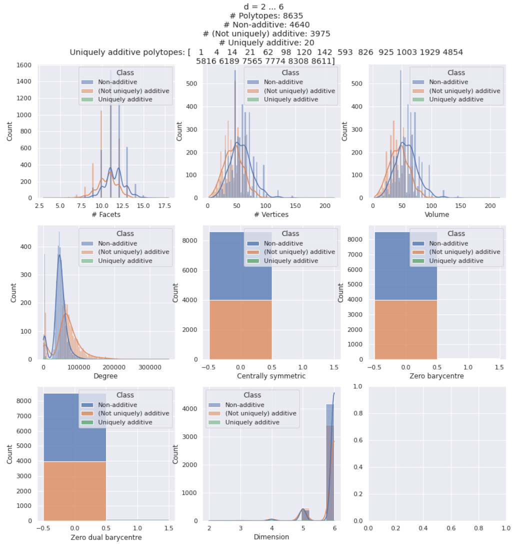
La siguiente tabla resume los resultados que obtuvimos por métodos computacionales:

d	# P	# (NU)AP	# UAP	Comentario
2	5	2	2	
3	18	12	2	# AP = 14 obtenido por [H., M., 2018]
4	124	75	4	
5	866	466	4	
6	7622	3420	8	
2 ... 6	8635	3975	20	

Para $d = 2$, los polítopos únicamente aditivos corresponden a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, Bl_{p,q}(\mathbb{P}^2)$, etc.

Conjetura

¡En dimensiones superiores sucede algo similar!



d = 2 ... 6
# Polytopes: 8635
# Non-additive: 4640
# (Not uniquely) additive: 3975
# Uniquely additive: 20
Uniquely additive polytopes: [1 4 14 21 62 98 120 142 593 826 925 1003 1929 4854
5816 6189 7565 7774 8308 8611]
Class
Non-additive
(Not uniquely) additive
Uniquely additive
Count
Facets
Vertices
Volume
Degree
Centrally symmetric
Zero barycentre
Zero dual barycentre
Dimension

¡Muchas gracias por su atención! :)