Dynamic Programming: Studi Kasus

Tim Olimpiade Komputer Indonesia

Pendahuluan

Melalui dokumen ini, kalian akan:

- Menyelesaikan beberapa contoh persoalan DP sederhana.
- Membiasakan diri untuk "berpikir secara DP".

Contoh Soal 1: Knapsack

- Diberikan N buah barang, dinomori dari 1 sampai N.
- Barang ke-i memiliki harga v_i rupiah dan berat w_i gram.
- Kita memiliki tas yang berkapasitas G gram.
- Kita ingin memasukkan beberapa barang kedalam tas, sedemikian sehingga jumlah berat dari barang-barang yang kita masukan tidak lebih dari kapasitas tas dan jumlah harganya sebanyak mungkin.

Observasi

- Untuk setiap barang, kita harus memutuskan apakah barang ini diambil atau tidak.
- Jika diambil, kapasitas tas kita berkurang, dan harga barang yang kita dapatkan bertambah.
- Jika tidak diambil, tidak terjadi perubahan.

Formulasi

- Definisikan sebuah fungsi $dp(i, c)$ sebagai jumlah harga maksimum yang mungkin diperoleh, jika kita hanya mempunyai barang ke-1 sampai ke-i dan sisa kapasitas tas kita adalah c gram.
- Untuk menghitung fungsi $dp(i, c)$ kita bisa mencoba-coba apakah kita akan memasukkan barang ke-i ke tas atau tidak.

Formulasi Rekurens

- Jika kita memasukkan barang ke-i ke tas, maka kita akan menyisakan barang ke-1 sampai ke-$(i-1)$ dan sisa kapasitas tas menjadi $c - w_i$.
- Harga barang yang didapatkan pada kasus ini adalah $dp(i-1, c-w_i)$ ditambah dengan harga yang kita peroleh pada barang ke-i.
- Dapat dituliskan $dp(i, c) = dp(i-1, c-w_i) + v_i$.
- Kasus ini hanya boleh dipertimbangkan jika $c \geq w_i$.

Formulasi Rekurens (lanj.)

- Jika kita tidak memasukkan barang ke-i ke tas, maka kita akan menyisakan barang ke-1 sampai ke-$(i-1)$ dan sisa kapasitas tas masih tetap c.
- Harga barang didapatkan pada kasus ini adalah $dp(i-1, c)$, tanpa tambahan apapun (kita tidak mengambil barang ke-i).
- Dapat dituliskan $dp(i, c) = dp(i-1, c)$.

Formulasi Rekurens (lanj.)

- Dari kedua pilihan keputusan tersebut, kita tertarik dengan yang menghasilkan nilai terbesar.
- Cukup bandingkan mana yang lebih besar, antara:
  - $dp(i-1, c-w_i) + v_i$, atau
  - $dp(i-1, c)$
- Dapat dituliskan:
  $dp(i, c) = \max(dp(i-1, c-w_i) + v_i, dp(i-1, c))$.
- Kembali ditekankan bahwa pilihan memasukkan barang ke-i hanya boleh dipertimbangkan jika $c \geq w_i$.

Formulasi Base Case

- Jika $i = 0$, maka berarti tidak ada lagi barang yang tersedia.
- Ini berarti $dp(i, c) = 0$.
- Kasus ini menjadi *base case*.

Formulasi Akhir

$dp(i, c)$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$dp(i, c) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ dp(i-1, c), & i > 0 \land c < w_i \\ \max(dp(i-1, c-w_i) + v_i, dp(i-1, c)), & i > 0 \land c \geq w_i \end{cases}$$

Analisis Kompleksitas

- Terdapat $O(N)$ nilai berbeda untuk nilai i dan $O(G)$ nilai berbeda untuk nilai c pada $dp(i, c)$.
- Dibutuhkan $O(1)$ untuk menghitung $dp(i, c)$.
- Sehingga untuk menghitung seluruh nilai $dp(i, c)$ untuk seluruh i dan c dibutuhkan waktu $O(NG)$.

Solusi Top-Down

Kita implementasikan $dp(i, c)$ sebagai fungsi $\textsc{solve}(i, c)$:

$\textsc{solve}(i, c)$

```
if (i == 0)
        return 0
if computed[i][c]
        return memo[i][c]
best = SOLVE(i − 1, c)
if (c ≥ w[i])
        best = max(best, SOLVE(i − 1, c − w[i]) + v[i])
computed[i][c] = true
memo[i][c] = best
return best
```

Jawaban akhirnya ada pada $\textsc{solve}(N, G)$.

Solusi Bottom-Up

```
SOLVE()
// Base case
for c = 0 to G
    dp[0][c] = 0

// Isi "tabel" dari kasus yang kecil ke besar
for i = 1 to N
    for c = 0 to G
        best = dp[i − 1][c]
        if (c ≥ w[i])
            best = max(best, dp[i − 1][c − w[i]] + v[i])
        dp[i][c] = best

return dp[N][G]
```

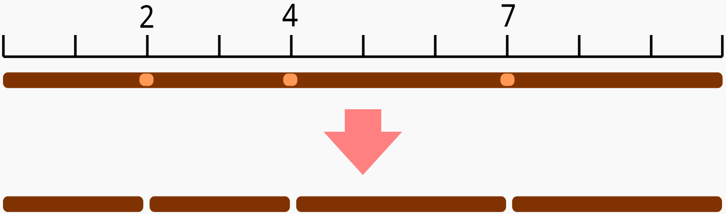
Contoh Soal 2: Memotong Kayu

Diadopsi dari UVa 10003 - Cutting Sticks

- Kita akan memotong sebuah batang kayu dengan panjang M meter pada N titik menjadi $N + 1$ bagian.
- Titik ke-i berada di L_i meter dari ujung kiri, dengan $1 \leq i \leq N$.
- Untuk memotong sebatang kayu menjadi dua, kita memerlukan usaha sebesar panjang kayu yang sedang kita potong.
- Cari urutan pemotongan sedemikian sehingga total usaha yang dibutuhkan minimum!

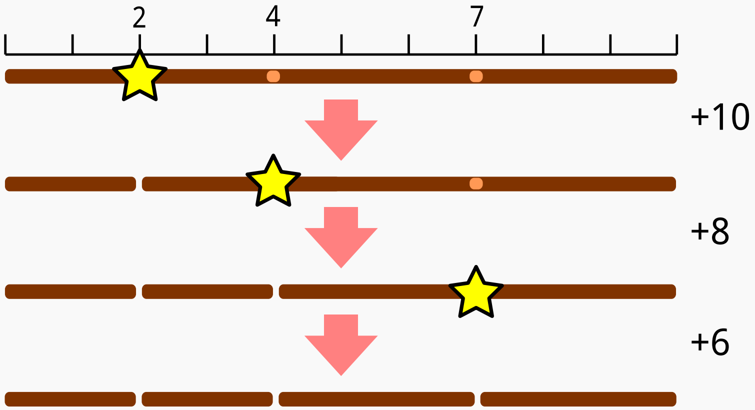
Contoh Soal 2: Memotong Kayu (lanj.)

Sebagai contoh, terdapat sebuah kayu dengan panjang 10 meter dan terdapat 3 titik potongan pada 2 meter, 4 meter, dan 7 meter dari ujung kiri.



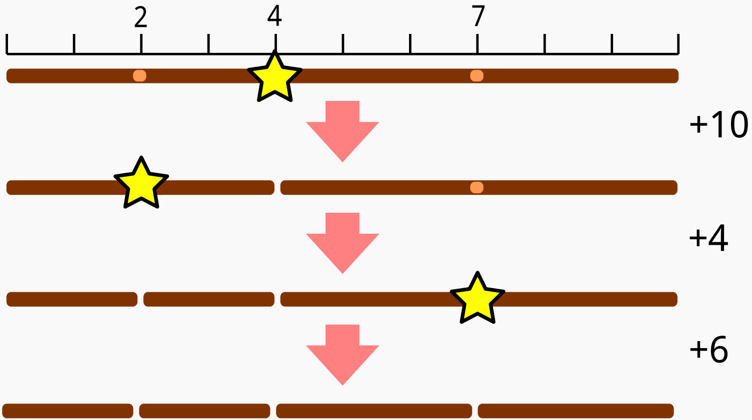
Contoh Soal 2: Memotong Kayu (lanj.)

Kita bisa memotong pada titik 2, titik 4, lalu titik 7 dan memerlukan usaha $10 + 8 + 6 = 24$.



Contoh Soal 2: Memotong Kayu (lanj.)

Cara lain adalah memotong pada titik 4, titik 2, lalu titik 7 dan memerlukan usaha $10 + 4 + 6 = 20$.



Solusi Greedy?

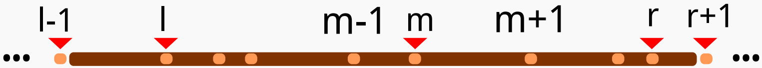
- Apakah strategi *greedy* dengan memotong "setengah-tengahnya" selalu menghasilkan solusi optimal?
- Bagaimana dengan kasus jika $M = 2000$ dan $L = [1, 2, 3, 4, 5, 1000]$?
- Kita akan coba menggunakan DP untuk persoalan ini.

Observasi

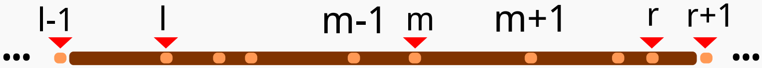
- Untuk pemotongan pertama, terdapat N pilihan lokasi pemotongan.
- Jika kita memotong di posisi L_m, maka didapatkan dua batang.
- Batang pertama perlu dipotong di titik $L_1, L_2, ..., L_{m-1}$ dan batang kedua di $L_{m+1}, L_{m+2}, ..., L_N$.
- Ternyata kita mendapatkan sub-persoalan yang serupa.
- Pemotongan bisa dilanjutkan secara rekursif, dan kita pilih posisi pemotongan yang ke depannya membutuhkan usaha terkecil.

Formulasi Rekurens

- Definisikan sebuah fungsi $dp(l, r)$ sebagai jumlah usaha minimum yang mungkin diperoleh, jika kita hanya perlu memotong di $L_l, L_{l+1}, ..., L_r$.
- Untuk menghitung $dp(l, r)$ kita dapat mencoba titik mana yang kita potong pertama kali.
- Jika kita memotong di L_m $(l \leq m \leq r)$, maka kita akan mendapatkan dua potongan.



Formulasi Rekurens (lanj.)



- Total usaha yang dibutuhkan jika kita melakukan pemotongan di L_m adalah jumlah dari:
  - Total usaha minimum dari potongan pertama, yaitu $dp(l, m-1)$.
  - Total usaha minimum dari potongan kedua, yaitu $dp(m+1, r)$.
  - Usaha untuk pemotongan ini, yaitu $L_{r+1} - L_{l-1}$.
- Untuk mempermudah, asumsikan $L_0 = 0$ dan $L_{N+1} = M$.

Formulasi Base Case

- Ketika $l > r$, artinya sudah tidak ada pemotongan yang perlu dilakukan.
- Dengan demikian, usaha yang dibutuhkan adalah 0, atau $dp(l, r) = 0$.

Formulasi Akhir

Dapat dirumuskan:

$$dp(l, r) = \begin{cases} 0, & l > r \\ \min_{l \le m \le r} dp(l, m-1) + dp(m+1, r) + (L_{r+1} - L_{l-1}), & l \le r \end{cases}$$

Analisis Kompleksitas

- Terdapat $O(N)$ nilai berbeda untuk nilai l dan $O(N)$ nilai berbeda untuk nilai r pada $dp(l, r)$.
- Dibutuhkan iterasi sebanyak $O(N)$ untuk menghitung $dp(l, r)$.
- Sehingga untuk menghitung seluruh nilai $dp(l, r)$ untuk seluruh l dan r dibutuhkan waktu $O(N^3)$.

Solusi Top-Down

Kita implementasikan $dp(l, r)$ sebagai fungsi SOLVE(l, r):

SOLVE(l, r)

```
if (l > r)
    return 0
if computed[l][r]
    return memo[l][r]

best = ∞
cost = L[r + 1] − L[l − 1]
for m = l to r
    best = min(best, SOLVE(l, m − 1) + SOLVE(m + 1, r) + cost)
computed[l][r] = true
memo[l][r] = best
return best
```

Jawaban akhirnya ada pada SOLVE$(1, N)$.

Solusi Bottom Up

SOLVE()

```
// Base case
for l = 0 to N + 1
    for r = 0 to l − 1
        dp[l][r] = 0

// Isi "tabel" mulai dari kasus yang kecil
for gap = 0 to N
    for l = 1 to N − gap
        r = l + gap
        best = ∞
        cost = L[r + 1] − L[l − 1]
        for m = l to r
            best = min(best, dp[l][m − 1] + dp[m + 1][r] + cost)
        dp[l][r] = best

return dp[1][N]
```

Pengisian "Tabel" DP

- Perhatikan bahwa pada metode *bottom-up*, pengisian "tabel" dilakukan secara "tidak biasa".
- Kita perlu mengisi mulai dari:
  - $dp[1][1], dp[2][2], ..., dp[N][N]$,
  - lalu $dp[1][2], dp[2][3], ..., dp[N-1][N]$,
  - lalu $dp[1][3], dp[2][4], ..., dp[N-2][N]$,
  - lalu $dp[1][4], dp[2][5], ..., dp[N-3][N]$,
  - dan seterusnya sampai $dp[1][N]$.
- Ingat bahwa pengisian "tabel" harus dilakukan dari kasus yang kecil ke besar.
- Definisi "kasus kecil" pada masalah ini adalah kayu dengan titik-titik pemotongan yang lebih sedikit.

Pengisian "Tabel" DP (lanj.)

- Dari contoh ini kita mempelajari bahwa urutan pengisian "tabel" pada DP *bottom-up* tidak selalu biasa.
- Jika urutan pengisiannya salah, maka hasil akhir yang didapatkan juga bisa jadi salah.
- Hal in terjadi ketika kita hendak menyelesaikan kasus yang besar, tetapi hasil untuk kasus-kasus yang lebih kecil belum tersedia.
- Untuk mengetahui urutan pengisian "tabel", Anda perlu mengamati apa definisi "kasus kecil" pada masalah yang dihadapi.

Penutup

- DP merupakan topik yang cukup luas untuk dibicarakan.
- Banyak berlatih mengerjakan soal DP dapat melatih kita untuk mendapatkan rumus DP yang sesuai dengan masalah yang dihadapi.
- Topik optimisasi lainnya pada DP akan dibahas pada kesempatan yang lain.