



# Matematika Diskret Dasar: Kombinatorika

Tim Olimpiade Komputer Indonesia

# Pendahuluan

Melalui dokumen ini, kita akan:

- Mempelajari **aturan perkalian**, **penjumlahan**, dan **pembagian**.
- Mempelajari **permutasi**.
- Mempelajari **kombinasi**.
- Memahami **segitiga pascal**.



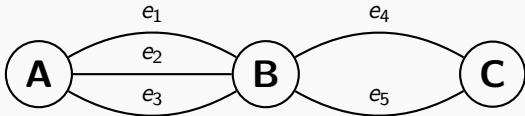
## Bagian 1

# Aturan Perkalian dan Aturan Penjumlahan



## Contoh Soal 1

- Terdapat 3 buah kota yaitu A, B, dan C.
- Kota A dan kota B terhubung oleh 3 jalur berbeda yaitu  $e_1$ ,  $e_2$ , dan  $e_3$ .
- Sedangkan kota B dan kota C terhubung oleh 2 jalur berbeda yaitu  $e_4$  dan  $e_5$ .
- Berapa banyak cara berbeda untuk menuju kota C dari kota A?
- Ilustrasi:



## Solusi Awal

- Apabila kita hitung satu per satu, maka cara yang berbeda untuk menuju kota C dari kota A adalah sebagai berikut:
  - Melalui jalur  $e_1$  kemudian jalur  $e_4$
  - Melalui jalur  $e_1$  kemudian jalur  $e_5$
  - Melalui jalur  $e_2$  kemudian jalur  $e_4$
  - Melalui jalur  $e_2$  kemudian jalur  $e_5$
  - Melalui jalur  $e_3$  kemudian jalur  $e_4$
  - Melalui jalur  $e_3$  kemudian jalur  $e_5$
- Dengan kata lain, terdapat 6 cara berbeda untuk menuju kota C dari kota A.
- Tetapi, apabila jumlah kota dan jalur yang ada sangatlah banyak, kita tidak mungkin menulis satu per satu cara yang berbeda. Karena itulah kita gunakan **aturan perkalian**.



# Aturan Perkalian

- Misalkan suatu proses dapat dibagi menjadi  $N$  subproses independen yang mana terdapat  $a_i$  cara untuk menyelesaikan subproses ke- $i$ .
- Banyak cara yang berbeda untuk menyelesaikan proses tersebut adalah  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_i$ .



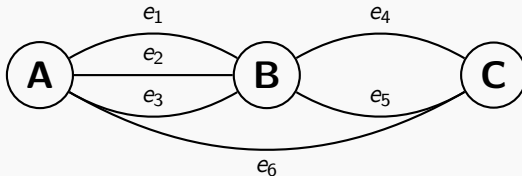
## Solusi dengan Aturan Perkalian

- Anggaplah bahwa perjalanan dari kota A menuju kota B merupakan subproses pertama, yang mana terdapat 3 cara untuk menyelesaikan subproses tersebut.
- Anggaplah pula bahwa perjalanan dari kota B menuju kota C merupakan subproses kedua, yang mana terdapat 2 cara untuk menyelesaikan subproses tersebut.
- Karena perjalanan dari kota A menuju kota B dan dari kota B menuju kota C merupakan 2 subproses yang berbeda, maka kita dapat menggunakan aturan perkalian.
- Banyak cara berbeda dari kota A menuju kota C adalah  $3 \times 2 = 6$ .



## Contoh Soal 2

- Contoh soal ini merupakan lanjutan dari Contoh Soal 1.
- Deskripsi soal, jumlah kota dan jalur serta susunan jalur yang ada sama persis dengan soal tersebut.
- Tambahkan 1 jalur lagi, yaitu  $e_6$  yang menghubungkan kota A dan C.
- Berapa banyak cara berbeda untuk menuju kota C dari kota A?
- Ilustrasi:





## Analisis Contoh Soal

- Dengan mencoba satu persatu setiap cara, maka terdapat 7 cara yang berbeda, yaitu 6 cara sesuai dengan soal sebelumnya, ditambah dengan menggunakan jalur  $e_6$ .
- Apabila kita menggunakan aturan perkalian, maka didapatkan banyak cara yang berbeda adalah  $3 \times 2 \times 1 = 6$  yang mana jawaban tersebut tidaklah tepat.
- Kita tidak dapat menggunakan aturan perkalian dalam permasalahan ini, karena antara perjalanan dari kota A menuju kota C melalui kota B dengan tanpa melalui kota B merupakan 2 proses yang berbeda.
- Oleh karena itu, kita dapat menggunakan **aturan penjumlahan**.



# Aturan Penjumlahan

- Misalkan suatu proses dapat dibagi menjadi  $N$  himpunan proses berbeda yaitu  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_N$  dengan setiap himpunannya saling lepas (tidak beririsan).
- Banyak cara yang berbeda untuk menyelesaikan proses tersebut adalah  $|H_1| + |H_2| + |H_3| + \dots + |H_N|$  dengan  $|H_i|$  merupakan banyaknya cara berbeda untuk menyelesaikan proses ke- $i$ .



## Solusi dengan Aturan Penjumlahan

- Proses perjalanan dari kota A menuju kota C dapat kita bagi menjadi 2 himpunan proses yang berbeda, yaitu dari kota A menuju kota C melalui kota B, dan dari kota A langsung menuju kota C.
- Banyak cara dari kota A menuju kota C melalui kota B dapat kita dapatkan dengan aturan perkalian seperti yang dibahas pada permasalahan sebelumnya, yaitu 6 cara berbeda.
- Banyak cara dari kota A langsung menuju kota C adalah 1 cara, yaitu melalui jalur  $e_6$ .
- Dengan aturan penjumlahan, banyak cara berbeda dari kota A menuju kota C adalah  $6 + 1 = 7$  cara berbeda.



# Hati-Hati!

- Apabila terdapat irisan dari himpunan proses tersebut, maka solusi yang kita dapatkan dengan aturan penjumlahan menjadi tidak tepat, karena ada solusi yang terhitung lebih dari sekali.
- Agar solusi tersebut menjadi tepat, gunakan **Prinsip Inklusi-Eksklusi** pada **Teori Himpunan**.



Bagian 2

## Permutasi



# Perkenalan Permutasi

- Permutasi adalah pemilihan urutan beberapa elemen dari suatu himpunan.
- Untuk menyelesaikan soal-soal permutasi, dibutuhkan pemahaman konsep faktorial.



# Notasi Faktorial

- Faktorial dari  $N$  ( $N!$ ) merupakan hasil perkalian dari semua bilangan asli kurang dari atau sama dengan  $N$ .
- $N! = N \times (N - 1) \times (N - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ , dengan  $0! = 1$ .
- Contoh:  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ .



# Aturan Pembagian

- **Aturan pembagian** terkadang disebut juga sebagai redundansi.
- Apabila terdapat  $K$  susunan cara berbeda yang kita anggap merupakan 1 cara yang sama, maka kita dapat membagi total keseluruhan cara dengan  $K$ , sehingga  $K$  cara tersebut dianggap sama sebagai 1 cara.





## Contoh Aturan Pembagian

- Banyak kata berbeda yang disusun dari huruf-huruf penyusun "TOKI" adalah  $4!$  (menggunakan aturan perkalian).
- Apabila kita ganti soal tersebut, yaitu kata berbeda yang disusun dari huruf-huruf penyusun "BACA", solusi  $4!$  merupakan solusi yang salah.
- Sebab, terdapat 2 buah huruf 'A'. Sebagai contoh:  $BA_1CA_2$  dan  $BA_2CA_1$  pada dasarnya merupakan kata yang sama.



## Contoh Aturan Pembagian (lanj.)

- Terdapat  $2!$  cara berbeda tetapi yang kita anggap sama, yaitu penggunaan  $A_1A_2$  dan  $A_2A_1$ .
- Sehingga banyak kata berbeda yang dapat kita bentuk dari huruf-huruf penyusun kata "BACA" adalah  $\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$  kata berbeda.



# Contoh Soal 1

- Terdapat 5 anak (sebut saja A, B, C, D, dan E) yang sedang mengikuti sebuah kompetisi.
- Dalam kompetisi tersebut akan diambil 3 peserta sebagai pemenang.
- Berapa banyak susunan pemenang yang berbeda dari kelima orang tersebut?



## Solusi Awal

- Anggap bahwa kita mengambil semua anak sebagai pemenang, sehingga terdapat  $5! = 120$  susunan pemenang yang berbeda (ABCDE, ABCED, ABDCE, ..., EDCBA).
- Apabila kita hanya mengambil 3 peserta saja, perhatikan bahwa terdapat 2 cara berbeda yang kita anggap sama. Contoh: (ABC)DE dan (ABC)ED merupakan cara yang sama, karena 3 peserta yang menang adalah A, B, dan C.
- Dengan menggunakan aturan pembagian, maka banyak susunan pemenang yang berbeda adalah  $\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$  susunan berbeda.



## Solusi Secara Umum

- Apabila terdapat  $N$  anak, dan kita mengambil semua anak sebagai pemenang, maka terdapat  $N!$  susunan cara berbeda.
- Tetapi apabila kita hanya mengambil  $R$  anak saja, maka akan terdapat  $(N - R)!$  susunan berbeda yang kita anggap sama.
- Secara umum dengan aturan pembagian, banyak susunan berbeda adalah  $\frac{N!}{(N-R)!}$ .
- Inilah yang kita kenal dengan istilah **permutasi**.



# Permutasi

- Misalkan terdapat  $n$  objek dan kita akan mengambil  $r$  objek dari  $n$  objek tersebut yang mana  $r < n$  dan urutan pengambilan diperhitungkan.
- Banyak cara pengambilan yang berbeda adalah permutasi  $r$  terhadap  $n$ :
- $P(n, r) = {}_n P_r = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ .



## Contoh Soal 2

- Contoh soal ini sejenis dengan contoh pada aturan pembagian.
- Berapa banyak kata berbeda yang disusun dari huruf-huruf penyusun kata "MEGAGIGA"?



## Solusi Awal

- Terdapat 8 huruf, sehingga banyak kata yang dapat disusun adalah  $8!$ .
- Terdapat 3 huruf 'G' sehingga terdapat 6 kata berbeda yang kita anggap sama ( $G_1 G_2 G_3, G_1 G_3 G_2, \dots, G_3 G_2 G_1$ ).
- Dengan aturan pembagian, maka banyak kata yang dapat disusun mengingat kesamaan kata pada huruf G adalah  $\frac{8!}{3!}$ .
- Perlu kita perhatikan pula bahwa terdapat 2 huruf A, sehingga dengan cara yang sama akan didapatkan banyak kata yang berbeda adalah  $\frac{8!}{(3! \times 2!)}$ .





## Solusi Secara Umum

- Terdapat  $N$  huruf, sehingga banyak kata yang dapat kita susun adalah  $N!$ .
- Apabila terdapat  $K$  huruf dengan setiap hurufnya memiliki  $R_i$  huruf yang sama, maka dengan aturan pembagian banyak kata berbeda yang dapat disusun adalah  $\frac{N!}{(R_1! \times R_2! \times R_3! \times \dots \times R_K!)}.$
- Inilah yang kita kenal dengan **permutasi elemen berulang**.



## Permutasi Elemen Berulang

- Misalkan terdapat  $n$  objek dan terdapat  $k$  objek yang mana setiap objeknya memiliki  $r_i$  elemen yang berulang, maka banyaknya cara berbeda dalam menyusun objek tersebut adalah:

- $$P_{r_1, r_2, r_3, \dots, r_k}^n = \frac{n!}{(r_1! \times r_2! \times r_3! \times \dots \times r_k!)}$$



## Contoh Soal 3

- Terdapat 4 anak, sebut saja A, B, C, dan D.
- Berapa banyak susunan posisi duduk yang berbeda apabila mereka duduk melingkar?



## Solusi Awal

- Banyak susunan posisi duduk yang berbeda apabila mereka duduk seperti biasa (tidak melingkar) adalah  $4! = 120$ .
- Perhatikan bahwa posisi duduk ABCD, BCDA, CDAB, dan DABC merupakan susunan yang sama apabila mereka duduk melingkar, karena susunan tersebut merupakan rotasi dari susunan yang lainnya.
- Dengan kata lain terdapat 4 cara berbeda yang kita anggap sama.
- Dengan aturan pembagian, banyak susunan posisi duduk yang berbeda adalah  $\frac{120}{4} = 30$  susunan berbeda.



## Solusi Secara Umum

- Banyak susunan posisi duduk yang berbeda apabila  $N$  anak seperti biasa (tidak melingkar) adalah  $N!$ .
- Dengan analisis yang sama, akan terdapat  $N$  cara berbeda yang kita anggap sama.
- Dengan aturan pembagian, banyak susunan posisi duduk yang berbeda adalah  $\frac{N!}{N} = (N - 1)!$  susunan berbeda.
- inilah yang kita kenal dengan istilah **permutasi siklis**.



# Permutasi Siklis

- Permutasi siklis adalah permutasi yang disusun melingkar.
- Banyaknya susunan yang berbeda dari permutasi siklis terhadap  $n$  objek adalah:
- $P_{(siklis)}^n = (n - 1)!$



Bagian 3

## Kombinasi



## Contoh Soal 1

- Terdapat 5 anak (sebut saja A, B, C, D, dan E) yang mana akan dipilih 3 anak untuk mengikuti kompetisi.
- Berapa banyak susunan tim berbeda yang dapat dibentuk?





## Solusi Awal

- Soal ini berbeda dengan permutasi, karena susunan ABC dan BAC merupakan susunan yang sama, yaitu 1 tim terdiri dari A, B, dan C.
- Apabila kita anggap bahwa mereka merupakan susunan yang berbeda, maka banyaknya susunan tim adalah  $P_2^5 = \frac{120}{2} = 60$ .
- Untuk setiap susunan yang terdiri dari anggota yang sama akan terhitung 6 susunan berbeda yang mana seharusnya hanya dihitung sebagai 1 susunan yang sama.
- Contoh: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA merupakan 1 susunan yang sama.
- Oleh karena itu dengan aturan pembagian, banyaknya susunan tim yang berbeda adalah  $\frac{60}{6} = 10$  susunan berbeda.



## Solusi Secara Umum

- Misalkan terdapat  $N$  anak dan akan kita ambil  $R$  anak untuk dibentuk sebagai 1 tim.
- Apabila urutan susunan diperhitungkan, maka banyaknya susunan tim adalah  $P_R^N$ .
- Setiap susunan yang terdiri dari anggota yang sama akan terhitung  $R!$  susunan berbeda yang mana seharusnya hanya dihitung sebagai 1 susunan yang sama.
- Dengan aturan pembagian, banyaknya susunan tim yang berbeda adalah  $\frac{P_R^N}{R!} = \frac{N!}{(N-R)! \times R!}$  susunan berbeda.
- Inilah yang kita kenal dengan istilah **kombinasi**.



# Kombinasi

- Misalkan terdapat  $n$  objek dan kita akan mengambil  $r$  objek dari  $n$  objek tersebut dengan  $r < n$  dan urutan pengambilan tidak diperhitungkan.
- Banyaknya cara pengambilan yang berbeda adalah kombinasi  $r$  terhadap  $n$ :
- $C(n, r) = {}_n C_r = C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}.$



## Contoh Soal 2

- Pak Dengklek ingin membeli kue pada toko kue yang menjual 3 jenis kue, yaitu rasa coklat, stroberi, dan kopi.
- Apabila Pak Dengklek ingin membeli 4 buah kue, maka berapa banyak kombinasi kue berbeda yang Pak Dengklek dapat beli?



## Analisis Contoh Soal

- Perhatikan bahwa membeli coklat-stroberi dengan stroberi-coklat akan menghasilkan kombinasi yang sama.
- Contoh soal ini merupakan permasalahan kombinasi.
- Akan tetapi, kita dapat membeli suatu jenis kue beberapa kali atau bahkan tidak membeli sama sekali.
- Contoh soal ini dapat dimodelkan secara matematis menjadi mencari banyaknya kemungkinan nilai  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  yang memenuhi  $A + B + C = 4$  dan  $A, B, C \geq 0$ .



## Solusi

- Kita dapat membagi 4 kue tersebut menjadi 3 bagian. Untuk mempermudah ilustrasi tersebut, kita gunakan lambang o yang berarti kue, dan | yang berarti pembatas.
- Bagian kiri merupakan kue A, bagian tengah merupakan kue B, dan bagian kanan merupakan kue C.
- Contoh: (o|o|oo) menyatakan 1 kue A, 1 kue B, dan 2 kue C.
- Contoh lain: (oo|oo|) menyatakan 2 kue A, 2 kue B, dan 0 kue C.
- Dengan kata lain, semua susunan yang mungkin adalah (oooo|), (ooo|o|), (oo|oo|), ..., (||oooo) yang tidak lain merupakan  $C_2^6 = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15$  susunan berbeda.



## Solusi Secara Umum

- Kita ingin mencari banyaknya susunan nilai berbeda dari  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_r$  yang mana  $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_r = n$ .
- Untuk membagi  $n$  objek tersebut menjadi  $r$  bagian, maka akan dibutuhkan  $r - 1$  buah pembatas, sehingga akan terdapat  $n + r - 1$  buah objek, yang mana kita akan memilih  $r - 1$  objek untuk menjadi simbol  $|$ .
- Dengan kata lain, banyaknya susunan nilai yang berbeda adalah  $C_{n+r-1}^{r-1}$ .
- Inilah yang kita kenal dengan istilah **kombinasi dengan perulangan**.



# Kombinasi dengan Perulangan

- Misalkan terdapat  $r$  jenis objek dan kita akan mengambil  $n$  objek, dengan tiap jenisnya dapat diambil 0 atau beberapa kali.
- Banyaknya cara berbeda yang memenuhi syarat tersebut adalah sebagai berikut:
- $C_n^{n+r-1} = C_{r-1}^{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{n! \times (r-1)!}$





## Bagian 4

# Segitiga Pascal



# Segitiga Pascal

- **Segitiga Pascal** merupakan susunan dari koefisien-koefisien binomial dalam bentuk segitiga.
- Nilai dari baris ke- $n$  suku ke- $r$  adalah  $C_r^n$ .
- Contoh Segitiga Pascal:
  - Baris ke-1: 1
  - Baris ke-2: 1 1
  - Baris ke-3: 1 2 1
  - Baris ke-4: 1 3 3 1
  - Baris ke-5: 1 4 6 4 1



# Analisis

- Diberikan suatu himpunan  $S = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . Berapa banyak cara untuk memilih  $r$  objek dari  $S$ ?
- Terdapat 2 kasus:
  - Kasus 1:  $X_n$  dipilih. Artinya,  $r - 1$  objek harus dipilih dari himpunan  $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}\}$ . Banyaknya cara berbeda dari kasus ini adalah  $C_{r-1}^{n-1}$ .
  - Kasus 2:  $X_n$  tidak dipilih. Artinya,  $r$  objek harus dipilih dari himpunan  $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ . Banyaknya cara berbeda dari kasus ini adalah  $C_r^{n-1}$ .



## Analisis (lanj.)

- Dengan aturan penjumlahan dari kasus 1 dan kasus 2, kita dapatkan  $C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$ .
- Persamaan itulah yang sering kita gunakan dalam membuat Segitiga Pascal, karena  $C_r^n$  juga menyatakan baris ke- $n$  dan kolom ke- $r$  pada Segitiga Pascal.



## Analisis (lanj.)

- Dalam dunia pemrograman, kadang kala dibutuhkan perhitungan seluruh nilai  $C_r^n$  yang memenuhi  $n \leq N$ , untuk suatu  $N$  tertentu.
- Pencarian nilai dari  $C_r^n$  dengan menghitung faktorial memiliki kompleksitas  $O(n)$ .
- Apabila seluruh nilai kombinasi dicari dengan cara tersebut, kompleksitas akhirnya adalah  $O(N^3)$ .
- Namun, dengan menggunakan persamaan  $C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$ , maka secara keseluruhan kompleksitasnya dapat menjadi  $O(N^2)$ .



## Implementasi Segitiga Pascal (lanj.)

SEGITIGA\_PASCAL( $N$ )

```
1  // Sediakan array 2-dimensi  $C$  berukuran  $(N + 1) \times (N + 1)$ 
2  for  $i = 0$  to  $N$ 
3       $C[i][0] = 1$ 
4      for  $j = 0$  to  $i - 1$ 
5           $C[i][j] = C[i - 1][j - 1] + C[i - 1][j]$ 
6       $C[i][i] = 1$ 
```



# Penggunaan Segitiga Pascal

- Dalam bidang matematika, Segitiga Pascal merupakan kumpulan dari koefisien binomial yang dapat digunakan dalam Binomial Newton  $(x + y)^n = \sum_{r=0}^n a_r x^{n-r} y^r$  yang mana  $a_r$  merupakan bilangan dalam segitiga pascal baris ke- $n$  suku ke- $r$ .
- Dalam bidang programming, algoritma dari segitiga pascal dapat digunakan untuk mencari semua nilai dari kombinasi  $r$  terhadap  $n$  untuk seluruh  $n \leq N$  dengan kompleksitas waktu  $O(N^2)$  dan memori  $O(N^2)$ .



# Penutup

- Materi ini berisi mengenai kombinatorika dasar dan implementasinya yang umum digunakan dalam pemrograman kompetitif.
- Dengan materi ini, Anda diharapkan dapat menggunakan konsep kombinatorika yang ada.

