



Dynamic Programming

Tim Olimpiade Komputer Indonesia

Pendahuluan

Melalui dokumen ini, kalian akan:

- Memahami konsep **dynamic programming** (DP).
- Menyelesaikan contoh persoalan DP sederhana.



Motivasi

- Diberikan M jenis koin, masing-masing jenis bernilai a_1, a_2, \dots, a_M rupiah.
- Asumsikan banyaknya koin untuk setiap nominal yang ada tak terbatas.
- Tentukan banyaknya koin paling sedikit untuk membayar **tepat** sebesar N rupiah!
- (Persoalan ini biasa disebut dengan *coin change*.)



Solusi Greedy

- Mari kita coba menyelesaikan masalah ini secara *greedy*.
- Salah satu algoritma *greedy* yang mungkin adalah dengan selalu menggunakan koin terbesar yang \leq sisa uang yang harus dibayar.



Solusi Greedy (lanj.)

- Misalkan kita memiliki nominal koin 1 rupiah, 6 rupiah, dan 10 rupiah dan ingin membayar 12 rupiah.
- Dengan algoritma sebelumnya, kita akan menggunakan koin 10 rupiah terlebih dahulu.
- Karena tersisa 2 rupiah, berikutnya kita akan menggunakan 2 koin 1 rupiah, sehingga totalnya kita menggunakan 3 koin.
- Namun, ada solusi lebih baik: 2 koin 6 rupiah.
- Algoritma *greedy* ini tidak memberikan solusi terbaik.



Observasi

- Anggaplah kita membayar N rupiah dengan koin-koin **satu-persatu**.
- Pastilah terdapat **koin pertama** yang kita bayarkan.
- Jika nilai koin itu adalah a_k , maka **sisanya** yang perlu kita bayar adalah $N - a_k$.
- Dalam kasus ini, terdapat M **pilihan** koin untuk a_k .



Observasi (lanj.)

- Perhatikan bahwa penukaran $N - a_k$ merupakan suatu subpersoalan yang serupa dengan persoalan awalnya.
- Artinya, cara yang sama untuk menyelesaikan subpersoalan dapat digunakan.
- Kita akan menggunakan strategi penyelesaian secara rekursif.



Solusi Rekursif

- Definisikan sebuah fungsi $f(x)$ sebagai banyaknya koin minimum yang dibutuhkan untuk membayar tepat x rupiah.
- Kita dapat mencoba-coba satu koin yang ingin kita gunakan.
- Jika suatu koin a_k digunakan, maka kita membutuhkan $f(x - a_k)$ koin ditambah satu koin a_k .
- Atau dapat ditulis $f(x) = f(x - a_k) + 1$
- Pencarian nilai $f(x - a_k)$ dilakukan secara rekursif, kita kembali mencoba-coba koin yang ingin digunakan.



Solusi Rekursif (lanj.)

- Dari semua kemungkinan a_k , mana pilihan yang terbaik?
- Pilihan yang terbaik akan memberikan nilai $f(x - a_k) + 1$ sekecil mungkin.
- Jadi kita cukup mencoba semua kemungkinan a_k , dan ambil yang hasil $f(x - a_k) + 1$ terkecil.



Solusi Rekursif (lanj.)

- Jika $f(x)$ dihitung secara rekursif, apa yang menjadi **base case**?
- Kasus terkecilnya adalah $f(0)$, yang artinya kita hendak membayar 0 rupiah.
- Membayar 0 rupiah tidak membutuhkan satu pun koin, sehingga $f(0) = 0$.



Solusi Rekursif (lanj.)

Secara matematis, hubungan rekursif ini dituliskan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \min_{1 \leq k \leq M, a_k \leq x} f(x - a_k) + 1, & x > 0 \end{cases}$$



Implementasi Solusi Rekursif

Kita implementasikan $f(x)$ sebagai fungsi $\text{SOLVE}(x)$:

$\text{SOLVE}(x)$

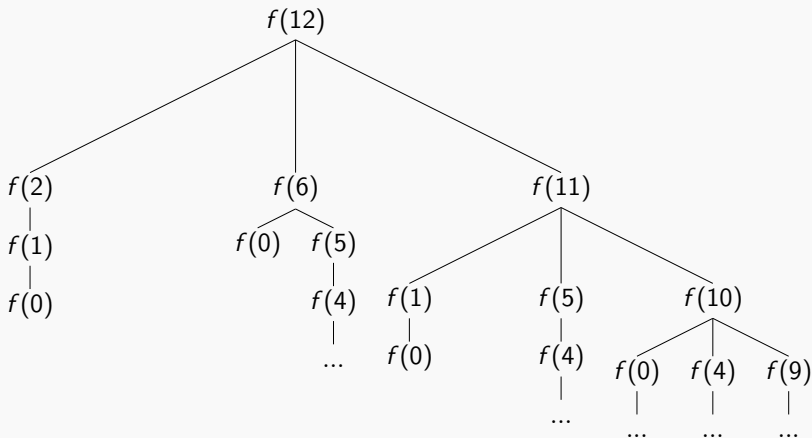
```
1  if ( $x == 0$ )  
2      return 0  
3  
4   $best = \infty$   
5  for  $k = 1$  to  $M$   
6      if ( $a_k \leq x$ )  
7           $best = \min(best, \text{SOLVE}(x - a_k) + 1)$   
8  return  $best$ 
```

Jawaban akhirnya ada pada $\text{SOLVE}(N)$.



Solusi Rekursif (lanj.)

Mari kita lihat pohon rekursi yang dihasilkan oleh fungsi f .
Berikut untuk $f(12)$ dengan nominal koin 1, 6, dan 10 rupiah.



Solusi Rekursif (lanj.)

- Jika diperhatikan pada pohon rekursi, terdapat $O(M)$ cabang untuk setiap pemanggilan f .
- Untuk menghitung nilai $f(N)$, kita akan memiliki pohon rekursi yang kira-kira sedalam $O(N)$.
- Berarti kira-kira dilakukan $O(M^N)$ pemanggilan fungsi.
- Karena itu, solusi ini membutuhkan $O(M^N)$ operasi, yang mana banyaknya operasi ini eksponensial.



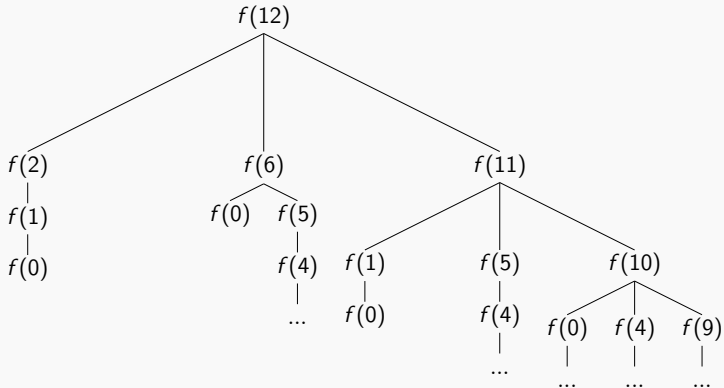
Solusi Rekursif (lanj.)

- Biasanya solusi eksponensial berjalan sangat lambat.
- Cobalah Anda hitung nilai $O(M^N)$ dengan $M = 3$ dan $N = 100$, untuk menyadari betapa lambatnya solusi ini!
- Kita tidak ingin memiliki solusi eksponensial pada pemrograman kompetitif, kecuali pada soal-soal tertentu yang tidak memiliki solusi polinomial.
- Karena itu, kita harus melakukan sebuah optimisasi.



Optimisasi

Jika diperhatikan, ternyata banyak $f(x)$ yang dihitung berkali-kali. Sebagai contoh, $f(5)$ dan $f(4)$.



Optimisasi (lanj.)

- Perhatikan bahwa hanya ada $N + 1$ kemungkinan x untuk $f(x)$, yaitu 0 sampai N .
- Kita dapat melakukan **memoisasi**, yaitu mencatat hasil perhitungan $f(x)$ setelah menghitungnya.
- Jika suatu ketika kita kembali memerlukan nilai $f(x)$, kita tidak perlu menghitungnya kembali.



Solusi Rekursif dengan Memoisasi

```
SOLVE( $x$ )  
1  if ( $x == 0$ )  
2      return 0  
3  if computed[ $x$ ]  
4      return memo[ $x$ ] // Langsung kembalikan  
5  
6  best =  $\infty$   
7  for  $k = 1$  to  $M$   
8      if ( $a_k \leq x$ )  
9          best =  $\min(\textit{best}, \text{SOLVE}(x - a_k) + 1)$   
10 computed[ $x$ ] = true // Tandai bahwa sudah pernah dihitung  
11 memo[ $x$ ] = best  
12 return best
```



Solusi Rekursif dengan Memoisasi (lanj.)

- Untuk menghitung suatu nilai $f(x)$, kita membutuhkan $O(M)$ iterasi.
- Sehingga untuk menghitung nilai $f(x)$ untuk seluruh x , kita membutuhkan $O(NM)$ operasi.
- Banyaknya operasi ini polinomial terhadap N dan M , dan **jauh lebih cepat** daripada solusi rekursif sebelumnya.



Dynamic Programming

- Merupakan metode penyelesaian persoalan yang melibatkan pengambilan keputusan dengan memanfaatkan informasi dari penyelesaian subpersoalan yang sama namun lebih kecil.
- Solusi subpersoalan tersebut hanya dihitung satu kali dan disimpan di memori.
- Jika sebuah persoalan adalah masalah optimisasi, maka biasanya kita mencoba semua kemungkinan solusi sub-problem yang dihasilkan, dan mengambil yang hasilnya paling optimal.



Dynamic Programming

Terdapat dua cara mengimplementasikan DP

- **top-down**: diimplementasikan secara rekursif sambil mencatat nilai yang sudah ditemukan (memoisasi).
- **bottom-up**: diimplementasikan secara iteratif dengan menghitung mulai dari kasus yang kecil ke besar.



Top-Down

- Cara yang sebelumnya kita gunakan adalah *top-down*.
- Kata memoisasi berasal dari "memo", yang artinya catatan.
- Pada *top-down*, penyelesaian masalah dimulai dari kasus yang besar.
- Untuk menyelesaikan kasus yang besar, dibutuhkan solusi dari kasus yang lebih kecil.
- Karena solusi kasus yang lebih kecil belum ada, maka kita akan mencarinya terlebih dahulu, lalu mencatat hasilnya.
- Hal ini dilakukan secara rekursif.



Bottom Up

- Pada *bottom-up*, penyelesaian masalah dimulai dari kasus yang kecil.
- Ketika merumuskan formula rekursif, kita mengetahui jawaban kasus yang paling kecil, yaitu *base case*.
- Informasi ini digunakan untuk menyelesaikan kasus yang lebih besar.
- Biasanya dianalogikan dengan pengisian "tabel DP".
- Hal ini dilakukan secara iteratif.



Solusi dengan Bottom-Up

Secara *bottom-up*, kita hitung semua nilai $f(x)$ untuk semua nilai x dari 0 sampai N secara menaik. Nilai dari $f(x)$ disimpan dalam *array* $f[x]$.

SOLVE()

```
1   $f[0] = 0$ 
2  for  $x = 1$  to  $N$ 
3       $best = \infty$ 
4      for  $k = 1$  to  $M$ 
5          if ( $a_k \leq x$ )
6               $best = \min(best, f[x - a_k] + 1)$ 
7       $f[x] = best$ 
8  return  $f[N]$ 
```



Kompleksitas?

- Dengan mudah Anda dapat memperhatikan bahwa kompleksitas solusi dengan *bottom-up* adalah $O(NM)$.
- Kompleksitas ini sama seperti dengan cara *top-down*.
- Kenyataannya, sebenarnya keduanya merupakan algoritma **yang sama**, hanya berbeda di arah pencarian jawaban.



Mengisi "Tabel"

Cara *bottom-up* yang dijelaskan sebelumnya terkesan seperti "mengisi tabel".

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$													



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Awalnya, diisi $f(0) = 0$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0												



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Berikutnya, diisi $f(1)$.

Satu-satunya pilihan adalah menukarkan dengan koin 1, karena kita tidak bisa menggunakan koin 6 atau 10. Jadi:

$$f(1) = f(1 - 1) + 1 = f(0) + 1$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0	1											

Masuk akal, untuk membayar 1 memang kita membutuhkan 1 koin.



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Hal serupa terjadi ketika kita mengisi $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, dan $f(5)$. Satu-satunya pilihan adalah menukarkan dengan koin 1, karena kita tidak bisa menggunakan koin 6 atau 10.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0	1	2	3	4	5							



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Berikutnya adalah mengisi $f(6)$.

Terdapat pilihan untuk menggunakan koin 1 atau 6 terlebih dahulu, sehingga:

$$\begin{aligned}f(6) &= \min(f(6 - 1) + 1, f(6 - 6) + 1) \\&= \min(f(5) + 1, f(0) + 1) \\&= \min(5 + 1, 0 + 1) \\&= \min(6, 1) \\&= 1\end{aligned}$$



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Memang benar, untuk membayar 6 kita hanya membutuhkan 1 koin.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	1						



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Lakukan hal serupa untuk $x = 7$ sampai $x = 9$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4			



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Berikutnya adalah mengisi $f(10)$.

Terdapat pilihan untuk menggunakan koin 1, 6, atau 10 terlebih dahulu, sehingga:

$$\begin{aligned} f(10) &= \min(f(10 - 1) + 1, f(10 - 6) + 1, f(10 - 10) + 1) \\ &= \min(f(9) + 1, f(4) + 1, f(0) + 1) \\ &= \min(4 + 1, 4 + 1, 0 + 1) \\ &= \min(5, 5, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Kembali, memang benar bahwa untuk membayar 10 kita hanya membutuhkan 1 koin, yaitu langsung menggunakan koin 10 (tanpa 1 dan 6).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1		



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Berikutnya adalah mengisi $f(11)$.

$$\begin{aligned}f(11) &= \min(f(11-1) + 1, f(11-6) + 1, f(11-10) + 1) \\&= \min(f(10) + 1, f(5) + 1, f(1) + 1) \\&= \min(1 + 1, 5 + 1, 1 + 1) \\&= \min(2, 6, 2) \\&= 2\end{aligned}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Terakhir, isi $f(12)$.

$$\begin{aligned} f(12) &= \min(f(12-1) + 1, f(12-6) + 1, f(12-10) + 1) \\ &= \min(f(11) + 1, f(6) + 1, f(2) + 1) \\ &= \min(2 + 1, 1 + 1, 2 + 1) \\ &= \min(3, 2, 3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dari sini, terlihat bahwa menggunakan koin 10 terlebih dahulu (pilihan paling kanan) mengakibatkan banyaknya koin yang dibutuhkan adalah 3.

Sementara menggunakan koin 6 terlebih dahulu (pilihan tengah) mengakibatkan banyaknya koin yang dibutuhkan adalah 2.



Mengisi "Tabel" (lanj.)

Jadi kita selesai mengisi "tabel" DP.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	2

- Jika Anda menggunakan *top-down*, pada akhirnya tabel *memo* juga akan berisi nilai-nilai ini.
- Coba implementasikan secara *top-down* dan *bottom-up* dan lihat hasilnya!



Top-Down dan Bottom-Up

Top-down

- Sebuah transformasi natural dari formula rekursif, biasanya mudah diimplementasikan.
- Urutan pengisian tabel tidak penting.
- Hanya menghitung nilai dari fungsi jika hanya diperlukan.
- Ketika seluruh tabel memo pada akhirnya terisi, bisa saja lebih lambat karena adanya *overhead* pemanggilan fungsi.



Top-Down dan Bottom-Up (lanj.)

Bottom-up

- Tidak mengalami perlambatan dari *overhead* pemanggilan fungsi.
- Memungkinkan penggunaan teknik DP lanjutan seperti *flying table*, kombinasi dengan struktur data *tree*, dsb.
- Harus memikirkan urutan pengisian nilai tabel.
- Semua tabel harus diisi nilainya walaupun tidak dibutuhkan akhirnya.



Top-Down dan Bottom-Up (lanj.)

- Beberapa orang lebih alami untuk menggunakan *top-down*, sementara sisanya lebih terbiasa dengan *bottom-up*.
- Bergantung dari cara berpikir Anda, salah satunya mungkin lebih mudah Anda pelajari.
- Untuk orang yang telah berpengalaman, penggunaan *bottom-up* dan *top-down* dapat disesuaikan dengan soal yang dihadapi.



Penutup

- Terdapat dua versi DP, yaitu *top-down* dan *bottom-up*.
- Keduanya memiliki keuntungan dan kerugian, pilih yang tepat sesuai dengan kebutuhan soal.
- Kunci dari mengerjakan soal DP adalah mengidentifikasi pilihan keputusan yang bisa diambil, dan merumuskannya menjadi rumus rekursif.
- Anda perlu banyak latihan soal DP untuk menjadi terbiasa dengan melakukan formulasi rekursif ini.

