4. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность и около которой можно описать окружность.

(a) Докажите, что проекция диагонали этой трапеции на большее основание равна боковой стороне.

(b) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, если основания трапеции равны 3 и 27.

Решение:

(a) В равнобедренной трапеции высота из вершины меньшего основания b делит большее основание a на отрезки (a - b)/2 и (a + b)/2; это очень просто увидеть, если провести высоты из обеих вершин. Второй отрезок (больший) как раз и есть проекция диагонали на основание (меньший отрезок — это проекция боковой стороны на основание). Поскольку в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона c равна полусумме оснований. a) доказано.

(b) Легко найти c = (27 + 3)/2 = 15; проекция c на a равна (27 - 3)/2 = 12; откуда высота трапеции 9; (получился египетский треугольник).
Кажется, что тут нужно искать значения радиусов (радиус вписанной окружности уже найден, он равен 9/2) и как-то с ними потом разбираться. Но всё куда проще.
Центры обеих окружностей лежат на прямой n, перпендикулярной основаниям и проходящей через их середины. При этом центр вписанной окружности лежит на средней линии.
Если через середину боковой стороны провести перпендикуляр, то он пересечет прямую n в центре описанной окружности. В силу очевидного подобия тут тоже получается египетский треугольник (его катеты - искомое расстояние и половина средней линии трапеции), и нужное расстояние равно (15/2)·12/9 = 10;

5. Окружность с центром O_1 вписана в прямоугольную трапецию ABCD с прямым углом при вершине A. Окружность с центром O_2 касается большей боковой стороны CD продолжений оснований трапеции.

(a) Докажите, что O_1CO_2D - прямоугольник.

(b) Найдите площадь этого прямоугольника, если точка касания M вписанной в трапецию окружности делит меньшее основание на отрезки BM = 6 и CM=4.

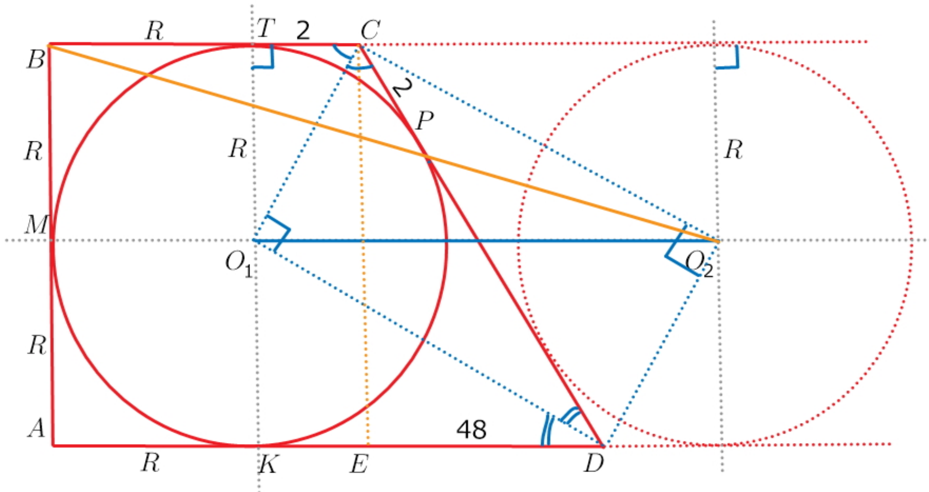
Аналогично, как в задаче:

Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований:

1) Доказать, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции
2) Найти расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной делит ее на отрезки, равные 2 и 50.

Решение:

Окружности будут равные, т.к. их диаметры равны, как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными основаниями трапеции.
центры окружностей расположены на биссектрисах соотв углов: CO_1, DO_1, CO_2, DO_2
$CO_1 \perp DO_1$ как биссектрисы углов, сумма которых = 180 градусов.
аналогично $CO_2 \perp DO_2$.
CO_2DO_1 — прямоугольник, диагонали прямоугольника равны: $CD = O_1O_2$
радиус окружностей можно найти из прямоугольного треугольника, построив еще одну высоту трапеции.
Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны.



$DP = DK = 50$
$CP = CT = EK = 2$
из ΔCED
$4R^2 = 52^2 - 48^2 = 4*100$
$R = 10$

$O_1O_2 = CD = 52$
из ΔBMO_2
$BO_2^2 = 10^2 + 62^2 = 4*(25+961)$
$BO_2 = 2\sqrt{986}$