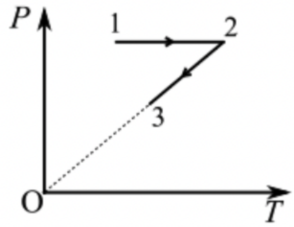
Задача 37. (*«Физтех», 2017, 10*) На диаграмме зависимости давления P газа от температуры T для гелия в количестве $\nu = 3/2$ моль показано, что сначала газ нагревался в изобарном процессе 1–2, а затем охлаждался в процессе 2–3 прямо пропорциональной зависимости давления от температуры. Температуры газа в состояниях 1, 2 и 3 $T_1 = 150$ K, $T_2 = 3T_1$, $T_3 = 2T_1$. Отношение давлений в состояниях 1 и 3 равно $3/2$.



1) Найти работу газа в процессе 1–2–3.

2) Найти отношение количества теплоты, подведённого к газу в процессе 1–2, к количеству теплоты, отведённому от газа в процессе 2–3.

1) $A = 2\nu RT_1 \approx 3740$ Дж; 2) $10/3$

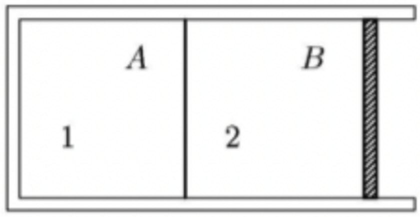
Возможное решение

Процесс 2-3 изохорический.

1) $A = A_{12} = 2\nu RT_1 \approx 3,74$ кДж.

2) $\dfrac{Q_{12}}{|Q_{23}|} = \dfrac{\nu C_P (T_2 - T_1)}{-\nu C_V (T_3 - T_2)} = \dfrac{10}{3}$.

Задача 45. (*«Физтех», 2015, 11*) Неподвижная теплопроводящая перегородка A делит объём теплоизолированного цилиндра на два отсека, в которых находится по ν моль гелия. Во втором отсеке газ удерживается подвижным теплоизолированным поршнем B. Наружное атмосферное давление равно p_0. В начальном состоянии температура гелия в первом отсеке больше, чем во втором. В результате медленного процесса теплообмена через перегородку температура в отсеках начинает выравниваться, а поршень перемещается. По окончании процесса теплообмена объём гелия во втором отсеке увеличивается на ΔV. Трением поршня о цилиндр, теплоёмкостью стенок цилиндра и поршня пренебречь.



1) Найдите отношение модулей изменения температуры в первом и втором отсеках после окончания теплообмена.

2) Найдите изменение температуры в первом отсеке.

1) $\frac{|\Delta T_1|}{\Delta T_2} = \frac{5}{3}$; 2) $\Delta T_1 = -\frac{5}{3}\frac{p_0 \Delta V}{\nu R}$

Возможное решение

2. 1) Количество теплоты, отданное газом из первого отсека, равно количеству теплоты, полученной газом из второго отсека: $\nu C_V |\Delta T_1| = \nu C_P \Delta T_2$. Здесь $C_V = 3R/2$, $C_P = C_V + R = 5R/2$ – молярные теплоемкости гелия при постоянном объеме и постоянном давлении, $\Delta T_1 < 0$. Отсюда отношение модулей изменений температуры в отсеках $\dfrac{|\Delta T_1|}{\Delta T_2} = \dfrac{5}{3}$.

2) Пусть V и T_2 – начальные объем и температура во втором отсеке. Уравнения состояния вначале и в конце $P_0 V = \nu RT_2$, $P_0(V + \Delta V) = \nu R(T_2 + \Delta T_2)$. Отсюда с учетом полученного выражения для отношения изменений температуры находим $\Delta T_1 = -\dfrac{5}{3}\dfrac{P_0 \Delta V}{\nu R} < 0$.

Задача 58. (*МФТИ, 1992*) Равные массы гелия He и водорода H_2 находятся в теплоизолированном цилиндре под поршнем. Объём цилиндра $V_0 = 1$ л, давление в нём $p_0 = 9$ атм. При адиабатическом расширении смесь газов совершает работу $A = 650$ Дж. Найти относительное изменение температуры смеси. Внутренняя энергия моля гелия равна $\frac{3}{2}RT$, водорода — $\frac{5}{2}RT$ (T — абсолютная температура, R — газовая постоянная). Молярные массы гелия и водорода равны соответственно $\mu_1 = 4$ г/моль и $\mu_2 = 2$ г/моль.

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{2(\mu_1+\mu_2)}{5\mu_1+3\mu_2}\frac{A}{p_0V_0} = -\frac{1}{3}}$$

Возможное решение

Альтернативная задача:

Равные массы гелия и водорода находятся в теплоизолированном цилиндре под поршнем. Объем цилиндра V_o, давление в нем P_o. Смесь газов расширяется и совершает работу A. Найти относительное изменение температуры смеси.

Обозначим через ν_1, ν_2, m_1, m_2, μ_1, μ_2 количества вещества, массы и молярные массы гелия и водорода соответственно.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона имеем $P_oV_o = (\nu_1 + \nu_2)RT_o$. Отсюда $T_o = \dfrac{P_oV_o}{R(\nu_1 + \nu_2)}$ (1)

Заметим, что $\nu_1 + \nu_2 = m/\mu_1 + m/\mu_2 = m(\mu_2 + \mu_1)/(\mu_1\mu_2)$.

С учетом последнего выражения формулу (1) можно переписать в виде $T_o = \dfrac{P_oV_o\mu_1\mu_2}{mR(\mu_1 + \mu_2)}$.

Вычислим работу при расширении смеси газов. Так как процесс расширения проходит без теплообмена с окружающей средой, то работа равна изменению внутренней энергии:

$$A = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2.$$

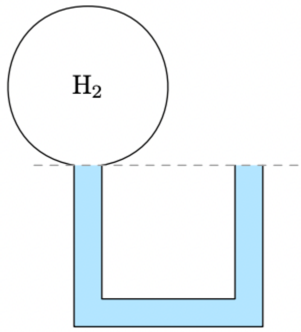
Поскольку гелий – одноатомный, а водород – двухатомный газ, имеем

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2}\nu_1 R\Delta T = \frac{3mR\Delta T}{2\mu_1}, \qquad \Delta U_2 = \frac{5}{2}\nu_2 R\Delta T = \frac{5mR\Delta T}{2\mu_2}.$$

Поэтому $A = \dfrac{\Delta TmR}{2}\left(\dfrac{3}{\mu_1} + \dfrac{5}{\mu_2}\right) = \dfrac{\Delta TRm}{2}\cdot\dfrac{3\mu_2 + 5\mu_1}{\mu_1\mu_2}$. Отсюда найдем $A = \dfrac{2A\mu_1\mu_2}{Rm(3\mu_2 + 5\mu_1)}$.

После преобразований окончательно получаем $\dfrac{\Delta T}{T_o} = \dfrac{2A(\mu_1 + \mu_2)}{P_oV_o(3\mu_2 + 5\mu_1)} = \dfrac{6A}{13P_oV_o} =$
$\dfrac{6\cdot 650}{13\cdot(9\cdot 10^5)\cdot(1\cdot 10^{-3})} = \dfrac{1}{3}$. Так как газ расширяется то он охлаждается, и тогда ответ: $-\dfrac{1}{3}$

Задача 65. (*МФТИ, 2004*) U-образная трубка состоит из трёх одинаковых колен, расположена вертикально и заполнена жидкостью. Один конец трубки соединён с баллоном, заполненным водородом, другой конец трубки открыт в атмосферу (см. рисунок). Водород в баллоне медленно нагревают, и он медленно вытесняет жидкость из трубки. К моменту, когда из трубки вылилось $2/3$ всей массы жидкости, водород получил количество теплоты $Q = 30$ Дж. Найти объём баллона, заполненного вначале водородом. Известно, что объём всей трубки равен объёму баллона. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, а добавочное давление, создаваемое столбом жидкости в вертикальном колене трубки, равно $p_0/9$.



$\boxed{V_0 = \frac{27}{77}\frac{Q}{p_0} \approx 0{,}1 \text{ л}}$

Задача из Кванта 40 стр: http://kvant.mccme.ru/pdf/2006-01s.pdf

Задача 3. U-*образная трубка расположена вертикально и заполнена жидкостью. Один конец трубки открыт в атмосферу, а другой конец соединен с сосудом объемом* $V_0 = 0{,}1$ *л, заполненным гелием (рис.1). Объем всей трубки равен объему этого сосуда. В некоторый момент гелий начинают медленно нагревать. Какое минимальное количество теплоты необходимо подвести к гелию, чтобы вся жидкость вылилась из трубки? Атмосферное давление* $p_0 = 10^5$ *Па; длины трех колен трубки одинаковы; давление, создаваемое столбом жидкости в вертикальном колене, равно* $p_0/8$.

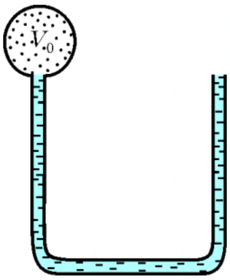


Рис. 1

Обозначим полную длину трубки через $3L$, а площадь внутреннего поперечного сечения трубки – через S. Поскольку объем трубки V_0, то длина каждого колена

$$L = \frac{V_0}{3S}.$$

Весь процесс нагрева гелия можно разбить на три участка. Первый участок – это когда жидкость еще находится в левом вертикальном колене. Рассмотрим момент времени, когда уровень жидкости в левом колене переместился на величину z, $0 \le z \le L$. Из условия равновесия жидкости в трубке найдем давление гелия:

$$p = p_0 + \rho_ж g z,$$

где $\rho_ж$ – плотность жидкости. На втором участке, для которого $L \le z \le 2L$, давление гелия

$$p = p_0 + \rho_ж g L = \text{const},$$

а на третьем участке, для $2L \le z \le 3L$, –

$$p = p_0 + \rho_ж g (3L - z).$$

На рисунке 2 изображен график зависимости давления гелия от его объема V, который связан со смещением z простым соотношением:

$$V = V_0 + Sz.$$

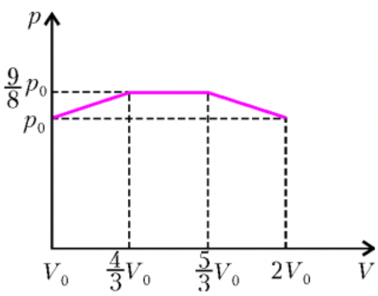


Рис. 2

На первых двух участках тепло необходимо подводить к гелию – это однозначно: здесь газ, расширяясь, совершает работу и одновременно нагревается. А вот третий участок неоднозначен: здесь газ также совершает работу, но при этом он может и охлаждаться. Убедимся, что и на этом участке тепло тоже подводится.

Учитывая, что $\rho_ж g L = p_0/8$, запишем уравнение процесса для третьего участка в виде

$$p = \frac{p_0}{8}\left(14 - 3\frac{V}{V_0}\right).$$

Рассмотрим малое изменение объема ΔV. Тогда работа, совершенная гелием, равна

$$\Delta A = p\Delta V = \frac{p_0}{8}\left(14 - 3\frac{V}{V_0}\right)\Delta V.$$

Запишем уравнение состояния гелия как идеального газа:

$$pV = \nu RT,$$

где ν – количество вещества, T – температура газа. Подставим в это уравнение выражение для давления на третьем участке процесса и получим

$$\frac{p_0}{8}\left(14V - 3\frac{V^2}{V_0}\right) = \nu RT.$$

Теперь найдем изменение внутренней энергии гелия при изменении объема на ΔV:

$$\Delta U = C_V \nu \Delta T = \frac{3}{2}\nu R \Delta T = \frac{3p_0}{16}\left(14 - 6\frac{V}{V_0}\right)\Delta V .$$

Согласно первому началу термодинамики, подведенное количество теплоты равно сумме изменения внутренней энергии газа и совершенной им работы:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{p_0}{8}\left(35 - 12\frac{V}{V_0}\right)\Delta V .$$

Легко убедиться, что при $\frac{5}{3} \le \frac{V}{V_0} \le 2$ и $\Delta V > 0$

$$\Delta Q > 0 .$$

Итак, на всех участках тепло подводится, поэтому полное подведенное к гелию количество теплоты Q найдем как сумму полного изменения внутренней энергии и полной работы, которую совершил гелий:

$$Q = (U_к - U_н) + A .$$

Поскольку начальная и конечная температуры равны, соответственно,

$$T_н = \frac{p_0 V_0}{\nu R} \text{ и } T_к = \frac{2p_0 V_0}{\nu R} ,$$

то изменение внутренней энергии равно

$$U_к - U_н = \frac{3}{2}\nu R (T_к - T_н) = \frac{3}{2} p_0 V_0 .$$

Полную работу найдем как площадь под кривой на рисунке 2:

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}p_0 + p_0\right)\frac{V_0}{3} + \frac{9}{8}p_0\frac{V_0}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}p_0 + p_0\right)\frac{V_0}{3} = \frac{13}{12}p_0 V_0 .$$

Тогда окончательно

$$Q = \left(\frac{3}{2} + \frac{13}{12}\right)p_0 V_0 = \frac{31}{12}p_0 V_0 \approx 26 \text{ Дж} .$$

Вспомним прошлый год: задача из контрольной работы:

Задача 6. *Стеклянный шар объемом V и плотностью ρ находится в сосуде с водой (рис.6). Угол между стенкой сосуда и горизонтальным дном α, внутренняя поверхность сосуда гладкая, плотность воды ρ_0. Найдите силу давления шара на дно сосуда в двух случаях: 1) сосуд неподвижен; 2) сосуд движется с постоянным горизонтальным ускорением a.*

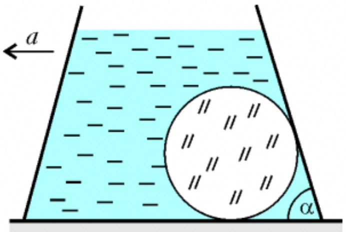


Рис. 6

Сначала рассмотрим движущийся по горизонтали с постоянным ускорением a сосуд с водой. Введем систему координат XY, связанную с сосудом, как это изображено на рисунке 7. Наша задача – найти уравнение свободной поверхности жидкости $y = f(x)$ в сосуде, который движется с горизонтальным ускорением a. Для этого выделим маленький элемент жидкости на оси X, длина которого dx, а площадь поперечного сечения равна единице. С левого торца этого элемента давление равно

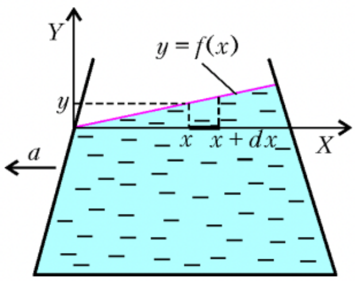


Рис. 7

$$p(x) = p_{атм} + \rho_0 g y ,$$

а с правого торца оно равно

$$p(x + dx) = p_{атм} + \rho_0 g (y + dy) ,$$

где y – высота столба жидкости в точке x, а $y + dy$ – аналогичная высота в точке $x + dx$. Так как наш элемент жидкости движется с ускорением a, его уравнение движения имеет вид

$$\rho_0\, dx\, a = \rho_0 g (y + dy) - \rho_0\, g y .$$

Отсюда получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{g} ,$$

или в интегральном виде –

$$y = \frac{a}{g}x + \text{const} .$$

Поскольку при $x = 0$ $y = 0$, константа тоже равна нулю, а уравнение свободной поверхности жидкости выглядит так:

$$y = \frac{a}{g}x .$$

Линии, параллельные свободной поверхности, внутри жидкости являются линиями постоянного давления. Таким образом, жидкость, движущаяся с горизонтальным ускорением a, эквивалентна неподвижной жидкости, находящейся в новом поле тяжести с эффективным «ускорением свободного падения», равным $g_э = \sqrt{a^2 + g^2}$ и направленным под углом $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{g}$ к вертикали (рис.8). Вертикальная составляющая этого эффективного ускорения равна обычному ускорению свободного падения g, а горизонтальная составляющая численно равна ускорению сосуда и направлена в противоположную сторону.

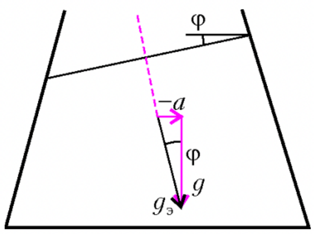


Рис. 8

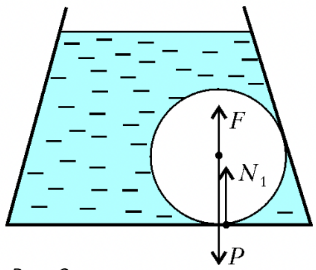


Рис. 9

В том случае, когда сосуд неподвижен ($a = 0$), эффективное ускорение равно g и направлено по вертикали. Силы, действующие на стеклянный шар в этом случае, показаны на рисунке 9. Здесь $P = \rho V g$ – вес (точнее – сила тяжести) шара, $F=\rho_0 Vg$ – выталкивающая сила, а N_1 – сила реакции дна сосуда на шар. Из условия равновесия шара найдем, что

$$N_1=(\rho-\rho_0)Vg\,.$$

Очевидно, что сила давления шара на дно численно равна силе реакции дна и направлена в противоположную сторону.

В случае движущейся с горизонтальным ускорением a жидкости или неподвижной жидкости, но находящейся в поле с новым «ускорением свободного падения» $g_э$, на шар будут действовать следующие силы (рис.10): вертикальная составляющая нового веса шара $P_1=\rho Vg$, горизонтальная составляющая этого веса $P_2=\rho Va$, вертикальная составляющая выталкивающей силы $F_1=\rho_0 Vg$, ее горизонтальная составляющая $F_2=\rho_0 Va$, реакция опоры T со стороны боковой стенки и, наконец, сила N_2 – сила реакции на шар со стороны дна сосуда. Запишем условие равновесия шара, т.е. равенство нулю всех сил, действующих на шар по вертикали:

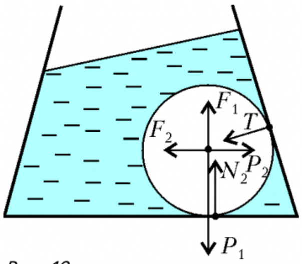


Рис. 10

$$F_1+N_2-P_1-T\cos\alpha=0$$

и по горизонтали:

$$F_2+T\sin\alpha-P_2=0\,.$$

Исключая из этих уравнений T, найдем искомую силу N_2:

$$N_2=P_1-F_1+(P_2-F_2)\operatorname{ctg}\alpha=(\rho-\rho_0)V(g+a\operatorname{ctg}\alpha)\,.$$

Разумеется, и в этом случае сила давления шара на дно сосуда численно равна силе реакции дна, но направлена в противоположную сторону.

Упражнения

1. В цилиндрическом сосуде с водой плавает деревянная дощечка. Если на нее сверху положить стеклянную пластинку, то дощечка с пластинкой останутся на плаву, а уровень воды в сосуде повысится на Δh_1. На сколько изменится уровень воды в сосуде с плавающей дощечкой, если ту же стеклянную пластинку бросить на дно сосуда? Плотность стекла $\rho_{ст}$, плотность воды $\rho_в$.

2. U-образная трубка состоит из трех одинаковых колен, расположена вертикально и заполнена жидкостью (см. рис.1). Один конец трубки соединен с баллоном, заполненным водородом, другой конец открыт в атмосферу. Водород в баллоне медленно нагревают, и он постепенно вытесняет жидкость из трубки. К моменту, когда из трубки вылилось $2/3$ всей массы жидкости, водород получил количество теплоты Q = 30 Дж. Найдите объем баллона. Известно, что объем всей трубки равен объему баллона; атмосферное давление $p_0=10^5$ Па; давление, создаваемое столбом жидкости в вертикальном колене трубки, равно $p_0/9$.

3. «Тройник» из трех вертикальных открытых в атмосферу трубок полностью заполнен водой (рис.11). После того, как тройник начали двигать в горизонтальном направлении в плоскости рисунка с некоторым ускорением, из него вылилось $9/32$ всей массы воды. Чему равно ускорение тройника? Внутренние сечения трубок одинаковы, длина каждой трубки L.

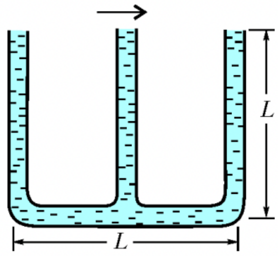


Рис. 11

4. Тонкая, запаянная с одного конца и изогнутая под прямым углом трубка заполнена жидкостью и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис.12). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке; атмосферное давление p_0; плотность жидкости ρ. Найдите давление жидкости у запаянного конца трубки.

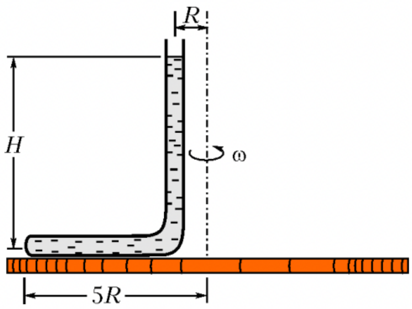


Рис. 12