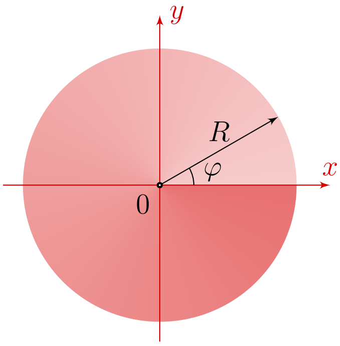
Я им покажу, как Чебурашек обижать!
Браконьеры несчастные!
Шапокляк

День Рождения Чебурашки

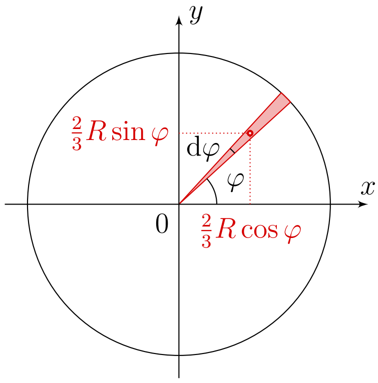
Ухо Чебурашки имеет форму диска радиуса R и толщины h (см. рис.). Плотность уха Чебурашки распределена по закону $\rho = \rho_0 \frac{\varphi}{2\pi}$, а температура $T = T_0 \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi}\right)$, где T_0 и ρ_0 — известные константы, $\varphi \in (0; 2\pi]$.



1. (*2 балла*) Чему равна масса m уха Чебурашки?
2. (*4 балла*) Определите координаты x и y центра масс уха.
3. (*4 балла*) Найдите установившуюся температуру T_1 уха Чебурашки. Считайте ухо теплоизолированным. Удельная теплоёмкость уха Чебурашки не зависит от координат и температуры.

Автор задачи: М. А. Еськин

Решение (Метод 1. Интеграл)



Разобьём ухо на сектора с углом $d\varphi$ (см. рис.). Масса сектора dm находится как

$$dm = \rho(\varphi)hdS = \frac{\rho_0\varphi}{2\pi}h\frac{d\varphi}{2}R^2,$$

Найдём массу уха:

$$m = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho_0 hR^2}{4\pi}\varphi d\varphi = \frac{\rho_0\pi hR^2}{2}.$$

Где линейная зависимость там и $1/2$!

Определим координату центра масс уха Чебурашки. Для этого также представим его в виде малых секторов. Центр масс каждого сектора лежит на расстоянии $2/3R$ от центра уха, аналогично центру масс однородного треугольника (типичная ошибка участников Кубка была в том, что они считали, что сектор это отрезок и поэтому его центр масс находится в $R/2$). Координата x центра масс по определению равна:

$$x_c = \frac{\int xdm}{m} = \frac{2}{\rho_0\pi hR^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{3}R\cos\varphi\frac{\rho_0 hR^2}{4\pi}\varphi d\varphi = \frac{R}{3\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\cos\varphi d\varphi =$$

$$= \begin{vmatrix} u=\varphi & dv=\cos\varphi d\varphi \\ du=d\varphi & v=\sin\varphi \end{vmatrix} = \frac{R}{3\pi^2}\left(\varphi\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\right) = \frac{R}{3\pi^2}(0-0) = 0.$$

На самом деле ответ и так «угадывался», масса I и IV четвертей равняется массе II и III четвертей, а центры масс у них расположены симметрично относительно $x = 0$.

Определим координату y центра масс:

$$y_c = \frac{\int ydm}{m} = \frac{2}{\rho_0\pi hR^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{3}R\sin\varphi\frac{\rho_0 hR^2}{4\pi}\varphi d\varphi = \frac{R}{3\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\sin\varphi d\varphi =$$

$$= \begin{vmatrix} u=\varphi & dv=\sin\varphi d\varphi \\ du=d\varphi & v=-\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{R}{3\pi^2}\left(-\varphi\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\right) = \frac{R}{3\pi^2}(-2\pi+0) = -\frac{2R}{3\pi}.$$

Найдём конечную температуру уха. Для этого запишем уравнение теплообмена в виде

$$Q_{\text{нач}} = Q_{\text{кон}}.$$

Где Q – полная энергия уха. Обозначим за C удельную теплоёмкость материала уха и найдём начальную энергию:

$$Q_{\text{нач}} = \int\limits_0^{2\pi} CT_0\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)\frac{\rho_0\pi R^2}{4\pi}\varphi d\varphi = CT_0\frac{\rho_0\pi R^2}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi d\varphi + \frac{\rho_0\pi R^2}{8\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{5}{6}CT_0\rho_0\pi R^2 h.$$

Конечная энергия будет равна

$$Q_{\text{кон}} = CmT_{\text{к}} = \frac{C\rho_0 \pi R^2 h}{2} T_{\text{к}}.$$

Из записанных уравнений находим

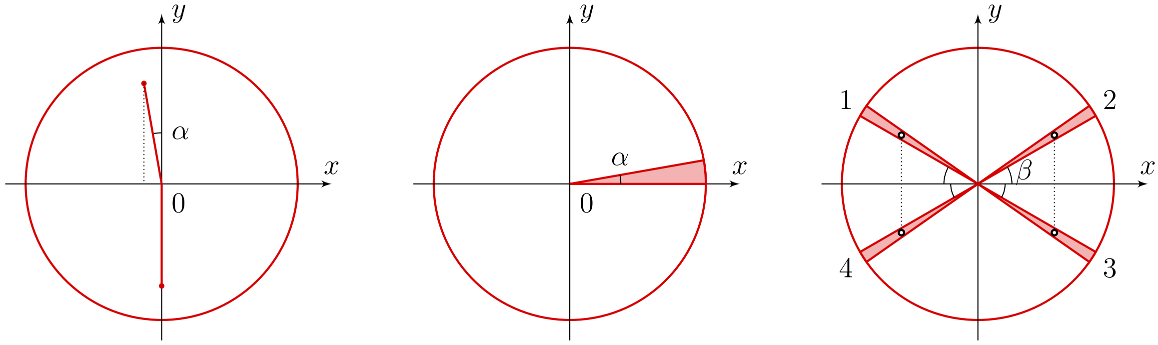
$$T_{\text{к}} = \frac{5}{3} T_0.$$

Решение (Метод 2. Симметрия)

Докажем, что координата центра масс $x_c = 0$. Рассмотрим четыре одинаковых сектора как изображено на рисунке. Заметим, что сумма масс двух правых и двух левых секторов равны, и координаты центров масс этих пар отличаются только знаком. Следовательно, расписав координату центра масс этих секторов, получим:

$$x_c = \frac{(Sh\rho_1 + Sh\rho_4)x + (Sh\rho_2 + Sh\rho_3)(-x)}{Sh\rho_1 + Sh\rho_2 + Sh\rho_3 + Sh\rho_4} = 0.$$

Теперь перейдём к нахождению координаты y центра масс.



Рассмотрим такое же ухо, симметрично отображенное относительно оси Ox. Если совместить это ухо с исходным, то мы получим объект с плотностью ρ_0. Повернём второе ухо на малый угол α. В результате мы получим однородный диск и маленький треугольник.

Центр масс однородного диска в его центре (начале координат), а центр масс треугольника по оси x имеет координату $2/3R$.

Найдем координату центра масс двумя способами:

1. треугольник и однородный диск;
2. наложение повёрнутых ушей.

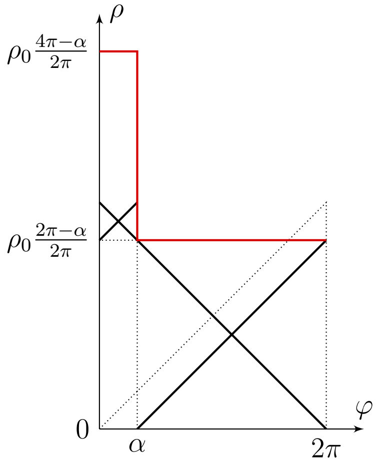
Рассмотрим первый способ. Координата x_c центра масс по определению равна

$$x_c = \frac{m_\triangle 2/3R}{M},$$

где $M = 2m_0$ — суммарная масса, $m_\triangle = \rho h R^2 \frac{\alpha}{2}$. Тогда находим

$$x_c = \frac{\rho h R^2 \frac{\alpha}{2} \frac{2}{3} R}{\rho_0 \pi h R^2} = \frac{2R}{3\pi} \frac{\alpha}{2}.$$

Рассмотрим второй способ. Если центр масс одного уха находился в координатах $(0; y_c)$, а второго находится в $(0; -y_c)$, то после поворота второго уха на малый угол α его координата будет в точке $(y_c\alpha/2; y_c)$. Координата центра масс x_c наложенных ушей будет равна



$$x_c = \frac{y_c\alpha}{2}.$$

Приравняв полученные выражения, находим

$$\frac{y_c\alpha}{2} = \frac{2R}{3\pi}\frac{\alpha}{2}; \quad \Longrightarrow \quad y_c = \frac{2R}{3\pi}.$$

Температуру найдём из уравнения теплового баланса, для этого найдём энергию запасённую в системе в начале:

$$Q_0 = \sum_i CT(\varphi)\Delta m(\varphi) = CT_0\frac{\rho_0 R^2}{4}\sum\left(1 + \frac{\varphi}{2\pi}\right)\varphi\Delta\varphi.$$

Точно такая же сумма получалась при решении альтернативной задачи (см. ниже). Сравнивая получившуюся сумму с суммой из альтернативной задачи, получим

$$Q_0 = \frac{5}{6}CT_0\rho_0\pi R^2 h.$$

Конечная энергия системы равна

$$Q_{\text{кон}} = \frac{C\rho_0\pi R^2 h}{2}T_{\text{к}}.$$

Приравняв энергии, найдём

$$T_{\text{к}} = \frac{5}{3}T_0.$$

Альтернативная задача

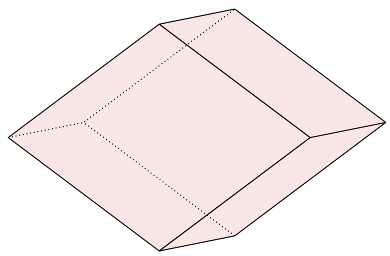
Задания, которые оцениваются в ноль баллов являются упражнениями! Их решения присылать не надо!

1. (*0 баллов*) Определите положение центра масс однородного полукольца.

2. (*0 баллов*) Определите положение центра масс однородной полусферы.

3. (*5 баллов*) В вершинах правильного N-угольника расположены последовательно точечные массы, величины которых образуют геометрическую прогрессию m, $2m$, $\ldots$, $2^{N-1}m$. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно R. Найдите величину напряжённости гравитационного поля g (ускорение свободного падения) в центре многоугольника.

4. (*5 баллов*) Сосуд в форме ромба заполнен водой и ориентирован вертикально. В начальный момент температура воды меняется с высотой по линейному закону от $t_1 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ у одной вершины до $t_2 = 30\,^\circ\mathrm{C}$ у противоположной. Какая температура t_x установится в сосуде после прекращения теплообмена?



Автор задачи: М. А. Фольклор

Решение альтернативной задачи

1. Рассмотрим полукольцо массой m и радиусом R (см. рис. 1).

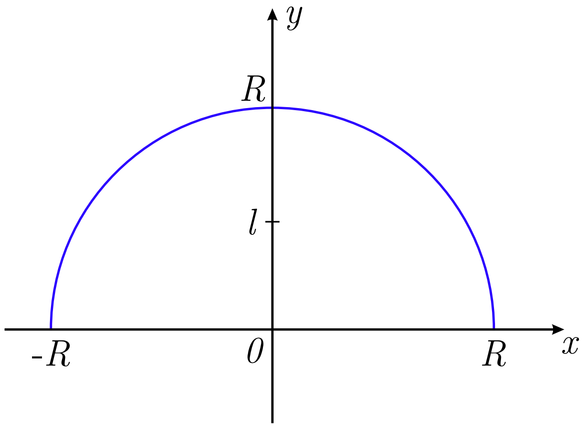


Рисунок 1.

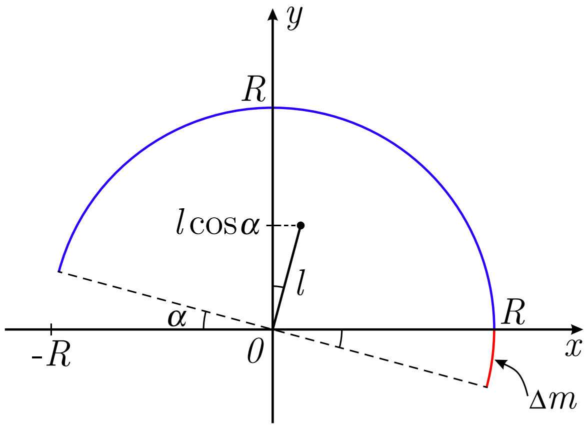


Рисунок 2.

Координата $x_c = 0$, так как полукольцо симметрично относительно прямой $x = 0$. Пусть координата $y_c = l$. Повернём кольцо на малый угол α. Тогда центр масс всего кольца также повернулся на угол α. Повёрнутое кольцо можно рассматривать как суперпозицию трёх элементов: не повёрнутого кольца и двух кусочков массы $-\Delta m$ и Δm (см. рис. 2). С учётом такого представления, координата центра масс повёрнутого кольца будет равна по определению

$$y_c = \frac{ml - \Delta m R\frac{\alpha}{2} + \Delta m R\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{m + \Delta m - \Delta m}.$$

С другой стороны, из рисунка следует, что $y_c = l\cos\alpha$. Тогда, воспользовавшись приближением справедливым для малых углов $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, получим

$$l - \frac{\Delta m}{m} R\alpha = l\cos\alpha \approx l\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Осталось найти только отношение массы кусочка Δm к массе полукольца m. Масса единицы длины однородного полукольца равна $\frac{m}{\pi R}$, тогда

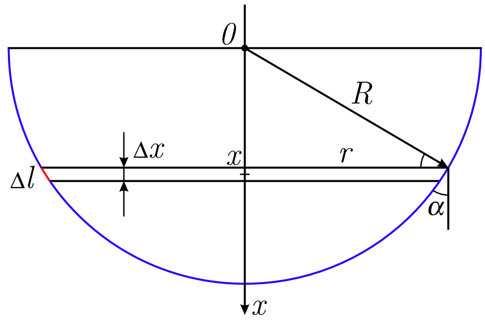
$$\Delta m = \frac{m}{\pi R} R\alpha; \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta m}{m} = \frac{\alpha}{\pi}.$$

Окончательно находим

$$l = \frac{2}{\pi} R.$$

Этот же ответ можно получить с помощью уравнения моментов.

2. Разобъём полусферу на много маленьких колец толщины Δl и массой Δm (см. рис.). Введём ось x так, как показано на рисунке.



По определению координата x_c центра масс сферы равна

$$x_c = \frac{\sum x\Delta m}{m},$$

где x — координата центра кольца, Δm — масса кольца, m — масса всей полусферы. Понятно, что площадь кольца равна

$$\Delta S = 2\pi r\Delta l.$$

Здесь r — радиус кольца, который зависит от его координаты (см. рис.). Найдём связь между толщиной кольца Δl и изменением координаты Δx на кольце (это **разные малые величины**!). Из рисунка видно, что

$$\Delta l = \Delta x\cos\alpha; \quad \cos\alpha = \frac{rR}{;} \quad r = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

С учётом записанных уравнений имеем

$$\Delta S = 2\pi r\Delta l = 2\pi r\frac{\Delta x}{\cos\alpha} = \frac{2\pi R\cos\alpha\Delta}{\cos\alpha} = 2\pi R\Delta x.$$

Масса единицы площади сферы равна $\frac{m}{S}$, тогда

$$\Delta m = \frac{m}{S}\Delta S = \frac{m}{2\pi R^2}2\pi R\Delta x = \frac{m}{R}\Delta x.$$

Заметим, что масса распределена равномерно по координате x, поэтому центр масс полусферы находится на высоте $x_c = \frac{R}{2}$. Формальное доказательство этого утверждения сводится к вычислению суммы

$$x_c = \frac{\sum x\Delta m}{m} = \frac{1}{R}\sum_{x\in[0;R]} x\Delta x = \frac{R}{2}.$$

Вычислить эту сумму можно ~~интегрированием~~ как площадь под графиком линейной функции.

3. Пусть напряжённость гравитационного поля g направлена так, как показано на рисунке 1.

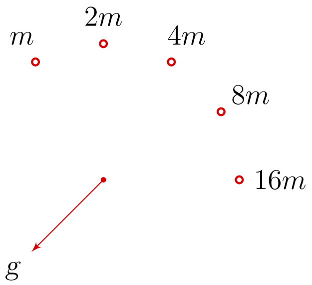


Рисунок 1.

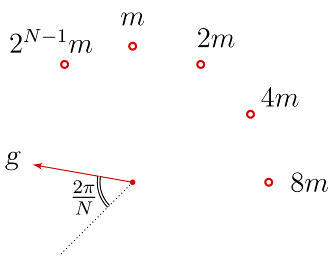


Рисунок 2.

На самом деле на рисунке g должно смотреть в другую сторону (от более массивных точек), однако ~~при рисовании картинок мы это забыли~~ мы хотели продемонстрировать непринципиальность этого момента в решении задачи.

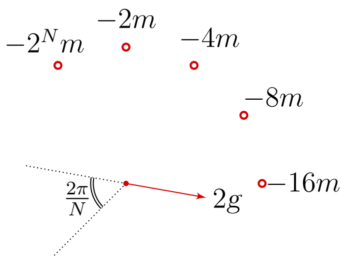


Рисунок 3.

Повернём картинку на угол $2\pi/N$ (см. рис. 2). Понятно, что вектор напряжённости гравитационного поля повернулся на угол $2\pi/N$, при этом модуль его не изменился. Умножим теперь все массы на рисунке 2 на -2, вектор напряжённости увеличился по модулю в два раза, а направление изменилось на противоположное (см. рис. 3).

Наложим теперь две системы точечных масс (рисунок 1 и рисунок 3). Останется только одна точка (см. рис. 4). Напряжённость гравитационного поля, создаваемая этой точкой, по закону всемирного тяготения равна

$$g_0 = \frac{G\left(m - 2^{N-1}m\right)}{R^2}.$$

Конечно, отрицательных масс не бывает, это лишь математическая уловка, которая позволила вычислить модуль g_0. С другой стороны поле этой точечной массы можно найти как векторную сумму полей от системы масс на рисунке 1 и рисунке 3. Для этого воспользуемся теоремой косинусов

$$g_0^2 = g^2 + (2g)^2 - 2\cdot g\cdot 2g\cdot\cos\frac{2\pi}{N} = g^2\left(5 - 4\cos\frac{2\pi}{N}\right).$$

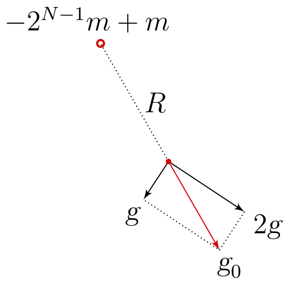


Рисунок 4.

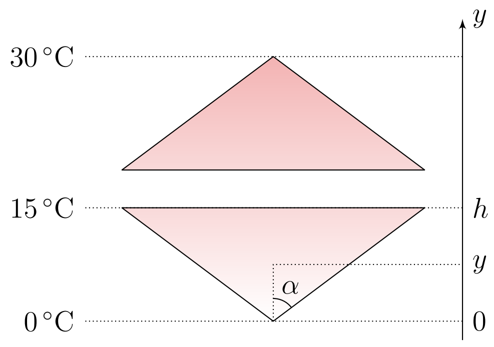
Из записанных уравнений находим g

$$g = \frac{Gm\left(2^{N-1} - 1\right)}{R^2\sqrt{5 - 4\cos\frac{2\pi}{N}}}.$$

К слову направление g также можно определить.

Отметим, что данная задача (в несколько другой оболочке) предлагалась на Московской олимпиаде школьников в 2008 году и послужила идеей основной задачи.

4. Разделим фигуру пополам по горизонтали (см. рис.). Координата центра масс по оси y нижнего треугольника по определению равна



$$y_c = \frac{\sum\limits_i y \cdot t2\operatorname{tg}\alpha \cdot b \cdot \rho dy}{h \cdot h \cdot 2\operatorname{tg}\alpha \cdot b \cdot \rho} = \frac{2}{3}h.$$

В последнем переходе мы воспользовались известным фактом — центр масс равнобедренного треугольника лежит на 2/3 высоты. Установившуюся температуру можно найти как

$$T_{\text{к}}\left(h \cdot h \cdot 2\operatorname{tg}\alpha \cdot b \cdot \rho\right)c = \sum_i T(y) \cdot y2\operatorname{tg}\alpha \cdot b \cdot \rho \cdot c; \quad \Longrightarrow \quad T_{\text{к}} = \frac{\beta y^2 dy}{h^2} = \beta\frac{2}{3}h.$$

Здесь β — коэффициент в зависимости $T(y) = \beta y$. Аналогично для верхнего получим, что

$$T_{\text{верх}} = \beta\frac{4}{3}h.$$

Тогда конечная температура всего ромба будет равна

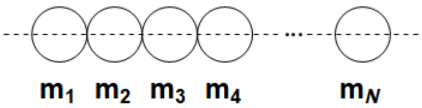
$$T_{\text{кон}} = \frac{T_{\text{верх}}mc + T_{\text{нижн}}mc}{2mc} = \frac{\beta\frac{4}{3}h + \beta\frac{2}{3}h}{2} = \beta h = 15\,^\circ\text{C}.$$

Упражнения

Задача 1. В вершинах правильного N-угольника расположены последовательно точечные массы, величины которых образуют арифметическую прогрессию m, $2m$, $3m$, $\ldots$, Nm. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно R. Найдите величину напряжённости гравитационного поля g (ускорение свободного падения) в центре многоугольника. *(МОШ, 2008 год)*

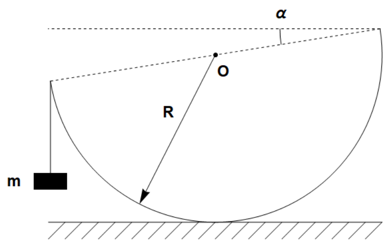
Ответ. $g = \dfrac{GNm}{2R^2 \sin \frac{\pi}{N}}$.

Задача 2. Найдите положение центра масс системы касающихся друг друга шаров (см. рис.). Все шары имеют одинаковый диаметр $a = 3$ см, а их массы возрастают по закону: $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = 5m$, $\ldots$, $m_N = (2N-1)m$, где $N = 500$. Плотность каждого шара постоянна. *(ОЭ, 1997 год)*



Ответ. Центр масс находится на расстоянии $x_c = \frac{4N^2-3N-1}{6N}a \approx \frac{2}{3}Na = 10$ м от левого края первого шара.

Задача 3. Конструкция в виде половины обода радиуса R покоится на горизонтальной плоскости. К одному её краю на лёгкой нити прикрепляют груз массой m. При этом конструкция поворачивается на малый угол α (см. рис.). На каком расстоянии r от точки O находится центр масс половины обода? Определите массу M конструкции. *(Регион, 2007 год)*



Ответ. $r = \frac{2}{\pi}R$; $M = \frac{\pi}{2\alpha}m$.

Литература

Нахождение центра масс проволочного треугольника

Центр тяжести полушария