

В задаче не требуется оценка погрешностей!

Задание

- Пусть заряд на обкладках конденсатора емкости C зависит от времени по гармоническому закону: $q(t) = q_0 \cdot \cos(2\pi ft)$. Какова амплитуда напряжения на конденсаторе? Какова амплитуда тока, затекающего на одну обкладку конденсатора и стекающего с противоположной?
- Для любой схемы, работающей на переменном токе, можно ввести величину Z – характеристику, аналогичную сопротивлению в постоянном токе и равную отношению амплитуд напряжения и тока. Опишите теоретически, как зависит Z для схемы на рис. 1 от частоты при малых частотах ($f \rightarrow 0$) и как – при больших частотах ($f \rightarrow \infty$).

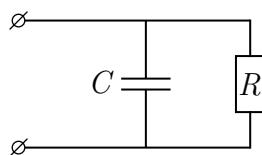


Рис. 1. Параллельное соединение.

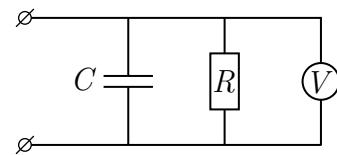


Рис. 2. Эквивалентная схема осциллографа с щупом.

Система из осциллографа и подключенного к нему щупа является неидеальным измерительным прибором. Простейшая эквивалентная схема – подключенные параллельно емкость, сопротивление и идеальный вольтметр переменного тока (см. рис. 2).

В настройках генератора выставьте синусоидальную форму сигнала с амплитудой 2 В. Подключите провод с черным и красным крокодилами к генератору, щупы – к каналам осциллографа.

- Определите емкость C осциллографа с подсоединенными щупами.
- Определите сопротивление R осциллографа с подсоединенными щупами.

Примечания

- В настройках генератора под амплитудой подразумевается разница между максимальным и минимальным за период напряжением, а не половина от этой разности. Аналогично – при измерении напряжения «ПИК ПИК»/«Pk-pk» на осциллографе.
- Все черные крокодилы образуют общую «землю» и должны быть соединены в одной точке!
- Перед началом измерений убедитесь, что делитель на обоих щупах стоит в положении «1X», а также в настройках обоих каналов осциллографа выбрано «Щуп 1X»/«Probe 1X».

Оборудование. Осциллограф со встроенным генератором, резистор $r = 1.1$ кОм, батарейка «Крона», провод BNC-крокодилы (для генератора), 2 щупа (для двух каналов осциллографа).

Решение

1. $U(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(2\pi ft)$, поэтому амплитуда напряжения $U_0 = \frac{q_0}{C}$.
 $I(t) = \dot{q}(t) = -q_0 2\pi f \sin(2\pi ft)$, поэтому амплитуда тока $I_0 = 2\pi f q_0$.
2. При малых частотах $Z_C = \frac{1}{2\pi f C} \gg Z_R = R$, поэтому $Z \approx Z_R = R$ и не зависит от частоты.

При больших частотах $Z_C \ll Z_R$, поэтому $Z \approx Z_C = \frac{1}{2\pi f C}$.

3. Соберем схему, показанную на рисунке 3. Один щуп осциллографа подключим напрямую к генератору для измерения напряжения на нем, другой щуп - последовательно с выданным резистором. При больших частотах второй канал осциллографа эквивалентен конденсатору емкостью C . Предположим, что уже при $f \sim 1\text{МГц}$ выполняется $Z \approx Z_C$. Пусть напряжение на конденсаторе меняется по закону:

$$U_2 = \frac{q_0}{C} \cos(2\pi ft) = \frac{I_0}{2\pi f C} \cos(2\pi ft). \quad (1)$$

Тогда для амплитуды напряжения на втором канале осциллографа имеем:

$$U_{20} = I_0 \cdot \frac{1}{2\pi f C}, \quad (2)$$

Ток в цепи же в цепи конденсатора и C и резистора r меняется по закону:

$$I(t) = \dot{q}(t) = -q_0 2\pi f \sin(2\pi ft) = -I_0 \sin(2\pi ft). \quad (3)$$

Тогда напряжение на резисторе r :

$$U_r(t) = I(t)r = -I_0 r \sin(2\pi ft). \quad (4)$$

Напряжение на первом канале осциллографа складывается из напряжений на конденсаторе C и сопротивлении r .

$$U_1(t) = U_r + U_2 = I(t)r = -I_0 r \sin(2\pi ft) + \frac{I_0}{2\pi f C} \cos(2\pi ft). \quad (5)$$

Введем дополнительный угол:

$$\phi = \arctan \frac{1}{2\pi f Cr}. \quad (6)$$

Тогда для напряжения на первом канале осциллографа получаем:

$$U_1(t) = I_0 \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2} \cos(2\pi f t + \phi). \quad (7)$$

И для амплитуды этого напряжения:

$$U_{10} = I_0 \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}. \quad (8)$$

Окончательно отношение амплитуд на первом и втором каналах осциллографа:

$$\frac{U_{10}}{U_{20}} = \sqrt{1 + (2\pi f C r)^2}, \quad (9)$$

где f - частота сигнала генератора.

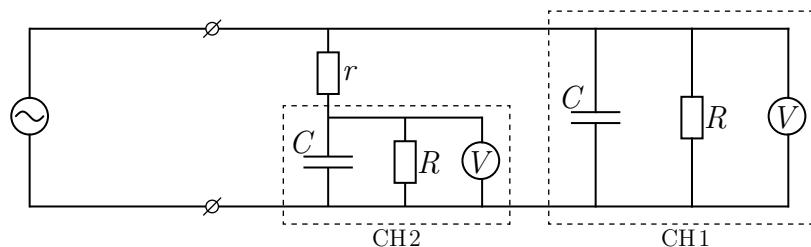


Рис. 3. Схема измерения емкости осциллографа.

Измерим зависимость напряжений на двух каналах осциллографа от частоты сигнала. Построим график зависимости квадрата отношения амплитуд этих напряжений $\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2$ от квадрата частоты сигнала f^2 .

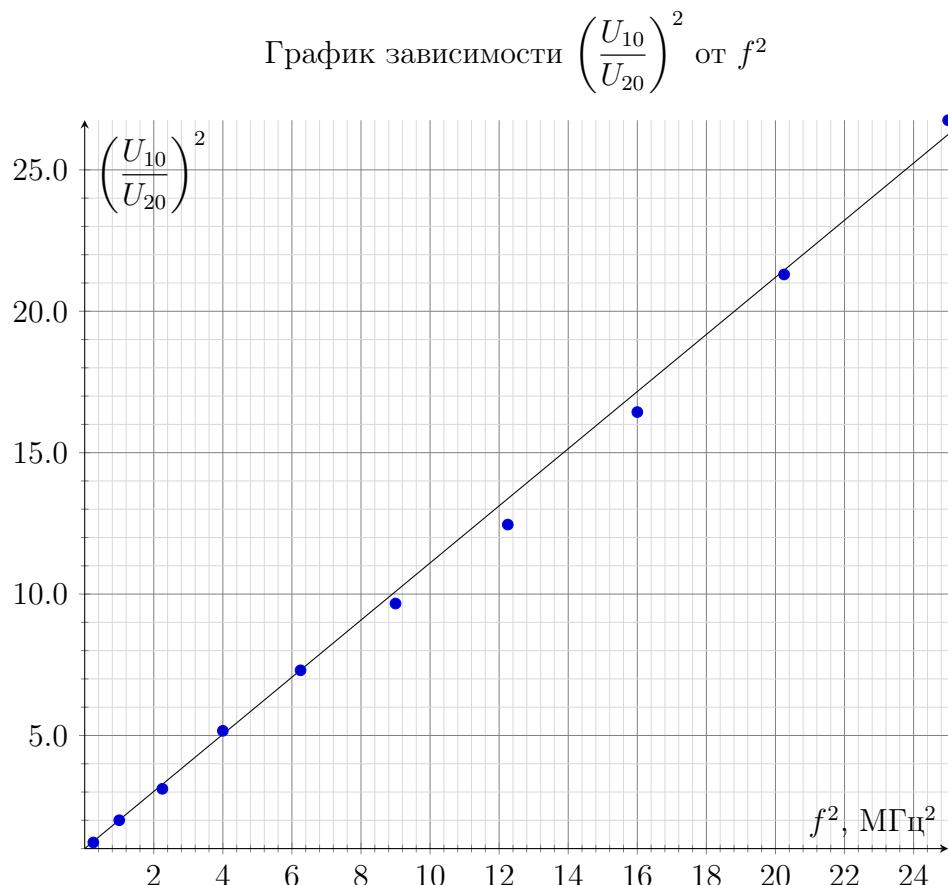
U_{10} , В	U_{20} , В	f , МГц	f^2 , МГц 2	$\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2$
3.00	2.72	0.50	0.25	1.22
3.00	2.12	1.00	1.00	2.00
3.00	1.70	1.50	2.25	3.11
3.00	1.32	2.00	4.00	5.17
3.00	1.11	2.50	6.25	7.30
3.00	0.97	3.00	9.00	9.66
3.00	0.85	3.50	12.25	12.46
3.00	0.74	4.00	16.00	16.44
3.00	0.65	4.50	20.25	21.30
3.00	0.58	5.00	25.00	26.75

Видно, что экспериментальные точки отлично описываются линейной функцией, т.е. предположение $Z_C \ll Z_R$ на этих частотах выполняется. Угловой коэффициент графика данной зависимости составляет

$$k = (2\pi Cr)^2 = 1.01 \cdot 10^{-12} \text{ c}^2. \quad (10)$$

Откуда емкость осциллографа

$$C = \frac{\sqrt{k}}{2\pi r} = 145 \text{ пФ}. \quad (11)$$



- Для определения сопротивления осциллографа соберем схему, изображенную на рисунке 4.

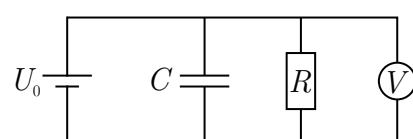


Рис. 4. Схема измерения сопротивления осциллографа.

При отключении осциллографа от батареи емкость осциллографа будет разряжаться через его внутреннее сопротивление. С помощью однократного срабатывания синхронизации запишем осциллограмму разрядки емкости. Используя курсоры и смещение осциллограммы, измерим зависимость напряжения на осциллографе от времени.

U , В	t , мкс	$\ln(U/B)$
9.60	0	2.26
7.60	36	2.03
5.60	84	1.72
4.72	100	1.55
3.60	148	1.28
2.48	200	0.91
1.60	252	0.47
1.20	300	0.18

Напряжения на конденсаторе должно убывать по экспоненциальному закону

$$\ln U = \ln U_0 - \frac{t}{RC}, \quad (12)$$

где U_0 - начальное напряжение на осциллографе. Построим график зависимости $\ln U$ от t . По угловому коэффициенту графика $k_1 = 7.0 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ найдем сопротивление осциллографа

$$R = \frac{1}{k_1 C} = 1.03 \text{ МОм.} \quad (13)$$

График зависимости $\ln U$ от t 