

Планиметрия 2.

Задачи для решения в классе.

Трапеция.

- Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB .
 - Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.
 - Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении 1 : 4.
- Боковая сторона CD трапеции $ABCD$ равна основанию AD .
 - Докажите, что CA – биссектриса угла BCD .
 - Прямая, проходящая через вершину C перпендикулярно CD , пересекает боковую сторону AB в точке M . Найдите отношение $BM : AM$, если $AD = CD = 2BC$ и $\angle ADC = 60^\circ$.
- В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность, CH – высота трапеции.
 - Докажите, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке BH .
 - Найдите диагональ AC , если средняя линия трапеции равна $2\sqrt{7}$, а $\angle AOD = 120^\circ$, где O – центр окружности, вписанной в трапецию, а AD – большее основание.
- Окружность, проходящая через вершины A , B и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , вторично пересекает прямую AD в точке M .
 - Докажите, что $AC = BM$.
 - Найдите AC , если $AD = 16$, $CD = 8\sqrt{3}$ и $\angle AMB = 60^\circ$.
- Диагональ BD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и DC .
 - Докажите, что луч AC – биссектриса угла BAD .
 - Найдите CD , если известны диагонали трапеции: $BD = 5$ и $AC = 8$.

Высоты и биссектрисы треугольника.

- В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH .
 - Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH .
 - Найдите CL , если $CM = 10$, $CH = 6$.
- Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M .
 - Докажите, что треугольники AMB , AMC и BMC равновелики.
 - Известно, что треугольник ABC прямоугольный, а точка M удалена от катетов на расстояния 3 и 4. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

- Окружность, построенная на биссектрисе BL равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, пересекает основание BC в точке P . Боковая сторона треугольника вдвое больше его основания.
 - Докажите, что $BP = 5CP$.
 - Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке M . Найдите BL , если $ML = \frac{\sqrt{15}}{2}$.
- Высоты, проведённые из вершин A , B и C треугольника ABC , равны 20, 15 и 12 соответственно.
 - Докажите, что треугольник прямоугольный.
 - Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной из вершины C .

Отношение отрезков.

- В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны AD , P – точка пересечения отрезка BM с диагональю AC .
 - Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB .
 - Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q . Найдите отношение $PM : BQ$, если $AB : AC = 1 : 3$.
- Биссектриса AD треугольника ABC делит его медиану BM пополам.
 - Докажите, что площадь треугольника ACD вдвое больше площади треугольника ABD .
 - В каком отношении медиана BM делит биссектрису AD ?
- На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N , причем M – середина AD , а $BN : NC = 1 : 3$.
 - Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.
 - Найдите площадь четырехугольника, образованного пересечениями прямых AN , AC , BD и BC , если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.
- Точка пересечения биссектрис углов при большем основании трапеции лежит на меньшем основании.
 - Докажите, что меньшее основание равно сумме боковых сторон.
 - Найдите углы трапеции, если отношение оснований трапеции равно 3 : 2, а отношение боковых сторон равно 5 : 3.
- Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Биссектриса угла ADC проходит через середину боковой стороны AB .
 - Докажите, что сумма оснований трапеции равна боковой стороне CD .
 - Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 8$, $BC = 2$ и $CD = 10$.
- На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .
 - Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.
 - Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{1}{3}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

Задачи для решения дома.

Трапеция.

- Через вершину B трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC проведена прямая, параллельная диагонали AC . Пусть эта прямая пересекается с продолжением основания AD в точке E .
 - Докажите, что треугольник BDE равнобеделик трапеции $ABCD$.
 - Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 10 и 24, а средняя линия равна 13.
- Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N соответственно, а диагонали AC и BD – в точках K и L соответственно, причем точка K лежит между M и L .
 - Докажите, что $MK = NL$.
 - Найдите MN , если $BC = a$, $AD = b$ и $MK : KL : LN = 1 : 2 : 1$.
- Точки L и N – середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ соответственно, а точки K и M – середины диагоналей AC и BD соответственно. Известно, что $KM = LN$.
 - Докажите, что сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° .
 - Найдите высоту трапеции, если площадь четырехугольника $KLMN$ равна 12, а разность оснований трапеции равна 10.
- Дана трапеция, в которую можно вписать окружность и около которой можно описать окружность.
 - Докажите, что проекция диагонали этой трапеции на большее основание равна боковой стороне.
 - Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, если основания трапеции равны 3 и 27.
- Окружность с центром O_1 вписана в прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A . Окружность с центром O_2 касается большей боковой стороны CD продолжений оснований трапеции.
 - Докажите, что O_1CO_2D – прямоугольник.
 - Найдите площадь этого прямоугольника, если точка касания M вписанной в трапецию окружности делит меньшее основание на отрезки $BM = 6$ и $CM = 4$.

Высоты и биссектрисы треугольника.

- Дана трапеция $ABCD$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC в точке K .
 - Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.
 - Найдите биссектрису BM треугольника ABK , если $AD = 10$, $BC = 2$, $AB = CD = 5$.
- Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причем $\angle BEC = 120^\circ$.
 - Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$
 - Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если $BE = 40$ и $CE = 24$.

- Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 4$, $BC = 6$ и $AC = 8$.

- Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне BC .
 - Найдите длину биссектрисы треугольника ABC , проведенной из вершины A .
- В треугольнике ABC высота CH , биссектриса CL и медиана CM делят угол ACB на четыре равных угла.
 - Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - Найдите длины высоты CH , биссектрисы CL и медианы CM , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен R .

Отношение отрезков.

- На катете BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C и с углом 30° при вершине A вне треугольника построен равносторонний треугольник BCD . Прямая AD пересекает сторону BC в точке K .
 - Докажите, что $CK : KB = 1 : 2$.
 - Прямая, проходящая через точку K перпендикулярно CD , пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите отношение $AM : MB$.
- На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, а на боковых сторонах AB и CD – точки K и L соответственно. При этом $DM : AM = CN : BN = BK : AK = CL : LD = 1 : 2$.
 - Докажите, что четырехугольник $KMLN$ – трапеция.
 - Известно, что $AD = 3BC$. В каком отношении диагональ BD трапеции $ABCD$ делит боковые стороны трапеции $KMLN$?
- Через точку пересечения O диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках M и N .
 - Докажите, что O – середина отрезка MN .
 - Найдите основания, если одно из них вдвое больше другого, а $MN = 6$.
- Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.
 - Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.
 - Известно, что радиус этой окружности в пять раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?
- В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC , причем отрезок BE в 3 раза меньше стороны BC . Отрезки AE и CD пересекаются в точке O , $AE = 5$, $OC = 4$.
 - Докажите, что $CD = AE$.
 - Найдите сторону AB , если $\angle AOC = 120^\circ$.