

В.П.Демков, О.Н.Третьякова
ФИЗИКА. ТЕОРИЯ. МЕТОДИКА. ЗАДАЧИ

М.: Высш. шк., 2001.— 669 с.

В пособие включены задачи по всем разделам программы вступительных экзаменов в вузы. Каждый раздел состоит из теоретической части, рекомендаций по решению задач, задач с подробными решениями и задач для самостоятельного решения.

Для слушателей подготовительных отделений и курсов вузов, учащихся и преподавателей средней школы, учащихся физико-математических школ, техникумов, студентов младших курсов вузов, а также лиц, занимающихся самообразованием.

Оглавление

<i>Предисловие</i>	4
Глава I. Механика	5
§1. Кинематика	5
§2. Динамика материальной точки. Законы Ньютона	60
§3. Динамика системы. Импульс. Работа. Мощность. Энергия. Законы сохранения	93
§4. Динамика движения по окружности	154
§5. Закон всемирного тяготения	174
§6. Статика	189
§7. Гидростатика и элементы гидродинамики	204
§8. Механические колебания	239
Глава II. Молекулярная физика. Тепловые явления	276
§9. Основы молекулярно-кинетической теории газов. Уравнение состояния идеального газа	280
§10. Теплота и работа. Физические основы термодинамики	304
§11. Уравнение теплового баланса. Изменение агрегатного состояния вещества. Влажность	329
Глава III. Электричество и магнетизм	350
§12. Электростатика	351
§13. Постоянный ток	414
§14. Магнетизм	457
Глава IV. Оптика. Атомная и ядерная физика	507
§15. Геометрическая и волновая оптика	507
§16. Элементы теории относительности	583
§17. Квантовая физика	600
§18. Физика атома	613
§19. Физика атомного ядра	627
<i>Ответы</i>	643
<i>Литература</i>	669

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое читателям учебное пособие занимает промежуточное положение между учебником и сборником задач по физике. В настоящее время уже существует немало хороших сборников задач. Эта книга отличается от них тем, что содержит не только большое количество задач (свыше тысячи), но и достаточно подробную теоретическую часть, а также рекомендации по решению задач каждого из разделов. При этом основную часть объема книги составляют задачи с решениями. Содержание книги охватывает практически все разделы курса общей физики средней школы.

При написании книги авторы придерживались традиционного порядка следования тем, хотя и допускали некоторые отступления. Построение книги не является стандартным для задачника. В начале каждого параграфа приводятся теоретические сведения, позволяющие вспомнить основные понятия и физические законы по рассматриваемой теме. Далее следуют рекомендации по классификации задач и предлагаются методы их решения. Другую часть каждого раздела составляют задачи, примерно треть из которых снабжена решениями. После каждой задачи с решением следуют несколько задач без решения. Задачи сгруппированы по темам и располагаются в порядке возрастания сложности. Ко всем задачам даны ответы в общем виде и в числовом выражении.

В книге преимущественно представлены задачи, предлагавшиеся в течение ряда лет на вступительных экзаменах по физике и физико-математических олимпиадах в Московском авиационном институте, в том числе оригинальные задачи.

Предлагаемая читателю книга не может служить основным учебником по физике, поскольку уровень изложения теории и методы решения задач предполагают достаточно свободное владение материалом курса физики и математики в рамках средней школы. Наиболее полезной она может быть слушателям подготовительных отделений и курсов вузов, учащимся и преподавателям школ, техникумов, студентам младших курсов вузов, а также лицам, желающим самостоятельно повысить уровень знаний по физике.

Пособие в первую очередь предназначено в помощь школьникам при подготовке к сдаче выпускных экзаменов в школе и вступительных экзаменов в вуз.

Авторы выражают глубокую благодарность заведующему кафедрой физики МГТУ гражданской авиации д-ру техн. наук, профессору С. К. Камзолову и д-ру физ.-мат. наук, профессору кафедры общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ Ю. М. Романовскому за внимательное прочтение рукописи.

Авторы с благодарностью примут замечания и пожелания читателей, направленные на улучшение содержания книги по адресу: 125871, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Московский авиационный институт, кафедра физики или по телефону (095) 158-86-98.

Авторы

ГЛАВА I

МЕХАНИКА

Механика – раздел физики, который изучает простейший способ движения материи – механическое движение тел в пространстве и во времени.

Движение тел в механике изучают относительно систем отсчета. *Система отсчета* – это тело или совокупность тел, условно считающихся неподвижными, относительно которых рассматривается движение данного тела, и часы, по которым отсчитываются времена. С выбранным в качестве системы отсчета телом жестко связывают систему координат. Обычно в качестве системы координат используют прямоугольную декартову систему XYZ , изображенную на рис. 1, где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – единичные векторы ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$) или орты, направленные вдоль осей OX , OY , OZ соответственно.

В механике важную роль играют два абстрактных идеальных понятия – материальная точка и абсолютно твердое тело. *Материальная точка* – это тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи (например, Землю можно считать материальной точкой при изучении ее движения вокруг Солнца, так как размеры Земли значительно меньше расстояния от нее до Солнца). *Системой материальных точек* называют совокупность нескольких тел, каждое из которых можно считать материальной точкой. *Абсолютно твердое тело* – это тело, форма и размеры которого не изменяются под воздействием других тел. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как совокупность жестко связанных между собой материальных точек, т.е. как систему материальных точек, расстояния между которыми не изменяются в процессе движения. Следует всегда помнить, что понятия материальной точки и абсолютно твердого тела – математические абстракции, приближенно соответствующие реальным физическим телам.

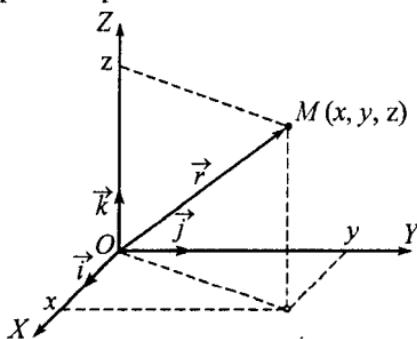


Рис. 1

§1. Кинематика

Кинематика – раздел механики, в котором изучается движение тел и не рассматриваются причины, вызывающие то или иное движение.

Начнем изучение движения тел с движения материальной точки.

Основные понятия кинематики

Положение материальной точки в пространстве в данный момент времени однозначно определяется в выбранной системе отсчета заданием ее трех координат x, y, z . Поэтому говорят, что материальная точка обладает тремя степенями свободы. Вообще говоря, число степеней свободы – это минимальное число независимых координат, с помощью которых можно однозначно определить положение тела в пространстве. Ясно, что положение в пространстве абсолютно твердого тела произвольной формы нельзя однозначно задать с помощью лишь трех координат. Здесь обычно поступают следующим образом: с телом жестко связывают систему ко-

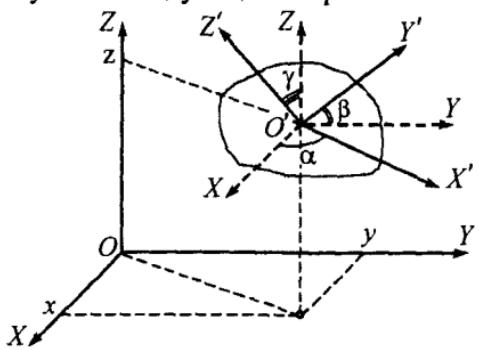


Рис. 1.1

ординат $X'Y'Z'$, и положение тела в пространстве в неподвижной системе отсчета определяют заданием трех координат x, y, z начала отсчета O' системы, связанной с телом, и трех углов α, β, γ между осями OX и $O'X'$, OY и $O'Y'$, OZ и $O'Z'$ (рис. 1.1). Следовательно, абсолютно твердое тело произвольной формы обладает шестью степенями свободы.

Положение материальной точки в пространстве удобно задавать ее радиус-вектором \vec{r} , проведенным из начала координат к материальной точке. При этом проекции r_x, r_y, r_z радиус-вектора на оси OX, OY и OZ совпадают с координатами x, y, z точки:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. \quad (1.1)$$

При движении материальной точки ее координаты и радиус-вектор изменяются со временем, а сама материальная точка описывает в пространстве некоторую линию, которая называется ее *траекторией*. Законом движения или уравнением траектории в векторной форме называется зависимость радиус-вектора материальной точки от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}, \quad (1.2)$$

которой эквивалентны три уравнения:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1.3)$$

Для получения уравнения траектории материальной точки в явном виде из системы (1.3) необходимо исключить время t , т.е. получить зависимость координат друг от друга. По форме траектории бывают *прямолинейными* и *криволинейными*. Если при своем движении материальная точка находится все время в одной плоскости, то такое движение называется *плоским*.

Вектор перемещения и отрезок пути материальной точки. Скалярную величину ΔS , равную расстоянию вдоль траектории, пройденному точкой за данный промежуток времени, называют *отрезком пути мате-*

риальной точки (*путем*). Путь положителен всегда и в процессе движения может только возрастать.

Пусть за время Δt материальная точка переместилась из точки M в точку M' , пройдя вдоль траектории отрезок пути ΔS (рис. 1.2). Вектор $\Delta \vec{r}$, проведенный из начальной точки M в конечную точку M' , называется *вектором перемещения* материальной точки за время Δt :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t),$$

или

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}, \quad (1.4)$$

где $\Delta x = x' - x$; $\Delta y = y' - y$; $\Delta z = z' - z$.

Из рис. 1.2 видно, что при криволинейном движении отрезок пути ΔS не равен величине вектора перемещения

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Вектор средней скорости и средняя путевая скорость. Вектором средней скорости за время Δt называется отношение вектора перемещения материальной точки ко времени, за которое оно совершено:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} = \langle v_x \rangle \vec{i} + \langle v_y \rangle \vec{j} + \langle v_z \rangle \vec{k}. \quad (1.5)$$

Направление вектора $\langle \vec{v} \rangle$ совпадает с $\Delta \vec{r}$ (рис. 1.2), а абсолютная величина равна

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \sqrt{\langle v_x \rangle^2 + \langle v_y \rangle^2 + \langle v_z \rangle^2} = \sqrt{\left\{ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right\}^2 + \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\}^2 + \left\{ \frac{\Delta z}{\Delta t} \right\}^2}. \quad (1.6)$$

Средней путевой скоростью за время Δt называется отношение отрезка пути ΔS к Δt :

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Средняя путевая скорость является скалярной величиной.

Так как $\Delta S = |\Delta \vec{r}|$ только в случае движения с неизменной по направлению скоростью, то в общем случае средняя путевая скорость не совпадает с модулем вектора средней скорости: $v_{cp} \neq |\langle \vec{v} \rangle|$.

Вектор скорости материальной точки. Вектор скорости материальной точки $\vec{v}(t)$ в данный момент времени t определяется как предел, к которому стремится вектор средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$ за время от t до $t + \Delta t$ при безграничном уменьшении промежутка времени Δt :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}'(t),$$

где штрих означает производную по времени, которую принято записывать в виде

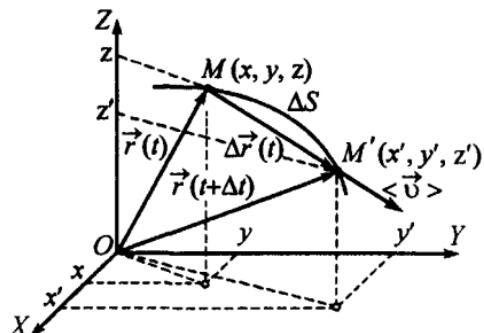


Рис. 1.2

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.8)$$

где $d\vec{r}$ – перемещение материальной точки за бесконечно малый промежуток времени dt .

Заметим, что при $\Delta t \rightarrow 0$ вектор $\Delta\vec{r} \rightarrow d\vec{r}$ и направлен в сторону движения по касательной к траектории материальной точки в момент времени t , а по абсолютной величине

$$|d\vec{r}| = dS. \quad (1.9)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} \right\} = \\ &= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (1.11)$$

а модуль вектора скорости

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (1.12)$$

Таким образом, вектор скорости материальной точки $\vec{v}(t)$ направлен по касательной к траектории в сторону движения, его проекции на оси OX, OY, OZ определяются соотношениями (1.11), а абсолютная величина – выражением (1.12).

Модуль вектора скорости также можно определить (используя (1.9)) с помощью выражения

$$v = |\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}, \quad (1.13)$$

т.е., взяв производную от пути по времени.

Вектор ускорения материальной точки. Пусть материальная точка, перемещаясь по своей траектории (рис. 1.3), находилась в момент времени t в точке M , а в момент времени $t + \Delta t$ – в точке M' . Векторы скорости $\vec{v}(t)$ и $\vec{v}(t + \Delta t)$ в точках M и M' направлены по касательным к траектории.

Если движение материальной точки криволинейное, то, очевидно, направления $\vec{v}(t)$ и $\vec{v}(t + \Delta t)$ не совпадают. Перенесем начало вектора $\vec{v}(t + \Delta t)$, не изменяя его направления, в точку M и соединим вектором $\Delta\vec{v}$ конец вектора $\vec{v}(t)$ с концом перенесенного вектора $\vec{v}(t + \Delta t)$:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t). \quad (1.14)$$

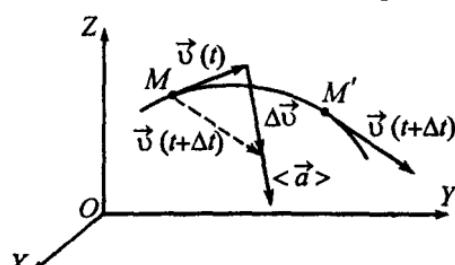


Рис. 1.3

Вектором среднего ускорения за время Δt называют отношение приращения вектора скорости $\Delta \vec{v}$ ко времени, за которое оно совершено:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.15)$$

Направление вектора $\langle \vec{a} \rangle$ совпадает с направлением $\Delta \vec{v}$ (рис. 1.3).

Предельный переход в выражении (1.15) при Δt , стремящемся к нулю, определяет вектор ускорения материальной точки в момент времени t :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{v}'(t) = \frac{d \vec{v}}{dt}, \quad (1.16)$$

где $d \vec{v}$ – приращение вектора скорости за бесконечно малый промежуток времени dt .

Выражение (1.16) можно записать в виде

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (1.17)$$

Следовательно, проекции вектора ускорения на координатные оси

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}, \quad (1.18)$$

а модуль вектора ускорения

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left\{ \frac{dv_x}{dt} \right\}^2 + \left\{ \frac{dv_y}{dt} \right\}^2 + \left\{ \frac{dv_z}{dt} \right\}^2}. \quad (1.19)$$

Следует отметить, что понятия, аналогичного v_{cp} (1.7), для ускорения не существует. Если речь идет о среднем ускорении, то имеется в виду вектор среднего ускорения $\langle \vec{a} \rangle$ (1.15).

Нормальное и тангенциальное ускорения материальной точки.

Если движение материальной точки плоское (будем в дальнейшем считать, что траектория материальной точки лежит в плоскости XOY), то вектор ускорения \vec{a} всегда можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 1.4)

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t, \quad (1.20)$$

где \vec{a}_n – нормальное (или центростремительное) и \vec{a}_t – тангенциальное (или касательное) ускорения матери-

альной точки. Вектор \vec{a}_n всегда направлен к центру кривизны траектории O' в точке M , а вектор \vec{a}_t лежит на касательной к траектории в точке M и может быть направлен как в сторону движения, так и в противоположную сторону. Такое разложение вектора ускорения \vec{a} связано с тем, что вектор скорости материальной точки \vec{v} , изменение которого в единицу времени характеризуется ускорением, может изменяться как по направлению, так и по абсолютной величине. Нормальное ускорение \vec{a}_n характеризует быстроту изменения направления вектора скорости материаль-

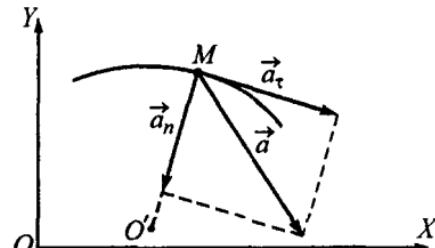


Рис. 1.4

ной точки. Тангенциальное ускорение \vec{a}_τ характеризует быстроту изменения величины скорости материальной точки.

Можно показать, что абсолютные значения $a_n = |\vec{a}_n|$ и $a_\tau = |\vec{a}_\tau|$ определяются соотношениями

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.21)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad (1.22)$$

где $v = |\vec{v}|$ – модуль скорости материальной точки; R – радиус кривизны траектории в данный момент времени.

Из (1.21) – (1.22) видно, что $a_n \geq 0$ (причем $a_n = 0$ при прямолинейном движении: $R \rightarrow \infty$), $a_\tau > 0$ при ускоренном движении материальной точки, $a_\tau < 0$, если материальная точка движется замедленно, и $a_\tau = 0$ при равномерном движении.

Из (1.20) и рис. 1.4 следует, что абсолютные значения величин a , a_n , a_τ связаны между собой соотношением

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (1.23)$$

Задачи кинематики

Прямая (основная) задача формулируется следующим образом: задан закон движения, требуется определить основные кинематические характеристики движения – скорость и ускорение материальной точки. Решение прямой задачи обычно не представляет существенных физических трудностей: скорость и ускорение находят по определению. Закон движения может быть задан в форме (1.2) или (1.3), а решение найдено с использованием соотношений (1.8), (1.16) или (1.10) – (1.11), (1.17) соответственно.

Обратная задача кинематики может быть сформулирована следующим образом: заданы ускорение \vec{a} материальной точки, ее начальная скорость \vec{v}_0 и положение \vec{r}_0 в начальный момент времени $t = t_0$. Требуется определить скорость \vec{v} материальной точки и ее положение \vec{r} в произвольный момент времени t .

Обратная задача гораздо сложнее прямой задачи кинематики и, как правило, для ее решения необходимо обладать навыками интегрирования. Поэтому нас будет интересовать лишь тот случай, когда заданное ускорение материальной точки не меняется со временем ни по величине, ни по направлению. Такое движение называется *равнопеременным*. В этом случае решение обратной задачи имеет следующий вид:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0), \quad (1.24)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{\vec{a} \cdot (t - t_0)^2}{2}. \quad (1.25)$$

Формулы (1.24) – (1.25) исчерпывают все возможные случаи равнопеременного движения. Рассмотрим некоторые важные частные случаи.

Равномерное прямолинейное движение материальной точки

Пусть ускорение материальной точки $\vec{a} = \text{const} = 0$. Тогда из соотношений (1.24) – (1.25) следует, что

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}_0, \\ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0), \end{cases} \quad (1.26)$$

т.е. скорость материальной точки не меняется со временем и всегда совпадает по направлению с вектором начальной скорости \vec{v}_0 . Таким образом, материальная точка движется равномерно и прямолинейно. Если направление оси OX выбрать вдоль вектора \vec{v}_0 (рис. 1.5) и спроектировать соотношения (1.26) на эту ось, то получим

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0, \\ x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0). \end{cases}$$

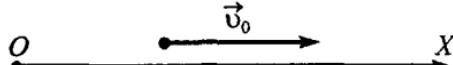


Рис. 1.5

При этом путь, пройденный материальной точкой от начала движения до момента времени t , равен

$$\Delta S = x(t) - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0).$$

Равнопеременное прямолинейное движение материальной точки

Если вектор ускорения материальной точки постоянен и отличен от нуля, т.е. $\vec{a} \neq 0$, а вектор начальной скорости \vec{v}_0 либо равен нулю, либо коллинеарен с вектором \vec{a} , то материальная точка будет двигаться прямолинейно вдоль линии, на которой лежат векторы \vec{v}_0 и \vec{a} . Если направление оси OX выбрать вдоль вектора \vec{v}_0 (рис. 1.6) и спроектировать соотношения (1.24) – (1.25) на эту ось, то получим

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 + a_x \cdot (t - t_0), \\ x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{a_x \cdot (t - t_0)^2}{2}, \end{cases}$$

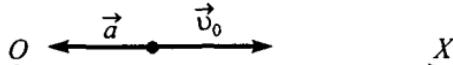
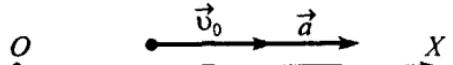


Рис. 1.6

где $a_x = a$ (a – модуль вектора ускорения), если направления векторов \vec{v}_0 и \vec{a} совпадают (рис. 1.6, а); $a_x = -a$, если направления векторов \vec{v}_0 и \vec{a} противоположны (рис. 1.6, б). В первом случае движение называют *равноускоренным*, во втором – *равнозамедленным*.

При определении пути, пройденного материальной точкой при прямолинейном равнопеременном движении, следует различать два случая:

а) равноускоренное движение: $a_x = a > 0$. Очевидно, что путь, пройденный материальной точкой от начала движения до момента времени t , равен

$$\Delta S = x(t) - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{a \cdot (t - t_0)^2}{2};$$

б) равнозамедленное движение: $a_x = -a < 0$. В этом случае для нахождения пути материальной точки можно построить график зависимости $|v_x|$ от времени (рис. 1.7). Из определения модуля следует, что

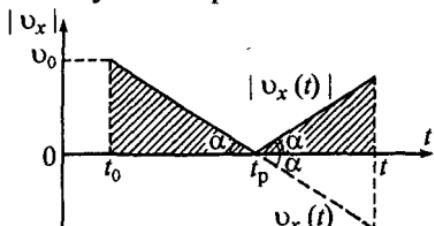


Рис. 1.7

$|v_x| = \begin{cases} v_0 - a \cdot (t - t_0) & \text{при } t < t_p, \\ -v_0 + a \cdot (t - t_0) & \text{при } t > t_p, \end{cases}$

где t_p – момент времени, когда материальная точка останавливается. Из условия $v_x(t_p) = 0$ получим

$$t_p = t_0 + \frac{v_0}{a}.$$

Путь, пройденный материальной точкой за время от t_0 до t , численно равен площади под графиком $|v_x|$ между точками t_0 и t (эта площадь на рис. 1.7 заштрихована).

Равнопеременное криволинейное движение материальной точки

Материальная точка совершает равнопеременное движение по криволинейной траектории, если ее вектор начальной скорости \vec{v}_0 и постоянный вектор ускорения \vec{a} не расположены вдоль одной прямой. В этом случае обычно выбирают систему координат таким образом, чтобы плоскость XOY совпадала с плоскостью, в которой лежат векторы \vec{v}_0 и \vec{a} (рис. 1.8). Тогда на основании соотношений (1.24) – (1.25) получим

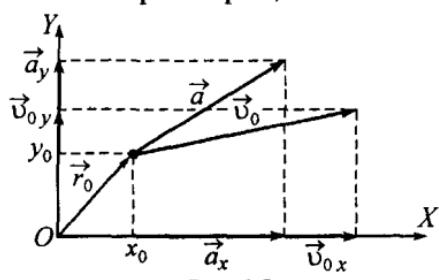


Рис. 1.8

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + a_x \cdot (t - t_0), \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y \cdot (t - t_0), \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot (t - t_0) + \frac{a_x \cdot (t - t_0)^2}{2}, \\ y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot (t - t_0) + \frac{a_y \cdot (t - t_0)^2}{2}, \end{cases} \quad (1.28)$$

где x_0, y_0 – положение материальной точки в начальный момент времени t_0 ; v_{0x}, v_{0y} – проекции вектора начальной скорости \vec{v}_0 на оси OX и OY соответственно; a_x, a_y – проекции вектора ускорения \vec{a} на эти же оси. Формулы (1.27) – (1.28) существенно упростятся, если, например, ось OY направить по линии, вдоль которой направлен вектор \vec{a} , а начало координат поместить в точку, где находилась материальная точка при $t = t_0$. Тогда $a_x = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и уравнения (1.27) – (1.28) примут вид

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x}, \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y \cdot (t - t_0), \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}(t - t_0), \\ y(t) = v_{0y}(t - t_0) + \frac{a_y(t - t_0)^2}{2}. \end{cases} \quad (1.30)$$

Из соотношений (1.29) – (1.30) видно, что в выбранной системе отсчета материальная точка совершает движение в плоскости XOY , причем вдоль оси OX она движется равномерно со скоростью $v_{0x} = \text{const}$, а вдоль оси OY – равноускоренно (или равнозамедленно) с ускорением $a_y = \text{const}$.

Из соотношений (1.30) нетрудно получить уравнение траектории материальной точки в явном виде: выражая $(t - t_0)$ из первого уравнения (1.30) и подставляя во второе, получим

$$y = \frac{a_y}{2 v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x.$$

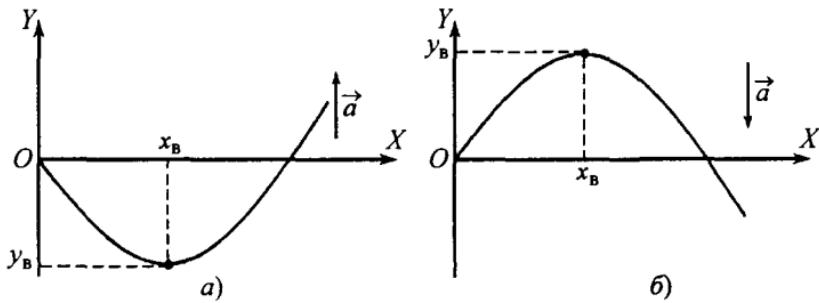


Рис. 1.9

Это уравнение параболы, проходящей через начало координат, ветви которой либо направлены вверх (рис. 1.9, *а*), если $a_y > 0$, либо вниз (рис. 1.9, *б*), если $a_y < 0$, а вершина расположена в точке с координатами

$$x_B = -\frac{v_{0x} v_{0y}}{a_y}, \quad y_B = -\frac{v_{0y}^2}{2 a_y}.$$

При криволинейном равноускоренном движении путь, пройденный материальной точкой за время от t_0 до t , можно вычислить лишь с помощью интегрирования:

$$\Delta S = \int_{t_0}^t v(t) dt,$$

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

а проекции вектора скорости v_x и v_y в момент времени t на оси системы координат нужно взять из (1.29). Задача о нахождении пути при криволинейном движении выходит за рамки школьной программы.

Абсолютное, относительное, переносное движение материальной точки. Сложение скоростей и ускорений

Пусть имеется неподвижная система отсчета K и система отсчета K' , движущаяся поступательно (углы между осями OX и $O'X'$, OY и $O'Y'$, OZ и $O'Z'$ остаются все время постоянными) относительно K (рис. 1.10).

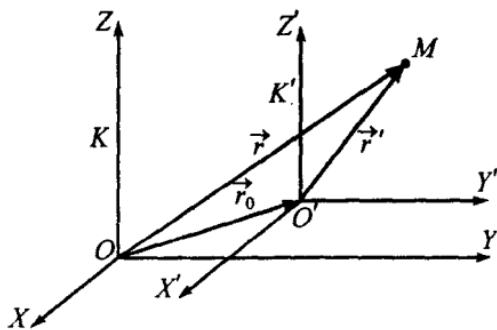


Рис. 1.10

Положение материальной точки M в системах отсчета K и K' в один и тот же момент времени определяется радиус-векторами \vec{r} и \vec{r}' соответственно. Из рис. 1.10 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad (1.31)$$

где \vec{r}_0 – радиус-вектор начала координат O' системы K' в системе K .

Взяв производную по времени от левой и правой частей уравнения (1.31), получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}, \quad \text{или} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \quad (1.32)$$

где \vec{v} – скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета K ; \vec{v}' – скорость материальной точки относительно движущейся системы отсчета K' ; \vec{v}_0 – скорость поступательного движения системы отсчета K' относительно системы K . Скорость \vec{v} называется *абсолютной скоростью* материальной точки, скорость \vec{v}' – ее *относительной скоростью*, а скорость \vec{v}_0 – *переносной*.

Продифференцировав (1.32) еще раз по времени, получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}, \quad \text{или} \quad \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}', \quad (1.33)$$

где \vec{a} – ускорение материальной точки в системе K ; \vec{a}' – ее ускорение в системе K' ; \vec{a}_0 – ускорение системы отсчета K' относительно K .

Из полученных правил сложения скоростей (1.32) и ускорений (1.33), в частности, следует, что если материальная точка участвует в нескольких движениях со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$ и ускорениями $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$, то результирующие скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} материальной точки относительно неподвижной системы отсчета K определяются выражениями

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \dots, \quad (1.34)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots \quad (1.35)$$

Кинематика движения материальной точки по окружности

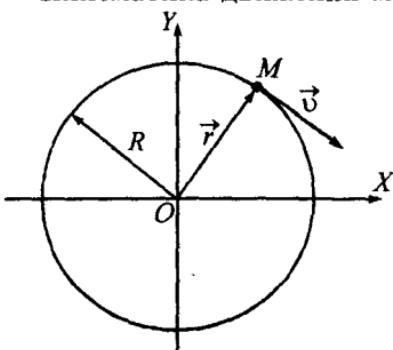


Рис. 1.11

Пусть материальная точка совершает плоское движение по окружности радиусом R . Выберем систему координат, плоскость XOY которой совпадает с плоскостью движения материальной точки, а начало координат совпадает с центром окружности, описываемой материальной точкой (рис. 1.11). Скорость движения материальной точки \vec{v} , направленная по касательной к траектории, всегда перпендикулярна радиус-

вектору материальной точки \vec{r} , а величина радиус-вектора $|\vec{r}| = R$ не меняется со временем.

При движении материальной точки по окружности, помимо скорости \vec{v} , которую часто называют *линейной скоростью*, удобно использовать понятие *угловой скорости* материальной точки ω .

Средней угловой скоростью $\langle\omega\rangle$ материальной точки на данном участке движения назовем величину, равную отношению угла поворота $\Delta\phi$ точки за некоторый промежуток времени Δt к этому промежутку времени:

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \quad (1.36)$$

а угловую скорость ω определим, как предел, к которому стремится $\langle\omega\rangle$ при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle\omega\rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}, \quad (1.37)$$

где $d\phi$ – угол, на который поворачивается радиус-вектор материальной точки \vec{r} за бесконечно малый промежуток времени dt .

Легко найти связь между угловой скоростью ω и модулем линейной скорости v материальной точки. За время dt материальная точка пройдет путь dS по дуге окружности радиусом R (рис. 1.12), причем

$$dS = R d\phi. \quad (1.38)$$

Очевидно, что, независимо от характера движения, путь ΔS , пройденный точкой за произвольный промежуток времени Δt , будет равен $\Delta S = R \Delta\phi$, где $\Delta\phi$ – угол поворота радиус-вектора точки за этот промежуток времени.

Поскольку величина линейной скорости (см. (1.13))

$$v = \frac{dS}{dt}, \quad (1.39)$$

то подставив (1.38) в (1.39) с учетом (1.37), получим

$$v = \frac{R d\phi}{dt} = R \omega. \quad (1.40)$$

Угловым ускорением ϵ материальной точки называется величина, равная пределу, к которому стремится отношение приращения угловой скорости $\Delta\omega$ за промежуток времени Δt к этому промежутку времени при стремлении последнего к нулю

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \quad (1.41)$$

т.е. производной от угловой скорости по времени.

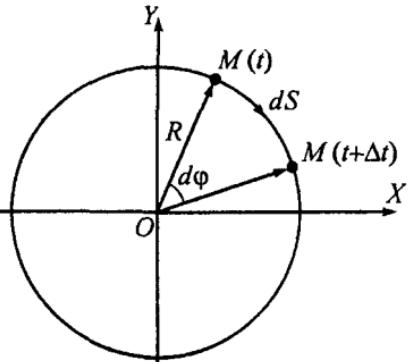


Рис. 1.12

Из (1.41) видно, что $\varepsilon > 0$, если угловая скорость материальной точки ω увеличивается со временем, $\varepsilon < 0$, если угловая скорость уменьшается со временем, и $\varepsilon = 0$, если $\omega = \text{const}$.

Используя соотношения (1.40) – (1.41), можно найти нормальное a_n и тангенциальное a_t ускорения материальной точки при ее движении по окружности радиусом R :

$$a_n = \frac{\omega^2}{R} = \omega^2 R, \quad (1.42)$$

$$a_t = \frac{d\omega}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \varepsilon. \quad (1.43)$$

Тогда полное ускорение материальной точки

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = R \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (1.44)$$

Прямая задача кинематики может быть сформулирована следующим образом: материальная точка движется по окружности радиусом R так, что угол поворота изменяется по закону $\phi(t)$. Требуется определить величины угловой скорости ω и ускорения ε точки в момент времени t . Решение задачи может быть проведено с использованием определений (1.37) и (1.41). С помощью соотношений (1.40) и (1.44) можно определить линейную скорость и полное ускорение точки в этот момент времени.

Обратная задача кинематики состоит в следующем: материальная точка движется по окружности радиусом R с угловым ускорением ε . В начальный момент времени t_0 материальная точка находилась в заданной точке окружности, в которой ее положение определялось углом поворота ϕ_0 , отсчитываемым от произвольно выбранной точки, и имела угловую скорость ω_0 . Необходимо определить угловую скорость ω и угол поворота ϕ в произвольный момент времени t .

Если угловое ускорение материальной точки $\varepsilon = \text{const}$, то решение обратной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0), \\ \phi(t) = \phi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{\varepsilon \cdot (t - t_0)^2}{2}. \end{cases} \quad (1.45)$$

При вычислении пути следует различать, как и при прямолинейном движении, два случая:

а) равноускоренное движение: $\varepsilon > 0$. Путь, пройденный точкой по дуге окружности от начала движения до момента времени t , в этом случае равен

$$\Delta S = R \left\{ \phi(t) - \phi_0 \right\} = R \left\{ \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{\varepsilon \cdot (t - t_0)^2}{2} \right\};$$

б) равнозамедленное движение: $\varepsilon = -|\varepsilon| < 0$. В этом случае

$$\Delta S = R \hat{\phi}(t),$$

где значение $\hat{\phi}(t)$ численно равно площади под графиком зависимости модуля угловой скорости от времени

$$|\omega(t)| = \begin{cases} \omega_0 - |\varepsilon| \cdot (t - t_0) & \text{при } t < t_p, \\ -\omega_0 + |\varepsilon| \cdot (t - t_0) & \text{при } t > t_p \end{cases}$$

между точками t_0 и t (рис. 1.13), где

$$t_p = t_0 + \frac{\omega_0}{|\varepsilon|}$$

момент времени, когда материальная точка изменяет направление своего движения.

В частном случае равномерного движения ($\varepsilon = 0$)

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega_0 = \text{const}, \\ \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0), \end{cases}$$

$$\Delta S = R [\varphi(t) - \varphi_0] = R \omega_0 \cdot (t - t_0).$$

При равномерном движении материальной точки по окружности удобно ввести понятия *периода обращения* (времени полного оборота материальной точки)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.46)$$

и *частоты обращения* (числа оборотов за одну секунду)

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (1.47)$$

Рекомендации по решению задач

Решение прямой задачи кинематики материальной точки основано на применении закона движения к тому или иному конкретному условию. Движение материальной точки полностью известно, если известен радиус-вектор $\vec{r}(t)$ как функция времени или, что эквивалентно, три скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, представляющие собой проекции векторного уравнения движения на оси декартовой системы координат. Эти функции содержат полную информацию о движении точки и позволяют определить ее положение, скорость и ускорение, а также другие характеристики движения в любой интересующий нас момент времени.

Если известен закон движения материальной точки относительно некоторой системы отсчета в векторной (1.2) или координатной (1.3) форме, то решить задачу можно на основании определений кинематики:

1. *Вектор скорости* в каждой точке траектории совпадает с касательной, проведенной к траектории в данной точке, и направлен в сторону движения. В зависимости от формы задания движения вектор скорости может быть определен как производная от радиус-вектора движущейся точки по времени (1.8), или по формулам (1.10) – (1.11).

2. *Вектор ускорения* материальной точки в зависимости от формы задания движения может быть определен как производная от вектора скорости по времени (1.16), или по формуле (1.17).

3. *Вектор перемещения* материальной точки за время Δt направлен вдоль прямой, соединяющей начальное и конечное положения точки, и определяется выражением (1.4).

4. *Вектор средней скорости* материальной точки за время Δt равен отношению вектора перемещения точки ко времени, за которое оно совершено (1.5), и направлен вдоль вектора перемещения $\vec{\Delta r}$.

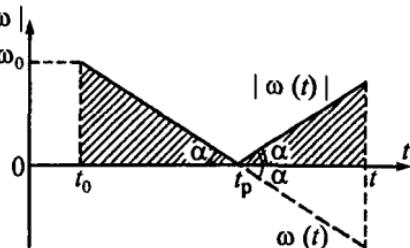


Рис. 1.13

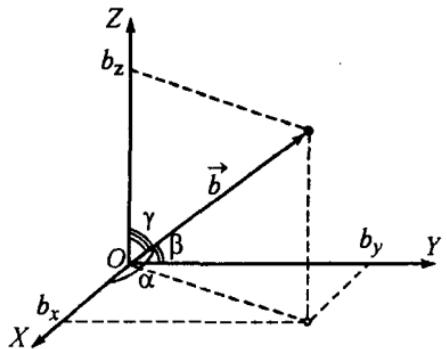


Рис. 1.14

В некоторых задачах требуется определить направление того или иного вектора (перемещения, средней скорости, скорости или ускорения) относительно какого-либо другого вектора или относительно осей выбранной системы координат, например, указать углы, которые образует данный вектор с осями OX , OY , OZ системы координат. Для определения этих углов можно использовать любую из известных тригонометрических функций. Рассмотрим произвольный вектор \vec{b} . Угол α между направлением вектора \vec{b} и осью OX может быть определен¹⁴⁾ как (рис. 1.14)

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{b_x^2 + b_z^2}}{b} = \arccos \frac{b_x}{b} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}{b_x}.$$

Аналогичным образом можно определить углы β и γ между вектором \vec{b} и осями OY и OZ . Наиболее часто для этих целей используются так называемые направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{b_x}{b}, \quad \cos \beta = \frac{b_y}{b}, \quad \cos \gamma = \frac{b_z}{b},$$

где b_x , b_y , b_z – проекции вектора \vec{b} на оси декартовой системы координат; b – модуль вектора, который равен корню квадратному из суммы квадратов проекций данного вектора на оси системы координат:

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

Для определения угла между двумя произвольными векторами

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

удобно воспользоваться скалярным произведением векторов. По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов \vec{a} и \vec{b} ; a и b – их модули. С другой стороны

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Следовательно,

$$a b \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

или

$$\cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}.$$

5. Путь, пройденный материальной точкой за время $\Delta t = t - t_0$, в рамках школьной программы может быть определен только для случаев прямолинейного движения. Пусть, например, материальная точка движется вдоль оси OX по закону $x = x(t)$. Ясно, что в случаях равномерного движения точки путь, пройденный за время Δt , равен разности координат точки в конечный t и начальный t_0 моменты времени. Причем, так как путь положителен при любом направлении движения и может только возрастать, то в общем случае равномерного движения его нужно определять как модуль разности координат

$$\Delta S = |x(t) - x(t_0)|.$$

Если точка участвует в равнопеременном движении, то без анализа движения вычислять путь через разность координат точки в конечный и начальный моменты времени нельзя. В случаях равнопеременного движения при вычислении пути можно поступать следующим образом:

а) определить закон изменения скорости и ускорение точки:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}, \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2};$$

б) определить скорость точки в начальный момент интересующего нас интервала движения $v_0 = v_x(t = t_0)$. Если скорость v_0 точки и ее ускорение имеют одинаковые знаки (это означает, что точка движется равноускоренно в данном направлении), то путь, как и в случае равномерного движения, может быть определен через модуль разности координат в конечный t и начальный t_0 моменты времени. Если v_0 и a_x имеют разные знаки, то в данном направлении точки движется равнозамедленно и, следовательно, в какой-то момент времени остановится (точку, в которой это произойдет, будем называть точкой разворота). Так как в точке разворота скорость частицы становится равной нулю, то для определения момента времени t_p , соответствующего точке разворота, следует приравнять значение скорости к нулю. Очевидно, что при равнопеременном движении точка разворота всего одна;

в) сравнивая значение времени t с моментом разворота t_p , определяем путь, пройденный точкой. Если $t_p \geq t$ (т.е. точка остановится после момента времени t), то путь можно найти как модуль разности координат в моменты времени t и t_0 . Если $t_p < t$, то для определения пути можно поступить любым из трех способов:

– вычислить отрезки пути, пройденные точкой от момента времени t_0 до момента разворота t_p и от момента разворота до момента времени t ; полный путь за время $\Delta t = t - t_0$ вычислить как сумму этих отрезков пути:

$$\Delta S = |x(t_p) - x(t_0)| + |x(t) - x(t_p)|;$$

– построить график зависимости модуля скорости точки $|v_x|$ на отрезке времени $[t_0, t]$ и путь определить как площадь фигуры под графиком $|v_x|$ от t (см. рис. 1.7);

– вычислить путь непосредственным интегрированием выражения для скорости материальной точки:

$$\Delta S = \left| \int_{t_0}^{t_p} v_x dt \right| + \left| \int_{t_p}^t v_x dt \right|.$$

Если ускорение точки не постоянно, то решение задачи на определение пути принципиально не отличается от решения задачи на равнопеременное движение. Особенность состоит лишь в том, что в таких случаях может быть несколько точек разворота.

6. Средняя путевая скорость движения материальной точки за время Δt является скалярной величиной и равна отношению пути, пройденного материальной точкой за время Δt , ко времени, за которое этот путь пройден (1.7).

Вторую группу задач по кинематике материальной точки составляют обратные задачи, в которых требуется по известному закону изменения скорости точки или ускорению определить закон движения. Не нарушая общности, можно считать, что в обратной задаче по известному ускорению материальной точки (зная закон изменения скорости, взяв производную, легко можно найти ускорение) требуется восстановить закон движения. Так как в общем случае решение обратной задачи требует знания интегрирования, то в рамках школьной программы рассматриваются задачи не сложнее, чем на равнопеременное движение. В этом случае закон движения выражается формулой (1.25), а скорость – (1.24).

Использовать векторные уравнения при решении многих задач обычно неудобно, поэтому уравнения движения записывают в скалярной форме, т.е. уравнения $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$ проектируют на оси декартовой системы координат.

Выбор системы отсчета может быть произвольным. Начало системы координат удобно совместить с положением точки в начальный момент времени $t_0 = 0$ (при этом $\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} = 0$). В случае равномерного движения ($\vec{a} = 0, \vec{v} = \text{const}$) движение может быть описано с помощью проекции уравнения (1.25) лишь на одну ось, если ее направить вдоль вектора скорости тела. Если движение тела равноускоренное, удобно одну из осей

координат направить вдоль вектора ускорения. В общем случае координатные оси удобно направлять так, чтобы приходилось делать минимум разложений векторов, т.е. чтобы как можно больше проекций векторов на оси оказались равными нулю и уравнения в проекциях на оси были предельно простыми. В общем случае $\vec{r}_0 \neq 0$, $\vec{v}_0 \neq 0$, $\vec{a} \neq 0$, записав значения проекций этих векторов на оси выбранной декартовой системы координат, получают скалярные уравнения движения

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}, \quad z = z_0 + v_{0z} t + \frac{a_z t^2}{2}.$$

Многие задачи кинематики сформулированы таким образом, что для их решения сначала нужно решить обратную задачу кинематики, т.е. определить закон движения материальной точки, а затем определить некоторые характеристики движения (путь, перемещение, среднюю скорость и т.д.) – решить прямую задачу.

К таким задачам относятся задачи на движение тел вблизи поверхности Земли, происходящее с постоянным ускорением свободного падения \vec{g} . Движение тел, брошенных под углом к горизонту, можно рассматривать как результат наложения двух одновременных движений по осям OX и OY произвольной неподвижной системы координат. Учитывая это,

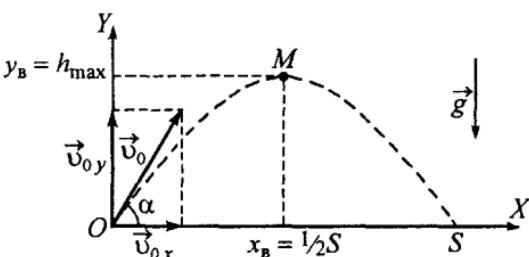


Рис. 1.15

решение задач такого типа удобно начинать с нахождения проекций вектора начальной скорости \vec{v}_0 и вектора ускорения $\vec{a} = \vec{g}$ на эти оси и затем составлять уравнение движения вдоль каждого направления. Если начало системы координат XOY совместить с положением тела в момент броска, а одну из осей, например OY , направить параллельно вектору \vec{g} ускорения точки (рис. 1.15), то

$$a_x = 0, \quad a_y = -g, \quad v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

и уравнения движения будут иметь вид

$$x = v_0 \cos \alpha t, \quad y = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

Эти уравнения справедливы как для равнозамедленного подъема тела вверх, так и для дальнейшего равноускоренного падения после прохождения телом верхней точки траектории, поскольку движение тела на обоих участках происходит с одним и тем же ускорением \vec{g} .

Исключая из уравнений движения время, легко получить уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

которое представляет собой уравнение «перевернутой» параболы с вершиной в точке с координатами

$$x_B = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad y_B = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Очевидно, что y_B есть не что иное, как максимальная высота h_{\max} , которой может достичь тело в процессе движения, а x_B – половина расстояния S , которое пролетит тело вдоль поверхности Земли:

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}; \quad h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Сопоставив полученные выражения для S и h_{\max} с уравнениями движения, легко найти время подъема тела на максимальную высоту t_m и время движения тела t_{dv} :

$$t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}; \quad t_{dv} = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}.$$

В задачах на движение тел вблизи поверхности Земли часто требуется найти радиус кривизны траектории точки в некоторый момент времени. Для определения радиуса кривизны R можно воспользоваться выражением для нормального ускорения (1.21):

$$R = \frac{v^2}{a_n},$$

где a_n — проекция вектора ускорения на нормаль к траектории движения в данной точке (или в данный момент времени).

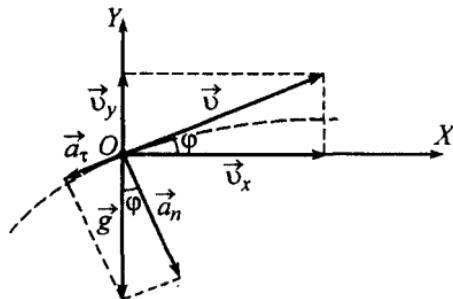


Рис. 1.16

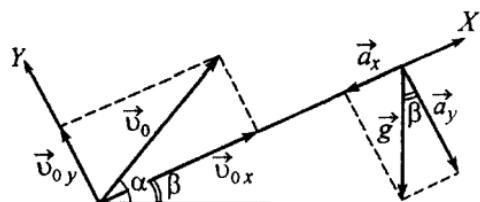


Рис. 1.17

Как следует из рис. 1.16,

$$a_n = g \cos \phi = \frac{g |v_x|}{v}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{v^3}{g |v_x|} = \frac{(v_x^2 + v_y^2)^{3/2}}{g |v_x|} = \frac{(v_0^2 - 2 v_0 \sin \alpha g t + g^2 t^2)^{3/2}}{g v_0 \cos \alpha}.$$

Так как в процессе движения может изменяться только значение проекции скорости v_y , то радиус кривизны траектории будет минимальным в той точке, где минимальна v_y (т.е. в вершине параболы, где $v_y = 0$):

$$R_{\min} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

Аналогично a_n можно определить и значение тангенциальной составляющей вектора ускорения в любой момент времени:

$$a_t = g \sin \phi = g \frac{|v_y|}{v} = g \frac{|v_0 \sin \alpha - g t|}{(v_0^2 - 2 v_0 \sin \alpha g t + g^2 t^2)^{1/2}}.$$

Иногда при решении подобных задач более удобными являются координатные оси, «поворнутые» относительно вектора полного ускорения \vec{g} на некоторый угол β (рис. 1.17). В этом случае

$$a_x = -g \sin \beta, \quad a_y = -g \cos \beta, \quad v_{0x} = v_0 \cos (\alpha - \beta), \quad v_{0y} = v_0 \sin (\alpha - \beta)$$

и уравнения движения примут вид

$$x = v_0 \cos (\alpha - \beta) t - \frac{g \sin \beta t^2}{2}, \quad y = v_0 \sin (\alpha - \beta) t - \frac{g \cos \beta t^2}{2}.$$

Кроме рассмотренных двух основных классов задач могут встречаться задачи, требующие применения методов математического анализа к исследованию функций на экстремум, что не всегда так просто, как в рассмотренном случае определения R_{\min} . Схема решения задач, в которых требуется определить максимальное или минимальное значение одной из величин (как при решении задач кинематики, так и при решении задач из других разделов), следующая:

— получить алгебраическое выражение искомой величины в зависимости от параметра, определяющего ее максимальное или минимальное значение, записав его через заданные характеристики движения;

- продифференцировать полученное выражение по переменному параметру и приравнять производную к нулю;
- решить полученное уравнение относительно переменного параметра, значения которого определяют экстремальные значения искомой величины;
- будет ли функция иметь максимум или минимум, часто можно определить из физических соображений, но в общем случае требуется взять вторую производную от функции. Если вторая производная при данном значении параметра окажется больше нуля, то функция имеет минимум; если меньше нуля — максимум;
- подставив найденное значение параметра в исходную формулу, получим экстремальное значение искомой величины.

На конец, могут встретиться задачи, в которых рассматривается движение одних тел относительно других, которые, в свою очередь, движутся относительно тела, принятого за неподвижное (чаще всего его связывают с Землей). В таких случаях говорят, что тело одновременно участвует в двух движениях. Здесь нужно прежде всего установить неподвижную и движущуюся системы отсчета и выяснить, какие из кинематических характеристик движения тела (заданные и искомые) относятся к абсолютному, какие к переносному и какие к относительному движению. Связь между кинематическими величинами при таком движении дается формулами (1.31) – (1.33), подстановка в которые выражений \vec{r}_0 , \vec{r} , \vec{v}_0 , \vec{v} , \vec{a}_0 , \vec{a} дает систему уравнений, приводящих подобные задачи к одному из двух рассмотренных выше классов задач. Если известны скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 двух тел относительно некоторой условно неподвижной системы отсчета, то, связав движущуюся систему отсчета с одним из тел, абсолютную скорость другого тела можно представить в виде

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{отн}\ 1} + \vec{v}_2, \quad \text{или} \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_{\text{отн}\ 2} + \vec{v}_1,$$

где $\vec{v}_{\text{отн}\ 1}$, $\vec{v}_{\text{отн}\ 2}$ — скорость первого тела относительно второго и скорость второго тела относительно первого соответственно. Тогда скорость одного тела относительно другого

$$\vec{v}_{\text{отн}\ 1} = -\vec{v}_{\text{отн}\ 2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Задачи о движении материальной точки по окружности принципиально не отличаются от соответствующих задач поступательного движения. Особенность состоит лишь в том, что, наряду с законами поступательного движения, здесь нужно использовать формулы кинематики движения по окружности (1.36) – (1.47).

Известную трудность представляют задачи на так называемое плоское движение, когда все точки тела перемещаются параллельно одной плоскости. Основная особенность подобных задач состоит в том, что здесь тело нельзя рассматривать как материальную точку. Примером такого движения может служить движение катящегося цилиндра.

При решении таких задач удобно использовать движущуюся систему координат $X'Y'$, жестко связанную с точкой, находящейся на оси вращения тела, и движущуюся вместе

с телом со скоростью \vec{v}_0 (рис. 1.18). Тогда каждая точка тела относительно такой системы координат будет участвовать лишь во вращательном движении. Если тело в данный момент времени имеет угловую скорость ω , то точка, находящаяся от оси вращения на расстоянии r , будет иметь относительную скорость $v_{\text{отн}} = \omega r$, направление которой совпадает с направлением касательной к окружности, которую описывает данная точка относительно движущейся системы координат. Следовательно, при таком подходе к ре-

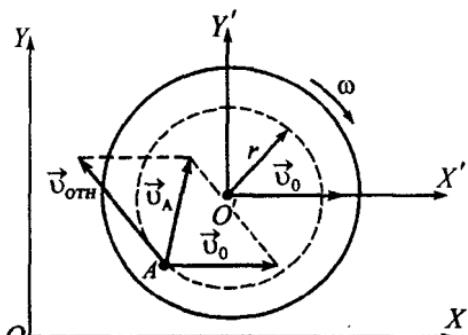


Рис. 1.18

шению задачи, абсолютная скорость произвольной точки A в неподвижной системе координат XOY равна векторной сумме относительной скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$ и переносной \vec{v}_0 :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{отн}}.$$

Обычно для решения подобных задач достаточно записать вышеуказанное уравнение для двух точек тела в проекциях на оси неподвижной системы координат. В качестве таких точек выбираются точки тела, о движении которых имеется в условии задачи какая-либо информация. Например, если тело катится без проскальзывания, то абсолютная скорость точки касания равна скорости подставки, или, если тело заставляют катиться с помощью намотанной на него нити, то скорость сматывания нити равна абсолютной скорости той точки тела, которой касается нить в данный момент времени.

Часто при решении подобных задач движущуюся систему координат связывают с так называемым *мгновенным центром скоростей* – точкой, относительно которой в данный момент времени скорость поступательного движения тела равна нулю. В этом случае движение тела можно рассматривать как ряд последовательных вращений относительно мгновенного центра, а абсолютная скорость произвольной точки тела равна относительной, причем $v_{\text{отн}} = \omega r$, где r – расстояние от данной точки до мгновенного центра скоростей. Если тело катится без проскальзывания, то, очевидно, мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения тела с поверхностью. В общем случае мгновенный центр скоростей можно определить как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из двух произвольных точек тела к линиям векторов абсолютной скорости этих точек. В том случае, когда перпендикуляры, проведенные из указанных точек, сливаются в одну прямую, мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения перпендикуляра с линией, проведенной через концы векторов скоростей этих точек.

Задачи

Равномерное движение

1.1. Материальная точка движется вдоль оси OX . График зависимости координаты точки от времени имеет вид, представленный на рис. 1.19. Построить графики зависимости скорости и пройденного пути от времени, а также определить среднюю путевую скорость точки за промежуток времени $0 \leq \Delta t \leq 5$ с.

- *Решение.* Закон движения материальной точки задан графически.

На участке, соответствующем интервалу времени от $t_0 = 0$ до $t_1 = 1$ с, координата точки не меняется. Это означает, что при $t_0 \leq t < t_1$ точка покоятся, следовательно, ее скорость v_1 и пройденный путь ΔS_1 за этот интервал времени равны нулю.

На участке, соответствующем интервалу времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с, зависимость координаты точки от времени имеет вид прямой

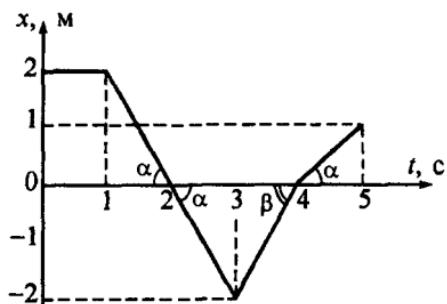


Рис. 1.19

$$x = a_1 + b_1 t, \quad (1)$$

где коэффициент b_1 численно равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси времени

$$b_1 = \lg(\pi - \alpha) = -\lg \alpha$$

и имеет размерность скорости, т.е. $b_1 = -2$ м/с.

Следовательно, (1) можно записать в виде

$$x = a_1 - 2t. \quad (2)$$

Уравнение (2) соответствует движению точки с постоянной скоростью $v_2 = -2 \text{ м/с}$. При этом за время $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 2 \text{ с}$ точка пройдет путь $\Delta S_2 = |v_2| \Delta t_2 = 4 \text{ м}$.

На участке, соответствующем интервалу времени от $t_2 = 3 \text{ с}$ до $t_3 = 4 \text{ с}$, зависимость координаты точки от времени имеет вид прямой

$$x = a_2 + b_2 t, \quad (3)$$

где $b_2 = \operatorname{tg} \alpha = 2 \text{ м/с}$. Следовательно, (3) примет вид

$$x = a_2 + 2t. \quad (4)$$

Это уравнение соответствует равномерному движению материальной точки со скоростью $v_3 = 2 \text{ м/с}$. Путь, пройденный точкой за промежуток времени $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 1 \text{ с}$, равен $\Delta S_3 = v_3 \Delta t_3 = 2 \text{ м}$.

На участке, соответствующем интервалу времени от $t_3 = 4 \text{ с}$ до $t_4 = 5 \text{ с}$, движение точки происходит по закону

$$x = a_3 + b_3 t, \quad (5)$$

где $b_3 = \operatorname{tg} \beta = 1 \text{ м/с}$. Следовательно,

$$x = a_3 + t. \quad (6)$$

На этом участке скорость также постоянна и равна $v_4 = 1 \text{ м/с}$, а пройденный путь за время $\Delta t_4 = t_4 - t_3 = 1 \text{ с}$, равен $\Delta S_4 = v_4 \Delta t_4 = 1 \text{ м}$.

Используя полученные результаты, построим графики зависимости скорости и пройденного пути от времени.

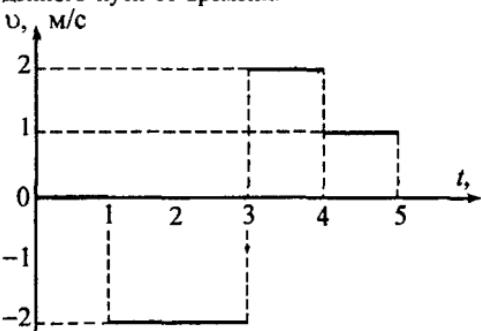


Рис. 1.20

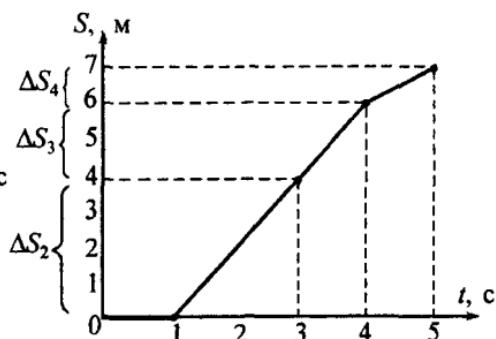


Рис. 1.21

Поскольку на каждом из рассмотренных участков движение точки происходило с постоянной скоростью, то график зависимости $v(t)$ будет состоять из горизонтальных отрезков и имеет вид, представленный на рис. 1.20.

При построении графика зависимости $S(t)$ следует учесть, что путь положителен всегда и в процессе движения может только возрастать. Кроме этого, при равномерном движении путь, так же, как и координата точки, меняется линейно в зависимости от времени. График $S(t)$ представлен на рис. 1.21.

Среднюю путевую скорость за промежуток времени $\Delta t = 5 \text{ с}$ найдем как отношение пути, пройденного точкой за этот промежуток времени, к Δt :

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4}{\Delta t} = \frac{7}{5} = 1,4 \text{ м/с.}$$

Пройденный путь можно также определить, используя график зависимости скорости материальной точки от времени: путь, пройденный за время Δt , численно равен площади фигуры под графиком $|v(t)|$ между точками $t_0 = 0 \text{ с}$ и $t_4 = 5 \text{ с}$.

• Ответ: рис. 1.20 – 1.21; $v_{\text{ср}} = 1,4 \text{ м/с.}$

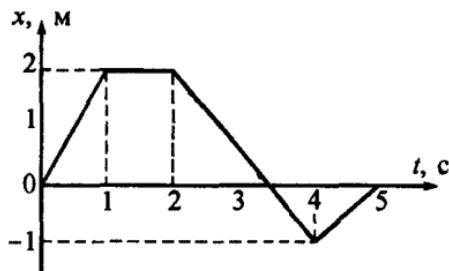


Рис. 1.22

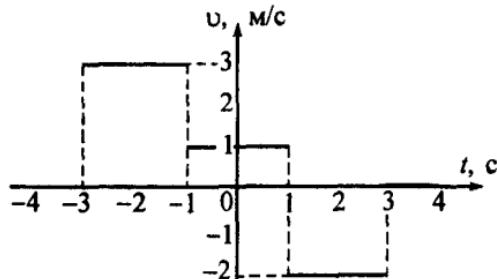


Рис. 1.23

1.2. Материальная точка движется вдоль оси OX . График зависимости координаты точки от времени имеет вид, представленный на рис. 1.22. Построить графики зависимости ее скорости и пройденного пути от времени.

1.3. Материальная точка движется вдоль оси OX . График зависимости скорости точки от времени имеет вид, представленный на рис. 1.23. Построить график зависимости координаты от времени, если в момент времени $t_0 = 0$ точка имела координату $x_0 = -1$ м.

• *Решение.* График зависимости $v(t)$ состоит из горизонтальных отрезков. Следовательно, на каждом из участков точка двигалась с постоянной скоростью, а ее координата менялась по закону

$$x = x_0 + v t. \quad (1)$$

Поскольку из условия задачи известна координата x_0 точки в момент времени t_0 , то начнем решение задачи с участка, соответствующего интервалу времени от $t_0 = 0$ до $t_1 = 1$ с. Из рис. 1.23 следует, что при $t_0 \leq t < t_1$ скорость точки $v_1 = 1$ м/с. Поэтому закон движения (1) в рассматриваемом интервале времени примет вид

$$x = -1 + 1 t. \quad (2)$$

График зависимости координаты точки от времени на этом участке представляет собой прямую линию, координаты концов которой равны: $x_0 = -1$ м при $t_0 = 0$ и $x_1 = -1 + 1(t_1 - t_0) = 0$ при $t_1 = 1$ с.

Координата x_1 точки в момент времени $t_1 = 1$ с является начальной координатой для участка, соответствующего интервалу времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с. Зависимость координаты точки от времени при $t_1 \leq t < t_2$ имеет вид прямой

$$x = v_2 t, \quad (3)$$

где $v_2 = -2$ м/с. Следовательно, уравнение (3) примет вид

$$x = -2 t. \quad (4)$$

Это также уравнение прямой, координаты концов которой равны: $x_1 = 0$ при $t_1 = 1$ с и $x_2 = -2(t_2 - t_1) = -4$ м при $t_2 = 3$ с.

На участке, соответствующем интервалу времени от $t_2 = 3$ с до $t_3 = 4$ с, скорость точки $v_3 = 0$. Следовательно, при $t_2 \leq t < t_3$ координата точки оставалась неизменной и равной $x_2 = -4$ м.

Теперь рассмотрим участок, соответствующий интервалу времени от $t_4 = -1$ с до $t_0 = 0$. Скорость материальной точки на этом участке такая же, как при $t_0 \leq t < t_1$, т.е. $v_4 = v_1 = 1$ м/с. Следовательно, закон движения (1) примет вид

$$x = x_{0-4} + 1 t, \quad (5)$$

где x_{0-4} – начальная координата на данном участке, т.е. координата точки в момент времени $t_4 = -1$ с. Для ее определения запишем уравнение (5) в момент времени $t_0 = 0$ с учетом, что в момент времени t_0 координата точки $x = x_0 = -1$ м:

$$-1 = x_{0-4} + 1(t_0 - t_4), \quad \text{или} \quad x_{0-4} = -2 \text{ м.}$$

С учетом значения x_{0-4} уравнение (5) примет вид

$$x = -2 + 1t.$$

График зависимости $x(t)$ при $t_4 \leq t < t_0$ представляет собой прямую, координаты концов которой равны: $x_{0-4} = -2$ м при $t_4 = -1$ с и $x_0 = -1$ м при $t_0 = 0$.

На участке, соответствующем интервалу времени от $t_5 = -3$ с до $t_4 = -1$ с, скорость точки $v_5 = 3$ м/с. Следовательно, при $t_5 \leq t < t_4$ координата точки менялась по закону

$$x = x_{0-5} + 3t, \quad (6)$$

где x_{0-5} – начальная координата на данном участке. Записав уравнение (6) в момент времени $t_4 = -1$ с с учетом, что в момент времени t_4 координата точки $x = x_{0-4} = -2$ м, получаем

$$-2 = x_{0-5} + 3(t_4 - t_5), \quad \text{или} \quad x_{0-5} = -8 \text{ м.}$$

С учетом значения x_{0-5} уравнение (6) примет вид

$$x = -8 + 3t. \quad (7)$$

График зависимости координаты точки от времени при $t_5 \leq t < t_4$ представляет собой прямую, координаты концов которой равны: $x_{0-5} = -8$ м при $t_5 = -3$ с и $x_{0-4} = -2$ м при $t_4 = -1$ с.

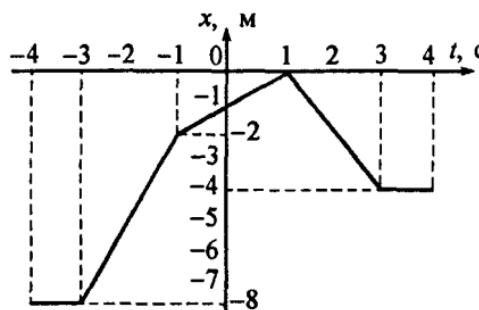


Рис. 1.24

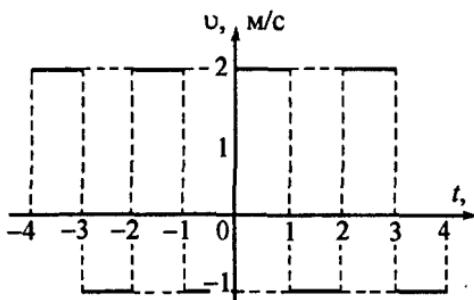


Рис. 1.25

На участке, соответствующем интервалу времени от $t_6 = -4$ с до $t_5 = -3$ с, скорость точки $v_6 = 0$. Следовательно, при $t_6 \leq t < t_5$ координата точки оставалась неизменной и равной $x_{0-5} = -8$ м.

При построении графика зависимости $x(t)$ следует учесть, что координата точки в конце одного участка является начальной координатой для следующего участка, т.е. график $x(t)$ непрерывен и будет представлять собой ломаную.

График зависимости $x(t)$, построенный на основании законов движения материальной точки на соответствующих участках, представлен на рис. 1.24.

• Ответ: рис. 1.24.

1.4. Материальная точка движется вдоль оси OX . График зависимости скорости точки от времени имеет вид, представленный на рис. 1.25. Построить график зависимости координаты от времени, если в момент времени $t_0 = 0$ точка имела координату $x_0 = -1$ м.

1.5. Материальная точка движется вдоль оси OX так, что ее координата зависит от времени по закону

$$x = \alpha + \beta t [\text{м}],$$

где $\alpha = -1$ м, $\beta = 2$ м/с. Найти координату, скорость и ускорение точки в момент времени $t = 5$ с, а также путь, пройденный точкой за промежуток времени $0 \leq \Delta t \leq 5$ с.

• Решение. Поскольку координата точки зависит от времени по линейному закону, то движение проходит с постоянной скоростью (ускорение $\vec{a} = 0$). При этом коэффициент α равен координате точки в момент времени $t = 0$, а β – проекция вектора скорости на ось OX . Следовательно, материальная точка движется со скоростью $v_x = \beta = 2$ м/с в положительном направлении оси OX , причем векторы скорости и ускорения остаются постоянными в любой момент времени:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t) = v_x \vec{i} = \beta \vec{i} = 2 \vec{i} \text{ [м/с]}, \quad \vec{a}(t) = \vec{a}(t) = 0.$$

Зависимости скорости и ускорения точки от времени можно также найти на основании определений кинематики, не прибегая к анализу закона движения:

– проекция вектора скорости точки на ось OX в произвольный момент времени t равна производной по времени от закона изменения координаты

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \beta;$$

– проекция вектора ускорения точки на ось OX в произвольный момент времени t равна производной по времени от проекции скорости

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0.$$

Для определения координаты точки в момент времени t достаточно подставить значение $t = 5$ с в заданный закон движения:

$$x(t) = \alpha + \beta t = 9 \text{ м.}$$

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, при равномерном движении равен модулю разности координат точки в моменты времени t_2 и t_1 :

$$\Delta S = |x(t_2) - x(t_1)| = |\beta t_2 - \beta t_1| = \beta \Delta t = 10 \text{ м.}$$

• Ответ: $x(t) = \alpha + \beta t = 9$ м; $\vec{v}(t) = \beta \vec{i} = 2 \vec{i}$ [м/с]; $\vec{a}(t) = 0$; $\Delta S = \beta \Delta t = 10$ м.

1.6. Материальная точка движется вдоль оси OX так, что ее координата зависит от времени по закону

$$x = 5 - 2t \text{ [м].}$$

Определить положение точки в момент времени $t = 4$ с, а также вектор перемещения и пройденный точкой путь за $0 \leq \Delta t \leq 4$ с.

1.7. Материальная точка начинает движение в момент времени $t = 0$ и движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r} = (3 - 4t) \vec{i} \text{ [м].}$$

Найти вектор перемещения точки за третью секунду движения, а также ее векторы скорости и ускорения в конце второй секунды.

1.8. Частица начинает движение в момент времени $t = 0$ и движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r} = \alpha t \vec{i} + (\beta - \gamma t) \vec{j} \text{ [м],}$$

где $\alpha = 1$ м/с, $\beta = 2$ м, $\gamma = 3$ м/с. Найти уравнение траектории $y = f(x)$ частицы, ее положение (координаты и радиус-вектор), скорость (величину и направление относительно координатных осей) и ускорение в момент времени $t = 4$ с, а также вектор перемещения за пятую секунду движения.

• **Решение.** Из заданной зависимости радиус-вектора частицы от времени следует, что движение происходит в плоскости XOY , при этом координаты частицы меняются с течением времени по законам

$$x = \alpha t, \quad y = \beta - \gamma t.$$

Выразив время из первого уравнения

$$t = \frac{x}{\alpha}$$

и подставив во второе, найдем уравнение траектории частицы в явном виде:

$$y = \beta - \frac{\gamma}{\alpha} x = 2 - 3x \text{ [м].}$$

В момент времени τ частица будет находиться в точке, координаты которой

$$x(\tau) = \alpha \tau = 4 \text{ м}, \quad y(\tau) = \beta - \gamma \tau = -10 \text{ м,}$$

а радиус-вектор

$$\vec{r}(\tau) = \alpha \tau \vec{i} + (\beta - \gamma \tau) \vec{j} = 4 \vec{i} - 10 \vec{j} \text{ [м].}$$

Скорость и ускорение по определению равны

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha \vec{i} - \gamma \vec{j}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

Как видим, частица движется равномерно, причем проекции вектора скорости на оси координат имеют значения $v_x = \alpha$, $v_y = -\gamma$. Следовательно, в любой момент времени

$$\vec{v} = \alpha \vec{i} - \gamma \vec{j} = 1 \vec{i} - 3 \vec{j} \text{ [м/с]; } |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \approx 3,16 \text{ м/с.}$$

Для определения направления вектора скорости относительно координатных осей можно воспользоваться любыми тригонометрическими функциями углов ϕ и ψ между \vec{v} и осями OX и OY системы координат, например:

$$\cos \phi = \frac{v_x}{|\vec{v}|}, \quad \cos \psi = \frac{v_y}{|\vec{v}|}.$$

Следовательно,

$$\cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}; \quad \phi = \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \approx 72^\circ 34';$$

$$\cos \psi = \frac{-\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}; \quad \psi = \arccos \frac{-\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \approx 161^\circ 34'.$$

Указанные углы ϕ и ψ можно также найти, воспользовавшись скалярным произведением векторов \vec{v} и \vec{i} , \vec{v} и \vec{j} соответственно:

$$\cos \phi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{|\vec{v}| |\vec{i}|} = \frac{(\alpha \vec{i} - \gamma \vec{j}) \vec{i}}{|\vec{v}|} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \quad \cos \psi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{|\vec{v}| |\vec{j}|} = \frac{(\alpha \vec{i} - \gamma \vec{j}) \vec{j}}{|\vec{v}|} = \frac{-\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}},$$

где учтено, что $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

Вектор перемещения частицы за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равен

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \alpha \Delta t \vec{i} - \gamma \Delta t \vec{j} = 1 \vec{i} - 3 \vec{j} \text{ [м],}$$

где $t_2 = 5 \text{ с}; t_1 = 4 \text{ с}; \Delta t = t_2 - t_1 = 1 \text{ с.}$

• **Ответ:** $y = 2 - 3x \text{ [м]}; x(\tau) = 4 \text{ м}, y(\tau) = -10 \text{ м}, \vec{r}(\tau) = 4 \vec{i} - 10 \vec{j} \text{ [м];}$

$$|\vec{v}(\tau)| \approx 3,16 \text{ м/с, } \phi \approx 72^\circ 34', \psi \approx 161^\circ 34'; \vec{a} = 0; \Delta \vec{r} = 1 \vec{i} - 3 \vec{j} \text{ [м].}$$

1.9. Материальная точка движется в плоскости XOY так, что ее координаты зависят от времени по законам

$$x = 4 + 2t \text{ [м]}, \quad y = 6t \text{ [м].}$$

Найти уравнение траектории $y = f(x)$ точки.

1.10. Материальная точка движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r} = (2t - 1) \vec{i} + 3t \vec{j} \text{ [см].}$$

Найти угол между радиус-вектором точки и вектором ее скорости в момент времени $t = 1$ с.

1.11. Спортсмен стреляет по движущейся со скоростью $v_1 = 10$ м/с мишени в тот момент, когда цель находится от него на кратчайшем расстоянии, равном $S = 100$ м (рис. 1.26, вид сверху). На какое расстояние сместится мишень к моменту попадания в нее пули? Скорость пули считать постоянной и равной $v_2 = 400$ м/с, а ее траекторию прямолинейной.

• **Решение.** Поскольку за время полета пули мишень сместится на некоторое расстояние Δl , то, чтобы попасть в цель, спортсмен должен выстрелить с некоторым опережением, целясь в точку M , находящуюся на расстоянии Δl от положения мишени в момент выстрела.

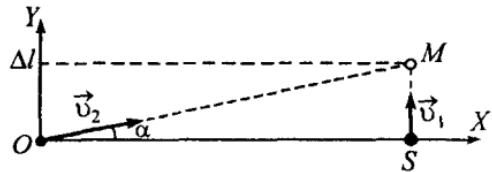


Рис. 1.26

Поместим начало отсчета O системы координат XOY в точке выстрела, а оси направим так, как показано на рис. 1.26. Уравнения движения мишени и пули в проекциях на оси OX и OY выбранной системы координат примут вид

$$\begin{cases} x_M = S, \\ y_M = v_1 t, \end{cases} \quad \begin{cases} x_p = v_2 \cos \alpha t, \\ y_p = v_2 \sin \alpha t, \end{cases}$$

где α – угол между направлением выстрела и осью OX .

В момент времени t , соответствующий попаданию пули в мишень,

$$\begin{cases} x_M(t) = x_p(t), \\ y_M(t) = y_p(t), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} S = v_2 \cos \alpha t, \\ v_1 t = v_2 \sin \alpha t. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\sin \alpha = \frac{v_1}{v_2}; \quad t = \frac{S}{v_2 \cos \alpha} = \frac{S}{v_2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{S}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}.$$

Следовательно, к моменту времени t мишень сместится на

$$\Delta l = y_M(t) = v_1 t = \frac{v_1 S}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \approx 1,67 \text{ м.}$$

• Ответ: $\Delta l = \frac{v_1 S}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \approx 1,67 \text{ м.}$

1.12. Водитель легкового автомобиля начинает обгон трейлера на скорости $v_1 = 90$ км/ч в момент, когда расстояние между машинами равно $S_1 = 20$ м, и перестраивается в прежний ряд при расстоянии между машинами $S_2 = 15$ м. Скорость трейлера $v_2 = 72$ км/ч, длина легкового автомобиля $l_1 = 4$ м, длина трейлера $l_2 = 16$ м. Определить время маневра.

1.13. По шоссе со скоростью $v_1 = 16$ м/с движется автобус. Человек находится на расстоянии $l = 50$ м от шоссе и на расстоянии $S = 400$ м от автобуса. В каком направлении со скоростью $v_2 = 4$ м/с должен идти человек, чтобы выйти на шоссе одновременно с автобусом?

1.14. Материальные точки K и M , находящиеся в плоскости XOY , в момент времени $t = 0$ одновременно начинают двигаться с постоянными скоростями $\vec{v}_K = -v_1 \vec{i}$ [м/с] и $\vec{v}_M = -v_2 \vec{j}$ [м/с] из точек с координатами $(x_0, 0)$, $(0, y_0)$ соответственно. В какой момент времени после начала движения расстояние между ними будет минимальным?

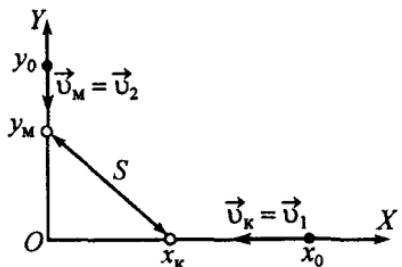


Рис. 1.27

• *Решение.* По условию задачи точки K и M движутся равномерно: точка K – со скоростью v_1 вдоль оси OX , точка M – со скоростью v_2 вдоль оси OY (рис. 1.27). Координаты точек K и M любой момент времени t равны соответственно

$$\begin{cases} x_K = x_0 - v_1 t, \\ y_K = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_M = 0, \\ y_M = y_0 - v_2 t, \end{cases}$$

а расстояние между ними

$$S = \sqrt{x_K^2 + y_M^2} = \sqrt{(x_0 - v_1 t)^2 + (y_0 - v_2 t)^2}.$$

Выражение

$$S^2 = (v_1^2 + v_2^2) t^2 - 2(x_0 v_1 + y_0 v_2) t + (x_0^2 + y_0^2) = a t^2 + b t + c$$

представляет собой уравнение параболы в осях (S^2, t) , ветви которой направлены вверх.

Так как функция $S(t)$ может иметь только положительные значения, то она и функция $S^2(t)$ принимают минимальные и максимальные значения в одни и те же моменты времени. Поэтому искомый момент времени t минимума функции $S(t)$ совпадает с моментом времени, соответствующим минимуму функции $S^2(t)$. Следовательно, координата $t_{\text{верш}}$ вершины параболы

$$t_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a} = \frac{x_0 v_1 + y_0 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

это и есть искомое время t .

Момент времени t , соответствующий минимуму функции $S(t)$, можно также найти, исследовав функцию $S(t)$ на экстремум.

Производная по времени от функции $S(t)$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{(x_0 - v_1 t) v_1 + (y_0 - v_2 t) v_2}{\sqrt{(x_0 - v_1 t)^2 + (y_0 - v_2 t)^2}}$$

равна нулю, если

$$(x_0 - v_1 t) v_1 + (y_0 - v_2 t) v_2 = 0,$$

т.е. в момент времени

$$\tau = \frac{x_0 v_1 + y_0 v_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

При этом вторая производная

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{(v_1^2 + v_2^2) [(x_0 - v_1 t)^2 + (y_0 - v_2 t)^2] - [(x_0 - v_1 t) v_1 + (y_0 - v_2 t) v_2]^2}{[(x_0 - v_1 t)^2 + (y_0 - v_2 t)^2]^{3/2}}$$

при $t = \tau$

$$\left. \frac{d^2 S}{dt^2} \right|_{t=\tau} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{[(x_0 - v_1 \tau)^2 + (y_0 - v_2 \tau)^2]^{1/2}}$$

положительна. Это указывает на то, что в момент времени τ функция $S(t)$ принимает наименьшее значение.

• Ответ: $\tau = \frac{x_0 v_1 + y_0 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$.

1.15. Две точки движутся в плоскости XOY так, что их координаты зависят от времени по законам

$$x_1 = 2t - 1 \text{ [м]}, \quad y_1 = 0 \text{ [м]}, \quad x_2 = 0 \text{ [м]}, \quad y_2 = 8 - t \text{ [м]}.$$

В какой момент времени расстояние между ними минимально? Чему оно равно?

1.16. Два самолета A и B движутся равномерно и прямолинейно по двум пересекающимся в точке O воздушным трассам (рис. 1.28). На какое наименьшее расстояние сблизятся самолеты, если в некоторый момент времени расстояния AB , AO и BO были одинаковы и равны $l = 60$ км, а скорость самолета A два раза больше скорости самолета B ?

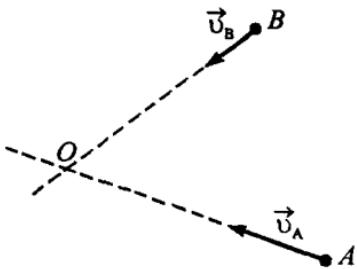


Рис. 1.28

1.17. Самолет пролетел расстояние из города A в город B со скоростью $v_1 = 800$ км/ч, а обратно – половину пути со скоростью $v_2 = 900$ км/ч, а вторую половину пути со скоростью $v_3 = 700$ км/ч. Определить среднюю путевую скорость самолета за все время полета.

• *Решение.* При движении из города A в город B самолет пролетел расстояние $\Delta S_1 = S$ (где S – расстояние между городами) за время Δt_1 . Так как по условию задачи скорость при этом была постоянной, то $\Delta S_1 = v_1 \Delta t_1$. При полете из города B в город A самолет на первую половину пути $\Delta S_2 = \frac{1}{2} S$ затратил время Δt_2 , а на вторую половину пути $\Delta S_3 = \frac{1}{2} S$ – время Δt_3 . При этом $\Delta S_2 = v_2 \Delta t_2$, $\Delta S_3 = v_3 \Delta t_3$. По определению средней путевой скорости

$$v_{cp} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}.$$

Следовательно,

$$v_{cp} = \frac{\frac{2S}{v_1} + \frac{S}{v_2} + \frac{S}{v_3}}{\frac{S}{2v_2} + \frac{S}{2v_3} + \frac{S}{v_1}} = \frac{4v_1 v_2 v_3}{2v_2 v_3 + v_1 v_3 + v_1 v_2} \approx 794 \text{ км/ч.}$$

• *Ответ:* $v_{cp} = \frac{4v_1 v_2 v_3}{2v_2 v_3 + v_1 v_3 + v_1 v_2} \approx 794 \text{ км/ч.}$

1.18. Три четверти своего пути автомобиль прошел с постоянной скоростью $v_1 = 60$ км/ч, а остальную часть пути – со скоростью $v_2 = 80$ км/ч. Определить среднюю путевую скорость автомобиля.

1.19. Мотоциклист едет из одного города в другой. Первые $\Delta t_1 = 2$ ч пути он движется с постоянной скоростью $v_1 = 60$ км/ч, а оставшиеся $\Delta S = 160$ км – со скоростью $v_2 = 80$ км/ч. Определить среднюю путевую скорость мотоциклиста между городами.

1.20. Человек прошел путь $\Delta S_1 = 6$ км со скоростью $v_1 = 3$ км/ч, двигаясь на север, затем он повернул на восток и прошел еще $\Delta S_2 = 4$ км за $\Delta t_2 = 1$ ч. После этого он двигался на юго-запад со скоростью $v_3 = 3$ км/ч еще $\Delta t_3 = 0,5$ ч. С какой средней путевой скоростью двигался человек и какова была величина вектора средней скорости?

• *Решение.* Введем систему координат XOY , начало которой поместим в точку, откуда человек начал движение, ось OX направим на восток, а ось OY – на север (рис. 1.29).

При движении на север (участок OA) человек прошел путь ΔS_1 за время

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{v_1},$$

и в точке A координаты человека приняли значения $x_1 = 0$, $y_1 = \Delta S_1$.

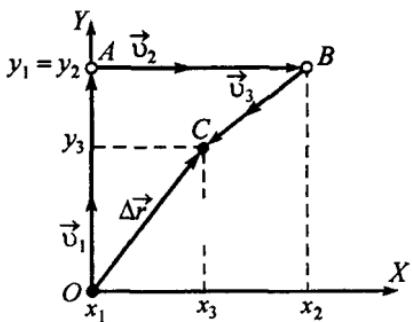


Рис. 1.29

При движении на восток (участок AB) человек прошел путь ΔS_2 за время Δt_2 и его координаты стали равны $x_2 = \Delta S_2$, $y_2 = y_1 = \Delta S_1$. При движении на юго-запад (участок BC) человек за время Δt_3 прошел путь

$$\Delta S_3 = v_3 \Delta t_3.$$

Координаты точки C

$$x_3 = x_2 - \Delta S_3 \sin 45^\circ, \quad y_3 = y_2 - \Delta S_3 \cos 45^\circ,$$

т.е.

$$x_3 = \Delta S_2 - \frac{v_3 \Delta t_3}{\sqrt{2}}, \quad y_3 = \Delta S_1 - \frac{v_3 \Delta t_3}{\sqrt{2}}$$

определяют положение человека в конце всего маршрута. При этом вектор перемещения человека за все время движения

$$\Delta \vec{r} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} = \left\{ \Delta S_2 - \frac{v_3 \Delta t_3}{\sqrt{2}} \right\} \vec{i} + \left\{ \Delta S_1 - \frac{v_3 \Delta t_3}{\sqrt{2}} \right\} \vec{j}$$

совпадает с радиус-вектором точки C .

Следовательно, средняя путевая скорость и вектор средней скорости человека за время $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$ равны соответственно

$$v_{cp} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3}{\Delta t} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + v_3 \Delta t_3}{\Delta S_1/v_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} \approx 3,3 \text{ км/ч};$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{d \vec{r}}{dt} = \frac{(\Delta S_2 - v_3 \Delta t_3 / \sqrt{2}) \vec{i} + (\Delta S_1 - v_3 \Delta t_3 / \sqrt{2}) \vec{j}}{\Delta S_1/v_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} \approx 0,83 \vec{i} + 1,41 \vec{j} [\text{км/ч}];$$

$$|\langle \vec{v} \rangle| \approx 1,64 \text{ км/ч.}$$

- Ответ: $v_{cp} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + v_3 \Delta t_3}{\Delta S_1/v_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} \approx 3,3 \text{ км/ч}; \quad |\langle \vec{v} \rangle| \approx 1,64 \text{ км/ч.}$

1.21. Туристы составили следующий маршрут: первые $\Delta S_1 = 10$ км они должны двигаться на восток, следующие $\Delta S_2 = 10$ км – на северо-восток. Намеченный маршрут они прошли за $\Delta t = 6$ ч. С какой средней путевой скоростью двигались туристы и какова была величина вектора средней скорости?

1.22. Тело совершает два последовательных одинаковых по величине перемещения со скоростями $v_1 = 10 \text{ м/с}$ под углом $\alpha_1 = 30^\circ$ и $v_2 = 30 \text{ м/с}$ под углом $\alpha_2 = 150^\circ$ к направлению оси OX . Найти среднюю путевую скорость и вектор средней скорости тела.

Равнопеременное движение

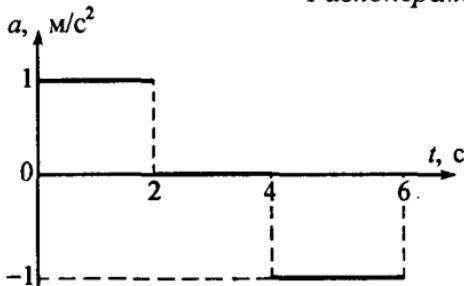


Рис. 1.30

1.23. Материальная точка движется вдоль оси OX . График зависимости ускорения точки от времени имеет вид, представленный на рис. 1.30. Построить графики зависимости скорости и координаты точки от времени, полагая, что в начальный момент точка находилась в начале координат и ее скорость была равна нулю.

• **Решение.** График зависимости ускорения материальной точки от времени, представленный на рис. 1.30, свидетельствует о том, что на участке, соответствующем интервалу времени от $t_1 = 0$ с до $t_2 = 2$ с, точка движется с постоянным положительным ускорением (равноускоренно вдоль оси OX) $a_1 = 1 \text{ м/с}^2$, на следующем участке в течение времени от $t_2 = 2$ с до $t_3 = 4$ с — с ускорением $a_2 = 0$, т.е. равномерно, а на последнем участке за время от $t_3 = 4$ с до $t_4 = 6$ с, — с постоянным отрицательным ускорением (равнозамедленно вдоль оси OX) $a_3 = -1 \text{ м/с}^2$.

Следовательно, уравнения движения и законы изменения скорости точки на выделенных участках можно записать в виде:

а) на первом участке:

$$x = x_{0-1} + v_{0-1} t + \frac{a_1 t^2}{2}, \quad v = v_{0-1} + a_1 t; \quad (1)$$

б) на втором участке:

$$x = x_{0-2} + v_{0-2} t, \quad v = v_{0-2}; \quad (2)$$

в) на третьем участке:

$$x = x_{0-3} + v_{0-3} t + \frac{a_3 t^2}{2}, \quad v = v_{0-3} + a_3 t, \quad (3)$$

где x_{0-1} , x_{0-2} , x_{0-3} , v_{0-1} , v_{0-2} , v_{0-3} — координаты и скорости точки в начальные моменты движения на соответствующих участках.

Так как в начальный момент времени $x_{0-1} = 0$ и $v_{0-1} = 0$, то график зависимости координаты точки от времени на первом участке будет иметь вид параболы

$$x = \frac{a_1 t^2}{2} = 0,5 t^2$$

вершина которой находится в начале координат, а ветви направлены вдоль оси OX вверх. График скорости на этом участке будет иметь вид прямой

$$v = a_1 t = 1 t,$$

проходящей через начало координат и образующей с осью времени угол, тангенс которого равен 1.

В конце первого участка движения (при $t = \Delta t_1 = t_2 - t_1 = 2$ с) координата точки и ее скорость примут значения

$$x_1 = 2 \text{ м}, \quad v_1 = 2 \text{ м/с}$$

соответственно.

На втором участке $x_{0-2} = x_1 = 2$ м, а $v_{0-2} = v_1 = 2$ м/с. Следовательно, уравнения (2) примут вид

$$x = 2 + 2 t, \quad v = 2 \text{ м/с},$$

т.е. графики зависимостей $x(t)$ и $v(t)$ на этом участке представляют собой прямые линии.

В конце движения на втором участке (при $t = \Delta t_2 = t_3 - t_2 = 2$ с) координата и скорость точки станут равны

$$x_2 = 6 \text{ м}, \quad v_2 = 2 \text{ м/с}$$

соответственно.

На третьем участке $x_{0-3} = x_2 = 6$ м, $v_{0-3} = v_2 = 2$ м/с. Следовательно, уравнения (3) примут вид

$$x = 6 + 2 t - 0,5 t^2, \quad v = 2 - t,$$

т.е. график зависимости $x(t)$ имеет вид параболы, ветви которой направлены вдоль оси OX вниз, а график $v(t)$ — вид прямой, тангенс угла наклона которой к оси времени равен (-1). При определении координат вершины параболы учтем, что на третьем участке движения время отсчитывалось от момента $t_3 = 4$ с. Поэтому вершина параболы будет находиться в точке с координатами $t = 6$ с, $x = 8$ м.

В конце третьего участка движения (при $t = \Delta t_3 = t_4 - t_3 = 2$ с) координата и скорость точки примут значения

$$x_3 = 8 \text{ м}, \quad v_3 = 0.$$

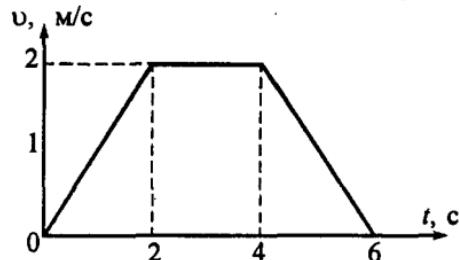


Рис. 1.31

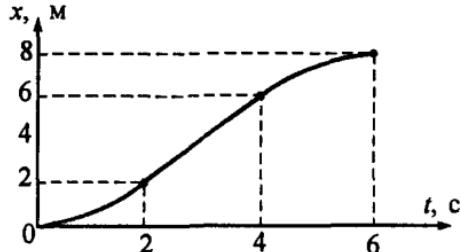


Рис. 1.32

Графики зависимостей $v(t)$ и $x(t)$ за все время движения представлены на рис. 1.31 и рис. 1.32 соответственно.

Площадь под графиком $v(t)$ (площадь трапеции) численно равна пути, пройденному точкой за время от $t_1 = 0$ с до $t_4 = 6$ с: $\Delta S = 8$ м. Путь можно также найти по графику $x(t)$: поскольку координата материальной точки в течение всего времени движения возрастила, то путь равен разности начальной и конечной координат.

• Ответ: рис. 1.31–1.32.

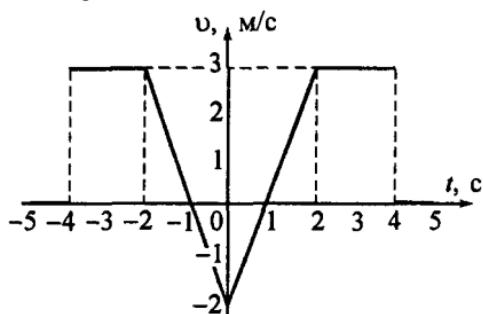


Рис. 1.33

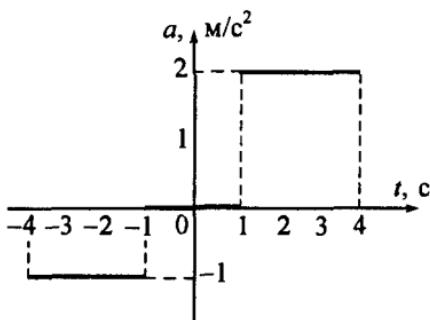


Рис. 1.34

1.24. По графику зависимости скорости материальной точки от времени (рис. 1.33) построить график изменения ее координаты со временем и определить среднюю путевую скорость за время от $t_1 = -5$ с до $t_2 = 5$ с, если в момент времени $t_0 = 1$ с координата точки была равна $x_0 = -1$ м.

1.25. По графику зависимости ускорения материальной точки от времени (рис. 1.34) построить график изменения ее координаты со временем и определить среднюю путевую скорость за время от $t_1 = -4$ с до $t_2 = 4$ с, если в момент времени $t_0 = 1$ с скорость точки была равна $v_0 = -2$ м/с, а координата $x_0 = 1$ м.

1.26. Материальная точка начинает движение в момент времени $t = 0$ и движется вдоль оси OX так, что ее координата зависит от времени по закону

$$x = 2 + 6t - 1,5t^2 [\text{м}].$$

Найти величину скорости и ускорение точки в момент времени $t = 3$ с, а также среднюю путевую скорость за первые $\Delta t = 3$ с после начала движения.

• **Решение.** Из заданной зависимости координаты точки от времени следует, что материальная точка движется вдоль оси Ox равнозамедленно с ускорением $a_x = -3 \text{ м/с}^2$ и в начальный момент времени $t = 0$ имела координату $x_0 = 2 \text{ м}$ и скорость $v_0 = 6 \text{ м/с}$. Следовательно, при движении ускорение точки будет оставаться постоянным

$$a_x(t) = a_x = -3 \text{ м/с}^2,$$

а скорость с течением времени будет меняться по закону

$$v_x(t) = v_0 + a_x t = 6 - 3t$$

и в момент времени τ станет равной

$$v_x(\tau) = 6 - 3\tau = -3 \text{ м/с.}$$

Зависимости проекций скорости и ускорения точки от времени можно также найти на основании определений кинематики:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 6 - 3t, \quad a_x(t) = \frac{dv}{dt} = -3 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы найти среднюю путевую скорость

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

за время $\Delta t = t_2 - t_1$, необходимо определить путь ΔS , пройденный точкой за это время.

Так как в начальный момент движения на данном участке пути скорость точки $v_0 = 6 \text{ м/с} > 0$, а ускорение $a_x = -3 \text{ м/с}^2 < 0$, то это означает, что в некоторый момент времени t_p точка остановится и начнет движение в противоположную сторону. В точке разворота скорость станет равной нулю, т.е.

$$v_x(t_p) = 0, \quad \text{или} \quad 6 - 3t_p = 0.$$

Отсюда находим момент времени t_p , соответствующий развороту точки: $t_p = 2 \text{ с.}$

Следовательно, за время Δt точка пройдет путь

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2,$$

где ΔS_1 – путь, пройденный от начала движения на рассматриваемом участке до момента разворота; ΔS_2 – путь, пройденный от момента t_p до момента времени $t_2 = 3 \text{ с.}$:

$$\Delta S_1 = |x(t_p) - x(t_1)| = |8 - 2| = 6 \text{ м}, \quad \Delta S_2 = |x(t_2) - x(t_p)| = |6,5 - 8| = 1,5 \text{ м},$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 7,5 \text{ м,}$$

или

$$\Delta S = |2 + 6t_p - 1,5t_p^2 - 2 - 6t_1 + 1,5t_1^2| + |2 + 6t_2 - 1,5t_2^2 - 2 - 6t_p + 1,5t_p^2| = 7,5 \text{ м.}$$

Тогда средняя путевая скорость

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 2,5 \text{ м/с.}$$

Путь ΔS можно найти также с помощью графика зависимости модуля скорости точки от времени. Путь, пройденный точкой от момента времени $t_1 = 0$ до $t_2 = 3 \text{ с.}$, численно равен площади под графиком $|v_x(t)|$. Поскольку скорость точки с течением времени менялась по линейному закону

$$v_x(t) = 6 - 3t,$$

то для построения графика зависимости $|v_x(t)|$ достаточно найти скорость точки в два произвольных момента времени, например, в моменты времени t_1 и t_2 :

$$v_x(t_1) = 6 - 3t_1 = 6 \text{ м/с,} \quad v_x(t_2) = 6 - 3t_2 = -3 \text{ м/с,}$$

причем в момент времени $t_p = 2 \text{ с}$ скорость точки равна нулю.

Как видно из рис. 1.35, для определения пути ΔS нужно найти площадь двух треугольников:

$$\Delta S = \frac{6 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2} = 7,5 \text{ м.}$$

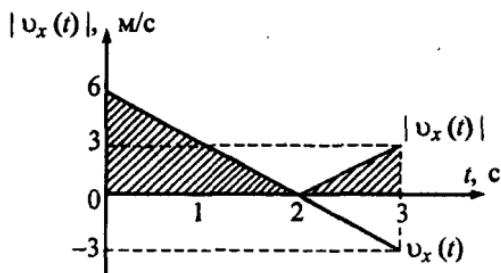


Рис. 1.35

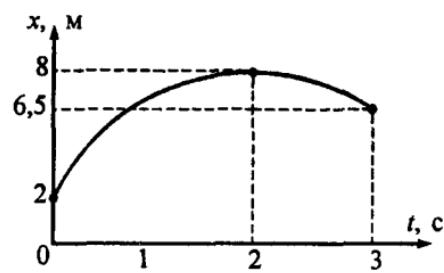


Рис. 1.36

Наконец, путь можно найти непосредственно из графика зависимости

$$x(t) = 2 + 6t - 1,5t^2.$$

Это парабола, вершина которой находится в точке

$$t_{\text{верш}} = -\frac{6}{2(-1,5)} = 3 \text{ с}, \quad x_{\text{верш}} = 2 + 6t_{\text{верш}} - 1,5t_{\text{верш}}^2 = 8 \text{ м},$$

а ветви направлены вниз. При этом парабола проходит через точки $t_1 = 0$, $x(t_1) = 2$ м и $t_2 = 3$ с, $x(t_2) = 6,5$ м. Из графика $x(t)$ (рис. 1.36) видно, что за время от t_1 до $t_{\text{верш}}$ точка пошла путь $\Delta S_1 = 6$ м, а от $t_{\text{верш}}$ до t_2 – путь $\Delta S_2 = 1,5$ м.

- Ответ: $v_x(t) = -3$ м/с; $a_x(t) = -3$ м/с²; $v_{\text{ср}} = 2,5$ м/с.

1.27. Материальная точка начинает движение в момент времени $t = 0$ и движется вдоль оси OX так, что ее координата зависит от времени по закону

$$x = 1 + 2t - t^2 \text{ [м].}$$

Определить путь, пройденный точкой за $\Delta t = 3$ с после начала движения.

1.28. Материальная точка начинает движение в момент времени $t = 0$ и движется вдоль оси OX так, что ее координата зависит от времени по закону

$$x = 2 - 6t + 2t^2 \text{ [м].}$$

Найти среднюю путевую скорость точки за первые $\Delta t_1 = 1$ с и $\Delta t_2 = 3$ с после начала движения.

1.29. Материальная точка движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r} = 2t \vec{i} + 3t^2 \vec{j} \text{ [м].}$$

Найти уравнение траектории $y = f(x)$ точки, а также определить значения нормального, тангенциального, полного ускорения точки и радиус кривизны траектории в момент времени $t = 1$ с.

- Решение. Для определения уравнения траектории материальной точки в виде $y = f(x)$ запишем закон движения в координатной форме

$$x = 2t, \quad y = 3t^2.$$

Следовательно,

$$t = \frac{1}{2}x; \quad y = \frac{3}{4}x^2.$$

В произвольный момент времени t скорость и ускорение точки равны

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 6t\vec{j} \text{ [м/с]}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{j} \text{ [м/с}^2\text{]},$$

а в момент времени τ

$$\vec{v}(\tau) = 2\vec{i} + 6\tau\vec{j} = 2\vec{i} + 6\vec{j} \text{ [м/с]}, \quad \vec{a}(\tau) = \vec{a}(t) = 6\vec{j} \text{ [м/с}^2\text{]}. \quad (1)$$

Поскольку точка движется по кривой, лежащей в плоскости XOY , то вектор ускорения можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие – нормальное и тангенциальное ускорения

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

причем

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad (2)$$

а их абсолютные значения

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Так как модуль вектора скорости точки в произвольный момент времени равен

$$v = \sqrt{4 + 36t^2} = 2\sqrt{1 + 9t^2}, \quad (3)$$

то тангенциальное ускорение

$$a_\tau(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{18t}{\sqrt{1 + 9t^2}}$$

в момент времени τ примет значение

$$a_\tau(\tau) = \frac{18\tau}{\sqrt{1 + 9\tau^2}} \approx 5,7 \text{ м/с}^2. \quad (4)$$

Нормальное ускорение точки можно найти из выражения (2). В момент времени τ

$$a_n(\tau) = \sqrt{a^2(\tau) - a_\tau^2(\tau)},$$

или с учетом (1) и (4)

$$a_n(\tau) = \sqrt{\frac{36 - 324\tau^2}{1 + 9\tau^2}} \approx 1,9 \text{ м/с}^2. \quad (5)$$

Чтобы найти радиус кривизны траектории в момент времени τ , воспользуемся приведенной выше формулой для a_n с учетом выражений (3) и (5):

$$R = \frac{v^2}{a_n} \approx 21,1 \text{ м.}$$

• Ответ: $y = \frac{3}{4}x^2$ [м]; $a_n(\tau) = 1,9 \text{ м/с}^2$; $a_\tau(\tau) = 5,7 \text{ м/с}^2$; $a(\tau) = 6 \text{ м/с}^2$; $R \approx 21,1 \text{ м}$.

1.30. Материальная точка движется в плоскости XOY так, что ее координаты зависят от времени по законам

$$x = \alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2 \text{ [м]}, \quad y = \alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2 \text{ [м]},$$

где $\beta_1 = \beta_2 = 1 \text{ м/с}$, $\gamma_1 = -1 \text{ м/с}^2$, $\gamma_2 = 2 \text{ м/с}^2$. Чему равно ускорение точки? Определить угол между направлениями векторов скорости и ускорения в момент времени $t = 1 \text{ с}$.

1.31. Материальная точка движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} \text{ [см].}$$

Найти радиус кривизны траектории в момент времени $t = 2 \text{ с}$.

1.32. Автомобиль начинает движение с ускорением $a = 1 \text{ м/с}^2$. Проезжая мимо наблюдателя, он имеет скорость $v = 10,5 \text{ м/с}$. На каком расстоянии от наблюдателя он находился секунду назад?

• Решение. Выберем начало системы координат в точке O , откуда автомобиль начал свое движение, а ось OX направим вдоль движения (рис. 1.37). Поскольку начальная скорость

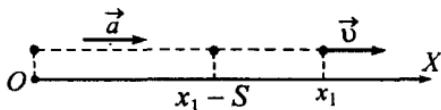


Рис. 1.37

автомобиля равна нулю, то его координата и скорость вдоль выбранной оси будут меняться с течением времени по законам

$$x = \frac{at^2}{2}, \quad v = at. \quad (1)$$

В момент времени t_1 , когда автомобиль поравнялся с наблюдателем, координата автомобиля имела некоторое значение x_1 . За секунду до этого (т.е. в момент времени $t = t_1 - \Delta t$, где $\Delta t = 1$ с) автомобиль находился на расстоянии S от наблюдателя и имел координату $x = x_1 - S$. В указанные моменты времени первое из уравнений (1) в можно записать в виде

$$x_1 = \frac{at_1^2}{2}, \quad x_1 - S = \frac{a(t_1 - \Delta t)^2}{2}.$$

Отсюда получим

$$S = \frac{at_1^2}{2} - \frac{a(t_1 - \Delta t)^2}{2} = a t_1 \Delta t - \frac{a \Delta t^2}{2}.$$

Время t_1 найдем из закона изменения скорости автомобиля, записав его для момента времени, когда автомобиль поравнялся с наблюдателем:

$$v = at_1; \quad t_1 = \frac{v}{a}.$$

Следовательно,

$$S = a \frac{v}{a} \Delta t - \frac{a \Delta t^2}{2} = v \Delta t - \frac{a \Delta t^2}{2} = 10 \text{ м.}$$

• Ответ: $S = v \Delta t - \frac{1}{2} a \Delta t^2 = 10 \text{ м.}$

1.33. Автомобиль начинает движение с постоянным ускорением и за десятую секунду проходит путь $\Delta S = 19 \text{ м}$. Определить ускорение автомобиля.

1.34. Автомобиль движется с постоянным ускорением и проходит путь $\Delta S_1 = 20 \text{ м}$ за $\Delta t_1 = 4 \text{ с}$, а следующий участок пути $\Delta S_2 = 40 \text{ м}$ за $\Delta t_2 = 5 \text{ с}$. Определить ускорение автомобиля.

1.35. Частица, вылетев из источника, проходит с постоянной скоростью расстояние $l = 2 \text{ м}$, а затем тормозится с ускорением $a = 5 \cdot 10^5 \text{ м/с}^2$. При какой начальной скорости частицы время ее движения от вылета до остановки будет наименьшим? На какое расстояние частица удалится от источника?

• Решение. Первый участок пути длиной l частица, двигаясь со скоростью v_0 , прошла за время

$$\Delta t_1 = \frac{l}{v_0}.$$

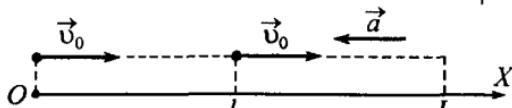


Рис. 1.38

Направив ось OX вдоль движения частицы, а начало отсчета поместив у источника (рис. 1.38), запишем закон движения частицы и зависимость ее скорости от времени в виде

$$x = l + v_0 t - \frac{at^2}{2}, \quad v = v_0 - at.$$

В конце участка торможения координата частицы примет значение L , а скорость станет равной нулю:

$$L = l + v_0 \Delta t_2 - \frac{a \Delta t_2^2}{2}, \quad 0 = v_0 - a \Delta t_2,$$

где Δt_2 – время движения частицы на втором участке.

Очевидно, что полное время движения частицы от источника до остановки

$$t_0 = \Delta t_1 + \Delta t_2,$$

или

$$t_0 = \frac{l}{v_0} + \frac{v_0}{a}.$$

Исследовав полученную зависимость $t_0(v_0)$ на экстремум, найдем скорость $v_{0\min}$ частицы у источника, при которой время ее движения до остановки будет наименьшим:

$$\frac{dt_0}{dv_0} = -\frac{l}{v_0^2} + \frac{1}{a} = 0; \quad v_0 = \sqrt{al}; \quad \left. \frac{d^2 t_0}{dv_0^2} \right|_{v_0=\sqrt{al}} = \frac{2l}{v_0^3} > 0.$$

Следовательно,

$$v_{0\min} = \sqrt{al} = 10^3 \text{ м/с.}$$

Расстояние L , на которое частица удалится от источника,

$$L = l + v_{0\min} \Delta t_2 - \frac{a \Delta t_2^2}{2} = l + \frac{v_{0\min}^2}{a} - \frac{v_{0\min}^2}{2a} = l + \frac{v_{0\min}^2}{2a} = l + \frac{l}{2} = \frac{3}{2}l = 3 \text{ м.}$$

• Ответ: $v_{0\min} = \sqrt{al} = 10^3 \text{ м/с}; L = \frac{3}{2}l = 3 \text{ м.}$

1.36. Подъезжая к светофору со скоростью $v = 10 \text{ м/с}$, автомобиль тормозит в течение времени $\Delta t = 4 \text{ с}$ и останавливается рядом со светофором. На каком расстоянии от светофора автомобиль находился в начале торможения?

1.37. После удара клюшкой шайба скользит по льду с постоянным ускорением. В конце пятой секунды после начала движения ее скорость была равна $v_0 = 1,5 \text{ м/с}$, а в конце шестой секунды шайба остановилась. С каким ускорением двигалась шайба, какой путь прошла и какова была ее скорость на расстоянии $l = 20 \text{ м}$ от начала движения?

1.38. Троллейбус отошел от остановки с ускорением $a = 0,2 \text{ м/с}^2$. Достигнув скорости $v = 36 \text{ км/ч}$, он в течение $\Delta t = 2 \text{ мин}$ двигался равномерно, затем, затормозив, равнозамедленно прошел до следующей остановки путь $\Delta S = 100 \text{ м}$. Определить среднюю путевую скорость троллейбуса на участке между остановками.

• Решение. Путь, пройденный троллейбусом от одной остановки до другой, разобъем условно на три участка. На первом участке пути длиной ΔS_1 троллейбус двигался без начальной скорости с ускорением $a_1 = a$ в течение времени Δt_1 . На втором участке пути длиной ΔS_2 троллейбус двигался равномерно со скоростью v в течение времени Δt . На третьем участке пути длиной ΔS троллейбус двигался с начальной скоростью v равнозамедленно с ускорением a_3 в течение времени Δt_3 . Если ось OX системы координат направить вдоль движения троллейбуса, а начало поместить у первой остановки (рис. 1.39), то уравнения движения троллейбуса и законы изменения его скорости с течением времени можно записать в виде:

а) на первом участке:

$$x = \frac{a t^2}{2}, \quad v = a t;$$

б) на втором участке:

$$x = x_{0-2} + v t;$$

в) на третьем участке:

$$x = x_{0-3} + v t - \frac{a_3 t^2}{2}, \quad v_3 = v - a_3 t,$$

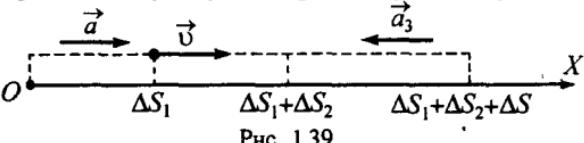


Рис. 1.39

где x_{0-2} – координата троллейбуса в начале второго участка, равная ΔS_1 ; x_{0-3} – координата троллейбуса в начале третьего участка, равная $\Delta S_1 + \Delta S_2$.

Запишем полученные уравнения в моменты времени, соответствующие окончанию движения на участках:

а) в конце первого участка:

$$\Delta S_1 = \frac{a \Delta t_1^2}{2}, \quad v = a \Delta t_1; \quad (1)$$

б) в конце второго участка:

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = \Delta S_1 + v \Delta t; \quad (2)$$

в) в конце третьего участка:

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + v \Delta t_3 - \frac{a_3 \Delta t_3^2}{2}, \quad 0 = v - a_3 \Delta t_3. \quad (3)$$

Решив систему уравнений (1) – (3), получим

$$\Delta t_1 = \frac{v}{a}; \quad \Delta S_1 = \frac{v^2}{2a}; \quad \Delta S_2 = v \Delta t; \quad a_3 = \frac{v}{\Delta t_3}; \quad \Delta t_3 = \frac{2 \Delta S}{v}.$$

Следовательно, средняя путевая скорость троллейбуса за время движения на участке между остановками

$$v_{cp} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \frac{v^2/(2a) + v \Delta t + \Delta S}{v/a + \Delta t + 2 \Delta S/v} \approx 8,16 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $v_{cp} = \frac{v^2/(2a) + v \Delta t + \Delta S}{v/a + \Delta t + 2 \Delta S/v} \approx 8,16 \text{ м/с.}$

1.39. Автомобиль первую половину пути двигался равномерно со скоростью $v_1 = 36 \text{ км/ч}$, а вторую половину – равноускоренно. Определить среднюю путевую скорость автомобиля, если в конце рассматриваемого участка его скорость равна $v_2 = 108 \text{ км/ч}$.

1.40. Поезд в течение $\Delta t_1 = 1 \text{ мин}$ движется с постоянным ускорением $a_1 = 0,5 \text{ м/с}^2$, затем в течение $\Delta t_2 = 2 \text{ мин}$ – с постоянной скоростью, затем $\Delta t_3 = 30 \text{ с}$ – равнозамедленно до полной остановки. Найти среднюю путевую скорость поезда на данном участке пути, если его начальная скорость равна нулю.

Произвольный закон движения

1.41. Материальная точка движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r} = \alpha t \vec{i} + (\beta t^2 - \gamma t^3) \vec{j} [\text{м}],$$

где $\alpha = 1 \text{ м/с}$, $\beta = 3 \text{ м/с}^2$, $\gamma = 4 \text{ м/с}^3$. Найти максимальную скорость точки?

• Решение. Из зависимостей координат точки от времени

$$x = \alpha t, \quad y = \beta t^2 - \gamma t^3$$

следует, что вдоль оси OX точка движется с постоянной скоростью $v_x = \alpha$, а вдоль оси OY – с некоторым ускорением a_y , которое меняется с течением времени. Следовательно, проекция вектора скорости

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha \vec{i} + (2\beta t - 3\gamma t^2) \vec{j} \quad (1)$$

на ось OY

$$v_y = 2\beta t - 3\gamma t^2 \quad (2)$$

и модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2\beta t - 3\gamma t^2)^2} \quad (3)$$

с течением времени будут меняться. Легко понять, что скорость будет максимальна в момент времени, соответствующий максимуму величины проекции v_y .

Исследуем зависимость (2) на экстремум:

$$\frac{dv_y}{dt} = 2\beta - 6\gamma t; \quad \beta - 3\gamma \tau = 0; \quad \tau = \frac{\beta}{3\gamma}.$$

Так как вторая производная $v_y(t)$ по времени

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -6\gamma$$

отрицательна, то функция $v_y(t)$ имеет только максимум. Поэтому момент времени τ соответствует максимуму проекции скорости v_y и максимуму величины скорости:

$$v_{\max} = \sqrt{\alpha^2 + (2\beta\tau - 3\gamma\tau^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^4}{9\gamma^2}} = 1,25 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $v_{\max} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^4}{9\gamma^2}} = 1,25 \text{ м/с.}$

1.42. Материальная точка движется вдоль прямой так, что пройденный ею путь зависит от времени по закону

$$S = a t - b t^2 + c t^3 [\text{м}],$$

где $a = 1 \text{ м/с}$, $b = 2 \text{ м/с}^2$, $c = 3 \text{ м/с}^3$. Найти скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2 \text{ с}$, а также определить расстояние, пройденное точкой, за первые $\Delta t = 2 \text{ с}$ после начала движения.

1.43. Материальная точка движется вдоль оси OX так, что ее координата зависит от времени по закону

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + \frac{1}{3} [\text{м}].$$

Найти среднюю путевую скорость точки в интервале времени от $t_1 = 1 \text{ с}$ до $t_2 = 5 \text{ с}$. Чему равна максимальная скорость точки в этом интервале времени?

1.44. Материальная точка совершает движение в плоскости XOY так, что ее координаты зависят от времени по законам

$$x = a \cos \omega t [\text{м}], \quad y = a \cos 2\omega t [\text{м}],$$

где a и ω – известные постоянные величины. Найти уравнение траектории $y = f(x)$ точки, а также зависимости от времени скорости и ускорения точки.

• Решение. Для того чтобы получить уравнение траектории материальной точки в виде $y = f(x)$, необходимо из уравнений движения исключить время и получить зависимость координат друг от друга. В задачах, подобных данной, из уравнений движения удобно исключить не время t , а функцию, содержащую время.

Выразив функцию времени

$$\cos \omega t = x/a$$

из зависимости $x(t)$ и подставив в $y(t)$

$$y = a(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = a[\cos^2 \omega t - (1 - \cos^2 \omega t)] = a \left\{ \frac{x^2}{a^2} - 1 + \frac{x^2}{a^2} \right\},$$

получим

$$y = \frac{2}{a}x^2 - a [\text{м}].$$

Проекции векторов скорости и ускорения на оси системы координат равны соответственно

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} = -a \omega \sin \omega t, \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -2a \omega \sin 2\omega t, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -a \omega^2 \cos \omega t, \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -4a \omega^2 \cos 2\omega t. \end{array} \right.$$

Следовательно, векторы скорости и ускорения точки

$$\vec{v} = -a \omega (\sin \omega t \vec{i} + 2 \sin 2\omega t \vec{j}) [\text{м/с}], \quad \vec{a} = -a \omega^2 (\cos \omega t \vec{i} + 4 \cos 2\omega t \vec{j}) [\text{м/с}^2].$$

- Ответ: $y = \frac{2}{a} x^2 - a$ [м]; $\vec{v} = -a \omega (\sin \omega t \vec{i} + 2 \sin 2\omega t \vec{j})$ [м/с];
 $\vec{a} = -a \omega^2 (\cos \omega t \vec{i} + 4 \cos 2\omega t \vec{j})$ [м/с²].

1.45. Материальная точка совершает движение в плоскости XOY так, что ее координаты зависят от времени по законам

$$x = \alpha \cos \omega t \text{ [м]}, \quad y = \beta \sin \omega t \text{ [м]},$$

где α , β и ω – известные постоянные величины. Найти зависимости от времени скорости и ускорения точки.

1.46. Материальная точка совершает движение в плоскости XOY так, что ее координаты зависят от времени по законам

$$x = a \sin \omega t \text{ [м]}, \quad y = a \cos 2\omega t \text{ [м]},$$

где a и ω – известные постоянные величины. Найти уравнение траектории $y = f(x)$ точки и зависимость величины скорости точки от времени.

Движение вблизи поверхности Земли

1.47. Тело, падающее с некоторой высоты без начальной скорости, последнее $h = 196$ м пути прошло за $\Delta t = 4$ с. Сколько времени падало тело и с какой высоты? Сопротивлением воздуха пренебречь.

- Решение. Тело, свободно движущееся вблизи поверхности Земли, имеет ускорение $\vec{a} = \vec{g}$.

Поскольку начальная скорость тела равна нулю, то тело будет падать вертикально и для описания его движения достаточно одной оси системы координат.

Поместим начало отсчета O системы координат в точке A , из которой начинает падать тело, а ось OY направим вертикально вниз вдоль вектора ускорения (рис. 1.40). Закон движения тела в проекции на ось OY примет вид

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2} = \frac{g t^2}{2}.$$

Запишем это уравнение для двух моментов времени.

В момент падения тела (точка C) время t соответствует искомому времени движения тела τ , а координата y – искомой высоте H , с которой падало тело:

$$H = \frac{g \tau^2}{2}.$$

В момент, когда тело находилось на высоте h от поверхности земли (точка B), время имело значение $(\tau - \Delta t)$, а координата y – значение $(H - h)$:

$$H - h = \frac{g(\tau - \Delta t)^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{g \tau^2}{2} - h = \frac{g \tau^2}{2} - g \tau \Delta t + \frac{g \Delta t^2}{2}, \quad \text{или} \quad 2g \tau \Delta t - g \Delta t^2 - 2h = 0.$$

Отсюда находим время движения тела

$$\tau = \frac{2h + g\Delta t^2}{2g\Delta t} = 7 \text{ с}$$

и высоту, с которой тело падало,

$$H = \frac{g\tau^2}{2} = \frac{(2h + g\Delta t^2)^2}{8g\Delta t^2} \approx 240 \text{ м.}$$

- Ответ: $\tau = \frac{2h + g\Delta t^2}{2g\Delta t} = 7 \text{ с}; H = \frac{(2h + g\Delta t^2)^2}{8g\Delta t^2} \approx 240 \text{ м.}$

1.48. Тело, падающее с некоторой высоты без начальной скорости, за последнюю секунду движения прошло $\frac{1}{4}$ часть своего пути. Определить высоту, с которой упало тело, и время падения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.49. Тело, падающее с некоторой высоты без начальной скорости, первый отрезок пути прошло за время Δt в два раза большее, чем такой же последний отрезок. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, с какой высоты упало тело.

1.50. Тело, падающее с некоторой высоты без начальной скорости, через промежуток времени, равный половине всего времени движения, находилось на высоте h от места падения. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, с какой высоты падало тело и его скорость в момент падения.

1.51. С крыши дома оторвалась маленькая сосулька, которая за время $\Delta t = 0,2$ с пролетела мимо окна высотой $h = 1,5$ м. С какой высоты относительно верхнего края окна упала сосулька? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.52. Камень падает с высоты $h = 81$ м. Разделите эту высоту на три участка, такие, чтобы изменение скорости камня на каждом из них было одинаковым. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.53. Тело, брошенное вертикально вверх, через промежуток времени, равный половине времени подъема на максимальную высоту, находилось на высоте $h = 9$ м над точкой броска. На какую максимальную высоту поднималось тело при движении? Сопротивлением воздуха пренебречь.

- Решение. Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением $\vec{d} = \vec{g}$. Если ось OY системы координат направить вертикально вверх (рис. 1.41), совместив начало отсчета O с точкой, из которой был произведен бросок, то уравнение движения тела и закон изменения проекции его скорости на ось OY можно записать в виде

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

$$v_y = v_0 - gt. \quad (2)$$

Запишем уравнение движения (1) в моменты времени t_1 и t_2 , соответствующие положению тела на высоте h и на максимальной высоте h_{\max} подъема тела относительно точки броска:

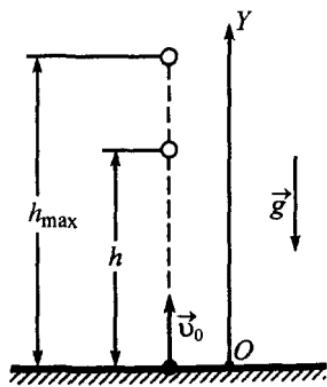


Рис. 1.41

$$h = v_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2}, \quad h_{\max} = v_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2}.$$

Время t_2 подъема тела на высоту h_{\max} найдем из выражения (2), записав его в наивысшей точке траектории:

$$0 = v_0 - g t_2; \quad t_2 = \frac{v_0}{g}. \quad (3)$$

Время t_2 можно также найти, не прибегая к закону изменения скорости (2). Поскольку время движения тела вверх равно времени падения, то полное время движения $t_0 = 2 t_2$. Записав уравнение движения (1) в момент времени t_0 , которому соответствует координата $y = 0$, получим

$$0 = v_0 t_0 - \frac{g t_0^2}{2}; \quad t_0 = \frac{2 v_0}{g}; \quad t_2 = \frac{v_0}{g}.$$

Поскольку $t_1 = \frac{1}{2} t_2$, то с учетом (3)

$$h = v_0 \frac{t_2}{2} - \frac{g t_2^2}{8} = \frac{3 v_0^2}{8g}; \quad h_{\max} = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g v_0^2}{2g^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Следовательно,

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} h = 12 \text{ м.}$$

• Ответ: $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} h = 12 \text{ м.}$

1.54. Тело, брошенное вертикально вверх, через время $\Delta t = 3$ с после начала движения имело скорость $v = 7 \text{ м/с}$. На какую максимальную высоту относительно места броска поднималось тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.55. Тело, брошенное вертикально вверх, на половине максимальной высоты подъема имело скорость $v = 10 \text{ м/с}$. На какую максимальную высоту относительно места броска поднималось тело? Чему равна начальная скорость тела? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.56. Мяч брошен вертикально вверх из точки, находящейся на высоте $h = 5 \text{ м}$. Определить время полета мяча, если он пролетел до момента падения путь $3h$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.57. Тело, брошенное вертикально вверх с высоты $h = 2 \text{ м}$ над поверхностью земли, упало на землю через $\tau = 2 \text{ с}$ после броска. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на какую максимальную высоту относительно земли поднималось тело при своем движении.

1.58. Мяч брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 20 \text{ м/с}$. Какой путь пройдет мяч за первые $\Delta t = 3 \text{ с}$ после начала движения? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.59. С самолета, летящего горизонтально со скоростью $v_0 = 720 \text{ км/ч}$ на высоте $H = 2 \text{ км}$, сброшен груз. На какой высоте скорость груза направлена под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту? Чему равен радиус кривизны траектории движения груза в этой точке? Сопротивлением воздуха пренебречь.

• **Решение.** В момент отделения от самолета груз будет иметь скорость \vec{v}_0 , направленную горизонтально, и после сброса будет двигаться с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$. Поскольку векторы \vec{v}_0 и \vec{g} не лежат на одной прямой, то движение груза будет проходить по параболе.

Введем систему координат XOY так, как показано на рис. 1.42: начало совместим с точкой отделения груза от самолета, ось OX направим вдоль вектора начальной скорости \vec{v}_0 , а ось OY — вдоль вектора ускорения \vec{g} .

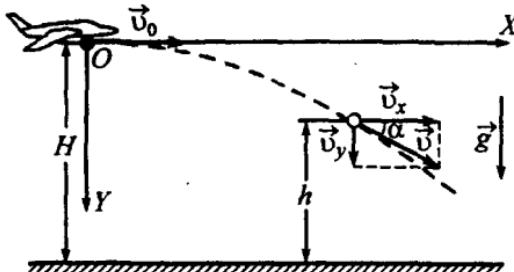


Рис. 1.42

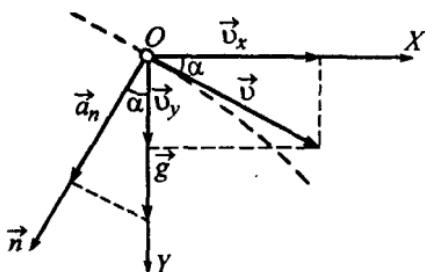


Рис. 1.43

Проекции векторов \vec{v}_0 и \vec{a} на оси выбранной системы координат равны: $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$, $a_x = 0$, $a_y = g$. Следовательно, вдоль оси OX груз будет двигаться равномерно, а вдоль оси OY – равноускоренно. При этом координаты груза и проекции его скорости будут меняться с течением времени по законам

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = \frac{g t^2}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_0, \\ v_y = g t. \end{cases}$$

При движении по параболе направление вектора скорости \vec{v} груза будет непрерывно меняться. В момент времени t , соответствующий направлению скорости груза под углом α к горизонту, проекции вектора скорости на оси системы координат

$$v_x = v_0, \quad v_y = g t$$

связаны очевидным соотношением

$$v_y = v_x \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{или} \quad g t = v_0 \operatorname{tg} \alpha,$$

а координата y груза равна $(H - h)$. Следовательно,

$$t = \frac{v_0 \operatorname{tg} \alpha}{g}; \quad H - h = \frac{g t^2}{2}, \quad \text{или} \quad h = H - \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2g} \approx 1,32 \text{ км.}$$

Радиус кривизны траектории груза найдем из выражения

$$R = \frac{v^2}{a_n},$$

где v – модуль вектора скорости в момент времени t ; a_n – проекция вектора ускорения на нормаль к траектории (рис. 1.43):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} = v_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad a_n = g \cos \alpha = g \frac{v_x}{v} = \frac{g}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{v_0^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}}{g} \approx 6,28 \text{ км.}$$

$$\bullet \text{ Ответ: } h = H - \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2g} \approx 1,32 \text{ км; } R = \frac{v_0^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}}{g} \approx 6,28 \text{ км.}$$

1.60. С холма в горизонтальном направлении брошено тело. Через $\Delta t = 0,5$ с после броска скорость тела по сравнению с начальной увеличилась в $n = 1,5$ раза. Определить начальную скорость тела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.61. Тело брошено горизонтально. Через $\Delta t = 5$ с после броска угол между направлением скорости и ускорения стал равен $\alpha = 45^\circ$. Определить скорость тела в этот момент времени. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.62. Камень брошен горизонтально со скоростью $v_0 = 5 \text{ м/с}$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения камня через $\Delta t = 1 \text{ с}$ после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.63. Из орудия, стоящего на высоте h_0 над уровнем горизонта, вылетает снаряд со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) время движения снаряда до падения на поверхность земли; 2) расстояние от места расположения пушки до точки падения снаряда, измеренное вдоль поверхности земли; 3) скорость снаряда в момент падения и угол падения; 4) максимальную высоту подъема снаряда над поверхностью земли; 5) уравнение траектории $y = f(x)$; 6) радиус кривизны траектории в высшей точке и в точке падения снаряда на землю.

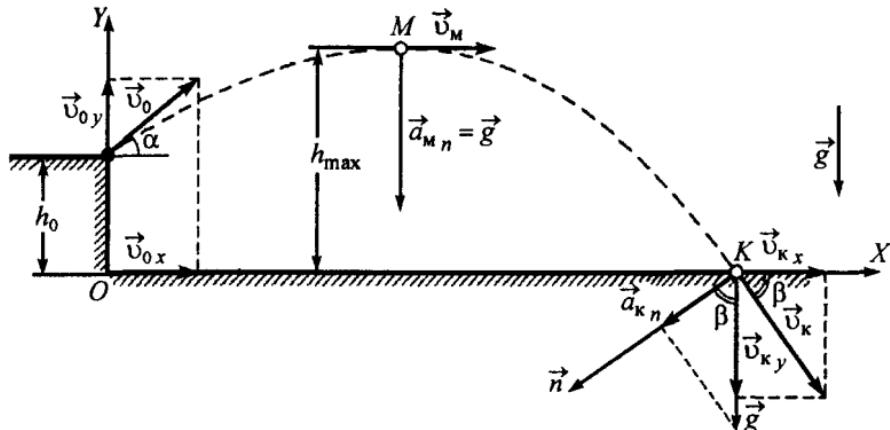


Рис. 1.44

Решение. Выберем систему отсчета из соображений удобства записи уравнений движения снаряда. Естественно направить оси координат горизонтально и вертикально таким образом, чтобы орудие находилось в начале отсчета хотя бы по одной из осей. Можно, например, выбрать систему координат XOY так, как показано на рис. 1.44.

Проекции векторов начальной скорости \vec{v}_0 и ускорения $\vec{a} = \vec{g}$ на оси системы координат равны: $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $a_x = 0$, $a_y = -g$. Следовательно, вдоль оси OX снаряд будет двигаться равномерно, а вдоль оси OY – равноускоренно.

Полное кинематическое описание рассматриваемого движения дает система уравнений

$$x = v_{0x} t = v_0 \cos \alpha t, \quad y = h_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2} = h_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (2)$$

которая в момент времени $t = \tau$, соответствующий падению снаряда на поверхность земли ($x(\tau) = S$; $y(\tau) = 0$), примет вид

$$S = v_0 \cos \alpha \tau, \quad 0 = h_0 + v_0 \sin \alpha \tau - \frac{g \tau^2}{2}, \quad (3)$$

$$v_{Kx} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{Ky} = v_0 \sin \alpha - g \tau, \quad (4)$$

где S – расстояние от места расположения пушки до точки падения снаряда, измеренное вдоль поверхности земли (расстояние от точки O до точки K); v_{Kx} , v_{Ky} – проекции вектора скорости снаряда в точке падения на оси OX и OY соответственно.

Время полета снаряда найдем из второго уравнения (3):

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2 g h_0}}{g}$$

Поскольку физический смысл ($t \geq 0$) имеет только решение со знаком «плюс» перед вторым слагаемым, то

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2 g h_0}}{g}$$

Зная время t , найдем расстояние S

$$S = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha + \sqrt{v_0^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + 2 g h_0 v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g} = \\ = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha + 8 g h_0 v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2g} \quad (5)$$

и модуль вектора скорости снаряда в момент падения

$$|\vec{v}_k| = \sqrt{v_{kx}^2 + v_{ky}^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g t)^2} = \\ = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (-\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2 g h_0})^2} = \sqrt{v_0^2 + 2 g h_0}.$$

Угол β падения снаряда на поверхность земли – это угол между вектором скорости \vec{v}_k в точке падения и положительным направлением оси OX . Из рис. 1.44 видно, что

$$\cos \beta = \frac{|v_{kx}|}{|v_k|} = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2 g h_0}}.$$

Поскольку в начальной точке траектории (в точке M) проекция вектора скорости \vec{v}_M на ось OY равна нулю, то, записав второе из уравнений (4) в момент времени t_M , соответствующий положению снаряда в точке M ,

$$0 = v_0 \sin \alpha - g t_M,$$

найдем время подъема снаряда на максимальную высоту

$$t_M = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

В момент времени t_M координата y (t_M) равна максимальной высоте подъема снаряда над поверхностью земли:

$$h_{\max} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g^2} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g}. \quad (6)$$

Подставив в выражениях (5) – (6) $h_0 = 0$, получим известные формулы для дальности полета тела и максимальной высоты подъема над уровнем горизонта, если точка броска и точка падения находятся на одном горизонтальном уровне:

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha}}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}; \quad h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Уравнение траектории снаряда в явном виде получим, исключив время из уравнений движения (1):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}; \quad y = h_0 + \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = h_0 + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Как видим, траектория снаряда представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз, а вершина имеет координаты

$$x_{\text{верш}} = -\frac{-\operatorname{tg} \alpha}{-2 \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g},$$

$$y_{\text{верш}} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2 v_0^2 \cos^2 \alpha} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Легко заметить, что максимальная высота $h_{\max} = y_{\text{верш}}$.

Радиус кривизны траектории в точке M найдем, учитывая, что $v_{M,y} = 0$, $v_{M,x} = v_x$ и

$\vec{a}_{M,n} = \vec{g} \perp \vec{v}_M$. Следовательно,

$$v_M = v_0 \cos \alpha; \quad a_{M,n} = g; \quad R_M = \frac{v_M^2}{a_{M,n}} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

Радиус кривизны траектории в точке K найдем, учитывая, что $\vec{a}_{K,n} \perp \vec{v}_K$. Тогда

$$a_{K,n} = g \cos \beta; \quad R_K = \frac{v_K^2}{a_{K,n}} = \frac{v_K^2}{g \cos \beta} = \frac{v_0^3}{v_0 g \cos \alpha} = \frac{(v_0^2 + 2g h_0)^{3/2}}{v_0 g \cos \alpha}.$$

• Ответ: $\tau = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2g h_0}}{g}$; $S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha + 8g h_0 v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2g}$;

$$v_K = \sqrt{v_0^2 + 2g h_0}; \quad \beta = \arccos \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2g h_0}}; \quad h_{\max} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g};$$

$$y(x) = h_0 + x \tan \alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}; \quad R_M = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}; \quad R_K = \frac{(v_0^2 + 2g h_0)^{3/2}}{v_0 g \cos \alpha}.$$

1.64. Из брандспойта (шланга с металлическим наконечником), расположенного около поверхности земли, бьет струя воды со скоростью $v = 10$ м/с. Брандспойт медленно вращается вокруг вертикальной оси. Определить максимальную площадь, которую можно оросить водой из этого брандспойта, если он может менять угол наклона к поверхности земли. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.65. Из шланга, лежащего на земле, бьет струя воды под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Определить массу воды, находящуюся в воздухе, если площадь поперечного сечения шланга $S = 5$ см². Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.66. Начальная скорость камня, брошенного под углом к горизонту, равна $v_0 = 10$ м/с. На какую максимальную высоту над начальным уровнем поднимался камень, если спустя $\Delta t = 0,5$ с после начала движения скорость камня была равна $v = 7$ м/с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.67. Камень бросили вверх с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, с какой высоты был брошен камень, если его скорость в момент падения на поверхность земли была в два раза больше скорости в высшей точке траектории.

1.68. Мяч бросили с некоторой высоты над поверхностью земли вверх под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. За время полета вертикальная составляющая его скорости по величине увеличилась на $\eta = 20\%$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, с какой высоты был брошен мяч.

1.69. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Найти радиус кривизны траектории в точке наивысшего подъема тела над поверхностью земли. Сопротивлением воздуха пренебречь.

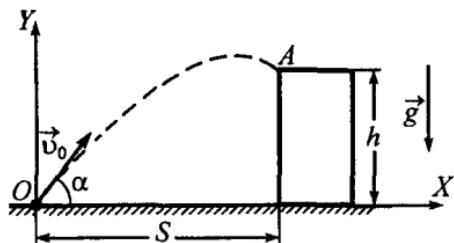


Рис. 1.45

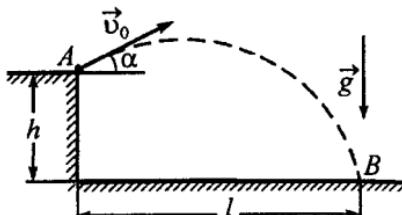


Рис. 1.46

1.70. С какой наименьшей скоростью и под каким углом к горизонту надо бросить мяч, чтобы забросить его на крышу дома высотой h с расстояния S от дома? Сопротивлением воздуха пренебречь.

• *Решение.* Выберем систему координат XOY так, как показано на рис. 1.45. Тогда проекции векторов начальной скорости мяча \vec{v}_0 и ускорения $\vec{a} = \vec{g}$ на оси системы координат будут равны $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $a_x = 0$, $a_y = -g$, а уравнения движения мяча примут вид

$$x = v_0 \cos \alpha t, \quad y = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

Поскольку мяч должен быть заброшен на крышу дома с минимальной начальной скоростью, то, очевидно, нужно рассмотреть бросок, при котором мяч попадет в точку A . Уравнения (1), записанные для этого момента времени,

$$S = v_0 \cos \alpha t, \quad h = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2},$$

позволяют получить зависимость начальной скорости v_0 мяча от угла α :

$$t = \frac{S}{v_0 \cos \alpha}; \quad h = v_0 \sin \alpha \frac{S}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g S^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

или

$$h = S \tan \alpha - \frac{g S^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}; \quad v_0^2 = \frac{g S^2}{2 \cos^2 \alpha (S \tan \alpha - h)}.$$

Так как в числителе полученного выражения стоит постоянная величина, то начальная скорость будет минимальна, если знаменатель

$$f(\alpha) = \cos^2 \alpha (S \tan \alpha - h)$$

будет максимальен. Исследовав функцию $f(\alpha)$ на экстремум,

$$\frac{df}{d\alpha} = -2 \sin \alpha \cos \alpha (S \tan \alpha - h) + \cos^2 \alpha \frac{S}{\cos^2 \alpha} = 0,$$

получим

$$-2 \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} (S \tan \alpha - h) + S = 0; \quad S \tan^2 \alpha - 2 h \tan \alpha - S = 0,$$

$$\tan \alpha = \frac{h + \sqrt{h^2 + S^2}}{S}.$$

Легко понять, что найденное значение угла α соответствует наименьшей начальной скорости мяча (поскольку при углах $\alpha \rightarrow 90^\circ$ начальная скорость мяча $v_0 \rightarrow \infty$). Следовательно, минимальная скорость, с которой надо бросить мяч, равна

$$v_{0 \min} = \sqrt{\frac{g S^2 (1 + \tan^2 \alpha)}{2 (S \tan \alpha - h)}} = \sqrt{g \left[\sqrt{S^2 + h^2} + h \right]}.$$

• *Ответ:* $\alpha = \arctg \frac{h + \sqrt{h^2 + S^2}}{S}$; $v_{0 \min} = \sqrt{g \left[\sqrt{S^2 + h^2} + h \right]}$.

1.71. Из точки A , находящейся на вершине крутого обрыва высотой $h = 10$ м, бросают камень, стараясь попасть им в точку B , которая нахо-

дится на расстоянии $l = 10$ м от обрыва (рис. 1.46). С какой наименьшей скоростью нужно бросить камень? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.72. Из шланга бьет тонкая струя воды под углом α к горизонту. Под каким углом к горизонту в той же точке требуется установить второй шланг, чтобы при минимальном напоре воды в шланге бьющая из него струя пересекла струю из первого шланга в верхней точке ее траектории? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.73. Снаряд вылетает со скоростью v_0 из пушки, стоящей у основания горы, составляющей угол β с горизонтом, под углом α к поверхности горы. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить дальность S полета снаряда вдоль склона и максимальную высоту h_{\max} подъема над склоном.

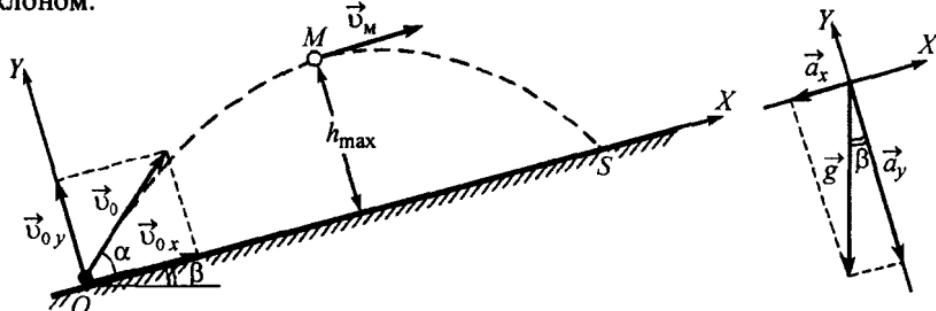


Рис. 1.47

• Решение. Выберем систему координат XOY так, как показано на рис. 1.47. Проекции векторов начальной скорости снаряда \vec{v}_0 и ускорения $\vec{a} = \vec{g}$ на оси системы координат будут равны

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha, \quad a_x = -g \sin \beta, \quad a_y = -g \cos \beta,$$

а уравнения движения снаряда и зависимости от времени проекций вектора скорости примут вид

$$x = v_0 \cos \alpha t - \frac{g \sin \beta t^2}{2}, \quad y = v_0 \sin \alpha t - \frac{g \cos \beta t^2}{2},$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha - g \sin \beta t, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - g \cos \beta t.$$

В момент падения снаряда на поверхность склона: $t = \tau$, $y(\tau) = 0$, $x(\tau) = S$:

$$S = v_0 \cos \alpha \tau - \frac{g \sin \beta \tau^2}{2}; \quad 0 = v_0 \sin \alpha \tau - \frac{g \cos \beta \tau^2}{2}.$$

Следовательно, время движения снаряда

$$\tau = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta},$$

а дальность полета снаряда вдоль склона

$$S = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta} v_0 \cos \alpha - \frac{g \sin \beta}{2} \frac{4 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 \cos^2 \beta} = \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{g \cos \beta} (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta). \quad (1)$$

Чтобы найти максимальную высоту подъема снаряда над склоном

$$h_{\max} = y(t_M) = v_0 \sin \alpha t_M - \frac{g \cos \beta t_M^2}{2},$$

надо знать время t_M , когда снаряд достигнет точки M . Поскольку в точке M проекция вектора скорости \vec{v}_M на ось OY равна нулю

$$0 = v_0 \sin \alpha - g \cos \beta t_m,$$

то

$$t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta};$$

$$h_{\max} = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta} - \frac{g \cos \beta v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g^2 \cos^2 \beta} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g \cos \beta}. \quad (2)$$

Максимальную высоту подъема h_{\max} можно также найти, если заметить, что уравнение движения вдоль оси OY – это уравнение параболы $y = at^2 + bt + c$, координата вершины которой

$$t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta}.$$

Заметим, что при $\beta = 0$ из выражений (1) – (2) получаются известные решения задачи №1.63 при $h_0 = 0$.

- Ответ: $S = \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{g \cos \beta} (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$; $h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g \cos \beta}$.

1.74. Маленький шарик роняют с высоты $h = 50$ см на наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом. Найти расстояние между точками первого и второго ударов шарика о плоскость. Сударения считать абсолютно упругими. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.75. Снаряд вылетает со скоростью $v_0 = 100$ м/с из пушки, стоящей у основания горы, составляющей угол $\beta = 20^\circ$ с горизонтом, под углом $\alpha = 30^\circ$ к поверхности горы. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить минимальный радиус кривизны траектории снаряда, а также радиус кривизны траектории в точке максимального подъема над поверхностью склона.

1.76. Снаряд вылетает из ствола пушки, стоящей у основания горы, составляющей угол α с горизонтом. Под каким углом к поверхности горы требуется произвести выстрел, чтобы дальность полета снаряда, измеренная вдоль склона, была максимальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Абсолютное, относительное, переносное движение

1.77. Два камня одновременно брошены из одной точки с равными скоростями $v_0 = 10$ м/с под углами $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 60^\circ$ к горизонту, причем движение происходит во взаимно перпендикулярных плоскостях. Чему равна величина скорости второго камня относительно первого в любой момент движения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

• Решение. Поскольку относительные скорости двух тел равны по величине, то для решения задачи достаточно найти скорость первого камня относительно второго или второго камня относительно первого.

Как известно, в векторной форме относительная скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$ двух тел равна разности их абсолютных скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 :

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Поэтому если скорости камней во время движения представить в виде

$$\vec{v}_1 = v_{1x} \vec{i} + v_{1y} \vec{j} + v_{1z} \vec{k}, \quad \vec{v}_2 = v_{2x} \vec{i} + v_{2y} \vec{j} + v_{2z} \vec{k},$$

где

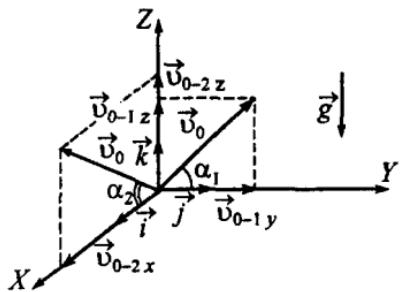


Рис. 1.48

$$\begin{aligned}v_{1x} &= 0, \\v_{2x} &= v_0 \cos \alpha_2, \\v_{1y} &= v_0 \cos \alpha_1, \\v_{2y} &= 0, \\v_{1z} &= v_0 \sin \alpha_1 - g t, \\v_{2z} &= v_0 \sin \alpha_2 - g t\end{aligned}$$

проекции векторов скорости первого и второго камня на соответствующие оси декартовой системы координат XYZ (рис. 1.48), $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты этих осей, то

$$\vec{v}_{\text{отн}} = -v_0 \cos \alpha_2 \vec{i} + v_0 \cos \alpha_1 \vec{j} + v_0 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \vec{k}.$$

Следовательно, величина относительной скорости камней

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{(-v_0 \cos \alpha_2)^2 + (v_0 \cos \alpha_1)^2 + v_0^2 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)^2},$$

или

$$v_{\text{отн}} = v_0 \sqrt{2(1 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2)} \approx 10,6 \text{ м/с.}$$

- Ответ: $v_{\text{отн}} = v_0 \sqrt{2(1 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2)} \approx 10,6 \text{ м/с.}$

1.78. Две точки движутся так, что их радиус-векторы меняются с течением времени по законам

$$\vec{r}_1 = 2t \vec{i} + 4t \vec{j} [\text{м}], \quad \vec{r}_2 = 3t^2 \vec{i} + 2t \vec{j} [\text{м}].$$

Определить модуль скорости первой точки относительно второй в момент времени $t = 1$ с.

1.79. Две прямые дороги пересекаются под углом $\alpha = 60^\circ$. От перекрестка удаляются по ним две машины: одна со скоростью $v_1 = 60$ км/ч, другая со скоростью $v_2 = 80$ км/ч. Определить величину скорости, с которой одна машина удаляется от другой. Перекресток машины прошли одновременно.

1.80. Человек находится на расстоянии $S = 300$ м от прямой дороги, по которой движется автомобиль с постоянной скоростью $v_1 = 40$ км/ч. В момент времени, когда автомобиль находился на кратчайшем расстоянии от человека, последний начинает бежать со скоростью $v_2 = 10$ км/ч. На какое минимальное расстояние сможет человек подбежать к автомобилю?

1.81. Турист плавает на моторной лодке против течения реки. Проплывая мимо одного из причалов, он теряет спасательный круг. Через четверть часа он обнаруживает пропажу, поворачивает назад и догоняет круг на расстоянии $S = 2$ км от причала, вблизи которого он его потерял. Какова средняя скорость течения реки, если мощность двигателя лодки не изменилась?

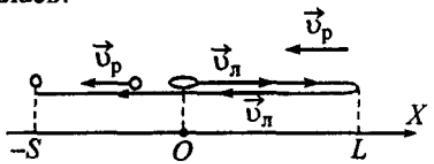


Рис. 1.49

• Решение. Введем систему координат, ось OY которой направим против течения реки, а начало отсчета поместим в точку, в которой турист потерял спасательный круг (рис. 1.49).

Скорость моторной лодки относительно выбранной системы отсчета может быть пред-

ставлена в виде векторной суммы скорости лодки в стоячей воде \vec{v}_L и скорости течения реки \vec{v}_p :

$$\vec{v} = \vec{v}_L + \vec{v}_p. \quad (1)$$

После того как турист потерял спасательный круг, он продолжал плыть против течения реки со скоростью

$$v_1 = v_L - v_p,$$

а после того как обнаружил пропажу, стал плыть по течению реки со скоростью

$$v_2 = -(v_L + v_p).$$

Очевидно, что

$$L = v_1 \Delta t_1 = (v_L - v_p) \Delta t_1, \quad S + L = |v_2| \Delta t_2 = (v_L + v_p) \Delta t_2, \quad (2)$$

где L – расстояние, которое турист проплыл до разворота; $\Delta t_1, \Delta t_2$ – время движения лодки до и после разворота соответственно, причем $\Delta t_1 = 0,25$ ч.

За время $\Delta t_3 = \Delta t_1 + \Delta t_2$ спасательный круг проплыл расстояние S со скоростью v_p :

$$S = v_p \Delta t_3, \quad S = v_p (\Delta t_1 + \Delta t_2). \quad (3)$$

Выразив время Δt_2 из (3) и подставив в (2), получим

$$\Delta t_2 = \frac{S}{v_p} - \Delta t_1; \quad S + (v_L - v_p) \Delta t_1 = (v_L + v_p) \left\{ \frac{S}{v_p} - \Delta t_1 \right\}.$$

Отсюда находим

$$v_p = \frac{S}{2 \Delta t_1} = 4 \text{ км/ч.}$$

Решение задачи может быть гораздо короче, если использовать движущуюся систему отсчета, связав ее со спасательным кругом. Абсолютная скорость лодки \vec{v} (скорость относительно системы отсчета, связанной с точкой, в которой турист потерял спасательный круг) равна сумме относительной $\vec{v}_{\text{отн}}$ и переносной $\vec{v}_{\text{пер}}$ скорости

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}, \quad (4)$$

причем $\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_p$.

Из (4) с учетом выражения (1) получим

$$\vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_p = \vec{v}_L + \vec{v}_p; \quad \vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_L.$$

Следовательно, относительно такой системы отсчета до и после разворота лодка двигалась с одинаковой скоростью, равной v_L . Поскольку до разворота лодка плыла в течение времени Δt_1 , то и обратно она затратит столько же времени. За это время тело отсчета (т.е. спасательный круг) пройдет путь S со скоростью v_p :

$$S = v_p 2 \Delta t_1; \quad v_p = \frac{S}{2 \Delta t_1}.$$

• Ответ: $v_p = \frac{S}{2 \Delta t_1} = 4 \text{ км/ч.}$

1.82. Когда мимо пристани проплывает плот, от пристани в деревню, расположенную на расстоянии $S_1 = 15$ км вниз по течению реки, отправляется моторная лодка. Она доходит до деревни за $\Delta t_1 = 45$ мин и, сразу повернув обратно, встречает плот на расстоянии $S_2 = 9$ км от деревни. Какова средняя скорость течения реки?

1.83. Катер идет по течению реки из пункта A в пункт B время $\Delta t_1 = 3$ ч, обратно – $\Delta t_2 = 6$ ч. Сколько времени потребуется катеру, чтобы пройти расстояние между пунктами A и B при выключенном моторе?

1.84. Мальчик, который может плавать со скоростью в два раза меньшей скорости течения реки, хочет переплыть реку так, чтобы его как можно меньше снесло вниз по течению. Под каким углом к берегу он должен плыть? На какое расстояние его снесет, если ширина реки $S = 50$ м?

- **Решение.** Поскольку скорость мальчика \vec{v}_M относительно воды меньше скорости течения реки v_p , то переплыть реку так, чтобы течение его не снесло, мальчик не сможет. Очевидно, что мальчик должен плыть против течения реки под некоторым углом α к береговой линии.

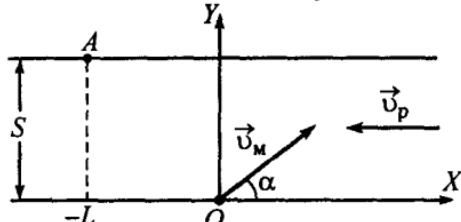


Рис. 1.50

Введем систему координат XOY , начало которой поместим в точку на берегу, из которой мальчик начал движение, а оси направим так, как показано на рис. 1.50. Скорость мальчика относительно выбранной системы отсчета равна

$$\vec{v}_{abc} = \vec{v}_M + \vec{v}_p.$$

Исключая время из уравнений движения мальчика

$$x = v_{abc} x t = (v_M \cos \alpha - v_p) t, \quad y = v_{abc} y t = v_M \sin \alpha t,$$

записанных в точке A , которой он достиг на противоположном берегу реки,

$$-L = (v_M \cos \alpha - v_p) t, \quad S = v_M \sin \alpha t$$

(где L – расстояние, на которое течение снесло мальчика; t – время, через которое мальчик достиг противоположного берега), получим

$$t = \frac{S}{v_M \sin \alpha}; \quad L = \frac{S(v_p - v_M \cos \alpha)}{v_M \sin \alpha}.$$

Исследуем зависимость $L(\alpha)$ на экстремум:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{S}{v_M} \frac{v_M \sin^2 \alpha - (v_p - v_M \cos \alpha) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0.$$

Поскольку $\sin \alpha \neq 0$, то

$$v_M \sin^2 \alpha - (v_p - v_M \cos \alpha) \cos \alpha = 0.$$

Следовательно,

$$v_M - v_p \cos \alpha = 0; \quad \cos \alpha = \frac{v_M}{v_p} = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 60^\circ.$$

Очевидно, что расстояние, на которое течение снесло мальчика, при $\alpha = 60^\circ$ минимально:

$$L_{min} = \sqrt{3} S \approx 86,6 \text{ м.}$$

- **Ответ:** $\alpha = 60^\circ$; $L_{min} = \sqrt{3} S \approx 86,6 \text{ м.}$

1.85. Моторная лодка движется перпендикулярно течению реки шириной $L = 54$ м. Течение снесло лодку на расстояние $S = 15$ м. Скорость лодки относительно воды $v_L = 5$ км/ч. Определить скорость течения реки.

1.86. Моторная лодка движется относительно воды со скоростью в два раза большей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

1.87. Самолет совершает прямой и обратный рейсы между двумя населенными пунктами. При каком направлении ветра относительно трассы время полета будет максимальным? минимальным?

Кинематика движения по окружности

1.88. В момент времени $t = 0$ материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом $R = 500$ м так, что угол поворота изменяется с течением времени по закону

$$\varphi = c t + b t^2 \text{ [рад]},$$

где $c = 0,2 \text{ рад/с}$, $b = 0,1 \text{ рад/с}^2$. Найти величину угловой скорости, угловое ускорение, линейную скорость и ускорение точки в момент времени, когда она изменяет направление вектора скорости на противоположное.

- Решение. Закон движения материальной точки задан в виде зависимости угла поворота φ от времени. Используя определения угловой скорости и углового ускорения, получим

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = c + 2b t, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2b. \quad (1)$$

Линейная скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения связаны с угловыми характеристиками движения соотношениями

$$v = \omega R; \quad a_t = \varepsilon R; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R; \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (2)$$

При движении по окружности направление вектора линейной скорости \vec{v} точки непрерывно меняется. Если угол поворота точки изменится на π радиан, то направление вектора \vec{v} изменится на противоположное. Запишем закон движения точки в момент времени t , которому соответствует $\varphi(t) = \pi$:

$$\pi = c t + b t^2.$$

Отсюда находим

$$t^2 + \frac{c}{b} t - \frac{\pi}{b} = 0; \quad t = 6,7 \text{ с.}$$

Подставив числовые значения в выражения (1) – (2), найдем искомые величины в момент времени t :

$$\omega(t) = c + 2b t = 1,54 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon = 2b = 0,2 \text{ рад/с}^2, \quad v = 770 \text{ м/с}, \quad a = 1190 \text{ м/с}^2.$$

- Ответ: $\omega(t) = c + 2b t = 1,54 \text{ рад/с}; \varepsilon = 2b = 0,2 \text{ рад/с}^2; v = 770 \text{ м/с}; a = 1190 \text{ м/с}^2$.

1.89. Угол поворота колеса радиусом $R = 10 \text{ см}$ изменяется с течением времени по закону

$$\varphi = 4 + 2t - t^2 \text{ [рад].}$$

Определить зависимости от времени угловой скорости и углового ускорения колеса, а также линейной скоростей точек на его ободе.

1.90. В момент времени $t = 0$ материальная точка начинает двигаться по окружности так, что угол поворота изменяется с течением времени по закону

$$\varphi = 2\pi(6t - 3t^3) \text{ [рад].}$$

Сколько полных оборотов сделает точка до момента изменения направления вращения?

1.91. Две материальные точки начинают одновременно двигаться по окружности радиусом $R = 2 \text{ м}$ так, что углы поворота изменяются с течением времени по законам

$$\varphi_1 = 2 + 2t \text{ [рад]}, \quad \varphi_2 = -3 - 4t \text{ [рад].}$$

Определить величину скорости одной точки относительно другой в момент их встречи.

1.92. Найти радиус вращающегося диска, если линейная скорость точки, лежащей на ободе, в $n = 2,5$ раза больше линейной скорости точки, лежащей на расстоянии $d = 5 \text{ см}$ ближе к оси диска. Во сколько раз отличаются ускорения этих точек?

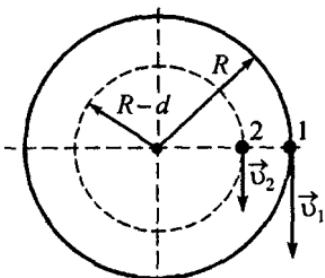


Рис. 1.51

Решение. При вращении диска все его точки движутся с одинаковыми угловыми скоростями. Рассмотрим точки 1 и 2, расположенные на расстояниях R и $R - d$ от оси диска соответственно (рис. 1.51).

Поскольку угловые скорости ω_1 и ω_2 точек одинаковы и связаны с их линейными скоростями соотношениями

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R}, \quad \omega_2 = \frac{v_2}{R-d},$$

то

$$\frac{v_1}{R} = \frac{v_2}{R-d}; \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{R}{R-d}.$$

Отсюда находим

$$R = d \frac{v_1/v_2}{v_1/v_2 - 1} = d \frac{n}{n-1} \approx 8,33 \text{ см.}$$

Ускорение точки 1, расположенной на ободе диска, может быть представлено через нормальное и тангенциальное ускорения

$$a_1 = \sqrt{a_{1n}^2 + a_{1\tau}^2}.$$

Полагая, что диск вращается равномерно, получаем

$$a_{1\tau} = 0; \quad a_{1n} = \frac{v_1^2}{R}; \quad a_1 = a_{1n} = \frac{v_1^2}{R}.$$

Аналогично для точки 2:

$$a_2 = a_{2n} = \frac{v_2^2}{R-d}.$$

Следовательно,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{v_1^2}{R}}{\frac{v_2^2}{R-d}} = \frac{v_1^2}{v_2^2} \cdot \frac{R-d}{R} = \frac{v_1}{v_2} \cdot n = 2,5.$$

- Ответ: $R = d \frac{n}{n-1} \approx 8,33 \text{ м}; \frac{a_1}{a_2} = n = 2,5.$

1.93. Линейная скорость точек на ободе вращающегося колеса равна $v_1 = 3 \text{ м/с}$. Точки, расположенные на $d = 10 \text{ см}$ ближе к оси, имеют линейную скорость $v_2 = 2 \text{ м/с}$. Сколько оборотов в секунду делает колесо?

1.94. Большой шкив ременной передачи имеет радиус $R_1 = 32 \text{ см}$ и вращается с частотой $n_1 = 120 \text{ об/мин}$. Радиус малого шкива $R_2 = 24 \text{ см}$. Найти угловую скорость малого шкива, число его оборотов в минуту и линейную скорость точек ремня.

1.95. Диск равномерно вращается вокруг своей оси так, что точки, расположенные на расстояниях $R = 30 \text{ см}$ от оси, за время $t = 20 \text{ с}$ проходят путь $\Delta S = 4 \text{ м}$. Сколько оборотов за это время сделал диск? Чему равен период обращения диска?

- **Решение.** При равномерном вращении диска угол поворота произвольной точки изменяется с течением времени по закону

$$\phi = \omega t,$$

где ω – угловая скорость диска.

За время t все точки диска повернутся на угол

$$\Delta\phi = \omega t,$$

а точка, расположенная на расстоянии R от оси диска, пройдет путь

$$\Delta S = R \Delta\phi, \quad \text{или} \quad \Delta S = R \omega t.$$

Следовательно, угловая скорость диска

$$\omega = \frac{\Delta S}{R \tau}.$$

Поскольку период обращения диска при равномерном вращении $T = 2\pi/\omega$, то

$$T = \frac{2\pi R \tau}{\Delta S} \approx 9,4 \text{ с.}$$

Число оборотов диска за время τ можно найти как отношение пути, пройденного рассматриваемой точкой за это время, к пути, соответствующему одному обороту точки (длине окружности),

$$N = \frac{\Delta S}{2\pi R},$$

или как отношение времени движения точки ко времени одного оборота (периоду)

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{\Delta S}{2\pi R} \approx 2,1.$$

- Ответ: $N = \frac{\Delta S}{2\pi R} \approx 2,1$; $T = \frac{2\pi R \tau}{\Delta S} \approx 9,4 \text{ с.}$

1.96. Материальная точка движется равномерно с частотой $v = 0,2 \text{ c}^{-1}$ по окружности радиусом $R = 50 \text{ см}$. Найти путь, пройденный точкой за $\Delta t = 20 \text{ с.}$

1.97. Материальная точка, движущаяся равномерно по окружности, совершает один оборот за $T = 2 \text{ с.}$ Найти радиус окружности, если за $\Delta t = 5 \text{ мин}$ точка прошла путь $\Delta S = 100 \text{ м.}$

1.98. Поезд въезжает на закругленный участок пути с начальной скоростью $v_0 = 54 \text{ км/ч}$ и, двигаясь с постоянным тангенциальным ускорением, проходит путь $\Delta S = 600 \text{ м}$ за время $\Delta t = 30 \text{ с.}$ Радиус закругления $R = 1 \text{ км.}$ Определить скорость и полное ускорение поезда в конце этого пути.

- Решение. Рассмотрим произвольную точку в начале поезда, полагая, что все остальные точки будут двигаться по таким же законам.

При движении с постоянным тангенциальным ускорением угол поворота и угловая скорость точки изменяются с течением времени по законам

$$\phi = \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 + \epsilon t, \quad (1)$$

где ω_0 – начальная угловая скорость точки; ϵ – ее угловое ускорение.

В момент времени $t = \Delta t$

$$\Delta\phi = \omega_0 \Delta t + \frac{\epsilon \Delta t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 + \epsilon \Delta t. \quad (2)$$

Используя связь между линейными и угловыми характеристиками движения

$$\Delta S = R \Delta\phi, \quad v = R \omega, \quad a_\tau = R \epsilon,$$

уравнения (2) запишем в виде

$$\Delta S = v_0 \Delta t + \frac{a_\tau \Delta t^2}{2}, \quad v = v_0 + a_\tau \Delta t.$$

Отсюда находим

$$a_\tau = \frac{2(\Delta S - v_0 \Delta t)}{\Delta t^2}; \quad v = v_0 + \frac{2(\Delta S - v_0 \Delta t)}{\Delta t} = \frac{2 \Delta S - v_0 \Delta t}{\Delta t} = 25 \text{ м/с.}$$

При плоском движении полное ускорение точки может быть представлено через нормальное и тангенциальное ускорения

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\Delta S - v_0 \Delta t)^2}{R \Delta t^2}.$$

Следовательно,

$$a = \frac{1}{\Delta t^2} \sqrt{\frac{(2\Delta S - v_0 \Delta t)^4}{R^2} + 4(\Delta S - v_0 \Delta t)^2} \approx 0,7 \text{ м/с}^2.$$

• Ответ: $v = \frac{2\Delta S - v_0 \Delta t}{\Delta t} = 25 \text{ м/с}; a = \frac{1}{\Delta t^2} \sqrt{\frac{(2\Delta S - v_0 \Delta t)^4}{R^2} + 4(\Delta S - v_0 \Delta t)^2} \approx 0,7 \text{ м/с}^2.$

1.99. Материальная точка движется по окружности радиусом $R = 20 \text{ см}$ с постоянным тангенциальным ускорением a_t . Найти величину этого ускорения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки достигла величины $v = 79,2 \text{ см/с}$.

1.100. Диск начинает движение без начальной скорости и вращается равноускоренно. Каким будет угол между векторами скорости и ускорения произвольной точки диска, когда он сделает один оборот?

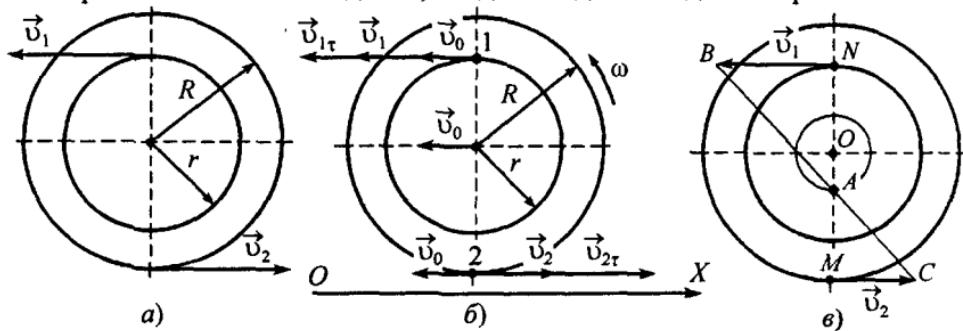


Рис. 1.52

1.101. Две нити, намотанные на катушку, тянут со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 так, как показано на рис. 1.52, а. С какой скоростью движется центр катушки? С какой угловой скоростью вращается катушка? Проскальзывания нет, радиусы катушки R и r заданы.

• Решение. Движение каждой точки катушки будем рассматривать как сумму поступательного движения вместе с осью катушки со скоростью \vec{v}_0 (переносное движение) и вращательного движения вокруг этой оси с угловой скоростью ω (относительное движение).

Рассмотрим движение двух точек 1 и 2 катушки (рис. 1.52, б). Поскольку нить по катушке не проскальзывает, то абсолютные скорости точек 1 и 2 равны скоростям \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , с которыми движутся нити. Пусть $v_1 > v_2$. Очевидно, что в этом случае скорость поступательного движения оси катушки \vec{v}_0 будет направлена влево и катушка будет вращаться против часовой стрелки.

Скорости $\vec{v}_{1\tau}$ и $\vec{v}_{2\tau}$, обусловленные вращательным движением катушки, равны

$$v_{1\tau} = \omega r, \quad v_{2\tau} = \omega R \quad (1)$$

и направлены так, как показано на рис. 1.52, б.

Кроме скоростей $\vec{v}_{1\tau}$ и $\vec{v}_{2\tau}$ каждая из выбранных точек будет иметь скорость \vec{v}_0 поступательного движения оси катушки. Следовательно,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{v}_{1\tau}, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_{2\tau}.$$

Записав эти уравнения в проекции на ось Ox с учетом (1)

$$-v_1 = -v_0 - \omega r, \quad v_2 = -v_0 + \omega R$$

и решив относительно v_0 и ω , получим

$$v_0 = \frac{R v_1 - r v_2}{R + r}; \quad \omega = \frac{v_1 + v_2}{R + r}.$$

Угловую скорость катушки можно найти, используя понятие мгновенного центра скоростей, который расположен в точке A (рис. 1.52, в).

Треугольники ΔABN и ΔAMC подобны, поэтому

$$\frac{BN}{MC} = \frac{NA}{MA},$$

где $BN = v_1$; $MC = v_2$; $NA = x$; $MA = R + r - x$; x – расстояние от мгновенного центра скоростей до точки N . Следовательно,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x}{R + r - x}.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{v_1(R + r)}{v_1 + v_2}.$$

Точка N относительно мгновенного центра скоростей будет участвовать только во вращательном движении по окружности радиусом x с угловой скоростью ω . Поэтому

$$v_1 = \omega x = \frac{\omega v_1(R + r)}{v_1 + v_2}. \quad (2)$$

Из (2) получим

$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{R + r}.$$

• Ответ: $v_0 = \frac{R v_1 - r v_2}{R + r}$; $\omega = \frac{v_1 + v_2}{R + r}$.

1.102. Автомобиль движется равномерно и прямолинейно по сухому шоссе со скоростью $v = 72$ км/ч. Определить наибольшую и наименьшую скорости точек на ободе его колес относительно поверхности дороги.

1.103. Нить, намотанную на катушку, тянут со скоростью \vec{v} (рис. 1.53). С какой скоростью движется центр катушки? Проскальзывания нет, радиусы катушки R и r заданы.

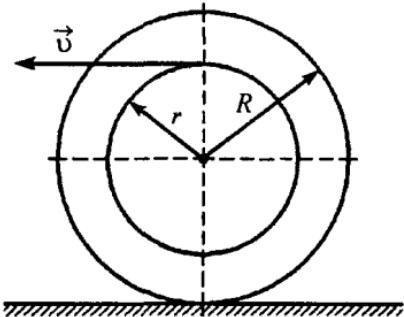


Рис. 1.53

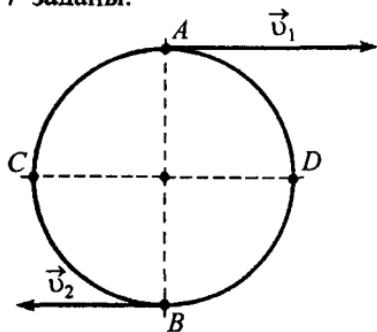


Рис. 1.54

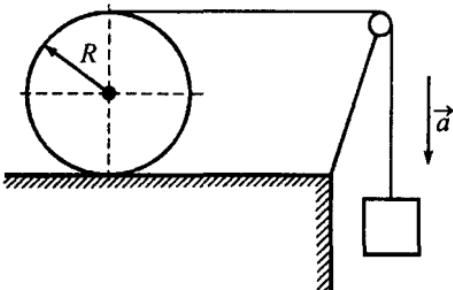


Рис. 1.55

1.104. Обруч, проскальзывая, катится по горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени скорость верхней точки A равна $v_1 = 6$ м/с, а нижней точки B – $v_2 = 2$ м/с. Определить скорость концов диаметра CD (рис. 1.54), перпендикулярного к AB , для того же момента времени.

1.105. Нить намотана на цилиндр радиусом R и перекинута через небесомый блок (рис. 1.55). Груз на конце нити начинает падать с постоянным ускорением \vec{a} . За какое время от начала движения цилиндр пройдет расстояние S ? Проскальзывания нет.

§2. Динамика материальной точки.

Законы Ньютона

Динамика – раздел механики, изучающий движение тела под действием других тел. Из опыта известно, что все тела взаимодействуют между собой (гравитационное взаимодействие, электрическое взаимодействие и др.). Меру взаимодействия тел, в результате которого тела деформируются или приобретают ускорение, называют *силой*. Сила – векторная величина, она характеризуется числовым значением, направлением действия и точкой приложения.

Движение любого тела всегда рассматривается относительно какой-либо выбранной системы отсчета. Различные системы отсчета являются равноправными и одинаково допустимыми при исследовании движения тела. Однако само движение будет выглядеть по-разному в различных системах отсчета. Естественно выбрать такую систему отсчета, чтобы движение тела выглядело наиболее просто.

Рассмотрим тело, находящееся настолько далеко от всех остальных тел, чтобы можно было пренебречь воздействием последних на него (из опыта известно, что любое воздействие уменьшается с увеличением расстояния между телами). Такое тело называется *свободно движущимся*, или, просто, *свободным*. Если теперь с таким телом связать систему отсчета, то в такой системе движение других свободных тел выглядит особенно просто: оно происходит прямолинейно и равномерно или, говоря иначе, с постоянной по величине и направлению скоростью ($\vec{v} = \text{const}$). Это утверждение составляет содержание так называемого *закона инерции*, впервые открытого Галилеем.

Система отсчета, связанная со свободным телом, называется *инерциальной системой отсчета*.

Закон инерции называют также *первым законом Ньютона*. Инерциальных систем отсчета существует бесчисленное множество, так как ясно, что любая система отсчета, движущаяся относительно выбранной инерциальной равномерно и прямолинейно, также будет инерциальной. В связи с этим возникает вопрос, можно ли, изучая различные физические явления, как-то отличить одну инерциальную систему отсчета от другой. Оказывается, что это невозможно: все физические явления и все законы природы выглядят абсолютно одинаково в различных инерциальных системах отсчета. Этот закон, один из фундаментальных законов физики, называется *принципом относительности*.

Так как все физические законы формулируются одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета, в то время как в неинерциальных

системах отсчета эти формулировки отличаются, то естественно изучать все физические явления именно в инерциальных системах отсчета. В дальнейшем так и будем поступать, за исключением особо оговоренных случаев.

Следует помнить, что фактически используемые в физических экспериментах системы отсчета являются инерциальными лишь с большей или меньшей степенью точности. Чаще всего систему отсчета связывают с Землей. Однако эта система отсчета не является строго инерциальной из-за суточного вращения Земли вокруг своей оси и кругового движения вокруг Солнца. Тем не менее в силу сравнительно медленного изменения направления скоростей при таком движении мы совершаляем небольшую ошибку, несущественную для целого ряда физических экспериментов, принимая систему отсчета, связанную с Землей, в качестве инерциальной.

Изучение законов движения естественно начать с движения наиболее простого тела, а именно, материальной точки (или частицы), так как мы можем при этом не рассматривать вращение тела, а также перемещение различных частей тела друг относительно друга.

Из первого закона Ньютона следует, что при свободном движении материальной точки, когда она не взаимодействует с другими телами, скорость ее в инерциальной системе отсчета остается неизменной ($\vec{v} = \text{const}$). Если же материальная точка взаимодействует с другими телами, ее скорость изменяется и она приобретает ускорение $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, причем

$$m \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k, \quad (2.1)$$

где m – масса частицы; $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$ – силы, с которыми другие тела действуют на частицу. Уравнение (2.1) является математической формулировкой *второго закона Ньютона*. Этот закон приобретает конкретный смысл только после того, как установлен вид сил \vec{F}_k как функции координат и скоростей частицы. После этого второй закон Ньютона позволяет определить зависимости скорости и координат материальной точки от времени, т.е. найти траекторию ее движения. При этом, помимо вида функций \vec{F}_k , должны быть заданы еще так называемые *начальные условия*: положение и скорость частицы в некоторый момент времени t_0 , принимаемый в качестве исходного.

Уравнение (2.1) является векторным уравнением. Поэтому его можно переписать в виде трех скалярных уравнений, связывающих проекции ускорения и проекции сил на оси координат:

$$m a_x = \sum_{k=1}^N F_{kx}, \quad m a_y = \sum_{k=1}^N F_{ky}, \quad m a_z = \sum_{k=1}^N F_{kz}. \quad (2.2)$$

Все силы в природе являются силами взаимодействия. Это означает, что если какое-либо тело 1 действует на тело 2 с силой \vec{F}_{1-2} , то тело 2 обязательно действует на тело 1 с некоторой силой \vec{F}_{2-1} , причем

$$\vec{F}_{2-1} = -\vec{F}_{1-2}, \quad (2.3)$$

т.е. сила, с которой второе тело действует на первое, должна быть равна по абсолютной величине и противоположна по направлению силе, с которой первое тело действует на второе. Это утверждение носит название *третьего закона Ньютона*.

Соотношение (2.3) можно записать в виде

$$\vec{F}_{1-2} + \vec{F}_{2-1} = 0, \quad (2.4)$$

т.е. сумма сил взаимодействия между двумя телами равна нулю.

Все силы в природе делятся на *фундаментальные* и *нефундаментальные*. Последние, в конечном итоге, можно всегда свести к действию фундаментальных сил. К фундаментальным силам относятся: силы гравитационного взаимодействия; силы электрического взаимодействия; ядерные силы, т.е. силы, с которыми взаимодействуют нуклоны (протоны и нейтроны), входящие в состав атомного ядра; и силы, возникающие при радиоактивном β -распаде (так называемое слабое взаимодействие). Последние два вида фундаментальных сил (сильное и слабое взаимодействия) нами рассматриваться не будут. К нефундаментальным силам относятся силы упругости (сила реакции опоры и сила натяжения нити тоже являются силами упругости), силы трения, сила Архимеда и др.

Рассмотрим более подробно эти силы.

1. Сила гравитационного взаимодействия.

Любые две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг друга с силой

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.5)$$

где r – расстояние между ними; $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – гравитационная постоянная.

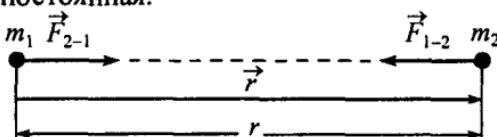


Рис. 2.1

Соотношение (2.5) выражает закон *всемирного тяготения*, открытый Ньютоном.

В векторной форме (2.5) можно записать в виде (рис. 2.1)

$$\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (2.6)$$

На тело массой m , находящееся вблизи поверхности Земли, со стороны последней действует гравитационная сила, которая обычно записывается в виде

$$\vec{F} = m \vec{g}, \quad (2.7)$$

где \vec{g} – ускорение свободного падения, направленное вертикально вниз (к центру Земли). При этом на Землю со стороны тела действует сила $|\vec{F}'| = |\vec{F}|$, направленная вертикально вверх.

2. Сила электрического взаимодействия.

Два точечных заряда q_1 и q_2 притягивают (если заряды разноименные, т.е. $q_1 \cdot q_2 < 0$) или отталкивают (если заряды одноименные, т.е. $q_1 \cdot q_2 > 0$) друг друга с силой

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon r^2}, \quad (2.8)$$

где r – расстояние между зарядами; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ [Ф/м] – электрическая постоянная; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся заряды. Соотношение (2.8) выражает закон Кулона.

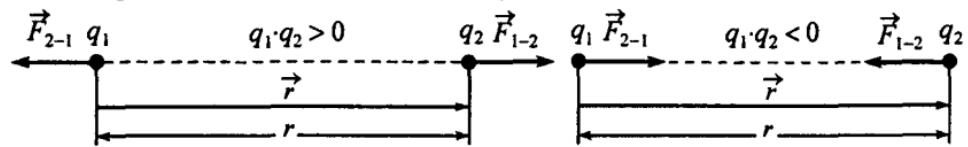


Рис. 2.2

В векторной форме (2.8) записывают в виде (рис. 2.2)

$$\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon r^3} \vec{r}. \quad (2.9)$$

3. Силы упругости.

Силы упругости возникают в твердом теле при его деформировании (изменении его формы). Простейшим видом деформации тела является его растяжение или сжатие. Например, оно возникает в тонком стержне (рис. 2.3), один из концов которого закреплен, а к другому приложена сила F перпендикулярно основанию стержня.

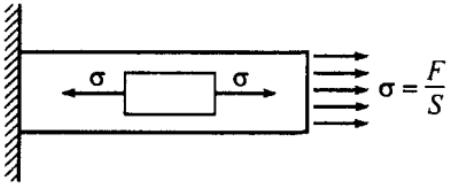


Рис. 2.3

Упругие напряжения $\sigma = F/S$ в стержне определяются величиной растягивающей (сжимающей) силы F , отнесенной к площади поперечного сечения стержня S . Эти напряжения одинаковы вдоль всей длины стержня. Это означает, что на каждый элемент длины стержня действуют со стороны прилегающих к нему частей стержня одни и те же растягивающие (сжимающие) напряжения σ . Если приложенная сила F не очень велика и можно пренебречь изменением толщины стержня при деформации, то справедлив закон Гука: относительное изменение длины стержня $\delta l/l_0$ (где δl – абсолютное изменение длины и l_0 – длина стержня до деформации) пропорционально растягивающему (сжимающему) напряжению $\sigma = F/S$:

$$\frac{\delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \sigma. \quad (2.10)$$

Коэффициент E характеризует упругие свойства материала тела и называется *модулем Юнга*.

Применительно к пружине закон Гука записывается обычно в виде

$$F = k x, \quad (2.11)$$

где $k = E S/l_0$ – коэффициент жесткости пружины; $x = \delta l$ – абсолютное удлинение пружины.

Силами упругости являются и так называемые силы натяжения нити \vec{T} и реакции опоры \vec{N} .

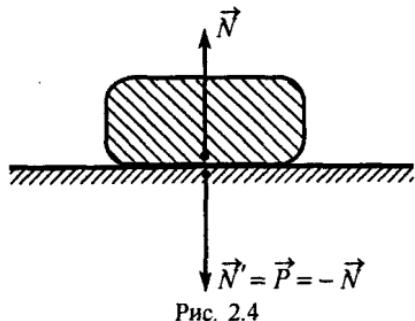


Рис. 2.4

При решении конкретных задач следует помнить, что сила натяжения нити всегда направлена вдоль нити, а если нить невесома и блоки, через которые перекинута нить, тоже не обладают массой, то величина силы натяжения одинакова в любом сечении нити (это справедливо только в случаях, когда нить нигде не пережата).

Сила реакции опоры \vec{N} возникает в том случае, когда какое-либо тело расположено на подставке. Подставка деформируется и действует на тело с силой \vec{N} , направленной перпендикулярно поверхности подставки (рис. 2.4). По третьему закону Ньютона на подставку со стороны тела действует сила $\vec{N}' = -\vec{N}$. При этом сила \vec{N}' (т.е. сила, с которой тело действует на подставку) называется весом тела $\vec{P} = \vec{N}' = -\vec{N}$ (по абсолютной величине вес тела $|\vec{P}| = |\vec{N}'|$). Не следует забывать, что вес тела приложен не к телу, а к подставке, на которой оно находится.

4. Силы трения и сопротивления.

Когда какое-либо тело расположено на подставке, кроме силы реакции опоры \vec{N} , на тело со стороны подставки может действовать еще и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, величина и направление которой (сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ всегда направлена по касательной к поверхности подставки в месте соприкосновения тела с подставкой) зависят от того, покоится ли тело относительно подставки или скользит по ней. Если тело покоится, а подставка перемещается относительно выбранной инерциальной системы отсчета с ускорением \vec{a} , то сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ называется силой трения покоя, а ее величина и направление определяются из второго закона Ньютона, записанного для тела на подставке,

$$m \vec{a} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k + \vec{F}_{\text{тр}}, \quad (2.12)$$

где m – масса тела; $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$ – сумма всех сил (кроме силы трения покоя), действующих на тело.

Сила трения покоя обладает тем свойством, что она не может превышать значения

$$F_{\text{тр max}} = \mu N, \quad (2.13)$$

где μ – коэффициент трения между телом и подставкой, зависящий от материалов соприкасающихся тел и степени их обработки. Подставка называется гладкой, если коэффициент трения между ней и телом $\mu = 0$. Таким образом, тело покоится относительно подставки при условии, что сила трения покоя

$$F_{\text{тр}} < F_{\text{тр max}} = \mu N. \quad (2.14)$$

Как только сила трения покоя достигает значения $F_{\text{тр max}}$, тело начинает скользить. При этом сила трения (в таких случаях ее называют силой

трения скольжения), приложенная к телу, направлена всегда по касательной к поверхности поставки в сторону, противоположную скорости движения точки поверхности тела, соприкасающейся с подставкой, и численно равна $F_{\text{тр}} \max = \mu N$.

Следует помнить, что сила трения не всегда направлена в сторону, противоположную движению тела. Так, например, при движении автомобиля с включенным двигателем на колеса автомобиля действуют силы трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ (если колеса не проскальзывают относительно дороги), направленные в сторону движения автомобиля (рис. 2.5) и создающие его ускорение. Величина силы трения покоя растет с увеличением угловой скорости вращения колес, которая определяется мощностью двигателя автомобиля.

При определенном значении угловой скорости силы трения покоя могут достичь своих максимальных значений и колеса начнут проскальзывать.

При движении тела в газе или жидкости возникают силы сопротивления, обусловленные взаимодействием тела с молекулами вещества, через которое движется тело. При не очень больших скоростях движения тела силу сопротивления можно приближенно считать пропорциональной скорости тела и направленной в сторону, противоположную вектору скорости тела:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -r \vec{v}, \quad (2.15)$$

где коэффициент пропорциональности r (коэффициент сопротивления) зависит от формы и поперечных размеров тела и свойств среды, в которой тело перемещается. При больших скоростях тела сила сопротивления может оказаться пропорциональной квадрату и даже кубу скорости тела.

В некоторых задачах иногда возникает все-таки необходимость рассматривать движение тела в неинерциальной системе отсчета. Спрашивается, как записать второй закон Ньютона в такой системе отсчета?

В любой инерциальной системе отсчета

$$m \vec{a} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k, \quad (2.16)$$

где \vec{a} – ускорение тела в данной системе отсчета; $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$ – сумма сил, действующих на тело. Согласно правилу сложения ускорений (см. §1, выражение (1.33))

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0, \quad (2.17)$$

где \vec{a}' – ускорение тела в неинерциальной системе отсчета и \vec{a}_0 – ускорение этой системы относительно инерциальной системы отсчета. Подставляя (2.17) в (2.16), получим второй закон Ньютона, записанный в неинерциальной системе отсчета:

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k. \quad (2.18)$$

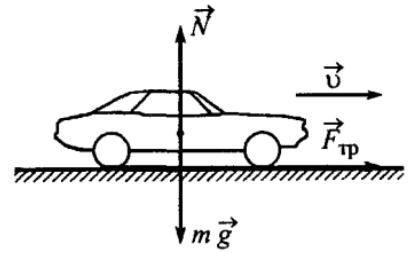


Рис. 2.5

Таким образом, решая задачу в неинерциальной системе отсчета, мы обязательно должны учитывать ускорение этой системы \vec{a}_0 .

Иногда уравнение (2.18) записывают в виде

$$m \vec{a}' = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k + \vec{F}_{\text{ин}}, \quad (2.19)$$

где

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m \vec{a}_0 \quad (2.20)$$

фиктивная сила, называемая *силой инерции*, в отличие от реальных сил \vec{F}_k . При таком определении сила инерции равна по величине и противоположна по направлению произведению массы тела на ускорение неинерциальной системы отсчета; она просто выражает влияние ускорения самой неинерциальной системы отсчета на характер движения тела относительно этой системы. Это та величина, которую надо добавлять к истинным силам \vec{F}_k , чтобы их сумма стала равной $m \vec{a}'$, где \vec{a}' – ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета.

Сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$ является фиктивной силой в том смысле, что для нее мы не можем указать второе тело, действующее на данное с такой силой. К силам инерции относится, например, известная *центробежная сила*, действующая на тело, находящееся во вращающейся системе отсчета, и направленная от оси вращения:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = m \omega^2 \vec{r}, \quad (2.21)$$

где ω – угловая скорость системы отсчета; \vec{r} – радиус-вектор, задающий положение частицы относительно неподвижной оси вращения.

Следует помнить, что введение сил инерции вовсе не обязательно, так как все фиктивное выглядит всегда запутанным: любую задачу о движении тела в неинерциальной системе отсчета можно решить с помощью уравнения (2.18), не используя понятие о силе инерции.

Рекомендации по решению задач

Основная задача динамики материальной точки состоит в том, чтобы найти закон движения материальной точки, зная приложенные к ней силы, или наоборот, по известному закону движения определить силы, действующие на эту точку.

Задачи на динамику материальной точки удобно решать в следующей последовательности:

1. Представив по условию задачи физический процесс, следует сделать схематический чертеж и указать на нем все тела, участвующие в движении, и связи между ними (нити, пружины и т.д.). Изобразить направления ускорений этих тел, если это возможно по условию задачи. В противном случае направления ускорений следует проставить произвольным образом.

2. Изобразить все силы, приложенные к телам, движение которых изучается. Расставляя силы, приложенные к телу, необходимо помнить, что силы могут действовать на данное тело только со стороны каких-то других тел: со стороны Земли – это сила тяжести $m \vec{g}$; со стороны нити – сила натяжения \vec{T} ; со стороны пружины – сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$; со стороны подставки – сила реакции \vec{N} и, если поверхности подставки и тела шероховатые, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Кроме этого, в некоторых задачах на тело могут действовать силы сопротивления и силы притяжения (или отталкивания) с другими телами; если в условии задачи нет специальных оговорок, этими силами обычно пренебрегают.

При изображении сил следует помнить, что:

- а) сила тяжести направлена вертикально вниз (к центру Земли);
- б) сила натяжения нити направлена вдоль нити от тела;
- в) сила упругости направлена вдоль пружины от тела, если пружина в процессе движения растянута, или к телу, если пружина сжата;
- г) сила реакции опоры направлена перпендикулярно поверхности соприкосновения тела с подставкой;

д) сила трения скольжения направлена по касательной к поверхности подставки в сторону, противоположную скорости движения точек поверхности тела, соприкасающихся с подставкой;

е) сила сопротивления направлена в сторону, противоположную вектору скорости тела.

При расстановке сил, приложенных к телу, не обязательно их прикладывать к строго определенным точкам тела (например, силу тяжести к центру масс). Обычно все силы изображают приложенными к какой-либо произвольной точке тела, выбор которой определяется удобством и наглядностью рисунка.

После того как проставлены все силы, желательно проверить, имеется ли сила противодействия каждой из сил, изображенных на рисунке. Нет необходимости рисовать силы противодействия силе тяжести, силам реакции опоры \vec{N} и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, если подставкой, по которой движется тело, является другое неподвижное тело, например, Земля.

3. Выбрать инерциальную систему отсчета, оси координат которой направить наиболее удобным для решения задачи образом. В некоторых задачах бывает удобным для каждого из тел, участвующих в движении, выбрать свое направление осей. Обычно удобно для каждого тела одну из осей системы координат направить вдоль вектора ускорения.

4. Записать уравнение второго закона Ньютона для каждого тела в векторной форме (2.1).

5. Записать уравнения второго закона Ньютона в проекциях на оси выбранной системы координат (2.2). При наличии трения скольжения силы трения, входящие в уравнения, нужно представить через соответствующие коэффициенты трения и силы нормального давления (2.13). Если скольжение одного тела по поверхности другого отсутствует, то такое представление сил трения использовать нельзя. В этом случае нужно записать уравнение движения системы тел как одного целого и силу трения покоя, действующую между ними, определить из уравнения движения любого из взаимодействующих тел только после того, как определено ускорение системы \vec{a} :

$$\vec{F}_{\text{тр пок}} = m \vec{a} - \sum_{k=1}^N \vec{F}_k,$$

где $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$ – сумма всех сил (кроме трения), действующих на данное тело.

6. Упростив, если можно, уравнения динамики, дополнить их необходимыми соотношениями кинематики для получения замкнутой системы уравнений, которую решить относительно искомых неизвестных величин.

В некоторых задачах динамики бывает более удобным рассматривать движение тела в неинерциальной системе отсчета, которая движется с некоторым ускорением \vec{a}_0 . В этом случае можно сохранить приведенную выше последовательность решения задачи, но при расстановке сил ко всем телам, движение которых рассматривается относительно данной неинерциальной системы отсчета, необходимо приложить силу инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$, которая равна по величине произведению массы данного тела m на ускорение системы a_0 и направлена в сторону, противоположную \vec{a}_0 . Дальнейшее решение задачи не отличается от ее решения в инерциальной системе отсчета. Следует лишь помнить, что абсолютное ускорение тела \vec{a} будет определяться как сумма относительного ускорения \vec{a}' тела в неинерциальной системе отсчета и переносного ускорения \vec{a}_0 – ускорения системы отсчета:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0.$$

Задачи

2.1. На легкой нерастяжимой нити, выдерживающей натяжение $T_{\max} = 20 \text{ Н}$, поднимают груз массой $m = 1 \text{ кг}$ из состояния покоя вертикально вверх. Считая движение равноускоренным, найти максимальную высоту, на которую можно поднять груз за $\Delta t = 1 \text{ с}$ так, чтобы нить не оборвалась.

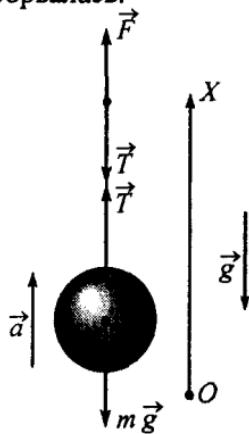


Рис. 2.6

• *Решение.* Для равноускоренного движения груза необходимо, чтобы действующие на него силы были постоянными.

Приложим к нити постоянную силу \vec{F} , направленную вертикально вверх (рис. 2.6).

При движении на груз будут действовать две силы: сила тяжести $m \vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . Поскольку нить невесома, то сила \vec{T} по величине будет равна силе \vec{F} , приложенной к нити.

Запишем уравнение движения груза

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}$$

в проекции на ось OX системы координат:

$$OX: m a = F - m g.$$

Так как по условию задачи требуется найти максимальную высоту, на которую можно поднять груз за фиксированное время, то к нити нужно приложить максимально большую силу, т.е. $F = T_{\max}$. Тогда ускорение груза будет равно

$$a = T_{\max}/m - g. \quad (1)$$

Записав уравнение равноускоренного движения

$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

в точке, которой достигнет груз через время Δt ,

$$h_{\max} = \frac{1}{2} a \Delta t^2, \quad (2)$$

из (2) с учетом (1) получим

$$h_{\max} = \frac{(T_{\max}/m - g) \Delta t^2}{2} = \frac{(T_{\max} - m g) \Delta t^2}{2 m} \approx 5,1 \text{ м.}$$

• *Ответ:* $h_{\max} = \frac{(T_{\max} - m g) \Delta t^2}{2 m} \approx 5,1 \text{ м.}$

2.2. Груз поднимают при помощи веревки вертикально вверх, приложив к свободному концу веревки силу $F = 100 \text{ Н}$. Какова масса груза, если за первую секунду движения он приобрел скорость $v = 10,2 \text{ м/с}$? Массой веревки и сопротивлением воздуха пренебречь.

2.3. Груз массой $m = 10^3 \text{ кг}$ поднимают при помощи троса вертикально вверх. В течение первых $\Delta t = 2 \text{ с}$ равноускоренного движения груз подняли на высоту $h = 10 \text{ м}$. Определить удлинение троса в этот момент времени, если коэффициент жесткости троса равен $k = 10^6 \text{ Н/м}$. Деформацию считать упругой. Массой троса и сопротивлением воздуха пренебречь.

2.4. Автомобиль, трогаясь с места, за $\Delta t = 5 \text{ с}$ равноускоренно набирает скорость $v = 72 \text{ км/ч}$. Найти минимальный коэффициент трения между колесами автомобиля и дорогой при таком движении. Каков наименьший тормозной путь автомобиля, набравшего эту скорость?

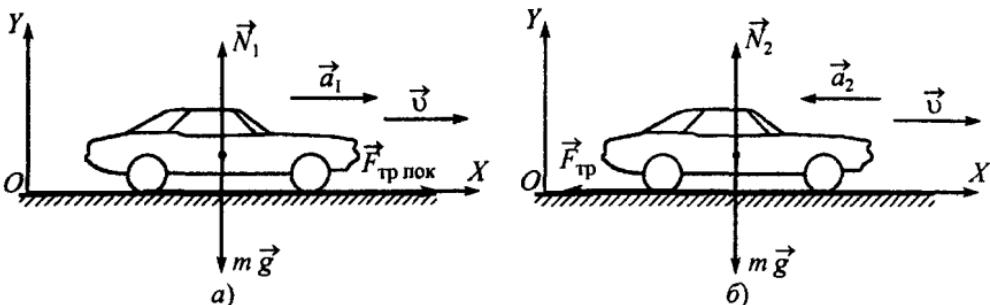


Рис. 2.7

• Решение. При движении автомобиля (как при разгоне, так и при торможении) на него действуют три силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила реакции дороги \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

При ускоренном движении автомобиля сила трения препятствует проскальзыванию ведущих колес по поверхности дороги, поэтому направлена в сторону движения автомобиля (рис. 2.7, а) и является силой трения покоя. Именно сила трения покоя в данном случае будет движущей силой.

Выберем систему координат XOY , ось OX которой направим по движению автомобиля. Запишем уравнение движения

$$m \vec{a}_1 = m \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр пок}}$$

в проекциях на оси системы координат:

$$OX: m a_1 = F_{\text{тр пок}}, \quad (1)$$

$$OY: 0 = N_1 - m g. \quad (2)$$

Следовательно, при разгоне ускорение автомобиля

$$a_1 = \frac{F_{\text{тр пок}}}{m}. \quad (3)$$

Как следует из условия задачи, автомобиль, двигаясь равноускоренно, за время Δt приобрел скорость v . Записав зависимость скорости автомобиля от времени при равноускоренном движении $v_x = a_1 t$ через время Δt после начала движения

$$v = a_1 \Delta t,$$

получим

$$a_1 = \frac{v}{\Delta t}. \quad (4)$$

Приравнивая правые части выражений (3) и (4)

$$\frac{F_{\text{тр пок}}}{m} = \frac{v}{\Delta t},$$

находим

$$F_{\text{тр пок}} = \frac{m v}{\Delta t}.$$

Так как сила трения покоя $F_{\text{тр пок}} \leq \mu N_1$, или с учетом (2) $F_{\text{тр пок}} \leq \mu m g$, то

$$\frac{m v}{\Delta t} \leq \mu m g, \quad \text{или} \quad \mu \geq \frac{v}{g \Delta t}.$$

Поскольку по условию задачи требуется найти минимально возможный коэффициент трения μ_{\min} между колесами автомобиля и дорогой, то

$$\mu_{\min} = \frac{v}{g \Delta t} \approx 0,4. \quad (5)$$

Рассмотрим вторую часть задачи.

При торможении автомобиля сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена в сторону, противоположную движению (рис. 2.7, б), и является силой трения скольжения.

Из уравнения движения автомобиля

$$m \vec{a}_2 = m \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

записанного в проекциях на оси выбранной системы координат

$$OX: -m a_2 = -F_{\text{тр}}$$

$$OY: 0 = N_2 - m g,$$

найдем ускорение автомобиля при торможении:

$$a_2 = \mu g = \text{const},$$

где учтено, что $F_{\text{тр}} = \mu N_2$.

Путь, пройденный до остановки автомобилем, движущимся равнозамедленно с начальной скоростью v , равен

$$\Delta S = v \tau - \frac{1}{2} a_2 \tau^2,$$

где время движения до остановки τ можно найти из условия, что конечная скорость автомобиля v_k равна нулю: $v_k = v - a_2 \tau = 0$. Следовательно,

$$\tau = \frac{v}{a_2}; \quad \Delta S = \frac{v^2}{2 a_2}, \quad \text{или} \quad \Delta S = \frac{v^2}{2 \mu g}.$$

С учетом выражения (5) для коэффициента трения $\mu = \mu_{\min}$ получим

$$S = \frac{1}{2} v \Delta t = 50 \text{ м.}$$

- Ответ: $\mu_{\min} = \frac{v}{g \Delta t} \approx 0,4$; $\Delta S = \frac{v \Delta t}{2} = 50 \text{ м.}$

2.5. Автомобиль за $\Delta t = 4$ с увеличил свою скорость от $v_1 = 10 \text{ м/с}$ до $v_2 = 20 \text{ м/с}$. Считая движение автомобиля равноускоренным, найти минимально возможный коэффициент трения покрышек о покрытие дороги при таком движении.

2.6. Самолет массой $m = 10 \text{ т}$, пробежав по взлетной полосе расстояние $S = 790 \text{ м}$, при отрыве от земли имеет скорость $v = 240 \text{ км/ч}$. Считая движение самолета равноускоренным, найти силу тяги его двигателей.

2.7. Определить, с какой скоростью двигался автомобиль, если длина следа заторможенных колес оказалась равной $S = 25 \text{ м}$. Коэффициент трения покрышек о покрытие дороги $\mu = 0,3$.

2.8. У бруска одна сторона гладкая, а другая шероховатая. Если его положить на наклонную плоскость шероховатой стороной, он будет находиться в равновесии на грани соскальзывания. С каким ускорением брускок будет соскальзывать, если его перевернуть? Коэффициент трения между шероховатой стороной бруска и поверхностью наклонной плоскости равен $\mu = 0,2$.

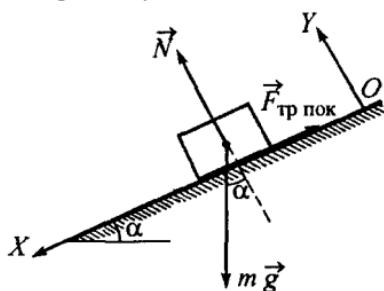


Рис. 2.8

• Решение. Рассмотрим равновесие бруска на наклонной плоскости, когда он лежит на ней шероховатой стороной.

На брускок действуют три силы: сила тяжести $m \vec{g}$ (где m – масса бруска), сила реакции \vec{N} поверхности плоскости и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр пок}}$, препятствующая соскальзыванию бруска (рис. 2.8).

Направим ось OX системы координат вдоль наклонной плоскости и запишем уравнение, выражающее второй закон Ньютона

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр пок}},$$

в проекциях на оси системы координат:

$$OX: m a = m g \sin \alpha - F_{\text{тр пок}} \quad (1)$$

$$OY: 0 = N - m g \cos \alpha, \quad (2)$$

где α – угол, который наклонная плоскость образует с горизонтом.

Учитывая, что тело находится в равновесии на грани скользывания, т.е.

$$\vec{a} = 0, \quad F_{\text{тр пок}} = \mu N,$$

из (1) – (2) находим

$$F_{\text{тр пок}} = \mu m g \cos \alpha; \quad 0 = m g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha; \\ \mu = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Полученный результат позволяет сделать полезный вывод: если коэффициент трения между телом и поверхностью наклонной плоскости $\mu > \operatorname{tg} \alpha$, то тело будет находиться в равновесии и самопроизвольно не будет скользить с плоскости; если $\mu = \operatorname{tg} \alpha$, то тело будет находиться в равновесии на грани скользывания; если $\mu < \operatorname{tg} \alpha$, то тело будет скользить с плоскости.

Рассмотрим движение бруска с наклонной плоскости, когда он лежит на ней гладкой стороной. Теперь на брускок действуют две силы: сила тяжести $m \vec{g}$ и сила реакции \vec{N} . Легко понять, что уравнения движения бруска в проекциях на оси системы координат совпадут с уравнениями (1) – (2) при $F_{\text{тр пок}} = 0$. Поскольку в рассматриваемом случае трения нет, то для описания движения достаточно лишь уравнения движения в проекции на ось OX :

$$OX: m a = m g \sin \alpha.$$

Отсюда находим

$$a = g \sin \alpha,$$

или с учетом выражения (3)

$$a = g \sin \alpha = g \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = g \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \approx 1,9 \text{ м/с}^2.$$

• Ответ: $a = g \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \approx 1,9 \text{ м/с}^2$.

2.9. Брускок лежит на доске. Если поднимать один конец доски, то при угле наклона $\alpha = 30^\circ$ брускок начинает скользить. За какое время брускок скользнет с доски длиной $l = 1 \text{ м}$, если она образует с горизонтом угол $\beta = 45^\circ$?

2.10. Монету толкнули резко вверх вдоль наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтом. Время подъема монеты до высшей точки оказалось в $n = 2$ раза меньше, чем время ее спуска до исходной точки. Определить коэффициент трения между монетой и плоскостью.

2.11. Шайбе, находящейся у основания наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, сообщают некоторую скорость, направленную вдоль плоскости вверх. Коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0,3$. При каких значениях угла α время движения шайбы до остановки будет наименьшим?

2.12. Брускок массой m , находящийся на горизонтальной плоскости, тянут за нить так, как показано на рис. 2.9. Коэффициент трения между бруском и плоскостью μ . Найти угол α , при котором натяжение нити при движении бруска будет наименьшим. Чему оно равно? Массой нити пренебречь.

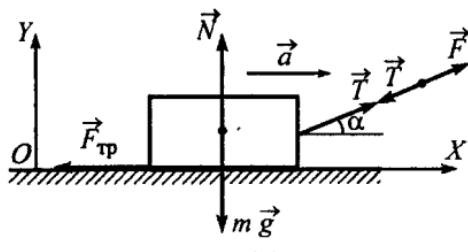


Рис. 2.9

• Решение. Приложим к нити постоянную силу \vec{F} , направленную под углом α к горизонту.

При движении на брусков будут действовать четыре силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} , сила натяжения нити \vec{T} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Поскольку нить невесома, то сила \vec{T} будет равна силе \vec{F} , приложенной к нити.

Запишем уравнение движения бруска

$$m \vec{a} = \vec{F} + m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

в проекциях на оси системы координат:

$$OX: m a = F \cos \alpha - F_{\text{тр}},$$

$$OY: 0 = F \sin \alpha + N - m g,$$

где сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Отсюда находим

$$m a = F \cos \alpha - \mu (m g - F \sin \alpha).$$

Следовательно, величина силы

$$F = \frac{m (a + \mu g)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

зависит от угла α . Кроме того, сила \vec{F} будет тем меньше, чем меньше ускорение бруска. Поэтому для нахождения минимальной силы положим $\vec{a} = 0$:

$$F = \frac{m \mu g}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Исследуем зависимость $F(\alpha)$ на экстремум.

Поскольку от угла α зависит лишь знаменатель

$$f(\alpha) = \cos \alpha + \mu \sin \alpha,$$

то вместо того чтобы исследовать на минимум функцию $F(\alpha)$, исследуем на максимум функцию $f(\alpha)$:

$$\frac{df}{d\alpha} = -\sin \alpha + \mu \cos \alpha = 0; \quad \frac{df^2}{d\alpha^2} = -\cos \alpha - \mu \sin \alpha < 0.$$

Следовательно,

$$\alpha = \arctg \mu; \quad F_{\min} = T_{\min} = \frac{\mu m g}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

• Ответ: $\alpha = \arctg \mu$; $T_{\min} = \frac{\mu m g}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

2.13. К телу массой $m = 10$ кг, лежащему на горизонтальной поверхности, привязана легкая нерастяжимая нить. Если к нити приложить силу $F = 39,2$ Н, направленную под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонту, то тело движется равномерно. С каким ускорением будет двигаться тело, если эту силу приложить под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту?

2.14. С каким ускорением соскальзывают санки массой $m = 10$ кг с горки, если их тянут вниз с постоянной горизонтальной силой $F = 50$ Н? Плоскость горки образует угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Коэффициент трения санок о поверхность горки $\mu = 0,2$.

2.15. По деревянным сходням, образующим угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Коэффициент трения дна ящика о сходни $\mu = 0,4$. Под каким углом к горизонту следует тянуть веревку, чтобы с минимальными усилиями втащить ящик?

2.16. ($n+1$) одинаковых грузов массой m каждый соединены друг с другом n одинаковыми невесомыми пружинами жесткостью k и находятся на горизонтальном столе. К крайнему грузу приложена некоторая горизонтальная сила \vec{F} , под действием которой система движется с ускорением \vec{a} (рис. 2.10). Определить величину силы \vec{F} и удлинение Δx_i каждой пружины, если коэффициенты трения между грузами и плоскостью одинаковы и равны μ .

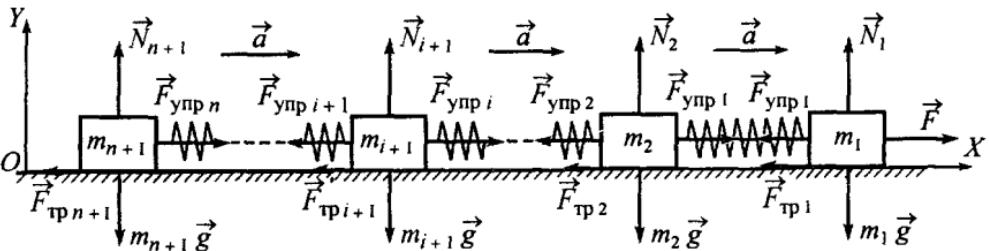


Рис. 2.10

• *Решение.* Если механическая система состоит из большого числа тел (или, как в данной задаче, из произвольного их числа), движущихся с одинаковыми по величине и направлению ускорениями, то при решении задачи можно не писать уравнение движения каждого тела в отдельности. Понятно, что при сложении левых и правых частей уравнений движения каждого из тел

$$m_i \vec{a} = \sum \vec{F}_j$$

(где m_i – масса i -го тела; $\sum \vec{F}_j$ – сумма сил, действующих на i -е тело) силы, обусловленные взаимодействием тел друг с другом (силы натяжения нитей или силы упругости пружин), сократятся, поскольку по третьему закону Ньютона они равны по величине и направлены в противоположные стороны.

Запишем уравнение движения системы тел

$$\sum_{j=1}^{n+1} m_j \vec{a} = \vec{F} + \sum_{j=1}^{n+1} m_j \vec{g} + \sum_{j=1}^{n+1} \vec{N}_j + \sum_{j=1}^{n+1} \vec{F}_{tpj}$$

в проекциях на оси системы координат:

$$OX: \sum_{j=1}^{n+1} m_j a = F - \sum_{j=1}^{n+1} F_{tpj}, \quad (1)$$

$$OY: 0 = - \sum_{j=1}^{n+1} m_j g + \sum_{j=1}^{n+1} N_j. \quad (2)$$

Поскольку все грузы имеют равные массы и коэффициенты трения о поверхность у них одинаковы, то уравнения (1) – (2) можно записать в виде

$$(n+1)m a = F - \mu \sum_{j=1}^{n+1} N_j, \quad 0 = -(n+1)m g + \sum_{j=1}^{n+1} N_j.$$

Отсюда получим

$$(n+1)m a = F - \mu (n+1)m g; \quad F = (n+1)m(a + \mu g).$$

Чтобы определить удлинение i -й пружины, найдем величину силы упругости $F_{upr i}$. Для этого запишем уравнение движения системы тел, расположенных левее i -го тела,

$$\sum_{j=i+1}^{n+1} m_j \vec{a} = \vec{F}_{upr i} + \sum_{j=i+1}^{n+1} m_j \vec{g} + \sum_{j=i+1}^{n+1} \vec{N}_j + \sum_{j=i+1}^{n+1} \vec{F}_{tpj},$$

в проекциях на оси системы координат:

$$\sum_{j=i+1}^{n+1} m_j a = F_{upr i} - \sum_{j=i+1}^{n+1} F_{tpj}, \quad 0 = - \sum_{j=i+1}^{n+1} m_j g + \sum_{j=i+1}^{n+1} N_j,$$

или

$$(n-i+1)m a = F_{\text{упр } i} - \mu(n-i+1)mg.$$

Следовательно,

$$F_{\text{упр } i} = (n-i+1)m(a + \mu g).$$

Представив силу упругости $F_{\text{упр } i}$ через удлинение пружины i -й пружины

$$F_{\text{упр } i} = k \Delta x_i,$$

находим

$$\Delta x_i = \frac{(n-i+1)m(a + \mu g)}{k}.$$

- Ответ: $F = (n+1)m(a + \mu g)$; $\Delta x_i = \frac{(n-i+1)m(a + \mu g)}{k}$, где $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

2.17. Два небольших тела массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг связаны невесомой и нерастяжимой нитью и расположены на горизонтальном столе. К первому телу приложена сила $F = 10$ Н, направленная под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (вверх). Определить ускорение системы, если коэффициенты трения тел о плоскость одинаковы и равны $\mu = 0,1$.

2.18. Цепочка, состоящая из $n = 20$ одинаковых звеньев, движется по гладкому горизонтальному столу под действием силы $F = 16$ Н, направленной вдоль цепочки. Определить силу взаимодействия между пятнадцатым и шестнадцатым звеном (отсчет ведется от головного звена цепочки).

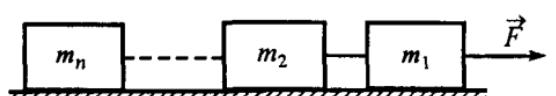


Рис. 2.11

2.19. Система n тел массами m_1, m_2, \dots, m_n , связанных друг с другом невесомыми и нерастяжимыми нитями, движется по горизонтальной поверхности под действием силы \vec{F} (рис. 2.11). Коэффициенты трения всех тел о поверхность стола одинаковы и равны μ . Определить ускорение системы и силы натяжения всех нитей при движении системы.

2.20. Брускок массой m_1 , находящийся на горизонтальном столе, соединен невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через легкий, врачающийся без трения блок, с грузом массой m_2 (рис. 2.12). Определить натяжение нити при движении системы. Коэффициент трения бруска о поверхность стола μ .

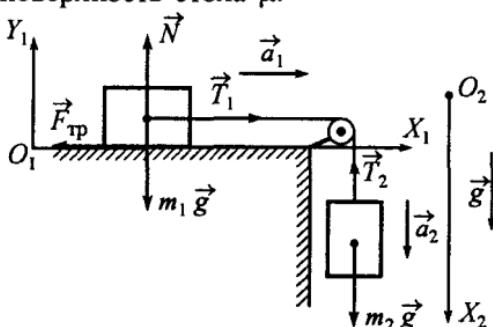


Рис. 2.12

• **Решение.** При решении задач на динамику движения системы связанных тел, движущихся с разными ускорениями (по величине или направлению), движение каждого тела нужно рассматривать отдельно. Если при этом тела, входящие в механическую систему, движутся в разных направлениях, то для каждого тела удобно выбрать свою систему отсчета, направив одну из координатных осей вдоль вектора ускорения. Кроме того, чтобы получить замкнутую систему уравнений динамики, необходимо записать соотношения, выражающие зависимость между ускорениями всех тел системы, и установить связь между си-

лучить замкнутую систему уравнений динамики, необходимо записать соотношения, выражающие зависимость между ускорениями всех тел системы, и установить связь между си-

лами, обусловленными взаимодействием разных тел. В остальном решение таких задач принципиально не отличается от рассмотренных выше.

Рассмотрим конкретную задачу.

В зависимости от значений масс тел и коэффициента трения система может находиться в покое или двигаться. Поскольку в задаче требуется найти натяжение нити при движении системы, то нужно также определить условие, при котором движение системы возможно.

Рассмотрим каждое тело отдельно.

На брусков действуют сила тяжести $m_1 \vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила реакции \vec{N} и сила натяжения нити \vec{T}_1 . На груз действуют сила тяжести $m_2 \vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T}_2 .

Так как блок невесом, трения в оси блока нет и нить нигде не пережата, то силы натяжения нити $T_1 = T_2$.

Поскольку нить, соединяющая тела, иерастяжима, то брусков и груза за равные промежутки времени пройдут одинаковые расстояния

$$S_1 = S_2, \quad S_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2, \quad S_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2$$

Следовательно, ускорения грузов $a_1 = a_2 = a$.

Поскольку тела движутся в разных направлениях, то удобно для бруска и груза ввести свою систему координат ($X_1O_1Y_1$ и O_2X_2 соответственно). Запишем уравнения движения тел системы

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + \vec{T}_1, \quad m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2$$

в проекциях на соответствующие оси с учетом, что ускорения тел $a_1 = a_2 = a$ и силы натяжения нити $T_1 = T_2 = T$:

$$O_1X_1 : \quad m_1 a = T - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$O_1Y_1 : \quad 0 = N - m_1 g, \quad (2)$$

$$O_2X_2 : \quad m_2 a = m_2 g - T, \quad (3)$$

где сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Сложив левые и правые части уравнений (1) и (3), получим

$$(m_1 + m_2) a = m_2 g - F_{\text{тр}} \quad \text{или} \quad (m_1 + m_2) a = m_2 g - \mu m_1 g.$$

Отсюда находим

$$a = \frac{(m_2 - \mu m_1) g}{m_1 + m_2}, \quad (4)$$

Силу натяжения нити можно найти, подставив выражение для ускорения (4) в уравнение (1) или (3):

$$T = m_1 (\mu g + a) = \frac{(\mu + 1) m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}, \quad \text{или} \quad T = m_2 (g - a) = \frac{(\mu + 1) m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Полученное решение имеет смысл, если ускорение тел $a > 0$, т.е.

$$a = \frac{(m_2 - \mu m_1) g}{m_1 + m_2} > 0,$$

что справедливо при выполнении условия $\mu < m_2/m_1$.

- Ответ: $T = \frac{(\mu + 1) m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$ при $\mu < \frac{m_2}{m_1}$.

2.21. Два бруска массами m_1 и m_2 , связанные нитью, находятся на горизонтальном столе. Первый бруск соединен нитью, переброшенной через легкий блок, с грузом массой m_3 (рис. 2.13). Коэффициенты трения между брусками и поверхностью стола одинаковы и равны μ .

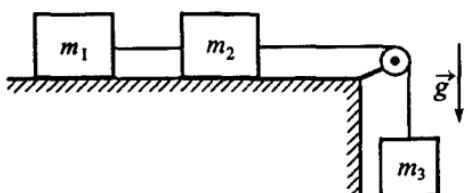


Рис. 2.13

Найти ускорение тел и силы натяжения нитей при движении системы. Нити невесомы и нерастяжимы, трения в оси блока нет.

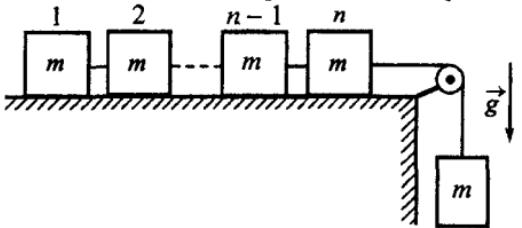


Рис. 2.14

2.22. n одинаковых брусков массой m каждый связаны друг с другом нитями и находятся на гладком горизонтальном столе. Последний бруск соединен нитью, переброшенной через легкий блок, с грузом массой m (рис. 2.14). Определить натяжение нити между k -м и $(k+1)$ -м брусками при движении системы. Нити невесомы и нерастяжимы, трения в оси блока нет.

2.23. Кусок тяжелого каната, подвешенного за один конец, не рвется, если его длина не превышает $l_0 = 5$ м. Кусок такого же каната кладут на гладкий стол так, что его малая часть свешивается. При какой максимальной длине каната он соскользнет со стола, не порвавшись?

2.24. Бруск массой m_1 , находящийся на наклонной плоскости с углом при основании α , соединен невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через легкий блок, с грузом массой m_2 (рис. 2.15). Определить силу натяжения нити, если коэффициент трения бруска о плоскость равен μ . Трения в оси блока нет.

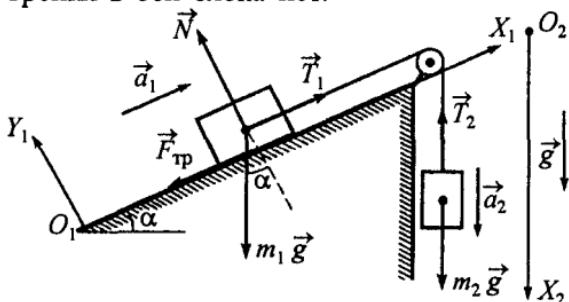


Рис. 2.15

• Решение. В зависимости от значений масс тел и коэффициента трения возможны три различных состояния системы:

- бруск может подниматься по наклонной плоскости, а груз опускаться;
- бруск может опускаться по наклонной плоскости, а груз подниматься;
- система может находиться в покое.

Рассмотрим первый из возможных вариантов.

На бруск действуют сила тяжести $m_1 \vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила реакции \vec{N} и сила натяжения нити \vec{T}_1 . На груз действуют сила тяжести $m_2 \vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T}_2 .

Введем для каждого из тел свою систему координат и запишем уравнения движения

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + \vec{T}_1, \quad m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2$$

в проекциях на соответствующие оси с учетом, что ускорения тел $a_1 = a_2 = a$ и силы натяжения нити $T_1 = T_2 = T$:

$$O_1 X_1 : m_1 a = -m_1 g \sin \alpha - F_{\text{тр}} + T, \quad (1)$$

$$O_1 Y_1 : 0 = -m_1 g \cos \alpha + N, \quad (2)$$

$$O_2 X_2 : m_2 a = m_2 g - T, \quad (3)$$

где сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Сложив левые и правые части уравнений (1) и (3), получим

$$(m_1 + m_2) a = m_2 g - m_1 g \sin \alpha - F_{\text{тр}},$$

или

$$(m_1 + m_2) a = m_2 g - m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha.$$

Отсюда получим

$$a = \frac{[m_2 - m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] g}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

Силу натяжения нити найдем, подставив выражение для ускорения (4) в уравнение (3):

$$T = m_2 (g - a) = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Рассмотренное решение имеет смысл, если ускорение тел

$$a = \frac{[m_2 - m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] g}{m_1 + m_2} > 0.$$

Это справедливо при выполнении условия

$$\mu < \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha.$$

Рассмотрим теперь второй случай. Понятно, что теперь сила трения и ускорения тел поменяют направления на противоположные, и уравнения движения в проекциях на оси систем координат примут вид

$$-m_1 a = -m_1 g \sin \alpha + F_{\text{тр}} + T, \quad 0 = -m_1 g \cos \alpha + N, \quad -m_2 a = m_2 g - T.$$

Отсюда получим

$$a = \frac{[m_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_2] g}{m_1 + m_2}; \quad T = m_2 (g + a) = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Рассмотренное решение имеет смысл при выполнении условия

$$a = \frac{[m_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_2] g}{m_1 + m_2} > 0, \quad \text{или} \quad \mu < \operatorname{tg} \alpha - \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha}.$$

Силу натяжения нити в случае, когда система тел находится в покое, можно найти из уравнения движения груза (3), положив $a_2 = 0$:

$$T = m_2 g.$$

Очевидно, что это справедливо при

$$\mu < \left| \operatorname{tg} \alpha - \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha} \right|.$$

• Ответ: $T = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}$ при $\mu < \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha$;

$T = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}$ при $\mu < \operatorname{tg} \alpha - \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha}$;

$T = m_2 g$ при $\mu < \left| \operatorname{tg} \alpha - \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha} \right|$.

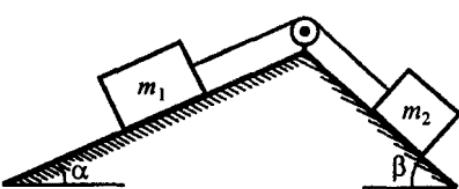


Рис. 2.16

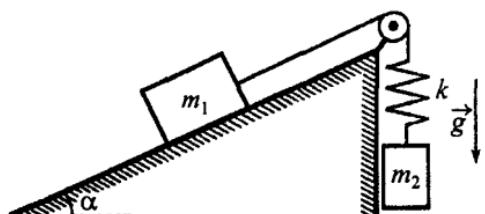


Рис. 2.17

2.25. Два бруска массами m_1 и m_2 , находящиеся на наклонных плоскостях, связаны невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через легкий блок. Плоскости образуют с горизонтом углы α и β (рис. 2.16). Коэффициент трения брусков о наклонные плоскости одинаков. При

каких значениях коэффициента трения движение брусков будет ускоренным? Трения в оси блока нет.

2.26. Брусок массой m_1 , находящийся на наклонной плоскости с углом при основании α , соединен невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через легкий блок, и пружиной жесткостью k с грузом массой m_2 (рис. 2.17). Определить величину деформации пружины, если коэффициент трения бруска о плоскость равен μ . Трения в оси блока нет.

2.27. На наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, удерживают два соприкасающихся бруска так, как показано на рис. 2.18. Массы брусков $m_1 = 1 \text{ кг}$, $m_2 = 2 \text{ кг}$, коэффициенты трения брусков о плоскость равны $\mu_1 = 0,25$ и $\mu_2 = 0,1$ соответственно. Найти силу взаимодействия между брусками, если их отпустить.

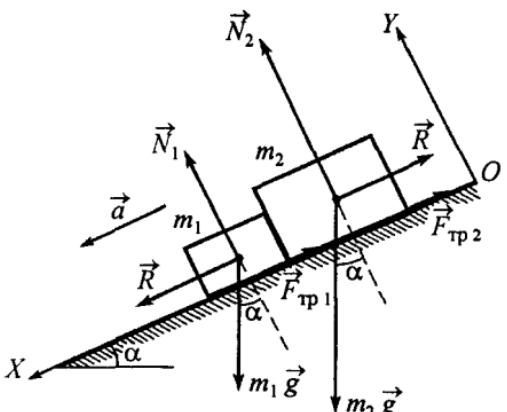


Рис. 2.18

На каждый из брусков при этом действуют три силы: тяжести $m \vec{g}$, реакции опоры \vec{N} и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Запишем уравнения движения брусков

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр} 1}, \quad m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр} 2}$$

в проекциях на оси системы координат:

$$OX: m_1 a_1 = m_1 g \sin \alpha - F_{\text{тр} 1},$$

$$OY: 0 = N_1 - m_1 g \cos \alpha,$$

$$OX: m_2 a_2 = m_2 g \sin \alpha - F_{\text{тр} 2},$$

$$OY: 0 = N_2 - m_2 g \cos \alpha,$$

или с учетом соотношений $F_{\text{тр} 1} = \mu_1 N_1$, $F_{\text{тр} 2} = \mu_2 N_2$:

$$a_1 = g (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha), \quad a_2 = g (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha).$$

Так как по условию задачи $\mu_1 > \mu_2$, то, очевидно, $a_1 < a_2$. Следовательно, бруски будут двигаться вместе с одинаковым ускорением, величину которого найдем из уравнений движения при условии, что бруски взаимодействуют между собой с силой R :

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha + R, \quad m_2 a = m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha - R.$$

Отсюда находим

$$R = \frac{m_1 m_2 (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha}{m_1 + m_2} g \approx 0,85 \text{ Н.}$$

• Ответ: $R = \frac{m_1 m_2 (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha}{m_1 + m_2} g \approx 0,85 \text{ Н.}$

• **Решение.** Поскольку коэффициенты трения брусков меньше $\tan \alpha \approx 0,58$, то каждый из брусков, будучи предоставленным сам себе, соскальзывал бы с наклонной плоскости. Если бруски начинают движение из положения, показанного на рисунке, то возможны два различных движения системы:

- брусок массой m_1 движется быстрее бруска массой m_2 . В этом случае сила взаимодействия между брусками $R = 0$;
- бруски движутся вместе с одинаковыми ускорениями.

Выясним, какой случай соответствует условию нашей задачи. Для этого найдем ускорения брусков \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , если бы они двигались независимо друг от друга.

2.28. Два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1,5$ кг при раздельном соскальзывании с одной и той же наклонной плоскости имеют ускорения $a_1 = 0,3$ м/с² и $a_2 = 0,2$ м/с² соответственно. С каким ускорением будут соскальзывать эти бруски с той же наклонной плоскости, если их положить так, как показано на рис. 2.19? Как изменится ответ, если бруски поменять местами?

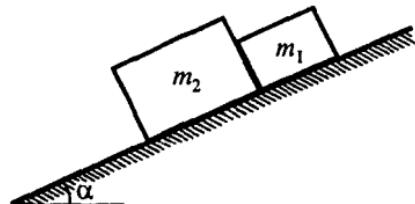


Рис. 2.19

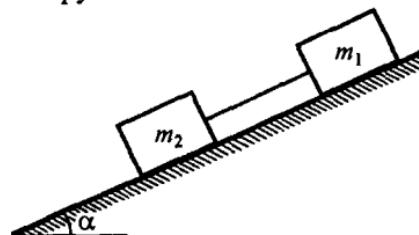


Рис. 2.20

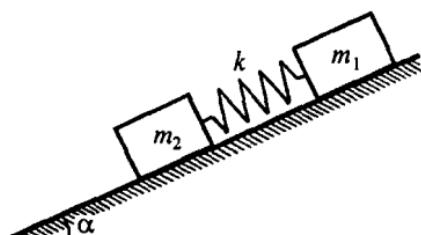


Рис. 2.21

2.29. Два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, соединенные невесомой нерастяжимой нитью, удерживаются на наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30^\circ$ (рис. 2.20). Коэффициенты трения брусков о плоскость равны $\mu_1 = 0,7$ и $\mu_2 = 0,4$ соответственно. Найти силу натяжения нити, если бруски отпустить.

2.30. Два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, соединенные невесомой недеформированной пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м, удерживаются на наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30^\circ$ (рис. 2.21). Коэффициенты трения брусков о плоскость равны $\mu_1 = 0,4$ и $\mu_2 = 0,7$ соответственно. Найти установившееся изменение длины пружины, если бруски отпустить.

2.31. Два груза массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через легкий блок, подвешенный к динамометру. Какое значение покажет динамометр во время движения грузов? Трения в оси блока нет.

• **Решение.** Механическая система состоит из двух грузов (рис. 2.22), на каждый из которых действуют силы тяжести и силы натяжения нитей.

Так как $m_2 > m_1$, то, очевидно, груз массой m_1 будет подниматься, а массой m_2 – опускаться.

Запишем уравнение движения каждого из грузов

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1, \quad m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2$$

в проекции на соответствующие оси с учетом, что ускорения тел $a_1 = a_2 = a$ и силы натяжения нити $T_1 = T_2 = T$:

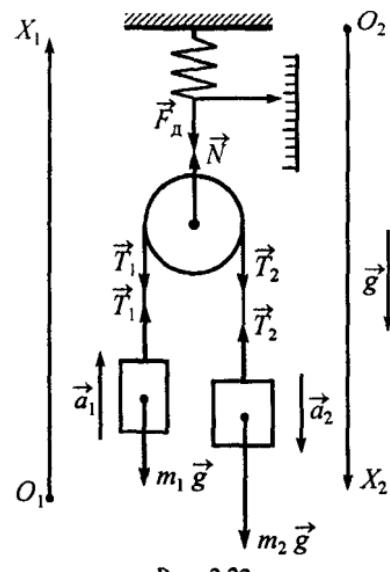


Рис. 2.22

$$O_1X_1 : m_1 a = T - m_1 g,$$

$$O_2X_2 : m_2 a = m_2 g - T.$$

Отсюда находим

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}; \quad T_1 = T_2 = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Сила \vec{F}_d , значение которой покажет динамометр, по величине равна силе \vec{N} реакции подвеса блока. Поскольку блок и весом и со стороны нити на него действуют две силы T_1 и T_2 , то

$$N = T_1 + T_2 = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Следовательно, динамометр покажет значение силы

$$F_d = N = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \approx 26 \text{ Н.}$$

- Ответ: $F_d = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \approx 26 \text{ Н.}$

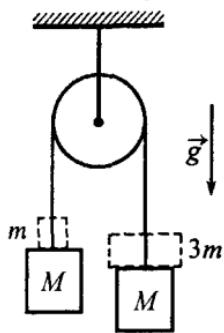


Рис. 2.23

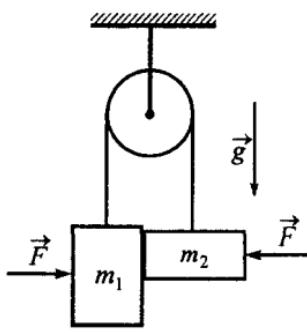


Рис. 2.24

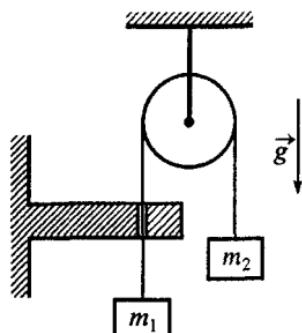


Рис. 2.25

2.32. Через легкий блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, на концах которой висят два одинаковых груза массой M каждый (рис. 2.23). Одновременно на каждый из этих грузов кладут по дополнительному грузу: справа массой $3m$ и слева массой m . Определить ускорение грузов и натяжение нити. Трения в оси блока нет.

2.33. Два груза массами $m_1 = 100 \text{ г}$ и $m_2 = 50 \text{ г}$ соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через легкий блок. Грузы прижимаются друг к другу с силой $F = 1 \text{ Н}$ (рис. 2.24). Коэффициент трения между грузами $\mu = 0,1$. С какими ускорениями движутся грузы в течение времени, пока соприкасаются друг с другом? Нити вертикальны, трения в оси блока нет.

2.34. Невесомая нерастяжимая нить перекинута через легкий блок и пропущена через отверстие в закрепленной доске (рис. 2.25). К концам нити подвешены грузы массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$). Найти ускорение грузов, если со стороны доски на нить действует постоянная сила трения $F_{\text{тр}}$. Нити вертикальны, трения в оси блока нет.

2.35. Определить ускорение, с которым движется груз m_1 в установке, изображенной на рис. 2.26. Масса груза $m_2 = 4 m_1$. Трением, массами блоков и нитей, а также растяжением нитей пренебречь. Нити вертикальны.

• Решение. В данной задаче условие $m_2 > m_1$ не позволяет без расчетов уверенно сказать, какой из грузов будет подниматься, а какой опускаться. Предположим, что груз массой m_1 поднимается с ускорением \vec{a}_1 , а массой m_2 опускается с ускорением \vec{a}_2 . Введем для каждого груза свою систему координат и запишем уравнение движения каждого из них в проекции на оси O_1X_1 и O_2X_2 соответственно:

$$O_1X_1: m_1 a_1 = T_1 - m_1 g, \quad (1)$$

$$O_2X_2: m_2 a_2 = m_2 g - T_2. \quad (2)$$

Система уравнений (1) – (2) содержит четыре неизвестных величины: ускорения a_1 , a_2 грузов и силы натяжения T_1 , T_2 нитей.

Легко понять, что груз массой m_1 движется быстрее, чем груз массой m_2 . Чтобы найти связь между ускорениями a_1 и a_2 грузов, сравним пройденные ими пути за один и тот же промежуток времени: если два тела, двигаясь из состояния покоя, за равные промежутки времени проходят соответственно пути

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad \text{и} \quad S_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2,$$

то их ускорения относятся так же, как эти пути:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Если груз массой m_1 пройдет вверх расстояние S_1 , то кусок нити длиной S_1 переместится через левый блок и правый блок вместе с грузом массой m_2 опустится на расстояние $S_2 = \frac{1}{2} S_1$. Следовательно,

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1. \quad (3)$$

Теперь найдем связь между силами натяжения T_1 и T_2 нитей. Для этого рассмотрим правый блок, на который эти силы действуют одновременно. Запишем уравнение движения этого блока в проекции на ось O_2X_2 :

$$O_2X_2: M a_2 = M g + T_2 - 2 T_1,$$

где M – масса блока. Поскольку массой блока можно пренебречь, то

$$0 = T_2 - 2 T_1. \quad (4)$$

Уравнения движения грузов (1) – (2) с учетом выражений (3) – (4) можно записать в виде

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g, \quad m_2 \frac{1}{2} a_1 = m_2 g - 2 T_1.$$

Следовательно,

$$a_1 = \frac{2(m_2 - 2m_1)g}{4m_1 + m_2} = \frac{(4m_1 - 2m_1)g}{4m_1} = \frac{g}{2} = 4,9 \text{ м/с}^2.$$

• Ответ: $a_1 = \frac{1}{2} g = 4,9 \text{ м/с}^2$.

2.36. Используя условие задачи №2.35, найти скорость груза m_1 в момент времени, когда он прошел расстояние $\Delta S = 10 \text{ см}$.

2.37. Два груза массами $m_1 = 1 \text{ кг}$ и $m_2 = 2 \text{ кг}$ соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через легкий блок, подвешенный к динамометру. Найти ускорения грузов, натяжение нити и показание динамометра, если блок вместе с грузами и динамометром поднимается вверх с ускорением $a_0 = 1 \text{ м/с}^2$. Массой динамометра пренебречь. Трения в оси блока нет.

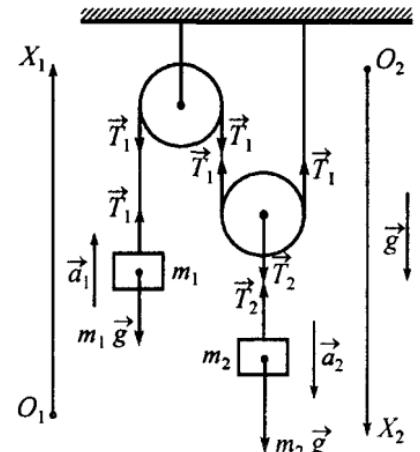


Рис. 2.26

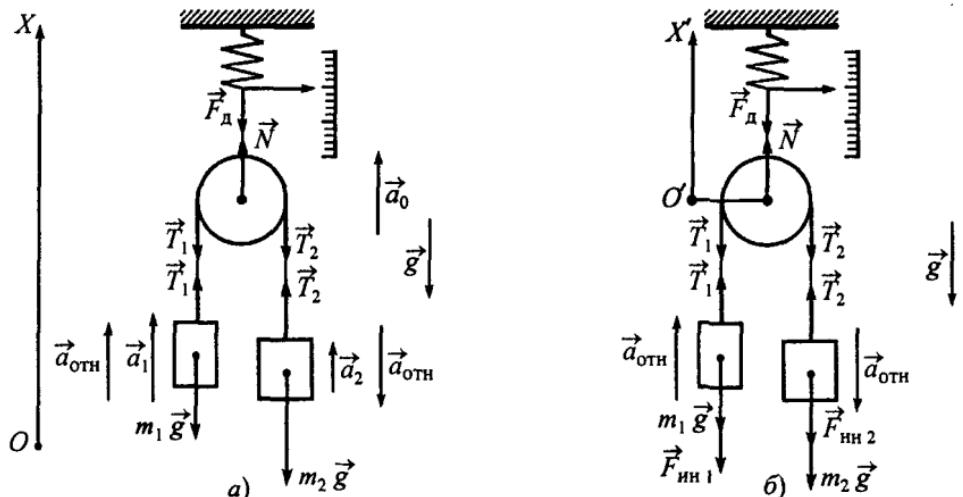


Рис. 2.27

Решение. Силы, действующие на каждый из грузов и на блок, указаны на рис. 2.27, а). Так как $m_2 > m_1$, то груз массой m_1 будет подниматься относительно блока с ускорением $\vec{a}_{\text{отн}}$, а груз массой m_2 с таким же по величине ускорением опускаться. Поскольку блок движется вверх с ускорением \vec{a}_0 , то относительно поверхности Земли ускорение \vec{a}_1 груза массой m_1 будет направлено вверх, а ускорение \vec{a}_2 груза массой m_2 может быть направлено как вверх, так и вниз. Пусть \vec{a}_2 направлено вверх.

Введем инерциальную систему отсчета, связанную с поверхностью Земли, и запишем уравнения движения грузов и блока

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1, \quad m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2, \quad M \vec{a}_0 = M \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

(где M – масса блока) в проекциях на ось OX системы координат:

$$m_1 a_1 = T - m_1 g, \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = T - m_2 g, \quad (2)$$

$$0 = N - 2T, \quad (3)$$

где учтено, что $T_1 = T_2 = T$, $M = 0$.

Абсолютные ускорения грузов \vec{a}_1 и \vec{a}_2 можно представить через ускорения $\vec{a}_{\text{отн}}$ относительно блока и ускорение блока \vec{a}_0

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_0,$$

которые в проекции на ось OX

$$a_1 = a_{\text{отн}} + a_0, \quad (4)$$

$$a_2 = -a_{\text{отн}} + a_0. \quad (5)$$

С учетом выражений (4) – (5) уравнения (1) – (3) запишем в виде

$$m_1 (a_{\text{отн}} + a_0) = T - m_1 g, \quad (6)$$

$$m_2 (-a_{\text{отн}} + a_0) = -T + m_2 g, \quad (7)$$

$$N = 2T.$$

Отсюда находим

$$a_{\text{отн}} = \frac{(m_2 - m_1)g + (m_2 - m_1)a_0}{m_1 + m_2}.$$

Следовательно, сила натяжения нити и показание динамометра $F_d = N$ (см. решение задачи №2.31)

$$T = m_1 (a_{\text{отн}} + a_0) + m_1 g = \frac{2m_1 m_2 (a_0 + g)}{m_1 + m_2} \approx 14,4 \text{ Н}, \quad F_d = 2T = \frac{4m_1 m_2 (a_0 + g)}{m_1 + m_2} \approx 28,8 \text{ Н},$$

а ускорения грузов

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_1)g + 2m_2a_0}{m_1 + m_2} \approx 4,6 \text{ м/с}^2, \quad a_2 = \frac{(m_1 - m_2)g + 2m_1a_0}{m_1 + m_2} \approx -2,6 \text{ м/с}^2.$$

Поскольку $a_2 < 0$, то это означает, что ускорение груза массой m_2 направлено противоположно, указанному на рисунке, т.е. вниз.

В задачах на движение тел, движущихся или неподвижных относительно других тел, которые сами движутся с некоторым ускорением, часто бывает удобно использовать систему отсчета, связанную с движущимся телом. Такая система отсчета будет неинерциальной. Если используется подобная система отсчета, то при расстановке сил ко всем телам, движение которых рассматривается относительно выбранной неинерциальной системы отсчета, необходимо приложить силу инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$, которая равна по величине произведению массы данного тела m на ускорение системы a и направлена в сторону, противоположную \vec{a} .

Рассмотрим решение задачи, используя неинерциальную систему отсчета, связанную с блоком (рис. 2.27, б). Относительно этой системы отсчета грузы движутся с равными по величине ускорениями $a_{\text{отн}}$ под действием сил тяжести, сил натяжения нити и сил инерции:

$$m_1 \vec{a}_{\text{отн}} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{ин}1}, \quad m_2 \vec{a}_{\text{отн}} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{ин}2},$$

где $\vec{F}_{\text{ин}1} = -m_1 \vec{a}_0$, $\vec{F}_{\text{ин}2} = -m_2 \vec{a}_0$. Следовательно, в проекции на ось OX'

$$m_1 a_{\text{отн}} = -m_1 g + T - m_1 a_0, \quad -m_2 a_{\text{отн}} = -m_2 g + T - m_2 a_0,$$

или

$$m_1 (a_{\text{отн}} + a_0) = -m_1 g + T, \quad m_2 (a_0 - a_{\text{отн}}) = -m_2 g + T. \quad (8)$$

Как видим, уравнения (8) совпадают с уравнениями движения (6) – (7), полученными в инерциальной системе отсчета. Дальнейшее решение задачи совпадает с уже рассмотренным.

• Ответ: $a_1 = \frac{(m_2 - m_1)g + 2m_2a_0}{m_1 + m_2} \approx 4,6 \text{ м/с}^2$, $a_2 = \frac{(m_1 - m_2)g - 2m_1a_0}{m_1 + m_2} \approx -2,6 \text{ м/с}^2$;

$$T = \frac{2m_1m_2(a_0 + g)}{m_1 + m_2} \approx 14,4 \text{ Н}; \quad F_{\text{д}} = \frac{4m_1m_2(a_0 + g)}{m_1 + m_2} \approx 28,8 \text{ Н.}$$

2.38. Паук массой $m = 0,1$ г поднимается по нити паутины, которая выдерживает максимальное натяжение $T_{\text{max}} = 7 \cdot 10^{-4}$ Н. С каким наибольшим ускорением может подниматься паук, если паутина прикреплена к потолку лифта, опускающегося с ускорением $a_0 = 3 \text{ м/с}^2$?

2.39. В механической системе, показанной на рис. 2.28, массы тел известны и равны m_0 , m_1 , m_2 . Нити невесомы и нерастяжимы. Трения нет, массы блоков пренебрежимо малы. Найти ускорение тела массой m_1 .

2.40. Брускок массой m_1 , находящийся на горизонтальном столе, соединен невесомой нерастяжимой нитью и легкой пружиной жесткостью k с грузом массой m_2 так, как показано на рис. 2.29. Найти установившееся изменение длины пружины, если стол начнет двигаться вертикально вверх с ускорением \vec{a} . Коэффициент трения бруска о поверхность стола равен μ .

• Решение. В зависимости от значений масс тел и коэффициента трения возможны два различных движения тел системы:

- тела движутся относительно стола;
- тела покоятся относительно стола.

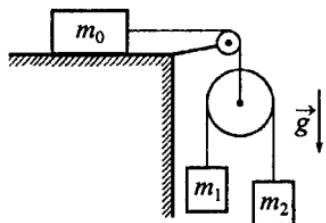


Рис. 2.28

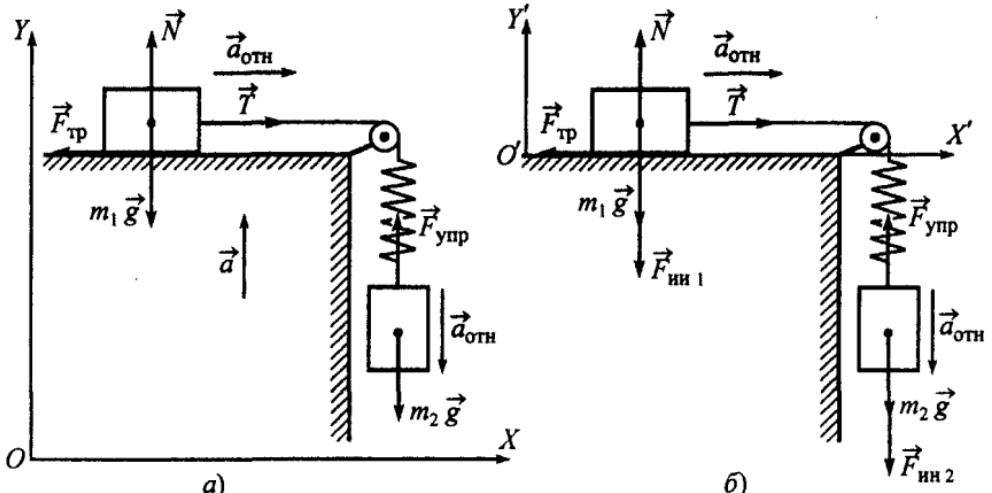


Рис. 2.29

Рассмотрим первый случай.

При движении тел относительно стола и бруска будут действовать четыре силы: сила тяжести $m_1 \vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} , сила натяжения нити \vec{T} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. На груз будут действовать сила тяжести $m_2 \vec{g}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Под действием указанных сил бруск и груз относительно поверхности Земли будут двигаться с ускорениями

$$\vec{d}_1 = \vec{a}_{\text{отн} 1} + \vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{d}_2 = \vec{a}_{\text{отн} 2} + \vec{a},$$

соответственно, где $\vec{a}_{\text{отн} 1}$, $\vec{a}_{\text{отн} 2}$ – ускорения бруска и груза относительно стола, причем $a_{\text{отн} 1} = a_{\text{отн} 2} = a_{\text{отн}}$.

Запишем уравнения движения тел (рис. 2.29, а)

$$m_1 \vec{d}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{тр}}, \quad m_2 \vec{d}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{F}_{\text{упр}}$$

в проекциях на оси OX и OY системы координат:

$$OX: m_1 a_{\text{отн} 1} = T - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$OY: m_1 a = -m_1 g + N, \quad (2)$$

$$OY: m_2 (a - a_{\text{отн} 2}) = -m_2 g + F_{\text{упр}}. \quad (3)$$

Поскольку $F_{\text{тр}} = \mu N$ и $T = F_{\text{упр}}$, то уравнения (1) – (3) можно записать в виде

$$m_1 a_{\text{отн}} = F_{\text{упр}} - \mu m_1 (a + g), \quad (4)$$

$$m_2 (a - a_{\text{отн}}) = -m_2 g + F_{\text{упр}}. \quad (5)$$

Решив уравнения (4) – (5) относительно ускорения $a_{\text{отн}}$, получим

$$a_{\text{отн}} = \frac{(m_2 - \mu m_1)(a + g)}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

Так как мы предположили наличие движения тел относительно стола, то рассмотренное решение справедливо при

$$a_{\text{отн}} = \frac{(m_2 - \mu m_1)(a + g)}{m_1 + m_2} > 0 \quad \text{или} \quad \mu < \frac{m_2}{m_1}.$$

Подставив значение $a_{\text{отн}}$ в уравнение (4) или (5), получим

$$F_{\text{упр}} = \frac{m_1 m_2 (1 + \mu)(a + g)}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

Представив $F_{\text{упр}} = k \Delta x$ (где Δx – изменение длины пружины), из (7) находим

$$\Delta x = \frac{m_1 m_2 (1 + \mu)(a + g)}{k(m_1 + m_2)}.$$

В случае $a_{\text{отн}} = 0$ на брусков будет действовать сила трения покоя, величина которой неизвестна. Поэтому определить силу $F_{\text{упр}}$ из уравнений (4) нельзя. Однако уравнение (5) остается справедливым и в этом случае, если положить $a_{\text{отн}} = 0$. Следовательно,

$$F_{\text{упр}} = k \Delta x = m_2 (a + g),$$

или

$$\Delta x = \frac{m_2 (a + g)}{k} \quad \text{при} \quad \mu \geq \frac{m_2}{m_1}.$$

Рассмотрим решение задачи, используя неинерциальную систему отсчета, связанную со столом (рис. 2.29, б). Приложим к брускам и грузу силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}1}$, $\vec{F}_{\text{ин}2}$ и запишем уравнения движения

$$m_1 \vec{a}_{\text{отн}} = m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_{\text{ин}1}, \quad m_2 \vec{a}_{\text{отн}} = m_2 \vec{g} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{ин}2}$$

в проекциях на оси OX' и OY' системы координат:

$$OX': m_1 a_{\text{отн}} = T - F_{\text{тр}},$$

$$OY': 0 = -m_1 g + N - F_{\text{ин}1},$$

$$OY': -m_2 a_{\text{отн}} = -m_2 g + F_{\text{упр}} - F_{\text{ин}2},$$

где $F_{\text{ин}1} = m_1 a$, $F_{\text{ин}2} = m_2 a$. Следовательно,

$$m_1 a_{\text{отн}} = T - F_{\text{тр}}, \quad 0 = -m_1 g + N - m_1 a, \quad -m_2 a_{\text{отн}} = -m_2 g + F_{\text{упр}} - m_2 a. \quad (8)$$

Как видим, уравнения (8) совпадают с уравнениями движения (1) – (3), полученными в инерциальной системе отсчета. Дальнейшее решение задачи совпадает с уже рассмотренным.

• Ответ: $\Delta x = \frac{m_1 m_2 (1 + \mu) (a + g)}{k (m_1 + m_2)}$ при $\mu < \frac{m_2}{m_1}$; $\Delta x = \frac{m_2 (a + g)}{k}$ при $\mu \geq \frac{m_2}{m_1}$.

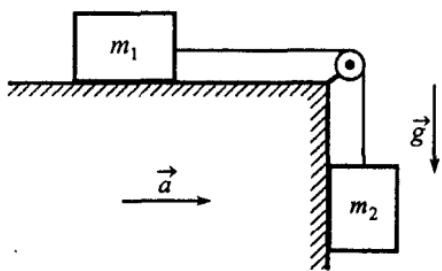


Рис. 2.30

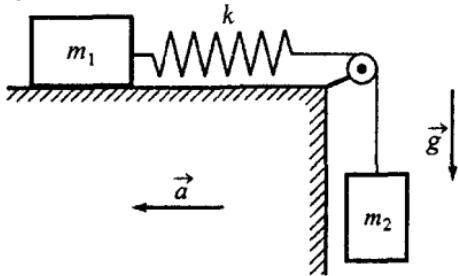


Рис. 2.31

2.41. Брусков массой m_1 , находящийся на горизонтальном столе, соединен невесомой нерастяжимой нитью с грузом массой m_2 так, как показано на рис. 2.30. Найти ускорения тел относительно стола, если стол движется вправо с ускорением \vec{a} . Коэффициенты трения бруска и груза о стол одинаковы и равны μ .

2.42. Брусков массой m_1 , находящийся на горизонтальном столе, соединен легкой пружиной жесткостью k и невесомой нерастяжимой нитью с грузом массой m_2 так, как показано на рис. 2.31. Найти установившееся изменение длины пружины, если стол начнет двигаться влево с ускорением \vec{a} . Коэффициент трения бруска о поверхность стола равен μ .

2.43. Доска длиной $l = 2$ м и массой $M = 20$ кг может без трения скользить по гладкой горизонтальной поверхности. На краю доски находится брусков массой $m = 10$ кг (рис. 2.32, а). Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0,1$. К доске прикладывают горизонтальную силу $F = 60$ Н.

Найти ускорения бруска и доски. Через какое время после начала действия силы брускок упадет с доски? Как изменится ответ, если сила $F = 20 \text{ N}$?

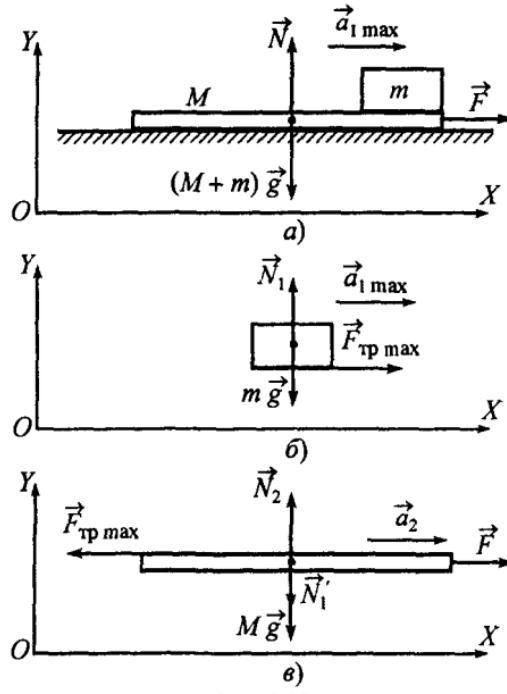


Рис. 2.32

Запишем уравнение движения тел

$$(M+m)\vec{a}_{1 \max} = \vec{F}_{\text{тр max}} + (M+m)\vec{g} + \vec{N}$$

в проекции на ось OX системы координат:

$$(M+m)a_{1 \max} = F_{\text{тр max}}. \quad (1)$$

Рассмотрим отдельно брускок и доску.

На брускок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр max}}$ и сила реакции со стороны доски \vec{N}_1 (рис. 2.32, б). Запишем уравнение движения брускка

$$m\vec{a}_{1 \max} = \vec{F}_{\text{тр max}}$$

в проекциях на оси OX и OY системы координат

$$OX: m a_{1 \max} = F_{\text{тр max}},$$

$$OY: 0 = -m g + N_1$$

и используя значение $F_{\text{тр max}} = \mu N_1$, получим

$$a_{1 \max} = \mu g. \quad (2)$$

Из выражений (1) – (2) находим

$$F_{\text{max}} = (M+m)\mu g = 29,4 \text{ N}.$$

Следовательно, если к доске приложить силу $F = 60 \text{ N} > F_{\text{max}}$, то брускок будет двигаться с ускорением

$$a_{1 \max} = \mu g = 0,98 \text{ m/c}^2.$$

Из уравнения движения доски

$$M\vec{a}_2 = \vec{F} + M\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр max}}$$

(где $|\vec{N}'_1| = |\vec{N}_1|$ – вес брускка; \vec{N}_2 – сила реакции поверхности, на которой находится доска), записанного в проекции на ось OX системы координат (рис. 2.32, в)

• Решение. Поскольку поверхность, на которой находится доска, гладкая, то при любой величине силы \vec{F} доска будет двигаться. При этом доска будет увлекать за собой брускок за счет силы трения, действующей между ними. Наибольшая сила трения, с которой брускок может взаимодействовать с доской, равна максимальной силе трения покоя $F_{\text{тр max}}$. Эта сила будет сообщать брускок некоторое ускорение $\vec{a}_{1 \max}$. Если сила трения $F_{\text{тр}} < F_{\text{тр max}}$, то брускок и доска будут двигаться как одно целое с ускорением $\vec{a} < \vec{a}_{1 \max}$. Если к доске приложить достаточно большую силу \vec{F} , которая сообщит ей ускорение $\vec{a} > \vec{a}_{1 \max}$, то доска начнет выскальзывать из-под брускка.

Найдем максимальную силу \vec{F}_{max} , при которой доска и брускок будут двигаться вместе с ускорением $\vec{a} = \vec{a}_{1 \max}$, а сила трения покоя $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр max}}$. При совместном движении на тела действуют три силы: сила $\vec{F} = \vec{F}_{\text{max}}$, сила тяжести $(M+m)\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} (рис. 2.32, а).

$$M a_2 = F - F_{\text{тр max}}, \quad \text{или} \quad M a_2 = F - \mu m g,$$

найдем ее ускорение:

$$a_2 = \frac{F - \mu m g}{M} \approx 2,5 \text{ м/с}^2.$$

Поскольку ускорение бруска относительно доски

$$a_{\text{отн}} = a_2 - a_{1 \text{ max}}, \quad a_{\text{отн}} = \mu g = \frac{F - \mu g (M + m)}{M},$$

то из уравнения равноускоренного движения бруска, соответствующего моменту времени, когда он упадет с доски

$$l = \frac{a_{\text{отн}} t^2}{2},$$

получим

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{\text{отн}}}} = \sqrt{\frac{2lM}{F - \mu g (M + m)}} \approx 1,14 \text{ с.}$$

Если к доске приложить силу $F = 20 \text{ Н} < F_{\text{max}}$, то тела будут двигаться вместе с ускорением

$$a = \frac{F}{M + m} \approx 0,67 \text{ м/с}^2$$

и доска не выскоцьнет из-под бруска.

- Ответ: $a_1 = \mu g = 0,98 \text{ м/с}^2$, $a_2 = \frac{F - \mu m g}{M} \approx 2,5 \text{ м/с}^2$, $t = \sqrt{\frac{2lM}{F - \mu g (M + m)}} \approx 1,14 \text{ с};$
 $a_1 = a_2 = \frac{F}{M + m} = 0,67 \text{ м/с}^2$, бруск с доски не упадет.

2.44. На доске массой $M = 20 \text{ кг}$ лежит бруск массой $m = 5 \text{ кг}$. Какую горизонтальную силу нужно приложить к доске, чтобы выдернуть ее из-под бруска? Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_1 = 0,6$, между доской и опорой – $\mu_2 = 0,2$.

2.45. Тележка массой $M = 20 \text{ кг}$ может катиться без трения горизонтально. На тележке лежит бруск массой $m = 2 \text{ кг}$. Коэффициент трения между бруском и тележкой $\mu = 0,25$. Определить ускорения бруска и тележки, если к брускому приложить горизонтальную силу $F = 29,6 \text{ Н}$.

2.46. На столе лежит доска массой $M = 2 \text{ кг}$, на которой находится бруск массой $m = 1 \text{ кг}$. Коэффициенты трения между поверхностями бруска и доски $\mu_1 = 0,4$, доски и стола $\mu_2 = 0,1$. С какими ускорениями будут двигаться бруск и доска, если к брускому приложить горизонтальную силу: а) $F = 3 \text{ Н}$; б) $F = 10 \text{ Н}$?

2.47. Три бруска массами $m = 2 \text{ кг}$, $2m$ и $3m$ лежат один на другом на гладком горизонтальном столе (рис. 2.33). Коэффициенты трения между брусками одинаковы и равны $\mu = 0,05$. С какой горизонтальной силой нужно тянуть средний бруск, чтобы он скользнул с нижнего, а с него скользнул верхний бруск?

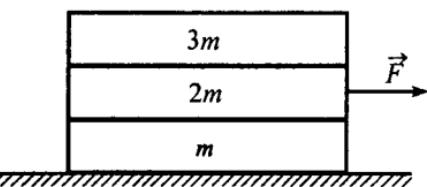


Рис. 2.33

2.48. Доска массой $M = 10 \text{ кг}$ может скользить без трения по горизонтальной поверхности. На доске лежит бруск массой $m = 4 \text{ кг}$. Коэффициент трения между поверхностями доски и бруска равен $\mu = 0,5$. Доска

соединена невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через легкий блок, с грузом (рис. 2.34). Какой должна быть масса груза m_x , чтобы бруск скользил по доске?

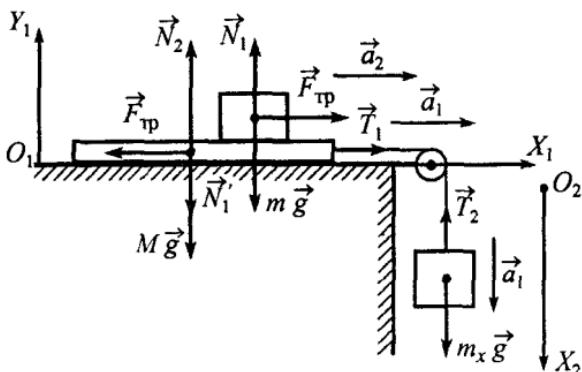


Рис. 2.34

$|\vec{N}'_1| = |\vec{N}_1|$. На груз действуют сила тяжести $m_x \vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T}_2 . Под действием этих сил доска и груз будут двигаться с ускорением \vec{a}_1 , а бруск с ускорением \vec{a}_2 .

Запишем уравнения движения бруска и доски

$$m \vec{a}_2 = m \vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}_1, \quad M \vec{a}_1 = M \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}_2 + \vec{N}_1'$$

в проекциях на оси системы координат $X_1O_1Y_1$, а уравнение движения груза

$$m_x \vec{a}_1 = m_x \vec{g} + \vec{T}_2$$

в проекции на ось O_2X_2 с учетом, что силы натяжения нити $T_1 = T_2 = T$:

$$O_1X_1 : m a_2 = F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$O_1Y_1 : 0 = N_1 - m g, \quad (2)$$

$$O_1X_1 : M a_1 = T - F_{\text{тр}}, \quad (3)$$

$$O_2X_2 : m_x a_1 = m_x g - T, \quad (4)$$

где сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N_1$. Сложив левые и правые части уравнений (3) и (4), получим

$$(M + m_x) a_1 = m_x g - \mu m g. \quad (5)$$

Из (1) и (5) находим

$$a_2 = \mu g; \quad a_1 = \frac{(m_x - \mu m) g}{M + m_x}.$$

Поскольку по условию задачи доска должна выскакывать из-под бруска, то $a_1 > a_2$, т.е.

$$\frac{(m_x - \mu m) g}{M + m_x} > \mu g.$$

Следовательно,

$$m_x > \frac{\mu (M + m)}{1 - \mu} = 14 \text{ кг.}$$

• Ответ: $m_x > \frac{\mu (M + m)}{1 - \mu} = 14 \text{ кг.}$

2.49. На гладком горизонтальном столе лежит доска массой $M = 2 \text{ кг}$, на которой находится бруск массой $m = 1 \text{ кг}$. Бруск соединен невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок, с грузом массой $2m$ (рис. 2.35). С какими ускорениями будут двигаться тела, представленные самим себе, если коэффициент трения между поверхностями бруска и доски равен $\mu = 0,5$?

• Решение. Так как поверхность, на которой находится доска, гладкая, то при любой массе груза доска будет двигаться, увлекая за собой бруск за счет силы трения, действующей между ними.

Рассмотрим каждое тело отдельно.

На бруск действуют сила тяжести $m \vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила реакции \vec{N}_1 со стороны доски. На доску действуют сила тяжести $M \vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T}_1 , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила реакции \vec{N}_2 и вес бруска

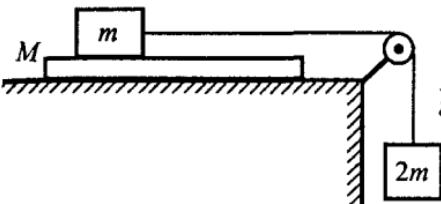


Рис. 2.35

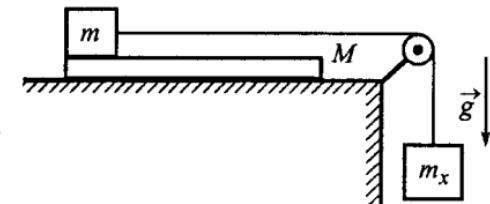


Рис. 2.36

2.50. На гладком горизонтальном столе лежит доска массой $M = 10$ кг, на конце которой удерживается бруском массой $m = 2$ кг. К брускому с помощью невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через легкий блок, подвешен груз массой m_x (рис. 2.36). Коэффициент трения между бруском и доской равен $\mu = 0,2$. При каком минимальном значении массы груза $m_{x\min}$ бруск будет скользить по доске, если тела освободить? Через какое время после начала движения бруск упадет с доски, если $m_x = 2m_{x\min}$, а длина доски $l = 5$ м?

2.51. На гладком склоне с углом при основании $\alpha = 30^\circ$ лежит доска массой $M = 10$ кг, а на доске находится бруском массой $m = 2$ кг. На доску действует сила, направленная вверх вдоль склона. При какой величине этой силы бруск соскользнет с доски? Коэффициент трения между доской и бруском $\mu = 0,8$.

• *Решение.* Поскольку коэффициент трения бруска о поверхность доски больше $\tan \alpha \approx 0,58$, то бруск не будет скользить с неподвижной доски. Для того чтобы бруск заскользил по доске, ее нужно выдернуть из-под бруска. Если доска будет двигаться вверх вдоль склона, то она будет увлекать за собой бруск за счет силы трения, действующей между ними. Наибольшая сила трения, с которой бруск может взаимодействовать с доской, равна максимальной силе трения покоя $F_{\text{тр max}} = \mu N_1$ (рис. 2.37). При этом бруск будет иметь ускорение $\vec{a}_{1\max}$, величину которого найдем, записав уравнения движения бруска

$$m \vec{a}_{1\max} = m \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр max}}$$

в проекциях на оси системы координат:

$$OX: m a_{1\max} = F_{\text{тр max}} - m g \sin \alpha, \quad (1)$$

$$OY: 0 = N_1 - m g \cos \alpha. \quad (2)$$

Следовательно,

$$a_{1\max} = g (\mu \cos \alpha - \sin \alpha). \quad (3)$$

Поскольку ускорение бруска не может превысить $a_{1\max}$, а ускорение доски \vec{a}_2 может быть любым, то при $a_2 > a_{1\max}$ бруск будет скользить с доски.

Запишем уравнение движения доски

$$M \vec{a}_2 = \vec{F} + M \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{N}'_1 + \vec{F}_{\text{тр max}}$$

в проекции на ось OX системы координат:

$$OX: M a_2 = F - M g \sin \alpha - F_{\text{тр max}}$$

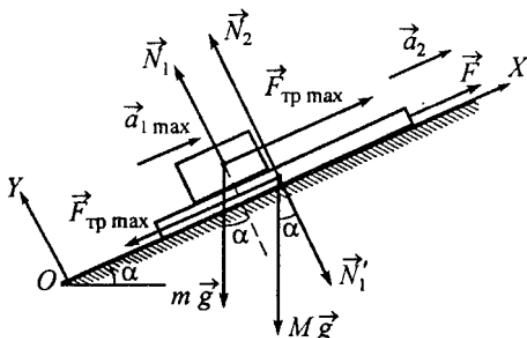


Рис. 2.37

Отсюда находим

$$a_2 = \frac{F - Mg \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha}{M}. \quad (4)$$

Из соотношений (3) – (4) с учетом условия задачи ($a_2 > a_{1\max}$) получим

$$\frac{F - Mg \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha}{M} > g (\mu \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Следовательно,

$$F > \mu (M + m) g \cos \alpha \approx 81,5 \text{ Н.}$$

• Ответ: $F > \mu (M + m) g \cos \alpha \approx 81,5 \text{ Н.}$

2.52. На гладкой наклонной плоскости с углом при основании α находится доска массой M . С каким ускорением и куда должен двигаться по этой доске человек массой m , чтобы доска не скользила?

2.53. На наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30^\circ$ лежит доска массой $M = 2 \text{ кг}$, а на доске находится брускок массой $m = 1 \text{ кг}$. Коэффициент трения доски о плоскость равен $\mu_1 = 0,2$, бруска о доску $\mu_2 = 0,15$. С какими ускорениями движутся брускок и доска, предоставленные сами себе?

2.54. На горизонтальном столе находится клин массой M и углом при основании α , а на нем – брускок массой m (рис. 2.38, а). Пренебрегая трением, найти ускорение клина.

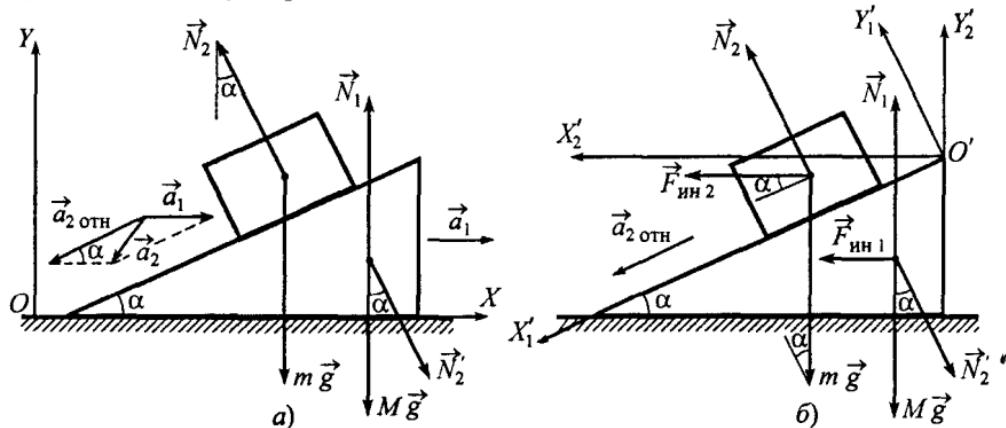


Рис. 2.38

• Решение. Брускок, соскальзывая с клина, будет действовать на него с силой $\vec{N}_2' = -\vec{N}_2$, выдавливая клин вправо. При этом ускорение \vec{a}_2 бруска относительно системы отсчета, связанной со столом, можно представить в виде

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{2\text{отн}},$$

где \vec{a}_1 – ускорение клина; $\vec{a}_{2\text{отн}}$ – ускорение бруска относительно клина. Запишем уравнения движения бруска и клина

$$m \vec{a}_2 = m \vec{g} + \vec{N}_2, \quad M \vec{a}_1 = M \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2'$$

в проекциях на оси системы координат XOY (рис. 2.38, а):

$$OX: m (a_1 - a_{2\text{отн}} \cos \alpha) = -N_2 \sin \alpha, \quad (1)$$

$$OY: -m a_{2\text{отн}} \sin \alpha = N_2 \cos \alpha - m g, \quad (2)$$

$$OX: M a_1 = N_2 \sin \alpha, \quad (3)$$

где учтено, что $N_2 = N_2'$.

Выразив a_2 от t из уравнения (2)

$$a_2 \text{ отн} = \frac{m g - N_2 \cos \alpha}{m \sin \alpha}$$

и подставив в (1)

$$m \left\{ a_1 - \frac{m g - N_2 \cos \alpha}{m \sin \alpha} \cos \alpha \right\} = -N_2 \sin \alpha,$$

получим

$$m a_1 \sin \alpha - m g \cos \alpha + N_2 \cos^2 \alpha = -N_2 \sin^2 \alpha, \quad N_2 = m (g \cos \alpha - a_1 \sin \alpha).$$

Следовательно, уравнение движения клина (3) примет вид

$$M a_1 = m (g \cos \alpha - a_1 \sin \alpha) \sin \alpha.$$

Отсюда находим

$$a_1 (M + m \sin^2 \alpha) = m g \sin \alpha \cos \alpha, \quad a_1 = \frac{m g \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Рассмотрим решение задачи, используя неинерциональные системы отсчета $X'_1 O'Y'_1$ и $X'_2 O'Y'_2$, связанные с клином (рис. 2.38, б). Относительно этих систем отсчета клин будет неподвижен, а ускорение бруска \vec{a}_2 отн направлено вдоль наклонной плоскости клина.

Запишем уравнение движения бруска

$$m \vec{a}_2 \text{ отн} = m \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{ин}} 2$$

в проекции на ось $O'Y'_1$ системы координат, а уравнение движения клина

$$0 = M \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}'_2 + \vec{F}_{\text{ин}} 1$$

в проекции на ось $O'X'_2$:

$$O'Y'_1 : 0 = -m g \cos \alpha + N_2 + F_{\text{ин}} 2 \sin \alpha,$$

$$O'X'_2 : 0 = F_{\text{ин}} 1 - N_2 \sin \alpha,$$

где $\vec{F}_{\text{ин}} 2 = -m \vec{a}_1$; $\vec{F}_{\text{ин}} 1 = -M \vec{a}_1$ — силы инерции, действующие на брускок и клин соответственно. Следовательно,

$$0 = -m g \cos \alpha + N_2 + m a_1 \sin \alpha; \quad 0 = M a_1 - N_2 \sin \alpha; \quad a_1 = \frac{m g \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

• Ответ: $a_1 = \frac{m g \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$.

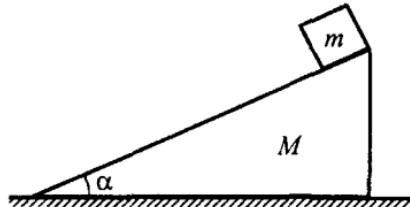


Рис. 2.39

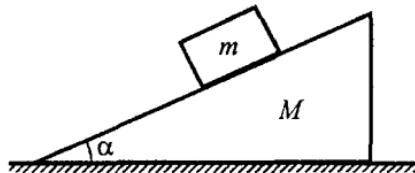


Рис. 2.40

2.55. Брускок массой $m = 5$ кг соскальзывает с вершины наклонной плоскости клина массой $M = 20$ кг и углом при основании $\alpha = 30^\circ$ (рис. 2.39). Пренебрегая трением, найти величину скорости бруска в конце спуска, если длина наклонной плоскости клина $l = 1$ м, а начальная скорость бруска равна нулю.

2.56. Брускок массой $m = 80$ кг удерживают на наклонной плоскости клина массой $M = 20$ кг с углом при основании $\alpha = 30^\circ$ (рис. 2.40). Трения между бруском и наклонной плоскостью клина и между клином и горизонтальной поверхностью нет. В некоторый момент брускок отпускают. На какое расстояние сместится клин за промежуток времени, в течение

которого брусков пройдет по наклонной плоскости расстояние $l = 4$ м? С каким ускорением относительно клина движется брусков?

2.57. Между наклонной плоскостью клина, стоящего на горизонтальной поверхности, и вертикальной стенкой кладут шар такой же массы, что и клин (рис. 2.41). Определить ускорение клина, если угол при его основании равен $\alpha = 30^\circ$. Трения нет.

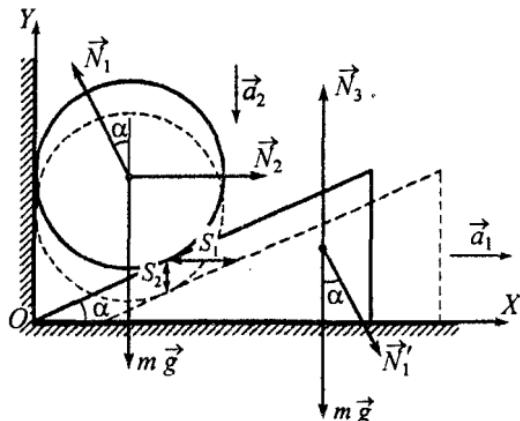


Рис. 2.41

• **Решение.** На шар действуют сила тяжести $m \vec{g}$, сила реакции \vec{N}_1 со стороны клина и сила реакции \vec{N}_2 стенки. На клин действуют сила тяжести $m \vec{g}$, сила давления \vec{N}_1' со стороны шара и сила реакции \vec{N}_3 пола. Под действием этих сил шар будет двигаться вертикально вниз с ускорением \vec{a}_2 , а клин – горизонтально с ускорением \vec{a}_1 .

Запишем уравнения движения клина и шара

$$m \vec{a}_1 = m \vec{g} + \vec{N}_1' + \vec{N}_3,$$

$$m \vec{a}_2 = m \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2$$

в проекциях на оси системы координат XOY :

$$OX: m a_1 = N_1 \sin \alpha, \quad (1)$$

$$OY: -m a_2 = -m g + N_1 \cos \alpha, \quad (2)$$

где учтено, что $N_1 = N_1'$.

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо еще одно соотношение, связывающее неизвестные величины a_1 , a_2 и N_1 . Поскольку связь между ускорениями a_1 , a_2 и силой N_1 дают уравнения движения (1) – (2), то, очевидно, нужно найти связь между ускорениями тел.

Из рисунка видно, что если шар опустится на расстояние S_2 , то клин сместится на S_1 , причем

$$S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}, \quad S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}, \quad S_2 = S_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,

$$a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Решив систему уравнений (1) – (3) относительно a_1 , получим

$$N_1 = \frac{m a_1}{\sin \alpha}; \quad m a_2 = m g - \frac{m a_1}{\sin \alpha} \cos \alpha; \quad a_1 \operatorname{tg} \alpha = g - \frac{a_1}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad a = a_1 = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \approx 4,24 \text{ м/с}^2.$$

• Ответ: $a = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \approx 4,24 \text{ м/с}^2$.

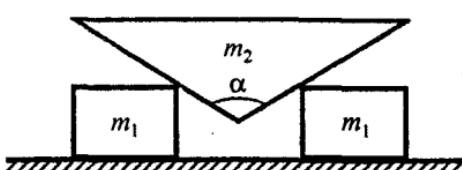


Рис. 2.42

2.58. Между двумя одинаковыми брусками массой m каждый вставлен клин массой M с углом при вершине α так, как показано на рис. 2.42. Пренебрегая трением, определить ускорения тел.

2.59. К свободному концу нити, прикрепленной к стене и перебро-

шенной через легкий блок, подвешен груз. Блок закреплен на бруске массой $M = 0,6$ кг, который может скользить без трения по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 2.43). В начальный момент нить с грузом отклоняют от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$ и отпускают. Определить ускорение бруска, если угол, образованный нитью с вертикалью, не меняется при движении системы. Чему равна масса груза? Трения в оси блока нет.

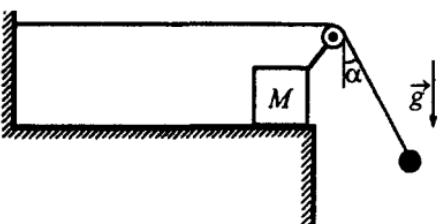


Рис. 2.43

§3. Динамика системы.

Импульс. Работа. Мощность. Энергия. Законы сохранения

Импульс. Закон сохранения импульса

Импульсом материальной точки называется векторная величина, равная произведению ее массы m на вектор скорости точки \vec{v} :

$$\vec{p} = m \vec{v}. \quad (3.1)$$

Из первого закона Ньютона следует, что импульс свободной частицы не изменяется ни по величине, ни по направлению, т.е. $\vec{p} = \text{const}$.

Как изменяется импульс частицы, на которую действуют силы? Обратимся ко второму закону Ньютона (2.1) и перепишем левую часть (2.1) (при условии, что масса частицы $m = \text{const}$) в виде

$$m \vec{a} = m \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = \frac{d \vec{p}}{dt}. \quad (3.2)$$

Тогда вместо (2.1) получим

$$\frac{d \vec{p}}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k, \quad (3.3)$$

т.е. скорость изменения импульса материальной точки равна векторной сумме сил, действующих на нее. Из (3.3) следует, что элементарное изменение импульса частицы $d\vec{p}$ за бесконечно малый промежуток времени dt равно

$$d\vec{p} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k dt, \quad (3.4)$$

где произведение $\vec{F}_k dt$ называется *импульсом силы* \vec{F}_k за время dt , т.е. изменение импульса частицы определяется не силами, а импульсами сил.

За конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ изменение импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (\vec{p}_1 – импульс частицы при $t = t_1$ и \vec{p}_2 – при $t = t_2$) определяется выражением

$$\Delta\vec{p} = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k \rangle \Delta t, \quad (3.5)$$

где $\langle \vec{F}_k \rangle$ – среднее значение силы \vec{F}_k за время Δt . Если сила $\vec{F}_k = \text{const}$, то $\langle \vec{F}_k \rangle = \vec{F}_k$.

Соотношения (3.4) – (3.5) обычно используются в задачах, где нужно определить силы, действующие на частицу, по заданному изменению ее импульса.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из n взаимодействующих друг с другом частиц, массы которых равны m_1, m_2, \dots, m_n . Если частицы, входящие в систему, взаимодействуют только между собой и не взаимодействуют с окружающими телами, не входящими в систему, то такая система называется *замкнутой*.

Импульсом системы называется векторная сумма импульсов $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ (m_i – масса i -й частицы; \vec{v}_i – ее скорость в инерциальной системе отсчета) всех частиц, входящих в систему:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (3.6)$$

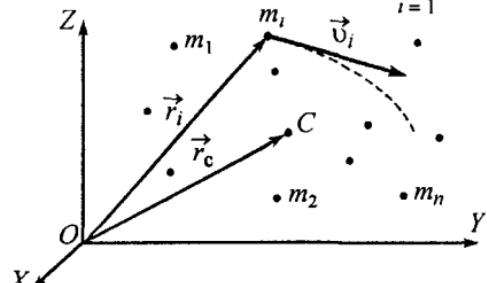


Рис. 3.1

С течением времени скорости и импульсы частиц изменяются и каждая из частиц движется по некоторой своей траектории $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ (рис. 3.1). Центром инерции (или центром масс) системы материальных точек называется точка в пространстве, радиус-вектор которой

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (3.7)$$

где

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (3.8)$$

– масса системы.

Скорость центра инерции равна

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \frac{1}{M} \vec{P}. \quad (3.9)$$

Переписав выражение (3.9) в виде

$$\vec{P} = M \vec{v}_c, \quad (3.10)$$

мы видим, что импульс системы, скорость движения центра инерции и сумма масс входящих в систему частиц связаны таким же соотношением, как импульс, скорость и масса отдельной частицы. Мы можем поэтому рассматривать импульс системы \vec{P} как импульс одной материальной точки, находящейся в центре инерции системы и имеющей массу M , равную сумме масс всех частиц в системе. Скорость центра инерции \vec{v}_c при этом можно рассматривать как скорость движения системы частиц как целого.

Запишем второй закон Ньютона в форме (3.3) для какой-либо i -й частицы системы:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{1-i} + \vec{F}_{2-i} + \dots + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots, \quad (3.11)$$

где \vec{F}_{j-i} – сила, с которой j -я частица действует на i -ю; $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ – внешние силы, действующие на i -ю частицу со стороны тел, не входящих в систему. Суммируя выражение (3.11) по всем частицам системы и учитывая, что $\sum_{k=1}^n p_k = \vec{P}$, а сумма всех внутренних сил \vec{F}_{j-i} взаимодействия между частицами системы на основании третьего закона Ньютона равна нулю, получим

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k, \quad (3.12)$$

где $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$ – сумма всех внешних сил, действующих на частицы системы.

Соотношение (3.12) называют вторым законом Ньютона для системы взаимодействующих материальных точек: скорость изменения полного импульса системы равна векторной сумме внешних сил, действующих на систему.

Используя (3.10), уравнение (3.12) можно переписать в виде

$$M \vec{a}_c = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k, \quad (3.13)$$

где

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \quad (3.14)$$

– ускорение центра инерции системы частиц.

Второй закон Ньютона для системы частиц (3.13) по форме совпадает со вторым законом Ньютона для материальной точки $m \vec{a} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$, только вместо массы частицы m в (3.13) стоит масса системы M , вместо ускорения точки \vec{a} – ускорение центра инерции \vec{a}_c , а в правой части – не все, а только внешние по отношению к системе силы.

Полезно помнить, что в случае, когда тела, входящие в систему, в любой момент времени имеют одинаковые скорости $\vec{v}_i(t) = \vec{v}(t)$ и, следовательно, движутся с одинаковыми ускорениями $\vec{a}_i(t) = \vec{a}(t)$ (например, несколько тел, соединенных какими-либо связями), то на основании (3.9) и (3.14) $\vec{v}_c = \vec{v}$, $\vec{a}_c = \vec{a}$, и второй закон Ньютона (3.13) для такой системы примет вид:

$$M \vec{a} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k, \quad (3.15)$$

где $M = \sum_{k=1}^n m_i$ – сумма масс тел, входящих в систему; \vec{a} – ускорение системы (одинаковое для всех тел); $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$ – сумма внешних сил, действующих на систему.

Уравнение (3.12) можно переписать в виде, аналогичном (3.4) – (3.5):

$$d\vec{P} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k dt, \quad (3.16)$$

где $d\vec{P}$ – элементарное изменение импульса системы за бесконечно малый промежуток времени dt и $\vec{F}_k dt$ – импульс внешней силы \vec{F}_k за время dt ;

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k \rangle \Delta t, \quad (3.17)$$

где $\Delta\vec{P}$ – конечное изменение импульса системы за время $\Delta t = t_2 - t_1$; $\langle \vec{F}_k \rangle$ – среднее за время Δt значение внешней силы \vec{F}_k .

Из этих соотношений видно, что импульс системы может измениться только под действием внешних сил (внутренние силы не в состоянии изменить импульс системы), а величина изменения определяется не самими внешними силами \vec{F}_k , а их импульсами.

В замкнутой системе материальных точек сумма внешних сил равна нулю, а значит, изменение импульса системы $\Delta \vec{P} = 0$ (см. выражение (3.17)). Следовательно, импульс замкнутой системы в инерциальной системе отсчета

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}, \quad (3.18)$$

т.е. не изменяется со временем. Это утверждение носит название *закона сохранения импульса*. Закон сохранения импульса является одним из фундаментальных законов природы.

Из соотношения (3.9) следует, что центр инерции замкнутой системы взаимодействующих материальных точек движется равномерно и прямолинейно ($\vec{v}_c = \text{const}$). Поэтому если с центром инерции замкнутой системы связать систему отсчета (ее называют *системой центра масс*), то она будет инерциальной. В этой системе отсчета $\vec{r}_c = 0$, $\vec{v}_c = 0$ и на основании (3.7) и (3.9)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

где \vec{r}_i , \vec{v}_i – радиус-вектор и скорость i -й частицы относительно системы центра масс.

Для замкнутой системы, состоящей из двух взаимодействующих частиц массами m_1 и m_2 , соотношения (3.19) примут вид

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0, \text{ или } \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2, \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0, \text{ или } \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2. \end{cases} \quad (3.20)$$

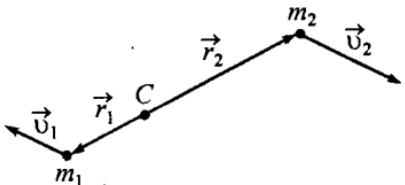


Рис. 3.2

Из первого выражения системы (3.20) следует, что центр инерции C системы двух частиц находится на линии, соединяющей эти частицы (рис. 3.2), а сами частицы при своем движении описывают в пространстве подобные траектории, так как $|\vec{r}_1| = r_1 = r_2 m_2 / m_1$. Из второго выражения системы (3.20) вытекает, что в системе центра масс скорости частиц в любой момент времени направлены в противоположные стороны, а их модули связаны между собой соотношением $v_1 = v_2 m_2 / m_1$.

Иногда встречаются случаи, когда сумма внешних сил, действующих на систему, отлична от нуля (т.е. система не является замкнутой), но проекция $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$ на некоторое направление OX ($\sum_{k=1}^N \vec{F}_k)_x = 0$). В этих слу-

чаях на основании (3.16) можно утверждать, что проекция импульса системы на это направление не меняется с течением времени, т.е.

$$P_x = \sum_{i=1}^n p_{ix} = \sum_{i=1}^n m_i v_{ix} = \text{const.} \quad (3.21)$$

Если на систему материальных точек действуют внешние силы $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$ в течение очень короткого промежутка времени Δt , то в некоторых случаях импульсом этих сил можно пренебречь и изменение импульса системы \vec{P} можно приближенно положить равным нулю, а импульс системы \vec{P} считать постоянным. В качестве примера подобной ситуации можно привести задачу о нахождении скоростей осколков снаряда после его разрыва в процессе полета. Осколки снаряда, разлетающиеся под действием внутренних сил, образуют незамкнутую систему тел, поскольку в процессе разрыва на осколки действуют внешние силы (сила тяжести, сила сопротивления воздуха), т.е. закон сохранения импульса для такой системы, вообще говоря, не выполняется. Однако, поскольку время разрыва снаряда очень мало ($\Delta t \rightarrow 0$), импульсом внешних сил за это время можно пренебречь и считать, что импульс снаряда до взрыва $\vec{P} = M \vec{v}_1$ (M – масса снаряда; \vec{v}_1 – скорость снаряда непосредственно перед взрывом) приближенно равен импульсу осколков $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{i-2}$ (m_i – масса i -го осколка; \vec{v}_{i-2} – скорость i -го осколка сразу после взрыва) непосредственно после окончания действия внутренних сил, вызвавших разрыв снаряда. При этом (поскольку $\Delta t \rightarrow 0$) можно считать, что осколки снаряда начинают разлетаться со скоростями \vec{v}_{i-2} в той же точке пространства, где находился снаряд в момент начала разрыва.

Работа силы

Рассмотрим движение материальной точки под действием силы \vec{F} (рис. 3.3).

Если за бесконечно малый промежуток времени dt частица прошла элементарный путь dS , то величина

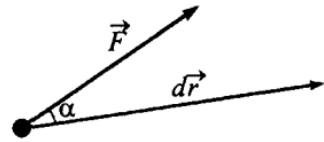


Рис. 3.3

$$dA = F dS \cos \alpha \quad (3.22)$$

называется элементарной работой силы \vec{F} на пути dS , где α – угол между векторами силы \vec{F} и бесконечно малого перемещения $d\vec{r}$ (напомним, что $|d\vec{r}| = dS$ (см. выражение (1.9))).

Выражение (3.22) можно переписать в виде

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.23)$$

(где $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ – скалярное произведение векторов \vec{F} и $d\vec{r}$), или

$$dA = F_s dS, \quad (3.24)$$

где $F_s = F \cos \alpha$ – проекция вектора силы \vec{F} на перемещение частицы $d\vec{r}$. Из (3.24) видно, что работа силы \vec{F} на пути dS может быть как положительной, так и отрицательной величиной в зависимости от знака F_s . Сила, действующая под прямым углом к перемещению частицы ($\alpha = \frac{1}{2}\pi$), не производит над ней никакой работы.

Мощностью силы N называется работа силы \vec{F} в единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt} = F \frac{dS}{dt} \cos \alpha. \quad (3.25)$$

Поскольку $dS/dt = v$ (см. выражение (1.13)), а вектор скорости частицы совпадает по направлению с перемещением, то формулу (3.25) можно записать в виде

$$N = F v \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (3.26)$$

т.е. мощность силы равна скалярному произведению силы \vec{F} на вектор скорости частицы \vec{v} .

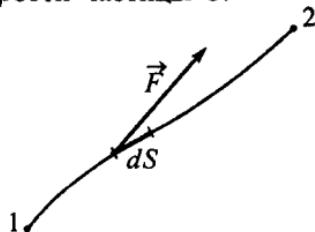


Рис. 3.4

Для того чтобы определить работу силы F на конечном пути частицы ΔS_{1-2} (рис. 3.4), нужно разбить этот путь на бесконечно малые участки dS и, определив работу на каждом элементарном участке, сложить эти работы. Математически эта операция записывается в виде определенного интеграла

$$A_{1-2}(F) = \int_1^2 F_s dS. \quad (3.27)$$

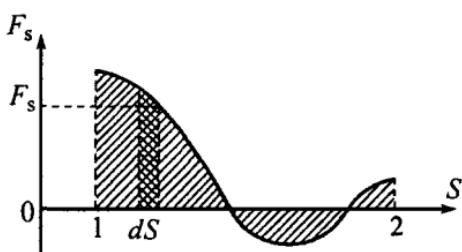


Рис. 3.5

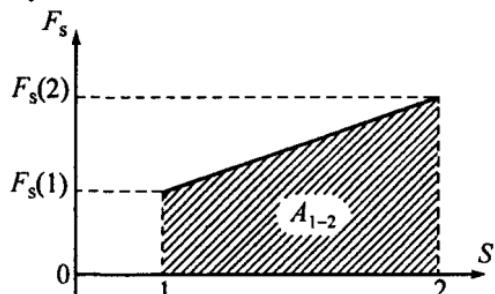


Рис. 3.6

Если изобразить графически зависимость проекции силы на перемещение частицы F_s от пути S , то видно (рис. 3.5), что элементарная работа $dA = F_s dS$ численно равна площади заштрихованного элементарного прямоугольника, причем эта площадь положительна, если $F_s > 0$, и отрицательна, если $F_s < 0$. Поэтому полная работа силы \vec{F} над частицей при перемещении последней из точки 1 в точку 2 численно равна алгебраической (с учетом знаков) сумме площадей, заключенных между кривой F_s и осью S между начальной и конечной точками пути. Если сила F_s зависит от пути S по линейному закону (рис. 3.6), то график зависимости F_s от S – прямая линия и работа силы на пути ΔS_{1-2} равна площади трапеции 1–A–B–2:

$$A_{1-2}(F) = \frac{F_s(1) + F_s(2)}{2} \Delta S_{1-2}. \quad (3.28)$$

Это выражение можно записать в виде

$$A_{1-2}(F) = \langle F_s \rangle \Delta S_{1-2}, \quad (3.29)$$

где

$$\langle F_s \rangle = \frac{F_s(1) + F_s(2)}{2} \quad (3.30)$$

— среднее арифметическое значение F_s на пути ΔS_{1-2} .

Отметим, что если частица возвращается из точки 2 в начальную точку 1 по той же траектории, а величина и направление силы в каждой точке обратного пути такие же, как и при движении частицы из 1 в 2 (в этом случае говорят, что частица находится в постоянном силовом поле \vec{F} , существующем в пространстве независимо от наличия или отсутствия частицы), то работа сил поля \vec{F}

$$A_{2-1}(F) = -A_{1-2}(F). \quad (3.31)$$

Кинетическая энергия материальной точки.

Теорема о кинетической энергии частицы

Кинетической энергией (энергией движения) частицы называется величина

$$T = \frac{m v^2}{2}, \quad (3.32)$$

где m — масса частицы и v — модуль ее скорости.

Выражение (3.32) можно выразить через импульс частицы $\vec{p} = m \vec{v}$:

$$T = \frac{\vec{p}^2}{2m}. \quad (3.33)$$

Из (3.32) видно, что кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю. Если частица свободна или движется с постоянной по величине скоростью по окружности (при этом ускорение частицы отлично от нуля), то ее кинетическая энергия остается неизменной. Что же изменяет кинетическую энергию частицы? Ответ на этот вопрос содержится в теореме о кинетической энергии частицы: если частица массой m движется под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, то изменение кинетической энергии $\Delta T = T_2 - T_1$ частицы при ее перемещении из точки 1 в точку 2 равно алгебраической сумме работ всех сил на этом пути, т.е.

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = \sum_{k=1}^N A_{1-2}(F_k), \quad (3.34)$$

где v_1 — скорость частицы в начальной точке 1 и v_2 — в конечной точке 2.

При равномерном движении частицы по окружности сила, действующая на частицу и создающая ее нормальное ускорение, направлена всегда к центру окружности и перпендикулярна перемещению частицы, следовательно, ее работа равна нулю, и эта сила не может изменить кинетическую энергию (а, следовательно, и модуль скорости v) частицы. Точно так же не могут изменить кинетическую энергию тела сила реакции опоры \vec{N} при его скольжении по подставке, сила натяжения нити \vec{T} , если тело вращается на закрепленной нити (маятник), и сила, действующая на движущуюся заряженную частицу в магнитном поле (сила Лоренца), поскольку все эти силы в любой момент движения тела перпендикулярны его перемещению.

Консервативные силы. Потенциальная энергия

Среди сил природы важную роль играют так называемые **консервативные силы**, которые обладают следующим замечательным свойством: если частица, на которую действует консервативная сила $\vec{F}_{\text{конс}}$, движется по любому замкнутому пути так, что в результате движения она возвращается в исходное положение, то работа, совершаемая при этом консервативной силой, будет равна нулю.

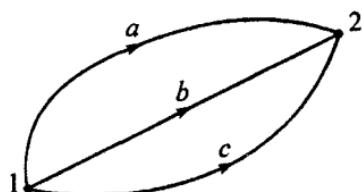


Рис. 3.7

Из этого свойства следует и другое эквивалентное первому утверждение: работа консервативной силы $\vec{F}_{\text{конс}}$ при перемещении частицы из положения 1 в положение 2 (рис. 3.7) не зависит от формы траектории ее движения, а определяется только положением начальной и конечной точек траектории:

$$A_{1-a-2}(\vec{F}_{\text{конс}}) = A_{1-b-2}(\vec{F}_{\text{конс}}) = A_{1-c-2}(\vec{F}_{\text{конс}}). \quad (3.35)$$

Любое однородное стационарное (постоянное в пространстве и во времени) поле является консервативным. К консервативным относятся также и центральные поля, например, гравитационное поле и электрическое поле точечного заряда. Так как работа сил такого поля не зависит от траектории движения частицы, а определяется только конечными точками ее пути, то ясно, что эта величина имеет глубокое физическое содержание. С помощью работы можно определить важную характеристику тела, находящегося в консервативном силовом поле, которая называется *потенциальной энергией*.

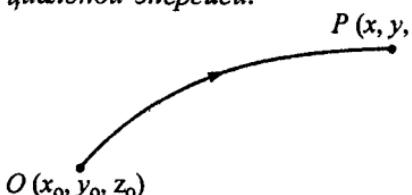


Рис. 3.8

Примем какую-либо точку пространства O (рис. 3.8) за начало отсчета работы и рассмотрим работу A_{O-P} , совершающую силами поля над телом при его перемещении по произвольной траектории из точки O в некоторую точку P . Обозначим эту работу через $(-U)$, т.е.

$$U = -A_{O-P}(\vec{F}_{\text{конс}}) = A_{P-O}(\vec{F}_{\text{конс}}). \quad (3.36)$$

Величина U (т.е. работа силового поля при перемещении частицы из точки P в точку O) называется *потенциальной энергией частицы* в точке P . Она является функцией координат x, y, z и x_0, y_0, z_0 точек P и O :

$$U = U(x, y, z, x_0, y_0, z_0). \quad (3.37)$$

Очевидно, что в точке O

$$U(O) = 0, \quad (3.38)$$

поэтому точку O называют *нулевым уровнем* потенциальной энергии. Выбор нулевого уровня произволен — обычно он выбирается таким образом, чтобы выражение для потенциальной энергии выглядело наиболее просто.

Выразим теперь работу консервативной силы $A_{1-2}(F_{\text{конс}})$ при перемещении частицы из какой-либо произвольной точки 1 в точку 2 (рис. 3.9). Так как эта работа не зависит от вида пути, переместим частицу из 1 в 2 через нулевой уровень O . Тогда

$$A_{1-2}(F_{\text{конс}}) = A_{1-O}(F_{\text{конс}}) + A_{O-2}(F_{\text{конс}}). \quad (3.39)$$

Поскольку $A_{O-2}(F_{\text{конс}}) = -A_{2-O}(F_{\text{конс}})$, то на основании определения потенциальной энергии (3.36) получим

$$A_{1-2}(F_{\text{конс}}) = U_1 - U_2, \quad (3.40)$$

где U_1 , U_2 – значения потенциальной энергии частицы в точках 1 и 2 соответственно. Следовательно, работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{1-2}(F_{\text{конс}}) = -(U_2 - U_1) = -\Delta U.$$

Для пояснения написанных выше соотношений определим потенциальную энергию частицы массой m , находящейся вблизи поверхности Земли. На эту частицу действует гравитационное поле Земли с силой $\vec{F}_{\text{конс}} = m \vec{g}$, направленной вертикально вниз (рис. 3.10). В системе отсчета, показанной на рис. 3.10, точка P , в которой мы хотим определить потенциальную энергию, имеет координату z . Выберем нулевой уровень потенциальной энергии (точка O) на высоте, вертикальная координата которой равна z_0 . Для нахождения $U(P)$ перенесем частицу из точки P в точку O по пути $P-A-O$ (точка A находится под точкой O на той же высоте, что и точка P). Выбор пути из P в O произведен, так как работа, которую мы ищем, не зависит от формы пути. По определению потенциальной энергии (3.36)

$$U(P) = A_{P-A}(m \vec{g}) + A_{A-O}(m \vec{g}). \quad (3.41)$$

Но $A_{P-A}(m \vec{g}) = 0$, так как на пути $P-A$ сила тяжести $m \vec{g}$ перпендикулярна перемещению, а

$$A_{A-O}(m \vec{g}) = -m g (z_0 - z), \quad (3.42)$$

где $(z_0 - z)$ – перемещение частицы. В (3.42) знак минус в правой части вызван тем, что угол α между направлением силы $m \vec{g}$ и перемещением частицы равен 180° , а $\cos 180^\circ = -1$. Следовательно,

$$U(P) = m g (z - z_0). \quad (3.43)$$

Из (3.43) видно, что $U > 0$, если частица находится выше нулевого уровня ($z > z_0$), и $U < 0$, если частица расположена ниже нулевого уровня. Если нулевой уровень O выбрать на высоте начала отсчета координаты z (не обязательно лежащего на поверхности Земли), то $z_0 = 0$ и выражение для потенциальной энергии (3.43) принимает наиболее простой вид



Рис. 3.9

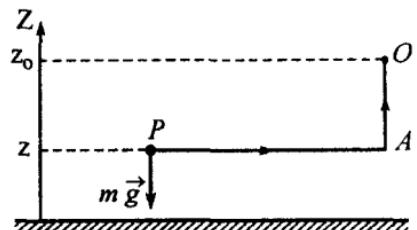


Рис. 3.10

$$U(z) = m g z, \quad (3.44)$$

где z – вертикальная координата частицы, отсчитываемая вверх ($z > 0$) или вниз ($z < 0$) от нулевого уровня.

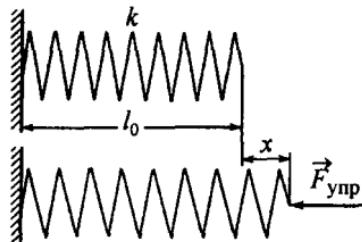


Рис. 3.11

недеформированном состоянии равна l_0 , жестко закреплена за один из концов и растянута (или сжата) на величину x (рис. 3.11). В пружине возникает сила упругости

$$F_{\text{упр}} = k x, \quad (3.45)$$

стремящаяся вернуть пружину в недеформированное состояние.

Для нахождения потенциальной энергии пружины выберем в качестве нулевого уровня состояние нерастянутой пружины ($x = 0$). Определим работу силы упругости при возвращении пружины из исходного состояния в недеформированное, которая и будет потенциальной энергией растянутой (сжатой) пружины. Так как сила упругости и перемещение пружины совпадают по направлению, то эта работа положительна, а ее величина (сила упругости зависит от перемещения x по линейному закону) согласно (3.29) и (3.30) равна

$$A = \langle F_{\text{упр}} \rangle (x - 0) = \langle F_{\text{упр}} \rangle x, \quad (3.46)$$

где

$$\langle F_{\text{упр}} \rangle = \frac{F_{\text{упр}}(0) + F_{\text{упр}}(x)}{2} = \frac{k x}{2}. \quad (3.47)$$

Подставляя (3.47) в (3.46) и учитывая, что $U = A$, получим окончательно выражение для потенциальной энергии растянутой (или сжатой) пружины жесткостью k :

$$U(F_{\text{упр}}) = \frac{k x^2}{2}. \quad (3.48)$$

Полная механическая энергия материальной точки.

Теорема о полной механической энергии частицы.

Закон сохранения энергии для частицы

Пусть материальная точка массой m движется под действием нескольких консервативных сил $\vec{F}_1^{\text{конс}}, \vec{F}_2^{\text{конс}}, \dots$ и каких-либо других неконсервативных сил (будем называть их *сторонними*), равнодействующую которых обозначим $\vec{F}_{\text{стор}}$.

Согласно теореме о кинетической энергии (3.34), приращение кинетической энергии частицы при ее перемещении из точки 1 в точку 2

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}(F_1^{\text{конс}}) + A_{1-2}(F_2^{\text{конс}}) + \dots + A_{1-2}(\vec{F}_{\text{стор}}). \quad (3.49)$$

К консервативным силам относится также сила упругости, возникающая при не очень сильных деформациях (сжатии или растяжении) твердого тела или пружины, когда выполняется закон Гука (2.10) – (2.11).

Найдем потенциальную энергию растянутой (или сжатой) пружины жесткостью k . Пусть пружина, длина которой в

равна l_0 , жестко закреплена за один из концов и растянута (или сжата) на величину x (рис. 3.11). В пружине возникает сила упругости

$$F_{\text{упр}} = k x, \quad (3.45)$$

стремящаяся вернуть пружину в недеформированное состояние.

Для нахождения потенциальной энергии пружины выберем в качестве нулевого уровня состояние нерастянутой пружины ($x = 0$). Определим работу силы упругости при возвращении пружины из исходного состояния в недеформированное, которая и будет потенциальной энергией растянутой (сжатой) пружины. Так как сила упругости и перемещение пружины совпадают по направлению, то эта работа положительна, а ее величина (сила упругости зависит от перемещения x по линейному закону) согласно (3.29) и (3.30) равна

$$A = \langle F_{\text{упр}} \rangle (x - 0) = \langle F_{\text{упр}} \rangle x, \quad (3.46)$$

где

$$\langle F_{\text{упр}} \rangle = \frac{F_{\text{упр}}(0) + F_{\text{упр}}(x)}{2} = \frac{k x}{2}. \quad (3.47)$$

Подставляя (3.47) в (3.46) и учитывая, что $U = A$, получим окончательно выражение для потенциальной энергии растянутой (или сжатой) пружины жесткостью k :

$$U(F_{\text{упр}}) = \frac{k x^2}{2}. \quad (3.48)$$

Полная механическая энергия материальной точки.

Теорема о полной механической энергии частицы.

Закон сохранения энергии для частицы

Пусть материальная точка массой m движется под действием нескольких консервативных сил $\vec{F}_1^{\text{конс}}, \vec{F}_2^{\text{конс}}, \dots$ и каких-либо других неконсервативных сил (будем называть их *сторонними*), равнодействующую которых обозначим $\vec{F}_{\text{стор}}$.

Согласно теореме о кинетической энергии (3.34), приращение кинетической энергии частицы при ее перемещении из точки 1 в точку 2

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}(F_1^{\text{конс}}) + A_{1-2}(F_2^{\text{конс}}) + \dots + A_{1-2}(\vec{F}_{\text{стор}}). \quad (3.49)$$

Учитывая, что (см. выражение (3.40))

$$A_{1-2}(F_k \text{ конс}) = U_1(F_k \text{ конс}) - U_2(F_k \text{ конс}) \quad (3.50)$$

(где $U(F_k \text{ конс})$ – потенциальная энергия k -й консервативной силы $F_k \text{ конс}$), соотношение (3.49) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & [T_2 + U_2(F_1 \text{ конс}) + U_2(F_2 \text{ конс}) + \dots] - \\ & - [T_1 + U_1(F_1 \text{ конс}) + U_1(F_2 \text{ конс}) + \dots] = A_{1-2}(F_{\text{стор}}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках в (3.51), называется *полной механической энергией* E материальной точки и складывается из кинетической энергии частицы и потенциальных энергий в поле всех консервативных сил, действующих на частицу, т.е.

$$E = T + U(F_1 \text{ конс}) + U(F_2 \text{ конс}) + \dots = \frac{m v^2}{2} + \sum_{k=1}^N U(F_k \text{ конс}). \quad (3.52)$$

Тогда (3.51) можно записать в виде

$$E_2 - E_1 = \Delta E = A_{1-2}(F_{\text{стор}}), \quad (3.53)$$

т.е. приращение полной механической энергии ΔE частицы равно работе всех сторонних сил. Это и есть *теорема о полной механической энергии материальной точки*. Из этой теоремы вытекает закон *сохранения полной механической энергии частицы*: если на частицу действуют только консервативные силы, то $A_{1-2}(F_{\text{стор}}) = 0$ и $\Delta E = E_2 - E_1 = 0$, т.е. полная механическая энергия частицы (3.51) остается постоянной.

Полная механическая энергия частицы может уменьшаться под действием таких сил, например, как сила трения или сила сопротивления, работа которых отрицательна. Силы трения и сопротивления поэтому называются *диссипативными силами* $\vec{F}_{\text{дис}}$, так как их действие приводит к превращению части механической энергии частицы в тепловую энергию. При этом количество выделившегося тепла Q численно равно взятой со знаком плюс работе диссипативных сил, т.е.

$$Q = |A_{1-2}(F_{\text{дис}})|. \quad (3.54)$$

Энергия системы материальных точек.

Закон сохранения механической энергии системы

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме их кинетических энергий:

$$T_{\text{сис}} = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (3.55)$$

где v_i – абсолютная скорость i -й частицы в какой-либо выбранной инерциальной системе отсчета. По правилу сложения скоростей

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_c, \quad (3.56)$$

где \vec{v}_c – скорость центра инерции системы; \vec{v}'_i – скорость i -й частицы относительно центра инерции. Подставив (3.56) в (3.55), можно показать, что

$$T_{\text{сис}} = \frac{M v_c^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i v'_i^2}{2} \quad (3.57)$$

(где $M = \sum_{i=1}^n m_i$ – масса системы), т.е. кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии движения системы как целого и кинетических энергий «внутренних» движений частиц относительно центра инерции. Ясно, что в инерциальной системе отсчета, связанной с центром инерции (системе центра масс), кинетическая энергия системы

$$T_{\text{сис}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (3.58)$$

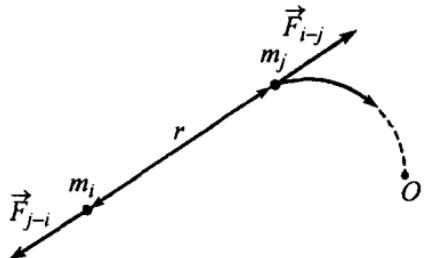


Рис. 3.12

Если частицы, входящие в систему, взаимодействуют друг с другом, причем силы взаимодействия являются консервативными, то для такой системы можно ввести *потенциальную энергию взаимодействия* $U_{\text{вз}}$. Эта энергия определяется следующим образом: выбираются две произвольные частицы системы, скажем m_i и m_j , взаимодействующие между собой с силами $\vec{F}_{i-j} = -\vec{F}_{j-i}$ (третий закон Ньютона). Одна из частиц (например, m_i) считается неподвижной, а другую перемещают из исходного положения на выбранный заранее произвольный нулевой уровень (точка O на рис. 3.12). Работа консервативной силы \vec{F}_{i-j} при таком перемещении и будет потенциальной энергией взаимодействия частицы m_i с частицей m_j , которую обозначим U_{i-j} . Если считать неподвижной частицу m_j , а перемещать в точку O частицу m_i , то работа силы \vec{F}_{j-i} , т.е. U_{j-i} , окажется равной U_{i-j} :

$$U_{i-j} = U_{j-i}. \quad (3.59)$$

Потенциальная энергия взаимодействия системы $U_{\text{вз}}$ равна сумме потенциальных энергий U_{i-j} для всех различных возможных пар частиц системы:

$$U_{\text{вз}} = U_{1-2} + U_{1-3} + \dots + U_{2-3} + U_{2-4} + \dots + U_{3-4} + U_{3-5} + \dots, \quad (3.60)$$

или

$$U_{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{i-j}, \quad (3.61)$$

где множитель $\{\frac{1}{2}\}$ появляется из-за того, что при суммировании в правой части любое слагаемое, например U_{2-3} , имеет пару U_{3-2} , но на основании (3.59) $U_{2-3} = U_{3-2}$.

Если система материальных точек является замкнутой, то полная механическая энергия системы $E_{\text{сис}}$ равна сумме ее кинетической энергии $T_{\text{сис}}$ (3.55) и потенциальной энергии взаимодействия $U_{\text{вз}}$:

$$E_{\text{сис}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U_{\text{вз}}, \quad (3.62)$$

или на основании (3.57)

$$E_{\text{сис}} = \frac{M v_c^2}{2} + E_{\text{внутр}}, \quad (3.63)$$

где

$$E_{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U_{\text{вз}} \quad (3.64)$$

— так называемая *внутренняя энергия* системы частиц, т.е. ее полная механическая энергия в системе центра масс.

Оказывается, что полная механическая энергия замкнутой системы $E_{\text{сис}}$ может изменяться только в том случае, если между телами системы помимо консервативных сил взаимодействия действуют еще и неконсервативные силы (например, силы трения и сопротивления). В этом случае изменение полной энергии системы $\Delta E = E_2 \text{ сис} - E_1 \text{ сис}$ равно работе всех внутренних неконсервативных (сторонних) сил, т.е.

$$\Delta E = E_2 \text{ сис} - E_1 \text{ сис} = \sum_{k=1}^N A(F_k \text{ стор}). \quad (3.65)$$

Если внутри замкнутой системы действуют только консервативные силы, то ее полная механическая энергия не изменяется со временем. Это и есть *закон сохранения полной механической энергии для замкнутой системы*.

В заключение приведем для справки выражения для потенциальных энергий взаимодействия двух частиц, между которыми действуют консервативные: а) гравитационные, б) электрические и в) упругие силы.

а) Две частицы m_1 и m_2 , расположенные на расстоянии r друг от друга, взаимодействуют между собой по закону всемирного тяготения (см. формулу (2.6))

$$\vec{F}_{1-2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Можно показать, что потенциальная энергия взаимодействия этих частиц

$$U_{1-2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (3.66)$$

Нулевой уровень U_{1-2} при такой записи выбран на бесконечности ($U_{1-2} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$).

Если система состоит, например, из трех частиц m_1 , m_2 и m_3 , то потенциальная энергия взаимодействия такой системы, согласно (3.61)

$$U_{1-2} = -\gamma \left\{ \frac{m_1 m_2}{r_{1-2}} + \frac{m_1 m_3}{r_{1-3}} + \frac{m_2 m_3}{r_{2-3}} \right\}, \quad (3.67)$$

где r_{1-2} , r_{1-3} и r_{2-3} — расстояния между частицами m_1 и m_2 , m_1 и m_3 , m_2 и m_3 соответственно (рис. 3.13).

б) Две заряженные частицы q_1 и q_2 , расположенные на расстоянии r друг от друга, взаимодействуют по закону Кулона (см. формулу (2.9))

$$\vec{F}_{1-2} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 r^3} \vec{r}.$$

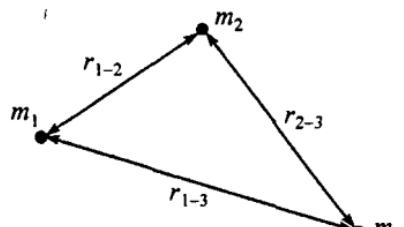


Рис. 3.13

Их потенциальная энергия взаимодействия

$$U_{1-2} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r}. \quad (3.68)$$

Нулевой уровень U_{1-2} тоже выбран на бесконечности.

в) Две частицы соединены друг с другом невесомой пружиной жесткостью k . Потенциальная энергия взаимодействия двух таких частиц

$$U_{1-2} = \frac{k x^2}{2}, \quad (3.69)$$

где x – удлинение (укорочение) пружины относительно ее недеформированного состояния. Здесь нулевой уровень U_{1-2} выбран при $x = 0$.

Упругие и неупругие столкновения

Законы сохранения энергии и импульса используются для установления соотношений между различными величинами при столкновениях тел.

В физике под *столкновением* понимают процесс взаимодействия между телами в широком смысле слова, а не буквально как соприкоснение тел. Столкивающиеся тела на больших расстояниях друг от друга являются свободными. Проходя мимо друг друга, они взаимодействуют между собой, в результате чего могут происходить различные процессы – тела могут соединяться в одно, могут возникать новые тела, наконец, может иметь место *упругое столкновение*, при котором тела после некоторого сближения вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния. Столкновения, сопровождающиеся изменением внутреннего состояния тел, называются *неупругими*.

Происходящие в обычных условиях столкновения обычных тел почти всегда бывают в той или иной степени неупругими – уже хотя бы потому, что они сопровождаются некоторым нагреванием тел, т.е. переходом части их кинетической энергии в тепло. Тем не менее в физике понятие об упругих столкновениях играет важную роль, так как с такими столкновениями часто приходится иметь дело в экспериментах в области атомных явлений. Но и обычные столкновения можно часто с достаточной степенью точности считать упругими.

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц с массами m_1 и m_2 , движущихся вдоль одной прямой (так называемое «*лобовое столкновение*» или *центральный удар*). В результате такого столкновения обе частицы будут двигаться вдоль той же прямой. Обозначим скорости и импульсы частиц до и после столкновения соответственно через \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$, $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$ и \vec{v}'_1 , \vec{v}'_2 , $\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1$, $\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2$.

Поскольку до и после столкновения частицы предполагаются невзаимодействующими, т.е. свободными, а при упругом столкновении между частицами не действуют диссилиативные силы, то полная механическая энергия системы частиц сохраняется и закон сохранения энергии сводится к сохранению кинетической энергии (см. выражение (3.33)):

$$\frac{p_1^2}{m_1} + \frac{p_2^2}{m_2} = \frac{p_1'^2}{m_1} + \frac{p_2'^2}{m_2}, \quad (3.70)$$

где опущен общий множитель $\{1/2\}$.

Закон сохранения импульса выражается векторным равенством

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2. \quad (3.71)$$

Перепишем уравнения (3.70) и (3.71) в виде

$$m_2(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)(\vec{p}_1 + \vec{p}'_1) = m_1(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2)(\vec{p}'_2 + \vec{p}_2), \quad (3.72)$$

$$\vec{p}_1 - \vec{p}'_1 = \vec{p}'_2 - \vec{p}_2. \quad (3.73)$$

С учетом (3.73) соотношение (3.72) можно записать по-другому:

$$m_2(\vec{p}_1 + \vec{p}'_1) = m_1(\vec{p}'_2 + \vec{p}_2). \quad (3.74)$$

Из (3.73) – (3.74) легко получить

$$\begin{cases} \vec{p}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{p}_1 + 2m_1\vec{p}_2}{m_1 + m_2}, \\ \vec{p}'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{p}_2 + 2m_2\vec{p}_1}{m_1 + m_2}, \end{cases} \quad (3.75)$$

или

$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \\ \vec{v}'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \end{cases} \quad (3.76)$$

Формулы (3.75) – (3.76) справедливы при движении взаимодействующих частиц как навстречу, так и вдогонку друг другу.

Рассмотрим частный случай упругого лобового столкновения двух частиц при условии, что частица массой m_2 до столкновения покоялась, т.е. $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = 0$. Запишем выражения (3.75) – (3.76) в проекции на ось OX , совпадающую с направлением импульса налетающей частицы (рис. 3.14):

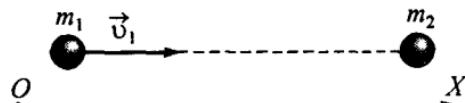


Рис. 3.14

$$\begin{cases} p'_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_{1x}, \\ p'_{2x} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_{1x}, \end{cases} \quad (3.77)$$

$$\begin{cases} v'_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}, \\ v'_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x}, \end{cases} \quad (3.78)$$

где мы учли, что $p_{1x} = p_1$; $p'_{1x} = p'_1$; $p'_{2x} = p'_2$; $v_{1x} = v_1$; $v'_{1x} = v'_1$ и $v'_{2x} = v'_2$.

Из (3.78) следует, что налетающая частица (массой m_1) будет продолжать двигаться в том же направлении или же изменит свое направление движения на обратное в зависимости от того, больше или меньше ее масса m_1 массы первоначально покившейся частицы m_2 . Если массы частиц одинаковы ($m_1 = m_2$), то $p'_{1x} = 0$ ($v'_{1x} = 0$) и $p'_{2x} = p_{1x}$ ($v'_{2x} = v_{1x}$), т.е. частицы при столкновении как бы обмениваются своими скоростями.

Если $m_1 \ll m_2$, то из (3.77) – (3.78) следует

$$\begin{cases} p'_{1x} \approx -p_{1x}, \\ p'_{2x} \approx 2p_{1x}, \end{cases} \quad \begin{cases} v'_{1x} \approx -v_{1x}, \\ v'_{2x} \approx 2\frac{m_1}{m_2}v_{1x} \approx 0, \end{cases}$$

т.е. покившаяся частица практически остается на месте, а налетевшая отскакивает назад с первоначальной скоростью.

Если, наоборот, $m_1 > m_2$, то

$$\begin{cases} p'_{1x} \approx p_{1x}, \\ p'_{2x} \approx 2\frac{m_2}{m_1}p_{1x}, \end{cases} \quad \begin{cases} v'_{1x} \approx v_{1x}, \\ v'_{2x} \approx 2v_{1x}, \end{cases}$$

т. е. налетающая массивная частица после столкновения продолжает двигаться со скоростью, близкой к первоначальной, а покившаяся легкая отлетает от нее с удвоенной первоначальной скоростью налетающей частицы.

Рассмотрим теперь упругое нецентральное столкновение двух частиц одинаковой массы при условии, что одна из частиц до столкновения покилась.

Из законов сохранения энергии и импульса

$$\frac{p_1^2}{m_1} = \frac{p'_1{}^2}{m_1} + \frac{p'_2{}^2}{m_2}, \quad (3.79)$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (3.80)$$

(где $m_1 = m_2$), в частности, следует, что импульсы \vec{p}_1 , \vec{p}'_1 и \vec{p}'_2 (а, следовательно, \vec{v}_1 , \vec{v}'_1 и \vec{v}'_2) лежат в одной плоскости.

Возводя (3.80) в квадрат

$$p_1^2 = p'_1{}^2 + 2\vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_2 + p'_2{}^2$$

(где $\vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_2$ – скалярное произведение векторов \vec{p}'_1 и \vec{p}'_2), с учетом (3.79) получим

$$0 = \vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_2,$$

или

$$0 = p'_1 \cdot p'_2 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = 0,$$

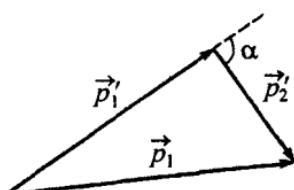


Рис. 3.15

где α – угол между векторами \vec{p}'_1 и \vec{p}'_2 . Следовательно, при упругом столкновении частиц с одинаковыми массами они разлетаются под прямым углом ($\alpha = \frac{1}{2}\pi$) и треугольник, образованный векторами \vec{p}_1 , \vec{p}'_1 и \vec{p}'_2 (рис. 3.15), является прямоугольным с гипотенузой \vec{p}_1 .

В случае нелобового столкновения частиц, массы которых не одинаковы, законов сохранения (3.79) – (3.80) недостаточно для определения импульсов \vec{p}_1' и \vec{p}_2' частиц после взаимодействия. Если в плоскости, в которой лежат векторы \vec{p}_1 , \vec{p}_1' и \vec{p}_2' , ввести систему координат XOY , направив ось OX вдоль вектора \vec{p}_1 , а ось OY перпендикулярно оси OX , то неизвестных окажется четыре: p_{1x}' , p_{1y}' , p_{2x}' , p_{2y}' , а уравнений три: закон сохранения энергии (3.79) и две проекции на оси OX и OY закона сохранения импульса (3.80). Дело в том, что угол α , под которым разлетаются частицы после столкновения, определяется не только законами сохранения энергии и импульса, а зависит от их взаимного расположения при столкновении. Если задать угол α , то величины \vec{p}_1' и \vec{p}_2' можно найти следующим графическим методом. Из треугольника на рис. 3.15 (на основании теоремы косинусов) следует

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2 p_1' p_2' \cos \alpha. \quad (3.81)$$

Вычитая из соотношения (3.81) выражение для закона сохранения энергии

$$p_1^2 = p_1'^2 + \frac{m_1}{m_2} p_2'^2, \quad (3.82)$$

получаем

$$p_1' = \frac{m_1 - m_2}{2 m_2 \cos \alpha} p_2'. \quad (3.83)$$

Так как величины $p_1' > 0$ и $p_2' > 0$, то из (3.83) следует, что угол α – острый ($\cos \alpha > 0$), если $m_1 > m_2$, и α – тупой, если $m_1 < m_2$.

Из (3.82) – (3.83) следует

$$\begin{cases} p_1' = \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{(m_2 - m_1)^2 + 4 m_1 m_2 \cos^2 \alpha}} p_1, \\ p_2' = \frac{2 m_2 |\cos \alpha|}{\sqrt{(m_2 - m_1)^2 + 4 m_1 m_2 \cos^2 \alpha}} p_1. \end{cases} \quad (3.84)$$

В случае лобового столкновения ($\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$) выражения (3.84), естественно, переходят в (3.77).

Если между налетающей частицей m_1 и покившейся m_2 происходит неупругое столкновение, то закон сохранения импульса (3.80) остается в силе, а закон сохранения энергии (3.79) перестает выполняться. Рассмотрим более подробно случай так называемого *абсолютно неупругого столкновения*, когда частицы m_1 и m_2 после взаимодействия движутся вместе (частицы «слипаются» после столкновения). Закон сохранения импульса можно записать тогда в виде

$$\vec{p}_1 = \vec{p}', \quad (3.85)$$

где $\vec{p}' = (m_1 + m_2) \vec{v}'$ и \vec{v}' – скорость составной частицы после столкновения.

Начальная (до столкновения) кинетическая энергия частиц равна

$$T_1 = \frac{p_1^2}{2 m_1}. \quad (3.86)$$

После столкновения их кинетическая энергия

$$T' = \frac{P'^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad (3.87)$$

или на основании (3.85)–(3.86)

$$T' = \frac{P_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_1. \quad (3.88)$$

Из (3.88) видно, что $T' < T_1$, т.е. часть кинетической энергии системы при неупругом столкновении превращается в тепло. Количество выделившегося тепла

$$Q = T_1 - T' = T_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1. \quad (3.89)$$

Рекомендации по решению задач

Механической системой или системой материальных точек называют совокупность материальных точек или твердых тел, рассматриваемых в задаче. В частном случае система может состоять из одной материальной точки. Все силы, действующие на систему, состоящую из одной материальной точки, будут являться внешними. В системе, состоящей из нескольких материальных точек, могут одновременно действовать как внешние, так и внутренние силы, т.е. силы, обусловленные взаимодействием материальных точек системы между собой. Следует помнить, что изменить характер движения системы как целого могут только внешние силы; внутренние силы могут изменить движение отдельных тел, входящих в систему, но не могут повлиять на движение системы как целого. Если в каком-либо произвольном направлении на систему не действуют внешние силы, то в таком направлении проекция полного импульса системы не меняется с течением времени, и систему будем называть замкнутой (изолированной) в этом направлении. Если же на систему не действуют вообще никакие внешние силы, систему называют просто замкнутой или изолированной.

Задачи на применение второго закона Ньютона в виде (3.4) или (3.5) (в случае системы, состоящей из нескольких тел, – (3.16) или (3.17)), как правило, это задачи на соударение тел, в которых нужно определить силы, действующие на систему, по заданному изменению ее импульса. Схема их решения такова:

1. Сделать схематический чертеж, на котором указать векторы начального \vec{P}_1 и конечного \vec{P}_2 импульсов системы, а также направления внешних сил, действующих на нее за время изменения импульса. При выполнении чертежа следует помнить, что векторы \vec{P}_1 , \vec{P}_2 и импульс результирующей внешних сил $\sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k \rangle \Delta t$ должны образовывать замкнутый треугольник: если совместить начала векторов \vec{P}_1 и \vec{P}_2 , то вектор $\sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k \rangle \Delta t$ будет соединять их концы и направлен от первого вектора ко второму.

2. Записать уравнение (3.4) или (3.5) ((3.16) или (3.17)) в векторной форме.

3. Выбрать оси координат системы отсчета наиболее удобным образом: в общем случае, направление осей выбирают таким образом, чтобы было наиболее просто проецировать на них векторы, изображенные на чертеже. Записать уравнение второго закона Ньютона в скалярной форме, спроектировав на оси выбранной системы координат.

4. Исходя из условий задачи, записать необходимые дополнительные соотношения и уравнения кинематики для получения замкнутой системы уравнений. После чего определить неизвестные искомые величины.

Задачи на закон сохранения импульса включают задачи на разрыв одного тела на части (например, разрыв снаряда, гранаты и т.п.), задачи о соединении тел в одно целое (например, абсолютно неупругое столкновение нескольких тел, в результате чего тела «слипаются»), задачи на движение одних тел по поверхности других в полностью изолированной или изолированной в некоторых направлениях системе. Закон сохранения импульса удобно исполь-

зоваться в таких задачах динамики, в которых внутренние силы меняются с течением времени по сложным законам или эти законы вообще неизвестны. При решении таких задач очень важно выяснить, какие из действующих на тела системы сил являются внешними, а какие внутренними; после чего установить, является ли рассматриваемая система тел замкнутой полностью или только замкнутой по каким-либо направлениям. Следует помнить, так как это обычно особо не оговаривается в условиях задач, что иногда действием внешних сил в течение очень коротких промежутков времени можно пренебречь, и изменение импульса системы в направлении действия таких сил можно приближенно считать равным нулю (например, разрыв снаряда, движущегося в поле силы тяжести, – в процессе разрыва импульсом силы тяжести пренебрегают). Кроме того, полагают, что за эти промежутки времени система не изменяет своего положения в пространстве (например, в задаче о разрыве снаряда осколки начинают разлетаться в той точке пространства, где находился снаряд в момент начала разрыва; в задачах об абсолютно неупругом столкновении бруска и пули тела после соударения начинают двигаться как единое целое из той точки, где находился брусок до взаимодействия).

При решении таких задач удобно придерживаться следующей схемы:

1. Сделать схематический чертеж, на котором изобразить векторы импульсов (скоростей) каждого тела системы в начале и в конце рассматриваемого процесса. Если направления импульсов некоторых тел в какие-либо из рассматриваемых моментов времени не известны и их нельзя определить, решив, например, задачу кинематики, то их нужно пропустить произвольным образом.

2. Внимательно проанализировать условие задачи и установить, какие силы действуют на тела системы в рассматриваемом процессе. После чего выяснить, какие из этих сил являются внутренними для системы, а какие внешними. Установить, импульсами каких внешних сил можно преибресть в силу кратковременности взаимодействия тел системы.

3. Ввести систему отсчета. Оси координат необходимо выбрать таким образом, чтобы приходилось делать минимум разложений изображенных на рисунке векторов и, самое главное, чтобы по крайней мере вдоль одной из осей система была замкнутой.

4. Записать уравнение, выраждающее закон сохранения импульса, в проекциях на оси, в направлениях которых система замкнута.

5. При необходимости представить импульсы тел через их массы и скорости, дополнить уравнение закона сохранения импульса соотношениями и уравнениями кинематики для получения замкнутой системы уравнений. При записи импульсов тел в виде $\vec{p} = m \vec{v}$ следует помнить, что для всех тел скорости должны быть записаны относительно одиой и той же инерциальной системы отсчета. Если в задаче известна скорость одного тела относительно другого, то абсолютную скорость движения нужно найти по формуле сложения скоростей (1.46) как векторную сумму относительной и переносной скоростей (например, при известной скорости вылета пули относительно ствола ружья ее абсолютная скорость будет равна относительной скорости и скорости отдачи ружья – переносной скорости).

6. Решить полученную систему уравнений относительно неизвестных искомых величин.

Работа силы \vec{F} на конечном пути ΔS в общем случае определяется интегралом (3.27). Однако в рамках школьной программы в подобных задачах сила или является постоянной, или изменяется в зависимости от пройденного пути по линейному закону.

При вычислении работы постоянной силы схема решения задачи может быть такой:

1. Сделать схематический чертеж, на котором указать тело и все силы, приложенные к нему.

2. Выяснить, работу какой силы необходимо определить (в ее качестве может выступать и равнодействующая нескольких сил). Если сила неизвестна из условий задачи, то ее следует найти из уравнений динамики.

3. При необходимости, используя законы кинематики, найти величину пути, на котором следует определить работу силы.

4. Определить значение угла α между направлением силы и направлением перемещения тела.

5. Вычислить работу постоянной силы по формуле $A = F \Delta S \cos \alpha$.

Если сила изменяется линейно в зависимости от пройденного пути, схема решения задачи может быть такой же, как и для постоянной силы, кроме п.5. При вычислении работы переменной силы можно воспользоваться одним из трех способов:

а) построить график зависимости проекции силы F_s на направление перемещения в зависимости от пройденного пути S и работу вычислить как площадь, ограниченную кривой F_s и прямыми, соответствующими координатам тела в начале и в конце пути (рис. 3.6);

б) найти среднее значение силы на данном участке пути по формуле (3.30) и определить работу силы с помощью выражения (3.29);

в) вычислить интеграл (3.27).

Предложенная схема решения задачи на определение работы силы может быть использована только для случаев, когда легко может быть определена проекция вектора силы на направление перемещения в любой момент времени (например, если угол между направлениями векторов силы и перемещения не меняется в процессе движения тела). В противном случае, вообще говоря, задача выходит за рамки школьной программы, кроме тех случаев, когда работа совершается консервативной силой (например, силой тяжести) – здесь работа может быть определена как убыль потенциальной энергии (см. формулу (3.40)).

Решение задач, связанных с расчетом мощности силы, основано на применении формул (3.25) или (3.26). Используя формулу (3.26) для практических расчетов, следует помнить, что если требуется вычислить мгновенную мощность (в данный момент времени), то под \vec{v} следует понимать мгновенную скорость, а если нужно определить среднюю мощность за некоторый промежуток времени, то в качестве скорости следует понимать вектор средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$.

Когда в задаче речь идет об определении мощности двигателя (самолета, автомобиля и т.п.), то имеется в виду мощность той силы, которая приложена к движущемуся телу благодаря работе двигателя. Ее можно условно назвать силой «тяги» двигателя. Эта сила направлена в сторону перемещения рассматриваемого тела.

При решении задач на мощность двигателя с использованием формулы (3.25) необходимо найти работу силы «тяги» за бесконечно малый промежуток времени dt и подставить полученное значение в (3.25). Если для определения мощности используется формула (3.26), то необходимо с помощью уравнений кинематики определить либо мгновенную скорость, либо вектор средней скорости тела за данный промежуток времени и подставить полученное значение в формулу (3.26). Если сила «тяги» не известна из условия задачи, для ее определения следует воспользоваться законами динамики.

Теорема о полной механической энергии материальной точки в форме (3.53) чаще всего используется при решении задач, в которых заданы два положения тела в процессе его движения. Часто такие задачи можно также решить с помощью законов динамики. Однако в ряде случаев силы, действующие на тело при его движении, или неизвестны, или неизвестен закон их изменения. Схема решения подобных задач может быть следующей:

1. Сделать схематический чертеж, на котором изобразить тело в двух положениях. Изобразить силы, действующие на тело в произвольный момент движения тела из одного положения в другое.

2. Выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии. Наиболее удобно его выбирать по самому нижнему положению, которое занимает тело при своем движении. Если нулевой уровень выбран произвольным образом, следует помнить, что если тело расположено выше нулевого уровня, то его потенциальная энергия положительна, если ниже – отрицательна.

3. Ввести инерциальную систему отсчета и записать значение полной механической энергии тела в начальном и конечном его положениях как сумму потенциальной и кинетической энергий.

4. Если в процессе движения на тело действуют диссипативные силы и их действие приводит к превращению части механической энергии в тепло, то необходимо вычислить значение этих сил и определить их работу при перемещении тела из первого положения во второе.

5. Записать теорему о полной механической энергии материальной точки в виде (3.53).

6. При необходимости дополнить полученное уравнение соотношениями динамики и кинематики и решить систему уравнений относительно искомых величин.

При использовании теоремы о полной механической энергии следует быть внимательным при выборе системы отсчета, поскольку в различных инерциальных системах отсчета не только скорость и кинетическая энергия тела меняются, но также может измениться и правая часть выражения (3.53). Рассмотрим простую задачу: найдем скорость тела массой m , скользнувшего без начальной скорости с высоты h гладкой наклонной плоскости. В произвольный момент движения на тело действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры \vec{N} , причем сила тяжести является консервативной, а сила реакции – сторонней. Выберем нулевой уровень отсчета потенциальной энергии у основания наклонной плоскости и свяжем с ней систему координат XOY (рис. 3.16). В начальном положении 1 полная энергия тела $E_1 = mgh$, а в конечном 2 $E_2 = \frac{1}{2}mv_0^2$, где v_0 – искомая скорость. Поскольку сила \vec{N} при движении тела перпендикулярна перемещению, то она работы не совершает и выражение (3.53) примет вид

$$\frac{m v_0^2}{2} - mgh = 0, \text{ или } v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Если же, например, использовать систему координат $X'O'Y'$, движущуюся в горизонтальном направлении налево с постоянной скоростью \vec{v}_0 , то в начальном положении тело будет иметь скорость \vec{v}_0 , направленную направо, и его полная механическая энергия $E_1 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2$, а в конечном – скорость тела станет равной нулю, а энергия $E_2 = 0$. Теперь выражение (3.53), записанное в виде

$$0 - \left\{ \frac{m v_0^2}{2} + mgh \right\} = 0,$$

приводит к абсурду:

$$v_0^2 = -2gh.$$

Ошибка здесь очевидна: относительно системы координат $X'O'Y'$ сила реакции \vec{N} при движении тела не перпендикулярна перемещению, поэтому ее работа не равна нулю.

Для того чтобы не допускать подобных ошибок при решении задач с использованием теоремы о полной механической энергии частицы (или теоремы о кинетической энергии), лучше всего использовать системы координат, связанные с неподвижными относительно Земли телами.

Наконец, рассмотрим возможную схему решения задач, в которых требуется одновременное использование закона сохранения импульса и закона изменения полной механической энергии системы в виде (3.65). К таким задачам относятся также задачи, в которых рассматриваются взаимодействия тел по законам упругого или неупругого ударов. При решении подобных задач можно придерживаться следующей схемы:

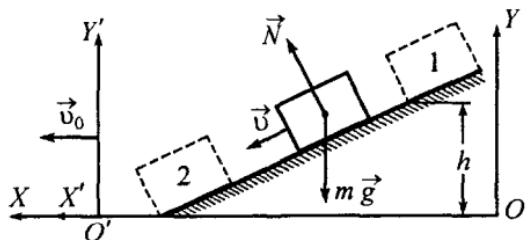


Рис. 3.16

- Сделать схематический чертеж, на котором указать все тела системы.
- Изобразить векторы импульса (или скорости) каждого из тел системы в начале и в конце процесса взаимодействия. Если направления импульсов некоторых тел неизвестны, то необходимо проставить их произвольным образом.
- Изобразить все силы, приложенные к телам, движение которых изучается. Представить, какие из сил, действующих на каждое из тел системы, являются внутренними, а какие внешними. Кроме того, определить, какие из этих сил являются сторонними.
- Ввести инерциальную систему отсчета. Одну из осей координат направить таким образом, чтобы в ее направлении система была замкнутой. Записать закон сохранения импульса в проекции на оси, вдоль которых система замкнута.
- Вычислить суммарную работу всех сторонних сил, действующих на тела системы в процессе их взаимодействия.

6. Выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии и записать значения полной механической энергии системы тел в начальном и конечном положениях. Если между телами системы действуют консервативные силы взаимодействия, вычислить потенциальные энергии взаимодействия в начальном и конечном положениях системы.

7. Записать закон изменения полной механической энергии системы в виде (3.65).

8. Дополнить уравнения, выражющие законы сохранения импульса и энергии системы, уравнениями динамики и кинематики для получения замкнутой системы уравнений.

9. Решить полученную систему уравнений относительно неизвестных искомых величин.

Если в задаче рассматриваются взаимодействия тел по законам упругого центрального удара, то для определения импульсов или скоростей сталкивающихся тел достаточно записать соотношения (3.75) или (3.76) в проекции на направление, вдоль которого происходит движение тел, последовательно для каждой пары взаимодействующих тел.

Задачи

Изменение импульса тела. Импульс силы

3.1. Мяч массой $m = 60 \text{ г}$ свободно падает на пол с высоты $H = 2 \text{ м}$ и подскакивает на высоту $h = 1 \text{ м}$. Определить продолжительность удара, если среднее значение силы удара мяча о пол равно $\langle F \rangle = 2 \text{ Н}$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

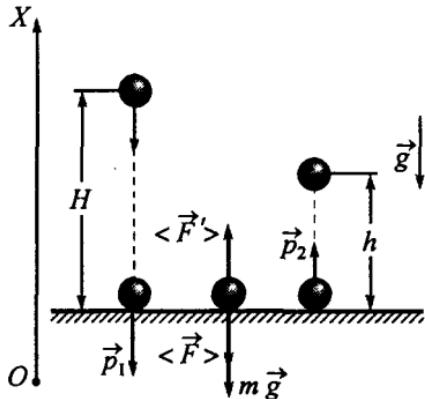


Рис. 3.17

• *Решение.* При падении с высоты H на пол мяч приобрел некоторую скорость \vec{v}_1 и в момент касания поверхности пола имел импульс $\vec{p}_1 = m \vec{v}_1$. Поскольку за время удара Δt мяч действовал на пол со средней силой $\langle \vec{F} \rangle$, то по третьему закону Ньютона пол действовал на мяч с такой же по величине силой $\langle \vec{F}' \rangle = \langle \vec{F} \rangle$, но направленной противоположно силе $\langle \vec{F} \rangle$. Кроме силы $\langle \vec{F}' \rangle$ за время удара на мяч действовала сила тяжести $m \vec{g}$. Под действием импульсов этих сил импульс мяча изменился и стал равным $\vec{p}_2 = m \vec{v}_2$.

Запишем выражение (3.5)

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (\langle \vec{F}' \rangle + m \vec{g}) \Delta t$$

в проекции на ось OX системы координат (рис. 3.17):

$$p_2 + p_1 = (\langle F' \rangle - m g) \Delta t, \quad \text{или} \quad m (v_2 + v_1) = (\langle F \rangle - m g) \Delta t.$$

Скорость мяча \vec{v}_1 в момент касания пола и скорость \vec{v}_2 в момент отскока найдем, записав кинематические уравнения движения мяча вблизи поверхности Земли:

а) при падении мяча вниз:

$$H = \frac{1}{2} g t_1^2, \quad v_1 = g t_1;$$

б) при движении мяча вверх:

$$h = v_2 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2, \quad 0 = v_2 - g t_2.$$

Отсюда находим

$$v_1 = \sqrt{2gH}; \quad v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Следовательно,

$$m(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh}) = (\langle F \rangle - mg) \Delta t,$$

а искомая продолжительность удара

$$\Delta t = \frac{m(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh})}{\langle F \rangle - mg} \approx 0,45 \text{ с.}$$

• Ответ: $\Delta t = \frac{m(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh})}{\langle F \rangle - mg} \approx 0,45 \text{ с.}$

3.2. В комнате высотой $h = 2,5 \text{ м}$ с потолка на пол упал кусок штукатурки массой $m = 50 \text{ г}$. Какой импульс был передан полу? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.3. Мяч массой $m = 50 \text{ г}$ свободно падает на пол с высоты $h = 2 \text{ м}$ и упруго отскакивает от него. Какой импульс был передан полу? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.4. Мяч массой $m = 0,15 \text{ кг}$ упруго ударяется о стенку под углом $\alpha = 30^\circ$ к ее поверхности. Найти среднее значение силы, действующей на мяч со стороны стенки, если скорость мяча в момент соударения равна $v = 10 \text{ м/с}$, а время взаимодействия $\Delta t = 0,1 \text{ с}$. Трения нет.

3.5. Небольшой шарик упруго ударяется о стенку под углом α к нормали. Коэффициент трения о стенку μ . Под каким углом шарик отлетит от стенки?

3.6. На стенку налетает поток частиц, движущихся со скоростью v под углом α к нормали. Масса каждой частицы m , их концентрация в потоке n . Определить величину силы, с которой частицы действуют на площадку S стенки, если k -я их часть поглощается стенкой, а остальные упруго отражаются от нее?

• Решение. При столкновении частиц со стенкой импульсы поглощенных частиц станут равными нулю (т.е. изменят величину), а импульсы отраженных будут направлены под углом α к нормали симметрично падающим (т.е. изменят направления). Следовательно, импульсы тех и других частиц изменятся.

Рассмотрим пучок частиц, падающих на площадку S стенки (рис. 3.18). За время Δt со стенкой

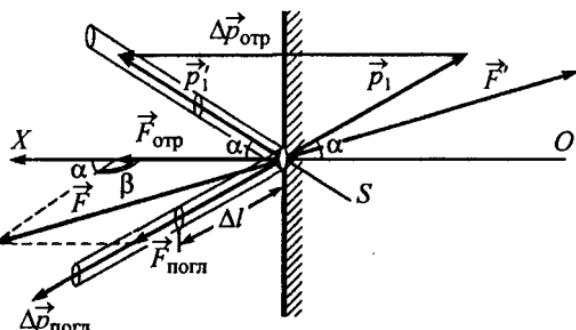


Рис. 3.18

«провзаимодействует» N частиц, заключенных в цилиндрическом столбе длиной $\Delta l = v \Delta t$ и поперечным сечением $S_0 = S \cos \alpha$:

$$N = n \Delta l S_0 = n v \Delta t S \cos \alpha,$$

при этом из них

$$N_{\text{погл}} = k N = k n v \Delta t S \cos \alpha \quad (1)$$

будут поглощены, а остальные

$$N_{\text{отр}} = (1 - k) N = (1 - k) n v \Delta t S \cos \alpha \quad (2)$$

будут отражены стенкой.

Рассмотрим частицы, поглощаемые стенкой. Изменение импульса $N_{\text{погл}}$ частиц за время Δt равно импульсу силы $\vec{F}_{\text{погл}}$, действующей на них со стороны стенки:

$$\vec{N}_{\text{погл}} \Delta \vec{p}_{\text{погл}} = \vec{F}_{\text{погл}} \Delta t. \quad (3)$$

Так как величина импульса каждой падающей частицы равна

$$p_1 = m v, \quad (4)$$

а поглощенной – нулю, то из выражения (3) получим

$$\vec{F}_{\text{погл}} = \frac{\vec{N}_{\text{погл}} \Delta \vec{p}_{\text{погл}}}{\Delta t} = \frac{N_{\text{погл}} (0 - \vec{p}_1)}{\Delta t} = - \frac{N_{\text{погл}} \vec{p}_1}{\Delta t}$$

или в проекции на направление движения падающих частиц (рис. 3.18) с учетом соотношений (1) и (4)

$$F_{\text{погл}} = \frac{N_{\text{погл}} p_1}{\Delta t} = \frac{k n m v \Delta t S \cos \alpha}{\Delta t} = k n m v^2 S \cos \alpha. \quad (5)$$

Аналогично, для отраженных частиц:

$$\begin{aligned} N_{\text{отр}} \Delta \vec{p}_{\text{отр}} &= \vec{F}_{\text{отр}} \Delta t, \\ \vec{F}_{\text{отр}} &= \frac{N_{\text{отр}} \Delta \vec{p}_{\text{отр}}}{\Delta t} = \frac{N_{\text{отр}} (\vec{p}'_1 - \vec{p}_1)}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (6)$$

где \vec{p}'_1 – импульс отраженной частицы (равный по величине импульсу \vec{p}_1 падающей); $\vec{F}_{\text{отр}}$ – сила, действующая на отраженные частицы. Проецируя (6) на направление оси OX , с учетом соотношений (2) и (4) получаем

$$F_{\text{отр}} = \frac{N_{\text{отр}} (p_1 \cos \alpha + p'_1 \cos \alpha)}{\Delta t} = 2 (1 - k) n m v^2 S \cos^2 \alpha. \quad (7)$$

Результирующая сила \vec{F} , действующая на частицы, будет складываться из силы $\vec{F}_{\text{погл}}$, действующей на поглощаемые частицы, и силы $\vec{F}_{\text{отр}}$, действующей на отражаемые частицы:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{погл}} + \vec{F}_{\text{отр}}; \quad F = \sqrt{F_{\text{погл}}^2 + F_{\text{отр}}^2 - 2 F_{\text{погл}} F_{\text{отр}} \cos \beta},$$

где угол $\beta = \pi - \alpha$. С учетом соотношений (5) и (7)

$$F = n m v^2 S \cos \alpha \sqrt{k^2 + 4 (1 - k) \cos^2 \alpha}.$$

По третьему закону Ньютона искомая сила \vec{F}' , действующая на площадку S стенки, равна по величине силе \vec{F} и направлена в противоположную сторону:

$$F' = n m v^2 S \cos \alpha \sqrt{k^2 + 4 (1 - k) \cos^2 \alpha}.$$

• Ответ: $F' = n m v^2 S \cos \alpha \sqrt{k^2 + 4 (1 - k) \cos^2 \alpha}$.

3.7. Струя воды, вытекающая из трубы диаметром $d = 2$ см со скоростью $v = 0,5$ м/с, неупруго ударяется о стенку. Определить величину силы, действующей на стенку, если труба расположена перпендикулярно к стенке. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

3.8. На стенку налетает поток частиц, движущихся перпендикулярно стенке, и упруго отражается от нее. Во сколько раз изменится величина

силы, с которой частицы действуют на стенку, если k -я их часть вдруг начнет поглощаться стенкой?

Закон сохранения импульса

3.9. Лодка длиной $l = 3$ м и массой $M = 120$ кг стоит на спокойной воде. На носу и корме находятся два рыбака массой $m_1 = 90$ кг и $m_2 = 60$ кг. На какое расстояние сместится лодка относительно воды, если рыбаки пройдут по лодке и поменяются местами? Сопротивлением воды пренебречь.

• **Решение.** Будем рассматривать лодку и рыбаков как одну систему. При перемещении рыбаков по лодке на систему будут действовать внешние силы: сила тяжести и сила Архимеда (см. §7). Обе эти силы направлены вертикально. Поскольку по условию задачи сопротивлением воды следует пренебречь, то это означает, что в горизонтальном направлении на систему никакие внешние силы не действуют. Следовательно, в направлении возможного перемещения лодки система «лодка – рыбаки» замкнута, и проекция импульса на ось OX меняться не будет.

Представим импульс системы в виде

$$\vec{P} = M_{\text{системы}} \vec{v}_c,$$

где $M_{\text{системы}} = M + m_1 + m_2$ – масса системы; \vec{v}_c – скорость ее центра масс.

Так как при перемещении рыбаков $(\vec{P})_x = \text{const}$, то и $(\vec{v}_c)_x = \text{const}$. Поскольку лодка первоначально покоялась, то проекция $(\vec{v}_c)_x = 0$, т.е. при перемещении рыбаков координата x_c центра масс системы не изменит своего положения.

В начальный момент координата центра масс лодки с рыбаками

$$x_c = \frac{Ma + m_1 l}{M + m_1 + m_2}, \quad (1)$$

где a – расстояние от начала координат до центра масс лодки (рис. 3.19, а).

После перемещения рыбаков по лодке

$$x_c = \frac{M(a + \Delta x) + m_1 \Delta x + m_2(l + \Delta x)}{M + m_1 + m_2}, \quad (2)$$

где Δx – смещение лодки относительно неподвижной системы отсчета (рис. 3.19, б).

Приравнивая правые части соотношений (1) и (2)

$$\frac{Ma + m_1 l}{M + m_1 + m_2} = \frac{M(a + \Delta x) + m_1 \Delta x + m_2(l + \Delta x)}{M + m_1 + m_2},$$

получаем

$$\Delta x = l \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} \approx 0,33 \text{ м.}$$

• Ответ: $\Delta x = l \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} \approx 0,33 \text{ м.}$

3.10. Лодка длиной $l = 3$ м и массой $M = 100$ кг стоит на спокойной воде носом к берегу. Как изменится расстояние между носом лодки и

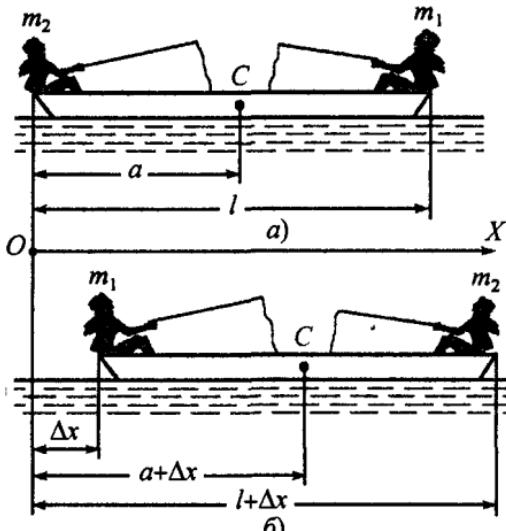


Рис. 3.19

берегом, если человек массой $m = 80$ кг перейдет с кормы на нос лодки? Сопротивлением воды пренебречь.

3.11. Однородный стержень длиной $l = 1$ м одним концом касается гладкой горизонтальной поверхности. Верхний конец стержня подвешен на нити так, что стержень образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 60^\circ$. Нить пережигают. В какую сторону и на какое расстояние сместится нижний конец стержня, когда он упадет?

3.12. Снаряд, летевший на высоте $h = 40$ м горизонтально со скоростью $v_0 = 100$ м/с, разрывается на два равных осколка. Один осколок спустя $\Delta t = 1$ с падает на землю точно под местом разрыва. Определить скорость другого осколка сразу после разрыва. Сопротивление воздуха не учитывать.

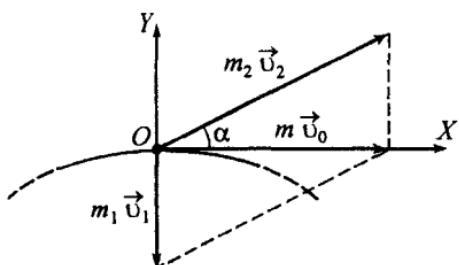


Рис. 3.20

• **Решение.** В силу кратковременности разрыва импульсом внешних сил (в данном случае силы тяжести) за время разрыва снаряда можно пренебречь и систему в течение этого промежутка времени считать замкнутой. Следовательно, справедлив закон сохранения импульса в виде

$$m \vec{v}_0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2,$$

где $m \vec{v}_0$ – импульс снаряда до разрыва; $m_1 \vec{v}_1$, $m_2 \vec{v}_2$ – импульсы осколков непосредственно после окончания действия внутренних сил, вызвавших разрыв снаряда.

Для того чтобы записать закон сохранения импульса в проекциях на оси системы координат, предварительно определим направления импульсов осколков после разрыва снаряда.

Осколок, упавший на землю под местом разрыва, имел начальную скорость, направленную вертикально. Если бы эта скорость была равной нулю, то осколок упал бы на поверхность земли через время

$$t_0 = \sqrt{2h/g} \approx 2,8 \text{ с},$$

большее $\Delta t = 1$ с. Поэтому, очевидно, после разрыва снаряда скорость рассматриваемого осколка направлена вниз.

Изобразим на рис. 3.20 схематический чертеж: импульс снаряда $m \vec{v}_0$ направлен горизонтально; импульс одного осколка $m_1 \vec{v}_1$ направлен вертикально вниз; импульс другого осколка

$$m_2 \vec{v}_2 = m \vec{v}_0 - m_1 \vec{v}_1$$

направлен под некоторым углом α к горизонту.

Теперь можно записать закон сохранения импульса в проекциях на оси системы координат с учетом, что массы осколков $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}m$:

$$OX: m v_0 = \frac{1}{2} m v_2 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$OY: 0 = -\frac{1}{2} m v_1 + \frac{1}{2} m v_2 \sin \alpha, \quad (2)$$

или

$$2 v_0 = v_2 \cos \alpha, \quad (3)$$

$$v_1 = v_2 \sin \alpha. \quad (4)$$

Возведя в квадраты уравнения (3) – (4) и сложив их, получим

$$4 v_0^2 + v_1^2 = v_2^2 \cos^2 \alpha + v_2^2 \sin^2 \alpha; \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + 4 v_0^2}. \quad (5)$$

Соотношение (5) можно получить гораздо проще, если заметить, что импульс снаряда до разрыва и импульсы осколков образуют прямоугольный треугольник. По теореме Пифагора находим

$$\frac{1}{2} m v_2 = \sqrt{\frac{1}{4} m v_1^2 + m^2 v_0^2}, \quad \text{или} \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + 4 v_0^2}.$$

Начальную скорость v_1 осколка, упавшего под местом разрыва, можно найти из уравнения движения, записанного в виде

$$v_1 \Delta t + \frac{g \Delta t^2}{2} = h; \quad v_1 = \frac{h}{\Delta t} - \frac{g \Delta t}{2}.$$

Следовательно, скорость другого осколка

$$v_2 = \sqrt{\left\{ \frac{h}{\Delta t} - \frac{g \Delta t}{2} \right\}^2 + 4 v_0^2} \approx 203 \text{ м/с.}$$

- Ответ: $v_2 = \sqrt{\left\{ \frac{h}{\Delta t} - \frac{g \Delta t}{2} \right\}^2 + 4 v_0^2} \approx 203 \text{ м/с.}$

3.13. Снаряд в верхней точке параболической траектории разрывается на два осколка равной массы. Один осколок возвращается к исходной точке вылета снаряда по его прежней траектории. Сравнить расстояние от исходной точки до места падения второго осколка с дальностью полета снаряда, если бы он не разорвался. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.14. Снаряд, летевший по вертикали, разрывается в верхней точке траектории на три равных осколка. Один из осколков, двигаясь по вертикали вниз, упал на землю через время Δt_1 после взрыва. Два других упали одновременно через время Δt_2 . Найти высоту, на которой разорвался снаряд. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.15. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, начинает соскальзывать без трения брускок массой M . В тот момент, когда брускок прошел путь ΔS , в него попадает пуля массой m , скорость которой направлена под углом β к горизонту (вниз), и застревает в бруске. Брускок при этом остановился. С какой скоростью летела пуля?

- Решение. По наклонной плоскости брускок двигался с постоянным ускорением

$$a = g \sin \alpha$$

и к моменту, когда он прошел путь ΔS , приобрел скорость

$$v = a \tau,$$

где время движения τ можно определить из кинематического соотношения

$$\Delta S = \frac{1}{2} a \tau^2.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{2 a \Delta S} = \sqrt{2 g \Delta S \sin \alpha}. \quad (1)$$

При взаимодействии пули с бруском силы трения будут одновременно тормозить оба тела. Запишем выражение (3.17) для системы тел «пуля – брускок» в виде

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \langle \vec{F}_{\text{внеш}} \rangle \Delta t, \quad (2)$$

где $\vec{p}_1 = M \vec{v} + m \vec{v}_0$, $\vec{p}_2 = 0$ – импульсы системы до и после взаимодействия (\vec{v}_0 – скорость пули до соударения); $\langle \vec{F}_{\text{внеш}} \rangle = \langle M \vec{g} + m \vec{g} + \vec{N} \rangle$ – среднее значение результирующей внешней силы (сил тяжести бруска $M \vec{g}$ и пули $m \vec{g}$ и силы реакции \vec{N}), действующих на брускок и пулю за время взаимодействия Δt .

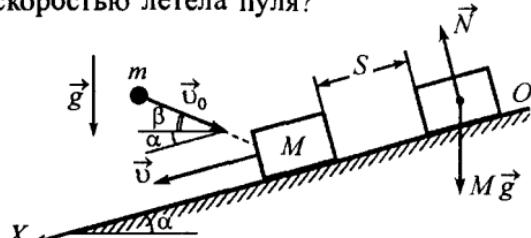


Рис. 3.21

Полагая, что время взаимодействия пули с бруском очень мало, импульсами внешних сил в направлении движения бруска за этот промежуток времени будем пренебречь. При таких допущениях в направлении оси OX (рис. 3.21) систему «пуля – брусков» за время Δt можно считать замкнутой. Поэтому соотношение (2) в проекции на ось OX системы координат примет вид

$$Mv - m v_0 \cos(\alpha + \beta) = 0.$$

Отсюда находим начальную скорость пули

$$v_0 = \frac{Mv}{m \cos(\alpha + \beta)},$$

или с учетом (1)

$$v_0 = \frac{M \sqrt{2g \Delta S \sin \alpha}}{m \cos(\alpha + \beta)}.$$

• Ответ: $v_0 = \frac{M \sqrt{2g \Delta S \sin \alpha}}{m \cos(\alpha + \beta)}$

3.16. Чтобы сцепить три одинаковых железнодорожных вагона, стоящих на рельсах на небольшом расстоянии друг от друга, первому вагону сообщают скорость $v_0 = 3$ м/с. Какую скорость будут иметь сцепившиеся вагоны? Трением пренебречь.

3.17. На горизонтальных рельсах стоит платформа с песком. В песок попадает снаряд, летевший вдоль рельсов, и застревает в нем. В момент попадания снаряда его скорость равна $v = 400$ м/с и направлена сверху вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Какую скорость приобрела платформа? Масса платформы с песком $M = 5$ т, масса снаряда $m = 10$ кг.

3.18. На тележку, движущуюся горизонтально со скоростью $v = 2$ м/с, сбросили вертикально груз. На какую величину при этом изменилась скорость тележки? Масса тележки $M = 800$ кг, масса груза $m = 200$ кг.

3.19. Из пушки массой M , находящейся у подножия наклонной плоскости, вылетает снаряд под углом α к плоскости и, если колеса пушки закреплены, падает на расстоянии S_0 от точки выстрела. Определить, на какое расстояние опустится пушка вдоль наклонной плоскости, если в момент выстрела колеса освободить. Масса снаряда $m \ll M$, плоскость составляет угол β с горизонтом, коэффициент трения пушки о плоскость равен $\mu > \tan \beta$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

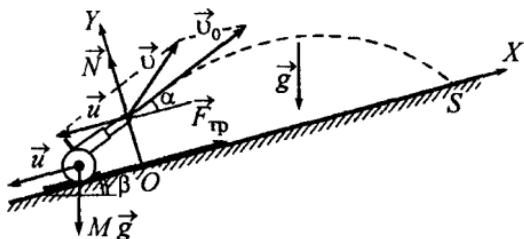


Рис. 3.22

• Решение. После выстрела из пушки, колеса которой закреплены, снаряд будет двигаться с ускорением свободного падения \vec{g} . Для определения начальной скорости снаряда, при которой дальность полета вдоль склона равна S_0 , воспользуемся результатом, полученным при решении задачи №1.73:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g S_0 \cos \beta}{\sin 2 \alpha (1 - \tan \alpha \tan \beta)}}. \quad (1)$$

Рассмотрим систему «пушка – снаряд», когда колеса пушки освобождены.

При выстреле пороховые газы будут разгонять снаряд в стволе до скорости \vec{v}_0 и одновременно «столкнуть» пушку вниз вдоль наклонной плоскости. Запишем выражение (3.17) для рассматриваемой системы тел в виде

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \langle \vec{F}_{\text{внеш}} \rangle \Delta t, \quad (2)$$

где $\vec{p}_1 = 0$, $\vec{p}_2 = M \vec{u} + m \vec{v}$ – импульсы системы до и после выстрела (\vec{u} – скорость пушки сразу после выстрела; \vec{v} – скорость снаряда относительно Земли, непосредственно после выстрела; $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_0$); $\langle \vec{F}_{\text{внеш}} \rangle = \langle M \vec{g} + m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} \rangle$ – среднее значение результирующей внешней силы (сил тяжести пушки $M \vec{g}$ и снаряда $m \vec{g}$, силы реакции \vec{N} и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$), действующих на пушку и снаряд за время выстрела Δt . Полагая, что время выстрела очень мало, импульсами внешних сил в направлении движения пушки за этот промежуток времени будем пренебречь. При таких допущениях в направлении оси OX (рис. 3.22) систему за время выстрела можно считать замкнутой. Поэтому соотношение (2) в проекции на ось OX системы координат примет вид

$$m(v_0 \cos \alpha - u) - M u = 0.$$

Следовательно, скорость пушки

$$u = \frac{m v_0 \cos \alpha}{m + M},$$

или с учетом (1)

$$u = \frac{m \cos \alpha}{m + M} \sqrt{\frac{g S_0 \cos \beta}{\sin 2 \alpha (1 - \tan \alpha \tan \beta)}}. \quad (3)$$

Обратимся теперь к законам динамики. При движении на пушку действуют силы тяжести $M \vec{g}$ (массой снаряда по сравнению с массой пушки пренебрегаем), силы реакции \vec{N} и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, под действием которых пушка будет скользить вниз вдоль наклонной плоскости. Записав уравнение движения пушки

$$M \vec{d} = M \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

в проекциях на оси системы координат

$$OX: M a_x = F_{\text{тр}} - M g \sin \beta,$$

$$OY: 0 = N - M g \cos \beta,$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

найдем ускорение пушки

$$a_x = g \cos \beta (\mu - \tan \beta).$$

Из кинематических уравнений

$$x = -u t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad u_x = -u + a_x t,$$

записанных для момента времени, когда пушка после отката остановится ($x = -S$, $u_x = 0$),

$$S = u \tau - \frac{a_x \tau^2}{2}, \quad 0 = u - a_x \tau,$$

получим

$$S = \frac{u^2}{2 a_x} = \frac{u^2}{2 g (\mu - \tan \beta) \cos \beta}. \quad (4)$$

Подставив в (4) значение начальной скорости пушки (3) при условии $m \ll M$, найдем расстояние, на которое опустится пушка вдоль наклонной плоскости после выстрела:

$$S = \frac{m^2 S_0}{4 M^2 \tan \alpha (1 - \tan \alpha \tan \beta) (\mu - \tan \beta)}.$$

• Ответ: $S = \frac{m^2 S_0}{4 M^2 \tan \alpha (1 - \tan \alpha \tan \beta) (\mu - \tan \beta)}$

3.20. Человек неподвижно стоит на тележке, которая может двигаться по горизонтальной поверхности без трения. Определить скорость тележки, если человек начнет перемещаться по ней со скоростью $v = 5 \text{ м/с}$ относительно тележки. Масса тележки $M = 120 \text{ кг}$, масса человека $m = 80 \text{ кг}$.

3.21. Из ружья массой $M = 5$ кг вылетает пуля массой $m = 5$ г со скоростью $v = 600$ м/с относительно ружья. Определить скорость отдачи ружья.

3.22. Ствол пушки направлен под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Когда колеса пушки закреплены, скорость снаряда, масса которого в $\eta = 50$ раз меньше массы пушки, $v = 180$ м/с. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если колеса освободить.

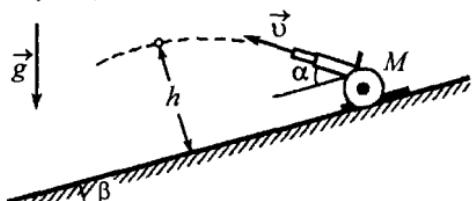


Рис. 3.23

нной плоскости, если в момент выстрела колеса освободить. Масса снаряда $m \ll M$, плоскость составляет угол β с горизонтом, коэффициент трения пушки о плоскость равен $\mu > \tan \beta$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Работа силы. Мощность

3.24. Определить минимальную работу, которую нужно совершить для того, чтобы построить куб со стороной $a = 1$ м из материала плотностью $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³.

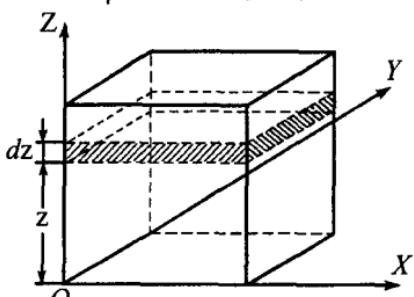


Рис. 3.24

• *Решение.* Вообще говоря, при построении куба нужно совершить работу, чтобы перенести «кирпичики», из которых он состоит, с некоторого расстояния к месту построения и затем поднять их на соответствующие уровни. Однако поскольку нас интересует минимальная работа, то «строительный материал» будем перемещать с помощью каких-либо приспособлений, чтобы исключить трение. При этом затраченная работа будет равна нулю, так как направление перемещения перпендикулярно действию сил тяжести и реакции.

Для определения работы, необходимой для поднятия «кирпичиков» на соответствующие уровни, разобьем куб на бесконечно тонкие горизонтальные слои толщиной dz (рис. 3.24) и массой dm . Работа по поднятию такого слоя на высоту z относительно уровня земли равна

$$dA = dm g z,$$

где $dm = \rho dV = \rho a^2 dz$.

Работа, затрачиваемая на построение всего куба, равна сумме элементарных работ dA и может быть выражена через определенный интеграл

$$A = \int_0^a g \rho a^2 z dz.$$

Так как подынтегральная функция линейна по z , то значение интеграла можно вычислить различными способами (например, графически или через среднее значение), которые рассмотрим в следующих примерах. Здесь же интеграл возьмем непосредственно:

$$A = g \rho a^2 \frac{\frac{a}{2}}{2} = \frac{\rho g a^4}{2} = 9,8 \text{ кДж.}$$

Полученный результат можно представить и по-другому:

$$A = \frac{m g a}{2},$$

т.е. минимальная работа, необходимая для построения куба, численно равна работе по поднятию материальной точки массой, равной массе всего куба, до уровня его центра масс.

- Ответ: $A = \frac{1}{2} \rho g a^4 = 9,8 \text{ кДж.}$

3.25. Цепь массой $m = 5 \text{ кг}$ и длиной $l = 2 \text{ м}$, лежащую на горизонтальной плоскости, поднимают за один из ее концов. Чему равна минимальная работа по подъему цепи на высоту, равную ее длине?

3.26. Десять кирпичей массой $m = 2 \text{ кг}$ и толщиной $h = 10 \text{ см}$ каждый лежат широкой своей частью на горизонтальном столе. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы положить их друг на друга?

3.27. Найти работу, которую необходимо совершить, чтобы с минимальным усилием переместить брусков массой m вдоль наклонной плоскости из точки 1 в точку 2 (рис. 3.25), расстояние между которыми по горизонтали l , а по вертикали h . Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен μ .

- Решение. Чтобы переместить брусков из точки 1 в точку 2, приложим к нему силу \vec{F} , направленную под углом β к наклонной плоскости.

При движении на брусков будут действовать четыре силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила \vec{F} . Запишем уравнение движения бруска

$$m \vec{a} = \vec{F} + m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

в проекциях на оси системы координат:

$$OX: m a = F \cos \beta - m g \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$OY: 0 = N + F \sin \beta - m g \cos \alpha, \quad (2)$$

где сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Из (1) – (2) получим

$$m a = F \cos \beta - m g \sin \alpha - \mu (m g \cos \alpha - F \sin \beta).$$

Следовательно, величина силы

$$F = \frac{m (a + g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \quad (3)$$

зависит от ускорения бруска и угла β . Очевидно, что F будет тем меньше, чем меньше ускорение бруска. Поэтому для нахождения работы, соответствующей перемещению бруска с минимальным усилием, к брускам надо приложить такую по величине силу, чтобы движение было равномерным ($\vec{a} = 0$). Для определения значения угла β , при котором величина силы F минимальна, исследуем (3) на экстремум.

Поскольку от угла β зависит лишь знаменатель

$$f(\beta) = \cos \beta + \mu \sin \beta,$$

то вместо того, чтобы исследовать на минимум функцию $F(\beta)$, исследуем на максимум функцию $f(\beta)$:

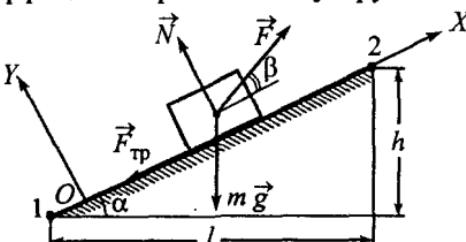


Рис. 3.25

$$\frac{df}{d\beta} = -\sin \beta + \mu \cos \beta = 0; \quad \frac{df^2}{d\beta^2} = -\cos \beta - \mu \sin \beta < 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta = \mu, \quad F_{\min} = \frac{m g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 + \mu \operatorname{tg} \beta} = \frac{m g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Работа постоянной силы \vec{F} на пути ΔS_{1-2}

$$A = F_s \Delta S_{1-2} = F \cos \beta \Delta S_{1-2}$$

при $F = F_{\min}$ равна

$$A = \frac{m g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\sqrt{1 + \mu^2}} \cos \beta \Delta S_{1-2} = \frac{m g (\Delta S_{1-2} \sin \alpha + \mu \Delta S_{1-2} \cos \alpha)}{1 + \mu^2} = \frac{m g (h + \mu l)}{1 + \mu^2},$$

где учтено, что $\Delta S_{1-2} \sin \alpha = h$; $\Delta S_{1-2} \cos \alpha = l$.

• Ответ: $A = \frac{m g (h + \mu l)}{1 + \mu^2}$.

3.28. Груз массой $m = 7$ кг поднимают на легкой веревке с поверхности земли на высоту $h = 1$ м: один раз равномерно, второй – равноускоренно с ускорением $a = 2$ м/с². На сколько большую работу по подъему груза совершили во втором случае, чем в первом? Сопротивление воздуха не учитывать.

3.29. Какую работу совершил сила \vec{F} , подняв по наклонной плоскости груз массой $m = 2$ кг на высоту $h = 2,5$ м с ускорением $a = 10$ м/с²? Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$. Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением о плоскость пренебречь.

3.30. Найти минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы втащить тело массой $m = 50$ кг на горку произвольного профиля по плоской траектории из точки 1 в точку 2, расстояние между которыми по горизонтали $l = 10$ м, а по вертикали $h = 10$ м. Коэффициент трения между телом и горкой всюду одинаков и равен $\mu = 0,1$. Профиль горки такой, что касательная к нему в любой точке составляет острый угол с горизонтом. Сила, приложенная к телу, всюду действует по касательной к траектории его перемещения.

3.31. Бруск массой m и длиной l лежит на стыке двух горизонтальных столов (рис. 3.26, а). Какую минимальную работу надо совершить, чтобы перетащить тело волоком с первого стола на второй, если коэффициенты трения между телом и столами соответственно равны μ_1 и μ_2 .

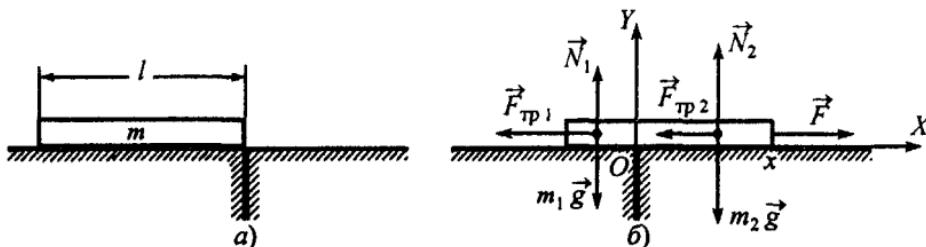


Рис. 3.26

• Решение. Рассмотрим промежуточное положение бруска, соответствующее длине x его части, находящейся на втором столе. Силы, действующие на бруск в этот момент времени,

представлены на рис. 3.26, б. Чтобы совершить минимальную работу по перетаскиванию бруска, к нему необходимо приложить горизонтальную силу F , которая по величине должна быть равна сумме сил трения $F_{\text{тр}1}$ и $F_{\text{тр}2}$, действующих на брусков со стороны первого и второго столов:

$$F = F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}.$$

Поскольку силы реакции $N_1 = m_1 g$, $N_2 = m_2 g$, то силы трения

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g, \quad F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g,$$

где m_1 и m_2 – массы частей бруска, находящихся в данный момент времени на первом и втором столах соответственно:

$$m_1 = \frac{m}{l} (l - x), \quad m_2 = \frac{m}{l} x.$$

Следовательно,

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 \frac{m}{l} (l - x) g, \quad F_{\text{тр}2} = \mu_2 \frac{m}{l} x g, \quad F = \frac{\mu_1 m g (l - x)}{l} + \frac{\mu_2 m g x}{l}.$$

Как видим, сила F будет меняться в зависимости от пройденного бруском пути x по линейному закону. Работа переменной силы F может быть определена одним из трех способов.

1 способ. График зависимости силы F от координаты (пройденного пути) x представлен на рис. 3.27. Работа переменной силы F численно равна площади заштрихованной фигуры (трапеции):

$$A = \frac{(\mu_1 + \mu_2) m g l}{2}.$$

2 способ. Поскольку сила F зависит от пройденного бруском пути x по линейному закону, то среднее значение силы

$$\langle F \rangle = \frac{(\mu_1 + \mu_2) m g}{2},$$

а работа силы на пути l

$$A = \langle F \rangle l = \frac{(\mu_1 + \mu_2) m g l}{2}.$$

3 способ. Работа силы F может быть определена с помощью интегрирования:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^l F dx = \int_0^l \left\{ \frac{\mu_1 m g (l - x)}{l} + \frac{\mu_2 m g x}{l} \right\} dx = \int_0^l \frac{\mu_1 m g (l - x)}{l} dx + \int_0^l \frac{\mu_2 m g x}{l} dx = \\ &= \mu_1 m g x \Big|_0^l - \frac{\mu_1 m g x^2}{2l} \Big|_0^l + \frac{\mu_2 m g x^2}{2l} \Big|_0^l = \frac{(\mu_1 + \mu_2) m g l}{2}. \end{aligned}$$

• Ответ: $A = \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) m g l$.

3.32. Чтобы вытащить гвоздь длиной $l = 10$ см из доски, нужно приложить силу не менее чем $F_{\min} = 500$ Н. Считая, что сила взаимодействия гвоздя с материалом доски прямо пропорциональна длине погруженной в доску части гвоздя, найти минимальную работу, совершенную при забивании гвоздя. Силу тяжести гвоздя не учитывать.

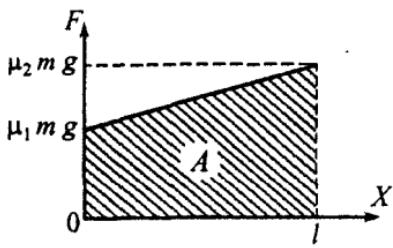
Решение. Поскольку сила взаимодействия гвоздя с доской (сила трения) прямо пропорциональна длине погруженной в доску части гвоздя, то для вытаскивания полностью забитого гвоздя к нему нужно приложить силу (рис. 3.28, а)

$$F \geq F_{\text{тр} \max} = \alpha l,$$

где $F_{\text{тр} \max}$ – максимальное значение силы трения; α – коэффициент пропорциональности между силой трения и частью гвоздя, находящейся в доске. По условию задачи наименьшее значение силы $F = F_{\min}$. Следовательно,

$$F_{\min} = \alpha l. \quad (1)$$

Рис. 3.27



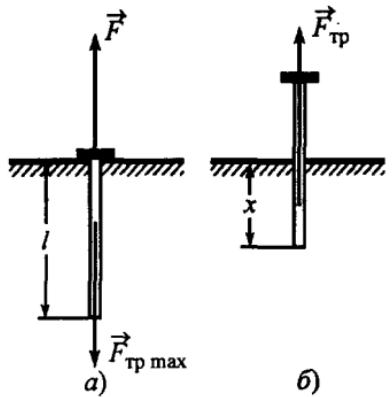


Рис. 3.28

Рассмотрим промежуточное положение гвоздя, забиваемого в доску, при котором в доске находится часть гвоздя длиной x (рис. 3.28, б). При ударе по гвоздю в таком положении со стороны доски на него будет действовать сила трения

$$F_{\text{тр}} = \alpha \cdot x.$$

Следовательно, для поступательного движения гвоздя к нему нужно приложить силу

$$F_0 \geq F_{\text{тр}}, \quad \text{или} \quad F_0 \geq \alpha \cdot x.$$

Как видим, сила F_0 , приложенная к гвоздю, должна возрастать в зависимости от глубины погружения x по линейному закону. Минимальная работа такой силы в интервале $0 \leq x \leq l$ равна

$$A = \langle F_0 \rangle l = \frac{F_{0 \min} + F_{0 \max}}{2} l = \frac{\alpha l}{2} l = \frac{\alpha l^2}{2}, \quad (2)$$

или с учетом (1)

$$A = \frac{1}{2} F_{\min} l = 25 \text{ Н.}$$

• Ответ: $A = \frac{1}{2} F_{\min} l = 25 \text{ Н.}$

3.33. После первого удара молотком по гвоздю длиной l , тот входит в доску на глубину (l/k) , где $k > 1$. За сколько ударов гвоздь будет забит полностью, если сила сопротивления материала доски прямо пропорциональна глубине погружения гвоздя? Силу тяжести гвоздя не учитывать.

3.34. Чтобы вытащить пробку из цилиндрической трубы на половину ее длины, нужно совершить работу не менее $A = 30 \text{ Дж}$. Какую работу нужно совершить, чтобы вытащить пробку из этой трубы целиком? Считать, что сила трения пропорциональна длине пробки, находящейся в трубе.

3.35. Резиновый шланг нужно надеть на цилиндрическую трубку. Во сколько раз большую работу нужно совершить, чтобы надеть шланг целиком, чем надеть его с противоположных концов трубы, предварительно разрезав на две равные части? Сила трения между резиной и трубкой прямо пропорциональна длине надетого куска шланга. Силу тяжести шланга не учитывать.

3.36. Какую мощность развивает человек, везущий по горизонтальной дороге груженые санки общей массой $m = 40 \text{ кг}$? Коэффициент трения полозьев о дорогу равен $\mu = 0,1$. Человек тянет санки с постоянной скоростью $v = 3 \text{ м/с}$ с помощью веревки, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту.

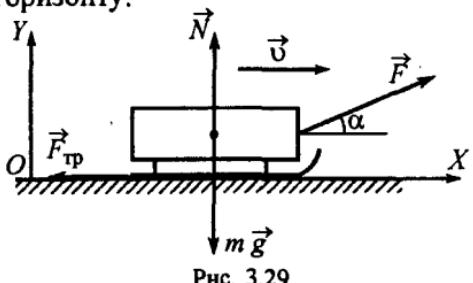


Рис. 3.29

• Решение. При движении санок на них будут действовать четыре силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила \vec{F} , приложенная человеком (рис. 3.29). Запишем уравнение движения санок

$$m \vec{d} = \vec{F} + m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

в проекциях на оси системы координат с учетом, что ускорение $\vec{d} = 0$:

$$OX: 0 = F \cos \alpha - F_{\text{тр}},$$

$$OY: 0 = N + F \sin \alpha - m g,$$

где сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Следовательно, величина силы и ее проекция на направление перемещения равны

$$F = \frac{\mu m g}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}; \quad F_s = \frac{\mu m g}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{\mu m g}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

Так как проекция F_s силы \vec{F} постоянна, то на некотором пути ΔS , пройденном за время t , человеком будет совершена работа

$$A = F_s \Delta S = \frac{\mu m g}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \Delta S,$$

где путь $\Delta S = v t$. Следовательно,

$$A = \frac{\mu m g}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} v t,$$

а мощность, развиваемая человеком,

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\mu m g v}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \approx 111,2 \text{ Вт.}$$

Мощность N можно найти по-другому: так как скорость санок не изменяется, то мгновенная мощность, развиваемая человеком, равна средней мощности за произвольный промежуток времени:

$$N = F_s v = \frac{\mu m g v}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

• Ответ: $N = \frac{\mu m g v}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \approx 111,2 \text{ Вт.}$

3.37. Лошадь везет сани массой $m = 200 \text{ кг}$ вверх по наклонной дороге со скоростью $v = 0,5 \text{ м/с}$. Коэффициент трения полозьев о дорогу $\mu = 0,3$. Угол наклона дороги к горизонту $\alpha = 30^\circ$. Определить мощность, развиваемую лошадью.

3.38. Поезд массой $m = 10^3 \text{ т}$ начинает двигаться в гору с ускорением $a = 0,2 \text{ м/с}^2$. Определить среднюю мощность двигателя тепловоза за первые $t = 10 \text{ с}$ после начала движения. Плоскость горы составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом.

3.39. Самолет для взлета должен иметь скорость $v = 25 \text{ м/с}$. Длина пробега перед взлетом $S = 100 \text{ м}$. Какова мощность моторов самолета в момент отрыва от земли? Считать движение самолета при взлете равноускоренным, а силу сопротивления пропорциональной весу самолета. Масса самолета $m = 5 \text{ т}$, коэффициент сопротивления $k = 0,02$.

Работа и изменение кинетической энергии

3.40. Пуля проникает в толстую доску на глубину $H = 15 \text{ см}$. Скорость пули в момент соударения с доской $v_0 = 500 \text{ м/с}$. С какой скоростью вылетит такая пуля, пробив доску из того же материала толщиной $h = 5 \text{ см}$? Силу сопротивления материала доски считать постоянной, а движение пули прямолинейным.

• Решение. При движении в доске толщиной h некоторая доля первоначальной кинетической энергии пули $T_1 = \frac{1}{2} m v_0^2$ (где m – масса пули) будет затрачена на работу по преодолению силы сопротивления материала доски.

Запишем теорему о кинетической энергии в виде

$$\Delta T = T_2 - T_1 = A (F_{\text{сопр}}),$$

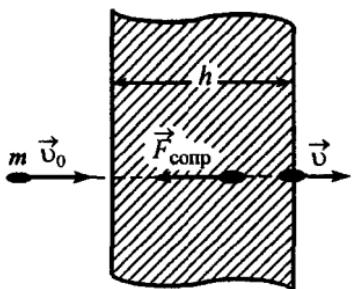


Рис. 3.30

где $T_2 = \frac{1}{2} m v^2$ – кинетическая энергия пули, вылетевшей из доски; $A(F_{\text{сопр}}) = -F_{\text{сопр}} h$ – работа силы сопротивления материала доски (знак «минус» обусловлен тем, что проекция силы $\vec{F}_{\text{сопр}}$ на направление перемещения пули отрицательна, рис. 3.30). Следовательно,

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = -F_{\text{сопр}} h. \quad (1)$$

Для определения величины силы сопротивления материала доски воспользуемся условием, что вся кинетическая энергия пули уходит на работу по преодолению силы $\vec{F}_{\text{сопр}}$ в доске толщиной H , т.е.

$$0 - \frac{m v_0^2}{2} = -F_{\text{сопр}} H.$$

Следовательно,

$$F_{\text{сопр}} = \frac{m v_0^2}{2 H}. \quad (2)$$

Из выражения (1), записанного с учетом (2)

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = -\frac{m v_0^2}{2 H} h,$$

получим

$$v = v_0 \sqrt{1 - h/H} \approx 408 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $v = v_0 \sqrt{1 - h/H} \approx 408 \text{ м/с.}$

3.41. Пуля, летящая с некоторой скоростью, проникает в стенку на $h = 10$ см. На какую глубины проникнет в ту же стенку пуля, которая будет иметь скорость вдвое большую? Силу сопротивления стенки считать постоянной, а движение пули прямолинейным.

3.42. Пуля пробивает доску толщиной $h = 3,6$ см и продолжает полет со скоростью, равной $\alpha = 0,8$ начальной скорости. Какой максимальной толщины доску из того же материала она может пробить? Силу сопротивления материала доски считать постоянной, а движение пули прямолинейным.

3.43. Саны длиной $l = 0,6$ м, соскользнув с горки, движутся без трения по заснеженной горизонтальной дороге со скоростью $v_0 = 10,8$ км/ч и выезжают на асфальт. Определить путь, пройденный санями по асфальту, если коэффициент трения между асфальтом и полозьями саней $\mu = 0,5$. Трением саней о снег пренебречь.

• Решение. При движении саней по асфальту их кинетическая энергия будет изменяться от $T_1 = \frac{1}{2} m v_0^2$ до $T_2 = 0$. Запишем теорему о кинетической энергии саней в виде

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \Sigma A(F),$$

где $\Sigma A(F)$ – алгебраическая сумма работ всех сил (силы тяжести $m \vec{g}$, силы реакции \vec{N} и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$), действующих на сани. Поскольку сила тяжести саней и сила реакции направлены перпендикулярно перемещению, то их работа равна нулю. Следовательно, изменение кинетической энергии саней будет равно работе силы трения:

$$0 - \frac{m v_0^2}{2} = \Sigma A(F_{\text{тр}}). \quad (1)$$

Понятно, что в течение промежутка времени, пока сани полностью не выедут на асфальт, сила трения будет меняться, а затем станет постоянной.

Рассмотрим промежуточное положение саней, соответствующее длине x их части, находящейся на асфальте (рис. 3.31). В этот момент на сани будет действовать сила трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, равная

$$F_{\text{тр}1} = \mu N_1,$$

где $N_1 = m_1 g$; m_1 – масса части саней, находящейся в данный момент времени на асфальте:

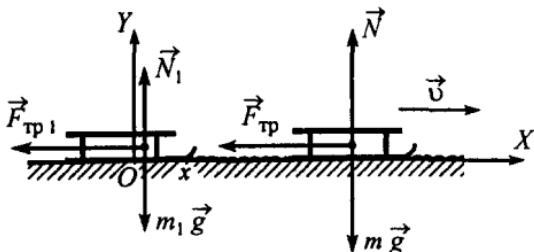


Рис. 3.31

Следовательно,

$$m_1 = \frac{m}{l} x.$$

$$F_{\text{тр}1} = \mu \frac{m}{l} x g.$$

Как видим, величина силы $\vec{F}_{\text{тр}1}$ будет меняться в зависимости от пройденного санями пути x по линейному закону. Работа переменной силы $\vec{F}_{\text{тр}1}$ будет отрицательна (поскольку отрицательна проекция силы $\vec{F}_{\text{тр}1}$ на направление перемещения) и в интервале $0 \leq x \leq l$ равна

$$A(F_{\text{тр}1}) = - \langle F_{\text{тр}1} \rangle l = - \frac{\mu m g l}{2}. \quad (2)$$

Дальнейшее движение саней будет происходить при постоянной величине силы трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, где $N = m g$. Работа постоянной силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ на пути ΔS равна

$$A(F_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}} \Delta S = -\mu m g \Delta S. \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) выражение (1) примет вид

$$-\frac{\frac{m v_0^2}{2}}{2} = -\frac{\mu m g l}{2} - \mu m g \Delta S.$$

Следовательно, путь, пройденный санями по асфальту,

$$\Delta S_0 = l + \Delta S = l + \frac{v_0^2}{2 \mu g} - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} + \frac{v_0^2}{2 \mu g} \approx 1,2 \text{ м.}$$

• Ответ: $\Delta S_0 = \frac{l}{2} + \frac{v_0^2}{2 \mu g} \approx 1,2 \text{ м.}$

3.44. Однородный брускок, скользящий со скоростью $v = 5 \text{ м/с}$ по гладкой горизонтальной поверхности, наезжает на шероховатую поверхность с коэффициентом трения $\mu = 0,8$. При какой минимальной длине бруска он остановится так, что часть его еще будет находиться на гладкой поверхности?

3.45. Однородный брускок длиной $l = 50 \text{ см}$, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, попадает на шероховатый участок шириной $2l$, коэффициент трения о который $\mu = 0,4$. При какой начальной скорости брускок преодолеет этот участок?

Работа и изменение потенциальной энергии

3.46. Груз массой $m = 10 \text{ кг}$ падает с высоты $H = 7 \text{ м}$ и проникает в мягкий грунт на глубину $h = 7 \text{ см}$. Определить среднюю силу сопротивления грунта. Сопротивлением воздуха пренебречь.

• *Решение.* При падении груза с высоты H на поверхность земли сила тяжести совершила положительную работу (так как направления силы тяжести и перемещения одинаковы), за счет которой груз приобретет кинетическую энергию. При дальнейшем движении груза эта энергия будет затрачена на совершение работы по преодолению силы сопротивления грунта.

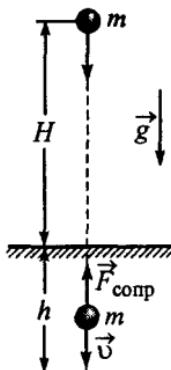


Рис. 3.32

Выберем за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии горизонтальный уровень, расположенный в грунте на глубине h (рис. 3.32). Тогда потенциальная энергия груза на высоте H над поверхностью земли будет равна

$$U_1 = m g (H + h), \quad (1)$$

а на глубине h

$$U_2 = 0. \quad (2)$$

При движении груза в грунте неконсервативной силой сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр}}$ будет совершена отрицательная работа (так как сила сопротивления направлена противоположно перемещению)

$$A (\vec{F}_{\text{сопр}}) = - \langle \vec{F}_{\text{сопр}} \rangle h, \quad (3)$$

где $\langle \vec{F}_{\text{сопр}} \rangle$ – среднее значение силы сопротивления грунта.

Воспользуемся теоремой о полной механической энергии тела в виде

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A (\vec{F}_{\text{сопр}}). \quad (4)$$

Поскольку в начальном и конечном положениях груза его кинетическая энергия равна нулю, то изменение полной механической энергии груза равно изменению его потенциальной энергии. Следовательно, выражение (4) примет вид

$$\Delta U = U_2 - U_1 = A (\vec{F}_{\text{сопр}}),$$

или с учетом (1) – (3)

$$0 - m g (H + h) = - \langle \vec{F}_{\text{сопр}} \rangle h.$$

Отсюда средняя сила сопротивления грунта

$$\langle \vec{F}_{\text{сопр}} \rangle = m g \frac{H + h}{h} \approx 9,8 \text{ кН.}$$

• Ответ: $\langle \vec{F}_{\text{сопр}} \rangle = m g \frac{H + h}{h} \approx 9,8 \text{ кН.}$

3.47. Груз свободно падает с высоты H и погружается в глину на глубину h_1 . Какой толщины слой песка следует насыпать на глину, чтобы груз углубился в глину на глубину h_2 , если средняя сила сопротивления глины в два раза больше средней силы сопротивления песка? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.48. По плоскости, составляющей угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом, соскальзывает шайба и в конце спуска ударяется о стенку, перпендикулярную наклонной плоскости (рис. 3.33). На какую высоту поднимется шайба по плоскости после удара о стенку, если первоначально она находилась на высоте $H = 6 \text{ м}$? Коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0,2$. Удар шайбы о стенку абсолютно упругий.

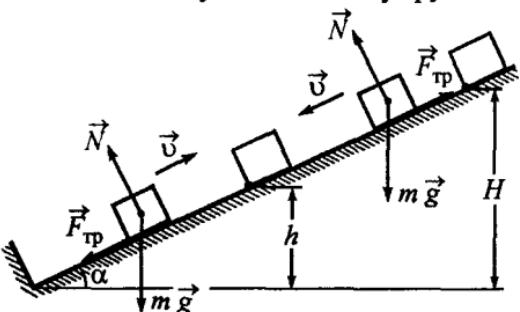


Рис. 3.33

• Решение. Шайба, соскальзывая с наклонной плоскости, будет приобретать кинетическую энергию за счет убытка потенциальной. После соударения со стенкой шайба начнет двигаться вверх и, в свою очередь, кинетическая энергия перейдет в потенциальную. Однако превращение одного вида энергии в другой будет не полным, так как часть энергии будет израсходована на работу против силы трения (перейдет в тепло).

При движении на шайбу будут действовать две неконсервативные силы – сила реакции \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Так как работа силы \vec{N} равна нулю, то теорему о полной механической энергии можно записать в виде

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \Sigma A(F_{\text{тр}}), \quad (1)$$

где $\Sigma A(F_{\text{тр}})$ – алгебраическая сумма работ сил трения, действующих на шайбу при скользывании вниз и движении вверх по наклонной плоскости после удара о стенку.

Поскольку в начальном и конечном положениях шайбы ее кинетическая энергия равна нулю, то за все время движения изменение полной механической энергии шайбы равно изменению ее потенциальной энергии. Следовательно, выбрав нулевой уровень отсчета потенциальной энергии у основания наклонной плоскости, выражение (1) можно записать в виде

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \Sigma A(F_{\text{тр}}), \quad (2)$$

где начальная и конечная потенциальные энергии шайбы равны $U_1 = mgh$ и $U_2 = mgH$ соответственно.

Легко понять, что при движении шайбы как вниз, так и вверх по наклонной плоскости, величина силы трения не изменится. Поэтому работа сил трения

$$\Sigma A(F_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}(\Delta S_1 + \Delta S_2), \quad (3)$$

где $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$; ΔS_1 и ΔS_2 – отрезки пути, пройденные шайбой по наклонной плоскости при движении вниз до соударения со стенкой и вверх на высоту h :

$$\Delta S_1 = \frac{H}{\sin \alpha}, \quad \Delta S_2 = \frac{h}{\sin \alpha}. \quad (4)$$

С учетом соотношений (3) – (4) выражение (2) запишем в виде

$$mgH - mgh = -\mu mg \cos \alpha \left\{ \frac{H}{\sin \alpha} + \frac{h}{\sin \alpha} \right\}.$$

Отсюда находим

$$h = H \frac{\tan \alpha - \mu}{\tan \alpha + \mu} = 4 \text{ м.}$$

- Ответ: $h = H \frac{\tan \alpha - \mu}{\tan \alpha + \mu} = 4 \text{ м.}$

3.49. Небольшая шайба скользит без начальной скорости с вершины наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью изменяется с расстоянием x от вершины по закону $\mu = kx$, где $k = 0,1 \text{ м}^{-1}$. На каком расстоянии от вершины надо поставить упор, чтобы после абсолютно упругого соударения и отскока шайба прошла как можно больший путь?

3.50. К бруски массой $m = 11 \text{ кг}$, лежащему на горизонтальной поверхности, прикреплена пружина жесткостью $k = 200 \text{ Н/м}$. В начальный момент пружина не деформирована. Затем, приложив к свободному концу пружины силу \vec{F} , направленную под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту (рис. 3.34), брусок медленно переместили на расстояние $l = 50 \text{ см}$. Какая работа была при этом совершена? Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0,1$.

- Решение. Сила \vec{F} , приложенная к свободному концу пружины, будет ее растягивать. При этом в пружине возникнет сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, равная по величине силе \vec{F} .

Поскольку по условию задачи бруск перемещали медленно, то можно считать, что силы, приложенные к бруsku, обеспечивали его равномерное движение с пренебрежимо малой скоростью.

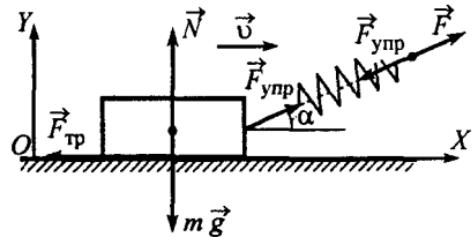


Рис. 3.34

При движении на бруск действуют четыре силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила реакции \vec{N} , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$.

Запишем уравнение равномерного движения бруска (с учетом, что сила упругости, действующая на бруск, $\vec{F}_{\text{упр}} = \vec{F}$)

$$\vec{F} + m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0$$

в проекциях на оси системы координат:

$$OX: F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0,$$

$$OY: F \sin \alpha + N - m g = 0,$$

где $F_{\text{тр}} = \mu N$. Следовательно, для равномерного движения бруска приложенная сила должна быть равна

$$F = \frac{\mu m g}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \text{const.}$$

Постоянная сила \vec{F} на пути l совершил работу

$$A_1 = F l \cos \alpha = \frac{\mu m g l \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Понятно, что при

$$F_{\text{упр}} = F < \frac{\mu m g}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

брюск перемещаться не будет. Чтобы сила упругости достигла значения, достаточного для движения бруска, пружина должна быть растянута на величину

$$\Delta x = \frac{F}{k} = \frac{\mu m g}{k (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)},$$

т.е. иметь потенциальную энергию

$$U = \frac{k \Delta x^2}{2} = \frac{\mu^2 m^2 g^2}{2 k (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2}.$$

Так как при растяжении пружины кинетическая энергия бруска не менялась, то изменение полной механической энергии системы равно изменению потенциальной энергии пружины. Следовательно, теорему о полной механической энергии можно записать в виде

$$\Delta U = A(F),$$

где $A(F) = A_2$ – работа силы \vec{F} по растяжению пружины на величину Δx .

Поскольку начальная энергия пружины равна нулю, то

$$A_2 = U = \frac{\mu^2 m^2 g^2}{2 k (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2}.$$

Следовательно, минимальная работа, совершенная силой \vec{F} при перемещении бруска на заданное расстояние, равна сумме работ A_1 и A_2 :

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\mu m g}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \left\{ l \cos \alpha + \frac{\mu m g}{2 k (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} \right\} \approx 5,4 \text{ Дж.}$$

$$\bullet \text{ Ответ: } A = \frac{\mu m g}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \left\{ l \cos \alpha + \frac{\mu m g}{2 k (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} \right\} \approx 5,4 \text{ Дж.}$$

3.51. На горизонтальной поверхности лежит бруск массой $m = 2 \text{ кг}$. К бруск прикреплена легкая пружина жесткостью $k = 100 \text{ Н/м}$. К свободному концу пружины приложили горизонтальную силу \vec{F} , растягивающую пружину. Какую работу совершил сила \vec{F} к моменту, когда бруск начнет скользить? Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0,5$.

3.52. Два одинаковых бруска массой $m = 1 \text{ кг}$ каждый соединены легким недеформированным резиновым шнуром и удерживаются на наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом (рис. 3.35). К

верхнему брускому прикладывают постоянную силу $F = 30$ Н, направленную вдоль наклонной плоскости вверх. Какую работу совершил сила к моменту, когда нижний брускок сдвинется с места? Коэффициент трения тел о плоскость $\mu = 0,6$, жесткость шнура $k = 25$ Н/м.

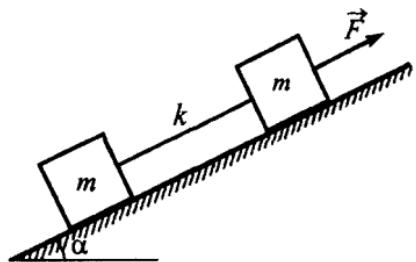


Рис. 3.35



a)

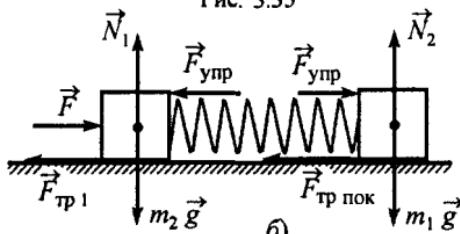


Рис. 3.36

3.53. На горизонтальном столе лежат два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, соединенных легкой пружиной (рис. 3.36, а). Какую наименьшую постоянную горизонтальную силу надо приложить к первому брускому, чтобы сдвинулся второй? Коэффициент трения брусков о поверхность стола одинаков и равен $\mu = 0,2$. В начальный момент пружина недеформирована.

• **Решение.** При движении вправо бруска массой m_1 пружина будет сжиматься, и на бруски будет действовать сила упругости (рис. 3.36, б)

$$F_{\text{упр}} = k \Delta x,$$

где k – коэффициент жесткости пружины; Δx – ее деформация, равная расстоянию, пройденному первым бруском (при условии, что второй покоятся). Кроме силы $F_{\text{упр}}$ на первый бруск в горизонтальном направлении действует сила трения $F_{\text{тр}1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$, а на второй – сила трения покоя $F_{\text{тр пок}}$, причем $F_{\text{тр пок}} = F_{\text{упр}}$.

Поскольку при движении первого бруска пружина сжимается и сила упругости возрастает, то до некоторого момента времени сила $F > F_{\text{упр}}$ и бруск массой m_1 будет двигаться ускоренно, а после этого сила F станет меньше силы $F_{\text{упр}}$ и бруск станет двигаться замедленно до полной остановки. В этот момент деформация пружины и сила упругости станут максимальными.

Очевидно, что бруск массой m_2 сдвинется с места, если сила трения покоя достигнет максимального значения: $F_{\text{тр max}} = \mu N_2 = \mu m_2 g$. Следовательно, условие начала движения второго бруска можно записать в виде

$$\mu m_2 g = k \Delta x_{\text{max}}, \quad (1)$$

где Δx_{max} – путь, пройденный до остановки первым бруском под действием сил F , $F_{\text{тр}1}$ и $F_{\text{упр}}$. Так как на бруск массой m_1 при движении действует переменная по величине сила упругости, то ускорение бруска будет также переменным и для определения пути Δx_{max} применять второй закон Ньютона нельзя. Однако это затруднение легко обойти, если воспользоваться теоремой о полной механической энергии в виде

$$\Delta E = A(F_{\text{стоп}}),$$

где работа стоянки сил

$$A(F_{\text{стоп}}) = A(F) + A(F_{\text{тр}1}) = F \Delta x_{\text{max}} - F_{\text{тр}1} \Delta x_{\text{max}} = F \Delta x_{\text{max}} - \mu m_1 g \Delta x_{\text{max}}.$$

Поскольку в начальном и конечном положениях тел их кинетические и потенциальные энергии равны нулю, то изменение механической энергии системы ΔE равно изменению потенциальной энергии пружины

$$\Delta U = \frac{k \Delta x_{\max}^2}{2}$$

Следовательно,

$$\frac{k \Delta x_{\max}^2}{2} = F \Delta x_{\max} - \mu m_1 g \Delta x_{\max}, \quad \text{или} \quad \Delta x_{\max} = \frac{2(F - \mu m_1 g)}{k}. \quad (2)$$

Подставив значение Δx_{\max} из (2) в (1)

$$\mu m_2 g = k \frac{2(F - \mu m_1 g)}{k},$$

получим

$$F = \mu g (m_1 + \frac{1}{2} m_2) = 4 \text{ Н.}$$

- Ответ: $F_{\min} = \mu g (m_1 + \frac{1}{2} m_2) = 4 \text{ Н.}$

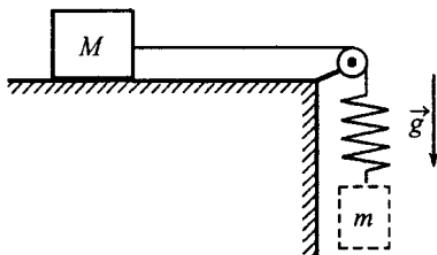


Рис. 3.37

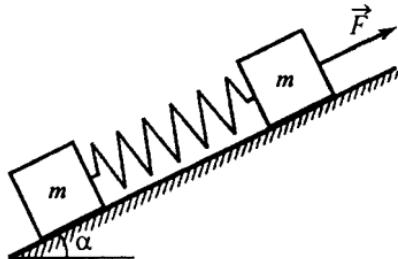


Рис. 3.38

3.54. На горизонтальном столе лежит брусков массой $M = 2 \text{ кг}$. К бруски привязана невесомая нерастяжимая нить, перекинутая через легкий блок. К свободному концу нити привязана пружина (рис. 3.37). Какой массы m груз нужно прицепить к пружине, чтобы, опускаясь, он смог сдвинуть брус?

3.55. Два одинаковых бруска массой $m = 1 \text{ кг}$ каждый соединены легкой недеформированной пружиной идерживаются на наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом (рис. 3.38). Какую наименьшую постоянную силу, направленную вдоль наклонной плоскости вверх, надо приложить к верхнему бруски, чтобы сдвинулся нижний? Коэффициент трения тел о плоскость одинаков и равен $\mu = 0,4$? Коэффициент трения бруска о поверхность стола $\mu = 0,3$.

3.56. Лифт массой $m = 2 \text{ т}$ равномерно поднялся на высоту $h = 10 \text{ м}$ за $t = 5 \text{ с}$. Какова мощность мотора лифта, если его коэффициент полезного действия $\eta = 80\%$?

• *Решение.* Коэффициент полезного действия любого механизма равен отношению работы, совершаемой им за некоторый промежуток времени (ее часто называют полезной работой), к энергии, потребляемой за этот же промежуток времени:

$$\eta = \frac{A}{E}.$$

Работу A , совершенную лифтом, можно найти из теоремы о полной механической энергии

$$A = \Delta E.$$

Поскольку лифт поднимался равномерно, то его кинетическая энергия не изменилась. Поэтому ΔE равно изменению потенциальной энергии

$$\Delta E = \Delta U = m g h.$$

За время подъема τ двигатель лифта мощностью N израсходовал энергию

$$E = N \tau.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{m g h}{N \tau}.$$

Отсюда находим

$$N = \frac{m g h}{\eta \tau} = 49 \text{ кВт.}$$

- Ответ: $N = \frac{m g h}{\eta \tau} = 49 \text{ кВт.}$

3.57. Для откачки нефти из глубины $h = 500 \text{ м}$ поставлен насос мощностью $N = 10 \text{ кВт}$ и коэффициентом полезного действия $\eta = 80\%$. Определить массу нефти, откачиваемой за $\tau = 1 \text{ час}$ работы насоса.

3.58. Транспортер поднимает песок в кузов автомобиля. Длина ленты транспортера $l = 3 \text{ м}$, угол наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$, коэффициент полезного действия транспортера $\eta = 85\%$, мощность, развиваемая двигателем транспортера, $N = 3,5 \text{ кВт}$. За какое время транспортер нагрузит $m = 6 \text{ т}$ песка?

Работа и изменение полной механической энергии

3.59. У основания наклонной плоскости находится брускок. Брускок сообщают некоторую скорость, направленную вдоль плоскости вверх. На высоте $h = 0,5 \text{ м}$ скорость бруска уменьшается до $v_1 = 9 \text{ м/с}$. После абсолютно упругого удара о стенку, расположенную на высоте $H = 1,5 \text{ м}$ перпендикулярно наклонной плоскости (рис. 3.39), брускок скользит вниз и на той же высоте h его скорость равна $v_2 = 6 \text{ м/с}$. Определить скорость бруска в момент удара о стенку.

- Решение. При движении бруска вверх по наклонной плоскости его кинетическая энергия будет расходоваться на работу по преодолению силы трения и на увеличение потенциальной энергии бруска. Причем, как следует из условия задачи, в момент соударения со стенкой брускок будет иметь некоторую кинетическую энергию.

Если нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбрать у основания наклонной плоскости, то на высоте h энергия бруска будет равна

$$E_1 = T_1 + U_1 = \frac{m v_1^2}{2} + m g h,$$

а в момент соударения со стенкой

$$E_2 = T_2 + U_2 = \frac{m v_0^2}{2} + m g H,$$

где v_0 – скорость бруска в момент удара о стенку.

Запишем теорему о полной механической энергии

$$\Delta E = A(F_{\text{стор}}) \quad (1)$$

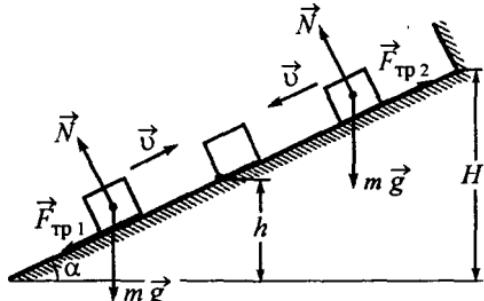


Рис. 3.39

в виде

$$E_2 - E_1 = A(F_{\text{тр}1}), \quad \text{или} \quad \left\{ \frac{m v_0^2}{2} + m g H \right\} - \left\{ \frac{m v_1^2}{2} + m g h \right\} = A(F_{\text{тр}1}), \quad (2)$$

где $A(F_{\text{тр}1})$ – работа силы трения при движении бруска вверх.

При скользывании бруска после соударения со стекой на высоте h его энергия будет равна

$$E_3 = T_3 + U_3 = \frac{m v_2^2}{2} + m g h$$

и уравнение (1) примет вид

$$E_3 - E_2 = A(F_{\text{тр}2}), \quad \text{или} \quad \left\{ \frac{m v_2^2}{2} + m g h \right\} - \left\{ \frac{m v_0^2}{2} + m g H \right\} = A(F_{\text{тр}2}), \quad (3)$$

где $A(F_{\text{тр}2})$ – работа силы трения при движении бруска вниз.

При движении вниз и вверх по наклонной плоскости бруск проходит один и тот же путь. Легко понять, что силы трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$ и $\vec{F}_{\text{тр}2}$ и их проекции на соответствующие направления перемещения будут одинаковы. Поэтому

$$A(F_{\text{тр}1}) = A(F_{\text{тр}2}).$$

Приравняв левые части выражений (2) и (3)

$$\left\{ \frac{m v_0^2}{2} + m g H \right\} - \left\{ \frac{m v_1^2}{2} + m g h \right\} = \left\{ \frac{m v_2^2}{2} + m g h \right\} - \left\{ \frac{m v_0^2}{2} + m g H \right\},$$

получим

$$m v_0^2 = \frac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2} - 2 m g (H - h).$$

Отсюда находим

$$v_0 = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} - 2 g (H - h)} \approx 6,2 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $v_0 = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} - 2 g (H - h)} \approx 6,2 \text{ м/с.}$

3.60. С вершины наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, начинает скользить бруск. Длина плоскости $l = 4 \text{ м}$, коэффициент трения бруска о ее поверхность $\mu = 0,2$. Какую скорость приобретет бруск в конце спуска?

3.61. Груз массой m медленно втаскивают по наклонной плоскости на высоту h , затратив на это работу A . На этой высоте груз срывается и скользит обратно. Какую скорость он будет иметь у основания плоскости?

3.62. Автомобиль с работающим двигателем въезжает на обледенелую гору, поверхность которой образует угол α с горизонтом. Какой высоты h гору может преодолеть автомобиль, если его начальная скорость при въезде равна v_0 , а коэффициент трения колес о лед $\mu < \operatorname{tg} \alpha$?

3.63. Два одинаковых бруска массой m каждый соединены легкой пружиной жесткостью k и лежат на горизонтальной поверхности. Левый бруск касается вертикальной стены (рис. 3.40, а). Какую скорость v_0 , направленную к стене, надо сообщить правому бруск, чтобы при обратном движении от стены он сдвинул левый бруск? Коэффициент трения брусков о поверхность одинаков и равен μ . Пружина в начальный момент не деформирована.

• Решение. При движении правого бруска по направлению к стене пружина будет сжиматься и на бруски будет действовать сила упругости (рис. 3.40, б), которая в момент наибольшего сжатия пружины

$$F_{\text{упр}1} = k \Delta x_1,$$

где Δx_1 – деформация пружины, равная расстоянию, пройденному правым бруском до остановки. Кроме силы упругости на правый бруск в горизонтальном направлении действует сила трения

$$F_{\text{тр}1} = \mu N_1 = \mu m_1 g. \quad (1)$$

Так как при движении на правый бруск действует переменная по величине сила упругости, то ускорение бруска будет также переменным. Поэтому для определения величины перемещения Δx_1 бруска воспользуемся теоремой о полной механической энергии

$$\Delta E = A(F_{\text{стоп}}), \quad (2)$$

где работа сторонних сил

$$A(F_{\text{стоп}}) = A(F_{\text{тр}1}) = -F_{\text{тр}1} \Delta x_1,$$

или с учетом (1)

$$A(F_{\text{стоп}}) = -\mu m g \Delta x_1. \quad (3)$$

При движении правого бруска его кинетическая энергия будет уменьшаться от $T_1 = \frac{1}{2} m v_0^2$ до $T_2 = 0$, а потенциальная энергия пружины будет увеличиваться от $U_1 = 0$ до $U_2 = \frac{1}{2} k \Delta x_1^2$. Следовательно, изменение механической энергии

$$\Delta E = T_2 + U_2 - T_1 - U_1, \quad \text{или} \quad \Delta E = \frac{k \Delta x_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}. \quad (4)$$

С учетом (3) – (4) уравнение (1) примет вид

$$\frac{k \Delta x_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = -\mu m g \Delta x_1. \quad (5)$$

Рассмотрим обратное движение правого бруска.

На левый бруск в горизонтальном направлении кроме силы упругости действуют сила трения покоя и сила реакции стены. Для того чтобы левый бруск сдвинулся с места при обратном движении правого бруска, в момент остановки правого бруска пружина должна быть растянута на некоторую величину Δx_2 (рис. 3.40, б). При этом сила упругости

$$F_{\text{упр}2} = k \Delta x_2$$

должна стать больше максимального значения силы трения покоя $F_{\text{тр} \max} = \mu N_2 = \mu m g$:

$$F_{\text{упр}2} > F_{\text{тр} \max}, \quad \text{или} \quad k \Delta x_2 > \mu m g. \quad (6)$$

Воспользуемся еще раз теоремой о полной механической энергии (1).

При движении от стены правый бруск пройдет расстояние $(\Delta x_1 + \Delta x_2)$. При этом сила трения $F_{\text{тр}1}$ совершил работу

$$A(F_{\text{стоп}}) = A(F_{\text{тр}1}) = -F_{\text{тр}1} (\Delta x_1 + \Delta x_2) = -\mu m g (\Delta x_1 + \Delta x_2),$$

а энергия пружины изменится на

$$\Delta U = \frac{k \Delta x_2^2}{2} - \frac{k \Delta x_1^2}{2}.$$

Поскольку в начальном и конечном положениях системы энергией обладает только пружина, то изменение механической энергии

$$\Delta E = \Delta U = \frac{k \Delta x_2^2}{2} - \frac{k \Delta x_1^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{k \Delta x_2^2}{2} - \frac{k \Delta x_1^2}{2} = -\mu m g (\Delta x_1 + \Delta x_2), \quad \text{или} \quad \frac{k (\Delta x_2 - \Delta x_1)}{2} = -\mu m g. \quad (7)$$

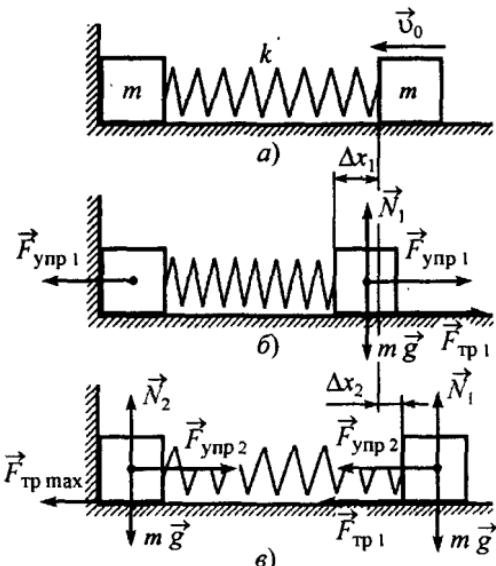


Рис. 3.40

Выразив Δx_1 из (5)

$$\Delta x_1 = \frac{-\mu m g + \sqrt{\mu^2 m^2 g^2 + k m v_0^2}}{k}$$

и подставив в (7)

$$\frac{k \Delta x_2}{2} - \frac{-\mu m g + \sqrt{\mu^2 m^2 g^2 + k m v_0^2}}{2} = -\mu m g,$$

получим

$$\Delta x_2 = -\frac{3 \mu m g}{k} + \frac{\sqrt{\mu^2 m^2 g^2 + k m v_0^2}}{k}. \quad (8)$$

С учетом (8) условие (6) примет вид

$$-3 \mu m g + \sqrt{\mu^2 m^2 g^2 + k m v_0^2} > \mu m g.$$

Отсюда находим

$$v_0 > \mu g \sqrt{15 m/k}.$$

• Ответ: $v_0 > \mu g \sqrt{15 m/k}$.



Рис. 3.41



Рис. 3.42

3.64. Бруск массой $m = 2,5$ кг, лежащий на горизонтальной поверхности, соединен легкой пружиной жесткостью $k = 60$ Н/м с вертикальной стеной (рис. 3.41). Бруски сообщают скорость $v_0 = 3$ м/с, направленную вдоль пружины к стене. Найти коэффициент трения бруска о поверхность, если на пути $\Delta S = 0,5$ м скорость бруска уменьшилась в $n = 2$ раза. Пружина в начальный момент не деформирована.

3.65. На горизонтальной поверхности лежат два бруска массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 5$ кг, соединенные между собой легкой пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м (рис. 3.42). Какую минимальную скорость, направленную вдоль пружины, надо сообщить бруски массой m_1 , чтобы сдвинулся второй бруск? Коэффициенты трения брусков о поверхность равны соответственно $\mu_1 = 0,5$ и $\mu_2 = 0,3$. Пружина в начальный момент не деформирована.

Закон сохранения полной механической энергии

3.66. Шарик подвешен на легкой нерастяжимой нити длиной $l = 30$ см так, что точка подвеса находится на высоте $h = 50$ см над столом. Шарик отклоняют на натянутой нити до горизонтального положения и отпускают. При движении шарика нить оборвалась в тот момент, когда она составила угол $\alpha = 60^\circ$ с вертикалью. Найти высоту, на которую подпрыгнет шарик после абсолютно упругого удара о стол. Сопротивлением воздуха пренебречь.

• **Решение.** При движении шарика из исходного положения до точки A (рис. 3.43), в которой нить оборвалась, на шарик действовали две силы: консервативная сила тяжести $m \vec{g}$ и стоящая сила натяжения нити \vec{T} . Поскольку сила \vec{T} в любой момент направлена перпендикулярно траектории шарика, то ее работа равна нулю, и полная механическая энергия ша-

рика не менялась, а только переходила из одного вида в другой. Выбрав нулевой уровень отсчета потенциальной энергии в точке A , закон сохранения механической энергии запишем в виде

$$m g l \cos \alpha = \frac{m v_0^2}{2},$$

откуда найдем скорость шарика в точке A :

$$v_0 = \sqrt{2 g l \cos \alpha}. \quad (1)$$

Дальнейшее движение шарика происходило только под действием консервативной силы тяжести, направленной вертикально вниз. Поэтому в горизонтальном направлении скорость шарика не изменялась. Поскольку в точке B максимального подъема шарика над поверхностью стола скорость \vec{v} направлена горизонтально, то

$$v = v_0 \cos \alpha. \quad (2)$$

Выбрав нулевой уровень отсчета потенциальной энергии на уровне стола, закон сохранения энергии при движении шарика из точки A в точку B запишем в виде

$$m g (h - l \cos \alpha) + \frac{m v_0^2}{2} = m g H + \frac{m v^2}{2},$$

откуда с учетом (1) – (2) находим

$$h - l \cos \alpha + l \cos \alpha = H + l \cos^3 \alpha, \quad \text{или} \quad H = h - l \cos^3 \alpha \approx 46 \text{ см.}$$

• Ответ: $H = h - l \cos^3 \alpha \approx 46 \text{ см.}$

3.67. Оценить величину скорости, которую должны иметь качели в нижней точке, чтобы подняться на высоту $h = 1,8 \text{ м}$.

3.68. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 30 \text{ м/с}$. На какой высоте его кинетическая энергия будет равна потенциальной? Сопротивление воздуха не учитывать.

3.69. Груз массой $m = 100 \text{ г}$ соединен невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через легкий блок, с пружиной жесткостью $k = 10 \text{ Н/м}$, прикрепленной к полу (рис. 3.44). В начальный момент груз удерживает на высоте $h = 15 \text{ см}$ от пола так, что нить натянута, а пружина не деформирована. Чему будет равна максимальная скорость груза, если его отпустить? Какое количество тепла выделится при абсолютно неупругом ударе груза о пол?

• Решение. При движении груз будет действовать сила тяжести $m \vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} , равная силе упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$, направленные так, как показано на рисунке. В начале движения сила тяжести по величине будет больше силы упругости пружины и ускорение груза будет направлено вниз. После прохождения положения равновесия сила упругости станет больше силы тяжести и скорость груза будет уменьшаться. Очевидно, что скорость груза будет максимальной в момент прохождения им положения равновесия, в котором

$$m g = F_{\text{упр}}, \quad \text{или} \quad m g = k x, \quad (1)$$

где x – растяжение пружины в этот момент.

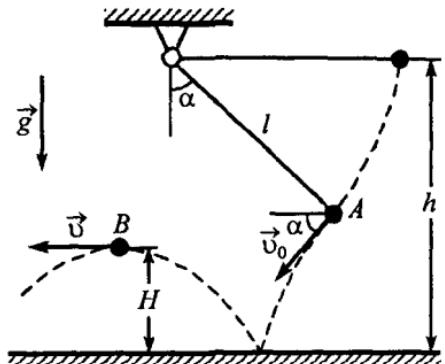


Рис. 3.43

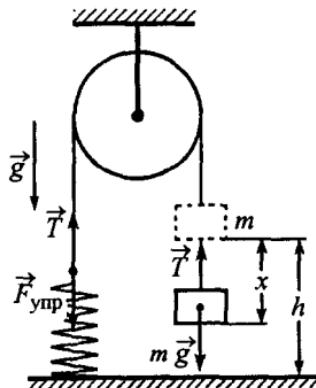


Рис. 3.44

Следовательно,

$$x = m g / k \approx 9,8 \text{ см}$$

меньше $h = 15$ см, и скорость груза будет максимальной на высоте $(h - x)$ над полом.

Поскольку в произвольный момент движения груза сила натяжения нити равна по величине силе упругости пружины, то работа сторонней силы \vec{T} на пути x будет равна работе консервативной силы $F_{\text{упр}}$:

$$|A(T)| = |A(F_{\text{упр}})| = \frac{k x^2}{2}.$$

Если выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии на уровне пола, то в начальном положении энергия системы равна потенциальной энергии груза

$$E_1 = m g h,$$

а на высоте $(h - x)$ над полом – сумме потенциальной и кинетической энергий груза и потенциальной энергии пружины:

$$E_2 = m g (h - x) + \frac{m v_{\max}^2}{2} + \frac{k x^2}{2},$$

где v_{\max} – максимальная скорость груза.

Следовательно, закон сохранения механической энергии системы примет вид

$$m g h = m g (h - x) + \frac{m v_{\max}^2}{2} + \frac{k x^2}{2}. \quad (2)$$

Из (2) с учетом (1) получим

$$v_{\max} = g \sqrt{m/k} \approx 1 \text{ м/с.}$$

Рассмотрим вторую часть задачи.

К моменту удара груза о пол пружина будет растянута на величину h и энергия системы станет равна

$$E_3 = \frac{m v^2}{2} + \frac{k h^2}{2},$$

где v – скорость груза в момент удара о пол.

Теперь закон сохранения механической энергии системы примет вид

$$m g h = \frac{m v^2}{2} + \frac{k h^2}{2}.$$

При абсолютно неупругом ударе о пол кинетическая энергия груза перейдет во внутреннюю (в тепло):

$$Q = \frac{m v^2}{2}.$$

Следовательно,

$$Q = m g h - \frac{k h^2}{2} \approx 34,5 \text{ мДж.}$$

• Ответ: $v_{\max} = g \sqrt{m/k} \approx 1 \text{ м/с}; Q = m g h - \frac{1}{2} k h^2 \approx 34,5 \text{ мДж.}$

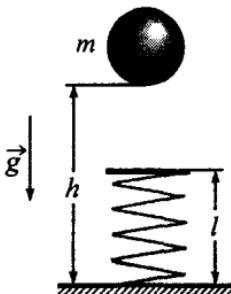


Рис. 3.45

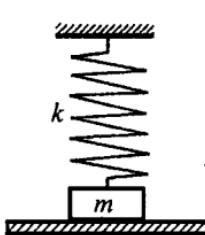


Рис. 3.46

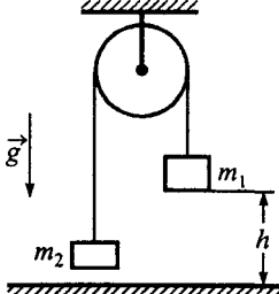


Рис. 3.47

3.70. Легкая пружина установлена вертикально на столе (рис. 3.45). На нее падает стальной шар массой $m = 250$ г. На какой высоте относительно поверхности стола шар будет иметь максимальную скорость? Чему

равно максимальное сжатие пружины, если в начальный момент шар находился на высоте $h = 40$ см от поверхности стола? Жесткость пружины $k = 50$ Н/м, длина в недеформированном состоянии $l = 30$ см.

3.71. Груз массой $m = 100$ г, подвешенный на пружине жесткостью $k = 100$ Н/м, находится на подставке (рис. 3.46). Пружина при этом не деформирована. Подставку быстро убирают. Определить максимальное удлинение пружины и максимальную скорость груза.

3.72. Два груза массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 100$ г связаны нерастяжимой нитью, переброшенной через легкий блок. В начальный момент груз массой m_1 удерживают на высоте $h = 50$ см от пола так, что нить натянута (рис. 3.47). Какое количество тепла выделится при абсолютно неупругом ударе груза массой m_1 о пол, если его отпустить?

Законы сохранения импульса и энергии при взаимодействии тел

3.73. Брусков массой $M = 1$ кг с полусферической выемкой радиусом $R = 20$ см стоит вплотную к вертикальной стене (рис. 3.48, а). С какой максимальной высоты над ближайшей к стене точкой A выемки надо уронить маленький шарик массой $m = 200$ г, чтобы он не поднялся над противоположной точкой B выемки? Трения нет.

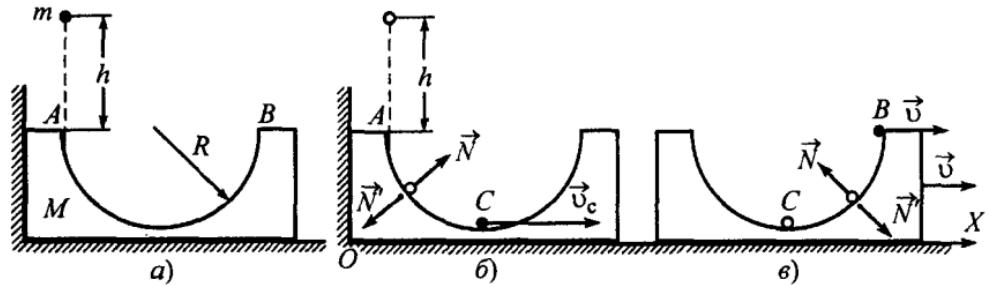


Рис. 3.48

• **Решение.** Движение шарика из исходной точки до точки A будет происходить по законам свободного падения. При движении по поверхности выемки от точки A до дна выемки (точки C , рис. 3.48, б) на шарик действуют две силы: сила тяжести и сила реакции \vec{N} . При этом шарик действует на брусков с силой $\vec{N}' = -\vec{N}$, которая прижимает брусков к стене, и брусков будет оставаться неподвижным.

Поскольку сторонняя сила \vec{N} при движении шарика от точки A до точки C направлена перпендикулярно траектории шарика, то ее работа равна нулю. Поэтому скорость шарика в точке C можно найти из закона сохранения энергии. Выбрав нулевой уровень отсчета потенциальной энергии на уровне дна выемки, получим

$$m g (R + h) = \frac{m v_c^2}{2}, \quad v_c = \sqrt{2 g (R + h)}, \quad (1)$$

где h – высота над точкой A выемки, с которой уронили шарик.

При дальнейшем движении шарика в выемке за счет сил взаимодействия с бруском шарик будет толкать брусков вправо (рис. 3.48, в). В результате этого брусков начнет двигаться.

По условию задачи шарик не должен подняться выше точки B выемки. Следовательно, в точке B вертикальная составляющая скорости шарика должна стать равной нулю, а горизонтальная – будет равна скорости брусков.

При движении шарика от точки C до точки B на шарик и бруск действуют внешние силы (силы тяжести шарика и бруска и сила реакции пола), направление вертикально, и в горизонтальном направлении система «шарик – бруск» будет замкнутой. Следовательно, проекция импульса системы на ось OX не изменится:

$$(\vec{p}_1)_x = (\vec{p}_2)_x, \quad (2)$$

где $\vec{p}_1 = m \vec{v}_c$; $\vec{p}_2 = m \vec{v} + M \vec{v}$; \vec{v} – скорость шарика и бруска в момент времени, когда шарик достиг точки B выемки.

Записав (2) в виде

$$m v_c = (M + m) v,$$

с учетом (1)

$$m \sqrt{2 g (R + h)} = (M + m) v$$

получим

$$v = \frac{m \sqrt{2 g (R + h)}}{M + m}. \quad (3)$$

Обратимся теперь к теореме о полной механической энергии системы.

Поскольку при движении шарика из точки C к точке B проекции сторонних сил \vec{N} и \vec{N}' на соответствующие направления перемещения шарика и бруска не равны нулю, то изменение механической энергии системы

$$\Delta E = \left\{ \frac{(M+m) v^2}{2} + m g R \right\} - \frac{m v_c^2}{2}$$

равно алгебраической сумме работ сил \vec{N} и \vec{N}' :

$$\left\{ \frac{(M+m) v^2}{2} + m g R \right\} - \frac{m v_c^2}{2} = A(N) + A(N'). \quad (4)$$

Представим работу каждой из сил через сумму элементарных работ

$$A(N) + A(N') = \sum dA(N) + \sum dA(N') = \sum \vec{N} \cdot d\vec{r} + \sum \vec{N}' \cdot d\vec{r},$$

где $d\vec{r}$ и $d\vec{r}'$ – элементарные перемещения шарика и бруска за бесконечно малые интервалы времени dt .

Скорость шарика \vec{v}_c в произвольный момент времени можно представить в виде суммы его скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$ относительно бруска и скорости $\vec{v}_{\text{бр}}$ бруска. За бесконечно малое время перемещения шарика и бруска будут равны

$$d\vec{r} = (\vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{бр}}) dt \quad \text{и} \quad d\vec{r}' = \vec{v}_{\text{бр}} dt$$

соответственно. Следовательно,

$$dA(N) + dA(N') = \vec{N} \cdot (\vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{бр}}) dt + \vec{N}' \cdot \vec{v}_{\text{бр}} dt = \vec{N} \cdot \vec{v}_{\text{отн}} dt + (\vec{N} + \vec{N}') \cdot \vec{v}_{\text{бр}} dt.$$

Поскольку сила \vec{N} перпендикулярна скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$, а $\vec{N} = -\vec{N}'$, то $\vec{N} \cdot \vec{v}_{\text{отн}} = 0$, $\vec{N} + \vec{N}' = 0$ и работа сил

$$dA(N) + dA(N') = 0, \quad A(N) + A(N') = \sum dA(N) + \sum dA(N') = 0.$$

Как видим, хотя каждая из сил \vec{N} и \vec{N}' в отдельности совершает работу, их суммарная работа равна нулю. Следовательно, уравнение (4) примет вид

$$\frac{(M+m) v^2}{2} + m g R - \frac{m v_c^2}{2} = 0.$$

Отсюда с учетом (1), (3) находим

$$\frac{m^2 2 g (R + h)}{2(M+m)} + m g R - \frac{m 2 g (R + h)}{2} = 0; \quad h = \frac{m R}{M} = 4 \text{ см.}$$

• Ответ: $h = \frac{m R}{M} = 4 \text{ см.}$

3.74. На гладкой горизонтальной поверхности находится бруск массой M и на нем небольшая шайба массой m (рис. 3.49). Шайбе сообщили в горизонтальном направлении скорость \vec{v} . На какую максимальную вы-

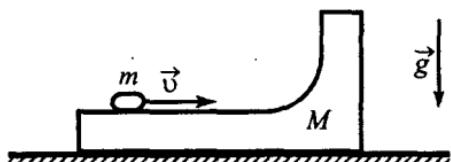


Рис. 3.49

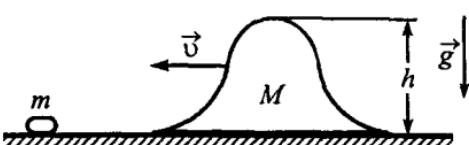


Рис. 3.50

соту (по сравнению с первоначальным уровнем) она поднимется после отрыва от бруска? Трения нет.

3.75. По гладкой горизонтальной поверхности движется «горка» высотой h и массой M . Основание горки плавно переходит в плоскость (рис. 3.50). На пути горки лежит шайба массой m . При какой наименьшей скорости горки шайба перевалит через ее вершину? Трения нет.

3.76. Два неподвижных клина одинаковой массы $M = 2$ кг имеют плавные переходы на горизонтальную поверхность и первоначально расположены так, как показано на рис. 3.51. С левого клина с высоты $h = 75$ см соскальзывает шайба массой $m = 0,5$ кг. На какую максимальную высоту поднимется шайба на правом клине? Трения нет.



Рис. 3.51

3.77. Два тела, которые первоначально покоялись на гладкой горизонтальной поверхности, расталкиваются зажатой между ними легкой пружиной. Начальная энергия пружины $E = 3$ Дж, массы тел $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. С какими наибольшими скоростями будут двигаться тела?

• **Решение.** Если освободить пружину, то ее энергия будет передана телам, которые приобретут кинетическую энергию.

При движении на тела системы действуют силы тяжести $m_1 \vec{g}$ и $m_2 \vec{g}$, силы реакции \vec{N}_1 и \vec{N}_2 и силы упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ (рис. 3.52). При этом сторонние силы (силы реакции) направлены перпендикулярно перемещению тел и работы не совершают. Следовательно, механическая энергия системы не будет меняться в любой момент времени

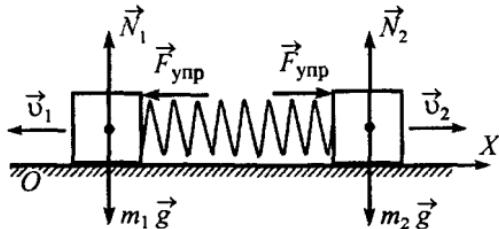


Рис. 3.52

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + E', \quad (1)$$

где v_1 , v_2 , E' – скорости тел и энергия пружины в рассматриваемый момент.

Поскольку первоначально система покоялась, а в горизонтальном направлении на систему никакие внешние силы не действуют, то проекция импульса системы на ось Ox не изменится:

$$(\vec{p}_1)_x = (\vec{p}_2)_x$$

где $\vec{p}_1 = 0$; $\vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$. Следовательно,

$$0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (2)$$

где учтено, что скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 направлены в противоположные стороны.

Выразив, например, скорость v_2 из закона сохранения импульса (2)

$$v_2 = v_1 \frac{m_1}{m_2}$$

и подставив в закон сохранения энергии (1)

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + E'$$

найдем скорость тела массой m_1 после освобождения пружины:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 m_2 (E - E')}{m_1 (m_1 + m_2)}} \quad (3)$$

Аналогично, скорость тела массой m_2

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 m_1 (E - E')}{m_2 (m_1 + m_2)}} \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что скорости тел будут максимальны, если $E' = 0$:

$$v_{1 \max} = \sqrt{\frac{2 m_2 E}{m_1 (m_1 + m_2)}} = 2 \text{ м/с}; \quad v_{2 \max} = \sqrt{\frac{2 m_1 E}{m_2 (m_1 + m_2)}} = 1 \text{ м/с.}$$

- Ответ: $v_{1 \max} = \sqrt{\frac{2 m_2 E}{m_1 (m_1 + m_2)}} = 2 \text{ м/с}; v_{2 \max} = \sqrt{\frac{2 m_1 E}{m_2 (m_1 + m_2)}} = 1 \text{ м/с.}$

3.78. Два тела, которые первоначально покоялись на гладкой горизонтальной поверхности, расталкиваются зажатой между ними легкой пружиной и начинают двигаться так, что в процессе движения их максимальные скорости равны $v_1 = 1 \text{ м/с}$ и $v_2 = 3 \text{ м/с}$. Какая энергия была запасена в пружине, если общая масса тел $M = 8 \text{ кг}$?

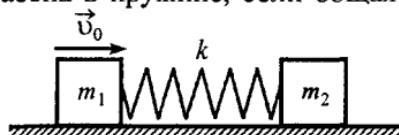


Рис. 3.53

3.79. На горизонтальном столе лежат два бруска массами $m_1 = 1 \text{ кг}$ и $m_2 = 2 \text{ кг}$, соединенные легкой недеформированной пружиной жесткостью $k = 100 \text{ Н/м}$ (рис. 3.53). Какую наименьшую скорость, направленную вдоль пружины, надо сообщить бруски массой m_1 , чтобы пружина сжалась на $\Delta x = 2 \text{ см}$? Трения нет.

3.80. На гладком горизонтальном столе лежат два бруска массами m_1 и m_2 , соединенные легкой недеформированной пружиной жесткостью $k = 10^3 \text{ Н/м}$ и длиной $l_0 = 10 \text{ см}$. К брускам одновременно прикладывают одинаковые по величине силы $F = 10 \text{ Н}$, направленные вдоль пружины в противоположные стороны. Найти удлинение пружины в момент времени, когда относительная скорость брусков максимальна. Чему равно максимальное расстояние между брусками при их движении?

- Решение. Поскольку стол гладкий, то движение брусков будет зависеть только от сил, направленных горизонтально.

При движении на каждый из брусков будут действовать равные по величине силы (постоянные силы \vec{F} и переменные силы упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$). Поэтому бруски будут двигаться, растягивая пружину, до тех пор, пока пружина не растянется настолько, что приложенная сила F станет равной $F_{\text{упр}}$. Приобретя к этому моменту времени некоторую скорость, бруски будут двигаться по инерции, продолжая растягивать пружину. После того как пружина максимально растянется, силы упругости заставят бруски двигаться навстречу друг другу. При этом, пройдя положение равновесия, бруски будут сжимать пружину.

Рассмотрим произвольное положение системы, например, когда бруски растягивают пружину (рис. 3.54).

Поскольку в начальный момент длина пружины в не деформированном состоянии равна l_0 , то к моменту времени, когда тело массой m_1 пройдет расстояние S_1 (будет иметь координату $x_1 = -S_1$), а тело массой m_2 – расстояние S_2 (будет иметь координату $x_2 = l_0 + S_2$), удлинение пружины станет равным

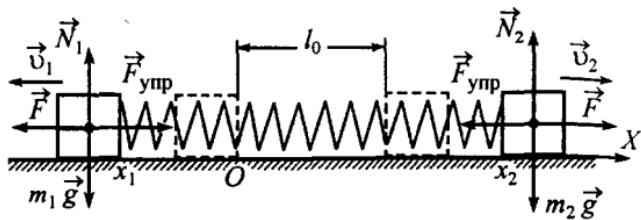


Рис. 3.54

$$\Delta x = S_1 + S_2. \quad (1)$$

Так как работа силы реакции стола \vec{N}_1 , \vec{N}_2 равна нулю, то алгебранческая сумма работ сторонних сил

$$A(F_{\text{стор}}) = A(F) = FS_1 + FS_2,$$

где FS_1 – работа силы \vec{F} , приложенной к телу массой m_1 ; FS_2 – работа силы \vec{F} , приложенной к телу массой m_2 .

Следовательно, изменение механической энергии системы

$$\Delta E = F(S_1 + S_2),$$

или

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{k \Delta x^2}{2} = F(S_1 + S_2), \quad (2)$$

где v_1 , v_2 – скорости брусков в рассматриваемый момент времени.

Так как в горизонтальном направлении сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то проекция импульса системы на ось Ox меняться не будет:

$$(\vec{p}_1)_x = (\vec{p}_2)_x,$$

где $\vec{p}_1 = 0$; $\vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$. Следовательно,

$$0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (3)$$

где учтено, что скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 направлены в противоположные стороны.

Выразив, например, скорость v_2 из (3)

$$v_2 = v_1 \frac{m_1}{m_2}$$

и подставив в (2)

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1^2 v_1^2}{2 m_2} + \frac{k \Delta x^2}{2} = F(S_1 + S_2),$$

с учетом (1) получим

$$\frac{m_1 v_1^2 (m_1 + m_2)}{2 m_2} + \frac{k \Delta x^2}{2} = F \Delta x. \quad (4)$$

Следовательно,

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 m_2}{m_1 (m_1 + m_2)} \left\{ F \Delta x - \frac{k \Delta x^2}{2} \right\}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2 m_1}{m_2 (m_1 + m_2)} \left\{ F \Delta x - \frac{k \Delta x^2}{2} \right\}}.$$

Из закона сохранения импульса (3) видно, что скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 принимают максимальные значения одновременно. Так как в любой момент времени скорости брусков направлены в противоположные стороны, то их относительная скорость

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \text{или} \quad v_{\text{отн}} = v_1 + v_2$$

будет максимальна в тот момент, когда максимальна скорость \vec{v}_1 (или \vec{v}_2).

Исследуем функцию $v_1(\Delta x)$ на экстремум. Поскольку величина скорости v_1 всегда положительна, то функции $v_1(\Delta x)$ и $v_1^2(\Delta x)$ принимают максимальные и минимальные значения при одних и тех же Δx . Следовательно,

$$(v_1^2)' = \frac{2 m_2}{m_1 (m_1 + m_2)} (F - k \Delta x) = 0.$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \frac{F}{k} = 1 \text{ см.}$$

Очевидно, что найденное значение Δx соответствует максимальной относительной скорости брусков, поскольку при минимальной величине $v_{\text{отн}} = 0$ (например, в начальный момент) $\Delta x = 0$.

Рассмотрим вторую часть задачи.

В момент времени, когда пружина максимально растянута, относительная скорость брусков равна нулю (т.е. $v_1 = v_2 = v$), и уравнения (3) – (4) примут вид

$$0 = (-m_1 + m_2)v, \quad \frac{m_1 v^2 (m_1 + m_2)}{2 m_2} + \frac{k \Delta x_{\text{max}}^2}{2} = F \Delta x_{\text{max}}.$$

Следовательно,

$$v = 0; \quad \frac{k \Delta x_{\text{max}}^2}{2} = F \Delta x_{\text{max}}; \quad \Delta x_{\text{max}} = \frac{2F}{k};$$

$$l_{\text{max}} = l_0 + \Delta x_{\text{max}} = l_0 + \frac{2F}{k} = 12 \text{ см.}$$

- Ответ: $\Delta x = \frac{F}{k} = 1 \text{ см}$; $l_{\text{max}} = l_0 + \frac{2F}{k} = 12 \text{ см}$.

3.81. На гладком горизонтальном столе лежат два бруска массами $m_1 = 2 \text{ кг}$ и $m_2 = 4 \text{ кг}$, соединенные легкой недеформированной пружиной жесткостью $k = 400 \text{ Н/м}$ и длиной $l_0 = 10 \text{ см}$. К бруски массой m_2 прикладываются постоянную силу $F = 12 \text{ Н}$, направленную вдоль пружины и растягивающую ее. Найти максимальное расстояние между брусками при их движении.

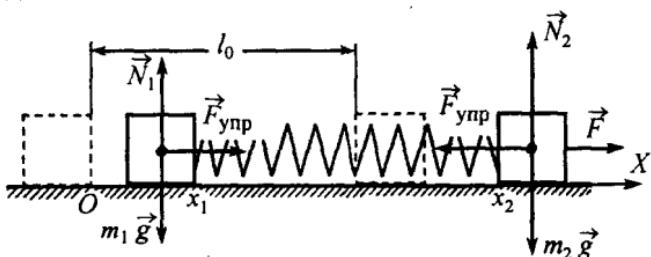


Рис. 3.55

• Решение. В отличие от №3.80, в рассматриваемой задаче сила \vec{F} приложена лишь к одному бруску, и сумма внешних сил, действующих на систему в горизонтальном направлении, не равна нулю. Поэтому проекция импульса системы на ось Ox при движении брусков будет меняться.

Рассмотрим произвольное положение системы (рис. 3.55).

Если в начальный момент длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0 , то к моменту времени, когда тело массой m_1 пройдет расстояние S_1 (будет иметь координату $x_1 = S_1$), а тело массой m_2 – расстояние S_2 (будет иметь координату $x_2 = l_0 + S_2$), удлинение пружины станет равным

$$\Delta x = S_2 - S_1, \quad \text{или} \quad \Delta x = x_2 - x_1 - l_0. \quad (1)$$

Так как работа сил реакции стола \vec{N}_1 , \vec{N}_2 равна нулю, то алгебраическая сумма работ сторонних сил

$$A(F_{\text{стор}}) = A(F) = FS_2.$$

Следовательно, изменение механической энергии системы

$$\Delta E = FS_2,$$

или

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{k \Delta x^2}{2} = FS_2, \quad (2)$$

где v_1 , v_2 – скорости брусков в рассматриваемый момент времени.

В положении, когда пружина максимально растянута, относительная скорость брусков равна нулю ($v_1 = v_2 = v$), и уравнение (2) примет вид

$$\frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + \frac{k \Delta x_{\max}^2}{2} = F S_2. \quad (3)$$

Уравнение (3) содержит три неизвестных величины: скорость брусков v , максимальное удлинение Δx_{\max} пружины и путь S_2 , пройденный бруском массой m_2 .

Из уравнений движения брусков, записанных в проекции на ось OX

$$m_1 a_1 = F_{\text{упр}}, \quad m_2 a_2 = F - F_{\text{упр}}. \quad (4)$$

следует, что бруски будут двигаться с разными по величине ускорениями. Причем, так как величина силы упругости $F_{\text{упр}}$ будет меняться, то ускорения брусков будут также меняться.

Поскольку в горизонтальном направлении на систему действует внешняя постоянная сила, то движение центра масс системы будет происходить с постоянным ускорением. Из уравнения движения центра масс

$$(m_1 + m_2) a_c = F$$

получим

$$a_c = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Следовательно, скорость центра масс и его координата будут меняться по законам равномеренного движения:

$$v_c = a_c t = \frac{F t}{m_1 + m_2}, \quad x_c = x_{c0} + \frac{a_c t^2}{2} = x_{c0} + \frac{F t^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad (5)$$

где x_{c0} – начальная координата центра масс:

$$x_{c0} = \frac{m_2 l_0}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

В рассматриваемый момент времени координата центра масс

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

Из (7) с учетом (1) получим

$$x_2 = x_c + \frac{m_1 (\Delta x + l_0)}{m_1 + m_2}. \quad (8)$$

В момент времени t , когда растяжение пружины максимально,

$$v_c = \frac{F t}{m_1 + m_2}; \quad x_c = \frac{m_2 l_0}{m_1 + m_2} + \frac{F t^2}{2(m_1 + m_2)}; \quad x_2 = x_c + \frac{m_1 (\Delta x_{\max} + l_0)}{m_1 + m_2}. \quad (9)$$

Подставляя соотношения (9) в (3)

$$\frac{(m_1 + m_2) F^2 t^2}{2(m_1 + m_2)^2} + \frac{k \Delta x_{\max}^2}{2} = F \Delta x_{\max} + F \left\{ \frac{m_2 l_0}{m_1 + m_2} + \frac{F t^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{m_2 (\Delta x_{\max} + l_0)}{m_1 + m_2} \right\}$$

(где учтено, что путь $S_2 = x_2 - l_0$), получим

$$\frac{F^2 t^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{k \Delta x_{\max}^2}{2} = \frac{F m_2 l_0}{m_1 + m_2} + \frac{F^2 t^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{F m_1 \Delta x_{\max}}{m_1 + m_2} + \frac{F m_1 l_0}{m_1 + m_2} - F l_0,$$

или

$$\frac{k \Delta x_{\max}^2}{2} = \frac{F m_1 \Delta x_{\max}}{m_1 + m_2}.$$

Следовательно, наибольшее растяжение пружины

$$\Delta x_{\max} = \frac{2 F m_1}{k (m_1 + m_2)},$$

а максимальное расстояние между брусками при их движении

$$l_{\max} = l_0 + \Delta x_{\max} = l_0 + \frac{2 F m_1}{k (m_1 + m_2)} = 12 \text{ см.}$$

• Ответ: $l_{\max} = l_0 + \Delta x_{\max} = l_0 + \frac{2 F m_1}{k (m_1 + m_2)} = 12 \text{ см.}$

3.82. На гладком горизонтальном столе лежат два бруска, соединенные легкой недеформированной пружиной жесткостью k . К брускам одновременно прикладывают одинаковые по величине силы \vec{F} , направленные вдоль пружины в противоположные стороны. Найти максимальную кинетическую энергию системы.



Рис. 3.56



Рис. 3.57

3.83. Два бруска массами $m = 1$ кг и $M = 4$ кг соединили легкой пружиной и положили на гладкий горизонтальный стол. Пружину сжали и с двух сторон поставили упоры, не дающие брускам разъезжаться (рис. 3.56). Когда убрали левый упор, система пришла в движение. Во сколько раз изменится максимальное удлинение пружины, если убрать не этот, а другой упор?

3.84. На гладком горизонтальном столе лежат два бруска массами m_1 и m_2 , соединенные легкой недеформированной пружиной жесткостью k (рис. 3.57). К бруски массой m_1 прикладывают постоянную силу \vec{F} , направленную вдоль пружины. Через некоторое время колебания, возникшие в системе, прекращаются. Найти отношение энергии пружины при колебаниях в момент наибольшего растяжения к ее энергии во время установившегося движения.

3.85. С наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, начинают соскальзывать два одинаковых бруска массой m каждый, соединенные легкой недеформированной пружиной жесткостью k . Найти наибольшее удлинение пружины, если трения между нижним бруском и наклонной плоскостью нет, а коэффициент трения верхнего бруска о плоскость $\mu < \operatorname{tg} \alpha$.

Упругие столкновения тел

3.86. Шарик, движущийся со скоростью \vec{v}_1 , налетает на стенку бесконечно большой массы, которая движется навстречу шарику со скоростью \vec{v}_2 . Происходит абсолютно упругий удар. Определить скорость шарика после удара.

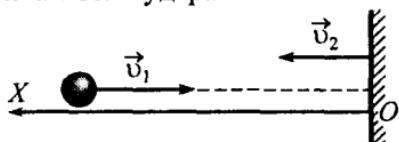


Рис. 3.58

• **Решение.** Поскольку до и после соударения движение тел происходит вдоль одного направления, то можно считать, что происходит центральный упругий удар и для определения скоростей тел после столкновения можно воспользоваться формулами (3.76), полученными в теоретическом введении.

Обозначив массу шарика m , а массу стенки M , запишем выражение для скорости шарика после удара

$$\vec{v}'_1 = \frac{(m - M) \vec{v}_1 + 2M \vec{v}_2}{m + M}$$

в проекции на ось OX системы координат (рис. 3.58):

$$v'_1 = \frac{-(m - M) v_1 + 2 M v_2}{m + M}.$$

Так как масса стенки бесконечно велика, то массой шарика по сравнению с массой стенки можно преигнорировать. Следовательно,

$$v'_1 = \frac{M v_1 + 2 M v_2}{M} = v_1 + 2 v_2.$$

• Ответ: $v'_1 = v_1 + 2 v_2$.

3.87. Шарик налетает на стенку бесконечно большой массы со скоростью \vec{v} , направленной под углом α к нормали стенки. Определить величину скорости шарика после упругого соударения со стенкой, если: а) стенка неподвижна; б) стенка движется со скоростью \vec{u} по направлению нормали навстречу шарику.

3.88. Шарик начинает свободно падать и, пролетев расстояние S , упруго сталкивается с тяжелой плитой, движущейся вверх со скоростью \vec{u} . На какую высоту относительно положения плиты в момент удара подскочит шарик после соударения?

3.89. Внутри неподвижной трубки, которая представляет собой горизонтально расположенное кольцо, находятся два шарика массами $m_1 = 50$ г и $m_2 = 30$ г (рис. 3.59, вид сверху). Шарикам сообщают начальные скорости $v_1 = 10$ м/с и $v_2 = 15$ м/с. Каковы будут скорости шариков после 999 столкновений? Все столкновения упругие и центральные. Трения нет.

• Решение. Для решения задачи воспользуемся формулами (3.76), полученными в теоретическом введении:

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2) \vec{v}_1 + 2 m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1) \vec{v}_2 + 2 m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}.$$

После первого соударения скорости шариков станут равны

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 13,75 \text{ м/с}, \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 8,75 \text{ м/с}$$

и будут направлены в одну сторону.

При следующем соударении скорости шариков

$$u'_1 = \frac{(m_1 - m_2) u_1 + 2 m_2 u_2}{m_1 + m_2} = 10 \text{ м/с}, \quad u'_2 = \frac{(m_2 - m_1) u_2 + 2 m_1 u_1}{m_1 + m_2} = 15 \text{ м/с}$$

станут такими же, как до первого столкновения. Легко понять, что при нечетных номерах столкновений скорости шариков будут равны u_1 и u_2 , а при четных — u'_1 и u'_2 .

• Ответ: $u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 13,75 \text{ м/с}; u_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 8,75 \text{ м/с}.$

3.90. Шар массой $m_1 = 1$ кг движется со скоростью $v_1 = 4$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_2 = 2$ кг, движущимся навстречу ему со скоростью $v_2 = 3$ м/с. Происходит упругий центральный удар. Найти скорости шаров после удара.

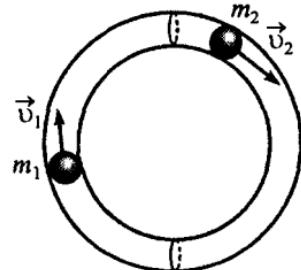


Рис. 3.59

3.91. Шар налетает на покоящийся шар и отражается назад с кинетической энергией в $n = 4$ раза меньшей первоначальной. Считая соударение упругим, найти отношение масс шаров.

3.92. На гладком горизонтальном столе вдоль одной прямой лежат $n = 8$ шаров, не соприкасаясь друг с другом. Массы шаров равны m , $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{4}m$, $\frac{1}{8}m$, $\frac{1}{16}m$, $\frac{1}{32}m$, $\frac{1}{64}m$ и $\frac{1}{128}m$ соответственно. На первый шар налетает со скоростью $v = 1$ м/с шар массой $2m$, движущийся вдоль той же прямой. Считая все соударения между шарами упругими и центральными, найти скорость, которую приобретет последний шар.

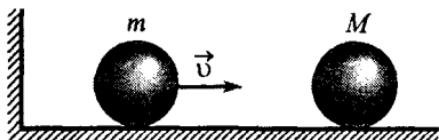


Рис. 3.60

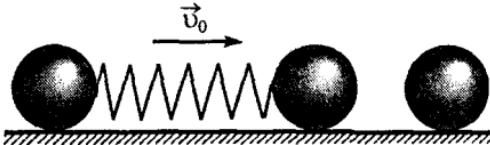


Рис. 3.61

3.93. Шар массой M находится на гладкой горизонтальной поверхности на некотором расстоянии от вертикальной стены. Другой шар массой m движется от стены к первому шару. Между шарами происходит центральный абсолютно упругий удар (рис. 3.60). При каком соотношении масс M/m между шарами не произойдет второго удара? Удар шара массой m о стену считать упругим.

3.94. Два одинаковых шара, соединенных недеформированной пружиной, движутся по гладкой поверхности со скоростью $v_0 = 7$ м/с, направленной вдоль пружины, к такому же покоящемуся шару (рис. 3.61). Происходит упругий центральный удар. Определить максимальную и минимальную длину пружины при движении шаров после соударения. Длина недеформированной пружины $l_0 = 10$ см, коэффициент жесткости $k = 10^3$ Н/м. Масса каждого шара $m = 50$ г.

3.95. Шар массой $M = 2$ кг упруго сталкивается с покоящимся шаром массой $m = 1$ кг. На какой наибольший угол может отклониться налетающий шар от своего первоначального направления движения?

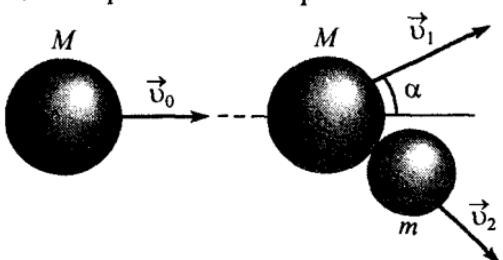


Рис. 3.62

• **Решение.** Пусть скорость шара массой M до столкновения равна v_0 , а скорости шаров массами M и m после столкновения — v_1 и v_2 соответственно (рис. 3.62).

При упругом столкновении полная механическая энергия системы и импульс сохраняются. Поскольку за время удара изменение потенциальной энергии равно нулю, то закон сохранения энергии сводится к сохранению кинетической энергии:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}. \quad (1)$$

При нецентральном ударе шаров, массы которых не одинаковы, шары разлетаются под некоторым углом друг относительно друга. Причем угол, под которым разлетаются шары

после столкновения, определяется не только законами сохранения энергии и импульса, но и зависит от их взаимного расположения при столкновении. Поэтому закон сохранения импульса системы удобно использовать в векторной форме:

$$M \vec{v}_0 = M \vec{v}_1 + m \vec{v}_2. \quad (2)$$

Выразив скорость \vec{v}_2 из (2)

$$\vec{v}_2 = \frac{M(\vec{v}_0 - \vec{v}_1)}{m}$$

и подставив в (1)

$$M v_0^2 = M v_1^2 + \frac{M^2 (v_0^2 - 2 \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 + v_1^2)}{m},$$

получим

$$m v_0^2 = m v_1^2 + M v_0^2 - 2 M v_0 v_1 \cos \alpha + M v_1^2,$$

где учтено, что скалярное произведение векторов $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = v_0 v_1 \cos \alpha$; α – угол между векторами \vec{v}_0 и \vec{v}_1 .

Следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{(M+m) v_1^2 + (M-m) v_0^2}{2 M v_0 v_1}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что при заданной скорости \vec{v}_0 угол α зависит от величины скорости \vec{v}_1 . Поскольку $\cos \alpha$ уменьшается с ростом α , то для того, чтобы определить наибольшее значение угла α_{\max} , найдем такие значения v_1 , при которых функция

$$f(v_1) = \frac{(M+m) v_1^2 + (M-m) v_0^2}{v_1}$$

минимальна:

$$\frac{df(v_1)}{dv_1} = \frac{2(M+m)v_1^2 - (M+m)v_1^2 - (M-m)v_0^2}{v_1^2} = 0; \quad v_1 = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

Так как наименьшее значение угла α равно нулю (центральный удар), то угол α , соответствующий полученному значению v_1 , будет максимальен:

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{(M-m) v_0^2 + (M-m) v_0^2}{2 M v_0^2} \sqrt{\frac{M+m}{M-m}} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}},$$

$$\sin \alpha_{\max} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_{\max}} = m/M; \quad \alpha_{\max} = \arcsin(m/M) = 30^\circ.$$

• Ответ: $\alpha_{\max} = \arcsin(m/M) = 30^\circ$.

3.96. Шар упруго сталкивается с таким же, но покоящимся шаром. Под каким углом они разлетятся? Удар нецентральный.

3.97. Шар упруго сталкивается с таким же, но покоящимся шаром, который в результате удара начинает двигаться под углом $\alpha = 30^\circ$ к первоначальному направлению движения налетающего шара. На какой угол относительно первоначального направления отклоняется налетающий шар в результате соударения?

3.98. В покоящийся клин массой M попадает горизонтально летящий шарик массой m (рис. 3.63) и после упругого удара о поверхность клина отскакивает вертикально вверх. На какую высоту h он поднимется, если горизонтальная скорость клина после удара равна v ? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

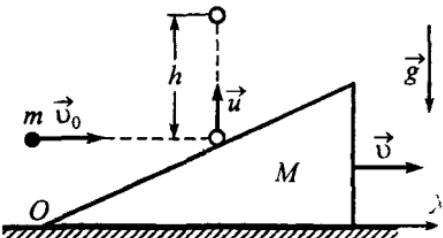


Рис. 3.63

• Решение. Полагая, что за время столкновения изменение потенциальной энергии шарика и клина равно нулю, закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m u^2}{2} + \frac{M v^2}{2}, \quad (1)$$

где \vec{v}_0 , \vec{u} – скорости шарика в момент столкновения с клином и непосредственно после столкновения соответственно.

Так как между поверхностями клина и горизонтальной плоскостью трение отсутствует, то система «клин – шарик» в горизонтальном направлении замкнута (все внешние силы – силы тяжести и реакции – будут направлены вертикально). Следовательно, закон сохранения импульса

$$m \vec{v}_0 = m \vec{u} + M \vec{v}$$

в проекции на ось OX примет вид

$$m v_0 = M v. \quad (2)$$

Выразив v_0 из (2) и подставив в (1)

$$\frac{M^2 v^2}{2 m} = \frac{m u^2}{2} + \frac{M v^2}{2},$$

найдем скорость шарика сразу после столкновения с клином:

$$v = u \sqrt{\frac{(M-m)M}{m^2}}.$$

Следовательно, высота подъема шарика

$$h = \frac{u^2}{2 g} = \frac{M(M-m)v^2}{2m^2g}.$$

• Ответ: $h = \frac{M(M-m)v^2}{2m^2g}.$

3.99. В покоящийся клин массой M попадает горизонтально летящий шарик массой m (рис. 3.63) и после упругого удара о поверхность клина отскакивает вертикально вверх. Скорость шарика в момент удара равна v_0 . Найти скорости шарика и клина после удара. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

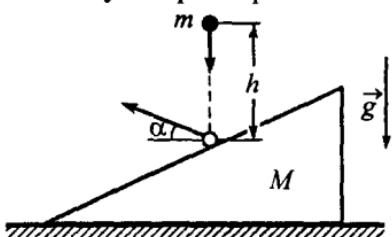


Рис. 3.64

3.100. На покоящийся клин массой M с высоты h падает шарик массой m и упруго отскакивает под углом α к горизонту (рис. 3.64). На какую максимальную высоту относительно точки удара о клин поднимется шарик? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Неупругие столкновения тел

3.101. На гладкой горизонтальной поверхности лежит брускок. Пуля, летящая горизонтально со скоростью $v = 600$ м/с, пробивает брускок и вылетает из него со скоростью $\frac{1}{2}v$. Масса пули $m = 9$ г, масса бруска $M = 5$ кг. Сколько тепла выделилось при движении пули в бруске? Траекторию пули считать прямолинейной.

• Решение. Будем рассматривать пулю и брускок как одну систему, что позволит исключить из рассмотрения силы, возникающие при ударе.

Если пренебречь импульсом силы трения за время взаимодействия пули с бруском, то в горизонтальном направлении систему можно считать замкнутой. Запишем закон сохранения импульса системы «пуля – бруском» в направлении движения пули в виде

$$\frac{1}{2}m\upsilon + Mu - m\upsilon = 0. \quad (1)$$

При движении пули в бруске между ними будет действовать диссипативная сила – сила трения, что приведет к тому, что часть механической энергии системы перейдет в тепло. Так как поверхность, на которой находится брускок, гладкая, то внешние диссипативные силы отсутствуют.

При столкновением с бруском начальная кинетическая энергия пули

$$E_1 = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

частично перейдет в тепло и механическая энергия системы непосредственно после взаимодействия будет равна

$$E_2 = \frac{m\upsilon^2}{8} + \frac{Mu^2}{2},$$

где u – скорость бруска после взаимодействия с пулей.

Запишем теорему о полной механической энергии в виде

$$|\Delta E| = |E_2 - E_1| = E_1 - E_2 = Q, \quad \text{или} \quad \frac{m\upsilon^2}{2} - \left\{ \frac{m\upsilon^2}{8} + \frac{Mu^2}{2} \right\} = Q, \quad (2)$$

где Q – количество тепла, выделившегося при движении пули в бруске.

Решив систему уравнений (1) – (2) относительно Q , получим

$$Q = \frac{m\upsilon^2(3M-m)}{8M} \approx 1,2 \text{ кДж.}$$

• Ответ: $Q = \frac{m\upsilon^2(3M-m)}{8M} \approx 1,2 \text{ кДж.}$

3.102. Шар абсолютно неупруго столкнулся с таким же покоящимся шаром. Какая доля энергии перешла в тепло?

3.103. На покоящийся шар массой m_1 налетает шар массой m_2 . После соударения один из шаров полетел под прямым углом, а другой – под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению первоначальной скорости первого шара. Найти отношение масс шаров, если при столкновении $\eta = 20\%$ энергии перешло в тепло.

3.104. «Пуля» пробивает закрепленную доску при минимальной скорости $\upsilon_0 = 10 \text{ м/с}$. С какой скоростью должна лететь «пуля» для того, чтобы пробить незакрепленную доску? Масса доски $M = 1 \text{ кг}$, масса пули $m = 200 \text{ г}$. Силу сопротивления материала доски считать постоянной.

3.105. В шар массой $M = 50 \text{ г}$, висящий на невесомой нерастяжимой нити, попадает горизонтально летящая пуля массой $m = 10 \text{ г}$ и застrevает в нем (рис. 3.65). Какое количество теплоты при этом выделилось, если после взаимодействия с пулей шар поднялся на высоту $h = 20 \text{ см}$?

• Решение. Полагая, что время взаимодействия пули с шаром мало, импульсами внешних сил (сил тяжести пули и шара) и смещением тел из точки, в которой произошло столкновение, будем пренебрегать. При

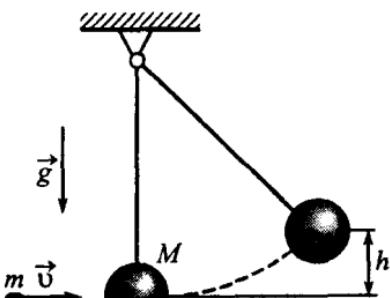


Рис. 3.65

таких допущениях в горизонтальном направлении система «пуля–шар» будет замкнутой. Следовательно, справедлив закон сохранения импульса в виде

$$m v = (M+m) u, \quad (1)$$

где v – скорость пули в момент удара; u – общая скорость пули и шара непосредственно после соударения.

Количество выделенной при взаимодействии теплоты можно найти как разность механических энергий системы до и после столкновения:

$$Q = \frac{m v^2}{2} - \frac{(M+m) u^2}{2}. \quad (2)$$

Выразив скорость пули v из (1)

$$v = \frac{(M+m) u}{m}$$

и подставив в (2)

$$Q = \frac{(M+m)^2 u^2}{2m} - \frac{(M+m) u^2}{2},$$

получим

$$Q = \frac{M(M+m) u^2}{2m}. \quad (3)$$

При движении шара с пулей после взаимодействия на систему будет действовать сторонняя сила – сила натяжения нити. Однако так как проекция этой силы на направление перемещения тел равна нулю, то сила работы не совершает. Поэтому после соударения механическая энергия системы не изменится:

$$\frac{(M+m) u^2}{2} = (M+m) g h,$$

где h – высота, на которую поднимается шар.

Следовательно,

$$u = \sqrt{2gh}, \quad Q = \frac{M(M+m)gh}{m} \approx 0,6 \text{ Дж.}$$

• Ответ: $Q = \frac{M(M+m)gh}{m} \approx 0,6 \text{ Дж.}$

3.106. На тонкой нити длиной l висит шар массой M . Пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью v , пробивает шар и вылетает из него со скоростью $\frac{1}{2}v$. Какая часть кинетической энергии пули перешла в тепло? На какой угол отклонилась нить с шаром после взаимодействия с пулей?

3.107. Два одинаковых бруска подвешены на одном уровне на тонких нитях и находятся на некотором расстоянии один от другого. Пуля, летящая горизонтально со скоростью v_0 , пробивает один брускок и застревает во втором. Найти количество теплоты, выделившейся в первом брускоке, если во втором брускоке выделилось Q_2 теплоты. Траекторию пули считать прямолинейной.

§4. Динамика движения по окружности

Пусть частица массой m движется под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ по окружности радиусом r (рис. 4.1). Второй закон Ньютона для такой частицы в инерциальной системе отсчета имеет вид

$$m \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots, \quad (4.1)$$

где \vec{a} – ускорение частицы относительно выбранной инерциальной системы отсчета.

При движении тела по окружности удобно использовать систему отсчета, жестко связанную с движущимся телом. Такая система отсчета называется *сопровождающей*. Эта система не является инерциальной, так как движется относительно инерциальной системы отсчета с ускорением $\vec{a}_0 = \vec{a}$. Поскольку само тело в сопровождающей системе отсчета покоится ($\vec{a}' = 0$), то второй закон Ньютона в ней (см. (2.18))

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

в точности совпадает с законом (4.1), записанным относительно инерциальной системы отсчета.

Выберем в сопровождающей системе отсчета три взаимно перпендикулярные оси: одну – вдоль единичного вектора \vec{n} , лежащего в плоскости окружности, по которой движется частица, и направленного к центру окружности O' (рис. 4.1), вторую – вдоль единичного вектора $\vec{\tau}$, также лежащего в плоскости окружности и направленного по касательной к окружности в произвольно выбранную сторону (при изменении направления движения частицы по окружности, направление вектора $\vec{\tau}$ не изменяется!), и ось OZ , перпендикулярную плоскости окружности. Спроецируем уравнение (4.1) на эти три оси с учетом, что

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

(где ω – угловая скорость частицы) – нормальное ускорение частицы,

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \epsilon$$

(где ϵ – угловое ускорение частицы) – тангенциальное ускорение частицы и $a_z = 0$, так как частица не перемещается в инерциальной системе отсчета вдоль оси OZ :

$$\left\{ \begin{array}{l} m a_n = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r = F_{1n} + F_{2n} + \dots, \\ m a_\tau = m \frac{dv}{dt} = m \epsilon r = F_{1\tau} + F_{2\tau} + \dots, \\ 0 = F_{1z} + F_{2z} + \dots \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Если по условию задачи частица движется по окружности равномерно ($v = \text{const}$), то $a_\tau = 0$. При этом нормальное ускорение частицы часто бывает удобно выразить через число оборотов в единицу времени $n = \omega / 2\pi$ или период обращения $T = 2\pi / \omega = 1/n$:

$$a_n = 4\pi^2 n^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r.$$

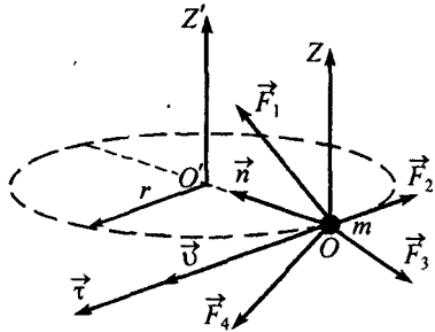


Рис. 4.1

При движении частицы по окружности постоянного радиуса с постоянным тангенциальным ускорением $a_t = \text{const}$ (или, что то же самое, постоянным угловым ускорением $\varepsilon = \text{const}$), скорость частицы изменяется со временем по закону

$$v = v_0 + a_t \cdot (t - t_0).$$

В этом случае нормальное ускорение частицы

$$a_n(t) = \frac{\{v_0 + a_t \cdot (t - t_0)\}^2}{r}, \quad \text{или} \quad a_n(t) = r \{ \omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0) \}^2, \quad (4.3)$$

где v_0 и ω_0 – линейная и угловая скорости частицы в начальный момент времени $t = t_0$.

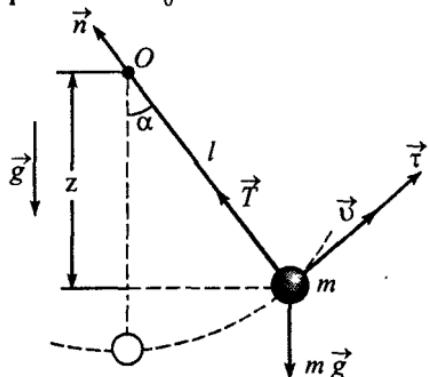


Рис. 4.2

В общем случае, когда частица движется по окружности с переменным тангенциальным ускорением a_t (например, при движении математического маятника $a_t = -g \sin \alpha$ (рис. 4.2), где угол отклонения маятника α изменяется со временем по неизвестному заранее закону), нахождение величины скорости частицы v в зависимости от времени t , а, следовательно, и нормального ускорения требует применения математических методов, выходящих за рамки

школьного курса математики (решение дифференциальных уравнений). В рамках школьного курса подобная задача решается только в том случае, если на частицу в процессе движения не действуют неконсервативные силы (например, силы трения или сопротивления среды) и полная механическая энергия частицы

$$E = \frac{m v^2}{2} + \sum_{k=1}^N U(F_k \text{ конс}) \quad (4.4)$$

(где $U(F_k \text{ конс})$ – потенциальные энергии консервативных сил F_k конс, действующих на частицу) не изменяется со временем. Из закона сохранения энергии (4.4) можно найти скорость частицы v в любой момент времени, если заданы ее положение $r\vec{}$ и скорость $v\vec{}$ в начальный момент времени $t = t_0$. Так, например, при движении идеального (т.е. без учета сил трения в месте подвеса и сил сопротивления воздуха) математического маятника единственной неконсервативной силой, способной изменить полную механическую энергию частицы, является сила натяжения нити $T\vec{}$, но при движении маятника она работу не совершает, так как в любой момент времени перпендикулярна траектории движения, и полная механическая энергия частицы остается величиной постоянной. Если нулевой уровень потенциальной энергии силы тяжести выбрать в точке подвеса O (рис. 4.2), то

$$E = \frac{m v^2}{2} - m g z = \frac{m v_0^2}{2} - m g l \cos \alpha = \frac{m v_0^2}{2} - m g l \cos \alpha_0 = \text{const}, \quad (4.5)$$

где v_0 и α_0 – скорость и угол отклонения нити маятника в начальный момент времени.

Из (4.5) можно получить выражение для скорости частицы массой m при произвольном угле α отклонения нити маятника:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2 g l (\cos \alpha_0 - \cos \alpha)}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим в заключение вопрос о движении по окружности взаимодействующих частиц, образующих замкнутую систему. В инерциальной системе отсчета, связанной с центром инерции (в системе центра масс), система частиц покоятся как целое, но сами частицы могут при определенных условиях двигаться по окружностям, центры которых расположены на оси, проходящей через центр инерции системы.

Если система состоит из двух взаимодействующих частиц массами m_1 и m_2 , то, как известно (см. (3.20)), их радиус-векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 в системе центра масс связаны соотношением $\vec{r}_2 = -(m_1/m_2) \vec{r}_1$. Это означает, что частицы в любой момент времени должны находиться на противоположных концах вектора $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проходящего через центр инерции системы (рис. 4.3).

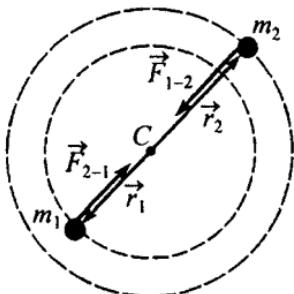


Рис. 4.3

Если между частицами действуют гравитационные или электрические силы притяжения $\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}$, то эти силы будут создавать ускорения частиц m_1 и m_2 , направленные к центру инерции системы,

$$\begin{cases} a_{n1} = F_{2-1}/m_1 = \omega_1^2 r_1, \\ a_{n2} = F_{1-2}/m_2 = \omega_2^2 r_2, \end{cases} \quad (4.7)$$

т.е. при определенных условиях частицы могут вращаться по окружностям радиусами r_1 и $r_2 = (m_1/m_2) r_1$, лежащими в одной плоскости и с центрами в центре инерции системы. Учитывая, что $F_{1-2} = F_{2-1}$ и $m_1 r_1 = m_2 r_2$, из (4.7) получим, что угловые скорости частиц одинаковы:

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{F_{2-1}/m_1 r_1} = \sqrt{F_{1-2}/m_2 r_2}. \quad (4.8)$$

Если замкнутая система состоит из трех взаимодействующих частиц массами m_1 , m_2 и m_3 , то в системе центра масс их радиус-векторы \vec{r}_1 , \vec{r}_2 и \vec{r}_3 связаны соотношением $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = 0$. Это, в частности, означает, что все три частицы и их центр инерции всегда лежат в одной плоскости, причем центр инерции расположен внутри треугольника, образованного частицами (рис. 4.4).

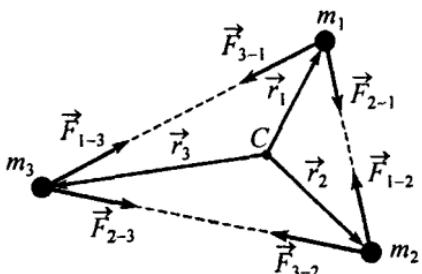


Рис. 4.4

Для того чтобы частицы совершили синхронные (с одинаковыми угловыми скоростями) движения по окружностям радиусами \vec{r}_1 , \vec{r}_2 и \vec{r}_3 , результирующие силы притяжения $\vec{F}_1 = \vec{F}_{2-1} + \vec{F}_{3-1}$, $\vec{F}_2 = \vec{F}_{1-2} + \vec{F}_{3-2}$ и $\vec{F}_3 = \vec{F}_{1-3} + \vec{F}_{2-3}$ должны быть направлены в любой момент времени к центру инерции системы, а их абсолютные величины подчиняться соотношению

$$F_1 : F_2 : F_3 = m_1 r_1 : m_2 r_2 : m_3 r_3, \quad (4.9)$$

которое вытекает из второго закона Ньютона, записанного для частиц m_1 , m_2 и m_3 :

$$\begin{cases} m_1 a_{n1} = m_1 \omega^2 r_1 = F_1, \\ m_2 a_{n2} = m_2 \omega^2 r_2 = F_2, \\ m_3 a_{n3} = m_3 \omega^2 r_3 = F_3. \end{cases} \quad (4.10)$$

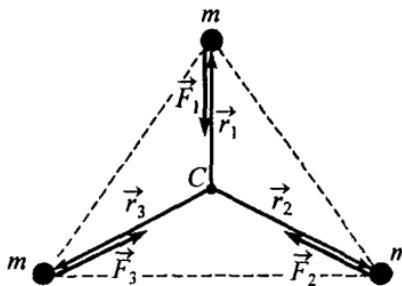


Рис. 4.5

Эти условия выполняются, например, для системы трех одинаковых взаимодействующих частиц ($m_1 = m_2 = m_3 = m$), расположенных в вершинах равностороннего треугольника (рис. 4.5). Центр инерции такой системы расположен на пересечении медиан (в равностороннем треугольнике медиана, гипotenуза и высота совпадают), и результирующие силы взаимодействия \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 всегда направлены

к центру инерции, а их величины $F_1 = F_2 = F_3$, что согласуется с условием (4.9), так как $m_1 r_1 = m_2 r_2 = m_3 r_3$. В результате все три частицы могут синхронно вращаться вокруг центра инерции с угловой скоростью (см. формулу (4.10))

$$\omega = \sqrt{F_1 / m_1 r_1} \quad (4.11)$$

Рекомендации по решению задач

Решение задач на динамику движения материальной точки по окружности ничем принципиально не отличается от решения задач на динамику поступательного движения. В некоторой степени эти задачи даже проще, так как при составлении уравнений движения нет необходимости в выборе удобной системы отсчета для той или иной конкретной задачи. При движении тела по окружности наиболее удобным представляется использовать систему отсчета, жестко связанную с движущимся телом, — сопровождающую систему отсчета. Координатные оси этой системы представляют собой тройку взаимно перпендикулярных векторов: одна направлена вдоль вектора нормали \vec{n} к траектории движения точки и лежит в плоскости окружности, по которой движется частица; вторая — вдоль вектора \vec{t} , также лежащего в плоскости окружности и направленного по касательной к траектории в произвольно выбранную сторону; третья ось перпендикулярна плоскости окружности.

С учетом выражений для нормального и тангенциального ускорений, уравнения движения в проекциях на оси сопровождающей системы отсчета имеют вид (4.2).

Задачи на динамику движения материальной точки по окружности можно разделить на три группы.

Первую группу составляют задачи на движение материальной точки в горизонтальной плоскости. Если движение происходит с постоянной по модулю скоростью ($a_t = 0$), то для

решения задачи обычно достаточно двух уравнений движения: в проекциях на направление нормали \vec{n} и на ось OZ сопровождающей системы отсчета. Если сопровождающая система отсчета движется вертикально с некоторым ускорением \vec{a}_0 , то последнее из уравнений (4.2) следует записывать в виде

$$m a_0 = F_{1z} + F_{2z} + \dots$$

Если движение материальной точки в горизонтальной плоскости происходит с постоянным тангенциальным ускорением, то полное ускорение частицы $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ не будет направлено по радиусу окружности. При решении таких задач обычно необходимо записать уравнения движения в проекциях на все оси сопровождающей системы отсчета. При этом из уравнения в проекции на ось \vec{t} , записанного в виде

$$m a_t = F_{1t} + F_{2t} + \dots, \quad \text{или} \quad m \varepsilon r = F_{1t} + F_{2t} + \dots,$$

можно найти a_t или угловое ускорение ε , которые связаны с нормальным ускорением соотношением (4.3).

Вторая группа включает задачи на движение материальной точки в вертикальной плоскости. В общем случае здесь частица движется с переменным тангенциальным ускорением (т.е. $a_t \neq \text{const}$). В задачах, рассматриваемых в рамках школьного курса, энергию частицы при таком движении изменяют только консервативные силы. Обычно такой силой является сила тяжести, а все другие силы, действующие на частицу при ее движении (например, сила реакции опоры, если частица движется по сферической поверхности, или сила натяжения нити – при движении частицы, подвешенной на нити), перпендикулярны траектории, следовательно, работы не совершают, т.е. не изменяют энергию частицы. При таком движении частица переходит по дуге окружности с одного уровня потенциальной энергии на другой и при этом ее полная энергия не изменяется. Для решения таких задач обычно достаточно только уравнения движения в проекции на нормаль к траектории и закона сохранения энергии.

Наконец, третью группу составляют задачи, в которых изучается движение не одной материальной точки, а системы взаимодействующих частиц (частицы могут притягиваться в соответствии, например, с законом всемирного тяготения или могут быть связаны нитями, соединенными невесомыми стержнями и т.д.). Такие задачи могут быть решены только в некоторых частных случаях при условии, что система частиц замкнута, а внутренние силы консервативны (т.е. справедливы законы сохранения импульса и механической энергии). В системе центра масс частицы при определенных условиях могут двигаться по окружностям, центры которых совпадают с центром масс. Для системы двух или трех взаимодействующих частиц такие задачи решаются на основании уравнений (4.7) – (4.8) или (4.10) – (4.11).

Если число неизвестных оказывается больше числа уравнений динамики, то недостающие соотношения между величинами, фигурирующими в задаче, составляют на основании формул кинематики, законов сохранения импульса и энергии. В общем случае, если в системе действуют неконсервативные силы, например силы трения и сопротивления, то определение закона изменения скорости движущейся частицы при $a_t \neq 0$ выходит за рамки школьной программы, так как в таких случаях требуется решать дифференциальные уравнения.

Задачи

Движение в горизонтальной плоскости.

4.1. Шарик подвешен на тонкой нерастяжимой нити длиной $l = 50$ м к краю горизонтального диска радиусом $R = 20$ см (рис. 4.6). Диск приводят во вращение вокруг вертикальной оси. С какой угловой скоростью надо вращать диск, чтобы нить с шариком отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$?

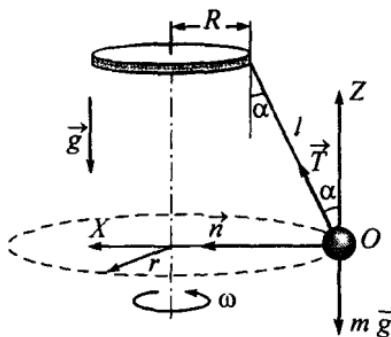


Рис. 4.6

Выберем сопровождающую систему отсчета, связанную с шариком, как показано на рис. 4.6, и запишем уравнение движения в проекциях на оси OX и OZ в виде

$$OX: m \omega^2 r = T \sin \alpha, \quad (1)$$

$$OZ: 0 = T \cos \alpha - m g, \quad (2)$$

где ω — угловая скорость шарика, равная угловой скорости диска; $r = R + l \sin \alpha$ — радиус окружности, описываемой шариком.

Выразив из (2) силу натяжения нити

$$T = \frac{m g}{\cos \alpha}$$

и подставив в (1)

$$m \omega^2 (R + l \sin \alpha) = \frac{m g}{\cos \alpha} \sin \alpha,$$

получим

$$\omega^2 (R + l \sin \alpha) = g \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{R + l \sin \alpha}} \approx 3,5 \text{ рад/с.}$$

• Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{R + l \sin \alpha}} \approx 3,5 \text{ рад/с.}$

4.2. Шарик массой $m = 1 \text{ кг}$, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1 \text{ м}$, вращают в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью, совершая один оборот за секунду. Определить величину силы натяжения нити и угол, который образует нить с вертикалью.

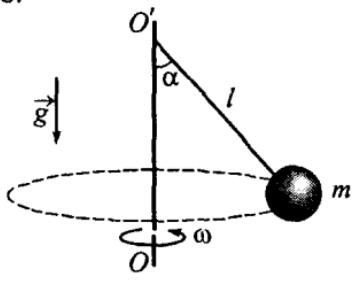


Рис. 4.7

4.3. Металлический стержень длиной $l = 1 \text{ м}$ закреплен на вертикальной оси OO' под углом $\alpha = 30^\circ$ к ней (рис. 4.7). К нижнему концу стержня прикреплен шар массой $m = 1 \text{ кг}$. Ось OO' приводят во вращение с угловой скоростью $\omega = 10 \text{ рад/с}$. Определить величину силы, действующей на шар со стороны стержня.

4.4. На горизонтальном диске, который может вращаться вокруг вертикальной оси, лежит шайба массой $m = 150 \text{ г}$. Шайба соединена легкой пружиной длиной $l_0 = 20 \text{ см}$ с осью диска. Определить жесткость пружины, если при угловой скорости диска

$\omega = 4$ рад/с пружина растягивается на $\Delta x = 2$ см. Коэффициент трения между шайбой и поверхностью диска $\mu = 0,2$.

- *Решение.* При вращении за счет силы трения диск будет увлекать за собой шайбу. Если угловая скорость диска будет оставаться постоянной, то у шайбы будет только нормальное ускорение \vec{a}_n , направленное горизонтально к оси вращения диска.

При движении на шайбу в горизонтальном направлении могут действовать сила трения и сила упругости пружины.

Если угловая скорость диска недостаточно велика, то пружина будет оставаться в недеформированном состоянии, и ускорение \vec{a}_n будет обусловлено только силой трения покоя $\vec{F}_{\text{тр пок}}$. С увеличением угловой скорости сила $\vec{F}_{\text{тр пок}}$ достигнет максимального значения $F_{\text{тр max}} = \mu N$, и при дальнейшем росте угловой скорости шайба начнет скользить, растягивая пружину. Если при этом угловая скорость перестанет меняться, то в установившемся состоянии на шайбу будут действовать сила трения $F_{\text{тр max}}$ и сила упругости пружины $F_{\text{упр}}$, направленные к оси вращения диска (рис. 4.8).

Выберем сопровождающую систему отсчета, связанную с шайбой, и запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси OX и OZ в виде

$$OX: m \omega^2 r = F_{\text{тр max}} + F_{\text{упр}} \quad (1)$$

$$OZ: 0 = N - m g, \quad (2)$$

где $r = l_0 + \Delta x$ – расстояние от оси вращения до шайбы.

С учетом выражений для сил трения $F_{\text{тр max}} = \mu N$ упругости $F_{\text{упр}} = k \Delta x$ из (1) – (2) получим

$$m \omega^2 (l_0 + \Delta x) = \mu m g + k \Delta x.$$

Следовательно,

$$k = \frac{m [\omega^2 (l_0 + \Delta x) - \mu g]}{\Delta x} \approx 11,7 \text{ Н/м.}$$

• Ответ: $k = \frac{m [\omega^2 (l_0 + \Delta x) - \mu g]}{\Delta x} \approx 11,7 \text{ Н/м.}$

4.5. Диск вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. На каких расстояниях от оси вращения шайба, расположенная на диске, не будет соскальзывать? Коэффициент трения между шайбой и поверхностью диска $\mu = 0,2$.

4.6. На диске, который может вращаться вокруг вертикальной оси, лежит шайба массой $m = 100$ г. Шайба соединена легкой пружиной с осью диска. Если число оборотов диска не превышает $v_1 = 2$ об/с, то пружина находится в недеформированном состоянии. Если число оборотов $v_2 = 5$ об/с, то длина пружины увеличивается вдвое. Определить жесткость пружины.

4.7. Горизонтально расположенный диск начинает раскручиваться с постоянным угловым ускорением ε . В какой момент времени тело, расположенное на расстоянии r от оси, начнет соскальзывать с диска, если коэффициент трения тела о поверхность диска равен μ ?

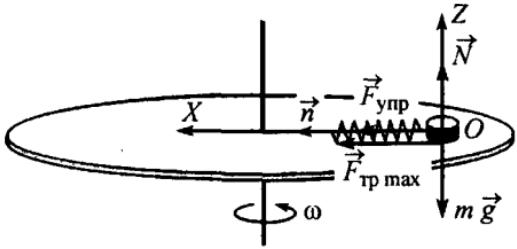


Рис. 4.8

4.8. Самолет делает поворот в горизонтальной плоскости, двигаясь с постоянной скоростью $v = 2000$ км/ч. При каком радиусе кривизны траектории летчик будет испытывать пятикратную перегрузку (отношение веса летчика к силе тяжести)?

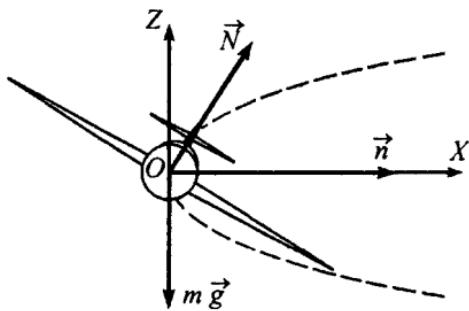


Рис. 4.9

• *Решение.* При движении самолета со скоростью v по дуге окружности радиусом R у летчика будет нормальное ускорение, равное ускорению самолета,

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

обусловленное действием силы реакции \vec{N} сиденья. Чтобы сила \vec{N} давала положительную проекцию на нормаль к траектории, самолет должен совершать вираж, двигаясь так, чтобы плоскость крыльев составляла некоторый угол с горизонтом (рис. 4.9).

Выберем сопровождающую систему отсчета, связанную с самолетом, как показано на рис. 4.9, и запишем второй закон Ньютона для летчика в проекциях на оси OX и OZ в виде

$$OX: \frac{m v^2}{R} = N_x, \quad (1)$$

$$OZ: 0 = N_z - m g, \quad (2)$$

где N_x, N_z – проекции силы реакции на соответствующие оси системы координат.

Поскольку вес летчика численно равен силе реакции, то

$$P = N = \sqrt{N_x^2 + N_z^2}$$

или с учетом (1) – (2)

$$P = \sqrt{\frac{m^2 v^4}{R^2} + m^2 g^2}.$$

По условию задачи $P = 5 m g$. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{m^2 v^4}{R^2} + m^2 g^2} = 5 m g.$$

Отсюда находим

$$R = \frac{v^2}{\sqrt{24 g}} \approx 6,4 \text{ км.}$$

• Ответ: $R = \frac{v^2}{\sqrt{24 g}} \approx 6,4 \text{ км.}$

4.9. Самолет массой $m = 1000$ кг движется с постоянной скоростью по окружности радиусом $R = 1000$ м, расположенной в горизонтальной плоскости. Определить перегрузку летчика, если кинетическая энергия самолета $T = 5$ МДж.

4.10. Самолет совершает вираж, двигаясь по горизонтальной окружности радиусом $R = 2$ км с постоянной скоростью $v = 2000$ км/ч. Какой угол с горизонтом составляет плоскость крыльев самолета?

4.11. Определить скорость, с которой должен двигаться мотоциклист по вертикальной цилиндрической стенке диаметром $D = 20$ м, чтобы не соскользнуть вниз. Коэффициент трения принять равным $\mu = 0,8$.

• *Решение.* При движении по окружности радиусом $R = \frac{1}{2} D$ с постоянной скоростью v мотоциклист будет иметь нормальное ускорение \vec{a}_n , обусловленное силой реакции стенки \vec{N} (рис. 4.10). В вертикальном направлении на мотоциклиста будут действовать сила тяжести

$m \vec{g}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр пок}}$. Если сила тяжести станет больше максимального значения трения покоя $F_{\text{тр max}}$, то мотоциклист соскальзнет вниз. Чтобы воспрепятствовать этому, мотоциклист должен увеличить скорость: при этом возрастет сила реакции \vec{N} и, как следствие, сила трения покоя.

Введем сопровождающую систему отсчета, связанную с мотоциклистом, и запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси OX и OZ в виде

$$OX: \frac{m v^2}{R} = N,$$

$$OZ: 0 = F_{\text{тр max}} - m g,$$

или с учетом выражения для силы трения $F_{\text{тр max}} = \mu N$

$$\frac{m v^2}{R} = \frac{m g}{\mu}.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{g R}{\mu}} = \sqrt{\frac{g D}{2 \mu}} \approx 11,1 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $v = \sqrt{\frac{g D}{2 \mu}} \approx 11,1 \text{ м/с.}$

4.12. С какой угловой скоростью должен вращаться вокруг своей оси вертикально расположенный цилиндр, чтобы мелкие частицы внутри цилиндра не соскальзывали вниз? Коэффициент трения между поверхностью цилиндра и частицами $\mu = 1$. Внутренний радиус цилиндра $R = 50 \text{ см}$.

4.13. В аттракционе «Карусель» люди прижимаются к внутренней поверхности вертикального цилиндра без дна радиусом $R = 3 \text{ м}$, вращающегося вокруг вертикальной оси с частотой $v = 1 \text{ об/с}$. Каким должен быть коэффициент трения, чтобы человек, катящийся на такой карусели, не выпал из нее?

4.14. Конус движется вертикально вверх с ускорением \vec{a} . Внутри конуса вращается шарик, описывая окружность радиусом R (рис. 4.11). Определить период движения шарика. Угол при вершине конуса 2α . Трением пренебречь.

• Решение. При движении шарик будет иметь нормальное ускорение \vec{a}_n , направленное горизонтально к оси конуса, и ускорение \vec{a} , направленное вертикально вверх. При этом ускорение \vec{a}_n будет обусловлено проекцией силы реакции стенки конуса \vec{N} на нормаль к траектории, а ускорение \vec{a} — проекцией силы \vec{N} и силы тяжести $m \vec{g}$ на вертикальное направление.

Выберем сопровождающую систему отсчета, связанную с шариком, и запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси OX и OZ в виде

$$OX: \frac{m v^2}{R} = N \cos \alpha, \quad (1)$$

$$OZ: m a = N \sin \alpha - m g. \quad (2)$$

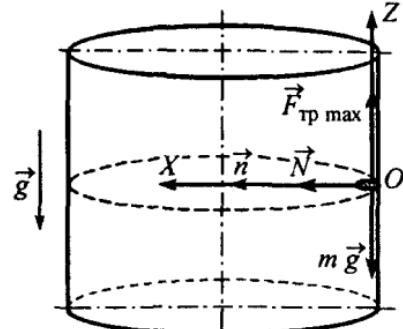


Рис. 4.10

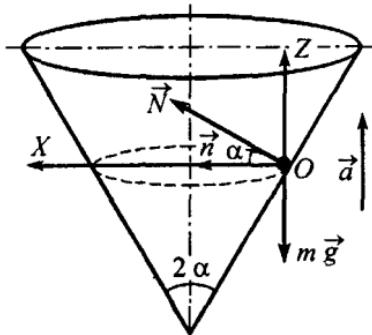


Рис. 4.11

Выразив силу реакции из (2)

$$N = \frac{m(g+a)}{\sin \alpha}$$

и подставив в (1)

$$\frac{m v^2}{R} = m(g+a) \operatorname{ctg} \alpha,$$

найдем линейную скорость шарика

$$v = \sqrt{R(g+a) \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Как видим, скорость шарика будет постоянной. Следовательно, время одного оборота шарика по окружности радиусом R

$$T = \frac{2\pi R}{v}, \quad \text{или} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R \operatorname{tg} \alpha}{a+g}}.$$

• Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{R \operatorname{tg} \alpha}{a+g}}$.

4.15. Внутрь сферы радиусом R насыпали немного песка. Где будут находиться песчинки, если сферу привести во вращение с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через центр сферы? Трением пренебречь.

4.16. Сосуд, имеющий форму усеченного расширяющегося вверх конуса, вращается вокруг вертикальной оси. Диаметр дна сосуда $D = 20$ см, угол наклона стенок к горизонту $\alpha = 60^\circ$. При какой угловой скорости вращения сосуда маленький шарик, лежащий на его дне, будет выброшен из сосуда? Трением пренебречь.

4.17. На гладком столе лежит кольцо массой m и радиусом R . Кольцо сделано из проволоки, выдерживающей максимальное натяжение T_{\max} . До какой угловой скорости нужно раскрутить кольцо, чтобы оно разорвалось?

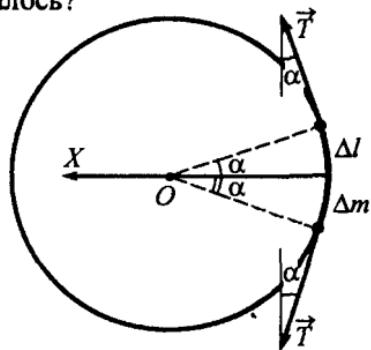


Рис. 4.12

• Решение. Рассмотрим бесконечно малый элемент кольца длиной Δl (рис. 4.12). Полагая, что масса m кольца распределена по всей его длине равномерно, найдем массу Δm выделенного элемента кольца. Так как масса единицы длины кольца равна $\Delta m_{\text{ед}} = m / 2\pi R$, то масса элемента кольца длиной Δl

$$\Delta m = \Delta m_{\text{ед}} \Delta l = \frac{m \Delta l}{2\pi R}.$$

Если длину Δl выразить через радиус кольца R и угол α , т.е. $\Delta l = 2R\alpha$, то получим

$$\Delta m = \frac{m \alpha}{\pi}. \quad (1)$$

При вращении кольца на выделенный элемент со стороны соседних элементов будут действовать силы натяжения \vec{T} , сообщающие ему нормальное ускорение

$$a_n = \omega^2 R.$$

Запишем уравнение движения элемента Δm кольца в проекции на ось OX (направленную по радиусу кольца):

$$\Delta m \omega^2 R = 2 T \sin \alpha. \quad (2)$$

Так как длина Δl мала, то угол α также мал, и можно положить, что $\sin \alpha \approx \alpha$. Тогда уравнение (2) с учетом (1) примет вид

$$\frac{m \alpha}{\pi} \omega^2 R \approx 2 T \alpha, \quad \text{или} \quad \frac{m}{\pi} \omega^2 R \approx 2 T.$$

Для того чтобы кольцо разорвалось, его нужно раскрутить до угловой скорости, при которой силы натяжения превысят \vec{T}_{\max} . При этом будет выполняться неравенство

$$\frac{m}{\pi} \omega^2 R > 2 T_{\max}$$

Следовательно,

$$\omega > \sqrt{\frac{2 \pi T_{\max}}{m R}}$$

• Ответ: $\omega > \sqrt{\frac{2 \pi T_{\max}}{m R}}$

4.18. Из тонкого резинового жгута массой $m = 0,2$ кг и длиной $l = 1$ м сделали кольцо. Кольцо раскрутили вокруг его оси до угловой скорости $\omega = 10$ рад/с. Найти радиус вращающегося кольца, если коэффициент жесткости резины, из которой оно изготовлено, равен $k = 10$ Н/м. Силу тяжести не учитывать.

4.19. Резиновое кольцо массой $m = 100$ г надето на вертикальный цилиндр радиусом $R = 20$ см. При этом сила натяжения кольца $T = 0,3$ Н. Найти коэффициент трения между поверхностью цилиндра и кольцом, если при вращении цилиндра вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с кольцо с него соскальзывает.

Движение в вертикальной плоскости

4.20. Небольшой шарик массой m соскальзывает без трения с вершины полусферы радиусом R . На какой высоте над центром полусферы шарик оторвется от ее поверхности? Чему равна скорость шарика в момент отрыва?

• Решение. При скольжении шарика по сферической поверхности на него будут действовать сила тяжести $m \vec{g}$ и сила реакции сферы \vec{N} (рис. 4.13). Поскольку сила \vec{N} перпендикулярна траектории шарика, то она работы не совершает. Поэтому полная механическая энергия шарика меняется не будет. Если нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбрать у основания полусферы, то в начальный момент (в точке A) шарик будет иметь только потенциальную энергию $E_1 = m g R$, а в произвольной точке B, находящейся на высоте h , – потенциальную и кинетическую энергию: $E_2 = m g h + \frac{1}{2} m v^2$.

На основании закона сохранения механической энергии

$$E_1 = E_2, \quad \text{или} \quad m g R = m g h + \frac{m v^2}{2}$$

Отсюда находим

$$v = \sqrt{2 g (R - h)}, \quad \text{или} \quad v = \sqrt{2 g R (1 - \cos \alpha)}, \quad (1)$$

где α – угол между прямой, проведенной из центра полусферы в точку B, и вертикалью.

При соскальзывании шарика его нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

будет увеличиваться одновременно с ростом скорости.

Из уравнения движения, записанного в проекции на ось OX , направленную по нормали \vec{n} к траектории,

$$\frac{m v^2}{R} = m g \cos \alpha - N$$

видно, что сила реакции поверхности сферы

$$N = m g \cos \alpha - \frac{m v^2}{R} \quad (2)$$

с увеличением скорости шарика будет уменьшаться и станет равной нулю (шарик оторвётся от поверхности сферы) при скорости

$$v = \sqrt{g R \cos \alpha}. \quad (3)$$

Приравняв правые части уравнений (1) и (3), получим

$$2gR(1-\cos\alpha) = gR\cos\alpha; \quad \cos\alpha = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, шарик оторвётся от поверхности сферы на высоте

$$h = R \cos \alpha = \frac{2}{3} R$$

и в момент отрыва будет иметь скорость

$$v = \sqrt{g R \cos \alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} g R.$$

• Ответ: $h = \frac{2}{3} R$; $v = \sqrt{\frac{2}{3}} g R$.

4.21. Небольшая шайба массой m лежит на вершине гладкой полусфера радиусом R . Шайбе сообщают скорость \vec{v}_0 , направленную горизонтально. На какой высоте над центром полусферы шайба оторвётся от ее поверхности?

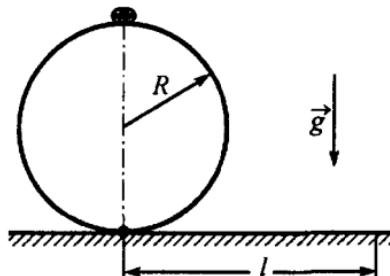


Рис. 4.14

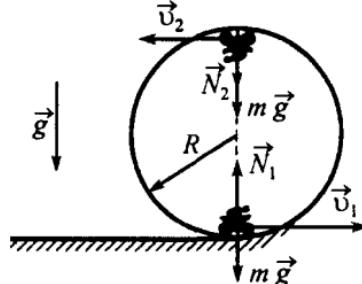


Рис. 4.15

4.22. Сфера радиусом R укреплена на горизонтальном полу. С вершины сферы соскальзывает без трения небольшое тело (рис. 4.14). На каком расстоянии l от точки закрепления сферы тело упадет на пол? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

4.23. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге. Какую скорость должен он развить, чтобы, выключив мотор, проехать по треку, имеющему форму «мертвой петли» радиусом $R = 4$ м? Трением пренебречь.

• Решение. При движении с выключенным мотором на систему «мотоцикл–мотоциклист» будут действовать сила тяжести $m \vec{g}$ и сила реакции поверхности трека \vec{N} (рис. 4.15). Поскольку сила реакции работы не совершает, то механическая энергия системы меняется не будет. Если ноль отсчета потенциальной энергии выбрать на уровне горизонтальной дороги, то в нижней точке трека энергия системы будет равна $E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$, а в верхней – $E_2 = m g 2R + \frac{1}{2} m v_2^2$, где v_1 , v_2 – скорость мотоциклиста в нижней и верхней точках трека соответственно. На основании закона сохранения механической энергии

$$E_1 = E_2, \quad \text{или} \quad \frac{m v_1^2}{2} = 2 m g R + \frac{m v_2^2}{2}. \quad (1)$$

Запишем уравнение движения системы в проекции на ось, направленную по нормали к траектории, в нижней и верхней точках трека:

$$\frac{m v_1^2}{R} = N_1 - m g, \quad \frac{m v_2^2}{R} = N_2 + m g. \quad (2)$$

Чтобы мотоциклист проехал трек, не отрываясь от его поверхности, сила реакции не должна обращаться в ноль во всех точках траектории. Поскольку минимальная величина силы реакции будет в верхней точке трека

$$N_2 = \frac{m v_2^2}{R} - m g,$$

то при выполнении условия

$$\frac{m v_2^2}{R} - m g > 0 \quad (3)$$

мотоциклист проедет весь трек, не отрываясь от его поверхности.

Выразив из уравнения (1) скорость v_2 и подставив в (3)

$$\frac{v_1^2 - 4 g R}{R} - g > 0,$$

получим

$$v_1 > \sqrt{5 g R} \approx 14 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $v_1 > \sqrt{5 g R} \approx 14 \text{ м/с.}$

4.24. С какой силой прижимается летчик к сидению самолета в нижней точке «мертвой петли» радиусом $R = 200 \text{ м}$? Масса летчика $m = 75 \text{ кг}$, скорость самолета $v = 360 \text{ км/ч}$.

4.25. Летчик выполняет на самолете «мертвую петлю» радиусом $R = 100 \text{ м}$. Скорость самолета в нижней точке петли $v = 360 \text{ км/ч}$. Полагая, что выражение выполняется при выключенном моторе, найти величину силы, с которой летчик прижимается к сидению самолета в верхней точке петли. Масса летчика $m = 70 \text{ кг}$.

4.26. Горка, представляющая собой дугу окружности радиусом $R = 4 \text{ м}$, плавно переходит в горизонтальную плоскость. Поверхность горки гладкая, а горизонтальная поверхность – шероховатая с коэффициентом трения $\mu = 0,1$. Санки, съехав с горки, остановились на расстоянии $l = 30 \text{ м}$ от ее конца. На какой высоте человек в санках испытал двукратную перегрузку (отношение веса человека к силе тяжести)?

4.27. Шарик скользит без трения по внутренней поверхности желоба, выполненного в виде двух сопряженных в точке A окружностей радиусами R и $\frac{1}{2}R < r < R$ (рис. 4.16). Найти скорость шарика в наивысшей точке его траектории, если первоначально шарик находился на высоте $h = R$ от точки сопряжения A .

• Решение. При скольжении шарика на него будут действовать сила тяжести $m \vec{g}$ и сила реакции поверхности желоба \vec{N} . Поскольку сила \vec{N} перпендикулярна траектории шарика, то она работы не совершает. Поэтому полная механическая энергия шарика в любой момент

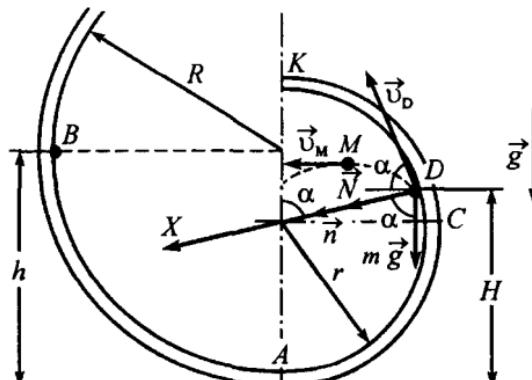


Рис. 4.16

будет одинаковой. Если нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбрать на уровне точки сопряжения A , то в начальный момент (в точке B) шарик будет иметь энергию $E_B = m g h = m g R$.

Рассмотрим последовательно все этапы движения шарика.

Соскользнув из точки B в точку A , шарик приобретет кинетическую энергию $T_A = E_B$. В точке C (расположенной на горизонтальном диаметре окружности радиусом r) потенциальная энергия шарика $U_C = m g r < E_B$. Следовательно, энергии достаточно, чтобы шарик смог достичь точки C , в которой кроме потенциальной он будет иметь также кинетическую энергию. Легко понять, что точки K шарик не достигнет, поскольку потенциальная энергия в указанной точке $U_K = m g 2r > E_B$. Это означает, что в некоторой точке D , расположенной между точками C и K , шарик оторвется от поверхности желоба. Причем, в момент отрыва шарик будет иметь скорость v_D , направленную по касательной к поверхности желоба.

Записав закон сохранения механической энергии в виде

$$E_B = E_D, \quad \text{или} \quad m g R = m g H + \frac{m v_D^2}{2}$$

(где $H = r(1 + \cos \alpha)$ – высота точки отрыва D относительно точки сопряжения A окружности), получим

$$v_D^2 = 2g[R - r(1 + \cos \alpha)]. \quad (1)$$

При движении по окружности радиусом r в точке D шарик приобретет нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v_D^2}{r}.$$

Записав уравнение движения шарика в проекции на ось OX , направленную по нормали \vec{n} к траектории,

$$\frac{m v_D^2}{r} = m g \cos \alpha - N,$$

в момент отрыва ($N = 0$) получим

$$v_D^2 = g r \cos \alpha. \quad (2)$$

Приравняв правые части уравнений (1) и (2), находим

$$2g[R - r(1 + \cos \alpha)] = gr \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{2}{3} \frac{R - r}{r}. \quad (3)$$

Подставив выражение для $\cos \alpha$ из (3) в (2), найдем скорость шарика в момент отрыва от поверхности желоба:

$$v_D = \sqrt{\frac{2}{3}g(R - r)}.$$

После отрыва от поверхности желоба шарик будет двигаться по параболе по законам движения тела, брошенного вблизи поверхности земли с начальной скоростью \vec{v}_D под углом α к горизонту. При таком движении скорость в произвольной точке

$$v = \sqrt{v_{\text{гор}}^2 + v_{\text{верт}}^2},$$

где $v_{\text{гор}} = v_D \cos \alpha$, $v_{\text{верт}} = v_D \sin \alpha - gt$ – проекции вектора скорости на горизонтальное и вертикальное направления соответственно (см. §1). Поскольку в верхней точке M траектории проекция вектора скорости \vec{v}_M шарика на вертикальное направление равна нулю, то

$$v_M = v_{\text{гор}} = v_D \cos \alpha = \frac{2}{3} \frac{R - r}{r} \sqrt{\frac{2}{3} g(R - r)}.$$

• Ответ: $v_M = \frac{2}{3} \frac{R - r}{r} \sqrt{\frac{2}{3} g(R - r)}$.

4.28. Шарик может скользить по гладкому желобу, изображенном на рис. 4.17. С какой минимальной высоты h нужно пустить шарик, чтобы он не покинул желоб по всей его длине? Радиус закругления желоба R .

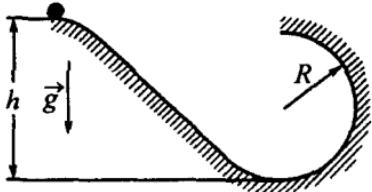


Рис. 4.17

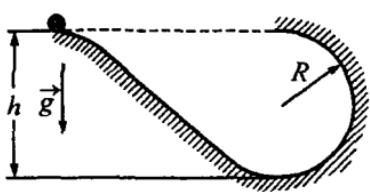


Рис. 4.18

4.29. Шарик начинает скользить с высоты h по гладкому желобу, переходящему в полуокружность радиусом $R = \frac{1}{2}h$ (рис. 4.18). Найти скорость шарика в наивысшей точке его траектории (после отрыва от желоба).

4.30. Шарик может скользить без трения по внутренней поверхности желоба, выполненного в виде двух сопряженных в точке A окружностей радиусами R и $2R$ (рис. 4.19). В точке B шарику сообщают горизонтальную скорость \vec{v}_0 , после чего он движется, не отрываясь от поверхности части желоба радиусом R . На какую высоту относительно точки A поднимется шарик после отрыва от части желоба радиусом $2R$?

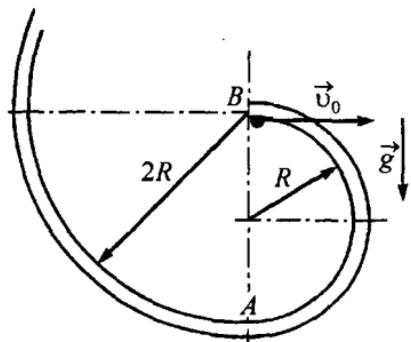


Рис. 4.19

4.31. На невесомой нерастяжимой нити висит груз массой m . Нить с грузом отклонили от вертикали на угол α_0 и отпустили. По какому закону меняется сила натяжения нити в зависимости от угла α между нитью и вертикалью?

• *Решение.* При движении груза на него будут действовать сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} (рис. 4.20). Поскольку сила \vec{T} перпендикулярна траектории груза, то она работы не совершает. Поэтому энергия груза меняться не будет.

Если нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбрать на уровне положения равновесия груза, то в начальный момент груз будет иметь энергию

$$E_1 = m g H,$$

а в положении, когда нить составит угол α с вертикалью,

$$E_2 = m g h + \frac{m v^2}{2},$$

где \vec{v} – скорость груза в этот момент.

На основании закона сохранения механической энергии

$$E_1 = E_2, \quad \text{или} \quad m g H = m g h + \frac{m v^2}{2}.$$

Выразив высоты H и h через длину нити l и углы α и α_0

$$H = l(1 - \cos \alpha_0), \quad h = l(1 - \cos \alpha),$$

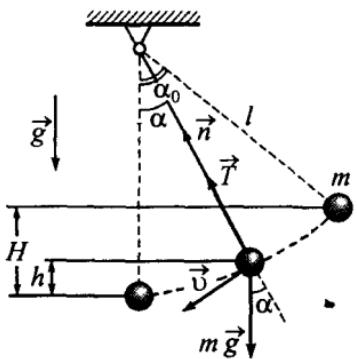


Рис. 4.20

получим

$$v^2 = 2gl(\cos \alpha - \cos \alpha_0). \quad (1)$$

При движении по окружности радиусом l груз приобретет нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{l}.$$

Из уравнения движения груза, записанного в проекции на ось, направленную по нормали \vec{n} к траектории,

$$\frac{m v^2}{l} = T - m g \cos \alpha$$

находим

$$v^2 = \frac{l(T - m g \cos \alpha)}{m}. \quad (2)$$

Приравняв правые части уравнений (1) и (2)

$$2gl(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \frac{l(T - m g \cos \alpha)}{m},$$

приходим к ответу:

$$T = m g (3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_0).$$

Следовательно, сила натяжения максимальна при $\alpha = 0$, т.е. при прохождении грузом положения равновесия, и минимальна в крайних точках.

- Ответ: $T = m g (3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_0)$.

4.32. На легкой нерастяжимой нити, прочность которой $T_{\max} = 10$ Н, подвешен груз массой $m = 0,5$ кг. Нить с грузом отклоняют от вертикали и отпускают. На какой максимальный угол можно отклонить нить с грузом, чтобы при последующем движении груза она не оборвалась?

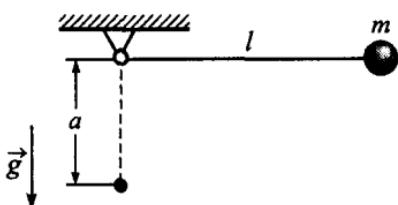


Рис. 4.21

4.33. Вблизи вертикальной стены на тонкой нерастяжимой нити длиной l подвешен шарик массой m . Нить с шариком отклоняют в плоскости, параллельной стене, до горизонтального положения и отпускают (рис. 4.21). На каком наименьшем расстоянии под точкой подвеса нужно вбить в стену гвоздь, чтобы нить, налетев на него, порвалась? Нить выдерживает силу натяжения не выше T_{\max} .

4.34. Вблизи вертикальной стены на тонкой нерастяжимой нити длиной l подвешен шарик. На расстоянии a под точкой подвеса в стену вбит гвоздь (рис. 4.21). Нить с шариком отклоняют в плоскости, параллельной стене, до горизонтального положения и отпускают. На какую максимальную (относительно гвоздя) высоту поднимется шарик при движении?

4.35. На тонкой нерастяжимой нити подвешен шарик. Нить с шариком отклоняют до горизонтального положения и отпускают. В каких точках траектории ускорение шарика направлено горизонтально?

- Решение. При решении данной задачи воспользуемся результатом, полученным в задаче №4.31. Положив в соотношении

$$T = m g (3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_0)$$

$\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$, найдем силу натяжения нити в зависимости от угла α между нитью и вертикалью в виде

$$T = 3 m g \cos \alpha. \quad (1)$$

В положении, когда ускорение \vec{a} шарика направлено горизонтально (рис. 4.22), результирующая сила в проекции на вертикальное направление равна нулю:

$$T \cos \alpha - m g = 0. \quad (2)$$

Подставив силу натяжения нити из (1) в (2)

$$3 m g \cos \alpha \cos \alpha - m g = 0,$$

получим

$$\cos \alpha = 1/\sqrt{3}; \quad \alpha = 54,7^\circ.$$

Следовательно, ускорение шарика будет направлено горизонтально в тех точках траектории, где угол отклонения нити от вертикали равен $\alpha = 54,7^\circ$.

• Ответ: $\alpha = 54,7^\circ$.

4.36. На тонкой нерастяжимой нити подвешен шарик. Нить с шариком отклоняют до горизонтального положения и отпускают. В каких точках траектории ускорение шарика направлено вертикально?

4.37. Шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайних и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол отклонения нити от вертикали в крайних положениях шарика.

4.38. Груз массой m , подвешенный на невесомой нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Найти максимальную разность сил натяжений нити.

• Решение. Начало решения данной задачи совпадает с решением задачи №4.23, если силу реакции поверхности трека \vec{N} заменить силой натяжения нити \vec{T} .

В задаче №4.31 было показано, что сила натяжения нити максимальна при прохождении грузом положения равновесия, а минимальна в крайних точках. Следовательно, максимальная разность сил натяжений нити

$$\Delta T_{\max} = T_1 - T_2,$$

где T_1 , T_2 – силы натяжения нити при прохождении грузом положения равновесия и верхней точки траектории соответственно (рис. 4.23).

Поскольку сила \vec{T} работы не совершает, то механическая энергия системы меняется не будет. Если ноль отсчета потенциальной энергии выбрать на уровне положения равновесия груза, то в нижней точке траектории энергия груза равна

$$E_1 = \frac{m v_1^2}{2},$$

а в верхней

$$E_2 = m g 2 l + \frac{m v_2^2}{2},$$

где v_1 , v_2 – скорость груза в нижней и верхней точках траектории соответственно. На основании закона сохранения механической энергии

$$E_1 = E_2, \quad \text{или} \quad \frac{m v_1^2}{2} = 2 m g l + \frac{m v_2^2}{2}. \quad (1)$$

Запишем уравнение движения груза в проекции на ось, направленную по нормали к траектории, в нижней и верхней ее точках:

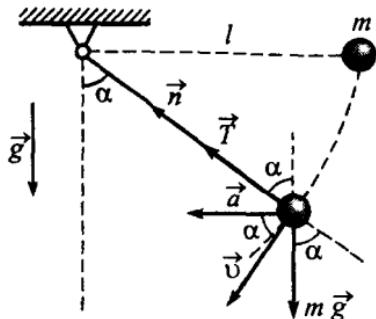


Рис. 4.22

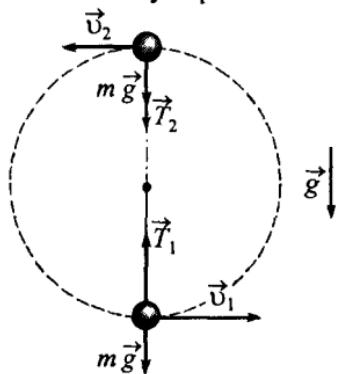


Рис. 4.23

$$\frac{m v_1^2}{l} = T_1 - m g, \quad \frac{m v_2^2}{l} = T_2 + m g. \quad (2)$$

Вычитая из первого уравнения (2) второе, получим

$$\frac{m v_1^2}{l} - \frac{m v_2^2}{l} = T_1 - T_2 - 2 m g. \quad (3)$$

Из (3) с учетом закона сохранения энергии (1) находим

$$\Delta T_{\max} = \frac{m v_1^2}{l} - \frac{m v_2^2}{l} + 2 m g = 6 m g.$$

• Ответ: $\Delta T_{\max} = 6 m g$.

4.39. Груз массой m вращается на легкой нерастяжимой нити сначала в горизонтальной, а затем в вертикальной плоскостях. Определить отношение максимальных линейных скоростей вращения груза, если прочность нити $T > m g$.

4.40. Шарик висит на легкой нерастяжимой нити длиной l . Какую минимальную скорость надо сообщить шарику в горизонтальном направлении, чтобы он совершил полный оборот вокруг точки подвеса?

4.41. Пуля массой $m = 5$ г попадает в шар массой $M = 0,5$ кг, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, и застревает в нем. Скорость пули до удара направлена горизонтально и равна $v = 500$ м/с. При какой наибольшей длине нити шар совершил полный оборот по окружности?

Движение системы взаимодействующих частиц

4.42. Два маленьких шарика массами m_1 и m_2 соединены легкой нерастяжимой нитью длиной l и находятся на гладком горизонтальном столе. Шарику массой m_2 сообщают горизонтальную скорость \vec{v} , направленную перпендикулярно нити. Найти силу натяжения нити в процессе движения.

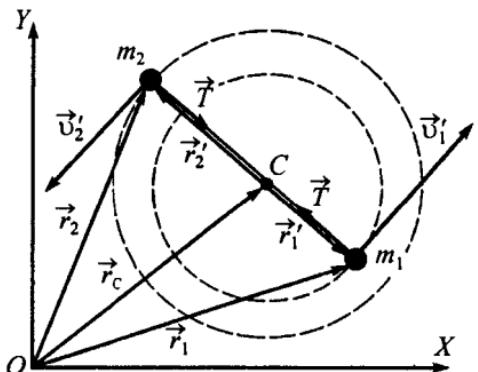


Рис. 4.24

• Решение. Введем неподвижную систему отсчета, связанную со столом (рис. 4.24).

Движение каждого шарика будем рассматривать как наложение двух движений – поступательного движения вместе с центром масс C и вращения вокруг центра масс.

Абсолютная скорость первого шарика \vec{v}_1 равна сумме относительной скорости \vec{v}'_1 (в системе центра масс) и переносной скорости \vec{v}_c – скорости центра масс:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_c. \quad (1)$$

Аналогично, для второго шарика:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{v}_c \quad (2)$$

При движении вокруг центра масс шарики приобретут нормальные ускорения

$$a'_1 = \frac{v'^2_1}{l_1}, \quad a'_2 = \frac{v'^2_2}{l_2},$$

где l_1, l_2 – радиусы окружностей, описываемых вокруг центра масс шариками массами m_1 и m_2 соответственно.

Уравнения движения каждого из шариков в проекции на соответствующие нормали к траекториям примут вид

$$\frac{m_1 \vec{v}_1^2}{l_1} = T, \quad \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{l_2} = T. \quad (3)$$

Представим радиус-векторы \vec{r}_1' и \vec{r}_2' шариков через радиус-вектор \vec{r}_c' центра масс и радиус-векторы \vec{r}_1 , \vec{r}_2 относительно системы центра масс:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 + \vec{r}_c, \quad \vec{r}_2' = \vec{r}_2 + \vec{r}_c,$$

где

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Следовательно,

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad \vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (4)$$

Из (4), в частности, следует, что векторы \vec{r}_1' и \vec{r}_2' направлены вдоль прямой, соединяющей шарики, в противоположные стороны. Модули векторов

$$|\vec{r}_1'| = l_1, \quad |\vec{r}_2'| = l_2. \quad (5)$$

Поскольку $l = l_1 + l_2$, то, разделив соотношения (4) одно на другое с учетом (5)

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

получим

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \quad l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

Так как на систему в плоскости XOY никакие внешние силы не действуют (трения нет), то система замкнута. Как известно, центр масс замкнутой системы движется с постоянной скоростью, т.е. в любой момент времени $\vec{v}_c = \vec{v}_{0c} = \text{const}$.

Запишем выражение для скорости центра масс двух частиц

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

с учетом, что в начальный момент времени $\vec{v}_{01} = 0$, $\vec{v}_{02} = \vec{v}$:

$$\vec{v}_c = \vec{v}_{0c} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}. \quad (7)$$

Из выражения (7) следует, что скорость центра масс системы направлена так же, как начальная скорость \vec{v} шарика массой m_2 , т.е. перпендикулярно нити, и неизменна по величине.

Относительно центра масс начальная скорость шарика массой m_2 равна (см. (2))

$$\vec{v}'_{02} = \vec{v}_{02} - \vec{v}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \quad (8)$$

и также направлена перпендикулярно нити.

Выразим скорость центра масс \vec{v}'_c системы через скорости шариков \vec{v}'_1 и \vec{v}'_2 относительно центра масс:

$$\vec{v}'_c = \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку в системе центра масс центр масс покоятся ($\vec{v}'_c = 0$), то

$$m_1 \vec{v}'_1 = -m_2 \vec{v}'_2. \quad (9)$$

Это означает, что скорости шариков относительно центра масс направлены в каждый момент времени в противоположные стороны. Как следует из выражений (8) – (9), в начальный момент времени скорости \vec{v}'_{01} и \vec{v}'_{02} будут направлены перпендикулярно нити.

Так как на каждый шарик действуют только силы натяжения нити, а направления этих сил перпендикулярны начальным скоростям \vec{v}'_{01} и \vec{v}'_{02} шариков, то в системе центра масс

эти силы работы не совершают и, следовательно, не могут изменить кинетическую энергию шариков. Следовательно, величина скорости шарика массой m_1 относительно центра масс не изменится. Так как в начальный момент $\vec{v}_{01} = 0$, то и в любой другой момент времени (см. (1)),

$$|\vec{v}_1'| = |\vec{v}_c| = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v = \text{const.} \quad (10)$$

Аналогично для второго шарика:

$$|\vec{v}_2'| = |\vec{v} - \vec{v}_c| = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v = \text{const.} \quad (11)$$

Подставив первое из выражений (6) и (10) в первое из уравнений (3) (или второе из выражений (6) и (10) во второе уравнение (3)), найдем силу натяжения нити:

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v^2}{l}.$$

Величину

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

называют приведенной массой системы двух материальных точек. Следовательно,

$$T = \mu \frac{v^2}{l}.$$

- Ответ: $T = \frac{\mu v^2}{l}$, где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

4.43. При каком отношении масс два тела, связанные нерастяжимой легкой нитью, могут вращаться с одинаковыми угловыми скоростями на гладкой горизонтальной поверхности, если ось вращения делит нить в отношении 1:5?

4.44. Два маленьких шарика массами m и M , соединенные легким стержнем длиной l , находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Шарику массой M сообщают горизонтальную скорость \vec{v} , направленную под углом α к стержню. Пренебрегая трением, определить угловую скорость вращения системы относительно центра масс.

4.45. Две звезды массами m_1 и m_2 образуют двойную систему с неизменным расстоянием между звездами R . Каков период обращения звезд вокруг общего центра масс?

4.46. Три звезды массой m каждая сохраняют при своем движении конфигурацию равностороннего треугольника со стороной l . С какой угловой скоростью может происходить вращение этой системы?

§5. Закон всемирного тяготения

Гравитационное взаимодействие является одним из четырех видов фундаментальных взаимодействий и играет чрезвычайно важную роль в природе. Это взаимодействие присуще всем телам, независимо от того, являются они электрически заряженными или нейтральными, и определяется только массами тел. Гравитационное взаимодействие заключается в том, что все тела притягиваются друг к другу, причем сила этого взаимодействия пропорциональна произведению масс тел.

Для двух материальных точек массами m_1 и m_2 сила гравитационного взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и прямо пропорциональна произведению их масс:

$$F = |\vec{F}_{1-2}| = |\vec{F}_{2-1}| = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (5.1)$$

где $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$ – гравитационная постоянная. Формула (5.1) выражает закон *всемирного тяготения Ньютона*.

Чрезвычайно малая величина γ показывает, что сила гравитационного взаимодействия может быть значительной только в случае очень больших масс. По этой причине гравитационное взаимодействие не играет существенной роли в механике атомов и молекул. С ростом массы роль гравитационного взаимодействия возрастает, и движение таких тел, как Луна, планеты, а также спутники, полностью определяется гравитационными силами.

Потенциальная энергия взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2 (см. §3 формулу (3.66))

$$U_{1-2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (5.2)$$

причем при выводе этой формулы нулевой уровень U_{1-2} выбран при $r \rightarrow \infty$.

Формулы (5.1) и (5.2) определяют силу и потенциальную энергию взаимодействия двух материальных точек. Но эти же формулы справедливы для сил тяготения между любыми двумя телами, если только расстояние между ними велико по сравнению с размерами тел. Для тел сферической формы формулы (5.1) – (5.2) справедливы при любых расстояниях между телами (в этом случае r обозначает расстояние между центрами сфер) при условии, что $r \geq R_1 + R_2$, где R_1 и R_2 – радиусы тел сферической формы. При этом одно из тел, например массой m_2 , может быть материальной точкой ($R_2 = 0$).

Можно доказать, что сила гравитационного взаимодействия между полой сферической оболочкой и материальной точкой, находящейся в произвольном месте внутри оболочки, тождественно равна нулю. Из сказанного следует, что на частицу массой m_2 , которая находится внутри однородного шара массой m_1 и радиусом R_1 , действует лишь часть m'_1 массы шара, заключенная внутри сферы радиусом $r \leq R_1$, на поверхности которой находится частица массой m_2 , т.е. сила взаимодействия равна

$$F = |\vec{F}_{1-2}| = \gamma \frac{m'_1 m_2}{r^2} \quad (5.3)$$

и направлена к центру шара (рис. 5.1).

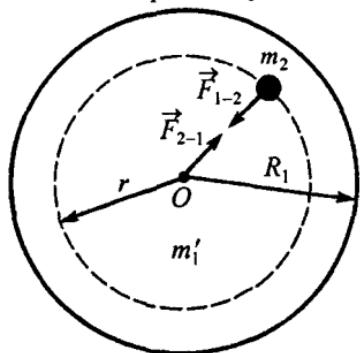


Рис. 5.1

С учетом, что

$$m_1' = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{m_1}{\frac{4}{3} \pi R_1^3} \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (5.4)$$

(где ρ – плотность шара), выражение (5.3) для силы взаимодействия сплошного шара массой m_1 и радиусом R_1 и материальной точки массой m_2 , находящейся внутри шара на расстоянии $r \leq R_1$ от центра шара, примет вид

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R_1^3} r. \quad (5.5)$$

Из (5.5) видно, что сила взаимодействия равна нулю, когда частица массой m_2 находится в центре шара ($r = 0$), и растет с увеличением r по линейному закону при смещении частицы массой m_2 к поверхности шара, достигая на поверхности значения

$$F(R_1) = \gamma \frac{m_1 m_2}{R_1^2},$$

соответствующего силе взаимодействия тела сферической формы с материальной точкой (5.1).

Используя формулы (5.2) и (5.5), можно получить выражение для потенциальной энергии взаимодействия между сплошным шаром и материальной точкой, находящейся внутри шара, которая по определению равна работе силы тяготения при перемещении частицы массой m_2 из исходного положения на нулевой уровень (при условии, что шар неподвижен), соответствующий удалению тел друг от друга на бесконечно большое расстояние.

Так как сила взаимодействия между сплошным шаром и материальной точкой при $r \leq R_1$ линейно зависит от r (см. формулу (5.5)), а при $r > R_1$ пропорциональна $1/r^2$ (см. формулу (5.1)), то

$$U_{1-2} = A_1 + A_2, \quad (5.6)$$

где A_1 – работа силы (5.5) при перемещении частицы массой m_2 из точки, находящейся внутри шара, на его поверхность; A_2 – работа силы (5.1) при перемещении этой частицы с поверхности шара на бесконечность.

Так как в интервале $[r, R_1]$ сила зависит от расстояния r по линейному закону, то (см. §3, формулы (3.29) – (3.30))

$$A_1 = - \langle F \rangle (R_1 - r),$$

где среднее значение силы

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2} \left\{ F(r) + F(R_1) \right\} = \frac{1}{2} \gamma \left\{ \frac{m_1 m_2}{R_1^3} r + \frac{m_1 m_2}{R_1^2} \right\}, \quad (5.7)$$

а знак «минус» поставлен потому, что направления силы и перемещения противоположны.

Работа A_2 есть не иное как потенциальная энергия частицы массой m_2 , находящейся на поверхности шара. В соответствии с (5.2)

$$A_2 = - \gamma \frac{m_1 m_2}{R_1}.$$

Тогда потенциальная энергия взаимодействия между шаром и материальной точкой, находящейся внутри шара,

$$U_{1-2} = -\frac{3}{2} \gamma \frac{m_1 m_2}{R_1} + \gamma \frac{m_1 m_2}{2 R_1^3} r^2. \quad (5.8)$$

Силу, с которой земной шар массой M_3 и радиусом R_3 действует на небольшое (по сравнению с размерами Земли) тело массой m , называют обычно силой тяжести и записывают ее в виде

$$\vec{F} = m \vec{g}, \quad (5.9)$$

где \vec{g} – ускорение свободного падения, направленное вертикально вниз (к центру Земли). Если считать тело материальной точкой, то, сравнивая (5.9) с (5.1) и (5.5), можно получить, что ускорение свободного падения

$$g = \gamma \frac{M_3}{r^2}, \quad (5.10)$$

если тело находится вне Земли ($r > R_3$), и

$$g = \gamma \frac{M_3}{R_3^3} r, \quad (5.11)$$

если тело находится внутри Земли ($r < R_3$). На поверхности Земли ($r = R_3$) ускорение свободного падения (из формулы (5.10) или (5.11))

$$g(r = R_3) = g_0 = \gamma \frac{M_3}{R_3^2}. \quad (5.12)$$

Подставив в (5.12) значения гравитационной постоянной γ , массы Земли $M_3 = 5,98 \cdot 10^{24}$ кг и ее радиуса $R_3 = 6,37 \cdot 10^6$ м, получим для g_0 значение $9,81 \text{ м/с}^2$. На рис. 5.2 представлена зависимость ускорения свободного падения тела g от расстояния до центра Земли r : в центре Земли $g = 0$, далее оно возрастает с ростом r по линейному закону, достигая значения g_0 на поверхности Земли, а затем убывает обратно пропорционально r^2 при удалении тела от поверхности Земли. Используя (5.12), выражения для ускорения свободного падения (5.10) и (5.11) можно переписать в виде

$$g = g_0 \frac{R_3^2}{r^2} = g_0 \frac{R_3^2}{(R_3 + h)^2} = \frac{g_0}{(1 + h/R_3)^2} \quad (5.13)$$

вне Земли ($r > R_3$), где h – высота тела над поверхностью Земли, и

$$g = g_0 \frac{r}{R_3} = g_0 \frac{R_3 - h}{R_3} = g_0 (1 - h/R_3) \quad (5.14)$$

внутри Земли ($r < R_3$), где h – глубина тела под поверхностью Земли. Если тело находится вблизи поверхности Земли: $h/R_3 \ll 1$ и $g \approx g_0$.

Используя (5.2) и (5.8), потенциальную энергию тела массой m , находящегося в поле тяготения Земли, можно представить в виде

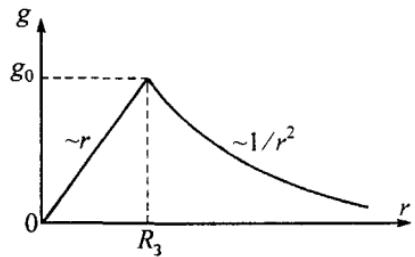


Рис. 5.2

$$U = -\gamma \frac{m M_3}{r} = -m g r = -m g_0 \frac{R_3^2}{r} = -m g_0 \frac{R_3}{1 + h/R_3} \quad (5.15)$$

при $r > R_3$ (вне Земли) и

$$\begin{aligned} U &= -\frac{3}{2} \gamma \frac{m M_3}{R_3} + \gamma \frac{m M_3}{2 R_3^3} r^2 = -\frac{3}{2} m g_0 R_3 + \frac{1}{2} m g_0 \frac{r^2}{R_3} = \\ &= -\frac{3}{2} m g_0 R_3 + \frac{1}{2} m g_0 R_3 (1 - h/R_3)^2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

при $r < R_3$ (внутри Земли).

Используя (5.15), найдем работу силы тяжести при перемещении тела массой m из точки 1, лежащей на высоте h над поверхностью Земли, в точку 2, расположенную на поверхности Земли:

$$A_{1-2} = U_1 - U_2 = -\frac{m g_0 R_3}{1 + h/R_3} + m g_0 R_3 = \frac{m g_0 h}{1 + h/R_3}. \quad (5.17)$$

По определению потенциальной энергии, работа A_{1-2} есть потенциальная энергия U' тела массой m , расположенного на высоте h , если за нулевой уровень принять поверхность Земли, т.е.

$$U' = A_{1-2} = \frac{m g_0 h}{1 + h/R_3}. \quad (5.18)$$

Если высота $h \ll R_3$, то из (5.18) следует, что

$$U' \approx m g_0 h, \quad (5.19)$$

что совпадает со стандартной формулой для потенциальной энергии тела, расположенного на высоте h вблизи поверхности Земли. Таким же образом из выражения (5.16) можно получить потенциальную энергию тела, находящегося на небольшой глубине $h < R_3$ под поверхностью Земли:

$$U' \approx -m g_0 h. \quad (5.20)$$

Рассмотрим теперь движение двух тел, притягивающихся друг к другу по закону всемирного тяготения. Предположим, что масса M одного из тел значительно больше массы m другого тела ($M \gg m$). Если расстояние между телами велико по сравнению с размерами меньшего тела m , а большее тело M имеет сферическую форму, то мы имеем дело с задачей о движении материальной точки m в гравитационном поле, создаваемом телом M , которое при $M \gg m$ можно считать неподвижным (см. §4)

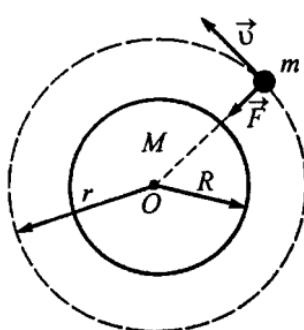


Рис. 5.3

Простейшим движением частицы m в этом случае является равномерное движение по окружности, центр которой совпадает с геометрическим центром тела M (рис. 5.3). На тело m действует только сила тяготения (5.1), направленная к центру окружности. Записав уравнение второго закона Ньютона для тела массой m в проекции на направление к центру окружности и сокращая на m , получим

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \gamma \frac{M}{r^2}, \quad (5.21)$$

где v – скорость тела m ; r – радиус окружности. Следовательно, скорость тела m

$$v = \sqrt{\gamma M/r}. \quad (5.22)$$

Полученная формула для скорости v позволяет установить соотношение между радиусом орбиты r и периодом T обращения по ней. Поскольку тело m движется равномерно, время одного оборота

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (5.23)$$

Используя (5.22), получаем

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} r^3. \quad (5.24)$$

Мы видим, что квадраты периодов обращения пропорциональны кубам радиусов орбит. Это соотношение называется *третьим законом Кеплера*, по имени немецкого астронома И. Кеплера, наблюдавшего движения планет и открывшего эмпирически в начале XVII столетия основные законы движения двух тел под влиянием гравитационного взаимодействия. Эти законы сыграли важную роль в открытии Ньютона закона всемирного тяготения.

Полная энергия частицы массой m (тело M считается неподвижным)

$$E = \frac{m v^2}{2} - \gamma \frac{m M}{r} \quad (5.25)$$

не меняется с течением времени ($E = \text{const}$). Используя соотношение (5.21), получим, что кинетическая энергия

$$T = \frac{m v^2}{2} = \gamma \frac{m M}{2r} = -\frac{1}{2} U,$$

а полная энергия

$$E = -T = -\frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} U = -\gamma \frac{m M}{2r}. \quad (5.26)$$

Мы видим, что при движении по окружности полная энергия частицы отрицательна (рис. 5.4).

С помощью полученных выше формул можно, в частности, определить скорость спутника Земли массой m , движущегося по круговой орбите на высоте h от поверхности Земли. Подставив ускорение свободного падения на поверхности Земли g_0 в формулу (5.22) с учетом, что $r = R_3 + h$, получим

$$v(h) = \sqrt{g_0 R_3 / (1 + h/R_3)}. \quad (5.27)$$

Из (5.27) следует, что скорость спутника возрастает при переходе его на более низкую орбиту. На высотах $h \ll R_3$ скорость спутника

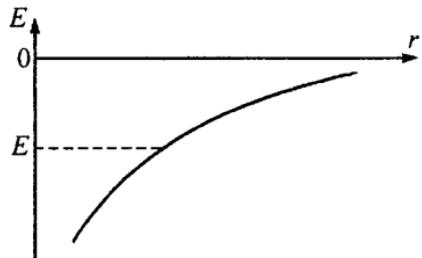


Рис. 5.4

$$v(h \rightarrow 0) = \sqrt{g_0 R_3} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ м/с.} \quad (5.28)$$

Эту скорость называют *первой космической скоростью* v_1 .

Второй космической скоростью v_2 называется такая минимальная начальная скорость ракеты на поверхности Земли, при которой ракета, запущенная вертикально вверх, не возвращается обратно на Землю из-за гравитационного притяжения со стороны Земли (при этом предполагается, что влияние других небесных тел на ракету пренебрежимо мало). Дело в том, что скорость ракеты по мере ее удаления от Земли уменьшается за счет земного притяжения и, если ракета останавливается на любом конечном расстоянии от Земли, она обязательно к ней притягивается и вернется на Землю. Поэтому ракету надо запустить с такой скоростью, чтобы она остановилась там, где земное притяжение уже не действует, т.е. при $r \rightarrow \infty$ ($F = \gamma m M_3 / r^2 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$). Используя закон сохранения энергии (5.25) и приравнивая энергию ракеты на поверхности Земли (при этом $v = v_2$ и $r = R_3$) энергию при $r \rightarrow \infty$ (при этом $v = 0$ и $U = -\gamma m M_3 / r \rightarrow 0$), получаем

$$E = \frac{m v_2^2}{2} - \gamma \frac{m M_3}{R_3} = \frac{m v_2^2}{2} - m g_0 R_3 = 0. \quad (5.29)$$

Следовательно,

$$v_2 = \sqrt{2 g_0 R_3} = \sqrt{2} v_1 = 11,2 \cdot 10^3 \text{ м/с.} \quad (5.30)$$

Рекомендации по решению задач

Задачи этого параграфа можно разделить на две группы.

Первая группа включает задачи на непосредственное применение закона всемирного тяготения и вытекающих из него следствий.

При решении таких задач следует помнить, что:

1. Формулы для силы гравитационного притяжения (5.1) и потенциальной энергии взаимодействия (5.2) справедливы только для двух материальных точек или тел, имеющих сферическую форму, при условии, что эти тела не пересекаются.

2. Сила и потенциальная энергия взаимодействия между материальной точкой и телом сферической формы зависит от расположения частицы относительно тела: если частица находится вне тела, сила и потенциальная энергия взаимодействия определяются формулами (5.1) и (5.2); если внутри тела – формулами (5.5) и (5.8); если на поверхности тела – формулами (5.1) или (5.5) и (5.2) или (5.8) при $r = R_1$. Если в качестве тела рассматривается Земля, то вместо формул (5.2) и (5.8) удобно использовать выражения (5.15) – (5.16).

3. Ускорение свободного падения, сообщаемое земным шаром телу, изменяется в зависимости от расположения тела относительно центра Земли: вне Земли величина \vec{g} определяется формулой (5.10) или (5.13); внутри Земли – (5.11) или (5.14); на ее поверхности – (5.12). Если тело находится на высоте (или на глубине) $h \ll R_3$ от поверхности Земли, то ускорение свободного падения можно считать постоянным и равным ускорению на поверхности g_0 .

4. Формулы (5.10) – (5.18) справедливы не только для Земли, но и для любого другого тела сферической формы, если в них заменить массу Земли и ее радиус соответствующими характеристиками другого тела.

Вторая группа включает задачи на движение тел, притягивающихся друг к другу по закону всемирного тяготения.

В рамках школьной программы изучается простейший случай такого движения – равномерное движение одного тела по круговой орбите, центр которой совпадает с центром инерции другого тела, предполагаемого неподвижным. При этом либо тело можно считать материальными точками, либо они имеют сферическую форму. При таком движении на движущееся тело действует только сила гравитационного притяжения со стороны другого тела, направленная к центру орбиты и сообщающая телу нормальное ускорение. Уравнение движения такого тела в проекции на нормаль к траектории (5.21) позволяет найти первую космическую скорость (5.22) и установить связь между радиусом орбиты и периодом обращения по ней (5.24).

Полная энергия тела, движущегося под действием силы тяготения по круговой орбите, складывается из кинетической энергии тела и потенциальной энергии взаимодействия (5.25) – (5.26). При переводе такого тела с одной орбиты на другую совершается работа, равная разности механических энергий при движении по этим орбитам. Для того чтобы вывести одно тело из поля гравитационного притяжения другого, телу нужно сообщить кинетическую энергию, соответствующую второй космической скорости.

Задачи

5.1. Три шара массами $m = 10 \text{ кг}$, $2m$ и $3m$ расположены на окружности радиусом $R = 10 \text{ м}$ так, как показано на рис. 5.5. Найти величину силы, действующей на шар массой m со стороны двух других.

• *Решение.* Результирующая сила \vec{F} , действующая на шар массой m , равна векторной сумме сил взаимодействия \vec{F}_1 и \vec{F}_2 этого шара с шарами $2m$ и $3m$ соответственно:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Поскольку силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 по величине равны

$$F_1 = \gamma \frac{2mm}{r_1^2}, \quad F_2 = \gamma \frac{3mm}{r_2^2}$$

(где $r_1 = r_2 = \sqrt{2}R$ – расстояния между центрами шаров) и направлены под прямым углом друг к другу, то

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \gamma \frac{\sqrt{13} m^2}{2 R^2} \approx 12 \cdot 10^{-11} \text{ Н.}$$

• *Ответ:* $F = \gamma \frac{\sqrt{13} m^2}{2 R^2} \approx 12 \cdot 10^{-11} \text{ Н.}$

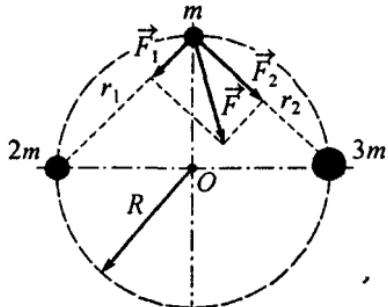


Рис. 5.5

5.2. Два одинаковых шара притягиваются друг к другу с некоторой силой. Во сколько раз нужно увеличить расстояние между центрами шаров, чтобы сила их притяжения уменьшилась в четыре раза?

5.3. Три одинаковых шара расположены так, как показано на рис. 5.6, а). Во сколько раз изменится результирующая сила гравитационного взаимодействия шара 1 с шарами 2 и 3, если шары расположить так, как показано на рис. 5.6, б)?

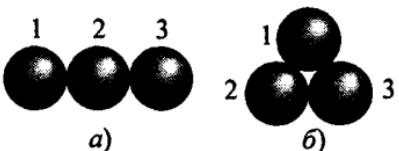


Рис. 5.6

5.4. Кольцо радиусом $R = 20 \text{ см}$ и массой $M = 100 \text{ г}$ изготовлено из тонкой проволоки. С какой силой это кольцо притягивает частицу массой $m = 2 \text{ г}$, находящуюся на оси кольца на расстоянии $d = 10 \text{ см}$ от его центра?

5.5. Однородный шар радиусом R имеет сферическую полость, поверхность которой касается поверхности шара и проходит через его центр. Масса сплошного шара без полости равнялась M . С какой силой шар будет притягивать частицу массой m , находящуюся на расстоянии $d \gg R$ от центра шара на прямой, соединяющей центры шара и полости, со стороны полости?

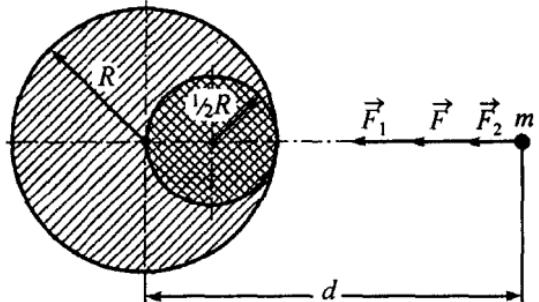


Рис. 5.7

• *Решение.* Рассмотрим сплошной шар радиусом R и массой M (рис. 5.7). Сила гравитационного взаимодействия такого шара с частицей массой m , находящейся на расстоянии d от центра шара, равна

$$F_1 = \gamma \frac{m M}{d^2}$$

и направлена вдоль прямой, соединяющей частицу с центром шара.

Представим сплошной шар в виде двух тел: шара радиусом $1/2 R$, расположенного на месте полости (на рис. 5.7 он заштрихован двойной штриховкой), и оставшейся части, т.е. шара с полостью (на рисунке заштрихован одинарной штриховкой). Тогда силу F_1 можно представить в виде векторной суммы сил

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F},$$

где \vec{F}_2 , \vec{F} – силы взаимодействия с частицей шара радиусом $1/2 R$ и шара с полостью соответственно.

Поскольку центры шара и полости лежат на прямой, проходящей через точку расположения частицы, то

$$F_1 = F_2 + F. \quad (1)$$

Согласно закону всемирного тяготения

$$F_1 = \gamma \frac{m M}{d^2}, \quad F_2 = \gamma \frac{m M'}{(d - 1/2 R)^2} \approx \gamma \frac{m M'}{d^2}, \quad (2)$$

где M' – масса шара радиусом $1/2 R$, расположенного на месте полости,

$$M' = \rho \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{M}{4/3 \pi R^3} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{M}{8}. \quad (3)$$

Подставив выражения (2) с учетом (3) в (1), найдем силу притяжения, действующую между шаром с полостью и частицей массой m :

$$F = F_1 - F_2 = \gamma \frac{m}{d^2} (M - 1/8 M) = \gamma \frac{7 m M}{8 d^2}.$$

• Ответ: $F = \gamma \frac{7 m M}{8 d^2}$.

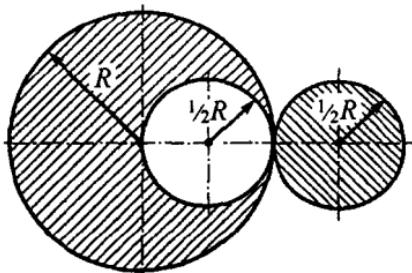


Рис. 5.8

5.6. Однородный шар радиусом R имеет сферическую полость, поверхность которой касается поверхности шара и проходит через его центр. Масса сплошного шара без полости равнялась M . С какой силой этот шар будет притягивать шар радиусом $1/2 R$, изготовленный из того же материала, что и большой шар, если шары расположить так, как показано на рис. 5.8?

5.7. Внутри однородного шара плотностью ρ имеется сферическая полость, центр которой находится на расстоянии r от центра шара. С какой силой этот шар будет притягивать частицу массой m , помещенную в полость?

- *Решение.* Пусть частица находится в точке A на расстоянии a от центра O шара и на расстоянии b от центра O' полости (рис. 5.9).

Чтобы найти силу гравитационного взаимодействия шара с полостью и частицы, поступим таким же образом, как при решении задачи №5.5.

Рассмотрим однородный сплошной шар радиусом $R_1 > r$ и массой M_1 , изготовленный из материала плотностью ρ . Сила гравитационного взаимодействия такого шара с частицей массой m , находящейся внутри шара на расстоянии a от его центра, равна (см. формулу (5.5))

$$F_1 = \gamma \frac{m M_1}{R_1^3} a = \gamma \frac{m \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{R_1^3} a = \frac{4}{3} \gamma m \rho \pi a \quad (1)$$

и направлена вдоль прямой AO , соединяющей частицу с центром шара.

Представим сплошной шар в виде двух тел: шара радиусом R_2 и массой M_2 , расположенного на месте полости (на рис. 5.9 он не заштрихован), и оставшейся части, т.е. шара с полостью (на рисунке он заштрихован). Тогда силу \vec{F}_1 можно представить в виде векторной суммы сил

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F},$$

где \vec{F}_2 , \vec{F} – силы взаимодействия с частицей шара радиусом R_2 и шара с полостью соответственно, причем сила \vec{F}_2 равна

$$F_2 = \gamma \frac{m M_2}{R_2^3} b = \gamma \frac{m \rho \frac{4}{3} \pi R_2^3}{R_2^3} b = \frac{4}{3} \gamma m \rho \pi b \quad (2)$$

и направлена вдоль прямой AO' , соединяющей частицу с центром полости.

Поскольку силы \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F} образуют замкнутый треугольник (рис. 5.10), то сила гравитационного взаимодействия шара с полостью и частицей

$$\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2; \quad F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos \alpha},$$

или с учетом (1) – (2)

$$F = \frac{4}{3} \gamma m \rho \pi \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \alpha}, \quad (3)$$

где α – угол между векторами \vec{F}_1 и \vec{F}_2 .

Применив теорему косинусов к треугольнику $\triangle OAO'$ (рис. 5.10), получим

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \alpha}. \quad (4)$$

Из (3) с учетом (4) находим

$$F = \frac{4}{3} \gamma m \rho \pi r.$$

- *Ответ:* $F = \frac{4}{3} \gamma m \rho \pi r$.

5.8. С какой силой притягивается к Земле тело массой m , находящееся внутри Земли на расстоянии r от ее центра? Радиус Земли R_3 .

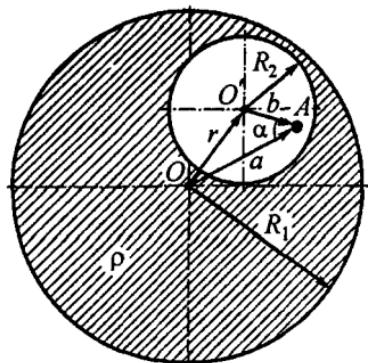


Рис. 5.9

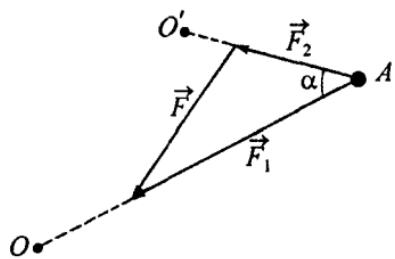


Рис. 5.10

5.9. Какую работу нужно совершить, чтобы переместить $m = 1$ кг вещества из центра Земли на ее поверхность? Радиус Земли $R_3 = 6400$ км. Плотность Земли считать постоянной.

5.10. Считая Землю однородным шаром, определить высоту над поверхностью Земли, на которой ускорение свободного падения составляет $\alpha = 81\%$ ускорения свободного падения у ее поверхности. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км. Влияние Солнца, Луны и других небесных тел не учитывать.

- *Решение.* У поверхности Земли ускорение свободного падения (см. формулу (5.12)) равно

$$g_0 = \gamma \frac{M_3}{R_3^2},$$

а на высоте h над ее поверхностью (см. формулу (5.13)) –

$$g = g_0 \frac{R_3^2}{(R_3 + h)^2}.$$

Поскольку $g = \alpha g_0$, то

$$\alpha g_0 = g_0 \frac{R_3^2}{(R_3 + h)^2}; \quad h = R_3 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1 \right\} \approx 711 \text{ км.}$$

- *Ответ:* $h = R_3 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1 \right\} \approx 711 \text{ км.}$

5.11. Считая Землю однородным шаром, найти ускорение свободного падения на высоте над поверхностью Земли, равной радиусу Земли.

5.12. Во сколько раз ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли больше, чем вблизи поверхности Луны? Масса Земли в 81 раз больше массы Луны, а радиус Земли в 3,75 раза больше радиуса Луны.

5.13. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Средняя плотность вещества планеты $\rho = 3000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Определить период обращения планеты вокруг собственной оси.

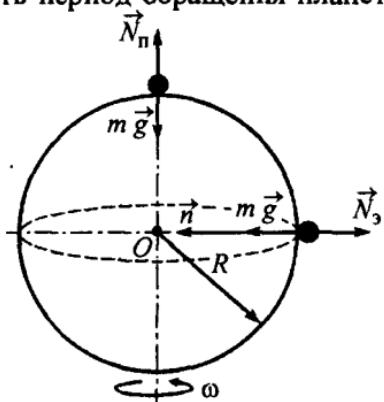


Рис. 5.11

- *Решение.* На полюсе планеты на тело действуют две силы, уравновешивающие друг друга: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N}_p (рис. 5.11). При этом вес тела, равный по величине силе реакции, будет равен силе тяжести:

$$P_p = N_p = \gamma \frac{m M}{R^2},$$

где m – масса тела; M и R – масса и радиус планеты.

На экваторе результирующая сила тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры \vec{N}_e сообщает телу нормальное ускорение $a_n = v^2/R$, где v – линейная скорость тела за счет вращения планеты вокруг собственной оси.

Записав уравнение движения тела в проекции на ось, направленную по нормали \vec{n} к траектории,

$$\frac{m v^2}{R} = m g - N_e,$$

с учетом выражения для ускорения свободного падения

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}$$

получим

$$P_3 = N_3 = \gamma \frac{m M}{R^2} - \frac{m v^2}{R}.$$

По условию задачи $P_{\text{п}} = 2 P_3$. Следовательно,

$$\gamma \frac{m M}{R^2} = 2 \gamma \frac{m M}{R^2} - 2 \frac{m v^2}{R}, \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\gamma \frac{M}{2 R}}.$$

Поскольку линейная скорость v связана с периодом обращения T планеты соотношением

$$v = \frac{2 \pi R}{T},$$

то

$$T = \sqrt{\frac{8 \pi^2 R^3}{\gamma M}}.$$

Выразив массу планеты в виде $M = \rho V = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$, получим

$$T = \sqrt{6 \pi / \gamma \rho} \approx 9,7 \cdot 10^3 \text{ с.}$$

• Ответ: $T = \sqrt{6 \pi / \gamma \rho} \approx 9,7 \cdot 10^3 \text{ с.}$

5.14. Какой продолжительности должны быть сутки на Земле, чтобы тела на экваторе были невесомы? Радиус Земли $R_3 = 6400 \text{ км}$.

5.15. На какой высоте h над поверхностью планеты вес тела на полюсе равен весу тела на экваторе вблизи поверхности? Планета имеет форму шара радиусом R и плотностью ρ . Период обращения вокруг собственной оси T .

5.16. Тело находится на поверхности Земли на широте $\varphi = 60^\circ$. Определить угол α , который составляет направление силы реакции \vec{N} , действующей на тело, с направлением радиус-вектора, проведенного из центра Земли в точку, где расположено тело (рис. 5.12, а). Радиус Земли $R_3 = 6400 \text{ км}$.

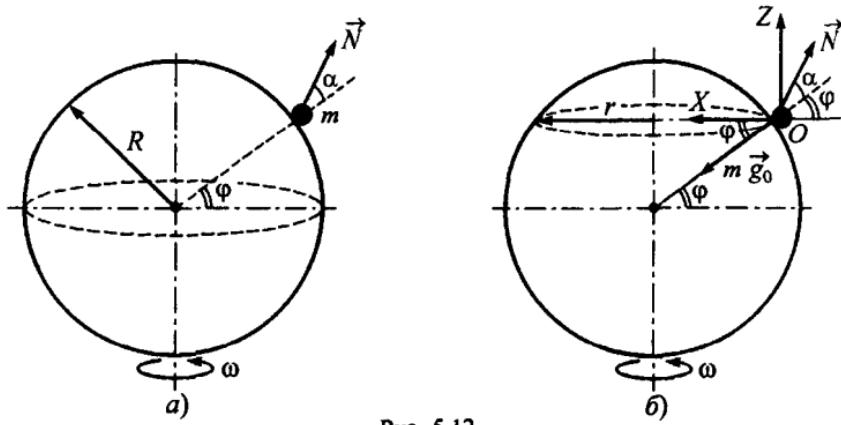


Рис. 5.12

• Решение. При вращении Земли на тело действуют сила тяжести $m \vec{g}_0$ и сила реакции \vec{N} (рис. 5.12, б), результирующая которых обеспечивает нормальное ускорение

$$a_n = \omega^2 r = \frac{4 \pi^2}{T_3^2} R_3 \cos \varphi,$$

где $r = R_3 \cos \varphi$ – радиус окружности, по которой вращается тело вместе с Землей; $T_3 = 1$ сутки = 86400 с – период обращения Земли вокруг собственной оси.

Запишем уравнение движения тела в проекциях на оси OX и OZ сопровождающей системы отсчета:

$$OX: m a_n = m \frac{4\pi^2}{T_3^2} R_3 \cos \varphi = m g_0 \cos \varphi - N_x, \quad (1)$$

$$OZ: 0 = -m g_0 \sin \varphi + N_z, \quad (2)$$

где N_x и N_z – проекции силы \vec{N} на соответствующие оси.

Выразив N_x и N_z из (1) – (2)

$$N_x = m g_0 \cos \varphi - m \frac{4\pi^2}{T_3^2} R_3 \cos \varphi, \quad N_z = m g_0 \sin \varphi,$$

получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) &= \frac{N_z}{N_x} = \frac{m g_0 \sin \varphi}{m g_0 \cos \varphi - m \frac{4\pi^2}{T_3^2} R_3 \cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 - \frac{4\pi^2}{g_0 T_3^2} R_3}; \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 - \frac{4\pi^2}{g_0 T_3^2} R_3} - \varphi \approx 0,086^\circ. \end{aligned}$$

- Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 - \frac{4\pi^2}{g_0 T_3^2} R_3} - \varphi \approx 0,086^\circ$.

5.17. Тело массой $m = 100$ кг находится на поверхности Земли на широте $\varphi = 60^\circ$. Определить вес тела? Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

5.18. Оценить относительную ошибку, допущенную при аналитическом определении веса тела на широте $\varphi = 60^\circ$ без учета суточного вращения Земли. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

5.19. Зная радиус орбиты Земли $R = 1,5 \cdot 10^8$ км, определить массу Солнца. Продолжительность земного года принять равной $T = 365$ суток.

• *Решение.* Если пренебречь силами притяжения, действующими на Землю со стороны небесных тел, то можно считать, что на Землю при ее движении действует сила гравитационного притяжения только со стороны Солнца. Поскольку сила притяжения направлена перпендикулярно траектории Земли, то она работы не совершает, следовательно, не изменяет кинетическую энергию и скорость движения Земли. Поэтому под действием силы гравитационного взаимодействия с Солнцем Земля равномерно движется по окружности радиусом R с нормальным ускорением

$$a_n = \frac{M_3 v^2}{R}.$$

Из уравнения движения Земли, записанного в сопровождающей системе отсчета в проекции на нормаль к траектории,

$$M_3 a_n = \frac{M_3 v^2}{R} = \gamma \frac{M_3 M_C}{R^2}$$

(где M_3, M_C – массы Земли и Солнца соответственно; $v = 2\pi R/T$ – линейная скорость Земли при движении по круговой орбите вокруг Солнца; T – период обращения Земли вокруг Солнца), получим

$$M_C = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma T^2} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг.}$$

- Ответ: $M_C = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma T^2} \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг.

5.20. Один из спутников Юпитера отстоит от центра Юпитера в среднем на расстояние $R = 1,9 \cdot 10^9$ м и имеет период обращения $T = 1,44 \cdot 10^6$ с. Определить массу Юпитера.

5.21. Венера находится от Солнца на расстоянии $R_1 = 1,08 \cdot 10^8$ км. Определить продолжительность венерианского года, учитывая, что Земля удалена от Солнца в на расстояние $R_2 = 1,5 \cdot 10^8$ км. Продолжительность земного года принять равной $T = 365$ суток.

5.22. Космический корабль, движущийся по круговой орбите вокруг Земли, перешел на новую орбиту, на которой скорость корабля уменьшилась в два раза. Во сколько раз при этом изменилась сила тяжести космонавта?

• *Решение.* Для движения по круговой орбите на высоте h над поверхностью Земли космический корабль должен иметь первую космическую скорость (см. формулу (5.27))

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{R_3 + h}}.$$

Следовательно, скорости космического корабля на орбитах высотой h_1 и h_2 различаются в

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{R_3 + h_2}{R_3 + h_1}} \quad (1)$$

раз.

С другой стороны, на высоте h над поверхностью Земли ускорение свободного падения равно (см. формулу (5.13))

$$g = g_0 \frac{R_3^2}{(R_3 + h)^2},$$

а сила тяжести космонавта массой m

$$m g = m g_0 \frac{R_3^2}{(R_3 + h)^2}.$$

Следовательно, на орбитах высотой h_1 и h_2 силы тяжести космонавта различаются в

$$\frac{m g_1}{m g_2} = \frac{(R_3 + h_2)^2}{(R_3 + h_1)^2} \quad (2)$$

раз.

Из (1) – (2) с учетом условия задачи ($v_1 = 2 v_2$) получим

$$\frac{m g_1}{m g_2} = \left\{ \frac{v_1}{v_2} \right\}^4 = 16.$$

• *Ответ:* уменьшилась в $\frac{m g_1}{m g_2} = \left\{ \frac{v_1}{v_2} \right\}^4 = 16$ раз.

5.23. Найти первую космическую скорость вблизи поверхности Луны. Радиус Луны $R_L = 1780$ км, ускорение свободного падения у ее поверхности в $n = 6$ раз меньше ускорения свободного падения у поверхности Земли.

5.24. Найти первую космическую скорость вблизи поверхности планеты радиусом $R = 2500$ км, средняя плотность которой $\rho = 4,5 \cdot 10^3$ кг/м³.

5.25. Искусственный спутник Земли, находящийся на круговой орбите, имеет скорость $v = 7,5$ км/с. На какой высоте над поверхностью Земли он движется? Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

5.26. Определить силу тяжести, действующую на космонавта массой $m = 75$ кг, находящегося на космическом корабле, движущемся по круговой орбите со скоростью $v = 1,56$ км/с на расстоянии $R = 2000$ км от центра Луны. Влияние Земли, Солнца и других планет не учитывать.

5.27. Какую минимальную работу должен совершить двигатель космического летательного аппарата массой $m = 2000$ кг, чтобы перевести его с орбиты высотой $h_1 = 2000$ км над поверхностью Земли на орбиту высотой $h_2 = 1000$ км? Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

• *Решение.* Работа по переводу спутника с одной орбиты на другую равна разности полных механических энергий при движении спутника по этим орбитам:

$$A = (T_2 + U_2) - (T_1 + U_1), \quad (1)$$

где T_1 , T_2 – кинетические, а U_1 , U_2 – потенциальные энергии спутника на начальной и конечной орбитах соответственно.

С учетом выражений для кинетической энергии и потенциальной энергии гравитационного взаимодействия (см. формулу (5.1))

$$T = \frac{m v^2}{2}, \quad U = -\gamma \frac{m M_3}{r}$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$A = \left\{ \frac{m v_2^2}{2} - \gamma \frac{m M_3}{r_2} \right\} - \left\{ \frac{m v_1^2}{2} - \gamma \frac{m M_3}{r_1} \right\}, \quad (2)$$

где $r_1 = R_3 + h_1$, $r_2 = R_3 + h_2$ – радиусы начальной и конечной орбит спутника соответственно; M_3 – масса Земли; v_1 , v_2 – скорости спутника на первой и второй круговых орбитах (см. формулу (5.22)):

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_3}{r_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{\gamma M_3}{r_2}}. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим

$$A = \left\{ \gamma \frac{m M_3}{2 r_2} - \gamma \frac{m M_3}{r_2} \right\} - \left\{ \gamma \frac{m M_3}{2 r_1} - \gamma \frac{m M_3}{r_1} \right\},$$

или

$$A = \gamma \frac{m M_3}{2} \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right\}.$$

Выразив массу Земли из условия (см. формулу (5.12))

$$g_0 = \gamma \frac{M_3}{R_3^2},$$

окончательно находим

$$A = \frac{g_0 m R_3^2}{2} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \frac{g_0 m R_3^2}{2} \frac{h_2 - h_1}{(R_3 + h_1)(R_3 + h_2)} \approx -6,46 \cdot 10^9 \text{ Дж.}$$

• Ответ: $A = \frac{g_0 m R_3^2}{2} \frac{h_2 - h_1}{(R_3 + h_1)(R_3 + h_2)} \approx -6,46 \cdot 10^9 \text{ Дж.}$

5.28. Найти отношение затрат энергии на поднятие спутника на высоту $h = 3200$ км и на последующий запуск его по круговой орбите на этой высоте. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

5.29. Спутник массой $m = 1000$ кг движется по круговой орбите вокруг Земли на высоте $h = 1000$ км от ее поверхности. Какова его потенциальная, кинетическая и полная энергия? Масса Земли $M_3 = 5,96 \cdot 10^{24}$ кг, радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

5.30. Спутник движется со скоростью v по круговой орбите вокруг Земли. Какую наименьшую добавочную скорость надо сообщить спутнику, чтобы он мог покинуть поле притяжения Земли?

§6. Статика

До сих пор мы изучали движения тел, которые можно было рассматривать как материальные точки. Переходим теперь к изучению таких явлений, когда существенна протяженность тел. При этом мы будем считать тела *абсолютно твердыми*. Напомним (см. §1), что под абсолютно твердым телом в механике понимается такое тело, взаимное расположение частей которого остается все время неизменным. Такое тело при движении выступает как единое целое.

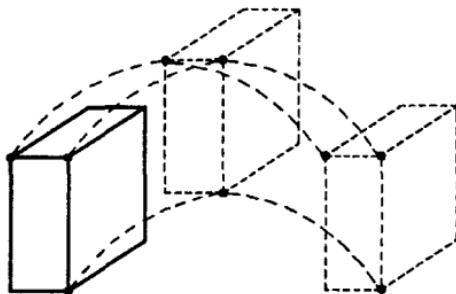


Рис. 6.1

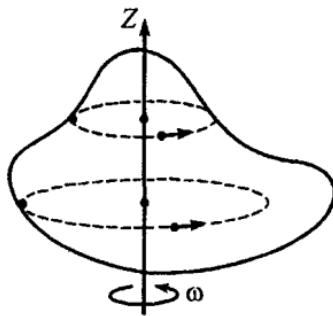


Рис. 6.2

Простейшим движением твердого тела является движение, при котором тело перемещается параллельно самому себе (рис. 6.1). Такое движение называется *поступательным*. При поступательном движении твердого тела все его точки имеют одинаковую скорость и описывают одинаковые траектории.

Другим простейшим видом движения твердого тела является *вращение* тела вокруг закрепленной оси. При вращении различные точки тела описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения (рис. 6.2). При этом все точки твердого тела движутся с одинаковой угловой скоростью ω .

Можно доказать, что произвольное движение твердого тела всегда можно представить в виде совокупности поступательного движения всего тела со скоростью какой-либо его точки и вращения вокруг оси, проходящей через эту точку. В качестве такой точки обычно выбирают центр инерции тела. Поступательная скорость при этом равна скорости перемещения центра инерции \vec{v}_c .

Поскольку абсолютно твердое тело является системой жестко связанных между собой материальных точек, его поступательное движение описывается вторым законом Ньютона для системы (см. §3, (3.12) – (3.13))

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = m \vec{a}_c = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots, \quad (6.1)$$

где $\vec{P} = m \vec{v}_c$ – импульс тела; $m = \sum_{i=1}^n m_i$ – масса тела; $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$ – силы, действующие на тело (все силы, действующие на тело, являются, по отношению к системе материальных точек, из которых состоит тело, внешними). Из (6.1), в частности, вытекает, что при условии

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k = 0 \quad (6.2)$$

ускорение центра инерции $\vec{a}_c = 0$, т.е. тело как целое либо покоится, либо движется поступательно с постоянной скоростью.

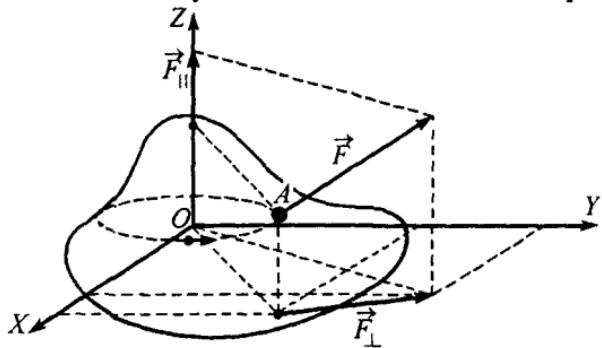


Рис. 6.3

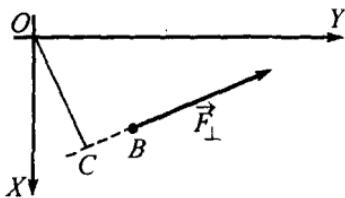


Рис. 6.4

Рассмотрим теперь другой простейший вид движения твердого тела – вращение тела вокруг определенной закрепленной оси (оси OZ). Пусть на тело действует некоторая сила \vec{F} , приложенная к точке A тела (рис. 6.3). Ясно, что составляющая силы $\vec{F}_{||}$, параллельная оси OZ , может только сдвинуть тело вдоль этой оси, но не может произвести вращение тела. Мы можем поэтому не принимать во внимание эту составляющую силы и рассматривать только составляющую \vec{F}_{\perp} , лежащую в плоскости XOY , перпендикулярной оси вращения. Составляющая силы \vec{F}_{\perp} тоже не всегда вызывает вращение тела. Вращения не будет, если ее линия действия CB проходит через ось OZ (рис. 6.4, на котором ось OZ направлена на нас). Ясно, что чем дальше от оси вращения проходит линия действия силы \vec{F}_{\perp} , тем сильнее будет вращаться тело при одном и том же численном значении \vec{F}_{\perp} .

Кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы \vec{F}_{\perp} называется *плечом силы* \vec{F}_{\perp} (на рис. 6.4 это перпендикуляр h , опущенный из точки O на линию CB действия силы \vec{F}_{\perp}).

Моментом силы \vec{F} относительно оси вращения OZ называется произведение модуля составляющей силы \vec{F}_{\perp} на ее плечо, взятое со знаком плюс, если сила \vec{F}_{\perp} вращает тело в таком направлении, в каком вращается правый винт при его продольном перемещении в положительном направлении оси OZ , и со знаком минус, если сила \vec{F}_{\perp} вращает тело в противоположную сторону:

$$M_z(\vec{F}) = \pm \vec{F}_{\perp} h. \quad (6.3)$$

На рис. 6.4 сила \vec{F}_{\perp} вращает тело против часовой стрелки, а ось OZ направлена на нас, поэтому момент этой силы положителен (при вращении правого винта против часовой стрелки он перемещается на нас, т.е. в положительном направлении оси OZ). Если бы линия действия силы \vec{F}_{\perp} проходила выше точки O , ее момент M_z был бы отрицательным.

Если на тело действуют несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, то результирующий вращательный момент относительно оси OZ равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно этой оси

$$M_z(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = \sum_{k=1}^N M_z(\vec{F}_k). \quad (6.4)$$

Можно доказать, что результирующий вращательный момент относительно какой-либо другой оси OZ' , параллельной оси OZ ,

$$M_{z'} = M_z, \quad (6.5)$$

если

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k = 0, \quad (6.6)$$

т.е. когда центр инерции тела покоятся или движется равномерно.

Из уравнения (6.1) вытекает, что ускорение поступательного движения (ускорение центра инерции) определяется результирующей силой $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$, действующей на тело. Угловое ускорение тела при его вращении вокруг закрепленной оси OZ определяется результирующим вращательным моментом M_z всех сил, действующих на тело:

$$J_z \varepsilon = M_z = \sum_{k=1}^N M_z(\vec{F}_k), \quad (6.7)$$

где величина J_z , характеризующая инерцию тела при вращении (при поступательном движении инерция тела определяется его массой m) и зависящая не только от массы тела, но и от того, как эта масса распределена в теле, от формы тела, его размеров и от того, где проходит ось вращения OZ , называется *моментом инерции* тела относительно оси OZ . Уравнение (6.7) и есть *уравнение движения вращающегося тела*. Из (6.7) вытекает, что при выполнении условия

$$\sum_{k=1}^N M_z(\vec{F}_k) = 0 \quad (6.8)$$

угловое ускорение тела $\varepsilon = 0$, т.е. тело либо не вращается, либо вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$.

Следует отметить, что при решении конкретных физических задач с помощью соотношения (6.8) можно не связывать знак момента силы \vec{F}_k с направлением оси OZ (см. определение момента силы), а просто считать все моменты сил, вращающих тело по часовой стрелке, положительными, а моменты сил, вращающих тело против часовой стрелки, отрицательными, или наоборот – результат будет одинаковым. Это связано с тем, что в соотношении (6.8) справа стоит ноль.

Итак, для того чтобы твердое тело находилось в покое (не перемещалось поступательно и не вращалось), необходимо выполнение двух условий: векторная сумма всех сил $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$, действующих на тело, должна равняться нулю (см. формулу (6.2)), и результирующий вращательный момент всех сил, действующих на тело, относительно любой оси OZ тоже должен равняться нулю (см. формулу (6.8)). Следует отметить, что при выполнении этих условий тело, вообще говоря, может равномерно вращаться и перемещаться поступательно с постоянной скоростью.

Если центр инерции тела движется с ускорением \vec{a}_c (т.е. сумма всех сил $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k \neq 0$), то для того чтобы тело не вращалось, условие (6.8) необходимо обязательно писать относительно оси OZ , проходящей через центр инерции тела. Можно, конечно, перейти в неинерциальную систему отсчета, связанную с центром инерции тела, и ввести помимо реальных сил \vec{F}_k , действующих на тело, силу инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m \vec{a}_c$, приложенную к центру инерции тела. В этой системе отсчета результирующая сила $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k + \vec{F}_{\text{ин}} = 0$, и условие (6.8) можно записать относительно любой оси OZ , но при этом нужно учитывать и момент силы инерции относительно выбранной оси OZ . Если же ось OZ проходит через центр инерции тела, то момент силы инерции относительно этой оси равен нулю (плечо этой силы равно нулю), и в условии (6.8) силу инерции можно не учитывать.

Таким образом, если на твердое тело действует много сил, то движение тела (поступательное и вращательное) зависит только от суммы всех этих сил и от суммы их моментов. Это обстоятельство позволяет иногда заменить совокупность всех действующих на тело сил одной силой, которую называют в таком случае равнодействующей. Очевидно, что по величине и направлению равнодействующая сила равна сумме всех сил $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$, а ее точка приложения должна быть выбрана таким образом, чтобы ее момент относительно произвольной оси был равен суммарному моменту всех сил относительно этой же оси. Наиболее важный случай такого рода – сложение параллельных сил. Сюда относится, в частности, сложение сил тяжести, действующих на отдельные материальные точки, из которых состоит твердое тело.

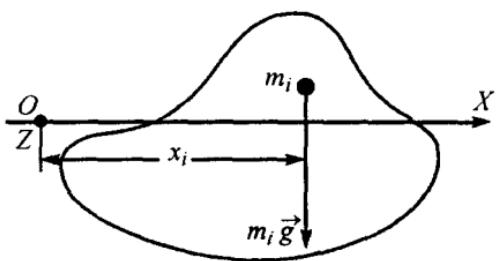


Рис. 6.5

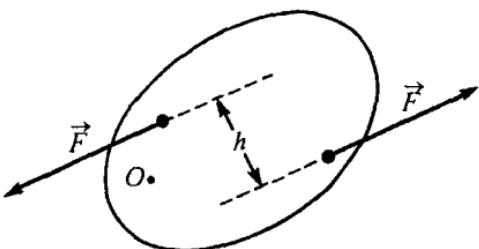


Рис. 6.6

Рассмотрим тело массой m и определим полный момент сил тяжести относительно горизонтальной оси OZ , проходящей через произвольно выбранную точку O тела и перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 6.5). Разобьем тело на n частей, каждую из которых можно считать материальной точкой. Сила тяжести, действующая на материальную точку m_i тела, равна $m_i \vec{g}$ и направлена вертикально вниз, а ее плечо есть координата x_i материальной точки. Поэтому результирующий момент всех сил тяжести

$$M_Z(m \vec{g}) = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \dots = g \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad (6.9)$$

где равнодействующая сила $(m_1 + m_2 + \dots) g = g \sum_{i=1}^n m_i = m g$. Если обозначить координату точки приложения равнодействующей силы (центра тяжести) через x_c , то тот же момент M_z можно записать в виде

$$M_z = m g x_c. \quad (6.10)$$

Приравняв (6.9) и (6.10), найдем координату центра тяжести:

$$x_c = \frac{M_z (m \vec{g})}{m g} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}. \quad (6.11)$$

Но это есть не что иное, как координата центра инерции тела. Таким образом, мы видим, что всю совокупность действующих на тело сил тяжести можно заменить одной силой $m \vec{g}$, приложенной к его центру инерции.

Сведение системы параллельных сил к одной равнодействующей силе, однако невозможно, если сумма всех сил равна нулю. Действие такой совокупности сил может быть сведено к действию, как говорят, *пары сил*: двух сил \vec{F} , равных по величине и противоположных по направлению. Очевидно, что сумма моментов M_z таких двух сил относительно любой оси OZ , перпендикулярной плоскости их действия, однаакова и равна произведению величины F на расстояние h (рис. 6.6) между направлениями действия обеих сил (*плечо пары*):

$$M_z = F h. \quad (6.12)$$

Рекомендации по решению задач

Основная задача статики состоит в том, чтобы найти условия равновесия материальной точки, системы точек, тела или системы тел. Статика представляет собой частный случай динамики при условии, что линейные и угловые ускорения тел системы равны нулю. Поэтому правила решения задач статики принципиально ничем не отличаются от правил решения задач динамики. Вместо уравнений движения здесь нужно составить вытекающие из них уравнения равновесия сил (6.2) и уравнения моментов (6.8).

В основе решения задач на определение положения центра инерции (центра тяжести) системы материальных точек лежит тот факт, что всю совокупность действующих на систему сил тяжести можно заменить одной силой, приложенной к центру инерции системы, положение которого определяется формулой (6.11), если система обладает симметрией относительно оси OX . Если система не обладает осевой симметрией, то оси OX , OY и OZ выбирают произвольным образом, а координаты центра инерции x_c , y_c и z_c определяют по формуле (6.11) и по аналогичным формулам для y_c и z_c :

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}.$$

Если система состоит из тел с известными положениями центров инерции каждого из них, тела заменяют материальными точками, расположенными в центрах инерции соответствующих тел. При этом полезно помнить, что центр инерции однородного плоскопараллельного диска совпадает с его геометрическим центром, прямоугольника – с точкой пересечения диагоналей, треугольника – с точкой пересечения медиан.

Ниже в задачах на статику рассматриваются тела, на которые действуют силы, лежащие в одной плоскости. В этом случае векторное уравнение (6.2) сводится к двум скалярным (если две оси системы координат расположить в плоскости действия сил), а уравнение (6.8) – к одному. Порядок решения таких задач может быть следующим:

1. Сделать схематический чертеж, на котором указать все силы, действующие на тело. Особое внимание здесь, в отличие от динамики материальной точки, нужно обратить не только на количество и направление сил, но и на то, к какой точке тела эти силы приложены:

- а) сила тяжести приложена к центру инерции тела;
- б) сила натяжения нити или упругости пружины приложена к точке крепления нити или пружины к телу;
- в) сила реакции опоры и сила трения приложены к точкам соприкосновения поверхности тела с подставкой.

2. Записать уравнение моментов (6.8) относительно оси, проходящей через некоторую точку O . Точку O можно выбирать произвольным образом, однако во многих случаях удобный выбор этой точки значительно упрощает решение задачи и позволяет применять только уравнение моментов (6.8) без привлечения уравнения равновесия сил (6.2). В общем случае точку O удобно выбирать таким образом, чтобы через нее проходило как можно больше линий действия сил, приложенных к телу. Моменты таких сил относительно оси, проходящей через эту точку, будут равны нулю, поскольку их плечи будут равны нулю. В этом случае уравнение моментов окажется наиболее простым. В некоторых задачах приходится использовать силы, направление которых неизвестно, а известна лишь точка приложения (например, сила реакции шарнира, к которому подвешено тело), или силы, значение которых определить из условия задачи невозможно (например, сила трения покоя при неизвестном коэффициенте трения покоя). В этом случае в качестве точки O можно рекомендовать использовать точку приложения силы (в случае шарнира) либо точку, лежащую на линии действия такой силы. Если центр инерции тела движется с некоторым ускорением, то для того чтобы тело не вращалось, условие (6.8) необходимо обязательно писать относительно оси OZ , проходящей через центр инерции тела.

Выбрав точку O , нужно найти плечи всех сил относительно оси, проходящей через эту точку, помня, что плечо – это перпендикуляр, опущенный из данной точки на линию действия силы.

При составлении уравнений моментов определите, какие из моментов будут условно считаться положительными, а какие отрицательными. Можно рекомендовать все моменты, вращающие тело относительно выбранной оси по часовой стрелке считать положительными, а моменты сил, вращающие тело против часовой стрелки, – отрицательными.

3. Если в полученное уравнение моментов входят две или более неизвестные величины, то к нему можно добавить уравнения моментов, взятых относительно осей, проходящих через другие точки, не совпадающие с точкой O . Однако значительно проще использовать уравнение равновесия сил в проекциях на оси произвольной системы координат. Направления осей и начало отсчета выбирают произвольным образом, руководствуясь лишь удобством решения задачи.

Уравнение моментов и уравнение равновесия в проекциях на оси выбранной системы координат дают систему уравнений статики, решение которой приводит к определению исключимых величин.

Если тело, находящееся в равновесии, имеет закрепленную ось вращения, исключающую всякое поступательное движение тела, то для решения задачи обычно можно ограничиться лишь составлением уравнений моментов относительно этой оси.

Если на тело действует несколько сил, не параллельных друг другу, так, что линии действия всех сил пересекаются в одной точке (так называемая сходящаяся система сил), то при равновесии тела многоугольник, составленный из векторов сил, действующих на тело, замкнут. Тогда решение задачи можно получить, не прибегая к уравнениям (6.2) и (6.8). Для этого силы, действующие на тело, нужно перенести параллельным переносом и построить с их помощью замкнутый многоугольник сил. Далее, воспользовавшись подобием многоугольника сил и геометрического многоугольника, образуемого элементами системы,

находящейся в равновесии, решить задачу на основании построений и правил геометрии. В этом случае решение может быть гораздо проще, чем решение на основании общих условий равновесия.

Задачи

Центр тяжести тела

6.1. Четыре материальные точки массами m_1, m_2, m_3, m_4 расположены на легком жестком стержне на расстояниях l друг за другом (рис. 6.7). Найти положение центра тяжести системы.

• **Решение. 1 способ.** Так как система обладает осевой симметрией, то ось OZ удобно направить вдоль прямой, соединяющей материальные точки, а начало отсчета поместить на конце стержня. Положение центра тяжести системы определим по формуле (6.11)

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} = \frac{m_1 0 + m_2 l + m_3 2l + m_4 3l}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Отсюда находим

$$x_c = l \frac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

2 способ. Если в центре тяжести (некоторой точке C , рис. 6.7) приложить к стержню силу \vec{F} , уравновешивающую действующие силы тяжести материальных точек, то система будет находиться в равновесии.

Запишем условия равновесия относительно системы координат, указанной на рисунке, с учетом силы \vec{F} :

$$\sum M_2 = m_2 g l + m_3 g 2l + m_4 g 3l - F x_c = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_y = -(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) g + F = 0, \quad (3)$$

где x_c – расстояние от оси OZ до центра тяжести системы (ось OZ проходит через точку O перпендикулярно плоскости чертежа).

Решив систему уравнений (1) – (3), получим

$$x_c = \frac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} l.$$

• Ответ: $x_c = l \frac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$.

6.2. К концам однородного стержня длиной $l = 50$ см и весом $P = 10$ Н подвешены две гири весом $P_1 = 10$ Н и $P_2 = 20$ Н. В какой точке следует поставить опору, чтобы стержень находился в равновесии?

6.3. На концах однородного стержня длиной $l = 1$ м и массой $m = 5$ кг закреплены два шара радиусами $R_1 = 15$ см и $R_2 = 20$ см и массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 50$ кг соответственно. Найти положение центра тяжести системы.

6.4. Внутри диска радиусом $R = 105,6$ см, изготовленного из плоско-параллельной однородной пластиинки, вырезан квадрат таким образом, как показано на рис. 6.8. Найти положение центра тяжести диска с вырезом.

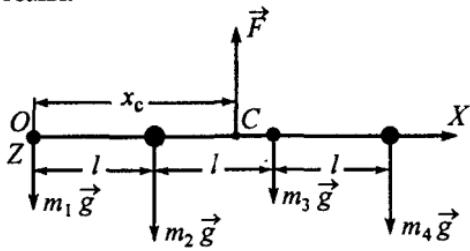


Рис. 6.7

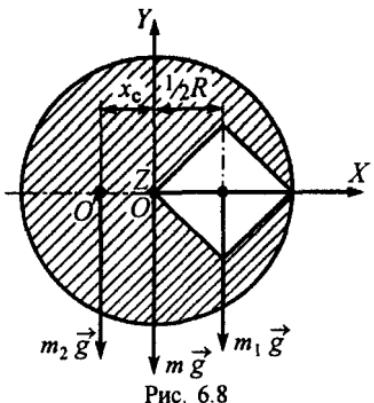


Рис. 6.8

Рассмотрим конкретную задачу.

Если бы диск массой m был без выреза, то на него действовала бы сила тяжести $m \vec{g} = m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g}$, где m_1, m_2 – масса вырезанного квадрата и масса диска с вырезом соответственно. При этом сила тяжести $m \vec{g}$ приложена к центру тяжести диска без выреза (к геометрическому центру диска), $m_1 \vec{g}$ – к центру тяжести квадрата (к геометрическому центру квадрата), $m_2 \vec{g}$ – в некоторой точке O' , соответствующей центру тяжести диска с вырезом. При этом диск находился бы в равновесии.

Запишем уравнение моментов целого диска относительно оси OZ , проходящей через точку O (геометрический центр диска) перпендикулярно плоскости чертежа, считая диск состоящим из двух частей – квадрата и диска с вырезом:

$$\Sigma M_Z = m_1 g \frac{R}{2} - m_2 g x_c = 0, \quad (1)$$

где x_c – расстояние от оси OZ до центра тяжести пластиинки с вырезом.

Выразив массы вырезанного квадрата и диска через плотность и объем

$$m_1 = \frac{1}{2} \rho h R^2, \quad m = \rho h \pi R^2 \quad (2)$$

(где h – толщина пластиинки; ρ – плотность материала, из которого она изготовлена), из (1) – (2) находим

$$x_c = \frac{\frac{1}{2} m_1 R}{m_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 R}{m - m_1} = \frac{R}{2(2\pi - 1)} \approx 0,1 \text{ м.}$$

• Ответ: $x_c = \frac{R}{2(2\pi - 1)} \approx 0,1 \text{ м.}$

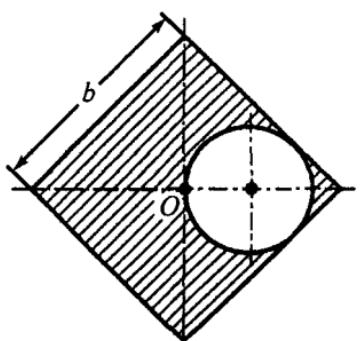


Рис. 6.9

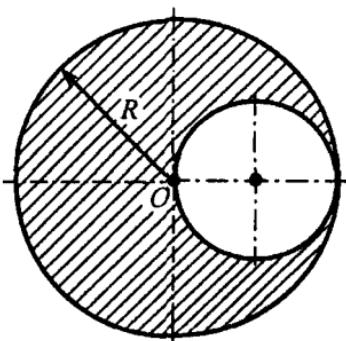


Рис. 6.10

6.5. В однородной квадратной пластиинке со стороной b вырезано круглое отверстие так, как показано на рис. 6.9. Найти положение центра тяжести пластиинки с вырезом.

6.6. Однородная плоская пластинка имеет форму круга радиусом R , из которого вырезан круг вдвое меньшего радиуса так, как показано на рис. 6.10. Найти положение центра тяжести пластиинки с вырезом.

Равновесие тел

6.7. Однородный стержень AB опирается о шероховатый пол и удерживается в равновесии горизонтальной нитью BC (рис. 6.11). Коэффициент трения между полом и стержнем $\mu = 0,35$. При каком наименьшем угле наклона α стержня к полу возможно это равновесие?

• **Решение.** На стержень действуют четыре силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} , сила реакции опоры \vec{N} и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр пок}}$, препятствующая скольжению стержня по полу. Запишем уравнение равенства нулю моментов сил относительно оси OZ , перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей, например, через точку A . Относительно этой оси силы реакции \vec{N} и трения $\vec{F}_{\text{тр пок}}$ моментов не создают (так как их плечи равны нулю), сила тяжести $m \vec{g}$ «вращает» стержень по часовой стрелке, а сила натяжения нити \vec{T} — против. Поэтому

$$\sum M_z = m g \frac{l}{2} \cos \alpha - T l \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

где l — длина стержня.

Очевидно, что для решения задачи уравнения моментов (1) не достаточно. Введем систему координат XOY и запишем условия равновесия для сил:

$$\sum F_x = F_{\text{тр пок}} - T = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_y = N - m g = 0. \quad (3)$$

Поскольку величина силы трения покоя $F_{\text{тр пок}} \leq F_{\text{тр max}} = \mu N$, то уравнение (2) с учетом (3) можно записать в виде

$$T = F_{\text{тр пок}} \leq F_{\text{тр max}} = \mu N, \quad \text{или} \quad T \leq \mu m g, \quad (4)$$

а уравнение (1) с учетом (4)

$$m g \frac{l}{2} \cos \alpha - \mu m g l \sin \alpha \leq 0.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{2 \mu}; \quad \alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \mu} = 55^\circ.$$

• **Ответ:** $\alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \mu} = 55^\circ$.

6.8. Каким должен быть коэффициент трения μ однородного стержня о пол, чтобы он мог стоять так, как показано на рис. 6.12? Длина нити l равна длине стержня.

6.9. Однородный стержень массой $m = 80$ кг шарнирно прикреплен нижним концом к неподвижной опоре и

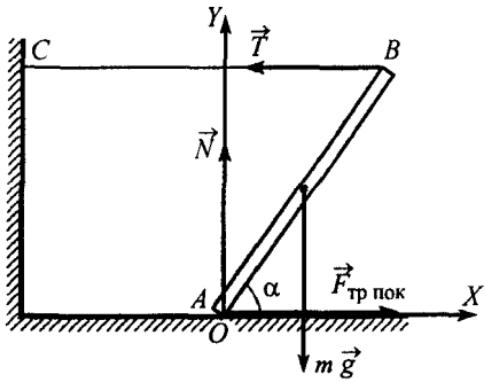


Рис. 6.11

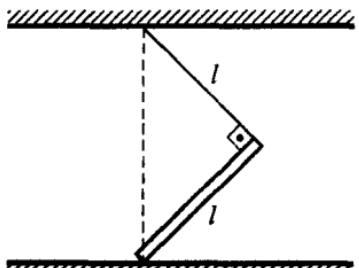


Рис. 6.12

может вращаться в вертикальной плоскости. Стержень удерживается в наклонном положении горизонтальным тросом, прикрепленным к его верхнему концу. Найти силу реакции шарнира и силу натяжения троса. Угол наклона стержня к горизонту $\alpha = 45^\circ$.

6.10. Лестница массой $m = 30 \text{ кг}$ прислонена к гладкой вертикальной стене под некоторым углом к полу. Коэффициент трения между лестницей и полом $\mu = 0,3$. Определить наименьший угол наклона лестницы к полу, при котором она может оставаться в равновесии, и силу, с которой лестница давит на стену, когда скользит.

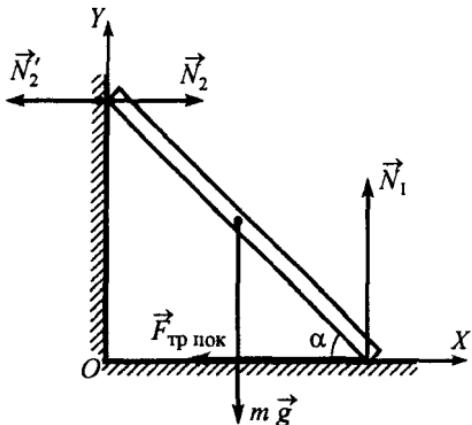


Рис. 6.13

• *Решение.* На лестницу кроме силы тяжести $m \vec{g}$, приложенной к ее центру масс (середине), действуют силы: со стороны пола – сила реакции N_1 и сила трения покоя $F_{\text{тр пок}}$; со стороны стены – сила реакции N_2 (рис. 6.13). При этом сила трения направлена таким образом, чтобы препятствовать скольжению лестницы по полу.

Введем систему координат XYZ . Относительно оси OZ , проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа, момент силы трения покоя $F_{\text{тр пок}}$ равен нулю, сила тяжести $m \vec{g}$ и сила реакции стены N_2 «вращают» лестницу по часовой стрелке, а сила реакции пола N_1 – против. С учетом этого запишем уравнения равновесия лестницы в виде

$$\sum M_z = m g \frac{l}{2} \cos \alpha + N_2 l \sin \alpha - N_1 l \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_x = N_2 - F_{\text{тр пок}} = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_y = N_1 - m g = 0. \quad (3)$$

Поскольку сила трения покоя

$$F_{\text{тр пок}} \leq F_{\text{тр max}} = \mu N_1,$$

то уравнения (2) – (3) можно записать в виде

$$N_2 = F_{\text{тр пок}} \leq \mu N_1; \quad N_1 = m g; \quad N_2 \leq \mu m g. \quad (4)$$

Преобразуем уравнение (1) с учетом выражений (4):

$$\frac{m g}{2} + \mu m g \tan \alpha \geq m g.$$

Отсюда находим

$$\tan \alpha \geq \frac{1}{2 \mu}; \quad \alpha_{\min} = \arctan \frac{1}{2 \mu} \approx 59^\circ.$$

Обратимся теперь ко второму вопросу задачи.

При скольжении лестницы сила трения будет равна $F_{\text{тр}} = \mu N_1$. Следовательно, сила N_2' (по третьему закону Ньютона $N_2' = N_2$), с которой лестница будет давить на стену,

$$N_2' = F_{\text{тр}} = \mu N_1 = \mu m g = 88,2 \text{ Н.}$$

• *Ответ:* $\alpha_{\min} = \arctan \frac{1}{2 \mu} \approx 59^\circ$; $N_2' = \mu m g = 88,2 \text{ Н.}$

6.11. К вертикальной гладкой стене приставлена лестница длиной $l = 3 \text{ м}$ и массой $m = 20 \text{ кг}$. Угол между лестницей и полом $\alpha = 60^\circ$. Ко-

коэффициент трения о пол $\mu = 0,3$. На какую высоту может влезть по лестнице человек массой $M = 60$ кг, прежде чем лестница начнет скользить?

6.12. Лестница длиной l и массой m опирается на вертикальную стену и горизонтальный пол. Коэффициент трения между стеной и лестницей $\mu_1 = 0,5$, между полом и лестницей $\mu_2 = 0,4$. Определить наименьший угол наклона лестницы к полу, при котором она может оставаться в равновесии.

6.13. На горизонтальной плоскости установлен брускок шириной $a = 20$ см и массой $M = 25$ кг (рис. 6.14). К нему прислонена плита длиной $l = 0,5$ м и массой $m = 20$ кг. Коэффициент трения между плоскостью и бруском, а также между плоскостью и плитой очень велик, так что скольжение невозможно. Трение между бруском и плитой пренебрежимо мало. При каких углах α между плитой и вертикалью возможно равновесие этой системы?

- **Решение.** По условию задачи брускок и плита должны находиться в равновесии. Рассмотрим условия равновесия каждого из тел, считая их однородными.

На плиту действуют четыре силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила реакции \vec{N}_1 со стороны горизонтальной плоскости, сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр пок}1}$ между плоскостью и плитой и сила реакции \vec{N}_2 со стороны бруска. По условию задачи значение силы $\vec{F}_{\text{тр пок}1}$ очень велико, но величина неизвестна. Поэтому запишем уравнение равенства нулю моментов сил для плиты относительно оси OZ , перпендикулярной плоскости чертежа (при таком выборе оси OZ силы \vec{N}_1 и $\vec{F}_{\text{тр пок}1}$ моментов не создают, так как их плечи относительно данной оси равны нулю). Очевидно, что плита будет находиться в равновесии независимо от значения угла α , если только брускок не опрокинется. Поэтому

$$\Sigma M_z = N_2 l \cos \alpha - m g \frac{l}{2} \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

На брускок действуют также четыре силы: сила тяжести $M \vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N}_3 со стороны горизонтальной плоскости, сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр пок}2}$ между плоскостью и основанием бруска и сила давления \vec{N}'_2 со стороны плиты, причем $N'_2 = N_2$. При этом сила \vec{N}_3 приложена ко всем точкам основания бруска и не имеет определенной линии действия. Однако в момент опрокидывания сила \vec{N}_3 будет приложена к точке O' бруска, а именно этот случай нас интересует по условию задачи. Запишем уравнение равенства нулю моментов сил, действующих на брускок, относительно оси $O'Z'$, параллельной оси OZ (при этом силы $\vec{F}_{\text{тр пок}2}$ и \vec{N}_3 моментов не создают). Для того чтобы брускок не опрокинулся под действием моментов сил $M g$ и \vec{N}'_2 , необходимо, чтобы момент силы реакции не превышал момент силы тяжести:

$$\Sigma M_{z'} = M g \frac{a}{2} - N'_2 l \cos \alpha \geq 0. \quad (2)$$

Выразив значение силы реакции N_2 из уравнения (1)

$$N_2 = \frac{m g \sin \alpha}{2 \cos \alpha}$$

и подставив в неравенство (2), получим

$$Ma - m l \sin \alpha \geq 0.$$

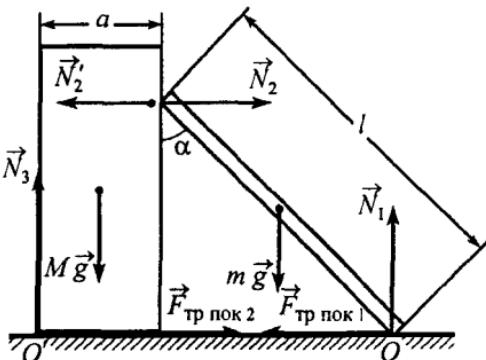


Рис. 6.14

Отсюда находим

$$\alpha \leq \arcsin \frac{M a}{m l} = 30^\circ.$$

- Ответ: $\alpha \leq \arcsin \frac{M a}{m l} = 30^\circ$.

6.14. Однородный брускок поставлен на горизонтальную плоскость. К верхней грани бруска приложена горизонтальная сила \vec{F} , под действием которой брускок движется равномерно. Ширина бруска, измеренная в направлении действия силы, равна $a = 18$ см. Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0,3$. Определить максимальную высоту бруска, при которой он будет двигаться без опрокидывания.

6.15. На плоскости, составляющей угол α с горизонтом, стоит цилиндр радиусом R . Какова наибольшая высота цилиндра h , при которой он еще не опрокидывается, если он изготовлен из однородного материала?

6.16. Шарик массой m подвешен на тонкой нити длиной l так, что он лежит на поверхности закрепленной сферы радиусом R (рис. 6.15, а). Точка подвеса расположена над верхней точкой сферы на расстоянии d от нее. Найти натяжение нити и силу реакции поверхности сферы.

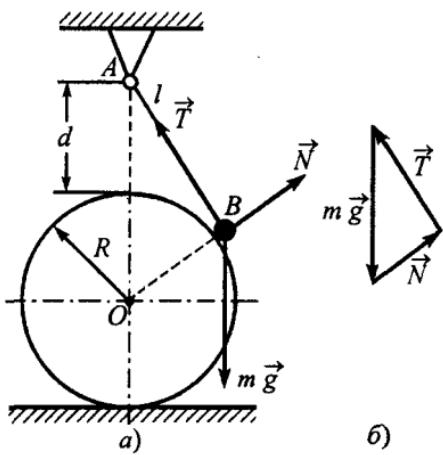


Рис. 6.15

• *Решение.* Решим задачу с помощью геометрических построений, не прибегая к уравнениям равновесия.

На шарик будут действовать три силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила реакции поверхности сферы \vec{N} и сила натяжения нити \vec{T} , причем эти силы образуют сходящуюся систему сил. Поскольку шарик находится в равновесии, то указанные силы можно представить в виде замкнутого треугольника сил (рис. 6.15, б), который подобен $\triangle OAB$ (рис. 6.15, а). Следовательно,

$$\frac{AO}{AB} = \frac{mg}{T}, \quad \frac{AO}{OB} = \frac{mg}{N}.$$

Учитывая, что $AO = d + R$, $AB = l$, $OB = R$, получаем

$$T = m g \frac{l}{d + r}; \quad N = m g \frac{r}{d + r}.$$

- Ответ: $T = m g \frac{l}{d + R}$; $N = m g \frac{R}{d + R}$.

6.17. К вертикальной гладкой стене подвешен однородный шар весом P . Веревка составляет со стеной угол α . Определить силу натяжения веревки и силу давления шара на стену.

6.18. На цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке в верхней точке наклонной плоскости так, как показано на рис. 6.16. Коэффициент трения цилиндра о плоскость μ . При каком максимальном значении угла α цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости?

- *Решение.* На цилиндр действуют четыре силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} , сила реакции \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр пок}}$, препятствующая скольжению цилиндра по плоскости.

Так как цилиндр покоятся, алгебраическая сумма моментов сил, действующих на цилиндр, относительно произвольно выбранной оси равна нулю. Запишем уравнение моментов, например, относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и совпадающей с осью цилиндра, а также уравнения равновесия для сил в проекциях на оси OX и OY :

$$\sum M_z = TR - F_{\text{тр пок}} R = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_x = T + F_{\text{тр пок}} - m g \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_y = N - m g \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Выразив из уравнения (1) силу натяжения нити T и подставив в (2), получим

$$2F_{\text{тр пок}} - m g \sin \alpha = 0. \quad (4)$$

Поскольку сила трения покоя $F_{\text{тр пок}} \leq F_{\text{тр max}} = \mu N$, то уравнение (4) с учетом (3) можно записать в виде

$$F_{\text{тр пок}} = \frac{m g \sin \alpha}{2} \leq \mu N = \mu m g \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$\tan \alpha \leq 2\mu; \quad \alpha \leq \arctg 2\mu; \quad \alpha_{\max} = \arctg 2\mu.$$

- Ответ: $\alpha_{\max} = \arctg 2\mu$.

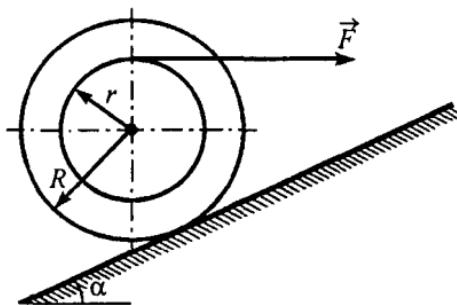


Рис. 6.17

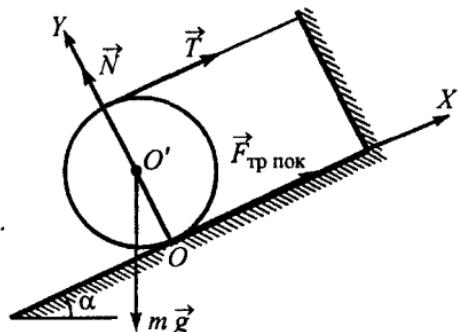


Рис. 6.16

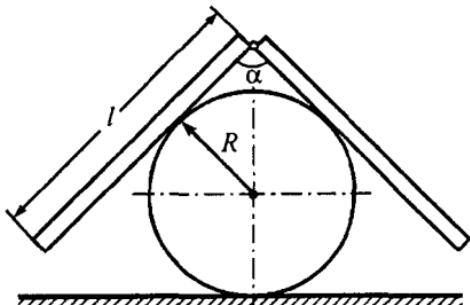


Рис. 6.18

6.19. Катушка удерживается в покое на наклонной плоскости горизонтальной силой \vec{F} , приложенной к нити, намотанной на катушку (рис. 6.17). Масса катушки $m = 40$ г, радиусы $r = 2$ см, $R = 4$ см, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60^\circ$. Найти величину силы \vec{F} .

6.20. Две одинаковые пластины шарнирно скреплены между собой и положены сверху «домиком» на гладкое горизонтальное бревно (рис. 6.18). В положении равновесия пластины образуют между собой угол $\alpha = 90^\circ$. Радиус бревна R . Определить длину пластины l .

6.21. На горизонтальной поверхности лежит доска массой $M = 2$ кг. На доске находится кубик массой $m = 0,5$ кг. Коэффициент трения между доской и горизонтальной поверхностью $\mu = 0,3$. Трение между кубиком и доской столь велико, что кубик относительно доски скользить не может. Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить к доске, чтобы кубик опрокинулся?

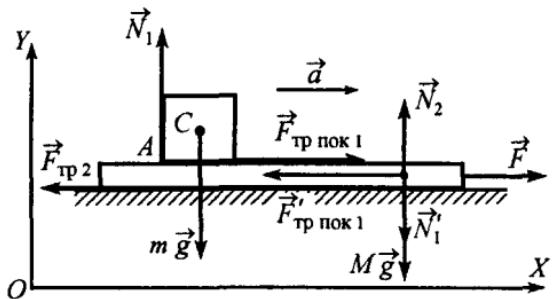


Рис. 6.19

носительно оси, проходящей через центр масс C кубика перпендикулярно рисунку, должен быть направлен против движения часовой стрелки. В момент опрокидывания кубика сила реакции N_1 будет приложена в точке A . Поэтому условие опрокидывания можно записать в виде

$$F_{\text{тр пок } 1} \frac{b}{2} \geq N_1 \frac{b}{2}, \quad (1)$$

где b – длина ребра кубика.

При совместном движении доски и кубика на систему в целом будут действовать сила тяжести $(M+m)\vec{g}$, сила реакции горизонтальной поверхности \vec{N} (равная по величине силе тяжести), сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ ($F_{\text{тр}} = \mu N$) и приложенная к доске горизонтальная сила \vec{F} . Из уравнения движения системы «доска – кубик», записанного в проекциях на оси OX и OY системы координат

$$OX: (M+m)a = F - F_{\text{тр}}, \quad OY: 0 = N - (M+m)g,$$

найдем ускорение системы:

$$a = \frac{F}{M+m} - \mu g. \quad (2)$$

Из уравнения движения кубика, записанного в проекциях на оси системы координат,

$$OX: ma = F_{\text{тр пок } 1}, \quad OY: 0 = N_1 - mg$$

с учетом выражения для ускорения системы (2), получим

$$F_{\text{тр пок } 1} = \frac{mF}{M+m} - \mu mg, \quad N_1 = mg. \quad (3)$$

Подставив (3) в неравенство (1)

$$\frac{mF}{M+m} - \mu mg \geq mg,$$

находим

$$F \geq (1 + \mu)(M+m)g; \quad F_{\min} = (1 + \mu)(M+m)g \approx 32 \text{ Н.}$$

• Ответ: $F_{\min} = (1 + \mu)(M+m)g \approx 32 \text{ Н.}$

6.22. Шестигранный карандаш, лежащий на столе, толкают горизонтальной силой, направленной перпендикулярно его продольной оси. При каких значениях коэффициента трения между карандашом и поверхностью стола карандаш будет скользить по столу, не вращаясь вокруг продольной оси?

6.23. На горизонтальной доске находится брускок (рис. 6.20). Коэффициент трения между поверхностями доски и бруска столь велик, что скольжение бруска невозможно. Доска с бруском движется по гладкой горизонтальной поверхности с постоянной скоростью и в некоторый момент наезжает на шероховатый участок. Каким должен быть коэффициент трения между доской и этим участком, чтобы брускок покатился по доске? Высота бруска $h = 20 \text{ см}$, ширина $a = 10 \text{ см}$.

• Решение. При движении доска будет увлекать за собой кубик за счет силы трения покоя, действующей между ними. При этом на кубик будут действовать сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со стороны доски \vec{N}_1 и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр пок } 1}$ (рис. 6.19). Поскольку система «доска – кубик» будет двигаться с некоторым ускорением \vec{a} , то для того чтобы кубик опрокинулся, результирующий момент от

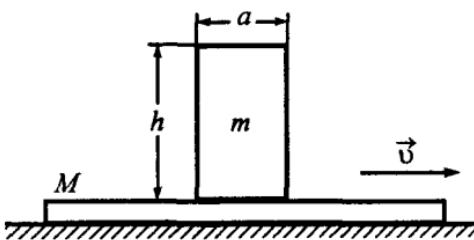


Рис. 6.20

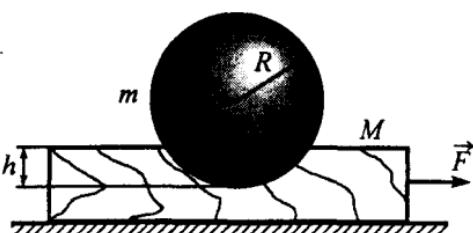


Рис. 6.21

6.24. В горизонтальной доске массой $M = 10$ кг сделана сферическая лунка глубиной $h = 15$ см, в которую вставлен шар радиусом $R = 50$ см, равным радиусу лунки, и массой $m = 2$ кг (рис. 6.21). К доске в горизонтальном направлении приложена сила \vec{F} . Пренебрегая трением между доской и горизонтальной поверхностью, определить максимальное значение силы \vec{F} , при которой шар не выкатится из лунки. Трение между шаром и доской очень велико.

6.25. Под каким углом к горизонту должен входить велосипедист в поворот радиусом $R = 10$ м на скорости $v = 36$ км/ч?

• *Решение.* При движении велосипедиста по горизонтальному закруглению на него действуют три силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила реакции \vec{N} и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр пок}}$, обеспечивающая движение велосипедиста по окружности (рис. 6.22). Полагая, что скорость велосипедиста при движении по закруглению не меняется по величине, проекции сил на ось, направленную по касательной к траектории, рассматривать не будем. Тогда уравнения динамики в проекциях на оси OX и OZ сопровождающей системы отсчета примут вид

$$OX: \frac{m v^2}{R} = F_{\text{тр пок}}, \quad OZ: 0 = N - m g. \quad (1)$$

При решении этой задачи велосипедиста нельзя считать материальной точкой, поскольку его размеры не малы по сравнению с рассматриваемыми расстояниями. При решении таких задач уравнений динамики недостаточно; необходимо привлекать уравнения моментов сил. Так как движение по окружности происходит с ускорением, то для того чтобы велосипедист не потерял равновесия при прохождении поворота, необходимо, чтобы сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через центр масс велосипедиста (точку C) перпендикулярно плоскости рисунка, была равна нулю:

$$\Sigma M_C = N \cdot OC \cos \alpha - F_{\text{тр пок}} \cdot OC \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

где OC – расстояние от точки O до центра масс велосипедиста.

Из (2) с учетом уравнений движения (1) получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N}{F_{\text{тр пок}}} = \frac{g R}{v^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu} = \operatorname{arctg} \frac{g R}{v^2} = 44^\circ 25'.$$

• Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{g R}{v^2} = 44^\circ 25'$.

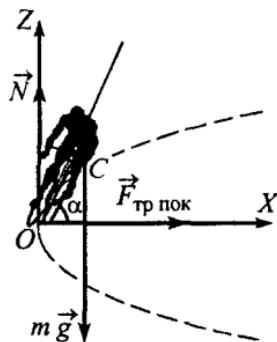


Рис. 6.22

6.26. Велосипедист движется по горизонтальному закруглению трека, отклонившись от вертикали на угол $\alpha = 22^\circ$. Определить возможные значения коэффициента трения колес о поверхность дороги.

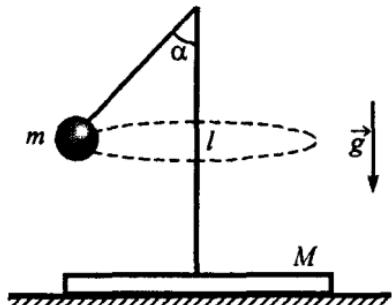


Рис. 6.23

6.27. На горизонтальном столе лежит тонкий диск массой $M = 500$ г и радиусом $R = 15$ см (рис. 6.23). В центре диска укреплен тонкий невесомый вертикальный стержень длиной $l = 40$ см, к верхнему концу которого на легкой нити подвешен шарик массой $m = 300$ г. Шарик приводят в движение так, что он описывает окружность в горизонтальной плоскости вокруг стержня. Какой максимальный угол при этом может составлять нить со стержнем, чтобы диск ни одной точкой не оторвался от стола? Считать, что трение столь велико, что диск не может скользить по столу.

§7. Гидростатика и элементы гидродинамики

Рассмотрим теперь движение жидкостей (и газов) под действием внешних сил. До сих пор мы изучали движение твердых тел, которые сопротивляются как изменению своего объема, так и изменению формы. Жидкости, в отличие от твердых тел, сопротивляются изменению объема, но не сопротивляются изменению формы; они принимают форму сосуда, в котором находятся, но, как и твердые тела, практически не поддаются сжатию, и объем их можно изменить лишь с помощью очень большой силы. Газы не обладают ни определенной формой, ни определенным объемом; они полностью заполняют сосуды, в которые их заключают. Не обладая определенной формой, жидкости и газы способны течь. Это общее свойство объединяет их.

При изучении движения жидкости (и газа) последняя рассматривается как сплошная среда. Это значит, что всякий сколь угодно малый элемент объема жидкости содержит все же достаточно большое число молекул. Такой объем называется «физическими» малым, т.е. он мал по сравнению с объемом всего тела (жидкости или газа), но велик по сравнению с межмолекулярными расстояниями.

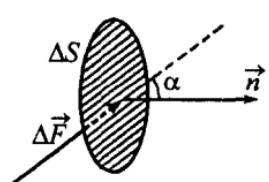


Рис. 7.1

Рассмотрим внутри жидкости (газа) воображаемую малую площадку ΔS , нормаль к которой обозначим \vec{n} (рис. 7.1). Со стороны жидкости на площадку действует сила $\Delta \vec{F}$. Давлением p жидкости в месте нахождения площадки называется отношение проекции силы $\Delta \vec{F}$ на нормаль к площадке $\Delta F_n = \Delta F \cos \alpha$ к площади ΔS :

$$p = \frac{\Delta F_n}{\Delta S}. \quad (7.1)$$

Если жидкость неподвижна, то давление в любой точке внутри жидкости не зависит от ориентации площадки ΔS . Действительно, выделим

внутри жидкости настолько малую пирамиду, чтобы действием на нее силы тяжести можно было пренебречь (рис. 7.2). Так как жидкость (и пирамида) неподвижна, то давления на противоположные грани пирамиды должны быть одинаковыми, иначе пирамида начала бы двигаться.

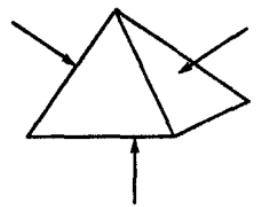


Рис. 7.2

Поскольку жидкость (газ) не сопротивляется изменению формы, то сила ΔF , действующая со стороны неподвижной жидкости (газа) на любую малую площадку ΔS , находящуюся внутри нее (в том числе и на стенки сосуда, в котором находится жидкость), всегда направлена по нормали к площадке ΔS ($\Delta F_n = \Delta F$). Действительно, так как по третьему закону Ньютона со стороны площадки ΔS (и стенок сосуда) на жидкость действует равная по величине и противоположная по направлению сила, то при наличии составляющей этой силы, параллельной площадке, элемент жидкости, соприкасающийся с ней, начал бы перемещаться.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как изменяется с глубиной давление неподвижной жидкости постоянной плотности ρ , на которую действует сила тяжести. Выделим на глубине h объем жидкости в виде прямого параллелепипеда с основанием площадью ΔS и высотой Δh (рис. 7.3). На выделенный объем действуют сила тяжести $\Delta m g = \rho \Delta V g = \rho \Delta S \Delta h g$ (где $\rho = \Delta m / \Delta V$ – плотность жидкости) и силы нормального давления жидкости: $F_1 = p \Delta S$ – на верхнюю грань параллелепипеда и $F_2 = (p + \Delta p) \Delta S$ – на нижнюю грань. Силы нормального давления, действующие на боковые поверхности параллелепипеда, уравновешивают друг друга. Поскольку жидкость неподвижна, то

$$0 = p \Delta S + \rho \Delta S \Delta h g - (p + \Delta p) \Delta S, \quad (7.2)$$

или

$$\Delta p = \rho g \Delta h, \quad (7.3)$$

т.е. при погружении в жидкость на глубину Δh давление возрастает на величину $\rho g \Delta h$, называемую *гидростатическим давлением* столба жидкости высотой Δh . Из формулы (7.3), в частности, следует, что при $\Delta h \rightarrow 0$, $\Delta p \rightarrow 0$ и давление жидкости в любой точке одного уровня $p = \text{const}$.

Если сосуд с жидкостью движется вертикально с ускорением \vec{a} , то вместо условия равновесия параллелепипеда (7.2) следует написать уравнение движения в виде

$$\pm \Delta m a = p \Delta S + \rho \Delta S \Delta h g - (p + \Delta p) \Delta S,$$

или

$$\pm \rho \Delta S \Delta h a = p \Delta S + \rho \Delta S \Delta h g - (p + \Delta p) \Delta S,$$

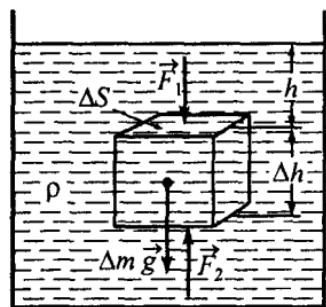


Рис. 7.3

где знак «+» в левой части соответствует направлению ускорения сосуда вниз, а «-» — вверх. Следовательно, в этом случае изменение давления с глубиной

$$\Delta p = \rho (g + a) \Delta h. \quad (7.4)$$

Из (7.4) следует, что изменение давления Δp при погружении в жидкость на глубину Δh численно равно весу столба жидкости высотой Δh и единичным сечением $\Delta S = 1 \text{ м}^2$. В частности, при движении сосуда вниз с ускорением $a = g$ жидкость становится невесомой и $\Delta p = 0$, т.е. давление внутри жидкости везде одинаково.

Если задано давление однородной и несжимаемой ($\rho = \text{const}$) жидкости $p(h_0)$ на некоторой глубине h_0 , то давление $p(h)$ на глубине $h > h_0$ можно найти из соотношения (7.3)

$$\begin{aligned} \Delta p &= p(h) - p(h_0) = \rho g (h - h_0); \\ p(h) &= p(h_0) + \rho g (h - h_0). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Обычно на свободной поверхности жидкости ($h_0 = 0$) давление известно: $p(h_0) = p_0$, где p_0 — атмосферное давление над поверхностью жидкости. Тогда на глубине h однородной несжимаемой и неподвижной жидкости давление

$$p(h) = p_0 + \rho g h. \quad (7.6)$$

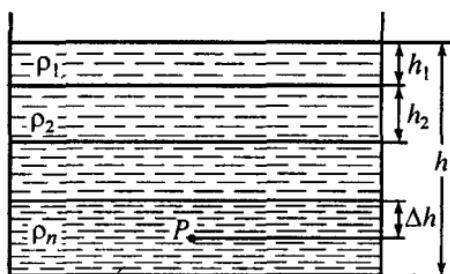


Рис. 7.4

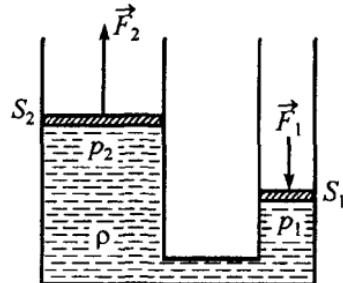


Рис. 7.5

Если жидкость неоднородна и состоит из нескольких слоев различных жидкостей (рис. 7.4), то, используя (7.3) и (7.6), нетрудно доказать, что давление на глубине h складывается из атмосферного давления p_0 и суммарного гидростатического давления всех вышележащих слоев жидкости:

$$p(h) = p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \dots + \rho_n g \Delta h, \quad (7.7)$$

где h_1, h_2, \dots — толщины слоев жидкостей плотностями ρ_1, ρ_2, \dots и $\Delta h = h - (h_1 + h_2 + \dots)$ — глубина точки P , в которой мы ищем давление, в том слое жидкости плотностью ρ_n , где находится эта точка.

Из формул (7.6) и (7.7) следует, что давление внутри несжимаемой и неподвижной жидкости включает в себя внешнее атмосферное давление p_0 , приложенное к свободной поверхности жидкости. Это лишь один пример общего закона, открытого французским ученым Паскалем, который гласит, что *давление, приложенное к свободной поверхности неподвижной жидкости (газа), передается во все точки внутри жидкости без изменения*.

На законе Паскаля основано действие целого ряда практических механизмов, например, гидравлического пресса (или подъемника). В гидравлическом прессе (рис. 7.5) небольшая сила F_1 , приложенная к поршню сечением S_1 , преобразуется в значительную силу F_2 , приложенную к поршню большим сечением S_2 . Согласно закону Паскаля давление p_1 , создаваемое силой F_1 , равно давлению p_2 , действующему на другой поршень:

$$p_1 = p_2, \quad \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}.$$

Следовательно,

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} > F_1, \quad (7.8)$$

т.е. выигрыш в силе пропорционален отношению площадей поршней.

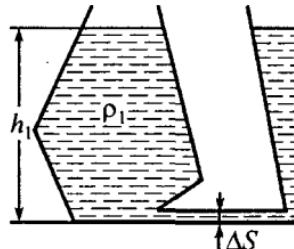


Рис. 7.6

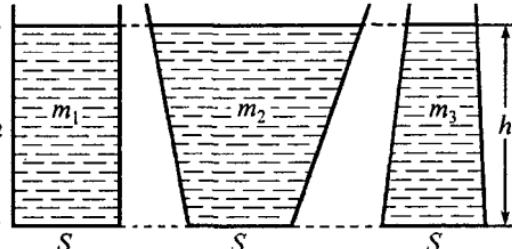


Рис. 7.7

С помощью соотношения (7.6) можно установить, на какой высоте устанавливаются уровни жидкости в сообщающихся сосудах (рис. 7.6). Пусть в левый сосуд налита жидкость плотностью ρ_1 , а в правый – плотностью ρ_2 , и граница раздела двух различных жидкостей находится в тонкой трубке малого сечения ΔS , соединяющей оба сосуда. Если жидкости находятся в равновесии, то силы, а, следовательно, и давления, действующие на границу раздела двух жидкостей слева и справа, равны между собой:

$$p_1 = p_2.$$

Используя (7.6), получим

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2, \quad (7.9)$$

где h_1 и h_2 – высоты уровней жидкостей слева и справа над уровнем, где находится соединяющая сосуды трубка.

Если в сообщающиеся сосуды налита однородная жидкость ($\rho_1 = \rho_2$), то

$$h_1 = h_2,$$

и уровень жидкости в сосудах окажется на одной и той же высоте.

Рассмотрим явление, которое получило название «гидростатического парадокса». Пусть в три сосуда различной формы (рис. 7.7) налита вода до одного и того же уровня. Площадь дна S у всех трех сосудов одинакова. Из (7.6) следует, что давления воды, а также силы, действующие на дно каждого сосуда (вес воды), одинаковы, хотя массы воды m_1 , m_2 и m_3 в сосудах различны. Поскольку давление на дно каждого из сосудов

$p = \rho g h S$ (атмосферное давление не учитывается), то в сосуде с вертикальными боковыми стенками вес воды $P_1 = p S = \rho g h S = m_1 g$, в сосуде, расширяющемся вверх, $-P_2 = p S = P_1 = m_1 g < m_2 g$, и, наконец, в сосуде, расширяющемся вниз, $-P_3 = p S = P_1 = m_1 g > m_3 g$.

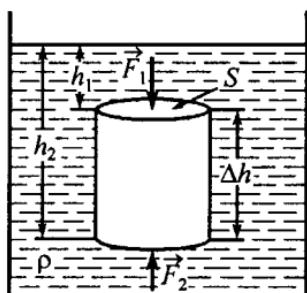


Рис. 7.8

Рассмотрим теперь силы, действующие со стороны жидкости на твердое тело, помещенное в покоящуюся жидкость плотностью ρ . Пусть тело в форме цилиндра высотой Δh и поперечным сечением S полностью погружено в жидкость плотностью ρ так, что ось цилиндра вертикальна, верхнее основание находится на глубине h_1 , а нижнее – на глубине $h_2 = h_1 + \Delta h$ (рис. 7.8). Сила F_1 , действующая со стороны жидкости на

верхнее основание цилиндра, равна $F_1 = (p_0 + \rho g h_1) S$ и направлена вниз. Сила F_2 , действующая на нижнее основание, равна $F_2 = (p_0 + \rho g h_2) S$ и направлена вверх. Результирующая сила, действующая на боковую поверхность цилиндра, равна нулю. В результате на цилиндр со стороны жидкости будет действовать сила

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho g \Delta h S = \rho g V = m_{\text{ж}} g \quad (7.10)$$

(где $V = \Delta h S$ – объем цилиндра; $m_{\text{ж}} = \rho V$ – масса жидкости, вытесненной телом), направленная вертикально вверх. Эта сила называется *выталкивающей* или *силой Архимеда*.

Если цилиндр погружен в жидкость не полностью, а так, что нижнее основание находится на глубине $\Delta h' < \Delta h$, то

$$F_1 = p_0 S, \quad F_2 = (p_0 + \rho g \Delta h') S,$$

и сила Архимеда равна

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho g V' = m'_{\text{ж}} g \quad (7.11)$$

(где $V' = \Delta h' S$ – объем погруженной части цилиндра; $m'_{\text{ж}} = \rho V'$ – масса жидкости, вытесненной телом) и направлена вертикально вверх.

Если сосуд с жидкостью перемещается вертикально с ускорением \vec{a} , то на тело, помещенное в жидкость, будет действовать сила Архимеда, величина которой определяется формулами (7.10) и (7.11), если в последних заменить ускорение свободного падения g на $(g \pm a)$:

$$F_A = \rho g \Delta h S = \rho (g \pm a) V = m_{\text{ж}} (g \pm a), \quad (7.12)$$

$$F_A = \rho (g \pm a) V' = m'_{\text{ж}} (g \pm a), \quad (7.13)$$

где знак «+» соответствует направлению ускорения сосуда вверх и «–» – вниз. При движении сосуда вертикально вниз с ускорением $g = a$ жидкость становится невесомой и выталкивающая сила, действующая на тело, обращается в нуль.

Поскольку в (7.12) $m_{\text{ж}} (g \pm a)$, а в (7.13) $m'_{\text{ж}} (g \pm a)$ – вес жидкости, вытесненной телом, то говорят, что *на тело, погруженное в жидкость*,

действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу жидкости, вытесненной телом (закон Архимеда). Можно доказать, что закон Архимеда справедлив для тел произвольной формы, помещенных в жидкость (или газ), а точка приложения выталкивающей силы совпадает с точкой, в которой находился бы центр тяжести однородной жидкости, если бы эта жидкость заполнила объем, занятый телом в жидкости.

Тело будет плавать в жидкости, если сила тяжести $m g = \rho_T V g$ (где ρ_T – плотность материала тела, V – его объем) уравновешивается силой Архимеда $F_A = \rho V' g$ (где ρ – плотность жидкости и V' – объем погруженной части тела), т.е.

$$\rho_T V g = \rho V' g, \quad \text{или} \quad \rho_T = \rho \frac{V'}{V} \leq \rho. \quad (7.14)$$

При этом тело будет находиться в положении *устойчивого равновесия*, если центр тяжести тела находится ниже точки приложения силы Архимеда F_A и обе эти точки расположены на одной вертикальной линии.

Определим, наконец, вес тела, находящегося в неподвижной жидкости. Пусть тело массой m (плотность материала тела ρ_T , а объем V) висит на нити и частично погружено в жидкость плотностью ρ (рис. 7.9). На тело действуют сила тяжести $m \vec{g}$, сила Архимеда \vec{F}_A и сила натяжения нити \vec{T} . Поскольку тело покоятся, то

$$m \vec{g} + \vec{F}_A + \vec{T} = 0,$$

или в проекции на вертикальную ось

$$m g - F_A - T = 0.$$

Отсюда находим

$$T = m g - F_A = m g \left\{ 1 - \frac{F_A}{m g} \right\} = m g \left\{ 1 - \frac{\rho V'}{\rho_T V} \right\}, \quad (7.15)$$

где V' – объем погруженной части тела.

Вес тела P по определению равен силе, с которой тело действует на нить, т.е. он приложен к нити и по третьему закону Ньютона численно равен силе натяжения нити:

$$P = T. \quad (7.16)$$

Из (7.15) – (7.16) видно, что вес тела, находящегося в жидкости, меньше $m g$ и обращается в нуль, если $F_A = m g$, т.е. когда тело плавает.

Перейдем теперь от рассмотрения покоящейся жидкости к изучению движущейся жидкости (или газа). Раздел физики, который исследует движение жидкости (или газа), называется *гидродинамикой* (или *газодинамикой*).

Течение жидкости бывает двух видов: *ламинарным* и *турбулентным*. При ламинарном течении движение жидкости плавное и соседние слои

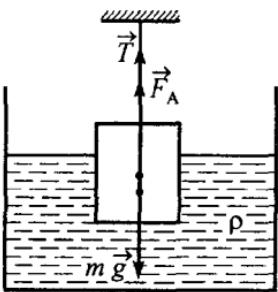


Рис. 7.9

жидкости скользят друг относительно друга. При этом отдельные частицы жидкости перемещаются по гладким траекториям, которые не пересекаются между собой. При турбулентном течении, возникающем при достаточно больших скоростях течения жидкости, траектории частиц жидкости представляют собой беспорядочные замкнутые колечки, называемые *вихрями*. Течение жидкости называется *стационарным*, если скорость жидкости в любой неподвижной (относительно инерциальной системы отсчета) точке пространства не изменяется со временем.

Будем рассматривать простейший случай стационарного ламинарного течения *идеальной жидкости*. Жидкость называется идеальной, если можно пренебречь силами внутреннего трения, возникающими между соседними слоями жидкости, движущимися с различными скоростями.

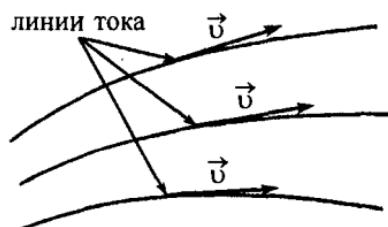


Рис. 7.10

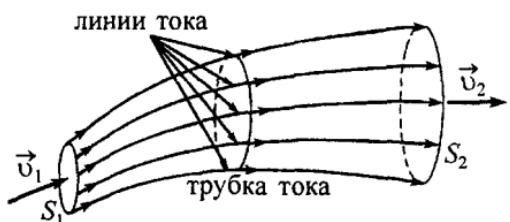


Рис. 7.11

Введем понятие *линий тока*. Линией тока называется линия, касательная к которой в любой ее точке совпадает по направлению со скоростью течения жидкости \vec{v} в этой точке (рис. 7.10). При стационарном течении, когда скорость в каждой точке остается постоянной, линии тока неизменны со временем и представляют собой просто траектории частиц жидкости. Ясно, что линии тока не могут пересекаться, так как в противном случае направление скорости течения жидкости в точке их пересечения оказалось бы неоднозначным.

Пучок линий тока, показанный на рис. 7.11, называется *трубкой тока*. Поскольку при стационарном течении жидкости линии тока совпадают с траекториями ее частиц, то жидкость не может ни втекать, ни вытекать через боковую поверхность трубы тока. Кроме того, при стационарном течении все параметры жидкости не изменяются со временем и количество жидкости, находящейся в произвольный момент времени внутри любой трубы тока заданной длины, остается постоянным. Это означает, что количество жидкости, втекающей через сечение S_1 трубы тока (рис. 7.11) за какой-либо промежуток времени Δt , равно количеству жидкости, вытекающей из трубы тока через сечение S_2 за тот же промежуток времени. За время Δt через сечение S_1 проходит жидкость массой

$$\Delta m_1 = \rho_1 v_1 \Delta t S_1, \quad (7.17)$$

где ρ_1 – плотность жидкости в сечении S_1 . Через сечение S_2 за этот же промежуток времени Δt вытекает жидкость массой

$$\Delta m_2 = \rho_2 v_2 \Delta t S_2, \quad (7.18)$$

где ρ_2 – плотность жидкости в сечении S_2 . Приравнивая правые части выражений (7.17) и (7.18) и сокращая на Δt , получаем

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (7.19)$$

Это соотношение называется *уравнением неразрывности для стационарного течения жидкости (или газа)*.

Масса жидкости, проходящая через сечение трубы тока за единицу времени $\Delta m/\Delta t$, называется *расходом жидкости* Q . Из (7.17) – (7.19) вытекает, что

$$Q_1 = \frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho_1 v_1 S_1, \quad Q_2 = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} = \rho_2 v_2 S_2, \quad Q_1 = Q_2, \quad (7.20)$$

т.е. расход жидкости в любом сечении трубы тока одинаков. Поскольку жидкость практически несжимаема, то $\rho_1 = \rho_2$, и уравнение неразрывности примет вид

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (7.21)$$

Из (7.21) следует, что скорость течения жидкости больше в том месте, где сечение трубы меньше, и наоборот.

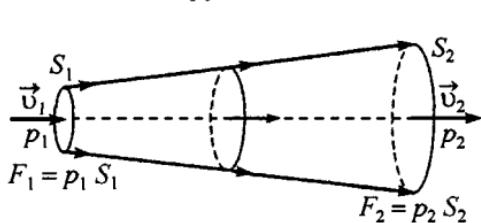


Рис. 7.12



Рис. 7.13

Возникает вопрос, под действием какой силы изменяется скорость течения жидкости в трубке тока переменного сечения. Если жидкость течет вдоль трубы с увеличивающимся сечением (рис. 7.12) и силой тяжести можно пренебречь, то такой силой, уменьшающей скорость жидкости от значения v_1 до v_2 , является результирующая сила давления $F_1 = p_1 S_1$ и $F_2 = p_2 S_2$ (где p_1 и p_2 – давления жидкости в сечениях S_1 и S_2 соответственно).

Можно показать, что в этом случае

$$p_1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho_2 v_2^2}{2}, \quad (7.22)$$

т.е. вдоль линии тока величина

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.} \quad (7.23)$$

Соотношения (7.22) – (7.23) называются *уравнениями Бернулли*.

Если жидкость течет в поле силы тяжести, то уравнение Бернулли вдоль линии тока можно записать в виде

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const}, \quad (7.24)$$

где h – высота линии тока относительно произвольно выбранного горизонтального нулевого уровня (рис. 7.13). Если линия тока проходит ниже нулевого уровня, то $h < 0$.

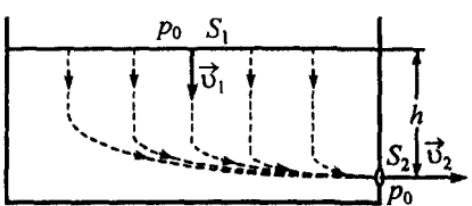


Рис. 7.14

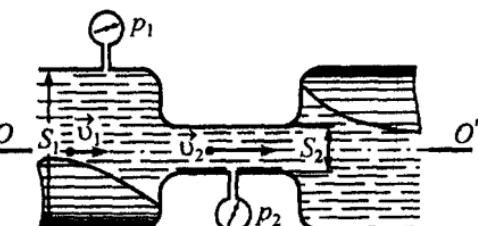


Рис. 7.15

Используя уравнения неразрывности и Бернулли, можно найти, с какой скоростью вытекает жидкость из отверстия малого сечения в нижней части широкого сосуда (рис. 7.14).

Будем считать жидкость несжимаемой ($\rho = \text{const}$) и атмосферное давление одинаковым на поверхности жидкости в сосуде и на высоте отверстия. Запишем уравнение Бернулли для сечения сосуда S_1 (свободная поверхность жидкости) и сечения отверстия S_2 :

$$p_0 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (7.25)$$

где нулевой уровень для h выбран на высоте отверстия. Из (7.25) получим

$$v_2^2 = v_1^2 + 2 g h. \quad (7.26)$$

Из уравнения неразрывности (7.21) следует, что

$$v_1 = v_2 S_2 / S_1. \quad (7.27)$$

Поскольку по условию задачи $S_2 / S_1 \ll 1$, то $v_1 \ll v_2$ и в выражении (7.26) слагаемым v_1^2 можно пренебречь по сравнению с v_2^2 . Следовательно,

$$v_2 = \sqrt{2 g h}. \quad (7.28)$$

Это соотношение называется *формулой Торричелли*, в честь итальянского физика, получившего ее за 100 лет до Бернулли.

Скорость течения воды и ее расход в водоеме можно измерить с помощью так называемой трубки Вентури, представляющей собой отрезок трубы сужением посередине и датчиками для измерения давления жидкости в широкой и узкой частях трубы (рис. 7.15). Трубку помещают горизонтально в поток жидкости и измеряют разность давлений $\Delta p = p_1 - p_2$, где p_1 – давление воды в широкой части трубы и p_2 – в узкой. Из уравнения Бернулли (7.22) (при $h_1 = h_2$) и уравнения неразрывности (7.21) нетрудно получить, что скорость воды в потоке равна

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}}, \quad (7.29)$$

а расход воды через единичное сечение

$$r = \frac{R_1}{S_1} = \frac{\rho v_1 S_1}{S_1} = \rho v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2 \rho \Delta p}{S_1^2 - S_2^2}}. \quad (7.30)$$

Зная сечения трубы S_1 и S_2 , разность давлений $\Delta p = p_1 - p_2$ и плотность жидкости ρ , из (7.29) – (7.30) можно найти скорость потока жидкости и расход жидкости через единичное сечение.

Рекомендации по решению задач

Законы гидромеханики (7.6), (7.12), (7.13), (7.19) и (7.24) позволяют решать многие задачи как по статике, так и по динамике жидкостей.

Задачи, связанные с нахождением давлений и сил давления в какой-либо точке внутри жидкости, решаются на основании закона Паскаля и вытекающих из него следствий. К ним можно отнести задачи на сообщающиеся сосуды. Порядок их решения может быть следующим:

1. Сделать схематический чертеж и отметить равновесные уровни жидкости, которые она занимает по условию задачи. Если даны сообщающиеся сосуды с разнородными жидкостями, то нужно отметить уровни каждой из них. Затем следует выбрать поверхность нулевого уровня, от которого будут отсчитываться высоты столбов всех жидкостей. Эта поверхность должна проходить через однородную жидкость; обычно ее выбирают на нижней границе раздела сред (жидкость – жидкость, жидкость – воздух) или на уровне трубы, соединяющей сосуды. Если по условию задачи происходит перетекание жидкости из одного сосуда в другой и при этом имеется два или несколько равновесных состояний жидкостей, то необходимо отметить высоты всех уровней, отсчитывая их от поверхности нулевого уровня.

2. Указав высоты столбов всех жидкостей в сосудах относительно поверхности нулевого уровня, следует записать уравнение равновесия жидкостей. Для произвольных точек в каждом из сообщающихся сосудов, лежащих на поверхности нулевого уровня, должно выполняться условие

$$p_0 + \rho_1 g h_1 + \dots + \rho_n g h_n = p'_0 + \rho'_1 g h'_1 + \dots + \rho'_k g h'_k = \dots,$$

где p_0, p'_0 – давление на свободных поверхностях верхних слоев жидкостей (обычно атмосферное), $h_i, h'_i, \rho_i, \rho'_i$ – высоты столбов жидкостей и их плотности. Если требуется решить задачу для жидкостей, находящихся в сосуде, движущемся с ускорением \vec{a} вертикально, то при составлении уравнения равновесия следует вместо ускорения свободного падения \vec{g} использовать выражение

$$\vec{g}' = \vec{g} \pm \vec{a},$$

где знак «+» ставится, если ускорение \vec{a} направлено вверх, и знак «–» – если \vec{a} направлено вниз.

3. Составив уравнение равновесия, следует, при необходимости, дополнить его условиями, которые связывают между собой высоты h_1, h_2 и т.д. Например, если жидкость перетекала из одного сосуда в другой, то обычно в качестве дополнительного условия используется свойство несжимаемости жидкостей: при уменьшении объема жидкости в одном из сосудов объем этой жидкости в другом сосуде увеличивается на такую же величину. Совместное решение полученных уравнений позволяет найти искомые величины.

К этой же группе относятся задачи на определение давлений и сил давления на поверхности неподвижных тел, соприкасающихся с жидкостью. При решении таких задач следует знать, что:

1. При погружении в жидкость плотностью ρ давление линейно возрастает и на глубине h равно $p(h) = p_0 + \rho g h$, где p_0 – давление на открытой поверхности жидкости.

2. Сила давления жидкости, действующая на произвольную плоскую поверхность, всегда направлена по нормали к ней. Если давление в любой точке поверхности одинаково (например, на поверхности горизонтального dna сосуда), то сила давления связана с давлением выражением $F = p S$, где S – площадь поверхности. Если давление в разных точках поверхности не одинаково (например, на поверхности боковой стенки сосуда), то поверхность необходимо разбить на столь малые элементарные площадки ΔS , чтобы давление в любой точке такой площадки можно было считать одинаковым. Результирующая сила давления будет равна геометрической сумме сил давления $\Delta F = p \Delta S$, действующих на все такие площадки. В частности, если поверхность плоская и имеет прямоугольную форму, то сила давления (см. решение задачи №7.16)

$$F = p_{\text{ср}} S,$$

где $p_{\text{ср}}$ – давление жидкости в средней части поверхности; S – ее площадь.

3. Сила давления на дно сосуда, расширяющегося или сужающегося вверх и имеющего вертикальную ось симметрии, численно равна весу жидкости, заключенной в вертикальном столбе высотой h , равной толщине слоя жидкости, и сечением S , равным площади дна (см. решение задачи №7.20)

$$F_{\text{дно}} = \rho (g \pm a) h S = m' (g \pm a)$$

(где $m' = \rho h S$ – масса жидкости в этом столбе). Результирующая сила давления на боковые стенки равна разности веса жидкости в сосуде и в вертикальном столбе высотой h и сечением S , равным площади дна

$$F_{\text{ст}} = |m - m'| (g \pm a),$$

где m – масса жидкости в сосуде. Для сосудов, расширяющихся вверх, сила $\vec{F}_{\text{ст}}$ направлена вертикально вниз и $m' < m$, а для сосудов, расширяющихся вниз, сила $\vec{F}_{\text{ст}}$ направлена вертикально вверх и $m' > m$.

В другую группу задач можно выделить задачи на применение силы Архимеда при плавании или движении тел в жидкости. Принципиально решение таких задач не отличается от решения задач статики и динамики. Здесь, кроме сил, рассмотренных в §2, должна быть учтена сила Архимеда

$$F_A = \rho (g \pm a) V,$$

где ρ – плотность жидкости; a – ускорение сосуда с жидкостью, если сосуд перемещается вертикально (знак «+» в скобке соответствует направлению ускорения сосуда вверх, а знак «–» – вниз); V – объем погруженной в жидкость части тела, равный объему вытесненной жидкости. Сила Архимеда направлена вертикально вверх, а точка приложения силы совпадает с точкой, в которой находился бы центр тяжести однородной жидкости, если бы эта жидкость была на месте погруженной части V тела.

Если тело находится на границе раздела разнородных жидкостей, то величина выталкивающей силы, действующей на тело, равна (см. решение задачи №7.32)

$$F_A = \rho_1 (g \pm a) V_1 + \rho_2 (g \pm a) V_2 + \dots,$$

где ρ_1, ρ_2, \dots – плотности жидкостей; V_1, V_2, \dots – объемы частей тела, находящиеся в этих жидкостях.

Если погруженное в жидкость тело находится в равновесии относительно жидкости, то задача сводится к задаче статики (см. §6). В общем случае для ее решения необходимо составить уравнения равновесия сил и уравнение моментов. Следует помнить, что если тело находится в сосуде, заполненном жидкостью, касаясь его стенок (или дна), и при этом жидкость между соприкасающимися поверхностями не проникает, то сила давления жидкости на тело не равна силе Архимеда, так как в этом случае сила давления на указанные поверхности не действует. В таких задачах силу, действующую со стороны жидкости на тело, можно искать как результирующую силу давления на поверхность тела со стороны жидкости, пользуясь определением (7.1), или из силы Архимеда векторно вычесть силы давления на те поверхности, на которые жидкость не действует.

Если тело полностью погружено в жидкость и движется в ней, то для решения задачи следует (см. §2):

1. Сделать чертеж и указать на нем все силы, действующие на тело.
2. Составить уравнение динамики поступательного движения

$$m \ddot{\vec{d}} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$$

и записать его в проекциях на оси выбранной системы координат.

3. Руководствуясь основными правилами решения задач динамики, необходимо составить дополнительные уравнения и решить полученную систему относительно искомых величин.

Если тело движется в жидкости так, что меняется объем части тела, находящейся в жидкости (например, тело, плавающее на поверхности жидкости, погружается в нее или всплывает), то на тело будет действовать переменная по величине сила Архимеда. Такие задачи решаются на основании теоремы о полной механической энергии (см. §3). Схема решения подобных задач может быть следующей:

1. Сделать схематический чертеж, на котором изобразить тело в двух положениях. Изобразить силы, действующие на тело в произвольный момент движения тела из одного положения в другое.

2. Выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии.

3. Ввести инерциальную систему отсчета и записать значение полной механической энергии тела в начальном и конечном его положениях как сумму потенциальной и кинетической энергий.

4. Вычислить работу всех сторонних сил, действующих на тело при его перемещении из первого положения во второе.

5. Записать теорему о полной механической энергии.

6. При необходимости составить дополнительные уравнения и решить систему уравнений относительно искомых величин.

Третья группа задач включает задачи, в которых движущимся телом является сама жидкость. Решение таких задач требует привлечения уравнения Бернулли и уравнения неразрывности (уравнения постоянства расхода жидкости). При решении подобных задач следует:

1. Записать уравнение неразрывности для стационарного течения жидкости. Если жидкость несжимаема, то для любого сечения S_i трубки тока произведение $v_i S_i$ остается постоянным. Если жидкость перетекает последовательно через ряд сосудов разных сечений S_1, S_2 и т.д., то

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \dots = v_i S_i = \dots,$$

где v_i — скорость течения жидкости в сечении S_i .

2. Выбрать произвольную линию тока и записать вдоль нее уравнения Бернулли (7.24), предварительно указав нулевой уровень:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = \dots = p_i + \rho g h_i + \frac{\rho v_i^2}{2} = \dots,$$

где p_i — давление жидкости в трубке сечением S_i ; h_i — высота линии тока относительно выбранного горизонтального нулевого уровня (если линия тока проходит ниже нулевого уровня, то h_i — отрицательная величина); v_i — скорость течения жидкости в сечении S_i , через которое проходит данная линия тока.

3. Дополнив уравнение неразрывности и уравнение Бернулли необходимыми соотношениями, вытекающими из условий задачи, решить систему относительно искомых величин.

Задачи

Давление. Закон Паскаля

7.1. Давление у головы водолаза на $\eta = 33\%$ превышает давление на поверхности водоема, равное $p_0 = 10^5$ Па. На сколько процентов давление у ног водолаза превышает давление p_0 ? Рост водолаза $h = 1$ м 74 см. Водолаз стоит в воде вертикально. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

• *Решение.* Изменение давления Δp при погружении в жидкость плотностью ρ на глубину Δh равно гидростатическому давлению столба жидкости высотой Δh :

$$\Delta p = \rho g \Delta h.$$

Если водолаз находится в воде на глубине H , то давление у головы и у ног водолаза отличаются от давления на поверхности водоема на

$$\Delta p_1 = \rho g (H - h) \quad \text{и} \quad \Delta p_2 = \rho g H$$

соответственно.

С другой стороны,

$$\Delta p_1 = \eta p_0$$

Следовательно,

$$\eta p_0 = \rho g (H - h), \text{ или } H = \frac{\eta p_0}{\rho g} + h; \quad \Delta p_2 = \rho g \left\{ \frac{\eta p_0}{\rho g} + h \right\}, \text{ или } \Delta p_2 = \eta p_0 + \rho g h.$$

Отсюда находим

$$\frac{\Delta p_2}{p_0} = \frac{\eta p_0 + \rho g h}{p_0} \approx 0,5 = 50\%.$$

- Ответ: $\frac{\Delta p_2}{p_0} = \frac{\eta p_0 + \rho g h}{p_0} \approx 0,5 = 50\%$.

7.2. На какую глубину нужно нырнуть в воду, чтобы ощутить на себе действие удвоенного атмосферного давления? Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$.

7.3. Мальчик ростом $h = 1,2 \text{ м}$ ныряет в пруд так, что его вытянутое тело входит в воду под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Чему равна разница давлений у макушки головы и у пальцев ног мальчика, когда его тело полностью погрузилось в воду? Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

7.4. В двух сообщающихся сосудах находится ртуть. Поверх нее в один сосуд налили столб воды высотой $h_1 = 0,8 \text{ м}$, а в другой — столб керосина высотой $h_2 = 0,2 \text{ м}$. Какая разность уровней ртути установится в сосудах? Плотность воды $\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, керосина — $\rho_2 = 0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, ртути — $\rho_3 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

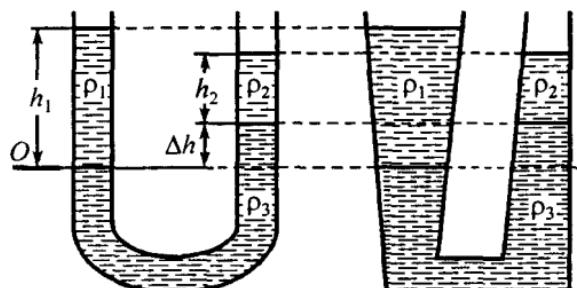


Рис. 7.16

• Решение. На рис. 7.16 изображены сообщающиеся сосуды разной формы. Если в сосудах содержится однородная жидкость, то независимо от формы сосудов она установится на одинаковых уровнях, при этом давления во всех точках, расположенных на одном и том же уровне, будут одинаковыми. Если в сосуды долить жидкости другой плотности (не смешивающиеся

с первой), то высоты столбов жидкостей станут разными. При этом давления в сосудах на некотором горизонтальном уровне, проходящем через однородную жидкость (например, у дна сосудов), будут одинаковыми.

Поскольку плотности воды и керосина меньше плотности ртути, то эти жидкости будут находиться сверху ртути. При этом (так как $h_1 > h_2$ и $\rho_1 > \rho_2$) давление столба воды

$$p_1 = p_0 + \rho_1 g h_1$$

на поверхность ртути будет больше давления столба керосина

$$p_2 = p_0 + \rho_2 g h_2,$$

где p_0 — атмосферное давление. Поэтому уровень ртути в том сосуде, в который налили воду, опустится, а в сосуде, в который налили керосин, поднимется. В результате в сосудах возникнет разность уровней ртути Δh .

Выберем поверхность нулевого уровня OO' на нижней границе раздела сред, т.е. на границе раздела ртуть – вода. Условие равновесия жидкостей относительно выбранной поверхности нулевого уровня примет вид

$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g \Delta h.$$

Отсюда находим

$$\Delta h = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{\rho_3} \approx 4,7 \text{ см.}$$

• Ответ: $\Delta h = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{\rho_3} \approx 4,7 \text{ см.}$

7.5. В открытой U-образной трубке находится ртуть. Какой высоты столб воды нужно долить в одно из колен трубки, чтобы уровни ртути сместились на $\Delta h = 2 \text{ см}$ относительно первоначального положения? Плотность ртути $\rho_1 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, воды – $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

7.6. В сосуд с водой вертикально опущена трубка площадью поперечного сечения $S = 2 \text{ см}^2$. Нижний конец трубки немного не доходит до дна сосуда. В трубку налили $m = 72 \text{ г}$ масла. Насколько выше уровня воды в сосуде находится уровень масла в трубке? Плотность воды $\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, масла – $\rho_2 = 9 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3$.

7.7. В двух сообщающихся цилиндрических сосудах находится ртуть. Площадь поперечного сечения одного сосуда в $n = 2$ раза меньше площади поперечного сечения другого. В узкий сосуд доливают столб воды высотой $h = 48 \text{ см}$, а в широкий – такое же по массе количество некоторой жидкости. Насколько изменится уровень ртути в широком сосуде? Плотность ртути $\rho_1 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, воды – $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

• Решение. Поскольку плотности всех известных жидкостей меньше плотности ртути, то вода и жидкость с неизвестной плотностью будут находиться сверху ртути. Так как в оба сосуда налили одинаковые массы жидкостей, то силы давления, оказываемые ими на поверхность ртути, будут равны, ио давление на ртуть будет больше в узком сосуде. Поэтому, независимо от плотности неизвестной жидкости, уровень ртути в узком сосуде понизится на некоторую величину Δh_2 , а в широком – повысится на Δh_1 (рис. 7.17).

Так как жидкости практически несжимаемы, то объем ртути в широком сосуде $\Delta V_1 = \Delta h_1 S_1$ равен объему ртути $\Delta V_2 = \Delta h_2 S_2$ в узком (где S_1 , S_2 – площади поперечных сечений широкого и узкого сосудов соответственно, причем $S_1 = n S_2$):

$$\Delta h_2 S_2 = \Delta h_1 S_1, \quad \text{или} \quad \Delta h_2 = n \Delta h_1. \quad (1)$$

Выберем поверхность нулевого уровня OO' на границе раздела ртуть – вода. Условие равновесия жидкостей относительно выбранной поверхности нулевого уровня примет вид

$$p_0 + \rho_3 g h_1 + \rho_1 g (\Delta h_1 + \Delta h_2) = p_0 + \rho_2 g h, \quad (2)$$

где p_0 – атмосферное давление; ρ_3 и h_1 – плотность и высота столба неизвестной жидкости.

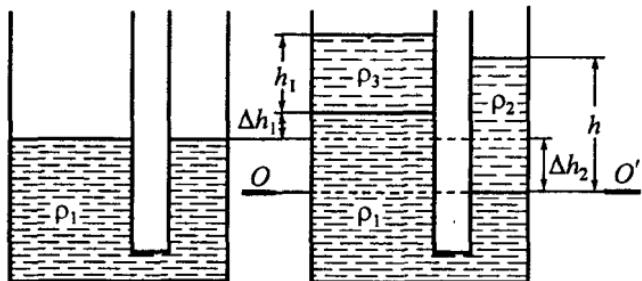


Рис. 7.17

Поскольку масса неизвестной жидкости равна массе воды, то

$$\rho_3 = \frac{m}{h_1 S_1} = \frac{\rho_2 h S_2}{h_1 S_1}. \quad (3)$$

Следовательно, уравнение (2) примет вид

$$\frac{\rho_2 h}{n} + \rho_1 (\Delta h_1 + \Delta h_2) = \rho_2 h, \quad \text{или} \quad \Delta h_1 + \Delta h_2 = \frac{\rho_2 h (n - 1)}{n \rho_1}.$$

Отсюда с учетом (1) находим

$$\Delta h_1 = \frac{\rho_2 h (n - 1)}{n \rho_1 (n + 1)} \approx 5,9 \text{ мм.}$$

- Ответ: повысится на $\Delta h_1 = \frac{\rho_2 h (n - 1)}{n \rho_1 (n + 1)} \approx 5,9 \text{ мм.}$

7.8. В двух сообщающихся цилиндрических сосудах, площади поперечных сечений которых S и $2S$, находится жидкость плотностью ρ . Насколько изменятся положения уровней этой жидкости в сосудах, если в более узкий сосуд налить жидкость массой m , не смешивающуюся с первой, и плотностью, меньшей ρ ?

7.9. В двух сообщающихся цилиндрических сосудах находится ртуть. Площадь поперечного сечения одного сосуда в $n = 3$ раза меньше площади поперечного сечения другого. Уровень ртути в узком сосуде расположен на расстоянии $h = 30 \text{ см}$ от верхнего края сосуда. Насколько поднимется уровень ртути в широком сосуде, если узкий сосуд доверху долить водой? Плотность ртути $\rho_1 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, воды — $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

7.10. При подъеме груза массой $m = 2 \cdot 10^3 \text{ кг}$ с помощью гидравлического подъемника была затрачена работа $A = 400 \text{ Дж}$. При этом малый поршень сделал $n = 10$ ходов, перемещаясь за один ход на $h = 10 \text{ см}$. Во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого? Какая сила была при этом приложена к малому поршню? Считать, что вся работа пошла на подъем груза.

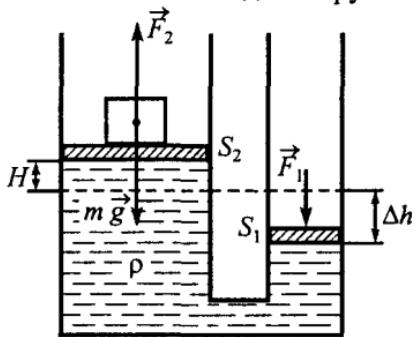


Рис. 7.18

• Решение. При подъеме груза массой m , находящемся на большом поршне гидравлического подъемника, к малому поршню нужно приложить силу

$$F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2},$$

где S_1, S_2 — площади малого и большого поршней соответственно; $F_2 = m g$ (рис. 7.18).

Поскольку перемещение малого поршня за один ход равно h , то за n ходов он переместится на расстояние $\Delta h = n h$, выдавив из узкого сосуда в широкий жидкость объемом $\Delta V_1 = \Delta h S_1 = n h S_1$. Так как жидкость несжимаема, то

$$n h S_1 = H S_2.$$

Работа, совершенная силой F_2 при подъеме груза на высоту H , равна

$$A = F_2 H, \quad \text{или} \quad A = m g H.$$

Следовательно,

$$A = m g \frac{n h S_1}{S_2}; \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{n h m g}{A} = 49; \quad F_1 = \frac{A}{n h} = 400 \text{ Н.}$$

- Ответ: в $\frac{S_2}{S_1} = \frac{n h m g}{A} = 49$ раз; $F_1 = \frac{A}{n h} = 400 \text{ Н.}$

7.11. При подъеме автомобиля массой $m = 1,5$ т с помощью гидравлического домкрата человек может надавить на малый поршень с силой $F = 500$ Н. Во сколько раз площадь большого поршня домкрата должна быть больше площади малого?

7.12. Гидравлический пресс, заполненный маслом, имеет поршни, сечения которых S_1 и S_2 . На больший поршень становится человек массой m . На какую высоту при этом поднимется меньший поршень? Плотность масла ρ .

7.13. Поршень массой $M = 1$ кг представляет собой диск радиусом $R = 4$ см с отверстием, в которое вставлена тонкостенная трубка радиусом $r = 1$ см. Поршень может перемещаться без трения в вертикальном цилиндрическом сосуде радиусом R и сначала лежит на дне сосуда. На какую высоту поднимется поршень, если в трубку налить $m = 700$ г воды? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

• **Решение.** Вода, наливаемая в трубку, будет частично проникать под поршень. Как известно, силы давления жидкости направлены по нормали ко всем поверхностям, соприкасающимся с жидкостью. Поэтому при высоте столба воды в трубке, равной h , на поршень будет действовать сила $F = (p_0 + \rho g h) S$ (где p_0 – атмосферное давление; $S = \pi R^2 - \pi r^2$ – площадь поршня с отверстием), направленная вертикально вверх. Если эта сила станет больше суммы сил тяжести Mg поршня и атмосферного давления $F_0 = p_0 S$, то поршень начнет подниматься. Если после этого продолжать наливать воду в трубку, то высота столба воды в трубке меняться не будет (количество воды, наливаемой в трубку, будет равно количеству воды, проникающей под поршень), а поршень будет продолжать подниматься. Когда вся масса воды будет залита в трубку, поршень остановится на некоторой высоте H (рис. 7.19), на которой

$$(p_0 + \rho g h) S = Mg + p_0 S.$$

При этом высота столба воды в трубке

$$h = \frac{M}{\rho S} = \frac{M}{\rho \pi (R^2 - r^2)}. \quad (1)$$

Выразив массу m воды через плотность и занимаемый объем

$$m = \rho [h \pi r^2 + H \pi R^2],$$

получим

$$H = \frac{m - \rho h \pi r^2}{\rho \pi R^2}. \quad (2)$$

Из (2) с учетом (1) находим

$$H = \frac{1}{\rho \pi R^2} \left\{ m - \frac{Mr^2}{R^2 - r^2} \right\} \approx 0,1 \text{ м.}$$

• **Ответ:** $H = \frac{1}{\rho \pi R^2} \left\{ m - \frac{Mr^2}{R^2 - r^2} \right\} \approx 0,1 \text{ м.}$

7.14. Чтобы возвратиться на то же место, турист бросил в море на глубину $h = 2$ м монету диаметром $d = 2$ см. Найти силу давления на монету. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

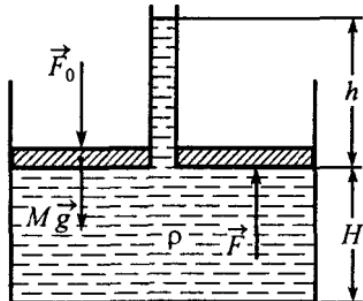


Рис. 7.19

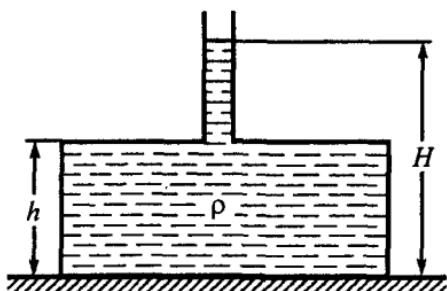


Рис. 7.20

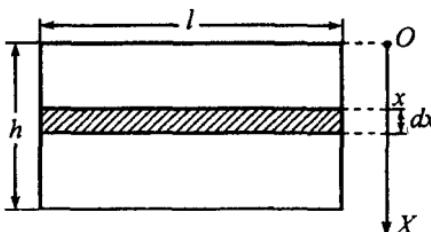


Рис. 7.21

7.15. В дне цилиндрического сосуда площадью S_1 просверлили отверстие площадью S_2 и вставили в него тонкостенную трубку. Масса сосуда с трубкой m . Сосуд стоит на ровном листе резины дном вверх (рис. 7.20). Сверху в трубку осторожно наливают воду. До какого уровня H можно налить воду, чтобы она не вытекала снизу? Высота сосуда h , плотность воды ρ .

7.16. Определить силу давления на вертикальную боковую стенку аквариума площадью $S = 10^3 \text{ см}^2$, доверху заполненного водой. Высота аквариума $h = 30 \text{ см}$. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Атмосферное давление не учитывать.

• *Решение.* Гидростатическое давление воды равномерно увеличивается от нуля на поверхности жидкости до величины $\rho g h$ у дна аквариума. Выделим на стенке бесконечно узкую горизонтальную полоску площадью $dS = l dx$ (где l – ширина стенки аквариума), расположенную на глубине x (рис. 7.21). В пределах ширины полоски давление можно считать постоянным и равным $p = \rho g x$. Сила давления на выбранную площадку

$$dF = p dS = \rho g x l dx.$$

Поскольку силы давления на все выше- и нижележащие площадки направлены перпендикулярно стенке, то результирующая сила давления будет равна алгебраической сумме элементарных сил dF и может быть выражена через определенный интеграл

$$F = \int_0^h \rho g l x dx = \rho g l \int_0^h x dx = \rho g l \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{\rho g l h^2}{2}.$$

Полученный результат можно представить по-другому:

$$F = \frac{\rho g h S}{2} = p_{cp} S, \quad (1)$$

где p_{cp} – давление жидкости в средней части стеки; $S = h l$ – площадь стенки. Следовательно,

$$F = \frac{\rho g h S}{2} = 147 \text{ Н.}$$

Следует отметить, что выражение (1) справедливо лишь для плоских стенок прямоугольной формы и стенок, имеющих горизонтальную ось симметрии (например, круг, эллипс). При этом стенки могут быть вертикальными или наклонными.

• *Ответ:* $F = \frac{1}{2} \rho g h S = 147 \text{ Н.}$

7.17. Аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда объемом $V = 500 \text{ л}$, полностью заполнен водой. Найти силу давления воды на вертикальную стенку аквариума, если ее длина $l = 1 \text{ м}$, а площадь дна аквариума $S = 1 \text{ м}^2$. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Атмосферное давление не учитывать.

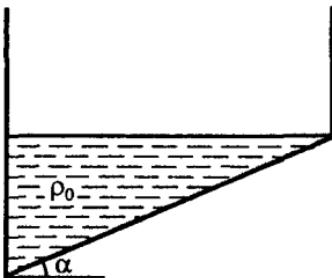


Рис. 7.22

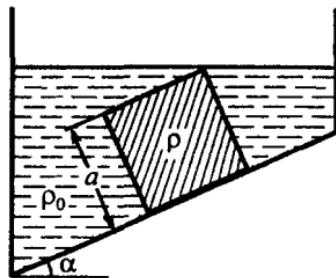


Рис. 7.23

7.18. В вертикальный цилиндрический сосуд сечением $S = 10^{-4} \text{ м}^2$ с наклонным дном налиты жидкость плотностью $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ так, как показано на рис. 7.22. Угол наклона дна сосуда к горизонту $\alpha = 30^\circ$. Найти силу давления на дно сосуда. Атмосферное давление не учитывать.

7.19. Сосуд наполнен жидкостью плотностью ρ_0 . К дну сосуда, представляющему наклонную плоскость с углом при основании α , прилип кубик, изготовленный из материала плотностью $\rho > \rho_0$. Верхняя грань кубика находится у поверхности жидкости (рис. 7.23). Найти силу давления кубика на дно сосуда, если жидкость между дном и нижней гранью кубика не проникает. Длина ребра кубика равна a . Атмосферное давление не учитывать.

7.20. Сосуд имеет форму расширяющегося вверх усеченного конуса (радиус дна r , радиус верхней части $R = 2r$). Сосуд доверху заполнен жидкостью массой m . Пренебрегая атмосферным давлением, найти силу давления на дно и результирующую силу, действующую на стенки сосуда.

• **Решение.** Объем усеченного конуса с основаниями R и r (рис. 7.24) равен

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 (h + h') - \frac{1}{3} \pi r^2 h'. \quad (1)$$

Из подобия треугольников, возникающих при сечении сосуда вдоль оси вертикальной плоскостью, следует, что

$$\frac{R}{h+h'} = \frac{r}{h},$$

или с учетом соотношения радиусов ($R = 2r$)

$$h = h'. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$V = \frac{7}{12} \pi R^2 h.$$

Следовательно, плотность жидкости в сосуде

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{12m}{7\pi R^2 h}. \quad (3)$$

Независимо от формы сосуда гидростатическое давление на глубине h от поверхности жидкости плотностью ρ постоянно и равно $\rho g h$. Поскольку по условию задачи атмосферным давлением следует пренебречь, то давление на дно сосуда

$$p_{\text{дно}} = \rho g h. \quad (4)$$

Следовательно, сила давления на дно площадью $S = \pi r^2$

$$F_{\text{дно}} = \rho g h \pi r^2, \quad (5)$$

или с учетом (3)

$$F_{\text{дно}} = \frac{12 m g}{7 \pi R^2} \pi r^2 = \frac{3}{7} m g. \quad (6)$$

Давление жидкости на стенки равномерно меняется от нуля у поверхности жидкости до величины $\rho g h$ у дна сосуда. Поскольку стенки сосуда не плоские, то при определении давления и силы давления жидкости на стенки сосуда формулы, полученные при решении задачи №7.16, использовать нельзя.

Для того чтобы найти результирующую силу $\vec{F}_{\text{ст}}$, действующую на стеки сосуда, разобьем боковую поверхность сосуда на малые элементы площадью ΔS , на каждый из которых жидкость действует с некоторой силой $\Delta \vec{F}_{\text{ст}}$ (рис. 7.24), перпендикулярной площадке ΔS . Разложим силу $\Delta \vec{F}_{\text{ст}}$ на две составляющие: горизонтальную $\Delta \vec{F}_{\text{ст гор}}$ и вертикальную $\Delta \vec{F}_{\text{ст верт}}$. Так как сосуд обладает осевой симметрией, то для любого элемента ΔS найдется симметричный относительно оси сосуда элемент ΔS_1 , сила давления $\Delta \vec{F}_{\text{ст},1}$ жидкости на который равна по величине силе $\Delta \vec{F}_{\text{ст}}$, а составляющие $\Delta \vec{F}_{\text{ст гор},1} = -\Delta \vec{F}_{\text{ст гор}}$, $\Delta \vec{F}_{\text{ст верт},1} = \Delta \vec{F}_{\text{ст верт}}$. Поэтому горизонтальные составляющие сил будут компенсироваться друг друга и останутся только вертикальные составляющие. Следовательно, результирующая сила $\vec{F}_{\text{ст}}$, действующая со стороны жидкости на боковую поверхность сосуда, равная геометрической сумме всех сил $\Delta \vec{F}_{\text{ст}}$, будет направлена вертикально вниз.

По третьему закону Ньютона, если жидкость действует на боковые стенки сосуда с силой $\vec{F}_{\text{ст}}$, направленной вертикально вниз, то стенки будут действовать на жидкость с силой $\vec{F}'_{\text{ст}} = -\vec{F}_{\text{ст}}$, направленной вертикально вверх. Кроме силы $\vec{F}'_{\text{ст}}$, на жидкость действует сила тяжести $m \vec{g}$ и реакция дна сосуда \vec{N} (численно равная силе давления на дно $F_{\text{дно}}$). Для определения результирующей силы давления на стенки воспользуемся условием, что жидкость неподвижна:

$$\vec{N} + \vec{F}'_{\text{ст}} + m \vec{g} = 0. \quad (7)$$

Спроектировав уравнение (7) на вертикальную ось, получим

$$N + F'_{\text{ст}} - m g = 0,$$

или с учетом (6)

$$F'_{\text{ст}} = m g - N = m g - F_{\text{дно}} = \frac{4}{7} m g.$$

Следовательно,

$$F_{\text{ст}} = F'_{\text{ст}} = \frac{4}{7} m g. \quad (8)$$

Выражения (5) и (8) можно представить в виде

$$F_{\text{дно}} = \rho g V_0 = m' g; \quad F_{\text{ст}} = (m - m') g,$$

где $V_0 = h S$ – объем столба жидкости высотой h и сечением S , равным площади дна; m' – масса жидкости в этом столбе. Следовательно, сила давления на дно сосуда численно равна силе тяжести жидкости (или весу жидкости, если сосуд движется вертикально с некоторым ускорением), заключенной в вертикальном столбе высотой h и сечением, равным площади дна, а результирующая сила давления на боковые стенки равна разности сил тяжести (веса) жидкости в сосуде и в вертикальном столбе высотой h и сечением, равным площади дна. Этот вывод справедлив для сосудов любой формы, имеющих вертикальную ось симметрии, если учесть, что для сосудов расширяющихся вниз, сила $\vec{F}_{\text{ст}}$ направлена вертикально вверх и $m' > m$. Поэтому в общем случае

$$F_{\text{ст}} = |m - m'| g.$$

• Ответ: $F_{\text{дно}} = \frac{3}{7} m g$; $F_{\text{ст}} = \frac{4}{7} m g$.

7.21. Чашу, имеющую форму полусфера радиусом $R = 15$ см, перевернули и поставили на горизонтальный лист резины так, что края чаши

плотно прилегают к поверхности резины (рис. 7.25). Через отверстие, расположенное в основании чаши, в нее наливают воду. Когда уровень воды доходит до уровня отверстия, она приподнимает чашу и начинает из-под нее течь. Найти массу чаши. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$.

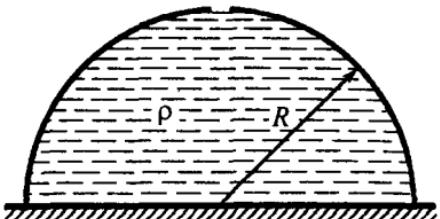


Рис. 7.25

7.22. Ведро имеет форму сужающегося вверх усеченного конуса (радиус дна R , радиус верхней части $r = \frac{1}{2}R$). Ведро полностью заполнено водой, масса которой m . Пренебрегая атмосферным давлением, найти силу давления на дно и результирующую силу, действующую на стенки ведра.

Сила Архимеда

7.23. В сосуде с водой плавает кусок льда. Как изменится уровень воды в сосуде, когда лед растает?

• Решение. Как известно, плотность льда меньше плотности воды, поэтому лед плавает на ее поверхности. При плавании в воде на кусок льда массой m будет действовать сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила Архимеда $F_A = \rho_B V' g$ (где ρ_B – плотность воды; V' – объем погруженной в воду части льда), направленная вертикально вверх. При этом

$$m\vec{g} = F_A,$$

или

$$m\vec{g} = \rho_B V' g.$$

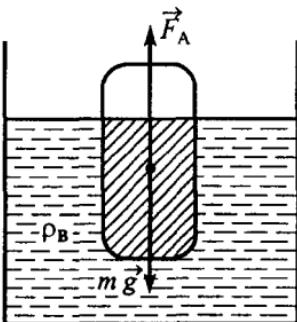


Рис. 7.26

Следовательно, в воде будет находиться часть льда (на рис. 7.26 она заштрихована) объемом

$$V' = m/\rho_B.$$

После таяния массы m льда появится такая же масса воды, объем которой

$$V_B = m/\rho_B.$$

Как видим, объем воды V_B , образованной от таяния льда, равен объему V' части льда, первоначально погруженной в воду. Следовательно, после того как лед растает, уровень воды в сосуде не изменится.

• Ответ: не изменится.

7.24. Определить объем айсберга массой $m = 10^8 \text{ кг}$, если над водой находится одна десятая часть его объема. Плотность воды $\rho_B = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$.

7.25. Какая часть тела окажется погруженной в жидкость, если плотность тела в n раз меньше плотности жидкости?

7.26. Сколько пассажиров средней массой $m = 70 \text{ кг}$ может выдержать шлюпка не затонув, если при погружении шлюпки в воду до краев ее бортов вытесняется объем воды $V = 1,5 \text{ м}^3$, а масса шлюпки $M = 450 \text{ кг}$? Плотность воды $\rho_B = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$.

• **Решение.** На шлюпку с пассажирами действуют сила тяжести $(M + n m) \vec{g}$ (где n – количество пассажиров в шлюпке), направленная вертикально вниз, и сила Архимеда $F_A = \rho_B V' g$ (где V' – объем погруженной в воду части шлюпки), направленная вертикально вверх. Для того чтобы шлюпка не затонула, сила тяжести не должна быть больше силы Архимеда, соответствующей погружению шлюпки до краев бортов, т.е.

$$(M + n m) g \leq \rho_B g V.$$

Следовательно,

$$n \leq \frac{\rho_B V - M}{m} = 15.$$

• Ответ: $n = \frac{\rho_B V - M}{m} = 15$.

7.27. Какой массы груз следует привязать к цилиндрическому поплавку, изготовленному из пробки, чтобы он погрузился в воду на половину своей длины? Длина поплавка $l = 5$ см, его радиус $R = 0,4$ см. Плотность пробки $\rho_{\text{пр}} = 200$ кг/м³, воды – $\rho_B = 10^3$ кг/м³.

7.28. Бревно длиной $l = 4$ м и диаметром $d = 30$ см плавает в воде. Какова может быть наибольшая масса человека, который сможет стоять на бревне, не замочив ног? Плотность древесины $\rho_D = 700$ кг/м³, воды – $\rho_B = 10^3$ кг/м³.

7.29. Кусок металла представляет собой сплав золота и серебра и весит в воздухе P_0 . Вес сплава в воде P . Какую долю от веса сплава составляет золото? Плотность золота ρ_3 , серебра – ρ_c , воды – ρ_B .

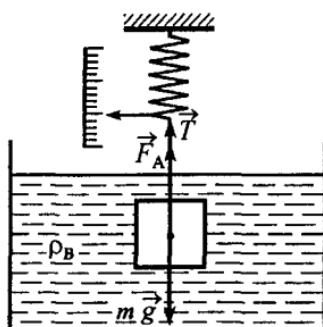


Рис. 7.27

Представим объем и вес сплава в воздухе в виде

$$V = V_3 + V_c, \quad P_0 = P_3 + P_c, \quad (3)$$

где $P_3 = \rho_3 g V_3$, $P_c = \rho_c g V_c$.

Из (1) с учетом (2) – (3) получим

$$P = P_0 - \rho_B g (V_3 + V_c) = P_0 - \rho_B g \left\{ \frac{P_3}{\rho_3 g} + \frac{P_c}{\rho_c g} \right\} = P_0 - \rho_B g \left\{ \frac{P_3}{\rho_3 g} + \frac{P_0 - P_3}{\rho_c g} \right\}.$$

Следовательно,

$$\frac{P_0 - P}{\rho_B} = \frac{P_3}{\rho_3} + \frac{P_0 - P_3}{\rho_c}. \quad (4)$$

Решив уравнение (4) относительно P_3/P_0 , находим

$$\frac{P_3}{P_0} = \frac{\rho_3}{\rho_3 - \rho_c} \left\{ 1 - \frac{\rho_c}{\rho_B} \frac{P_0 - P}{P_0} \right\}.$$

• Ответ: $\frac{P_3}{P_0} = \frac{\rho_3}{\rho_3 - \rho_c} \left\{ 1 - \frac{\rho_c}{\rho_B} \frac{P_0 - P}{P_0} \right\}$.

• **Решение.** Чтобы взвесить тело в жидкости, подвесим его, например, на невесомой нерастяжимой нити к динамометру (рис. 7.27).

В воде на тело действуют три силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} и сила Архимеда \vec{F}_A . При этом вес тела

$$P = T = m g - F_A$$

или

$$P = m g - \rho_B g V, \quad (1)$$

где V – объем сплава.

При взвешивании тела в воздухе вес тела

$$P_0 = m g. \quad (2)$$

7.30. Корона массой $m = 14,7$ кг имеет вес в воде, равный весу тела массой $m_x = 13,4$ кг, взвешенного в воздухе. Золотая ли она? Плотность воды $\rho_B = 10^3$ кг/м³, золота – $\rho_Z = 19,3 \cdot 10^3$ кг/м³.

7.31. Кусок железа с полостью весит в воздухе $P_0 = 2,6$ Н, а в воде $P = 2,2$ Н. Найти объем полости. Плотность железа $\rho_J = 7,9 \cdot 10^3$ кг/м³, воды – $\rho_B = 10^3$ кг/м³.

7.32. Плавающий на поверхности ртути куб погружен в нее на четверть своего объема. Какая часть объема куба будет находиться в ртути, если поверх нее налить слой воды, полностью закрывающей куб? Плотность ртути $\rho_{Pt} = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³, воды – $\rho_B = 10^3$ кг/м³.

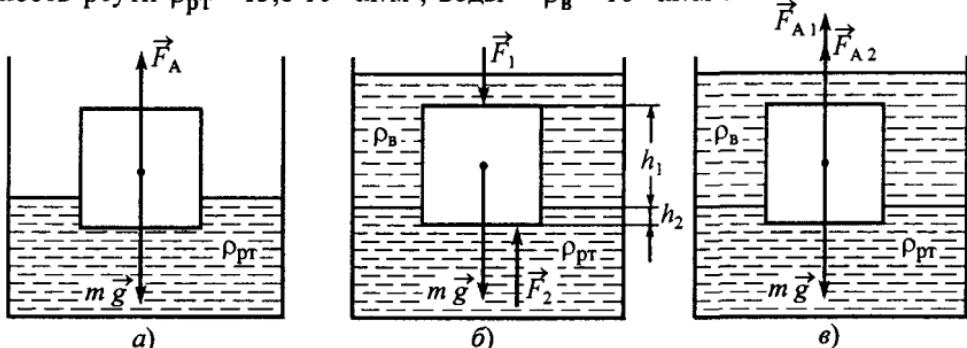


Рис. 7.28

• *Решение.* На куб, плавающий в ртути, действуют сила тяжести $m \vec{g}$ и сила Архимеда \vec{F}_A (рис. 7.28, а), причем эти силы уравновешивают друг друга:

$$m g = F_A, \quad \text{или} \quad m g = \rho_{Pt} g \frac{1}{4} V, \quad (1)$$

где V – объем куба.

Если поверх ртути налить слой воды, полностью закрывающей куб, то на верхнюю грань куба, находящуюся в воде, будет действовать сила давления (рис. 7.28, б) $F_1 = p_1 S$ (где p_1 – давление на уровне верхней грани; S – площадь грани), направленная вертикально вниз, а на нижнюю грань, находящуюся в ртути, будет действовать сила давления $F_2 = p_2 S$ (где p_2 – давление на уровне нижней грани), направленная вертикально вверх.

Если в воде находится часть куба высотой h_1 , а в ртути – высотой h_2 , то по закону Паскаля

$$p_2 = p_1 + \rho_B g h_1 + \rho_{Pt} g h_2.$$

Результирующая сила давления

$$F = F_2 - F_1 = (p_2 - p_1) S = (\rho_B g h_1 + \rho_{Pt} g h_2) S$$

может быть представлена в виде

$$F = \rho_B g V_1 + \rho_{Pt} g V_2, \quad (2)$$

где V_1 , V_2 – объемы частей куба, находящихся в воде и в ртути соответственно.

Поскольку первое слагаемое в правой части (2) напоминает выражение для силы Архимеда $F_{A1} = \rho_B g V_1$, действующей со стороны воды на тело объемом V_1 , а второе – силы Архимеда $F_{A2} = \rho_{Pt} g V_2$, действующей со стороны ртути на тело объемом V_2 , то результирующую силу формально можно рассматривать как геометрическую сумму двух сил Архимеда, действующих независимо друг от друга:

$$F = F_{A1} + F_{A2}. \quad (3)$$

При этом сила \vec{F}_{A1} приложена к точке, в которой находился бы центр масс объема воды, если бы вода была на месте части куба объемом V_1 . Аналогично, сила \vec{F}_{A2} приложена

к точке, в которой находился бы центр масс объема ртути, если бы ртуть была на месте части куба объемом V_2 .

Следовательно, условие плавания куба в двух жидкостях (рис. 7.28, б) можно записать в виде

$$m g = F_{A1} + F_{A2},$$

или с учетом (1) и (2)

$$\rho_{\text{рт}} g \frac{1}{4} V = \rho_{\text{в}} g V_1 + \rho_{\text{рт}} g V_2.$$

Подставив вместо объема V_1 разность объемов $(V - V_2)$, получим

$$\rho_{\text{рт}} \frac{1}{4} V = \rho_{\text{в}} (V - V_2) + \rho_{\text{рт}} V_2; \quad \frac{V_2}{V} = \frac{\frac{1}{4} \rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}} \approx 0,2 = 20\%.$$

- Ответ: $\eta = \frac{\frac{1}{4} \rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}} \approx 0,2 = 20\%$.

7.33. В сосуд налита ртуть, а поверх нее масло. Шар в сосуде плавает так, что треть его объема находится в ртути. Определить плотность шара, если плотность ртути $\rho_{\text{рт}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, масла — $\rho_{\text{м}} = 9 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3$.

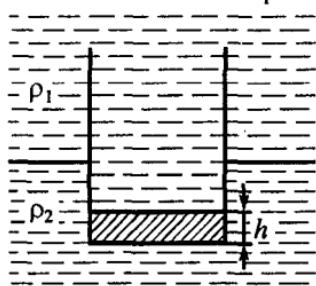


Рис. 7.29

7.34. Тонкостенный стакан массой $m = 50 \text{ г}$ плавает в вертикальном положении на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей с плотностями $\rho_1 = 800 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ (рис. 7.29). Определить глубину погружения стакана в нижнюю жидкость, если дно стакана имеет площадь $S = 30 \text{ см}^2$ и толщину $h = 1 \text{ см}$, а сам стакан заполнен жидкостью плотностью ρ_1 .

7.35. Пластмассовый кубик плавает в некоторой жидкости, погрузившись в нее на треть своего объема. При замене жидкости на другую объем погруженной части увеличился вдвое. Какая часть кубика будет погружена в жидкость, образованную от смешивания этих двух жидкостей, взятых в объемном отношении $V_1/V_2 = n = 2$ соответственно?

- Решение. Запишем условия равновесия кубика при плавании во всех трех жидкостях:

$$m g = \frac{1}{3} \rho_1 g V; \quad m g = \frac{2}{3} \rho_2 g V; \quad m g = \rho_3 g V'; \quad (1)$$

где V — объем кубика; V' — объем части кубика, находящейся в третьей жидкости (смеси первых двух).

Из первых двух уравнений (1) следует, что

$$\rho_1 = 2 \rho_2. \quad (2)$$

Плотность ρ_3 образованной жидкости равна

$$\rho_3 = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{m_1 + m_2}{V_2(n+1)} = \frac{n m_1}{V_1(n+1)} + \frac{m_2}{V_2(n+1)} = \frac{n \rho_1}{n+1} + \frac{\rho_2}{n+1},$$

или с учетом (2)

$$\rho_3 = \frac{\rho_2(2n+1)}{n+1}.$$

Следовательно, последнее из уравнений (1) примет вид

$$m g = \frac{\rho_2(2n+1)}{n+1} g V', \quad \text{или} \quad \frac{2 \rho_2 g V}{3} = \frac{\rho_2(2n+1)}{n+1} g V'.$$

Отсюда находим

$$\frac{V'}{V} = \frac{2(n+1)}{3(2n+1)} = \frac{2}{5}.$$

• Ответ: $\eta = \frac{2(n+1)}{3(2n+1)} = \frac{2}{5}$.

7.36. На поверхности чистой воды плавает деревянный кружок, погруженный на глубину $h = 2,1$ см. Насколько изменится глубина погружения кружка, если в каждом литре воды растворить $m = 50$ г соли? Изменением объема воды при растворении соли пренебречь. Плотность чистой воды $\rho_B = 10^3$ кг/м³.

7.37. Куб со стороной $a = 40$ см плавает в керосине, погрузившись в него на $\alpha = 0,92$ своего объема. Затем этот куб опускают в воду. Определить силу давления на одну из боковых граней куба, когда он плавает в воде. Плотность керосина $\rho_K = 800$ кг/м³, воды – $\rho_B = 10^3$ кг/м³. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

7.38. В цилиндрический сосуд, наполненный водой, опустили пластмассовый брусков массой $m = 100$ г. Насколько при этом изменился уровень воды в сосуде? Радиус дна сосуда $R = 0,1$ м. Плотность материала бруска $\rho_{бр} = 800$ кг/м³, воды – $\rho_B = 10^3$ кг/м³. Как изменится ответ, если бруск утопить в воде?

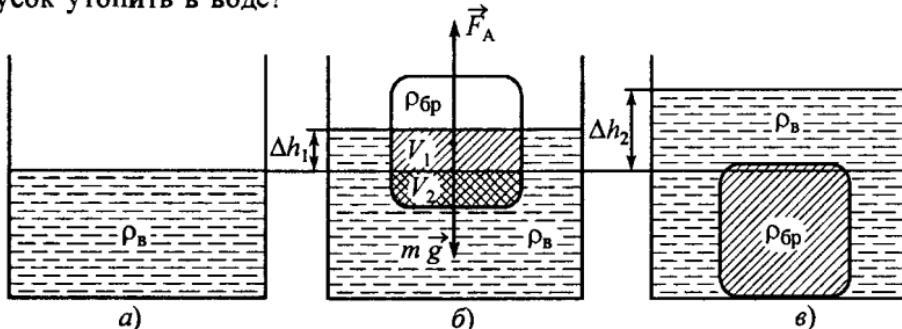


Рис. 7.30

• Решение. Если в сосуд с жидкостью опустить тело, плотность которого меньше ее плотности, то тело будет плавать на поверхности жидкости, частично погрузившись в нее, тем самым увеличив уровень жидкости в сосуде.

При плавании в воде на бруск действуют сила тяжести $m \vec{g}$ и сила Архимеда \vec{F}_A , причем

$$m g = F_A, \quad \text{или} \quad m g = \rho_B g V, \quad (1)$$

где V – объем части бруска, находящейся в воде.

Представим объем V в виде (рис. 7.30, б)

$$V = V_1 + V_2. \quad (2)$$

Если уровень воды в сосуде повысится на Δh_1 , то объем слоя $\Delta h_1 S$ (где $S = \pi R^2$ – площадь поперечного сечения сосуда) можно представить в виде

$$\Delta h_1 S = V_B + V_1, \quad (3)$$

где V_B – объем воды в рассматриваемом слое. Поскольку объем V_B возник за счет вытеснения воды бруском, то $V_B = V_2$. Следовательно, из (2) – (3) получим

$$\Delta h_1 S = V,$$

и уравнение (1) запишем в виде

$$m = \rho_B \Delta h_1 \pi R^2.$$

Отсюда находим

$$\Delta h_1 = \frac{m}{\rho_B \pi R^2} \approx 0,32 \text{ см.}$$

Если бруск утопить, то он вытеснит объем воды, равный объему тела (рис. 7.30, б):

$$\Delta h_2 S = V_{\text{бр.}}$$

где $V_{\text{бр.}} = m / \rho_{\text{бр.}}$

Следовательно,

$$\Delta h_2 S = \frac{m}{\rho_{\text{бр.}}} ; \quad \Delta h_2 = \frac{m}{\rho_{\text{бр.}} \pi R^2} \approx 0,4 \text{ см.}$$

- Ответ: $\Delta h_1 = \frac{m}{\rho_B \pi R^2} \approx 0,32 \text{ см}; \Delta h_2 = \frac{m}{\rho_{\text{бр.}} \pi R^2} \approx 0,4 \text{ см.}$

7.39. В сосуд с вертикальными стенками и площадью дна S налиты жидкость плотностью ρ . Насколько изменится уровень жидкости в сосуде, если в него опустить тело произвольной формы массой m , которое не тонет?

7.40. В одном из двух одинаковых сообщающихся сосудов, заполненных водой, плавает шарик массой $m = 10 \text{ г}$. Площадь поперечного сечения каждого сосуда равна $S = 10 \text{ см}^2$. Насколько изменятся уровни воды в сосудах, если шарик вынуть? Плотность воды $\rho_B = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

7.41. На дне цилиндрического стакана с водой лежит кусок льда. Когда лед растаял, то уровень воды в стакане изменился на $\Delta h = 4 \text{ см}$. Какова была сила давления льда на дно стакана? Площадь дна стакана $S = 12 \text{ см}^2$, плотность воды $\rho_B = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

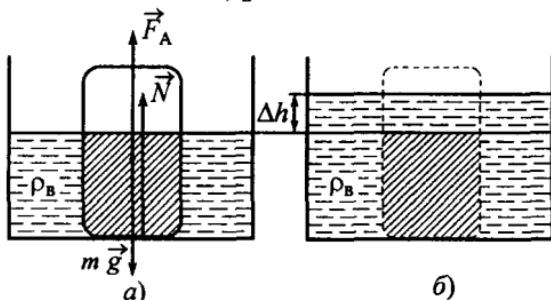


Рис. 7.31

• Решение. Если в воде свободно плавает кусок льда, то после его таяния уровень воды не изменится (см. решение задачи №7.23). В нашем случае воды в стакане слишком мало, чтобы лед мог плавать, поэтому он лежит на дне и вытесняет объем воды меньший, чем объем воды, образующейся после таяния льда. Следовательно, после таяния льда уровень воды в стакане увеличится (рис. 7.31, б).

В начальном положении на кусок льда действуют сила тяжести $m \vec{g}$, реакция дна \vec{N} и сила Архимеда \vec{F}_A (рис. 7.31, а), причем

$$N + F_A = m g,$$

а сила давления \vec{F} льда на дно стакана равна по величине силе реакции:

$$F = N = m g - F_A = m g - \rho_B g V,$$

где m – масса льда; V – объем части льда, находящейся в воде (на рисунке он заштрихован).

Объем образующейся от таяния льда воды можно представить в виде (рис. 7.31, б)

$$V_B = V + \Delta h S,$$

а ее массу

$$m_B = \rho_B V_B = \rho_B (V + \Delta h S).$$

Поскольку m_B равна массе льда m , то

$$V = \frac{m}{\rho_B} - \Delta h S, \quad F = m g - \rho_B g \left\{ \frac{m}{\rho_B} - \Delta h S \right\} = \rho_B g \Delta h S \approx 0,47 \text{ Н.}$$

- Ответ: $F = \rho_B g \Delta h S \approx 0,47 \text{ Н.}$

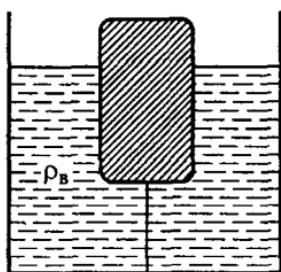


Рис. 7.32

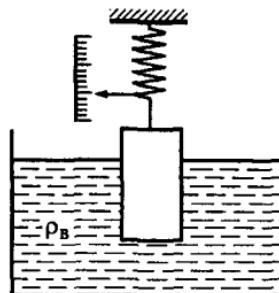


Рис. 7.33

7.42. В цилиндрическом стакане, заполненном водой, плавает льдинка, привязанная невесомой нерастяжимой нитью ко дну (рис. 7.32). Когда льдинка растаяла, то уровень воды изменился на $\Delta h = 2$ см. Каково было натяжение нити? Площадь дна стакана $S = 100$ см², плотность воды $\rho_{\text{в}} = 10^3$ кг/м³.

7.43. Цилиндрическую гирю, подвешенную к динаметру, опустили в воду (рис. 7.33). При этом уровень воды в сосуде увеличился на $\Delta h = 10$ см, а показание динамометра изменилось на $\Delta F = 1$ Н. Найти площадь поперечного сечения сосуда. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 10^3$ кг/м³.

7.44. Круглое отверстие в дне сосуда закрыто конической пробкой сечением у основания S (рис. 7.34, а). При какой наибольшей плотности материала пробки можно, доливая воду, добиться всплытия пробки? Площадь отверстия S_0 , плотность воды $\rho_{\text{в}}$.

• Решение. При наличии воды в сосуде на каждую элементарную площадку поверхности пробки будут действовать силы давления $\vec{\Delta F}$, направленные перпендикулярно площадке (рис. 7.34, а). При этом горизонтальные составляющие сил давления будут компенсировать друг друга (см. решение задачи №7.20) и результирующая сила давления \vec{F} будет направлена вертикально вверх. Если уровень воды в сосуде увеличить, то давление в каждой точке жидкости возрастет, и, как следствие, увеличится величина силы \vec{F} . Если уровень воды достигнет верхнего основания пробки, то, продолжая доливать воду, мы одновременно на одинаковую величину будем увеличивать силу \vec{F} , действующую на боковую поверхность пробки и направленную вверх, и силу давления, действующую на основание пробки и направленную вниз. Следовательно, если пробка не всплынет, когда уровень воды достигнет основания пробки, то она не всплынет и при дальнейшем доливании воды.

Рассмотрим положение пробки, когда вода находится на одном уровне с верхним основанием пробки (рис. 7.34, б). На пробку, закрывающую

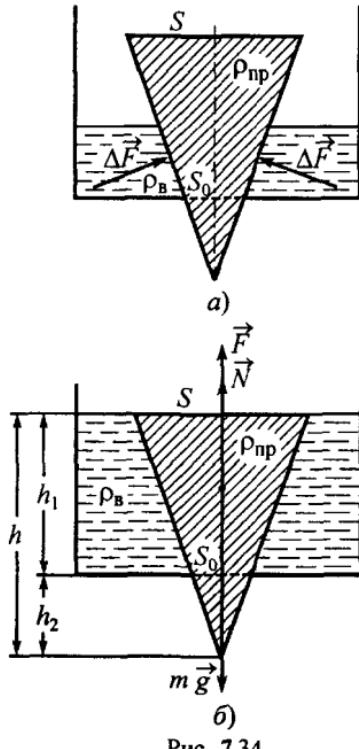


Рис. 7.34

отверстие, действуют сила тяжести $m \vec{g}$, результирующая сила реакции отверстия \vec{N} и выталкивающая сила \vec{F} , причем

$$\vec{F} + \vec{N} - m \vec{g} = 0.$$

Для того чтобы пробка всплыла, сила \vec{N} должна стать равной нулю. Тогда условие всплытия пробки примет вид

$$\vec{F} = m \vec{g}. \quad (1)$$

Результирующую силу давления можно найти таким же способом, как и в задаче №7.20. Однако здесь гораздо проще воспользоваться силой Архимеда.

Если предположить, что в воде находится не пробка, закрывающая отверстие, а тело в форме усеченного конуса высотой h_1 и основаниями площадью S и S_0 , то на него будет действовать сила Архимеда $F_A = \rho_B g V$, где V – объем усеченного конуса

$$V = \frac{1}{3} (S h - S_0 h_2).$$

Поскольку сила Архимеда равна равнодействующей сил давления, то ее можно представить в виде суммы

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{\text{ст}} + \vec{F}_{\text{дно}}, \quad (2)$$

где $\vec{F}_{\text{ст}}$ – результирующая сила давления на стенки конуса; $\vec{F}_{\text{дно}}$ – сила давления на нижнее основание конуса (дно). Поскольку у пробки и рассматриваемого тела боковые поверхности совпадают, то понятно, что $\vec{F} = \vec{F}_{\text{ст}}$. Следовательно, результирующую силу давления \vec{F} на боковую поверхность пробки можно найти из (2)

$$\vec{F} = \vec{F}_A - \vec{F}_{\text{дно}}. \quad (3)$$

Так как силы \vec{F}_A и $\vec{F}_{\text{дно}}$ направлены вертикально вверх, то в проекции на вертикальную ось уравнение (3) примет вид

$$F = F_A - F_{\text{дно}}. \quad (4)$$

У дна конуса давление равно

$$p = \rho_B g h_1.$$

Следовательно, уравнение (4) можно записать в виде

$$F = \rho_B g \frac{1}{3} (S h - S_0 h_2) - \rho_B g h_1 S_0. \quad (5)$$

Если радиус верхнего основания пробки равен R , а отверстия r , то из подобия треугольников следует

$$\frac{R}{h} = \frac{r}{h_2}. \quad (6)$$

Поскольку $S = \pi R^2$, $S_0 = \pi r^2$, то соотношение (6) примет вид

$$\frac{\sqrt{S}}{h} = \frac{\sqrt{S_0}}{h_2}. \quad (7)$$

Из (7) с учетом того, что $h = h_1 + h_2$, получим

$$h_1 = h (1 - \sqrt{S_0/S}); \quad h_1 = h \sqrt{S_0/S}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), находим

$$F = \frac{1}{3} \rho_B g (S h - S_0 h \sqrt{S_0/S}) - \rho_B g h (1 - \sqrt{S_0/S}) S_0,$$

или

$$F = \frac{1}{3} \rho_B g h (S + 2 S_0 \sqrt{S_0/S} - 3 S_0).$$

Следовательно, условие всплытия пробки (1) примет вид

$$\frac{1}{3} \rho_B g h (S + 2 S_0 \sqrt{S_0/S} - 3 S_0) = m g,$$

или

$$\frac{1}{3} \rho_B g h (S + 2 S_0 \sqrt{S_0/S} - 3 S_0) = \frac{1}{3} \rho_{\text{пр}} g S h,$$

где $\rho_{\text{пр}}$ – плотность материала пробки.

Отсюда находим

$$\rho_{\text{пр}} = \rho_B [1 + 2 (S_0/S)^{1/2} - 3 S_0/S].$$

• Ответ: $\rho_{\text{пр}} = \rho_B [1 + 2 (S_0/S)^{1/2} - 3 S_0/S]$.

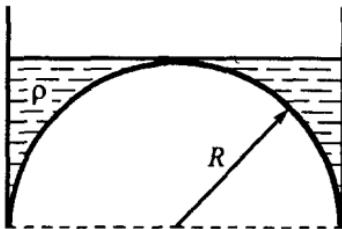


Рис. 7.35

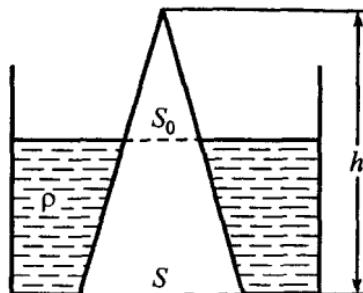


Рис. 7.36

7.45. Сосуд имеет на дне выступ в виде полусферы радиусом R и высотой $h = R$ (рис. 7.35). В сосуд наливают жидкость плотностью ρ до уровня, при котором верхняя точка выступа находится на уровне края жидкости. Найти результирующую силу давления на выступ. Атмосферное давление не учитывать.

7.46. Сосуд имеет на дне конический выступ высотой h и сечением S (рис. 7.36). В сосуд наливают жидкость плотностью ρ до уровня, при котором площадь сечения выступа на уровне верхнего края жидкости равна S_0 . Найти результирующую силу давления на выступ. Атмосферное давление не учитывать.

7.47. Конус с основанием в форме части сферы, подвешенный за вершину к веревке,держивают полностью погруженным в жидкость плотностью $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ (рис. 7.37). Высота конуса $H = 30 \text{ см}$, радиус его основания $R = 10 \text{ см}$. Вершина конуса находится на глубине $h = 10 \text{ см}$. Определить результирующую силу давления, действующую на боковую поверхность конуса. Атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$.

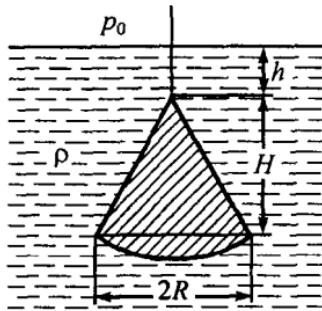


Рис. 7.37

7.48. Тонкий однородный стержень, закрепленный за верхний конец шарнирно, находится в устойчивом равновесии, когда три четверти его длины погружены в жидкость. Найти отношение плотности материала ρ , из которого изготовлен стержень, к плотности жидкости $\rho_{ж}$.

• **Решение.** Так как стержень имеет закрепленную ось вращения, проходящую через точку O , то условие равновесия стержня запишем через равенство нулю моментов сил относительно оси OZ , проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа. Относительно этой оси момент силы реакции шарнира \vec{N} будет равен нулю. Кроме силы \vec{N} на стержень действуют сила тяжести $m \vec{g}$, приложенная к его центру тяжести – точке C , и сила Архимеда \vec{F}_A , приложенная к центру тяжести вытесненного объема жидкости – точке A (рис. 7.38). Следовательно,

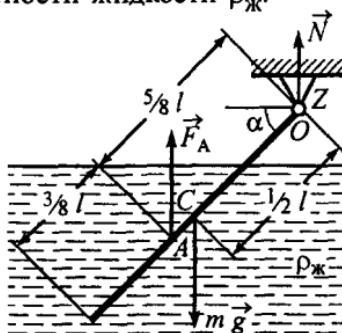


Рис. 7.38

$$\sum M_z = F_A \cdot \frac{5}{8} l \cos \alpha - m g \cdot \frac{1}{2} l \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Поскольку сила тяжести $m g = \rho l S g$ (где l – длина стержня; S – площадь его поперечного сечения), а сила Архимеда $F_A = \rho_{\text{ж}} g^{3/4} l S$, то уравнение (1) можно записать в виде

$$\rho_{\text{ж}} g^{3/4} l S (1 - \frac{5}{8}) - \rho l S g \frac{1}{2} = 0. \quad (2)$$

Отсюда находим

$$\rho / \rho_{\text{ж}} = \frac{15}{16}.$$

- Ответ: $\rho / \rho_{\text{ж}} = \frac{15}{16}$.

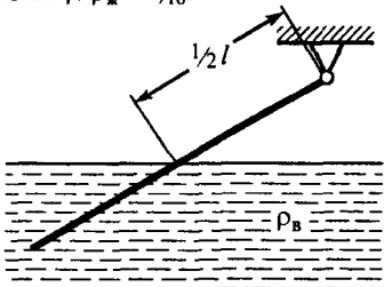


Рис. 7.39

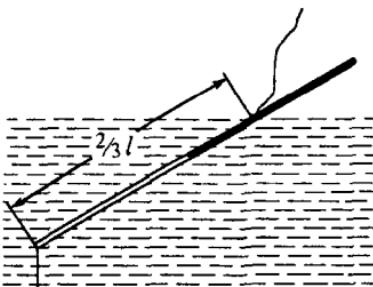


Рис. 7.40

7.49. Однородный стержень щарнирно закреплен за верхний конец. Стержень находится в устойчивом равновесии, когда половина его находится в воде (рис. 7.39). Какова плотность материала, из которого изготовлен стержень? Плотность воды $\rho_b = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

7.50. Определить силу натяжения нижней лески у поплавка, если он находится в устойчивом равновесии, когда погружен в воду на две трети своей длины (рис. 7.40). Масса поплавка $m = 2 \text{ г}$. Верхняя леска не натянута.

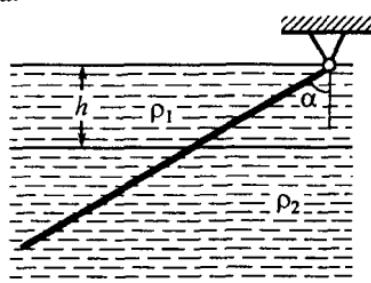


Рис. 7.41

7.51. Стержень длиной l , изготовленный из материала плотностью ρ , закреплен с помощью шарнира и погружен полностью в несмешивающиеся жидкости плотностями ρ_1 и ρ_2 так, как показано на рис. 7.41. Высота слоя жидкости с плотностью ρ_1 равна h . Определить угол, который образует стержень с вертикалью в положении устойчивого равновесия.

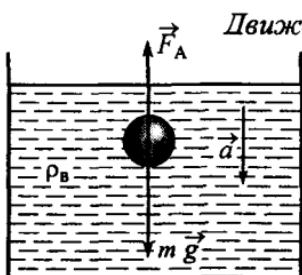


Рис. 7.42

Движение тел в жидкости

7.52. Стеклянный шарик опускается в воде с ускорением $a = 5,8 \text{ м/с}^2$. Найти плотность стекла. Плотность воды $\rho_b = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Силами вязкого трения пренебречь.

• **Решение.** При движении шарика в воде на него действуют сила тяжести $m \vec{g}$ и сила Архимеда \vec{F}_A (рис. 7.42).

Запишем уравнение движения шарика

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_A$$

в проекции на ось, направленную вертикально вниз:

$$m a = m g - F_A.$$

Отсюда с учетом выражения для силы Архимеда $F_A = \rho_B g V$ (где V – объем шарика) получим

$$m a = m g - \rho_B g V.$$

Следовательно,

$$m = \frac{\rho_B g V}{g - a}; \quad \rho_{ct} = \frac{m}{V} = \frac{\rho_B g}{g - a} \approx 2,46 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

- Ответ: $\rho_{ct} = \frac{\rho_B g}{g - a} \approx 2,46 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

7.53. Из водоема с помощью веревки медленно вытаскивают алюминиевый цилиндр длиной $l = 60$ см и площадью поперечного сечения $S = 100 \text{ см}^2$. Когда над поверхностью воды оказалась $n = \frac{1}{4}$ часть длины цилиндра, веревка оборвалась. Найти максимальную силу натяжения, которую выдерживает веревка. Плотность воды $\rho_B = 10^3 \text{ кг/м}^3$, алюминия – $\rho_A = 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

7.54. В вертикальном цилиндрическом сосуде, заполненном жидкостью плотностью $\rho_J = 10^3 \text{ кг/м}^3$, находится шарик радиусом $r = 2 \text{ см}$ и массой $m = 20 \text{ г}$, привязанный к центру дна нитью длиной $l = 40 \text{ см}$. Сосуд вращают вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 5 \text{ рад/с}$. Определить угол между нитью и осью сосуда в положении устойчивого равновесия шарика.

7.55. Куб, изготовленный из материала плотностью ρ , плавает в жидкости плотностью ρ_J (рис. 7.43, а). Сторона куба равна a . Определить минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы: а) полностью потопить куб; б) полностью вытащить его из жидкости.

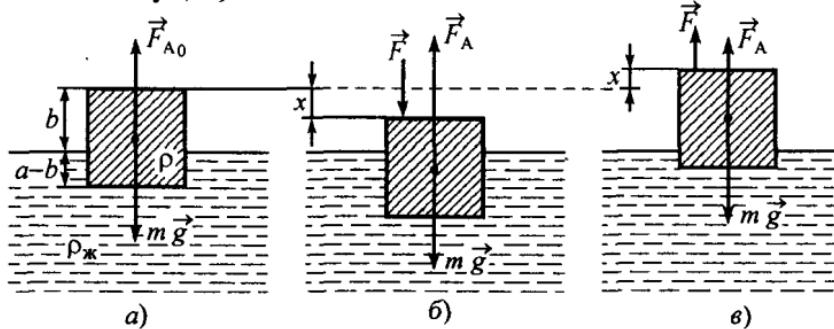


Рис. 7.43

• *Решение.* Чтобы потопить куб, затратив минимальную работу, к нему нужно приложить такую силу \vec{F} , чтобы куб перемещался равномерно. При движении куба на него, кроме силы \vec{F} , действуют сила тяжести $m \vec{g}$ и сила Архимеда \vec{F}_A (рис. 7.43, б). При погружении куба сила Архимеда будет возрастать от значения $F_{A0} = m g$ (рис. 7.43, а), соответствующего равновесию куба, до максимального значения $F_{Amax} = \rho_J g a^3$, когда куб будет потоплен. Поэтому по мере погружения куба в жидкость сила

$$F = F_A - m g$$

(где m – масса куба) должна также увеличиваться.

Рассмотрим произвольное положение куба, когда он смещен из положения равновесия вниз на некоторую величину x . В этом положении сила Архимеда увеличилась по сравнению с первоначальным значением F_{A_0} на $\Delta F_A = \rho_{ж} g a^2 x$ и стала равна

$$F_A = F_{A_0} + \rho_{ж} g a^2 x,$$

а сила

$$F = F_{A_0} + \rho_{ж} g a^2 x - m g. \quad (1)$$

С учетом условия плавания ($F_{A_0} = m g$) уравнение (1) примет вид

$$F = \rho_{ж} g a^2 x. \quad (2)$$

Как видим, приложенная сила должна меняться по мере погружения куба в жидкость по линейному закону. Работа переменной силы $F(x)$ на пути b равна

$$A = \langle F(x) \rangle b,$$

где среднее значение силы $F(x)$ в интервале изменения $0 \leq x \leq b$

$$\langle F(x) \rangle = \frac{\rho_{ж} g a^2 b}{2}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{2} \rho_{ж} g a^2 b^2. \quad (3)$$

Путь b найдем из условия плавания куба на поверхности жидкости, записав его в виде

$$\rho_{ж} g a^2 (a - b) = \rho g a^3.$$

Отсюда находим

$$b = a \frac{\rho_{ж} - \rho}{\rho_{ж}}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим

$$A = \frac{g a^4 (\rho_{ж} - \rho)^2}{2 \rho_{ж}}.$$

Аналогично, при вытаскивании куба из жидкости приложенная сила \vec{F} должна меняться по мере движения куба (рис. 7.43, б) по линейному закону

$$F = m g - F_A = m g - (F_{A_0} - \rho_{ж} g a^2 x) = \rho_{ж} g a^2 x.$$

Работа переменной силы $F(x)$ на пути $(a - b)$ равна

$$A = \langle F(x) \rangle (a - b),$$

где среднее значение силы $F(x)$ в интервале изменения $0 \leq x \leq (a - b)$

$$\langle F(x) \rangle = \frac{\rho_{ж} g a^2 (a - b)}{2}.$$

Следовательно, с учетом (4)

$$A = \frac{g a^4 \rho^2}{2 \rho_{ж}}.$$

• Ответ: а) $A = \frac{g a^4 (\rho_{ж} - \rho)^2}{2 \rho_{ж}}$; б) $A = \frac{g a^4 \rho^2}{2 \rho_{ж}}$.

7.56. Цилиндрический тонкостенный стакан массой m плавает в жидкости, погруженный в нее на половину своей высоты. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы его утопить? Высота стакана равна H . Ось стакана вертикальна.

7.57. Рыболовный поплавок, представляющий собой однородную цилиндрическую палочку площадью поперечного сечения $S = 50 \text{ мм}^2$ и длиной $l = 8 \text{ см}$, плавает в воде, образуя угол $\alpha = 45^\circ$ с ее поверхностью. Какую минимальную работу необходимо совершить рыбке, чтобы поплавок плавно лег на поверхность воды? Плотность воды $\rho_{в} = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ в четыре раза больше плотности материала поплавка. Масса грузила, прикреплен-

ногого к нижнему концу поплавка, равна $m = 12$ г. Размерами грузила пре- небречь.

7.58. В водоеме с глубиной $h = 10$ м всплывает деревянный цилиндр радиусом $R = 1$ м и высотой $H = 0,8$ м. Какое количество теплоты выделяется к моменту окончания движения цилиндра и воды? Ось цилиндра все время остается перпендикулярной поверхности воды. Плотность воды $\rho_b = 10^3$ кг/м³, древесины – $\rho_d = 800$ кг/м³.

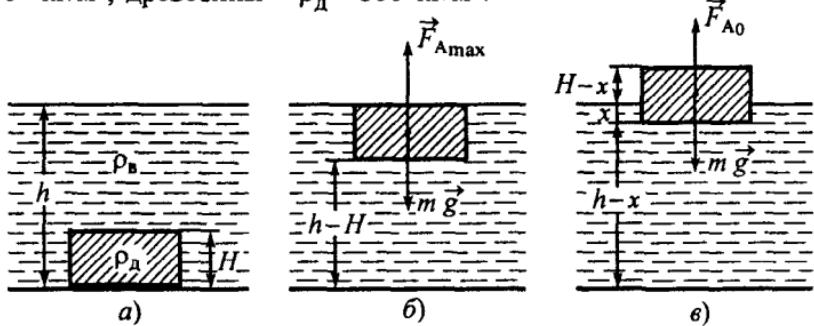


Рис. 7.44

• Решение. При движении цилиндра на него действуют две силы: сила тяжести mg и сила Архимеда F_A , причем при движении до уровня поверхности воды сила Архимеда будет оставаться постоянной и равной максимальному значению $F_{A\max} = \rho_b g S H$ (где $S = \pi R^2$ – площадь поперечного сечения цилиндра), а при переходе границы поверхности воды сила Архимеда будет меняться по линейному закону (см. решение задачи №7.55).

Поскольку плотность древесины меньше плотности воды, то $F_{A\max} > mg$. Поэтому до положения равновесия цилиндр будет подниматься с ускорением, направленным вертикально вверх. Приобретя к этому моменту времени некоторую скорость, цилиндр «прокочит» выше положения равновесия, где $F_A < mg$, а затем опустится ниже него, где $F_A > mg$, и т.д. При этом каждый раз часть механической энергии цилиндра будет переходить во внутреннюю энергию тела и воды (в тепло), и через достаточно большой промежуток времени цилиндр займет положение равновесия, где силы тяжести и Архимеда уравновесят друг друга (рис. 7.44, σ):

$$F_{A0} = mg, \quad \text{или} \quad \rho_b g S x = \rho_d g S H. \quad (1)$$

Поскольку при движении цилиндра на него действует переменная сила Архимеда, то для решения задачи воспользуемся теоремой о полной механической энергии системы в виде

$$\Delta E = A(F_{\text{стоп}}), \quad (2)$$

где изменение механической энергии цилиндра равно изменению его потенциальной энергии (рис. 7.44, a , σ)

$$\Delta E = m g (h - x), \quad (3)$$

а работа сторонних сил

$$A(F_{\text{стоп}}) = A(F_{A\max}) + A(F_A) - Q. \quad (4)$$

Первое слагаемое в выражении (4) соответствует работе постоянной силы Архимеда $F_{A\max} = \rho_b g S H$ при движении цилиндра до поверхности воды

$$A(F_{A\max}) = F_{A\max} (h - H) = \rho_b g S H (h - H). \quad (5)$$

Второе слагаемое – работе переменной силы Архимеда, среднее значение которой равно

$$\langle F_A \rangle = \frac{\rho_b g S H + \rho_b g S x}{2},$$

при переходе границы поверхности воды до положения равновесия цилиндра

$$A(F_{A\max}) = \langle F_A \rangle (H - x) = \frac{\rho_B g S H + \rho_B g S x}{2} (H - x). \quad (6)$$

Наконец, третье слагаемое – это и есть искомое количество теплоты: знак «» перед Q соответствует тому, что тепло выделяется за счет уменьшения механической энергии системы.

С учетом (3) – (6) уравнение (2) примет вид

$$mg(h - x) = \rho_B g S H (h - H) + \frac{\rho_B g S H + \rho_B g S x}{2} (H - x) - Q. \quad (7)$$

Выразив массу цилиндра через плотность и объем ($m = \rho_d S H = \rho_d \pi R^2 H$), уравнение (7) с учетом условия равновесия цилиндра (1) запишем в виде

$$\rho_d \pi R^2 H g \left\{ h - \frac{\rho_d H}{\rho_B} \right\} = \rho_B g S H (h - H) + \frac{\rho_B g S H + \rho_d g S H}{2} (H - x) - Q.$$

Отсюда находим

$$Q = \frac{\pi g R^2 H}{2 \rho_B} \left\{ (\rho_B - \rho_d) [2\rho_B h - (\rho_B + \rho_d) H] \right\} \approx 45,7 \text{ кДж.}$$

• Ответ: $Q = \frac{\pi g R^2 H}{2 \rho_B} \left\{ (\rho_B - \rho_d) [2\rho_B h - (\rho_B + \rho_d) H] \right\} \approx 45,7 \text{ кДж.}$

7.59. Пластмассовый кубик со стороной $a = 4$ см плавает в жидкости, погрузившись в нее на треть своего объема. На какую высоту над уровнем жидкости подпрыгнет кубик, если его полностью погрузить в жидкость так, чтобы верхняя грань совпала с уровнем жидкости, и отпустить?

7.60. Льдина площадью попечного сечения $S = 4 \text{ м}^2$ и толщиной $h = 0,4 \text{ м}$ плавает в воде. С какой наименьшей высоты должен прыгнуть на льдину человек массой $m = 60 \text{ кг}$, чтобы она затонула? Плотность льда $\rho_l = 900 \text{ кг}/\text{м}^3$, воды – $\rho_B = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$.

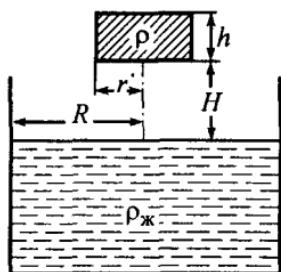


Рис. 7.45

7.61. В цилиндрический сосуд радиусом R , частично заполненный жидкостью, падает цилиндрическая пробка радиусом r и высотой h . Начальная высота нижней поверхности пробки над уровнем жидкости H (рис. 7.45). Какое количество теплоты выделится к моменту окончания движения жидкости и пробки? Плотность пробки ρ , плотность жидкости $\rho_ж > \rho$. Начальная скорость пробки равна нулю.

Движение идеальной жидкости

7.62. Определить разность давлений в широком и узком ($d_1 = 9 \text{ см}$, $d_2 = 6 \text{ см}$) коленах горизонтальной трубы (рис. 7.46), если вода в широком колене течет со скоростью $v_1 = 6 \text{ м}/\text{с}$. Плотность воды $\rho_B = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$.

• Решение. Считая воду идеальной несжимаемой жидкостью, запишем уравнение Бернуlli для горизонтальной линии тока OO'

$$p_1 + \frac{\rho_B v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho_B v_2^2} \quad (1)$$

(где v_2 – скорость течения воды в узком колене трубы; p_1 и p_2 – давления в широком и узком коленах соответственно) и уравнение непрерывности для двух сечений

$$\rho_B S_1 v_1 = \rho_B S_2 v_2, \quad (2)$$

или с учетом выражений для поперечных сечений трубы ($S_1 = \frac{1}{4} \pi d_1^2$; $S_2 = \frac{1}{4} \pi d_2^2$)

$$v_2 = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}. \quad (3)$$

Подставив (3) в (1), найдем искомую разность давлений:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} \left\{ \frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right\} \approx 7,3 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

• Ответ: $\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} \left\{ \frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right\} \approx 7,3 \cdot 10^4 \text{ Па.}$

7.63. На поршень медицинского шприца диаметром $d = 1$ см давят с постоянной силой $F = 0,2$ Н. С какой скоростью будет вытекать струя из отверстия, расположенного на оси шприца, в горизонтальном направлении? Считать, что жидкость в шприце несжимаема, а диаметр отверстия много меньше диаметра шприца. Трением и атмосферным давлением пренебречь. Плотность жидкости $\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

7.64. Насос представляет собой расположенный горизонтально цилиндр с поршнем площадью S_1 и выходным отверстием S_2 , расположенным у оси цилиндра. Определить скорость истечения струи из насоса, если поршень под действием горизонтальной силы F перемещается с постоянной скоростью. Плотность жидкости ρ . Атмосферное давление не учитывать.

7.65. На горизонтальной поверхности стоит широкий сосуд с водой. Уровень воды в сосуде h , вес сосуда вместе с водой P . В боковой стенке сосуда у дна имеется закрытое пробкой небольшое отверстие с закругленными краями площадью S . При каком значении коэффициента трения между дном и поверхностью стола сосуд придет в движение, если вынуть пробку? Плотность воды ρ .

7.66. В боковой стенке сосуда с водой просверлены одно над другим два отверстия площадью $S = 0,2 \text{ см}^2$ каждое. Расстояние между отверстиями $H = 50 \text{ см}$. В сосуд ежесекундно вливают $Q = 140 \text{ см}^3$ воды. Найти точку пересечения струй, вытекающих из отверстий.

7.67. В дне сосуда проделано отверстие сечением S_1 . В сосуд налита вода до высоты h , и уровень ее поддерживается постоянным. Определить площадь поперечного сечения струи, вытекающей из дна сосуда на расстоянии $3h$ от его дна. Считать, что струя не разбрызгивается.

• Решение. Запишем уравнение Бернулли вдоль вертикальной линии тока для сечений 0–1 (рис. 7.47)

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{\rho v_1^2}{2} \quad (1)$$

и сечений 1–2

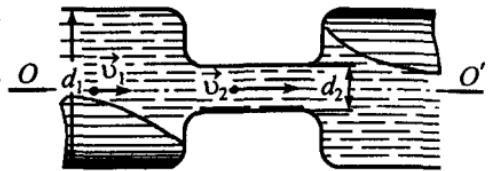


Рис. 7.46

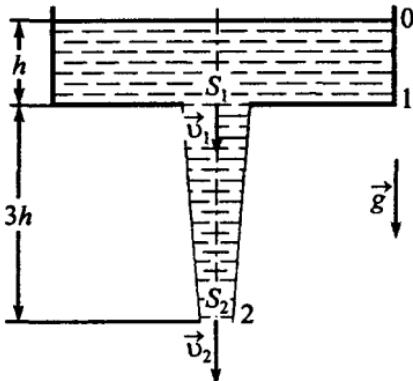


Рис. 7.47

$p_0 + \rho g h + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}$, (2)
где p_0 – атмосферное давление; v_1, v_2 – скорости воды в сечениях 1 и 2 соответственно.

Из уравнений (1) и (2) получим

$$v_1 = \sqrt{2gh}; \quad v_2 = 2\sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Учитывая несжимаемость воды, запишем условие постоянства расхода жидкости в струе в виде

$$\rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2.$$

Следовательно, площадь поперечного сечения струи

$$S_2 = S_1 \frac{v_1}{v_2},$$

$$S_2 = 0,5 S_1.$$

или с учетом выражений (3)

• Ответ: $S_2 = 0,5 S_1$.

7.68. Из брандспойта вертикально вверх бьет струя воды. Во сколько раз площадь поперечного сечения струи на высоте $h = 2$ м над концом брандспойта больше площади ее поперечного сечения у выходного отверстия, скорость струи в котором равна $v = 7$ м/с?

7.69. На какой высоте площадь поперечного сечения вертикальной струи из фонтана в три раза больше площади выходного отверстия трубы, скорость струи в котором равна $v = 6$ м/с?

7.70. Из брандспойта вертикально вверх бьет струя воды. Расход воды $Q = 60$ л/мин. Какова площадь поперечного сечения струи на высоте $h = 2$ м над концом брандспойта, если площадь поперечного сечения выходного отверстия брандспойта равна $S_0 = 1,5$ см²?

7.71. Струя воды бьет из брандспойта, установленного под некоторым углом к горизонту. Площади поперечных сечений струи у выходного отверстия брандспойта и в высшей точке траектории относятся как 1:2. Скорость струи у отверстия брандспойта $v = 9$ м/с. Под каким углом к горизонту установлен брандспойт? Какой наибольшей высоты над уровнем горизонта достигала струя?

7.72. На дне плавательного бассейна имеется отверстие для слива воды. Предположим, что скорость, с которой вода вытекает из отверстия, пропорциональна давлению воды на дно. Коэффициент пропорциональности равен k . Бассейн имеет вертикальные стенки и горизонтальное дно, площадь которого S намного больше площади сливного отверстия S_1 . Определить, как связана скорость v падения уровня воды в бассейне с высотой уровня h над дном бассейна. Плотность воды ρ . Внешним давлением пренебречь.

7.73. Из отверстия в дне высокого сосуда вытекает вода. Сечение сосуда S_1 , сечение отверстия S_2 . Уровень воды в сосуде перемещается с постоянным ускорением. Найти это ускорение.

§8. Механические колебания

В природе часто наблюдается такое движение, когда тело, перемещаясь по замкнутой траектории, возвращается в исходное положение через равные промежутки времени. Такое движение называется *периодическим*, а промежуток времени, по истечении которого движение повторяется, называется его *периодом* T . Величина, обратная периоду, называется *частотой*. Частота

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (8.1)$$

показывает, сколько раз в секунду повторяется движение. Единица измерения частоты, соответствующая периоду $T = 1$ с, называется *герцем* [Гц]: $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

Существует, очевидно, бесчисленное множество различных видов периодического движения. Мы будем рассматривать простейший случай периодического движения материальной точки вдоль определенной кривой: в этом случае говорят, что частица совершает *одномерное* движение, т.е. она обладает одной степенью свободы. Для задания положения частицы в таком случае достаточно всего одной координаты; в качестве таковой можно выбрать, например, расстояние вдоль кривой от некоторой точки, используемой в качестве начала отсчета. Обозначим эту координату буквой x . Силы, действующие на частицу, в этом случае будут зависеть от этой единственной координаты.

Гармонические колебания

Поскольку простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции синус и косинус (их период равен 2π), то простейшим одномерным периодическим движением будет такое движение материальной точки, при котором ее координата x изменяется по закону

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (8.2)$$

где A , ω_0 , α – некоторые постоянные величины.

Такое периодическое движение называется *гармоническим колебательным движением*, а частица, совершающая гармонические колебания, – *гармоническим осциллятором*.

Величины A и ω_0 имеют простой физический смысл. Так как период косинуса и синуса равен 2π , то период движения T (*период колебаний*) связан с ω_0 соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (8.3)$$

Это соотношение легко получить из условия, что частица в моменты времени t и $(t + T)$ имеет одинаковые координаты

$$x(t) = x(t + T). \quad (8.4)$$

Из (8.3) и (8.1) вытекает, что

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (8.5)$$

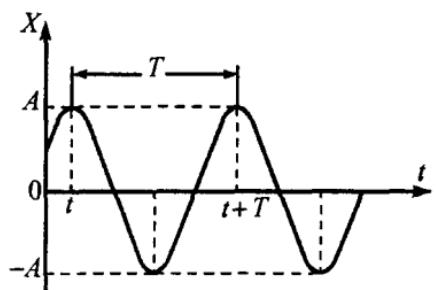


Рис. 8.1

Величину ω_0 называют *циклической* (круговой) *частотой*. Единица измерения циклической частоты – радиан в секунду [рад/с].

Максимальное значение координаты x называется *амплитудой* колебания. Так как максимальное значение косинуса и синуса равно единице, то максимальное значение координаты x при гармонических колебаниях равно A (рис. 8.1).

Аргумент косинуса или синуса в (8.2)

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \alpha \quad (8.6)$$

называют *фазой колебаний*. Из (8.6) следует, что

$$\alpha = \varphi(t=0), \quad (8.7)$$

поэтому постоянную α называют *начальной фазой*.

Из (8.2) (мы будем везде в дальнейшем использовать первую формулу для $x(t)$) легко найти скорость частицы, совершающей гармонические колебания. Взяв производную по времени от (8.2), получим

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{1}{2}\pi). \quad (8.8)$$

Как видим, при гармонических колебаниях скорость частицы также изменяется по гармоническому закону, но изменение скорости «опережает по фазе» изменение координаты на величину $\frac{1}{2}\pi$. Иначе говоря, разность фаз колебаний скорости и координаты равна $\frac{1}{2}\pi$. При этом в те моменты времени, когда координата x достигает максимальных значений $\pm A$, скорость частицы обращается в нуль, и наоборот. Максимальное значение скорости (ее амплитуда) равно

$$v_{\max} = A \omega_0. \quad (8.9)$$

Выясним, какова должна быть результирующая сила $F_x = \sum_{k=1}^N F_{kx}$, действующая на частицу, чтобы она совершала гармонические колебания. Найдем для этого ускорение частицы при таком движении. Продифференцировав (8.8) по времени, получим

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (8.10)$$

или с учетом (2)

$$a_x = -\omega_0^2 x = A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (8.11)$$

Из (8.11) видно, что ускорение изменяется со временем по такому же закону, что и координата частицы, но фаза колебаний ускорения отличается от фазы координаты на π . Наибольшее значение ускорения

$$a_{\max} = A \omega_0^2. \quad (8.12)$$

Из второго закона Ньютона для частицы массой m

$$m \ddot{x} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k = \vec{F},$$

записанного в проекции на направление движения частицы

$$m a_x = F_x$$

с учетом (8.11) получим

$$F_x = -m \omega_0^2 x. \quad (8.13)$$

Таким образом, для того чтобы частица совершила гармонические колебания, действующая на нее результирующая сила должна быть пропорциональна величине смещения частицы и направлена в сторону, противоположную этому смещению. Такую силу называют *восстанавливающей* (или *возвращающей*).

Зависимость силы от положения частицы (8.13) встречается в физических задачах очень часто. Если какое-либо тело находится в положении *устойчивого равновесия* (пусть это будет точка $x = 0$), то в этом положении $\vec{F} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k x = 0$, а при смещении тела из этого положения в ту или другую сторону возникнет отличная от нуля результирующая сила \vec{F} , действующая на тело и стремящаяся вернуть его в положение равновесия. При этом график зависимости $F_x(x)$ будет иметь вид некоторой кривой: в точке $x = 0$ сила $F_x = 0$, а по обе стороны от этой точки она имеет противоположные знаки (рис. 8.2).

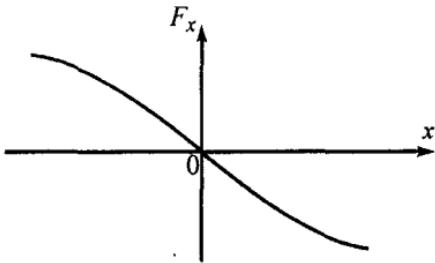


Рис. 8.2

В общем случае зависимость возвращающей силы от x не является линейной. Это означает, что хотя тело и будет совершать колебания около положения равновесия, но колебания не будут гармоническими. Однако при небольших смещениях тела из положения равновесия отрезок кривой F_x вблизи $x = 0$ можно всегда приближенно заменить отрезком прямой линии так, что сила F_x окажется пропорциональной величине отклонения x , и колебания тела будут гармоническими. Частота этих колебаний определяется жесткостью закрепления тела, характеризующей связь между силой и смещением. Если сила связана со смещением по линейному закону

$$F_x = -kx \quad (8.14)$$

(где k – некоторый коэффициент, определяемый свойствами рассматриваемой системы, называемый *коэффициентом восстанавливающей (возвращающей) силы*), то из сравнения (8.14) с выражением для силы при гармонических колебаниях (8.13) следует, что

$$k = m \omega_0^2 \quad (8.15)$$

и циклическая частота гармонических колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (8.16)$$

а период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (8.17)$$

Как видим, частота и период колебаний зависят только от свойств системы (жесткости закрепления тела около положения равновесия) и от

его массы), но не от амплитуды колебаний. Одно и то же тело, производя колебания с разной амплитудой, совершает их с одинаковой частотой. Это очень важное свойство гармонических колебаний. Напротив, амплитуда колебаний A и начальная фаза α определяются не только свойствами колеблющейся системы, но и начальными условиями ее движения, т.е. начальным смещением из положения равновесия $x_0 = x(t=0)$ и начальной скоростью $v_0 = v_x(t=0)$. Так, подставив x_0 и v_0 в (8.2) и (8.8), получим

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \alpha, \\ v_0 = -A \omega_0 \sin \alpha, \end{cases} \quad (8.18)$$

Решив систему уравнений (8.18) относительно A и α , находим

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \alpha = -\arctg \frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \quad (8.19)$$

Если систему каким-либо образом заставили совершать колебания (например, сместив из положения равновесия на x_0 или сообщив начальную скорость v_0) и предоставили самой себе, то возникающие колебания называют *собственными колебаниями*, а частоту колебаний – *собственной частотой*.

Используя выражение для возвращающей силы (8.14), нетрудно найти потенциальную энергию колеблющейся частицы. Будем считать, что потенциальная энергия $U(x)$ равна нулю в положении равновесия $x = 0$ (нулевой уровень потенциальной энергии). По определению потенциальной энергии она равна работе силы $\vec{F}(x)$ при перемещении частицы из смещенного положения x на нулевой уровень

$$U_x = A(F). \quad (8.20)$$

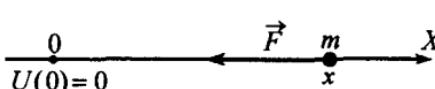


Рис. 8.3

Поскольку сила $\vec{F}(x)$ направлена к положению равновесия (рис. 8.3) и линейно зависит от x , то ее работа при таком смещении будет положительной и равна (см. §3)

$$A = \langle F \rangle (x - 0) = \frac{F(x) + F(0)}{2} x = \frac{k x^2}{2}. \quad (8.21)$$

Следовательно, потенциальная энергия гармонического осциллятора

$$U = \frac{k x^2}{2}, \quad (8.22)$$

или, учитывая (8.15),

$$U = \frac{m \omega_0^2 x^2}{2}. \quad (8.23)$$

Кинетическая энергия осциллятора

$$T = \frac{m v_x^2}{2}. \quad (8.24)$$

Подставив (8.2) и (8.8) в (8.23) и (8.24), получим

$$U = \frac{m \omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha), \quad T = \frac{m \omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha), \quad (8.25)$$

т.е. и потенциальная, и кинетическая энергии частицы в процессе колебания изменяются со временем, причем таким образом, что когда одна из них увеличивается, другая – уменьшается. Полная же энергия гармонического осциллятора

$$E = T + U = \frac{m \omega_0^2 A^2}{2} = \frac{k A^2}{2} = \text{const} \quad (8.26)$$

остается все время постоянной и равной максимальной кинетической энергии

$$T_{\max} = \frac{m \omega_0^2 A^2}{2} \quad (8.27)$$

или, что то же самое, максимальной потенциальной энергии

$$U_{\max} = \frac{k A^2}{2}. \quad (8.28)$$

Другими словами, процесс колебаний связан с периодическим переходом энергии из потенциальной в кинетическую и обратно. Средние же (за период колебаний) значения потенциальной и кинетической энергий одинаковы и каждое из них равно $\frac{1}{2} E$:

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2} E. \quad (8.29)$$

Математический маятник

В качестве примера гармонических колебаний рассмотрим малые колебания математического маятника – материальной точки массой m , подвешенной на невесомой и нерастяжимой нити длиной l в поле тяжести Земли. Когда маятник висит вертикально (рис. 8.4), сумма сил (силы тяжести Земли $m \vec{g}$ и силы натяжения нити \vec{R}), действующих на частицу,

$$\vec{F} = m \vec{g} + \vec{R} = 0, \quad (8.30)$$

т.е. частица m находится в равновесии.

Сместим частицу из положения равновесия по дуге окружности радиусом l на величину

$$x = l \theta, \quad (8.31)$$

где θ – угол отклонения нити. При этом сила тяжести $m \vec{g}$ останется без изменений, в то время как сила натяжения нити \vec{R}' изменится не только по направлению, но и по величине, в результате чего результирующая сила \vec{F} , действующая на частицу, станет отличной от нуля и будет направлена к положению равновесия (т.е. эта сила возвращающая, а положение равновесия устойчивое). Из рис. 8.4 видно, что

$$F_x = -m g \sin \theta, \quad (8.32)$$

или, используя (8.31),

$$F_x = -m g \sin(x/l). \quad (8.33)$$

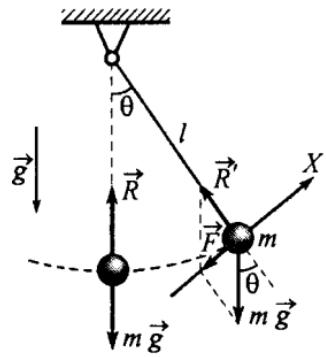


Рис. 8.4

Из (8.33) видно, что возвращающая сила F_x не зависит от x по линейному закону. Следовательно, колебания математического маятника в общем случае не являются гармоническими. Однако в случае малых колебаний, когда выполняется условие $x \ll l$, отношение $x/l \ll 1$ и $\sin(x/l) \approx x/l$. Поэтому при малых колебаниях возвращающая сила

$$F_x \approx -\frac{m g x}{l} \quad (8.34)$$

линейно зависит от x , причем коэффициент возвращающей силы

$$k = \frac{m g}{l}. \quad (8.35)$$

Таким образом, при малых смещениях от положения равновесия математический маятник колебается по гармоническому закону

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (8.36)$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (8.37)$$

Отметим, что длина маятника с периодом колебаний $T_0 = 1$ с (для стандартного значения ускорения свободного падения вблизи поверхности Земли $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$) равна 24,8 см.

Если маятник находится в глубокой шахте на глубине h или на вершине горы высотой h (не на борту спутника!), то его период колебаний будет определяться ускорением свободного падения в месте нахождения маятника. Если не учитывать вращение Земли и воспользоваться выражениями для g из §5 (см. формулы (5.14) и (5.13)), то получим, что на глубине h

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_0(1-h/R_3)}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-h/R_3}} > T_0 \quad (8.38)$$

(где T_0 – его период колебаний на поверхности Земли и R_3 – радиус Земли), а на высоте h

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l(1+h/R_3)^2}{g_0}} = T_0(1+h/R_3) > T_0. \quad (8.39)$$

Отметим, что в случае, когда глубина шахты $h \ll R_3$, стоящий в (8.38) множитель $1/\sqrt{1-h/R_3}$ можно приближенно заменить на $(1+h/2R_3)$. В этом случае период колебаний маятника

$$T \approx T_0 \left\{ 1 + \frac{h}{2R_3} \right\}. \quad (8.40)$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как изменяется колебательное движение математического маятника, если на материальную точку, кроме силы тяжести, действует еще постоянная внешняя сила F' (например, сила Архимеда, когда маятник движется в жидкости).

В положении равновесия (рис. 8.5) равнодействующая всех сил, действующих на частицу,

$$\vec{F} = m \vec{g} + \vec{F}' + \vec{R} = 0. \quad (8.41)$$

Из (8.41), в частности, следует, что в положении равновесия векторы \vec{g} (вертикаль), \vec{R} (нить) и \vec{F}' лежат в одной плоскости.

Соотношение (8.41) можно записать в виде

$$\vec{F} = m \vec{g}_{\text{эфф}} + \vec{R} = 0, \quad (8.42)$$

где

$$\vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g} + \frac{\vec{F}'}{m}, \quad (8.43)$$

т.е. в этом случае нить маятника в положении равновесия не вертикальна, а расположена вдоль вектора $\vec{g}_{\text{эфф}}$. Обратим внимание, что условие равновесия (8.42) формально совпадает с (8.30) с той лишь разницей, что в (8.30) стоит \vec{g} , а в (8.42) – $\vec{g}_{\text{эфф}}$. Поэтому все формулы, написанные после (8.30) и относящиеся к выводу периода колебания математического маятника, остаются в силе и в нашем случае, если в них заменить g на $\vec{g}_{\text{эфф}}$. Таким образом, при действии на маятник постоянной силы \vec{F}' он будет совершать малые гармонические колебания около положения равновесия, в котором нить расположена вдоль вектора $\vec{g}_{\text{эфф}}$, с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_{\text{эфф}}}{l}} \quad (8.44)$$

и периодом

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g_{\text{эфф}}}}, \quad (8.45)$$

где

$$g_{\text{эфф}} = \left| \vec{g} + \frac{\vec{F}'}{m} \right| \quad (8.46)$$

– абсолютное значение (модуль) вектора $\vec{g}_{\text{эфф}}$.

Полученные выше результаты можно использовать при рассмотрении задачи о гармонических колебаниях математического маятника, когда его точка подвеса движется относительно Земли с постоянным ускорением \vec{a}_0 . Для этого перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с точкой подвеса. Как известно, закон движения материальной точки (второй закон Ньютона) в неинерциальной системе отсчета совпадает с законом движения точки в инерциальной системе отсчета, если считать, что на материальную точку, кроме реальных сил, действует также фиктивная сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m \vec{a}_0$ (см. §2, формулу (2.20)). На основании этого можно заключить, что в случае, когда точка подвеса математического маятника движется с постоянным ускорением \vec{a}_0 , маятник может совершать малые гармонические колебания около положения устойчивого равновесия, в котором нить маятника расположена вдоль вектора

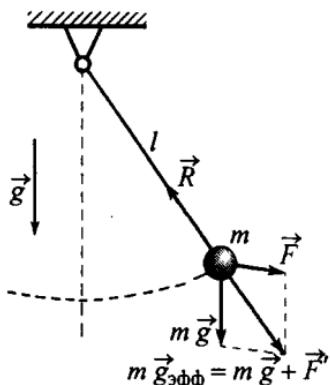


Рис. 8.5

$$\vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g} + \frac{\vec{F}_{\text{ин}}}{m} = \vec{g} - \vec{d}_0, \quad (8.47)$$

с частотой (8.44) и периодом (8.45), где

$$g_{\text{эфф}} = |\vec{g} - \vec{d}_0|. \quad (8.48)$$

Пружинный маятник

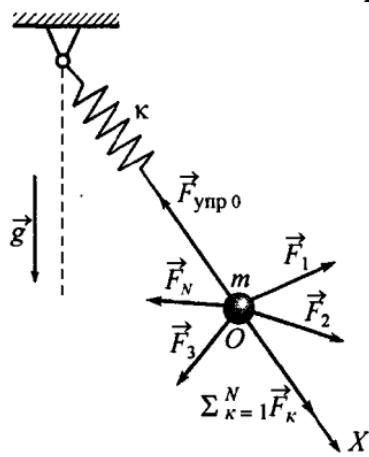


Рис. 8.6

В качестве другого примера гармонического осциллятора рассмотрим пружинный маятник – материальную точку массой m , прикрепленную к одному концу идеальной невесомой пружины жесткостью k , другой конец которой закреплен. Длина пружины в нерастянутом положении равна l_0 .

Пусть на материальную точку массой m действуют, кроме силы упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$, постоянные силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ (рис. 8.6), не зависящие ни от удлинения пружины, ни от кинематических характеристик движения материальной точки (например, ее скорости). В положении равновесия

$$\vec{F}_{\text{упр}0} = - \sum_{k=1}^N \vec{F}_k, \quad (8.49)$$

т.е. пружина будет расположена вдоль равнодействующей силы $\vec{F} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$ и растянута (или сжата) на величину

$$\Delta l = |l - l_0| = \frac{1}{k} \vec{F}_{\text{упр}0} = \frac{1}{k} \left| \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \right|. \quad (8.50)$$

Если теперь вывести пружину из положения равновесия, растянув или сжав ее на величину x , отсчитываемую от положения равновесия, то равнодействующая сила \vec{F} не изменится, а сила упругости увеличится на величину kx . В результате этого появится результирующая сила, направленная в сторону положения равновесия (возвращающая сила) и равная

$$F_x = -kx. \quad (8.51)$$

Из (8.51) видно, что возвращающая сила линейно зависит от смещения x , причем коэффициент возвращающей силы равен жесткости пружины

$$k = \text{const}, \quad (8.52)$$

а это означает, что пружинный маятник будет совершать гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.53)$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8.54)$$

около положения равновесия, в котором пружина растянута на величину, определяемую выражением (8.50).

Обратим внимание, что собственная частота (и период) колебаний пружинного маятника определяется лишь жесткостью пружины и массой маятника и не зависит от внешних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, действующих на него, от которых зависит лишь растяжение пружины в положении равновесия. Поэтому, где бы ни находился пружинный маятник (в шахте, на вершине горы или на борту спутника) и как бы ни двигалась точка закрепления пружины, его частота и период колебаний будут всегда одними и теми же.

Вынужденные колебания. Резонанс

До сих пор мы рассматривали колебательное движение тела так, как если бы оно происходило совершенно беспрепятственно. Однако если движение происходит в какой-либо среде, то эта среда оказывает сопротивление движению, стремясь замедлить его. Процесс взаимодействия тела со средой можно описать введением силы сопротивления, направленной в сторону, противоположную скорости движения тела (см. §2). При достаточно малых скоростях движения сила сопротивления пропорциональна скорости тела \vec{v}

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -r \vec{v}, \quad (8.55)$$

где r – положительная постоянная (коэффициент сопротивления), характеризующая взаимодействие тела со средой.

Выясним, как влияет наличие такого взаимодействия на колебательное движение. Будем считать при этом, что сила сопротивления настолько мала, что вызываемая ею потеря энергии ΔE за время одного периода колебаний T относительно мала, т.е. $|\Delta E/E| \ll 1$.

Потеря энергии ΔE равна (см. §3) работе силы сопротивления

$$\Delta E = \langle F_{\text{сопр}} \rangle \Delta S = -r \langle v^2 \rangle T = -2 \frac{r}{m} \left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle T, \quad (8.56)$$

где $\langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle$ – среднее значение (за период колебаний) кинетической энергии, равное половине полной энергии колебаний (см. выражение (8.29)):

$$\left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle = \frac{E}{2}. \quad (8.57)$$

Подставив (8.57) в (8.56), получим

$$\frac{\Delta E}{E} = -2 \gamma T = -\frac{4 \pi \gamma}{\omega_0}, \quad (8.58)$$

где $\gamma = r/2m$ – коэффициент затухания.

Можно показать, что при наличии силы сопротивления (8.55) полная энергия системы убывает со временем по закону

$$E = E_0 e^{-2\gamma t}, \quad (8.59)$$

где E_0 – значение энергии в начальный момент времени.

Во всякой реальной колебательной системе всегда происходят те или иные процессы трения. Поэтому свободные колебания, возникающие в системе, с течением времени затухают. Для того чтобы возбудить неза-

тухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии, обусловленные трением. Такая компенсация может производиться внешними (по отношению к колебательной системе) источниками энергии. Простейшим случаем является воздействие на систему переменной внешней силы $F_{\text{внеш}}$, изменяющейся со временем по гармоническому закону

$$F_{\text{внеш}} = F_0 \cos \omega t \quad (8.60)$$

с некоторой частотой ω . Под влиянием этой силы в системе возникнут колебания, происходящие в такт с изменением внешней силы; эти колебания называются *вынужденными*.

Запишем уравнение этих колебаний в виде

$$x = A \cos (\omega t - \beta), \quad (8.61)$$

где A – амплитуда, а β – некоторый сдвиг по фазе между вынуждающей силой и вызываемыми ею колебаниями.

Можно доказать, что амплитуда вынужденных колебаний равна

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad (8.62)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – частота собственных колебаний системы; $\gamma = r/2m$ – коэффициент затухания. Из (8.62) видно, что амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы F_0 и существенно зависит от соотношения между частотой этой силы ω и собственной частотой системы ω_0 . На рис. 8.7 представлен график зависимости амплитуды A от частоты ω при малом затухании.

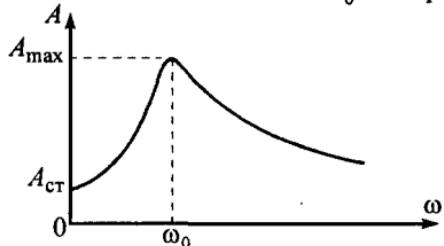


Рис. 8.7

Если коэффициент затухания γ мал (по сравнению с собственной частотой ω_0), то наибольшего значения амплитуда колебаний достигает приблизительно при совпадении частот ω и ω_0 , или, как говорят, при *резонансе*.

При $\omega = \omega_0$ максимальное значение

$$A_{\max} = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} \quad (8.63)$$

обратно пропорционально коэффициенту затухания γ . По этой причине при резонансе нельзя пренебрегать трением в системе, даже если оно мало. Кривая на рис. 8.7 называется *резонансной кривой*.

Сравним значение A_{\max} со смещением $A_{\text{ст}}$, которое испытывало бы тело под действием постоянной (статической) силы, равной F_0 . Смещение $A_{\text{ст}}$ можно найти из общей формулы для амплитуды (8.62), положив в ней $\omega = 0$ (при $\omega = 0$ сила $F_{\text{внеш}} = F_0 \cos \omega t = F_0$):

$$A_{\text{ст}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}. \quad (8.64)$$

Отношение резонансного смещения к статическому равно

$$\frac{A_{\max}}{A_{\text{ст}}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (8.65)$$

Мы видим, что относительное увеличение амплитуды колебаний при резонансе (по сравнению со статическим отклонением) определяется отношением частоты собственных колебаний к коэффициенту затухания. Для систем с малым затуханием это отношение может быть очень большим. Это обстоятельство разъясняет огромное значение явления резонанса в физике и технике. Им широко пользуются, если хотят усилить колебания, и всячески избегают, если резонанс может привести к нежелательному росту колебаний.

Рекомендации по решению задач

При гармонических колебаниях движение тела может быть задано одним из уравнений:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad x = A \sin(\omega_0 t + \beta); \quad x = A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t,$$

где $\beta = \alpha + \frac{1}{2}\pi$; $A_1 = A \cos \alpha$; $A_2 = -A \sin \alpha$; $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Так как любое из этих уравнений легко можно привести к виду двух других, ниже будем использовать только одну из формул задания движения, например, первую.

Если известен закон движения тела (т.е. амплитуда, циклическая частота и начальная фаза колебаний), то основные характеристики системы, совершающей гармонические колебания, легко найти на основании определений:

1. *Период T и частота v колебаний связаны с циклической частотой ω_0 соотношениями (8.3) и (8.5).*

2. *Смещение тела относительно положения равновесия в произвольный момент времени определяется уравнением движения (8.2), записанным для этого момента времени.*

3. *Скорость тела изменяется со временем по такому же гармоническому закону, что и его координата, но изменение скорости «опережает по фазе» изменение координаты на величину $\frac{1}{2}\pi$; т.е. в те моменты времени, когда смещение тела относительно положения равновесия достигает максимальных значений (крайние точки), скорость тела равна нулю, и, наоборот, — в положении равновесия скорость тела максимальна и равна $v_{\max} = \omega_0 A$. Скорость тела в любой момент движения направлена по касательной к траектории в сторону движения, а ее величина определяется выражением (8.8).*

4. *Ускорение тела изменяется со временем по такому же закону, что и его координата и скорость, но изменение ускорения «опережает по фазе» изменение координаты на величину π , а скорости — на величину $\frac{1}{2}\pi$; т.е. в те моменты времени, когда смещение тела относительно положения равновесия максимально, его ускорение также максимально и равно $a_{\max} = \omega_0^2 A$, а в положении равновесия ускорение равно нулю. Следует помнить, что при гармонических колебаниях ускорение тела всегда направлено к положению равновесия (т.е. противоположно смещению) и в произвольный момент времени определяется выражением (8.10) или (8.11).*

5. *Потенциальная и кинетическая энергии тела в процессе движения изменяются по законам (8.25), причем таким образом, что когда одна из них увеличивается, другая — уменьшается. Потенциальная энергия имеет максимальное значение $U_{\max} = \frac{1}{2} A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$ в крайних точках, а кинетическая $T_{\max} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$ — в положении равновесия. Полная энергия при гармонических колебаниях остается постоянной и равной максимальной потенциальной U_{\max} или максимальной кинетической T_{\max} энергии. Средние за период колебаний значения потенциальной и кинетической энергий одинаковы и равны половине полной энергии.*

В ряде задач этого параграфа, прежде чем приступить к определению тех или иных характеристик колеблющейся системы, необходимо составить уравнение гармонических колебаний

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

в которое входят три величины – амплитуда A , начальная фаза α и циклическая частота ω_0 – значения которых требуется определить из условий конкретной задачи.

Для определения частоты колебаний существует несколько способов. Можно:

- привести уравнение движения тела к виду

$$a_x + \omega_0^2 x = 0,$$

которое называют дифференциальным уравнением гармонических колебаний;

– использовать теорему о полной механической энергии и полученное выражение про-дифференцировать по времени. В результате также получим дифференциальное уравнение колебаний;

– использовать связь восстанавливающей силы со смещением (8.14), а циклическую частоту определить через коэффициент возвращающей силы в соответствии с (8.16).

Для определения частоты гармонических колебаний первым способом можно придерживаться следующей схемы:

а) сделать схематический чертеж, на котором изобразить тело, колебания которого ис-следуются, в положении равновесия. Мысленно заменить данное тело телом другой массы. Если при этом положение равновесия изменится, то следует записать условие равновесия данного тела. Если же при замене тела положение равновесия останется прежним, то усло-вие равновесия можно не писать;

б) мысленно сместить тело из положения равновесия и отпустить. Представить, по какой траектории будет двигаться тело, предоставленное самому себе, и изобразить на ри-сунке положение тела в произвольный момент движения (исключая положение равновесия и крайние точки). Изобразить на чертеже все силы, действующие на тело в данный момент движения;

в) ввести удобную систему координат, одну из осей которой (например, ось OX) на-править вдоль движения в сторону увеличения смещения;

- г) записать уравнение движения тела

$$m \vec{a} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$$

в проекции на выбранную ось в виде

$$m a_x = \sum_{k=1}^N F_{kx};$$

д) записать результирующую силу $F_x = \sum_{k=1}^N F_{kx}$ с учетом условия равновесия и до-полнительных условий задачи (например, условия малости колебаний, которое означает, что смещения тела относительно положения равновесия малы по сравнению с другими разме-рами системы). При этом два или более слагаемых в $\sum_{k=1}^N F_{kx}$ должны сократиться, а ре-зультирующая сила F_x приобрести вид $F_x = -kx$, где k – некоторая положительная посто-янная. В этом случае сила F_x будет возвращающей и будет выполнено условие (8.14), не-обходимое для наличия гармонических колебаний, а уравнение движения тела примет вид

$$m a_x + kx = 0, \quad \text{или} \quad a_x + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – циклическая частота колебаний.

Рассмотрим, как можно получить значение частоты ω_0 колебаний, используя теорему о полной механической энергии. Для этого следует:

- а) выполнить пункты а–в, записанные для первого способа;

б) если при движении тела меняется его высота относительно поверхности Земли, то следует выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии на уровне положения равновесия тела (такой выбор не обязательен, но наиболее удобен);

- в) записать теорему о полной механической энергии

$$E_2 - E_1 = A(F_{\text{стор}})$$

при перемещении тела из начального положения в положение, соответствующее смещению тела относительно положения равновесия на величину x . Поскольку при определении час-

тоты колебаний мы сами задаем начальные параметры системы (например, начальное смещение из положения равновесия), то начальная энергия будет равна полной энергии колебаний, т.е. $E_1 = \text{const}$. В произвольный момент движения система будет иметь кинетическую энергию $\frac{1}{2} m v^2$, потенциальную U и полную $E_2 = \frac{1}{2} m v^2 + U$. Если при движении тело смещается по вертикали, то его потенциальная энергия в поле тяжести Земли равна $\pm m g x$, где знак «+» соответствует положению тела выше положения равновесия, знак «-» — ниже. Если тело совершает колебания на пружине жесткостью k , то в выражение для U войдет также энергия пружины $\frac{1}{2} k (x_1 + x)^2$, где x_1 — деформация пружины в начальном положении. Поэтому в общем случае $U = \pm m g x + \frac{1}{2} k (x_1 + x)^2$. Если в процессе движения на тело действуют сторонние силы, то следует найти работу этих сил на рассматриваемом перемещении. В рамках школьной программы сторонние силы либо работы не совершают (перпендикулярны направлению перемещения), либо линейно зависят от величины перемещения (например, при колебаниях на границе раздела «воздух — жидкость» сила Архимеда пропорциональна глубине погружения тела в жидкость). В общем случае $A(F_{\text{стор}}) = \pm \frac{1}{2} (F_{\text{стор 1}} + F_{\text{стор 2}}) x$, где $F_{\text{стор 1}}, F_{\text{стор 2}}$ — значения сторонних сил в начальном и конечном положениях тела, причем $F_{\text{стор 2}} \sim x$,

г) записать теорему о полной механической энергии в виде

$$\frac{m v^2}{2} \pm m g x + \frac{k (x_1 + x)^2}{2} - E_1 = \pm \frac{(F_{\text{стор 1}} + F_{\text{стор 2}})}{2} x$$

и взять производную по времени от левой и правой его частей с учетом, что

$$\frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} = 2xv; \quad \frac{dv^2}{dt} = 2v \frac{dv}{dt} = 2v a_x; \quad \frac{dE_1}{dt} = 0.$$

В результате получим уравнение, которое с учетом условий равновесия примет вид уравнения движения

$$a_x + \omega_0^2 x = 0,$$

где коэффициент ω_0 — циклическая частота колебаний.

Рассмотрим, наконец, третий способ определения частоты ω_0 колебаний через коэффициент возвращающей силы. Для этого нужно поступить следующим образом:

а) выполнить пункты а–в, записанные для первого способа;

б) спроектировать силы, действующие на тело в произвольный момент движения, на выбранную ось OX , и записать выражение для результирующей силы в виде $F_x = \sum_{k=1}^N F_{k,x}$, в которое со знаком «плюс» войдут проекции сил, направленных под острым углом к оси (т.е. направленных от положения равновесия), а со знаком «минус» — проекции сил, которые составляют тупой угол с осью (т.е. направлены к положению равновесия);

в) записать выражение для результирующей силы F_x с учетом условия равновесия;

г) если сила F_x примет вид $F_x = -kx$, то тело будет совершать гармонические колебания, при которых коэффициент k возвращающей силы связан с циклической частотой ω_0 выражениями (8.15) — (8.16). Если $F_x \neq -kx$, то следует учесть дополнительные условия задачи, чтобы привести F_x к требуемому виду; д) по известному коэффициенту возвращающей силы определить циклическую частоту колебаний.

Все три рассмотренных способа равноправны и приводят к одному результату. Однако второй способ наиболее сложен, поэтому к нему следует прибегать только в крайних случаях.

Если исследуются колебания математического или пружинного маятника, циклическая частота может быть определена через параметры системы (длину нити, жесткость пружины и массу маятника) с помощью формул (8.36) или (8.53) соответственно.

Период (и частота) колебаний математического маятника, находящегося в шахте или на горе, зависит от ускорения свободного падения в месте нахождения маятника и может быть определен с помощью формул (8.38) или (8.39). Если на математический маятник, кроме силы тяжести и силы натяжения нити, действуют и другие внешние постоянные силы

\vec{F}_k , то циклическая частота (или период) колебаний может быть определена по формуле (8.44) (или (8.45)), где $g_{\text{эфф}} = |\vec{g} + \sum_{k=1}^N \vec{F}_k/m|$. Такой внешней силой может быть сила Архимеда (если маятник целиком находится в жидкости), сила Кулона (если маятник имеет заряд и существует внешнее электрическое поле), сила притяжения магнита (если груз маятника представляет собой железный шарик, помещенный вблизи постоянного магнита) и др. Если точка подвеса маятника движется с постоянным ускорением \vec{a}_0 (например, если маятник установлен на ракете, в лифте и т.п.), то циклическая частота и период колебаний могут быть найдены по тем же формулам (8.44) и (8.45), где величина $g_{\text{эфф}}$ определяется выражением (8.48). Следует помнить, что $g_{\text{эфф}}$ равно модулю геометрической суммы векторов, поэтому в общем случае для его определения нужно применить теорему косинусов.

Частота и период колебаний пружинного маятника, в отличие от математического, не зависят от наличия внешних сил и ускорения точки подвеса и определяются только параметрами системы – жесткостью пружины и массой маятника.

Выясним теперь, как можно определить амплитуду и начальную фазу колебаний.

Для того чтобы тело пришло в движение, можно: а) сместить его из положения равновесия на величину x_0 и предоставить самому себе; б) сообщить ему некоторую начальную скорость v_0 в направлении возможного движения; в) сделать то и другое, т.е. задать начальное смещение x_0 и сообщить скорость v_0 . При этом x_0 и v_0 называют начальными условиями движения.

Если значения x_0 и v_0 известны (заданы или определены из дополнительных условий задачи), то амплитуда A и начальная фаза α колебаний могут быть найдены с помощью формул (8.19). Как следует из (8.19), если в начальный момент движения тело было смещено из положения равновесия и отпущено без начальной скорости, то начальная фаза колебаний равна нулю, если же $x_0 = 0$, а $v_0 \neq 0$, то начальная фаза $\alpha = -\frac{1}{2}\pi$. Следует отметить, что соотношения (8.19) справедливы лишь для маятников, совершающих гармонические колебания по закону косинуса. Если же колебания происходят по закону синуса, то формула для амплитуды не изменится, а начальную фазу следует искать по формуле $\alpha = \arctg(\omega_0 x_0/v_0)$.

Если найдены циклическая частота колебаний, их амплитуда и начальная фаза, то, записав уравнение колебаний, можно найти любые характеристики системы.

Наконец, могут встретиться задачи, в которых тело, совершающее гармонические колебания, подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. При этом в системе будут наблюдаться вынужденные колебания, амплитуда которых зависит от частоты вынуждающей силы в соответствии с формулой (8.62). Если затухания в системе малы, то при совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой ω_0 в системе будет наблюдаться резонанс, при котором амплитуда колебаний достигнет максимально возможных значений (8.63). При решении задач, в которых на тело в процессе колебаний действует какая-либо внешняя периодическая сила, кроме собственной частоты ω_0 , требуется определить частоту ω этой силы по условию конкретной задачи. Дальнейшее решение может быть основано на формулах (8.61) – (8.65).

Задачи

Гармонические колебания

8.1. Частица совершает гармонические колебания по закону $$x = 0,4 \sin(\pi t + \frac{1}{6}\pi) [\text{см}]$$

Какой путь пройдет частица за $\Delta t = 11/6$ с после начала движения?

• **Решение.** Как следует из закона движения, частица будет совершать колебания с частотой $\omega_0 = \pi$ рад/с, периодом $T = 2\pi/\omega_0 = 2$ с и амплитудой $A = 0,4$ см. Поскольку при гармонических колебаниях частица возвращается в исходное положение через промежутки времени,

равные периоду колебаний, то при движении она обязательно разворачивается. Как известно, в точках разворота скорость частицы равна нулю. Зависимость скорости частицы от времени найдем, взяв производную по времени от закона движения:

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,4 \pi \cos(\pi t + \frac{1}{6}\pi).$$

В точках разворота $v(t_p) = 0$, т.е.

$$0 = 0,4 \pi \cos(\pi t_p + \frac{1}{6}\pi).$$

Следовательно, частица будет менять направления движения в моменты времени, удовлетворяющие условию

$$\pi t_p + \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда находим

$$t_{p1} = \frac{1}{3} \text{ с}; \quad t_{p2} = \frac{4}{3} \text{ с}; \quad t_{p3} = \frac{7}{3} \text{ с и т.д.}$$

Поскольку за время от $t_0 = 0$ до $\tau = \Delta t$ частица совершает два разворота (в моменты времени t_{p1} и t_{p2}), то путь, пройденный частицей за время Δt (см. §1, решение задачи №1.26),

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3,$$

где ΔS_1 – путь, пройденный от начала движения t_0 до момента разворота t_{p1} ; ΔS_2 – путь, пройденный от момента t_{p1} до момента времени t_{p2} ; ΔS_3 – путь, пройденный от момента t_{p2} до момента времени τ :

$$\Delta S_1 = |x(t_{p1}) - x(t_0)|; \quad \Delta S_2 = |x(t_{p2}) - x(t_{p1})|; \quad \Delta S_3 = |x(\tau) - x(t_{p2})|,$$

или

$$\Delta S_1 = |0,4 \sin(\pi t_{p1} + \frac{1}{6}\pi) - 0,4 \sin(\pi t_0 + \frac{1}{6}\pi)| = |0,4 \sin(\frac{1}{2}\pi) - 0,4 \sin(\frac{1}{6}\pi)| = 0,2 \text{ см};$$

$$\Delta S_2 = |0,4 \sin(\pi t_{p2} + \frac{1}{6}\pi) - 0,4 \sin(\pi t_{p1} + \frac{1}{6}\pi)| = |0,4 \sin(\frac{3}{2}\pi) - 0,4 \sin(\frac{1}{2}\pi)| = 0,8 \text{ см};$$

$$\Delta S_3 = |0,4 \sin(\pi \tau + \frac{1}{6}\pi) - 0,4 \sin(\pi t_{p2} + \frac{1}{6}\pi)| = |0,4 \sin(2\pi) - 0,4 \sin(\frac{3}{2}\pi)| = 0,4 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$\Delta S = 1,4 \text{ см.}$$

• Ответ: $\Delta S = 1,4 \text{ см.}$

8.2. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону

$$x = 7 \sin \frac{1}{2}\pi t [\text{см}].$$

Через какое время после начала движения точка пройдет путь от положения равновесия до максимального смещения?

8.3. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону

$$x = 0,1 \sin(2\pi t) [\text{м}].$$

Найти среднюю путевую скорость точки: а) за половину периода; б) за первую $\frac{1}{8}$ часть периода; в) за вторую $\frac{1}{8}$ часть периода.

8.4. Частица совершает гармонические колебания по закону

$$x = A \sin(2\pi t + \frac{1}{6}\pi) [\text{м}],$$

где A – известная постоянная. В какие моменты времени кинетическая энергия частицы равна потенциальной?

• Решение. При гармонических колебаниях частица через равные промежутки времени будет возвращаться в исходное состояние, поэтому значения ее координат и скоростей будут повторяться. Поскольку кинетическая энергия частицы зависит от ее скорости, а потенциальная – от координаты, то, очевидно, значения этих энергий также будут повторяться. Так

как при гармонических колебаниях полная механическая энергия частицы не меняется, то кинетическая и потенциальная энергии будут изменяться со временем таким образом, что когда одна из них увеличивается, то другая – уменьшается. Поэтому в определенные моменты времени они будут равны друг другу.

Рассмотрим уравнение гармонических колебаний частицы в виде

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (1)$$

Продифференцировав уравнение (1) по времени, получим выражение для скорости частицы

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (2)$$

Кинетическая и потенциальная энергия частицы массой m в любой момент времени

$$T = \frac{m v^2}{2} = \frac{m \omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha), \quad U = \frac{k x^2}{2} = \frac{m \omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha), \quad (3)$$

где учтено, что $\omega_0^2 = k/m$ (k – коэффициент возвращающей силы).

Разделив первое из уравнений (3) на второе, получим

$$\frac{T}{U} = \operatorname{tg}^2(\omega_0 t + \alpha).$$

В искомые моменты времени τ

$$T(\tau) = U(\tau).$$

Следовательно, кинетическая энергия частицы равна потенциальной в моменты времени τ , удовлетворяющие условию

$$\operatorname{tg}(\omega_0 \tau + \alpha) = \pm 1.$$

Отсюда находим

$$\omega_0 \tau_1 + \alpha = \frac{1}{4} \pi + n \pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\omega_0 \tau_2 + \alpha = -\frac{1}{4} \pi + n' \pi, \text{ где } n' = 0, 1, 2, \dots$$

С учетом условия задачи ($\omega_0 = 2 \pi$, $\alpha = \frac{1}{6} \pi$) получим

$$2 \pi \tau_1 + \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{4} \pi + n \pi, \quad \tau_1 = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} n \text{ с};$$

$$2 \pi \tau_2 + \frac{1}{6} \pi = -\frac{1}{4} \pi + n' \pi, \quad \tau_2 = -\frac{5}{24} + \frac{1}{2} n' \text{ с},$$

или $\tau = \frac{1}{24} + \frac{1}{4} n \text{ с}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

• Ответ: $\tau = \frac{1}{24} + \frac{1}{4} n \text{ с}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

8.5. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону

$$x = 4 \sin(\pi t - \frac{1}{6} \pi) [\text{см}].$$

Через какой промежуток времени после начала движения кинетическая энергия частицы во второй раз достигнет максимального значения?

8.6. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону

$$x = 5 \sin 2t [\text{м}].$$

В момент времени, когда возвращающая сила впервые достигла значения $F = 5 \cdot 10^{-3}$ Н, потенциальная энергия точки стала равной $U = 6 \cdot 10^{-3}$ Дж. Определить этот момент времени.

8.7. В процессе гармонических колебаний максимальная скорость частицы $v_{\text{шах}} = 2 \text{ см/с}$, а максимальное ускорение $-a_{\text{max}} = 1 \text{ см/с}^2$. Определить циклическую частоту и амплитуду колебаний, а также скорость частицы в момент времени, когда ее смещение относительно положения равновесия равно половине максимального.

• Решение. Смещение частицы относительно положения равновесия в произвольный момент времени t определяется уравнением гармонических колебаний

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1)$$

Дважды последовательно продифференцировав (1) по времени, получим зависимости скорости и ускорения частицы от времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) следует, что максимальные значения скорости и ускорения частицы, совершающей гармонические колебания, равны соответственно

$$v_{\max} = A \omega_0, \quad a_{\max} = A \omega_0^2. \quad (4)$$

Следовательно, циклическая частота и амплитуда колебаний

$$\omega_0 = \frac{a_{\max}}{v_{\max}} = 0,5 \text{ рад/с}, \quad A = \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}} = 4 \text{ см}.$$

Чтобы найти скорость частицы в момент времени, соответствующий определенному положению частицы, получим зависимость скорости частицы от ее координаты. Для этого исключим время в уравнениях (1) и (2), переписав их в виде

$$\cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{x^2}{A^2}, \quad \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{v^2}{A^2 \omega_0^2}$$

и сложив:

$$1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega_0^2}.$$

Отсюда находим

$$v = \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2},$$

или с учетом выражения для циклической частоты ω_0 и условия задачи ($x = \frac{1}{2} A$)

$$v = \omega_0 \sqrt{A^2 - \frac{1}{4} A^2} = \frac{\omega_0 A \sqrt{3}}{2} = \frac{v_{\max} \sqrt{3}}{2} \approx 1,73 \text{ см/с}.$$

• Ответ: $\omega_0 = \frac{a_{\max}}{v_{\max}} = 0,5 \text{ рад/с}; A = \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}} = 4 \text{ см}; v = \frac{v_{\max} \sqrt{3}}{2} \approx 1,73 \text{ см/с}.$

8.8. Частица совершает гармонические колебания с частотой $v = 0,5 \text{ Гц}$ и амплитудой $A = 3 \text{ см}$. Определить скорость частицы в момент времени, когда ее смещение относительно положения равновесия равно $\frac{1}{2} A$.

8.9. Тело массой $m = 100 \text{ г}$ совершает гармонические колебания. На расстояниях $x_1 = 40 \text{ см}$ и $x_2 = 0,4\sqrt{2} \text{ м}$ от положения равновесия скорости тела равны $v_1 = 3\sqrt{3} \text{ м/с}$ и $v_2 = 3\sqrt{2} \text{ м/с}$ соответственно. Найти полную энергию тела.

8.10. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой A и частотой ω_0 . Определить начальную скорость точки и ее смещение относительно положения равновесия в начальный момент времени, если в этот момент ее кинетическая энергия равна T , а потенциальная U .

8.11. Ареометр – прибор для измерения плотности жидкостей – представляет собой цилиндрическую запаянную стеклянную трубку, один конец которой тяжелее, чем другой. Площадь поперечного сечения ареометра S , масса m . Найти период малых вертикальных колебаний ареометра в жидкости плотностью ρ . Силами вязкого трения пренебречь.

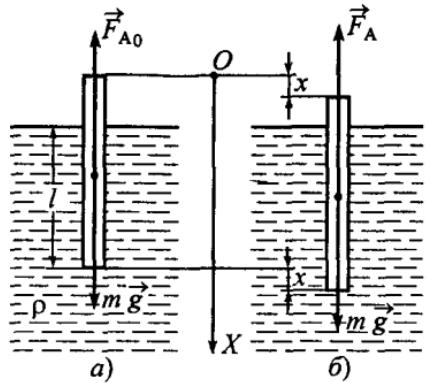


Рис. 8.8

о жидкости, то при движении ареометра на него будут действовать сила тяжести $m \vec{g}$ и сила Архимеда \vec{F}_A , причем величина силы \vec{F}_A будет меняться вместе с глубиной погружения прибора в жидкость. В положениях, когда ареометр будет находиться ниже положения равновесия, сила $F_A > m g$; если прибор будет находиться выше положения равновесия, то сила $F_A < m g$. Причем в том и другом положениях результирующая сила будет направлена к положению равновесия, т.е. будет возвращающей.

Рассмотрим три способа определения периода колебаний, предложенные в рекомендациях по решению задач данного параграфа.

1 способ. Рассмотрим произвольный момент движения ареометра, например, когда он погружен в жидкость на глубину x относительно положения равновесия (рис. 8.8, б).

Направим ось Ox вдоль движения ареометра в сторону смещения, т.е. вниз, и запишем уравнение движения прибора

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_A$$

в проекции на выбранную ось

$$ma_x = m g - F_A, \quad (2)$$

где $F_A = \rho g (l+x) S$. С учетом условия равновесия (1) уравнение движения (2) запишем в виде

$$ma_x = \rho g l S - \rho g (l+x) S, \quad \text{или} \quad a_x + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\rho g S / m}$ – циклическая частота колебаний ареометра, которая связана с периодом соотношением $T = 2\pi / \omega_0$.

Следовательно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

2 способ. Пусть энергия ареометра в момент времени, соответствующий началу колебаний, равна E_{\max} . Выберем нулевой уровень отсчета потенциальной энергии в положении равновесия и воспользуемся теоремой о полной механической энергии в виде

$$\Delta E = A(F_A), \quad (4)$$

где изменение энергии

$$\Delta E = \frac{m v^2}{2} - m g x - E_{\max}, \quad (5)$$

а работа силы Архимеда

$$A(F_A) = - \langle F_A \rangle x. \quad (6)$$

Поскольку среднее значение силы Архимеда на перемещении x равно

$$\langle F_A \rangle = \frac{\rho g l S + \rho g (l+x) S}{2}, \quad (7)$$

то выражение (4) с учетом (5) – (7) примет вид

$$\frac{m v^2}{2} - m g x - E_{\max} = - \frac{\rho g l S + \rho g (l+x) S}{2} x. \quad (8)$$

• Решение. В положении равновесия на ареометр действуют сила тяжести $m \vec{g}$ и сила Архимеда \vec{F}_{A0} (рис. 8.8, а), причем

$$m g = F_{A0}, \quad \text{или} \quad m g = \rho g l S, \quad (1)$$

где l – длина погруженной в жидкость части прибора.

Чтобы найти период колебаний ареометра, заставим его двигаться. Для этого прибор можно сместить из положения равновесия на малую величину x_0 (т.е. изменить потенциальную энергию) и отпустить или сообщить ему вертикальную скорость v_0 (т.е. сообщить кинетическую энергию). Если пренебречь силой вязкого трения

Взяв производную по времени от левой и правой частей (8), получим

$$m a_x v - m g v = -\rho g l S v - \rho g x S v, \quad (9)$$

где учтено, что

$$v = \frac{dx}{dt}; \quad a_x = \frac{dv}{dt}; \quad \frac{dE_{\max}}{dt} = 0.$$

Следовательно, уравнение (9) можно записать в виде

$$m a_x - (m g - \rho g l S) + \rho g x S = 0,$$

или с учетом условия равновесия (1)

$$a_x + \omega_0^2 x = 0, \quad (10)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\rho g S / m}$. Как видим, уравнение (10) совпадает с (3). Следовательно,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

3 способ. Спроектируем на ось OX силы, действующие на ареометр в положении, показанием на рис. 8.8, б. Результирующая сила

$$F_x = m g - F_A = m g - \rho g (l + x) S,$$

или с учетом условия равновесия (1)

$$F_x = -\rho g x S,$$

направлена к положению равновесия и пропорциональна смещению x прибора относительно этого положения. Поэтому ареометр будет совершать гармонические колебания, при которых сила F_x связана со смещением x зависимостью

$$F_x = -kx,$$

где k – коэффициент возвращающей силы. Следовательно,

$$k = \rho g S.$$

Используя выражение для периода гармонических колебаний через коэффициент возвращающей силы

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

• Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$.

8.12. Набухшее бревно постоянного сечения плавает в воде в вертикальном положении так, что над водой находится лишь малая по сравнению с длиной часть бревна. Период малых вертикальных колебаний бревна $T = 2$ с. Найти длину бревна. Силами вязкого трения пренебречь.

8.13. В воде плавает льдина, имеющая форму куба со стороной $a = 50$ см. Льдину погружают на небольшую глубину (не потопляя ее полностью) и отпускают, в результате чего она начинает совершать гармонические колебания с амплитудой $A = 5$ см. Определить энергию колебаний льдины. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³. Силами вязкого трения пренебречь.

8.14. Внутри гладкой сферической поверхности радиуса $R = 10$ см находится небольшой шарик массой $m = 10$ г (рис. 8.9), который совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение шарика из положения равновесия, измеренное вдоль поверхности сферы, равно $S_{\max} = 5$ мм. Чему равны циклическая частота и энергия колебаний шарика?

• *Решение.* При движении шарика на него будут действовать сила тяжести $m \vec{g}$ и сила реакции \vec{N} . Поскольку движение шарика происходит по дуге окружности, то введем сопро-

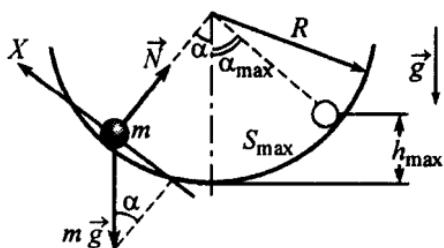


Рис. 8.9

Длина дуги окружности радиусом R , соответствующая центральному углу α , равна $x = R \alpha$. Следовательно, уравнение (1) примет вид

$$a_t + \frac{g}{R}x = 0, \quad \text{или} \quad a_t + \omega_0^2 x = 0, \quad (2)$$

где циклическая частота

$$\omega_0 = \sqrt{g/R} \approx 9,9 \text{ рад/с.} \quad (3)$$

Рассмотрим второй способ определения ω_0 .

Поскольку при движении шарика механическая энергия сохраняется (единственная сторонняя сила \vec{N} направлена перпендикулярно траектории и работы не совершает), то энергия шарика при максимальном смещении из положения равновесия $E_{\max} = mgh_{\max}$ равна энергии $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ в момент времени, когда шарик находится на высоте $h = R - R \cos \alpha$ (рис. 8.9, нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбран на уровне нижней точки сферы):

$$\frac{m v^2}{2} + m g R (1 - \cos \alpha) = m g h_{\max}. \quad (4)$$

Взяв производную по времени от обеих частей (4), получим

$$m v \frac{dv}{dt} + m g R \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = 0. \quad (5)$$

Если учесть, что $dv/dt = a_t$ – тангенциальное ускорение шарика; $d\alpha/dt = \omega$ – его угловая скорость и $v = \omega R$, то уравнение (5) можно записать в виде

$$a_t + g \sin \alpha = 0. \quad (6)$$

Как видим, уравнение (6) совпадает с (1). Далее решение задачи совпадает с первым способом.

Рассмотрим, наконец, третий способ определения ω_0 .

Спроектируем на ось OX силы, действующие на шарик в положении, показанном на рис. 8.9:

$$F_x = -m g \sin \alpha.$$

Так как шарик совершает гармонические колебания, то сила F_x связана со смещением x зависимостью

$$F_x = -kx,$$

где k – коэффициент возвращающей силы; $x = \alpha R$ – величина смещения шарика из положения равновесия. Следовательно,

$$m g \sin \alpha = k \alpha R,$$

или с учетом малости угла α

$$m g \alpha = k \alpha R; \quad k = \frac{m g}{R}.$$

Используя выражение для циклической частоты колебаний через коэффициент возвращающей силы

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},$$

получим

$$\omega_0 = \sqrt{g/R}.$$

вождающую систему отсчета (см. §4) и уравнение движения шарика запишем в проекции на ось OX , направленную по касательной к траектории,

$$m a_t = -m g \sin \alpha, \quad \text{или} \quad a_t + g \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

Поскольку максимальное смещение шарика из положения равновесия равно S_{\max} , то наибольшее значение угла α

$$\alpha_{\max} = S_{\max}/R = 0,05 \text{ рад} \approx 2,87^\circ.$$

При столь малых углах $\sin \alpha \approx \alpha$, где угол α выражен в радианах.

Длина дуги окружности радиусом R , соответствующая центральному углу α , равна $x = R \alpha$. Следовательно, уравнение (1) примет вид

$$a_t + \frac{g}{R}x = 0, \quad \text{или} \quad a_t + \omega_0^2 x = 0, \quad (2)$$

где циклическая частота

$$\omega_0 = \sqrt{g/R} \approx 9,9 \text{ рад/с.} \quad (3)$$

Рассмотрим второй способ определения ω_0 .

Поскольку при движении шарика механическая энергия сохраняется (единственная сторонняя сила \vec{N} направлена перпендикулярно траектории и работы не совершает), то энергия шарика при максимальном смещении из положения равновесия $E_{\max} = mgh_{\max}$ равна энергии $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ в момент времени, когда шарик находится на высоте $h = R - R \cos \alpha$ (рис. 8.9, нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбран на уровне нижней точки сферы):

$$\frac{m v^2}{2} + m g R (1 - \cos \alpha) = m g h_{\max}. \quad (4)$$

Взяв производную по времени от обеих частей (4), получим

$$m v \frac{dv}{dt} + m g R \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = 0. \quad (5)$$

Если учесть, что $dv/dt = a_t$ – тангенциальное ускорение шарика; $d\alpha/dt = \omega$ – его угловая скорость и $v = \omega R$, то уравнение (5) можно записать в виде

$$a_t + g \sin \alpha = 0. \quad (6)$$

Как видим, уравнение (6) совпадает с (1). Далее решение задачи совпадает с первым способом.

Рассмотрим, наконец, третий способ определения ω_0 .

Спроектируем на ось OX силы, действующие на шарик в положении, показанном на рис. 8.9:

$$F_x = -m g \sin \alpha.$$

Так как шарик совершает гармонические колебания, то сила F_x связана со смещением x зависимостью

$$F_x = -kx,$$

где k – коэффициент возвращающей силы; $x = \alpha R$ – величина смещения шарика из положения равновесия. Следовательно,

$$m g \sin \alpha = k \alpha R,$$

или с учетом малости угла α

$$m g \alpha = k \alpha R; \quad k = \frac{m g}{R}.$$

Используя выражение для циклической частоты колебаний через коэффициент возвращающей силы

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},$$

получим

$$\omega_0 = \sqrt{g/R}.$$

Обратимся теперь ко второму вопросу задачи.

Полная энергия гармонических колебаний не зависит от времени и в любой момент

равна

$$E = \frac{k A^2}{2} = \frac{m \omega_0^2 A^2}{2},$$

где $A = S_{\max}$ – амплитуда колебаний. Следовательно, с учетом (3)

$$E = \frac{m g S_{\max}^2}{2R} = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

• Ответ: $E = \frac{m g S_{\max}^2}{2R} = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$

8.15. Горизонтальный желоб выгнут по цилиндрической поверхности: слева по радиусу R , справа – по радиусу $2R$ (рис. 8.10). На дне желоба находится бусинка массой m . Найти период малых колебаний бусинки. Трения нет.

8.16. Резиновое кольцо массой $m = 20 \text{ г}$ лежит на гладком горизонтальном столе. Кольцо немного растягивают так, что оно сохраняет форму окружности, и отпускают. После этого кольцо начинает совершать гармонические колебания. Найти период этих колебаний. Жесткость кольца $k = 200 \text{ Н/м}$.

8.17. На горизонтальной плите лежит груз. Плита из крайнего нижнего положения начинает двигаться вверх, совершая по вертикали гармонические колебания с частотой ω_0 и амплитудой A . На какую высоту относительно начального положения подскочит груз после отрыва от поверхности плиты?

• Решение. При движении доски на груз будут действовать сила тяжести $m \vec{g}$ и сила реакции \vec{N} . Груз не оторвется от плиты, если сила реакции будет отлична от нуля (больше нуля) во всех точках траектории.

Запишем уравнение движения груза

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N}$$

в проекции на ось Ox (рис. 8.11):

$$m a_x = N - m g.$$

Отсюда получим

$$N = m(g + a_x). \quad (1)$$

Из (1) следует, что груз может оторваться от плиты в момент времени, когда ускорение будет направлено противоположно оси Ox ($a_x < 0$). Так как при гармонических колебаниях ускорение всегда направлено к положению равновесия, то, очевидно, отрыв груза возможен в момент времени, когда плита с грузом будет находиться выше этого положения.

При гармонических колебаниях координата тела меняется со временем по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (2)$$

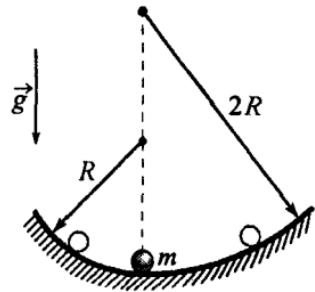


Рис. 8.10

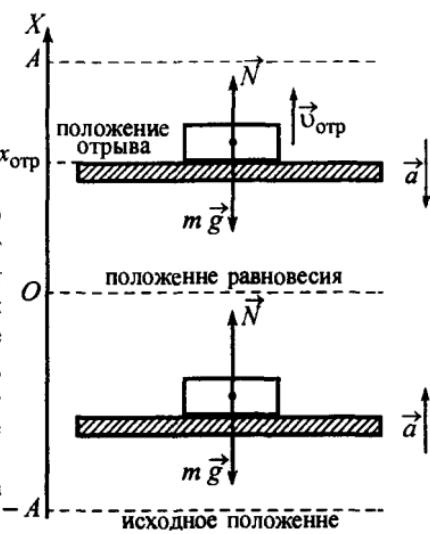


Рис. 8.11

По условию задачи в начальный момент времени ($t_0 = 0$) координата плиты с грузом равна $-A$. Следовательно,

$$-A = A \cos(\omega_0 t_0 + \alpha), \quad \text{или} \quad -1 = \cos \alpha.$$

Следовательно, $\alpha = \pi$ и уравнение (2) примет вид

$$x = -A \cos \omega_0 t. \quad (3)$$

Дважды последовательно продифференцировав (3) по времени, получим зависимости скорости и ускорения плиты с грузом в произвольный момент движения:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A \omega_0 \sin \omega_0 t, \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = A \omega_0^2 \cos \omega_0 t,$$

или с учетом (3) (см. решение задачи №8.7)

$$v_x = \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}, \quad a_x = -x \omega_0^2. \quad (4)$$

В момент отрыва сила реакции $N = 0$ и ускорение тела будет равно (см. (1))

$$a_x \text{ отр} = -g,$$

а координата точки отрыва и скорость груза в этот момент времени

$$x_{\text{отр}} = \frac{g}{\omega_0^2}; \quad (5)$$

$$v_{\text{отр}} = \omega_0 \sqrt{A^2 - \frac{g^2}{\omega_0^4}} = \frac{\sqrt{A^2 \omega_0^4 - g^2}}{\omega_0}. \quad (6)$$

Действительно, как мы и предполагали, груз может оторваться от плиты при $x > 0$, т.е. после прохождения плитой положения равновесия. При этом отрыв произойдет (см. (6)), если $A \omega_0^2 > g$.

После отрыва от плиты груз будет двигаться вертикально вверх с начальной скоростью $v_{\text{отр}}$ и ускорением свободного падения g . Выбрав нулевой уровень отсчета потенциальной энергии груза в точке отрыва, запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{m v_{\text{отр}}^2}{2} = m g h',$$

где h' – максимальная высота, на которую поднимется груз после отрыва от плиты. Следовательно, с учетом (6)

$$h' = \frac{v_{\text{отр}}^2}{2g} = \frac{A^2 \omega_0^4 - g^2}{2g \omega_0^2} = \frac{A^2 \omega_0^2}{2g} - \frac{g}{2 \omega_0^2},$$

а максимальная высота, на которую поднимется тело относительно начального положения,

$$h = A + x_{\text{отр}} + h' = A + \frac{g}{2 \omega_0^2} + \frac{\omega_0^2 A^2}{2g}.$$

Как следует из решения задачи, это возможно, если $A \omega_0^2 > g$.

- Ответ: $h = A + \frac{g}{2 \omega_0^2} + \frac{\omega_0^2 A^2}{2g}$ при $A \omega_0^2 > g$.

8.18. На горизонтальной платформе, совершающей гармонические колебания в вертикальной плоскости с амплитудой A и периодом T , находится небольшое тело массой m . Определить максимальное значение силы давления тела на платформу. При каком условии тело в процессе колебаний не оторвется от платформы?

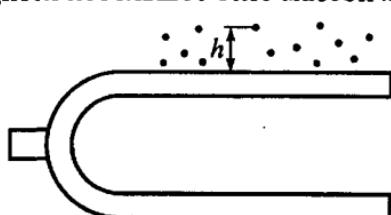


Рис. 8.12

8.19. На верхнюю ветвь горизонтально расположенного камертона положили в один ряд песчинки по всей длине (рис. 8.12). Камертон приводят в коле-

бательное движение с частотой $v = 500 \text{ c}^{-1}$. Какова амплитуда колебаний в том месте камертонов, где песчинки подскакивают на высоту $h = 2 \text{ мм}$ относительно уровня покоявшегося камертонов?

Математический маятник

8.20. Математический маятник подвешен вблизи вертикальной стены и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. В стену вбит гвоздь так, что середина нити маятника наталкивается на него каждый раз, как маятник проходит положение равновесия справа налево (рис. 8.13). Найти длину нити, если период колебаний такого маятника равен $T = 2,41 \text{ с}$.

• *Решение.* Период колебаний – это промежуток времени, за который маятник возвращается в исходное положение.

Будем рассматривать движение маятника из крайнего правого положения.

Из точки A в точку B маятник движется за время Δt_1 , равное четверти периода колебаний математического маятника длиной l :

$$\Delta t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Из точки B в точку C время движения Δt_2 равно четверти периода колебаний маятника длиной $\frac{1}{2}l$:

$$\Delta t_2 = \frac{T_2}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}l}{2g}}.$$

Следовательно, период колебаний маятника

$$T = 2(\Delta t_1 + \Delta t_2) = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Отсюда находим

$$l = \frac{2g T^2}{\pi^2 (\sqrt{2} + 1)^2} \approx 2 \text{ м.}$$

• *Ответ:* $l = \frac{2g T^2}{\pi^2 (\sqrt{2} + 1)^2} \approx 2 \text{ м.}$

8.21. Один математический маятник имеет период $T_1 = 3 \text{ с}$, а другой – $T_2 = 4 \text{ с}$. Определить период колебаний математического маятника, длина нити которого равна сумме длин нитей указанных маятников.

8.22. Определить отношение длин нитей двух математических маятников, если за одинаковое время один из них совершает $n_1 = 36$ колебаний, а другой – $n_2 = 9$ колебаний.

8.23. В подвале главного здания МГУ в свое время были установлены точные маятниковые астрономические часы. Насколько стали бы отставать эти часы за сутки, если бы их перенесли на крышу здания высотой $h = 200 \text{ м}$? Глубиной подвала пренебречь. Радиус Земли считать равным $R = 6400 \text{ км}$.

• *Решение.* Период колебаний математического маятника зависит от ускорения свободного падения в месте, где расположен маятник. Маятниковые часы, находящиеся в подвале здания МГУ, имеют период

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

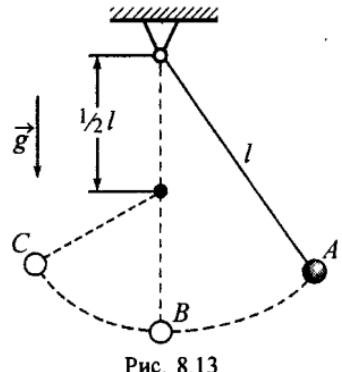


Рис. 8.13

н за сутки совершили

$$N_1 = \frac{T}{T_1} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

(где T – длительность суток в секундах) колебаний.

Когда часы поместили на крышу здания, их период стал равен

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_h}},$$

а число колебаний за сутки

$$N_2 = \frac{T}{T_2} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{g_h}{l}},$$

где

$$g_h = \gamma \frac{M_3}{(R_3 + h)^2} = \frac{g R_3^2}{(R_3 + h)^2}$$

– ускорение свободного падения на высоте h над поверхностью Земли (см. §5).

Следовательно, за сутки число колебаний уменьшится на

$$\Delta N = N_1 - N_2 = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \left\{ 1 - \frac{R_3}{R_3 + h} \right\} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \left\{ \frac{h}{R_3 + h} \right\}$$

и часы отстанут на

$$\Delta t = T_2 \Delta N = T \frac{h}{R_3} \approx 2,7 \text{ с.}$$

- Ответ: $\Delta t = T \frac{h}{R_3} \approx 2,7 \text{ с.}$

8.24. Насколько за сутки будут уходить маятниковые часы, выверенные на высоте $h = 4$ км над уровнем моря, если их перенести на уровень моря? Радиус Земли считать равным $R_3 = 6400$ км.

8.25. Каково соотношение между высотой горы H и глубиной шахты h , если период колебаний математического маятника на вершине горы и на дне шахты один и тот же? Радиус Земли равен R_3 .

8.26. Математическому маятнику в положении равновесия сообщили горизонтальную скорость v_0 . При последующих колебаниях в крайних положениях нить маятника отклоняется от вертикали на угол β . Найти период колебаний маятника, считая их гармоническими.

- Решение. Запишем уравнение гармонических колебаний маятника в виде

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1)$$

Поскольку в момент времени $t_0 = 0$ маятник находится в положении равновесия ($x_0 = 0$), а его скорость равна v_0 , то амплитуда A колебаний и начальная фаза α

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \frac{v_0}{\omega_0}, \quad \alpha = -\arctg \left\{ \frac{v_0}{\omega_0 x_0} \right\} = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, уравнение (1) примет вид

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

или с учетом связи периода колебаний с циклической частотой $\omega_0 = 2\pi/T$

$$x = \frac{v_0 T}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad (2)$$

В момент времени, равный четверти периода колебаний, маятник достигнет крайнего положения, нить маятника составит с вертикалью угол β , а координата груза маятника, измеренная вдоль дуги окружности радиусом l (l – длина нити), станет равна $x = \beta l$. С учетом сказанного, уравнение (2) примет вид

$$\beta l = \frac{v_0 T}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4}.$$

Следовательно,

$$\beta l = \frac{v_0 T}{2\pi}. \quad (3)$$

При гармонических колебаниях математического маятника период связан с длиной нити соотношением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{или} \quad l = \frac{g T^2}{4\pi^2}. \quad (4)$$

Из (3) с учетом (4) получим

$$T = \frac{2\pi v_0}{g\beta}.$$

• Ответ: $T = \frac{2\pi v_0}{g\beta}$.

8.27. Маленький шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м, отклоняют на натянутой нити из положения равновесия так, что нить составляет малый угол с вертикалью, и отпускают. Через какой промежуток времени угол между нитью и вертикалью уменьшится вдвое?

8.28. Грузу, подвешенному на легкой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м, сообщают горизонтальную скорость, в результате чего он начинает совершать гармонические колебания с амплитудой $A = 2$ см. Найти начальную скорость груза.

8.29. Груз математического маятника представляет собой железный шарик массой m . Маятник совершает гармонические колебания между полюсами магнита так, что на него действует горизонтальная магнитная сила в плоскости колебаний. Найти величину этой силы. Длина нити маятника l , период колебаний T .

• Решение. При колебаниях маятника вблизи магнита на груз, кроме силы тяжести, действует постоянная сила притяжения \vec{F}_M , направленная горизонтально (рис. 8.14). При этом маятник будет совершать колебания около положения равновесия, в котором нить расположена вдоль вектора

$$\vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g} + \frac{\vec{F}_M}{m},$$

с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{\text{эфф}}}}. \quad (1)$$

Из рис. 8.14 видно, что

$$g_{\text{эфф}} = \sqrt{g^2 + \frac{F_M^2}{m^2}}. \quad (2)$$

С учетом (2) выражение (1) примет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \frac{F_M^2}{m^2}}}}.$$

Отсюда находим

$$F_M = m \sqrt{\frac{16\pi^4 l^2}{T^4} - g^2}.$$

• Ответ: $F_M = m \sqrt{\frac{16\pi^4 l^2}{T^4} - g^2}$.

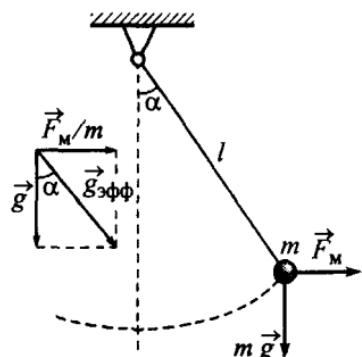


Рис. 8.14

8.30. Математический маятник установлен на тележке, скользящейся без трения вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 8.15). Определить период колебаний маятника во время движения тележки. Длина нити маятника l .

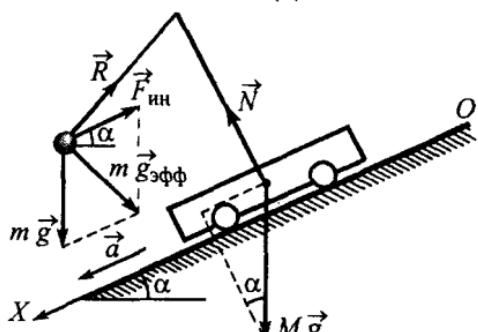


Рис. 8.15

• **Решение.** Пусть масса груза маятника равна m , а масса тележки с маятником M . Записав уравнение движения тележки по наклонной плоскости в проекции на ось OX (рис. 8.15)

$$Ma = Mg \sin \alpha,$$

найдем ее ускорение

$$a = g \sin \alpha. \quad (1)$$

Рассмотрим движение груза маятника относительно системы отсчета, связанной с тележкой. Поскольку точка подвеса маятника движется с постоянным ускорением \vec{a} , то эта система будет неинерциальной. В ней на

груз маятника, кроме силы тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити \vec{R} , действует сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$, направленная в сторону, противоположную ускорению системы.

Для определения периода колебаний математического маятника, точка подвеса которого движется с постоянным ускорением, воспользуемся формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{\text{эфф}}}},$$

где $g_{\text{эфф}} = |\vec{g} - \vec{a}|$.

По теореме косинусов получим

$$g_{\text{эфф}} = \sqrt{g^2 + a^2 - 2ag \cos(90^\circ - \alpha)},$$

или с учетом выражения (1) для ускорения тележки

$$g_{\text{эфф}} = \sqrt{g^2 + g^2 \sin^2 \alpha - 2g^2 \sin^2 \alpha} = g \cos \alpha.$$

Следовательно, период колебаний маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}.$$

• Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}$.

8.31. Математический маятник подвешен над одним из полюсов постоянного магнита. Груз маятника представляет собой железный шарик массой $m = 1$ г. Период малых колебаний маятника (над магнитом) $T_1 = 0,5$ с. Если магнит убрать, то период станет $T_2 = 1$ с. Найти силу, действующую на шарик со стороны магнита.

8.32. Математический маятник длиной l устанавливают на подвижной платформе. Чему равна частота колебаний маятника, если платформа движется относительно поверхности Земли с ускорением \vec{a} , направленным: а) вертикально вверх; б) вертикально вниз; в) горизонтально?

Пружинный маятник

8.33. Груз массой $m = 500$ г, подвешенный на пружине жесткостью $k = 100$ Н/м, совершают гармонические колебания с энергией $E = 1$ Дж. Найти период колебаний, их амплитуду и максимальную скорость груза.

• Решение. Период гармонических колебаний груза массой m , подвешенного на пружине жесткостью k , равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,44 \text{ с.}$$

Потенциальная и кинетическая энергии при гармонических колебаниях изменяются со временем таким образом, что когда одна из них увеличивается, то другая – уменьшается. При этом полная энергия

$$E = T + U = \frac{m v_{\max}^2}{2} = \frac{k A^2}{2}$$

остается постоянной. Следовательно, максимальная скорость и амплитуда колебаний груза

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2 \text{ м/с; } A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \approx 0,14 \text{ м.}$$

- Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,44 \text{ с.}$; $v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2 \text{ м/с; } A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \approx 0,14 \text{ м.}$

8.34. К пружине подвешивают поочередно два груза. Период колебаний первого груза $T_1 = 0,3$ с, второго – $T_2 = 0,4$ с. Определить период колебаний, если к той же пружине одновременно подвесить оба груза?

8.35. Груз, подвешенный на пружине жесткостью $k = 100 \text{ Н/м}$, совершает гармонические колебания с энергией $E = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$. Найти амплитуду колебаний груза.

8.36. Груз массой $m = 1 \text{ г}$, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 1 \text{ см}$. Наибольшая скорость груза $v_{\max} = 1 \text{ м/с}$. Определить жесткость пружины.

8.37. Во сколько раз отличаются периоды колебаний пружинных маятников одинаковой массы, составленных из двух пружин жесткостью k_1 и k_2 , соединенных один раз последовательно, а другой раз – параллельно?

- Решение. Рассмотрим последовательное соединение пружин (рис. 8.16, а).

Груз массой m , подвешенный к такой системе пружин, растянет ее на величину

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2,$$

где Δx_1 – удлинение пружины жесткостью k_1 ; Δx_2 – удлинение пружины жесткостью k_2 .

В положении равновесия груза

$$mg = F_{\text{упр}1}, \quad \text{или} \quad mg = k_1 \Delta x_1. \quad (1)$$

Так как пружины считаются невесомыми, то

$$F_{\text{упр}1} = F_{\text{упр}2}, \quad \text{или} \quad k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2. \quad (2)$$

С учетом (1) – (2) суммарное удлинение Δx системы пружин можно представить в виде

$$\Delta x = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2}.$$

Заменим систему пружин одной эквивалентной пружиной жесткостью $k_{\text{посл}}$, которая под действием силы тяжести груза также растягивается на величину Δx . В положении равновесия груза массой m , подвешенного на такой пружине,

$$mg = k_{\text{посл}} \Delta x.$$

Следовательно,

$$mg = k_{\text{посл}} \left\{ \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} \right\}.$$

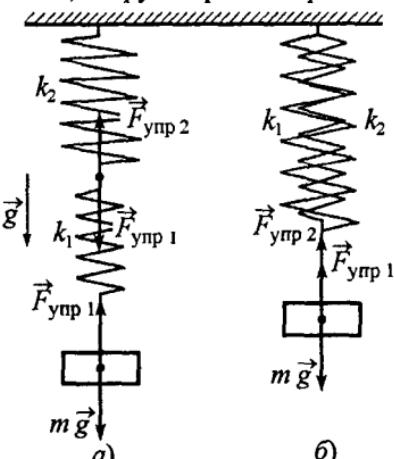


Рис. 8.16

Откуда находим

$$k_{\text{посл}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Груз массой m , подвешенный на такой пружине, будет совершать колебания с периодом

$$T_{\text{посл}} = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{посл}}}} = 2 \pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

При параллельном соединении пружин (рис. 8.16, б) обе пружины под действием силы тяжести груза массой m будут растянуты на одинаковую величину Δx . В положении равновесия груза

$$mg = F_{\text{упр } 1} + F_{\text{упр } 2}, \quad \text{или} \quad mg = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x. \quad (3)$$

Если заменить систему пружин одной эквивалентной пружиной жесткостью $k_{\text{пар}}$, которая под действием силы тяжести груза массой m также растягивается на величину Δx , т.е.

$$mg = k_{\text{пар}} \Delta x,$$

то с учетом (3) получим

$$k_1 \Delta x + k_2 \Delta x = k_{\text{пар}} \Delta x, \quad \text{или} \quad k_{\text{пар}} = k_1 + k_2.$$

Период колебаний груза массой m , подвешенного на такой пружине,

$$T_{\text{пар}} = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{пар}}}} = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{T_{\text{посл}}}{T_{\text{пар}}} = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

- Ответ: $\frac{T_{\text{посл}}}{T_{\text{пар}}} = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k_1 k_2}}$.

8.38. К оси подвижного блока, подвешенного на нерастяжимой нити AB , соединенной с двумя пружинами жесткостью $k_1 = 10 \text{ Н/м}$ и $k_2 = 20 \text{ Н/м}$, прикреплен груз массой $m = 100 \text{ г}$ так, как показано на рис. 8.17, а). Блок может свободно скользить по нити. Пренебрегая трением в оси блока и его массой, определить период малых колебаний груза.

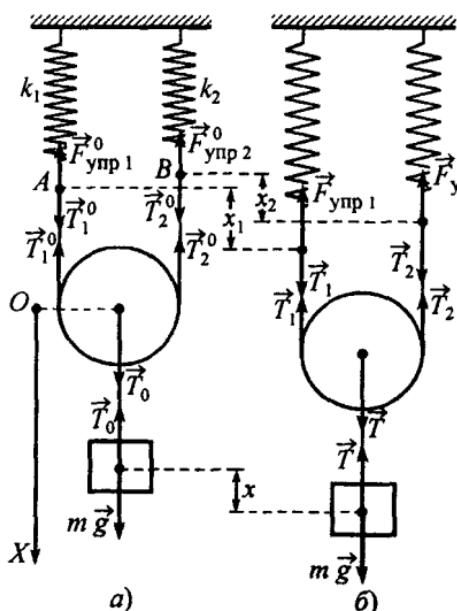


Рис. 8.17

• **Решение.** Сложность задачи состоит в том, что блок висит на нити, по которой он может скользить, и при движении груза пружины (в зависимости от их жесткости) будут растягиваться на разные величины. Поэтому пружины нельзя заменить одной эквивалентной пружиной жесткостью $k_{\text{пар}} = k_1 + k_2$ (см. решение задачи №8.37).

Запишем условия равновесия груза и блока (рис. 8.17, а):

$$mg = T_0, \quad T_0 = T_1^0 + T_2^0,$$

$$T_1^0 = T_2^0, \quad T_1^0 = F_{\text{упр } 1}^0, \quad T_2^0 = F_{\text{упр } 2}^0,$$

или

$$mg = F_{\text{упр } 1}^0 + F_{\text{упр } 2}^0, \quad F_{\text{упр } 1}^0 = F_{\text{упр } 2}^0. \quad (1)$$

Здесь и далее индекс «0» (вверху или внизу) соответствует равновесию, индексы «1» или «2» относятся к соответствующим пружинам.

Для определения периода колебаний груза заставим его двигаться. Для этого смесем груз из положения равновесия на малую величину и отпустим.

При движении груза на него будут действовать силы тяжести и инерции. Рассмотрим произвольный момент движения груза, например, когда он смещен относительно положения равновесия вниз на величину x (рис. 8.17, б). При этом пружина жесткостью k_1 относительно положения равновесия будет растянута на x_1 , а пружина жесткостью k_2 — на x_2 .

Выберем начало отсчета системы координат на оси блока в положении равновесия, а ось OX направим вниз. Запишем уравнение движения груза

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T}$$

в проекции на выбранную ось:

$$m a_x = m g - T. \quad (2)$$

Поскольку

$$T = T_1 + T_2, \quad T_1 = F_{\text{упр } 1}, \quad T_2 = F_{\text{упр } 2} \quad (3)$$

и

$$F_{\text{упр } 1} = F_{\text{упр } 1}^0 + k_1 x_1, \quad F_{\text{упр } 2} = F_{\text{упр } 2}^0 + k_2 x_2, \quad (4)$$

то уравнение (2) можно записать в виде

$$m a_x = m g - (F_{\text{упр } 1}^0 + k_1 x_1) - (F_{\text{упр } 2}^0 + k_2 x_2),$$

или с учетом условий равновесия (1)

$$m a_x = -k_1 x_1 - k_2 x_2. \quad (5)$$

Растяжения x_1 и x_2 пружин связаны с величиной x выражением

$$x = \frac{1}{2} (x_1 + x_2). \quad (6)$$

Так как $T_1 = T_2$, то из (3) — (4) получим

$$F_{\text{упр } 1}^0 + k_1 x_1 = F_{\text{упр } 2}^0 + k_2 x_2, \quad \text{или} \quad k_1 x_1 = k_2 x_2. \quad (7)$$

Выразив растяжения пружин x_1 и x_2 из (6) — (7)

$$x_1 = \frac{2 k_2}{k_1 + k_2} x, \quad x_2 = \frac{2 k_1}{k_1 + k_2} x, \quad (8)$$

уравнение (5) перепишем в виде

$$m a_x = -k_1 \frac{2 k_2}{k_1 + k_2} x - k_2 \frac{2 k_1}{k_1 + k_2} x, \quad \text{или} \quad a_x + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{4 k_1 k_2}{m (k_1 + k_2)}}$ — циклическая частота колебаний груза, которая связана с периодом соотношением

$$T = \frac{2 \pi}{\omega_0}.$$

Следовательно,

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m (k_1 + k_2)}{4 k_1 k_2}} \approx 0,38 \text{ с.}$$

Рассмотрим второй способ определения ω_0 .

Поскольку при движении груза механическая энергия сохраняется, то энергия E_{max} системы при максимальном смещении груза из положения равновесия равна энергии

$$E = \frac{m v^2}{2} - m g x + \frac{k_1 (x_1 + x_{10})^2}{2} + \frac{k_2 (x_2 + x_{20})^2}{2}$$

в момент времени, когда груз находится в положении, показанном на рис. 8.17, б (нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбран в положении равновесия груза; x_{10} и x_{20} — растяжения пружин в положении равновесия груза):

$$\frac{m v^2}{2} - m g x + \frac{k_1 (x_1 + x_{10})^2}{2} + \frac{k_2 (x_2 + x_{20})^2}{2} = E_{\text{max}}. \quad (9)$$

С учетом (8) выражение (9) примет вид

$$\frac{m v^2}{2} - m g x + \frac{k_1 \left\{ \frac{2 k_2}{k_1 + k_2} x + x_{10} \right\}^2}{2} + \frac{k_2 \left\{ \frac{2 k_1}{k_1 + k_2} x + x_{20} \right\}^2}{2} = E_{\text{max}}. \quad (10)$$

Взяв производную по времени от обеих частей (10), получим

$$m v a_x - m g v + k_1 \left\{ \frac{2 k_2}{k_1 + k_2} x + x_{10} \right\} \frac{2 k_2}{k_1 + k_2} v + k_2 \left\{ \frac{2 k_1}{k_1 + k_2} x + x_{20} \right\} \frac{2 k_1}{k_1 + k_2} v = 0,$$

или

$$m a_x + \left\{ \frac{4 k_1 k_2^2}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{4 k_1^2 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \right\} x - m g + \frac{2 k_1 k_2}{k_1 + k_2} (x_{10} + x_{20}) = 0. \quad (11)$$

Используя условия равновесия (1) в виде

$$m g = k_1 x_{10} + k_2 x_{20}, \quad k_1 x_{10} = k_2 x_{20},$$

находим

$$x_{10} = \frac{m g}{2 k_1}, \quad x_{20} = \frac{m g}{2 k_2}. \quad (12)$$

С учетом (12) выражение (11) примет вид

$$m a_x + \frac{4 k_1 k_2}{k_1 + k_2} x - m g + \frac{2 k_1 k_2}{k_1 + k_2} \left\{ \frac{m g}{2 k_1} + \frac{m g}{2 k_2} \right\} = 0,$$

или

$$m a_x + \frac{4 k_1 k_2}{k_1 + k_2} x = 0; \quad a_x + \frac{4 k_1 k_2}{m (k_1 + k_2)} x = 0,$$

где $\sqrt{\frac{4 k_1 k_2}{m (k_1 + k_2)}} = \omega_0$ – циклическая частота колебаний груза.

Рассмотрим, наконец, третий способ определения частоты и периода колебаний.

Спроектируем на ось OX силы, действующие на груз в положении, показанном на рис. 8.17, б. Результирующая сила

$$F_x = m g - T$$

с учетом соотношений (3) – (4), (8) и условия равновесия (1) может быть представлена в виде

$$F_x = m g - F_{\text{упр } 1} - F_{\text{упр } 2} = m g - (F_{\text{упр } 1}^0 + k_1 x_1) - (F_{\text{упр } 2}^0 + k_2 x_2) = -k_1 x_1 - k_2 x_2,$$

или

$$F_x = -k_1 \frac{2 k_2}{k_1 + k_2} x - k_2 \frac{2 k_1}{k_1 + k_2} x = -\frac{4 k_1 k_2}{k_1 + k_2} x.$$

Как видим, сила F_x направлена к положению равновесия (т.е. является возвращающей) и пропорциональна смещению x груза относительно этого положения. Поэтому груз будет совершать гармонические колебания, при которых сила F_x связана со смещением x зависимостью

$$F_x = -k x,$$

где k – коэффициент возвращающей силы. Следовательно,

$$-\frac{4 k_1 k_2}{k_1 + k_2} x = -k x, \quad \text{или} \quad k = \frac{4 k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Используя связь коэффициента возвращающей силы с периодом колебаний

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

получим

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m (k_1 + k_2)}{4 k_1 k_2}}.$$

• Ответ: $T = 2 \pi \sqrt{\frac{m (k_1 + k_2)}{4 k_1 k_2}} \approx 0,38$ с.

8.39. Шарик, подвешенный между двумя вертикальными пружинами жесткостью $k_1 = 20$ Н/м и $k_2 = 10$ Н/м так, как показано на рис. 8.18, имеет период колебаний такой же, что и математический маятник длиной $l = 10$ см. Определить массу шарика.

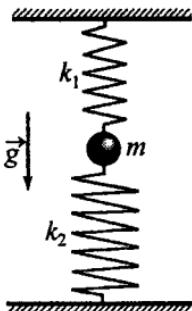


Рис. 8.18

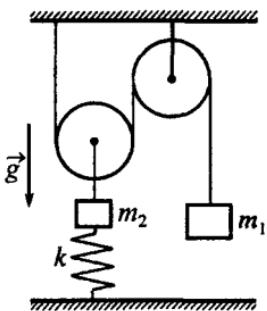


Рис. 8.19

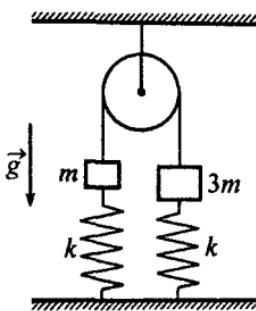


Рис. 8.20

8.40. Груз массой m_1 подведен с помощью нити, перекинутой через неподвижный и подвижный блоки так, как показано на рис. 8.19. К оси подвижного блока на нити подведен груз массой m_2 и притянут к полу пружиной жесткостью k . В положении равновесия грузов пружина растянута. Груз m_1 смещают из положения равновесия вертикально вниз на расстояние x_0 и отпускают. Найти максимальные скорости грузов и период возникающих колебаний, считая их гармоническими. Массами блоков, нитей и пружины, а также трением в осях блоков пренебречь.

8.41. Грузы массами m и $3m$ висят на концах нити, перекинутой через неподвижный блок. Каждый из грузов соединен с полом при помощи вертикальной пружины жесткостью k (рис. 8.20). В положении равновесия обе пружины растянуты. Грузу массой m сообщили скорость v_0 , направленную вертикально вниз. Найти амплитуду и период возникающих колебаний грузов, считая их гармоническими. Массами блока, нити и пружин, а также трением в оси блока пренебречь.

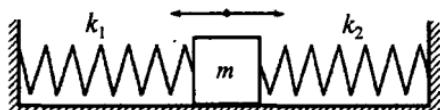


Рис. 8.21

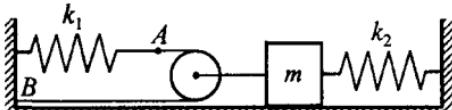


Рис. 8.22

8.42. Бруск массой m закреплен между двумя горизонтальными пружинами жесткостью k_1 и k_2 так, как показано на рис. 8.21. Определить период малых продольных колебаний бруска. В положении равновесия пружины не деформированы. Трения нет.

8.43. На гладком горизонтальном столе лежит бруск массой $m = 0,1$ кг. Бруск соединен с вертикальными стойками: с левой стойкой через легкий блок, пружину жесткостью $k_1 = 20$ Н/м и нить AB ; с правой – пружиной жесткостью $k_2 = 40$ Н/м (рис. 8.22). Блок может свободно скользить по нити. Пренебрегая трением в оси блока, определить период малых колебаний бруска. В положении равновесия обе пружины растянуты.

8.44. Два тела массами m_1 и m_2 соединены пружиной жесткостью k и лежат на гладком горизонтальном столе (рис. 8.23). Тела раздвинули, растянув пружину и сообщив ей энергию E , и отпустили. Найти амплитуды возникающих колебаний тел, считая их гармоническими.

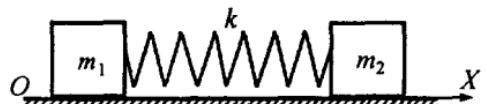


Рис. 8.23

• **Решение.** После освобождения тел, пружина, восстанавливаясь, приведет тела в движение, передавая им свою энергию. В момент времени, когда энергия пружины будет равна нулю, тела приобретут максимальную кинетическую энергию. Далее тела по инерции будут сжимать пружину.

При максимальной деформации пружина будет иметь начальную энергию E , а скорости тел станут равными нулю. Затем процесс пойдет в обратном направлении.

После освобождения тел в горизонтальном направлении на систему внешние силы не действуют, поэтому в направлении оси OX ее импульс сохраняется:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0, \quad (1)$$

где v_1, v_2 – скорости тел в произвольный момент движения, а знак «минус» между слагаемыми обусловлен тем, что скорости тел в любой момент времени направлены в противоположные стороны.

Для выполнения соотношения (1) необходимо, чтобы тела достигали своих крайних положений и положения равновесия одновременно, т.е. тела должны совершать колебания с одинаковой частотой ω_0 . В момент времени, когда оба тела будут находиться в положении равновесия, их скорости будут иметь максимальные значения

$$v_{1\max} = \omega_0 A_1, \quad v_{2\max} = \omega_0 A_2, \quad (2)$$

где A_1, A_2 – амплитуды колебаний тел.

С учетом (2) выражение (1) можно записать в виде

$$m_1 \omega_0 A_1 = m_2 \omega_0 A_2, \quad \text{или} \quad m_1 A_1 = m_2 A_2. \quad (3)$$

Так как в процессе колебаний нет сил, приводящих к потере механической энергии системы, то в крайних положениях, когда тела находятся на максимальном (или минимальном) удалении друг от друга, энергия системы будет равна энергии растянутой (или сжатой) пружины

$$E = \frac{k(A_1 + A_2)^2}{2}. \quad (4)$$

Решив систему уравнений (3) – (4) относительно амплитуд колебаний тел, получим

$$A_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{2E}{k}}; \quad A_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

• Ответ: $A_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{2E}{k}}$; $A_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{2E}{k}}$.

8.45. Два одинаковых тела, соединенные легкой пружиной жесткостью $k = 500$ Н/м, лежат на гладком горизонтальном столе. Найти амplitуды возникающих гармонических колебаний тел, если пружине сообщить энергию $E = 0,1$ Дж.

8.46. На гладком столе лежат два одинаковых бруска массой m каждый, соединенные пружиной жесткостью k . Тела раздвинули, растянув пружину, и отпустили. Найти период колебаний системы, считая их гармоническими.

8.47. На гладком горизонтальном столе лежит брусков массой M , прикрепленный к вертикальной стене пружиной жесткостью k (рис. 8.24). В брусков попадает пуля массой m , имеющая в момент удара скорость v , направленную горизонтально вдоль пружины к стене, и застrevает в бруске. Записать закон изменения координаты бруска от времени после взаимодействия с пулей.

• **Решение.** В результате соударения брускок приобретет кинетическую энергию и придет в движение, сжимая пружину. Пружина будет сжиматься до тех пор, пока вся кинетическая энергия бруска не перейдет в энергию деформации пружины. Далее пружина, восстанавливаясь, приведет брускок в движение в обратном направлении. Так как стол гладкий, то в положении равновесия брускок будет иметь максимальную кинетическую энергию, которую ему сообщит пуля, и скорость бруска будет направлена в сторону удлинения пружины (вправо). В крайнем правом положении кинетическая энергия бруска передаст в энергию растянутой пружины и процесс повторится. При движении в горизонтальном направлении на брускок будет действовать единственная сила — сила упругости пружины, которая в каждый момент времени направлена к положению равновесия и равна

$$F = -kx, \quad (1)$$

где x — деформация пружины в данный момент. Как известно, если на тело в процессе движения действует сила вида (1), то тело будет совершать гармонические колебания по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (2)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/(M+m)}$ — циклическая частота колебаний.

При колебаниях тела по закону (2) амплитуда A и начальная фаза α связаны с начальным смещением x_0 тела относительно положения равновесия и начальной скоростью v_0 соотношениями

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \alpha = -\arctg \left\{ \frac{v_0}{\omega_0 x_0} \right\}.$$

Поскольку движение системы происходит из положения равновесия ($x_0 = 0$), то

$$A = v_0/\omega_0, \quad \alpha = -\frac{1}{2}\pi. \quad (3)$$

Для определения начальной скорости v_0 рассмотрим процесс взаимодействия пули с бруском. Полагая, что время взаимодействия пули и бруска мало и за время соударения брускок не смещается, пренебрежем импульсом внешней силы (силы упругости пружины), действующей на систему «пуля — брускок», и запишем закон сохранения импульса

$$m\vec{v} = (M+m)\vec{v}_0$$

в проекции на ось OX

$$mv = (M+m)v_0.$$

Следовательно,

$$v_0 = \frac{mv}{M+m}. \quad (4)$$

Подставив значения амплитуды и начальной фазы колебаний (3) с учетом (4) в уравнение (2), получим

$$x = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}} \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{M+m}} t - \frac{\pi}{2} \right\}, \quad \text{или} \quad x = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{M+m}} t \right\}.$$

• Ответ: $x = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{M+m}} t \right\}$.

8.48. На покоящуюся на гладкой горизонтальной поверхности систему, состоящую из двух одинаковых тел массой $m = 10$ г каждое, соединенных



Рис. 8.24

между собой пружиной жесткостью $k = 8$ Н/м, налетает тело массой M (рис. 8.25). Происходит центральный упругий удар. Определить массу

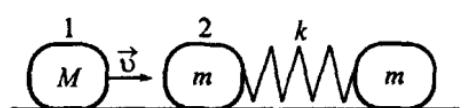


Рис. 8.25

M тела 1, если удар между телами 1 и 2 произошел еще раз через время $\Delta t = 0,1$ с после первого соударения.

8.49. На диск массой $m = 200$ г, подвешенный на легкой пружине жесткостью $k = 200$ Н/м, с некоторой высоты h падает шайба такой же массы, что и диск (рис. 8.26). После абсолютно неупругого удара шайбы о диск возникают гармонические колебания с амплитудой $A = 2$ см. Определить высоту h . Сопротивление воздуха не учитывать.

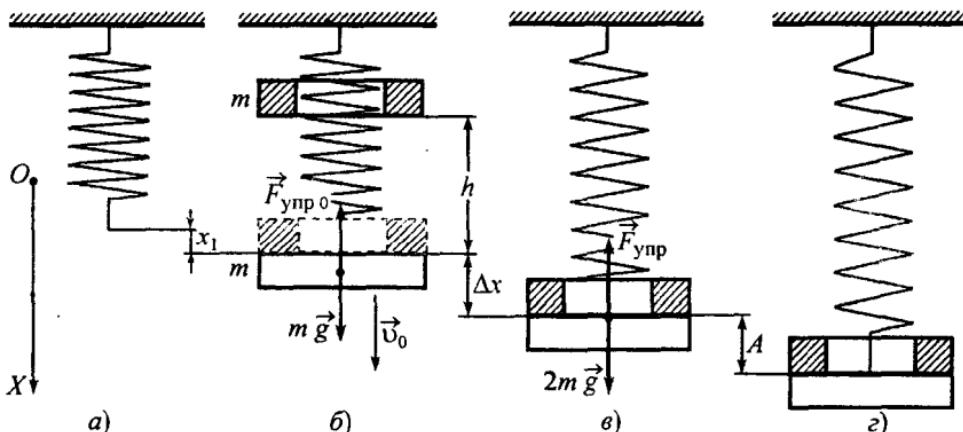


Рис. 8.26

• Решение. Рассмотрим последовательно движение тел.

Падая с высоты h , к моменту соударения с диском шайба приобретет скорость \vec{v} , значение которой можно найти, например, из закона сохранения энергии

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2; \quad v = \sqrt{2gh}.$$

При соударении шайбы с диском некоторая часть механической энергии перейдет в тепло. Поэтому для определения скорости системы «шайба – диск» сразу после взаимодействия воспользуемся законом сохранения импульса. Полагая, что время взаимодействия мало, пренебрежем импульсами внешних сил (сил тяжести и упругости пружины), действующих на систему, и запишем закон сохранения импульса

$$m\vec{v} = (m+m)\vec{v}_0$$

в проекции на ось OX

$$mv = 2mv_0.$$

Следовательно,

$$v_0 = \frac{1}{2}v, \quad \text{или} \quad v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2gh}. \quad (1)$$

В результате удара шайбы о диск система придет в движение с начальной скоростью \vec{v}_0 , растягивая пружину. Поскольку в положении равновесия диска (рис. 8.26, б) сила тяжести равна силе упругости пружины

$$mg = F_{upr0}, \quad \text{или} \quad mg = kx_1 \quad (2)$$

(где x_1 – растяжение пружины в положении равновесия диска), то после взаимодействия сила тяжести $2mg$ системы «диск – шайба» будет больше силы F_{upr0} . Поэтому ускорение системы будет направлено вниз. В некоторый момент движения система достигнет нового положения равновесия (рис. 8.26, в), в котором скорость будет максимальной, а

$$F_{upr} = 2mg, \quad \text{или} \quad kx_1 + k\Delta x = 2mg, \quad (3)$$

где Δx – расстояние между положениями равновесия диска и диска с шайбой. Далее система будет двигаться замедленно до крайнего нижнего положения, в котором сила упругости пружины будет больше силы тяжести. Под действием результирующей этих сил система

начнет двигаться вверх. Поскольку на систему сторонние силы не действуют, то механическая энергия будет сохраняться. Поэтому при движении вверх система поднимется выше точки, где произошло соударение, т.е. выше положения равновесия диска. Далее система будет двигаться вниз и процесс повторится, т.е. система будет совершать вертикальные колебания с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}, \quad (4)$$

при которых амплитуда A связана с начальным смещением x_0 тела относительно положения равновесия и начальной скоростью v_0 соотношением

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}. \quad (5)$$

Поскольку положение равновесия системы находится на Δx ниже точки соударения тел, то $x_0 = \Delta x$. Из (3) с учетом (2) получим

$$mg = k \Delta x, \quad \text{или} \quad \Delta x = x_0 = \frac{mg}{k}. \quad (6)$$

Подставив (1), (4), (6) в (5), получим

$$A = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{g h m}{k}}.$$

Отсюда находим

$$h = \frac{k A^2}{m g} - \frac{m g}{k} \approx 0,03 \text{ м.}$$

К этому же результату можно прийти, не прибегая к соотношениям (4) и (5).

Запишем закон сохранения механической энергии при движении системы из положения, соответствующего соударению шайбы с диском (рис. 8.26, б), до крайнего нижнего положения, когда система смещена из положения равновесия (рис. 8.26, б) на максимальное расстояние A (рис. 8.26, г):

$$2mg(\Delta x + A) + \frac{2mv_0^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{k(x_1 + \Delta x + A)^2}{2}, \quad (7)$$

где нулевой уровень отсчета потенциальной энергии соответствует крайнему нижнему положению системы.

Подставив в (7) значения величин v_0 , x_1 и Δx из (1), (2) и (6)

$$2mg\left[\frac{mg}{k} + A\right] + \frac{mg h}{2} + \frac{m^2 g^2}{2k} = \frac{k\left[\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} + A\right]^2}{2},$$

получим

$$h = \frac{k A^2}{m g} - \frac{m g}{k}.$$

• Ответ: $h = \frac{k A^2}{m g} - \frac{m g}{k} \approx 0,03 \text{ м.}$

8.50. На чашку пружинных весов падает с высоты h груз массой m и прилипает к ней (рис. 8.27). Жесткость пружины k . Определить амплитуду возникающих при этом колебаний чашки. Масса чашки равна M . Сопротивление воздуха не учитывать.

8.51. На чашку пружинных весов падает с высоты h груз массой m . Масса чашки M , жесткость пружины k . При какой высоте h произойдет отрыв груза от чашки в верхней точке при возникновении колебаний в системе? Сопротивление воздуха не учитывать.

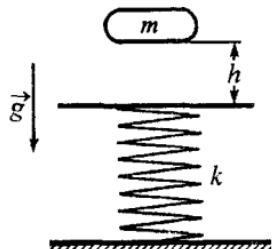


Рис. 8.27

8.52. К легкой пружине жесткостью $k = 98 \text{ Н/м}$ с помощью невесомой нерастяжимой нити подвешен груз массой $m = 100 \text{ г}$ (рис. 8.28). Какова может быть максимальная амплитуда колебаний груза, чтобы эти колебания были гармоническими?

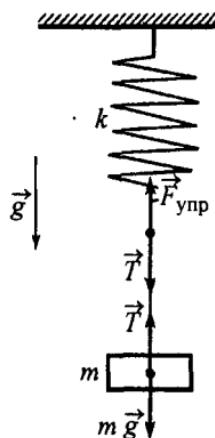


Рис. 8.28

• *Решение.* Для того чтобы тело совершало гармонические колебания, действующая на него результирующая сила должна быть пропорциональна величине смещения тела из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную этому смещению.

При колебаниях на груз действуют сила тяжести $m \vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . Поскольку нить невесома, то сила \vec{T} равна силе упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Поэтому, если при движении груза нить будет натянутой, то результирующая сила

$$\vec{F} = \vec{T} + m \vec{g} = \vec{F}_{\text{упр}} + m \vec{g} = \vec{F}_{\text{упр}0} + \Delta \vec{F}_{\text{упр}} + m \vec{g},$$

где $\vec{F}_{\text{упр}0}$ — сила упругости пружины в положении равновесия груза, причем $\vec{F}_{\text{упр}0} = -m \vec{g}$; $\Delta \vec{F}_{\text{упр}}$ — изменение силы упругости при смещении груза из положения равновесия; $\Delta \vec{F}_{\text{упр}} = -k \vec{x}$ (знак минус соответствует тому, что $\Delta \vec{F}_{\text{упр}}$ в любой момент времени направлена к положению равновесия, т.е. противоположно смещению). Следовательно,

$$\vec{F} = \Delta \vec{F}_{\text{упр}}, \quad \text{или} \quad F = -k x.$$

Если при движении груза нить перестанет быть натянутой, то гармонических колебаний не будет. Очевидно, что это произойдет, если груз поднимется выше положения равновесия на величину Δx , равную растяжению пружины в положении равновесия, где

$$k \Delta x = m g.$$

Следовательно, чтобы колебания были гармоническими, максимальное смещение груза из положения равновесия (амплитуда колебаний) должно быть

$$A_{\max} \leq \Delta x = \frac{m g}{k} = 1 \text{ см}.$$

• Ответ: $A_{\max} \leq \frac{m g}{k} = 1 \text{ см}$.

8.53. Груз массой $m = 0,1 \text{ кг}$ подвешен к легкой пружине жесткостью $k = 10 \text{ Н/м}$ с помощью невесомой нерастяжимой нити (рис. 8.28). Груз смешили вертикально вниз на $x_0 = 15 \text{ см}$ и отпустили. На какую максимальную высоту относительно положения равновесия поднимется груз?

8.54. Груз массой $m = 100 \text{ г}$ соединен легкой вертикальной пружиной жесткостью $k = 10^3 \text{ Н/м}$ с бруском массой $M = 1 \text{ кг}$, лежащим на горизонтальном столе (рис. 8.29). Груз медленно смещают вертикально вниз на величину x_0 и отпускают. При каких значениях x_0 возникающие колебания будут гармоническими?

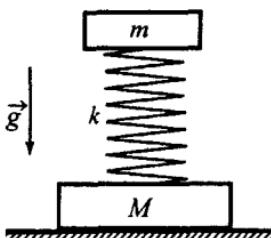


Рис. 8.29

Вынужденные колебания. Резонанс

8.55. При какой скорости поезда тело массой $m = 0,1 \text{ кг}$, подвешенное в вагоне на пружине жесткостью $k = 10 \text{ Н/м}$, особенно сильно колебляется, если длина рельсов $l = 12,5 \text{ м}$?

• **Решение.** При движении поезда на маятник будет действовать внешняя периодическая сила, период которой равен времени движения поезда между стыками рельсов

$$T = l/v,$$

а частота

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi v/l.$$

Если частота внешней силы ω будет равна собственной частоте колебаний маятника

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},$$

то в колеблющейся системе наступит резонанс, при котором амплитуда колебаний будет максимальной. Это возможно при условии

$$\frac{2\pi v}{l} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

т.е. при скорости поезда

$$v = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 19,9 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $v = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 19,9 \text{ м/с.}$

8.56. Через ручей переброшена длинная упругая доска. Когда мальчик стоит на ней неподвижно, она прогибается на $\Delta x = 10 \text{ см}$. Когда же он идет по ней со скоростью $v = 3,6 \text{ км/ч}$, то доска начинает раскачиваться так сильно, что мальчик падает в воду. Какова длина шага мальчика?

8.57. Капли воды падают через одинаковые интервалы времени с некоторой высоты на пластину, закрепленную на вертикальной пружине. При этом амплитуда колебаний пластины оказывается наибольшей. Найти расстояние между отрывающейся и ближайшей к ней падающей каплей, если частота собственных колебаний пластины $\omega_0 = 10 \text{ рад/с.}$

8.58. Автомобиль с двухколесным автоприцепом движется по дороге, выложенной из бетонных неплотно пригнанных плит длиной $l = 10 \text{ м}$ каждая. Оценить скорость автомобиля, при которой прицеп будет «подпрыгивать» на стыках наиболее сильно. Масса прицепа $m = 100 \text{ кг}$, жесткость пружин амортизаторов каждого из его колес $k = 5 \cdot 10^3 \text{ Н/м.}$

ГЛАВА II

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Любое вещество состоит из огромного числа мельчайших частиц, сохраняющих все химические свойства данного вещества. Эти мельчайшие частицы называются *молекулами*. Сами молекулы могут состоять из более простых частиц – *атомов*. Например, молекула воды H_2O состоит из трех атомов: одного атома кислорода и двух атомов водорода. Если различного вида молекул известно огромное число (миллионы), то различных атомов совсем немного. В настоящее время известно 105 различных видов атомов, причем в природе их встречается 88, а 17 получено искусственным путем. Это атомы так называемых химических элементов. Размеры молекул и составляющих их атомов чрезвычайно малы: если представить их в виде шариков, то их радиус имеет численное значение порядка 10^{-10} м. Зато число частиц в веществе очень велико. В одном грамме воды, например, содержится $3,3 \cdot 10^{22}$ молекул.

Массы атомов и молекул тоже малы, поэтому их удобнее измерять не в килограммах, а в специальных единицах. Эта единица называется *атомной единицей массы* [а.е.м.]. По определению,

$$1 \text{ а.е.м.} = m_{\text{ед}} [\text{кг}] = 1/12 \cdot (\text{масса атома изотопа углерода } {}^12_6 C). \quad (\text{II.1})$$

Согласно современным измерениям

$$1 \text{ а.е.м.} = m_{\text{ед}} \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.} \quad (\text{II.2})$$

Масса атома, выраженная в [а.е.м.], называется *относительной атомной массой* *A*. Относительные атомные массы химических элементов приведены в таблице Д. И. Менделеева. Так, например, для водорода $A_H = 1,0079$, для кислорода $A_O = 15,9994$, а для изотопа углерода ${}^12_6 C$ относительная атомная масса равна точно 12. Масса молекулы, выраженная в [а.е.м.], называется *относительной молекулярной массой* μ' , которая, очевидно, равна сумме относительных атомных масс атомов, составляющих данную молекулу. Так, например, относительная молекулярная масса молекулы воды равна

$$\mu'_{H_2O} = 2 \cdot A_H + A_O \approx 2 \cdot 1 + 16 = 18 \text{ а.е.м.}$$

Для нахождения массы молекулы m_0 в килограммах нужно ее относительную молекулярную массу μ' умножить на $m_{\text{ед}} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг, т.е.

$$m_0 = \mu' m_{\text{ед}}. \quad (\text{II.3})$$

В молекулярной физике удобно использовать понятие *количество вещества*. Единица количества вещества называется *моль*. По определению, моль любого вещества – это такое количество вещества, которое

содержит столько же молекул (или атомов, если вещество состоит из одноатомных молекул), сколько их содержится в 0,012 кг углерода ^{12}C . Из определения моля следует, что моль любого вещества состоит из одинакового числа молекул. Это число называется *числом Авогадро* N_A и равно

$$N_A = \frac{0,012 \text{ [кг]}}{m_{^{12}\text{C}}} ,$$

где $m_{^{12}\text{C}} = \mu'_{^{12}\text{C}} m_{\text{ед}}$ – масса атома в килограммах, а $\mu'_{^{12}\text{C}} = 12$ а.е.м. Следовательно,

$$N_A = \frac{0,012}{12 m_{\text{ед}}} = \frac{10^{-3}}{m_{\text{ед}}} = \frac{10^{-3}}{1,66 \cdot 10^{-27}} = 6,02 \cdot 10^{23} \left[\frac{1}{\text{моль}} \right]. \quad (\text{II.4})$$

Масса одного моля вещества называется его *молярной массой* μ [кг/моль]. Ясно, что

$$\mu = m_0 N_A .$$

Используя (II.3) и (II.4), получим

$$\mu = \mu' m_{\text{ед}} N_A = \mu' m_{\text{ед}} \frac{10^{-3}}{m_{\text{ед}}} = 10^{-3} \mu' \left[\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right]. \quad (\text{II.5})$$

Например, молярная масса воды $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-3} \mu'_{\text{H}_2\text{O}} = 0,018$ кг/моль, а молярная масса углерода 0,012 кг/моль. Если какое-либо тело имеет массу m [кг], то говорят, что в этом теле находится $v = m/\mu$ количества вещества. Число молекул в m [кг] вещества

$$N = v N_A = \frac{m}{\mu} N_A . \quad (\text{II.6})$$

С помощью (II.6) легко проверить более раннее утверждение о количестве молекул в одном грамме воды.

Между молекулами вещества существуют силы взаимодействия: на больших расстояниях друг от друга молекулы притягиваются, а при сближении они отталкиваются. Эти силы, несмотря на то что каждая молекула электрически нейтральна, имеют в основном электрическое происхождение. Само существование трех различных *агрегатных состояний* вещества – твердого, жидкого и газообразного – указывает на существование межмолекулярных сил. В твердом и жидком состояниях молекулы притягиваются друг к другу настолько, что тела сохраняют свой объем, а в случае твердого тела – еще и форму. В газообразном состоянии силы взаимодействия значительно меньше, так что газ заполняет весь предоставленный ему объем. Этот последний факт указывает еще на одну очень важную особенность частиц любого вещества: молекулы вещества находятся в постоянном движении. Характерной особенностью этих движений является их полная беспорядочность, хаотичность. Это хаотическое движение молекул носит название *теплового движения*. В твердых телах молекулы тоже совершают хаотическое тепловое движение, состоящее из непрерывных беспорядочных колебаний молекул около своих положений равновесия, образующих в твердых телах правильную кристаллическую

решетку. В хаотическом тепловом движении молекул заключена природа теплоты и тепловых явлений.

Если привести в соприкосновение два тела, то молекулы этих тел, сталкиваясь между собой, будут передавать друг другу энергию. Тело, которое при этом теряет энергию, называют более нагретым, а тело, к которому энергия переходит, — менее нагретым. Как показывает опыт, такой переход энергии продолжается до тех пор, пока не установится некоторое состояние, в котором тела могут находиться сколь угодно долго. Это состояние называют *состоянием теплового равновесия*.

Для характеристики степени нагретости тел служит понятие *температуры*. В физике в качестве температурной шкалы пользуются так называемой *абсолютной шкалой* (шкалой Кельвина), глубоко связанной с наиболее общими тепловыми свойствами всех тел.

Ясно, что физическое определение температуры должно основываться на такой физической величине, которая становится одинаковой для двух любых тел, находящихся в состоянии теплового равновесия друг с другом. Оказывается, что этим замечательным свойством обладает *средняя кинетическая энергия поступательного движения* частиц (молекул или атомов) тела. По этой причине средняя кинетическая энергия поступательного движения частиц внутри любого тела

$$\left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{m_0 v_i^2}{2}$$

(где m_0 — масса частицы; v_i — скорость i -й частицы; N — число частиц в теле) может быть выбрана для определения величины температуры. По определению, абсолютная температура T в кельвинах:

$$T = \frac{2}{3} \frac{\left\langle \frac{1}{2} m_0 v^2 \right\rangle}{k} [\text{K}], \quad (\text{II.7})$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — коэффициент, переводящий энергию в джоулях [Дж] в кельвины [К], называется *постоянной Больцмана*.

Из (II.7) следует, что в состоянии теплового равновесия при температуре T средняя энергия поступательного движения молекулы вещества

$$\left\langle \frac{1}{2} m_0 v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k T. \quad (\text{II.8})$$

Следует отметить, что формула (II.8) справедлива не только для молекул вещества, но и для частиц больших, макроскопических масштабов, например, мелких пылинок, взвешенных в жидкости, которые можно наблюдать через микроскоп (так называемое броуновское движение).

Для характеристики скорости теплового движения частиц можно воспользоваться квадратным корнем из входящей в определение температуры величины $\langle v^2 \rangle$; его обычно называют *тепловой* v_T или *среднеквадратичной* (средней квадратичной) $v_{cp\ kb}$ скоростью частицы вещества:

$$v_T = v_{cp\ kb} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 k T}{m_0}}. \quad (\text{II.9})$$

Для среднеквадратичной скорости молекул (II.9) можно получить более удобное выражение, умножив под корнем числитель и знаменатель на число Авогадро N_A . Учитывая, что $m_0 N_A = \mu$ (молярная масса вещества), а

$$k N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 8,31 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} \right] = R \quad (\text{II.10})$$

— универсальная газовая постоянная, получим

$$v_{\text{ср кв}} = \sqrt{\frac{3 R T}{\mu}}. \quad (\text{II.11})$$

В технике и быту часто используется не шкала Кельвина, а шкала Цельсия. Температура t [$^{\circ}\text{C}$] по этой шкале связана с абсолютной температурой T [К] соотношением:

$$t = T - 273,15. \quad (\text{II.12})$$

Благодаря тепловому движению своих молекул газ (или жидкость) оказывает давление на стенки заключающего его сосуда. Молекулы газа, сталкиваясь со стенкой, передают ей часть своего импульса. Изменение же импульса тела в единицу времени определяет действующую на него силу. Если отнести силу ΔF_n , действующую со стороны газа (или жидкости) в направлении, нормальному к участку поверхности стенки ΔS , к величине ΔS , то мы получим давление на этом участке:

$$p = \frac{\Delta F_n}{\Delta S} [\text{Н}/\text{м}^2 = \text{Па}]. \quad (\text{II.13})$$

Свойства тел, рассматриваемых в целом, не вдаваясь в детали их молекулярной структуры (с которой эти свойства в действительности связаны), называются макроскопическими свойствами. Температура и давление являются важнейшими величинами, характеризующими макроскопическое состояние тела. К числу этих величин относится также и объем тела V . Однако эти три величины не являются независимыми. Уравнение, связывающее эти три величины, называется уравнением состояния данного тела и является одним из наиболее важных соотношений, характеризующих его тепловые свойства. Получить же теоретически уравнение состояния можно лишь в случае самых простых тел (например, для идеального газа).

Следует теперь уточнить введенное выше понятие теплового равновесия как состояния, в котором температуры двух соприкасающихся тел выравниваются. Вообще состоянием теплового равновесия системы тел называют такое состояние, при котором в системе не происходит никаких самопроизвольных тепловых процессов и все части системы покоятся друг относительно друга, не совершая никаких макроскопических движений. Следовательно, в состоянии равновесия выравниваются не только температуры частей системы, но и давления, иначе эти части пришли бы в движение.

§9. Основы молекулярно-кинетической теории газов. Уравнение состояния идеального газа

Идеальным газом называется такой газ, в котором силами взаимодействия молекул можно пренебречь. Время от времени молекулы сталкиваются между собой, но столкновения происходят настолько редко, что большую часть времени молекулы газа движутся равномерно и прямолинейно. Чем более разрежен реальный газ, тем ближе его свойства к свойствам идеального. Для такого газа оказывается возможным получить зависимость между его макроскопическими параметрами p , V и T , рассматривая движение одной молекулы, а затем усредняя это движение по огромному числу составляющих этот газ молекул (при обычных условиях в 1 см³ газа содержится $2 \cdot 10^{19}$ молекул).

Если в сосуде объемом V содержится N одинаковых молекул идеального газа массой m_0 каждая, движущихся хаотически, то эти молекулы, сталкиваясь со стенками сосуда и передавая им часть своего импульса, оказывают на них давление

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle, \quad (9.1)$$

где $n = N/V$ – концентрация газа; $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \langle \frac{1}{2} m_0 v^2 \rangle$ – кинетическая энергия поступательного движения молекулы, усредненная по всем N молекулам газа; v – скорость поступательного движения молекулы. Уравнение (9.1) называется *основным уравнением кинетической теории идеального газа*.

Если воспользоваться определением абсолютной температуры (II.7), согласно которому

$$\langle \frac{1}{2} m_0 v^2 \rangle = \frac{3}{2} k T,$$

то уравнение (9.1) можно записать в виде

$$p = n k T. \quad (9.2)$$

Это и есть уравнение состояния идеального газа, причем оно записано в такой форме, которая не содержит никаких специфических свойств того или иного конкретного газа. Так, из (9.2) следует, что при заданных давлении p и температуре T , концентрации молекул любого газа одинаковы и равны $p/k T$.

Если в сосуде содержится смесь из r различных идеальных газов, то полное число молекул в сосуде равно

$$N = \sum_{i=1}^r N_i, \quad (9.3)$$

где N_i – число молекул i -го сорта.

Подставляя (9.3) в (9.2) и учитывая, что все газы находятся в равновесии (т.е. обладают одинаковой температурой T), получим

$$p = \frac{k T}{V} \sum_{i=1}^r N_i = k T \sum_{i=1}^r \frac{N_i}{V} = k T \sum_{i=1}^r n_i, \quad (9.4)$$

где $n_i = N_i/V$ – концентрация молекул i -го сорта.

Соотношение (9.4) можно записать в виде

$$p = \sum_{i=1}^r p_i, \quad (9.5)$$

где $p_i = n_i k T$ – так называемое *парциальное давление* i -го компонента смеси, т.е. давление, которое производил бы этот компонент смеси, если бы он один занимал весь объем сосуда. Уравнение (9.5) является математической записью закона Дальтона для смеси идеальных газов, который гласит, что давление смеси газов равно сумме парциальных давлений компонентов смеси.

Вернемся к уравнению состояния (9.2) для идеального газа, состоящего из N одинаковых молекул массой m_0 каждая. Число молекул газа массой m и молярной массой μ равно (см. формулу (II.6))

$$N = \frac{m}{\mu} N_A = v N_A,$$

где $v = m/\mu$ – число молей газа. Подставляя это выражение для N в (9.2) и учитывая, что $k N_A = R$ (см. (II.10)), получим уравнение, которое называется *уравнением Менделеева – Клапейрона*:

$$p V = \frac{m}{\mu} R T = v R T. \quad (9.6)$$

Это уравнение, в отличие от (9.2), содержит специфическое свойство конкретного газа – его молярную массу. Разделив (9.6) на объем газа V и введя плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (9.7)$$

получим

$$p = \frac{\rho}{\mu} R T. \quad (9.8)$$

Из уравнения (9.8) следует, что плотность газа не постоянна, а определяется его давлением и температурой.

Для смеси различных газов, находящихся в равновесии, уравнение (9.6) можно записать в виде

$$p V = \frac{m}{\mu_{cm}} R T, \quad (9.9)$$

или

$$p = \frac{\rho}{\mu_{cm}} R T, \quad (9.10)$$

где $p = \sum_{i=1}^r p_i$ – давление смеси; $m = \sum_{i=1}^r m_i$ – масса смеси (m_i – масса i -го компонента смеси); $\rho = m/V = \sum_{i=1}^r m_i/V = \sum_{i=1}^r \rho_i$ – плотность смеси газов (ρ_i – плотность i -го компонента смеси) и

$$\mu_{cm} = \frac{m}{\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{\mu_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^r \frac{m_i/m}{\mu_i}} \quad (9.11)$$

– *средняя молярная масса смеси*. Здесь m_i/m – относительное содержание (по массе) i -го компонента смеси. Например, молярная масса воздуха, со-

стоящего из азота N_2 ($\approx 78\%$), кислорода O_2 ($\approx 21\%$) и небольшого количества аргона, водорода и других газов, равна $0,029 \text{ кг/моль}$. Используя это значение и уравнение (9.10), можно, например, найти плотность воздуха при нормальных условиях, т.е. при давлении $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и температуре $T_0 = 273,15 \text{ К}$ (или при $t = 0^\circ\text{C}$):

$$p_0 = \frac{P_0 \mu_{\text{см}}}{R T_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 0,029}{8,31 \cdot 273,15} \approx 1,29 \text{ кг/м}^3.$$

Обратимся еще раз к уравнению Менделеева – Клапейрона (9.6), описывающему связь между макроскопическими параметрами газа p , V и T (будем считать, что количество вещества в газе $v = m/\mu = \text{const}$). При изменении состояния газа меняются, вообще говоря, все три параметра газа, связанные уравнением (9.6). Если бы мы попытались изобразить графически эти изменения, то мы бы получили некоторую поверхность (при постоянном числе молей v) в трехмерной системе координат, на оси которой откладывались величины p , V и T . Поскольку, однако, пространственное построение на практике неудобно, ограничиваются обычно построением плоских графиков, изображая на них кривые, представляющие собой сечения поверхности плоскостями, перпендикулярными той или иной координатной оси. Так, пересекая поверхность плоскостями, перпендикулярными оси температур T (при этом $T = \text{const}$), мы получим семейство кривых, изображающих зависимость давления p от объема V при различных заданных значениях температуры T ; такие кривые называются *изотермами*. Для идеального газа при $T = \text{const}$ (см. (9.6))

$$pV = \text{const.} \quad (9.12)$$

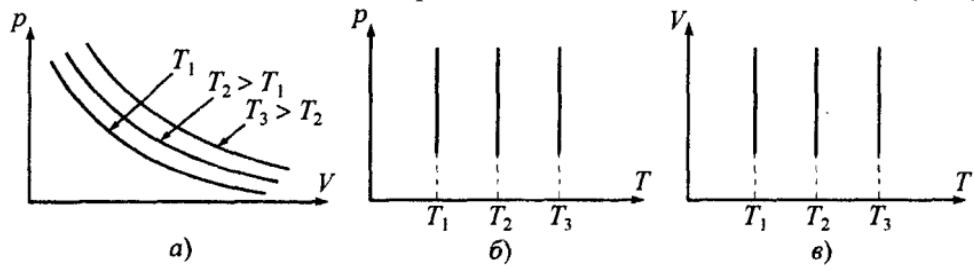


Рис. 9.1

Соотношение (9.12) выражает закон *Бойля – Мариотта*. Семейство изотерм, как видно из (9.12), представляет собой семейство гипербол (рис. 9.1, а), расстояние до которых от начала координат увеличивается при увеличении температуры. Изотермический процесс можно изобразить и на диаграммах зависимости p от T и V от T (рис. 9.1, б, в).

Аналогичным образом можно построить семейство *изобар* – кривых, изображающих зависимость V от T при заданных значениях давления p . Для идеального газа при $p = \text{const}$ из (9.6) следует соотношение

$$V/T = \text{const}, \quad (9.13)$$

которое выражает закон *Гей – Люссака*. Изобары на диаграмме $V – T$ представляют собой семейство прямых, проходящих через начало ко-

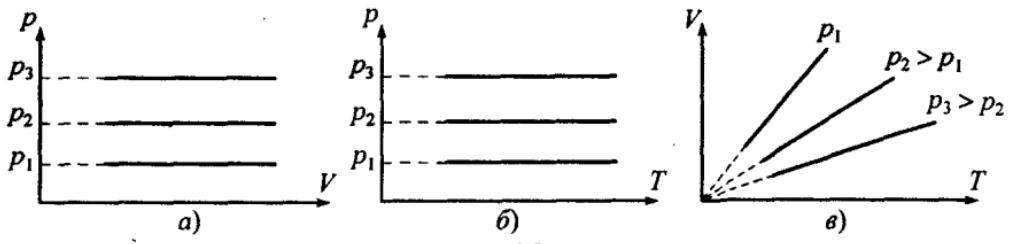


Рис. 9.2

ординат, угол наклона которых к оси температур T уменьшается с увеличением давления (рис. 9.2, в). Изобарический процесс можно также изобразить на диаграммах p – V (рис. 9.2, а) и p – T (рис. 9.2, б).

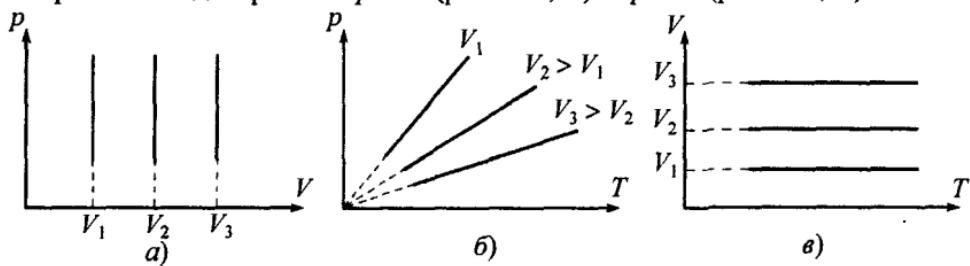


Рис. 9.3

Пересекая поверхность, описывающую зависимость давления p от объема V и температуры T , плоскостями, перпендикулярными оси объемов V , получим семейство изохор — кривых зависимости давления p от температуры T при заданных значениях объема, занимаемого газом. Для идеального газа из (9.6) при $V = \text{const}$ получим соотношение

$$p/T = \text{const}, \quad (9.14)$$

которое выражает закон Шарля. Семейство изохор на диаграмме p – T — семейство прямых, проходящих через начало координат, угол наклона которых к оси температур T уменьшается с увеличением объема V (рис. 9.3, б). На рис. 9.3, а, в изохорический процесс изображен на диаграммах p – V и V – T .

Рекомендации по решению задач

Хотя в данном параграфе разговор идет о идеальном газе, необходимо твердо уяснить, что такие понятия, как моль, молярная масса, число Авогадро, температура, средняя кинетическая энергия движения молекул, тепловая скорость, относятся как к газам, так и любому другому агрегатному состоянию вещества. Отметим те основные положения молекулярно-кинетической теории, которые можно считать основными:

- вещество имеет «зернистую» структуру: оно состоит из молекул (атомов). В одном моле вещества содержится одинаковое число молекул независимо от его агрегатного состояния, равное числу Авогадро;
- молекулы вещества находятся в непрерывном тепловом движении;
- характер теплового движения зависит от степени взаимодействия молекул друг с другом и изменяется при переходе вещества из одного агрегатного состояния в другое;
- интенсивность теплового движения молекул зависит от степени нагретости вещества, характеризуемой абсолютной температурой.

В случае идеального газа предполагают, что средняя кинетическая энергия молекул $\langle \epsilon \rangle$ много больше потенциальной энергии их взаимодействия $U_{\text{вз}}$: $\langle \epsilon \rangle \gg U_{\text{вз}}$. Это условие достигается при достаточно высоких температурах и при достаточно сильном разрежении газа. Иными словами, газ можно считать идеальным, если он достаточно нагрет и разрежен. Все уравнения и законы, содержащиеся в §9, относятся именно к таким газам.

При решении задач на общие положения молекулярно-кинетической теории вещества достаточно ясного понимания основ теории.

При решении задач на идеальные газы обязательно используется уравнение состояния (9.2) или уравнение Менделеева – Клапейрона (9.6), которое в случаях, если какой-либо параметр состояния остается неизменным (при постоянной массе газа), автоматически переходит в одно из трех уравнений: закон Бойля – Мариотта (9.12), Гей – Льюссака (9.13) или Шарля (9.14).

Рассмотрим более подробно уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \nu RT,$$

полагая число молей газа неизменным. Очевидно, что изменение одного из параметров (p , V , T) обязательно приведет к изменению других. Рассмотрим два различных состояния некоторого идеального газа с начальными параметрами (p_1, V_1, T_1) и конечными – (p_2, V_2, T_2) . Из уравнений Менделеева – Клапейрона:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1, \quad p_2 V_2 = \nu R T_2$$

можно получить связь между параметрами начального и конечного состояний:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Это соотношение, записанное в виде

$$\frac{pV}{T} = \text{const},$$

называют объединенным газовым законом; при постоянном одном из параметров состояния (p , V или T) газа из него следуют законы изопроцессов (Гей – Льюссака, Шарля или Бойля – Мариотта соответственно).

Основную группу задач этого параграфа составляют задачи, где заданы несколько состояний одного и того же газа, в которых применимо уравнение объединенного газового закона (или его частные случаи). Последовательность решения таких задач может быть следующей:

а) прочитав условие задачи, нужно ясно представить, в скольких различных процессах участвует данный газ при переходе из начального состояния в конечное. Если газ последовательно участвует в нескольких процессах, то удобно сделать схематический чертеж, на котором изобразить все процессы и отметить состояния газа в начале и в конце каждого из них;

б) для каждого процесса написать уравнения, связывающие начальные и конечные параметры состояния газа в процессе: либо уравнения Менделеева – Клапейрона для начального и конечного состояний газа в процессе, либо уравнение объединенного газового закона (в частности, изопроцесса);

в) записать все вспомогательные условия, связывающие параметры (p , V , T , m) в различных состояниях;

г) при необходимости дополнить полученные уравнения развернутым значением параметров, выразив их через известные величины, заданные в условии задачи. Решить полученную систему уравнений.

Другую группу задач составляют задачи, в которых рассматриваются смеси различных газов. Если имеется смесь газов и рассматриваются процессы, связанные с изменением ее состояния, то все действия, указанные для первой группы задач, нужно проделать для каждого компонента смеси отдельно, а результирующее давление смеси определить с помощью закона Дальтона (9.5). Если рассматриваются процессы образования смеси (например, при

сочинении нескольких сосудов, содержащих разные газы, или при диссоциации), то последовательность решения задач может быть такой:

- записать уравнение состояния для каждого газа до образования смеси;
- выяснить, какие компоненты образуются в результате возникновения смеси, и записать уравнение состояния для каждого компонента смеси;
- записать закон Дальтона для смеси;
- записать все вспомогательные условия и решить систему уравнений.

Часто встречаются задачи, в которых требуется умение вычислять давление газа в том или ином конкретном состоянии. К этим задачам отнесем задачи на расчет параметров газа, заключенного в сосуде под тяжелым поршнем, в прямой и U-образной трубке, где объем, занимаемый газом, ограничен столбиком жидкости и т.п. Здесь для нахождения давления следует использовать закон Паскаля: выбрать нулевой уровень, отделяющий газ от поршня или жидкости, и записать уравнение равновесия поршня или столба жидкости. В остальном эти задачи решаются аналогично задачам первой группы.

В комбинированных задачах, где рассматривается движение сосуда с газом (например, воздушного шара), уравнения состояния газа дополняются уравнениями механики.

Наконец, встречаются задачи, в которых задан закон изменения параметров состояния газа, отличный от изопроцессов. Здесь также можно использовать схему решения задач первой группы, а в качестве вспомогательных условий использовать уравнение процесса (т.е. зависимость между параметрами состояния в данном процессе), записав его в начальном и конечном состояниях газа. Если в задаче закон изменения параметров состояния задан графически (в любых переменных), необходимо представить его в виде математического уравнения, которое также использовать в качестве дополнительного условия (это может быть уравнение прямой, параболы и т.п. в переменных $p - V$, $p - T$ или $V - T$). Если при этом требуется в таком уравнении перейти от одних параметров состояния к другим, то нужно воспользоваться уравнением Менделеева – Клапейрона и исключить «лишний» параметр. Это часто используют, если требуется графически изобразить на рисунках некоторый процесс в различных переменных.

Задачи

9.1. В комнате объемом $V = 60 \text{ м}^3$ испарили капельку духов, содержащую $m = 10^{-4} \text{ г}$ ароматического вещества с относительной молекулярной массой $\mu' = 50 \text{ а.е.м.}$ Сколько молекул этого вещества попадает в легкие человека при каждом вдохе? Объем легких принять равным $V_0 = 2,2 \text{ л}$.

• *Решение.* Вследствие теплового движения молекул через некоторое время после того, как в комнате испарили капельку духов, их концентрация (т.е. количество молекул в единице объема) станет одинаковой во всей комнате:

$$n = N/V.$$

Количество молекул N ароматического вещества, содержащихся в массе m , равно

$$N = \frac{m}{\mu'} N_A,$$

где молярная масса $\mu = \mu' \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Поскольку число молекул в единице объема

$$n = \frac{m N_A}{\mu' \cdot 10^{-3} V},$$

то при каждом вдохе в легкие человека попадает

$$N_0 = n V_0 = \frac{m N_A V_0}{\mu' \cdot 10^{-3} V} \approx 4,4 \cdot 10^{16} \text{ молекул.}$$

• Ответ: $N_0 = \frac{m N_A V_0}{\mu' \cdot 10^{-3} V} \approx 4,4 \cdot 10^{16} \text{ молекул.}$

9.2. Найти массу молекулы углекислого газа. Подсчитать число молекул в $m = 100$ г газа, а также их концентрацию при плотности газа $\rho = 1,98 \text{ кг}/\text{м}^3$. Молярная масса $\mu = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

9.3. Если пометить все молекулы в одном стакане воды и вылить эту воду в Мировой океан, а потом вновь зачерпнуть стакан воды, то сколько в нем будет меченых молекул? Объем воды Мирового океана $V_1 = 1,3 \cdot 10^{18} \text{ м}^3$, объем стакана $V_2 = 0,2 \text{ л}$. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, молярная масса $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

9.4. В сосуде объемом $V = 8 \text{ л}$ находится $m = 8 \text{ г}$ гелия при давлении $p = 1 \text{ атм}$. Определить количество молекул гелия в сосуде и их суммарную кинетическую энергию. Молярная масса гелия $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

• *Решение.* В газе молекулы находятся на таких больших расстояниях друг от друга, что их можно считать практически не взаимодействующими. Каждая из молекул движется свободно от других молекул, испытывая относительно редкие столкновения. При этом каждая молекула участвует в трех типах движения: поступательном, вращательном и колебательном (атомы внутри молекулы колеблются друг относительно друга). Если молекула одноатомная, например, молекула гелия, то имеет место только поступательное движение.

Кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы гелия, усредненная по всем N молекулам газа, равна

$$\langle \epsilon_1 \rangle = \frac{3}{2} k T.$$

Следовательно, энергия всех молекул будет равна произведению $\langle \epsilon_1 \rangle$ на число молекул N газа в сосуде, т.е.

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} N k T,$$

где $N = (m/\mu) N_A \approx 1,2 \cdot 10^{24}$ молекул.

Отсюда с учетом уравнения Менделеева – Клапейрона, записанного для гелия при заданных параметрах состояния p и V ,

$$p V = \frac{m}{\mu} R T$$

получим

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} N_A k T = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R T = \frac{3}{2} p V = 1,2 \text{ кДж},$$

где учтено, что $N_A k = R$.

• *Ответ:* $N = \frac{m}{\mu} N_A \approx 1,2 \cdot 10^{24}$ молекул; $\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} p V = 1,2 \text{ кДж}$.

9.5. Чему равна средняя кинетическая энергия поступательного движения атома аргона, если $v = 2$ моля этого газа в баллоне объемом $V = 10 \text{ л}$ создают давление $p = 10^6 \text{ Па}$?

9.6. Средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул кислорода, находящегося в баллоне объемом $V = 5 \text{ л}$, равна $\langle \epsilon \rangle = 6 \text{ кДж}$. Найти давление кислорода в баллоне.

9.7. Плотность идеального газа, находящегося в закрытом сосуде, равна $\rho = 3 \text{ кг}/\text{м}^3$. Найти давление газа, если средняя квадратичная скорость его молекул $v_{\text{ср кв}} = 100 \text{ м}/\text{с}$.

• *Решение.* Даление идеального газа в сосуде зависит от других параметров состояния газа – занимаемого им объема и температуры – и связано с ними уравнением Менделеева – Клапейрона

$$p V = \frac{m}{\mu} R T, \quad \text{или} \quad p = \frac{\rho}{\mu} R T. \quad (1)$$

Поскольку средняя квадратичная скорость молекул газа является функцией его температуры

$$v_{\text{ср кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (2)$$

то, выразив температуру из (2)

$$T = \frac{\mu v_{\text{ср кв}}^2}{3R}$$

и подставив в уравнение (1), получим

$$p = \frac{\rho R}{\mu} \frac{\mu v_{\text{ср кв}}^2}{3R} = \frac{\rho v_{\text{ср кв}}^2}{3} \approx 10^4 \text{ Па.}$$

• Ответ: $p = \frac{\rho v_{\text{ср кв}}^2}{3} \approx 10^4 \text{ Па.}$

9.8. Найти концентрацию молекул водорода при давлении $p = 10^5 \text{ Па}$, если средняя квадратичная скорость его молекул равна $v_{\text{ср кв}} = 1000 \text{ м/с}$. Молярная масса водорода $\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

9.9. Найти среднюю квадратичную скорость молекул идеального газа, если в $m = 5 \text{ г}$ этого газа при нормальных условиях ($t = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 10^5 \text{ Па}$) содержится $N = 9,7 \cdot 10^{22}$ молекул.

9.10. Один литр идеального газа при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ и давлении $p = 1 \text{ атм}$ имеет массу $m = 0,0894 \text{ г}$. Какой это газ?

• Решение. Единственной специфической характеристикой конкретного газа в молекулярно-кинетической теории является его молярная масса. Из уравнения Менделеева – Клапейрона, записанного для газа при заданных параметрах состояния p , V и T ,

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

с учетом числовых данных задачи получим

$$\mu = \frac{mRT}{pV} = \frac{8,94 \cdot 10^{-5} \cdot 8,31 \cdot 273}{10^5 \cdot 10^{-3}} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Единственный газ, который может иметь такую молярную массу, – это водород H_2 .

• Ответ: водород H_2 .

9.11. При температуре $t = 27^\circ\text{C}$ и давлении $p = 4,155 \cdot 10^5 \text{ Па}$ плотность газа равна $\rho = 2,833 \text{ кг/м}^3$. Известно, что молекулы этого газа представляют собой соединение азота ^{14}N с водородом ^1H . Определить молярную формулу этого соединения.

9.12. Газ массой $m = 15 \text{ г}$, молекулы которого состоят из атомов водорода и углерода, содержит $N = 5,64 \cdot 10^{23}$ молекул. Определить массу атомов углерода и водорода, входящих в состав этого газа.

9.13. Сосуд объемом $V_1 = 4 \text{ л}$, заполненный идеальным газом при давлении $p_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$, соединяют с пустым сосудом объемом $V_2 = 2 \text{ л}$. Определить установившееся давление газа, считая его температуру неизменной.

• Решение. Соединение сосудов приведет к расширению газа, содержащегося в сосуде объемом V_1 , до объема $(V_1 + V_2)$. При этом установится новое давление p_2 . Так как процесс протекал изотермически, то из закона Бойля – Мариотта получим

$$p_1 V_1 = p_2 (V_1 + V_2).$$

Следовательно,

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2} = 8 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

• Ответ: $p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2} = 8 \cdot 10^4 \text{ Па.}$

9.14. Идеальный газ, находящийся в сосуде объемом $V_1 = 3$ л, изотермически сжали до объема $V_2 = 1,5$ л. На сколько процентов изменилось давление газа?

9.15. Стеклянная лампа емкостью $V = 500$ см³ наполнена азотом при давлении $p_1 = 600$ мм рт. ст. Какая масса воды войдет в лампу, если в ней сделать небольшое отверстие под водой при давлении $p_2 = 760$ мм рт. ст.? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³. Температуру азота считать постоянной.

9.16. При нагревании идеального газа на $\Delta T = 3$ К при постоянном объеме его давление увеличилось на $\alpha = 1\%$ от первоначального давления. Определить начальную температуру газа.

- Решение. Изохорическое нагревание газа постоянной массы подчиняется закону Шарля:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Так как первоначальное давление p_1 газа увеличилось на α процентов (т.е. на $\Delta p = \alpha p_1$, где $\alpha = 0,01$), то конечное давление

$$p_2 = p_1 + \Delta p = (1 + \alpha) p_1.$$

Следовательно, конечная температура газа T_2 в

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} = 1 + \alpha$$

раз стала больше начальной температуры T_1 .

Представив T_2 в виде $T_2 = T_1 + \Delta T$, получим

$$T_1 + \Delta T = T_1 (1 + \alpha); \quad T_1 = \Delta T / \alpha = 300 \text{ К.}$$

- Ответ: $T_1 = \Delta T / \alpha = 300$ К.

9.17. Насколько изменилось давление воздуха в шине автомобиля при повышении температуры на $\Delta T = 30$ К, если первоначально при $T_1 = 270$ К давление было равно $p_1 = 1,8$ атм? Изменением объема шины пренебречь.

9.18. В закрытом сосуде находится идеальный газ. На сколько процентов изменится его давление, если средняя квадратичная скорость его молекул увеличится на 20%?

9.19. При повышении температуры на $\Delta T = 3$ К объем газа увеличился на $\alpha = 1\%$. Какова была первоначальная температура, если процесс прошел изобарически?

- Решение. Изобарическое нагревание газа постоянной массы подчиняется закону Гей – Люссака:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Так как начальный объем V_1 газа увеличился на α процентов (т.е. на $\Delta V = \alpha V_1$, где $\alpha = 0,01$), то конечный объем

$$V_2 = V_1 + \Delta V = (1 + \alpha) V_1.$$

Следовательно, конечная температура газа T_2 в

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = 1 + \alpha$$

раз стала больше начальной температуры T_1 .

Представив T_2 в виде $T_2 = T_1 + \Delta T$, получим

$$T_1 + \Delta T = T_1 (1 + \alpha); \quad T_1 = \Delta T / \alpha = 300 \text{ К.}$$

- Ответ: $T_1 = \Delta T / \alpha = 300$ К.

9.20. Воздушный шар внесли с улицы, где температура воздуха была $t_1 = -13^\circ\text{C}$, в комнату с температурой $t_2 = 17^\circ\text{C}$. На сколько процентов увеличился объем шара? Натяжением резины пренебречь.

9.21. Тонкостенный полый шар объемом $V = 5 \text{ см}^3$ имеет небольшое несквозное отверстие. Шар нагревают до температуры $t_1 = 400^\circ\text{C}$ и опускают отверстием на поверхность ртути. Какая масса ртути войдет в шар при его охлаждении до $t_2 = 16^\circ\text{C}$? Плотность ртути $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$. Расширением шара пренебречь.

9.22. Баллон содержит сжатый идеальный газ при температуре $t_1 = 27^\circ\text{C}$ и давлении $p_1 = 0,2 \text{ МПа}$. Каким будет давление в баллоне, когда из него будет выпущено $\alpha = 0,7$ массы газа, а температура понизится до $t_2 = 0^\circ\text{C}$?

• *Решение.* Так как масса газа в сосуде изменилась, то использовать закон Шарля для изохорического процесса нельзя. Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для начального и конечного состояний газа

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2.$$

Отсюда находим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 T_1}{m_2 T_2}, \quad \text{или} \quad p_2 = p_1 \frac{m_2 T_2}{m_1 T_1},$$

где m_2 – масса газа, оставшегося в сосуде:

$$m_2 = m_1 - \alpha m_1 = (1 - \alpha) m_1.$$

Следовательно, давление в баллоне станет равным

$$p_2 = p_1 (1 - \alpha) \frac{T_2}{T_1} \approx 5,46 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

• *Ответ:* $p_2 = p_1 (1 - \alpha) T_2 / T_1 \approx 5,46 \cdot 10^4 \text{ Па.}$

9.23. В баллоне объемом $V = 10 \text{ л}$ содержится водород при температуре $t = 20^\circ\text{C}$ и давлении $p = 10 \text{ атм}$. Какое количество водорода было выпущено из баллона, если при полном сгорании оставшегося образовалось $m = 50 \text{ г}$ воды? Молярная масса водорода и кислорода равны $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$ и $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$ соответственно.

9.24. В сосуде объемом $V = 10 \text{ л}$ находится гелий под давлением $p_1 = 1 \text{ МПа}$ и при температуре $t_1 = 27^\circ\text{C}$. После того, как из сосуда было взято $\Delta m = 10 \text{ г}$ газа, температура в сосуде понизилась до $t_2 = 17^\circ\text{C}$. Определить давление гелия, оставшегося в сосуде. Молярная масса гелия $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

9.25. При аэродинамическом торможении в атмосфере планеты температура внутри автоматического спускаемого аппарата увеличилась от $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до $t_2 = 80^\circ\text{C}$. Какую часть воздуха необходимо выпустить, чтобы давление внутри аппарата не изменилось?

• *Решение.* При температуре t_1 внутри летательного аппарата находился воздух при некотором давлении p_1 в количестве v_1 молей, причем

$$p_1 V = v_1 R T_1,$$

где V – объем, занимаемый воздухом.

Очевидно, что при повышении температуры воздуха до t_2 его давление возрастет. Чтобы этого избежать, некоторое количество газа необходимо выпустить. При этом для оставшегося воздуха справедливо

$$p_1 V = v_2 R T_2.$$

Следовательно, количество выпущенного воздуха

$$\Delta v = v_1 - v_2 = \frac{p_1 V}{R T_1} - \frac{p_1 V}{R T_2} = \frac{p_1 V (T_2 - T_1)}{R T_1 T_2}$$

относительно начального количества

$$v_1 = \frac{p_1 V}{R T_1}$$

составит

$$\frac{\Delta v}{v_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \approx 0,17 = 17\%.$$

- Ответ: $\frac{\Delta v}{v_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \approx 0,17 = 17\%$.

9.26. После того, как в комнате протопили печь, температура поднялась с $t_1 = 15^\circ\text{C}$ до $t_2 = 27^\circ\text{C}$. На сколько процентов уменьшилось число молекул в этой комнате?

9.27. В стальном резервуаре находится сжатый воздух при температуре $t_1 = -23^\circ\text{C}$. На резервуаре имеется предохранительный клапан. Клапан открывается, если давление в резервуаре увеличивается на $\Delta p = 2$ атм. При нагревании резервуара до $t_2 = 27^\circ\text{C}$ из него вышло $\eta = 10\%$ массы газа. Какое давление было первоначально в резервуаре?

9.28. Сколько ходов должен сделать поршень компрессора, чтобы увеличить давление в баллоне объемом V от атмосферного p_0 до p , если объем рабочего цилиндра компрессора равен V_0 ? Забор воздуха производится из атмосферы. Изменение температуры не учитывать.

• **Решение.** После n ходов поршня компрессора из атмосферы будет «забран» объем воздуха $V_n = n V_0$ при давлении p_0 . Эта масса воздуха будет введена в объем баллона, создав в нем парциальное давление p'_n . Так как по условию задачи изменением температуры следует пренебречь, то справедлив закон Бойля – Марнотта:

$$p'_n V = p_0 n V_0.$$

Следовательно,

$$p'_n = p_0 \frac{n V_0}{V}.$$

Поскольку через n ходов давление в баллоне станет равным

$$p_n = p_0 + p'_n = p_0 \left\{ 1 + n \frac{V_0}{V} \right\},$$

то для достижения давления $p_n = p$ поршень компрессора должен сделать

$$n = \frac{V}{V_0} \left\{ \frac{p}{p_0} - 1 \right\}$$

ходов.

- Ответ: $n = \frac{V}{V_0} \left\{ \frac{p}{p_0} - 1 \right\}$.

9.29. В камеру футбольного мяча объемом $V = 2,5$ л накачивают воздух насосом, забирающим при каждом качании $V_0 = 0,15$ л атмосферного воздуха при давлении $p_0 = 10^5$ Па. Каково будет давление в камере мяча после $n = 50$ качаний, если камера вначале была пустой? Изменением температуры пренебречь.

9.30. Автомобильную камеру емкостью $V = 10$ л нужно накачать до давления $p = 2$ атм. Сколько качаний следует сделать насосом, забирающим при каждом качании $V_0 = 500$ см³ воздуха из атмосферы, если камера вначале была заполнена воздухом при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па. Изменением температуры пренебречь.

9.31. Сколько ходов должен сделать поршневой насос с объемом рабочего цилиндра V_0 , чтобы откачать воздух из баллона емкостью V от давления p_0 до давления p ? Изменением температуры пренебречь.

• *Решение.* Если в начале первого рабочего хода воздух в баллоне занимал объем V при давлении p_0 , то к концу первого хода та же масса воздуха займет объем $(V + V_0)$ при давлении p_1 . Так как температура воздуха не меняется, то по закону Бойля – Мариотта получим

$$p_0 V = p_1 (V + V_0).$$

Следовательно,

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V + V_0}.$$

В начале второго хода поршня объем и давление воздуха в баллоне равны соответственно V и p_1 , а в конце хода – $(V + V_0)$ и p_2 . Поэтому

$$p_1 V = p_2 (V + V_0),$$

откуда с учетом выражения для давления p_1

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V + V_0} = p_0 \left\{ \frac{V}{V + V_0} \right\}^2.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, легко получить, что к концу n -го рабочего хода давление в баллоне станет равным

$$p_n = p_0 \left\{ \frac{V}{V + V_0} \right\}^n.$$

Следовательно, для достижения давление $p_n = p$ насос должен сделать

$$n = \frac{\lg (p/p_0)}{\lg [V/(V + V_0)]} = \frac{\lg (p_0/p)}{\lg [(V + V_0)/V]}$$

ходов.

• *Ответ:* $n = \frac{\lg (p_0/p)}{\lg [(V + V_0)/V]}$.

9.32. Поршневым воздушным насосом откачивают воздух из сосуда. За один ход поршня откачивается $\alpha = 1/10$ объема воздуха в сосуде. Во сколько раз уменьшится давление воздуха в сосуде после двух ходов поршня? Температуру считать неизменной.

9.33. После $n = 6$ ходов поршня откачивающего насоса давление в сосуде стало равным $p = 35$ мм рт. ст. Каким было первоначальное давление газа в сосуде, если объем сосуда равен $V = 300$ см³, а объем цилиндра насоса $V_0 = 200$ см³? Температуру считать постоянной.

9.34. Идеальный газ, занимающий объем V_1 при давлении p_1 и температуре $T_1 = 300$ К, расширился изотермически до объема $V_2 = 2$ л. Затем давление газа было уменьшено изохорически в два раза. Далее газ расширился при постоянном давлении до объема $V_4 = 4$ л. Определить температуру газа в конечном состоянии.

• *Решение.* Так как газ последовательно проходит несколько состояний, участвуя в трех различных процессах, то для удобства решения задачи изобразим на рисунке графики процессов, например, в переменных $p - V$ (рис. 9.4).

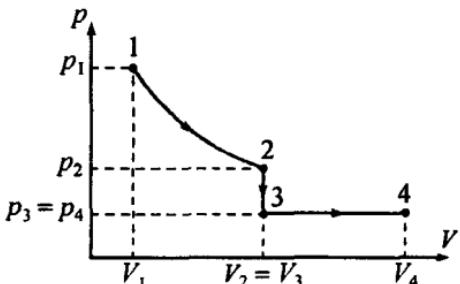


Рис. 9.4

- Ответ: $T_4 = \frac{1}{2} T_1 \frac{V_4}{V_2} = 300$ К.

9.35. Начальное состояние идеального газа определяется объемом V_0 , температурой T_0 и давлением p_0 . Газ подвергли сначала изобарическому расширению до объема V_1 , после чего нагрели при постоянном объеме до давления p_2 . Определить температуру газа в конечном состоянии.

9.36. Идеальный газ, находящийся при температуре $t_1 = 127^\circ\text{C}$ и давлении $p_1 = 4 \cdot 10^5$ Па, занимает первоначально объем $V_1 = 2$ л. Этот газ изотермически сжимают, затем изохорически охлаждают до температуры $t_3 = -73^\circ\text{C}$ и далее изотермически доводят его объем до $V_4 = 1$ л. Определить установившееся давление газа.

9.37. Приближенно воздух можно считать смесью азота ($\alpha_1 = 80\%$ по массе) и кислорода ($\alpha_2 = 20\%$ по массе). Найти молярную массу воздуха. Молярная масса азота $\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, кислорода — $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

- Решение. Число молекул в некотором объеме смеси двух газов равно

$$N = N_1 + N_2.$$

Количество молекул N_1 , N_2 каждого из газов, содержащихся в выбранном объеме, можно выразить через их массы m_1 , m_2 и молярные массы μ_1 , μ_2 :

$$N_1 = \frac{m_1}{\mu_1} N_A; \quad N_2 = \frac{m_2}{\mu_2} N_A.$$

Тогда

$$N = \frac{m_1}{\mu_1} N_A + \frac{m_2}{\mu_2} N_A, \quad \text{или} \quad \frac{m}{\mu_{\text{возд}}} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2},$$

где m — масса смеси; $\mu_{\text{возд}}$ — молярная масса воздуха. Следовательно,

$$\mu_{\text{возд}} = \frac{m \mu_1 \mu_2}{m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1} \approx 28,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

- Ответ: $\mu_{\text{возд}} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1} \approx 28,7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

9.38. В кислороде имеется примесь азота, массовая доля которого составляет $\alpha = 2\%$ массовой доли кислорода. Давление смеси газов $p_0 = 10^5$ Па. Определить парциальное давление азота. Молярная масса азота $\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, кислорода — $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

9.39. При некоторых температуре и давлении один газ имеет плотность $\rho_1 = 0,4$ кг/м³, а другой — $\rho_2 = 0,6$ кг/м³. Какую плотность будет иметь при тех же условиях смесь газов, если их массы одинаковы?

Запишем уравнения изотермического, изохорического и изобарического процессов, согласно обозначениям, принятым на рисунке:

- изотермический процесс: $p_1 V_1 = p_2 V_2$;
- изохорический процесс: $p_2 / T_2 = p_3 / T_3$;
- изобарический процесс: $V_2 / T_3 = V_4 / T_4$.

Решив полученную систему уравнений с учетом, что $T_2 = T_1$ и $p_2 = 2 p_3$, получим

$$T_4 = T_3 \frac{V_4}{V_3} = T_2 \frac{p_3}{p_2} \frac{V_4}{V_2} = \frac{1}{2} T_1 \frac{V_4}{V_2} = 300 \text{ К.}$$

9.40. Плотность смеси водорода и азота при температуре $t = 47^\circ\text{C}$ и давлении $p = 2$ атм равна $\rho = 0,3$ г/л. Найти концентрацию молекул водорода в смеси? Молярная масса водорода $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, азота – $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

• Решение. Для смеси газов справедлив закон Дальтона:

$$p = p_1 + p_2, \quad (1)$$

где p_1, p_2 – парциальные давления водорода и азота, которые могут быть определены из уравнений состояния

$$p_1 = n_1 k T, \quad p_2 = n_2 k T, \quad (2)$$

где n_1, n_2 – концентрации соответствующих газов.

Сложив уравнения (2) с учетом закона Дальтона (1), получим

$$p = (n_1 + n_2) k T. \quad (3)$$

Плотность смеси газов

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_1 + m_2}{V}, \quad (4)$$

где m_1, m_2 – массы водорода и азота в данной смеси.

Учитывая, что концентрация любого газа, содержащегося в объеме V ,

$$n = \frac{N}{V} = \frac{m}{\mu} \frac{N_A}{V},$$

выразим массы газов через их концентрации:

$$m_1 = \frac{\mu_1 n_1 V}{N_A}; \quad m_2 = \frac{\mu_2 n_2 V}{N_A}. \quad (5)$$

Подставив соотношения (5) в (4), находим

$$\rho = \frac{\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2}{N_A}. \quad (6)$$

Решив систему уравнений (3), (6), получим

$$n_1 = \frac{N_A (p \mu_2 / R T - \rho)}{\mu_2 - \mu_1} \approx 4,18 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3},$$

где учтено, что $k N_A = R$.

• Ответ: $n_1 = \frac{N_A (p \mu_2 / R T - \rho)}{\mu_2 - \mu_1} \approx 4,18 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$.

9.41. В закрытом сосуде объемом $V = 100$ л при температуре $T = 300$ К находится водород массой $m_1 = 4$ г и гелий массой $m_2 = 4$ г. Найти давление в сосуде после того, как в него поместили $N = 3 \cdot 10^{23}$ молекул азота. Молярная масса водорода $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, гелия – $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Температуру считать постоянной.

9.42. В сосуде объемом $V = 10$ л содержится смесь водорода и кислорода в равных массовых количествах (масса каждого $m = 2$ г). Весь кислород, соединяясь с частью водорода, образует воду. Каким будет давление оставшегося водорода при $t = 17^\circ\text{C}$? Молярная масса водорода $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, кислорода – $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

9.43. В баллонах объемами $V_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ м³ и $V_2 = 44 \cdot 10^{-3}$ м³ содержится одинаковый идеальный газ. Давление в первом баллоне $p_1 = 2,4 \cdot 10^6$ Па, во втором – $p_2 = 1,6 \cdot 10^6$ Па. Определить общее давление после соединения баллонов, если температура газов не изменилась.

- Решение. После соединения баллонов общее давление p' газов можно найти по закону Дальтона:

$$p' = p'_1 + p'_2,$$

где p'_1 , p'_2 – парциальные давления газов, первоначально находившихся в сосудах объемом V_1 и V_2 соответственно.

Сложив уравнения состояния каждого из газов после соединения баллонов

$$p'_1(V_1 + V_2) = v_1 R T, \quad p'_2(V_1 + V_2) = v_2 R T$$

с учетом закона Дальтона, получим

$$p' = \frac{v_1 + v_2}{V_1 + V_2} R T.$$

Число молей v_1 и v_2 компонентов смеси можно определить из уравнений Менделеева – Клапейрона, записанных до соединения баллонов:

$$p_1 V_1 = v_1 R T; \quad p_2 V_2 = v_2 R T.$$

Следовательно,

$$p' = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} \approx 1,85 \text{ МПа.}$$

- Ответ: $p' = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} \approx 1,85 \text{ МПа.}$

9.44. Два сосуда, содержащие некоторые газы, соединены трубкой с краном. Давления в сосудах равны p_1 и p_2 , а число молекул N_1 и N_2 соответственно. Каким будет давление, если открыть кран соединительной трубки? Температура газов не изменяется.

9.45. Лазерные трубы объемом $V_0 = 60 \text{ см}^3$ заполняются смесью гелия и неона в молярном отношении 5:1 при давлении $p_0 = 5 \text{ мм рт. ст.}$ Имеются баллоны этих газов, каждый объемом $V = 2 \text{ л}$. Давление в баллоне с гелием $p_1 = 50 \text{ мм рт. ст.}$, с неоном – $p_2 = 20 \text{ мм рт. ст.}$ Какое количество трубок можно заполнить?

9.46. В сосуде объемом $V = 1 \text{ дм}^3$ находится $m = 0,28 \text{ г}$ азота. Газ нагревают до температуры $t = 1500^\circ\text{C}$, при которой $\alpha = 30\%$ молекул азота диссоциировало на атомы. Определить давление в сосуде. Молярная масса азота $\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$

- Решение. После того, как часть молекул азота распалась на атомы, газ в сосуде можно считать состоящим из двух компонентов: молекулярного азота с молярной массой μ и атомарного азота с молярной массой $\frac{1}{2}\mu$. Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для того и другого компонента:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\frac{1}{2}\mu} R T, \quad (1)$$

где p_1 , p_2 – парциальные давления компонентов газа.

Давление смеси с учетом закона Дальтона и уравнений (1) можно представить в виде

$$p = p_1 + p_2 = \frac{R T}{V} \left\{ \frac{m_1}{\mu} + \frac{2 m_2}{\mu} \right\}. \quad (2)$$

Поскольку массы компонентов смеси

$$m_1 = (1 - \alpha) m, \quad m_2 = \alpha m,$$

то из уравнения (2) получим

$$p = \frac{m R T}{V \mu} (1 + \alpha) \approx 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

- Ответ: $p = \frac{m R T}{V \mu} (1 + \alpha) \approx 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па.}$

9.47. В сосуде находится озон (O_3) при температуре $t_1 = 527^\circ\text{C}$. Через некоторое время он полностью превратился в кислород (O_2), а температура упала до $t_2 = 127^\circ\text{C}$. На сколько процентов изменилось давление в сосуде?

9.48. В сосуде находится идеальный двухатомный газ. При увеличении температуры в $n = 3$ раза давление газа увеличилось в $m = 3,15$ раза. Сколько процентов молекул от их начального количества распалось на атомы?

9.49. В вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем находится $m = 1 \text{ г}$ азота. Площадь поршня $S = 10 \text{ см}^2$, масса $M = 1 \text{ кг}$. Азот нагревают на $\Delta T = 10 \text{ К}$. Насколько при этом поднимется поршень? Давление над поршнем нормальное. Молярная масса азота $\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Трения нет.

• *Решение.* В положении равновесия на поршень действуют три силы: сила тяжести поршня Mg и силы давления над поршнем $F_0 = p_0 S$ и под поршнем $F = p S$, (где p_0 и p – внешнее давление и давление под поршнем соответственно), направленные так, как показано на рис. 9.5. При этом указанные силы уравновешиваются друг друга:

$$Mg + F_0 = F, \quad \text{или} \quad Mg + p_0 S = p S.$$

Следовательно, давление под поршнем

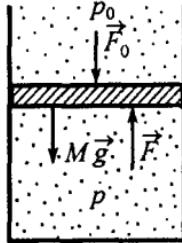


Рис. 9.5

$$p = \frac{Mg}{S} + p_0 \quad (1)$$

зависит только от массы, сечения поршня (сосуда) и давления над ним, т.е. не зависит от параметров газа под поршнем. Это означает, что процесс нагревания газа, заключенного под незакрепленным поршнем, будет протекать изобарически. В этом случае справедлив закон Гей – Люссака:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad \text{или} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

где $V_1 = Sh_1$, $V_2 = Sh_2$ – объемы, занимаемые азотом до и после нагревания. Следовательно, при нагревании газа его объем увеличится и поршень поднимется на высоту

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{V_2 - V_1}{S} = \frac{V_1}{S} \left\{ \frac{V_2}{V_1} - 1 \right\} = \frac{V_1}{S} \left\{ \frac{T_2}{T_1} - 1 \right\} = \frac{V_1}{S T_1} (T_2 - T_1) = \frac{V_1}{S T_1} \Delta T. \quad (2)$$

Записав уравнение состояния азота при температуре T_1

$$p V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1$$

с учетом (1)

$$\left\{ \frac{Mg}{S} + p_0 \right\} V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1, \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{m R}{\mu (Mg/S + p_0)},$$

из (2) получим

$$\Delta h = \frac{m R \Delta T}{\mu (Mg/S + p_0) S} = \frac{m R \Delta T}{\mu (Mg + p_0 S)} \approx 2,7 \text{ см.}$$

• Ответ: $\Delta h = \frac{m R \Delta T}{\mu (Mg + p_0 S)} \approx 2,7 \text{ см.}$

9.50. В вертикальном открытом сверху цилиндрическом сосуде поперечным сечением $S = 40 \text{ см}^2$ на высоте $h = 40 \text{ см}$ от дна находится в равновесии поршень массой $m = 2 \text{ кг}$, поддерживаемый столбом воздуха. Насколько опустится поршень, если на него поставить гирю массой $M = 10 \text{ кг}$?

Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Трения нет, температуру воздуха считать постоянной.

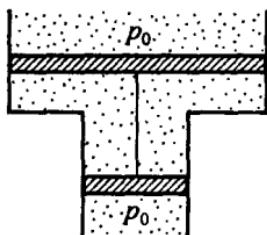


Рис. 9.6

9.51. В гладкой, открытой с обоих торцов вертикальной трубе, имеющей два разных сечения, находятся в равновесии два поршня, соединенные невесомой нерастяжимой нитью, а между поршнями $v = 1$ моль идеального газа (рис. 9.6). Площадь сечения верхнего поршня на $S = 10 \text{ см}^2$ больше, чем нижнего. Общая масса поршней $m = 5 \text{ кг}$. Давление наружного воздуха $p_0 = 1 \text{ атм}$. На сколько градусов надо нагреть газ между поршнями, чтобы они переместились на расстояние $\Delta l = 5 \text{ см}$?

9.52. В вертикальном открытом цилиндре над закрепленным снизу поршнем находится газ, закрытый сверху другим поршнем. Расстояние между поршнями равно h_0 . На верхний поршень до самого верха цилиндра налит слой жидкости плотностью ρ высотой h_0 . На какое расстояние надо поднять нижний поршень, чтобы над верхним остался слой жидкости высотой $h < h_0$? Атмосферное давление p_0 . Массой поршней пренебречь, температуру считать постоянной.

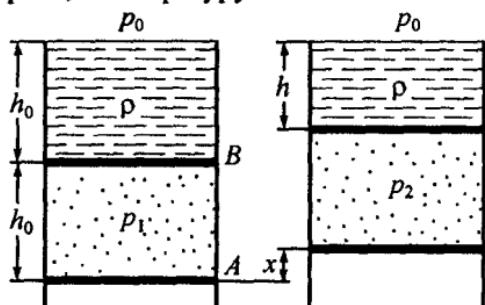


Рис. 9.7

• **Решение.** Поскольку поршни невесомы, то давление газа под поршнем B (рис. 9.7) будет определяться внешним давлением и давлением гидростатического столба жидкости. При перемещении нижнего поршня верхний поршень будет также подниматься, при этом часть жидкости вытечет, тем самым уменьшив давление, оказываемое на газ. Это приведет к изотермическому расширению газа от объема $V_1 = h_0 S$ (где S – площадь поперечного сечения цилиндра) до объема $V_2 = (2h_0 - x - h) S$, где x –

величина перемещения поршня A .

Поскольку до и после перемещения поршней поршень B находится в равновесии, то это означает, что давления над и под поршнем B одинаковы. Следовательно,

$$p_1 = p_0 + \rho g h_0, \quad p_2 = p_0 + \rho g h, \quad (1)$$

где p_1 , p_2 – давления газа, заключенного в объеме между поршнями до и после перемещения поршня A соответственно. Записав закон Бойля – Марнотта

$$p_1 h_0 S = p_2 (2h_0 - x - h) S$$

с учетом (1)

$$(p_0 + \rho g h_0) h_0 = (p_0 + \rho g h) (2h_0 - x - h),$$

получим

$$x = 2h_0 - h - \frac{p_0 + \rho g h_0}{p_0 + \rho g h} h_0.$$

• **Ответ:** $x = 2h_0 - h - \frac{p_0 + \rho g h_0}{p_0 + \rho g h} h_0$.

9.53. В открытом вертикальном цилиндрическом сосуде, заполненном воздухом, находятся в равновесии два одинаковых тонких тяжелых порш-

ня. Расстояние между поршнями и расстояние от нижнего поршня до дна сосуда одинаковы и равны l . Давление между поршнями равно удвоенному атмосферному давлению $p = 2p_0$. На верхний поршень давят таким образом, что он перемещается на место нижнего. На каком расстоянии от дна будет находиться нижний поршень? Трения нет, температуру считать постоянной.

9.54. Вертикальный цилиндрический сосуд, открытый сверху, разделен тонким поршнем массой m так, что объемы воздуха в верхней и нижней частях одинаковы. Высота сосуда $2l$, площадь поперечного сечения S . Давление в верхней части равно атмосферному p_0 . Сосуд герметически закрывают и переворачивают вверх дном. На какое расстояние сместится поршень? Трения нет, температуру считать постоянной.

9.55. На гладком столе лежит прямоугольный сосуд длиной $l = 1$ м. Внутри сосуда находится тонкий поршень, делящий объем сосуда на равные части (рис. 9.8), в каждой из которых содержится воздух при температуре $t = 27^\circ\text{C}$. На какое расстояние переместится сосуд, если воздух в одной части сосуда нагреть на $\Delta T = 60$ К, а в другой – охладить на $\Delta T = -60$ К? Трения между поршнем и сосудом нет. Массой сосуда и поршня пренебречь.

• Решение. При нагревании воздуха, например, в левой части сосуда и охлаждении в правой, поршень сместится в сторону более холодного газа. Но в целом центр масс системы останется на прежнем месте (в направлении оси OX система замкнута, см. §3).

Поскольку сосуд расположен горизонтально, а поршень находится в равновесии, то давление воздуха по обе стороны от поршня одинаково. Запишем обобщенный газовый закон для воздуха в обеих частях сосуда в виде

$$\frac{p_0 S^{1/2} l}{T} = \frac{p S^{1/2} (\frac{1}{2} l + x)}{T + \Delta T}, \quad \frac{p_0 S^{1/2} l}{T} = \frac{p S^{1/2} (\frac{1}{2} l - x)}{T - \Delta T},$$

где p_0 , p – начальное и конечное давление воздуха в сосуде; S – площадь поперечного сечения сосуда. Следовательно, смещение поршня относительно сосуда

$$x = \frac{l \Delta T}{2T},$$

а начальная и конечная координаты центра масс системы

$$x_{c1} = \frac{m \frac{1}{4} l + m \frac{3}{4} l}{m + m} = \frac{l}{2},$$

$$x_{c2} = \frac{m (\frac{1}{4} l + \frac{1}{2} x - \Delta x) + m (\frac{3}{4} l + \frac{1}{2} x - \Delta x)}{m + m} = \frac{l - 2\Delta x + x}{2},$$

где m – масса воздуха в каждой части сосуда.

Следовательно,

$$x_{c1} = x_{c2}, \quad \text{или} \quad \frac{l}{2} = \frac{l - 2\Delta x + x}{2}; \quad \Delta x = \frac{x}{2} = \frac{l \Delta T}{4T} = 5 \text{ см.}$$

• Ответ: $\Delta x = \frac{l \Delta T}{4T} = 5$ см.

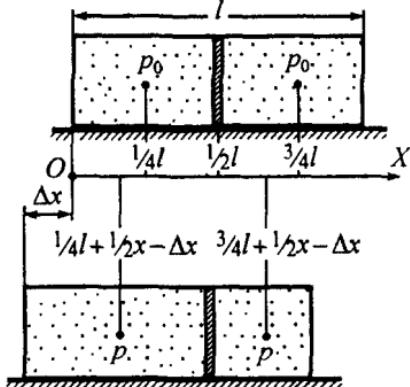


Рис. 9.8

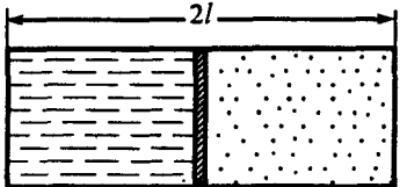


Рис. 9.9

9.56. В прямоугольном закрытом с обоих торцов горизонтальном сосуде длиной $2l$ находится с одной стороны жидкость, отделенная подвижным тонким поршнем от воздуха в другой части сосуда (рис. 9.9). В начальный момент поршень находится в равновесии и делит объем сосуда на равные части. На какое расстояние сместится поршень, если температуру воздуха уменьшить в три раза? Трения нет.

9.57. Найти период малых колебаний поршня массой m , разделяющего горизонтальный закрытый с обоих торцов цилиндрический сосуд сечением S на две равные части длиной l каждая. По обе стороны от поршня находится воздух при давлении p_0 . Трения нет. Температуру считать постоянной.

9.58. Стеклянная трубка длиной l_0 наполовину погружена в ртуть. Ее закрывают пальцем и вынимают. При этом часть ртути вытекает. Какова длина l столбика ртути, оставшегося в трубке? Атмосферное давление равно $p_0 = H$ мм рт. ст. Температуру считать постоянной.

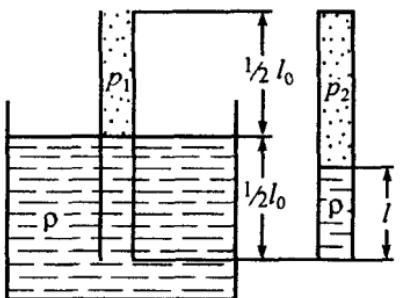


Рис. 9.10

• **Решение.** До того как трубка была закрыта и вынута из ртути, в ней находился воздух объемом $V_1 = \frac{1}{2} l_0 S$ (где S – площадь поперечного сечения трубки) при атмосферном давлении $p_1 = p_0$. Когда трубку вынули и часть ртути из нее вытекла, воздух изотермически расширился до объема $V_2 = S(l_0 - l)$, а его давление стало равным $p_2 = p_0 - \rho g l$, где ρ – плотность ртути; l – длина столбика ртути, оставшегося в трубке (рис. 9.10).

Записав закон Бойля – Марнотта в виде

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

или

$$\frac{1}{2} p_0 l_0 S = (p_0 - \rho g l) (l_0 - l) S,$$

получим

$$l^2 - \frac{p_0 + \rho g l_0}{\rho g} l + \frac{p_0 l_0}{2 \rho g} = 0. \quad (1)$$

Если учесть связь единиц измерения давления в [Па] и в [мм рт. ст.]

$$p_0 = \rho g H,$$

то выражение (1) можно записать в виде

$$l^2 - (H + l_0) l + \frac{1}{2} H l_0 = 0. \quad (2)$$

Решив уравнение (2), получим

$$l = \frac{H + l_0 \pm \sqrt{H^2 + l_0^2}}{2}.$$

Значение $l = \frac{1}{2} \{ H + l_0 + \sqrt{H^2 + l_0^2} \}$ не удовлетворяет очевидному физическому условию: $l < \frac{1}{2} l_0$. Следовательно,

$$l = \frac{1}{2} \{ H + l_0 - \sqrt{H^2 + l_0^2} \}.$$

• **Ответ:** $l = \frac{1}{2} \{ H + l_0 - \sqrt{H^2 + l_0^2} \}$.

9.59. В вертикальной запаянной с одного конца стеклянной трубке длиной $l_0 = 90$ см находится столбик воздуха, ограниченный сверху столбиком ртути высотой $h = 30$ см. Ртуть доходит до верхнего края трубки. Трубку осторожно поворачивают открытым концом вниз, при этом часть ртути выливается. Какова высота l оставшегося столбика ртути? Плотность ртути $\rho = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³. Атмосферное давление $p_0 = 1$ атм.

9.60. В длинной узкой пробирке с воздухом, расположенной горизонтально, капелька ртути находится на расстоянии l_1 от дна. Если пробирку перевернуть вверх отверстием, то капелька окажется на расстоянии l_2 от дна. На каком расстоянии от дна окажется капелька, если перевернуть пробирку вверх дном? Температуру считать постоянной.

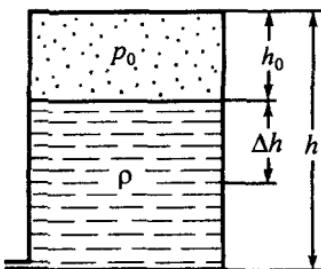
9.61. Вертикальный цилиндрический сосуд сечением S и высотой h заполнен жидкостью плотностью ρ и запаян при атмосферном давлении p_0 . При этом высота столба воздуха в сосуде равна h_0 . Какое количество жидкости вытечет из сосуда, если в его нижней части сделать небольшое отверстие? Температуру считать постоянной.

• *Решение.* Так как сосуд с жидкостью запаян при атмосферном давлении p_0 , то если в его нижней части сделать отверстие, давление на уровне отверстия изнутри сосуда будет больше атмосферного и жидкость начнет вытекать. При этом воздух в сосуде будет расширяться, а его давление уменьшаться. В некоторый момент времени давление воздуха уменьшится настолько, что жидкость перестанет вытекать. Тогда давление, действующее на уровне отверстия (рис. 9.11), станет равным атмосферному:

$$p + \rho g (h - h_0 - \Delta h) = p_0, \quad (1)$$

где Δh – высота слоя жидкости, которая вытечет из сосуда.

Рис. 9.11



Записав закон Бойля – Мариотта для изотермического расширения воздуха

$$p_0 h_0 S = p (h_0 + \Delta h) S$$

с учетом (1), получим

$$p_0 h_0 = \left\{ p_0 - \rho g (h - h_0 - \Delta h) \right\} (h_0 + \Delta h),$$

или

$$\Delta h^2 + (2h_0 - h + p_0 / \rho g) \Delta h - h_0 (h - h_0) = 0. \quad (2)$$

Решив уравнение (2), находим

$$\Delta h = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 - h + \sqrt{\left\{ \frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 - h \right\}^2 + 4h_0 (h - h_0)} \right\}.$$

Следовательно, из сосуда вытечет жидкость массой

$$\Delta m = \rho S \Delta h = \frac{1}{2} \rho S \left\{ \frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 - h + \sqrt{\left\{ \frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 - h \right\}^2 + 4h_0 (h - h_0)} \right\}.$$

• Ответ: $\Delta m = \frac{1}{2} \rho S \left\{ \frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 - h + \sqrt{\left\{ \frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 - h \right\}^2 + 4h_0 (h - h_0)} \right\}.$

9.62. В цилиндрический сосуд высотой h через крышку вертикально вставлена немногим не доходящая до дна сосуда тонкостенная трубка длиной l (рис. 9.12). В сосуд через трубку наливают жидкость плотностью ρ .

Найти высоту уровня жидкости от дна сосуда, когда трубка полностью заполнится жидкостью. Атмосферное давление p_0 . Соединение сосуда с крышкой и крышки с трубкой герметичное. Температуру считать постоянной.

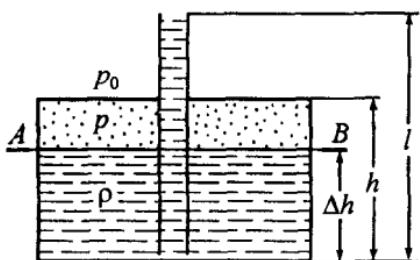


Рис. 9.12

• Решение. Так как трубка лишь немногого не доходит до дна сосуда, то жидкость создаст «пробку» и воздух, заполняющий сосуд, не сможет выходить наружу. Поэтому, по мере заполнения сосуда жидкостью, воздух в сосуде будет сжиматься, а его давление будет возрастать. В некоторый момент времени давление воздуха станет достаточно большим и жидкость достигнет верхнего края трубки. Тогда давление, действующее на поверхность жидкости (на уровне AB), станет равным давлению воздуха в сосуде:

$$p = p_0 + \rho g (l - \Delta h), \quad (1)$$

где Δh – высота слоя жидкости в сосуде.

Записав закон Бойля – Мариотта для изотермического сжатия воздуха

$$p_0 h S = p (h - \Delta h) S$$

(где S – площадь поперечного сечения сосуда) с учетом (1), получим

$$p_0 h = \{p_0 + \rho g (l - \Delta h)\} (h - \Delta h),$$

или

$$\rho g \Delta h^2 - (p_0 + \rho g l + \rho g h) \Delta h + \rho g h l = 0. \quad (2)$$

Решив уравнение (2), находим

$$\Delta h = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_0}{\rho g} + l + h - \sqrt{\left\{ \frac{p_0}{\rho g} + l + h \right\}^2 - 4 h l} \right\}.$$

• Ответ: $\Delta h = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_0}{\rho g} + l + h - \sqrt{\left\{ \frac{p_0}{\rho g} + l + h \right\}^2 - 4 h l} \right\}.$

9.63. Открытая сверху вертикальная цилиндрическая трубка высотой $2h$ поровну разделена горизонтальной перегородкой. Над перегородкой находится жидкость плотностью ρ , а под ней – воздух при атмосферном давлении p_0 . В перегородке открывается небольшое отверстие и жидкость начинает перетекать под перегородку. Какой толщины будет слой жидкости в нижней части трубки в момент, когда воздух начнет проходить через отверстие вверх? Температуру считать постоянной.

9.64. На поверхности жидкости плотностью ρ плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость. На какую глубину погрузится стакан в жидкость, если его поставить на поверхность жидкости дном вверх? Высота стакана h , атмосферное давление p_0 .

9.65. В U-образной трубке высота столба воздуха $l_0 = 300$ мм, а высота столба ртути $h_0 = 110$ мм (рис. 9.13). В правое колено долили столько ртути, что ее уровень поднялся на $\Delta h = 40$ мм. Насколько поднялся уровень ртути в левом колене? Атмосферное давление $p_0 = H$ мм рт. ст., где $H = 760$ мм. Температуру считать постоянной.

• Решение. Рассмотрим воздух, заключенный между ртутью и запаянным концом трубы.

При доливании ртути в правое колено, высота столба ртути в левом колене увеличится на Δl , а объем, занимаемый воздухом, уменьшится от $V_1 = l_0 S$ до $V_2 = (l_0 - \Delta l)S$ (где S – сечение трубы).

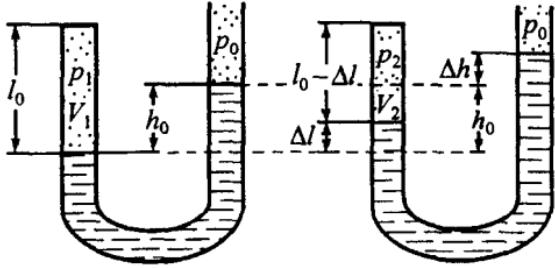


Рис. 9.13

Поскольку трубка представляет собой сообщающиеся сосуды, то до и после доливания ртути давления воздуха в левом колене могут быть выражены через атмосферное давление и гидростатическое давление столба жидкости:

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho g h_0, \\ p_2 = p_0 + \rho g (h_0 + \Delta h - \Delta l), \end{cases}$$

где ρ – плотность ртути.

Так как процесс сжатия воздуха протекал изотермически, то на основании закона Бойля – Марнотта получим

$$p_1 V_1 = p_2 V_2; \quad (p_0 + \rho g h_0) l_0 S = [p_0 + \rho g (h_0 + \Delta h - \Delta l)] (l_0 - \Delta l) S,$$

или с учетом связей единиц измерения давления в [Па] и в [мм рт. ст.] $p_0 = \rho g H$,

$$(H + h_0) l_0 = (H + h_0 + \Delta h - \Delta l) (l_0 - \Delta l).$$

Отсюда находим

$$\Delta l^2 - \Delta l (l_0 + h_0 + \Delta h + H) + \Delta h l_0 = 0;$$

$$\Delta l = \frac{1}{2} (l_0 + h_0 + \Delta h + H) - \sqrt{\frac{1}{4} (l_0 + h_0 + \Delta h + H)^2 - \Delta h l_0} \approx 10^{-2} \text{ м},$$

где знак «+» перед квадратным корнем отброшен в силу физических условий ($\Delta l < l_0$).

$$\bullet \text{ Ответ: } \Delta l = \frac{1}{2} (l_0 + h_0 + \Delta h + H) - \sqrt{\frac{1}{4} (l_0 + h_0 + \Delta h + H)^2 - \Delta h l_0} \approx 10^{-2} \text{ м.}$$

9.66. В U-образный манометр налила ртуть (рис. 9.14). Открытое колено манометра соединено с окружающим пространством при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ и ртуть в открытом колене стоит выше на $\Delta h = 10$ см, чем в закрытом. При этом свободная от ртути часть закрытого колена имеет длину $l_0 = 20$ см. Когда открытое колено присоединили к баллону с воздухом, то разность уровней ртути увеличилась и достигла значения $\Delta h_1 = 26$ см. Найти давление воздуха в баллоне. Плотность ртути $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Температуру считать постоянной.

9.67. Два одинаковых сообщающихся цилиндрических сосуда сечением S заполнены частично жидкостью плотностью ρ при атмосферном давлении p_0 . Один из сосудов запаяли. При этом высота столба воздуха в нем h_0 . Найти установившееся значение разности уровней исходной жидкости, если в открытый сосуд налить несмешивающуюся с ней жидкость массой m и плотностью, меньшей ρ . Температуру считать постоянной.

9.68. Идеальный газ сжимают так, что его давление изменяется по закону $p V^{-1} = \text{const}$. Найти начальное давление p_1 газа, если после сжатия

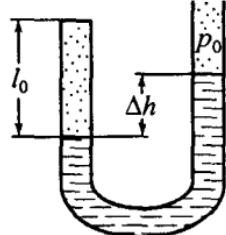


Рис. 9.14

тия его давление $p_2 = 10^5$ Па, а температура газа в процессе уменьшилась в $n = 4$ раза.

- *Решение.* Поскольку зависимость давления газа от занимаемого им объема не является изопроцессом, то для решения задачи уравнения состояния газа до и после сжатия

$$p_1 V_1 = v R T_1, \quad p_2 V_2 = v R T_2 \quad (1)$$

необходимо дополнить уравнением процесса, записанным в указанных состояниях:

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}. \quad (2)$$

Решив систему уравнений (1) – (2), получим

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2}; \quad \frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{T_1}{T_2}; \quad p_1 = p_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

- *Ответ:* $p_1 = p_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 2 \cdot 10^5$ Па.

9.69. Состояние данной массы m идеального газа изменяется в соответствии с законом: $p^2/T = \alpha$, где α – известная константа. Определить зависимость давления p газа от его объема V в этом процессе. Молярная масса газа равна μ .

9.70. Идеальный газ расширяется по закону $p V^2 = \text{const}$ и его объем увеличивается в три раза. Найти первоначальную температуру газа T_1 , если после расширения его температура равна $T_2 = 100$ К.

9.71. Гелий массой $m = 20$ г бесконечно медленно переводят из состояния 1, которому соответствует объем $V_1 = 32$ л и давление $p_1 = 4,1 \cdot 10^5$ Па, в состояние 2, где $V_2 = 9$ л и $p_2 = 15,5 \cdot 10^5$ Па. Какой наибольшей температуре достигает газ в этом процессе, если на диаграмме p – V зависимость давления от объема изобразится прямой линией? Молярная масса гелия $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

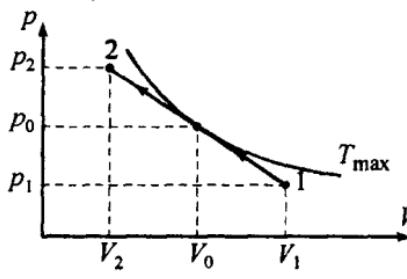


Рис. 9.15

• *Решение.* Каждой точке на графике зависимости давления газа от занимаемого им объема (рис. 9.15) соответствует определенное значение температуры. Графически состоянне, в котором температура гелия максимальна, можно определить, построив семейство изотерм. При этом изотерма, соответствующая наибольшей температуре (очевидно, что прямая зависимости давления от объема должна быть касательной к ней), определит значения давления p_0 и объема V_0 , при которых температура максимальна.

Аналитически значения p_0 и V_0 легко найти, исследовав на экстремум зависимость температуры от давления или от объема.

Поскольку давление зависит от объема линейно, т.е.

$$p = a V + b, \quad (1)$$

то с учетом (1) уравнение Менделеева – Клапейрона

$$p V = \frac{m}{\mu} R T$$

можно записать в виде

$$T = \frac{\mu}{m R} (a V + b). \quad (2)$$

Следовательно,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\mu}{m R} (2 a V + b); \quad 2 a V_0 + b = 0; \quad V_0 = -\frac{b}{2 a}. \quad (3)$$

Подставив значение V_0 в (1), получим

$$p_0 = \frac{1}{2} b.$$

Так как зависимость $T(V)$ имеет один экстремум, то найденные значения объема V_0 и давления p_0 соответствуют состоянию газа с максимальной температурой:

$$T_{\max} = \frac{\mu}{m R} (a V_0 + b) V_0 = -\frac{\mu}{m R} \frac{b^2}{4a}.$$

Записав уравнение процесса (1) в начальном и конечном состояниях

$$p_1 = a V_1 + b, \quad p_2 = a V_2 + b,$$

найдем значения коэффициентов a и b :

$$a = \frac{p_1 - p_2}{V_1 - V_2} = -5 \cdot 10^7 \text{ Па/м}^3; \quad b = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_2}{V_1 - V_2} = 2 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Следовательно,

$$T_{\max} = \frac{\mu (p_2 V_1 - p_1 V_2)^2}{4 m R (V_1 - V_2) (p_2 - p_1)} \approx 481 \text{ К.}$$

Решение можно упростить, если заметить, что зависимость (2) температуры от объема имеет вид параболы, координата вершины которой совпадает с (3).

- Ответ: $T_{\max} = \frac{\mu (p_2 V_1 - p_1 V_2)^2}{4 m R (V_1 - V_2) (p_2 - p_1)} \approx 481 \text{ К.}$

9.72. n молей идеального газа бесконечно медленно переводят из состояния 1 в состояние 2 по закону: $p = -\alpha V^2 + \beta$, где α и β – некоторые известные положительные постоянные. Какой наибольшей температуры может достичь газ в таком процессе?

9.73. Определить наименьшее давление идеального газа в процессе, протекающем по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0 и α – положительные постоянные. Каковы температура и объем одного моля газа при этом давлении?

9.74. На диаграмме $p - V$, изображенной на рис. 9.16, представлен циклический процесс, проведенный с идеальным газом. Участки 1–2 и 3–4 лежат на прямых, проходящих через начало координат, участки 4–1 и 2–3 – изотермы. Найти объем V_3 , если известны объемы V_1 и V_2 и известно, что объемы V_2 и V_4 равны.

- Решение. Так как процессы 1–2 и 3–4 изображаются линейными зависимостями давления от объема вида

$$p = aV, \text{ или } pV^{-1} = a,$$

то в указанных процессах

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2} \quad \text{и} \quad \frac{p_3}{V_3} = \frac{p_4}{V_4}. \quad (1)$$

По условию задачи кривые 2–3 и 4–1 изотермы, поэтому

$$p_2 V_2 = p_3 V_3 \quad \text{и} \quad p_1 V_1 = p_4 V_4. \quad (2)$$

С учетом что $V_2 = V_4$, из системы уравнений (1) – (2) получим

$$V_3 = V_4 \frac{p_3}{p_4} = V_4 \frac{p_2 V_2}{p_4 V_3} = V_4 \frac{p_1 V_2^2 V_4}{p_1 V_1^2 V_3} = \frac{V_2^4}{V_1^2 V_3}.$$

Следовательно,

$$V_3 = \frac{V_2^2}{V_1}.$$

- Ответ: $V_3 = V_2^2/V_1$.

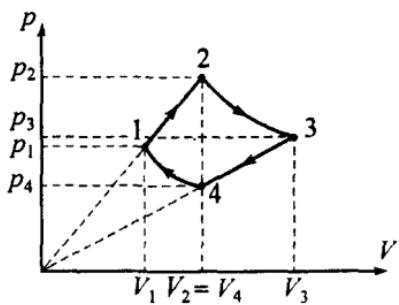


Рис. 9.16

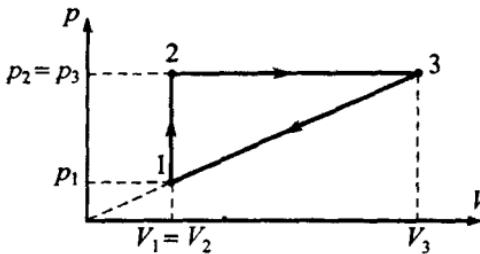


Рис. 9.17

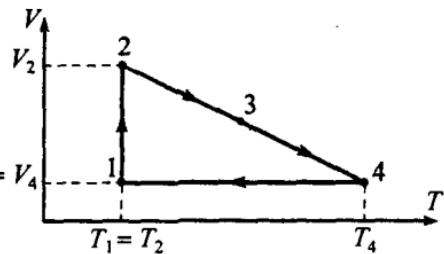


Рис. 9.18

9.75. Идеальный газ совершают циклический процесс, представленный на рис. 9.17. Температуры газа в состояниях 1 и 3 равны $T_1 = 300$ К и $T_3 = 400$ К соответственно. Найти температуру газа в состоянии 2.

9.76. С идеальным газом происходит процесс 1–2–3–4–1, представленный на рис. 9.18. В состоянии 3 на отрезке диаграммы 2–3–4 давление такое же, как и в состоянии 1. Определить объем V_3 газа в состоянии 3, если известно, что $V_1 = 1 \text{ м}^3$, $V_2 = 4 \text{ м}^3$, $T_1 = 100$ К, $T_4 = 300$ К.

§10. Терплота и работа. Физические основы термодинамики

Обратимся теперь к энергетической стороне процесса изменения состояния какого-либо тела.

Любое тело (твердое, жидкое, газообразное), находящееся в состоянии теплового равновесия (см. §9), которое характеризуется его макроскопическими параметрами p , V и T , обладает определенным запасом *внутренней энергии* U . Внутренняя энергия тела складывается из кинетической энергии движения молекул, кинетической энергии движения атомов внутри молекулы (если молекула не одноатомная), потенциальной энергии взаимодействия между атомами внутри молекулы и потенциальной энергии взаимодействия молекул между собой. В нее, однако, не входит кинетическая энергия движения тела как целого – $\frac{1}{2} m v^2$ (где m – масса тела и v – скорость его центра масс) и потенциальная энергия внешних сил, действующих на тело.

Внутренняя энергия тела обладает тем замечательным свойством, что при переходе тела из какого-то первоначального состояния 1 (p_1 , V_1 , T_1) в конечное состояние 2 (p_2 , V_2 , T_2) изменение внутренней энергии ΔU_{1-2} не зависит от того, с помощью какого процесса произошел этот переход, и

$$\Delta U_{1-2} = U_2 - U_1, \quad (10.1)$$

где U_1 – внутренняя энергия тела в начальном и U_2 – в конечном состояниях. Если над телом совершается *циклический процесс*, то изменение внутренней энергии при этом $\Delta U_{1-2} = 0$, так как $U_2 = U_1$ (в результате циклического процесса тело возвращается в исходное состояние). Поэтому говорят, что внутренняя энергия тела является *функцией состояния*.

Внутреннюю энергию тела можно изменить двумя способами:

1) если теплоизолировать тело и совершить над ним *механическую работу* A_{1-2} или предоставить ему возможность совершить механическую работу A_{1-2} над окружающими телами. В первом случае работа A_{1-2} считается отрицательной, а во втором – положительной. Ясно, что в этом случае изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{1-2} = -A_{1-2}; \quad (10.2)$$

2) привести тело в контакт с более нагретым или менее нагретым телом. При этом наше тело может получать (или отдавать) энергию путем ее непосредственного перехода от других тел (к другим телам), без совершения при этом механической работы. Такой процесс называют *теплопередачей*, а получаемую (или отдаваемую) телом энергию – количеством тепла Q_{1-2} , причем $Q_{1-2} > 0$, если тело получает энергию, и $Q_{1-2} < 0$ если оно энергию отдает. В этом случае

$$\Delta U_{1-2} = Q_{1-2}. \quad (10.3)$$

Если тело может совершать механическую работу A_{1-2} и получать энергию Q_{1-2} от других тел, то полное изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{1-2} = U_2 - U_1 = Q_{1-2} - A_{1-2}.$$

Это соотношение обычно записывают в виде

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}. \quad (10.4)$$

Уравнение (10.4) выражает закон сохранения энергии при тепловых процессах и представляет собой содержание *первого начала (закона) термодинамики: количество тепла, сообщенное телу, идет на приращение внутренней энергии тела и на совершение этим телом работы над другими телами*.

Необходимо подчеркнуть, что работа A_{1-2} и количество тепла Q_{1-2} зависят в отличие от ΔU_{1-2} не только от начального и конечного состояний тела, но и от процесса, с помощью которого происходило изменение состояния. По этой причине ни в коем случае нельзя говорить о «количестве тепла, заключенном в теле» и считать, что $Q_{1-2} = Q_2 - Q_1$. Бессмыслица такого утверждения особенно наглядно проявляется при циклическом процессе, когда тело возвращается в исходное состояние, между тем как общее количество поглощенного (или выделенного) тепла Q отнюдь не равно нулю, а равно полной механической работе тела за цикл A :

$$Q = A. \quad (10.5)$$

Рассмотрим теперь каждое из слагаемых, входящих в первое начало термодинамики (10.4). Начнем с работы A_{1-2} .

При расширении тело перемещает окружающие его тела, т.е. производит над ними механическую работу. Если объем тела увеличивается на бесконечно малую величину dV (при этом давление тела p можно считать неизменным), то тело совершает бесконечно малую (или *элементарную*) работу

$$dA = p dV. \quad (10.6)$$

Работа $dA > 0$ при расширении тела ($dV > 0$), когда тело производит работу над окружающими телами, и $dA < 0$ при сжатии тела ($dV < 0$), когда работа производится над телом окружающими телами. Если объем тела не меняется ($dV = 0$), то работа $dA = 0$.

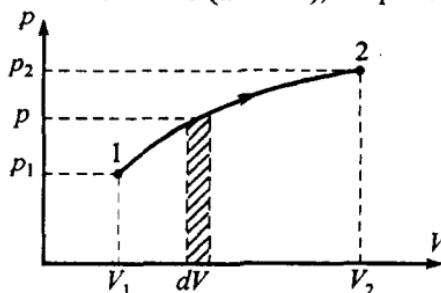


Рис. 10.1

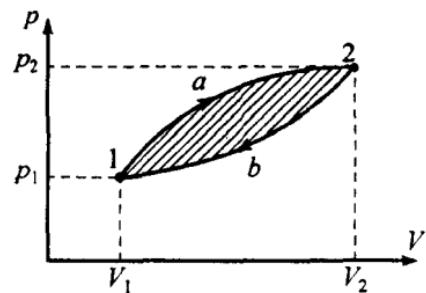


Рис. 10.2

Пусть тело с помощью какого-либо процесса переходит из состояния 1 (p_1, V_1, T_1) в состояние 2 (p_2, V_2, T_2). Произведенная при этом работа тела A_{1-2} допускает наглядную геометрическую интерпретацию, если изобразить процесс графически на диаграмме $p - V$ (рис. 10.1). При увеличении объема на dV при произвольном давлении p совершаемая телом работа равна $p dV$, т.е. площади бесконечно узкого заштрихованного прямоугольника. Поэтому полная работа тела A_{1-2} при его расширении от объема V_1 до объема V_2 , складываясь из элементарных работ dA , изобразится площадью криволинейной трапеции 1-2- V_2 - V_1 , заключенной под кривой между двумя крайними вертикальными линиями. Математически это можно записать в виде интеграла

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} dA = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (10.7)$$

Если тело вернуть из состояния 2 в состояние 1 с помощью такого же процесса, то оно совершил такую же по величине, но отрицательную работу $A_{2-1} = -A_{1-2}$, поскольку тело при этом сжимается.

При изобарическом процессе ($p = \text{const}$) площадь трапеции 1-2- V_2 - V_1 равна $p(V_2 - V_1)$ и работа тела

$$(A_{1-2})_p = p(V_2 - V_1). \quad (10.8)$$

При циклическом процессе тело возвращается из состояния 2 в состояние 1 по другому пути (рис. 10.2). На участке 1- a -2 тело расширяется и совершает положительную работу, равную площади под кривой 1- a -2. На участке 2- b -1 тело сжимается и производит отрицательную работу, равную площади под кривой 2- b -1. Следовательно, суммарная работа тела за цикл равна разности этих двух площадей, т.е. равна площади, заключенной внутри замкнутой кривой 1- a -2- b -1. Если бы тело переходило из состояния 1 в состояние 2 по пути 1- b -2, а возвращалось бы в исходное состояние по пути 2- a -1, то работа тела за цикл оказалась бы отрицательной. Итак, работа тела за цикл численно равна площади

цикла на диаграмме $p - V$ и положительна, если состояние тела изменяется в цикле по часовой стрелке. При изменении состояния тела в цикле против часовой стрелки работа тела за цикл отрицательна. Следует помнить, что и в том, и в другом случаях работа за цикл $A = Q$ (см. выражение (10.5)).

Пусть тело при контакте с другими телами получает элементарное количество тепла dQ , причем на основании первого начала термодинамики

$$dQ = dU + dA, \quad (10.9)$$

где dA – элементарная работа и dU – элементарное (бесконечно малое) изменение внутренней энергии тела. При этом температура тела увеличивается на бесконечно малую величину dT . Теплоемкостью тела $C_{\text{тела}}$ называется отношение

$$C_{\text{тела}} = \frac{dQ}{dT}. \quad (10.10)$$

Теплоемкость одного килограмма вещества называется *удельной теплоемкостью* c , а теплоемкость одного моля вещества – *молярной теплоемкостью* C . Ясно, что

$$C_{\text{тела}} = m c = \nu C, \quad (10.11)$$

где m – масса тела; $\nu = m/\mu$ – количество молей в теле.

Такое определение теплоемкости (10.10) само по себе еще недостаточно, так как требуемое для изменения температуры на dT количество тепла dQ зависит не только от температуры, но и от других условий, в которых производится нагревание тела; необходимо еще указать, какой именно процесс совершается над телом. В связи с этой неоднозначностью возможны и различные определения теплоемкости.

Наиболее часто используемы в физике так называемые *теплоемкость при постоянном объеме* ($C_{\text{тела}})_V$ и *теплоемкость при постоянном давлении* ($C_{\text{тела}})_p$, определяющие количества тепла $(dQ)_V$ и $(dQ)_p$ при нагревании тела в условиях, когда поддерживаются неизменными соответственно его объем V (изохорический процесс) или давление p (изобарический процесс). На основании (10.10)

$$(dQ)_V = (C_{\text{тела}})_V dT, \quad (10.12)$$

$$(dQ)_p = (C_{\text{тела}})_p dT. \quad (10.13)$$

При переходе тела из состояния 1 (p_1, V_1, T_1) в состояние 2 (p_2, V_2, T_2) количества полученного тепла $(dQ_{1-2})_V$ и $(dQ_{1-2})_p$ равны:

$$(Q_{1-2})_V = \int_{T_1}^{T_2} (C_{\text{тела}})_V dT, \quad (10.14)$$

$$(Q_{1-2})_p = \int_{T_1}^{T_2} (C_{\text{тела}})_p dT. \quad (10.15)$$

Во многих процессах важной характеристикой тела является отношение его теплоемкостей $(C_{\text{тела}})_V$ и $(C_{\text{тела}})_p$, обычно обозначаемое γ ,

$$\gamma = \frac{(C_{\text{тела}})_p}{(C_{\text{тела}})_V} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v} \quad (10.16)$$

и называемое показателем адиабаты.

Из определения теплоемкости (10.10) следует, что при изотермическом процессе ($T = \text{const}$ и $dT = 0$) теплоемкость тела $(C_{\text{тела}})_T \rightarrow \infty$, что, однако, не означает, что количество тепла $(dQ)_T = (C_{\text{тела}})_T dT$, полученного телом при постоянной температуре, является бесконечно большой величиной.

Применим полученные выше соотношения к идеальному газу, т.е. газу, взаимодействием молекул которого между собой можно пренебречь. Начнем с его внутренней энергии U .

Внутренняя энергия газа складывается из кинетической энергии поступательного движения молекул газа, кинетической энергии движения атомов, входящих в состав молекулы, и потенциальной энергии взаимодействия атомов молекулы между собой. Энергией взаимодействия молекул можно пренебречь, так как газ считается идеальным. Если газ одноатомный, то внутренняя энергия такого газа, состоящего из N молекул,

$$U = N \langle \frac{1}{2} m_0 v^2 \rangle, \quad (10.17)$$

где $\langle \frac{1}{2} m_0 v^2 \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы, которая, согласно определению абсолютной температуры (II.7), равна $\frac{3}{2} k T$. Следовательно, для одноатомного газа (см. (II.8))

$$U = N \frac{3}{2} k T = \frac{m}{\mu} N_A \frac{3}{2} k T = \frac{m}{\mu} \frac{3}{2} R T. \quad (10.18)$$

Прежде чем находить внутреннюю энергию двухатомного газа, уточним определение абсолютной температуры тела T . В статистической физике доказывается, что в состоянии теплового равновесия при температуре T кинетическая энергия распределяется поровну между всеми степенями свободы системы, причем на одну степень свободы приходится средней кинетической энергии

$$\langle \varepsilon_{\text{кин}} \rangle = \frac{1}{2} k T. \quad (10.19)$$

Напомним, что число степеней свободы системы (см. гл. I, §1) равно минимальному числу независимых координат, с помощью которых можно однозначно задать положение системы в пространстве. Если система состоит из N невзаимодействующих материальных точек (одноатомный газ), то у каждой материальной точки имеются $i = 3$ степени свободы (три ее декартовы координаты в какой-либо системе отсчета). Эти три степени свободы соответствуют поступательному движению молекулы. Вся система обладает $3N$ поступательными степенями свободы, поэтому ее внутренняя энергия

$$U = \frac{3}{2} N k T, \quad (10.20)$$

что совпадает с (10.18).

Если молекула идеального газа состоит из двух атомов, расстояние между которыми не изменяется (жесткая двухатомная молекула), что, как правило, выполняется при не слишком высоких температурах, то такая молекула имеет $i = 5$ степеней свободы, из которых три (координаты центра масс молекулы) соответствуют поступательному движению молекулы и две – вращательному движению молекулы вокруг двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости, перпендикулярной линии, соединяющей атомы, и проходящей через центр масс молекулы. Для газа, состоящего из N жестких двухатомных молекул, внутренняя энергия

$$U = \frac{5}{2} N k T. \quad (10.21)$$

Объединяя (10.20) и (10.21), можно написать выражение для внутренней энергии идеального газа:

$$U = \frac{i}{2} N k T = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R T, \quad (10.22)$$

где число степеней свободы: $i = 3$ – для одноатомного газа и $i = 5$ – для газа, состоящего из жестких двухатомных молекул.

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона (9.6), выражение (10.22) можно записать в виде

$$U = \frac{i}{2} p V. \quad (10.23)$$

Из (10.22) следует, что внутренняя энергия идеального газа определяется только его температурой. При переходе тела из состояния 1 в состояние 2 изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{i}{2} N k \Delta T = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1), \quad (10.24)$$

а элементарное изменение внутренней энергии

$$dU = \frac{i}{2} N k dT = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R dT. \quad (10.25)$$

Из (10.24) видно, что изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$, если газ изменяет свое состояние при постоянной температуре $T = \text{const}$ (изотермический процесс). При этом $(Q_{1-2})_T = (A_{1-2})_T$.

Если газ изменяет свое состояние при постоянном объеме, то работа газа $dA = p dV = 0$ и элементарное количество теплоты $(dQ)_V = dU$. Поэтому теплоемкость идеального газа при постоянном объеме (см. (10.10), (10.25))

$$(C_{\text{тела}})_V = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} N k = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R; \quad (10.26)$$

$$C_V = \frac{i}{2} N_A k = \frac{i}{2} R. \quad (10.27)$$

Используя первое начало термодинамики, можно показать, что теплоемкость идеального газа при изобарическом процессе

$$(C_{\text{тела}})_P = \frac{(dQ)_P}{dT} = (C_{\text{тела}})_V + N k = \frac{i+2}{2} N k = \frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R; \quad (10.28)$$

$$C_P = C_V + N_A k = C_V + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (10.29)$$

Показатель адиабаты γ для идеального одноатомного газа

$$\gamma = \frac{(C_{\text{тела}})_p}{(C_{\text{тела}})_v} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}, \quad (10.30)$$

а для газа, состоящего из жестких двухатомных молекул,

$$\gamma = \frac{(C_{\text{тела}})_p}{(C_{\text{тела}})_v} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}. \quad (10.31)$$

Если идеальный газ переходит из начального состояния 1 в конечное состояние 2 изохорически или изобарически, то количества полученного газом тепла $(Q_{1-2})_v$ или $(Q_{1-2})_p$ определяются выражениями (10.14), (10.15). Поскольку теплоемкости идеального газа $(C_{\text{тела}})_v$ и $(C_{\text{тела}})_p$ не зависят от температуры (см. (10.26), (10.28)), их можно вынести в (10.14) и (10.15) за знак интеграла и получить:

$$(Q_{1-2})_v = (C_{\text{тела}})_v \Delta T = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1); \quad (10.32)$$

$$(Q_{1-2})_p = (C_{\text{тела}})_p \Delta T = \frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1). \quad (10.33)$$

Отметим, что

$$(Q_{1-2})_p = (C_{\text{тела}})_p \Delta T = \gamma (C_{\text{тела}})_v \Delta T = \gamma (Q_{1-2})_v. \quad (10.34)$$

Помимо изохорического ($V = \text{const}$), изобарического ($p = \text{const}$) и изотермического ($T = \text{const}$) процессов в термодинамике важную роль играет тепловой процесс, который называется *адиабатическим*. Этот процесс состоит в расширении или сжатии газа при условии, что в течение всего процесса газ остается теплоизолированным от внешней среды, т.е. никуда не отдает и ниоткуда не получает тепла. При адиабатическом процессе $dQ = 0$ и газ совершает при расширении работу (или при сжатии над ним совершается работа) за счет уменьшения (или увеличения) его внутренней энергии. При этом (см. (10.4))

$$A_{1-2} = -\Delta U_{1-2} = U_1 - U_2 = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} (T_1 - T_2). \quad (10.35)$$

Из (10.35) видно, что при адиабатическом расширении температура идеального газа понижается, так как $A_{1-2} > 0$, а при его адиабатическом сжатии — повышается.

Используя уравнение Менделеева — Клапейрона, можно показать, что при адиабатическом переходе из начального состояния 1 (p_1, V_1, T_1) в конечное состояние 2 (p_2, V_2, T_2)



Рис. 10.3

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \quad (10.36)$$

где $\gamma = (C_{\text{тела}})_p / (C_{\text{тела}})_v$ — показатель адиабаты газа.

Поскольку $\gamma > 1$, из (10.36) следует, что кривая зависимости p от V на диаграмме $p - V$ для адиабатического процесса (адиабата) идет круче изотермы (рис. 10.3).

Обратимся теперь к проблеме, послужившей, собственно, в свое время (начало XIX в.) причиной возникновения термодинамики как науки – проблеме превращения теплоты в механическую работу, или, говоря иначе, проблеме теплового двигателя.

Изобретение методов получения механической работы за счет теплоты явилось началом новой эпохи в истории цивилизации. Дело в том, что механическую энергию всегда можно полностью превратить в тепловую (например, за счет трения), а *полное превращение тепловой энергии в механическую без каких-либо изменений в окружающих телах*, как оказалось, *невозможно*. Последнее утверждение называется *вторым началом термодинамики*.

Любая тепловая машина, превращающая теплоту в работу (паровые машины, двигатели внутреннего сгорания и т.д.), действует циклически, т.е. в ней процессы передачи тепла и преобразование его в работу периодически повторяются. Для этого нужно, чтобы тело, совершающее работу (*рабочее тело*), после получения теплоты Q_1 от источника (*нагревателя*), находящегося при температуре T_1 , вернулось в исходное состояние, чтобы снова начать такой же процесс. Другими словами, рабочее тело должно совершать циклический процесс. Но мы знаем, что для того чтобы суммарная работа тела за цикл A оказалась положительной, тело должно вернуться в исходное состояние на диаграмме $p - V$ по более «низкой» кривой (кривая 2–b–1 на рис. 10.2). Однако более «низкой» кривой на диаграмме $p - V$ соответствует более низкая температура. Поэтому перед сжатием рабочее тело должно быть охлаждено, т.е. от него нужно отнять некоторое количество тепла Q_2 и передать его еще одному (третьему) телу – *холодильнику*, температура которого T_2 ниже температуры нагревателя T_1 . Вот почему никакая циклическая тепловая машина не может обойтись только источником тепла и рабочим телом. Если бы можно было обойтись только рабочим телом и нагревателем, то для получения механической работы можно было бы воспользоваться такими источниками тепла, как вода морей и океанов, от которых можно заимствовать практически неограниченное количество тепловой энергии. Такая машина называется «вечным двигателем» второго рода, в отличие от «вечного двигателя» первого рода, который совершает механическую работу, не тратя при этом никакой энергии, существование которого запрещается законом сохранения энергии (первым началом термодинамики). «Вечный двигатель» второго рода не запрещен законом сохранения энергии, так как в таком двигателе работа совершается за счет теплоты. Но опыт показывает, что такая машина не может быть построена.

Итак, для работы циклической машины, кроме нагревателя и рабочего тела, необходимо наличие третьего тела – *холодильника*, температура которого ниже температуры источника тепла. В реальных тепловых машинах в качестве холодильника служит окружающая среда. Структурно тепловая машина представлена на рис. 10.4.



Рис. 10.4

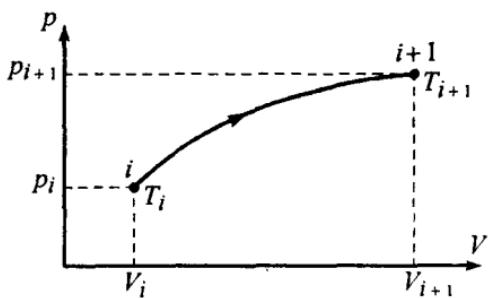


Рис. 10.5

Полная механическая работа, совершаемая рабочим телом за один цикл (см. выражение (10.5)),

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (10.37)$$

Эту работу легко найти, если изобразить циклический процесс на диаграмме $p - V$ и найти площадь петли. Эта площадь, как мы знаем, численно равна работе A .

Коэффициентом полезного действия (КПД) η тепловой машины называется отношение

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \quad (10.38)$$

где $Q_1 > 0$ – количество тепла, полученного рабочим телом за цикл.

Рассмотрим теперь, как практически найти Q_1 , если циклический процесс изображен на диаграмме $p - V$ и рабочее тело – идеальный газ. Обычно весь процесс на диаграмме $p - V$ состоит из нескольких отрезков непрерывных кривых или прямых линий, соответствующих процессам перехода рабочего тела из i -го начального состояния в $(i+1)$ -е конечное состояние. Один такой произвольный участок цикла изображен на рис. 10.5. Если процесс $i \rightarrow i+1$ адиабатический, то $Q_{i,i+1} = 0$; если процесс изотермический ($T_i = T_{i+1}$ или $p_i V_i = p_{i+1} V_{i+1}$), то $Q_{i,i+1} > 0$ (тело получает тепло) при расширении рабочего тела ($V_{i+1} > V_i$); если процесс $i \rightarrow i+1$ изохорический ($V_i = V_{i+1}$), то $Q_{i,i+1} > 0$ при увеличении давления ($p_{i+1} > p_i$); и, наконец, если процесс изобарический ($p_i = p_{i+1}$), то $Q_{i,i+1} > 0$ при расширении тела ($V_{i+1} > V_i$). Полное количество тепла, полученное рабочим телом за цикл,

$$Q_1 = \sum Q_{i,i+1}, \quad (10.39)$$

где суммируется лишь тепло $Q_{i,i+1}$ на тех отрезках цикла, где это тепло положительно.

Для нахождения полученного телом тепла $Q_{i,i+1}$ при изохорическом и изобарическом процессах нужно использовать соотношения (10.32) – (10.33) и уравнение состояния идеального газа.

Можно доказать, что из всех возможных циклических тепловых машин *максимальным КПД* обладает машина, работающая по циклу, схематически представленному на рис. 10.6, который называется циклом Карно. На участке 1–2 рабочее тело, находясь в контакте с нагревателем

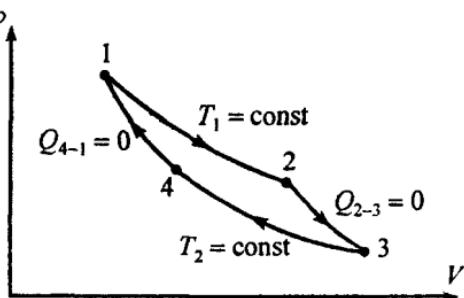


Рис. 10.6



Рис. 10.7

при температуре T_1 , изотермически ($T_1 = \text{const}$) расширяется и совершает положительную механическую работу A_{1-2} за счет тепла Q_1 , отнятого у нагревателя. При этом работа $A_{1-2} = Q_1$, так как при постоянной температуре внутренняя энергия тела не изменяется ($U_2 = U_1$). На участке 2–3 рабочее тело теплоизолировано от нагревателя и адиабатически ($Q_{2-3} = 0$) расширяется, совершая положительную механическую работу A_{2-3} за счет убыли его внутренней энергии: $A_{2-3} = U_2 - U_3$. При этом температура рабочего тела уменьшается до температуры холодильника T_2 . На участке 3–4 рабочее тело приводят в контакт с холодильником и изотермически ($T_2 = \text{const}$) сжимают. При этом $U_4 = U_3$ и газ совершает отрицательную работу $A_{3-4} = -Q_2$, где Q_2 – тепло, отданное рабочим телом холодильнику. И наконец, на участке 4–1 рабочее тело изолируют от холодильника и адиабатически сжимают до тех пор, пока его температура не станет равной температуре нагревателя T_1 . В результате рабочее тело возвращается в исходное состояние и далее цикл повторяется. При адиабатическом сжатии $Q_{4-1} = 0$, и тело совершает отрицательную работу $A_{4-1} = U_4 - U_1$. Полная работа тела за цикл, как и следовало ожидать,

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1} = \quad (10.40)$$

$$= Q_1 + U_2 - U_3 - Q_2 + U_4 - U_1 = Q_1 - Q_2,$$

где учтено, что $U_2 = U_1$ и $U_3 = U_4$.

Так как $Q_1 = A_{1-2}$ (работа при $T_1 = \text{const}$) и $Q_2 = -A_{3-4}$ (работа при $T_2 = \text{const}$), то для цикла Карно можно показать, что

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad (10.41)$$

а КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (10.42)$$

В термодинамике доказывается, что любая тепловая машина, работающая при заданных значениях температур нагревателя T_1 и холодильника T_2 , имеет КПД меньший, чем машина, работающая по циклу Карно при тех же значениях температур нагревателя и холодильника. При этом ее КПД не зависит от природы рабочего тела.

В заключение заметим, что разновидностью тепловых машин является так называемая **холодильная машина**. Для ее работы необходимо осущест-

ствовать «обратный» цикл: расширение рабочего тела следует производить по более «низкой» кривой 1-*b*-2 (рис. 10.2), а сжатие по кривой 2-*a*-1. Совершая расширение 1-*b*-2 машина будет заимствовать у холодильника тепло Q_2 ; при сжатии она передаст нагревателю тепло $Q_1 > Q_2$. При этом над машиной будет произведена положительная работа $A' = Q_1 - Q_2$. Структурная схема холодильной машины представлена на рис. 10.7.

Рекомендации по решению задач

В отличие от молекулярно-кинетической теории термодинамика изучает процессы обмена энергией между телами с общих позиций, не опираясь ни на какие модельные представления о атомно-молекулярной структуре вещества.

Одной из самых важных величин, характеризующих произвольную систему тел, является ее энергия. Как показывает опыт, изменить энергию системы (не изменяя саму систему, например, добавляя к ней или удаляя из нее частицы) можно двумя способами:

- совершая работу над системой или предоставляя ей возможность совершить работу;
- вследствие передачи теплоты от окружающих тел системе или, наоборот, отбирая теплоту от системы к телам.

Полная энергия системы состоит из механической и внутренней энергии. В термодинамике обычно рассматривают покоящиеся тела, механическая энергия которых не меняется. В этом случае первое начало термодинамики удобно сформулировать в виде: изменение внутренней энергии системы за время ее перехода из одного состояния в другое равно сумме совершенной над системой работы: внешними телами и полученного системой тепла в результате теплообмена с другими телами. Работа и процессы теплообмена – это различные способы изменения и передачи энергии от одного тела к другому. В то время как энергия характеризует состояние рассматриваемой системы, теплообмен и работа характеризуют изменение состояния, т.е. происходящие в системе процессы.

Задачи данного параграфа можно разделить на две основные группы. К первой группе отнесем задачи, в которых требуется рассчитать те или иные характеристики идеального газа (или смеси газов) при переходе системы из одного состояния в другое. Решение таких задач основано на непосредственном применении первого начала термодинамики в виде

$$\Delta U = \pm Q \pm A,$$

где знаки «плюс» относятся к случаям, когда газ приобретает энергию, а знаки «минус» – когда газ отдает энергию окружающим телам.

Прежде чем приступить к обсуждению методов решения задач, отметим, что:

1. Внутренняя энергия U системы является функцией состояния и ее изменение ΔU определяется лишь начальным и конечным состояниями системы, т.е. не зависит, каким образом система перешла из одного состояния в другое:

$$U = \frac{i}{2} v R T, \quad \Delta U = \frac{i}{2} v R \Delta T = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1),$$

где i – число степеней свободы ($i = 3$ для одноатомного газа и $i = 5$ для двухатомного, состоящего из жестких молекул); p_1, p_2, V_1, V_2 – давления и объемы газа в начальном и конечном состояниях соответственно.

2. Работа, совершаемая при переходе из одного состояния в другое, зависит не только от начального и конечного состояний, но и от вида процесса, с помощью которого происходит изменение состояния. Однако, независимо от процесса, совершаемая газом работа положительна, если в процессе происходит расширение газа, и отрицательна в противном случае.

3. Количество теплоты, поглощаемой или выделяемой системой при переходе из одного состояния в другое, так же, как и работа, зависит от вида процесса.

Рассмотрим более подробно известные процессы, совершаемые идеальным газом, число молей которого остается неизменным.

1. Изотермический процесс ($T = \text{const}$):

а) изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$;

б) работа, совершаемая газом при переходе из состояния с параметрами (p_1, V_1, T) в состояние (p_2, V_2, T) , определяется интегралом

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

или с учетом уравнения Менделеева – Клапейрона в виде $p = v R T / V$:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{v R T}{V} dV = v R T \ln \frac{V_2}{V_1} = v R T \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

При расширении газа $A > 0$; при сжатии $A < 0$;

в) количество теплоты $Q = A$: при изотермическом расширении газ получает извне тепло Q и такое же количество энергии в виде работы возвращает в окружающую среду.

2. Изохорический процесс ($V = \text{const}$):

а) изменение внутренней энергии равно $\Delta U = v C_v \Delta T = \frac{1}{2} v R \Delta T = \frac{1}{2} V \Delta p$;

б) работа в процессе $A = 0$;

в) количество теплоты $Q = \Delta U$: при изохорическом нагревании газ получает извне теплоту Q , которая полностью переходит во внутреннюю энергию газа.

3. Изобарический процесс ($p = \text{const}$):

а) изменение внутренней энергии равно $\Delta U = v C_v \Delta T = \frac{1}{2} v R \Delta T = \frac{1}{2} p \Delta V$;

б) работа в процессе $A = p \Delta V$;

в) количество теплоты $Q = \Delta U + A = v C_p \Delta T = (\frac{1}{2} + 1) v R \Delta T = (\frac{1}{2} + 1) p \Delta V$: при изобарическом расширении газ получает извне теплоту Q и часть полученной энергии идет на совершение работы A , а другая часть – на приращение внутренней энергии.

4. Адиабатический процесс ($Q = 0$):

а) изменение внутренней энергии $\Delta U = v C_v \Delta T = \frac{1}{2} v R \Delta T$;

б) работа в процессе $A = -\Delta U$: при адиабатическом расширении работа совершается за счет внутренней энергии газа;

в) количество теплоты $Q = 0$.

При решении задач удобно пользоваться таблицей:

Процесс	Изменение внутренней энергии	Работа в процессе	Количество теплоты
изотермический	$\Delta U = 0$	$A = v R T \ln (V_2/V_1) = v R T \ln (p_1/p_2)$	$Q = A$
изохорический	$\Delta U = \frac{1}{2} V \Delta p$	$A = 0$	$Q = \Delta U$
изобарический	$\Delta U = \frac{1}{2} p \Delta V$	$A = p \Delta V$	$Q = \Delta U + A$
адиабатический	$\Delta U = \frac{1}{2} v R \Delta T$	$A = -\Delta U$	$Q = 0$

При решении задач первой группы можно придерживаться следующей последовательности:

а) прочитав условие задачи, нужно ясно представить, в скольких различных процессах участвует данный газ при переходе из начального состояния в конечное. Если газ последовательно участвует в нескольких процессах, то удобно сделать схематический чертеж, на котором изобразить все процессы и отметить состояния газа в начале и конце каждого из них;

б) для каждого процесса написать выражения для изменения внутренней энергии ΔU , работы A и количества теплоты Q в соответствии с таблицей; ΔU , A и Q при переходе из начального состояния в конечное найти как алгебраическую сумму ΔU_i , A_i и Q_i для всех рассматриваемых процессов;

в) при необходимости для того или иного процесса (или для всех) записать уравнение объединенного газового закона (или его частный случай), связывающее начальное и конечное состояния газа в данном процессе. Дополнить полученные уравнения развернутыми значениями параметров, выразив их через известные или искомые величины. Если рассматривается смесь газов, то записать закон Дальтона для установления результирующего давления компонентов;

г) записать все вспомогательные условия, связывающие параметры p , V , T газа в различных состояниях. Если рассматриваются комбинированные задачи, связанные с механическим движением системы, то уравнения дополнить законами механики;

д) решить полученную систему уравнений.

Во вторую группу выделим задачи, в которых рассматриваются циклические процессы. Этую группу задач можно разбить на две части; первая из которых включает задачи на произвольные циклы, а вторая – на цикл Карно.

При решении задач на определение количества тепла, полученного или отданного рабочим телом за цикл, работы за цикл или КПД цикла, удобно придерживаться следующей последовательности:

а) внимательно рассмотрев циклический процесс, ясно представить, в каких процессах участвует рабочее тело. Часто удобно изобразить цикл графически на диаграмме $p - V$; если по условию задачи цикл уже задан графически, но в переменных $p - T$ или $V - T$, то перестроить его на диаграмму $p - V$, отметив параметры состояния в начале и конце каждого процесса;

б) используя схему решения задач первой группы, найти работу A_p , совершающую рабочим телом (или над ним), и количество тепла Q_p , полученное (или отданное) им, для всех рассматриваемых процессов, составляющих цикл;

в) проанализировав условие задачи, установить, на каких участках цикла рабочее тело отдавало тепло, а на каких получало. Сумма количеств теплоты на участках, где $Q_i > 0$ будет равна количеству теплоты, полученной рабочим телом за цикл, т.е. теплу, полученному от нагревателя: $Q_1 = \sum Q_i$. Сумма количеств теплоты в процессах, где $Q_i < 0$ будет равна теплоте, отданной за цикл холодильнику: $Q_2 = \sum |Q_i|$;

г) работу A за цикл вычислить как алгебраическую сумму работ на каждом из его участков. Если график цикла в переменных $p - V$ представляет собой простую геометрическую фигуру (треугольник, квадрат, трапеция и т.п.), то работу можно определить как площадь фигуры, ограниченной петлей цикла; при этом работа положительна, если состояние рабочего тела изменяется в цикле по часовой стрелке, в противном случае – отрицательна;

д) КПД цикла вычислить по одной из формул:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Если тепловая машина работает по циклу Карно, то схема решения задач такая же, как для произвольного цикла, за исключением, что КПД такой машины можно также вычислить через температуры нагревателя T_1 и холодильника T_2 по формуле

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Следует также помнить, что машина Карно получает тепло лишь на участке изотермического расширения, а отдает – на участке изотермического сжатия. При этом количество полученного или отданного тепла за цикл равно работе соответствующего изотермического процесса.

Задачи

10.1. Воздух, занимавший объем $V_1 = 1$ л при давлении $p_1 = 0,8$ МПа, изотермически расширился до $V_2 = 10$ л. Определить изменение его внутренней энергии и работу, совершенную газом. Какое количество тепла было сообщено газу в процессе расширения?

- *Решение.* В изотермических процессах температура газа не меняется, а, следовательно, не меняется и его внутренняя энергия, т.е.

$$\Delta U = 0.$$

При расширении v молей воздуха от объема V_1 до V_2 при постоянной температуре T газом будет совершена положительная работа

$$A = v R T \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

С учетом уравнения Менделеева – Клапейрона, записанного для начального состояния воздуха,

$$p_1 V_1 = v R T,$$

получим

$$A = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \approx 2,6 \text{ кДж.}$$

Следовательно, количество тепла, сообщенного газу в процессе изотермического расширения,

$$Q = \Delta U + A = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \approx 2,6 \text{ кДж.}$$

- *Ответ:* $\Delta U = 0$; $A = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \approx 2,6 \text{ кДж}$; $Q = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \approx 2,6 \text{ кДж}$.

10.2. Идеальный одноатомный газ изотермически расширился из состояния с давлением $p_1 = 10^6$ Па и объемом $V_1 = 1$ л до вдвое большего объема. Найти внутреннюю энергию газа в конечном состоянии.

10.3. Один моль идеального газа, находящегося при температуре $T = 300$ К, изотермически сжали от давления $p_1 = 1$ атм до $p_2 = 2$ атм. Определить количество теплоты, выделившейся в процессе.

10.4. Идеальный одноатомный газ, находящийся в закрытом сосуде объемом $V = 2$ л, изохорически охладили так, что давление газа изменилось от $p_1 = 2$ атм до $p_2 = 1$ атм. Найти количество теплоты, выделившейся в процессе.

- *Решение.* В изохорических процессах работа

$$A = 0,$$

а количество теплоты, полученной (при нагревании) или выделившейся (при охлаждении) в процессе, по величине равно изменению внутренней энергии газа

$$\Delta U = v C_v (T_2 - T_1),$$

где C_v – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме (в нашем случае одноатомного газа $C_v = \frac{3}{2} R$); T_1 , T_2 – температура газа в начальном и конечном состояниях.

Записав уравнение Менделеева – Клапейрона в начальном и конечном состояниях газа,

$$p_1 V = v R T_1, \quad p_2 V = v R T_2,$$

получим

$$\Delta U = \frac{3}{2} v R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} V (p_2 - p_1).$$

Поскольку $p_2 < p_1$, то $\Delta U < 0$. Следовательно, в процессе охлаждения газа выделилось количество теплоты

$$Q = |\Delta U| = \frac{3}{2} V (p_1 - p_2) = 300 \text{ Дж.}$$

- Ответ: $Q = \frac{3}{2} V (p_1 - p_2) = 300 \text{ Дж.}$

10.5. В закрытом сосуде находится $v = 3$ моля гелия при температуре $t = 27^\circ\text{C}$. На сколько процентов увеличится давление в сосуде, если газу сообщить количество теплоты $Q = 3 \text{ Дж?}$

10.6. Температура аргона, находящегося в баллоне объемом $V = 10 \text{ л}$, при изохорическом процессе уменьшилась в $n = 2,5$ раза. Определить изменение внутренней энергии газа, если начальное давление в баллоне было равно $p_0 = 10^5 \text{ Па}$.

10.7. Один киломоль гелия изобарически расширился так, что температура газа увеличилась на $\Delta t = 20^\circ\text{C}$. Определить изменение внутренней энергии газа, совершенную газом работу и количество теплоты, сообщенной газу.

- Решение. При изобарическом нагревании гелия часть теплоты, сообщенной газу, идет на увеличение его внутренней энергии, а часть – на совершение работы расширения газа.

Если v молей гелия нагреть на ΔT градусов, то внутренняя энергия газа увеличится на

$$\Delta U = v C_v \Delta T,$$

где C_v – молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме, в случае одноатомного газа равная $C_v = \frac{3}{2} R$. Следовательно,

$$\Delta U = \frac{3}{2} v R \Delta T \approx 2,5 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Работа, совершаемая газом при изобарическом расширении,

$$A = p (V_2 - V_1),$$

где p – давление газа; $(V_2 - V_1)$ – изменение объема, занимаемого гелием.

Записав уравнение Менделеева – Клапейрона в начальном и конечном состояниях газа,

$$p V_1 = v R T_1, \quad p V_2 = v R T_2,$$

получим

$$A = v R (T_2 - T_1) = v R \Delta T \approx 1,7 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

На основании первого начала термодинамики количество теплоты, сообщенной газу,

$$Q = \Delta U + A = \frac{5}{2} v R \Delta T \approx 4,2 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

- Ответ: $\Delta U = \frac{3}{2} v R \Delta T \approx 2,5 \cdot 10^5 \text{ Дж}; A = v R \Delta T \approx 1,7 \cdot 10^5 \text{ Дж}; Q = \frac{5}{2} v R \Delta T \approx 4,2 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$

10.8. В вертикальном цилиндре поперечным сечением $S = 50 \text{ см}^2$ под поршнем массой $M = 50 \text{ кг}$ находится воздух при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$. Первоначально поршень расположен на высоте $h = 50 \text{ см}$ от основания цилиндра. Какую работу совершил газ, если его нагреть на $\Delta T = 30 \text{ К}$? Атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Трения нет.

- Решение. Как было показано в задаче №9.49, процесс нагревания газа, заключенного под подвижным поршнем, будет протекать при постоянном давлении

$$p = p_0 + \frac{Mg}{S}.$$

Следовательно, при расширении от объема V_1 до V_2 газ совершил работу

$$A = p (V_2 - V_1) = \left\{ p_0 + \frac{Mg}{S} \right\} (V_2 - V_1).$$

Из закона Гей – Льюссака для изобарического процесса

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

с учетом условий задачи

$$V_1 = h S, \quad \Delta T = T_2 - T_1$$

получим

$$V_2 - V_1 = \frac{\Delta T}{T_1} h S.$$

Следовательно,

$$A = \left\{ p_0 + \frac{Mg}{S} \right\} \frac{\Delta T}{T_1} h S \approx 49,5 \text{ Дж.}$$

- Ответ: $A = \left\{ p_0 + \frac{Mg}{S} \right\} \frac{\Delta T}{T_1} h S \approx 49,5 \text{ Дж.}$

10.9. В процессе изобарического расширения неона было затрачено $Q = 1200 \text{ Дж}$ тепла. Определить работу, совершенную газом.

10.10. При изобарическом сжатии гелия над газом была совершена работа $A = 20 \text{ кДж}$. В результате температура газа уменьшилась в $n = 3$ раза. Найти начальный объем гелия, если его давление равно $p = 10^5 \text{ Па}$.

10.11. В процессе расширении $v = 5$ молей аргона при постоянном давлении объем газа увеличился в $n = 5$ раз, а внутренняя энергия изменилась на $\Delta U = 60 \text{ кДж}$. Определить начальную температуру аргона.

10.12. В вертикальном цилиндре поперечным сечением $S = 10 \text{ см}^2$ под поршнем массой $M = 1 \text{ кг}$ находится $m = 1 \text{ г}$ неона. Какое количество теплоты нужно затратить, чтобы нагреть газ на $\Delta t = 10^\circ\text{C}$? Насколько при этом поднимется поршень? Атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Молярная масса неона $\mu = 2 \cdot 10^{-2} \text{ кг/моль}$.

10.13. В процессе расширения идеального газа от объема $V_1 = 1 \text{ л}$ до $V_2 = 11 \text{ л}$ давление изменяется по закону $p = \alpha V$, где $\alpha = 4 \text{ Па/м}^3$. Определить работу, совершенную газом в процессе.

• Решение. По условию задачи газ расширяется так, что давление газа и занимаемый им объем связаны линейной зависимостью $p = \alpha V$. Работа расширения в этом случае может быть определена одним из трех способов:

1) через определенный интеграл:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \alpha V dV = \frac{\alpha (V_2^2 - V_1^2)}{2} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж};$$

2) как площадь трапеции, ограниченной графиком функции $p(V)$ и вертикальными линиями $V = V_1$ и $V = V_2$ (рис. 10.8):

$$A = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \\ = \frac{(\alpha V_2 + \alpha V_1)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{\alpha (V_2^2 - V_1^2)}{2};$$

3) как произведение среднего значения функции $p(V)$ в данном диапазоне изменения объема V на изменение объема $\Delta V = V_2 - V_1$:

$$A = \langle p(V) \rangle \Delta V = \langle \alpha V \rangle (V_2 - V_1) = \frac{(\alpha V_2 + \alpha V_1)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{\alpha (V_2^2 - V_1^2)}{2}.$$

- Ответ: $A = \frac{1}{2} \alpha (V_2^2 - V_1^2) = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$

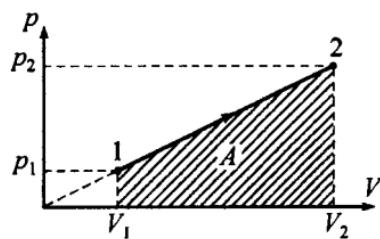


Рис. 10.8

10.14. При расширении идеального газа его давление уменьшается от $p_1 = 2$ кПа до $p_2 = 1$ кПа и при этом изменяется по закону $p = \alpha - \beta V$, где α – некоторая постоянная, $\beta = 0,5$ Па/м³. Определить работу, совершенную газом.

10.15. Один моль идеального газа расширяется от объема $V_1 = 1$ л до $V_2 = 2$ л в процессе, при котором температура изменяется по закону $T = \alpha V^2$, где $\alpha = 0,2$ К/м⁶. Определить работу, совершенную газом.

10.16. Идеальный одноатомный газ, занимавший объем $V_1 = 2$ л при давлении $p_1 = 0,1$ МПа, расширили изотермически до $V_2 = 4$ л. После этого, охлаждая изохорически, его давление уменьшили в два раза. Далее газ изобарически расширился до $V_4 = 8$ л. Найти работу, совершенную газом, изменение его внутренней энергии и количество теплоты, сообщенной газу.

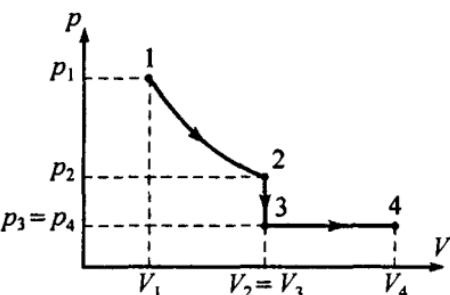


Рис. 10.9

• **Решение.** Так как газ последовательно проходит несколько состояний, участвуя в трех различных процессах, то для удобства решения задачи изобразим на рисунке графики всех процессов. Поскольку работа в процессе численно равна площади под графиком зависимости p (V), то наиболее удобно воспользоваться диаграммой p – V (рис. 10.9).

Рассмотрим последовательно все процессы, записав для каждого из них выражения для изменения внутренней энергии, работы и количества теплоты, согласно обозначениям, принятым на рисунке:

– изотермический процесс:

$$\Delta U_{1-2} = 0, \quad A_{1-2} = v R T_1 \ln(V_2/V_1), \quad Q_{1-2} = A_{1-2};$$

– изохорический процесс:

$$\Delta U_{2-3} = v C_V (T_3 - T_2), \quad A_{2-3} = 0, \quad Q_{2-3} = \Delta U_{2-3};$$

– изобарический процесс:

$$\Delta U_{3-4} = v C_V (T_4 - T_3), \quad A_{3-4} = p_3 (V_4 - V_2), \quad Q_{3-4} = \Delta U_{3-4} + A_{3-4}.$$

Поскольку изменение внутренней энергии газа не зависит от процесса, а определяется лишь начальным и конечным состояниями газа, то за весь процесс

$$\Delta U = \Delta U_{1-4} = v C_V (T_4 - T_1).$$

Работа газа в процессе и количество теплоты, сообщенной газу, равны соответственно алгебраическим суммам работ и теплот на каждом из участков:

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} = v R T_1 \ln(V_2/V_1) + p_3 (V_4 - V_2);$$

$$Q = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-4} = v C_V (T_4 - T_2) + v R T_1 \ln(V_2/V_1) + p_3 (V_4 - V_2).$$

Из уравнения Менделесева – Клапейрона, записанного в начальном и конечном состояниях газа на каждом из участков,

$$p_1 V_1 = v R T_1, \quad p_2 V_2 = v R T_2, \quad p_3 V_3 = v R T_3, \quad p_4 V_4 = v R T_4,$$

с учетом условия задачи ($T_1 = T_2$, $V_2 = V_3$, $p_3 = p_4$, $p_2 = 2 p_3$) получим

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{v R}; \quad T_4 = \frac{p_1 V_1 V_4}{2 v R V_2}; \quad p_3 = \frac{p_1 V_1}{2 V_2}.$$

Следовательно,

$$\Delta U = \frac{3}{2} p_1 V_1 \left\{ \frac{V_4}{2 V_2} - 1 \right\} = 0;$$

$$A = p_1 V_1 \left\{ \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{V_4 - V_2}{2} \right\} \approx 238,6 \text{ Дж};$$

$$Q = \frac{3}{2} p_1 V_1 \left\{ \frac{V_4}{2 V_2} - 1 \right\} + p_1 V_1 \left\{ \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{V_4 - V_2}{2} \right\} \approx 238,6 \text{ Дж},$$

где учтено, что в случае одноатомного газа $C_v = \frac{3}{2} R$.

- Ответ: $A = p_1 V_1 \left\{ \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{V_4 - V_2}{2} \right\} \approx 238,6 \text{ Дж}; \Delta U = \frac{3}{2} p_1 V_1 \left\{ \frac{V_4}{2 V_2} - 1 \right\} = 0;$
- $Q = \frac{3}{2} p_1 V_1 \left\{ \frac{V_4}{2 V_2} - 1 \right\} + p_1 V_1 \left\{ \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{V_4 - V_2}{2} \right\} \approx 238,6 \text{ Дж}.$

10.17. При нагревании $m = 1 \text{ кг}$ идеального газа на $\Delta T = 1 \text{ К}$ при постоянном давлении требуется $Q_p = 909 \text{ Дж}$ тепла, а при нагревании при постоянном объеме – $Q_v = 649 \text{ Дж}$. Какой это газ?

10.18. Идеальный газ дважды переводят из состояния 1 с давлением $p_1 = 0,4 \text{ МПа}$ и объемом $V_1 = 3 \text{ м}^3$ в состояние 2 с давлением $p_2 = 0,2 \text{ МПа}$ и объемом $V_2 = 1 \text{ м}^3$. Один раз переход совершился сначала по изобаре, а затем по изохоре, а второй раз – сначала по изохоре, а затем по изобаре. В каком случае выделяется больше тепла? Определить разницу в теплоизделии.

10.19. Три моля идеального газа, находящегося при температуре $T_0 = 273 \text{ К}$, изотермически расширили в $n = 5$ раз, а затем изохорически нагрели так, что его давление стало равным первоначальному. За весь процесс газу сообщили количество тепла $Q = 80 \text{ кДж}$. Найти показатель адиабаты для этого газа.

10.20. В длинном вертикальном открытом сверху цилиндрическом теплоизолированном сосуде на высоте h от дна на нити висит поршень массой m , под которым находится моль одноатомного газа при давлении окружающего пространства и температуре T_0 (рис. 10.10). Какое количество тепла нужно сообщить газу, чтобы поршень поднялся до высоты $2h$? Трения нет.

- Решение. Так как первоначально давление под поршнем равно давлению окружающего пространства (т.е. давлению газа над поршнем), то это означает, что нить натянута и поршень на газ не давит. Поэтому, чтобы поршень поднялся на высоту $2h$, газ сначала необходимо нагреть до температуры T_2 , сообщив некоторое количество тепла Q_1 при постоянном объеме

$$Q_1 = \Delta U_1 = v C_v (T_2 - T_0),$$

а затем – до температуры T_3 при постоянном давлении (напомним, что расширение газа под незакрепленным поршнем при отсутствии трения происходит изобарически), сообщив тепло

$$Q_2 = \Delta U_2 + A_2 = v C_p (T_3 - T_2),$$

где $C_v = \frac{3}{2} R$, $C_p = \frac{5}{2} R$ – молярные теплоемкости одноатомного газа при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно.

Следовательно,

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{3}{2} v R (T_2 - T_0) + \frac{5}{2} v R (T_3 - T_2).$$

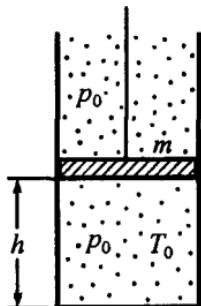


Рис. 10.10

Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для трех состояний газа:

$$p_0 h S = v R T_0, \quad p h S = v R T_2, \quad p 2h S = v R T_3,$$

где p_0 – атмосферное давление; $p = p_0 + m g / S$ – давление под поршнем при расширении газа; S – поперечное сечение сосуда. Отсюда получим

$$T_2 = T_0 \left\{ 1 + \frac{m g}{p_0 S} \right\}, \quad T_3 = 2T_0 \left\{ 1 + \frac{m g}{p_0 S} \right\},$$

а количество тепла, сообщенного газу,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{2} v R \left\{ T_0 \left\{ 1 + \frac{m g}{p_0 S} \right\} - T_0 \right\} + \frac{5}{2} v R \left\{ 2T_0 \left\{ 1 + \frac{m g}{p_0 S} \right\} - T_0 \left\{ 1 + \frac{m g}{p_0 S} \right\} \right\} = \\ &= \frac{5}{2} v R T_0 + \frac{4m g v R T_0}{p_0 S} = \frac{5}{2} v R T_0 + 4m g h. \end{aligned}$$

• Ответ: $Q = \frac{5}{2} v R T_0 + 4m g h$.

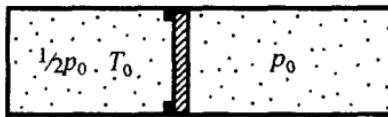


Рис. 10.11

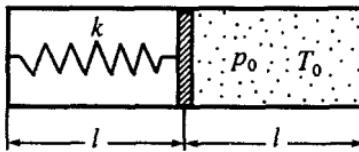


Рис. 10.12

10.21. В длинном горизонтальном цилиндрическом теплоизолированном сосуде находится поршень, удерживаемый ограничителем на некотором расстоянии от закрытого торца сосуда (рис. 10.11). Поршень отделяет от внешнего пространства моль одноатомного газа при давлении в два раза меньшем атмосферного и температуре T_0 . Какое количество тепла нужно сообщить газу, чтобы его объем увеличился в два раза? Трения нет.

10.22. В горизонтальном цилиндрическом теплоизолированном сосуде сечением S и длиной $2l$ удерживается тонкий поршень, делящий объем сосуда на две равные части. Одну половину занимает одноатомный газ при температуре T_0 и давлении p_0 , а в другой половине – вакуум. Поршень соединен с торцом вакуумированной части сосуда пружиной жесткостью k и длиной в недеформированном состоянии $2l$ (рис. 10.12). Пренебрегая трением, найти установившуюся температуру газа после того, как поршень отпустили.

10.23. Закрытый с торцов горизонтальный теплоизолированный цилиндрический сосуд массой m перегорожен подвижным поршнем массой $M \gg m$. С обеих сторон от поршня находится по одному молю идеального одноатомного газа. Коротким ударом сосуду сообщают скорость v , направленную вдоль оси сосуда. На сколько градусов изменится температура газа после затухания колебаний поршня? Трением между поршнем и стенками сосуда, а также теплоемкостью поршня пренебречь. Масса газа $m_g \ll m$.

• Решение. После удара сосуд придет в движение, что приведет к сжатию газа в одной части сосуда и расширению в другой. Возникшая разность давлений с разных сторон от поршня заставит последний двигаться в сторону объема с меньшим давлением. При движении поршня сила результирующего давления постепенно будет уменьшаться до нуля, и о

так как поршень массивен, то он пройдет по инерции положение равновесия и сожмет газ в той части сосуда, где он первоначально был разрежен. Возникшая разность давлений заставит двигаться поршень в другую сторону и т.д. Такое движение поршня будет происходить до тех пор, пока колебания не затухнут.

Так как в направлении движения сосуда система «сосуд – поршень – газ» замкнута, то по закону сохранения импульса можно записать

$$m v = (m + M + m_r) u, \quad (1)$$

где m_r – масса газа в сосуде; u – скорость движения системы после прекращения колебаний поршня.

Разность кинетических энергий системы в начале движения сосуда и в конце, когда колебания поршня затухнут, равна энергии, отданной газу:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} (m + M + m_r) u^2 = \Delta E. \quad (2)$$

С учетом, что масса газа в сосуде $m_r \ll M$ и масса сосуда $m \ll M$, из (1) – (2) получим

$$u = v \frac{m}{M}, \quad \Delta E = \frac{m (M - m) v^2}{2 M}.$$

Так как после затухания колебаний поршня система будет двигаться с постоянной скоростью, то в обеих частях сосуда давления будут одинаковыми, а так как массы газа по обе стороны от поршня равны, то это приведет к тому, что поршень опять разделит сосуд на равные части, т.е. будет находиться в том же положении, что и до движения сосуда. Поэтому суммарная работа будет равна нулю, а энергия ΔE , отданная газу, полностью уйдет на увеличение его внутренней энергии:

$$\Delta E = \Delta U = 2v C_v \Delta T,$$

где C_v – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме: $C_v = \frac{3}{2} R$.

Следовательно,

$$\Delta T = \frac{m (M - m) v^2}{4v M C_v} = \frac{m (M - m) v^2}{6v M R} \approx \frac{m v^2}{6v R}.$$

• Ответ: $\Delta T = \frac{m (M - m) v^2}{6v M R} \approx \frac{m v^2}{6v R}$, где $v = 1$ моль.

10.24. В длинной горизонтальной теплоизолированной трубе между двумя одинаковыми поршнями массой m каждый находится один моль одноатомного газа при температуре T_0 . В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону (вдогонку друг другу) и равны v и $3v$. До какой максимальной температуры нагреется газ? Массой газа и теплоемкостью поршней пренебречь.

10.25. В длинном горизонтальном закрепленном цилиндрическом теплоизолированном сосуде находится поршень массой m , отделяющий от внешнего пространства моль одноатомного газа. Газ нагревают и одновременно отпускают поршень, который, двигаясь равноускоренно, приобретает скорость v . Найти количество тепла, сообщенного газу. Трения нет. Внешнее давление не учитывать.

10.26. Определить работу, которую совершают идеальный газ в цикле 1–2–3–1, представленном на рис. 10.13, где $p_0 = 10^5$ Па, $V_0 = 1$ м³.

• Решение. Поскольку циклический процесс 1–2–3–1 на диаграмме p – V представляет собой простую геометрическую фигуру – треуголь-

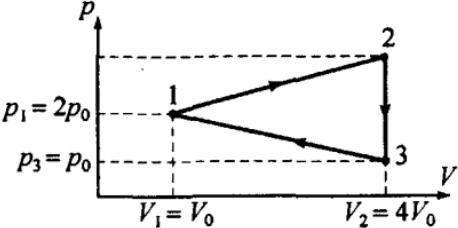


Рис. 10.13

ник, то площадь, ограниченная петлей цикла, может быть легко определена. Численно она будет равна работе, совершенной газом за цикл:

$$A = \frac{1}{2} (p_2 - p_3) (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (3p_0 - p_0) (4V_0 - V_0) = 3p_0 V_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

• Ответ: $A = 3p_0 V_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$

10.27. С идеальным газом, взятым в количестве $v = 3$ моля, проводят замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар. Отношение давлений на изобарах $\alpha = 5/4$, отношение объемов на изохорах $\beta = 6/5$. Раз-

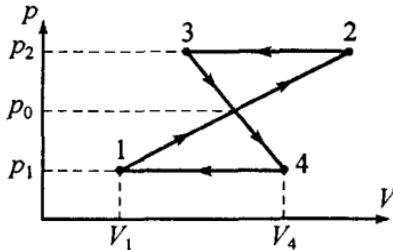


Рис. 10.14

ность максимальной и минимальной температур в процессе $\Delta T = 100 \text{ К}$. Определить работу, совершающую газом за один цикл.

10.28. Определить работу, которую совершает идеальный одноатомный газ в цикле 1–2–3–4–1, представленном на рис. 10.14, где $V_1 = 10 \text{ л}$, $V_4 = 20 \text{ л}$, $p_1 = 10^5 \text{ Па}$, $p_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $p_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

10.29. $v = 2$ моля идеального одноатомного газа участвуют в циклическом процессе 1–2–3–4–1, представленном на рис. 10.15. Температуры газа в состояниях 1 и 2 равны $T_1 = 300 \text{ К}$ и $T_2 = 400 \text{ К}$ соответственно. Найти работу, совершенную газом за цикл, если на участке 3–4 газу сообщили $Q = 2000 \text{ Дж}$ тепла.

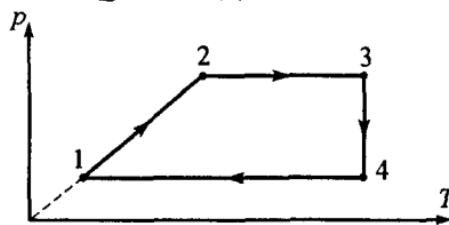


Рис. 10.15

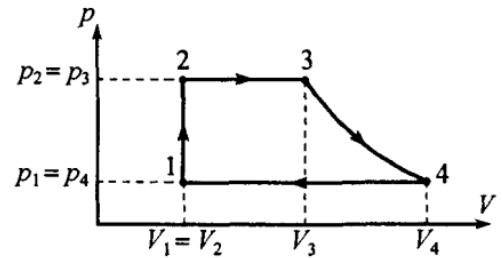


Рис. 10.16

• Решение. Из рис. 10.15 видно, что процесс 1–2 – изохорический, 2–3 и 4–1 – изобарические, а 3–4 – изотермический. Изобразим наш процесс на графике зависимости давления от объема (рис. 10.16).

Работа газа за весь процесс будет равна алгебраической сумме работ на соответствующих участках:

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1}.$$

Из графика на диаграмме $P - V$ видно, что

1) $A_{1-2} = 0$, так как объем газа не меняется;

2) $A_{2-3} = p_2 (V_3 - V_1)$ как площадь под графиком процесса 2–3;

3) $A_{3-4} = Q_{3-4} - \Delta U_{3-4} = Q$, так как в изотермическом процессе $\Delta U_{3-4} = 0$;

4) $A_{4-1} = p_1 (V_1 - V_4)$ как площадь под графиком процесса 4–1, причем работа A_{4-1} отрицательна, так как объем газа уменьшается.

Следовательно,

$$A = p_2 (V_3 - V_1) + Q + p_1 (V_1 - V_4),$$

или

$$A = p_2 V_3 - p_2 V_1 + Q + p_1 V_1 - p_1 V_4.$$

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, записанное для каждого из состояний газа,

$$p_1 V_1 = v R T_1, \quad p_2 V_1 = v R T_2, \quad p_2 V_3 = v R T_3, \quad p_1 V_4 = v R T_4,$$

с учетом, что $T_3 = T_4$, получим

$$A = p_1 V_1 - p_2 V_1 + Q = v R T_1 - v R T_2 + Q = v R (T_1 - T_2) + Q \approx 339 \text{ Дж.}$$

- Ответ: $A = v R (T_1 - T_2) + Q \approx 339 \text{ Дж.}$

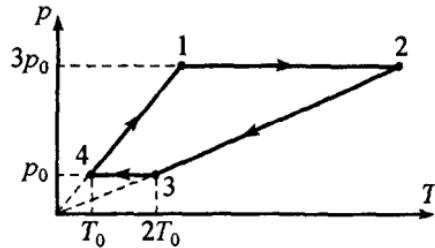


Рис. 10.17

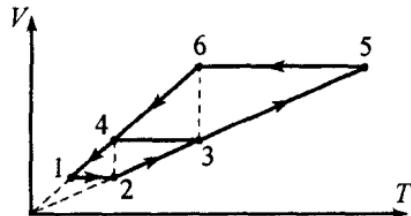


Рис. 10.18

10.30. Определить работу, которую совершают $v = 2$ моля идеального одноатомного газа в цикле 1–2–3–4–1, представленном на рис. 10.17, где $T_0 = 100 \text{ K}$.

10.31. Найти отношение работ, совершаемых идеальным одноатомным газом в циклических процессах 1–2–3–4–1 и 4–3–5–6–4, представленных на рис. 10.18. Температуры газа в состояниях 2 и 4 и в состояниях 3 и 6 одинаковы. Температуры в состояниях 1 и 5 отличаются в $n = 8$ раз.

10.32. Найти КПД цикла, представленного на рис. 10.19, где $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.

• **Решение.** Поскольку график циклического процесса 1–2–3–1 на диаграмме p - V представляет собой простую геометрическую фигуру, площадь которой легко найти, то для определения КПД цикла воспользуемся формулой

$$\eta = \frac{A}{Q},$$

где A – работа газа за цикл; Q – количество тепла, подведенного за цикл от нагревателя.

Работа A численно равна площади, ограниченной петлей цикла:

$$A = \frac{1}{2} (\alpha - 1) (\beta - 1) p_0 V_0. \quad (1)$$

К соотношению (1) можно также прийти, последовательно вычислив работу на участках 1–2, 2–3, 3–1 с учетом, что $A_{3-1} < 0$.

Для нахождения количества тепла Q , подведенного за цикл от нагревателя, рассмотрим последовательно участки цикла. Поскольку в изохорическом процессе 1–2 давление газа увеличивается, а в изобарическом процессе 2–3 растет занимаемый им объем, то $Q_{1-2} > 0$ и $Q_{2-3} > 0$. Поскольку хотя бы на одном из участков тепло должно отводиться к холодильнику, то без расчетов понятно, что $Q_{3-1} < 0$. Следовательно, тепло подводилось на участках 1–2 и 2–3, т.е.

$$Q = Q_{1-2} + Q_{2-3},$$

где (см. решение задач №10.4 и №10.7)

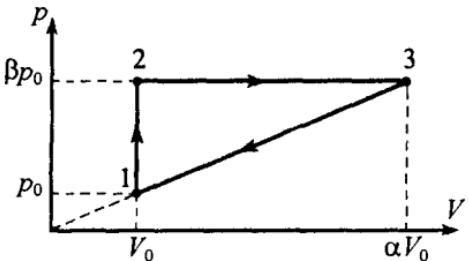


Рис. 10.19

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} = v C_v (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \beta p_0 V_0 = \frac{3}{2} (\beta - 1) p_0 V_0;$$

$$Q_{2-3} = \Delta U + A_{2-3} = \frac{3}{2} p_2 \Delta V + p_2 \Delta V = \frac{5}{2} p_2 \Delta V = \frac{5}{2} \beta p_0 \Delta V = \frac{5}{2} (\alpha - 1) \beta p_0 V_0.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{3}{2} (\beta - 1) p_0 V_0 + \frac{5}{2} (\alpha - 1) \beta p_0 V_0; \quad \eta = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{3(\beta - 1) + 5\beta(\alpha - 1)}.$$

С учетом уравнения процесса 3-1, записанного в виде

$$\frac{\beta p_0}{\alpha V_0} = \frac{p_0}{V_0},$$

окончательно получим

$$\eta = \frac{\alpha - 1}{3 + 5\alpha}.$$

• Ответ: $\eta = \frac{\alpha - 1}{3 + 5\alpha}$.

10.33. При каком значении α КПД цикла 1-2-3-1 (рис. 10.19) равен $\eta = \frac{1}{6}$? Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.

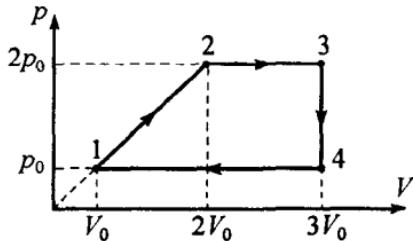


Рис. 10.20

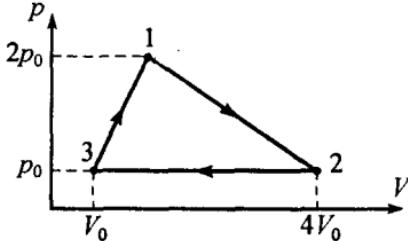


Рис. 10.21

10.34. Определить КПД цикла 1-2-3-4-1, представленном на рис. 10.20. Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.

10.35. Определить КПД цикла 1-2-3-1 (рис. 10.21), если температуры в состояниях 1 и 2 одинаковы. Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.

• Решение. Для определения КПД цикла воспользуемся формулой

$$\eta = \frac{A}{Q},$$

где A – работа газа за цикл; Q – количество теплоты, получаемой за цикл от нагревателя.

Так как работа A численно равна площади фигуры, ограниченной кривыми цикла в переменных $p - V$, то, как следует из рисунка,

$$A = \frac{(V_2 - V_3)(p_1 - p_2)}{2} = \frac{3p_0 V_0}{2}.$$

Для нахождения количества тепла Q , подведенного за цикл от нагревателя, предварительно найдем объем газа в состояниях 1 и температуры $T_1 = T_2 = T_3$.

Записав уравнение Менделеева – Клапейрона в состояниях 1, 2 и 3 с учетом, что $T_1 = T_2$,

$$2p_0 V_1 = v R T_1, \quad 4p_0 V_0 = v R T_1, \quad p_0 V_0 = v R T_3,$$

получим

$$V_1 = 2V_0; \quad T_1 = T_2 = \frac{4p_0 V_0}{v R}; \quad T_3 = \frac{p_0 V_0}{v R}.$$

В изобарическом процессе 2-3 объем, занимаемый газом, уменьшается. Следовательно, $Q_{2-3} < 0$. Поскольку процессы 1-2 и 3-1 не являются изопроцессами, то для того, чтобы выяснить, получал или отдавал газ тепло на этих участках, необходимо воспользоваться первым началом термодинамики:

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2} = v C_v (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1) = 3p_0 V_0 > 0;$$

$$Q_{3-1} = \Delta U_{3-1} + A_{3-1} = v C_v (T_1 - T_3) + \frac{1}{2} (p_1 + p_3) (V_1 - V_3) = 6p_0 V_0 > 0,$$

где учтено, что молярная теплоемкость одноатомного газа равна $C_V = \frac{3}{2}R$, а работы на участках 1–2 и 3–1 численно равны площадям трапеций под соответствующими графиками процессов.

Следовательно, на участках 1–2 и 3–1 газ получал тепло:

$$Q = Q_{3-1} + Q_{1-2} = 9p_0 V_0.$$

Тогда КПД цикла

$$\eta = \frac{1}{6}.$$

• Ответ: $\eta = \frac{1}{6}$.

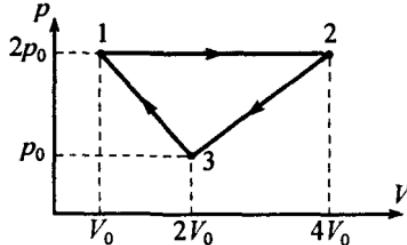


Рис. 10.22

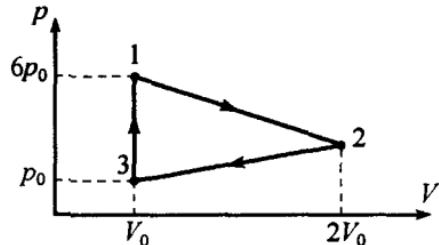


Рис. 10.23

10.36. Найти КПД цикла, изображенного на рис. 10.22. Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.

10.37. Найти КПД цикла 1–2–3–1, представленного на рис. 10.23, если температуры в состояниях 1 и 2 одинаковы. Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.

10.38. Зная КПД цикла 1–2–3–1 $\eta_1 = \frac{1}{13}$ (рис. 10.24), найти КПД цикла 1–3–4–1. Рабочее тело – идеальный газ.

• Решение. По определению КПД цикла равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}, \quad (1)$$

где Q_1 – тепло, подведенное за цикл от нагревателя; Q_2 – тепло, переданное холодильнику; A – работа, совершаемая рабочим телом за цикл.

В замкнутом процессе 1–2–3–1 тепло к системе подводится на участках 1–2 и 2–3, для цикла 1–3–4–1 – на участке 1–3 (см. решение задачи №10.32, 10.35). Поскольку работа в том и другом циклах одинакова (площади, ограниченные линиями 1–2–3–1 и 1–3–4–1, равны), то КПД циклов

$$\eta_1 = \frac{A}{Q_{1-2} + Q_{2-3}}, \quad \eta_2 = \frac{A}{Q_{1-3}}. \quad (2)$$

Следовательно,

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{Q_{1-2} + Q_{2-3}}{Q_{1-3}}. \quad (3)$$

Так как изменение внутренней энергии рабочего тела за цикл равно нулю, то из первого начала термодинамики следует, что тепло, «использованное» рабочим телом за цикл (тепло от нагревателя «минус» тепло, отдданное холодильникам), равно работе, совершаемой за цикл:

$$Q_{1-2} + Q_{2-3} - Q_{3-1} = A. \quad (4)$$

Поскольку количество теплоты, отведенное в цикле 1–2–3–1, равно количеству теплоты, подведенному в цикле 1–3–4–1, то выражение (3) для КПД цикла 1–3–4–1 с учетом (4) примет вид

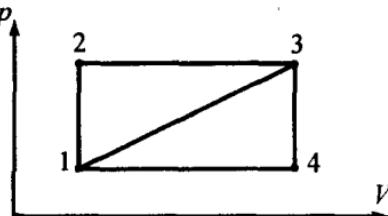


Рис. 10.24

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{A + Q_{3-1}}{Q_{1-3}} = \eta_1 \frac{A + Q_{1-3}}{Q_{1-3}} = \eta_1 (\eta_2 + 1).$$

Следовательно,

$$\eta_2 = \frac{\eta_1}{1 - \eta_1} = \frac{1}{12}.$$

• Ответ: $\eta_2 = \frac{\eta_1}{1 - \eta_1} = \frac{1}{12}$.

10.39. Коеффициент полезного действия цикла 1–2–3–4–1, представленного на рис. 10.24, равен $\eta_1 = 40\%$. Определить КПД цикла 1–3–4–1.

10.40. Известно, что КПД цикла 1–2–3–4–1 $\eta_1 = 40\%$ (рис. 10.24). Найти: 1) КПД η_2 цикла 1–2–3–1; 2) во сколько раз количество теплоты, подводимое рабочему газу в цикле 1–3–4–1, больше совершающей им за этот цикл работы. Рабочее тело – идеальный газ.

10.41. Мощность идеальной тепловой машины Карно $N = 10^4$ Вт. Температура нагревателя $T_1 = 500$ К, холодильника – $T_2 = 300$ К. Определить тепловую мощность N_1 , получаемую от нагревателя, и количество теплоты Q_2 , отдаваемое холодильнику за $\tau = 10$ с работы машины.

• Решение. КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, можно вычислить по формуле

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad (1)$$

или

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (2)$$

где T_1, T_2 – температуры нагревателя и холодильника; Q_1, Q_2 – количества тепла, получаемого от нагревателя и отдаваемого холодильнику за один цикл работы машины.

Из (1) – (2) находим

$$Q_2 = \frac{Q_1 T_2}{T_1}. \quad (3)$$

Так как за время τ была совершена работа $A = N \tau$, то на основании закона сохранения энергии, записанного в виде

$$Q_1 - Q_2 = A,$$

с учетом (3) получим

$$Q_2 = \frac{(Q_1 + A) T_2}{T_1}, \quad Q_2 = \frac{N \tau T_2}{T_1 - T_2} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Следовательно, мощность, получаемая от нагревателя,

$$N_1 = \frac{Q_1}{\tau} = \frac{Q_2 T_1}{\tau T_2} = \frac{N T_1}{T_1 - T_2} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Вт.}$$

• Ответ: $Q_2 = \frac{N \tau T_2}{T_1 - T_2} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Дж}; N_1 = \frac{N T_1}{T_1 - T_2} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Вт.}$

10.42. Тепловая машина Карно $\alpha = 70\%$ тепла, получаемого от нагревателя, отдает холодильнику. Определить температуру нагревателя, если температура холодильника $t_2 = 49^\circ\text{C}$.

10.43. Идеальная тепловая машина получает за один цикл от нагревателя $Q_1 = 1 \text{ кДж}$ теплоты. Температура нагревателя $T_1 = 600 \text{ К}$, температура холодильника $T_2 = 300 \text{ К}$. Какую работу совершает машина за один цикл? Какое количество теплоты отдается за цикл холодильнику?

10.44. Тепловая машина, которая работает по циклу Карно, имеет полезную мощность $N = 73,5$ кВт и работает в интервале температур от $T_1 = 373$ К до $T_2 = 273$ К. Определить энергию, получаемую машиной от нагревателя, а также энергию, отдаваемую холодильнику за $t = 1$ час работы.

10.45. Найти работу на участке изотермического расширения рабочего тела теплового двигателя, работающего по циклу Карно, если его КПД $\eta = 80\%$, а количество тепла, отдаваемого за цикл, $Q = 2$ Дж.

10.46. Тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 600$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Найти КПД цикла и количество тепла, отдаваемого за один цикл холодильнику, если работа на участке изотермического расширения рабочего тела равна $A = 200$ кДж.

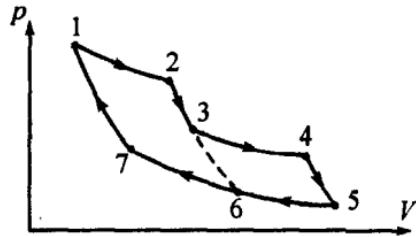


Рис. 10.25

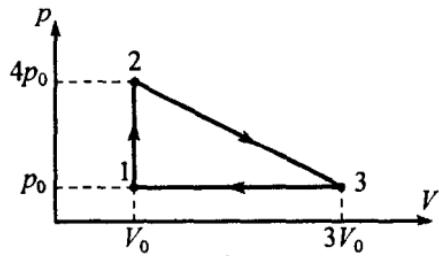


Рис. 10.26

10.47. Циклический процесс 1–2–3–4–5–6–7–1 (рис. 10.25) состоит из трех изотерм 1–2, 3–4, 5–6–7, соответствующих температурам $t_1 = 227^\circ\text{C}$, $t_2 = 127^\circ\text{C}$, $t_3 = 27^\circ\text{C}$ и трех адиабат 2–3, 4–5, 7–1. Определить КПД цикла 1–2–3–4–5–6–7–1, если работа, совершаемая рабочим телом в цикле 1–2–3–6–7–1 в два раза больше работы, совершаемой в цикле 3–4–5–6–3.

10.48. Тепловая машина совершает циклический процесс 1–2–3–1, представленный на рис. 10.26. Рабочее тело – идеальный газ. Определить максимально возможный КПД тепловой машины, работающей в том же диапазоне температур.

§11. Уравнение теплового баланса.

Изменение агрегатного состояния вещества. Влажность

Плавление твердого тела, затвердевание или испарение жидкости, конденсация пара в жидкость относятся к явлениям, которые в физике называются *фазовыми переходами*. Состояния вещества, между которыми осуществляется фазовый переход, называются его *фазами*. Так, например, лед, вода и пар – фазы воды.

Переход из одной фазы в другую всегда происходит (при заданном давлении) при строго определенной температуре. Лед, например, начинает плавиться (при атмосферном давлении) при 0°C и при дальнейшем нагревании температура остается постоянной и равной температуре плав-

ния, пока весь лед не превратится в воду. Такое поведение льда при плавлении является частным случаем общего правила: при температуре фазового перехода обе фазы находятся в состоянии теплового равновесия, и при отсутствии подвода внешнего тепла они могут существовать неограниченно долго. При температурах же выше или ниже точки перехода может существовать только одна из двух фаз.



Рис. 11.1

При изменении давления меняется и температура фазового перехода. Эту зависимость можно изобразить графически в виде кривой на так называемой *фазовой диаграмме*, на осях которой откладываются давление p и температура T . На рис. 11.1 представлена кривая испарения, дающая значения давления и температуры, при

которых жидкость и ее пар могут существовать в равновесии друг с другом. Справа от кривой вещество может находиться только в газообразном состоянии, а слева — только в жидком.

Переход вещества из одной фазы 1 в другую 2 всегда связан с выделением или поглощением некоторого количества тепла Q_{1-2} — так называемой скрытой теплоты, или *теплоты перехода*. В случае перехода твердого тела в жидкость говорят о теплоте плавления, в случае перехода жидкости в газ — о теплоте парообразования. Ясно, что

$$Q_{1-2} = -Q_{2-1}, \quad (11.1)$$

т.е. если при некотором фазовом переходе теплота поглощается (при плавлении твердого тела и при испарении жидкости) $Q_{1-2} > 0$, то обратный переход сопровождается выделением такого же количества тепла $Q_{2-1} = -Q_{1-2}$ (при затвердевании жидкости и при конденсации пара). Теплота перехода, отнесенная к единице массы вещества, называется *удельной теплотой перехода*. Так, для плавления m [кг] вещества требуется количество тепла

$$Q_{1-2} = \lambda m, \quad (11.2)$$

где λ — *удельная теплота плавления*, а для испарения m [кг] жидкости —

$$Q_{1-2} = r m, \quad (11.3)$$

где r — *удельная теплота парообразования*.

Представим теперь, что в какой-либо теплоизолированный сосуд поместили несколько тел с различными температурами, например жидкость, кусок льда, металлическое тело и т.д. Между телами происходит теплообмен, в результате которого более нагретые тела охлаждаются, а менее нагретые — нагреваются. При этом лед может частично или полностью растаять, а жидкость замерзнуть. Эти процессы могут происходить до тех пор, пока в системе не установится тепловое равновесие, когда температуры всех тел выровняются и все фазовые переходы прекратятся. Поскольку наша система теплоизолирована, алгебраическая сумма всех ко-

личеств теплоты (поглощенных и выделенных) в системе должна равняться нулю:

$$\sum_{i,j} Q_{i-j} = 0. \quad (11.4)$$

Напомним, что при нагревании (охлаждении) m [кг] вещества от температуры T_1 до температуры T_2 поглощается (выделяется) тепло

$$Q_{1-2} = m c (T_2 - T_1), \quad (11.5)$$

где c – удельная теплоемкость вещества.

Уравнение (11.4) называется уравнением теплового баланса.

Если сосуд не теплоизолирован, то уравнение (11.4) нужно записать в виде

$$\sum_{i,j} Q_{i-j} = Q, \quad (11.6)$$

где Q – количество тепла, полученное (отданное) системой. Например, тепло может подводиться к системе за счет сгорания топлива; при полном сгорании топлива массой m [кг] выделяется энергия

$$Q = q m, \quad (11.7)$$

где q – удельная теплота сгорания.

Рассмотрим теперь более подробно фазовый переход: жидкость – пар. Возьмем герметичный сосуд, частично заполненный жидкостью, и допустим, что первоначально над жидкостью воздух был удален. В этом случае наиболее быстрые молекулы будут испаряться в пространство над жидкостью (процесс парообразования), а так как они движутся вблизи жидкости, то некоторые из них будут сталкиваться с ней и возвращаться в жидкое состояние (процесс конденсации). Число молекул пара возрастает до тех пор, пока не будут достигнуты такие условия, когда число покидающих жидкость молекул за определенный промежуток времени не станет равным числу возвращающихся в нее. Между жидкостью и паром установится подвижное равновесие и оно будет существовать до тех пор, пока не изменится температура или объем системы. Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным, а о его давлении говорят как об упругости насыщенного пара.

Давление насыщенного пара не зависит от объема пространства над жидкостью. Если увеличить объем сосуда, то плотность пара уменьшится. При этом число молекул, испаряющихся с поверхности жидкости, превысит число молекул, возвращающихся в нее: возникнет дополнительный поток молекул из жидкости, и этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока пар и жидкость снова не придут в равновесное состояние. Разумеется, это справедливо, если в сосуде жидкости достаточное количество для достижения насыщения. В противном случае вся жидкость испарится и пар будет ненасыщенным. Если объем пространства над жидкостью не меняется, а температура возрастает, то упругость насыщенного пара будет увеличиваться, так как при более высоких температурах больше молекул имеют энергию, достаточную для перехода из жидкого состояния в газообразное. Следовательно, состояние равновесия будет до-

стигнуто при более высоком давлении. Поэтому кривую равновесия жидкость – пар (см. рис. 11.1) можно рассматривать и как кривую зависимости упругости насыщенного пара от температуры.

Следует отметить, что насыщенный пар не является идеальным газом. Поэтому законы идеального газа для изопроцессов можно применять к ненасыщенным парам только в случае, если пар далек от насыщения. Для насыщенного пара использование этих законов приводит к абсурду. Однако уравнение Менделеева – Клапейрона можно применять для нахождения массы или плотности насыщенных паров, если известна их упругость, и наоборот, зная массу или плотность насыщенного пара, можно найти его упругость. Таким образом, уравнение Менделеева – Клапейрона

$$p V = \frac{m}{\mu} R T, \quad \text{или} \quad p = \frac{\rho}{\mu} R T \quad (11.8)$$

справедливо для конкретной температуры и конкретного объема пара и не выражает зависимость давления от температуры при постоянном объеме и давления от объема при постоянной температуре, так как при этом меняется масса насыщенных паров и их плотность.

Другим видом парообразования является кипение. *Кипением* называется парообразование, которое происходит в объеме всей жидкости и при постоянной температуре.

Выясним особенности процесса кипения жидкости. При нагревании жидкости на дне и на стенках сосуда образуются пузырьки растворенного в жидкости воздуха, содержащие также пары жидкости. В момент образования пузырька суммарное давление воздуха и пара в нем равно внешнему давлению

$$p = p_0 + \rho g h,$$

где p_0 – атмосферное давление; $\rho g h$ – гидростатическое давление вышележащих слоев жидкости (при записи выражения для давления мы пренебрегли так называемым лапласовским давлением, связанным с кривизной поверхности пузырька).

При нагревании жидкости давление насыщенных паров в пузырьках возрастает, поэтому увеличивается объем пузырьков. При достаточно большом объеме пузырька действующая на него сила Архимеда отрывает его от поверхности сосуда и поднимает вверх. Если нагрев жидкости осуществляется снизу, то при подъеме пузырька, вследствие того, что верхние слои жидкости холоднее нижних, насыщенный пар в нем конденсируется и объем пузырька уменьшается. Поэтому многие из пузырьков, не достигнув поверхности жидкости, схлопываются.

Когда температура всей жидкости выравнивается, объем пузырьков при подъеме будет уже возрастать, так как давление насыщенного пара внутри пузырька не меняется, а гидростатическое давление уменьшается. При росте размеров пузырька все пространство внутри него заполняется насыщенным паром. Когда такой пузырек достигнет поверхности, то давление насыщенного пара в нем практически станет равным атмосферному

давлению на поверхности жидкости, поскольку давление воздуха в пузырьке в этот момент мало и им можно пренебречь. На поверхности жидкости пузырек лопается, а находящийся в нем насыщенный пар выходит в окружающую среду. Это и есть кипение. Таким образом, кипение жидкости происходит при одинаковой температуре всей жидкости, когда давление насыщенного пара этой жидкости равно внешнему давлению.

Опыт показывает, что температура кипящей жидкости и температура пара над ее поверхностью одинаковы. Поэтому *температура кипения* жидкости называется такая температура, при которой давление насыщенных паров этой жидкости равно внешнему давлению на ее поверхности. При уменьшении внешнего давления температура кипения уменьшается, а при увеличении давления – увеличивается. Температура кипения жидкости при нормальном атмосферном давлении называется *точкой кипения*. Например, вода закипает при $t = 100^{\circ}\text{C}$ при атмосферном давлении $p = 10^5 \text{ Па}$.

Процесс кипения тесно связан с наличием растворенного газа, а также примесей в жидкости. Если из жидкости удалить растворенный в ней газ, например, предварительным продолжительным кипячением, то можно нагревать эту жидкость до температуры, превышающей температуру ее кипения. Такую жидкость называют *перегретой*.

Обратимся снова к фазовой диаграмме $p - T$ на рис. 11.1. По мере повышения температуры T давление (упругость) насыщенного пара $p_{\text{н}}$ быстро возрастает, что приводит к увеличению плотности насыщенного пара, которая приближается к плотности жидкости. При некоторой температуре эти плотности выравниваются и пар становится неотличимым от жидкости, т.е. кривая равновесия жидкости и газа на фазовой диаграмме $p - T$ заканчивается в некоторой точке (точка K на рис. 11.1). Эта точка называется *критической*. Ее координаты определяют критическую температуру T_k и критическое давление p_k вещества. Так, для воды $T_k = 647 \text{ К}$ (или 374°C) и $p_k = 218 \text{ атм}$. Если газ находится при температуре $T < T_k$, то, увеличивая давление, его можно перевести в жидкое состояние. Если же температура газа $T > T_k$, то ни при каком давлении его нельзя превратить в жидкость. Часто проводят различие между терминами «газ» и «пар»: вещество, находящееся в газообразном состоянии при температуре $T < T_k$, называется паром; если же $T > T_k$, то оно называется газом.

Влажность

Когда мы говорим о погоде, что она сухая или влажная, то мы имеем в виду содержание паров воды в воздухе. Величина, характеризующая содержание водяных паров в атмосфере Земли, называется *влажностью*.

На практике различают абсолютную и относительную влажность.

Абсолютной влажностью воздуха называют плотность водяного пара, находящегося в воздухе:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (11.9)$$

где V , m – объем сосуда, в котором находится воздух, и масса водяных паров в этом объеме соответственно.

Относительная влажность воздуха определяется как отношение парциального давления p паров воды, содержащихся в воздухе, к давлению p_h насыщенного пара при данной температуре. Обычно она выражается в процентах:

$$\phi = \frac{P}{P_h} \cdot 100\%. \quad (11.10)$$

Относительную влажность можно определить и через плотность водяных паров, так как при постоянной температуре плотность водяного пара пропорциональна давлению (см. формулу (11.8)):

$$\phi = \frac{\rho}{\rho_h} \cdot 100\%, \quad (11.11)$$

где ρ – плотность водяных паров, т.е. абсолютная влажность.

Поскольку $\rho = m/V$ и $\rho_h = m_h/V$, то для вычисления относительной влажности можно использовать также формулу

$$\phi = \frac{m}{m_h} \cdot 100\%. \quad (11.12)$$

Из формул (11.10) – (11.12) видно, что относительная влажность определяется не только абсолютной влажностью, но и температурой воздуха (так как давление и плотность насыщенного пара зависят от температуры). Следует отметить, что P_h и ρ_h являются табличными величинами.

При относительной влажности 100% парциальное давление P воды в воздухе равно упругости P_h насыщенного пара при данной температуре. Иногда в воздухе содержится такое количество воды, что парциальное давление пара превышает упругость насыщенного пара при данной температуре. Такой пар называется *пересыщенным*. Такая ситуация может возникнуть при внезапном понижении температуры. Для превращения пара в жидкость нужны центры конденсации, которыми в обычном воздухе служат пылинки. В абсолютно чистом воздухе пар может быть пересыщенным сколь угодно долго, но если появляются центры конденсации, то избыток воды сконденсируется и выпадет в виде росы, а давление пара станет равным давлению насыщенного пара при данной температуре, т.е. при понижении температуры относительная влажность воздуха повышается, и пар, находящийся в воздухе, из ненасыщенного может превратиться в насыщенный. Температура, при которой водяной пар, находящийся в воздухе, становится насыщенным, называется *точкой росы* для воздуха заданной влажности. При понижении температуры ниже точки росы часть пара конденсируется.

Рекомендации по решению задач

Решение основной части задач этого параграфа основано на применении закона сохранения энергии в форме уравнения теплового баланса (11.6), которое более удобно использовать в виде

$$\Sigma Q_{\text{пол}} = \Sigma Q_{\text{отд}}$$

где $\Sigma Q_{\text{пол}}$, $\Sigma Q_{\text{отд}}$ – суммарные количества теплоты, полученной и отданной телами системы в процессе теплообмена.

К сожалению, при решении подобных задач на составление уравнения теплового баланса часто необходимо проводить промежуточные вычисления, так как конечное состояние системы определяется конкретными начальными значениями температур тел и их физическими свойствами. Если по условию задачи непосредственно не ясно, в каких фазах будут находиться тела, составляющие систему, после завершения теплообмена, то в таких задачах особое внимание следует обратить на возможность наличия агрегатных превращений. Так как любое вещество после теплообмена при установившейся температуре одновременно может находиться в двух фазах, то для решения задачи нужно иметь ясное представление о том, будет ли конкретное вещество находиться в одном или сразу в двух агрегатных состояниях. Например, если вещество находится в газообразной (жидкой) фазе и участвует в теплообмене с более холодными телами, находящимися при температуре ниже температуры конденсации (отвердевания) данного вещества, то при установившейся температуре в системе оно может или оставаться в первоначальной фазе, но при более низкой температуре, или частично перейти в новую фазу (т.е. сразу находиться в двух фазах), или полностью перейти в новую фазу. В таких случаях необходимо сделать числовой расчет и определить, сколько тепла Q_1 нужно для нагревания более холодных тел до температуры соответствующего фазового перехода (плавления или кипения данного вещества), и сколько тепла Q_2 может выделить данное более горячее тело при остывании до температуры перехода и при самом переходе (отвердевании или конденсации). Если окажется, что $Q_1 > Q_2$, то после теплопередачи получится одна фаза вещества, а если $Q_1 < Q_2$, то при установившейся температуре будут находиться две фазы при температуре фазового перехода.

Порядок решения таких задач следующий:

- внимательно прочитав условие задачи, нужно установить, у каких тел, участвующих в теплообмене, энергия уменьшается, а у каких увеличивается;
- если при теплообмене возможны фазовые переходы, то следует провести числовые расчеты и выяснить, в каких фазах будут находиться тела системы при установившейся температуре;
- определить суммарное количество теплоты, полученное более холодными телами системы при их нагревании и фазовых переходах (плавлении и парообразовании);
- определить суммарное количество теплоты, отданное более горячим телами системы при их охлаждении и фазовых переходах (конденсации и кристаллизации). При записи выражения для количества теплоты, отданного телом, в форме $c m (t_2 - t_1)$, всюду нужно вычитать из большей температуры меньшую;
- составить уравнение теплового баланса и решить его относительно искомой величины.

При решении некоторых задач на фазовые переходы и уравнение теплового баланса необходимо дополнительно привлекать уравнения и законы механики.

Решение задач на влажность принципиально не отличается от задач на идеальные газы. Основные затруднения здесь обычно связаны с неумением пользоваться уравнениями, выражающими газовые законы, и попытками с их помощью описать процессы, происходящие с насыщеннымиарами. Следует помнить, что законы идеального газа для изопроцессов можно применять лишь карам, далеким от насыщения. Для насыщенного пара необходимое использование этих законов может привести к грубым ошибкам. Поскольку уравнение Менделеева – Клапейрона в случае насыщенного пара справедливо для конкретной температуры и конкретного объема пара и не выражает зависимость давления от температуры при постоянном объеме и зависимость давления от объема при постоянной температуре (так как при изменении объема или температуры меняется также масса насыщенного

пара), то данное уравнение можно применять в каждом конкретном состоянии, т.е. по известной плотности насыщенного пара можно определить его давление (упругость): $p_n = \rho_n R T / \mu$ (где μ – молярная масса пара) и, наоборот, зная давление насыщенного пара, можно найти его плотность. Следует также помнить, что если задана температура насыщенного пара, то его давление и плотность при этой температуре можно найти в таблицах, если же известны температура и давление (плотность) насыщенного пара, то его плотность (давление) можно определить из уравнения Менделеева – Клапейрона. Если известна температура ненасыщенного пара T и его точка росы T_p , то с помощью таблиц можно определить абсолютную и относительную влажность при температуре T , так как при температуре T_p пар станет насыщенным.

Порядок решения задач на влажность может быть таким:

а) установить, какой газ рассматривается в задаче: чистый пар жидкости или его смесь с сухим воздухом;

б) выяснить, в скольких разных состояниях будет последовательно находиться пар по условию задачи. Для каждого состояния пара записать уравнение Менделеева – Клапейрона, формулу абсолютной или относительной влажности в любой из форм (через давления, или через плотности, или через массы пара). Если в объеме находится не только пар, но и некоторый газ (например, воздух), то для смеси газа и пара (а также для смеси паров, если рассматривается такая смесь) записать закон Дальтона;

в) если рассматривается насыщенный пар, используя таблицы, определить упругость и плотность пара при заданной температуре. Записать дополнительные условия, связывающие величины, входящие в составленные уравнения, и решить полученную систему.

Задачи

Уравнение теплового баланса. Изменение агрегатного состояния вещества

11.1. Латунный калориметр массой $m_1 = 0,1$ кг содержит $m_2 = 0,2$ кг воды при температуре $t_1 = 7^\circ\text{C}$. В калориметр с водой опускают брускок массой $m_3 = 0,1$ кг при температуре $t_3 = 127^\circ\text{C}$, после чего в калориметре устанавливается температура $\theta = 27^\circ\text{C}$. Определить удельную теплоемкость c_3 материала, из которого изготовлен предмет. Удельная теплоемкость латуни $c_1 = 380$ Дж/(кг·К), воды – $c_2 = 4200$ Дж/(кг·К).

• **Решение.** Примем систему «калориметр – вода – брускок» как теплоизолированную и будем считать, что с окружающей средой ее теплообмен ничтожно мал и им можно пренебречь. В такой системе полная внутренняя энергия остается неизменной.

Основным уравнением, описывающим процесс теплового взаимодействия между телами системы, является уравнение теплового баланса. Поскольку температура калориметра и воды t_1 меньше температуры бруска t_3 , то при взаимодействии тел брускок остывает, отдав количество тепла

$$Q_1 = c_3 m_3 (t_3 - \theta),$$

а вода и калориметр получат такое же тепло

$$Q_2 = c_1 m_1 (\theta - t_1) + c_2 m_2 (\theta - t_1),$$

в результате чего в системе установится температура θ .

Записав уравнение теплового баланса $Q_1 = Q_2$ в виде

$$c_3 m_3 (t_3 - \theta) = (c_1 m_1 + c_2 m_2) (\theta - t_1),$$

найдем удельную теплоемкость материала бруска:

$$c_3 = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2) (\theta - t_1)}{m_3 (t_3 - \theta)} \approx 1756 \text{ Дж/(кг·К).}$$

• **Ответ:** $c_3 = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2) (\theta - t_1)}{m_3 (t_3 - \theta)} \approx 1756 \text{ Дж/(кг·К).}$

11.2. Для измерения температуры воды в нее погрузили термометр, который показал температуру $t_1 = 32,4^\circ\text{C}$. Какова действительная температура воды, если теплоемкость термометра $C = 1,9 \text{ Дж/К}$ и перед погружением в воду он показывал температуру $t_2 = 17,8^\circ\text{C}$? Масса воды $m = 66 \text{ г}$, удельная теплоемкость $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$.

11.3. В алюминиевом калориметре массой $M = 500 \text{ г}$ находится $m_1 = 250 \text{ г}$ воды при температуре $t_1 = 19^\circ\text{C}$. Если в калориметр опустить металлический цилиндр массой $m_2 = 180 \text{ г}$, состоящий из двух частей – алюминиевой и медной, то температура воды поднимется до $\theta = 27^\circ\text{C}$. Определить массу алюминия m_A и меди m_M в цилиндре, если его начальная температура $t_2 = 127^\circ\text{C}$. Удельные теплоемкости алюминия, меди и воды равны $c_1 = 900 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, $c_2 = 400 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ и $c_3 = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ соответственно.

11.4. В калориметр, заполненный $V = 2 \text{ л}$ воды при температуре $t_1 = 25^\circ\text{C}$, опустили лед, находящийся при $t_2 = -10^\circ\text{C}$, и алюминиевый бруск массой $m_3 = 100 \text{ г}$, нагретый до $t_3 = 200^\circ\text{C}$. Какую массу льда опустили в калориметр, если брусок остыл до температуры $\theta = 20^\circ\text{C}$? Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Удельные теплоемкости воды, льда и алюминия равны $c_1 = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, $c_2 = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ и $c_3 = 900 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ соответственно. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

• **Решение.** Будем считать систему «вода – лед – брусок» теплоизолированной, полагая, что внутренняя энергия системы остается неизменной.

Поскольку начальная температура системы равна $\theta = 20^\circ\text{C}$, то, очевидно, в калориметре при установившейся температуре будут находиться вода и брусок (т.е. весь лед растает).

При тепловом взаимодействии «горячие» тела – вода и брусок – остынут до температуры θ , отдав более холодному телу – льду – количества теплоты

$$Q_B = c_1 m_1 (t_1 - \theta) = c_1 \rho V (t_1 - \theta), \quad Q_{Bp} = c_3 m_3 (t_3 - \theta)$$

соответственно. В результате внутренняя энергия более горячих тел уменьшится на величину

$$Q_1 = Q_B + Q_{Bp} = c_1 \rho V (t_1 - \theta) + c_3 m_3 (t_3 - \theta).$$

Эта энергия перейдет ко льду: часть на нагревание льда от температуры t_2 до температуры плавления $t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$:

$$Q_L = c_2 m_2 (t_{\text{пл}} - t_2);$$

часть на плавление льда:

$$Q_{\text{пл}} = \lambda m_2$$

и часть на нагревание образовавшейся воды от $t_{\text{пл}}$ до конечной температуры системы θ :

$$Q_H = c_1 m_2 (\theta - t_{\text{пл}}).$$

Следовательно, в результате теплообмена лед получит количество тепла

$$Q_2 = Q_L + Q_{\text{пл}} + Q_H = m_2 [c_2 (t_{\text{пл}} - t_2) + \lambda + c_1 (\theta - t_{\text{пл}})].$$

Записав уравнение теплового баланса $Q_1 = Q_2$ в виде

$$\rho V c_1 (t_1 - \theta) + m_3 c_3 (t_3 - \theta) = m_2 [c_2 (t_{\text{пл}} - t_2) + \lambda + c_1 (\theta - t_{\text{пл}})],$$

найдем массу льда:

$$m_2 = \frac{\rho V c_1 (t_1 - \theta) + m_3 c_3 (t_3 - \theta)}{c_2 (t_{\text{пл}} - t_2) + \lambda + c_1 (\theta - t_{\text{пл}})} \approx 134 \text{ г.}$$

• **Ответ:** $m_2 = \frac{\rho V c_1 (t_1 - \theta) + m_3 c_3 (t_3 - \theta)}{c_2 (t_{\text{пл}} - t_2) + \lambda + c_1 (\theta - t_{\text{пл}})} \approx 134 \text{ г.}$

11.5. Какая масса льда нужна, чтобы охладить воду в ванной от температуры $t_1 = 17^\circ\text{C}$ до $t_2 = 7^\circ\text{C}$? Объем воды $V = 100 \text{ л}$, удельная теплоемкость $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, плотность $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$. Температура льда $t_3 = 0^\circ\text{C}$, удельная теплота плавления $\lambda = 0,33 \text{ МДж}/\text{кг}$.

11.6. В медный теплоизолированный сосуд, нагретый до температуры $t_1 = 350^\circ\text{C}$, положили $m_2 = 600 \text{ г}$ льда при температуре $t_2 = -10^\circ\text{C}$. В результате в сосуде оказалось $m_3 = 550 \text{ г}$ льда, смешанного с водой. Найти массу сосуда. Удельная теплоемкость меди $c_1 = 420 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, льда — $c_2 = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж}/\text{кг}$.

11.7. В теплоизолированный сосуд, содержащий $V_1 = 0,5 \text{ л}$ воды при температуре $t_1 = 6^\circ\text{C}$, поместили $m_1 = 900 \text{ г}$ льда при температуре $t_{\text{л}} = -25^\circ\text{C}$. После достижения теплового равновесия половину воды из этого сосуда перелили в другой такой же сосуд, содержащий $V_2 = 2 \text{ л}$ воды при температуре $t_2 = 18^\circ\text{C}$, добавив в него $m_2 = 0,45 \text{ кг}$ льда при температуре $t_{\text{л}}^* = 0^\circ\text{C}$. Найти температуру, которая установится во втором сосуде. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, льда — $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж}/\text{кг}$. Теплоемкости сосудов не учитывать.

• **Решение.** Чтобы определить установившуюся температуру во втором сосуде, необходимо знать, какие вещества и при каких температурах будут в этот сосуд помещены. Для этого найдем массу воды Δm , которую перелили из первого сосуда во второй, и ее температуру t .

Так как в первом сосуде первоначально находилась вода массой $m_{\text{в}1} = \rho V_1$ при температуре $t_1 = 6^\circ\text{C}$ и лед массой m_1 при температуре $t_{\text{л}} = -25^\circ\text{C}$, то непосредственно не видно, что будет в сосуде (вода, лед или обе фазы одновременно) при установившейся температуре t . Для понимания происходящих в сосуде процессов проведем предварительные расчеты.

Определим, какое количество тепла необходимо льду для нагревания до температуры плавления $t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$:

$$Q_{\text{л}}^{\text{нагр}} = c_{\text{л}} m_1 (t_{\text{пл}} - t_{\text{л}}) = 47,25 \text{ кДж.}$$

Вода при этом должна остывть до такой же температуры, отдав тепло

$$Q_{\text{в}}^{\text{ост}} = c_{\text{в}} m_{\text{в}1} (t_1 - t_{\text{пл}}) = c_{\text{в}} \rho V_1 (t_1 - t_{\text{пл}}) = 12,6 \text{ кДж.}$$

Поскольку $Q_{\text{л}}^{\text{нагр}} > Q_{\text{в}}^{\text{ост}}$, то это означает, что лед, получив тепло $Q_{\text{в}}^{\text{ост}}$ за счет остывания воды, не нагреется до $t_{\text{пл}}$.

Найдем количество тепла $Q_{\text{в}}^{\text{крист}}$, которое может быть передано льду при замерзании воды:

$$Q_{\text{в}}^{\text{крист}} = m_{\text{в}1} \lambda = \rho V_1 \lambda = 165 \text{ кДж.}$$

Сравнивая $Q_{\text{л}}^{\text{нагр}}$ с $(Q_{\text{в}}^{\text{ост}} + Q_{\text{в}}^{\text{крист}})$, видим, что $Q_{\text{л}}^{\text{нагр}} < (Q_{\text{в}}^{\text{ост}} + Q_{\text{в}}^{\text{крист}})$. Следовательно, для нагревания льда до температуры $t_{\text{пл}}$ в первом сосуде должна остывь и часть ее превратится в лед при $t_{\text{пл}}$.

Записав уравнение теплового баланса в виде

$$Q_{\text{л}}^{\text{нагр}} = Q_{\text{в}}^{\text{ост}} + m_{\text{в}1}' \lambda,$$

найдем массу $m_{\text{в}1}'$ замерзшей воды:

$$m_{\text{в}1}' = \frac{Q_{\text{л}}^{\text{нагр}} - Q_{\text{в}}^{\text{ост}}}{\lambda} \approx 0,1 \text{ кг.}$$

Следовательно, во второй сосуд перелили

$$\Delta m = \frac{1}{2} (m_{\text{в}1} - m_{\text{в}1}') = \frac{1}{2} (\rho V_1 - m_{\text{в}1}') \approx 0,2 \text{ кг}$$

воды при температуре $t = 0^\circ\text{C}$.

Рассмотрим теперь содержимое второго сосуда: в нем находится вода массой $m_{\text{в}2} = \rho V_2$ при температуре $t_2 = 18^\circ\text{C}$, вода массой Δm при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ и лед массой m_2 при температуре $t_{\text{л}}^* = 0^\circ\text{C}$.

Так как лед находится при температуре плавления $t_{\text{л}}^* = t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$, то, чтобы его расплавить, необходимо сообщить ему количество тепла

$$Q_{\text{л}}^{\text{плавл}} = m_2 \lambda = 148,5 \text{ кДж.}$$

Это тепло может быть получено за счет остывания воды массой $m_{\text{в}2}$ до температуры $t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$:

$$Q_{\text{в}}^{\text{ост}} = c_{\text{в}} m_{\text{в}2} (t_2 - t_{\text{пл}}) = c_{\text{в}} \rho V_2 (t_2 - t_{\text{пл}}) = 151,2 \text{ кДж.}$$

Так как $Q_{\text{л}}^{\text{плавл}} < Q_{\text{в}}^{\text{ост}}$, то весь лед во втором сосуде растает, а образовавшаяся вода нагреется до температуры θ , которую найдем, записав уравнение теплового баланса в виде

$$Q_{\text{л}}^{\text{плавл}} + c_{\text{в}} m_2 (\theta - t_{\text{пл}}) + c_{\text{в}} \Delta m (\theta - t) = c_{\text{в}} \rho V_2 (t_2 - \theta).$$

Отсюда получим

$$\theta = \frac{c_{\text{в}} \rho V_2 t_2 - Q_{\text{л}}^{\text{плавл}}}{c_{\text{в}} (m_2 + \Delta m + \rho V_2)} \approx 0,11^\circ\text{C}.$$

• Ответ: $\theta \approx 0,11^\circ\text{C}$.

11.8. Имеются два теплоизолированных сосуда. В первом из них находится $V_1 = 5 \text{ л}$ воды при температуре $t_1 = 60^\circ\text{C}$, во втором $V_2 = 1 \text{ л}$ воды при температуре $t_2 = 20^\circ\text{C}$. Вначале часть воды перелили из первого сосуда во второй. Затем, после установления во втором сосуде теплового равновесия, из него в первый сосуд отлили столько воды, чтобы ее объемы в сосудах стали равны первоначальным. После этого температура в первом сосуде стала равна $t_1^* = 59^\circ\text{C}$. Сколько воды переливали из первого сосуда во второй?

11.9. Два одинаковых цилиндрических калориметра высотой $h = 75 \text{ см}$ заполнены на треть своих объемов. Первый – льдом, второй – водой при температуре $t = 10^\circ\text{C}$. Воду из второго калориметра перелили в первый. После того как температура в первом калориметре установилась, уровень заполнения его увеличился на $\Delta h = 0,5 \text{ см}$. Найти начальную температуру льда в первом калориметре. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 10^3 \text{ кг/м}^3$, льда – $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$. Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, льда – $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$.

11.10. В теплоизолированном сосуде находится вода при температуре $t = 0^\circ\text{C}$. Из сосуда откачивают воздух, в результате чего вода замерзает за счет охлаждения ее при испарении. Какая часть воды при этом испарились? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$, удельная теплота парообразования воды при $t = 0^\circ\text{C}$ равна $r = 2,54 \text{ МДж/кг}$.

• Решение. При испарении воды вылетают наиболее быстрые молекулы, вследствие чего суммарная энергия оставшихся молекул уменьшается и температура воды понижается. Если теплообмен с окружающей средой отсутствует, то, откачивая пары воды, энергию молекул, оставшихся в сосуде, можно уменьшить настолько, что они образуют твердую фазу воды – лед.

Для образования пара массой $m_{\text{п}}$ необходима энергия

$$Q_1 = r m_{\text{п}},$$

которая будет получена за счет образования льда массой $m_{\text{л}}$:

$$Q_2 = m_{\text{л}} \lambda = (m - m_{\text{п}}) \lambda,$$

где m – первоначальная масса воды в сосуде.

На основании уравнения теплового баланса

$$Q_1 = Q_2, \quad \text{или} \quad r m_{\text{п}} = (m - m_{\text{п}}) \lambda$$

получим

$$\frac{m_{\text{п}}}{m} = \frac{\lambda}{r + \lambda} \approx 0,115.$$

• Ответ: $\frac{m_{\text{п}}}{m} = \frac{\lambda}{r + \lambda} \approx 0,115$.

11.11. Какое минимальное количество теплоты необходимо сообщить $m = 2$ кг льда, взятого при температуре $t_1 = -10^\circ\text{C}$, чтобы превратить его в пар при температуре $t_2 = 100^\circ\text{C}$? Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, льда $- c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$, удельная теплота парообразования воды $r = 2,26 \text{ МДж/кг}$.

11.12. Из колбы, в которой находилось $m = 800 \text{ г}$ воды при $t = 0^\circ\text{C}$, откачивают воздух и водяные пары, благодаря чему вода в колбе замерзает. Определить массу образовавшегося льда. Удельная теплота парообразования воды при $t = 0^\circ\text{C}$ равна $r = 2,54 \text{ МДж/кг}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$.

11.13. В калориметр поместили $m_{\text{л}} = 500 \text{ г}$ льда при температуре $t_{\text{л}} = -15^\circ\text{C}$, $m_{\text{в}} = 250 \text{ г}$ воды при температуре $t_{\text{в}} = 0^\circ\text{C}$ и $m_{\text{п}} = 250 \text{ г}$ пара при температуре $t_{\text{п}} = 100^\circ\text{C}$. Какая масса воды окажется в калориметре после установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, льда $- c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$, удельная теплота парообразования воды $r = 2,26 \text{ МДж/кг}$. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

• Решение. Исходя из условия задачи непосредственно не видно, будет ли при установившейся температуре в сосуде находиться вода в одной или двух фазах и в каких именно. Для ясности понимания процессов, происходящих в калориметре, и составления уравнения теплового баланса (считая, что система «лед – вода – пар» теплоизолирована) проведем предварительный числовой анализ.

1. Количество теплоты, которое необходимо льду для нагревания от температуры $t_{\text{л}}$ до температуры плавления $t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$ и его плавления,

$$Q_{\text{л}} = c_{\text{л}} m_{\text{л}} (t_{\text{пл}} - t_{\text{л}}) + \lambda m_{\text{л}} \approx 1,8 \cdot 10^5 \text{ Дж.} \quad (1)$$

2. Количество теплоты, которое может отдать пар, если он весь сконденсируется,

$$Q_{\text{п}} = r m_{\text{п}} \approx 5,615 \cdot 10^5 \text{ Дж.} \quad (2)$$

Поскольку $Q_{\text{п}} > Q_{\text{л}}$, то это означает, что весь лед расплавится и при установившейся температуре в системе может находиться только вода и пар или только вода.

3. Поскольку конечная температура системы не задана, определим, какое наибольшее количество теплоты может поглотить вода (это будет в том случае, если вода и растаявший лед нагреются до температуры $t_{\text{п}} = 100^\circ\text{C}$):

$$Q_{\text{в}} = c_{\text{в}} (m_{\text{в}} + m_{\text{п}}) (t_{\text{п}} - t_{\text{л}}) \approx 3,15 \cdot 10^5 \text{ Дж.} \quad (3)$$

Из выражений (1) и (3) определим количество теплоты, необходимое для плавления льда и нагревания всей воды в системе до температуры $t_{\text{п}}$:

$$Q_{\text{л}} + Q_{\text{в}} \approx 4,9 \cdot 10^5 \text{ Дж.} \quad (4)$$

Сравнивая $(Q_{\text{л}} + Q_{\text{в}})$ с $Q_{\text{п}}$, можно сделать вывод о направлении процесса: поскольку $(Q_{\text{л}} + Q_{\text{в}}) < Q_{\text{п}}$, то конечная температура смеси будет равна $t_{\text{п}} = 100^\circ\text{C}$ и сконденсируется только часть пара массой Δm , которую найдем из уравнения теплового баланса:

$$r \Delta m = Q_{\text{л}} + Q_{\text{в}}$$

Отсюда находим

$$\Delta m = \frac{Q_L + Q_B}{r} \approx 0,22 \text{ кг.}$$

Следовательно, в калориметре будет масса воды

$$m = m_B + m_L + \Delta m \approx 0,97 \text{ кг.}$$

- Ответ: $m \approx 0,97 \text{ кг.}$

11.14. В теплоизолированный сосуд поместили $m_1 = 2 \text{ кг}$ воды при температуре $t_1 = 5^\circ\text{C}$ и $m_2 = 5 \text{ кг}$ льда при температуре $t_2 = -40^\circ\text{C}$. Какая температура установится в сосуде? Плотность воды $\rho_B = 10^3 \text{ кг/м}^3$, льда — $\rho_L = 900 \text{ кг/м}^3$. Удельная теплоемкость воды $c_B = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, льда — $c_L = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$. Теплоемкостью сосуда пренебречь.

11.15. В калориметр, содержащий $m_1 = 50 \text{ г}$ водяных паров при температуре $t_1 = 100^\circ\text{C}$, поместили кусок льда массой $m_2 = 100 \text{ г}$ при температуре $t_2 = -5^\circ\text{C}$. Какая температура установится в калориметре? Удельная теплоемкость воды $c_B = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, льда — $c_L = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$, удельная теплота парообразования воды $r = 2,26 \text{ МДж/кг}$. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

11.16. Какое количество природного газа надо сжечь, чтобы $m = 4 \text{ кг}$ льда, взятого при температуре $t_L = -20^\circ\text{C}$, превратить в пар с температурой $t_{\text{п}} = 100^\circ\text{C}$? КПД нагревателя $\eta = 60\%$. Удельная теплоемкость воды $c_B = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, льда — $c_L = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$, удельная теплота парообразования воды $r = 2,26 \text{ МДж/кг}$, удельная теплота сгорания газа $q = 34 \text{ МДж/кг}$.

- Решение. При сжигании M [кг] природного газа в виде тепла будет выделена энергия

$$Q = q M,$$

из которой часть

$$Q' = c_L m (t_{\text{пл}} - t_L) + \lambda m + c_B m (t_{\text{п}} - t_{\text{пл}}) + r m$$

уйдет на нагревание льда до температуры плавления $t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$, его плавление, нагревание образовавшейся воды до температуры парообразования $t_{\text{п}} = 100^\circ\text{C}$ и испарение воды, а оставшуюся часть — $(Q - Q')$, — составят потери.

КПД любого нагревательного прибора равен отношению суммарного количества теплоты, израсходованной на поставленные цели, к количеству затраченной энергии. Следовательно,

$$\eta = \frac{Q'}{Q}, \quad \text{или} \quad \eta = \frac{m [c_L (t_{\text{пл}} - t_L) + \lambda + c_B (t_{\text{п}} - t_{\text{пл}}) + r]}{q M}.$$

Отсюда находим

$$M = \frac{m [c_L (t_{\text{пл}} - t_L) + \lambda + c_B (t_{\text{п}} - t_{\text{пл}}) + r]}{\eta q} \approx 0,6 \text{ кг.}$$

- Ответ: $M = \frac{m [c_L (t_{\text{пл}} - t_L) + \lambda + c_B (t_{\text{п}} - t_{\text{пл}}) + r]}{\eta q} \approx 0,6 \text{ кг.}$

11.17. Для нагревания на спиртовке $M = 300 \text{ г}$ воды в железном сосуде теплоемкостью $C = 42 \text{ Дж/К}$ от $t_1 = 18^\circ\text{C}$ до $t_2 = 68^\circ\text{C}$ было израсходовано $m = 7 \text{ г}$ спирта. Найти КПД спиртовки. Удельная теплоемкость воды $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота сгорания спирта $q = 29,3 \text{ МДж/кг}$.

11.18. На сколько километров пути хватит одной заправки автомобиля (объем бака $V = 40$ л) при средней скорости движения $v = 60$ км/ч, если КПД двигателя равен $\eta = 50\%$, а развиваемая автомобилем мощность $N = 40$ кВт? Плотность бензина $\rho = 700$ кг/м³, удельная теплота сгорания $q = 46,1$ МДж/кг.

11.19. В электрический чайник мощностью $N = 1$ кВт налили $V = 2$ л воды при температуре $t = 18^\circ\text{C}$ и включили в сеть. Через какое время вся вода испарится, если КПД чайника $\eta = 50\%$? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³, удельная теплоемкость $c = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r = 2,26$ МДж/кг.

- **Решение.** КПД чайника можно представить как отношение суммарного количества теплоты, которое идет на нагревание воды до температуры кипения $t_k = 100^\circ\text{C}$

$$Q_1 = c m (t_k - t)$$

и парообразование

$$Q_2 = r m,$$

к количеству энергии, получаемой нагревателем чайника от сети,

$$E = \tau N,$$

где τ – время, за которое вода закипит, т.е.

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{E},$$

или

$$\eta = \frac{c m (t_k - t) + r m}{\tau N}.$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{\rho V [c (t_k - t) + r]}{\eta N} \approx 180 \text{ мин.}$$

- **Ответ:** $\tau = \frac{\rho V [c (t_k - t) + r]}{\eta N} \approx 180 \text{ мин.}$

11.20. Кусок льда массой $m = 0,8$ кг и начальной температурой $t = -20^\circ\text{C}$ растопили на электроплитке мощностью $N = 1$ кВт. Полученную воду довели до кипения и кипятили до тех пор, пока четвертая часть ее испарилась. Время всего процесса $\tau = 40$ мин. Определить КПД плитки. Удельная теплоемкость воды $c_w = 4200$ Дж/(кг·К), льда – $c_l = 2100$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33$ МДж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2,26$ МДж/кг.

11.21. За время $\tau = 2$ часа в холодильнике превращается в лед при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$ масса воды $m = 7,2$ кг, имевшая начальную температуру $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Какая мощность потребляется холодильником от электросети, если он отдает в окружающее пространство в единицу времени количество теплоты $N_0 = 700$ Дж/с? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33$ МДж/кг.

11.22. С какой минимальной скоростью свинцовая пуля должна ударить в подвижный экран, чтобы расплавиться? Считать, что удар абсолютно неупругий, а на нагрев и плавление пули идет $\eta = 60\%$ энергии деформации. Масса пули $m = 10$ г, масса экрана $M = 1$ кг. Удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления свинца

$\lambda = 25$ кДж/кг, температура плавления свинца $T_{\text{пл}} = 600$ К. К моменту удара пуля имела температуру $t_0 = 100^\circ\text{C}$.

• Решение. Так как удар пули об экран абсолютно неупругий, то часть механической энергии системы «пуля – экран» передаст в тепло. Считая систему в направлении ее движения замкнутой, запишем законы сохранения импульса и энергии в виде

$$m v = (M + m) u, \quad \frac{m v^2}{2} = \frac{(M + m) u^2}{2} + Q,$$

где u – скорость системы после соударения; Q – количество теплоты, выделившееся при ударе. Следовательно,

$$u = \frac{m v}{M + m}; \quad Q = \frac{m M v^2}{2(M + m)}.$$

По условию задачи на нагрев и плавление пули идет часть энергии

$$Q_1 = \eta Q = \eta \frac{m M v^2}{2(M + m)}.$$

С другой стороны, на нагрев пули от начальной температуры t_0 до температуры плавления $t_{\text{пл}} = 327^\circ\text{C}$ и на плавление свинца необходимо количество теплоты

$$Q_2 = c m (t_{\text{пл}} - t_0) + \lambda m.$$

Записав уравнение теплового баланса $Q_1 = Q_2$ в виде

$$\eta \frac{m M v^2}{2(M + m)} = m [c (t_{\text{пл}} - t_0) + \lambda],$$

получим

$$v = \sqrt{\frac{2(M + m) [c (t_{\text{пл}} - t_0) + \lambda]}{\eta M}} \approx 420 \text{ м/с.}$$

$$\text{Ответ: } v = \sqrt{\frac{2(M + m) [c (t_{\text{пл}} - t_0) + \lambda]}{\eta M}} \approx 420 \text{ м/с.}$$

11.23. С какой наименьшей высоты должны были бы свободно падать дождевые капли, чтобы при ударе о землю от них не осталось мокрого места? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Начальная температура капель $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения считать постоянным.

11.24. При выстреле вертикально вверх свинцовая пуля ударила о неупругую преграду и расплавилась. На какой высоте произошло это столкновение, если начальная скорость пули $v_0 = 480$ м/с, а на нагревание и плавление пули ушло $\eta = 50\%$ выделившегося количества теплоты? Температура пули в момент соударения $t_0 = 100^\circ\text{C}$, температура плавления свинца $T_{\text{пл}} = 600$ К, удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления $\lambda = 25$ кДж/кг. Сопротивление воздуха не учитывать.

11.25. Два одинаковых кусочка льда летят навстречу друг другу с равными скоростями и при ударе обращаются в пар. Оценить минимально возможные скорости льдинок перед ударом, если их температуры равны $t = -12^\circ\text{C}$. Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·К), льда – $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/К.

Насыщенные и ненасыщенные пары. Влажность

11.26. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под легким поршнем площадью $S = 100 \text{ см}^2$ находится $m_{\text{n}} = 1,8 \text{ г}$ насыщенного водяного пара при температуре $t_{\text{n}} = 100^\circ\text{C}$. В цилиндр впрыскивают $m_{\text{v}} = 1,8 \text{ г}$ воды при температуре $t_{\text{v}} = 0^\circ\text{C}$. Куда и насколько переместится поршень? Удельная теплоемкость воды $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота парообразования $r = 2,26 \text{ МДж/кг}$. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Теплоемкостью цилиндра и поршня пренебречь

• *Решение.* Очевидно, что после впрыскивания воды пар в сосуде будет конденсироваться, отдавая энергию на нагрев воды. Однако, исходя из условия задачи неизвестно, весь пар при этом сконденсируется или только его часть. Для установления этого проведем предварительный числовый анализ.

1. Количество теплоты, которое может отдать пар при конденсации,

$$Q_1 = r m_{\text{n}} \approx 4068 \text{ Дж.}$$

2. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды до температуры кипения $t_{\text{k}} = 100^\circ\text{C}$,

$$Q_2 = c m_{\text{v}} (t_{\text{k}} - t_{\text{v}}) \approx 756 \text{ Дж.}$$

Сравнивая Q_1 и Q_2 , видим, что для нагревания воды до температуры t_{k} нужно меньше тепла, чем может дать пар при полной конденсации. Это означает, что сконденсируется только часть пара массой m_0 , которую найдем из уравнения теплового баланса:

$$r m_0 = c m_{\text{v}} (t_{\text{k}} - t_{\text{v}}).$$

Отсюда находим

$$m_0 = \frac{c m_{\text{v}} (t_{\text{k}} - t_{\text{v}})}{r} \approx 0,334 \text{ г.}$$

Следовательно, объем смеси «вода – пар» под поршнем станет равен

$$V = V_{\text{v}} + V_{\text{n}},$$

где $V_{\text{v}} = (m_{\text{v}} + m_0)/\rho$ – объем, занимаемый водой; V_{n} – объем, занимаемый паром.

Выразив объем пара V_{n} из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$p_0 V_{\text{n}} = \frac{m_{\text{n}} - m_0}{\mu} R T$$

(где $T = 373 \text{ К}$ – температура пара), записанного с учетом, что давление пара под поршнем равно атмосферному давлению (поскольку поршень невесом), получим

$$V = \frac{m_{\text{v}} + m_0}{\rho} + \frac{m_{\text{n}} - m_0}{\mu p_0} R T \approx 0,0023 \text{ м}^3.$$

Так как объем, занимаемый паром до впрыскивания воды, был равен

$$V_0 = \frac{m_{\text{n}}}{\mu p_0} R T \approx 0,0031 \text{ м}^3,$$

то поршень переместится вниз на величину

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{V_0 - V}{S} \approx 6 \text{ см.}$$

• *Ответ:* поршень переместится вниз на $\Delta h \approx 6 \text{ см.}$

11.27. В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре $T = 350 \text{ К}$ находится насыщенный водяной пар. При изотермическом вдвигании поршня была совершена работа $A = 2 \text{ кДж}$. Определить массу сконденсированного пара. Молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

11.28. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем площадью $S = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ находится $m = 300 \text{ г}$ воды при температуре $t = 20^\circ\text{C}$. Воде сообщили количество теплоты $Q = 101,7 \text{ кДж}$. Насколько поднимется поршень? Атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Удельная теплоемкость воды $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота парообразования $r = 2,26 \text{ МДж/кг}$. Молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Воздуха под поршнем нет.

11.29. Пробирка погружена вертикально в широкий сосуд с водой запаянным концом вверх так, что расстояние от поверхности воды до запаянного конца равно $l = 2 \text{ м}$. При температуре $t_1 = 20^\circ\text{C}$ уровень воды в пробирке совпадает с уровнем воды в сосуде. Насколько опустится уровень воды в пробирке, если температуру системы увеличить до $t_2 = 75^\circ\text{C}$? Упругость насыщенных водяных паров при 75°C равна $p_H = 40 \text{ кПа}$, плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Давлением паров при 20°C пренебречь.

• *Решение.* Первоначально в пробирке находился только воздух при давлении p_1 , а после нагревания системы — воздух и насыщенный водяной пар при давлении

$$p_2 = p_H + p'_1,$$

где p'_1 — парциальное давление воздуха.

С другой стороны (рис. 11.2),

$$p_1 = p_0, \quad p_2 = p_0 + \rho g x.$$

Следовательно,

$$p_H + p'_1 = p_0 + \rho g x,$$

или

$$p'_1 = p_0 - p_H + \rho g x. \quad (1)$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона, записанного для воздуха при начальной температуре t_1 и смеси воздуха с водяным паром при температуре t_2 ,

$$p_0 l S = v_B R T_1, \quad p'_1 (l+x) S = v_B R T_2, \quad p_H (l+x) S = v_H R T_2$$

(где v_B , v_H — число молей воздуха и пара в пробирке соответственно), с учетом (1) получим

$$\frac{p_0 l T_2}{(l+x) T_1} = p_0 - p_H + \rho g x,$$

или

$$\rho g T_1 x^2 + T_1 (p_0 - p_H + \rho g l) x - l [p_0 (T_2 - T_1) + p_H T_1] = 0. \quad (2)$$

Отсюда находим

$$x = \frac{-(p_0 - p_H + \rho g l) + \sqrt{(p_0 - p_H + \rho g l)^2 + 4 \rho g l T_1 [p_0 (T_2 - T_1) + p_H T_1]}}{2 \rho g T_1} \approx 1,27 \text{ м.}$$

$$\bullet \text{Ответ: } x = \frac{-(p_0 - p_H + \rho g l) + \sqrt{(p_0 - p_H + \rho g l)^2 + 4 \rho g l T_1 [p_0 (T_2 - T_1) + p_H T_1]}}{2 \rho g T_1} \approx 1,27 \text{ м.}$$

11.30. Пробирка погружена вертикально в широкий сосуд с водой запаянным концом вверх так, что расстояние от поверхности воды до запаянного конца равно $l = 3 \text{ м}$. При температуре $t = 85^\circ\text{C}$ уровень воды в пробирке совпадает с уровнем воды в сосуде. Куда и насколько сместится уровень воды в пробирке, если ее опустить на $h = 1,8 \text{ м}$? Упругость насыщенных водяных паров при 85°C равна $p_H = 60 \text{ кПа}$, плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$.

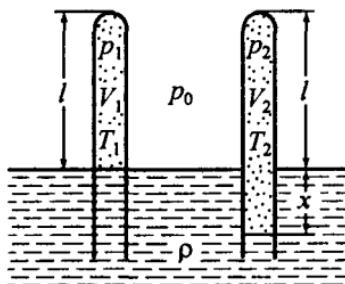


Рис. 11.2

11.31. В сосуде объемом $V = 1 \text{ м}^3$ находится смесь воздуха с парами эфира при температуре $T = 303 \text{ К}$ и давлении $p = 107 \text{ кПа}$. Найти массы воздуха и эфира в сосуде, если конденсация паров эфира начинается при $T_0 = 273 \text{ К}$. Упругость насыщенных паров эфира при температуре 273 К равна $p_{\text{н}} = 24,4 \text{ кПа}$. Молярная масса эфира $\mu_1 = 74 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, молярная масса воздуха – $\mu_2 = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

11.32. В запаянной трубке объемом $V = 0,4 \text{ л}$ находится водяной пар под давлением $p = 8,5 \text{ кПа}$ при температуре $T_1 = 423 \text{ К}$. Какое количество росы выпадет на стенки трубы при охлаждении ее до $T_2 = 295 \text{ К}$? Упругость насыщенных водяных паров при температуре $T_2 = 295 \text{ К}$ равна $p_{\text{н}} = 2,64 \text{ кПа}$, молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

• *Решение.* В задаче рассматриваются два состояния пара в трубке – до и после охлаждения. Независимо от того, каким был пар в начальном состоянии (насыщенным или ненасыщенным), при конечной температуре $T_2 = 295 \text{ К}$ пар будет насыщенным. В этом легко убедиться, записав уравнение Менделеева – Клапейрона для пара при температуре T_2 , полагая пар ненасыщенным:

$$p_2 V = \frac{m_1}{\mu} R T_2, \quad \text{или} \quad p_2 = \frac{m_1}{\mu V} R T_2,$$

где m_1 – масса пара в начале процесса охлаждения.

Используя уравнение состояния пара при температуре T_1

$$p V = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \quad (1)$$

получим

$$p_2 = p \frac{T_2}{T_1} \approx 5,93 \cdot 10^3 \text{ Па.}$$

Как видим, давление пара массой m_1 при конечной температуре T_2 должно превышать давление насыщенного пара $p_{\text{н}} = 2,64 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Но так как $p_{\text{н}}$ – это максимальное давление пара при данной температуре, то это означает, что, начиная с некоторой температуры (точки росы), пар начинает конденсироваться.

Из уравнения состояния (1) для пара в начале процесса охлаждения и уравнения состояния насыщенного пара при конечной температуре

$$p_{\text{н}} V = \frac{m_2}{\mu} R T_2 \quad (2)$$

(где m_2 – масса пара в конце процесса), найдем массу Δm росы, выпавшей на стенках трубы:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{\mu V}{R} \left\{ \frac{p}{T_1} - \frac{p_{\text{н}}}{T_2} \right\} \approx 9,65 \cdot 10^{-6} \text{ кг.}$$

• *Ответ:* $\Delta m = \frac{\mu V}{R} \left\{ \frac{p}{T_1} - \frac{p_{\text{н}}}{T_2} \right\} \approx 9,65 \cdot 10^{-6} \text{ кг.}$

11.33. Чему равна абсолютная и относительная влажность воздуха, заполняющего баллон емкостью $V = 700 \text{ л}$ при температуре $t = 24^\circ\text{C}$, если до полного насыщения пара понадобилось испарить в этот объем воду массой $m = 6,2 \text{ г}$? Упругость насыщенных водяных паров при этой температуре равна $p_{\text{н}} = 3 \text{ кПа}$, молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

• *Решение.* Массу воды, которую необходимо испарить в баллоне для полного насыщения пара, можно представить как разность между массой пара m_1 , который был первоначально в баллоне, и массой пара m_2 , которая будет в баллоне после испарения воды:

$$m = m_2 - m_1.$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона, записанного для пара до и после испарения воды,

$$pV = \frac{m_1}{\mu} RT, \quad p_h V = \frac{m_2}{\mu} RT,$$

находим

$$m_1 = \frac{\mu p V}{R T}; \quad m_2 = \frac{\mu p_h V}{R T}; \quad m = m_2 - m_1 = \frac{\mu V}{R T} (p_h - p).$$

Следовательно, первоначальное давление пара и его масса

$$p = p_h - \frac{m R T}{\mu V}, \quad m_1 = \frac{\mu p V}{R T} = \frac{\mu p_h V}{R T} - m.$$

Используя определение абсолютной ρ и относительной φ влажности, получаем

$$\rho = \frac{m_1}{V} = \frac{\mu p_h}{R T} - \frac{m}{V} \approx 13 \text{ г/м}^3; \quad \varphi = \frac{p}{p_h} \cdot 100\% = \left\{ 1 - \frac{m R T}{\mu p_h V} \right\} \cdot 100\% \approx 60\%.$$

- Ответ: $\rho = \frac{\mu p_h}{R T} - \frac{m}{V} \approx 13 \text{ г/м}^3; \quad \varphi = \left\{ 1 - \frac{m R T}{\mu p_h V} \right\} \cdot 100\% \approx 60\%.$

11.34. В комнате объемом $V = 150 \text{ м}^3$ поддерживается постоянная температура $T_1 = 293 \text{ К}$, а точка росы $T_2 = 283 \text{ К}$. Определить относительную влажность воздуха и массу водяных паров в комнате. Упругость насыщенных водяных паров при 293 К равна $p_{h1} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ Па}$, при $283 \text{ К} - p_{h2} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Па}$, молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

11.35. На некоторой высоте над поверхностью Земли слой воздуха объемом $V = 10^6 \text{ м}^3$ имеет температуру $t_1 = 20^\circ\text{C}$ при относительной влажности $\varphi = 70\%$. Воздух охладился до $t_2 = 10^\circ\text{C}$. Найти массу выпавшего дождя. Плотности насыщенного водяного пара при температурах 20°C и 10°C равны соответственно $\rho_{h1} = 17,3 \text{ г/м}^3$ и $\rho_{h2} = 9,4 \text{ г/м}^3$.

11.36. Когда и во сколько раз больше абсолютная влажность воздуха: в ноябре при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$ и влажности $\varphi_1 = 95\%$ или в июле при $t_2 = 35^\circ\text{C}$ и влажности $\varphi_2 = 40\%$? Упругость насыщенных водяных паров при 0°C равна $p_1 = 600 \text{ Па}$, при $35^\circ\text{C} - p_2 = 5,5 \text{ кПа}$?

11.37. В помещении объемом $V = 60 \text{ м}^3$ температура воздуха повысилась с $t_1 = 17^\circ\text{C}$ до $t_2 = 21^\circ\text{C}$, при этом влажность увеличилась с $\varphi_1 = 40\%$ до $\varphi_2 = 60\%$. Какая масса воды испарились в воздухе? Упругость насыщенных паров воды при 17°C равна $p_{h1} = 1,94 \text{ кПа}$, при $21^\circ\text{C} - p_{h2} = 2,49 \text{ кПа}$. Молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

11.38. В герметический сосуд объемом $V = 0,8 \text{ м}^3$, наполненный влажным воздухом при температуре $t_1 = 25^\circ\text{C}$ с относительной влажностью $\varphi_1 = 40\%$, поместили $m_b = 2 \text{ г}$ воды. Затем температуру системы понизили до $t_2 = 8^\circ\text{C}$. Какая масса воды будет в сосуде по истечении большого промежутка времени? Упругость насыщенных паров воды при 25°C равна $p_{h1} = 3,17 \cdot 10^3 \text{ Па}$, при $8^\circ\text{C} - p_{h2} = 1,07 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

• Решение. Так как первоначально пар был ненасыщенным, то вода, помещенная в сосуд, может испаряться, увеличивая содержание паров в сосуде. При этом парциальное давление паров при заданной температуре будет расти, но не может превысить давление насыщенных паров p_{h1} .

Если бы температура в системе не изменялась, то вода однозначно испарялась бы. Однако при понижении температуры пар, первоначально содержащийся в сосуде, может

стать насыщенным и даже частично сконденсироваться. Определим, каким стало бы давление паров в сосуде при понижении температуры системы от t_1 до t_2 . Для этого запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для первоначальной массы m пара в сосуде при температурах t_1 и t_2 :

$$p_1 V = \frac{m}{\mu} R T_1, \quad p_2 V = \frac{m}{\mu} R T_2. \quad (1)$$

Следовательно, если бы пар не конденсировался, то он создал бы давление в сосуде

$$p_2 = p_1 T_2 / T_1,$$

или с учетом определения относительной влажности

$$\varphi_1 = \frac{p_1}{p_{H1}}, \quad (2)$$

$$p_2 = \varphi_1 p_{H1} T_2 / T_1 \approx 1579 \text{ Па.}$$

Так как $p_2 > p_{H2} = 1,07 \text{ кПа}$, то это означает, что при новой температуре t_2 пар в сосуде станет насыщенным и часть его сконденсируется (см. решение задачи №11.32). Массу Δm сконденсированного пара найдем из уравнения состояния

$$p_{H2} V = \frac{m - \Delta m}{\mu} R T_2$$

с учетом уравнений (1) – (2):

$$\Delta m = m - \frac{p_{H2} V \mu}{R T_2} = \frac{\varphi_1 p_{H1} V \mu}{R T_1} - \frac{p_{H2} V \mu}{R T_2}.$$

Следовательно, в сосуде окажется масса воды

$$M = \Delta m + m_B = \frac{V \mu}{R} \left\{ \frac{\varphi_1 p_{H1}}{T_1} - \frac{p_{H2}}{T_2} \right\} + m_B \approx 2,77 \text{ г.}$$

• Ответ: $M = \frac{V \mu}{R} \left\{ \frac{\varphi_1 p_{H1}}{T_1} - \frac{p_{H2}}{T_2} \right\} + m_B \approx 2,77 \text{ г.}$

11.39. Стакан с водой объемом $V = 0,2 \text{ л}$ накрыли герметичным колпаком, объем которого $V_0 = 2 \text{ м}^3$. Начальная температура воздуха $t_1 = 20^\circ\text{C}$, относительная влажность $\varphi = 80\%$. Затем температуру системы повысили до $t_2 = 50^\circ\text{C}$. Какой объем воды останется в стакане по истечении большого промежутка времени? Упругость насыщенных водяных паров при 20°C равна $p_{H1} = 2,6 \text{ кПа}$, при $50^\circ\text{C} - p_{H2} = 12,3 \text{ кПа}$. Молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, плотность $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

11.40. В герметичный сосуд объемом $V_0 = 0,4 \text{ м}^3$, наполненный воздухом при температуре $t_1 = 30^\circ\text{C}$ с относительной влажностью $\varphi_1 = 20\%$, поместили массу воды объемом $V = 1,5 \text{ см}^3$, а затем температуру системы понизили до $t_2 = 10^\circ\text{C}$. Какой объем воды останется в сосуде по истечении большого промежутка времени? Плотность насыщенных паров воды при 30°C равна $\rho_{H1} = 30,2 \text{ г/м}^3$, при $10^\circ\text{C} - \rho_{H2} = 9,38 \text{ г/м}^3$, плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

11.41. Определить отношение плотностей сухого воздуха и воздуха с относительной влажностью $\varphi = 50\%$. Обе порции взяты при атмосферном давлении $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t = 20^\circ\text{C}$. Упругость насыщенных водяных паров при этой температуре равна $p_H = 23 \text{ гПа}$. Отношение молярных масс воды и сухого воздуха $\mu_W/\mu_A = 0,6$.

• Решение. Для сухого воздуха уравнение состояния

$$p_0 V = \frac{m}{\mu_A} R T$$

позволяет найти его плотность:

$$\rho_{\text{сух}} = \frac{m}{V} = \frac{P_0 \mu_B}{R T}.$$

Влажный воздух представляет собой смесь воздуха без пара и водяного пара.

Плотность влажного воздуха

$$\rho_{\text{вл}} = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{m_1}{V} + \frac{m_2}{V} = \rho_1 + \rho_2,$$

где ρ_1, ρ_2 – плотность воздуха без водяных паров и плотность пара соответственно.

Давление влажного воздуха по закону Далтона равно сумме парциальных давлений воздуха без пара p_1 и водяного пара p_2 :

$$p_0 = p_1 + p_2,$$

где давление водяных паров $p_2 = \varphi p_H$.

Следовательно, давление воздуха без пара

$$p_1 = p_0 - p_2 = p_0 - \varphi p_H.$$

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, записанное для воздуха без пара и насыщенного пара в виде

$$p_1 = \frac{\rho_1}{\mu_B} R T, \quad p_H = \frac{\rho_H}{\mu_H} R T,$$

получим

$$p_1 = \frac{\mu_B P_1}{R T} = \frac{\mu_B P_0}{R T} - \frac{\varphi \mu_B P_H}{R T}, \quad \rho_2 = \varphi \rho_H = \frac{\varphi P_H \mu_H}{R T}.$$

Отсюда находим плотность влажного воздуха

$$\rho_{\text{вл}} = \frac{\mu_B (p_0 - \varphi p_H)}{R T} + \frac{\varphi \mu_H p_H}{R T}$$

и отношение плотностей сухого и влажного воздуха

$$\frac{\rho_{\text{сух}}}{\rho_{\text{вл}}} = \frac{p_0}{p_0 - \varphi p_H (1 - \mu_H/\mu_B)} \approx 1,0046.$$

• Ответ: $\frac{\rho_{\text{сух}}}{\rho_{\text{вл}}} = \frac{p_0}{p_0 - \varphi p_H (1 - \mu_H/\mu_B)} \approx 1,0046$.

11.42. Плотность влажного воздуха при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ и давлении $p = 10^5$ Па равна $\rho_B = 1,19 \text{ кг}/\text{м}^3$. Определить абсолютную и относительную влажность воздуха. Плотность насыщенных водяных паров при 27°C равна $\rho_H = 0,027 \text{ кг}/\text{м}^3$. Молярная масса сухого воздуха $\mu_1 = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$, воды – $\mu_2 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

11.43. При температуре $t = 20^\circ\text{C}$ и давлении $p = 10^5$ Па воздух имеет относительную влажность $\varphi = 100\%$. На сколько процентов он легче сухого воздуха той же температуры и с тем же давлением? Упругость насыщенных паров воды при 20°C равна $p_H = 2,33 \text{ кПа}$. Молярная масса сухого воздуха $\mu_1 = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$, воды – $\mu_2 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Как известно, в природе существует четыре вида взаимодействий: гравитационное, электрическое (или электромагнитное), ядерное (или сильное) и слабое. Каждое из них характеризует взаимодействие разных материальных объектов и проявляется в различных пространственных масштабах.

Гравитационное притяжение заметно между телами астрономических масштабов (по крайней мере одно из тел должно быть очень массивным, например, планета или звезда). Ядерные силы отвечают за взаимодействие протонов и нейтронов, входящих в состав атомного ядра. Слабое – возникает при взаимном превращении определенных сортов частиц и характеризует силы, возникающие при радиоактивном β -распаде. При этом расстояния, на которых обнаруживаются сильные и слабые взаимодействия, чрезвычайно малы (порядка $10^{-16} \div 10^{-12}$ м). Электромагнитные взаимодействия проявляются в тех пространственных масштабах, в которых протекает наша повседневная жизнь. Например, благодаря им мы видим книгу, которую сейчас читаем.

Каждый вид взаимодействия связан с определенной характеристикой частиц. Например, гравитационное взаимодействие зависит от масс частиц (см. §5), электромагнитное – от электрических зарядов.

Электрический заряд – это скалярная физическая величина, которая является одной из основных характеристик частиц. Единицей измерения величины заряда в системе СИ служит кулон [Кл].

Существует два вида электрических зарядов. Принято одни заряды называть *положительными*, другие – *отрицательными*. Заряд всех элементарных частиц (если он не равен нулю) одинаков по абсолютной величине и равен $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Его называют *элементарным зарядом* и обозначают буквой e . К числу элементарных частиц принадлежат, в частности, электрон (отрицательный элементарный заряд $-e$), протон (положительный элементарный заряд $+e$), нейтрон (заряд равен нулю). Из этих частиц состоят атомы и молекулы любого вещества, поэтому элементарные заряды входят в состав всех тел. Обычно частицы, несущие заряды разных знаков, присутствуют в теле в равных количествах и распределены с одинаковой плотностью. При этом алгебраическая сумма зарядов в любом элементарном объеме тела равна нулю, и каждый такой объем (и тело в целом) будет нейтральным. Если каким-либо образом создать в теле избыток зарядов одного знака, тело окажется заряженным. Поскольку заряд q тела образуется совокупностью элементарных зарядов, то он всегда будет кратным e :

$$q = \pm N e.$$

Экспериментально установлено, что величина заряда, измеренная в различных системах отсчета, одинакова. Это означает, что величина заряда не зависит от того, движется этот заряд или покойится.

Электрические заряды могут исчезать и появляться вновь. Однако всегда исчезают или появляются два элементарных заряда противоположных знаков. Например, электрон и позитрон (частица массой, равной массе электрона, и зарядом $+e$) при взаимодействии исчезают (говорят, аннигилируют), превращаясь в два нейтральных так называемых γ -кванта. В ходе процесса, называемого рождением пары, γ -квант вблизи атомного ядра превращается в пару частиц – электрон и позитрон. При этом возникают заряды $-e$ и $+e$. Таким образом, суммарный электрический заряд не изменяется. Опыт показывает, что это справедливо для любых процессов взаимодействия частиц, в которых изменяется их состав: *суммарный заряд электрически изолированной системы (т.е. такой системы, в которой через поверхность, ее ограничивающую, не переносятся электрические заряды) со временем не изменяется, какие бы процессы ни протекали в системе*. Это утверждение называют *законом сохранения заряда*.

§12. Электростатика

Электрические заряды наделяют окружающее их пространство особыми физическими свойствами – создают электрическое поле. Основным его свойством является то, что на находящуюся в нем зарженную частицу действует некоторая сила. Раздел физики – *электростатика* – изучает постоянное во времени электрическое поле, создаваемое неподвижными зарядами.

Закон Кулона

Тот факт, что тело имеет электрический заряд, может быть обнаружен, если к этому телу поднести другое зарженное тело. Опыт показывает, что тела, обладающие зарядами одного знака (одноименно заряженные), отталкиваются друг от друга, а тела, обладающие зарядами разных знаков (разноименно заряженные), – притягиваются друг к другу. Впервые количественное значение силы взаимодействия заряженных тел было получено Кулоном для *точечных зарядов*. При этом под точечным зарядом понимают зарженное тело, размеры которого малы по сравнению с расстояниями до других заряженных тел.

Рассмотрим два одноименных точечных заряда q_1 и q_2 , положение которых в пространстве определяется радиус-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 (рис. 12.1). Пусть \vec{F}_{1-2} – сила, с которой заряд q_2 действует на заряд q_1 , а \vec{F}_{2-1} – сила,

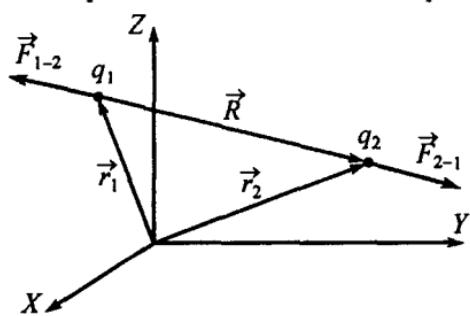


Рис. 12.1

действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 . Тщательные измерения, проведенные Кулоном, Ампером и другими исследователями, показали, что сила взаимодействия точечных зарядов пропорциональна величине этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды. Этот закон называют законом Кулона. Математически в системе СИ он может быть записан в виде

$$\vec{F}_{1-2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{R}; \quad \vec{F}_{2-1} = \frac{q_2 q_1}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{R}; \quad |\vec{F}_{1-2}| = |\vec{F}_{2-1}| = \frac{q_2 q_1}{4\pi \epsilon_0 R^2}, \quad (12.1)$$

где $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – вектор, проведенный от заряда q_1 к заряду q_2 ; R – его модуль, т.е. расстояние между зарядами; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²·Н⁻¹·м⁻² – электрическая постоянная.

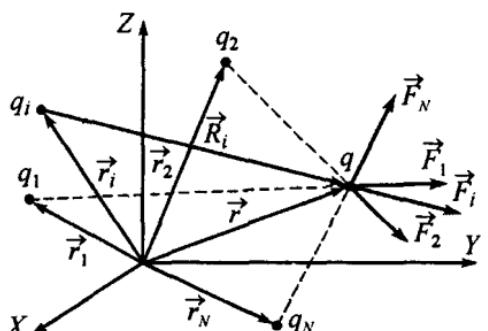


Рис. 12.2

Легко заметить, что соотношения (12.1) справедливы для любых знаков зарядов q_1 и q_2 .

Рассмотрим теперь систему, состоящую из N точечных зарядов q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots, N$), положение каждого из которых в пространстве задано радиус-вектором \vec{r}_i (рис. 12.2). Опыт показывает, что сила, с которой заряд q_i действует на некоторый точечный заряд q , не зависит от присутствия других зарядов:

$$\vec{F}_i = \frac{q_i q}{4\pi \epsilon_0 R_i^3} \vec{R}_i, \quad (12.2)$$

где $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$ – вектор, соединяющий заряд q_i с зарядом q ; R_i – его модуль.

Очевидно, что результирующая сила \vec{F} , с которой система зарядов q_i действует на заряд q , равна векторной сумме сил \vec{F}_i , действующих на этот заряд со стороны каждого из зарядов системы:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (12.3)$$

Это утверждение называют *принципом суперпозиции сил*. Свойство суперпозиции используется в электростатике при рассмотрении взаимодействия заряженных тел, которые нельзя считать точечными.

Электрическое поле

При исследовании взаимодействия электрических зарядов закономерно возникают вопросы, почему появляются силы, действующие на заряды и как они передаются от одного заряда к другому? В процессе развития физики существовало два подхода к ответу на эти вопросы. Первоначально предполагалось, что заряженным телам присущее свойство действовать на другие заряды на расстоянии без участия промежуточных тел

или среды, и при наличии только одного заряда никаких изменений в окружающем пространстве не происходит (теория дальнодействия). Несколько позже появилась вторая точка зрения — силовые взаимодействия между разобщенными телами могут передаваться только при наличии некоторой среды, окружающей эти тела, последовательно от одной части этой среды к другой, и с конечной скоростью; наличие даже одного заряда в окружающем пространстве приводит к определенным его изменениям (теория близкодействия).

В настоящее время физика сохраняет только теорию близкодействия. При этом для понимания происхождения и передачи силового взаимодействия необходимо допустить наличие некоторой среды, создаваемой зарядами в окружающем пространстве. Такой средой является особый вид материи — *электрическое поле*. Электрическое поле является неизменным спутником каждого электрического заряда. Судить о существовании электрического поля в данной точке пространства можно только по наличию силы, с которой поле действует на помещенный в эту точку электрический заряд.

Напряженность электрического поля

Поместим точечный заряд q в начало системы координат и рассмотрим силы, действующие на заряды q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots$), которые поочередно будем помещать в некоторую точку с координатами x, y, z (рис. 12.3).

Из (12.1) следует, что при изменении заряда q_i сила

$$\vec{F}_i = \frac{q_i q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{R} \quad (12.4)$$

также будет меняться.

Поскольку правая часть отношения

$$\frac{\vec{F}_i}{q_i} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{R} \quad (12.5)$$

не зависит от величины заряда q_i , а определяется лишь зарядом q и радиус-вектором \vec{R} , проведенным в данную точку пространства, то можно сделать вывод, что отношение \vec{F}_i/q_i характеризует электрическое поле, которое существует в точке с координатами x, y, z , безотносительно к заряду q_i .

Вектор, равный отношению силы \vec{F} , с которой заряд q действует на точечный малый положительный заряд q_0 (так называемый *пробный заряд*), помещенный в некоторую точку пространства,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (12.6)$$

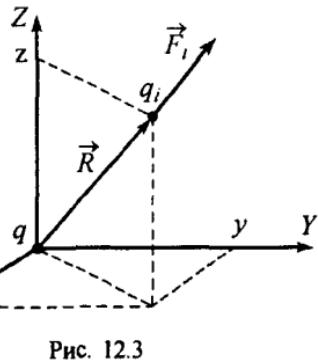


Рис. 12.3

называют *напряженностью электрического поля*, создаваемого зарядом q в данной точке. С другой стороны, если напряженность электрического поля в данной точке известна, то сила, действующая на произвольный заряд q , помещенный в эту точку,

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (12.7)$$

Используя понятие электрического поля, можно перейти к другому способу описания взаимодействия зарядов. Вместо того чтобы говорить о том, что на некоторый заряд q_i действует заряд q с силой \vec{F} , можно сказать, что заряд q создает электрическое поле напряженностью \vec{E} , и на заряд q_i , находящийся в этом поле, действует сила $\vec{F} = q_i \vec{E}$. Такой способ описания взаимодействия очень удобен, так как формула (12.7), в отличие от закона Кулона, справедлива для электрических полей, создаваемых любой системой зарядов.

Из соотношений (12.6) и (12.7) следует, что напряженность электрического поля точечного заряда q на расстоянии R от него

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{R}; \quad E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^2}. \quad (12.8)$$

Рассмотрим систему N неподвижных зарядов q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots, N$) и вычислим результирующую силу, действующую на пробный заряд q_0 , помещенный в некоторую точку пространства. Согласно (12.3), она будет равна векторной сумме сил, действующих на этот заряд со стороны каждого из зарядов системы. Разделив обе части соотношения (12.3) на q_0 , получим

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{q_0}. \quad (12.9)$$

Поскольку отношение \vec{F}_i/q_0 есть напряженность электрического поля \vec{E}_i , созданного зарядом q_i в точке, где расположен заряд q_0 , то напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ системы зарядов в данной точке

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \quad (12.10)$$

т.е. векторы напряженности электрического поля подчиняются, как и векторы сил, *принципу суперпозиции*.

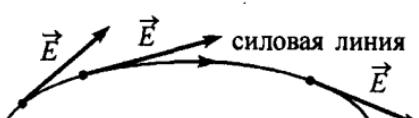


Рис. 12.4

Для описания электрического поля нужно задать векторы напряженности в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически, в виде зависимостей напряженности поля от координат. Для наглядности такую зависимость можно

представить и графически с помощью силовых линий (рис. 12.4). *Силовой линией* называют такую линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряженности поля в этой точке. Поскольку касательная может иметь два взаимно противоположных направления, то силовым линиям приписываются определенное направление, от-

мечая его на чертеже стрелкой в направлении вектора напряженности. При этом силовые линии нигде не пересекаются. В противном случае в точках пересечения вектор напряженности поля имел бы одновременно разные направления.

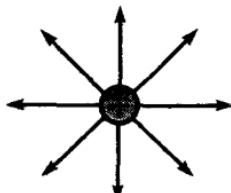


Рис. 12.5

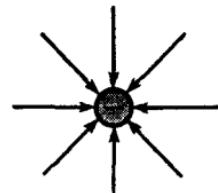


Рис. 12.6

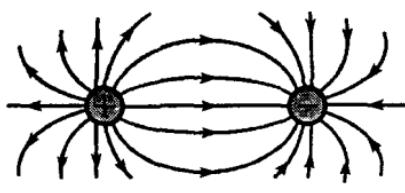


Рис. 12.7

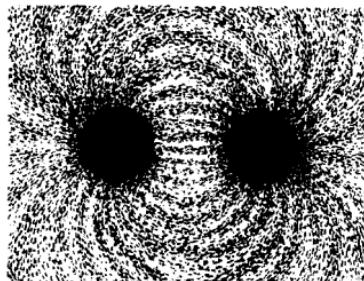


Рис. 12.8

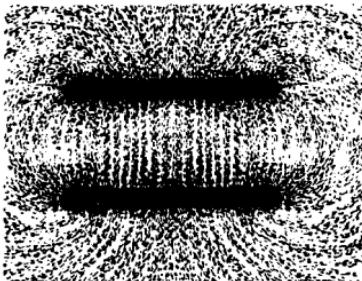


Рис. 12.9

Рассмотрим положительный точечный заряд q . Перемещая в поле заряда q пробный заряд q_0 , можно легко построить векторы напряженности в каждой его точке. Сила, с которой заряд q действует на пробный заряд q_0 , направлена вдоль линий, соединяющих заряды, к заряду q_0 . Точно так же будут направлены и векторы напряженности поля заряда q . Поэтому картина силовых линий для положительного заряда будет иметь вид, представленный на рис. 12.5. Аналогично можно построить силовые линии для отрицательного заряда (рис. 12.6) и, например, двух точечных зарядов разных знаков (рис. 12.7). В случае заряженных тел сложной формы картину силовых линий можно получить на опыте. Не вникая в подробности таких экспериментов, приведем картины силовых линий двух разноименно заряженных шариков (рис. 12.8) и двух разноименно заряженных пластин (рис. 12.9).

Обратим внимание на то, что вблизи зарядов, где напряженность электрического поля больше, силовые линии расположены гуще. Этот факт дает общее правило изображения силовых линий: число силовых линий, пересекающих единичную площадку, перпендикулярную направлению \vec{E} , должно быть пропорционально величине напряженности поля в данном месте.

Кроме того, из определения силовой линии следует, что они начинаются только на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или «уходят» на бесконечность от положительного заряда; или «приходят» из бесконечности к отрицательному заряду).

Наконец, обратим внимание на картину силовых линий поля, созданного двумя разноименно заряженными параллельными пластинами (рис. 12.9): силовые линии между пластинами параллельны и расположены на равных расстояниях друг от друга, исключая области вблизи краев. Таким образом, в центральной части напряженность электрического поля во всех точках одинакова. Такие электрические поля называют однородными.

Электрический потенциал

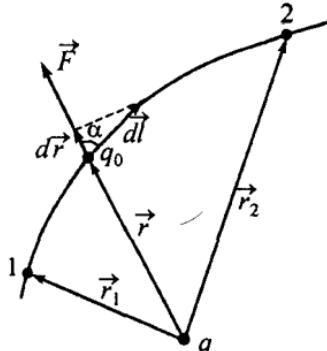


Рис. 12.10

Рассмотрим электрическое поле, созданное положительным точечным зарядом q . В любой точке этого поля на пробный заряд q_0 действует сила

$$\vec{F} = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{r}.$$

Вычислим работу силы электрического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2 (рис. 12.10) по произвольной траектории. Эта работа равна (см. §3)

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cos \alpha \, dl, \quad (12.11)$$

где α – угол между направлением радиус-вектора \vec{r} и бесконечно малым перемещением $d\vec{l}$. Из рисунка видно, что произведение $dl \cos \alpha$ равно величине приращения $dr = |d\vec{r}|$ радиус-вектора \vec{r} в данной точке траектории.

Следовательно,

$$A_{1-2} = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \epsilon_0} \left\{ -\frac{1}{r} \right|_{r_1}^{r_2} = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \epsilon_0 r_1} - \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \epsilon_0 r_2}. \quad (12.12)$$

Таким образом, работа силы электрического поля по перемещению точечного заряда в поле другого точечного заряда не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положениями зарядов. Как известно, такие силовые поля называются консервативными. Это означает, что в электрическом поле можно ввести понятие потенциальной энергии одного заряда в силовом поле другого.

Поскольку работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии (см. §3, формула (3.40))

$$A_{1-2} = W_1 - W_2 \quad (12.13)$$

(в электростатике энергию принято обозначать буквой W), то из (12.12) следует

$$W_1 = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \epsilon_0 r_1} + \text{const}; \quad W_2 = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \epsilon_0 r_2} + \text{const}.$$

Легко сообразить, что если нулевой уровень потенциальной энергии выбрать на бесконечности, то $\text{const} = 0$ и потенциальная энергия заряда q_0 , находящегося на расстоянии r от заряда q ,

$$W = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (12.14)$$

Если вместо заряда q_0 в данную точку поля заряда q поместить другой заряд q_i , то его энергия станет равной

$$W_i = \frac{q_i \cdot q}{4\pi \epsilon_0 r}.$$

Однако отношение

$$\frac{W_i}{q_i} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

не зависит от значения q_i , а определяется лишь зарядом q и расстоянием r от него до данной точки пространства. Поэтому отношение W_i/q_i , наряду с напряженностью поля, является его характеристикой.

Скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии пробного заряда q_0 в электрическом поле заряда q к величине этого заряда

$$\Phi = \frac{W}{q_0}, \quad (12.15)$$

называется *потенциалом* электрического поля заряда q в данной точке.

Из определения потенциала следует, что потенциал точечного заряда q на расстоянии r от него

$$\Phi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (12.16)$$

Рассмотрим поле, создаваемое системой N точечных зарядов q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots, N$), расстояние от каждого из которых до некоторой точки поля равно r_i . Работа, совершаемая силами этого поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2, будет равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{1-2} = \sum_{i=1}^N A_i.$$

Согласно (12.12), каждая из работ A_i равна

$$A_i = \frac{q_0 \cdot q_i}{4\pi \epsilon_0 r_{i,1}} - \frac{q_0 \cdot q_i}{4\pi \epsilon_0 r_{i,2}},$$

где $r_{i,1}, r_{i,2}$ – расстояния от заряда q_i до начального и конечного положений заряда q_0 соответственно. Следовательно,

$$A_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_0 \cdot q_i}{4\pi \epsilon_0 r_{i,1}} - \sum_{i=1}^N \frac{q_0 \cdot q_i}{4\pi \epsilon_0 r_{i,2}}.$$

Сопоставив это выражение с соотношением (12.13), получим для потенциальной энергии заряда q_0 в поле системы зарядов выражение

$$W = q_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0 r_i},$$

из которого следует, что потенциал поля системы зарядов в данной точке

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0 r_i}$$

равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i \quad (12.17)$$

Часто соотношение (12.17) называют *принципом суперпозиции потенциала*.

Используя определение потенциала (12.15), выражение для работы (12.12) можно переписать в виде

$$A_{1-2} = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (12.18)$$

Поскольку потенциал точечного заряда убывает обратно пропорционально расстоянию от него до рассматриваемой точки поля, то на бесконечности $\varphi_\infty = 0$. Поэтому работа сил поля A_∞ по перемещению единичного положительного заряда из данной точки на бесконечность численно равна потенциальну в этой точке:

$$\varphi_\infty = \frac{A_\infty}{q}. \quad (12.19)$$

Часто за «ноль» потенциала принимают не его значение на бесконечности, а значение потенциала Земли. Это не существенно в тех задачах, в которых нужно найти разность потенциалов между точками поля, а не абсолютное значение потенциалов в этих точках.

Формулу (12.19) можно использовать для установления единиц измерения потенциала. За единицу потенциала в системе СИ, называемую *вольтом* [В], принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности положительного заряда, равного 1 Кл, внешним силам необходимо совершить работу в 1 Дж.

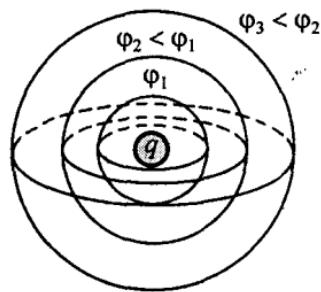


Рис. 12.11

Потенциал можно использовать, подобно линиям напряженности, для графического изображения электрического поля. Объединяя в электрическом поле точки, обладающие одинаковым потенциалом, получают некоторые поверхности, называемые *поверхностями равного потенциала* или *экви-потенциальными поверхностями*. Очевидно, что для уединенных точечных зарядов экви-потенциальные поверхности представляют

собой совокупность сфер с общим центром, расположенным на заряде (рис. 12.11).

Связь между потенциалом и напряженностью электрического поля

Рассмотрим однородное электрическое поле напряженностью \vec{E} , созданное некоторой системой неподвижных зарядов. Поместим в точку 1

заряд q и перенесем его в точку 2 вдоль вектора $\vec{\Delta l}$ (рис. 12.12). Работу сил электрического поля при этом перемещении можно выразить, во-первых, через напряженность поля

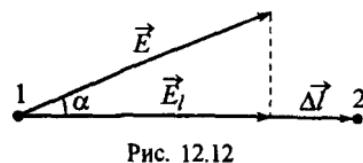


Рис. 12.12

(где E_l – проекция вектора \vec{E} на направление перемещения; Δl – величина перемещения), во-вторых, через разность потенциалов точек 1 и 2:

$$A_{1-2} = q \vec{E} \cdot \vec{\Delta l} = q E \cos \alpha \Delta l = q E_l \Delta l$$

Приравнивая оба выражения для работы, получаем

$$E_l = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta l}. \quad (12.20)$$

В общем случае неоднородного поля точки 1 и 2 нужно выбирать достаточно близко друг от друга (строго говоря, бесконечно близко), чтобы напряженность поля на перемещении $\vec{\Delta l}$ можно было считать постоянной. Переходя к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$, из (12.20) получим

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (12.21)$$

Производная, стоящая в правой части выражения (12.21), характеризует быстроту изменения потенциала в данном направлении. Следовательно, проекция E_l вектора напряженности на данное направление равна скорости убывания потенциала в этом направлении.

Соотношения (12.20) – (12.21) можно использовать для определения единицы измерения напряженности электрического поля. В системе СИ такой единицей является *вольт на метр* [В/м] – это напряженность однородного электрического поля, созданная разностью потенциалов в 1 В между точками, находящимися на расстоянии 1 м на линии напряженности.

Рассмотрим две эквипотенциальные поверхности φ_1 и $\varphi_2 < \varphi_1$ (рис. 12.13). Вектор \vec{E} напряженности электрического поля в произвольной точке эквипотенциальной поверхности направлен перпендикулярно касательной к ней в данной точке. В этом легко убедиться, если допустить наличие касательной составляющей $E_{\text{каст}}$ вектора \vec{E} , например, на эквипотенциальной поверхности φ_1 : тогда работа, совершаемая силами электрического поля по перемещению заряда q вдоль эквипотенциальной поверхности на расстояние Δl , имела бы, с одной стороны, значение $A = q E_{\text{каст}} \Delta l \neq 0$, а с другой – $A = q (\varphi_1 - \varphi_1) = 0$. Следовательно, $E_{\text{каст}} = 0$. Поэтому силовые линии поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям и направлены от поверхности с большим потенциалом φ_1 к поверхности с потенциалом $\varphi_2 < \varphi_1$.

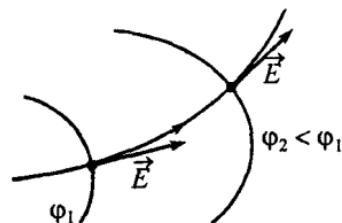


Рис. 12.13

Теорема Гаусса

Вычисление величины напряженности электрического поля во многих случаях сильно упрощается, если воспользоваться теоремой, излагаемой ниже.

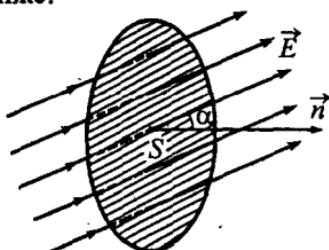


Рис. 12.14

Прежде всего введем понятие потока вектора напряженности электрического поля.

Рассмотрим плоскую поверхность S , которую пронизывают силовые линии однородного электрического поля напряженностью \vec{E} , составляющие угол α с нормалью \vec{n} к поверхности (рис. 12.14). Величину

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot S = E_n S \quad (12.22)$$

(где $E_n = E \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{E} на направление нормали) называют *потоком вектора напряженности электрического поля* через поверхность S .

Если поле неоднородно и поверхность S , через которую ищут поток, не является плоскостью, то эту поверхность можно разбить на бесконечно малые элементы dS и каждый элемент считать плоским, а поле, его пронизывающее, – однородным. Элементарный поток через такую площадку равен

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot dS = E_n dS,$$

а полный поток Φ_E через всю поверхность S – их алгебраической сумме. Можно показать, что величина суммарного потока Φ_E не зависит от формы поверхности S .

Из определения потока видно, что он может быть положительным (если направление вектора \vec{E} составляет острый угол с нормалью), отрицательным (если направление вектора \vec{E} составляет тупой угол с нормалью) и равным нулю (если вектор \vec{E} перпендикулярен нормали).

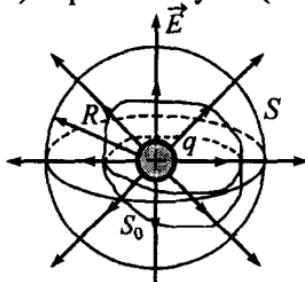


Рис. 12.15

Рассмотрим картину силовых линий электрического поля неподвижного точечного заряда $q > 0$ (рис. 12.15).

Окружим заряд воображаемой сферой радиуса R с центром в точке расположения заряда. Площадь поверхности сферы равна $S = 4\pi R^2$.

Так как векторы напряженности электрического поля во всех точках на поверхности рассматриваемой сферы направлены по радиусу (т.е. по нормали к поверхности сферы) и одинаковы по величине, то поток вектора напряженности электрического поля точечного заряда q через поверхность S

$$\Phi_E = E_n S = E_n 4\pi R^2.$$

Поскольку в точках на поверхности сферы (см. формулу (12.8))

$$E_n = E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^2},$$

то

$$\Phi_E = q/\epsilon_0.$$

Легко видеть, что поток вектора \vec{E} через поверхность сферы другого радиуса также будет равен q/ϵ_0 . Можно показать, что этот результат справедлив для любой замкнутой поверхности S_0 (см. рис. 12.15) и для произвольного расположения заряда (или зарядов) внутри этой поверхности. В этом суть теоремы Гаусса: *поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0* :

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (12.23)$$

Продемонстрируем возможности теоремы Гаусса на трех полезных для решения задач примерах. Прежде чем приступить к рассмотрению этих примеров, введем понятия *поверхностной* и *объемной* плотностей заряда.

Если заряд сосредоточен в тонком поверхностном слое тела, то распределение заряда можно характеризовать с помощью *поверхностной плотности заряда* σ , которая определяется как величина заряда, приходящаяся на единицу площади поверхности тела, несущего заряд. Если заряд распределен по объему тела, то используется *объемная плотность заряда* ρ – заряд, находящийся в единице объема тела. В случаях равномерного распределения заряда q по поверхности площадью S тела или по его объему V

$$\sigma = q/S \quad \text{или} \quad \rho = q/V$$

соответственно.

1. Вычислим напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью. Пусть для определенности поверхностная плотность заряда на плоскости $\sigma > 0$. Из соображений симметрии вытекает, что векторы напряженности поля в любой точке направлены перпендикулярно плоскости. Также очевидно, что в симметрично удаленных от плоскости точках векторы напряженности одинаковы по величине и противоположны по направлению.

Представим себе мысленно цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями площадью S (рис. 12.16). В силу симметрии $E_1 = E_2 = E$ и $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ перпендикулярны основаниям цилиндра. Поскольку векторы напряженности поля параллельны боковой поверхности,

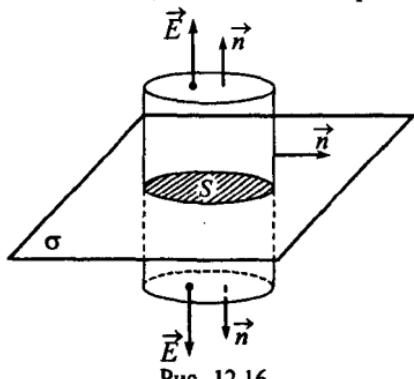


Рис. 12.16

то поток вектора напряженности через всю поверхность цилиндра будет равен потоку через его основания:

$$\Phi_E = E_1 S + E_2 S = 2E S.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi_E = q/\epsilon_0,$$

где q – заряд, заключенный внутри поверхности цилиндра:

$$q = \sigma S.$$

Следовательно,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (12.24)$$

Полученный результат свидетельствует о том, что величина напряженности поля бесконечной заряженной плоскости на любых расстояниях от нее одинакова.

Для плоскости, заряженной отрицательно, результат будет таким же, лишь направление вектора \vec{E} изменится на противоположное.

2. Вычислим напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой радиуса R .

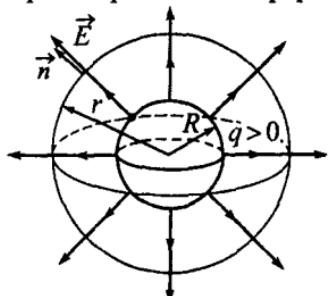


Рис. 12.17

Поле, создаваемое сферической поверхностью, заряженной равномерно, будет, очевидно, центрально-симметричным, т.е. в любой точке векторы напряженности поля будут направлены вдоль радиусов сферы.

Вообразим концентрическую с заряженной сферой поверхность радиуса $r > R$ (рис. 12.17). Во всех точках этой поверхности величина проекции вектора \vec{E} на нормаль будет одинакова. Поэтому суммарный поток вектора напряженности поля через выбранную поверхность

$$\Phi_E(r > R) = E 4\pi r^2.$$

С другой стороны, весь заряд сферы находится внутри этой поверхности. Поэтому

$$\Phi_E(r > R) = q/\epsilon_0.$$

Следовательно,

$$E(r > R) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}, \quad (12.25)$$

т.е. электрическое поле вне заряженной сферы тождественно полю точечного заряда, помещенного в центр сферы.

Поверхность радиуса $r < R$ не будет содержать зарядов. Поэтому внутри заряженной сферы

$$E(r < R) = 0. \quad (12.26)$$

Очевидно, что для сферы, заряженной отрицательно, формулы (12.25) – (12.26) остаются справедливыми, только векторы напряженности будут направлены в противоположные стороны (к центру сферы).

Поскольку поле, создаваемое точечным зарядом, такое же, как поле вне заряженной сферы, то потенциал сферы при $r > R$ может быть вычислен по формуле (12.16):

$$\phi(r > R) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (12.27)$$

Внутри сферы поле отсутствует, поэтому при перемещении заряда из точки, расположенной на расстоянии $r < R$ от центра сферы, на ее поверхность силы поля работы не совершают. Это означает, что работа сил поля при перемещении заряда из этой точки на бесконечность равна работе при его перемещении с поверхности сферы на бесконечность. Поэтому потенциал внутри сферы одинаков и равен потенциальному на ее поверхности:

$$\phi(r < R) = \phi(r = R) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}. \quad (12.28)$$

3. Вычислим напряженность электрического поля, созданного шаром радиуса R , равномерно заряженным по объему с плотностью заряда ρ .

Поле, созданное таким шаром, будет центрально-симметричным. Легко понять, что вне шара для поля получится такой же результат, что и для поля вне сферы.

Найдем поле внутри шара.

Выберем концентрическую с шаром сферическую поверхность радиуса $r < R$ (рис. 12.18). Поток вектора напряженности поля через поверхность этой сферы

$$\Phi_E(r < R) = E 4\pi r^2.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi_E(r < R) = q'/\epsilon_0,$$

где

$$q' = \rho 4/3 \pi r^3 = \frac{q 4/3 \pi r^3}{4/3 \pi R^3} = \frac{q r^3}{R^3}$$

— заряд, заключенный в сфере радиуса r . Следовательно,

$$E(r < R) = \frac{q r}{4\pi \epsilon_0 R^3}. \quad (12.29)$$

Таким образом, внутри равномерно заряженного шара напряженность поля растет линейно с расстоянием от его центра.

Проводники в электрическом поле

В проводниках имеется большая доля зарядов, которые могут свободно перемещаться внутри вещества. К проводникам относятся все металлы в жидком и твердом состояниях, водные растворы солей и кислот и многие другие вещества. Здесь же под проводником будем понимать твердое металлическое тело.

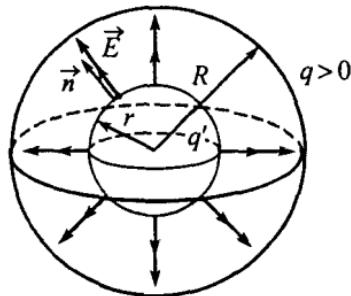


Рис. 12.18

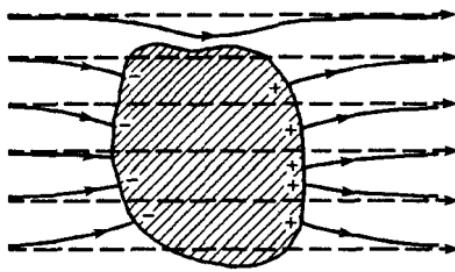


Рис. 12.19

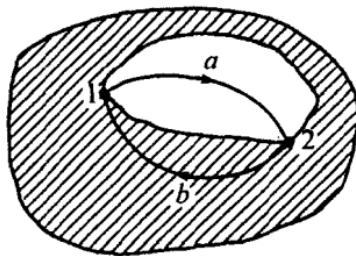


Рис. 12.20

Рассмотрим проводник во внешнем электрическом поле (на рис. 12.19 его силовые линии показаны пунктиром). Под действием поля свободные заряды в проводнике придут в движение. В результате у границ проводника возникнут заряды противоположных знаков, называемые *индивидуированными*. Электрическое поле этих зарядов направлено противоположно внешнему. Следовательно, появление индуцированных зарядов приводит к ослаблению поля в проводнике. За ничтожно малое время свободные заряды перераспределяются так, что *напряженность электрического поля внутри проводника станет равной нулю* (в противном случае свободные заряды продолжали бы двигаться), а *силовые линии вне проводника вблизи его поверхности будут направлены перпендикулярно к ней* (на рис. 12.19 они показаны сплошными линиями). Действительно, если бы существовала касательная составляющая поля, то заряды перемещались бы вдоль поверхности проводника, что противоречит опыту.

Если проводнику сообщить некоторый избыточный заряд q , то в нем возникнет электрическое поле, и заряды придут в движение. Они будут перемещаться до тех пор, пока электрическое поле внутри проводника не станет равным нулю. При этом поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность внутри проводника будет равен нулю. Это может означать только одно – избыточных зарядов внутри этой поверхности нет, т.е. *избыточные заряды внутри проводника отсутствуют, а распределяются по его поверхности*.

Отмеченные условия означают, что потенциалы во всех точках поверхности проводника (и внутри него) одинаковы, т.е. *поверхность проводника эквипотенциальна*. Поэтому соединение заряженного проводника с другим проводником приведет к тому, что заряды между проводниками перераспределятся так, чтобы потенциалы тел выровнялись. В этом состоит принцип «заземления», т.е. соединения проводника с Землей: потенциал заземленного проводника будет равен потенциалу Земли.

Рассмотрим проводник, внутри которого имеется полость (рис. 12.20). Сообщим ему некоторый заряд и поместим проводник во внешнее электрическое поле.

Вычислим работу сил электрического поля, совершающую ими при перемещении некоторого точечного заряда q по замкнутой траектории $1-a-2-b-1$, часть которой проходит через полость, а часть – через проводник.

Поскольку электрическое поле консервативно, то $A_{1-a-2-b-1} = 0$. С другой стороны, $A_{1-a-2-b-1} = A_{1-a-2} + A_{2-b-1}$. Так как поле внутри проводника отсутствует, то $A_{2-b-1} = 0$. Следовательно, $A_{1-a-2} = 0$. Таким образом, независимо от траектории перемещения заряда внутри полости, работа сил поля будет равна нулю. Это может быть только в случае, если *поле внутри полости отсутствует*.

Если полый проводник находится во внешнем электрическом поле, то на нем появятся индуцированные заряды. Эти заряды будут сосредоточены на поверхности проводника, а электрическое поле внутри проводника и в полости будет равно нулю. Поэтому полый проводник экранирует электрическое поле всех внешних зарядов. На этом свойстве основана электростатическая защита: для того чтобы оградить чувствительные электрические приборы от воздействия внешних электрических полей, их заключают в замкнутые металлические оболочки. При этом поля по обе стороны оболочки полностью не зависят друг от друга.

Отметим, что полый проводник экранирует только поле внешних зарядов. Если электрические заряды находятся внутри полости, индуцированные заряды возникнут не только на внешней поверхности проводника, но и на внутренней. При этом распределение зарядов будет таким, чтобы результирующее поле зарядов внутри полости и индуцированных зарядов в любой точке в толще проводника было равно нулю. Однако внутри полости поле не будет равным нулю.

Теперь представим себе, что вблизи некоторого проводника расположен точечный заряд. Как индуцированный заряд распределится по поверхности проводника, чтобы поле в его толще было равным нулю, а поверхность эквипотенциальна, в общем случае выяснить чрезвычайно сложно. Не менее сложно вычислить силу, с которой будет действовать поле индуцированных зарядов на точечный заряд и наоборот. Рассмотрим один весьма интересный способ решения такой задачи в наиболее простом случае: определим силу взаимодействия большой проводящей заземленной пластины с точечным зарядом q , расположенным вблизи ее поверхности.

Предварительно рассмотрим картину поля двух разноименных точечных зарядов $\pm q$. Построим для них систему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (см. рис. 12.21, а). Рассмотрим некоторую эквипотенциальную поверхность A с потенциалом Φ_A . Предположим, что мы изогнули тонкий металлический лист так, что он в точности совпал с частью поверхности A . Если на нем к тому же установить потенциал Φ_A , то от появления листа в картине поля ничего не изменится. Если этот же лист замкнуть по всей поверхности A , то он разделит пространство на две части: одна будет внутри, другая – снаружи листа. Как указывалось выше, поля в этих областях не зависят друг от друга. Поэтому независимо от того, каково поле внутри замкнутого проводника, снаружи поле всегда одно и то же (конечно, при условии, что на поверхности проводника под-

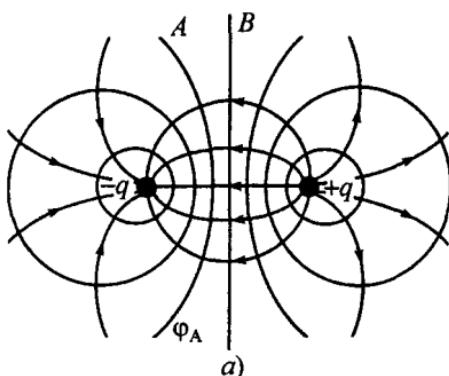
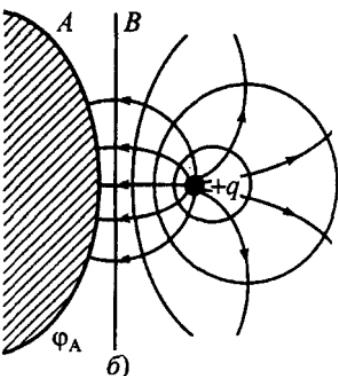


Рис. 12.21



держивается потенциал ϕ_A). Можно даже заполнить внутреннюю область металлом (рис. 12.21, б). Следовательно, картина силовых линий и экви-потенциальных поверхностей точечного заряда ($+q$) и проводника будет такой же, как у заряда ($+q$) и у заряда ($-q$), расположенного в определенном месте пространства. При этом заряд ($-q$) называют зарядом – изображением.

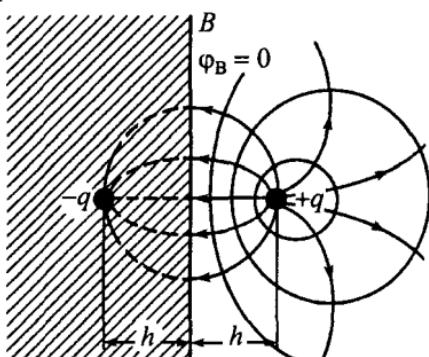


Рис. 12.22

Легко сообразить, что потенциал поверхности B , расположенной посередине между зарядами, равен нулю. Поэтому, если, например, левую часть пространства от поверхности B заполнить металлом (рис. 12.22) и соединить с Землей, то в правой части поле двух точечных зарядов $\pm q$, расположенных на расстоянии $2h$ друг от друга, тождественно полю заземленной проводящей пластины

и точечного заряда, расположенного на расстоянии h от нее. Естественно, справедливо и обратное утверждение: электрическое поле между заземленной пластиной и точечным зарядом совпадает с полем, создаваемым этим зарядом и его зеркальным изображением в этой пластине. При этом сила взаимодействия точечного заряда с зарядом, индуцированным на пластине, будет равна силе взаимодействия двух разноименных точечных зарядов:

$$F = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 (2h)^2}.$$

Дизелектрики в электрическом поле

В отличие от проводников в дизелектриках свободных электронов крайне мало. Заряды, входящие в состав молекул дизелектрика, называют связанными. Под действием электрического поля заряды могут лишь не-

много смещаться из своих положений равновесия; покинуть пределы молекулы, в состав которой они входят, связанные заряды не могут. Примерами диэлектриков могут служить стекло, эбонит, различные пластмассы и все газы в нормальных условиях.

Всякая молекула представляет собой систему с суммарным зарядом, равным нулю. Однако распределение положительного и отрицательного зарядов внутри различных молекул может быть разным. Если центры масс положительных и отрицательных зарядов совпадают, то молекулу называют *неполярной*.

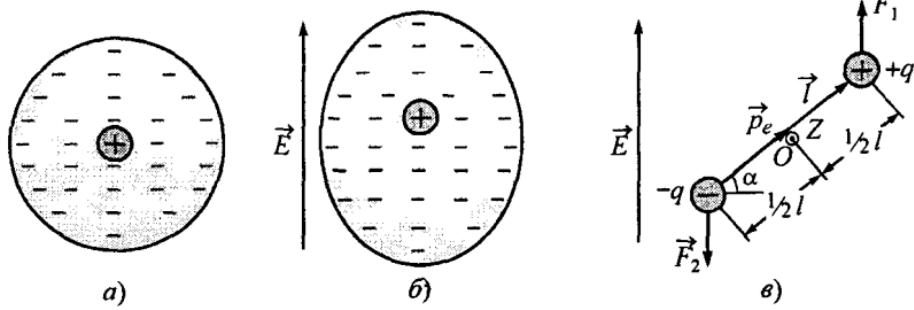


Рис. 12.23

Рассмотрим схематически молекулу такого вещества. Каждый атом такой молекулы имеет положительно заряженное ядро, окруженное электронами, которые распределены вокруг ядра равномерно (рис. 12.23, а). В электрическом поле ядро сместится вдоль силовых линий по полю, а электроны – противоположно (рис. 12.23, б). При этом центры масс ядра и электронов уже не будут совпадать. Этот процесс называют *поляризацией* вещества. В отличие от рассмотренной молекулы, в природе существуют молекулы, у которых центры масс положительного и отрицательного зарядов не совпадают даже при отсутствии внешнего поля. Такие молекулы называют *полярными*. Поэтому, независимо от вида молекулы, в электрическом поле молекулу схематически можно представить в виде так называемого *электрического диполя*, суммарный заряд которого равен нулю, а положительные ($+q$) и отрицательные ($-q$) заряды смещены друг относительно друга на малое расстояние l (рис. 12.23, в).

Если диполь поместить в однородное электрическое поле напряженностью E , то на образующие его заряды ($+q$) и ($-q$) будут действовать равные по величине, но противоположные по направлению силы $|F_1| = |F_2| = qE$. В общем случае эти силы создадут момент сил, который стремится развернуть диполь вдоль силовых линий поля. Например, в положении диполя, показанном на рис. 12.23, в, относительно оси OZ , перпендикулярной плоскости рисунка, на диполь действует момент сил

$$M_z = F_1 \frac{1}{2} l \sin \alpha + F_2 \frac{1}{2} l \sin \alpha = qE l \sin \alpha,$$

который при $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ максимальен

$$M_{\max} = qE l \quad (12.30)$$

и обращается в ноль при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ (в первом случае диполь будет находиться в положении устойчивого равновесия, во втором – в положении неустойчивого равновесия).

Величина

$$p_e = q l \quad (12.31)$$

называется *электрическим моментом диполя*. Его принято записывать в виде вектора

$$\vec{p}_e = q \vec{l}, \quad (12.32)$$

где \vec{l} – вектор, направленный от заряда ($-q$) диполя к заряду ($+q$).

С учетом (12.31) выражение для момента сил, действующего на диполь в электрическом поле (называемого *механическим моментом*), можно представить в виде

$$M_z = p_e E \sin \alpha; \quad M_{\max} = p_e E. \quad (12.33)$$

Механический момент стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент \vec{p}_e установился по направлению поля \vec{E} .

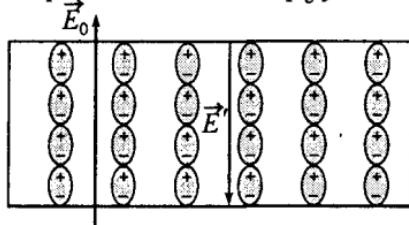


Рис. 12.24

Рассмотрим диэлектрическую пластину во внешнем электрическом поле напряженностью E_0 . Со стороны поля на молекулы будут действовать моменты сил таким образом, чтобы развернуть их вдоль линий поля (рис. 12.24). При этом в толще диэлектрика количество

положительных и отрицательных зарядов будет по-прежнему одинаково, а на поверхностях диэлектрика возникнут нескомпенсированные заряды разных знаков, которые называют *поляризационными*. Поляризационные заряды создадут собственное поле \vec{E}' , направленное противоположно внешнему. Результирующее поле внутри диэлектрика, равное

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'; \quad E = E_0 - E',$$

будет меньше внешнего \vec{E}_0 . Можно показать, что для однородного диэлектрика отношение $\epsilon = E_0/E$ есть величина постоянная, определяющая диэлектрические свойства материала. Ее называют *диэлектрической проницаемостью* вещества: она показывает, во сколько раз величина напряженности электрического поля внутри однородного диэлектрика меньше величины напряженности внешнего поля:

$$E = E_0/\epsilon. \quad (12.34)$$

Следует отметить, что понятие диэлектрической проницаемости для произвольных сред вводится гораздо сложнее и соотношение (12.34) в них не выполняется.

Поляризацией объясняются многие явления, наблюдаемые в повседневной жизни. Например, наэлектризованная расческа притягивает маленькие кусочки диэлектрика – бумаги (а ведь они нейтральны!). Дело в том, что на кусочке бумаги возникают поляризационные заряды обоих

знаков, притягиваемые и отталкиваемые расческой. Однако бумага притягивается, потому что поле вблизи расчески сильнее, чем вдали от нее. Если же этот кусочек бумаги поместить в однородное электрическое поле, то он останется неподвижен.

Электроемкость

Напомним, что сообщенный уединенному проводнику заряд распределится по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю. При этом проводник приобретет некоторый потенциал ϕ . Если проводнику сообщить дополнительный заряд, то он также перераспределится по его поверхности и потенциал проводника изменится. Опыт показывает, что потенциал проводника пропорционален находящемуся на нем заряду:

$$q = C \phi, \quad (12.35)$$

где коэффициент пропорциональности C называют **электроемкостью** (или просто *емкостью*) проводника. В системе СИ электроемкость измеряется в *фарадах* [$\Phi = \text{Кл}/\text{В}$].

Конденсаторы

✓ Если к заряженному проводнику поднести какое-либо проводящее незаряженное тело, то на этом теле появится индуцированный заряд; причем, заряды, противоположные по знаку заряду проводника, расположатся ближе к проводнику, чем одноименные с ним (рис. 12.25). При этом, очевидно, потенциал заряженного проводника уменьшится. Согласно (12.35), это означает увеличение емкости проводника. Поэтому при изготовлении систем, обладающих большой емкостью, используют два проводника, расположенные близко друг от друга. Такие системы называют **конденсаторами**, проводники — *его обкладками*, расстояние между ними — *зазором*.

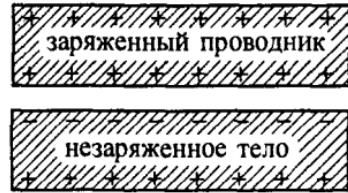


Рис. 12.25

Чтобы внешние тела не оказывали влияния на емкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают их друг относительно друга, чтобы поле, создаваемое зарядами обкладок, было сосредоточено между ними. Наиболее простая система, удовлетворяющая этим условиям, представляет собой две параллельные металлические пластины, расположенные на малом расстоянии друг от друга, на которых находятся разноименные, равные по величине, заряды. Такой конденсатор называют **плоским**.

Основной характеристикой конденсатора является его **емкость**, под которой понимают величину, пропорциональную величине заряда на одной из обкладок и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\Delta\phi}, \quad (12.36)$$

при этом разность потенциалов $\Delta\phi$ часто называют *напряжением* и обозначают буквой U . Из определения (12.35) понятно, что емкость конденсатора измеряется в *фарадах*.

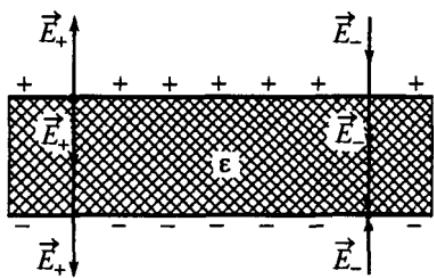


Рис. 12.26

вблизи пластин поле приближенно можно считать однородным): силовые линии E_+ (рис. 12.26) положительно заряженной обкладки будут направлены от нее перпендикулярно поверхности пластины, а отрицательно заряженной – к пластины, причем по величине (см. формулу (12.24))

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

где $\sigma = q/S$ – поверхностная плотность зарядов на пластине.

Очевидно, что вне зазора конденсатора

$$E_{\text{внеш}} = E_+ - E_- = 0, \quad (12.37)$$

а внутри

$$E_{\text{внутри}} = \frac{E_+ + E_-}{\epsilon} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0 S}, \quad (12.38)$$

где учтено, что внутри диэлектрика поле ослаблено в ϵ раз.

Используя связь (12.20) величины напряженности однородного поля с разностью потенциалов, получим напряжение между на обкладках конденсатора

$$U = \Delta\phi = E_{\text{внутри}} d = \frac{q d}{\epsilon \epsilon_0 S} \quad (12.39)$$

и его емкость

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}. \quad (12.40)$$

Из (12.40) видно, что емкость плоского конденсатора тем больше, чем большие размеры обкладок и чем меньше зазор между ними.

Последовательное и параллельное соединение конденсаторов

Изготовить конденсаторы с емкостями «на все случаи жизни» практически невозможно. Поэтому, если требуется получить систему с заданной емкостью, имеющиеся конденсаторы соединяют в батареи.

На рис. 12.27 и рис. 12.28 показано последовательное и параллельное соединения конденсаторов. Рассмотрим каждое из них.

При последовательном соединении заряды на всех конденсаторах одинаковы. Это легко понять, если рассмотреть соседние обкладки любых двух конденсаторов (на рис. 12.27 они заключены в прямоугольник). Если

Рассмотрим плоский конденсатор с пластинами площадью S каждая и толщиной зазора d , полностью заполненного однородным диэлектриком проницаемостью ϵ . Поместим на обкладки заряды $\pm q$. Заряды каждой обкладки создадут в окружающем пространстве электрическое поле (если зазор между обкладками по сравнению с их размерами мал, то

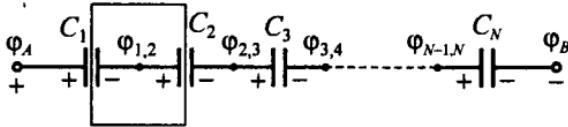


Рис. 12.27

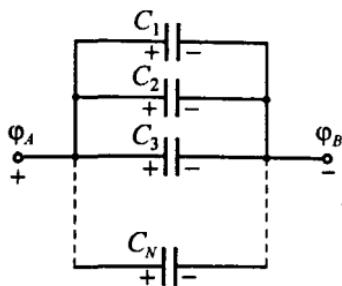


Рис. 12.28

заряд на положительно заряженной обкладке конденсатора емкостью C_1 равен $(+q_1)$, то на второй обкладке он будет $(-q_1)$. Выделенные на рисунке обкладки конденсаторов C_1 и C_2 изолированы от внешней цепи: их суммарный заряд равен нулю. Поэтому заряд положительно заряженной обкладки конденсатора емкостью C_2 также равен $(+q_1)$ и т.д. Следовательно, заряд батареи будет равен заряду любого из конденсаторов:

$$q = q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_N.$$

Разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$ на концах батареи равна сумме разностей потенциалов на каждом из конденсаторах:

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^N \Delta\varphi_i,$$

в чем легко убедиться, введя потенциалы $\varphi_{i,j}$ точек между конденсаторами емкостями C_i и C_j :

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = (\varphi_A - \varphi_{1,2}) + (\varphi_{1,2} - \varphi_{2,3}) + (\varphi_{2,3} - \varphi_{3,4}) + \dots + (\varphi_{N-1,N} - \varphi_B).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \frac{\Delta\varphi}{q} = \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 + \dots + \Delta\varphi_N}{q},$$

или

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \frac{\Delta\varphi_1}{q} + \frac{\Delta\varphi_2}{q} + \frac{\Delta\varphi_3}{q} + \dots + \frac{\Delta\varphi_N}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}.$$

При параллельном соединении конденсаторов заряд всей батареи будет равен сумме зарядов на всех конденсаторах:

$$q = \sum_{i=1}^N q_i,$$

где q_i – заряд i -го конденсатора, равный

$$q_i = C_i \Delta\varphi_i.$$

Поскольку разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$ на концах батареи равна напряжению на каждом конденсаторе

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_3 = \dots = \Delta\varphi_N,$$

то

$$q = C_1 \Delta\varphi + C_2 \Delta\varphi + C_3 \Delta\varphi + \dots + C_N \Delta\varphi = \Delta\varphi \sum_{i=1}^N C_i,$$

а емкость батареи конденсаторов, соединенных параллельно:

$$C_{\text{пар}} = \frac{q}{\Delta\varphi} = \sum_{i=1}^N C_i.$$

Энергия электрического поля

Энергия взаимодействия зарядов

Выражение (12.14) можно рассматривать как взаимную потенциальную энергию зарядов q и q_0 . Обозначив заряды как q_1 и q_2 , а расстояние между ними $r_{1,2}$, получим выражение для энергии взаимодействия двух точечных зарядов:

$$W_{1,2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{1,2}}. \quad (12.41)$$

Если воспользоваться выражением (12.16) для потенциала точечного заряда, то формулу (12.41) можно переписать по-другому:

$$W_{1,2} = q_1 \Phi_1 = q_2 \Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i \Phi_i, \quad (12.42)$$

где Φ_1 – потенциал поля в точке расположения заряда q_1 , Φ_2 – в точке расположения заряда q_2 .

Рассмотрим систему, состоящую из N точечных зарядов q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots, N$), расстояние между любой парой которых равно $r_{i,j}$. Энергия взаимодействия такой системы равна сумме энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N W_{i,j}. \quad (12.43)$$

В формуле (12.43) суммирование производится по индексам i и j , при этом оба индекса «пробегают» все значения от 1 до N , причем слагаемые, которым соответствуют одинаковые значения индексов i и j , не учитываются.

С учетом формулы (12.42) для энергии взаимодействия двух точечных зарядов выражению (12.43) можно придать вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i \Phi_i, \quad (12.44)$$

где Φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i , в точке, где расположен этот заряд.

Энергия проводника

Заряд q , находящийся на проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов Δq_i , энергия взаимодействия которых

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta q_i \Phi_i,$$

где Φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме Δq_i , в точке на поверхности проводника, где расположен этот заряд. Поскольку поверхность проводника эквипотенциальна, то

$$W = \frac{1}{2} \Phi \sum_{i=1}^N \Delta q_i = \frac{1}{2} q \Phi,$$

или с учетом (12.35):

$$W = \frac{q \Phi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C \Phi^2}{2}. \quad (12.45)$$

Энергия конденсатора

Каждая из обкладок конденсатора представляет собой заряженный проводник. Если заряд $(+q)$ находится на обкладке с потенциалом φ_1 , а заряд $(-q)$ – на обкладке с потенциалом φ_2 , то энергия такой системы

$$W = \frac{1}{2} \{ (+q) \varphi_1 + (-q) \varphi_2 \} = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} q \Delta\varphi,$$

или с учетом (12.36):

$$W = \frac{q \Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C \Delta\varphi^2}{2}. \quad (12.46)$$

Энергия электрического поля

Применим формулу (12.46) к расчету энергии плоского конденсатора, обкладки которого имеют площадь S , а зазор шириной d полностью заполнен диэлектриком с проницаемостью ϵ :

$$W = \frac{C \Delta\varphi^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} E^2 d^2, \quad (12.47)$$

где использовано выражение для емкости конденсатора (12.40), а разность потенциалов записана в виде $\Delta\varphi = E d$.

Запишем соотношение (12.47) по-другому:

$$W = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} S d = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} V = w V, \quad (12.48)$$

где $V = S d$ – объем, занимаемый полем (напомним, что у конденсатора поле сосредоточено только между обкладками).

Величина

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2}, \quad (12.49)$$

равная энергии поля, сосредоточенной в единице объема, называется *объемной плотностью энергии электрического поля*.

В общем случае неоднородного поля выражение для объемной плотности энергии электрического поля совпадает с (12.49). Энергию, заключенную в некотором объеме V , можно найти, вычислив интеграл

$$W = \int_V w dV. \quad (12.50)$$

Рекомендации по решению задач

Часть задач электростатики основана на применении закона Кулона к точечным зарядам и системам, сводящимся к ним (например, заряженную нить или кольцо можно представить в виде бесконечно большого числа точечных зарядов, расположенных непрерывно), находящимся в равновесии. При решении таких задач следует:

1. Сделать схематический чертеж, на котором указать все силы, действующие на заряды. Если в задаче рассматриваются только два заряда, то сила Кулона будет направлена вдоль линии, соединяющей заряды; при этом следует помнить, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные – притягиваются. Если система содержит $N > 2$ точечных зарядов, то на каждый из зарядов будет действовать $N - 1$ сила Кулона. Направления этих сил для выбранного заряда нужно проставить, рассмотрев поочередно взаимодействие этого заряда с каждым из остальных. При этом может оказаться, что силы, действующие на заряд (силы Кулона, сила тяжести, силы реакции опоры и натяжения нити и т.п.), не лежат в

одной плоскости. Замена всех сил Кулона их равнодействующей (на основании принципа суперпозиции) в таких задачах, как правило, позволяет уйти от необходимости пространственного рассмотрения условий равновесия и свести систему сил в одну плоскость. Следует иметь в виду, что при рассмотрении систем зарядов, на каждый из которых действуют одинаковые силы (например, одинаковые заряды расположены в вершинах треугольника, квадрата или любой другой правильной геометрической фигуры), нет необходимости рассматривать отдельно каждый заряд: достаточно рассмотреть любой из них.

2. Выбрать систему координат, расположив ее оси в плоскости действия сил, и записать условия равновесия для зарядов, составляющих систему. При этом для каждого из зарядов удобно выбирать свою систему координат. Условия равновесия обычно записывают в виде равенства нулю суммы проекций сил на оси:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0.$$

Если находящееся в равновесии тело имеет закрепленную ось вращения, исключающую всякое поступательное движение тела, то в качестве условия равновесия удобно использовать уравнение равенства нулю моментов сил относительно этой оси (см. §6).

3. Записать развернутые выражения для всех сил, действующих на каждое из тел, и решить полученную систему уравнений.

Другая большая часть задач связана с расчетами напряженности и потенциала электрического поля, создаваемого системами точечных зарядов, заряженными плоскостями и телами сферической формы.

В задачах на вычисление напряженности электрического поля особое внимание нужно обратить на векторный характер \vec{E} :

– векторы напряженности электрического поля единственного точечного заряда направлены от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен;

– поле заряженной плоскости однородно; векторы \vec{E} поля плоскости направлены перпендикулярно ее поверхности от плоскости, если ее заряд положителен, и к плоскости, если заряд отрицателен;

– для электрического поля заряженной сферы в точках, расположенных за ее пределами, векторы напряженности направлены так же, как у точечного заряда, находящего в центре сферы; внутри сферы электрическое поле равно нулю;

– для поля шара, заряженного равномерно по объему, в точках, расположенных за его пределами, векторы напряженности направлены так же, как у сферы; внутри – как у точечного заряда, помещенного в центр шара (совпадают только направления, а не величины!); если шар проводящий, то нескомпенсированные заряды расположатся на его поверхности, что с точки зрения электростатики эквивалентно заряженной сфере;

– электрическое поле внутри проводника и внутри полой проводящей оболочки отсутствует (это справедливо независимо от наличия у проводника заряда и внешнего электрического поля);

– направление вектора напряженности поля системы точечных зарядов в произвольной точке определяется на основании принципа суперпозиции: строятся векторы \vec{E}_i в данной точке для каждого из зарядов q_i , а результирующий вектор \vec{E} определяют как их векторную сумму; направление вектора напряженности системы точечных зарядов и плоскости, сферы или шара, или при любой другой комбинации заряженных тел, определяется аналогично.

При решении задач на расчет потенциала следует иметь в виду, что потенциал скалярная функция, и его знак определяется знаком заряда, создающего поле. Потенциал точечного заряда определяется формулой (12.16), сферы и шара в точках, расположенных за их пределами, – формулой (12.27), внутри сферы или проводящего шара – он равен потенциальному на поверхности и его значение можно найти по формуле (12.28). Потенциал поля любой комбинации указанных тел будет равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из них в отдельности. Потенциал электрического поля, созданного заряженной

плоскостью, вычислить нельзя; так как поле плоскости на любых расстояниях от ее поверхности одинаково (см. формулу (12.24)), то работа сил поля по перемещению положительного заряда из произвольной точки на бесконечность будет стремиться к бесконечности. Это значит, что потенциал также будет стремиться к бесконечности. Однако в практических расчетах важно знать не потенциал в некоторой точке, а разность потенциалов между точками поля, которую можно найти из связи потенциала с напряженностью (см. формулы (12.20), (12.21)). Так для двух точек поля, расположенных на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости (с одной стороны),

$$\Delta\varphi_{1-2} = \varphi_2 - \varphi_1 = E \Delta x,$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$.

Определение потенциалов поля более сложных систем зарядов – достаточно трудоемкая задача, требующая навыков интегрирования.

Достаточно часто встречаются задачи, в которых происходит перераспределение зарядов между телами, например, при соприкосновении тел друг с другом или соединении их проводником. Следует помнить, что заряды перераспределяются таким образом, чтобы потенциалы тел стали равными, а суммарный заряд сохранился. Очевидно, что если тела одинаковы, то заряды распределяются между ними поровну. Сюда же относятся задачи, в которых одним из тел является Земля (ее потенциал при любых процессах считают неизменным и равным нулю). Часто при этом делают ошибку, полагая, что с заземленного тела все заряды стекут на Землю. На самом деле заземление приводит лишь к тому, что потенциал тела станет равным потенциалу Земли, а тело отдаст Земле или возьмет у нее необходимый для этого заряд любого знака.

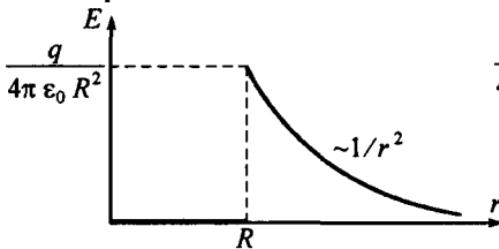


Рис. 12.29

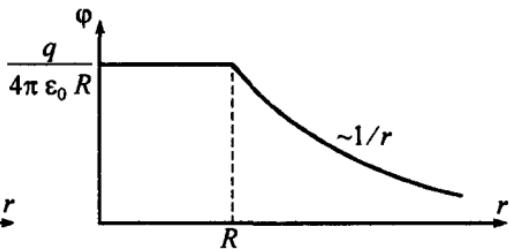


Рис. 12.30

При графическом изображении поля следует иметь в виду, что силовые линии строятся так, чтобы векторы напряженности в любой точке были направлены по касательным к ним, а сами силовые линии должны быть перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям и направлены в сторону убывания потенциала. Если задача состоит в построении зависимостей значений величины напряженности поля или его потенциала от координат, то следует помнить, что любая проводящая поверхность является эквипотенциальной и «разрывает» силовые линии. При этом напряженность поля может изменяться скачком, а потенциал будет непрерывен (вспомните, он пропорционален работе сил поля, а она не может меняться скачками). На рис. 12.29 и рис. 12.30 в качестве примера построены зависимости напряженности поля и потенциала сферы радиуса R , заряженной равномерно положительным зарядом q (см. формулы (12.26), (12.25), (12.28) и (12.27)).

Следующая часть задач связана с расчетом параметров конденсаторов и образованных из них цепей. Следует иметь в виду, что две близко расположенные заряженные пластины представляют собой плоский конденсатор только в том случае, если на них находятся равные по величине разноименные заряды. В противном случае, это всего лишь набор заряженных проводников, создающих в окружающем пространстве однородное электрическое поле.

Если требуется рассчитать емкость системы, составленной из набора проводящих пластин, то можно пойти по такому пути:

- пластина, соединенным с точками входа и выхода (назовем их крайними), сообщить одинаковые разноименные заряды;
- рассчитать напряженность электрического поля во всем пространстве между этими пластинами (это поле однородно);
- используя связь (12.20) между разностью потенциалов и напряженностью поля, определить напряжение между крайними пластинами;
- по формуле (12.36) определить емкость системы.

Если между крайними пластинами находится толстая проводящая незаряженная пластина, то на ее поверхностях появятся индуцированные заряды, которые не внесут никаких изменений в картину поля; при этом саму пластину можно убрать и учесть ее, уменьшив расстояние между крайними пластинами на величину, равную толщине этой пластины. Если же между проводящими пластинами находится пластина из диэлектрика с проницаемостью ϵ , то на ее границах появятся поляризационные заряды, что приведет к уменьшению поля внутреннего диэлектрика в ϵ раз.

Если одна из крайних пластин соединена с каким-либо телом, например, с третьей пластиной, то при расчете параметров поля следует учесть тот факт, что сообщенный этой пластине заряд перераспределится между ней и третьей пластиной так, чтобы их потенциалы стали одинаковыми.

При расчете батарей конденсаторов прежде всего нужно выяснить тип соединений (для этого, возможно, нужно будет нарисовать схему по-другому); понять, какие из конденсаторов соединены между собой последовательно, а какие – параллельно. Далее, последовательно заменяя два (или более) конденсатора одним с эквивалентной емкостью, цепь постепенно упрощают, пока не будет найдена общая емкость. Если же соединение конденсаторов не относится ни к последовательному, ни к параллельному, то общую емкость такого соединения методами школьного курса физики можно найти сравнительно просто только в тех случаях, если в схеме имеются точки с одинаковым потенциалом: такие точки можно соединять и разъединять, при этом заряды на конденсаторах и емкость батарен не изменяются. Соединяя и разъединяя точки с равным потенциалом, можно сложное соединение конденсаторов свести к комбинации последовательных и параллельных соединений. Точки с одинаковым потенциалом есть всегда в соединениях, обладающих осью или плоскостью симметрии относительно точек входа и выхода. При этом если точки входа и выхода лежат на плоскости симметрии, то точки одного потенциала находятся на концах конденсаторов, которые «перечеркиваются» этой плоскостью. Если плоскость симметрии перпендикулярна линии, на которой лежат точки входа и выхода, то равные потенциалы имеют все точки пересечения этой плоскости с проводниками. Например, в известной схеме – мост емкостей, представленной на рис. 12.31, если $C_1 = C_2$ и $C_3 = C_4$, то плоскостью симметрии является плоскость, проходящая перпендикулярно рисунку через точки входа A и выхода B . При этом

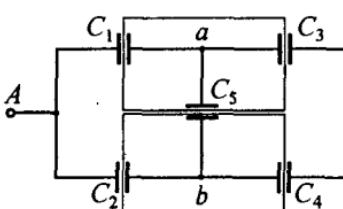


Рис. 12.31

потенциалы в точках a и b будут одинаковы. Это означает, что конденсатор емкостью C_5 не заряжен и на накоплены зарядов участия не принимает: его можно не учитывать, удалив из цепи или соединив между собой точки a и b . Если $C_1 = C_3$ и $C_2 = C_4$, то плоскость симметрии проходит через точки a и b , которые будут иметь равные потенциалы. Очевидно, что рассмотренные случаи можно объединить: если $C_1, C_4 = C_2, C_3$, то точки a и b имеют равные потенциалы. Такой мост называют уравновешенным или сбалансированным.

При расчете батарей конденсаторов следует помнить, что:

- при последовательном соединении заряды на всех конденсаторах одинаковы и равны заряду батареи; разность потенциалов на концах батарен равна сумме разностей потенциа-

лов на каждом конденсаторе; емкость батареи будет меньше емкости конденсатора с наименьшей емкостью;

– при параллельном соединении конденсаторов заряд батареи равен сумме зарядов всех конденсаторов; напряжения на всех конденсаторах одинаковы и равны напряжению на концах батареи; емкость батареи будет больше емкости конденсатора с наибольшей емкостью;

– алгебраическая сумма зарядов любой системы обкладок, изолированных от источника, равна нулю (например, на рис. 12.31 такие системы обкладок заключены в прямоугольники);

– если батарея конденсаторов подключена к источнику напряжения, то при изменении емкости системы (вследствие изменения расстояния между обкладками, внесение или удаление диэлектрика из зазора и т.п.) напряжение на концах батареи меняться не будет, а заряд изменится;

– если батарею конденсаторов зарядить, а затем отключить от источника зарядов, то при изменении емкости системы заряд батареи меняться не будет, а напряжение на концах изменится.

Вычисление энергии системы зарядов, проводника, конденсатора или электрического поля особых затруднений не вызывает. Эти величины могут быть найдены по формулам (12.44), (12.45), (12.46), (12.48) или (12.50).

Работа, совершаемая полем над точечным зарядом, будет равна разности энергий заряда в конечной и начальной точках траектории и не зависит от ее формы. Если же энергия системы по каким-либо причинам уменьшилась, то это означает, что часть энергии поля перешла в механическую энергию или сторонние силы совершили отрицательную работу и часть энергии поля перешла в тепло.

Наконец, существенную часть задач представляют комбинированные задачи, сочетающие электростатику с элементами механики. При решении таких задач можно использовать рекомендации, предложенные для решения соответствующих задач механики в книге «Механика». Единственное, что стоит отметить, это тот факт, что в случае неоднородных полей (поле точечного заряда или системы, сферы, шара, или их комбинаций) напряженность будет меняться от точки к точке. При этом также будет меняться сила, действующая на движущиеся заряды (см. формулу (12.7)). Поэтому движение заряженных тел в таких полях следует описывать через законы сохранения, поскольку использование второго закона Ньютона приводит к дифференциальным уравнениям.

Задачи

Электрический заряд. Закон Кулона

12.1. Два одинаковых свинцовых шарика радиусом $R = 1$ см расположены в вакууме на расстоянии $r = 1$ м друг от друга. С какой силой взаимодействовали бы шарики, если бы удалось у каждого атома одного шарика «отнять» по одному электрону и все их перенести на другой шарик? Относительная атомная масса свинца $A = 207$ а.е.м., плотность $\rho = 11,3$ г/см³. Заряд электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Гравитационным взаимодействием шариков пренебречь.

• *Решение.* Если у N атомов одного шарика отнять по одному электрону и все их поместить на другой, то первый шарик приобретет положительный заряд q_1 , а второй – отрицательный q_2 , причем $|q_1| = |q_2| = N|e|$. При этом между шариками возникнет сила притяжения

$$F = \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{N^2 |e|^2}{4\pi \epsilon_0 r^2}.$$

Число атомов, находящихся в каждом из шариков,

$$N = \frac{m}{\mu} N_A,$$

где $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ – масса шарика; $\mu = A \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса свинца (см. §9).

Следовательно, сила притяжения шариков

$$F = \frac{4\pi N_A^2 |e|^2 \rho^2 R^6}{9 \cdot 10^{-6} \epsilon_0 A^2 r^2} \approx 4,36 \cdot 10^{18} \text{ Н.}$$

• Ответ: $F = \frac{4\pi N_A^2 |e|^2 \rho^2 R^6}{9 \cdot 10^{-6} \epsilon_0 A^2 r^2} \approx 4,36 \cdot 10^{18} \text{ Н.}$

12.2. Медная монета массой $m = 5 \text{ г}$ обладает положительным зарядом $q = 0,8 \text{ мКл}$. Какую долю своих электронов потеряла монета? Относительная атомная масса меди $A = 64$ а.е.м. Заряд электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. Заряд ядра атома меди $Q = 29|e|$.

12.3. На двух одинаковых каплях масла радиусами $r = 8,22 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ находятся одноименные равные по величине заряды. Определить величину этих зарядов, если сила кулоновского отталкивания уравновешивает силу гравитационного притяжения капель. Плотность масла $\rho = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

12.4. Три одинаковых заряда величиной $q = 10^{-6} \text{ Кл}$ каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника. Где и какой заряд Q нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии?

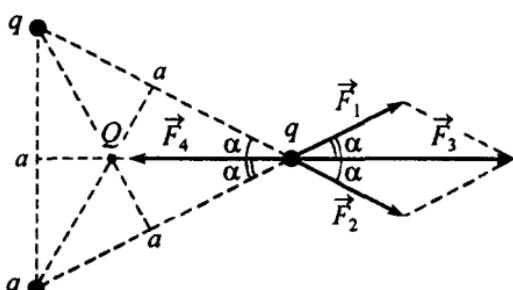


Рис. 12.32

• Решение. Так как по условию задачи все заряды находятся на равных расстояниях друг от друга и величины зарядов равны между собой, то между любым двумя из них будет действовать сила отталкивания

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2},$$

где a – расстояние между двумя произвольными зарядами (рис. 12.32).

Рассмотрим один из зарядов. Со стороны соседних зарядов на него будут действовать две равные по величине силы

$$F_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2},$$

результатирующая которых

$$F_3 = 2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \alpha,$$

где $\alpha = 30^\circ$. Сила \vec{F}_3 будет направлена по диагонали параллелограмма, построенного на векторах \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Такие же по величине силы будут действовать и на остальные два заряда. Очевидно, что для равновесия системы в геометрическом центре треугольника (в случае равностороннего треугольника – это точка пересечения биссектрис, медиан или высот) необходимо поместить отрицательный заряд Q , который будет притягивать каждый из зарядов q с силой

$$F_4 = F_3 = \frac{q|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где $r = a/(2 \cos \alpha)$ – расстояние между зарядами q и Q .

Следовательно,

$$\frac{q^2 \cos \alpha}{2\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{q|Q| \cos^2 \alpha}{\pi \epsilon_0 a^2}; \quad Q = \frac{q}{2 \cos \alpha} \approx -5,8 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.}$$

• Ответ: заряд $Q \approx -5,8 \cdot 10^{-7}$ Кл нужно поместить в геометрическом центре треугольника.

12.5. На концах горизонтальной непроводящей трубы длиной l закреплены положительные заряды q_1 и q_2 . Найти положение равновесия шарика с положительным зарядом q , который помещен внутрь трубы. Трения нет.

12.6. В центр квадрата, в вершинах которого находятся одинаковые заряды q , помещен отрицательный заряд Q . Какова должна быть величина этого заряда, чтобы система находилась в равновесии?

12.7. Четыре положительных заряда q , Q , q , Q связаны пятью невесомыми нерастяжимыми нитями так, как показано на рис. 12.33, а. Длина каждой нити l . Определить силы натяжения всех нитей.

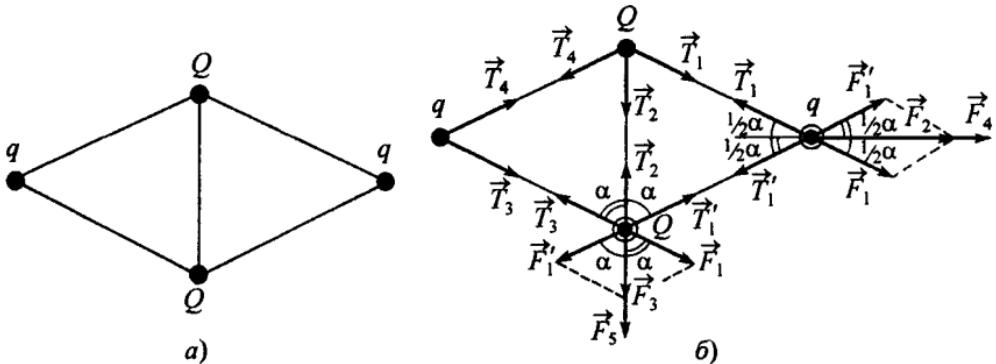


Рис. 12.33

• Решение. Рассмотрим два заряда q и Q , выделенные на рис. 12.33, б.

На заряд q действуют четыре силы: силы \vec{F}_1 , \vec{F}'_1 со стороны соседних с ним зарядов Q , сила \vec{F}_2 со стороны наиболее удаленного заряда q и силы натяжения нитей \vec{T}_1 , \vec{T}'_1 . Причем

$$F_1 = F'_1 = \frac{qQ}{4\pi \epsilon_0 l^2}, \quad F_2 = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 [2l \cos(\frac{1}{2}\alpha)]^2},$$

где $\alpha = 60^\circ$. Результирующая этих сил \vec{F}_4 будет направлена вдоль диагонали ромба, построенного на векторах \vec{F}_1 и \vec{F}'_1 , и равна

$$F_4 = 2F_1 \cos(\frac{1}{2}\alpha) + F_2 = \frac{qQ}{2\pi \epsilon_0 l^2} \cos(\frac{1}{2}\alpha) + \frac{q^2}{16\pi \epsilon_0 l^2 \cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}.$$

Так как система зарядов находится в равновесии, то это означает, что вектор, равный сумме сил натяжения нитей \vec{T}_1 и \vec{T}'_1 , будет лежать на указанной диагонали ромба и направлен в сторону, противоположную \vec{F}_4 . Это возможно только в случае, если $T_1 = T'_1$. Следовательно, условие равновесия рассматриваемого заряда q

$$\vec{F}_4 + \vec{T}_1 + \vec{T}'_1 = 0$$

в проекции на ось OX можно записать в виде

$$2T_1 \cos(\frac{1}{2}\alpha) = \frac{qQ}{2\pi \epsilon_0 l^2} \cos(\frac{1}{2}\alpha) + \frac{q^2}{16\pi \epsilon_0 l^2 \cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}.$$

Отсюда получим

$$T_1 = T'_1 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 l^2} \left\{ Q + \frac{q}{8 \cos^3(\frac{1}{2}\alpha)} \right\} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 l^2} \left\{ Q + \frac{q}{3\sqrt{3}} \right\}.$$

Аналогично для выделенного заряда Q .

На заряд Q действуют четыре силы: силы \vec{F}_1 и \vec{F}'_1 со стороны соседних зарядов q , сила \vec{F}_3 со стороны заряда Q и силы натяжения нитей \vec{T}'_1 , \vec{T}_2 и \vec{T}_3 . Причем равнодействующая \vec{F}_5 сил

$$F_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2}, \quad F'_1 = F_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2}, \quad F_3 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2}$$

будет направлена вдоль нити, соединяющей заряды Q и q :

$$F_5 = 2F_1 \cos \alpha + F_3 = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 l^2} \cos \alpha + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

С другой стороны, результирующая сила натяжения нитей также направлена вдоль этой нити, но в противоположную сторону, и равна по величине силе F_5 . Это означает, что $T'_1 = T_3$ (рис. 12.33, б) и условие равновесия заряда Q можно записать в виде

$$2T_1 \cos \alpha + T_2 = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 l^2} \cos \alpha + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

Следовательно, с учетом выражения для силы натяжения T_1 и значения угла α

$$T_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 l^2} \left\{ qQ + Q^2 - qQ - \frac{q^2}{3\sqrt{3}} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 l^2} \left\{ Q^2 - \frac{q^2}{3\sqrt{3}} \right\}.$$

Легко понять, что сила натяжения T_4 нити, соединяющей заряды q и Q , по величине равна $T_1 = T'_1 = T_3$.

- Ответ: $T_1 = T'_1 = T_3 = T_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} \left\{ Q + \frac{q}{3\sqrt{3}} \right\}$; $T_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 l^2} \left\{ Q^2 - \frac{q^2}{3\sqrt{3}} \right\}$.

12.8. Три положительных заряда q_1 , q_2 , q_3 расположены на одной прямой и связаны невесомыми нерастяжимыми нитями длиной l каждая. Найти силы натяжения нитей.

12.9. Каркас в форме квадрата со стороной a составлен из четырех одинаковых невесомых непроводящих пружин жесткостью k каждая. Пружины соединены между собой попарно небольшими шариками. Когда шарикам были сообщены одинаковые заряды, площадь, ограниченная каркасом, увеличилась в два раза. Найти заряд каждого шарика.

12.10. Три маленьких шарика массой $m = 10$ г каждый подвешены в одной точке на невесомых нерастяжимых нитях длиной $l = 1$ м. Шарики одинаково заряжены и располагаются в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 0,1$ м. Каков заряд каждого шарика?

12.11. Маленький шарик с зарядом $q = 10^{-8}$ Кл находится на расстоянии $l = 3$ см от большой заземленной металлической пластины. С какой силой они взаимодействуют?

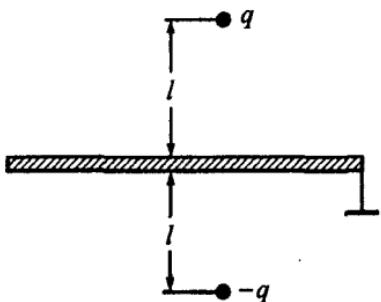


Рис. 12.34

• Решение. Как указывалось в теоретическом введении к данному параграфу, сила взаимодействия между точечным зарядом и большой заземленной металлической плоскостью равна силе взаимодействия двух точечных зарядов q и $(-q)$, расположенных зеркально относительно плоскости (рис. 12.34). Следовательно,

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2l)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2} \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

- Ответ: $F = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2} \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$ Н.

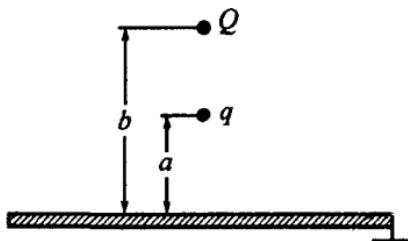


Рис. 12.35

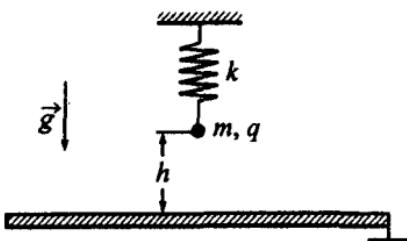


Рис. 12.36

12.12. Два точечных заряда $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл и $Q = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл находятся вблизи большой заземленной металлической пластины на расстояниях $a = 10$ см и $b = 20$ см от ее поверхности соответственно. Причем оба заряда находятся на одном перпендикуляре к поверхности пластины (рис. 12.35). Определить силу, действующую на заряд q .

12.13. Маленький шарик подвешен на легкой пружине жесткостью k вблизи большой металлической заземленной пластины (рис. 12.36). Если шарик не заряжен, то он находится на расстоянии h от пластины. При сообщении шарику некоторого заряда расстояние уменьшается на величину Δh . Найти заряд, сообщенный шарику.

12.14. Металлическое кольцо радиусом R несет на себе электрический заряд q , при котором натяжение проволоки, из которой сделано кольцо, равно T . Какой заряд Q нужно поместить в центр кольца, чтобы оно разорвалось? Проволока выдерживает максимальное натяжение T_0 .

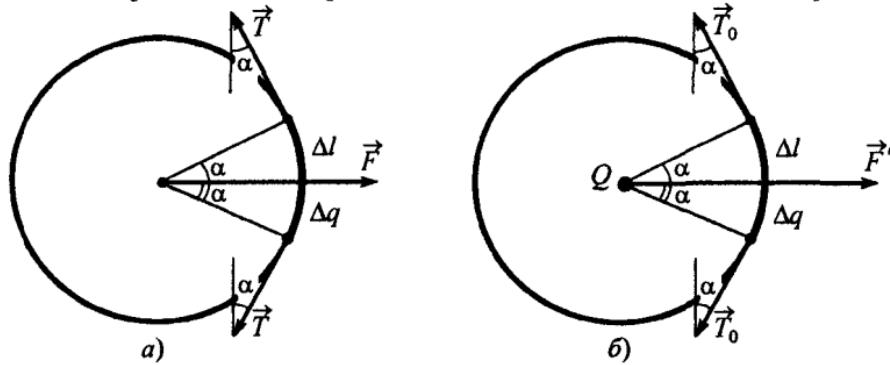


Рис. 12.37

• *Решение.* Рассмотрим бесконечно малый элемент кольца длиной Δl .

Полагая, что электрический заряд кольца q распределен по всей его длине равномерно, найдем заряд Δq на выделенном элементе кольца. Так как на единицу длины приходится заряд $\Delta q_{\text{ед}} = q/2\pi R$, то на элементе кольца длиной Δl будет находиться заряд

$$\Delta q = \Delta q_{\text{ед}} \Delta l = \frac{q \Delta l}{2\pi R}.$$

Если длину Δl выразить через радиус кольца R и центральный угол α (рис. 12.37, а), т.е. $\Delta l = 2R\alpha$, то заряд Δq можно представить в виде

$$\Delta q = q \alpha / \pi.$$

На заряд Δq со стороны остальных зарядов кольца будет действовать кулоновская сила \vec{F} , направленная по радиусу и стремящаяся разорвать кольцо. Кроме силы \vec{F} на эле-

мент ΔF кольца будут действовать со стороны соседних участков силы натяжения \vec{T} . Очевидно, что при этом выполняется равенство

$$F = 2 T \sin \alpha.$$

Если в центр кольца поместить заряд Q , то на выделенный элемент кольца будет действовать сила $\vec{F}' = \vec{F} + \Delta \vec{F}$ (рис. 12.37, б), где

$$\Delta F = \frac{\Delta q Q}{4\pi \epsilon_0 R^2},$$

и силы натяжения \vec{T}_0 . При этом, для того чтобы кольцо разорвалось, должно выполняться неравенство

$$2 T_0 \sin \alpha < F'$$

где

$$F' = F + \frac{\Delta q Q}{4\pi \epsilon_0 R^2}, \quad \text{или} \quad F' = 2 T \sin \alpha + \frac{\Delta q Q}{4\pi \epsilon_0 R^2}.$$

Так как угол α мал, то можно положить, что $\sin \alpha \approx \alpha$. Следовательно, с учетом выражения для Δq ,

$$2 T_0 \alpha < 2 T \alpha + \frac{q Q \alpha}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

Отсюда окончательно находим

$$Q > \frac{8\pi^2 \epsilon_0 (T_0 - T) R^2}{q}.$$

• Ответ: $Q > \frac{8\pi^2 \epsilon_0 (T_0 - T) R^2}{q}$.

12.15. В центр металлического кольца радиусом R , на которое нанесен заряд Q , помещают точечный заряд q . Насколько при этом изменилась сила натяжения кольца?

12.16. Металлическое заряженное кольцо разорвалось кулоновскими силами, когда заряд кольца был равен q_0 . Оценить, какой заряд q разорвет такое же кольцо, если оно в два раза прочнее.

Напряженность электрического поля

12.17. Шарик массой $m = 25$ мг подвешен на невесомой непроводящей нити в однородном электрическом поле напряженностью $E = 35$ В/м, силовые линии которого горизонтальны. Какой угол с вертикалью составит нить, если шарику сообщить заряд $q = 7$ мКл?

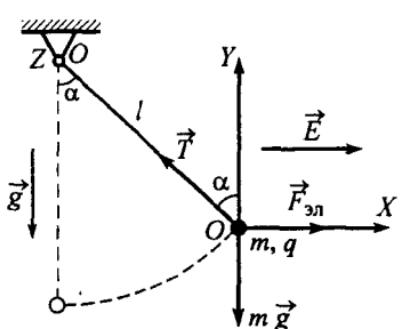


Рис. 12.38

• Решение. На заряженный шарик, помещенный в электрическое поле напряженностью \vec{E} , будут действовать три силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} и сила $\vec{F}_{\text{эл}}$, обусловленная наличием постоянного электрического поля, причем, так как заряд шарика $q > 0$, то $\vec{F}_{\text{эл}}$ будет направлена вдоль силовых линий поля (рис. 12.38).

Под действием этих трех сил шарик будет отклонять нить от вертикального положения до тех пор, пока все силы не уравновесят друг друга. Запишем условие равновесия шарика, например, через равенство нулю моментов сил, действующих на него относительно оси OZ , проходящей через точку подвеса O перпендикулярно плоскости рисунка:

$$\Sigma M_Z = m g l \sin \alpha - F_{\text{эл}} l \cos \alpha = 0,$$

где l – длина нити, сила $F_{\text{эл}} = q E$.

Следовательно,

$$m g \sin \alpha = q E \cos \alpha.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q E}{m g}; \quad \alpha = \arctg \frac{q E}{m g} = 45^\circ.$$

Условия равновесия шарика можно было записать через равенство нулю проекций сил, действующих на шарик, на оси OX и OY системы координат:

$$\Sigma F_x = F_{x\text{пл}} - T \sin \alpha = 0, \quad \Sigma F_y = T \cos \alpha - m g = 0.$$

Решение этой системы уравнений также приводит к ответу.

- Ответ: $\alpha = \arctg \frac{q E}{m g} = 45^\circ$.

12.18. Заряженный шарик, подвешенный на невесомой диэлектрической нити, находится во внешнем электрическом поле, силовые линии которого горизонтальны. При этом нить образует угол $\alpha = 45^\circ$ с вертикалью. Насколько изменится угол отклонения нити при уменьшении заряда шарика на $\eta = 10\%$?

12.19. Шарик, подвешенный на невесомой непроводящей пружине жесткостью k , помещен в однородное электрическое поле, векторы напряженности \vec{E} которого направлены вертикально вверх. Насколько изменится длина пружины, если шарику сообщить положительный заряд q ?

12.20. Два одинаковых точечных заряда q расположены на расстоянии $2a$ друг от друга. Определить максимальное значение величины напряженности электрического поля этой системы зарядов на прямой, перпендикулярной линии, соединяющей заряды и проходящей через ее середину.

- Решение. Рассмотрим произвольную точку O на прямой, перпендикулярной линии, соединяющей заряды и проходящей через ее середину (рис. 12.39).

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Напряженность \vec{E} электрического поля в данной точке может быть найдена как геометрическая сумма напряженностей \vec{E}_1 и \vec{E}_2 полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 полей, создаваемых первым и вторым зарядами, будут равны по величине

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2},$$

где r – расстояние от каждого из зарядов до точки O .

Векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 направлены вдоль прямых, соединяющих заряды с точкой O , от зарядов, если $q > 0$, и к зарядам, если $q < 0$. Рассмотрим случай $q > 0$.

В силу симметрии расположения зарядов относительно прямой OO' абсолютное значение вектора \vec{E}

$$E = 2 E_1 \cos \alpha = \frac{q \cos \alpha}{2 \pi \epsilon_0 r^2}.$$

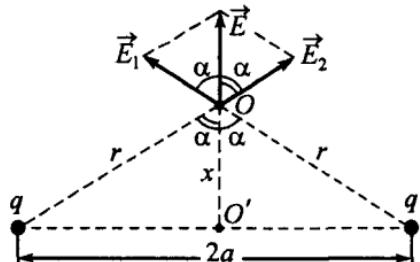


Рис. 12.39

Обозначим расстояние OO' через x . Тогда расстояние r и значение $\cos \alpha$ можно представить в виде

$$r = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Следовательно,

$$E = E(x) = \frac{q x}{2\pi \epsilon_0 (x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Так как числитель функции $E = E(x)$ линеен относительно x , а знаменатель растет как x^2 , то это означает, что при небольших значениях x функция $E(x)$ растет, достигая максимального значения при некотором x_0 . При $x > x_0$ функция $E(x)$ убывает. Следовательно, в некоторой точке на прямой OO' функция $E(x)$ принимает максимальное значение.

Исследуем функцию $E = E(x)$ на экстремум:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \frac{(x^2 + a^2)^{3/2} - 3/2 x (x^2 + a^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^3} = 0.$$

Отсюда найдем значение расстояния x_0 , при котором напряженность электрического поля в точке O будет наибольшей:

$$(x_0^2 + a^2) - 3x_0^2 = 0, \quad \text{или} \quad x_0 = a/\sqrt{2}.$$

Следовательно, максимальное значение напряженности электрического поля на рассматриваемой прямой

$$E_{\max} = E(x_0) = \frac{q}{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Если величина каждого заряда $q < 0$, то решение задачи ничем не отличается от рассмотренного выше и приводит к тому же результату. Читатель может убедиться в этом, самостоятельно решив задачу для случая $q < 0$.

- Ответ: $E_{\max} = \frac{q}{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2}$.

12.21. Два одинаковых по величине разноименных заряда величиной $q = 18$ нКл каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 2$ м. Определить напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника.

12.22. В углах квадрата со стороной a расположены четыре одинаковых точечных заряда q . Определить максимальное значение величины напряженности электрического поля E_{\max} на оси, проходящей через середину квадрата перпендикулярно его плоскости.

12.23. На тонком кольце радиусом R равномерно распределен заряд Q . Определить силу, действующую на точечный заряд q , находящийся на оси кольца на расстоянии h от его центра. Чему равна напряженность электрического поля в этой точке?

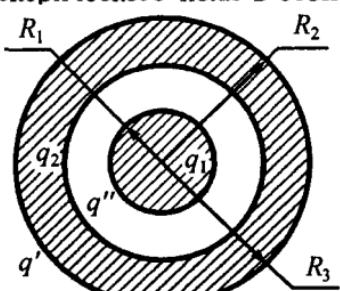


Рис. 12.40

12.24. Металлический шар радиусом $R_1 = 10$ см помещен в центр толстостенной металлической сферы с внутренним радиусом $R_2 = 20$ см и наружным радиусом $R_3 = 30$ см (рис. 12.40). Заряд шара $q_1 = 10^{-10}$ Кл, заряд сферы $q_2 = -2 \cdot 10^{-10}$ Кл. Найти и графически изобразить зависимость величины напряженности электрического поля E от расстояния r до центра шара.

- **Решение.** Электрическое поле заряда q_1 приведет к появлению индуцированных зарядов q' и q'' на внутренней и внешней поверхностях сферической оболочки, причем, как следует из закона сохранения заряда, $q' + q'' = 0$.

Сферическая симметрия всех тел системы позволяет предполагать равномерное распределение зарядов на соответствующих поверхностях и строгую радиальность силовых линий.

Так как силовые линии напряженности электрического поля терпят разрыв на любой проводящей поверхности, то найдем величины напряженности поля в четырех разных областях – в точках, где расстояние r от центра шара ограничено соответствующими радиусами окружностей: $0 \leq r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$ и $r > R_3$.

В области $0 \leq r < R_1$ электрическое поле равно нулю, так как шар радиусом R_1 изготовлен из металла:

$$E(0 \leq r < R_1) = 0. \quad (1)$$

В области $R_1 < r < R_2$ результирующее электрическое поле будет равно полю, создаваемому только зарядом q_1 , находящимся на шаре, так как внутри сферы электрическое поле, создаваемое зарядами, находящимися на ее поверхности, равно нулю:

$$E(R_1 < r < R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2)$$

В области $R_2 < r < R_3$ электрическое поле равно нулю, так как сфера также изготовлена из металла:

$$E(R_2 < r < R_3) = 0. \quad (3)$$

В области $r > R_3$ результирующее поле будет создано всеми зарядами системы. В силу симметрии векторы напряженности полей всех зарядов в любой точке будут лежать на одной прямой. Поэтому, следуя принципу суперпозиции электрических полей, получим

$$E(r > R_3) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

или, учитывая закон сохранения заряда ($q' + q'' = 0$):

$$E(r > R_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (4)$$

Вблизи границ областей (при $r \rightarrow R_1$, $r \rightarrow R_2$, $r \rightarrow R_3$) значения полей найдем из формул (2) и (4):

$$E(r = R_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \approx 90 \text{ В/м};$$

$$E(r = R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \approx 22,5 \text{ В/м};$$

$$E(r = R_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3^2} \approx -10 \text{ В/м}.$$

График зависимости $E(r)$ будет иметь вид, представленный на рис. 12.41: в первой и третьей из рассматриваемых областей, электрическое поле равно нулю, а во второй и четвертой – уменьшается по абсолютной величине обратно пропорционально квадрату расстояния от центра шара.

- **Ответ:** $E(0 \leq r < R_1) = 0$; $E(R_1 < r < R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$; $E(R_2 < r < R_3) = 0$; $E(r > R_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$;

$$E(r = R_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \approx 90 \text{ В/м}, E(r = R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \approx 22,5 \text{ В/м},$$

$$E(r = R_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3^2} \approx -10 \text{ В/м}.$$

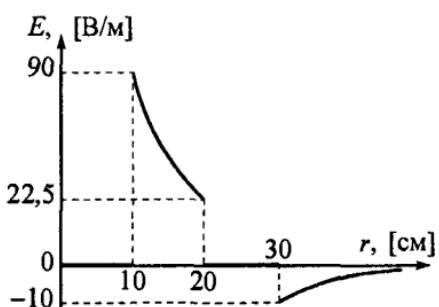


Рис. 12.41

12.25. Подсчитать среднюю плотность электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля вблизи поверхности Земли равна $E_0 = 100$ В/м, а на высоте $h = 1,5$ км — $E = 25$ В/м. Радиус Земли $R \gg h$.

12.26. Заряд Q равномерно распределен по объему шара радиусом R из непроводящего материала. Найти напряженность электрического поля E на расстоянии r от его центра. Построить график зависимости E от r . Диэлектрическая проницаемость материала шара $\epsilon = 1$.

12.27. Три тонкие металлические пластины, имеющие заряды q , $3q$ и $2q$, расположены параллельно друг другу так, как показано на рис. 12.42, а. Площадь каждой пластины S . Найти силу, действующую на среднюю пластину. Электрическое поле, создаваемое каждой пластиной, считать однородным.

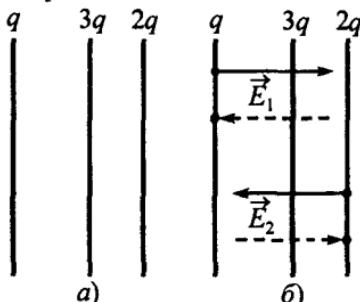


Рис. 12.42

• *Решение.* Сила, действующая на среднюю пластину с зарядом $3q$, может быть определена по формуле

$$\vec{F} = 3q\vec{E},$$

где \vec{E} — напряженность электрического поля в месте расположения данной пластины, созданного крайними пластинами.

Если $q > 0$, т.е. крайние пластины заряжены положительно, то векторы напряженности электрических полей, создаваемых ними, будут направлены так, как показано на рис. 12.42, б. По условию задачи эти поля можно считать однородными, поэтому

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2S\epsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = \frac{2q}{2S\epsilon_0}.$$

Следовательно, средняя пластина будет находиться в электрическом поле напряженностью

$$E = E_2 - E_1 = \frac{q}{2S\epsilon_0}$$

и на нее будет действовать сила

$$F = 3qE = \frac{3q^2}{2S\epsilon_0}.$$

Если $q < 0$, то векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 будут направлены так, как показано на рис. 12.42, б штриховыми линиями. При этом величина результирующего поля и искомая сила F не изменятся.

• *Ответ:* $F = \frac{3q^2}{2S\epsilon_0}$.

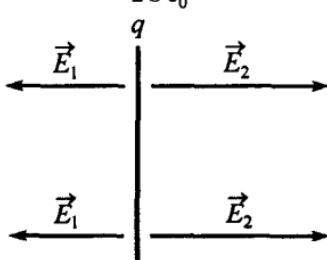


Рис. 12.43

12.28. Заряженная пластина помещена в однородное электрическое поле, вектор напряженности которого перпендикулярен ее поверхности. Напряженности полей слева и справа от пластины равны E_1 и E_2 соответственно (рис. 12.43). Найти силу, действующую на пластину, если ее заряд равен q . Поле, создаваемое пластиной, считать однородным.

12.29. Равномерно заряженные тонкие бесконечно большие пластины находятся на небольшом расстоянии друг от друга (рис. 12.44). Найти поверхностные плотности их зарядов σ_1 и σ_2 , если напряженность поля в точке A равна $E_1 = 3 \text{ кВ/м}$, а в точке $B - E_2 = 1 \text{ кВ/м}$.

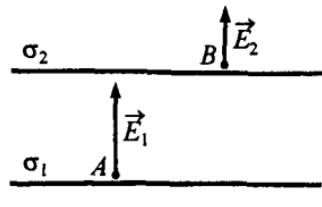


Рис. 12.44

Электрический потенциал

12.30. В вершинах квадрата со стороной l находятся четыре заряда величиной q каждый. Чему равен потенциал электрического поля в центре квадрата?

• **Решение.** Исходя из принципа суперпозиции потенциала электрического поля, потенциал в точке O (рис. 12.45) будет равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4.$$

Так как заряды $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$ на расстояния от каждого из них до точки O равны $r = l/\sqrt{2}$, то

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 l}.$$

Следовательно, потенциал поля в центре квадрата

$$\Phi = 4\Phi_1 = \frac{\sqrt{2}q}{\pi\epsilon_0 l}.$$

• **Ответ:** $\Phi = \frac{\sqrt{2}q}{\pi\epsilon_0 l}$.

12.31. Шесть точечных зарядов $q_1 = 100 \text{ нКл}$, $q_2 = 10 \text{ нКл}$, $q_3 = 1 \text{ нКл}$, $q_4 = -10 \text{ нКл}$, $q_5 = -1 \text{ нКл}$, $q_6 = -10 \text{ нКл}$ находятся в вершинах правильного шестиугольника со стороной $l = 2 \text{ см}$. Чему равен потенциал электрического поля этой системы зарядов в геометрическом центре шестиугольника?

12.32. Четыре заряда величиной $q = 10^{-9} \text{ Кл}$ каждый находятся в углах квадрата со стороной $l = 10 \text{ см}$. Найти разность потенциалов в поле этих зарядов между центром квадрата и серединой одной из его сторон.

12.33. Две концентрические металлические сферы радиусами $R_1 = 15 \text{ см}$ и $R_2 = 30 \text{ см}$ имеют заряды соответственно $q_1 = -2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ и $q_2 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$. Вычислить потенциал электрического поля в точках 1, 2 и 3, удаленных от центра сфер на расстояния $l_1 = 10 \text{ см}$, $l_2 = 20 \text{ см}$ и $l_3 = 40 \text{ см}$ (рис. 12.46). Изобразить графически зависимость потенциала от расстояния до центра сфер.

• **Решение.** Потенциал так же, как и напряженность электрического поля, подчиняется принципу суперпозиции, т.е. потенциал поля системы зарядов в данной точке может быть найден как алгебраическая сумма потенциалов полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

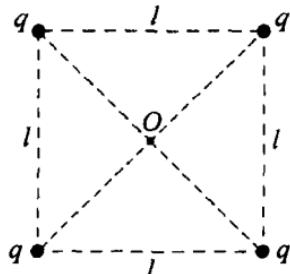


Рис. 12.45

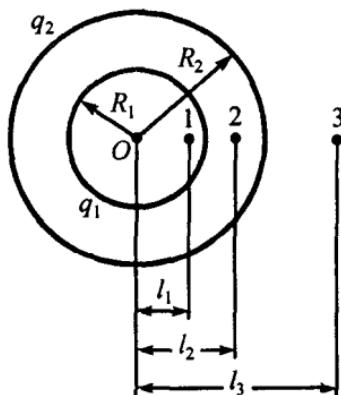


Рис. 12.46

Так как в нашем случае система зарядов обладает сферической симметрией, то потенциал в любой точке на равных расстояниях от центра сфер будет одинаков.

Потенциал поля, создаваемого равномерно заряженной сферой радиусом R и зарядом Q , внутри нее равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}, \quad (1)$$

а вне, на расстоянии r от ее центра

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (2)$$

В области $0 \leq r < R_1$ потенциал будет равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых обеими сферами во внутренних областях. Используя (1), получим

$$\varphi (0 \leq r < R_1) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2}. \quad (3)$$

В области $R_1 \leq r < R_2$ потенциал поля внутренней сферы будет изменяться по закону (2), а внешней – (1):

$$\varphi (R_1 \leq r < R_2) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2}. \quad (4)$$

В области $r \geq R_2$ потенциалы полей обеих сфер будут изменяться по закону (2):

$$\varphi (r \geq R_2) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (5)$$

На границах областей (при $r = R_1$ и $r = R_2$) значение потенциала можно найти, например, по формулам (4) – (5), положив $r = R_1$ и $r = R_2$ соответственно:

$$\varphi (r = R_1) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2} = 0; \quad \varphi (r = R_2) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2} \approx 600 \text{ В.}$$

Точки 1, 2 и 3 лежат в областях $0 \leq r < R_1$, $R_1 \leq r < R_2$, $r \geq R_2$ соответственно. Поэтому для точки, удаленной от центра сфер на расстояние l_1 , из формулы (3) получим

$$\varphi (r = l_1) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2} = 0.$$

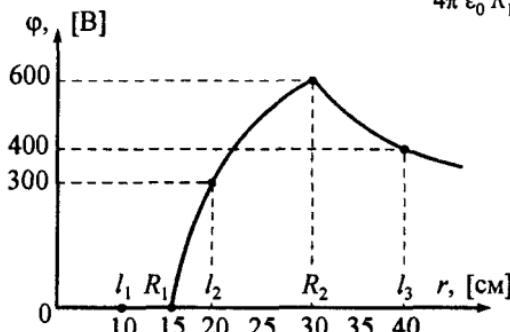


Рис. 12.47

В точке, соответствующей расстоянию от центра сфер равном l_2 , потенциал найдем по формуле (4), положив $r = l_2$:

$$\varphi (r = l_2) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 l_2} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2} \approx 300 \text{ В.}$$

Наконец, в точке на расстоянии l_3 от центра сфер, потенциал определим по формуле (5), положив $r = l_3$:

$$\varphi (r = l_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 l_3} \approx 450 \text{ В.}$$

График зависимости $\varphi (r)$ представлен на рис. 12.47.

• Ответ: $\varphi (r = l_1) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2} = 0$; $\varphi (r = l_2) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 l_2} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2} \approx 300 \text{ В.}$

$$\varphi (r = l_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 l_3} \approx 450 \text{ В.}$$

12.34. На расстоянии $a = 5$ см от поверхности металлического шара потенциал равен $\varphi_1 = 1,2$ кВ, а на расстоянии $b = 10$ см – $\varphi_2 = 900$ В. Определить радиус шара, его заряд и потенциал на поверхности.

12.35. Три проводящие концентрические сферы радиусами r , $2r$ и $3r$ имеют заряды соответственно q , $2q$ и $-3q$. Определить потенциал каждой сферы.

12.36. Два металлических шара, находящиеся на большом расстоянии, один диаметром $d_1 = 10$ см и зарядом $q_1 = 6 \cdot 10^{-10}$ Кл, другой – $d_2 = 30$ см и $q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$ Кл, соединяются длинным тонким проводником. Какой заряд переместится по нему?

- *Решение.* Так как по условию задачи шары находятся далеко друг от друга, то будем полагать, что до соединения их проводником они не взаимодействуют друг с другом, а после соединения – заряды на поверхностях каждого из шаров распределятся равномерно.

После соединения шаров проводником заряды q_1 и q_2 перераспределятся между ними таким образом, чтобы потенциалы шаров стали одинаковыми.

Потенциал на поверхности шара радиусом R с зарядом Q

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Следовательно, потенциалы шаров радиусами $R_1 = \frac{1}{2}d_1$ и $R_2 = \frac{1}{2}d_2$ после их соединения

$$\phi'_1 = \frac{2q'_1}{4\pi\epsilon_0 d_1}; \quad \phi'_2 = \frac{2q'_2}{4\pi\epsilon_0 d_2}; \quad \phi'_1 = \phi'_2,$$

где q'_1 , q'_2 – заряды, которые будут находиться на шарах после их соединения.

На основании закона сохранения заряда получим

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2; \quad q'_2 = q_1 + q_2 - q'_1.$$

Следовательно,

$$\frac{2q'_1}{4\pi\epsilon_0 d_1} = \frac{2(q_1 + q_2 - q'_1)}{4\pi\epsilon_0 d_2}; \quad q'_1 = \frac{(q_1 + q_2)d_1}{d_1 + d_2}.$$

Если первоначально на этом шаре был заряд q_1 , а стал q'_1 , то это означает, что по проводнику переместился заряд

$$\Delta q = |q_1 - q'_1| = q_1 - \frac{(q_1 + q_2)d_1}{d_1 + d_2} = \frac{q_1d_2 - q_2d_1}{d_1 + d_2} = 9,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл.}$$

- *Ответ:* $\Delta q = \frac{q_1d_2 - q_2d_1}{d_1 + d_2} = 9,5 \cdot 10^{-10}$ Кл.

12.37. Два одинаковых заряженных шарика притягиваются друг к другу с некоторой силой. Шарики привели в соприкосновение и разнесли на расстояние в $n = 2$ раза большее, чем прежде. При этом сила взаимодействия уменьшилась в $m = 32$ раза. Найти величину заряда первого шарика до соприкосновения, если второй имел заряд $q_2 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

12.38. Два металлических шара радиусами R_1 и R_2 расположены так, что расстояние между ними во много раз больше радиуса большего из шаров. На шар радиусом R_1 помещен заряд Q . Найти заряды на шарах после соединения их проводником, если второй шар не был заряжен?

12.39. Из трех концентрических тонких металлических сфер радиусами R_1 , R_2 и R_3 крайние заземлены (рис. 12.48), а средней соображен заряд q . Найти зависимость потенциала электрического поля от расстояния до центра сфер. Сфера находятся в вакууме.

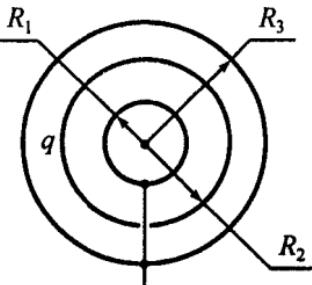


Рис. 12.48

• **Решение.** При сообщении средней сфере заряда q на поверхностях внутренней и внешней сфер будут индуцированы заряды q_1 и q_3 .

Заземление любой поверхности приводит к тому, что на ней устанавливается потенциал, равный нулю.

На поверхности сферы радиусом R_1 потенциал будет равен

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 R_3} = 0,$$

а на поверхности сферы радиусом R_3 :

$$\varphi_3 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_3} + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 R_3} = 0,$$

или

$$\frac{q_1}{R_1} + \frac{q}{R_2} + \frac{q_3}{R_3} = 0, \quad \frac{q_1}{R_3} + \frac{q}{R_2} + \frac{q_3}{R_3} = 0.$$

Решив эту систему уравнений относительно q_1 и q_3 , получим

$$q_1 = q \frac{R_1(R_2 - R_3)}{R_2(R_3 - R_1)}, \quad q_2 = q \frac{R_3(R_1 - R_2)}{R_2(R_3 - R_1)}.$$

Учитывая, что потенциал внутри сферы постоянен и равен потенциальну на ее поверхности, а вне сферы изменяется так же, как у точечного заряда, помещенного в центр сферы, найдем потенциалы электрических полей во всех точках пространства:

а) при $0 \leq r < R_1$:

$$\varphi(0 \leq r < R_1) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 R_3} = 0;$$

б) при $R_1 \leq r < R_2$:

$$\varphi(R_1 \leq r < R_2) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 R_3} = \frac{q(r - R_1)(R_3 - R_2)}{4\pi \epsilon_0 R_2(R_3 - R_1)r},$$

в) при $R_2 \leq r < R_3$:

$$\varphi(R_2 \leq r < R_3) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 R_3} = \frac{q(R_3 - r)(R_2 - R_1)}{4\pi \epsilon_0 R_2(R_3 - R_1)r};$$

г) при $r \geq R_3$:

$$\varphi(r \geq R_3) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 r} = 0.$$

• **Ответ:** $\varphi(0 \leq r < R_1) = 0$; $\varphi(R_1 \leq r < R_2) = \frac{q(r - R_1)(R_3 - R_2)}{4\pi \epsilon_0 R_2(R_3 - R_1)r}$;

$$\varphi(R_2 \leq r < R_3) = \frac{q(R_3 - r)(R_2 - R_1)}{4\pi \epsilon_0 R_2(R_3 - R_1)r}; \quad \varphi(r \geq R_3) = 0.$$

12.40. Металлический шар радиусом R_1 , заряженный до потенциала φ_0 , окружает концентрической сферической оболочкой радиусом R_2 . Чему станет равен потенциал шара, если заземлить внешнюю оболочку?

12.41. Заряженный металлический шарик окружают незаряженной металлической сферой, центр которой совпадает с центром шарика. Радиус шарика R_1 , сферы — R_2 . Определить зависимость напряженности электрического поля E и потенциала φ от расстояния до центра шарика в случае, когда сфера заземлена. Заряд шарика q .

Электроемкость. Конденсаторы

12.42. В незаряженный плоский воздушный конденсатор параллельно его обкладкам вносят тонкую металлическую пластину с зарядом q . Площади обкладок конденсатора и внесенной пластины равны S , расстояние между обкладками конденсатора d . Как зависит разность потенциалов на

обкладках конденсатора от расстояния x между одной из обкладок и металлической пластины?

• Решение. Электрическое поле, создаваемое вблизи заряженной плоской пластины, будет однородным и равным по величине

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2S\epsilon_0},$$

где $\sigma = q/S$ – поверхностная плотность заряда на пластине.

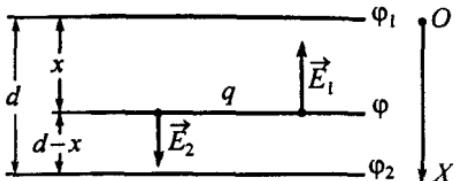


Рис. 12.49

Тонкая пластина с зарядом q создаст по обе стороны от поверхностей однородные поля E_1 и E_2 (рис. 12.49), причем

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{2S\epsilon_0},$$

что приведет к появлению индуцированных зарядов на обкладках конденсатора. Однако в силу закона сохранения заряда суммарный заряд каждой пластины останется равным нулю, а значит, результирующее поле, создаваемое индуцированным зарядами, также будет равным нулю. Таким образом, между обкладками конденсатора будет только поле, создаваемое внесенной пластиной.

Если потенциал одной из обкладок обозначить через Φ_1 , а другой – через Φ_2 , то разности потенциалов между каждой из них и внесенной пластиной будут равны

$$\Phi - \Phi_1 = E_1 x = \frac{qx}{2S\epsilon_0}, \quad \Phi - \Phi_2 = E_2 (d - x) = \frac{q(d - x)}{2S\epsilon_0},$$

где Φ – потенциал пластины; x и $(d - x)$ – расстояния между пластиной и обкладками конденсатора.

Вычитая друг из друга два последних соотношения, получаем

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{q(d - x)}{2S\epsilon_0} - \frac{qx}{2S\epsilon_0} = \frac{q}{2S\epsilon_0} (d - 2x).$$

Очевидно, что в случае $x = 0$, т.е. когда пластина располагается на одной из обкладок, мы приходим к известной формуле:

$$\Delta\Phi = \frac{qd}{2S\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} d = Ed,$$

выражающей разность потенциалов между двумя произвольными точками, находящимися на расстоянии d в однородном электрическом поле напряженностью E , создаваемом заряженной пластиной с поверхностной плотностью заряда $\sigma = q/S$.

• Ответ: $\Delta\Phi = \frac{q}{2S\epsilon_0} (d - 2x)$.

12.43. Чему равна разность потенциалов между крайними пластинами в системе, состоящей из трех параллельных бесконечных пластин, заряженных одноименными зарядами с поверхностной плотностью σ_1 , σ_2 , σ_3 ? Средняя пластина находится на расстоянии h_1 от первой и на расстоянии h_2 от третьей пластины.

12.44. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора, одна из которых заземлена, равна $\Delta\Phi = 100$ В. В воздушный зазор шириной $d = 4$ см между пластинами вдвигается незаряженная металлическая пластина на расстоянии $l = 3$ см от заземленной пластины. Определить потенциал внутренней пластины и напряженность электрического поля по обе стороны от нее.

12.45. Между соединенными проводником обкладками плоского незаряженного конденсатора помещена металлическая пластина, делящая расстояние между обкладками в отношении 1:3. Какой величины заряд пропечет по проводнику, если на внутреннюю пластину поместить заряд Q ?

• Решение. Заряд Q пластины создаст по обе стороны от нее электрическое поле напряженностью \vec{E} . Так как рассматривается плоский конденсатор, то расстояние между двумя любыми попарно взятыми пластинами будет много меньше их линейных размеров, поэтому поля между ними можно считать однородными.

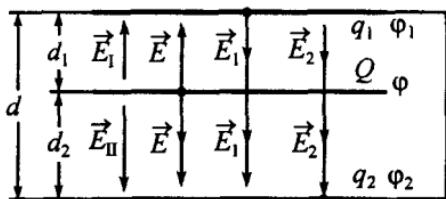


Рис. 12.50

ними. Так как в нашем случае обкладки закорочены, то заряды будут перемещаться с одной обкладки на другую до тех пор, пока потенциалы на них не станут равными, в результате чего на обкладках возникнут заряды q_1 и q_2 (рис. 12.50), причем $q_1 + q_2 = 0$.

Пусть для определенности $Q > 0$, $q_1 = q > 0$, $q_2 = -q$. Тогда векторы напряженности электрического поля \vec{E} , создаваемого зарядами средней пластины, векторы \vec{E}_1 поля, создаваемого обкладкой с зарядом q_1 , и векторы \vec{E}_2 поля обкладки с зарядом q_2 будут направлены перпендикулярно пластинам так, как показано на рис. 12.50. Следовательно, напряженность электрического поля между пластиной и обкладкой, находящейся на расстоянии $d_1 = \frac{1}{4}d$ (где d – расстояние между обкладками конденсатора) от нее, будет равна

$$E_1 = E - E_1 - E_2,$$

где $E = Q/(2S\epsilon_0)$, $E_1 = E_2 = q/(2S\epsilon_0)$ – значения напряженностей электрических полей, создаваемых средней и крайними пластинами соответственно; S – площадь пластины и каждой из обкладок. Следовательно,

$$E_1 = \frac{Q - q - q}{2S\epsilon_0} = \frac{Q - 2q}{2S\epsilon_0}.$$

Разность потенциалов между рассматриваемыми пластинами

$$\varphi - \varphi_1 = E_1 d_1 = \frac{Q - 2q}{2S\epsilon_0} \frac{d}{4} = \frac{(Q - 2q)d}{8S\epsilon_0},$$

где φ_1 , φ – потенциалы обкладки с зарядом q и пластины соответственно.

Аналогично для области между пластиной и второй обкладкой конденсатора с зарядом q_2 :

$$E_{II} = E + E_1 + E_2 = \frac{Q + q + q}{2S\epsilon_0} = \frac{Q + 2q}{2S\epsilon_0}; \quad \varphi - \varphi_2 = E_{II} d_2 = \frac{Q + 2q}{2S\epsilon_0} \frac{3d}{4} = \frac{3(Q + 2q)d}{8S\epsilon_0}.$$

Так как обкладки соединены проводником, то $\varphi_1 = \varphi_2$. Следовательно,

$$\frac{(Q - 2q)d}{8S\epsilon_0} = \frac{3(Q + 2q)d}{8S\epsilon_0}; \quad Q - 2q = 3(Q + 2q).$$

Отсюда находим величину заряда, наведенного на каждой из обкладок:

$$q = q_1 = -q_2 = -\frac{1}{4}Q.$$

Если первоначально на обкладках заряда не было, а после того как между ними была помещена заряженная пластина, на каждой из них возникли разноименные заряды $\pm q$, то это означает, что заряд, равный $|q|$, перетек по проводнику с одной обкладки на другую.

Электрическое поле \vec{E} приведет к появлению на обкладках конденсатора индуцированных зарядов, причем, как следует из закона сохранения электрического заряда, суммарный заряд на обеих обкладках конденсатора не изменится, т.е. останется равным нулю. Как следует из решения задачи №12.42, в случае если обкладки конденсатора не соединены проводником, то наличие заряженной пластины приведет к возникновению разности потенциалов между

При этом обкладка, расположенная ближе к пластине, приобрела заряд противоположный по знаку заряду пластины.

• Ответ: $|q| = \frac{1}{4}Q$.

12.46. Две одинаковые параллельно расположенные и закороченные проводником пластины находятся друг от друга на расстоянии d , малом по сравнению с их линейными размерами. Такая же пластина с зарядом Q находится между ними на расстоянии a от одной из них. Какой заряд протечет по закорачивающему проводнику, если заряженную пластину вынуть?

12.47. Между пластинами замкнутого плоского конденсатора находится заряженная пластина такого же размера, что и обкладки конденсатора. Расстояние между обкладками конденсатора равно d . Первоначально заряженная пластина находится на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от одной из обкладок. Какой заряд протечет по проводнику, замыкающему пластины конденсатора, при перемещении заряженной пластины в новое положение на расстояние $\frac{1}{3}d$ от другой из обкладок? Заряд пластины равен Q .

12.48. Расстояние между обкладками плоского закороченного проводником конденсатора равно d . Между обкладками помещают металлическую плоскопараллельную пластину толщиной b и зарядом Q на расстоянии a от одной из обкладок. Определить заряды на каждой из сторон пластины.

• Решение. Заряд Q пластины создаст по обе стороны от нее электрическое поле напряженностью \vec{E} , которое приведет к появлению индуцированных зарядов q_1 и q_2 на обкладках конденсатора, причем $q_1 = -q_2$ (см. решение задачи №12.45).

Пусть $Q > 0$, $q_1 = q > 0$, $q_2 = -q$. Тогда напряженность электрического поля в зазоре шириной a (рис. 12.51) равна

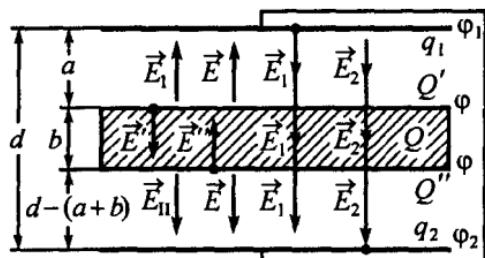


Рис. 12.51

$$E_1 = E - E_1 - E_2 = \frac{Q - 2q}{2S\epsilon_0},$$

а в зазоре шириной $[d - (a + b)]$ –

$$E_{II} = E + E_1 + E_2 = \frac{Q + 2q}{2S\epsilon_0}$$

Так как потенциалы φ_1 и φ_2 равны между собой (обкладки закорочены), то разности потенциалов между пластиной и обкладками также равны друг другу:

$$\varphi - \varphi_1 = \varphi - \varphi_2, \quad \text{или} \quad E_1 a = E_{II} [d - (a + b)].$$

Следовательно,

$$(Q - 2q)a = (Q + 2q)[d - (a + b)].$$

Отсюда находим

$$q = q_1 = -q_2 = Q \frac{2a + b - d}{2(d - b)}.$$

Внутри металлической пластины напряженность \vec{E}_0 электрического поля равна нулю. С другой стороны, можно записать, что она равна

$$\vec{E}_0 = \vec{E}' + \vec{E}'' + \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где \vec{E} , \vec{E}'' – напряженности полей, создаваемых зарядами Q' и Q'' находящимися на противоположных поверхностях пластины, причем $Q' + Q'' = Q$.

Напряженности \vec{E} , \vec{E}'' создаются одноименными зарядами (в нашем предположении – положительными), поэтому направлены навстречу друг другу. Следовательно,

$$E_0 = 0 = E' - E'' + E_1 + E_2, \quad \text{или} \quad 0 = \frac{Q' - Q'' + q + q}{2S\epsilon_0}.$$

Решив систему уравнений

$$Q' + Q'' = Q, \quad Q' - Q'' + 2q = 0,$$

получим

$$Q' = \frac{Q - 2q}{2} = Q \frac{d - b - a}{d - b}; \quad Q'' = Q - Q' = Q \frac{a}{d - b}.$$

• Ответ: $Q' = Q \frac{d - b - a}{d - b}$; $Q'' = Q \frac{a}{d - b}$.

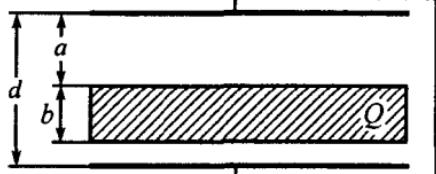
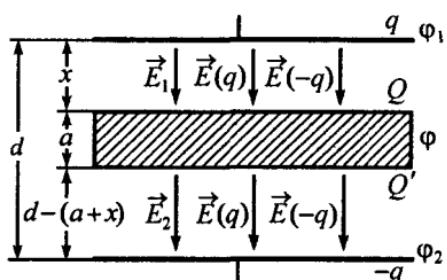


Рис. 12.52

12.49. Расстояние между обкладками плоского закороченного проводником конденсатора равно d . Между обкладками на расстоянии a от одной из них находится плоская параллельная им металлическая пластина толщиной b с зарядом Q (рис. 12.52). Какой заряд протечет по проводнику, если заряд на пластине увеличить вдвое?

12.50. Расстояние между обкладками плоского закороченного проводником конденсатора равно d . Между обкладками на расстоянии a от одной из них находится плоская параллельная им металлическая пластина толщиной b с зарядом Q (рис. 12.52). Какой заряд протечет по проводнику, если указанную обкладку переместить на расстояние a и совместить с пластиной?

12.51. Между обкладками плоского воздушного конденсатора параллельно его пластинам помещается металлическая пластина толщиной a . Размеры пластины совпадают с размерами обкладок, площадь которых равна S , а расстояние между ними – d . Определить емкость получившегося конденсатора.



• Решение. Для определения емкости получившегося конденсатора поместим на его обкладки равные по величине разноименные заряды q и $(-q)$, как показано на рис. 12.53, и емкость определим по формуле

$$C = \frac{q}{\Delta\phi},$$

где $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ – разность потенциалов между обкладками.

Заряды на обкладках конденсатора будут индуцировать на сторонах незаряженной металлической пластины заряды Q и Q' , противоположные по знаку и равные по величине.

Пусть пластина помещена на произвольном расстоянии x от одной из обкладок, тогда расстояние до другой обкладки будет равно $[d - (a + x)]$.

Напряженность электрического поля в воздушном зазоре шириной x будет равна геометрической сумме напряженностей $\vec{E}(q)$, $\vec{E}(-q)$ полей, создаваемых зарядами q и $(-q)$, и $\vec{E}(Q)$, $\vec{E}(Q')$ полей, создаваемых индуцированными зарядами Q и Q' :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}(q) + \vec{E}(-q) + \vec{E}(Q) + \vec{E}(Q').$$

Так как $Q = -Q'$, то

$$\vec{E}(Q) = -\vec{E}(Q'); \quad \vec{E}_1 = \vec{E}(q) + \vec{E}(-q).$$

Векторы напряженностей $\vec{E}(q)$ и $\vec{E}(-q)$ между обкладками конденсатора направлены в одну сторону. Следовательно,

$$E_1 = E(q) + E(-q) = \frac{q}{2\epsilon_0 S} + \frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{q}{\epsilon_0 S}.$$

Так как электрическое поле внутри конденсатора однородно, то разность потенциалов между обкладкой с зарядом q и пластиной

$$\Phi_1 - \varphi = E_1 x = \frac{qx}{\epsilon_0 S}, \quad (1)$$

где φ – потенциал пластины.

Аналогично, для воздушного зазора шириной $[d - (a + x)]$:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}(q) + \vec{E}(-q) + \vec{E}(Q) + \vec{E}(Q') = \vec{E}(q) + \vec{E}(-q),$$

или

$$E_2 = E(q) + E(-q) = \frac{q}{2\epsilon_0 S} + \frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{q}{\epsilon_0 S}.$$

Разность потенциалов между обкладкой с зарядом $(-q)$ и пластиной

$$\varphi - \Phi_2 = E_2 [d - (a + x)] = \frac{q[d - (a + x)]}{\epsilon_0 S}. \quad (2)$$

Складывая выражения (1) и (2), найдем разность потенциалов между обкладками конденсатора:

$$\Delta\varphi = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{q}{\epsilon_0 S} [d - (a + x) + x] = \frac{q(d - a)}{\epsilon_0 S}.$$

Следовательно, емкость получившегося конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon_0 S}{d - a}. \quad (3)$$

Как видим, емкость получившегося конденсатора не зависит от места расположения внесенной пластины и поэтому для определения емкости системы пластины можно располагать на каком угодно расстоянии x . Если ее расположить непосредственно на одной из обкладок, то получим новый конденсатор с расстоянием между обкладками равном $(d - a)$ и емкостью (3).

Рассмотрим систему, состоящую из двух последовательно соединенных конденсаторов с одинаковыми пластинами площадью S и расстояниями между обкладками x и $[d - (a + x)]$ соответственно. Их емкости, очевидно, равны

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{x} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d - (a + x)},$$

а емкость системы

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 S}{d - a}.$$

Следовательно, можно сделать еще один вывод: если между обкладками конденсатора поместить металлическую пластину, то образованную систему можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора. Это, очевидно, справедливо также для случаев, когда внутри конденсатора находится несколько пластин.

• Ответ: $C = \frac{\epsilon_0 S}{d - a}$.

12.52. Между обкладками плоского воздушного конденсатора параллельно им расположены две металлические пластины толщиной a каждая. Определить емкость получившегося конденсатора, если площади пластин равны S и их размеры совпадают с размерами обкладок. Расстояние между обкладками конденсатора равно d .

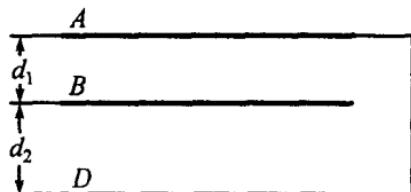


Рис. 12.54

12.54. Между обкладками плоского воздушного конденсатора параллельно его пластинам помещается диэлектрическая пластина толщиной a и проницаемостью ϵ (рис. 12.55). Размеры пластины совпадают с размерами обкладок, площадь которых равна S , а расстояние между ними — d . Определить емкость получившегося конденсатора.

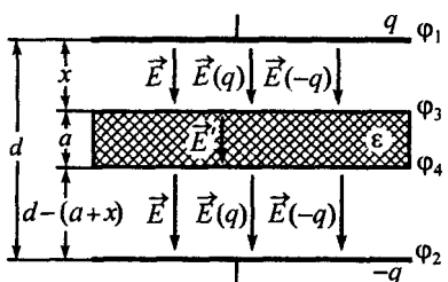


Рис. 12.55

12.53. Конденсатор составлен из трех проводящих пластин площадью S каждая. Расстояния между соседними пластинами d_1 и d_2 много меньше линейных размеров пластин (рис. 12.54). Крайние пластины соединены проводником. Определить емкость конденсатора между пластинами A и B .

Решение. Для определения емкости конденсатора поступим таким же образом, как в случае задачи №12.51. Поместим на обкладки конденсатора равные по величине разноименные заряды $\pm q$, как показано на рис. 12.55. Наличие на обкладках этих зарядов приведет к появлению в воздушном зазоре электрического поля напряженностью

$$\vec{E} = \vec{E}(q) + \vec{E}(-q),$$

или в проекции на направление от положительно заряженной пластины к отрицательно заряженной:

$$E = E(q) + E(-q) = \frac{q}{2S\epsilon_0} + \frac{q}{2S\epsilon_0} = \frac{q}{S\epsilon_0}.$$

Внутри диэлектрика проницаемостью ϵ поле \vec{E}' будет ослаблено в ϵ раз:

$$E' = \frac{E}{\epsilon} = \frac{q}{S\epsilon\epsilon_0}.$$

Так как поля \vec{E} и \vec{E}' созданы заряженными пластинами, расстояние между которыми много меньше линейных размеров пластин, то их можно считать однородными, а разность потенциалов между обкладками определить как

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_4) + (\varphi_4 - \varphi_2),$$

где $\varphi_1 - \varphi_3 = Ex$; $\varphi_3 - \varphi_4 = E'a$; $\varphi_4 - \varphi_2 = E[d - (a + x)]$. Следовательно,

$$\Delta\varphi = Ex + \frac{E}{\epsilon}a + E[d - (a + x)] = E \left\{ \frac{\epsilon(x + d - a - x) + a}{\epsilon} \right\} = \frac{q}{S\epsilon\epsilon_0} \left\{ \epsilon(d - a) + a \right\}.$$

Емкость конденсатора найдем как отношение заряда на обкладках конденсатора к разности потенциалов между ними:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{\epsilon(d - a) + a}.$$

Как и в случае конденсатора с внесенной между его обкладками металлической пластиной, в нашем случае емкость конденсатора не зависит от места расположения диэлектрической пластины, а определяется лишь ее проницаемостью ϵ и толщиной a . Поэтому при определении емкости конденсатора пластину можно расположить на произвольном расстоянии x . Расположив ее на поверхности одной из обкладок, получим систему двух последовательно соединенных конденсаторов емкостями

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d-a} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{a},$$

где C_1 – емкость конденсатора с воздушным зазором шириной $(d-a)$; C_2 – емкость конденсатора, заполненного диэлектриком проницаемостью ϵ и шириной a . Следовательно,

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{\epsilon(d-a) + a}.$$

Мы доказали, что конденсатор с внесенным между его обкладками диэлектриком можно рассматривать как систему двух последовательно соединенных конденсаторов. Этот вывод можно обобщить также на случай, если в конденсатор внесено несколько плоскопараллельных диэлектрических пластин.

• Ответ: $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{\epsilon(d-a) + a}$.

12.55. Пространство между обкладками плоского конденсатора полностью заполнено двумя плоскими слоями диэлектриков проницаемостями ϵ_1 , ϵ_2 и толщинами d_1 , d_2 соответственно. Найти емкость этого конденсатора, если площадь каждой обкладки S .

12.56. Плоский воздушный конденсатор имеет емкость C_0 . Определить емкость того же конденсатора, когда он наполовину погружен в трансформаторное масло так, что пластины перпендикулярны поверхности масла. Относительная диэлектрическая проницаемость масла ϵ .

Параллельное и последовательное соединение конденсаторов

12.57. Определить емкость батареи конденсаторов, представленной на рис. 12.56, а, где $C_1 = 6 \text{ мкФ}$, $C_2 = 9 \text{ мкФ}$, $C_3 = 3 \text{ мкФ}$, $C_4 = 1 \text{ мкФ}$.

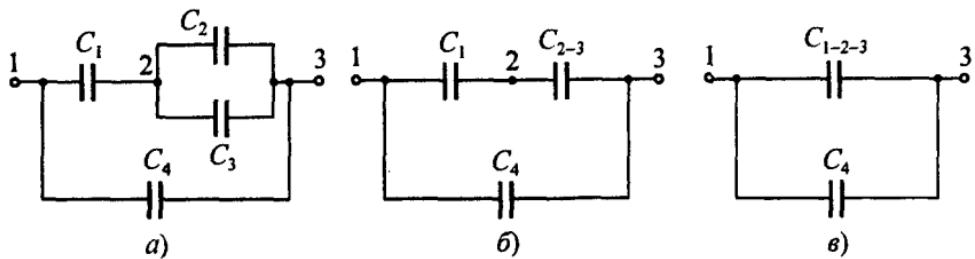


Рис. 12.56

• Решение. Воспользуемся формулами для определения емкости системы параллельно и последовательно соединенных конденсаторов:

$$C_{\text{пар}} = C_1 + C_2 + \dots + C_N; \quad \frac{1}{C_{\text{посл}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N},$$

где C_1, C_2, \dots, C_N – емкости конденсаторов, из которых составлена батарея.

В батарее, представленной на рис. 12.56, а, конденсаторы C_2 и C_3 соединены параллельно. Их общая емкость

$$C_{2-3} = C_2 + C_3.$$

Заменив два конденсатора C_2 и C_3 одним C_{2-3} , получим новую батарею, в которой конденсаторы C_1 и C_{2-3} соединены последовательно (рис. 12.56, б). Их общая емкость

$$\frac{1}{C_{1-2-3}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{2-3}}, \quad \text{или} \quad C_{1-2-3} = \frac{C_1 C_{2-3}}{C_1 + C_{2-3}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Теперь батарею можно представить в виде двух параллельно соединенных конденсаторов — C_{1-2-3} и C_4 (рис. 12.56, в). Следовательно, емкость батареи

$$C_{\text{общ}} = C_{1-2-3} + C_4, \quad \text{или} \quad C_{\text{общ}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} + C_4 = 5 \text{ мкФ}.$$

- Ответ: $C_{\text{общ}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} + C_4 = 5 \text{ мкФ}.$

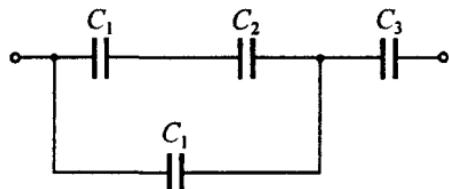


Рис. 12.57

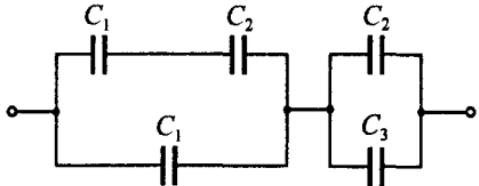
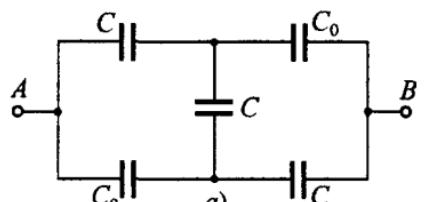


Рис. 12.58

12.58. Определить емкость батареи конденсаторов, представленной на рис. 12.57, где $C_1 = 2 \text{ мкФ}$, $C_2 = 5 \text{ мкФ}$, $C_3 = 8 \text{ мкФ}$.

12.59. Определить емкость батареи конденсаторов, представленной на рис. 12.58, где $C_1 = 5 \text{ мкФ}$, $C_2 = 10 \text{ мкФ}$, $C_3 = 15 \text{ мкФ}$.

12.60. Найти емкость батареи конденсаторов, представленной на рис. 12.59, а, между точками A и B .



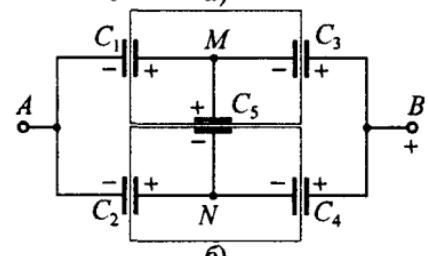
• Решение. Соединение конденсаторов в батарею, предложенную для расчета, называют мостом емкостей. Такое соединение никакими перестроениями упростить нельзя.

При решении задачи воспользуемся законом сохранения электрического заряда (заряд изолированного участка цепи неизменен). В рассматриваемой задаче участки цепи, заключенные в прямоугольники, нарисованные тонкими линиями (рис. 12.59, б), являются изолированными, поэтому при любых процессах, происходящих в остальной цепи, суммарные заряды здесь остаются равными нулю.

Для определения емкости батареи конденсаторов присоединим к точкам A и B источник, поддерживающий разность потенциалов $\Delta\phi$.

В схеме четыре участка цепи имеют разные потенциалы: Φ_A , Φ_B , Φ_M , Φ_N . Если потенциал точки A условно принять равным нулю, то потенциал точки B будет равен $\Phi_B = \Delta\phi$. Обозначим потенциалы точек M и N через x и y соответственно, т.е. $\Phi_M = x$, $\Phi_N = y$.

Используя закон сохранения заряда, можно утверждать, что суммарные заряды конденсато-



б)

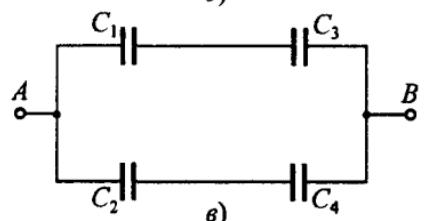


Рис. 12.59

ров C_1 , C_3 и C_5 на обкладках, соединенных с точкой M , равны нулю. Пусть потенциал $\Phi_M > \Phi_N$, т.е. на обкладке конденсатора C_5 , присоединенной к точке M , будет находиться положительный заряд. Тогда

$$q_1 - q_3 + q_5 = 0. \quad (1)$$

Аналогично, для зарядов на обкладках конденсаторов C_2 , C_4 , C_5 , присоединенных к точке N :

$$q_2 - q_4 - q_5 = 0, \quad (2)$$

где q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , q_5 – заряды на соответствующих конденсаторах.

Используя связь между зарядом на обкладках конденсатора и разностью потенциалов между ними

$$q = C \Delta\phi,$$

заряды q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , q_5 можно представить в виде

$$q_1 = C_1 (\Phi_M - \Phi_A) = C_1 x; \quad q_2 = C_2 (\Phi_N - \Phi_A) = C_2 y; \quad q_3 = C_3 (\Phi_B - \Phi_M) = C_3 (\Delta\phi - x);$$

$$q_4 = C_4 (\Phi_B - \Phi_N) = C_4 (\Delta\phi - y); \quad q_5 = C_5 (\Phi_M - \Phi_N) = C_5 (x - y).$$

Теперь выражения (1) – (2) можно записать по-другому:

$$C_1 x - C_3 (\Delta\phi - x) + C_5 (x - y) = 0, \quad C_2 y - C_4 (\Delta\phi - y) - C_5 (x - y) = 0. \quad (3)$$

Решив систему уравнений (3) относительно x и y , получим

$$x = \Phi_M = \Delta\phi \frac{C_3 (C_2 + C_4 + C_5) + C_4 C_5}{(C_1 + C_3 + C_5) (C_2 + C_4 + C_5) - C_5^2};$$

$$y = \Phi_N = \Delta\phi \frac{C_4 (C_1 + C_3 + C_5) + C_3 C_5}{(C_1 + C_3 + C_5) (C_2 + C_4 + C_5) - C_5^2}.$$

Легко заметить, что в случаях, если $C_1 C_4 = C_2 C_3$, потенциалы $\Phi_M = \Phi_N$, т.е. заряд конденсатора емкостью C_5 будет равен нулю. Это означает, что конденсатор C_5 в накоплении зарядов участия не принимает и его можно не учитывать при вычислении емкости такой схемы. В этом случае говорят, что мост емкостей сбалансирован. Емкость такой схемы (рис. 12.59, б)

$$C_{\text{общ}} = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Вернемся к нашей задаче.

Если известны потенциалы в точках M и N , то полный заряд q на батарее конденсаторов (он равен суммарному заряду на обкладках конденсаторов C_1 и C_2 , присоединенных к точке A , или заряду на обкладках конденсаторов C_3 и C_4 , присоединенных к точке B) может быть найден как

$$\begin{aligned} q = q_3 + q_4 &= C_3 (\Phi_B - \Phi_M) + C_4 (\Phi_B - \Phi_N) = C_3 (\Delta\phi - x) + C_4 (\Delta\phi - y) = \\ &= \Delta\phi \left\{ C_2 + C_4 - \frac{C_3^2 (C_2 + C_4 + C_5) + C_4^2 (C_1 + C_3 + C_5) + 2 C_3 C_4 C_5}{(C_1 + C_3 + C_5) (C_2 + C_4 + C_5) - C_5^2} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, емкость схемы между точками A и B

$$C_{\text{общ}} = \frac{q}{\Delta\phi} = C_2 + C_4 - \frac{C_3^2 (C_2 + C_4 + C_5) + C_4^2 (C_1 + C_3 + C_5) + 2 C_3 C_4 C_5}{(C_1 + C_3 + C_5) (C_2 + C_4 + C_5) - C_5^2}.$$

Используя значения емкостей конденсаторов ($C_1 = C_4 = C_5 = C$, $C_2 = C_3 = C_0$), после преобразований получаем

$$C_{\text{общ}} = \frac{C (3 C_0 + C)}{3 C + C_0}.$$

• Ответ: $C_{\text{общ}} = \frac{C (3 C_0 + C)}{3 C + C_0}$.

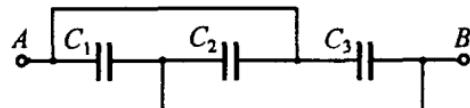


Рис. 12.60

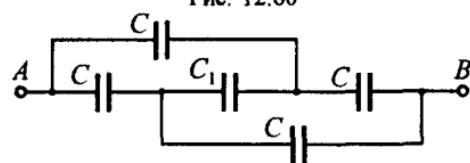


Рис. 12.61

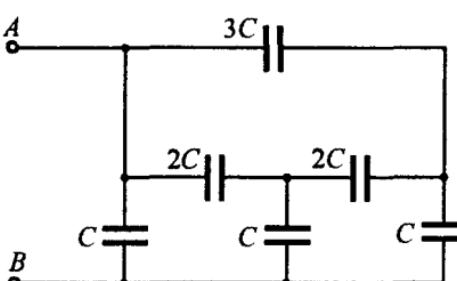


Рис. 12.62

12.61. Найти емкость батареи конденсаторов между точками A и B , которая показана на рис. 12.60.

12.62. Найти емкость батареи конденсаторов между точками A и B , которая показана на рис. 12.61.

12.63. Найти емкость батареи конденсаторов между точками A и B , которая показана на рис. 12.62.

Работа и энергия в электростатическом поле

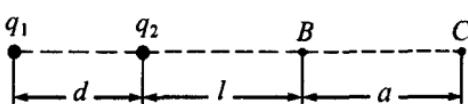


Рис. 12.63

12.64. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы переместить заряд q_0 из точки C в точку B в поле двух точечных зарядов q_1 и q_2 (рис. 12.63)? Расстояния a , d , l известны.

• *Решение.* Так как электрическое поле неподвижных зарядов потенциально, то работа по перемещению заряда q_0 из точки C в точку B не будет зависеть от формы траектории, по которой перемещают частицу, и равна разности энергий заряда q_0 в конечной и начальной точках пути:

$$A = W_B - W_C$$

Энергия заряда q_0 в поле двух точечных зарядов равна

$$W = q_0(\varphi_1 + \varphi_2),$$

где φ_1 , φ_2 – потенциалы электрического поля зарядов q_1 и q_2 соответственно в точке расположения заряда q_0 .

Так как потенциал точечного заряда q в произвольной точке определяется как

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r},$$

то энергия заряда q_0 в точке C

$$W_C = q_0 \left\{ \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 (d+l+a)} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 (l+a)} \right\},$$

где первое слагаемое соответствует потенциальному электрическому полю, создаваемого зарядом q_1 , а второе – зарядом q_2 .

Аналогично, для точки B :

$$W_B = q_0 \left\{ \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 (d+l)} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 l} \right\}.$$

Следовательно, искомая работа

$$A = \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{q_1}{d+l} + \frac{q_2}{l} - \frac{q_1}{d+l+a} - \frac{q_2}{l+a} \right\} = \frac{q_0 a}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{q_1}{(d+l)(d+l+a)} + \frac{q_2}{l(l+a)} \right\}.$$

• Ответ: $A = \frac{q_0 a}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{q_1}{(d+l)(d+l+a)} + \frac{q_2}{l(l+a)} \right\}$.

12.65. Точечные заряды $q_1 = -1,7 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл находятся от точечного заряда $q_0 = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл на расстояниях $l_1 = 2$ см и $l_2 = 5$ см соответственно. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поменять местами заряды q_1 и q_2 ?

12.66. Два шарика с одинаковыми зарядами $q = 10^{-7}$ Кл, лежащие на гладкой горизонтальной плоскости, прикрепили к концам неидеальной пружины длиной в недеформированном состоянии $l_0 = 8$ см и отпустили. Какое количество энергии перешло в тепло при затухании колебаний, если расстояние между шариками после прекращения колебаний стало равным $l = 10$ см?

12.67. Точечный заряд $q = 2 \cdot 10^{-5}$ Кл расположен вблизи бесконечной равномерно заряженной пластины с поверхностной плотностью заряда $\sigma = -50$ нКл/м². Заряд перемещают из точки 1 в точку 2 под углом $\alpha = 60^\circ$ к пластине (рис. 12.64). Определить минимальную работу, которую необходимо совершить при таком перемещении. Расстояние между точками 1 и 2 $l = 5$ м.

• *Решение.* Так как по условию задачи необходимо определить минимальную работу, то заряд q будем перемещать без ускорения. Для этого приложим к нему силу \vec{F} , равную по величине силе притяжения $\vec{F}_{\text{эл}}$ заряда плоскостью и противоположную ей по направлению, т.е. $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{эл}}$. При этом работа A силы \vec{F} по модулю будет равна работе $A_{\text{эл}}$ силы $\vec{F}_{\text{эл}}$.

Электростатическое поле является потенциальным, поэтому работа $A_{\text{эл}}$ не зависит от траектории перемещения заряда q . Выберем в качестве траектории перемещения ломаную 1–3–2. Тогда работа $A_{\text{эл}}$ будет равна алгебраической сумме работ A_{1-3} и A_{3-2} на участках 1–3 и 3–2 соответственно.

Так как векторы напряженности электрического поля бесконечной пластины направлены перпендикулярно ее поверхности, то на участке 1–3 работа совершилась не будет. Это связано с тем, что направление перемещения из точки 1 в точку 3 перпендикулярно вектору \vec{E} , а значит перпендикулярно силе $\vec{F}_{\text{эл}}$. На участке 3–2 заряд q будем перемещать вдоль силовых линий электрического поля, причем направление перемещения противоположно направлению вектора напряженности. Следовательно,

$$A_{3-2} = -F_{\text{эл}} S_{3-2} = -q E S_{3-2},$$

где $S_{3-2} = l \sin \alpha$ – величина перемещения из точки 3 в точку 2; $E = |\sigma|/2\epsilon_0$ – напряженность электрического поля, создаваемого заряженной пластиной.

Следовательно,

$$A = -A(F_{\text{эл}}) = -A_{3-2} = q \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} l \sin \alpha = 0,24 \text{ Дж.}$$

• Ответ: $A = \frac{q |\sigma| l \sin \alpha}{2\epsilon_0} = 0,24 \text{ Дж.}$

12.68. Точечный заряд $q = -70$ нКл расположен между обкладками плоского конденсатора в точке 1 (рис. 12.65) вблизи положительно заряженной пластины. Заряд q перемещают из точки 1 в точку 3, расположенную вблизи другой пласти-

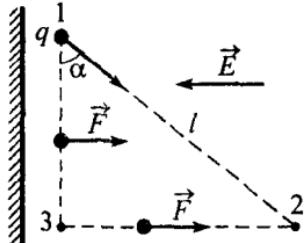


Рис. 12.64

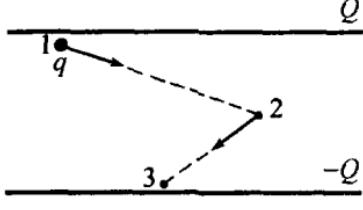


Рис. 12.65

ны, по ломаной 1–2–3. Определить минимальную работу, которую необходимо совершить при таком перемещении. Емкость конденсатора равна $C = 10^{-10} \Phi$, заряд $Q = 5 \cdot 10^{-4}$ Кл.

12.69. Три заряда q , q , $-q$ находятся в точках с декартовыми координатами $(a, a, 0)$, $(0, a, 0)$ и $(0, a, -a)$ соответственно. Найти энергию этой системы зарядов.

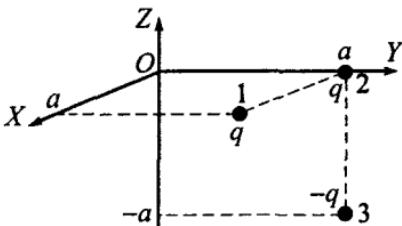


Рис. 12.66

• Решение. Энергия системы N неподвижных точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta q_i \varphi_i,$$

где φ_i – потенциал электрического поля в точке расположения заряда q_i , создаваемый всеми ($N - 1$) зарядами за исключением заряда q_i .

В нашем случае трех точечных зарядов энергия системы

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2 + q_3 \varphi_3),$$

где φ_1 , φ_2 , φ_3 – потенциалы в точках 1, 2 и 3 расположения зарядов $q_1 = q$, $q_2 = q$, $q_3 = -q$ соответственно (рис. 12.66):

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varphi_0 l_{1-2}} - \frac{q}{4\pi\varphi_0 l_{1-3}}; \quad \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varphi_0 l_{1-2}} - \frac{q}{4\pi\varphi_0 l_{2-3}}; \quad \varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varphi_0 l_{1-3}} + \frac{q}{4\pi\varphi_0 l_{2-3}},$$

где $l_{1-2} = l_{2-3} = a$, $l_{1-3} = \sqrt{2}a$ – расстояния между зарядами, расположенными в точках 1–2, 2–3 и 1–3 соответственно. Следовательно,

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varphi_0 a} - \frac{q}{4\pi\varphi_0 \sqrt{2}a}; \quad \varphi_2 = 0; \quad \varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varphi_0 \sqrt{2}a} + \frac{q}{4\pi\varphi_0 a},$$

а энергия системы зарядов

$$W = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_3) = -\frac{q^2}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a}.$$

• Ответ: $W = -\frac{q^2}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a}$.

12.70. Точечные заряды q_1 , q_2 , q_3 расположены в вершинах правильного треугольника со стороной l . Определить энергию этой системы зарядов.

12.71. Из заряженного не замкнутого на внешнюю цепь конденсатора вынули диэлектрик проницаемостью ϵ . Во сколько раз при этом изменилась энергия конденсатора? Какой будет результат, если конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения?

• Решение. Энергия плоского конденсатора может быть вычислена по одной из формул

$$W = \frac{q \Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C \Delta\varphi^2}{2}.$$

Если конденсатор заряжен и отключен от источника, то заряд на его обкладках может не быть. Поэтому здесь для вычисления энергии конденсатора удобно использовать формулу

$$W = \frac{q^2}{2C}.$$

Если энергия конденсатора емкостью C с диэлектриком была равна

$$W_1 = \frac{q^2}{2C},$$

то после того, как диэлектрик вынули, она стала равной

$$W_2 = \frac{q^2}{2 C'},$$

где $C' = C/\epsilon$ – емкость конденсатора без диэлектрика. Следовательно,

$$W_2/W_1 = \epsilon,$$

т.е. энергия конденсатора возросла в ϵ раз.

Если конденсатор подключен к источнику (разность потенциалов $\Delta\phi$ между обкладками постоянна) и его энергия была равна

$$W_1 = \frac{C \Delta\phi^2}{2},$$

то после того, как диэлектрик вынули, она стала равной

$$W_2 = \frac{C' \Delta\phi^2}{2},$$

где $C' = C/\epsilon$. Следовательно,

$$W_2/W_1 = 1/\epsilon,$$

т.е. энергия конденсатора уменьшилась в ϵ раз.

- Ответ: в первом случае энергия конденсатора увеличится в ϵ раз; во втором случае энергия конденсатора уменьшится в ϵ раз.

12.72. Отключенный от источника воздушный конденсатор емкостью C имеет на обкладках заряд q . Какое количество теплоты выделится в конденсаторе, если его заполнить веществом с диэлектрической проницаемостью ϵ ?

12.73. Расстояние между пластинами плоского конденсатора емкостью $C = 1 \text{ мкФ}$ увеличивают в $n = 2$ раза, не отключая от источника, поддерживающего между пластинами разность потенциалов $\Delta\phi = 1000 \text{ В}$. Какая при этом совершается механическая работа?

12.74. В однородном электрическом поле напряженностью E_0 перпендикулярно его направлению расположены заряженные плоские конденсаторы, напряженность поля между обкладками которых была равна E (рис. 12.67, а). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы расположить пластины конденсатора параллельно внешнему полю? Площадь каждой обкладки конденсатора равна S , расстояние между ними d .

• Решение. При решении этой задачи необходимо помнить, что электрическое поле, создаваемое зарядами на обкладках конденсатора, полностью сосредоточено между обкладками, и заряженный конденсатор не вносит никаких изменений в окружающее пространство. Поэтому при любом расположении конденсатора во внешнем поле E_0 энергия окружающего пространства не меняется. Однако в зависимости от того как расположен конденсатор во внешнем поле, энергия, сосредоточенная в объеме, ограниченном пластинами конденсатора, будет разной. Искомую работу в данном случае можно определить как разность энергий конденсатора до и после его разворота.

Если конденсатор расположен так, что силовые линии поля \vec{E} направлены противоположно \vec{E}_0 (рис. 12.67, а), то объемная плотность энергии между пластинами конденсатора равна

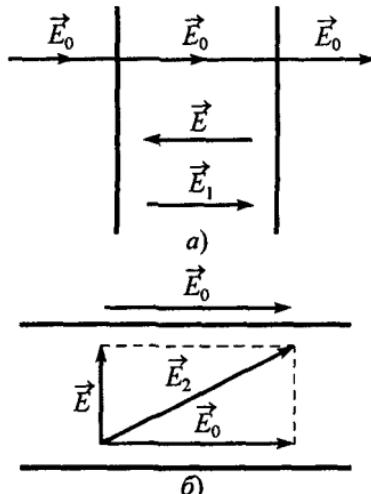


Рис. 12.67

а энергия

$$w_1 = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} = \frac{\epsilon_0 (E_0 - E)^2}{2},$$

$$W_1 = w_1 V = \frac{\epsilon_0 (E_0 - E)^2}{2} S d,$$

где $E_1 = E_0 - E$ – напряженность результирующего поля в конденсаторе в первом случае; $V = S d$ – объем, заключенный между пластинами.

Если конденсатор расположен так, что его обкладки параллельны внешнему полю (рис. 12.67, б), то энергия внутри конденсатора

$$W_2 = w_2 V = \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} = \frac{\epsilon_0 (E_0^2 + E^2)}{2} S d,$$

где $E_2 = \sqrt{E_0^2 + E^2}$ – напряженность результирующего поля в конденсаторе в этом случае.

Следовательно,

$$A = W_2 - W_1 = \frac{\epsilon_0 S d \{ E^2 + E_0^2 - (E_0 - E)^2 \}}{2} = \epsilon_0 S d E E_0.$$

• Ответ: $A = \epsilon_0 S d E E_0$.

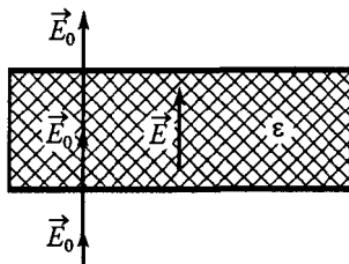


Рис. 12.68

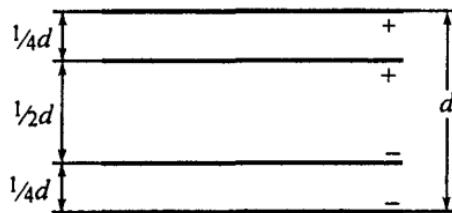


Рис. 12.69

12.75. В однородном электрическом поле напряженностью \vec{E}_0 перпендикулярно его направлению расположена заряженный плоский конденсатор, площадь обкладок которого равна S , а расстояние между ними d . Зазор между обкладками заполнен диэлектриком с проницаемостью ϵ . До помещения во внешнее поле напряженность электрического поля между обкладками была равна E (рис. 12.68). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вынуть диэлектрик из конденсатора?

12.76. Два плоских воздушных конденсатора с обкладками одинаковой площади $S = 8 \text{ см}^2$ имеют равные заряды $q = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ и вставлены друг в друга так, как показано на рис. 12.69. Расстояние между обкладками первого конденсатора $d = 12 \text{ мм}$ вдвое больше, чем у второго. Какое количество теплоты выделится, если обкладки внутреннего конденсатора закоротить?

Движение заряженных частиц в электрическом поле

12.77. Электрон, имеющий кинетическую энергию W , влетает в плоский конденсатор, между пластинами которого поддерживается разность потенциалов $\Delta\phi$. Расстояние между пластинами d , их длина l . На расстоянии h от конденсатора находится экран (рис. 12.70). Начальная скорость электрона направлена параллельно пластинам. Найти смещение электрона на экране. Заряд электрона $|e|$. Силой тяжести пренебречь.

• Решение. Решение задач о движении заряженных частиц в электрическом поле конденсатора или заряженной плоскости сходно с решением задач на движение тела, брошенного под углом к горизонту вблизи поверхности земли. Отличие состоит лишь в том, что движение частиц в однородном электрическом поле происходит с некоторым ускорением \vec{a} , отличным от ускорения свободного падения \vec{g} . Действие силы тяжести в подобных задачах обычно не учитывается, так как гравитационные силы ничтожно малы по сравнению с электрическими.

Если электрон влетает в электрическое поле заряженного конденсатора, то под действием силы \vec{F} поля он будет отклоняться от своего начального направления движения и вылетит из конденсатора под некоторым углом к этому направлению.

По условию задачи электрон влетает в конденсатор параллельно его обкладкам. Очевидно, что под действием силы \vec{F} в поле конденсатора электрон будет двигаться по параболе. Выберем систему координат XOY так, как показано на рис. 12.70, и запишем уравнение, выражющее второй закон Ньютона, в проекциях на оси OX и OY :

$$OX: m a_x = 0, \quad OY: m a_y = F,$$

где m – масса частицы.

Так как сила \vec{F} , действующая на электрон в электрическом поле, равна

$$F = |e| E, \quad (1)$$

то движение частицы вдоль оси OX будет происходить с постоянной скоростью, а вдоль оси OY – равноускорению. Следовательно, кинематические уравнения движения электрона можно записать в виде

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} a_y t^2, \quad (2)$$

где v_0 – скорость электрона при азете в конденсатор; a_y – проекция ускорения электрона на ось OY :

$$a_y = F/m = |e| E/m. \quad (3)$$

Если длина конденсатора равна l , то уравнения движения (2) электрона в момент вылета из конденсатора примут вид

$$l = v_0 \tau, \quad \Delta y_1 = \frac{1}{2} a_y \tau^2, \quad (4)$$

где τ – время движения электрона в конденсаторе; Δy_1 – смещение электрона по оси OY за этот промежуток времени.

Следовательно,

$$\Delta y_1 = \frac{a_y l^2}{2 v_0^2} = \frac{|e| E l^2}{2 m v_0^2}. \quad (5)$$

Для определения смещения Δy_2 при движении электрона в области от края конденсатора до экрана достаточно определить угол α , который будет составлять вектор его скорости \vec{v} с пластинами, так как здесь электрон будет двигаться равномерно и прямолинейно. С этой целью определим проекции вектора \vec{v} на оси системы координат в момент вылета электрона из конденсатора:

$$v_x = v_0, \quad v_y = a_y \tau = \frac{|e| E l}{m v_0}.$$

Следовательно,

$$\Delta y_2 = h \operatorname{tg} \alpha = h \frac{v_y}{v_x} = \frac{|e| E l h}{m v_0^2}. \quad (6)$$

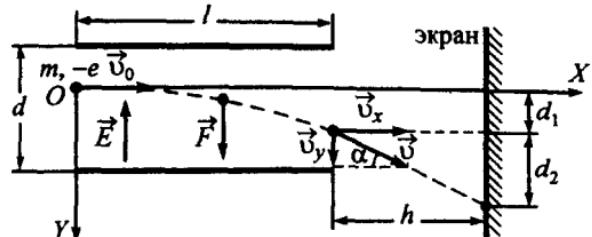


Рис. 12.70

Наконец, определим начальную скорость электрона при влете в конденсатор и величину напряженности поля между его обкладками.

Из выражения для кинетической энергии частицы

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2$$

получим

$$v_0 = \sqrt{2 W / m}. \quad (7)$$

Так как между обкладками конденсатора поддерживается постоянная разность потенциалов $\Delta\phi$, то напряженность электрического поля в зазоре конденсатора

$$E = \frac{\Delta\phi}{d}. \quad (8)$$

Окончательно смещение электрона на экране найдем как сумму смещений Δy_1 и Δy_2 с учетом выражений (7) и (8) для v_0 и E :

$$\Delta y = \frac{|e| E l^2}{2 m v_0^2} + \frac{|e| E l h}{m v_0^2} = \frac{|e| \Delta\phi l}{4 d W} (l + 2 h).$$

• Ответ: $\Delta y = \frac{|e| \Delta\phi l}{4 d W} (l + 2 h)$.

12.78. В плоский конденсатор длиной $l = 5$ см влетает электрон под углом $\alpha = 15^\circ$ к пластинам. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора, при которой электрон на выходе из него будет двигаться параллельно пластинам. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см, начальная энергия электрона $W = 1500$ эВ, заряд $-|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Силой тяжести пренебречь.

12.79. Электрон влетает в плоский воздушный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v = 4 \cdot 10^7$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 1$ см, их длина $l = 5$ см, разность потенциалов между ними $\Delta\phi = 400$ В. Найти величину отклонения электрона от первоначального направления движения при вылете из конденсатора. Заряд электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Силой тяжести пренебречь.

12.80. На горизонтальной плоскости на расстоянии d друг от друга удерживают два одинаковых тела массой m каждое, имеющие равные заряды q . Какое расстояние пройдет каждое из тел, если их освободить? Какую максимальную скорость v_{max} приобретут тела в процессе движения? Коэффициент трения тел о плоскость равен μ .

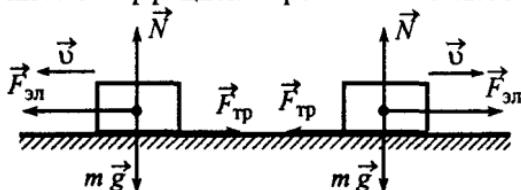


Рис. 12.71

значение силы трения покоя $F_{tr\ max} = \mu N$, то после освобождения тел они придут в движение.

Расстояние, которое пройдет каждое из тел, и их максимальную скорость в процессе движения можно найти, записав уравнения динамики поступательного движения и уравнения кинематики. Однако так как при изменении расстояния между телами сила $F_{3\text{л}}$ будет изменяться обратно пропорционально квадрату расстояния между ними, то подобное реше-

• Решение. На каждое из тел будут действовать четыре силы: сила тяжести $m g$, сила реакции опоры N , сила трения F_{tr} и сила электрического взаимодействия $F_{3\text{л}}$, направленные так, как показано на рис. 12.71. Если сила $F_{3\text{л}}$ в начальном положении превышает максимальное

ние задачи будет достаточно сложным. Гораздо проще здесь воспользоваться теоремой о изменении полной механической энергии системы: изменение энергии будет равно работе сторонних сил, действующих на тела системы, при данном перемещении.

В начальной и конечной точках пути полная энергия системы тел будет равна энергии их взаимодействия, так как кинетическая и потенциальная энергии будут равны нулю. Поэтому изменение энергии можно представить в виде

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 (d + 2S)} - \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 d},$$

где первое слагаемое соответствует энергии взаимодействия между телами в конечном положении, второе – в начальном.

Сторонней силой, действующей на каждое из тел в процессе движения, является сила трения, работа которой

$$A = -2 F_{tr} S,$$

где $F_{tr} = \mu N = \mu m g$; S – путь, пройденный каждым из тел до остановки; знак « $-$ » связан с тем, что сила трения и перемещение направлены в противоположные стороны. Следовательно,

$$\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 (d + 2S)} - \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 d} = -2 \mu m g S.$$

Отсюда получим

$$q^2 d - q^2 (d + 2S) = -8\pi \epsilon_0 d S \mu m g (d + 2S),$$

или

$$q^2 S = 4\pi \epsilon_0 d S \mu m g (d + 2S).$$

Следовательно, каждое из тел пройдет расстояние

$$S = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 d \mu m g} - \frac{d}{2}. \quad (1)$$

Таким же образом можно найти максимальную скорость тел в процессе движения. Для этого нужно мысленно представить, как двигались тела. Очевидно, что если в начальный момент $F_{зл} > F_{тр}$, то тела будут ускоряться до тех пор, пока $F_{зл}$ не станет равной $F_{тр}$. После этого тела будут двигаться замедлению до остановки. Следовательно, скорости тел будут максимальны в момент движения, при котором $F_{зл} = F_{тр}$, т.е.

$$\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 (d + 2x)^2} = \mu m g,$$

где x – расстояние, которое пройдет каждое из тел из начального положения в точку, где $F_{зл} = F_{тр}$.

Записав теорему о изменении полной механической энергии системы в виде

$$\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 (d + 2x)} + 2 \frac{m v_{max}^2}{2} - \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 d} = -2 \mu m g x,$$

получим

$$v_{max} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m d} - \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m (d + 2x)} - 2 \mu g x}.$$

Выразив значение x из условия максимума скорости

$$x = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi \epsilon_0 \mu m g} - \frac{d}{2}},$$

окончательно находим

$$v_{max} = \left\{ \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m d} - 2 q \sqrt{\frac{\mu g}{4\pi \epsilon_0 m}} + \mu g d \right\}^{1/2}. \quad (2)$$

Очевидно, что результаты (1) и (2) справедливы только в случаях, если в начальном положении $F_{зл} > F_{тр} = \mu N$, т.е.

$$\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 d^2} > \mu m g, \quad \text{или} \quad \mu < \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m g d^2}.$$

- Ответ: $S = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 d \mu m g} - \frac{d}{2}; v_{\max} = \left\{ \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m d} - 2q \sqrt{\frac{\mu g}{4\pi \epsilon_0 m}} + \mu g d \right\}^{1/2}$
при $\mu < \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m g d^2}$.

12.81. Три одинаковых одноименно заряженных тела, заряд каждого из которых равен q , а масса m , соединены невесомыми нерастяжимыми и непроводящими нитями длиной l так, что нити образуют равносторонний треугольник. Одну из нитей пережигают. Найти максимальные скорости тел.

12.82. Два небольших тела, связанные нитью длиной l , лежат на горизонтальной плоскости. Заряд каждого тела равен q , масса равна m . Нить пережигают, и тела начинают скользить по плоскости. Какую максимальную скорость приобретут тела, если коэффициент трения равен μ ?

12.83. Небольшой шарик массой m , имеющий заряд q , вращается в горизонтальной плоскости на непроводящей нити длиной l (рис. 12.72). Определить период обращения шарика, если в центре окружности, описываемой шариком при вращении, расположен точечный заряд q . При вращении нить образует с вертикалью угол α .

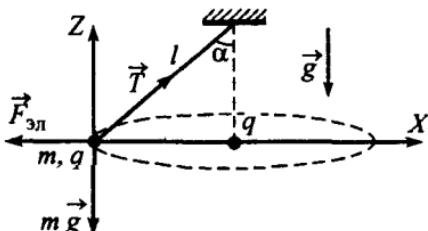


Рис. 12.72

• Решение. На шарик в произвольный момент движения будут действовать три силы: сила тяжести $m \vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} и сила взаимодействия между зарядами $\vec{F}_{\text{эл}}$, направленные так, как показано на рис. 12.72, причем

$$F_{\text{эл}} = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 r^2},$$

где $r = l \sin \alpha$ – радиус окружности, описываемой шариком.

Запишем уравнение движения шарика на ось OX сопровождающей системы отсчета (см. §4), направленную по нормали к траектории тела, и ось OZ , перпендикулярную плоскости вращения:

$$OX: \frac{m v^2}{r} = T \sin \alpha - F_{\text{эл}}; \quad OZ: 0 = T \cos \alpha - m g.$$

С учетом выражений для радиуса окружности r и значения силы $F_{\text{эл}}$ получим

$$\frac{m v^2}{l \sin \alpha} = m g \operatorname{tg} \alpha - \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 l^2 \sin^2 \alpha}.$$

Отсюда находим

$$v = \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{m} \left\{ m g \operatorname{tg} \alpha - \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 l^2 \sin^2 \alpha} \right\}}.$$

Следовательно, период обращения

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \sqrt{l \sin \alpha}}{\sqrt{g \operatorname{tg} \alpha - \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m l^2 \sin^2 \alpha}}}.$$

- Ответ: $\tau = \frac{2\pi \sqrt{l \sin \alpha}}{\sqrt{g \operatorname{tg} \alpha - \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m l^2 \sin^2 \alpha}}}$

12.84. Небольшой шарик массой m , подвешенный на непроводящей нити длиной l , вращают в горизонтальной плоскости. На оси вращения в точке, расположенной симметрично точке подвеса относительно плоскости вращения, помещен точечный заряд q (рис. 12.73). Такой же по величине заряд сообщен шарику. С какой скоростью вращается шарик, если при вращении нить образует с вертикалью угол α ?

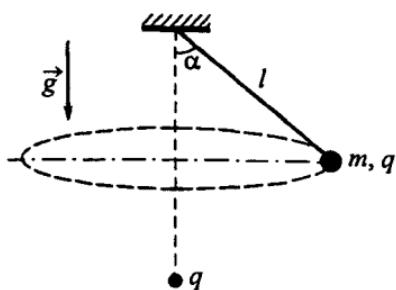


Рис. 12.73

12.85. На тонкое диэлектрическое кольцо радиусом R надета бусинка массой m , которой сообщен заряд q . Кольцо расположено в вертикальной плоскости и вся система находится в однородном вертикальном электрическом поле напряженностью E . Какой по величине точечный заряд следует расположить в центре кольца, чтобы бусинка, соскользнувшая с вершины кольца, не давила на него в нижней точке? Трения нет.

12.86. Найти период малых колебаний математического маятника, состоящего из шарика массой m с зарядом $q > 0$, подвешенного на нити длиной l , если маятник помещен в электрическое поле, векторы напряженности которого E направлены: а) вдоль силы тяжести; б) под углом 90° к направлению силы тяжести.

• Решение. На маятник в произвольный момент движения будет действовать сила

$$F_{\text{эл}} = qE,$$

направленная вдоль силовых линий электрического поля.

Период гармонических колебаний математического маятника, на который, кроме силы тяжести и натяжения нити, действует постоянная внешняя сила, равен (см. §8):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{\text{эфф}}}},$$

где $g_{\text{эфф}} = |\vec{g} + \vec{F}_{\text{эл}}/m|$.

В случае, когда векторы напряженности электрического поля направлены вдоль силы тяжести (рис. 12.74, а):

$$g_{\text{эфф}} = g + F_{\text{эл}}/m = g + qE/m.$$

Следовательно, в первом случае период колебаний маятника будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + qE}}.$$

Если силовые линии электрического поля направлены горизонтально (рис. 12.74, б), то

$$g_{\text{эфф}} = \sqrt{g^2 + (F_{\text{эл}}/m)^2} = \sqrt{g^2 + (qE/m)^2}.$$

Следовательно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{\sqrt{m^2g^2 + q^2E^2}}}.$$

• Ответ: а) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + qE}}$; б) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{\sqrt{m^2g^2 + q^2E^2}}}$.

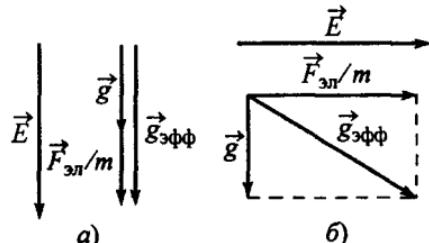


Рис. 12.74

12.87. Небольшой металлический шарик массой m , подвешенный на непроводящей нити длиной l , колеблется по закону математического маятника над бесконечной равномерно заряженной горизонтальной плоскостью с плотностью заряда $(+\sigma)$. Определить период колебаний маятника, если на шарике находится заряд $(-q)$.

12.88. Вблизи вертикальной стенки, заряженной положительно с поверхностью плотностью заряда σ , подвешено на непроводящей нити длиной l маленько тело массой m и зарядом $q > 0$. Найти период колебаний тела, считая их гармоническими.

12.89. Две маленькие бусинки, имеющие одинаковые заряды, надеты на непроводящий стержень, расположенный вертикально вблизи поверхности Земли, причем нижняя из бусинок закреплена. В положении равновесия расстояние между бусинками равно l_0 . Найти период малых колебаний подвижной бусинки. Трением пренебречь.

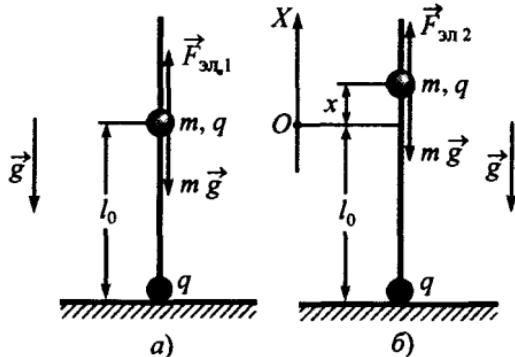


Рис. 12.75

• Решение. Если пренебречь трением, то при колебаниях подвижной бусинки на нее будут действовать две силы: сила тяжести $m \vec{g}$ и сила Кулона $\vec{F}_{\text{эл}}$, направленные в противоположные стороны. Так как сила тяжести остается постоянной, а сила Кулона изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между бусинками, то легко заметить, что при колебаниях результирующая сила

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{эл}} + m \vec{g}$$

все время будет направлена к положению равновесия, т.е. будет возвращающей.

Для определения периода колебаний сместим подвижную бусинку из положения равновесия на некоторое расстояние и предоставим самой себе. Тогда в некоторый момент времени смещение бусинки от положения равновесия будет равно x (рис. 12.75, б). Если ось OX направить в сторону смещения, то результирующая сила в проекции на эту ось будет иметь значение $F_x = F_{\text{эл},2} - mg$, где сила Кулона

$$F_{\text{эл},2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(l_0+x)^2}.$$

Следовательно,

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(l_0+x)^2} - mg.$$

С учетом условия равновесия (рис. 12.74, а)

$$mg = F_{\text{эл},1}, \quad (1)$$

где

$$F_{\text{эл},1} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l_0^2}, \quad (2)$$

получим

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(l_0+x)^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l_0^2}, \quad \text{или} \quad F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(l_0+x)^2} - \frac{1}{l_0^2} \right\} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{l_0^2 - (l_0+x)^2}{l_0^2(l_0+x)^2} \right\}.$$

Так как рассматриваются малые колебания, то $x \ll l_0$ и выражение для результирующей силы F_x можно записать в виде

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{l_0^2 - l_0^2 - 2l_0x - x^2}{l_0^2(l_0+x)^2} \right\} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-x(2l_0+x)}{l_0^2(l_0+x)^2} \right\} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-2l_0x}{l_0^4} \right\} = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{l_0^3}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что сила F_x пропорциональна смещению x бусинки из положения равновесия и, как было отмечено выше, действительно является возвращающей. Это означает, что бусинка будет совершать гармонические колебания. При таких колебаниях сила F_x связана с коэффициентом k возвращающей силы соотношением

$$F_x = -kx. \quad (4)$$

Следовательно, из (3) – (4) находим

$$k = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 l_0^3}.$$

Выразив величину заряда q бусинок из соотношений (1) – (2)

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0 m g l_0^2,$$

получим

$$k = 2m g / l_0.$$

Используя связь коэффициента возвращающей силы с периодом гармонических колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{m/k},$$

окончательно находим

$$T = 2\pi \sqrt{l_0/2g}.$$

• Ответ: $T = 2\pi \sqrt{l_0/2g}$.

12.90. На концах тонкого непроводящего горизонтального стержня длиной l закреплены две маленькие бусинки, а третья надета на стержень, по которому она может перемещаться без трения. Всем бусинкам сообщают одинаковые заряды q . Найти период малых колебаний подвижной бусинки, если ее масса равна m .

12.91. Горизонтальный желоб выгнут по цилиндрической поверхности: слева по радиусу R , справа – по радиусу $2R$ (рис. 12.76). На дне желоба находится бусинка массой m и зарядом q , а в точке O закреплен такой же по знаку заряд величиной Q . Найти период малых колебаний бусинки. Трением пренебречь.

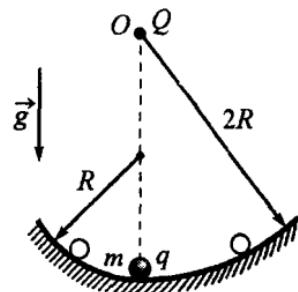


Рис. 12.76

12.92. На какое минимальное расстояние смогут сблизиться два электрона, если они движутся навстречу друг другу из бесконечности с относительными скоростями $v_{\text{отн}} = 10^6$ м/с. Заряд электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

• Решение. При движении одной заряженной частицы в электрическом поле другой сила взаимодействия между ними будет изменяться обратно пропорционально квадрату расстояния между зарядами. Для читателя, хорошо обладающего навыками интегрирования, работу такой силы при произвольном перемещении зарядов определить несложно. Однако гораздо проще решать подобные задачи, если воспользоваться законом сохранения механической энергии.

Пусть электроны на бесконечном расстоянии друг относительно друга имеют скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Тогда в исходном положении полная механическая энергия системы двух рассматриваемых зарядов будет равна сумме их кинетических энергий:

$$W_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2,$$

где учтено, что в начальном положении частицы не взаимодействуют.

При движении электронов навстречу друг другу их скорости будут уменьшаться, так как движение каждой из частиц будет происходить в тормозящем поле другой. Однако предполагать, что в момент сближения электроны на минимальное расстояние скорости обеих частиц станут равными нулю, нет никаких оснований. Считая, что рассматриваемые две частицы образуют замкнутую систему, на основании закона сохранения импульса, записанного в виде

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 0$$

(где \vec{p}_1 , \vec{p}_2 – начальный и конечный импульсы системы соответственно), можно сделать вывод, что на минимальном расстоянии скорости частиц станут равны нулю (т.е. $\vec{p}_2 = 0$) только в случае, если в начальный момент импульсы частиц будут равны по величине и противоположны по направлению. В общем случае этого не происходит. Следовательно, записав импульсы в развернутом виде

$$\vec{p}_1 = m \vec{v}_1 + m \vec{v}_2, \quad \vec{p}_2 = (m+m) \vec{v}$$

(где \vec{v} – скорость электронов на минимальном расстоянии между ними), получим

$$(m+m) \vec{v} - (m \vec{v}_1 + m \vec{v}_2) = 0.$$

Отсюда найдем скорость \vec{v} :

$$\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2). \quad (1)$$

Теперь можно записать выражение для полной механической энергии системы в конечном положении:

$$W_2 = \frac{2 m v^2}{2} + \frac{|e|^2}{4 \pi \epsilon_0 r_{\min}},$$

где второе слагаемое представляет собой потенциальную энергию взаимодействия частиц, r_{\min} – минимальное расстояние, на которое сблизятся электроны.

На основании закона сохранения энергии получим

$$W_1 = W_2, \quad \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} = \frac{2 m v^2}{2} + \frac{|e|^2}{4 \pi \epsilon_0 r_{\min}}. \quad (2)$$

Скорость v электронов на минимальном расстоянии найдем из закона сохранения импульса (1), записав его в проекции на произвольную ось, параллельную векторам \vec{v}_1 и \vec{v}_2 :

$$v = \frac{1}{2} (v_1 + v_2). \quad (3)$$

Подставляя значение скорости v из (3) в (2), получаем

$$\frac{m (v_1 + v_2)^2}{4} = \frac{|e|^2}{4 \pi \epsilon_0 r_{\min}}.$$

Следовательно, искомое минимальное расстояние между электронами

$$r_{\min} = \frac{|e|^2}{\pi \epsilon_0 m v_{\text{отн}}^2} \approx 10^{-9} \text{ м},$$

где учтено, что при сближении электронов вдоль одной прямой их относительные скорости равны $v_{\text{отн}} = v_1 + v_2$.

• Ответ: $r_{\min} = \frac{|e|^2}{\pi \epsilon_0 m v_{\text{отн}}^2} \approx 10^{-9} \text{ м.}$

12.93. Два электрона движутся вдоль одной прямой. На расстоянии a друг от друга их скорости направлены в одну сторону и равны v_1 и v_2 , причем $v_1 > v_2$. На какое минимальное расстояние смогут сблизиться электроны? Заряд электрона $|e|$, его масса m .

12.94. Скорости двух электронов равны v , лежат в одной плоскости и при расстоянии между электронами d образуют одинаковые углы α с

прямой, соединяющей электроны. На какое минимальное расстояние смогут сблизиться электроны? Заряд электрона $|e|$, его масса m .

12.95. Частица массой m , имеющая заряд q , со скоростью v_0 приближается с большого расстояния к заряженному незакрепленному кольцу, двигаясь по его оси. Радиус кольца R , заряд Q ($Q \cdot q > 0$), масса M . Вначале кольцо покоится. Чему будет равна скорость частицы, когда она проходит через центр кольца? Как изменится ответ, если кольцо закрепить?

• **Решение.** При движении вдоль оси заряженного кольца сила, действующая на частицу и кольцо, будет меняться. Поэтому для решения задачи удобно воспользоваться законами сохранения импульса и механической энергии.

Считая систему «частица – кольцо» замкнутой, закон сохранения импульса

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (m \vec{v} + M \vec{u}) - m \vec{v}_0 = 0,$$

(где \vec{v} , \vec{u} – скорости частицы и кольца в момент времени, когда частица проходит через центр кольца) запишем в проекции на направление движения тел системы:

$$m v + M u - m v_0 = 0. \quad (1)$$

В начальный момент полная механическая энергия тел равна кинетической энергии частицы

$$W_1 = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

а в момент, когда частица находится в центре кольца,

$$W_2 = \frac{m v^2}{2} + \frac{M u^2}{2} + W_{B3},$$

где W_{B3} – энергия взаимодействия частицы с кольцом в рассматриваемом положении:

$$W_{B3} = q \phi.$$

Потенциал ϕ , создаваемый кольцом в центре, легко определить, разбив заряд Q на элементарные заряды ΔQ , каждый из которых можно считать точечным. Так как все заряды ΔQ находятся на равных расстояниях от центра кольца, то потенциал, создаваемый ими, будет равен

$$\phi = \sum \frac{\Delta Q}{4\pi \epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R},$$

где R – радиус кольца.

Следовательно,

$$W_2 = \frac{m v^2}{2} + \frac{M u^2}{2} + \frac{q Q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

и закон сохранения механической энергии примет вид

$$W_1 = W_2, \quad \text{или} \quad \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{M u^2}{2} + \frac{q Q}{4\pi \epsilon_0 R}. \quad (2)$$

Выразив скорость кольца u из закона сохранения импульса (1)

$$u = \frac{m(v_0 - v)}{M}$$

и подставив в закон сохранения энергии (2), получим

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{m^2(v_0^2 - 2v_0 v + v^2)}{2M} + \frac{q Q}{4\pi \epsilon_0 R}. \quad (3)$$

После несложных преобразований уравнение (3) примет вид

$$v^2 - \frac{2m v_0}{M+m} v - \frac{M-m}{M+m} v_0^2 + \frac{q Q M}{2\pi \epsilon_0 m (M+m) R} = 0.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{m v_0}{M+m} \pm \sqrt{\frac{M^2 v_0^2}{(M+m)^2} - \frac{q Q M}{2\pi \epsilon_0 m (M+m) R}}. \quad (4)$$

Для того чтобы частица пролетела сквозь кольцо, ее скорость v должна быть больше скорости u кольца. Очевидно, что частица догонит удаляющееся от нее кольцо, если относительная скорость $v_{\text{отн}} = v - u \geq 0$, или с учетом (1) и (4):

$$v_{\text{отн}} = v - \frac{m v_0}{M} + \frac{m u}{M} = \frac{m v_0}{M} \pm \frac{M+m}{M} \sqrt{\frac{M^2 v_0^2}{(M+m)^2} - \frac{q Q M}{2\pi \epsilon_0 m (M+m) R}} - \frac{m v_0}{M}.$$

Легко видеть, что условию $v_{\text{отн}} \geq 0$ соответствует перед радикалом знак «+». Следовательно,

$$v = \frac{m v_0}{M+m} + \sqrt{\frac{M^2 v_0^2}{(M+m)^2} - \frac{q Q M}{2\pi \epsilon_0 m (M+m) R}}. \quad (5)$$

Если кольцо закреплено, то полагая $M \gg m$, из (5) получаем

$$v = \frac{m v_0}{M} + \sqrt{v_0^2 - \frac{q Q}{2\pi \epsilon_0 m R}} \approx \sqrt{v_0^2 - \frac{q Q}{2\pi \epsilon_0 m R}}. \quad (6)$$

Выражение (6) можно также получить, записав закон сохранения энергии в виде

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{q Q}{4\pi \epsilon_0 R}.$$

- Ответ: $v = \frac{m v_0}{M+m} + \sqrt{\frac{M^2 v_0^2}{(M+m)^2} - \frac{q Q M}{2\pi \epsilon_0 m (M+m) R}}$; $v = \sqrt{v_0^2 - \frac{q Q}{2\pi \epsilon_0 m R}}$.

12.96. Частица массой m , имеющая заряд q , движется по оси заряженного закрепленного кольца, приближаясь к нему. Какую наименьшую скорость должна иметь частица на большом расстоянии от кольца, чтобы пролететь сквозь него? Радиус кольца R , заряд Q .

12.97. Частица массой m , имеющая заряд q , движется с большого расстояния к центру равномерно заряженной незакрепленной сферы. Радиус сферы R , заряд Q ($Q \cdot q > 0$), масса M . Какой скоростью должна обладать частица на большом расстоянии от сферы, чтобы через небольшое отверстие пролететь сквозь нее? Вначале сфера покоятся.

12.98. Частица массой m , имеющая заряд q , приближается с большого расстояния к равномерно заряженному незакрепленному шару, двигаясь по направлению к его центру. Радиус шара R , заряд Q ($Q \cdot q > 0$), масса M . Какую минимальную скорость должна иметь частица на большом расстоянии от шара, чтобы через небольшое отверстие пролететь сквозь него? Вначале шар покоялся.

§13. Постоянный ток

При движении заряженных частиц в проводнике происходит перенос электрического заряда с одного места на другое. Поскольку заряженные частицы совершают беспорядочное тепловое движение, то в обычных условиях через любую воображаемую площадку в проводнике за произвольный промежуток времени проходит в обе стороны в среднем одинаковое количество носителей зарядов противоположных знаков. Если же каким-либо образом упорядочить движение зарядов так, чтобы через эту площадку переносился суммарный заряд, отличный от нуля, то говорят, что через эту площадку течет **электрический ток**. При этом за направление

тока условились считать направление движения положительных зарядов. Если ток образован движением отрицательно заряженных частиц, то направление тока считают противоположным направлению движения частиц.

Для существования электрического тока необходимо наличие в проводниках свободных заряженных частиц, которые называют *носителями тока*. Таковыми, например, в металлах являются электроны, утратившие связи с атомами (свободные электроны или электроны проводимости), в проводящих растворах (электролитах) – это положительные или отрицательные ионы, а в ионизованных газах – ими одновременно являются и электроны, и ионы. Однако наличия свободных носителей зарядов еще недостаточно для возникновения тока – необходимо также существование силы, действующей на заряды в определенном направлении. Если эта сила перестанет действовать, то упорядоченное движение зарядов прекратится из-за сопротивления, оказываемого их движению кристаллической решеткой металлов или нейтральными молекулами электролитов. Причиной, вызывающей и поддерживающей упорядоченное движение заряженных частиц, служит электрическое поле, которое существует внутри проводника до тех пор, пока между различными точками проводника имеется разность потенциалов, которую называют *напряжением*.

Легко понять, что независимо от знака носителей тока ток в проводнике всегда направлен от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Действительно, электрическое поле направлено в сторону убывания потенциала (см. §12) и если свободные заряды положительны, то они будут двигаться по направлению силовых линий поля, если отрицательны – то против них. Поэтому, согласно договоренности о направлении тока, его направление будет совпадать с направлением электрического поля.

Движение носителей тока непосредственно невидимо. Однако это движение вызывает различные явления, по которым можно судить о наличии тока. Так, электрический ток вызывает нагревание проводников, может изменять химический состав проводника – выделять его химические составные части (при прохождении тока через электролиты), а также оказывать силовое воздействие на соседние токи и магниты (см. §14).

Сила тока и плотность тока

Чтобы получить наглядное представление о движении электронов и ионов, образующих ток, используют понятие *линий тока* – линий, вдоль которых перемещаются заряженные частицы. Если внутри проводника мысленно выделить некоторую трубку, у которой боковая поверхность состоит из линий тока, то заряженные частицы при движении не будут пересекать боковую поверхность трубы, т.е. не будут выходить из трубы наружу или входить в трубку извне. Такую трубку называют *трубкой тока* (рис. 13.1). В частности, трубкой тока является боковая поверхность металлической проволоки.



Рис. 13.1

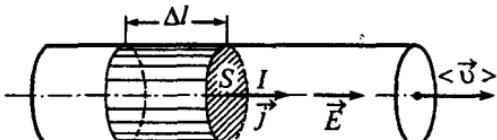


Рис. 13.2

Рассмотрим проводник поперечным сечением S . Величина заряда, протекающего через поперечное сечение проводника за единицу времени, называется *силой тока*. Если за одинаковые промежутки времени Δt через поперечное сечение проводника протекают равные заряды Δq , то сила тока в проводнике равна

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad (13.1)$$

при этом ток называют *постоянным (стационарным)*.

Если сила тока изменяется с течением времени, то формула (13.1) определяет среднее значение силы тока за промежуток времени Δt . Для определения мгновенного значения силы тока в (13.1) необходимо перейти к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (13.2)$$

Единицей измерения силы тока в системе СИ служит *ампер [A]* (подробное определение будет дано в §14).

Как известно (см. §12), сила, действующая на заряды в проводнике со стороны электрического поля напряженностью E , определяется формулой $F = qE$. Поэтому при отсутствии других сил заряды должны двигаться с ускорением. Однако из-за столкновений носителей тока с атомами и молекулами проводника возникает тормозящая сила, пропорциональная скорости $\langle \vec{v} \rangle$, которую называют *средней скоростью направленного (упорядоченного) движения* или *средней скоростью дрейфа*.

Пусть в проводнике имеются носители тока одного знака, средняя скорость направленного движения которых постоянна и равна $\langle \vec{v} \rangle$. Если проводник цилиндрический, то площадка S , совпадающая с площадью поперечного сечения проводника, будет расположена перпендикулярно к линиям тока, а, значит, и перпендикулярно к направлению скорости $\langle \vec{v} \rangle$ заряженных частиц. Построим на этой площадке цилиндр длиной $\Delta l = \langle v \rangle \Delta t$ (рис. 13.2). Если через равные по площади участки поперечного сечения S проводника в единицу времени протекают равные заряды, то число заряженных частиц, которые пройдут через площадку S за время Δt , будет равно числу частиц в рассматриваемом цилиндре:

$$\Delta q = q_0 n S \Delta l, \quad \text{или} \quad \Delta q = q_0 n S \langle v \rangle \Delta t,$$

где q_0 – заряд одной частицы, n – их концентрация в проводнике. В этом случае распределение тока называют *равномерным*.

Электрический ток может быть распределен по сечению S неравномерно. Более детально ток можно характеризовать с помощью вектора *плотности тока* j . Если распределение тока по сечению проводника рав-

номерное, то величина вектора плотности тока численно равна заряду, протекающему через единицу площади поперечного сечения проводника за единицу времени:

$$j = \frac{I}{S}, \quad \text{или} \quad j = q_0 n <\vec{v}>. \quad (13.3)$$

Поскольку за направление тока принято направление движения положительных зарядов, то направление плотности тока совпадает с направлением скорости $<\vec{v}>$. Поэтому соотношение (13.3) в векторной форме записывают в виде

$$\vec{j} = q_0 n <\vec{v}>. \quad (13.4)$$

Если плотность тока не одинакова во всех точках поперечного сечения проводника, то поверхность S можно разбить на бесконечно малые элементы dS , в каждой точке которых плотность тока одинакова. Тогда ток через каждую такую площадку dS будет равен

$$dI = j dS,$$

а сила тока, протекающего через сечение S ,

$$I = \int_S dI = \int_S j dS, \quad (13.5)$$

где интегрирование производится по всей поверхности S сечения проводника.

Закон Ома для однородного участка цепи.

Электрическое сопротивление

Рассмотрим металлический проводник (рис. 13.3), между концами которого имеется разность потенциалов $\Delta\Phi_{a-b} = \Phi_a - \Phi_b$ (т.е. напряжение или падение напряжения $U = \Phi_a - \Phi_b$). Если $\Phi_a > \Phi_b$, то ток в проводнике будет направлен от точки a к точке b . Если состояние проводника остается неизменным, то существует однозначная зависимость между напряжением, приложенным к концам проводника, и силой тока в нем. Эту зависимость называют *вольт-амперной характеристикой* данного проводника. Для металлических проводников эта зависимость особенно проста: сила тока I в проводнике прямо пропорциональна разности потенциалов U на его концах

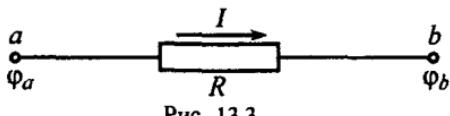


Рис. 13.3

$$I = \frac{U}{R}, \quad (13.6)$$

где коэффициент R называется *электрическим сопротивлением* (или просто *сопротивлением*) проводника, которое представляет собой меру противодействия данного проводника протеканию в нем электрического тока. В системе СИ единицей измерения сопротивления служит *ом* [$\text{Ом} = \text{В/А}$].

Формула (13.6) была экспериментально установлена Омом и выражает закон *Ома для однородного участка цепи* (определение однородного участка будет дано ниже).

Электрическое сопротивление – основная электрическая характеристика проводника, зависящая от его формы и размеров. Для металлических проводников постоянного сечения установлено, что сопротивление прямо пропорционально длине l проводника и обратно пропорционально площади S его поперечного сечения:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (13.7)$$

где ρ – *удельное сопротивление* проводника, характеризующее свойства и состояние вещества, из которого он изготовлен. Удельное сопротивление зависит не только от химической природы вещества, но и от температуры проводника: как правило, сопротивление металлов возрастает с ростом температуры и для всех металлов при обычных температурах

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad (13.8)$$

где ρ_0 – удельное сопротивление при 0°C ; α – *температурный коэффициент сопротивления*; t – температура проводника в $[\text{ }^\circ\text{C}]$.

Значения температурного коэффициента сопротивления являются табличными величинами. Однако для всех чистых металлов и многих сплавов в области температур $0^\circ\text{C} \div 100^\circ\text{C}$ можно считать $\alpha \approx 1/273$ [град $^{-1}$].

Используя понятие удельного сопротивления, закон Ома (13.6) можно записать по-другому.

Рассмотрим проводник длиной l и площадью поперечного сечения S , представленный на рис. 13.2. Если на концах этого проводника поддерживается постоянное напряжение U , то внутри него существует электрическое поле напряженностью

$$E = \frac{U}{l},$$

направленное вдоль оси проводника. Если плотность тока одинакова в любой точке, то сила тока в проводнике

$$I = j S.$$

На основании (13.6) и (13.7) получим

$$j S = \frac{E l S}{\rho l}, \quad \text{или} \quad j = \sigma E, \quad (13.9)$$

где $\sigma = 1/\rho$ – *удельная электрическая проводимость* (или просто *проводимость*) проводника, единицей измерения которой является *сименс* [$\text{См} = \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$].

Поскольку в проводнике упорядоченное движение носителей тока происходит в направлении вектора \vec{E} , то направления \vec{j} и \vec{E} совпадают. Поэтому соотношение (13.9) записывают в виде

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (13.10)$$

и называют *законом Ома в дифференциальной форме*.

Последовательное и параллельное соединение проводников

Несколько проводников могут быть соединены между собой. При этом так же, как у конденсаторов, различают последовательное и параллельное соединения (см. рис. 13.4 и рис. 13.5 соответственно).

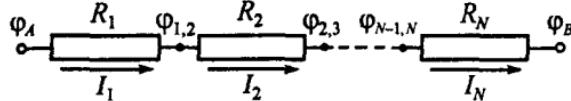


Рис. 13.4

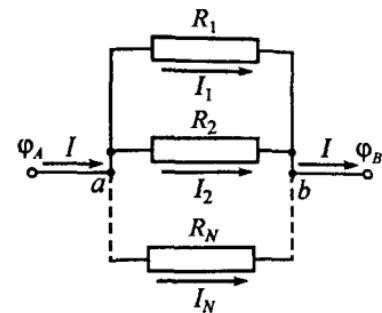


Рис. 13.5

При последовательном соединении проводников через каждый из них течет одинаковый ток (в противном случае заряд накапливался бы в некоторой точке):

$$I = I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_N.$$

Разность потенциалов $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B$ на концах соединения равна сумме разностей потенциалов на каждом из проводников:

$$\Delta\phi = \sum_{i=1}^N \Delta\phi_i,$$

в чем легко убедиться, введя потенциалы $\phi_{i,j}$ точек между проводниками сопротивлениями R_i и R_j :

$$\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = (\phi_A - \phi_{1,2}) + (\phi_{1,2} - \phi_{2,3}) + (\phi_{2,3} - \phi_{3,4}) + \dots + (\phi_{N-1,N} - \phi_B),$$

или

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_N,$$

где U – напряжение на концах участка; U_i – падения напряжения на каждом из проводников.

Общее сопротивление всего соединения найдем, используя закон Ома (13.6):

$$R_{\text{посл}} = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_N}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \frac{U_3}{I} + \dots + \frac{U_N}{I},$$

или

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N = \sum_{i=1}^N R_i. \quad (13.11)$$

При параллельном соединении напряжения на концах всех проводников одинаковы

$$U = U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_N = \phi_a - \phi_b,$$

а сила тока до точки a и после точки b (см. рис. 13.5) по закону сохранения заряда будет равна сумме токов в каждом из проводников:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_N.$$

Следовательно, при параллельном соединении общее сопротивление

$$R_{\text{пар}} = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_N},$$

или

$$\frac{1}{R_{\text{пар}}} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \frac{I_3}{U} + \dots + \frac{I_N}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}. \quad (13.12)$$

Электродвижущая сила источника.

Закон Ома для неоднородного участка цепи и замкнутой цепи

Легко понять, что нельзя получить в проводнике постоянный ток, если для создания напряжения на концах проводника использовать заряженный конденсатор. Наличие тока будет сопровождаться переходом зарядов с одной обкладки на другую в таком направлении, чтобы разность потенциалов между обкладками уменьшалась. При этом сила тока в проводнике быстро упадет до нуля.



Рис. 13.6

Рассмотрим проводник, между концами A и B которого существует разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$, причем $\varphi_A > \varphi_B$ (рис. 13.6). В проводнике возникнет электрическое поле, под действием которого носители заряда будут перемещаться таким образом, чтобы уменьшить потенциал φ_A и увеличить потенциал φ_B .

Через некоторое время, если не принять мер для поддержания разности потенциалов, перемещение носителей заряда приведет к тому, что поле внутри проводника исчезнет и ток прекратится. Для того чтобы поддержать ток, нужно непрерывно перемещать приносимые на один конец проводника заряды на другой его конец, т.е. необходимо осуществить круговорот зарядов, чтобы они двигались по замкнутому пути. Очевидно, чтобы заставить двигаться положительные заряды от меньшего потенциала к большему, а отрицательные – от большего к меньшему, необходима сила, имеющая неэлектрическую природу. Поэтому в замкнутой цепи наряду с участками, на которых заряды движутся под действием сил электрического поля (такие участки называют *однородными*), должны существовать участки, где перенос зарядов происходит против сил поля. Перемещение зарядов на таких участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения (т.е. не кулоновских), которые называют *сторонними*, а участки, на которых они действуют, – *неоднородными*. Эти силы, например, могут быть обусловлены химическими процессами (всевозможные аккумуляторы) или иметь электромагнитное происхождение (генераторы тока).

Сторонние силы характеризуют работой, которую они совершают над перемещаемыми зарядами. Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется *электродвижущей силой* (ЭДС), действующей в контуре или на участке цепи:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}. \quad (13.13)$$

Из сопоставления формул (13.13) и (12.19) следует, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала, т.е. ЭДС измеряется в вольтах.

Любое устройство, в котором возникают сторонние силы, называют источником тока. Реальный источник тока имеет ЭДС \mathcal{E} и сопротивление r , которое обычно называют внутренним сопротивлением источника в отличие от внешнего сопротивления R цепи (в генераторе r – это сопротивление обмоток, в аккумуляторе – сопротивление раствора электролита и электродов). При расчете цепей реальный источник заменяют идеальным источником с ЭДС \mathcal{E} , внутреннее сопротивление которого равно нулю, и последовательно включенным с ним сопротивлением r .

Источники, используемые в цепях постоянного тока, имеют два электрода (один электрод положительный, а другой – отрицательный) и предназначены для перемещения положительных зарядов от электрода с меньшим потенциалом к электроду с большим, а отрицательные наоборот. Поэтому работа сторонних сил $A_{\text{стор}} > 0$ (а, значит и ЭДС $\mathcal{E} > 0$), если положительные заряды внутри источника переносятся от отрицательного электрода к положительному. В противном случае $A_{\text{стор}} < 0$ и $\mathcal{E} < 0$.

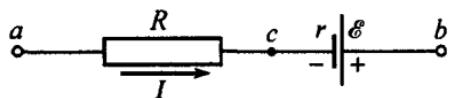


Рис. 13.7

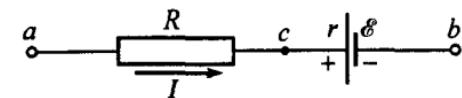


Рис. 13.8

Рассмотрим участок цепи, содержащий источник ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r и внешнее сопротивление R (рис. 13.7), по которому течет ток I в указанном направлении.

Работа, совершаемая всеми силами при перемещении заряда q на участке $a-b$ цепи, равна

$$A_{a-b} = A_{\text{эл}} + A_{\text{стор}},$$

где $A_{\text{эл}} = q(\varphi_a - \varphi_b)$ – работа сил электрического поля (согласно указанному на рисунке направлению тока, полагаем, что $\varphi_a > \varphi_b$); $A_{\text{стор}}$ – работа сторонних сил. Следовательно,

$$A_{a-b} = q(\varphi_a - \varphi_b) + q\mathcal{E}.$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электрическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется падением напряжения (напряжением) U на данном участке цепи. Поэтому для участка $a-b$

$$U_{a-b} = \frac{A_{a-b}}{q} = (\varphi_a - \varphi_b) + \mathcal{E}. \quad (13.14)$$

Если источник включен так, как показано на рис. 13.8, то работа сторонних сил будет отрицательной, поскольку внутри источника заряды будут перемещаться в направлении убывания потенциала. В этом случае

$$U_{a-b} = \frac{A_{a-b}}{q} = (\varphi_a - \varphi_b) - \mathcal{E}. \quad (13.15)$$

Выражения (13.14) и (13.15) можно объединить:

$$U_{a-b} = \Delta\varphi_{a-b} \pm \mathcal{E}, \quad (13.16)$$

где знак «+» перед ЭДС соответствует случаю, если источник способствует движению положительных зарядов в направлении тока на участке, а знак «-» – если препятствует.

Разделив напряжение U_{a-b} на полное сопротивление $R_{a-b} = R + r$ участка, получим

$$I = \frac{\Delta\Phi_{a-b} \pm \mathcal{E}}{R + r}. \quad (13.17)$$

Формула (13.17) выражает закон *Ома для неоднородного участка цепи*.

Понятно, что если участок содержит N сопротивлений R_i и M источников ЭДС \mathcal{E}_j , то

$$U_{a-b} = \sum_{i=1}^N \Delta\Phi_i \pm \sum_{j=1}^M \mathcal{E}_j, \quad (13.18)$$

где $\Delta\Phi_i$ – разность потенциалов на концах сопротивления R_i . Следовательно, падение напряжения на неоднородном участке цепи равно алгебраической сумме падений напряжений на однородных участках и действующих ЭДС.

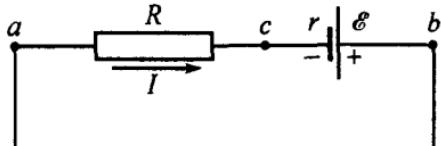


Рис. 13.9

Если цепь замкнута (рис. 13.9), то, положив в (13.17) $\Delta\Phi_{a-b} = 0$, получим выражение закона *Ома для замкнутой цепи*:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (13.19)$$

Разность потенциалов между точками a и c цепи равна падению напряжения на сопротивлении R

$$IR = \mathcal{E} - Ir$$

и совпадает с разностью потенциалов между точками b и c (так как $\Phi_a = \Phi_b$), которая равна напряжению на зажимах источника.

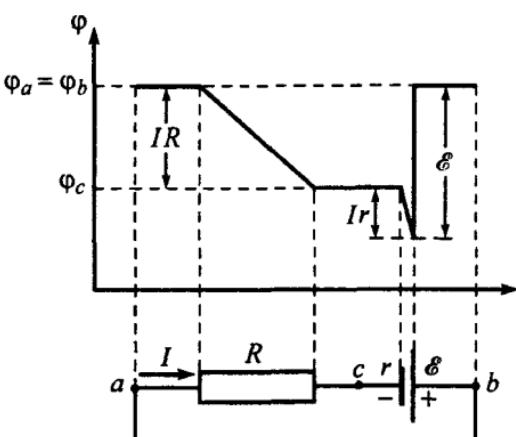


Рис. 13.10

Итак, замкнутая цепь, в которой течет постоянный ток, должна содержать источник, внутри которого положительные заряды движутся под действием сторонних сил в направлении возрастания потенциала (от отрицательного электрода к положительному), а во всей остальной цепи – в направлении убывания потенциала. На рис. 13.10 показано распределение потенциала в замкнутой электрической цепи, содержащей реальный источник и внешнее сопротивление R .

Разветвленные цепи постоянного тока. Законы Кирхгофа

Определим некоторые понятия, принятые в электротехнике:

- **узел** – это точка, в которой сходятся более чем два проводника;
- **ветвь** – это последовательное соединение сопротивлений, конденсаторов и источников тока, расположенное между двумя узлами;
- **контур** – это замкнутый участок цепи, содержащий несколько последовательных ветвей;
- **независимый контур** – контур, который содержит хотя бы одну ветвь, не принадлежащую другим контурам, т.е. его нельзя получить наложением других контуров друг на друга.

Расчет электрической цепи в общем случае предполагает нахождение токов во всех ветвях цепи.

Существует два способа расчета разветвленных электрических цепей. Один состоит в том, чтобы путем эквивалентных преобразований (замены последовательно и параллельно соединенных элементов цепи эквивалентными) свести исходную разветвленную цепь к одному контуру, а затем, применив закон Ома для замкнутой цепи, найти ток в неразветвленной части. Далее, применяя законы Ома для однородных и неоднородных участков цепи, обратными преобразованиями нужно вернуться к исходной цепи, последовательно вычислив падения напряжения на каждом из участков и токи во всех ветвях. Однако не все схемы можно преобразовать к одному замкнутому контуру, поэтому этот путь не является универсальным.

Другой способ, не требующий преобразований цепи, основан на применении законов Кирхгофа. Первый из них относится к узлам цепи: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum_i I_i = 0, \quad (13.20)$$

при этом ток, текущий к узлу, считается имеющим один знак (плюс или минус), а ток, текущий от узла, – имеющим другой знак (минус или плюс). Первый закон Кирхгофа вытекает из закона сохранения заряда: поскольку в узле не может происходить накопления зарядов, то суммарный заряд, приходящий в узел за любой промежуток времени, должен быть равен заряду, вытекающему из узла за это же время.

Выделим в разветвленной цепи какой-либо контур (рис. 13.11) и запишем закон Ома (13.17) для отдельных его участков в виде

$$\begin{cases} I_1 (R_1 + r_1) = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1; \\ I_2 (R_2 + r_2) = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2; \\ I_3 (R_3 + r_3) = \varphi_3 - \varphi_1 - \mathcal{E}_3. \end{cases} \quad (13.21)$$

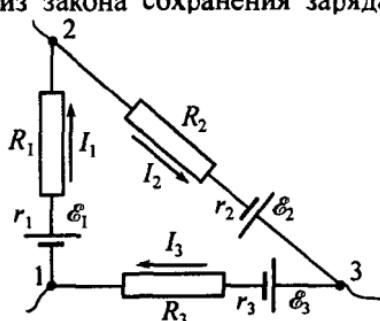


Рис. 13.11

Сложив левые и правые части уравнений (12.21), получим

$$I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) + I_3(R_3 + r_3) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3,$$

или

$$\sum_i I_i (R_i + r_i) = \sum_j \mathcal{E}_j. \quad (13.22)$$

Соотношение (13.22) выражает второй закон Кирхгофа: для любого замкнутого контура алгебраическая сумма падений напряжений в ветвях контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре.

Применяя законы Кирхгофа к узлам и к различным замкнутым контурам, входящим в состав разветвленной цепи, можно получить систему уравнений для определения всех токов. Можно показать, что число независимых уравнений всегда равно числу неизвестных токов. Если цепь содержит N узлов и B ветвей с различными токами, то система должна содержать B уравнений, причем $N - 1$ из них составлены по первому закону Кирхгофа, а $K = B - (N - 1)$ – по второму, где K – число независимых контуров. Прежде чем составлять систему уравнений по законам Кирхгофа, необходимо задать произвольным образом направления токов в каждой ветви и выбрать направления обхода независимых контуров (по часовой стрелке или против, причем для каждого контура можно выбрать свое направление обхода). При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа соблюдаются правила знаков: падения напряжений на однородных участках контуров считаются положительными, если направления токов в них совпадают с направлением обхода, и ЭДС считают положительными, если они действуют в направлении обхода, т.е. направление движения положительных зарядов внутри источника (от «минуса» к «плюсу») совпадает с направлением обхода контура.

Измерение токов и напряжений

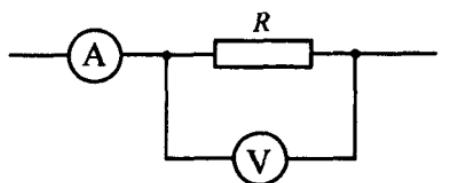


Рис. 13.12

Для измерения тока в проводнике и падения напряжения на нем в электрическую цепь включают амперметр и вольтметр, причем амперметр включают последовательно с этим проводником, а вольтметр – параллельно к нему (рис. 13.12).

Основной частью этих приборов является гальванометр, принцип работы которого основан на том, что магнитное поле оказывает ориентирующее действие на виток с током (см. §14), причем отклонение стрелки прибора пропорционально силе протекающего через него тока.

Для измерения токов и напряжений гальванометры включают по схеме амперметра или вольтметра. Поскольку измерительные приборы не должны менять токи и напряжения на участках цепи, то внутреннее сопротивление амперметра должно быть очень малым, а вольтметра – большим.

Каждый гальванометр рассчитан на измерение определенного максимального тока I_{\max} , соответствующего отклонению стрелки прибора на всю шкалу. Такой гальванометр можно непосредственно использовать для измерения токов силой $I \leq I_{\max}$. Чтобы изме-

рять токи $I > I_{\max}$, параллельно гальванометру включают дополнительное сопротивление $R_{\text{ш}}$, которое называют шунтом (рис. 13.13). Необходимое значение $R_{\text{ш}}$ для измерения тока $I > I_{\max}$ подбирают таким образом, чтобы через прибор протекал ток силой I_{\max} , а ток $I_{\text{ш}} = I - I_{\max}$ отводился через шунт (по первому закону Кирхгофа: $I - I_{\max} - I_{\text{ш}} = 0$). Поскольку прибор и шунт подключены к одним и тем же точкам цепи, то падение напряжения на внутреннем сопротивлении R_G гальванометра (сопротивлении витка) и шунте $R_{\text{ш}}$ одинаково:

$$I_{\max} R_G = I_{\text{ш}} R_{\text{ш}}.$$

Следовательно, через шунт потечет ток

$$I_{\text{ш}} = \frac{I_{\max} R_G}{R_{\text{ш}}},$$

являющийся частью тока в цепи, равного

$$I = I_{\max} + I_{\text{ш}}, \quad \text{или} \quad I = I_{\max} \left\{ 1 + \frac{R_G}{R_{\text{ш}}} \right\}.$$

Отсюда получим

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_G}{n - 1}, \quad (13.23)$$

где $n = I/I_{\max}$.

По закону Ома для однородного участка цепи предельно допустимое напряжение, которое может измерить прибор, равно

$$U_{\max} = I_{\max} R_G.$$

Если необходимо измерить падение напряжения U на сопротивлении R , которое больше U_{\max} , к гальванометру последовательно подключают дополнительное сопротивление R_d , которое называют добавочным (рис. 13.14). Величину добавочного сопротивления выбирают так, чтобы через прибор и R_d тек ток силой I_{\max} . Напряжение на сопротивлении R будет равно падению напряжения на добавочном сопротивлении и внутреннем сопротивлении прибора:

$$U = I_{\max} (R_G + R_d), \quad \text{или} \quad U = U_{\max} \frac{R_G + R_d}{R_G}.$$

Отсюда получим

$$R_d = R_G (n - 1), \quad (13.24)$$

где $n = U/U_{\max}$.

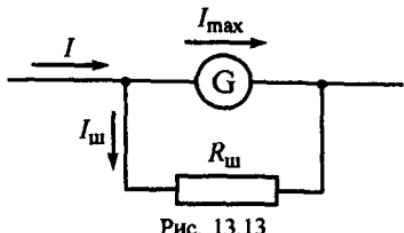


Рис. 13.13

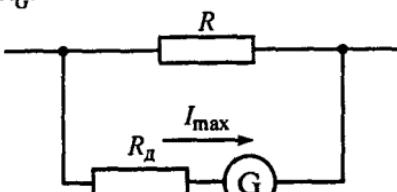


Рис. 13.14

Из сказанного следует, что гальванометр с внутренним сопротивлением R_G , рассчитанный на измерение тока I_{\max} , можно использовать для измерения токов $I \leq n I_{\max}$, если параллельно к нему подключить шунт, рассчитанный по формуле (13.23). Если этот прибор нужно использовать как вольтметр для измерения напряжений $U \leq n I_{\max} R_G$, то к нему необходимо последовательно подключить добавочное сопротивление, величина которого должна быть определена по формуле (13.24).

Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим произвольный однородный участок цепи (см. рис. 13.3), между концами которого имеется разность потенциалов $U = \varphi_a - \varphi_b$. Через сопротивление R участка будет течь ток силой I , и за промежуток времени Δt через поперечное сечение проводника пройдет заряд $\Delta q = I \Delta t$. Силы электрического поля при этом совершают работу

$$A = \Delta q (\varphi_a - \varphi_b) = \Delta q U = I U \Delta t, \quad (13.25)$$

которую принято называть *работой тока*.

Рассмотрим теперь неоднородный участок цепи, представленный на рис. 13.7 – 13.8. При наличии на участке цепи источника тока работу по переносу заряда будут совершать силы электрического поля и сторонние силы, причем если источник способствует движению положительных зарядов в направлении тока (см. рис. 13.7), то работа сторонних сил положительна, в противном случае (см. рис. 13.8) – отрицательна:

$$A = \Delta q (\varphi_a - \varphi_b) \pm A_{\text{стор}} = \Delta q (\Delta \varphi_{a-b} \pm \epsilon) = I \Delta \varphi_{a-b} \Delta t \pm I \epsilon \Delta t,$$

где первое слагаемое представляет собой работу тока на участке цепи, а второе – работу источника.

Прохождение тока через проводник, обладающий сопротивлением, всегда сопровождается выделением теплоты. Нагревание проводника с током объясняется столкновениями носителей тока с узлами кристаллической решетки: при столкновении часть кинетической энергии носителей тока передается решетке, увеличивая энергию теплового движения атомов вблизи положений равновесия, это и означает увеличение температуры (см. формулу (II.7)).

Для однородных участков цепи, на которых не совершается механическая работа и ток не производит химических действий, работа тока будет затрачена на увеличение внутренней энергии проводника. Поэтому количество теплоты Q , выделившейся в проводнике сопротивлением R за время Δt , будет равно работе тока за это время:

$$Q = I U \Delta t. \quad (13.26)$$

Используя закон Ома (13.6), работу тока (13.25) и количество теплоты (13.27) можно выразить любым из трех эквивалентных способов:

$$A = Q = I U \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t = I^2 R \Delta t. \quad (13.27)$$

Выражение для Q в виде

$$Q = I^2 R \Delta t \quad (13.28)$$

было получено экспериментально и носит название закона Джоуля – Ленца.

На неоднородных участках цепи выделяющаяся теплота в общем случае не равна работе тока: на таких участках протекание тока обычно сопровождается не только нагреванием проводников, но и другими процессами, связанными с превращением энергии.

Рассмотрим в качестве примера зарядку и разрядку источника тока, например аккумулятора. В цепи, представленной на рис. 13.8, при указанном направлении тока будет происходить зарядка источника, сопровождаемая химическими процессами. Работу тока

$$A = I \Delta\varphi_{a-b} \Delta t, \quad (13.29)$$

используя закон Ома для неоднородного участка цепи (13.17)

$$I = \frac{\Delta\varphi_{a-b} - \mathcal{E}}{R + r},$$

можно представить в виде

$$A = \frac{[(\Delta\varphi_{a-b})^2 - \mathcal{E}\Delta\varphi_{a-b}] \Delta t}{R + r} = [I \mathcal{E} + I^2(R + r)] \Delta t.$$

Слагаемое $I \mathcal{E} \Delta t$ представляет собой часть работы тока, затраченную на увеличение энергии источника (зарядку аккумулятора), а $I^2(R + r) \Delta t$ – тепло, выделившееся за время Δt на сопротивлении R и внутреннем сопротивлении r аккумулятора (см. формулу (13.28)).

В цепи, представленной на рис. 13.7, при указанном направлении тока будет происходить разрядка аккумулятора. В этом случае ток на участке цепи равен

$$I = \frac{\Delta\varphi_{a-b} + \mathcal{E}}{R + r},$$

и работу тока можно представить в виде

$$A = I \Delta\varphi_{a-b} \Delta t = \frac{[(\Delta\varphi_{a-b})^2 + \mathcal{E}\Delta\varphi_{a-b}] \Delta t}{R + r} = [-I \mathcal{E} + I^2(R + r)] \Delta t.$$

Слагаемое $I \mathcal{E} \Delta t$ представляет собой энергию, выделяемую аккумулятором при его разрядке.

Как видим, независимо от направления тока на участке, количество теплоты, выделившейся за время Δt на всех сопротивлениях (включая внутреннее сопротивление источника) неоднородного участка цепи, будет равно

$$Q = I^2(R + r) \Delta t. \quad (13.30)$$

Если цепь замкнута (см. рис. 13.9), то $\Delta\varphi_{a-b} = 0$ и работа источника тока

$$A = I \mathcal{E} \Delta t. \quad (13.31)$$

Поскольку в замкнутой цепи носители тока перемещаются благодаря источнику, то работа (13.31) определяет полную работу источника за время Δt . Если ток в цепи не производит никаких действий, кроме нагревания проводников, то количество теплоты, выделившейся в цепи (на

внешнем сопротивлении и внутреннем сопротивлении источника) за это время, будет равно

$$Q = I \mathcal{E} \Delta t = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r} \Delta t = I^2 (R+r) \Delta t, \quad (13.32)$$

при этом на внешнем сопротивлении R цепи будет выделено тепло

$$Q_R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} R \Delta t = I^2 R \Delta t. \quad (13.33)$$

Работа, совершаяя источником за единицу времени

$$N = \frac{A}{\Delta t} = I \mathcal{E}, \quad (13.34)$$

называется *полной мощностью источника тока*, а количество теплоты, выделяющейся в проводнике сопротивлением R за единицу времени

$$N_R = \frac{Q}{\Delta t}, \quad (13.35)$$

тепловой мощностью тока.

Если цепь замкнута, то на внешнем сопротивлении (которое часто называют *нагрузкой*) выделяется тепловая мощность

$$N_R = \frac{Q_R}{\Delta t} = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} R = I^2 R, \quad (13.36)$$

называемая *полезной мощностью*. Для такой цепи разность

$$N_r = N - N_R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} r = I^2 r$$

определяет тепловую мощность, выделяющуюся внутри источника (это часть полной мощности источника, которая тратится бесполезно на выделение тепла внутри источника).

Для замкнутой цепи отношение полезной мощности N_R к полной N называют *коэффициентом полезного действия источника*:

$$\eta = \frac{N_R}{N} = \frac{R}{R+r}. \quad (13.37)$$

Очевидно, что КПД источника может быть определен как

$$\eta = \frac{Q_R}{Q}. \quad (13.38)$$

Рассмотрим более подробно, как зависит полезная мощность и КПД источника от внутреннего сопротивления r источника и внешнего сопротивления R цепи.

Полная мощность N (13.34) с учетом закона Ома (13.19) может быть записана в виде

$$N = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}.$$

Отсюда следует, что полная мощность источника достигает максимального значения при $R=0$, т.е. при коротком замыкании источника. Полезная мощность и КПД источника при этом становятся равными нулю (см. формулы (13.36), (13.37)).

Полезная мощность в зависимости от тока изменяется по параболическому закону, в чем легко убедиться, если представить N_R в виде

$$N_R = N - N_r = I \mathcal{E} - I^2 r.$$

Для нахождения значения максимальной полезной мощности исследуем зависимость N_R на экстремум:

$$\frac{dN_R}{dI} = \mathcal{E} - 2 I_m r = 0; \quad I_m = \frac{\mathcal{E}}{2r}; \quad N_{R\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

Очевидно, что ток в цепи будет равен $I_m = \mathcal{E}/2r$, если внешнее сопротивление R равно внутреннему сопротивлению источника r (см. формулу (13.19)).

КПД источника

$$\eta = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{1+r/R}$$

увеличивается при возрастании сопротивления внешней цепи и при токе, соответствующем максимальной полезной мощности, равен $\eta_m = 1/2$.

Зависимости N , N_R , η от величины внешнего сопротивления представлены на рис. 13.15. Как видим, условия получения максимальной полезной мощности и максимального КПД источника несовместимы: когда N_R достигает наибольшего значения, КПД равен $\eta_m = 1/2$. Когда же КПД близок к единице, мощность N_R мала по сравнению с максимальной мощностью, которую мог бы развить данный источник.

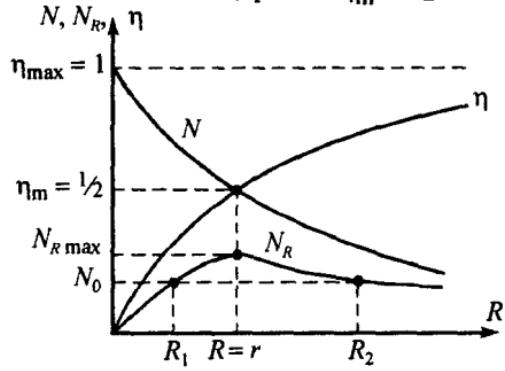


Рис. 13.15

Как следует из зависимости N_R от R , любую полезную мощность N_0 (меньшую максимальной) можно получить при двух разных сопротивлениях R_1 и R_2 внешней цепи. Очевидно, что для получения заданной полезной мощности следует выбирать большее внешнее сопротивление, так как КПД источника при этом выше.

Для получения большого КПД источника должно выполняться условие $1 + r/R \approx 1$, т.е. внешнее сопротивление должно быть $R \gg r$. Если же $R \ll r$, то практически вся мощность будет выделяться в источнике, что может привести к его перегреву и выходу из строя.

Электролиз

Рассмотрим некоторые особенности электрического тока в проводящих жидкостях — **электролитах**. В общем случае электролитами называют растворы и расплавы солей, щелочей и кислот, способные проводить ток. В этих средах носителями тока являются положительно и отрицательно заряженные ионы, которые образуются в результате **электролитической диссоциации** — процесса распада электролита на ионы при растворении, никак не связанного с наличием тока.

Прохождение постоянного тока в электролитах всегда сопровождается выделением на электродах химических составных частей электролита. Этот процесс называется **электролизом**.

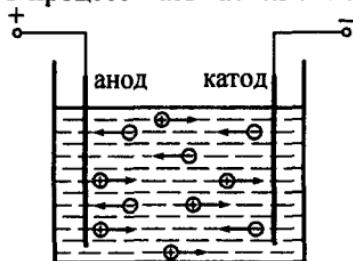


Рис. 13.16

Рассмотрим два электрода, помещенные в электролит (рис. 13.16). Положительно и отрицательно заряженные ионы под действием электрического поля будут двигаться в противоположные стороны: положительные ионы (их называют *катионами*) к отрицательному электроду – катоду, а отрицательно заряженные (анионы) – к положительному электроду – аноду. Достигая анода, отрицательный ион передает свой заряд электроду, отчего один или несколько электронов (в зависимости от величины заряда иона) проходят по внешней цепи, и ион превращается в нейтральный атом или молекулу, выделяющуюся на аноде. Положительный ион, напротив, заимствует от катода один или несколько электронов и, нейтрализуясь, выделяется на катоде. Эти процессы были впервые изучены Фарадеем, который экспериментально установил, что масса m вещества, выделившегося на каком-либо электроде, пропорциональна заряду Δq , прошедшему через электролит:

$$m = k \Delta q, \quad \text{или} \quad m = k I \Delta t, \quad (13.39)$$

где k – *электрохимический эквивалент* вещества.

Фарадей обратил внимание, что электрохимические эквиваленты различных веществ всегда пропорциональны атомной массе A и обратно пропорциональны валентности n , и установил зависимость k от отношения A/n (в химии отношение A/n называют *химическим эквивалентом*):

$$k = \frac{1}{F} \frac{A}{n}, \quad (13.40)$$

где атомная масса A вещества выражена в [кг/моль], а коэффициент пропорциональности $F = |e| N_A = 9,6494 \cdot 10^4$ Кл/моль называется *постоянной Фарадея*.

Выражения (13.39) и (13.40) часто называют *первым и вторым законами Фарадея для электролиза*.

Рекомендации по решению задач

Задачи, в которых неизвестная величина (сила тока, плотность тока, средняя скорость упорядоченного движения носителей тока и т.п.) может быть найдена на основании определений, решаются по формулам (13.1) – (13.5) и никаких особых трудностей не вызывают.

Большая часть задач связана с расчетом параметров сопротивлений проводников и образованных из них цепей. Если в условии задачи указано, из какого материала изготовлен проводник, даны его геометрические размеры (длина, площадь поперечного сечения или объем) или масса, то для определения сопротивления проводника достаточно воспользоваться формулой (13.7) и известными соотношениями между массой, плотностью и объемом. Для решения задач о температурной зависимости сопротивлений проводников, как правило, достаточно формул (13.7) и (13.8).

При расчете общего сопротивления цепи, составленной из нескольких проводников, поступают таким же образом, как при расчете емкости батарей конденсаторов:

– прежде всего нужно выяснить тип соединений (для этого, возможно, нужно будет нарисовать схему по-другому); понять, какие из проводников соединены между собой последовательно, а какие – параллельно;

– последовательно заменяя два (или более) сопротивления одним эквивалентным (при последовательном соединении по формуле (13.11), при параллельном – по (13.12)), цепь постепенно упрощают, пока не будет найдено общее сопротивление;

– если соединение проводников не относится ни к последовательному, ни к параллельному, то общее сопротивление соединения можно найти сравнительно просто только в тех случаях, когда в схеме имеются точки с одинаковым потенциалом: такие точки можно соединять и разъединять, поскольку через проводник, включенный между ними, ток не течет. Соединения (если они были разъединены) и разъединения (если они были соединены) точки с равным потенциалом, можно сложное соединение проводников свести с комбинации последовательных и параллельных соединений. Как и в случае батарей конденсаторов, точки с одинаковым потенциалом есть всегда в соединениях, обладающих осью или плоскостью симметрии относительно точек входа и выхода (т.е. относительно точек подключения источника тока). При этом если точки входа и выхода лежат на плоскости симметрии, то точки одного потенциала находятся на концах проводников, которые «перечеркиваются» этой плоскостью. Если плоскость симметрии перпендикулярна линии, на которой лежат точки входа и выхода, то равные потенциалы имеют все точки пересечения этой плоскости с проводниками. Например, в известной схеме – мост сопротивлений, представленной на рис. 13.17, если $R_1 = R_2$ и $R_3 = R_4$, то плоскостью симметрии является плоскость, проходящая перпендикулярно рисунку через точки входа A и выхода B . При этом плоскость симметрии «перечеркивает» сопротивление R_5 и

потенциалы в точках a и b будут одинаковы. Это означает, что через проводник сопротивлением R_5 ток не течет: его можно не учитывать удалив из цепи или соединив между собой точки a и b . Если $R_1 = R_3$ и $R_2 = R_4$, то плоскость симметрии проходит через точки a и b , которые будут иметь равные потенциалы. Легко понять, что рассмотренные случаи можно объединить: если $R_1 R_4 = R_2 R_3$, то точки a и b имеют равные потенциалы. Мост, в котором ток через сопротивление R_5 отсутствует, называют уравновешенным или сбалансированным.

В общем случае, когда нет точек с равным потенциалом, общее сопротивление цепи определяют на основании законов Кирхгофа.

Задачи на определение силы тока в ветвях цепи или падения напряжения на отдельных проводниках можно разделить на две группы: первая из них охватывает цепи, которые могут быть приведены к одному контуру (путем замены нескольких проводников одним эквивалентным), другая – разветвленные цепи, которые простыми преобразованиями привести к одному контуру нельзя.

Задачи первой группы можно решать в следующей последовательности:

а) начертить схему цепи, на которой отметить все узлы и проставить направления токов во всех ветвях (в общем случае во всех ветвях токи разные); если направления токов неизвестны, то в таких ветвях направления токов можно проставить произвольно (если при расчетах окажется, что ток отрицателен, то это означает, что направление тока противоположно тому, которое указано на рисунке);

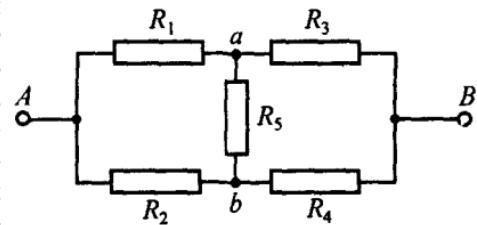


Рис. 13.17

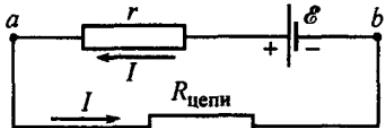


Рис. 13.18

в) применив закон Ома (13.19) для замкнутой цепи, найти ток I , текущий через сопротивление $R_{\text{цепи}}$ и источник;

г) применяя законы Ома для однородных (формула (13.6)) и неоднородных (формула (13.17)) участков цепи, определить падения напряжения на внешнем участке цепи и источнике: $U_{a-b} = IR_{\text{цепи}}$, $U_{a-b} = \mathcal{E} - Ir$;

д) если сопротивления R_i , составляющие $R_{\text{цепи}}$, соединены между собой последовательно, то, зная ток I , по закону Ома (13.6) определить падение напряжения на каждом из них: $U_i = IR_i$; если сопротивления R_i , составляющие $R_{\text{цепи}}$, соединены между собой параллельно, то, зная падение напряжения U_{a-b} , по закону Ома (13.6) для однородного участка определить токи через эти сопротивления: $I_i = U_{a-b}/R_i$;

е) зная падения напряжения U_i между узлами цепи, по закону Ома (13.6) вычислить токи во всех ветвях, включенных между этими узлами; зная токи I_i в отдельных ветвях, по закону Ома (13.6) определить падения напряжения на каждом из элементов, содержащихся в этих ветвях;

ж) если падения напряжения и токи определены не на всех элементах цепи, то пункт е) следует повторять до тех пор, пока не будут найдены все необходимые по условию задачи падения напряжения и токи.

Если цепь не замкнута (т.е. рассматривается участок цепи), то при решении задач можно руководствоваться пунктами а–ж, за исключением пункта в), в котором следует использовать закон Ома (13.6), если цепь не содержит источников тока, или (13.17), если цепь содержит источник.

Задачи второй группы нужно решать на основании законов Кирхгофа. Общие правила расчетов разветвленных цепей таковы:

а) начертить схему цепи, на которой отметить все узлы и произвольно проставить направления токов во всех ветвях;

б) написать уравнения, выражающие первый закон Кирхгофа для всех узлов, кроме одного; при этом ток, текущий к узлу, считается имеющим один знак (плюс или минус), а ток, текущий от узла, – имеющим другой знак (минус или плюс);

в) произвольно выбрать направления обхода независимых контуров (одно и то же для всех или разные для каждого контура); при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа нужно тщательно соблюдать правила знаков: падения напряжений на однородных участках контуров считаются положительными, если направления токов в них совпадают с направлением обхода и ЭДС считают положительными, если они действуют в направлении обхода;

г) если цепь содержит N узлов и B ветвей с различными токами, то составить для $K = B - (N - 1)$ независимых контуров уравнения, соответствующие второму закону Кирхгофа;

д) решить полученную систему уравнений; если в результате решения какие-либо токи окажутся отрицательными, то в действительности их направления противоположны указанным на рисунке.

К этой же группе можно отнести задачи на расчет цепей, содержащих сопротивления и конденсаторы. Обычно в таких задачах требуется определить напряжение на конденсаторе или его заряд. Для этого поступают следующим образом:

– поскольку в ветви, содержащей конденсатор, ток течет лишь до тех пор, пока конденсатор не зарядится (в течение очень малого промежутка времени), то при расчете цепи

б) путем эквивалентных преобразований (замены последовательно и параллельно соединенных проводников эквивалентными) свести исходную цепь к одному контуру, содержащему источник тока и общее сопротивление $R_{\text{цепи}}$ цепи (рис. 13.18);

в) применив закон Ома (13.19) для замкнутой цепи, найти ток I , текущий через сопротивление $R_{\text{цепи}}$ и источник;

г) применяя законы Ома для однородных (формула (13.6)) и неоднородных (формула (13.17)) участков цепи, определить падения напряжения на внешнем участке цепи и источнике: $U_{a-b} = IR_{\text{цепи}}$, $U_{a-b} = \mathcal{E} - Ir$;

д) если сопротивления R_i , составляющие $R_{\text{цепи}}$, соединены между собой последовательно, то, зная ток I , по закону Ома (13.6) определить падение напряжения на каждом из них: $U_i = IR_i$; если сопротивления R_i , составляющие $R_{\text{цепи}}$, соединены между собой параллельно, то, зная падение напряжения U_{a-b} , по закону Ома (13.6) для однородного участка определить токи через эти сопротивления: $I_i = U_{a-b}/R_i$;

е) зная падения напряжения U_i между узлами цепи, по закону Ома (13.6) вычислить токи во всех ветвях, включенных между этими узлами; зная токи I_i в отдельных ветвях, по закону Ома (13.6) определить падения напряжения на каждом из элементов, содержащихся в этих ветвях;

ж) если падения напряжения и токи определены не на всех элементах цепи, то пункт е) следует повторять до тех пор, пока не будут найдены все необходимые по условию задачи падения напряжения и токи.

Если цепь не замкнута (т.е. рассматривается участок цепи), то при решении задач можно руководствоваться пунктами а–ж, за исключением пункта в), в котором следует использовать закон Ома (13.6), если цепь не содержит источников тока, или (13.17), если цепь содержит источник.

Задачи второй группы нужно решать на основании законов Кирхгофа. Общие правила расчетов разветвленных цепей таковы:

а) начертить схему цепи, на которой отметить все узлы и произвольно проставить направления токов во всех ветвях;

б) написать уравнения, выражающие первый закон Кирхгофа для всех узлов, кроме одного; при этом ток, текущий к узлу, считается имеющим один знак (плюс или минус), а ток, текущий от узла, – имеющим другой знак (минус или плюс);

в) произвольно выбрать направления обхода независимых контуров (одно и то же для всех или разные для каждого контура); при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа нужно тщательно соблюдать правила знаков: падения напряжений на однородных участках контуров считаются положительными, если направления токов в них совпадают с направлением обхода и ЭДС считают положительными, если они действуют в направлении обхода;

г) если цепь содержит N узлов и B ветвей с различными токами, то составить для $K = B - (N - 1)$ независимых контуров уравнения, соответствующие второму закону Кирхгофа;

д) решить полученную систему уравнений; если в результате решения какие-либо токи окажутся отрицательными, то в действительности их направления противоположны указанным на рисунке.

К этой же группе можно отнести задачи на расчет цепей, содержащих сопротивления и конденсаторы. Обычно в таких задачах требуется определить напряжение на конденсаторе или его заряд. Для этого поступают следующим образом:

– поскольку в ветви, содержащей конденсатор, ток течет лишь до тех пор, пока конденсатор не зарядится (в течение очень малого промежутка времени), то при расчете цепи

ветвь, в которую включен конденсатор, не учитывают, и схему рисуют без нее (например, в цепи, представленной на рис. 13.19, это ветвь $a-C-b-R_1-d$);

– далее находят токи во всех ветвях и падения напряжения между всеми узлами цепи (если они остались в цепи после удаления из нее ветви с конденсатором);

– затем цепь восстанавливают, т.е. включают в нее ветвь с конденсатором, и для определения падения напряжения U_C на конденсаторе обходят любой из контуров, содержащих конденсатор. Например, для контура $a-C-b-R_1-d-R-a$ при обходе по часовой стрелке получим: $(\varphi_a - \varphi_b) + (\varphi_b - \varphi_d) - IR = 0$, где $\varphi_a - \varphi_b = U_C$ – падение напряжения на конденсаторе; $\varphi_b - \varphi_d = 0$, поскольку ток в ветви $a-C-b-R_1-d$ не течет. Следовательно, $U_C - IR = 0$. Падения напряжения U_C на конденсаторе можно найти также, рассмотрев другой контур, содержащий источник. Рассмотрим, например, контур $a-C-b-R_1-d-\mathcal{E}-a$. Обходя его против часовой стрелки, получим: $(\varphi_a - \varphi_b) + (\varphi_b - \varphi_d) + (\varphi_d - \varphi_e) - \mathcal{E} = 0$, где $\varphi_a - \varphi_b = U_C$; $\varphi_b - \varphi_d = 0$; $\varphi_d - \varphi_e = Ir$. Откуда находим: $U_C + Ir - \mathcal{E} = 0$. Если учесть, что ток в цепи равен $I = \mathcal{E}/(R+r)$, то в обоих рассмотренных случаях $U_C = \mathcal{E}R/(R+r)$;

– наконец, заряд конденсатора определяют по формуле: $q = C U_C$.

При решении задач, связанных с расчетами шунтов и добавочных сопротивлений для гальванометров, можно использовать формулы (13.23) – (13.24). Если шкала гальванометра с внутренним сопротивлением R_G рассчитана на максимальный ток I_{max} , то им можно измерять токи $I \leq I_{max}$ и напряжения $U \leq I_{max} R_G$. Чтобы расширить пределы измерения токов в n раз, параллельно гальванометру нужно подключить шунт, сопротивление которого рассчитывается по формуле (13.23). Для увеличения в n раз пределов измерения напряжений к гальванометру последовательно подключают добавочное сопротивление, рассчитанное по формуле (13.24). При этом следует помнить, что для измерения тока в проводнике амперметр включают последовательно с этим проводником, а вольтметр – параллельно к нему.

Задачи на работу, мощность и тепловое действие можно разделить на две группы. Задачи первой из них решаются аналогично задачам на расчет токов в ветвях цепи и падений напряжений на ее элементах. Для их решения составляют те же уравнения, но к ним добавляют формулы (13.25) – (13.38):

– работа тока на однородном и неоднородном участках цепи определяется формулами (13.25), (13.29); для нахождения полной работы источника тока в замкнутой цепи нужно использовать формулу (13.31);

– количество теплоты, выделившейся на однородном участке цепи, можно определить по любой из формул (13.27); количество теплоты, выделившейся на всех сопротивлениях неоднородного участка цепи, – по формуле (13.30), а в замкнутой цепи (если ток не производит никаких действий, кроме нагревания проводников) – по формулам (13.32) – (13.33);

– если в задаче речь идет о тепловой мощности тока, полной или полезной мощности источника тока, то необходимо использовать формулы (13.34) – (13.36);

– для определения КПД источника нужно найти полную и полезную мощность или количество тепла, выделившегося во внешней цепи и во всей цепи, и воспользоваться формулами (13.37) или (13.38).

К задачам первой группы относятся также задачи на расчет цепей, содержащих нагревательные приборы (электрические кипятильники, плитки и т.п.). Так как нагревательные приборы обычно подключают к источнику постоянного напряжения, величина которого не зависит от вибрирующей цепи, то для расчета количества теплоты (или мощности), выделяющейся на разных проводниках, удобно использовать формулу (13.27) в виде $Q = U^2 \Delta t / R$ (или $N = U^2 / R$).

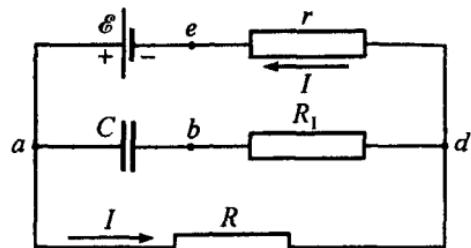


Рис. 13.19

К задачам второй группы отнесем задачи о превращении электрической энергии в механическую и тепловую. Решение таких задач основано на совместном использовании законов постоянного тока и закона сохранения энергии.

Последнюю часть задач на постоянный ток составляют задачи на электролиз. В большинстве случаев для решения таких задач достаточно законов Фарадея (13.39) – (13.40) и некоторых соотношений, связывающих данные задачи с величинами, входящими в законы Фарадея: ими могут быть зависимости толщины слоя металла, выделяющегося на электроде, скорости роста этого слоя, расхода электроэнергии от массы вещества и времени электролиза и др. Если в задаче рассматривается выделение газа при электролизе, то совместно с законами Фарадея нужно использовать уравнения состояния идеального газа.

Задачи

Электрическое сопротивление.

Параллельное и последовательное соединение сопротивлений

13.1. Нихромовая спираль нагревательного элемента при температуре накала $t = 900^\circ\text{C}$ должна иметь сопротивление $R = 30 \text{ Ом}$. Какой длины надо взять проволоку поперечным сечением $S = 0,6 \text{ мм}^2$, чтобы сделать эту спираль? Удельное сопротивление никрома при $t_0 = 0^\circ\text{C}$ равно $\rho_0 = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$, температурный коэффициент сопротивления никрома $\alpha = 10^{-4} \text{ град}^{-1}$. Тепловым расширением проволоки пренебречь.

• *Решение.* Сопротивление проволоки длиной l и поперечным сечением S при $t_0 = 0^\circ\text{C}$ равно

$$R_0 = \frac{\rho_0 l}{S}.$$

При повышении температуры удельное сопротивление проволоки увеличится и при температуре t станет равным

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t).$$

Поскольку по условию задачи изменением длины и площади поперечного сечения проволоки можно пренебречь, то при температуре t сопротивление проволоки

$$R = \frac{\rho_0 (1 + \alpha t) l}{S}.$$

Следовательно, для изготовления нагревательного элемента с заданным сопротивлением R при температуре t нужно взять проволоку длиной

$$l = \frac{RS}{\rho_0 (1 + \alpha t)} \approx 15 \text{ м.}$$

• *Ответ:* $l = \frac{RS}{\rho_0 (1 + \alpha t)} \approx 15 \text{ м.}$

13.2. При какой температуре сопротивление серебряного проводника станет в $n = 2$ раза больше, чем при $t_0 = 0^\circ\text{C}$? Температурный коэффициент сопротивления серебра $\alpha = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$. Тепловым расширением проводника пренебречь.

13.3. Насколько отличаются сопротивления телеграфной линии длиной $l = 100 \text{ км}$ летом и зимой, если она проложена железным проводом поперечного сечения $S = 10 \text{ мм}^2$? Температуру летом считать равной $t_1 = 25^\circ$, зимой – $t_2 = -20^\circ\text{C}$. Удельное сопротивление железа при $t_0 = 0^\circ\text{C}$ равно $\rho_0 = 9,8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$, температурный коэффициент сопротивления железа $\alpha = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$. Тепловым расширением провода пренебречь.

13.4. Два проводника, соединенные последовательно, имеют сопротивление в $n = 6,25$ раза больше, чем при их параллельном соединении. Определить, во сколько раз сопротивление одного проводника больше сопротивления другого.

• **Решение.** Общее сопротивление двух проводников, соединенных последовательно,

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2, \quad (1)$$

где R_1, R_2 – сопротивления каждого из проводников.

При их параллельном соединении общее сопротивление

$$R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad (2)$$

или с учетом выражения (1)

$$R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_{\text{посл}}}.$$

Поскольку по условию задачи

$$\frac{R_{\text{посл}}}{R_{\text{пар}}} = n, \quad \text{или} \quad R_{\text{посл}} = n R_{\text{пар}},$$

то соотношения (1) и (2) можно представить в виде

$$n R_{\text{пар}} = R_1 + R_2, \quad n R_{\text{пар}}^2 = R_1 R_2.$$

Отсюда получим

$$\sqrt{n} = \frac{R_1 + R_2}{\sqrt{R_1 R_2}}, \quad \text{или} \quad n = \frac{R_1^2 + 2R_1 R_2 + R_2^2}{R_1 R_2}.$$

Если обозначить отношение R_1/R_2 через x , то последнее выражение примет вид

$$n = x + 2 + 1/x, \quad \text{или} \quad x^2 - (n - 2)x + 1 = 0.$$

Окончательно находим

$$x = \frac{R_1}{R_2} = \frac{n - 2 + \sqrt{(n - 2)^2 - 4}}{2} = 4 \quad \text{или} \quad x = \frac{R_1}{R_2} = \frac{n - 2 - \sqrt{(n - 2)^2 - 4}}{2} = 0,25.$$

• **Ответ:** $R_1/R_2 = 1/2 \left\{ n - 2 \pm \sqrt{(n - 2)^2 - 4} \right\}$; $R_1/R_2 = 4$ или $R_1/R_2 = 0,25$.

13.5. На сколько равных частей требуется разрезать проводник, чтобы при параллельном соединении частей получить сопротивление в n раз меньшее?

13.6. Из одинаковых сопротивлений по $R = 5$ Ом каждое требуется получить сопротивление $R_0 = 3$ Ом. Как их следует соединить для того, чтобы обойтись наименьшим числом сопротивлений?

13.7. Найти сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рис. 13.20, a , если $R = 4$ Ом.

• **Решение.** Три сопротивления R , $2R$ и R , подсоединенные к точкам c и d цепи, соединены между собой последовательно. Их общее сопротивление

$$R_1 = R + 2R + R = 4R.$$

Заменив указанные сопротивления одним эквивалентным R_1 (рис. 13.20, b), легко заметить, что оно оказывается включенным параллельно сопротивлению $2R$. Следовательно, общее сопротивление участка цепи между точками c и d

$$\frac{1}{R_{c-d}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R}, \quad \text{или} \quad R_{c-d} = \frac{R_1 2R}{R_1 + 2R} = \frac{8R}{6} = \frac{4}{3}R.$$

С учетом сопротивления R_{c-d} цепь можно преобразовать к виду, показанному на рис. 13.20, c , откуда видно, что сопротивления R , R_{c-d} и R соединены между собой последовательно. Заменив эти три сопротивления одним

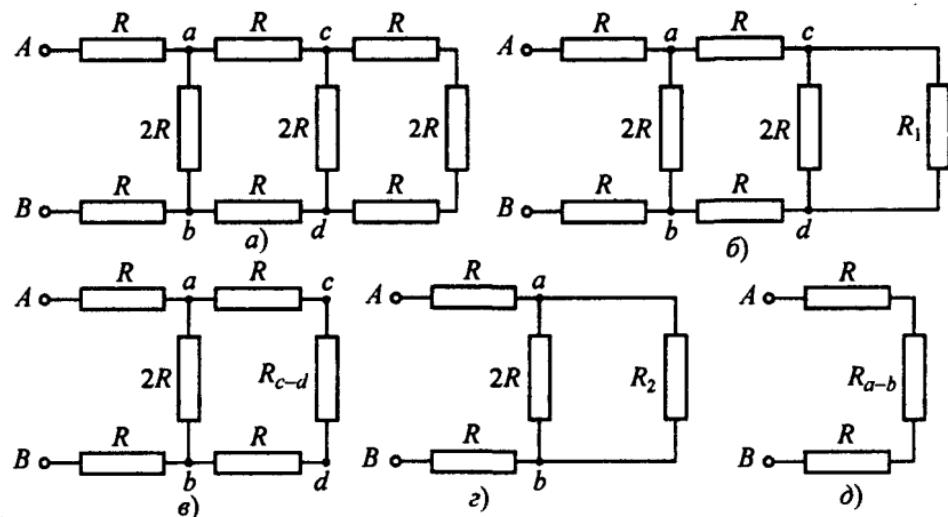


Рис. 13.20

$$R_2 = R + R_{c-d} + R = R + \frac{4}{3}R + R = \frac{10}{3}R,$$

цепь преобразуем к виду, представленному на рис. 13.20, г).

Очевидно, что сопротивления $2R$ и R_2 , включенные между точками a и b , между собой соединены параллельно. Их общее сопротивление

$$\frac{1}{R_{a-b}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R}, \quad \text{или} \quad R_{a-b} = \frac{R_2 \cdot 2R}{R_2 + 2R} = \frac{\frac{10}{3}R \cdot 2R}{\frac{10}{3}R + 2R} = \frac{5}{4}R.$$

После замены сопротивлений $2R$ и R_2 на эквивалентное сопротивление R_{a-b} получаем цепь (рис. 13.20, д), содержащую три сопротивления R , R_{a-b} и R , соединенных последовательно. Искомое сопротивление цепи

$$R_{\text{цепи}} = R + R_{a-b} + R = R + \frac{5}{4}R + R = \frac{13}{4}R = 13 \text{ Ом.}$$

• Ответ: $R_{\text{цепи}} = 13 \text{ Ом.}$

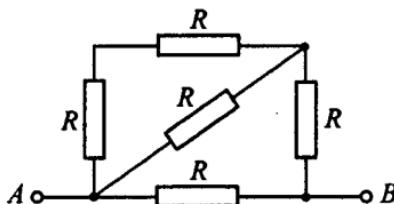


Рис. 13.21

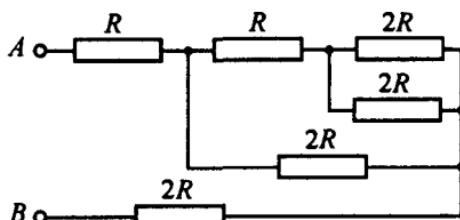


Рис. 13.22

13.8. Найти сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рис. 13.21, если $R = 4 \text{ Ом}$.

13.9. Найти сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рис. 13.22, если $R = 1 \text{ Ом}$.

13.10. Найти сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рис. 13.23, а, если $R = 1 \text{ Ом}$.

• Решение. На первый взгляд в представленной цепи нет ни последовательных, ни параллельных соединений сопротивлений. Действительно, между любой парой сопротивлений имеется узел, к которому подсоединен проводник или третье сопротивление.

Однако нетрудно заметить, что в данной схеме сопротивления включены симметрично — в схеме есть продольная ось симметрии, проходящая через точки A и B , и поперечная

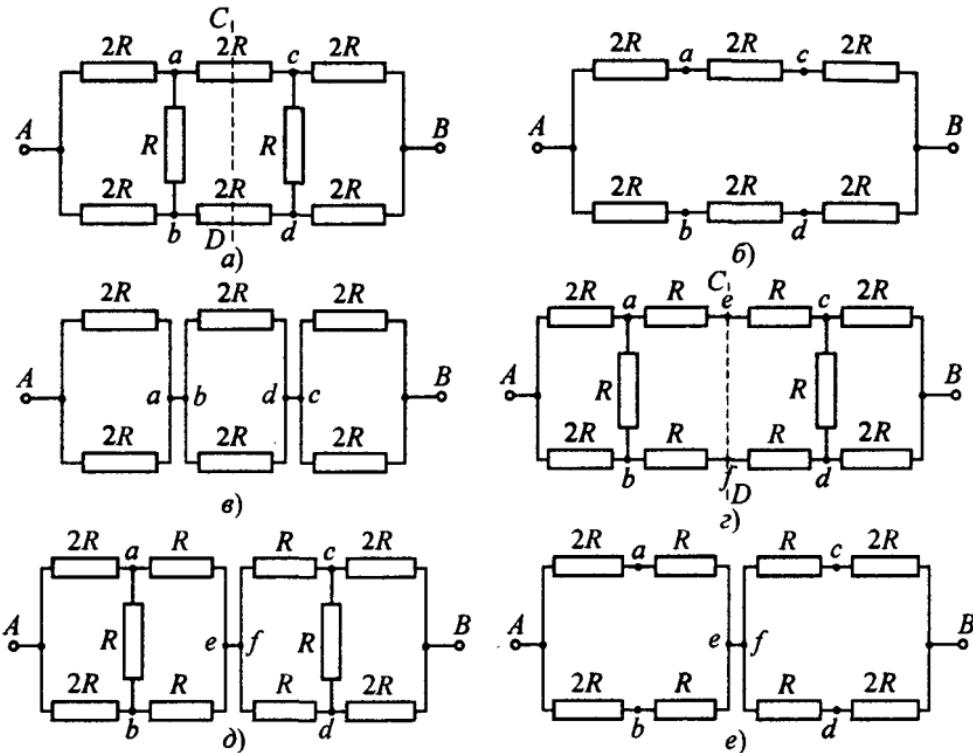


Рис. 13.23

ось симметрии CD , проходящая через средние сопротивления $2R$. Это означает, что в цепи имеются точки с равными потенциалами, разъединив или соединив которые, можно свести задачу к расчету более простой цепи.

Продольная ось симметрии AB указывает, что потенциалы в точках a и b , а также в точках c и d будут равны. Поэтому разности потенциалов $\Delta\varphi_{a-b} = 0$, $\Delta\varphi_{c-d} = 0$ и по сопротивлениям R ток не пойдет. Следовательно, не нарушая режима работы цепи, эти точки можно разъединить или соединить, выбросив сопротивления R .

Если рассматриваемые точки разъединить, то цепь преобразуется к виду, показанному на рис. 13.23, б). Преобразованная цепь содержит две параллельно соединенные ветви $A-a-c-B$ и $A-b-d-B$, в каждой из которых по три сопротивления, соединенные между собой последовательно. Сопротивление одной ветви равно

$$R_{A-a-c-B} = R_{A-b-d-B} = 2R + 2R + 2R = 6R,$$

а общее сопротивление цепи

$$\frac{1}{R_{\text{цепи}}} = \frac{1}{R_{A-a-c-B}} + \frac{1}{R_{A-b-d-B}} ; \quad R_{\text{цепи}} = \frac{R_{A-a-c-B} R_{A-b-d-B}}{R_{A-a-c-B} + R_{A-b-d-B}} = 3R = 3 \Omega.$$

Если же точки a и b , c и d соединить между собой, то исходная цепь может быть представлены в виде трех последовательно соединенных звеньев, каждое из которых содержит два сопротивления, соединенные параллельно друг другу (рис. 13.23, в). Сопротивление каждого звена равно

$$\frac{1}{R_{\text{звена}}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}, \quad R_{\text{звена}} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R,$$

а общее сопротивление цепи

$$R_{\text{цепи}} = R_{\text{звена}} + R_{\text{звена}} + R_{\text{звена}} = 3R = 3 \Omega.$$

Рассмотрим теперь ось симметрии CD . Чтобы найти точки с равными потенциалами, на наличие которых указывает эта ось, нарисуем цепь по-другому, заменив сопротивления

$2R$, которые перекрывают ось CD , двумя сопротивлениями R , соединенными последовательно (рис. 13.23, σ).

Точки e и f имеют одинаковые потенциалы, поэтому их можно соединить и цепь преобразовать к виду, показанному на рис. 13.23, δ . Легко заметить, что теперь цепь содержит два одинаковых моста сопротивлений, соединенных между собой последовательно, причем оба моста уравновешены. Поэтому сопротивления R , включенные между точками $a-b$ и $c-d$, можно изъять из цепи, а схему преобразовать к виду, показанному на рис. 13.23, ε .

Сопротивление каждого из мостов сопротивлений равно

$$\frac{1}{R_{\text{моста}}} = \frac{1}{2R+R} + \frac{1}{2R+R}; \quad R_{\text{моста}} = \frac{3}{2} R,$$

а общее сопротивление цепи

$$R_{\text{цепи}} = 2 R_{\text{моста}} = 3R = 3 \text{ Ом.}$$

• Ответ: $R_{\text{цепи}} = 3 \text{ Ом.}$

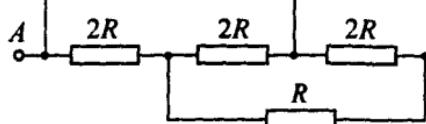


Рис. 13.24

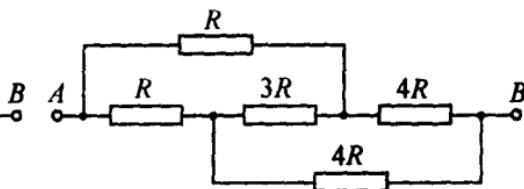


Рис. 13.25

13.11. Найти сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рис. 13.24.

13.12. Найти сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рис. 13.25.

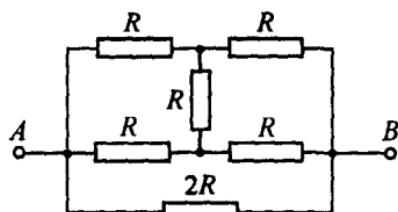


Рис. 13.26

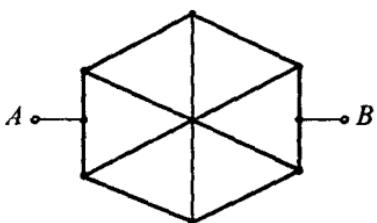


Рис. 13.27

13.13. Найти сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рис. 13.26, если $R = 3 \text{ Ом}$.

13.14. Найти сопротивление между точками A и B проволочного каркаса, изображенного на рис. 13.27, между точками A и B . Сопротивление каждого звена равно R .

Цепи постоянного тока

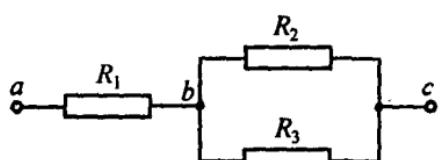


Рис. 13.28

13.15. Найти падение напряжения на сопротивлении R_1 участка цепи, представленного на рис. 13.28, если падение напряжения на участке $a-c$ равно $U = 12 \text{ В}$, а сопротивления $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$.

• Решение. Сопротивление участка $b-c$ цепи, содержащего два сопротивления R_2 и R_3 , соединенных параллельно, и полное сопротивление участка $a-c$ равны соответственно

$$R_{b-c} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}; \quad R_{\text{участка}} = R_1 + R_{b-c} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Применив закон Ома для однородного участка $a-c$, найдем силу тока в неразветвленной части цепи

$$I = \frac{U}{R_{\text{участка}}} = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3},$$

которая равна току, текущему через сопротивление R_1 .

Еще раз записав закон Ома, но теперь для участка $a-b$, найдем падение напряжения на сопротивлении R_1 :

$$U_{a-b} = I R_1 = \frac{U(R_2 + R_3) R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \approx 9 \text{ В.}$$

• Ответ: $U_{a-b} = \frac{U(R_2 + R_3) R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \approx 9 \text{ В.}$

13.16. По участку цепи, состоящем из четырех одинаковых параллельно соединенных проводников, течет ток силой $I_0 = 4,8 \text{ А}$. Какой ток будет течь по участку, если эти проводники соединить последовательно при том же напряжении на его концах?

13.17. Электрическая цепь, на которую подается постоянное напряжение, состоит из двух параллельно соединенных сопротивлений, подключенных последовательно к третьему. Все сопротивления одинаковы. Во сколько раз изменится напряжение на третьем сопротивлении, если одно из параллельно соединенных сопротивлений сгорит?

13.18. В цепи (рис. 13.29) ЭДС источника равна $\mathcal{E} = 5 \text{ В}$, внутреннее сопротивление $r = 0,1 \text{ Ом}$. Найти токи I_1 и I_2 , текущие через сопротивления $R_1 = 4 \text{ Ом}$ и $R_2 = 6 \text{ Ом}$.

• Решение. Сопротивление внешней цепи, содержащей два сопротивления R_1 и R_2 , соединенных параллельно, равно

$$R_{\text{цепи}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Для определения тока I в неразветвленной части цепи, содержащей источник ЭДС, применим закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{цепи}} + r} = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)}.$$

Записав закон Ома для однородного участка $a-b$ цепи, найдем падение напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 :

$$U_{a-b} = I R_{\text{цепи}} = \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)}.$$

Напряжение $U_{a-b} = \varphi_a - \varphi_b$ можно также найти, записав закон Ома для неоднородного участка $b-\mathcal{E}-a$ цепи:

$$I r = \varphi_b - \varphi_a + \mathcal{E}; \quad I = \frac{\mathcal{E} - U_{a-b}}{r}; \quad U_{a-b} = \mathcal{E} - I r = \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)}.$$

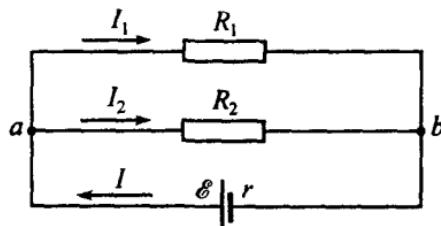


Рис. 13.29

Зная напряжения на концах сопротивлений R_1 и R_2 , можно найти токи I_1 и I_2 :

$$I_1 = \frac{U_{a-b}}{R_1} = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)} = 1,2 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{U_{a-b}}{R_2} = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)} = 0,8 \text{ A}.$$

• Ответ: $I_1 = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)} = 1,2 \text{ A}$; $I_2 = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)} = 0,8 \text{ A}$.

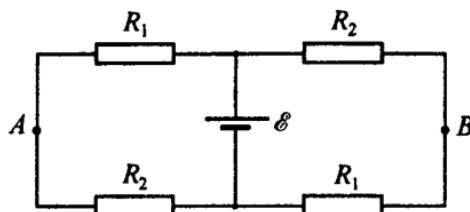


Рис. 13.30

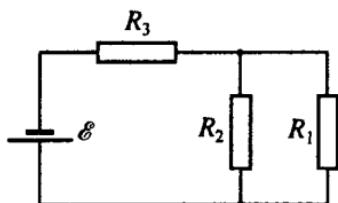


Рис. 13.31

13.19. Чему равна разность потенциалов между точками A и B в цепи, представленной на рис. 13.30, если ЭДС источника $\mathcal{E} = 80$ В, сопротивления $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, внутреннее сопротивление преибрежимо мало?

13.20. Найти силу тока, текущего через сопротивление $R_1 = 2$ кОм в цепи, изображенной на рис. 13.31, где $R_2 = 1$ кОм, $R_3 = 2$ кОм, ЭДС источника $\mathcal{E} = 24$ В, внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

13.21. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного двум последовательно соединенным элементам с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 .

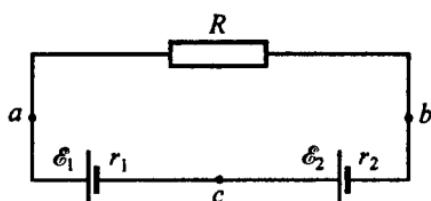


Рис. 13.32

• Решение. Батарея, содержащая несколько соединенных последовательно источников ЭДС, может быть заменена одним эквивалентным источником.

Рассмотрим цепь, содержащую два источника тока с ЭДС \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 и внутренними сопротивлениями r_1 , r_2 , замкнутую на внешнее сопротивление R (рис. 13.32). Запишем закон Ома для однородного участка $a-R-b$ цепи и неоднородных участков $a-R-b-\mathcal{E}_2-c$ и $c-\mathcal{E}_1-a-R-b$:

$$I = \frac{\Phi_a - \Phi_b}{R}; \quad I = \frac{(\Phi_a - \Phi_c) + \mathcal{E}_2}{R + r_2}; \quad I = \frac{(\Phi_c - \Phi_b) + \mathcal{E}_1}{R + r_1}.$$

Поскольку

$$(\Phi_a - \Phi_b) = (\Phi_a - \Phi_c) + (\Phi_c - \Phi_b),$$

то

$$IR = I(R + r_2) - \mathcal{E}_2 + I(R + r_1) - \mathcal{E}_1, \quad \text{или} \quad I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}.$$

Сравнивая полученное соотношение с законом Ома для замкнутой цепи, видим, что два последовательно соединенных источника тока действуют как один источник, у которого ЭДС и внутреннее сопротивления равны соответственно

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2; \quad r = r_1 + r_2.$$

Очевидно, что при соединении источников разноименными полюсами, их ЭДС будут вычитаться.

Легко сообразить, что ЭДС и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного последовательно соединенным источникам, равны

$$\mathcal{E}_{\text{экв}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_n; \quad r_{\text{экв}} = r_1 + r_2 + \dots + r_n.$$

• Ответ: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2; \quad r = r_1 + r_2$.

13.22. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 .

• Решение. Для решения поставленной задачи подключим к источникам сопротивление нагрузки R и рассмотрим два варианта соединения источников друг с другом: одноименными (рис. 13.33, а) и разноименными (рис. 13.33, б) полюсами. Такую цепь (разветвленную) рассчитать, используя только законы Ома, нельзя; здесь используют закон Кирхгофа.

Рассмотрим первое соединение.

Выберем направления токов на участках цепи так, как показано на рис. 13.33, а, и условимся обходить контуры по часовой стрелке.

Как видим, в цепи протекает три разных тока I_1 , I_2 и I . Поэтому для решения задачи нужно составить три уравнения.

Рассматриваемая схема содержит два узла A и B . Поэтому по первому закону Кирхгофа можно составить только одно уравнение для любого из узлов. При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком «плюс»; ток, отходящий от узла, — со знаком «минус» (или наоборот). Поэтому, например, для узла B :

$$I_1 + I_2 - I = 0. \quad (1)$$

Уравнение для узла A будет следствием уравнения (1).

Недостающие два уравнения получим по второму закону Кирхгофа. Число независимых уравнений всегда меньше количества контуров. Поэтому, чтобы уравнения были независимыми, контуры необходимо выбирать так, чтобы в каждый новый контур входил хотя бы один участок, не участвовавший ни в одном из ранее использованных контуров. В нашей задаче можно использовать два из трех контуров: $A - \mathcal{E}_1 - B - \mathcal{E}_2 - A$, $A - \mathcal{E}_1 - B - R - A$, $A - \mathcal{E}_2 - B - R - A$.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо соблюдать следующие правила знаков: если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контуров, то соответствующее произведение IR входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае — со знаком «минус»; если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т.е. если при обходе контура приходится идти от «минуса» к «плюсу» внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае — со знаком «минус».

Запишем уравнения, выражающие второй закон Кирхгофа, для независимых контуров $A - \mathcal{E}_1 - B - R - A$, $A - \mathcal{E}_2 - B - R - A$:

$$I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1, \quad I_2 r_2 + IR = \mathcal{E}_2. \quad (2)$$

Выразив токи I_1 и I_2 из уравнений (2)

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{r_1}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - IR}{r_2}$$

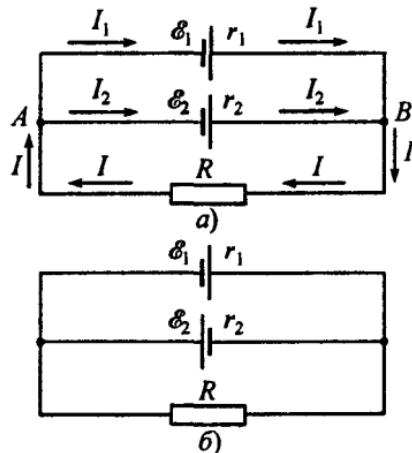


Рис. 13.33

и подставив их значения в (1), получим уравнение относительно тока I

$$\frac{\mathcal{E}_1 - IR}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2 - IR}{r_2} - I = 0,$$

решив которое, найдем ток I :

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}. \quad (3)$$

Если заменить источники \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 эквивалентным источником с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , то ток I будет равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

Очевидно, что внутреннее сопротивление r эквивалентного источника определяется как сопротивление двух параллельно соединенных сопротивлений r_1 и r_2 :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad \text{или} \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (4)$$

Следовательно,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + R} = \frac{\mathcal{E}(r_1 + r_2)}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}. \quad (5)$$

Приравнивая правые части выражений (3) и (5), получим

$$\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1 = \mathcal{E}(r_1 + r_2).$$

Отсюда находим

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}. \quad (6)$$

Соотношение (6) можно переписать в виде

$$\frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}, \quad (7)$$

где r определяется выражением (4).

Если имеется более двух соединенных параллельно источников ЭДС, то, заменяя последовательно каждую пару эквивалентным источником по формулам (4) и (7), придем к выражениям для внутреннего сопротивления и ЭДС эквивалентного источника:

$$\frac{1}{r_{\text{экв}}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}; \quad \frac{\mathcal{E}_{\text{экв}}}{r_{\text{экв}}} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \dots + \frac{\mathcal{E}_n}{r_n}, \quad (8)$$

где n – количество источников.

Если рассмотреть случай соединения двух источников, показанный на рис. 13.33, б, то мы придем к выражению для тока I в виде

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}.$$

Легко сделать вывод, что формулы (4) и (7) здесь остаются справедливыми, если учесть правило знаков: ЭДС источников, которые создавали бы ток того же направления, что и ток, идущий в цепи, берут со знаком «плюс», а ЭДС источников, которые давали бы ток противоположного направления, – со знаком «минус».

• Ответ: $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}; \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

13.23. Две батареи соединили последовательно и замкнули на сопротивление $R = 4$ Ом. При этом ток в цепи оказался равным $I_1 = 1,83$ А. Затем один из источников перевернули, включив навстречу другому источнику. Ток в цепи стал равным $I_2 = 0,34$ А. Найти ЭДС и внутренние сопротивления батарей, если при замыкании каждой из них на сопротивление R через него идут токи $I_3 = 1$ А и $I_4 = 1,3$ А соответственно?

13.24. Два гальванических элемента с равными ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В соединены параллельно одинаковыми полюсами и замкнуты на внешнее сопротивление R . Внутренние сопротивления элементов равны соответственно $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 2$ Ом. Чему равно внешнее сопротивление R , если ток, текущий через первый элемент, равен $I_1 = 1$ А? Найти силу тока I_2 , текущего через второй элемент, а также силу тока I_R через внешнее сопротивление.

13.25. Есть две батареи: одна составлена из нескольких одинаковых гальванических элементов, соединенных параллельно, другая – из того же числа таких же элементов, соединенных последовательно. На какие одинаковые сопротивления R нужно замкнуть каждую из батарей, чтобы токи через эти сопротивления были равны? Внутреннее сопротивление каждого элемента равно r . Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

13.26. Определить силу тока через сопротивление R_2 и напряжение между точками A и B в цепи, представленной на рис. 13.34, а). ЭДС источников равны $\mathcal{E}_1 = 4$ В и $\mathcal{E}_2 = 3$ В, сопротивления $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 6$ Ом. Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

• Решение. При решении задачи можно воспользоваться законами Кирхгофа или заменить два источника ЭДС одним эквивалентным и использовать законы Ома.

Рассмотрим оба способа решения.

Выберем направления токов I_1 , I_2 , I_3 на участках цепи так, как показано на рис. 13.34, а), и условимся обходить контуры по часовой стрелке. Поскольку в цепи протекает три разных тока, то для решения задачи нужно составить три уравнения.

Рассматриваемая схема содержит два узла A и B . Поэтому по первому закону Кирхгофа можно составить только одно уравнение для любого из узлов, например, для узла A :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (1)$$

Недостающие два уравнения нужно составить, используя второй закон Кирхгофа для двух из трех контуров: $A-R_2-\mathcal{E}_2-B-\mathcal{E}_1-R_1-A$, $A-R_3-B-\mathcal{E}_1-R_1-A$, $A-R_2-\mathcal{E}_2-B-\mathcal{E}_1-R_3-A$. Например, для контуров $A-R_3-B-\mathcal{E}_1-R_1-A$, $A-R_2-\mathcal{E}_2-B-\mathcal{E}_1-R_3-A$:

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1; \quad -I_2 R_2 - I_3 R_3 = -\mathcal{E}_2. \quad (2)$$

Из уравнений (2) находим

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_2 - I_2 R_2}{R_3}; \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + I_2 R_2}{R_1}. \quad (3)$$

Подставив выражения для токов I_1 и I_3 из (3) в (1)

$$\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + I_2 R_2}{R_1} + I_2 - \frac{\mathcal{E}_2 - I_2 R_2}{R_3} = 0,$$

получим уравнение относительно тока I_2 :

$$\mathcal{E}_1 R_3 - \mathcal{E}_2 R_3 + I_2 R_2 R_3 + I_2 R_1 R_3 - \mathcal{E}_2 R_1 + I_2 R_1 R_2 = 0.$$

Отсюда находим

$$I_2 = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) R_3 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 0.$$

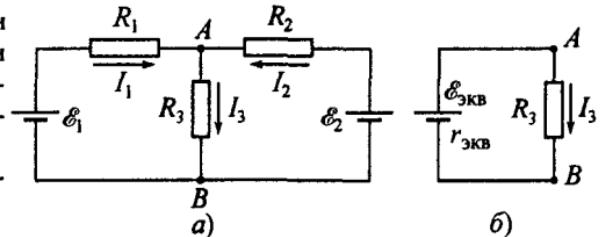


Рис. 13.34

Падение напряжения между точками A и B найдем из закона Ома для однородного участка $A-R_3-B$ цепи:

$$U_{A-B} = I_3 R_3,$$

где ток

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_2 - (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) R_3 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \frac{R_2}{R_3} = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Следовательно,

$$U_{A-B} = \frac{(\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1) R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 3 \text{ В.}$$

Рассмотрим теперь второй способ.

Для расчета ЭДС $\mathcal{E}_{\text{экв}}$ и внутреннего сопротивления $r_{\text{экв}}$ эквивалентного источника будем считать, что сопротивления R_1 и R_2 являются как бы внутренними сопротивлениями источников \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 соответственно (если бы источники имели внутренние сопротивления r_1 и r_2 , то при расчетах $r_{\text{экв}}$ и $\mathcal{E}_{\text{экв}}$ мы считали бы, что их внутренние сопротивления равны $(r_1 + R_1)$ и $(r_2 + R_2)$).

Воспользуемся результатами решения задачи №13.22. Так как источники соединены друг с другом одинаковыми полюсами, то

$$r_{\text{экв}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad \mathcal{E}_{\text{экв}} = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

С учетом эквивалентного источника цепь можно преобразовать к виду, представленному на рис. 13.34, б.

Используя закон Ома для замкнутой цепи, найдем ток I_3 через сопротивление R_3 :

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_{\text{экв}}}{r_{\text{экв}} + R_3} = \frac{\frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Падение напряжения между точками A и B равно

$$U_{A-B} = I_3 R_3 = \frac{R_3 (\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 3 \text{ В.}$$

Далее, применяя закон Ома для неоднородного участка цепи $A-R_2-\mathcal{E}_2-B$, найдем ток через источник \mathcal{E}_2 , который равен току через сопротивление R_2 :

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - U_{A-B}}{R_2} = \frac{\frac{\mathcal{E}_2 - (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) R_3 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}{R_2} = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) R_3 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 0.$$

Ответ: $I_2 = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) R_3 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 0$; $U_{A-B} = \frac{(\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1) R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 3 \text{ В.}$

13.27. Какой ток будет течь через амперметр с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением в цепи, показанной на рис. 13.35, а, если $R_1 = 15 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = R_4 = 10 \text{ Ом}$, ЭДС источника $\mathcal{E} = 7,5 \text{ В}$. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Решение. Так как сопротивление R_A амперметра очень мало, будем считать его равным нулю. Тогда ток I_A через амперметр найти по закону Ома

$$I_A = \frac{U_{b-c}}{R_A}$$

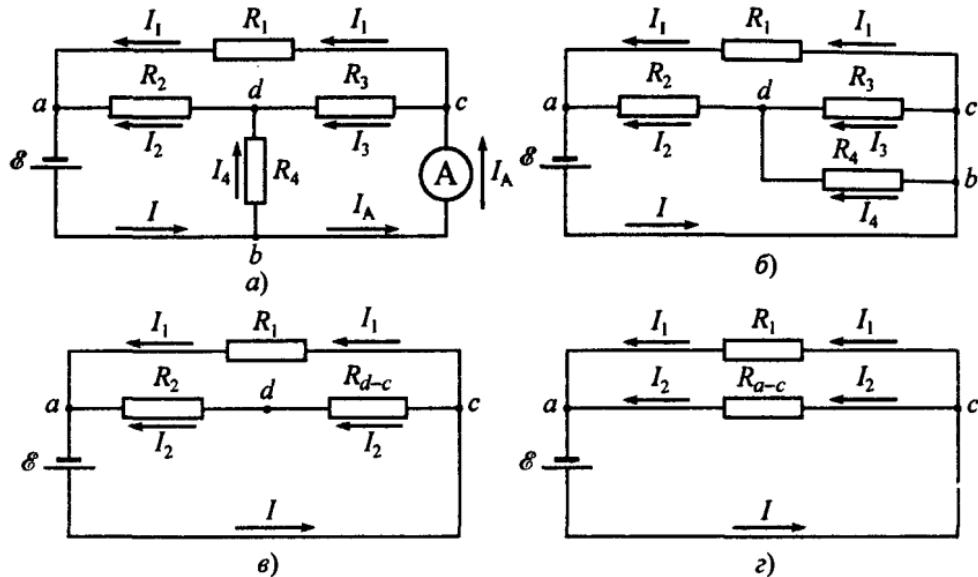


Рис. 13.35

для однородного участка цепи $b-c$ нельзя. В таких задачах силу тока определяют, используя первый закон Кирхгофа, записанный для любого из узлов, к которому подходит или от которого отходит ток I_A . В нашей задачи можно использовать узел b или узел c :

$$I - I_4 - I_A = 0, \quad I_A - I_1 - I_3 = 0, \quad (1)$$

где токи I , I_1 , I_3 , I_4 соответствуют обозначениям на рис. 13.35, а

Поскольку $R_A = 0$, то при расчете токов в цепи точки b и c соединим, выбросив амперметр.

Сопротивления R_3 и R_4 соединены параллельно (рис. 13.35, б), поэтому сопротивление участка $d-c$

$$R_{d-c} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Сопротивление R_{d-c} соединено с сопротивлением R_2 последовательно (рис. 13.35, в). Поэтому сопротивление участка $a-c$

$$R_{a-c} = R_1 + R_{d-c} = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4},$$

а полное сопротивление цепи (сопротивления R_{a-c} и R_1 соединены между собой параллельно (рис. 13.35, г))

$$R_{\text{цепи}} = \frac{R_1 R_{a-c}}{R_1 + R_{a-c}} = \frac{R_1 [R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4]}{(R_1 + R_2) (R_3 + R_4) + R_3 R_4}.$$

Записав закон Ома для замкнутой цепи, содержащей источник ЭДС и сопротивление $R_{\text{цепи}}$, найдем ток I :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{цепи}}} = \frac{\mathcal{E} [(R_1 + R_2) (R_3 + R_4) + R_3 R_4]}{R_1 [R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4]}. \quad (2)$$

Далее, используя второй закон Кирхгофа для контура $a-\mathcal{E}-c-d-a$ (рис. 13.35, в), найдем ток I_2 :

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_{a-c}} = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = \frac{\mathcal{E} (R_3 + R_4)}{R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4}.$$

Из закона Ома для участка $d-c$ цепи найдем падение напряжения на участке

$$U_{d-c} = I_2 R_{d-c} = \frac{\mathcal{E} R_3 R_4}{R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4},$$

а затем ток I_4 :

$$I_4 = \frac{U_{d-c}}{R_4} = \frac{\mathcal{E} R_3}{R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4}. \quad (3)$$

Следовательно, из (1) с учетом (2) и (3) получим

$$I_A = I - I_4 = \frac{\mathcal{E} [(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4]}{R_1 [R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4]} - \frac{\mathcal{E} R_3}{R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4};$$

$$I_A = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E} R_1 R_4}{R_1 [R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4]} = 0,75 \text{ A.}$$

• Ответ: $I_A = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E} R_1 R_4}{R_1 [R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4]} = 0,75 \text{ A.}$

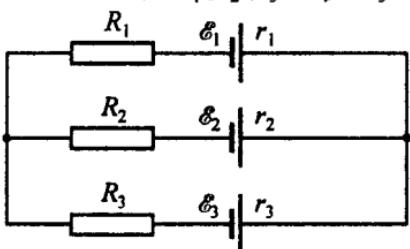


Рис. 13.36

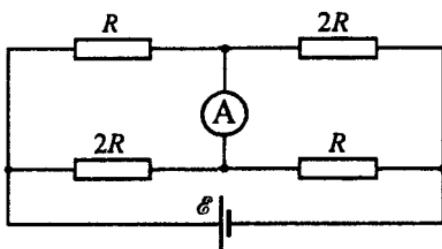


Рис. 13.37

13.28. Три батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1,5 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 2,5 \text{ В}$ соединены с сопротивлениями $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$ и $R_3 = 30 \Omega$ так, как показано на рис. 13.36. Найти ток через сопротивление R_1 . Внутренние сопротивления батарей пренебрежимо малы.

13.29. Какой ток будет течь через амперметр в цепи, изображенной на рис. 13.37? ЭДС источника $\mathcal{E} = 20 \text{ В}$, сопротивление $R = 5 \Omega$, внутренними сопротивлениями амперметра и источника пренебречь.

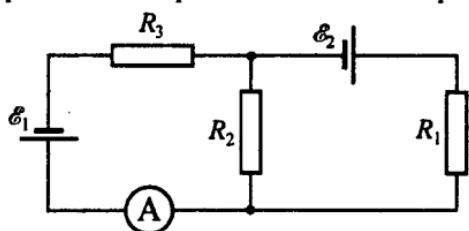


Рис. 13.38

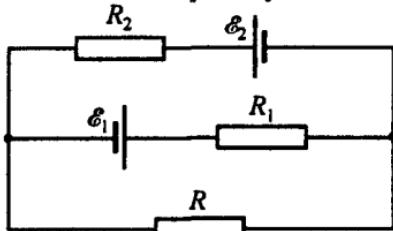


Рис. 13.39

13.30. Какой ток протекает через амперметр в цепи, изображенной на рис. 13.38? Значения R_1 , R_2 , R_3 , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 известны. Внутренними сопротивлениями источников и амперметра пренебречь.

13.31. Найти значение и направление тока через сопротивление R в цепи, изображенной на рис. 13.39, если $\mathcal{E}_1 = 1,5 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 3,7 \text{ В}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R = 5 \Omega$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

13.32. Найти заряд конденсатора в цепи, изображенной на рис. 13.40.

Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

- Решение. По участку цепи $a-d$, содержащему конденсатор емкостью C , электрический ток будет течь до тех пор, пока конденсатор не зарядится. После этого ток I_1 в узле a разветвляться не будет и весь пойдет через сопротивление R . В узле b ток разветвится на токи I_2 и I_4 . Далее ток $I_3 = I_2$ пойдет через сопротивление $3R$ и в узле n сольется с током I_4 , образуя ток I_1 .

Чтобы определить заряд на конденсаторе, нужно найти разность потенциалов на его обкладках. Как видно из рис. 13.40, она равна разности потенциалов между точками a и d (потенциал $\varphi_a > \varphi_d$, так как точка a соединена с положительной клеммой источника):

$$U_{a-d} = \varphi_a - \varphi_d.$$

Найти разность потенциалов U_{a-d} непосредственно используя закон Ома нельзя, поскольку ток I_1 , выходящий из точки a , на пути к точке d разветвляется. Рассмотрим путь $a-b-d$, по которому ток приходит из точки a в точку d . Используя потенциал φ_b промежуточной точки b , выражение для U_{a-d} можно записать в виде

$$U_{a-d} = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_d = (\varphi_a - \varphi_b) + (\varphi_b - \varphi_d).$$

Разность потенциалов $(\varphi_a - \varphi_b)$ равна падению напряжения на сопротивлении R :

$$\varphi_a - \varphi_b = I_1 R,$$

а разность потенциалов $(\varphi_b - \varphi_d)$ – падению напряжения на сопротивлении $2R$:

$$\varphi_b - \varphi_d = I_2 2R.$$

Следовательно, нахождение разности потенциалов на конденсаторе

$$U_{a-d} = I_1 R + I_2 2R$$

фактически сводится к определению токов I_1 и I_2 , т.е. к решению стандартной задачи по расчету токов на участках цепи (см., например, задачу №13.27).

Участок $b-d-n$ содержит два сопротивления, соединенные последовательно. Общее сопротивление участка

$$R_{b-d-n} = 2R + 3R = 5R.$$

Сопротивление R_{b-d-n} соединено параллельно с сопротивлением $4R$. Поэтому сопротивление участка цепи между точками $b-n$

$$R_{b-n} = \frac{R_{b-d-n} 4R}{R_{b-d-n} + 4R} = \frac{20}{9} R,$$

а полное сопротивление цепи

$$R_{цепи} = R_{b-n} + R = \frac{29}{9} R.$$

Применив закон Ома для замкнутой цепи, найдем ток I_1 :

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_{цепи}} = \frac{9 \mathcal{E}}{29R}.$$

Падение напряжения между точками $b-n$ цепи

$$U_{b-n} = I_1 R_{b-n} = \frac{20 \mathcal{E}}{29}.$$

Следовательно,

$$I_2 = \frac{U_{b-n}}{R_{b-d-n}} = \frac{4 \mathcal{E}}{29R}.$$

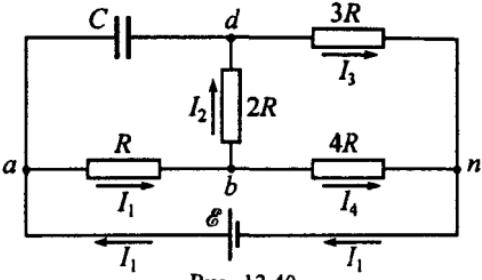


Рис. 13.40

Используя значения токов I_1 и I_2 , найдем разность потенциалов на обкладках конденсатора

$$U_{a-d} = \frac{9\mathcal{E}}{29R} R + \frac{4\mathcal{E}}{29R} 2R = \frac{17\mathcal{E}}{29}$$

и заряд на нем

$$q = C U_{a-d} = \frac{17}{29} C \mathcal{E}.$$

- Ответ: $q = \frac{17}{29} C \mathcal{E}$.

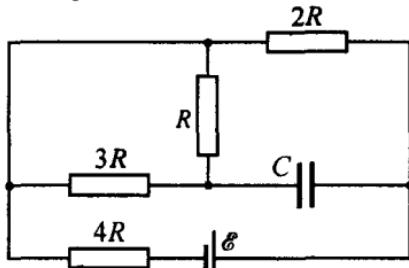


Рис. 13.41

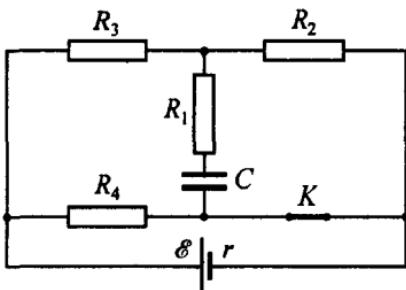


Рис. 13.42

13.33. Найти заряд на обкладках конденсатора емкостью $C = 1 \text{ мкФ}$ в цепи, представленной на рис. 13.41. ЭДС источника $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$, внутренним сопротивлением пренебречь.

13.34. Определить заряд, который пройдет через сопротивление R_1 после размыкания ключа K (рис. 13.42). ЭДС источника $\mathcal{E} = 500 \text{ В}$, внутреннее сопротивление $r = 10 \text{ Ом}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$, $C = 10 \text{ мкФ}$.

Измерение токов и напряжений

13.35. Имеются два сопротивления. Если амперметр зашунтировать одним из них, то цена его деления увеличится в n_1 раз, если зашунтировать другим, то цена деления увеличится в n_2 раз. Как изменится цена деления амперметра, если для шунта использовать оба сопротивления, включив их между собой: а) последовательно; б) параллельно?

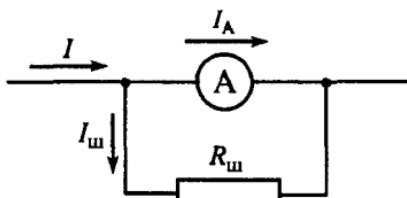


Рис. 13.43

• Решение. Предельно допустимый ток в цепи, который может измерять амперметр без шунта,

$$I_A = \frac{U_A}{R_A}, \quad (1)$$

где U_A – максимальное падение напряжения на приборе, при котором стрелка отклоняется на всю шкалу; R_A – внутреннее сопротивление амперметра.

Для увеличения диапазона измеряемых токов к амперметру параллельно подключают шунты. При этом часть тока «отводится» через шунт (рис. 13.43). Поскольку прибор и шунт подключены к точкам цепи параллельно, то падение напряжения на внутреннем сопротивлении амперметра R_A и шунте R_{sh} одинаково:

$$I_A R_A = I_{sh} R_{sh}.$$

Следовательно, через шунт потечет ток

$$I_{sh} = \frac{I_A R_A}{R_{sh}},$$

являющийся частью тока в цепи равного

$$I = I_A + I_{\text{ш}}, \quad \text{или} \quad I = I_A \left\{ 1 + \frac{R_A}{R_{\text{ш}}} \right\}.$$

Если подключить первый шунт R_1 , то максимальный ток, измеряемый прибором, станет равным

$$I_{1 \max} = I_A \left\{ 1 + \frac{R_A}{R_1} \right\}, \quad (2)$$

а с другой стороны,

$$I_{1 \max} = n_1 I_A. \quad (3)$$

Из выражений (2) и (3) получим

$$n_1 = 1 + \frac{R_A}{R_1}, \quad \text{или} \quad R_1 = \frac{R_A}{n_1 - 1}.$$

Аналогично, при подключении шунта R_2 :

$$I_{2 \max} = I_A \left\{ 1 + \frac{R_A}{R_2} \right\}; \quad I_{2 \max} = n_2 I_A; \quad R_2 = \frac{R_A}{n_2 - 1}.$$

Если оба сопротивления R_1 и R_2 соединить последовательно и подключить к амперметру, то вновь образованный шунт будет иметь сопротивление

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2,$$

или с учетом полученных выше соотношений

$$R_{\text{посл}} = \frac{R_A (n_1 + n_2 - 2)}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}. \quad (4)$$

Теперь амперметр может измерять токи до значений

$$I_{\max} = I_A \left\{ 1 + \frac{R_A}{R_{\text{посл}}} \right\},$$

или с учетом (4)

$$I_{\max} = I_A \left\{ 1 + \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} \right\}.$$

Следовательно, цена деления прибора изменится в

$$n_{\text{посл}} = \frac{I_{\max}}{I_A} = 1 + \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{n_1 n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2} \text{ раз.}$$

Если сопротивления R_1 и R_2 соединить параллельно, то сопротивление шунта будет равно

$$R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_A}{n_1 + n_2 - 2} \quad (5)$$

и амперметром можно измерять токи до значений

$$I_{\max} = I_A \left\{ 1 + \frac{R_A}{R_{\text{пар}}} \right\},$$

или с учетом (5)

$$I_{\max} = I_A \left\{ 1 + (n_1 + n_2 - 2) \right\}.$$

При этом цена деления прибора изменится в

$$n_{\text{пар}} = \frac{I_{\max}}{I_A} = n_1 + n_2 - 1 \text{ раз.}$$

• Ответ: а) изменится в $n_{\text{посл}} = \frac{n_1 n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}$ раз; б) изменится в $n_{\text{пар}} = n_1 + n_2 - 1$ раз.

13.36. Для шунтирования амперметра используют два одинаковых сопротивления. Если сопротивления соединены между собой последовательно, то цена деления увеличивается в $n = 10$ раз. Во сколько раз изменится цена деления, если сопротивления соединить между собой параллельно?

13.37. Микроамперметр имеет шкалу из $N = 100$ делений. Цена деления $I_0 = 1 \text{ мА}$. Внутреннее сопротивление микроамперметра $r = 200 \Omega$. Какой величины шунт нужно присоединить к этому прибору, чтобы им можно было измерять ток до $I = 1 \text{ mA}$?

13.38. Имеются два сопротивления. Если к вольтметру подключить одно из них, то цена его деления увеличится в n_1 раз, если подключить второе, то она увеличится в n_2 раз. Как изменится цена деления вольтметра, если эти сопротивления использовать одновременно, включив между собой: а) последовательно; б) параллельно?

- *Решение.* Предельно допустимое напряжение, которое может измерить вольтметр без добавочных сопротивлений,

$$U_V = I_V R_V, \quad (1)$$

где I_V – максимальный ток через прибор, при котором стрелка отклоняется на всю шкалу; R_V – внутреннее сопротивление вольтметра.

Для увеличения диапазона измеряемых напряжений к вольтметру последовательно подключают добавочные сопротивления. При этом шкала прибора становится грубее. Если подключить первое сопротивление R_1 , то максимально допустимое напряжение, измеряемое прибором, станет равным

$$U_{1 \max} = I_V (R_V + R_1), \quad (2)$$

а с другой стороны,

$$U_{1 \max} = n_1 U_V. \quad (3)$$

Из выражений (2) и (3) с учетом (1) получим

$$n_1 R_V = R_V + R_1, \quad \text{или} \quad R_1 = (n_1 - 1) R_V.$$

Аналогично, при подключении добавочного сопротивления R_2 :

$$U_{2 \max} = I_V (R_V + R_2); \quad U_{2 \max} = n_2 U_V; \quad R_2 = (n_2 - 1) R_V.$$

Если оба сопротивления R_1 и R_2 соединить последовательно и подключить к вольтметру, то вновь образованное добавочное сопротивление будет равно

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2,$$

или с учетом полученных выше соотношений

$$R_{\text{посл}} = (n_1 + n_2 - 2) R_V. \quad (4)$$

Теперь вольтметр может измерять напряжения до значений

$$U_{\max} = I_V (R_V + R_{\text{посл}}),$$

или с учетом (4)

$$U_{\max} = I_V R_V (n_1 + n_2 - 1) = U_V (n_1 + n_2 - 1).$$

Следовательно, цена деления прибора изменится в

$$n_{\text{посл}} = \frac{U_{\max}}{U_V} = n_1 + n_2 - 1 \text{ раз.}$$

Если сопротивления R_1 и R_2 соединить параллельно, то добавочное сопротивление будет равно

$$R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_V (n_1 - 1) (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} \quad (5)$$

и вольтметром можно измерить предельное напряжение

$$U_{\max} = I_V (R_V + R_{\text{пар}}),$$

или с учетом (5)

$$U_{\max} = I_V R_V \left\{ \frac{(n_1 - 1) (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} + 1 \right\} = U_V \frac{n_1 n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}.$$

При этом цена деления прибора изменится в

$$n_{\text{пар}} = \frac{U_{\text{max}}}{U_V} = \frac{n_1 n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2} \text{ раз.}$$

- Ответ: а) изменится в $n_{\text{посл}} = n_1 + n_2 - 1$ раз; б) изменится в $n_{\text{пар}} = \frac{n_1 n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}$ раз.

13.39. Вольтметр со шкалой на $U = 100$ В имеет внутреннее сопротивление $R_V = 10$ кОм. Какое максимальное падение напряжения можно измерить этим прибором, если к нему присоединить добавочное сопротивление $R_{\text{д}} = 90$ кОм?

13.40. В цепи, изображенной на рис. 13.44, при подключении вольтметра к точкам AB , он покажет значение напряжения $U_1 = 6$ В. Если вольтметр подключить к точкам BC , то $-U_2 = 4$ В, а если к точкам AC , то $-U_3 = 12$ В. Пренебрегая внутренним сопротивлением источника, определить действительные значения напряжений между точками A, B, C .

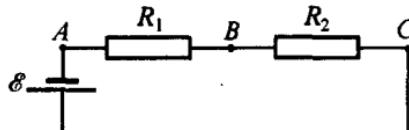


Рис. 13.44

13.41. Если к амперметру, рассчитанному на максимальную силу тока $I_A = 2$ А, присоединить шунт сопротивлением $R_{\text{ш}} = 0,5$ Ом, то цена деления шкалы амперметра возрастает в $n = 10$ раз. Определить, какое добавочное сопротивление необходимо присоединить к тому же амперметру, чтобы его можно было использовать как вольтметр, рассчитанный на измерение напряжений до $U = 220$ В?

- Решение. При наличии шунта стрелка амперметра будет отклоняться на всю шкалу при токе в неразветвленной части цепи равном

$$I = I_A + I_{\text{ш}}$$

где $I_{\text{ш}}$ — сила тока через шунт.

Поскольку по условию задачи $I = n I_A$, то через шунт протекает ток силой

$$I_{\text{ш}} = I_A (n - 1).$$

Так как падение напряжения на приборе и шунте одинаково

$$I_A R_A = I_{\text{ш}} R_{\text{ш}},$$

то внутреннее сопротивление амперметра

$$R_A = \frac{I_{\text{ш}} R_{\text{ш}}}{I_A} = R_{\text{ш}} (n - 1) = 4,5 \text{ Ом}$$

и максимально допустимое падение напряжения на нем

$$U_{\text{max}} = I_A R_A = I_A R_{\text{ш}} (n - 1) = 9 \text{ В.}$$

Следовательно, для измерения напряжений до $U = 220$ В к амперметру необходимо присоединить последовательно добавочное сопротивление $R_{\text{доб}}$, величину которого найдем из условия, что при максимально допустимой силе тока через прибор падение напряжения на сопротивлении ($R_A + R_{\text{доб}}$) равно U :

$$U = I_A (R_A + R_{\text{доб}}).$$

Отсюда находим

$$R_{\text{доб}} = \frac{U}{I_A} - R_A = \frac{U}{I_A} - R_{\text{ш}} (n - 1) = 105,5 \text{ Ом.}$$

- Ответ: $R_{\text{доб}} = U/I_A - R_{\text{ш}} (n - 1) = 105,5$ Ом.

13.42. Имеется прибор с ценой деления $n = 1$ мА. Шкала прибора имеет $N = 100$ делений, внутреннее сопротивление $r = 1$ кОм. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжения до $U = 100$ В или амперметр для измерения тока до $I = 1$ А?

13.43. Амперметр и вольтметр подключили последовательно к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В. Если параллельно вольтметру подключить некоторое сопротивление, то показание вольтметра уменьшается в $n = 2$ раза, а показание амперметра во столько же раз увеличивается. Найти показание вольтметра после подключения сопротивления. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Работа и мощность тока

13.44. Электроплитка содержит три нагревательных спирали сопротивлениями $R = 120$ Ом каждая, соединенные параллельно друг с другом. Плитку включают в сеть последовательно с сопротивлением $r = 50$ Ом. Как изменится время, необходимое для нагревания на этой плитке чайника с водой до кипения, при перегорании одной из спиралей?

- *Решение.* Независимо от количества спиралей в электроплитке и их соединения между собой количество тепла, необходимое для нагревания воды до кипения, во всех случаях должно быть одинаковым.

При первоначальном соединении спиралей плитки общее сопротивление цепи

$$R_1 = \frac{1}{3} R + r$$

и в цепи протекал ток силой

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{U}{\frac{1}{3}R + r}.$$

При этом на спиралах за время Δt_1 выделяется количество тепла

$$Q_1 = I_1^2 \frac{1}{3} R \Delta t_1 = \frac{U^2}{(\frac{1}{3}R + r)^2} \frac{1}{3} R \Delta t_1 = \frac{3U^2}{(R + 3r)^2} R \Delta t_1.$$

Если одна из спиралей перегорит, то общее сопротивление цепи станет равным

$$R_2 = \frac{1}{2}R + r$$

и в цепи будет течь ток силой

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{U}{\frac{1}{2}R + r},$$

и на спиралах за время Δt_2 выделится количество тепла

$$Q_2 = I_2^2 \frac{1}{2} R \Delta t_2 = \frac{U^2}{(\frac{1}{2}R + r)^2} \frac{1}{2} R \Delta t_2 = \frac{2U^2}{(R + 2r)^2} R \Delta t_2.$$

Поскольку $Q_1 = Q_2$, то

$$\frac{3U^2}{(R + 3r)^2} R \Delta t_1 = \frac{2U^2}{(R + 2r)^2} R \Delta t_2, \quad \text{или} \quad \frac{3 \Delta t_1}{(R + 3r)^2} = \frac{2 \Delta t_2}{(R + 2r)^2}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{2(R + 3r)^2}{3(R + 2r)^2} = \frac{2}{3} \left\{ \frac{R + 3r}{R + 2r} \right\}^2 = \frac{243}{242}.$$

- *Ответ:* уменьшится в $\frac{243}{242}$ раза.

13.45. В электрическую цепь с напряжением на зажимах $U = 127$ В включены параллельно несколько лампочек сопротивлением $R = 420$ Ом каждая. При этом потребляемая мощность $N = 500$ Вт. Определить число лампочек в цепи.

13.46. Утюг рассчитан на некоторую мощность при напряжении $U_0 = 220$ В. Как надо изменить включение нагревательной спирали, чтобы утюг нормально эксплуатировался при напряжении $U = 110$ В?

13.47. Электрокипятильник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в сосуде закипает через $t_1 = 10$ мин, а при включении другой — через $t_2 = 20$ мин. Через какое время закипит вода в том же сосуде, если обе обмотки включить: а) последовательно; б) параллельно?

13.48. Два источника с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E} = 120$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0,5$ Ом и $r_2 = 0,6$ Ом соединены параллельно одинаковыми полюсами и замкнуты на сопротивление $R = 10$ Ом. Найти мощность, разрабатываемую каждым источником, и мощность, выделяющуюся на внешнем сопротивлении.

• *Решение.* Используя решение задачи №13.22, заменим два источника одним эквивалентным с внутренним сопротивлением $r_{\text{экв}}$ и ЭДС $\mathcal{E}_{\text{экв}}$:

$$r_{\text{экв}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}; \quad \mathcal{E}_{\text{экв}} = \frac{\mathcal{E} r_2 + \mathcal{E} r_1}{r_1 + r_2} = \mathcal{E}.$$

Применив закон Ома для замкнутой цепи, найдем ток через внешнее сопротивление и падение напряжения на нем (оно равно напряжению на зажимах батареи):

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{экв}}}{r_{\text{экв}} + R} = \frac{\mathcal{E}(r_1 + r_2)}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}; \quad U = I R = \frac{\mathcal{E}(r_1 + r_2) R}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}.$$

Следовательно, мощность, выделяющаяся на сопротивлении R ,

$$N_R = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 (r_1 + r_2)^2 R}{(r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R)^2} \approx 1,36 \text{ кДж.}$$

Для расчета мощности, разрабатываемой каждым источником, найдем токи I_1 и I_2 , записав закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - U}{r_1} = \frac{\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}(r_1 + r_2) R}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}}{r_1} = \frac{\mathcal{E} r_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R},$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - U}{r_2} = \frac{\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}(r_1 + r_2) R}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}}{r_2} = \frac{\mathcal{E} r_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}.$$

Мощность, разрабатываемая источником, может быть найдена по одной из формул:

$$N = I \mathcal{E} = I^2 (R + r) = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}.$$

Поэтому

$$N_1 = I_1 \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2 r_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R} \approx 764,6 \text{ Дж}; \quad N_2 = I_2 \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2 r_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R} \approx 637,2 \text{ Дж.}$$

• Ответ: $N_R = \frac{\mathcal{E}^2 (r_1 + r_2)^2 R}{(r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R)^2} \approx 1,36 \text{ кДж}; \quad N_1 = \frac{\mathcal{E}^2 r_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R} \approx 764,6 \text{ Дж};$

$$N_2 = \frac{\mathcal{E}^2 r_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R} \approx 637,2 \text{ Дж.}$$

13.49. Два параллельно соединенных сопротивления $R_1 = 6$ Ом и $R_2 = 12$ Ом включены последовательно с сопротивлением $R_3 = 15$ Ом и подключены к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 200$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Определить мощность, выделяющуюся на сопротивлении R_1 .

13.50. Два гальванических элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 10$ В и $\mathcal{E}_2 = 6$ В и одинаковыми внутренними сопротивлениями $r = 1$ Ом соединены параллельно и замкнуты на внешнее сопротивление $R = 0,5$ Ом. Какая мощность выделяется внутри первого элемента в виде тепла?

13.51. Батарея состоит из $n = 5$ последовательно соединенных источников с ЭДС $\mathcal{E} = 1,4$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,3$ Ом каждого. Чему равна наибольшая мощность N_{\max} , которую можно получить от батареи?

• *Решение.* Для определения величины наибольшей мощности, которую можно получить от данной батареи источников, необходимо исследовать на максимум зависимость мощности, выделяющейся на внешней цепи, от величины ее сопротивления.

При последовательном соединении источников тока ЭДС всей батареи равна алгебраической сумме ЭДС отдельных источников (см. решение задачи №13.21):

$$\mathcal{E}_{\text{бат}} = n \mathcal{E}$$

Полное сопротивление цепи равно сумме внутренних сопротивлений источников и сопротивления R внешней цепи:

$$R_{\text{цепи}} = n r + R$$

При этом в цепи протекает ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{бат}}}{R_{\text{цепи}}} = \frac{n \mathcal{E}}{n r + R}$$

и на внешнем участке выделяется мощность

$$N = I^2 R = \left\{ \frac{n \mathcal{E}}{n r + R} \right\}^2 R = \frac{n^2 \mathcal{E}^2 R}{(n r + R)^2}$$

Взяв производную от функции $N(R)$ по R , получим

$$\frac{dN}{dR} = n^2 \mathcal{E}^2 \frac{(n r + R)^2 - 2R(n r + R)}{(n r + R)^2} = 0; \quad R = n r$$

Следовательно, для получения максимальной мощности N_{\max} сопротивление внешней цепи должно быть равно внутреннему сопротивлению батареи:

$$N_{\max} = \frac{n^2 \mathcal{E}^2 n r}{(n r + n r)^2} = \frac{n \mathcal{E}^2}{4 r} \approx 8,16 \text{ Вт.}$$

• Ответ: $N_{\max} = \frac{n \mathcal{E}^2}{4 r} \approx 8,16 \text{ Вт.}$

13.52. Источник с ЭДС $\mathcal{E} = 2,2$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнут медной проволокой, масса которой $m = 30,3$ г. Сопротивление проволоки подобрано таким образом, что на нем выделяется максимальная мощность. Насколько нагреется проволока за $t = 5$ мин? Удельная теплоемкость меди $c = 378$ Дж/(кг·К).

13.53. К источнику ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом подключена система из $n = 4$ сопротивлений по $R = 1$ Ом каждое. Как требуется подсоединить эти сопротивления, чтобы в системе выделялась максимальная мощность?

13.54. Определить КПД источника при силе тока в цепи $I = 0,8$ А, если ток короткого замыкания равен $I_{\text{к.з.}} = 2$ А.

• *Решение.* При подключении к источнику ЭДС некоторого сопротивления R в цепи потечет ток и на участках, содержащих сопротивления, будет выделяться тепло. При этом коэффициент полезного действия источника тока можно определить как отношение количества

тепла Q_R , выделяющегося во внешней цепи, к количеству тепла Q , выделяющемуся во всей цепи (включая источник):

$$\eta = Q_R/Q.$$

Если источник тока закорочен, то ток $I_{\text{к.з.}}$ определяется лишь ЭДС \mathcal{E} источника и его внутренним сопротивлением r

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{\mathcal{E}}{r}, \quad (1)$$

а при наличии внешней цепи сопротивлением R

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}. \quad (2)$$

Используя закон Джоуля – Ленца, найдем количество тепла, выделяющегося за время Δt на сопротивлении R

$$Q_R = I^2 R \Delta t = \left\{ \frac{\mathcal{E}}{R+r} \right\}^2 R \Delta t = \frac{\mathcal{E}^2 R \Delta t}{(R+r)^2}$$

и во всей цепи

$$Q = I^2 (R+r) \Delta t = \left\{ \frac{\mathcal{E}}{R+r} \right\}^2 (R+r) \Delta t = \frac{\mathcal{E}^2 \Delta t}{R+r}.$$

Подставив эти соотношения в выражение для КПД, получим

$$\eta = \frac{R}{R+r},$$

или с учетом (1) и (2)

$$\eta = I/I_{\text{к.з.}} = 0,4 = 40\%.$$

• Ответ: $\eta = I/I_{\text{к.з.}} = 0,4 = 40\%$.

13.55. КПД источника с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В, к которому подключили сопротивление $R = 10$ Ом, равен $\eta = 25\%$. Определить мощность, выделяющуюся на сопротивлении.

13.56. Во сколько раз сопротивление внешней цепи больше внутреннего сопротивления источника, если КПД источника равен $\eta = 80\%$?

Электролиз

13.57. Через раствор азотно-кислого серебра проходит ток плотностью $j = 0,7$ А/дм². Сколько времени нужно пропускать ток, чтобы на катоде образовался слой серебра толщиной $d = 0,05$ мм? Относительная атомная масса серебра $A = 108$ а.е.м., валентность $n = 1$, плотность $\rho = 10,5$ г/см³.

• Решение. При прохождении электрического тока силой I через раствор азотно-кислого серебра за время t на катоде откладывается масса серебра

$$m = k I t, \quad (1)$$

где $k = \frac{A \cdot 10^{-3}}{n F}$ – электрохимический эквивалент серебра.

Если серебро плотностью ρ осаждается равномерно по всей поверхности электрода площадью S и образует слой толщиной d , то масса выделившегося серебра

$$m = \rho S d. \quad (2)$$

С учетом (2) выражение (1) примет вид

$$\rho S d = \frac{A \cdot 10^{-3}}{n F} I t,$$

или, используя связь $I = j S$ между силой тока и его плотностью,

$$\rho S d = \frac{A \cdot 10^{-3}}{n F} j S t.$$

Отсюда находим

$$t = \frac{n F \rho d}{A \cdot 10^{-3} j} \approx 1,86 \text{ ч.}$$

• Ответ: $t = \frac{n F \rho d}{A \cdot 10^{-3} j} \approx 1,86$ ч.

13.58. Какое количество атомов двухвалентного цинка можно выделить за $t = 5$ мин при пропускании тока силой $I = 2,5$ А через раствор сернокислого цинка? Молярная масса цинка $\mu = 65 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, электрохимический эквивалент $k = 3,39 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

13.59. За какое время при силе тока $I = 1$ А разложится $m = 1$ г воды. Электрохимический эквивалент водорода $k = 10^{-8}$ кг/Кл.

13.60. При электролизе раствора серной кислоты за время $\tau = 30$ мин выделилось $m = 2 \cdot 10^{-4}$ кг водорода. Определить максимальную силу тока, протекающего через электролит, если ток нарастал по линейному закону, а электрохимический эквивалент водорода $k = 10^{-8}$ кг/Кл.

13.61. Сколько электроэнергии нужно затратить для получения из воды $V = 2,5$ л водорода при температуре $T = 298$ К и давлении $p = 10^5$ Па, если электролиз ведется при напряжении $U = 5$ В, а КПД установки равен $\eta = 75\%$? Молярная масса водорода $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, электрохимический эквивалент $k = 10^{-8}$ кг/Кл.

• Решение. КПД любой установки равен отношению полезной работы A , совершающейся ею за некоторый промежуток времени Δt , к потребляемой энергией Q :

$$\eta = \frac{A}{Q}.$$

По закону Фарадея масса вещества (в нашем случае – водорода), выделившегося при электролизе, пропорциональна заряду Δq , прошедшему через электролит:

$$m = k \Delta q. \quad (1)$$

С другой стороны, массу водорода можно выразить из уравнения Менделеева – Клапейрона через параметры состояния газа:

$$p V = \frac{m}{\mu} R T; \quad m = \frac{p V \mu}{R T}. \quad (2)$$

Приравняв правые части соотношений (1) и (2), получим

$$k \Delta q = \frac{p V \mu}{R T}; \quad \Delta q = \frac{p V \mu}{k R T}.$$

Следовательно, электрическая энергия, израсходованная на образование массы m водорода (полезная работа),

$$A = \Delta q U = \frac{p V \mu U}{k R T}$$

и выражение для КПД установки можно представить в виде

$$\eta = \frac{p V \mu U}{k R T Q}.$$

Отсюда находим

$$Q = \frac{p V \mu U}{\eta k R T} \approx 134 \text{ кДж.}$$

• Ответ: $Q = \frac{p V \mu U}{\eta k R T} \approx 134 \text{ кДж.}$

13.62. Какое количество электричества нужно пропустить через электролитическую ванну с подкисленной водой, чтобы получить $V = 1$ л водорода при температуре $t = 20^\circ\text{C}$ и давлении $p = 10^5$ Па? Валентность водорода $n = 1$.

13.63. При электролизе раствора серной кислоты за время $t = 50$ мин выделилось $m = 0,3$ г водорода. Определить количество теплоты, выделившейся при этом в электролите, если его сопротивление $R = 0,4$ Ом, а электрохимический эквивалент водорода $k = 10^{-8}$ кг/Кл.

§14. Магнетизм

Хорошо известно, что если поднести два магнита друг к другу, то между ними появится сила; магниты будут либо притягивать друг друга, либо отталкивать. Взаимодействие магнитов ощущается даже тогда, когда они не соприкасаются. Любой магнит имеет два полюса – северный и южный. Если к северному полюсу одного магнита поднести северный полюс другого, то магниты будут отталкиваться; то же самое будет, если магниты сблизить южными полюсами. Но если к северному полюсу одного магнита поднести южный полюс другого, то между магнитами возникнет притяжение. Это напоминает взаимодействие зарядов: одноименные полюсы отталкиваются, а разноименные притягиваются.

Многочисленные опыты, проводимые с токами, показали, что электрические токи взаимодействуют друг с другом подобно магнитам.

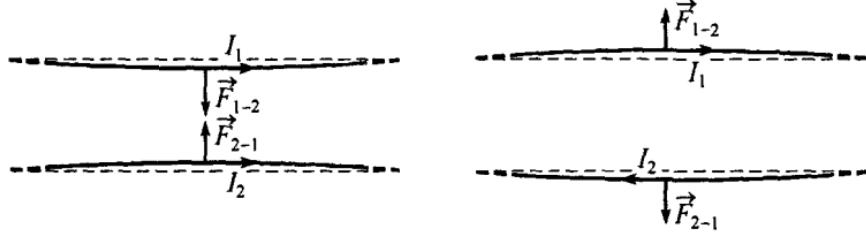


Рис. 14.1

Рассмотрим два прямолинейных проводника, расположенных в одной плоскости параллельно друг другу (рис. 14.1). Опыты показывают, что при пропускании по проводникам токов одного направления проводники будут притягиваться; если же токи имеют противоположные направления – проводники будут отталкиваться. Однако если ток течет лишь по одному проводнику, то силы взаимодействия между проводниками отсутствуют.

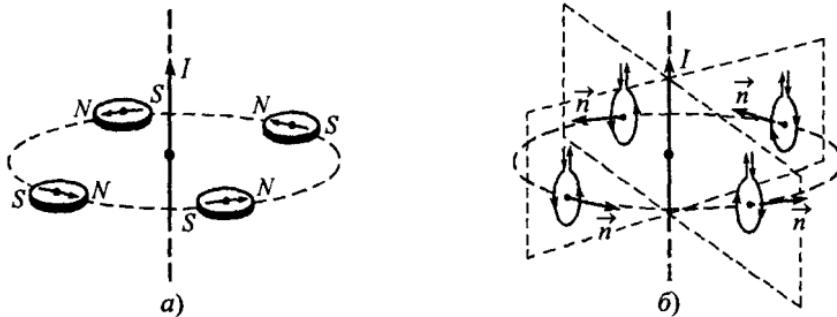


Рис. 14.2

Обратимся к другому опыту. Поместим вблизи длинного прямолинейного проводника с током компас и будем его перемещать вокруг проводника. Мы обнаружим, что в любой точке магнитная стрелка компаса установится по касательной к окружности, очерченной вокруг проводника (рис. 14.2, *a*, где *N* – северный полюс магнитной стрелки, *S* – южный). Теперь заменим магнитную стрелку на маленькую проволочную рамку,

которая может свободно вращаться вокруг оси, параллельной проводнику с током. При наличии тока в рамке она повернется и расположится так, что проводник будет находиться в плоскости рамки (рис. 14.2, б). Таким образом, проводник с током оказывает ориентирующее действие на рамку с током так же, как и на магнитную стрелку. Если изменить направление тока в проводнике, то и стрелка и рамка повернутся на 180° .

Как позже было установлено, природа взаимодействия магнитов друг с другом, токов друг с другом, магнитов и токов, одна и та же — в ее основе лежит тот факт, что магниты и токи наделяют окружающее пространство особыми физическими свойствами.

Магнитное поле

Для объяснения взаимодействия неподвижных зарядов (см. §12) требовалось наличие некоторой материальной среды, порождаемой зарядами в окружающем пространстве, которую называли электрическим полем. Появление сил магнитного взаимодействия также объясняют возникновением вокруг магнитов и токов некоторой материальной среды, порождаемой магнитами и токами, которую называют *магнитным полем*. При этом магнитное поле существует, даже если магнитное взаимодействие не наблюдается. О наличии в пространстве магнитного поля можно судить только по его действию на другие магниты, движущиеся заряды или токи.

Из рассмотренных опытов следует, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Ее называют *магнитной индукцией* \vec{B} (или *вектором индукции магнитного поля*). Единицей измерения величины магнитной индукции в системе СИ служит *тесла* [Тл].

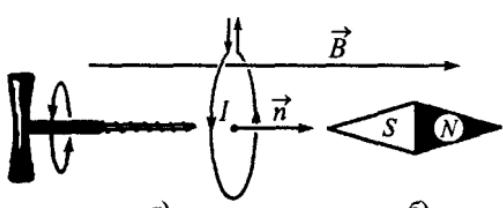


Рис. 14.3

Ориентирующее действие магнитного поля на рамку с током используют для определения направления вектора магнитной индукции. За направление вектора \vec{B} в том месте, где расположена рамка с током (которая может свободно ориентироваться), принимают на-

правление перпендикуляра к плоскости рамки. Так как перпендикуляр можно провести в ту или иную сторону, то условились за направление перпендикуляра принимать то направление, в котором будет поступательно двигаться буравчик (правый винт), если его рукоятку вращать по направлению тока в рамке (рис. 14.3, а). Этот перпендикуляр называют *положительной нормалью*. При этом в магнитном поле направление положительной нормали \vec{n} рамки с током совпадает с направлением от южного полюса S к северному N магнитной стрелки (рис. 14.3, б).

С помощью магнитной стрелки или рамки с током можно на опыте определить направление вектора магнитной индукции в каждой точке поля. При этом можно убедиться, что изменение формы проводника с

током влияет на направление вектора \vec{B} . Опыт дает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив *принцип суперпозиции*: индукция магнитного поля, порождаемого несколькими токами, равна векторной сумме индукций полей, создаваемых каждым из токов в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i. \quad (14.1)$$

Поскольку любой проводник может быть представлен в виде отдельных прямолинейных участков (в общем случае бесконечно малых) длиной dl , то магнитная индукция \vec{B} проводника с током в каждой точке будет равна векторной сумме элементарных индукций $d\vec{B}$, создаваемых отдельными участками. Изменение расположения этих участков приведет к изменению направлений векторов $d\vec{B}$ и вектора \vec{B} в целом. Понятно, что если буравчик расположить вдоль участка тока и рукоятку вращать так, чтобы поступательное движение буравчика совпало с направлением тока в проводнике, то направление вращения рукоятки укажет направление вектора $d\vec{B}$ магнитной индукции (рис. 14.4). Это правило называют *правилом буравчика*.

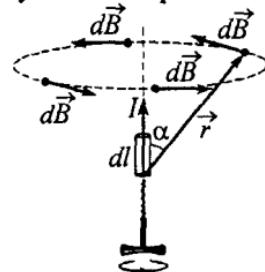


Рис. 14.4

Магнитное поле так же, как и электрическое, можно изображать графически при помощи линий индукции (силовых линий магнитного поля). Линиями индукции называют линии, касательные к которым в каждой точке направлены так же, как и вектор \vec{B} в данной точке поля. Очевидно, что через каждую точку магнитного поля можно провести лишь одну линию индукции (в противном случае вектор \vec{B} одновременно должен иметь два или более направления). Следовательно, линии индукции нигде не могут пересекаться. Для наглядности на рисунках линии индукции изображают гуще в тех точках поля, где больше величина \vec{B} . При этом на линии индукции изображают стрелку в направлении вектора индукции.

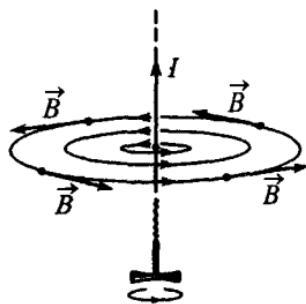


Рис. 14.5

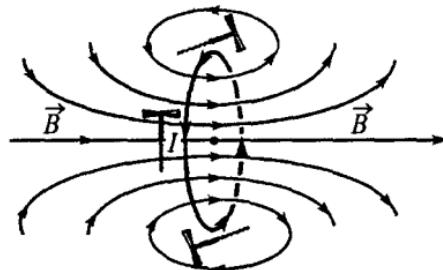


Рис. 14.6

Обратимся к рис. 14.2, а, б. По действию магнитного поля прямолинейного тока на стрелку и рамку с током можно заключить, что линии индукции магнитного поля прямолинейного проводника с током пред-

ставляют собой концентрические окружности, в центре которых находится проводник. Используя правило буравчика, можно легко изобразить картину линий индукции поля такого тока (рис. 14.5) и поля кругового тока (рис. 14.6).

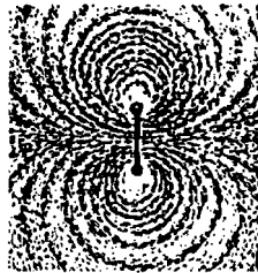


Рис. 14.7

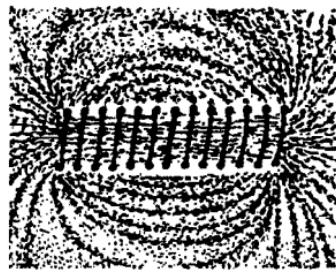


Рис. 14.8

Представление о линиях индукции можно получить с помощью магнитной стрелки или рамки с током для любых токов. Еще удобнее воспользоваться железными опилками, которые в магнитном поле намагничиваются и становятся подобными маленьким стрелкам компаса. На рис. 14.7 и 14.8 приведены полученные таким способом картины линий индукции поля кругового витка с током и соленоида (так называют длинную катушку с большим числом витков). Из рис. 14.8 видно, что в средней части внутри соленоида линии индукции параллельны друг другу и расположены на равных расстояниях. Такие магнитные поля называют однородными.

Несмотря на некоторое сходство описания электрических и магнитных полей между ними имеется принципиальное отличие: линии магнитной индукции непрерывны (они не имеют ни начала, ни конца) и замыкаются сами на себя. Это имеет место для любых магнитных полей, порожденных какими угодно токами. Векторные поля, обладающие такими свойствами, называют вихревыми.

Обратимся теперь к количественному описанию магнитного поля тока.

Если известна величина и направление векторов $d\vec{B}$ каждого участка dl тока I , то величину и направление вектора \vec{B} можно найти как векторную сумму элементарных индукций $d\vec{B}$, создаваемых отдельными участками. Формула для определения величины магнитной индукции dB бесконечно малого участка тока была получена опытным путем и выражает закон Бюо – Савара – Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}, \quad (14.2)$$

где r – расстояние от участка тока до рассматриваемой точки поля (см. рис. 14.4); α – угол между током и направлением в данную точку поля; коэффициент $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А² называется магнитной постоянной.

Определение количественных значений индукции магнитного поля даже для простейших токов достаточно трудоемкая задача, решение ко-

торой связано с интегрированием. Поэтому ограничимся лишь результатами решения такой задачи для трех рассмотренных выше токов:

а) индукция магнитного поля прямолинейного бесконечно длинного проводника с током I на расстоянии r от него:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}; \quad (14.3)$$

б) индукция на оси тока силой I , текущего в круговом проводнике радиусом R , на расстоянии x от плоскости проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (14.4)$$

в его центре ($x = 0$):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}; \quad (14.5)$$

в) индукция на оси бесконечно длинного соленоида с током силой I :

$$B = \mu_0 n I, \quad (14.6)$$

где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Магнитное поле в отличие от электрического не оказывает действия на покоящиеся заряды. Сила, с которой магнитное поле индукцией B действует на электрический заряд q , движущийся со скоростью \vec{v} , называется силой Лоренца. Опытным путем установлено, что величина этой силы

$$F_L = q v B \sin \alpha, \quad (14.7)$$

где α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} . Сила Лоренца направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \vec{v} и \vec{B} . Если заряд положительный, то направление силы Лоренца можно определить по правилу левой руки: если расположить левую руку таким образом, чтобы выпрямленные пальцы были направлены по вектору скорости частицы, а составляющие \vec{B} линии индукции магнитного поля, перпендикулярные \vec{v} , входили в ладонь, то отогнутый большой палец покажет направление силы (рис. 14.9, а). Очевидно, что направление силы Лоренца, действующей на отрицательный заряд, будет противоположным (рис. 14.9, б).

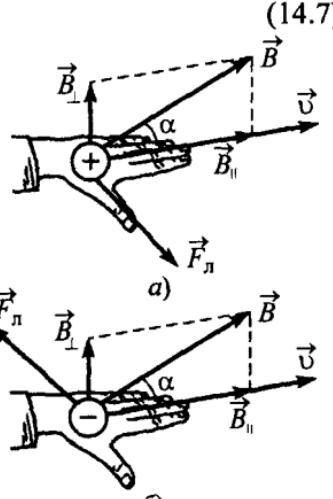


Рис. 14.9

Из выражения (14.7) следует, что сила Лоренца действует на движущиеся заряды только в том случае, если вектор скорости заряда не параллелен линиям индукции ($\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 180^\circ$). В противном случае $F_L = 0$.

Поскольку сила Лоренца все время перпендикулярна скорости частицы, ее проекция на направление перемещения частицы в любой момент

равна нулю. Это означает, что \vec{F}_L не совершает работы над частицей и не меняет ее кинетическую энергию (см. §3).

Рассмотрим движение частицы с зарядом $q > 0$ в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} . Пусть скорость \vec{v} частицы направлена перпендикулярно линиям индукции.

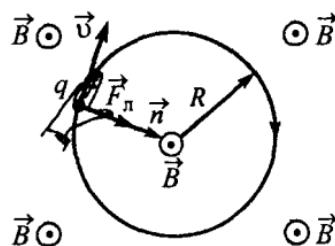


Рис. 14.10

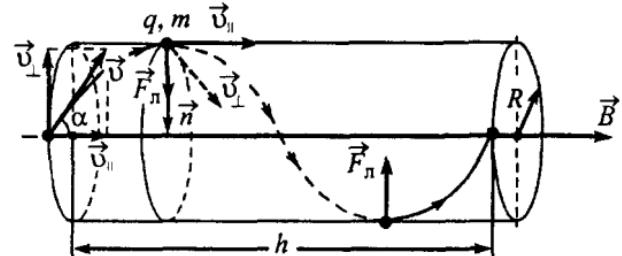


Рис. 14.11

Так как сила \vec{F}_L перпендикулярна \vec{v} , то она будет менять только направление скорости частицы, сообщая ей нормальное ускорение. При этом вектор скорости останется перпендикулярным вектору \vec{B} . Это означает, что частица в магнитном поле будет двигаться по окружности и в любой момент времени сила Лоренца будет оставаться постоянной по величине

$$F_L = q v B$$

и направленной перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \vec{B} и \vec{v} , к центру окружности радиуса R (рис. 14.10). Записав уравнение движения частицы в проекции на нормаль \vec{n} к траектории (см. §4)

$$m a_n = F_L, \quad \text{или} \quad \frac{m v^2}{R} = q v B,$$

получим значение радиуса окружности, по которой будет двигаться частица,

$$R = \frac{m v}{q B}$$

и ее период обращения:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{q B}.$$

Как видим, период обращения частицы не зависит от ее скорости и кинетической энергии.

Рассмотрим случай, когда скорость частицы составляет угол α с направлением линий индукции (рис. 14.11). Разложим вектор скорости \vec{v} частицы на две составляющие, одна из которых $v_{\perp} = v \sin \alpha$ направлена перпендикулярно силовым линиям поля, а другая — $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ параллельна им. На частицу в магнитном поле действует сила Лоренца, обусловленная составляющей v_{\perp} ,

$$F_L = q v_{\perp} B,$$

направленная к центру некоторой окружности радиуса R . Эта сила заставит частицу двигаться по окружности. В направлении силовых линий на

частицу никакие силы не действуют, поэтому составляющая v_{\perp} скорости не будет меняться ни по величине, ни по направлению. Наличие составляющей v_{\parallel} приведет к тому, что частица будет двигаться равномерно вдоль силовых линий поля. В результате наложения этих двух движений траекторией частицы станет цилиндрическая спираль, изображенная на рис. 14.11. Радиус R спирали легко найти из уравнения движения частицы

$$\frac{m v_{\perp}^2}{R} = q v_{\perp} B; \quad R = \frac{m v_{\perp}}{q B} = \frac{m v \sin \alpha}{q B},$$

а период T обращения частицы и шаг h спирали – из очевидных условий:

$$T = \frac{2 \pi R}{v_{\perp}} = \frac{2 \pi m}{q B}; \quad h = v_{\parallel} T = v_{\parallel} \frac{2 \pi R}{v_{\perp}} = \frac{2 \pi m v \cos \alpha}{q B}.$$

Независимость периода обращения заряженной частицы в магнитном поле от энергии частицы используют для устройства ускорителя заряженных частиц – циклотрона. Он предназначен для ускорения тяжелых частиц без применения большой разности потенциалов.

Рассмотрим другой пример действия силы Лоренца. Поместим проводник прямоугольного сечения, по которому течет ток плотностью j , в однородное магнитное поле, перпендикулярное направлению тока в проводнике (рис. 14.12). На движущиеся электроны в проводнике будет действовать сила Лоренца \vec{F}_L , направленная вниз, и электроны будут отклоняться к поверхности 1–1 проводника. Вследствие этого между поверхностями 1–1 и 2–2 возникнет разность потенциалов $\Delta\phi$ и электрическое поле напряженностью E . Разность потенциалов будет увеличиваться до тех пор, пока силы $\vec{F}_{\text{эл}}$ электрического поля не уравновесят силы, действующие на заряды со стороны магнитного поля:

$$|\vec{F}_{\text{эл}}| = |\vec{F}_L|, \quad \text{или} \quad |e| < v > B = |e| E,$$

где $< v >$ – средняя скорость направленного движения электронов в проводнике (см. § 13)

$$< v > = \frac{j}{|e| n},$$

E – величина напряженности электрического поля между рассматриваемыми поверхностями:

$$E = \frac{\Delta\phi}{d}.$$

Следовательно, между поверхностями 1–1 и 2–2 проводника установится разность потенциалов

$$\Delta\phi = \frac{j B d}{|e| n}.$$

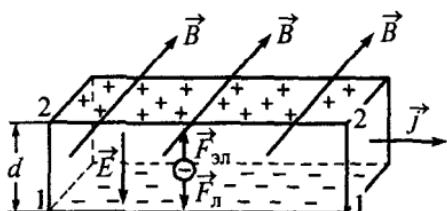


Рис. 14.12

Рассмотренное явление называют **эффектом Холла** для металлов, а возникающую между поверхностями разность потенциалов – **ЭДС Холла**, которую принято записывать в виде

$$\Delta\varphi = R_x j B d,$$

где величина $R_x = 1/|e|n$, зависящая от концентрации n электронов в проводнике, называется **постоянной Холла**.

Сила Ампера

Как было отмечено выше, магнитное поле действует не только на движущиеся заряженные частицы, но и на токи. В наиболее простом случае прямолинейного тока I сила, действующая со стороны однородного магнитного поля с индукцией \vec{B} , направленного так, что линии индукции составляют угол α с направлением тока, равна

$$F_A = I B l \sin \alpha, \quad (14.8)$$

где l – длина участка проводника с током. Эту силу называют **силой Ампера**.

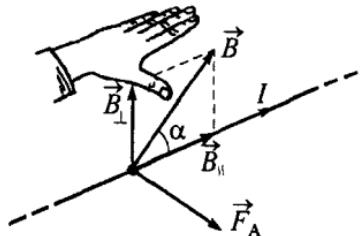


Рис. 14.13

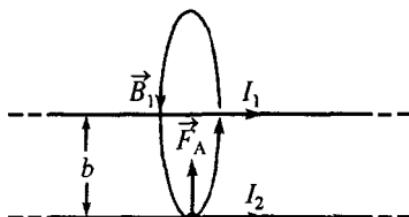


Рис. 14.14

Опыт показывает, что сила Ампера перпендикулярна плоскости, в которой лежит проводник и вектор \vec{B} . Направление силы Ампера можно определить по правилу левой руки, сформулированному для силы Лоренца, если вместо направления скорости частицы использовать направление тока (рис. 14.13).

Рассмотрим два прямолинейных параллельных тока, расположенных на расстоянии b друг от друга (рис. 14.14). Пусть токи имеют одинаковые направления и равны I_1 и I_2 . Проводник с током I_1 создаст на расстоянии b магнитное поле с индукцией (см. формулу (14.3))

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi b},$$

направленное так, как показано на рисунке. Проводник с током I_2 окажется в магнитном поле, силовые линии которого направлены перпендикулярно проводнику от нас. В результате этого на участок длиной l проводника с током I_2 будет действовать сила Ампера

$$F_A = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 \pi b} l. \quad (14.9)$$

Понятно, что при изменении направления тока в одном из проводников направление силы F_A изменится на противоположное, и проводники будут отталкиваться.

Заметим, что на основании силы (14.9) в системе СИ устанавливается единица измерения силы тока – ампер [А]: это сила тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызывает между проводниками силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

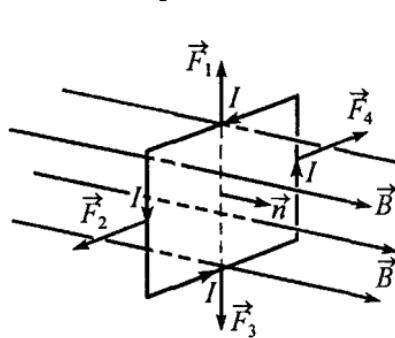


Рис. 14.15

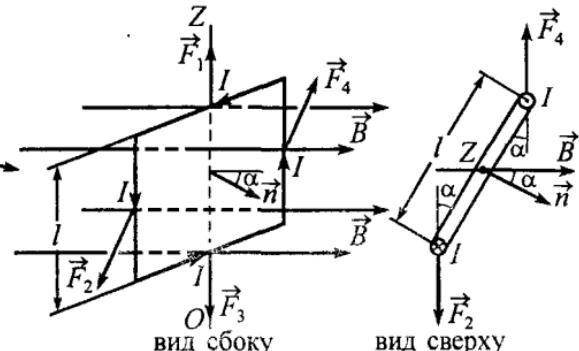


Рис. 14.16

Рассмотрим теперь квадратный контур с током I , расположенный в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} так, что его плоскость перпендикулярна линиям индукции (рис. 14.15). На каждый прямолинейный участок тока будут действовать силы Ампера, направленные перпендикулярно току и лежащие в плоскости контура. Если направления тока в контуре и поля таковы, как показано на рисунке, то силы Ампера будут растягивать контур, стремясь его разорвать; если направление тока или поля изменить на противоположное, то силы Ампера будут сжимать контур.

Легко понять, что независимо от ориентации такого контура в магнитном поле сумма действующих на него сил Ампера будет равна нулю. Это означает, что однородное поле не может заставить двигаться контур поступательно. Однако если нормаль к плоскости контура составляет некоторый угол α с направлением поля, то силы Ампера будут направлены так, чтобы, во-первых, растянуть (сжать) контур, а во-вторых, повернуть его и расположить в плоскости, перпендикулярной силовым линиям. Например, в положении контура, показанном на рис. 14.16, относительно оси OZ на контур действует момент сил

$M_z = F_1 \frac{1}{2} l \sin \alpha + F_4 \frac{1}{2} l \sin \alpha = IB l^2 \sin \alpha$,
который стремится развернуть контур. При $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ он максимален

$$M_{\max} = IB l^2 = IBS \quad (14.10)$$

(где S – площадь, ограниченная контуром) и обращается в ноль при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ (в первом случае контур с током будет находиться в положении устойчивого равновесия, во втором – в положении неустойчивого равновесия).

Величина

$$P_m = IS \quad (14.11)$$

называется *магнитным моментом* контура с током. Магнитный момент p_m принято записывать в виде вектора

$$\vec{p}_m = I S \vec{n}, \quad (14.12)$$

где \vec{n} – положительная нормаль контура с током.

Опыт показывает, что в данной точке поля момент сил, действующих на контур с током относительно произвольной неподвижной оси, зависит от расположения контура, его геометрических размеров и от силы тока в нем, но не зависит от формы контура. Поэтому для любого плоского контура справедливо:

$$M_2 = p_m B \sin \alpha; \quad M_{\max} = p_m B. \quad (14.13)$$

Следовательно, на контур с током в магнитном поле в общем случае действует момент сил Ампера (называемый *механическим моментом*), который стремится расположить контур так, чтобы направление магнитного момента \vec{p}_m контура совпало с направлением вектора индукции поля в данной точке.

Магнитное поле в веществе

До сих пор мы рассматривали магнитное поле в вакууме. Если проводник с током находится не в вакууме, а в некотором веществе, то, как показывает опыт, магнитное поле изменяется. Это указывает на тот факт, что различные вещества в магнитном поле сами становятся источниками магнитного поля (говорят, намагничиваются). Результирующее поле в веществе является суммой полей, создаваемых проводником с током и намагниченным веществом, и поэтому не равно полю в вакууме. Вещества, способные намагничиваться, называют *магнетиками*.

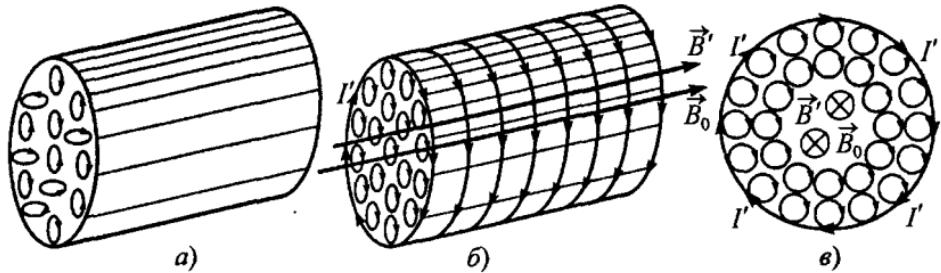


Рис. 14.17

Намагничивание тел Ампер объяснял наличием в веществе мельчайших круговых токов (молекулярных токов). Каждый такой ток создает в окружающем пространстве магнитное поле и обладает магнитным моментом \vec{p}_m . При отсутствии внешнего поля магнитные моменты молекулярных токов ориентированы беспорядочным образом (рис. 14.17, а). Под действием внешнего поля \vec{B}_0 магнитные моменты молекул преимущественно ориентируются в одном направлении (рис. 14.17, б). В этом случае молекулярные токи, текущие по соприкасающимся участкам, имеют противоположные направления и взаимно компенсируются; нескомпенсированными остаются лишь токи на участках, примыкающих к поверхности

магнетика. Поэтому действие всех молекулярных токов будет такое же, как действие некоторого тока I' , текущего по поверхности магнетика (рис. 14.17, б, в). Этот ток создаст магнитное поле \vec{B}' , направленное параллельно внешнему. Результирующее поле внутри магнетика, равное

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}', \quad B = B_0 + B',$$

будет больше внешнего \vec{B}_0 . Можно показать, что для однородного магнетика, заполняющего все пространство, отношение $\mu = B/B_0$ есть величина постоянная, определяющая магнитные свойства вещества. Ее называют *магнитной проницаемостью* вещества: она показывает, во сколько раз величина магнитной индукции внутри магнетика больше величины индукции внешнего поля:

$$B = \mu B_0. \quad (14.14)$$

Следует отметить, что не все магнетики усиливают внешнее поле: существуют вещества, у которых магнитная проницаемость $\mu < 1$. Соотношение (14.14) справедливо лишь для магнетиков с $\mu > 1$ (к ним относятся железо, кобальт, никель и многие сплавы).

Электромагнитная индукция

Выше мы обсудили две стороны связи между магнитными и электрическими явлениями: а) электрический ток создает магнитное поле и б) со стороны магнитного поля на электрический ток или движущийся заряд действует сила. Закономерно задаться вопросом: если электрический ток создает магнитное поле, то не может ли магнитное поле привести к возникновению тока? Ответ на него был независимо получен Дж. Генри и М. Фарадеем.

На рис. 14.18 схематически представлена установка одного из опытов Фарадея. Фарадей обнаружил, что при замыкании и размыкании ключа K стрелка гальванометра сильно отклоняется то в одну, то в другую сторону. Однако при замкнутом ключе, когда через катушку протекал постоянный ток, стрелка оставалась неподвижной. Исходя из этого Фарадей сделал вывод, что постоянное во времени (стационарное) магнитное поле катушки не приводит к появлению тока в рамке; для его возникновения необходимо, чтобы магнитное поле, пронизывающее рамку, менялось со временем, т.е. было нестационарным. Дальнейшие опыты (например, быстрое введение постоянного магнита в проволочный виток, или удаление его из витка) подтвердили догадку Фарадея: в проводящем контуре возникает электрический ток только в случае, если меняется магнитное поле, которое его пронизывает.

Появление тока в контуре равносильно наличию в контуре источника ЭДС, которую назвали ЭДС *электромагнитной индукции*, а возникающий в контуре ток – *индукционным током*.

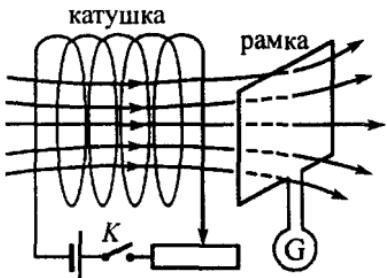


Рис. 14.18

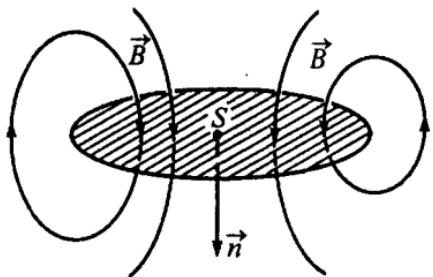


Рис. 14.19

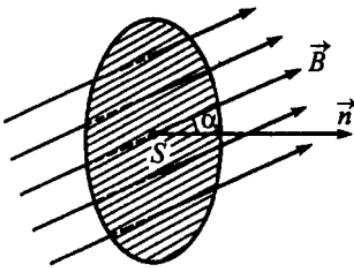


Рис. 14.20

Количественные измерения ЭДС индукции привели к выводу, что ее величина зависит от быстроты изменения индукции магнитного поля, площади, ограниченной контуром, и ориентации контура в магнитном поле. Если магнитное поле изобразить с помощью линий магнитной индукции, то их густота будет пропорциональна величине индукции. Продвигающий контур в таком поле будет охватывать некоторую часть силовых линий (рис. 14.19). Если величина индукции изменится, то число силовых линий, охватываемых контуром, также изменится (увеличится или уменьшится). Такой же результат будет при изменении площади контура и изменении его ориентации в магнитном поле (часть силовых линий станет параллельна плоскости контура или, наоборот, ранее параллельные плоскости контура силовые линии будут теперь охвачены контуром). Во всех этих случаях полное число линий, проходящих через площадь, ограниченную контуром, изменится, и в контуре возникнет индукционный ток.

Рассмотрим плоскую поверхность \$S\$ в однородном магнитном поле с индукцией \$\vec{B}\$ (рис. 14.20). Потоком вектора индукции магнитного поля (или магнитным потоком) через поверхность \$S\$ называют скалярную величину

$$\Phi = \vec{B} \cdot S = B_n S, \quad (14.15)$$

где \$\alpha\$ – угол между вектором индукции \$\vec{B}\$ и нормалью \$\vec{n}\$ к поверхности \$S\$; \$B_n = B \cos \alpha\$ – проекция вектора \$\vec{B}\$ на нормаль.

Если магнитное поле неоднородно, а рассматриваемая поверхность \$S\$ не плоская, то ее можно разбить на бесконечно малые плоские элементы \$dS\$ так, чтобы индукция магнитного поля в каждой точке такого элемента была одинаковой. Очевидно, что в зависимости от значения проекции \$B_n\$ поток может быть положительным, отрицательным или равным нулю, а поток \$\Phi\$ магнитной индукции через всю поверхность \$S\$ равен алгебраической сумме потоков \$d\Phi = B dS \cos \alpha = B_n dS\$. Можно показать, что величина суммарного потока \$\Phi\$ не зависит от формы поверхности \$S\$.

Единицей измерения величины потока магнитной индукции в системе СИ служит вебер [Вб = Тл\$\cdot\$м²].

Вернемся к опытам Фарадея. Используя определение потока, можно сделать вывод, что ЭДС индукции и индукционный ток возникают в контуре всякий раз, когда меняется магнитный поток, который пронизывает поверхность, натянутую на контур. Это явление, открытое Фарадеем, на-

зывается электромагнитной индукцией. Математически результаты опыта Фарадея можно записать в виде

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (14.16)$$

Следовательно, ЭДС электромагнитной индукции, возникающей в проводящем контуре, находящемся в магнитном поле, равна скорости изменения потока индукции магнитного поля через произвольную поверхность, натянутую на этот контур. Это утверждение называется законом электромагнитной индукции.

Величина ЭДС \mathcal{E}_i индукции не зависит от того, какие причины привели к возникновению нестационарного потока индукции магнитного поля. Из определения потока (14.15) видно, что изменение величины магнитной индукции B , площади поверхности, охватываемой контуром, или изменение ориентации контура в магнитном поле (т.е. изменение угла α) приведет к тому, что величина потока изменится и если границей поверхности служит проводящий контур, то в нем потечет ток.

Индукционный ток, возникающей в контуре, создаст собственное магнитное поле, линии индукции которого также будут пронизывать поверхность, ограниченную контуром. В зависимости от направления индукционного тока суммарный поток индукции внешнего и собственного магнитных полей будет равен их сумме или разности. Направление индукционного тока определяется правилом Ленца: *индукционный ток направлен всегда так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей*. Поэтому если магнитный поток внешнего поля увеличится, то в контуре возникнет индукционный ток такого направления, чтобы собственный магнитный поток ослабил внешний. И наоборот, уменьшение внешнего магнитного потока приведет к возникновению индукционного тока такого направления, чтобы собственный магнитный поток поддержал внешний. Именно по этой причине в правой части формулы (14.16) стоит знак «минус».

Если контур, в котором индуцируется ЭДС индукции, состоит из N витков, то в каждом витке возникнет своя ЭДС. Поскольку все витки соединены последовательно, то \mathcal{E}_i будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков в отдельности:

$$\mathcal{E}_i = - \sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \Phi_i.$$

Величину

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad (14.17)$$

называют *полным магнитным потоком* или *потокосцеплением*. Если поток, пронизывающий каждый из витков, одинаков, то

$$\Psi = N \Phi,$$

а ЭДС индукции в таком контуре

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt} = - N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (14.18)$$

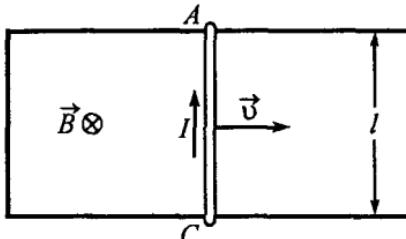


Рис. 14.21

Рассмотрим контур, образованный согнутым в форме буквы П проводником и стержнем AC , который может скользить по проводнику (рис. 14.21). Поместим контур во внешнее стационарное магнитное поле с индукцией \vec{B} , направленное перпендикулярно плоскости, в которой расположен контур.

Если стержень AC перемещать со скоростью v в плоскости контура, то площадь, охватываемая контуром, и магнитный поток, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром, будут меняться со временем по законам

$$S = v t l, \quad \Phi = B S = B v t l.$$

Согласно закону электромагнитной индукции, в контуре возникнет ЭДС

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt} = B v l. \quad (14.19)$$

Сторонней силой, которой обусловлена ЭДС индукции в рассмотренном случае, служит сила Лоренца. При движении стержня вправо с такой же скоростью будут перемещаться носители тока в стержне — электроны. В результате на каждый электрон начнет действовать сила Лоренца, направленная вдоль стержня, и электроны начнут перемещаться к его концу C : в контуре возникнет индукционный ток. Перераспределившиеся в стержне заряды создадут между точками A и C разность потенциалов, равную $|\mathcal{E}_i|$. Очевидно, что в данном случае для возникновения разности потенциалов между концами стержня вовсе не требуется контур. Действительно, появившийся избыток электронов у конца C стержня и их недостаток у конца A , приведет к появлению в стержне электрического поля напряженностью E и силы $F_{\text{эл}} = |e| E$, направленной противоположно силе Лоренца $F_{\text{Л}} = |e| v B$. Если эти две силы станут равными по величине ($F_{\text{эл}} = F_{\text{Л}}$, или $E = v B$), то движение электронов в стержне прекратится и между его концами установится разность потенциалов

$$\Delta\varphi = E l = B v l. \quad (14.20)$$

Как видим, разность потенциалов (14.20) между концами стержня, движущегося в магнитном поле, совпадает с величиной ЭДС индукции (14.19), возникающей в контуре, который пронизывает переменный магнитный поток, обусловленный изменением площади контура за счет движения этого стержня.

Рассмотрим другой пример возникновения ЭДС индукции в контуре, представленном на рис. 14.21. Теперь стержень AC будет оставаться неподвижным, а будет меняться величина индукции B магнитного поля. В этом случае магнитный поток $\Phi = B S$, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром, также будет меняться. По закону электромагнитной индукции это приведет к появлению в контуре индукционного тока

и ЭДС \mathcal{E}_i , т.е. в контуре появятся сторонние силы. Ясно, что в нашем случае это не силы Лоренца: привести в движение покоящиеся заряды эти силы не могут. Известно, что заставить двигаться покоящиеся заряды в проводнике может только электрическое поле (см. §13). Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического поля, причем это поле существует независимо от наличия проводящего контура. Последний лишь позволяет обнаружить это поле по возникающему в контуре индукционному току. Электрическое поле, порождаемое переменным магнитным, отличается от полей, рассматриваемых в электростатике: его силовые линии, как и у магнитного поля, представляют собой замкнутые кривые, т.е. оно является вихревым.

Никакого принципа, объединяющего оба рассмотренных случая возникновения электромагнитной индукции (за счет действия на носители тока силы Лоренца или вихревого электрического поля), не обнаружено. Поэтому закон электромагнитной индукции нужно понимать как совместный эффект двух совершенно различных явлений. При этом формула (14.16) автоматически учитывает оба фактора.

Самоиндукция

Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий контур. В частности, нестационарный поток может создаваться током, текущим в самом рассматриваемом контуре.

Рассмотрим контур (состоящий из одного или нескольких витков), по которому протекает ток. Наличие тока приведет к появлению магнитного потока ψ собственного магнитного поля, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром. При изменении силы тока величина индукции магнитного поля, созданного этим током, изменится и, как следствие, изменится магнитный поток. Вследствие этого в контуре возникнет ЭДС, которую называют ЭДС самоиндукции, а связанные с ней токи – экстрапотоками самоиндукции.

Из закона Био – Савара – Лапласа (14.2) и определения магнитного потока (14.15) следует, что величина потока ψ растет линейно с током в контуре:

$$\psi = L I, \quad (14.21)$$

где коэффициент пропорциональности L называют индуктивностью контура. Единицей измерения индуктивности в системе СИ служит генри [$\Gamma\text{н} = \text{Вб}/\text{А}$].

Величина индуктивности зависит от геометрии контура, а также магнитных свойств окружающей контур среды. Найдем, например, индуктивность очень длинного соленоида площадью поперечного сечения S , заполненного магнетиком с магнитной проницаемостью μ . При протекании по соленоиду тока силой I внутри него возникнет однородное маг-

нитное поле, индукция которого равна $B = \mu \mu_0 n I$ (см. формулы (14.6) и (14.14)). Поток через каждый из витков равен $\Phi = B S = \mu \mu_0 n I S$, а полный магнитный поток

$$\psi = N \Phi = N \mu \mu_0 n I S,$$

где N – число витков в соленоиде, равное $N = n l$ (l – длина соленоида).

Следовательно, $\psi = \mu \mu_0 n^2 I l S$, а индуктивность соленоида

$$L = \psi / I = \mu \mu_0 n^2 l S. \quad (14.22)$$

Рассмотрим контур индуктивностью $L = \text{const}$, по которому протекает ток силой I , величина которого меняется с течением времени. Подставив значение потока ψ индукции, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром, из (14.21) в формулу (14.16), получим

$$\mathcal{E}_s = - \frac{d(LI)}{dt} = - L \frac{dI}{dt}, \quad (14.23)$$

где \mathcal{E}_s – ЭДС самоиндукции, а знак «минус» в правой части обусловлен правилом Ленца.

Из (14.23) вытекает, что при уменьшении (увеличении) силы тока в контуре в нем возникнет ЭДС самоиндукции, направленная так, чтобы поддержать (ослабить) значение тока. Поэтому наличие самоиндукции проявляется в замедлении процессов исчезновения и установления тока в цепи, содержащей контур (в общем случае, катушку) индуктивностью L .

Энергия магнитного поля

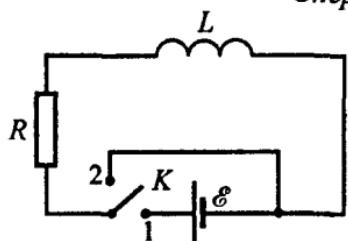


Рис. 14.22

Рассмотрим электрическую цепь, представленную на рис. 14.22. При замкнутом ключе K в положение 1 в катушке индуктивностью L установится некоторый ток. Если ключ замкнуть в положение 2, то ток в катушке должен исчезнуть. Однако вследствие самоиндукции исчезновение тока произойдет не мгновенно.

Убывающий ток будет поддерживаться возникающей в катушке ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_s = - L \frac{dI}{dt}.$$

Работа, совершаемая экстратоком за бесконечно малое время dt , будет равна (см. §13, формула (13.31)):

$$dA = \mathcal{E}_s I dt = - L I dI,$$

а за время, соответствующее полному исчезновению тока в цепи:

$$A = - \int_1^0 L I dI = \frac{LI^2}{2}, \quad (14.24)$$

где I – значение силы тока в момент размыкания ключа из положения 1.

Работа (14.24) идет на приращение внутренней энергии сопротивления R . Совершение этой работы сопровождается исчезновением тока в

цепи и магнитного поля, которое первоначально существовало в окружающем пространстве. Поскольку никаких других изменений не произошло, то можно сделать вывод, что магнитное поле является носителем энергии, за счет которой и совершается работа (14.24). Поэтому контур (в нашем случае катушка) индуктивностью L , по которому течет ток силой I , обладает энергией

$$W = \frac{L I^2}{2}, \quad (14.25)$$

которая сосредоточена в возбуждаемом током магнитном поле. Ее называют *энергией магнитного поля*.

Используя выражение (14.22), энергию магнитного поля соленоида с током I можно записать в виде

$$W = \frac{\mu_0 n^2 I S I^2}{2},$$

или с учетом (14.6):

$$W = \frac{B^2}{2 \mu_0} I S = \frac{B^2}{2 \mu_0} V,$$

где $V = S l$ – объем соленоида. Величина

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2 \mu_0}, \quad (14.26)$$

равная энергии поля, сосредоточенной в единице объема, называется *объемной плотностью энергии магнитного поля*.

В общем случае неоднородного поля выражение для объемной плотности энергии магнитного поля совпадает с (14.26). Энергию, заключенную в некотором объеме V , можно найти, вычислив интеграл

$$W = \int_V w dV. \quad (14.27)$$

Электрические колебания

Рассмотрим один пример проявления ЭДС самоиндукции.

Зарядим конденсатор емкостью C , поместив на обкладки разноименные заряды $\pm q_0$, и подключим его к катушке индуктивностью L так, как показано на рис. 14.23. В результате конденсатор будет разряжаться и в цепи потечет ток, появление которого приведет к возникновению в катушке ЭДС самоиндукции и экстратока. При этом энергия электрического поля конденсатора будет уменьшаться, но зато возникнет все возрастающая энергия магнитного поля катушки, обусловленная током. Полагая сопротивление катушки и соединительных проводов ничтожно малым, можно утверждать, что полная энергия (энергия электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки) останется неизменной и равной начальной энергии конденсатора:

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{L I^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

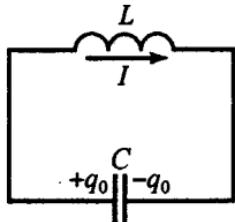


Рис. 14.23

Поэтому в момент, когда заряд конденсатора и энергия электрического поля обратятся в нуль, энергия магнитного поля и ток в цепи достигнут наибольшего значения. В дальнейшем ток будет уменьшаться и, когда заряды на обкладках конденсатора достигнут первоначального значения $\pm q_0$ (заряды на обкладках поменяются местами), сила тока в цепи станет равной нулю. После этого процессы потекут в обратном направлении. В ходе каждого из процессов будет меняться заряд на обкладках конденсатора и сила тока, текущего через катушку. При этом будут происходить взаимные превращения энергий электрического и магнитного полей.

Можно показать, что эти изменения будут происходить периодически с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (14.28)$$

Поэтому цепь, представленную на рис. 14.23, называют *колебательным контуром* (контуром Томсона). Заряд конденсатора и ток в катушке в таком контуре будут изменяться по гармоническим законам

$$q = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad I = \frac{dq}{dt} = -q_{\max} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (14.29)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ называется *собственной частотой контура*; q_{\max} – максимальное значение величины заряда на обкладках конденсатора; α – начальная фаза. Значения q_{\max} и α можно найти из начальных условий (т.е. из величины заряда конденсатора q_0 и тока I_0 в катушке в начальный момент):

$$q_0 = q_{\max} \cos \alpha; \quad I_0 = -q_{\max} \omega_0 \sin \alpha.$$

Отсюда получим

$$q_{\max} = \sqrt{q_0^2 + \frac{I_0^2}{\omega_0^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_0}{q_0 \omega_0}. \quad (14.30)$$

Колебательный контур является неотъемлемой частью любого устройства, передающего или принимающего радиосигналы. В процессе периодических превращений энергии электрического поля в энергию магнитного и наоборот, колебательный контур будет излучать *электромагнитную волну* с частотой

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (14.31)$$

и длиной волны

$$\lambda = c T = \frac{2\pi c}{\omega_0}, \quad (14.32)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Если собственная частота контура совпадает с частотой электромагнитной волны, передаваемой некоторой радиостанцией, то говорят, что в контуре наблюдается *резонанс*. Например, вращая рукоятку настройки радиоприемника, мы изменяем параметры его принимающего контура (обычно емкость конденсатора) до тех пор, пока не услышим устойчивый сигнал. В этот момент собственная частота нашего контура совпадает с частотой принимаемого сигнала, и

мы говорим, что радиоприемник настроен на волну передающей станции. Колебания зарядов и токов в принимающем контуре будут происходить по законам, отличным от (14.29), поскольку причиной их возникновения служат внешние факторы. О таких колебаниях говорят, что они *вынужденные* (см. §8).

Переменный ток

Рассмотрим теперь электрические колебания, возникающие в том случае, если в цепи имеется источник тока, ЭДС которого изменяется периодически (такой источник будем называть *генератором*). Такие колебания подобны механическим вынужденным колебаниям.

Все реальные генераторы тока имеют ЭДС, изменяющуюся по закону, очень близкому к синусоидальному, и создаваемые ими токи практически являются синусоидальными. С другой стороны, теория синусоидальных токов наиболее проста. По этим причинам мы будем рассматривать только такие токи, сила которых меняется по закону

$$I = I_0 \sin \omega t, \quad (14.33)$$

где I_0 – амплитудное значение тока, ω – его частота.

Сопротивление в цепи переменного тока

Рассмотрим цепь, состоящую из генератора и сопротивления R (рис. 14.24), которое в случае переменных токов называют *активным сопротивлением*.

Напряжение на участке $a-R-b$ цепи будет равно

$$U = IR = I_0 R \sin \omega t = U_0 \sin \omega t, \quad (14.34)$$

где $U_0 = I_0 R$ – максимальное значение напряжения на участке.

Таким образом, напряжение на концах участка изменяется по закону синуса, так же, как и ток в цепи. Причем разность фаз между колебаниями тока и напряжения равна нулю: напряжение и ток одновременно достигают максимальных значений и одновременно обращаются в нуль.

Конденсатор в цепи переменного тока

Рассмотрим теперь цепь, состоящую из генератора и конденсатора емкостью C .

Заряд конденсатора и силу тока будем считать положительными, если они соответствуют рис. 14.25.

Напряжение на участке $a-C-b$ цепи будет равно

$$U = \frac{q}{C},$$

где $q = \int I dt$ – заряд конденсатора (см. формулу (13.2)).

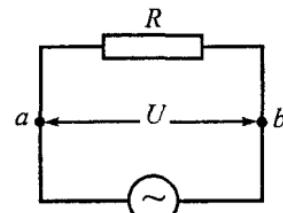


Рис. 14.24

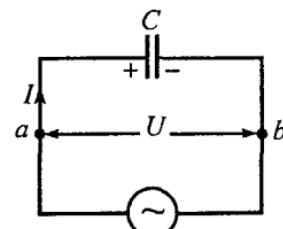


Рис. 14.25

Если сила тока в цепи изменяется по закону (14.33), то заряд на конденсаторе в любой момент времени равен

$$q = \int I_0 \sin \omega t dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t,$$

$$U = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin (\omega t - \frac{1}{2}\pi) = U_0 \sin (\omega t - \frac{1}{2}\pi). \quad (14.35)$$

Как видим, напряжение на конденсаторе изменяется также по закону синуса, но колебания напряжения отстают по фазе от колебаний тока в цепи на $\frac{1}{2}\pi$ (когда ток, возрастаю, проходит через нуль, напряжение достигает минимума и начинает увеличиваться; когда сила тока становится максимальной, напряжение проходит через нуль и т.д.).

Амплитудное значение напряжения на конденсаторе $U_0 = I_0 / \omega C$ обычно записывают в виде

$$U_0 = I_0 X_C, \quad (14.36)$$

где $X_C = 1 / \omega C$ называют *реактивным сопротивлением емкости*. Величина X_C тем меньше, чем больше частота тока и в цепи постоянного тока $X_C \rightarrow \infty$.

Индуктивность в цепи переменного тока

Рассмотрим, наконец, цепь, состоящую из генератора и катушки индуктивностью L (рис. 14.26).

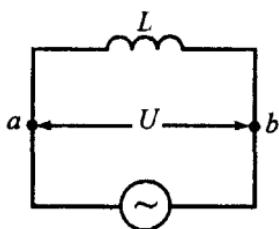


Рис. 14.26

При наличии переменного тока в цепи в катушке возникнет ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

Поскольку активное сопротивление цепи равно нулю, то напряжение на участке $a-L-b$ цепи будет равно

$$U = -\mathcal{E}_s = L \frac{dI}{dt}.$$

Если сила тока в цепи изменяется по закону (14.33), то

$$U = -I_0 \omega L \cos \omega t = I_0 \omega L \sin (\omega t + \frac{1}{2}\pi) = U_0 \sin (\omega t + \frac{1}{2}\pi). \quad (14.37)$$

Как видим, напряжение на индуктивности изменяется также по закону синуса, но колебания напряжения опережают по фазе колебания тока в цепи на $\frac{1}{2}\pi$ (когда ток, возрастаю, проходит через нуль, напряжение уже достигает максимума и начинает уменьшаться; когда сила тока становится максимальной, напряжение проходит через нуль и т.д.).

Амплитудное значение напряжения на индуктивности $U_0 = I_0 \omega L$ обычно записывают в виде

$$U_0 = I_0 X_L, \quad (14.38)$$

где $X_L = \omega L$ называют *реактивным сопротивлением индуктивности*. Величина X_L растет линейно с частотой тока и в цепи постоянного тока $X_L = 0$.

Векторные диаграммы. Закон Ома для цепи переменного тока

Рассмотрим систему координат XOY и вектор длиной A , составляющий с осью OX угол α (рис. 14.27). Пусть этот вектор равномерно вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω . Тогда в любой момент времени вектор \vec{A} будет составлять с осью OX угол $\varphi = \omega t + \alpha$, а проекции этого вектора на оси OX и OY будут равны

$$A_x = A \cos \varphi = A \cos (\omega t + \alpha),$$

$$A_y = A \sin \varphi = A \sin (\omega t + \alpha).$$

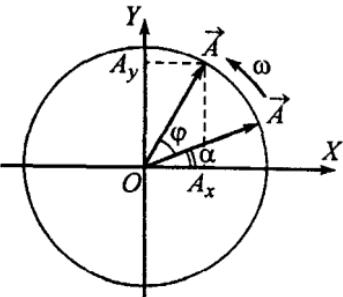


Рис. 14.27

Поэтому колебания с амплитудой A и постоянной частотой ω , происходящие по закону косинуса, можно наглядно представить графически в виде проекций равномерно вращающегося с угловой скоростью ω вектора длиной A на ось OX , а синусоидальные колебания – в виде его проекции на ось OY .

Можно показать, что сложение двух колебаний одного направления и одинаковой частоты графически можно выполнить по правилам сложения двух векторов.

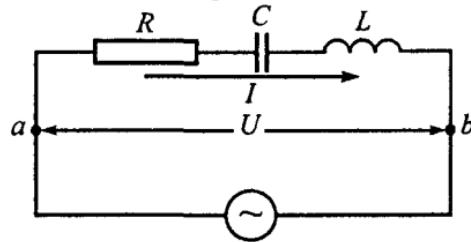


Рис. 14.28

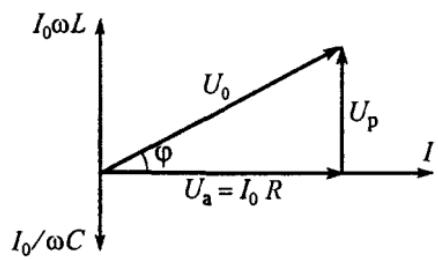


Рис. 14.29

Вернемся к цепям переменного тока и рассмотрим последовательное соединение с генератором активного сопротивления R , конденсатором емкостью C и катушкой индуктивностью L (рис. 14.28). При таком соединении напряжение между точками $a-b$ участка $a-R-C-L-b$ цепи будет равно сумме падений напряжений на элементах участка. Выше мы видели, что ток в цепи, напряжения на активном сопротивлении, конденсаторе и катушке меняются по законам синуса с одинаковой частотой. Для сложения напряжений воспользуемся *векторной диаграммой напряжений*. Выберем ось диаграммы таким образом, чтобы вектор, изображающий колебания тока, был направлен вдоль этой оси (рис. 14.29). Тогда вектор, соответствующий колебаниям напряжения на активном сопротивлении, будет иметь длину $I_0 R$ и будет направлен вдоль оси токов, поскольку разность фаз между током и напряжением равна нулю. Вектор длиной $I_0 / \omega C$, изображающий колебания напряжения на конденсаторе, будет направлен относительно оси токов с отставанием на угол $1/2 \pi$. Аналогично, вектор длиной $I_0 \omega L$, изображающий колебания напряжения на катушке, будет

направлен относительно оси токов с опережением на угол $\frac{1}{2}\pi$. Складывая векторы, соответствующие двум последним напряжениям, получим значение так называемой *реактивной* составляющей напряжения:

$$U_p = I_0 (\omega L - 1/\omega C). \quad (14.39)$$

С учетом (14.39) амплитуда напряжения на участке $a-R-C-L-b$ цепи

$$U_0 = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = I_0 \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}, \quad (14.40)$$

где $U_a = I_0 R$ – активная составляющая напряжения.

Формула (14.40) имеет сходство с законом Ома в том смысле, что амплитуда напряжения U_0 пропорциональна амплитуде тока I_0 . Поэтому выражение (14.40) часто называют *законом Ома для участка цепи переменного тока*. Следует помнить, что эта формула справедлива лишь для амплитуд, но не для мгновенных значений тока и напряжения.

Величину

$$Z = U_0/I_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (14.41)$$

называют *полным сопротивлением* цепи для переменного тока или *импедансом* цепи, а величину

$$X = U_p/I_0 = \omega L - 1/\omega C \quad (14.42)$$

реактивным сопротивлением или *реактанском* цепи.

Из векторной диаграммы и проведенных вычислений понятно, что напряжение между точками $a-b$ участка $a-R-C-L-b$ цепи меняется по закону

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (14.43)$$

где сдвиг фаз φ между током и напряжением (см. рис. 14.29)

$$\varphi = \arctg \frac{U_p}{U_a} = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (14.44)$$

Работа и мощность переменного тока

Найдем работу, совершающую в цепи, представленной на рис. 14.28, при наличии в ней переменного синусоидального тока.

Поскольку сила тока в цепи и напряжение на ее концах непрерывно меняются, то сначала найдем работу dA за бесконечно малый интервал времени dt , в течение которого ток и напряжение можно считать постоянными:

$$dA = I U dt.$$

Разложим напряжение U на активную и реактивную составляющие следующим образом (см. рис. 14.29):

$$U_a = U_0 \cos \varphi \sin \omega t; \quad U_p = U_0 \cos \varphi \sin(\omega t \pm \frac{1}{2}\pi),$$

где учтено, что реактивная составляющая напряжения U_p смешена относительно тока на угол $\pm\frac{1}{2}\pi$ (если $\omega L > 1/\omega C$, то U_p смешена на угол $+\frac{1}{2}\pi$, в противном случае – на $-\frac{1}{2}\pi$). Тогда работа за период $T = 2\pi/\omega$, обусловленная активной и реактивной составляющими напряжения, будет равна

$$A_a = \int_0^T U_a I dt = I_0 U_0 \cos \varphi \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} T I_0 U_0 \cos \varphi, \quad (14.45)$$

$$A_p = \int_0^T U_p I dt = \pm I_0 U_0 \sin \varphi \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0. \quad (14.46)$$

Следовательно, полная работа тока в рассматриваемой цепи за период определяется только активной составляющей напряжения.

Средняя мощность переменного тока за период равна

$$N = \frac{A_a}{T} = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi, \quad (14.47)$$

где величина $\cos \varphi$ называется *коэффициентом мощности*. Очевидно, что в случае, если цепь переменного тока содержит только активные сопротивления, сдвиг фаз между током и напряжением отсутствует и $\cos \varphi = 1$. В этом случае выражение для средней мощности примет вид

$$N = \frac{1}{2} I_0 U_0 = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{U_0^2}{2 R}. \quad (14.48)$$

Такую же мощность в этой цепи развивает постоянный ток силой

$$I_d = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad (14.49)$$

который называют *действующим* (или *эффективным*) значением силы тока (действующее значение синусоидального тока численно равно значению такого постоянного тока, при котором за время, равное периоду синусоидального тока, во внешней цепи выделится такое же количество теплоты.) Аналогично величина

$$U_d = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (14.50)$$

называется *действующим* (или *эффективным*) значением напряжения.

Выражение для средней мощности (14.47) через действующие значения силы тока и напряжения примет вид

$$N = I_d U_d \cos \varphi \quad (14.51)$$

Рекомендации по решению задач

В задачах на расчет индукции магнитного поля, создаваемого искаженными токами, обязательно нужно использовать рисунок, на котором требуется изобразить векторы индукции отдельных токов в рассматриваемых точках поля. При этом особое внимание следует обратить на направление векторов индукции. В общем случае для определения направления вектора индукции произвольного прямолинейного участка с током можно воспользоваться правилом буравчика. Поскольку в рамках школьного курса физики изучаются магнитные поля лишь бесконечно длинных прямолинейных и круговых токов, то достаточно запомнить, как направлены векторы индукции этих токов (см. рис. 14.5, 14.6). Определив направления векторов индукции всех токов, далее нужно найти их количественные значения в рассматриваемой точке поля по известным формулам (14.3) или (14.4) – (14.5) и вычислить индукцию магнитного поля, созданного всеми токами, воспользовавшись принципом суперпозиции (14.1).

Большую часть задач по магнетизму составляют задачи, связанные с определением силового действия магнитного поля на движущиеся заряды и токи.

При решении задач на движение заряженных частиц в магнитных полях нужно помнить, что:

- если вектор скорости частицы не параллелен вектору индукции магнитного поля, то частица будет двигаться вокруг силовой линии;
- если скорость частицы перпендикулярна линиям индукции, то ее траекторией будет окружность постоянного радиуса;
- если скорость частицы направлена под некоторым углом к линиям индукции, то ее траекторией будет цилиндрическая спираль;
- независимо от направления скорости частицы и направления магнитного поля сила Лоренца не меняет величину скорости частицы.

При решении таких задач можно придерживаться следующей последовательности:

1) сделать чертеж, на котором изобразить силовые линии магнитного поля и вектор начальной скорости частицы;

2) если начальная скорость частицы направлена под углом к линиям индукции магнитного поля, то ее следует разложить на две составляющие, одна из которых \vec{v}_\perp должна быть направлена перпендикулярно векторам индукции, а вторая \vec{v}_{\parallel} – параллельно им. Такое разложение позволяет представить достаточно сложное движение частицы в магнитном поле в виде наложения двух более простых: наличие составляющей \vec{v}_\perp проводит к движению по окружности постоянного радиуса, а наличие \vec{v}_{\parallel} – к прямолинейному движению вдоль силовых линий поля;

3) изобразить силы, действующие на частицу в произвольный момент движения. Для определения направления силы Лоренца следует воспользоваться правилом левой руки, которую нужно расположить так, чтобы силовые линии поля входили в ладонь, а пальцы были направлены по составляющей \vec{v}_\perp скорости частицы; если частица имеет положительный заряд, то отогнутый большой палец укажет направление силы Лоренца; если заряд отрицательный, то сила Лоренца будет направлена в противоположную сторону;

4) ввести сопровождающую систему отсчета, направив одну из осей системы координат по составляющей \vec{v}_\perp скорости частицы, вторую – по составляющей \vec{v}_{\parallel} , третью (обычно в такой оси нет необходимости) – перпендикулярно первым двум;

5) записать уравнение второго закона Ньютона в проекции на оси выбранной системы координат, дополнив их развернутыми выражениями для сил, действующих на частицу;

6) при необходимости записать уравнения кинематики и решить систему уравнений.

При решении задач, в которых рассматривается движение проводников с током в магнитном поле, можно воспользоваться рекомендациями, предложенными в §1-8, поскольку эти задачи ничем принципиально не отличаются от задач механики; единственное отличие, которое может быть, это наличие силы Ампера. При известных токах, текущих в проводниках (если же токи неизвестны, то для их определения следует воспользоваться законами постоянного тока), и индукции магнитного поля (если она неизвестна, то ее требуется предварительно рассчитать) величину силы Ампера можно найти по формуле (14.8), а ее направление – по правилу левой руки. Если в задаче рассматривается контур с током или его часть, то значение силы Ампера и ее направление следует найти для всех прямолинейных проводников. Следует помнить, что контур с током в магнитном поле силы Ампера будут растягивать или сжимать (но не то и другое одновременно), и если плоскость контура не перпендикулярна линиям индукции, то на контур будет действовать механический момент сил Ампера (14.13), разворачивающий контур так, чтобы расположить его в плоскости, перпендикулярной силовым линиям.

Самую сложную часть задач этого параграфа составляют задачи на закон электромагнитной индукции (включая и самоиндукцию). При их решении следует помнить, что:

– при движении проводника в магнитном поле ЭДС индукции обусловлена действием на носители тока силы Лоренца;

– при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром, ЭДС индукции обусловлена вихревым электрическим полем; ее появление не зависит от того, какая из величин, входящих в выражение (14.15) для потока Φ , изменилась (величина B индукции поля, площадь S контура, его ориентация в магнитном поле, две или все три из этих величин);

– независимо от причин возникновения ЭДС индукции ее величина может быть найдена по формуле (14.16);

– появление ЭДС индукции приводит к возникновению в контуре индукционного тока, направление которого определяется правилом Ленца; если магнитный поток увеличивается, то в контуре возникает индукционный ток такого направления, чтобы собственный магнитный поток ослабил внешний, т.е. магнитное поле индукционного тока должно быть направлено противоположно внешнему; если магнитный поток уменьшается, то индукционный ток будет направлен так, чтобы поддержать внешний, т.е. магнитное поле индукционного тока будет направлено по внешнему. При этом векторы индукции внешнего и собственного магнитных полей не обязательно будут параллельны;

– на элементы контура, в котором возникает индукционный ток, будет действовать сила Ампера. Поскольку направление индукционного тока определяется правилом Ленца, то и сила Ампера будет направлена так, чтобы противодействовать причине, вызывающей появление ЭДС индукции. Если магнитный поток возрастает, то сила Ампера будет направлена так, чтобы его уменьшить; так как сила Ампера не может изменить величину индукции внешнего поля, то она будет направлена так, чтобы уменьшить площадь, ограниченную контуром, т.е. сжать контур. И наоборот, при уменьшении магнитного потока сила Ампера будет направлена так, чтобы растянуть контур.

Если проводник движется в магнитном поле, то на электроны, находящиеся в проводнике, будет действовать сила Лоренца, и электроны будут перемещаться к одной из границ проводника: в результате у одной границы проводника окажется избыток электронов, а у другой – их недостаток. При этом между противоположными границами проводника возникнет электрическое поле и разность потенциалов, значения которых нужно определить, используя формулы электростатики. Другой способ решения таких задач основан на непосредственном применении закона электромагнитной индукции (14.16). В этом случае проводник следует дополнить проводящей рамкой до замкнутого контура, все части которого (кроме проводника) неподвижны. При этом контур должен иметь такую форму, чтобы места контакта с рамкой у проводника не менялись; если проводник движется поступательно, то рамка может иметь форму буквы П (см. рис. 14.21); если проводник вращается вокруг одного из концов, то рамка должна иметь форму части сектора (рис. 14.30). Переменный магнитный поток через поверхность S , ограниченную таким контуром, будет обусловлен изменением площади контура. Поэтому если магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости контура, то закон электромагнитной индукции (14.16) может быть записан в виде

$$\mathcal{E}_i = -B \frac{dS}{dt}.$$

Относительно просто решаются задачи, в которых причиной появления ЭДС индукции является вихревое электрическое поле, порождаемое изменяющимся со временем магнитным полем, а параметры контура (его площадь и ориентация в магнитном поле остаются

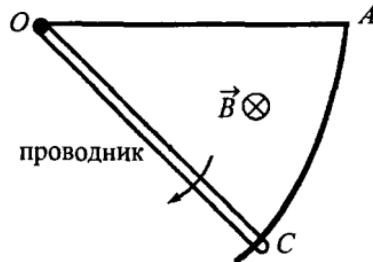


Рис. 14.30

неизменными). Для их решения достаточно правильно вычислить величину магнитного потока в произвольный момент времени и воспользоваться законом электромагнитной индукции (14.16).

Часто встречаются задачи, в которых нестационарный магнитный поток и ЭДС индукции возникают в контуре при изменении его площади за счет движения одной из сторон контура (одной из сторон контура является подвижный проводящий стержень). Обычно такие задачи требуют привлечения законов механики. Решая их, можно придерживаться следующей последовательности:

- 1) сделать чертеж, на котором изобразить силовые линии магнитного поля и контур;
- 2) проанализировав условие задачи, установить причины изменения магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром;
- 3) воспользовавшись правилом Ленца, определить направление индукционного тока в контуре, указав его на рисунке;
- 4) если в задаче идет речь о движении контура или его части, указать направления всех сил (в том числе и силы Ампера), действующих на интересующие нас элементы контура;
- 5) записать развернутые выражения для потока Φ магнитной индукции, ЭДС \mathcal{E}_i индукции, индукционного тока и силы Ампера. Если контур содержит только сопротивления, то величину индукционного тока нужно определить по закону Ома для замкнутой цепи, содержащей источник ЭДС, равный \mathcal{E}_i : $I = \mathcal{E}_i / R$. Если в контуре содержится конденсатор емкостью C , то силу тока нужно выразить через заряд q конденсатора: $I = dq/dt$, где $q = C \mathcal{E}_i$;
- 6) записать необходимые законы механики и решить систему уравнений относительно искомых величин.

При решении задач на самоиндукцию нужно помнить, что ЭДС \mathcal{E}_s самоиндукции возникает в контуре при изменении силы тока в нем и препятствует увеличению или уменьшению тока в цепи. Задачи на расчет ЭДС самоиндукции решаются или очень просто (по основным определениям), или очень сложно, причем эти сложности математические. Поскольку ЭДС самоиндукции существует лишь до тех пор, пока в контуре течет нестационарный ток, то любые уравнения, связанные с \mathcal{E}_s (например, ток в цепи, напряжения на участках цепи, количество выделившегося на них тепла и т. п.), будут содержать зависимости от времени. Решение таких задач чаще всего требует навыков интегрирования.

К задачам на самоиндукцию можно также отнести задачи на электрические колебания. Колебания даже в самом простом контуре – контуре Томсона – описываются дифференциальными уравнениями. Поэтому в рамках школьного курса физики используются их готовые решения: период колебаний определяется формулой (14.28), заряд на конденсаторе и ток в катушке изменяются по законам (14.29), максимальное значение заряда на обкладках конденсатора и начальную фазу колебаний можно найти по формулам (14.30). Обычно этих формул достаточно, чтобы решить любую задачу на свободные незатухающие электрические колебания. В некоторых случаях необходимо также использовать закон сохранения энергии.

Задачи на определение частоты или длины волны, на которую настроен колебательный контур, решаются непосредственным применением формул (14.31) и (14.32).

Наконец, особую часть составляют задачи на цепи переменного тока, изменяющегося по закону синуса (14.33). В силу математических сложностей здесь также рассматривается очень узкий класс задач, в которых электрические цепи содержат не более чем активное сопротивление, конденсатор и катушку, соединенные последовательно с генератором. При расчете таких цепей следует помнить, что:

- напряжение на концах активного сопротивления изменяется по такому же закону, что и ток в цепи, причем сдвиг фаз между током и напряжением равен нулю;

— напряжение на конденсаторе меняется по такому же закону, что и ток в цепи, но отстает по фазе от тока на $\frac{1}{2}\pi$; реактивное сопротивление $X_C = 1/\omega C$ конденсатора уменьшается с ростом частоты тока;

— напряжение на катушке меняется по такому же закону, что и ток в цепи, но опережает ток по фазе на $\frac{1}{2}\pi$; реактивное сопротивление $X_L = \omega L$ катушки увеличивается с ростом частоты тока;

— амплитудное значение U_0 напряжения на концах цепи определяется из векторной диаграммы (см. рис. 14.29) или по формуле (14.40); активная составляющая напряжения U_a совпадает по фазе с током в цепи, а реактивная U_p — смещена относительно тока на угол $\pm\frac{1}{2}\pi$;

— напряжение U на концах участка цепи меняется по такому же закону, что и ток в цепи, но существует сдвиг фаз ϕ между током и напряжением; если цепь переменного тока содержит лишь активное сопротивление, то сдвиг фаз равен нулю;

— полное сопротивление Z цепи для переменного тока не определяется простым арифметическим сложением активного и реактивных сопротивлений: его значение может быть найдено по формуле (14.41); полное сопротивление цепи минимально и равно активному сопротивлению, если частота тока такова, что выполняется условие $\omega L = 1/\omega C$, т.е. $X_L = X_C$;

— полная работа (средняя мощность) реактивной составляющей напряжения за период равна нулю;

— полная работа (средняя мощность) переменного тока за период равна работе (средней мощности) активной составляющей напряжения и определяется формулой (14.45) (или (14.47));

— действующее значение синусоидального тока численно равно значению такого постоянного тока, при котором за время, равное периоду синусоидального тока, во внешней цепи выделяется такое же количество теплоты.

Задачи

Магнитное поле тока

14.1. Два бесконечно длинных прямых проводника скрещены под прямым углом (рис. 14.31). По проводникам текут токи $I_1 = 80$ А и $I_2 = 60$ А. Расстояние между проводниками $d = 10$ см. Чему равна магнитная индукция в точке A , одинаково удаленной от обоих проводников?

• *Решение.* Прямолинейный бесконечно длинный проводник с током I создает на расстоянии r от своей оси магнитное поле индукцией

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r},$$

направление которого можно определить по правилу буравчика (правого винта).

Проводники, рассматриваемые в задаче, находятся на равных расстояниях от точки A , поэтому индукции, создаваемые токами I_1 и I_2 , будут равны

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi \frac{1}{2}d} = \frac{\mu_0 I_1}{\pi d}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{\pi d}$$

соответственно.

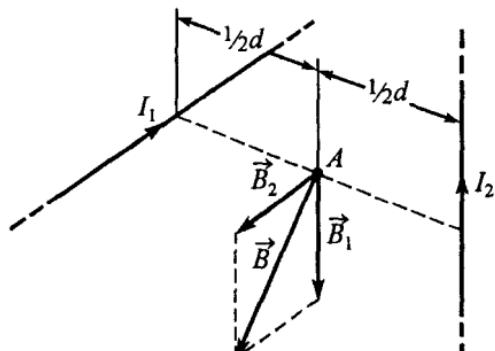


Рис. 14.31

Вектор индукции \vec{B}_1 тока I_1 в точке A будет направлен параллельно проводнику с током I_2 вертикально вниз, а вектор индукции \vec{B}_2 тока I_2 – параллельно проводнику с током I_1 на нас. Индукция магнитного поля в точке A будет равна их векторной сумме:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Поскольку векторы \vec{B}_1 и \vec{B}_2 составляют между собой прямой угол, то

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

• Ответ: $B = \frac{\mu_0}{\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$

14.2. Расстояние между двумя длинными параллельными проводниками равно $d = 5 \text{ см}$. По проводникам в одном направлении текут токи силой $I = 30 \text{ А}$ каждый. Найти величину индукции магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 4 \text{ см}$ от одного и $r_2 = 3 \text{ см}$ от другого проводника.

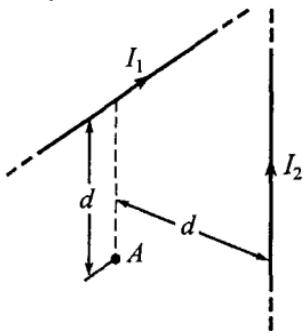


Рис. 14.32

14.4. Найти величину индукции магнитного поля в центре петли радиусом $R = 10 \text{ см}$, образованной бесконечно длинным тонким проводником с током $I = 50 \text{ А}$ (рис. 14.33).

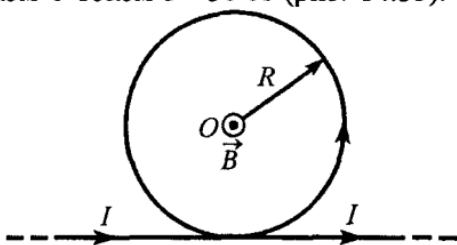


Рис. 14.33

• Решение. Вектор индукции магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного тока на расстоянии R от него по величине равен

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R}$$

и направлен в центре (точке O) петли перпендикулярно ее плоскости на нас.

Вектор индукции \vec{B}_2 магнитного поля кругового тока в центре петли по направлению совпадает с \vec{B}_1 и по величине равен

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2 R}.$$

Следовательно, индукция поля, создаваемого проводником и круговым витком в рассматриваемой точке,

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2; \quad B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R} + \frac{\mu_0 I}{2 R} = \frac{\mu_0 I(1 + \pi)}{2 \pi R} \approx 414 \text{ мкТл.}$$

• Ответ: $B = \frac{\mu_0 I(1 + \pi)}{2 \pi R} \approx 414 \text{ мкТл.}$

14.5. Два круговых проводника одинакового радиуса с общим центром O расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 14.34). Индукция магнитного поля в точке O равна $B_0 = 0,2 \text{ мТл}$. Индукция магнитного поля первого проводника с током $I_1 = 8 \text{ А}$ в этой же точке $B_1 = 1,6 \text{ мТл}$. Определить индукцию B_2 магнитного поля второго проводника в точке O и силу тока I_2 в нем.

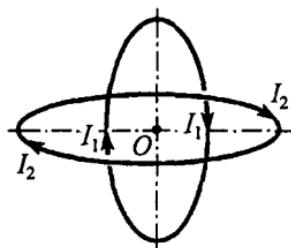


Рис. 14.34

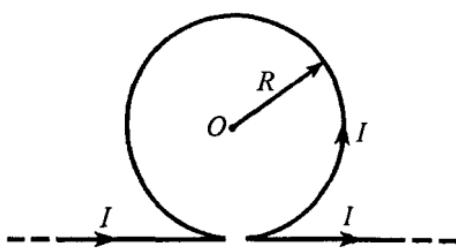


Рис. 14.35

14.6. Найти величину индукции магнитного поля в центре петли радиусом $R = 10$ см, образованной бесконечно длинным тонким проводником с током $I = 50$ А (рис. 14.35).

14.7. Найти величину индукции магнитного поля в точке O , если бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 20$ А изогнут так, как показано на рис. 14.36. Радиус изгиба закругленной части $R = 50$ см.

• *Решение.* Для определения индукции магнитного поля тока I в точке O разобьем проводник на три участка, как показано на рис. 14.36, а индукцию \vec{B} результирующего поля найдем на основании принципа суперпозиции.

Рассмотрим полубесконечный участок 1–2 проводника.

Бесконечно длинный прямолинейный проводник с током I , расположенный на месте участка 1–2, на расстоянии R создавал бы магнитное поле с индукцией

$$B_{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R},$$

направленное перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Поскольку бесконечный проводник с током можно представить как два полубесконечных, каждый из которых вносит одинаковый вклад в индукцию B_{∞} поля, то участок 1–2 проводника в точке O создаст магнитное поле с индукцией

$$B_{1-2} = \frac{1}{2} B_{\infty} = \frac{\mu_0 I}{4 \pi R}.$$

Участок 2–3 проводника представляет собой дугу окружности длиной, равной $3/4$ длины окружности радиуса R . Каждый участок тока этой дуги в точке O создает магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Поэтому индукция магнитного поля дуги 2–3 проводника будет равна

$$B_{2-3} = \frac{3}{4} B_{\text{кр}},$$

где $B_{\text{кр}} = \frac{\mu_0 I}{2 R}$ – индукция кругового тока в точке O . Следовательно,

$$B_{2-3} = \frac{3 \mu_0 I}{8 R}.$$

Индукция магнитного поля участка 3–4 проводника в точке O равна нулю. Действительно, радиус-вектор, проведенный от любого элемента этого участка в точку O , составляет с направлением тока угол $\alpha = 180^\circ$. По закону Бю – Савара – Лапласа такой элемент тока в рассматриваемой точке магнитного поля не создает (поскольку $\sin \alpha = 0$). Поэтому индукция магнитного поля всего участка 3–4 проводника в точке O

$$B_{3-4} = 0.$$

Следовательно, индукция поля, создаваемого проводником в рассматриваемой точке,

$$\vec{B} = \vec{B}_{1-2} + \vec{B}_{2-3}; \quad B = B_{1-2} + B_{2-3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{3\mu_0 I}{8R} = \frac{\mu_0 I(2+3\pi)}{8\pi R} \approx 22,8 \text{ мкТл.}$$

• Ответ: $B = \frac{\mu_0 I(2+3\pi)}{8\pi R} \approx 22,8 \text{ мкТл.}$

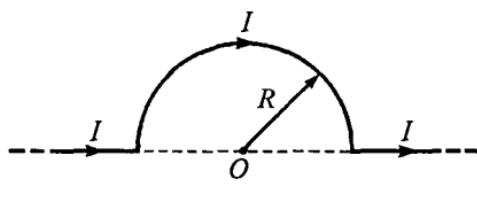


Рис. 14.37

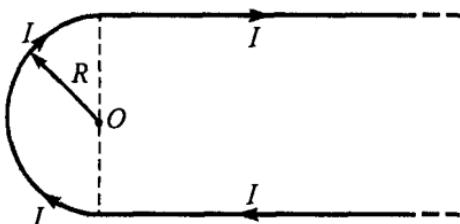


Рис. 14.38

14.8. Решить задачу №14.7, если бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 20 \text{ А}$ изогнут так, как показано на рис. 14.37. Радиус изгиба закругленной части $R = 20 \text{ см}$.

14.9. Решить задачу №14.7, если бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 50 \text{ А}$ изогнут так, как показано на рис. 14.38. Радиус изгиба закругленной части $R = 50 \text{ см}$.

14.10. Найти индукцию магнитного поля внутри длинного соленоида при силе тока в нем $I = 8 \text{ А}$, если на $l = 40 \text{ см}$ его длины намотано $N = 400$ витков проволоки. Во сколько раз изменится индукция магнитного поля, если внутрь соленоида поместить железный сердечник, магнитная проницаемость которого $\mu = 2000$?

Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле

14.11. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 100 \text{ мкТл}$ по винтовой линии движется электрон. Определить скорость электрона, если радиус винтовой линии $R = 5 \text{ см}$, а шаг $h = 20 \text{ см}$. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

• *Решение.* При движении заряженной частицы в магнитном поле на нее действует сила Лоренца, направленная в любой момент перпендикулярно вектору скорости частицы. При этом сила Лоренца не совершает работы над частицей и не меняет ее кинетическую энергию. Поэтому скорость частицы будет оставаться неизменной в течение всего времени движения в магнитном поле.

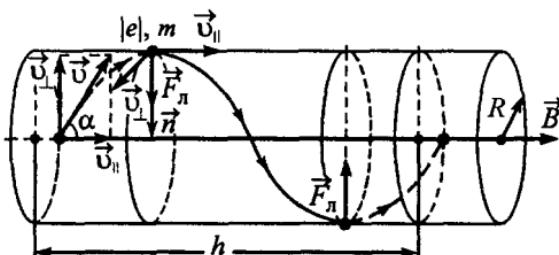


Рис. 14.39

Известно, что при движении заряженной частицы в магнитном поле по винтовой линии ее скорость \vec{v} направлена под некоторым углом $\alpha \neq 0$ к линиям индукции поля (рис. 14.39). Разложим вектор скорости \vec{v} электрона на две составляющие, одна из которых $v_\perp = v \sin \alpha$ направлена перпендикулярно силовым линиям поля, а другая $v_\parallel = v \cos \alpha$ – параллельна им. На электрона в магнитном поле действует сила Лоренца

$$F_{\perp} = |e| v_{\perp} B,$$

обусловленная составляющей v_{\perp} . Под действием этой силы частица будет двигаться по некоторой окружности радиусом R .

Наличие составляющей v_{\parallel} скорости приведет к тому, что частица будет двигаться равномерно вдоль силовых линий поля. В результате наложения этих двух движений траектория электрона будет представлять собой цилиндрическую спираль.

Из уравнения движения электрона, записанного в проекции на нормаль \vec{l} к траектории,

$$\frac{m v_{\perp}^2}{R} = |e| v_{\perp} B$$

найдем радиус спирали:

$$R = \frac{m v_{\perp}}{|e| B} = \frac{m v \sin \alpha}{|e| B}. \quad (1)$$

Шаг h спирали – это расстояние, на которое сместится электрон вдоль силовой линии поля за время T одного оборота. Поскольку $v_{\parallel} = \text{const}$, то

$$h = v_{\parallel} T = v_{\parallel} \frac{2 \pi R}{v_{\perp}} = \frac{2 \pi m v \cos \alpha}{|e| B}. \quad (2)$$

Выразив $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ из (1) и (2)

$$\sin \alpha = \frac{R |e| B}{m v}, \quad \cos \alpha = \frac{h |e| B}{2 \pi m v},$$

получим

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{R^2 |e|^2 B^2}{m^2 v^2} + \frac{h^2 |e|^2 B^2}{4 \pi^2 m^2 v^2}; \quad v = \frac{|e| B}{m} \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4 \pi^2}} \approx 1,04 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $v = \frac{|e| B}{m} \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4 \pi^2}} \approx 1,04 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$

14.12. Электрон влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B = 10^{-6}$ Тл перпендикулярно к силовым линиям. Определить частоту обращения электрона. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

14.13. Электрон проходит ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi = 1$ кВ и влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл под углом $\alpha = 30^\circ$ к силовым линиям. Определить радиус спирали, по которой будет двигаться электрон. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

14.14. Протон влетает в однородные электрическое и магнитное поля, силовые линии которых параллельны друг другу. Начальная скорость протона перпендикулярна этим полям. Во сколько раз шаг второго витка траектории протона больше шага первого витка?

14.15. Электрон влетает в область магнитного поля шириной l . Скорость электрона \vec{v} перпендикулярна как вектору индукции поля \vec{B} , так и границам области (рис. 14.40). Под каким углом к границе области электрон вылетит из магнитного поля? Масса электрона m , его заряд $|e|$.

• Решение. Поскольку скорость электрона перпендикулярна силовым линиям, то в области магнитного поля на него будет действовать сила Лоренца

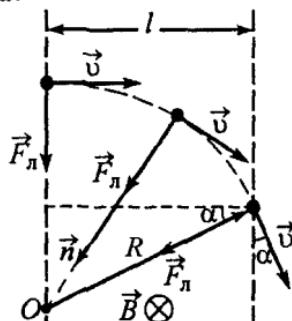


Рис. 14.40

$$F_L = |e| \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

и электрон будет двигаться по дуге окружности некоторого радиуса R с центром в точке O . Учитывая, что сила Лоренца в любой момент направлена по радиусу окружности, запишем уравнение движения электрона в проекции на нормаль \vec{n} к траектории:

$$\frac{m v^2}{R} = |e| v B.$$

Отсюда получим

$$R = \frac{mv}{|e|B}.$$

Из равенства углов, обозначенных на рисунке α , находим

$$\cos \alpha = \frac{l}{R}, \quad \text{или} \quad \cos \alpha = \frac{|e|B l}{m v}.$$

Следовательно, если электрон пролетит сквозь область, занятую магнитным полем, то он вылетит под углом

$$\alpha = \arccos \frac{|e|B l}{m v}$$

к ее границам.

Легко понять, что при небольших скоростях, сильных магнитных полях или достаточно протяженной области, занятой полем, электрон не сможет пролететь сквозь поле: в какой-то точке поля он развернется и вылетит из области под углом $\alpha = 90^\circ$ с той же стороны, с которой алеет.

Соотношение между величинами \vec{v} , \vec{B} и l при котором электрон пролетит сквозь область, занятую полем, можно найти из условия ограниченности функции $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{|e|B l}{m v} \leq 1; \quad v \geq \frac{|e|B l}{m}.$$

Следовательно, электрон покинет область поля под углом

$$\alpha = \arccos \frac{|e|B l}{m v} \quad \text{при } v \geq \frac{|e|B l}{m} \quad \text{или} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{при } v < \frac{|e|B l}{m}.$$

• Ответ: $\alpha = \arccos \frac{|e|B l}{m v}$, если $v \geq \frac{|e|B l}{m}$; $\alpha = 90^\circ$, если $v < \frac{|e|B l}{m}$.

14.16. Для определения отношения величины заряда $|e|$ электрона к его массе m пучок электронов разгоняют между катодом и анодом электронно-лучевой трубки. При вылете из трубы электроны попадают в область однородного магнитного поля с индукцией $B = 5 \cdot 10^{-4}$ Тл, силовые линии которого перпендикулярны скорости пучка. При этом светлое пятно на экране, находящемся за анодом, смещается на $\Delta l = 7,5$ мм (относительно положения, когда магнитное поле отсутствует). Определить отношение $|e|/m$, если напряжение между анодом и катодом трубы равно $U = 10$ кВ, а расстояние между анодом и экраном $l = 10$ см. Силу тяжести не учитывать.

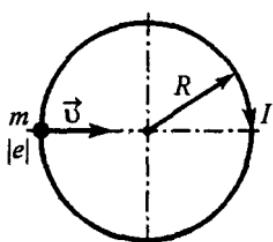


Рис. 14.41

14.17. Электрон со скоростью \vec{v} влетает в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} , создаваемое длинным соленоидом радиусом R , перпендикулярно оси соленоида (рис. 14.41). Какой угол с первоначальным направлением будет составлять скорость электрона после прохождения соленоида? Масса электрона m , его заряд $|e|$.

14.18. Небольшой шарик массой $m = 10$ г и зарядом $q = 10^{-6}$ Кл вращается в горизонтальной плоскости на невесомой диэлектрической нити длиной $l = 50$ см. В пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, силовые линии которого направлены вдоль силы тяжести вниз (рис. 14.42). При движении нить образует с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Найти период обращения шарика.

• **Решение.** При движении заряженного тела в магнитном поле на него будет действовать сила Лоренца. В зависимости от того, в какую сторону вращается шарик, сила Лоренца будет направлена или к центру окружности, описываемой шариком, или в противоположную сторону. Пусть в положении, показанном на рисунке, скорость шарика направлена на нас; тогда сила Лоренца будет направлена по радиусу окружности от ее центра.

Запишем уравнения движения шарика в проекции на нормаль \vec{n} к траектории и ось OZ , перпендикулярную плоскости движения:

$$\frac{m v^2}{R} = N \sin \alpha - q v B; \quad 0 = N \cos \alpha - m g,$$

где учтено, что $F_n = q v B$.

Отсюда находим

$$N = \frac{m g}{\cos \alpha}; \quad \frac{m v^2}{R} + q v B - m g \tan \alpha = 0,$$

или

$$v = \frac{-q B + \sqrt{q^2 B^2 + 4 m^2 g \tan \alpha / R}}{2 m / R}.$$

Следовательно, период обращения шарика по окружности радиусом $R = l \sin \alpha$

$$T = \frac{2 \pi R}{v} = \frac{4 \pi m}{\sqrt{q^2 B^2 + 4 m^2 g \tan \alpha / R} - q B} = \frac{4 \pi m}{\sqrt{q^2 B^2 + 4 m^2 g / l \cos \alpha} - q B} \approx 1,32 \text{ с.}$$

Если шарик вращается в другую сторону, то сила Лоренца будет направлена к центру окружности. Легко понять, что в этом случае

$$v = \frac{q B + \sqrt{q^2 B^2 + 4 m^2 g \tan \alpha / R}}{2 m / R}; \quad T = \frac{4 \pi m}{\sqrt{q^2 B^2 + 4 m^2 g / l \cos \alpha} + q B} \approx 1,31 \text{ с.}$$

• Ответ: $T = \frac{4 \pi m}{\sqrt{q^2 B^2 + 4 m^2 g / l \cos \alpha} \pm q B}$; $T \approx 1,32$ с или $T \approx 1,31$ с.

14.19. Небольшой шарик массой $m = 20$ г и зарядом $q = 10^{-6}$ Кл подвешен на невесомой диэлектрической нити длиной $l = 50$ см и помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, силовые линии которого перпендикулярны силе тяжести (рис. 14.43). Шарик отклонили от положения равновесия в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{B} , до высоты $h = 10$ см, и отпустили без начальной скорости. Найти напряжение нити при движении шарика, когда он проходит положение равновесия.

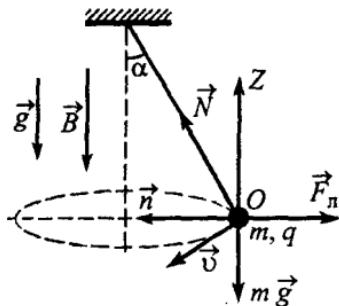


Рис. 14.42

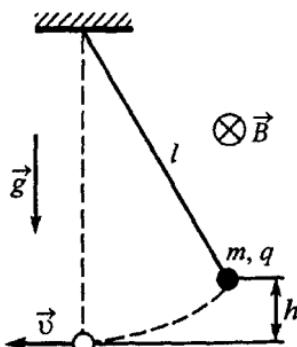


Рис. 14.43

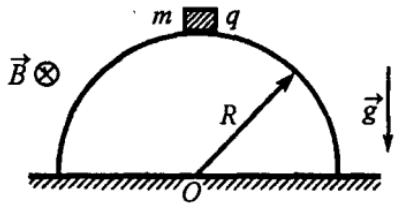


Рис. 14.44

14.20. Небольшое тело массой $m = 50 \text{ г}$ и зарядом $q = 10^7 \text{ Кл}$ начинает скользить без начальной скорости с вершины гладкой полусферы радиусом $R = 50 \text{ см}$ (рис. 14.44). На какой высоте над центром полусферы тело оторвется от ее поверхности, если в пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$? Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости, в которой происходит движение тела.

Сила Ампера. Проводник с током в магнитном поле

14.21. Металлический стержень массой $m = 0,5 \text{ кг}$ и длиной $l = 1 \text{ м}$ скользит по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. В пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Определить ускорение этого стержня, если по нему пропустить ток силой $I = 5 \text{ А}$ в направлении, показанном на рис. 14.52, а. Коэффициент трения между стержнем и поверхностью наклонной плоскости $\mu = 0,2$.

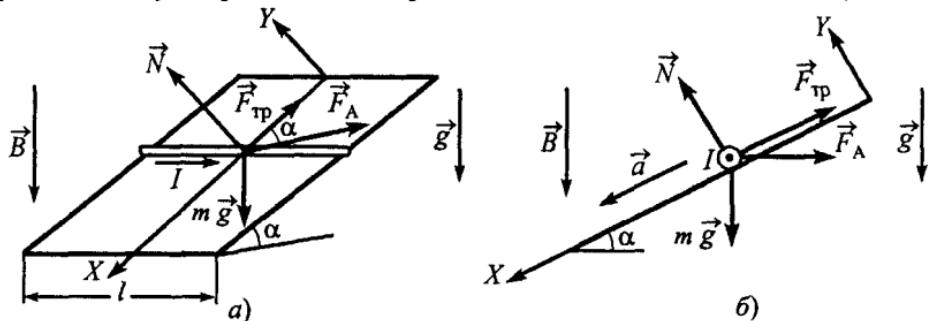


Рис. 14.45

• **Решение.** При движении стержня с током в магнитном поле на него будут действовать: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции \vec{N} и трение $\vec{F}_{\text{тр}}$ между стержнем и поверхностью наклонной плоскости и сила Ампера \vec{F}_A . Направление силы Ампера определяется правилом левой руки: расположим левую руку так, чтобы силовые линии магнитного поля входили в ладонь, а пальцы были направлены по току. Тогда отогнутый большой палец будет направлен горизонтально и укажет направление силы Ампера (рис. 14.45, а, б).

Из уравнения движения стержня, записанного в проекциях на оси системы координат,

$$OX: m a = m g \sin \alpha - F_{\text{тр}} - F_A \cos \alpha,$$

$$OY: 0 = N - m g \cos \alpha - F_A \sin \alpha,$$

с учетом, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, получим

$$N = m g \cos \alpha + F_A \sin \alpha, \quad F_{\text{тр}} = \mu (m g \cos \alpha + F_A \sin \alpha);$$

$$m a = m g \sin \alpha - \mu (m g \cos \alpha + F_A \sin \alpha) - F_A \cos \alpha.$$

Поскольку сила Ампера в нашем случае равна

$$F_A = I B l,$$

то

$$m a = m g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha - \mu I B l \sin \alpha - I B l \cos \alpha;$$

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{IBI}{m} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha) \approx 2,2 \text{ м/с}^2.$$

- Ответ: $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{IBI}{m} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha) \approx 2,2 \text{ м/с}^2$.

14.22. На наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, находится проводящий стержень массой $m = 0,5$ кг и длиной $l = 30$ см. В пространстве создано однородное магнитное поле. Какова должна быть минимальная величина индукции этого поля, чтобы стержень двигался вверх по наклонной плоскости с ускорением $a = 0,1 \text{ м/с}^2$, если по нему пропустить ток силой $I = 50 \text{ А}$? Коеффициент трения $\mu = 0,2$. Стержень расположен в горизонтальной плоскости.

14.23. На двух легких проводящих нитях горизонтально висит металлический стержень длиной $l = 0,25 \text{ м}$ и массой $m = 0,015 \text{ кг}$. Стержень находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,3 \text{ Тл}$, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Определить угол отклонения нитей, если по стержню пропустить ток силой $I = 0,2 \text{ А}$.

14.24. Проводник длиной $l = 24 \text{ см}$ и сопротивлением $R = 36 \text{ Ом}$ согнут в форме квадрата и помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$, перпендикулярное плоскости квадрата. Какая сила будет действовать на проводник, если на соседние вершины образованной фигуры подать напряжение $U = 5,4 \text{ В}$?

- Решение. Точки a и b , на которые подано напряжение U , разделят проводник на две части с сопротивлениями

$$R_{a-b} = \frac{1}{4} R \quad \text{и} \quad R_{a-c-d-b} = \frac{3}{4} R,$$

по которым будут течь токи

$$I_1 = \frac{U}{R_{a-b}} = \frac{4 U}{R} \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{U}{R_{a-c-d-b}} = \frac{4 U}{3 R}.$$

Поскольку стороны квадрата представляют собой проводники с током в магнитном поле, то на каждую из них будут действовать силы Ампера, направленные так, как показано на рис. 14.46, и равные

$$F_1 = \frac{1}{4} I_1 B; \quad F_2 = \frac{1}{4} I_2 B; \quad F_3 = \frac{1}{4} I_2 B; \quad F_4 = \frac{1}{4} I_2 B.$$

Так как силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 направлены в одну сторону, а силы \vec{F}_3 и \vec{F}_4 равны по величине и противоположны по направлению, то результирующая сила, действующая на проводник,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

по величине будет равна

$$F = F_1 + F_2,$$

или

$$F = \frac{1}{4} I B (I_1 + I_2) = \frac{1}{4} I B \left\{ \frac{4 U}{R} + \frac{4 U}{3 R} \right\} = \frac{4 U I B}{3 R} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

- Ответ: $F = \frac{4 U I B}{3 R} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$

14.25. Решить задачу №14.24, если проводник согнут в форме равностороннего треугольника.

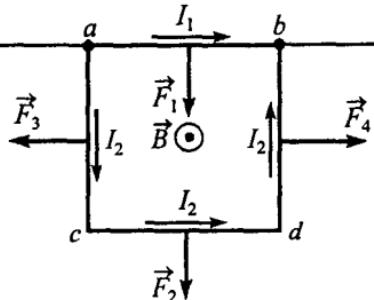


Рис. 14.46

14.26. Решить задачу №14.24, если проводник согнут в форме правильного шестиугольника.

Контур с током в магнитном поле

14.27. Проводящее кольцо радиусом $R = 1,5$ м поместили в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца. По кольцу пропустили ток силой $I = 10$ А. При какой величине индукции магнитного поля кольцо разорвается, если проволока, из которой кольцо изготовлено, выдерживает максимальное натяжение $T_{\max} = 2,5$ Н? Магнитным полем тока в кольце пренебречь.

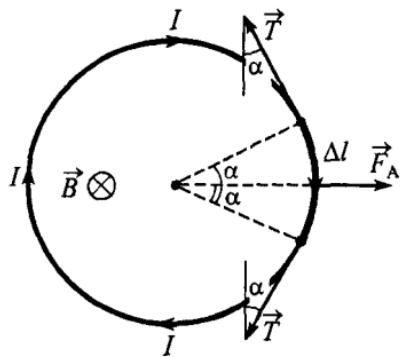


Рис. 14.47

- **Решение.** Рассмотрим настолько малый элемент кольца длиной Δl , чтобы его можно было считать прямолинейным. В магнитном поле с индукцией B , перпендикулярном плоскости кольца, на него будет действовать сила Ампера

$$F_A = IB \Delta l,$$

которая будет растягивать кольцо или сжимать его. Для того чтобы кольцо разорвалось, ток в кольце и магнитное поле должны быть направлены так, как показано на рис. 14.47.

Кроме силы F_A на элемент Δl кольца со стороны соседних участков будут действовать силы натяжения \vec{T} . Очевидно, что при этом выполняется равенство

$$F_A = 2T \sin \alpha, \quad \text{или} \quad IB \Delta l = 2T \sin \alpha.$$

Поскольку длина Δl элемента кольца

$$\Delta l = \frac{l}{2\pi} 2\alpha = \frac{2\pi R \alpha}{\pi} = 2\alpha R,$$

а угол α мал (можно положить, что $\sin \alpha \approx \alpha$), то

$$IB 2\alpha R = 2T \alpha.$$

Следовательно, если индукция магнитного поля

$$B \geq T_{\max}/IR \approx 0,167 \text{ Тл},$$

то кольцо разорвется.

- **Ответ:** $B \geq T_{\max}/IR \approx 0,167 \text{ Тл}$.

14.28. По проводящему кольцу радиусом $R = 50$ см течет ток силой $I = 10$ А. Кольцо поместили в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, перпендикулярное плоскости кольца. Определить величину силы, действующей на кольцо. Магнитным полем тока в кольце пренебречь.

14.29. Проволочный виток радиусом $R = 5$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Плоскость витка составляет угол $\beta = 60^\circ$ с направлением поля. Определить магнитный момент витка и механический момент, действующий на виток, если по нему течет ток силой $I = 5$ А.

- **Решение.** На виток с током, расположенный в магнитном поле так, что его плоскость не перпендикулярна направлению силовых линий поля, относительно произвольной неподвиж-

ной оси OZ будет действовать механический момент M_z , который стремится повернуть виток так, чтобы магнитный момент \vec{p}_m витка был направлен по полю. Величина магнитного момента произвольного плоского контура с током зависит лишь от силы тока и площади, ограниченной контуром. Следовательно, для витка радиусом R , по которому течет ток I ,

$$p_m = IS = I\pi R^2 \approx 0,04 \text{ A}\cdot\text{м}^2.$$

Величина механического момента, действующего на виток в магнитном поле относительно произвольной оси, зависит от магнитного момента, величины индукции магнитного поля и ориентации контура в магнитном поле:

$$M_z = p_m B \sin \alpha,$$

где α – угол, который составляет нормаль к плоскости контура с направлением поля. В нашем случае $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \beta$. Следовательно,

$$M_z = I\pi R^2 B \sin(\frac{1}{2}\pi - \beta) = I\pi R^2 B \cos \beta \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

- Ответ: $p_m = I\pi R^2 \approx 0,04 \text{ A}\cdot\text{м}^2$; $M_z = I\pi R^2 B \cos \beta \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$.

14.30. По проволочному витку радиусом $R = 50$ см течет ток силой $I = 50$ А. Определить магнитный момент витка.

14.31. Катушка радиусом $R = 10$ см, содержащая $N = 200$ витков провода, находится в магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл. Определить магнитный момент катушки и максимальный механический момент, действующий на катушку относительно произвольной оси, если в ней течет ток силой $I = 1$ А.

Электромагнитная индукция

14.32. Прямолинейный металлический стержень длиной $l = 1$ м движется с постоянной скоростью $v = 2$ м/с в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл так, что его ось перпендикулярна силовым линиям. Определить разность потенциалов, возникающую между концами стержня.

- Решение. Появление сторонних сил внутри проводящего стержня и возникновение разности потенциалов на его концах в данном случае обусловлено действием силы Лоренца на свободные электроны, находящиеся в проводнике, движущемся в магнитном поле.

Рассмотрим произвольный электрон, находящийся внутри стержня (рис. 14.48). Известно, что на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца \vec{F}_L . Поскольку скорость электрона равна скорости проводника, то сила

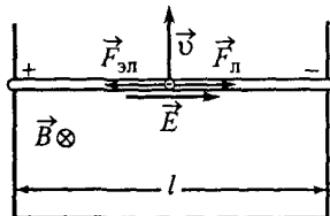


Рис. 14.48

$$F_L = |e| v B,$$

и направлена вдоль стержня. Под действием этой силы электроны будут перемещаться вдоль стержня к одному из его концов. В результате между концами проводника возникнет некоторая разность потенциалов и электрическое поле напряженностью E , которое будет расти до тех пор, пока силы электрического поля

$$F_{\text{Эл}} = |e| E$$

не уравновесят силу Лоренца во всех точках стержня:

$$F_L = F_{\text{Эл}}; \quad v B = E.$$

При этом на одном конце стержня окажется избыток электронов, а на другом – их недостаток и возникнет постоянная разность потенциалов $\Delta\phi$. Поскольку электрическое поле в любой точке стержня постоянно, то (см. §12, формула (12.20))

$$\Delta\phi = E l = \upsilon B l = 0,2 \text{ В.}$$

Рассмотрим второй способ решения задачи.

Дополним стержень П-образным проводником до замкнутого контура (рис. 14.48). При движении стержня с постоянной скоростью υ площадь S , охватываемая контуром, будет меняться со временем по закону

$$S = l \upsilon t.$$

Принимая нестационарный магнитный поток

$$\Phi = B S = B l \upsilon t,$$

пронизывающий поверхность, натянутую на контур, и в контуре возникнет ЭДС электромагнитной индукции

$$|\mathcal{E}_l| = \frac{d\Phi}{dt} = B l \upsilon,$$

равная искомой разности потенциалов.

- Ответ: $\Delta\phi = \upsilon B l = 0,2 \text{ В.}$

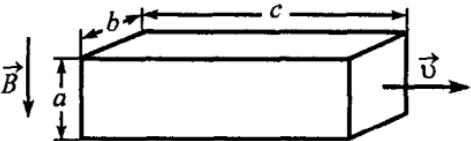


Рис. 14.49

14.33. Металлический брусков размерами $a \times b \times c$ движется горизонтально со скоростью $\upsilon = 20 \text{ м/с}$ в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$ (рис. 14.49). Определить поверхностные плотности зарядов на

всех поверхностях бруска. Распределение зарядов по поверхностям бруска считать равномерным.

14.34. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$ вокруг одного из своих концов вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ рад/с}$ стержень длиной $l = 50 \text{ см}$. Найти разность потенциалов между концами стержня. Магнитные силовые линии перпендикулярны плоскости вращения.

14.35. Металлический стержень массой $m = 100 \text{ г}$ и длиной $l = 1 \text{ м}$ расположен горизонтально и подведен за середину к пружине жесткостью $k = 1 \text{ Н/м}$. Стержень совершает в вертикальной плоскости гармонические колебания с амплитудой $A = 0,1 \text{ м}$. Определить максимальную разность потенциалов, возникающую между концами стержня, если в окружающем пространстве создать однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2} \text{ Тл}$, силовые линии которого направлены перпендикулярно плоскости колебаний.

14.36. Замкнутая квадратная рамка из гибкой проволоки расположена в магнитном поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$, силовые линии которого направлены перпендикулярно к плоскости рамки. Какой заряд протечет в рамке, если, не меняя плоскости расположения, придать ей форму окружности? Длина проволоки $l = 1 \text{ м}$, ее сопротивление $R = 100 \text{ Ом}$.

• Решение. Рассмотрим более общую задачу: определить, какой заряд протечет в контуре сопротивлением R , если по каким-либо причинам изменился магнитный поток, пронизывающий площадь, ограниченную контуром.

При наличии нестационарного магнитного потока в контуре возникнет ЭДС электромагнитной индукции

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Появление ЭДС приведет к возникновению в контуре тока силой

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

С другой стороны, сила тока по определению равна

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Следовательно,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}; \quad dq = \frac{1}{R} d\Phi.$$

Если изменение потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную контуром, на величину $d\Phi$ приведет к тому, что в контуре протечет заряд dq , то, очевидно, при изменении потока на $\Delta\Phi$ в контуре протечет заряд

$$\Delta q = \frac{1}{R} \Delta\Phi,$$

причем его величина не зависит от причин изменения потока.

Вернемся к нашей задаче.

Поток вектора магнитной индукции через поверхность, ограниченную контуром, зависит от величины магнитной индукции, площади, охватываемой контуром, и ориентации плоскости контура относительно направления силовых линий магнитного поля. По условию задачи магнитное поле и плоскость, в которой расположен контур, не менялись, а изменилась площадь, им ограниченная. Действительно, если рамка имела первоначально форму квадрата площадью

$$S_1 = \left(\frac{1}{4} l \right)^2 = \frac{1}{16} l^2,$$

то после преобразования рамки в окружность радиусом R ($l = 2\pi R$) площадь круга стала равной

$$S_2 = \pi R^2 = l^2 / 4\pi.$$

Поскольку $S_1 \neq S_2$, то поток вектора магнитной индукции через поверхность, ограниченную рамкой, изменился на величину

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = B S_2 - B S_1 = B \frac{l^2}{4\pi} - B \frac{l^2}{16} = \frac{B l^2 (4 - \pi)}{16\pi}$$

и по контуру протек заряд

$$\Delta q = \frac{1}{R} \frac{B l^2 (4 - \pi)}{16\pi} \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$$

• Ответ: $\Delta q = \frac{1}{R} \frac{B l^2 (4 - \pi)}{16\pi} \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$

14.37. Проволочный контур в форме равностороннего треугольника со стороной $l = 1$ м расположен в магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл так, что силовые линии поля перпендикулярны плоскости контура. Определить изменение магнитного потока через контур, если не меняя плоскости расположения преобразовать его в квадрат.

14.38. Лежащее на столе металлическое кольцо перевернули. Радиус кольца $r = 10$ см, его сопротивление $R = 2$ Ом. Какой величины заряд протек при этом через кольцо, если вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл?

14.39. Из проволоки сопротивлением $R = 20$ Ом и длиной $l = 0,5$ м сделали кольцо и поместили в магнитное поле, индукция которого меня-

ется по закону $B = \alpha t$, где $\alpha = 10^{-4}$ Тл/с, t – время в секундах. Какая мощность выделяется в проволоке, если плоскость кольца перпендикулярна линиям индукции магнитного поля?

• Решение. Поскольку магнитное поле, в котором находится кольцо, нестационарно, то магнитный поток, пронизывающий поверхность площадью $S = 2\pi r^2$ ($l = 2\pi r$), ограниченную кольцом

$$\Phi = B S,$$

будет меняться со временем по закону

$$\Phi = \alpha t \frac{l^2}{4\pi}.$$

Это приведет к появлению в кольце ЭДС электромагнитной индукции

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\alpha l^2}{4\pi}$$

и тока

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{\alpha l^2}{4\pi R}.$$

При этом в кольце будет выделяться тепловая мощность

$$N = I^2 R = \frac{\alpha^2 l^4}{16\pi^2 R} \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ Вт.}$$

• Ответ: $N = \frac{\alpha^2 l^4}{16\pi^2 R} \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ Вт.}$

14.40. Замкнутая накоротко катушка диаметром $D = 10$ см, содержащая $n = 200$ витков, находится в однородном магнитном поле, индукция которого увеличивается от $B_1 = 2$ Тл до $B_2 = 6$ Тл в течение времени $\Delta t = 0,1$ с. Определить среднее значение ЭДС индукции в катушке, если плоскость витков перпендикулярна силовым линиям поля.

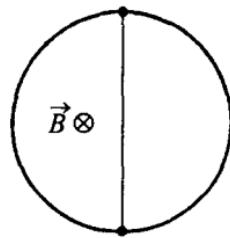


Рис. 14.50

14.41. Проволоку длиной $l = 1$ м согнули в виде кольца, затем замкнули по диаметру прямым проводником (рис. 14.50). Сопротивление проволоки $R = 200$ Ом. Перпендикулярно плоскости кольца создано магнитное поле, индукция которого зависит от времени по закону $B = \alpha t$, где $\alpha = 0,02$ Тл/с, t – время в секундах. Найти тепловую мощность, выделяющуюся в проволоке.

14.42. Длинный провод, расположенный в горизонтальной плоскости, согнут под углом $\alpha = 30^\circ$. В вершине угла расположен металлический стержень, перпендикулярный биссектрисе угла. Стержень может без трения скользить по проводу. Система помещена в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,05$ Тл. К стержню прикладывают горизонтальную силу $F = kx$, направленную вдоль биссектрисы угла, которая растет линейно с расстоянием x , отсчитываемым от вершины угла (рис. 14.51, вид сверху). Определить максимальную скорость стержня, если сопротивление единицы его длины равно $\rho = 0,2$ Ом/м, а коэффициент пропорциональности $k = 0,1$ Н/м. Сопротивлением провода пренебречь.

• **Решение.** Если к стержню приложить силу \vec{F} , то при его перемещении будет меняться площадь треугольника ACD , ограниченного проводом и стержнем, и, следовательно, возникнет изменяющийся со временем поток индукции магнитного поля

$$\Phi = BS,$$

где $S = x^2 \sin(\frac{1}{2}\alpha)$ – площадь контура (расстояние x отсчитывается от вершины угла $\angle CAD$). Наличие нестационарного магнитного потока приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} = 2Bx \sin(\frac{1}{2}\alpha) \frac{dx}{dt} = 2Bx \sin(\frac{1}{2}\alpha) v,$$

что, в свою очередь, вызовет появление индукционного тока I и силы Ампера \vec{F}_A .

Поскольку при движении стержня магнитный поток, пронизывающий контур, увеличивается, то по правилу Ленца в контуре возникнет индукционный ток такого направления, чтобы его собственный магнитный поток ослаблял внешний (в нашем случае магнитное поле тока I , пронизывающее площадь ΔACD , будет направлено на нас, а ток в стержне – от точки D к точке C). Направление силы Ампера, действующей на стержень с током I в магнитном поле с индукцией \vec{B} , можно определить по правилу левой руки: расположим левую руку в плоскости рисунка так, чтобы силовые линии поля входили в ладонь, а пальцы указывали направление тока; при этом отогнутый большой палец покажет направление силы Ампера (см. рис. 14.51), равной

$$F_A = IB 2x \sin(\frac{1}{2}\alpha). \quad (1)$$

По закону Ома сила тока в стержне

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R},$$

где $R = 2\rho x \sin(\frac{1}{2}\alpha)$ – сопротивление части стержня между точками C и D контакта с проводом. Следовательно,

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{2\rho x \sin(\frac{1}{2}\alpha)} = \frac{2Bx \sin(\frac{1}{2}\alpha)v}{2\rho x \sin(\frac{1}{2}\alpha)} = \frac{Bv}{\rho}. \quad (2)$$

С учетом выражения (2) силу Ампера (1) можно представить в виде

$$F_A = \frac{2B^2 x v}{\rho} \sin(\frac{1}{2}\alpha).$$

Запишем уравнение движения стержня на ось OX системы координат:

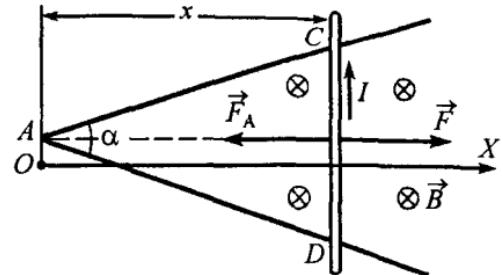
$$ma = F - F_A, \quad \text{или} \quad ma = kx - \frac{2B^2 x v}{\rho} \sin(\frac{1}{2}\alpha).$$

Скорость стержня будет максимальна в момент времени, когда его ускорение станет равным нулю. Следовательно,

$$0 = k - \frac{2B^2 v_{\max}}{\rho} \sin(\frac{1}{2}\alpha); \quad v_{\max} = \frac{\rho k}{2B^2 \sin(\frac{1}{2}\alpha)} \approx 15,45 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $v_{\max} = \frac{\rho k}{2B^2 \sin(\frac{1}{2}\alpha)} \approx 15,45 \text{ м/с.}$

14.43. Длинный проводник согнут в виде буквы П. По параллельным сторонам проводника под действием постоянной силы \vec{F} скользит проводящая перемычка (рис. 14.52). Проводник находится в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , силовые линии которого направлены перпендикулярно плоскости проводника. Длина перемычки равна l , ее сопро-



. Рис. 14.51

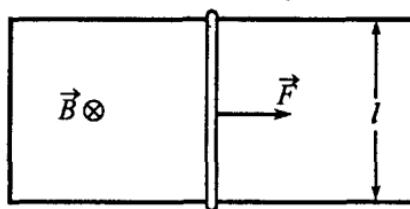


Рис. 14.52

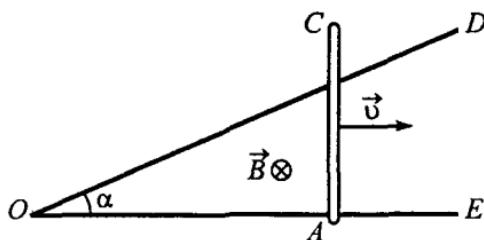


Рис. 14.53

тивление R . Пренебрегая сопротивлением проводника, определить максимальную скорость перемычки.

14.44. Металлический стержень AC , сопротивление единицы длины которого r , движется с постоянной скоростью \vec{v} , перпендикулярной AC , замыкая два проводника OD и OE , образующие друг с другом угол α . Длина OE равна l , а AC перпендикулярна OE (рис. 14.53). Вся система помещена в однородное постоянное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное плоскости системы. Найти количество теплоты, которое выделится в цепи при движении стержня AC от точки O до точки E . Сопротивлением проводников OD и OE пренебречь.

14.45. По двум параллельным проводящим стержням, образующим угол α с горизонтом, соскальзывает горизонтальная проводящая перемычка массой m и длиной l (рис. 14.54, а). В верхней части стержни замкнуты сопротивлением R . Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , силовые линии которого направлены вертикально вниз. Определить максимальную скорость движения перемычки, если коэффициент трения между поверхностями стержней и перемычкой равен μ . Сопротивлением стержней и перемычки пренебречь.

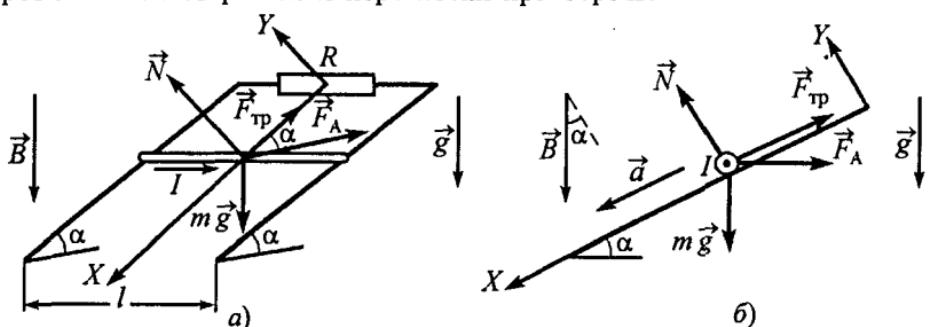


Рис. 14.54

• *Решение.* При соскальзывании перемычки возникнет переменный магнитный поток $\Phi = B S \cos \alpha$,

обусловленный тем, что меняется площадь

$$S = l x,$$

ограниченная контуром, где x – координата перемычки, отсчитываемая от верхнего края контура. Это приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt} = B \cos \alpha \frac{dS}{dt} = B l \cos \alpha \frac{dx}{dt} = B l v \cos \alpha$$

и вызовет появление тока в контуре и силы Ампера, направленных так, как показано на рис. 14.54, а, б (направления тока в контуре и силы Ампера определяются правилами Ленца и левой руки соответственно; см. решение задачи №14.42).

По закону Ома ток в контуре будет равен

$$I = \frac{|\mathcal{E}_l|}{R} = \frac{B l v \cos \alpha}{R},$$

а сила, действующая на перемычку,

$$F_A = I B l = \frac{B^2 l^2 v \cos \alpha}{R}. \quad (1)$$

Запишем уравнения движения перемычки в проекции на оси OX и OY системы координат:

$$OX: m a = m g \sin \alpha - F_A \cos \alpha - F_{tp}, \quad (2)$$

$$OY: 0 = N - m g \cos \alpha - F_A \sin \alpha, \quad (3)$$

где $F_{tp} = \mu N$.

Решив уравнения движения (2) – (3) относительно ускорения перемычки, получим

$$N = m g \cos \alpha + F_A \sin \alpha, \quad F_{tp} = \mu (m g \cos \alpha + F_A \sin \alpha);$$

$$m a = m g \sin \alpha - \mu (m g \cos \alpha + F_A \sin \alpha) - F_A \cos \alpha,$$

или с учетом выражения (1)

$$m a = m g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{B^2 l^2 v \cos \alpha}{R} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha).$$

Скорость перемычки будет максимальной в момент времени, когда ее ускорение станет равным нулю. Следовательно,

$$0 = m g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{B^2 l^2 v_{\max} \cos \alpha}{R} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha).$$

Отсюда находим

$$v_{\max} = \frac{m g R (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{B^2 l^2 \cos \alpha (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}.$$

Легко понять, что такая максимальная скорость будет у перемычки при $\mu \leq \tan \alpha$. В противном случае перемычка останется в покое.

- Ответ: $v_{\max} = \frac{m g R (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{B^2 l^2 \cos \alpha (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}$ при $\mu \leq \tan \alpha$.

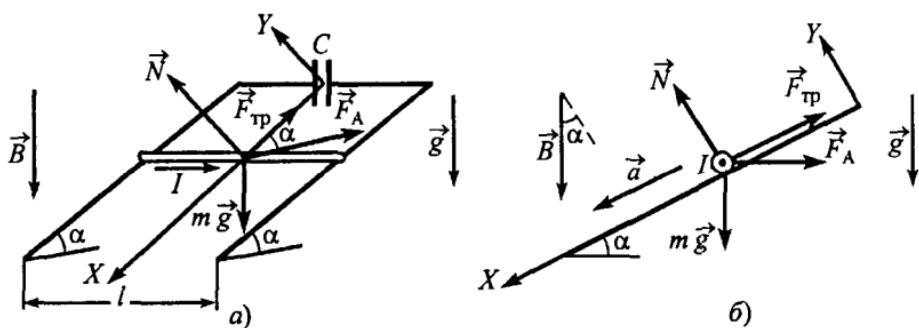


Рис. 14.55

14.46. По двум параллельным проводящим стержням, образующим угол α с горизонтом, соскальзывает горизонтальная проводящая перемычка массой m и длиной l (рис. 14.55, а). В верхней части стержни замкнуты конденсатором емкостью C . Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , силовые линии которого направлены вертикально вниз. Найти ускорение перемычки, если коэффициент трения между по-

верхностями стержней и перемычкой равен μ . Сопротивлением стержней и перемычки пренебречь.

• Решение. Поскольку условие нашей задачи в точности совпадает с условием задачи №14.45, за исключением того, что вместо сопротивления стержни замкнуты конденсатором, то решения этих задач на начальном этапе совпадают.

При соскальзывании перемычки в контуре возникнет ЭДС электромагнитной индукции $|\mathcal{E}_i| = B l v \cos \alpha$,

что вызовет появление тока в контуре и силы Ампера, направленных так, как показано на рис. 14.55, а, б. При этом ток будет заряжать конденсатор.

Силу тока в контуре можно определить через заряд на обкладках конденсатора. Учитывая, что напряжение на обкладках конденсатора $U = \mathcal{E}_i$, а заряд конденсатора $q = C U$, получаем

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C \mathcal{E}_i) = C B l \cos \alpha \frac{dv}{dt} = C B l a \cos \alpha,$$

где a – ускорение перемычки.

Следовательно, сила Ампера, действующая на перемычку в любой момент, будет равна

$$F_A = I B l = C B^2 l^2 a \cos \alpha.$$

Запишем уравнения движения перемычки в проекции на оси OX и OY системы координат:

$$OX: m a = m g \sin \alpha - F_A \cos \alpha - F_{\text{тр}},$$

$$OY: 0 = N - m g \cos \alpha - F_A \sin \alpha,$$

где $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Решив уравнения движения относительно ускорения перемычки с учетом выражения для силы Ампера, находим

$$m a = m g \sin \alpha - \mu (m g \cos \alpha + F_A \sin \alpha) - F_A \cos \alpha,$$

или

$$a = \frac{m g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m + F_A (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{m g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m + C l^2 B^2 \cos \alpha (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}.$$

• Ответ: $a = \frac{m g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m + C l^2 B^2 \cos \alpha (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}$.

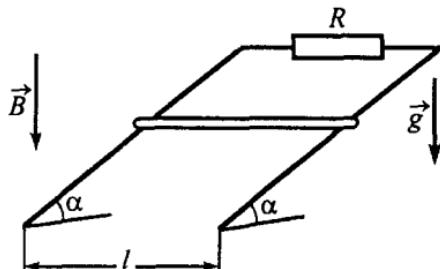


Рис. 14.56

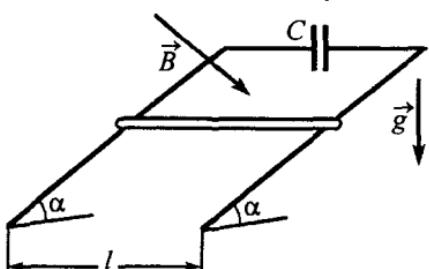


Рис. 14.57

14.47. По двум гладким параллельным проводящим стержням, образующим угол α с горизонтом, соскальзывает горизонтальная проводящая перемычка массой m и длиной l (рис. 14.56). В верхней части стержни замкнуты сопротивлением R . Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , силовые линии которого направлены вертикально вниз. Определить силу тока в цепи и скорость установившегося движения перемычки. Сопротивлением стержней пренебречь.

14.48. По двум параллельным проводящим стержням, образующим угол α с горизонтом, соскальзывает горизонтальная проводящая перемычка массой m и длиной l (рис. 14.57). В верхней части стержни замкнуты конденсатором емкостью C . Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , силовые линии которого направлены перпендикулярно плоскости, в которой движется перемычка. Найти ускорение перемычки. Сопротивлением стержней и перемычки, а также трением пренебречь.

Самоиндукция. Энергия магнитного поля

14.49. По катушке индуктивностью $L = 0,03$ Гн течет ток $I = 0,6$ А. При размыкании цепи сила тока изменяется практически до нуля за $\Delta t = 10^{-3}$ с. Определить среднее значение ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке.

- Решение. При размыкании цепи ток в катушке начнет уменьшаться, что приведет к изменению магнитного потока, пронизывающего витки катушки. При этом в катушке возникнет ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

За бесконечно малое время dI сила тока в катушке изменится на величину

$$dI = \frac{|\mathcal{E}_s| dt}{L},$$

а за время Δt на

$$\Delta I = \frac{|\mathcal{E}_s| \Delta t}{L}.$$

Следовательно, за время уменьшения тока до нуля в катушке будет действовать ЭДС самоиндукции, среднее значение которой

$$|\mathcal{E}_s| = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 18 \text{ В.}$$

- Ответ: $|\mathcal{E}_s| = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 18$ В.

14.50. Ток в катушке индуктивностью $L = 10$ мГн равномерно увеличиваются на $\Delta I = 0,1$ А за время $\Delta t = 1$ с. Определить среднее значение ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке.

14.51. Катушку индуктивностью $L = 3$ мГн подключают к источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5$ В. Через какое время ток в катушке достигнет значения $I = 50$ А? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

14.52. В электрической цепи, представленной на рис. 14.58, индуктивность катушки равна $L = 9$ мГн, сопротивления $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 25$ Ом. Первоначально ключ K замкнут и в цепи течет ток силой $I = 2$ А. Какое количество электричества будет индуцировано в катушке после размыкания цепи ключом K ? Внутренним сопротивлением источника и катушки пренебречь.

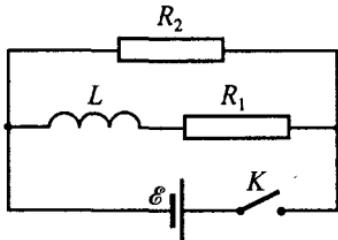


Рис. 14.58

14.53. Определить индуктивность длинного соленоида, в котором при увеличении тока от $I_1 = 4$ А до $I_2 = 6$ А энергия магнитного поля увеличивается на $\Delta W = 10$ мДж.

• Решение. Энергия магнитного поля внутри соленоида с индуктивностью L при увеличении тока в нем от I_1 до I_2 увеличится от

$$W_1 = \frac{1}{2} L I_1^2$$

до

$$W_2 = \frac{1}{2} L I_2^2.$$

По условию задачи

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} L I_2^2 - \frac{1}{2} L I_1^2.$$

Отсюда находим

$$L = \frac{2 \Delta W}{I_2^2 - I_1^2} \approx 10^{-3} \text{ Гн.}$$

• Ответ: $L = \frac{2 \Delta W}{I_2^2 - I_1^2} \approx 10^{-3}$ Гн.

14.54. Индуктивность длинного соленоида равна $L = 0,1$ мГн. При какой силе тока энергия магнитного поля внутри соленоида составляет $W = 10$ мкДж?

14.55. Соленоид с индуктивностью $L = 4$ мГн содержит $N = 60$ витков провода. Определить энергию магнитного поля внутри соленоида и магнитный поток, пронизывающий каждый из витков соленоида при силе тока в нем $I = 12$ А.

Электромагнитные колебания и волны

14.56. Колебательный контур состоит из двух соединенных последовательно одинаковых конденсаторов емкостями $C_1 = C_2 = 4$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 0,2$ мГн. Определить период свободных колебаний в контуре, максимальный заряд и максимальное напряжение на каждом конденсаторе. Максимальный ток в цепи $I_{\max} = 0,1$ А.

• Решение. Период колебаний в контуре, содержащем катушку и конденсатор, равен

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Поскольку наш контур содержит два конденсатора, соединенных последовательно, то их общая емкость

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Следовательно,

$$T = 2\pi \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \approx 125 \text{ мкс.}$$

Для определения максимального заряда q_{\max} на конденсаторах воспользуемся законом сохранения энергии: энергия конденсаторов будет максимальна в момент времени, когда энергия магнитного поля катушки станет равной нулю:

$$\frac{L I_{\max}^2}{2} = \frac{q_{\max}^2}{2C}.$$

Отсюда находим

$$q_{\max} = I_{\max} \sqrt{LC}.$$

При последовательном соединении конденсаторов заряд каждого из них равен заряду всей батареи. Поэтому

$$q_{\max 1} = q_{\max 2} = I_{\max} \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \approx 2 \text{ мККл.}$$

Максимальное напряжение на каждом из конденсаторов определим через его заряд и емкость:

$$U_{\max 1} = q_{\max 1} C_1 = I_{\max} C_1 \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \approx 0,5 \text{ В}; \quad U_{\max 2} = I_{\max} C_2 \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \approx 0,5 \text{ В.}$$

• Ответ: $T = 2\pi \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \approx 125 \text{ мкс}; \quad q_{\max 1} = q_{\max 2} = I_{\max} \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \approx 2 \text{ мКл};$

$$U_{\max 1} = I_{\max} C_1 \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \approx 0,5 \text{ В}; \quad U_{\max 2} = I_{\max} C_2 \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \approx 0,5 \text{ В.}$$

14.57. Конденсатор емкостью $C = 2 \text{ мКФ}$, заряженный до разности потенциалов $U = 2 \cdot 10^3 \text{ В}$, разряжается через катушку индуктивностью $L = 100 \text{ мГн}$. Каково максимальное значение силы тока в катушке? В какой момент времени после начала разряда достигается максимальное значение тока?

14.58. Конденсатор емкостью $C = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}$, заряженный до напряжения $U_0 = 10^3 \text{ В}$, разряжается через катушку индуктивностью $L = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ и каким-то активным сопротивлением. Через некоторое время напряжение на конденсаторе равно $U = 600 \text{ В}$, а ток в катушке достиг значения $I = 20 \text{ А}$. Какое количество тепла выделилось к этому моменту в катушке?

14.59. Определить длину волны, на которую настроен колебательный контур Томсона, если максимальный ток в контуре $I_{\max} = 1 \text{ А}$, а максимальный заряд конденсатора $q_{\max} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$. Какова емкость конденсатора, если индуктивность контура $L = 20 \text{ мКГн}$?

• Решение. Частота собственных колебаний в контуре Томсона определяется формулой $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

При совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой в контуре наступает резонанс. Поэтому собственную частоту контура часто называют резонансной.

Используя закон сохранения энергии в виде

$$\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{q_{\max}^2}{2C},$$

получим

$$I_{\max} = \frac{q_{\max}}{\sqrt{LC}}; \quad \omega_0 = \frac{I_{\max}}{q_{\max}}.$$

Следовательно, длина волны, на которую настроен колебательный контур, и емкость конденсатора соответственно равны

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega_0} = \frac{2\pi v q_{\max}}{I_{\max}} \approx 37,7 \text{ м}; \quad C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{q_{\max}^2}{I_{\max}^2 L} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф},$$

где $v = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ — скорость света.

• Ответ: $\lambda = \frac{2\pi v q_{\max}}{I_{\max}} \approx 37,7 \text{ м}; \quad C = \frac{q_{\max}^2}{I_{\max}^2 L} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф.}$

14.60. Определить резонансную частоту колебаний в контуре Томсона, если максимальный ток в нем $I_{\max} = 5 \text{ А}$, а максимальное напряжение на конденсаторе емкостью $C = 10 \text{ мКФ}$ равно $U_{\max} = 100 \text{ В}$.

14.61. Входной контур радиоприемника состоит из катушки с индуктивностью $L = 2 \text{ мГн}$ и плоского конденсатора с площадью пластин $S = 10 \text{ см}^2$ и расстоянием между ними $d = 2 \text{ мм}$. Пространство между пластинами заполнено слюдой с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 7,5$. На какую длину волны настроен радиоприемник?

Переменный ток

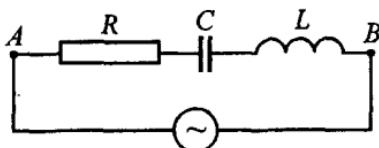


Рис. 14.59

14.62. В схеме (рис. 14.59) активное сопротивление равно $R = 2 \Omega$, индуктивность катушки $L = 50 \text{ мГн}$, емкость конденсатора $C = 25 \mu\Phi$. Определить полное сопротивление цепи и сдвиг фаз между током и напряжением при частоте переменного тока $v = 50 \text{ Гц}$. При какой частоте сопротивление цепи минимально? Чему оно равно?

- **Решение.** Полное сопротивление цепи, содержащей соединенные последовательно активное сопротивление, катушку и конденсатор, для переменного тока

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

где $X_L = \omega L$, $X_C = 1/\omega C$ – реактивные сопротивления катушки и конденсатора соответственно, $\omega = 2\pi v$. Следовательно,

$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi v L - 1/2\pi v C)^2} \approx 111,6 \Omega.$$

Сдвиг фаз между током и напряжением в такой цепи

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \arctg \frac{2\pi v L - 1/2\pi v C}{R} \approx 89^\circ.$$

Из выражения для полного сопротивления цепи видно, что минимальное сопротивление цепи равно

$$Z_{\min} = R = 2 \Omega$$

при частоте тока v_0 , для которой полное реактивное сопротивление равно нулю:

$$2\pi v_0 L - 1/2\pi v_0 C = 0, \quad \text{или} \quad v_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \approx 142,4 \text{ Гц.}$$

- **Ответ:** $Z = \sqrt{R^2 + (2\pi v L - 1/2\pi v C)^2} \approx 111,6 \Omega$; $\varphi = \arctg \frac{2\pi v L - 1/2\pi v C}{R} \approx 89^\circ$;

$$Z_{\min} = 2 \Omega; v_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \approx 142,4 \text{ Гц.}$$

14.63. Катушка с активным сопротивлением $R = 15 \Omega$ и индуктивностью $L = 52 \text{ мГн}$ включена в сеть переменного тока с частотой $v = 50 \text{ Гц}$ последовательно с конденсатором емкостью $C = 120 \mu\Phi$. Действующее значение напряжения в сети $U_d = 220 \text{ В}$. Определить амплитудное и действующее значения тока в цепи, а также среднюю за период мощность тока.

- **Решение.** Полное сопротивление цепи, содержащей соединенные последовательно катушку с активным сопротивлением и конденсатор, для переменного тока частотой v равно (см. решение задачи №14.62)

$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi v L - 1/2\pi v C)^2}.$$

Из закона Ома для участка цепи переменного тока

$$I_0 = \frac{U_0}{Z},$$

где I_0 , U_0 – максимальные значения тока в цепи и напряжения на концах участка.

Используя связь между действующим и максимальным значениями напряжения

$$U_0 = \sqrt{2} U_d,$$

получим величину амплитудного

$$I_0 = \frac{\sqrt{2} U_d}{\sqrt{R^2 + (2\pi v L - 1/2\pi v C)^2}} \approx 17,2 \text{ А}$$

и действующего

$$I_d = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U_d}{\sqrt{R^2 + (2\pi v L - 1/2\pi v C)^2}} \approx 12,3 \text{ A}$$

значений тока в цепи.

Для определения средней мощности переменного тока воспользуемся формулой

$$N = U_d I_d \cos \varphi.$$

Значение коэффициента мощности $\cos \varphi$ можно найти, воспользовавшись известным выражением для сдвига фаз между током и напряжением в цепи, представленной на рис. 14.59:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} = \frac{2\pi v L - 1/2\pi v C}{R}.$$

Отсюда после несложных преобразований получим

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\pi v L - 1/2\pi v C)^2}}.$$

Значение $\cos \varphi$ можно найти и по-другому. Обратимся к векторной диаграмме токов и напряжений. Из рис. 14.60 видно, что

$$\cos \varphi = U_a / U_0,$$

или

$$\cos \varphi = \frac{I_0 R}{I_0 Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\pi v L - 1/2\pi v C)^2}}.$$

Следовательно,

$$N = \frac{U_d^2 R}{R^2 + (2\pi v L - 1/2\pi v C)^2} \approx 2250 \text{ Вт.}$$

• Ответ: $I_0 \approx 17,2 \text{ A}$; $I_d \approx 12,3 \text{ A}$; $N \approx 2250 \text{ Вт.}$

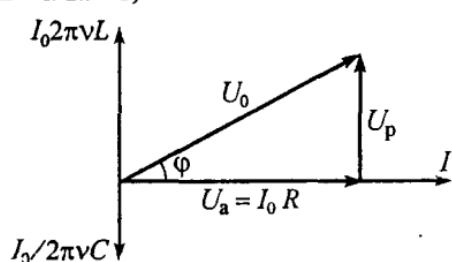


Рис. 14.60

14.64. В городскую сеть переменного тока с частотой $v = 50 \text{ Гц}$ и действующим напряжением $U_d = 127 \text{ В}$ включили лампочку от карманного фонаря и конденсатор, соединенные между собой последовательно. Какой должна быть емкость конденсатора, чтобы лампочка горела нормальным накалом? Лампочка рассчитана на постоянное напряжение $U_L = 3,5 \text{ В}$ и ток $I = 0,28 \text{ А}$.

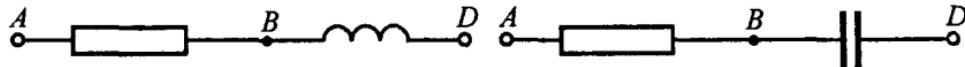


Рис. 14.61

Рис. 14.62

14.65. По участку ABD (рис. 14.61) цепи протекает синусоидальный ток. На участке AB действующее значение напряжения равно $U_{AB} = 30 \text{ В}$, а на участке BD — $U_{BD} = 40 \text{ В}$. Определить действующее значение напряжения на участке AD .

14.66. По участку ABD (рис. 14.62) цепи протекает синусоидальный ток. На участке AB действующее значение напряжения равно $U_{AB} = 20 \text{ В}$, а на участке BD — $U_{BD} = 10 \text{ В}$. Определить действующее значение напряжения на участке AD .

14.67. По участку ABD (рис. 14.63) цепи протекает синусоидальный ток. Индуктивность катушки $L = 0,25 \text{ Гн}$, емкость конденсатора $C = 100 \text{ мкФ}$. Пренебрегая активным сопротивлением участка, определить частоту тока, при которой сопротивление участка будет равно нулю.

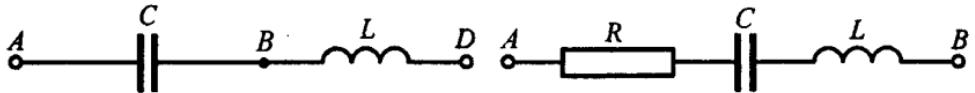


Рис. 14.63

Рис. 14.64

14.68. Для неразветвленной цепи переменного тока (рис. 14.64) сопротивления равны: $R = 3 \text{ Ом}$, $X_L = 6 \text{ Ом}$, $X_C = 2 \text{ Ом}$. Определить полное сопротивление цепи и коэффициент мощности.

14.69. В неразветвленной цепи переменного тока (рис. 14.64) напряжения на участках цепи соответственно равны: $U_R = 40 \text{ В}$, $U_L = 80 \text{ В}$, $U_C = 50 \text{ В}$. Определить напряжение между точками A и B цепи и коэффициент мощности.

14.70. Спираль нагревателя электрического чайника имеет индуктивность $L = 30 \text{ мГн}$ и активное сопротивление $R = 30 \text{ Ом}$. В каком случае и во сколько раз быстрее закипит вода в чайнике: а) при включении в цепь переменного напряжения $U = 311 \cos \omega t$, где $\omega = 314 \text{ рад/с}$, или б) при включении в цепь постоянного напряжения $U = 311 \text{ В}$?

ОПТИКА. АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

§15. Геометрическая и волновая оптика

Способность видеть чрезвычайно важна, так как именно зрение позволяет нам получать значительную часть информации о внешнем мире. Как мы видим? Что представляет собой нечто, называемое нами светом, и каким образом с его помощью нам удается видеть явления, которые мы наблюдаем? Каковы законы распространения света? Что происходит при взаимодействии света с веществом? Исследование этих и других проблем, связанных с изучением природы света и его свойств, составляет содержание раздела физики, называемого *оптикой*.

Видимый свет составляет только небольшую часть широкого спектра явлений одной природы, причем разные части этого спектра характеризуются разными значениями определенной физической величины. Эту величину называют *длиной волны*. Свет с большой длиной волны относят к области инфракрасных волн, далее, по мере уменьшения длины волны, идет область видимого света, затем – ультрафиолетовая область. За ультрафиолетовой областью начинаются рентгеновские лучи, затем жесткое излучение, потом γ -излучение и так до все меньшим значениям величины, которую мы назвали длиной волны. На самом деле между разными областями нет никаких границ, природа их не создала. Разделение света по разным диапазонам и, конечно, сами названия этих диапазонов весьма условны.

В зависимости от соотношения длины волны (как позже увидим, длина волны обратно пропорционально связана с ее энергией) с характеристиками приборов, с помощью которых изучают такие волны, выделяют три области, в которых возможны разные приближения при изучении законов оптики. Область, где длина волны мала по сравнению с размерами приборов и энергия волны меньше чувствительности приборов, изучают в приближении так называемой геометрической оптики. Когда же длина волны становится сравнимой с размерами прибора, а энергия по-прежнему мала, используется приближение волновой оптики. И наконец, для коротких длин волн, когда их энергия велика, свет рассматривают с точки зрения фотонной (квантовой) теории (см. §17).

Геометрическая оптика

Простейшие оптические явления, например возникновение теней и получение изображений в оптических приборах, могут быть поняты в рамках *геометрической оптики*. В основе формального построения по-

ледней лежат четыре закона, установленные опытным путем: 1) закон прямолинейного распространения света; 2) закон независимости световых пучков; 3) закон отражения и 4) закон преломления света.

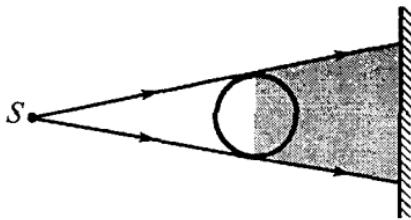


Рис. 15.1

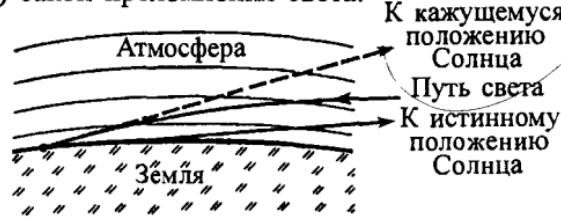


Рис. 15.2

Согласно закону прямолинейного распространения, свет в прозрачной однородной среде распространяется по прямым линиям. Опытным доказательством этого закона могут служить резкие тени, отбрасываемые непрозрачными телами при их освещении точечными источниками света, т.е. источниками, размеры которых малы по сравнению с размерами освещаемого тела и расстоянием до него (рис. 15.1).

Закон независимости световых пучков состоит в том, что распространение всякого светового пучка в среде совершенно не зависит от того, есть в ней другие пучки света или нет, т.е. световой пучок, прошедший через какую-либо область пространства, выходит из нее таким же, независимо от того, заполнена она другим светом или нет. При совместном распространении нескольких световых пучков происходит их наложение друг на друга без каких-либо взаимных искажений.

В действительности в природе часто наблюдаются отступления от законов прямолинейного распространения и независимости световых пучков. Впервые общий принцип, наглядно объясняющий законы поведения света, был предложен Ферма и получил название *принципа наименьшего времени*: свет выбирает из всех возможных путей, соединяющих две точки, тот путь, который требует наименьшего времени для его прохождения. Поэтому, когда мы смотрим на заходящее Солнце, нам кажется, что Солнце еще над горизонтом, хотя оно на самом деле уже зашло. Это связано с тем, что земная атмосфера вверху более разрежена, чем вблизи поверхности Земли, и свет распространяется по кривой (рис. 15.2) таким образом, чтобы дойти до нас за наименьшее время. Нарушение закона независимости световых пучков проявляется в явлениях интерференции и дифракции света. Например, в тени от края непрозрачного предмета наблюдается переходная область, в которой освещенность меняется немонотонно: в ней наблюдаются так называемые дифракционные полосы. Об этих явлениях мы будем подробнее говорить ниже, здесь же отметим, что в геометрической оптике ими пренебрегают.

На основе законов прямолинейного распространения и независимости световых пучков сложилось представление о *световых лучах* как о линиях, вдоль которых распространяется свет. В таком понимании луч явля-

ется чисто математическим понятием. В физическом смысле под лучом понимают конечный, достаточно узкий, световой пучок.

Закон отражения света был известен еще до нашей эры. Падая на поверхность какого-либо предмета, свет частично отражается. Остальная его часть либо поглощается предметом (и превращается в тепло), либо (если предмет прозрачен) проходит сквозь предмет. Для плоских поверхностей падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью к границе раздела в точке падения (эта плоскость называется *плоскостью падения*), причем угол падения α (угол между нормалью к границе раздела и падающим лучом) равен углу отражения γ (углу между нормалью к границе раздела и отраженным лучом) (рис. 15.3).

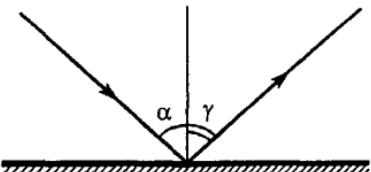


Рис. 15.3

Это есть закон отражения. Падая на шероховатую поверхность, свет отражается в различных направлениях, и здесь наблюдается *диффузное отражение*. Именно благодаря диффузному отражению обычный предмет можно наблюдать под разными углами. Если же луч света падает на зеркальную поверхность, то отраженный луч можно увидеть лишь в том случае, если глаз займет положение, для которого выполняется закон отражения.

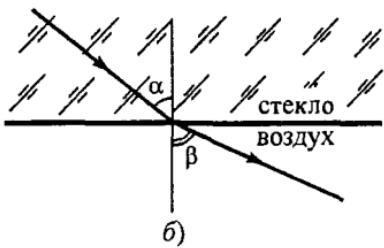
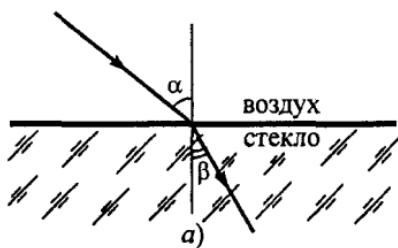


Рис. 15.4

Когда свет переходит из одной прозрачной среды в другую, причем свет падает под некоторым углом к поверхности раздела, то наблюдается *преломление света*. Экспериментально установлено, что при переходе света в среду, где его скорость меньше, преломленный луч приближается к нормали (рис. 15.4, а), если же в новой среде скорость света больше, то луч отклоняется от нормали к границе раздела сред (рис. 15.4, б). Преломлением обусловлен целый ряд широко известных оптических иллюзий. Например, наблюдателю на берегу кажется, что у человека, зашедшего в воду по пояс, ноги стали короче. Как показано на рис. 15.5, лучи от ног человека, стоящего в воде, после преломления отклоняются к поверхности. Наблюдатель же воспринимает лучи как прямолинейные, и поэтому

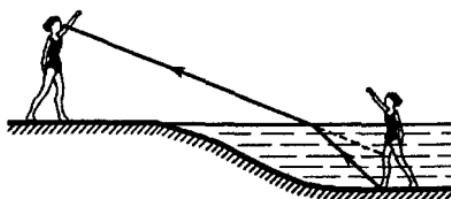


Рис. 15.5

ступни ног ему кажутся расположенными выше, чем в действительности. По этой же причине ложка в стакане чая кажется согнутой в том месте, где она входит в жидкость. Экспериментально установлено, что угол преломления β (угол между нормалью к границе раздела и преломленным лучом) зависит от скорости света в обеих средах и от угла падения луча. Эта зависимость известна как закон Снеллиуса и выражает закон преломления: преломленный луч лежит в плоскости падения, причем отношение синуса угла падения α к синусу угла преломления β для рассматриваемых сред зависит только от длины световой волны, т.е.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{2,1}, \quad (15.1)$$

где $n_{2,1} = n_2/n_1$ называется *относительным показателем преломления второй среды относительно первой*; n_1, n_2 – показатели преломления первой и второй сред относительно вакуума, называемые *абсолютными показателями преломления* этих сред (абсолютный показатель преломления показывает, во сколько раз скорость света c в вакууме больше скорости света v в данной среде: $n = c/v$).

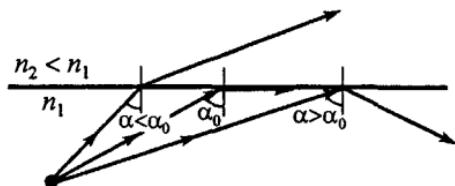


Рис. 15.6

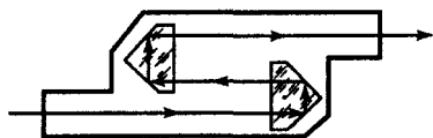


Рис. 15.7

Из закона Снеллиуса ясно, что если $n_2 > n_1$, то $\beta < \alpha$ и преломленный луч будет приближаться к нормали. Когда свет переходит в среду с меньшим показателем преломления, т.е. $n_{2,1} < 1$, он отклоняется от нормали и может оказаться, что при определенном угле падения величина $\sin \beta = (\sin \alpha)/n_{2,1}$, формально вычисленная по формуле (15.1), превзойдет единицу. Угол падения α_0 , при котором $(\sin \alpha_0)/n_{2,1} = 1$, называется *критическим углом, или предельным углом полного внутреннего отражения*. При углах падения меньше α_0 преломленный луч существует. Если же угол падения превышает критический, то преломленный луч отсутствует и весь свет отражается (рис. 15.6). Это явление получило название *полного внутреннего отражения*.

Полное внутреннее отражение используется во многих оптических приборах. Например, в биноклях и перископах для отражения света используются не зеркала, а специальные призмы (рис. 15.7); при этом достигается почти 100%-ное отражение света. На полном внутреннем отражении основана вся волоконная оптика: свет передается по пучку тонких прозрачных волокон (световоду), испытывая только скользящие отражения от их стенок, т.е. претерпевая полное внутреннее отражение.

Изображения в зеркалах

Глядя в зеркало прямо перед собой, мы видим как бы своего двойника и различные предметы, которые находятся вокруг нас. При этом нам кажется, что двойник и эти предметы находятся перед нами, за зеркалом, хотя их там, разумеется, нет. То, что мы видим в зеркале, – это изображения предметов.

На рис. 15.8 показано, как формируется изображение плоским зеркалом на примере пучков света, попадающих в глаз из двух различных точек предмета. Каждой точке предмета соответствует своя точка изображения. Рассмотрим два луча, выходящие из точки A предмета и попадающие в точки B и B' зеркала. После отражения от зеркала эти лучи идут расходящимся пучком, и мы видим изображение точки A предмета как точку пересечения за зеркалом продолжений этих лучей (точка C). По построению углы $\angle ADB$ и $\angle CBD$ прямые, а углы $\angle ABD$ и $\angle CBD$ равны по закону отражения. Так как сторона BD является общей для треугольников ΔABD и ΔCBD , то эти треугольники равны и $AD = CD$. Аналогичным образом можно построить изображения всех точек предмета. Легко понять, что предмет и его изображение располагаются симметрично относительно плоскости зеркала и высота изображения равна высоте предмета. В частном случае, когда предмет расположен параллельно плоскости зеркала, расстояние f от зеркала до изображения будет равно расстоянию d от предмета до зеркала.

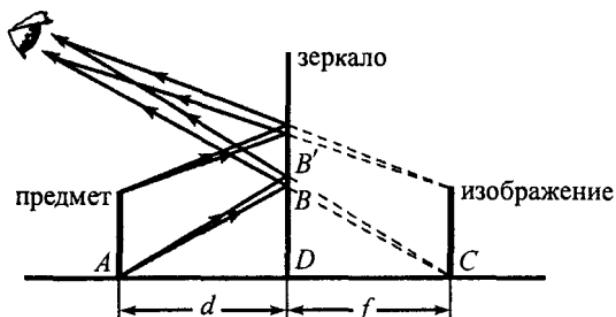


Рис. 15.8

Так как точки изображения предмета мы наблюдаем как точки пересечения не лучей, а их продолжений, то, поместив лист бумаги или фотопластинку в то место, где находится изображение, мы не получим никакого изображения. Поэтому такое изображение называется *мнимым*.

Действительное изображение предмета можно получить с помощью кривых зеркал, например *сферических*. Сферическое зеркало называют *вогнутым*, если отражение световых лучей происходит от внутренней сферической поверхности. Если отражающей поверхностью служит внешняя поверхность сферы, то зеркало называют *выпуклым*.

Рассмотрим параллельные лучи, попадающие на вогнутое зеркало (рис. 15.9). Для каждого из этих лучей в точке падения должен выполняться закон отражения. Легко видеть, что не все отраженные лучи соберутся в одной точке. Следовательно, сферическое зеркало не создаст такого четкого изображения, как плоское. Но если размеры зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны, так что все лучи будут отражаться от его поверхности под малыми углами, то они пересекутся почти в

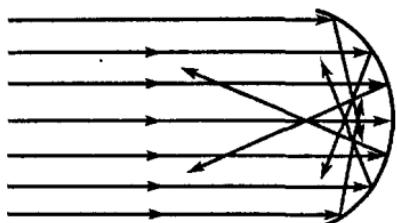


Рис. 15.9

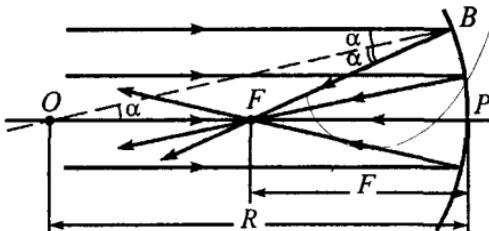


Рис. 15.10

одной точке F , которую называют *фокусом* (рис. 15.10). Прямая OP , перпендикулярная центру кривизны зеркала, называется *главной оптической осью*, а расстояние от фокуса (точки F) до центра зеркала (точки P) называется *фокусным расстоянием*, которое будем обозначать также буквой F .

Рассмотрим луч, параллельный главной оси, падающий на зеркало в точке B , при условии, что размеры зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны. Пусть точка O – центр кривизны зеркала (центр сферы, сегментом которой является наше зеркало). По законам отражения и геометрии три угла, обозначенные на рис. 15.10 буквой α , равны. Следовательно, треугольник ΔOFB равнобедренный. Поэтому $OF = BF$. Так как, по предположению, размеры зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны, то углы α малы и длина отрезка FB мало отличается от длины отрезка FP . В этом приближении $FP = FO$. Но $FP = F$, $OP = 2 \cdot FP = R$ (где F – фокусное расстояние; R – радиус кривизны зеркала). Следовательно,

$$F = \frac{1}{2} R, \quad (15.2)$$

т.е. все отраженные от поверхности зеркала лучи пройдут через точку F , находящуюся на главной оптической оси на расстоянии, равном половине радиуса кривизны зеркала. Это утверждение выполняется лишь приближенно, и чем больше размеры зеркала, тем хуже приближение и более расплывчатым становится изображение. Этот дефект сферических зеркал называется *сферической aberrацией*.

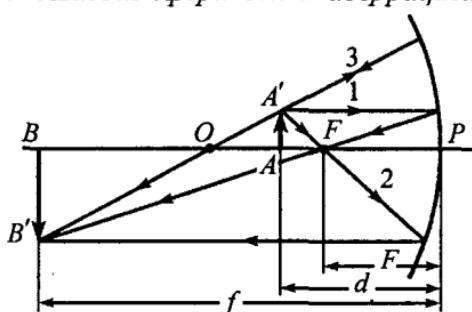


Рис. 15.11

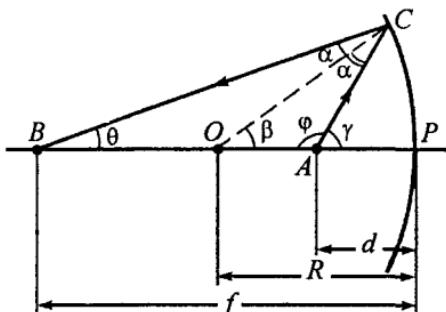


Рис. 15.12

Рассмотрим теперь случай, когда предмет располагается в точке A на некотором расстоянии d от поверхности зеркала между фокусом F и центром кривизны O (рис. 15.11), и определим расстояние f от зеркала до изображения точки A' предмета. Для этого проведем несколько лучей в

направлении к зеркалу. Такое построение достаточно трудоемко, но задача упростится, если воспользоваться тремя лучами, которые на рис. 15.11 обозначены цифрами 1, 2 и 3. Луч 1 проведем параллельно главной оси. Следовательно, после отражения он пройдет через точку F . Луч 2 проведем через точку F , поэтому после отражения он должен идти параллельно оси. Наконец, луч 3 проведем через центр кривизны зеркала, который после отражения возвратится по первоначальному направлению. Точка B' , в которой эти три луча пересекутся, есть искомая точка изображения. Все другие лучи из точки A' предмета пройдут через ту же точку B' изображения. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольный луч AC (рис. 15.12), выходящий из точки A . Так как $\gamma + \varphi = 180^\circ$ и сумма внутренних углов треугольника ΔACB также равна 180° , то

$$\gamma = \theta + 2\alpha.$$

Аналогично находим

$$\beta = \theta + \alpha.$$

Следовательно,

$$\gamma + \theta = 2\beta.$$

Если углы θ , γ и β малы, то это соотношение (в радианной мере углов) можно переписать в виде

$$\frac{s}{d} + \frac{s}{f} = \frac{2s}{R},$$

где s – длина дуги CP ; R – радиус кривизны зеркала. Откуда, используя выражение (15.2), получим

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{R}. \quad (15.3)$$

Соотношение (15.3) называется *уравнением зеркала*. Мы вывели формулу (15.3) для точки A , лежащей на главной оптической оси, но она остается справедливой и для точек, расположенных на малых расстояниях выше или ниже этой оси, в силу симметрии сферического зеркала. Из уравнения (15.3) следует, что расстояние f не зависит от угла γ , образуемого лучом AC с осью. Это означает, что все лучи, выходящие из точки A' (см. рис. 15.11), сберутся в точке B' .

Аналогичным образом можно построить изображения всех точек предмета. Однако, когда предмет – прямая линия, достаточно построить изображения только двух его крайних точек, соединив которые, получим изображение предмета. При этом если предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси зеркала (расстояние d одинаково для всех точек предмета), то его изображение также будет перпендикулярным этой оси (расстояние f будет одинаковым для всех точек изображения).

Аналогичным образом построим изображения предмета AA' в случаях, когда он расположен за центром зеркала (рис. 15.13) и между зеркалом и фокусом (рис. 15.14). Как видим, в первом случае изображение получено на пересечении лучей, поэтому является действительным, а во втором – на пересечении продолжений лучей, т.е. изображение мнимое.

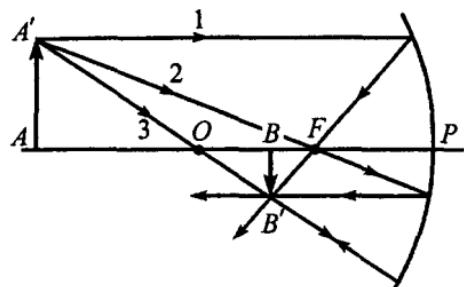


Рис. 15.13

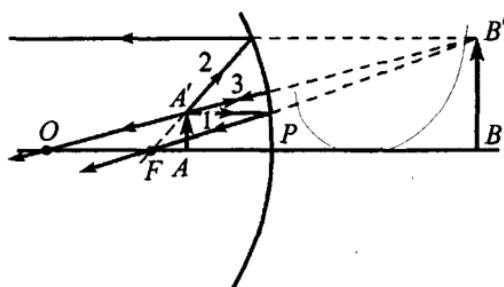


Рис. 15.14

Повторив вывод уравнения зеркала для двух последних рассмотренных случаев взаимного расположения зеркала и предмета, можно убедиться, что формула (15.3) остается справедливой при размещении предмета на произвольном расстоянии от зеркала, если ввести правило знаков: если изображение находится с отражающей стороны зеркала (на всех рисунках слева от зеркала), то расстояние f до изображения считается положительным; если же за зеркалом – то отрицательным (или по-другому: расстояние f считается положительным, если изображение действительное; отрицательным – если мнимое).

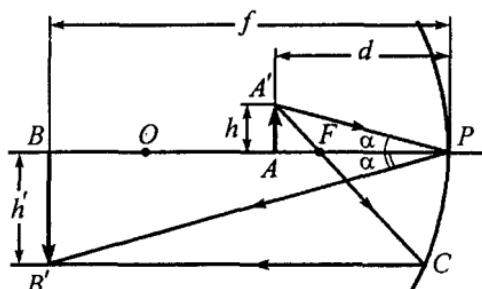


Рис. 15.15

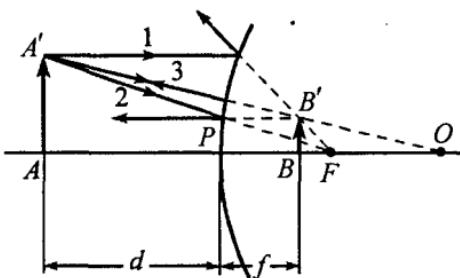


Рис. 15.16

Найдем теперь *увеличение зеркала* как отношение высоты изображения h' к высоте предмета h . На рис. 15.15 луч $A'P$ отражается по закону равенства углов падения и отражения, поэтому из подобия треугольников $\Delta AA'P$ и $\Delta BB'P$ находим увеличение

$$\Gamma = \frac{h'}{h} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{BP}{AP} = \frac{f}{d}. \quad (15.4)$$

Рассмотренные на рис. 15.11, 15.13 – 15.14 примеры показывают, что если предмет расположен между вогнутым зеркалом и его фокусом, то изображение будет мнимым, прямым и увеличенным. Если же предмет находится за фокусом, то изображение будет действительным и перевернутым. Будет ли при этом увеличение больше или меньше единицы, здесь зависит от положения предмета относительно точки O – центра кривизны зеркала.

Анализ, проведенный для случая вогнутых зеркал, применим и к выпуклым сферическим отражающим поверхностям. На рис. 15.16 приведе-

но построение изображения предмета в выпуклом зеркале, проведенное на основе закона отражения света. При этом, независимо от того, где расположен предмет, его изображение всегда будет мнимым. Можно убедиться, что формулы (15.3) и (15.4) остаются справедливыми и в случае выпуклых зеркал, если правило знаков дополнить соглашением, что здесь радиус кривизны, а значит, и фокусное расстояние F считаются отрицательными.

Преломление на сферической поверхности

Рассмотрим теперь, как происходит преломление луча на сферической поверхности раздела прозрачных сред. Пусть источник света находится в среде с показателем преломления n_1 и лучи, исходящие из него, попадают в среду с показателем преломления n_2 . Пусть точка O – центр кривизны сферической поверхности радиуса R (рис. 15.17).

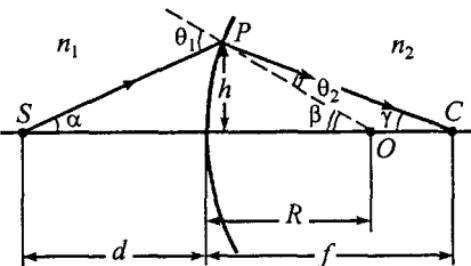


Рис. 15.17

Рассмотрим произвольный луч SP , выходящий из точки S , в предположении, что он составляет малый угол α с прямой SO . По закону преломления

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Так как мы предположили, что угол α мал, то углы θ_1 и θ_2 также будут малыми, и можно считать $\sin \theta \approx \theta$ и

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2.$$

Кроме того, как видно из треугольника ΔCPO , угол $\beta = \gamma + \theta_2$, а из треугольника $\Delta SPO - \theta_1 = \alpha + \beta$. Следовательно,

$$n_1 \alpha + n_1 \beta = n_2 \beta - n_2 \gamma,$$

или

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta. \quad (15.5)$$

Так как мы рассматриваем только случай малых углов, можно записать следующие приближенные равенства (полагая тангенсы углов α , β , γ приближенно равными самим углам):

$$\alpha \approx \frac{h}{d}, \quad \beta \approx \frac{h}{R}, \quad \gamma \approx \frac{h}{f}, \quad (15.6)$$

где d – расстояние от источника до преломляющей поверхности; f – расстояние до изображения; h – расстояние от прямой SC до точки P . Подставив (15.6) в (15.5), после деления на h получим

$$\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (15.7)$$

Из (15.7) видно, что при заданной величине d расстояние до изображения f не зависит от угла, образуемого лучом с осью. Следовательно, все лучи, составляющие малые углы с осью и друг с другом, собираются в точке C .

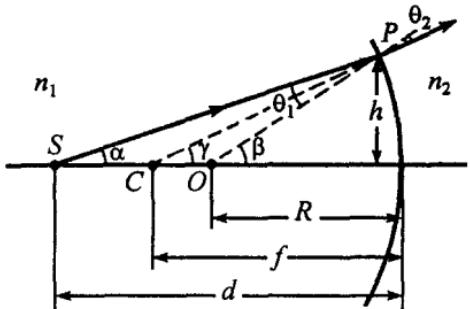


Рис. 15.18

При выводе уравнения (15.7) мы пользовались рисунком, на котором лучи падают на выпуклую часть сферической поверхности. Но это уравнение справедливо и для вогнутой поверхности (в чем легко убедиться, построив ход лучей при преломлении на вогнутой поверхности (рис. 15.18) и повторив вывод (15.7)), если ввести следующие соглашения (правила знаков):

1. Для выпуклой преломляющей поверхности радиус кривизны положителен, а для вогнутой преломляющей поверхности отрицателен.
2. Расстояние до изображения f положительно, если источник света и изображение находятся по разные стороны от преломляющей поверхности (действительное изображение, т.е. изображение получено при пересечении истинных лучей), и отрицательно, если источник и изображение находятся по одну сторону от поверхности (изображение мнимое, т.е. получено при пересечении продолжений лучей).

3. Расстояние d до предмета положительно, если предмет действительный; и отрицательно в противном случае (мнимый предмет). Случай мнимого предмета может иметь место, когда сам предмет является изображением, полученным от какой-либо линзы или зеркала: в этих случаях лучи на преломляющую поверхность идут сходящимся пучком.

Для случая, изображенного на рис. 15.18, значения величин R и f в уравнение (15.7) следует подставлять со знаком «минус».

Тонкие линзы

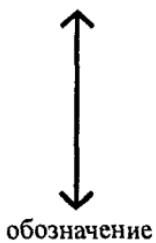


Рис. 15.19



Тонкие линзы



обозначение



Рис. 15.20

Тонкие линзы являются наиболее простыми и вместе с тем очень важными оптическими устройствами. По своему внешнему виду они обычно бывают круглыми (причем, толщина линзы много меньше ее диаметра), и каждая из поверхностей представляет собой сегмент сферы (иногда часть цилиндрической поверхности). Ограничивающая линзу поверхность может быть выпуклой, вогнутой или плоской. В зависимости от этого линзы называют двояковыпуклыми, двояковогнутыми, плоско-выпуклыми или плоско-вогнутыми. При этом линзы более толстые в центре, чем по краям, называются *собирающими* (рис. 15.19), а линзы, которые в цент-

ре тоньше, чем у краев, – *рассеивающими* (рис. 15.20). Линия, проходящая через центры кривизны обеих поверхностей, называется *главной оптической осью*.

Рассмотрим двояковыпуклую линзу, толщина которой в центре равна l , а радиусы кривизны сферических поверхностей R_1 и R_2 (рис. 15.21). Пусть линза изготовлена из материала с показателем преломления n_2 и находится в среде с показателем преломления $n_1 < n_2$. Для передней поверхности линзы (т.е. со стороны распространения луча) уравнение (15.7) примет вид

$$\frac{n_1}{d} - \frac{n_2}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}, \quad (15.8)$$

где знак «минус» перед вторым слагаемым в левой части связан с тем, что при таком расположении источника и линзы, как на рис. 15.21, изображение S' мнимое.

Применим уравнение (15.7) ко второй поверхности. Лучи падают на вторую поверхность так, как если бы они исходили из точки S' в среде с показателем преломления n_2 . В силу вышеуказанных соглашений

$$\frac{n_2}{f'+l} + \frac{n_1}{f} = \frac{n_1 - n_2}{R'_2}, \quad (15.9)$$

где $R'_2 = -R_2 < 0$, так как вторая сферическая поверхность, если ее рассматривать со стороны распространения луча, вогнутая.

Предполагая, что толщина линзы l мала по сравнению с f' из (15.8)–(15.9) получим

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right\}. \quad (15.10)$$

Соотношение (15.10) называют *уравнением шлифовщика линз*.

Если на тонкую линзу падают лучи, параллельные главной оптической оси, то они собираются в точке, называемой *фокальной точкой* или *фокусом* F . Поэтому если источник удалить на бесконечность ($d = \infty$), то на линзу будут падать лучи, параллельные главной оптической оси, и расстояние до изображения f совпадает с *фокусным расстоянием* F :

$$\frac{1}{F} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right\}, \quad (15.11)$$

или с учетом (15.10)

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}. \quad (15.12)$$

Это и есть так называемое *уравнение тонкой линзы*.

Величина, обратная фокусному расстоянию

$$D = \frac{1}{F},$$

называется *оптической силой* линзы (измеряется в *диоптриях* [длтр]).

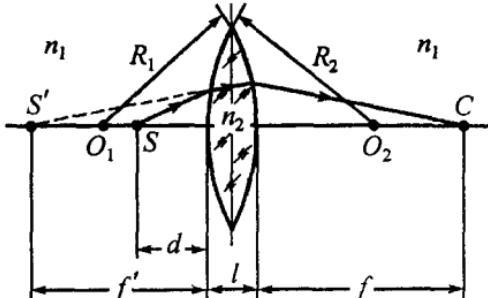


Рис. 15.21

Как следует из выражения (15.11), если линзу перевернуть так, что свет будет падать на нее с противоположной стороны, то фокусное расстояние останется прежним, даже если различна кривизна ограничивающих линзу поверхностей, т.е. фокусы F располагаются по обе стороны от линзы на одинаковых расстояниях.

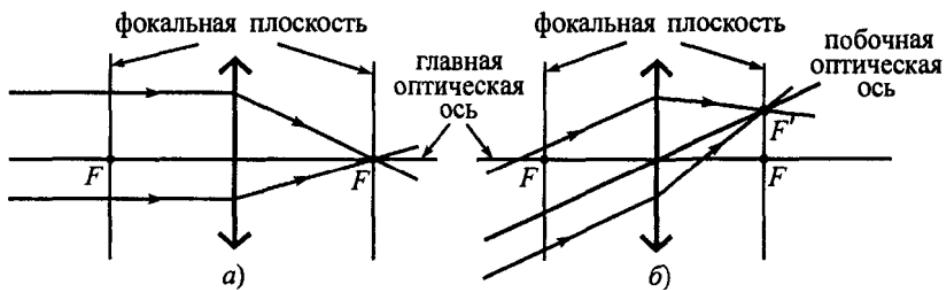


Рис. 15.22

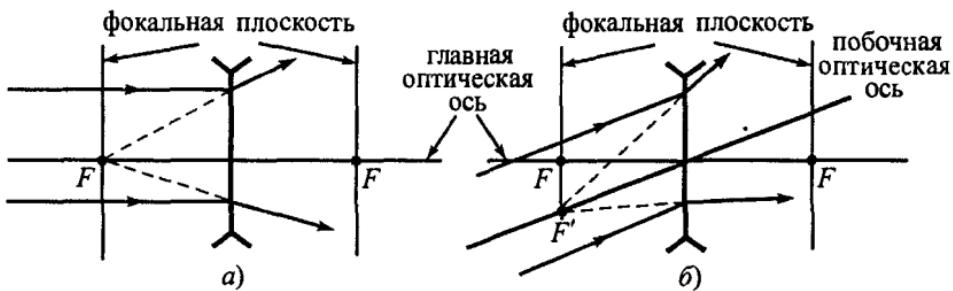


Рис. 15.23

Линия, проходящая через геометрический центр линзы и не совпадающая с главной оптической осью, называется *побочной оптической осью*. Очевидно, что любая собирающая линза будет сводить параллельные лучи в точку: лучи, параллельные главной оптической оси линзы, пересекутся в фокусе F (рис. 15.22, а), а лучи, падающие на линзу под некоторым углом, – в побочном фокусе F' (рис. 15.22, б). Плоскость, в которой расположены все точки типа F и F' , называется *фокальной плоскостью линзы*. У рассеивающей линзы параллельные лучи за линзой будут расходиться, а их продолжения пересекутся в фокусе (при падении на линзу под углом – в побочном фокусе F'), расположеннем со стороны падения лучей (рис. 15.23, а, б).

Изображение предмета в линзе можно получить, построив изображение каждой его точки, т.е. найдя пересечения лучей, исходящих из этой точки, после их преломления в линзе. В принципе, при этом достаточно найти пересечение каких-либо двух из этих лучей. Например, если известны положения линзы и ее фокусов, то изображение точки будет в месте пересечения любой пары из трех лучей: луч I параллелен главной оптической оси, поэтому, преломившись в линзе, он пройдет через фокус за линзой, если линза собирающая (рис. 15.24), или будет отклоняться от главной оптической оси так, как будто он выходит из фокуса перед линзой.

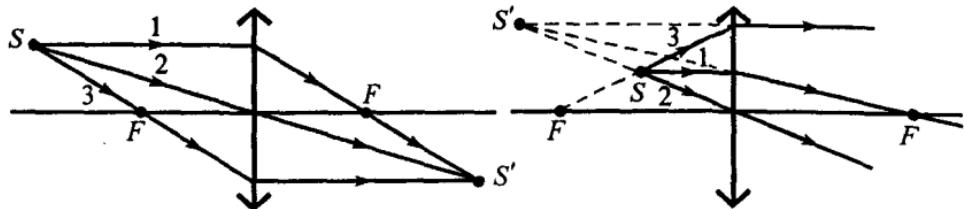


Рис. 15.24

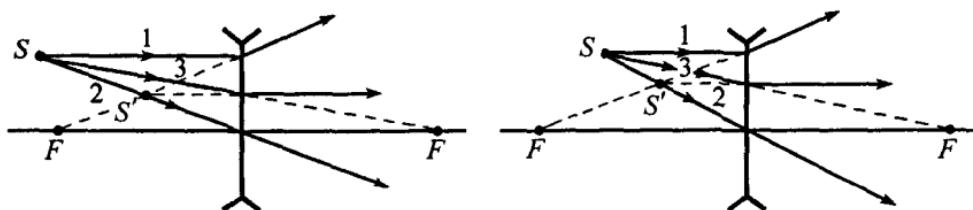


Рис. 15.25

зой, если линза рассеивающая (рис. 15.25); луч 2 проходит через центр линзы, где обе поверхности, по существу, параллельны, поэтому этот луч выйдет из линзы под первоначальным углом; луч 3 в случае собирающей линзы идет через фокус, расположенный по ту же сторону от линзы, что и точка, поэтому в результате преломления линзой он оказывается параллельным главной оптической оси; в случае, когда линза рассеивающая, луч 3 распространяется в направлении фокуса, расположенного за линзой, и также после преломления становится параллельным главной оптической оси. Если любые два из этих лучей пересекаются в некоторой точке, то изображение будет действительным, если же пересекаются их продолжения, то изображение будет мнимым. Как видим из рис. 15.24 и рис. 15.25, действительное изображение может быть получено только собирающей линзой, если предмет находится за фокусом, при этом изображение перевернутое. Если же предмет расположен между фокусом и линзой или линза рассеивающая, то изображение будет мнимым и прямым.

Геометрические построения часто оказываются полезными, и мы воспользуемся ими для иллюстрации правильности вывода уравнения линзы и найдем ее увеличение. Рассмотрим предмет AA' и его изображение BB' , например, в рассеивающей линзе (рис. 15.26). Треугольники $\Delta FBB'$ и ΔFCP , $\Delta APA'$ и $\Delta BPB'$ подобны, поэтому

$$\frac{BB'}{CP} = \frac{F-f}{F}, \quad \frac{BB'}{AA'} = \frac{f}{d}.$$

Левые части этих равенств одинаковы, так как $CP = AA'$. Приравнивая их правые части, поделив на f и переставив члены, получим соотношение

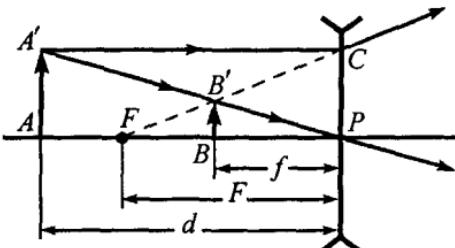


Рис. 15.26

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F},$$

которое представляет собой уравнение (15.12) для рассеивающей линзы, если учсть правила знаков:

- фокусное расстояние F положительно для собирающих линз и отрицательно для рассеивающих;
- расстояние d до предмета положительно, если предмет действительный, и отрицательно в противном случае;
- расстояние до изображения f положительно, если предмет и изображение находятся по разные стороны от линзы (действительное изображение), и отрицательно, если предмет и изображение находятся по одну сторону от линзы (изображение мнимое).

Так же легко из рисунка можно найти *увеличение линзы*, т.е. отношение высоты изображения h' к высоте предмета h :

$$\Gamma = \frac{h'}{h} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{f}{d}. \quad (15.13)$$

Оптические приборы и системы

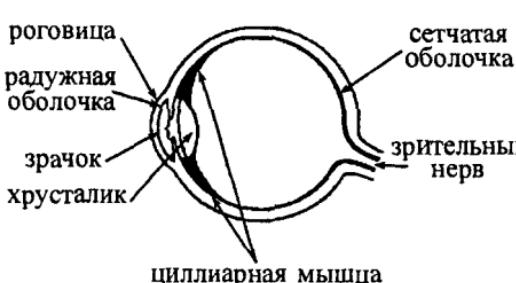


Рис. 15.27

Рассмотрим всем хорошо известную оптическую систему – *человеческий глаз*. Глаз (рис. 15.27) представляет собой замкнутый объем, в который свет попадает через хрусталик. У глаза имеется диафрагма, называемая радужной оболочкой, которая автоматически регулирует количество попадающего в глаз света. Отверстие

в радужной оболочке, через которое проходит свет, называется зрачком, а задняя поверхность глаза, играющая роль светочувствительной пленки, называется сетчатой оболочкой. Кроме этого у глаза имеются другие специфические детали, например, обеспечивающие его механическую защиту от внешней среды.

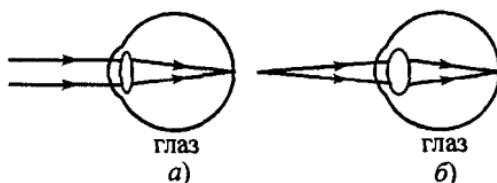


Рис. 15.28

Линза глаза (хрусталик) слабо преломляет световые лучи. Преломление в основном происходит на передней поверхности роговицы, которая служит также предохранительным покрытием. Хрусталик обеспечивает точную

фокусировку глаза на различные расстояния. Эта фокусировка достигается сокращением цилиарных мышц, в результате которого происходит изменение кривизны хрусталика и, следовательно, его фокусного расстояния. При фокусировке на дальний объект мышцы расслабляются и хрусталик становится тонким (рис. 15.28, а). При фокусировке на близкий

объект мышцы напрягаются, вызывая утолщение хрусталика в центре (рис. 15.28, б) и, следовательно, фокусное расстояние сокращается. Подобная юстировка называется *аккомодацией* глаза (т.е. это способность глаза создавать отчетливые изображения предметов, находящихся на разных расстояниях).

Для более детального рассмотрения предмета мы подносим его ближе к глазам, чтобы увеличить угол зрения. Например, небольшой предмет с расстояния 30 см кажется вдвое больше, чем с расстояния 60 см (рис. 15.29). Однако наши глаза способны аккомодироваться лишь до определенного предела. Расстояние, на котором глаз может обеспечить четкую фокусировку при максимальном угле зрения без чрезмерного напряжения мышц, называется *расстоянием наилучшего зрения*, а максимальное расстояние – *пределом зрения* и отвечает случаю полного расслабления мышц глаза. Для нормального глаза расстояние наилучшего зрения d_0 составляет в среднем около 25 см, а предел зрения очень велик, и мы будем считать его бесконечным. С возрастом человека способность глаз к аккомодации снижается, и расстояние наилучшего зрения возрастает.

Два наиболее распространенных дефекта зрения – это близорукость и дальнозоркость. Близорукостью страдает глаз, который может фокусироваться только на близких предметах, а удаленные предметы видят расплывчато. У такого глаза изображения удаленных предметов фокусируются перед сетчаткой. Для коррекции близорукости применяют рассеивающие линзы, которые заставляют параллельные лучи (т.е. лучи от удаленных объектов) расходиться и фокусироваться на сетчатке (рис. 15.30, а). Дальнозоркостью страдает глаз, который не может фокусироваться на близких объектах. Для устранения дефекта зрения здесь используют собирающие линзы (рис. 15.30, б).

Наиболее простым оптическим устройством, позволяющим получить увеличенное изображение предмета, служит лупа, представляющая собой обыкновенную собирающую линзу.

Лупа позволяет видеть предмет под большим углом (рис. 15.31). При этом предмет помещают в фокальной плоскости линзы или поблизости от нее. *Мнимое изображение* предмета, создаваемое собирающей линзой, должно находиться от глаза на расстоянии не менее 25 см, чтобы глаз мог сфокусироваться на нем. Угловым *увеличением*, а часто просто *уве-*

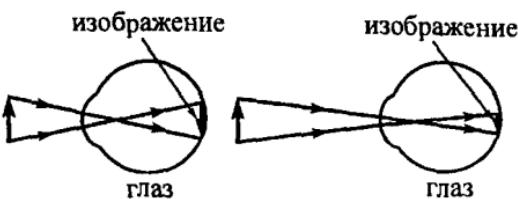


Рис. 15.29

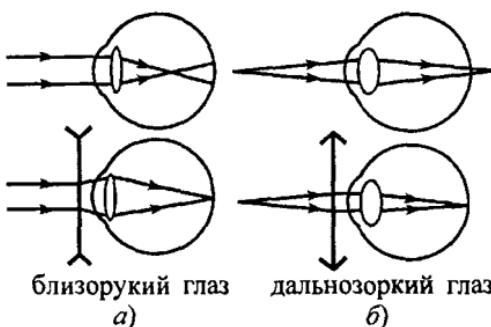
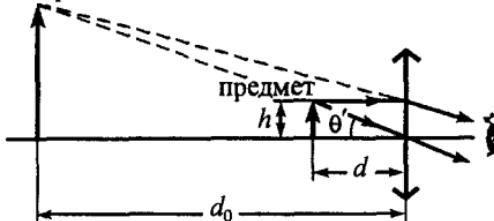


Рис. 15.30

изображение



предмет

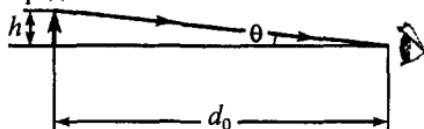


Рис. 15.31

личением, Γ лупы называется отношение углов, под которыми виден предмет при использовании линзы и при рассмотрении его невооруженным глазом с расстояния наилучшего зрения d_0 :

$$\Gamma = \frac{\theta'}{\theta}.$$

Это соотношение можно выразить через фокусное расстояние F линзы. Если изображение находится на расстоянии d_0 от глаза, то расстояние до предмета d можно определить из формулы линзы

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} = \frac{1}{F},$$

где знак «минус» перед вторым слагаемым соответствует мнимому изображению. Тогда

$$d = \frac{F d_0}{F + d_0}.$$

Если высота предмета столь мала, что углы θ и θ' приближенно равны соответственно их синусам и тангенсам, то

$$\theta' = \frac{h}{d} = \frac{(F + d_0) h}{F d_0} \quad \text{и} \quad \theta = \frac{h}{d_0}.$$

Следовательно, увеличение лупы

$$\Gamma = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{F + d_0}{F} = 1 + \frac{d_0}{F}. \quad (15.14)$$

Формула (15.14) соответствует аккомодации глаза на расстояние наилучшего зрения. Если при использовании лупы мышцы глаз полностью расслаблены, то изображение будет находиться на бесконечности, а объект расположен в фокусе ($d = F$). В этом случае $\theta' = h/F$ и

$$\Gamma = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{d_0}{F}. \quad (15.15)$$

Из сравнения выражений (15.14) и (15.15) видно, что несколько лучшего увеличения можно достичь, когда глаз фокусируется в точку на расстоянии наилучшего зрения, однако в этом случае приходится напрягать мышцы глаза.

При необходимости подробно рассмотреть предметы, находящиеся на очень большом удалении, применяют телескопы.

Существует несколько типов астрономических телескопов. Обычный телескоп, часто называемый кеплеровским, имеет две собирающие линзы,

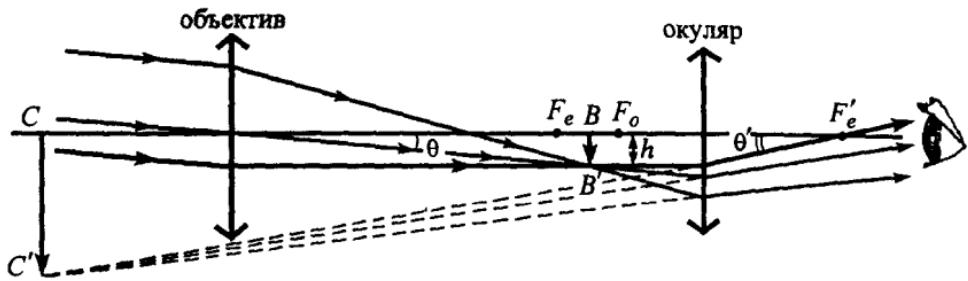


Рис. 15.32

расположенные на противоположных концах длинной трубы (рис. 15.32). Линза, обращенная к рассматриваемому объекту, называется *объективом*; она создает действительное изображение BB' предмета в своей фокальной плоскости F_o (или вблизи нее, если объект оказывается не бесконечно удаленным). Хотя изображение BB' меньше самого объекта, оно расположено очень близко ко второй линзе, называемой *окуляром* и действующей как лупа. Это означает, что окуляр увеличивает создаваемое объективом изображение, в результате чего возникает второе, сильно увеличенное изображение CC' , которое будет мнимым. Если мышцы глаза наблюдателя расслаблены, то окуляр регулируется (говорят *юстируется*) так, чтобы изображение CC' оказалось на бесконечности. В этом случае действительное изображение BB' будет находиться в фокальной точке окуляра F_e и в случае бесконечно удаленного предмета расстояние между линзами должно быть равно $F_o + F_e$.

Чтобы определить полное увеличение кеплеровского телескопа, заметим, что угол, под которым объект виден невооруженным глазом, совпадает с углом θ , под которым объект виден из объектива телескопа. Из рис. 15.32 ясно, что

$$\theta \approx \frac{h}{F_o},$$

где h – высота изображения BB' (здесь предполагается, что угол θ мал, и поэтому $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$). Луч, проведенный на рис. 15.32 самой жирной линией, до попадания в окуляр параллелен главной оптической оси и, следовательно, проходит через фокус F'_e . Таким образом,

$$\theta' \approx \frac{h}{F'_e},$$

и полное увеличение кеплеровского телескопа

$$\Gamma = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{F_o}{F'_e}. \quad (15.16)$$

Очевидно, что для получения большего увеличения телескопа в качестве объектива следует выбирать более длиннофокусную линзу, а в качестве окуляра – более короткофокусную.

Зрительная труба в отличие от своего астрономического аналога – телескопа – должна давать прямое изображение. На рис. 15.33 изображены две конструктивные схемы зрительных труб. На рис. 15.33, а показана

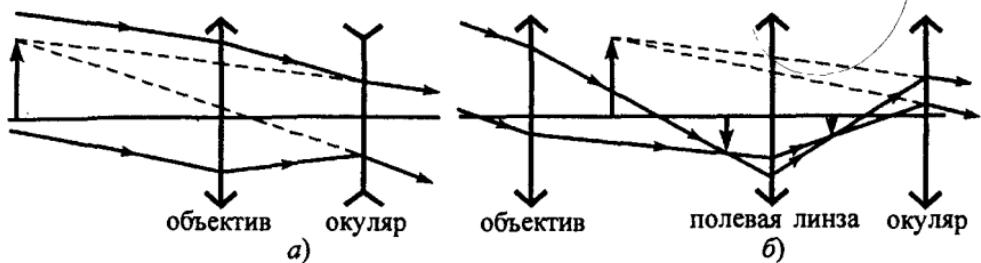


Рис. 15.33

схема зрительной трубы (телескопа) Галилея. В качестве окуляра здесь используется рассеивающая линза, которая располагается на пути сходящихся лучей до того, как они достигнут фокуса объектива. С помощью окуляра образуется мнимое прямое изображение. Конструкцию, изображенную на рис. 15.33, б, часто называют *подзорной трубой*; в ней используется третья (полевая) линза, предназначенная для получения прямого изображения. Объективом и окуляром здесь служат собирающие линзы.

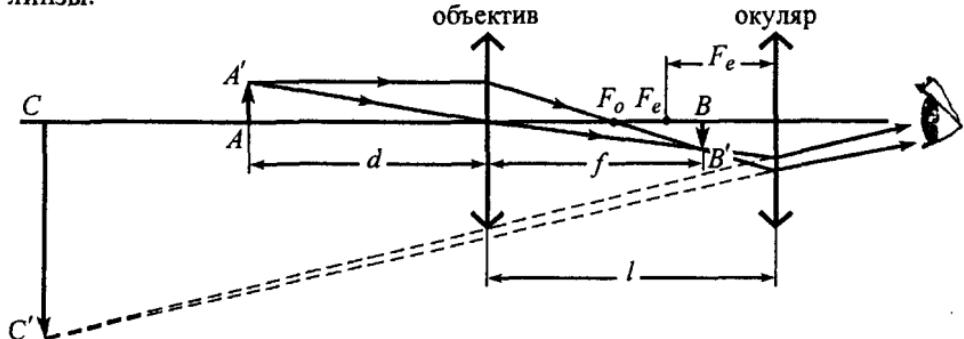


Рис. 15.34

Для наблюдения очень близких объектов используют микроскопы. Подобно телескопу микроскоп имеет и объектив, и окуляр. Рассматриваемый объект располагают непосредственно перед фокальной плоскостью объектива, как показано на рис. 15.34. Создаваемое объективом действительное изображение BB' находится далеко от линзы (вблизи фокальной плоскости окуляра) и увеличено. В свою очередь, это изображение увеличивается окуляром и превращается в еще большее, но теперь уже мнимое изображение CC' , наблюдаемое глазом.

Полное увеличение микроскопа равно произведению увеличений объектива и окуляра. Изображение BB' , создаваемое объективом, в Γ_o раз больше самого объекта. Из рис. 15.34 и формулы (15.13) для увеличения простой линзы получим

$$\Gamma_o = \frac{f}{d} = \frac{l - F_e}{d},$$

где l – расстояние между линзами (равное длине тубуса). Окуляр действует, как простая лупа. Если предположить, что мышцы глаза расслаблены, то увеличение окуляра Γ_e равно (см. уравнение (15.15))

$$\Gamma_e = \frac{d_0}{F_e},$$

где d_0 – расстояние наилучшего зрения. Так как окуляр увеличивает создаваемое объективом изображение, то общее увеличение микроскопа

$$\Gamma = \Gamma_o \Gamma_e = \frac{l - F_e}{d} \frac{d_0}{F_e} \approx \frac{d_0 l}{F_o F_e}. \quad (15.17)$$

Формула (15.17) обеспечивает достаточную точность, если фокусные расстояния F_o и F_e малы по сравнению с l , так что $l - F_e \approx l$ и $d \approx F_o$.

Волновая оптика

Прежде чем приступить к изучению свойств света с волновых позиций, вспомним один из законов электромагнетизма. В соответствии с законом электромагнитной индукции, открытым Фарадеем, любое изменение индукции магнитного поля вызывает появление в окружающем пространстве вихревого электрического поля. Максвелл предположил, что справедливо и обратное утверждение: любое изменение напряженности электрического поля сопровождается возникновением вихревого магнитного поля. Согласно гипотезе Максвелла, однажды начавшийся в некоторой точке процесс изменения электромагнитного поля будет непрерывно захватывать все новые области окружающего пространства. Максвелл показал, что электромагнитное поле может существовать и при отсутствии источников – зарядов и токов. При этом переменное электромагнитное поле в среде без источников будет представлять собой волну (которую называют *электромагнитной волной*), распространяющуюся со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (15.18)$$

Совпадение скорости электромагнитных волн в вакууме ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

с измеренной задолго до их открытия скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с послужило отправным пунктом для отождествления света с электромагнитными волнами и создания электромагнитной теории света.

Поскольку электрическое и магнитное поля имеют энергию, то электромагнитная волна переносит эту энергию в направлении своего распространения. Энергия, переносимая волной через единицу площади в единицу времени, называется *интенсивностью* волны.

Излучателями оптических волн являются атомы и молекулы. В каждом атоме процесс излучения длится очень короткое время (порядка 10^{-8} с), затем обрывается и начинается вновь с иной интенсивностью и начальной фазой. Поэтому два независимых источника света возбуждают волны с быстро изменяющейся разностью фаз. Если свет от таких источников направить на экран, то в результате наложения этих волн вся поверхность экрана будет равномерно освещена с некоторой средней интенсивностью.

Если же одну волну расчленить на две или более, то при наложении полученных таким образом волн разные точки экрана будут освещены с разной интенсивностью. Явление увеличения или уменьшения интенсивности света при наложении нескольких волн называют *интерференцией*.

Другим известным явлением, обусловленным волновой природой света, является *дифракция*, под которой понимают огибание волнами препятствий и проникновение в «область тени», т.е. отклонение света от прямолинейного распространения. В приближении геометрической оптики свет за непрозрачной преградой с отверстием (или щелью) не должен проникать в область геометрической тени. Как показывает опыт, в действительности за преградой свет распространяется по всем направлениям, причем проникновение в область геометрической тени тем существеннее, чем меньше размеры отверстий. При диаметре отверстий или ширине щелей, сравнимых с длиной волны, приближение геометрической оптики оказывается совершенно неправомерным.

Качественно поведение света за преградой с отверстием может быть объяснено с помощью *принципа Гюйгенса*. Принцип Гюйгенса основан на представлении, что каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, распространяющихся от нее во все стороны, и результирующую волну можно рассматривать как наложение вторичных волн (этот принцип справедлив не только для световых волн, но и для любых волновых процессов. Например, если камень бросить в воду, то от места падения побегут волны, и этот процесс будет продолжаться также после того, как камень упадет на дно, т.е. исчезнет причина, породившая первоначальное возмущение. Отсюда следует, что непосредственной причиной распространения волнового процесса является не камень, а возмущение воды, которое он вызвал).

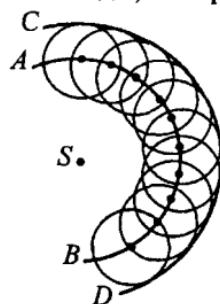


Рис. 15.35

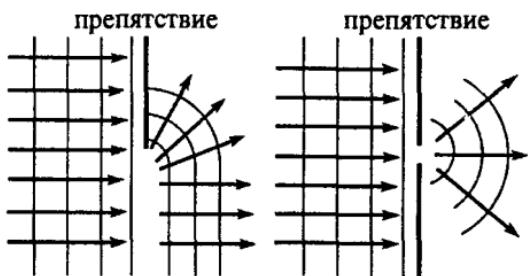


Рис. 15.36

В качестве примера применения принципа Гюйгенса рассмотрим волновой фронт *AB* (волновым фронтом называют геометрическое место точек, до которых дошли колебания к данному моменту времени, т.е. это поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченнную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли), распространяющийся от источника *S* (рис. 15.35). Будем считать, что скорость *v* волн одинакова по всем направлениям (говорят, среда *изотропна*).

на). Чтобы найти положение волнового фронта спустя короткий промежуток времени t после того, как он занимал положение AB , проведем окружности радиусом $r = v t$. Центры этих окружностей лежат на исходном волновом фронте AB , а сами окружности представляют собой элементарные волны Гюйгенса. Огибающая этих элементарных волн – линия CD – определяет новое положение волнового фронта.

Принцип Гюйгенса особенно полезен при рассмотрении случаев, когда волны встречают на своем пути какое-либо препятствие и волновой фронт частично прерывается. Согласно принципу Гюйгенса, волны должны огибать препятствия, как это показано на рис. 15.36.

Между интерференцией и дифракцией света нет физических различий: то и другое заключается в перераспределении интенсивности света в результате наложения волн. Если рассматриваются волны, возбуждаемые дискретными источниками, то говорят об интерференции; если же источники расположены непрерывно, – то о дифракции.

Интерференция

В качестве примера интерференции от двух источников рассмотрим схему опыта Юнга. Свет от источника проходит через щель S и затем падает на второй экран, в котором на близком расстоянии друг от друга прорезаны две щели – S_1 и S_2 (рис. 15.37).

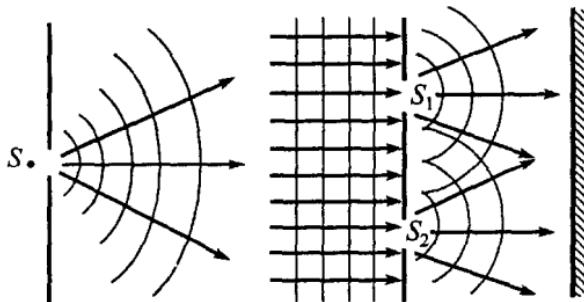


Рис. 15.37

Если свет рассматривать с позиций геометрической оптики, то на экране, расположеннном позади щелей, следует ожидать две яркие линии. Но Юнг наблюдал целую серию ярких линий и объяснил это как результат интерференции волн. Чтобы понять ход его рассуждений, представим себе две волны света, падающие на две щели. Согласно принципу Гюйгенса, за щелями волны будут распространяться по всем направлениям. Рассмотрим только волны, распространяющиеся под тремя углами (рис. 15.38). На рис. 15.38, a показаны волны, попадающие в центр экрана. Очевидно, что здесь от каждой из щелей волны проходят одинаковое расстояние и достигают экрана в одной фазе. При этом в центре экрана возникает светлое пятно, что свидетельствует о максимуме интерференционной картины в данной точке. Легко понять, что увеличение интенсивности света при наложении двух волн возникает каждый раз, когда разность хода ΔS этих волн (т.е. разность путей, проходимых волнами) равна целому числу длин волн (четному числу длин половин), как показано на рис. 15.38, b . Но если одна из волн проходит дополнительное расстояние, равное полуцелому числу

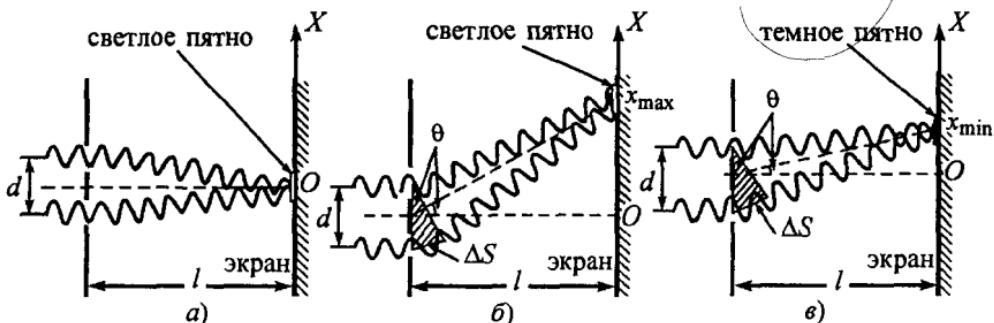


Рис. 15.38

длин волн (нечетному числу длин полуволн), то обе волны попадут на экран в противофазе (рис. 15.38, в). В этом случае наблюдается *минимум интерференционной картины*, и экран в данном месте оказывается темным. Так образуется схема светлых и темных полос (говорят, *интерференционных полос*).

Определим положение этих полос на экране. Пусть расстояние между щелями равно d , а длины волн λ . Если расстояние d между щелями очень мало по сравнению с расстоянием l до экрана, то лучи, вдоль которых распространяются волны, вблизи экрана будут почти параллельны. Из заштрихованных треугольников на рис. 15.38, б, в видно, что разность хода ΔS волн равна дополнительному расстоянию $d \sin \theta$, проходимому нижней волной, где θ – угол, образуемый лучами с перпендикуляром к поверхностям преграды и экрана. Максимум интерференционной картины на экране наблюдается, если величина ΔS равна целому числу длин волн или четному числу длин полуволн

$$\Delta S = \pm m \lambda, \quad d \sin \theta = \pm m \lambda, \quad (15.19)$$

а минимум – если полуцелому числу длин волн или нечетному числу длин полуволн

$$\Delta S = \pm (m + \frac{1}{2}) \lambda, \quad d \sin \theta = \pm (m + \frac{1}{2}) \lambda, \quad (15.20)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$ называется *порядком* интерференционной полосы.

Соотношения (15.19) – (15.20) соответствуют случаю, когда интерферирующие волны распространяются в вакууме. Если волна распространяется в некоторой среде с показателем преломления n , то ее скорость v будет в n раз меньше, чем в вакууме. При этом длина волны частотой v

$$\lambda = \frac{v}{n}, \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{c}{n v}$$

(где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме) также уменьшится в n раз и на том же участке пути будет укладываться другое число длин волн. Поэтому если интерферирующие волны проходят через среды с различными показателями преломления n_1 и n_2 , то в формулах (15.19) – (15.20) разность хода ΔS следует заменить *оптической разностью хода*

$$\Delta = |n_1 S_1 - n_2 S_2|, \quad (15.21)$$

где S_1, S_2 – пути, пройденные первой и второй волной соответственно.

Если обе волны распространяются в одной и той же среде с показателем преломления n , то с учетом (15.21) выражения (15.19) – (15.20) примут вид

$$n \Delta S = \pm m \lambda, \quad n d \sin \theta = \pm m \lambda, \quad (15.22)$$

$$n \Delta S = \pm (m + \frac{1}{2}) \lambda, \quad n d \sin \theta = \pm (m + \frac{1}{2}) \lambda, \quad (15.23)$$

где λ – длина волны в вакууме.

Так как в действительности интерференционные полосы наблюдаются только в небольшой области экрана (так называемое *поле интерференции*), то можно считать, что углы θ малы и $\operatorname{tg} \theta \approx \sin \theta$. Поэтому максимумы интерференции будут наблюдаться в точках экрана с координатами

$$x_{\max} = \pm l \operatorname{tg} \theta_{\max},$$

или с учетом (15.22)

$$x_{\max} \approx \pm l \sin \theta_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \frac{\lambda}{n}. \quad (15.24)$$

Аналогично координаты минимумов

$$x_{\min} \approx \pm l \sin \theta_{\min} = \pm (m + \frac{1}{2}) \frac{l}{d} \frac{\lambda}{n}. \quad (15.25)$$

Расстояние между двумя соседними максимумами называют *расстоянием между интерференционными полосами*, а расстояние между соседними минимумами – *шириной интерференционной полосы*. Из формул (15.24) и (15.25) следует, что расстояния между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение, равное

$$\Delta x = \frac{l}{d} \frac{\lambda}{n}. \quad (15.26)$$

Две щели на рис. 15.38 действуют подобно источникам излучения. Такие источники называют *когерентными*. В общем случае когерентными являются источники, если испускаемые ими волны синусоидальны, имеют одинаковую частоту и постоянную во времени разность фаз. Необходимо отметить, что интерференционная картина наблюдается только для когерентных источников. Если источники некогерентные, например, лампы накаливания, то интерференции мы не увидим: любая поверхность будет равномерно освещенной.

Интерференция света порождает многочисленные явления, наблюдавшиеся нами в повседневной жизни, например, радужные переливы мыльных пузырей или тонких пленок нефти на воде. Чтобы понять происходящее, рассмотрим тонкую пленку нефти на воде (рис. 15.39). Часть падающего света отражается от верхней поверхности, а часть света проходит внутрь пленки и отражается от ее нижней поверхности. Волна, отраженная от нижней поверхности, проходит относительно волны, отраженной от верхней поверхности, дополнительный путь ABC . Если оптический путь ABC равен длине волны или целому числу длин волн, то обе волны, ин-

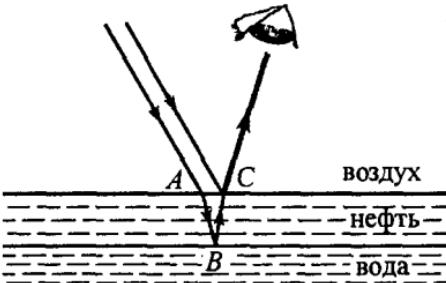


Рис. 15.39

терферируя, дадут максимум интерференционной картины. Если же оптический путь ABC кратен нечетному числу длин полуволн, то интерферирующие волны окажутся в противофазе и возникнет минимум интерференции.

Если на тонкую пленку падает белый свет (т.е. свет, содержащий все длины волн), то оптический путь ABC будет кратен целому числу длин волн при данном угле зрения только для определенной длины волны. Соответствующая этому условию окраска интерференционной полосы будет яркой. Для света, падающего под другим углом, интерференция будет происходить для других длин волн. Таким образом, мы увидим яркие разноцветные полосы, расположенные друг за другом. На окраску и последовательность расположения полос также влияет неоднородность пленки по толщине.

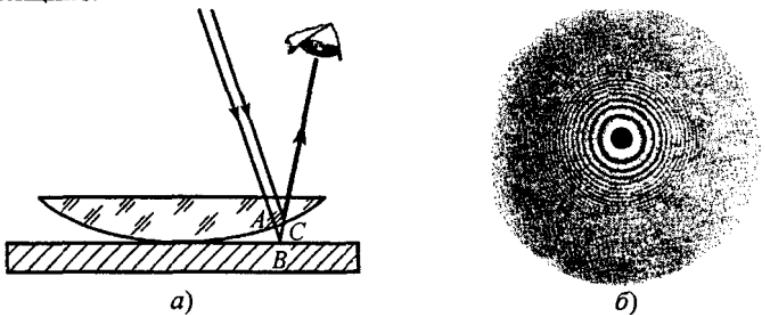


Рис. 15.40

Интерференцию можно наблюдать при освещении монохроматическим светом искривленной стеклянной поверхности (например, выпуклой линзы), соприкасающейся с плоской стеклянной поверхностью (рис. 15.40, а). Здесь мы увидим серию концентрических окружностей (рис. 15.40, б), называемых *кольцами Ньютона*. Они возникают вследствие интерференции света, отраженного от верхней и нижней границ воздушного зазора между стеклами. Поскольку толщина этого зазора растет по мере удаления от точки касания к краям, то дополнительный оптический путь ABC также увеличивается. Поэтому в некоторых местах будут наблюдаться максимумы интерференции, а в некоторых – минимумы.

Можно заметить, что точка соприкосновения двух стекол оказывается темной. Так как оптическая разность хода волн в этой точке равна нулю, то можно было бы ожидать, что волны, отражаясь от верхней и нижней границ зазора, находятся в фазе, и точка соприкосновения будет светлой. Но в действительности она оказывается темной, и это свидетельствует о том, что волны находятся в противофазе. Так может происходить только в случае, если одна из волн при отражении меняет фазу на 180° . Как показывают опыты, в частности с кольцами Ньютона, при отражении волны от среды с большим показателем преломления ее фаза изменяется на 180° , что эквивалентно изменению оптического пути на $\frac{1}{2}\lambda$. При отражении волны от среды с меньшим показателем преломления ее фаза не меняется. Этот результат можно получить и аналитически.

Дифракция

Чтобы понять, как возникает дифракционная картина, проанализируем прохождение монохроматического света через узкую щель. Если источник света и экран находятся от щели настолько далеко, что лучи, вдоль которых распространяются волны, падающие на щель, и лучи, идущие к экрану, практически параллельны, то говорят о *дифракции в параллельных лучах*, или о *дифракции Фраунгофера*. Если экран расположен вблизи щели, то имеет место *дифракция Френеля*. Анализ дифракции Френеля сложен, поэтому мы ограничимся только случаем дифракции Фраунгофера.

Пусть параллельные лучи света падают на узкую щель шириной b (рис. 15.41), за которой на достаточно большом расстоянии находится экран. Для наблюдения дифракции поместим на пути лучей между щелью и экраном собирающую линзу так, чтобы экран оказался в ее фокальной плоскости.

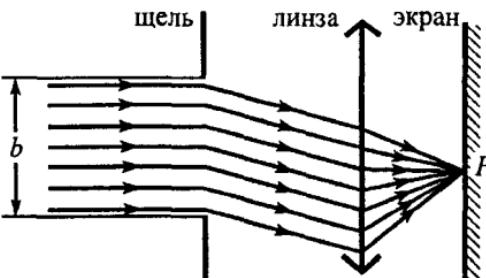


Рис. 15.41

Из принципа Гюйгенса следует, что волны, пройдя через узкую щель, распространяются по всем направлениям. Нас будет интересовать, как интерферируют волны, проходящие через различные участки щели.

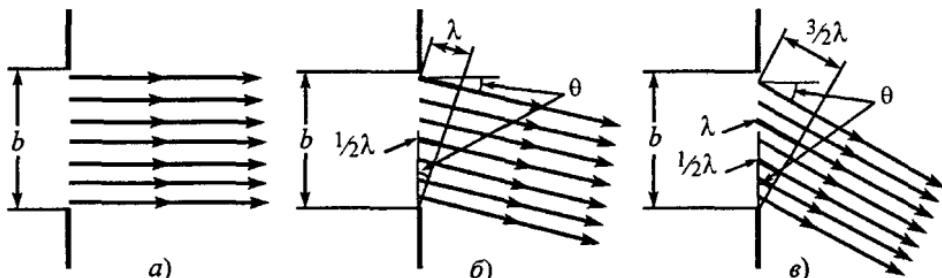


Рис. 15.42

Так как экран расположен далеко от щели, то лучи, вдоль которых распространяются волны в направлении любой из точек экрана, можно считать параллельными. Рассмотрим сначала лучи, перпендикулярные плоскости экрана (рис. 15.42, а). Волны, распространяющиеся вдоль этих лучей, находятся в фазе, поэтому в центре экрана возникнет светлое пятно. Если лучи идут под углом θ таким, что луч из верхнего края щели проходит ровно на одну длину волны больше луча от нижнего края щели (рис. 15.42, б), то луч из центра щели пройдет путь на половину длины волны больше, чем от нижнего края. Волны, соответствующие этим лучам, окажутся в противофазе и, интерферируя, ослабят друг друга. Аналогично, волна из точки щели, расположенной чуть выше нижнего края щели, ослабит волну из точки, расположенной на таком же расстоянии

над центром щели. Таким образом, каждая волна из точки в нижней половине щели ослабит соответствующую волну из ее верхней половины. Интерферируя попарно, все волны ослабят друг друга, поэтому на экране под данным углом θ света не будет. Угол θ , при котором происходит максимальное ослабление света, как видно из рис. 15.42, б, удовлетворяет соотношению

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{b}. \quad (15.27)$$

Очевидно, что интенсивность света максимальна при углах $\theta = 0$ и убывает до минимума при угле θ , задаваемом соотношением (15.27).

Рассмотрим теперь больший угол θ , такой, что луч из верхнего края щели проходит путь, на $\frac{3}{2}\lambda$ превышающий путь луча из нижнего края (рис. 15.42, в). В этом случае волны из точек нижней трети щели, попарно интерферируя, ослабят соответствующие волны из средней трети, так как в каждой паре волны окажутся в противофазе. Но волны из верхней трети щели, интерферируя, дадут на экране светлое пятно, не столь яркое, как при угле $\theta = 0$. При еще большем угле θ , таком, что луч из верхнего края щели проходит путь, на 2λ превышающий путь луча из нижнего края, волны из нижней четверти щели будут ослаблять волны из второй снизу четверти, так как разность хода между ними составит $\frac{1}{2}\lambda$. В свою очередь, волны из четверти щели, расположенной непосредственно над ее



Рис. 15.43

центром, интерферируя с волнами из верхней четверти щели, ослабят их. Следовательно, на экране снова будет минимум интенсивности. График зависимости интенсивности света от синуса угла θ показан на рис. 15.43, где минимумы интенсивности возникают при

$$b \sin \theta = \pm m \lambda, \quad (15.28)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$. Соотношение (15.28) выражает условие минимумов дифракционной картины на щели.

Рассмотрим теперь дифракцию на так называемой *дифракционной решетке*, состоящей из большого числа параллельных щелей, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Дифракционные решетки обычно изготавливают, нанося на стекло очень тонкие линии алмазным резцом; промежутки между штрихами служат щелями. Существуют также отражательные решетки, в которых штрихи наносят на металлическую поверхность: здесь дифракцию наблюдают в отраженном свете.

Анализ действия дифракционной решетки во многом напоминает анализ интерференции в опыте Юнга. Предположим, что на решетку падают параллельные лучи света (рис. 15.44). Волны, распространяющиеся за решеткой вдоль лучей, соответствующих углам $\theta = 0$, будут в фазе и в ре-

зультате интерференции дадут на экране светлое пятно. Очевидно, что для волн, распространяющихся под углами θ , усиление света имеет место, если разность хода ΔS будет кратна целому числу длин волн, т.е. при

$$d \sin \theta = m \lambda, \quad (15.29)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ называют порядком дифракционного максимума; d – расстояние между щелями (*период решетки*).

Если свет, падающий на дифракционную решетку, не монохроматичен, а содержит две или больше длин волн, то во всех порядках (кроме $m = 0$) для каждой длины волны максимумы будут возникать под своим углом. Например, если на решетку падает белый свет, то центральный максимум будет представлять собой светлую полосу, а во всех остальных порядках будет наблюдаться радужное цветное размытие по некоторому диапазону углов. Картину, получаемую при разложении света на составляющие, соответствующие различным длинам волн, называют *спектром*. Поэтому дифракционную решетку часто называют *спектральным прибором*. Дифракционные решетки служат для измерения длин волн света и используются в приборах (спектроскопах) для разделения цветов или для наблюдения спектров.

Одно из наиболее интересных практических применений дифракции света – голограммия. При рассмотрении объемных голограммических фотографий (голограмм) предмета зрительное ощущение такое, каким оно было бы при рассмотрении самого предмета (можно, например, заглянуть за предмет). При этом голограммы обладают удивительным свойством: изображение предмета можно получить по любой, достаточно небольшой части голограммы.

Рекомендации по решению задач

Прежде чем приступить к решению задач по геометрической оптике, необходимо запастись карандашом и линейкой, поскольку решение практически всех задач, в том числе и расчетного характера, нужно начинать с построения хода лучей или изображений предметов. Ниже под предметом будем понимать прямолинейный отрезок.

Задачи геометрической оптики разделим на две группы: задачи на законы отражения и задачи на законы преломления.

В первой группе задач можно отдельно выделить задачи на плоские и сферические зеркала. Если по условию задачи требуется выполнить только графическое построение изображения предмета в зеркале, то достаточно воспользоваться законом отражения и построить изображение двух его крайних точек (поскольку мы рассматриваем только такие зеркала, в которых изображение всякой прямой линии также будет прямой линией). Для построения изображения произвольной точки достаточно найти точку пересечения двух произвольных лучей (или их продолжений), отраженных от зеркала.

В плоском зеркале предмет и его изображение располагаются симметрично относительно зеркала и высота изображения равна высоте предмета. Для построения изображения

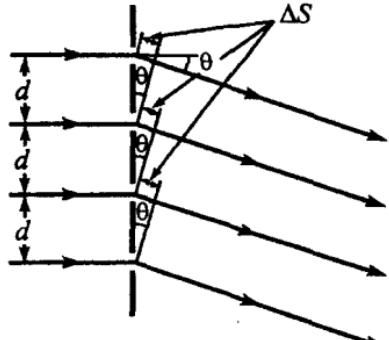


Рис. 15.44

произвольной точки используют два луча: первый луч падает перпендикулярно поверхности зеркала и отражается по тому же направлению, второй выбирают произвольно. Далее, построив нормаль к поверхности зеркала в точке падения этого луча и отраженный луч, находят точку пересечения его продолжения с продолжением первого луча. Если между предметом и зеркалом находится непрозрачный экран, то используют два произвольных луча, падающих на зеркало, минуя экран.

Если зеркало сферическое, то для построения изображения произвольной точки предмета удобно использовать два из трех лучей (см. рис. 15.11, 15.13, 15.14, 15.16):

– луч 1, параллельный главной оптической оси, после отражения в зеркале пройдет через фокус перед зеркалом, если зеркало вогнутое, или будет отклоняться от главной оптической оси так, как будто он выходит из фокуса за зеркалом, если зеркало выпуклое;

– луч 2 в случае вогнутого зеркала идет через фокус, расположенный со стороны падения луча, и после отражения идет параллельно главной оптической оси; если зеркало выпуклое, то луч 2 распространяется в направления фокуса, расположенного за зеркалом, и после отражения также становится параллельным главной оптической оси;

– луч 3, идущий в направлении центра кривизны зеркала, отражается в том же направлении.

Если отраженные от зеркала лучи пересекаются в некоторой точке, то изображение будет действительным, если же пересекаются их продолжения, то изображение будет мнимым. Действительное изображение предмета может дать только вогнутое сферическое зеркало, если предмет расположен за фокусом; при этом предмет и его изображение будут находиться с одной стороны от поверхности зеркала. Если же предмет расположен между фокусом и зеркалом или зеркало выпуклое, то его изображение будет мнимым: предмет и его изображение будут находиться с разных сторон от поверхности зеркала. При этом действительное изображение будет всегда перевернутым, а мнимое – прямым. Следует отметить, что это справедливо лишь для действительного предмета. Если предмет мнимый, то для определения, каким будет изображение (мнимым или действительным), необходимо провести численные расчеты.

Если точка, изображение которой следует построить, находится на главной оптической оси зеркала, то рассмотренные лучи 1, 2 и 3 сольются в один. Поэтому здесь обычно используются два луча. Первый из лучей идет вдоль оси зеркала и отражается по тому же направлению. Второй луч выбирают произвольно. Ход этого луча после отражения определяют так: проводят прямую из центра кривизны зеркала в точку падения луча (она совпадает с нормалью к поверхности зеркала) и, построив отраженный луч, находят точку его пересечения с первым лучом.

Задачи, связанные с построением изображений в системе зеркал, принципиально не отличаются от задач с одним зеркалом. Здесь следует иметь в виду, что изображение, полученное в одном зеркале, является предметом для другого. В таких задачах достаточно часто изображение предмета в первом зеркале находится за отражающей поверхностью второго; в этом случае лучи падают на второе зеркало сходящимся пучком, поэтому предмет для этого зеркала считается мнимым.

Независимо от количества зеркал в системе при решении задач расчетного характера следует помнить, что для каждого из зеркал справедливо уравнение зеркала (15.3) и формула (15.4) для увеличения. В общем случае уравнения (15.3) и (15.4) нужно записать для всех зеркал, руководствуясь правилами:

– если зеркало плоское, то фокусное расстояние $F \rightarrow \infty$, а расстояние d между предметом и зеркалом равно расстоянию f между зеркалом и изображением;

– расстояние d от предмета до зеркала положительно, если предмет действительный, и отрицательно в противном случае (мнимый предмет, т.е. на зеркало лучи падают сходящимся пучком);

– расстояние f от зеркала до изображения положительно, если предмет и изображение находятся по одну сторону от отражающей поверхности (действительное изображение, т.е. изображение получено при пересечении лучей), и отрицательно, если предмет и изображение находятся по разные стороны от поверхности зеркала (изображение мнимое, т.е. получено при пересечении продолжений лучей);

– для вогнутой отражающей поверхности сферического зеркала радиус R кривизны и фокусное расстояние F положительны, а для выпуклой – отрицательны.

В группе задач на законы преломления можно выделить задачи на преломление света на границе раздела сред (включая сюда задачи на прохождение лучей через плоскопараллельные пластиинки, призмы, шары и т.п.), задачи на построение и расчет изображений в одиночных линзах, задачи на оптические системы (содержащие линзы и зеркала или несколько линз) и задачи на оптические приборы (очки, лупа, микроскоп, зрительная труба, телескоп).

Задачи на преломление света на границе раздела сред решают на основании закона преломления (15.1) с использованием геометрии и тригонометрии. При решении задачи нужно прежде всего сделать чертеж, на котором указать ход лучей, идущих из одной среды в другую. Для этого в точке падения луча следует провести нормаль к границе раздела сред и отметить угол падения (угол между лучом и нормалью). Перед тем как чертить преломленный луч, необходимо выяснить, переходит ли он из оптически менее плотной среды в более плотную или наоборот. Если показатель преломления n_2 второй среды больше показателя преломления n_1 первой, то преломленный луч будет приближаться к нормали. Если $n_2 < n_1$, то преломленный луч отклоняется от нормали к границе раздела сред. В этом случае обязательно нужно провести численный расчет угла преломления. Если формально вычисленный синус угла преломления окажется больше единицы, то преломленного луча не будет: луч, падающий на границу раздела сред, испытывает полное внутреннее отражение. После того как сделан чертеж, нужно записать закон преломления (15.1) для каждого перехода луча из одной среды в другую и составить вспомогательные уравнения, связывающие углы и расстояния, используемые в задаче. Обычно этого достаточно для определения неизвестных величин. Задачи на преломление света на сферической границе раздела сред решаются на основании формулы (15.7), в которую величины d , f и R нужно подставить с учетом правил знаков, сформулированных в теоретическом введении.

Задачи на линзы, радиусы кривизны преломляющих поверхностей которых известны, можно решать аналогично задачам на преломление света на сферической границе раздела сред (здесь формулу (15.7) нужно записать для каждой границы раздела, причем источником для второй преломляющей поверхности будет являться изображение, полученное после преломления лучей на первой). Если по обе стороны от линзы находится одна и та же среда, то для решения задачи можно применить формулу шлифовщика линз (15.10), в которую значения величин d , f , R_1 и R_2 нужно подставить с учетом правил знаков:

– расстояние d от источника до линзы положительно, если источник действительный, и отрицательно в противном случае;

– расстояние f от линзы до изображения положительно, если источник и изображение находятся по разные стороны от линзы (действительное изображение), и отрицательно, если источник и изображение находятся по одну сторону от линзы (изображение мнимое);

– радиусы кривизны R_1 и R_2 преломляющих поверхностей считаются положительными, если эти поверхности выпуклые со стороны распространения луча, и отрицательными – если вогнутые.

При решении задач на построение изображений в линзах следует руководствоваться правилами, похожими на правила построения изображений в зеркалах. Изображение предмета в линзе можно получить, построив изображение каждой его точки, т.е. найдя пересечения лучей, исходящих из этой точки, после их преломления в линзе. При этом достаточно

найти пересечение каких-либо двух лучей. Если известны положения линзы и ее фокусов, то при построении изображения точки удобно использовать любые два из трех лучей (свойства этих лучей используются также, если требуется построить предмет по известному его изображению, или определить положения линзы и ее фокусов по известному положению предмета и изображения):

– луч, параллельный главной оптической оси, преломившись в линзе, пройдет через фокус за линзой, если линза собирающая, или будет отклоняться от главной оптической оси так, как будто он выходит из фокуса перед линзой, если линза рассеивающая;

– в случае собирающей линзы луч, проходящий через фокус, расположенный по ту же сторону от линзы, что и точка, в результате преломления будет параллелен главной оптической оси; если линза рассеивающая, то луч, идущий в направления фокуса, расположенного за линзой, после преломления также будет параллелен главной оптической оси;

– луч, проходящий через геометрический центр линзы, не преломляется.

Если преломленные в линзе лучи пересекаются в некоторой точке, то изображение будет действительным, если же пересекаются их продолжения, то изображение будет мнимым. Действительное изображение может быть получено только собирающей линзой, если предмет находится за фокусом, при этом изображение перевернутое. Если же предмет расположен между фокусом и линзой или линза рассеивающая, то изображение будет мнимым и прямым. Это справедливо лишь для действительного предмета. Если предмет мнимый, то для определения, каким будет изображение (мнимым или действительным), необходимо провести численные расчеты.

Если точка, изображение которой следует построить, находится на главной оптической оси линзы, то рассмотренные лучи совпадают. Здесь, как и для зеркал, используют два луча. Первый из лучей идет вдоль оси линзы и не преломляется. Второй луч выбирают произвольно. Ход этого луча после преломления можно определить так:

– провести побочную оптическую ось, параллельную лучу;

– провести фокальные плоскости и построить побочные фокусы;

– если линза собирающая, то за линзой луч пойдет в направлении побочного фокуса, расположенного за линзой; если линза рассеивающая, то после преломления луч пойдет в направлении побочного фокуса, расположенного со стороны падения луча.

В случаях, если предмет пересекает фокальную плоскость собирающей линзы, то часть предмета, находящаяся за фокусом, даст действительное изображение, а часть, находящаяся между фокусом и линзой, – мнимое. Причем изображения обеих частей будут находиться по разные стороны от линзы. В таких случаях для каждой части предмета нужно построить изображения двух точек: крайней и любой другой точки. Поскольку в линзе изображение прямой есть прямая, то изображение каждой части предмета будет отдельной прямой, один из концов которой совпадает с изображением соответствующей крайней точки, а другой уходит на бесконечность в направлении изображения второй точки (поскольку изображение предмета, находящегося в фокусе, будет на бесконечности). Если предмет пересекает фокальную плоскость рассеивающей линзы, то никаких особенностей не возникает и построение изображения предмета нужно проводить, руководствуясь общими правилами.

Задачи расчетного характера решают на основании уравнения тонкой линзы (15.12) и формулы (15.13) для увеличения. При записи этих соотношений следует руководствоваться правилами:

– расстояние d от предмета до линзы положительно, если лучи от каждой точки предмета падают на линзу расходящимся пучком (предмет действительный), и отрицательно, если лучи на линзу падают сходящимся пучком (предмет мнимый);

– расстояние f от линзы до изображения положительно, если лучи за линзой идут сходящимся пучком (изображение действительное), и отрицательно в противном случае (изображение мнимое);

– фокусное расстояние F положительно для собирающих линз и отрицательно для расходящихся.

Задачи на построение и расчет изображений в оптических системах, содержащих линзы и зеркало, линзы и плоскопараллельные пластинки (или призмы), несколько линз, решаются на основании тех же правил, что и в случае одиночных линз. Порядок их решения может быть следующим:

– в соответствии с условием задачи начертить оптическую систему (с указанием фокусов всех линз и сферических зеркал) и предмет;

– построить изображение предмета в первом элементе системы, считая, что за ним ничего больше нет; при этом необходимо сразу же провести численные расчеты для определения точного положения изображения, поскольку оно позволит судить о том, как это изображение будет расположено относительно следующего элемента системы;

– используя в качестве предмета полученное изображение, провести расчет и построить изображение в следующем элементе системы; повторить этот пункт, пока не будет получено окончательное изображение предмета.

Если оптическая система состоит из нескольких линз или линз и зеркала, то увеличение предмета системой будет равно произведению увеличений каждого элемента системы. Действительно, так как изображение в одном элементе служит предметом для следующего, то, перемножив увеличения всех элементов системы

$$\Gamma_1 = \frac{h_1}{h}, \quad \Gamma_2 = \frac{h_2}{h_1}, \quad \Gamma_3 = \frac{h_3}{h_2}, \dots,$$

получим

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \dots = \frac{h_1}{h} \frac{h_2}{h_1} \frac{h_3}{h_2} \dots = \frac{H}{h},$$

где h, H – высота предмета и высота окончательного изображения соответственно.

Если оптическая система состоит из нескольких линз или линз и зеркала, сложенных вплотную, то расстояние f от системы до изображения можно найти, сложив уравнения (15.12) для всех линз и уравнение (15.3) для зеркала

$$\pm \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f_1} = \pm \frac{1}{F_1}, \quad \mp \frac{1}{f_1} \pm \frac{1}{f_2} = \pm \frac{1}{F_2}, \quad \mp \frac{1}{f_2} \pm \frac{1}{f_3} = \pm \frac{1}{F_3}, \dots,$$

где учтено, что расстояние до изображения в одном элементе системы равно расстоянию до предмета в следующем элементе, и, если изображение в первом элементе действительное (мнимое), то оно же в качестве предмета для следующего элемента будет мнимым (действительным). Отсюда получим

$$\pm \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F_1} \pm \frac{1}{F_2} \pm \frac{1}{F_3} \dots$$

Очевидно, что оптическая сила системы линз, сложенных вплотную,

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + \dots$$

При расчете систем, содержащих линзы и зеркало (независимо от того, сложены они вместе или находятся на некотором расстоянии), лучи через линзы проходят дважды: через линзы к зеркалу и обратно.

Если в задаче рассматриваются такие оптические приборы, как очки или лупа, то при решении следует помнить, что для человека изображение предмета должно находиться на расстоянии наилучшего зрения или на бесконечности, при этом оно должно быть прямым, т.е. мнимым. Поэтому при записи уравнения линзы (15.12) расстояние f от линзы до изображения нужно всегда брать со знаком «минус».

Если рассматриваются такие оптические приборы, как микроскоп, зрительная труба, телескоп, то порядок решения задач совпадает с решением задач на системы линз. При этом необходимо точно знать, какие линзы используются и как они расположены друг относительно друга в данном приборе.

Другой класс задач этого параграфа – это задачи на волновую оптику.

Задачи на интерференцию света делятся в основном на две группы: задачи, связанные с интерференцией волн от двух когерентных источников, и задачи на интерференцию в тонких пленках.

Если когерентные источники образуются путем разделения одного и того же источника на два (с помощью зеркал, призм, или как-либо еще), то предварительно нужно определить положение этих источников друг относительно друга и относительно экрана. Для этого следует воспользоваться законами геометрической оптики. Далее если положения источников света известны, то координаты максимумов и минимумов интерференционной картины на экране можно найти следующим образом:

- ввести систему координат и выбрать произвольную точку на экране;
- провести в эту точку лучи от обоих источников;
- из геометрических соображений найти пути S_1 и S_2 волн, распространяющихся вдоль этих лучей, выразив их через координаты точки на экране и расстояние до экрана;
- найти оптические пути $n_1 S_1$ и $n_2 S_2$ волн;
- найти оптическую разность хода $\Delta = |n_1 S_1 - n_2 S_2|$ волн;
- если требуется определить координаты максимумов, то полученную оптическую разность хода следует приравнять величине, равной целому числу длин волн (или четному числу длин полуволн): $\Delta = 2m \frac{1}{2} \lambda$; если требуется определить координаты минимумов, то разность хода лучей следует приравнять величине, равной полуцелому числу длин волн (или нечетному числу длин полуволн): $\Delta = (2m + 1) \frac{1}{2} \lambda$;
- найти координаты максимумов и минимумов интерференционной картины, расстояние между интерференционными полосами и ширину интерференционных полос.

При решении таких задач для определения координат максимумов и минимумов интерференционной картины можно воспользоваться формулами (15.24), (15.25), а расстояния между интерференционными полосами и ширину интерференционных полос можно найти по формуле (15.26). Если при этом требуется оценить ширину поля интерференции, то, воспользовавшись условием (15.22) в виде

$$\sin \theta = \frac{m \lambda}{n d} \leq 1,$$

нужно найти угол θ , под которым будет виден максимум наибольшего порядка. Далее из геометрических соображений следует определить ширину поля интерференции.

При интерференции в тонких пленках оптическая разность хода интерферирующих волн возникает за счет дополнительного расстояния, пройденного одной из них. В таких задачах следует учитывать, что одна из интерферирующих волн отражается от границы раздела сред. Если отражение происходит от среды с показателем преломления большим, чем среда, в которой распространяется свет, то фаза отраженной волны изменится на π радиан, что соответствует оптическому пути, равному $\pm \frac{1}{2} \lambda$. Если отражение света происходит от среды с меньшим показателем преломления, то фаза отраженной волны не меняется. В таких задачах условия максимумов и минимумов интерференционной картины следуют записать в виде:

- $\Delta = (2m + 1) \frac{1}{2} \lambda$ – соответствует условию максимумов, если фаза меняется, и условию минимумов, если фаза не меняется;
- $\Delta = 2m \frac{1}{2} \lambda$ – соответствует условию минимумов, если фаза меняется, и условию максимумов, если фаза не меняется.

Задачи на дифракцию света в рамках школьного курса физики достаточно просты. Это обычно задачи на дифракцию на щели или решетке, на которые свет падает перпендикулярно. Для решения таких задач достаточно ясного понимания формул (15.28) и (15.29) и элементарной геометрии.

Задачи
Геометрическая оптика
Отражение света

15.1. На поверхности воды определить построением точку отражения луча, идущего от лампы A к наблюдателю в точку B (рис. 15.45, а).

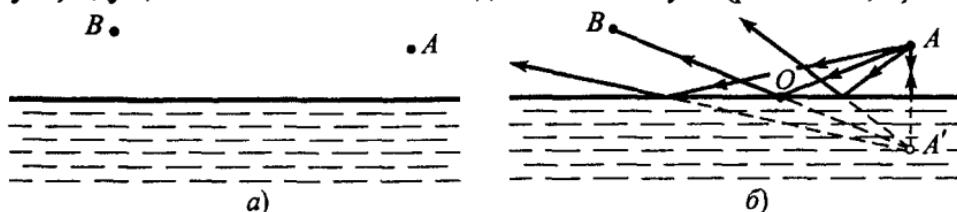


Рис. 15.45

• **Решение.** Поверхность воды можно считать плоским зеркалом. Все световые лучи, идущие от лампы A , на поверхности воды будут отражаться, причем продолжения отраженных лучей пересекутся в одной точке A' (рис. 15.45, б), расположенной симметрично точке A относительно поверхности воды, которая будет мнимым изображением лампы. Поскольку над поверхностью воды все отраженные лучи будут распространяться так, как если бы они выходили из точки A' , то для решения задачи достаточно построить прямую, соединяющую точки A' и B : точка O пересечения этой прямой с поверхностью воды будет искомой точкой.

• **Ответ:** точка O на рис. 15.45, б.

15.2. Солнечный луч составляет с поверхностью Земли угол $\alpha = 30^\circ$. Под каким углом к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы этот луч после отражения от зеркала попал на дно глубокого колодца?

15.3. Человек ростом $H = 1,8$ м, стоящий на берегу озера, видит луну в небе по направлению, составляющему угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом. На каком расстоянии от себя человек видит отражение луны в озере?

15.4. Светящаяся точка A находится между тремя зеркалами так, как показано на рис. 15.46, а, где зеркала 1 и 3 параллельны друг другу, зеркало 2 перпендикулярно им. Постройте луч, который после последовательного отражения в зеркалах вернется в точку A .

• **Решение.** Выходящие из точки A лучи будут падать на зеркала и отражаться от них расходящимися пучками, давая всякий раз на своем продолжении мнимые изображения. В нашем случае точка A даст в зеркалах три мнимых изображения, расположенных симметрично точке A относительно зеркал. Каждое изображение будет источником для этих зеркал и даст в свою очередь новые изображения. Легко понять,

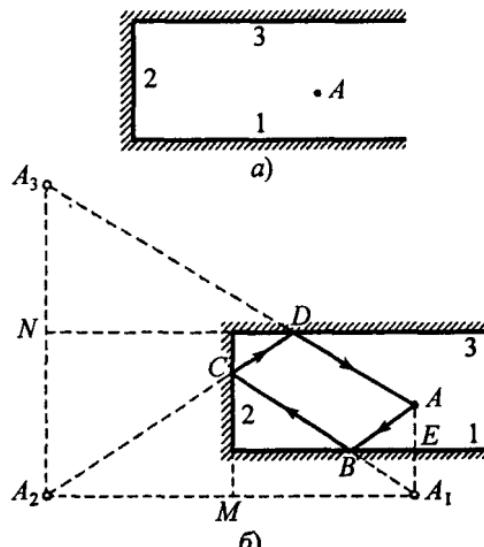


Рис. 15.46

что в данной задаче число изображений точки A будет бесконечно и построить их все невозможно. Поэтому будем строить их последовательно одно за другим до тех пор, пока не выполнится условие задачи.

Изображение в одном зеркале можно считать предметом для другого. Точка A в первом зеркале даст изображение A_1 (рис. 15.46, б), которое будет предметом для зеркала 2. При этом точки A и A_1 будут расположены симметрично относительно зеркала 1. Изображение A_2 в зеркале 2 будет расположено симметрично точке A_1 относительно зеркала 2. Изображение A_3 точки A_2 в зеркале 3 будет расположено симметрично точке A_2 относительно зеркала 3. Поскольку изображение A_1 получается на продолжении лучей, отраженных зеркалом 1, изображение A_2 — лучей, отраженных зеркалом 2, изображение A_3 — лучей, отраженных зеркалом 3, то изображения A_3 следует остановиться (так как по условию задачи луч должен последовательно отразиться от всех зеркал по одному разу и вернуться в точку A).

Прямая, соединяющая точки A_3 и A , определит направление луча, отраженного зеркалом 3 в направлении точки A . В точку D пересечения этой прямой с зеркалом 3 луч падает, как будто он выходит из точки A_2 . Поэтому прямая A_2D определит направление луча, отраженного зеркалом 2 в направлении точки D . Аналогично, в точку C пересечения этой прямой с зеркалом 2 луч падает, как будто он выходит из точки A_1 , и прямая A_1C определит направление луча, отраженного зеркалом 1 в направлении точки C . Для окончательного решения задачи осталось лишь направить луч из точки A в точку B пересечения прямой A_1C с зеркалом 1.

Легко понять, что в точках B , C и D выполняется закон отражения. Действительно, треугольники ΔABE и ΔA_1BE равны (по построению $\angle AEB = \angle A_1EB = 90^\circ$, $AE = A_1E$, сторона BE общая), поэтому $\angle ABE = \angle A_1BE$. Так как угол $\angle BA_1A_2 = \angle A_1BE$, то угол падения луча AB на поверхность зеркала 1 будет равен углу отражения луча BC . Аналогично, рассмотрев треугольники ΔA_1CM и ΔA_2CM , ΔA_2DN и ΔA_3DN , можно показать, что закон отражения также выполняется на зеркалах 2 и 3.

- Ответ: см. рис. 15.46, б.

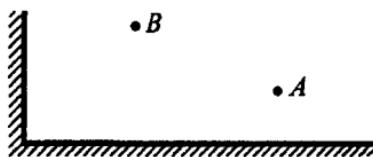


Рис. 15.47

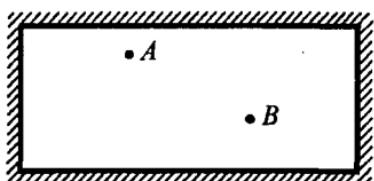


Рис. 15.48

15.5. Постройте луч, который, выйдя из точки A после последовательного отражения в двух взаимно перпендикулярных зеркалах, придет в точку B (рис. 15.47).

15.6. Постройте луч, который, выйдя из точки A , находящейся внутри зеркального прямоугольного ящика (рис. 15.48), пройдет через точку B , отразившись по одному разу от всех четырех стенок. Точки A и B лежат в плоскости рисунка.

15.7. Сколько изображений даст светящаяся точка, находящаяся на биссектрисе двугранного угла $\alpha = 45^\circ$, образованного двумя плоскими зеркалами?

• Решение. Светящаяся точка S даст два мнимых изображения S_1 и S_2 (рис. 15.49), расположенных симметрично точке S относительно зеркал OA и OB . Из равенства треугольников ΔAOS , ΔBOS , ΔAOS_1 , ΔBOS_2 следует, что изображения S_1 и S_2 лежат на дуге окружности с центром в точке O и радиусом $R = OS$. При этом $\angle SOS_1 = \alpha$. Мнимый источник S_1 отраж-

ется в зеркале OB , давая изображение S_3 , лежащее на той же окружности (так как $OS_3 = OS_1 = OS$), причем угол между прямыми OS_3 и OS равен $2\alpha = 90^\circ$. Аналогично образуется изображение S_4 мнимого источника S_2 в зеркале OA . Нетрудно заметить, что следующие изображения S_5 и S_6 образуются точно так же, а углы между прямыми OS и OS_5 , OS и OS_6 одинаковы и равны $3\alpha = 135^\circ$. Изображения S_5 и S_6 , отражаясь в зеркалах OB и OA соответственно, дадут изображения, которые наложатся друг на друга в точке S_7 . Следовательно, всего будет семь изображений светящейся точки S .

• Ответ: семь изображений.

15.8. Светящаяся точка лежит на биссектрисе угла между двумя плоскими зеркалами, поставленными под углом $\alpha = 30^\circ$ на расстоянии $a = 40$ см от линии пересечения зеркал (рис. 15.50). Чему равно расстояние между первыми мнимыми изображениями точки?

15.9. Два плоских зеркала AO и OB образуют произвольный двугранный угол $\phi = 2\pi/n$, где n – произвольное целое число. Точечный источник света S находится между зеркалами на равных расстояниях от каждого из них. Найти число изображений источника в зеркалах.

15.10. Какого наименьшего размера l должно быть плоское зеркало, чтобы, встав перед ним, человек ростом $h = 170$ см увидел себя в полный рост?

• Решение. Глядя в зеркало, человек видит свое мнимое изображение $A'G'$. Пусть глаза человека находятся на расстоянии h' от его макушки. Построим ход лучей, отраженных от плоского зеркала (рис. 15.51). Луч, идущий от точки A , отразившись от зеркала, переходит в луч BE и попадает в глаз (точка E). Так как луч от точки A попадает в глаз после отражения в точке B , то нет необходимости в наличии зеркала ниже этой точки. Поскольку угол отражения равен углу падения, то высота BD составляет половину высоты AE . Но $AE = h - h'$, поэтому $BD = \frac{1}{2}(h - h')$. Аналогично, если человек должен видеть свою макушку, то верхний край зеркала должен доходить только до точки F , которая на $\frac{1}{2}h'$ ниже макушки. Следовательно, $DF = h - \frac{1}{2}h'$, и зеркало должно иметь высоту

$$BF = DF - BD = \frac{1}{2}h = 85 \text{ см.}$$

При этом нижний край зеркала должен находиться на высоте BD от пола.

• Ответ: $l = \frac{1}{2}h = 85$ см.

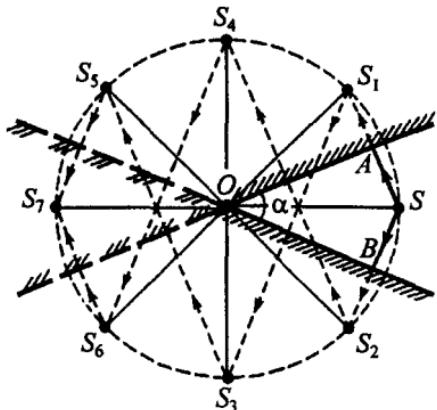


Рис. 15.49

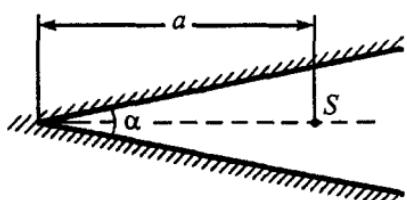


Рис. 15.50

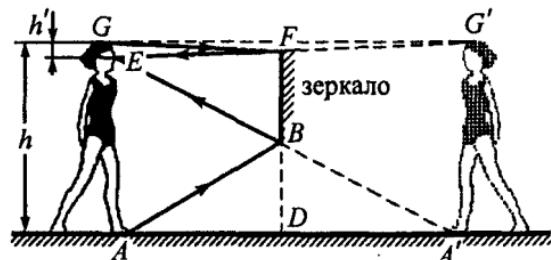


Рис. 15.51

15.11. В комнате длиной $l = 5$ м и высотой $h = 3$ м висит на стене плоское зеркало. Человек смотрит в него, находясь на расстоянии $a = 2$ м от той стены, на которой оно висит. Какова должна быть наименьшая высота зеркала, чтобы человек мог видеть стену, находящуюся у него за спиной, во всю высоту?

15.12. Размеры заднего окна автомобиля $a \times b = 120 \times 45$ см². Каковы должны быть минимальные размеры плоского зеркала заднего вида, висящего на расстоянии $l_0 = 50$ см перед водителем, чтобы водитель имел наилучший обзор дорожной обстановки за автомобилем? Водитель сидит на расстоянии $l = 2$ м от заднего окна.

15.13. Танцовщица в репетиционном классе движется со скоростью $v_0 = 1,5$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к зеркальной стене. С какой скоростью она приближается к своему изображению?

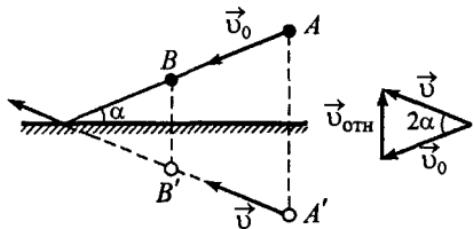


Рис. 15.52

• *Решение.* В любой момент танцовщица и ее изображение в зеркале будут расположены симметрично относительно стены. Поскольку за равные промежутки времени танцовщица и ее изображение проходят одинаковые расстояния ($AB = A'B'$, см. рис. 15.52), то изображение будет приближаться к зеркалу со скоростью \vec{v} , равной по величине скорости \vec{v}_0 танцовщицы, и направленной

под углом α к стене. При этом скорость танцовщицы относительно ее изображения будет равна (см. §1)

$$v_{0,_{\text{отн}}} = \vec{v}_0 - \vec{v},$$

величину которой можно найти по теореме косинусов:

$$v_{0,_{\text{отн}}} = \sqrt{v_0^2 + v^2 - 2v_0 v \cos 2\alpha} = \sqrt{v_0^2 + v^2 - 2v_0 v_0 \cos 2\alpha} = v_0 \sqrt{2(1 - \cos 2\alpha)} = 2v_0 \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$v_{0,_{\text{отн}}} = 2v_0 \sin \alpha = 1,5 \text{ м/с.}$$

• *Ответ:* $v_{0,_{\text{отн}}} = 2v_0 \sin \alpha = 1,5 \text{ м/с.}$

15.14. Посередине между двумя плоскими зеркалами, параллельными друг другу, помещен точечный источник света. С какими одинаковыми скоростями должны двигаться оба зеркала, оставаясь параллельными друг другу, чтобы первые мнимые изображения источника в зеркалах сближались со скоростью $v = 5$ м/с?

15.15. Плоское зеркало расположено параллельно стене на расстоянии l от нее. Свет от укрепленного на стене точечного источника падает на зеркало и, отражаясь, дает на стене «зайчик». С какой скоростью будет двигаться «зайчик» по стене, если приближать к ней зеркало со скоростью v ? Как будут при этом меняться размеры «зайчика»?

15.16. Плоское зеркало AB может вращаться вокруг горизонтальной оси O (рис. 15.53, а). Луч света попадает на зеркало под углом падения α . На какой угол повернется отраженный луч, если зеркало повернется на угол β ?

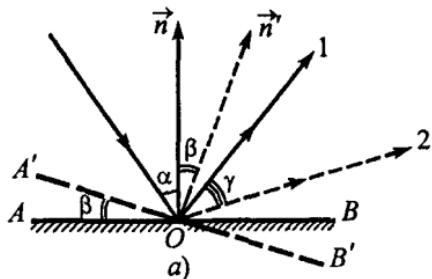
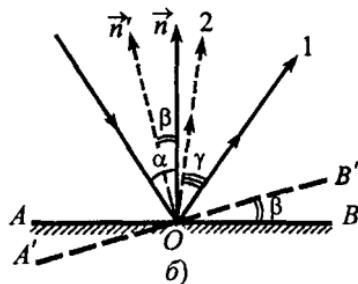


Рис. 15.53



• Решение. При повороте зеркала по часовой стрелке на угол β нормаль \vec{n} к поверхности зеркала в точке падения луча повернется также на угол β и займет положение \vec{n}' (рис. 15.53, а), поэтому угол падения будет равен $(\alpha + \beta)$. Следовательно, угол между падающим и отраженным лучами станет равен $2(\alpha + \beta)$. Так как до поворота зеркала угол между падающим и отраженным лучами был равен 2α , то, очевидно, отраженный луч повернется на угол $\gamma = 2(\alpha + \beta) - 2\alpha = 2\beta$. В случае, если направление поворота зеркала противоположно рассмотренному, то угол падения луча будет равен $(\alpha - \beta)$ (рис. 15.53, б), а отраженный луч, как и в первом случае, повернется на угол $\gamma = 2\alpha - 2(\alpha - \beta) = 2\beta$.

• Ответ: $\gamma = 2\beta$.

15.17. Плоское круглое зеркальце может вращаться вокруг своего вертикального диаметра. На расстоянии $l = 1,2$ м от зеркала на стене висит плоский экран, параллельный плоскости зеркальца. Горизонтальный луч света падает в центр зеркальца под углом $\alpha = 12^\circ$ и отражается на экран. На какое расстояние переместится световой «зайчик» на экране при повороте зеркальца на угол $\beta = 15^\circ$?

15.18. Маленькое плоское зеркальце вращается с постоянной частотой $n = 0,5$ об/с. С какой скоростью будет перемещаться «зайчик» по сферическому экрану радиусом $R = 10$ м, если зеркальце находится в центре кривизны зеркала?

15.19. Предмет расположен перед вогнутым сферическим зеркалом перпендикулярно к его главной оптической оси так, что отношение линейных размеров действительного изображения и предмета оказалось равным $\Gamma_1 = 1,5$. После того, как предмет отодвинули на $l = 16$ см от зеркала, отношение размеров изображения и предмета стало равным $\Gamma_2 = 0,5$. Найти радиус кривизны зеркала.

• Решение. При построении изображений в сферических зеркалах используется закон отражения в той же формулировке, что и для плоских зеркал: угол падения равен углу отражения. Однако в отличие от плоских зеркал, в которых изображение всегда мнимое, в случае сферического зеркала можно получить как мнимое, так и действительное изображение. Построим, например, изображение предмета AB в вогнутом сферическом зеркале с радиусом кривизны R (рис. 15.54). Рассмотрим три наиболее простых луча. Луч

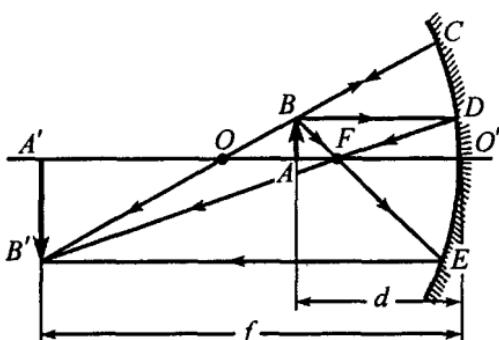


Рис. 15.54

BD , проведенный параллельно главной оптической оси зеркала, после отражения должен проходить через фокус F зеркала. Луч BE , проведенный через точку F , после отражения должен идти параллельно оси. Луч BC , проведенный через центр кривизны зеркала O , после отражения возвращается по первоначальному направлению. Точка, в которой все три отраженных луча пересекутся, есть точка B' изображения. Как видим, в данном случае изображение действительное и увеличенное. Непосредственным построением легко убедиться, что в случаях, если источник расположен за центром кривизны зеркала, то изображение будет действительным и уменьшенным. Если же источник расположен между фокусом и поверхностью зеркала, то изображение будет мнимым и увеличенным.

Очевидно, что в нашей задаче первоначально предмет находился между фокусом и центром кривизны зеркала, а после того как его отодвинули – за центром кривизны.

Положение изображения предмета можно определить двумя способами: построением с решением соответствующей геометрической задачи или воспользоваться уравнениями зеркала, которые представляют собой решение этой задачи. Второй, аналитический, способ избавляет нас от необходимости строить точный чертеж.

Обозначим расстояния от предмета до зеркала и от зеркала до изображения буквами d и f соответственно.

Радиус кривизны R и фокусное расстояние F вогнутого сферического зеркала связаны соотношением $R = 2F$. Следовательно, задача сводится к нахождению фокусного расстояния зеркала. Используя формулу вогнутого зеркала в случае действительного изображения

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

и увеличение

$$G = \frac{f}{d},$$

запишем для первого положения предмета:

$$F = \frac{d_1 f_1}{d_1 + f_1}; \quad f_1 = G_1 d_1,$$

или после подстановки f_1 :

$$F = \frac{G_1}{1 + G_1} d_1. \quad (1)$$

Аналогично для второго положения предмета:

$$F = \frac{d_2 f_2}{d_2 + f_2}; \quad f_2 = G_2 d_2; \quad F = \frac{G_2}{1 + G_2} d_2.$$

По условию задачи $d_2 = d_1 + l$, следовательно,

$$F = \frac{G_2}{1 + G_2} (d_1 + l). \quad (2)$$

Выразив из соотношения (1) значение

$$d_1 = \frac{1 + G_1}{G_1} F$$

и подставив его в уравнение (2), получим

$$F = \frac{G_2}{1 + G_2} \left\{ \frac{1 + G_1}{G_1} F + l \right\}; \quad F = \frac{G_1 G_2}{G_1 - G_2} l.$$

Следовательно, радиус кривизны зеркала

$$R = 2l \frac{G_1 G_2}{G_1 - G_2} = 24 \text{ см.}$$

• Ответ: $R = 2l \frac{G_1 G_2}{G_1 - G_2} = 24 \text{ см.}$

15.20. На главной оптической оси вогнутого сферического зеркала с радиусом кривизны $R = 1,6 \text{ м}$ помещен точечный источник света. Его мнимое изображение получилось за зеркалом на расстоянии $f = 70 \text{ см}$ от него. На каком расстоянии от зеркала находится источник света?

15.21. На вогнутое сферическое зеркало падает сходящийся конический пучок световых лучей. На каком расстоянии от фокуса пересекутся отраженные лучи, если радиус зеркала $R = 80$ см, а продолжения лучей пересекают главную оптическую ось зеркала на расстоянии $a = 40$ см от зеркала?

15.22. На расстоянии $d = 1,5$ м от выпуклого сферического зеркала с радиусом кривизны $R = 72$ см на его главной оптической оси расположена светящаяся точка. На каком расстоянии от зеркала находится изображение этой точки?

15.23. Пучок сходящихся лучей падает на выпуклое сферическое зеркало с радиусом кривизны $R = 56$ см так, что отраженные лучи пересекаются на главной оптической оси зеркала. Расстояние от точки пересечения этих лучей до зеркала равно $f = 20$ см. Где пересекутся лучи, если убрать зеркало?

15.24. В центре кривизны вогнутого сферического зеркала с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см находится выпуклое сферическое зеркало с фокусным расстоянием $F_2 = 25$ см. Главные оптические оси зеркал совпадают. Между фокусом и центром кривизны вогнутого зеркала на расстоянии $d = 28$ см от него расположен предмет высотой $h = 2$ см перпендикулярно главной оптической оси. Определить величину и положение изображения предмета в выпуклом зеркале, даваемого лучами, отраженными от вогнутого зеркала.

• **Решение.** Фокусное расстояние сферического зеркала равно половине его радиуса кривизны. Поэтому выпуклое зеркало будет находиться на расстоянии $2F_1 = 40$ см от вогнутого.

Поскольку расстояние d от предмета до поверхности вогнутого зеркала больше фокусного расстояния F_1 , но меньше $2F_1$, то предмет AB будет расположен между фокусом и центром кривизны O_1 зеркала (рис. 15.55), а его изображение A_1B_1 в этом зеркале будет действительным и увеличенным.

Для построения изображения A_1B_1 предмета AB в вогнутом зеркале построим только изображение точки B , для чего воспользуемся двумя лучами: лучом BC , проходящим через фокус F_1 , и лучом BD , падающим на зеркало параллельно главной оптической оси. При отсутствии выпуклого зеркала отраженные от вогнутого зеркала лучи пересекутся в точке B_1 на расстоянии f_1 от вогнутого зеркала. Изображение A_1 точки A предмета будет находиться в точке пересечения перпендикуляра, опущенного из точки B_1 на главную оптическую ось. Расстояние f_1 и высоту h_1 изображения A_1B_1 найдем, записав уравнение зеркала и формулу для увеличения (действительные предмет и изображение, отражающая поверхность вогнутая):

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1}, \quad f_1 = \frac{h_1}{h} = \frac{f_1}{d},$$

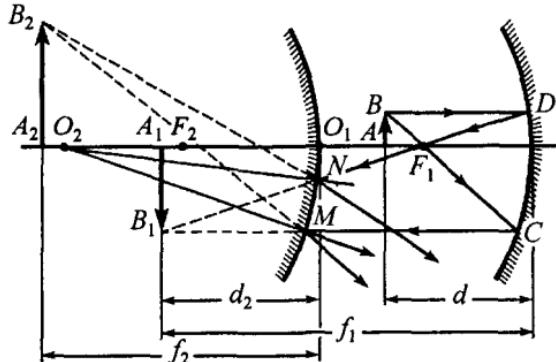


Рис. 15.55

или

$$f_1 = \frac{dF_1}{d - F_1}, \quad h_1 = h \frac{f_1}{d} = h \frac{F_1}{d - F_1}.$$

Следовательно, изображение A_1B_1 находится на расстоянии

$$d_2 = f_1 - 2F_1 = \frac{dF_1}{d - F_1} - 2F_1 = 30 \text{ см}$$

от выпуклого зеркала.

Для приближенного построения изображения A_2B_2 предмета в выпуклом зеркале проведем в точки M и N падения лучей CM и DN , отраженных от вогнутого зеркала, прямые O_2M и O_2N из центра кривизны O_2 выпуклого зеркала (точка O_2 находится на расстоянии $2F_2$ от точки O_1). Отраженные от поверхности выпуклого зеркала лучи пересекутся в некоторой точке B_2 , определив положение изображения A_2B_2 предмета в выпуклом зеркале (изображение A_2 точки A построим так же, как точку A_1).

Поскольку лучи CM и DN падают на выпуклое зеркало сходящимся пучком, то изображение A_1B_1 будет мнимым предметом для этого зеркала. Как видим из рисунка, отраженные от выпуклого зеркала лучи идут расходящимся пучком, поэтому изображение A_2B_2 будет получено на их продолжении, т.е. будет мнимым. С учетом знаков (мнимые предмет и изображение, отражающая поверхность выпуклая) уравнение зеркала и увеличение запишем в виде

$$-\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F_2}, \quad \Gamma_2 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{f_2}{d_2},$$

или

$$f_2 = \frac{d_2 F_2}{d_2 - F_2}, \quad h_2 = h_1 \frac{f_2}{d_2} = h_1 \frac{F_2}{d_2 - F_2}.$$

Следовательно, изображение A_2B_2 будет находиться на расстоянии

$$f_2 = \frac{d_2 F_2}{d_2 - F_2} = 150 \text{ см}$$

от поверхности выпуклого зеркала и будет иметь высоту

$$h_2 = h \frac{F_1}{d - F_1} \frac{F_2}{d_2 - F_2} = 25 \text{ см.}$$

- Ответ: изображение высотой $h_2 = h \frac{F_1}{d - F_1} \frac{F_2}{d_2 - F_2} = 25 \text{ см}$ будет находиться на расстоянии $f_2 = \frac{d_2 F_2}{d_2 - F_2} = 150 \text{ см}$ от поверхности выпуклого зеркала.

15.25. Два одинаковых вогнутых сферических зеркала поставлены друг против друга так, что их фокусы совпадают. На расстоянии $d = 50 \text{ см}$ от первого зеркала на общей оптической оси зеркал помещен точечный источник света. Где получится изображение источника после отражения лучей от обоих зеркал? Радиус кривизны каждого зеркала $R = 80 \text{ см}$.

15.26. Вогнутое и выпуклое сферические зеркала с одинаковыми радиусами кривизны $R = 60 \text{ см}$ расположены на одной оптической оси на расстоянии $l = 120 \text{ см}$ так, что их отражающие поверхности обращены друг к другу. На каком расстоянии от вогнутого зеркала на оси зеркал нужно поместить точечный источник света S , чтобы лучи, отраженные сначала вогнутым, а затем выпуклым зеркалом, вернулись обратно в точку S ?

Преломление света

15.27. Луч света падает на границу раздела двух прозрачных сред под углом $\alpha = 30^\circ$. При этом отраженный от границы раздела и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Определить скорость света во второй среде и ее показатель преломления, если скорость света в первой среде $v_1 = 1,25 \cdot 10^8$ м/с. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

• **Решение.** При отражении луча 1 (рис. 15.56) от границы раздела сред луч 2 будет распространяться под углом α , равным углу падения, а луч 3 изменит направление, т.е. преломится. Угол преломления β зависит от скорости распространения света в обеих средах и угла падения света. Эта зависимость известна как закон преломления или закон Снеллиуса:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta,$$

где n_1, n_2 – показатели преломления сред:

$$n_1 = c/v_1, \quad n_2 = c/v_2,$$

где v_1, v_2 – скорость света в первой и второй среде соответственно. Следовательно,

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}. \quad (1)$$

По условию задачи отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \pi, \quad \text{или} \quad \beta = \frac{1}{2} \pi - \alpha. \quad (2)$$

С учетом (2) выражение (1) можно записать в виде

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin (\frac{1}{2} \pi - \alpha)}{v_2}, \quad \text{или} \quad \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\cos \alpha}{v_2}.$$

Отсюда находим скорость света во второй среде

$$v_2 = v_1 \operatorname{ctg} \alpha \approx 2,16 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

и показатель преломления

$$n_2 = \frac{c}{v_1 \operatorname{ctg} \alpha} \approx 1,38.$$

• **Ответ:** $v_2 = v_1 \operatorname{ctg} \alpha \approx 2,16 \cdot 10^8$ м/с; $n_2 = \frac{c}{v_1 \operatorname{ctg} \alpha} \approx 1,38$.

15.28. На двухслойную прозрачную плоскопараллельную пластинку по нормали к ней падает луч света. Показатели преломления материалов пластиинки равны $n_1 = 2,42$ и $n_2 = 1,5$. Каким должно быть отношение толщин этих веществ, чтобы время распространения света в них было одинаковым?

15.29. На поверхности озера глубиной $h = 2$ м находится круглый плот радиусом $R = 8$ м. Определить радиус тени от плота на дне озера при освещении водоема рассеянным светом. Показатель преломления воды $n = 1,33$.

15.30. На дне водоема глубиной $H = 1$ м лежит камень. Где будет видеть камень человек, если он видит его под углом $\alpha = 30^\circ$ относительно нормали к поверхности воды (рис. 15.57). Расположение глаз принять таким, чтобы соответствующие им лучи зрения лежали в одной вертикальной плоскости. Показатель преломления воды $n = 1,33$.

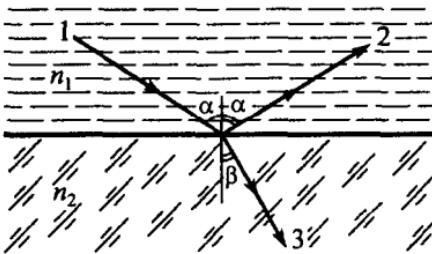


Рис. 15.56

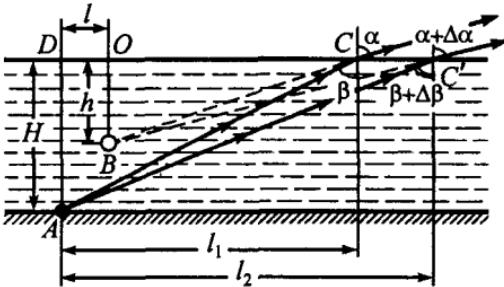


Рис. 15.57

• Решение. Вследствие преломления лучей при выходе из воды человек будет видеть камень не в точке A , а в точке B . Так как изображение камня создается пучком лучей, попадающим в глаз, то углы падения лучей в пучке при переходе из воды в воздух отличаются на малую величину $\Delta\beta$. Это относится и к углам преломления α .

Из треугольников ΔBOC и $\Delta BOC'$ находим

$$l_1 - l = h \operatorname{tg} \alpha, \quad l_2 - l = h \operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha),$$

или

$$l = l_1 - h \operatorname{tg} \alpha; \quad l = l_2 - h \operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha); \quad l_1 - h \operatorname{tg} \alpha = l_2 - h \operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha). \quad (1)$$

Выразив значения l_1 и l_2 из треугольников ΔADC и $\Delta ADC'$,

$$l_1 = H \operatorname{tg} \beta, \quad l_2 = H \operatorname{tg} (\beta + \Delta\beta)$$

и подставив в (1),

$$H \operatorname{tg} \beta - h \operatorname{tg} \alpha = H \operatorname{tg} (\beta + \Delta\beta) - h \operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha),$$

получим

$$h = H \frac{\operatorname{tg} (\beta + \Delta\beta) - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha) - \operatorname{tg} \alpha},$$

или, используя формулу для разности тангенсов:

$$h = H \frac{\sin \Delta\beta \cos \alpha \cos (\alpha + \Delta\alpha)}{\sin \Delta\alpha \cos \beta \cos (\beta + \Delta\beta)}, \quad h \approx H \frac{\cos^2 \alpha \sin \Delta\beta}{\cos^2 \beta \sin \Delta\alpha}, \quad (2)$$

где учтена малость углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$.

Записав закон преломления лучей в виде

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{n}, \quad \frac{\sin (\beta + \Delta\beta)}{\sin (\alpha + \Delta\alpha)} = \frac{1}{n}, \quad (3)$$

найдем отношение синусов углов $\Delta\beta$ и $\Delta\alpha$:

$$\frac{\sin (\beta + \Delta\beta)}{\sin (\alpha + \Delta\alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \frac{\sin \beta \cos \Delta\beta + \cos \beta \sin \Delta\beta}{\sin \alpha \cos \Delta\alpha + \cos \alpha \sin \Delta\alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

$$\sin \alpha \sin \beta \cos \Delta\beta + \sin \alpha \cos \beta \sin \Delta\beta = \sin \beta \sin \alpha \cos \Delta\alpha + \sin \beta \cos \alpha \sin \Delta\alpha.$$

Так как углы $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ малы, то заменив

$$\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha, \quad \sin \Delta\beta \approx \Delta\beta, \quad \cos \Delta\alpha = \cos \Delta\beta \approx 1,$$

получим

$$\sin \alpha \sin \beta + \Delta\beta \sin \alpha \cos \beta = \sin \alpha \sin \beta + \Delta\alpha \cos \alpha \sin \beta,$$

или с учетом первого соотношения (3):

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha} = \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta}.$$

Теперь выражение (2) примет вид

$$h = \frac{H}{n} \left\{ \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right\}^3,$$

где $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha/n^2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}/n$.

Отсюда окончательно находим

$$h = n^2 H \left\{ \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right\}^3 \approx 61 \text{ см}; \quad l = H \operatorname{tg} \beta - h \operatorname{tg} \alpha = H \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - h \operatorname{tg} \alpha \approx 5 \text{ см}.$$

$$• Ответ: h = n^2 H \left\{ \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right\}^3 \approx 61 \text{ см}; \quad l = H \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - h \operatorname{tg} \alpha \approx 5 \text{ см}.$$

15.31. Какова истинная глубина h_0 реки, если при определении на глаз по вертикальному направлению глубина ее кажется равной $h = 2$ м? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

15.32. Стержень опущен концом в прозрачную жидкость, показатель преломления которой равен n , и образует с поверхностью жидкости некоторый угол α . Наблюдателю, который смотрит сверху, конец стержня, погруженный в жидкость, кажется смещенным на угол β . При каком угле наклона стержня α угол смещения β будет максимальным?

15.33. Точечный источник света находится на дне сосуда с жидкостью, показатель преломления которой $n = 1,8$. Во сколько раз максимальное время, затрачиваемое светом на прохождение слоя жидкости с последующим выходом в воздух, больше минимального времени?

• Решение. Источник света находится в среде более плотной, чем воздух. Поэтому лучи, падающие на границу раздела жидкость–воздух под углами большими, чем предельный угол полного внутреннего отражения

$$\alpha_0 = \arcsin(1/n), \quad (1)$$

не смогут выйти из жидкости.

Очевидно, что минимальное время на прохождение слоя жидкости затратит луч 1 (рис. 15.58), идущий перпендикулярно границе сред, а максимальное – луч 2, распространяющийся под углом немногим меньшим α_0 :

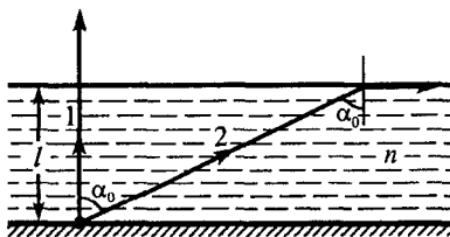


Рис. 15.58

где l – толщина слоя жидкости; v – скорость света в ней.

Из соотношения (1) получим

$$\cos \alpha_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_0} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{t_{\max}}{t_{\min}} = \frac{l}{\cos \alpha_0} = \frac{l}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 1,2.$$

• Ответ: $\frac{t_{\max}}{t_{\min}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 1,2$.

15.34. Водолаз видит отраженными от поверхности воды те части горизонтального дна, которые расположены от него на расстоянии $l = 15$ м и больше. Рост водолаза $h = 1,8$ м, показатель преломления воды $n = 1,33$. На какой глубине находится водолаз?

15.35. На дне водоема глубиной h находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый диск так, что его центр находится над источником. При каком минимальном диаметре диска лучи от источника не будут выходить из воды? Показатель преломления воды равен n .

15.36. На горизонтальной плоскости лежит монета радиусом R . В центре монеты вертикально стоит, опираясь вершиной в ее центр, стеклянный конус (рис. 15.59) Показатель преломления стекла $n = 1,8$. Угол раствора конуса $2\alpha = 60^\circ$, радиус основания равен R . На монету смотрят

с большого расстояния вдоль оси конуса. Во сколько раз площадь изображения будет меньше площади монеты?

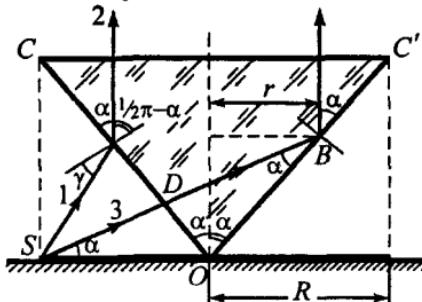


Рис. 15.59

• **Решение.** Так как наблюдатель находится далеко от конуса, то для того, чтобы он увидел монету, лучи должны идти к нему параллельно оси конуса (перпендикулярно основанию).

Рассмотрим произвольный луч l , падающий из точки S (лежащей на краю монеты) на боковую поверхность OC конуса. Очевидно, что преломленный луч 2 должен распространяться под углом $(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ к нормали. Тогда из закона преломления

$$\frac{\sin \gamma}{\sin (\frac{1}{2}\pi - \alpha)} = n$$

найдем требуемый угол падения γ :

$$\gamma = \arcsin (n \cos \alpha) \approx \arcsin 1,56.$$

Это означает, что лучей от точки S , распространяющихся параллельно оси конуса после преломления на границе OC , не существует.

Возможно, могут быть видимыми лучи, которые проходят через границу OC и испытывают на противоположной границе OC' конуса полное внутреннее отражение: при этом отраженный луч должен распространяться под углом α к границе OC' , а угол падения должен быть равен $(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$. Следовательно, угол скольжения $\angle SBO = \alpha = 30^\circ$. Так как угол при вершине конуса $2\alpha = 60^\circ$, то угол $\angle ODB = \pi - 2\alpha - \angle SBO = \frac{1}{2}\pi$. Поэтому единственный луч от точки S , который нас устраивает, должен идти к границе OC' конуса перпендикулярно к OC (луч 3 на рис. 15.59).

Следовательно, точку S монеты наблюдатель увидит в точке B на расстоянии r от оси конуса:

$$r = OB \cdot \sin \alpha.$$

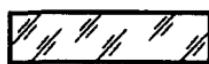
Так как треугольник SOB равнобедренный, то $OB = SO = R$. Тогда

$$r = R \sin \alpha.$$

Понятно, что r является радиусом изображения монеты. Следовательно, отношение площадей монеты и ее изображения

$$\eta = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \approx 4.$$

• Ответ: $\eta = 1/\sin^2 \alpha \approx 4$.



монета



Рис. 15.60

15.38. В днище судна сделан стеклянный иллюминатор диаметром $d = 40$ см много большим толщины стекла. Определить площадь обзора у такого иллюминатора. Показатель преломления воды $n = 1,4$, расстояние до дна $h = 5$ м.

15.39. Световод (длинная очень тонкая нить) изготовлен из прозрачного материала с показателем преломления $n = 1,2$. Один из торцов световода прижат к источнику рассеянного освещения, другой торец разме-

15.37. Стеклянный параллелепипед находится над монетой (рис. 15.60). Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Доказать, что монету нельзя увидеть через боковую грань параллелепипеда.

щен на расстоянии $l = 5$ см от экрана (рис. 15.61). Найти диаметр светового пятна на экране.

• Решение. Лучи от источника рассеянного света будут падать на боковую поверхность световода под произвольными углами. Часть из них преломится на границе с воздухом и уйдет из световода, а часть испытает полное внутреннее отражение. Очевидно, что отраженные один раз лучи больше нигде из световода не выйдут и дойдут до противоположного торца. Легко заметить, что к удаленному от источника света торцу придут лучи, перпендикулярные плоскости торца или составляющие с нормалью к нему углы меньше $(\frac{1}{2}\pi - \alpha_0)$, где α_0 — предельный угол полного внутреннего отражения:

$$\alpha_0 = \arcsin(1/n).$$

Понятно, что крайние точки светового пятна на экране составят лучи, падающие на торец под углом α_0 к нормали. Из рис. 15.61 видно, что

$$AB = l \operatorname{tg} \beta, \quad D = d + 2l \operatorname{tg} \beta,$$

где d — диаметр световода.

Записав закон преломления для углов падения $\frac{1}{2}\pi - \alpha_0$, найдем угол преломления β :

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha_0)}{\sin \beta} = \frac{1}{n}; \quad \sin \beta = n \cos \alpha_0.$$

Следовательно,

$$D = d + 2l \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = d + 2l \frac{n \cos \alpha_0}{\sqrt{1 - n^2 \cos^2 \alpha_0}} = d + 2l \frac{n \sqrt{1 - 1/n^2}}{\sqrt{1 - n^2 + 1}}.$$

Так как по условию задачи нить световода очень тонкая, то, пренебрегая величиной d , получим

$$D \approx 2l \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{2 - n^2}} \approx 8,86 \text{ см.}$$

• Ответ: $D \approx 2l \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{2 - n^2}} \approx 8,86 \text{ см.}$

15.40. Световод представляет собой сплошной цилиндр из прозрачного материала, показатель преломления которого $n = 1,28$. Луч света падает из воздуха в центр торца световода под углом β . Определить максимальное значение угла β , при котором луч будет идти внутри световода, не выходя за его пределы.

15.41. Каким должен быть внешний радиус изгиба световода, сделанного из прозрачного вещества с показателем преломления n , чтобы при диаметре световода, равном d , свет, вошедший в световод перпендикулярно плоскости его попечного сечения, распространялся не выходя через боковую поверхность наружу (рис. 15.62)?

15.42. Луч света падает на боковую поверхность равнобедренной трехгранной призмы из кварцевого стекла под углом $\alpha = 36^\circ$. Преломляющий угол призмы $\theta = 40^\circ$. Показатель преломления стекла $n = 1,54$. Под каким углом γ луч выйдет из призмы?

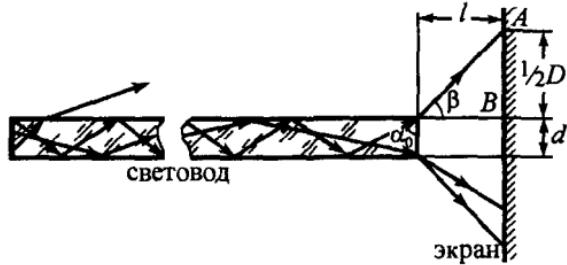


Рис. 15.61

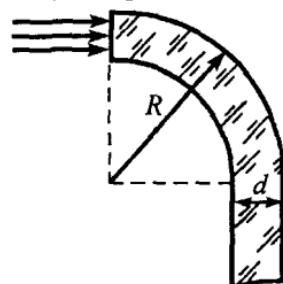


Рис. 15.62

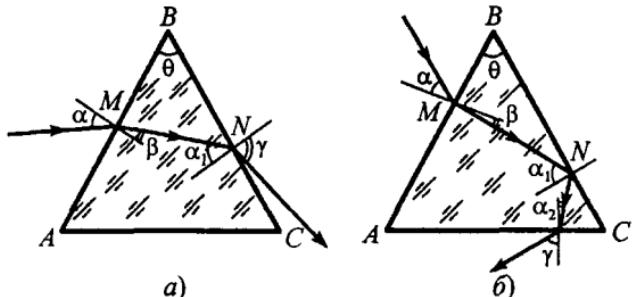


Рис. 15.63

которой распространяется свет, световые лучи будут отклоняться к основанию призмы. Из закона преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

определим угол β , под которым луч войдет в призму:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}; \quad \beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} \approx 22,44^\circ. \quad (1)$$

Из треугольника ΔMBN находим

$$180^\circ = (90^\circ - \beta) + (90^\circ - \alpha_1) + \theta.$$

Следовательно, угол α_1 , под которым луч будет падать на боковую грань BC ,

$$\alpha_1 = \theta - \beta \approx 17,56^\circ. \quad (2)$$

Так как предельный угол полного внутреннего отражения на границе стекло–воздух составляет

$$\alpha_0 = \arcsin (1/n) = 40,5^\circ > \alpha_1,$$

то луч, преломившись на грани BC , выйдет из призмы. Записав второй раз закон преломления для луча, прошедшего из призмы через грань BC ,

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}, \quad (3)$$

получим

$$\sin \gamma = n \sin \alpha_1,$$

или с учетом (2)

$$\sin \gamma = n \sin (\theta - \beta).$$

Запишем значение $\sin (\theta - \beta)$ с учетом закона преломления (1):

$$\sin (\theta - \beta) = \sin \theta \cos \beta - \sin \beta \cos \theta = \sin \theta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n} - \cos \theta \frac{\sin \alpha}{n}.$$

Окончательно получим

$$\gamma = \arcsin \left[\sin \theta \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \theta \sin \alpha \right] = 27,7^\circ.$$

Рассмотрим теперь случай, когда луч падает на боковую поверхность призмы так, как показано на рис. 15.63, б. Очевидно, что угол преломления β в этом случае также определяется выражением (1).

Из рисунка следует, что угол α_1 падения луча на грань BC связан с углами α и θ соотношением

$$\alpha_1 = \theta + \beta,$$

откуда, подставив числовые значения, получим

$$\alpha_1 = 40^\circ + \arcsin \frac{\sin 36^\circ}{1,54} = 62,44^\circ.$$

Так как для рассматриваемого луча $\alpha_0 < \alpha_1$, то на грани призмы BC произойдет полное внутреннее отражение и на грань AC луч будет падать под углом

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta - \alpha_1 \approx 6,56^\circ < \alpha_0.$$

• Решение. Так как в условии задачи не оговорено, как именно луч падает на призму, рассмотрим два случая возможного падения луча.

Рассмотрим случай, представленный на рис. 15.63, а.

При прохождении света через призму, изготовленную из материала с показателем преломления большим, чем у среды, из

Записав закон преломления света на грани призмы AC , найдем искомый угол
 $\gamma = \arcsin(n \sin \alpha_2)$,

или

$$\gamma = \arcsin \left\{ n \cos \left[\frac{3}{2} \theta + \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} \right] \right\} = 11,7^\circ.$$

• Ответ: $\gamma = \arcsin \left\{ \sin \theta \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \theta \sin \alpha \right\} = 27,7^\circ$, или

$$\gamma = \arcsin \left\{ n \cos \left[\frac{3}{2} \theta + \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} \right] \right\} = 11,7^\circ.$$

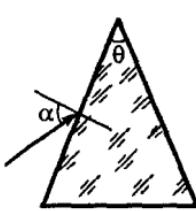


Рис. 15.64

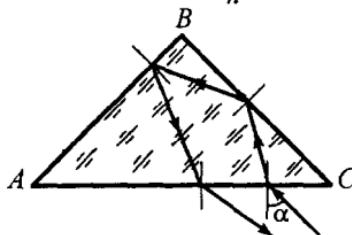


Рис. 15.65

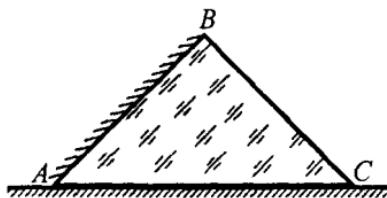


Рис. 15.66

15.43. Луч света падает под углом α на боковую грань равнобедренной призмы с преломляющим углом θ (рис. 15.64). При каком показателе преломления n призмы свет не пройдет через другую боковую грань?

15.44. На рис. 15.65 показан ход луча в равнобедренной призме с прямым углом при вершине ($AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$). При каких углах падения на грань AC луч выйдет из призмы, дважды испытав полное внутреннее отражение на гранях AB и BC ? Показатель преломления призмы $n = 2$.

15.45. В равнобедренной прямоугольной призме (рис. 15.66), изготовленной из прозрачного материала, основание AC и боковая грань BC прозрачны, а грань AB матовая. Призма стоит основанием на бумаге с печатным текстом, который равномерно освещен рассеянным светом. Наблюдатель, смотрящий на прозрачную грань BC , видит часть текста, находящегося под основанием AC , равную $\alpha = 0,895$ от площади, занимаемой текстом. Каков показатель преломления призмы?

15.46. Стеклянный шар диаметром D находится в воздухе. На шар падают два симметричных относительно его центра параллельных луча. Расстояние между лучами $d < D$. Каким должен быть показатель преломления стекла n , чтобы эти лучи пересеклись внутри шара?

• Решение. Очевидно, что при любом показателе преломления стекла лучи не пересекутся левее точки O (рис. 15.67). Чем больше показатель преломления, тем сильнее преломленные лучи будут отклоняться к точке O . При относительно малом показателе лучи могут пересечься вне поверхности шара. Минимальное значение показателя преломления определим из условия, чтобы лучи пересеклись в точке A , лежащей на поверхности шара.

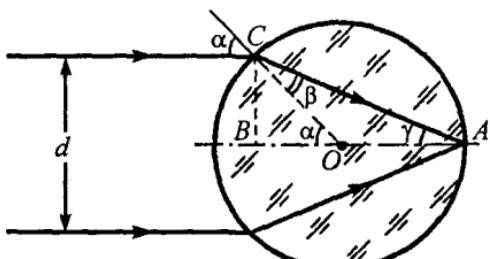


Рис. 15.67

Из рис. 15.67 видно, что $\gamma = \alpha - \beta$ и $\gamma = \beta$. Легко понять, что при углах $\beta \leq \frac{1}{2}\alpha$ лучи пересекутся внутри сферы.

Запишем закон преломления света:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \text{или} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \leq n. \quad (1)$$

Из треугольника ΔOBC находим

$$\sin \alpha = d/D. \quad (2)$$

Следовательно,

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)} = \left\{ \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - d^2/D^2}] \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в выражение (1), получим

$$n \geq \frac{d}{D} \sqrt{2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - d^2/D^2} \right\}}^{-1/2}.$$

- Ответ: $n \geq \frac{d}{D} \sqrt{2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - d^2/D^2} \right\}}^{-1/2}$

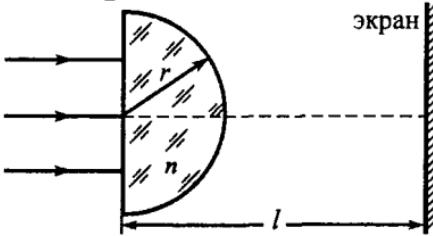


Рис. 15.68

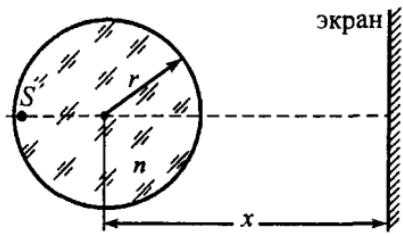


Рис. 15.69

- 15.47.** На плоскую поверхность половины шара радиусом $r = 2$ см, изготовленного из стекла с показателем преломления $n = 1,41$, падает параллельный пучок лучей. Определить радиус светлого пятна на экране, расположеннном параллельно плоской поверхности полушария на расстоянии $l = 4,82$ см от нее (рис. 15.68).

- 15.48.** Внутри стеклянного шара радиусом r слева от центра вблизи поверхности находится точечный источник света S (рис. 15.69). На каком расстоянии x от центра шара справа от него надо поставить экран, чтобы радиус освещенной поверхности был равен r ? Показатель преломления шара $n = 2$.

Линзы

- 15.49.** Двойковыпуклая линза с радиусами кривизны $R = 170$ см изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Линза находится на границе раздела двух сред с показателями преломления $n_1 = 1,33$ и $n_2 = 1,4$. Определить расстояние между главными фокусами линзы.

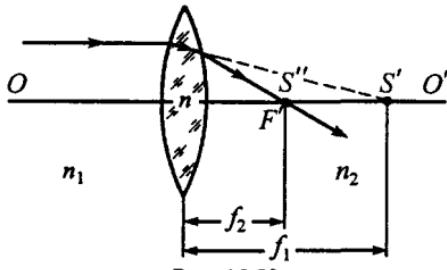


Рис. 15.70

- Решение. Чтобы найти правый фокус, рассмотрим пучок лучей, падающих на линзу параллельно ее главной оптической оси слева от линзы (рис. 15.70). При этом точка, в которой собираются лучи, будет ее фокусом.

Воспользуемся формулой (15.7) для сферической поверхности раздела сред с показателями преломления n_1 и n_2 :

$$\frac{n_1}{d_1} + \frac{n}{f_1} = \frac{n - n_1}{R},$$

где d_1 – расстояние от линзы до источника (в нашем случае $d_1 = \infty$). Тогда расстояние f_1 до изображения S'

$$f_1 = R \frac{n}{n - n_1}. \quad (1)$$

Полученное изображение S' является источником для преломляющей поверхности раздела сред с показателями преломления n и n_2 . Следовательно,

$$-\frac{n}{f_1} + \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_2 - n}{R}, \quad (2)$$

где знак « $-$ » перед первым слагаемым связан с тем, что лучи падают на вторую преломляющую поверхность сходящимся пучком, т.е. предмет S' для этой поверхности мнимый; знак « $-$ » в правой части – из-за того, что со стороны падения лучей рассматриваемая преломляющая поверхность вогнутая.

Из (2) с учетом (1) получим

$$f_2 = R \frac{n_2}{2n - n_1 - n_2}.$$

Так как рассматриваются лучи, параллельные оси линзы, то точка S'' , в которой собираются лучи, будет фокусом линзы. Поэтому фокусное расстояние

$$F' = f_2 = R \frac{n_2}{2n - n_1 - n_2}.$$

Аналогично, чтобы найти левый фокус, нужно рассмотреть пучок лучей, падающих параллельно главной оптической оси справа от линзы. В этом случае

$$F'' = R \frac{n_1}{2n - n_1 - n_2}.$$

Следовательно,

$$d = F' + F'' = R \frac{n_1 + n_2}{2n - n_1 - n_2} \approx 17,2 \text{ м.}$$

- Ответ: $d = \frac{(n_1 + n_2) R}{2n - n_1 - n_2} \approx 17,2 \text{ м.}$

15.50. Определить оптическую силу двояковыпуклой линзы из каменной соли с радиусами кривизны $R = 40$ см, находящейся в сероуглероде. Показатель преломления каменной соли $n_1 = 1,54$, сероуглерода – $n_2 = 1,63$.

15.51. Определить фокусное расстояние плоско-вогнутой линзы с радиусом кривизны $R = 25$ см, изготовленной из сильвина и находящейся в ацетоне. Показатель преломления сильвина $n_1 = 1,49$, ацетона – $n_2 = 1,36$.

15.52. Определить оптическую силу двояковогнутой линзы с одинаковыми радиусами кривизны поверхностей $R = 25$ см, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1,6$.

15.53. На рис. 15.71, а показаны источник AB и его изображение $A'B'$, полученное в линзе. Определить построением расположения линзы и ее фокусов (OO' – главная оптическая ось).

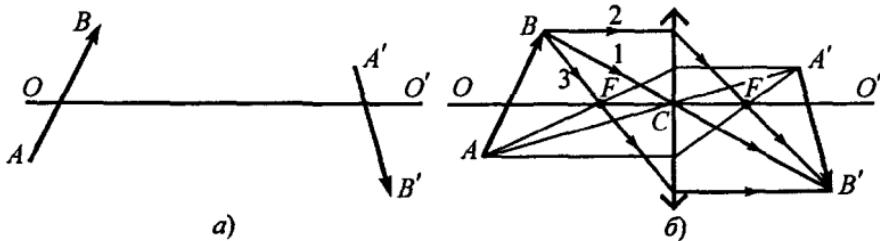


Рис. 15.71

• **Решение.** Так как изображение $A'B'$ источника AB перевернутое, то, следовательно, линза собирающая и расположена между источником и изображением. Пересечение луча 1, соединяющего точки B и B' (или A и A') с оптической осью линзы OO' , определит оптический центр линзы C (рис. 15.71, б). После того как построена линза, проведем, например, луч 2, параллельный главной оптической оси линзы OO' , который после преломления в линзе при пересечении с лучом 1 определит положение точки B , а при пересечении с осью OO' — фокус линзы F (справа от линзы). Для определения положения второго фокуса (слева от линзы) воспользуемся лучом 3, который после преломления в линзе идет параллельно оси OO' в направлении на точку B' , а до линзы — через второй фокус.

• **Ответ:** рис. 15.71, б.

15.54. На главной оптической оси тонкой линзы найти построением положения линзы и ее фокусов, если известны положения источника S и его изображения S' (рис. 15.72, а, где OO' — главная оптическая ось).

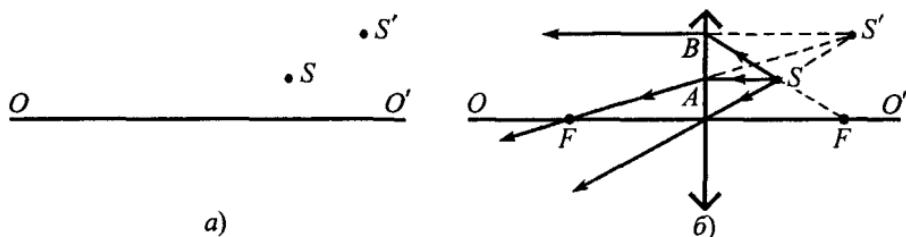


Рис. 15.72

• **Решение.** Так как источник и его изображение находятся по одну сторону от оптической оси, то это означает, что изображение мнимое. Такое изображение могут дать и собирающая, и рассеивающая линза. Но в данном случае изображение S' находится выше источника S (относительно оптической оси), т.е. изображение увеличенное. Такие изображения могут давать только собирающие линзы, когда источник находится между линзой и фокусом.

Теперь, когда мы выяснили, с какой линзой имеем дело в данной задаче, можно найти положение линзы и ее фокусы. Для этого воспользуемся тремя известными лучами:

1. Луч, идущий через оптический центр линзы, не преломляется; следовательно, прямая, проходящая через источник S и его изображение S' при пересечении с главной оптической осью, определит положение линзы (рис. 15.72, б).

2. Луч, идущий параллельно главной оптической оси, за линзой пойдет через ее фокус; следовательно, луч SA за линзой пойдет так, чтобы его продолжение прошло через изображение S' . Пересечение этого луча с главной оптической осью определит положение одного фокуса линзы (рис. 15.72, б).

3. Луч, идущий до линзы через ее фокус, за линзой будет распространяться параллельно главной оптической оси; следовательно, луч SB (рис. 15.72, б) за линзой пойдет параллельно оси OO' так, чтобы его продолжение прошло через изображение S' . Продолжение луча SB до пересечения с главной оптической осью определит положение второго фокуса.

• **Ответ:** рис. 15.72, б.

15.55. Построить изображение предмета ABC в тонкой собирающей линзе (рис. 15.73). OO' — главная оптическая ось линзы, F — ее фокусы.

15.56. Построить изображения предметов A_1B_1 и A_2B_2 в тонкой собирающей линзе (рис. 15.74). OO' — главная оптическая ось линзы, F — ее фокусы.

15.57. По известному положению источника S света и его изображения S' (рис. 15.75) найти построением оптический центр линзы и положение ее фокусов (OO' — главная оптическая ось линзы).

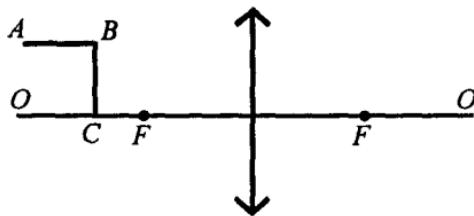


Рис. 15.73

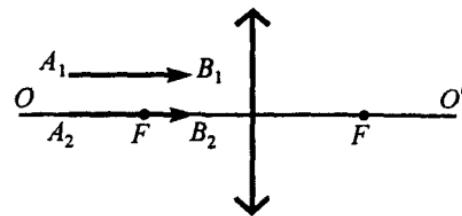


Рис. 15.74

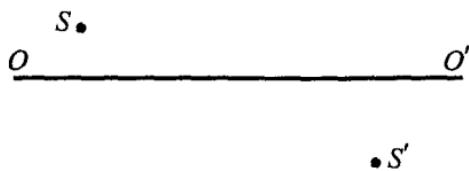


Рис. 15.75

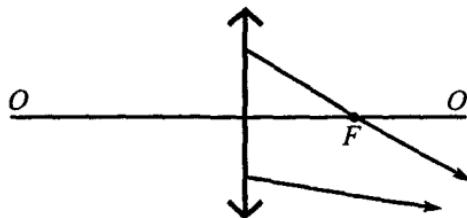


Рис. 15.76

15.58. На рис. 15.76 изображен ход двух лучей от точечного источника света после их преломления в тонкой собирающей линзе с фокусным расстоянием F . Найти построением положение источника света. OO' – главная оптическая ось линзы, F – ее фокусное расстояние.

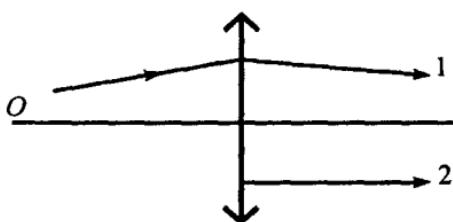


Рис. 15.77

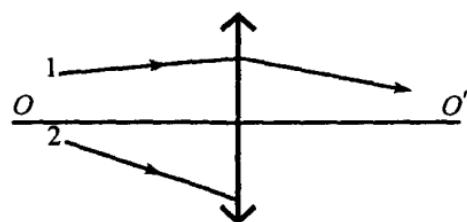


Рис. 15.78

15.59. На рис. 15.77 изображен ход луча 1 до и после преломления в тонкой собирающей линзе. Найти построением ход луча 2 до линзы и ее фокусы, если после линзы луч 2 от того же точечного источника распространяется параллельно главной оптической оси. OO' – главная оптическая ось линзы.

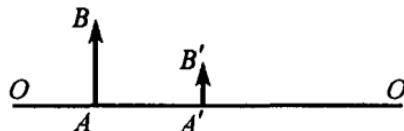
15.60. На рис. 15.78 изображен ход луча 1 до и после преломления в тонкой собирающей линзе. Найти построением ход луча 2 от того же точечного источника за линзой и ее фокусы. OO' – главная оптическая ось линзы.

15.61. На главной оптической оси тонкой линзы найти построением положения линзы и ее фокусов, если известны положения предмета AB и его изображения $A'B'$ (рис. 15.79, а).

• *Решение.* Так как изображение $A'B'$ источника AB прямое и уменьшенное, то, следовательно, линза рассеивающая.

Найдем положение линзы и ее фокусы, аналогично задачам №15.53 – 15.54.

Воспользуемся тремя лучами:



a)

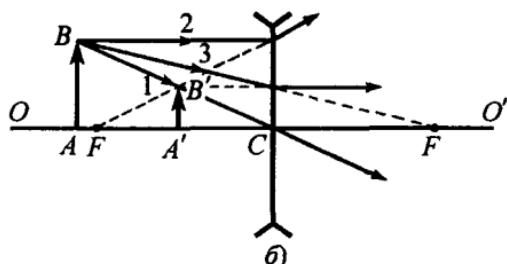


Рис. 15.79

1. Луч 1, идущий через оптический центр линзы, не преломляется; следовательно, прямая, проходящая через точку B предмета и ее изображение B' , при пересечении с главной оптической осью определит положение линзы (точка C , рис. 15.79, б).

2. Луч 2, идущий параллельно главной оптической оси, за линзой пойдет в направлении ее фокуса, расположенного до линзы (со стороны падения луча); следовательно, луч 2 за линзой пойдет так, чтобы его продолжение прошло через изображение B' . Пересечение этого луча с главной оптической осью определит положение одного фокуса линзы.

3. Луч 3, идущий до линзы в направлении фокуса, расположенного с другой стороны линзы, за линзой будет распространяться параллельно главной оптической оси; следовательно, луч 3 за линзой пойдет параллельно оси OO' так, чтобы его продолжение прошло через изображение B' . Продолжение луча 3 до пересечения с главной оптической осью определит положение второго фокуса.

• Ответ: рис. 15.79, б.

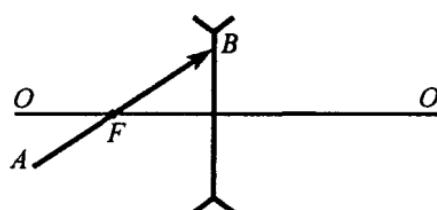


Рис. 15.80

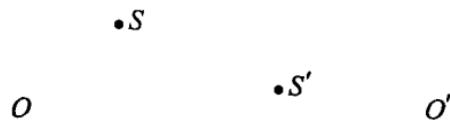


Рис. 15.81

15.62. Построить изображение предмета AB в тонкой рассеивающей линзе (рис. 15.80). OO' – главная оптическая ось линзы, F – ее фокус.

15.63. По известному положению источника S света и его изображения S' (рис. 15.81) найти построением оптический центр линзы и положение ее фокусов (OO' – главная оптическая ось линзы).

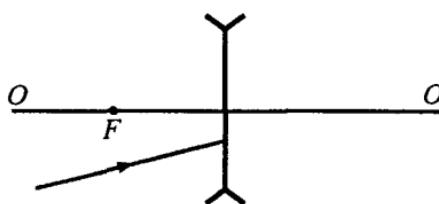


Рис. 15.82

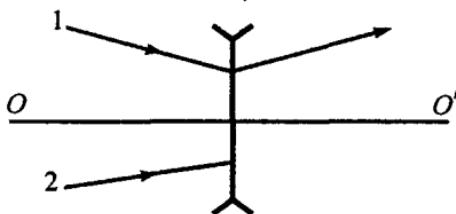
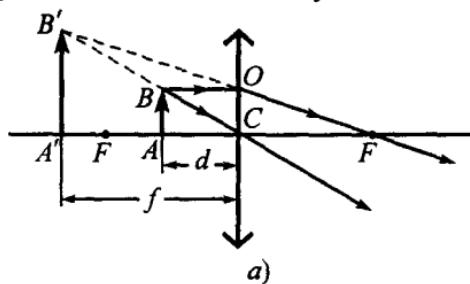


Рис. 15.83

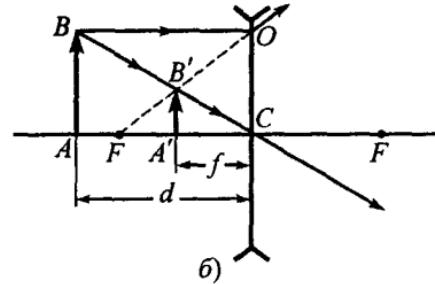
15.64. На рис. 15.82 изображен ход луча, падающего на тонкую рассеивающую линзу с фокусным расстоянием F . Найти построением ход луча после преломления в линз \circ . OO' – главная оптическая ось линзы.

15.65. На рис. 15.83 изображен ход луча 1 до и после преломления в тонкой рассеивающей линзе. Найти построением ход луча 2 от того же точечного источника за линзой и положение фокусов линзы. OO' – главная оптическая ось линзы.

15.66. Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см. Расстояние от предмета до линзы равно $d = 10$ см. Определить расстояние f от изображения до линзы, если: а) линза собирающая; б) линза рассеивающая. Построить ход лучей в системе. Найти увеличение линзы.



a)



b)

Рис. 15.84

• Решение. а) Так как расстояние d от предмета до линзы меньше фокусного расстояния F , то изображение предмета будет мнимым, прямым и увеличенным. Построим изображение предмета в собирающей линзе, как это было сделано в задаче №15.54, воспользовавшись первыми двумя лучами (рис. 15.84, а).

Так как треугольники ΔABC и $\Delta A'B'C$ подобны, то

$$\frac{AB}{d} = \frac{A'B'}{f}, \quad (1)$$

где d и f – расстояния от линзы до предмета AB и его изображения $A'B'$ соответственно.

Так же подобны треугольники ΔCOF и $\Delta A'B'F$, поэтому

$$\frac{A'B'}{f+F} = \frac{CO}{F}, \quad (2)$$

где F – фокусное расстояние линзы. Исключив из (2) значение $A'B'$ и подставив в (1), получим

$$\frac{AB}{d} = \frac{CO}{F} \frac{f+F}{f}. \quad (3)$$

Так как $AB = CO$, то из (3) следует уравнение, связывающее расстояния от линзы до предмета и его изображения с параметром линзы – фокусным расстоянием

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad (4)$$

которое совпадает с известным уравнением тонкой линзы, если учесть, что в соответствии с правилами знаков перед слагаемым $\{1/f\}$ ставится знак «минус», если изображение мнимое.

Увеличение линзы равно отношению высоты изображения к высоте предмета:

$$\Gamma = \frac{A'B'}{AB},$$

или с учетом выражения (1)

$$\Gamma = \frac{f}{d}. \quad (5)$$

Для сформулированной выше конкретной задачи

$$f = \frac{Fd}{F-d} = 20 \text{ см}; \quad \Gamma = \frac{F}{F-d} = 2.$$

б) Аналогично пункту а) поступим и в случае рассеивающей линзы, построив изображение в нем аналогично задаче №15.61.

Из подобия треугольников ΔABC и $\Delta A'B'C$, ΔCOF и $\Delta A'B'F$ (рис. 15.84, б) получим

$$\frac{AB}{d} = \frac{A'B'}{f}, \quad \frac{CO}{F} = \frac{A'B'}{F-f},$$

откуда при $AB = CO$

$$\frac{1}{d} = \frac{F-f}{fF}, \quad \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}. \quad (6)$$

Выражение (6) – формула тонкой рассеивающей линзы, где знаки «минус» поставлены в связи с тем, что линза рассеивающая и изображение мнимое. Увеличение в линзе

$$\Gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{d} = \frac{F}{F+d} \quad (7)$$

совпадает с выражением (5) для собирающей линзы.

Для рассматриваемой задачи

$$f = \frac{Fd}{F+d} = 6,6 \text{ см}; \quad \Gamma = \frac{F}{F+d} = 0,66; \quad \frac{1}{\Gamma} = 1,5.$$

- Ответ: а) в случае собирающей линзы получим мнимое, прямое и увеличенное в 2 раза изображение предмета на расстоянии 20 см от линзы; б) в случае рассеивающей линзы получим мнимое, прямое и уменьшенное в 1,5 раза изображение предмета на расстоянии 6,6 см от линзы.

15.67. Свечу отодвинули на $l = 2$ м от стены и между ними на расстоянии $d = 40$ см от свечи поместили собирающую линзу. При этом на стене получилось отчетливое изображение свечи. Определить увеличение и оптическую силу линзы.

15.68. На каком расстоянии от собирающей линзы нужно поместить предмет, чтобы его мнимое изображение было в $\Gamma = 3$ раза больше самого предмета? Фокусное расстояние линзы $F = 9$ см.

15.69. Тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F = 12$ см расположена между двумя точечными источниками света так, что к одному из них она находится вдвое ближе, чем к другому. Источники находятся на главной оптической оси линзы. При этом расстояние между изображениями источников равно $l = 7,8$ см. Найти расстояние между источниками.

15.70. Предмет находится на расстоянии $d = 10$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см. Во сколько раз изменится величина изображения, если на место собирающей линзы поставить рассеивающую с тем же по модулю фокусным расстоянием?

15.71. Сходящийся пучок лучей падает на рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F = 9$ см и собирается в точку в главном фокусе линзы. На каком расстоянии от линзы собирается этот же пучок лучей, если рассеивающую линзу заменить собирающей с таким же фокусным расстоянием?

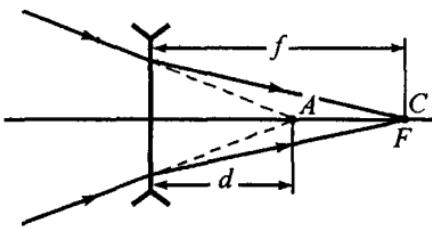


Рис. 15.85

• Решение. Так как лучи падают на линзу сходящимся пучком, то это означает, что источник мнимый и находится в точке A , т.е. в точке пересечения лучей, если линзу убрать (рис. 15.85). Поэтому в формуле линзы перед слагаемым $\{1/d\}$ нужно поставить знак «–»:

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}, \quad (1)$$

где знак «+» перед слагаемым $\{1/f\}$ соответствует условию задачи: так как по условию задачи за линзой лучи собираются в точку, то у рассматриваемого минимого источника изображение будет действительным.

Так как $f = F$, то из (1) получим

$$d = \frac{1}{2}F. \quad (2)$$

Если на место рассеивающей линзы поместить собирающую, то знак «-» перед слагаемым $\{1/d\}$ сохранится, но знак в правой части (1) станет «+»:

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f_0} = \frac{1}{F}, \quad (3)$$

где f_0 – искомое расстояние от собирающей линзы до изображения источника. С учетом (2) из соотношения (3) получим

$$f_0 = \frac{dF}{d+F} = \frac{\frac{1}{2}F^2}{\frac{3}{2}F} = \frac{1}{3}F = 3 \text{ см.}$$

• Ответ: $f_0 = \frac{1}{3}F = 3 \text{ см.}$

15.72. Минимый источник находится в фокусе тонкой собирающей линзы (на главной оптической оси). Где находится его изображение, если фокусное расстояние линзы $F = 20 \text{ см}$?

15.73. Экран расположен на расстоянии $l = 21 \text{ см}$ от отверстия, в которое вставлена тонкая линза радиусом $R = 5 \text{ см}$. На линзу падает сходящийся пучок лучей, в результате чего на экране образуется светлое пятно радиусом $r = 3 \text{ см}$, причем, если линзу убрать, то радиус пятна не изменится. Чему равно фокусное расстояние линзы?

15.74. Квадрат со стороной, равной фокусному расстоянию тонкой собирающей линзы, расположен так, как показано на рис. 15.86. Построить изображение квадрата и найти отношение площадей квадрата и его изображения.

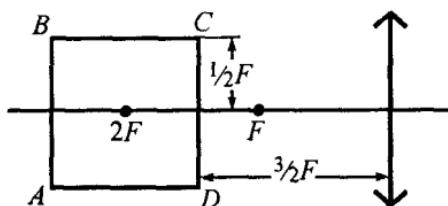


Рис. 15.86

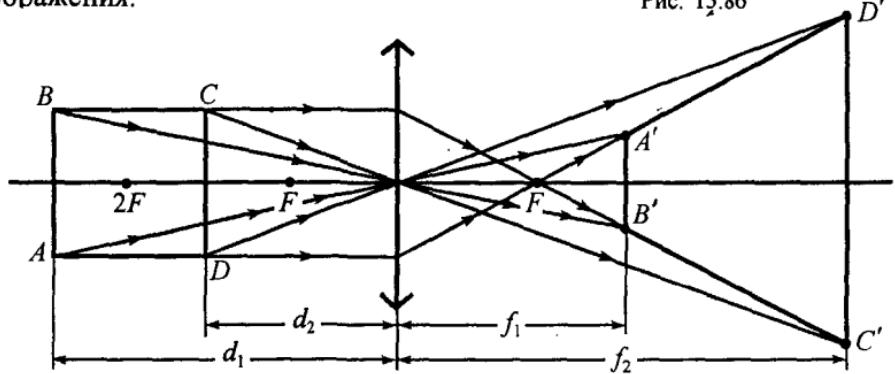


Рис. 15.87

• *Решение.* Так как все стороны квадрата находятся за фокусом линзы, то изображение будет действительным.

Построим изображение квадрата в собирающей линзе, воспользовавшись лучами, проходящими через оптический центр линзы (они не преломляются), и лучами, идущими параллельно главной оптической оси (за линзой такие лучи пойдут в направлении ее фокуса). Легко заметить, что изображением квадрата $ABCD$ будет трапеция $A'B'C'D'$ (рис. 15.87).

По условию задачи площадь квадрата

$$S_{\text{кв}} = F \cdot F = F^2.$$

Для определения площади трапеции найдем длины ее оснований $A'B'$, $C'D'$ и высоту.

Запишем уравнение тонкой линзы для положений предмета на расстояниях d_1 (сторона AB квадрата) и d_2 (сторона CD):

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда с учетом условия задачи ($d_1 = \frac{5}{2}F$, $d_2 = \frac{3}{2}F$) находим

$$f_1 = \frac{5}{3}F, \quad f_2 = 3F.$$

Так как увеличение линзы определяется выражением

$$\Gamma = \frac{f}{d},$$

то основания трапеции равны

$$A'B' = AB \cdot \Gamma_1 = AB \frac{f_1}{d_1} = AB \frac{2}{3}F, \quad C'D' = CD \cdot \Gamma_2 = CD \frac{f_2}{d_2} = 2F,$$

а высота

$$h = f_2 - f_1 = \frac{4}{3}F.$$

Следовательно, площадь трапеции $A'B'C'D'$

$$S_{\text{тр}} = \frac{A'B' + C'D'}{2} h = \frac{\frac{2}{3}F + 2F}{2} \frac{4}{3}F = \frac{16}{9}F^2.$$

Окончательно получаем

$$\frac{S_{\text{кв}}}{S_{\text{тр}}} = \frac{9}{16}.$$

- Ответ: $\frac{S_{\text{кв}}}{S_{\text{тр}}} = \frac{9}{16}$.

15.75. Предмет в виде отрезка длиной l расположен вдоль оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F , дающей действительное изображение всех его точек. Середина отрезка расположена на расстоянии a от линзы. Определить продольное увеличение предмета. Каким будет увеличение предмета, если $l \ll F$?

15.76. Вершину конуса с углом раствора 2α рассматривают через тонкую собирающую линзу, имеющую фокусное расстояние F и расположенную от нее на расстоянии d , причем ($d < F$). Найти видимый через линзу угол раствора конуса. Главная оптическая ось линзы проходит через ось симметрии конуса.

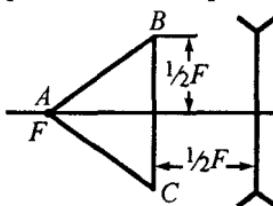


Рис. 15.88

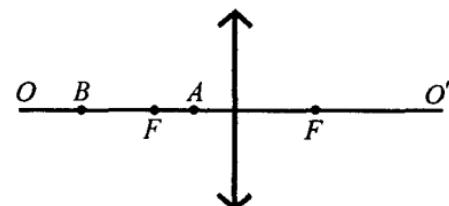


Рис. 15.89

15.77. Прямоугольный равнобедренный треугольник с основанием, равным фокусному расстоянию тонкой рассеивающей линзы, расположен так, как показано на рис. 15.88. Найти отношение площадей треугольника и его изображения.

15.78. Когда предмет находился в точке A (рис. 15.89), тонкая собирающая линза давала увеличение $\Gamma_1 = 2$, а когда его поместили в точку

B, то увеличение стало $\Gamma_2 = 3$. Каким будет увеличение, если предмет поместить в середине отрезка *AB*?

• Решение. Запишем уравнение линзы и увеличение для двух положений предмета:

а) когда предмет находился в точке *A*, то его изображение было мнимым:

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}; \quad \Gamma_1 = \frac{f_1}{d_1}; \quad (1)$$

б) когда предмет поместили в точку *B*, его изображение стало действительным:

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}; \quad \Gamma_2 = \frac{f_2}{d_2}, \quad (2)$$

где d_1, f_1, d_2, f_2 – расстояния до предмета и его изображения в первом и втором случаях соответственно.

Из соотношений (1) и (2) получим

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_1 \Gamma_1} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2 \Gamma_2} = \frac{1}{F},$$

или

$$d_1 = \frac{\Gamma_1 - 1}{\Gamma_1} F, \quad d_2 = \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2} F.$$

Следовательно, расстояние от линзы до середины отрезка *AB* (т.е. до третьего положения предмета) равно

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{F}{2} \left\{ \frac{\Gamma_1 - 1}{\Gamma_1} + \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2} \right\} = \frac{11}{12} F.$$

Так как расстояние *d* до предмета меньше фокусного расстояния, то изображение будет мнимым. Поэтому уравнение линзы для последнего положения предмета будет иметь вид

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

или с учетом выражения для увеличения $\Gamma = f/d$:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d \Gamma} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда находим

$$\Gamma = \frac{F}{F-d} = \frac{F}{F - \frac{F}{2} \left\{ \frac{\Gamma_1 - 1}{\Gamma_1} + \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2} \right\}} = \frac{2}{2 - \frac{\Gamma_1 - 1}{\Gamma_1} - \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2}} = \frac{2 \Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_2 - \Gamma_1} = 12.$$

• Ответ: $\Gamma = \frac{2 \Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_2 - \Gamma_1} = 12$.

15.79. С помощью тонкой линзы получают увеличенное в $\Gamma_1 = 2$ раза действительное изображение плоского предмета. Если предмет сместить на $\Delta d = 1$ см в сторону линзы, то изображение будет увеличенным в $\Gamma_2 = 3$ раза. Чему равно фокусное расстояние линзы?

15.80. Предмет, помещенный в точку *A* (рис. 15.90), тонкая собирающая линза увеличивает вдвое, а помещенный в точку *B* – втрой. Во сколько раз эта линза изменяет длину отрезка *AB*?

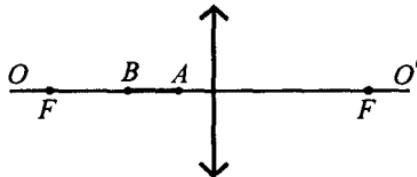


Рис. 15.90

15.81. Точечный источник света, расположенный на расстоянии $d_1 = 1,2$ м от тонкой рассеивающей линзы, приближают к ней вдоль главной оптической оси до расстояния $d_2 = 0,6$ м. При этом изображение источника перемещается вдоль оптической оси на $\Delta l = 10$ см. Найти фокусное расстояние линзы.

15.82. Перемещая тонкую собирающую линзу между источником и экраном, нашли два положения, при которых линза дает на экране четкое изображение предмета. Найти высоту h предмета, если высота первого изображения равна h_1 , а второго – h_2 .

• Решение. Так как источник и его изображение находятся по разные стороны от линзы, то изображение действительное. Увеличения изображений линзой в первом и во втором положениях равны

$$\Gamma_1 = \frac{h_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}, \quad \Gamma_2 = \frac{h_2}{h} = \frac{f_2}{d_2}, \quad (1)$$

где d_1, d_2, f_1, f_2 – расстояния от линзы до предмета и его изображения при первом и втором положениях линзы.

По условию задачи расстояние между изображением и предметом неизменно, т.е.

$$f_1 + d_1 = f_2 + d_2. \quad (2)$$

Фокусное расстояние также постоянно, поэтому, используя формулу тонкой линзы в случае действительного изображения, получим

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{d_2}. \quad (3)$$

Из выражений (2) – (3) следует, что расстояния от линзы до предмета и изображения в обоих положениях связаны соотношением

$$d_1 f_1 = d_2 f_2,$$

или с учетом (1)

$$f_1 (f_2 + d_2 - f_1) = d_2 f_2.$$

Отсюда находим

$$f_1 (f_2 - f_1) = d_2 (f_2 - f_1).$$

т.е. $f_1 = d_2$. Точно так же $f_2 = d_1$. С учетом этого из уравнений (1) получим

$$\frac{h_1 h_2}{h^2} = \frac{f_1 f_2}{d_1 d_2} = 1; \quad h = \sqrt{h_1 h_2}.$$

• Ответ: $h = \sqrt{h_1 h_2}$.

15.83. Свеча находится на расстоянии a от экрана. Между ними помещают собирающую линзу, которая дает на экране четкое изображение свечи при двух положениях линзы. Найти расстояние между положениями линзы, если фокусное расстояние линзы равно F .

15.84. Расстояние между точечными источниками света, находящимися на главной оптической оси линзы, равно $l = 24$ см. Где между ними нужно поместить тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 9$ см, чтобы изображения обоих источников оказались в одной и той же точке?

15.85. Точка лежит на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см на расстоянии $d = 40$ см от линзы. Точку переместили на расстояние $l = 5$ см в плоскости, перпендикулярной оптической оси. На какое расстояние нужно передвинуть линзу, чтобы изображение точки переместилось в первоначальное положение?

15.86. Точка лежит на главной оптической оси рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 25$ см. Расстояние от линзы до изображения этой точки $f = 15$ см. На какое расстояние переместится изображение точки, если линзу передвинуть на расстояние $l = 2$ см в направлении, перпендикулярном главной оптической оси?

15.87. На оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 5$ см и диаметром $d = 2$ см на расстоянии $l_1 = 20$ см от нее находится точечный источник света. По другую сторону линзы на расстоянии $l_2 = 10$ см от нее расположен экран. Найти диаметр D светового пятна на экране.

• *Решение.* Для решения задачи построим изображение источника в линзе и светового пятна на экране, используя световые лучи, проходящие через край линзы (рис. 15.91). Из подобия треугольников $\Delta AS'B$ и $\Delta A'S'B'$ следует, что

$$\frac{\frac{1}{2}D}{\frac{1}{2}d} = \frac{l_2 + f}{f}. \quad (1)$$

Расстояние f от изображения S' до линзы можно определить из формулы тонкой линзы. С учетом того, что изображение мнимое, а линза рассеивающая,

$$\frac{1}{l_1} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}; \quad f = \frac{l_1 F}{F + l_1}.$$

Подставив полученное выражение для f в соотношение (1), получим диаметр светового пятна на экране:

$$D = d \frac{l_2 + f}{f} = d \left\{ 1 + \frac{l_2}{l_1} + \frac{l_2}{F} \right\} = 7 \text{ см.}$$

• *Ответ:* $D = d \left\{ 1 + \frac{l_2}{l_1} + \frac{l_2}{F} \right\} = 7 \text{ см.}$

15.88. Экран расположен на расстоянии $l = 21$ см от отверстия, в которое вставлена тонкая линза радиусом $r = 5$ см. На линзу падает сходящийся пучок лучей, в результате чего на экране образуется светлое пятно радиусом $R = 3$ см. Оказалось, что если линзу убрать, радиус пятна не изменится. Найти фокусное расстояние линзы.

15.89. Точечный источник света помещен в фокусе рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 4$ см. На экране, расположенным за линзой на расстоянии $l = 3$ см, получено светлое пятно. На какое расстояние по оптической оси надо переместить источник, чтобы диаметр пятна уменьшился на $\eta = 20\%$?

15.90. Точка движется со скоростью $v = 2$ см/с перпендикулярно главной оптической оси тонкой собирающей линзы. С какой скоростью движется ее изображение, если расстояние от линзы до точки $d = 15$ см, фокусное расстояние линзы $F = 10$ см?

• *Решение.* При перемещении точки A за некоторое время Δt в точку B ее изображение A' переместится в точку B' , причем, если прямая AB перпендикулярна главной оптической оси OO' , то и ее изображение $A'B'$ также будет перпендикулярным OO' .

Из подобия треугольников ΔACB и $\Delta A'C'B'$ (рис. 15.92) следует

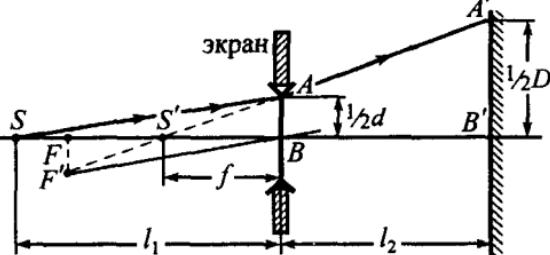


Рис. 15.91

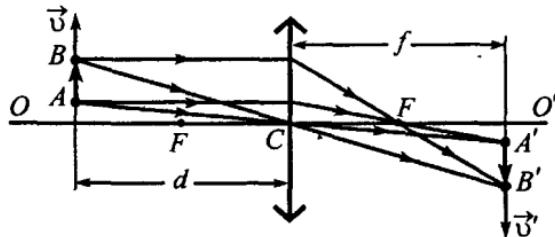


Рис. 15.92

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{d},$$

где f – расстояние от линзы до линии, вдоль которой движется изображение точки A' .

Если точка A за время Δt пройдет путь $AB = v \Delta t$, то ее изображение за это же время пройдет путь $A'B' = v' \Delta t$, где v' – скорость движения изображения. Следовательно,

$$\frac{v' \Delta t}{v \Delta t} = \frac{f}{d}; \quad v' = v \frac{f}{d}.$$

Используя формулу тонкой собирающей линзы для случая действительного изображения

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}; \quad f = \frac{dF}{d-F},$$

получим искомую скорость:

$$v' = v \frac{F}{d-F} = 40 \text{ см.}$$

• Ответ: $v' = v \frac{F}{d-F} = 40 \text{ см/с.}$

15.91. Какое время экспозиции надо выбрать, фотографируя погружение спортсмена в воду при прыжке с высоты $H = 8 \text{ м}$, если допустимая размытость изображения на пленке не должна превышать $h = 0,4 \text{ мм}$? Фотоаппарат установлен на расстоянии $d = 10 \text{ м}$ от места погружения, фокусное расстояние объектива $F = 10 \text{ см}$.

15.92. Фотограф, находящийся на борту судна, снимает катер, идущий встречным курсом. В момент съемки катер находится под углом $\alpha = 45^\circ$ по ходу судна на расстоянии $d = 150 \text{ м}$ от него. Скорость судна $v_1 = 18 \text{ км/ч}$, а катера – $v_2 = 36 \text{ км/ч}$. Какое максимальное время экспозиции может дать фотограф, чтобы величина размытости изображения на пленке не превышала $\Delta l = 0,03 \text{ мм}$? Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F = 5 \text{ см}$.

15.93. Небольшое тело находится на горизонтальной подставке на оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Расстояние между линзой и телом равно $2F$. Телу сообщают скорость v , направленную от линзы вдоль ее главной оптической оси. Коэффициент трения тела о подставку равен μ . Какое расстояние пройдет изображение тела в линзе к моменту остановки тела?

• Решение. Путь l , пройденный телом вдоль оптической оси до остановки, можно найти по-разному, например, по теореме об изменении кинетической энергии

$$\Delta E_k = A(F),$$

где

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = -\frac{1}{2} m v^2$$

– изменение кинетической энергии тела;

$$A(F) = -F_{tp} l = -\mu m g l$$

– работа силы трения на пути l . Следовательно,

$$-\frac{m v^2}{2} = -\mu m g l; \quad l = \frac{v^2}{2 \mu g}.$$

Так как в начале и конце перемещения тело находится дальше фокусного расстояния линзы, то уравнение линзы для этих двух положений можно записать в виде

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{a} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{2F+l} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F},$$

где a, b – соответствующие расстояния от линзы до изображения.

Отсюда получим

$$a = \frac{2FF}{2F - F} = 2F; \quad b = \frac{F(2F + l)}{2F + l - F} = \frac{F(2F + l)}{F + l}.$$

Расстояние, пройденное изображением,

$$S = |b - a| = 2F - \frac{F(2F + l)}{F + l} = \frac{Fl}{F + l} = \frac{Fv^2}{2\mu Fg + v^2}.$$

• Ответ: $S = \frac{Fv^2}{2\mu Fg + v^2}$.

15.94. Небольшое тело находится на горизонтальной подставке на оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Расстояние между линзой и телом равно a ($a > F$). Телу сообщают скорость v , направленную перпендикулярно оптической оси линзы. Пройдя некоторое расстояние, тело останавливается. Найти коэффициент трения тела о подставку, если изображение тела в линзе прошло путь S .

15.95. Гулливер с помощью лупы наблюдает, как дети-лилипуты съезжают на самокатах с горки (рис. 15.93). Склон горки прямой и составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. По какой траектории движутся дети с точки зрения Гулливера? Ответ представить в виде уравнения траектории. Фокусное расстояние лупы $F = 8$ см, расстояние от лупы до склона горки, измеренное вдоль главной оптической оси, $d_0 = 5$ см.

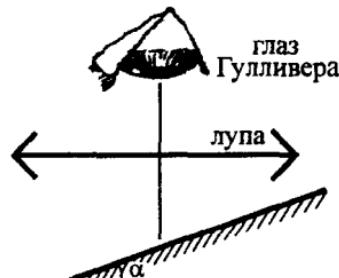


Рис. 15.93

15.96. Небольшой шарик, подвешенный на нити длиной l , вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса. Под шариком на расстоянии a от плоскости вращения закреплена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием F ($F < a$) так, что ее главная оптическая ось совпадает с осью вращения шарика. Найти угловую скорость шарика, если его изображение вращается по окружности радиусом R .

• Решение. При движении по окружности радиусом R_0 на шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} (рис. 15.94).

Запишем уравнения движения шарика в проекциях на оси OX и OY системы координат

$$OX: m\omega^2 R_0 = T \sin \alpha, \quad OY: 0 = T \cos \alpha - mg$$

(где ω — угловая скорость шарика), получим

$$\frac{m\omega^2 R_0}{mg} = \frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{R_0}} = \sqrt{\frac{g}{l^2 - R_0^2}}.$$

Из уравнения линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

(где b — расстояние от линзы до плоскости вращения изображения) и увеличения

$$M = \frac{b}{a} = \frac{R}{R_0}$$

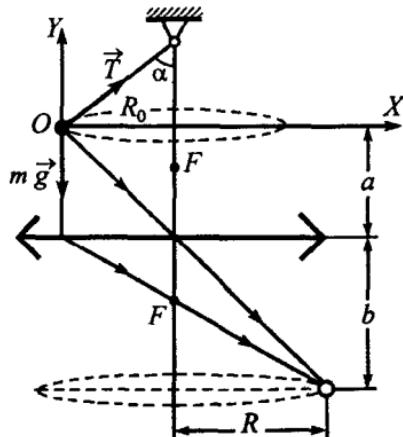


Рис. 15.94

находим

$$\frac{F}{a-F} = \frac{R}{R_0}; \quad R_0 = \frac{R(a-F)}{F}.$$

Следовательно,

$$\omega = \sqrt{g} \left\{ l^2 - \frac{R^2(a-F)^2}{F^2} \right\}^{-1/4}.$$

• Ответ: $\omega = \sqrt{g} \left\{ l^2 - \frac{R^2(a-F)^2}{F^2} \right\}^{-1/4}$.

15.97. Небольшой шарик, подвешенный на нити, вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, причем нить составляет угол α с осью вращения. Под шариком на расстоянии a от плоскости вращения закреплена собирающая линза с фокусным расстоянием F ($F < a$) так, что ее главная оптическая ось совпадает с осью вращения шарика. По окружности какого радиуса вращается изображение шарика в линзе?

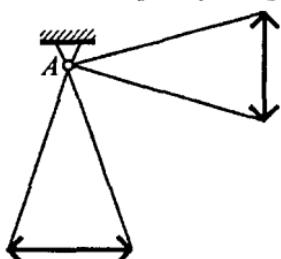


Рис. 15.95

15.98. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см подвешена в точке A на нитях так, что расстояние от точки A до оптического центра линзы равно $l = 25$ см. Подвес отклоняют от горизонтального положения, затем отпускают (рис. 15.95). С каким ускорением будет двигаться изображение точки A в линзе, когда линза проходит нижнее положение?

15.99. Материальная точка массой m находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F на расстоянии a ($a > F$) от линзы. На точку начинает действовать сила P , изменяющаяся со временем по закону $P = P_0 \sin \omega t$ и направленная перпендикулярно главной оптической оси. P_0 и ω – известные положительные постоянные. Найти максимальное смещение изображения материальной точки от главной оптической оси линзы.

• Решение. Так как сила изменяется по гармоническому закону $P = P_0 \sin \omega t$, то и ускорение материальной точки

$$a = \frac{P}{m} = \frac{P_0}{m} \sin \omega t$$

также будет изменяться по гармоническому закону. Известно, что в этом случае ускорение можно представить в виде

$$a = -\omega^2 x,$$

где x – смещение точки от положения равновесия. Следовательно,

$$\frac{P_0}{m} \sin \omega t = -\omega^2 x; \quad x = -\frac{P_0}{m \omega^2} \sin \omega t.$$

Очевидно, что максимальное смещение точки будет при $\sin \omega t = 1$:

$$x_{\max} = \frac{P_0}{m \omega^2}.$$

Уравнение линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$$

позволяет найти расстояние от линзы до изображения:

$$d = \frac{Fa}{a-F}.$$

Увеличение линзы

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{F}{a - F}, \quad \text{или} \quad \Gamma = \frac{x'_{\max}}{x_{\max}},$$

где x'_{\max} – максимальное смещение изображения. Следовательно,

$$x'_{\max} = x_{\max} \frac{F}{a - F} = \frac{P_0}{m \omega^2} \frac{F}{a - F}.$$

• Ответ: $x'_{\max} = \frac{P_0}{m \omega^2} \frac{F}{a - F}$.

15.100. Небольшое тело массой $m = 1$ г, подвешенное на легкой пружине жесткостью $k = 10$ Н/м, находится на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $d = 30$ см от нее. Пружину растянули на $h_0 = 1$ см и отпустили. С какой скоростью изображение точки пересечет главную оптическую ось линзы? Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см.

15.101. Материальная точка массой m находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F на расстоянии $2F$ от линзы. На точку начинает действовать сила P , изменяющаяся со временем по закону $P = P_0 \sin \omega t$ и направленная вдоль главной оптической оси. P_0 и ω – известные положительные постоянные. Найти амплитуду колебаний изображения материальной точки.

Оптические системы

15.102. Точечный источник света находится под поверхностью жидкости на глубине $h = 20$ см. С помощью тонкой собирающей линзы получают уменьшенное изображение поверхности жидкости на экране, отстоящем от поверхности на расстоянии $l = 10$ см. Фокусное расстояние линзы $F = 1,6$ см. Определить радиус освещенного пятна на экране. Показатель преломления жидкости $n = 1,5$.

• Решение. Так как источник света S находится под поверхностью жидкости, то не все лучи смогут выйти из жидкости в воздух: часть лучей испытывает полное внутреннее отражение на границе жидкость–воздух. Радиус R освещенного пятна равен (рис. 15.96)

$$R = h \operatorname{tg} \alpha_0,$$

где α_0 – предельный угол полного внутреннего отражения:

$$\sin \alpha_0 = 1/n.$$

Следовательно,

$$R = h \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} = h \frac{1/n}{\sqrt{1 - 1/n^2}} = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (1)$$

Это светлое пятно будет являться действительным предметом для линзы. Из условия задачи следует, что изображение освещенной поверхности жидкости будет уменьшенным. Поэтому в случае собирающей линзы оно будет действительным.

Из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

и связи $d + f = l$ получим

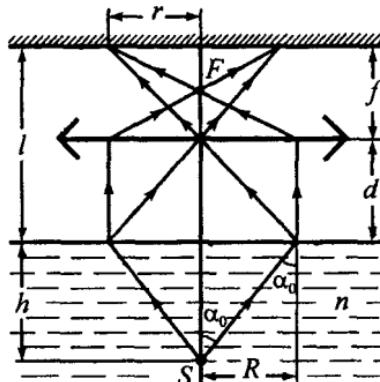


Рис. 15.96

$$\frac{d+f}{df} = \frac{1}{F}; \quad \frac{l}{d(l-d)} = \frac{1}{F}; \quad d^2 - ld + lF = 0.$$

Следовательно,

$$d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lF}}{2}. \quad (2)$$

Аналогично получим выражение для расстояния от линзы до изображения:

$$\frac{l}{(l-f)f} = \frac{1}{F}; \quad f^2 - lf + lF = 0;$$

$$f = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lF}}{2}. \quad (3)$$

Из формулы увеличения линзы

$$\Gamma = \frac{r}{R} = \frac{f}{d}$$

следует, что в случае уменьшеннего изображения $f < d$, т.е. выражение (2) следует брать со знаком «+» перед квадратным корнем, а выражение (3) – со знаком «-». Тогда

$$r = R \frac{f}{d} = r \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lF}}{l + \sqrt{l^2 - 4lF}},$$

или с учетом (1)

$$r = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lF}}{l + \sqrt{l^2 - 4lF}} = 4,47 \text{ см.}$$

• Ответ: $r = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lF}}{l + \sqrt{l^2 - 4lF}} = 4,47 \text{ см.}$

15.103. Фотограф с лодки снимает морскую звезду, лежащую на дне прямо под ним на глубине $h = 2 \text{ м}$. Во сколько раз изображение на пленке будет меньше предмета, если фокусное расстояние объектива $F = 10 \text{ см}$, а расстояние от объектива до поверхности воды $l = 50 \text{ см}$? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

15.104. Точечный источник света расположен на расстоянии $a = 30 \text{ см}$ от собирающей линзы, оптическая сила которой $D = 5 \text{ дптр}$. На какое расстояние сместится изображение источника, если между линзой и источником поместить толстую стеклянную пластинку толщиной $d = 15 \text{ см}$ с показателем преломления $n = 1,5$?

15.105. Плоско-вогнутая тонкая линза с фокусным расстоянием F имеет посеребренную плоскую поверхность. Источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $d > F$ от вогнутой стороны линзы. Построить ход лучей в данной оптической системе.

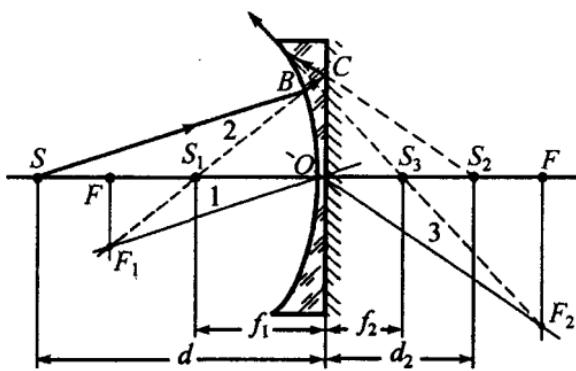


Рис. 15.97

• Решение. Выберем из пучка лучей, падающих на линзу, два луча: луч SO , идущий на оптический центр линзы, и произвольный луч SB (рис. 15.97). Проследим ход этих лучей в системе.

Первый луч пройдет через линзу не преломляясь, упадет на посеребренную поверхность и отразится назад по тому же направлению. Второй луч, преломившись в линзе, падает на посеребренную поверхность так, как если

бы он выходил из точки S_1 , являющейся мнимым изображением источника S . Графически положение точки S_1 находится с помощью построения побочной оптической оси I , проведенной параллельно лучу SB . После преломления луч BC своим продолжением должен попасть в побочный фокус F_1 . Там, где продолжение 2 преломленного луча BC пересекается с главной оптической осью, и находится точка S_1 . Аналитически расстояние f_1 от изображения S_1 до линзы определяется формулой тонкой линзы. Так как линза рассеивающая и изображение S_1 источника S мнимое, то формулу линзы запишем в виде

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = -\frac{1}{F}.$$

Отсюда получим

$$f_1 = \frac{dF}{d+F}.$$

Пройдя через линзу, луч BC отразится от посеребренной поверхности под тем же углом, под которым падал. Направление отраженного луча таково, как если бы он выходил из точки S_2 , являющейся изображением точки S_1 в плоском зеркале. Очевидно, что точка S_2 лежит справа от линзы на расстоянии d_2 , равном

$$d_2 = f_1 = \frac{dF}{d+F}.$$

Далее отраженный луч еще раз преломится в линзе. Окончательное изображение S_3 источника S будет в точке пересечения продолжения отраженного луча с продолжением луча SO . Графически ход отраженного луча после преломления в линзе можно построить с помощью побочной оси 3 и побочного фокуса F_2 .

Чтобы найти расстояние f_2 от точки S_3 до линзы, нужно воспользоваться еще раз формулой тонкой линзы, рассматривая промежуточное изображение S_2 в зеркале как действительный предмет для рассеивающей линзы (так как лучи, отраженные от зеркала, падают на линзу расходящимся пучком):

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F},$$

где знаки « $-$ » проставлены в связи с тем, что изображение S_3 источника S_2 мнимое, а линза рассеивающая. Отсюда находим

$$f_2 = \frac{Fd_2}{d_2 + F} = \frac{dF}{2d + F}.$$

Как видим, $f_2 > 0$. Это подтверждает, что изображение S_3 находится так же, как и точка S_2 , справа от линзы, т.е. источник S и его изображение S_3 находятся по разные стороны от линзы.

- *Ответ:* рис. 15.97; источник и его изображение находятся по разные стороны от линзы, при этом расстояние от линзы до изображения равно $f_2 = \frac{dF}{2d + F}$.

15.106. Плоское зеркало расположено перпендикулярно главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии $l = 10$ см от линзы. Фокусное расстояние линзы равно $F = 6$ см. Предмет расположен на расстоянии $d = 9$ см от линзы. Определить положение изображения предмета в данной оптической системе и построить его.

- *Решение.* Рассмотрим два луча, падающих на линзу из точки B предмета. Луч 1, идущий параллельно главной оптической оси линзы, за линзой пойдет в направлении ее правого фокуса (рис. 15.98). Луч 2, проходящий через оптический центр линзы, преломляться не будет. Если бы за линзой не было зеркала, то лучи 1 и 2 пересеклись бы в точке B_1 , определив положение действительного изображения A_1B_1 предмета AB . Расстояние от линзы до изображения A_1B_1 найдем из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}; \quad f_1 = \frac{dF}{d-F} = 18 \text{ см.}$$

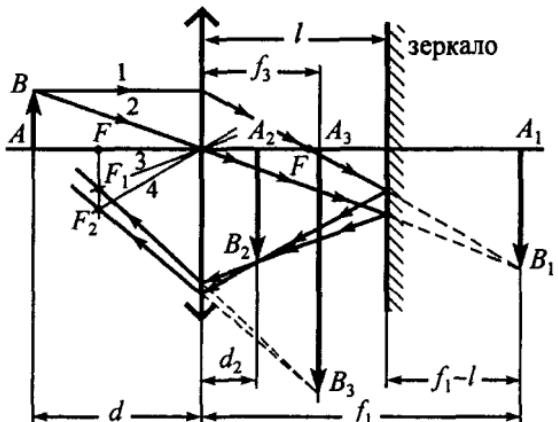


Рис. 15.98

$$d_2 = l - (f_1 - l) = 2 \text{ см.}$$

Как показывают расчеты, расстояние d_2 от линзы до точки B_2 меньше ее фокусного расстояния. Поэтому изображение этой точки в линзе будет мнимым, а сама точка B_2 будет являться действительным источником для линзы, так как лучи от нее падают на линзу расходящимся пучком. Для определения положения изображения B_3 точки B_2 в линзе запишем уравнение линзы с учетом того, что источник действительный, а его изображение мнимое:

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_3} = \frac{1}{F}; \quad f_3 = \frac{d_2 F}{F - d_2} = \frac{[l - (f_1 - l)] F}{F - [l - (f_1 - l)]} = 3 \text{ см.}$$

Для графического построения изображения A_3B_3 предмета AB достаточно построить побочную ось 3 и 4, параллельные лучам, отраженным от зеркала, и определить положения побочных фокусов F_1 и F_2 ; после преломления в линзе лучи будут распространяться расходящимся пучком в направлении соответствующих побочных фокусов и точка пересечения их продолжений определит положение изображения A_3B_3 .

- *Ответ:* рис. 15.98; изображение будет находиться между линзой и зеркалом на расстоянии $f_3 = 3$ см от линзы.

15.107. Предмет расположен на оптической оси тонкой собирающей линзы параллельно плоскости линзы. По другую сторону линзы вплотную к ней расположено плоское зеркало. Плоскость зеркала перпендикулярна оптической оси линзы. Действительное изображение предмета в данной оптической системе находится на расстоянии $2F$ от линзы. С каким увеличением изображен предмет?

15.108. На расстоянии $d = 30$ см от тонкой собирающей линзы на ее главной оптической оси помещен точечный источник света. На расстоянии $l = \frac{3}{4}d$ за линзой расположено плоское зеркало. Изображение источника в данной оптической системе находится на середине отрезка, соединяющего источник с центром линзы. Чему равно фокусное расстояние линзы?

15.109. Собирающая линза с оптической силой $D_1 = 2$ дптр и рассеивающая линза с оптической силой $D_2 = -1,5$ дптр расположены на расстоянии $a = 40$ см друг от друга и имеют общую оптическую ось. Со сто-

так как зеркало находится на расстоянии $l = 10$ см от линзы, а расстояние до изображения A_1B_1 равно $f_1 = 18$ см, то лучи 1 и 2 еще до пересечения в точке B_1 отразятся от зеркала и упадут на линзу. Эти лучи будут распространяться в направлении линзы так, как если бы они выходили из точки B_2 , которая является изображением в зеркале точки B_1 , т.е. изображение A_1B_1 является предметом для зеркала, а изображение A_2B_2 в зеркале является новым предметом для линзы. Так как расстояния от зеркала до точек A_1 и A_2 одинаковы и равны ($f_1 - l$), то расстояние от линзы до изображения A_2B_2

роны собирающей линзы на расстоянии $d_1 = 4$ м от нее находится предмет высотой $h = 20$ см. Определить, где и какое изображение предмета дадут эти линзы. Предмет расположен на оптической оси линзы параллельно ее плоскости.

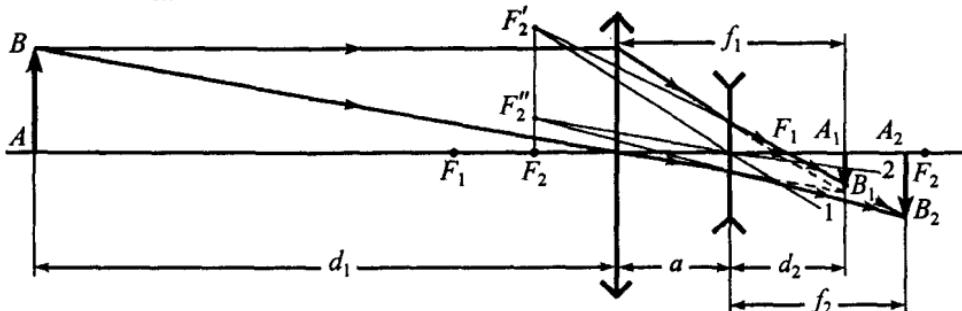


Рис. 15.99

• Решение. В случае системы линз расчет окончательного положения и величины изображения такой же, как для систем линза – зеркало, рассмотренных выше (см. задачи №15.105 – 15.106), и основан на том, что изображение, даваемое одной линзой, является предметом для другой и т.д.

Из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = D \quad (1)$$

можно найти, где и какое изображение предмета AB должна дать собирающая линза. Это изображение A_1B_1 (на рис. 15.99 прямые 1 и 2 – побочные оптические оси, F'_2, F''_2 – побочные фокусы рассеивающей линзы) будет служить предметом для рассеивающей линзы, которая уже и даст изображение A_2B_2 . Его положение можно найти из приведенной выше формулы тонкой линзы, а высоту – из соотношения

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}. \quad (2)$$

Найдем, где и какое изображение предмета AB даст собирающая линза. Так как расстояние $d_1 = 4$ м от источника до линзы больше фокусного расстояния $F_1 = 1/D_1 = 0,5$ м, то изображение A_1B_1 будет действительным, поэтому

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = D_1, \quad \text{или} \quad f_1 = \frac{d_1}{D_1 d_1 - 1} = 0,57 \text{ м}; \quad \frac{H_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}, \quad \text{или} \quad H_1 = \frac{h}{D_1 d_1 - 1} = 0,0286 \text{ м},$$

где f_1 и H_1 – расстояние от линзы до изображения A_1B_1 и его высота соответственно.

Так как $f_1 > a = 0,4$ м, то лучи из точки A после прохождения собирающей линзы попадают на рассеивающую линзу сходящимся пучком. Поэтому изображение A_1B_1 в действительности не получится, но рассеивающая линза даст изображение A_2B_2 мнимого источника A_1B_1 . Найдем расстояние f_2 от рассеивающей линзы до изображения A_2B_2 с помощью формулы тонкой линзы, учитывая, что расстояние d_2 от изображения A_1B_1 до рассеивающей линзы равно ($f_1 - a$) и источник мнимый, т.е. d_2 нужно подставить в формулу линзы со знаком «–»:

$$-\frac{1}{f_1 - a} + \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F_2} = D_2; \quad f_2 = \frac{f_1 - a}{1 + D_2(f_1 - a)} = 0,22 \text{ м.}$$

Так как $f_2 > 0$, то изображение A_2B_2 будет получено на пересечении действительных лучей (а не их продолжений) и будет находиться с той же стороны от рассеивающей линзы, что и A_1B_1 . Поэтому для источника AB изображение A_2B_2 будет действительным.

Найдем высоту H_2 изображения A_2B_2 , учитывая, что вместо h в формуле (1) следует брать высоту H_1 изображения A_1B_1 :

$$H_2 = \frac{H_1 f_2}{d_2} = \frac{H_1 f_2}{f_1 - a} = \frac{H_1}{1 + D_2(f_1 - a)} = 0,035 \text{ м.}$$

• Ответ: действительное перевернутое изображение A_2B_2 предмета AB высотой $H = 3,5 \text{ см}$ получится за рассеивающей линзой на расстоянии $f = 22 \text{ см}$ от нее.

15.110. Тонкие линзы с оптическими силами $D_1 = 4 \text{ дптр}$ и $D_2 = 5 \text{ дптр}$ находятся на расстоянии $l = 0,9 \text{ м}$ друг от друга. Где находится изображение предмета, расположенного на расстоянии $d = 0,5 \text{ м}$ перед первой линзой? Оптические оси линз совпадают.

15.111. Источник света находится на расстоянии $d_1 = 30 \text{ см}$ от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 20 \text{ см}$. По другую сторону от линзы на расстоянии $l = 40 \text{ см}$ расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 12 \text{ см}$. Где находится изображение источника? Оптические оси линз совпадают.

15.112. Две тонкие плоско-выпуклые линзы, фокусное расстояние каждой из которых в воздухе равно F , помещены в оправу так, что их выпуклые поверхности соприкасаются. Определить фокусное расстояние такой системы в жидкости с показателем преломления n , если жидкость между линзами отсутствует. Как изменится ответ, если жидкость попадет между линзами? Показатель преломления стекла, из которого изготовлены линзы, равен n_0 . Оптические оси линз совпадают.

Оптические приборы

15.113. Какие очки нужно прописать близорукому человеку, который может читать текст, расположенный от глаз не далее $l_1 = 20 \text{ см}$, а какие дальнозоркому, который может читать текст, расположенный от глаз не ближе $l_2 = 50 \text{ см}$?

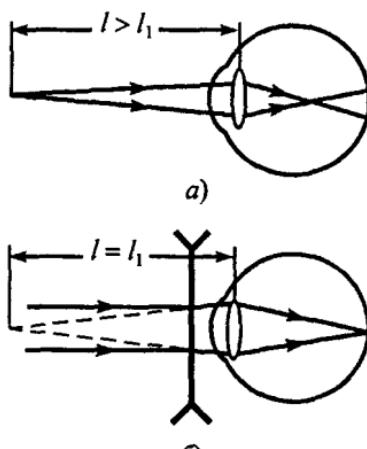


Рис. 15.100

• Решение. Дальняя точка аккомодации глаза человека с нормальным зрением находится на бесконечности, а дальняя точка аккомодации глаза близорукого человека по условию задачи – на расстоянии $l_1 = 20 \text{ см}$. Для такого человека все предметы, находящиеся на расстояниях меньших l_1 , фокусируются на сетчатке глаза. При рассмотрении предметов, находящихся на расстояниях больших l_1 , изменение фокусного расстояния хрусталика недостаточно и изображение будет находиться перед сетчаткой глаза, т.е. на сетчатке будет размытое изображение (рис. 15.100, а). Очки, восполняющие недостаток такого глаза, должны быть таковые, чтобы бесконечно удаленный предмет казался на расстоянии l_1 (рис. 15.100, б), т.е. изображение бесконечно удаленного предмета в линзе очков должно быть на расстоянии l_1 от линзы с той же стороны, что и предмет, т.е. мнимым. Поэтому из формулы тонкой линзы получим

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{l_1} = D_1; \quad D_1 = -\frac{1}{l_1} = -5 \text{ дптр.}$$

Если близорукий человек собирается читать книгу, держа ее на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 25$ см, то ему нужно сменить очки на такие, которые разместят текст на расстоянии l_1 от глаз, т.е. в этом случае

$$\frac{1}{d_0} - \frac{1}{l_1} = D_2; \quad D_2 = \frac{l_1 - d_0}{l_1 d_0} = -1 \text{ дптр.}$$

Для дальнозоркого человека все предметы, расположенные на расстояниях больших l_2 , дают изображение на сетчатке глаза, а все предметы, расположенные на расстояниях меньших l_2 , — за сетчаткой, а на сетчатке — размытое изображение (рис. 15.101, а). Для такого человека прямое (следовательно, мнимое) изображение в линзах очков предмета, который находится на расстоянии $d_0 = 25$ см наилучшего зрения, должно находиться на расстоянии l_2 (рис. 15.101, б). В этом случае из формулы тонкой линзы получим

$$\frac{1}{d_0} - \frac{1}{l_2} = D_3; \quad D_3 = \frac{l_2 - d_0}{l_2 d_0} = 2 \text{ дптр.}$$

• Ответ: $D_1 = -5$ дптр; $D_3 = 2$ дптр.

15.114. Рассматривая свое лицо, человек располагает плоское зеркало на расстоянии $d = 25$ см от глаз. Какой оптической силы очки должен носить этот человек? Расстояние наилучшего зрения $d_0 = 25$ см.

15.115. Близорукий человек без очков рассматривает предмет, находящийся в воде. При этом если глаза располагаются вблизи поверхности воды, то человек отчетливо видит все детали предмета на глубине до $d = 30$ см. Какой оптической силы очки должен носить этот человек? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

15.116. Два человека — дальнозоркий и близорукий, надев очки, могут читать книгу так же, как человек с нормальным зрением. Однажды они случайно поменялись очками. Надев очки близорукого, дальнозоркий обнаружил, что может видеть только бесконечно удаленные предметы. На каком расстоянии сможет читать книгу близорукий человек в очках дальнозоркого? Расстояние наилучшего зрения нормального глаза $d_0 = 25$ см.

15.117. Определить увеличение, которое дает лупа с фокусным расстоянием $F = 1,25$ см. Расстояние наилучшего зрения $d_0 = 25$ см.

• Решение. Как известно, существует две формулы для увеличения лупы. Первая имеет вид

$$\Gamma_1 = \frac{d_0}{F}$$

и справедлива для случая, когда предмет находится в главном фокусе линзы, а глаз аккомодирован на бесконечность. Вторая формула имеет вид

$$\Gamma_2 = \frac{d_0}{F} + 1$$

и справедлива для случая, когда глаз видит изображение на расстоянии наилучшего зрения. При этом получится большее увеличение, но глаз будет уставать при длительном рассматривании предмета. Объясняется это тем, что в естественном состоянии при полном расслаблении мышц глаз человека аккомодирован на бесконечность.

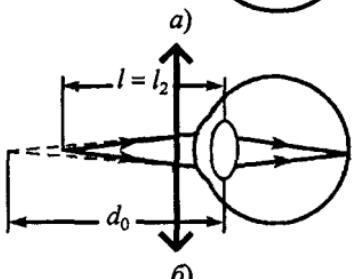
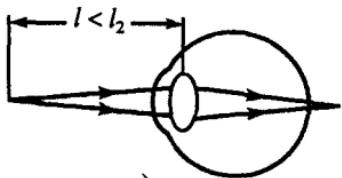


Рис. 15.101

Поскольку в задаче нет никаких указаний, то вычислим увеличение лупы для обоих случаев:

$$\Gamma_1 = \frac{d_0}{F} = 20; \quad \Gamma_2 = \frac{d_0}{F} + 1 = 21.$$

• Ответ: при аккомодации нормального глаза на бесконечность лупа дает 20-кратное увеличение, а при аккомодации на расстояние наилучшего зрения – 21-кратное увеличение.

15.118. Линзу с оптической силой $D = 50$ дптр используют в качестве лупы. Какое линейное увеличение она может дать, если глаз аккомодирован на расстояние наилучшего зрения? Расстояние наилучшего зрения $d_0 = 25$ см.

15.119. Лупа с фокусным расстоянием $F = 12$ см «отодвигает» рассматриваемый предмет на расстояние $l = 12$ см. Во сколько раз она его при этом увеличивает?

15.120. Объектив микроскопа имеет фокусное расстояние $F_1 = 3$ мм, а окуляр – фокусное расстояние $F_2 = 50$ мм. Расстояние между объективом и окуляром $l = 135$ мм. Определить линейное увеличение микроскопа, если предмет находится на расстоянии $d = 3,1$ мм от объектива.

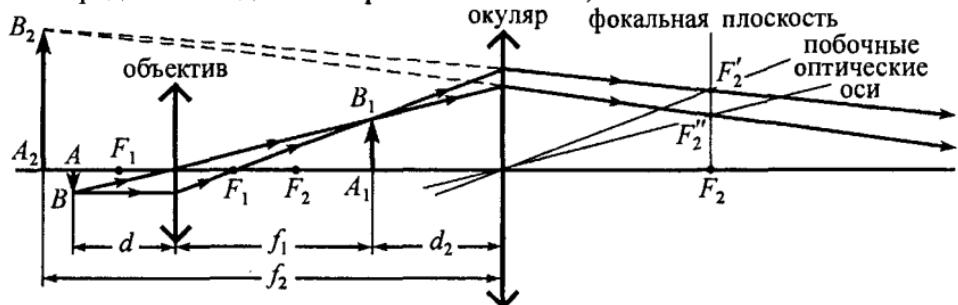


Рис. 15.102

• Решение. Микроскоп предназначен для наблюдения близкорасположенных от прибора объектов и состоит из объектива и окуляра. Объект располагается непосредственно перед объективом, но за его фокусом (рис. 15.102). Создаваемое объективом действительное изображение объекта A_1B_1 будет находиться далеко от линзы объектива и будет увеличено. В свою очередь, это изображение увеличивается окуляром и превращается в еще большее мнимое изображение A_2B_2 , наблюданное глазом. Полное увеличение микроскопа равно произведению увеличений объектива и окуляра.

Изображение A_1B_1 , создаваемое объективом, в $\Gamma_1 = f_1/d$ раз больше самого объекта. Из рис. 15.102 и формулы тонкой линзы в случае действительного изображения определим расстояние f_1 от объекта до изображения A_1B_1 и увеличение Γ_1 объектива:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F_1}, \quad \Gamma_1 = \frac{f_1}{d}, \quad \text{или} \quad f_1 = \frac{dF_1}{d - F_1}, \quad \Gamma_1 = \frac{F_1}{d - F_1}.$$

Изображение A_2B_2 в $\Gamma_2 = f_2/d_2$ раз больше изображения A_1B_1 . Для случая мнимого изображения A_2B_2 расстояние от линзы окуляра до изображения найдем из формул

$$-\frac{1}{f_2} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{F_2}, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{f_2} + \frac{1}{l - f_1} = \frac{1}{F_2};$$

Отсюда находим

$$f_2 = \frac{F_2(l - f_1)}{F_2 - (l - f_1)}.$$

Увеличение окуляра

$$\Gamma_2 = \frac{f_2}{d_2} = \frac{F_2}{F_2 - (l - f_1)}.$$

Следовательно, увеличение микроскопа

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{F_1}{d - F_1} \frac{F_2}{F_2 - \left\{ l - \frac{dF_1}{d - F_1} \right\}} = \frac{F_1 F_2}{d F_1 + (F_2 - l) (d - F_1)} = 187,5.$$

• Ответ: $\Gamma = \frac{F_1 F_2}{d F_1 + (F_2 - l) (d - F_1)} = 187,5$.

15.121. Увеличение микроскопа $\Gamma = 600$. Определить оптическую силу объектива, если фокусное расстояние окуляра $F_1 = 4$ см, а длина тубуса $l = 24$ см. Расстояние наилучшего зрения $d_0 = 25$ см.

15.122. Зрительная труба настроена для наблюдения Луны. На какое расстояние и в какую сторону нужно передвинуть окуляр, чтобы можно было рассматривать предметы, удаленные от трубы на $d = 100$ м? Фокусное расстояние объектива $F = 60$ см.

15.123. Определить увеличение телескопа, у которого объектив имеет фокусное расстояние $F_1 = 20$ м, а окуляр дает пятикратное увеличение.

Волновая оптика

Интерференция света

15.124. Расстояние между двумя когерентными источниками монохроматического света S_1 и S_2 с длиной волны $\lambda = 500$ нм, находящимися в воздухе, равно $d = 0,15$ мм (рис. 15.103). Расстояние от этих источников до экрана $l = 4,8$ м. Определить оптическую разность хода волн, приходящих от источников S_1 и S_2 в точку C экрана, если расстояние OC равно $x = 16$ мм. Что будет наблюдаться в точке C экрана – усиление или ослабление интенсивности света?

• Решение. Поскольку свет распространяется в воздухе, то оптическая разность хода Δ волн будет равна геометрической. Опустим на экран перпендикуляры $S_1 B_1$, $S_2 B_2$ и соединим точки S_1 и S_2 с точкой C . Тогда из треугольников $\Delta S_1 B_1 C$ и $\Delta S_2 B_2 C$ по теореме Пифагора находим

$$(S_1 C)^2 = (S_1 B_1)^2 + (B_1 C)^2; \quad (S_2 C)^2 = (S_2 B_2)^2 + (B_2 C)^2.$$

Так как $S_1 B_1 = S_2 B_2 = l$, $OC = x$ и $B_1 O = OB_2 = \frac{1}{2} d$, то

$$(S_1 C)^2 = l^2 + (x + \frac{1}{2} d)^2 \quad \text{и} \quad (S_2 C)^2 = l^2 + (x - \frac{1}{2} d)^2.$$

Вычитая эти выражения друг из друга, получаем

$$(S_1 C)^2 - (S_2 C)^2 = l^2 + (x + \frac{1}{2} d)^2 - l^2 - (x - \frac{1}{2} d)^2, \quad \text{или} \quad (S_1 C + S_2 C) \cdot (S_1 C - S_2 C) = 2x d.$$

Так как величины d и x малы по сравнению с l (что всегда справедливо при наблюдении интерференции света), то сумму $(S_1 C + S_2 C)$ приближенно можно заменить на $2l$, а разность $(S_1 C - S_2 C)$ есть искомая разность хода Δ . Тогда

$$2l \Delta = 2x d; \quad \Delta = x d / l = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

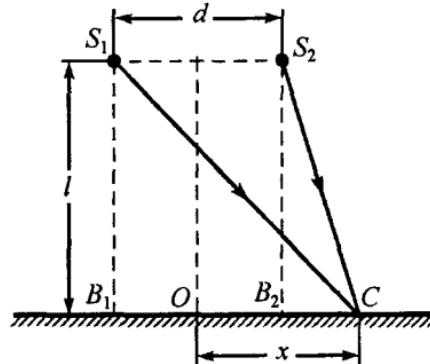


Рис. 15.103

Усиление или ослабление интенсивности света в той или иной точке экрана зависит от оптической разности хода интерферирующих волн, т.е. от числа m полуволн, укладываемыхся на оптической разности хода Δ :

$$m = \frac{\Delta}{\frac{1}{2}\lambda} = 2.$$

Так как m четное, следовательно, в данную точку экрана волны придут в фазе и интенсивность света усилится.

- Ответ: $\Delta = x d/l = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м; интенсивность света усилится.

15.125. Найти все длины волн видимого света (от $\lambda_1 = 0,38$ мкм до $\lambda_2 = 0,76$ мкм), которые будут: а) максимально усилены; б) максимально ослаблены при оптической разности хода интерферирующих волн $\Delta = 1,8$ мкм.

15.126. При наблюдении интерференции света от двух мнимых источников монохроматического света с длиной волны $\lambda = 520$ нм оказалось, что на экране длиной $\Delta x = 4$ см умещается $N = 8,5$ полосы. Определить расстояние между источниками света, если расстояние от них до экрана $l = 2,75$ м.

15.127. Опыт Ллойда состоит в получении на экране интерференционной картины от точечного монохроматического источника света S и его мнимого изображения в зеркале (рис. 15.104). Определить ширину интерференционной полосы на экране, если длина волны света $\lambda = 0,7$ мкм, расстояние от источника света до зеркала $h = 1$ мм, до экрана $l = 4$ м.

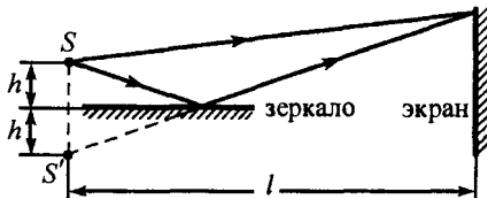


Рис. 15.104

• Решение. Рассмотрим два луча из источника S : один из них идет непосредственно на экран, а второй попадает на экран, предварительно отразившись от зеркала. Причем отраженный луч идет на экран так, как если бы он был испущен изображением S' источника S в зеркале. Волны, распространяющиеся вдоль этих лучей, можно рассматривать как

волны от когерентных источников S и S' . Поэтому на экране эти волны будут интерферировать.

Ширина интерференционной полосы равна

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda,$$

где $d = 2h$ – расстояние между источниками. Следовательно,

$$\Delta x = \frac{l}{2h} \lambda = 1,4 \text{ мм.}$$

- Ответ: $\Delta x = \frac{l}{2h} \lambda = 1,4$ мм.

15.128. В опыте Ллойда (рис. 15.104) источник света расположен на расстоянии $h = 1$ мм от зеркала. Когда источник немного отодвинули от зеркала, то четвертая светлая полоса на экране переместилась на место, первоначально занятое третьей светлой полосой. На какое расстояние отодвинули источник?



Рис. 15.105

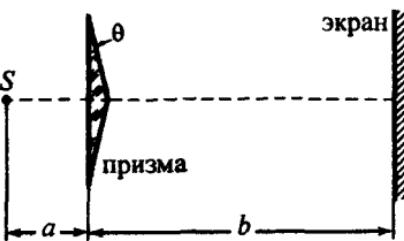


Рис. 15.106

15.129. Два плоских зеркала образуют между собой малый угол α . На биссектрисе угла на равных расстояниях от зеркал расположен точечный монохроматический источник света S (рис. 15.105). Определить расстояние между соседними интерференционными полосами на экране, расположенным на расстоянии a от точки пересечения зеркал (ширма препятствует непосредственному падению света на экран). Длина световой волны λ . Расстояние от точки пересечения зеркал до источника b .

15.130. На равнобедренную стеклянную призму с малыми углами преломления $\theta = 2 \cdot 10^{-3}$ рад падает свет от точечного монохроматического источника S , расположенного на расстоянии $a = 1$ м от призмы (рис. 15.106). Световые лучи, преломленные призмой, дают на экране интерференционную картину. Найти ширину интерференционных полос, если расстояние от призмы до экрана равно $b = 4$ м. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Длина волны света $\lambda = 600$ нм.

15.131. На толстую стеклянную пластинку, покрытую очень тонкой пленкой, показатель преломления которой равен $n_2 = 1,4$, падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Определить толщину пленки, если отраженный свет вследствие интерференции максимально ослаблен. Показатель преломления стекла $n_3 = 1,5$.

• **Решение.** Рассмотрим падение света на пластинку, покрытую пленкой, под произвольным углом $\alpha \neq 0$. Часть падающего света отражается от границы раздела воздух – пленка под углом падения α , а часть проходит внутрь пленки под углом преломления β и в свою очередь частично отражается от границы раздела пленка – стекло, а частично проникает в стекло. Пучок света, отраженный от границы раздела пленка – стекло, выходит в воздух и интерферирует с пучком, отраженным от границы раздела воздух – пленка. Если оптическая разность хода Δ интерферирующих волн равна нечетному числу длин полуволн

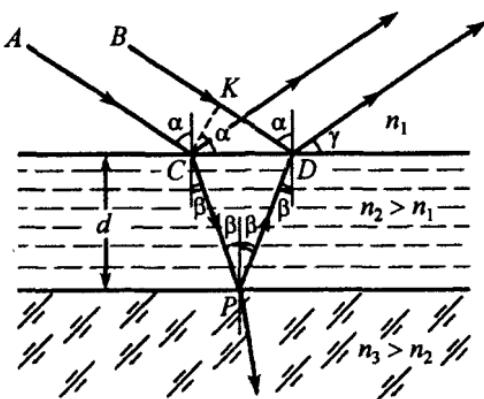


Рис. 15.107

$$\Delta = (2m + 1) \frac{1}{2} \lambda,$$

то свет вследствие интерференции будет максимально ослаблен.

Из пучка параллельных лучей выделены два луча AC и BD (рис. 15.107). Ход лучей до того, как они сойдутся в точке D , показан на рисунке. До точек C и K , лежащих на перпендикуляре к лучам, лучи пройдут одинаковые пути. Далее луч AC пройдет оптический путь

$$S_1 = (CP + PD) n_2,$$

а луч BD —

$$S_2 = KD n_1.$$

Так как показатель преломления воздуха n_1 меньше показателя преломления вещества пленки n_2 , который в свою очередь меньше показателя преломления стекла n_3 , то в обоих случаях отражение луча происходит от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой идет падающий луч. Поэтому фаза волны, распространяющейся вдоль луча $ACPD$, при отражении в точке P изменяется на π радиан, и точно так же на π радиан изменяется фаза волны, распространяющейся вдоль луча BD , при отражении света в точке D . Следовательно, результат интерференции этих волн будет такой же, как если бы никакого изменения фазы ни у той, ни у другой волны не было. Поэтому оптическая разность хода рассматриваемых волн

$$\Delta = S_1 - S_2 = (CP + PD) n_2 - KD n_1.$$

Следовательно, условие максимального ослабления света (т.е. интерференционного минимума) примет вид

$$(CP + PD) n_2 - KD n_1 = (2m + 1) \frac{1}{2} \lambda.$$

Поскольку

$$CP = PD = \frac{d}{\cos \beta}, \quad KD = CD \sin \alpha, \quad CD = 2d \tan \beta,$$

то

$$\Delta = 2 \frac{d}{\cos \beta} n_2 - 2d \tan \beta \sin \alpha n_1.$$

С учетом закона преломления

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

получим

$$\Delta = \frac{2dn_2}{\sqrt{1 - n_1^2 \sin^2 \alpha / n_2^2}} - \frac{2dn_1^2 \sin^2 \alpha}{n_2 \sqrt{1 - n_1^2 \sin^2 \alpha / n_2^2}},$$

или

$$\Delta = \frac{2d(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha)}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

По условию задачи свет падает под углом $\alpha = 0$. Поскольку показатель преломления воздуха $n_1 = 1$, то

$$\Delta = 2dn_2$$

и условие максимального ослабления отраженного света можно записать в виде

$$2dn_2 = (2m + 1) \frac{1}{2} \lambda.$$

Следовательно, искомая толщина пленки

$$d = \frac{(2m + 1)\lambda}{4n_2}.$$

Полагая $m = 0, 1, 2, \dots$, получим ряд возможных значений толщины пленки:

$$d_0 = \frac{\lambda}{4n_2} = 0,1 \text{ мкм}; \quad d_1 = \frac{3\lambda}{4n_2} = 3d_0 = 0,33 \text{ мкм и т. д.}$$

• Ответ: $d = \frac{(2m + 1)\lambda}{4n_2}$, где $m = 0, 1, 2, \dots$;

$$d_0 = \frac{\lambda}{4n_2} = 0,11 \text{ мкм}, \quad d_1 = \frac{3\lambda}{4n_2} = 3d_0 = 0,33 \text{ мкм и т. д.}$$

15.132. Белый свет падает на стеклянную пластинку, толщина которой $d = 0,4$ мкм. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Какие длины волн, лежащие в пределах видимого спектра (от $\lambda_1 = 350$ нм до $\lambda_2 = 750$ нм), усиливаются в отраженном пучке? Свет падает перпендикулярно к поверхности пластиинки.

15.133. На мыльную пленку с показателем преломления $n = 1,3$, находящуюся в воздухе, падает пучок белого света. При какой наименьшей толщине пленки отраженный свет с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции? Свет падает перпендикулярно к поверхности пленки.

15.134. На плоскопараллельную стеклянную пластинку положена выпуклой стороной плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны $R = 12$ м (рис. 15.108). На плоскую поверхность линзы параллельно ее главной оптической оси падает пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. При этом в отраженном свете на линзе видны чередующиеся темные и светлые кольца, а в центре линзы – темное пятно. Определить радиус третьего темного кольца.

• **Решение.** Построим ход двух узких пучков света, падающих на плоскую поверхность линзы перпендикулярно к ней.

Пучок 1 не преломляясь входит в линзу, а при выходе из нее меняет направление распространения, отклоняясь к оси линзы OB . После отражения в точке N от пластиинки пучок 1 падает на поверхность линзы в точке C и интерферирует с пучком 2. Так как радиус кривизны линзы достаточно велик, то пути, пройденные пучками 1 и 2 в линзе, практически одинаковы, а отклонением пучка 1 от прямолинейного распространения можно пренебречь и считать, что после линзы пучок 1 падает на поверхность пластиинки нормально и отражается по тому же направлению. Поэтому пучок 1 проходит дважды расстояние d в зазоре между линзой и пластиинкой и разность хода двух рассмотренных пучков равна $\Delta S = 2d$.

Поскольку наблюдение интерференции производится в отраженном свете, то для определения оптической разности хода Δ интерферирующих волн необходимо учесть изменения фазы при отражении от границ раздела сред.

Так как показатель преломления n среды, заполняющей зазор между линзой и пластиинкой (в нашем случае это воздух с $n = 1$), меньше показателей преломления $n_{\text{ст}}$ материала линзы и $n_{\text{ст}}$ стеклянной пластиинки, то отражение пучка 1 в точке N происходит от среды, оптически более плотной, чем та среда, из которой он распространяется. Поэтому фаза волны в пучке 1 при отражении в точке N изменится на π радиан, что соответствует изменению разности хода на $\frac{1}{2}\lambda$. Пучок 2 в точке C отражается от менее плотной среды и фаза волны в нем не меняется. Следовательно, оптическая разность хода интерферирующих волн

$$\Delta = n \Delta S + \frac{1}{2} \lambda, \quad \text{или} \quad \Delta = 2dn + \frac{1}{2} \lambda.$$

Таким образом, условие максимумов интерференционной картины можно записать в виде

$$2dn + \frac{1}{2} \lambda = m\lambda, \quad \text{или} \quad 2dn = (2m - 1)\frac{1}{2} \lambda, \quad (1)$$

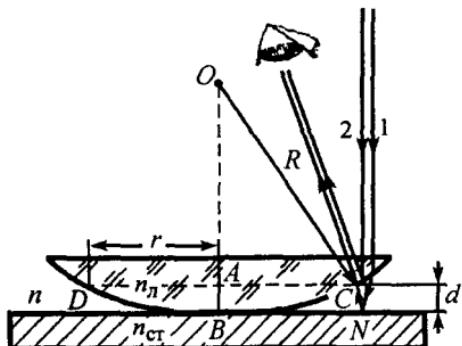


Рис. 15.108

$$2dn + \frac{1}{2}\lambda = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad \text{или} \quad 2dn = 2m\frac{1}{2}\lambda. \quad (2)$$

Легко заметить, что соотношения (1) и (2) можно объединить: формула

$$2dn = (k - 1)\frac{1}{2}\lambda, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

при четных значениях k выражает условие максимумов интерференции света, а при нечетных k — минимумов. Значению $k = 1$ соответствует точка касания линзы и пластиинки.

Для определения радиусов колец проведем некоторые приближенные расчеты.

Из треугольника ΔOCA имеем

$$AC^2 = OC^2 - OA^2.$$

Поскольку $AC = r$, $OA = OB - AB$, $OB = OC = R$, $AB = d$, то

$$r^2 = R^2 - (R - d)^2, \quad \text{или} \quad r^2 = R^2 - R^2 + 2Rd - d^2; \quad r^2 = (2R - d)d, \quad (4)$$

где r — радиус интерференционного кольца, всем точкам которого соответствует одинаковый зазор d .

Так как расстояние d мало по сравнению с $2R$, то выражение (4) можно упростить, опустив d в скобках. Тогда

$$r^2 = 2Rd; \quad r = \sqrt{2Rd}.$$

Следовательно, с учетом выражения (3) получим значения радиусов колец в виде

$$r_k = \sqrt{\frac{(k-1)R\lambda}{2n}},$$

где k — порядковый номер кольца.

Так как третьему темному кольцу соответствует $k = 7$, то

$$r = \sqrt{\frac{6R\lambda}{2n}} = \sqrt{3R\lambda} = 4,65 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

• Ответ: $r = \sqrt{3R\lambda} = 4,65 \cdot 10^{-3}$ м.

15.135. Определить диаметр второго светлого кольца Ньютона, наблюдавшегося в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 640$ нм, если радиус кривизны плоско-выпуклой линзы, лежащей выпуклой стороной на плоской стеклянной пластине, равен $R = 6,4$ м, а лучи параллельны главной оптической оси линзы.

15.136. Решить задачу 15.135 при условии, что линза помещена в воду. Показатель преломления воды $n = 1,33$ меньше показателя преломления стекла и материала линзы.

Дифракция света

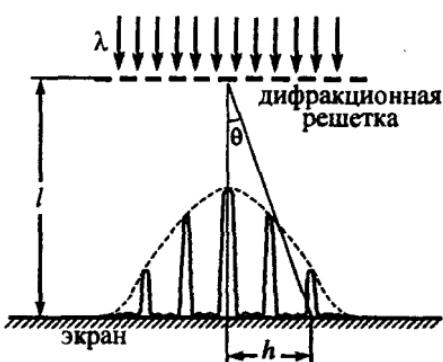


Рис. 15.109

15.137. Дифракционная решетка, на каждом миллиметре которой нанесено $N = 75$ штрихов, освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм (рис. 15.109). На экране, отстоящем от решетки на расстояние l , видны светлые полосы на равных расстояниях друг от друга. Расстояние от центральной светлой полосы на экране до второй полосы равно $h = 11,25$ см. Определить расстояние l .

• Решение. Искомое расстояние l можно найти из соотношения

$$\frac{h}{l} = \operatorname{tg} \theta,$$

где θ – угол, который составляет направление на вторую светлую полосу с направлением на центральную светлую полосу. Для определения значения θ обратимся к формуле максимумов интенсивности дифракционной картины

$$d \sin \theta = m \lambda,$$

где d – период дифракционной решетки, равный расстоянию между соседними штрихами:

$$d = \frac{10^{-3}}{N}.$$

В условиях данной задачи угол θ мал, в чем легко убедиться из следующего расчета:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} = 2 \frac{\lambda}{d} = 0,075.$$

Для таких малых углов можно приближенно считать $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{h}{l} \approx \sin \theta = m \frac{\lambda}{d}; \quad l = \frac{h d}{m \lambda} = \frac{h \cdot 10^{-3}}{m \lambda N} = 1,5 \text{ м.}$$

• Ответ: $l = \frac{h \cdot 10^{-3}}{m \lambda N} = 1,5 \text{ м.}$

15.138. Определить угол, под которым наблюдается максимум третьего порядка в спектре, даваемом при облучении дифракционной решетки светом с длиной волны $\lambda = 589 \text{ нм}$. На $l = 1 \text{ мм}$ дифракционной решетки приходится $N = 5$ штрихов. Свет падает на решетку нормально.

15.139. Для некоторой длины волны дифракционный максимум первого порядка спектра наблюдается под углом $\theta_1 = 8,5^\circ$. Под каким углом наблюдается последний максимум? Свет падает на решетку нормально.

15.140. Определить длину волны света, для которого линия, соответствующая максимуму третьего порядка в дифракционном спектре, совпадает с линией, соответствующей максимуму четвертого порядка для света с длиной волны $\lambda = 490 \text{ нм}$. Свет падает на решетку нормально.

15.141. На дифракционную решетку нормально падает свет, длины волн которого лежат в пределах от $\lambda_1 = 490 \text{ нм}$ до $\lambda_2 = 600 \text{ нм}$. Максимумы каких порядков в спектрах не будут перекрываться?

§16. Элементы теории относительности

Вспомним, что под инерциальной системой отсчета принято понимать такую систему отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона – закон инерции (см. §2). По этому закону, если на тело со стороны других тел не действует результирующая сила, то оно либо остается в состоянии покоя, либо продолжает двигаться равномерно и прямолинейно.

Посмотрим, одинаково ли выглядят законы механики Ньютона в неподвижной и движущейся инерциальных системах отсчета. Для этого введем две системы отсчета

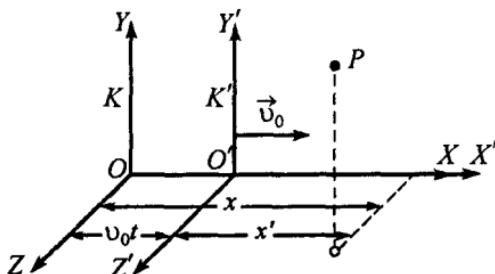


Рис. 16.1

K и K' , оси которых остаются все время параллельными друг другу и в начальный момент времени совпадают. Пусть система отсчета K' движется равномерно и прямолинейно со скоростью \vec{v}_0 так, как показано на рис. 16.1. Очевидно, что координаты точки P в системах отсчета K и K' в любые моменты времени связаны соотношениями

$$x = x' + v_0 t', \quad y' = y, \quad z' = z,$$

добавив к которым условие, что время в обеих системах отсчета течет одинаково, получим четыре уравнения

$$x = x' + v_0 t', \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (16.1)$$

которые называют *преобразованиями Галилея*.

Дважды последовательно продифференцировав по времени первые три соотношения (16.1), найдем связи между скоростями и ускорениями точки P в системах отсчета K и K' :

$$v_x = v_{x'} + v_0, \quad v_y = v_{y'}, \quad v_z = v_{z'}, \quad (16.2)$$

$$a_x = a_{x'}, \quad a_y = a_{y'}, \quad a_z = a_{z'}. \quad (16.3)$$

Законы механики Ньютона исходят из некоторых допущений, которые опираются на повседневный опыт. Предполагается, что длина тела (или разность координат двух произвольных точек) одинакова в любой системе отсчета и что время в различных системах отсчета течет одинаково, т.е. результаты пространственных и временных измерений не изменяются при переходе из одной системы отсчета в другую. При этом масса тела и все силы, действующие на тело, также считаются неизменными. Очевидно, что при таких допущениях, если подставить преобразования (16.1) во второй закон Ньютона $\vec{F} = m \vec{a}$, он останется неизменным. Неизменность вида уравнения при замене в нем координат и времени одной системы отсчета координатами и временем другой системы называют *инвариантностью* уравнения. Тем самым второй закон Ньютона инвариантен по отношению к преобразованиям Галилея.

Из того, что законы механики Ньютона одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, следует важный вывод: ни одна инерциальная система отсчета ничем не выделена по сравнению с другой инерциальной системой. Именно в этом смысле мы говорим, что *все инерциальные системы отсчета инвариантны с точки зрения описания механических явлений*. Система отсчета, связанная с поездом или самолетом, которые движутся равномерно и прямолинейно, ничем не уступает системе отсчета, связанной с Землей. Если вы мчитесь без толчков и качки, то можно с равным основанием утверждать, что вы покойтесь, а Земля движется. Необходимо придумать эксперимент, с помощью которого можно было бы установить, какая система отсчета «действительно» покоятся, а какая движется. Следовательно, не существует способа выделить систему отсчета, которая находилась бы в состоянии абсолютного покоя.

Утверждение, что все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, называют *принципом относительности Галилея*.

Во второй половине XIX в. в результате исследований явлений электричества, магнетизма и света интерес к принципу относительности значительно возрос. Развивая теорию электродинамики, Максвелл показал, что свет можно рассматривать как электромагнитную волну. Согласно уравнениям Максвелла, скорость распространения электромагнитных волн, в частности света, в вакууме одинакова по всем направлениям и равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Из преобразований Галилея следовало, что скорость света может быть одинаковой по всем направлениям только в одной инерциальной системе отсчета. Действительно, если в рассмотренной выше системе отсчета K скорость света по всем направлениям равна c , то в любой другой системе K' это не так (см. формулы (16.2)): в положительном направлении оси $O'X'$ свет должен распространяться с относительной скоростью $(c - v_0)$, а в отрицательном – с $(c + v_0)$. Но в уравнениях Максвелла нет каких-либо оговорок насчет относительной скорости. Теория просто указывала, что $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Возможно, это предполагало, что должна существовать выделенная система отсчета, в которой скорость света имела бы такое значение. При этом возникает вопрос: в какой системе отсчета скорость света имеет значение, предсказанное теорией Максвелла?

Физики того времени рассматривали материальный мир с точки зрения законов механики, и для них было естественным предположение, что свет распространяется в некоторой среде, которую называли эфиром и считали, что она заполняет все пространство. Тем самым физики XIX в. полагали, что предсказываемое теорией Максвелла значение скорости света достигается в системе отсчета, связанной с эфиром. Наиболее простой вид уравнения Максвелла принимали в системе отсчета, в которой $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, т.е. системе отсчета, покоящейся относительно эфира. В любой другой системе отсчета в уравнения Максвелла было необходимо вводить добавочные члены, которые учитывали бы относительную скорость. Таким образом, они были не одинаковы в различных инерциальных системах отсчета, т.е. законы электромагнетизма принципу относительности не удовлетворяли. Следовал вывод, что уравнения Максвелла позволяют выделить одну систему отсчета и отдать ей предпочтение перед другими, а именно ту, которую можно было бы считать абсолютно покоящейся системой отсчета. Физики стали определять скорость Земли относительно этой абсолютной системы отсчета. Было осуществлено множество хитроумных экспериментов. Самым известным явился опыт А.А. Майкельсона и Э.В. Морли по измерению скорости Земли относительно эфира. Суть его сводилась к измерению скорости света в различных направлениях. Подобно тому как лодка имеет различную скорость относительно Земли в зависимости от того, движется ли она вверх по течению, вниз по течению или поперек течения, так и свет, по предложению ученых, должен был бы распространяться с различной скоростью в зависимости от скорости обтекания эфиром Земли. Вопреки ожи-

даниям, никакого различия в скорости света им обнаружить не удалось. Отрицательный результат эксперимента был неожидан и непонятен и стал одной из величайших загадок физики конца прошлого века. Все попытки объяснить его оказались безуспешными. Наиболее удачную идею для объяснения отрицательного результата эксперимента независимо выдвинули Дж.Ф. Фишджеральд и Г.А. Лоренц. Оба автора утверждали, что любой отрезок в направлении движения через эфир сокращается в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, где v – скорость отрезка. Хотя гипотеза сокращения успешно объясняла результаты опыта, она сама была беззащитной, так как ее единственная цель – избавиться от трудностей в объяснении опыта. Она была чересчур искусственной. Сходные трудности возникали и в других опытах по обнаружению земного эфира. Планка предположил, что в природе есть закон, заключающийся в том, что нельзя обнаружить эфирный ветер никаким способом, т.е. абсолютную скорость измерить невозможно. В 1905 г. Альберт Эйнштейн предложил новую теорию, которая смогла объяснить результаты опыта Майкельсона – Морли и решить многие другие проблемы, при этом полностью изменив принятые представления о пространстве и времени. Многие понятия и величины, считавшиеся *абсолютными* (т.е. не зависящими от системы отсчета), теория Эйнштейна перевела в ранг относительных.

Преобразования Лоренца

Когда стало ясно, что с уравнениями физики не все ладится, в первую очередь подозрение пало на уравнения электродинамики Максвелла. Они только-только были написаны, казалось почти естественным, что они неверны. Их принялись переписывать, видоизменять и подгонять к тому, чтобы оказался выполненным принцип относительности Галилея. При этом в уравнениях электродинамики появлялись новые члены; они предсказывали новые электромагнитные явления, но эксперимент никаких таких явлений не обнаружил, и пришлось отказаться от попыток изменить уравнения Максвелла. Постепенно становилось ясно, что законы электродинамики верны, а проблема в чем-то другом.

Между тем Лоренц заметил одно замечательно интересное явление: если в уравнениях Максвелла сделать подстановку

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}; \quad (16.4)$$

$$y = y'; \quad (16.5)$$

$$z = z'; \quad (16.6)$$

$$t = \frac{t' + v_0 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad (16.7)$$

то форма уравнений после подстановки не менялась. Уравнения (16.4)–(16.7) теперь называют *преобразованиями Лоренца*. Как видим, изменилась не только формула преобразования координаты x , но и формула пре-

образования времени t . Из выражений (16.4) и (16.7) видно, как переплетены пространственная и временная координаты.

Формулы (16.4) – (16.7) были предложены Лоренцем для объяснения отрицательного результата эксперимента Майкельсона – Морли и для придания уравнениям Максвелла одинакового вида во всех инерциальных системах отсчета. Год спустя Эйнштейн вывел их независимо на основе своей специальной теории относительности.

Постулаты и следствия специальной теории относительности

Анализируя проблемы электромагнитной теории и теории света, Эйнштейн пришел к выводу, что существующие противоречия обусловлены предположением о существовании абсолютного пространства. Эйнштейн предложил полностью отказаться от представления об эфире и от сопутствующего предположения о существовании абсолютной системы отсчета. Эти предположения Эйнштейн сформулировал в виде двух постулатов. Первый постулат был обобщением принципа относительности Галилея не только на законы механики, но и на законы всей физики, включая электричество и магнетизм: *законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета (принцип относительности)*, или по-другому, *уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой*. Второй постулат согласуется с первым: *во всех инерциальных системах отсчета свет распространяется в вакууме со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, не зависящей от скорости источника или наблюдателя (постоянство скорости света)*. Второй постулат утверждает, что наблюдатель, движущийся к источнику или от источника света, получит в результате измерений такую же скорость света, как и наблюдатель, покоящийся относительно источника. Это противоречит нашему повседневному опыту, так как при приближении наблюдателя к источнику скорость его движения должна была бы, по нашим представлениям, прибавляться к скорости света, а при удалении – вычитаться из нее. Возникающая проблема отчасти обусловлена тем, что в повседневном опыте нам никогда не приходится измерять скорости, близкие к скорости света. Поэтому наш жизненный опыт здесь бесполезен.

Два сформулированных выше постулата образуют основу *специальной теории относительности*. Теория относительности Эйнштейна потребовала отказа от представлений о пространстве и времени, основанных на здравом смысле, позволила объединить электромагнитную теорию Максвелла с механикой и предсказала много необычных, чрезвычайно интересных явлений. Некоторые из них рассмотрим подробнее.

1. Лоренцево сокращение

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси $O'X'$ и покоящийся относительно системы отсчета K' , которая движется относительно системы K со скоростью \vec{v}_0 так, как показано на рис. 16.2. Длина стержня в сис-

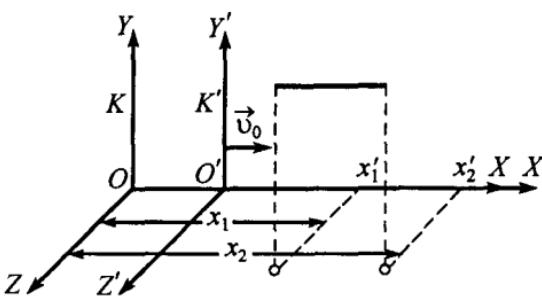


Рис. 16.2

теме отсчета K' равна $l_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1, x'_2 – не изменяющиеся со временем t' координаты его концов. Для определения длины стержня в системе K нужно отметить координаты x_1 и x_2 его концов в один и тот же момент времени $t_1 = t_2$. Их разность $(x_2 - x_1)$ даст длину l стержня в системе отсчета K .

Выразив время t' из формулы (16.7)

$$t' = t \sqrt{1 - v_0^2/c^2} - v_0 x'/c^2$$

и подставив в (16.4)

$$x = \frac{x' + v_0 (t \sqrt{1 - v_0^2/c^2} - v_0 x'/c^2)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

получим

$$x = x' \sqrt{1 - v_0^2/c^2} + v_0 t.$$

Следовательно, координаты x_1, x_2 концов стержня в системе отсчета K , измеренные в моменты времени t_1 и t_2 , равны

$$x_1 = x'_1 \sqrt{1 - v_0^2/c^2} + v_0 t_1, \quad x_2 = x'_2 \sqrt{1 - v_0^2/c^2} + v_0 t_2,$$

а длина стержня

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - v_0^2/c^2} + v_0 (t_2 - t_1).$$

Поскольку $t_1 = t_2$, то, используя введенные обозначения l и l_0 , находим

$$l = l_0 \sqrt{1 - v_0^2/c^2}. \quad (16.8)$$

Таким образом, длина стержня l , измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется, меньше длины l_0 , измеренной в системе, относительно которой стержень покойится. Этот эффект называют *лоренцевым сокращением длины*. Длина l_0 называется *собственной длиной*. Как видим, формула (16.8) совпадает с гипотезой сокращения длины отрезка Фицджеральда и Лоренца.

Важно отметить, что сокращение длины происходит только в направлении движения. Предположим, что вы движетесь мимо высокого здания с очень большой скоростью. Это эквивалентно тому, что здание движется мимо вас в противоположную сторону с такой же по величине скоростью. При этом здание будет казаться таким же высоким, но более узким.

2. Замедление времени

Пусть в одной и той же точке с координатами $x'_1 = x'_2$ системы отсчета K' , движущейся со скоростью v_0 , происходят два события в разные моменты времени t'_1 и t'_2 . Тогда этим событиям в неподвижной системе отсчета K соответствуют моменты времени t_1 и t_2 , причем (см. формулу (16.7))

$$t_1 = \frac{t'_1 + v_0 x'_1 / c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + v_0 x'_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Отсюда получим

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

или, вводя обозначения $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta t'_0 = t'_2 - t'_1$,

$$\Delta t'_0 = \Delta t \sqrt{1 - v_0^2/c^2}. \quad (16.9)$$

Следовательно, время $\Delta t'_0$, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называемое *собственным временем*, всегда меньше, чем время Δt , отсчитанное по часам, движущимся относительно тела.

Для проверки эффекта замедления времени были поставлены специальные эксперименты. Например, в 1971 г. сверхточные атомные часы были помещены на реактивный самолет, совершивший кругосветный полет. При этом предсказание Эйнштейна было подтверждено. Очень интересным примером замедления времени служат мю-мезоны (мюоны) – частицы, которые в среднем через 2,2 мкс самопроизвольно распадаются. Они приходят на Землю с космическими лучами, но могут быть созданы и в лабораторных условиях. Ясно, что при таком малом времени жизни мюон не может пройти расстояние больше 660 м, даже если он будет двигаться со скоростью света. Но хотя космические мюоны возникают примерно на высоте 10 км и выше, их все-таки обнаруживают вблизи поверхности Земли. Объяснение этого состоит в том, что некоторые мюоны летят со скоростями, близкими к скорости света. Поэтому, с «их собственной точки зрения», они живут всего лишь около 2 мкс, с нашей же – их жизненный путь гораздо более долгий: их жизнь удлиняется в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз.

Замедление времени породило множество интересных парадоксов относительно космических путешествий, наиболее известным из которых является парадокс близнецов. Суть его состоит в следующем. Предположим, что один из двух близнецов, достигших 20-летнего возраста, отправился в полет к далекой звезде и обратно на космическом корабле, развивающем околосветовую скорость, а другой близнец остался на Земле. С точки зрения оставшегося близнеца, близнец-астронавт стареет медленнее: если для оставшегося на Земле близнеца пройдет, к примеру, 20 лет, то для его брата-близнеца пройдет всего лишь год. Следовательно, по возвращении на Землю ему исполнится 21 год, тогда как оставшемуся близнецу «стукнет» 40 лет. Однако, с точки зрения близнеца-астронавта, все наоборот. Так как все относительно, то близнец-астронавт может повторить все рассуждения своего брата и утверждать, что в момент встречи близнец, оставшийся на Земле, будет моложе его на 19 лет. Но оба близнеца не могут быть правы одновременно, так как по возвращении космического корабля на Землю возможно сравнение возраста близнецов и сверка часов. В действительности парадокса здесь никакого нет. Дело в том, что все следствия специальной теории относительности, в том числе и замедление времени, применимы только к наблюдателям, находящимся

в инерциальных системах отсчета. Землю в достаточно хорошем приближении можно считать инерциальной системой отсчета, а космический корабль – нельзя, так как он ускоряется в начале и в конце полета и в какой-то далекой точке должен повернуть назад (что обязательно произойдет с ускорением). Поэтому рассуждения близнец-астронавта неверны: он окажется моложе.

3. Одновременность событий

Пусть в неподвижной системе отсчета K одновременно происходят два события. Тогда первому событию в движущейся системе K' соответствует момент времени (что легко получить, исключив x' в формулах (16.4) и (16.7))

$$t'_1 = \frac{t_1 - v_0 x_1 / c^2}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}},$$

а второму –

$$t'_2 = \frac{t_2 - v_0 x_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}},$$

где $t_1 = t_2$, а x_1 и x_2 определяют координаты в системе K , где эти события произошли. Следовательно,

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{v_0 (x_1 - x_2) / c^2}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}. \quad (16.10)$$

Этот эффект называют *нарушением одновременности удаленных событий*. Другими словами, пространственно разобщенные события, произошедшие одновременно с точки зрения наблюдателя, находящегося в одной системе отсчета, для наблюдателя в другой системе – не одновременны. Например, вспышка света от источника, расположенного в центре космического корабля, с точки зрения космонавта, одновременно достигнет носа и кормы корабля. Но, с точки зрения наблюдателя из неподвижной системы отсчета, это не так.

Преобразование скоростей

Рассмотрим еще одно следствие преобразований Лоренца – найдем правило преобразования скоростей при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Пусть система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью \vec{v}_0 . Если в некоторый момент времени частица имеет проекции скорости v_x' , v_y' и v_z' на оси координат системы отсчета K' , то за бесконечно малое время dt' , измеренное по часам этой системы, приращения координат частицы составят

$$dx' = v_x' dt', \quad dy' = v_y' dt', \quad dz' = v_z' dt'.$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в неподвижной системе отсчета K , приращения координат частицы будут равны

$$dx = \frac{v_{x'} dt' + v_0 dt'}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}, \quad dy = v_{y'} dt', \quad dz = v_{z'} dt',$$

а соответствующее им время

$$dt = \frac{dt' + v_0 (v_{x'} dt') / c^2}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}.$$

Разделив выражения для dx , dy и dz на dt , получим

$$v_x = \frac{v_{x'} + v_0}{1 + v_0 v_{x'}/c^2}, \quad v_y = \frac{v_y \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_0 v_{x'}/c^2}, \quad v_z = \frac{v_z \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_0 v_{x'}/c^2}, \quad (16.11)$$

где учтено, что $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$ – проекции скорости частицы на оси координат системы отсчета K . Формулы (16.11) выражают правило сложения скоростей в так называемой *релятивистской кинематике*. Очевидно, что при медленных движениях ($v_0 \ll c$, $\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \approx 1$) они переходят в формулы (16.2).

Напомним, что одним из постулатов теории относительности является постулат о постоянстве скорости света в любых инерциальных системах отсчета. Предположим, что человек на борту космического корабля наблюдает, как распространяется свет в определенном направлении ($v_{x'} = c$). Тогда для человека, находящегося в любой другой инерциальной системе отсчета, свет в том же направлении будет распространяться со скоростью

$$v_x = \frac{c + v_0}{1 + v_0 c/c^2} = c \frac{c + v_0}{c + v_0} = c,$$

т.е., с точки зрения стороннего наблюдателя, скорость света не изменится, она по-прежнему будет равна c , даже если сам наблюдатель также будет двигаться со скоростью света!

Релятивистская динамика

Теория относительности Эйнштейна предполагает, что не только уравнения Максвелла, но и все физические законы не должны меняться от преобразований Лоренца. Иными словами, уравнения динамики следует изменить так, чтобы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой согласно преобразованиям (16.4) – (16.7) они оставались такими же, причем при малых скоростях они должны переходить в законы классической механики (механики Ньютона). Как оказалось, единственное, что нужно сделать для этого, – это определить импульс тела как

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (16.12)$$

где m_0 – масса тела, измеренная в системе отсчета, относительно которой тело поконится; иногда ее называют *массой покоя*, и она совпадает с массой тела в механике Ньютона. Величину

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (16.13)$$

принято называть *релятивистской массой* тела.

Используя определение (16.12) импульса тела, уравнение, выражающее второй закон Ньютона, в формулировке Эйнштейна записывают в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} = \vec{F}, \quad (16.14)$$

и называют основным уравнением релятивистской динамики тела. Очевидно, что при малых скоростях величина релятивистского импульса (16.12) тела совпадает со значением импульса в классической механике и уравнения (16.14) превращаются в хорошо известный второй закон Ньютона.

В механике Ньютона, если на тело долгое время действует постоянная сила, то скорость тела будет непрерывно возрастать и может превысить даже скорость света. В релятивистской механике беспрерывно растет не скорость тела, а его импульс, и этот рост оказывается не на скорости, а на релятивистской массе тела. Со временем изменение скорости становится все меньше, а импульс продолжает расти: у тела появляется громадная инерция. Например, чтобы отклонить электроны в ускорителе заряженных частиц, необходимо магнитное поле в тысячи раз более сильное, чем это следует из законов Ньютона. Это означает, что инертность электронов возросла в тысячи раз.

Связь массы и импульса тела с энергией

Если на тело на определенном пути будет действовать постоянная сила, которая совершает над ним положительную работу, то скорость тела будет возрастать. С другой стороны, с увеличением скорости тела, согласно (16.13), происходит также увеличение его массы, т.е. производимая над телом работа приводит к увеличению не только его скорости, но и массы. Из ньютоновской механики известно, что работа, производимая над телом, увеличивает его энергию. Это приводит к мысли, что масса есть форма энергии.

Чтобы найти математическую связь между массой и энергией, Эйнштейн предположил, что закон сохранения энергии остается справедливым и в специальной теории относительности, и показал, что кинетическая энергия тела может быть вычислена по формуле

$$T = m c^2 - m_0 c^2, \quad (16.15)$$

где m – масса тела, движущегося со скоростью v , определяемая формулой (16.13); m_0 – масса покоя тела. Можно показать, что при $v \ll c$ формула (16.15) превращается в известное из механики выражение $T = \frac{1}{2} m_0 v^2$.

Исходя из представления о массе как о форме энергии, Эйнштейн назвал второе слагаемое в (16.15) энергией покоя:

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (16.16)$$

Преобразовав формулу (16.15) с учетом (16.16)

$$m c^2 = T + E_0 \quad (16.17)$$

и назвав величину

$$E = T + E_0 \quad (16.18)$$

полнейшей энергией тела, мы приходим к знаменитой формуле Эйнштейна

$$E = m c^2. \quad (16.19)$$

Эта формула устанавливает математическую связь между понятиями массы и энергии. Чтобы идея о существовании подобной связи имела

смысл с практической точки зрения, т.е. чтобы масса представляла собой одну из форм энергии, она должна быть способна превращаться в другие формы энергии. Предсказание Эйнштейна о возможных превращениях массы было много раз подтверждено на практике и лежит в основе многих процессов. Взаимное превращение массы и энергии проще всего обнаруживается в ядерной физике (см. §19) и физике элементарных частиц. Например, на опыте наблюдался распад нейтрального pione (так называемый π^0 -мезон) с массой покоя $2,4 \cdot 10^{-28}$ кг на два фотона (см. §17), т.е. превращение частицы целиком в электромагнитное излучение, когда π^0 -мезон полностью исчезает. Количество образующейся в результате распада энергии, как показали измерения, в точности соответствует формуле (16.13). В лабораторных условиях наблюдался и обратный процесс превращения электромагнитного излучения в такие материальные частицы, как, например, электроны.

Используя выражения (16.12) для импульса и (16.19) для полной энергии тела, можно получить связь между этими величинами:

$$E^2 - m_0^2 c^4 = p^2 c^2, \quad \text{или} \quad E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (16.20)$$

Величины, значения которых одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, называют *инвариантами*. Из рассмотренных нами величин инвариантами являются скорость света, масса покоя тела, собственное время, величина $E^2 - p^2 c^2$. Интересно отметить, что инвариантом также является величина $E^2 - c^2 B^2$ (где E и B – напряженность электрического поля и индукция магнитного поля соответственно). Отсюда следует фундаментальный вывод, что единой физической реальностью является электромагнитное поле, а не отдельно электрическое и магнитное поля.

Для проверки предсказаний специальной теории относительности было проведено очень много экспериментов, но никаких противоречий с теорией обнаружено не было. При скоростях, существенно меньших скорости света, формулы теории относительности (релятивистские) переходят в классические. Требование, согласно которому более общая теория должна приводить к тем же результатам, что и более ограниченная теория, называется *принципом соответствия*: две теории должны соответствовать друг другу там, где их области применимости перекрываются. Таким образом, специальная теория относительности не противоречит классической механике. Она скорее представляет собой более общую теорию, частным случаем которой следует считать механику Ньютона.

Рекомендации по решению задач

Решение первой части задач этого параграфа основано на непосредственном применении следствий преобразований Лоренца и правил преобразования скоростей релятивистской кинематики. При решении таких задач следует помнить, что:

- длина жесткого стержня l , измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью v , всегда в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз меньше длины l_0 , измеренной в системе, относительно которой стержень покойится; при этом сокращение длины происходит только в направлении движения; если ось стержня составляет некоторый угол с направлением дви-

жения, то для наблюдателя, находящегося в другой системе отсчета, стержень останется прямым, но угол изменится – тангенс угла увеличится в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз (см. решение задачи №16.2);

– собственное время Δt_0 , отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, всегда в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз меньше, чем время Δt , отсчитанное по часам, движущимся со скоростью v относительно тела;

– пространственно разобщенные события, произошедшие одновременно с точки зрения наблюдателя, находящегося в одной системе отсчета, не одновременны для наблюдателя в другой системе;

– скорость тела в одной системе отсчета не равна векторной сумме относительной и переносной скоростей, как в классической механике, а определяется по правилам преобразования проекций скоростей релятивистской кинематики (16.11); скорость тела в любой инерциальной системе отсчета не может превысить скорость света.

Решение другой части задач основано на применении законов релятивистской динамики и определений релятивистской массы, импульса и энергии тела. Для решения таких задач достаточно понимания соответствующих формул (16.12) – (16.20). Следует иметь в виду, что для тел, движущихся со скоростями, близкими к скорости света, второй закон Ньютона в виде $m \ddot{d} = \vec{F}$ применять нельзя (можно показать, что в релятивистском случае ускорение и сила, вообще говоря, даже не лежат на одной прямой). Однако, если при движении скорость тела не меняется по величине (тангенциальное ускорение равно нулю), то уравнение (16.14) можно записать в виде

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad \text{или} \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v^2}{R} = F_n,$$

где $v^2/R = a_n$ – нормальное ускорение тела; R – радиус кривизны траектории; F_n – проекция результирующей силы, действующей на тело, на нормаль к траектории движения.

Задачи

16.1. Предположим, что вы решили отправиться в космический полет к звезде, удаленной от Земли на расстояние 65 световых лет. С какой скоростью необходимо лететь, чтобы это расстояние сократилось до 20 световых лет?

• **Решение.** Световым годом принято называть расстояние, на которое распространяется свет за один год, т.е. 1 световой год = $3 \cdot 10^8$ м/с $365 \cdot 24 \cdot 3600$ с $\approx 9,5 \cdot 10^{15}$ м.

По условию задачи, звезда удалена от Земли на расстояние $S_0 = 65$ световых лет. Если вы астронавт и находитесь на космическом корабле, который мчится к звезде со скоростью v , то это эквивалентно тому, что звезда приближается к вам с такой же скоростью. Если мысленно заменить расстояние S_0 жестким стержнем такой же длины, то относительно системы отсчета, связанной с космическим кораблем, длина стержня

$$S = S_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Отсюда находим

$$v = c \sqrt{1 - (S/S_0)^2} \approx 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

где учтено, что $S = 20$ световых лет.

• **Ответ:** $v = c \sqrt{1 - (S/S_0)^2} \approx 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$

16.2. Система отсчета «ракета» движется вдоль оси OX инерциальной системы отсчета «Земля» с постоянной скоростью $v = 2 \cdot 10^8$ м/с. В системе отсчета «Земля» расположен стержень длиной $l_0 = 1$ м под углом $\alpha_0 = 45^\circ$

к оси OX . Найти длину стержня и угол наклона его к оси $O'X'$ в системе отсчета «ракета». Оси OX и $O'X'$ параллельны.

• Решение. Длина стержня в системах отсчета «Земля» и «ракета» равна

$$l_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$l = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}$$

соответственно (рис. 16.3).

Так как эффект сокращения длины проявляется только в направлении движения, то

$$x'_1 = x_1 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad x'_2 = x_2 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

$$y'_1 = y_1; \quad y'_2 = y_2.$$

Следовательно,

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (1 - v^2/c^2) + (y_2 - y_1)^2}.$$

Из рис. 16.3 видно, что

$$x_2 - x_1 = l_0 \cos \alpha_0, \quad y_2 - y_1 = l_0 \sin \alpha_0.$$

Тогда

$$l = l_0 \sqrt{(1 - v^2/c^2) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2 \cos^2 \alpha} \approx 0,88 \text{ м},$$

а искомый угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1) \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \operatorname{arctg} \frac{\tan \alpha_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 53,3^\circ.$$

• Ответ: $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2 \cos^2 \alpha} \approx 0,88 \text{ м}; \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\tan \alpha_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 53,3^\circ$.

16.3. Космический корабль, пролетая мимо наблюдателя, имеет скорость $v = 2,4 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. По измерениям наблюдателя, длина корабля равна $l = 90 \text{ м}$. Чему равна длина корабля в состоянии покоя?

16.4. Длина катета AB прямоугольного треугольника равна $a = 5 \text{ м}$, а угол между этим катетом и гипотенузой — $\alpha = 30^\circ$. Найти значение этого угла, длину гипотенузы и ее отношение к собственной длине в системе отсчета, движущейся вдоль катета AB со скоростью $v = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

16.5. Сколько времени для земного наблюдателя и для космонавтов займет космическое путешествие до звезды и обратно на ракете, летящей со скоростью $v = 2,9 \cdot 10^8 \text{ м/с}$? Расстояние до звезды (для земного наблюдателя) равно 40 световым годам.

• Решение. Расстояние S , которое пролетит космический корабль в системе отсчета, связанный с Землей, равно $S = 40 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с} \approx 3,8 \cdot 10^{17} \text{ м}$. Следовательно, по часам земного наблюдателя полет корабля продлится

$$\Delta t = \frac{2S}{v} \approx 2,62 \cdot 10^9 \text{ с} \approx 83 \text{ года.}$$

Время, измеренное по часам, находящимся на борту космического корабля, в соответствии с эффектом замедления времени

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

или

$$\Delta t_0 = \frac{2S \sqrt{1 - v^2/c^2}}{v} = \frac{2S \sqrt{c^2 - v^2}}{cv} \approx 6,7 \cdot 10^8 \text{ с} \approx 21,3 \text{ года.}$$

• Ответ: $\Delta t = \frac{2S}{v} \approx 2,62 \cdot 10^9 \text{ с} \approx 83 \text{ года}; \Delta t_0 = \frac{2S \sqrt{c^2 - v^2}}{cv} \approx 6,7 \cdot 10^8 \text{ с} \approx 21,3 \text{ года.}$

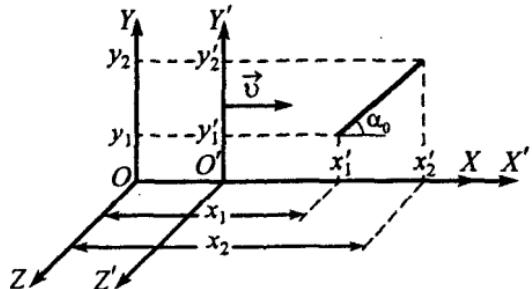


Рис. 16.3

16.6. С какой скоростью должен лететь пион, чтобы пролететь до распада расстояние $l = 20$ м? Среднее время жизни пиона в состоянии покоя равно $\Delta t_0 = 26$ нс.

16.7. На космическом корабле находятся часы, синхронизированные до полета с земными. Насколько отстанут часы на корабле, по измерениям земного наблюдателя, за время $\Delta t_0 = 0,5$ года, если скорость корабля равна $v = 7,9$ км/с?

16.8. В системе отсчета K два параллельных стержня имеют одинаковую собственную длину $l_0 = 1$ м и движутся в продольном направлении навстречу друг другу с равными скоростями $v = 2 \cdot 10^8$ м/с, измеренными в этой системе отсчета. Чему равна длина каждого стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

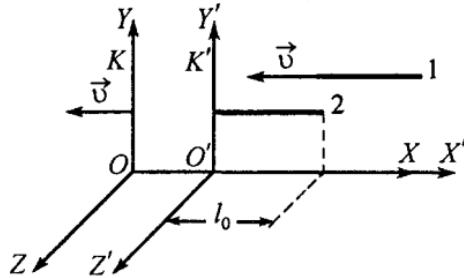


Рис. 16.4

• **Решение.** Для неподвижного наблюдателя при движении протяженных тел с большими скоростями их размеры в направлении движения существенно сокращаются. Связем систему отсчета K' с одним из стержней, направив одну из осей вдоль стержня (рис. 16.4). Тогда в этой системе стержень 1 будет находиться в покое и его длина будет равна собственной длине l_0 . Длина l стержня 2 относительно системы отсчета K'

$$l = l_0 \sqrt{1 - v_{\text{отн}}^2/c^2},$$

где $v_{\text{отн}}$ – скорость стержня 2 относительно системы K' .

Скорость $v_{\text{отн}}$ можно найти по формуле сложения скоростей

$$v_{\text{отн}} = \frac{v_{x'} + v_0}{1 + v_0 v_{x'}/c^2}.$$

Поскольку система отсчета K' связана с одним из стержней, то скорость v_0 движения системы отсчета K относительно системы K' по величине будет равна скорости v стержня 1 и направлена в противоположную сторону. Скорость $v_{x'}$ стержня 2, движущегося относительно системы K' , в системе отсчета K также равна v . Если ось $O'X'$ направлена вдоль движения стержня 1, то проекции скоростей v_0 и $v_{x'}$ на эту ось будут отрицательны (рис. 16.4). Поэтому скорость стержня, движущегося относительно системы K' , будет равна

$$v_{\text{отн}} = \frac{-v - v}{1 + v v/c^2}.$$

Следовательно,

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{4v^2 c^2}{(c^2 + v^2)^2}} = l_0 \frac{\sqrt{c^4 + 2v^2 c^2 + v^4 - 4v^2 c^2}}{c^2 + v^2} = l_0 \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2} \approx 38 \text{ см.}$$

• **Ответ:** $l = l_0 \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2} \approx 38 \text{ см.}$

16.9. Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость $v_1 = 0,4$ с (где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с). В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения частицу со скоростью $v_2 = 0,75$ с относительно ускорителя. Чему равна скорость частицы относительно ядра?

16.10. Две частицы движутся под прямым углом друг к другу со скоростями $v_1 = 0,5$ с и $v_2 = 0,75$ с (где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с), измеренными относи-

тельно одной и той же системы отсчета K . Чему равна относительная скорость частиц?

16.11. При движении тела его продольные размеры уменьшились в $n = 2$ раза. Во сколько раз изменилась масса тела?

• Решение. При движении частицы со скоростью v ее релятивистская масса m увеличивается по сравнению с массой покоя m_0 в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Известно, что при переходе от одной системы отсчета к другой размеры тела изменяются, при этом лоренцево сокращение происходит только в направлении движения. Если в системе отсчета, связанной с телом, его продольные размеры имеют некоторое значение l_0 , то в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью v , они сокращаются в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз:

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Используя условие задачи, получаем

$$l_0/n = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Отсюда находим

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/n; \quad m = n m_0; \quad m/m_0 = n = 2.$$

• Ответ: масса тела увеличилась в два раза.

16.12. Скорость частицы $v = 180$ Мм/с. На сколько процентов масса движущейся частицы больше массы покоящейся?

16.13. При движении частицы ее релятивистский импульс в $n = 2$ раза превышает классический. Чему равна скорость частицы?

16.14. Масса Солнца равна $M = 1,99 \cdot 10^{30}$ кг. Солнце в течение года излучает энергию $E = 12,6 \cdot 10^{33}$ Дж. За какое время масса Солнца уменьшится вдвое?

• Решение. Массу Солнца, теряемую им при излучении, можно оценить на основании формулы Эйнштейна

$$E = m c^2.$$

Если в течение года Солнце излучает энергию E , то за одну секунду оно в среднем теряет массу

$$\Delta m = \frac{E}{T c^2} \approx 4,4 \cdot 10^9 \text{ кг/с},$$

где T – продолжительность года, выраженная в секундах. Следовательно, масса Солнца уменьшится вдвое за время

$$t = \frac{M}{2 \Delta m} = \frac{MTc^2}{2E} \approx 2,24 \cdot 10^{20} \text{ с} \approx 7,1 \cdot 10^{12} \text{ лет.}$$

• Ответ: $t = \frac{MTc^2}{2E} \approx 7,1 \cdot 10^{12}$ лет.

16.15. Какое количество энергии выделяется при аннигиляции нейтрона и антинейтрона, если масса покоя нейтрона $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг?

16.16. Масса Солнца ежесекундно уменьшается на $\Delta m = 4 \cdot 10^6$ т/с. Какое количество энергии излучает Солнце за $\Delta t = 1$ ч? Какое количество гидростанций мощностью $N = 2,1 \cdot 10^6$ кВт могло бы выработать столько же энергии за час?

16.17. Скорость электрона составляет 0,9 скорости света в вакууме. Вычислить в процентах, какая ошибка будет сделана, если кинетическую энергию частицы определять по формуле классической механики.

- **Решение.** При скоростях, близких к скорости света, кинетическая энергия частицы может быть вычислена по формуле

$$T = m c^2 - m_0 c^2$$

(где m_0 – масса покоя электрона), которая с учетом выражения для релятивистской массы может быть записана в виде

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}.$$

В классической механике кинетическую энергию электрона находят по формуле

$$T' = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Следовательно, относительная ошибка, которая будет допущена при определении кинетической энергии частицы по формуле классической механики,

$$\eta = \frac{T - T'}{T} = 1 - \frac{\frac{1}{2} m_0 v^2}{m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}} = 1 - \frac{v^2/c^2}{2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}} \approx 0,69; \quad \eta \approx 69\%.$$

- **Ответ:** $\eta \approx 69\%$.

16.18. Скорость частицы $v = 180 \text{ Мм/с}$. На сколько процентов полная энергия движущейся частицы больше энергии покоя?

16.19. Найти отношение кинетической энергии электрона к его энергии покоя, если скорость электрона $v = 1,5 \cdot 10^6 \text{ м/с}$.

16.20. Электрон, ускоренный электрическим полем, приобрел скорость, при которой его полная энергия стала равной удвоенной энергии покоя. Чему равна разность потенциалов, которую прошел электрон? Отношение заряда электрона к его массе покоя $|e|/m_0 = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$.

- **Решение.** Пройдя ускоряющую разность потенциалов $\Delta\Phi$, электрон приобрел кинетическую энергию T за счет работы $A = |e| \Delta\Phi$ сил электрического поля

$$T = A, \quad \text{или} \quad T = |e| \Delta\Phi.$$

При скоростях движения, близких к скорости света, полная энергия электрона E равна сумме кинетической энергии T и энергии покоя $E_0 = m_0 c^2$:

$$E = T + m_0 c^2.$$

Следовательно,

$$T = E - m_0 c^2,$$

или

$$T = 2 m_0 c^2 - m_0 c^2; \quad m_0 c^2 = |e| \Delta\Phi.$$

Отсюда находим

$$\Delta\Phi = \frac{m_0 c^2}{|e|} \approx 5,11 \cdot 10^5 \text{ В.}$$

- **Ответ:** $\Delta\Phi = \frac{m_0 c^2}{|e|} \approx 5,11 \cdot 10^5 \text{ В.}$

16.21. Какую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его собственное время уменьшилось в $n = 10$ раз по сравнению со временем, измеренным по часам неподвижной системы отсчета? Масса покоя электрона $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

16.22. Какую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его продольные размеры стали в $n = 2$ раза меньше? Масса покоя электрона $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-16}$ Кл.

16.23. Найти импульс, полную и кинетическую энергию релятивистского электрона, движущегося со скоростью $v = 0,9 c$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Масса покоя электрона $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

• *Решение.* Величина релятивистского импульса частицы

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}.$$

Полная энергия частицы связана с ее импульсом соотношением

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}.$$

Следовательно,

$$E = c \sqrt{\frac{m_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2} + m_0^2 c^2} = \frac{m_0 c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}} \approx 1,88 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.}$$

Полную энергию частицы также можно было найти по формуле

$$E = m c^2$$

с учетом выражения для релятивистской массы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия частицы равна разности между ее полной энергией и энергией покоя $E_0 = m_0 c^2$:

$$T = m c^2 - m_0 c^2,$$

или

$$T = m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\} \approx 1,06 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.}$$

• Ответ: $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}; E = \frac{m_0 c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}} \approx 1,88 \cdot 10^{-13} \text{ Дж};$

$$T = m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\} \approx 1,06 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.}$$

16.24. Найти кинетическую энергию релятивистского протона, импульс которого $p = 5 \cdot 10^{-19}$ кг·м/с. Масса покоя протона $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

16.25. Кинетическая энергия релятивистской частицы равна ее энергии покоя. Во сколько раз возрастет импульс частицы, если ее кинетическая энергия увеличится в $n = 4$ раза?

16.26. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,01$ Тл со скоростью $v = 2,4 \cdot 10^8$ м/с. Определить радиус окружности. Масса покоя электрона $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-16}$ Кл.

• *Решение.* При движении в магнитном поле на электрон будет действовать сила Лоренца

$$F_L = |e| v B,$$

направленная по радиусу окружности. Как известно, эта сила работы над частицей не совершает, поэтому величина скорости частицы меняться не будет. Сила Лоренца будет сообщать частице нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Уравнение движения электрона в проекции на нормаль к траектории (в данном случае на радиус окружности) можно записать в виде (см. рекомендации по решению задач)

$$m \frac{v^2}{R} = |e| v B,$$

где $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ – релятивистская масса электрона.

Отсюда находим радиус окружности

$$R = \frac{m v}{|e| B}; \quad R = \frac{m_0 v}{|e| B \sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 0,23 \text{ м.}$$

- Ответ: $R = \frac{m_0 v}{|e| B \sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 0,23 \text{ м.}$

16.27. Электрон движется в магнитном поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$ по окружности радиусом $R = 2 \text{ см}$. Определить кинетическую энергию электрона, считая его релятивистским. Отношение заряда электрона к его массе покоя $|e|/m_0 = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$.

16.28. Электрон, кинетическая энергия которого равна $T = 1,5 \text{ МэВ}$, движется в однородном магнитном поле по окружности некоторого радиуса. Определить период обращения электрона, если индукция поля равна $B = 0,02 \text{ Тл}$. Энергия покоя электрона $E_0 = 0,51 \text{ МэВ}$, масса покоя $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ Кл}$.

§17. Квантовая физика

Одним из экспериментальных фактов, не получивших объяснения к концу XIX в., был спектр излучения нагретых тел (см. §18). При комнатных температурах мы не замечаем теплового излучения из-за его слабой интенсивности. С повышением температуры инфракрасное излучение становится достаточно сильным, и, приблизившись к нагретому телу, мы ощущаем тепло. При еще более высоких температурах тела начинают светиться и при температурах свыше 2000 К тела испускают желтый или беловатый свет (вспомните, например, раскаленное железо или нить в лампе накаливания). Все это свидетельствует о том, что с повышением



Рис. 17.1

температуры максимум интенсивности испускаемого телами излучения смещается. На рис. 17.1 качественно изображены так называемые спектры излучения *абсолютно черного тела* (такое тело поглощает все падающее на него излучение), полученные опытным путем. Как видим, максимум интенсивности спектров

излучения с повышением температуры смещается в сторону более коротких длин волн (или более высоких частот). Одна из проблем, с которой физики столкнулись в конце прошлого века, как раз состояла в объяснении подобных спектров излучения.

Электромагнитная теория Максвелла предсказывала, что колеблющиеся электрические заряды должны испускать электромагнитные волны,

и излучение нагретых тел могло быть обусловлено колебаниями электрических зарядов в атомах вещества, из которого состоит тело. Это объясняло причину появления излучения, но не позволяло правильно определить спектр излучения. Было предложено несколько теорий (Вина, Рэлея и Джинса), которые, основываясь на классических представлениях, достаточно правильно описывали распределение интенсивности излучения лишь в области длинных волн. Перелом наступил в конце 1900 г., когда Макс Планк предложил формулу, прекрасно описывающую экспериментальные данные во всей области длин волн. Затем он стал анализировать теоретические предпосылки, которые смогли бы его привести к этой формуле, и пришел к заключению, что энергия должна излучаться веществом в виде отдельных порций (квантов), величина которых пропорциональна частоте излучения:

$$\epsilon = h \nu. \quad (17.1)$$

Коэффициент пропорциональности h получил впоследствии название *постоянной Планка*. Он впервые был вычислен Планком на основе экспериментальных данных и равен $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Гипотеза Планка предполагала, что энергия колебаний электрических зарядов в атомах вещества может быть только целым, кратным $h\nu$:

$$E = n h \nu, \quad (17.2)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Эту гипотезу часто называют *гипотезой квантов Планка*. Гипотеза Планка утверждала, что энергия колебаний атома может быть равна $h\nu$, $2h\nu$, $3h\nu$ и т.д., но не существует колебаний с энергией в промежутке между двумя последовательными целыми, кратными $h\nu$. Это означало, что энергия не непрерывна, как полагали на протяжении столетий, а *квантуется*, т.е. существует в строго определенных дискретных порциях. Наименьшая порция энергии называется *квантом энергии*.

Первоначально идея Планка рассматривалась как математический прием, позволяющий получить «правильный ответ». Признание важности и принципиальной новизны гипотезы Планка пришло через несколько лет, когда Эйнштейн выдвинул свою идею, обобщавшую гипотезу квантов, и положил ее в основу новой теории света. Эйнштейн предположил, что если энергия атомов квантована, то для выполнения закона сохранения свет должен испускаться атомами порциями, или квантами, с энергией

$$\epsilon = h \nu, \quad (17.3)$$

где h – также постоянная Планка. Гипотеза Эйнштейна утверждала, что свет распространяется в виде крохотных частиц, а не волн. Эйнштейн предложил способ проверки своей гипотезы, основанный на количественных измерениях при фотоэлектрическом эффекте.

Фотоэффект

Фотоэлектрическим эффектом, или *фотоэффектом*, называется испускание электронов веществом под действием света. Прибор для наблюдения фотоэффекта схематически изображен на рис. 17.2. Металличес-

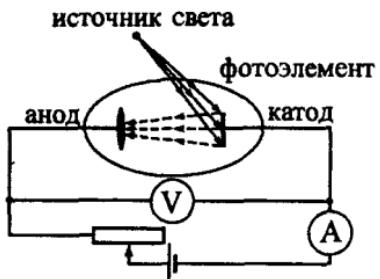


Рис. 17.2

кая пластинка (*катод*) и небольшой электрод (*анод*), помещенные в откаченную до глубокого вакуума стеклянную трубку, образуют *фотоэлемент*. Электроды соединены через реостат с источником ЭДС так, как показано на рисунке. Для измерений тока в цепи и разности потенциалов на фотоэлементе в электрическую схему включены

амперметр и вольтметр. Свет, проходя через стеклянный корпус прибора, падает на катод. В результате в цепи возникает ток, регистрируемый амперметром. Объяснить, каким образом замыкается цепь, можно, предположив, что под воздействием света с поверхности катода вылетают заряженные частицы и движутся под действием электрического поля к аноду. Опытным путем было установлено, что: 1) испускаемые под действием света заряды имеют отрицательный знак (позже было установлено, что эти заряды являются электронами); 2) максимальный ток в цепи пропорционален интенсивности света, падающего на катод; 3) максимальные скорости вылетающих электронов не зависят от интенсивности света, а определяются его частотой; 4) для каждого вещества существует минимальная частота света, при которой фотоэффект еще возможен, т.е. при более низких частотах ток в цепи отсутствует.

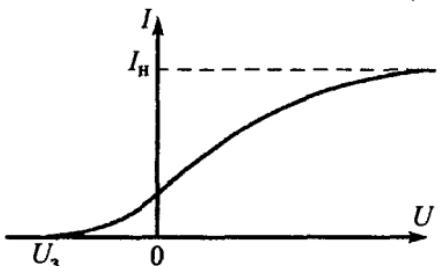


Рис. 17.3

Изменяя напряжение между электродами прибора (при постоянных интенсивности и частоте падающего света), можно получить зависимость тока в цепи (так называемого *фототока*) от напряжения (рис. 17.3). Эту зависимость называют *вольт-амперной характеристикой* фотоэлемента. Пологий ход кривой указывает на то, что

электроны (*фотоэлектроны*) вылетают из катода с различными по величине скоростями. Часть электронов, соответствующих силе тока при $U = 0$, обладает скоростями, достаточными для того, чтобы долететь до анода «самостоятельно», без помощи ускоряющего электрического поля между электродами. Для того чтобы такие электроны не долетели до анода, т.е. для обращения силы тока в ноль, нужно поменять полярность источника. В этом случае между электродами возникнет тормозящее электроны электрическое поле такое, что даже обладающие при вылете из катода наибольшим значением скорости v_{\max} частицы не в состоянии преодолеть расстояние до анода. Напряжение U_3 , соответствующее $I = 0$, называют *задерживающим* или *затирающим*. Согласно теореме об изменении кинетической энергии, $\Delta T = 0 - \frac{1}{2} m v_{\max}^2$ будет равно работе сил электрического поля $A = -|e| U_3$, т.е.

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = |e| U_3. \quad (17.4)$$

При некотором напряжении между электродами фототок достигает своего максимального значения I_h , называемого током насыщения, при котором все испущенные катодом электроны попадают на анод. Следовательно, сила тока I_h определяется количеством электронов, испускаемых катодом в единицу времени под действием света.

Эйнштейн показал, что все отмеченные закономерности фотоэффекта легко объясняются, если предположить, что свет поглощается квантами $h\nu$. При этом энергия, получаемая электроном, доставляется ему в виде кванта $h\nu$, который поглощается им целиком. Часть этой энергии, равная работе выхода A , затрачивается на то, чтобы электрон мог покинуть тело (работа выхода, та наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону, чтобы удалить его из тела в вакуум). Если электрон находится не у самой поверхности, а на некоторой глубине, то часть энергии может быть также потеряна вследствие столкновений в веществе. Остаток энергии образует кинетическую энергию электрона, покинувшего вещество. Если электрон находится у самой поверхности, то доля энергии, передаваемой электрону в виде кинетической энергии, будет максимальной. В этом случае должно выполняться условие

$$h\nu = A + \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad (17.5)$$

которое называется формулой Эйнштейна.

Фотоэффект и работа выхода в сильной степени зависят от состояния поверхности катода. Поэтому идея Эйнштейна была экспериментально проверена только через десять лет, когда была разработана технология тонкой очистки поверхностей металлов. Результаты оказались в полном согласии с формулой (17.5).

Из формулы (17.5) вытекает, что в случае, когда работа выхода A превышает энергию кванта $h\nu$, электроны не могут покинуть металл. Следовательно, для возникновения фотоэффекта необходимо выполнение условия $h\nu \geq A$, т.е.

$$\nu \geq \nu_0 = A/h, \quad (17.6)$$

или через длину волн $(\nu = c/\lambda)$:

$$\lambda \leq \lambda_0 = hc/A. \quad (17.7)$$

Минимальная частота ν_0 или максимальная длина волн λ_0 , при которых возможен фотоэффект, называются красной границей фотоэффекта.

Рассмотренный выше фотоэффект часто называют внешним фотоэффектом, чтобы отличать его от внутреннего, наблюдаемого в диэлектриках и полупроводниках. Физика и закономерности внутреннего эффекта другие, и их изучение выходит за рамки этого параграфа.

Фотоны

Чтобы объяснить распределение энергии в спектре теплового излучения, достаточно, как показал Планк, допустить, что свет испускается квантами величиной $h\nu$. Для объяснения фотоэффекта достаточно предположить, что свет поглощается такими же порциями. Однако Эйнштейн

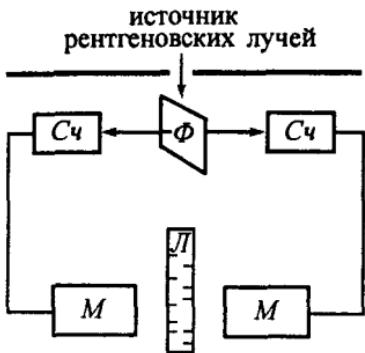


Рис. 17.4

малой интенсивности, под действием которых она сама становилась источником рентгеновских лучей. При попадании лучей от фольги на счетчик он срабатывал и приводил в действие механизм M , делающий отметку на движущейся ленте L . Если бы излучаемая фольгой энергия распространялась во все стороны, как это следует из волновой теории, то оба счетчика срабатывали бы одновременно и отметки на ленте приходились бы одна против другой. В действительности же наблюдалось совершенно беспорядочное расположение отметок. Это можно объяснить только тем, что в отдельных актах испускания возникают световые частицы, летящие то в одном, то в другом направлении. Это доказывало наличие световых частиц — фотонов. Согласно Эйнштейну, энергия фотона определяется его частотой:

$$\epsilon = h \nu. \quad (17.8)$$

Фотон — подлинно релятивистская частица; он всегда движется со скоростью света. Следовательно, массу и импульс фотона мы должны вычислять по формулам специальной теории относительности. Масса m любой частицы определяется выражением $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Так как у фотона $v = c$, то знаменатель в правой части обращается в нуль. Следовательно, либо масса покоя m_0 фотона также равна нулю, либо его энергия $\epsilon = m c^2$ бесконечна, но это противоречит формуле (17.8). Сказанное означает, что фотон представляет собой частицу особого рода, отличную от таких частиц, как электрон, протон и т.п., которые могут существовать, двигаясь со скоростями, меньшими скорости света, и даже покоясь. Масса движущегося фотона равна

$$m = \frac{\epsilon}{c^2} = \frac{h \nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}. \quad (17.9)$$

Из специальной теории относительности следует, что импульс релятивистской частицы связан с ее энергией соотношением (см. §16, формулу (16.20))

$$\epsilon^2 - m_0^2 c^4 = p^2 c^2.$$

Поскольку покоящихся фотонов не существует, то, полагая $m_0 = 0$, получим

$$p = \frac{\epsilon}{c}, \quad \text{или} \quad p = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (17.10)$$

пошел дальше, предположив, что свет и распространяется в виде дискретных частиц, названных первоначально *световыми квантами*, а позже *фотонами*. Наибольшее подтверждение гипотезы Эйнштейна получила в опыте Боте, суть которого состояла в следующем. Тонкая металлическая фольга Φ помещалась между двумя газоразрядными счетчиками $C\chi$ (рис. 17.4). Фольга освещалась пучком рентгеновских лучей

Фотонная теория света была неоднократно подтверждена во многих экспериментах: опытах Комптона по рассеянию рентгеновских лучей различными веществами, при изучении характеристического рентгеновского излучения и др. При этом возникает дилемма: одни эксперименты свидетельствуют о том, что свет ведет себя как волна (см. §15), другие – что свет ведет себя так, как поток частиц. На первый взгляд, кажется, что волновая и корпускулярная (фотонная) теории света несовместимы, но обе теории подтверждаются экспериментами. В конце концов физики пришли к заключению, что двойственную природу света следует принять как непреложный факт. Именно эту двойственность света имеют в виду, когда говорят о корпускулярно-волновом дуализме. Наглядно представить корпускулярно-волновой дуализм невозможно. Следует осознать и согласиться, что двойственность поведения света – это различные стороны его природы. Нильс Бор выдвинул так называемый *принцип дополнительности*, который утверждает, что для объяснения данного эксперимента следует использовать либо волновые, либо корпускулярные представления о природе света, но не те и другие одновременно. Однако не всегда вопрос о природе света стоит так категорично. Существует ряд явлений, допускающих корректное объяснение с любой из этих точек зрения, например, давление света.

Исходя из электромагнитной теории света Максвелл показал, что при падении света перпендикулярно на поверхность тела с коэффициентом отражения ρ (он равен отношению интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей) свет оказывает давление

$$P_d = (1 + \rho) \frac{J}{c}, \quad (17.11)$$

где J – энергия, переносимая в единицу времени через единицу площади, т.е. интенсивность волны (см. §15), а индекс «д» у давления поставлен для того, чтобы отличать обозначения давления и импульса. Эта формула позже была экспериментально подтверждена в опытах П.Н. Лебедева.

Формулу (17.11) достаточно просто получить, если использовать фотонную теорию света. Наличие у фотона импульса позволяет объяснить причину светового давления по аналогии с давлением потока частиц. Пусть на поверхность какого-либо тела перпендикулярно к ней падает свет с частотой v . Если за время Δt на поверхность площадью S тела падает n фотонов, то ρn из них отразится поверхностью, а $(1 - \rho)n$ – поглотится. Изменение импульса фотонов

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{отр}} - \vec{p}_{\text{пад}}$$

(где $\vec{p}_{\text{отр}}$ – суммарный импульс отраженных фотонов; $\vec{p}_{\text{пад}}$ – импульс всех падающих фотонов) численно будет равно импульсу, переданному поверхности тела. Проецируя выражение для $\Delta \vec{p}$ на ось OX (рис. 17.5), получаем

$$\Delta p = p_{\text{отр}} + p_{\text{пад}}$$

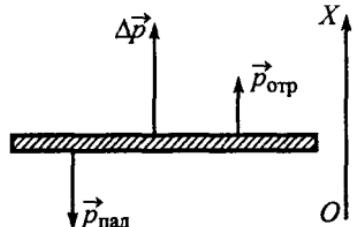


Рис. 17.5

Поскольку импульсы каждого из падающих и отраженных фотонов одинаковы и равны $p = h\nu/c$, то

$$\Delta p = \rho n \frac{h\nu}{c} + n \frac{h\nu}{c}, \quad \text{или} \quad \Delta p = (\rho + 1) n \frac{h\nu}{c}.$$

Изменение импульса фотонов за время Δt равно импульсу силы, действующей на них со стороны поверхности тела:

$$\Delta p = F \Delta t, \quad \text{или} \quad F \Delta t = (\rho + 1) n \frac{h\nu}{c}.$$

Сила, с которой поверхность тела действует на фотоны, по величине равна силе, действующей на поверхность. Поэтому давление, оказываемое светом, будет равно

$$p_d = \frac{F}{S} = (\rho + 1) \frac{n h \nu / c}{\Delta t S}.$$

Так как энергия n фотонов равна $n\varepsilon = nh\nu$, то величина $n h \nu / \Delta t S$ представляет собой энергию, переносимую в единицу времени через единицу площади, т.е. интенсивность J света. Следовательно,

$$p_d = (1 + \rho) \frac{J}{c}. \quad (17.12)$$

Как видим, выражение (17.12) в точности совпадает с формулой (17.11).

Рекомендации по решению задач

Задачи, связанные с определением массы, импульса или энергии фотона, решаются на основании формул (17.9), (17.10) и (17.8) соответственно. При этом нельзя забывать, что фотон релятивистская частица и формулы классической физики к нему неприменимы. Если в задаче наряду с фотонами рассматриваются другие частицы (например, фотон сталкивается с электроном, протоноем и т.п., или требуется сравнить массу, импульс или энергию фотона с соответствующей характеристикой частицы) и специально не оговорено, релятивистские они или нет, то нужно вычислить энергию E и энергию покоя E_0 частицы. Если $E < E_0$, то частицу можно считать нерелятивистской и использовать законы классической физики; если $E \geq E_0$, то необходимо применять формулы специальной теории относительности.

Задачи на фотоэффект решаются на основании формулы Эйнштейна (17.5) и вытекающих из нее соотношений:

– красная граница фотоэффекта – это минимальная частота ν_0 или максимальная длина волны λ_0 , при которых возможен фотоэффект; соответствующая ν_0 или λ_0 энергия кванта равна работе выхода электрона из поверхности данного металла (см. формулы (17.6) и (17.7));

– задерживающее напряжение U_3 (задерживающая разность потенциалов) – это минимальная разность потенциалов между анодом и катодом, при которой электрическое поле между электродами достаточно сильное, чтобы не дать фотоэлектронам долететь до анода; U_3 по величине равно максимальной кинетической энергии фотоэлектронов (см. формулу (17.4));

– ток насыщения I_H – это максимальный ток в цепи при условии, что катод освещается одним и тем же источником света; I_H по величине равен суммарному заряду всех электронов, испускаемых катодом в единицу времени.

Задачи на давление света решаются на основании формулы (17.12). При этом следует помнить, что она справедлива только для случая, если свет падает перпендикулярно поверхности тела. Часто формулу (17.12) удобно использовать в другой форме записи. По-

скольку интенсивность J света равна энергии, падающей в единицу времени на единицу площади тела, то ее можно представить в виде

$$J = n \epsilon, \quad \text{или} \quad J = n_{\text{ед}} h v,$$

где $n_{\text{ед}}$ – число фотонов с частотой v , падающих на ту же поверхность тела. В этом случае формулу (17.12) можно записать в виде

$$P_D = (1 + \rho) \frac{n_{\text{ед}} h v}{c}.$$

Если свет падает на поверхность под некоторым углом α , то непосредственно применять формулу (17.12) нельзя. Однако последовательность решения таких задач может быть такой же, как при получении этой формулы (см. решение задачи №17.23). При этом следует обратить внимание на то, что площадь S поперечного сечения светового пучка и площадь S_0 на поверхности тела, на которое падает этот пучок, не равны друг другу, а связаны соотношением $S = S_0 \cos \alpha$.

Задачи

Фотоны

17.1. Определить массу, импульс и энергию фотона с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м.

• *Решение.* Согласно теории Эйнштейна, масса, импульс и энергия фотона определяются формулами

$$m = \frac{hv}{c^2}; \quad p = \frac{hv}{c}; \quad \epsilon = hv,$$

где v – частота света, которая связана с длиной волны λ соотношением

$$v = c/\lambda.$$

Следовательно,

$$\epsilon = \frac{hc}{\lambda} \approx 3,97 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 2,5 \text{ эВ}; \quad m = \frac{h}{\lambda c} \approx 4,4 \cdot 10^{-36} \text{ кг}; \quad p = \frac{h}{\lambda} \approx 1,32 \cdot 10^{-27} \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с},$$

где учтено, что 1 эВ = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

• *Ответ:* $\epsilon = \frac{hc}{\lambda} \approx 3,97 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 2,5 \text{ эВ}; m = \frac{h}{\lambda c} \approx 4,4 \cdot 10^{-36} \text{ кг}; p = \frac{h}{\lambda} \approx 1,32 \cdot 10^{-27} \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}.$

17.2. Найти массу фотона, импульс которого равен импульсу молекулы водорода (молярная масса водорода $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) при температуре $t = 20^\circ\text{C}$. Скорость молекулы считать равной среднеквадратичной скорости.

17.3. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны $\lambda = 520$ нм? Считать скорость электрона много меньшей скорости света. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

17.4. Определить кинетическую энергию электрона, импульс которого равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 700$ нм. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Считать скорость электрона много меньшей скорости света.

17.5. Фотон с длиной волны $\lambda = 10^{-10}$ м упруго сталкивается с первоначально покоявшимся электроном и рассеивается под углом $1/2\pi$ к первоначальному направлению своего движения. Какую скорость приобрел электрон после столкновения? Считать скорость электрона много меньшей скорости света. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

• Решение. Запишем законы сохранения импульса и энергии системы «фотон–электрон» в виде

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e, \quad (1)$$

$$\epsilon + E_0 = \epsilon' + E_e, \quad (2)$$

где \vec{p} , ϵ – импульс и энергия фотона до столкновения; \vec{p}' , ϵ' – импульс и энергия рассеянного фотона; E_0 – начальная энергия электрона (энергия покоя); \vec{p}_e , E_e – конечные импульс и энергия электрона.

Так как по условию задачи электрон нерелятивистский, то его начальная энергия $E_0 = 0$, а импульс и энергия после взаимодействия с фотоноом

$$p_e = m v, \quad E_e = \frac{1}{2} m v^2, \quad (3)$$

где v – искомая скорость.

Фотон всегда движется со скоростью света: его импульс и энергия равны

$$p = h/\lambda; \quad \epsilon = h c/\lambda; \quad p' = h/\lambda'; \quad \epsilon' = h c/\lambda', \quad (4)$$

где λ' – длина волны рассеянного фотона.

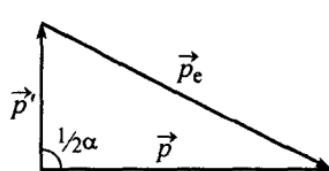


Рис. 17.6

Поскольку векторы \vec{p} , \vec{p}' и \vec{p}_e образуют прямоугольный треугольник (рис. 17.6), то закон сохранения импульса (1) в скалярной форме можно записать в виде

$$p_e^2 = p^2 + p'^2. \quad (5)$$

С учетом (3) – (4) выражения (5) и (2) примут вид

$$m^2 v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} + p'^2; \quad \frac{h c}{\lambda} = \epsilon' + \frac{m v^2}{2}, \quad (6)$$

где импульс рассеянного фотона p' связан с его энергией ϵ' выражением (см. два последних соотношения (4))

$$p' = \epsilon'/c. \quad (7)$$

Решив систему (6) – (7), получим уравнение относительно скорости электрона v :

$$\frac{m^2}{4 c^2} v^4 - m \left\{ \frac{h}{c \lambda} + m \right\} v^2 + \frac{2 h^2}{\lambda^2} = 0.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{\sqrt{2} c}{m} \sqrt{m \left\{ \frac{h}{c \lambda} + m \right\} \pm \sqrt{m^2 \left\{ \frac{h}{c \lambda} + m \right\}^2 - \frac{2 m^2 h^2}{c^2 \lambda^2}}},$$

где знак «+» перед радикалом не имеет физического смысла, так как в этом случае $v \approx 6 \cdot 10^8$ м/с больше скорости света. Поэтому

$$v = \frac{\sqrt{2} c}{m} \sqrt{m \left\{ \frac{h}{c \lambda} + m \right\} - \sqrt{m^2 \left\{ \frac{h}{c \lambda} + m \right\}^2 - \frac{2 m^2 h^2}{c^2 \lambda^2}}} \approx 8,54 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $v = \frac{\sqrt{2} c}{m} \sqrt{m \left\{ \frac{h}{c \lambda} + m \right\} - \sqrt{m^2 \left\{ \frac{h}{c \lambda} + m \right\}^2 - \frac{2 m^2 h^2}{c^2 \lambda^2}}} \approx 8,54 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$

17.6. Фотон с импульсом $p = 4 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с упруго сталкивается с первоначально покоявшимся электроном и рассеивается под прямым углом к первоначальному направлению своего движения. Найти импульс рассеянного фотона. Считать скорость электрона много меньшей скорости света. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

17.7. Фотон с энергией $\epsilon = 10^{-16}$ Дж упруго сталкивается с первоначально покоявшимся электроном. Какую кинетическую энергию приобрел электрон, если в результате столкновения длина волны фотона изменилась на $\eta = 20\%$? Считать скорость электрона много меньшей скорости света. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

17.8. Электрическая лампа имеет мощность $N = 60$ Вт. Какова средняя длина волны излучения, если в секунду лампа испускает $n = 1020$ фотонов, а на излучение затрачивается $\eta = 70\%$ мощности? Оценить, насколько уменьшается масса спирали за один час работы лампы.

- **Решение.** Доля энергии, затрачиваемая лампой на излучение, равна отношению энергии излучения E к потребляемой энергии W :

$$\eta = \frac{E}{W}.$$

Если энергия одного фотона равна ε , то за произвольный промежуток времени Δt , будет испущено $n \Delta t$ фотонов с общей энергией

$$E = n \varepsilon \Delta t.$$

За такое же время энергия, потребляемая лампой, составит величину

$$W = N \Delta t.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{n \varepsilon \Delta t}{N \Delta t}.$$

С учетом, что энергия одного фотона равна $\varepsilon = h c / \lambda$, получим

$$\eta = \frac{n h c}{N \lambda}, \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{n h c}{\eta N} \approx 4,73 \cdot 10^{-7} \text{ м.} \quad (1)$$

Полагая, что излучение происходит за счет превращения массы Δm нити накаливания в энергию испускаемых лампой фотонов по формуле Эйнштейна $E = \Delta m c^2$, где энергия излучения E за $t = 1$ ч равная

$$E = n \varepsilon t = n \frac{h c}{\lambda} t,$$

получим

$$n \frac{h c}{\lambda} t = \Delta m c^2. \quad (2)$$

Подставив в (2) выражение (1) для длины волны излучения, находим

$$\Delta m c^2 = \eta N t; \quad \Delta m = \frac{\eta N t}{c^2} \approx 1,68 \cdot 10^{-12} \text{ кг.}$$

- **Ответ:** $\lambda = \frac{n h c}{\eta N} \approx 4,73 \cdot 10^{-7} \text{ м}; \quad \Delta m = \frac{\eta N t}{c^2} \approx 1,68 \cdot 10^{-12} \text{ кг.}$

17.9. Рубиновый лазер работает в импульсном режиме с числом импульсов в секунду $n = 200$. Найти число фотонов, излучаемых лазером за один импульс, если потребляемая лазером мощность $N = 1$ кВт. На излучение идет $\eta = 0,1\%$ потребляемой энергии, а длина волны излучения $\lambda = 560$ нм.

17.10. Луч лазера имеет вид конуса с углом раствора $\alpha = 10^{-4}$ рад. Мощность излучения $N = 3$ мВт, длина волны $\lambda = 630$ нм. На каком максимальном расстоянии наблюдатель может увидеть этот луч, если глаз способен «регистрировать» не менее $n = 100$ фотонов в секунду? Диаметр зрачка считать равным $d = 0,5$ см.

17.11. Излучатель мощностью $N = 10^{10}$ Вт помещен в прозрачную среду с показателем преломления $n = 2$. Подсчитать количество квантов, излучаемых телом за $t = 1$ мин, если они имеют длину волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ м.

- **Решение.** Число квантов света, излучаемых телом за промежуток времени $t = 1$ мин, равно

$$N_0 = \frac{N t}{\varepsilon},$$

где ε – энергия фотона, соответствующая одному кванту света:

$$\varepsilon = h v.$$

Частота ν излучения связана с длиной волны λ выражением

$$\nu = c/\lambda,$$

где v – скорость распространения излучения в данной среде, равная

$$v = c/n.$$

Следовательно,

$$\epsilon = \frac{h\nu}{\lambda} = \frac{hc}{n\lambda}.$$

Окончательно получим

$$N_0 = \frac{Nt\lambda n}{hc} = 1,2 \cdot 10^{10}.$$

- Ответ: $N_0 = \frac{Nt\lambda n}{hc} = 1,2 \cdot 10^{10}$.

17.12. Найти показатель преломления среды, в которой свет с энергией кванта $\epsilon = 4,4 \cdot 10^{-19}$ Дж имеет длину волны $\lambda = 300$ нм.

17.13. Поток фотонов падает из вакуума на границу с оптически прозрачным веществом с показателем преломления $n = 1,5$. Определить импульс падающего фотона, если длина волны света в этом веществе равна $\lambda = 400$ нм.

Фотоэффект. Давление света

17.14. Красная граница фотоэффекта для цинка $\lambda_0 = 2,9 \cdot 10^{-7}$ м. Какая часть энергии фотона, вызывающего фотоэффект, расходуется на работу выхода, если максимальная скорость фотоэлектронов, вырванных с поверхности металла, $v_{max} = 10^6$ м/с? Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

• Решение. При облучении металла светом, длина волны λ_0 , которого соответствует красной границе фотоэффекта, кинетическая энергия, а следовательно, и скорость фотоэлектронов равны нулю. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта в случае красной границы можно записать в виде

$$h\nu_0 = A, \quad \text{или} \quad \frac{hc}{\lambda_0} = A.$$

При облучении поверхности металла светом с длиной волны $\lambda < \lambda_0$, т.е. фотонами с энергией $\epsilon > A$, максимальная скорость фотоэлектронов определяется уравнением Эйнштейна

$$\epsilon = A + \frac{m v_{max}^2}{2}, \quad \text{или} \quad \epsilon = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{m v_{max}^2}{2}.$$

Искомая часть энергии фотона ϵ , которая расходуется на работу выхода A ,

$$\eta = \frac{A}{\epsilon} = \frac{\frac{hc}{\lambda_0}}{\frac{hc}{\lambda_0} + \frac{m v_{max}^2}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{m \lambda_0 v_{max}^2}{2hc}} = 0,6.$$

- Ответ: $\eta = \frac{2hc}{2hc + m\lambda_0 v_{max}^2} = 0,6$.

17.15. Фотон с импульсом $p = 2,67 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с выбивает электрон из металла, работа выхода которого равна $A = 2$ эВ. Во сколько раз импульс вылетевшего электрона больше импульса фотона? Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

17.16. Если поочередно освещать поверхность металла излучением с длинами волн $\lambda_1 = 350$ нм и $\lambda_2 = 450$ нм, то максимальные скорости фотоэлектронов будут отличаться в два раза. Определить работу выхода электронов для этого металла.

17.17. При освещении поверхности катода фотоэлемента, изготовленного из цезия, излучением с длиной волны $\lambda = 360$ нм задерживающая разность потенциалов $\Delta\phi = 1,47$ В. Определить граничную длину волны, при которой возможен фотоэффект для цезия. Заряд электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

• **Решение.** По формуле Эйнштейна для фотоэффекта

$$\epsilon = A + \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

максимальная кинетическая энергия вылетевших электронов будет равна разности энергии фотоиа и работы выхода для данного металла:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \epsilon - A = \frac{h c}{\lambda} - A.$$

Для того чтобы выбитые фотоэлектроны вернулись назад на поверхность катода, между электродами фотоэлемента надо создать электрическое поле, тормозящее электроны, такой величины, чтобы при движении в нем электрон израсходовал всю свою кинетическую энергию. Работа A_E против сил электрического поля напряженностью \vec{E}

$$A_E = |e| E l, \quad \text{или} \quad A_E = |e| \Delta\phi,$$

где l – расстояние между электродами. Следовательно,

$$T_{\max} = |e| \Delta\phi, \quad \text{или} \quad |e| \Delta\phi = \frac{h c}{\lambda} - A. \quad (1)$$

Граничная длина волны, или красная граница, может быть определена из формулы Эйнштейна для фотоэффекта при $T_{\max} = 0$:

$$\frac{h c}{\lambda_0} = A. \quad (2)$$

Решив систему уравнений (1) – (2), получим

$$|e| \Delta\phi = \frac{h c}{\lambda} - \frac{h c}{\lambda_0}; \quad \lambda_0 = \frac{h c}{\frac{h c}{\lambda} - |e| \Delta\phi} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \frac{|e| \Delta\phi}{h c}} = 6,28 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

• **Ответ:** $\lambda_0 = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \frac{|e| \Delta\phi}{h c}} = 6,28 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$

17.18. Уединенный железный шарик облучают светом с длиной волны $\lambda = 200$ нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик, теряя фотоэлектроны? Работа выхода для железа $A = 4,36$ эВ. Заряд электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

17.19. Катод фотоэлемента освещается светом частотой $v = 1,5 \cdot 10^{15}$ с⁻¹. При изменении частоты света на $\eta = 30\%$ от первоначального значения запирающее напряжение изменилось на $\chi = 50\%$. Определить работу выхода электронов из катода.

17.20. Металлическая пластина облучается светом с длиной волны λ . Выбитые фотоэлектроны ускоряются, пройдя разность потенциалов $\Delta\phi$. Какова работа выхода для данного металла, если ускоренные электроны приобретают максимальную скорость v_{\max} ? Масса электрона m , его заряд $|e|$.

• **Решение.** Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта запишем в виде

$$h v = A + \frac{1}{2} m v_{\max}^2.$$

Выбитые с поверхности металла фотоэлектроны ускоряются электрическим полем, при этом изменение кинетической энергии будет равно работе сил электрического поля:

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 - \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = |e| \Delta\phi.$$

Учитывая, что $v = c/\lambda$, из вышеуказанных уравнений получаем

$$A = \frac{h c}{\lambda} - \frac{m u_{\max}^2}{2} + |e| \Delta\phi.$$

- Ответ: $A = \frac{h c}{\lambda} - \frac{m u_{\max}^2}{2} + |e| \Delta\phi$.

17.21. Плоская алюминиевая пластинка освещается ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 83$ нм. На какое максимальное расстояние от поверхности пластины может удалиться фотоэлектрон, если вне пластины создано перпендикулярное к ней задерживающее однородное электрическое поле напряженностью $E = 7,5$ В/см? Красная граница фотозависимости для алюминия $\lambda_0 = 332$ нм. Заряд электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

17.22. Незаряженный плоский конденсатор с обкладками площадью $S = 6 \cdot 10^{-4}$ м² и расстоянием между ними $d = 10$ мм помещен в вакуум. Внутренняя поверхность одной из обкладок конденсатора равномерно освещается светом с длиной волны $\lambda = 200$ нм. Вылетающие фотоэлектроны попадают на другую обкладку. Оценить, через какое время от начала освещения фототок между пластинаами прекратится, если за $t = 1$ с вылетает $n = 10^5$ электронов. Работа выхода материала, из которого изготовлена обкладка, $A = 3$ эВ. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

17.23. Короткий импульс света с энергией $E = 10$ Дж в виде узкого параллельного монохроматического пучка фотонов падает на пластинку под углом падения $\alpha = 60^\circ$. При этом $k = 30\%$ фотонов поглощаются пластинкой, а остальные зеркально отражаются. С какой силой действует этот импульс на пластинку, если его длительность $\Delta t = 5 \cdot 10^{-12}$ с?

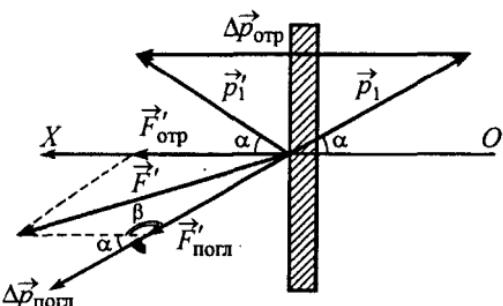


Рис. 17.7

фотонов поглощаются, а остальные

$$N_{\text{отр}} = (1 - k) E / \epsilon \quad (3)$$

зеркально отражаются пластинкой.

Рассмотрим часть фотонов, поглощаемых пластиною. Изменение импульса $N_{\text{погл}}$ фотонов за время Δt , равно импульсу силы $\vec{F}'_{\text{погл}}$, действующей на них со стороны пластины:

$$N_{\text{погл}} \Delta \vec{p}_{\text{погл}} = \vec{F}'_{\text{погл}} \Delta t. \quad (4)$$

Так как импульс каждого падающего фотона равен

$$p_1 = \epsilon / c, \quad (5)$$

- Решение. Сила давления пучка будет складываться из силы давления фотонов, поглощаемых пластиною, и силы давления отражаемых фотонов:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{погл}} + \vec{F}_{\text{отр}}. \quad (1)$$

Если энергия одного фотона равна ϵ , то полное число фотонов в импульсе с энергией E

$$N = E / \epsilon,$$

из которых

$$N_{\text{погл}} = k E / \epsilon \quad (2)$$

а поглощенного равен нулю, то из выражения (4) получим

$$\vec{F}'_{\text{погл}} = \frac{N_{\text{погл}} \Delta \vec{p}_{\text{погл}}}{\Delta t} = \frac{N_{\text{погл}} (0 - \vec{p}_1)}{\Delta t} = - \frac{N_{\text{погл}} \vec{p}_1}{\Delta t},$$

или в проекции на направление движения фотона (рис. 17.7) с учетом соотношений (2) и (5)

$$F'_{\text{погл}} = \frac{N_{\text{погл}} p_1}{\Delta t} = \frac{k E}{c \Delta t}. \quad (6)$$

Аналогично, для отраженных фотонов:

$$\begin{aligned} N_{\text{отр}} \Delta \vec{p}_{\text{отр}} &= \vec{F}'_{\text{отр}} \Delta t, \\ \vec{F}'_{\text{отр}} &= \frac{N_{\text{отр}} \Delta \vec{p}_{\text{отр}}}{\Delta t} = \frac{N_{\text{отр}} (\vec{p}'_1 - \vec{p}_1)}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (7)$$

где \vec{p}'_1 – импульс зеркально отраженного фотона, по величине равный импульсу \vec{p}_1 падающего. Проецируя (7) на направление оси OX , получаем

$$F'_{\text{отр}} = \frac{2 N_{\text{отр}} p_1 \cos \alpha}{\Delta t} = \frac{2 (1 - k) E \cos \alpha}{c \Delta t}. \quad (8)$$

Следовательно, результирующая сила, действующая на луч лазера со стороны пластиинки,

$$F' = \sqrt{(F'_{\text{погл}})^2 + (F'_{\text{отр}})^2 - 2 F'_{\text{погл}} F'_{\text{отр}} \cos \beta},$$

где угол $\beta = \pi - \alpha$.

С учетом выражений (6) и (8) получим

$$F' = \frac{E}{c \Delta t} \sqrt{k^2 + 4 (1 - k)^2 \cos^2 \alpha + 4 k (1 - k) \cos^2 \alpha} = \frac{E}{c \Delta t} \sqrt{k^2 + 4 (1 - k) \cos^2 \alpha}.$$

По третьему закону Ньютона, искомая сила давления будет равна по величине силе F' и направлена в противоположную сторону:

$$F = \frac{E \sqrt{k^2 + 4 (1 - k) \cos^2 \alpha}}{c \Delta t} \approx 6 \text{ кН.}$$

• Ответ: $F = \frac{E \sqrt{k^2 + 4 (1 - k) \cos^2 \alpha}}{c \Delta t} \approx 6 \text{ кН.}$

17.24. Существует проект запуска космических аппаратов с помощью наземного лазера. Запускаемый аппарат при этом снабжается зеркалом, полностью отражающим лазерное излучение. Какова должна быть минимальная мощность лазера, обеспечивающего запуск по этой схеме аппарата массой $m = 100 \text{ кг}$?

17.25. Параллельный пучок света с интенсивностью $J = 0,2 \text{ Вт/см}^2$ падает под углом падения $\alpha = 60^\circ$ на плоское зеркало с коэффициентом отражения $\rho = 0,9$. Определить давление света на поверхность зеркала.

17.26. Луч лазера мощностью $N = 50 \text{ Вт}$ падает нормально на пластиинку, которая отражает $k = 50\%$ и пропускает $n = 30\%$ энергии излучения. Остальная энергия поглощается пластиинкой. Определить силу светового давления луча лазера на эту пластиинку.

§18. Физика атома

После открытия электрона в 90-х гг. XIX в. физики стали представлять себе атом не как нечто неделимое, а как объект, обладающий внутренней структурой, и рассматривать электроны в качестве составного элемента этой структуры. В это время широкое распространение получила модель

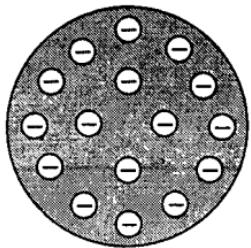


Рис. 18.1

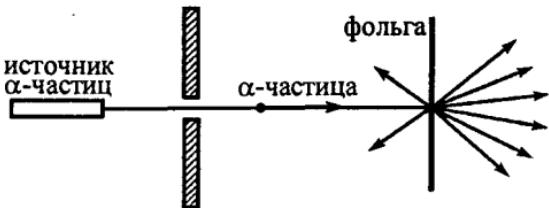


Рис. 18.2

атома в виде однородной, положительно заряженной сферы, в которую, как изюм в булочку, вкраплены отрицательно заряженные электроны (рис. 18.1). Вскоре Дж.Дж. Томсон высказал идею, по которой эта модель должна содержать не покоящиеся, а движущиеся электроны.

В начале XX в. Эрнест Резерфорд выполнил эксперименты, результаты которых противоречили модели атома Томсона. В этих экспериментах пучок положительных зарядов (α -частиц) направлялся на тонкую золотую фольгу (рис. 18.2). Исходя из модели Томсона, следовало ожидать, что α -частицы не будут отклоняться на большие углы, так как было известно, что электроны гораздо легче α -частиц (более чем в 7000 раз) и последние не должны встретить массивного скопления положительного заряда, которое могло бы сильно отталкивать их. Однако опыт дал существенно иные результаты. Действительно, большинство α -частиц свободно проходили через фольгу, как если бы та представляла собой пустое пространство. Но наряду с ними были зафиксированы α -частицы, отклонившиеся от первоначального направления на очень большие углы – иногда почти на 180° . По мнению Резерфорда, такое могло происходить только в том случае, если положительно заряженные α -частицы испытывали отталкивание массивного положительного заряда. Резерфорд предположил,

что положительный заряд не «размазан» по всему объему атома, а сосредоточен в очень малой области пространства, т.е. атом состоит из крохотного, но массивного положительно заряженного ядра (в котором сосредоточено 99,9% массы атома), окруженного электронами (рис. 18.3). По оценкам Резерфорда, размеры ядра должны быть порядка $10^{-15} \div 10^{-14}$ м. Электроны должны бы

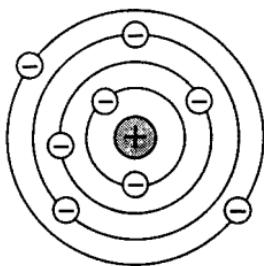


Рис. 18.3

ли обращаться вокруг ядра (подобно планетам вокруг Солнца) – если бы они поколились, то упали бы на ядро под действием электрического притяжения.

В соответствии с классической электродинамикой, любые электрические заряды, движущиеся ускоренно, должны излучать свет. А так как полная энергия сохраняется, то энергия электрона должна непрерывно уменьшаться. Следовательно, электроны должны падать по спирали на ядро.

Между тем повседневный опыт показывает, что атомы стабильны. Очевидно, что модель атома Резерфорда также была не в состоянии объяснить строение атома.

Опыт показывает, что нагретые тела и газы испускают свет. Каждое вещество обладает своим, характерным только для него *спектром излучения*, который служит своего рода «отпечатком пальца», позволяющим идентифицировать вещество.

Излучение возбужденных разреженных газов (этого можно достичь, приложив к газоразрядной трубке с газом под низким давлением высокое напряжение) было обнаружено еще в начале XIX в. При этом спектр излучения был дискретен, т.е. возбужденные газы испускают свет только определенных длин волн. Такой спектр называют *линейчатым*. Известно, что если излучение с непрерывным спектром (содержащее все длины волн) проходит через газ, то в спектре появляются темные линии, соответствующие светлым линиям в линейчатом спектре излучения данного газа. Такой спектр (с темными линиями) называется *спектром поглощения*. Было установлено, что газы поглощают свет на тех же частотах, на которых они излучают.

В разреженных газах атомы находятся в среднем на больших расстояниях друг от друга, поэтому свет должны излучать или поглощать изолированные атомы, а не атомы, взаимодействующие между собой, как это имеет место в твердых телах, жидкостях или плотных газах. Следовательно, линейчатые спектры разреженных газов служат своего рода ключом к пониманию строения атома: любая теория должна объяснить, почему атомы *испускают* излучение только с определенными дискретными длинами волн. Ясно, что в модели атома Резерфорда излучаемый атомами свет должен иметь непрерывный спектр, тогда как наблюдаемые спектры линейчатые.

Модель Бора

Нильс Бор, проработав несколько месяцев в лаборатории Резерфорда, пришел к убеждению, что модель атома Резерфорда в основном верна. Существующие противоречия между теорией и опытом Бор разрешил, введя некоторые допущения.

Известные к тому времени работы Планка и Эйнштейна показали, что в нагретых телах энергия колеблющихся электрических зарядов изменяется дискретными порциями при переходе из одного состояния в другое с испусканием кванта излучения. Возможно, рассуждал Бор, что электроны в атомах также не могут терять энергию непрерывно. Он высказал идею, что электроны движутся вокруг ядра по круговым орбитам, но из бесконечного множества орбит, возможных с точки зрения классической механики, разрешенными являются только определенные орбиты. Найдясь на одной из таких орбит, электрон, несмотря на то, что он движется с ускорением, не излучает энергии. Такие орбиты Бор назвал *стационарными*.

ными состояниями. Он предположил, что излучение света происходит, когда электрон в атоме переходит из одного стационарного состояния в другое с меньшей энергией. При каждом таком переходе испускается один фотон, энергия которого равна

$$h\nu = E_n - E_m, \quad (18.1)$$

где E_n, E_m – энергия начального и конечного состояний соответственно.

Следующим шагом Бора было введение *условия квантования*. Зная спектр атома водорода, Бор установил, что его теория согласуется с формулой, описывающей этот спектр (о ней речь пойдет ниже), если момент импульса электрона $L = m_e v_n r_n$ равен целому, кратному $\hbar/2\pi$, т.е.

$$L = m_e v_n r_n = n \hbar/2\pi, \quad (18.2)$$

где n – целое положительное число (номер орбиты); r_n – радиус n -й разрешенной орбиты; v_n – скорость электрона на этой орбите. Число $n = 1, 2, 3, \dots$ называют *главным квантовым числом*.

Рассмотрим электрон, движущийся по круговой орбите радиусом r_n в поле атомного ядра с зарядом $Z|e|$. При $Z=1$ такая система соответствует атому водорода, при иных Z – водородоподобному иону, т.е. атому с порядковым номером Z , из которого удалены все электроны, кроме одного. На электрон будет действовать сила электрического взаимодействия с ядром атома, сообщающая электрону нормальное ускорение. Уравнение движения электрона в проекции на нормаль к траектории движения можно записать в виде

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{Z|e|^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}. \quad (18.3)$$

Вторым уравнением, описывающим движение электрона, является правило квантования орбит по Бору (8.2). Решая совместно систему уравнений (18.2) – (18.3), получим выражения для скорости движения электрона на n -й боровской орбите и ее радиуса:

$$v_n = \frac{Z|e|^2}{2\epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n}; \quad (18.4)$$

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e Z|e|^2} \cdot n^2. \quad (18.5)$$

Соотношение (18.5) задает радиусы разрешенных орбит в боровской модели атома. Для атoma водорода ($Z=1$) ближайшей к ядру орбите ($n=1$) соответствует радиус $r_1 \approx 0,529 \cdot 10^{-10}$ м. Этот наименьший радиус иногда называют боровским радиусом. Из (18.5) видно, что $r_2 = 4r_1$, $r_3 = 9r_1$, ..., $r_n = n^2 r_1$.

Внутренняя энергия атома водорода складывается из кинетической энергии электрона и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром

$$E_n = \frac{m_e v_n^2}{2} - \frac{Z|e|^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}, \quad (18.6)$$

где v_n , r_n – скорость движения электрона на n -й боровской орбите и ее радиус соответственно. Из (18.4) и (18.5) находим

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 |e|^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (18.7)$$

Для атома водорода наименьшему значению энергии соответствует квантовое число $n = 1$. Подставив в (18.7) численные значения, получим: $E_1 \approx -2,17 \cdot 10^{-18}$ Дж $\approx -13,6$ эВ. Очевидно, что энергия атома при $n > 1$ равна

$$E_2 = -\frac{13,6 \text{ эВ}}{4}; \quad E_3 = -\frac{13,6 \text{ эВ}}{9}; \dots; \quad E_n = -\frac{13,6 \text{ эВ}}{n^2}.$$

Из соотношения (18.7) видно, что в боровской модели квантуются не только радиусы орбит, но и энергии. Различные разрешенные значения энергии обычно изображаются на схеме энергетических уровней в виде горизонтальных линий. Для водорода такая схема уровней показана на рис. 18.4. Низший энергетический уровень (или состояние) имеет энергию E_1 и называется основным состоянием. Более высокие состояния (с E_2 , E_3 и т.д.) называются возбужденными состояниями. Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода может находиться на любом из разрешенных уровней, но никогда между ними. При комнатной температуре почти все атомы водорода находятся в основном состоянии. При более высоких температурах или в электрическом поле многие атомы переходят в возбужденное состояние. При обратном переходе в более низкое энергетическое состояние атом испускает фотон. Этими переходами в рамках боровской модели и обусловлены спектры испускания возбужденных газов. Вертикальными стрелками на рис. 18.4 указаны переходы, соответствующие различным наблюдаемым линиям спектра. Соотношения (18.1) и (18.7) позволяют предсказать частоты и длины волн всех спектральных линий:

$$h\nu = \frac{h_c c}{\lambda} = E_n - E_m = \frac{m_e Z^2 |e|^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\},$$

или

$$\nu_{n, m} = \frac{m_e Z^2 |e|^4}{8 \epsilon_0^2 h^3} \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\}; \quad \frac{1}{\lambda_{n, m}} = \frac{m_e Z^2 |e|^4}{8 \epsilon_0^2 c h^3} \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\}, \quad (18.8)$$

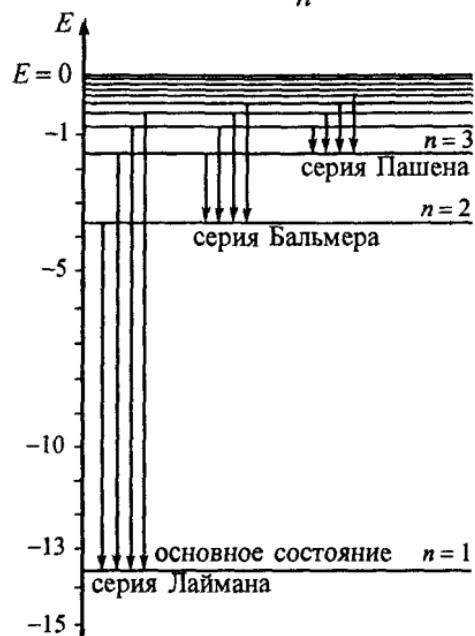


Рис. 18.4

где $\nu_{n, m}$, $\lambda_{n, m}$ – частота и длина волны фотона, соответствующие переходу электрона в атоме водорода с n -го энергетического уровня на m -й.

Величина

$$\frac{m_e |e|^4}{8 \epsilon_0^2 c h^3} \approx 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$$

называется *постоянной Ридберга* и обозначается буквой R_λ . Часто постоянной Ридберга называют величину

$$R_v = c R_\lambda = \frac{m_e |e|^4}{8 \epsilon_0^2 h^3} \approx 3,290 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

С учетом выражений для R_λ и R_v формулы (18.7) и (18.8) можно записать в виде

$$E_n = -\frac{Z^2 h c R_\lambda}{n^2} = -\frac{Z^2 h R_v}{n^2}; \quad (18.9)$$

$$\nu_{n, m} = Z^2 c R_\lambda \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = Z^2 R_v \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\}; \quad (18.10)$$

$$\frac{1}{\lambda_{n, m}} = Z^2 R_\lambda \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = \frac{Z^2 R_v}{c} \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\}. \quad (18.11)$$

Почти за двадцать лет до появления боровской модели атома Дж.Дж. Бальмер обнаружил, что четыре видимые линии в спектре излучения водорода (соответствующие, согласно измерениям, длинам волн 656, 486, 434 и 410 нм) следуют формуле

$$\frac{1}{\lambda} = R_\lambda \left\{ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right\}, \quad (18.12)$$

где $n = 3, 4, 5, 6$. Очевидно, что выражение (18.11) в точности совпадает с *формулой Бальмера* (18.12) для атома водорода ($Z = 1$) при переходах на второй энергетический уровень. Серия спектральных линий атома водорода, соответствующая формуле (18.12), называется *серийей Бальмера*. Впоследствии было обнаружено, что спектральные линии серии Бальмера продолжаются при $n > 6$. В ультрафиолетовой и инфракрасной областях имеются другие серии линий, аналогичные по своей структуре серии Бальмера, но с другими длинами волн. Каждая из этих серий может быть описана формулой, напоминающей (18.12). Например, *серия Лаймана* (переход электрона в атоме на первый энергетический уровень) описывается формулой

$$\frac{1}{\lambda} = R_\lambda \left\{ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right\},$$

где $n = 2, 3, 4, \dots$, *серия Пашена* (переход электрона в атоме на третий энергетический уровень) –

$$\frac{1}{\lambda} = R_\lambda \left\{ \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right\},$$

где $n = 4, 5, 6, \dots$

Очевидно, что выражение (18.11) является обобщением всех перечисленных спектральных формул; его называют *обобщенной формулой Бальмера* или *формулой Бальмера – Ридберга*. Как видим, теория Бора дала

модель атома, позволившую объяснить, почему атомы излучают линейчатые спектры, и точно предсказать для атома водорода длины волн испускаемого излучения.

Теория Бора позволила также объяснить и спектры поглощения: столкновение фотона (с соответствующей длиной волны) с атомом приводит к переходу электрона с одного энергетического уровня на другой, более высокий. При этом энергия фотона должна быть равной разности энергий этих уровней. Этим объясняется, почему непрерывный спектр, проходя через газ, давал темные линии (спектр поглощения) на тех же самых частотах, что и линии спектра излучения.

Если атом поглотил энергию, достаточную для перехода в состояние с энергией, равной нулю (т.е. на удаление электрона на уровень $n = \infty$), то электрон перестает быть связан с ядром. Минимальная энергия, необходимая для вырываания электрона из атома, называется *энергией ионизации* или *энергией связи*. Для атома водорода энергия ионизации $E_{\text{ион}}$, согласно измерениям, равна $E_{\text{ион}} = 13,6$ эВ. Она соответствует вырыванию электрона из низшего энергетического состояния $E_1 = -13,6$ эВ. Легко заметить, что, по теории Бора, энергия ионизации также равна $E_{\text{ион}} = \Delta E_{1, \infty} = E_{\infty} - E_1 = h R_v = 13,6$ эВ.

Теория Бора была крупным шагом в развитии теории атома. Она дала хорошее согласование с экспериментом для водорода и водородоподобных атомов. Но все попытки ее применения для построения модели второго за водородом простейшего атома – атома гелия, приводили к неудачам. Самой слабой стороной теории Бора была ее внутренняя противоречивость: она не была ни классической, ни квантовой. Новая теория, получившая название *квантовой механики*, изучается в курсе физики высшей школы.

Рекомендации по решению задач

Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода или водородоподобном атоме может находиться на одной из разрешенных орбит:

- радиусы r_n разрешенных орбит определяются выражением (18.5);
- скорость электрона на n -й орбите определяется формулой (18.4);
- угловая скорость электрона на n -й орбите может быть определена из соотношения

$$\omega_n = \frac{\nu_n}{r_n} = \frac{\pi Z^2 |e|^4 m_e}{2 \epsilon_0^2 h^3} \cdot \frac{1}{n^3};$$

- период обращения электрона на n -й орбите

$$t_n = \frac{2 \pi r_n}{\nu_n} = \frac{4 \epsilon_0^2 h^3}{Z^2 |e|^4 m_e} \cdot n^3;$$

- кинетическая энергия электрона на n -й орбите

$$T_n = \frac{m_e \nu_n^2}{2} = \frac{m_e Z^2 |e|^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad \text{или} \quad T_n = Z^2 h R_v \cdot \frac{1}{n^2} = Z^2 h c R_\lambda \cdot \frac{1}{n^2};$$

- потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром

$$U_n = -\frac{Z |e|^2}{4 \pi \epsilon_0 r_n} = -\frac{m_e Z^2 |e|^4}{4 \epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad \text{или} \quad U_n = -2 Z^2 h R_v \cdot \frac{1}{n^2} = -2 Z^2 h c R_\lambda \cdot \frac{1}{n^2};$$

– полная энергия атома

$$E_n = T_n + U_n = -\frac{m_e Z^2 |e|^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \text{ или } E_n = -Z^2 h R_V \cdot \frac{1}{n^2} = -Z^2 h c R_\lambda \cdot \frac{1}{n^2}.$$

При переходе электрона в атоме водорода с n -го энергетического уровня (n -й орбиты) на m -й (m -ю орбиту), причем $n > m$, атом испускает квант энергии с частотой или длиной волны, значения которых определяются формулами (18.10) или (18.11) соответственно. Если электрон в атоме находится на энергетическом уровне, соответствующем квантовому числу $n = 2$, то переход электрона возможен только на уровень $m = 1$; при этом может быть испущен фотон, соответствующий только одной частоте или длине волны. Если электрон находится на энергетическом уровне $n > 2$, то переход электрона возможен на любой из уровней $m = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$; при этом могут быть испущены фотоны, соответствующие разным частотам или длинам волн.

Для перехода электрона в атоме водорода с n -го энергетического уровня (n -й орбиты) на m -й (m -ю орбиту), причем $n < m$, атому необходимо сообщить энергию, равную разности энергий атома в конечном и начальном состояниях. Если атом поглотил энергию, достаточную для перехода электрона на уровень $m = \infty$, то электрон теряет связь с ядром и становится свободным. Минимальная энергия, необходимая для этого, называется энергией ионизации или энергией связи.

Задачи

18.1. Определить силу электрического тока, обусловленного движением электрона по первой боровской орбите атома водорода. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

• *Решение.* Сила электрического тока, возникающего при движении электрона по орбите радиусом r с линейной скоростью v , равна

$$I = \frac{|e|}{t}, \quad (1)$$

где t – период обращения электрона:

$$t = \frac{2 \pi r}{v}. \quad (2)$$

Скорость движения электрона на n -й боровской орбите и ее радиус равны

$$v = \frac{|e|^2}{2 \epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n}, \quad r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m |e|^2} \cdot n^2 \quad (3)$$

соответственно.

Подставив выражения (3) при $n = 1$ в уравнение (1) с учетом (2), найдем величину силы тока:

$$I = \frac{m |e|^5}{4 \epsilon_0^2 h^3} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

• *Ответ:* $I = \frac{m |e|^5}{4 \epsilon_0^2 h^3} = 1,05 \cdot 10^{-3}$ А.

18.2. С какой силой притягивается к ядру атома водорода электрон, находящийся на 4-й боровской орбите? Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

18.3. Определить частоту обращения электрона в атоме водорода на второй боровской орбите. Во сколько раз изменится частота обращения при переходе электрона с первой на вторую орбиту? Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

18.4. На какую величину изменится потенциальная энергия электрона, переходящего в атоме водорода с первой на четвертую боровскую орбиту? Во сколько раз изменится его кинетическая энергия при обратном

переходе на первую орбиту? Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

- Решение. Потенциальная энергия электрона в атоме определяется энергией его взаимодействия с ядром:

$$U = -\frac{|e| q_{\text{яд}}}{4\pi \epsilon_0 r},$$

где $q_{\text{яд}}$ – заряд ядра (для атома водорода равный по величине заряду электрона $|e|$); r – расстояние между ядром и электроном, равное радиусу соответствующей боровской орбиты. Следовательно, потенциальная энергия на первой и четвертой боровских орбитах равна

$$U_1 = -\frac{|e|^2}{4\pi \epsilon_0 r_1} \quad \text{и} \quad U_4 = -\frac{|e|^2}{4\pi \epsilon_0 r_4}$$

соответственно. Радиусы первой и четвертой орбиты по теории Бора

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m |e|^2}; \quad r_4 = \frac{16 \epsilon_0 h^2}{\pi m |e|^2}.$$

Следовательно, изменение потенциальной энергии электрона

$$\Delta U = U_4 - U_1 = -\frac{|e|^2}{4\pi \epsilon_0 r_4} + \frac{|e|^2}{4\pi \epsilon_0 r_1},$$

или

$$\Delta U = -\frac{m |e|^4}{64 \epsilon_0^2 h^2} + \frac{m |e|^4}{4 \epsilon_0^2 h^2} = \frac{15m |e|^4}{64 \epsilon_0^2 h^2} \approx 4,06 \cdot 10^{-18} \text{Дж} \approx 25,4 \text{ эВ.}$$

Кинетическая энергия электрона

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

определяется скоростью v его движения на рассматриваемой орбите:

$$v_1 = \frac{|e|^2}{2 \epsilon_0 h}; \quad v_4 = \frac{|e|^2}{8 \epsilon_0 h}.$$

Тогда

$$T_1 = \frac{m v_1^2}{2} = \frac{m |e|^4}{8 \epsilon_0^2 h^2}; \quad T_4 = \frac{m v_4^2}{2} = \frac{m |e|^4}{128 \epsilon_0^2 h^2},$$

и при переходе электрона с четвертой боровской орбиты на первую его кинетическая энергия изменится в

$$\frac{T_1}{T_4} = \frac{128}{8} = 16 \text{ раз.}$$

- Ответ: увеличится на $\Delta U = \frac{15 m |e|^4}{64 \epsilon_0^2 h^2} \approx 4,06 \cdot 10^{-18} \text{Дж} \approx 25,4 \text{ эВ}$; увеличится в 16 раз.

18.5. Исходя из основных положений теории Бора, определить энергию электрона в атоме водорода на первой боровской орбите. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

18.6. Исходя из основных положений теории Бора, определить кинетическую энергию электрона на третьей орбите атома водорода. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

18.7. Атом водорода испускает квант света. С точки зрения теории Бора, этот квант соответствует переходу электрона с четвертой орбиты на вторую. Может ли этот квант света вырвать электрон с поверхности пластины из калия, для которого работа выхода электрона равна $A = 2$ эВ?

- Решение. При переходе электрона в атоме водорода с n -го энергетического уровня (орбиты) на m -й (орбиту) атом испускает квант энергии с частотой

и энергией

$$v = R_v \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\}$$

$$\epsilon = h v = h R_v \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Для фотоэффекта энергии ϵ испущенного фотона должно быть достаточно для совершения работы выхода A электрона из металла.

Используя данные задачи, получаем

$$\epsilon = h R_v \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = h R_v \left\{ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right\} = \frac{3}{16} h R_v \approx 4,08 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 2,55 \text{ эВ.}$$

Так как $\epsilon \approx 2,55 \text{ эВ} > A = 2 \text{ эВ}$, то энергии фотона будет достаточно для вырывания электрона из металла.

- Ответ: энергии фотона достаточно для вырывания электрона из металла.

18.8. Атом водорода излучил квант света в видимом диапазоне с длиной волны $\lambda = 656 \text{ нм}$. Во сколько раз при этом изменился радиус орбиты электрона?

18.9. Атом водорода испустил фотон при переходе электрона со второй боровской орбиты на первую. Испущенный фотон попадает на катод фотоэлемента и выбивает из него фотоэлектрон. Определить максимальную скорость фотоэлектрона, если работа выхода для материала катода $A = 8,2 \text{ эВ}$. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

18.10. Найти длину волны, которую испускает ион лития Li^{++} при переходе с четвертого энергетического уровня на второй.

18.11. Электрон с энергией $E = 12,8 \text{ эВ}$ при соударении с атомом водорода, находящимся в основном состоянии, возбуждает его в некоторое состояние, передавая ему всю свою энергию. Какие линии спектра атома водорода (какой длины волны) могут излучаться при переходе атома из этого возбужденного состояния на второй энергетический уровень?

• Решение. При соударении электрона с атомом водорода последний переходит из основного состояния в возбужденное, что сопровождается переходом электрона атома на более высокий энергетический уровень. При переходе электрона атома на более низкий энергетический уровень он излучает квант энергии. При этом электрон атома может перейти в новое состояние различными путями: непосредственно на новый энергетический уровень или пройдя последовательно несколько промежуточных. Поэтому, для того чтобы понять, какие линии спектра могут излучаться возбужденным атомом, нужно выяснить, на какой энергетический уровень перешел электрон в атоме после соударения с налетающим электроном.

Энергия атома водорода в произвольном m -м энергетическом состоянии равна

$$E_m = - \frac{h R_v}{m^2}.$$

Уровень, на который возбуждается атом при столкновении с электроном, определим из закона сохранения энергии, полагая, что при столкновении с атомом электрон теряет всю свою энергию:

$$E_0 + E = E_m,$$

где $E_0 = - h R_v$ – энергия атома в основном невозбужденном состоянии. Следовательно,

$$- h R_v + E = - \frac{h R_v}{m^2},$$

т.е. электрон в атоме переходит на

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - E/h R_V}} = 4$$

энергетический уровень.

Переход электрона с четвертого энергетического уровня на второй может проходить двумя путями (рис. 18.5):

- переход из состояния с $m = 4$ в состояние с $n = 2$;
- переход из состояния с $m = 4$ в состояние с $n' = 3$, затем переход из состояния с $n' = 3$ в состояние с $n = 2$.

При переходе электрона атома на более низкий энергетический уровень будет испущен фотон с длиной волны

$$\frac{1}{\lambda_{n,m}} = \frac{R_V}{c} \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda_{n,m}} = R_\lambda \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{4,2} = \frac{1}{R_\lambda \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right\}} = \frac{n^2 m^2}{R_\lambda (m^2 - n^2)} = \frac{16}{3 R_\lambda} \approx 4,85 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

$$\lambda_{4,3} = \frac{n'^2 m^2}{R_\lambda (m^2 - n'^2)} = \frac{144}{7 R_\lambda} \approx 1,87 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \quad \lambda_{3,2} = \frac{n^2 n'^2}{R_\lambda (n'^2 - n^2)} = \frac{36}{5 R_\lambda} \approx 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

• Ответ: $\lambda_{4,2} = \frac{16}{3 R_\lambda} \approx 4,85 \cdot 10^{-7} \text{ м}$; $\lambda_{4,3} = \frac{144}{7 R_\lambda} \approx 1,87 \cdot 10^{-6} \text{ м}$; $\lambda_{3,2} = \frac{36}{5 R_\lambda} \approx 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

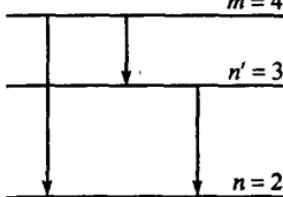


Рис. 18.5

18.12. Чему должна быть равна минимальная энергия фотона, облучающего водород, находящийся в основном состоянии, чтобы при обратном переходе электрона в возбужденном атоме на второй энергетический уровень можно было наблюдать шесть линий спектра?

18.13. Электроны, ускоренные разностью потенциалов $U = 12,3$ В, проходят через атомарный невозбужденный водород. Определить длины волн испускаемого излучения, возникающего при переходе атомов из возбужденного состояния в основное. Заряд электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

18.14. В спектре атома водорода интервал между наибольшей длиной волны, излучаемой при переходе электрона на первый энергетический уровень, и наибольшей длиной волны, излучаемой при переходе на второй энергетический уровень, равен $\Delta\lambda = 533$ нм. По этим данным определить постоянную Ридберга.

• *Решение.* Длина волны, излучаемая атомом водорода при переходе электрона с n -го энергетического уровня на m -й, определяется формулой Бальмера – Ридберга

$$\frac{1}{\lambda} = R_\lambda \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\}. \quad (1)$$

При этом, если электрон непосредственно переходит с n -го энергетического уровня на m -й, то спектр излучения будет содержать только одну спектральную линию, т.е. атом испустит квант света с одной длиной волны. Если же переход будет осуществлен через некоторый промежуточный энергетический уровень $k < n$, то спектр будет содержать две линии, соответствующие переходам с уровня n на уровень k и с уровня k на уровень m . Поэтому при переходе электрона с n -го энергетического уровня на m -й, спектр излучения атома может содержать большое число линий, соответствующих различным длинам волн. Как следует из выражения (1), при переходе на m -й энергетический уровень наибольшим длинам волн будут соответствовать переходы с уровня $(m-1)$. Следовательно, максимальные длины волн, излучаемые атомом водорода при переходах на первый и второй энергетический уровни,

$$\lambda_{\max 1} = \frac{1}{R_\lambda \left\{ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right\}} = \frac{4}{3 R_\lambda}, \quad \lambda_{\max 2} = \frac{1}{R_\lambda \left\{ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right\}} = \frac{36}{5 R_\lambda}. \quad (2)$$

По условию задачи

$$\Delta\lambda = \lambda_{\max 2} - \lambda_{\max 1},$$

или с учетом соотношений (2)

$$\Delta\lambda = \lambda_{\max 2} - \lambda_{\max 1} = \frac{36}{5 R_\lambda} - \frac{4}{3 R_\lambda} = \frac{88}{15 R_\lambda}.$$

Отсюда находим

$$R_\lambda = \frac{88}{15 \Delta\lambda} \approx 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}, \quad \text{или} \quad R_\nu = \frac{88 c}{15 \Delta\lambda} \approx 3,3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

• Ответ: $R_\lambda = \frac{88}{15 \Delta\lambda} \approx 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$; $R_\nu = \frac{88 c}{15 \Delta\lambda} \approx 3,3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

18.15. Наибольшая длина волны, излучаемая атомом водорода при переходе электрона на второй энергетический уровень, равна $\lambda_{\max} = 656,3$ нм. Определить длину волны, излучаемую при переходе электрона с третьего на первый энергетический уровень. Постоянную Ридберга считать неизвестной.

18.16. Длина волны, излучаемая атомом водорода при переходе электрона на второй энергетический уровень с четвертого, равна $\lambda = 4850$ нм. Определить минимальную длину волны, излучаемую атомом при переходе электрона на первый энергетический уровень. Постоянную Ридберга считать неизвестной.

18.17. Атом водорода переходит из возбужденного состояния в основное. При этом он испускает (последовательно, один за другим) два кванта света с длинами волн $\lambda_1 = 4051$ нм и $\lambda_2 = 97,25$ нм. Определить энергию первоначального (возбужденного) состояния атома. Энергия ионизации водорода равна $E_{\text{ион}} = 13,6$ эВ. Постоянную Ридберга считать неизвестной.

• **Решение.** Длина волны, излучаемая атомом водорода при переходе электрона с n -го энергетического уровня на m -й, определяется формулой Бальмера – Ридберга

$$\frac{1}{\lambda} = R_\lambda \left\{ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right\}. \quad (1)$$

Поскольку атом испустил последовательно два кванта света, то переход с начального n -го энергетического уровня на конечный $m = 1$ (в основное состояние) был осуществлен через некоторый промежуточный энергетический уровень k , причем $m < k < n$.

Записав формулу (1) для двух последовательных переходов

$$\frac{1}{\lambda_1} = R_\lambda \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right\}, \quad \frac{1}{\lambda_2} = R_\lambda \left\{ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{k^2} \right\},$$

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = R_\lambda \left\{ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right\}. \quad (2)$$

Энергия атома в начальном состоянии

$$E_n = -\frac{h c R_\lambda}{n^2}$$

с учетом (2) может быть представлена в виде

$$E_n = h c \left\{ \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - R_\lambda \right\}. \quad (3)$$

Для определения постоянной Ридберга воспользуемся значением энергии ионизации атома. Поскольку $E_{\text{ион}}$ – это минимальная энергия, необходимая для перехода электрона в атоме из основного состояния на уровень $m = \infty$

$$E_{\text{ион}} = E_{\infty} - E_1 = h R_V = h c R_{\lambda}$$

то

$$E_n = h c \left\{ \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{E_{\text{ион}}}{h c} \right\} = -E_{\text{ион}} + h c \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \approx -0,5 \text{ эВ.}$$

• Ответ: $E_n = -E_{\text{ион}} + h c \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \approx -0,5 \text{ эВ.}$

18.18. Найти номер боровской орбиты, соответствующей возбужденному состоянию атома водорода, если известно, что при переходе в основное состояние этот атом испустил два фотона. Импульс первого фотона равен $p_1 = 1,36 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с, а частота второго соответствует красной границе фотоэффекта для материала с работой выхода $A = 10,2$ эВ. Энергия ионизации водорода равна $E_{\text{ион}} = 13,6$ эВ. Постоянную Ридберга считать неизвестной.

18.19. Фотон с длиной волны $\lambda = 80$ нм выбивает электрон из атома водорода, находящегося в основном состоянии. Вдали от атома электрон влетает в однородное электрическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. На какое максимальное расстояние от границы поля может удалиться электрон, если силовые линии электрического поля направлены по вектору его скорости? Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

18.20. Фотон с длиной волны $\lambda = 90$ нм выбивает электрон со второй боровской орбиты атома водорода. Находясь вдали от атома, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 5$ мТл так, что вектор индукции перпендикулярен вектору скорости электрона. Определить радиус орбиты, по которой будет двигаться электрон в магнитном поле. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

18.21. Первоначально покоящийся атом массой $m = 1,8 \cdot 10^{-25}$ кг испускает фотон с частотой $v = 10^{15}$ с⁻¹. Определить изменение полной энергии атома.

• Решение. Запишем законы сохранения импульса и энергии для системы «фотон – атом»:

$$0 = m v - h v/c; \quad (1)$$

$$E_0 = E + h v + \frac{1}{2} m v^2, \quad (2)$$

где E_0, E – полная энергия атома до и после испускания фотона; v – скорость, которую приобретает атом после испускания фотона.

Изменение полной энергии атома равно

$$\Delta E = E_0 - E. \quad (3)$$

Решив систему уравнений (1) – (3), получим

$$\Delta E = h v \left\{ \frac{h v}{2 m c^2} + 1 \right\} \approx 4,15 \text{ эВ.}$$

• Ответ: $\Delta E = h v \left\{ \frac{h v}{2 m c^2} + 1 \right\} \approx 4,15 \text{ эВ.}$

18.22. Покоящийся атом водорода излучил фотон с длиной волны $\lambda = 486$ нм. Какую скорость при этом приобрел атом? Масса атома водорода $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

18.23. Покоящийся атом водорода испустил фотон при переходе из энергетического состояния $n = 2$ в основное. Какую скорость приобрел атом? Масса атома водорода $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

18.24. Фотон с энергией $\epsilon = 16,5$ эВ выбил электрон с первой боровской орбиты покоящегося атома водорода. Какую скорость будет иметь электрон вдали от ядра? Масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

• Решение. Поскольку энергия ϵ фотона много меньше энергии покоя E_0 электрона ($E_0 = m_e c^2 \approx 0,5$ МэВ), то при решении задачи релятивистскими поправками будем пренебречь.

Рассмотрим процесс поглощения атомом фотона. Считая систему «фотон – атом» замкнутой, запишем законы сохранения импульса и энергии при поглощении атомом фотона с энергией ϵ :

$$\epsilon/c = m v_{\text{ат}}; \quad (1)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} m v_{\text{ат}}^2 + \Delta E, \quad (2)$$

где m – масса атома водорода; $v_{\text{ат}}$ – его скорость после поглощения фотона; ΔE – энергия, идущая на возбуждение атома.

Оценим скорость, которую приобрёл атом после поглощения фотона. Считая массу атома водорода $m \approx 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, из уравнения (1) получим $v_{\text{ат}} \approx 5,3$ м/с. Величина кинетической энергии атома $\frac{1}{2} m v_{\text{ат}}^2 \approx 1,45 \cdot 10^{-7}$ эВ много меньше энергии фотона $\epsilon = 16,5$ эВ. Поэтому в дальнейшем кинетической энергией атома при поглощении фотона будем пренебречь.

Вследствие изменения внутренней энергии атома на величину $\Delta E \approx \epsilon$ происходит ионизация атома, т.е. вырывание электрона из атома.

Запишем законы сохранения импульса и энергии для системы «электрон – атом», где под атомом будем подразумевать атом, из которого выбит электрон:

$$0 = m_e u - (m - m_e) v; \quad (3)$$

$$\epsilon = E_{\text{ион}} + \frac{1}{2} m_e u^2 + \frac{1}{2} (m - m_e) v^2, \quad (4)$$

где u – скорость выбитого электрона; v – скорость атома; m – его масса; $E_{\text{ион}}$ – энергия, необходимая для ионизации атома. Из уравнений (3) – (4) получим

$$v = u \frac{m_e}{m - m_e}; \quad (5)$$

$$\epsilon = E_{\text{ион}} + \frac{m_e u^2}{2} + \frac{m_e^2 u^2}{2(m - m_e)} = E_{\text{ион}} + \frac{m_e u^2}{2} \left\{ 1 + \frac{m_e}{m - m_e} \right\}. \quad (6)$$

Так как масса электрона m_e много меньше разности масс $(m - m_e)$, вторым слагаемым в круглых скобках выражения (6) можно пренебречь. Следовательно,

$$\epsilon \approx E_{\text{ион}} + \frac{1}{2} m_e u^2. \quad (7)$$

Энергия ионизации соответствует вырыванию электрона из низшего энергетического состояния E_1 при переходе в состояние $E_\infty = 0$ и равна

$$E_{\text{ион}} = h R_v.$$

Выражая из (7) искомую величину скорости электрона, с учетом (6) получаем

$$u = \sqrt{2(\epsilon - h R_v)/m_e} \approx 10^6 \text{ м/с.}$$

• Ответ: $u = \sqrt{2(\epsilon - h R_v)/m_e} \approx 10^6 \text{ м/с.}$

18.25. Покоящийся атом водорода поглощает фотон, вследствие чего электрон, находящийся на второй боровской орбите, вылетает из атома со скоростью $v = 6 \cdot 10^5$ м/с. Чему равна частота фотона? Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

18.26. Какую скорость приобретет покоящийся атом водорода, поглощая фотон и переходя из основного в первое возбужденное состояние? Энергия ионизации атома водорода $E_{\text{ион}} = 13,6$ эВ. Масса атома водорода $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. Постоянную Ридберга считать неизвестной.

§19. Физика атомного ядра

Как упоминалось в §18, в начале XX в. благодаря опытам Резерфорда было доказано, что в центре атома находится крохотное по своим размерам, но массивное ядро. Одновременно с созданием квантовой теории и попытками объяснить строение атома начались исследования и атомного ядра. Оказалось, что ядро достаточно сложно, в его структуре и по сей день остается много неясного. Тем не менее в начале 30-х гг. была разработана модель атомного ядра, которая по-прежнему широко используется. Согласно этой модели, ядро состоит из частиц двух типов – протонов и нейтронов. Протон представляет собой ядро простейшего атома – атома водорода. Он имеет положительный заряд $q_p = +e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл и массу $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг. Нейtron электрически нейтрален ($q_n = 0$), а его масса равна $m_n = 1,6750 \cdot 10^{-27}$ кг. Протоны и нейтроны, представляющие собой два составных элемента атомного ядра, объединяют общим названием *нуклонов*.

Ядро атома водорода состоит из одного протона, тогда как ядра атомов других химических элементов содержат и протоны, и нейтроны. Различные типы ядер часто называют *нуклидами*. Число протонов в ядре (или в нуклиде) называется *зарядовым числом* Z . Число Z определяет порядковый номер химического элемента в периодической таблице Д.И. Менделеева. Поэтому его также называют *атомным номером* ядра. Общее число нуклонов, т.е. протонов и нейтронов, обозначается буквой A и называется *массовым числом*. Такое название это число получило потому, что произведение A на массу отдельного нуклона (протона или нейтрона) очень близко по значению к массе ядра. Очевидно, что число нейронов в ядре равно $N = A - Z$.

Чтобы характеризовать данный нуклид, достаточно указать только значения Z и A . Для обозначения ядер обычно применяется символическая запись ${}_Z^A X$, где под X подразумевается химический символ данного элемента. Например, ${}_{15}^{15} N$ означает ядро атома азота, содержащее 7 протонов и 8 нейтронов, т.е. всего 15 нуклонов.

В ядрах одного химического элемента число нейтронов может быть различным, а число протонов всегда одно и то же. Например, в ядрах углерода число протонов всегда равно 6, а число нейтронов может быть равно 5, 6, 7, 8, 9 или 10. Ядра, содержащие одинаковое число протонов, но различное число нейтронов, называют *изотопами*. Так, изотопами являются обычный водород ${}_1^1 H$, дейтерий (тяжелый водород) ${}_1^2 H$ и тритий ${}_1^3 H$. Разумеется, распространенность изотопов одного и того же элемента неодинакова. Многие изотопы вообще не встречаются в природе, но могут быть получены в лабораториях с помощью ядерных реакций. Более того, все элементы (так называемые трансуранные) с $Z > 92$ могут быть получены только искусственно (кроме плутония с $Z = 94$, который в ничтожно малых количествах встречается также в природном минерале – смоляной обманке).

Силы, удерживающие нуклоны в ядре, называются *ядерными силами*. Эти силы представляют собой проявление самого интенсивного из известных в физике взаимодействий – так называемого *сильного взаимодействия*. Ядерные силы, действующие между двумя протонами в ядре, примерно на два порядка больше кулоновских сил и в 10^{38} раз больше сил их гравитационного взаимодействия. Опыт показывает, что нейтроны и протоны в ядре в отношении сильного взаимодействия ведут себя практически одинаково: ядерные силы между двумя протонами, двумя нейтронами или протоном и нейtronом неразличимы. Поэтому протоны и нейтроны в ядре рассматривают как два различных зарядовых состояния одной и той же частицы – нуклона. Независимость ядерных сил от зарядового состояния нуклонов называется *изотопической инвариантностью*.

Действие ядерных сил быстро спадает с расстоянием: на расстояниях, больших $2 \cdot 10^{-11}$ см, их действие не проявляется. Вплоть до расстояний порядка $0,7 \cdot 10^{-13}$ см они проявляются как силы притяжения, на меньших расстояниях – как силы отталкивания.

Размеры ядер приближенно были впервые определены Резерфордом в опытах по рассеянию заряженных частиц. По современным оценкам, радиус ядра возрастает в зависимости от массового числа согласно формуле

$$r \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} [\text{м}].$$

Так как объем сферы равен $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, то можно заключить, что объем ядра пропорционален числу нуклонов A . Следовательно, все ядра имеют приблизительно одинаковую плотность порядка 10^{17} кг/м³. Такая большая плотность характерна и для некоторых космических объектов, например, нейтронных звезд – пульсаров.

Массы ядер, как и массы атомов и молекул, принято измерять в атомных единицах массы (см. §9). В атомных единицах массы масса электрона составляет $m_e = 0,00054858$ а.е.м., протона $m_p = 1,007276$ а.е.м., нейтрона $m_n = 1,008665$ а.е.м., атома водорода $m_{\text{H}} = 1,007825$ а.е.м. Массы ядер часто выражают в единицах энергии электрон-вольт ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$). Использование единиц энергии возможно из-за того, что масса и энергия взаимосвязаны формулой Эйнштейна $E = m c^2$ (см. §16). Так как масса атома водорода $m_{\text{H}} = 1,007825$ а.е.м. = $1,6736 \cdot 10^{-27}$ кг, то справедливо равенство

$$1,0000 \text{ а.е.м.} \approx (1,0000/1,007825) \cdot 1,6736 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Эта масса эквивалентна энергии

$$E = m c^2 \approx (1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ кг}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 / (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/эВ}) \approx 931,5 \text{ МэВ.}$$

Более точные измерения дают значение

$$1,0000 \text{ а.е.м.} = (931,5016 \pm 0,0026) \text{ МэВ/с}^2.$$

Дефект массы и энергия связи ядра

Согласно измерениям, масса атома гелия ^4He равна 4,002603 а.е.м. Если вычесть массу двух электронов, входящих в состав атома, то

получим: $4,002603 - 2 \cdot 0,00054858 = 4,001506$ а.е.м. Суммарная масса двух протонов и двух нейтронов, входящих в ядро атома, равна $2 \cdot 1,007276 + 2 \cdot 1,008665 = 4,031882$ а.е.м. Видим, что масса ядра на величину $4,031882 - 4,001506 = 0,0203076$ а.е.м. меньше суммарной массы нуклонов, входящих в состав ядра атома ${}_2^4\text{He}$. Этот пример не является частным случаем. Масса стабильного ядра $m_{\text{я}}$ всегда меньше суммы масс входящих в него нуклонов. Следовательно, энергия покоящегося ядра меньше суммарной энергии невзаимодействующих покоящихся нуклонов на величину

$$E_{\text{св}} = c^2 \{ [Z m_p + (A - Z) m_n] - m_{\text{я}} \}, \quad (19.1)$$

которую называют *энергией связи* нуклонов в ядре. Она равна той минимальной работе, которую необходимо совершить, чтобы разделить нуклоны, образующие ядро, и удалить их друг от друга на расстояния, при которых они не взаимодействуют. Если бы масса ядра была в точности равна сумме масс нуклонов, то $E_{\text{св}} = 0$, и ядро самопроизвольно распалось бы без сообщения ему дополнительной энергии. Заметим, что энергия связи не содержится в самом ядре – это энергия, которой не достает ядру для стабильности.

Величина

$$\Delta m = [Z m_p + (A - Z) m_n] - m_{\text{я}} \quad (19.2)$$

называется *дефектом массы* ядра. Очевидно, что

$$\Delta m = E_{\text{св}} / c^2. \quad (19.3)$$

Как известно, энергия связи электрона с ядром атома водорода в основном состоянии (см. §18) равна 13,6 эВ. По сравнению с полной энергией атома $1,007825 \cdot 931,5 \approx 938$ МэВ – это очень малая величина. Для других атомов энергия связи ядер примерно в 10^6 раз больше энергий связи электронов с ядром. Поэтому если добавить и вычесть в соотношении (19.1) величину $Z m_e$ (суммарную массу электронов в нейтральном атоме) и пренебречь энергией связи электронов с ядром

$E_{\text{св}} = c^2 \{ [Z m_p + Z m_e + (A - Z) m_n] - (m_{\text{я}} + Z m_e) \}$,
то получим

$$E_{\text{св}} = c^2 \{ [Z (m_p + m_e) + (A - Z) m_n] - m_{\text{ат}} \},$$

или

$$E_{\text{св}} = c^2 \{ [Z m_{\text{H}} + (A - Z) m_n] - m_{\text{ат}} \}. \quad (19.4)$$

Формула (19.4) более удобная, чем (19.1), потому что в таблицах обычно даются не массы ядер $m_{\text{я}}$, а массы атомов $m_{\text{ат}}$.

Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, т.е.

$$\varepsilon_{\text{св уд}} = E_{\text{св}} / A, \quad (19.5)$$

называется *удельной энергией связи* нуклонов в ядре. На рис. 19.1 показана

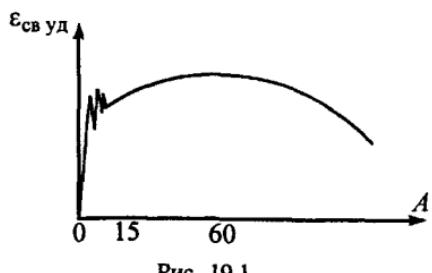


Рис. 19.1

зависимость средней удельной энергии связи ядра от числа нуклонов для стабильных ядер. С увеличением A кривая зависимости сначала возрастает и выходит на насыщение, а при $A > 60$ – медленно спадает. Такое поведение удельной энергии связи объясняется для легких ядер неполным насыщением ядерных сил, когда число «соседей» у каждого нуклона меньше, чем это возможно при их плотной упаковке, и возрастанием роли кулоновского отталкивания протонов в ядрах с большим массовым числом, т.е. более тяжелые ядра оказываются менее «прочными». Такая зависимость $\epsilon_{\text{св}} \text{уд}$ от A делает энергетически возможными два процесса: 1) деление тяжелых ядер на несколько более легких; 2) слияние легких ядер в одно ядро. При этом оба процесса должны сопровождаться выделением большого количества энергии.

Радиоактивность

Историю ядерной физики принято отсчитывать с 1896 г., когда Анри Беккерель, занимаясь исследованием фосфоресценции, обнаружил, что один из минералов обладает способностью засвечивать фотопластинку, даже если та завернута в светонепроницаемую бумагу. Было ясно, что минерал испускает некоторое излучение, причем самопроизвольно. Это явление получило название *радиоактивности*. Вскоре Мария и Пьер Кюри выделили два ранее не известных химических элемента, обладавшие высокой радиоактивностью (эти элементы получили названия полоний и радий). Позже были открыты и другие радиоактивные элементы. Во всех случаях на радиоактивность не влияли самые интенсивные физические или химические воздействия, в том числе сильный нагрев или охлаждение, обработка сильнодействующими химическими реактивами. Вскоре стало ясно, что источником радиоактивности являются атомные ядра, превращаясь из одних в другие. Стало ясно также, что радиоактивность возникает в результате распада нестабильного ядра.

Многие нестабильные изотопы встречаются в природе; их радиоактивность называют *естественной радиоактивностью*. Другие нестабильные изотопы могут быть созданы в лабораториях как продукты ядерных реакций, такие изотопы называют *искусственными*, а их радиоактивность – *искусственной радиоактивностью*.

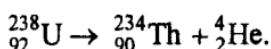
При изучении радиоактивности было обнаружено, что по проникающей способности излучение можно разделить на три различных вида. Излучение одного вида едва проникало сквозь лист бумаги. Излучение второго вида проходило сквозь алюминиевую пластинку толщиной до 3 мм. Излучение третьего вида было особенно проникающим: оно проходило сквозь слой свинца толщиной в несколько сантиметров. Эти три вида излучения были названы первыми тремя буквами греческого алфавита: альфа (α)-, бета (β)- и гамма (γ)-излучением (лучами). Оказалось, что все три вида излучений имеют различный электрический заряд: α -лучи заряжены положительно; β -лучи заряжены отрицательно, а γ -лучи нейтраль-

ны. Было обнаружено, что радиоактивные излучения всех трех видов представляют собой уже известные частицы: альфа-лучи – это ядра атомов гелия, бета-лучи состоят из электронов (идентичных электронам в атоме, хотя β -лучи испускаются ядром), гамма-лучи представляют собой фотоны очень высокой энергии. Рассмотрим эти виды радиоактивного распада подробнее.

1) **Альфа-распад.** Ядро, образующееся в результате испускания ядром α -лучей (как было установлено – это ядра гелия ${}^4_2\text{He}$), должно отличаться от исходного, так как последнее теряет два протона и два нейтрона. При α -распаде всегда образуется новый химический элемент по схеме



Превращение одного элемента в другой называют *трансмутацией*. Примером альфа-распада может служить распад изотопа урана, протекающий с образованием тория:



В выражении (19.6) буквой X обозначен химический символ распадающегося (*материнского*) ядра, буквой Y – химический символ образующегося (*дочернего*) ядра. Альфа-распад обычно сопровождается испусканием дочернем ядром γ -лучей.

Причиной альфа-распада служит нестабильность материнского ядра: энергия покоя (масса) радиоактивного ядра превышает суммарную энергию (суммарную массу) дочернего ядра и α -частицы. Разность масс выделяется в виде кинетической энергии, уносимой в основном α -частицей. В большинстве случаев радиоактивное вещество испускает несколько групп α -частиц близкой, но различной энергии. Пролетая через вещество, α -частица постепенно теряет свою энергию, затрачивая ее на ионизацию молекул вещества, и, в конце концов, останавливается. Очевидно, что чем больше плотность вещества, тем меньше пробег α -частицы до остановки. Так, например, в воздухе при нормальном давлении пробег составляет несколько сантиметров, а в твердом теле – порядка 10^{-3} см. Поэтому α -частица полностью задерживается листом бумаги.

2) **Бета-распад.** Превращение элементов происходит и при бета-распаде ядра, т.е. испускании материнским ядром электрона. Бета-распад протекает по схеме

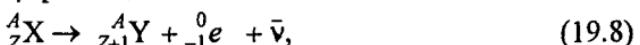


где символом ${}^{-1}_-e$ обозначен электрон, так как его заряд соответствует $Z = -1$, а масса очень мала, т.е. при испускании электрона ядро не теряет нуклонов, и полное число протонов и нейтронов A в дочернем ядре такое же, как в материнском.

Необходимо отметить, что испускаемый при β -распаде электрон не имеет отношения к электронам атома. Он рождается внутри самого ядра так, как будто один из нейтронов превращается в протон и при этом (для сохранения заряда) испускается электрон. Чтобы подчеркнуть ядерное

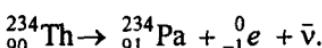
происхождение таких электронов, их обычно называют не электронами, а β -частицами.

Тщательные измерения показали, что лишь небольшое число β -частиц имеет кинетическую энергию, близкую к разности масс (в энергетических единицах) материнского ядра и суммарной массы электрона и дочернего ядра. Вольфганг Паули предположил, что при β -распаде помимо электрона испускается еще одна частица, которую очень трудно обнаружить. Новая частица была названа *нейтрино* («маленький нейтрон»). Нейтрино имело нулевой заряд и близкую к нулю массу покоя. Непосредственное экспериментальное доказательство существования нейтрино было получено только через двадцать лет. Нейтрино принято обозначать буквой ν . С учетом нейтрино схема β -распада запишется в виде



где черта над символом нейтрино означает *антинейтрино* (в соответствии с принятой в настоящее время классификацией считается, что при β -распаде испускается не нейтрино, а антинейтрино).

Примером β -распада может служить превращение тория в протактний:

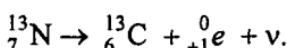


Многие изотопы распадаются с испусканием электрона. Все они обладают избытком нейтронов по сравнению с числом протонов. Однако существуют изотопы с дефицитом нейтронов по сравнению с числом протонов. Такие изотопы также претерпевают радиоактивные превращения с испусканием не электрона, а позитрона ${}_{+1}^0 e$: частицы с такой же массой, как у электрона, но с положительным зарядом $+e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Такой распад называют β^+ -распадом или *позитронным* распадом. Поэтому рассмотренный выше бета-распад обычно называют *электронным* или β^- -распадом. Позитронный распад протекает по схеме



так, как если бы один из протонов исходного ядра превратился в нейтрон, испустив при этом позитрон и нейтрино.

В качестве примера β^+ -распада можно привести превращение азота в углерод:

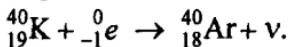


Существует также третий тип бета-распада (*электронный захват*), состоящий в том, что ядро поглощает один из электронов своего атома, в результате чего один из протонов превращается в нейтрон, испуская при этом нейтрино:



При электронном захвате место захваченного ядром электрона заполняется электроном с более высокого энергетического уровня, в результате

чего возникают рентгеновские лучи. Примером такого распада может служить превращение калия в аргон:



3) Гамма-распад. Гамма-распад представляет собой фотоны очень высокой энергии. Распад ядра с испусканием γ -излучения во многом напоминает испускание фотонов возбужденными атомами. Подобно атому, ядро может находиться в возбужденном состоянии (например, дочернее ядро, возникающее в результате β^- -распада, довольно часто находится в возбужденном состоянии). При переходе в состояние с более низкой энергией, или основное состояние, ядро испускает фотон. Разрешенные энергетические уровни ядра разнесены значительно сильнее, чем энергетические уровни атома: расстояние между соседними уровнями в ядре имеет порядок 10^3 или 10^6 эВ по сравнению с несколькими электрон-вольтами в случае энергетических уровней атома. Следовательно, энергии испускаемых фотонов могут изменяться от нескольких кэВ до нескольких МэВ. Отвечающее данному распаду γ -излучение всегда имеет одну и ту же энергию. Так как γ -излучение не несет заряда, то при гамма-распаде не происходит превращения одного химического элемента в другой.

При радиоактивном распаде всех трех типов выполняются законы *сохранения* энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда и числа нуклонов, т.е. эти величины после распада остаются такими же, как до распада.

Закон радиоактивного распада

Образец любого радиоактивного изотопа содержит огромное число радиоактивных ядер. Эти ядра распадаются не одновременно, а на протяжении некоторого времени. Процесс распада является случайным: мы не можем точно предсказать, когда произойдет распад данного ядра. Но можно приблизенно вычислить, сколько ядер образца распадется за любой промежуток времени.

Число распадов dN , происходящих за очень малый промежуток времени dt , пропорционально этому промежутку и полному числу N радиоактивных ядер:

$$dN = -\lambda N dt, \quad (19.11)$$

где коэффициент пропорциональности λ называется *постоянной распада*. Эта постоянная у разных изотопов различна.

Интегрирование выражения (19.11) приводит к соотношению

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (19.12)$$

где N_0 – число ядер в начальный момент; N – количество нераспавшихся ядер к моменту времени t .

Формула (19.12) выражает математическую запись закона *радиоактивного распада*: *число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненте*.

Количество ядер, распавшихся за время t , равно

$$N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}). \quad (19.13)$$

Скорость распада, или число распадов в секунду, называют *активностью* радиоактивного вещества:

$$\alpha = \frac{dN}{dt} = -\lambda N = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (19.14)$$

Таким образом, активность вещества также экспоненциально убывает со временем.

Скорость распада изотопа часто характеризуется не постоянной распада, а его *периодом полураспада* T : это – промежуток времени, за который распадается половина исходного количества ядер. Из (19.12) получим

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda T}; \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (19.15)$$

Периоды полураспада известных радиоактивных изотопов изменяются в диапазоне от 10^{-22} до 10^{28} с. Например, период полураспада изотопа полония $^{210}_{84}\text{Po}$ равен 164 мкс, а изотопа теллура $^{130}_{52}\text{Te}$ – $2 \cdot 10^{21}$ лет.

Используя (19.15) закон радиоактивного распада (19.12), можно записать через период полураспада:

$$N = N_0 2^{-t/T}. \quad (19.16)$$

Ядерные и термоядерные реакции. Деление ядер

Ядерной реакцией называют процесс взаимодействия атомного ядра с какой-либо частицей (например, γ -квантом или нейтроном) или с другим ядром, в результате которого происходит изменение состава и структуры ядра (или ядер). Из-за короткодействующего характера ядерных сил ядерные реакции происходят при сближении частиц на расстояния порядка 10^{-13} см. При ядерных реакциях выполняются уже упомянутые выше законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда и числа нуклонов. Кроме этого, сохраняется так называемый лептонный заряд, согласно которому рождение электрона обязательно сопровождается рождением антинейтрино, а рождение позитрона – рождением нейтрино. Образование электрон-позитронной пары может происходить и без появления нейтрино и антинейтрино.

Наиболее распространенным видом ядерной реакции является взаимодействие легкой частицы a с ядром X , в результате которого образуется новая частица b и ядро Y :



Уравнение таких реакций принято записывать в виде

$$X(a, b)Y, \quad (19.17)$$

где в скобках указываются участвующие в реакции легкие частицы.

При ядерных реакциях могут образовываться новые радиоактивные изотопы, которых нет на Земле в естественном состоянии. Создание ускорителей заряженных частиц значительно расширило возможности осуществления таких ядерных реакций. В качестве снарядов для бомбардиро-

ровки ядер-мишеней используются разогнанные до высоких энергий протоны, дейтроны и электроны. Ядерные реакции могут происходить также и под действием γ -квантов достаточно больших энергий (фотоядерные реакции).

Ядерные реакции сопровождаются энергетическими превращениями, при которых может выделяться или поглощаться энергия. Количество выделяющейся энергии называется *энергией реакции*. Она определяется разностью масс (выраженных в энергетических единицах) исходных и конечных ядер. Если сумма масс образующихся ядер превосходит сумму масс исходных, то реакции идет с поглощением энергии.

Интересным примером ядерной реакции может служить ${}_7^1N(n, p) {}_6^1C$ (здесь n и p – нейтрон и протон), которая постоянно протекает в атмосфере под действием нейтронов, образуемых космическими лучами. Возникающий при этом углерод 14_6C называется радиоуглеродом, так как он β^- -радиоактивен с периодом полураспада 5730 лет. Радиоуглерод усваивается при фотосинтезе растениями и участвует в круговороте веществ в природе. Пока организм живет, убыль в нем 14_6C из-за радиоактивности восполняется за счет участия в круговороте веществ. В момент смерти организма процесс усвоения сразу же прекращается и концентрация 14_6C начинает убывать по закону радиоактивного распада. Следовательно, измерив концентрацию 14_6C в останках организма (в древесине, костях и т.п.), можно определить дату смерти организма или, как говорят, возраст останков.

В 1938 г. Отто Ган и Фриц Штрасман сделали удивительное открытие. Они обнаружили, что при бомбардировке урана нейтронами иногда возникают ядра примерно вдвое более легкие, чем исходное ядро. Такое превращение было весьма необычным, так как все известные ядерные реакции проходили по схеме (19.16) и сопровождались вылетом из ядра лишь небольших осколков (нейтронов, протонов или альфа-частиц). Новое явление было названо *делением ядра* (из-за его сходства с делением клетки в биологии). В результате деления возникало огромное количество энергии, и, что не менее важно, при делении каждого ядра высвобождалось несколько нейтронов. Это делало возможным осуществление *цепной реакции*. Действительно, испущенные при одном делении k нейтронов могут вызвать деление k ядер, в результате будет испущено k^2 новых нейтронов, которые вызовут деление k^2 ядер, и т.д. Естественно, процесс размножения нейтронов на самом деле несколько иной: часть нейтронов поглощается ядрами неделяющихся примесей, некоторые успевают покинуть зону реакции прежде, чем захватываются ядром и др. Для осуществления цепной реакции необходимо, чтобы так называемый коэффициент размножения нейтронов – отношение числа нейтронов в каком-либо поколении к числу нейтронов в предыдущем – был больше единицы. Поэтому существует понятие *критической массы*, при которой это условие выполняется и возможна цепная реакция.

Как отмечалось выше, масса любого стабильного ядра меньше суммы масс составляющих его нуклонов. Например, масса изотопа гелия ^4_2He меньше суммы масс двух протонов и двух нейтронов. Следовательно, если из двух протонов и двух нейтронов как-то образовать ядро гелия, то это сопровождалось бы выделением большого количества энергии. Образование ядер в процессе слияния отдельных протонов и нейтронов или легких ядер называется ядерным синтезом. Согласно современным представлениям, все химические элементы в природе первоначально образовались в ходе ядерного синтеза. Сейчас ядерный синтез происходит в недрах звезд, в том числе и нашего Солнца. Именно этот процесс служит источником испускаемого ими мощного светового излучения.

Ядерный синтез может происходить только при очень высоких температурах, поэтому его обычно называют термоядерной реакцией. Для осуществления термоядерных реакций необходимо создать и поддерживать температуру порядка 10^7 – 10^8 К. При такой высокой температуре вещество представляет собой полностью ионизованную плазму. Поэтому для управления термоядерной реакцией, наряду с проблемой получения чрезвычайно высокой температуры, возникает проблема (которая пока еще не решена) удержания плазмы в заданном объеме. Осуществление управляемого термоядерного синтеза даст человечеству практически неисчерпаемый экологически чистый источник энергии.

Рекомендации по решению задач

Ядра атомов состоят из частиц двух типов – протонов и нейтронов, которые называют нуклонами. Для обозначения ядер применяется символическая запись ^A_ZX , где

- X – химический символ данного элемента;
- A – массовое число, равное числу нуклонов в ядре; произведение A на массу одного нуклона (протона или нейтрона) приближенно равно массе ядра;
- Z – зарядовое число, равное числу протонов в ядре, определяет порядковый номер данного химического элемента в периодической таблице Д.И. Менделеева; произведение $Z|e|$ равно заряду ядра;
- $(A - Z)$ – число нейтронов в ядре.

У стабильных ядер масса ядра m_y всегда меньше суммы масс входящих в него нуклонов на величину, равную дефекту массы

$$\Delta m = [Z m_p + (A - Z) m_n] - m_y.$$

Из формулы взаимосвязи массы и энергии (см. §16) следует, что сумма энергий свободных протонов и нейтронов больше энергии составленного из них ядра на величину

$$E_{cb} = \Delta m c^2,$$

которую называют энергией связи: она равна той минимальной работе, которую необходимо совершить, чтобы разделить нуклоны, образующие ядро, и удалить их друг от друга на расстояния, при которых они не взаимодействуют. Очевидно, что более устойчивыми являются ядра с большей энергией связи. При соединении протонов и нейтронов в атомное ядро за счет работы сил ядерного притяжения выделяется энергия, равная по модулю энергии связи ядра.

При вычислении энергии связи по формулам (19.1) и (19.4) необходимо массы протонов, нейтронов, ядер, атома водорода и атома данного химического элемента подставлять в [кг]. Поскольку в таблице Д.И. Менделеева массы атомов приведены в [а.е.м.], то часто удобнее использовать выражения

$$E_{\text{св}} = 931,5 \left\{ [Z m_p + (A - Z) m_n] - m_{\text{я}} \right\}, \quad E_{\text{св}} = 931,5 \left\{ [Z m_{\text{H}} + (A - Z) m_n] - m_{\text{ат}} \right\},$$

где массы выражены в [а.е.м.], а $E_{\text{св}}$ – в [МэВ].

При любых ядерных реакциях выполняются законы сохранения электрического заряда, суммарного числа нуклонов, энергии, импульса и другие законы. Первые два закона позволяют правило записать ядерную реакцию даже в тех случаях, когда одна из частиц – участников реакции или ее продуктов – не известна: в любой ядерной реакции сумма зарядовых чисел (массовых чисел) всех участников реакции равна сумме зарядовых чисел (массовых чисел) продуктов реакции.

Законы сохранения энергии и импульса позволяют найти энергетический выход ядерной реакции, кинетические энергии частиц – продуктов реакции и направления их движения.

Ядерные реакции сопровождаются энергетическими превращениями, при которых может выделяться или поглощаться энергия. Энергия реакции определяется разностью энергий участников и продуктов реакции:

$$Q = Q_{\text{участников}} - Q_{\text{продуктов}} \quad \text{или} \quad Q = c^2 (m_{\text{участников}} - m_{\text{продуктов}}).$$

Если массы $m_{\text{участников}}$ и $m_{\text{продуктов}}$ выражены в [а.е.м.], то

$$Q = 931,5 (m_{\text{участников}} - m_{\text{продуктов}}) \text{ [МэВ].}$$

Если сумма масс образующихся ядер превосходит сумму масс исходных, то реакция идет с поглощением энергии.

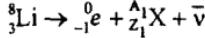
Обычно в ядерных реакциях значение Q не превосходит нескольких десятков МэВ. Поскольку энергия покоя даже самого легкого ядра (ядра водорода) равна 938 МэВ, то, вычисляя скорости, импульсы и энергии ядер или отдельных нуклонов, их можно заведомо считать классическими. Вместе с тем энергия ядерной реакции, как правило, превышает энергию покоя легких частиц – электронов и позитронов, равную 0,511 МэВ. Поэтому для таких частиц следует пользоваться релятивистскими формулами.

При решении задач на определение числа нераспавшихся или распавшихся ядер к определенному моменту времени следует использовать закон радиоактивного распада (19.12) или (19.13) соответственно. Если известен период T полураспада, то постоянную распада λ можно найти из выражения (19.15) и закон радиоактивного распада (19.12) записать в виде (19.16).

Задачи

19.1. Какой изотоп образуется из ${}^3_3\text{Li}$ после одного электронного β -распада и одного α -распада?

• **Решение.** Превращение элементов при электронном β -распаде ядра сопровождается реакцией испускания электрона. При этом электрон не существует внутри ядра, а образуется в нем как бы при превращении нейтрона в протон. В этом смысле говорят, что β -распад это не внутриддерный, а внутринуклонный процесс. При β -распаде протекает реакция



образования нового химического элемента X , у которого на основании законов сохранения массового A и зарядового Z чисел

$$A_1 = 8 - 0 = 8, \quad Z_1 = 3 - (-1) = 4.$$

При α -распаде из ядра вылетает альфа-частица – ядро атома гелия ${}^4_2\text{He}$, в результате чего образуется новый химический элемент Y согласно реакции



где $A_2 = 8 - 4 = 4$; $Z_2 = 4 - 2 = 2$.

Следовательно, после одного электронного β -распада и одного α -распада ядра атома ${}^3_3\text{Li}$ образуется изотоп гелия ${}^4_2\text{He}$.

• **Ответ:** ${}^4_2\text{He}$.

19.2. Определить число протонов, нейтронов и нуклонов, входящих в состав следующих ядер: $^{226}_{88}\text{Ra}$, $^{25}_{12}\text{Mg}$, $^{63}_{29}\text{Cu}$, $^{238}_{92}\text{U}$.

19.3. Во сколько раз радиус ядра урана $^{238}_{92}\text{U}$ больше радиуса ядра атома водорода?

19.4. Написать недостающие обозначения в следующих ядерных реакциях: а) $^{27}_{13}\text{Al} + n \rightarrow {}^4_2\text{He} + ?$; б) $^{19}_9\text{F} + p \rightarrow {}^16_8\text{O} + ?$; в) $^{55}_{25}\text{Mn} + ? \rightarrow {}^{55}_{26}\text{Fe} + n$; г) $^{7}_3\text{Li} + ? \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + n$; д) $^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow ? + p$.

19.5. При бомбардировке α -частицами ядер алюминия $^{27}_{13}\text{Al}$ образуется новое ядро и нейtron. Написать символическую запись ядерной реакции и определить, ядро какого элемента при этом образуется.

19.6. Какой изотоп образуется из тория $^{232}_{90}\text{Th}$ после четырех α -распадов и двух электронных β -распадов?

19.7. Найти энергию связи ядер трития ^3_1H и гелия ^4_2He . Какое из этих ядер более устойчиво? Масса атома водорода $m_{^1_1\text{H}} = 1,00783$ а.е.м., атома трития $m_{^3_1\text{H}} = 3,01605$ а.е.м., атома гелия $m_{^4_2\text{He}} = 4,00260$ а.е.м., масса нейтрона $m_n = 1,00867$ а.е.м.

• *Решение.* Энергия связи ядра, т.е. минимальная энергия (работа), которую необходимо затратить, чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны, может быть определена как

$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2, \quad (1)$$

где Δm – дефект массы ядра, равный разности между суммой масс протонов и нейтронов $Z m_p + (A - Z) m_n$ в ядре и массой этого ядра m_y :

$$\Delta m = Z m_p + (A - Z) m_n - m_y. \quad (2)$$

Прибавляя и вычитая в выражении (2) величину $Z m_e$, равную массе электронов в атоме рассматриваемого химического элемента, получим

$$\Delta m = Z m_{^1_1\text{H}} + (A - Z) m_n - m_{\text{ат}}, \quad (3)$$

где $Z m_{^1_1\text{H}} = Z(m_p + m_e)$ – масса Z атомов водорода; $m_{\text{ат}}$ – масса рассматриваемого атома.

В случае, если дефект массы выражен в [а.е.м.], а энергия связи вычисляется в [МэВ], соотношение (1) с учетом переводных коэффициентов примет вид

$$E_{\text{св}} = 931,5 \Delta m. \quad (4)$$

Используя (3) – (4), определим энергию связи ядер трития и гелия:

$$E_{\text{св}}{}^3_1\text{H} = 931,5 [1 \cdot 1,00783 + (3 - 1) \cdot 1,00867 - 3,01605] \approx 8,495 \text{ МэВ};$$

$$E_{\text{св}}{}^4_2\text{He} = 931,5 [2 \cdot 1,00783 + (4 - 2) \cdot 1,00867 - 4,0026060] \approx 28,318 \text{ МэВ}.$$

Так как $E_{\text{св}}{}^4_2\text{He} \geq E_{\text{св}}{}^3_1\text{H}$, то ядро гелия более устойчиво.

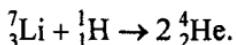
• *Ответ:* $E_{\text{св}}{}^3_1\text{H} \approx 8,495 \text{ МэВ}$; $E_{\text{св}}{}^4_2\text{He} \approx 28,318 \text{ МэВ}$. Более устойчиво ядро гелия.

19.8. Найти энергию связи ядер лития ^7_3Li и гелия ^4_2He . Какое из этих ядер более устойчиво? Масса атома лития $m_{^7_3\text{Li}} = 7,01601$ а.е.м., атома гелия $m_{^4_2\text{He}} = 4,00260$ а.е.м., атома водорода $m_{^1_1\text{H}} = 1,00783$ а.е.м., масса нейтрона $m_n = 1,00867$ а.е.м.

19.9. Определить энергию связи ядра гелия ^4_2He и вычислить дефект массы в процентах от массы ядра. Масса ядра гелия $m_{^4_2\text{He}} = 6,644 \cdot 10^{-27}$ кг, масса протона $m_p = 1,6724 \cdot 10^{-27}$ кг, масса нейтрона $m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27}$ кг.

19.10. Определить удельную энергию связи ядра углерода $^{12}_6\text{C}$. Масса атома углерода $m_{^{12}_6\text{C}} = 12,01115$ а.е.м., атома водорода $m_{^1_1\text{H}} = 1,00783$ а.е.м., масса нейтрона $m_n = 1,00867$ а.е.м.

19.11. Определить величину энергии, освобождающейся при ядерной реакции



Масса атома лития $m_{^7_3\text{Li}} = 7,01601$ а.е.м., атома водорода $m_{^1_1\text{H}} = 1,00783$ а.е.м., атома гелия $m_{^4_2\text{He}} = 4,00260$ а.е.м.

- Решение. Энергия реакции Q равна разности энергий исходных и конечных продуктов реакции. Используя связь массы и энергии, получаем

$$Q = c^2 (m_{^7_3\text{Li}} + m_{^1_1\text{H}} - 2 m_{^4_2\text{He}}), \quad (1)$$

т.е. энергия ядерной реакции пропорциональна разности масс исходных и конечных атомов (или равна ей, если массы выражены в энергетических единицах). При этом если сумма масс образующихся атомов превосходит сумму масс исходных атомов, то реакция протекает с поглощением энергии и энергия реакции будет отрицательной. В противном случае реакция идет с выделением энергии.

Если массы атомов заданы в [а.е.м.], а энергия рассчитывается в [МэВ], то уравнение (1) с учетом переводных коэффициентов можно представить в виде

$$Q = 931,5 (m_{^7_3\text{Li}} + m_{^1_1\text{H}} - 2 m_{^4_2\text{He}}).$$

Подставляя числовые значения, найдем энергию, освобождающуюся при заданной ядерной реакции

$$Q = 931,5 \cdot (m_{^7_3\text{Li}} + m_{^1_1\text{H}} - 2 m_{^4_2\text{He}}) \approx 17,36 \text{ МэВ.}$$

Легко заметить, что формулу (1) можно записать через массы ядер продуктов реакции, при этом ее вид не изменится:

$$Q = c^2 (m_{^7_3\text{Li}} - 3m_e + m_{^1_1\text{H}} - m_e - 2 m_{^4_2\text{He}} + 4m_e) = c^2 (m_{^7_3\text{Li}} + m_{^1_1\text{H}} - 2 m_{^4_2\text{He}}),$$

где индексом «я» обозначены ядра рассматриваемых атомов.

В некоторых случаях выражение (1) удобно использовать в другой форме.

Определим энергию связи ядер гелия ${}^4_2\text{He}$ и лития ${}^7_3\text{Li}$ (см. решение задачи №19.7):

$$E_{\text{св}} {}^4_2\text{He} = c^2 (2 m_{^1_1\text{H}} + 2 m_n - m_{^4_2\text{He}}); \quad E_{\text{св}} {}^7_3\text{Li} = c^2 (3 m_{^1_1\text{H}} + 4 m_n - m_{^7_3\text{Li}}).$$

Следовательно,

$$2 E_{\text{св}} {}^4_2\text{He} - E_{\text{св}} {}^7_3\text{Li} = 2 c^2 (2 m_{^1_1\text{H}} + 2 m_n - m_{^4_2\text{He}}) - c^2 (3 m_{^1_1\text{H}} + 4 m_n - m_{^7_3\text{Li}}).$$

Если учесть, что энергия связи $E_{\text{св}} {}^1_1\text{H}$ водорода ${}^1_1\text{H}$ пренебрежимо мала, то

$$2 E_{\text{св}} {}^4_2\text{He} - (E_{\text{св}} {}^7_3\text{Li} + E_{\text{св}} {}^1_1\text{H}) = 2 c^2 (2 m_{^1_1\text{H}} + 2 m_n - m_{^4_2\text{He}}) - c^2 (3 m_{^1_1\text{H}} + 4 m_n - m_{^7_3\text{Li}}),$$

или

$$2 E_{\text{св}} {}^4_2\text{He} - (E_{\text{св}} {}^7_3\text{Li} + E_{\text{св}} {}^1_1\text{H}) = c^2 (m_{^7_3\text{Li}} + m_{^1_1\text{H}} - 2 m_{^4_2\text{He}}). \quad (2)$$

Как видим, правые части соотношений (1) и (2) совпадают. Поэтому энергию реакции можно найти как разность энергий связи конечных и исходных продуктов реакции:

$$Q = 2 E_{\text{св}} {}^4_2\text{He} - (E_{\text{св}} {}^7_3\text{Li} + E_{\text{св}} {}^1_1\text{H}).$$

- Ответ: $Q = 931,5 \cdot (m_{^7_3\text{Li}} + m_{^1_1\text{H}} - 2 m_{^4_2\text{He}}) \approx 17,36 \text{ МэВ.}$

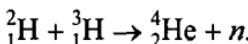
19.12. Какую наименьшую энергию необходимо затратить, чтобы «оторвать» один нейтрон от ядра азота ${}^{14}_7\text{N}$? Масса атомов азота $m_{^{14}_7\text{N}} = 14,00307$ а.е.м., $m_{^1_7\text{N}} = 13,00574$ а.е.м., масса нейтрона $m_n = 1,00867$ а.е.м.

19.13. При взрыве водородной бомбы протекает термоядерная реакция образования атомов гелия ${}^4_2\text{He}$ из дейтерия ${}^2_1\text{H}$ и трития ${}^3_1\text{H}$. Написать ядерную реакцию и определить ее энергетический выход. Масса атома

дейтерия $m_{^2\text{H}} = 2,01410$ а.е.м., атома трития $m_{^3\text{H}} = 3,01603$ а.е.м., атома гелия $m_{^4\text{He}} = 4,00260$ а.е.м., масса нейтрона $m_n = 1,00867$ а.е.м.

19.14. Какое количество урана ^{235}U расходуется в сутки на атомной электростанции мощностью $N = 5$ МВт, если коэффициент полезного действия станции $\eta = 17\%$? Считать, что при каждом акте распада ядра урана выделяется энергия $Q = 200$ МэВ.

19.15. Найти кинетическую энергию нейтрона, образующегося в результате ядерной реакции



Начальной кинетической энергией ядер дейтерия и трития пренебречь. Масса атома дейтерия $m_{^2\text{H}} = 2,01410$ а.е.м., атома трития $m_{^3\text{H}} = 3,01605$ а.е.м., атома гелия $m_{^4\text{He}} = 4,00260$ а.е.м., масса нейтрона $m_n = 1,00867$ а.е.м.

• *Решение.* Закон сохранения энергии в ядерных реакциях в общем случае принято записывать в виде

$$E_1 + T_1 = E_2 + T_2,$$

где E_1, T_1 – суммарная энергия покоя и кинетическая энергия исходных участников ядерной реакции; E_2, T_2 – суммарная энергия покоя и кинетическая энергия конечных продуктов реакции. Поскольку энергии покоя ядер пропорциональны массам ядер (или равны им, если массы выражены в энергетических единицах), то разность энергий покоя

$$E_1 - E_2 = c^2 (m_{\text{участников}} - m_{\text{продуктов}})$$

равна энергии Q , выделяющейся в реакции (см. решение задачи №19.11). Поэтому закон сохранения энергии обычно записывают в виде

$$Q = T_2 - T_1.$$

Вернемся к нашей задаче.

Пренебрегая начальной кинетической энергией дейтерия и трития, запишем законы сохранения импульса и энергии для продуктов ядерной реакции:

$$0 = p_{^4\text{He}} - p_n; \quad (1)$$

$$Q = T_{^4\text{He}} + T_n, \quad (2)$$

где $p_{^4\text{He}}, p_n$ – импульсы ядра гелия и нейтрона; $T_{^4\text{He}}, T_n$ – их кинетические энергии.

Энергия Q , выделяющаяся в результате ядерной реакции,

$$Q = 931,5 (m_{^2\text{H}} + m_{^3\text{H}} - m_{^4\text{He}} - m_n) \approx 15,1 \text{ МэВ}.$$

Как видим, энергия реакции достаточно мала. Поскольку энергии покоя ядра гелия $E_{^4\text{He}} = m_{^4\text{He}} c^2 \approx 3730$ МэВ и нейтрона $E_n = m_n c^2 \approx 940$ МэВ гораздо больше Q , то частицы можно считать классическими. С учетом того что кинетическая энергия связана с импульсом нерелятивистской частицы формулой

$$T = \frac{p^2}{2m},$$

закон сохранения импульса запишем в виде

$$\sqrt{2m_{^4\text{He}} T_{^4\text{He}}} = \sqrt{2m_n T_n}, \quad \text{или} \quad m_{^4\text{He}} T_{^4\text{He}} = m_n T_n. \quad (3)$$

Решив совместно уравнения (2) – (3), найдем значение искомой энергии

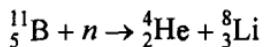
$$T_n = Q \frac{m_{^4\text{He}}}{m_{^4\text{He}} + m_n} = 931,5 (m_{^2\text{H}} + m_{^3\text{H}} - m_{^4\text{He}} - m_n) \frac{m_{^4\text{He}}}{m_{^4\text{He}} + m_n} \approx 14,07 \text{ МэВ}.$$

• Ответ: $T_n = 931,5 (m_{^2\text{H}} + m_{^3\text{H}} - m_{^4\text{He}} - m_n) \frac{m_{^4\text{He}}}{m_{^4\text{He}} + m_n} \approx 14,07 \text{ МэВ}.$

19.16. Протоны, налетающие на неподвижную мишень, возбуждают реакцию ${}^7\text{Li}(p, n){}^7\text{Be}$. При какой кинетической энергии протона возникающий нейтрон может быть покоящимся? Масса атома лития $m_{^7\text{Li}} = 7,01601$ а.е.м., атома бериллия $m_{^7\text{Be}} = 7,01693$ а.е.м., масса протона $m_p = 1,00783$ а.е.м., масса нейтрона $m_n = 1,00867$ а.е.м. Скорости ядер и частиц много меньше скорости света.

19.17. При бомбардировке покоящегося литиевого ядра ${}^7\text{Li}$ протонами образуются два одинаковых ядра, разлетающихся симметрично по отношению к налетающим протонам. Записать ядерную реакцию и определить отношение кинетической энергии падающих протонов к суммарной кинетической энергии продуктов реакции, если угол разлета осколков $\theta = 170^\circ$. Масса протона $m_p = 1,00783$ а.е.м., масса образовавшегося ядра $m = 4,00388$ а.е.м. Скорости ядер и протонов много меньше скорости света.

19.18. Пороговая (наименьшая) энергия нейtronов, необходимая для возбуждения реакции



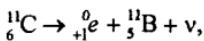
на покоящихся ядрах бора, равна $E_{\text{п}} = 4$ МэВ. Какая энергия выделяется или поглощается в результате реакции? Учесть, что при пороговом значении кинетической энергии бомбардирующей частицы относительная скорость частиц, возникающих в реакции, равна нулю. Скорости ядер и частиц считать много меньше скорости света. Масса ядра атома бора $m_{^5\text{B}} = 11,0221$ а.е.м., нейтрона $m_n = 1,00867$ а.е.м.

19.19. Для плавления алюминия используется энергия, выделяющаяся при позитронном β -распаде изотопов углерода ${}^{11}\text{C}$, причем каждое ядро углерода испускает один позитрон. Продукты распада не радиоактивны. Сколько потребуется углерода ${}^{11}\text{C}$ для выполнения плавки $M = 100$ т алюминия за $t = 30$ мин, если начальная температура алюминия $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$? Температура плавления алюминия $\theta = 660^\circ\text{C}$, удельная теплоемкость $c = 895$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления $\lambda = 32$ кДж/кг. Период полураспада углерода $T = 20$ мин. Масса ядра атома углерода $m_1 = 11,01143$ а.е.м., масса ядра атома бора, образующегося при распаде углерода, $m_2 = 11,00930$ а.е.м., масса позитрона $m_3 = 0,00055$ а.е.м.

• *Решение.* Энергию, необходимую для плавки алюминия, найдем из уравнения теплового баланса как сумму энергий, необходимых для нагревания массы алюминия до температуры плавления и процесса плавления:

$$Q_0 = c M (\theta - \theta_0) + \lambda M \approx 6,05 \cdot 10^{10} \text{ Дж.}$$

Энергия, выделяющаяся при одном акте распада ядра углерода, протекающего в соответствии с ядерной реакцией



равна

$$Q = 931,5 (m_1 - m_2 - m_3) \approx 1,47 \text{ МэВ} \approx 2,35 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.}$$

Следовательно, необходимое количество актов распада

$$\Delta N = \frac{Q_0}{Q} \approx 2,57 \cdot 10^{23}.$$

Для расчета необходимого количества углерода запишем закон радиоактивного распада через период полураспада:

$$N = N_0 2^{-t/T},$$

где N_0 – первоначальное, т.е. искомое количество ядер углерода; N – количество иераспавшихся ядер. Тогда

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 \{ 1 - 2^{-t/T} \}.$$

Следовательно, исходное количество ядер углерода

$$N_0 = \frac{\Delta N}{1 - 2^{-t/T}} \approx 3,98 \cdot 10^{23}.$$

Считая массу атома углерода приблизительно равной массе его ядра, оценим массу углерода, необходимую для плавки алюминия:

$$m = N_0 m_1 \approx 7,32 \text{ г.}$$

• Ответ: $m \approx 7,32$ г.

19.20. Период полураспада изотопа полония $^{210}_{84}\text{Po}$ равен $T = 140$ сут. При распаде полоний превращается в стабильный свинец $^{207}_{82}\text{Pb}$. Какая масса свинца образуется в $m = 1$ мг полония за $t = 70$ сут в результате распада?

19.21. Найти энергию, выделяющуюся за время $t = 2T$ (где T – период полураспада) при электронном β -распаде, если начальное число радиоактивных ядер N_0 . Масса атома радиоактивного вещества m_1 , масса атома образующегося вещества m_2 .

19.22. Радиоактивный натрий $^{24}_{11}\text{Na}$ распадается, испуская β -частицу. Период полураспада натрия $T = 14,8$ ч. Найти количество атомов, распавшихся в $m = 1$ мг изотопа за время $\Delta t = 10$ ч. Каков суммарный заряд испущенных при распаде β -частиц? Заряд электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

19.23. Плутоний $^{238}_{94}\text{Pu}$ испытывает α -распад. Продукты распада не радиоактивны. Период полураспада плутония $T = 1/4$ года. Какую массу воды можно испарить, доведя до кипения, энергией, выделившейся при распаде $m = 2$ г плутония за год? Масса ядра атома плутония $m_1 = 238,04952$ а.е.м., масса образующегося при распаде ядра атома урана $m_2 = 234,04090$ а.е.м., масса ядра атома гелия $m_3 = 4,00260$ а.е.м. Начальная температура воды $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r = 2,26$ МДж/кг.

Ответы

§1. Кинематика

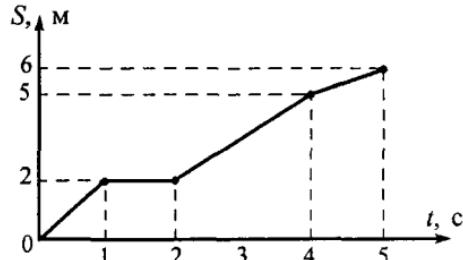
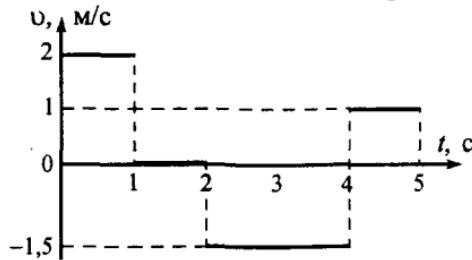


Рис. 1

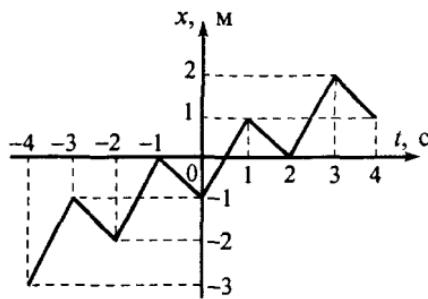


Рис. 2

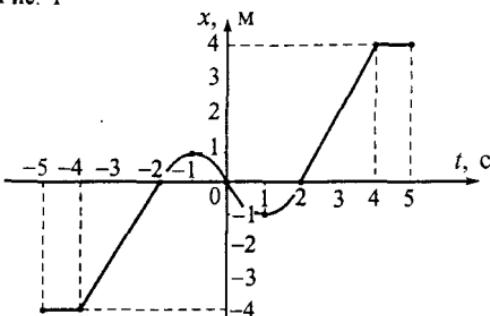


Рис. 3

1.2. Рис. 1.

1.4. Рис. 2.

1.6. $x = -3 \text{ м}; \Delta \vec{r} = -8 \vec{i} \text{ [м]}; \Delta S = 8 \text{ м.}$

1.7. $\Delta \vec{r} = -4 \vec{i} \text{ [м]}; \vec{v} = -4 \vec{i} \text{ [м/с]}; \vec{a} = 0.$

1.9. $y = 3x - 12 \text{ [м].}$

1.10. $\alpha = (\hat{\vec{r}} \hat{\vec{v}}) = 15,25^\circ.$

1.12. $\Delta t = \frac{S_1 + S_2 + l_1 + l_2}{v_1 - v_2} = 11 \text{ с.}$

1.13. В направлении, составляющем с шоссе угол $\alpha = (\hat{\vec{v}_1} \hat{\vec{v}_2}) = 37^\circ 10'.$

1.15. $\tau = 2 \text{ с}; S_{\min} = 6,7 \text{ м.}$

1.16. $l_{\min} = \frac{1}{2} l = 30 \text{ км.}$

1.18. $v_{cp} = \frac{4v_1 v_2}{3v_2 + v_1} = 64 \text{ км/ч.}$

1.19. $v_{cp} = \frac{v_1 \Delta t_1 + \Delta S}{\Delta t_1 + \Delta S / v_2} = 70 \text{ км/ч.}$

1.21. $v_{cp} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2}{\Delta t} \approx 3,33 \text{ км/ч}; |\vec{v}| \approx 3,08 \text{ км/ч.}$

1.22. $v_{cp} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 15 \text{ м/с}; \langle \vec{v} \rangle = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \left[(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \vec{i} + (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \vec{j} \right] = 7,5 \vec{j} \text{ [м/с].}$

1.24. Рис. 3; $v_{cp} = 1,2 \text{ м/с.}$

1.25. Рис. 4; $v_{cp} \approx 1,44 \text{ м/с.}$

1.27. $\Delta S = 5 \text{ м.}$

1.28. $v_{cp1} = 4 \text{ м/с}; v_{cp2} = 3 \text{ м/с.}$

$$1.30. \vec{d} = 2(\gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j}) [\text{м/c}^2], |\vec{d}| = \sqrt{4\gamma_1^2 + 4\gamma_2^2} \approx 4,47 \text{ м/c}^2;$$

$$\varphi = \arccos \frac{[(\beta_1 + 2\gamma_1 t)\gamma_1 + (\beta_2 + 2\gamma_2 t)\gamma_2]}{\sqrt{[(\beta_1 + 2\gamma_1 t)^2 + (\beta_2 + 2\gamma_2 t)^2](\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}} \approx 15,3^\circ.$$

$$1.31. R \approx 1,52 \text{ м.}$$

$$1.33. a = 2 \text{ м/c}^2.$$

$$1.34. a = \frac{2(\Delta S_2 \Delta t_1 - \Delta S_1 \Delta t_2)}{\Delta t_1 \Delta t_2 (\Delta t_1 + \Delta t_2)} \approx 0,07 \text{ м/c}^2.$$

$$1.36. S = \frac{1}{2} v \Delta t = 20 \text{ м.}$$

$$1.37. a = 1,5 \text{ м/c}^2; \Delta S = 27 \text{ м}; v = 4,6 \text{ м/c.}$$

$$1.39. v_{cp} = \frac{2v_1(v_1 + v_2)}{3v_1 + v_2} = 48 \text{ км/ч.}$$

$$1.40. v_{cp} = \frac{a_1 \Delta t_1 (\Delta t_1 + 2\Delta t_2 + \Delta t_3)}{2(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)} = 23,6 \text{ м/c.}$$

$$1.42. v(t) = 29 \text{ м/c; } a(t) = 32 \text{ м/c}^2; \Delta S = 18 \text{ м.} \quad 1.43. v_{cp} = 1 \text{ м/c; } v_{max} = 3 \text{ м/c.}$$

$$1.45. \vec{v} = -\omega(\alpha \vec{i} \sin \omega t - \beta \vec{j} \cos \omega t) [\text{м/c}]; \vec{d} = -\omega^2(\alpha \vec{i} \cos \omega t + \beta \vec{j} \sin \omega t) [\text{м/c}^2].$$

$$1.46. y = a - \frac{2}{a}x^2 [\text{м}]; v = \omega a \sqrt{\cos^2 \omega t + 4 \sin^2 2\omega t} [\text{м/c}].$$

$$1.48. H \approx 273 \text{ м; } t \approx 7,46 \text{ с.}$$

$$1.49. H = 2532 g \Delta t^2.$$

$$1.50. H = \frac{4}{3}h; v = \sqrt{\frac{8}{3}gh}.$$

$$1.51. H = \frac{(2h - g \Delta t^2)^2}{8g \Delta t^2} \approx 2,17 \text{ м.}$$

$$1.52. h_1 = 9 \text{ м; } h_2 = 27 \text{ м; } h_3 = 45 \text{ м.}$$

$$1.54. h_{max} = \frac{(v + g \Delta t)^2}{2g} \approx 67,6 \text{ м.}$$

$$1.55. h_{max} = v^2/g \approx 10,2 \text{ м; } v_0 = \sqrt{2}v \approx 1,4 \text{ м/c.}$$

$$1.56. \tau = (\sqrt{2} + 2) \sqrt{h/g} \approx 2,4 \text{ с.}$$

$$1.57. h_{max} = h + \frac{(g \tau^2 - 2h)^2}{8g \tau^2} \approx 6 \text{ м.}$$

$$1.58. \Delta S = \frac{v_0^2}{g} - v_0 \Delta t + \frac{g \Delta t^2}{2} \approx 25 \text{ м.}$$

$$1.60. v_0 = \frac{g \Delta t}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 4,4 \text{ м/c.}$$

$$1.61. v = g \Delta t \sqrt{\tan^2 \alpha + 1} \approx 69,3 \text{ м/c.}$$

$$1.62. a_n = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \Delta t^2}} \approx 4,45 \text{ м/c}^2; a_t = \frac{g^2 \Delta t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \Delta t^2}} \approx 8,73 \text{ м/c}^2.$$

$$1.64. S_{max} = \frac{\pi v_0^4}{g^2} \approx 314 \text{ м}^2.$$

$$1.65. m = \frac{2\rho S v_0^2 \sin \alpha}{g} \approx 5 \text{ кг.}$$

$$1.66. h_{max} = \frac{(v_0^2 + g^2 \Delta t^2 - v^2)^2}{8g^3 \Delta t^2} \approx 3 \text{ м.}$$

$$1.67. h = \frac{v_0^2 (4 \cos^2 \alpha - 1)}{2g} \approx 10 \text{ м.}$$

$$1.68. h = \frac{\eta(2+\eta)v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \approx 6,7 \text{ м.}$$

$$1.69. R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \approx 10,2 \text{ м.}$$

$$1.71. v_{0min} = l \sqrt{\frac{g}{2 \cos \alpha (h \cos \alpha + l \sin \alpha)}} \approx 6,4 \text{ м/c, где } \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(l/h) \approx 22,5^\circ.$$

$$1.72. \beta = \operatorname{arctg} \{ \tan \alpha + \sqrt{\tan^2 \alpha + 1} \}.$$

$$1.74. S = 8h \sin \alpha \approx 2,83 \text{ м.}$$

$$1.75. R_{min} = \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha + \beta)}{g} \approx 421,6 \text{ м; } R = \frac{v_0^2 (\cos \alpha - \sin \alpha \tan \beta)^2}{g \cos \beta} \approx 508 \text{ м.}$$

$$1.76. \beta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha.$$

$$1.78. v_{opt} \approx 4,47 \text{ м/c.}$$

$$1.79. v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha} \approx 72,1 \text{ км/ч при движении машин в одну сторону;}$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha} \approx 121,7 \text{ км/ч при движении в противоположные стороны.}$$

$$1.80. S_{\min} \approx 290 \text{ м.}$$

$$1.82. v_p = \frac{S_1 - S_2}{2 \Delta t_1} = 4 \text{ км/ч.}$$

$$1.83. \Delta t = \frac{2 \Delta t_1 \Delta t_2}{\Delta t_2 - \Delta t_1} = 12 \text{ часов.}$$

$$1.85. v_p = v_n \frac{S}{L} = 1,3 \text{ км/ч.}$$

$$1.86. \beta = 90^\circ + \arcsin \frac{1}{2} = 120^\circ.$$

1.87. Максимальным при $\alpha = 0^\circ$; минимальным при $\alpha = 90^\circ$.

$$1.89. \omega(t) = 2 - 2t \text{ [рад/с]; } \varepsilon(t) = -2 \text{ рад/с}^2; v(t) = 0,2(1-t) \text{ [м/с].}$$

$$1.90. n = 3 \text{ оборота.}$$

$$1.91. v_{\text{отн}} = 12 \text{ м/с.}$$

$$1.93. n = \frac{v_1 - v_2}{2 \pi d} \approx 1,6 \text{ об/с.}$$

$$1.94. \omega_2 = 2 \pi n_1 \frac{R_1}{R_2} \approx 16,7 \text{ рад/с; } n_2 = n_1 \frac{R_1}{R_2} = 160 \text{ об/мин; } v = 2 \pi n_1 R_1 \approx 4 \text{ м/с.}$$

$$1.96. \Delta S = 2 \pi v R \Delta t \approx 12,6 \text{ м.}$$

$$1.97. R = \frac{\Delta S T}{2 \pi \Delta t} \approx 10 \text{ см.}$$

$$1.99. a_t = \frac{v^2}{20 \pi R} \approx 0,05 \text{ м/с}^2.$$

$$1.100. \alpha = \operatorname{arctg}(4\pi) = 85^\circ 27'.$$

$$1.102. v_{\max} = 2v = 144 \text{ км/ч; } v_{\min} = 0.$$

$$1.103. v_0 = v \frac{R}{r+R}.$$

$$1.104. v_C = v_D = \sqrt{\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)} \approx 4,47 \text{ м/с.}$$

$$1.105. \tau = 2 \sqrt{S/a}.$$

§2. Динамика материальной точки. Законы Ньютона

$$2.2. m = \frac{F}{v/\Delta t + g} \approx 5 \text{ кг, где } \Delta t = 1 \text{ с.}$$

$$2.3. \Delta l = \frac{m}{k} \left\{ \frac{2h}{\Delta t^2} + g \right\} \approx 1,4 \text{ см.}$$

$$2.5. \mu_{\min} = \frac{v_2 - v_1}{g \Delta t} \approx 0,25.$$

$$2.6. F_T = \frac{m v^2}{2 S} \approx 28 \text{ кН.}$$

$$2.7. v_0 = \sqrt{2 \mu g S} \approx 12 \text{ м/с.}$$

$$2.9. \tau = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \beta - \operatorname{tg} \alpha \cos \beta)}} \approx 0,83 \text{ с.}$$

$$2.10. \mu = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \operatorname{tg} \alpha \approx 0,16.$$

$$2.11. \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu} \approx 73,3^\circ.$$

$$2.13. a = \frac{F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)}{m} \approx 1 \text{ м/с}^2, \text{ где } \mu = \frac{F \cos \beta}{mg - F \sin \beta}.$$

$$2.14. a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + \frac{F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{m} \approx 8 \text{ м/с}^2.$$

$$2.15. \gamma = \alpha + \operatorname{arctg} \mu \approx 51,8^\circ.$$

$$2.17. a = \frac{F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{m_1 + m_2} - \mu g \approx 2,1 \text{ м/с}^2. \quad 2.18. T = 5 F/n = 4 \text{ Н.}$$

$$2.19. a = F / \sum_{j=1}^n m_j - \mu g; T_{i,i+1} = F \sum_{j=i+1}^n m_j / \sum_{j=i}^n m_j, \text{ для } i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ при } \mu < F / (g \sum_{j=1}^n m_j).$$

$$2.21. a = g \frac{m_3 - \mu(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}; T_{1-2} = \frac{(1+\mu)m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}; T_{2-3} = \frac{(1+\mu)(m_1 + m_2)m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

при $\mu < \frac{m_3}{m_1 + m_2}$.

$$2.22. T_{k,k+1} = \frac{k m g}{n+1}.$$

$$2.23. l_{\max} = 4 l_0 = 20 \text{ м.}$$

$$2.25. \mu < \frac{|m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta|}{m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta}.$$

$$2.26. \Delta x = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{k(m_1 + m_2)} \text{ при } \mu < \operatorname{tg} \alpha - \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha};$$

$$\Delta x = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{k(m_1 + m_2)} \text{ при } \mu < \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\Delta x = \frac{m_2 g}{k} \text{ при } \mu \geq \left| \operatorname{tg} \alpha - \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha} \right|.$$

$$2.28. a = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = 0,24 \text{ м/с}^2; a_1 = 0,3 \text{ м/с}^2, a_2 = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

$$2.29. T = \frac{m_1 m_2 g (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha}{m_1 + m_2} \approx 1,7 \text{ H.}$$

$$2.30. \Delta x = \frac{m_1 m_2 g (\mu_2 - \mu_1) \cos \alpha}{k(m_1 + m_2)} \approx 1,7 \text{ см.}$$

$$2.32. a = g \frac{m}{M+2m}; T = g \frac{(M+3m)(M+m)}{M+2m}.$$

$$2.33. a = \frac{(m_1 - m_2)g - 2\mu F}{m_1 + m_2} \approx 2 \text{ м/с}^2.$$

$$2.34. a = \frac{(m_1 - m_2)g - F_{\text{tp}}}{m_1 + m_2} \text{ при } F_{\text{tp}} < (m_1 - m_2)g; a = 0 \text{ при } F_{\text{tp}} \geq (m_1 - m_2)g.$$

$$2.36. v_1 = \sqrt{\frac{4g\Delta S(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2}} \approx 1 \text{ м/с.}$$

$$2.38. a_{\max} = \frac{T_{\max} - m(g - a_0)}{m} \approx 0,2 \text{ м/с}^2.$$

$$2.39. a_1 = \frac{4m_1 m_2 + (m_1 - m_2)m_0}{4m_1 m_2 + (m_1 + m_2)m_0} g.$$

$$2.41. a' = \frac{(m_2 - \mu m_1)g - (m_1 + \mu m_2)a}{m_1 + m_2} \text{ или } a' = \frac{(m_1 - \mu m_2)a - (m_2 + \mu m_1)g}{m_1 + m_2}$$

$$\text{при } \mu < \frac{|m_2 g - m_1 a|}{m_1 g + m_2 a}; a' = 0 \text{ при } \mu \geq \frac{|m_2 g - m_1 a|}{m_1 g + m_2 a};$$

$$2.42. \Delta x = \frac{m_1 m_2 (\sqrt{a^2 + g^2} + \mu g - a)}{k(m_1 + m_2)} \text{ при } \sqrt{a^2 + g^2} > \frac{m_1}{m_2} (\mu g - a);$$

$$\Delta x = \frac{m_2 \sqrt{a^2 + g^2}}{k} \text{ при } \sqrt{a^2 + g^2} \leq \frac{m_1}{m_2} (\mu g - a).$$

$$2.44. F > g(M+m)(\mu_1 + \mu_2) \approx 196 \text{ H.}$$

$$2.45. a_{\text{бруска}} = \frac{F}{m} - \mu g \approx 12,35 \text{ м/с}^2; a_{\text{тележки}} = \frac{\mu m g}{M} \approx 0,245 \text{ м/с}^2.$$

$$2.46. \text{а) } a_{\text{бруска}} = a_{\text{доски}} = \frac{F}{m+M} - \mu_2 g \approx 0,02 \text{ м/с}^2;$$

$$\text{б) } a_{\text{бруска}} = \frac{F}{m} - \mu_1 g \approx 6,1 \text{ м/с}^2, a_{\text{доски}} = g \left\{ \frac{(\mu_1 - \mu_2)m}{M} - \mu_2 \right\} \approx 0,5 \text{ м/с}^2.$$

$$2.47. F > 18 \mu m g \approx 17,6 \text{ H.}$$

$$2.49. a_{\text{доски}} = \frac{\mu m g}{M} \approx 2,45 \text{ м/с}^2; a_{\text{бруска}} = a_{\text{груза}} = \frac{g(2-\mu)}{3} \approx 4,9 \text{ м/с}^2.$$

$$2.50. m_x \min > \frac{\mu m (M+m)}{M - \mu m} = 0,5 \text{ кг}; \tau = \sqrt{\frac{2IM(m_x + m)}{M m_x g - \mu m (M+m+m_x) g}} \approx 7,9 \text{ с.}$$

$$2.52. \text{Вниз с ускорением } a = g(1 + M/m) \sin \alpha.$$

$$2.53. a_{\text{бруска}} = g(\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha) \approx 3,6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{\text{доски}} = g \left\{ \frac{m_2 (\mu_2 - \mu_1) - m_1 \mu_1}{m_1} \cos \alpha + \sin \alpha \right\} \approx 3 \text{ м/с}^2.$$

$$2.55. v = \sqrt{\frac{2 g l (m^2 \sin^2 \alpha + 2 m M \sin^2 \alpha + M^2)}{\sin \alpha (m M \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha + 2 m M \sin^2 \alpha + M^2)}} \approx 5,8 \text{ м/с.}$$

$$2.56. S = \frac{m l \cos \alpha}{m + M} \approx 2,8 \text{ м; } a_{\text{отн}} = \frac{(M+m) g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \approx 12,5 \text{ м/с}^2.$$

$$2.58. a_1 = \frac{m_2 g \operatorname{tg}(\frac{1}{2} \alpha)}{m_2 + 2 m_1 \operatorname{tg}^2(\frac{1}{2} \alpha)}; a_2 = \frac{m_2 g}{m_2 + 2 m_1 \operatorname{tg}^2(\frac{1}{2} \alpha)}.$$

$$2.59. a = g \operatorname{tg} \alpha \approx 5,66 \text{ м/с}^2; m = \frac{M \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)^2} = 1,2 \text{ кг.}$$

§3. Динамика системы.

Импульс. Работа. Мощность. Энергия. Законы сохранения

$$3.2. p = m \sqrt{2 g h} \approx 0,35 \text{ кг·м/с.}$$

$$3.3. p = 2 m \sqrt{2 g h} \approx 0,63 \text{ кг·м/с.}$$

$$3.4. \langle F \rangle = \frac{2 m v \sin \alpha}{\Delta t} = 15 \text{ Н.}$$

$$3.5. \beta = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha - 2 \mu) \text{ при } \operatorname{tg} \alpha > 2 \mu; \beta = 0 \text{ при } \operatorname{tg} \alpha \leq 2 \mu.$$

$$3.7. F = \frac{1}{4} \pi \rho d^2 v^2 \approx 0,1 \text{ Н.}$$

$$3.8. \text{Уменьшится в } \frac{2}{2-k} \text{ раз.}$$

$$3.10. \text{Увеличится на } \Delta x = \frac{m}{M+m} l \approx 1,33 \text{ м.}$$

$$3.11. \text{В сторону уменьшения угла } \alpha \text{ на } \Delta x = l \sin^2(\frac{1}{2} \alpha) = 0,25 \text{ м.}$$

$$3.13. S_{\text{осколка}} / S_{\text{снаряда}} = 2.$$

$$3.14. h = \frac{g \Delta t_1 \Delta t_2 (2 \Delta t_2 - \Delta t_1)}{2 (2 \Delta t_1 - \Delta t_2)}.$$

$$3.16. u = \frac{1}{3} v_0 = 1 \text{ м/с.}$$

$$3.17. u = \frac{m v \cos \alpha}{M + m} \approx \frac{m v \cos \alpha}{M} \approx 0,69 \text{ м/с.}$$

$$3.18. \text{Уменьшилась на } \Delta v = \frac{m v}{M + m} = 0,4 \text{ м/с.}$$

$$3.20. u = \frac{m}{M + m} v = 2 \text{ м/с.}$$

$$3.21. u = v \frac{m}{m + M} \approx \frac{m}{M} v = 0,6 \text{ м/с.}$$

$$3.22. u = \frac{v \cos \alpha}{1 + \eta} = 2,5 \text{ м/с.}$$

$$3.23. S = \frac{m^2 h}{(M + m)^2 (\mu + \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$3.25. A_{\min} = \frac{m g l}{2} \approx 49 \text{ Дж.}$$

$$3.26. A_{\min} = 45 m g h \approx 88,2 \text{ Дж.}$$

$$3.28. \Delta A = m a h = 14 \text{ Дж.}$$

$$3.29. A = m h (g + a / \sin \alpha) \approx 149 \text{ Дж.}$$

$$3.30. A_{\min} = m g (\mu l + h) \approx 5,4 \text{ кДж.}$$

$$3.33. n \geq k^2.$$

$$3.34. A_0 = \frac{1}{3} A = 40 \text{ Дж.}$$

$$3.35. \text{В 2 раза.}$$

$$3.37. N = m g v (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \approx 744,6 \text{ Вт.}$$

$$3.38. \langle N \rangle = \frac{m a \tau}{2} (a + g \sin \alpha) \approx 5,1 \text{ кВт.}$$

$$3.39. N = m v \left\{ \frac{v^2}{2 S} + k g \right\} \approx 83 \text{ кВт.}$$

$$3.41. H = 4 h = 40 \text{ см.}$$

$$3.42. H_{\max} = h / (1 - \alpha^2) = 10 \text{ см.}$$

$$3.44. l_{\min} = \frac{v^2}{\mu g} \approx 3,2 \text{ м.}$$

$$3.45. v_0 \geq 2 \sqrt{\mu g l} \approx 2,8 \text{ м/с.}$$

$$3.47. h = 2 H \frac{h_1 - h_2}{H + h_1}.$$

$$3.49. l = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{k} \approx 5,8 \text{ м.}$$

$$3.51. A = \frac{\mu^2 m^2 g^2}{2 k} \approx 0,5 \text{ Дж.}$$

$$3.52. A = F \frac{m g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{k} \approx 12 \text{ Дж.}$$

$$3.54. m > \frac{1}{2} \mu M = 0,3 \text{ кг.}$$

$$3.55. F_{\min} = \frac{3}{2} m g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \approx 12,4 \text{ Н.}$$

$$3.57. m = \frac{\eta N \tau}{g h} \approx 5,9 \text{ т.}$$

$$3.58. \tau = \frac{m g l \sin \alpha}{\eta N} \approx 30 \text{ с.}$$

$$3.60. v = \sqrt{2 g l (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \approx 5,1 \text{ м/с.}$$

$$3.61. v = \sqrt{2 (2 g h - A/m).}$$

$$3.62. h = \frac{v_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{2 g (\operatorname{tg} \alpha - \mu)}.$$

$$3.64. \mu = \frac{3 v_0^2}{8 g \Delta S} - \frac{k \Delta S}{2 m g} \approx 0,08.$$

$$3.65. v_0 \min = g \sqrt{\frac{\mu_2 m_2}{k m_1}} (2 \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) \approx 1,6 \text{ м/с.}$$

$$3.67. v_0 \geq \sqrt{2 g h} \approx 6 \text{ м/с.}$$

$$3.68. h = \frac{v_0^2}{4 g} \approx 23 \text{ м.}$$

$$3.70. H = l - \frac{m g}{k} \approx 25 \text{ см; } \Delta x_{\max} = \frac{m g + \sqrt{m^2 g^2 + 2 m g (h-l) k}}{k} \approx 16 \text{ см.}$$

$$3.71. \Delta x_{\max} = \frac{2 m g}{k} \approx 2 \text{ см; } v_{\max} = g \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,31 \text{ м/с.}$$

$$3.72. Q = \frac{m_1 g h (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \approx 0,33 \text{ Дж.}$$

$$3.74. h_{\max} = \frac{M v^2}{2 g (M+m)}.$$

$$3.75. v_{\min} = \sqrt{2 g h \frac{M+m}{M}}.$$

$$3.76. h_{\max} = \frac{M^2 h}{(M+m)^2} = 48 \text{ см.}$$

$$3.78. E = \frac{M v_1 v_2}{2} = 12 \text{ Дж.}$$

$$3.79. v_{\min} = \Delta x \sqrt{\frac{k (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \approx 0,25 \text{ м/с.}$$

$$3.82. T_{\max} = \frac{F^2}{2 k}.$$

$$3.83. \text{Уменьшится в } n = \sqrt{M/m} = 2 \text{ раза.}$$

$$3.84. \frac{E_{\max}}{E_0} = 4.$$

$$3.85. \Delta x_{\max} = \frac{\mu m g \cos \alpha}{k}.$$

$$3.87. \text{a) } v' = v; \text{ б) } v' = \sqrt{v^2 + 4 u v \cos \alpha + 4 u^2}.$$

$$3.88. h = \frac{(2 u + \sqrt{2 g S})^2}{2 g}.$$

$$3.90. v'_1 = \frac{2 m_2 v_2 - (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2} \approx 5,3 \text{ м/с; } v'_2 = \frac{2 m_1 v_1 - (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2} \approx 1,7 \text{ м/с.}$$

$$3.91. \frac{M}{m} = \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1} = 3.$$

$$3.92. v' = \left(\frac{4}{3}\right)^8 v \approx 10 \text{ м/с.}$$

$$3.93. M/m > 3.$$

$$3.94. l_{\max} = l_0 + v_0 \sqrt{m/2k} \approx 13,5 \text{ см; } l_{\min} = l_0 - v_0 \sqrt{m/2k} \approx 6,5 \text{ см.}$$

$$3.96. \alpha = \frac{1}{2} \pi.$$

$$3.97. \beta = \frac{1}{2} \pi - \alpha = 60^\circ.$$

$$3.99. v_{\text{ш}} = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M}}; v_{\text{кл}} = v_0 \frac{m}{M}.$$

$$3.100. h_{\max} = h \frac{M \sin^2 \alpha}{M + m \cos^2 \alpha}.$$

$$3.102. \eta = 0,5.$$

$$3.103. m_2/m_1 = \cos^2 \alpha (1 - \eta) - \sin^2 \alpha \approx 0,35.$$

$$3.104. v = v_0 \sqrt{\frac{M+m}{M}} \approx 11 \text{ м/с.}$$

$$3.106. \eta = \frac{3 M - m}{4 M}; \quad \alpha = 2 \arcsin \frac{m v}{4 M \sqrt{g l}}.$$

$$3.107. Q_1 = 2 \sqrt{Q_2 m} (v - 2 \sqrt{Q_2 / m}).$$

§4. Динамика движения по окружности

$$4.2. T = 4 \pi^2 m l v^2 \approx 39,5 \text{ Н; } \alpha = \arccos \frac{g}{4 \pi^2 v^2 l} \approx 75,6^\circ, \text{ где } v = 1 \text{ об/с.}$$

$$4.3. F = m \sqrt{\omega^4 l^2 \sin^2 \alpha - g^2} \approx 50 \text{ Н.}$$

$$4.5. r \leq \frac{\mu g}{\omega^2} \approx 98 \text{ см.}$$

$$4.6. k = 4 \pi^2 m (2 v_2^2 - v_1^2) \approx 181,6 \text{ Н/м.}$$

$$4.7. \tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ \frac{\mu^2 g^2}{\varepsilon^2 r^2} - 1 \right\}^{1/4}$$

$$4.9. n = \frac{\sqrt{m^2 g^2 R^2 + 4 T^2}}{m g R} \approx 1,43.$$

$$4.10. \alpha = \operatorname{arctg} \frac{v^2}{g R} \approx 86,4^\circ.$$

$$4.12. \omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu R}} \approx 4,23 \text{ рад/с.}$$

$$4.13. \mu \geq \frac{g}{4 \pi^2 v^2 R} \approx 0,083.$$

4.15. На боковой поверхности сферы на расстоянии $r = \sqrt{R^2 - g^2/\omega^2}$ от оси вращения при $\omega^2 R > g$ или на дне сферы при $\omega^2 R \leq g$.

$$4.16. \omega > \sqrt{\frac{2 g \operatorname{tg} \alpha}{D}} \approx 13 \text{ рад/с.}$$

$$4.18. R = \frac{2 \pi k l}{4 \pi^2 k - m \omega^2} \approx 16,7 \text{ см.}$$

$$4.19. \mu = \frac{m g}{2 \pi T - m \omega^2 R} \approx 0,3.$$

$$4.21. h = \frac{2}{3} R + \frac{v_0^2}{3 g} \text{ при } v_0 < \sqrt{g R}; h = R \text{ при } v_0 \geq \sqrt{g R}.$$

$$4.22. l \approx 1,46 R.$$

$$4.24. F = m g + \frac{m v^2}{R} \approx 4,5 \text{ кН.}$$

$$4.25. F = \frac{m v^2}{R} - 5 m g \approx 3,6 \text{ кН.}$$

$$4.26. h = \frac{1}{3} (2 \mu l - R) \approx 0,67 \text{ м.}$$

$$4.28. h_{\min} = \frac{5}{2} R.$$

$$4.29. v = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3} h g}.$$

$$4.30. h_{\max} = 2 R \left\{ 1 + \frac{v_0^2}{6 g R} \right\} + \frac{v_0^2}{216 g^2 R} (36 g^2 R^2 - v_0^4) \text{ при } v_0 \leq \sqrt{6 g R};$$

$h_{\max} = 4 R \text{ при } v_0 > \sqrt{6 g R}.$

$$4.32. \alpha_{\max} = \arccos \frac{3 m g - T_{\max}}{2 m g} \approx 61,3^\circ.$$

$$4.33. a_{\min} = l \frac{T_{\max} - 3 m g}{T_{\max} - m g}.$$

$$4.34. h_{\max} = a - \frac{4}{27} \frac{a^3}{(l-a)^2} \text{ при } a < \frac{3}{5} l; h_{\max} = l - a \text{ при } a \geq \frac{3}{5} l.$$

4.36. В крайних точках и положении равновесия.

$$4.37. \alpha \approx 53,1^\circ.$$

$$4.39. \frac{v_{\text{гор max}}}{v_{\text{верт max}}} = \sqrt{\frac{T_0 + m g}{T_0}}.$$

$$4.40. v_{\min} = \sqrt{5 g l}.$$

$$4.41. l_{\max} = \frac{m^2 v^2}{5 g (M+m)^2} \approx 0,5 \text{ м.}$$

$$4.43. m_1/m_2 = 5.$$

$$4.44. \omega = \frac{(M+m) v \sin \alpha}{m l}.$$

$$4.45. T = 2 \pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma (m_1 + m_2)}}, \text{ где } \gamma - \text{гравитационная постоянная (см. §5).}$$

$$4.46. \omega = \sqrt{\frac{3 \gamma m}{l^3}}, \text{ где } \gamma - \text{гравитационная постоянная (см. §5).}$$

§5. Законы всемирного тяготения

5.2. В два раза.

5.3. Увеличится в 1,38 раза.

$$5.4. F = \gamma \frac{m M d}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \approx 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ Н.}$$

$$5.6. F \approx 0,04 \gamma \frac{M^2}{R^2}.$$

$$5.8. F = \frac{m g_0 r}{R_3}.$$

$$5.9. A = \frac{1}{2} m g_0 R_3 = 3,14 \cdot 10^7 \text{ Дж.}$$

$$5.11. g = \frac{1}{4} g_0 \approx 2,45 \text{ м/с}^2.$$

$$5.12. B \frac{M_3 R_\pi^2}{M_\pi R_3^2} \approx 5,76 \text{ раза.}$$

$$5.14. T = 2 \pi \sqrt{R_3/g_0} \approx 5,1 \cdot 10^3 \text{ с.}$$

$$5.15. h = R \left\{ \sqrt{\frac{\gamma \rho T^2}{\gamma \rho T^2 - 3 \pi}} - 1 \right\}.$$

$$5.17. P = m g_0 \left\{ 1 - \frac{8 \pi^2}{T^2 g_0} R_3 \left\{ 1 - \frac{2 \pi^2}{T^2 g_0} R_3 \right\} \cos^2 \varphi \right\}^{\frac{1}{2}} \approx 980,63 \text{ Н, где } T - \text{период обращения}$$

Земли вокруг собственной оси (сутки).

$$5.18. \frac{P - P'}{P} \approx \frac{4 \pi^4 R_3}{g_0 T^2} \cos^2 \varphi \approx 8,6 \cdot 10^{-4}, \text{ где } T - \text{период обращения Земли вокруг собственной оси (сутки).}$$

$$5.20. M_{\text{Ю}} = \frac{4 \pi^2 R^3}{\gamma T^2} \approx 1,96 \cdot 10^{27} \text{ кг.}$$

$$5.21. T_B = T \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 223 \text{ дня.}$$

$$5.23. v = \sqrt{\frac{g_0 R_\pi}{n}} \approx 1,7 \text{ км/с.}$$

$$5.24. v = 2 R \sqrt{\frac{1}{3} \gamma \pi \rho} \approx 2,8 \text{ км/с.}$$

$$5.25. h = R_3 \left\{ \frac{g_0 R_3}{v^2} - 1 \right\} \approx 736 \text{ км.}$$

$$5.26. m g = \frac{m v^2}{R} \approx 91,3 \text{ Н.}$$

$$5.28. n = 2 h/R_3 = 1.$$

$$5.29. U = -\frac{\gamma m M_3}{R_3 + h} \approx -5,37 \cdot 10^{10} \text{ Дж; } T = \frac{\gamma m M_3}{2(R_3 + h)} \approx 2,68 \cdot 10^{10} \text{ Дж; } E = U + T = -2,68 \cdot 10^{10} \text{ Дж.}$$

$$5.30. \Delta v = (\sqrt{2} - 1) v.$$

§6. Статика

$$6.2. \text{На расстоянии } x = \frac{(1/2 P + P_2) l}{P + P_1 + P_2} = 31,25 \text{ см от гирь весом } P_1 = 10 \text{ Н.}$$

$$6.3. \text{На стержне на расстоянии } x = \frac{m (R_1 + 1/2 l) + m_2 (R_1 + R_2 + l)}{m + m_1 + m_2} = 109 \text{ см от центра шара радиусом } R_1 = 15 \text{ см.}$$

$$6.5. \text{На оси симметрии пластинки на расстоянии } x = \frac{\pi b}{(2 + \sqrt{2}) [(2 + \sqrt{2})^2 - \pi]} \approx 0,108 \text{ см слева от ее геометрического центра.}$$

$$6.6. \text{На оси симметрии пластинки на расстоянии } x = 1/6 R \text{ слева от ее геометрического центра.}$$

$$6.8. \mu \geq 0,33.$$

$$6.9. N = \frac{m g}{2 \sin \alpha} \sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1} \approx 877 \text{ Н; } T = \frac{m g}{2 \tan \alpha} \approx 392 \text{ Н.}$$

$$6.11. h_{\max} = \frac{2(M+m) \mu \sin \alpha - m \cos \alpha}{2M} / \tan \alpha \approx 1,37 \text{ м.}$$

$$6.12. \alpha_{\min} = \arctg \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_2} = 45^\circ.$$

$$6.14. h_{\max} = \frac{a}{2 \mu} = 30 \text{ см.}$$

$$6.15. h_{\max} = 2 R \cot \alpha.$$

$$6.17. T = \frac{P}{\cos \alpha}; \quad N = P \tan \alpha.$$

$$6.19. F = \frac{m g R \sin \alpha}{r + R \cos \alpha} \approx 0,34 \text{ Н.}$$

$$6.20. l = 4 R.$$

$$6.22. \mu \leq 1/\sqrt{3}.$$

$$6.23. \mu > h/a = 2.$$

$$6.24. F_{\max} = \frac{(M+m)g\sqrt{h(2R-h)}}{R-h} \approx 150 \text{ H.}$$

$$6.26. \mu \geq \tan \alpha \approx 0,4.$$

$$6.27. \alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{R(M+m)}{lm} = 45^\circ.$$

§7. Гидростатика и элементы гидродинамики

$$7.2. h = \frac{p_0}{\rho g} \approx 10,2 \text{ м.}$$

$$7.3. \Delta p = \rho g h \sin \alpha \approx 5,9 \text{ кПа.}$$

$$7.5. h = \frac{2 \Delta h p_1}{\rho_2} = 54,4 \text{ см.}$$

$$7.6. \Delta h = \frac{m}{S} \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 \rho_2} = 4 \text{ см.}$$

$$7.8. \Delta h_1 = \frac{2 m}{3 \rho S}; \Delta h_2 \approx \frac{m}{3 \rho S}.$$

$$7.9. \Delta h = \frac{\rho_2 h}{\rho_1 - n \rho_2} \approx 2,83 \text{ см.}$$

$$7.11. B \text{ в } m \text{ g/F} \approx 29,4 \text{ раза.}$$

$$7.12. \Delta h = \frac{m}{\rho (S_1 + S_2)}.$$

$$7.14. F = \frac{1}{4} \rho g h \pi d^2 \approx 37,6 \text{ H.}$$

$$7.15. H = h + \frac{m}{\rho (S_1 - S_2)}.$$

$$7.17. F = \frac{\rho g l V^2}{2 S^2} = 2,45 \text{ кН.}$$

$$7.18. F = \frac{\rho g S \sqrt{S/\pi} \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \approx 3,7 \text{ МН.}$$

$$7.19. F = g \alpha S (\frac{1}{2} \rho_0 \sin \alpha + \rho \cos \alpha).$$

$$7.21. m = \frac{1}{3} \rho \pi R^3 \approx 3,53 \text{ кг.}$$

$$7.22. F_{\text{дно}} = \frac{12 mg}{7}; F_{\text{ст}} = \frac{5 mg}{7}.$$

$$7.24. V = \frac{10 m}{9 \rho_B} \approx 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

$$7.25. \frac{V'}{V} = \frac{1}{n}.$$

$$7.27. m = (\rho_B - \rho_{np}) l \pi R^2 \approx 2 \text{ г.}$$

$$7.28. m = \frac{1}{4} (\rho_B - \rho_D) l \pi d^2 \approx 84,8 \text{ кг.}$$

$$7.30. \text{Нет, так как плотность короны } \rho = \frac{\rho_B m}{m - m_x} = 11,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \neq \rho_3.$$

$$7.31. V = \frac{P_0 (\rho_K - \rho_B) - P \rho_K}{\rho_B \rho_K g} \approx 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

$$7.33. \rho = \frac{\rho_{pt} + 2 \rho_M}{3} \approx 5,13 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

$$7.34. H = \frac{m - \rho_1 h S}{(\rho_2 - \rho_1) S} \approx 4,3 \text{ см.}$$

$$7.36. \Delta h = \frac{h m}{\rho_B V + m} \approx 1 \text{ мм, где } V = 10^{-3} \text{ м}^3.$$

$$7.37. F \approx 20335 \text{ Н.}$$

$$7.39. \text{Увеличится на } \Delta h = \frac{m}{\rho S}.$$

$$7.40. \text{Уменьшается на } \Delta h = \frac{m}{2 \rho_B S} = 5 \text{ мм.}$$

$$7.42. T = \rho_B g \Delta h S \approx 2 \text{ Н.}$$

$$7.43. S = \frac{\Delta F}{\rho_B g \Delta h} \approx 10^{-3} \text{ м}^2.$$

$$7.45. F = \frac{1}{3} \rho g \pi R^3.$$

$$7.46. F = \frac{1}{3} \rho g h S [3 \sqrt{S_0/S} - (S_0/S)^{3/2} - 2].$$

$$7.47. F_{\text{бок}} = \{ p_0 + \rho g (h + \frac{2}{3} H) \} \pi R^2 \approx 3,2 \text{ кН.}$$

$$7.49. \rho = \frac{3}{4} \rho_B = 750 \text{ кг/м}^3.$$

$$7.50. T = \frac{1}{2} m g = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

$$7.51. \alpha = \arccos \left\{ \frac{h}{l} \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 - \rho}} \right\}.$$

$$7.53. T_{\max} = [\rho_A - (1 - n) \rho_B] g l S \approx 132 \text{ Н.}$$

$$7.54. \alpha = \arccos \frac{(\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_K - m) g}{m \omega^2 l} \approx 48,5^\circ.$$

$$7.56. A_{\min} = \frac{1}{4} m g H.$$

$$7.57. A_{\min} = \frac{1}{2} g l (m - \frac{1}{2} \rho_B l S) \sin \alpha \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

$$7.59. h = \frac{1}{2} a = 2 \text{ см.}$$

$$7.60. H_{\min} = \frac{(m + \rho_{\text{л}} h S) h (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{m^2 \rho_{\text{в}}} \left\{ \frac{h S (\rho_{\text{в}} + \rho_{\text{л}})}{2} - (m + \rho_{\text{л}} h S) \right\} \approx 0,33 \text{ м.}$$

$$7.61. Q = \pi r^2 \rho g h H \left\{ 1 + \frac{\rho h (R^2 + r^2)}{2 \rho_{\text{ж}} H R^2} \right\}.$$

$$7.63. v = \sqrt{\frac{8F}{\pi d^2 \rho}} \approx 2 \text{ м/с.}$$

$$7.64. v = \sqrt{\frac{2FS_1}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}}.$$

$$7.65. \mu < \frac{2 \rho g h S}{P}.$$

7.66. $x_0 = \frac{1}{g} \left\{ \frac{Q^2}{4S^2} - \frac{g^2 H^2 S^2}{Q^2} \right\} \approx 1,2 \text{ м}; y_0 = \frac{1}{2g} \left\{ \frac{Q}{2S} - \frac{gHS}{Q} \right\}^2 \approx 0,65 \text{ м};$ начало отсчета выбрано у нижнего отверстия: ось OX горизонтальна, ось OY направлена вертикально вверх.

$$7.68. B \sqrt{\frac{v^2}{v^2 - 2gh}} \approx 2,2 \text{ раза.}$$

$$7.69. h = \frac{4v^2}{9g} \approx 1,63 \text{ м.}$$

$$7.70. S = \frac{Q}{\sqrt{(Q/S_0)^2 - 2gh}} \approx 4,38 \text{ см}^2.$$

$$7.71. \alpha = 60^\circ; h_{\max} = \frac{3v^2}{8g} \approx 3,1 \text{ м.}$$

$$7.72. v(h) = \frac{k \rho g S_1}{S} h.$$

$$7.73. a = g S_2^2 / S_1^2.$$

§8. Механические колебания

$$8.2. \Delta t = 1 \text{ с.}$$

$$8.3. \text{a) } v_{\text{ср}} \approx 0,4 \text{ м/с; б) } v_{\text{ср}} \approx 0,56 \text{ м/с; в) } v_{\text{ср}} \approx 0,23 \text{ м/с.}$$

$$8.5. \Delta t \approx 1,17 \text{ с.}$$

$$8.6. \tau = 0,5 \arcsin \frac{2U}{5F} = 0,25 \text{ с.}$$

$$8.8. v = \sqrt{3} \pi v A \approx 8,2 \text{ м/с.}$$

$$8.9. E = \frac{m(x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2)}{2(x_1^2 - x_2^2)} \approx 1,8 \text{ Дж.}$$

$$8.10. v_0 = A \omega_0 \sqrt{\frac{T}{T+U}}; x_0 = A \sqrt{\frac{U}{T+U}}.$$

$$8.12. l = \frac{g T^2}{4\pi^2} \approx 1 \text{ м.}$$

$$8.13. E = \frac{\rho g a^2 A^2}{2} \approx 3,1 \text{ Дж.}$$

$$8.15. T = \frac{\pi \sqrt{R} (\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{g}}.$$

$$8.16. T = \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,01 \text{ с.}$$

$$8.18. F_{\max} = \frac{4\pi^2 m A}{T^2} + mg; \text{ при } A \leq \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

$$8.19. A = \frac{1}{2\pi v} \sqrt{2gh - \frac{g^2}{4\pi^2 v^2}} \approx 0,063 \text{ мм.}$$

$$8.21. T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = 5 \text{ с.}$$

$$8.22. \frac{l_2}{l_1} = \frac{n_1^2}{n_2^2} = 16.$$

$$8.24. \Delta t = \frac{86400 h}{R_3} \approx 54 \text{ с.}$$

$$8.25. h = \frac{R_3 H (2R_3 + H)}{(R_3 + H)^2}; h \approx \frac{2H R_3}{R_3 + H} \approx 2H \text{ при } h, H \ll R_3.$$

$$8.27. \Delta t = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 0,33 \text{ с.}$$

$$8.28. v_0 = A \sqrt{\frac{g}{l}} \approx 6,3 \text{ см/с.}$$

$$8.31. F_M = m g \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2} \approx 0,03 \text{ Н.}$$

$$8.32. \text{a) } v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g+a}{l}}; \text{ б) } v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g-a}{l}}; \text{ в) } v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{g^2+a^2}}{l}}.$$

$$8.34. T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = 0,5 \text{ с.}$$

$$8.35. A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \approx 1 \text{ см.}$$

$$8.36. k = \frac{m v_{\max}^2}{A^2} = 10 \text{ Н/м.}$$

$$8.39. m = \frac{l(k_1 + k_2)}{g} \approx 300 \text{ г.}$$

$$8.40. v_{1 \max} = x_0 \sqrt{\frac{k}{4m_1 + m_2}}; v_{2 \max} = \frac{x_0}{2} \sqrt{\frac{k}{4m_1 + m_2}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{4m_1 + m_2}{k}}.$$

$$8.42. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

$$8.41. A = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

$$8.45. A_1 = A_2 = \sqrt{\frac{E}{2k}} \approx 1 \text{ см.}$$

$$8.43. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{4k_1 + k_2}} \approx 0,18 \text{ с.}$$

$$8.48. M = -\frac{\sqrt{2mk} t}{\sin(\sqrt{2k/m} t)} \approx 61 \text{ г.}$$

$$8.46. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

$$8.51. h = \frac{M g (M+2m)(M+m)}{2km^2}.$$

$$8.50. A = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2mg h}{k}}.$$

$$8.54. x_0 \leq \frac{(M+m)g}{k} \approx 1 \text{ см.}$$

$$8.53. h_{\max} = \frac{mg}{2k} + \frac{kx_0^2}{2mg} \approx 16,4 \text{ см.}$$

$$8.57. \Delta l = \frac{2\pi^2 g}{\omega_0^2} \approx 2 \text{ м.}$$

$$8.56. l = 2\pi v \sqrt{\frac{\Delta x}{g}} \approx 63 \text{ см.}$$

$$8.58. v = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} \approx 16 \text{ м/с.}$$

§9. Основы молекулярно-кинетической теории газов. Уравнение состояния идеального газа

$$9.2. m_0 = \frac{\mu}{N_A} \approx 7,31 \cdot 10^{-26} \text{ кг}; N = \frac{m}{\mu} N_A \approx 1,37 \cdot 10^{24} \text{ молекул}; n = \frac{\rho N_A}{\mu} \approx 2,71 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

$$9.3. N = \frac{\rho V_2^2}{\mu V_1} N_A \approx 1,03 \cdot 10^3 \text{ молекул.}$$

$$9.5. \langle \varepsilon \rangle = \frac{3pV}{2\sqrt{N_A}} \approx 1,24 \cdot 10^{-20} \text{ Дж.}$$

$$9.6. p = \frac{2\langle \varepsilon \rangle}{3V} = 8 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$9.8. n = \frac{3pN_A}{\mu v_{\text{ср кв}}^2} \approx 9,03 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

$$9.9. v_{\text{ср кв}} = \sqrt{\frac{3RTN}{mN_A}} \approx 468 \text{ м/с.}$$

$$9.11. \mu = \frac{\rho RT}{p} \approx 17 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль; газ NH}_3.$$

$$9.12. \text{Газ CH}_4; m_c \approx 11,25 \text{ г}, m_h \approx 3,75 \text{ г.}$$

9.14. Увеличилось на 100%.

$$9.15. m = \rho V(1 - p_1/p_2) \approx 105 \text{ г.}$$

$$9.17. \text{Увеличилось на } \Delta p = \frac{p_1 \Delta T}{T_1} = 2 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

$$9.18. \text{Увеличится на } \frac{\Delta p}{p} = \left\{ \frac{\Delta v_{\text{ср кв}}}{v_{\text{ср кв}}} + 1 \right\}^2 - 1 = 0,44 = 44\%.$$

$$9.20. \text{На } \eta = T_2/T_1 - 1 \approx 0,115 = 11,5\%.$$

$$9.21. m = \rho V(1 - T_2/T_1) \approx 38,8 \text{ г.}$$

$$9.23. \Delta m = \frac{pV\mu_1}{RT} - m \frac{2\mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} \approx 2,66 \text{ г.}$$

$$9.24. p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} - \frac{\Delta m R T_2}{\mu V} \approx 3,64 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$9.26. \text{На } \eta = 1 - T_1/T_2 \approx 0,04 = 4\%.$$

$$9.27. p_1 = \frac{\Delta p T_1}{(1 - \eta) T_2 - T_1} = 25 \text{ атм.}$$

$$9.29. p = p_0 \frac{nV_0}{V} = 3 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$9.30. n = \frac{V}{V_0} \left\{ \frac{p}{p_0} - 1 \right\} = 20 \text{ качаний.}$$

$$9.32. B (1 + \alpha)^2 = 1,21 \text{ раза.}$$

$$9.35. T_2 = T_0 \frac{V_1 p_2}{V_0 p_0}.$$

$$9.38. p = p_0 \frac{\alpha \mu_2}{\alpha \mu_2 + \mu_1} \approx 2235 \text{ Па.}$$

$$9.41. p = \frac{R T}{V} \left\{ \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{N}{N_A} \right\} \approx 87,2 \text{ кПа.}$$

$$9.44. p = \frac{N_1 + N_2}{N_1/p_1 + N_2/p_2}.$$

$$9.47. \text{Уменьшилось на } \eta = 1 - \frac{3T_2}{2T_1} = 0,25 = 25\%.$$

$$9.48. \eta = m/n - 1 = 0,05 = 5\%.$$

$$9.51. \Delta T = \frac{(p_0 S + m g) \Delta l}{v R} \approx 1 \text{ К.}$$

$$9.54. \Delta l = l \frac{\sqrt{(2p_0 S + m g)^2 + 8m^2 g^2} - 2p_0 S - m g}{2m g}.$$

$$9.56. \Delta l = 0,37 \text{ л.}$$

$$9.33. p_0 = p \left\{ \frac{V + V_0}{V} \right\}^6 \approx 83,4 \text{ мм рт. ст.}$$

$$9.36. p_4 = p_1 \frac{V_1 T_3}{T_1 V_4} \approx 1,6 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

$$9.39. \rho = \frac{2 \rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 0,48 \text{ кг/м}^3.$$

$$9.42. p = \frac{m (\mu_2 - 2 \mu_1) R T}{\mu_1 \mu_2 V} \approx 2,1 \text{ атм.}$$

$$9.45. n = \frac{p_1 V}{\gamma_6 p_0 V_0} \approx 400.$$

$$9.50. \Delta h = \frac{M g h}{p_0 S + (M + m) g} \approx 7,6 \text{ см.}$$

$$9.53. h \approx 0,55 \text{ л.}$$

$$9.57. T = 2\pi \sqrt{\frac{m l}{2p_0 S}}.$$

$$9.59. l = \frac{1}{2} (p_0 / \rho g + l_0) - \sqrt{\frac{1}{4} (p_0 / \rho g + l_0)^2 - [p_0 / (\rho g) + h - l_0] h} \approx 2,8 \text{ см.}$$

$$9.60. l = \frac{l_1 l_2}{2l_2 - l_1}.$$

$$9.63. \Delta h = h - \frac{p_0 - \sqrt{p_0^2 + 4 p_0 \rho g h}}{2 \rho g}.$$

$$9.64. \Delta h = \frac{h}{2} \left\{ 1 + \frac{2 \rho g h}{2p_0 + \rho g h} \right\}.$$

$$9.66. p = \frac{2 (p_0 + \rho g \Delta h) l_0}{2 l_0 + \Delta h_1 - \Delta h} - \rho g \Delta h_1 \approx 0,46 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$9.67. \Delta h = \frac{1}{4 \rho g} \left\{ p_0 + \frac{m g}{S} + 2 \rho g h_0 - \sqrt{\left[p_0 + \frac{m g}{S} + 2 \rho g h_0 \right]^2 - \frac{8 \rho g h_0 m g}{S}} \right\}.$$

$$9.69. p = \frac{\alpha \mu}{m R} V.$$

$$9.70. T_1 = T_2 \frac{V_2}{V_1} = 300 \text{ К.}$$

$$9.72. T_{\max} = \frac{2 \beta}{3 v R} \sqrt{\frac{\beta}{3 \alpha}}.$$

$$9.73. p_{\min} = 2 v R \sqrt{\alpha T_0}; T = 2 T_0; V = \sqrt{T_0 / \alpha}.$$

$$9.75. T_2 = \sqrt{T_1 T_3} \approx 346 \text{ К.}$$

$$9.76. V_3 = \frac{T_4 V_2 - T_1 V_1}{T_1 V_2 / V_1 + T_4 - 2 T_1} \approx 2,2 \text{ м}^3.$$

§10. Температура и работа. Физические основы термодинамики

$$10.2. U = \frac{3}{2} p_1 V_1 = 1,5 \text{ кДж.}$$

$$10.3. Q = v R T \ln(p_2/p_1) \approx 1,73 \text{ кДж.}$$

$$10.5. \frac{\Delta p}{p} = \frac{2 Q}{3 v R T} \approx 0,27 = 27\%.$$

$$10.6. \Delta U = \frac{3}{2} p_0 V \frac{1-n}{n} = -900 \text{ Дж.}$$

$$10.9. A = \frac{2}{3} Q = 480 \text{ Дж.}$$

$$10.10. V = \frac{A n}{p (n-1)} = 0,3 \text{ м}^3.$$

$$10.11. T = \frac{2 \Delta U}{3 v R (n-1)} \approx 241 \text{ К.}$$

$$10.12. Q = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T \approx 10,4 \text{ Дж}; \Delta h = \frac{m R \Delta T / \mu}{p_0 S + Mg} \approx 3,8 \text{ см.}$$

$$10.14. A = \frac{1}{2} (p_1^2 - p_2^2) / \beta = 3 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

$$10.15. A = \frac{1}{2} \alpha v R (V_2^2 - V_1^2) \approx 2,5 \text{ Дж.}$$

$$10.17. \mu = \frac{m R \Delta T}{Q_p - Q_v} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль; кислород } O_2.$$

10.18. В первом случае выделится теплоты на $\Delta Q = (p_1 - p_2)(V_1 - V_2) = 4 \cdot 10^5 \text{ Дж}$ больше, чем во втором.

$$10.19. \gamma = 1 + \frac{(n-1)v R T_0}{Q - v R T_0 \ln n} \approx 1,4.$$

$$10.21. Q = \frac{1}{2} v R T_0.$$

$$10.22. T = T_0 \frac{3 p_0 S + k l}{4 p_0 S}.$$

$$10.24. T_{\max} = T_0 + \frac{2}{3} m v^2 / R.$$

$$10.25. Q = \frac{5}{4} m v^2.$$

$$10.27. A = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{\alpha \beta - 1} v R \Delta T \approx 250 \text{ Дж.}$$

$$10.28. A = \frac{(V_4 - V_1)}{2} \cdot \frac{(p_0 - p_1)^2 - (p_2 - p_0)^2}{p_0 - p_1} \approx 750 \text{ Дж}$$

$$10.30. A = 2 v R T_0 = 3324 \text{ Дж.}$$

$$10.31. A_{4-3-5-6-4} / A_{1-2-3-4-1} = 2.$$

$$10.33. \alpha = 9.$$

$$10.34. \eta = \frac{3}{22} \approx 13,6\%.$$

$$10.36. \eta = 10\%.$$

$$10.37. \eta = \frac{5}{24}.$$

$$10.39. \eta_2 = \frac{\eta_1}{2 - \eta_1} = 25\%.$$

$$10.40. \eta_2 = \frac{1}{2 \eta_1} = 20\%; \text{ в } \frac{2}{\eta_1} - 1 = 4 \text{ раза.}$$

$$10.42. T_1 = T_2 / \alpha = 460 \text{ К.}$$

$$10.43. A = Q_1 (1 - T_2 / T_1) = 500 \text{ Дж}; Q_2 = Q_1 T_2 / T_1 = 500 \text{ Дж.}$$

$$10.44. Q_1 = \frac{N \tau T_1}{T_1 - T_2} \approx 987 \text{ МДж}; Q_2 = \frac{N \tau T_2}{T_1 - T_2} \approx 722 \text{ МДж.}$$

$$10.45. A = \frac{Q}{1 - \eta} = 5 \text{ Дж.}$$

$$10.46. \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0,5 = 50\%; Q_2 = A \frac{T_2}{T_1} = 100 \text{ кДж.}$$

$$10.47. \eta = \frac{3 (T_1 - T_3) (T_2 - T_3)}{3 T_1 T_2 - T_2 T_3 - 2 T_1 T_3} = \frac{1}{3} \approx 0,33 = 33\%.$$

$$10.48. \eta_{\max} = \frac{97}{121} \approx 0,8 = 80\%.$$

§11. Уравнение теплового баланса.

Изменение агрегатного состояния вещества. Влажность

$$11.2. t = t_1 + \frac{C(t_1 - t_2)}{c m} \approx 32,5^\circ\text{C}.$$

$$11.3. m_A = \frac{c_1 M + c_3 m_1}{c_1 - c_2} \frac{\theta - t_1}{t_2 - \theta} - \frac{c_2 m_2}{c_1 - c_2} \approx 96 \text{ г; } m_M = m_2 - m_A \approx 84 \text{ г.}$$

$$11.5. m = \frac{c \rho V (t_1 - t_2)}{\lambda + c (t_2 - t_3)} \approx 11,7 \text{ кг.}$$

$$11.6. m_1 = \frac{c_2 m_2 (t_{\text{пл}} - t_2) + \lambda (m_2 - m_3)}{c_1 (t_1 - t_{\text{пл}})} \approx 198 \text{ г, где } t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C} - \text{температура плавления льда.}$$

$$11.8. \Delta V = \frac{V_1 V_2 (t_1 - t_1^*)}{V_2 (t_1 - t_2) - V_1 (t_1 - t_1^*)} \approx 1,43 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

$$11.9. t_0 = -1,11 \cdot \frac{c_{\text{п}} t}{c_{\text{п}} h} - \frac{30 \lambda \Delta h}{c_{\text{п}} h} \approx -53,6^\circ\text{C}.$$

11.11. $Q = m [c_{\text{п}}(t_{\text{пл}} - t_1) + \lambda + c_{\text{в}}(t_2 - t_{\text{пл}}) + r] \approx 6,06 \text{ МДж}$, где $t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$ – температура плавления льда.

$$11.12. M = \frac{m r}{r + \lambda} \approx 707 \text{ г.}$$

$$11.14. \theta = 0^\circ\text{C}.$$

$$11.15. \theta = 100^\circ\text{C}.$$

$$11.17. \eta = \frac{(c M + C)(t_2 - t_1)}{q m} \approx 0,317 = 31,7\%.$$

$$11.18. S = \eta \frac{\rho V g v}{N} \approx 270 \text{ км.}$$

$$11.20. \eta = \frac{m [c_{\text{п}}(t_{\text{пл}} - t) + \lambda + c_{\text{в}}(t_{\text{кип}} - t_{\text{пл}}) + 0,25 r]}{N v} = 0,424 = 42,4\%, \text{ где } t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C} \text{ – температура плавления льда, } t_{\text{кип}} = 100^\circ\text{C} \text{ – температура кипения воды.}$$

$$11.21. N = N_0 - m [c(t_0 - t_1) + \lambda] / \tau \approx 286 \text{ Вт.}$$

$$11.23. h_{\text{мин}} = [c(t_{\text{кип}} - t_0) + r] / g \approx 265 \text{ км, где } t_{\text{кип}} = 100^\circ\text{C} \text{ – температура кипения воды.}$$

$$11.24. h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{c(T_{\text{пл}} - T_0) + \lambda}{\eta g} \approx 631 \text{ м.}$$

$$11.25. v_{\text{мин}} = \sqrt{2 [c_{\text{в}}(t_{\text{кип}} - t_{\text{пл}}) + c_{\text{п}}(t_{\text{пл}} - t) + \lambda + r]} \approx 2,58 \text{ км/с, } t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C} \text{ – температура плавления льда, } t_{\text{кип}} = 100^\circ\text{C} \text{ – температура кипения воды.}$$

$$11.27. \Delta m = \frac{\mu A}{R T} \approx 12 \text{ г.}$$

$$11.28. h = \frac{[Q - c m (t_{\text{кип}} - t)] R T_{\text{кип}}}{\mu r p_0 S} \approx 13,7 \text{ см, где } t_{\text{кип}} = 100^\circ\text{C}, T_{\text{кип}} = 373 \text{ К – температура кипения воды.}$$

$$11.30. \text{Внутрь пробирки на } \Delta h = \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ \frac{p_0 - p_{\text{H}}}{\rho g} + l - h \right\}^2 + \frac{p_0 - p_{\text{H}}}{\rho g} h} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_0 - p_{\text{H}}}{\rho g} + l - h \right\} \approx 1,2 \text{ м.}$$

$$11.31. m_{\text{возд}} = \frac{V \mu_2}{R} \left\{ \frac{p}{T} - \frac{p_{\text{H}}}{T_0} \right\} \approx 0,9 \text{ кг; } m_{\text{эфир}} = \frac{p_{\text{H}} V \mu_1}{R T_0} \approx 0,8 \text{ кг.}$$

$$11.34. \varphi = \frac{p_{\text{H2}}}{p_{\text{H1}}} \frac{T_1}{T_2} = 0,54 = 54\%, m = \frac{p_{\text{H2}} V \mu}{R T_2} \approx 1,38 \text{ кг.}$$

$$11.35. m = (\varphi \rho_1 - \rho_2) V = 2710 \text{ кг.}$$

$$11.36. \text{В иколе в } \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\varphi_2 p_2 T_1}{\varphi_1 p_1 T_2} \approx 3,4 \text{ раза.}$$

$$11.37. m = \frac{\mu V}{R} \left\{ \frac{\varphi_2 p_{\text{H2}}}{T_2} - \frac{\varphi_1 p_{\text{H1}}}{T_1} \right\} \approx 0,31 \text{ кг.}$$

$$11.39. V' = V - \frac{\mu V_0}{\rho R} \left\{ \frac{p_{\text{H2}}}{T_2} - \frac{\varphi_1 p_{\text{H1}}}{T_1} \right\} \approx 0,066 \text{ л.}$$

$$11.40. V' \approx 0,164 \text{ см}^3.$$

$$11.42. \rho = \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{p \mu_1}{R T} - \rho_{\text{B}} \right\} \approx 0,0133 \text{ кг/м}^3; \quad \varphi = \frac{\rho}{\rho_{\text{H}}} \approx 0,494 = 49,4\%.$$

$$11.43. \text{На } \alpha = \frac{(\mu_1 - \mu_2) p_{\text{H}}}{p \mu_1} \approx 8,84 \cdot 10^{-3} = 0,88\%.$$

§12. Электростатика

$$12.2. \alpha = \frac{10^{-3} q A}{Q m N_A} \approx 3,66 \cdot 10^{-12}$$

$$12.3. q = \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \sqrt{4\pi \epsilon_0 \gamma} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

12.5. На расстоянии $x = l \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$ от заряда q_1 .

$$12.6. Q = \frac{1}{4} (1 + 2\sqrt{2}) \approx 0,96 q.$$

$$12.8. T_{1-2} = \frac{q_1 (4q_2 + q_3)}{16\pi \epsilon_0 l^2}; T_{2-3} = \frac{q_3 (q_1 + 4q_2)}{16\pi \epsilon_0 l^2}.$$

$$12.9. q = \sqrt{\frac{16\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi k \epsilon_0 a^3}{2\sqrt{2}+1}} \approx 1,56 \sqrt{\pi k \epsilon_0 a^3}.$$

$$12.10. q = \sqrt{\frac{4\pi \epsilon_0 m g a^3}{\sqrt{3}(3l^2 - a^2)}} \approx 6,03 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$$

$$12.12. F = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{q}{4a^2} + \frac{Q}{(b-a)^2} + \frac{Q}{(b+a)^2} \right\} \approx 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

$$12.13. q = 4(h - \Delta h) \sqrt{\pi \epsilon_0 k \Delta h}.$$

$$12.15. \Delta T = \frac{q Q}{8\pi \epsilon_0 R^2}.$$

$$12.16. q = \sqrt{2} q_0.$$

12.18. Уменьшится на $\Delta \alpha = \alpha - \arctg [(1-\eta) \tan \alpha] \approx 3^\circ$.

$$12.19. \text{Уменьшится на } \Delta x = \frac{q E}{k}.$$

$$12.21. E = \frac{|q|}{4\pi \epsilon_0 a^2} \approx 40,5 \text{ В/м.}$$

$$12.22. E_{\max} = \frac{4q}{3\sqrt{3}\pi \epsilon_0 a^2}.$$

$$12.23. F = \frac{q Q h}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}; E = \frac{Q h}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

$$12.25. \rho = \frac{\epsilon_0 (E - E_0)}{h} \approx -4,3 \cdot 10^{-13} \text{ Кл/м}^3.$$

$$12.26. E(r < R) = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 R^3}, E(r > R) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2};$$

график $E(r)$ представлен на рис. 5.

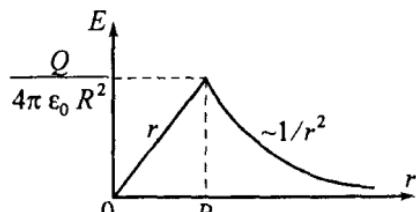


Рис. 5

$$12.28. F = \frac{1}{2} q |E_2 - E_1|.$$

$$12.29. \sigma_1 = \epsilon_0 (E_1 + E_2) = 3,54 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2; \sigma_2 = \epsilon_0 (E_2 - E_1) = -1,77 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2.$$

$$12.31. \phi = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6}{4\pi \epsilon_0 l} \approx 40,5 \text{ В. ?} \quad 12.32. \Delta \phi = \frac{q}{\pi \epsilon_0 l} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{2} \right\} \approx 11,9 \text{ В.}$$

$$12.34. R = \frac{b \phi_2 - a \phi_1}{\phi_1 - \phi_2} = 0,1 \text{ м; } q = \frac{4\pi \epsilon_0 \phi_1 \phi_2 (b-a)}{\phi_1 - \phi_2} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл; } \phi_0 = \frac{\phi_1 \phi_2 (b-a)}{b \phi_2 - a \phi_1} \approx 1,8 \text{ кВ.}$$

$$12.35. \phi_1 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}; \phi_2 = \frac{q}{8\pi \epsilon_0 r}; \phi_3 = 0.$$

$$12.37. q_1 = -3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

$$12.38. q_1 = Q \frac{R_1}{R_1 + R_2}; q_2 = Q \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$12.40. \phi = \phi_0 \frac{R_2 - R_1}{R_2}.$$

$$12.41. E(r < R_1) = 0, E(R_1 < r < R_2) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}, E(r > R_2) = 0;$$

$$\phi(r < R_1) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}, \phi(R_1 < r < R_2) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{R_2 - r}{r R_2}, \phi(r > R_2) = 0.$$

$$12.43. \Delta\phi = \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)(h_1 + h_2) + \sigma_2(h_1 - h_2)}{2\epsilon_0}$$

$$12.46. q = Q \frac{d-2a}{2d}$$

$$12.49. q = Q \frac{d-2a-b}{2(d-b)}$$

$$12.52. C = \frac{\epsilon_0 S}{d-2a}$$

$$12.55. C = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0 S}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}$$

$$12.58. C = \frac{C_1 C_3 (C_1 + 2C_2)}{C_1 C_2 + (C_1 + C_2)(C_1 + C_3)} = 2,4 \text{ мкФ.}$$

$$12.59. C = \frac{C_1 (C_1 + 2C_2) (C_2 + C_3)}{C_1 C_2 + (C_1 + C_2)(C_1 + C_2 + C_3)} = 6,25 \text{ мкФ.}$$

$$12.61. C_0 = C_1 + C_2 + C_3.$$

$$12.62. C_0 = C.$$

$$12.63. C_0 = \frac{63}{26} C.$$

$$12.65. A_{\min} = \frac{q_0 (q_2 - q_1) (l_2 - l_1)}{4\pi \epsilon_0 l_1 l_2} \approx 30 \text{ мДж.}$$

$$12.66. W = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{l_0} - \frac{3}{2l} + \frac{l_0}{2l^2} \right\} \approx 0,135 \text{ мДж.}$$

$$12.70. W = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 l} (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3).$$

$$12.73. A = \frac{C \Delta\phi^2}{2} \frac{(n-1)}{n} = 0,25 \text{ Дж.}$$

$$12.76. Q = \frac{q^2 d}{\epsilon_0 S} \approx 27 \text{ Дж.}$$

$$12.79. \Delta x = \frac{|e| \Delta\phi l^2}{2m d v^2} = 5,5 \text{ мм.}$$

$$12.81. v_{\max 1} = v_{\max 2} = 2 v_{\max 3} = \frac{q}{\sqrt{6\pi\epsilon_0 m l}}.$$

$$12.82. v_{\max} = \left\{ \mu g l + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m l} - 2q \sqrt{\frac{\mu g}{4\pi\epsilon_0 m}} \right\}^{1/2}.$$

$$12.84. v = \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{m} \left\{ m g \operatorname{tg} \alpha - \frac{q^2 \sin \alpha}{2\pi\epsilon_0 l^2} \right\}}.$$

12.85. Силовые линии напряженности электрического поля направлены:

$$\text{вверх: } Q = \frac{20\pi\epsilon_0 R^2 (E - m g)}{q} \text{ при } q E \neq m g \text{ и } q > 0, Q = \frac{20\pi\epsilon_0 R^2 (|q| E + m g)}{|q|} \text{ при } q < 0;$$

$$\text{вниз: } Q = \frac{20\pi\epsilon_0 R^2 (q E + m g)}{q} \text{ при } q > 0, Q = \frac{20\pi\epsilon_0 R^2 (m g - |q| E)}{|q|} \text{ при } |q| E \neq m g \text{ и } q < 0.$$

$$12.87. T = 2\pi \sqrt{\frac{2l\epsilon_0}{2g\epsilon_0 + |q|\sigma}}.$$

$$12.90. T = \frac{\pi l^2 \sqrt{2\pi\epsilon_0 m}}{q}.$$

$$12.44. \phi = \Delta\phi \frac{l}{d} = 75 \text{ В; } E = \frac{\Delta\phi}{d} = 25 \text{ В/см.}$$

$$12.47. q = \frac{1}{3} Q.$$

$$12.50. q = Q \frac{a}{d-b}.$$

$$12.53. C = \frac{S \epsilon_0 (d_1 + d_2)}{d_1 d_2}.$$

$$12.56. C = \frac{1}{2} (\epsilon + 1) C_0.$$

$$12.62. C_0 = C.$$

$$12.68. A_{\min} = |q| \frac{Q}{C} = 0,35 \text{ Дж.}$$

$$12.72. Q = \frac{q^2}{2C} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}.$$

$$12.75. A_{\min} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon - 1) (\epsilon E^2 - E_0^2) S d.$$

$$12.78. \Delta\phi = \frac{d W \sin 2\alpha}{|e| l} = 150 \text{ В.}$$

$$12.88. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + q^2 \sigma^2 / 4\epsilon_0 m^2}}}.$$

$$12.91. T = \pi \left\{ \sqrt{\frac{2R}{g}} + \sqrt{\frac{m}{mg/R + qQ/32\pi\varepsilon_0 R^3}} \right\}, \quad 12.93. r_{\min} = \frac{a|e|^2}{\pi\varepsilon_0 m (v_1 - v_2)^2 + |e|^2}.$$

$$12.94. r_{\min} = \frac{|e|^2 d}{|e|^2 + 4\pi\varepsilon_0 m v^2 d \cos^2 \alpha}.$$

$$12.96. v_{\min} = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m R}} \quad \text{при } qQ > 0; \quad v = 0 \quad \text{при } qQ < 0.$$

$$12.97. v \geq \sqrt{\frac{qQ(M+m)}{2\pi\varepsilon_0 R m M}}.$$

$$12.98. v_{\min} = \sqrt{\frac{3(M+m)qQ}{4\pi\varepsilon_0 m M R}}.$$

§13. Постоянный ток

$$13.2. t = \frac{n-1}{\alpha} \approx 244^\circ\text{C}.$$

$$13.3. \Delta R = \rho_0 l \alpha (t_1 - t_2)/S \approx 273 \text{ Ом}.$$

13.5. На \sqrt{n} частей.

13.6. Схему соединения см. на рис. 6.

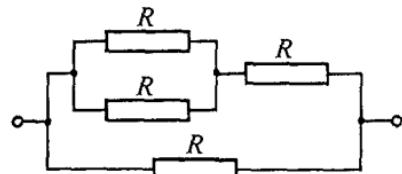


Рис. 6

$$13.8. R_{\text{цепи}} = \frac{5}{8} R = 2,5 \text{ Ом}.$$

$$13.9. R_{\text{цепи}} = 4 R = 4 \text{ Ом}.$$

$$13.11. R_{\text{цепи}} = R.$$

$$13.12. R_{\text{цепи}} = \frac{5}{2} R.$$

$$13.13. R_{\text{цепи}} = \frac{2}{3} R = 2 \text{ Ом}.$$

$$13.14. R_{\text{цепи}} = R.$$

$$13.16. I = \frac{1}{16} I_0 = 0,3 \text{ А.}$$

13.17. Уменьшится в $\eta = \frac{4}{3}$ раза.

$$13.19. \Delta\phi = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} = 48 \text{ В.}$$

$$13.20. I = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 3 \text{ мА.}$$

$$13.23. \mathcal{E}_1 = (r_1 + R) I_3 = 5,14 \text{ В, } r_1 = R \frac{(I_2 - I_4)(I_3 + I_4 - I_1) + (I_4 - I_1)(I_4 - I_3 - I_2)}{(I_1 - I_3)(I_2 - I_4) + (I_4 - I_1)(I_2 + I_3)} = 1,14 \text{ Ом;}$$

$$\mathcal{E}_2 = (r_2 + R) I_4 = 7,5 \text{ В, } r_2 = R \frac{I_4 - I_3 - I_2}{I_2 - I_4} - r_1 \frac{I_2 + I_3}{I_2 - I_4} = 1,76 \text{ Ом.}$$

$$13.24. R = \frac{\mathcal{E} - I_1 r_1}{I_1 (r_1 + r_2)} \quad r_2 = \frac{2}{3} \text{ Ом; } I_2 = I_1 \frac{r_1}{r_2} = 0,5 \text{ А; } I_R = I_1 \frac{r_1 + r_2}{r_2} = 1,5 \text{ А.}$$

$$13.25. R = r.$$

$$13.28. I = \frac{R_2 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3) + R_3 (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \approx 0,06 \text{ А.} \quad 13.29. I = \frac{\mathcal{E}}{4R} = 1 \text{ А.}$$

$$13.30. I = \frac{\mathcal{E}_1 R_1 + (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

$$13.31. I = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 - \mathcal{E}_1 R_2}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)} = 0,02 \text{ А; } \text{ против часовой стрелки (или слева направо).}$$

$$13.33. q = \frac{1}{3} C \mathcal{E} \approx 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$13.34. q = \mathcal{E} \frac{C R_2 R_4}{r(R_2 + R_3 + R_4) + R_4(R_2 + R_3)} + \mathcal{E} \frac{C R_3}{r + R_2 + R_3} \approx 3,43 \cdot 10^{-3} \text{ Кл.}$$

$$13.36. \text{Увеличится в } n' = 4n - 3 = 37 \text{ раз.}$$

$$13.37. R_{\text{ш}} = \frac{N r I_0}{I - N I_0} = 22,2 \text{ Ом.}$$

$$13.39. U_{\text{max}} = \frac{U(R_V + R_R)}{R_V} = 1000 \text{ В.}$$

$$13.40. U_{AB} = \frac{U_3}{1 + U_2/U_1} = 7,2 \text{ В}; U_{BC} = U_3 - U_{AB} = 4,8 \text{ В}; U_{AC} = U_3 = 12 \text{ В.}$$

$$13.42. \text{а) Включить последовательно добавочное сопротивление } R_{\text{доб}} = \frac{U - N n r}{N n} \approx 10^6 \text{ Ом;}$$

$$\text{б) включить параллельно шунт сопротивлением } R_{\text{ш}} = \frac{n N r}{1 - N n} = 0,1 \text{ Ом.}$$

$$13.43. U = \frac{\mathcal{E}}{n+1} = 2 \text{ В.}$$

$$13.45. n = \frac{N R}{U^2} = 13.$$

13.46. Разделить спираль на две равные части, которые соединить параллельно.

$$13.47. \text{а) } t_3 = t_1 + t_2 = 30 \text{ мин; б) } t_3 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 400 \text{ с.}$$

$$13.49. N = \frac{\mathcal{E}^2 R_1 R_2}{[(r + R_3)(R_1 + R_2) + R_1 R_2]^2} \approx 266,6 \text{ Вт.}$$

$$13.50. N = r \left\{ \frac{\mathcal{E}_1 r - (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) R}{r(r + 2R)} \right\}^2 \approx 36 \text{ Вт.} \quad 13.52. \Delta T = \frac{\mathcal{E}^2 t}{4m c r} \approx 31,7 \text{ К.}$$

13.53. В два последовательно соединенных звена, в каждом из которых по два параллельно соединенных сопротивления.

$$13.55. N_R = \eta^2 \frac{\mathcal{E}^2}{R} = 62,5 \text{ Вт.}$$

$$13.56. \text{В } \frac{\eta}{1-\eta} = 4 \text{ раза.}$$

$$13.58. N = \frac{k I t N_A}{\mu} \approx 2,35 \cdot 10^{21}.$$

$$13.59. t = \frac{m}{9kI} \approx 3 \text{ часа.}$$

$$13.60. I_{\text{max}} = \frac{2m}{k\tau} \approx 22,2 \text{ А.}$$

$$13.62. q = \frac{2p V n F}{R T} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ Кл.}$$

$$13.63. Q = \frac{m^2 R}{k^2 t} \approx 120 \text{ кДж.}$$

§14. Магнетизм

$$14.2. B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\sqrt{2(r_1^2 + r_2^2) - d^2}}{r_1 r_2} \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.} \quad 14.3. B = \frac{\mu_0}{2\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

$$14.5. B_2 = \sqrt{B_0^2 - B_1^2} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Тл; } I_2 = \frac{I_1 \sqrt{B_0^2 - B_1^2}}{B_1} = 6 \text{ А.}$$

$$14.6. B = \frac{\mu_0 I (\pi - 1)}{2\pi R} \approx 214 \text{ мкТл.} \quad 14.8. B = \frac{\mu_0 I}{4R} \approx 31,4 \text{ мкТл.}$$

$$14.9. B = \frac{\mu_0 I (\pi + 2)}{4\pi R} \approx 51,4 \text{ мкТл.}$$

$$14.10. B = \mu_0 I N / l \approx 0,01 \text{ Тл; увеличится в 2000 раз.}$$

$$14.12. v = \frac{|e| B}{2\pi m} \approx 2,8 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}.$$

$$14.13. R = \frac{\sin \alpha}{B} \sqrt{\frac{2m \Delta \phi}{|e|}} \approx 5,33 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$14.14. h_2/h_1 = 3.$$

$$14.16. \frac{|e|}{m} = \frac{8U \Delta l^2}{B^2 (l^2 + \Delta l^2)^2} \approx 1,8 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.}$$

$$14.17. \alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{|e| B R}{m v}.$$

$$14.19. T = m g (1 + 2h/l) + q B \sqrt{2g h} \approx 0,27 \text{ Н.}$$

14.20. $h = \frac{2}{3}R - \frac{qBR}{9m} \left\{ \frac{qBR}{mg} + \sqrt{6gR + \frac{q^2R^2B^2}{m^2}} \right\} \approx 33,331$ см, если тело скользит влево (см. рис. 14.44); $h = \frac{2}{3}R - \frac{qBR}{9m} \left\{ \frac{qBR}{mg} - \sqrt{6gR + \frac{q^2R^2B^2}{m^2}} \right\} \approx 33,334$ см, если тело скользит вправо.

$$14.22. B_{\min} = \frac{ma + mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{Il(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} \approx 0,23 \text{ Тл.}$$

$$14.23. \alpha = \operatorname{arctg} \frac{IBl}{mg} = 5,8^\circ.$$

$$14.25. F = \frac{3Ulb}{2R} = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

$$14.26. F = \frac{6UlB}{5R} = 4,32 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

$$14.28. F = lBR = 0,5 \text{ Н.}$$

$$14.30. p_m = I\pi R^2 \approx 39,3 \text{ А}\cdot\text{м}^2.$$

$$14.31. p_m = I\pi R^2 \approx 6,28 \text{ А}\cdot\text{м}^2; M_{\max} = I\pi R^2 B \approx 6,28 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

$$14.33. \sigma_1 = \epsilon_0 \cup B \approx 17,7 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

$$14.34. \Delta\phi = \frac{1}{2}\omega l^2 B \approx 0,125 \text{ В.}$$

$$14.35. \Delta\phi_{\max} = AlB\sqrt{k/m} \approx 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

$$14.37. \Delta\Phi = \frac{Bl^2(9 - 4\sqrt{3})}{16} \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ Вб.}$$

$$14.38. \Delta q = \frac{4\pi r^2 B}{R} \approx 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$14.40. \mathcal{E}_i = \frac{\pi D^2 n (B_2 - B_1)}{4\Delta t} \approx 62,8 \text{ В.}$$

$$14.41. N = \frac{\alpha^2 l^4}{16\pi^2 R} \approx 1,27 \cdot 10^{-8} \text{ Вт.}$$

$$14.43. v_{\max} = \frac{FR}{l^2 B^2}.$$

$$14.44. Q = \frac{B^2 l^2 \cup \operatorname{tg} \alpha}{2r}.$$

$$14.47. I = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{Bl}; v = \frac{mgR \operatorname{tg} \alpha}{B^2 l^2 \cos \alpha}.$$

$$14.48. a = \frac{mg \sin \alpha}{m + CB^2 l^2}.$$

$$14.50. \mathcal{E}_s = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 10^{-3} \text{ В.}$$

$$14.51. \Delta t = \frac{LI}{\mathcal{E}} = 0,1 \text{ с.}$$

$$14.52. q = \frac{ILR_2}{(R_1 + R_2)^2} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

$$14.54. I = \sqrt{\frac{2W}{L}} \approx 0,45 \text{ А.}$$

$$14.55. W = \frac{LI^2}{2} = 0,288 \text{ Дж; } \Phi = \frac{LI}{N} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

$$14.57. I_{\max} = U \sqrt{C/L} \approx 8,9 \text{ А; } \tau = \frac{1}{2}\pi \sqrt{LC} \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

$$14.58. Q = \frac{C(U_0^2 - U^2) - LI^2}{2} = 5,6 \text{ Дж.}$$

$$14.60. v_p = \frac{I_{\max}}{2\pi C U_{\max}} \approx 795,8 \text{ Гц.}$$

$$14.61. \lambda = 2\pi c \sqrt{\epsilon \epsilon_0 S L/d} \approx 485,6 \text{ м, где } c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с — скорость света в вакууме.}$$

$$14.64. C = \frac{l}{2\pi \sqrt{U_D^2 - U_L^2}} \approx 7 \text{ мКФ.}$$

$$14.65. U_{AD} = \sqrt{U_{AB}^2 + U_{BD}^2} = 50 \text{ В.}$$

$$14.66. U_{AD} = \sqrt{U_{AB}^2 + U_{BD}^2} \approx 22,4 \text{ В.}$$

$$14.67. v = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \approx 31,8 \text{ Гц.}$$

$$14.68. Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 5 \text{ Ом; } \cos \varphi = R/Z = 0,6.$$

$$14.69. U_{AB} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = 50 \text{ В; } \cos \varphi = U_R/U = 0,8.$$

$$14.70. \text{В случае б) в } n = 2 \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R^2} \approx 2,2 \text{ раза.}$$

§15. Геометрическая и волнистая оптика

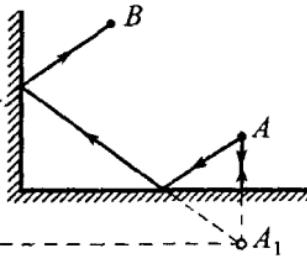


Рис. 7

15.2. Под углом $\beta = 60^\circ$.

15.3. $S = H \operatorname{ctg} \alpha \approx 1 \text{ м.}$

15.5. Рис. 7.

15.6. Рис. 8.

15.8. $d = 2a \sin \alpha = 0,4 \text{ м.}$

15.9. $(n-1)$ изображений.

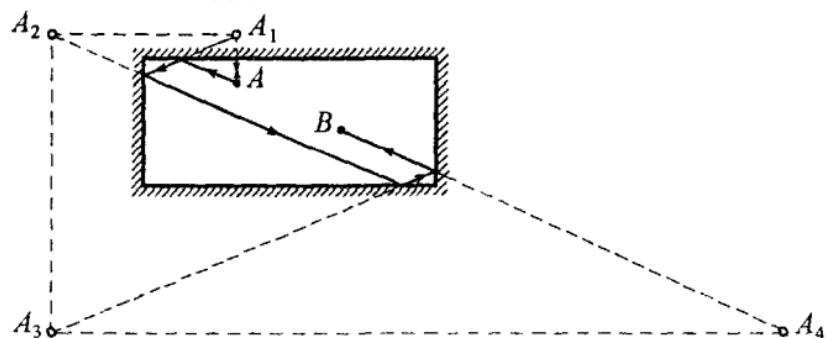


Рис. 8

$$15.11. h_{\min} = \frac{ha}{l+a} \approx 0,86 \text{ м.}$$

$$15.12. h_{\min} = \frac{b l_0}{l+2l_0} \approx 7,5 \text{ см}; l_{\min} = \frac{a l_0}{l+2l_0} \approx 20 \text{ см.}$$

$$15.14. v' = \frac{1}{4} v = 1,25 \text{ м/с.}$$

15.15. Положение «зайчика» и его размеры меняться не будут.

$$15.17. \Delta x = l [\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) - \operatorname{tg} \alpha] \approx 82,5 \text{ см.}$$

$$15.18. v = 4\pi n R = 62,8 \text{ м/с.}$$

$$15.20. d = \frac{fR}{2f+R} \approx 37,3 \text{ см.}$$

$$15.21. l = \frac{aR}{2a+R} = 20 \text{ см.}$$

$$15.22. f = \frac{dR}{2d+R} = 29 \text{ см.}$$

15.23. На расстоянии $d = \frac{fR}{2f+R} \approx 11,7 \text{ см}$ от места, где находилось зеркало.

15.25. На расстоянии $f = 30 \text{ см}$ от второго зеркала.

$$15.26. l \approx 0,67 R \approx 40 \text{ см.}$$

$$15.28. h_2/h_1 = n_1/n_2 \approx 1,6.$$

$$15.29. r = R - \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 5,72 \text{ м.}$$

$$15.31. h_0 = n h = 2,66 \text{ м.}$$

$$15.32. \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$15.34. H = \frac{1}{2} (h + l \sqrt{n^2 - 1}) \approx 7,5 \text{ м.}$$

$$15.35. d_{\min} = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

$$15.38. S = \frac{\pi h^2}{n^2 - 1} \approx 82 \text{ м}^2.$$

$$15.40. \beta_{\max} = \arcsin \sqrt{n^2 - 1} \approx 53^\circ.$$

$$15.41. R \geq d \frac{n}{n-1}.$$

$$15.43. n \leq \frac{\sqrt{1 + 2 \sin \alpha \cos \theta + \sin^2 \alpha}}{\sin \theta}.$$

$$15.45. n = \sqrt{1 + 1/(2\alpha - 1)^2} \approx 1,61.$$

$$15.48. x = r(n + \sqrt{n^2 - 1}) \approx 3,73r.$$

$$15.50. D = \frac{2(n_1 - n_2)}{R n_2} = -0,27 \text{ дптр.}$$

$$15.51. F = \frac{R n_2}{n_1 - n_2} = 261 \text{ см.}$$

$$15.52. D = -\frac{2(n-1)}{R} = -4,8 \text{ дптр.}$$

15.55. Рис. 9.

$$15.44. \alpha \leq \arcsin \frac{\sqrt{n^2 - 1} - 1}{\sqrt{2}} \approx 31,2^\circ.$$

$$15.47. R = l/\sqrt{n^2 - 1} - rn = 2 \text{ см.}$$

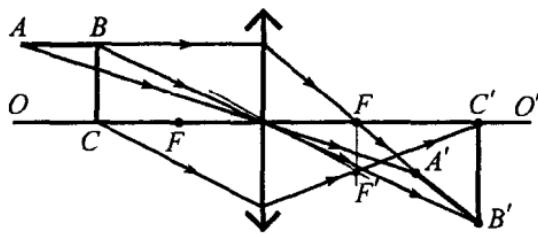


Рис. 9



Рис. 10

15.56. Рис. 10.

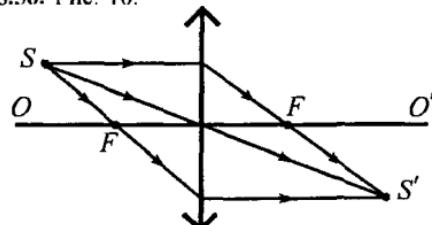


Рис. 11

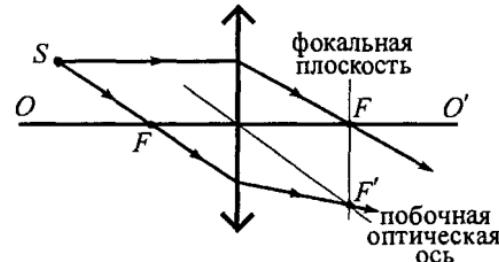


Рис. 12

15.57. Рис. 11.

фокальная
плоскость

побочная
оптическая
ось

фокальная
плоскость

побочная
оптическая
ось

15.58. Рис. 12.

фокальная
плоскость

побочная
оптическая
ось

Рис. 11

Рис. 13

Рис. 14

15.59. Рис. 13.

15.60. Рис. 14.

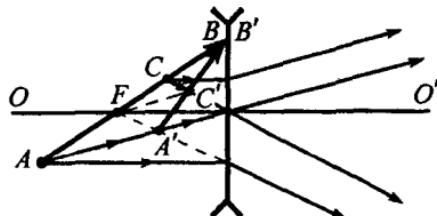


Рис. 15

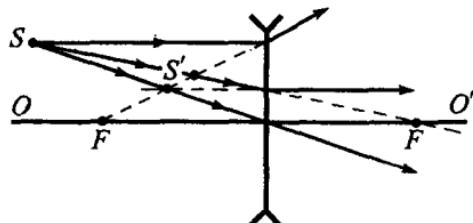


Рис. 16

15.62. Рис. 15.

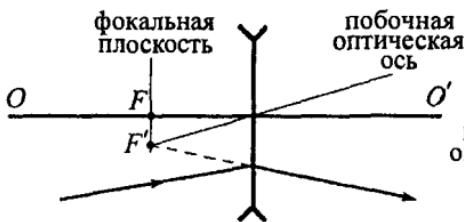


Рис. 17

15.63. Рис. 16.



Рис. 18

15.64. Рис. 17.

$$15.67. \Gamma = \frac{l-d}{d} = 4; D = \frac{l}{d(l-d)} = 3,125 \text{ дптр.}$$

$$15.69. S \approx 17 \text{ см.}$$

15.65. Рис. 18.

$$15.68. d = F \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} = 6 \text{ см.}$$

$$15.70. \text{Уменьшится в } \eta = \frac{F+d}{F-d} = 3 \text{ раза.}$$

15.72. На расстоянии $f = \frac{1}{2}F = 10 \text{ см}$ от линзы.15.73. $F = \frac{IR}{2r} = 17,5 \text{ см}$; линза может быть собирающая или рассеивающая.

$$15.75. \Gamma = \frac{F^2}{(a-F)^2 - \frac{1}{4}l^2}; \Gamma = \frac{F^2}{(a-F)^2}.$$

$$15.77. \frac{S_{\text{треугольника}}}{S_{\text{изображения}}} = \frac{9}{2}.$$

15.80. Увеличивает в 6 раз.

$$15.76. \alpha' = 2 \operatorname{arctg} [\operatorname{tg} \alpha \cdot (1 - d/F)].$$

$$15.79. F = \frac{\Delta d \Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_2 - \Gamma_1} = 6 \text{ см.}$$

$$15.81. F = 57 \text{ см.}$$

$$15.83. l = \sqrt{a^2 - 4aF}.$$

$$15.84. \text{На расстоянии } d_1 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 2Fl}}{2} = 18 \text{ см от одиой или на расстоянии } d_2 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 2Fl}}{2} = 6 \text{ см от другой.}$$

$$15.85. S = \frac{lf}{d} = 1,875 \text{ см.}$$

$$15.86. S = \frac{lf}{F} = 1,2 \text{ см.}$$

$$15.88. F = \frac{lr}{2R} = 0,175 \text{ м}; \text{ линза может быть собирающая или рассеивающая.}$$

15.89. От линзы на расстояние $x = 8 \text{ см}$.

$$15.91. \tau = \frac{h(d-F)}{F} \sqrt{\frac{2}{gH}} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

$$15.92. \tau = \frac{\Delta d}{F(v_1 + v_2) \sin \alpha} = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

$$15.94. \mu = \frac{F v^2}{2(a - F) S g}.$$

$$15.95. y = \frac{F \operatorname{tg} \alpha}{F - d_0} x + \frac{d_0 F}{F - d_0} = 1,54 x + 13,33 \text{ [см].}$$

$$15.97. R = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\omega^2} \frac{F}{a - F}.$$

$$15.100. v = \frac{F h_0 \sqrt{k/m}}{d - F} = 1 \text{ м/с.}$$

$$15.98. a = 2g \frac{l}{l - F} = 98 \text{ м/с}^2.$$

$$15.101. A = \frac{2F^2 P_0 m \omega^2}{(m \omega^2 F)^2 - P_0^2}.$$

$$15.103. \text{В } \eta = \frac{n(l - F) + h}{nF} = 19 \text{ раз.}$$

$$15.104. \Delta f = \frac{(a - d) n + d}{n [(a - d) D - 1] + dD} - \frac{a}{a D - 1} = 0,4 \text{ м.}$$

$$15.107. \Gamma = 3.$$

$$15.108. F = \frac{3}{4} l = 22,5 \text{ см, или } F = \frac{1}{3} l = 10 \text{ см.}$$

15.110. Изображение предмета действительное, прямое и будет находиться на расстоянии

$$f = 2/D_2 = 0,4 \text{ м от второй линзы.}$$

15.111. Изображение источника света мнимое и будет находиться на расстоянии

$$f = \frac{d_1 F_1 F_2 - l F_2 (d_1 - F_1)}{d_1 F_1 - (d_1 - F_1)(F_2 + l)} = 30 \text{ см от рассеивающей линзы.}$$

$$15.112. F' = \frac{1}{2} n F; \quad F'' = \frac{(n_0 - 1)n}{2(n_0 - n)} F.$$

$$15.114. D = \frac{2d - d_0}{2d d_0} = 2 \text{ дптр.}$$

$$15.115. D = -\frac{n}{d} \approx -4,3 \text{ дптр.}$$

$$15.116. d = \frac{1}{2} d_0 = 12,5 \text{ см.}$$

$$15.118. \Gamma = d_0 D + 1 = 13,5.$$

$$15.119. \text{В } \Gamma = \frac{\sqrt{l^2 + 4lF + l}}{\sqrt{l^2 + 4l - l}} \approx 2,46 \text{ раза.}$$

$$15.121. D = \frac{\Gamma F_1}{d_0 (l - F_1)} = 480 \text{ дптр.}$$

$$15.122. \text{Увеличить расстояние между окуляром и объективом на } \Delta l = \frac{F^2}{d - F} \approx 0,36 \text{ см.}$$

$$15.123. \Gamma = 400.$$

$$15.125. \text{а) } \lambda_1 = 0,6 \text{ мкм; б) } \lambda_2 = 0,4 \text{ мкм и } \lambda_3 = 0,72 \text{ мкм.}$$

$$15.126. d = \frac{N l \lambda}{\Delta x} \approx 0,3 \text{ мм.}$$

$$15.128. \Delta h = 0,4 \text{ мм.}$$

$$15.129. \Delta x = \frac{\lambda (a + b)}{2b \alpha}.$$

$$15.130. \Delta x = \frac{\lambda (a + b)}{2a (n - 1) \theta} \approx 0,15 \text{ см.}$$

$$15.132. \lambda_1 = 400 \text{ нм и } \lambda_2 = 600 \text{ нм.}$$

$$15.133. d_{\min} = \frac{\lambda}{4n} \approx 0,1 \text{ мкм.}$$

$$15.135. d = \sqrt{6R \lambda} \approx 5 \text{ мм.}$$

$$15.136. d = \sqrt{6R \lambda/n} \approx 4,3 \text{ мм.}$$

$$15.138. \theta = \arcsin \frac{3N \lambda}{l} \approx 0,5^\circ.$$

$$15.139. \theta \approx 62,5^\circ.$$

$$15.140. \lambda' = \frac{4}{3} \lambda \approx 653 \text{ нм.}$$

15.141. Первых три максимума спектров.

§16. Элементы теории относительности

$$16.3. l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 150 \text{ м.}$$

$$16.4. \alpha' = \arctg \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 49^\circ; \quad l = \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \approx 3,8 \text{ м};$$

$$\frac{l}{l_0} = \cos \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \approx 0,66.$$

$$16.6. v = \frac{l c}{\sqrt{\Delta t_0^2 c^2 + l^2}} \approx 10^8 \text{ м/с.}$$

$$16.7. \Delta t = \frac{\Delta t_0 v^2}{2 c^2} \approx 0,57 \text{ с.}$$

$$16.9. v = \frac{(v_2 - v_1) c^2}{c^2 - v_1 v_2} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$16.10. v_{\text{отн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2^2/c^2} \approx 2,63 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$16.12. \text{На } \eta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\} = 0,25 = 25\%.$$

$$16.13. v = \frac{c \sqrt{n^2 - 1}}{n} \approx 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$16.15. E = 2 m_n c^2 \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ Дж.}$$

$$16.16. Q = \Delta t \Delta m c^2 \approx 1,3 \cdot 10^{30} \text{ Дж}; \quad n = \frac{\Delta m c^2}{N} = 1,7 \cdot 10^{17}.$$

$$16.18. \text{На } \eta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\} = 0,25 = 25\%.$$

$$16.19. \frac{T}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \approx 0,15.$$

$$16.21. \Delta \varphi = \frac{m_0 c^2 (n-1)}{|e|} \approx 4,61 \text{ МВ.}$$

$$16.22. \Delta \varphi = \frac{m_0 c^2 (n-1)}{|e|} \approx 510 \text{ кВ.}$$

$$16.24. T = m_0 c^2 \left\{ \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right\} \approx 6,2 \cdot 10^{-11} \text{ Дж.}$$

16.25. В 2,82 раза.

$$16.27. T = m_0 c^2 \left\{ \frac{m_0 c}{\sqrt{m_0^2 c^2 - |e|^2 B^2 R^2}} - 1 \right\} \approx 5,7 \cdot 10^{-16} \text{ Дж.}$$

$$16.28. t = \frac{2\pi m_0 (T + E_0)}{|e| B E_0} \approx 7 \text{ нс.}$$

§17. Квантовая физика

$$17.2. m = \frac{\sqrt{3 \mu R T}}{c N_A} \approx 2,12 \cdot 10^{-32} \text{ кг.}$$

$$17.3. v = \sqrt{\frac{2 h c}{\lambda m}} \approx 9,16 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

$$17.4. T = \frac{h^2}{2 m \lambda^2} \approx 4,9 \cdot 10^{-25} \text{ Дж.}$$

$$17.6. p' = \sqrt{m^2 c^2 - p(p - 2m c)} - m c \approx 3,9 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

$$17.7. T = \frac{\eta \epsilon}{1 + \eta} \approx 1,67 \cdot 10^{-17} \text{ Дж.}$$

$$17.9. k = \frac{\eta N \lambda}{n h c} \approx 1,4 \cdot 10^{16}.$$

$$17.10. S_{\max} = \frac{d}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda N t}{n c h}} \approx 4,9 \cdot 10^8 \text{ м.}$$

$$17.12. n = \frac{h c}{\lambda \epsilon} \approx 1,5.$$

$$17.13. p = \frac{h}{n \lambda} \approx 1,1 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

$$17.15. \text{В } \eta = \frac{\sqrt{2m(p c - A)}}{p} \approx 350 \text{ раз.}$$

$$17.16. A = \frac{h c}{3} \frac{4\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \approx 4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 2,5 \text{ эВ.}$$

$$17.18. \Phi_{\max} = \frac{h c / \lambda - A}{|e|} \approx 1,85 \text{ В.}$$

17.19. $A = h v (1 - \eta/\chi) \approx 3,97 \cdot 10^{-19}$ Дж $\approx 2,48$ эВ.

$$17.21. S_{\max} = \frac{h c (\lambda_0 - \lambda)}{|e| E \lambda_0 \lambda} \approx 1,5 \text{ см.}$$

$$17.24. N_{\min} = \frac{m g c}{2} = 1,47 \cdot 10^{11} \text{ Вт.}$$

$$17.26. p = \frac{(1+k-n)N}{c} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ Па.}$$

$$17.22. \Delta t = \frac{(h c / \lambda - A) S \varepsilon_0}{n |e|^2 d} \approx 106,4 \text{ с.}$$

$$17.25. p = \frac{(1+\rho) J}{c} \cos^2 \alpha \approx 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ Па.}$$

§18. Физика атома

$$18.2. F = \frac{\pi m^2 |e|^6}{4 \varepsilon_0^3 h^4} \frac{1}{n^4} \approx 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

$$18.3. v = \frac{m |e|^4}{32 \varepsilon_0^2 h^3} \approx 8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-1}; \text{ увеличится в 8 раз.}$$

$$18.5. E_1 = -\frac{m |e|^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \approx -2,17 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \approx -13,6 \text{ эВ.}$$

$$18.6. T = \frac{m |e|^4}{72 \varepsilon_0^2 h^2} \approx 2,41 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 1,5 \text{ эВ.}$$

$$18.8. \text{Уменьшился в } \eta = \frac{\lambda R_v}{\lambda R - 4c} \approx 2,25 \text{ раза.} \quad 18.9. v_{\max} = \sqrt{\frac{3/2 h R_v - 2A}{m}} \approx 8,4 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

$$18.10. \lambda = \frac{16c}{27R_v} \approx 5,4 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

$$18.12. \varepsilon_{\min} = \frac{24}{25} h R_v \approx 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \approx 13,07 \text{ эВ.}$$

$$18.13. \lambda_{3-2} = \frac{36c}{5R_v} \approx 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м, } \lambda_{2-1} = \frac{4c}{3R_v} \approx 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ м, } \lambda_{3-1} = \frac{9c}{8R_v} \approx 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

$$18.15. \lambda = \frac{5}{32} \lambda_{\max} = 102,5 \text{ нм.}$$

$$18.16. \lambda_{\min} = \frac{3}{16} \lambda \approx 909,4 \text{ нм.}$$

$$18.18. n = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A + p_1 c}{h R_v}}} \approx 4.$$

$$18.19. S_{\max} = \frac{h (c/\lambda - R_v)}{|e| E} \approx 1,9 \text{ см.}$$

$$18.20. r = \frac{1}{|e| B} \sqrt{\frac{2 h c m}{\lambda}} - \frac{h m R_v}{2} \approx 2,2 \text{ мм.}$$

$$18.22. v = \frac{h}{m \lambda} \approx 0,816 \text{ м/с.}$$

$$18.23. v = \frac{3 h R_v}{4 m c} \approx 3,26 \text{ м/с.}$$

$$18.25. v = \frac{R_v}{4} + \frac{m v^2}{2 h} \approx 1,07 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-1}.$$

$$18.26. v = \frac{3 E_{\text{ион}}}{4 m c} \approx 4,34 \text{ м/с.}$$

§19. Физика атомного ядра

19.2. $^{226}_{88}\text{Ra}$: 226 нуклонов, 88 протонов, 138 нейтронов; $^{25}_{12}\text{Mg}$: 25 нуклонов, 12 протонов, 13 нейтронов; $^{63}_{29}\text{Cu}$: 63 нуклона, 29 протонов, 34 нейтрона; $^{238}_{92}\text{U}$: 238 нуклонов, 92 протона, 146 нейтронов.

19.3. В 6,2 раза.

$$19.4. \text{a) } {}_{13}^{27}\text{Al} + n \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_{11}^{24}\text{Na}; \text{ б) } {}_9^{19}\text{F} + p \rightarrow {}_8^{16}\text{O} + {}_2^4\text{He}; \text{ в) } {}_{25}^{55}\text{Mn} + p \rightarrow {}_{26}^{55}\text{Fe} + n;$$

$$\text{г) } {}_3^7\text{Li} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_5^{10}\text{B} + n; \text{ д) } {}_7^{14}\text{N} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_8^{17}\text{O} + p.$$

$$19.5. {}_{13}^{27}\text{Al} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_{15}^{30}\text{P} + n; \text{ ядро фосфора.}$$

$$19.6. \text{Полоний } {}_{84}^{216}\text{Po}.$$

19.8. Более устойчиво ядро лития. $E_{\text{cb}}{}^7_{\text{Li}} = 931,5 \cdot (3 m_1^{\text{H}} + 4 m_n - m_3^{\text{Li}}) \approx 39,27 \text{ МэВ};$

$$E_{\text{cb}}{}^4_{\text{He}} = 931,5 \cdot (2 m_1^{\text{H}} + 2 m_n - m_2^{\text{He}}) \approx 28,32 \text{ МэВ.}$$

19.9. $E_{\text{cb}}{}^4_{\text{He}} = c^2 (2m_p + 2m_n - m_2^{\text{He}}) \approx 4,54 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}; \frac{2m_p + 2m_n - m_2^{\text{He}}}{m_2^{\text{He}}} \cdot 100\% \approx 0,76\%.$

19.10. $\varepsilon_{\text{cb}} \text{ уд } {}^4_{\text{He}} = \frac{931,5}{12} \cdot (6 m_1^{\text{H}} + 6 m_n - m_6^{12\text{C}}) \approx 6,82 \text{ МэВ/нуклон.}$

19.12. $E_{\text{min}} = 931,5 \cdot (m_{13}^{\text{N}} + m_n - 3 m_{7}^{14\text{N}}) \approx 10,56 \text{ МэВ.}$

19.13. ${}_1^2\text{H} + {}_1^3\text{H} \rightarrow {}_2^4\text{He} + n; Q = 931,5 \cdot (m_1^{\text{H}} + m_3^{\text{H}} - m_2^{\text{He}} - m_n) \approx 17,57 \text{ МэВ.}$

19.14. $m = \frac{N t}{\eta Q \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 235 \cdot 1,6724 \cdot 10^{-27} \approx 0,031 \text{ кг} = 31 \text{ г.}$

19.16. $T_p = 931,5 (m_7^{\text{Be}} + m_n - m_3^{\text{Li}} - m_p) \frac{m_7^{\text{Be}}}{m_7^{\text{Be}} - m_p} \approx 1,9 \text{ МэВ.}$

19.17. ${}^7_{\text{Li}} + p \rightarrow 2 \cdot {}_2^4\text{He}; \frac{T_p}{T} = 2 \frac{m}{m_p} \cos^2(\theta/2) \approx 0,06.$

19.18. Поглощается энергия $Q = E_{\text{n}} \frac{m_{11}^{11\text{B}}}{m_{11}^{11\text{B}} + m_p} \approx 3,66 \text{ МэВ.}$

19.20. $m_{82}^{207}\text{Pb} = m \frac{207}{210} \left\{ 1 - 2^{-\nu T} \right\} \approx 2,9 \cdot 10^{-7} \text{ кг.} \quad 19.21. Q = \frac{3}{4} N_0 (m_1 - m_2) c^2.$

19.22. $N = \frac{m}{\mu} N_A \left\{ 1 - 2^{-\Delta \nu T} \right\} \approx 9,38 \cdot 10^{18} \text{ атомов; } q = N |e| = \frac{m}{\mu} N_A \left\{ 1 - 2^{-\Delta \nu T} \right\} |e| \approx 1,5 \text{ Кл.}$

19.23. $M = \frac{931,5 \cdot m (m_1 - m_2 - m_3) \left\{ 1 - 2^{-\nu T} \right\}}{m_1 [r + c (100^\circ - \theta_0)]} \approx 1,63 \cdot 10^3 \text{ кг.}$

Литература

1. Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения. – 3-е изд., перераб. и испр. – М.: Просвещение, 1974. – 430 с.
2. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В. и др. Задачи по физике для поступающих в вузы. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1987. – 465 с.
3. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика в примерах и задачах. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
4. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика для поступающих в вузы. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1991. – 640 с.
5. Воробьев И.И., Зубков П.И., Кутузова Г.А. и др. Задачи по физике. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
6. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. – 5-е изд. – М.: Высш. школа, 1983. – 351 с.
7. Демков В.П., Третьякова О.Н. В помощь поступающим в вузы. Физика. Механика. – 3-е изд., перераб. – М.: Изд-во МАИ, 2000. – 420 с.
8. Демков В.П., Третьякова О.Н. В помощь поступающим в вузы. Физика. Молекулярная физика. Тепловые явления. Электричество и магнетизм. – 3-е изд., перераб. – М.: Изд-во МАИ, 2000. – 440 с.
9. Демков В.П., Третьякова О.Н. В помощь поступающим в вузы. Физика. Геометрическая и волновая оптика. Теория относительности. Квантовая физика. Физика атома. Физика атомного ядра. – 3-е изд., перераб. – М.: Изд-во МАИ, 2000. – 216 с.
10. Демков В.П., Студников Е.Л., Студникова И.Н. Задачи по физике вступительных экзаменов в МАИ в 1995 году. – М.: Изд-во МАИ, 1995. – 48 с.
11. Демков В.П., Кременцова Ю.Н., Студников Е.Л., Суров О.И. Задачи по физике вступительных экзаменов в МАИ в 1996 году. – М.: Изд-во МАИ, 1996. – 80 с.
12. Демков В.П., Студников Е.Л., Студникова И.Н. Варианты по физике вступительных экзаменов в МАИ в 1998 году. – М.: Изд-во МАИ, 1998. – 136 с.
13. Демков В.П., Студников Е.Л., Студникова И.Н. Варианты по физике вступительных экзаменов в МАИ в 1999 году. – М.: Изд-во МАИ, 1999. – 116 с.
14. Демков В.П., Студников Е.Л., Студникова И.Н. Варианты по физике вступительных экзаменов в МАИ в 2000 году. – М.: Изд-во МАИ, 2000. – 148 с.
15. Меледни Г.В. Физика в задачах. Экзаменационные задачи с решениями. – М.: Наука, 1985. – 208 с.