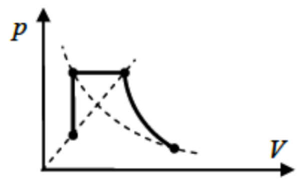
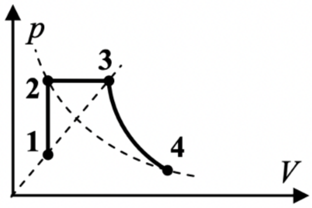
Задача 68. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Постоянное количество идеального газа участвует в процессе, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление–объём. Известно, что при изохорном нагревании газ получает количество теплоты, равное $Q = 60$ кДж, а после изобарного расширения температура газа становится в $n = 9$ раз больше наименьшей (для всего процесса). Найдите работу газа при адиабатическом расширении. Линии, показанные пунктиром — прямая, проходящая через начало координат, и изотерма.



$A_x = Q\sqrt{n} = 180$ кДж

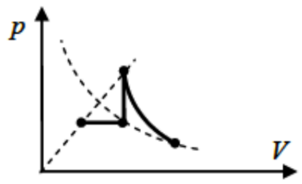
Решение задачи: Занумеруем точки на диаграмме так, как показано на рисунке. При адиабатическом расширении $Q_{34} = A_{34} + \Delta U_{34} = 0 \Rightarrow A_{34} = -\Delta U_{34}$. Из диаграммы видно, что $T_4 - T_3 = -(T_3 - T_2)$, и поэтому $A_{34} = \Delta U_{23} = \dfrac{i}{2}\nu R(T_3 - T_2)$. С другой стороны, теплота, полученная газом при изохорном нагревании $Q = \dfrac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$.



С учетом того, что линия 1-3 проходит через начало координат, $\dfrac{V_3}{V_1} = \dfrac{p_3}{p_1} \equiv k$, поэтому $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{T_3}{T_2} = k$. Кроме того, ясно, что минимальная температура в процессе – это T_1. Поэтому $\dfrac{T_3}{T_1} = n = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{n}$. Таким образом, $\dfrac{A_{34}}{Q} = \dfrac{T_3 - T_2}{T_2 - T_1} = \dfrac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} = \sqrt{n}$, и $A_{34} = \sqrt{n}Q = 180$ кДж.

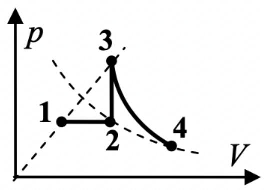
ОТВЕТ: $A_{34} = \sqrt{n}Q = 180$ **кДж. Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задача 69. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2016, 10–11*) Постоянное количество идеального газа участвует в процессе, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление–объём. Известно, что при изобарном нагревании газ получает количество теплоты, равное $Q = 75$ кДж, а в ходе изохорного нагревания температура газа увеличивается в $n = 2$ раза. Найдите работу газа при адиабатическом расширении. Линии, показанные пунктиром — прямая, проходящая через начало координат, и изотерма.



$A_{34} = \frac{i}{i+2} nQ$

Решение задачи: Занумеруем точки на диаграмме так, как показано на рисунке. При адиабатическом расширении $Q_{34} = A_{34} + \Delta U_{34} = 0 \Rightarrow A_{34} = -\Delta U_{34}$. Из диаграммы видно, что $T_4 - T_3 = -(T_3 - T_2)$, следовательно $A_{34} = \Delta U_{23} = \nu c_V (T_3 - T_2)$. С другой стороны, теплота, полученная газом при изобарном нагревании $Q = Q_{12} = \nu(c_V + R)(T_2 - T_1)$. С учетом того, что линия 1-3 проходит через начало координат, $\dfrac{V_3}{V_1} = \dfrac{p_3}{p_1}$, и поэтому $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{T_3}{T_2} = n$. Значит, $A_{34} = \nu c_V n(T_2 - T_1) = n\dfrac{c_V}{c_V + R}Q$. Если ввести обозначение i – число степеней свободы молекулы газа ($i = 3,5,6$ для одноатомного, двухатомного и многоатомного идеального газа соответственно), то $c_V = \dfrac{i}{2}R$, и тогда $A_{34} = n\dfrac{i}{i+2}Q$, то есть $A_{34} = 90$ кДж для одноатомного идеального газа, $A_{34} \approx 107{,}1$ кДж для двухатомного идеального газа, $A_{34} = 112{,}5$ кДж для многоатомного идеального газа.



ОТВЕТ: $A_{34} = n\dfrac{i}{i+2}Q = \begin{cases} 90\text{ кДж} & \text{для одноатомного газа} \\ 107{,}1\text{ кДж} & \text{для двухатомного газа} \\ 112{,}5\text{ кДж} & \text{для многоатомного газа} \end{cases}$.

Задача 70. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Давление одного моля одноатомного идеального газа изохорически изменили от начального до некоторого значения. Затем изобарически уменьшили объём газа в $n = 3$ раза. После этого газ изохорически перевели в конечное состояние. Зная, что температура газа в конечном состоянии в $k = 1{,}2$ раза превышает его температуру в начальном состоянии и что полное количество теплоты, которым обменялся газ с внешними телами, равно нулю, найти отношение максимального давления газа к минимальному в этом процессе.

$\boxed{\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{2k(n-1)}{3(k-1)} = 8}$

Решение задачи: Пусть p_0 и V_0 - начальные значения давления и объема, p_1 - промежуточное значение давления, а p_2 - конечное. В соответствие с уравнением состояния и данными задачи:

$$\left\{\begin{aligned} V_2 = V_1 = \frac{V_0}{n} \\ p_2V_2 = RT_2 = kRT_0 = k \cdot p_0V_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_2 = kn \cdot p_0 > p_0 .$$

Кроме того, поскольку во всем процессе работа совершается только при изобарическом сжатии $A = p_1\left(\frac{V_0}{n} - V_0\right) = -\frac{n-1}{n} p_1V_0$, а изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_0V_0) = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0$. Значит, в соответствии с первым началом термодинамики $Q = -p_1\frac{n-1}{n}V_0 + \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0 = 0$, то есть $p_1 = \frac{3n}{2(n-1)}(k-1)p_0 < p_0$.

Значит, $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2k(n-1)}{3(k-1)} = 8$.

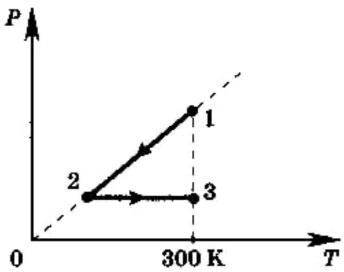
Ответ: $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{2k(n-1)}{3(k-1)} = 8$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задача 71. (*«Росатом», 2012, 11*) ν молей одноатомного идеального газа, имеющего абсолютную температуру T, сначала охлаждаются изохорически так, что давление газа уменьшается в 2 раза. Затем газ нагревается изобарически до температуры, в 3 раза превосходящей первоначальную. Определить количество тепла, полученное газом во всем этом процессе.

$\boxed{Q = \frac{11}{2}\nu RT}$

Аналогичные задачи:

9. Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль сначала охладили, а затем нагрели до первоначальной температуры 300 К, увеличив объем газа в 3 раза (см. рисунок). Какое количество теплоты отдал газ на участке 1—2?



Образец возможного решения (рисунок не обязателен)

Первый закон термодинамики $\Delta U = Q + A_{вн.с.}$.

Учитывая, что на участке 1 – 2 : $A_{12} = 0$, получим $Q_{12} = -\Delta U_{12}$.

Формула расчета изменения внутренней энергии:

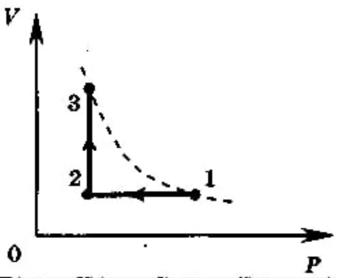
$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1).$$

Применив закон Гей-Люссака для состояний 2 и 3: $\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2}$ и получим соотношение $T_2 = \frac{T_1}{3}$.

Проведя преобразования, получим формулу расчета количества теплоты и числовое значение: $Q_{12} = \nu RT_1 = 2{,}5$ кДж.

Ответ: $Q_{12} = 2{,}5$ кДж.

10. Идеальный одноатомный газ в количестве 10 моль охладили, уменьшив давление в 3 раза. Затем газ нагрели до первоначальной температуры 300 К (см. рисунок). Какое количество теплоты сообщено газу на участке 2—3?



Образец возможного решения (рисунок не обязателен)

Первый закон термодинамики, формулы расчета изменения внутренней энергии и работы газа в изобарном процессе:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23}.$$

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{23}. \quad A_{23} = \nu R\Delta T_{23}.$$

Следовательно, формула расчета количества теплоты: $Q_{23} = \frac{5}{2}\nu R\Delta T_{23}$, в которой учтено, что $T_3 = T_1$. Применив закон Шарля для состояний 1 и 2: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$, получим соотношение $T_2 = \frac{T_1}{3}$.

Проведя преобразования, получим формулу расчета количества теплоты и числовое значение: $\Delta T_{23} = \frac{2}{3}T_1$. $Q_{23} = \frac{5}{3}\nu RT_1 = 41{,}6$ кДж.

Ответ: $Q_{23} = 41{,}6$ кДж.

Задача 72. (*«Курчатов», 2016, 11*) Один моль жидкой воды при температуре $t_1 = 0\,^\circ$C находится в длинном горизонтальном цилиндре, закрытом поршнем. Эту воду можно перевести в пар при температуре $t_2 = 100\,^\circ$C двумя путями. Первый путь: сначала этому количеству воды предоставляют при $0\,^\circ$C такой объём, что вся вода переходит в пар, то есть проводят изотермическое расширение, а затем проводят изохорный процесс, при котором водяной пар нагревают до $100\,^\circ$C. Второй путь: сначала проводят изохорное нагревание воды до $100\,^\circ$C, а затем изотермически увеличивают объём до тех пор, пока вся вода не превратится в пар. Найдите количества теплоты, которые нужно подвести к воде в первом и во втором случае.

При решении задачи можно считать, что молярная теплота испарения воды при атмосферном давлении равна $L = 40{,}7$ кДж/моль и не зависит от температуры. Молярная теплоёмкость жидкой воды $C = 75{,}7$ Дж/(моль · K). Давление насыщенного пара воды при $0\,^\circ$C равно $p_1 = 0{,}6$ кПа, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · K).

$Q_1 = 47{,}4$ кДж; $Q_2 = 48{,}3$ кДж

Возможное решение

Согласно первому началу термодинамики количество подведённой теплоты равно сумме изменения внутренней энергии и совершённой системой работы

$$Q = \Delta U + A.$$

Изменение внутренней энергии ΔU воды в этих двух разных процессах перехода в пар одинаково, так как в обоих случаях в конце получается 1 моль водяного пара при температуре 100 °C. Отличаются только работы, совершаемые при изотермическом расширении, поэтому

$$Q_2 - Q_1 = A_2 - A_1.$$

Объём водяного пара во много раз больше объёма, занимаемого этим же количеством воды в жидком состоянии, поэтому работа, совершаемая паром при изотермическом расширении, равна

$$A_i = P_i \Delta V_i \approx \nu R T_i.$$

Рассчитаем количество теплоты, подводимое к воде во втором случае:

$$Q_2 = (C \cdot (t_2 - t_1) + L) \cdot 1 \text{ моль} \approx 48{,}3 \text{ кДж}$$

(теплота испарения включает в себя и изменение внутренней энергии и работу, которую совершает пар при увеличении объёма). Количество теплоты, подведённой в первом случае:

$$Q_1 = Q_2 - A_2 + A_1 \approx Q_2 - \nu R T_2 + \nu R T_1 = 47{,}4 \text{ кДж}.$$

Ответы. $Q_1 = 47{,}4$ кДж, $Q_2 = 48{,}3$ кДж.

http://olimpiadakurchatov.ru/2016/kurchatov_phys_11_sol.pdf

Задача 73. (*«Курчатов», 2019, 11*) Длинный горизонтальный цилиндр с одной стороны наглухо закрыт, а с другой открыт в окружающую среду. В цилиндре может двигаться без трения тяжёлый поршень. Между поршнем и закрытым торцом цилиндра находится идеальный одноатомный газ, занимающий объём $V_0 = 1{,}5$ л при внешнем давлении P_0. Внешнее давление мгновенно уменьшают до значения $P_1 = (1-\alpha)P_0$, где $\alpha = 0{,}2$, и поддерживают его постоянным до полной остановки поршня и перехода газа в новое состояние равновесия с давлением P_1. Далее внешнее давление скачком увеличивают до начального значения P_0 и поддерживают его постоянным до перехода газа в конечное равновесное состояние, в котором газ занимает некоторый объём $V_\text{К}$ при давлении P_0. Считая, что стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, найдите разность объёмов $\Delta V = V_\text{К} - V_0$. Числовой ответ выразите в кубических сантиметрах.

$\Delta V = \frac{6\alpha^2 V_0}{25(1-\alpha)} = 18$ см^3

Возможное решение

Рассмотрим переход газа из начального состояния 0 в промежуточное равновесное состояние 1. Параметры газа, относящиеся к этим состояниям, будем отмечать индексами 0 и 1. Запишем первое начало термодинамики:

$$0 = \frac{3}{2}\nu R T_1 - \frac{3}{2}\nu R T_0 + A_{01}\,,$$

R — универсальная газовая постоянная, ν – число молей газа, A_{01} — работа силы давления газа на поршень. Далее рассмотрим баланс энергии для поршня. Так как его механическая энергия не изменилась, то

$$0 = A_{01} + A'_{01}\,.$$

Здесь A'_{01} — работа силы внешнего давления:

$$A'_{01} = -P_1\,(\,V_1 - V_0\,)\,.$$

Эта работа отрицательна, поскольку сила внешнего давления действует против направления движения поршня при расширении газа. Используя также уравнение состояния газа

$$P_0V_0 = \nu R T_0\,, \quad P_1V_1 = \nu R T_1\,,$$

находим объём V_1:

$$A_{01} = -A'_{01} = P_1\,(\,V_1 - V_0\,)\,,$$

$$0 = \frac{3}{2}P_1V_1 - \frac{3}{2}P_0V_0 + P_1\,(\,V_1 - V_0\,) \quad\longrightarrow\quad 0 = 3P_1V_1 - 3P_0V_0 + 2P_1V_1 - 2P_1V_0\,,$$

$$5P_1V_1 = 3P_0V_0 + 2P_1V_0 \quad\longrightarrow\quad V_1 = \frac{V_0\,(\,3P_0 + 2P_1\,)}{5P_1} = \frac{V_0\,(\,5 - 2\alpha\,)}{5\,(\,1-\alpha\,)}\,.$$

Рассмотрим теперь переход газа из состояния 1 в конечное состояние. Параметры газа, относящиеся к конечному состоянию, будем отмечать индексом K. Запишем первое начало термодинамики:

$$0 = \frac{3}{2}\nu R T_K - \frac{3}{2}\nu R T_1 + A_{1K}\,,$$

A_{1K} — работа силы давления газа на поршень. Так как механическая энергия поршня не изменилась, то

$$0 = A_{1K} + A'_{1K}\,,$$

A'_{1K} — работа силы внешнего давления:

$$A'_{1K} = P_0\,(\,V_1 - V_K\,)\,.$$

В данном случае работа положительна, поскольку сила внешнего давления действует по направлению движения поршня при сжатии газа. Используя также соотношение

$$P_0 V_K = \nu R T_K$$

и полученное выше значение V_1, находим объём V_K:

$$A_{1K} = -A'_{1K} = -P_0\,(\,V_1 - V_K\,)\,,$$

$$0 = \frac{3}{2}\,P_0 V_K - \frac{3}{2}\,P_1 V_1 - P_0\,(\,V_1 - V_K\,) \quad\longrightarrow\quad 0 = 3P_0 V_K - 3P_1 V_1 - 2P_0 V_1 + 2P_0 V_K\,,$$

$$5P_0 V_K = 3P_1 V_1 + 2P_0 V_1 \quad\longrightarrow\quad V_K = \frac{V_1\,(\,3P_1 + 2P_0\,)}{5P_0} = \frac{V_0\,(\,5 - 2\alpha\,)\,(\,5 - 3\alpha\,)}{25\,(\,1 - \alpha\,)}\,.$$

Разность конечного и начального объёмов равна:

$$\Delta V = V_K - V_0 = V_0\,\left[\,\frac{(\,5 - 2\alpha\,)\,(\,5 - 3\alpha\,)}{25\,(\,1 - \alpha\,)} - 1\,\right] = \frac{6\,\alpha^2\,V_0}{25\,(\,1 - \alpha\,)} = 18\ \text{см}^3$$

Ответ:

$$\Delta V = \frac{6\,\alpha^2\,V_0}{25\,(\,1 - \alpha\,)} = 18\ \text{см}^3$$

http://olimpiadakurchatov.ru/2019/final/kurchatov-2019-final-phys-11-sol.pdf