Сила Ампера

Задачи из mathus

Задачи 8, 29. Из Кванта

На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая тонкая жесткая квадратная рамка из однородного куска провода со стороной a. Рамка находится в магнитном поле длинного горизонтального провода с током, расположенного симметрично над рамкой (рис. 5). Масса рамки m, индукиия магнитного поля у боковых сторон рамки 1 и 2 равна B, коэффициент трения скольжение о поверхность стола $\mu (\mu < 1/3)$.
Какой ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала скользить по столу, не отрываясь от него?

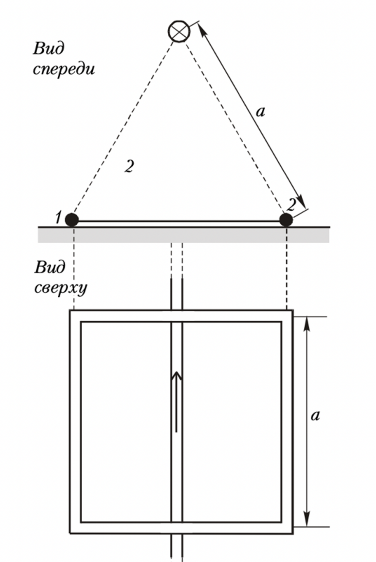


Рис. 5

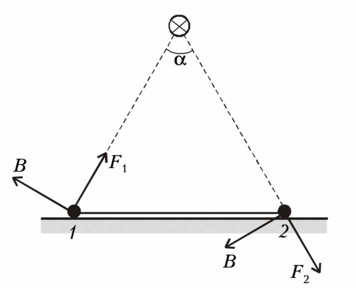


Рис. 6

Решение:

Пусть по квадратной рамке течет ток I по часовой стрелке, если смотреть сверху. На боковые стороны рамки будут действовать силы Ампера $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис.6), причем

$$F_1 = F_2 = IaB.$$

В общем случае при увеличении тока через рамку возможны два варианта: либо рамка начнет приподниматься относительно стороны 2, либо она начнет скользить без отрыва от стола. Предположим, что коэффициент трения скольжения таков, что рамка может приподниматься раньше, чем наступит скольжение. Запишем условие подъема стороны 1:

$$F_1 a\frac{\sqrt{3}}{2} - mg\frac{a}{2} \geq 0.$$

Отсюда следует, что ток, при котором происходит подъем, подчиняется условию

$$I_\text{п} \geq \frac{mg}{\sqrt{3}aB}$$

Теперь рассмотрим случай, когда раньше наступит скольжение рамки. Результирующая сила вдоль горизонтальной оси равна

$$F_2 \cos\alpha + F_1 \cos\alpha = IaB \cdot 2\cos\alpha.$$

Реакция опоры равна весу рамки mg. Запишем условие скольжения:

$$2IaB\cos\alpha \geq \mu mg.$$

Отсюда для тока, соответствующего скольжению, получаем

$$I_с \geq \frac{\mu mg}{aB} = \frac{mg}{3aB}.$$

Сравнивая токи $I_п$ и $I_{ск}$, мы убеждаемся, что скольжение рамки наступит раньше при токах

$$I_с \geq \frac{\mu mg}{aB}.$$

Задача 9.

Жёсткое проволочное кольцо радиуса R находится в однородном магнитном поле B, перпендикулярном плоскости кольца. По кольцу течёт постоянный ток I. Найдите силу упругости, возникающую в проволоке. Магнитное взаимодействие различных участков проволоки не учитывать.

Решение:

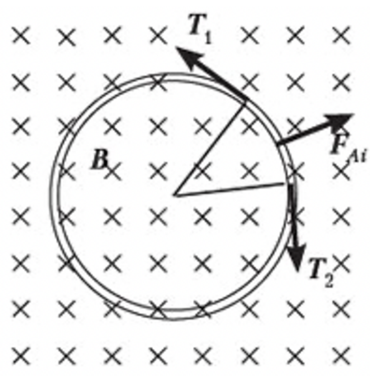
$$2T\sin\frac{\alpha}{2} = F_{Ai}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} \to \frac{\alpha}{2}$$

$$T \cdot \alpha = B \cdot I \cdot l$$

$$T \cdot \alpha = B \cdot I \cdot \alpha \cdot R$$

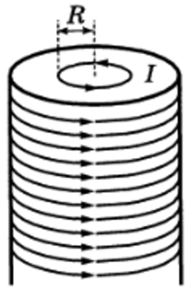
$$T = B \cdot I \cdot R$$



Ответ: $T = BIR$

Задача 11.

Внутри длинного соленоида вдали от его торцов магнитное поле однородно и его индукция равна B. Один из торцов соленоида закрывают картонным диском, на котором соосно закрепляют небольшой круговой виток из проволоки так, что центр витка совпадает с осью соленида. Найдите силу натяжения проволоки витка, если его радиус равен R, а сила тока протекающего по нему равна I.



Решение:

Очевидно, что поле вблизи торца соленоида неоднородно. Но если мысленно к этому соленоиду «приставить» точно такой же соленоид, то из соображений симметрии ясно, что аксиальные составляющие магнитных полей обоих соленоидов одинаковы и равны $\frac{B}{2}$, а радиальные взаимно компенсируют друг друга. Возвратимся к исходной задаче. Сила, действующая со стороны составляющей магнитного поля, лежащей в плоскости витка, будет прижимать виток к картону, а сила, обусловленная аксиальной составляющей поля, будет растягивать виток. Найдем условие равновесия витка. Для этого разделим его на две половинки. Сила Ампера, действующая на элемент витка dl, равна $dF = \frac{B}{2} Idl$ (рис. 93), а ее проекция на ось x

$$dF_x = dF \sin\varphi = I\frac{B}{2}\Delta l \sin\varphi = I\frac{B}{2}dy$$

Таким образом, полная сила, действующая на полукольцо, есть $F = \frac{IB}{2} \cdot 2R = IBR$. Эта сила уравновешивается силой натяжения витка в точках A и B. Следовательно,

$$2T = IBR \text{ и } T = \frac{IBR}{2}.$$

Задача 23.

Треугольная проволочная рамка с током может вращаться вокруг горизонтальной оси OO', проходящей через вершину треугольника. Масса единицы длины проволоки ρ, ток в рамке I. Рамка находится в магнитном поле индукции B, направленном вдоль поля тяжести. Определите угол отклонения плоскости треугольника от вертикали.

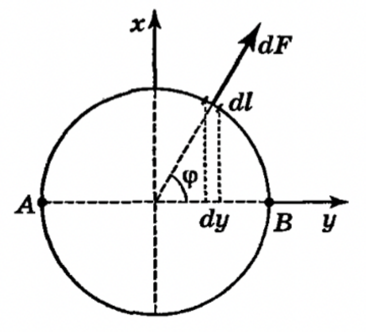
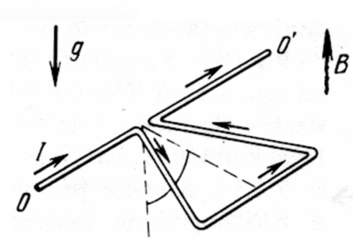
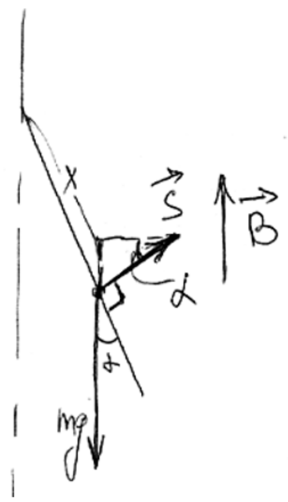


Рис. 93

Решение:



Здесь надо приравнять моменты силы тяжести и сил Ампера, возникающих в рамке с током в магнитном поле.
Сила тяжести приложена к центру масс рамки и направлена вниз. Центр масс находится в точке пересечения медиан, т.е. на расстоянии 2/3 высоты от точки вращения рамки. Тогда, вводя длину стороны треугольника l, получаем $x = \frac{l\sqrt{5}}{3}$ и для момента силы тяжести



$$M_G = -xgm \cdot \sin\alpha = -l^2\rho g\sqrt{5} \cdot \sin\alpha.$$

С другой стороны момент сил Ампера равен $M_B = IS \times B$, т.е. в нашем случае

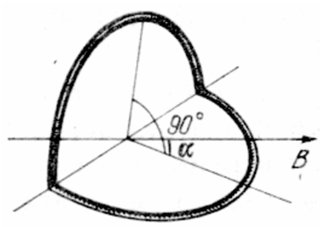
$$M_B = ISB \cdot \cos\alpha = \frac{Il^2\sqrt{5}}{4} B\cos\alpha.$$

Сумма моментов должна быть равна нулю. Приравнивая получившиеся выражения, получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{IB}{4g\rho}.$$

Задача 25.

Виток радиуса R согнули по диаметру под прямым углом и поместили в однородное магнитное иоле индукции B так, что одна из плоскостей витка оказалась расположенной под углом α, другая — под углом $\pi/2 - \alpha$ к направлению индукции B.



Решение:

Ток в витке I. Определите момент сил, действующих на виток. Решение. Как ни странно, задача решается просто «в лоб». Каждую полуокружность можно считать как отдельную рамку. Полный момент сил это векторная сумма моментов сил, действующих на каждую полуокружность. При этом направление вектора плоскости будем определять по «правилу буравчика» от направления вращения тока. В результате получаем:

$$M = IS_1 B\sin\alpha - IS_2 B\cos\alpha = \frac{\pi R^2}{2} IB(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

Задача 26.

Катушка, по виткам которой течет ток, вертикально стоит на плоскости. Общий вес катушки P, число витков n, радиус R, ток в витках I. При какой индукции однородного магнитного поля, направленного горизонтально, катушка под действием этого поля опрокинется?

Решение:

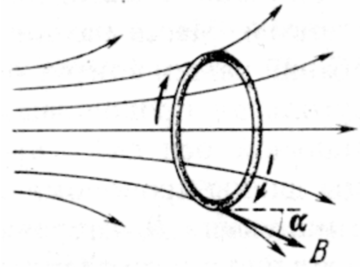
Опять же задача очень страшна на вид, однако проста по сути. Очевидно, что опрокидывающий момент, создаваемый магнитным полем должен быть больше момента, создаваемого весом катушки. Нарисовав «катушку, вид сбоку» мы увидим, что вес катушки проходит через её центр масс и направлен вертикально вниз, катушка же может опрокинуться «через край», поэтому момент, создаваемый весом катушки $M_G \le PR$. Отсюда получаем: $In\pi R^2 B \ge PR$, откуда

$$B \ge \frac{P}{\pi R I n}.$$

Заметим, что это условие того, что враща-ющий магнитный момент начнёт поворот катушки. Для опрокидывания этого недоста-точно: для точного ответа на вопрос задачи надо знать высоту катушки...

Задача 7.

Кольцо радиуса R, но которому циркулирует ток I, поместили в неоднородное аксиально-симметричное поле. Ось кольца совпадает с осью симметрии магнитного поля. Индукция магнитного поля B, действующего на ток, направлена под углом α к оси симметрии поля. Масса кольца m. Определите ускорение кольца.



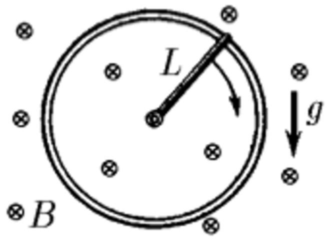
Решение:

Надо рассмотреть сначала маленький фрагмент кольца длиной Δl. На него будет действовать сила $\Delta F = \Delta l \cdot I \cdot B$, направленная под углом $\pi - \alpha$ к оси, или под углом α к плоскости кольца.

Значит суммарная сила будет $2\pi R \cdot IB \cdot \sin\alpha$, т.к. составляющие силы, параллельные плоскости кольца сократятся. В итоге получаем:

$$a = \frac{2\pi RBI}{m}\sin\alpha.$$

Задача 14.



В поле тяжести помещено вертикально металлическое кольцо. Металлический стержень длины L и массы m шарнирно закреплён в центре кольца и касается его другим концом. Однородное магнитное поле индукции B перпендикулярно плоскости кольца. По какому закону надо менять ток в стержне, чтобы стержень вращался равномерно с угловой скоростью ω, если в начальный момент стержень находился в верхнем положении? Трением пренебречь.

Решение:

Стержень будет вращаться равномерно при условии, что алгебраическая сумма моментов сил относительно оси вращения равна нулю. Момент силы реакции оси равен нулю, отличны от нуля моменты сил Ампера и силы тяжести (рис. 2). Сила Ампера, действующая на проводник с током в магнитном поле, пропорциональна длине проводника: $F_{\text{A}} = IBl$ (I и B — константы, т. к. сила тока в каждый момент времени одинакова по всей длине стержня). Отсюда $dF_A = IBdl$ — сила Ампера, действующая на элемент стержня длиной d. $dM_1 = F_1 dl$ — момент силы Ампера относительно оси стержня, действующий на элемент стержня длиной dl.

$$M_1 = \int dM_1 = \int_0^L F_A dl = \int_0^L IBldl = IB\int_0^L ldl.$$

$$M_1 = \left.\frac{IBl^2}{2}\right|_0^L = \frac{IBL^2}{2} - \text{ момент силы Ампера относительно оси}$$

вращения стержня, действующий на весь стержень.

$$M_2 = F_\perp \cdot |OA| = mg\frac{L}{2}\sin\alpha,\ \text{где } F_\perp = mg\sin\alpha - \text{ составляющая силы}$$

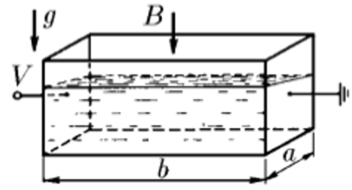
тяжести, перпендикулярная стержню, $|OA| = L/2$ — плечо силы $\vec{F}_\perp$.
$M_2 = \frac{mgL\sin\alpha}{2}$ — момент силы тяжести относительно оси вращения. Итак,

$$M_1 = M_2; \frac{IBL^2}{2} = \frac{mgL\sin\alpha}{2}$$

$IBL = mg\sin\alpha \Rightarrow I = \frac{mg}{BL}\sin\alpha = I_m \sin\alpha$ — зависимость силы тока в стержне от угла его поворота ($I_m = mg/(BL)-$ амплитуда силы тока).

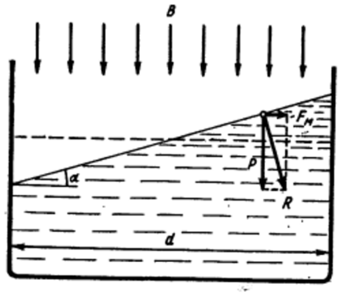
$$I = I_m \sin\omega t \quad (\alpha = \omega t)$$

Задача 12.



В прямоугольную кювету, две противоположные стенки которые металлические, а остальные сделаны из изолятора, налит электролит, плотность которого ρ, удельная проводимость σ. К металлическим стенкам кюветы приложено напряжение U, и вся кювета помещена в однородное вертикальное магнитное поле индукции B. Определите разность уровней жидкости около неметаллических стенок кюветы. Длина кюветы l, ширина d.

Решение:



Будем считать разность уровней очень малой (слабое магнитное поле). Найдем силы, действующие на тонкий «шнур» тока вблизи поверхности. Очевидно, что это — сила тяжести P и сила, действующая со стороны магнитного поля (сила Лоренца) — F_M (рис.). Пусть сечение «шнура» равно ΔS. Тогда на «шнур» длиной l действует сила $F_M = \Delta IBl$. Здесь ΔI — ток через «шнур»: $\Delta I = I\frac{\Delta S}{S}$, S — сечение кюветы, перпендикулярное току, а I — полный ток. Сила тяжести:

$$P = \rho g \Delta S l.$$

При установившейся форме поверхности сумма сил P и F_M должна быть направлена перпендикулярно поверхности жидкости, тогда:

$$\frac{F_M}{P} = \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{или} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{IB}{\rho g S}.$$

Сила тока определяется из закона Ома: $I = \frac{U}{R} = \frac{\sigma U S}{l}$. Подставляя это значение I в предыдущую формулу, получим: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma U B}{\rho g l}$. Искомая разность уровней есть

$$\Delta h = d\frac{\sigma U B}{\rho g l}.$$