Контрольный вопрос №1

Ответ: инерциальной системой отсчета называют системой отсчета, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно либо покоятся.

Свободные тела — это тела, на которые не действуют внешние силы, либо действия всех внешних сил скомпенсированы.

Человек, стоящий на остановке, является свободным телом. Но в системе отсчёта, связанной с автобусом, этот человек движется не равномерно, а ускоряется. Поэтому СО, связанная с автобусом, не является инерциальной.

Контрольный вопрос №2.

Ответ: импульс материальной точки — физическая величина, определяемая произведением массы материальной точки на вектор скорости в данной системе отсчета:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Величину $\Delta\vec{p} = \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t)$ называют приращением импульса материальной точки за время от t до $t+\Delta t$.

Импульс силы в ИСО равен приращению импульса материальной точки

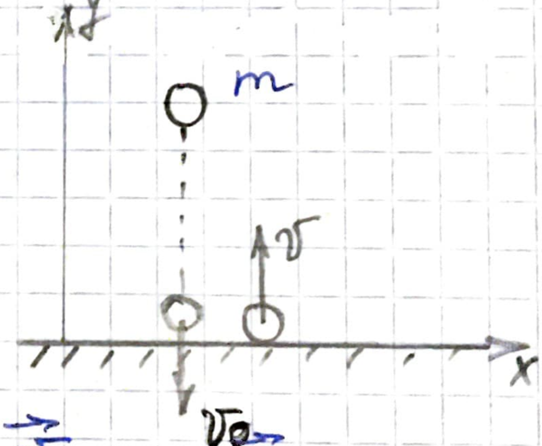
Дано:

$m = 0{,}2$ кг
$v = 5$ м/с
$h = 0{,}45$ м
$\Delta t = 0{,}01$ с

Найти: $|\Delta\vec{p}|$ — ?

$N_{ср}$ — ?

Решение:



1) $\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = m \cdot \vec{v} - m \cdot \vec{v}_0$

Проекция на ось oy:

$\Delta p = mv - m(-v_0) = m(v + v_0)$ (1)

2) В момент соударение:

$$E_k = E_п$$

$$\frac{m v_0^2}{2} = mgh \rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

3) Из (1) и (2) =>

=>

$$\Delta p = m(v + \sqrt{2gh}) =$$

$$= 0{,}2 кг \cdot (5 м/с + \sqrt{2 \cdot 10 м/с^2 \cdot 0{,}45 м}) =$$

$$= 1{,}6 \ кг \cdot м/с$$

4) Поскольку действием силы тяжести за время удара пренебрегаем, средняя сила, с которой плоскость при ударе действует на шарик, равна

$$N_{ср} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Спроецировав на ось Oy:

$$N_{ср} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1{,}6 \ кг \cdot м/с}{0{,}01 с} = 160 кг \cdot м/с^2 =$$

$$= 160 \ Н$$

Ответ: $|\Delta \vec{p}| = 1{,}6 \ \frac{кг \cdot м}{с}$

$$N_{ср} = 160 Н$$

Контрольный вопрос №3

Теорема об изменении импульса материальной точки: скорость изменение импульса системы материальных точек равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Дано:

$m = 2кг$

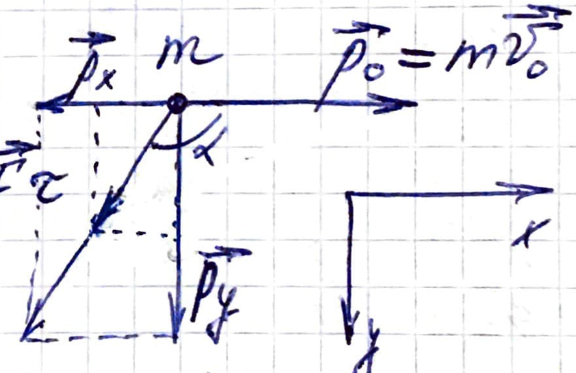
$F = 0{,}5Н$

$t = 0с$ $v_0 = 1 м/с$ $\alpha = 120°$

$|\vec{p}| = |\vec{p}_0|$

Найти: τ — ?

Решение:



$p_x = p_0 + F\tau \cdot \cos\alpha$

$p_y = F\tau \cdot \sin\alpha$

$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = p_0$ (по усл)

$p_0^2 = (p_0 + F\tau\cos\alpha)^2 + (F\tau\sin\alpha)^2$

$p_0^2 = p_0^2 + 2p_0F\tau\cos\alpha + F^2\tau^2\cos^2\alpha + F^2\tau^2\sin^2\alpha$

$0 = 2p_0F\tau\cos\alpha + F^2\tau^2$

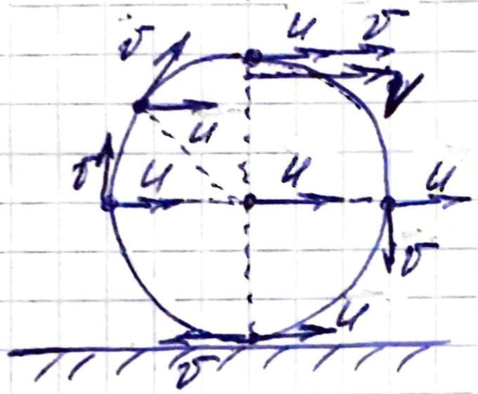
$-2p_0F\tau\cos\alpha = F^2\tau^2$

$\tau = \frac{-2p_0\cos\alpha}{F} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 120°}{0{,}5}(c) = 4c$

Ответ: $\tau = 4c$

Контрольный вопрос №4

Ответ: Импульсом $\vec{P}_c$ системы материальных точек называют векторную сумму импульсов материальных точек, составляющих систему, $\vec{P}_c = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n$



u_i — переносная скорость

v_i — относительная скорость.

$$\vec{P}_c = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \ldots + \vec{P}_n$$

$$\vec{P}_i = m_i \vec{v}_i + m_i \vec{u}$$

$$\vec{P}_c = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i + \sum_i m_i \vec{u} =$$

$$= m\left(\sum_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{u}\right) =$$

$$= m\left(\underbrace{\sum_i \frac{\vec{v}_i}{2}}_{0} + \vec{u}\right) =$$

$$= m(0 + \vec{u}) = m\vec{u}$$

$\vec{P}_c = m\vec{u}$, где m — масса колеса, $\vec{u}$ — вектор скорости центра масс колеса.

Задача №1

Дано:

$m_1 = m$

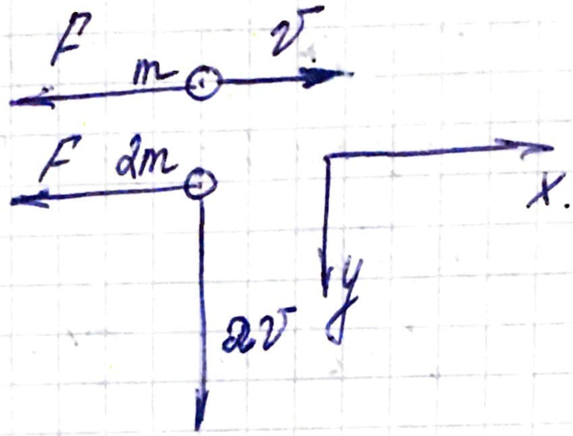
$m_2 = 2m$

$v_1 = v$

$v_2 = 2v$

$v_1' = 3v$ и $\vec{v}_1' \uparrow\downarrow \vec{v}_1$

Найти: $v_2' - ?$



Решение:

Т.к. $\vec{v}_1' \uparrow\downarrow \vec{v}_1$, то $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{v}_1$ и $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{v}_1'$

Тогда $\vec{F} \perp \vec{v}_2$ $(\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1)$

ЗСИ для 1ого: $\vec{v}_1 m_1 + \vec{\Delta p} = \vec{v}_1' m_1$

$$\vec{\Delta p} = \vec{F} \Delta t$$

Ox: $v_1 m_1 - F\Delta t = -v_1' m_1$

$$vm - F\Delta t = -3vm$$

$$F\Delta t = 4vm$$

ЗСИ для 2ого: $\vec{v}_2 m_2 + \vec{F}\Delta t = \vec{v}_2' m_2$

Ox: $0 - F\Delta t = v_{2x}' \cdot m_2$

$$v_{2x}' \cdot 2m = -F\Delta t = -4vm$$

$$v_{2x}' = -\frac{4vm}{2m} = -2v$$, т.е. $\vec{v}_{2x}' \uparrow\downarrow Ox$

Oy: $v_2 \cdot m_2 + 0 = v_{2y}' \cdot m_2$

$$v_{2y}' = 2v$$

По теореме Пифагора:

$$|\vec{v}_2'| = \sqrt{|\vec{v}_{2x}'|^2 + |\vec{v}_{2y}'|^2}$$

$$v_2' = \sqrt{(v_{2x}')^2 + (v_{2y}')^2} = \sqrt{(-2v)^2 + (2v)^2} =$$

$$= \sqrt{4v^2 + 4v^2} = \sqrt{8v^2} = 2v \cdot \sqrt{2} =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot v$$

Ответ: $v_2' = 2\sqrt{2}\,v$

Задача 2.

Дано:

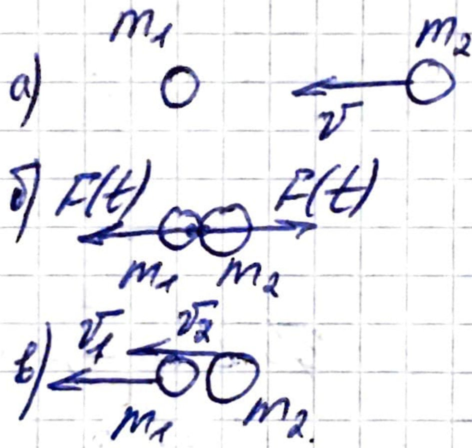
$m_1 = 0{,}2$ кг

$v = 0{,}4$ м/с

$m_2 = 0{,}4$ кг

$\tau = 0{,}1$ с

$F_{max} = 1{,}2$ Н



Найти:

v_1, v_2 — ?

Решение:

1) Из II з. Ньютона

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

2) $\Delta p = F_{ср} \cdot 2\tau = \left(\frac{F_{max}}{2}\right) \cdot 2\tau = F_{max} \cdot \tau$

3) Изменение импульса каждого из шариков в проекциях на начальное направление полёта определяю-

так следующими выражениями:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = F_{max}\tau \\ v_2 = v - \dfrac{F_{max}\tau}{m_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{F_{max}\tau}{m_1} = 1{,}2Н \cdot 0{,}1с \dfrac{1}{0{,}2кг} = 0{,}6 м/с \\ v_2 = v - \dfrac{F_{max}\tau}{m_2} = 0{,}4 м/с - \dfrac{1{,}2Н \cdot 0{,}1с}{0{,}4кг} = \\ = 0{,}1 м/с \end{cases}$$

Ответ: $v_1 = 0{,}6$ м/с

$v_2 = 0{,}1$ м/с

Задача 3

Дано:

$v_0 = 5$ м/с

$S_1 = 45$ м

$v_1 = 20$ м/с

$v_2 = 30$ м/с

Найти S_2 - ?

Решение:

По условию равнодействующая сила F автомобиля пропорционально его скорости: $F = \alpha \cdot v$, где $\alpha = const$.

Тогда:

$F \sim a$ и $F \sim v$, то $a \sim F \sim v$

и $a \sim v$. Domножим на Δt.

$\Delta t a \sim \Delta t v$.

$\Delta t a = \Delta v$ и $\Delta t v = \Delta S \Rightarrow \Delta v \sim \Delta S$

Просуммируем $\Delta v \sim \Delta S$:

$$\sum \Delta v \sim \sum \Delta S$$

$$\Delta V \sim S$$

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &\sim S_1 \\ \Delta V_2 &\sim S_2 \end{aligned} \Rightarrow \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

$$\frac{v_1 - v_0}{v_2 - v_0} = \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow$$

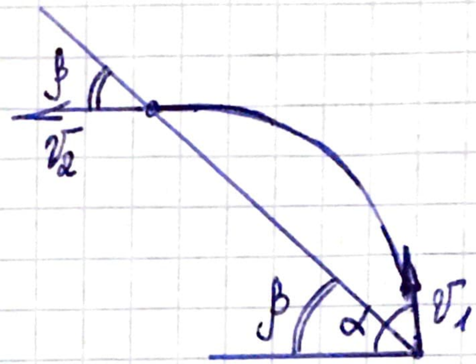
$$\Rightarrow S_2 = S_1 \frac{v_2 - v_0}{v_1 - v_0} = 45\,м \cdot \frac{30-5}{20-5} =$$

$$= 45 \cdot \frac{25}{15}\,м = 75\,м.$$

<u>Ответ:</u> $S_2 = 75\,м$.

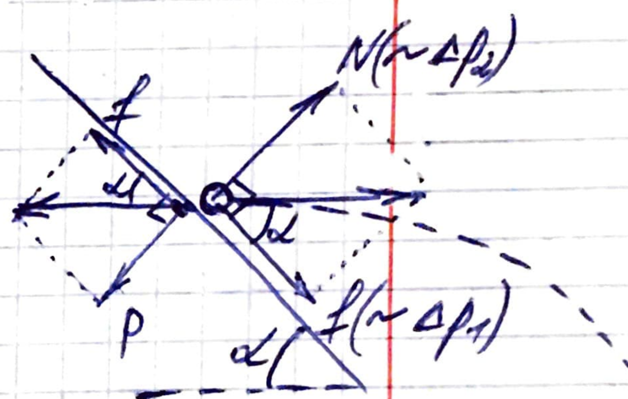
Задача 4

Дано:
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$.



Решение:

Рассмотрим случай во время удара:



$|\vec{P}| = |\vec{N}|$

$f = \mu N$

$\Delta p_1 = \mu N \Delta t$

$\Delta p_2 = N \Delta t$

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mu} = \frac{8}{3}$ (по усл.)

$$\mu = \frac{3}{8}$$

Ответ: $\mu = \frac{3}{8}$

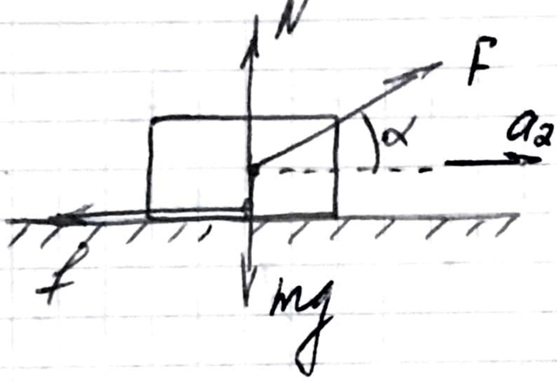
Задача 5

Дано: $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $t_1 = t_2 = t$

$v_1 = v_2 = v$

Найти: μ - ?

(а)



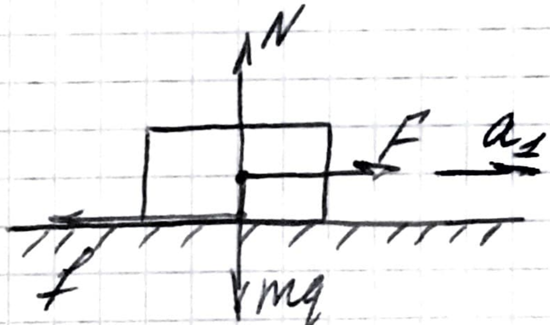
Решение:

Случай (а): II з.Н. для санок:

$$\begin{cases} Ox: F\cos\alpha - f = ma_2 \\ Oy: N + F\sin\alpha - mg = 0 \end{cases}$$

Случай (в):

$$\begin{cases} Ox: F - f = ma_1 \\ Oy: N - mg = 0 \end{cases}$$



Т.к. тело скользит, то $f = \mu N$

(а) $$\begin{cases} f = \mu mg \\ F - \mu mg = ma_1 \end{cases}$$

(в) $$\begin{cases} f = \mu(mg - F\sin\alpha) \\ F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = ma_2 \end{cases}$$

Т.к. в обоих случаях $F = const$, то можно воспользоваться формулами для равноускоренного движения

Тогда:

$$\begin{cases} v_1 = a_1 t \\ v_2 = a_2 t \end{cases} \Rightarrow \text{т.к. } v_1 = v_2 \text{ то } a_1 = a_2,$$

т.е. $ma_1 = ma_2$

$$F - \mu mg = F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha$$

$$F = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\mu = ctg\alpha = ctg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

<u>Ответ</u>: $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Задача 6

Дано:
m, M, u

$\frac{M}{m} = 4$

Найти: $v_A, v_Б$ – ?

Решение.

Из з.с.и. легко вывести, что если 2 объекта массами m и M разделяются с относительною скоростью u, то изменение скоростей их в инерциальной системе отсчета обратно пропорционально массам, поэтому скорость объектам массой M изменится на $v = u \cdot \frac{m}{m+M}$

а) оба жука (объект массой $2m$) спрыгивают одновременно и скорость соломинки изменяется на

$$v_A = \frac{2um}{2m+M} = u \cdot \frac{2m}{2m+M}$$

б) после того, как первый жук спрыгнул скорость соломинки со вторым жуком:

$$v_1 = u \frac{m}{2m+M};$$

далее, с неё спрыгивает 2ой жук и скорость соломинки увеличивается ещё на:

$$v_2 = u \frac{m}{m+M}$$

Итого, скорость соломинки во 2ом случае равна:

$$v_b = v_1 + v_2 = u \cdot m \cdot \left(\frac{1}{2m+M} + \frac{1}{m+M} \right)$$

Найдем $k = \left(\frac{v_B}{v_A} - 1 \right) \cdot 100\%$ при $\frac{M}{m} = 4$:

$$v_A = u \cdot \frac{2m}{2m+4m} = u \cdot \frac{2m}{6m} = \frac{u}{3}$$

$$v_b = u \cdot m \left(\frac{1}{2m+4m} + \frac{1}{m+4m} \right) =$$

$$= u \cdot m \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{m} =$$

$$= \frac{11u}{30} = \frac{11}{30} u$$

$$k = \left(\frac{11}{30} u \cdot \frac{3}{u} - 1 \right) \cdot 100\% = \frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%$$

<u>Ответ:</u> $v_A = \frac{u}{3} = \frac{1}{3} u$

$v_b = \frac{11}{30} u$

$v_B > v_A$ на $k = 10\%$

Задача 7

Дано:
$\eta = 10\% = 0{,}1$
$M = 7m$

Найти: β - ?

Решение:

Т.к. импульс налетающей шайбы уменьшился на $\eta = 10\%$, то

$$p_1' = 0{,}9 \cdot p_1$$

Пусть скорость налетающей шайбы до и после удара v_1 и u_1 равны.

Скорость покоящейся шайбы до и после удара равны 0 и u_2 соотв-нно.

$$\beta = \angle \vec{u}_2, \vec{v}_1$$

По ЗСИ в векторной форме:

$$m\vec{v}_1 + M \cdot 0 = m\vec{u}_1 + M \cdot \vec{u}_2$$

По закону сохр. энергии: $mv_1^2 + 0 = mu_1^2 + Mu_2^2$

Заменим M на $7m$ и сократим все уравнения на m:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 7\vec{u}_2$$

$$v_1^2 = u_1^2 + 7u_2^2$$

Перепишем систему в формат проекций на систему координат xOy, расположив вектор $\vec{v}_1$ вдоль оси Ox:

$$v_1 = u_1 \cos\alpha + 7u_2 \cdot \cos\beta$$

$0 = u_1 \sin\alpha + 7u_2 \cdot \sin\beta$

$v_1^2 = u_1^2 + 7u_2^2$

Т.к. $p_1' = 0{,}9 \cdot p_1$, то $u_1 = 0{,}9 v_1$

при $m = const$

Избавляемся от переменной u_1:

$v_1 = 0{,}9 \cdot v_1 \cdot \cos\alpha + 7u_2 \cdot \cos\beta$

$0 = 0{,}9 \cdot v_1 \cdot \sin\alpha + 7 \cdot u_2 \cdot \sin\beta$

$v_1^2 = (0{,}9 \cdot v_1)^2 + 7u_2^2$

Пусть $k = \frac{u_2}{v_1}$. Тогда:

$$\begin{cases} 1 = 0{,}9\cos\alpha + 7k \cdot \cos\beta \\ 0 = 0{,}9\sin\alpha + 7k \cdot \sin\beta \\ 1 = 0{,}9^2 + 7k^2 \end{cases}$$

Найдём α и β: $\alpha = 74{,}5^\circ$

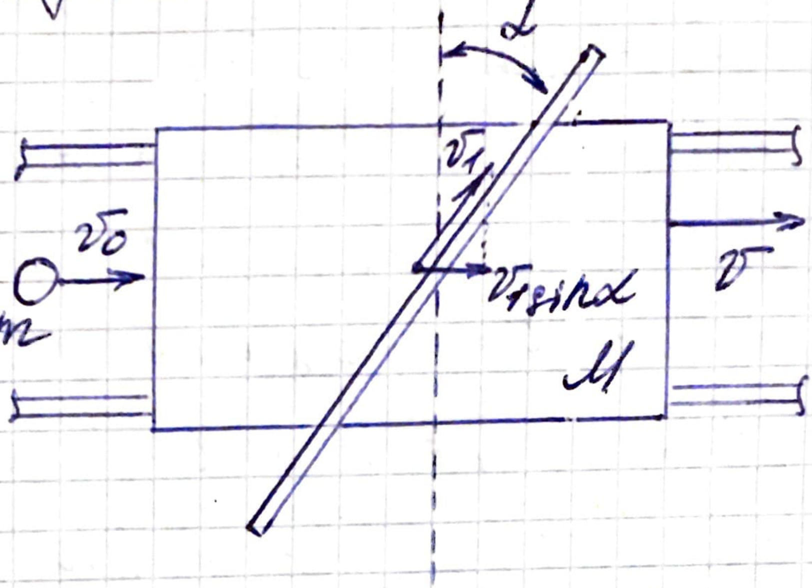
$\beta = -48{,}8^\circ$

Ответ: $\beta = -48{,}8^\circ$

Задача 8

Дано:
M, m, v_0, α

Найти:
$\tilde{v}$ – ?
v – ?



Решение:

1) Пусть шарик сполз по желобу и лег на тележку. Тогда по ЗСИ:

$$m v_0 = (m+M) v$$

$$v = \frac{m v_0}{M+m}$$

2) А если шарик стал скользить по тележке и сполз в итоге с неё?

Тогда скорость v_0 может быть разложена на составляющие, одна из которых направлена вдоль желоба – с такой скоростью v_1 шарик движется по тележке.

Скорость шарика относительно рельсов:

$$\vec{v}_2 = \vec{\tilde{v}} + \vec{v}_1$$

Закон сохранения импульса:

$$m v_0 = m v_2 + M v$$

$$m v_0 = m \tilde{v} + m v_1 \sin\alpha + M v$$

На плоскость клина:

$$m v_0 \sin\alpha = m \tilde{v} \sin\alpha + m v_1$$

Тогда: $v_1 = v_0 \cdot \sin\alpha - \tilde{v} \sin\alpha$

Подставим это в ЗСИ:

$$m v_0 = m \tilde{v} + m \sin\alpha (v_0 \sin\alpha - \tilde{v} \sin\alpha) + M v$$

$$m v_0 = m \tilde{v} + m v_0 \sin^2\alpha - m \tilde{v} \sin^2\alpha + M v$$

$$m v_0 (1 - \sin^2\alpha) = m \tilde{v} (1 - \sin^2\alpha) + M v$$

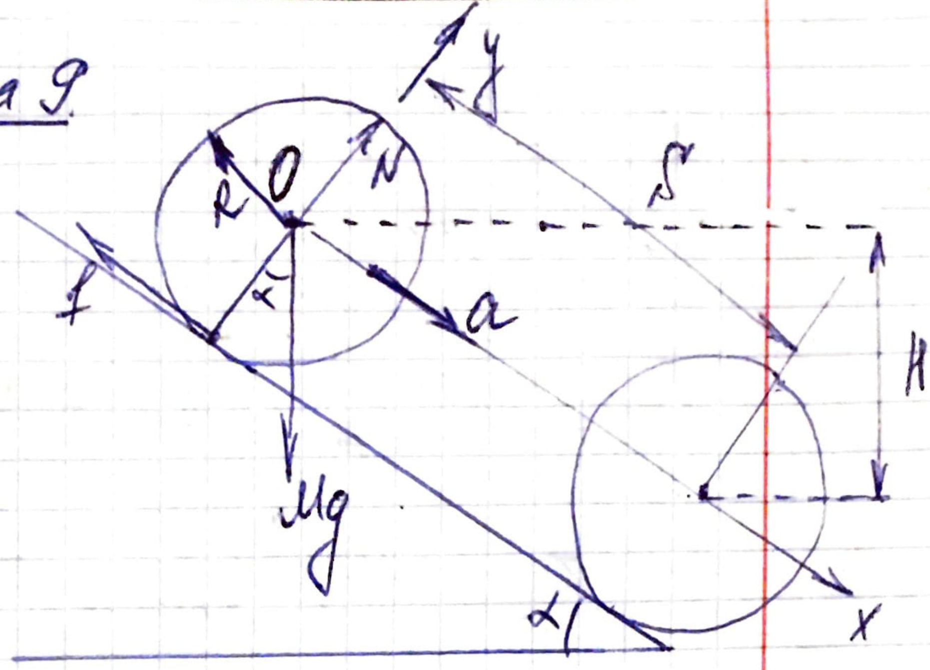
$$m v_0 \cos^2\alpha = m \tilde{v} \cos^2\alpha + M v$$

$$\tilde{v} = \frac{m v_0 \cos^2\alpha}{m \cos^2\alpha + M}$$

<u>Ответ:</u> $v = \dfrac{m v_0}{m + M}$

$$\tilde{v} = \frac{m v_0 \cos^2\alpha}{m \cos^2\alpha + M}$$

Задача 9



Дано:

$H = 1{,}2$ м

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

$M = 2$ кг

Найти:

$-?\ T-?$

Решение:

Запишем II з. Ньют. на дв. колеса:

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = M\vec{a}$$

ox: $Mg\sin\alpha - f = Ma$

oy: $N - Mg\cos\alpha = 0$

$f = \mu N = \mu \cdot (Mg\cos\alpha)$

отн. т. O: $f \cdot R = J\varepsilon = \frac{MR^2}{2}\varepsilon$

и $a = \varepsilon \cdot R \Rightarrow \varepsilon = \frac{a}{R}$

Тогда:

$$f = \frac{MR}{2}\varepsilon = \frac{MR}{2} \cdot \frac{a}{R} = \frac{Ma}{2}$$

$$Mg\sin\alpha - \frac{Ma}{2} = Ma$$

$$g\sin\alpha = \frac{3}{2}a$$

$$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

$$f = \frac{Ma}{2} = \frac{M}{2} \cdot \frac{2}{3} g\sin\alpha = \frac{Mg\sin\alpha}{3}$$

$$S = \frac{aT^2}{2}; \quad a \quad H = S \cdot \sin\alpha$$

$$H = \frac{aT^2}{2}\sin\alpha = \frac{\frac{2}{3}g\sin\alpha}{3} T^2 \cdot \sin\alpha$$

$$T^2 = H \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{g\sin^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{3}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{H}{2g}} = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{1{,}2}{2 \cdot 10}} =$$

$$= 6 \cdot \sqrt{0{,}06}\,(c) = 0{,}6 \cdot \sqrt{6}\ c \approx 1{,}47\ c$$

$$f = \frac{Mg\sin\alpha}{3} = \frac{2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{10}{3}(H) = 3\frac{1}{3}\ H \approx$$

$$\approx 3{,}33\ H$$

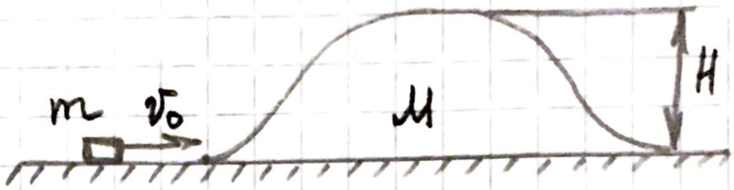
<u>Ответ:</u> $f = 3{,}33 H$

$T = 1{,}47 c$

Задача 10

Дано:

$v_0 = 6$ м/с
$H = 1,2$ м
$M = 5m$
$v_0' = 4,8$ м/с



Найти:

v_{1x} – ? v_2 – ?

v_{1x}' – ? v_2' – ?

Решение:

Пусть M и m – массы горки и шайбы соответственно.

Запишем законы сохр. энергии и импульса после соскальзывания шайбы:

$$\begin{cases} \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{Mv_2^2}{2} \\ m_0 = mv_1 + Mv_2 \end{cases}$$

Из этих уравнений следует

$$v_1 = \frac{m-M}{m+M} v_0$$

$$v_2 = \frac{2m}{m+M} v_0$$

Это происходит, если шайба не сможет перескакать через горку.

Но чтобы шайба заехала на горку должно выполняться условие:

$$\frac{m v_0^2}{2} = mgH + \frac{(M+m) v_1^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2gH(M+m)}{M}}$$

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2gH(M+m)}{M}}$$

Проверим: $v_0 \geq \sqrt{\frac{2gH(M+m)}{M}}$

$$6 \geq \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1{,}2 \cdot (5m+m)}{5m}}$$

$$6 \geq \sqrt{\frac{20 \cdot 1{,}2 \cdot 6}{5}}$$

$$36 \geq \frac{20 \cdot 1{,}2 \cdot 6}{5}$$

$36 \geq 28{,}8 \Rightarrow$ шайба заедет и спустится с др. стороны горки.

Тогда скорость шайбы в этом случае равна: $v_1 = v_0$ А ск горки равна: $v_2 = 0$:

$$\begin{cases} v_{1x} = 6 \text{ м/с} \\ v_2 = 0 \text{ м/с} \end{cases}$$

Проверим второй случай (v_0'):

$$v_0' \geq \sqrt{\frac{2gH(M+m)}{M}}$$

$4{,}8^2 \geq 28{,}8$ $\qquad$ $23{,}04 \ngeq 28{,}8$, т.е. шайба не заедет на горку.

И скорость шайбы и горки в этом случае равна:

$$v_{1x}' = \frac{m-M}{M+m} v_0 = -\frac{4m}{6m} \cdot 6\,(м/с) = -4\,м/с,$$

т.е. $\vec{v}_{1x} \uparrow\downarrow \vec{v}_0$

$$v_2' = \frac{2m}{m+M} \cdot v_0 = \frac{2m}{6m} \cdot 6\,(м/с) = 2\,м/с,$$

т.е. $\vec{v}_2 \uparrow\uparrow \vec{v}_0$

<u>Ответ:</u> $\begin{cases} v_{1x} = 6\,м/с \\ v_2 = 0\,м/с \end{cases}$ и $\begin{cases} v_{1x}' = -4\,м/с \\ v_2' = 2\,м/с \end{cases}$