# Сила Ампера. Часть №2

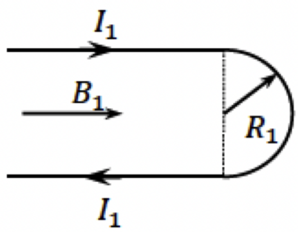
Задачи из mathus

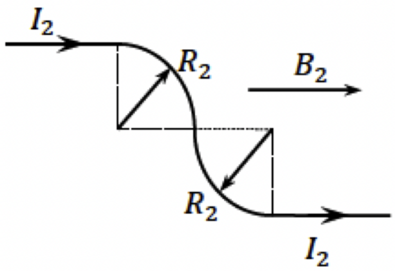
## Криволинейный проводник

### Задача 16

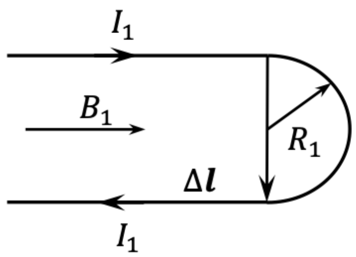
А) Проводник с током $I_1$, состоящий из двух параллельных участков, соединённых прово-лочной полуокружностью радиусом $R_1$, помещён в однородное магнитное поле индукцией $B_1$, направленное вдоль параллельных участков провода (верхний рисунок). Определите модуль силы, с которой магнитное поле действует на этот провод с током.

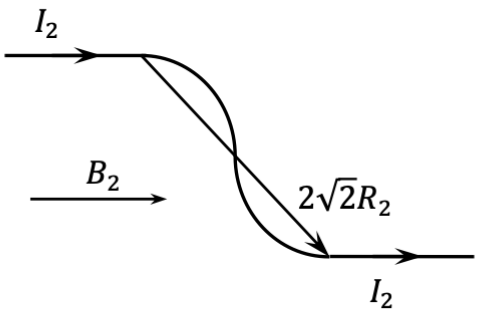
Б) Решите задачу в случае, когда провод состоит из двух параллельных участков, которые соединены двумя проволочными четвертями окружностей радиусом $R_2 = 10$ см, как показано на нижнем рисунке. Ток в проводе $I_2 = 30$ А, вектор индукции однородного магнитного поля $B_2 = 1$ Тл направлен вдоль параллельных участков провода.




*Решение:*




Возможное решение. А) На провода, параллельные вектору индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$, не действует сила Ампера. Разобьем проволочную полуокружность на элементы тока. На каждый элемент тока действует сила Ампера равная:

$$\boldsymbol{F}_i = I\,[\Delta \boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{B}]$$

Сила, действующая на весь проводник, равна векторной сумме сил, действующих на элементы тока:

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_i I\,[\Delta \boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{B}] = I\left[\sum_i \Delta \boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{B}\right] = I[\Delta \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}]$$

где $\Delta \boldsymbol{l}$ — вектор, соединяющий начальную и конечную точки проволочной полуокружности. Окончательно получаем:

$$F_1 = I_1 \cdot 2R_1 \cdot B_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2I_1R_1B_1.$$

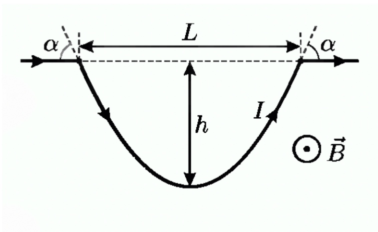
Б) Аналогично предыдущему пункту получаем (см. рис.):

$$F_2 = I_2 \cdot 2\sqrt{2}R_2 \cdot B_2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 30 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 0,1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6(\text{Н}).$$

*Ответ:* А) $F_1 = 2I_1R_1B_1$, Б) $F_2 = I_2 \cdot 2\sqrt{2}R_2 \cdot B_2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 6(\text{Н})$.

## Задача 17

Участок гибкого провода массой $m$ подвешен так, что его концы закреплены на одинаковой высоте (см. рисунок). Провод находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией B, и по нему течёт ток $I$. Силы, действующие на провод в точках подвеса, образуют углы $\alpha$ с горизонтом. Найдите силу $T$ натяжения провода в его нижней точке. Размеры $L$ и $h$ известны.




*Решение:*

Обозначим нижнюю точку провода через $A$, верхние точки — через $B$ и $C$ (см. рисунок). Введём в плоскости провода декартову прямоугольную систему координат, направив ось $X$ вправо, ось $Y$ — вверх; обозначим координаты точек $A$ и $C$ как $(x_A; y_A)$ и $(x_C; y_C)$.
Рассмотрим участок провода $AC$. На него действуют направленная вниз сила тяжести $\frac{m\vec{g}}{2}$, направленная влево сила $\vec{T}$ натяжения нити в нижней точке $A$, направленная под углом $\alpha$ к горизонту сила натяжения нити $\vec{F}$ и сила Ампера $\vec{F}^{\text{магн}}$, действующая состороны магнитного поля. Запишем условие равновесия системы в проекциях на оси $X$ и $Y$:

$$F_x^{\text{магн}} + F\cos\alpha - T = 0, \quad F_y^{\text{магн}} + F\sin\alpha - \frac{mg}{2} = 0$$

Выражая из второго соотношения неизвестную величину силы $F$ и подставляя её в первое уравнение, находим искомую силу натяжения нити:

$$T = F_x^{\text{магн}} + \left(\frac{mg}{2} - F_y^{\text{магн}}\right)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Для получения ответа остаётся найти компоненты силы Ампера $\vec{F}^{\text{магн}}$. Рассмотрим маленький отрезок провода длиной $\Delta l$, составляющий угол $\gamma$ с горизонтом и расположенный между точками с координатами $(x; y)$ и $(x+\Delta x; y+\Delta y)$, где $\Delta x = \Delta l \cdot \cos\gamma$, $\Delta y = \Delta l \cdot \sin\gamma$ (см. рисунок). На этот участок действует сила Ампера $\Delta\vec{F}^{\text{магн}}$, равная по модулю $IB\Delta l$ и направленная под углом $\gamma$ к вертикали. Эта сила имеет компоненты

$$\begin{aligned}\Delta F_x^{\text{магн}} &= \Delta F^{\text{магн}}\sin\gamma = IB\Delta l\sin\gamma = IB\Delta y\\ \Delta F_y^{\text{магн}} &= -\Delta F^{\text{магн}}\cos\gamma = -IB\Delta l\cos\gamma = -IB\Delta x\end{aligned}$$

Складывая силы Ампера, действуюшие на все малые отрезки участка $AC$ провода, находим:

$$\begin{aligned}F_x^{\text{магн}} &= IB\,(y_C - y_A) = IBh;\\ F_y^{\text{магн}} &= -IB\,(x_C - x_A) = -IB\frac{L}{2}\end{aligned}$$

Подставляя результат в формулу для силы натяжения провода, приходим к ответу:

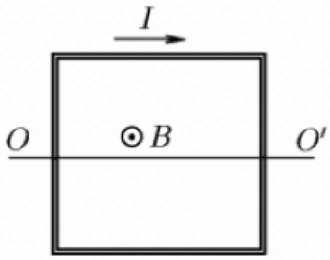
$$T = IBh + \frac{mg + IBL}{2}\operatorname{ctg}\alpha$$

## Магнитный момент

Рассмотрим плоский контур с током $I$, имеющий площадь $S$. Магнитным моментом этого контура называется вектор $\vec{\mu}$, имеющий длину $IS$ и направленный перпендикулярно плоскости контура в то полупространство, из которого ток видится циркулирующим против часовой стрелки.

## Задача 21

В однородном магнитном поле индукции В находится квадратная рамка с током. Масса рамки $m$, ток в ней $I$. Определите частоту свободных колебаний рамки вокруг оси $OO'$.




*Решение:*

Определим момент сил, действующих на рамку с током со стороны магнитного поля при малых отклонениях рамки от положения равновесия.
На стороны рамки, перпендикулярные оси $OO'$, со стороны магнитного поля действуют силы, лежащие в плоскости рамки. Эти силы не создают вращающий момент относитель-но оси $OO'$.
На стороны рамки, параллельные оси OO', действуют силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ (рис. 2).
Разложим силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ на две составляющие, лежащие в плоскости рамки $\left(\vec{F_1'}\text{ и }\vec{F_2'}\right)$ и перпендикулярные к ней $\left(\vec{F_1''}\right.$ и $\left.\vec{F_2''}\right)$.

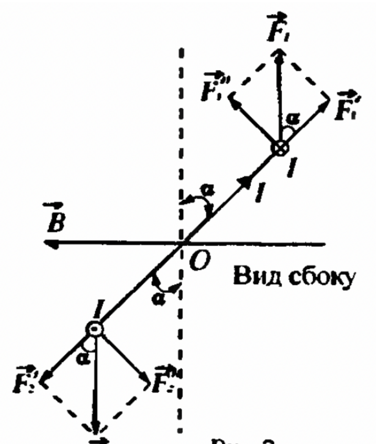


Рис. 2

Составляющие $\vec{F_1''}$ и $\vec{F_2''}$ создают вращающий момент, возвращающий рамку с током в положение равновесия (рис. 2).
$M = F_1 a = IBa \cdot a \cdot \sin\alpha = IBa^2 \sin\alpha$ — вращающий момент, дейтвующий на рамку с током в однородном магнитном поле.
$F_1'' = F_2' = IBa \cdot \sin\alpha$, где $a$ — сторона рамки.
Для вращательного движения рамки справедливо следующее уравнение:

$$I_0\alpha^m = -M = -IBa^2\sin\alpha,$$

где $I_0$ — момент инерции рамки относительно оси $O'; \alpha''$ — вторая пронзводная от угла поворота рамки по времени (так называемое угловое ускорение).
Знак «минус» у момента $M$ взят потому, что этот момент направлен к положению равновесия рамки (т. е. уменьшает угол $\alpha$ ).
Тогда (с учетом приближенного равенства $\sin\alpha \approx \alpha$, справедливого при малых углах $\alpha$) получим:

$$I_0\alpha'' = -IBa^2\sin\alpha = -IBa^2\alpha.$$

Момент инерции одной стороны рамки, параллельной $OO'$, составляет $I_1 = \frac{m}{4}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$, где $\frac{m}{4}$— масса одной стороны рамки; $\frac{a}{2}$— расстояние от стороны рамки до оси вращения $OO'$.
$I_2 = 2I_1 = 2\cdot\frac{m}{4}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{ma^2}{8}$ — момент инерции двух сторон рамки относительно оси $OO'$:

Момент инерции одной стороны рамки, перпендикулярной оси $OO'$, равен

$$I_3 = \frac{m}{4} \cdot \frac{a^2}{12} = \frac{ma^2}{48}.$$

Момент инерции двух сторон рамки, перпендикулярных оси $OO'$, составляет

$$I_4 = 2I_3 = ma^2/24.$$

$I_0 = I_2 + I_4 = \frac{ma^2}{8} + \frac{ma^2}{24} = \frac{4ma^2}{24} = \frac{ma^2}{6}$ — момент инерции всей рамки относительно оси $OO'$. Отсюда

$$\frac{ma^2}{6} \cdot \alpha'' = -1Ba^2\alpha,$$

или

$$\alpha'' = \frac{-6IBa^2}{ma^2}\alpha$$

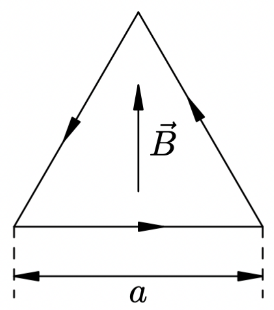
$$\alpha'' = -\frac{6IB}{m}\alpha; \ \alpha'' = -\omega_0^2\alpha$$

Получено дифференциальное уравнение колебательного движения рамки с током в магнитном поле. $\omega_0^2 = \frac{6IB}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{6IB}{m}}$ — циклическая частота свободных колебаний рамки с током в магнитном поле.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6IB}{m}}$$

## Задача 27

На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая рамка из однородного куска проволоки в виде равностороннего треугольника со стороной, равной $a$. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого перпендиклярны одной из сторон рамки (рис.). Масса рамки $M$, величина индукции $B$. Какой силы ток нужно пропустить по рамке (против часовой стрелки), чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника?




*Решение:*

На проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует сила Ампера

$$F = IBl\sin\alpha,$$

где $\alpha$ — угол между направлением вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ и направлением тока. На сторону $AB$ действует сила

$$F_1 = IBa,$$

направленная перпендикулярно плоскости треугольной рамки. На стороны $AC$ и $BC$ действуют аналогичные силы, направленные в противоположную сторону:

$$F_2 = F_3 = IB\frac{l}{2}.$$

Эти силы совместно с силой тяжести рамки создают момент относительно оси $OO'$, проходящей через вершину $C$ параллельно прямой $AB$. Запишем условие равенства моментов:

$$F_1\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2F_2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + mg\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

или

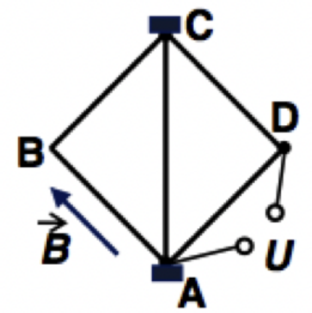
$$IB\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 2IB\frac{a^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} + mg\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Тогда для искомого тока $I$ получаем:

$$I = \frac{4}{3}\frac{mg}{aB}.$$

## Задача 30

Из медной проволоки изготовлен квадратный контур с перемычкой. Контур подключён к источнику постоянного напряжения $U$ = 1,5 В между точками $A$ и $D$ и помещён в магнитное поле с индукцией $B$ = 8 мТл, причём силовые линии лежат в плоскости контура и параллельны двум его сторонам. Найдите величину и направление силы, действующей на контур со стороны магнитного поля, а также величину и направление момента сил, поворачивающего контур вокруг оси AC. Удельное сопротивление проволоки $\rho$ = 0,018 мкОм · м, площадь сечения проволоки $S$ = 1,8 мм2, длина стороны квадрата $a$ = 1 м.




*Решение:*

Сопротивление стороны квадрата $R = \rho\frac{a}{S}$, тогда сопротивление участка АС равно $R\sqrt{2}$, а участка АВС $- 2R$. Примем, что потенциал А выше потенциала D. Направления токов показаны на рисунке. Величины сил тока обозначим следующим образом:

$$I_{AD} \equiv I_1, \quad I_{AC} \equiv I_2, I_{ABC} \equiv I_3 \quad \text{и} \quad I_{CD} \equiv I_4.$$

Ясно, что

$$I_1 = \frac{U}{R}, \quad I_4 = I_2 + I_3 = \frac{U}{R + 2R/(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}}\frac{U}{R}.$$

Далее находим, что

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{U}{R} \qquad \text{и} \qquad I_3 = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\frac{U}{R}.$$

Силы Ампера, действующие на участки АВ и CD, равны нулю. Силы Ампера, действующие на остальные участки, направлены «на наблюдателя» от плоскости контура. Величины этих сил

$$F_1 = aBI_1 = \frac{aBU}{R} = \frac{BUS}{\rho},$$

$$F_2 = a\sqrt{2}BI_2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho}, F_3 = aBI_3 = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho}.$$

Суммарная сила

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{4+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho} \approx 1,9\text{Н}.$$

Точками приложения сил $F_1$ и $F_3$ можно считать середины участков AD и BC, поэтому они имеют одинаковые плечи по отношению к оси AC, равные $l = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, а направления создаваемого ими вращения противоположные. Плечо силы $F_2$ равно нулю. Таким образом, момент сил

$$M = \frac{a}{2\sqrt{2}}\,(F_1 - F_3) = aBI_3 = \frac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}\frac{BUSa}{\rho} \approx 0,33\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Этот момент создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения величины силы и моменты остаются прежними, а направления изменяются на противоположные. *Ответ:*

$$F = \frac{4+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho} \approx 1,9\ \text{Н},$$

направление силы при $\varphi_A > \varphi_D$ «на наблюдателя» от плоскости контура,

$$M = \frac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}\frac{BUSa}{\rho} \approx 0,33\ \text{Н} \cdot \text{М},$$

создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения величины силы и моменты остаются прежними, а направления изменяются на противоположные.