Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Планиметрия (часть I)

Решение задания №1 для 9-х классов

(2020 – 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2020

Составитель: Т. С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: решение задания №1 для 9-х классов (2020 – 2021 учебный год), 2020, 21 с.

Составитель:
Пиголкина Татьяна Сергеевна
Подписано 16.09.20. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,31. Уч.-изд. л. 1,16.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

Контрольные вопросы

1(4). а) Докажите, что для прямоугольного треугольника справедливы равенства (в обозначениях § 1): $a^2 = c \cdot a_c$ и $h^2 = a_c \cdot b_c$.

б) По данным рисунка 2 найдите c, b, $\cos\alpha$.

в) По данным рисунка 3 найдите h, c, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Δ **1а(2).** Приведём доказательство на основе подобия треугольников. Пусть CH – высота к гипотенузе AB из вершины прямого угла треугольника ABC (рис. 1) и $\angle BAC = \alpha$, тогда и $\angle BCH = \alpha$. Имеем две пары подобных треугольников:

$$\Delta AHC \sim \Delta CHB \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HC}{HB} \Leftrightarrow \frac{b_c}{h} = \frac{h}{a_c} \Leftrightarrow \underline{h^2 = a_c \cdot b_c}\ .$$

$$\Delta ACB \sim \Delta CHB \Leftrightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{HB} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{a_c} \Leftrightarrow a^2 = \underline{c \cdot a_c}\ .$$

1б(1). Пусть $AH = x,\ BC = a$ (рис. 2). По доказанному $CH^2 = BH \cdot AH \Leftrightarrow 9 = 1 \cdot x \Leftrightarrow x = 9,\ \ \underline{\underline{c = AB = 10}}$.

Далее, $\underline{\underline{b}} = AC = \sqrt{x \cdot c} = \underline{\underline{3\sqrt{10}}}$ и $\cos\alpha = \dfrac{x}{b} = \underline{\underline{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}}$.

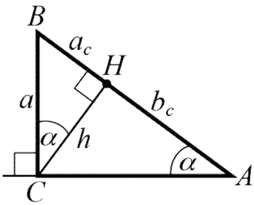

Рис. 1

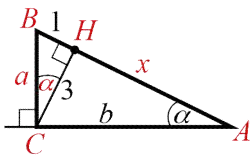

Рис. 2

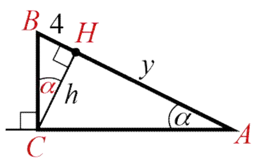

Рис. 3

1в(1). В прямоугольном треугольнике CHB угол BCH равен α (рис. 3), $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BH}{CH} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{h} \Leftrightarrow \underline{\underline{h = 6}}$. В треугольнике ACH $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{CH}{AH} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{h}{y} \Leftrightarrow y = 9,\ \ c = BH + y, \underline{\underline{c = 13}}$. ▲

2(7). а) Сформулируйте теорему о биссектрисе угла треугольника.

б) В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : DC = 1:3$. Медиана BM пересекает биссектрису AD в точке O (рис. 4). Найдите отношения $BO : OM$ и $AO : OD$.

в) В равнобедренном треугольнике ABC биссектриса CK равна основанию AC. Найдите углы треугольника ABC.

г) Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, составляет 2/7 его высоты к основанию. Периметр треугольника равен 28. Найдите стороны. (Используйте свойство биссектрисы треугольника).

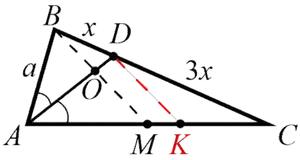

Рис. 4

Δ **2а(1).** Биссектриса угла треугольника делит противолежащую углу сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим им сторонам (если AD – биссектриса треугольника ABC, то $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$ (рис. 4). Теорема Задания).

2б(3). По свойству биссектрисы треугольника имеем $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}\Leftrightarrow\dfrac{x}{3x}=\dfrac{a}{AC}\Leftrightarrow \underline{AC=3a}$. Точка M – середина стороны AC, $AM=\dfrac{3}{2}a$. В треугольнике ABM отрезок AO – биссектриса, по свойству биссектрисы $\dfrac{BO}{OM}=\dfrac{AB}{AM}\Leftrightarrow\dfrac{BO}{OM}=\dfrac{a}{\frac{3}{2}a}\Leftrightarrow \underline{\underline{BO:OM=2:3}}.$

Пусть $DK\parallel BM$. Стороны угла BCM пересечены параллельными прямыми DK и BM, по теореме 6 §4 имеем $MK:MC=BD:BC\Leftrightarrow MK:MC=1:4\Leftrightarrow MK=\dfrac{1}{4}MC=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{2}a.$ $\quad MK=\dfrac{3}{8}a.$ Стороны угла DAC пересечены параллельными прямыми DK и OM, по той же теореме

$$\frac{AO}{OD}=\frac{AM}{MK}\Leftrightarrow\frac{AO}{OD}=\frac{\frac{3}{2}a}{\frac{3}{8}a}=4,\qquad \underline{\underline{AO:OD=4:1}}.$$

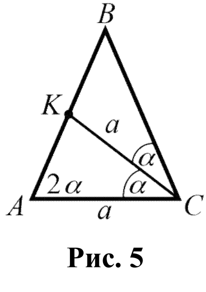

Рис. 5

2в(1). Треугольник ABC – равнобедренный, $\angle A=\angle C=2\alpha$ (рис. 5). Биссектриса CK делит угол C пополам, $\angle ACK=\alpha$. По условию $CK=AC$, т. е. треугольник ACK – равнобедренный с основанием AK, $\angle AKC=\angle KAC=2\alpha$. Сумма углов треугольника ACK равна 5α и равна π, значит $\underline{\alpha=\dfrac{\pi}{5}=36^\circ}$. Углы треугольника ABC равны $\angle A=\angle C=2\alpha=\dfrac{2\pi}{5}=72^\circ$,

$\angle B=\pi-2\angle A=\dfrac{\pi}{5},$ кратко $\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{\pi}{5}$ или $\underline{\underline{72^\circ,72^\circ,36^\circ}}$. Отсюда следует, что треугольник BKC так же равнобедренный и $BK=a$.

2г(2). В равнобедренном треугольнике ABC высота BD к основанию AC является медианой и биссектрисой (рис. 6). Если O – центр вписанной окружности, то он лежит на BD и CO – биссектриса угла C. Пусть $DC=x$ $\left(DC=\dfrac{1}{2}AC\right)$, по свойству биссектрисы треугольника для треугольника BDC имеем $\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{BC}{DC}\Leftrightarrow\dfrac{BC}{x}=\dfrac{\frac{5}{7}BD}{\frac{2}{7}BD}\Leftrightarrow BC=\dfrac{5}{2}x.$

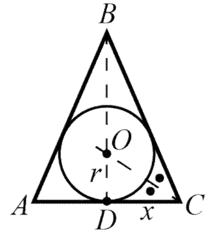

Рис. 6

Периметр треугольника ABC равен $2\cdot BC+2x=5x+2x=7x.$ По условию $7x=28\ \Rightarrow\ x=4,$ $\underline{\underline{AC=8,\ AB=BC=10.}}$ ▲

3(4). а) В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Известно, что $AB=6, A_1B_1=3\sqrt{2}.$ Чему равен угол ACB? (Первая лемма о высотах).

б) Угол ACB треугольника ABC равен 60°. Высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H, $BH=3, HB_1=2.$ Чему равна высота AA_1? (Вторая лемма о высотах).

Δ **3а(2).** По первой лемме о высотах в любом не прямоугольном треугольнике $\Delta A_1B_1C\sim\Delta ABC$ и коэффициент подобия равен $\left|\cos C\right|=\dfrac{A_1B_1}{AB}$.

Если угол C – острый, то $\cos C=\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{3\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},$ $\underline{\underline{\angle C=45^\circ}}$; если же угол C – тупой, то $\cos C=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},$ $\underline{\underline{\angle C=135^\circ}}$.

3б(2). В треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H, $\angle C=60^\circ$ (рис. 7). В треугольнике AA_1C угол $A_1AC=30^\circ$ и это острый угол прямоугольного треугольника AHB_1, катет $HB_1=2$, следовательно, гипотенуза $AH=4$. По

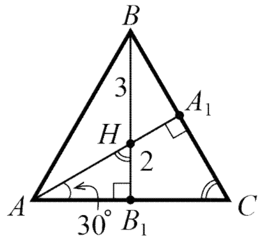

Рис. 7

второй лемме о высотах $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 \Leftrightarrow 4 \cdot HA_1 = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow HA_1 = \dfrac{3}{2}$ и

$AA_1 = 4 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{11}{2} = \underline{\underline{5{,}5}}.$ ▲

4(5). а) Сформулируйте теорему о трёх медианах.

б) Медиана *BM* треугольника *ABC* равна половине стороны *AC*. Докажите, что $\angle B = 90^\circ$.

в) В треугольнике *ABC* его медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке *O*. Середины отрезков *OA*, *OB* и *OC* обозначены соответственно A_2, B_2 и C_2. Выразите периметр шестиугольника $A_2C_1B_2A_1C_2B_1$ через медианы $m_a = AA_1, m_b = BB_1, m_c = CC_1$.

Δ **4а(1).** Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, и каждая медиана точкой пересечения делится в отношении 2:1, считая от вершины.

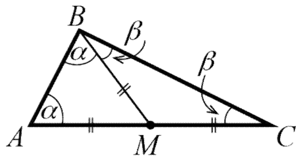

Рис. 8

4б(2). Из $BM = \dfrac{1}{2}AC$ следует $AM = MB$ и $CM = MB$ (рис. 8). В равнобедренном треугольнике *AMB* равные углы при основании *AB* обозначим α, в равнобедренном треугольнике *CMB* равные углы при основании *BC* обозначим β. Сумма углов треугольника *ABC* равна 180° и равна $2\alpha + 2\beta$, откуда и следует, что $\angle ABC = \alpha + \beta = \underline{\underline{90^\circ}}$.

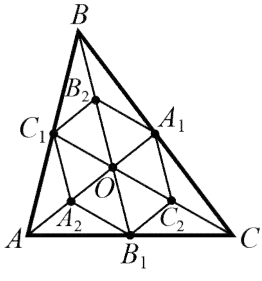

Рис. 9

4в(2). По теореме о трёх медианах $BO = \dfrac{2}{3}BB_1 = \dfrac{2}{3}m_в$ (рис. 9). В треугольнике *AOB* точка $C_1 -$ середина стороны *AB*, точка $A_2 -$ середина стороны $AO \Rightarrow$ отрезок $C_1A_2 -$ средняя линия, она параллельна *BO* и равна его половине: $C_1A_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}m_b\right) = \dfrac{1}{3}m_b$. Аналогично, $A_1C_2 -$ средняя линия треугольника *BOC*, $A_1C_2 \parallel BO$ и $A_1C_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}m_b\right) = \dfrac{1}{3}m_b$. Точно также устанавливается, что $C_1B_2 \parallel AA_1 \parallel B_1C_2$ и $C_1B_2 = B_1C_2 = \dfrac{1}{3}m_a$. Затем устанавливаем, что

$B_1A_2 = A_1B_2 = \frac{1}{3}m_c$ и $B_1A_2 \parallel CC_1 \parallel A_1B_2$. В шестиугольнике $A_2C_1B_2A_1C_2B_1$ противоположные стороны попарно параллельны и равны трети соответствующей медианы. Итак, периметр этого шестиугольника равен $2\left(\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c)}}$. ▲

5(4). Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC, точка E – на стороне BC. Известно: $AD:DC = 4:3, BE:EC = 2:1$.

а) Отрезки AE и BD пересекаются в точке O. Найдите отношения $AO:OE$ и $BO:OD$. (Теорема Менелая).

б) Прямая DE пересекает прямую AB в точке K. Найдите отношение $AK:AB$. (Теорема Менелая).

∆ **5а(2).** **<u>1 способ</u>** (по теореме Менелая). Обозначим $DC = 3x, CE = y$, тогда $AD = 4x$, $BE = 2y$ (рис. 10).

1) Рассматриваем треугольник CBD и секущую EA. По теореме Менелая:

$$\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BO}{OD}\cdot\frac{DA}{AC} = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{2y}\cdot\frac{BO}{OD}\cdot\frac{4x}{7x} = 1 \Leftrightarrow BO:OD = 7:2.$$

2) Теперь рассматриваем треугольник CAE и секущую DB. Имеем:

$$\frac{CD}{DA}\cdot\frac{AO}{OE}\cdot\frac{EB}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{4x}\cdot\frac{AO}{OE}\cdot\frac{2y}{3y} = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{AO:OE = 2:1}}.$$

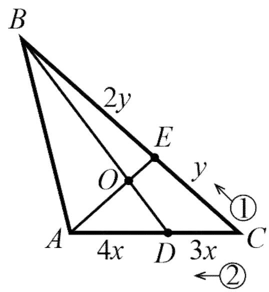

Рис. 10

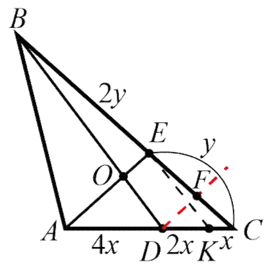

Рис. 11

<u>2 способ</u> (без использования теоремы Менелая). Через точку E проводим $EK \parallel BD$. (Рис. 11). Параллельные прямые EK и BD пересекают стороны угла BCD. По теореме 6 Задания $DK:KC = BE:EC \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow DK:KC = 2:1$; $DK = \frac{2}{3}DC = 2x$. Параллельные прямые OD и EK пересекают стороны угла EAC, по той же теореме $AO:OE = AD:DK \Leftrightarrow AO:OE = 4x:2x$, $\underline{\underline{AO:OE = 2:1}}$. Для определения отношения $BO:OD$ надо провести через точку D прямую, параллельную прямой AE до пересечения со стороной BC и далее аналогичные рассуждения.

5б(2). Если через точку E провести прямую EF, параллельную BA, то она пересечёт отрезок AC в точке, лежащей между D и C, так как $\frac{CE}{CB}=\frac{1}{3}<\frac{CD}{CA}=\frac{3}{7}$. Поэтому точки K и B лежат в разных полуплоскостях по отношению к прямой AC (рис. 12). Пусть $AH \parallel BC$, тогда $\Delta ADH \sim \Delta CDE$ (по двум углам), $\frac{AH}{CE}=\frac{AD}{DC} \Leftrightarrow AH=\frac{4}{3}y$. Далее, в треугольнике KBE отрезок $AH \parallel BE$, по лемме §3 $\Delta KAH \sim \Delta KBE \Rightarrow \frac{KB}{KA}=\frac{BE}{AH} \Leftrightarrow \frac{c+z}{z}=\frac{2y}{\frac{4}{3}y} \Leftrightarrow$

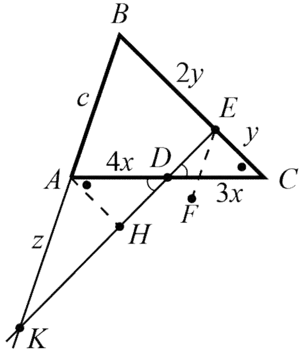

Рис. 12

$\frac{c}{z}=\frac{1}{2}; z=2c$, $\underline{\underline{AK:AB=2:1}}$. ▲

6(4). а) Диагонали трапеции, пересекая среднюю линию, делят её на три равные части. Найдите отношение длин оснований.

б) Отрезок MN параллелен основаниям трапеции $ABCD$ (рис. 14), $BC=3, AD=13, MN=9.$ Найдите в каком отношении прямая MN делит боковые стороны.

в) Найдите высоту равнобокой трапеции, диагональ которой равна d, а средняя линия равна m.

Δ **6а(1).** Средняя линия трапеции, пересекая диагональ трапеции, делит её пополам (свойство 1° трапеции). Если MN – средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 13) пересекает диагонали в точках P и Q, $AD=a, BC=b$, то $MP=\frac{b}{2}, QN=\frac{b}{2}, PQ=\frac{a-b}{2}$. Из равенства $\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}$ следует $\underline{\underline{a=2b}}$.

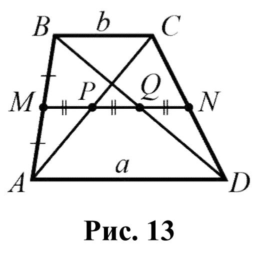

Рис. 13

6б(2). Решаем по методу Примера 5 Задания. Пусть $CE \| BA$ и $NF \| BA$ (рис. 14). Имеем: $MBCE$ – параллелограмм, $ME = BC$, $AMNF$ – параллелограмм, $MN = AF$, поэтому $EN = MN - BC = 6$, $FD = AD - MN = 4$. Далее: $\Delta CNE \sim \Delta NDF$ (по двум углам), $\dfrac{CN}{ND} = \dfrac{EN}{FD} \Leftrightarrow \dfrac{CN}{ND} = \dfrac{3}{2}$. По обобщённой теореме Фалеса $\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{CN}{ND} = \underline{\underline{\dfrac{3}{2}}}$.

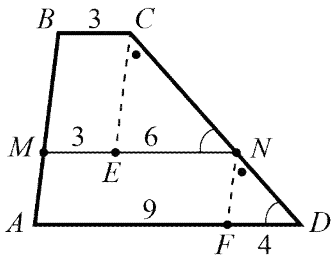

Рис. 14

6в(1). Если основания равнобокой трапеции $ABCD$ $(AD \| BC)$ равны a и b (рис. 15) и $CF \perp AD$, то по свойству 5° равнобокой трапеции $AF = \dfrac{a+b}{2}, FD = \dfrac{a-b}{2}$. В прямоугольном треугольнике ACF с гипотенузой $AC = d$ и катетом $AF = \dfrac{a+b}{2} = m$ находим катет $\underline{\underline{CF = \sqrt{d^2 - m^2}}}$. ▲

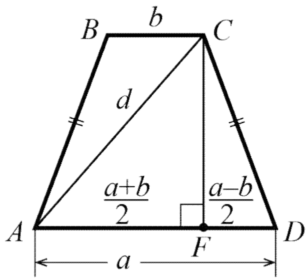

Рис. 15

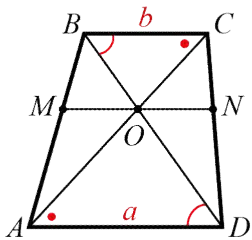

Рис. 16

7(6). а) В трапеции отрезок MN параллелен основаниям (рис. 16), $MN = 4$, сумма оснований равна 9. Найдите основания (см. Пример 4 Задания).

б) Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 7 и $\sqrt{15}$. Найдите расстояние между серединами оснований.

в) Углы при большем основании трапеции равны 61° и 29°. Точки M и N – середины оснований, точки P и Q – середины боковых сторон. Найдите основания трапеции, если $MN = 4$ и $PQ = 7$.

Δ **7а(2).** Пусть $BC = b$, $AD = a$, (рис. 16). Из $MO \parallel AD$ следует $\Delta MBO \sim \Delta ABD$ (по лемме §3), $\dfrac{MO}{AD} = \dfrac{BO}{BD} \Leftrightarrow MO = a \cdot \dfrac{BO}{BD}$. (1)

Далее, $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (по двум углам), $\dfrac{OD}{BO} = \dfrac{AD}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{OD}{BO} = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{OD}{BO} + 1 = \dfrac{a}{b} + 1 \Leftrightarrow \dfrac{BO + OD}{BO} = \dfrac{a+b}{b} \Leftrightarrow \dfrac{BO}{BD} = \dfrac{b}{a+b}$, тогда из (1) следует $MO = \dfrac{ab}{a+b}$.

Аналогично доказывается, что $ON = \dfrac{ab}{a+b}$, поэтому $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$.

При $MN = 4$ и $a + b = 9$ получаем систему $\begin{cases} a+b=9, \\ ab=18, \end{cases}$ $\underline{\underline{a=6}}, \underline{\underline{b=3}}\,(a > b)$.

7б(2). Пусть $AD = a, BC = b, AC \perp BD, AC = \sqrt{15}, BD = 7$, точки M и N – середины оснований (рис. 17). По свойству 3° трапеции середины оснований и точки пересечения диагоналей лежат на одной прямой, следовательно, $MN = MO + ON$. В прямоугольных треугольниках BOC и AOD отрезки OM и ON – медианы к гипотенузам, следовательно, $OM = \dfrac{1}{2}BC, ON = \dfrac{1}{2}AD$ и $MN = \dfrac{1}{2}(a+b)$.

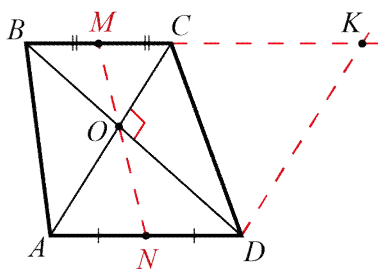

Рис. 17

Диагонали перпендикулярны друг другу. Пусть $BK \parallel AD$ и $DK \parallel AC$, тогда $\angle BDK = 90^\circ, DK = AC$ и $CK = AD$ (т. к. $ACKD$ – параллелограмм). Итак, $BK = b + a$, BK – гипотенуза прямоугольного треугольника BDK: $BK = \sqrt{BD^2 + AC^2} = \sqrt{49 + 15} = 8$, и $BK = a + b$. Находим $\underline{\underline{MN = \dfrac{a+b}{2} = 4}}$.

7в(2). Сумма углов A и D при большем основании трапеции $ABCD$ равна 90°, следовательно, продолжения боковых сторон пересекаются под углом 90° (рис. 18). Точки M и N – середины оснований. По свойству 3° трапеции середины оснований и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой, т. е. точка N лежит на отрезке KM и $MN = KM - KN$. В прямоугольном треугольнике AKD и BKC отрезки KM и KN соответственно являются медианами к гипотенузам, $KM = \frac{1}{2}AD, KN = \frac{1}{2}BC, MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$. Отрезок PQ – средняя линия, $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$. По условию $AD - BC = 8,\quad AD + BC = 14 \Rightarrow AD = 11, BC = 3.$ ▲

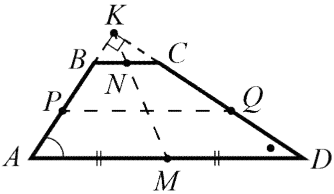

Рис. 18

8*(3). а) Будут ли два четырёхугольника подобны, если четыре угла одного соответственно равны четырём углам другого?

б) Дана трапеция с основаниями a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает её на две трапеции, подобные друг другу. Какова длина отрезка прямой внутри трапеции?

Δ В §3 дано определение подобных фигур. Подобные фигуры переводятся друг в друга преобразованием подобия.

Напомним определение преобразования «гомотетия» (в переводе с греческого «одинаковое расположение»). Пусть F – данная фигура и O – фиксированная точка. Проведём через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нём отрезок OX', равный $k \cdot OX$, где k – положительное число (рис. 19). Преобразование фигуры F, при котором каждая её точка X переходит в точку X', построенную указанным способом, называется гомотетией относительно центра O. Число k называется коэффициентом гомотетии. Гомотетия есть преобразование подобия: для любых точек X и Y фигуры F и их образов X' и Y' при

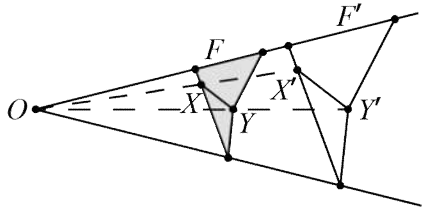

Рис. 19

гомотетии $X'Y' = kXY$. Действительно, $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY'} = k\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = k\left(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}\right) = k \cdot \overrightarrow{XY} \Rightarrow \left|\overrightarrow{X'Y'}\right| = k\left|\overrightarrow{XY}\right| \Leftrightarrow X'Y' = k \cdot XY$.

Преобразование подобия есть композиция гомотетии и движения (рис. 20). Фигура F'' равна фигуре F', фигура F' гомотетична с коэффициентом *k* фигуре *F*, фигура F'' подобна фигуре *F* с коэффициентом *k*, но не гомотетична ей.

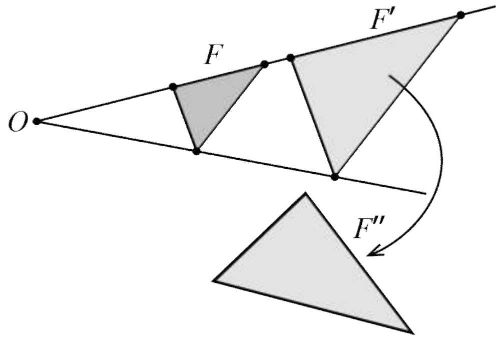

Рис. 20

8а(1). Два четырёхугольника F_1 и F_2, у которых четыре угла одного равны соответственно четырём углам другого, могут не быть подобными, например, квадрат и прямоугольник с отношением сторон 2:1, поскольку не существует прямоугольника с таким отношением сторон, который был бы гомотетичен квадрату (квадрат при гомотетии всегда переходит в квадрат).

8б(2). Рассмотрим трапецию *ABCD*. По определению, у трапеции только две стороны параллельны, значит продолжения двух других сторон (боковых) пересекаются в некоторой точке *K*. Любая прямая *d*, параллельная основаниям, разобьёт трапецию *ABCD* на две трапеции, при этом четыре угла верхней трапеции будут соответственно равны четырём углам нижней. Ищем положения прямой *MN* такое, что при гомотетии с центром в точке *K* верхняя трапеция преобразовывалась бы в нижнюю (рис. 21). Тогда эти две трапеции будут подобны.

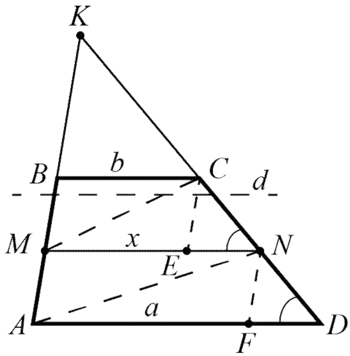

Рис. 21

Пусть $BC=b,\ AD=a,\ MN=x$. При гомотетии, с центром в точке K вершины трапеции $MBCN$ соответственно перейдут в вершины $B\to M$, $M\to A, C\to N, N\to D.$ Отношение верхних оснований должно быть равно отношению нижних оснований. $\frac{BC}{MN}=\frac{MN}{AD}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow MN^2=BC\cdot AD,\ MN=\sqrt{ab}.$ Найдём коэффициент гомотетии $\frac{AD}{MN}=\frac{a}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{a}{b}},\ \frac{MN}{BC}=\frac{\sqrt{ab}}{b}=\sqrt{\frac{a}{b}},\quad k=\sqrt{\frac{a}{b}}$. Покажем, что отношение образов боковых сторон AM и DN к их прообразам MB и NC будет таким же: $CE\parallel BA, NF\parallel BA,$ $MBCE$ и $AMNF$– параллелограммы, $ME=b, EN=x-b;\quad AF=MN=x, FD=a-x.$ Отношение боковых сторон равно: $\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}=\frac{a-x}{x-b},\quad \frac{a-x}{x-b}=\frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}-b}=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$ Действительно, отношение образа любой из сторон трапеции $MBCN$ при гомотетии с центром в точке K и коэффициентом $k=\sqrt{\frac{a}{b}}$ преобразуется в соответствующую сторону нижней трапеции $AMND$.

Итак, отрезок, параллельный основаниям трапеции с концами на боковых сторонах разбивает трапецию на две подобные друг другу трапеции, тогда и только тогда, когда его длина равна среднему геометрическому оснований искомой трапеции. Заметим, что при этом диагонали MC и AN параллельны. ▲

Задачи

1(4). Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 6. Медиана CM перпендикулярна медиане AK. Найдите катеты и третью медиану.

Ответ: $AC=2\sqrt{3}; BC=2\sqrt{6}; BE=3\sqrt{3}.$

Δ Пусть медианы CM и AK пересекаются в точке O (рис. 22). Медиана CM, проведённая к гипотенузе $AB=6$, равна $\frac{1}{2}AB$, $CM=3$; в точке O медиана CM делится в отношении 2:1, считая от вершины, $CO=2, OM=1$.

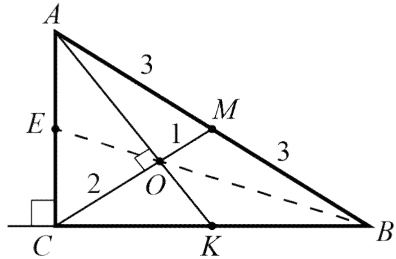

Рис. 22

$\Delta AMO, \angle AOM = 90^\circ, AO = \sqrt{AM^2 - OM^2} = \sqrt{8};$

$\Delta ACO, \angle AOC = 90^\circ, AC = \sqrt{AO^2 + CO^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$

$\Delta ABC, \angle C = 90^\circ, BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$

Третья медиана BE проходит через точку O и $OE = \frac{1}{3}BE.$ Отрезок OE – медиана к гипотенузе в прямоугольном треугольнике ACO, $OE = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3} \Rightarrow BE = 3\sqrt{3}.$ ▲

2(5). Точка D – середина стороны AB, точка M – середина стороны BC треугольника ABC. Высота AH пересекает отрезок DM в точке K так, что $DK = 2KM$. Найдите длину стороны BC, если $AB = 7$ и $AC = 8$.

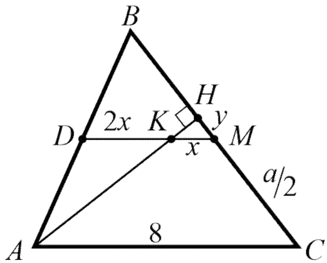

Рис. 23

Ответ: $5\sqrt{3}.$

Δ Средняя линия $DM = 4,$ $DK = 2KM$, $KM = \frac{1}{3}DM = \frac{4}{3}$ (рис. 23). Пусть $BC = a$, точка M – середина стороны BC, $MC = \frac{a}{2},$ и пусть $HM = y$. Имеем: $\Delta AHC \sim \Delta KHM$ (т. к. $KM \parallel AC$), $\frac{CH}{MH} = \frac{AC}{KM} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2} + y}{y} = \frac{8}{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow y = \frac{a}{10} \Rightarrow CH = \frac{a}{2} + \frac{a}{10} = \frac{3}{5}a,\ BH = \frac{2}{5}a$. Выражаем высоту AH из треугольников ABH и ACH:

$$AH^2 = 49 - \left(\frac{2}{5}a\right)^2 = 64 - \left(\frac{3}{5}a\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{5} = 15 \Leftrightarrow a = 5\sqrt{3}.\ ▲$$

3(5). Основания BC и AD равнобокой трапеции $ABCD$ равны 3 и 12. Диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. Найдите высоту, диагональ и боковую сторону трапеции.

Ответ: $h = \frac{3}{2}\sqrt{15}, d = 3\sqrt{10}, c = 3\sqrt{6}.$

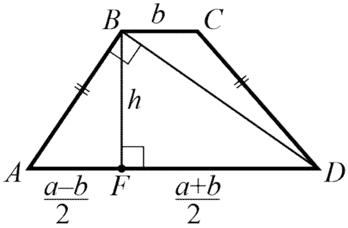

Рис. 24

Δ Трапеция $ABCD$ – равнобокая, $BD \perp AB, BC = b = 3, AC = a = 12$ (рис. 24). Опустим высоту BF. По свойству 5° равнобокой трапеции $AF = \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{9}{2}$, $DF = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{15}{2}$. Треугольник ABD – прямоугольный, BF – высота к гипотенузе. По формуле $h^2 = AF \cdot BF$ для высоты прямоугольного треугольника получаем: $h^2 = \dfrac{9 \cdot 15}{4}, h = \dfrac{3}{2}\sqrt{15}$. Из прямоугольных треугольников BDF и BAF вычисляем диагональ и боковую сторону:

$$d = BD = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9 \cdot 15}{4} + \frac{15^2}{4}} = \sqrt{\frac{15}{4} \cdot 24} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10},$$

$$c = CD = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9 \cdot 15}{4} + \frac{9^2}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot 24} = 3\sqrt{6}.$$

Для равнобокой трапеции справедливо равенство $d^2 = c^2 + ab$. Действительно, $c^2 + ab = h^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 + ab = h^2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = d^2$. ▲

4(8). Треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC = 13, AC = 10$. Найдите расстояние от вершины B до точек пересечения:

а) медиан; б) биссектрис; в) серединных перпендикуляров; г) высот.

Ответ: а) 8; б) $8\dfrac{2}{3}$; в) $7\dfrac{1}{24}$; г) $9\dfrac{11}{12}$.

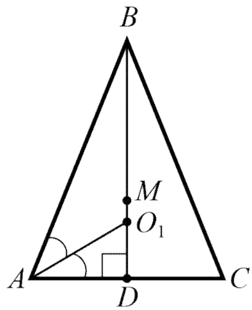

Рис. 25

Δ Высота $h = BD$ к основанию AC является медианой, биссектрисой и серединным перпендикуляром отрезка AC, поэтому все искомые точки лежат на BD; $h = BD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (рис. 25).

а) Пусть M – точка пересечения медиан, по теореме о медианах $BM = \dfrac{2}{3}BD$, $\underline{\underline{BM = 8}}$.

б) Пусть $O_1 -$ точка пересечения биссектрис (рис. 25). В треугольнике ABD отрезок $AO_1 -$ биссектриса, по теореме о биссектрисе треугольника $\frac{BO_1}{O_1D}=\frac{AB}{AD}\Leftrightarrow\frac{BO_1}{O_1D}=\frac{13}{5}\Leftrightarrow BO_1=\frac{13}{18}BD$. Итак, $BO_1=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$.

в) Пусть O – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC (рис. 26), тогда $O-$ центр описанной окружности: $OB=OC=R.$ Из прямоугольного треугольника DOC, в котором $OC=R$ и $OD=h-R,$ получаем $R^2-\left(h-R\right)^2=DC^2\Leftrightarrow -h^2+2hR=5^2$, $R=\frac{169}{24}=7\frac{1}{24}, BO=7\frac{1}{24}.$

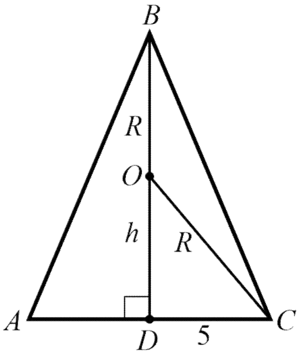

Рис. 26

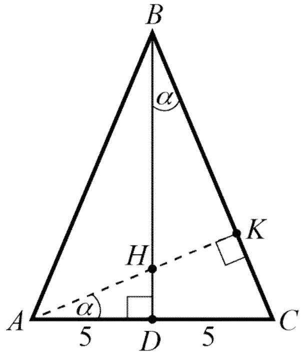

Рис. 27

г) Высота AK пересекает высоту BD в точке H (рис. 27), $\alpha=\angle CAK=\angle CBD.$ Из треугольника CBD находим $\operatorname{tg}\alpha=\frac{DC}{BD}=\frac{5}{12}$.

В треугольнике AHD $\operatorname{tg}\alpha=\frac{HD}{AD}=\frac{HD}{5}\Rightarrow HD=\frac{25}{12}$ и $BH=BD-HD=$ $=12-\frac{25}{12}=\frac{119}{12}=9\frac{11}{12}.$ ▲

5(5). В равнобедренном треугольнике с основанием 2 и боковой стороной 5, найдите периметр ортотреугольника.

Ответ: 3,84.

Δ Пусть BB_1, AA_1 и CC_1 – высоты равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC = 5)$, $AC = 2$ (рис. 28). По лемме 1 о высотах $\underline{\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC}$. Треугольник A_1B_1C также равнобедренный, $A_1B_1 = B_1C$. Из $AB_1 = B_1C = 1$ следует $A_1B_1 = 1$. Аналогично, $\underline{\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC}$, $AB_1 = B_1C_1 \Rightarrow B_1C_1 = 1$. Далее, по двум сторонам и углу между ними $\Delta A_1B_1C = \Delta AB_1C_1 \Rightarrow AC_1 = CA_1$. Обозначим $CA_1 = x$. Из подчёркнутого подобия следует $\dfrac{x}{AC} = \dfrac{1}{BC} \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}$, значит $AC_1 = CA_1 = \dfrac{2}{5}$ и $BA_1 = BC_1 = 5 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{23}{5}$. Далее $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$, $\dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{BC_1}{BC} \Leftrightarrow A_1C_1 = 2\dfrac{\frac{23}{5}}{5} = \dfrac{46}{25}$. Находим периметр ортотреугольника $A_1B_1C_1$: $P = 1 + 1 + \dfrac{46}{25} = 3\dfrac{21}{25} = \underline{\underline{3,84}}$. ▲

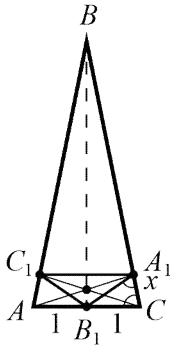

Рис. 28

6(6). В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC $(AD > BC)$. Точка M – середина стороны CD, угол AMD – прямой. Найдите отношение длин оснований, если $AB = \dfrac{2}{3}AM$.

Ответ: 7:9.

Δ Пусть $AD = a$, $BC = b$ и $AB = 2x$, KM – средняя линия трапеции (рис. 29). Из $KM \parallel AD$ и $AD \perp AB \Rightarrow KM \perp AB$. Обозначим $\angle KMA = \alpha$, тогда $\angle DAM = \alpha$ (накрест лежащие углы). По условию $AM = \dfrac{3}{2}AB = 3x$. Из ΔKAM находим $KM = 2\sqrt{2}x$. Прямоугольные треугольники с равным острым углом подобны, поэтому $\Delta KMA \sim \Delta MAD$. Из подобия следует $\dfrac{KM}{MA} = \dfrac{MA}{AD} \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{2}x}{3x} = \dfrac{3x}{a} \Rightarrow a = \dfrac{9}{2\sqrt{2}}x$. Уже найденный отрезок KM есть

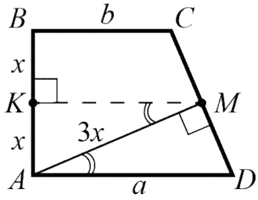

Рис. 29

средняя линия: $KM=\dfrac{a+b}{2}=2\sqrt{2}x.$ Находим $b=4\sqrt{2}x-a=$ $=4\sqrt{2}x-\dfrac{9\sqrt{2}}{4}x=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}x,$ откуда $\dfrac{b}{a}=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{9}=\dfrac{7}{9}.$ ▲

7(6). В прямоугольном треугольнике *ABC* из вершины *C* прямого угла проведены медиана *CM*, биссектриса *CK* и высота *CH*.

а) Докажите, что *CK* – биссектриса угла *HCM*.

б) Зная, что $HK=1$ и $KM=2$ найдите величину угла *A* в градусах, длину биссектрисы *CK* и значение tg *A*.

Ответ: $\angle A=15^\circ;\ \mathrm{tg}\,A=2-\sqrt{3},\ CK=2.$

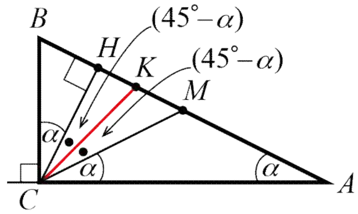

Рис. 30

Δ **а)** Пусть прямоугольный треугольник *ABC* не равнобедренный (рис. 30), меньший из его углов $\angle BAC=\alpha$ $(\alpha<45^\circ)$. Медиана $CM=\dfrac{1}{2}AB=AM$, треугольник *AMC* – равнобедренный, $\angle ACM=\alpha$. *CH* – высота к гипотенузе, $\angle BCH=\angle BAC=\alpha$. Если *CK* – биссектриса прямого угла *ACB*, то $\angle ACK=\angle BCK=45^\circ$ и $\angle MCK=45^\circ-\alpha=\angle HCK$. Это означает, что биссектриса *CK* прямого угла *ACB* делит пополам угол *MCH* между медианой *CM* и высотой *CH*, ч. т. д.

б) Пусть $AB=c, CH=h, HK=1, KM=2$. Из ΔCHM имеем $CH^2=CM^2-HM^2\Leftrightarrow$ $h^2=\dfrac{c^2}{4}-9$ и $\dfrac{CH}{CM}=\dfrac{HK}{KM}\Leftrightarrow\dfrac{h}{\frac{c}{2}}=\dfrac{1}{2}.$ Итак,

$h=\dfrac{c}{4}, 9=\dfrac{c^2}{4}-\dfrac{c^2}{16}=\dfrac{3}{16}c^2\Leftrightarrow \underline{\underline{c=4\sqrt{3}}},$ $h=\sqrt{3}.$ Далее, $\angle CMH=2\alpha,$ $\cos 2\alpha=\dfrac{HM}{CM}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$ $2\alpha=30^\circ$, $\underline{\underline{\alpha=15^\circ}}.$ Из прямоугольного треугольника *CHA* находим $\mathrm{tg}\,15^\circ=\dfrac{CH}{HA},$ $HA=HM+MA=3+2\sqrt{3},$ $\mathrm{tg}\,15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\underline{\underline{2-\sqrt{3}}}.$ Длину биссектрисы определяем из прямоугольного треугольника *HCK*: $CK=\sqrt{HC^2+HK^2}=\sqrt{h^2+1}=\underline{\underline{2}}.$ ▲

8(6). Точка M лежит на стороне AC, точка D – на стороне BC треугольника ABC. Отрезки AD и BM пересекаются в точке O, при этом $AO:OD=6:7$ и $BO:OM=10:3$. Найдите отношения $AM:MC$ и $BD:DC$.

Ответ: $AM:MC=3:7$, $BD:DC=1:1$.

Δ Пусть $AM=m$, $MC=n$ и $BD=p$, $DC=q$ (рис. 31). Для треугольника CAD и секущей MB по теореме Менелая имеем

$$\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DB}{BC}=1\Leftrightarrow\frac{n}{m}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{p}{p+q}=1 \quad (1),$$

а из треугольника CBM и секущей DA по теореме Менелая получаем

$$\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BO}{OM}\cdot\frac{MA}{AC}=1\Leftrightarrow\frac{q}{p}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{m}{m+n}=1 \quad (2).$$

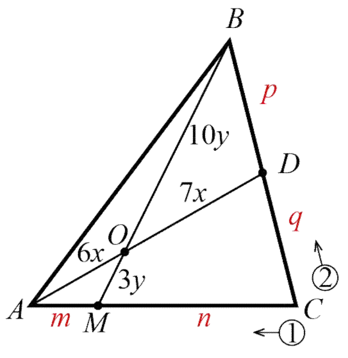

Рис. 31

Преобразуем равенство (2):

$$\frac{q}{p}\cdot\frac{10}{3}=\frac{m+n}{m}\Leftrightarrow\frac{10q}{3p}-1=\frac{n}{m}\Leftrightarrow\frac{n}{m}=\frac{10q-3p}{3p}$$

и значение $\frac{n}{m}$ подставляем в (1):

$$\frac{10q-3p}{3p}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{p}{p+q}=1\Leftrightarrow 20q-6p=7p+7q\Leftrightarrow 13p=13q.$$

Итак, $p=q$, теперь находим $\frac{n}{m}=\frac{7}{3}$ и записываем ответ: $AM:MC=m:n=3:7$ и $BD:DC=p:q=1:1$. ▲

9(7). В треугольнике ABC проведены биссектриса AD и медиана BM. Из точек D и M опущены перпендикуляры DK и MP на сторону AB. Известно, что $AK:KB=9:1$ и $AP:PB=2:3$. Найдите отношение $AD:BM$.

Ответ: $AD:BM=\sqrt{2}$.

Δ Из условия следует, что $AK=\frac{9}{10}AB$, $KB=\frac{1}{10}AB$, а также $AP=\frac{4}{10}AB$, $PB=\frac{6}{10}AB$. Обозначим $KB=x$ (рис. 32), тогда $AK=9x$, $AP=4x$ и $PB=6x$.

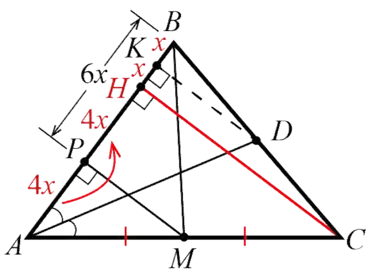

Рис. 32

Точка M – середина стороны AC. Проведём высоту $CH \perp AB$. Из $MP \perp AB$, и $CH \perp AB$ следует, $MP \| CH$, тогда из $AM = AC$ по теореме Фалеса следует $AP = PH = 4x$, а по теореме о средней линии $MP = \frac{1}{2}CH$. Также следует, что $AH = 8x$, поэтому $HB = 2x$ и точка K – середина отрезка HB. Вновь из $HK = KB$ и $HC \| KD$ по теореме Фалеса получаем $BD = DC$, а по теореме о средней линии $DK = \frac{1}{2}CH$.

Биссектриса AD треугольника ABC оказалась также и медианой. Можно утверждать, что треугольник ABC равнобедренный $AB = AC$ (доказано в Задании в «примерах ответов на контрольные вопросы», стр. 24).

Итак, $\underline{AB = AC = 10x}$. Обозначим $CH = h$, как установили $MP = \frac{h}{2}$ и $DK = \frac{h}{2}$. Из прямоугольных треугольников BMP и ADK выражаем $BM^2 = PM^2 + BP^2$ и $AD^2 = DK^2 + AK^2$, получаем $BM^2 = \frac{h^2}{4} + (6x)^2$ и $AD^2 = \frac{h^2}{4} + (9x)^2$. Рассмотрим также ΔAMP: $\angle APM = 90^\circ$, $AM = \frac{1}{2}AC = 5x$, $MP = \frac{h}{2}$, имеем $\frac{h^2}{4} = 25x^2 - 16x^2 = 9x^2$. Вот теперь выражаем через x AD и BM: $AD^2 = 9x^2 + 81x^2 = 90x^2$, $BM^2 = 9x^2 + 36x^2 = 45x^2 \Rightarrow \frac{AD}{BM} = \sqrt{\frac{90}{45}} = \sqrt{2}$. ▲

10(6). Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O и перпендикулярны друг другу, основания $AD = a$ и $BC = b, a > b$. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно стороне AB, пересекает сторону AB в точке M и сторону CD в точке N. Известно, что имеет место равенство $AO \cdot OC = BO \cdot OD$. Найдите длину отрезка MN.

Ответ: $\frac{(a+b)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$.

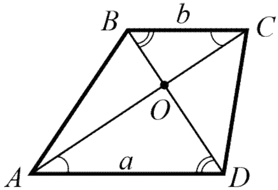

Рис. 33

Δ В любой трапеции диагонали разбивают трапецию на 4 треугольника. Треугольники, прилежащие к основаниям, подобны. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 33)

$$\Delta BOC \sim \Delta DOA \Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{OC}{OA} \Leftrightarrow BO \cdot OA = CO \cdot OD.$$

В заданной трапеции другое равенство $AO \cdot OC = BO \cdot OD$. Отношение левых и правых частей даёт равенство $\frac{BO}{OC} = \frac{CO}{BO} \Rightarrow BO = OC \Rightarrow AO = DO$. Это приводит к равенству диагоналей $\underline{BD = AC}$ и равенству боковых сторон $(BO = CO, AO = DO, \ \angle BOA = \angle COD \Rightarrow \ \Delta BOA = \Delta COD \Rightarrow \ AB = CD)$.

Треугольники BOC и AOD прямоугольные равнобедренные (рис. 34); ΔBOC: $BO = OC = \frac{b}{\sqrt{2}}$; ΔAOD: $AO = OD = \frac{a}{\sqrt{2}}$; треугольники AOB и COD – равные прямоугольные, с катетами $\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}$ и гипотенузами $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$. В треугольнике AOB отрезок OM – высота к гипотенузе, $OM \cdot AB = BO \cdot AO \Rightarrow \ OM = \frac{ab}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}}$. Расставим равные углы α $\left(\alpha = \angle BAO = \angle CDO\right)$, видим, что ON – медиана к гипотенузе в треугольнике COD, $ON = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$. Длина отрезка MN равна

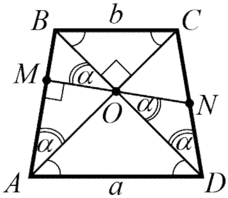

Рис. 34

$$OM + ON = \frac{ab}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2ab + a^2 + b^2}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\left(a+b\right)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}. \ \blacktriangle$$