Кубок ЛФИ

9.s03.epilogue

Постскриптум — место в письме, которое является главным,
но притворяется второстепенным.
Ашот Наданян

Постскриптум

Мэри каждый день ходит из пункта ДОМ в пункт МЕРЧ и обратно. Так как Мерч еще не привезли, то скорость движения Мэри туда и обратно одинакова.

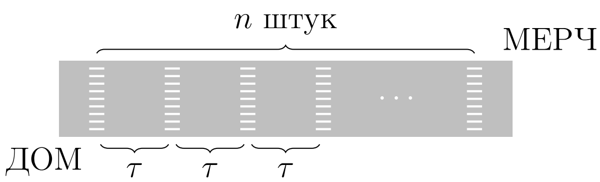
Пункты ДОМ и МЕРЧ находятся по разные стороны Пути, вдоль которого расположены n равноудалённых светофоров. Известно, что все светофоры синхронизированны, то есть меняют цвет одновременно. Светофоры светят красным в течение времени $t_{к}$, зелёным в течение времени $t_{з}$.

Мэри проходит расстояние между соседними светофорами за время τ. Известно, что она успевает пройти расстояние от первого до последнего светофора за время меньшее, чем его период, то есть $\tau(n-1) < t_{к} + t_{з}$.

Каждый день Мэри отправляется в Путь в случайное время. Мэри следует правилам дорожного движения ~~что и вам советуем~~ и не переходит дорогу на красный. При этом она всегда выбирает маршрут, на котором время ожидания минимально, и записывает это время в дневник ~~чтобы не забыть~~.

Вам предлагается дневник Мэри. Из него определите:

1. *(2,5 балла)* количество светофоров n,
2. *(2,5 балла)* время $t_{к}$, в течение которого светофоры светят красным ,
3. *(2,5 балла)* время $t_{з}$, в течение которого светофоры светят зеленым,
4. *(2,5 балла)* время τ, в течение которого Мэри идёт между двумя ближайшими светофорами.

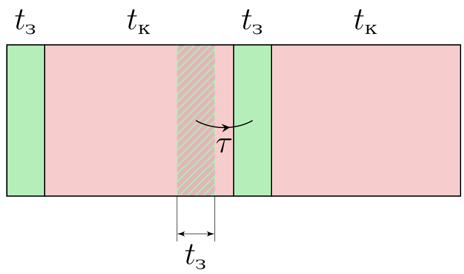


Вы можете скачать дневник Мэри в форматах csv, excel и pdf.

Автор задачи: Паша Шишкин

Решение

Для начала определимся с «языком» на котором будет решение. Нарисуем два цикла светофора (см. рис.). Если Мэри оказывается на красном, заштрихованном зелёным участке, она идёт к следующему светофору. При этом она ждёт 0 секунд, так как на новом светофоре будет зелёный свет. Тогда будем считать этот участок эффективно зелёным.



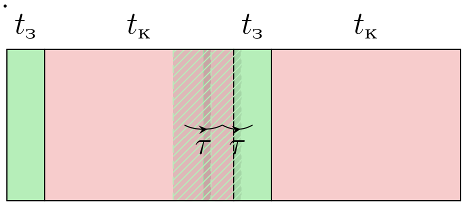
То есть образ «зелёного» тоже «зелёный» в некотором смысле. Очевидно, если светофоров n, промежутков между ними ровно $n-1$, тогда есть $(n-1)$ образ. Из условия

$$(n-1)\tau < t_к + t_з$$

получаем, что эти образы не могут уйти за пределы первого таймлайна. Под плотностью вероятности будем понимать вероятность попасть в некоторую секунду. Такое «дискретное» определение корректно, так как светофор светит дискретно по времени (показывает только номер секунды). Рассмотрим некоторые случаи.

1 случай. $\tau < t_з$. Как видно из картинки, в этом случае будет длинный зелёный участок длины

$$(n-1)\tau + t_з.$$



Тогда в распределении плотности вероятности будет большой пик в нуле (при попадании в $t_з$) и постоянное значение для времён от 0 до $t_к - (n-1)\tau$. Возможно, что

$$t_к - (n-1)\tau < 0.$$

Тогда Мэри всегда ждёт 0 секунд.

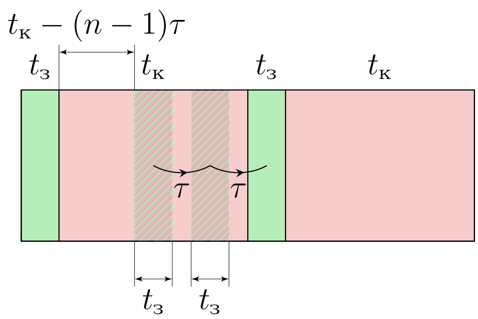
2 случай. $t_з < \tau$. Самый интересный случай!

1. $(n-1)\tau > t_к$. В этом случае будет $(n-1)$ красных участков длины

$$\tau - t_з > 0.$$

   Эти участки *все одной длины* и нет других красных участков. Следовательно, все времена ожидания от 1 до $\tau - t_з$ равновероятны, у плотности вероятности пик в нуле, далее константа.

2. $(n-1)\tau < t_к$; $t_к - (n-1)\tau > \tau - t_з$. Теперь у нас есть участки разной длины: один участок длиной $t_к - (n-1)\tau$ и $(n-1)$ участков длиной $\tau - t_з$.



(a) Распределение плотности вероятности в нуле равно

$$p(0) = \frac{nt_з}{t_к + t_з},$$

так как зелёного света n участков, а сами участки не пересекаются.

(b) Распределение плотности вероятности имеет ступеньку длиной $t_к(n-1)\tau$, высотой $\dfrac{1\ \text{сек}}{t_к + t_з}$, так как на больших временах получить это время можно только одним способом (попав в длинный участок).

(c) Распределение плотности вероятности имеет ступеньку длиной $\tau - t_з$, высотой $\dfrac{n \cdot 1\ \text{сек}}{t_к + t_з}$, так как эти времена можно получить во всех n участках.

3. $(n-1)\tau < t_к$, $\tau > t_з$, $\tau - t_з > (n-1)\tau$, $(n-1)\tau < t_к$. Аналогично предыдущему пункту:

   (a) $p(0) = \dfrac{t_з n}{t_з + t_к}$

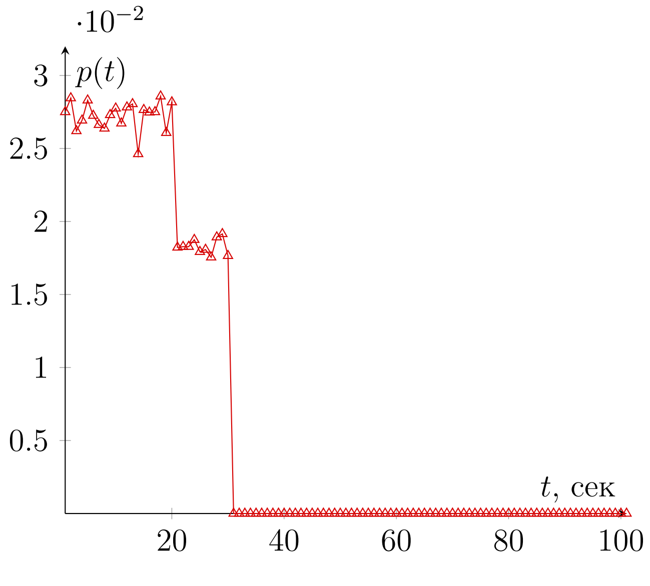
   (b) $p(t) = \dfrac{(n-1)\cdot 1\ \text{сек}}{t_к + t_з}$; $t_к - (n-1)\tau < t^* \leq \tau - t_з$.

   (c) $p(t) = \dfrac{n \cdot 1\ \text{сек}}{t_к + t_з}$; $0 < t \leqslant t_к - (n-1)\tau$.

   Здесь в пункте (b) $(n-1)$ способов, а не 1. Так как $(n-1)$ промежутков соответствующей длины.

Теперь для каждого времени посчитаем вероятность: для каждого времени посчитаем количество случаев и поделим на общее количество записей в дневнике.

Построим график. На нём **не рисуем** $p(0)$ так как оно будет слишком высоко.



Воспользуемся первым хинтом. Он нам говорит сравнить высоты, чтобы ~~проехать под мостом~~ узнать n

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{3}.$$

Здесь p_1 и p_2 — высоты ступенек на графике. Откуда получаем $n = 3$, что сходится со вторым хинтом. Вероятность в нуле равна

$$p(0) = 0{,}271843\dots$$

Из соображений выше

$$\begin{cases} 30\text{ сек} = \tau - t_з; \\ 20\text{ сек} = t_к - (n-1)\tau; \\ P(0) = \dfrac{t_з n}{t_з + t_к}; \end{cases} \implies \begin{cases} \tau = 39{,}96\text{ сек}; \\ t_к = 99{,}91\text{ сек}; \\ t_з = 9{,}96\text{ сек}; \end{cases} \implies \begin{cases} \tau = 40\text{ сек}; \\ t_к = 100\text{ сек}; \\ t_з = 10\text{ сек}. \end{cases}$$

Причём первые 2 уравнения именно так записываем, поскольку соотношение ступенек $2/3$.