Давление излучения

Аннотация

Известно, что для того, чтобы разогнать что–то, надо придать ему импульс. И неважно, как: можно отбрасывать от себя некоторую массу в виде газа, тем самым придавая себе импульс подобно ракете, а можно толкать чем–нибудь извне. Конечно, пушкой, как это описывал Жюль Верн в своей книге, много чего не сделаешь — однако нам это и не нужно. Ведь же у нас есть источник, который может толкать постоянно, сколь угодно долго (если, конечно, не нужно будет для чего–то разгоняться миллиарды лет). И этот источник — наше Солнце: оно излучает свет, а фотоны, как известно, обладают импульсом. Поэтому солнечный свет может передавать импульс, а значит, и оказывать давление.

Собственно, хорошо бы узнать давление, действующее на солнечный парус. Эта задача с грамотно использующимся приближением совсем не сложная и даётся, например, 11–классникам на заключительном этапе всероссийской олимпиады (пример: 4 задача ВсОШ 2017 года). И обычно выходит выражение для светового давления $P = 2\mathcal{F}/c$, где $\mathcal{F}$ — освещённость Солнцем (при условии полного отражения). Однако, используя уравнение состояния для фотонного газа выходит, что $P = 4\mathcal{F}/3c$, что довольно сильно отличается от того, что используется в задаче. Возникает закономерный вопрос: а почему так вышло? В этой статье мы попробуем с этим разобраться.

1 Введение

Прежде, чем вычислять давление, плотность и прочие характеристики фотонного газа (не обязательно равновесного), нужно определится с различными величинами. Представим себе такую ситуацию: у нас есть площадка площадью dS и она излучает свет под углом θ к нормали. Выясним, от чего зависит энергия, которую излучает эта площадка.

Очевидно, что она пропорциональна времени, в течении которого фотоны поступали на эту площадку. Также она пропорциональна некоторой эффективной площади площадки, которая равна $dS \cos\theta$ (см. рис. 1) и телесному углу $d\omega$, из которого эта энергия поступает. В итоге можно записать $\delta E \propto dtdS\cos\theta d\omega$. У этой зависимости есть некоторый коэффициент пропорциональности, который зависит от частоты ν, на которой эта энергия проходит. С учётом этого можно окончательно записать $\delta E(I_\nu) = I_\nu d\nu dtdSd\omega\cos\theta$, I_ν — это спектральная плотность яркости

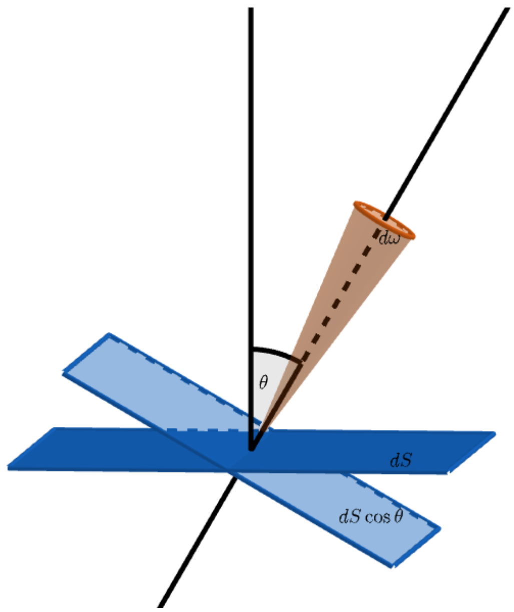

Рис. 1: Наглядное представление I_ν

Аналогично можно ввести спектральную плотность освещённости $\mathcal{F}_\nu$ — это энергия на частоте ν, которую излучила данная площадка во всех направлениях, делённая на время dt, в течении которого эта площадка излучала, и на её площадь dS, иными словами в этом случае

$$\delta E(\mathcal{F}_\nu) = \mathcal{F}_\nu\, d\nu dtdS = \int\limits_\Phi \delta E(I_\nu)d\omega$$

Отсюда

$$\mathcal{F}_\nu = \int\limits_\Phi I_\nu\cos\theta d\omega$$

где Φ — область интегрирования. Однако выражение "во всех направлениях" весьма двусмысленно. В самом деле: если представить, что площадка излучает фотонный газ, находящийся в равновесии, то в одну полусферу она в абсолютном значении излучает столько же, сколько и в другую. Однако это излучение будет направлено противоположно излучению в первой полусфере, поэтому, если интегрировать по всей сфере, то $\mathcal{F}_\nu = 0$. Можно дать и более формальный вывод: в первой полусфере угол к нормали θ лежит в пределах $[0; \pi/2)$, а во второй — в $(\pi/2; \pi]$. Функция $\cos\theta$ центрально–симметрична относительно $\theta = \pi/2$, а для равновесного фотонного газа $I_\nu(\theta, \varphi) = \mathrm{const}$, поэтому $\mathcal{F}_\nu = 0$ (здесь и далее φ — аналог долготы в сферической системе координат). В любом случае получается, что площадка ничего не излучает, что, очевидно, не так. Поэтому область интегрирования Φ — это полусфера, ограниченная плоскостью площадки.

Рассмотрим ламбертово тело, у которого $I_\nu(\theta, \varphi) = \mathrm{const}$, другими словами — изотропное излучение. Тогда

$$\mathcal{F}_\nu = \int\limits_\Phi I_\nu \cos\theta d\omega = \iint\limits_\Phi I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= I_\nu \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = I_\nu \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi I_\nu$$

Это важный частный случай.

Освещённость $\mathcal{F}$ — это поток, который площадка излучает во всех направлениях по всем частотам. Исходя из этого

$$\delta E(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\, dt dS = \int\limits_0^\infty \delta E(\mathcal{F}_\nu) d\nu \Rightarrow \mathcal{F} = \int\limits_0^\infty \mathcal{F}_\nu\, d\nu$$

Важный частный случай — это излучение равновесного фотонного газа, который описывается формулой Планка: $I_\nu = \dfrac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1}$. Тогда $\mathcal{F} = \sigma T^4$, где σ — постоянная Стефана–Больцмана, равная $\dfrac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$.

Наконец, светимость тела определяется довольно просто: $L = dE/dt$ и, по аналогии с предыдущими рассуждениями,

$$L = \int\limits_\Omega \mathcal{F}(S)\; dS$$

где Ω — поверхность излучающего тела. Очевидно, что если освещённость тела одинакова в любой точке его поверхности, то $L = \mathcal{F} S$. В частности, у сферы радиуса R выходит $L = 4\pi R^2 \mathcal{F}$

2 Плотность фотонного газа

Разумеется, у фотонов нет массы. Тем не менее, они обладают энергией, то есть можно ввести такое понятие, как плотность энергии $u = dE/dV$. Также введём по аналогии со спектральной плотностью яркости спектральную плотность плотности энергии $u_\nu = du/d\nu$

Всё также представим площадку, излучающую свет под углом θ к нормали за время dt. Тогда за это время площадка в этом направлении излучит энергию $\delta E = I_\nu dt dS d\nu d\omega \cos\theta$, которая поступит из объёма $dV = dS \cdot cdt \cos\theta$ (см. рис. 2). Тогда плотность в этом направлении

$$\delta u_\nu = \frac{\delta E}{dV d\nu} = \frac{I_\nu dt dS d\nu d\omega \cos\theta}{cdSdt\cos\theta d\nu} = \frac{I_\nu}{c} d\omega$$

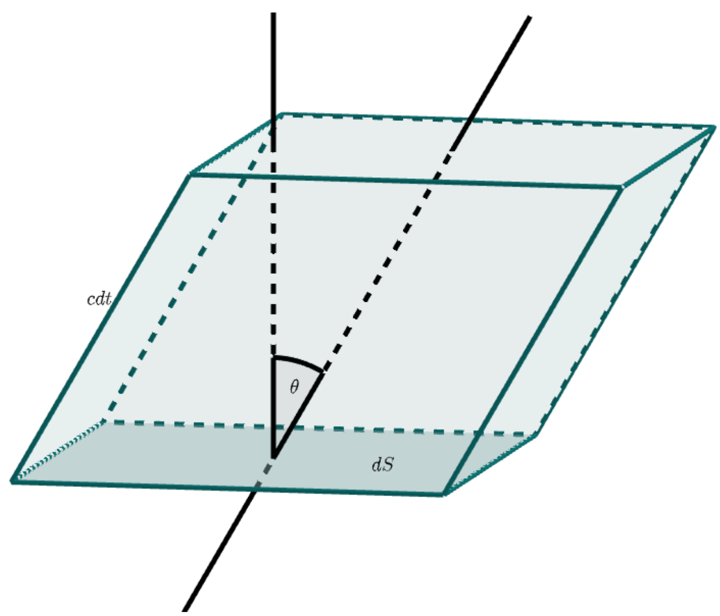

Рис. 2: Вся энергия, содержащаяся в этом цилиндре, равна δE

Соответственно, чтобы узнать суммарную плотность по частоте ν, нужно проинтегрировать по всем направлениям. Здесь уже можно смело интегрировать во всей сфере Φ_0. Отметим, что в случае изотропного излучения

$$u_\nu = \int\limits_{\Phi_0} \delta u_\nu = \frac{I_\nu}{c} \int\limits_{\Phi_0} d\omega = \frac{I_\nu}{c} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{I_\nu}{c} \int\limits_0^{2\pi} 2 d\varphi = \frac{4\pi I_\nu}{c}$$

Учитывая выражение для спектральной плотности освещённости можно сказать $u_\nu = 4\,\mathcal{F}_\nu\,/c$. Отсюда можно получить выражение для полной плотности энергии:

$$u = \int\limits_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{4}{c} \int\limits_0^\infty \mathcal{F}_\nu\, d\nu = \frac{4\,\mathcal{F}}{c}$$

Заметим, что данная формула требует только изотропности излучения во всех направлениях и совершенно не привязана к равновесию фотонного газа. Поэтому, например, к излучению Солнца (если пренебречь эффектом потемнения к краю) её можно спокойно применять: отклонение спектра такого излучения от чернотельного роли не играет. Однако есть ньюанс...

3 Давление

Собственно, мы подошли к полному ответу на вопрос. В самом деле: если смотреть на уравнение состояния равновесного фотонного газа, то его давление $P = u/3 = 4\,\mathcal{F}\,/3c$. В то же время в задачах используется $P = \mathcal{F}\,/c$ или $P = 2\,\mathcal{F}\,/c$ в зависимости от отражательной способности. В чём же дело?

Нужно вспомнить, что излучение Солнца очень неоднородно. Поэтому, если в равновесном фотонном газе на площадку довольно много фотонов падают некоторым углом к нормали, то есть не полностью передают свой импульс, то в фотонном газе, который излучается Солнцем, можно сделать так, чтобы практически все фотоны падали перпендикулярно площадке (разумеется, это будет на довольно большом расстоянии от Солнца). То есть, иными словами, коэффициент перед $\mathcal{F}\,/c$ должен увеличиваться по мере расстояния.

Докажем наши утверждения математически. В равновесном фотонном газе фотоны отражаются площадкой, то есть их импульс изменяется на 2 проекции импульса на нормаль к этой площадке (см. рис. 3). Также известно, что энергия и импульс фотона связаны между собой следующий образом: $E = pc$.

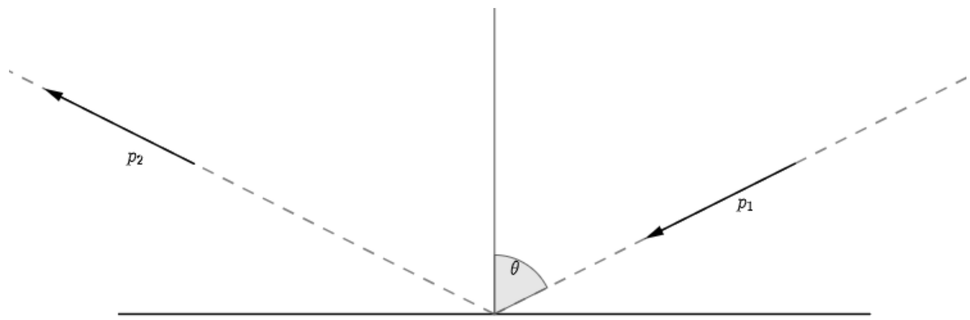

Рис. 3: $|\Delta p| = 2|p_1|\cos\theta$

Исходя из всего этого, под углом θ к нормали из телесного угла $d\omega$ передаётся импульс $\delta p(I_\nu) = 2\delta E(I_\nu)\cos\theta/c$, а давление будет равно

$$\delta P_\nu = \frac{\delta p(I_\nu)\cos\theta}{cdtdSd\nu} = \frac{2I_\nu}{c}\cos^2\theta d\omega$$

Разумеется, в равновесном фотонном газе давление с одной полусферы площадки будет уравновешиваться давлением с другой полусферы. Поэтому, чтобы узнать суммарный переданный импульс на частоте ν, надо интегрировать по полусфере Φ. Так как излучение изотропно, то получаем

$$P_\nu = \int\limits_\Phi \delta P = \frac{2I_\nu}{c}\iint\limits_\Phi \cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi d\nu =$$

$$= \frac{2I_\nu}{c}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \cos^2\theta d(\cos\theta) = \frac{2I_\nu}{c}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3} = \frac{4\pi I_\nu}{3c} = \frac{u_\nu}{3} = \frac{4\,\mathcal{F}_\nu}{3c}$$

В этом случае очевидно, что интегрирование по всем частотам даст выражение $P = u/3$.

Представим, что теперь площадка находится не в равновесном фотонном газе, а далеко от Солнца и она ориентирована перпендикулярно солнечным лучам (но, как и раньше, отражает весь падающий свет). Тогда Солнце излучает только из одной точки, поэтому величина I_ν здесь не имеет смысла. Тогда можно пользоваться определением для $\delta E(\mathcal{F}_\nu)$ и в таком случае

$$P_\nu = \frac{2\delta E(\mathcal{F}_\nu)}{c d\nu dt dS} = \frac{2\,\mathcal{F}_\nu}{c}$$

Отсюда интегрирование по всем частотам приведёт к результату $P = 2\,\mathcal{F}/c$, что соответствует, в частности, выражению давления, которое используется в задачах. Однако мы сделали очень важное допущение, а именно то, Солнце является точечным источником. Хотя это близко к действительности, но насколько это приближение адекватно?

4 Солнечный фотонный газ

Для начала докажем теорему о том, что интенсивности света I_ν одинаковы как с точки зрения излучающей площадки площадью dS_1, так и с точки зрения принимающей площадки площадью dS_2:

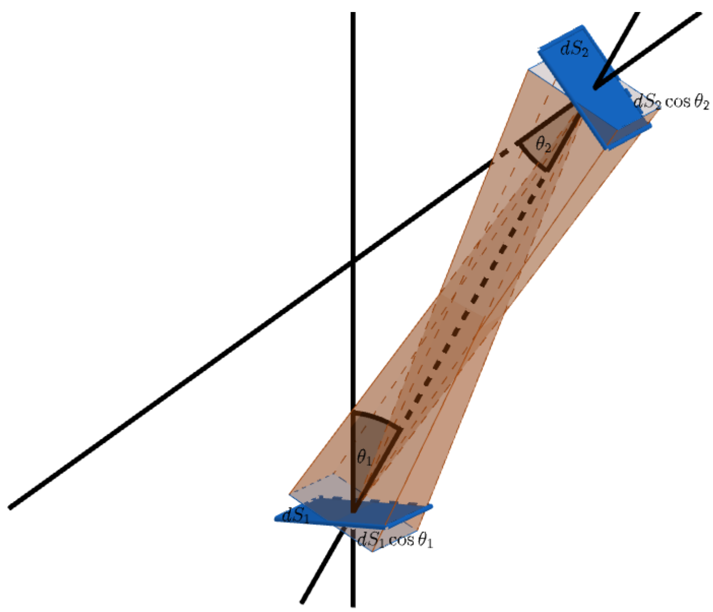

Рис. 4: Иллюстрация теоремы

Очевидно, что излучающая энергия $\delta E_{12} = I_\nu^{12} dt d\nu d\omega_2 dS_1 \cos\theta_1$ равна принимающей $\delta E_{21} = I_\nu^{21} dt d\nu d\omega_1 dS_2 \cos\theta_2$, где $d\omega_2$ — телесный угол, под которым видна площадка с площадью dS_2 с площадки площадью dS_1, а $d\omega_1$ — наоборот.

Тогда, если расстояние между ними равно r, то $d\omega_2 = dS_2 \cos\theta_2/r^2$, а $d\omega_1 = dS_1 \cos\theta_1/r^2$. В итоге

$$\frac{I_\nu^{12} dt d\nu dS_2 \cos\theta_2 dS_1 \cos\theta_1}{r^2} = \frac{I_\nu^{21} dt d\nu dS_1 \cos\theta_1 dS_2 \cos\theta_2}{r^2}$$

Отсюда очевидно, что $I_\nu^{12} = I_\nu^{21}$

Теперь представим, что теперь площадка ориентирована так, что Солнце находится в зените (см. рис. 5). Теперь пусть Солнце имеет угловой радиус χ, эффектом потемнения к краю пренебрежём. Тогда $I_\nu(\theta, \varphi) = \mathrm{const}$ для всего участка неба, который занимает Солнце. Выясним, чему равна освещённость такой площадки:

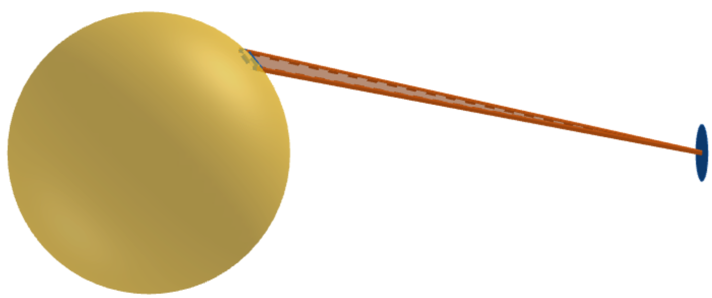

Рис. 5: Как выяснено ранее, яркость падающего на площадку света равна яркости Солнца

$$\mathcal{F}_\nu = \int\limits_{Sun} I_\nu \cos\theta d\omega = I_\nu \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\chi} \cos\theta \sin\theta d\theta = I_\nu \cdot 2\pi \cdot \frac{1 - \cos^2\chi}{2}$$

Учитывая то, что $\mathcal{F}_\nu^{\odot} = \pi I_\nu$, где $\mathcal{F}_\nu^{\odot}$ — спектральная плотность освещённости поверхности Солнца, получаем $\mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}_\nu^{\odot} \sin^2\chi$. Проинтегрируем полученное выражение по всем частотам: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\odot} \sin^2\chi$.

Заметим, что $\mathcal{F}_\odot = L_\odot/4\pi R_\odot^2$, а также $\sin\chi = R_\odot/r$, где r — расстояние до центра Солнца. Подставляя всё это в получившееся выражение, получаем хорошо знакомую формулу: $\mathcal{F} = L_\odot/4\pi r^2$.

Аналогично выведем формулу для плотности энергии:

$$u_\nu = \int\limits_{Sun} \delta u_\nu = \frac{I_\nu}{c}\int\limits_{Sun} d\omega = \frac{I_\nu}{c}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\chi} \sin\theta d\theta = \frac{I_\nu}{c}\cdot 2\pi(1-\cos\chi) =$$

$$= \frac{2\,\mathcal{F}_\nu^\odot(1-\cos\chi)}{c}$$

$$u = \int\limits_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{2(1-\cos\chi)}{c}\int\limits_0^\infty \mathcal{F}_\nu^\odot\, d\nu = \frac{2\,\mathcal{F}_\odot(1-\cos\chi)}{c} =$$

$$= \frac{L_\odot}{2\pi R_\odot^2}\frac{1-\sqrt{1-(R_\odot/r)^2}}{c} = \frac{2\,\mathcal{F}}{c}\left(\frac{r}{R_\odot}\right)^2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2}\right)$$

Как видно, при $r = R_\odot$ выходит $u = 2\,\mathcal{F}/c$, а при $r = \infty$ получается $u = \mathcal{F}/c$. Это и был тот самый ньюанс.

Отметим, что вблизи Солнца $u = 2\,\mathcal{F}/c$ потому, что там по прежнему неравновесный фотонный газ (см. рис. 6), а освещённость и яркость связаны так же, как и в фотонном газе потому, что Солнце занимает полусферу.

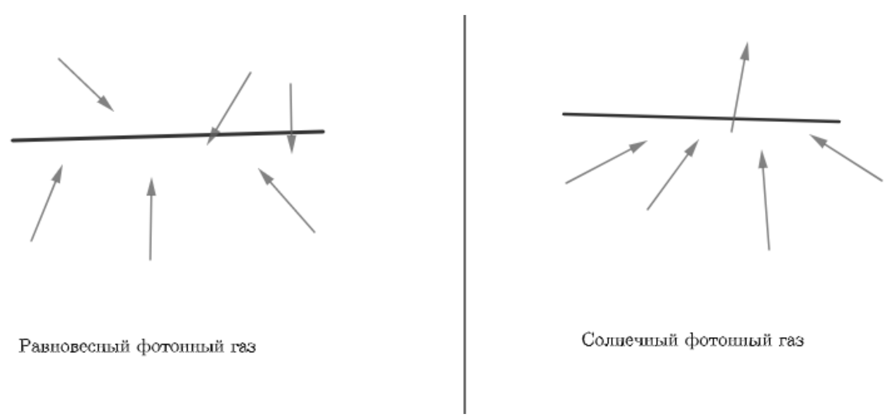

Рис. 6: Фотонный газ около поверхности Солнца — неравновесный

Теперь найдём выражение для давления:

$$P_\nu = \frac{2I_\nu}{c}\iint\limits_{Sun}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{2I_\nu}{c}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\chi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta =$$
$$= \frac{4\pi I_\nu}{3c}(1-\cos^3\chi)$$

Интегрируя по всем частотам, получаем

$$P = \int\limits_0^{\infty}P_\nu d\nu = \frac{4\,\mathcal{F}_\odot}{3c}(1-(\cos^2\chi)^{3/2}) =$$
$$= \frac{4\,\mathcal{F}}{3c}\left(\frac{r}{R_\odot}\right)^2\left(1-\left(1-\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2\right)^{3/2}\right)$$

Отметим, что при $r = R_\odot$ выходит $P = 2\,\mathcal{F}/3c$, а при стремлении r к бесконечности давление приближается выражением $P = 2\,\mathcal{F}/c$, что совпадает с предположением о точечности Солнца.

Если же попытаться вывести подобие уравнения состояния, то получится следующее:

$$\frac{P}{u} = \frac{2}{3}(\cos^2\chi+\cos\chi+1) = \frac{2}{3}\left(2-\sin^2\chi+\sqrt{1-\sin^2\chi}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\left(2-\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2+\sqrt{1-\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2}\right)$$

Соответственно, это отношение P/u можно считать, можно сказать, мерой точечности Солнца: при $r \to R_\odot$ данное отношение стремится к $2/3$, а при $r \to \infty$ — к 2. Для более наглядного представления приведём график:

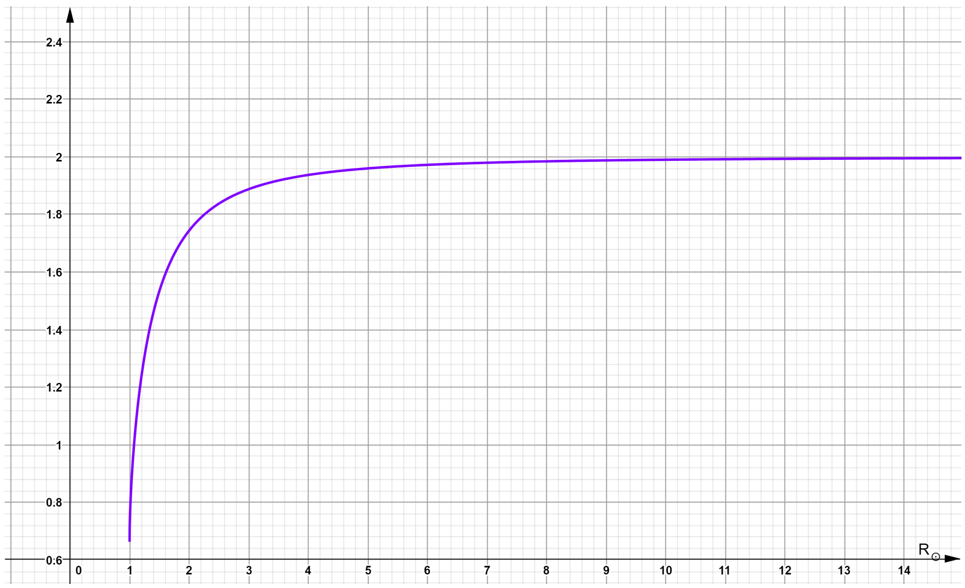

Рис. 7: Расстояние по оси абсцисс откладывается в солнечных радиусах

Как видно, при $r = 14,2 R_\odot$ или $r = 9,88 \cdot 10^6$ км данный параметр отличается от 2 меньше, чем на 0,005. Так что можно уверенно говорить о том, что приближение, использующееся в задачах, полностью соответствует действительности.