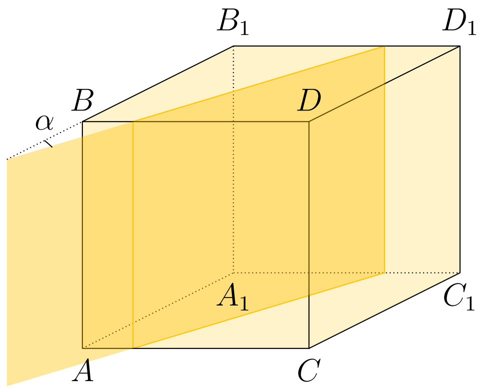
Чёрт знает, чем всё кончится,
но хорошо, что хоть начинается.
Анджей Сапковский
«Крещение огнём»

3d6

Две пары 1 (ABB_1A_1 и CDD_1C_1) и 2 ($ABDC$ и $A_1B_1D_1C_1$) противоположных граней куба с длиной рёбер L заряжены с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 = -\sigma$ и $\sigma_2 = \sigma$ соответственно, где $\sigma > 0$ — известная величина, а пара 3 — с некоторой поверхностной плотностью заряда σ_3. Частица с массой m и зарядом $q > 0$ может перемещаться по плоскости, содержащей центр куба, перпендикулярной паре 3 и образующей двугранный угол $\alpha = \pi/6$ с парой 1.



Оказалось, что при запуске частицы из центра куба в любом направлении в данной плоскости с одной и той же скоростью, её траектория представляет собой отрезок прямой линии длиной $2a \ll L$.

Сил тяжести и трения нет. Электрическая постоянная равна ε_0.

1. *(6 баллов)* Определите поверхностную плотность заряда третьей пары граней σ_3.
2. *(4 балла)* Определите скорость частицы v_0 при прохождении центра куба.

Автор задачи: А. Уймин

Решение основной задачи

Найдём перпендикулярную составляющую вектора напряжённости $E_\perp$, создаваемой равномерно заряженной плоскостью площадью S с поверхностью плотностью заряда σ (Рис. 1).

$$E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\cdot S\cos\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Omega,$$

где Ω — телесный угол, под которым видна площадь S.

Рассмотрим две плоскости с поверхностной плотностью заряда σ и заряд q находящейся между ними. Рассмотрим малое смещение заряда x в направлении, перпендикулярном плоскостям (Рис. 2).

Левая пластина и правая пластина без 4 полосок толщиной h (образующих квадрат) видны под одним и тем же телесным углом. Значит поле от пластин в точке, где находится заряд, будет создаваться двумя полосками толщиной h.

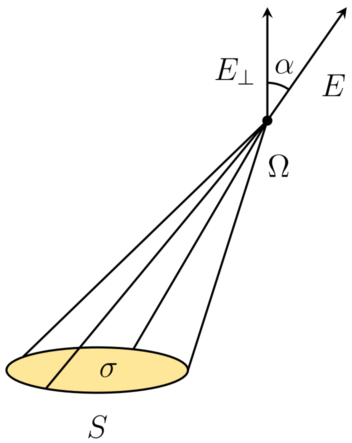


Рис. 1

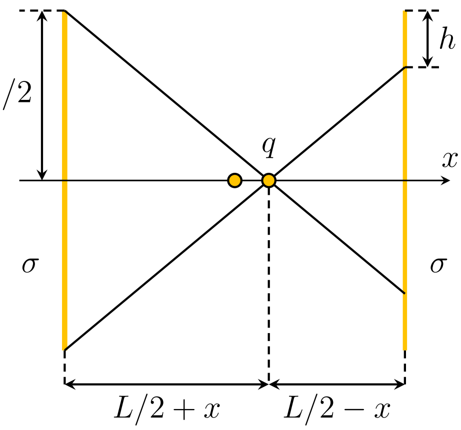


Рис. 2

Из подобия треугольников выразим h через x:

$$\frac{L/2-h}{L/2} = \frac{L/2-x}{L/2+x}$$

$$h = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\left(\frac{L/2-x}{L/2+x}\right)$$

$$h = \frac{L}{2}\left(\frac{2x}{L/2+x}\right) \approx 2x$$

Рассчитаем поле от равномерно заряженной полоски длинной L с линейной с толщиной h (Рис. 3). Рассмотрим часть $h\cdot dx$ с зарядом $\sigma\cdot h\cdot dx$. Поле dE в рассматриваемой точке на расстоянии H от полоски:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\cdot h\cdot dx}{x^2+H^2}$$

Перепишем предыдущее выражение через угол α_0 и $d\alpha$:

$$dx\cdot\cos\alpha = \sqrt{x^2+H^2}\,d\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{H}{\sqrt{x^2+H^2}}$$

$$dx = \frac{x^2+H^2}{H}d\alpha \Rightarrow dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\cdot h}{H}d\alpha$$

Проинтегрируем:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\cdot h}{H}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\sigma\cdot h\cdot\alpha_0}{H}$$

Поле направлено против оси x, тогда заменяя h на $2x$ получим:

$$E = -\frac{\sigma\alpha_0}{H\pi\varepsilon_0}x$$

При малом смещении x можно считать $H = \sqrt{3}/2L$. С учётом 4 полосок окончательно получаем:

$$E_1 = -\frac{8\sigma_1\cdot\alpha_0}{\sqrt{3}\cdot L\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}x = -2A\cdot\sigma_1 x,$$

где A — константа.

Мы рассмотрели поле, создаваемое пластинами перпендикулярными смещению заряда. Рассмотрим поле, которое создают пластину вдоль которых происходило смещение заряда (Рис.4).

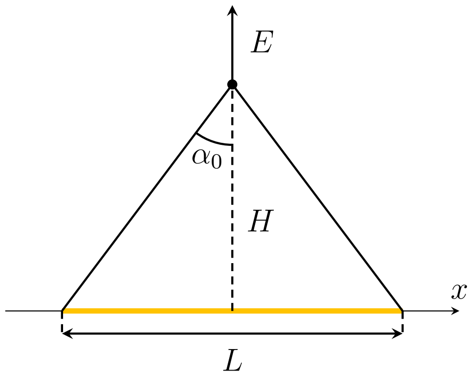


Рис. 3

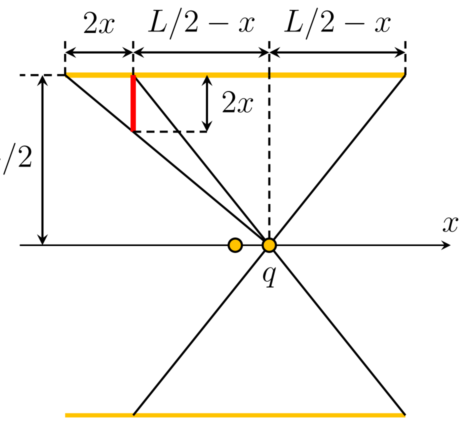


Рис. 4

В силу симметрии поле будут создавать 2 полоски длинной $2x$. Чтобы воспользоваться выражением $E_\perp \propto \Omega$ проведем красный отрезок. При малом смещении x длину красного отрезка можно считать равной $\approx 2x$. Значит, 2 отрезка создают поле, направленное вдоль оси x:

$$E_3 = A\cdot\sigma_3\cdot x$$

По аналогии:

$$E_2 = A\cdot\sigma_2\cdot x$$

Запишем проекцию поля, действующего со стороны куба на заряд, смещенный на малое расстояние x:

$$E_x = A(-2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = A(3\sigma + \sigma_3)x$$

Отметим полоски, которые мы рассмотрели в кубе (Рис. 5). Запишем E_y, E_z по аналогии, выбрав оси x, y, z, как показано на Рис. 6 с началом в центре куба.

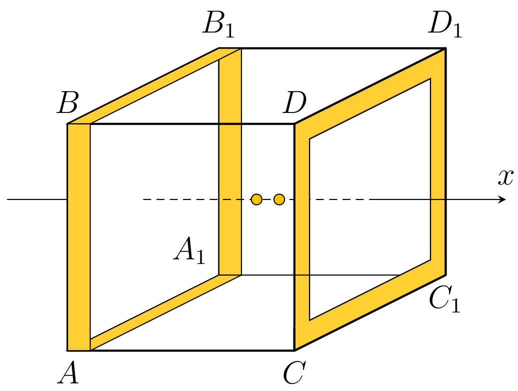


Рис. 5

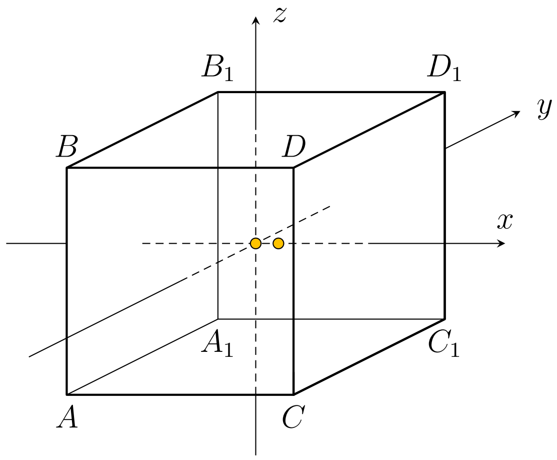


Рис. 6

$$
\begin{aligned}
E_x &= A(-2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)x = A(3\sigma + \sigma_3)x \\
E_y &= A(-2\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_3)y = A(-3\sigma + \sigma_3)y \\
E_z &= A(-2\sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_2)z = A(-2\sigma_3)z
\end{aligned}
$$

Рассмотрим плоскость, в которой, траектория частицы представляет собой прямой отрезок. Введём ось x', которую можно спроецировать на оси x и y:

$$y = x' \cos\alpha, \quad x = x' \sin\alpha$$

Центр куба будет являться точкой устойчивого равновесия когда

$$E_z < 0, \quad E_{x'} < 0$$

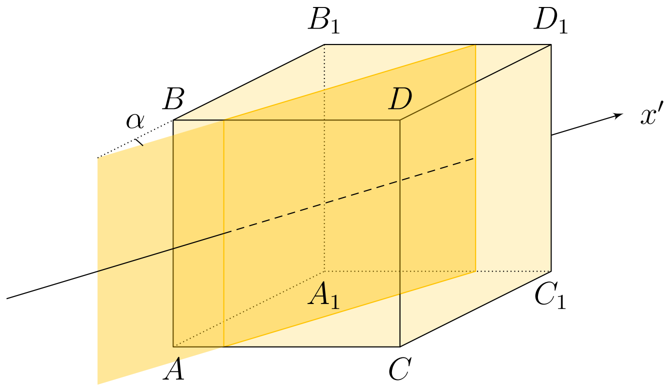


Рис. 7

Выразим $E_{x'}$ через E_x и E_y:

$$E_{x'} = E_x \sin\alpha + E_y \cos\alpha = A(3\sigma + \sigma_3)\sin^2\alpha{\cdot}x' + A(-3\sigma + \sigma_3)\cos^2\alpha{\cdot}x'$$
$$E_{x'} = A\left[3\sigma(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \sigma_3\right]x'$$

Подставив $\alpha = \pi/6$ и воспользовавшись условием равновесия получим ответ на первый вопрос задачи:

$$\sigma_3 \in \left(0, \frac{3}{2}\sigma\right)$$

Заряд будет совершать колебания вдоль прямой линии длинной $2a$, значит частоты колебаний вдоль оси x' и z будут равны друг другу

$$\omega_{x'} = \omega_z = \omega$$

Запишем уравнения колебаний вдоль оси z:

$$m\ddot{z} + q(2A\sigma_3)z = 0$$

Следовательно частота колебаний будет равна:

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2A{\cdot}q{\cdot}\sigma_3}{m}}$$

Аналогично частота

$$\omega_{x'} = \sqrt{\frac{A{\cdot}q{\cdot}(3/2\sigma - \sigma_3)}{m}}$$

С учётом равенства частот выражаем σ_3:

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2}$$

что укладывается в диапазон от 0 до $3/2\sigma$.

Рассчитать скорость в центре куба v_0, зная частоту колебаний и амплитуду a не составляет трудности:

$$v_0 = a{\cdot}\omega = a\sqrt{\frac{A{\cdot}q{\cdot}\sigma}{m}}$$

Альтернативная задача

1. *(3 балла)* Тонкий диэлектрический квадрат равномерно заряжен по периметру с известной линейной плотностью заряда λ. Найдите поле на оси, перпендикулярной к плоскости квадрата, проходящей через его центр.

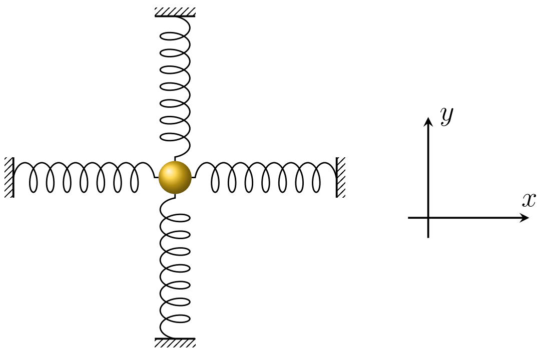
2. *(4 балла)* Равносторонний треугольник со стороной a, плоскость которого горизонтальна, равномерно заряжен с поверхностной плотностью заряда σ. Маленький кубичек с зарядом q может без трения скользить по оси симметрии треугольника, перпендикулярной его плоскости. В положении равновесия (при наличии гравитационного поля $\vec{g}$) кубичек находится в точке A на расстоянии $L = a/\sqrt{2}$ от каждой из вершин треугольника.

   (a) *(2 балла)* Найдите массу кубичка m.

   Кубичек отвели на расстояние $r \ll a$ от положения равновесия и отпустили без начальной скорости.

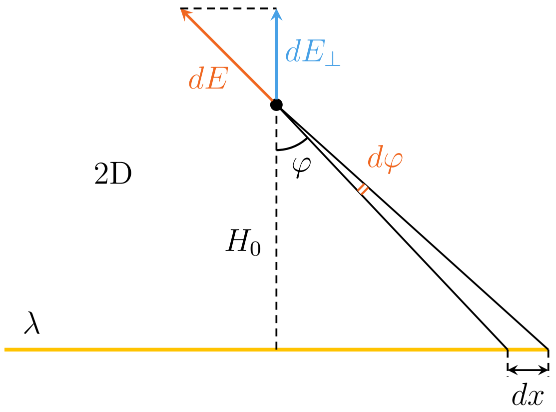
   (b) *(2 балла)* Найдите его скорость при прохождении положения равновесия.

3. *(3 балла)* В центре квадрата со стороной $2L$ лежит шарик массой m. Четыре пружины соединяют его с серединами боковых сторон квадрата. Все пружины имеют жёсткость k. Шарик отводят от положения равновесия на расстояние $a \ll L$ в произвольном направлении. Найдите зависимость его координат от времени.



Решение альтернативной задачи

1. a. Рассмотрим тонкую нить и найдём поле на её серединном перпендикуляре.



Заметим, что в силу симметрии поле будет направлено вдоль серпера. Из геометрии рисунка находим, что

$$x = H_0 \operatorname{tg}\varphi; \quad \Longrightarrow \quad dx = H_0 \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Напряжённость поля от маленького кусочка нити длины dx по закону Кулона равна

$$dE = k\frac{\lambda dx}{(H_0/\cos\varphi)^2}.$$

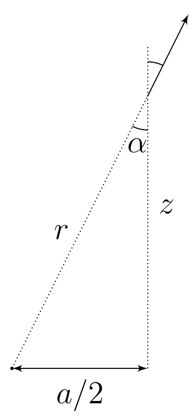
Проекция этого поля на направление серединного перпендикуляра равна

$$dE_\perp = dE\cos\varphi = k\frac{\lambda}{H_0}\cos\varphi d\varphi = k\frac{\lambda}{H_0} d\left(\sin\varphi\right).$$

Откуда находим

$$E_\perp = k\frac{\lambda}{H_0}\int\limits_{-\sin\varphi_0}^{\sin\varphi_0} = \frac{k\lambda}{H_0} 2\sin\varphi_0.$$

b. Теперь найдём искомое поле от квадрата. Для этого необходимо векторно сложить поля от каждой стороны квадрата. Заметим, что из симметрии поле будет направлено вдоль оси, перпендикулярной плоскости квадрата и проходящей через его центр. Тогда необходимо найти проекцию поля стороны на эту ось



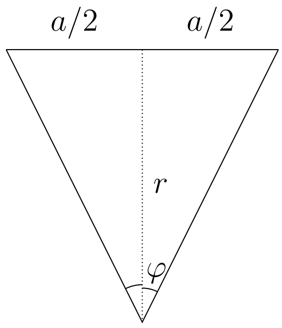
$$E_\perp = \cos\alpha \frac{k\lambda}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + z^2}} r\sin\varphi.$$

Напряжённость поля квадрата равна $E = 4E_\perp$. Осталось разобраться с геометрией рисунка

$$\sin\varphi = \frac{a/2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a/2}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{4z^2 + 2a^2}};$$

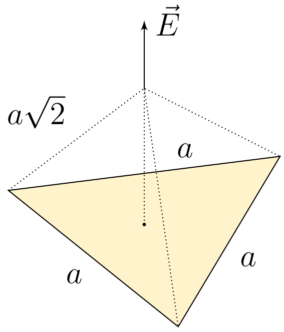
$$\cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Окончательно находим



$$E(z) = 4\frac{k\lambda z}{z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{4z^2 + 2a^2}} = \frac{32k\lambda az}{(z^2 + 4a^2)\sqrt{4z^2 + 2a^2}}.$$

2. a. Легко заметить, что при данных расстояниях треугольник видно под телесным углом $\Omega = 4\pi/8$, так как это сторона правильного октаэдра. Таким образом поле на оси

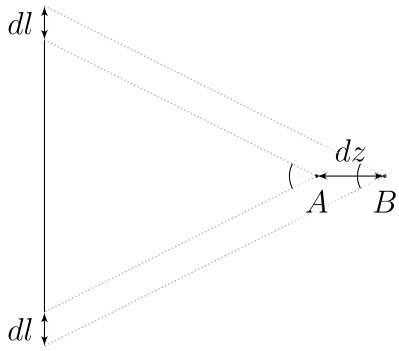


$$E_\perp = k\sigma\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{8} \cdot \sigma.$$

Из условия кубичка следует, что

$$Eq = mg; \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{\sigma q}{8g\varepsilon_0}.$$

b. Найдём изменение силы при смещении кубичка. Так как поле определяется только телесным углом, то изменение поля будет обусловлено только треугольничком толщины dl (см. рис.) от вершин которого расстояние $a\sqrt{2}$. Полная сила, действующая на кубичек, будет равна



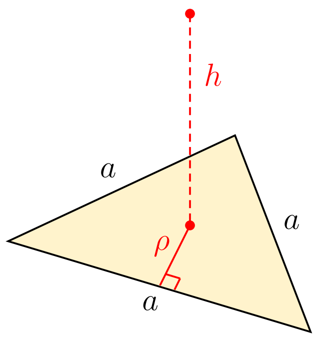
$$Eq - mg = qdE.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в положении равновесия сила Кулона и сила тяжести компенсируют друг друга.

Воспользуемся тем, что исходный треугольник является гранью некоторого октаэдра, поэтому

$$h = r_{in} = a\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Из геометрии находим



$$l = \frac{\sqrt{3}}{6}a; \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{6l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = l\sqrt{2}.$$

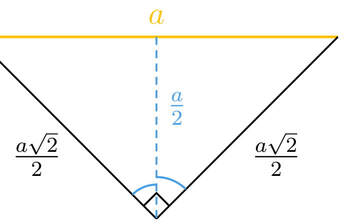
Также понятно, что $dh = dz$, поэтому

$$dl = \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Осталось найти напряжённость поля 3 сторон получившегося прямоугольника. Линейная плотность заряда этих сторон равна

$$\lambda = -\sigma dl.$$

Тогда



$$dE = -\frac{k\lambda}{a/2} \cdot 2\sin\frac{\pi}{4} = -2k\sigma\frac{dz}{a} = \frac{2\sqrt{6}k\sigma}{a} \cdot (-dz).$$

Минус в данном равенстве гарантирует, что суммарная сила будет возвращающей. Заметим, что изменение напряжённости поля прямо пропорциональна смещению из положения равновесия. Следовательно, систему можно рассматривать как пружину с жёсткостью k равной

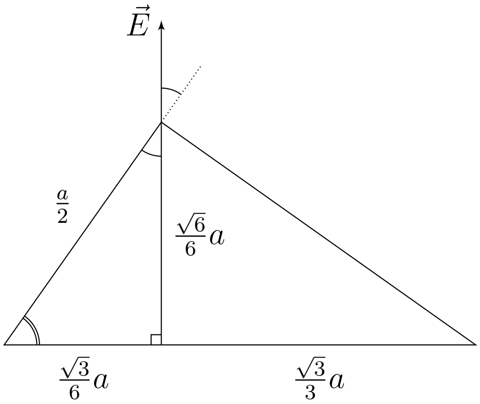
$$k = \frac{2\sqrt{6}k\sigma q}{a}.$$

Записав закон сохранения энергии для такой пружины, получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kr^2}{2}; \quad \Longrightarrow \quad v_0 = r\sqrt{\frac{k}{m}} = r\sqrt{\frac{2\sqrt{6}k\sigma q \cdot 8g\varepsilon_0}{a\sigma q}}.$$

Окончательно получаем

$$v_0 = r\sqrt{4\sqrt{6}\pi\frac{g}{a}}.$$



3. Запишем теорему о движении центра масс для такого шарика в проекциях на оси x и y

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2kx; \\ m\ddot{y} = -2ky. \end{cases}$$

Минус в данных выражениях означает то, что сила упругости является возвращающей. Двойка появляется из-за одновременного действия двух пружин. Данные уравнения является уравнением гармонических колебаний, их решение известно. С учётом начальных условий

$$\begin{cases} x(0) = a\sin\alpha; \\ y(0) = a\cos\alpha; \\ \dot{x}(0) = 0; \\ \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

Здесь угол α по условию произвольный. В итоге получаем решение

$$x = a\sin(\alpha)\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right); \quad y = a\cos(\alpha)\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right).$$