Кубок ЛФИ

10.s03.e03

Люди не пропадают, просто другие перестают их искать.
Сэм Винчестер, Сверхъестественное

Ищущий и Скрытый

Часть 1

Скрытый и Ищущий находятся на боковой поверхности прозрачного Цилиндра ($n = 3/2$, $R = 1$ м) в одной плоскости, перпендикулярной его оси, и никогда из нее не выходят.

1. *(1 балл)* Определите вероятность того, что при случайном расположении на Цилиндре Ищущий видит Скрытого через Цилиндр.

Чтобы продолжить Игру, Ищущий некоторым образом удаляется от Цилиндра и в какой-то момент начинает видеть в нем три изображения Скрытого, хотя до этого всегда видел только одно его изображение. Ищущий замирает.

2. *(2 балла)* Изобразите, где относительно Ищущего может прятаться Скрытый. Докажите, что других расположений нет.
3. *(2 балла)* Найдите, на каком расстоянии от оси Цилиндра находится Ищущий.
4. *(2 балла)* Какой минимальный Путь нужно преодолеть Скрытому по поверхности Цилиндра, чтобы стать невидимым?

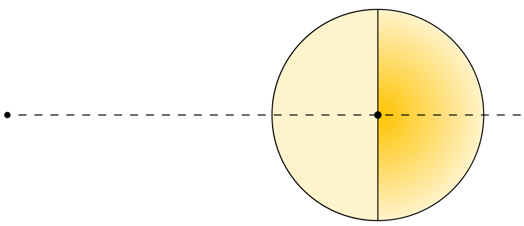
Все численные ответы дайте с точностью не менее 5%. Размерами Ищущего и Скрытого можно пренебречь.

Часть 2

Внимание Ищущего привлек другой Цилиндр, состоящий из двух полуцилиндров, один из которых однородный с $n = 3/2$, а другой – с изменяющимся показателем преломления $n = C/r$, где C – Неизвестная Постоянная Величина, а r – расстояние до оси Цилиндра. Ось Цилиндра сделана из материала, который полностью поглощает свет. Ищущий приближается к этому Цилиндру из Бесконечности вдоль линии перпендикулярной плоскости контакта полуцилиндров и проходящей через ось Цилиндра.

5. *(3 балла)* Найдите хотя бы одно расстояние от оси когда Ищущий увидит себя.

Радиус полуцилиндра равен 1 м. Отражение лучей от Цилиндра не учитывать. Однородная часть Цилиндра находится ближе к Ищущему, чем другая его половина.



Автор задачи: А. Киреев, И. Гриднев

Решение

Часть 1

Ищущий будет видеть Скрытого через Цилиндр, если луч, идущий от Ищущего, сможет выйти из цилиндра. (Рис. 1)

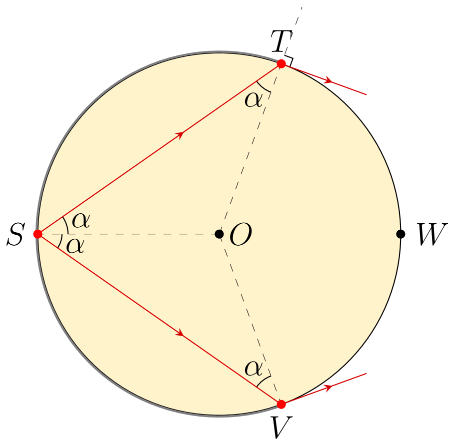


Рис. 1

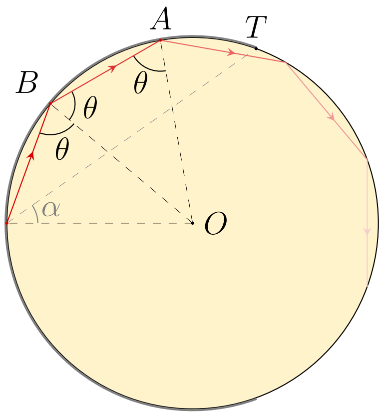


Рис. 2

Предельное значение угла α можно найти из закона Снеллиуса, записанного для полного внутреннего отражения

$$n\cdot \sin\alpha = \sin(90^\circ) = 1 \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right).$$

Если луч будет падать на цилиндр под углом больше α, то он не сможет выйти из цилиндра, а полностью отразится. Докажем это утверждение. (Рис. 2)

Пусть луч падает под углом θ на границу раздела сред. Угол $\theta > \alpha \Rightarrow$ луч полностью отразится. $\triangle OAB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle OBA = \angle BAO$, значит отразившийся луч снова будет падать на цилиндр под углом θ и так далее. Луч будет «заперт» в цилиндре.

Тогда вероятность p того, что Ищущий видит Скрытого, будет пропорциональна длине дуги окружности TWV, которая видна под углом 4α (центральный угол в 2 раза больше вписанного). Вероятность того, что Скрытый окажется в любом месте окружности должна быть равна 1, следовательно, для нахождения p необходимо поделить длину дуги TWV на 2π:

$$\boxed{p = \frac{4\alpha}{2\pi} \approx 46{,}5\%}$$

Пусть Ищущий отошел на некоторое расстояние L от центра окружности O. Проанализируем зависимость угла α от угла γ (Рис. 3). По закону Снеллиуса:

$$\sin\gamma = n\sin\beta.$$

Выразим угол α через β и φ:

$$\angle BOW = \pi \Rightarrow \varphi + (\pi - 2\beta) + \alpha = \pi \Rightarrow \alpha = 2\beta - \varphi.$$

По теореме синусов в $\triangle AOB$:

$$\angle ABO = \arcsin\left(\frac{R\sin\gamma}{L}\right).$$

γ — внешний угол в $\triangle ABO$, следовательно,

$$\gamma = \varphi + \angle ABO = \varphi + \arcsin\left(\frac{R\sin\gamma}{L}\right).$$

Из предыдущих выражений получаем зависимость α от γ:

$$\alpha(\gamma) = 2\arcsin\left(\frac{\sin\gamma}{n}\right) - \gamma + \arcsin\left(\frac{R\sin\gamma}{L}\right).$$

Построим график α от γ (Рис. 4). С увеличением L уменьшается $\alpha_{\max}$.

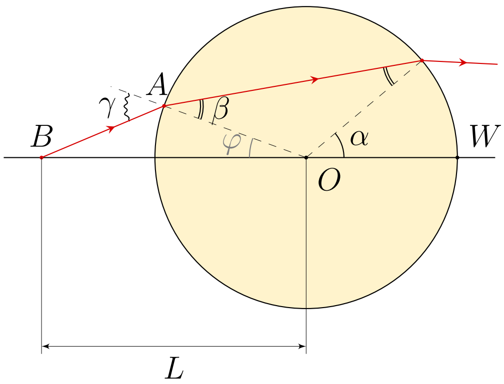


Рис. 3

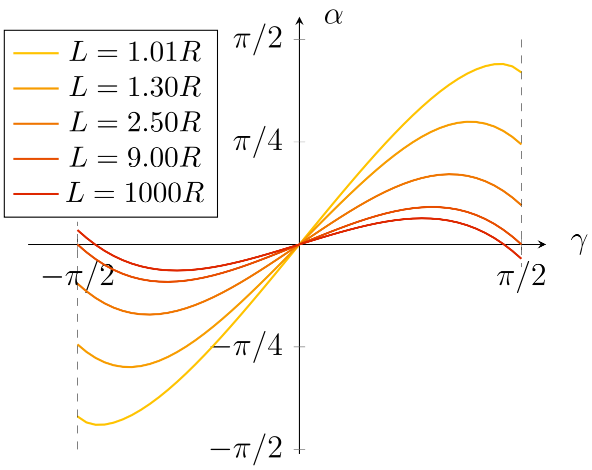


Рис. 4

Рассмотрим произвольный момент времени, пока Ищущий отходит (Рис. 5). Пусть положение Скрывающегося $\alpha_0 \neq 0$, тогда наступил бы момент, когда Ищущий увидел бы 2 изображения. Однако по условию Ищущий видит сразу 3 изображения, следовательно, $\alpha_0 = 0$ (Рис. 6).

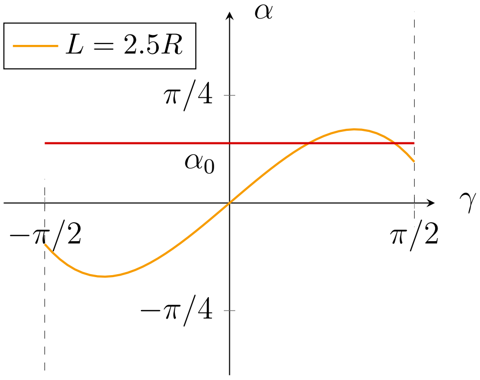


Рис. 5

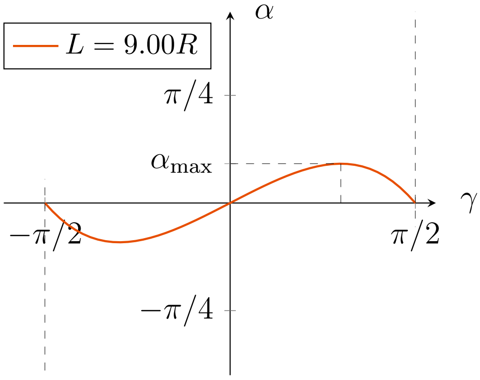
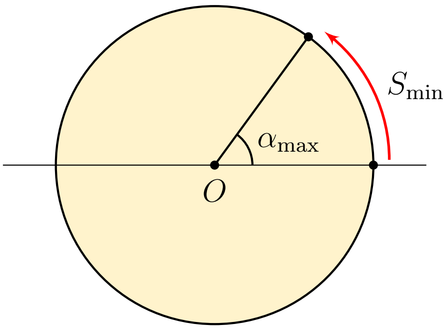


Рис. 6

Именно в этот момент ищущий замирает. Из условия $\alpha = 0$ получаем значение L и $\alpha_{\max}$:

$$\boxed{L = 9\text{ м}}, \qquad \alpha_{\max} = 0{,}287\text{ рад}$$



Минимальный путь, который необходимо преодолеть Скрытому, чтобы стать невидимым, легко выразить через угол $\alpha_{\max}$

$$\boxed{S_{\min} = \alpha_{\max}{\cdot}R = 0{,}287\text{ м}}$$

Часть 2

Докажем, что луч в среде с $n = C/r$ двигается по окружности (Рис. 7). По закону Снеллиуса и по теореме синусов получаем:

$$\begin{cases} n(r+dr)\sin\alpha = n(r)\sin\beta \\ \dfrac{r}{\sin\beta} = \dfrac{r+dr}{\sin\alpha'} \end{cases}$$

Преобразуем:

$$n(r+dr){\cdot}(r+dr)\sin\alpha = n(r){\cdot}r{\cdot}\sin\alpha' \Rightarrow n{\cdot}r{\cdot}\sin\alpha = \text{const}.$$

С учётом зависимости $n = C/r$:

$$C\sin\alpha = \text{const} \Rightarrow \alpha = \text{const}.$$

Изобразим возможную траекторию движения (Рис. 8).

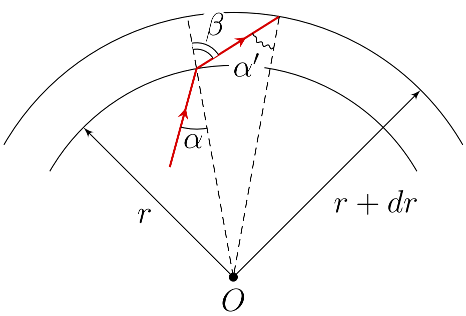


Рис. 7

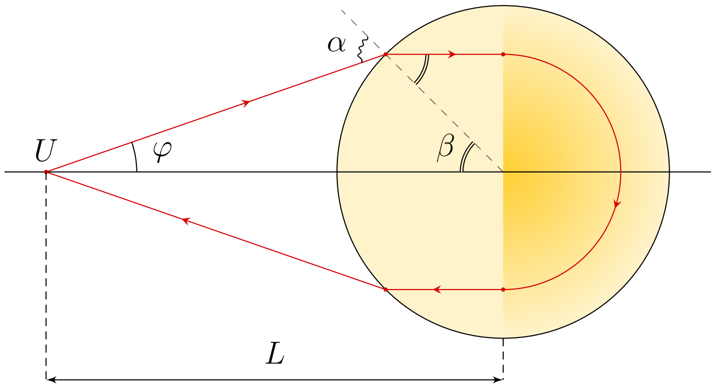


Рис. 8

Запишем закон Снеллиуса и выразим угол φ через α и β.

$$\sin\alpha = n\sin\beta, \quad \varphi = \alpha - \beta.$$

Запишем теорему синусов:

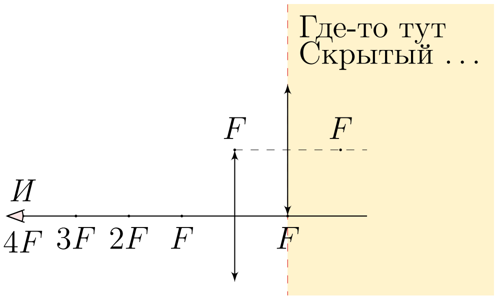
$$\frac{L}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\varphi}.$$

Так как просят найти любое значение L, когда Ищущий увидит себя, то найдём такое L, при котором α, β, φ можно считать малыми ($\sin\alpha \approx \alpha, \sin\beta \approx \beta, \sin\varphi \approx \varphi$). В таком случае легко выразить L из предыдущих уравнений:

$$\boxed{L = \frac{n}{n-1}R = 3\text{ м}}$$

Альтернативная задача

1. В представленной оптической схеме где-то справа от красного пунктира расположился Скрытый. Положение Ищущего отмечено глазом. Определить области пространства, при расположении в которых Скрытого Ищущий будет видеть



   (a) *(1,5 балла)* 0 изображений,

   (b) *(1,5 балла)* 1 изображение,

   (c) *(1,5 балла)* 2 изображения,

   (d) *(1,5 балла)* 3 изображения,

   (e) *(1,5 балла)* 4 изображения.

Расстояние от центра до края каждой линзы F.

Примечание. Изображение — область на линзе (возможно точка) , посмотрев в которую Ищущий видит Скрытого и которая отделена разрывом от других таких областей.

2. (2,5 балла) На неизвестной планете показатель преломления воздуха в атмосфере меняется по закону $n = n_0 - kR$, где R — расстояние от центра планеты до исследуемой точки, n_0 и k — известные константы. Определить на каком расстоянии до центра планеты в этой атмосфере возможно явление «закольцовывания» луча.

Решение альтернативной задачи

1. Если мы пустим лучи из Ищущего в направлении линз, то области простанства, которые будут ими «заметаться», будут являться областями, в которых Скрытого будет видно (ровно благодаря обратному ходу выпущенных нами лучей). Причём если для какой-то точки оптической схемы таких лучей несколько (пересекаются в этой точке), то они могут образовывать разные изображения в нашем понимании (приходя в Ищущего через разные участки линз).

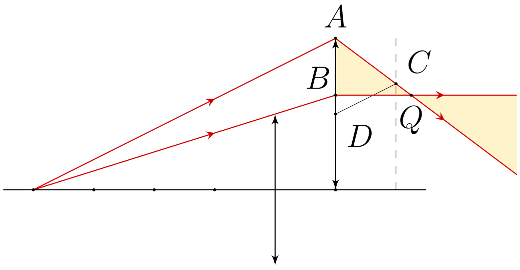
2. Рассмотрим некоторый пример построения лучей в этой схеме.

2.1. Луч OB преломляется в точке B, причём так как он проходит через фокус правой линзы, следовательно после преломления идет горизонтально.

2.2. Луч OA преломляется в точке A, для нахождения его пути после преломления строим побочную оптическую ось $DC \parallel OA$. Таким образом находим побочный фокус C, и строим луч AC.

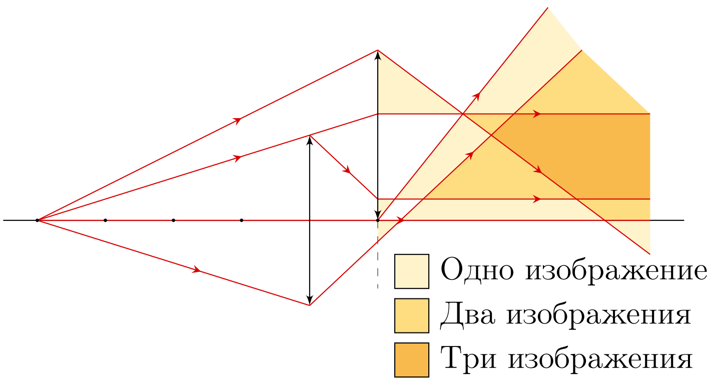
2.3. Фактически Q — изображение O в правой линзе, следовательно, все лучи между A и B на правой линзе проходят через Q, а это значит, что вся заштрихованная область «заметается» такими лучами.

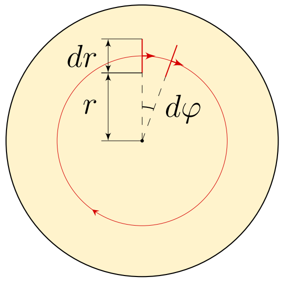
2.4. В дальнейшем рассмотрим луч, проходящий через B, но преломляющийся в левой линзе (он идёт чуть-чуть ниже рассмотренного луча OB, который в ней не преломился).



3. Аналогичными рассуждениями «замётаем» остальные области, а в местах, где они будут накладываться, Скрытый будет создавать несколько изображений (количество изображений равно количеству областей, которые покрывают конкретный вариант расположения Скрытого) . Окончательно, смотрите рисунок.

4. Также важно помнить, что если скрытый расположился в точках на подобии Q (каких-то обычных изображениях O), то на поверхности линзы его изображение будет занимать некоторую область.





Задача 2. Запишем условие сохранения волнового фронта лучей, идущих в предложенной атмосфере по круговой траектории. Пусть искомое расстояние r, тогда

$$n(r+dr)(r+dr)\cdot d\varphi = n(r)r\cdot d\varphi; \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(n_0 - k(r+dr)\right)(r+dr) = (n_0 - kr)\,r.$$

После преобразований имеем

$$(n_0 - 2kr - kdr)\,dr = 0.$$

Откуда находим,

$$n_0 = 2kr; \quad \Longrightarrow \quad r_{\text{иском}} = \frac{n_0}{2k}.$$

Предположение о круговой траектории на найденной высоте подтвердилось.