СПбАО.10 класс

1 Разрешение в ультрафиолете

Условие

Капелла – тесная двойная звезда, состоящая из почти одинаковых компонент. Впервые уверенно разрешить её компоненты без использования интерферометра удалось только при наблюдениях на телескопе Хаббла в ультрафиолетовом диапазоне на длине волны 3000 Å. Оцените угловое расстояние между комопнентами. Диаметр зеркала телескопа Хаббла равен 2,4 метра.

Решение

Фраза "впервые уверенно разрешить" означает, что такая система для телескопа Хаббла находилась на пределе разрешения. Тогда искомый угол $\theta = 1,22\dfrac{\lambda}{D} = 1,22\dfrac{3 \cdot 10^{-7}\text{м}}{2,4\text{м}} = 1,22 \cdot 1,25 \cdot 10^{-7} \approx 1,53 \cdot 10^{-7}$

Видно, что это угол в радианах. Но обычно угол измеряется в секундах, тем более такой маленький. Так как без калькулятора умножать это на $180 \cdot 3600/\pi$ проблематично, то лучше вспомнить, что в 1 радиане 206265 секунд. Округлив данное число до тысяч, получаем, что $\theta \approx 309 \cdot 10^{-4\prime\prime} \approx 31$ mas.

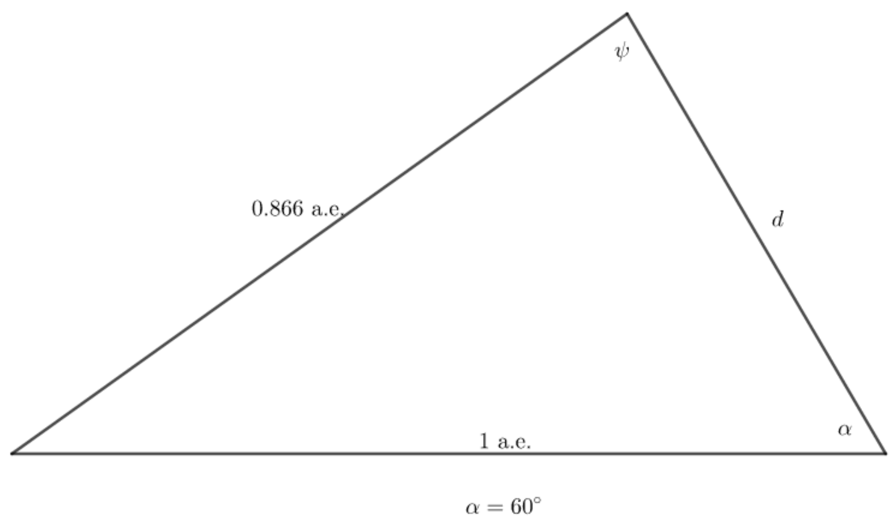
2 Астероид

Условие

Астероид радиусом 50 метров в некоторый момент времени находится на расстоянии 0,866 а. е. от Солнца и при наблюдении с Земли угол между астероидом и Солнцем составлял 60°. Оцените видимую звёздную величину астероида в тот момент. Возможно ли наблюдать его в телескоп с диаметром объектива 50 см? Оптические свойства поверхности астероида такие же, как у Луны.

Решение

Нарисуем картинку:



Тогда по теореме косинусов будет справедливо следующее:

$$0.866^2 = 1^2 + d^2 - 2 \cdot 1 \cdot d \cos \alpha$$

Учитывая, что $0,866 \approx \sqrt{3}/2$, можем написать следующее:

$$\frac{3}{4} = 1 + d^2 - d \Leftrightarrow d^2 - d + \frac{1}{4} = \left(d - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow d = 0,5$$

Пусть у астероида полная фаза (фазовый угол ψ мы учтём позднее), а поверхностная яркость Солнца на Земле $f_\odot$. Тогде поверхностная яркость Солнца на астероиде будет равна $(2/\sqrt{3})^2 f_\odot = 4 f_\odot/3$. Тогда поверхностная яркость астероида на Земле будет равной

$$f = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{\frac{4}{3}\alpha\pi R^2 f_\odot}{4\pi d^2} = \frac{4}{3}\frac{R^2}{d^2}\frac{\alpha}{4} f_\odot$$

Здесь R – радиус астероида, а α – его альбедо. Конечно здесь используется плоское, а не сферическое альбедо, но мы воспользуемся таким же типом альбедо и для Луны, так что ошибка вследствие использования альбедо исключена.

Аналогично поверхностной яркости астероида посчитаем поверхностную яркость Луны $f_\star$ относительно Земли и выразим её альбедо:

$$f_\star = \frac{R_\star}{r^2}\frac{\alpha}{4} f_\odot \Rightarrow \frac{\alpha}{4} = \frac{f_\star}{f_\odot}\left(\frac{r}{R_\star}\right)^2$$

Здесь $R_\star$ – радиус Луны, r – расстояние от Земли до Луны. Тогда

$$\frac{f}{f_\odot} = \frac{4}{3}\left(\frac{R}{d}\right)^2\left(\frac{r}{R_\star}\right)^2\frac{f_\star}{f_\odot}$$

Заметим, что $0,866^2 + d^2 = 3/4 + 1/4 = 1$, т. е. треугольник Солнце-Земля-астероид прямоугольник прямоугольник. Тогда $\psi = 90°$. Тогда в правую часть вышеприведённого уравнения нужно ещё добавить множитель $1/2$.

Тогда искомая звёздная величина астероида:

$$m = M_\odot - 2,5\log\frac{f}{f.} = M_\odot - 2,5\left(\log\frac{2}{3} + \log\left(\frac{R}{d}\right)^2 + \log\left(\frac{r}{R_\star}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \log\frac{f_\star}{f_\odot}\right) = M_\odot - 2,5(\log 2 - \log 3) - 5\log\frac{R}{d} - 5\log\frac{r}{R_\star} - (M_\odot - M_\star)$$

Рассчитаем логарифмы по отдельности:

$$2,5(\log 2 - \log 3) \approx 2,5(0,3 - 0,48) = -0,45$$

$$\frac{R}{d} = \frac{50}{0,5\cdot 1,5\cdot 10^{11}} = \frac{2}{3}\cdot 10^{-9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\log\frac{R}{d} = 5(\log 2 - \log 3 - \log 10^9) \approx -5\cdot 9,18 \approx -45,9$$

$$\frac{r}{R_\star} \approx \frac{384}{1,74} \approx 220 \Rightarrow 5\log\frac{r}{R_\star} \approx 5(\log 2,2 + \log 10^2) = \cdots$$

$$\log 2,2 = \log 2 + \log 1,1 = \log 2 + \frac{\ln 1,1}{\ln 10} \approx 0,3 + \frac{0,1}{4,3} \approx 0,3 + 0,023 \approx 0,32$$

$$\cdots = 5(0,32 + 2) = 11,6$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\ln(1+x) \approx x$

Тогда звёздная величина астероида $m = 0,45 + 45,9 - 11,6 - 12,6 \approx 22,2^m$

Оценим, какой диаметр объектива телескопа должен быть, чтобы увидеть астероид такой величины: $D = 0,6\cdot 10^{\frac{22,2-6}{5}} = 0,6\cdot 10^{3,24} > 0,6\cdot 10^3 = 600$ см $= 6$ м. Очевидно, что 50 см здесь и близко не хватит.

3 Аккреция на белый карлик

Условие

Двойная система состоит из звезды с максимальным радиусом 0,10 а. е. и белого карлика, находящегося на расстоянии 0,14 а. е. от центра основного компонента. Масса белого карлика равна самме Солнца, с основного компонента на карлик идёт аккреция вещества с не большой скоростью. Оцените среднюю плотность основного компонента системы.

Решение

У каждого компонента есть так называемая полость Роша – область пространства, в которой звезда остаётся гравитационно связной. Так как в условии сказано, что происходит аккреция, то основной компонент уже полностью заполнил полоть Роша. Однако эта аккреция медленная, а значит, размеры основного компонента ненамного большей данной полости.

Пусть радиус полости Роша R, расстояние между основным компонентом и белым карликом – a, их массы – M и m соответственно. Тогда ускорение для вещества, которое находится на границе полости Роша, создаваемое основным компонентом, равно $g = GM/R^2$. С другой стороны, белый карлик тоже притягивает. Значит, ускорение вещества на белый карлик относительно центра основного компонента равно $Gm\left(\dfrac{1}{(a-R)^2} - \dfrac{1}{a^2}\right) = g$

Так как размерности длины и массы не зависят друг от друга, то имеем право считать массу в солнечных, а расстояние – в а. е. Значит, масса основного компонента:

$$M = mR^2\left(\frac{1}{(a-R)^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 1 \cdot 0,10^2\left(\frac{1}{0,04^2} - \frac{1}{0,14^2}\right) =$$
$$= 100 \cdot 10^{-4}\left(\frac{1}{16 \cdot 10^{-4}} - \frac{1}{196 \cdot 10^{-4}}\right) \approx 100(0,0625 - 0,005) =$$
$$= 100 \cdot 0,0575 = 5,75\mathfrak{M}_\odot = 1,15 \cdot 10^{31}\text{кг}$$

Тогда плотность основного компонента

$$\rho = \frac{1,15 \cdot 10^{31}\text{кг}}{\frac{4}{3}\pi(0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}\text{м})^3} \approx \frac{1,15 \cdot 10}{4,2 \cdot 3,4}\ \text{кг/м}^3 = \frac{11,5}{14,3} \approx 8\ \text{кг/м}^3$$

4 Смещение линий

Условие

При наблюдениях двойной системы, состоящей из нейтронной звезды массой 1,4 массы Солнца и звезды главной последовательности, были обнаружены рентгеновские пульсации со средним периодом 1 секунда, отклоняющиеся от него максимум на 10^{-4} секунды. При этом спектральные наблюдения в оптическом диапазоне показали, что линия H_α также периодически меняет длину волны, отклоняясь от среднего значения максимум на 0,5 Å. Оцените светимость такой системы в оптическом диапазоне

Решение

Отклонения периода от пульсации происходят, очевидно, из-за движения нейтронной звезды по орбите. Тогда скорость её движения $v_M = c\dfrac{10^{-4}}{1} \approx 30$ км/с.

H_α – это первая линия серии Бальмера, которая имеет длину 6560 Å. Участник может либо помнить эту величину, либо вывести её из того факта, что это длина волны света, испускаемая при переходе электрона с 3 энергетического уровня на 2 в атоме водорода. Тогда у этой звезды $v_m = c\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = 3 \cdot 10^5 \dfrac{0,5}{6560} \approx 23$ км/с.

Если масса нейтронной звезды обозначить за M, а массу звезды главной последовательности за m, то очевидно, что $Mv_M = mv_m \Rightarrow m = M\dfrac{v_M}{v_m} \approx 1,4\dfrac{30}{23} \approx 1,83\mathfrak{M}_\odot$.

У звёзд примерно такой массы выполняется закономерность $L \propto \mathfrak{M}^4$. Тогда $L = 1,83^4 = (2-0,17)^4 = 2^4(1-0,085)^4 \approx 16(1-0,34) = 10,56L_\odot \approx 11L_\odot$.

Нейтронная звезда весьма тусклая вследствие своей небольшой площади поверхности. Значит, наибольший вклад будет вносить звезда главной последовательности. То есть светимость такой системы – 11 светимостей Солнца.

5 Атмосферное поглощение

Условие

Звезда Гиаусар (λ Дракона) имеет координаты $\delta = 69°20'$ и $\alpha = 11^h31^m$. Её видимая звёздная величина без атмосферы равна $3^m,8$. Как зависит видимая звёздная величина звезды от часового угла при наблюдениях в Мурманске? Широта города $\varphi = 68°58'$

Решение

Построив параллактический треугольник и применив к нему сферическую теорему косинусов относительно часового угла, можно получить следующую зависимость: $\cos 90^\circ - h = \cos(90^\circ - \delta)\cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \delta)\sin(90^\circ - \varphi)\cos t$. Произведём следующие замены: $90^\circ - \varphi = \rho$, $90^\circ - \delta = p$. Тогда $sinh = \cos p \cos\rho + \sin p \sin\rho\cos t$. Обратим внимание, что ρ и p малые. Тогда имеет смысл их перевести в радианы:

$\rho = \dfrac{21^\circ 2'}{57,3} \approx 0,367$; $p = dfrac 20^\circ 20' 57,3 \approx 0,355$. Тогда $\sin\rho\sin p \approx 0,130$, а $\cos\rho\cos p = \left(1 - \dfrac{\rho^2}{2}\right)\left(1 - \dfrac{p^2}{2}\right) \approx 1 - \dfrac{\rho^2 + p^2}{2} \approx 1 - \dfrac{0,261}{2} \approx 1 - 0,13 = 0,87$.

Участник может или знать, или вывести, что атмосферное поглощение для малых зенитных расстояний (до 70°) рассчитывается как $\Delta m = \dfrac{0,2}{\sin h}$. Очевидно, что нижняя кульминация Гиаусар равна $h = -90^\circ + \varphi + \delta = 48^\circ 18'$, что действительно довольно высоко.

Значит, итоговая зависимость

$$m(t) = 3,8 + \frac{0,2}{0,87 + 0,13\cos t}$$