Метод математической индукции.

1. Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

2. Докажите, что
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

3. Докажите, что
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

4. Найдите $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2020^2$.

5. Докажите, что при любом натуральном n число $21^n + 4^{n+2}$ делится на 17.

6. Докажите, что при любом натуральном n число $5^n - 3^n + 2n$ делится на 4.

7. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

8. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

9. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 6, a_{n+1} = 2a_n - 3n + 2$. Найдите a_n.

10. Последовательность $\{b_n\}$ задана рекуррентно: $b_1 = 7, b_2 = 27, b_{n+2} = 6b_{n+1} - 5b_n$. Найдите b_n.

11. n прямых попарно пересекаются, никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Найдите количество множеств на которые делят эти прямые плоскость.

12. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что части (в том числе неограниченные), на которые плоскость разбивается этими прямыми, можно раскрасить в два центра так, чтобы части одного цвета не имели общей границы.

13. Докажите, что любой квадрат можно разрезать на любое число квадратов, больше пяти.

14. Докажите неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1 + nx$, если $x \geq -1$ и n – натуральное число.

15. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой город.

16. В компании из $2n+1$ человек для любых n человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.