Задача двух тел в олимпиадной астрономии

Муратов В.А.

Содержание

Часть I
Введение

В 1609 году в свет вышел научный труд Иоганна Кеплера "Новая астрономия в которой был сформулирован первый из своих законов. В течении следующих 10 лет Кеплер издал ряд работ, в которых сформулировал оставшиеся два закона. Однако эти законы не были доказаны в рамках математической модели, а являлись лишь эмпирическими фактами, основанными на наблюдениях Тихо Браге. лишь спустя почти 60 лет Исаак Ньютон доказал законы Кеплера, постулировав закон всемирного тяготения и свои три закона движения. Законы Кеплера являются предельным решением задачи двух тел, в случае когда масса одного из них много больше массы другого. В данном документе вы найдете все теоретические выкладки в рамках решения задачи двух тел, а также сможете подборку олимпиадных задач по этой теме.

Часть II

Постановка задачи

Формулировка задачи следующая: точечные тела массами M и m находятся в пустом пространстве и взаимодействуют лишь гравитационно и только друг с другом. Заданы их векторы скорости и радиус-векторы в начальный момент времени в С.О., связанной с центром масс системы. Задача: в С.О. центра масс системы получить уравнения для положения тел в каждый момент времени и уравнения их траекторий. Закон всемирного тяготения в формулировке Ньютона постулирован, релятивисткие эффекты и эффекты ОТО не учитываются.

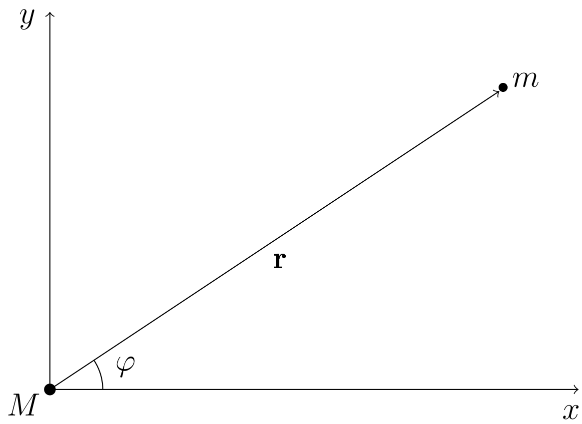
Часть III

Задача двух тел в приближении Кеплера

1 Вывод законов Кеплера

1.1 Уравнение движения

Рассматривается случай $M >> m$. В этом случае отклонения большего тела от центра масс пренебрежимо малы по сравнению с отклонениями меньшего тела. Можно считать, что большее тело "приколото булавкой"в центре масс системы.



В этом случае, согласно закону всемирного тяготения, на меньшее тело действует сила:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$$

Где $\mathbf{r}$ — радиус вектор, направленный от большего тела к меньшему[1] . Тогда, уравнение движения меньшего тела:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

Где $\mathbf{v}$ — скорость меньшего тела относительно большего. Или:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

Где $\mu = GM$ — гравитационный параметр. Для решения данного уравнения проще всего воспользоваться вспомогательным утверждением — законом сохранения момента импульса, или его прямым следствием — вторым законом Кеплера.

[1]здесь и далее жирным шрифтом обозначены векторные величины, а их модули — обычным

1.2 Второй закон Кеплера

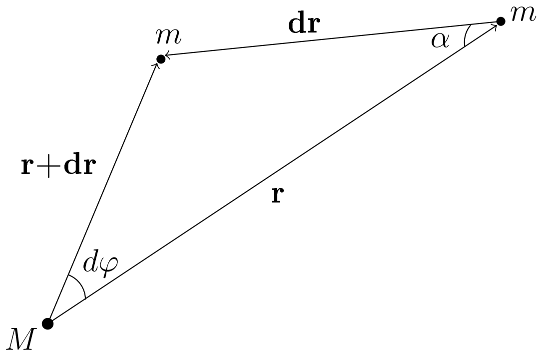
В данной задаче силы, действующие на меньшее тело сонаправлены с радиус-вектором. Поэтому они не создают момента сил, а значит момент импульса точки m сохраняется. Удобнее рассмотреть даже сохранение удельного момента импульса $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = const$$

Рассмотрим подробнее модуль этого вектора:

$$j = vr\sin\alpha = \frac{rdr\sin\alpha}{dt} = 2\frac{dS}{dt} \tag{3}$$

Где α — угол между скоростью и радиус-вектором, dS — площадь треугольника на рисунке снизу. Этот треугольник составлен из положений меньшего тела в соседние моменты времени.



Если j сохраняется, значит сохраняется и производная площади по времени, называемая секторной скоростью C:

$$C = \frac{dS}{dt} = \frac{j}{2} = const \tag{4}$$

В этом и заключается второй закон Кеплера:
За равные промежутки времени радиус-вектор из центра масс заметает равные площади
Важное следствие: рассмотрим площадь треугольника несколько с иной стороны:

$$dS = \frac{r(r+dr)d\varphi}{2} = \frac{r^2}{2}d\varphi$$

Значит:

$$2\frac{dS}{dt} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = j \tag{5}$$

Это соотношение ялвется ключевым и важнейшим, и в будущем еще не раз выручит нас.

1.3 Первый закон Кеплера

Теперь приступим к решению уравнения 2. Если расписать его покомпонентно в декартовых координатах:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}x \tag{6}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}y \tag{7}$$

Осуществим переход к полярным координатам по формулам:

$$x = r\cos\varphi \tag{8}$$

$$y = r\sin\varphi \tag{9}$$

Разделим 6 и 7 на 5, а затем выполним в них подстановку 8 и 9. Получится:

$$\frac{dv_x}{d\varphi} = -\frac{\mu}{j}\cos\varphi$$

$$\frac{dv_y}{d\varphi} = -\frac{\mu}{j}\sin\varphi$$

Интегрируя обе части, по φ, получим:

$$v_x = -\frac{\mu}{j}\sin\varphi + A \tag{10}$$

$$v_y = \frac{\mu}{j}\cos\varphi + B \tag{11}$$

Константы интегрирования вообще говоря ищутся из начальных условий. Однако никто не мешает нам повернуть координатные оси так, чтобы ось икс была перпендекулярна скорости в начальный момент времени. В таких координатах уравнение траектории просто будет иметь более красивый вид, так как в момент $\varphi = 0$ у нас $v_x = 0$ и тогда $A = 0$, так что эта константа больше не появится в наших выкладках. Теперь продифференциируем выражения 8 и 9 по времени. Получим:

$$v_x = \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi} = \dot{r}\cos\varphi - \frac{j\sin\varphi}{r} \tag{12}$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi} = \dot{r}\sin\varphi + \frac{j\cos\varphi}{r} \tag{13}$$

Здесь была выполнена подстановка 5 чтобы уйти от $dot\varphi$. Теперь просто рассмотрим следующую сумму:

$$-v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi = -\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{j\sin^2\varphi}{r} + \dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{j\cos^2\varphi}{r} \tag{14}$$

Но с другой стороны, из 10 и 11, эта же сумма есть:

$$-v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi = \frac{\mu}{j}\sin^2\varphi + \frac{\mu}{j}\cos^2\varphi + B\cos\varphi \tag{15}$$

Приравнивая 14 и 15 и сокращая все что можно, получим, если выразить $r(\varphi)$:

$$r = \frac{\frac{j^2}{\mu}}{1 + \frac{Bj}{\mu}\cos\varphi} \tag{16}$$

Данное уравнение задает кривую в полярных координатах. В курсе аналитической геометрии нетрудно доказывается, что кривая, которая задается уравнением:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

является одним из трёх конических сечений — эллипсом, параболой или гиперболой, причем фокус кривой находится в центре координат. Коэфициент p обозначает фокальный параметр, e — эксцентриситет. Это параметры кривой, и они будут рассмотрены подробнее далее. Таким образом, первый закон Кеплера можно сформулировать как:
В ограниченной задаче двух тел меньшее из тел движется вокруг большего по коническому сечению, причем большее тело находится в фокусе сечения.
Важные соотношения, полученные нами здесь связывают свойства кривой и начальные условия:

$$p = \frac{j^2}{\mu} \tag{17}$$

$$e = \frac{Bj}{\mu} \tag{18}$$

1.4 Третий закон Кеплера

Вывод третьего закона Кеплера корректен только в случае, когда траектория замкнута, так как в нем фигурирует период обращения. Из названных кривых лишь эллипс является замкнутым, на параболе и гиперболе период просто бесконечен. В случае, если уж так получилось и траектория все же эллипс, период есть просто площадь эллипса, деленная на секторную скорость:

$$T = \frac{S}{C}$$

Площадь эллипса есть:

$$S = \pi a^2\sqrt{1 - e^2}$$

где a — половина большей оси эллипса (большая полуось).

$$C = \frac{j}{2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{2} = \frac{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}{2}$$

Здесь была использована недоказанная ранее формула :

$$p = a(1 - e^2)$$

Она также является свойством эллипса, а о свойствах эллипса будет сказано чуть позже. Пока, если принять это за данность и подставить в уравнение для периода, получим:

$$T = 2\pi a^2 \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a(1-e^2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{19}$$

Если множество малых тел обращаются вокруг одного большого (прямо как в солнечной системе!), то формула преобретает очень простой вид:

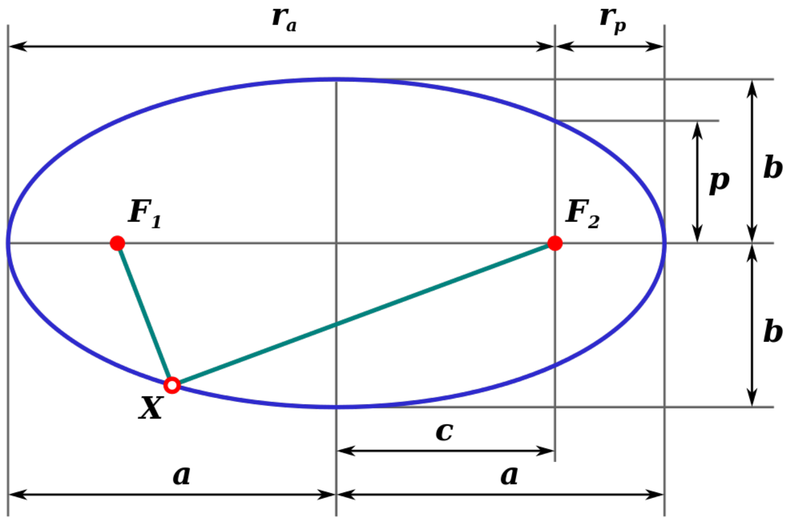
$$\frac{T^2}{a^3} = const \tag{20}$$

Таким образом, второй закон Кеплера формулируется как:
Квадраты периодов тел относятся как кубы их больших полуосей, если все тела обращаются вокруг общего центра

2 Орбиты и скорости на них

2.1 Эллипс

Чаще всего в олимпиадных задачах формой орбиты является именно эллипс, так как именно по эллипсам обращаются большие и малые планеты солнечной системы. Чисто геометрически эллипс — ГМТ точек, сумма расстояний от которых до заданных двух (называемых фокусами) постоянна. Снизу картинка с википедии, где указаны все основные элементы эллиптичной орбиты.



Парметры эллипса:

- F_1 и F_2 — фокусы эллипса. В одном из них находится гравитирующий центр.
- Большая полуось a — половина большой оси эллипса. Является основной характеристекой, из которой выражаются все остальные.
- Фокусное расстояние c — половина межфокусного расстояния.
- Эксцентриситет e — отношение $\frac{c}{a}$. Вводится для всех конических сечений. Степень сжатости эллипса относительно окружности, которая является частным случаем эллипса с $e = 0$. Эксцентреситет у эллипса строго меньше 1.
- Малая полуось b — половина малой оси эллипса. $b = a\sqrt{1-e^2}$
- Фокальный параметр p — важный параметр, который возникает в ряде физических уравнений. $p = a(1-e^2)$
- Перицентрическое расстояние r_p или q — расстояние от фокуса до ближайшей к нему точки эллипса (перицентра орбиты). $q = a(1-e)$
- Апоцентрическое расстояние r_a или Q — расстояние от фокуса до самой удаленной от него точки эллипса (апоцентр орбиты). $Q = a(1+e)$

Эллипс может быть задан с помощью уравнения второй степени в декартовых координатах:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

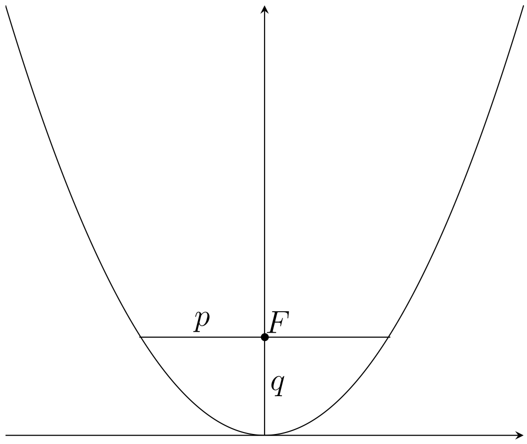
Центр координат совпадает с центром эллипса (пересечение большой и малой осей), а сами оси совпадают с большой и малой осями эллипса.
Площадь полного эллипса S:

$$S = \pi ab$$

Все приведенные формулы выводятся из тривиальной геометрии, а сам вывод предоставляется читателю в качестве упражнения.

2.2 Парабола

Параболой называется ГМТ точек, равноудаленных от точки (фокус) и данной прямой (директриса параболы). С точки зрения небесной механики параболу удобно считать коническим сечением с $e = 1$.



Элементы параболы:

- F — фокус параболы. Именно там находится гравитирующий центр.
- Фокальный параметр p — основная характеристика параболы. Обычно все остальное выражается через него.
- Перицентрическое расстояние q — наименьшее расстояние от точки параболы до ее фокуса. $q = \frac{p}{2}$

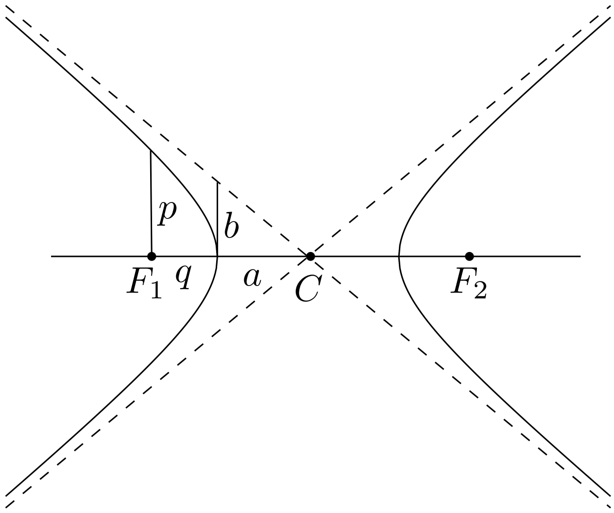
Каноническое уравнение параболы в декартовых координатах:

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

где центр координат совпадает с центром параболы. Парабола является переходным типом орбиты между эллипсом и гиперболой. Это орбита, на котором тело имеет наименьшую возможную энергию, необходимую чтобы преодолеть гравитационное поле центра притяжения.

2.3 Гипербола

Гипербола — орбита, которая позволяет меньшему телу улететь на бесконечность относительно большего. Большинство комет из облака Оорта имеют гиперболическую орбиту. Чисто математически гипербола — ГМТ точек, разность расстояний от которых до данных двух (фокусов) есть константа. Гипербола — коническое сечение с $e > 1$.



У гиперболы есть две ветви, как видно из рисунка. Тело летит по той из них, ближе к которой находится фокус с гравитирующим центром.
Элементы гиперболы:

- F_1 и F_2 — фокусы гиперболы. В одном из них находится гравитирующая масса.
- Пунктирные линии — ассимптоты гиперболы. На бесконечности гипербола совпадает с ними.
- C — центр гиперболы. Точка пересечения ассимптот.
- a — большая полуось гиперболы. Расстояние от центра до ближайшей к центру точки гиперболы (перицентр). Обычно через большую полуось выражаются все остальные элементы.
- c — фокальное расстояние. Половина межфокусного расстояния.
- e — эксцентриситет гиперболы. $e = \frac{c}{a}$. На гиперболе строго больше единицы.
- b — малая полуось. Длина перпендикуляра с ассимптоты гиперболы на прямую F_1F_2, опущенного в точку перицентра. $b = a\sqrt{e^2 - 1}$
- p — фокальный параметр. Снова возникает в ряде физических формул. $p = a(e^2 - 1)$
- Перицентрическое расстояние q — расстояние от фокуса до перицентра орбиты. $q = a(e - 1)$

Гипербола задается уравнением в декартовых координатах как:

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Где центр координат совпадает с центром гиперболы. Угол между ассимптотами гиперболы α — угол поворота вектора скорости тела, которое совершает гравитационный маневр в поле тяжести большого тела.

$$\alpha = 2\arccos(\frac{1}{e})$$

2.4 Скорости и энергии на орбитах

Теперь попробуем подсчитать с какой скоростью движется тело по каждой из орбит. Для этого применим уже готовые уравнения 10 и 11:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{\mu^2}{j^2}\sin^2\varphi + (\frac{\mu}{j}\cos\varphi + B)^2 = \frac{\mu^2}{j^2} + 2\frac{\mu B}{j}\cos\varphi + B^2$$

В это выражение осталось лишь подставить полученные нами ранее выражения для B и j (уравнение 17 и 18), а также выразить φ через r, чтобы получить скорость в зависимости от расстояния до центра. Сделаем все это:

$$v^2 = \frac{\mu}{p} + 2\frac{\mu e\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}p}\frac{\frac{p}{r} - 1}{e} + e^2\frac{\mu}{p} \tag{21}$$

Здесь чтобы уйти от φ было использовано указанное ранее уравнение конических сечений в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{22}$$

Упрощая 21, получим:

$$v^2 = \mu(\frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p}) \tag{23}$$

Эта формула является наиболее общей и задает скорость в самом общем случае для Кеплеровского движения. Однако на практике гораздо полезнее оказывается рассмотреть три возможных случая орбит.

2.4.1 Эллиптическая орбита

Подставляя $p = a(1 - e^2)$, получим:

$$v^2 = \mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{1}) \tag{24}$$

Частный случай эллипса — окружность, получается из этой формулы подстановкой $r = a = const$. На окружности:

$$v^2 = \frac{\mu}{a} \tag{25}$$

Эта скорость называется первой космической, или круговой скоростью.
Полезно выразить удельную полную энергию на орбите через её параметры. Полная удельная энергия есть:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \tag{26}$$

Тут стоят удельная кинетическая энергия и потенциал взаимодействия точечных масс. Видно, что на эллипсе:

$$E = -\frac{\mu}{2a} = const < 0 \tag{27}$$

Итак, эллиптическая энергия обладает отрицательной полной энергией. Это и логично, ведь такая орбита является устоявшейся и периодической, а значит должна обладать отрицательной полной энергией. У систем с положительной энергией возможны состояния, когда нет потенциальной энергии (все частицы на бесконечности). На эллиптической орбите тела никогда не расстанутся, а значит обязаны обладать отрицательной энергией. Из закона сохранения энергии очевидно, что кинетическая энергия (скорость) наибольшая в момент, когда наименьшая потенциальная. Потенциальная энергия в нашей задаче с расстоянием монотонно возрастает, поэтому наибольшую скорость на эллиптической орбите тело имеет в самой ближайшей к фокусу точке — то есть в перицентре орбиты. По той же логике, самая маленькая полная скорость в апоцентре. Получить выражение для них можно просто подставив в 24 $r = q$ и $r = Q$. Получится:

$$v_q = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}} \tag{28}$$

$$v_Q = \sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}} \tag{29}$$

2.4.2 Параболическая орбита

Подставляя $e = 1$ в 23, получим:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} \tag{30}$$

Эта скорость называется второй космической. Это минимальная скорость, нужная чтобы покинуть окрестности гравитирующей массы навсегда. Полная энергия на параболической орбите равна нулю, в чем можно убедиться простой подстановкой.

$$E = const = 0 \tag{31}$$

На параболической орбите тело на бесконечности не имеет скорости.

2.4.3 Гиперболическая орбита

Для гиперболы $p = a(e^2 - 1)$ и полная скорость:

$$v^2 = \mu(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}) \tag{32}$$

А полная энергия:
$$E = \frac{\mu}{2a} = const > 0 \tag{33}$$
На гиперболической орбите тело на бесконечности имеет полную скорость, равную:
$$v_\infty^2 = \frac{\mu}{a} \tag{34}$$
А в перицентре — точке, где тело движется быстрее всего:
$$v_q = \sqrt{\frac{\mu(e+1)}{a(e-1)}} \tag{35}$$
Таким образом тип орбиты однозначно определяется знаком полной энергии.

2.5 Определение основных параметров орбит

Невероятно полезным в олимпиадной астрономии является умение определять параметры орбит из известных начальных данных. Для того, чтобы однозначно восстановить большую полуось и эксцентриситет, нужно знать лишь полную скорость, расстояние до гравитирующего центра и угол между вектором скорости и радиус-вектором. Итак, пусть нам известны v, r, α, и массу центрального тела (обычно это Солнце) мы считаем известным. Как найти a и e? Прежде всего заметим, что из 26 мы знаем полную энергию на орбите. Более того, по знаку полной энергии можно восстановить тип орбиты. Ну а затем, из формул 27 и 33 можно найти большую полуось в случае если орбита эллипс или гипербола. На параболе, как мы помним, понятие большой полуоси не вводится. Чтобы найти e нужно вспомнть другой закон сохранения — закон сохранения момента импульса. Он выражается соотношением 3:
$$j = vr\sin\alpha = const$$
И эту констатнту мы знаем, ведь $j = \sqrt{\mu p}$ из 17 Поэтому:
$$vr\sin\alpha = \sqrt{\mu p}$$
Отсюда ищется фокальный параметр, а из него уже очевидно и эксцентриситет по известной полуоси.

2.6 Вырожденные случаи

А что будет если остановить Землю относительно Солнца, или, скажем, придать ей начальную скорость ровно вдоль радиус-вектора с Солнца? Кажется очевидным, что Земля начнет падать на Солнце просто по прямой. Но прямой линии не было в списке возможных траекторий в задаче двух тел, но тем не менее движение по ней возможно. Это — вырожденный случай задачи двух тел, и в реальности отрезок, являющийся траекторией в рамках задачи, представляет собой вырожденное коническое сечение. Например, если сжимать эллипс все сильнее, устремляя его эксцентриситет к единице слева, эллипс будет все больше похож на отрезок. Нечто аналогичное можно проделать и с гиперболой, устремляя e к 1 справа, да и с параболой тоже. Поэтому отрезок в задаче про падение Земли на Солнце без начальной скорости — вырожденный эллипс (тип вырожденного сечения снова определяется знаком полной энергии, и в этой задаче она, очевидно, отрицательна). Можно даже определить большую полуось этого эллипса — из закона сохранения энергии получится 0.5 а.е.. Время падения Земли на Солнце будет равно просто половине периода полета по этому эллипсу, то есть $\frac{0.5^{1.5}}{2}$ лет.

3 Задачи и упражнения

1. Находясь на широте 30°, я кинул камень на юг под некоторым углом к горизонту и случайно сбил геостационарный спутник. При этом в момент удара мой камень находился в апоцентре своей орбиты. С какой начальной скоростью и под каким углом к горизонту я кинул камень?

2. 17 января 2016 года комета C/2013 US10 (Каталина) приблизилась к Земле на минимальное расстояние. При этом ее горизонтальный параллакс составил $12.0''$. 18 марта того же года параллакс кометы был равен $4.0''$. С какой средней пространственной скоростью относительно Земли двигалась комета за этот период?

3. Космический корабль прошел точку перисатурния над полюсом Сатурна на расстоянии его экваториального радиуса от центра планеты, после чего пролетел сквозь щель Энке (радиус $1.34 \cdot 10^5$ км) в кольцах. Определите расстояние апосатурния этого корабля. Останется ли аппарат искусственным спутником Сатурна?

4. Звезда — красный гигант обладает системой из очень большого количества планет, движущихся по орбитам с одинаковыми эксцентриситетами. В один момент звезда быстро сбрасывает оболочку, уносящую ровно половину массы гиганта. Тем не менее, 0.7 от общего числа планет в итоге остались в системе звезды. Определите эксцентриситет орбит планет до сброса оболочки. Считать, что оболочка рассеивается очень быстро, ее взаимодействие с планетами с момента сброса, а также взаимодействие планет между собой не учитывать. Все планеты несравнимо меньше звезды по массе.

5. Какой импульс и в каком направлении надо придать Земле, чтобы ее полная энергия на орбите не изменилась?

6. За какое время долетает тело от перицентра до точки на расстоянии a от фокуса на эллиптической орбите?

7. Суперзлодей будущего остановил Венеру в её орбитальном движении и пнул в сторону Солнца с начальной скоростью 15 $\frac{km}{s}$. Определите, через какое время Венера столкнется с Солнцем. Радиус орбиты Венеры до остановки 0.723 $a.u.$

8. Проходя перигей своей орбиты, который находится на орбите Меркурия, комета останавливается в своем видимом движении среди звезд на Земном небе. Определите большую полуось и эксцентриситет ее орбиты, считая, что она лежит в плоскости эклиптики.

9. Какую фазу при наблюдении с Земли должен иметь Марс во время старта АМС, которая летит к Марсу по энергетически выгодной траектории? Орбиту Марса принять круговой и лежащей в плоскости эклиптики, подразумевается что станция приземлится на Марс во время первого же прохождения перицентра орбиты.

10. Планета обращается по эллиптической орбите с большей полуосью a и эксцентриситетом e вокруг красного гиганта. В один момент звезда быстро сбрасывает оболочку, тем самым теряет половину своей массы. Эксцентриситет орбиты планеты при этом не изменился. Выразите новую большую полуось a_2 и расстояние до звезды в момент сброса r через e. При каких e такое возможно?

11. Космический аппарат стартует с Земли с третьей космической скоростью, и вскоре совершает гравитационный маневр возле Юпитера. Определите фазу Юпитера в момент старта аппарата и угол поворота скорости при маневре.

12. Комета покинула окрестности звезды Росс 248 по параболической траектории относительно нее и попала в окрестности Солнца, пролетев мимо него на минимальном расстоянии 1 а.е. Какой был эксцентриситет орбиты этой кометы при пролете около Солнца? На какой угол изменится направление скорости кометы после пролета через Солнечную систему? Параметры звезды Росс 248: собственное движение $1.6''$ за год, лучевая скорость равна -78 км/с, параллакс $0.32''$. Влиянием на систему всех иных тел, кроме Солнца и звезды Росс 248, пренебречь.

13.

Часть IV

Задача двух тел в случае сопоставимых масс

4 Решение в С.О. одного из тел

Теперь решим задачу двух тел в самом общем виде, ничем не пренебрегая. Два тела в пустом простанстве взимодействуют друг с другом, и мы хотим понять как они будут двигаться. Перейдем в С.О. тела массой M. Эта система отсчета неинерциальна, ведь на неё действует меньшее тело с силой:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$$

Все обозначения те же, что и в первой главе. Ускорение данной С.О. есть:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{Gm}{r^3}\mathbf{r}$$

Поэтому, уравнение движения меньшего тела принимает вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} - m\mathbf{a}_1$$

Второе слагаемое в левой части — сила инерции. Уравнение движения примет вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\mathbf{r} \tag{36}$$

Разумеется, закон сохранения момента импульса снова выполняется, ведь все силы вновь сонаправлены с радиус-вектором. Мы получили то же уравнение, что и 2, только вместо массы большего тела в знаменателе сумма масс. Решение будет абсолютно таким же, только вместо массы большего тела во всех формулах появляется сумма масс. И снова траектория второго тела при наблюдении с первого — одно из трех конических сечений. Период, очевидно, равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(M+m)}} \tag{37}$$

Это утверждение называется обобщенным третьим законом Кеплера. Оно может быть записано как:

$$\frac{T^2(M+m)}{a^3} = const \tag{38}$$

Выражение для всевозможных относительных скоростей также будут иметь такой же вид как и в ограниченной задаче, разумеется кроме того факта, что вместо массы большего тела туда стоит подставлять суммарную массу.

5 Решение в С.О. центра масс

Полезно понимать и то, как будут выглядеть траектории звезд в системе отсчета, связанной с их центром масс. Для этого докажем основные теоремы о движении центра масс.

5.1 Движение центра масс

Пусть относительно некоторой инерциальной системы отсчета тела M и m имеют радиус-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Тогда, положение их центра масс в этой С.О.:

$$\mathbf{R} = \frac{M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{M+m} \tag{39}$$

Дифференцируя 39 по времени, мы получим выражение для скорости центра масс звезд в этой С.О.:

$$\mathbf{V} = \frac{M\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2}{M+m} \tag{40}$$

Теперь определим скорости тел относительно центра масс:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} = \frac{m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{M+m} = \frac{m\mathbf{v}}{M+m} \tag{41}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V} = \frac{M(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{M+m} = -\frac{M\mathbf{v}}{M+m} \tag{42}$$

Где $\mathbf{v}$ — та самая относительная скорость, которая возникала буквально в предыдущем разделе. Отметим, что скорость центра масс есть величина постоянная, поскольку она является частным полного импульса системы (он сохраняется из третьего закона Ньютона) и суммарной массы, которую мы тоже считаем постоянной. Поэтому эта система отсчета инерциальна.

5.2 Основные уравнения

Система отсчета центра масс инерциальна, поэтому в ней уравнение движения скажем тела m примет вид:

$$\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \tag{43}$$

Теперь пусть $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы тел M и m в С.О. центра масс. Хорошо бы оставить в правой части 43 фунцкию от радиус-вектора $\mathbf{r}_2$. Сделать это совсем несложно, ведь в С.О. центра масс $\mathbf{R} = 0$, а значит:

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{M}{m}\mathbf{r}_1 \tag{44}$$

При этом, очевидно:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2(1 + \frac{m}{M}) \tag{45}$$

Очевидно просто из определения векторной разности. Поэтому, уравнение движения принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -\frac{GM}{(1+\frac{m}{M})^2 r_2^3}\mathbf{r}_2 \tag{46}$$

Уравнение снова тоже самое, однако эффективная масса на этот раз равна:

$$M_{eff} = \frac{M}{(1+\frac{m}{M})^2}$$

Траектория снова является коническим сечением, фокус на этот раз расположен в центре масс. Если сделать аналогичную подстановку со второй звездой, для нее эффективная масса окажется равна:

$$m_{eff} = \frac{m}{(1+\frac{M}{m})^2}$$

6 Задачи и упражнения

1. Штурман космического корабля наблюдает за двойной системой, состоящей их двух одинаковых белых карликов с массой каждого, равной массе Солнца, движущихся по круговой орбите с периодом 7.9 лет. В некоторый момент расстояние от корабля до обеих компонент системы было одинаковым, видимый блеск каждой из них был равен -1^m, а угловое расстояние между ними составляло $14'19.4''$. Через некоторое время корабль, пролетая вблизи этой

системы, оказался практически на одной линии со звездами на расстоянии 15 а.е. от ближайшей из них. Какую суммарную звездную величину будет иметь система в этот момент, если штурман видит обе звезды полностью?

2. Пусть мы наблюдаем звезду с экзопланетой, орбита которой лежит в плоскости луча зрения. Выразите массу экзопланеты через амплитудное значение лучевой скорости звезды v, период системы T, максимальное угловое расстояние от звезды до планеты ρ и параллакс π.

3. Четыре звезды солнечной массы вращаются в вершинах квадрата по круговой орбите. Сторона квадрата одна астрономическая единица. Найдите период системы.

4. N звезд солнечной массы находятся в вершинах правильного N-угольника и обращаются по круговым орбитам вокруг его центра. Определите период системы, сторона многоугольника 1 астрономическая единица.

5. Две звезды солнечной массы обращаются по круговой орбите вокруг общего центра масс, расстояние между звездами 1 а.е.. Издалека к ним навстречу мчится третья звезда с начальной скоростью v_0, и после тесного контакта три звезды больше никогда не встречаются. Определите минимально возможное значение v_0.

6. Красный гигант массой в три солнечных и белый карлик солнечной массы обращаются по эллиптичным орбитам вокруг общего центра масс. Эксцентриситет системы 0.5, полуось 2 а.е.. В результате взрыва красный гигант теряет половину массы. Определите новые параметры орбиты.

7.

Часть V

Кеплеровы элементы орбиты

7 Задачи и упражнения

Часть VI

Уравнения Кеплера

8 Общее уравнение

9 Эллипс

10 Парабола

11 Гипербола

12 Вырожденный случай

13 Задачи и упражнения

Часть VII

Специальные случаи

14 Движение внутри однородно заряженного шара

15 Солнечный парус

16 Элементарная модель для учета эффекта Пойтнинга-Робертсона

17 Задачи и упражнения