

*Не надо строить иллюзий, которые
могут закончиться травмпунктом.*

Кар Карыч, «Малышарики Искусство кройки и житъя»

Каром

В данной задаче надо будет анализировать частично упругие удары малышариков с коэффициентом восстановления k , который определяется соотношением

$$k = 1 - E_{\text{п}}/W,$$

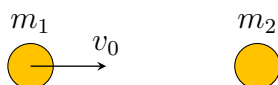
где $E_{\text{п}}$ — потери энергии, а W — максимальная энергия деформации во время удара.

Например, малышарик падает с высоты H и ударяется о пол. Максимальная энергия деформации mgH . Если коэффициент восстановления равен k , то энергия малышарика после удара равна $mgHk$ и он поднимется на высоту Hk .

Во всех пунктах считайте, малышариков гладкими, шарообразными, однородными, а их движение исключительно поступательным.

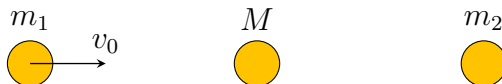
Часть 1. Центральный удар

А. Барашик фиксированной массы m_1 налетает на Крошика массы m_2 и происходит центральный удар с коэффициентом восстановления k .



1. (1 балл) Найдите, при каком значении массы Крошика m_2 его кинетическая энергия после удара будет максимальной.

В. Между Барашиком и Ёжиком с известными массами m_1 и m_2 расположили другого вспомогательного малышарика, массу M которого мы можем изменять. Первому малышарику сообщили скорость v_0 , остальные малышарики покоятся ~~е-миром~~.



2. (1,5 балла) При каком значении массы вспомогательного малышарика, кинетическая энергия Ёжика массы m_2 будет максимальной?

Все удары центральные, коэффициенты восстановления одинаковы и равны k .

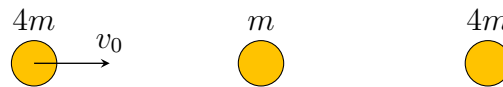
С. Между Барашиком и Нюшенькой с известными массами m_1 и m_2 расположили N вспомогательных малышариков, массы которых мы можем изменять. Первому малышарику сообщили скорость v_0 , остальные малышарики покоятся.



3. (1 балл) При каких значениях масс вспомогательных малышариков, кинетическая энергия Ньюеньки массы m_2 будет максимальной? Все удары центральные, коэффициенты восстановления одинаковы и равны k .
4. (1,5 балла) При каком значении k кинетическая энергия Ньюеньки будет больше, чем если бы не было вспомогательных малышариков?

Массы вспомогательных малышариков можно изменять независимо.

Д. В качестве частного примера рассмотрим следующую ситуацию. Три малышарика Барашик, Крош и Ёжик массами $4m$, m и $4m$ соответственно расположились в этом порядке вдоль одной прямой линии. Барашику сообщили скорость v_0 по направлению к двум другим малышарикам, которые находились в состоянии покоя. Коэффициент восстановления всех ударов 0,5.



5. (2 балла) Какое количество теплоты выделится за сколько угодно большое время?

Часть 2. Нецентральный удар

Две смешайбочки одинакового радиуса R располагаются на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения смешайбочек о поверхность одинаков и равен μ . Смешайбочка массы m_1 налетает на покоящуюся смешайбочку массы m_2 . В момент удара с коэффициентом восстановления k скорость первой смешайбы равна v_0 . После удара вторая смешайба к моменту остановки прошла путь L_2 . Найдите:

6. (1,5 балла) количество теплоты Q , выделившееся за время соударения;
7. (1,5 балла) расстояние L_1 , пройденное первой смешайбой после соударения.

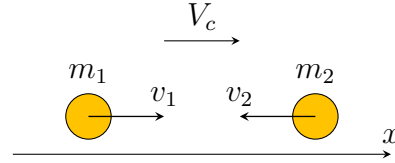
Авторы задачи: Л. Колдунов, П. Шиликин, А. Уймин

Решение основной задачи

Часть 1. Центральнй удар

А. Перейдем в систему центра масс Барашика и Крошика, которая будет двигаться с постоянной скоростью

$$V_c = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2},$$



так как на систему не действуют внешние силы по горизонтали. Тогда проекция скорости Барашика на горизонтальную ось будет равна

$$v_{1x} = v_0 - V_c = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2},$$

а скорость Крошика

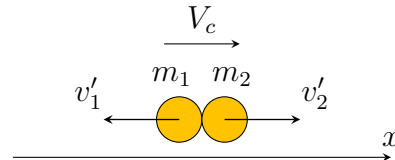
$$v_{2x} = -V_c = -\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Модули импульсов Барашика и Крошика в системе центра масс будут равны друг другу

$$p_{1x} = \frac{m_1}{m_2 v_0 m_1 + m_2}; \quad p_{2x} = -\frac{m_1 m_2 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Проекция импульса на ось x для системы тел, состоящей из Барашика и Крошика, будет сохраняться, так как по горизонтали на них не действуют другие силы.

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} = 0,$$



где p'_{1x} и p'_{2x} — проекции импульсов Барашика и Крошика после соударения соответственно. В системе центра масс импульс системы будет равен 0. Следовательно, $p'_{1x} = -p'_{2x}$.

Запишем уравнение сохранения энергии с учётом коэффициента восстановления

$$k \left(\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \right) = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}.$$

Выразим коэффициент k с учётом $p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} = 0$

$$k = \frac{p_1'^2}{p_1^2} = \frac{p_2'^2}{p_2^2}.$$

Скорость Крошика после удара в лабораторной системе отсчёта будет равна

$$v_2^* = v_{2x}' + V_c = V_c(\sqrt{k} + 1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0(\sqrt{k} + 1)$$

Кинетическая энергия Крошика после удара будет равна

$$E_k = m_2 (v_2^*)^2 = m_2 V_c^2 (\sqrt{k} + 1)^2 = \left[(\sqrt{k} + 1) m_1 v_0 \right]^2 \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2} = A \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Здесь A — константа. Задача поиска максимума E_k

$$E_k = A \frac{1}{\left(\frac{m_1}{\sqrt{m_2}} + \sqrt{m_2} \right)^2}.$$

сводится к поиску минимума выражения в знаменателе

$$\frac{m_1}{\sqrt{m_2}} + \sqrt{m_2} \rightarrow \min.$$

Следовательно, максимум E_k достигается при:

$$\frac{m_1}{\sqrt{m_2}} + \sqrt{m_2} \geq 2\sqrt{m_1}.$$

Окончательно получаем

$$\boxed{m_2 = m_1.}$$

В. Используя предыдущий пункт, легко определить скорость малышарика массой M после соударения с Барашиком

$$v_M = \frac{m_1 v_0}{m_1 + M} (\sqrt{k} + 1).$$

Аналогично определим скорость Ёжика после столкновения с малышариком массой M

$$v_2 = \frac{M v_M}{M + m_2} (\sqrt{k} + 1).$$

Подставим v_M в предыдущую формулу

$$v_2 = \frac{m_1 M v_0}{(m_1 + M)(m_2 + M)} (\sqrt{k} + 1)^2.$$

Кинетическая энергия Ёжика равна

$$E_k = m_2 v_2^2 = m_2 \left[m_1 v_0 (\sqrt{k} + 1)^2 v_0 \frac{M}{(m_1 + M)(m_2 + M)} \right]^2$$

$$E_k = A^* \left[\frac{M}{(m_1 + M)(m_2 + M)} \right]^2,$$

где A^* — константа. Максимум кинетической энергии Ёжика будет достигаться при

$$\begin{aligned} \frac{M}{(m_1 + M)(m_2 + M)} \rightarrow \max; & \iff \frac{1}{M + \frac{m_1 m_2}{M} + m_1 + m_2} \rightarrow \max; & \iff \\ & \iff M + \frac{m_1 m_2}{M} \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Используя неравенство о среднем, получаем

$$M + \frac{m_1 m_2}{M} \geq 2\sqrt{m_1 m_2}$$

Максимум E_k достигается при

$$\boxed{M = \sqrt{m_1 m_2}}.$$

В случае $k = 0$ смешные шарики слипнутся и покатятся дальше вместе. Законы сохранения теперь запишутся так:

$$\begin{cases} m_1 v_0 = (m_1 + M + m_2) v_1, \\ m_1 \frac{v_0^2}{2} = (m_1 + M + m_2) \frac{v_1^2}{2}. \end{cases}$$

Тогда $v_1 = v_0 \frac{m_1}{m_1 + M + m_2}$, и $E_{\text{Лось}} = \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + M + m_2)^2} \cdot \frac{v_0^2}{2}$. Для максимизации этого выражения достаточно минимизировать его знаменатель, для этого необходимо взять $M = 0$.

С. Воспользуемся результатами предыдущего пункта для определения скорости Нюшеньки после всех столкновений

$$v_2 = \frac{m_1 M_1 M_2 \dots M_n}{(m_1 + M_1)(M_1 + M_2) \dots (M_{n-1} + M_n)(M_n + m_2)} v_0 (\sqrt{k} + 1)^{n+1}.$$

Кинетическая энергия Нюшеньки будет равна

$$E_k = m_2 v_2^2.$$

Её максимум будет достигаться при максимуме выражения:

$$\frac{M_1 M_2 \dots M_n}{(m_1 + M_1)(M_1 + M_2) \dots (M_{n-1} + M_n)(M_n + m_2)} \rightarrow \max.$$

Рассмотрим более простые выражения для максимизации:

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{(m_1 + M_1)(M_1 + M_2)} &\rightarrow \max, \text{ при } M_1 = \sqrt{m_1 M_2}, \\ \frac{M_2}{(M_1 + M_2)(M_2 + M_3)} &\rightarrow \max, \text{ при } M_2 = \sqrt{M_1 M_3}, \\ \frac{M_3}{(M_2 + M_3)(M_3 + M_4)} &\rightarrow \max, \text{ при } M_3 = \sqrt{M_2 M_4}, \\ &\vdots \\ \frac{M_n}{(M_{n-1} + M_n)(M_n + m_2)} &\rightarrow \max, \text{ при } M_n = \sqrt{M_{n-1} m_2}. \end{aligned}$$

Выразим M_2 из первого уравнения, M_3 из второго уравнения и так далее:

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{M_1^2}{m_1}; \\ M_3 &= \frac{M_2^2}{M_1} = \frac{M_1^3}{m_1^2}; \\ M_4 &= \frac{M_3^2}{M_2} = \frac{M_1^4}{m_1^3}; \\ &\vdots \\ M_{n-1} &= \frac{M_1^{n-1}}{m_1^{n-2}}; \\ M_n &= \frac{M_1^n}{m_1^{n-1}}. \end{aligned}$$

Из выражений M_{n-1} , M_n через M_1 и m_1 с помощью уравнения $M_n = \sqrt{M_{n-1}m_2}$ можно найти M_1

$$\frac{M_1^{2n}}{m_1^{2n-2}} = \frac{M_1^{n-1}}{m_1^{n-2}} m_2$$

$$M_1 = \sqrt[n+1]{m_1^n m_2}$$

Выразим M_j

$$M_j = M_1^j m_1^{1-j} = m_1^{1-\frac{j}{n+1}} m_2^{\frac{j}{n+1}}$$

В случае $k = 0$ абсолютно все то же самое, что и в предыдущем пункте для $k = 0$, только с индексами. Законы сохранения почти такие же:

$$\begin{cases} m_1 v_0 = (m_1 + M_1 + \dots + M_n + m_2) v_1, \\ m_1 \frac{v_0^2}{2} = (m_1 + M_1 + \dots + M_n + m_2) \frac{v_1^2}{2}. \end{cases}$$

Скорость Совуны отсюда $v_1 = v_0 \frac{m_1}{m_1 + M_1 + \dots + M_n + m_2}$, и $E_{\text{Сова}} = \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + M_1 + \dots + M_n + m_2)^2} \cdot \frac{v_0^2}{2}$. Опять таки, для максимизации всего выражения достаточно минимизировать знаменатель, то есть взять все $M_i = 0$.

Зная выражение для M_j , вычислим максимальную скорость Нюшеньки после соударений v_2 . Для этого посчитаем 2 произведения:

$$\begin{aligned} m_1 M_1 M_2 \dots M_n &= M_1^{1+2+\dots+n} m_1^{n-(1+2+\dots+n)} = m_1 M_1^{\frac{n(n+1)}{2}} m_1^{\frac{n(1-n)}{2}} = m_1^{\frac{n+2}{2}} m_2^{\frac{n}{2}} \\ (m_1 + M_1)(M_1 + M_2)(M_2 + M_3) \dots (M_{n-1} + M_n)(M_n + m_2) &= \\ &= \left(m_1 + m_1^{1-\frac{1}{n+1}} m_2^{\frac{1}{n+1}} \right) \left(m_1^{1-\frac{1}{n+1}} m_2^{\frac{1}{n+1}} + m_1^{1-\frac{2}{n+1}} m_2^{\frac{2}{n+1}} \right) \dots \left(m_1^{1-\frac{n}{n+1}} m_2^{\frac{n}{n+1}} + m_1^0 m_2^1 \right) = \\ &= m_1 \left(1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right) m_1^{1-\frac{1}{n+1}} m_2^{\frac{1}{n+1}} \left(1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right) \dots m_1^{1-\frac{n}{n+1}} m_2^{\frac{n}{n+1}} \left(1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right) = \\ &= m_1^{\frac{n+2}{2}} m_2^{\frac{n}{2}} \left(1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Тогда скорость Нюшеньки будет равна:

$$v_2 = \left(1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right)^{-n-1} v_0 (\sqrt{k} + 1)^{n+1}.$$

Кинетическая энергия Нюшеньки с вспомогательными малышариками будет больше при условии

$$\left(1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right)^{-n-1} v_0 (\sqrt{k} + 1)^{n+1} > \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 (\sqrt{k} + 1)$$

$$(\sqrt{k} + 1)^n > \frac{\left(1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right)^{n+1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \implies k > \left[\frac{\left(1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}}}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{n}}} - 1 \right]^2$$

Д. До этого мы рассматривали только удары, в которых один из малышариков изначально покоился. Получим преобразования скоростей в общем случае: когда сталкиваются два малышарика массами m_1 и m_2 , движущиеся со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$).

Перейдем в систему центра масс малышариков, которая будет двигаться с постоянной скоростью

$$V_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$


так как на систему не действуют внешние силы по горизонтали. Тогда проекции скоростей малышариков на горизонтальную ось будут равны:

$$\begin{cases} v_{1x} = v_1 - V_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2); \\ v_{2x} = v_2 - V_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1). \end{cases}$$

Модули импульсов малышариков системе центра масс будут равны друг другу:

$$\begin{cases} p_{1x} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}; \\ p_{2x} = \frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}. \end{cases}$$

Проекция импульса на ось x для системы малышариков будет сохраняться, так как по горизонтали на них не действуют другие силы.

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} = 0,$$


где p'_{1x} и p'_{2x} — проекции импульсов малышариков после соударения соответственно. В системе центра масс импульс системы будет равен 0. Следовательно, $p'_{1x} = -p'_{2x}$.

Запишем уравнение сохранения энергии с учётом коэффициента восстановления:

$$k \left(\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \right) = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}.$$

Выразим коэффициент k с учётом $p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} = 0$:

$$k = \frac{p_1'^2}{p_1^2} = \frac{p_2'^2}{p_2^2}.$$

Скорости малышариков после удара в лабораторной системе отсчёта будут равны

$$\begin{cases} v_1^* = v'_{1x} + V_c = \frac{p_1'}{m_1} + V_c = \sqrt{k}v_1 + V_c; \\ v_2^* = \sqrt{k}v_2 + V_c. \end{cases}$$

Окончательно:

$$\begin{cases} v_1^* = \frac{1}{m_1 + m_2} \left((m_1 - m_2\sqrt{k}) v_1 + m_2 (1 + \sqrt{k}) v_2 \right); \\ v_2^* = \frac{1}{m_1 + m_2} \left(m_1 (1 + \sqrt{k}) v_1 + (m_2 - m_1\sqrt{k}) v_2 \right). \end{cases}$$

Изначально $v_1 = v_0$, $v_2 = 0$ и $v_3 = 0$.

Путём несложных вычислений, которые мы оставим читателю, можно получить, что после пятого удара скорости равны, соответственно

$$\begin{cases} v_1 = 0.256v_0; \\ v_2 = 0.271v_0; \\ v_3 = 0.677v_0. \end{cases}$$

$v_1 < v_2 < v_3$, а значит, больше ударяться малышарики не будут.

Окончательно получаем

$$Q = 4\frac{mv_0^2}{2} - \left(\frac{4mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{4mv_3^2}{2} \right) = 0,91714m_0v_0^2.$$

Но проще всего сделать при помощи компьютерного моделирования. Каждое соударение — линейное преобразование скоростей, которое удобно записать в форме умножения на матрицу

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 - \sqrt{k}m_2 & m_2(1 + \sqrt{k}) \\ m_1(1 + \sqrt{k}) & m_2 - \sqrt{k}m_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Примечание. Смотрите [видео Кубка ЛФИ про матрицы](#).

Этот пункт проще всего сделать при помощи компьютерного моделирования. Каждое соударение — линейное преобразование скоростей, которое удобно записать в форме умножения на матрицу:

Затем следует провести несколько последовательных столкновений, каждый раз проверяя, не выстроились ли скорости по порядку.

Результат вычислений для изменения энергии

$$\Delta E = -0,91714m_0v_0^2.$$

Часть 2. Нецентральный удар

6. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся со скоростью $v_{0x} \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ вдоль оси x . В этой системе отсчёта проекции скоростей смешайбочек на ось x равны

$$v'_{1x} = v_{0x} \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \quad v'_{2x} = -v_{0x} \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Проекция импульса системы на ось x равна нулю. Тогда после удара получаем, что проекции скоростей смешайбочек равны

$$u'_{1x} = -u \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \quad u'_{2x} = u \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Когда смешайбочки максимально деформированы, проекции их скоростей на ось x равны нулю. Тогда

$$W = \frac{m_1}{2} \left(\frac{v_{0x} m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{v_{0x} m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_{0x}^2}{2}.$$

Найдём u из закона сохранения энергии

$$\frac{m_1}{2} \left(\frac{v_{0x} m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{v_{0x} m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1}{2} \left(\frac{u m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{u m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + (1 - k)W,$$

После несложных преобразований, находим

$$W = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{u^2}{2} + (1 - k)W, \quad \Rightarrow \quad u = v_{0x} \sqrt{k}.$$

Тогда проекция скорости второй смешайбочки на ось x в лабораторной системе отсчёта равна

$$u_{2x} = u'_{2x} + v_{0x} \frac{m_1}{m_1 + m_2} = v_{0x} \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{k}).$$

С другой стороны, так как после удара вторая смешайба к моменту остановки прошла путь L_2 , то

$$\frac{m_2 u_{2x}^2}{2} = \mu m_2 g L_2; \quad \Rightarrow \quad u_{2x} = \sqrt{2\mu g L_2}.$$

Откуда получаем

$$v_{0x} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 (1 + \sqrt{k})} \sqrt{2\mu g L_2}.$$

Тогда количество теплоты, выделившееся с момента соударения равно

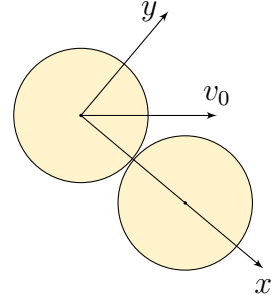
$$Q = (1 - k)W = (1 - k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1^2 (1 + \sqrt{k})^2} \frac{2\mu g L_2}{2} = (1 - k) \frac{m_2}{m_1} \frac{m_1 + m_2}{(1 + \sqrt{k})^2} \mu g L_2.$$

7. Расстояние L_1 найдём из закона сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = Q + \mu g L_1 m_1 + \mu m_2 g L_2.$$

Окончательно

$$L_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g} - L_2 \frac{m_2}{m_1} - (1 - k) \frac{m_2}{m_1^2} \frac{m_1 + m_2}{(1 + \sqrt{k})^2} L_2.$$



Альтернативная задача

0. Нюшенька массой m_1 со скоростью v_1 налетает на покоящегося Ёжика массой m_2 . Удар центральный.
- (а) (0,5 балла) Рассчитайте скорости Нюшеньки и Ёжика в момент, когда расстояние между ними минимально.
- (б) (0,5 балла) Рассчитайте максимальную энергию деформации.
1. (1,5 балла) Решите пункт 1 основной задачи для $k = 1$, $k = 0,5$ и $k = 0$.
2. (1,5 балла) Решите пункт 2 основной задачи при $k = 1$, $k = 0,5$ и $k = 0$.
3. (1,5 балла) Решите пункт 3 основной задачи при $k = 1$, $k = 0,5$ и $k = 0$.
4. (0,5 балла) Докажите, что в 4 пункте основной задачи при $k = 1$ энергии может передаться больше чем без вспомогательных малышариков.
5. (1 балл) Решите пункт 5 основной задачи для масс $2m$, m , $2m$ и $k = 0,25$.
6. (2 балла) Решите пункт 6 основной задачи при $k = 1$ и $k = 0$.
7. (1 балл) Решите пункт 7 основной задачи при $k = 0,5$.

Решение альтернативной задачи

0. Расстояние между Ёжиком и Нюшей минимально, когда их скорости равны, т.к. до этого они сближаются, а после — отдаляются.

В этот момент их скорости равны скорости центра масс

$$v_1 = v_2 = V_c = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Энергия деформации максимальна при максимальной деформации, то есть максимальном сближении. Рассчитаем её из закона сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = W + \frac{m_1 V_c^2}{2} + \frac{m_2 V_c^2}{2} \implies W = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

1. Отдельно рассмотрим случай неупругого удара с $k = 0$. В этом случае в СО центра масс вся энергия теряется, и малышарики «слипаются»

$$\begin{cases} m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_1, \\ m_1 \frac{v_0^2}{2} = (m_1 + m_2) \frac{v_1^2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $v_1 = v_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$, и кинетическая энергия Кроша $E_k = \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{v_0^2}{2}$. Введя параметр $\alpha = \frac{m_1}{m_2}$, получим, что надо максимизировать выражение $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}$. Заметим, что $(1+\alpha)^2 \geq 4\alpha$, причем равенство достигается только при $\alpha = 1$. Отсюда $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \leq \frac{1}{4}$ и достигает верхней границы только при $\alpha = 1$, то есть когда $m_1 = m_2$.

Случай $k \neq 0$ разобран в [части А основной задачи](#).

2. Смотрите решение основной задачи при $k \neq 0$ и при $k = 0$.

3. Смотрите решение основной задачи при $k \neq 0$ и при $k = 0$.

4. Смотрите решение [части С основной задачи](#).

5. В этом случае ударов будет всего три и итоговые скорости

$$\begin{cases} v_1 = 0.25v_0; \\ v_2 = 0.5v_0; \\ v_3 = 0.5v_0. \end{cases}$$

Выделившаяся теплота равна

$$Q = 2 \frac{m v_0^2}{2} - \left(\frac{2m v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} + \frac{2m v_3^2}{2} \right) = 0,625 m_0 v_0^2.$$

6. $k = 0$. В этом случае $Q = W$, т.е. происходит абсолютно неупругий удар. Тогда после удара проекции скоростей шайб на ось x равны

$$u = v_{0x} \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Из закона сохранения энергии получаем, что

$$\frac{m_2 u^2}{2} = \mu m_2 g L_2; \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2\mu g L_2}.$$

Тогда, подставляя v_0 из выражения для u , получаем, что выделившееся тепло равно

$$Q = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} - \frac{m_1 v_{0x}^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_{0x}^2}{2} = \frac{m_2}{m_1} (m_1 + m_2) \mu g L_2.$$

k = 1. В этом случае

$$1 - \frac{Q}{W} = 1,$$

значит $Q = 0$, т. е. происходит абсолютно упругий удар и тепло не выделяется.

7. Смотрите решение [части 2 основной задачи](#).