Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

ФИЗИКА

Движение материальной точки по окружности

Задание №6 для 9-х классов

(2020 – 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2021

Составитель: В.И. Плис, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Физика: задание №6 для 9-х классов (2020 – 2021 учебный год), 2021, 24 с.

Срок отправления заданий по физике и математике – 15 апреля 2021 г.

Составитель:
Плис Валерий Иванович
Подписано в печать 26.02.21. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,33.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-55-80 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Кинематика движения точки по окружности

1.1. Линейная и угловая скорости

Важным частным случаем движения материальной точки по заданной траектории является движение по окружности. Рассмотрим движение материальной точки M по окружности радиуса R с центром в точке O.

В произвольный момент времени t положение точки на окружности однозначно определяется углом $\varphi(t)$, который радиус-вектор $\vec{r}\left(t\right)$ точки M образует с направлением начала отсчёта углов (рис. 1). Таким направлением будем считать направление OA. Другим способом задания положения точки на окружности является задание длины $S(t)$ дуги AM. Оба способа задания положения точки на окружности эквивалентны, так как угловая $\varphi(t)$ и дуговая $S(t)$ координаты связаны определением радианной меры угла:

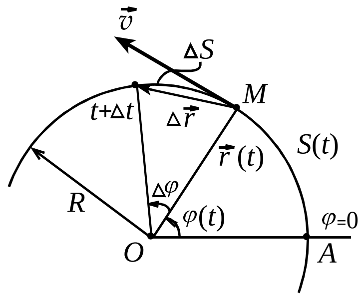

Рис. 1

$$\varphi(t) = \frac{S(t)}{R}.$$

Рассмотрим перемещение $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$ точки M при движении по окружности за малый промежуток времени Δt. Это перемещение стягивается дугой длиной $\Delta S \approx \left|\Delta\vec{r}\right| = \left|\vec{v}\right|\Delta t$, а радиус-вектор точки M поворачивается при этом на угол $\Delta\varphi$. На такой же угол поворачивается и вектор скорости, *так как скорость* $\vec{v}$ *перпендикулярна* $\vec{r}$ – радиус-вектору точки, т. к. направлена по касательной к окружности.

Линейной скоростью $v(t)$ точки называют отношение длины ΔS дуги ко времени Δt перемещения (при $\Delta t \to 0$):

$$v(t) = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Линейная скорость точки есть модуль (величина) вектора скорости. В системе СИ линейную скорость измеряют в м/с (метр в секунду).

Угловой скоростью $\omega\left(t\right)$ радиус-вектора точки называют отношение угла $\Delta\varphi$ поворота радиус-вектора ко времени Δt, за которое этот поворот был совершён (при $\Delta t \to 0$),

$$\omega\left(t\right) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (2)$$

С такой же угловой скоростью вращается и вектор скорости точки, так как линейная скорость $\vec{v} \perp \vec{r}$ – радиус-вектору точки. В системе СИ угловую скорость измеряют в рад/с (радиан в секунду).

Следует отметить, что в учебных пособиях угловую скорость радиус-вектора точки часто называют просто угловой скоростью, а в качестве единицы измерения угловой скорости указывают $1/\text{с}$ (обратную секунду, с$^{-1}$), последнее обусловлено тем, что радиан – величина безразмерная.

Замечая, что $\Delta\varphi(t) = \dfrac{\Delta S(t)}{R}$, приходим с учётом (1) и (2) к соотношению, связывающему линейную $v(t)$ и угловую $\omega(t)$ скорости при произвольном движении материальной точки по окружности радиуса R:

$$v(t) = \omega(t) \cdot R. \tag{3}$$

1.2. Равномерное движение по окружности. Период и частота обращения

Движение по окружности с постоянной по модулю скоростью называют равномерным движением по окружности. Из (3) следует, что при таком движении угловая скорость ω тоже постоянна. В этом случае её называют также циклической частотой.

Для описания равномерного движения по окружности наряду с циклической частотой ω удобно использовать *период обращения* T, определяемый как время, в течение которого совершается один полный оборот, и *частоту* ν *обращения* $\nu = \dfrac{1}{T}$, которая численно равна числу оборотов радиус-вектора точки за единицу времени. В связи с этим говорят, что частота ν измеряется в оборотах в секунду.

Из определения (2) угловой скорости следует, что при равномерном движении по окружности величины ω, T и ν связаны соотношениями

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{4}$$

Размерности ω и ν одинаковы (1/с), так как эти величины различаются лишь числовым множителем 2π.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих применение введённых величин.

Пример 1. Считая, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите радиуса $R = 150$ млн км, найдите линейную скорость v Земли в её годичном движении вокруг Солнца.

Решение. Будем считать, что Земля совершает один полный оборот вокруг Солнца за 365 суток. Тогда период обращения Земли $T = 3{,}15 \cdot 10^7$ с. Далее из (3) и (4) находим

$$v = \frac{2\pi}{T} R = \frac{2 \cdot 3{,}14}{3{,}15 \cdot 10^7} \cdot 150 \cdot 10^9 \approx 30 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Рельсы игрушечной железной дороги образуют кольцо радиуса R. Вагончик M перемещается по рельсам, подталкиваемый стержнем AB, который вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку A, которая лежит внутри кольца почти у самых рельсов (рис. 2). Как зависит от времени линейная скорость $v(t)$ вагончика? Считайте $0 \le \varphi_1 < \pi/2$.

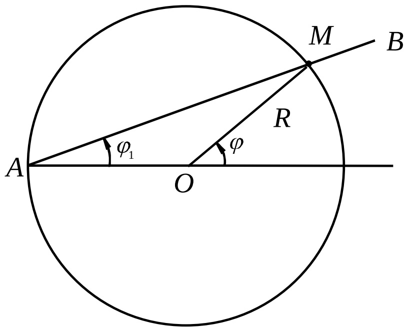

Рис. 2

Решение. Будем считать, что угол φ_1 отсчитывается от направления, задаваемого радиусом AO (точка O – центр окружности, по которой движется вагончик). Стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω_1, следовательно, угол φ_1 растёт со временем по линейному закону $\varphi_1 = \omega_1 t$. Найдём зависимость от времени t угла φ поворота радиус-вектора вагончика. Для этого заметим, что треугольник AOM равнобедренный, тогда $\angle OAM = \varphi_1$. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных, отсюда $\varphi = 2\varphi_1 = 2\omega_1 t$. Заметим, что угол $\varphi(t)$ растёт со временем по линейному закону и что угловая скорость ω вагончика при движении по рельсам постоянна и вдвое больше угловой скорости ω_1, с которой вращается стержень, т. е. $\omega = 2\omega_1$. Следовательно, вагончик движется по окружности равномерно, его линейная скорость от времени не зависит и равна

$$v = \omega \cdot R = 2 \cdot \omega_1 \cdot R.$$

1.3. Ускорение при равномерном движении по окружности

По определению ускорение $\vec{a}$ материальной точки есть векторная величина, равная отношению приращения вектора скорости ко времени, за которое произошло это приращение:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{при } \Delta t \to 0). \qquad (5)$$

Найдём величину и направление ускорения $\vec{a}$ точки при равномерном движении по окружности. Допустим, что при этом движении радиус-вектор точки за время от t до $t+\Delta t$ совершил поворот на угол $\Delta\varphi$ (рис. 3). Из равнобедренного треугольника, иллюстрирующего соотношение $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$, найдём величину приращения вектора скорости, обусловленного только изменением направления (вращением) вектора скорости:

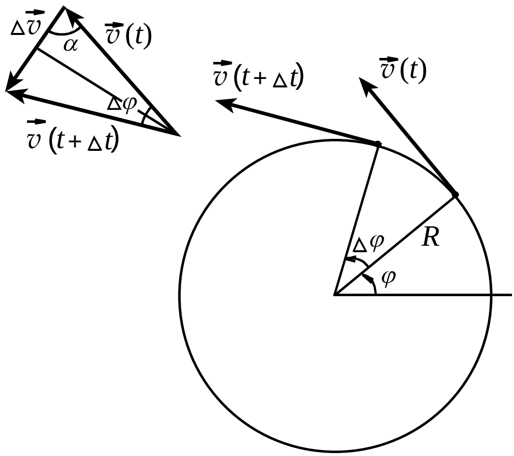

Рис. 3

$$\left|\Delta\vec{v}\right| = 2\cdot v\cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2} = v\cdot\Delta\varphi.$$

Здесь учтено, что при малых аргументах, т. е. при $|x| << 1$, выполняется приближённое равенство $\sin x \approx x$, где x выражен в радианной мере. Тогда из соотношения (5) находим величину a вектора ускорения точки при равномерном движении по окружности:

$$a = \left|\vec{a}(t)\right| = \frac{\left|\Delta\vec{v}\right|}{\Delta t} = \frac{v\cdot\Delta\varphi}{\Delta t} = v\cdot\omega.$$

С учётом (3) и (4) последнее соотношение можно также представить в виде

$$a = \omega\cdot v = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4\cdot\pi^2\cdot\nu^2\cdot R = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R. \qquad (6)$$

Установим направление вектора $\vec{a}$. Из (5) следует, что ускорение $\vec{a}$ и приращение $\Delta\vec{v}$ скорости – сонаправленные векторы. При $\Delta t \to 0$ угол $\Delta\varphi \to 0$ и $\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \to \frac{\pi}{2}$ (рис. 3), следовательно, в любой момент времени векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ взаимно перпендикулярны, при этом вектор ускорения направлен по радиусу к центру окружности и с радиус-вектором $\vec{r}(t)$ точки связан соотношением (рис. 4):

$$\vec{a}(t) = -\omega^2\cdot\vec{r}(t). \qquad (7)$$

Так как вектор ускорения направлен к центру окружности, то такое ускорение называют центростремительным (радиальным, нормальным, т. е. направленным по внутренней нормали к траектории). Подчеркнём, что величина центростремительного ускорения (как видно из вывода) связана с угловой скоростью вращения вектора скорости.

Сформулируем вывод: *движение точки по окружности с постоянной по величине скоростью есть движение ускоренное, при этом вектор ускорения в любой момент времени направлен к центру окружности, а его величина постоянна и определяется из* (6).

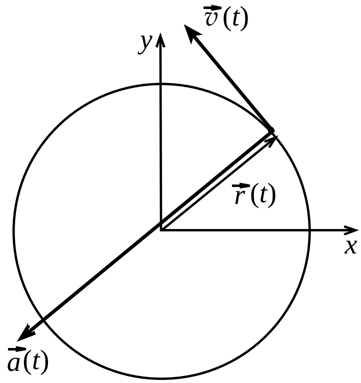

Рис. 4

Пример 3. Найдите скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ точек земной поверхности на широте $\varphi = 60^\circ$, обусловленные участием в суточном вращении Земли. Радиус Земли $R = 6400\,\text{км}$.

Решение. Выберем указанную на рисунке 5 систему отсчёта. Начало отсчёта поместим в центр Земли, плоскость xy совпадает с плоскостью экватора, ось z совпадает с осью вращения планеты. В выбранной системе отсчёта любая точка земной поверхности на широте φ движется равномерно по окружности радиуса $r = R\cos\varphi$ (на рисунке 5 показана пунктиром) с периодом в одни сутки, т. е. $T = 86400\,\text{с}$. Скорость любой точки направлена по касательной к такой окружности, а ускорение к её центру. Величины векторов скорости ускорения найдём из (3) и (6):

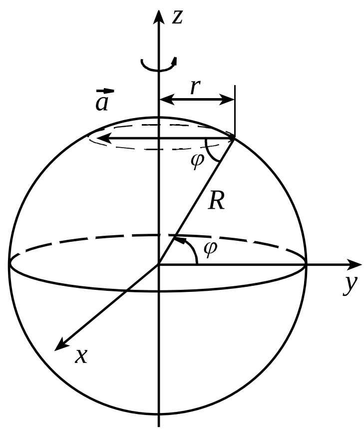

Рис. 5

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T} \approx 230\,\text{м/с}, \quad a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi \approx 0{,}017\,\text{м/с}^2.$$

1.4. Ускорение при неравномерном движении по окружности

При неравномерном движении по окружности изменяется со временем не только направление вектора $\vec{v}$ скорости, но и его модуль v. В этом случае приращение $\Delta\vec{v}$ вектора скорости (рис. 6) может быть представлено в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$, где $\Delta\vec{v}_\tau$ – составляющая приращения скорости, сонаправленная с вектором скорости $\vec{v}$ и обусловленная приращением величины вектора скорости на

$$\Delta v_\tau = \Delta v = \left|\Delta\vec{v}\right|\cos\theta;$$

вторая составляющая $\Delta\vec{v}_n$ – нормальная (нами уже изучена), обусловлена (как и прежде) поворотом вектора скорости. Тогда, естественно, и ускорение можно представить в виде суммы касательной (тангенциальной) и нормальной составляющих:

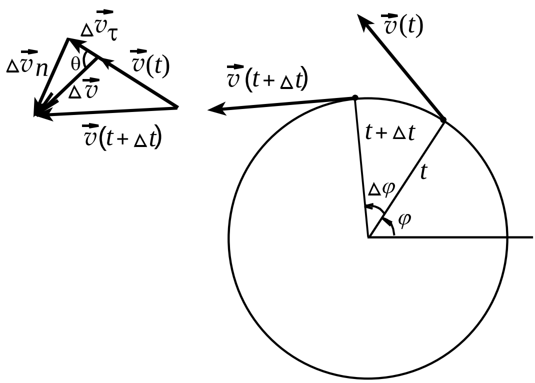

Рис. 6

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (8)$$

Для проекций вектора ускорения на касательное и нормальное направления справедливы соотношения:

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t},\ \ \Delta t \to 0,$$

$$a_n = \omega \cdot v = \frac{v^2}{R}. \quad (9)$$

Отметим, что касательная составляющая a_τ ускорения определяется скоростью изменения модуля вектора скорости, в свою очередь, нормальная (радиальная) составляющая a_n связана с угловой скоростью вращения вектора скорости. По теореме Пифагора

$$a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (10)$$

Отметим, что движение по произвольной криволинейной траектории может быть представлено как последовательность перемещений по элементарным дужкам окружностей. Тогда соотношения (9), (10) *справедливы и при неравномерном движении материальной точки по произвольной криволинейной траектории, при этом величину* R *в формуле* (9) *для* a_n *называют радиусом кривизны траектории в рассматриваемой точке. Иначе говоря, это радиус элементарной дужки окружности, с которой в первом приближении совпадает траектория материальной точки в малой окрестности того места, где эта точка в данный момент находится*.

В заключение отметим, что при неравномерном движении по окружности угловая скорость ω зависит от времени. Скорость изменения ω со временем называют угловым ускорением ε, которое вводится по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ (при } \Delta t \to 0\text{)}. \qquad (11)$$

Если угловое ускорение постоянно, то зависимость угла поворота радиус-вектора от времени (по аналогии с кинематикой равнопеременного движения по прямой) принимает вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}.$$

Из (9) и (11) следует, что тангенциальная составляющая a_τ ускорения материальной точки и угловое ускорение ε связаны соотношением

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = R \cdot \varepsilon. \qquad (12)$$

Пример 4. Материальная точка движется по окружности радиуса R с постоянным угловым ускорением ε. Найдите зависимости от времени величин скорости v и ускорения a. В начальный момент времени точка покоилась.

Решение. Так как угловое ускорение постоянно, то угловая скорость будет увеличиваться со временем по линейному закону

$$\omega(t) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t = \varepsilon \cdot t. \qquad (13)$$

Из (3) с учётом (13) находим

$$v(t) = R \cdot \omega(t) = R \cdot \varepsilon \cdot t.$$

Далее из соотношений (9), (12) и (13) находим проекции вектора ускорения на направления: тангенциальное $a_\tau = R \cdot \varepsilon,$ нормальное $a_n = \omega^2 R = (\varepsilon \cdot t)^2 R$ и величину (модуль) ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \varepsilon \cdot R \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}.$$

Пример 5. Камень брошен со скоростью v_0 под углом α к горизонту. В малой окрестности точки старта найдите радиус R кривизны траектории и угловую скорость ω вращения вектора скорости.

Решение. Для решения задачи воспользуемся соотношениями

$$R = \frac{v^2}{a_n}, \qquad \omega = \frac{a_n}{v} \qquad \text{(см. (9))}.$$

В малой окрестности точки старта (рис. 7) $v = v_0$, нормальное ускорение a_n есть проекция ускорения свободного падения $\vec{g}$ на нормаль к траектории $a_n = g \cdot \cos\alpha.$

Из приведённых соотношений находим

$$R = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}, \quad \omega = \frac{g\cos\alpha}{v_0}.$$

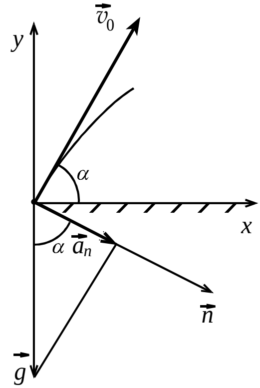

Рис. 7

§2. Динамика движения по окружности

В инерциальной системе отсчёта основным уравнением динамики материальной точки является второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \,. \tag{14}$$

Рассмотрим подробнее *равномерное движение тела по окружности*, лежащей в плоскости *XOY* координатной системы. Из (7) и (14) следует, что при таком движении сумма сил, так же как и ускорение, в любой момент времени направлена к центру окружности. Тогда, переходя в (14) к скалярной форме записи, удобно перейти не к проекциям сил и ускорения на оси *OX*, *OY* инерциальной системы отсчёта, а на подвижное направление – направление внутренней нормали, считая положительным направление к центру окружности. Это приводит к соотношению:

$$ma_n = m\frac{v^2}{R} = F_{1n} + F_{2n} + \dots \,. \tag{15}$$

В рассматриваемом случае движение происходит в плоскости *XOY*. Тогда $a_z = 0$, и из (14) находим, что сумма проекций сил на направление *OZ*, перпендикулярное плоскости окружности, равна нулю:

$$0 = F_{1z} + F_{2z} + \dots \,. \tag{16}$$

Таким образом, для решения задач динамики равномерного движения материальной точки по окружности необходимо:

1) в инерциальной системе отсчёта привести «моментальную фотографию» движущегося тела и указать приложенные к нему силы и сообщаемое этими силами ускорение,

2) составить уравнения (14) – (16) и решить полученную систему.

Отметим, что из (15) следует – *произведение массы тела на нормальное* (*радиальное, центростремительное*) *ускорение равно сумме нормальных проекций всех действующих на тело сил.* Эту сумму, стоящую в правой части (15), часто неудачно называют центростремительной силой. Из (14) видно, что никакой центростремительной силы в природе не существует. В инерциальной системе отсчёта движение по окружности всегда происходит под действием сил, обусловленных известными взаимодействиями. Такими силами являются силы тяжести, трения, реакции опоры и т. д.

Пример 6. Некоторые планеты (Венера, Земля, Нептун) движутся вокруг Солнца по орбитам «близким» к круговым.

Докажите, что для таких планет квадраты периодов обращения относятся как кубы радиусов орбит.

Вычислите массу M Солнца, считая радиус земной орбиты равным $R=150$ млн км.

Решение. Будем считать, что планета обращается вокруг Солнца по круговой орбите радиуса r под действием силы притяжения к Солнцу. Тогда по втором закону Ньютона (рис. 8)

$$m\vec{a}=m\vec{g}(r).$$

Переходя к проекциям силы притяжения и ускорения на нормальное направление, получаем

$$m\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\right)^2 r=G\frac{mM}{r^2}.$$

Отсюда следует

$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM},$$

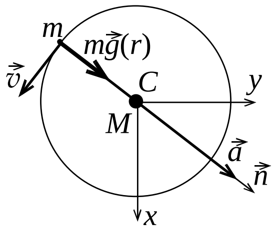

Рис. 8

здесь T – период обращения планеты, r – радиус орбиты, M – масса Солнца. Это отношение одинаково для всех планет,

$$\frac{T_2^2}{T_1^2}=\frac{r_2^3}{r_1^3},$$

т. е. «квадраты периодов обращения относятся как кубы радиусов орбит». Это соотношение является частным случаем третьего закона Кеплера, открытого им в доньютоновские времена (1608 г) в результате обработки полувековых астрономических наблюдений, выполненных датским астрономом Тихо Браге.

Для вычисления массы Солнца считаем, что Земля обращается вокруг Солнца по круговой орбите радиуса $r=1{,}5\cdot10^{11}$ м с периодом $T=3{,}15\cdot10^{7}$ с, тогда

$$M=\frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{r^3}{T^2}=\frac{4\cdot3{,}14^2}{6{,}67\cdot10^{-11}}\cdot\frac{\left(1{,}5\cdot10^{11}\right)^3}{\left(3{,}15\cdot10^{7}\right)^2}\approx2{,}0\cdot10^{30}\text{ кг}.$$

Пример 7. Автомобиль движется в горизонтальной плоскости с постоянной по модулю скоростью по закруглению дороги – дуге окружности радиуса $R = 200$ м. Коэффициент трения скольжения шин по дороге $\mu = 0{,}1$. При какой скорости v автомобиля его не будет «заносить»? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Инерциальная система отсчёта и силы, действующие на автомобиль, показаны на рис. 9. Такими силами являются: сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила сопротивления $\vec{F}_{\text{с}}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{с}} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

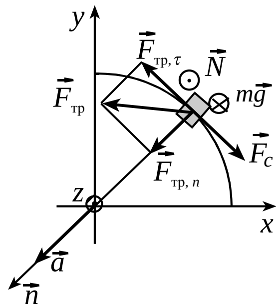

Рис. 9

Так как автомобиль движется по окружности равномерно, $\vec{F}_{\text{тр},\tau} = -\vec{F}_{\text{с}}$. Перейдём к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

$$m\frac{v^2}{R} = F_{\text{тр},n} \tag{17}$$

и на вертикаль

$$0 = N - mg. \tag{18}$$

Величина силы трения ограничена $F_{\text{тр}} \le \mu N$. Тогда из (17), (18) следует, что при движении по окружности в горизонтальной плоскости $m\frac{v^2}{R} \le \mu mg$. Отсюда находим верхнюю оценку (при $F_{\text{с}} = 0$) скорости такого движения: $v \le \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0{,}1 \cdot 10 \cdot 200} \approx 14$ м/с.

Пример 8. Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу в $1/12$ окружности радиуса $R = 100$ м. С какой наибольшей по величине v скоростью автомобиль может выехать на прямолинейный участок дороги, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию $\mu = 0{,}3$? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

Решение. На автомобиль в процессе разгона действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, которая сонаправлена с ускорением $\vec{a}$. Проанализируем изменение вектора ускорения со временем. Для этого удобно обратиться к тангенциальной a_τ и нормальной a_n составляющим ускорения. По условию a_τ постоянна, следовательно, величина скорости автомобиля в конце разгона и тангенциальная составляющая a_τ связаны соотношением

$$v=\sqrt{2a_\tau s}=\sqrt{2a_\tau\cdot\frac{2\pi R}{12}},\text{ отсюда }a_\tau=\frac{3v^2}{\pi R}.$$

Центростремительная составляющая ускорения определяется формулой $a_n=\dfrac{v^2}{R}$ и достигает наибольшего значения в конце участка разгона, где скорость наибольшая. По теореме Пифагора

$$a_{max}=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2+\left(\frac{3v^2}{\pi R}\right)^2}=\frac{v^2}{R}\sqrt{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}.$$

Из второго закона Ньютона следует $N=mg$, а сила трения может сообщить наибольшее по величине ускорение

$$a_{\max}=\frac{F_{\text{тр},\max}}{m}=\frac{\mu N}{m}=\mu g.$$

Тогда наибольшая скорость в конце участка разгона равна

$$v=\sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}}}\approx 15\text{м/с}.$$

Пример 9. Массивный шарик, подвешенный на лёгкой нити, движется равномерно по окружности в горизонтальной плоскости (рис. 10). Расстояние от точки подвеса нити до плоскости, в которой происходит движение, равно H. Найдите период T обращения шарика. Ускорение свободного падения g.

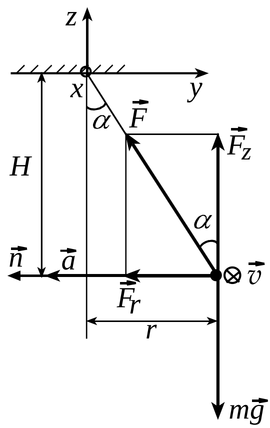

Рис. 10

Решение. Введём обозначения: $L-$ длина нити, $\alpha-$ угол, образуемый нитью с вертикалью, $r=L\sin\alpha-$радиус окружности, по которой движется шарик со скоростью v. Заметим, что $H=L\cos\alpha$. Обратимся к динамике. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{F}$ нити. Эти силы сообщают шарику направленное к центру окружности нормальное ускорение, по величине равное $a=\dfrac{4\pi^2}{T^2}r$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$, переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление и на вертикаль, получаем:

$$m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} r = F \sin\alpha, \tag{19}$$

$$0 = F\cos\alpha - mg. \tag{20}$$

С учётом (20) преобразуем (19) к виду:

$$m\frac{4\pi^2}{T^2} L\sin\alpha = mg \cdot \mathrm{tg}\alpha, \text{ отсюда } T = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Пример 10. Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной L, массой M и жёсткостью k, вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью ω. Найдите радиус R вращающегося кольца.

Решение. Рассмотрим элементарный участок вращающегося кольца длиной Δl. Его масса $\Delta m = \frac{M}{2\pi R}\Delta l$. На выделенный участок действуют силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ (рис. 11), направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю $T_1 = T_2 = T$. По второму закону Ньютона

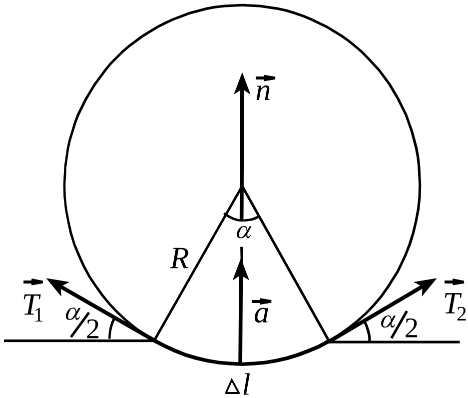

Рис. 11

$$\Delta m \cdot \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2.$$

Рассматриваемый элементарный участок под действием приложенных сил равномерно движется по окружности, следовательно, его ускорение в любой момент времени направлено к центру окружности и по величине равно $\omega^2 R$. Переходя в математической записи второго закона Ньютона к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, получаем $\frac{M\,\Delta l}{2\pi R}\omega^2 R = 2T\sin(\alpha/2)$. Величина T упругой силы (силы натяжения) связана с удлинением $\left(2\pi R - L\right)$ кольца законом Гука $T = k\left(2\pi R - L\right)$. При малых углах $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = \Delta l/(2R)$. С учётом этих соотношений уравнение движения принимает вид

$$\frac{M\,\Delta l}{2\pi R}\omega^2 R = 2k\left(2\pi R - L\right)\frac{\Delta l}{2R}.$$

Отсюда $R=\dfrac{2\pi kL}{4\pi^2k-\omega^2M}$. Из последней формулы следует, что при $\omega=2\pi\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ кольцо должно неограниченно растягиваться, однако этого не случится, так как закон Гука нарушится уже при небольших удлинениях, а с ростом ω кольцо разорвётся.

Пример 11. Определите вес P тела массой m на географической широте φ. Ускорение свободного падения g, Землю считайте однородным шаром радиуса R.

Решение. Напомним, что вес $\vec{P}$ тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. Допустим, что тело лежит на поверхности вращающейся Земли, на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная к центру Земли, и сила реакции $\vec{N}$ (рис. 12). По третьему закону Ньютона $\vec{P}=-\vec{N}$. Поэтому для определения веса тела найдём силу реакции $\vec{N}$. В инерциальной системе отсчёта тело равномерно движется по окружности радиуса $r=R\cdot\cos\varphi$ с периодом одни сутки, т. е. $T=86400$ с, и циклической частотой

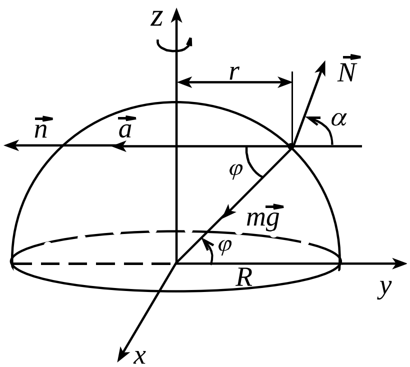

Рис. 12

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=7{,}3\cdot10^{-5}\ \text{с}^{-1}.$$

Ускорение тела по величине равно $a_n=\omega^2\cdot r=\omega^2\cdot R\cdot\cos\varphi$ и направлено к оси вращения Земли. Из этого следует, что равнодействующая сил тяжести и реакции Земли тоже должна быть направлена к оси вращения Земли. Тогда сила реакции образует с перпендикуляром к оси вращения некоторый угол $\alpha\neq\varphi$, иначе сумма сил, приложенных к телу, а следовательно, и ускорение были бы равны нулю. По второму закону Ньютона $m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}$.

Перейдём к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

$$m\omega^2R\cos\varphi=mg\cos\varphi-N\cos\alpha$$

и на направление, перпендикулярное плоскости, в которой лежит окружность, $0=-mg\sin\varphi+N\sin\alpha$. Исключая α из двух последних соотношений, находим вес тела:

$$P=N=\sqrt{(mg)^2-m^2\omega^2R(2g-\omega^2R)\cos^2\varphi}.$$

Пример 12. Маленький деревянный шарик прикреплён с помощью нерастяжимой нити длиной $l = 30$ см ко дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити $r = 20$ см. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения нить отклонится от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Нить с шариком отклонится к оси вращения. Действительно, на шарик будут действовать три силы: сила $m\vec{g}$ тяжести, сила $\vec{T}$ натяжения нити и сила $\vec{F}_\text{А}$ Архимеда (рис. 13). Найдём эту силу. Обозначим объём шарика V, плотность дерева, из которого изготовлен шарик, $\rho_\text{ш}$, плотность воды $\rho_\text{в}$ и рассмотрим движение жидкости до погружения в неё шарика. Любой элементарный объём воды равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления (силы Архимеда) $F_{\text{А},z}$ уравновешивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объёме, горизонтальная составляющая $F_{\text{А},r}$ сообщает этой жидкости центростремительное ускорение. При замещении жидкости шариком эти составляющие не изменяются. Тогда вертикальная составляющая силы Архимеда, действующей на шарик, по величине равна $F_{\text{А},z} = \rho_\text{в} V g$, а направленная к оси вращения составляющая силы Архимеда по величине равна $F_{\text{А},r} = \rho_\text{в} V \omega^2 (r - l\sin\alpha)$. Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиуса $(r - l\sin\alpha)$ в горизонтальной плоскости. Из второго закона Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}$.

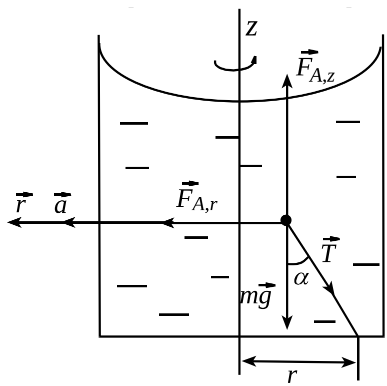

Рис. 13

Переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим:

$$\rho_\text{в} V g - \rho_\text{ш} V g - T\cos\alpha = 0,$$

проектируя силы и ускорения в горизонтальной плоскости на нормальное направление, получаем

$$\rho_\text{ш} V \omega^2 (r - l\sin\alpha) = \rho_\text{в} V \omega^2 (r - l\sin\alpha) - T\sin\alpha.$$

Исключая T из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость $\omega = \sqrt{\dfrac{g\,\text{tg}\alpha}{r - l\sin\alpha}} \approx 10{,}7\ \text{с}^{-1}$.

Пример 13. Определите радиус R горбатого мостика, имеющего вид дуги окружности, если известно, что при скорости $v = 90$ км/ч вес автомобиля в верхней точке мостика вдвое меньше веса на горизонтальной дороге. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. При движении по горизонтальной дороге вес тела равен силе тяжести.

Обратимся к движению автомобиля по мостику. Инерциальная система отсчёта и силы, действующие на автомобиль и на мостик, показаны на рис. 14.

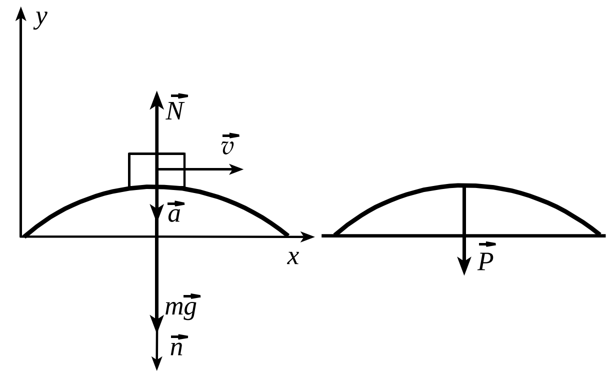

Рис. 14

Для автомобиля в верхней точке мостика по второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Перейдём в этом уравнении к проекциям сил и ускорения на нормальное направление: $mv^2/R = mg - N$. По условию $P = mg/2$, а по третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{P},$ тогда $N = mg/2$. Из полученных соотношений находим: $mv^2/R = mg/2,$ отсюда

$$R = \frac{2 \cdot v^2}{g} = \frac{2 \cdot 25^2}{10} = 125 \text{м}.$$

Рассмотрим два примера, в которых тела движутся по окружности неравномерно, при этом тангенциальное ускорение тоже изменяется. В этом случае наряду с законом Ньютона полезно привлекать закон изменения (или сохранения) механической энергии.

Пример 14. По длинной проволочной винтовой линии радиуса R с шагом H, ось которой вертикальна, скользит бусинка. Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке равен $\mu(\mu < H/(2\pi R))$. Найдите установившуюся скорость v скольжения бусинки. Ускорение свободного падения g.

Решение. На бусинку действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, при этом $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, здесь $N_1 -$ горизонтальная составляющая, а N_2 лежит в одной плоскости с $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 15).

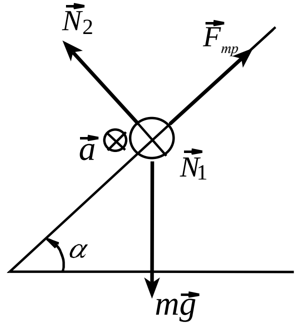

Рис. 15

Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости составляющая N_1, сообщающая бусинке центростремительное ускорение, а с ней и сила трения будут расти по величине, так что естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью v. Для определения этой скорости перейдём в инерциальную систему отсчёта (ИСО), движущуюся по вертикали вниз со скоростью $v\sin\alpha$, $\alpha -$ угол наклона вектора скорости к горизонту, $\operatorname{tg}\alpha = H/(2\pi R)$. В выбранной ИСО бусинка равномерно движется по окружности радиуса R со скоростью $v\cos\alpha$, при этом ускорение бусинки направлено по нормали к оси винтовой линии и по величине равно $(v\cos\alpha)^2/R$. Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, находим $m\dfrac{(v\cos\alpha)^2}{R} = N_1$. В вертикальной плоскости $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}$, переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, находим $F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha$, $N_2 = mg\cos\alpha$.

Из этих соотношений с учётом $F_{\text{тр}} = \mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ получаем:

$$v = (gR/\mu)^{1/2}\left[(\operatorname{tg}^2\alpha - \mu^2)(\operatorname{tg}^2\alpha + 1)\right]^{1/4}.$$

Пример 15. Гладкий жёлоб состоит из горизонтальной части AB и дуги окружности BD радиуса $R = 5$ м (рис. 16). Шайба скользит по горизонтальной части со скоростью $v_0 = 10$ м / с. Определите модуль a ускорения шайбы в точке C и угол β, который вектор $\vec{a}$ ускорения шайбы в этот момент составляет с нормалью к траектории в точке C. Радиус OC образует с вертикалью угол $\alpha = 60^{\circ}$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

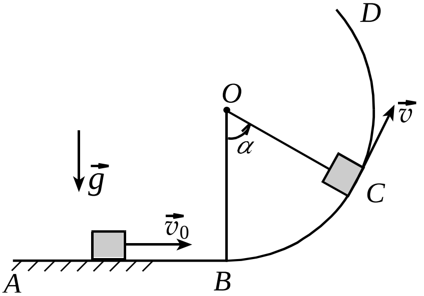

Рис. 16

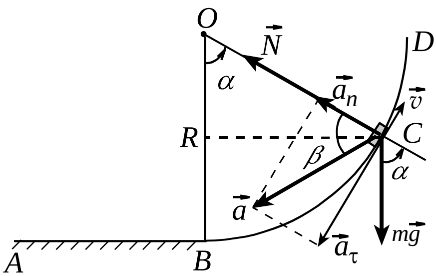

Рис. 17

Решение. Для нахождения ускорения a шайбы в точке C найдём тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие ускорения в этой точке. На тело, движущееся в вертикальной плоскости по дуге BD (рис. 17), в любой точке действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры $\vec{N}$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Перейдём в этом уравнении к проекциям сил и ускорения на тангенциальное направление (на направление вектора скорости)

$$ma_\tau = -mg\sin\alpha.$$

Отсюда $a_\tau = -g\sin\alpha = -10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx -8,7$ м/с^2.

Для определения $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ найдём величину v скорости шайбы в точке C. Обратимся к энергетическим соображениям. При движении по горизонтальной части жёлоба скорость тела не изменяется вследствие отсутствия трения, а на вертикальной части жёлоба (как и на горизонтальной) сила нормальной реакции не совершает работу, т. к. эта сила перпендикулярна скорости. Следовательно, механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) сохраняется. Потенциальную энергию шайбы на горизонтальной части жёлоба будем считать равной нулю. Тогда по закону сохранения механической энергии

$$m\frac{v_0^2}{2} = m\frac{v^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha),$$

отсюда

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} - 2g(1-\cos\alpha) = \frac{10^2}{5} - 2\cdot 10\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = 10\,\text{м/с}^2.$$

Величину a ускорения шайбы в точке C найдём по теореме Пифагора: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \approx 13{,}2\,\text{м/с}^2$.

В точке C вектор ускорения $\vec{a}$ образует с нормалью угол β такой, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{|a_\tau|}{a_n} \approx 0{,}87$, отсюда $\beta \approx 41^\circ$.

Пример 16. На горизонтальной поверхности лежит полушар массой $M = 100\,\text{г}$. Из его верхней точки без трения с нулевой начальной скоростью скользит шайба массой $m = 25\,\text{г}$. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается при $\alpha = 10^\circ$. Найдите коэффициент μ трения скольжения полушара по поверхности. Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Решение. Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел. На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}_1$ (рис. 18). Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1.$$

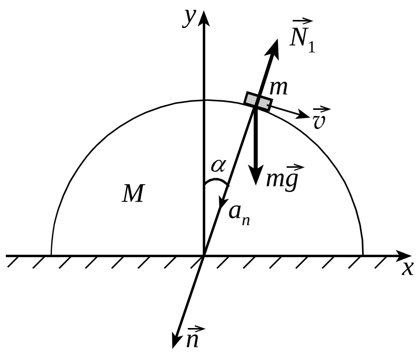

Рис. 18

Переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, в момент начала движения полушара получаем $m\frac{v^2}{R} = mg\cos\alpha - N_1$.

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\alpha).$$

Из этих соотношений находим величину действующей на шайбу в этот момент силы нормальной реакции:

$$N_1 = mg(3\cos\alpha - 2).$$

На полушар действуют силы: тяжести $M\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}_2$, трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и вес $\vec{P}$ шайбы (рис. 19).

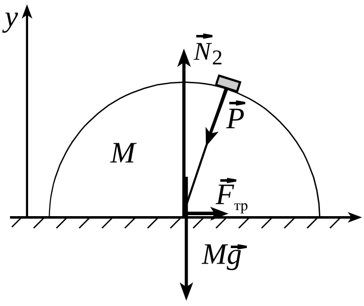

Рис. 19

По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}_1$. В момент начала движения полушара из второго закона Ньютона

$$M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{P} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения $\vec{a}_1 = \vec{0}$ полушара на вертикальное направление, с учётом равенства $P = N_1$ получаем:

$$N_2 = Mg + P\cos\alpha = Mg + mg\left(3\cos\alpha - 2\right)\cos\alpha.$$

Переход к проекциям сил и ускорения полушара на горизонтальное направление позволяет определить величину силы трения:

$$F_{\text{тр}} = P\sin\alpha = mg(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha.$$

С ростом α сила $F_{\text{тр}}$ увеличивается, сила N_2 уменьшается. В момент начала движения полушара величина силы трения связана с величиной силы нормальной реакции соотношением $F_{\text{тр}} = \mu \cdot N_2$. Отсюда

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N_2} = \frac{m(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha}{M + m(3\cos\alpha - 2)\cos\alpha} \approx 0,033.$$

Контрольные вопросы

Справочные данные:

Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$, радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = G\dfrac{M}{R^2} \approx 10\ \text{м}/\text{с}^2$, объём шара радиуса R равен $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

1. Вычислите и сравните угловую скорость вращения часовой стрелки часов и угловую скорость Земли в ее суточном вращении.

2. Вычислите в *гелиоцентрической* системе отсчета скорость и ускорение Земли, обусловленное обращением планеты вокруг Солнца. Радиус земной орбиты считайте равным $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ м.

3. Частица движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением. Начальная скорость частицы равна нулю.

Найдите угол α между векторами скорости и ускорения этой частицы в тот момент, когда радиус-вектор частицы повернется на угол $2 \cdot \pi$ радиан.

4. Камень, брошенный под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, упал на землю на расстоянии $S = 20$ м от точки старта.

Найдите наибольший $R_{\max}$ и наименьший $R_{\min}$ радиусы кривизны траектории камня. Точки старта и финиша лежат на одной горизонтальной плоскости.

5. Небольшое тело массой $m = 0,1$ кг, подвешенное на легком резиновом шнуре, движется по окружности в горизонтальной плоскости, совершая полный оборот за время $T = 1,25$ с. Шнур составляет с вертикалью угол $\alpha = 60°$. Коэффициент упругости шнура $k = 10$ Н/м.

Вычислите длину l_0 нерастянутого шнура.

6. Спутник с работающим двигателем движется по круговой орбите радиуса R со скоростью v, которая вдвое больше скорости движения по этой же орбите под действием только силы тяжести.

Найдите величину F силы тяги и укажите направление этой силы. Масса спутника m. Изменение массы спутника считайте пренебрежимо малым.

7. Поезд движется в горизонтальной плоскости по дуге окружности радиуса $R = 400$ м со скоростью $v = 20$ м/с.

На какую величину Δh внешний рельс должен быть выше внутреннего, чтобы боковое давление на рельсы было равно нулю? Расстояние между рельсами $d = 1{,}52$ м.

8. В **Примере № 11** настоящего Задания вычислите отношение $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\varphi}$.

На сколько процентов отличаются $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\varphi$ для точек земной поверхности, не лежащих на полюсе и на экваторе?

Указание: при $x \ll 1$ $\dfrac{1}{1-x} \approx 1 + x$.

9. Подвешенному на нити шарику сообщили начальную скорость в горизонтальном направлении. В тот момент, когда нить отклонилась на угол $\alpha_1 = 30°$ от вертикали, проекция вектора ускорения шарика на вертикаль нулевая.

Какой угол $\alpha_{\max}$ с вертикалью будет составлять нить в момент остановки шарика?

Задачи

1. При плоском движении частицы в некоторый момент времени, когда величина скорости равна $v = 10^6$ м/с, вектор ускорения по величине равен $a = 10^4$ м/с^2 и образует угол $\alpha = 30°$ с вектором скорости.

Вычислите приращение Δv модуля скорости частицы за последующие $\Delta t = 0{,}02$ с.

С какой угловой скоростью ω вращается вектор скорости?

На какой угол $\Delta\varphi$ повернется вектор скорости частицы за последующие $\Delta t = 0{,}02$ с?

Каков радиус R кривизны траектории в малой окрестности рассматриваемой точки?

2. Трамвай движется с постоянным тангенциальным ускорением по круговому повороту, который является четвертью окружности радиуса R. В начале поворота величина скорости трамвая равна v_0. Тангенциальная составляющая ускорения вдвое больше начальной нормальной.

Найдите отношение нормальной и тангенциальной составляющих ускорения при завершении поворота.

Если на горизонтальном полу трамвая стоит коробка, то при каких значения коэффициента трения скольжения она не будет скользить по полу?

3. В нижней точке жесткого проволочного шероховатого кольца радиуса $R = 2$ м, находящегося в вертикальной плоскости, покоится бусинка. Кольцо очень медленно раскручивают вокруг вертикальной оси, касающейся кольца.

Найдите коэффициент μ трения скольжения бусинки по кольцу, если при угловой скорости $\omega = 3{,}2\ \text{с}^{-1}$ бусинка поднялась на высоту, равную половине радиуса. При каких значениях величины $\dfrac{\omega^2 R}{g}$ задача не имеет решения?

4. На прошедшем в августе 2007 г. в Жуковском международном авиационно-космическом салоне впервые в мире 5 тяжёлых истребителей Су–27 из пилотажной группы «Русские витязи» и четыре фронтовых истребителя МиГ–29 из пилотажной группы «Стрижи», пролетая мимо зрителей со скоростью $v_1 = 100$ м/с в плотном строю «ромб» (рис. 20), приблизительно за $\tau = 18$ с выполнили «бочку» (вращение строем на $360°$ вокруг горизонтальной оси; см. видео в интернете). Крайние истребители Су–27 удалены от истребителя в центре строя на $r = 30$ м.

Рис. 20

На какую величину Δv скорость крайних истребителей Су–27 должна превышать скорость истребителя в центре строя во время выполнения фигуры? Во сколько раз наибольшая сила давления на сиденье лётчика крайнего истребителя больше силы тяжести лётчика во время выполнения фигуры?

5. В момент противостояния Солнце, Земля и Марс находятся на одной прямой (Марс виден с Земли в направлении противоположном направлению на Солнце). Марсианский год продолжается дольше земного в $k = 1{,}88$ раза. Радиус земной орбиты $R_E = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ м.

Считая, что планеты обращаются вокруг Солнца по концентрическим окружностям, лежащим в одной плоскости, найдите минимальное расстояние r между Марсом и Землей, а также промежуток времени τ между двумя последовательными противостояниями.

6. При какой продолжительности T суток на Земле нить, на которой подвешен груз на широте $\varphi = 30°$, образует угол $\beta = 30°$ с осью вращения Земли?

На сколько процентов линейная скорость точек на экваторе будет в рассматриваемом случае меньше скорости приповерхностного спутника планеты?

7. Допустим, что на планете Фантазия реализован следующий эксперимент. Груз на нити длиной $l = 3\,\text{м}$ отклоняют на некоторый угол α и отпускают. Далее в процессе колебаний максимальная сила натяжения отличается от минимальной в $k = 4$ раза. Такой же угол α с вертикалью образует эта же нить маятника, если груз обращается с периодом $\tilde{T} = 4\,\text{с}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса.

Определите ускорение свободного падения на планете. Считайте планету однородным шаром.

8. Заполненный водой цилиндрический сосуд радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси. На дне сосуда лежит однородный шар радиуса $r < 0{,}5 \cdot R$ и плотности ρ. Найдите величину и направление силы, с которой шар действует на боковую стенку цилиндра. Ось цилиндра вертикальна. Плотность воды $\rho_{\text{В}}$.

9. Бусинка массы m надета на гладкое проволочное кольцо радиуса R, плоскость которого наклонена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Кольцо жесткое и закреплено неподвижно. В некоторый момент бусинка начинает движение из верхней точки кольца с пренебрежимо малой скоростью.

Найдите ускорение a бусинки в нижней точке кольца (укажите величину и направление).

С какой по величине силой N действует кольцо на бусинку в момент прохождения нижней точки кольца.

Какой угол β образует сила N с вертикалью?

10. На горизонтальной поверхности лежит гладкий полушар массой $M = 200\,\text{г}$. Из его верхней точки в противоположных направлениях с пренебрежимо малыми начальными скоростями скользят две шайбы с массами $m_1 = 20\,\text{г}$ и $m_2 = 15\,\text{г}$. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается в тот момент, когда одна из шайб пройдет $\delta = 1/36$ длины окружности большого круга.

Вычислите коэффициент μ трения скольжения полушара по поверхности. Шайбы приходят в движение одновременно.