Пифия

Введение

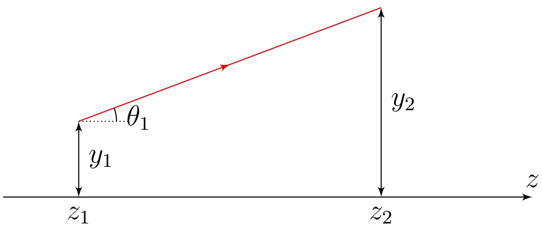
В Пятом туре Второго Сезона Кубка ЛФИ вам будет предложено исследовать различные оптические системы при помощи матриц 2×2. Видео, где рассказывается про то, как работать с такими матрицами доступно по ссылке. Если у вас при решении будут возникать вопросы, связанные с тем, как правильно работать с матрицами, то вы можете их задавать Максиму.

Важно! Вопросы могут быть связаны только с тем, как правильно работать с матрицами. Вопросы, связанные с условием задачи нужно задавать в личку Кубку ЛФИ.

Общая теория

Будем называть оптическую систему *центрированной*, если центры кривизны всех сферических преломляющих и отражающих поверхностей расположены на одной прямой, которая называется *главной оптической осью*. В случае, если все распространяющиеся в ней пучки лучей находятся на небольшом расстоянии от оптической оси и образуют с ней малый угол, мы будем говорить, что корректно *параксиальное приближение*.

Замечание. В данной задаче, если не оговорено иное, мы будем считать, что параксиальное приближение корректно, а все оптические системы центрированы.



Введем декартову систему координат: ось Oz, которая совпадает с главной оптической осью; оси Ox и Oy перпендикулярные главной оптической оси, при этом ось Oy будет лежать в плоскости рисунка. Рассмотрим пучок лучей, распространяющийся в плоскости рисунка. В любой точке с известной координатой z луч можно однозначно определить, если известно его расстояние до оптической оси и угол θ, который образует этот луч с данной осью. Так, на рисунке представлен луч, который проходит через точку, находящуюся на расстоянии y_1 от оптической оси, и образующий угол θ_1 с этой осью (см. рис.). Угол θ мы будем измерять в радианах и считать *положительным*, если он *соответствует вращению против часовой стрелки* от положительного направления оси z к направлению, в котором свет распространяется вдоль луча.

Несмотря на то, что расстояние y и угол θ являются интуитивно понятными параметрами для того, чтобы задать положение и направление распространения луча, в литературе чаще используется два других параметра: расстояние y и *оптический направляющий косинус* $v = n \cdot \theta$, где n – показатель преломления среды в данной точке. В дальнейшем мы будем характеризовать луч именно этой парой чисел и будем говорить, что он однозначно характеризуется следующим вектором

$$\begin{pmatrix} y \\ n\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}.$$

При распространении света в оптической системе с пучком может происходить три процесса: *процесс распространения*, *преломления света на границе раздела двух сред*, а также *отражение света*. Каждому процессу мы будем ставить в соответствие $ABCD$ матрицу, на которую будем умножать вектор, задающий луч в данной плоскости $z = \text{const}$, в результате чего мы будем получать новый вектор, который отвечает новому расположению луча. В качестве примера рассмотрим процесс распространения луча в однородной среде.

Матрица распространения T

На рисунке выше показан процесс распространения луча в однородной среде с показателем преломления n. Рассмотрим две плоскости с координатами z_1 и z_2. Ясно, что угол между лучом и главной оптической осью в обеих плоскостях одинаковый, т. е.

$$\theta_2 = \theta_1 \quad \iff \quad v_2 = v_1,$$

где $v_1 = n\theta_1$, а $v_2 = n\theta_2$.

С другой стороны, координату y_2 легко выразить через y_1 и θ_1. Действительно:

$$y_2 = y_1 + \operatorname{tg}\theta_1(z_2 - z_1) \approx y_1 + \theta_1(z_2 - z_1) = y_1 + v_1\frac{z_2 - z_1}{n}.$$

Из последних двух уравнений мы получаем, что уравнение распространения луча в однородной среде можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{z_2 - z_1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $ABCD$ матрица распространения имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{z_2 - z_1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если луч участвует в нескольких процессах подряд, то с ним необходимо проделать несколько преобразований, равносильных перемножению матриц. Действительно, если луч находился на расстоянии y_1 от оптической оси и распространялся на расстояние l_1 вдоль нее, то это равносильно умножению вектора с компонентами y_1 и v_1 на соответствующую матрицу распространения T_1

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{l_1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Если луч и дальше распространялся в однородной среде на дополнительное расстояние l_2, то это равносильно умножению вектора с компонентами y_2 и v_2 на матрицу T_2

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{l_2}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{l_2}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{l_1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = T_2\, T_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Т. е. можно утверждать, что итоговая матрица преобразования T равна произведению двух матриц распространения, записанных в **обратном** порядке. Здесь мы использовали тот факт, что при перемножении матриц и векторов выполняется свойство ассоциативности. Т. е. верно следующее утверждение:

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

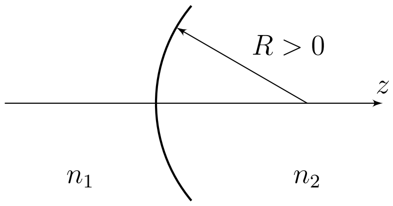
В качестве упражнения убедитесь, что матрица T имеет вид

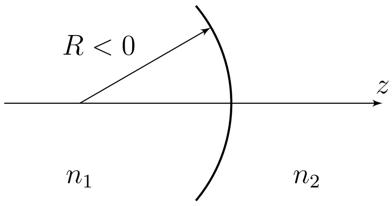
$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{l_1 + l_2}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в данном случае верно соотношение $T_1 T_2 = T_2 T_1$. Другими словами матрицы коммутируют, что верно не всегда, в том числе и в тех примерах, которые будут рассмотрены в дальнейшем. Поэтому порядок записи матриц очень важен! И в нашем случае матрицы записывают в **обратном порядке**!

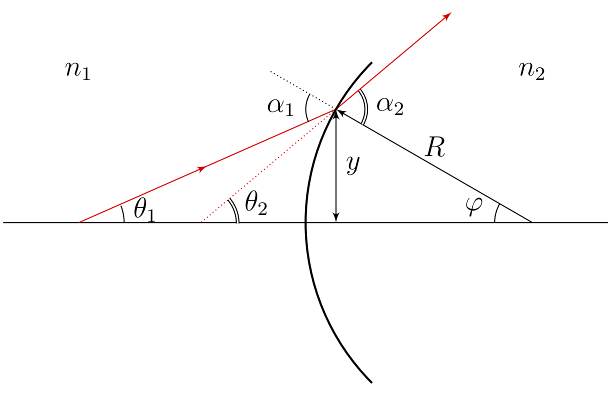
Матрица преломления P

Рассмотрим сферическую границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2. Будем считать, что радиус кривизны поверхности положительный, если угол между осью Oz и радиус-вектором соединяющим центр кривизны и сферическую поверхность тупой. Если же данный угол острый, то такой радиус кривизны считаем отрицательным (см. рис.).





Рассмотрим преломление света на сферической поверхности и найдем матрицу преломления P. Пусть луч переходит из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 (см. рис.). Ясно, что при переходе границы раздела двух сред координата y не изменяется, т. е.



$$y_2 = y_1.$$

Углы падения и преломления обозначим
α_1 и α_2 соответственно. Углы между оптической осью и падающим и преломленным лучами обозначим как θ_1 и θ_2. Из рисунка видно, что $\alpha_1 = \theta_1 + \varphi$, а $\alpha_2 = \theta_2 + \varphi$, где φ – угол между оптической осью и радиусом проведенным в точку, где преломляется луч. Запишем закон Снеллиуса $n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2$ и воспользуемся тем фактом, что $\varphi = y/R$, тогда

$$n_1\left(\theta_1 + \frac{y}{R}\right) = n_2\left(\theta_2 + \frac{y}{R}\right).$$

Переписывая последнее уравнение через направляющие косинусы v_1 и v_2 получаем, что

$$v_2 = \frac{n_1 - n_2}{R} y_1 + v_1,$$

откуда находим

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

В левом нижнем углу матрицы мы вынесли знак и выделили дробь, которая называется оптической силой поверхности P_1

$$P_1 = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Таким образом получаем, что матрица преломления имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1. Покажите, что у тонкой двояковыпуклой линзы с радиусами кривизны $R_1 > 0$ и $R_2 < 0$ и показателем преломления n, помещенной в среду с показателем преломления n_0, матрица преобразования оптических лучей имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(P_1 + P_2) & 1 \end{pmatrix},$$

где $P_1 + P_2 = (n - n_0)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) = \dfrac{1}{F}$.

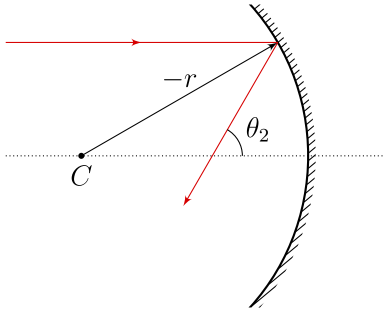
Упражнение 2. Найдите оптическую силу тонкой двояковыпуклой линзы с радиусами кривизны $R_1 > 0$ и $R_2 < 0$ и с показателем преломления n, если она помещена между двумя средами с показателями преломления n_1 и n_2.

Упражнение 3. Докажите, что оптические силы двух линз, расположенных вплотную друг к другу, складываются.

Матрица отражения R

Найдем матрицу отражения для сферического зеркала. Луч, идущий параллельно оси зеркала (см. рис.), задается вектором

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$



После отражения он проходит через фокус сферического зеркала, расположенный на расстоянии $r/2$ от его центра кривизны. Сразу после отражения высота луча не изменится, а угол наклона луча будет равен

$$\alpha = -\frac{y}{-r/2}.$$

Здесь мы учли, что угол и радиус кривизны отрицательны, поэтому отраженный луч характеризуется вектором

$$\begin{pmatrix} y \\ \dfrac{2}{r}y \end{pmatrix}.$$

Падающий и отражённый лучи связаны матрицей отражения R

$$\begin{pmatrix} y \\ \dfrac{2}{r}y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay \\ Cy \end{pmatrix}.$$

Из равенства координат векторов следует, что

$$A = 1; \quad C = \frac{2}{r}.$$

Теперь обратим направление только что рассмотренного луча. Тогда луч до отражения будет задаваться вектором

$$\begin{pmatrix} y \\ -\dfrac{2}{r}y \end{pmatrix}.$$

После отражения он задаётся вектором

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Падающий и отражённый лучи всё ещё связаны матрицей отражения R

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} y \\ -\dfrac{2}{r}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ -\dfrac{2}{r}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay - B\dfrac{2}{r}y \\ Cy - D\dfrac{2}{r}y \end{pmatrix}.$$

Приравняв координаты векторов, получим

$$B = 0; \quad C - D\frac{2}{r} = 0.$$

Откуда (с учётом выражения для C) находим

$$D = 1.$$

Все элементы матрицы отражения найдены

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. При рассмотрении отражений обычно делается одно из дополнительных предположений:

- положительное направление оси z принимается по ходу луча;
- при изменении направления луча направление оси z остаётся тем же, а показатель преломления среды изменяется на $-n$.

Задание

Часть 1

Пусть есть некоторая оптическая система, которая описывается некоторой $ABCD$ матрицей, преобразующей луч выходящий из плоскости с координатой z_1 в луч входящий в плоскость z_2. Параметры оптической системы были так подобраны, чтобы один из элементов матрицы стал равен нулю. Каким физическим свойством обладает система, если

1. $A = 0$;
2. $B = 0$;
3. $C = 0$;
4. $D = 0$;

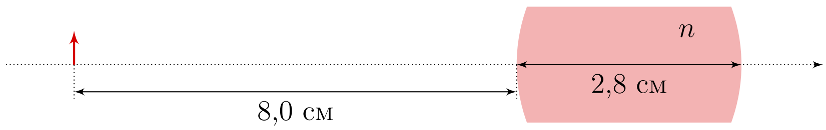
Замечание. Каждый из пунктов оценивается в ноль баллов, но вы можете эти пункты прислать и они будут проверены по схеме `CPI`, чтобы вы смогли сделать правильные выводы из своих рассуждений.

Часть 2

5. *(0,5 балла)* Окуляр телескопа Ежика состоит из двух тонких положительных линз с оптическими силами P_1 и P_2, изготовленными из одного материала и расположенными на некотором расстоянии друг от друга. При каком расстоянии между линзами зависимость показателя преломления стекла от длины волны не будет влиять на оптическую силу окуляра? Считайте, что длина волны излучения лежит в небольшом спектральном интервале в окрестности длины волны λ_0.

Часть 3

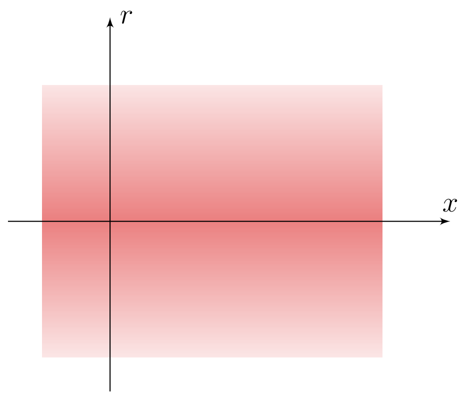
6. *(0,5 балла)* Оба торца стеклянного цилиндрического стержня длины 2,8 см имеют сферическую форму радиусом 2,4 см. Показатель преломления стекла 1,6. Предмет в виде прямой линии длиной 0,5 см помещен на оси стержня в вакууме на расстоянии 8,0 см от левого торца стержня. Найдите положение и размер изображения предмета.



Часть 4

Рассмотрим пластинку с показателем преломления, зависящим только от расстояния до оптической оси по закону

$$n(r) = n_0 - n_1\frac{r^2}{2}.$$

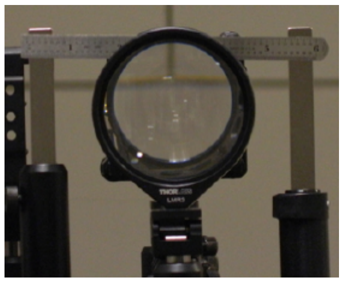


Ширина этой пластины L, а толщина a. Константы n_0 и n_1 считайте известными, также известно, что $n_1 a^2 \ll n_0$.

7. *(1 балл)* Найдите $ABCD$-матрицу пластинки.

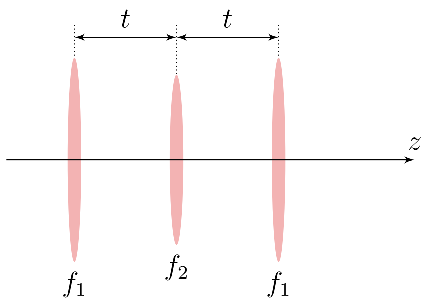
Часть 5

Известно, что при определённых параметрах системы линз объекты, находящиеся на периферии пространства между линзами, становятся невидимыми, а изображения объектов, находящихся снаружи оптической системы видны без искажения, т. е. так, как если бы оптической системы не было (см. рис.).

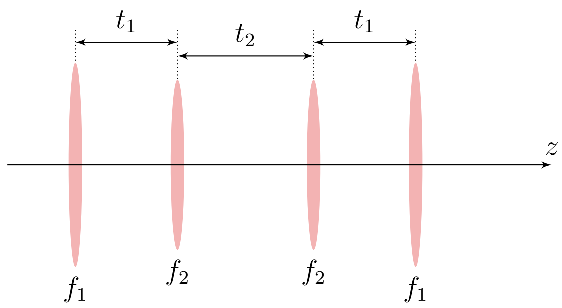


Замечание. Во всех пунктах этой задачи факт существования области невидимости **доказывать не надо**.

8. *(1 балл)* Покажите, что система из трех тонких линз с фокусными расстояниями f_1, f_2 и f_1 соответственно (см. рис.) удовлетворяет выше описанному условию только в том случае, если $f_1 \gg t$, где t — расстояние между линзами.



9. *(3 балла)* Найдите соотношение между фокусными расстояниями f_1 и f_2 для системы из четырех тонких линз с фокусными расстояниями f_1, f_2, f_2 и f_1 соответственно (см. рис.), при котором будет наблюдаться данное явление. Определите при каком отношении f_1/f_2 длина оптической системы достигает экстремума. Чему при этом равно отношение t_2/f_2? Считайте, что расстояние между первой и второй линзами равно расстоянию между третьей и четвертой линзами.

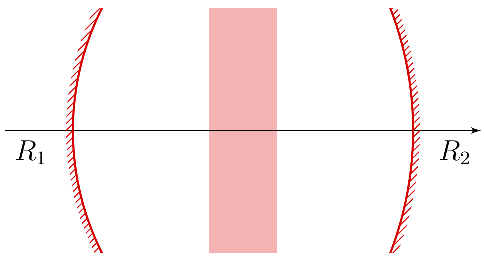


Замечание. Во всех пунктах расстояние между линзами и их фокусные расстояния неизвестны. Хроматической аберрацией можно пренебречь.

Часть 6

На рисунке изображён резонатор, представляющий собой 2 сферических зеркала радиусов R_1 и R_2 на расстоянии L друг от друга, а также некоторый оптический элемент в середине резонатора с матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$



При этом известно, что

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1.$$

Устойчивость системы

10. *(1 балл)* Найдите матрицу передачи луча для одного «цикла» луча в резонаторе. **Примечание.** Ответ можно оставить в виде произведения матриц.

Обозначим полученную в 1 пункте матрицу, как

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

11. *(2 балла)* Найдите условия на A, B, C и D, которые соответствуют траекториям луча, не покидающего резонатор через большое число отражений. Ответ выразить через A, B, C, D.

    Примечание. `Correct` можно получить и при неправильном пункте 10.

Хаотическое поведение света

В данном пункте считайте

$$\begin{cases} R_1 = -1 \text{ м}; \\ R_2 = 2 \text{ м}; \\ L = 1{,}001 \text{ м}. \end{cases}$$

Матрица оптического элемента

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. *(1 балл)* Для лучей

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

    таких, что $|y_1 - y_2| \ll |y_1|$, найдите скорость расхождения. Оцените характер зависимости (линейный, экспоненциальный, полиномиальный и т. п.). **Примечание.** Скоростью расхождения называется функция расстояния между лучами в зависимости от числа прохождений резонатора. Размерность — м/число полётов резонатора.

Указание. Возможно, где-то в задаче будет удобно найти некоторые решения в следующем виде

$$x_k = x_{\max} \sin\left(k\omega + \varphi_0\right);$$

$$x_k = x_{\max} \operatorname{sh}\left(k\omega + \varphi_0\right).$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус.

Решение

1. Рассмотрим случай $A = 0$. Соответствующее уравнение принимает вид

$$y_2 = Bv_1.$$

Это означает, что лучи, попадающие в оптическую систему под одним и тем же углом, пройдут через одну и ту же точку с координатой y_2 в выходной плоскости, откуда следует, что выходная плоскость является фокальной.

2. Рассмотрим случай $B = 0$. Первая строка системы уравнений будет иметь вид

$$y_2 = Ay_1.$$

Это означает, что все лучи, выходящие из точки O с координатой y_1 пройдут через одну и ту же точку в выходной плоскости с координатой y_2. Другими словами, входная и выходная плоскости оптической системы являются сопряжёнными (т. е. одна плоскость содержит источник, а другая его изображение). Коэффициент A в этом случае является коэффициентом линейного увеличения. Если коэффициент больше нуля, то изображение прямое, если меньше нуля, то перевёрнутое.

3. Рассмотрим случай $C = 0$. В этом случае мы получаем, что

$$v_2 = Dv_1.$$

Это означает, что параллельный пучок при попадании в оптическую систему остаётся параллельным. Такую систему линз принято называть *афокальной* или *телескопической*. Коэффициент D называют угловым увеличением.

4. Рассмотрим случай $D = 0$. Рассмотрим соответствующую строчку системы уравнений в которой есть ноль

$$v_2 = Cy_1.$$

Из этого уравнения следует, что все лучи, выходящие из одной и той же точки y_1 выйдут из оптической системы под одним и тем же углом $v_2 = Cy_1$ независимо от того, под каким углом эти лучи в неё попадали. То есть входная плоскость оптической системы является фокальной плоскостью.

5. Посчитаем матрицу трансформации M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P_1L & L \\ -(P_1 + P_2 - P_1P_2L) & 1 - P_2L \end{pmatrix}.$$

Входящий луч $\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$, преобразуется в

$$\begin{pmatrix} (1 - P_1L)h \\ -(P_1 + P_2 - P_1P_2L)h \end{pmatrix}.$$

При этом расстояние от фокуса до главной оптической плоскости будет определяться углом

$$f = \frac{1}{P_1 + P_2 - P_1 P_2 L} = -\frac{1}{C}.$$

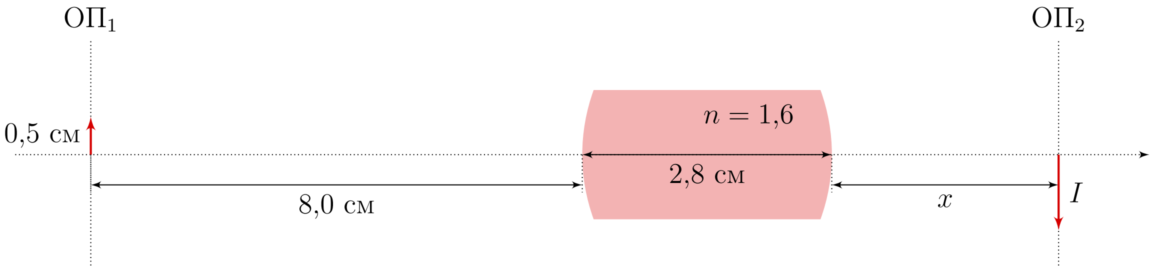
Тогда оптическая сила $\Phi = -C = P_1 + P_2 - P_1 P_2 L$. Приравняв производную Φ по n нулю, получим необходимое условие

$$P_1 + P_2 - 2P_1 P_2 L = 0; \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{P_1 + P_2}{2P_1 P_2}.$$

6. Если окончательное изображение расположено справа на расстоянии X см от правого конца стержня, то цепочка матриц записывается в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(1-1{,}6)}{-2{,}4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2{,}8}{1{,}6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(1{,}6-1)}{2{,}4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь первая матрица соответствует промежутку от изображениия до стержня, вторая — преломлению на правом конце стержня, третья — распространению внутри длины стержня, четвёртая — преломлению на левый конец стержня, пятая — распространению от стержня до предмета.



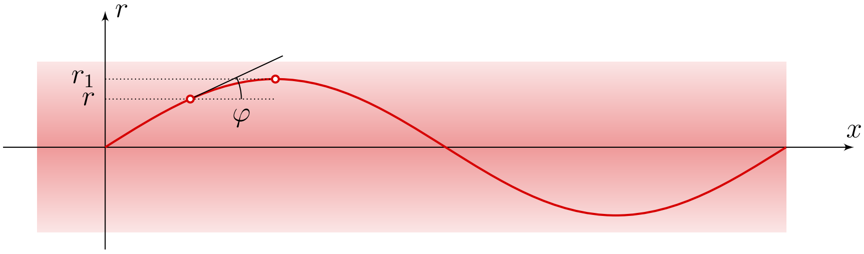
После всех вычислений, получим

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5625 - 0{,}391X & 6{,}25 - 2{,}56X \\ -0{,}391 & -2{,}56 \end{pmatrix}.$$

Соотношение связи между предметом и его изображением определяется равенством $B = 0$. Это означает, что данная матрица связывает вектор одного и того же луча в *плоскости предмета* и в *плоскости изображения*. Чтобы выполнялось соотношение связи между предметом и его изображением, должно выполняться равенство $2{,}56X = 6{,}25$. Следовательно, $X = 2{,}44$ см (справа от стержня). Увеличение $1/D = -1/2{,}56 = -0{,}39$. Следовательно, изображение стрелки перевёрнуто и его размер равен $(0{,}5 \cdot 0{,}39)$ см $= 0{,}195$ см.

7. Пусть для такой системы есть $ABCD$-матрица. Рассмотрим два луча

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Коэффициент преломления зависит от координаты r как

$$n(r) = n_0 - n_1 \frac{r^2}{2}.$$

Из геометрического смысла производной следует

$$\frac{dr}{dx} \equiv r' = \operatorname{tg}\theta \approx \theta.$$

Здесь мы учитываем, что работаем в параксиальной оптике. Траектория луча удовлетворяет закону Снеллиуса, поэтому

$$n(r_0) = n(r) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = n(r)\cos\theta.$$

Воспользовавшись разложением косинуса малого угла в ряд, получим

$$n(r_0) = \left(n_0 - n_1 \frac{r^2}{2}\right)\left(1 - \frac{r'^2}{2}\right) = n_0 - n_1 \frac{r_0^2}{2}.$$

Откуда находим, отбрасывая слагаемые большие второго порядка малости,

$$n_0 - n_1 \frac{r^2}{2} - n_0 \frac{r'^2}{2} = n_0 - n_1 \frac{r_0^2}{2},$$

где r_0 — максимальная координата по r, После нетрудных преобразований, получаем уравнение гармонических колебаний

$$r'^2 + \frac{n_1}{n_0} r^2 = \text{const}.$$

Решение этого уравнения

$$r = r_0 \sin\left(\omega x + \varphi_0\right); \quad \omega \equiv \frac{n_1}{n_0}.$$

Здесь φ_0 не угол, а начальная фаза! С учётом параксиального приближения, угол между лучом и осью x равен

$$\theta(x) \approx r' = r_0 \omega \cos\left(\omega x + \varphi_0\right).$$

Имеем

$$\begin{cases} r = r_0 \sin\left(\omega x + \varphi_0\right); \\ \theta(x) = r_0 \omega \cos\left(\omega x + \varphi_0\right). \end{cases}$$

Рассмотрим луч $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$. Для этого луча при $x = 0$ угол равен нулю, а координата r максимальна. Найдём его «амплитуду» r_{01} и начальную фазу φ_{01}

$$r_{01} = r; \quad \omega x + \varphi_{01} = \frac{\pi}{2}.$$

При $x = 0$, получаем $\varphi_0 = \pi/2$. Пусть r_1 и θ_1 — координаты на выходе, тогда

$$\begin{cases} r_{01} = r\cos\omega x; \\ \theta_{01} = \sqrt{\dfrac{n_1}{n_0}} r \sin\omega x; \end{cases} \implies \begin{cases} A = \cos\omega L; \\ C = -\sqrt{\dfrac{n_1}{n_0}} \sin\omega L. \end{cases}$$

Рассмотрим луч $\begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$. Для этого луча при $x = 0$, угол максимален, а координата равна нулю. Найдём его «амплитуду» r_{02} и начальную фазу φ_{02}

$$r_{02}\omega = \theta; \qquad \implies \qquad r_{02} = \frac{\theta}{\omega}; \quad \varphi_{02} = 0.$$

Пусть y_1 и θ_1 — координаты на выходе, тогда

$$\begin{cases} r_{02} = \dfrac{\theta}{\omega} \sin\omega L; \\ \theta_{02} = \theta\cos\omega L; \end{cases} \implies \begin{cases} B = \dfrac{\sin\omega L}{\omega}; \\ D = \cos\omega L. \end{cases}$$

Теперь можем записать $ABCD$-матрицу этой системы

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega L & \dfrac{\sin\omega L}{\omega} \\ -\omega n_0 \sin\omega L & \cos\omega L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Здесь мы работали в координатах $\begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix}$, в координатах $\begin{pmatrix} y \\ n\theta \end{pmatrix}$ будет

$$\begin{pmatrix} \cos\omega L & \dfrac{\sin\omega L}{n_0\omega} \\ -n_0\omega \sin\omega & \cos\omega L \end{pmatrix}.$$

Условие преломления луча на левой границе пластинки записывается как

$$\begin{pmatrix} y \\ n_{\text{пл}}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ n_{\text{ср}}\theta_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы пренебрегаем $\dfrac{n_1 y^2}{2}$, показатель преломления пластинки $n_{\text{пл}} \approx n_0$. Аналогичное условие для правой границы

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ n_{\text{пл}}\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ n_{\text{ср}}\theta \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega L & \dfrac{\sin\omega L}{\omega} \\ -\omega\sin\omega & \cos\omega L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega L & \dfrac{\sin\omega L}{\omega} \\ -\omega\sin\omega & \cos\omega L \end{pmatrix}.$$

8. Найдём матрицу системы (P_1 и P_2 — оптические силы линз)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство получено из условия, что матрица этой системы совпадает с матрицей распространения луча на расстояние $2t$. Обозначим

$$q = 2P_1 t + P_2 t - P_1 P_2 t^2.$$

Тогда

$$M = \begin{pmatrix} 1-q & 2t - P_2 t^2 \\ (P_1 t - 1)q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Чтобы система вела себя как будто её нет, M должна быть матрицей распространения на $2t$. Следовательно, $q = 0$. Тогда диагональные элементы становятся единицами, левый нижний угол нулём, а верхний правый должен удовлетворять следующему условию

$$2t = 2t - P_2 t^2.$$

Так как $q = 0$

$$t = \frac{2P_1 + P_2}{P_1 P_2} = f_1 + 2f_2.$$

Тогда предыдущие условие можно записать в форме

$$\frac{2t^2}{t - f_1} = 0.$$

Очевидно, оно может выполняться только когда $f_1 \gg t$.

9. Найдём матрицу системы (P_1 и P_2 — оптические силы линз)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущему случаю, матрица M должна быть матрицей распространения на $2t_1 + t_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t_1 + t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$q = P_1 + P_2 - P_1 P_2 t_1.$$

При $t_1 = \dfrac{P_1 + P_2}{P_1 P_2}$ получаем, что

$$A = 1; \quad C = 0; \quad D = 1.$$

Тогда

$$t_1 = \frac{P_1 + P_2}{P_1 P_2} = f_1 + f_2.$$

Приравнивая оставшийся элемент $2t_1 + t_2$ матрицы (после вычисления всех произведений матриц), получаем

$$t_2 = \frac{2(P_1 + P_2)}{P_2(P_2 - P_1)} = \frac{2f_2(f_1 + f_2)}{f_1 - f_2}.$$

Длина системы

$$L = 2t_1 + t_2 = 2(f_1 + f_2)\left(1 + \frac{f_2}{f_1 - f_2}\right) = \frac{2f_1(f_1 + f_2)}{f_1 - f_2}.$$

Рассмотрим частные производные этой величины по каждому из фокусных расстояний

$$\frac{\partial L}{\partial f_1} = 2\frac{f_1^2 - 2f_1 f_2 - f_2^2}{(f_1 - f_2)^2}; \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial f_2} = \frac{4f_1^2}{(f_1 - f_2)^2}.$$

Нетрудно заметить, что производная по f_2 (при фиксированном f_1) всегда положительна, а производная по f_1 (при фиксированном f_2) равна нулю при

$$f_1 = (1 \pm \sqrt{2}) f_2.$$

При этом

$$\frac{t_2}{f_2} = \frac{2(f_1 + f_2)}{f_1 - f_2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{2})}{\pm\sqrt{2}} = 2(1 + \sqrt{2}).$$

Мы откинули решение в котором $t_2 < 0$, так как расстояние между линзами не может быть отрицательным.

10. Найдём $ABCD$-матрицу передачу луча. Представим это, как систему линз:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 1,$$

так как произведение матриц с единичным детерминантом дают единичный детерминант.

11. Найдём условие непокидания резонатора. За первый проход

$$\begin{cases} y_{m+1} = Ay_m + B\theta_m; \\ \theta_{m+1} = Cy_m + D\theta_m; \end{cases} \implies \quad \theta_m = \frac{y_{m+1} - Ay_m}{B}; \quad \theta_{m+1} = \frac{y_{m+2} - Ay_{m+1}}{B}.$$

Собирая вместе θ_m, θ_{m+1}, y_{m+1} получаем

$$y_{m+2} = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} y_{m+1} - \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} y_m.$$

Здесь $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — след $ABCD$-матрицы, который равен $A + D$.

С учётом равенства единице детерминанта, получим

$$y_{m+2} = (A + D)y_{m+1} - y_m.$$

Мы получили рекуррентное уравнение, будем искать его решение в виде

$$y_m = y_{\max} \sin(m\omega + \varphi_0).$$

Подставим это возможное решение в наше уравнение

$$y_{\max} \sin(m\omega + 2\omega + \varphi_0) = (A + D)y_{\max} \sin(m\omega + \omega + \varphi_0) - y_{\max} \sin(m\omega + \varphi_0).$$

Сокращая $y_{\max}$, получаем

$$\sin(\omega + 2\omega + \varphi_0) + \sin(m\omega + \varphi_0) = 2\cos(\omega) \sin(m\omega + \omega + \varphi_0).$$

Имеем

$$2\cos(\omega) \sin(m\omega + \omega + \varphi_0) = (A + D) \sin(m\omega + \omega + \varphi_0).$$

То есть данное решение реализуется при

$$2\cos\omega = A + D; \quad \implies \quad |A + D| \leqslant 2.$$

Однако есть ещё другое возможное решение вида

$$y_m = y_{\max} \operatorname{sh}(m\omega + \varphi_0).$$

Подставим это решение в рекуррентное уравнение

$$y_{\max} \operatorname{sh}(m\omega + 2\omega + \varphi_0) = (A + D)y_{\max} \operatorname{sh}(m\omega + \omega + \varphi_0) - y_{\max} \operatorname{sh}(m\omega + \varphi_0).$$

Сокращая $y_{\max}$, получаем

$$\operatorname{sh}(m\omega + \varphi_0 + 2\omega) + \operatorname{sh}(m\omega + \varphi_0) = 2\operatorname{ch}(\omega) \operatorname{sh}(m\omega + \varphi_0).$$

Откуда находим

$$2\operatorname{ch}(\omega)\operatorname{sh}(m\omega+\varphi_0+\omega)=(A+D)\operatorname{sh}(m\omega+\omega+\varphi_0).$$

То есть данное решение реализуется при

$$2\operatorname{ch}(\omega)=A+D;\quad\Longrightarrow\quad A+D\geqslant 2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\operatorname{ch}\omega=\frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2}\geqslant 1.$$

Примечание. Рассмотрим случай $A+D=2$. Матрица распространения M равна

$$M=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию $A+D=2$ и является устойчивым решением.

Рассмотрим другую матрицу распространения

$$M^{*}=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}.$$

Она действует на луч

$$\begin{pmatrix}y\\\theta\end{pmatrix}$$

следующим образом

$$M^{*}\begin{pmatrix}y\\\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}001(k+1)\\0{,}001\end{pmatrix}.$$

То есть луч уходит на бесконечность, следовательно, при $A+D=2$ не обязательно устойчиво, следовательно, нельзя дать однозначный ответ.

12. Рассмотрим два луча

$$v_1=\begin{pmatrix}y_1\\0\end{pmatrix};\quad v_2=\begin{pmatrix}y_2\\0\end{pmatrix}.$$

Найдём $ABCD$-матрицу

$$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&L\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-\dfrac{2}{R_2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&L\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-\dfrac{2}{R_1}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}999&0{,}9999\\-1{,}002&-0{,}001\end{pmatrix}.$$

След этой матрицы равен

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=A+D=1{,}998.$$

Тогда

$$2\cos\omega=A+D;\quad\Longrightarrow\omega=\arccos\left(\frac{A+D}{2}\right)=0{,}447.$$

Найдём второй y_1

$$y_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}909 y_1 \\ -1{,}002 y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_{\max} \sin(0 \cdot \omega + \varphi_0) = y_1; \\ y_{\max} \sin(\omega + \varphi_0) = 1{,}999 y_1; \end{cases} \implies \begin{cases} y_{\max} \varphi_0 = y_1; \\ y_{\max}(\omega + \varphi_0) = 1{,}999 y_1. \end{cases}$$

Здесь мы при переходе полагаем $\varphi_0 \ll 1$. Из записанных уравнений находим

$$y_{\max} = \frac{0{,}999}{\omega} y_1; \quad \varphi_0 = \frac{\omega}{0{,}999}.$$

Откуда

$$y_1(m) = \frac{0{,}999}{\omega} y_1(\omega m + \varphi_0) = 0{,}999 y_1 \left(m + \frac{1}{0{,}999} \right) = 0{,}999 m y_1 + y_1.$$

Аналогично получаем

$$y_2(m) = \ldots = 0{,}999 m y_2 + y_2.$$

Тогда

$$\Delta y(m) = y_1(m) - y_2(m) = 0{,}999 m (y_1 - y_2) + (y_1 - y_2).$$

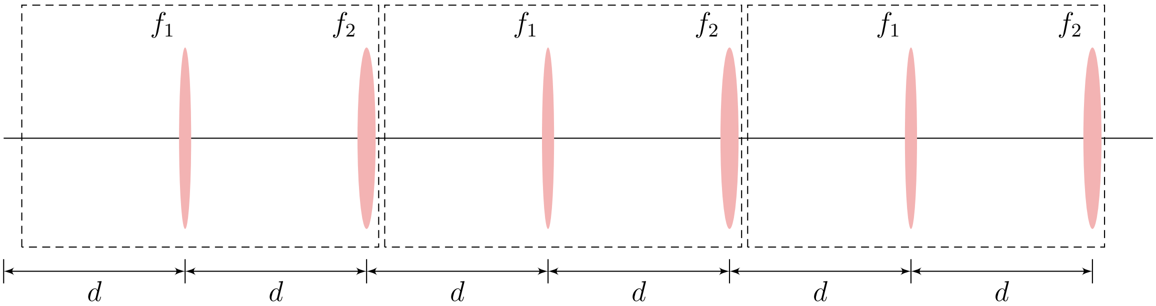
Альтернативная задача

1. *(2,5 балла)* Параллельный пучок света проходит через прозрачный сферический шарик диаметром 2 см из органического стекла, показатель преломления которого равен 1,4. В какой точке за шариком свет соберётся в фокус? Рассмотрите случай, когда показатель преломления стекла равен 2,0.

2. *(2,5 балла)* Объект размером 5 см расположен на расстоянии 3 м от экрана. Каково должно быть фокусное расстояние линзы и где её следует поместить, чтобы даваемое этой линзой изображение объекта на экране имело размер 100 см?

3. *(2,5 балла)* Луч света входит слева в стеклянный шар радиусом r. Показатель преломления стекла n. Когда он достигает правой граничной поверхности шара, некоторые из его лучей отражаются назад и опять появляются с левой стороны шара. Найдите матрицу преобразования лучей для этого случая, причём в качестве опорной плоскости следует взять плоскость, примыкающую слева к поверхности шара.

4. *(2,5 балла)* Рассмотрим бесконечную периодическую систему линз, находящихся на расстоянии d друг от друга. Фокусные расстояния f_1 и f_2 известны. Найдите условие при котором траектория лучей будет ограничена.



Примечание. Во всех пунктах считайте показатель преломления внешней среды равным единице.

Решение альтернативной задачи

1. Если мы выберем выходную опорную плоскость ОП$_2$ расположенной на расстоянии X см справа от шарика, то цепочка матриц запишется в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-1(1-1{,}4)}{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2}{1{,}4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-(1{,}4-1)}{1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь первая матрица соответствует воздушному промежутку, вторая — правая поверхности, третья — промежутку между поверхностями, четвёртая — левой поверхности. Вычислим произведение матриц

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}429 - 0{,}571X & 1{,}429 + 0{,}429X \\ -0{,}571 & 0{,}429 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Чтобы параллельный пучок света собрался в фокус в ОП$_2$, матричный элемент A должен быть равен нулю

$$0{,}571X = 0{,}429; \quad \Longrightarrow \quad X = 0{,}75.$$

По-другому такой же результат можно получить непосредственно из матрицы для шарика

$$\begin{pmatrix} 0{,}429 & 1{,}429 \\ -0{,}571 & 0{,}429 \end{pmatrix}$$

Поскольку $v_1 = 0$, мы имеем

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay_1 \\ Cy_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, расстояние, на котором луч $\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ пересечёт ось, равно

$$-n\frac{y_2}{v_2} = -\frac{A}{C}.$$

справа от шарика, т. е. 0,75 см.

Рассмотрим случай $n = 2$. Если мы выберем выходную опорную плоскость ОП$_2$ расположенной на расстоянии X см справа от шарика, то цепочка матриц запишется в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Посчитав произведение матриц, находим

$$M = \begin{pmatrix} -X & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

То есть $X = 0$, луч пройдёт через правую точку шара.

Замечание. Этот расчёт относится только к центральному параксиальному участку пучка лучей — остальная часть пучка даст сферическую аберрацию.

2. Хотя размеры предмета и изображения даны в сантиметрах, в данном случае для вычисления матричных элементов более удобно использовать метры. Потребуем, чтобы линза была тонкой и положительной (собирающей). Оптическую силу P этой линзы будем измерять в обратных метрах. Предположим, что мы поместили линзу на расстоянии X метров от щели и $(3-X)$ метров от экрана. Произведение матриц, соответствующее цепочке от экрана до щели, записывается в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3-X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь первая матрица соответствует промежутку от экрана до линзы, вторая — линзе, третья — промежутку от линзы до щели. Вычислим произведение матриц

$$M = \begin{pmatrix} 1-3P+PX & X+(3-X)(1-PX) \\ -P & 1-PX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Одиночная линза всегда даёт перевёрнутое действительное изображение действительного предмета, поэтому увеличение следует взять со знаком минус, т. е. $-100/5=-20$. Следовательно, в приведённой выше матрице имеем

$$A = \frac{1}{D} = -20; \quad B = 0.$$

То есть выполняется соотношение связии между предметом и его изображением. Поскольку

$$D = 1 - PX = -0{,}05,$$

то из равенства $B=0$ находим

$$B = X - 0{,}05(3-X) = 0.$$

Следовательно,

$$1{,}05 = 0{,}05\cdot 3; \quad \Longrightarrow \quad X \approx 0{,}15 \text{ м}.$$

Уравнение для D теперь принимает вид

$$1 - 0{,}15P = -0{,}05; \quad \Longrightarrow \quad P = +7.$$

Таким образом, фокусное расстояние линзы составляет $(1/7)$ м ≈ 14 см.

3. Цепочка матриц относительно опорной плоскости, примыкающей слева к поверхности шара, записывается в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-(n-1)}{r} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2r}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2n}{r} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2r}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-(n-1)}{r} & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь первая матрица соответствует последнему преломлению на левой поверхности шара, вторая — перемещению через шар после отражения, третья — отражению от правой поверхности, четвёртая — перемещению через шар до отражения, пятая — начальному преломлению на левой поверхности. После преломления этих матриц получаем

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{n-4}{n} & \dfrac{-4r}{n} \\ \dfrac{-2(2-n)}{nr} & \dfrac{n-4}{n} \end{pmatrix}.$$

Проверка
$$\det\, M = \frac{n^2 - 8n + 16}{n^2} - \frac{16 - 8n}{n^2} = 1.$$

4. Смотрите параграф 1.4.4 в «Оптика и фотоника принципы применения».

Литература

Введение в матричную оптику. А. Джеррард, Дж. М. Бёрч

Оптика и фотоника принципы применения. Б. Салех, М. Тейх