Принцип крайнего.

1. По кругу записано 100 чисел, каждое из которых равно сред- нему арифметическому своих соседей. Докажите, что все 100 чисел равны.

2. Докажите, что у любого выпуклого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

3. По кругу записаны несколько целых чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Сумма всех чисел равна 14. Сколько чисел могло быть записано по кругу?

4. В системе Зелёной Собаки 1001 планета. На каждой из этих планет сидит астроном и смотрит в телескоп на ближайшую планету. Докажите, что если попарные расстояния между планетами различны, то найдётся планета, на которую никто не смотрит.

5. Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

6. Докажите, что число
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$
ни при каком $n > 1$ не является целым.

7. На танцевальном вечере каждая девушка танцевала по крайней мере с одним юношей, но ни один из юношей не танцевал с каждой из девушек. Докажите, что можно выбрать двух юношей A и B,и двух девушек C и D так, что A танцевал с C, B танцевал с D, но A не танцевал с D, а B не танцевал с C.

8. Сто прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку) разбивают плоскость на части. Докажите, что к любой прямой примыкает треугольник разбиения.

9. В круговом турнире по волейболу участвовало несколько команд. Будем говорить, что команда A сильнее команды B, если либо команда A выиграла у команды B, либо существует такая команда C, что команда A выиграла у команды C, а команда C выиграла у команды B. Докажите, что победитель турнира сильнее остальных команд.