

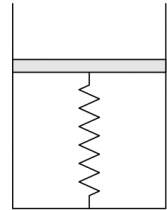
Газ и пружина

Задачи из mathus

Поршень, закрывающий сосуд с газом, может находиться под действием нескольких сил: давления газа в сосуде, атмосферного давления, силы тяжести, силы упругости пружины. Если поршень покоится, то эти силы уравновешивают друг друга.

Задача 1

В цилиндре под невесомым поршнем находится газ при атмосферном давлении. Поршень прикреплен к дну сосуда упругой пружиной (см. рисунок). Во сколько раз нужно увеличить температуру газа, чтобы его объем увеличился в полтора раза? Если газ полностью откачать из-под поршня, то поршень будет находиться в равновесии у дна цилиндра. Сила, действующая со стороны пружины на поршень, пропорциональна величине деформации пружины.



Решение:

Так как в начальном положении давление газа равно атмосферному, то в этом положении пружина не сжата. Пусть первоначально поршень находится на высоте h . Если газ полностью откачать из-под поршня, то атмосферное давление сожмет пружину как раз на длину h . Это дает возможность прокалибровать пружину.

По закону Гука $F = kx$, где k — жесткость пружины, x — изменение ее длины. При $x = h$ сила $F = p_0 S$ и, следовательно, $k = p_0 S/h$. Давление, которое пружина оказывает через поршень на газ, $p = F/S = p_0 x/h$.

Когда объем газа увеличится в полтора раза, пружина удлинится на величину $h/2$ и будет создавать давление $p = p_0/2$. Применяя уравнение газового состояния, получим

$$p_0 V = \frac{m}{M} R T_0, \left(p_0 + \frac{p_0}{2} \right) \frac{3}{2} V = \frac{m}{M} R T;$$

отсюда $T = 2,25 T_0$, то есть в 2,25 раз увеличить нужно температуру.

Задача 2

В комнате в вертикально расположенном цилиндре под весомым поршнем, который может перемещаться без трения, находится ν молей идеального газа при температуре T . Поршень подвешен на пружине жесткостью k . Газ охлаждают так, что в конечном состоянии его давление уменьшается в $\alpha = 1,5$ раза, а температура уменьшается в $\beta = 2$ раза. Найдите начальное давление газа. Площадь поршня равна S .

Решение:

Изменение давления газа при перемещении поршня обусловлено только пружиной, т.к. атмосферное давление и вес поршня постоянны. При перемещении поршня на расстояние x вверх объем увеличивается на $\Delta V = Sx$, давление тоже увеличивается на $\Delta P = \frac{kx}{S}$ и $\Delta P = \frac{k}{S^2} \Delta V$. Обозначим начальные значения P_0 и V_0 . Тогда конечные значения:

$$P = \frac{1}{\alpha} P_0 = \frac{2}{3} P_0, \quad V = \frac{\alpha}{\beta} V_0 = \frac{3}{4} V_0.$$

Изменения:

$$\Delta P = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) P_0 = -\frac{1}{3} P_0, \quad \Delta V = \frac{\alpha - \beta}{\beta} V_0 = -\frac{1}{4} V_0.$$

Из двух уравнений

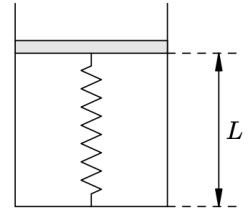
$$\Delta P = \frac{k}{S^2} \Delta V, \quad P_0 V_0 = \nu R T$$

находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) P_0 &= \frac{k}{S^2} \frac{\alpha - \beta}{\beta} V_0, \\ P_0^2 &= \frac{k}{S^2} \frac{\alpha - \beta}{\beta \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} p_0 V_0 = \frac{k}{S^2} \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\beta(1 - \alpha)} \nu R T, \\ P_0 &= \frac{1}{S} \sqrt{\frac{k\alpha(\beta - \alpha)}{\beta(\alpha - 1)} \nu R T} = P_0 = \frac{\sqrt{3k\nu R T}}{2S} \end{aligned}$$

Задача 3

В цилиндрическом сосуде с вертикальными гладкими стенками и открытой в атмосферу верхней частью под подвижным тяжёлым поршнем находится ν молей идеального газа. К поршню и дну сосуда прикреплена пружина с жёсткостью k (см. рисунок). При температуре газа T_1 пружина растянута, и её длина равна L . До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы его объём увеличился в $n = 2$ раза?



Решение:

Пусть p_0 , S , m и x — это атмосферное давление, площадь поршня, масса поршня и растяжение пружины в начальный момент соответственно.

Тогда сила давления газа в первом случае и во втором равна

$$\begin{aligned} p_1 S &= p_0 S + mg + kx \\ p_2 S &= p_0 S + mg + k(x + L(n - 1)) \end{aligned}$$

Из этих уравнений получим

$$p_1 S - p_2 S = -kL(n - 1)$$

Так как $S = \frac{V}{L}$, то

$$\begin{aligned} p_1 \frac{V}{L} - p_2 \frac{V}{L} &= -kL(n - 1) \\ p_1 V - p_2 V &= -kL^2(n - 1) \end{aligned}$$

Запишем уравнение состояния идеального газа для первого и второго случая:

$$\begin{aligned} p_1 V &= \nu R T_1 \\ p_2 V \cdot n &= \nu R T_2 \end{aligned}$$

Подставим их в предыдущее уравнение:

$$\nu R T_1 - \frac{1}{n} \nu R T_2 = -kL^2(n - 1)$$

Найдем отсюда T_2 :

$$T_2 = n \cdot \frac{\nu R T_1 + kL^2(n - 1)}{\nu R} = n \left(T_1 + \frac{kL^2(n - 1)}{\nu R} \right)$$

Задача 4

Подвижный поршень весом mg , подвешенный на пружине, делит объём вертикально расположенного откачанного цилиндра на две части (см. рисунок). В положении равновесия высота нижней части H_0 , а удлинение пружины равно x_0 . В нижнюю часть цилиндра впрыскивают ν молей воды. При медленном нагреве до некоторой температуры вся вода испаряется, а поршень перемещается на величину αx_0 ($\alpha = 1/2$).

- 1) Определить конечную температуру T .
- 2) Найти работу A , совершённую паром.

Решение:

Обозначим жесткость пружины через k и запишем условие равновесия поршня до впрыскивания воды:

$$mg = kx_0.$$

Для определения температуры водяного пара воспользуемся уравнением состояния идеального газа

$$T = \frac{PV}{\nu R},$$

где P и V — давление и объем пара:

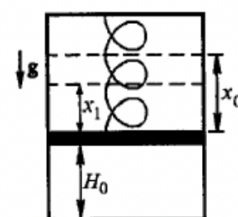
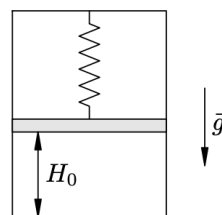
$$P = \frac{mg - kx_0(1 - \alpha)}{S} = \frac{\alpha mg}{S}, V = (H_0 + \alpha x_0) S$$

После подстановки P и V в уравнение состояния получим,

$$T = \frac{\alpha mg (H_0 + \alpha x_0)}{\nu R}$$

Работа, совершенная паром, идет на увеличение потенциальной энергии поршня и на изменение энергии деформированной пружины:

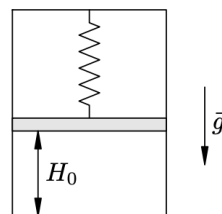
$$A = mg\alpha x_0 + \frac{k(x_0 + \alpha x_0)^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mgx_0}{8}$$



Задача 5

Подвижный поршень весом mg , подвешенный на пружине, делит объём вертикально расположенного пустого цилиндра на две части (см. рисунок). В положении равновесия высота нижней части цилиндра H_0 , удлинение пружины равно x_0 . В нижнюю часть цилиндра впускают ν молей воздуха. После установления равновесия пружина оказывается сжатой. Величина деформации сжатой пружины $x_1 = \alpha x_0$ ($\alpha = 2$). После этого воздух медленно охлаждают до некоторой температуры, так что в конечном состоянии деформация сжатой пружины $x_2 = \alpha x_0/2$.

- 1) Найти конечную температуру воздуха.
- 2) Найти работу, совершённую воздухом в процессе охлаждения.



Решение:

Под весом поршня пружина удлиняется на x , при этом сила натяжения пружины $kx = mg$, отсюда $k = \frac{mg}{x}$ пружина в сжатом состоянии давит на поршень с силой $\frac{k\alpha x}{2} = \frac{\alpha mg}{2}$, при этом на поршень также действует сила тяжести mg .

Чтобы поршень находился в равновесии, на него должна действовать сила давления воздуха

$$F = (\alpha/2 + 1)mg = pS,$$

где S — площадь поршня (сечение цилиндра).

Следовательно, давление равно

$$p = \frac{(\alpha/2 + 1)mg}{S}$$

Объём воздуха в цилиндре

$$V = S \cdot \left(H + \left(\frac{\alpha}{2} + 1 \right) x \right)$$

Согласно уравнению Менделеева-Клайперона

$$pV = \nu RT$$

$$pS \cdot \left(H + \left(\frac{\alpha}{2} + 1 \right) x \right) = \nu RT$$

$$\left(\frac{\alpha}{2} + 1 \right) mg \cdot \left(H + \left(\frac{\alpha}{2} + 1 \right) \cdot x \right) = \nu RT$$

Температура равна

$$T = \frac{\left(\frac{\alpha}{2} + 1 \right) mg \cdot \left(H + \left(\frac{\alpha}{2} + 1 \right) \cdot x \right)}{\nu R} = \frac{2mg}{\nu R} (H_0 + 2x_0)$$

При уменьшении объёма работа совершается *над* газом (то есть работа, совершённая газом отрицательна).

Потенциальная энергия поршня уменьшается на $\frac{1}{2}mg\alpha x$.

Энергия пружины уменьшается на

$$\frac{k(\alpha x)^2}{2} - \frac{k(\frac{\alpha x}{2})^2}{2} = k\alpha^2 x^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{8}k\alpha^2 x^2 = \frac{3}{8}mg\alpha^2 x$$

Следовательно, над газом совершается работа

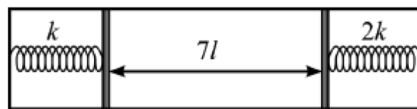
$$A' = \frac{1}{2}mg\alpha x + \frac{3}{8}mg\alpha^2 x = mg\alpha x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\alpha \right) = \frac{5}{2}mgx.$$

Газом совершается работа

$$A = -A' = -mg\alpha x \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\alpha \right) = -\frac{5}{2}mgx$$

Задача 6

К боковым стенкам горизонтально расположенного цилиндра с помощью пружин прикреплены два лёгких подвижных поршня, как показано на рисунке.



Жёсткость левой пружины равна k , правой — $2k$, пружины подчиняются закону Гука и находятся в вакууме. Между поршнями находится идеальный газ при температуре $T_1 = 350$ К, расстояние между поршнями $7l$, длина каждой из пружин $3l$. После того, как газ нагрели до температуры $T_2 = 600$ К, длина правой пружины уменьшилась до $2l$. Найдите длины пружин в недеформированном состоянии.

Решение:

Поскольку жёсткость правой пружины в 2 раза больше, чем левой, а изменения сил давления на оба поршня при нагревании газа одинаковы, сжатие левой пружины должно быть в два раза больше, то есть составит $2l$. Поэтому после нагревания расстояние между поршнями будет равно $10l$. Пусть p_1, V_1 — начальные давление и объём газа, а p_2, V_2 — конечные. Как следует из уравнения состояния идеального газа:

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{откуда} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \frac{V_1}{V_2} = \frac{600}{350} \frac{7l}{10l} = \frac{6}{5} = 1.2$$

Значит, давление в результате нагревания увеличилось на 20%, из чего следует, что и деформация пружин увеличилась на 20%. Получается, что начальная деформация левой пружины равна $10l$, а правой — $5l$. Длина левой пружины в недеформированном состоянии $13l$, а правой — $8l$.