

Вписанные углы.

Вписанный четырёхугольник.

1. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности, причём центр O окружности расположен внутри четырёхугольника $ABCD$. Точки K, L, M и N – середины отрезков AB, BC, CD и AD соответственно. Докажите, что $\angle KON + \angle MOL = 180^\circ$.
2. Докажите, что если биссектрисы углов выпуклого четырёхугольника при пересечении образуют четырёхугольник, то он – вписанный.
3. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P . Докажите, что центр O её описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB .
4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD : AB = BC = CD$, M – точка пересечения диагоналей, K – точка пересечения биссектрис углов A и D . Докажите, что точки A, M, K и D лежат на одной окружности.
5. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка K , на стороне CD – точка L , на отрезке KL – точка M . Докажите, что вторая (отличная от M) точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AKM и MLC , лежит на диагонали AC .
6. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны соответственно точки C', A', B' . Докажите, что описанные окружности треугольников $AB'C', BC'A', CA'B'$ проходят через одну и ту же точку.

Вспомогательные окружности.

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 , пересекающиеся в точке H . Докажите, что $\angle A_1AC = \angle A_1C_1C = \angle A_1BH$.
2. Общая гипотенуза AB прямоугольных треугольников ABC и ABD имеет длину 5. Найдите наибольшее возможное расстояние между точками C и D .
3. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a . Точка D находится от точки A на расстоянии a . Какие значения может принимать величина угла BDC ?
4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C тупые. Сравните длины диагоналей AC и BD .
5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $\angle A = 60^\circ, \angle B = 150^\circ, \angle C = 45^\circ$ и $AB = BC$. Докажите, что треугольник ABD равносторонний.
6. Дан квадрат $ABCD$. Отрезок AE пересекает сторону BC , причем $\angle BAE = 30^\circ$ а $\angle BCE = 75^\circ$. Найдите $\angle CBE$.
7. Равносторонние треугольники ABC и DFE расположены на плоскости так, что вершина B лежит внутри отрезка DE , а вершина F – внутри отрезка AC . Докажите, что у четырёхугольника, вершинами которого являются точки A, C, D и E , есть параллельные стороны.
8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60^\circ, \angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$. Найдите BD , если $AB = 2$.