Сила Ампера. Часть №2

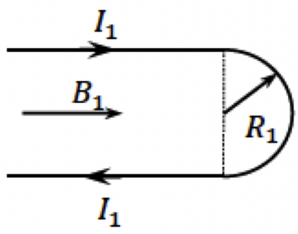
Задачи из mathus

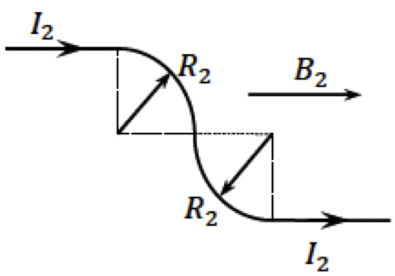
Криволинейный проводник

Задача 16

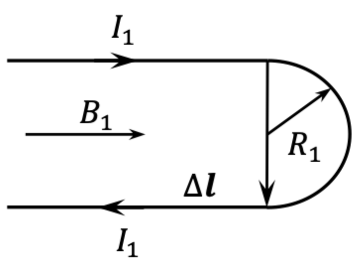
А) Проводник с током I_1, состоящий из двух параллельных участков, соединённых прово-лочной полуокружностью радиусом R_1, помещён в однородное магнитное поле индукцией B_1, направленное вдоль параллельных участков провода (верхний рисунок). Определите модуль силы, с которой магнитное поле действует на этот провод с током.

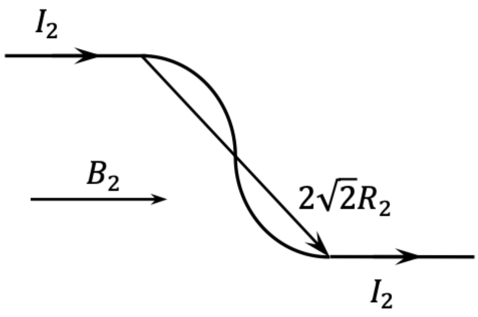
Б) Решите задачу в случае, когда провод состоит из двух параллельных участков, которые соединены двумя проволочными четвертями окружностей радиусом $R_2 = 10$ см, как показано на нижнем рисунке. Ток в проводе $I_2 = 30$ А, вектор индукции однородного магнитного поля $B_2 = 1$ Тл направлен вдоль параллельных участков провода.





Решение:





Возможное решение. А) На провода, параллельные вектору индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$, не действует сила Ампера. Разобьем проволочную полуокружность на элементы тока. На каждый элемент тока действует сила Ампера равная:

$$\boldsymbol{F}_i = I\,[\Delta \boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{B}]$$

Сила, действующая на весь проводник, равна векторной сумме сил, действующих на элементы тока:

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_i I\,[\Delta \boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{B}] = I\left[\sum_i \Delta \boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{B}\right] = I[\Delta \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}]$$

где $\Delta \boldsymbol{l}$ — вектор, соединяющий начальную и конечную точки проволочной полуокружности. Окончательно получаем:

$$F_1 = I_1 \cdot 2R_1 \cdot B_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2I_1R_1B_1.$$

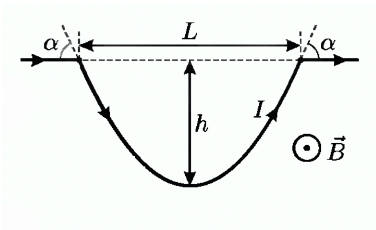
Б) Аналогично предыдущему пункту получаем (см. рис.):

$$F_2 = I_2 \cdot 2\sqrt{2}R_2 \cdot B_2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 30 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 0,1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6(\text{Н}).$$

Ответ: А) $F_1 = 2I_1R_1B_1$, Б) $F_2 = I_2 \cdot 2\sqrt{2}R_2 \cdot B_2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 6(\text{Н})$.

Задача 17

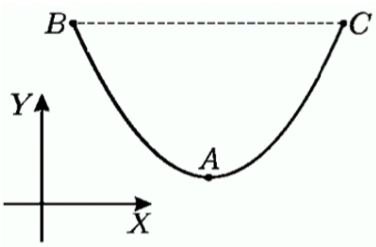
Участок гибкого провода массой m подвешен так, что его концы закреплены на одинаковой высоте (см. рисунок). Провод находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией B, и по нему течёт ток I. Силы, действующие на провод в точках подвеса, образуют углы α с горизонтом. Найдите силу T натяжения провода в его нижней точке. Размеры L и h известны.



Решение:

Обозначим нижнюю точку провода через A, верхние точки — через B и C (см. рисунок). Введём в плоскости провода декартову прямоугольную систему координат, направив ось X вправо, ось Y — вверх; обозначим координаты точек A и C как $(x_A; y_A)$ и $(x_C; y_C)$.

Рассмотрим участок провода AC. На него действуют направленная вниз сила тяжести $\frac{m\vec{g}}{2}$, направленная влево сила $\vec{T}$ натяжения нити в нижней точке A, направленная под углом α к горизонту сила натяжения нити $\vec{F}$ и сила Ампера $\vec{F}^{\text{магн}}$, действующая состороны магнитного поля. Запишем условие равновесия системы в проекциях на оси X и Y:

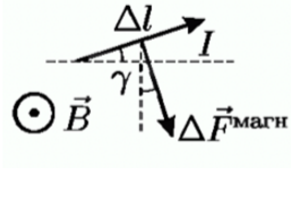


$$F_x^{\text{магн}} + F\cos\alpha - T = 0, \quad F_y^{\text{магн}} + F\sin\alpha - \frac{mg}{2} = 0$$

Выражая из второго соотношения неизвестную величину силы F и подставляя её в первое уравнение, находим искомую силу натяжения нити:

$$T = F_x^{\text{магн}} + \left(\frac{mg}{2} - F_y^{\text{магн}}\right)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Для получения ответа остаётся найти компоненты силы Ампера $\vec{F}^{\text{магн}}$. Рассмотрим маленький отрезок провода длиной Δl, составляющий угол γ с горизонтом и расположенный между точками с координатами $(x; y)$ и $(x+\Delta x; y+\Delta y)$, где $\Delta x = \Delta l \cdot \cos\gamma$, $\Delta y = \Delta l \cdot \sin\gamma$ (см. рисунок). На этот участок действует сила Ампера $\Delta\vec{F}^{\text{магн}}$, равная по модулю $IB\Delta l$ и направленная под углом γ к вертикали. Эта сила имеет компоненты



$$\begin{aligned}
\Delta F_x^{\text{магн}} &= \Delta F^{\text{магн}} \sin\gamma = IB\Delta l \sin\gamma = IB\Delta y \\
\Delta F_y^{\text{магн}} &= -\Delta F^{\text{магн}} \cos\gamma = -IB\Delta l \cos\gamma = -IB\Delta x
\end{aligned}$$

Складывая силы Ампера, действуюшие на все малые отрезки участка AC провода, находим:

$$F_x^{\text{магн}} = IB\,(y_C - y_A) = IBh;$$

$$F_y^{\text{магн}} = -IB\,(x_C - x_A) = -IB\frac{L}{2}$$

Подставляя результат в формулу для силы натяжения провода, приходим к ответу:

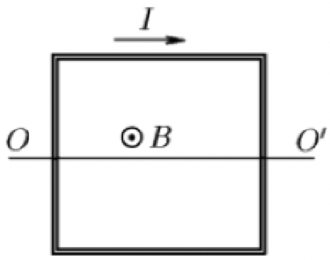
$$T = IBh + \frac{mg + IBL}{2}\operatorname{ctg}\alpha$$

Магнитный момент

Рассмотрим плоский контур с током I, имеющий площадь S. Магнитным моментом этого контура называется вектор $\vec{\mu}$, имеющий длину IS и направленный перпендикулярно плоскости контура в то полупространство, из которого ток видится циркулирующим против часовой стрелки.

Задача 21

В однородном магнитном поле индукции B находится квадратная рамка с током. Масса рамки m, ток в ней I. Определите частоту свободных колебаний рамки вокруг оси OO'.



Решение:

Определим момент сил, действующих на рамку с током со стороны магнитного поля при малых отклонениях рамки от положения равновесия.
На стороны рамки, перпендикулярные оси OO', со стороны магнитного поля действуют силы, лежащие в плоскости рамки. Эти силы не создают вращающий момент относитель-но оси OO'.
На стороны рамки, параллельные оси ОО’, действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 2).
Разложим силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ на две составляющие, лежащие в плоскости рамки $\left(\vec{F}_1'\text{ и }\vec{F}_2'\right)$ и перпендикулярные к ней $\left(\vec{F}_1''\text{ и }\vec{F}_2''\right)$.

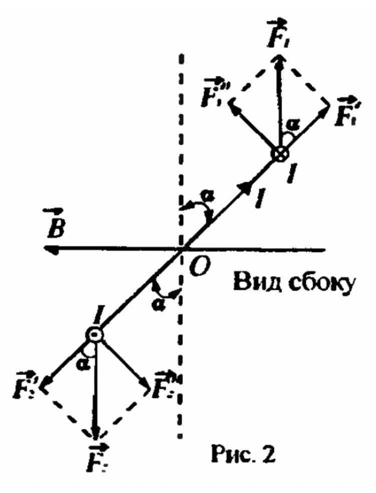


Рис. 2

Составляющие $\vec{F}_1''$ и $\vec{F}_2''$ создают вращающий момент, возвращающий рамку с током в положение равновесия (рис. 2).
$M = F_1 a = IBa \cdot a \cdot \sin\alpha = IBa^2\sin\alpha$ — вращающий момент, дейтвующий на рамку с током в однородном магнитном поле.
$F_1'' = F_2' = IBa \cdot \sin\alpha$, где a — сторона рамки.
Для вращательного движения рамки справедливо следуюшее уравнение:

$$I_0\alpha^m = -M = -IBa^2\sin\alpha,$$

где I_0 — момент инерции рамки относительно оси $O'; \alpha''$ — вторая пронзводная от угла поворота рамки по времени (так называемое угловое ускорение).
Знак «минус» у момента M взят потому, что этот момент направлен к положению равновесия рамки (т. е. уменьшает угол α).
Тогда (с учетом приближенного равенства $\sin\alpha \approx \alpha$, справедливого при малых углах α) получим:

$$I_0\alpha'' = -IBa^2 \sin\alpha = -IBa^2\alpha.$$

Момент инерции одной стороны рамки, параллельной OO', составляет $I_1 = \frac{m}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$, где $\frac{m}{4}$— масса одной стороны рамки; $\frac{a}{2}$— расстояние от стороны рамки до оси вращения OO'. $I_2 = 2I_1 = 2 \cdot \frac{m}{4} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{ma^2}{8}$ — момент инерции двух сторон рамки относительно оси OO': Момент инерции одной стороны рамки, перпендикулярной оси OO', равен

$$I_3 = \frac{m}{4} \cdot \frac{a^2}{12} = \frac{ma^2}{48}.$$

Момент инерции двух сторон рамки, перпендикулярных оси OO', составляет

$$I_4 = 2I_3 = ma^2/24.$$

$I_0 = I_2 + I_4 = \frac{ma^2}{8} + \frac{ma^2}{24} = \frac{4ma^2}{24} = \frac{ma^2}{6}$ — момент инерции всей рамки относительно оси OO'. Отсюда

$$\frac{ma^2}{6} \cdot \alpha'' = -1Ba^2\alpha,$$

или

$$\alpha'' = \frac{-6IBa^2}{ma^2}\alpha$$

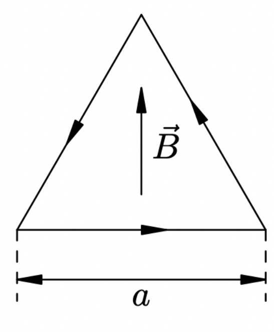
$$\alpha'' = -\frac{6IB}{m}\alpha; \ \alpha'' = -\omega_0^2\alpha$$

Получено дифференциальное уравнение колебательного движения рамки с током в магнитном поле. $\omega_0^2 = \frac{6IB}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{6IB}{m}}$ — циклическая частота свободных колебаний рамки с током в магнитном поле.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6IB}{m}}$$

Задача 27

На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая рамка из однородного куска проволоки в виде равностороннего треугольника со стороной, равной a. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого перпендиклярны одной из сторон рамки (рис.). Масса рамки M, величина индукции B. Какой силы ток нужно пропустить по рамке (против часовой стрелки), чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника?



Решение:

На проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует сила Ампера

$$F = IBl \sin\alpha,$$

где α — угол между направлением вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ и направлением тока. На сторону AB действует сила

$$F_1 = IBa,$$

направленная перпендикулярно плоскости треугольной рамки. На стороны AC и BC действуют аналогичные силы, направленные в противоположную сторону:

$$F_2 = F_3 = IB\frac{l}{2}.$$

Эти силы совместно с силой тяжести рамки создают момент относительно оси OO', проходящей через вершину C параллельно прямой AB. Запишем условие равенства моментов:

$$F_1\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2F_2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + mg\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

или

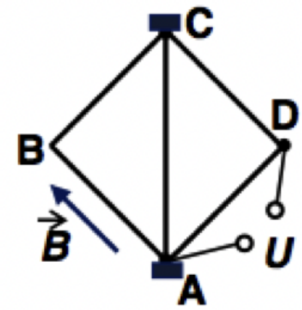
$$IB\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 2IB\frac{a^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} + mg\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Тогда для искомого тока I получаем:

$$I = \frac{4}{3}\frac{mg}{aB}.$$

Задача 30

Из медной проволоки изготовлен квадратный контур с перемычкой. Контур подключён к источнику постоянного напряжения U = 1,5 В между точками A и D и помещён в магнитное поле с индукцией B = 8 мТл, причём силовые линии лежат в плоскости контура и параллельны двум его сторонам. Найдите величину и направление силы, действующей на контур со стороны магнитного поля, а также величину и направление момента сил, поворачивающего контур вокруг оси АС. Удельное сопротивление проволоки ρ = 0,018 мкОм · м, площадь сечения проволоки S = 1,8 мм2, длина стороны квадрата a = 1 м.



Решение:

Сопротивление стороны квадрата $R = \rho\frac{a}{S}$, тогда сопротивление участка АС равно $R\sqrt{2}$, а участка АВС $- 2R$. Примем, что потенциал А выше потенциала D. Направления токов показаны на рисунке. Величины сил тока обозначим следующим образом:

$$I_{AD} \equiv I_1, \quad I_{AC} \equiv I_2, I_{ABC} \equiv I_3 \quad \text{и} \quad I_{CD} \equiv I_4.$$

Ясно, что

$$I_1 = \frac{U}{R}, \quad I_4 = I_2 + I_3 = \frac{U}{R + 2R/(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}}\frac{U}{R}.$$

Далее находим, что

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{U}{R} \qquad \text{и} \qquad I_3 = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\frac{U}{R}.$$

Силы Ампера, действующие на участки АВ и CD, равны нулю. Силы Ампера, действующие на остальные участки, направлены «на наблюдателя» от плоскости контура. Величины этих сил

$$F_1 = aBI_1 = \frac{aBU}{R} = \frac{BUS}{\rho},$$

$$F_2 = a\sqrt{2}BI_2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho}, F_3 = aBI_3 = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho}.$$

Суммарная сила

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{4+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho} \approx 1,9\text{Н}.$$

Точками приложения сил F_1 и F_3 можно считать середины участков AD и BC, поэтому они имеют одинаковые плечи по отношению к оси AC, равные $l = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, а направления создаваемого ими вращения противоположные. Плечо силы F_2 равно нулю. Таким образом, момент сил

$$M = \frac{a}{2\sqrt{2}}\left(F_1 - F_3\right) = aBI_3 = \frac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}\frac{BUSa}{\rho} \approx 0,33\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Этот момент создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения величины силы и моменты остаются прежними, а направления изменяются на противоположные. *Ответ:*

$$F = \frac{4+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho} \approx 1,9\ \text{Н},$$

направление силы при $\varphi_A > \varphi_D$ «на наблюдателя» от плоскости контура,

$$M = \frac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}\frac{BUSa}{\rho} \approx 0,33\ \text{Н}\cdot\text{М},$$

создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения величины силы и моменты остаются прежними, а направления изменяются на противоположные.