Приготовьтесь к осложнениям.
Доктор Хаус.

Хаос и дискретные модели

В данной задаче вам придется применять как навыки аналитических вычислений, так и навыки численного моделирования. Но это не так страшно, как может показаться на первый взгляд.

Среда программирования для задачи

Для того, чтобы вам не пришлось ничего программировать, мы подготовили тетрадку в среде Google Colab. Можно использовать без смс, но с регистрацией.

Проходите по ссылке на тетрадку (на всякий случай, вот она еще раз), заходите в свой гуглаккаунт, нажимаете на выполнение кода в любой ячейки (это такая кнопка плей), вам сообщают радостную новость о том, что данный код написал некий Елисеев Максим, вы соглашаетесь с этим и тетрадка готова к использованию.

Подробно про то, как пользоваться тетрадкой рассказано в данном видео (тем самым Максимом Елисеевым). ~~Если~~ Когда у вас ~~останутся~~ появятся вопросы о том, как пользоваться данной тетрадью, то вы можете их задать в личные сообщения вот этому человеку. Не стесняйтесь, он готов и заряжен отвечать 25 (двадцать пять) на 7.

Замечание. Большая часть тетради это обучение, которое пропускать не надо, и задание 10-11 классов, которое вы можете пропустить (в крайнем случае нет). Основная работа будет в разделе «Дискретная модель» и «Путь Точки».

Замечание. Вы можете использовать любую другую среду для решения данной задачи, но мы не гарантируем, что другие численные методы сойдутся к правильному решению. И есть риск, что мы не сможем вам с этим никак помочь.

Дискретные модели

Во многих задачах бывает удобно переходить к дискретному времени и наблюдать за динамикой изменения некоторой величины. Например, мы можем обозначить x_n популяцию некоторого биологического вида в момент времени t_n (к примеру, в год с номером n). Тогда уравнение, описывающее динамику изменения популяции в самом простом случае, может иметь вид

$$x_{n+1} = \lambda x_n,$$

где $\lambda = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент, который определяет условия жизни данного вида. Ясно, что если $\lambda > 1$, то популяция будет неограниченно расти, если $\lambda = 1$, то ее значение будет из года в год постоянным, если $\lambda < 1$, то популяция вымрет. В этой части задачи мы будем анализировать схожие модели.

Правую часть уравнения мы будем обозначать $f(x_n)$. Если некоторое значение x^* удовлетворяет условию $f(x^*) = x^*$, то такой x^* мы будем называть положением равновесия.

Если мы два раза подействуем нашей «функцией», т. е. запишем выражение вида $f(f(x))$, то такое преобразование мы будем называть квадратичным и будем обозначать как $f^2(x)$. При действии нашей функцией n раз мы будем использовать обозначение $f^n(x)$. Ясно, что степень в данном случае не равносильна понятию степени из алгебры.

Путь точки. Линейный случай.

Рассмотрите в тетради клетку «Путь Точки». В ней задана «функция»

$$f(x) = \lambda \cdot \min\left[(1-x), x\right], \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

где $\lambda = \text{const} > 0$. Во всех пунктах этой части задачи мы будем рассматривать только значения $x \in [0, 1]$.

1. *(0,5 балла)* В каких пределах может изменяться параметр λ, чтобы x_n при любом n принадлежал отрезку от $[0, 1]$?
2. *(0 баллов)* Изобразите $f(x)$.
3. *(0,5 балла)* Качественно изобразите $f^2(x)$ и $f^4(x)$ при значениях параметра $\lambda \neq 0$.
4. *(0,5 балла)* Найдите зависимость числа положений равновесия от параметра λ у системы, задаваемой «функцией» $f(x)$. Для тех значений λ, где число положений равновесия наибольшее, найдите зависимость положений равновесия $x^*(\lambda)$.
5. *(0,3 балла)* Найдите зависимость числа положений равновесия от параметра λ у системы, задаваемой «функцией» $f^2(x)$. Для любого параметра λ, где число положений равновесия максимально, разработайте графический метод отыскания этих положений равновесия.
6. *(0,7 баллов)* Чему равно максимальное конечное число положений равновесия у системы, задаваемой «функцией» $f^n(x)$?
7. *(1,3 балла)* Для «функции» $f(x)$ и $\lambda = 1.5$ получите последовательность x_n, если $x_0 = 0{,}6$, $x_0 = 0{,}4$ и $x_0 = 0{,}139$. Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены $f(x)$, а также $g(x) = x$ или в виде первых сорока значений последовательности $x(n)$. Объясните полученный результат.
8. *(1,7 баллов)* Для «функции» $f^2(x)$ и $\lambda = 1.5$ получите последовательность x_n, если $x_0 = 0{,}6$, $x_0 = 0{,}61$. Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены $f(x)$, а также $g(x) = x$ или в виде первых сорока значений последовательности $x(n)$. Объясните результат.

   Попробуйте найти (или изобразить) зависимости для других начальных значений.
9. *(1 балл)* Откройте клетку тетради в разделе «Дискретная модель. Линейный случай». Она умеет строить зависимость значений точек, отвечающих положениям равновесия для функции $f^n(x)$ от параметра λ. Постройте данный график. Какие особенности данного графика вы можете выделить? Перечислите все свойства, которые сможете найти.

Путь Точки. Квадратичный случай.

Модифицируя код в клетке «Путь Точки», проанализируйте следующую «функцию»

$$f(x) = \lambda x(1-x),$$

где $\lambda = \text{const} > 0$.

Примечание. Эта «функция» встречается в самых разных разделах науки. От диффузии до экономики.

Во всех пунктах этой части задачи мы будем рассматривать только значения $x \in [0, 1]$.

10. *(0,5 балла)* В каких пределах может изменяться параметр λ, чтобы x_n при любом n принадлежал отрезку от $[0, 1]$?

11. *(0,5 балла)* Изобразите $f(x)$. Найдите, при каких λ число положений равновесий наибольшее. Как зависят данные положения равновесия от λ

12. *(0,5 балла)* Изобразите $f^2(x)$ при любом значении параметра $\lambda \neq 0$.

13. *(0,5 балла)* Для «функции» $f(x)$ и $\lambda = 2$ и получите последовательность x_n, если $x_0 = 0{,}5$, $x_0 = 0{,}4$ и $x_0 = 0{,}33$. Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены $f(x)$, а также $g(x) = x$ или в виде первых сорока значений последовательности $x(n)$. Объясните полученный результат.

14. *(0,5 балла)* Для «функции» $f^2(x)$ и $\lambda = 2$ получите последовательность x_n, если $x_0 = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}16$. Результат представьте в виде графика, на котором будут изображены $f(x)$, а также $g(x) = x$ или в виде первых сорока значений последовательности $x(n)$. Объясните результат.

    Попробуйте найти (или изобразить) зависимости для других начальных значений x.

15. *(1 балл)* Откройте клетку тетради в разделе «Дискретная модель. Квадратичный случай». Она умеет строить зависимость значений точек, отвечающих положениям равновесия для функции $f(x)$ от параметра λ. Задайте максимальное значение λ и постройте данный график. Какие особенности данного графика вы можете выделить? Перечислите все свойства, которые сможете найти.

Авторы задачи: А. В. Сахаров, Л. М. Колдунов, М. И. Пауков

Решение основной задачи

Обсудим смысл уравнений, которые были даны в задаче. В дальнейшем, те преобразования, который в задаче назывались «функциями» мы будем называть отображениями. Так, первая «функция» это отображение «тент». Область его применения достаточно широка – от прогнозирования биржи до генератора случайных чисел и кодирования сообщений.

Вторая «функция», параболическая, называется логистическим отображением. Она часто применяется для описания популяционной биологии. В тексте задачи был показан простейший пример, когда отношение числа видов популяции в год $n+1$ линейно зависело от предыдущего года, и это вело (за исключением случая $\lambda = 1$) либо к вымиранию из-за отсутствия ресурса, который считается постоянным, либо к неограниченному размножению. Однако эту модель можно наделить большим смыслом, если учесть, что ресурсы не могут быть всегда постоянными: популяция в год n влияет не только прямым образом (числом особей) на популяцию в следующий год, но и на ресурсы (потребляя их). Отсюда получается логистическое отображение вида:

$$x_{(n+1)} = \lambda\left(1 - x_n\right) x_n.$$

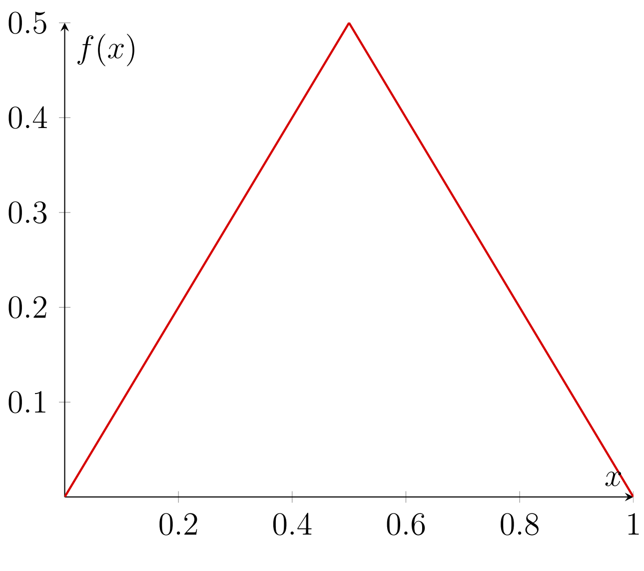
Можно рассмотреть вариант, когда за выживание конкурирует несколько популяций и они влияют друг на друга:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n - \alpha x_n y_n; \\ y_{n+1} = \mu(1 - y_n)y_n + \beta x_n y_n. \end{cases}$$

В такой модели может наблюдаться гораздо больше динамических режимов (обе вымрут, одна выживет, обе будут жить). Такая модель называется конкурентные уравнения Лотки-Вольтерры и при наличии 4 и более видов она может демонстрировать различные динамические режимы — от очевидных до автоколебательных и динамического хаоса.

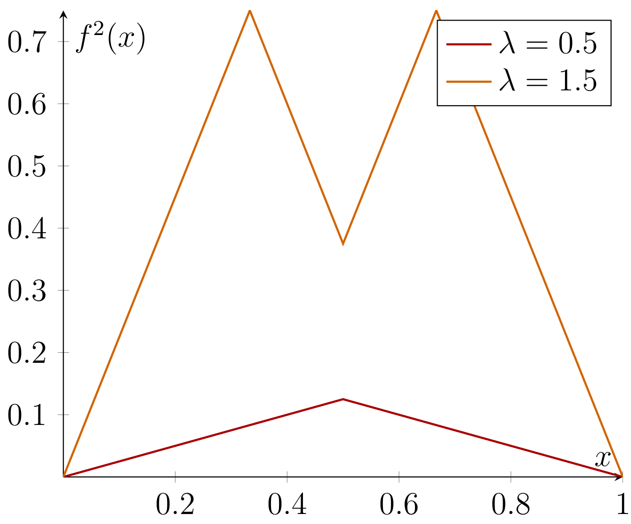
Линейное отображение

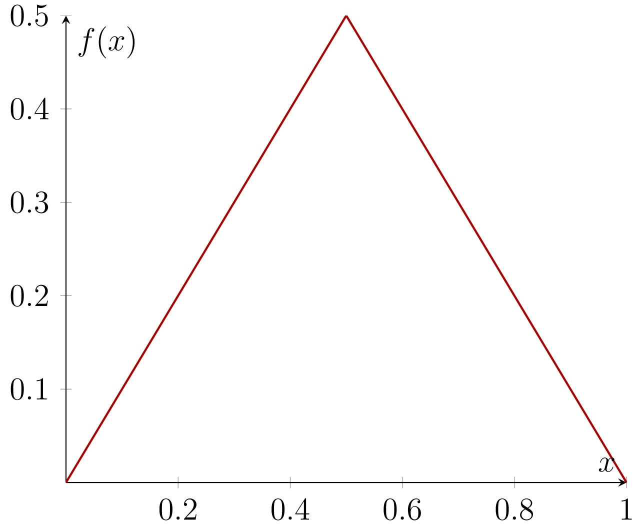
1. Рассмотрим функцию $f(x) = \lambda \min\{1 - x, x\}$, Максимум данной функции достигается при $x = 0,5$, тогда в силу условия $x \in [0;1]$ получим, что $0 < \lambda \leq 2$.

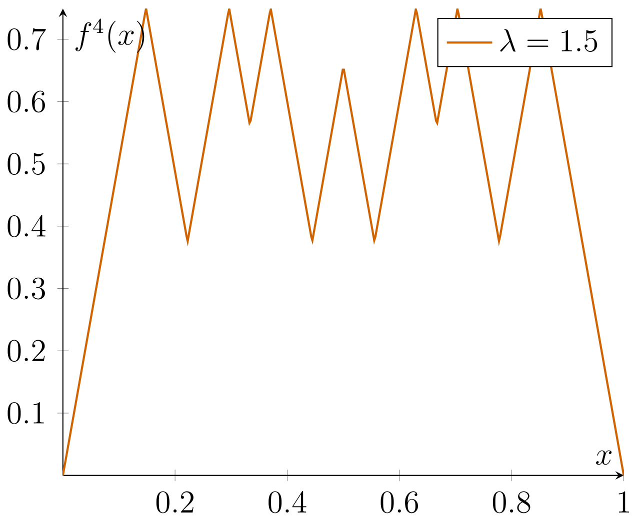


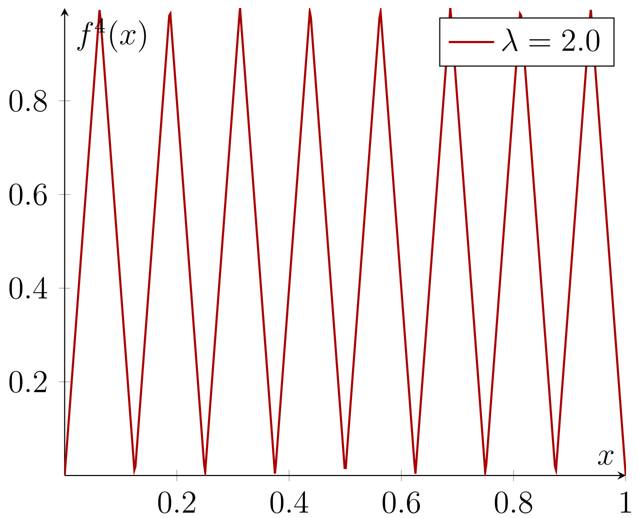
2. Само отображение представлено на рисунке, из которого ясно следует почему оно называется «тент».

3. Используя тетрадь в гуглколабе построим графики квадрата отображения и четвертой степени. Если изменять параметр λ, то можно заметить, что при $\lambda < 1$ графики функций $f^2(x)$ и $f^4(x)$ имеют один излом, как в случае $f(x)$. При $1 < \lambda \leq 2$ графики могут иметь 2 и более изломов:







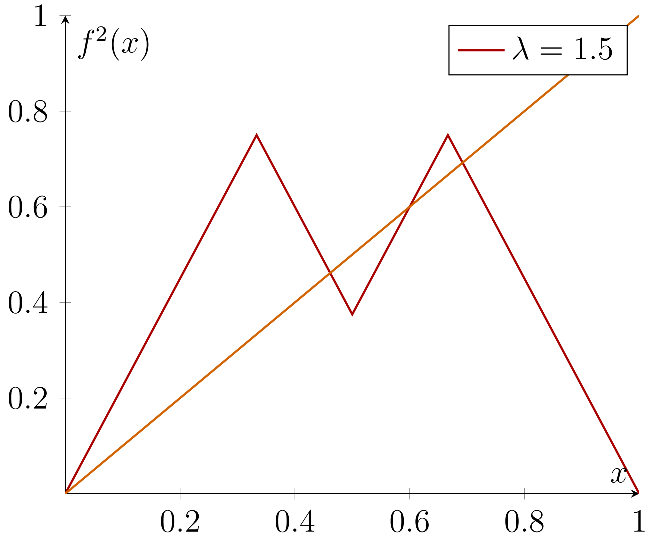


4. Чтобы найти положение равновесия (их еще иногда называют неподвижными точками), необходимо найти, когда точка под действием отображения перейдёт в саму себя. Графически это означает, что надо провести прямую $y = x$ и найти число точек её пересечения с графиком отображения.

При $\lambda < 1$ будет одно положение равновесия $x = 0$, при $\lambda = 1$ их бесконечно много (вырожденный случай), при $1 < \lambda \leq 2$ — два. Первое $x_1 = 0$, второе $x_2 = \lambda/(1 + \lambda)$.

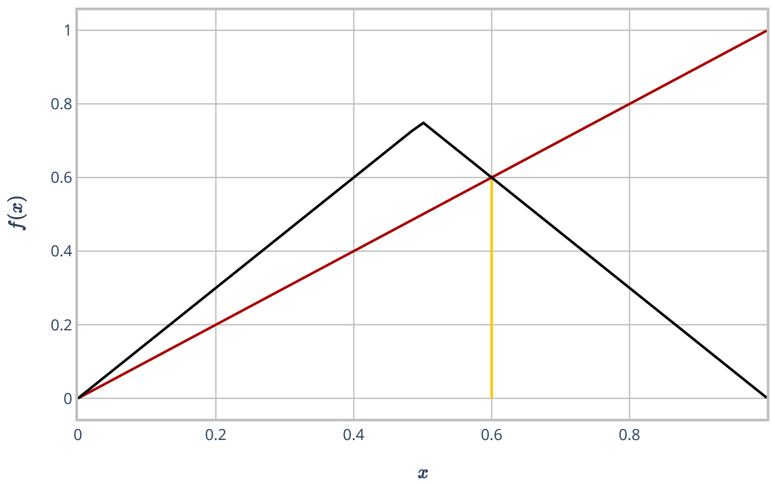
5. В п. 9 мы построили график квадрата отображения. Используя методику предыдущего пункта, получаем, что при $\lambda < 1$ одно положение равновесия, при $\lambda = 1$ их бесконечно много (вырожденный случай), при $1 < \lambda \leq 2$ – четыре.

6. Чем больше значение λ, тем ниже опускаются минимумы отображения и число пересечений функции отображения и функции $y = x$ увеличивается. Наибольшее число пересечений достигается при $\lambda = 2$ и оно равно 2^n.



7. $x = 0.6$ – это положение равновесия, неподвижная точка, поэтому мы в ней находимся все 40 итераций.

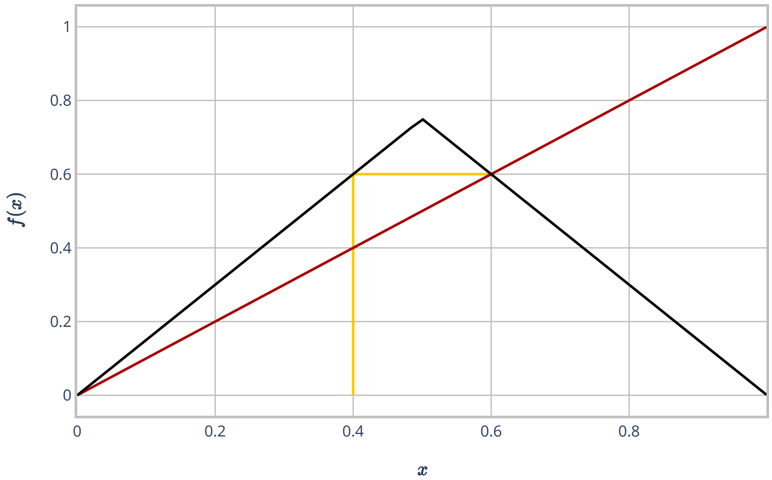
Процедура, изображаемая на графике кода в тетрадке называется лестницей Ламерея и отображает «функцию» в работе. Мы берём начальную точку x_0, считаем $x_1 = f(x_0)$, затем, чтоб сделать следующую итерацию переходим по прямой $y = x$ на нужный x_1, считаем $x_2 = f(x_1)$. Мы сделали шаг по лестнице Ламерея.

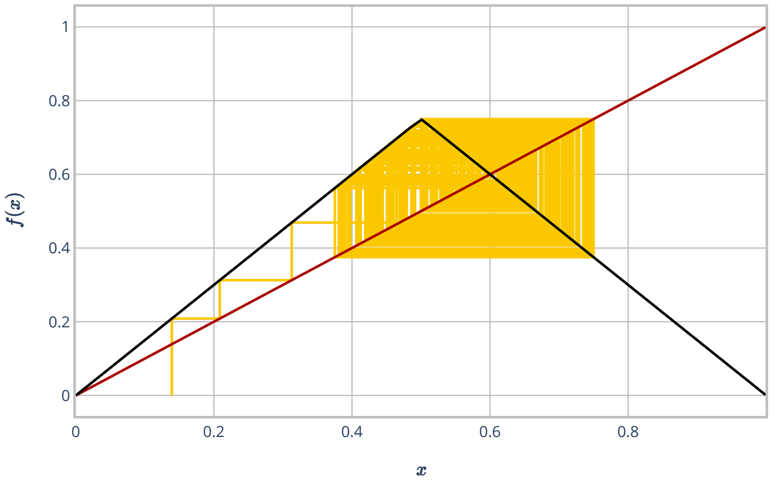


При $x_0 = 0.6$ мы сразу попадаем в положение равновесия или неподвижную точку и в ней остаемся.

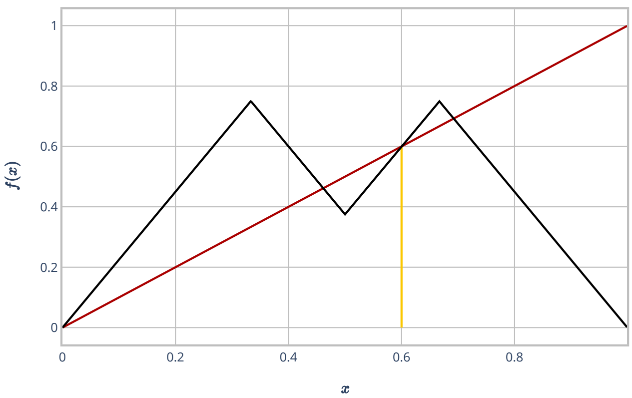
При $x_0 = 0.4$ мы видим, что за два шага мы приходим в положение равновесия 0.6.

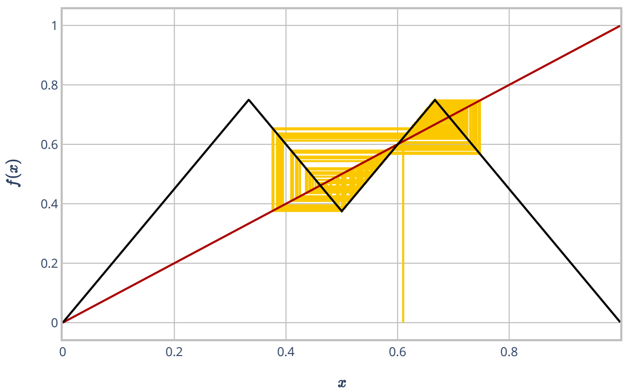
При небольшом отклонении от значения 0.4 мы попадаем в ситуацию, где за 40 итерация мы не попадаем в положение равновесия.





8. Данный пункт решается аналогично предыдущему.





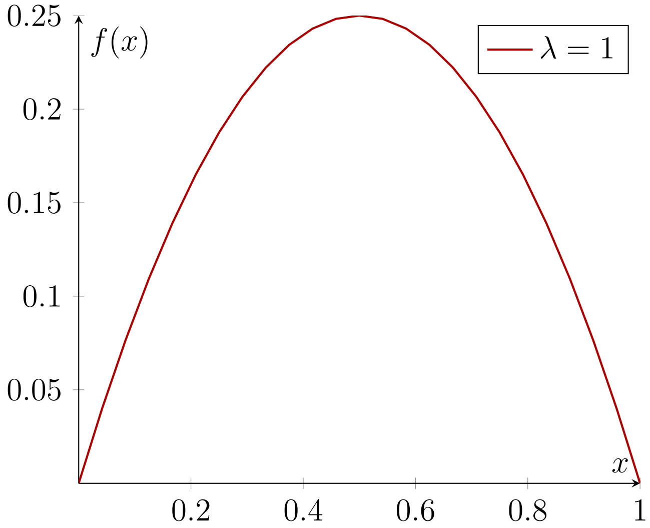
9. Данная часть посвящена изучению бифуркационной диаграммы отображения «тент». Мы видим, что по мере роста параметра λ происходит удвоение числа положений равновесий и в то же время рост расстояния между ними. В какой-то момент их становится так много, что они практически неразличимы. Важно отметить фрактальность этой структуры, т.е. её самоподобие. Такие фигуры впервые начал изучать Мандельброт. Одним из самых известных фракталов является снежинка Коха. Фрактальность будет более заметна в случае логистического отображения.

Второй интересной особенностью являются области, не заполненные положениями равновесия на фоне «сплошной» закраски – окна прозрачности. Такие же особенности можно выделить и в п. 21.

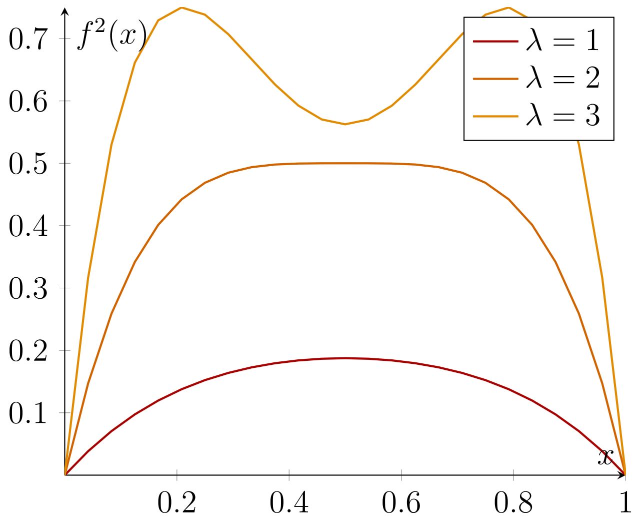
Логистическое отображение

10. Поступая аналогично п. 7, получаем $\lambda_{max} = 4$.

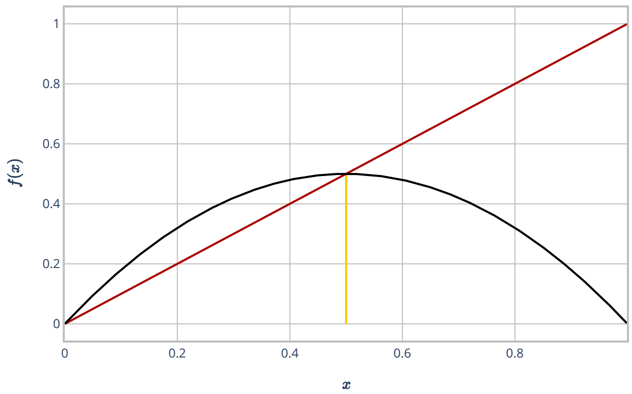
11. При $\lambda < 1$ одно положение равновесия, при $1 < \lambda \leq 4$ – два. В последнем случае найдем положения равновесия. Первое $x_1 = 0$, второе пересечение $x_2 = (\lambda - 1)/\lambda$.

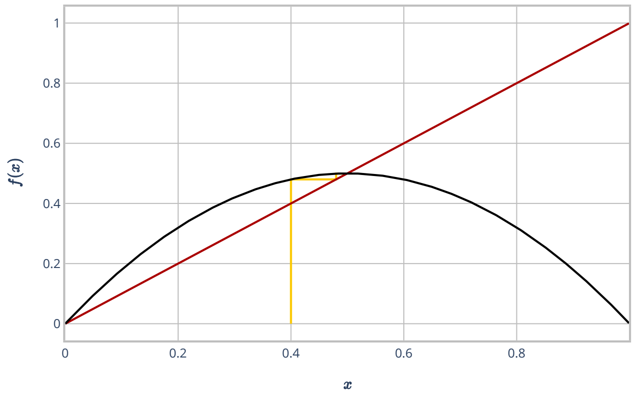


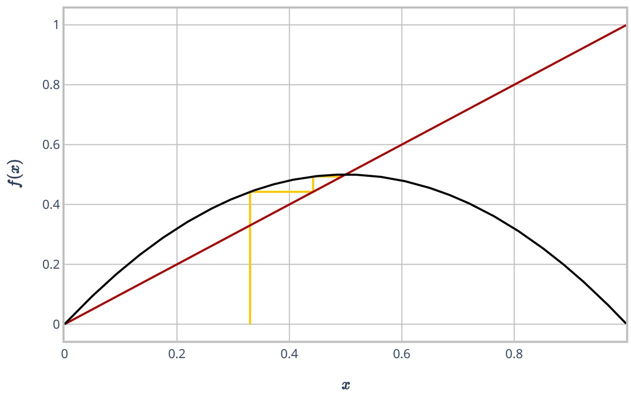
12. График квадрата функции $f^2(x)$ изображен ниже. При $\lambda \leq 2$ график качественно не отличается от графика $f(x)$. Если $2 < \lambda \leq 4$, то график имеет два максимума и один локальный минимум в центре.

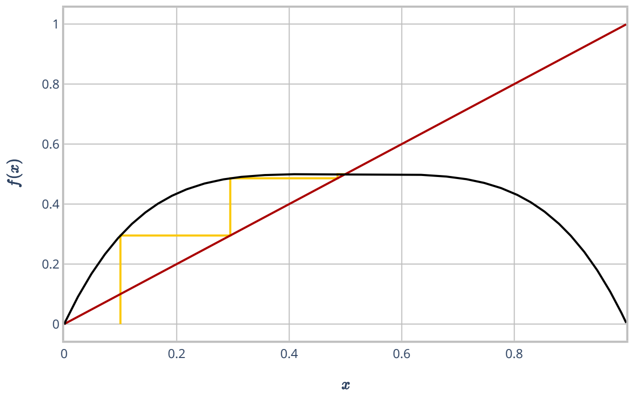


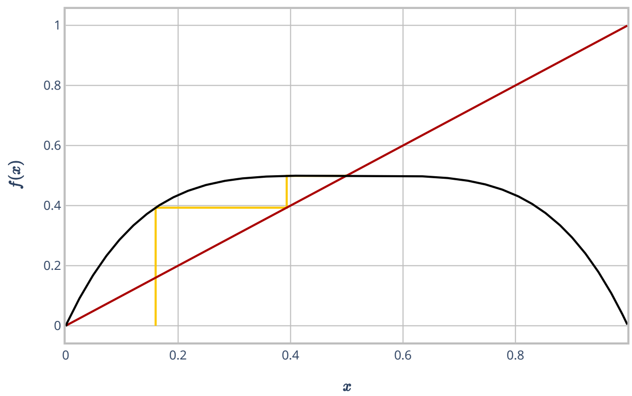
13-14. Данные пункты решаются аналогично тому, что было в предыдущей части задания.



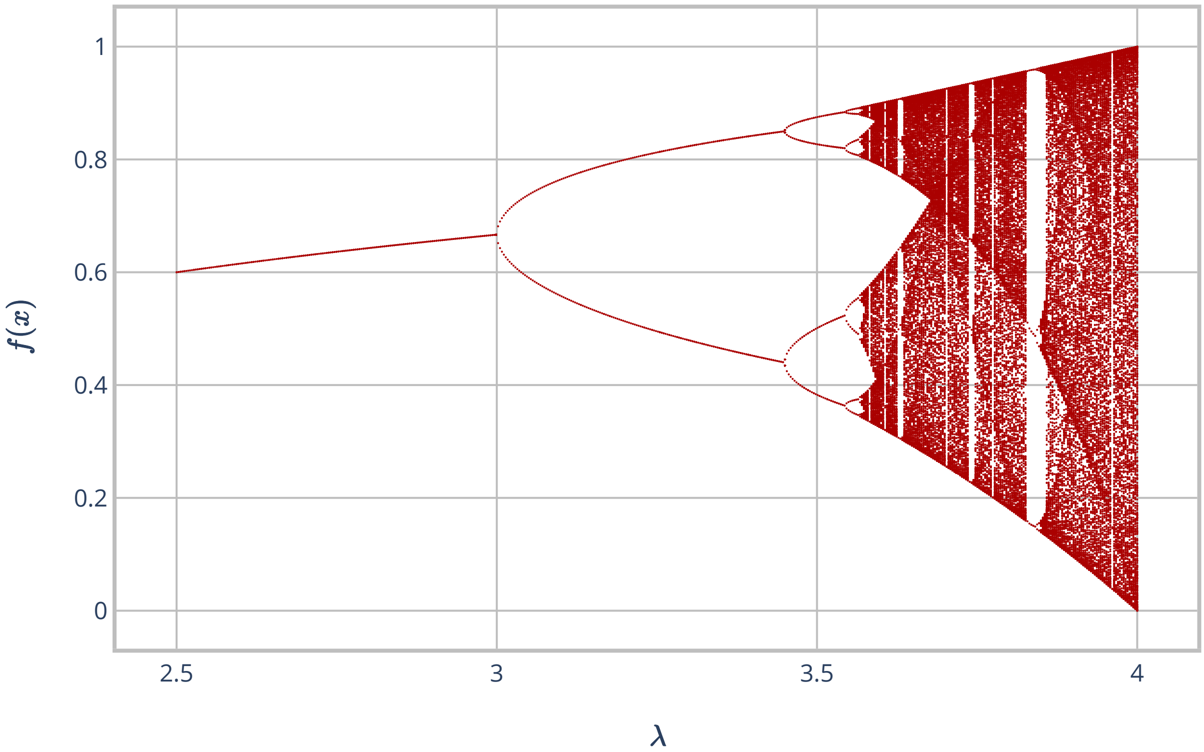








15. Мы получаем результат аналогичный тому, что был в п. 15. Отличие лишь в том, что фрактальная структура более очевидна. Тот факт, что результаты схожи не является удивительным. Такие отображения называются подобными.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
f(x)
2.5
3
3.5
4
λ

Альтернативная задача

Путь точки. Линейный случай II.

Пройдите в альтернативную тетрадку. Рассмотрите в тетради клетку «Путь Точки». В этом разделе анализируется следующая «функция»: $\{\lambda x\}$ — дробная часть λx, где $\lambda = \text{const} > 0$. Во всех пунктах этой части задачи мы будем рассматривать только значения $x \in [0, 1]$.

1. *(2,5 балла)* Изобразите $f(x)$ для $\lambda = 2$.
2. *(2,5 балла)* Качественно изобразите $f^2(x)$ и $f^4(x)$ при значениях $\lambda = 2$, $\lambda = 2{,}5$, $\lambda = 4$.
3. *(2,5 балла)* Найдите зависимость числа положений равновесия от степени функции при $\lambda = 2$.
4. *(2,5 балла)* Откройте клетку тетради в разделе «Дискретная модель. Линейный случай». Измените «функцию» на ту, что изучается в альтернативной задаче. В этом разделе изображаются все значения, которые получается после большого количества отображений при λ из диапазона от 10 до 20. Попробуйте проанализировать полученный результат.

Решение альтернативной задачи

Данное отображение называется «зуб пилы». Заметим, один интересный «трюк»: если писать числа в двоичной системе, то при умножении на 2 всё число сдвигается влево на один разряд, а взятии целой части - отбрасыванию старшего разряда, поэтому x_{n+1} получается из x_n:

$$x_0 = 0.01011...$$

$$x_1 = 0.1011...$$

$$x_2 = 0.011...$$

Для отображения пилы известно, что последовательность, начинающаяся при рациональном $x = p/q$ периодическая, если q - нечетное. Например, последовательность, начинающаяся с $1/3$, имеет период 2:

$$1/3 \to 2/3 \to 1/3\ldots,$$

а для $1/7$ получается период 3

$$1/7 \to 2/7 \to 4/7 \to 1/7\ldots$$

При четном q траектория выходит на периодическую через несколько итераций, например

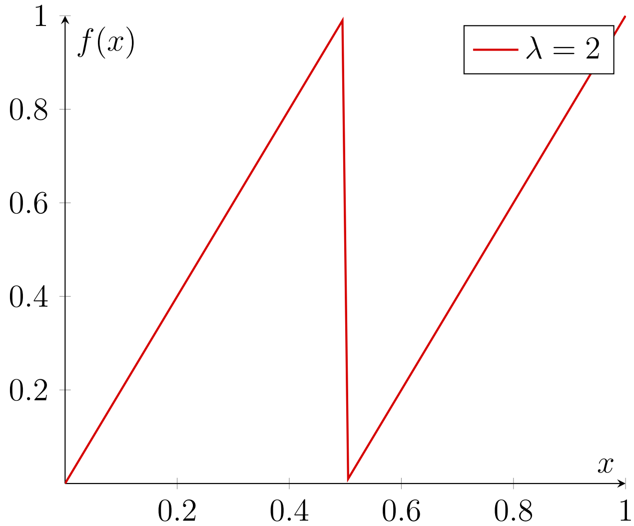
$$1/6 \to 1/3 \to 2/3 \to 1/3\ldots$$

или

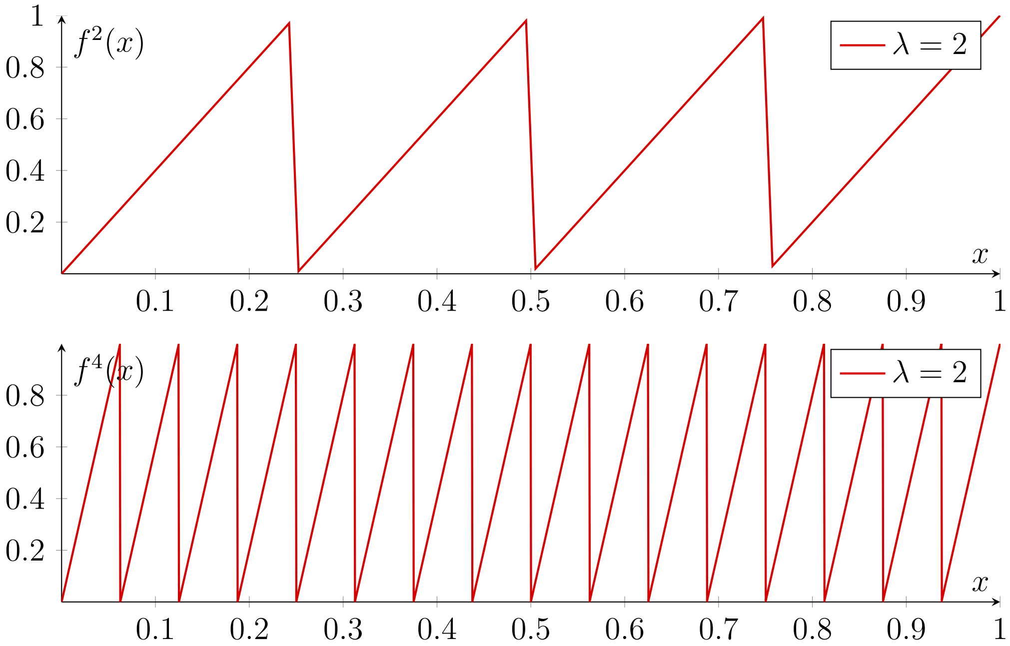
$$1/8 \to 1/4 \to 1/2 \to 1 \to 1\ldots$$

Т.о. у отображения существует бесконечное (счетное) множество неустойчивых периодических орбит.

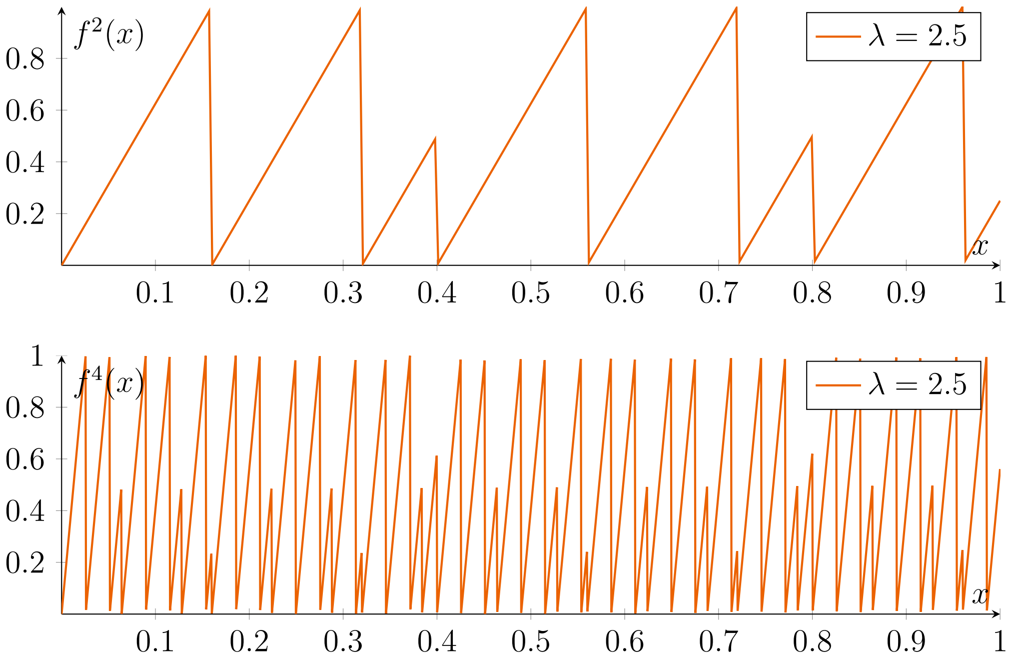
Итак, при $\lambda = 2$ имеем



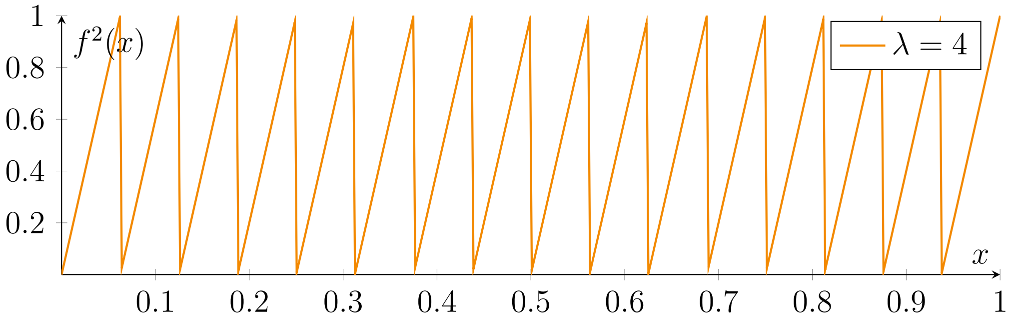
Квадрат и четвёртая степень отображения при том же λ

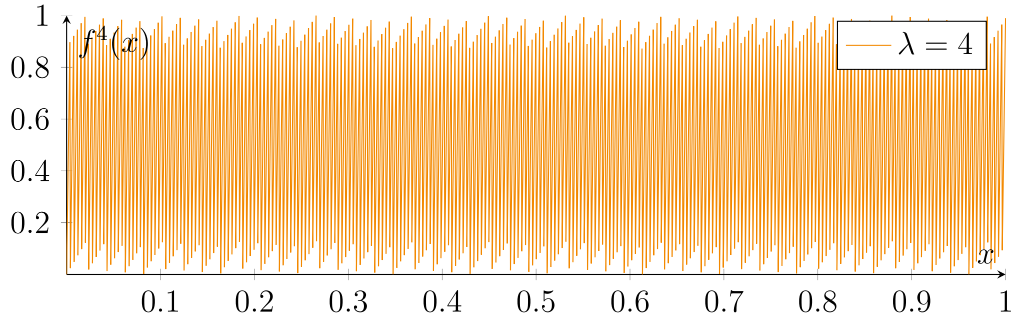


Квадрат и четвёртая степень отображения при $\lambda = 2.5$



Квадрат и четвёртая степень отображения при $\lambda = 4$





Видим после нескольких итераций, что ответ 2^n.

Таким образом, несмотря на простоту задачи, в ней много что можно изучить, меняя либо степень функции, либо сам параметр.