# Разные задачи (часть 3).

1. На сторонах $BC$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ взяты точки $M$ и $N$ соответственно. Диагональ $BD$ пересекает стороны $AM$ и $AN$ треугольника $AMN$ соответственно в точках $E$ и $F$, разбивая его на две части. Докажите, что эти части имеют одинаковые площади тогда и только тогда, когда точка $K$, определяемая условиями $EK||AD$, $FK||AB$, лежит на отрезке $MN$.

2. На стороне $AB$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки $K$ и $L$ (точка $K$ лежит между $A$ и $L$), а на стороне $CD$ взяты точки $M$ и $N$ (точка $M$ между $C$ и $N$). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ – вписанный четырехугольник, то и $ADML$ тоже вписан.

3. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$ расположена окружность $\omega$ с центром $I$, касающаяся отрезков $AB, CD$ и $DA$. Окружность, описанная около треугольника $BIC$, вторично пересекает сторону $AB$ в точке $E$. Докажите, что прямая $CE$ касается окружности $\omega$.

4. Окружность с центром в точке $I$ вписана в четырёхугольник $ABCD$. Лучи $BA$ и $CD$ пересекаются в точке $P$, а лучи $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $Q$. Известно, что точка $P$ лежит на окружности $\omega$, описанной около треугольника $AIC$. Докажите, что точка $Q$ тоже лежит на окружности $\omega$.

5. Окружность $\omega$ описана около остроугольного треугольника $ABC$. На стороне $AB$ выбрана точка $D$, а на стороне $BC$ – точка $E$ так, что $AC \parallel DE$. Точки $P$ и $Q$ на меньшей дуге $AC$ окружности $\omega$ таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи $QA$ и $PC$ пересекают прямую $DE$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180°$.

6. Пусть $O$ – центр окружности $\Omega$, описанной около остроугольного треугольника $ABC$. На дуге $AC$ этой окружности, не содержащей точку $B$, взята точка $P$. На отрезке $BC$ выбрана точка $X$ так, что $PX \perp AC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $BXP$, лежит на окружности, описанной около треугольника $ABO$.

7. Дан треугольник $ABC$, в котором $\angle A = \angle C = 30°$. На его сторонах $AB, BC$ и $AC$ выбраны точки $D, E$ и $F$ соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60°$. Периметр треугольника $ABC$ равен $p$, а периметр треугольника $DEF$ равен $p_1$. Докажите, что $p \leq 2p_1$.