Задача 1

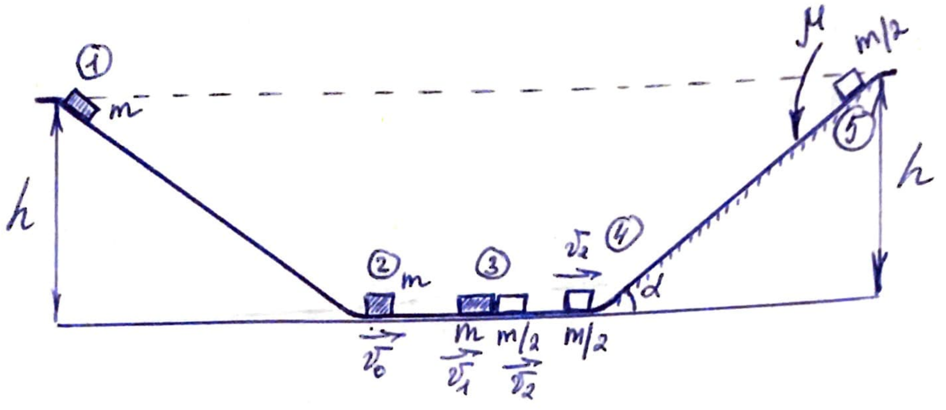
Дано:

$h_1 = h_2 = h$

$\mu = 0{,}36$

m; $m/2$

Найти: α - ?



Решение:

1) Используем закон сохр. энергии для ситуации ① - ②:

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

2) Запишем ЗСЭ и ЗСИ для ② - ③ - ④:
(абсолютно упругий удар)

ЗСЭ: $\dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{\frac{1}{2}mv_2^2}{2}$

ЗСИ: $mv_0 = mv_1 + \frac{1}{2}mv_2$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0^2 = v_1^2 + \frac{1}{2}v_2^2; \\ v_0 = v_1 + \frac{1}{2}v_2; \end{cases} \quad - \begin{cases} v_0^2 = v_1^2 + \frac{1}{2}v_2^2; \\ v_0^2 = v_1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot v_1\cdot v_2 + \frac{1}{4}v_2^2; \end{cases}$$

$$0 = \frac{1}{4}v_2^2 - 2\cdot\frac{1}{2}v_1 v_2$$

$$v_1\cdot v_2 = \frac{1}{4}v_2^2$$

$$4v_1 = v_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = v_1 + \frac{1}{2}v_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = v_1 + \frac{1}{2}v_2$$

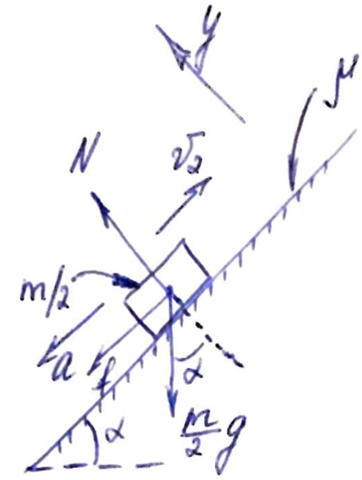
$$v_0 = v_1 + \frac{1}{2}\cdot 4v_1 \qquad\qquad v_0 = \frac{1}{3}v_0 + \frac{1}{2}v_2$$

$$v_0 = v_1 + 2v_1 \qquad\qquad \frac{2}{3}v_0 = \frac{1}{2}v_2$$

$$v_1 = \frac{1}{3}v_0 \qquad\qquad v_2 = \frac{4}{3}v_0$$

Задача 1 прод-ние.

3) Запишем II закон Ньютона для $m/2$ шайбы:



$$\vec{N} + \vec{f} + \frac{1}{2}m\vec{g} = \frac{1}{2}m\vec{a}$$

oy: $N - \frac{1}{2}mg\cdot\cos\alpha = 0$

$$N = \frac{1}{2}mg\cdot\cos\alpha$$

$$f = \mu N = \mu\cdot\frac{1}{2}mg\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\mu mg\cos\alpha.$$

4) Шайба с массой $m/2$ должна „проехать" на высоту h и расстояние $|\vec{s}| = s = \frac{h}{\sin\alpha}$

Работа трения равна $A_f = f\cdot s\cdot\cos\angle(\vec{f};\vec{s}) =$
$= f\cdot s\cdot\cos 180^\circ = -f\cdot s$

Запишем ЗСЭ для ④-⑤ (включая механическую):

$$\Delta E = E_5 - E_4$$

$$A_f = \frac{1}{2}mgh - \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{2}$$

$$-f\cdot s = \frac{1}{2}mgh - \frac{m\cdot\frac{16}{9}v_0^2}{4}$$

$$-\frac{1}{2}\mu mg\cdot\cos(\alpha)\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}mgh - \frac{4}{9}m\cdot 2gh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{tg\alpha} = \frac{7}{9} \Rightarrow tg\alpha = \frac{9}{7}\mu = \frac{9}{7}\cdot 0{,}36 = \frac{81}{175}$$

Ответ: $\alpha = arctg\left(\frac{81}{175}\right) \approx 25^\circ$

Задача 2

Дано:

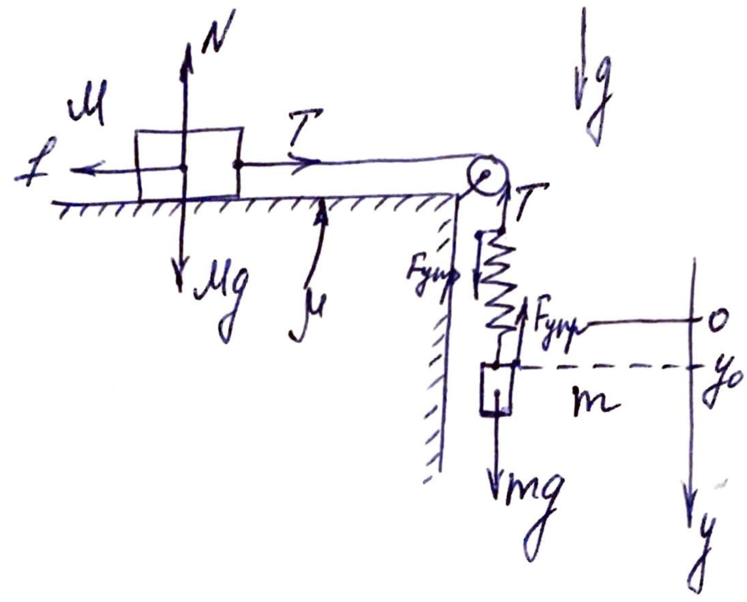
$M = 480$ г

$k = 10$ Н/м

$m = 100$ г

$\tau = \frac{\pi}{30}$ с

Найти: μ - ?



Решение:

1) $N = Mg$

$f = \mu N = \mu M g \quad f = T = F_{упр}$

2) Условие начала движение бруска массой M:

$T = f = F_{упр} = k y_0 = \mu M g$

3) Найдем зависимость $y(\tau)$:

По второму з. Ньютона: $ma = my'' = mg - ky$

с начальными условиями: $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = v(0) = 0 \end{cases}$

y' и y'' - производные по времени.

4) Сделаем замену переменных: $z = y - \frac{mg}{k}$:

$y = z + \frac{mg}{k}$

$my'' = mg - ky$

$y'' = g - \frac{ky}{m}$

$\left(z + \frac{mg}{k}\right)'' = g - \frac{k}{m}\cdot\left(z + \frac{mg}{k}\right)$

$\left(z' + \left(\frac{mg}{k}\right)'\right)' = g - \frac{k}{m}z - g$

$(z' + 0)' = -\frac{k}{m}z$

$z'' + \frac{k}{m}z = 0 \quad (*)$

5) Заметим, что $z'' + \frac{k}{m}z = 0$ и есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$z'' + \frac{k}{m}z = 0$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$: $z'' + \omega^2 z = 0$, Задача 2 прод-ние

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – циклическая частота.

6) Учитывая $\underset{(t=0)}{z(0)} = -\frac{mg}{k}$ и $z'(0) = v(0) = 0$

то решение этого уравнения (*) принимает вид $z(t) = -\frac{mg}{k} \cdot \cos(\omega \cdot t) = -\frac{mg}{k} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$

7) Переходим от z к y:

$$z = y - \frac{mg}{k}$$

$$y = z + \frac{mg}{k}$$

$$y(t) = \frac{mg}{k} + z(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) =$$

$$= \frac{mg}{k}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right]$$

8) Условие начала движения бруска:

$$ky_0 = \mu Mg$$

$$y_0 = \frac{mg}{k}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \tau\right)\right]$$

$$\mu Mg = mg\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \tau\right)\right]$$

$$\mu = \frac{m}{M}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, \tau\right)\right] = \frac{0{,}1}{0{,}48}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{10}{0{,}1}} \cdot \frac{\pi}{30}\right)\right]$$

$$\approx 0{,}10$$

Ответ: $\mu = 0{,}10$.

Задача 3.

Дано:

$H = 1м$

$m = 20г = 0,02кг$

$g = 10 м/с^2$

Найти: ΔU - ?

Решение:

1) Т.к. газ одноатомный, то $i = 3$.

2) Запишем I закон термодинамики:

$$\Delta Q = \Delta U + A,$$

A – работа газа

ΔU – изм. внутр. энергии газа.

ΔQ – теплота, которая равна нулю в этом случае.

3) $\Delta Q = 0$:

$\Delta U + A = 0$ В этом случае: адиабатический процесс

4) $\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T$

5) Запишем уравнения Клапейрона - Менделеева для начального и конечного состояния газа:

$$\begin{cases} pV = \nu RT \\ (p + \Delta p)(V - \Delta V) = \nu R(T + \Delta T) \end{cases}$$

При опускании поршня вниз у газа $p\uparrow$ $V\downarrow$ и $T\uparrow$ $(\Delta p, \Delta V, \Delta T > 0)$

$$(p + \Delta p)(V - \Delta V) = \nu R(T + \Delta T)$$

$$pV - p\Delta V + \Delta p V - \cancel{\Delta p \Delta V}^{0} = \nu RT + \nu R\Delta T$$

6) Δp и ΔV - малые величины, то $\Delta p \Delta V$ - бесконечно малая величина и ею можно пренебречь.

Тогда: $$\begin{cases} pV - p\Delta V + \Delta pV = \nu RT + \nu R\Delta T \\ -\ pV = \nu RT \end{cases}$$

$$\Delta pV - p\Delta V = \nu R\Delta T$$

Задача 3. прод-ние

7) $\Delta p V - p \Delta V = \nu R \Delta T$ p и V – начальные давление и объём газа.

8) Запишем условия равновесия поршня массой M в начальном и конечном состояниях:

$$\begin{cases} Mg + p_0 S = pS & (*) \\ (M+m)g + p_0 S = (p+\Delta p)\cdot S & (**) \end{cases}$$ где

S – площадь поршня

p_0 – атмосферное давление.

Из (*) и (**) $\Rightarrow$ $mg = \Delta p S$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R \Delta T = \frac{i}{2}(\Delta p V - p\Delta V)$$

$$mg = \Delta p S \quad | \cdot H$$

$$mgH = \Delta p \cdot V$$

Из первого закона термодинамики, т.к. газ теплоизолирован, то

$$\Delta U = p \cdot \Delta V$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}(\Delta p V - p\Delta V) = \frac{i}{2}(mgH - \Delta U)$$

$$\left(1 + \frac{i}{2}\right)\Delta U = \frac{i}{2} mgH$$

$$\Delta U = \frac{i}{2+i} mgH = \frac{3}{2+3} mgH = \frac{3}{5} mgH =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot 0{,}02 \cdot 10 \cdot 1 \text{ (Дж)} = 0{,}12 \text{ Дж} = 120 \text{ мДж}$$

<u>Ответ:</u> $\Delta U = 120$ мДж

Задача 4.

Дано:

$q = 1$ мкКл

$L = 1$ мГн

$R = 4$ Ом

$\mathcal{E} = 6{,}0$ В

$r = 1$ Ом

Найти: U – ?

Решение:

1) Рассмотрим момент времени, когда напряжение на катушке равно U. Обозначим I_L, I_R и I_r силы токов, текущих в этот момент через катушку, резистор и источник, соответственно.

2) По закону электромагнитной индукции:

$$U = L \cdot \frac{\Delta I_L}{\Delta t},$$

где ΔI_L – изменение за малое время Δt силы тока, текущего через катушку.

3) По закону Ома для однородного участка цепи:

$$U = I_R \cdot R.$$

4) По закону Ома для участка цепи, содержащего $\mathcal{E}$:

$$U = \mathcal{E} - I_r \cdot r.$$

5) По первому правилу Кирхгофа $I_r = I_L + I_R$.

6) $U = \mathcal{E} - I_r \cdot r = \mathcal{E} - (I_L + I_R) \cdot r = \mathcal{E} - \left(I_L + \frac{U}{R}\right) \cdot r \quad (*)$

7) $L \cdot \Delta I_L = U \cdot \Delta t = I_R \cdot R \cdot \Delta t = R \cdot \Delta q$,

где $\Delta q = I_R \cdot \Delta t$ – заряд, протекший через резистор R за время Δt.

8) Т.к. до замыкания ключа ток через катушку отсутствовал, а к рассматриваемому моменту времени стал равным I_L, то $L I_L = Rq$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I_L = \frac{Rq}{L} \quad (**)$$

9) Из $(**)$ и $(*)$ $\Rightarrow$ $U = \mathcal{E} - \left(\frac{Rq}{L} + \frac{U}{R}\right) \cdot r$.

10) Находим U: $U = \frac{R}{R+r}\left(\mathcal{E} - \frac{R \cdot r \cdot q}{L}\right)$.

$$U = \frac{R}{R+r}\left(\mathcal{E} - \frac{R \cdot r \cdot q}{L}\right) = \frac{4}{4+1}\left(6 - \frac{4 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}\right) = \frac{8}{5} (В) = 1{,}6 \text{ В}$$

Ответ: $U = 1{,}6$ В

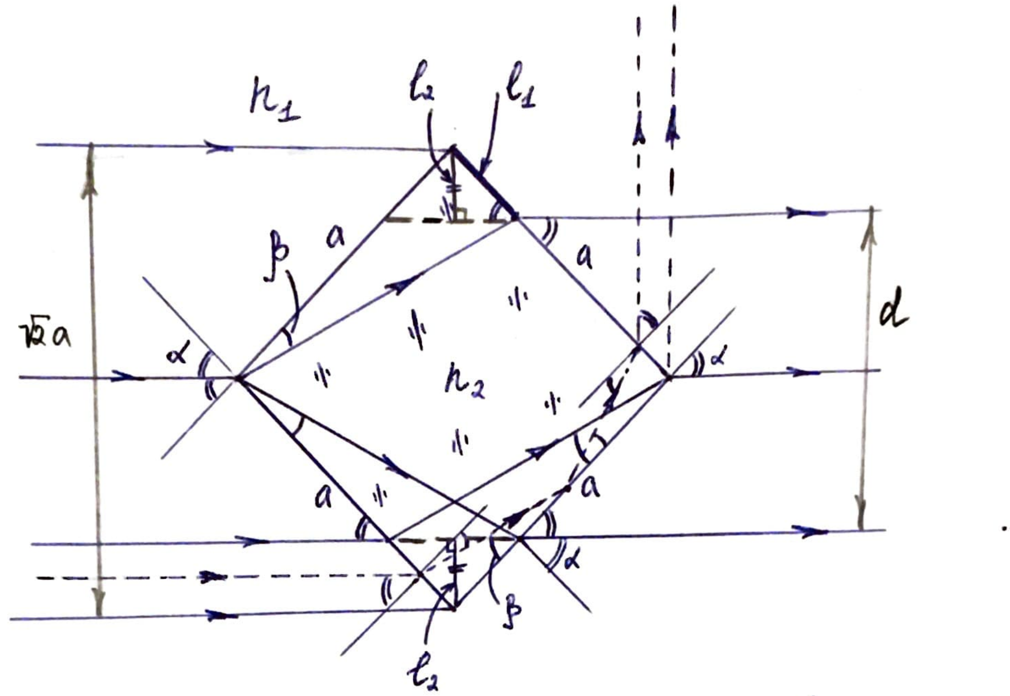
Задача 5

Дано:

$a = 7{,}5$ см

$n = 1{,}5 \equiv n_2$

Найти: d



Решение:

1) Заметим, что некоторые лучи света (пунктиром нарисованы) будут полностью отражаться в стеклянной призме и выходить уже, преломляясь, перпендикулярно начальному направлению.

2) Ширина входящего пучка: $\sqrt{2}\cdot a$, выходящего d:

$d = \sqrt{2}a - 2l_2$

3) Угол α — угол падения луча, β — угол преломления из n_1 в n_2 среду. И наоборот угол β — угол падения, α — угол преломления из n_2 в n_1 среду. $\alpha = 45^\circ$

4) $n_1 \approx 1$ (воздух)

$n_2 \equiv n = 1{,}5$ (стекло)

5) По закону Снеллиуса:

$$n_1 \cdot \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{1{,}5} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\beta \approx 28^\circ$$

6) Найдем предельный угол θ: $\theta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \approx 42^\circ$ (т.к. луч из $n_2 \to n_1$ среду).

7) Т.к. $90^\circ - \beta > \theta$ ($(90-\beta)$ — угол падения в среде n_2), то некоторые лучи будут полностью отражаться в среде n_2 (стекло) (лучи пунктиром синим цветом)

Задача 5 прод-ние.

8) Заметим, что:

$$\begin{cases} tg\beta = \frac{l_1}{a} & (l_1 \text{ на рис.}) \\ \sin\alpha = \frac{l_2}{l_1} \end{cases}$$

$$tg\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (\text{пункт } 5)$$

9) Найдем d:

$$l_2 = l_1 \cdot \sin\alpha = a \cdot tg\beta \cdot \sin\alpha = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} \cdot \sin\alpha$$

$$d = \sqrt{2} a - 2l_2 = \sqrt{2} a - 2 \cdot a \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} \cdot \sin\alpha =$$

$$= \sqrt{2} a - a \cdot \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt{1-\frac{2}{9}}}\right) =$$

$$= a\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}}\right) = a \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{7}}\right) = \left(\frac{7\sqrt{2} - 2\sqrt{7}}{7}\right) a.$$

При $a = 7{,}5$ см:

$$d = \left(\frac{7\sqrt{2} - 2\sqrt{7}}{7}\right) \cdot 7{,}5 \text{ (см)} \approx 4{,}9 \text{ см}$$

<u>Ответ</u>: $d = 4{,}9$ см