Движение. Геометрические экстремумы.

Задачи, помеченные *курсивом* разбираются в классе.

1. Продолжения боковых сторон AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке S. Докажите, что окружности, описанные около $\triangle ASC, \triangle BDS$ пересекаются в центре окружности, описанной около данной трапеции.

   Указание: Окружности симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB.

2. *Точки M и N симметричны вершине C треугольника ABC относительно прямых, содержащих биссектрисы его углов A и B. Докажите, что точка P касания стороны AB с вписанной в треугольник ABC окружностью является* серединой отрезка MN.

3. *В окружность вписаны два правильных $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$. Пусть A_2 — точка пересечения BC и B_1C_1, B_2 - точка пересечения CA и C_1A_1, C_2 — точка пересечения AB и A_1B_1. Докажите, что $\triangle A_2B_2C_2$ — правильный.*

4. *Противоположные вершины параллелограмма $ABCD$ принадлежат прямым, содержащим противоположные стороны другого параллелограмма $MNPQ$. Докажите, что эти параллелограммы имеют общий центр.*

5. *На гипотенузе прямоугольного треугольника вне его построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата, если сумма длин катетов m.*

6. *Точка Торричелли (точка Ферма): на сторонах остроугольного треугольника ABC извне построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что:*

   1) *Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны, а угол между любыми двумя из них равен* $60°$.

   2) *Три окружности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в некоторой точке O.*

   3) *Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 также пересекаются в точке O.*

   4) *Все стороны треугольника ABC видны из точки O под равными углами.*

   5) *Точка O является той точкой плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC принимает наименьшее значение.*

7. *Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Докажите, что можно выбрать на стороне AB точку C_1, на стороне BC – точку A_1, а на стороне AC – точку B_1 таким образом, чтобы длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ были равны отрезкам MA, MB и MC.*

8. На сторонах треугольника ABC извне построены правильные треугольники ABM и BCP. Точки K, E — середины AP, MC соответственно. Докажите, что $\triangle BKE$ - правильный.

   Указание: Сделайте поворот на $\frac{\pi}{3}$ относительно точки B.

9. *Даны две квадрата $ABCD$ и $DEFG$, внутренние области которых не имеют общих точек, а границы пересекаются только по точке D. Найдите угол между прямой, содержащей медиану DM треугольника CDG, и прямой AE.*

10. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

    Указание: Сделайте поворот на $\frac{\pi}{2}$ относительно точки A.

11. *Окружности S_1 и S_2 радиуса 1 касаются в точке A. Центр O окружности S радиуса 2 принадлежит S_1. Окружность S_1 касается S в точке B. Докажите, что AB проходит через точку пересечения S_2 и S.*

12. На плоскости дан выпуклый четырехугольник. Найдите точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.

13. *Внутри угла дана точка M. Найдите на сторонах угла точки A и B (по одной на каждой стороне) такие, что периметр треугольника MAB наименьший.*

14. Внутри угла даны две точки M и N. Найдите на сторонах угла точки A и B (по одной на каждой стороне) такие, что периметр четырехугольника (не обязательно выпуклого) с вершинами M, N, A, B наименьший.

    Указание: см. предыдущую задачу.

15. *На одной стороне острого угла даны точки A и B. Найдите на другой его стороне точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.*

    Указание: точка C – точка касания окружности с хордой AB с другой стороной угла.

16. *Докажите, что высоты треугольника являются биссектрисами углов ортотреугольника.*

17. *Пусть A_1, B_1, C_1 – основания высот остроугольного треугольника ABC. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется ортотреугольником треугольника ABC. Докажите, что ортотреугольник — треугольник наименьшего периметра такой, что его вершины лежат на сторонах треугольника ABC.*

18. Поворот с центром O переводит прямую l_1 в прямую l_2, а точку A_1, лежащую на прямой l_1, — в точку A_2. Докажите, что точка пересечения прямых l_1 и l_2 лежит на описанной окружности треугольника A_1OA_2.

    Указание: признак вписанного четырехугольника.

19. *Точки K и L — середины сторон AB и BC правильного шестиугольника $ABCDEF$. Отрезки KD и LE пересекаются в точке M. Площадь треугольника DEM равна* 12. *Найдите площадь четырёхугольника $KBLM$.*

    Ответ: 12.

20. Точка O — центр круга, описанного около треугольника ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны точке O относительно сторон треугольника ABC. Докажите, что все высоты треугольника $A_1B_1C_1$ проходят через точку O, а все высоты

треугольника ABC проходят через центр круга, описанного около треугольника $A_1B_1C_1$. Для этого докажите, что BB_1, AA_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, являющейся центром симметрии, переводящей $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$.

21. *Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка O так, что $\angle OCD = \angle OAD$. Докажите, что $\angle OBC = \angle ODC$.*

22. Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D — в точке N. Докажите, что $|AB + CD - BC - AD| = 2MN$.

    Указание: примените свойство касательной несколько раз.

23. *Деревни A и B разделены рекой, берега которой параллельны. Где на реке нужно поставить мост, чтобы путь из одной деревни в другую был наименьшим? (мост перпендикулярен берегам реки)*

24. Деревни A и B разделены двумя параллельными реками разной ширины. На каждой реке нужно поставить по мосту так, чтобы путь из одной деревни в другую был наименьшим (мосты перпендикулярны берегам).

    Указание: см. предыдущую задачу.

25. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы от каждой из них на расстоянии 1 находилось ровно 3 точки.