Кубок ЛФИ

11.s03.epilogue

Постскриптум — место в письме, которое является главным,
но притворяется второстепенным.
Ашот Наданян

Постскриптум

Мэри каждый день ходит из пункта ДОМ в пункт МЕРЧ и обратно. Так как обратно она идет с Мерчом, её скорость меньше.

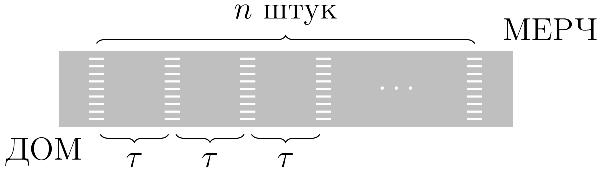
Пункты ДОМ и МЕРЧ находятся по разные стороны Пути, вдоль которого расположены n равноудалённых светофоров. Известно, что все светофоры синхронизированны, то есть меняют цвет одновременно. Светофоры светят красным в течение времени $t_к$, зелёным в течение времени $t_з$.

Мэри проходит расстояние между соседними светофорами за время τ. Известно, что она успевает пройти расстояние от первого до последнего светофора за время меньшее, чем его период, то есть $\tau(n-1) < t_к + t_з$.

Каждый день Мэри отправляется в Путь в случайное время. Мэри следует правилам дорожного движения ~~что и вам советуем~~ и не переходит дорогу на красный. При этом она всегда выбирает маршрут, на котором время ожидания минимально, и записывает это время в дневник ~~чтобы не забыть~~.

Вам предлагается дневник Мэри. К сожалению, ~~от времени чернила выцвели~~ данные в дневнике перемешались и идут *не по порядку*. Из него определите:

1. *(2 балла)* количество светофоров n,
2. *(2 балла)* время $t_к$, в течение которого светофоры светят красным,
3. *(2 балла)* время $t_з$, в течение которого светофоры светят зеленым,
4. *(2 балла)* время τ_1, в течение которого Мэри идёт между двумя ближайшими светофорами без Мерча,
5. *(2 балла)* время τ_2, в течение которого Мэри идёт между двумя ближайшими светофорами, нагруженная Мерчом.

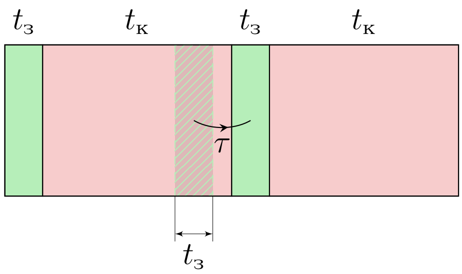


Вы можете скачать дневник Мэри в форматах csv, excel и pdf.

Автор задачи: Паша Шишкин

Решение

Для начала определимся с «языком» на котором будет решение. Нарисуем два цикла светофора (см. рис.). Если Мэри оказывается на красном, заштрихованном зелёным участке, она идёт к следующему светофору. При этом она ждёт 0 секунд, так как на новом светофоре будет зелёный свет. Тогда будем считать этот участок эффективно зелёным.



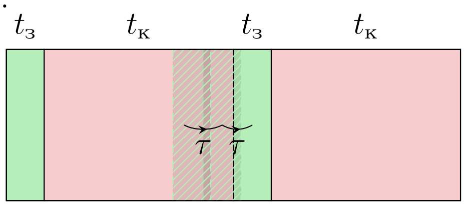
То есть образ «зелёного» тоже «зелёный» в некотором смысле. Очевидно, если светофоров n, промежутков между ними ровно $n-1$, тогда есть $(n-1)$ образ. Из условия

$$(n-1)\tau < t_к + t_з$$

получаем, что эти образы не могут уйти за пределы первого таймлайна. Под плотностью вероятности будем понимать вероятность попасть в некоторую секунду. Такое «дискретное» определение корректно, так как светофор светит дискретно по времени (показывает только номер секунды). Рассмотрим некоторые случаи.

1 случай. $\tau < t_з$. Как видно из картинки, в этом случае будет длинный зелёный участок длины

$$(n-1)\tau + t_з.$$



Тогда в распределении плотности вероятности будет большой пик в нуле (при попадании в $t_з$) и постоянное значение для времён от 0 до $t_к - (n-1)\tau$. Возможно, что

$$t_к - (n-1)\tau < 0.$$

Тогда Мэри всегда ждёт 0 секунд.

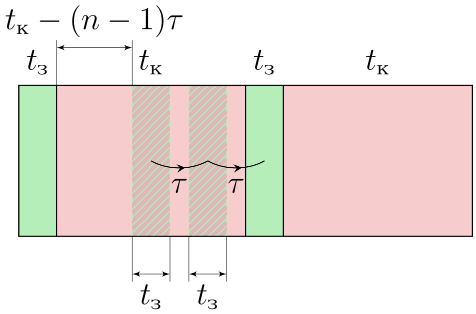
2 случай. $t_з < \tau$. Самый интересный случай!

1. $(n-1)\tau > t_к$. В этом случае будет $(n-1)$ красных участков длины

   $$\tau - t_з > 0.$$

   Эти участки *все одной длины* и нет других красных участков. Следовательно, все времена ожидания от 1 до $\tau - t_з$ равновероятны, у плотности вероятности пик в нуле, далее константа.

2. $(n-1)\tau < t_к$; $t_к - (n-1)\tau > \tau - t_з$. Теперь у нас есть участки разной длины: один участок длиной $t_к - (n-1)\tau$ и $(n-1)$ участков длиной $\tau - t_з$.



(a) Распределение плотности вероятности в нуле равно

$$p(0) = \frac{nt_з}{t_к + t_з},$$

так как зелёного света n участков, а сами участки не пересекаются.

(b) Распределение плотности вероятности имеет ступеньку длиной $t_к(n-1)\tau$, высотой $\dfrac{1\text{ сек}}{t_к + t_з}$, так как на больших временах получить это время можно только одним способом (попав в длинный участок).

(c) Распределение плотности вероятности имеет ступеньку длиной $\tau - t_з$, высотой $\dfrac{n\cdot 1\text{ сек}}{t_к + t_з}$, так как эти времена можно получить во всех n участках.

3. $(n-1)\tau < t_к$, $\tau > t_з$, $\tau - t_з > (n-1)\tau$, $(n-1)\tau < t_к$. Аналогично предыдущему пункту:

   (a) $p(0) = \dfrac{t_з n}{t_з + t_к}$

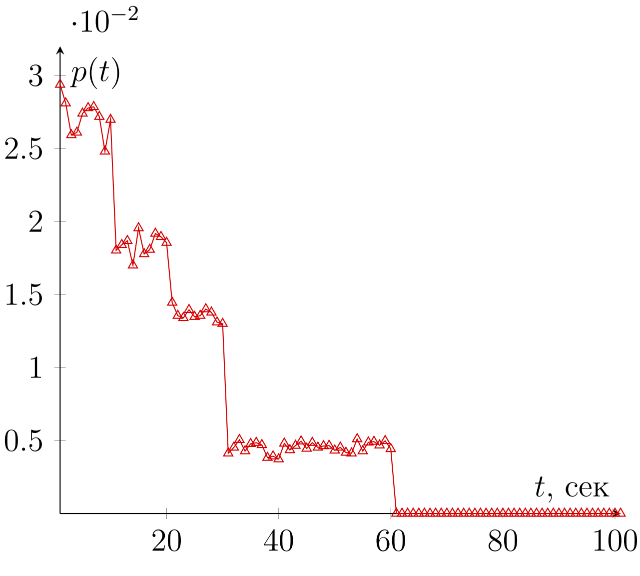
   (b) $p(t) = \dfrac{(n-1)\cdot 1\text{ сек}}{t_к + t_з}$; $t_к - (n-1)\tau < t^* \leq \tau - t_з$.

   (c) $p(t) = \dfrac{n\cdot 1\text{ сек}}{t_к + t_з}$; $0 < t \leqslant t_к - (n-1)\tau$.

   Здесь в пункте (b) $(n-1)$ способов, а не 1. Так как $(n-1)$ промежутков соответствующей длины.

Теперь для каждого времени посчитаем вероятность: для каждого времени посчитаем количество случаев и поделим на общее количество записей в дневнике.

Построим график. На нём **не рисуем** $p(0)$ так как оно будет слишком высоко.



Воспользуемся первым хинтом. Он нам говорит сравнить высоты, чтобы ~~проехать под мостом~~ узнать n

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{3}.$$

Здесь p_1 и p_2 — высоты двух правых ступенек на графике. Откуда получаем $n = 3$, что сходится со вторым хинтом.

В данной задаче будет два просумированных распределения плотности вероятности, описанных выше. Каждый скачок плотности вероятности отвечает скачку одного из распределений. Так как Мэри ходит одинаковое число раз туда и обратно, то эти распределения войдут с одинаковым весом. Как мы видим высоты ступенек соотносятся как $1:3:4:6$. Тогда относительный рост $1:2:1:2$ (первая подскочила на одну единицу, вторая — на $2, \ldots$), следовательно, последовательность скачков

$$t_к - 2\tau_?; \quad \tau_? - t_з; \quad t_к - 2\tau_?; \quad \tau_? - t_з.$$

Здесь $\tau_?$ равно либо τ_1, либо τ_2. Определим, куда какие τ относятся и составим необходимые уравнения.

1. 0 сек: $P(0) = \dfrac{nt_з}{t_з + t_к}$ — было показано выше.
2. 60 сек $= t_к - 2\tau_1$. Именно $t_к - 2\tau$ из-за высот; именно τ_1, так как $\tau_1 < \tau_2$. Следовательно, $t_к - 2\tau_1 > t_к - 2\tau_2$.
3. 30 сек $= \tau_2 - t_з$. Именно $\tau - t_з$, так как высота подскочила на 2 относительных единицы. Именно τ_2, так как $\tau_2 > \tau_1$, следовательно, $\tau - t_з > \tau_1 - t_з$ откуда следует, что скачок который связан с τ будет позже.
4. 20 сек $= t_к - 2\tau_2$. Из высоты видим, что это $t_к - 2\tau$, при этом τ_1 уже использовали.
5. 10 сек $= \tau_1 - t_з$. Всё что осталось.

Итого наша система

$$\begin{cases} \dfrac{3t_з}{t_к + t_з} = 0{,}272068; \\ t_к - 2\tau_1 = 60 \text{ сек}; \\ \tau_2 - t_з = 30 \text{ сек}; \\ t_к - 2\tau_2 = 20 \text{ сек}; \\ \tau_1 - t_з = 10 \text{ сек}; \end{cases} \implies \begin{cases} t_к = 99{,}93 \text{ сек}; \\ \tau_1 = 19{,}97 \text{ сек}; \\ \tau_2 = 39{,}97 \text{ сек}; \\ t_з = 9{,}97 \text{ сек} \end{cases}$$

Получили больше уравнений чем неизвестных, но это даже хорошо (одно из них линейно зависимо от других). Кроме того можно проверить справедливость рассуждений. После округления получаем

$$\begin{cases} t_к = 100 \text{ сек}; \\ \tau_1 = 20 \text{ сек}; \\ \tau_2 = 40 \text{ сек}; \\ t_з = 10 \text{ сек}; \end{cases}$$

С МЕРЧом Мэри ходит ВДВОЕ медленнее. МЕРЧА МНОГО — главный итог задачи!