Движение тела в гравитационном поле

Содержание

1 Введение

В этой статье будут рассмотрены и выведены формы движения объектов в различных гравитационных полях, а именно:

- Движение в поле, образованном одним массивным телом
- Движение в шаровом скоплении

Форма планет будет выводится, конечно, из закона всемирного тяготения:

$$\begin{gathered}\mathbf{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} \\ F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\end{gathered} \tag{1}$$

Формулами в системе (1) мы будем пользоваться в дальнейшем.

Также мы будем пользоваться понятием момента импульса:

$$\mathbf{L} \equiv [\mathbf{r}, \mathbf{p}] \tag{2}$$

2 Случай с одним массивным телом

Как известно, в поле силы тяжести тело обладает потенциальной энергией, которая является интегралом силы по расстоянию:

$$U(r) = \int F(r)dr = \int G\frac{m_1m_2}{r^2}dr = Gm_1m_2\int r^{-2}dr = -G\frac{m_1m_2}{r} + C \quad (3)$$

На бесконечности значение потенциальной энергии удобно принять за ноль, т. е. $U(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}$

Рассмотрим сохранение момента импульса. Для начала вспомним, что производная момента импульса по времени – момент силы. Величина момента силы считается следующим образом (т. е. как векторное произведение между радиус-вектором и силой, действующей на движущееся тело):

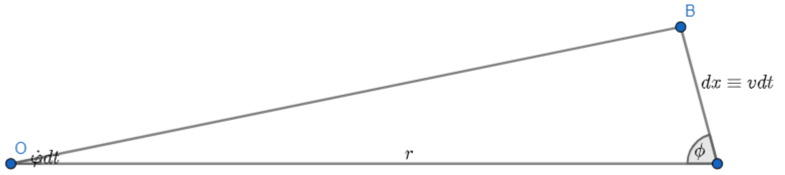
$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{F}|\sin\theta \quad (4)$$

Заметим, что, так как вектор силы коллинеарен радиус-вектору (см. формулу (1)), то $\theta = 0$. Из этого следует, что $\mathbf{L} = \mathrm{const}$, т. е. момент импульса сохраняется. Прежде всего это значит, что плоскость, в которой двигается объект, сохраняется.

Но также это значит, что значение момента импульса сохраняется. Из этого следует, что

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{p}|\sin\phi = rmv\sin\phi = 2m\cdot\frac{1}{2}r\frac{dx}{dt}\sin\phi \Rightarrow \frac{|\mathbf{L}|}{2m}dt = \frac{1}{2}rdx\sin\phi \quad (5)$$

Заметим, что в правой части получившейся формулы (5) получилась площадь треугольника, образованного радиус-вектором $\mathbf{r}$, бесконечно малым перемещением dx, совершённым за бесконечно малое время dt и углом ϕ между ними. Так как при бесконечно малых масштабах любая кривая является прямой, то получившийся бесконечно малый треугольник - это также бесконечно малый сектор произвольной фигуры с площадью dS:



Но также

$$dS = \frac{1}{2}r^2\sin\dot{\varphi}dt \quad (6)$$

Подставляя получившееся выражение в формуле (6) в формулу (5) получим следующее:

$$\frac{|\mathbf{L}|}{2m}dt = \frac{1}{2}r^2 \sin\dot{\varphi}dt = dS$$

Так как $\dot{\varphi}dt \to 0$, то формула получает следующий окончательный вид:

$$|\mathbf{L}| \equiv L = mr^2\dot{\varphi} \tag{7}$$

Займёмся теперь скоростью. Как известно, вектор скорости $\mathbf{v}$ можно разложить на нормальную и тангенциальную компоненты:

$$\begin{cases} v_n = \dot{r} \\ v_t = \dot{\varphi}r. \end{cases} \tag{8}$$

Используя систему (8), можно написать закон сохранения энергии (применяя, что масса тела, создающего гравитационное поле – M, а обращащегося вокруг него тела – m):

$$U(r) + E(r)_k = -G\frac{Mm}{r} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\dot{\varphi}^2r^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \text{const} = E \tag{9}$$

В формулу (9) подставляем значение из формулы (7):

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \tag{10}$$

Выразим из этого $\dot{r}$:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\right)} \tag{11}$$

Из формулы (7) можно выразить dt через $d\varphi$. Таким образом можно выразить dt из формулы (11):

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\right)}}$$

Из формулы (7):

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}dt$$

Значит,

$$d\varphi = \frac{L}{r^2\sqrt{2m\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\right)}}dr \tag{12}$$

Преобразуем подкоренное выражение в формуле (12):

$$E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} =$$

$$= E - \left(\left(\frac{GMm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}L} \right)^2 - \frac{GMm}{r} + \left(\frac{L^2}{\sqrt{2m}r} \right)^2 - \left(\frac{GMm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}L} \right)^2 \right) =$$

$$= E - \left(\left(\frac{GMm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}L} - \frac{L^2}{\sqrt{2m}r} \right)^2 - \left(\frac{GMm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}L} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{L^2}{2m} \left(\frac{2mE}{L^2} - \left(\frac{GMm^2}{L^2} - \frac{1}{r} \right)^2 + \left(\frac{GMm^2}{L^2} \right)^2 \right) = \cdots$$

$$\frac{GMm^2}{L^2} \equiv \alpha$$

$$\cdots = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{2mE}{L^2} - \left(\alpha - \frac{1}{r} \right)^2 + \alpha^2 \right) =$$

$$= \frac{L^2}{2m} \left(\alpha^2 \left(1 + \frac{2mE}{\alpha^2 L^2} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{r} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{L^2}{2m} \left(\alpha^2 \left(1 + \frac{2mE}{\frac{(GM)^2 m^4}{L^4} L^2} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{r} \right)^2 \right) = \qquad (13)$$

$$= \frac{L^2}{2m} \left(\alpha^2 \left(1 + \frac{2EL^2}{(GM)^2 m^3} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{r} \right)^2 \right) = \cdots$$

$$1 + \frac{2EL^2}{(GM)^2 m^3} \equiv \beta^2$$

$$\cdots = \frac{L^2}{2m} \left(\alpha^2 \beta^2 - \left(\alpha - \frac{1}{r} \right)^2 \right) = \frac{L^2}{2m} \alpha^2 \beta^2 \left(1 - \frac{\left(\alpha - \frac{1}{r} \right)^2}{\alpha^2 \beta^2} \right) =$$

$$= \frac{L^2}{2m} \alpha^2 \beta^2 \left(1 - \left(\frac{\alpha - \frac{1}{r}}{\alpha\beta} \right)^2 \right)$$

$$\frac{\alpha - \frac{1}{r}}{\alpha\beta} \equiv \gamma$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{L}{r^2 \sqrt{2m \frac{L^2}{2m} \alpha^2 \beta^2 \left(1 - \gamma^2 \right)}} dr = \frac{L}{L r^2 \alpha\beta \sqrt{1 - \gamma^2}} dr =$$

$$= \frac{dr}{\alpha\beta r^2 \sqrt{1 - \gamma^2}}$$

В получившейся формуле $\alpha(r) = \text{const}$ и $\beta(r) = \text{const}$, что не сказать о $\gamma(r)$. Тогда разумно будет вести интегрирование по $d\gamma$:

$$d\gamma = \left(\frac{\alpha - \frac{1}{r}}{\alpha\beta}\right)' dr = \frac{1}{r^2\alpha\beta}dr$$

Подставляя получившееся выражние в формулу (13), получаем:

$$d\varphi = \frac{d\gamma r^2\alpha\beta}{r^2\alpha\beta\sqrt{1-\gamma^2}} \Rightarrow \varphi(\gamma) = \int \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \arcsin\gamma + C$$

Выражая γ через φ, получаем:

$$\gamma = \sin\varphi - C = \frac{\alpha - \frac{1}{r}}{\alpha\beta} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{1}{\alpha - \alpha\beta\left(\sin\varphi - C\right)} = \frac{1}{\alpha\left(1 - \beta\left(\sin\varphi - C\right)\right)}$$

Сделаем следующие замены: $\dfrac{1}{\alpha} \equiv p$, $\beta \equiv \varepsilon$, $C = -\dfrac{\pi}{2}$. Тогда получим уравнение в полярных координатах, которое является уравнением кривой второго порядка (эллипс, гипербола, парабола):

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \tag{14}$$

Выводы

Как известно, конические сечения отличаются между собой одним параметром - ε, называемым *эксцентриситетом*. Также известно, что при $\varepsilon = 0$ будет окружность, при $0 < \varepsilon < 1$ – эллипс, при $\varepsilon = 1$ – парабола, при $\varepsilon > 1$ – гипербола. Следует заметить, что при $\varepsilon \to \infty$ гипербола вырождается в прямую. На основании этого можно вывести так называемые *космические скорости*.

Но сначала выведем формулу для более общего случая, в котором тело находится в перицентре орбиты произвольного эксцентриситета. Этот случай удобен тем, что $\dot{r} = 0 \Rightarrow \mathbf{r}\perp\mathbf{v} \Rightarrow v = r\dot{\varphi}$. При выводе мы будем пользоваться формулами (13, 9, 7):

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{(GM)^2m^3}$$

$$\frac{EL^2}{(GM)^2m^3} = \frac{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}}{(GM)^2m^3}L^2 = \left(\frac{m^2r^2\dot{\varphi}^2}{2mr^2(GM)^2m^3} - \frac{GMm}{r(GM)^2m^3}\right)m^2r^2\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \left(\frac{v^2}{2(GM)^2m^2} - \frac{1}{rGMm^2}\right)m^2r^2v^2 =$$

$$= \frac{r^2v^4}{2(GM)^2} - \frac{rv^2}{GM} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{2}; r \equiv \rho$$

$$\left(\frac{\rho v^2}{GM} - 1\right)^2 = \varepsilon^2 \Rightarrow v = \sqrt{(1+\varepsilon)\,\frac{GM}{\rho}}$$

Так как $\rho \equiv a(1-\varepsilon)$, где a – большая полуось, то оклнчательно получаем выражение для скорости (кроме параболы):

$$v = \sqrt{GM\frac{1+\varepsilon}{a(1-\varepsilon)}} \tag{15}$$

Из формулы (15) можно доказать *теорему о вириале*, которая гласит, что удвоенная полная энергия тела равна средней потенциальной:

$$\begin{gathered} E = -\frac{GMm}{a(1-\varepsilon)} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{GMm}{a(1-\varepsilon)} + \frac{GMm(1+\varepsilon)}{2a(1-\varepsilon)} = \\ = \frac{GMm(-1+\varepsilon)}{2a(1-\varepsilon)} = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow E = \frac{1}{2}U \end{gathered} \tag{16}$$

Первая космическая скорость — это та скорость, при которой орбита тела является круговой. Из формулы (15) значение первой космической скорости очевидно:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{17}$$

Вторая космическая скорость — это та минимальная скорость, при которой траектория тела будет незамкнутой. С ней всё немного сложнее, потому что при использовании формулы (15) знаменатель подкоренного выражения обращается в ноль. Но можно посчитать скорость в перицентре, а затем, отталкиваясь от закона сохранения энергии, доказать, что полученная формула верна для любого расстояния:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{18}$$

Выясним период обращения объекта по орбите с большой полуосью a и эксцентриситетом ε. Как известно, площадь эллипса $S = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$, а "площадную скорость"$\dot{S}$ можно вычислить из формул (5, 6):

$$
\begin{gathered}
T = \frac{S}{\dot{S}} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\frac{L}{2m}} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\frac{mr^2\dot{\varphi}}{2m}} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{a(1-\varepsilon)\sqrt{GM\frac{1+\varepsilon}{a(1-\varepsilon)}}} = \\
= \frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{GMa(1-\varepsilon^2)}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{a^3}{GM}
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Используя закон сохранения энергии и полученные формулы, можно вывести формулы зависимости скорости от расстояния, угла между радиус-вектором и касательной, а также, в частности, знаменитое уравнение Кеплера $M = E - \varepsilon \sin E$, которое применяется в орбитальной механике и астродинамике. Вывод всех этих многочисленных формул мы предоставляем читателю.

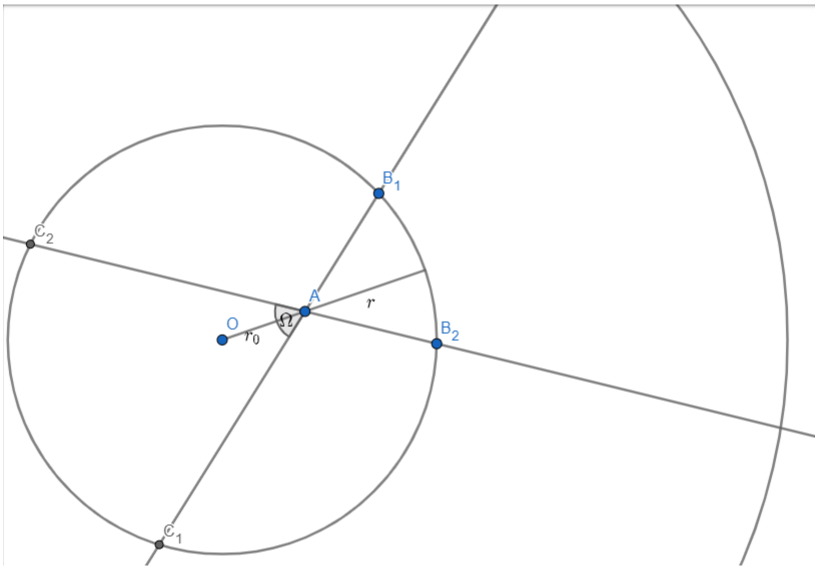
3 Движение тела в шаровом скоплении

Рассматривать движение тела в шаровом скоплении мы будем, исходя из того, что масса в шаровом скоплении распределена равномерно (что соответствует достаточно большому шаровому скоплению либо эллиптической галактике E0). Пусть радиус шарового скопления R, его масса - M.

Для начала рассмотрим следующую теорему. Пусть у нас есть однородный шар плотностью ρ и находящийся в нём объект на расстоянии r_0 от центра шара. Тогда равнодейтсвующая сил тяготения, дейтсвующих на данное тело массы m с точке, удалённый от центра шара на расстояние $r > r_0$, равна нулю.

Доказательство:

Рассмотрим "слои"на расстоянии r от центра и толщиной dh, расположенные на противоположных сторонах и стягивающие телесный угол Ω.



Тогда силы, действующие на точку, будут следующими:

$$F_1 = Gm\frac{\rho(r-r_0)^2 dh}{(r-r_0)^2}\frac{4\Omega}{\pi} = Gm\rho\frac{4\Omega}{\pi}dh$$
$$F_2 = Gm\frac{\rho(r+r_0)^2 dh}{(r+r_0)^2}\frac{4\Omega}{\pi} = Gm\rho\frac{4\Omega}{\pi}dh$$

Из этого следует, что равнодействующая $F = F_1 - F_2 = 0$, **что и тредовалось доказать**.

Из доказанной теоремы следует, что в шаровых скоплениях сила тяготения, дейтсвующая на точку массы m на расстоянии $r < R$, равна

$$\mathbf{F} = Gm\frac{m_0}{r^3}\mathbf{r} = Gm\frac{M\left(\frac{r}{R}\right)^3}{r^3}\mathbf{r} = \frac{GMm}{R^3}\mathbf{r} \tag{20}$$

Проведём замену $GR^{-3} \equiv \zeta$. Тогда закон тяготения в шаровых скоплениях будет выглядеть следующим образом (ζ здесь, можно сказать, локальная гравитационная постоянная):

$$\begin{gathered}\mathbf{F} = \zeta Mm\mathbf{r}\\ F = \zeta Mmr\end{gathered} \tag{21}$$

Из формулы (21) можно вывести зависимость потенциальной энергии:

$$U(r) = \int \zeta Mmr dr = \frac{1}{2}\zeta Mmr^2 + C \tag{22}$$

При $r = 0$ удобно C принять за ноль. Тогда зависимость потенциальной энергии выглядит следующим образом: $U(r) = \dfrac{1}{2}\zeta Mmr^2$

Считая аналогичным образом зависимость $d\varphi$ от dr (аналогично формулам 5 – 12), получаем

$$\begin{gathered}
d\varphi = \frac{L}{mr^2\sqrt{\frac{1}{m}\left(2E - \zeta Mmr^2 - \frac{L^2}{mr^2}\right)}}dr = \\
= \frac{L}{r^2\sqrt{m\left(2E - \zeta Mmr^2 - \frac{L^2}{mr^2}\right)}}dr = \frac{L}{Lr\sqrt{\frac{2Em}{L^2}r^2 - \frac{\zeta Mm^2}{L^2}r^4 - 1}}dr \\
\Rightarrow \varphi(r) = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{2Em}{L^2}r^2 - \frac{\zeta Mm^2}{L^2}r^4 - 1}} = \cdots \\
\frac{2mE}{L^2} \equiv \beta \\
\frac{\zeta Mm^2}{L^2} \equiv \alpha \\
r^2 \equiv x \Rightarrow dr = \frac{dx}{2r} \\
\cdots = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x - 1}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{\beta r^2 - 2}{r^2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} + C
\end{gathered} \tag{23}$$

Почему этот интеграл именно такой, будет рассмотрено в главе "Приложение".

Выразим из формулы (23) функцию $r(\varphi)$

$$\begin{gathered}
r(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}\sin 2\varphi - 2C}} = \\
= \sqrt{\frac{2}{\frac{2mE}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{2mE}{L^2}\right)^2 - 4\frac{\zeta Mm^2}{L^2}}\sin 2\varphi - 2C}} = \\
= \sqrt{\frac{2L^2}{2mE - \sqrt{4m^2E^2 - 4\zeta Mm^2L^2}\sin 2\varphi - 2C}} = \\
= \sqrt{\frac{\frac{L^2}{mE}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\zeta ML^2}{E^2}}\sin 2\varphi - 2C}} = \cdots
\end{gathered}$$

Пусть $C = -\frac{\pi}{4}$:

$$\dots = \sqrt{\frac{\frac{L^2}{mE}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\zeta M L^2}{E^2}}(2\cos^2\varphi - 1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{L^2}{mE}}{1 - 2\sqrt{1 - \frac{\zeta M L^2}{E^2}}\cos^2\varphi + \sqrt{1 - \frac{\zeta M L^2}{E^2}}}} = \dots$$

$$\sqrt{1 - \frac{\zeta M L^2}{E^2}} \equiv \gamma$$

$$\frac{L^2}{mE} \equiv \delta^2$$

$$\dots = \sqrt{\frac{\delta^2}{1 - 2\gamma\cos^2\varphi + \gamma}} = \sqrt{\frac{\frac{\delta^2}{1+\gamma}}{1 - 2\frac{\gamma}{1+\gamma}\cos^2\varphi}} = \dots$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{1+\gamma}} \equiv b$$

$$\sqrt{\frac{2\gamma}{1+\gamma}} \equiv \varepsilon$$

$$\dots = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi}}$$

Полученное выражение является уравнение эллипса в полярных координатах, где полюсом является геометрический центр эллипса. Таким образом, мы вывели, можно сказать, "первый закон Кеплера"для объекта, находящегося в центре шарового скопления:

Тело, находящееся в шаровом скоплении, двигается по эллипсу, в геометрическом центре которого находится центр масс шарового скопления

Выводы

Пусть у нас тело двигается по некоторому эллипсу с малой полуосью b и эксцентриситетом ε, при том оно находится на минимальном расстоянии (т. е. на расстоянии b). Такая ситуация удобна тем, что $\dot{r} = 0 \Rightarrow \mathbf{r} \perp \mathbf{v} \Rightarrow$

$v = r\dot{\varphi}$. Тогда выведем его скорость:

$$\varepsilon^2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{1+\gamma}} \Rightarrow \gamma = \frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2} \Rightarrow 1 - \frac{\zeta M L^2}{E^2} = \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2 + 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{E^2} = \frac{4}{\zeta M} \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2 + 4} = \left(\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\zeta M m r^2}{2}} \right)^2 =$$

$$= 4\left(\frac{rv}{v^2 + \zeta M r^2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{rv}{v^2 + \zeta M r^2} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{\zeta M}(2-\varepsilon^2)}$$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2}v^2 - \sqrt{\zeta M}(2-\varepsilon^2)rv + \zeta M r^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} = 0$$

$$v^2 - \sqrt{\zeta M} r \frac{2-\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} v + \zeta M r^2 =$$

$$= \left(v - \sqrt{\zeta M} r \frac{2-\varepsilon^2}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)^2 + \zeta M r^2 - \zeta M r^2 \frac{\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2 + 4}{4(1-\varepsilon^2)} = 0$$

$$v - \sqrt{\zeta M} r \frac{2-\varepsilon^2}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{\zeta M \frac{\varepsilon^4}{4(1-\varepsilon^2)}} r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\zeta M}{1-\varepsilon^2}} r$$

Так как $r \equiv b$, то скорость будет равна

$$v = \sqrt{\frac{\zeta M}{1-\varepsilon^2}} b \tag{24}$$

Заметим, что траектория тела будет всегда представлять собой эллипс, так как при приближении эксцентриситета к 1 скорость неограниченно возрастает (в реальности же размер шарового скопления ограничен). Таким образом, имеет смысл только **первая космическая скорость**:

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b = R \Rightarrow v = \sqrt{\zeta M} R \tag{25}$$

Вычислим также период обращения тела по такому эллипсу, пользуясь законом сохранения момента импульса:

$$\begin{aligned} T = \frac{S}{\dot{S}} = \frac{\pi b^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{2m}{L} = \frac{\pi b^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{2m}{mrv} = \\ = \frac{\pi b^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{b^2 \sqrt{\zeta M}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\zeta M}} \end{aligned} \tag{26}$$

Таким образом мы получили удивительный вывод – в шаровом скоплении период обращения тела по любой орбите постоянный!

Вывод остальных формул мы предоставляем читателю в качестве упраженения.

4 Приложение

Пусть у нас есть уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a < 0$. Тогда его можно представить в виде

$$-(-ax^2 - bx - c) = -(-a)\left(x - \frac{b - \sqrt{D}}{-2a}\right)\left(x - \frac{b + \sqrt{D}}{-2a}\right); D \equiv b^2 - 4ac$$

Тогда возьмём неопределённый интеграл от данного квадратного трёхчлена:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(-a)\left(x - \frac{b-\sqrt{D}}{-2a}\right)\left(x - \frac{b+\sqrt{D}}{-2a}\right)}} =$$

$$= \frac{2|a|}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(2ax + b - \sqrt{D}\right)\left(2ax + b + \sqrt{D}\right)}} = \cdots$$

$$2ax + b \equiv y \Rightarrow dx = \frac{dy}{2a}$$

$$\cdots = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\sqrt{D} - y\right)\left(\sqrt{D} + y\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dy}{\sqrt{D - y^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{y}{\sqrt{D}} + C = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C$$

На основании только что взятого интеграла возьмём следующий (при условии $c < 0$):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \cdots$$

$$x \equiv \frac{1}{y} \Rightarrow dx = -\frac{dy}{y^2}$$

$$\cdots = \int \frac{-\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c}} =$$

$$= -\int \frac{\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y^2}\sqrt{a+by+cy^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{cy^2+by+a}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2cy+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx+2c}{x\sqrt{b^2-4ac}} + C$$

На основании вышеизложенного и был взят интеграл из формулы (23)