Скорость как поворот

Обозначения

v — скорость

c — скорость света в вакууме

$\beta = \dfrac{v}{c}$ — скорость, выраженная в скоростях света

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — фактор Лоренца

Везде ct воспринимать как единый символ.

1 Введение

Обратим внимание, что между уравнениями специальной теории относительности и гиперболичесой геометрии есть некоторое сходство:

Релятивисткое сложение скоростей: $\beta = \dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$
Гиперболический тангенс суммы: $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1+\operatorname{th} x \operatorname{th} y}$

$\gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}$
Следствие гиперболического тождества $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{1}{1-\operatorname{th}^2 x}$

Интервал в СТО: $\Delta s^2 = \Delta ct^2 - \Delta r^2$
Основное гиперболическое тождество: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
Совпадения более, чем очевидны. И, глядя на все эти совпадения, возникает закономерный вопрос: случайны ли они? Или, может быть,

это следствие фундамента, на котором строится СТО? Если последнее верно, то разумно будет сделать вывод всех преобразований на основе гиперболической геометрии. Собственно, в этой статье я сделал данную попытку, а также рассмотрел случай равноускоренного движения, в котором вектор ускорения сонаправлен с вектором скорости (собственно, я упростил задачу с рассмотрения 3 пространственных и 1 временного измерения до рассмотрения пространства–времени с 1 пространственным и одним временным измерением)

2 Поворот

Заметим, что выражение $\Delta s^2 = \Delta ct^2 - \Delta r^2$ по сути задаёт метрику пространства-времени. Допустим, что $\Delta s = \text{const}$. Тогда заметим, что нам подходят пары $(\Delta ct, \Delta r)$ такие, что $c\Delta t = \Delta s \operatorname{ch} \vartheta$, $\Delta r = \Delta s \operatorname{sh} \vartheta$, где ϑ — некоторый параметр. Убедимся в справедливости:

$$\Delta ct^2 - \Delta r^2 = \Delta s^2(\operatorname{ch}^2 \vartheta - \operatorname{sh}^2 \vartheta) = \Delta s^2$$

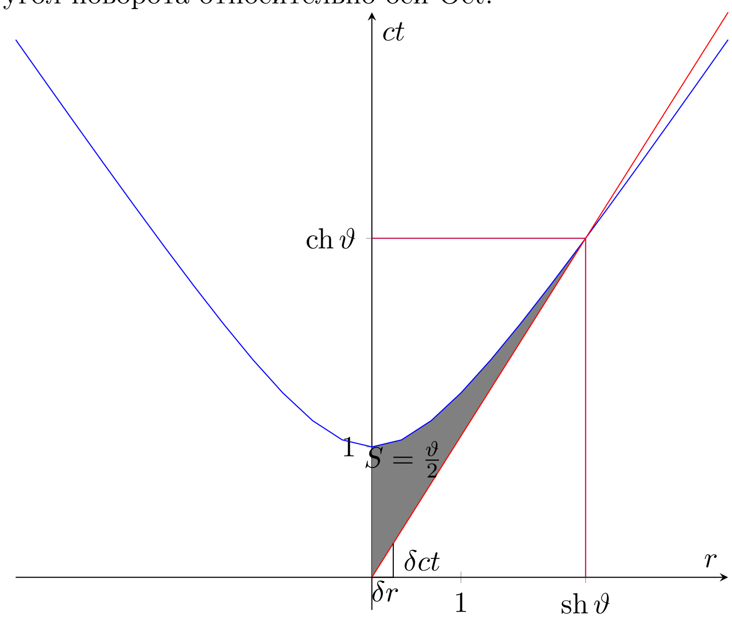
Но какой физический смысл несут проделанные нами манипуляции? Пусть есть два события A и B. Тогда Δs — это интервал между этими событиями и, так как он является аналогом расстояния, но в пространстве–времени, он одинаковый в любой системе отсчёта. В свою очередь, Δt — это временной промежуток между данными событиями в некоторой системе отсчёта, а Δr — пространственный. Таким образом, полученный результат означает, что Δt и Δrs зависят исключительно от некоторого параметра ϑ, причём эта зависимость выражается через гиперболические функции.

Посмотрим на пространство с обычной метрикой: $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Точно также введём две точки, только одну из точек зафиксируем в начале координат. Тогда кривая возможно расположений точки B при фиксированном δr будет описываться уравнением $x^2 + y^2 = r^2$, то есть банально уравнение окружности. В то же время пары (x, y) опываются парами $(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$, где ϑ — параметр, имеющий наглядный геометрический смысл: угол поворота относительно оси абсцисс.

Возвращаясь к нашим событиям A и B, зафиксируем событие A в начале координат. $(ct)^2 - r^2 = s^2$. Это, очевидно, уравнение гиперболы[1], у которых координаты (r, ct) выражаются как $(s \operatorname{sh}\vartheta, s \operatorname{ch}\vartheta)$. Сходство с

[1] Строго говоря, гипербола — это геометрическое место точек, у которых модуль *разности* расстояний до двух данных одинаково. Очевидно, что в нашем случае это место точек, равноудалённых от данной, что под определение гиперболы не подходит.

евклидовым случаем очевидно, так что разумно сказать, что и здесь ϑ — угол поворота относительно оси Oct.



3 Скорость. Релятивисткое сложение скоростей

Пусть мы запустили некоторое тело, которое полетело с постоянной скоростью. Тогда обозначим за событие A момент, когда мы запустили это тело, а за событие B — событие с координатами $(\delta r, \delta ct)$ (т. е. прошло некоторое время δct и тело пролетело расстояние δr в нашей системе отсчёта). Тогда скорость

$$\beta = \frac{\delta r}{\delta ct} = \frac{\delta s \operatorname{sh}\vartheta}{\delta s \operatorname{ch}\vartheta} = \operatorname{th}\vartheta$$

То есть, иными словами, скорость — это гиперболический тангенс поворота относительно оси Oct.

Отсюда релятивисткая формула сложения скоростей выводится самым естественным образом. В самом деле, пусть мы запустили тело 1 с некоторой скоростью β_1, а тело 1 (которое оказалось, например, ракетой) тут же выпустило тело 2 со скоростью β_2. В итоге тело 1 повёрнуто относительно нас (ведь мы покоимся) на угол $\vartheta_1 = \operatorname{arth}\beta_1$, а тело 2 повёрнуто

Гиперболой данную кривую я назвал исключительно из-за сходства с уравнением гиперболы в декартовых координатах.

относительно тела 1 на угол $\vartheta_2 = \operatorname{arth}\beta_2$. Значит тело 2 повёрнуто относительно нас на угол $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$, а его скорость относительно нас будет равна

$$\beta = \operatorname{th}\vartheta = \operatorname{th}(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \frac{\operatorname{th}\vartheta_1 + \operatorname{th}\vartheta_2}{1 + \operatorname{th}\vartheta_1 \operatorname{th}\vartheta_2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

Или

$$v = \beta c = \frac{\beta_1 c + \beta_2 c}{1 + \beta_1\beta_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}$$

4 Преобразования Лоренца

Представим, что теперь мы находимся в начале системы координат, а где-то произошло событие с координатами (r, ct). Повернёмся на некоторый угол φ. Вопрос: какие координаты (r', ct') будут у этого события после поворота?

Представим, что $\varphi = \phi_1 - \phi_2$, где ϕ_1 — угол между направлением на событие и осью Oct до нашего поворота, а ϕ_2 — после. Тогда получаем, что

$$\begin{cases} r' = s\operatorname{sh}\phi_2 = s\operatorname{sh}(\phi_1 + \varphi) = s(\operatorname{sh}\phi_1 \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{ch}\phi_1 \operatorname{sh}\varphi) = r\operatorname{ch}\varphi + ct\operatorname{sh}\varphi \\ ct' = s\operatorname{ch}\phi_2 = s\operatorname{ch}(\phi_1 + \varphi) = s(\operatorname{ch}\phi_1 \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{sh}\phi_1 \operatorname{sh}\varphi) = ct\operatorname{ch}\varphi + r\operatorname{sh}\varphi. \end{cases}$$

Теперь вернёмся к задаче о преобразованиях Лоренца. Задача выглядит следующим образом: в системе отсчёта K (предположим, это ракета, движущаяся в светлое будущее сквозь межзвёздную пустоту), которая летит относительно нас с некоторой скоростью v, произошло событие, координаты которого в той системе отсчёта (r, ct). Какие координаты этого события будут в нашей системе отсчёта?

Отметим, что когда мы оперировали поворотом, то представлялось, что $\phi_2 = \phi_1 + \varphi$, то есть если вспомнить вывод релятивисткой формулы скоростей, то событие имеет координаты (r, ct) в той системе отсчёта, в которой до начала поворота мы покоились, а затем сдвинулись так, что теперь эта система отсчёта двигается с некоторой скоростью. Соответственно, если рассматривать непосредственно задачу о преобразованиях Лоренца, то выходит, что мы повёрнуты относительно ракеты на угол $\varphi = \operatorname{arth}\dfrac{v}{c}$

Тогда очевидно, что

$$r' = r\operatorname{ch}\varphi + ct\operatorname{sh}\varphi = \frac{r}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} + \frac{ct\operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{r+ct\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = (r+vt)\gamma$$
$$ct' = ct\operatorname{ch}\varphi + r\operatorname{sh}\varphi = \frac{ct+r\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(ct+\frac{rv}{c}\right)\gamma \Rightarrow t' = \left(t+\frac{rv}{c^2}\right)\gamma$$

То, что точно также (только с заменой v на $-v$) выражается (r, ct) через (r', ct'), предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

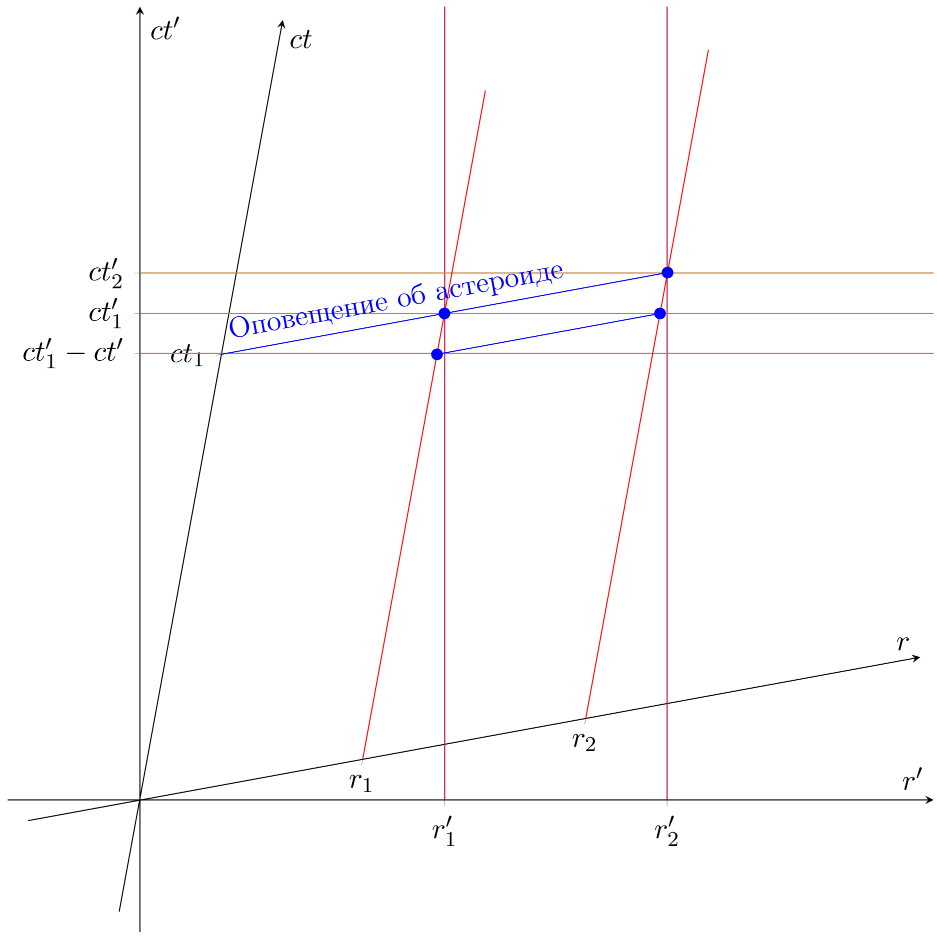
5 Релятивисткое сокращение длины и времени

В связи с этим хочется обсудить релятивисткие эффекты и начнём мы с сокращения длины. Для начала зададимся вопросом: что вообще значит измерить длину? Представим, что у нас опять же, есть ракета длиной l. Это значит, что в системе отсчёта этой ракеты пространственное расстояние между началом и концом ракеты будет равно l, а временное, естественно, равно нулю. То есть если в системе отсчёта ракеты произошло событие по всей ракете (например, произошло оповещение о пролетающем астероиде), то на конце ракеты оно будет иметь координаты (r_1, ct), а на начале — (r_2, ct), где $r_2 - r_1 = l$

Если данная ракета перемещается со скоростью v в нашей системе отсчёта, то её длина l' будет равна

$$l' = r'_2 - r'_1 = (r_2+vt)\gamma - (r_1+vt)\gamma = (r_2-r_1)\gamma = l\gamma$$

Осмыслим данный результат (хотя бы потому, что вроде как известно, что должно быть $l' \leqslant l$, в то время как получилось наоборот). Мы взяли событие включения света на начале ракеты и в конце ракеты и выяснили, какое расстояние между ними будет в нашей системе отсчёта. Но дело в том, что мы выяснили расстояние *только между этими событиями*, но не длину ракеты. Потому что в системе отсчёта ракеты эти события были одновременными, а в нашей системе отсчёта они таковыми не являются, что видно из рисунка.



Выясним, сколько будет продолжаться событие:

$$ct' = ct'_2 - ct'_1 = \left(ct_1 + \frac{r_1 v}{c}\right)\gamma - \left(ct_2 + \frac{r_2 v}{c}\right)\gamma = \frac{(r_2 - r_1)v\gamma}{c} = l\beta\gamma$$

Перенесём конец ракеты в момент оповещения об астероиде на ct' в прошлое в нашей системе отсчёта. Тогда, если в этот момент на всей ракете одновременно в её системе отсчёта произошло ещё какое-то событие, то событие на конце ракеты в нашей системе отсчёта будет иметь координаты $(r'_1 - \beta ct', ct'_1 - ct')$, а на начале — $(r'_2 - \beta ct', ct'_2 - ct')$, причём обратим внимание, что $ct'_2 - ct' = ct'_1$, то есть данное событие на начале ракеты и оповещение об астероиде на конце ракеты были одновременными. Тогда, если найти расстояние между оповещением об астероиде на конце ракеты и более ранним событием на начале ракеты, то мы найдём ту самую длину ракеты l'. Значит,

$$l' = r_2' - \beta ct' - r_1' = (r_2' - r_1') - \beta l \beta \gamma = l\gamma(1-\beta^2) = l\frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\gamma}$$

Рассмотрим теперь сокращение (да, очень удачное название, согласен) времени. Для этого обратимся снова к нашей ракете, а точнее, установленным на ней часам и двум событиям. Какие могут быть события у ракеты, пересекающей межзвёздное пространство? Можно выделить момент, когда она достаточно отдалилась от Солнца и момент, когда она приблизилась к цели достаточно близко. Путь между этими событиями часы насчитали время ct. Тогда координаты покидания Солнца — (r_1, ct_1), а приближения к звезде — (r_2, ct_2), причём $ct_2 - ct_1 = ct'$, $r_2 = r_1$, так как ракета в собственной системе отсчёта покоится.

С нашей же точки зрения между этими событиями прошло время

$$ct' = ct_2' - ct_1' = (ct_2 + r_2\beta)\gamma - (ct_1 + r_1\beta)\gamma = ct\gamma$$

Также обдумаем этот результат. Не нужно ли делать учитывать, например, различие в пространстве этих событий в нашей системе отсчёта или что-то другое? Конечно, нет. Когда мы рассматривали сокращение длины ракеты, то мы длину измеряли косвенным путём. Здесь же мы измеряем время именно между *событиями*, то есть измерения мы проводили прямые. Поэтому никаких поправок делать не нужно

6 Немного философии

Вы, наверное, заметили, что в подавляющем большинстве случаев я использую ct как единый символ и лишь иногда его разделяю на отдельные компоненты. Причём разделение происходит с помощью определения $\beta = v/c$ и мне ни разу не приходилось это разделение приводить, например, при выводе преобразований Лоренца. В связи с этим разумно сказать, что фундаментально вернее время измерять как раз-таки в метрах, ставя в соответствии промежутку Δt промежуток $c\Delta t$ или Δct. В итоге скорость будет измеряться в скоростях света, а предельная скорость будет равна 1 (и будет безразмерной). То есть фундаментальность скорости света будет видна, можно сказать, воочию. Да и тем более: если время — одно из измерений наряду с пространством, то снабжать его отдельной размерностью по сути настолько же разумно, насколько разумно длину измерять в тугриках, а высоту — в деревяшках.

Но тогда почему тогда получилось, что мы измеряем время и длину в разных размерностях, конвертируя их через скорость света? Ответ, думаю, кроется в том, что человеку проще работать с числами порядка 1. За время порядка 1 сек свет пролетает порядка 10^6 км. Как часто приходится работать с расстояниями в миллион км в повседневной жизни? Ответ очевиден.

7 Равноускоренное движение в СТО

Для начала определим, что мы вообще подразумеваем под равноускоренным движением. Очевидно, что классическое определение $\dfrac{dv}{dt} = \text{const}$ не подходит хотя бы потому, что время в различных системах отсчёта будет течь по-разному. Да и тогда скорость будет неограниченно увеличиваться, что тоже невозможно[2]. Тогда проведём мысленный эксперимент: представим, что мы летим в ракете с постоянным ускорением, допустим, 10 м/с^2. И мы отпустили из ракеты какой-то шарик. Шарик полетел с постоянной скоростью, но в его системе отсчёта, спустя некоторое время dct ракета приобрела скорость $d\beta$. Проведём этот эксперимент ещё раз. И ещё. И каждый раз будет результат будет одинаковым.

Только с этим результатом работать будет очень неудобно: ведь, как мы помним, при переходе из одной системы отсчёта в другую скорости просто так не складываются. Но мы помним, что складываются быстроты. Тогда можно сказать, что за то же время dct ракета повернётся на угол $d\varphi$. Тогда, из всего вышесказанного, можно записать равноускоренное движение следующим образом:

$$\frac{d\varphi}{dct_0} = \omega = \text{const}$$

Здесь ct_0 — время в системе отсчёта ракеты (мы же помним, что мячи выпускались с ракеты, то есть в начале у них течение времени совпадало с течением времени ракеты).

С другой стороны, $dct_0 = dct/\gamma = \dfrac{dct}{\operatorname{ch}\varphi}$, где ct — время в системе отсчёта покоящегося наблюдателя. В итоге мы получаем достаточно простое дифференциальное уравнение первого порядка:

[2]Но всё же: почему? Она чем-то ограничена? Да, если вспомнить, что $\beta = \operatorname{th}\varphi$. Из этого выражения явно следует, что $\beta \leqslant 1$, а при $\vartheta = \infty$ или $\beta = 1$ преобразования Лоренца, которые выполнялись для $\beta < 1$, становятся неприменимыми. Иными словами, разогнаться до $\beta > 1$ тело не может.

$$\frac{d\varphi}{dct_0} = \frac{d\varphi}{dct}\operatorname{ch}\varphi = \omega$$
$$dct = \frac{d\varphi\operatorname{ch}\varphi}{\omega} \Rightarrow ct = \frac{1}{\omega}\int \operatorname{ch}\varphi d\varphi = \frac{\operatorname{sh}\varphi}{\omega} + C$$

Интегрируя от $\varphi = 0$ до конечного значения φ получаем, что $\operatorname{sh}\varphi = \omega ct$.

Но какой смысл имеет ω? Чтобы это выяснить, обратимся теперь к классической механике, а точнее, тому факту, что СТО вырожается в классическую механику при малых скоростях.

Тогда $\operatorname{sh} d\varphi = d\varphi = d\beta = \dfrac{dv}{c} = \omega c dt \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = \omega c^2 = a$

Приведём всё в нормальные величины:

$$\operatorname{sh}\varphi = \frac{\operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \beta = \frac{\operatorname{sh}\varphi}{\sqrt{1+sh^2\varphi}}$$
$$\operatorname{sh}\varphi = \omega ct = \frac{at}{c} \Rightarrow v = \frac{at}{\sqrt{1+\left(\dfrac{at}{c}\right)^2}}$$

Также выведем формулу расстояния в системе отсчёта покоящегося наблюдателя:

$$r = \int\limits_0^t v(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \sqrt{\frac{a^2\tau^2c^2}{c^2+a^2\tau^2}}d\tau = c\int\limits_0^t \sqrt{\frac{1}{\dfrac{c^2}{a^2\tau^2}+1}}d\tau =$$
$$= \frac{c^2}{a}\int\limits_0^t \frac{\dfrac{a\tau}{c}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\tau}{c}\right)^2+1}}d\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

Для того, чтобы взять этот интеграл, возьмём интеграл, выглядящий поприятнее:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + C$$

В итоге исходный интеграл будет равен

$$r=\frac{c^2}{a}\left(\sqrt{\left(\frac{at}{c}\right)^2+1}-1\right)=\frac{\sqrt{a^2c^2t^2-c^4}-c^2}{a}$$

Можно убедиться, что при $at \ll c$ формула вырождается в классическую $r=at^2/2$.

Однако самое интересное получается, если рассмотреть, что происходит на самой ракете, ведь с нашей точки зрения на ракете часы идут медленнее (что происходит с точки зрения ракеты при этом, мы рассматривать не будем), причём, если обозначит время на ракете за t_0, то это время связано с нашим через следующее отношение: $dt=\gamma dt_0$. Значит

$$t_0=\int\limits_0^t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}d\tau=\int\limits_0^t\sqrt{1-\frac{a^2\tau^2}{c^2+a^2\tau^2}}d\tau=\int\limits_0^t\sqrt{\frac{c^2}{c^2+a^2\tau^2}}d\tau=$$
$$=\frac{c}{a}\int\limits_0^t\frac{d\left(\frac{a\tau}{c}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{a\tau}{c}\right)^2}}=\frac{c}{a}\operatorname{arsh}\frac{at}{c}=\frac{c}{a}\ln\left(\frac{at}{c}+\sqrt{\left(\frac{at}{c}\right)^2+1}\right)$$

А можно ли говорить о том, что ракета в собственной системе отсчёта пролетела какое-то расстояние? Хотя она в собственной системе отсчёта и покоится, однако в этой системе отсчёта пространство проносится мимо неё, а расстояния сокращаются из-за лоренцева сокращения. Тогда в её системе отсчёта расстояние r_0 связано с нашим r как $dr=\gamma dr_0$.

Прежде, чем бездумно брать интеграл, сначала выясним, как связаны конечная скорость и пройденное расстояние, но в нашей системе отсчёта:

$$\operatorname{sh}\varphi=\frac{at}{c}\Rightarrow t=\frac{c}{a}\operatorname{sh}\varphi$$
$$r=\frac{c^2}{a}\left(\sqrt{\left(\frac{a}{c}\frac{c}{a}\operatorname{sh}\varphi\right)^2+1}-1\right)=\frac{c^2}{a}(\operatorname{ch}\varphi-1)$$
$$\operatorname{ch}\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{ar}{c^2}+1$$

А теперь можно и интеграл взять:

$$r_0 = \int\limits_0^r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dl = \int\limits_0^r \frac{c^2}{al + c^2} dl = \int\limits_0^r \frac{dl}{\frac{al}{c^2} + 1} = \frac{c^2}{a} \int\limits_0^r \frac{d\left(\frac{al}{c^2} + 1\right)}{\frac{al}{c^2} + 1} =$$
$$= \frac{c^2}{a} \ln\left(\frac{ar}{c^2} + 1\right)$$

То, что в выражениях для собственного времени и расстояния есть логарифм значит, что с увеличением расстояния эти величины будут расти очень медленно. В качестве примера предлагаю читателю самому посчитать, сколько займёт полёт к Деве А с берегов Земли, если ракета будет ускоряться с ускорением 9,8 м/с^2 половину пути, а другую половину — замедляться с таким же ускорением.