

**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа**

МАТЕМАТИКА

Алгебраические уравнения и неравенства

Задание №1 для 10-х классов

(2021 – 2022 учебный год)



г. Долгопрудный, 2021

Составитель: С.И. Колесникова, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №1 для 10-х классов (2021 – 2022 учебный год), 2021, 24 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 26 сентября 2021 г.

Составитель:

Колесникова София Ильинична

Подписано 11.06.21. Формат 60×90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,50. Уч.-изд. л. 1,33.

Заочная физико-техническая школа

Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.

ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение**,

тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение**,

тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение**.

***e-mail:* zftsh@mail.mipt.ru**

Наш сайт: <https://zftsh.online/>

© МФТИ, ЗФТШ, 2021

Все права защищены. Воспроизведение учебно-методических материалов и материалов сайта ЗФТШ в любом виде, полностью или частично, допускается только с письменного разрешения правообладателей.

В нашем задании большую роль будет играть равносильность уравнений и систем. Поэтому коротко мы напомним основные понятия, связанные с этим.

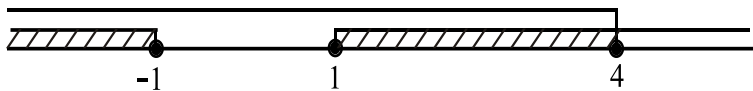
Неравенства – одна из важнейших тем в школьном курсе математики. Мы вспомним, прежде всего, метод интервалов для рациональных функций. Обратите внимание на то, как мы выделяем решение на числовой оси.

Затем рассмотрим иррациональные уравнения и уравнения, содержащие модуль или квадратный корень. Приведём условия равносильности, которыми вы, наверное, пользуетесь, но не записываете в таком виде. Всё это даёт возможность решать уравнения быстрее, что важно для выполнения, например, заданий ЕГЭ.

§1. Понятие равносильности уравнений и неравенств

Пусть на некоторых числовых множествах X_1, X_2 заданы соответственно функции $f(x), g(x)$. Отношения вида $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) = g(x)$ называют неравенствами и уравнением с одной переменной. Если функции $f(x), g(x)$ – алгебраические, то неравенства и уравнения называются алгебраическими.

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства или уравнения называют множество всех значений переменной x , при которых одновременно определены обе части неравенства или уравнения, т. е. пересечение множеств X_1 и X_2 . Например, рассмотрим неравенство $\sqrt{x^2 - 1} \leq \sqrt{4 - x}$. Левая часть определена при $x^2 - 1 \geq 0$, а правая при $4 - x \geq 0$. Поэтому областью определения этого неравенства является множество $(-\infty; -1] \cup [1; 4]$.



Решить неравенство (уравнение) – это значит найти все числа a , после подстановки которых, вместо X получается верное числовое неравенство (равенство), или доказать, что неравенство (уравнение) не имеет решений. Ясно, что число a является решением только тогда, когда a принадлежит ОДЗ.

При решении неравенств и уравнений фундаментальное значение имеет понятие равносильности, и в нашем задании это будет играть большую роль.

Два неравенства

$$f_1(x) > g_1(x) \text{ и } f_2(x) > g_2(x) \quad (1)$$

или два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \text{ и } f_2(x) = g_2(x) \quad (2)$$

называются равносильными на множестве X , если каждое решение первого неравенства (уравнения), принадлежащее множеству X , является решением второго, и, наоборот, каждое решение второго, принадлежащее X , является решением первого; или ни одно из неравенств (уравнений) на X не имеет решений, т. е. множества решений этих неравенств (уравнений) совпадают. Отсюда следует, что вместо того, чтобы решать данное неравенство (уравнение), можно решать любое другое, равносильное данному. Замену одного неравенства (уравнения) другим, равносильным данному на X , называют равносильным переходом на X . Равносильный переход обозначают двойной стрелкой \Leftrightarrow .

Например, $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$; а неравенства $\sqrt{4x+5} \leq 2$ и $4x+5 \leq 4$ не равносильны, т. к., если $4x+5 < 0$, то первое неравенство не имеет решений, а второе имеет, например, $x = -2$.

Важно понимать, что для доказательства равносильности двух неравенств (уравнений) нет необходимости решать каждое из неравенств (уравнений), а затем убеждаться в том, что множества их решений не совпадают – достаточно указать одно решение одного из неравенств (уравнений), которое не является решением другого неравенства (уравнения).

Пример 1. Равносильны ли уравнения $\sqrt{2x+3} = x$ и $2x+3 = x^2$?

♦ Нет, не равносильны, т. к. решение $x = -1$ второго уравнения не является решением первого. ♦

Пример 2. Равносильны ли уравнения $\sin x = 3$ и $\sqrt{-x^2} = 1$?

♦ Да, равносильны, т. к. ни одно из них не имеет решения. ♦

Приведём несколько примеров операций, приводящих к равносильным уравнениям или неравенствам.

1. Если функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены на множестве X , то на X

а) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x).$

б) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x).$

2. Если $h(x) > 0$ на X , то на X

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) < g(x)h(x),$$

т. е. при умножении неравенства на *положительную* функцию знак неравенства *не меняется*.

3. Если $h(x) \neq 0$ на X , то на X

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) = g(x)h(x).$$

4. Если $h(x) < 0$ на X , то на X

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) > g(x)h(x),$$

т. е. при умножении неравенства на отрицательную функцию знак неравенства *меняется на противоположный*.

5. Если $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ на X , то на X

$$а) f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x),$$

т. е. если обе части неравенства *неотрицательны*, то возведение в квадрат обеих частей приводит к равносильному неравенству.

Если обе части неравенства неположительны, то умножим обе части на -1 , придём к неравенству противоположного знака, но с неотрицательными частями, и теперь можно пользоваться свойством 5а.

Если левая и правая части неравенства имеют *разные* знаки, то возведение в квадрат может привести как к равносильному неравенству, так и к неравносильному: $-4 < 5$ и $16 < 25$; $-7 < 5$, но $49 > 25$, поэтому в этом случае *нельзя* возводить неравенство в квадрат.

$$б) f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x).$$

6. Для любых $f(x)$ и $g(x)$ на X и любого натурального n

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x).$$

§2. Система уравнений и неравенств. Совокупность уравнений и неравенств

Пусть задано неравенство $f(x) > g(x)$. По определению, неравенство выполнено, если разность функций $f(x) - g(x) > 0$. Поэтому, за редким исключением, неравенства будем решать «сравнением с нулём» и записывать их в виде $f(x) > 0 (< 0)$.

Часто приходится иметь дело не с одним неравенством или уравнением, а с несколькими. При этом важно различать две задачи:

- 1) решить систему уравнений или систему неравенств,
- 2) решить совокупность уравнений или совокупность неравенств.

Пусть дано m неравенств (или уравнений) $f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0 (=0)$, $f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0 (=0) \dots f_m(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0 (=0)$ на некотором множестве X . Если стоит задача – найти все упорядоченные наборы чисел $a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in X$, каждый из которых является решением *каждого* из заданных неравенств (уравнений), то говорят, что задана система неравенств (уравнений). Такое a называется решением системы. Ре-

шить систему – это значит найти множество всех решений. Обычно систему неравенств (уравнений) записывают в столбик и объединяют фигурной скобкой

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0 (=0), \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0 (=0), \\ \dots, \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0 (=0). \end{cases}$$

ОДЗ системы называется множество, являющееся пересечением областей допустимых значений всех этих неравенств.

Если для неравенств (уравнений)

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0 (=0), f_2(x_1, \dots, x_k) > 0 (=0), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k) > 0 (=0)$$

стоит задача – найти все такие упорядоченные наборы чисел $a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in X$, каждый из которых является решением **хотя бы одного** из заданных неравенств (уравнений), то говорят, что на X задана совокупность неравенств (уравнений). Такое **a** называется решением совокупности неравенств (уравнений). Решить совокупность неравенств (уравнений) – это значит найти всё множество её решений. В современной литературе совокупность записывают в столбик и объединяют квадратной скобкой

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0 (=0), \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0 (=0), \\ \dots, \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0 (=0). \end{bmatrix}$$

ОДЗ совокупности называется объединение областей допустимых значений всех заданных неравенств (уравнений).

Во всех случаях количество заданных неравенств (число m) никак не связано с количеством неизвестных (число k).

§3. Квадратные уравнения и сводящиеся к ним

На вступительных экзаменах не разрешается пользоваться калькуляторами. Поэтому полезной оказывается следующая формула для корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a}.$$

Она особенно удобна, когда коэффициент при x число чётное.

Пример 3. Решите уравнение $144x^2 + 24x - 287 = 0$.

$$\blacklozenge x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 144 \cdot 287}}{144} = \frac{-1 \pm \sqrt{288}}{12} = \frac{-1 \pm 12\sqrt{2}}{12} = \pm\sqrt{2} - \frac{1}{12}.$$

Ответ: $-\frac{1}{12} \pm \sqrt{2}$.

Заметим, что использование других формул привело бы к более громоздким вычислениям. \blacklozenge

Уравнение можно считать решённым, если удаётся найти замену переменных, сводящую заданное уравнение к квадратному.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} - \frac{4(x-1)}{x+2} = 1$.

\blacklozenge Сделаем замену переменных $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = t \geq 0$. Тогда уравнение примет вид

$$t - \frac{4}{t^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{t^3 - t^2 - 4}{t^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - t^2 - 4 = t^3 - 2t^2 + t^2 - 4 = (t-2)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 2, \\ t \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

В старых переменных $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Ответ: 2. \blacklozenge

§4. Рациональные неравенства. Метод интервалов

В 9-м классе изучается метод интервалов прежде всего для многочленов. Он основан на том, что

а) двучлен $(x-a)$ положителен при $x > a$ и отрицателен при $x < a$, т. е. *меняет* знак при переходе через точку a ,

б) квадрат двучлена $(x-a)^2$ при переходе через точку a знак *не меняет*,

в) квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$, $p^2 - 4q < 0$, имеющий положительный коэффициент при x^2 и отрицательный дискриминант, всегда положителен и может быть опущен при решении любого неравенства.

Заметим, что:

1) двучлен $(x-a)$ в любой **нечётной** степени $(x-a)^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, ведёт себя так же, как и $(x-a)$,

2) двучлен $(x-a)$ в любой **чётной** степени $(x-a)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, ведёт себя так же, как и $(x-a)^2$.

Важно, что при переходе через точку a , может изменить знак только **один** множитель $(x-a)^{2k-1}$, а выражение $(x-b)^{2n-1}$, $b \neq a$ при переходе через a ни при каком n знак не меняет.

Прежде чем расставлять знаки, необходимо все многочлены записать *правильно*. Это значит, что во всех скобках коэффициенты *при старшей степени* переменной должны быть *положительны*, множители при произведениях в числителе и знаменателе тоже положительны – при больших x (когда x больше самого большого корня) многочлен всегда принимает положительные значения.

Итак, сформулируем

«Метод интервалов для многочленов (рациональных функций)»

1. Проверяем, все ли множители записаны “правильно”.
2. Находим корни числителя и знаменателя.
3. Представляем числитель и знаменатель в виде произведения неприводимых множителей, т. е. множителей вида $(x-a)^k$ (все квадратные трёхчлены, имеющие отрицательный дискриминант, не записываем – их «опускаем»).
4. Наносим на числовую ось корни числителя (точками, если неравенство нестрогое, или “дырками”, если неравенство строгое) и знаменателя (в любом неравенстве “дырками”).
5. Расставляем знаки дроби в промежутках между корнями, учитывая, что многочлен *меняет* знак при переходе через точку a , если в многочлене стоит $(x-a)^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, и *не меняет* знак, если в многочлене стоит $(x-a)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Отмечаем прямоугольниками решение заданного неравенства и “снимаем” с рисунка ответ. При этом помним, что,

- а) если неравенство строгое, то решением являются открытые промежутки;
- б) если неравенство нестрогое, то к предыдущим решениям *добавляются все “точки”*.

Когда говорим: Решим неравенство методом интервалов, – имеется в виду, что будут выполнены именно вышеприведённые действия.

Метод интервалов затем распространяется на рациональные функции.

Рациональной называется функция, которая может быть представлена

в виде частного двух многочленов, т. е. в виде $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Например, функции $y = x - 2$, $y = \frac{x^3 - x + 5}{x + 4}$ – рациональные, а функция $y = \sqrt{5x}$ не является рациональной – она называется иррациональной.

Неравенства называются рациональными, если их правые и левые части являются рациональными функциями. Рациональные неравенства чаще всего решаются сравнением с нулём, т. е. решаются неравенства

вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 (< 0)$.

Заметим, что дробь положительна (отрицательна) тогда и только тогда, когда числитель и знаменатель имеют одинаковые (противоположные) знаки, т. е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 (< 0) \Leftrightarrow P(x)Q(x) > 0 (< 0),$$

поэтому метод интервалов применяется к дроби точно так же, как и к многочленам.

Замечание 1. В школе принято писать для дроби ОДЗ: $Q(x) \neq 0$, но это является совершенно *излишним*. В самом алгоритме решения таких неравенств учитывается условие, что знаменатель не равен 0 – нули знаменателя отмечаются всегда кружочками («дырками»). Именно поэтому ОДЗ для рациональной дроби *не пишут*.

Некоторые учащиеся после нахождения ОДЗ даже «бросают» знаменатель. Они не понимают, что решение зависит не от того, равен или не равен 0 знаменатель, а от того, где знаменатель *положителен*, а где *отрицателен*.

Замечание 2. При применении этого метода интервалов нет необходимости в рассмотрении «пробных» точек.

Пример 5. Найдите наименьшую длину промежутка, в котором рас-

положены все решения неравенства $\frac{2-x}{4x+5} \geq 0$.

♦ Переписываем наше неравенство в *правильном* виде:

$$\frac{2-x}{4x+5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\left(x+\frac{5}{4}\right)} \leq 0 \quad \text{и}$$

применяем метод интервалов – рис. 1.

С рисунка «снимаем»

Ответ: 3,25.

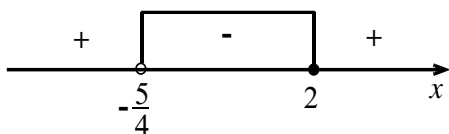


Рис. 1

Заметим, что на нашей картинке нет никаких «змеек». Такой способ отмечать решение неравенства (который, с непривычки, некоторые отвергают, не попробовав) имеет преимущество, потому что он выделяет именно *решение*, а, кроме того, он даёт возможность «красиво» решать системы неравенств. ♦

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right) \geq 0, \\ \frac{(x-2)\left(x-\frac{51}{50}\right)}{\left(x+\frac{3}{16}\right)x} < 0. \end{cases}$$

♦ Здесь очень «плохие» пробные точки – дробные и близкие. Это сделано специально, чтобы привыкнуть их не использовать.

Решаем сначала первое неравенство: наносим на числовую ось нули точками, т. к. неравенство нестрогое.

Теперь расставим знаки. Замечаем, что при больших x все множители положительны. При переходе через точку $x=1$ функция меняет знак, т. к. $(x-1)$ входит в нечётной (первой) степени. По этой же причине при переходе и через остальные точки функция опять меняет знак (рис. 2).

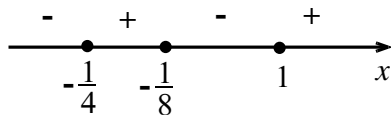


Рис. 2

Теперь отметим “прямоугольниками” решение неравенства (рис. 3).

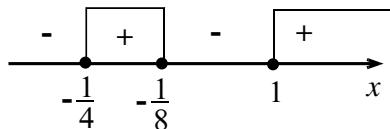


Рис. 3

Теперь решаем второе: наносим на числовую ось нули и числителя, и знаменателя кружочками (дырками), т. к. неравенство строгое. Получаем рис. 4.

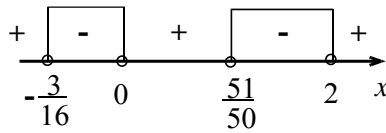


Рис. 4

Теперь надо обе картинki поместить на одну ось. Надо ли соблюдать масштаб? А зачем? Не надо. Ведь нас интересует только взаимное расположение точек относительно друг друга, а расстояния между ними никакой роли не играют.

Теперь заштриховываем общие части прямоугольников – отлично виден ответ (рис. 5).

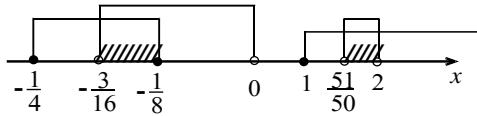


Рис. 5

Ответ. $x \in \left(-\frac{3}{16}; -\frac{1}{8}\right] \cup \left(\frac{51}{50}; 2\right)$. ♦

Пример 7. Найдите наименьшую длину промежутка, в котором расположены все решения неравенства

$$(x-1)^2(x+1,5)^3(x-12)(x+2)^4(x-25)^8 \leq 0.$$

♦ При решении неравенств, левая часть которых содержит чётные степени, можно поступать по-разному.

Первый способ

Левая часть уже записана правильно, корни видны сразу. Отмечаем их точками на числовой оси, а затем по вышеприведённым правилам расставляем знаки и отмечаем решение прямоугольниками – рис. 6.

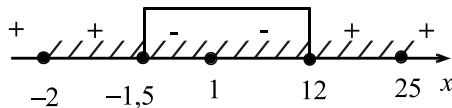


Рис. 6

С рисунка снимаем ответ, что $x \in \{-2; 25\} \cup [-1,5; 12]$. Отсюда следует, что наименьшая длина промежутка равна $25 - (-2) = 27$.

Второй способ

Можно заранее учесть, что бином $(x-a)^{2k}$ принимает либо значение, равное 0, либо положительно на всей числовой оси – поэтому можно записать в решение $x=a$, а бином «опустить», т. к. он не влияет на знак оставшегося выражения:

$$(x-1)^2(x+1,5)^3(x-12)(x+2)^4(x-25)^8 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=-2, \\ x=25, \\ (x+1,5)(x-12) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-2; 25\} \cup [-1,5; 12].$$

Ответ. 27. ♦

Пример 8. Решите неравенство $x \leq \frac{8x-2}{x+5}$.

$$\diamond \quad x \leq \frac{8x-2}{x+5} \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x+5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x+5} \leq 0$$

Из рис. 7 следует

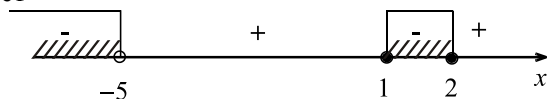


Рис. 7

Ответ. $(-\infty; -5) \cup [1; 2]$. ♦

Пример 9. (МФТИ, 1999) Найти все пары целых чисел x, y , для ко-

торых верны неравенства
$$\begin{cases} 3y - 2x < 45, \\ x + y > 24, \\ 3x - y < 3. \end{cases}$$

♦ Запишем систему в стандартном виде (для сравнения с нулём)

$$\begin{cases} 3y - 2x - 45 < 0, \\ -x - y + 24 < 0, \\ 3x - y - 3 < 0. \end{cases}$$

Заметим, что y входит в первое неравенство со знаком «+», а во второе и третье со знаком «-». Поэтому умножим сначала второе и третье неравенства на 3 (получились равносильные неравенства), а затем заменим второе и третье неравенства их суммами с первым – таким образом, мы исключим y . Итак,

$$\begin{cases} 3y - 2x - 45 < 0, \\ -x - y + 24 < 0, \\ 3x - y - 3 < 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3y - 2x - 45 < 0, \\ -3x - 3y + 72 + 3y - 2x - 45 = -5x + 27 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{27}{5}, \Rightarrow \\ 9x - 3y - 9 + 3y - 2x - 45 = 7x - 54 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{54}{7} \end{cases}$$

$$(\text{учтём, что мы ищем целые решения}) \Rightarrow x = \begin{cases} 6, \\ 7. \end{cases}$$

Подставим последовательно найденные значения x в систему.

$$x = 6 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 57 < 0, \\ -y + 18 < 0, \\ 15 - y < 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset. \quad x = 7 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 59 < 0, \\ -y + 17 < 0, \\ -y + 18 < 0. \end{cases} \Rightarrow y = 19,$$

Ответ. (7, 19). ♦

§5. Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$

Решают такие уравнения по-разному

Первый способ, который чаще всего используется в школе. Он применяется в том случае, когда функция $f(x)$ **проще, чем** $g(x)$.

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \\ f(x) < 0, \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \quad (\text{УР M1})$$

Там, где $f(x) \geq 0$, $|f(x)| = f(x)$, уравнение примет вид $f(x) = g(x)$; там, где $f(x) < 0$, $|f(x)| = -f(x)$, уравнение примет вид $-f(x) = g(x)$.

И, наоборот, если $f(x) \geq 0$ и $f(x) = g(x)$, то $|f(x)| = g(x)$, а если $f(x) < 0$ и $-f(x) = g(x)$, то опять $|f(x)| = g(x)$, или при этом

НЕ НАДО решать неравенства, а необходимо только подставить в них решения соответствующих уравнений.

Второй способ (этот способ применяется обычно, если функция $g(x)$ проще, чем $f(x)$).

Уравнение $|f(x)| = g(x)$ не имеет решений, если $g(x) < 0$. Если же $g(x) \geq 0$, то там, где $f(x) \geq 0$ уравнение имеет вид $f(x) = g(x)$, а там, где $f(x) < 0$, уравнение имеет вид $-f(x) = g(x)$. Отсюда следует

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases} \quad (\text{УР M2})$$

При решении вторым способом можно не писать условий равносильности, а просто решить совокупность уравнений $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{cases}$ и найденные корни подставить в условие $g(x) \geq 0$.

Пример 10. Решите уравнение $|x-7| = 3x^2 + 4x - 1$.

♦ Так как подмодульное выражение проще, чем правая часть, применим (УР M1):

$$\begin{aligned} |x-7| = 3x^2 + 4x - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-7 \geq 0, \\ x-7 = 3x^2 + 4x - 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x-7 < 0, \\ -x+7 = 3x^2 + 4x - 1, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-7 \geq 0, \\ 3x^2 + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} x-7 < 0, \\ 3x^2 + 5x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 11}{6}, \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{3}, \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. $-\frac{8}{3}, 1$. ♦

Пример 11. Решите уравнение $|x^2 + x - 3| = -2x + 1$.

♦ Так как правая часть проще, чем подмодульное выражение, применим (УР М2):

$$|x^2 + x - 3| = -2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 + x - 3 = -2x + 1, \\ x^2 + x - 3 = 2x - 1, \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0,5, \\ \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2}, \\ x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2}, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ. $-4, -1$. ♦

§6. Уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то,

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = \\ = (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}} \quad (\text{УР М3})$$

Оно удобно тем, что **никак не связано со знаками** $f(x)$ и $g(x)$. Важно, что мы пишем разность квадратов, но в квадрат не возводим!

Пример 12. Решите уравнение $|3x - 2| = |2x - 3|$.

♦ Воспользуемся условием равносильности для модулей (УР М3):

$$|3x - 2| = |2x - 3| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 2x - 3, \\ 3x - 2 = -(2x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Ответ. $1, -1$. ♦

Пример 13. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения

$$(5x - 1)\sqrt{x^2 - 16} = 0.$$

$$\begin{aligned} & \text{♦ } (5x - 1)\sqrt{x^2 - 16} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ \begin{cases} x^2 - 16 > 0, \\ 5x - 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 4. \end{aligned}$$

Ответ: 32. ♦

§7. Уравнение вида $\alpha^2 \sqrt{x+a} + \beta^2 \sqrt{x+b} = \text{const.}$

Монотонность

Пример 14. Решите уравнение $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.

♦ Функция монотонно возрастает на всей области определения – любая горизонтальная прямая, если пересекает график, то только один раз. Этим и воспользуемся. Иногда точку пересечения удаётся найти подбором (если авторы, конечно, на это рассчитывали!).

Прежде всего, надо пробовать подставлять такие числа, чтобы корни извлекались нацело. Например, в нашем случае можно подставить $x = 2$: $\sqrt{4-3} + \sqrt{8+1} = 4$.

Ответ. 2. ♦

Пример 15. Решите уравнение $\sqrt{9x+31} + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{-x-2}$.

♦ Заметим, что слева стоят монотонно возрастающие функции, а справа – монотонно убывающая – поэтому равенство возможно лишь в одной точке. Подставим точку, когда извлекаются все корни: $x = -3$.

Ответ. - 3. ♦

§8. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

При решении уравнений этого вида очень многие школьники, прежде всего, находят ОДЗ: $f(x) \geq 0$, затем решают получившееся квадратное уравнение, проверяют после нахождения решений условие $f(x) \geq 0$ и успокаиваются. Ответ может оказаться неверным. Почему? Потому что могут появиться “лишние” корни. Почему? Потому, что после возведения в квадрат решаются сразу два уравнения:

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt{f(x)} = -g(x)$, но на разных промежутках числовой оси: $\sqrt{f(x)} = g(x)$ – там, где $g(x) \geq 0$, и $\sqrt{f(x)} = -g(x)$ – там, где $g(x) \leq 0$. “Лишние” корни – это корни второго уравнения, геометрически это пересечение графика функции $y = g(x)$ с графиком функции $y = -\sqrt{f(x)}$.

Как быть?

Дело в том, что обе части *любого* уравнения всегда можно возвести в квадрат, но при этом может получиться неравносильное уравнение, а, значит, могут появиться посторонние корни. В нашем случае получится уравнение $f(x) = g^2(x)$, при этом очень важно, что ОДЗ уравнения выполняется *автоматически* – поэтому при таком способе решения **не надо** тратить энергию на решение неравенства $f(x) \geq 0$!

Заметим, что уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ может иметь решение для $g(x) \geq 0$, но не имеет решений, если $g(x) < 0$.

Вспомним, что, если $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, то

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x).$$

Так как уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ может иметь решение лишь при условии $g(x) \geq 0$ (т. е. обе части в ОДЗ уравнения неотрицательны), то

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}} \quad (\text{УР K1})$$

Это *очень важное* условие равносильности.

Во-первых, оно освобождает от необходимости исследовать, а после нахождения решений и проверять условие $f(x) \geq 0$ — неотрицательности подкоренного выражения, т. к. это условие выполняется автоматически.

Во-вторых, акцентирует внимание на проверке условия $g(x) \geq 0$ — *неотрицательности правой* части — это условие “отсекает” посторонние корни — корни уравнения $-\sqrt{f(x)} = g(x)$. При этом сначала решается уравнение, а затем найденные корни подставляются в неравенство. Неравенство (за редким исключением, когда корни “плохие”) заранее решать не надо.

Наше условие равносильности особенно полезно при решении **тригонометрических** уравнений, в которых нахождение ОДЗ связано с решением тригонометрических неравенств, что гораздо сложнее, чем решение тригонометрических уравнений. Проверку в тригонометрических уравнениях даже условия $g(x) \geq 0$ не всегда просто сделать.

Замечание. При решении любых уравнений, где есть хотя бы один неравносильный переход, надо делать проверку, подставляя найденные корни в *исходное уравнение*!

Пример 16. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 8x + 9} = x - 1$.

$$\diamond \sqrt{2x^2 - 8x + 9} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 2x^2 - 8x + 9 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 4. \end{cases}$$

Ответ. 2; 4. В этом примере не оказалось лишних корней. ♦

Пример 17. $\sqrt{2x^3 + 2x^2 - 3x + 3} = x + 1$.

♦ Видно, что важным при решении является условие $x+1 \geq 0$, а ОДЗ корня искать не надо, да и найти трудно.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^3 + 2x^2 - 3x + 3} = x+1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ (x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Любопытно, что $x = -2$ принадлежит ОДЗ корня ($-16+8+6+3 > 0$), но не является решением, т. к. для него не выполнено условие $x+1 \geq 0$.

Ответ. 0,5;1. ♦

§9. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

В ОДЗ обе части неотрицательны, и возведение в квадрат даёт равносильное в ОДЗ уравнение $f(x) = g(x)$. Поэтому

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad (\text{УРК2})$$

Пример 18. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения

$$\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{4x - 10}.$$

$$\diamond \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{4x - 10} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10 \geq 0, \\ x^2 - 3x = 4x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 5, \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow x^2 = 25.$$

Ответ. 25. ♦

При таком способе решения достаточно проверить неотрицательность **одной** из функций – можно выбрать более простую функцию.

Рекомендация. При решении уравнений ОДЗ пишем, но **не находим**, т. к. решение неравенств, определяющих ОДЗ, часто требует даже больше усилий, чем решение самого уравнения. Поэтому не надо тратить на это время.

1. Если при решении уравнения использовались только равносильные преобразования, то найденные корни достаточно подставить в ОДЗ. Если они принадлежат ОДЗ, то являются решениями уравнения.

2. Если при решении уравнения не следить за равносильностью преобразований, то после нахождения корней надо сделать проверку. Можно сначала подставить их в ОДЗ – если они не принадлежат ОДЗ, то не являются решениями уравнения, но, если принадлежат ОДЗ, то это ещё не значит, что они являются решениями уравнения – их надо теперь подставить в само уравнение.

Это была рекомендация, полезная при решении большинства уравнений, но, конечно, бывают исключения, когда изучение ОДЗ сразу приводит к решению.

§10. Уравнение вида $\sqrt{ax+b} = cx+d$

Это уравнение можно решать стандартным способом. Но иногда ответить на поставленный вопрос помогает график. Уметь строить эскизы левой и правой частей уравнения $\sqrt{ax+b} = cx+d$ очень полезно. Графическая интерпретация решения такого уравнения помогает быстро решить некоторые задачи ЕГЭ.

Пример 19. Какое утверждение

- 1) уравнение имеет два корня одного знака (оба корня или положительны, или отрицательны);
- 2) уравнение имеет только один корень, и он отрицателен.
- 3) уравнение имеет два корня разных знаков;
- 4) уравнение имеет только один корень, и он положителен;

верно по отношению к корням уравнения $\sqrt{x+4} = 3(x+1)$?

♦ Для ответа на поставленный вопрос не обязательно решать уравнение. Часто достаточно аккуратно начертить эскизы левой и правой частей (рис. 8).

На оси надо отметить точки пересечений полупараболы и прямой с осями координат. Из рисунка ясно, что пересечение графиков происходит на отрицательной полуоси – это обеспечивается тем, что прямая пересекает ось Ox правее, а ось Oy выше полупараболы.

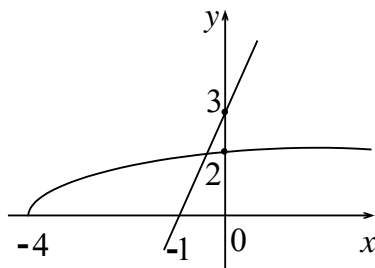


Рис. 8

Ответ. 2. ♦

§11. Возвратные уравнения

Уравнение вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$$

называется возвратным.

Чтобы его решить, надо вынести за скобку x^2 . Тогда выражение в скобке приведётся к квадратному уравнению относительно $x \pm \frac{1}{x}$:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 \left(ax^2 + bx + c \pm \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 \right) + b \left(x \pm \frac{1}{x} \right) + c = 0.$$

При этом,

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \Leftrightarrow a \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + b \left(x - \frac{1}{x} \right) + (c + 2a) = 0$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow a \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + (c - 2a) = 0$$

Пример 20. Решите уравнение $t^4 + 8t^3 + 6t^2 - 8t + 1 = 0$.

♦ Уравнение является возвратным. Вынесем за скобку t^2 , а затем оставшееся выражение в скобке группировкой сведётся к квадратному трёхчлену:

$$t^2 \left(t^2 + 8t + 6 - \frac{8}{t} + \frac{1}{t^2} \right) = 0 \Leftrightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} + 8t - \frac{8}{t} + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} \right) + 8 \left(t - \frac{1}{t} \right) + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 + 8 \left(t - \frac{1}{t} \right) + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t - \frac{1}{t} = -4 \pm 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 2(2 - \sqrt{2})t - 1 = 0, \\ t^2 + 2(2 + \sqrt{2})t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -(2 - \sqrt{2}) \pm \sqrt{7 - 4\sqrt{2}}, \\ t = -(2 + \sqrt{2}) \pm \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Ответ. $\sqrt{2} - 2 \pm \sqrt{7 - 4\sqrt{2}}, -2 - \sqrt{2} \pm \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$. ♦

§12. Задачи с параметром

Пример 21. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 6|x| - a + 6 = 0$ имеет ровно два различных решения.

♦ *Первый способ* – решение «в лоб»

Чтобы уравнение $x^2 - 6|x| - a + 6 = 0$ имело ровно два различных решения, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $t^2 - 6t - a + 6 = 0$ $t = |x|$, имело одно положительное решение. Это возможно, если

1. Или дискриминант $= 0$ и единственный корень положителен:

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = 9 + a - 6 = 3 + a = 0 \Leftrightarrow a = -3, \\ t = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

2. Или дискриминант положителен, но корни имеют разные знаки (тогда отрицательный корень нам не подходит):

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = 3 + a > 0, \\ y_1 y_2 = 6 - a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow a > 6.$$

Ответ: $\{-3\} \cup (6; +\infty)$.

Второй способ – решение с помощью графика.

Перепишем уравнение по-другому, отправив свободный член направо:

$$t^2 - 6t - a + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t = a - 6 \Leftrightarrow t(t - 6) = a - 6.$$

Рис. 9

Это очень удобно, потому что легко строить эскиз графика оставшегося квадратного трёхчлена, не думая о дискриминанте.

Теперь построим график функции $y = t(t - 6)$ – рис. 9.

Видно, что положительное решение единственно, если или $a - 6 = y_{\text{верш}} = y(3) = -9 \Rightarrow a = -3$, или $a - 6 > 0$.

Ответ: $\{-3\} \cup (6; +\infty)$. ♦

С помощью эскизов графиков можно рассматривать некоторые типы уравнений и неравенств. Приведём примеры таких задач.

Пример 22. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + f^2(a)x - g(a) = 0$ имеет единственное положительное решение.

♦ Перепишем уравнение в другом виде:

$(x + f^2(a))x = g(a)$. Построим эскиз левой части – рис. 10.

Видно, что условию задачи удовлетворяют все положительные значения правой части, т. е. $g(a) > 0$. ♦

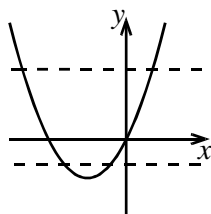
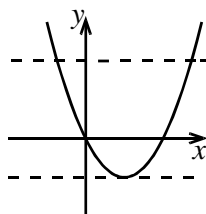


Рис. 10

Пример 23. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + f^2(a)x - g(a) = 0$ имеет два отрицательных решения.

♦ Перепишем уравнение в другом виде: $(x + f^2(a))x = g(a)$. Построим эскиз левой части – рис. 10. Видно, что условию задачи удовлетворяют те значения $g(a)$, которые лежат между значениями левой части в вершине и числом 0, т. е.

$$y\left(-\frac{f^2(a)}{2}\right) < g(a) < 0 \Leftrightarrow -\left(-\frac{f^2(a)}{2}\right)^2 < g(a) < 0. \quad \blacklozenge$$

Пример 24. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 - f^2(a)x - g(a) \leq 0$ имеет единственное положительное решение.

♦ Перепишем неравенство в другом виде: $(x - f^2(a))x \leq g(a)$. Построим эскиз левой части – рис. 11. Видно, что условию задачи выполнено только тогда, когда $g(a)$ равно значению левой части в вершине, т. е.

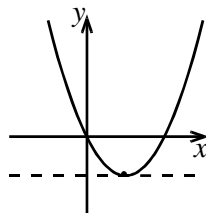


Рис. 11

$$g(a) = y\left(\frac{f^2(a)}{2}\right) = -\left(\frac{f^2(a)}{2}\right)^2.$$

Контрольные вопросы

1(3). Решите неравенство $\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} + \frac{2}{x - 3} \leq x$.

2(3). Решите неравенство $\left(\frac{2}{25x^2 - 10x - 8} + \frac{25x^2 - 10x - 8}{2}\right)^2 \geq 4$.

3(3). Решите неравенство $\frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geq x^2 - \frac{1}{x - 4} + \frac{5}{x}$.

4(3). Решите неравенство $\frac{2}{0,5\sqrt{5}x - 1} + \frac{0,5\sqrt{5}x - 2}{0,5\sqrt{5}x - 3} \geq 2$.

5(3). Решите неравенство $\frac{8x^2 + 7}{x^2 + x + 1} \geq \frac{x}{x + 5} + 7$.

6(3). Решите уравнение $(\sqrt{x - 4} - 1)(x + 5)(2x - 9) = 0$.

7(3). Решите уравнение $\left(\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x+2}\right)(x^2-9)=0$.

8(3). Решите уравнение $2x^2+7x-12+\sqrt{x^2-25}=x^2-11x+\sqrt{x^2-25}$.

9(3). Решите уравнение

$$x^2-8x+1+\sqrt{(x-0,12)(x-4,9)}=\sqrt{(x-0,12)(x-4,9)}.$$

10(3). Решите уравнение $|6x^3+9x-6|=|6x^3+6x^2-13x+6|$.

Задачи

1(3). Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2+2x+1}=5-3x$.

2(3). Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2-17x+15}=2-x$.

3(3). Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{15x^2+2x+8}+4x=0$.

4(3). Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{x+2}=|x-1|$.

5(4). Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{|x^2+14x+47|}-1=|x+7|-1$.

6(4). Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{5-4x-x^2}=3a+3$ имеет один корень.

7(4). Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 4x^2-5x+1>0, \\ \frac{(5x^2-2x+1)-(4x^2-5x+1)}{4x^2-5x} \leq 0. \end{cases}$$

8(4). Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x>1, \\ \frac{(x-3)\left(x-\left(1+\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}\right)\right)}{(x-1,5)(x-1,25)(x-1,125)} \geq 0. \end{cases}$$

9(3). Решите уравнение $\sqrt{1-\sqrt{4x^3-5x+1}}=\sqrt{1+\sqrt{4x^3-5x+1}}$.

10(4). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых совокупность уравнений

$$\begin{cases} 2ax^2 - 4ax - a^2 + 3 = 0, \\ (a-2)x^2 + 2(a-2)x - a^2 - a + 2 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно положительное решение.

11(5). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax - 1)(y + x - a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Литература

1. С. И. Колесникова «Интенсивный курс подготовки к Единому Государственному экзамену». Москва, Айрис – Пресс.
2. «Решение сложных задач Единого Государственного экзамена» Москва, Айрис – Пресс или «Вако», 2011.
3. Журнал «Потенциал» №№1 – 2 за 2005 г. – статьи С. И. Колесниковой «Иррациональные уравнения» и «Иррациональные неравенства».
4. С. И. Колесникова «Иррациональные уравнения», Москва, 2010, ООО «Азбука».
5. С. И. Колесникова «Иррациональные неравенства», Москва, 2010, ООО «Азбука».
6. С. И. Колесникова «Уравнения и неравенства, содержащие модули», Москва, 2010, ООО «Азбука».