Вписанные углы.

Счёт дуг.

1. На окружности даны точки A, B, M и N (в таком порядке). Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны.

2. Пусть I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W . Докажите, что $WI = WA = WC$.

3. Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n-угольника, кратного $\frac{180^\circ}{n}$.

4. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 – середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что прямая A_1C_1 перпендикулярна прямой B_1D_1.

5. В окружность вписаны равнобедренные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что $AC = A_1C_1$.

6. (a) Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг AB и AC, где A, B и C – три точки одной окружности, отсекает на хордах AB и AC равные отрезки, считая от точки A.
   (b) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть точки M и N – середины дуг CD и AB. Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла AEB (или содержит её).

7. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке. Точка M – середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что четырёхугольник $KECD$ вписанный.

8. Шестиугольник $ABCDEF$ вписанный, причем $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

9. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.
   (a) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 содержат биссектрисы углов треугольника ABC, то они содержат высоты треугольника $A_1B_1C_1$.
   (b) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 содержат высоты треугольника ABC, то они содержат биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

10. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Прямые,содержащие противоположные стороны AB и CD, при продолжении пересекаются в точке K, а прямые, содержащие стороны BC и AD, – в точке L. Докажите, что биссектрисы углов BKC и BLA перпендикулярны, а точки их пересечения со сторонами четырёхугольника являются вершинами ромба.

11. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть I_1 – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а I_2 – центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Прямая I_1I_2 отсекает от треугольника AEB треугольник с вершиной E. Докажите, что он равнобедренный.