It's time

Внутри однородного шара радиуса R, гравитационное поле на поверхности которого равняется g, проведён гладкий и узкий канал, соединяющий северный полюс шара с точкой его экватора. Канал проведён таким образом, что если из точки, находящейся на северном полюсе, без начальной скорости отпустить материальную точку, то время её движения по каналу до точки экватора оказывается минимально возможным. В рамках данной задачи вам предстоит найти это минимально возможное время.

1. *(1 балл)* Найдите скорость материальной точки v на расстоянии r от центра шара.

Далее наиболее удобно воспользоваться оптико-механической аналогией. Пусть внутри шара сферически симметрично распределено вещество с показателем преломления $n(r)$. Рассмотрим движение луча в такой среде. Обозначим угол между радиус-вектором луча $\vec{r}$, проведённым из центра шара, и вектором его скорости $\vec{v}$ за φ.

2. *(2 балла)* Найдите соотношение, связывающее n, r и φ.
3. *(1 балл)* Найдите с точностью до постоянного множителя $n(r)$ такое, чтобы оптимальная гравитационная траектория движения материальной точки и траектория луча в данной среде совпадали.

Обозначим за O центр шара, а за C — точку траектории, которую в данный момент проходит луч. Проведём через точку C хорду AB (в плоскости траектории луча), перпендикулярно направлению вектора скорости луча $\vec{v}$, при этом $AC > BC$.

4. *(3 балла)* Для фиксированного положения точки B найдите возможное геометрическое место точек C. Найдите также минимально возможное расстояние OC.
   Примечание. Вам может понадобиться теорема о произведении отрезков хорд.

Вернёмся к исходной задаче.

5. *(3 балла)* Найдите минимальное возможное время $t_{\min}$ движения материальной точки от северного полюса до точки на экваторе.

Автор задачи: А. И. Уймин

Решение

1. Гравитационное поле на расстоянии r от центра шара

$$\vec{E}_g = -\frac{gr}{R}\vec{e}_r.$$

Отсюда из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mg}{2R}\left(R^2 - r^2\right).$$

Окончательно находим

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}(R^2 - r^2)}.$$

2. Рассмотрим дискретные изменения n и R. Пусть $n(r) = n_1$ при $r \leqslant R_1$ и $n(r) = n_2$ при $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Из закона Снэлла для преломления на границе раздела сред

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta.$$

Пусть при достижении расстояния R_2 угол падения равен γ. Из теоремы синусов

$$\frac{R_1}{\sin\gamma} = \frac{R_2}{\sin\beta}.$$

Комбинируя два полученных соотношения

$$n_1 R_1 \sin\alpha = n_2 R_2 \sin\gamma.$$

Переходя к непрерывной зависимости $n(r)$

$$nr\sin\varphi = \mathrm{const}.$$

3. Учитывая, что $n = \dfrac{c}{v}$, а для скорости материальной точки мы получили

$$v \propto \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Получаем, что

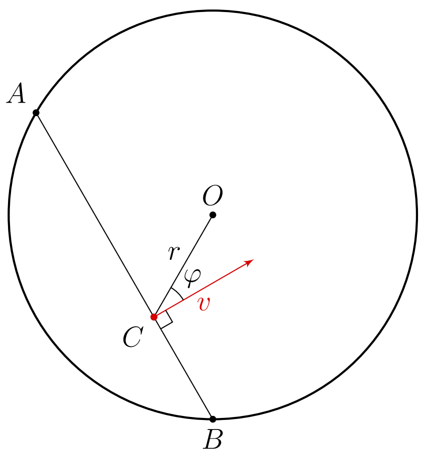
$$n = \frac{C_1}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

4. Из результатов предыдущих пунктов получим

$$R^2 - r^2 = \frac{r^2 \sin^2\varphi}{C_2^2},$$

где C_2 — постоянная. Проведём хорду AB, перпендикулярную направлению скорости. Из теоремы о произведении отрезков хорд

$$AC \cdot BC = R^2 - r^2.$$



Тогда

$$AC \cdot BC = BC^2 + 2BC \cdot r\sin\varphi = \frac{r^2\sin^2\varphi}{C_2^2}.$$

Пусть $\alpha = \dfrac{BC}{r\sin\varphi}$. Отсюда находим

$$\alpha^2 + 2\alpha = \frac{1}{C_2^2}.$$

Из последнего уравнения следует, что $\alpha = \mathrm{const}$, поскольку $C_2 = \mathrm{const}$. Соединим центр шара с точкой B и обозначим точку пересечения OB с линией направления скорости за D. Тогда

$$\frac{BD}{OD} = \alpha = \mathrm{const}.$$

Из этого следует, что в любой момент точка C находится на окружности, центр которой лежит на OB, а её диаметр BD постоянен.

Поймём, как данная окружность движется внутри шара. Заметим, что точка B является её мгновенным центром вращения, откуда следует, что движение происходит без проскальзывания. Отсюда найдём радиус данной окружности r_0. Зафиксировав положение её центра и рассмотрев перемещение точки C относительно шара, получим

$$2\pi r_0 = \frac{\pi R}{2}.$$

Откуда находим

$$r_0 = \frac{R}{4}.$$

Для минимального расстояния имеем

$$r_{\min} = R - 2r_0 = \frac{R}{2}.$$

5. Найдём угловую скорость данной окружности в произвольный момент. Для скорости материальной точки имеем

$$v = 2\omega r_0\cos\theta = \frac{\omega R\cos\theta}{2}.$$

Из закона сохранения энергии получим

$$v^2 = \frac{g\left(R^2 - r^2\right)}{R}.$$

Из теоремы косинусов для треугольника OBC

$$OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC\cos\theta.$$

Окончательно находим

$$r^2 = R^2 + \frac{R^2\cos^2\theta}{4} - R^2\cos^2\theta.$$

Комбинируя полученные результаты

$$\frac{\omega^2R^2\cos^2\theta}{4} = \frac{3gR\cos^2\theta}{4}.$$

Откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{R}} = \text{const}.$$

Тогда скорость центра окружности

$$v_{O'} = \omega r_0 = \frac{\sqrt{3gR}}{4}.$$

Найдём минимально возможное время движения

$$t_{\min} = \frac{\pi\left(R - r_0\right)}{2v_{O'}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3R}{g}}.$$

Альтернативная задача

Рассмотрим точки A и B, находящиеся на одной горизонтали на расстоянии L друг отт друга. Гравитационное поле постоянно и равно $\vec{g}$ (направлено вертикально).

Материальная точка может двигаться без трения по гладкому каналу, соединяющему точки A и B, имея в точке A нулевую начальную скорость. Обозначим за φ угол между векторами скорости точки $\vec{v}$ и вектором ускорения свободного падения $\vec{g}$. Канал проведён таким образом, что время движения от точки A до точки B оказывается минимально возможным.

Направим ось y по направлению ускорения свободного падения, а ось x от точки A к точке B. Начало координат находится в точке A.

1. *(2 балла)* Найдите связь между v и φ, обеспечивающую условие минимального времени движения.

Обозначим за C некоторую точку траектории материальной точки. Проведём из точки C перпендикуляр к направлению скорости в ней до пересечения с осью x, которое обозначим за D.

2. *(0,5 балла)* Выразите CD через y и φ.
3. *(3,5 балла)* Найдите максимальное значение CD в процессе движения.
4. *(4 балла)* Найдите минимально возможное время движения $t_{\min}$ между точками A и B.

Решение альтернативной задачи

Траектория минимального времени циклоида. В рамках данной модели CD — расстояние от точки окружности до мгновенного центра вращения

$$H = 2r = CD_{\max} = \frac{L}{\pi}.$$

Найдём v из закона сохранения энергии

$$v_{\max} = \sqrt{2gH} = \sqrt{\frac{2gL}{\pi}}.$$

Тогда

$$v = \frac{v_{\max}}{2r} 2r \sin\varphi = v_{\max} \sin\varphi = \sqrt{\frac{2gL}{\pi}} \sin\varphi.$$

Из рисунка находим

$$CD = \frac{y}{\sin\varphi}.$$

Получаем, что минимальное время движения

$$t_{\min} = \frac{L}{v_{\max}/2} = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}}.$$