Воздушный шар

Задачи из mathus

В задачах встречаются две различные конструкции воздушного шара: 1) оболочка герметична, шар наполнен лёгким газом; 2) в оболочке имеется отверстие, воздух в шаре нагревается горелкой.
Перед решением задач листка рекомендуется поработать с материалами из приведённого списка.

- В. Н. Ланге. Зачем топят печи? «Квант», 1975, №4.

  О воздушных шарах тут ни слова, однако протапливаемая комната со щелями и воздушный шар с отверстием и горелкой - это примерно одно и то же.

- Л. П. Баканина. Задачи о воздушных шарах. «Квант», 1975, №1. [Ответы]

  Задачи МФТИ: минимально необходимый радиус оболочки шара с гелием; минимально необходимая температура горячего воздуха в шаре с отверстием; изменение температуры атмосферы с высотой; максимальная высота подъёма шара при заданном законе изменения атмосферного давления. Упражнения.

- А. Л. Стасенко. Как попасть на Таинственный остров. «Квант», 2004, №1.
- С. Варламов. Путешествие на воздушном шаре. «Квант», 2004, №3.
- С. Варламов. Задача про «Монгольфьер». «Квант», 2011, №2.
- С. Варламов. Резиновый шарик, надутый гелием. «Квант», 2015, №1.

Задача 1

В известном мультфильме про Винни-Пуха есть явное несоответствие: Винни-Пух надувает воздушный шарик обычным воздухом и взлетает на нём. Для того, чтобы воздушный шарик поднимался (а тем более поднимал Винни-Пуха), нужно, чтобы он был наполнен лёгким газом, плотность которого меньше плотности окружающего воздуха. Можно предположить, что Винни-Пух надувает шарик тёплым воздухом, плотность которого, как известно, меньше плотности холодного. Рассчитайте, каким должен быть в этом случае минимальный необходимый для подъёма объём шарика, если плотность тёплого воздуха внутри шарика $\rho_1 = 1.13$ кг/м^3, плотность холодного воздуха снаружи $\rho_2 = 1.29$ кг/м^3, а масса Винни-Пуха $m = 5$ кг.

Решение:

На систему «Винни-Пух + шарик» действует вниз сила тяжести Винни-Пуха, вниз сила тяжести Шарика и вверх сила Архимеда. Запишем второй закон Ньютона, спроецировав силы на ось Ох, направленную вверх:

$$-mg - \rho_1 V g + \rho_2 V g = 0$$

Отсюда и объём:

$$V = \frac{m}{\rho_2 - \rho_1} =$$

Задача 2

Из тонкой оболочки поверхностной плотности $\sigma = 50$ г/м^2 изготовили воздушный шар. При каких значениях радиуса R он сможет подняться в воздух плотностью $\rho_{\text{в}} = 1.3$ кг/м^3? Считайте, что шар наполняется гелием, плотность которого $\rho_{\text{г}} = 0.18$ кг/м^3. Объём шара радиусом R составляет $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, а площадь его поверхности равна $S = 4\pi R^2$.

Решение:

Напишем условие, когда равнодействующая сила будет равна или больше 0, спроецировав все силы на ось, направленную вверх:

$$-F_{\text{тяж.шара}} - F_{\text{тяж.газа}} + F_{\text{Архимеда}} \geqslant 0$$

$$-\sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot g - \rho_{\text{г}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot g + \rho_{\text{в}}\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot g \geqslant 0$$

Откуда

$$R \geqslant \frac{3\sigma}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{г}}}$$

Задача 3

В комнате объёмом $V = 30$ м^3 сначала была температура $t_1 = 10$°C. После включения отопления она стала равна $t_2 = 20$°C. Увеличилась или уменьшилась масса воздуха в комнате? На сколько килограммов? Атмосферное давление равно $p = 100$ кПа, молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/моль·К). Абсолютный нуль температуры составляет $t_0 = -273$°C.

Решение:

По условию начальная температура в комнате составляет $T_1 = 283$ К, конечная $T_2 = 293$ К. Пусть m_1 - масса воздуха в комнате до включения отопления, m_2 — после включения отопления. Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m_1 R T_1}{\mu}, \quad pV = \frac{m_2 R T_2}{\mu}.$$

Следовательно,

$$m_2 = \frac{pV\mu}{RT_2}, \quad m_1 = \frac{pV\mu}{RT_1}$$

.

Уменьшение массы воздуха в комнате составит

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{pV\mu\,(T_2 - T_1)}{RT_1T_2} \approx 1.26 \text{ кг.}$$

Задача 4

С какой максимальной силой прижимается к телу человека банка (применяемая в медицинской практике для лечения), если диаметр её отверстия $d = 4$ см? В момент прикладывания банки к телу воздух в ней прогрет до температуры $t = 80$°C, а температура окружающего воздуха $t_0 = 20$°C. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Изменением объёма воздуха в банке (из-за втягивания кожи) пренебречь.

Решение:

Сила связана с давлением
$$F = \Delta p \cdot S = p \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$
Разность давлений
$$\Delta p = p_{\text{атм}} - p_1 = p_{\text{атм}} - p_{\text{атм}}\frac{T_2}{T_1} = p_{\text{атм}}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$
Сила равна
$$F = \Delta p \cdot S = p_{\text{атм}}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)\frac{\pi d^2}{4} = 1 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \frac{293}{353}\right) \cdot \frac{3,14 \cdot 0,04^2}{4} = 21,35 \text{ Н}$$

Задача 5

В последние годы популярность приобретает катание на воздушных шарах. Воздух в таком шаре нагревается с помощью газового факела, расположенного у отверстия в нижней части шара. Какую температуру должен иметь воздух в шаре, чтобы поднять двух человек? Масса людей, оболочки, шара, корзины, баллона с газом составляет $M = 420$ кг, диаметр шара $D = 20$ м, температура окружающего воздуха $t_0 = +17°$C, средняя молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/моль·К).

Решение:

Запишем уравнение состояния идеального газа, поделив на объем V:
$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p = \frac{\rho}{\mu}RT.$$
Тогда плотность воздуха снаружи шара (при атмосферном давлении p_0) равна
$$\rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT_0}$$
и плотность воздуха внутри шара (при таком же внутри атмосферном давлении p_0) равна
$$\rho = \frac{p_0\mu}{RT}$$
Запишем второй закон Ньютона, когда шар поднимается равномерно или остается в покое на небе:
$$-Mg - \rho \cdot \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}g + \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}g = 0$$
$$-Mg - \frac{p_0\mu}{RT} \cdot \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}g + \frac{p_0\mu}{RT_0} \cdot \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}g = 0$$
$$\frac{p_0\mu}{RT_0} \cdot \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}g - Mg = \frac{p_0\mu}{RT} \cdot \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}g$$
Откуда
$$T = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{6MR}{p_0\mu\pi D^3}\right)^{-1} \approx 316\ K$$

Задача 6

Чтобы не стать помехой движению самолётов, олимпийский аэростат «Миша», наполненный гелием ($\mu_1 = 4$ г/моль) под давлением $p_0 = 1$ атм при температуре $T = 300$ К, должен был подняться над Лужниками на высоту 1,5 км, где плотность воздуха ($\mu_2 = 29$ г/моль) примерно на 20% меньше, чем у поверхности Земли. Найдите массу M корпуса аэростата, если его объём $V = 500$ м^3. Оболочка нерастяжимая и герметичная.

Решение:

Запишем уравнение состояния идеального газа, поделив на объем V:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p = \frac{\rho}{\mu}RT.$$

Плотность воздуха внутри шара и снаружи равна соответственно

$$\rho = \frac{p_0\mu_1}{RT} \qquad \text{и} \qquad \rho_0 = \frac{p_0\mu_2 \cdot 0.8}{RT}.$$

II закон Ньютона, спроецированный на ось, направленную вверх:

$$-F_{\text{тяж.корпуса}} - F_{\text{тяж.газа}} + F_{\text{Архимеда}} = 0$$

$$-Mg - \frac{p_0\mu_1}{RT}Vg + \frac{p_0\mu_2 \cdot 0.8}{RT}Vg = 0$$

Откуда M равно

$$M = \frac{p_0Vg}{RT}(0.8\mu_2 - \mu_1) \approx 380 \text{ кг}$$

Задача 7

Герметичный шар-зонд, изготовленный из нерастягивающегося материала, должен поднять аппаратуру массой $M = 10$ кг на высоту примерно 5,5 км, где плотность воздуха ($\mu_{\text{в}} = 29$ г/моль) вдвое меньше, чем у поверхности Земли. Шар наполняют гелием ($\mu_{\text{He}} = 4$ г/моль) при температуре $T = 300$ К и давлении $p_0 = 1$ атм. Объём шара $V = 100$ м^3. Определить массу квадратного метра материала оболочки шара.

Решение:

Плотность $\rho_{\text{в}}$ воздуха и массу m_{He} гелия из уравнения состояния идеального газа равны соответственно

$$\rho_{\text{в}} = \frac{\mu_{\text{в}}p_0}{RT} \qquad \text{и} \qquad m_{\text{He}} = \frac{\mu_{\text{He}}p_0V}{RT}.$$

Запишем уравнение (II закон Ньютона на ось Ox):

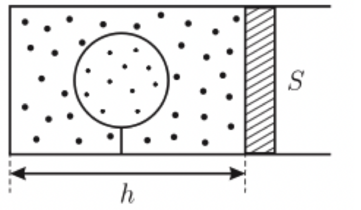
$$-\sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot g - Mg - m_{\text{He}}g + \frac{1}{2}\rho_{\text{в}}Vg = 0$$

Достанем отсюда σ:

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}\rho_{\text{в}}V - m_{\text{He}} - M}{4\pi R^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\mu_{\text{в}}p_0}{RT}V - \frac{\mu_{\text{He}}p_0}{RT}V - M}{4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3}} \approx 0.3 \text{ кг/м}^3$$

Задача 8

Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд с теплопроводящими стенками, заполненный аргоном плотностью $\rho = 1.7$ кг/м^3, закрыт подвижным поршнем и находится в комнате. Площадь поршня равна $S = 400$см^2, расстояние от левого края цилиндра до поршня равно $h = 50$ см (см. рисунок). В сосуде ко дну на нити прикреплен шар объёмом $V_ш = 1000$ см^3, сделанный из тонкого нерастяжимого и теплопроводящего материала и заполненный гелием; масса шара с гелием равна $m = 1.2$ г. После того как протопили печь и воздух в комнате прогрелся, поршень переместился вправо на расстояние $\Delta h = 3$ см. Найдите изменение ΔN силы натяжения нити, удерживающей шар. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Решение:

При передвижении поршня объём аргона изменился со $V = Sh - V_ш$ до значения $V + S\delta h$, увеличившись в $\frac{V+S\Delta h}{V}$ раз. В такое же количество раз уменьшилась плотность аргона — в конце процесса она равна $\rho\frac{V}{V+S\Delta h}$. Следовательно, выталкивающая сила, действующая на шар, уменьшилась на величину

$$\Delta F = \left(\rho - \rho\frac{V}{V+S\Delta h}\right) gV_ш = \rho\frac{S\Delta h}{V+S\Delta h} gV_ш = \rho\frac{S\Delta h}{S(h+\Delta h) - V_ш} gV_ш$$

На такую же величину уменьшилась и сила натяжения нити, удерживающей шар. Поэтому изменение этой силы равно

$$\Delta N = -\rho\frac{S\Delta h}{S(h+\Delta h) - V_ш} gV_ш \approx -1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Н },$$

если только оно не превышает по величине начальной силы натяжения нити, то есть если шар в конце нагревания не ляжет на дно цилиндра. Проверим это: вначале сила натяжения нити N была равна разности силы Архимеда и веса шара с гелием:

$$N = (\rho V_ш - m)\, g = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Н} > |\Delta N|.$$

Значит, нить в конце останется натянутой, и наш ответ справедлив.

Задача 9. «Водородная бомба»

Водород находится в стальном сферическом контейнере высокого давления («бомбе»). Плотность стали $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м^3, предел прочности $\sigma = 5 \cdot 10^8$ Н/м^2. Водород из контейнера заполняет лёгкую растяжимую оболочку воздушного шара при неизменной температуре $T = 300$ К. Может ли этот воздушный шар поднять сферический контейнер, в котором водород находился ранее?
Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль $\cdot$К), молярную массу воздуха примите равной $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. При расчёте весом водорода и оболочки шара можно пренебречь.

Решение:

Максимальное давление газа в сферической оболочке может быть найдено из условия равновесия двух полусферических частей оболочки (внешнее давление $p_0 \ll p$).

Обе половинки оболочки расталкиваются за счет давления газа внутри силами $\pi R_0^2 p$ (рис. 14). Поэтому

$$\pi R_0^2 p \leq 2\pi R_0 d\sigma$$

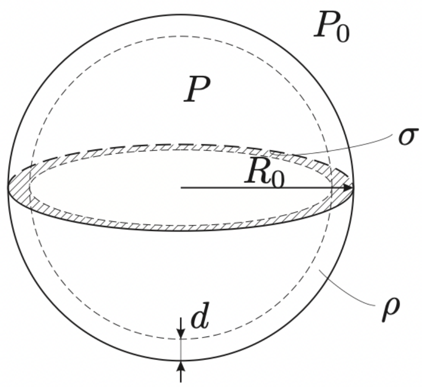


Рис. 14

Если газ (водород) поступает в легкую растяжимую оболочку воздушного шара, его давление падает до атмосферного давления p_0 (температура T предполагается неизменной). Объем шара становится равным

$$V = \frac{4\pi R_0^3}{3}\frac{p}{p_0}$$

Вес стальной сферической оболочки по условию не должен превышать выталкивающей силы:

$$4\pi R_0^2 d\rho g \leq \frac{4\pi R_0^3}{3}\frac{p}{p_0}\rho_{\text{возд}}\, g.$$

Из этих соотношений следует:

$$\frac{\sigma}{\rho} \geq \frac{3p_0}{2\rho_{\text{возд}}} = \frac{3}{2}\frac{RT}{\mu}.$$

Здесь R — универсальная газовая постоянная, $\mu_{\text{возд}}$ — средняя молярная масса воздуха, $T = 300$ К — температура воздуха. Числовой расчет показывает, что это условие не выполняется:

$$\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)_{\text{сталь}} \approx 0,63 \cdot 10^5\ \frac{\text{Н} \cdot \text{М}}{\text{кг}}, \quad \frac{3}{2}\frac{RT}{\mu_{\text{возд}}} \approx 1,3 \cdot 10^5\ \frac{\text{Н} \cdot \text{М}}{\text{кг}}.$$