

Вписанные углы.

Две пересекающиеся окружности.

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ , пересекающие вторую окружность в точках B и C . Докажите, что:
 - (a) длина отрезка BC не зависит от выбора точки A ;
 - (b) касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC .
2. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B . Докажите, что угол AQB не зависит от положения секущей.
3. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q . Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B соответственно. Докажите, что треугольники AQB и O_1QO_2 подобны.
4. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B , а через точку Q – секущая, которая пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что $AC \parallel BD$.
5. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D . Через точки C и D проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке E . Докажите, что точки B, C, D и E лежат на одной окружности.
6. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку P проводятся все возможные секущие, которые вторично пересекают обе окружности в точках A и B . Найдите ГМТ центров окружностей, описанных около всех таких треугольников AQB .

Во всех следующих задачах занятия использована следующая конструкция и обозначения.

Даны две окружности с центрами O_1 и O_2 , пересекающиеся в точках A и B . Для произвольной точки X первой окружности (отличной от точек A и B) обозначим через Y и Z точки пересечения прямых XA и XB соответственно со второй окружностью.

7. Докажите, что прямая YZ перпендикулярна диаметру первой окружности, проведённому через точку X .
8.
 - (a) Для каждой точки X построена прямая, содержащая высоту треугольника XYZ , проведённую из вершины X . Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.
 - (b) Выбрана одна из двух дуг, на которую первую окружность делят точки A и B . Для каждой точки X выбранной дуги построена прямая, содержащая биссектрису треугольника XYZ , проведённую из вершины X . Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.
9. Найдите положение точки X , при котором площадь треугольника XYZ наибольшая.
10. Найдите ГМТ центров окружностей, описанных около треугольников XYZ .
11. Пусть окружность, описанная около треугольника XYZ , вторично пересекает первую окружность в точке P . Докажите, что угол XPO_2 прямой.