Сборы.

9 класс.

1. Точки M и K – середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, P – точка пересечения AM и BK, T – точка пересечения DM и KC. Докажите, что $S_{PMTK} = S_{ABP} + S_{CDT}$.

2. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Докажите, что диаметр окружности ω не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Окружность, описанная около треугольника ABL, пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что точка S, симметричная точке C относительно прямой DL, лежит на стороне AB и не совпадает с её концами. Какие значения может принимать $\angle ABC$?

4. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом при вершине A. На дуге AB описанной окружности треугольника ABD, не содержащей точки D, выбрана точка P. Луч PA пересекает луч CD в точке Q. Точка O – центр описанной окружности треугольника CPQ. Докажите, что если $O \neq D$, то $OD \perp AD$.

5. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит а прямой BC. Докажите, что окружность Γ, описанная около треугольника ABC, касается окружности ω.

6. Дан треугольник ABC. На внешней биссектрисе угла ABC отмечена точка D, лежащая внутри угла BAC, такая, что $\angle BCD = 60°$. Известно, что $CD = 2AB$. Точка M – середина отрезка BD. Докажите, что треугольник AMC – равнобедренный.

7. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M – середина отрезка BC. Найдите угол DME.

8. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120°$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке Y. Прямая l проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY. Докажите, что l касается ω.