Физтех-лицей имени П.Л. Капицы

Физический эксперимент

Обработка результатов эксперимента

Без оценки погрешности любой эксперимент имеет нулевую ценность. Однако расчеты погрешностей должны разумно дополнять основную работу — проведение измерений и получение окончательного результата.
Если результат измерения x снимается непосредственно с измерительного прибора, то такое измерение называется **прямым**. Внешние факторы могут привести к различным результатам, наличие такого разброса требует проведения нескольких измерений, результаты которых обозначим $x_1,\ x_2, ..., x_N$. В качестве окончательного результата прямого измерения принимается среднее арифметическое всех измерений

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1}$$

Приборная ошибка возникает вследствие несовершенства любого прибора — изготовитель не может (и не обязан) гарантировать абсолютную точность. Поэтому каждый тип прибора имеет гарантированную заводом изготовителем максимальную погрешность. Если приборная погрешность не задана в условии задачи (или в описании прибора), то допускается в качестве приборной погрешности использовать половину цены наименьшего деления. расчет приборной погрешности $\Delta x_{\text{пр}}$ сводится к тому, чтобы вспомнить таблицу, или внимательно посмотреть на шкалу прибора.
Случайная ошибка рассчитывается по формуле (здесь приведены два равносильных выражения, – по какому из них проводить расчеты зависит от индивидуального вкуса).

$$\Delta x_{\text{сл}} = t\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N(N-1)}} \tag{2}$$

В этой формуле t — коэффициент Стьюдента, зависящий от числа измерений и от требуемой доверительной вероятности. Нет необходимости запоминать значения этих коэффициентов — вы не сильно ошибетесь, полагая, что $t = 2$ (если число ваших измерений больше 5).
Таким образом полная погрешность прямого измерения может быть рассчитана следующи образом:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{сл}}^2 + \Delta x_{\text{пр}}^2} \tag{3}$$

На первый взгляд расчет полной погрешности прямого измерения требует значительного времени, однако, при небольшой тренировке и наличии калькулятора эта процедура занимает не более одной минуты.
Если окончательный экспериментальный результат получается в ходе вычислений над результатами прямых измерений, то такое измерение называется **косвенным**. Результат косвенного измерения y является некоторой функцией

$y = f(a, b, ...)$ от результатов прямых измерений: $\overline{a} \pm \Delta a,\ \overline{b} \pm \Delta b, ...$. В качестве окончательного результата используется значение функции, вычисленное для средних значениях результатов прямых измерений:

$$\overline{y} = f(\overline{a}, \overline{b}, ...) \tag{4}$$

Результат косвенного измерения вычисляется **один** раз.
Относительная погрешность измерения — отношение абсолютной погрешности измерения к опорному значению измеряемой величины, в качестве которого может выступать, в частности, её истинное или действительное значение:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\overline{x}} \cdot 100\,\% \tag{5}$$

Погрешности, вносимые приборами и методом суммируются, поэтому имеет смысл для всех измеренных величин рассчитать сразу суммарную погрешность. Для расчетных величин также будет сразу определяться суммарная погрешность расчетной величины, учитывающая влияние неточностей приборов и метода измерений.
Следует рассмотреть 3 различных случая получения значения расчетных величин с использованием значений измеренных величин:

1. расчетная величина определяется по простой формуле, в которую каждая измеренная величина входит только один раз;
2. расчетная величина определяется по углу наклона построенного прямолинейного графика;
3. расчетная величина определяется по сложной формуле или одна из измеренных величин входит в формулу более одного раза.

1 Простой

Рассчет погрешности косвенных измерений, определяемых различными видами зависимостей проводится следующим образом:

Вид функции	Относительная погрешность
$x = A \pm B$	$\varepsilon_x = \dfrac{\Delta A + \Delta B}{A \pm B}$
$x = A{\cdot}B,\ x = \dfrac{A}{B}$	$\varepsilon_x = \varepsilon_A + \varepsilon_B = \dfrac{\Delta A}{A} + \dfrac{\Delta B}{B}$
$x = A^n$	$\varepsilon_x = \dfrac{\varepsilon_A}{n} = \dfrac{\Delta A}{n{\cdot}A}$
$x = \dfrac{1}{A} \pm \dfrac{1}{B}$	$\varepsilon_x = \dfrac{\Delta A/A^2 + \Delta B/B^2}{1/A + 1/B}$
$x = \sin A$	$\varepsilon_x = \Delta A{\cdot}\operatorname{ctg} A$
$x = \cos A$	$\varepsilon_x = \Delta A{\cdot}\operatorname{tg} A$
$x = \operatorname{tg} A$	$\varepsilon_x = \dfrac{2\Delta A}{\sin 2A}$

2 Графический

При построении графика исследуемой зависимости нужно учитывать погрешность определения как аргумента, так и самой функции. Для этого используют **планки погрешностей**. Если величина ошибки аргумента или функции — величина фиксированная, например это приборная погрешность, то и длины планок для всех точек будут одинаковыми. Фактически, половина длины план-

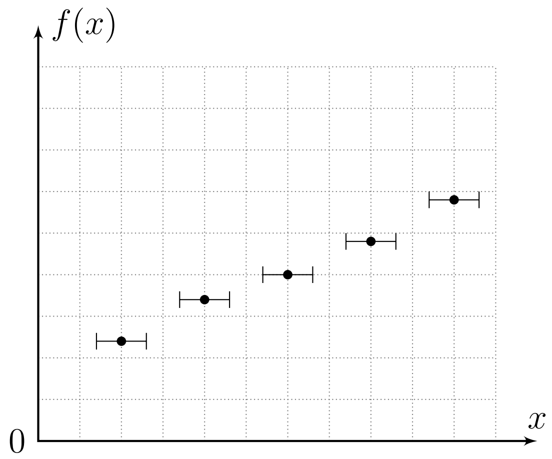

Рис. 1: Пример приборной погрешности

ки — абсолютная погрешность величины. Удвоение длины связано с равновероятностью ошибки в обе стороны. Величина же ошибки косвенных измерений определяется как произведение относительной погрешности на каждое рассчетное значение, и, как следствие, величина абсолютной погрешности для функции будет тем больше, чем больше каждое ее значение (см. рисунок 2).

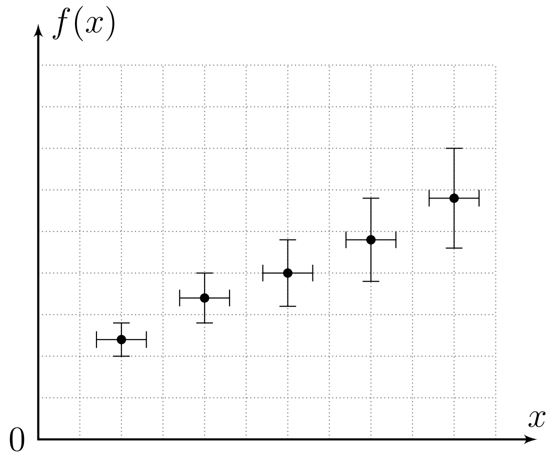

Рис. 2: Пример погрешности косвенных измерений

Для того, чтобы выполнить графическое усреднение необходимо провести две прямые с максимальным и минимальным углом наклона так, чтобы они обе проходили через все «кресты погрешностей». Для наглядности области крестов выделим цветом. Искомая линейная зависимость окажется на биссектрисе угла, образованного проведенными прямыми.

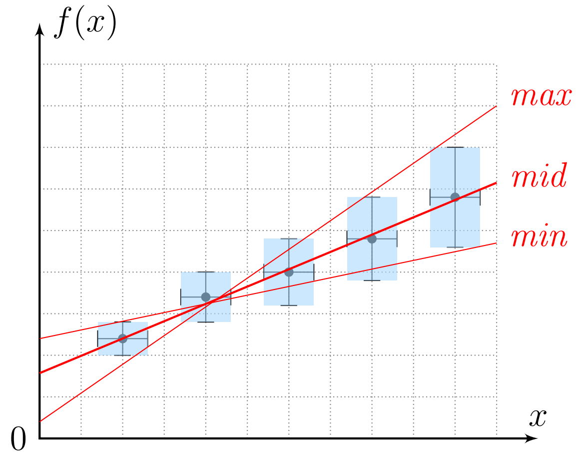

Рис. 3: Графическое усреднение

Если искомая величина — угловой коэффициент полученной прямой, то погрешность ее можно расчитать как разность тангенса угла наклона прямой max и тангенса наклона усредненной прямой mid, т.е.

$$q = \mathrm{tg}\,(\varphi_{mid}), \tag{6}$$

$$\Delta q = \mathrm{tg}\,(\varphi_{max}) - \mathrm{tg}\,(\varphi_{mid}). \tag{7}$$

В случаях **нелинейной зависимости** построение графика вручную оказывается наиболее приближенным и неточным, но все же стоит выполнять его аккуратно и не допускать резких изломов, сглаживая переходы от точки к точке. При этом почти всегда имеет смысл попробовать подобрать такие оси, при которых зависимость будет иметь линейный вид.

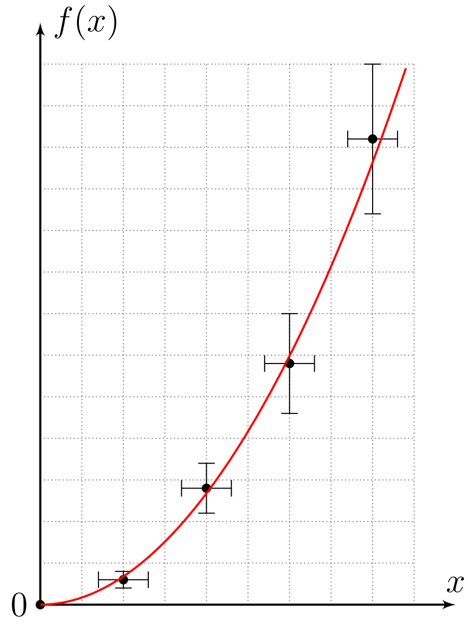

Рис. 4: Нелинейная зависимость

3 Сложный

В общем случае погрешность косвенного расчета можно определить как корень квадратный из суммы квадратов частных производных функции по аргументам, помноженным на абсолютную погрешность аргументов. Иными словами:

$$\Delta f(x, y, z, ...) = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\Delta z\right)^2 + ...} \tag{8}$$

Для вычисления частных производных можно воспользоваться таблицей

Вид функции $f(x)$	Частная производная функции $f(x)$ по x
$const$	0
x	1
$a{\cdot}x$	a
$a{\cdot}x^n$	$a{\cdot}n{\cdot}x^{n-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \cdot \ln x$