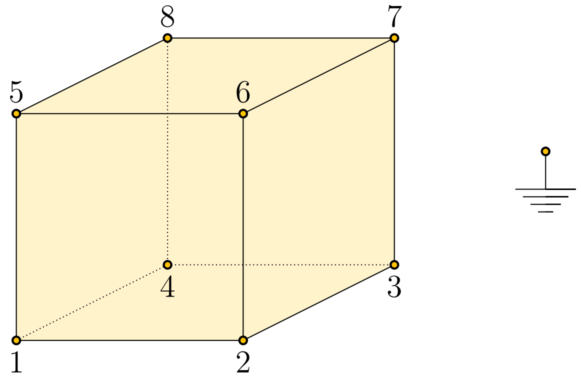
Кубик ЛФИ

9.s03.e01

— Вы не особенно боитесь.
— Вы не особо пугаете.
Шерлок

3d6

Восемь идеальных источников с ЭДС $\mathscr{E}_i$ подключают отрицательным полюсом к точке с нулевым потенциалом (земле), а положительным полюсом к i-ой вершине проводящего однородного кубика. Значения ЭДС источников равны $\mathscr{E}_1 = 2$ В, $\mathscr{E}_2 = 3$ В, $\mathscr{E}_3 = 4$ В, $\mathscr{E}_4 = 1$ В, $\mathscr{E}_5 = 5$ В, $\mathscr{E}_6 = 6$ В, $\mathscr{E}_7 = 7$ В, а потенциал в центре кубика оказался равен $\varphi = 4$ В. На сколько изменится потенциал центра кубика, если источник с ЭДС $\mathscr{E}_8$ заменить источником с ЭДС $5\mathscr{E}_8$?

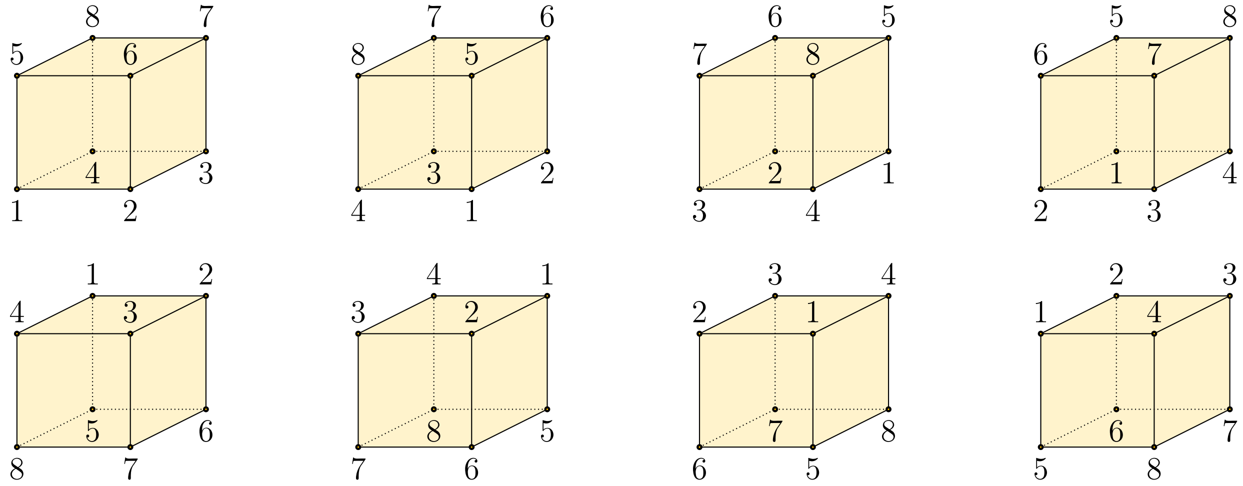


Автор задачи: А. А. Киреев

Решение основной задачи

Рассмотрим подключения источника $\mathscr{E}_i$ к земле и к i-ому узлу: если φ_i — потенциал точки i, то $\mathscr{E}_i = \varphi_i$. Таким образом мы нашли потенциал каждого узла.

Воспользуемся методом наложения. Для этого рассмотрим несколько повёрнутых кубиков (подключения к земле везде одно и то же), заметим, что при таких поворотах потенциал центра кубика из симметрии не изменялся.



Наложим все получившиеся схемы друг на друга. Получится кубик, у которого потенциалы вершин равен

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi_D = \varphi_E = \varphi_F = \varphi_G = \varphi_H = \sum_{i=1}^{8} \varphi_i.$$

Здесь все потенциалы равны, так как при наложении каждая i-ая вершина встречалась в сумме один раз. Если потенциалы в вершинах куба одинаковые, то и в любой точке куба они одинаковы (так как нет тока). То есть потенциал в центре такого куба будет равен

$$\varphi_{\text{центр}} = \sum_{i=1}^{8} \varphi_i.$$

С другой стороны, так как потенциал в центре накладываемых кубиков был одинаков, он равен

$$\varphi_{\text{центр}} = 8\varphi_0,$$

где φ_0 — потенциал в центре изначального кубика. Из последних двух равенств мы можем найти $\mathscr{E}_8$

$$\mathscr{E}_8 = 8\varphi_0 - \sum_{i=1}^{8} \varphi_i = 8\varphi_0 - \sum_{i=1}^{8} \mathscr{E}_i = 4\ \text{В}.$$

После замены источника ЭДС, потенциал в центре кубика станет равным

$$\varphi'_{\text{центр}} = \sum_{i=1}^{7} \mathscr{E}_i + 5\mathscr{E}_8 = 48\ \text{В}.$$

Но это потенциал в центре наложенного куба! Потенциал в центре нового «изначального» равен

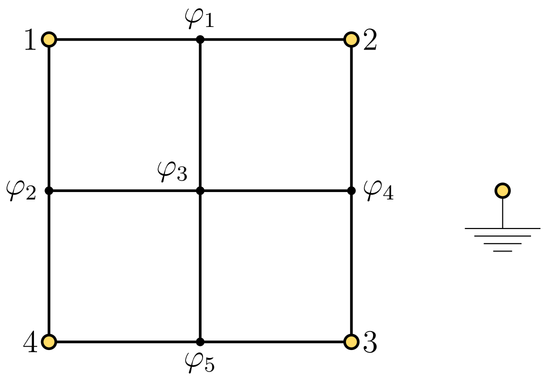
$$\varphi_0' = \frac{\varphi'_{\text{центр}}}{8} = 6 \text{ В}.$$

Следовательно, изменение потенциала центра кубика равно

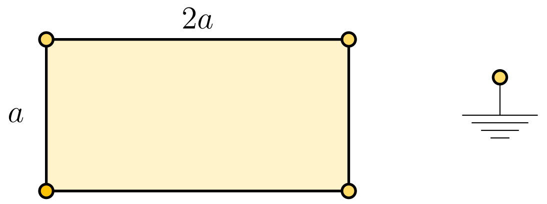
$$\Delta\varphi = \varphi_0' - \varphi_0 = 2 \text{ В}.$$

Альтернативная задача

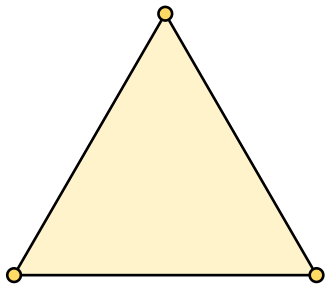
1. *(5 баллов)* Четыре идеальных источника с ЭДС $\mathscr{E}_i$ подключают отрицательным полюсом к точке с нулевым потенциалом (земле), а положительным полюсом к i-ым углам квадратной сетки (см. рис.). Каждый отрезок схемы имеет сопротивление R. Значения ЭДС источников равны $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}$, $\mathscr{E}_2 = 2\mathscr{E}$, $\mathscr{E}_3 = 4\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}_4 = 7\mathscr{E}$. Найдите потенциалы φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 и φ_5 всех узлов.



2. *(3 балла)* Три вершины тонкой металлической прямоугольной пластины заземлены. К четвёртой вершине подключают идеальный источник ЭДС так, что ее потенциал становится равным $\mathscr{E}$. Найдите потенциал в центре пластины, если ее размеры a и $2a$.

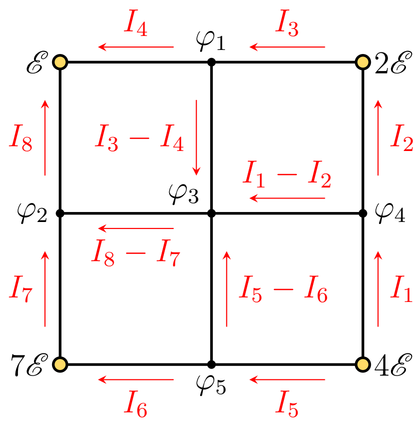


3. *(2 балла)* Сплошную проводящую пластину в форме правильного треугольника подключают к идеальным источникам ЭДС. Потенциалы вершин пластины равны φ_1, φ_2, φ_3. Найдите потенциал центра пластины.



Решение альтернативной задачи

1. Будем решать задачу с помощью правил Кирхгофа. Расставим токи на всех элементах цепи.



Запишем второе правило Кирхгофа, для этого определим количество уравнений или контуров, для которых можно записать независимые уравнения. Внутри самого квадрата содержится 4 «элементарных» контура, также есть 4 контура, захватывающие ЭДСки, итого 8 независимых контуров. Записываем уравнения, крепитесь

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \dfrac{\mathscr{E}}{R}; \\ I_5 + I_6 = -3\dfrac{\mathscr{E}}{R}; \\ I_7 + I_8 = 6\dfrac{\mathscr{E}}{R}; \\ I_3 + I_4 = \dfrac{\mathscr{E}}{R}; \\ I_1 + I_5 + I_7 + I_3 = I_6 + I_2 + I_8 + I_4; \\ 2I_1 - I_2 = 2I_5 - I_6; \\ I_5 - I_6 + I_8 - I_7 = I_6 + I_7; \\ I_4 = I_3 - I_4 + I_8 - I_7 + I_8. \end{cases} \implies \begin{cases} I_1 = \dfrac{5\mathscr{E}}{6R}; \\ I_2 = \dfrac{7\mathscr{E}}{6R}; \\ I_3 = -\dfrac{\mathscr{E}}{6R}; \\ I_4 = \dfrac{7\mathscr{E}}{6R}; \\ I_5 = -\dfrac{5\mathscr{E}}{6R}; \\ I_6 = -\dfrac{13\mathscr{E}}{6R}; \\ I_7 = \dfrac{19\mathscr{E}}{6R}; \\ I_8 = \dfrac{17\mathscr{E}}{6R}. \end{cases}$$

Решение этой системы элементарно и предлагается читателю. Теперь, зная токи, можно найти все искомые потенциалы

$$\varepsilon_1 = \frac{13}{6}\mathscr{E}; \qquad \varphi_2 = \frac{23}{6}\mathscr{E}; \qquad \varphi_3 = \frac{7}{2}\mathscr{E}; \qquad \varphi_4 = \frac{19}{6}\mathscr{E}; \qquad \varphi_5 = \frac{29}{6}\mathscr{E}.$$

2. Рассмотрим схему где к каждой вершине прямоугольника подключено 4 одинаковых ЭДС $\mathscr{E}$. Из симметрии понятно, что потенциал, создаваемый в центре прямоугольника одной ЭДСкой равен

$$\varphi_{\text{прям}} = \frac{\mathscr{E}}{4}.$$

Этот же результат можно получить методом наложения, которым, по сути, мы сейчас и воспользовались. Для этого необходимо наложить четыре прямоугольника друг на друга таких, что к одной из вершин подключен источник, а остальные — заземлены. При этом у разных прямоугольников ЭДС подключены к разным вершинам. Тогда из наложения следует то, что написано выше.

3. Исходя из решения предыдущей задачи, каждый i-источник создаёт потенциал в центре равный $\mathscr{E}_i/3$. Поэтому суммарный потенциал равен

$$\varphi_{\text{треуг}} = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3}{3}.$$