

**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа**

ФИЗИКА

**Основы молекулярно-кинетической теории.
Законы идеального газа**

Задание №2 для 10-х классов

(2021 – 2022 учебный год)



г. Долгопрудный, 2021

Составитель: А.З. Нусратуллин, научный сотрудник МФТИ.

Физика: задание №2 для 10-х классов (2021 – 2022 учебный год), 2021, 32 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 31 октября 2021 г.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:

Нусратуллин Ахат Зинурович

Подписано 14.07.21. Формат 60×90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,00. Уч.-изд. л. 1,77.

Заочная физико-техническая школа

Московского физико-технического института

(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.

ЗФТШ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение,**

тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение,**

тел. (499) 755-5580 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© МФТИ, ЗФТШ, 2021

Все права защищены. Воспроизведение учебно-методических материалов и материалов сайта ЗФТШ в любом виде, полностью или частично, допускается только с письменного разрешения правообладателей.

1. Введение

Газообразное состояние вещества и протекающие в газах тепловые процессы могут быть описаны либо с использованием уравнения состояния идеального газа (уравнения Менделеева – Клапейрона), газовых законов, либо в рамках молекулярно-кинетической теории (МКТ). Эти два подхода к изучаемым явлениям не противоречат друг другу, а взаимно дополняют.

Законы Бойля – Мариотта, Шарля и Гей-Люссака, найденные при экспериментальном изучении поведения газов в разных условиях, позволили получить уравнение состояния идеального газа – уравнение Менделеева – Клапейрона.

На основе законов молекулярно-кинетической теории газообразного состояния вещества в принципе можно дать описание любого теплового процесса или явления с участием газов. Упомянутые выше газовые законы находят довольно простое объяснение в МКТ.

2. Некоторые сведения из теории строения вещества

2.1. Свойства газообразного состояния вещества

В основе молекулярно-кинетической теории строения вещества лежат три утверждения: все вещества состоят из отдельных атомов или молекул, разделённых промежутками; молекулы вещества находятся в состоянии непрерывного беспорядочного теплового движения; между молекулами вещества существует взаимное притяжение и отталкивание.

Из опыта известно, что в газообразном состоянии вещество не имеет собственной формы и постоянного объёма. Газы принимают форму сосуда и полностью заполняют объём, ограниченный непроницаемыми для газа стенками.

Такие свойства газов связаны с тем, что среднее расстояние между молекулами газа намного больше размеров самих молекул. В этом случае силы притяжения между молекулами значительно меньше сил притяжения между молекулами вещества в жидком или твёрдом состояниях. А это означает, что молекулы газа могут двигаться во всех направлениях, почти не притягиваясь друг к другу, и заполнять весь предоставленный им объём.

Стремясь расшириться, газ оказывает давление на стенки сосуда или любого другого тела, с которым он соприкасается. Давление газа, находящегося в состоянии равновесия в сосуде обычных размеров, практически одинаково по всему объёму сосуда. Изменение температуры газа или его объёма приводит к изменению его давления.

2.2. Массы атомов и молекул

В экспериментальной физике разработаны различные методы для определения масс атомов и молекул. Наибольшая точность таких измерений достигнута с использованием специального прибора – *масс-спектрометра*. Например, для массы одного атома углерода (m_C) и одной молекулы воды (m_{H_2O}) измерения дают значения

$$m_C = 1,995 \cdot 10^{-26} \text{ кг}, \quad m_{H_2O} = 2,990 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

За атомную единицу массы (1 а. е. м.) принимается $1/12$ массы атома изотопа углерода $^{12}_6\text{C}$. Относительной атомной (или молекулярной) массой вещества называют отношение массы атома (или молекулы) к 1 а. е. м. Значения относительных атомных масс химических элементов можно найти в таблице периодической системы элементов Д. И. Менделеева. Например, относительная атомная масса аргона (Ar) равна 40.

2.3. Количество вещества

Для характеристики количества вещества используют относительное число молекул. В международной системе единиц СИ количество вещества измеряют в молях. 1 моль – это количество вещества, в котором содержится столько же молекул или атомов, сколько их содержится в углероде массой 0,012 кг.

Моль любого вещества содержит одно и то же число атомов или молекул. Это число обозначается N_A и называется *постоянной Авогадро*. Значение постоянной Авогадро, полученное с использованием современных экспериментальных методов, составляет

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Количество вещества ν , т. е. число молей, равно отношению числа молекул N в данном теле к постоянной Авогадро N_A : $\nu = \frac{N}{N_A}$.

2.4. Молярная масса

Важной характеристикой конкретного вещества является его молярная масса M . Молярной массой называют массу данного вещества, взятого в количестве одного моля. Молярная масса равна произведению массы m_0 одной молекулы данного вещества на постоянную Авогадро:

$$M = m_0 N_A.$$

Масса m тела, состоящего из N одинаковых молекул, равна $m = m_0 N$. Тогда, используя выражения для m и молярной массы M , для количества вещества ν в теле можно записать:

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}.$$

Для определения молярных масс можно воспользоваться таблицей периодической системы элементов Д. И. Менделеева. Например, для кремния 28 а. е. м. соответствует молярной массе $M_{\text{Si}} = 0,028$ кг/моль.

Молярная масса газа, молекулы которого состоят из разных атомов, может быть определена по его химической формуле путём сложения относительных атомных масс элементов, входящих в состав молекулы. Например, молярная масса $M_{\text{аммиак}}$ аммиака (NH_3) равна

$$\begin{aligned} M_{\text{аммиак}} &= M_{\text{N}} + 3M_{\text{H}} = \\ &= 0,014 \text{ кг/моль} + 3 \cdot 0,001 \text{ кг/моль} = 0,017 \text{ кг/моль}. \end{aligned}$$

Здесь $M_{\text{N}} = 0,014$ кг/моль и $M_{\text{H}} = 0,001$ кг/моль – молярные массы углерода и водорода соответственно.

2.5. Размеры атомов и молекул

Оценим размер молекулы (атома). В веществе, находящемся в жидком или твёрдом состоянии, атомы или молекулы расположены «вплотную» друг к другу. Тогда характерный размер молекулы (или атома) можно оценить, определив объём, в котором находится одна молекула.

Пусть имеется сплошное тело массой m и плотностью ρ , изготовленное из вещества с молярной массой M . Число молекул N данного вещества в этом объёме равно

$$N = \frac{mN_A}{M}.$$

Объём тела V равен m/ρ . Тогда занимаемый одной молекулой объём V_0 можно определить следующим образом:

$$V_0 = \frac{V}{N} = \frac{mM}{\rho N_A m} = \frac{M}{\rho N_A}.$$

Линейный размер r молекулы оценим из приближённого соотношения $V_0 \approx r^3$ (для молекулы в форме «шарика» $V_0 = 4\pi r^3/3$):

$$r \approx \sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}}.$$

Оценим, например, размер атома кальция ($\rho = 1550 \text{ кг/м}^3$, $M = 0,040 \text{ кг/моль}$). Подставляя данные в приведённую выше формулу, находим: $r \approx 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ (справочное значение $3,84 \cdot 10^{-10} \text{ м}$). Размеры того же порядка (10^{-10} м) имеют атомы и молекулы других веществ.

3. Состояние термодинамического равновесия

Пусть в сосуде объёма V находится некоторое количество газа, состоящего из нейтральных молекул. Допустим также, что нам известен химический состав данного газа (например, азот N_2 или углекислый газ CO_2).

Равновесное состояние любого тела в термодинамике определяется некоторым (небольшим) количеством физических величин, полностью характеризующих это состояние. Эти величины принято называть параметрами состояния, или просто параметрами. Например, для описания состояния газа в сосуде используют давление газа, занимаемый им объём и его температуру.

Состоянием термодинамического равновесия системы (в том числе и газа) называется состояние, характеризуемое тем, что в нём все макроскопические процессы прекращаются, а давление и температура принимают значения, постоянные по всему объёму системы.

Если давление газа в любой точке сосуда принимает одно и то же значение, то в сосуде не происходит движения отдельных частей газа, т. е. имеет место механическое равновесие. Это верно для сосудов обычных размеров, если пренебречь незначительным изменением давления с высотой, возникающим под действием силы тяжести.

Если температура газа во всём объёме одинакова, то не происходит теплопередачи от одной части газа к другой, т. е. наступает тепловое равновесие.

Как показывает опыт, в состоянии теплового равновесия три параметра состояния газа (давление, температура и объём) не являются независимыми друг от друга. Если некоторое количество газа заключено в сосуде определённого объёма при определённой температуре, то газ имеет и вполне определённое давление. При изменении температуры газа или его объёма давление газа также изменяется, принимая новое, вполне определённое значение. Эта связь между тремя параметрами

(объёмом V , давлением p и температурой T) не зависит от того, каким способом были достигнуты два параметра. Такую связь между параметрами газа в самом общем виде для постоянной массы газа называют уравнением состояния газа. Конкретный вид уравнения состояния получают на основании данных опытов, в которых устанавливаются закономерности поведения газа при изменении какого-либо параметра состояния.

4. Термодинамические процессы

4.1. Квазистатические процессы

Всякое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из её параметров состояния, называется термодинамическим процессом.

Пусть в сосуде с поршнем находится некоторая порция газа. Тогда примером термодинамического процесса может служить процесс, в котором при перемещении поршня происходит изменение объёма V газа в сосуде. При этом каждому значению объёма V в состоянии теплового равновесия будет соответствовать определённое значение давления газа p . Следовательно, между объёмом газа и его давлением будет существовать некоторая зависимость $p(V)$, которую можно представить графически, т. е. построить её график в координатах p, V .

Каждое равновесное состояние газа изображается на таком графике соответствующей точкой, а сам график изображает изменение параметров газа, т. е. даёт графическое описание теплового процесса.

Но всякое изменение одного из параметров означает, что система вышла из состояния теплового равновесия и ей уже нельзя приписать в целом ни определённого давления, ни определённой температуры.

Например, при быстром опускании поршня (т. е. при сжатии газа) параметры состояния газа (например, давление, плотность и температура) вблизи поршня изменятся довольно существенно. В то же время вдали от поршня изменение состояния газа произойдёт несколько позже. Поэтому газ в целом имеет разные давления и температуры в различных точках, и такое состояние газа нельзя изобразить графически. Возникает естественный вопрос: каким же образом необходимо изменять параметры системы, чтобы можно было в процессе их изменения характеризовать газ тем же числом параметров и использовать уравнение состояния, справедливое, строго говоря, только для состояния теплового равновесия?

Как показывает опыт, любая система, выведенная из состояния равновесия и предоставленная самой себе, переходит по прошествии некоторого времени в состояние теплового равновесия. Процесс перехода к равновесному состоянию называется релаксацией, а время, необходимое для этого, временем релаксации. Это время и определяет скорость изменения параметров системы. Если время перехода из одного равновесного состояния в другое много больше времени релаксации, то все отклонения от равновесного состояния будут успевать исчезать и система будет проходить через ряд равновесных состояний, переходящих одно в другое. Такие процессы называются квазистатическими, потому что при этом в каждый данный момент состояние системы мало отличается от равновесного.

Таким образом, если в рассматриваемом нами примере процесс изменения объёма идёт достаточно медленно, то давление и температура газа во всем объёме успевают сравняться и принимают в каждый момент времени одинаковые по всему объёму значения. Это означает, что в таком процессе газ проходит через последовательность равновесных (почти равновесных) состояний. Так как в равновесном процессе давление p , температура T и объём V в каждый момент времени имеют вполне определённые значения, то существуют зависимости между p и T , V и T , p и V . Следовательно, квазистатические процессы можно изображать в виде графиков этих зависимостей, например, $p(V)$ или $V(T)$. Неравновесный процесс невозможно изобразить графически.

Ясно, что с помощью уравнения состояния можно изучать только квазистатические процессы. Времена релаксаций, определяющие степень медленности квазистатического процесса, для разных систем и различных тепловых процессов сильно отличаются друг от друга, и для их определения нужно проводить очень трудный и сложный дополнительный анализ. В дальнейшем рассматриваются только квазистатические процессы.

Процессы, протекающие при постоянной массе газа и неизменном значении одного из параметров состояния газа (давление, объём или температура), принято называть изопроцессами. Например, процесс, происходящий при постоянной температуре, называется изотермическим, при постоянном объёме – изохорическим (или изохорным), при постоянном давлении – изобарическим (или изобарным).

4.2. Изотермический процесс. Закон Бойля – Мариотта

В XVII веке независимо друг от друга английский физик Бойль и французский физик Мариотт экспериментально установили закон изменения объёма газа при изменении давления: для данной массы любого газа при постоянной температуре его объём обратно пропорционален давлению. Закон носит название закона Бойля – Мариотта и обычно записывается в виде:

$$pV = \text{const},$$

где значение константы определяется температурой, при которой происходит данный процесс.

График этого процесса (изотерма) в координатах p и V изобразится кривой, определяемой уравнением

$$p = \frac{\text{const}}{V}.$$

Эта кривая, как известно из математики, называется гиперболой. На рисунке 1 изображены изотермы одной и той массы газа для двух разных температур T_1 и T_2 ($T_2 > T_1$). Изотерма, соответствующая большей температуре, проходит выше, так как при одинаковых объёмах большей температуре соответствует и большее давление.

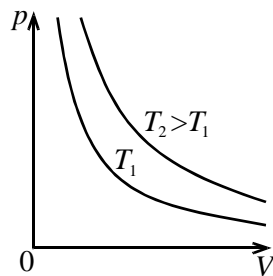


Рис. 1

4.3. Изобарический процесс. Закон Гей-Люссака

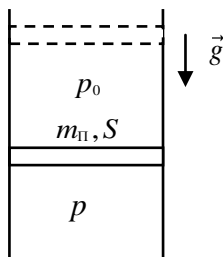


Рис. 1

Поместим газ в сосуд с вертикальными стенками и подвижным поршнем, имеющим массу $m_{\text{п}}$ и площадь сечения S , который может перемещаться без трения (рис. 2). Пусть на поршень сверху действует атмосферное давление p_0 . Рассмотрим равновесное состояние газа, характеризующееся давлением p . Величину этого давления найдём из условия механического равновесия для поршня.

На поршень действуют две силы, направленные вертикально вниз (сила тяжести $m_{\text{п}}g$ и сила давления атмосферы p_0S), и направленная вертикально вверх сила давления со стороны газа под поршнем, значение которой равно pS . Условие равновесия поршня – равенство нулю равнодействующей этих сил. Отсюда для давления p газа находим

$$p = p_0 + \frac{m_{\text{п}}g}{S},$$

Внешнее давление на газ также равно p . Как показывает опыт, при квазистатическом (медленном) нагревании газа под поршнем при постоянном внешнем давлении, объём всех без исключения газов увеличивается, а при охлаждении уменьшается.

Исследуя на опыте тепловое расширение газов при постоянном давлении, французский учёный Гей-Люссак открыл, что объём V газа данной массы при изменении температуры $t(^{\circ}\text{C})$ изменяется по линейному закону:

$$V = V_0(1 + \alpha t).$$

Здесь V_0 – объём газа при температуре 0°C , α – коэффициент объёмного расширения при постоянном давлении. Оказалось, что для всех газов α принимает одно и то же значение, равное $1/273^{\circ}\text{C}$.

4.4. Изохорический процесс. Закон Шарля

Рассмотрим теперь процесс нагревания газа при постоянном объёме, или, как говорят, процесс изохорического нагревания газа. Поместим для этого газ в герметический сосуд, например, в металлический котёл с плотно завинчивающейся крышкой. Будем нагревать газ в котле, измеряя его температуру и давление. Как показывает опыт, давление газа внутри котла увеличивается с ростом температуры.

Зависимость давления газа от температуры при неизменном объёме была экспериментально установлена французским физиком Шарлем. Согласно закону Шарля, давление p газа данной массы при изменении температуры $t(^{\circ}\text{C})$ изменяется по линейному закону:

$$p = p_0(1 + \gamma t).$$

Здесь p_0 – давление газа при температуре 0°C , γ – термический коэффициент давления. Оказалось, что для всех газов γ принимает одно и то же значение, равное $1/273^{\circ}\text{C}$. Заметим, что коэффициент γ равен коэффициенту α в законе Гей-Люссака.

4.5. Абсолютная шкала температур

Законы Гей-Люссака и Шарля выглядят гораздо проще, если вместо температурной шкалы Цельсия $t(^{\circ}\text{C})$ ввести шкалу, предложенную английским физиком Кельвином. Связь между температурой T по шкале Кельвина и температурой t по шкале Цельсия даётся формулой:

$$T = t + \frac{1}{\alpha} = t + \frac{1}{\gamma} = t + 273.$$

Шкалу Кельвина называют абсолютной шкалой температур. На новой температурной шкале нулю градусов Цельсия соответствует температура $T_0 = 273$ градуса (точнее, 273,15). Единица измерения температуры называется кельвином и обозначается буквой К. Изменению температуры на 1 градус Цельсия соответствует её изменению на 1 кельвин. Комнатной температуре $t = 20^{\circ}\text{C}$ по шкале Цельсия соответствует температура $T = 293$ К по шкале Кельвина.

Законы Гей-Люссака и Шарля при этом примут вид:

$$V = V_0 \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = \alpha V_0 T \quad \text{закон Гей-Люссака,}$$

$$p = p_0 \gamma \left(\frac{1}{\gamma} + t \right) = \gamma p_0 T \quad (\text{закон Шарля}),$$

где V_0 и p_0 – объём и давление газа при температуре T_0 .

Как видно из уравнения для закона Гей-Люссака, график изобарического процесса (изобара) в координатах V и T представляет собой отрезок, лежащий на прямой линии, проходящей через начало координат. На рисунке 3 показаны две изобары при различных давлениях p_1 и p_2 ($p_2 > p_1$). Давление, при котором проходит процесс, можно изменять, используя поршни разной массы. Вторая изобара проходит ниже первой, так как при одной и той же температуре большему давлению соответствует меньший объём.

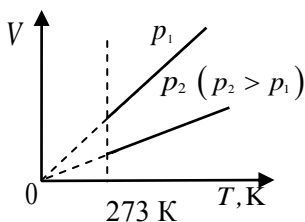


Рис. 3

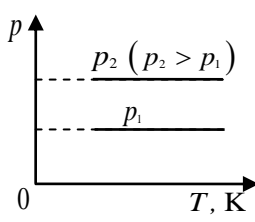


Рис. 4

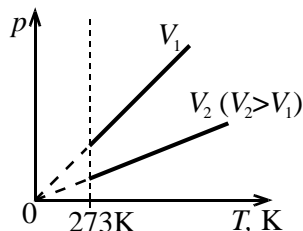


Рис. 5

В координатах p и T графики изобарических процессов представляют собой прямые линии, параллельные оси T (рис. 4).

График изохорического процесса (изохора, закон Шарля) в координатах p и T представляет собой отрезок, лежащий на прямой линии, проходящей через начало координат. На рисунке 5 показаны две изохоры при различных объёмах V_1 и V_2 ($V_2 > V_1$). Вторая изохора проходит ниже первой, так как при одной и той же температуре большему давлению соответствует меньший объём.

5. Уравнение состояния идеального газа

Равенство коэффициента теплового расширения α газа при постоянном давлении термическому коэффициенту давления γ при постоянном объёме является свойством, присущим только идеальным газам. Оно позволяет найти уравнение состояния газов.

Пусть газ совершает тепловой процесс, в котором его сначала нагревают при постоянном объёме, а затем при постоянном давлении. График процесса изохорического нагревания в координатах p, V изображится прямой 1–2', параллельной оси ординат p (рис. 6).

Процесс изобарического нагревания изобразится на этом графике прямой 2'–2, параллельной оси абсцисс V .

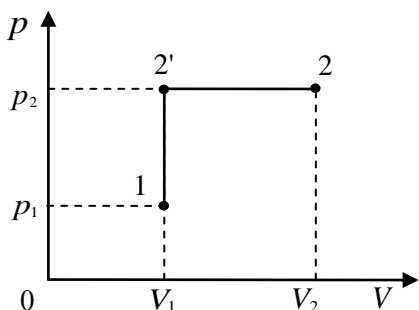


Рис. 6

Обозначим давление, объём и температуру газа в начале теплового процесса (точка 1 на графике) как p_1, V_1, T_1 соответственно; в конце процесса изохорического нагревания – p_2', V_2', T_2' (точка 2') и в конце изобарического процесса – p_2, V_2, T_2 (точка 2).

Из закона Шарля следует, что отношение давления к абсолютной температуре есть величина постоянная: $p/T = \alpha p_0$ ($\gamma = \alpha$). Поэтому давление и температура газа в точке 2' связаны с давлением и температурой газа в точке 1 соотноше-

нием $p_2' / T_2' = p_1 / T_1$, из которого находим температуру T_2' в конце изохорического нагревания:

$$T_2' = \frac{p_2'}{p_1} \cdot T_1.$$

Аналогично, используя закон Гей-Люссака, можно показать, что температура T_2' и объём газа V_2' в точке 2' в процессе изобарического нагревания связаны с температурой T_2 и объёмом газа V_2 в точке 2 соотношением $V_2' / T_2' = V_2 / T_2$. Подставляя в это уравнение температуру T_2' и учитывая равенства $V_2' = V_1$, $p_2' = p_2$, получаем:

$$\frac{V_1 p_1}{p_2 T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Откуда следует:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}. \quad (1)$$

Начальное и конечное состояния газа (точки 1 и 2) были выбраны совершенно произвольно. Можно было бы взять в качестве начального и конечного состояний другие точки. Процесс перевода газа из состояния 1 в состояние 2 также можно было бы совершить по-иному, нагревая, например, газ сначала изобарически, а затем изохорически. Однако в любом случае можно показать, что параметры начального (точка 1) и конечного (точка 2) состояний газа всегда связаны между собой соотношением (1), или, по-другому, что в состоянии теплового равновесия для данной массы газа справедливо соотношение:

$$\frac{pV}{T} = \text{const}. \quad (2)$$

Неизвестную постоянную удалось вычислить после того, как итальянским физиком Авогадро был экспериментально установлен закон, согласно которому один моль любого газа при нормальных условиях, т. е. при нормальном атмосферном давлении 1 атм (101325 Па) и температуре 0°C (273,15 К) занимает объём 22,4 л. Подставляя эти данные в найденное соотношение (2), для моля газа получим значение постоянной R

$$\frac{pV}{T} = R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Величину R называют универсальной газовой постоянной.

С учётом этого соотношения уравнение состояния для одного моля газа можно записать в виде

$$pV = RT. \quad (3)$$

Используя уравнение (3), нетрудно получить уравнение состояния для произвольного количества газа. Так как в состоянии теплового равновесия масса газа распределена равномерно по объёму сосуда, то ν молей газа при тех же условиях занимают в ν раз больший объём, чем объём одного моля. Таким образом, уравнение состояния для ν молей газа может быть записано в виде

$$pV = \nu RT = \frac{m}{M} RT. \quad (4)$$

Здесь m и M – масса и молярная масса газа. Уравнение (4) называют уравнением состояния идеального газа.

Уравнение состояния в форме (2) было впервые записано Клапейроном, а в форме (4) – Менделеевым. Поэтому часто уравнение газового состояния называют уравнением (или законом) Менделеева – Клапейрона.

Следует отметить, что в реальных условиях ни один из газов не подчиняется строго уравнению Менделеева – Клапейрона. Правда, отклонения от закона Менделеева – Клапейрона фактически исчезают для достаточно разреженных газов. Однако при низких температурах и больших плотностях начинаются заметные отклонения от этого закона. Этот факт учитывается при графическом описании тепловых процессов с участием идеального газа. На рисунках 3 – 5 графики процессов изображаются сплошными линиями, которые нельзя продолжать в область низких температур. Пунктирная линия используется только в качестве вспомогательной.

Отклонения от закона Менделеева – Клапейрона наблюдаются и при достаточно высоких температурах (порядка тысячи или нескольких тысяч градусов) для газов из многоатомных молекул. При этих температурах начинается распад молекул на атомы (диссоциация). При ещё более высоких температурах начинается распад атомов на электроны и ионы, и любой газ перестаёт подчиняться уравнению Менделеева – Клапейрона, даже при сколь угодно малых плотностях.

В термодинамике идеальным называют газ, строго подчиняющийся уравнению Менделеева – Клапейрона (о том, что такое идеальный газ с точки зрения молекулярно-кинетической теории, см. в разделе 9 настоящего задания).

Из уравнения Менделеева – Клапейрона нетрудно получить зависимость между давлением p , плотностью ρ и температурой T идеального газа:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad \rho = \frac{pM}{RT}, \quad p = \frac{\rho}{M} RT. \quad (5)$$

6. Закон Дальтона

При описании природных явлений и процессов в технических устройствах приходится иметь дело не только с одним газом (кислородом, водородом и т. п.), но и со смесью нескольких газов. Воздух, являющийся смесью азота, кислорода, углекислого газа, аргона и других газов, – наиболее часто упоминаемый пример смеси газов.

Допустим, что смесь из N различных газов находится в равновесном состоянии в сосуде объёмом V при абсолютной температуре T . От чего зависит общее давление p в сосуде, заполненном смесью газов? Исследованием этого вопроса в начале XIX века занимался английский химик Джон Дальтон.

Пронумеруем газы, входящие в состав смеси, присвоив каждому свой номер i ($i = 1, 2, \dots, N$). Давление p_i , которое производил бы каждый из газов, составляющих смесь, если удалить остальные газы из сосуда, называют парциальным давлением этого газа. Парциальный (от латинского слова *pars* – часть) – частичный, отдельный. Дальтоном экспериментально установлено, что для достаточно разреженных газов давление $p_{\text{см}}$ смеси газов, химически не взаимодействующих между собой, равно сумме парциальных давлений компонентов смеси:

$$p_{\text{см}} = p_1 + p_2 + \dots + p_N. \quad (6)$$

Сейчас этот закон называют *законом Дальтона*.

В смеси идеальных газов каждый из газов ведёт себя независимо от других газов, занимает весь предоставленный объём (т. е. объём каждой компоненты смеси V), и его состояние описывается уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$p_i V = \frac{m_i}{M_i} RT = \nu_i RT. \quad (7)$$

Здесь m_i , M_i и ν_i – масса, молярная масса и количество молей i -го газа.

Если теперь в равенство (6), выражающее закон Дальтона, подставить значения парциальных давлений из (7), то после несложных преобразований можно получить уравнение, описывающее состояние смеси идеальных газов:

$$p_{\text{см}} V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_N}{M_N} \right) RT = (\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_N) RT. \quad (8)$$

Если ввести понятие молярная масса смеси:

$$M_{\text{см}} = \frac{m_{\text{см}}}{\nu_{\text{см}}} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_N}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_N} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_N}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_N}{M_N}} =$$

$$= \frac{\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \dots + \nu_N M_N}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_N} = \frac{p_1 M_1 + p_2 M_2 + \dots + p_N M_N}{p_1 + p_2 + \dots + p_N}, \quad (9)$$

то уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси газов будет выглядеть так:

$$p_{\text{см}} V = \frac{m_{\text{см}}}{M_{\text{см}}} RT = \nu_{\text{см}} RT. \quad (10)$$

7. Насыщенный пар. Кипение. Влажность

Насыщенным паром называется пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью: скорость испарения равна скорости конденсации. Давление и плотность насыщенного пара для данного вещества зависят только от его температуры и увеличиваются при увеличении температуры. Иными словами, давление насыщенных паров – это максимальное возможное давление пара при данной температуре.

Условие кипения жидкости – это условие роста пузырьков насыщенного пара в жидкости. Пузырёк может расти, если давление насыщенного пара внутри него будет не меньше внешнего давления. Итак, *жидкость кипит при той температуре, при которой давление её насыщенных паров равно внешнему давлению*. Приведём полезный пример.

Известно, что при нормальном атмосферном давлении $p_0 \approx 10^5$ Па вода кипит при 100°C . Это означает, что давление насыщенных паров воды при 100°C равно $p_0 \approx 10^5$ Па. А в горах на высоте 5 км атмосферное давление $\sim 0,5 \cdot 10^5$ Па, что соответствует давлению насыщенных паров при 80°C , и в результате вода кипит при 80°C .

Пары воды в атмосферном воздухе обычно ненасыщенные. *Абсолютной влажностью* воздуха называется плотность водяных паров ρ . *Относительной влажностью* воздуха называется величина

$$\varphi = \frac{p}{p_{\text{нас}}}.$$

Здесь p – парциальное давление паров воды при данной температуре в смеси воздух – пары воды, $p_{\text{нас}}$ – парциальное давление насыщенных водяных паров при той же температуре. Ещё раз напоминаем, что $p_{\text{нас}}$ зависит только от температуры и не зависит от плотности и состава воздуха.

Если пар считать идеальным газом, то $p = \frac{\rho}{M} RT$, $p_{\text{нас}} = \frac{\rho_{\text{нас}}}{M} RT$, где ρ и $\rho_{\text{нас}}$ – плотности ненасыщенного и насыщенного водяного пара, $M = 18 \text{ г/моль}$. Деление одного уравнения на другое даёт $\frac{p}{p_{\text{нас}}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{нас}}}$.
Итак,

$$\varphi = \frac{p}{p_{\text{нас}}} \approx \frac{\rho}{\rho_{\text{нас}}}.$$

Относительная влажность показывает какую долю (процент) составляют пары воды от насыщенных, так сказать степень насыщения паров воды. Например, при относительной влажности воздуха 40% парциальное давление паров воды $p = 0,4 p_{\text{нас}}$. Считается, что наиболее комфортная относительная влажность воздуха ~60%.

8. Примеры решения задач

Задача 1*. Органическое соединение массой $m = 716 \text{ мг}$, имеющее формулу $(\text{C}_3\text{H}_6\text{O})_n$, при давлении $p = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t = 200^\circ\text{C}$ занимает в газообразном состоянии объём $V = 243 \text{ см}^3$. Найдите n .

Решение. Для молярной массы M этого соединения имеем

$$M = 3n \cdot M_{\text{C}} + 6n \cdot M_{\text{H}} + n \cdot M_{\text{O}},$$

где $M_{\text{C}} = 12 \text{ г/моль}$, $M_{\text{H}} = 1 \text{ г/моль}$ и $M_{\text{O}} = 16 \text{ г/моль}$ – молярные массы углерода (C), водорода (H) и кислорода (O), соответственно.

Подставляя выражение для M в уравнение состояния идеального газа, для n находим

$$\begin{aligned} n &= \frac{mRT}{pV(3M_{\text{C}} + 6M_{\text{H}} + M_{\text{O}})} = \\ &= \frac{0,716 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 8,31 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)} \cdot 473 \text{ К}}{10^5 \text{ Па} \cdot 0,243 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 58 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}} = 2. \end{aligned}$$

Задача 2. Бутылка, наполненная воздухом, плотно закрыта пробкой площадью сечения $S = 2,5 \text{ см}^2$. До какой температуры t_2 следует нагреть воздух, чтобы пробка вылетела из бутылки, если максимальная сила трения, удерживающая пробку, $F = 12 \text{ Н}$? Начальное давление воздуха в бутылке и наружное давление одинаковы и равны $p = 100 \text{ кПа}$, начальная температура $t_1 = -3^\circ\text{C}$.

Решение. В момент начала движения пробки разность сил давления, действующих на пробку, равна максимальной силе трения

$$\tilde{p}S - pS = F.$$

Отсюда находим давление газа

$$\tilde{p} = p + \frac{F}{S}$$

в бутылке в этот момент. При изохорическом нагревании давление газа прямо пропорционально абсолютной температуре (закон Шарля)

$$\frac{p}{T_1} = \frac{\tilde{p}}{T_2}.$$

Из приведенных соотношений приходим к ответу на вопрос задачи

$$t_2 = (t_1 + 273) \left(\frac{F}{pS} + 1 \right) - 273 \approx 127^\circ \text{C}.$$

Задача 3*. При нагревании идеального газа была получена зависимость давления от температуры, изображённая на рис. 7. Определите, что производилось во время нагревания газа: сжатие или расширение? T – абсолютная температура.

Решение. Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся приёмом, основанным на вспомогательных построениях.

График изохорного процесса в координатах p, T представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Угловой коэффициент этой прямой обратно пропорционально зависит от объёма.

Проведём две изохоры, одна из которых проходит через точку 1, вторая – через 2 (рис. 8). Первая изохора соответствует объёму V_1 в состоянии 1, вторая – объёму V_2 в состоянии 2. Видно, что первая изохора идёт круче второй, следовательно, её угловой коэффициент больше. Это, в свою очередь, означает, что $V_1 < V_2$, т. е. при переходе из состояния 1 в состояние 2 газ расширялся.

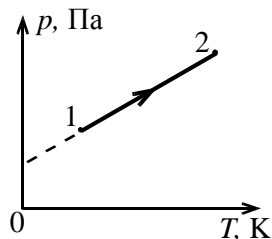


Рис. 7

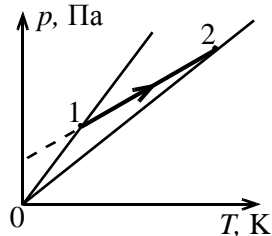


Рис. 8

Задача 4. В вертикально расположенном цилиндре с гладкими стенками сечением S под поршнем массой m находится воздух при температуре T_1 . Когда на поршень положили груз массой M , расстояние от него до дна цилиндра уменьшилось в n раз. На сколько повысилась температура воздуха в цилиндре? Атмосферное давление p_0 .

Решение. В первой ситуации на поршень действуют две силы, направленные вертикально вниз (сила тяжести mg и сила давления атмосферы $p_0 S$), и направленная вертикально вверх сила давления со стороны воздуха под поршнем $p_1 S$. Из равенства нулю равнодействующей этих сил (условие механического равновесия поршня) для начального давления p_1 воздуха находим

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}.$$

Рассуждая аналогичным образом, для давления p_2 воздуха во второй ситуации (на поршень положили дополнительный груз массой M) имеем

$$p_2 = p_0 + \frac{(m+M)g}{S}.$$

Пусть H_1 и H_2 – расстояния от дна цилиндра до поршня в начале и в конце опыта. Тогда для начального (V_1) и конечного (V_2) объёмов воздуха можно записать: $V_1 = H_1 S$, $V_2 = H_2 S$.

С учётом полученных соотношений уравнения Менделеева – Клапейрона для начального и конечного состояний воздуха принимают вид

$$p_1 V_1 = \left(p_0 + \frac{mg}{S} \right) H_1 S = \nu R T_1, \quad p_2 V_2 = \left(p_0 + \frac{(m+M)g}{S} \right) H_2 S = \nu R T_2,$$

где ν – число молей воздуха в цилиндре. Учитывая, что объём воздуха уменьшился в n раз ($H_2 = H_1 / n$), для отношения температур воздуха находим:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\left(p_0 + \frac{mg}{S} \right) H_1 S}{\left(p_0 + \frac{(m+M)g}{S} \right) H_2 S} = \frac{n \left(p_0 + \frac{mg}{S} \right)}{\left(p_0 + \frac{(m+M)g}{S} \right)}.$$

Теперь для изменения температуры $\Delta T = T_2 - T_1$ получаем:

$$\Delta T = T_1 \left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{Mg}{n(p_0 S + mg)} \right).$$

Заметим, что воздух будет нагреваться, если выражение в скобках больше нуля.

Задача 5. U-образная тонкая трубка постоянного внутреннего сечения с вертикально расположенными коленями заполняется ртутью так, что в каждом из открытых колен остаётся слой воздуха длиной $L = 320$ мм (рис. 9). Затем правое колено закрывается небольшой пробкой. Какой максимальной длины слой ртути можно долить в левое колено, чтобы она не выливалась из трубки? Опыт производится при постоянной температуре, внешнее давление составляет 720 мм рт.ст. (МФТИ, 2000 г.)

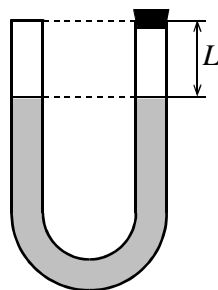


Рис. 9

Решение. Пусть S – площадь сечения трубки. Тогда, после того как правое колено закрыли пробкой, между пробкой и ртутью оказался заперт воздух, занимающий объём $V_1 = SL$ при давлении $p_1 = 720$ мм рт.ст. Равновесное состояние этого воздуха описывается уравнением Менделеева – Клапейрона $p_1 V_1 = p_1 SL = \nu RT$, где ν – число молей воздуха, T – его температура.

При доливании в левое колено максимально возможного количества ртути оно будет заполнено ртутью полностью, т. е. уровень ртути поднялся на L , а в правом колене уровень ртути поднимется на некоторую высоту h . Таким образом, полная высота столбика ртути, долитой в трубку, равна $L + h$.

Ртуть в трубке находится в равновесии. Условием равновесия является равенство давлений в точках, расположенных в правом и левом коленях на одном горизонтальном уровне. Выберем уровень, проходящий на расстоянии L от верхнего края трубки. Давление в левом колене $p_{\text{л}} = p_1 + \rho_{\text{рт}} g L$, где p_1 – атмосферное давление на открытую поверхность ртути.

Давление в правом колене $p_{\text{п}} = p_2 + \rho_{\text{рт}} g h$, где p_2 – давление воздуха запертого в правом колене. Тогда условие равновесия ртути в трубке можно записать следующим образом:

$$p_{\text{л}} = p_1 + \rho_{\text{рт}} g L = p_{\text{п}} = p_2 + \rho_{\text{рт}} g h.$$

Новое равновесное состояние запертого в правом колене воздуха описывается уравнением

$$p_2 V_2 = p_2 S(L - h) = \nu RT.$$

Используя составленные соотношения, получаем квадратное уравнение для определения h :

$$p_2 S(L - h) = (p_1 + \rho_{\text{рт}} g(L - h)) S(L - h) = p_1 SL,$$

решая которое, находим: $h = 80$ мм (второй корень уравнения ($h = 1280$ мм) не удовлетворяет условию задачи). Следовательно, в трубку можно долить слой ртути максимальной высотой $L + h = 400$ мм.

Задача 6. Горизонтально расположенный сосуд, постоянного внутреннего сечения и длины L разделён теплонепроницаемой подвижной перегородкой (рис. 10). В одной части сосуда находится азот, в другой гелий. В первоначальном состоянии температура газов 300К, а объём, занимаемый гелием в два раза больше объёма азота. Затем температуру азота повышают до 600К. На какое расстояние переместится перегородка? Толщина перегородки много меньше L . Трением между поршнем и стенками сосуда пренебречь

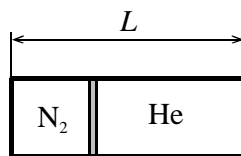


Рис. 10

Решение. Найдём начальное положение перегородки l_1 (отсчёт ведётся от левого края сосуда (см. рис. 10)):

$$\frac{V_{\text{N}_2}}{V_{\text{He}}} = \frac{Sl_1}{S(L-l_1)} \Rightarrow l_1 = \frac{V_{\text{N}_2} / V_{\text{He}}}{1 + V_{\text{N}_2} / V_{\text{He}}} L \Rightarrow l_1 = \frac{1}{3} L,$$

Где V_{N_2} и V_{He} – начальные объёмы азота и гелия, S – площадь поперечного сечения сосуда.

Так как перегородка подвижна и теплонепроницаема, то давление в левой и правой частях сосуда будет одинаково, температура азота поднимется от T_1 до T_2 (по условию), а температура гелия остаётся неизменной T_1

Запишем уравнения Менделеева – Клапейрона для начального и конечного состояний, и найдём конечное отношение объёмов азота и гелия. (p_1 и p_2 – начальные и конечные давления в сосуде, v_{N_2} и v_{He} – количества азота и гелия, $V_{2\text{N}_2}$ и $V_{2\text{He}}$ – конечные объёмы азота и гелия).

В начальном состоянии:

$$\begin{cases} p_1 V_{\text{N}_2} = v_{\text{N}_2} R T_1 \\ p_1 V_{\text{He}} = v_{\text{He}} R T_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{\text{N}_2}}{v_{\text{He}}} = \frac{V_{\text{N}_2}}{V_{\text{He}}} \Rightarrow \frac{v_{\text{N}_2}}{v_{\text{He}}} = \frac{1}{2}$$

В конечном состоянии:

$$\begin{cases} p_2 V_{2\text{N}_2} = v_{\text{N}_2} R T_2 \\ p_2 V_{2\text{He}} = v_{\text{He}} R T_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_{\text{N}_2}}{V_{\text{He}}} = \frac{v_{\text{N}_2}}{v_{\text{He}}} \cdot \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{V_{\text{N}_2}}{V_{\text{He}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{600\text{K}}{300\text{K}} = 1$$

Конечное положение перегородки:

$$l_2 = \frac{V_{2_{N_2}} / V_{2_{He}}}{1 + V_{2_{N_2}} / V_{2_{He}}} L \Rightarrow l_2 = \frac{1}{2} L,$$

Смещение перегородки Δl :

$$\Delta l = l_2 - l_1 = \frac{1}{2} L - \frac{1}{3} L = \frac{1}{6} L.$$

Итак, перегородка сместится на $\frac{1}{6} L$ вправо.

Задача 7. Воздушный шар, наполненный водородом (H_2), имеет объём $V = 100 \text{ м}^3$. Чему равна подъёмная сила шара у поверхности Земли? Давление и температура водорода и окружающего воздуха одинаковые и составляют соответственно 760 мм рт. ст. и 20°C . Оболочка шара тонкая и имеет массу 9 кг, молярная масса воздуха $M_{\text{возд}} = 29 \text{ г/моль}$.

Решение. Подъёмная сила шара равна разности силы Архимеда (выталкивающей силы), действующей на аэростат со стороны окружающего его воздуха, и силы тяжести, действующей на оболочку шара и водород внутри него: $F_{\text{под}} = F_{\text{арх}} - F_{\text{тяж}}$.

Для силы Архимеда имеем:

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{возд}} g V, \text{ где } \rho_{\text{возд}} = \frac{p M_{\text{возд}}}{RT}.$$

Здесь p – давление воздуха, $M_{\text{возд}}$ – его молярная масса, T – температура. Учитывая уравнение состояния водорода, для силы тяжести, действующей на оболочку шара и водород, получаем:

$$F_{\text{тяж}} = (m + m_{\text{вод}}) g = (m + \rho_{\text{вод}} V) g = \left(m + \frac{p M_{\text{вод}} V}{RT} \right) g,$$

где m – масса оболочки, $M_{\text{вод}}$ – молярная масса водорода. Теперь для подъёмной силы находим

$$F_{\text{под}} = \left(\frac{p V (M_{\text{возд}} - M_{\text{вод}})}{RT} - m \right) g \approx 1020 \text{ Н}.$$

Задача 8. В баллоне находится смесь газов, содержащая 524 г ксенона, 16 г гелия и 71 г молекулярного хлора (Cl_2). Найти молярную массу этой смеси.

Решение. По определению молярной массы:

$$M_{\text{смеси}} = \frac{m_{\text{смеси}}}{\nu_{\text{смеси}}} = \frac{m_{\text{Xe}} + m_{\text{He}} + m_{\text{Cl}_2}}{\nu_{\text{Xe}} + \nu_{\text{He}} + \nu_{\text{Cl}_2}} = \frac{m_{\text{Xe}} + m_{\text{He}} + m_{\text{Cl}_2}}{\frac{m_{\text{Xe}}}{M_{\text{Xe}}} + \frac{m_{\text{He}}}{M_{\text{He}}} + \frac{m_{\text{Cl}_2}}{M_{\text{Cl}_2}}},$$

$$M_{\text{смеси}} = \frac{524\text{г} + 16\text{г} + 71\text{г}}{\frac{524\text{г}}{131\text{г/моль}} + \frac{16\text{г}}{4\text{г/моль}} + \frac{71\text{г}}{71\text{г/моль}}} \approx 68\text{ г/моль}.$$

Задача 9. При изотермическом сжатии 18 г водяного пара при температуре $T = 373\text{ К}$ его объём уменьшился в 4 раза, а давление возросло вдвое. Найти начальный объём пара.

Решение. При сжатии часть пара сконденсировалась, и оставшийся пар стал насыщенным. При температуре $T = 373\text{ К}$, т. е. 100°C , его давление $p \approx 10^5\text{ Па}$. Уравнение Менделеева – Клапейрона для начального состояния

$$\frac{p}{2}V = \frac{m}{M}RT, \text{ где } M = 18\text{ г/моль}.$$

$$\text{Отсюда } V = \frac{2mRT}{Mp} \approx 62 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3 = 62\text{ л}.$$

9. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

9.1. Модель идеального газа в молекулярно-кинетической теории

Законы идеальных газов, найденные опытным путём, находят довольно простое объяснение в молекулярно-кинетической теории (МКТ). Она исходит при этом из упрощённых представлений о строении газа. Это обусловлено рядом причин, в частности, неточным знанием сил взаимодействия между молекулами. Однако, как оказывается, даже такая упрощённая модель газа позволяет найти уравнение состояния, правильно описывающее его поведение.

В молекулярно-кинетической теории принимается следующая идеализированная модель газа – идеальный газ. Молекулы газа считаются твёрдыми, абсолютно упругими шариками, причём размеры молекул малы по сравнению со средним расстоянием между ними. Это означает, что собственный суммарный объём молекул значительно меньше объёма сосуда, в котором находится газ. Взаимодействие между молекулами проявляется только при непосредственном столкновении их друг с

другом. Между столкновениями молекулы движутся по инерции. Движение молекул подчиняется законам механики Ньютона.

Для нахождения уравнения состояния газа необходимо сделать ещё важное упрощающее предположение, а именно, считать движение любой молекулы газа *беспорядочным, хаотичным*.

Аккуратный вывод основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа требует принимать во внимание ряд моментов, например, наличие в газе молекул, движущихся с разными по величине скоростями, столкновения молекул между собой, характер столкновения отдельной молекулы со стенкой сосуда (упругий или неупругий). В разделе 7.3 будет рассмотрен упрощённый вариант вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории.

9.2. Давление идеального газа

Давление, которое оказывает газ на стенку сосуда, есть результат *ударов молекул* газа о стенку. Если бы в сосуде содержалось всего несколько молекул, то их удары следовали бы друг за другом редко и беспорядочно. Поэтому нельзя было бы говорить ни о какой регулярной силе давления, действующей на стенку. Стенка подвергалась бы отдельным практически мгновенным бесконечно малым толчкам. Если же число молекул в сосуде очень велико, то велико и число ударов их о стенку сосуда. Одновременно о стенку сосуда ударяется громадное количество молекул. Очень слабые силы отдельных ударов складываются при этом в значительную по величине и почти постоянную силу, действующую на стенку. Среднее по времени значение этой силы, отнесённое к единичной площадке, и есть давление газа, с которым имеет дело термодинамика.

Пусть в сосуде объёма V находятся N одинаковых молекул идеального газа, а m_0 – масса одной молекулы. В рамках молекулярно-кинетической теории показывается, что давление p газа определяется выражением

$$p = m_0 n \overline{v^2} / 3, \quad (11)$$

где $n = N/V$ – концентрация молекул газа, $\overline{v^2}$ – среднее значение квадрата скорости молекулы. Выражение (11) называют основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Заметим, что величина $m_0 \overline{v^2} / 2$ есть средняя кинетическая энергия \overline{E} поступательного движения молекулы. Поэтому полученную формулу можно представить в другом виде:

$$p = 2n\overline{E} / 3. \quad (12)$$

Ниже приводится один из способов вывода уравнения (11). Данный раздел при первом прочтении можно пропустить.

9.3.* Вывод основного уравнения МКТ идеального газа

Вычислим среднее давление газа на стенку сосуда.

Для простоты будем считать, что удар молекулы о стенку происходит абсолютно упруго, а сама стенка идеально гладкая и молекула после удара отражается от неё под тем же углом, под каким она падала на стенку (см. рис. 11), или, как говорят, зеркально (однако ясно, что никаких гладких стенок не существует: ведь сама стенка состоит из молекул).

Введём систему координат, направив ось OX перпендикулярно стенке, а ось OY – вдоль стенки (см. рис. 11).

Пронумеруем все молекулы от $i=1$ до $i=N$. Пусть $v_{i,x}$, ($v_{i,x} > 0$) – проекция скорости i -ой молекулы на ось OX до удара. При абсолютно упругом ударе о стенку проекция скорости на ось OX изменяет знак: $v'_{i,x} = -v_{i,x}$. Изменение проекции импульса молекулы на ось OX при столкновении молекулы со стенкой равно

$$\Delta p_{i,x} = m_0 v'_{i,x} - m_0 v_{i,x} = -2m_0 v_{i,x},$$

а передаваемый стенке импульс равен

$$\Delta p_{i,x, \text{стен}} = -\Delta p_{i,x} = 2m_0 v_{i,x}.$$

Так как давление газа не зависит от формы сосуда, возьмём для простоты сосуд в форме куба с ребром l . Тогда промежуток времени между двумя последовательными столкновениями молекулы с одной и той же стенкой составит $\tau_i = 2l/v_{i,x}$, а за большой интервал времени t она столкнётся со стенкой $N_{\text{столк},i} = t/\tau_i$ раз. Переданный стенке одной молекулой за это время импульс равен

$$2m_0 v_{i,x} \cdot N_{\text{столк},i} = 2m_0 v_{i,x} \cdot \frac{v_{i,x} t}{2l} = m_0 v_{i,x}^2 \cdot \frac{t}{l}.$$

Так как в сосуде находятся N молекул, то полный переданный стенке импульс всех молекул равен

$$\Delta p_{x,\Sigma} = \sum_{i=1}^{i=N} \Delta p_{i,x, \text{стен}} = \frac{m_0 t}{l} \sum_{i=1}^{i=N} v_{i,x}^2.$$

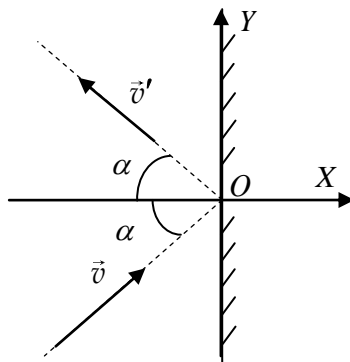


Рис. 11

Среднюю силу давления на стенку можно получить, разделив полный передаваемый стенке импульс на время t :

$$F_{x, \text{cp}} = \frac{\Delta p_{x, \Sigma}}{t} = \frac{m_0}{l} \sum_{i=1}^{i=N} v_{i,x}^2,$$

а давление p – разделив эту силу на площадь стенки $S = l^2$:

$$p = \frac{F_{x, \text{cp}}}{S} = \frac{m_0}{l^3} \sum_{i=1}^{i=N} v_{i,x}^2 = \frac{m_0}{V} \sum_{i=1}^{i=N} v_{i,x}^2.$$

Здесь учтено, что объём сосуда $V = l^3$. Если ввести среднее значение квадрата проекции скорости одной молекулы

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} v_{i,x}^2,$$

то для давления p получаем

$$p = \frac{m_0 N}{V} \overline{v_x^2}.$$

Входящую в это выражение величину $\overline{v_x^2}$ можно выразить через среднее значение квадрата скорости молекулы. Из соотношения $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ для средних значений имеем: $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$. Так как движение молекул беспорядочное, то все направления движения равновероятны и средние значения квадратов проекций на любое направление должны быть равны $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. Отсюда получаем: $\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$, что позволяет записать выражение для давления в виде

$$p = \frac{1}{3} \frac{m_0 N}{V} \overline{v^2}, \text{ или } p = \frac{1}{3} m_0 n \overline{v^2},$$

где $n = N/V$ – концентрация молекул газа.

10. Молекулярно-кинетический смысл температуры

Найдём связь между средней кинетической энергией \bar{E} поступательного движения молекулы газа и его температурой T . Учитывая соотношение $n = N/V$, перепишем уравнение (12) в виде:

$$pV = 2N\bar{E}/3.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением Менделеева–Клапейрона

$$pV = \nu RT = NRT/N_A,$$

получаем для средней кинетической энергии \bar{E} :

$$\bar{E} = \frac{m_0 \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT, \quad (13)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж / К – постоянная Больцмана.

С учётом соотношения (13) выражение (12) для давления можно записать в виде:

$$p = nkT. \quad (14)$$

Также из соотношения (13) обнаруживается связь между основными термодинамическими постоянными:

$$R = k \cdot N_A \quad (15)$$

В состоянии теплового равновесия средняя кинетическая энергия поступательного движения любых молекул имеет одно и то же значение, т. е. средняя кинетическая энергия молекул обладает основным свойством температуры – в состоянии теплового равновесия она одинакова для всех молекул газов, находящихся в тепловом контакте, а также для различных молекул газовой смеси. Величину \bar{E} можно принять поэтому за меру температуры газа. В этом и состоит физический смысл температуры с молекулярно-кинетической точки зрения.

Скорость хаотического (теплового) движения молекул характеризуется средней квадратичной скоростью

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (16)$$

Дополнительно хочется отметить, что

$$\boxed{\bar{E}_{\text{полн}} \sim kT},$$

где в $\bar{E}_{\text{полн}}$ входит средняя кинетическая энергия поступательного, вращательного, колебательного и других движений молекулы. Более того, в классической термодинамике эта пропорциональность справедлива не только для газообразных, но и для жидких и твёрдых тел и сред.

Таким образом, ещё раз напоминаем, температура есть мера средней кинетической энергии молекул. В этом и состоит молекулярно-кинетический смысл температуры. В частности при температуре $T = 0$ К прекращается всякое тепловое движение молекул.

11. Примеры решений задач (МКТ идеального газа)

Задача 10. Определить массу водорода (H_2) и концентрацию молекул, содержащихся в сосуде вместимостью $V = 20$ л при давлении $p = 2,5 \cdot 10^5$ Па и температуре $t = 27^\circ\text{C}$. Определите среднюю кинетическую энергию поступательного движения всех молекул водорода, а также среднюю квадратичную скорость молекул.

Решение. Для определения массы водорода воспользуемся уравнением состояния идеального газа

$$m = pVM / (RT) = 4 \text{ г.}$$

Концентрацию n водорода найдём, воспользовавшись одним из уравнений молекулярно-кинетической теории идеального газа

$$p = nkT, n = p / (kT) = 6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Здесь $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана.

Средняя квадратичная скорость молекул водорода

$$v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 1934 \text{ м/с.}$$

При выводе использованы соотношения $R = kN_A$ и $M = m_0N_A$, где N_A – число Авогадро, m_0 – масса одной молекулы водорода.

При получении значения средней кинетической энергии поступательного движения всех молекул водорода можно рассуждать следующим образом. Средняя кинетическая энергия ε поступательного движения одной молекулы определяется выражением $\varepsilon = 3kT / 2$. Если в сосуде находится N молекул, то их суммарная энергия \bar{E} равна $\bar{E} = N\varepsilon = 3NkT / 2$.

Число молекул в сосуде даётся выражением $N = \nu N_A = (m / M) N_A$.

Используя это выражение, для величины \bar{E} имеем

$$\bar{E} = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} N_A kT = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot RT = \frac{3}{2} pV = 7500 \text{ Дж.}$$

Задача 11*. Используя молекулярно-кинетическую теорию идеального газа, оцените площадь купола парашюта. Масса парашютиста со снаряжением $m = 100$ кг. Скорость снижения $v = 5$ м/с. Условия нормальные ($p = 10^5$ Па, $T = 273$ К). Молярная масса воздуха $M_B = 29$ г/моль.

Решение. Сила сопротивления воздуха, действующая на купол, равна

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

где Δp – импульс переданный молекулами воздуха куполу за время Δt .

Задачу о столкновении молекулы воздуха с куполом парашюта можно рассматривать как известную задачу из механики об упругом столкновении лёгкого тела с массивным подвижным телом.

Будем считать купол плоской площадкой, площадью S , перемещающийся со скоростью v . В таком предположении импульс переданный куполу одной молекулой равен $2m_0v$. За время Δt на купол набегит количество молекул N содержащихся в объёме $V = Sv\Delta t$

Отсюда получаем

$$\Delta p = N \cdot 2m_0v = 2m_0v nV = 2m_0v Sv\Delta t = 2m_0nSv^2\Delta t.$$

Полагая $m_0 = \frac{M_B}{N_A}$, и используя уравнения МКТ ($p = nkT$, $R = k \cdot N_A$), получаем

$$\Delta p = 2 \frac{M_B}{N_A} \cdot \frac{p}{kT} \cdot Sv^2\Delta t = 2 \frac{pM_B}{RT} Sv^2\Delta t.$$

Отсюда $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2 \frac{pM_B}{RT} Sv^2$ (Заметим, что $\frac{pM_B}{RT} = \rho$).

Так как купол движется равномерно, то сила сопротивления равна силе тяжести парашютиста mg . Тогда

$$S = \frac{mgRT}{2pM_Bv^2} = \frac{100 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 273 \text{ К}}{2 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 0,029 \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot (5 \text{ м/с})^2} \approx 15,6 \text{ м}^2.$$

Полученный в рамках данной модели результат хорошо согласуется с техническими характеристиками парашютных систем «Талка-3» – 16 м^2 и «Фламинго» – 15 м^2 .

Вопросы и задачи, отмеченные знаком *, относятся к задачам повышенной сложности.

Контрольные вопросы

1. Может ли быть в состоянии термодинамического равновесия температура $t = -300^\circ\text{C}$. Ответ поясните, используя молекулярно-кинетический смысл температуры.

2. В молекулярно-кинетической теории газов используется модель идеального газа. Укажите наиболее важные особенности этой модели газа, а также условия, при выполнении которых свойства реальных газов близки к свойствам идеального газа.

3. Оцените во сколько раз среднее расстояние между молекулами газа при н. у. ($p = 10^5$ Па, $T = 273$ К) больше размера (диаметра) самих молекул. Оцените также отношение объёма газа к суммарному объёму молекул в этом объёме. Диаметр молекул принять равным $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м.

4. Идеальный газ сначала расширяется при постоянном давлении, затем нагревается при постоянном объёме, потом газ изотермически сжимается, после охлаждается при постоянном давлении и по изохоре возвращается в начальное состояние. Нарисуйте графики этого процесса в координатах p, V ; V, T ; p, T .

5*. Уравнение теплового процесса $pV^2 = \alpha$, где α – некоторая константа. Увеличивается или уменьшается температура газа при уменьшении объёма (сжатие)?

6. В цилиндре под поршнем находится влажный воздух при температуре 100°C . Парциальное давление водяного пара 25 кПа. В медленном изотермическом процессе объём уменьшается в 5 раз. Найдите парциальное давление водяного пара после окончания процесса. Нарисуйте график этого процесса в координатах p, V .

7. Атмосферное давление на вершине Эльбруса $p_{\text{атм}} = 5 \cdot 10^4$ Па. Оцените, при какой температуре там закипит вода. Ответ поясните.

Примечание: воспользуйтесь справочными таблицами.

8. Докажите, что в смеси идеальных газов плотность смеси равна сумме плотностей компонентов смеси:

$$\rho_{\text{см}} = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_N \quad \text{или} \quad \rho_{\text{см}} = \sum_i \rho_i$$

9. Гелий массой $m = 830$ г находится в баллоне объёмом $V = 50$ л под давлением $p = 10$ МПа. Определить среднюю квадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию поступательного движения атомов гелия (He).

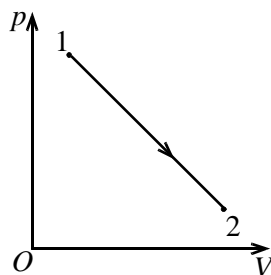


Рис. 12

10*. На рис. 12 изображён график процесса идеального газа в координатах p, V . Как изменялась температура газа в этом процессе.

Задачи

1. Масса оболочки аэростата, корзины, полезного груза и балласта $m = 1110$ кг. Аэростат заполняют гелием. При каком объёме аэростата возможно воздухоплавание? Атмосферное давление $p = 1 \cdot 10^5$ Па, температура воздуха $t = 0^\circ\text{C}$. Молярные массы воздуха и гелия равны, соответственно, $M_{\text{возд}} = 0,029$ кг/моль и $M_{\text{He}} = 0,004$ кг/моль.

2. Газ массой $m = 10$ г, молекулы которого состоят из атомов водорода и углерода, находится в сосуде объёмом $V = 1660$ см³ при температуре $t = 47^\circ\text{C}$ и давлении $p = 1 \cdot 10^6$ Па. Определите по этим данным химическую формулу газа. Молярные массы углерода и водорода равны, соответственно, $M_{\text{C}} = 12$ г/моль и $M_{\text{H}} = 1$ г/моль.

3. При комнатной температуре четырёхокись азота частично диссоциирует на двуокись азота: $\text{N}_2\text{O}_4 \rightarrow 2\text{NO}_2$. В откачанный сосуд объёмом $V = 250$ см³ вводится $m = 0,92$ г жидкой четырёх окиси азота. Когда температура в сосуде увеличивается до $t = 27^\circ\text{C}$, жидкость полностью испаряется, а давление становится равным $p = 129$ кПа. Какая масса четырёхокиси азота при этом диссоциирует?

4. Смесь состоит из 8 г молекулярного кислорода и 22 г углекислого газа. Найти плотность смеси при температуре 27°C и давлении 100 кПа.

5*. Смесь воды и её насыщенного пара занимает некоторый объём при температуре 90°C . Если смесь нагревать медленно и изохорически, то вся вода испаряется к моменту, когда температура достигает 100°C . Чему равно давление насыщенного водяного пара при температуре 90°C , если в начальном состоянии масса воды составляла 29% от массы всей смеси? Объёмом воды по сравнению с объёмом смеси пренебречь.

6*. Оцените, используя МКТ, скорость парусника при попутном ветре. Площадь паруса $S = 12 \text{ м}^2$, скорость ветра $v_в = 5 \text{ м/с}$, атмосферное давление $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$, температура воздуха $t = +7^\circ\text{C}$. В процессе движения на парусник действует сила сопротивления пропорциональная скорости $\vec{F} = -k\vec{v}$, $k = 40 \text{ кг/с}$.

Рекомендация: коэффициенты при получившемся уравнении можете округлить до целых.

7. При температуре $T = 310 \text{ К}$ средняя квадратичная скорость молекул газа $v = 520 \text{ м/с}$, а плотность газа $\rho = 1,4 \text{ кг/м}^3$. Найдите концентрацию молекул газа.

8. Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд разделён тонким подвижным, хорошо проводящим тепло поршнем на две части. В начальный момент справа от поршня находится кислород (O_2), а слева – смесь гелия (He) и водорода (H_2). Масса кислорода $m_{\text{O}_2} = 32 \text{ г}$. Поршень при этом находится в равновесии посередине сосуда. Материал поршня, непроницаемый для водорода и кислорода, оказался проницаемым для гелия, в результате чего поршень начал перемещаться и окончательно расположился на расстоянии четверти длины цилиндра от левой стенки. Определите массы гелия и водорода в смеси. Трением между поршнем и стенками сосуда пренебречь.

9. В баллоне находится смесь гелия и азота. Молярная масса смеси 12 г/моль . Найдите отношение концентрации гелия к концентрации молекул азота.

10. Условная граница между атмосферой Земли и Космосом находится на высоте $H = 100 \text{ км}$ (так называемая линия Кáрмана). Через каждые $h = 5 \text{ км}$ высоты атмосферное давление уменьшается в два раза. Атмосферное давление на поверхности Земли $p_0 = 100 \text{ кПа}$. Оцените по этим данным количество молекул воздуха в 1 см^3 на линии Кармана, если температура вблизи линии Кармана $t \approx -77^\circ\text{C}$.