Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Иррациональные уравнения. Системы уравнений

Решение задания №4 для 9-х классов

(2020 – 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2020

Составитель: Я.С. Агаханова, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: решение задания №4 для 9-х классов (2020 – 2021 учебный год), 2020, 22 с.

Составитель:
Агаханова Яна Сергеевна

Подписано 25.12.20. Формат 60х90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,38. Уч.-изд. л. 1,22.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-55-80 – **очное отделение.**

***e-mail:* zftsh@mail.mipt.ru**

Наш сайт: https://zftsh.online/

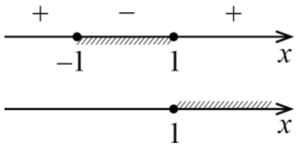
Контрольные вопросы

1(4). а)(1) $\sqrt{5-x}+2=0,\ \sqrt{5-x}=-2,\ \sqrt{5-x}\ge 0$ для всех x из области определения, а правая часть $-2<0,$ значит, данное уравнение не имеет решений.

б)(1) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{5x+8}+1=0,\quad \sqrt{3x-1}+\sqrt{5x+8}=-1,\quad \sqrt{3x-1}\ge 0$ и $\sqrt{5x+8}\ge 0$, т. е. правая часть уравнения сумма двух неотрицательных выражений, а левая $-1<0,$ значит, данное уравнение не имеет решений.

в)(1) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{5x-5}=2.$ Найдём область определения

$$\begin{cases}1-x^2\ge 0,\\5x-5\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-1\le 0,\\5(x-1)\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}(x-1)(x+1)\le 0,\\x-1\ge 0.\end{cases}$$



Уравнение определено только для $\underline{x=1}$, подставим его в уравнение $\sqrt{1-1^2}+\sqrt[4]{5\cdot 1-5}=2; 0+0=2-$ неверно, значит, $x=1$ не является корнем уравнения, и уравнение не имеет решений.

г)(1) $\sqrt{1-x}=\sqrt[3]{x-2}.$

Область определения: $1-x\ge 0,\ x\le -1,$ но при $x\in(-\infty;-1]$ правая часть уравнения принимает отрицательные значения, а $\sqrt{1-x}\ge 0,$ значит, данное уравнение не имеет решений.

2(2). а)(1) $\sqrt{x-5}=x.$ Область допустимых значений $\begin{cases}x-5\ge 0\\x\ge 0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{x\ge 5}}.\ x-5=x^2, x^2-x+5=0.\ \ D=1-20<0\ -$ нет решений,

$x^2=x-5,\quad x^2-x+5=0.\ D<0-$ решений нет.

Уравнения равносильны.

б)(1) $\sqrt[4]{x-2}=|x|$

$x-2=x^4,$ при $x-2\ge 0;\ \underline{x\ge 2}.$

И второе уравнение $x-2=x^4,$ также правая часть $x^4\ge 0,$ то и левая $x-2\ge 0$ и значит, уравнения равносильны.

3(2). $\begin{cases} y + x^2 = 1, \\ y - ax = 0, \end{cases}$

$ax + x^2 - 1 = 0,\ x^2 + ax - 1 = 0.$

Нам нужно, чтобы система имела одно решение, если будет одно решение *x*, то и будет одно решение *y*. Значит, уравнение $x^2 + ax - 1 = 0$ должно иметь одно решение, следовательно $D = 0$.

$a^2 - 4\cdot(-1) = 0;\quad a^2 + 4 = 0;\quad a^2 = -4$ – решений нет.

Значит, не существует такого *a*, при котором данная система имеет одно решение.

Ответ: не существует таких *a*.

4(2). $(2;y)$ и $(x;1)$

$\begin{cases} x - 2y^2 = 2y, \\ 3x - 5y - 7 = 0. \end{cases}$

Подставим первую пару $(2;y)$ в систему $\begin{cases} 2 - 2y^2 = 2y, \\ 6 - 5y - 7 = 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} y^2 + y - 1 = 0, \\ 5y = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 - \dfrac{1}{5} - 1 = 0, \\ y = -\dfrac{1}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{5} - 1 \neq 0, \\ y = -\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Значит, пара $(2;y)$ не является решением системы.

Подставим $(x;1)$ в систему

$\begin{cases} x - 2 = 2, \\ 3x - 5 - 7 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ 3x = 12, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ x = 4 \end{cases}$ – верно.

Ответ: $(x;\ 1)$ является решением системы.

5(1). На рис. 1 находим точки пересечения графиков $(0;4)$ и $(5;-1)$. Подставив в систему, убедимся, что они подходят.

Ответ: $(0;4)$ и $(5;-1)$.

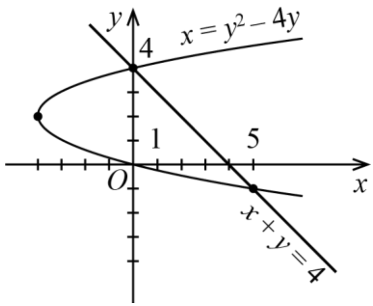


Рис. 1

6(5). Неравносильное преобразование могло получиться, когда уравнение $\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 1$ сложили с исходным уравнением (см. сноску 4 на стр. 12 Задания).

Проверку равносильности можно осуществить двумя способами.

Способ 1. Подставляем найденные значения x в исходное уравнение.

$$x=\frac{3}{4}\Rightarrow\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{9}{4}-2}-\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{3}{4}+1}=4\cdot\frac{3}{4}-3\Leftrightarrow\frac{\sqrt{13}}{4}-\frac{\sqrt{13}}{4}=0-\text{ верно;}$$

$$x=\frac{7+\sqrt{13}}{6}\Rightarrow\sqrt{\frac{31+7\sqrt{13}}{18}+\frac{7+\sqrt{13}}{2}-2}-\sqrt{\frac{31+7\sqrt{13}}{18}-\frac{7+\sqrt{13}}{6}+1}=$$

$$=4\cdot\frac{7+\sqrt{13}}{6}-3\Leftrightarrow\sqrt{\frac{29+8\sqrt{13}}{9}}-\sqrt{\frac{14+2\sqrt{13}}{9}}=\frac{5+2\sqrt{13}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4+\sqrt{13}}{3}-\frac{1+\sqrt{13}}{3}=\frac{5+2\sqrt{13}}{3}\Leftrightarrow1=\frac{5+2\sqrt{13}}{3}-\text{ неверно.}$$

$$x=\frac{7-\sqrt{13}}{6}\Rightarrow\sqrt{\frac{31-7\sqrt{13}}{18}+\frac{7-\sqrt{13}}{2}-2}-\sqrt{\frac{31-7\sqrt{13}}{18}-\frac{7-\sqrt{13}}{6}+1}=$$

$$=4\cdot\frac{7-\sqrt{13}}{6}-3\Leftrightarrow\sqrt{\frac{29-8\sqrt{13}}{9}}-\sqrt{\frac{14-2\sqrt{13}}{9}}=\frac{5-2\sqrt{13}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4-\sqrt{13}}{3}-\frac{\sqrt{13}-1}{3}=\frac{5-2\sqrt{13}}{3}-\text{ верно.}$$

Таким образом, решениями данного уравнения являются только $x=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$ и $x=\frac{3}{4}$.

Способ 2. Решим уравнение $\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=1$ по-другому. Оно равносильно следующему:

$$\sqrt{x^2+3x-2}=1-\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x-2=1+\left(x^2-x+1\right)-2\sqrt{x^2-x+1},\\1-\sqrt{x^2-x+1}\ge0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-x+1}=2-2x,\\\sqrt{x^2-x+1}\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x+1=4-8x+4x^2,\\x^2-x+1\le1,\\2-2x\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-7x+3=0,\\x\left(x-1\right)\le0,\\x\le1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{6},\\0\le x\le1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{7-\sqrt{13}}{6}.$$

Тогда получаем, что исходное уравнение имеет два решения: $x=\dfrac{3}{4}$ и $x=\dfrac{7-\sqrt{13}}{6}$.

Ответ: приведённое решение неверно.

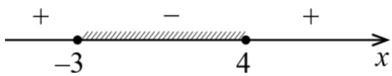
7(2). $y=\sqrt{12+x-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{2|0{,}5-x|-5}}$.

Квадратный корень из $f(x)$, т. е. $\sqrt{f(x)}$, определён лишь для тех значений *x*, для которых $f(x)\ge 0$. Для выражения $\dfrac{1}{\sqrt{2|0{,}5-x|-5}}$ корень стоит в знаменателе, значит, учитываем, что знаменатель не обращается в ноль. Область определения данной функции будет решение системы неравенств

$$\begin{cases}12+x-x^2\ge 0, & (1)\\ 2|0{,}5-x|-5>0, & (2)\end{cases}$$

(1) $x^2-x-12\le 0$

$(x-4)(x+3)\le 0$



$x\in[-3;4]$.

(2) $2|0{,}5-x|>5$

$|x-0{,}5|>\dfrac{5}{2}$

$$\left[\begin{array}{l}x-0{,}5>\dfrac{5}{2},\\ x-0{,}5<-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$$

$$\begin{cases}x\in[-3;4]\\ x\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)\end{cases}\Rightarrow x\in[-3;-2)\cup(3;4].$$

Ответ: $x\in[-3;-2)\cup(3;4]$.

8(4). а)(2) Решим первую систему

$$\begin{cases} x+y=4, & (1)\\ x+z=-2, & (2)\\ y+z=7. & (3) \end{cases}$$

$$(1)+(2)+(3)$$

$$2x+2y+2z=9,$$

$$x+y+z=\frac{9}{2}.$$

Вычтя из этого уравнения каждое из уравнений исходной системы, получим $(x+y+z)-(x+y)=\frac{9}{2}-4;$ $\underline{z=\frac{1}{2}},$

$$(x+y+z)-(x+z)=\frac{9}{2}+2;\ \underline{y=\frac{13}{2}};$$

$$(x+y+z)-(y+z)=\frac{9}{2}-7;\ \underline{x=-\frac{5}{2}}.$$

Итак, система имеет единственное решение $\left(-\frac{5}{2};\frac{13}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} y-z=6, & (1)\\ x-z=-3, & (2)\\ x-y=-9, & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} y=6+z,\\ x=z-3,\\ (z-3)-(6+z)=-9. \end{cases}$$

(3): $-9=-9 \Rightarrow$ выполняется при любых z, тогда третье уравнение можно отбросить. Получим $\begin{cases} y=6+z,\\ x=z-3. \end{cases}$

Таким образом, мы можем брать любое число z, и в зависимости от него получать x и y. То есть решением систем является тройка чисел вида $(z-3,\ 6+z,\ z)$, где $z\in\mathbb{R}$. Значит, система имеет бесконечно много решений. Поэтому системы равносильными не являются.

Ответ: неравносильные.

б)(2) Решим первую систему. Из её второго уравнения $x=-\frac{7}{2}y$. Подставляя это в первое уравнение, получаем $-\frac{7}{2}y\cdot y=-14$, откуда $y^2=4,\ y=\pm 2$. Если $y=2,$ то $x=-7;$ если $y=-2,$ то $x=7.$ Таким образом, эта система имеет два решения: $(-7;\ 2)$ и $(7;-2)$.

Вторая система при условиях $x \neq 0,\ \ y \neq 0$ равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2 = 49, \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 7, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

Получаем 4 пары чисел: $(7;-2)$, $(7;2)$, $(-7;-2)$, $(-7;2)$. Множества решений систем различны, поэтому они неравносильны. Можно также отметить, что множество решений первой системы является подмножеством множества решений второй системы, поэтому вторая система есть следствие первой.

Ответ: неравносильны.

9(3). а)(1) $\sqrt{2x^2-3x+10}=3.$ По определению арифметического квадратного корня уравнения $\sqrt{2x^2-3x+10}=3$ равносильно уравнению $2x^2-3x+10=9,\ \ 2x^2-3x+1=0,\ \ D=9-4\cdot 2\cdot 1=1$

$$x_1=\frac{3+1}{4}=1,\quad x_2=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $1, \frac{1}{2}.$

б)(1) $\sqrt{x^2-2x+5}=-2.$

Так как $\sqrt{x^2-2x+5}\geq 0$, а правая часть $-2<0,$ значит, данное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

в)(1) $\sqrt[3]{x^2-11}=-2.$ Данное уравнение равносильно:

$$x^2-11=(-2)^3$$

$$x^2-11=-8$$

$$x^2=11-8$$

$$x^2=3$$

$$x=\pm\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}, -\sqrt{3}.$

Задачи

1(4). а)(1) $\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2x-6}$

$$x^2-3x=2x-6$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$x_1=3;\ x_2=2.$$

Сделаем проверку $x_1 = 3;\quad \sqrt{3^2 - 3\cdot 3} = \sqrt{3\cdot 2 - 6};\quad 0 = 0$ – верно.

$x_1 = 3$ – корень уравнения.

$x_2 = 2$

$\sqrt{2^2 - 3\cdot 2} = \sqrt{2\cdot 2 - 6}$

$\sqrt{-2} = \sqrt{-2}$, полученное равенство не имеет смысла, так как противоречит определению арифметического квадратного корня.

$x = 2$ – не корень.

Ответ: $x = 3$.

б)(1) $\sqrt[3]{x^2 + x} = \sqrt[3]{-2x - 2}$.

Возведём обе части уравнения в третью степень.

$x^2 + x = -2x - 2;\ x^2 + 3x + 2 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = -2.$

Так как преобразование, использованное нами, равносильное, то проверку делать не нужно.

Ответ: –1, –2.

в)(1) $2x = 1 + \sqrt{x^2 - 5x + 5}$.

Уединив корень, получим $2x - 1 = \sqrt{x^2 - 5x + 5}$. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 5x + 5 = (2x-1)^2, \\ 2x - 1 \geq 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 5 - 4x^2 + 4x - 1 = 0, \\ x \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$-3x^2 - x + 4 = 0;\qquad 3x^2 + x - 4 = 0;$

$D = 1 - 4\cdot 3(-4) = 49;\qquad x_1 = 1,\quad x_2 = -\dfrac{4}{3}.$

Так как $x \geq \dfrac{1}{2}$, то подходит только 1.

Ответ: $x = 1$.

г)(1) $\sqrt{5 + |x - 2|} = 1 - x$. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5 + |x - 2| = (1 - x)^2, \\ 1 - x \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x - 2| = (1 - x)^2 - 5, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Так как $x \le 1,$ то случай раскрытия модуля $x-2 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2$ можно не рассматривать. Рассмотрим $x-2<0 \Rightarrow x<2$

$$5-x+2=1-2x+x^2$$
$$x^2-x-6=0$$
$$x_1=3; \quad x_2=-2.$$

Так как $x \le 1,$ то находим только $x=-2.$

Ответ: $x=-2.$

2(6). а)(2) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=2.$ Введём новую переменную $\sqrt[4]{x}=t,$ тогда $\sqrt{x}=t^2$. Так как корень чётной степени, то $t \ge 0$. Получим уравнение: $t+t^2=2;$ $t^2+t-2=0;$ $t_1=1 \quad t_2=-2 \; <0-$ не подходит. $\sqrt[4]{x}=1;$ $x=1.$

Ответ: $x=1.$

б)(2) $\sqrt{x^2-2x-1}=\dfrac{14}{\sqrt{x^2-2x-1}}-5.$

Пусть $\sqrt{x^2-2x-1}=t,$ $t \ge 0$, но так как $\sqrt{x^2-2x-1}$ ещё и в знаменателе, то $t>0.$ $t=\dfrac{14}{t}-5$, так $t \ne 0$, то умножим левую и правую части уравнения на t.

$$t^2=14-5t$$
$$t^2+5t-14=0$$
$$D=25+56=81$$
$$t_1=\frac{-5+9}{2}=2; \quad t_2=\frac{-5-9}{2}=-7-\text{не подходит.}$$

Обратная замена $\sqrt{x^2-2x-1}=2,$ $x^2-2x-1=4,$ $x^2-2x-5=0$

$$D=4+20=24$$
$$x_1=\frac{2+\sqrt{24}}{2}=\frac{2+2\sqrt{6}}{2}=1+\sqrt{6}$$
$$x_2=1-\sqrt{6}.$$

Ответ: $x_1=1+\sqrt{6};$ $x_2=1-\sqrt{6}.$

в)(2) $x^2+\sqrt{x^2-x+9}=x+3.$

$$x^2-x+\sqrt{x^2-x+9}=3$$
$$\underline{x^2-x+9}-9+\underline{\sqrt{x^2-x+9}}=3.$$

Замена $\sqrt{x^2-x+9}=t,\quad t\ge 0,$ тогда $x^2-x+9=t^2,$

$t^2+t-9-3=0,$ $t^2+t-12=0,$ $t_1=-4;\quad t_2=3,$ $t_1=-4$ не подходит.

$\sqrt{x^2-x+9}=3,$ $x^2-x+9=9,$ $x^2-x=0,$ $x(x-1)=0,$ $x=0,\quad x=1.$

Ответ: $x=0,\quad x=1.$

3(3). $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$

Умножим обе части уравнения на выражение $\varphi(x)=\sqrt{2x^2+3x+5}-$ $-\sqrt{2x^2-3x+5},$ сопряженное выражению $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}$.

$$\left(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)=$$

$$=3x\cdot\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right);$$

$$2x^2+3x+5-\left(2x^2-3x+5\right)=3x\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right);$$

$$6x=3x\cdot\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right);$$

$$3x\left(2-\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)\right)=0;$$

$x=0$ или $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2.$

Если мы полученное уравнение $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2$ сложим с данным уравнением $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$, получим $2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2,$ $4\left(2x^2+3x+5\right)=9x^2+12x+4,$

$$8x^2+12x+20=9x^2+12x+4,\quad x^2=16,\quad x\pm 4.$$

Проверка.

1) $x_1=0$

$\sqrt{0+0+5}+\sqrt{0-0+5}=0$

$2\sqrt{5}\ne 0$ – неверно.

2) $x_2=4$

$\sqrt{2\cdot 16+3\cdot 4+5}+\sqrt{2\cdot 16-12+5}=12$

$7+5=12$ – верно.

3) $x_3=-4$

$\sqrt{2\cdot 16-12+5}+\sqrt{2\cdot 16+12+5}=-12$

$12\ne -12$ – неверно.

Ответ: $x=4.$

4(4). а)(2) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}}=2,5.$

Пусть $\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}}=t,\quad t\geq 0,$ тогда $\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}}=\dfrac{1}{t},\quad t>0;\quad t+\dfrac{1}{t}=2,5$. Так как $t\neq 0$, умножим уравнение на t: $t^2-2,5t+1=0$.

$t_1=0,5;\quad t_2=2.$

$$\sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}}=\frac{1}{2} \qquad \text{или} \qquad \sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}}=2;$$

$\dfrac{3x+2}{2x-3}=\dfrac{1}{4},\quad x\neq\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{3x+2}{2x-3}=\dfrac{4}{1},\quad x\neq\dfrac{3}{2}$
$12x+8=2x-3$	$3x+2=8x-12$
$10x=-11$	$5x=14$
$x=\dfrac{-11}{10}$	$x=\dfrac{14}{5}$
$\underline{x=-1,1}.$	$\underline{x=2,8}.$

Ответ: $x=-1,1;\ x=2,8.$

б)(2) $\sqrt{5x+4}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}.$

$$\left(\sqrt{5x+4}+\sqrt{2x-1}\right)^2=3x+1$$

$$5x+4+2\left(\sqrt{5x+4}\cdot\sqrt{2x-1}\right)+2x-1=3x+1$$

$$2\left(\sqrt{5x+4}\cdot\sqrt{2x-1}\right)=-4x-2$$

$$\sqrt{(5x+4)\cdot(2x-1)}=-2x-1$$

$$(5x+4)\cdot(2x-1)=(-2x-1)^2$$

$$10x^2-5x+8x-4=4x^2+4x+1$$

$$6x^2-x-5=0$$

$$D=121,\quad x_1=-\frac{10}{12}=-\frac{5}{6};\quad x_2=1.$$

Проверка. $x=-\dfrac{5}{6}.$

$$\sqrt{\frac{-25}{6}+4}+\underbrace{\sqrt{\frac{-10}{6}-1}}_{<0\ \text{не имеет смысла}}=\sqrt{\frac{-15}{6}+1}$$

$x=1$

$\sqrt{5+4}+\sqrt{2-1}=\sqrt{3+1}$

$3+1=2$

$4\neq 2$

Ответ: нет решений.

5(6). а)(2) $\begin{cases} x+y=-8, & (1) \\ x^2+y^2+6x+2y=0; & (2) \end{cases}$

Используя метод подстановки. Из (1) уравнения $x=-8-y$ подставим в (2): $(-8-y)^2+y^2+6(-8-y)+2y=0$

$64+16y+y^2+y^2-48-6y+2y=0$

$2y^2+12y+16=0$

$y^2+6y+8=0$

$y_1=-2,\quad y_2=-4$

$x_1=-6,\quad x_2=-4$

Ответ: $(-6;-2);(-4;-4)$.

б)(2) $\begin{cases} x^2+y^5=4, & (1) \\ 6x+2x^2+3y^5=12; & (2) \end{cases}$

Умножим уравнение (1) на 3 и вычтем полученное из (2), получим

$6x+2x^2+\underline{3y^5}-3x^2-\underline{3y^5}=12-4\cdot 3$

$6x-x^2=0$

$x(6-x)=0$

$x=0$ или $x=6$

$x=0$	$x=6$
$0+y^5=4$	$36+y^5=4$
$y^5=4$	$y^5=-32$
$y=\sqrt[5]{4}$.	$y=\sqrt[5]{-32}$
	$y=-2$.

Ответ: $(0;\sqrt[5]{4})$; $(6;-2)$.

в)(2) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{y}=1\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

Сделаем замену $\frac{1}{x}=u;\quad \frac{1}{y}=v,\ \ x\neq 0,\ \ y\neq 0 \Rightarrow u\neq 0, v\neq 0.$

$$\begin{cases} 4u+6v=\frac{7}{6}, & (1)\\ 3u-4v=\frac{1}{6}, & (2)\end{cases}$$

(1) умножим на 2, а (2) умножим на 3 и сложим результаты $17u=\frac{17}{6}$;

$\underline{u=\frac{1}{6}}$ подставим $u=\frac{1}{6}$ в (1) $\frac{4}{6}+6v=\frac{7}{6};\quad 6v=\frac{3}{6},\ \underline{v=\frac{1}{12}}.$

Обратная замена $\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\quad\Rightarrow\quad x=6\quad \frac{1}{y}=\frac{1}{12}\Rightarrow\ y=12.$

Ответ: $(6;12)$.

6(6). а)(3) $\begin{cases}3x^2+xy-2y^2=0,\\ 2x^2-3xy+y^2=-1.\end{cases}$

Первое уравнение системы – однородное (напомним, что так называют уравнение вида $f(x,y)=0$, где $f(x,y)$ – однородный многочлен). Заметим, что если положить $y=0$, то из уравнения $3x^2+xy-2y^2=0$ находим $x=0$. Но пара $(0;0)$ не удовлетворяет второму уравнению системы, поэтому $y\neq 0$, и, следовательно, обе части, однородного уравнения $3x^2+xy-2y^2=0$ можно разделить на y^2 (это не приведёт к потере корней).

Получим: $\frac{3x^2}{y^2}+\frac{xy}{y^2}-\frac{2y^2}{y^2}=0$

$3\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}-2=0,$ замена $\frac{x}{y}=t$

$3t^2+t-2=0;\qquad t_1=-1,\quad t_2=\frac{2}{3}.$

Обратная замена

$\frac{x}{y}=1$ или $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, т. е. $x=-y$ или $x=\frac{2}{3}y.$

Теперь задача свелась к решению совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}y, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1. \end{cases}$$

$$2y^2+3y^2+y^2=-1 \qquad 2\cdot\frac{4}{9}y^2-3\cdot\frac{2}{3}y^2+y^2=-1$$

$$6y^2=-1 \qquad \frac{8}{9}y^2-\frac{18}{9}y^2+y^2=-1$$

нет решений $\qquad -\dfrac{y^2}{9}=-1$

$$y^2=9,$$

$$y=\pm 3$$

$(2;3);(-2;-3)-$ решения этот системы.

Ответ: $(2;3);(-2;-3)$.

б)(3) $\begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x}, \\ xy+24=\dfrac{x^3}{y}. \end{cases}$

Перемножив уравнения системы, получим систему

$$\begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x}, \\ (xy+24)(xy-6)=\dfrac{y^3x^3}{xy}, \end{cases}$$

являющуюся следствием исходной.

$$\begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x}, \\ x^2y^2+18xy-144=y^2x^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x}, & (1) \\ xy=8. & (2) \end{cases}$$

Вычтем теперь (1) из (2). Получим систему

$$\begin{cases} xy=8, \\ 6=8-\dfrac{y^3}{x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=8, \\ \dfrac{y^3}{x}=2. \end{cases}$$

Перемножив уравнения последней системы, получим систему $\begin{cases} xy=8, \\ y^4=16. \end{cases}$

$$y_1=2, \quad y_2=-2 \text{ и } x_1=4, \quad x_2=-4.$$

Найденные решения необходимо проверить.

$$\begin{cases} 4\cdot 2-6=\dfrac{2^3}{4} \\ 4\cdot 2+24=\dfrac{4^3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2=2 \\ 32=32 \end{cases} \text{ – верно.}$$

$$\begin{cases} (-4)\cdot(-2)-6=\dfrac{(-2)^3}{-4} \\ -4\cdot(-2)+24=\dfrac{(-4)^3}{-2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2=2 \\ 32=32 \end{cases} \text{ – верно}$$

Ответ: $(4;2)$ и $(-4;-2)$.

7(9). а)(3) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

Положим $\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases}$

Так как $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$, а $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=$ $=u^2-2v,$ $x^3+y^3=u\cdot\left(u^2-2v-v\right)=u^3-3uv.$ Заданная система сводится к следующей $\begin{cases} u^3-3uv+v^3=17, \\ u+v=5. \end{cases}$

Ещё раз сделаем замену $\begin{cases} u+v=a, \\ u\cdot v=b, \end{cases}$ получим новую систему

$$\begin{cases} a^3-3ab-3b=17 \\ \underline{a=5} \end{cases}$$

$$125-3\cdot 5\cdot b-3b=17;\ -18b=-108;\quad \underline{b=6}$$

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u\cdot v=6, \end{cases} \quad \begin{cases} u=5-v \\ (5-v)v=6 \end{cases}$$

$v^2-5v+6=0;$ $v_1=2$ $v_2=3,$ тогда $u_1=3$ $u_2=2$. Теперь остаётся решить следующую совокупность систем:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=2, \\ xy=3 \end{cases}$$

Решения этой совокупности, а с нею и исходной системы $(1;2)$; $(2;1)$.

Ответ: $(1;2)$ или $(2;1)$.

б)(3) $\begin{cases}(x^2-x)(y^2-y)=72,\\(x+1)(y+1)=20.\end{cases}$

Запишем систему в виде

$$\begin{cases}x^2y^2-xy(x+y)+xy=72,\\xy+x+y+1=20.\end{cases}$$

Положим $\begin{cases}x+y=u,\\xy=v,\end{cases}$ получим $\begin{cases}v^2-uv+v=72,\\u+v=19.\end{cases}$

Выразим из второго уравнения $u=19-v$ и подставим в первое, получим равносильную систему $\begin{cases}u=19-v,\\v^2-v(19-v)+v=72.\end{cases}$

Решим второе уравнение

$2v^2-18v=72,\quad v^2-9v-36=0,\quad v_1=12,\quad v_2=-3,\quad u_1=7,\quad u_2=22.$
Теперь решим совокупность систем

$$\begin{cases}x+y=7\\xy=12\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}x+y=22\\xy=-3.\end{cases}$$

Если $x+y=7, xy=12,$ то числа x, y по теореме, обратной теореме Виета, являются корнями уравнения $t^2-7t+12=0$, т. е. $x=3, y=4$ или $x=4, y=3$. Если $x+y=22,\ xy=-3,$ то числа x и y являются корнями уравнения $t^2-22t-3=0$, т. е. $x=11+\sqrt{124},\quad y=11-\sqrt{124}$ или $x=11-\sqrt{124}, y=11+\sqrt{124}.$

Ответ: $(3;4);(4;3);\left(11+\sqrt{124};11-\sqrt{124}\right);\left(11-\sqrt{124};11+\sqrt{124}\right).$

в)(3) $\begin{cases}x^4+y^4+x^2+y^2=92,\\xy=3.\end{cases}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy,$

$x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2(xy)^2.$

Положим $\begin{cases}x+y=u,\\x\cdot y=v.\end{cases}$

Исходная система примет вид

$\begin{cases}u^4-4u^2v+2v^2+u^2-2v=92,\\v=3.\end{cases}$

Подставим $v=3$ в первое уравнение системы, получим

$u^4-12u^2+2\cdot 9+u^2-6=92$

$u^4-11u^2-80=0$

Пусть $t=u^2\geq 0$

$t^2-11t-80=0$

$t_1=16,\quad t_2=-5\quad$ – не подходит.

$u^2=16,\quad u=\pm 4.$

Теперь решим совокупность систем

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases}$$

Если $x+y=4,\ xy=3,$ то числа x и y являются корнями уравнения $t^2-4t+3=0$, то есть $x=3,\ y=1,$ или $x=1,\ y=3.$

Если $x+y=-4,\ xy=3,$ то числа x и y являются корнями уравнения $t^2+4t+3=0$, то есть $x=-3,\ y=-1$ или $x=-1,\ y=-3.$

Ответ: $(3;1),(1;3),(-3;-1),(-1;-3).$

8(8). **а(4)** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2, \\ 4y^2-1=3y(x-1). \end{cases}$

Положим $u=\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}},$ тогда первое уравнение системы примет вид $u+\dfrac{1}{u}=2, u\neq 0,\ \ u^2+1-2u=0, (u-1)^2=0, u=1.$

Таким образом, решение исходной системы сводится к решению следующей системы:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}=1, \\ 4y^2-1=3y(x-1). \end{cases}$$

Возведя в квадрат обе части первого уравнения системы и освободившись от знаменателя, приходим к системе

$$\begin{cases} 3x-2y=2x, \\ 4y^2-1=3y(x-1). \end{cases} \qquad (1)$$

Из первого уравнения получим $x = 2y$ и подставим во второе:

$$4y^2 - 1 = 3y(2y-1),$$
$$4y^2 - 1 - 6y^2 + 3y = 0,$$
$$-2y^2 + 3y - 1 = 0,$$
$$2y^2 - 3y + 1 = 0.$$
$$D = 9 - 4\cdot 2 = 1,$$
$$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{1}{2} \text{ и}$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 1.$$

Проверка: При условии $x \neq 0$ и $3x \neq 2y$ исходная система равносильна системе (1). В свою очередь система (1) равносильна исходной системе. Таким образом, решением исходной системы будут решения $(2;1)$ и $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $(2;1)$ и $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

б)(4) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8. \end{cases}$

Упростим второе уравнение:
$\sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = \sqrt[6]{(x+y)^3}\cdot\sqrt[6]{(x-y)^2} = \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{|x-y|}$, система примет вид:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{|x-y|} = 8. \end{cases} \qquad (*)$$

Эта система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} x-y \geq 0, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y} = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y < 0, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y} = -8. \end{cases}$$

Положим $\begin{cases} u = \sqrt{x+y}, \\ v = \sqrt[3]{x-y}, \end{cases}$

получим

$$\begin{cases} x-y\ge 0, \\ u+v=6, \\ u\cdot v=8, \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x-y<0, \\ u+v=6, \\ u\cdot v=-8. \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы (1):

$$\begin{cases} x\ge y, \\ u_1=2, \\ v_1=4, \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge y, \\ u_2=4, \\ v_2=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=34, \\ y_1=-30, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=12, \\ y_2=4. \end{cases}$$

При решении системы (2) $x-y<0,$ т. е. $v<0.$

$$\begin{cases} x<y, \\ u=3+\sqrt{17}, \text{ и тогда} \\ v=3-\sqrt{17} \end{cases}$$

$$x_3=103-19\sqrt{17},$$

$$y_3=-77+25\sqrt{17}.$$

Проверка: Первые два решения легко проверить непосредственной подстановкой в исходную систему. Но проверить таким же способом третье решение непросто. Как нетрудно убедиться, совокупность систем (1) и (2) равносильна системе (*), а система (*) равносильна исходной. Поэтому решения совокупности (1) и (2) являются решениями исходной системы.

Ответ: $(34;-30)$, $(12;4)$, $(103-19\sqrt{17};-77+25\sqrt{17})$.

9(4). $\sqrt[4]{x-15}=4-\sqrt[4]{97-x}.$

Положим $\begin{cases} u=\sqrt[4]{x-15}, \\ v=\sqrt[4]{97-x}. \end{cases}$

Тогда уравнение примет вид $u+v=4.$

Для получения второго уравнения относительно новых переменных u, v возведём в четвёртую степень.

$$\begin{cases} u^4=x-15, \\ v^4=97-x. \end{cases}$$

Сложим $u^4+v^4=82.$

Получим систему $\begin{cases} u+v=4, \\ u^4+v^4=82. \end{cases}$

Сделаем замену $\begin{cases} u+v=a, \\ u\cdot v=b \end{cases}$, получим $\begin{cases} a=4, \\ a^4-4a^2b+2b^2=82. \end{cases}$

Подставим во второе уравнение $a=4$:

$256-4\cdot 16\cdot b+2b^2=82$

$b^2-32b+87=0$

$\frac{D}{4}=256-87=169$

$b_1=\frac{16+13}{1}=29;\ b_2=16-13=3$

$\begin{cases} u+v=4, \\ u\cdot v=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} u+v=4, \\ u\cdot v=29. \end{cases}$

Если $u+v=4,\ u\cdot v=3$, то числа u и v являются корнями уравнения $t^2-4t+3=0$

$u_1=1,\quad v_1=3$ или $u_2=3,\quad v_2=1$

Если $u+v=4,\quad u\cdot v=29,$ то u и v являются корнями уравнения.

$t^2-4t+29=0$

$D=16-4\cdot 29<0,$ решений нет.

$\begin{cases} u^4=x-15, \\ v^4=97-x \end{cases}$

$u_1=1, v_1=3;\ \begin{cases} 1=x-15, \\ 81=97-x, \end{cases}\qquad \underline{x=16}$

$u_2=3, v_2=1;\ \begin{cases} 81=x-15, \\ 1=97-x, \end{cases}\qquad \underline{x=96}.$

Проверка:

$x=16$

$\sqrt[4]{16-15}=4-\sqrt[4]{97-16}$

$1=4-3$

$1=1\quad -$верно;

$x=96$

$\sqrt[4]{96-15}=4-\sqrt[4]{97-96}$

$3=3\quad -$верно.

Ответ: $x=16, x=96.$

10(4). Примем величину работы (в данном случае – это вспашка всего поля) за единицу.

Пусть x ч – время, необходимое для вспашки поля первому трактору, y ч – второму и z ч – третьему трактору.

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность первого трактора, $\frac{1}{y}$ – второго и $\frac{1}{z}$ – третьего. По условию задачи $z-x=2$ и $x-y=1$. Так как при совместной работе первого и второго тракторов выполняется $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть работы в час, а вся работа выполняется ими за 1 ч 12 мин, т. е. за $\frac{6}{5}$ ч, то $\frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1.$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z-x=2, \\ x-y=1, \\ \frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $3,2,5$, $-0,4;-0,6;2,4$.

По условию задачи $x>1,\ y>0,\ z>2$. Из найденных решений этим условиям удовлетворяет только первое решение.

Теперь ответим на вопрос задачи. При совместной работе трёх тракторов производительность труда составит $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$. Значит, время на вспашку поля тремя тракторами составляет $\frac{30}{31}$ ч.

Ответ: $\frac{30}{31}$ ч.