



# Кубок ЛФИ

9.s03.e03



*Хороший Игрок видит границу в любой Игре.  
Дориан Грей (фильм)*

## Ищущий и Скрытый

Скрытый и Ищущий находятся на боковой поверхности прозрачного Цилиндра ( $n = 3/2$ ,  $R = 1$  м) в одной плоскости, перпендикулярной его оси, и никогда из нее не выходят.

1. (1 балл) Определите вероятность того, что при случайном расположении на Цилиндре Ищущий видит Скрытого через Цилиндр.

Скрытый и Ищущий находятся в диаметрально противоположных точках Цилиндра. Чтобы продолжить Игру, Ищущий удаляется от Цилиндра по прямой, проходящей через Скрытого.

2. (2 балла) Постройте качественный график зависимости числа изображений, которые видит Ищущий от расстояния между ним и осью Цилиндра.
3. (4 балла) Ищущий расположился так, чтобы быть как можно ближе к Цилиндру, но видеть максимальное число копий Скрытого. Чему равно расстояние от Ищущего до оси Цилиндра?
4. (3 балла) Какой минимальный Путь нужно преодолеть Скрытому по поверхности Цилиндра, чтобы стать невидимым?

Все численные ответы дайте с точностью не менее 5%. Размерами Ищущего и Скрытого можно пренебречь.

*Авторы задачи: А. Киреев, И. Гриднев*

## Решение

Ищущий будет видеть Скрытого через Цилиндр, если луч, идущий от Ищущего, сможет выйти из цилиндра. (Рис. 1)

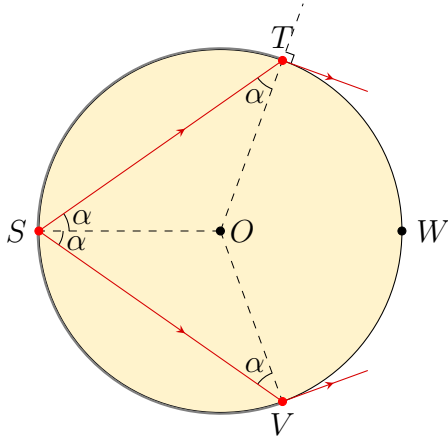


Рис. 1

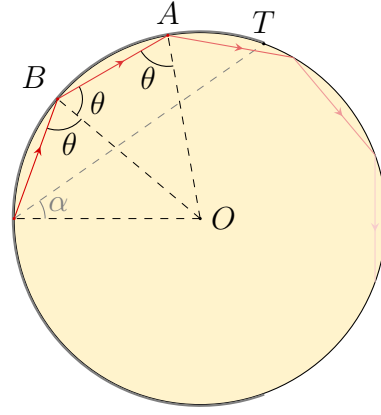


Рис. 2

Предельное значение угла  $\alpha$  можно найти из закона Снеллиуса, записанного для полного внутреннего отражения

$$n \cdot \sin \alpha = \sin(90^\circ) = 1 \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right).$$

Если луч будет падать на цилиндр под углом больше  $\alpha$ , то он не сможет выйти из цилиндра, а полностью отразится. Докажем это утверждение. (Рис. 2)

Пусть луч падает под углом  $\theta$  на границу раздела сред. Угол  $\theta > \alpha \Rightarrow$  луч полностью отразится.  $\triangle OAB$  — равнобедренный  $\Rightarrow \angle OBA = \angle BAO$ , значит отразившийся луч снова будет падать на цилиндр под углом  $\theta$  и так далее. Луч будет «заперт» в цилиндре.

Тогда вероятность  $p$  того, что Ищущий видит Скрытого, будет пропорциональна длине дуги окружности  $TWV$ , которая видна под углом  $4\alpha$  (центральный угол в 2 раза больше вписанного). Вероятность того, что Скрытый окажется в любом месте окружности должна быть равна 1, следовательно, для нахождения  $p$  необходимо поделить длину дуги  $TWV$  на  $2\pi$ :

$$p = \frac{4\alpha}{2\pi} \approx 46,5\%$$

Пусть Ищущий отошел на некоторое расстояние  $L$  от центра окружности  $O$ . Проанализируем зависимость угла  $\alpha$  от угла  $\gamma$  (Рис. 3). По закону Снеллиуса:

$$\sin \gamma = n \sin \beta.$$

Выразим угол  $\alpha$  через  $\beta$  и  $\varphi$ :

$$\angle BOW = \pi \Rightarrow \varphi + (\pi - 2\beta) + \alpha = \pi \Rightarrow \alpha = 2\beta - \varphi.$$

По теореме синусов в  $\triangle AOB$ :

$$\angle ABO = \arcsin\left(\frac{R \sin \gamma}{L}\right).$$

$\gamma$  — внешний угол в  $\triangle ABO$ , следовательно,

$$\gamma = \varphi + \angle ABO = \varphi + \arcsin \left( \frac{R \sin \gamma}{L} \right).$$

Из предыдущих выражений получаем зависимость  $\alpha$  от  $\gamma$ :

$$\alpha(\gamma) = 2 \arcsin \left( \frac{\sin \gamma}{n} \right) - \gamma + \arcsin \left( \frac{R \sin \gamma}{L} \right).$$

Построим график  $\alpha$  от  $\gamma$  (Рис. 4). С увеличением  $L$  уменьшается  $\alpha_{\max}$ .

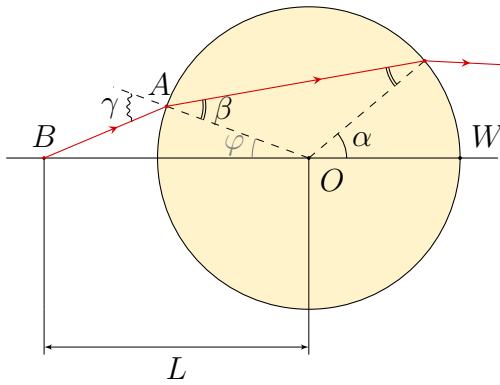


Рис. 3

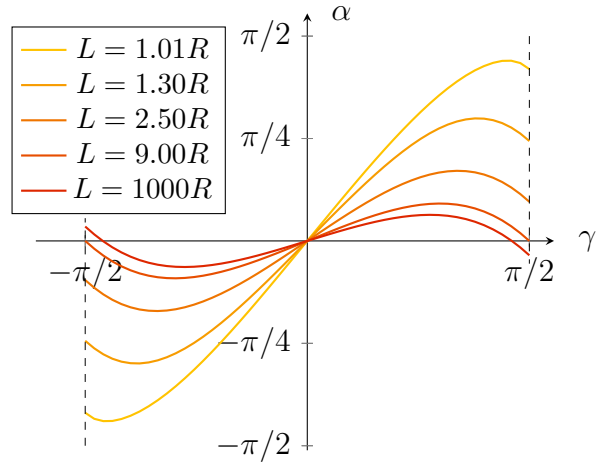


Рис. 4

По условию Скрытый и Ищущий находятся в диаметрально противоположных точках Цилиндра, а затем Ищущий удаляется от Цилиндра по прямой. Это значит, что всегда  $\alpha = 0$  на Рис. 3.

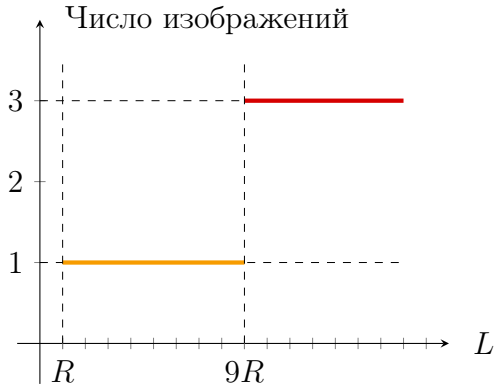


Рис. 5

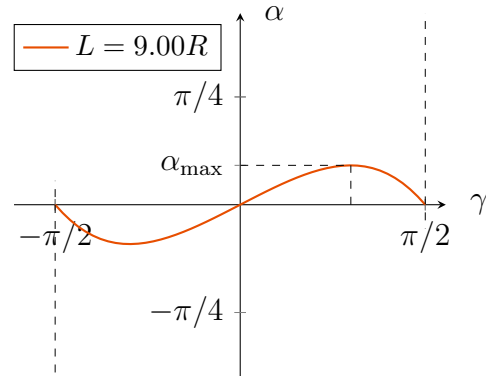


Рис. 6

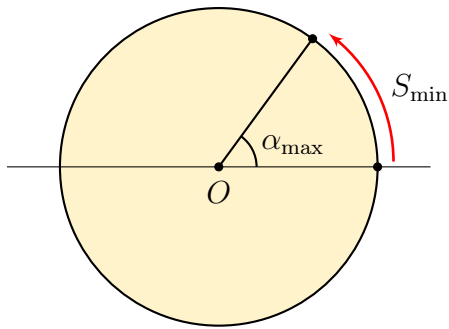
Число изображений, которое видит Ищущий, будет равно количеству пересечений прямой  $\alpha = 0$  с зависимостью  $\alpha(\gamma)$  (Рис. 4). Видно, что при  $R < L < 9R$  будет только одно пересечение при  $\gamma = 0$  (лучи, идущие параллельно с  $BW$ ). При  $L \geq 9R$  будет три пересечения. Значит, график будет выглядеть следующим образом — Рис. 5.

Максимальное число копий Скрытого — 3. Ищущий будет видеть 3 копии, начиная с расстояния

$$L = 9R = 9 \text{ м}$$

Скрытый станет невидимым, когда сместится по цилиндру на угол больше  $\alpha_{\max}$  на Рис 6. Это угол можно найти численно (поиск экстремума функции с помощью специализированных компьютерных программ):

$$\alpha_{\max} = 0,287 \text{ рад}$$



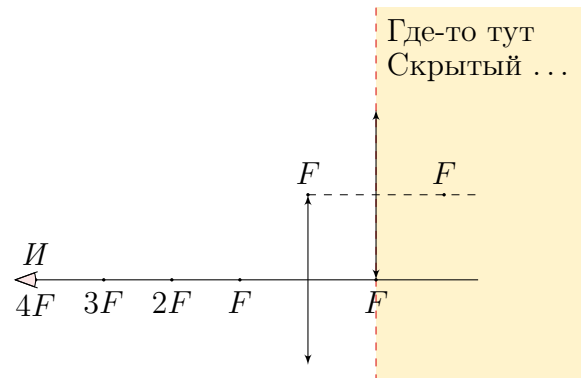
Минимальный путь, который необходимо преодолеть Скрытому, чтобы стать невидимым, легко выразить через угол  $\alpha_{\max}$

$$S_{\min} = \alpha_{\max} \cdot R = 0,287 \text{ м}$$

## Альтернативная задача

В представленной оптической схеме где-то справа от красного пунктира расположился Скрытый. Положение Ищущего отмечено глазом. Определить области пространства, при расположении в которых Скрытого Ищущий будет видеть

1. (2 балла) 0 изображений,
2. (2 балла) 1 изображение,
3. (2 балла) 2 изображения,
4. (2 балла) 3 изображения,
5. (2 балла) 4 изображения.



Расстояние от центра до края каждой линзы  $F$ .

**Примечание.** Изображение — область на линзе (возможно точка), посмотрев в которую Ищущий видит Скрытого и которая отделена разрывом от других таких областей.

## Решение альтернативной задачи

1. Если мы пустим лучи из Ищущего в направлении линз, то области пространства, которые будут ими «заметаться», будут являться областями, в которых Скрытого будет видно (ровно благодаря обратному ходу выпущенных нами лучей). Причём если для какой-то точки оптической схемы таких лучей несколько (пересекаются в этой точке), то они могут образовывать разные изображения в нашем понимании (приходя в Ищущего через разные участки линз).

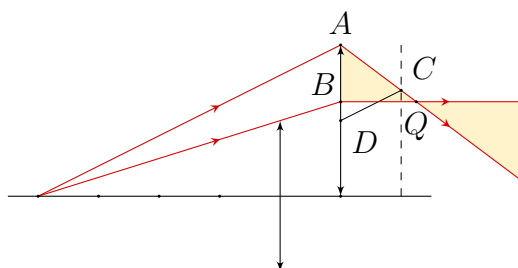
2. Рассмотрим некоторый пример построения лучей в этой схеме.

2.1. Луч  $OB$  преломляется в точке  $B$ , причём так как он проходит через фокус правой линзы, следовательно после преломления идет горизонтально.

2.2. Луч  $OA$  преломляется в точке  $A$ , для нахождения его пути после преломления строим побочную оптическую ось  $DC \parallel OA$ . Таким образом находим побочный фокус  $C$ , и строим луч  $AC$ .

2.3. Фактически  $Q$  — изображение  $O$  в правой линзе, следовательно, все лучи между  $A$  и  $B$  на правой линзе проходят через  $Q$ , а это значит, что вся заштрихованная область «заметается» такими лучами.

2.4. В дальнейшем рассмотрим луч, проходящий через  $B$ , но преломляющийся в левой линзе (он идёт чуть-чуть ниже рассмотренного луча  $OB$ , который в ней не преломился).



3. Аналогичными рассуждениями «замётаем» остальные области, а в местах, где они будут накладываться, Скрытый будет создавать несколько изображений (количество изображений равно количеству областей, которые покрывают конкретный вариант расположения Скрытого). Окончательно, смотрите рисунок.

4. Также важно помнить, что если скрытый расположился в точках на подобии  $Q$  (каких-то обычных изображениях  $O$ ), то на поверхности линзы его изображение будет занимать некоторую область.

