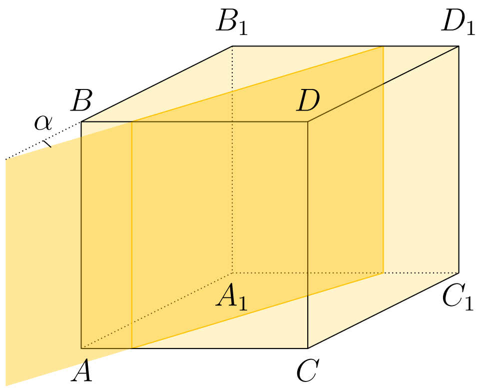
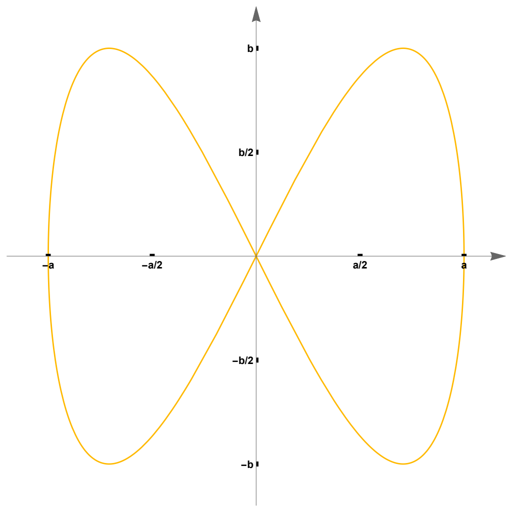
То, что повторяется часто,
уже не может болеть так сильно.
Эрих Мария Ремарк
«Возлюби ближнего своего»

3d6

Две пары 1 (ABB_1A_1 и CDD_1C_1) и 2 ($ABDC$ и $A_1B_1D_1C_1$) противоположных граней куба с длиной рёбер L заряжены с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 = -\sigma$ и $\sigma_2 = \sigma$, где $\sigma > 0$ — известная величина, а пара 3 — с некоторой поверхностной плотностью заряда σ_3. Частица с массой m и зарядом $q > 0$ может перемещаться по плоскости, содержащей центр куба, перпендикулярной паре 3 и образующей двугранный угол $\alpha = \pi/6$ с парой 1.





Сил тяжести и трения нет. Электрическая постоянная равна ε_0.

1. *(4 балла)* При каких значениях σ_3 положение равновесия частицы является устойчивым?
2. *(3 балла)* В этом и следующих пунктах траектория частицы имеет форму восьмёрки, проходящей через центр куба, при этом параметры a и b траектории много меньше L и являются известными. Определите поверхностную плотность заряда третьей пары граней σ_3.
3. *(3 балла)* Определите скорость частицы v_0 при прохождении центра куба.

Автор задачи: А. Уймин

Решение основной задачи. Способ 1

1. Найдём перпендикулярную составляющую вектора напряжённости $E_{\perp}$, создаваемой равномерно заряженной плоскостью площадью S с поверхностью плотностью заряда σ (Рис. 1).

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma \cdot S\cos\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Omega,$$

где Ω — телесный угол, под которым видна площадь S.

Рассмотрим две плоскости с поверхностной плотностью заряда σ и заряд q находящейся между ними. Рассмотрим малое смещение заряда x в направлении, перпендикулярном плоскостям (Рис. 2).

Левая пластина и правая пластина без 4 полосок толщиной h (образующих квадрат) видны под одним и тем же телесным углом. Значит поле в от пластин в точке, где находится заряд, будет создаваться двумя полосками толщиной h.

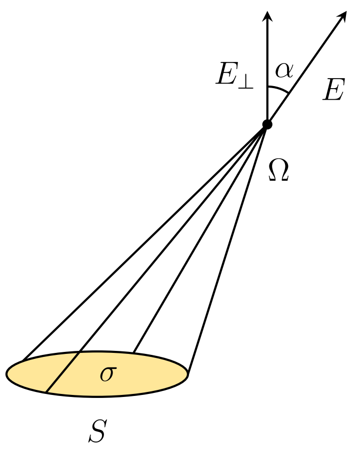


Рис. 1:

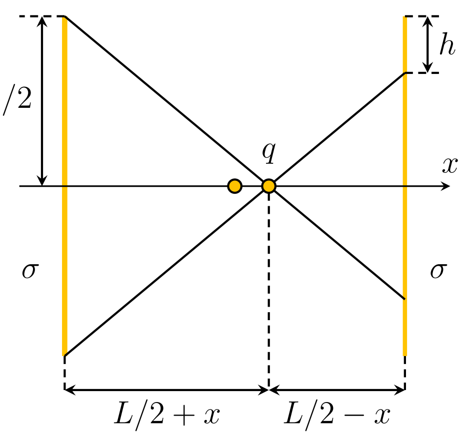


Рис. 2:

Из подобия треугольников выразим h через x:

$$\frac{L/2 - h}{L/2} = \frac{L/2 - x}{L/2 + x}$$

$$h = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\left(\frac{L/2 - x}{L/2 + x}\right)$$

$$h = \frac{L}{2}\left(\frac{2x}{L/2 + x}\right) \approx 2x$$

Рассчитаем поле от равномерно заряженной полоски длинной L с линейной с толщиной h (Рис. 3). Рассмотрим часть $h \cdot dx$ с зарядом $\sigma \cdot h \cdot dx$. Поле dE в рассматриваемой точке на расстоянии H от полоски:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma \cdot h \cdot dx}{x^2 + H^2}$$

Перепишем предыдущее выражение через угол α_0 и $d\alpha$:

$$dx \cdot \cos\alpha = \sqrt{x^2 + H^2}d\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{H}{\sqrt{x^2 + H^2}}$$

$$dx = \frac{x^2 + H^2}{H}d\alpha \Rightarrow dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma \cdot h}{H}d\alpha$$

Проинтегрируем:
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma \cdot h}{H}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\sigma \cdot h \cdot \alpha_0}{H}$$

Поле направлено против оси x, тогда заменяя h на $2x$ получим:

$$E = -\frac{\sigma\alpha_0}{H\pi\epsilon_0}x$$

При малом смещении x можно считать $H = \sqrt{3}/2L$. С учётом 4 полосок окончательно получаем:
$$E_1 = -\frac{8\sigma_1 \cdot \alpha_0}{\sqrt{3} \cdot L \cdot \pi \cdot \epsilon_0}x = -2A \cdot \sigma_1 x,$$
где A — константа.

Мы рассмотрели поле, создаваемое пластинами перпендикулярными смещению заряда. Рассмотрим поле, которое создают пластину вдоль которых происходило смещение заряда (Рис.4).

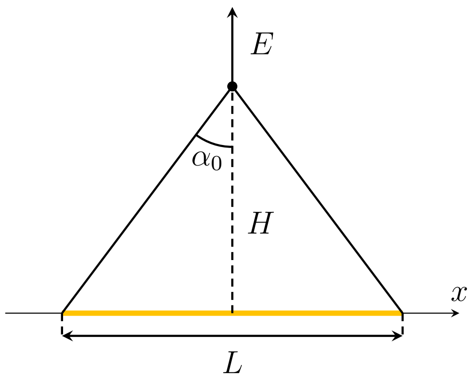


Рис. 3:

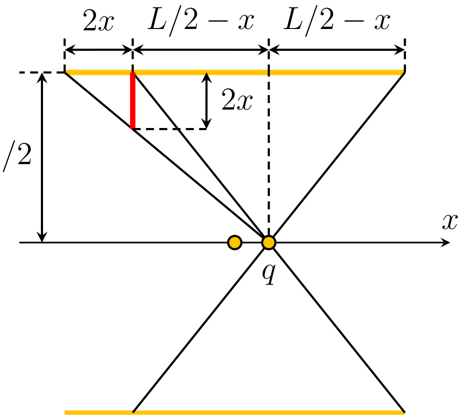


Рис. 4:

В силу симметрии поле будут создавать 2 полоски длинной $2x$. Чтобы воспользоваться выражением $E_\perp \propto \Omega$ проведем красный отрезок. При малом смещении x длину красного отрезка можно считать равной $\approx 2x$. Значит, 2 отрезка создают поле, направленное вдоль оси x:
$$E_3 = A \cdot \sigma_3 \cdot x$$

По аналогии:
$$E_2 = A \cdot \sigma_2 \cdot x$$

Запишем проекцию поля, действующего со стороны куба на заряд, смещенный на малое расстояние x:
$$E_x = A(-2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = A(3\sigma + \sigma_3)x$$

Отметим полоски, которые мы рассмотрели в кубе (Рис. 5). Запишем E_y, E_z по аналогии, выбрав оси x, y, z, как показано на Рис. 6 с началом в центре куба.

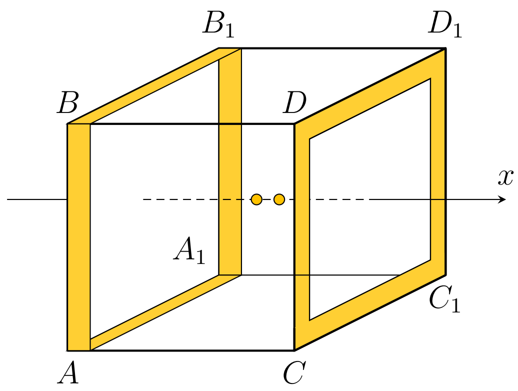


Рис. 5:

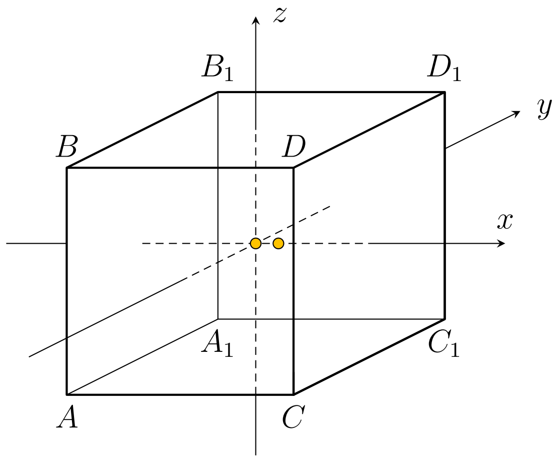


Рис. 6:

$$E_x = A(-2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)x = A(3\sigma + \sigma_3)x$$
$$E_y = A(-2\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_3)y = A(-3\sigma + \sigma_3)y$$
$$E_z = A(-2\sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_2)z = A(-2\sigma_3)z$$

Рассмотрим плоскость, в которой, траектория частицы представляет собой прямой отрезок. Введём ось x', которую можно спроецировать на оси x и y:

$$y = x' \cos\alpha, \quad x = x' \sin\alpha$$

Центр куба будет являться точкой устойчивого равновесия когда

$$E_z < 0, \quad E_{x'} < 0$$

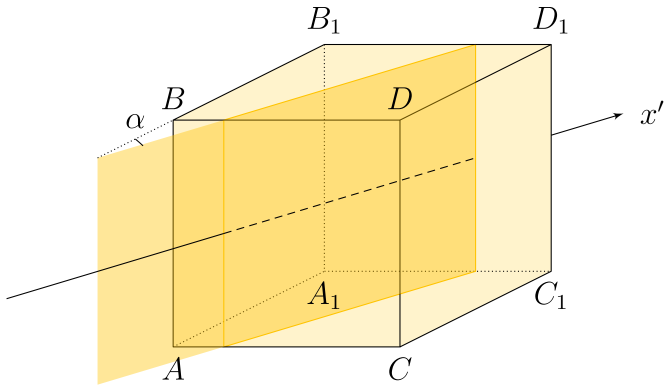


Рис. 7:

Выразим $E_{x'}$ через E_x и E_y:

$$E_{x'} = E_x \sin\alpha + E_y \cos\alpha = A(3\sigma + \sigma_3)\sin^2\alpha \cdot x' + A(-3\sigma + \sigma_3)\cos^2\alpha \cdot x'$$
$$E_{x'} = A\left[3\sigma(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \sigma_3\right] x'$$

Подставив $\alpha = \pi/6$ и воспользовавшись условием равновесия получим ответ на первый вопрос задачи:

$$\sigma_3 \in \left(0, \frac{3}{2}\sigma\right)$$

2. Рассмотрим для начала два крайних случая (когда она симметрична относительно оси x). Напряжённость поля в зависимости от координаты равна

$$E(x) = -kx.$$

Здесь k — коэффициент пропорциональности, который был найден в предыдущем пункте. Запишем второй закон Ньютона для частицы

$$m\ddot{x} + kqx = 0; \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{q}{m}kx = 0.$$

Циклическая частота получившихся колебания равна

$$\omega = \sqrt{\frac{qk}{m}}.$$

Так как траектория восьмёрка, то частоты могут относиться как

$$\left[\begin{aligned} &\omega_x = 2\omega_y; \\ &\omega_x = \frac{1}{2}\omega_y. \end{aligned}\right.$$

Здесь первый случай соответствует направлению восьмёрки вдоль оси y, а второй случай — вдоль x. Подставляя значения коэффициентов k с учётом направлений, получим

$$\left[\begin{aligned} &\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_3}{\pi\varepsilon_0 L} = \frac{1}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3/2\sigma - \sigma_3}{\pi\varepsilon_0 L}; \\ &\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_3}{\pi\varepsilon_0 L} = 4\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3/2\sigma - \sigma_3}{\pi\varepsilon_0 L}; \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &16\sigma_3 = 3\sigma - 2\sigma_3; \\ &\sigma_3 = 3\sigma - \sigma_3; \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\sigma_3 = \frac{1}{6}\sigma; \\ &\sigma_3 = \sigma. \end{aligned}\right.$$

Оба корня принадлежат интервалу $(0; 3\sigma/2)$.

3. Понятно, что колебания независимы (следствие теоремы о движении центра масс на две оси). Поэтому

$$v_0 = \sqrt{v_a^2 + v_b^2}.$$

Зависимость координат частицы от времени равна

$$x(t) = a\cos(\omega_1 t + \varphi_1); \quad y(t) = b\cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Амплитудные значения скорости равны

$$v_a = a\omega_1; \quad v_b = b\omega_2.$$

Откуда находим

$$v_0 = \sqrt{a^2\omega_1^2 + b^2\omega_2^2}.$$

Рассмотрим два граничных случая. Если восьмёрка ориентирована вдоль x, то есть $\sigma_3 = \sigma$, то скорость частицы

$$v_0 = \sqrt{\frac{q}{m}\frac{\sigma}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 L}\left(a^2 + 4b^2\right)}.$$

Если восьмёрка ориентирована вдоль y, то есть $\sigma_3 = \sigma/6$, то скорость частицы

$$v_0 = \sqrt{\frac{q}{m}\frac{\sigma}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 L}\left(2a^2 + 8b^2\right)3} = \sqrt{\frac{q}{m}\frac{\sigma}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 L}\left(a^2 + 4b^2\right)} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Окончательный ответ

$$\left[\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{q}{m}\frac{\sigma}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 L}\left(a^2+4b^2\right)}; \\ v_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{q}{m}\frac{\sigma}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 L}\left(a^2+4b^2\right)}. \end{aligned}\right.$$

Решение 2

Рассмотрим энергию взаимодействия заряда куба

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\cdot\sigma_i}{r}dudv$$

Здесь σ_i — заряд какой-то из плоскостей. u, v — какие-то оси (может быть пара x, y и т.п.). r — расстояние от заряда до маленького сегмента куба.

Обезразмерим следующим образом:

$$r_0 = L\left(\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{pmatrix}\right) + a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

r_0 — координата заряда.

$$r_1 L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

r_1 — координат участка с которым идёт взаимодействие

$$\sigma_i = \sigma{\cdot}q_i$$

Собираем всё вместе и получаем:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q{\cdot}\sigma}{L}L^2\frac{dxdy{\cdot}q_i}{\sqrt{\left(\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^2}}$$

$$dE = E_0\frac{dxdy{\cdot}q_i}{\sqrt{\left(\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^2}}$$

Далее изучаем только геометрий фактор, вынося за скобки q_i и E_0.

В конечном счете мы рассчитываем найти колебания, так что будем искать ответ в виду:

$$E_{\text{full}} = (a\ b)J_1\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}q_1 + (a\ b)J_2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}q_2 + (a\ b)J_3\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}q_3$$

Где J_i — матрица энергии взаимодействия с i парой плоскостей.

Линейных членов не возникнет в силу симметрии. Высшие порядки не интересны в силу малости колебаний. Для краткости записи положим:

$$r(a,b) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad r_0(x,y,z) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Таким образом

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{\sqrt{r(a,b)-r_0(0,y,z)^2}}\right)\right)_{a=0,b=0} dydz+$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{\sqrt{r(a,b)-r_0(1,y,z)^2}}\right)\right)_{a=0,b=0} dydz$$
$$J_2 = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{\sqrt{r(a,b)-r_0(x,0,z)^2}}\right)\right)_{a=0,b=0} dxdz+$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{\sqrt{r(a,b)-r_0(x,1,z)^2}}\right)\right)_{a=0,b=0} dxdz$$
$$J_3 = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{\sqrt{r(a,b)-r_0(x,y,0)^2}}\right)\right)_{a=0,b=0} dxdy+$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{\sqrt{r(a,b)-r_0(x,y,1)^2}}\right)\right)_{a=0,b=0} dxdy$$

Вычислим:
$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Матрица $q_1J_1 + q_2J_2 + q_3J_3$ диагональная, значит нам минимум энергии будет достигать при условии, что да диагонали стоят положительные числа. Получаем

$$0 < q_3 < \frac{3}{2}$$

Таким образом для устойчивости:

$$0 < \sigma_3 < \frac{3}{2}\sigma$$

По условию траектория — восьмерка. Это означает, что частица колеблется в потенциале и соотношение частот в противоположных направлениях $1:2$ или $2:1$. Поскольку здесь не требуется точное значение частоты, а только отношение, продолжаем работать с обезразмеренными величинами. Уравнение на энергию:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{\omega_1^2 m x_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2 m x_2^2}{2} = Energy$$

Тогда надо, чтобы собственные значения суммы матриц относились как $\lambda_1/\lambda_2 = 1/4$ (или $4/1$). Здесь пишем 4, а не 2, так как частоты отличаются в 2 раза, а значит их квадраты в 4 раза.

Таким образом есть 2 ответа:

$$\sigma_3 = 1; \sigma_3 = 1/6$$

Заряд ведет себя как гармонический осцилляторы. Тогда можно записать:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{\omega_1^2 m x_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2 m x_2^2}{2} = const$$

Или

$$v_0 = \sqrt{\omega_1^2 a^2 + \omega_2^2 b^2}$$

Кроме того из рисунка можно сказать:

$$2\omega_1 = \omega_2$$

Найдём эти частоты. Здесь придётся вернуться к размерностя По определению J:

$$(J_{11}x_1^2 + J_{22}x_2^2)E_0 = Energy$$

Поскольку x_1, x_2 безразмерны, то $x_i = \frac{a}{L}$

Тогда:

$$J_{11}\frac{E_0}{L^2} = \frac{\omega_1^2 m}{2}$$
$$J_{22}\frac{E_0}{L^2} = \frac{\omega_2^2 m}{2}$$

Или:

$$J_{22}\frac{E_0}{L^2} = \frac{\omega_1^2 m}{2}$$
$$J_{11}\frac{E_0}{L^2} = \frac{\omega_2^2 m}{2}$$

Тогда для $q_3 = 1$ собственные числа матрицы $-J_1 + J_2 + J3$: $\frac{8}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\omega_1^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{E_0}{mL^2} = \frac{q\cdot\sigma}{4\pi\epsilon_0 mL}\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{q\cdot\sigma}{4\pi\epsilon_0 mL}}\cdot\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}a^2 + \frac{16}{\sqrt{3}}b^2}$$

Аналогично для $q_3 = 1/6$

Собственные значения $-J_1 + J_2 + J_3/6$: $\frac{16}{3\sqrt{3}}$, $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

$$\omega_1^2 = \frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{E_0}{mL^2} = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0 mL}\frac{8}{3\sqrt{3}} \Rightarrow$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{q\sigma}{4\pi\epsilon mL}}\cdot\sqrt{\frac{8}{3\sqrt{3}}a^2 + \frac{32}{3\sqrt{3}}b^2}$$

Альтернативная задача

1. *(3 балла)* Тонкий диэлектрический квадрат равномерно заряжен по периметру с известной линейной плотностью заряда λ. Найдите поле на оси, перпендикулярной к плоскости квадрата, проходящей через его центр.

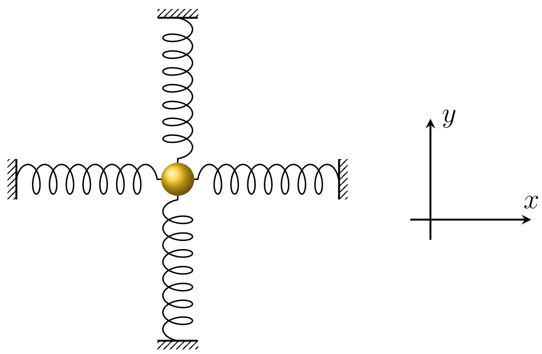
2. *(4 балла)* Равносторонний треугольник со стороной a, плоскость которого горизонтальна, равномерно заряжен с поверхностной плотностью заряда σ. Маленький кубичек с зарядом q может без трения скользить по оси симметрии треугольника, перпендикулярной его плоскости. В положении равновесия (при наличии гравитационного поля $\vec{g}$) кубичек находится в точке A на расстоянии $L = a/\sqrt{2}$ от каждой из вершин треугольника.

   (a) *(2 балла)* Найдите массу кубичка m.

   Кубичек отвели на расстояние $r \ll a$ от положения равновесия и отпустили без начальной скорости.

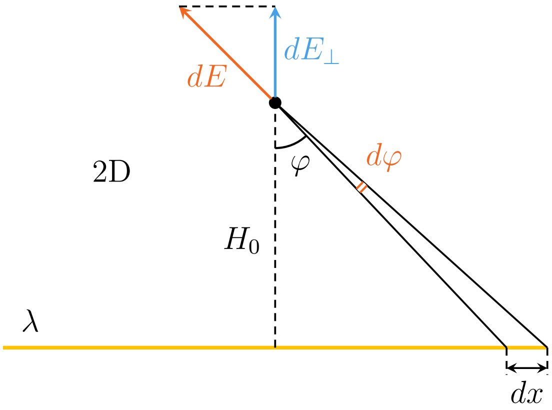
   (b) *(2 балла)* Найдите его скорость при прохождении положения равновесия.

3. *(3 балла)* В центре квадрата со стороной $2L$ лежит шарик массой m. Четыре пружины соединяют его с серединами боковых сторон квадрата. Горизонтальные пружины имеют жесткость $4k$, а вертикальные — k. Шарик отводят от положения равновесия на расстояние $a \ll L$ под углом $30°$ по направлению к горизонтали. Найдите зависимость его координат от времени.



Решение альтернативной задачи

1. a. Рассмотрим тонкую нить и найдём поле на её серединном перпендикуляре.



Заметим, что в силу симметрии поле будет направлено вдоль серпера. Из геометрии рисунка находим, что

$$x = H_0 \operatorname{tg} \varphi; \quad \Longrightarrow \quad dx = H_0 \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Напряжённость поля от маленького кусочка нити длины dx по закону Кулона равна

$$dE = k\frac{\lambda dx}{(H_0/\cos\varphi)^2}.$$

Проекция этого поля на направление серединного перпендикуляра равна

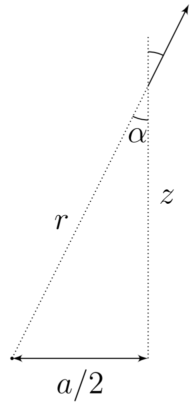
$$dE_\perp = dE\cos\varphi = k\frac{\lambda}{H_0}\cos\varphi d\varphi = k\frac{\lambda}{H_0} d\left(\sin\varphi\right).$$

Откуда находим

$$E_\perp = k\frac{\lambda}{H_0}\int\limits_{-\sin\varphi_0}^{\sin\varphi_0} = \frac{k\lambda}{H_0} 2\sin\varphi_0.$$

b. Теперь найдём искомое поле от квадрата. Для этого необходимо векторно сложить поля от каждой стороны квадрата. Заметим, что из симметрии поле будет направлено вдоль оси, перпендикулярной плоскости квадрата и проходящей через его центр. Тогда необходимо найти проекцию поля стороны на эту ось

$$E_\perp = \cos\alpha \frac{k\lambda}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + z^2}} r\sin\varphi.$$

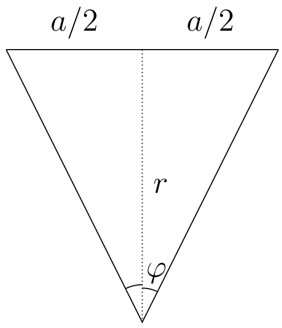


Напряжённость поля квадрата равна $E = 4E_\perp$. Осталось разобраться с геометрией рисунка

$$\sin\varphi = \frac{a/2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a/2}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{4z^2 + 2a^2}};$$

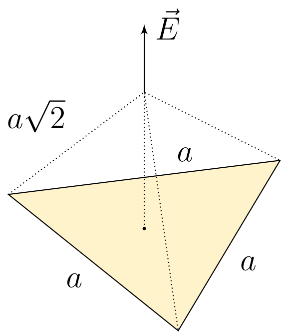
$$\cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Окончательно находим



$$E(z) = 4\frac{k\lambda z}{z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{4z^2 + 2a^2}} = \frac{32k\lambda az}{(z^2 + 4a^2)\sqrt{4z^2 + 2a^2}}.$$

2. a. Легко заметить, что при данных расстояниях треугольник видно под телесным углом $\Omega = 4\pi/8$, так как это сторона правильного октаэдра. Таким образом поле на оси

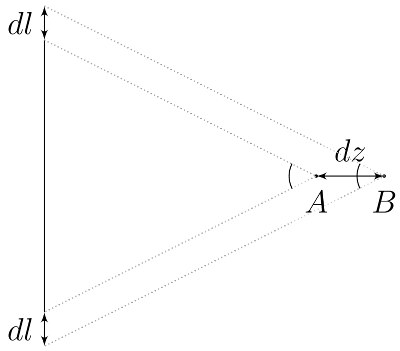


$$E_\perp = k\sigma\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{8} \cdot \sigma.$$

Из условия кубичка следует, что

$$Eq = mg; \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{\sigma q}{8g\varepsilon_0}.$$

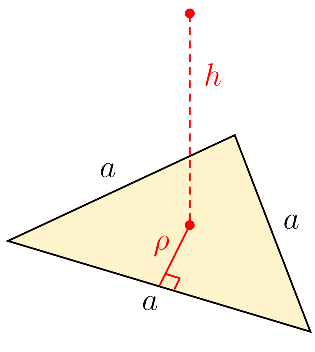
b. Найдём изменение силы при смещении кубичка. Так как поле определяется только телесным углом, то изменение поля будет обусловлено только треугольничком толщины dl (см. рис.) от вершин которого расстояние $a\sqrt{2}$. Полная сила, действующая на кубичек, будет равна



$$Eq - mg = qdE.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в положении равновесия сила Кулона и сила тяжести компенсируют друг друга.

Воспользуемся тем, что исходный треугольник является гранью некоторого октаэдра, поэтому



$$h = r_{in} = a\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Из геометрии находим

$$l = \frac{\sqrt{3}}{6}a; \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{6l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = l\sqrt{2}.$$

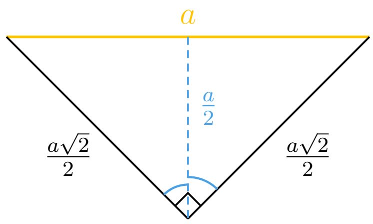
Также понятно, что $dh = dz$, поэтому

$$dl = \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Осталось найти напряжённость поля 3 сторон получившегося прямоугольника. Линейная плотность заряда этих сторон равна

$$\lambda = -\sigma dl.$$

Тогда



$$dE = -\frac{k\lambda}{a/2} \cdot 2\sin\frac{\pi}{4} = -2k\sigma\frac{dz}{a} = \frac{2\sqrt{6}k\sigma}{a} \cdot (-dz).$$

Минус в данном равенстве гарантирует, что суммарная сила будет возвращающей. Заметим, что изменение напряжённости поля прямо пропорциональна смещению из положения равновесия. Следовательно, систему можно рассматривать как пружину с жёсткостью k равной

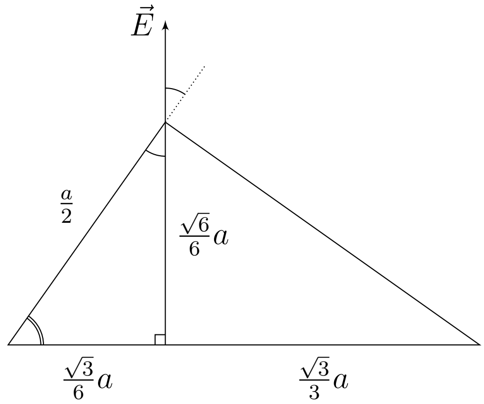
$$k = \frac{2\sqrt{6}k\sigma q}{a}.$$

Записав закон сохранения энергии для такой пружины, получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kr^2}{2}; \quad \Longrightarrow \quad v_0 = r\sqrt{\frac{k}{m}} = r\sqrt{\frac{2\sqrt{6}k\sigma q \cdot 8g\varepsilon_0}{a\sigma q}}.$$

Окончательно получаем

$$v_0 = r\sqrt{4\sqrt{6}\pi\frac{g}{a}}.$$



3. Запишем теорему о движении центра масс для такого шарика в проекциях на оси x и y

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -8kx; \\ m\ddot{y} = -2ky. \end{cases}$$

Минус в данных выражениях означает то, что сила упругости является возвращающей. Удвоенная жёсткость появляется из-за одновременного действия двух пружин. Данные уравнения является уравнением гармонических колебаний, их решение известно. С учётом начальных условий

$$\begin{cases} x(0) = a\sin\alpha; \\ y(0) = a\cos\alpha; \\ \dot{x}(0) = 0; \\ \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

Здесь угол $\alpha = 30^\circ$ по условию. В итоге получаем решение

$$x = \frac{a}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{8k}{m}}t\right); \quad y = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right).$$