Пробный тур финального этапа

10 класс

Московская область *2 марта 2022*

---

1. Метеокульминация 10 баллов

На некоторой российской метеостанции нижняя кульминация Солнца 10 июня совпадает с высотой в верхней кульминации 15 сентября. Найдите географическую широту метеостанции. Величина рефракции у горизонта — $34'$.

Решение. Заметим, что рефракция не повлияет на ответ в задаче, так как Солнце будет располагаться на одной высоте и рефракция будет вносить одинаковый вклад в любом случае. Найдём склонения солнца на заданные даты. Для этого воспользуемся следующей формулой:

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\frac{360^\circ}{365^d}n$$

где n — количество дней от весеннего равноденствия (21 марта). $n_1 = 81$ сут., $n_2 = 178$ сут. — количество дней от весеннего равноденствия до 10 июня и 15 сентября соответственно. Получаем $\delta_1 = 23^\circ 6'$, $\delta_2 = 1^\circ 46'$.

Формулы верхней и нижней кульминации для общих случаев:

$$h_{\text{вк}} = 90^\circ - |\varphi - \delta_2| \text{ — верхняя кульминация;}$$

$$h_{\text{нк}} = |\varphi + \delta_1| - 90^\circ \text{ — нижняя кульминация.}$$

Из условия задачи известно, что $h_{\text{нк}} = h_{\text{вк}}$, тогда получим 4 возможных варианта этого уравнения раскрывая модуль

$$90^\circ - \varphi + \delta_2 = \varphi + \delta_1 - 90^\circ$$

— возможно;

$$90^\circ - \varphi + \delta_2 = -\varphi - \delta_1 - 90^\circ$$

— невозможно;

$$90^\circ + \varphi - \delta_2 = \varphi + \delta_1 - 90^\circ$$

— невозможно;

$$90^\circ + \varphi - \delta_2 = -\varphi - \delta_1 - 90^\circ$$

— невозможно ($\varphi < -90°$).

Таким образом получаем единственный возможный случай:

$$90° - \varphi + \delta_2 = \varphi + \delta_1 - 90°,$$

$$\varphi = \frac{180° - \delta_1 + \delta_2}{2} = \boxed{79°20'}$$

Критерии оценивания **10**

Определение склонения Солнца на дату 2

выражение *1*

значения *1*

Запись выражений для высот кульминаций в общем случае 4

Анализ подходящих значений и получение ответа 4

анализ *3*

численный ответ *1*

2. Трио из галактики 10 баллов

Три звезды типа Солнца расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 5 млн км. Нарисуйте кривую блеска для наблюдателя в плоскости орбиты звёзд на расстоянии 10 пк от системы.

Решение. В равностороннем треугольнике расстояние $a = r\sqrt{3}$. Звёзды движутся по окружности радиусом $r = a/\sqrt{3} = 4.1R_\odot$. Пускай их период p, скорость $v = 2\pi r/p$. Нас интересует относительная скорость звёзд, из Рис. 1b

$$v_{\text{отн.}} = 2v\cos\alpha = 2\sqrt{3}\pi r/p.$$

Значит общая продолжительно покрытия (вхождения и выхождения)

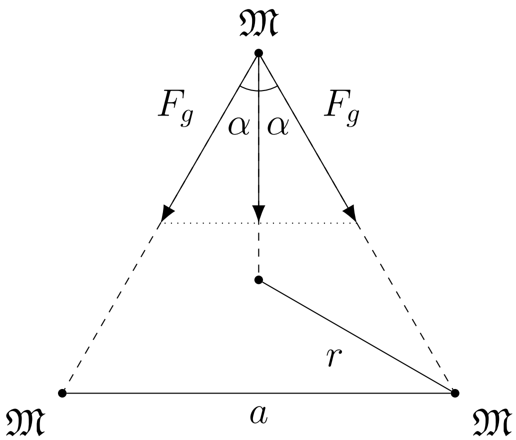
$$\tau = \frac{4R_\odot}{v_{\text{отн.}}} = \frac{4R_\odot}{2\sqrt{3}\pi r/p} = 0.09p.$$

> Для вычисления периода запишем второй закон ньютона для звезды: $F = ma$. Распишем:
>
> $$F = 2F_g\cos\alpha = 2\frac{G\mathfrak{M}\mathfrak{M}}{a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathfrak{M}\omega^2 r,$$
> $$\frac{G\mathfrak{M}}{a^2}\sqrt{3} = \omega^2\frac{a}{\sqrt{3}},$$
> $$\sqrt{3\frac{G\mathfrak{M}}{r^3}} = \omega.$$
>
> Значит, период $p = 2\pi/\omega \approx 31^h$. Этот материал изложен в образовательных целях.

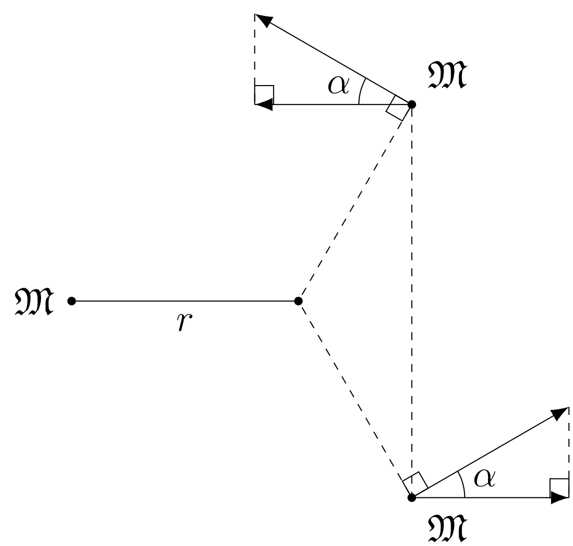
При покрытии плато не будет, иначе говоря, сразу после вхождения начнётся выхождение. При вхождении можно честно посчитать вид зависимости площади покрытия от времени, но весьма допустимо считать его прямолинейным участком. Значит, нужно посчитать звёздные величины в максимуме и минимуме. Максимум соответствует трём звездам, минимум — двум. На расстоянии 10 пк звёздная величина звезды типа Солнца $m_\odot = 4.8^m$. Тогда

$$m_2 = m_\odot - 2.5\log 2 = 4.0^m,$$
$$m_3 = m_\odot - 2.5\log 3 = 3.6^m.$$

Остаётся выяснить, когда будут минимумы. В силу симметрии происходящего, минимумы будут равномерно распределены по периоду, то есть каждые $p/6 \approx 0.17p$. Теперь строим зависимость блеска от фазы (доли периода).



(a) К расчёту периода.



(b) К расчёту скоростей.

Рис. 1 К задаче Трио из галактики.

Критерии оценивания **10**

Относительная скорость 3
Время вхождения и выхождения 1
Звёздные величины 3
Построение графика 3

3. Полёт к соседям 10 баллов

Спутнику на геостационарной орбите придают удельный импульс 20 км/с. Определите длительность полёта до ближайшей экзопланеты. Аппарат взаимодействовал только с Землёй и Солнцем.

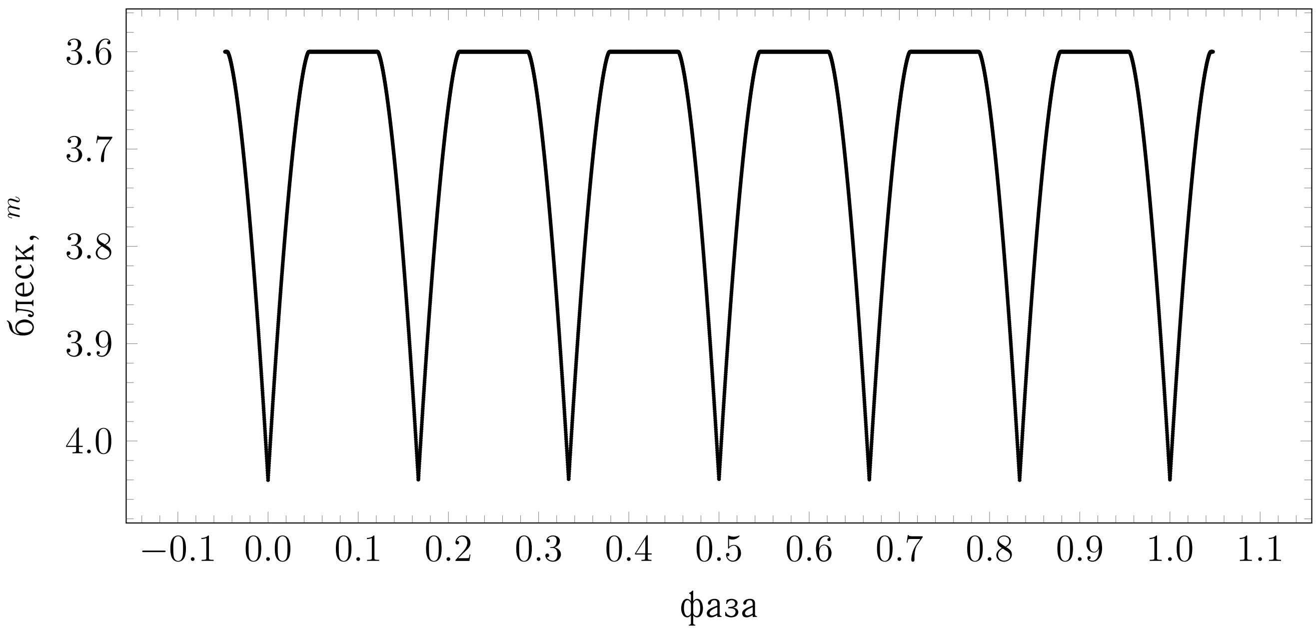


Рис. 2 Кривая блеска системы.

Решение. Радиус геостационарной орбиты $r_г = 42\,000$ км. Определим скорость спутника:

$$v_{кр} = \frac{2\pi}{T_\oplus} = 3 \text{ км/с}.$$

Значит, после манёвра скорость будет $v = v_0 + \Delta v = 23$ км/с. Из закона сохранения энергии определим скорость, когда гравитационное влияние Земли перестанет вносить существенный вклад. Тогда:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{G\mathfrak{M}}{r_г} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{G\mathfrak{M}}{r_\infty} \approx \frac{v_\infty^2}{2},$$

Выразим отсюда v_∞:

$$v_\infty = \sqrt{v^2 - \frac{2G\mathfrak{M}}{r_г}} = \sqrt{v^2 - 2v_{кр}^2} = 22.6 \text{ км/с}.$$

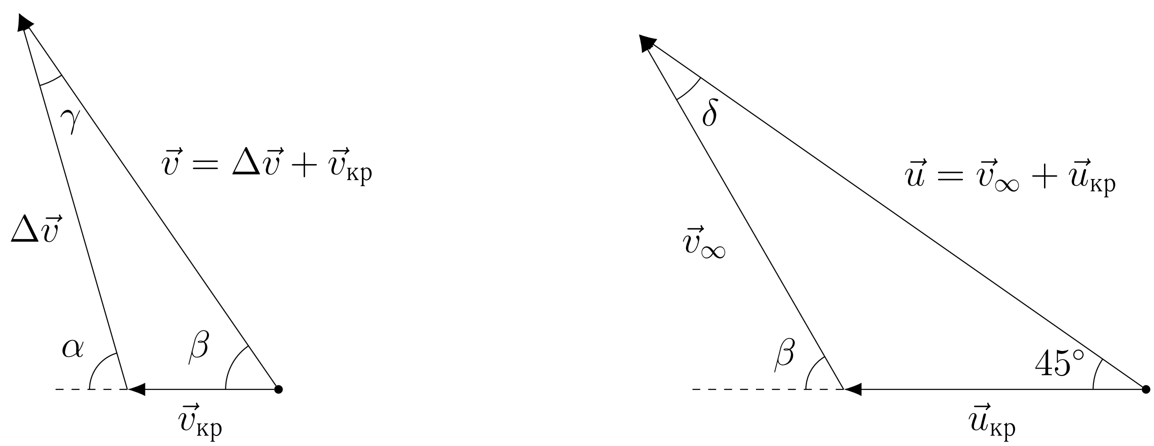
После вылета из зоны действия Земли скорость относительно Солнца $\vec{u}$ будет векторной суммой скорости Земли $\vec{u}_{кр}$ и относительной скорости $\vec{v}_\infty$. При оптимальной траектории их модули будут просто складываться: $u = u_{кр} + v_\infty = 52.6$ км/с. По аналогии с предыдущими выкладками:

$$u_\infty = \sqrt{u^2 - 2u_{кр}^2} = 31.1 \text{ км/с} \approx 1 \cdot 10^{-4}\ c.$$

Ближайшая экзопланета находится у звезды Проксима Центавра, расстояние до неё $d = 4.3$ св. лет. При перелёте по гиперболической траектории для оценки продолжительности полёта можно считать, что аппарат летит прямолинейно со скоростью u_∞. Тогда продолжительность:

$$\tau = \frac{d}{u_\infty} \approx \boxed{43\,000 \text{ лет}}$$

До сих пор мы считали, что Проксима находится в плоскости эклиптики, однако это не так. Её эклиптическая широта примерно $-45°$. Решение с учётом эклиптической широты трудоёмко и мы не будем его здесь излагать. При решении могут быть полезны следующие рисунки:



(a) Манёвр на геостационарной орбите.　　(b) Вычсисление гелиоцентрической скорости.

Рис. 3 К вычислению скоростей.

Критерии оценивания **10**

Скорость после манёвра на геостационарной орбите 1
Выражение для скорости на ∞ 2
Вычисление гелиоцентрической скорости 1
Расположение экзопланеты 2
Проксима Центавра *1*
расстояние *1*
Продолжительность полёта в прямолинейном приближении 2
Верное заврешние решения в рамках модели участника 1
Обоснованный учёт ненулевой эклиптической широты 1

4. Либретто 10 баллов

Определите положение Луны на своей орбите, где либрация по долготе будет максимальна.

Решение. Либрация определяется как разность аномалии луны на её орбите и угла, на который луна повернулась при вращении вокруг своей оси. В самом общем случае либрация λ задаётся как:

$$\lambda = \int_0^\tau (\omega_0 - \omega) dt,$$

Где ω_0 — угловая скорость Луны при вращении вокруг своей оси, ω — скорость её орбитального движения, τ — время, прошедшее после прохождения перицентра орбиты. Чтобы найти максимум данной величины, найдём производную по времени:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \omega_0(\tau) - \omega(\tau),$$

что очевидно из теоремы Ньютона-Лейбница. В экстремуме первая производная должна занулиться. Поэтому, в максимуме либрации:

$$\omega_0 = \omega.$$

Далее, по определению:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{GMp}}{r^2}$$

Подставляя период обращения Луны вокруг своей оси, который, как известно, равен ее сидерическому периоду, получим следующее соотношение:

$$\sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \frac{\sqrt{GMp}}{r^2}$$

$$r = a\sqrt[4]{1 - e^2} \approx \boxed{384\,100 \text{ км}}$$

Если очень хочется, можно посчитать истинную аномалию на данном расстоянии:

$$\varphi \approx \boxed{92.4^\circ}$$

Критерии оценивания **10**

Верное определение понятия либрации 2

Математическое выражение для условия максимума 2

Значения угловых скоростей 4

обращения вокруг своей оси *1*

обращения по орбите *3*

Ответ в виде расстояния или истинной аномалии 2

любой не абсолютно точно совпадающий ответ *0*