Mathus. Тепловые двигатели. Задачи 40, 44, 46

Задача 40. В архиве лорда Кельвина нашли график циклического процесса, совершенного над фиксированным количеством одноатомного идеального газа (рис.). От времени чернила выцвели, и информация про направления некоторых процессов была утрачена. Также была утрачена и информация про то, что отложено по оси абсцисс. Известно лишь, что на оси абсцисс отложена одна из следующих величин: объем, давление, температура или плотность, а шкала выполнена в условных единицах. По оси ординат отложена молярная теплоемкость газа C. Найдите максимально возможный КПД цикла.

Возможное решение. Заметим, что цикл состоит из трех процессов, с теплоемкостями $\frac{5}{2}R$, $\frac{3}{2}R$ и $2R$, значит первые два процесса это соответственно — изохорический, изобарический. Выясним какой процесс имеет теплоемкость $2R$.

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{\frac{3}{2}(PdV + VdP) + PdV}{\frac{1}{R}(PdV + VdP)} = 2R$$

откуда получим $PdV = VdP$ или $\frac{P}{V} = \frac{dP}{dV}$, что соответствует процессу в котором давление пропорционально объему.
Заметим, что изохорический процесс на графике в условии представлен в виде точки, что означает, что по оси абсцисс отложен объем или плотность. Рассмотрим вариант, где по оси абсцисс отложен объем. Тогда используя тот факт, что один из процессов - это изобарическое расширение и что изохорический процесс происходит при наименьшем значении объема на изобаре, получаем следующий вид цикла (рис. 27).
Найдем его КПД, обозначив минимальные давления и объем за P_0 и V_0.

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{пол}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2P_0 \cdot 2V_0}{\frac{3}{2}\left(3P_0 \cdot 3V_0 - P_0V_0\right) + 3P_0 \cdot 2V_0} = \frac{2P_0V_0}{18P_0V_0} = 1/9$$

Если по оси абсцисс графика из условия отложено ρ или $\frac{1}{V}$, то соответствующий график процесса представлен на рисунке (рис. 28).

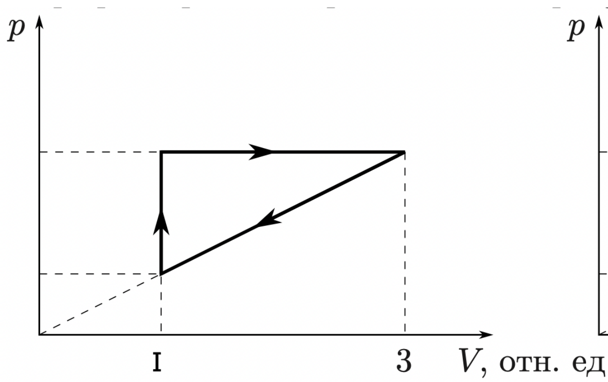


Рис. 27

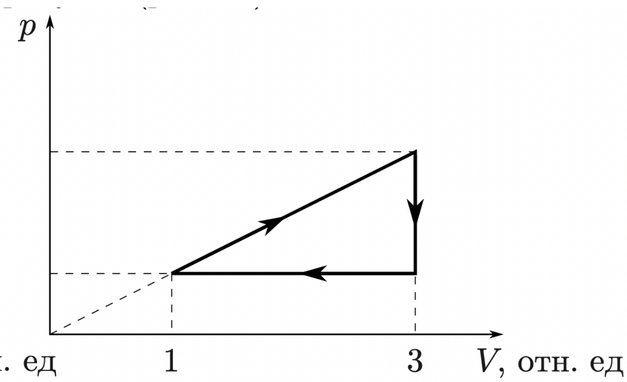


Рис. 28

Рассчитаем КПД цикла в этом случае:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{пол}}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2P_0 \cdot 2V_0}{\frac{3}{2}\left(3P_0\cdot 3V_0 - P_0V_0\right) + \frac{P_0+3P_0}{2}\cdot 2V_0} = \frac{2P_0V_0}{16P_0V_0} = 1/8$$

Таким образом максимальный КПД цикла равен 1/8.

Задача 44. Моль гелия расширяется изобарически, совершая работу 3,4 Дж, затем изохорически уменьшают его температуру, и, наконец, сжимают ади-абатически, возвращая в начальное состояние. Найдите к.п.д. цикла, если в адиабатическом процессе над газом была совершена работа 1,7 Дж.

Возможное решение. Работа газа за цикл: $A = 3,4 - 1,7 = 1,7$ Дж. Газ получает тепло при изобарическом расширении. Из первого начала термодинамики следует, что в изобарических процессах с одноатомным идеальным газом величины $Q, \Delta U$ и A всегда относятся соответственно, как 5:3:2. Значит, $Q_+ = \frac{5}{2}A_{12} = 2,5\cdot 3,4 = 8,5$ Дж. К.п.д. цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{3,4-1,7}{8,5} = 0,2$$

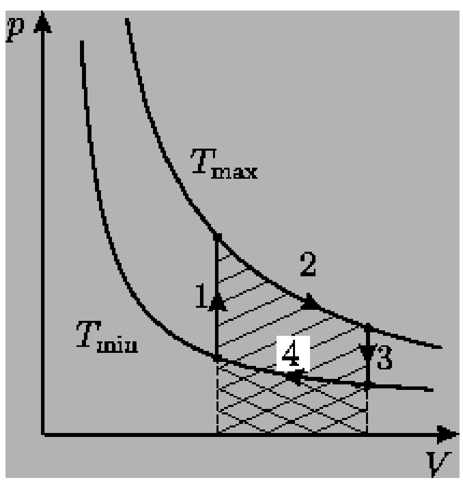
Задача 46. Идеальный одноатомный газ (количество вещества ν) участвует в циклическом процессе, состоящем из двух изотерм и двух изохор. При изохорическом нагревании газ получает количество теплоты Q_1, а при изотермическом расширении — количество теплоты Q_2. Минимальная температура газа в данном циклическом процессе равна T_{min}. Найдите:

а) максимальную температуру газа;
б) количества теплоты, отданные газом при изохорическом охлаждении и изотермическом сжатии;
в) работу, совершённую газом на каждой из стадий процесса;
г) КПД теплового двигателя, работающего по рассматриваемому циклу.

Возможное решение. Количество теплоты Q_1, сообщаемое газу при изохорическом нагревании от температуры $T_{\min}$, которую газ имел на нижней изотерме (см. рисунок), до максимальной температуры $T_{\max}$ на верхней изотерме, идёт на изменение его внутренней энергии:

$$Q_1 = (3/2)\nu R\,(T_{\max} - T_{\min})$$

Следовательно, $T_{\max} = T_{\min} + \frac{Q_1}{(3/2)\nu R}$.



Заметим, что величины работ A_2 и A_4, совершаемых газом на изотермических стадиях, относятся, как площади криволинейных трапеций (см. рисунок) под гиперболами, описываемыми следующими уравнениями: $p = \nu RT_{\max}/V$ (верхняя изотерма) и $p = \nu RT_{\min}/V$ (нижняя изотерма). Поскольку при изменении объёма на малую величину ΔV газ совершает работу

$$\Delta A = (\nu R \Delta V/V)T$$

, то величина работы, совершён-ной в изотермическом процессе, пропорциональна температуре T, которую имеет газ в этом процессе. Поэтому $A_2/|A_4| = T_{\max}/T_{\min}$.
Таким образом, можно найти работы, совершаемые газом на каждой из стадий данного циклического процесса.

1) Изохорическое нагревание: $A_1 = 0$.
2) Изотермическое расширение: $A_2 = Q_2$, так как внутренняя энергия газа не изменяется.
3) Изохорическое охлаждение: $A_3 = 0$.
4) Изотермическое сжатие:

$$A_4 = -A_2\frac{T_{\min}}{T_{\max}} = -Q_2\frac{(3/2)\nu RT_{\min}}{(3/2)\nu RT_{\min} + Q_1}$$

При изохорическом охлаждении (стадия 3) газ отдаёт количество теплоты $|Q_3| = (3/2)\nu R\left(T_{\max} - T_{\min}\right) = Q_1$, а при изотермическом сжатии (стадия 4) - количество теплоты

$$|Q_4| = |A_4| = Q_2\frac{(3/2)\nu RT_{\min}}{(3/2)\nu RT_{\min} + Q_1}$$

КПД η теплового двигателя, работающего по рассматриваемому циклу, равен отношению совершённой работы

$$A = A_2 + A_4 = A_2\left(1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\right) = Q_2\left(1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\right)$$

к полученному количеству теплоты $Q_1 + Q_2$. Следовательно,

$$\eta = \frac{Q_1Q_2}{\left(Q_1 + Q_2\right)\left(\frac{3}{2}\nu RT_{\min} + Q_1\right)}$$

Ответ:
а) $T_{\max} = T_{\min} + \frac{Q_1}{(3/2)\nu R}$
б) $|Q_3| = Q_1, |Q_4| = Q_2\frac{(3/2)\nu RT_{\min}}{(3/2)\nu RT_{\min}+Q_1}$
в) $A_1 = A_3 = 0, A_2 = Q_2, A_4 = -Q_2\frac{(3/2)\nu RT_{\min}}{(3/2)\nu RT_{\min}+Q_1}$
г) $\eta = \frac{Q_1Q_2}{\left(Q_1+Q_2\right)\left(\frac{3}{2}\nu RT_{\min}+Q_1\right)}$