Инварианты и раскраски.

1. Написанное на доске четырёхзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9, либо вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002? равны.

2. В каждой клетке доски 7×7 сидит жук. В какой-то момент времени все жуки взлетают, и после этого каждый из жуков садится в клетку, соседнюю по стороне с той, из которой он взлетел. Докажите, что в какую-то клетку не сядет ни одного жука.

3. На доске написаны числа 1, 2 и 4. Разрешается стереть с доски два числа a и b, а вместо них записать числа $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить на доске числа $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ и 3?

4. На доске написано число 12. Каждую минуту число умножают или делят либо на 2, либо на 3 и результат записывают на доске вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

5. Можно ли доску 10×10 разрезать на прямоугольники 4×1?

6. Можно ли таблицу 5×5 заполнить числами так, чтобы сумма чисел в любой строке была положительной, а сумма чисел в любом столбце – отрицательной?

7. На доске написаны многочлены $P(x) = x^2 + 2$ и $Q(x) = x + 1$. Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых двух из уже выписанных на доску многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $R(x) = x^3 + 2$?

8. клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки «+»» и «-», как показано на (Рис. 1). Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных либо в одной строке, либо в одном столбце, либо на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что, сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис. 1: задача №8.

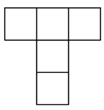
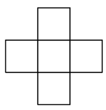
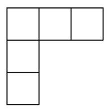
9. На доске написаны числа 3, 4, 5, 6. Любую пару чисел a, b можно заменить на пару чисел $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ и $a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$. Может ли на доске появиться число, меньшее 1?

10. В шести коробках лежат конфеты. В первой – 1, во второй – 2, в третьей – $3, \ldots$ в шестой – 6. За один ход разрешается в любые две коробки добавить по одной конфете. Можно ли за несколько ходов уравнять количество конфет в коробках?

11. На столе стоят вверх дном 25 стаканов. За один ход Вася может перевернуть любые 2 стакана. Сможет ли Вася за несколько ходов поставить все стаканы правильно?

12. В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: A, B и C. Две амёбы любых двух разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каким может быть её тип, если исходно амёб типа A было 20 штук, типа B – 21 штука и типа C – 22 штуки?

13. От квадратной доски 1001×1001 отрезали четыре угловых квадрата 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разбить на фигурки вида

 ,  и  ?

(Все фигурки состоят из пяти клеточек 1×1, их можно поворачивать.)