Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Элементы теории множеств.
Элементы логики

Задание №6 для 9-х классов

(2020 – 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2021

Составители: Я.С. Агаханова, доцент кафедры высшей математики МФТИ,
Е. С. Штыпа, аспирант кафедры высшей информатики МФТИ.

Математика: задание №6 для 9-х классов (2021 – 2022 учебный год), 2021, 26 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 15 апреля 2021 г.

Составители:
Агаханова Яна Сергеевна
Штыпа Евгения Сергеевна
Подписано 04.03.20. Формат 60x90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,62 .Уч.-изд. л. 1,44.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-55-80 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: zftsh.online

§1. Множество. Подмножество. Равенство множеств. Числовые множества и множества точек

Понятие *множества* – одно из первичных и, следовательно, неопределяемых понятий математики; понятие «множество» столь общее, что трудно дать ему какое-нибудь определение, которое не сводилось бы к замене слова «множество» равнозначными выражениями: совокупность, собрание элементов и т. д. В качестве примера можно рассмотреть множество учеников вашего класса, множество корней уравнения, множество прямых на плоскости, множество точек данной прямой и т. д. *Элементы множества* – это то, из чего оно состоит. Например, числа 1 и –1 есть элементы множества корней уравнения $x^2-1=0$, а окружность с центром в начале координат и радиусом 4 есть элемент множества всех окружностей и т. д.

Обычно множества обозначают большими буквами: $A, B, X, N, \ldots,$ а их элементы – соответствующими маленькими буквами:

$$a, b, x, n, \ldots .$$

В частности, приняты следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел (числовая прямая).

Если a есть элемент множества, то пишут $a \in A$ (читается: элемент a принадлежит множеству A). Запись $a \,\bar{\in}\, A$ (или $a \notin A$) означает, что a не является элементом множества A. Например, $3 \in \mathbb{N}$, $1/3 \notin \mathbb{Z}$.

Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно установить, является он элементом данного множества или нет. Рассмотрим способы, которыми может быть задано множество. Если множество состоит из конечного числа элементов, то оно может быть задано:

а) *перечислением* всех своих элементов, при этом порядок расположения элементов не существенен. Например, множество A корней уравнения $x^2-5x+6=0$ можно задать так: $A=\{2,3\}$ или $A=\{3,2\}$.

б) *указанием отличительных свойств*, которые выделяют элементы множества из элементов уже известного более широкого *основного* множества; например, $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-5x+6=0\}$ означает, что множество A состоит из тех элементов x множества действительных чисел, для которых справедливо равенство $x^2-5x+6=0$.

Очевидно, что перечислить бесконечное число элементов невозможно, поэтому для задания бесконечных множеств используется только второй способ. Например, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq 10\}$ есть множество решений неравенства $x\geq 10$.

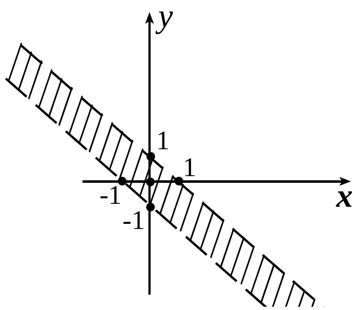
Может случиться, что ни один элемент не обладает отличительным свойством, определяющим множество A. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается $\varnothing$. Например, множество A натуральных чисел, меньших, чем $1/2$, есть пустое множество; пишут $A=\varnothing$.

Если все элементы множества A являются и элементами множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B и говорят, что множество A содержится в множестве B. Записывают это так: $A\subset B$ или $B\supset A$. Например, множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ есть подмножество всех целых чисел $\mathbb{Z}:\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

Из определения следует, что само множество также является своим подмножеством, т. е. всегда $A\subset A$.

Полагают также, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества A: $\varnothing\subset A$ для любого множества A. В самом деле, так как пустое множество не содержит ни одного элемента, то в нём нет и элементов, которые бы не принадлежали множеству A.

Если $A\subset B$ и $B\subset A$, то множества A и B называют *равными* и обозначают: $A=B$. Например, множество A всех корней уравнения $x^2-2x+1=0$ и множество B всех натуральных чисел, меньших, чем $3/2$, равны: и множество A, и множество B содержат один элемент – натуральное число 1.



Пример 1. Изобразите на координатной плоскости множество

$$A=\{(x;y)\,|\,|x+y|<1\}.$$

$$|x+y|<1\Leftrightarrow -1<x+y<1\Leftrightarrow\begin{cases}y<1-x,\\ y>-1-x.\end{cases}$$

Границы изображены пунктирной линией, так как они не входят в множество A.

§2. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение

Пусть A и B – произвольные множества. *Объединением* множеств A и B называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (обозначение: $C=A\bigcup B$).

Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B (обозначение: $C = A \bigcap B$).

Пример 2. $A = \{1,3,5,7,9\}$, $\quad B = \{1,2,3,4,5\}$.

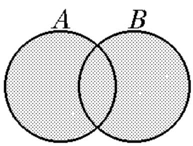
$$A \bigcup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}, \qquad A \bigcap B = \{1,3,5\}.$$

Пример 3. $A = [-1,1]$, $\quad B = (0,4)$.

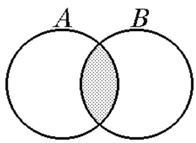
$$A \bigcup B = [-1,4), \qquad A \bigcap B = (0,1].$$

Аналогично определяется объединение и пересечение любого числа множеств. Например, объединение $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D$ есть множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B, C или D, а пересечение $A \bigcap B \bigcap C$ есть множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих *всем* трём множествам A, B и C.

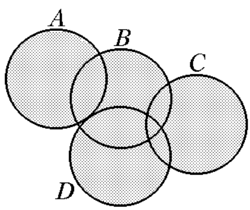
Определения и свойства операций над множествами будем для наглядности иллюстрировать рисунками; условимся изображать множества A, B, C, $\ldots$ в виде кругов. Тогда:



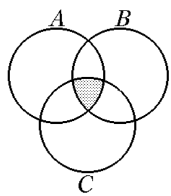
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \cup B \cup C \cup D$



$A \cap B \cap C$

(закрашены соответственно множества $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D$ и $A \bigcap B \bigcap C$). Такие рисунки называют *диаграммами Эйлера.*

Если множества A и B не имеют ни одного общего элемента, то их пересечение есть пустое множество: $A \bigcap B = \varnothing$.

Свойства операций объединения и пересечения

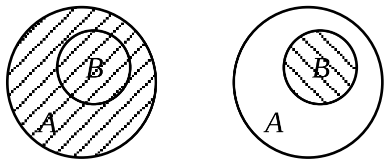
$$A \bigcup B = B \bigcup A, \qquad A \bigcap B = B \bigcap A,$$

$$(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C), \qquad (A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C),$$
$$A\bigcup A = A, \qquad A\bigcap A = A,$$
$$A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C), \qquad A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C).$$

Если множества A и B таковы, что $B\subset A,$ то $A\bigcup B = A,$ $A\bigcap B = B.$

Докажем, например, равенство $A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C).$

Проведём доказательство, пользуясь определением равенства множеств. Заметим, что если мы доказываем, что множества, скажем, X и $Y,$ равны, то доказательство проводится в **два** шага. Сначала показываем, что любой элемент множества X принадлежит множеству $Y,$ т. е. $X\subset Y$ (шаг 1), а затем, что любой элемент множества Y принадлежит множеству $X,$ т. е. $Y\subset X$ (шаг 2). Тогда $X = Y,$ т. к. $X\subset Y$ и $X\supset Y.$



$A\cup B$ $\qquad$ $A\cap B$

Доказательство. Пусть $x\in A\bigcup(B\bigcap C).$ Тогда из определения объединения множеств следует, что либо $x\in A,$ либо $x\in B\bigcap C$ (либо принадлежит обоим множествам). Если $x\in A,$ то $x\in A\bigcup B$ и $x\in A\bigcup C,$ следовательно, по определению пересечения множеств, $x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C).$ Если $x\in B\bigcap C,$ то $x\in B$ и $x\in C.$ Следовательно, $x\in A\bigcup B,$ $x\in A\bigcup C,$ поэтому $x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C).$ Таким образом доказано, что $A\bigcup(B\bigcap C)\subset(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ (шаг 1). Аналогично доказывается, что $A\bigcup(B\bigcap C)\supset(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ (шаг 2). Следовательно, по определению равенства множеств, $A\bigcup\left(B\bigcap C\right)=\left(A\bigcup B\right)\bigcap\left(A\bigcup C\right).$

Можно заметить, что объединение и пересечение множеств обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам суммы и произведения чисел. Например, $A\bigcup B = B\bigcup A$ и $a+b=b+a,$ $A\bigcap B = B\bigcap A$ и $ab=ba,$ $(A\bigcup B)\bigcap C = (A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$ и $(a+b)c = ac+bc$ и т. д. Однако, далеко не все операции над множествами аналогичны арифметическим операциям. Например, $A\bigcap A = A$ и $A\bigcup A = A$ для любого множества $A,$ в то время как соответствующие равенства верны не для всех чисел.

Пусть A и B – произвольные множества.

Разностью множеств A и B называется множество $C,$ состоящее из тех и только тех элементов множества $A,$ которые не содержатся в множестве B (см. рис. 1). Обозначение: $C = A\setminus B.$

Иногда бывает, что все рассматриваемые в данный момент множества являются подмножествами некоторого множества E , называемого *универсальным* множеством. Например, если мы имеем дело с множествами, элементами которых являются действительные числа, то в качестве универсального множества E можно взять множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

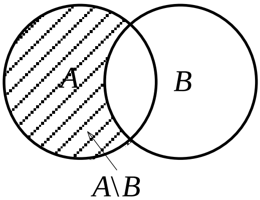


Рис. 1

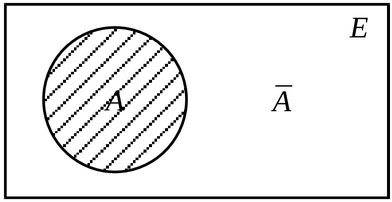


Рис. 2

Разность между множеством E и содержащимся в нём подмножеством A обычно называют *дополнением* A в E и обозначают $\overline{A}$, если из контекста ясно, в каком множестве ищется дополнение к A (см. рис. 2). Таким образом,

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}, \ \overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Из определения следует, что для любого множества $A \subset E$

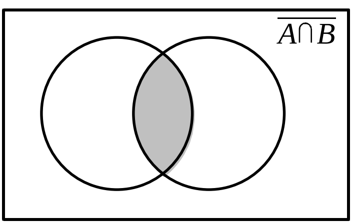
$$A \cap \overline{A} = \varnothing,$$
$$A \cup \overline{A} = E,$$
$$\overline{(\overline{A})} = A.$$

Для любых двух подмножеств A и B основного множества E справедливы равенства

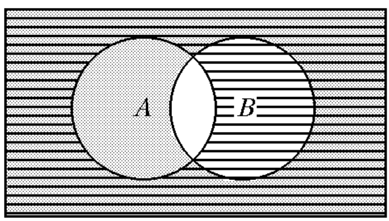
1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

которые называются *законами де Моргана*. Второй закон де Моргана проиллюстрирован ниже.

Докажем второй закон де Моргана (*обратите внимание, что сам рисунок не является доказательством, он лишь упрощает проведение*



Заштриховано $A \cap B$, *не заштриховано множество* $\overline{A \cap B}$.



Закрашено множество $\overline{B}$, *горизонтальная штриховка* – $\overline{A}$.

доказательства, иллюстрируя то, о чём говорится). Пусть $x \in \overline{A \cap B}$, т. е. $x \in E$, но $x \notin A \cap B$. Следовательно, либо $x \notin A$, либо $x \notin B$ (либо x не принадлежит ни A, ни B). Но если $x \notin A$, то $x \in \overline{A}$, а если $x \notin B$, то $x \in \overline{B}$. Следовательно, в любом случае $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, т. е. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Наоборот, пусть $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Тогда либо $x \in \overline{A}$, либо $x \in \overline{B}$ (либо x принадлежит и $\overline{A}$, и $\overline{B}$). Если $x \in \overline{A}$, то $x \notin A$, если же $x \in \overline{B}$, то $x \notin B$. Таким образом, в любом случае x не принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Следовательно, $x \notin A \cap B$, т. е. $x \in \overline{A \cap B}$. Поэтому $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$. Второй закон де Моргана доказан.

§3. Конечные множества

Множество называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов.

Пусть A – некоторое конечное множество. Обозначим через $m(A)$ количество элементов в множестве A. Например, если

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 1 = 0 \right\}, \text{ то } m(A) = 2.$$

Число элементов пустого множества равно нулю: $m(\varnothing) = 0$.

Если конечное множество A представимо в виде объединения *попарно непересекающихся* множеств $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_l$, то

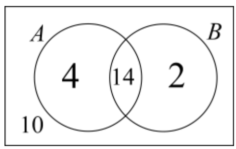
$$m(A) = m(A_1) + m(A_2) + \ldots + m(A_l).$$

Для любых двух конечных множеств A и B справедливо равенство

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B), \tag{1}$$

называемое формулой включений и исключений.

В самом деле, пусть множества A и B не пересекаются, т. е. $A \cap B = \varnothing$, $m(A \cap B) = 0$. Тогда их объединение получается в результате добавления элементов одного множества к элементам другого. Следовательно, $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.



Если же $A \cap B \neq \varnothing$, то число общих элементов у множества A и B равно $m(A \cap B)$. Объединение множеств A и B получается путём добавления к элементам множества A всех элементов множества B, которые не входят в A. Число таких элементов равно $m(B) - m(A \cap B)$. Поэтому

$$m(A \cup B) = m(A) + [m(B) - m(A \cap B)] = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Пример 4. В классе 30 учеников. Известно, что 18 ребят имеют спортивный разряд по лыжам, а 16 – по плаванию. Десять учеников не имеют разряда ни по плаванию, ни по лыжам. Сколько ребят имеют спортивный разряд и по плаванию, и по лыжам?

Решение. Пусть A – множество учеников, имеющих разряд по лыжам, а B – множество учеников, имеющих разряд по плаванию. Тогда в силу условия задачи $m(A)=18,$ $m(B)=16,$ а $m(A\bigcup B)=30-10=20.$ Применив равенство (1), имеем:

$$m(A\bigcap B)=-m(A\bigcup B)+m(A)+m(B)=-20+18+16=14.$$

Таким образом, спортивный разряд и по лыжам, и по плаванию имеют 14 учеников.

*§4. Эквивалентность множеств. Счётные и несчётные множества

Любые два конечных множества можно сравнивать по количеству элементов в них. Действительно, для этого достаточно перечислить элементы каждого из них. Например, $A=\{1,3,5,7,9\},$ $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$ Очевидно, что $m(A)<m(B),$ т. к. $m(A)=5,$ $m(B)=10.$ Если же мы имеем дело с бесконечными множествами, например, множеством треугольников на плоскости или множеством натуральных чисел, то такой способ сравнения множеств не подходит.

Рассмотрим способ сравнения множеств, который применим как к конечным, так и к бесконечным множествам. Допустим, к вам пришли гости, и вы должны накрыть стол. Для этого совсем не обязательно сначала пересчитать гостей, а потом отсчитать нужное количество тарелок и приборов. Можно просто рассадить гостей и перед каждым поставить тарелку и положить прибор. Такое попарное сочетание элементов разных множеств называется взаимно однозначным соответствием.

Между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*, если:

а) каждому элементу $a\in A$ соответствует единственный элемент $b\in B;$

б) каждый элемент $b\in B$ соответствует некоторому элементу $a\in A;$

в) разным элементам множества A соответствуют разные элементы множества $B.$

Например, соответствия между множествами A и $B,$ изображённые на рис. 3 и рис. 4, не являются взаимно однозначными, так как не выполнено условие а); на рис. 5 не выполнено условие б), а на рис. 6 – условие в). И только на рис. 7 изображено взаимно однозначное соответствие множеств.

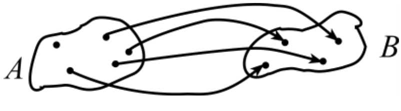


Рис. 3

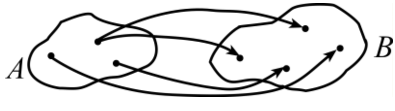


Рис. 4

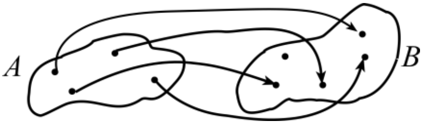


Рис. 5

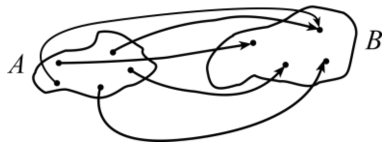


Рис. 6

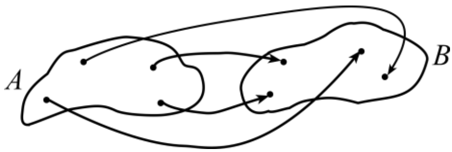


Рис. 7

Множества A и B называются *эквивалентными,* или *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Данное определение годится для любых множеств, а не только для конечных.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Множество натуральных чисел и множество чётных положительных чисел эквивалентны, т. к. между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, например, по следующему правилу:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

Так как множество чётных положительных чисел является подмножеством множества натуральных чисел, то данный пример показывает, что бесконечное множество может быть равномощным своему подмножеству. В случае конечных множеств такая ситуация невозможна: между конечными множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда $m(A) = m(B)$.

2. Множество целых чисел эквивалентно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots & n & -n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \end{array}$$

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется *счётным множеством*. Иначе говоря, множество счётно, если все элементы этого множества можно занумеровать при помощи натуральных чисел. Таким образом, множество чётных положительных чисел и множество целых чисел счётны.

3. Множество положительных рациональных чисел счётно. В самом деле, представим каждое рациональное число в виде несократимой дроби и запишем его в бесконечную таблицу, а затем пронумеруем числа в таблице следующим образом:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\[2mm]
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \cdots \\[2mm]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \cdots
\end{array}
$$

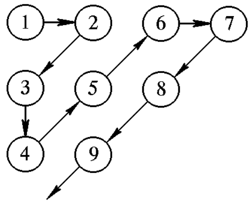


Таблица уходит в бесконечность вправо и вниз. Числа в таблице не повторяются (так, если есть число 5/2, то нет числе 10/4, 15/6 и т. д.). Обозначим числа таблицы кружочками и пронумеруем их следующим образом:

Под номером 1 стоит число 1, под номером 2 – число 2, под номером 3 – число 1/2, под номером 4 – число 1/3 и т. д.

4. Множества $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n},...\right\}$ и $B=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$ счётны и, следовательно, эквивалентны. В самом деле, установим взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$
\begin{array}{cccccccc}
A & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\
\mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & \cdots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\
B & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \cdots
\end{array}
$$

Замечание. Аналогично доказывается, что любые два счётных множества равномощны.

5. Любой отрезок $[a,b]$, где $a \neq b$, эквивалентен отрезку $[0,1]$. Искомое взаимно однозначное соответствие можно задать линейной функцией вида $y=\alpha x+\beta$ $\left(x\in[0;1], y\in[a;b]\right)$. При этом α и β подберём так, чтобы выполнялись условия $y(0)=a$, $y(1)=b$ (рис. 8).

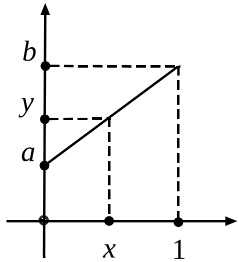


Рис. 8

Получаем условия $a=\alpha\cdot 0+\beta,\ b=\alpha+\beta,$ откуда $\alpha=b-a,\ \beta=a.$ Значит, функция $y=(b-a)x+a$ ставит в соответствие каждому $x\in[0;1]$ значение $y\in[a;b].$ Очевидно, что это соответствие является взаимно однозначным, т. к. x единственным образом выражается через y по формуле $x=\dfrac{y-a}{b-a}.$ Можно также задать взаимно однозначное соответствие графически (рис. 9).

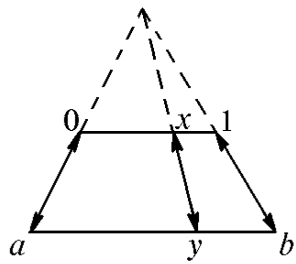


Рис. 9

6. Установим взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(0;1)$ и точками полуинтервала $[0;1).$ Эти два множества отличаются всего лишь одной точкой, однако установить взаимно однозначное соответствие не так просто. Рассмотрим множества A и B из пункта 4.

Заметим, что множество $(0;1)\setminus A$ и множество $[0;1)\setminus B$ равны. Обозначим $C=(0;1)\setminus A=[0;1)\setminus B.$ Тогда $(0;1)=A\bigcup C,$ $[0;1)=B\bigcup C.$ Таким образом, и интервал, и полуинтервал мы представили в виде объединения счётного множества и одного и того же множества C . Так как A и B равномощны, данные множества также будут равномощны. Установить взаимно однозначное соответствие можно так. Пусть $x\in(0;1).$ Если $x\in A,$ то поставим ему в соответствие $y\in B$ по закону, описанному в пункте 4; если же $x\in C$, то поставим ему в соответствие себя: $y=x\in C.$ Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между $(0;1)$ и $[0;1).$ Следовательно, множества $(0;1)$ и $[0;1)$ эквивалентны, или равномощны.

В заключение заметим, что не все бесконечные множества являются счётными; например, можно доказать, что множество точек любого отрезка $[a,b],$ где $a<b,$ не является счётным.

§5. Высказывания. Операции над высказываниями

Под *высказыванием* понимают всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Например:

1. Днепр впадает в Каспийское море.

2. Уравнение $x^2+6x+18=0$ не имеет решений.

3. Муха – это земноводное.

Очевидно, первое и третье высказывания ложны, а второе – истинно. Встречаются также и *неопределённые высказывания* – такие высказывания, истинность или ложность которых установить невозможно, например:

4. В МФТИ поступить легко.

5. В Москве сегодня плохая погода.

6. $y<10$.

Некоторые имеющие смысл предложения вообще не являются высказываниями, например:

– определения («параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны»);

– вопросы («сколько времени?»);

– призывы («не переходите улицу на красный свет!»).

Если у нас есть несколько высказываний, то при помощи так называемых логических связок или *операций* (**«или», «и», «не», «если…, то…»)** из них можно образовывать новые высказывания. Рассмотрим каждую из них в отдельности.

I. Отрицание.

Каждому высказыванию A можно сопоставить утверждение «высказывание A ложно», которое само является высказыванием, так как оно либо истинно, либо ложно. Это новое высказывание обозначают $\overline{A}$ и называют отрицанием A. В нашей речи отрицанию часто соответствует частица «не», которую мы присоединяем к сказуемому или опускаем, если она уже была в исходном высказывании например: если $A=\{\text{на сосне растут помидоры}\}$, а $B=\{6-\text{это не простое число}\}$, то $\overline{A}=\{\text{на сосне не растут помидоры}\}$, $\overline{B}=\{6-\text{это простое число}\}$.

Из двух высказываний A и $\overline{A}$ всегда одно является истинным, а другое – ложным.

II. Сумма высказываний. Из двух данных высказываний A и B можно составить новое высказывание, называемое суммой высказываний A и B и обозначаемое $A+B$. Высказывание $A+B$ истинно, если истинно хотя бы одно из высказываний A, B; если же оба высказывания A и B ложны, то $A+B$ также ложно. Хорошо известный вам пример суммы высказываний – это нестрогое неравенство. Действительно, неравенство $x\le y$ справедливо тогда и только тогда, когда верно хотя бы одно из двух высказываний $x=y$ или $x<y$. В нашей

речи сумма высказываний обычно образуется с помощью союза «или». Рассмотрим высказывания A и B из предыдущего пункта. Очевидно, что A и $\overline{B}$ ложны, а $\overline{A}$ и B истинны. Значит, высказывания $A+B$, $\overline{A}+B$, $\overline{A}+\overline{B}$ истинны, а высказывание $A+\overline{B}$ ложно.

III. Произведением высказываний A и B (обозначается $A\cdot B$ или AB) называют такое высказывание, которое истинно в том и только в том случае, когда истинны оба высказывания A и B. Обычно произведение двух высказываний получают при помощи союза «и».

Например, высказывание «река Урал впадает в Каспийское море и ель – это хвойное дерево» является истинным, так как каждая из двух составляющих его частей истинна. Высказывание «Пушкин получил Нобелевскую премию и 7 – простое число» ложно, так как ложна его первая часть. Уже встречавшийся вам пример произведения двух высказываний – это двойное неравенство: мы считаем, что $a<b<c$ истинно тогда и только тогда, когда истинны оба неравенства $a<b$ и $b<c$.

IV. Импликация. Высказывание, образованное из данных высказываний A и B при помощи слов «если…, то…», называют *импликацией высказываний* и обозначают $A\to B$. Высказывание A называют *условием*, а высказывание B – *заключением*.

Импликация $A\to B$ считается ложным высказыванием только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно. В других случаях $A\to B$ истинна. Рассмотрим высказывания:

– если $36<0$, то 40 делится на 10;

– если 9 делится на 7, то Париж находится в Антарктиде;

– если 13 – простое число, то неравенство $x^2<7$ не имеет решений;

– если 13 – простое число, то неравенство $x^2<-7$ не имеет решений;

Из них ложным является только третье (в нём условие истинно, а заключение ложно), все остальные высказывания истинны.

Ещё раз обратим ваше внимание, что если A ложно, то импликация $A\to B$ истинна для любого высказывания B.

Таким образом, из неверного высказывания может следовать как неверное, так и верное высказывание.

V. Рассмотрим свойства логических операций.

Два высказывания называются *равносильными*, если они либо оба истинны, либо оба ложны. Равносильные высказывания обозначают знаком $=$ (или знаком $\Leftrightarrow$ в том случае, когда высказывания представляют собой уравнения или неравенства).

Для любых высказываний A, B и C выполнены следующие свойства:

$$A+B=B+A, \tag{2}$$

$$\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right), \tag{3}$$

$$AB=BA, \tag{4}$$

$$\left(AB\right)C=A\left(BC\right), \tag{5}$$

$$A\left(B+C\right)=AB+AC, \tag{6}$$

$$A+BC=\left(A+B\right)\left(A+C\right), \tag{7}$$

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}, \tag{8}$$

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}, \tag{9}$$

$$\overline{\overline{A}}=A, \tag{10}$$

$$A\to B=\overline{A}+B. \tag{11}$$

Докажем, например, формулу (11). Для двух высказываний A и B возможны 4 различных случая:

1) A и B истинны;

2) A истинно, а B ложно;

3) A ложно, а B истинно;

4) A и B ложны.

Убеждаемся, что в каждом из четырёх случаев левая и правая части (11) равны (в 1, 3, 4 случаях обе части истинны, а в случае 2 обе части ложны).

С помощью формул (2) – (11) можно проводить преобразования логических выражений точно так же, как в обычной алгебре.

Например,

$$\overline{B}\to\overline{A}\overset{(11)}{=}\overline{\overline{B}}+\overline{A}\overset{(10)}{=}B+\overline{A}\overset{(2)}{=}\overline{A}+B\overset{(11)}{=}A\to B,\ \text{то есть}\ \overline{B}\to\overline{A}=A\to B.$$

Пример 5. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был чёрный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг», но ни в коем случае не синий. Стало известно, что желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо её цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Решение. Рассмотрим высказывания:

$$A=\{\text{машина синего цвета}\};$$

$$B=\{\text{машина марки "Бьюик"}\};$$

$$C=\{\text{машина чёрного цвета}\};$$

$$D=\{\text{машина марки "Крайслер"}\};$$

$$E=\{\text{машина марки "Форд Мустанг"}\}.$$

Поскольку каждый участник назвал верно либо марку машины, либо её цвет, то из показаний следует истинность высказываний $A+B$ (Браун), $C+D$ (Джонс) и $\overline{A}+E$ (Смит). Значит, будет истинным и произведение этих трёх высказываний $P=(A+B)(C+D)(\overline{A}+E).$ Раскроем скобки:

$$P=(AC+AD+BC+BD)(\overline{A}+E)=AC\overline{A}+ACE+AD\overline{A}+ADE+$$
$$+BC\overline{A}+BCE+BD\overline{A}+BDE.$$

Сумма восьми слагаемых может быть истинным высказыванием только в том случае, когда хотя бы одно из них истинно. Из определения высказываний A, B, C, D, E сразу же следует, что все слагаемые, кроме пятого ложны. Значит, истинно пятое слагаемое $BCA.$

Ответ: чёрный «Бьюик».

§6. Высказывания, зависящие от переменных. Метод математической индукции

Высказывания, истинность которых зависит от одной или нескольких переменных, будем называть предложениями, зависящими от переменных. Например, предложение «n делится на 6» зависит от переменной n, принимающей натуральные значения. При одних значениях переменной n оно истинно, а при других – ложно. Неравенство $2x + y > 4$ является предложением, зависящим от двух переменных x и y. При $x = 3$, $y = -1$ оно истинно, а при $x = -1$, $y = 3$ – ложно.

Предложения, зависящие от переменной, обозначают $A(x)$, $B(n)$, $C(x;y)$ и т. д. Для каждого предложения необходимо указывать, на каком множестве переменных оно рассматривается.

Например, предложение «n делится на 6» рассматривается на множестве натуральных чисел. Когда ясно, о каком множестве идёт речь, для краткости вместо $A(x),\ x\in U$ пишут просто $A(x)$.

Множество U, на котором рассматривается предложение $A(x)$, можно разбить на два подмножества: одно из них, содержащее те и только те элементы из U, для которых $A(x)$ истинно, называется *множеством истинности* предложения $A(x)$; второе из них содержит те и только те элементы из U, для которых $A(x)$ ложно. Если первое из этих подмножеств обозначить через W, то второе подмножество можно обозначить $\overline{W}$, так как оно является дополнением множества W до множества U.

Например, для предложения $x-|x|\geq 0$ множеством истинности является $W=[0;+\infty)$, а $\overline{W}=(-\infty;0)$.

Два предложения $A(x)$ и $B(x)$, *заданные на одном и том же множестве*, называются *равносильными*, если у них совпадают множества истинности. Например, неравенства $x-5>0$ и $x^4(x-5)>0$ равносильны, так как у них одинаковые множества решений, то есть одинаковые множества, при которых они истинны.

На предложения, зависящие от переменных, переносятся логические операции, введённые нами в предыдущем параграфе для высказываний. Например, импликацией $A(x)\to B(x)$ предложений $A(x)$ и $B(x)$, определённых на множестве U, называется предложение, определённое на том же множестве U и обращающееся в ложное высказывание тогда и только тогда, когда условие $A(x)$ истинно, а заключение $B(x)$ ложно.

Пример 6. Даны два предложения:

$$A(x): x-2>0,\ B(x): x+2\geq 0,$$

определённые при $x\in\mathbb{R}$. В чём заключаются следующие предложения, и каковы множества их истинности:

а) $A(x)+B(x)$; б) $A(x)\cdot B(x)$; в) $A(x)\to B(x)$;

г) $B(x)\to A(x)$; д) $A(x)\cdot\overline{B}(x)$; е) $\overline{B(x)}\to\overline{A(x)}$?

Решение. а) Предложение $A(x)+B(x)$ означает, что выполнено *хотя бы одно* из двух неравенств: $x-2>0$ или $x+2\geq 0,$ то есть

$$A(x)+B(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>0, \\ x+2\geq 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\geq -2.$$

Промежуток $[-2;+\infty)$ и есть множество истинности $A(x)+B(x).$

б) Предложение $A(x)\cdot B(x)$ состоит в том, что справедливы *оба* неравенства $x-2>0$ и $x+2\geq 0$:

$$A(x)\cdot B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0, \\ x+2\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$$

Множество истинности: $x>2.$

в) Предложение $A(x)\to B(x)$ обозначает следующее: «если $x-2>0,$ то $x+2\geq 0$». Оно верно для всех $x\in\mathbb{R}$, т. е. $\mathbb{R}$ – множество истинности.

г) Предложение «если $x+2\geq 0,$ то $x-2>0$» истинно для $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ и ложно для $x\in[-2;\,2].$

д) Множество истинности $\bar{B}(x)$ задаётся неравенством $x+2<0.$ Таким образом,

$$A(x)\cdot \bar{B}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0, \\ x+2<0, \end{cases}$$

а значит, множество истинности пусто.

е) «Если $x+2<0,$ то $x-2\leq 0$» – верно для всех $x\in\mathbb{R}$.

В математике часто приходится доказывать истинность предложений $A(n),$ зависящих от натуральной переменной $n.$ Одним из методов доказательства является *принцип математической индукции.* Суть его состоит в следующем. Предложение $A(n)$ считается истинным для всех натуральных $n,$ если

1°. Предложение $A(n)$ верно для $n=1$ (база индукции);

2°. Для любого натурального числа k из предположения, что $A(k)$ верно, следует, что $A(k+1)$ верно (шаг индукции).

Пример 7. Докажите, что при всех $n\in\mathbb{N}$ число $11^{n+1}+12^{2n-1}$ делится на 133.

Решение. 1) Проверяем базу индукции: при $n=1$ получаем число 121+12=133, которое делится на 133.

2) Предполагаем, что утверждение верно для некоторого $k \in \mathbb{N}$, т. е. верно $A(k)$:

$$11^{k+1}+12^{2k-1} \vdots 133. \tag{12}$$

Утверждение $A(k+1)$ имеет вид:

$$11^{k+2}+12^{2k+1} \vdots 133. \tag{13}$$

Наша задача такая: доказать $A(k+1)$ (т. е. (13)), используя $A(k)$ (т. е. (12)). Выполним следующие преобразования:

$$11^{k+2}+12^{2k+1}=11\cdot 11^{k+1}+144\cdot 12^{2k-1}=11\cdot 11^{k+1}+11\cdot 12^{2k-1}+133\cdot 12^{2k-1}=$$
$$=11\cdot\left(11^{k+1}+12^{2k-1}\right)+133\cdot 12^{2k-1}.$$

В последнем выражении слагаемое $11\cdot\left(11^{k+1}+12^{2k-1}\right)$ делится на 133 по предположению индукции (12); ясно также, что второе слагаемое делится на 133; поэтому их сумма также делится на 133, и наше утверждение доказано.

Пример 8. Докажите, что при $x>-1, x\neq 0$ для всех натуральных n, кроме $n=1$, выполнено *неравенство Бернулли*

$$(1+x)^n > 1+nx. \tag{14}$$

Решение. Здесь мы имеем дело с предложениями $A(n)$ при $n \in \mathbb{N}$, $\underline{n \geq 2}$, поэтому принцип математической индукции применим в немного другой форме.

1) Базой индукции служит проверка (14) для $\underline{n=2}$.

$(1+x)^2 > 1+2x \Leftrightarrow x^2>0$, что верно, т. к. по условию $x\neq 0$.

2) Предполагаем, что (14) верно для некоторого натурального k $(k\geq 2)$, т. е. выполнено неравенство

$$(1+x)^k > 1+kx. \tag{15}$$

Наша задача: используя предположение индукции (15), доказать утверждение (14) для $n=k+1$, т. е. доказать, что

$$(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x. \tag{16}$$

Чтобы это сделать, умножим обе части неравенства (15) на $1+x$ (по условию $1+x>0$):

$$\left(1+x\right)^{k+1}>\left(1+kx\right)\left(1+x\right)=1+\left(k+1\right)x+kx^2>1+\left(k+1\right)x$$

(мы отбросили слагаемое kx^2, так как оно положительно). Неравенство доказано.

§7. Обратные и противоположные теоремы. Необходимые и достаточные условия

Большинство теорем в математике может быть сформулировано так: для любого элемента x множества U из предложения $A(x)$ следует предложение $B(x)$. $A(x)$ называют условием теоремы, а $B(x)$ – заключением. Для теоремы «если сумма цифр натурального числа делится на 3, то само число делится на 3» множество $U=\mathbb{N}$; $A(n)=\{$сумма цифр числа n делится на $3\}$; $B(n)=\{$число n делится на $3\}$.

Рассмотрим подробнее теорему «диагонали прямоугольника равны». При такой формулировке может показаться, что её нельзя записать в виде «для любого $x\in U$, если $A(x)$, то $B(x)$». На самом деле это не так.

Пусть U_1 – множество всех четырёхугольников; U_2 – множество всех параллелограммов. Поскольку в исходной формулировке насчёт множества U ничего не сказано, мы можем выбрать его не единственным образом. Теорему можно сформулировать так: «для любого четырёхугольника, если он является прямоугольником, то у него диагонали равны» или так: «для любого параллелограмма, если он является прямоугольником, то у него диагонали равны». Условие и заключение у этих двух теорем совпадают, однако они заданы на разных множествах, поэтому они являются различными теоремами.

Если мы поменяем местами условие $A(x)$ и заключение $B(x)$, то получим теорему «для любого элемента x из множества U, если выполнено $B(x)$, то выполнено $A(x)$», называемую *теоремой, обратной данной*. Для теорем, сформулированных в данном параграфе, обратными будут следующие: «если натуральное число делится на 3, то и сумма его цифр делится на 3»; «если у четырёхугольника диагонали равны, то он является прямоугольником»; «если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником». Из них верными являются только первая и третья теоремы, тогда как вторая неверна. Таким образом, теорема, обратная данной теореме, может быть как верной, так и неверной. Можно также заметить, что справедливость обратной теоремы зависит от того, на каком множестве рассматривается прямая теорема.

Если же мы в теореме заменим условие и заключение их отрицаниями, то получим *теорему, противоположную данной*: «для любого $x \in U$: если $\overline{A}(x)$, то $\overline{B}(x)$». *Теорема, противоположная обратной,* выглядит так: «для любого $x \in U$: если $\overline{B}(x)$, то $\overline{A}(x)$». Несложно заметить, что сама теорема и теорема, противоположная обратной, эквивалентны (на стр. 15 показано что $A \to B = \overline{B} \to \overline{A}$). На этом основан хорошо вам известный метод доказательства от противного: если нам надо доказать, что для любого $x \in U$ из $A(x)$ следует $B(x)$, то вместо этого можно доказать, что из отрицания $B(x)$ следует невыполнение условия $A(x)$ (т. е. отрицание $A(x)$).

С понятием прямой и обратной теоремы тесно связано употребление слов «необходимо», «достаточно» и им подобных. Если теорема «для любого $x \in U$ из $A(x)$ следует $B(x)$» верна, то предложение $A(x)$ называется *достаточным условием* для $B(x)$, а предложение $B(x)$ – *необходимым условием* для $A(x)$. Если справедлива не только прямая теорема, но и обратная, то $A(x)$ является *необходимым и достаточным условием* для $B(x)$, а $B(x)$ – необходимым и достаточным для $A(x)$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Для того, чтобы число делилось на 9, достаточно, но не необходимо, чтобы сумма его цифр делилась на $27.$ Действительно, теорема «если сумма цифр числа делится на $27,$ то число делится на 9» верна, а обратная ей («если число делится на $9,$ то сумма его цифр делится на 27») – нет.

2. Для того, чтобы число делилось на $6,$ необходимо (но недостаточно), чтобы число делилось на $2.$ (Теорема «если число делится на $6,$ то оно делится на 2» верна, а теорема «если число делится на $2,$ то оно делится на 6» – неверна.)

3. Для того, чтобы параллелограмм являлся ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были перпендикулярны (т. к. и прямая, и обратная теоремы верны).

Контрольные вопросы

1(4). Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством:

а) $C=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\, x^4-5x^2+4=0\right\}$

б) $D=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\, -5<x^3+1<20\right\}$

2(6). Найдите $A\bigcap B,\ A\bigcup B,\ A\setminus B,$ если

а) $A=\left(-\infty;+\infty\right),\ B=\left(-1;9\right)$

б) A – множество простых чисел,

B – множество положительных чётных чисел.

в) $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\, x\geq 10\right\}, \quad B=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\, x\leq 16\right\}.$

3(2). Множество A состоит из целых чисел, делящихся на 4, множество B – из целых чисел, оканчивающихся нулем и множество C – из целых чисел, делящихся на 75. Из каких чисел состоит множество $A\bigcap B\bigcap C$?

4(7). а)(1) Запишите формулу включений для двух множеств.

б)(3) Выведите формулу включений и исключений для трёх множеств A, B и C:

$$m\left(A\bigcup B\bigcup C\right)=m\left(A\right)+m\left(B\right)+m\left(C\right)-m\left(A\bigcap B\right)-m\left(A\bigcap C\right)-$$
$$-m\left(B\bigcap C\right)+m\left(A\bigcap B\bigcap C\right).$$

Указание. Запишите, что $m\left(A\bigcup B\bigcup C\right)=m\left(\left(A\bigcup B\right)\bigcup C\right),$ и воспользуйтесь формулой включений и исключений для двух множеств.

в)(3) Возможно ли, что $m\left(A\right)=9,\ m\left(B\right)=16,\ m\left(C\right)=17,$
$m\left(A\bigcap B\right)=5,\ m\left(A\bigcap C\right)=8,\ m\left(B\bigcap C\right)=13,\ m\left(A\bigcup B\bigcup C\right)=22$?

5*(7). а)(1) Что такое счётное множество?

б)(3) Является ли счётным множество чётных натуральных чисел? Ответ обоснуйте.

в)(3) Является ли счётным множество рациональных чисел? Ответ обоснуйте.

6*(5) а)(1) Какие множества называют равномощными?

Докажите, что следующие множества равномощны:

б)(2) $\left[0;1\right]$ и $\left[0;\,2\right]$;

в)(2) $\left[3;\,7\right)$ и $\left[3;7\right]$.

7(10). Являются ли следующие высказывания истинными или ложными? Ответ обоснуйте.

а)(2) Уравнение $x^4+2=0$ не имеет действительных корней.

б)(2) Уравнение $ax^2+bx+c=0$ может иметь более двух корней или в остроугольном треугольнике биссектрисы не пересекаются в одной точке.

в)(2) Если диагонали квадрата не взаимно перпендикулярны, то диагонали ромба делятся точкой пересечения в отношении 2:1 каждая.

г)(2) Если диаметр окружности равен её удвоенному радиусу, то уравнение $8x^2-5x+3=0$ не имеет корней.

д)(2) Если сумма квадратов корней уравнения $x^2+9x+4=0$ больше 80, то числа 139 и 273 взаимно простые.

8(12). Используя формулы (2) – (11), упростите выражения, а затем ответьте на вопрос:

а)(3) $\overline{\overline{AB}+BC}$. Истинно или ложно данное высказывание, если известно, что B и C истинны?

б)(3) $\overline{\left(\overline{A\to C}\right)}\cdot\left(B+\left(\bar{C}\to A\right)\right)$. Истинно или ложно данное высказывание, если A и B ложны, а $C-$ истинно?

в)(3) $\left(\overline{XY+\overline{\overline{XY}}}\right)\cdot\left(X+\bar{Y}\right)$. Истинно или ложно данное высказывание, если X и Y ложны?

г)(3) $\overline{\left(X+Y\right)\to\left(\overline{Y+Z}\right)}$. Истинно или ложно данное высказывание, если X и Z истинны, а $Y-$ ложно.

Замечание. Если у вас не выходит упростить высказывания, то можете проверить их истинность подстановкой данных в исходные выражения.

9(8). На множестве натуральных чисел заданы три предложения: $A(n)=\{n$ делится на $2\}$, $B(n)=\{n$ делится на $3\}$, $C(n)=\{n$ делится на $6\}$. Каковы множества истинности следующих предложений

а)(2) $A(n)+C(n)$; **б)(2)** $B(n)\cdot C(n)$;

в)(2) $A(n)\cdot\bar{C}(n)$; **г)(2)** $B(n)\to C(n)$?

10(6). **а)(1)** В чём заключается метод математической индукции?

б)(2) Пользуясь методом математической индукции, докажите, что

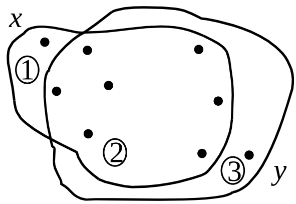
$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

в)(3) Найдите ошибку в нижеприведённом рассуждении.

Докажем, что все коты одной и той же породы. Пусть $A(n)=\{$любые n котов имеют одну и ту же породу$\}$. Докажем, что $A(n)$ справедливо для всех n методом математической индукции.

Очевидно, что утверждение $A(1)$ истинно (любой кот имеет одну породу). База индукции выполняется.

Предположим, что $A(k)$ верно (т. е. любые k котов имеют одну и ту же породу) и докажем, что тогда и $A(k+1)$ будет верно. Рассмотрим $(k+1)$ кота. Выделим двумя способами группы из k котов (см. рисунок). Тогда часть котов попадёт в каждую из двух групп. Очевидно, что кот 1 имеет ту же породу, что и все коты из 2 (т. к. они все находятся в группе x, состоящей из k котов); ясно также, что кот 3 имеет ту же породу, что и коты 2, так как они все находятся в группе y из k котов. Получаем, что $k+1$ котов обязательно будут одной и той же породы. Утверждение доказано.



11(5). Заполните многоточия словами «необходимо, и достаточно», «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо», «не достаточно и не необходимо» так, чтобы получились верные утверждения (ответ можно не обосновывать).

а)(1) Для того, чтобы число делилось на 2, …, чтобы оно было чётным.

б)(1) Для того, чтобы параллелограмм был квадратом, …, чтобы его диагонали были перпендикулярны.

в)(1) Для того, чтобы было истинно равенство $2x+3=9$, …, чтобы x равнялось 2.

г)(1) Для того, чтобы сумма двух чисел была нечётной,…, чтобы только одно из них было нечётным.

д)(1) Для того, чтобы треугольник был прямоугольным, …, чтобы сумма квадратов двух его сторон равнялась квадрату третьей стороны.

12(8). Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратную, противоположную и противоположную обратной. Укажите, какие из этих теорем верны.

а)(4) Если параллелограмм является ромбом, то все его стороны равны и попарно параллельны.

б)(4) Соответственные углы равны.

Задачи

1(4). Игорь провёл социальный опрос и выяснил, про жителей своего подъезда, что: 25 из них играют в шахматы, 30 были в Архангельске, 28 летали на самолёте. Среди летавших на самолёте 18 играют в шахматы и 17 были в Архангельске. 16 жителей играют в шахматы и были в Архангельске, притом среди них 15 ещё и летали на самолёте. От коменданта Игорь узнал, что всего в подъезде живёт 45 человек. Не ошибся ли комендант?

2(4). По данным опроса, проведённого в 10 «Б» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, играют в шахматы, а 25% учеников, играющих в шахматы, интересуются математикой. И только Миша и Маша не играют в шахматы и не интересуются математикой. Сколько человек в 10 «Б» классе, если известно, что их больше 20, но меньше 30?

3(6). Каждая сторона в ΔABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, и C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

4(4). В семье четверо детей, им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Катя, Вася, Ира и Лиза. Сколько лет каждому ребёнку, если одна девочка ходит в детский сад, Катя старше Васи и сумма лет Кати и Иры делится на 3?

5(4). Четырнадцать школьников участвовало в олимпиаде по истории, 16 – в олимпиаде по географии, 10 – в олимпиаде по физике. Восемь учеников участвовали в олимпиадах и по истории, и по географии, 4 – в олимпиадах и по истории, и по физике, 9 – в олимпиадах и по географии, и по физике. Во всех трёх олимпиадах участвовали три человека. Сколько всего было школьников?

6(12). Используя метод математической индукции, докажите следующие утверждения:

а)(3) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(1+2+3+\ldots+n\right)^2$, при $n\in\mathbb{N}$;

б)(3) $\left(1+\alpha\right)^n\geq 1+n\alpha$, при $\alpha\geq -1$, $n\in\mathbb{N}$;

в)(3) $1+3+5+\ldots+\left(2n-1\right)=n^2$, при $n\in\mathbb{N}$;

г)(3) n^3+3n^2+5n делится на 3 при $n\in\mathbb{N}$.

7(5). Симметрической разностью множеств A и B (обозначение $A\Delta B$) называют $(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$.

а)(2) С помощью диаграмм Эйлера покажите, что $A\Delta B=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$.

б)(3) Докажите, что $A\Delta B=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$ (примеры доказательств рассматриваются в §2).

8(6). Пусть A, B, C являются подмножествами некоторого универсального множества E. С помощью диаграмм Эйлера покажите, что выполняются соотношения:

а(2) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$,

б(2) $(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)=A\setminus(B\bigcap C)$,

в(2) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

9(9). Докажите соотношения предыдущей задачи (примеры доказательств см. в §2).