Кубок ЛФИ

10.s02.e04

2 августа

Газ помещён в большой адиабатический сосуд, разделённый на две части пористой перегородкой, по разные стороны от которой поддерживаются постоянные значения давлений p_1 и p_2 в результате чего газ медленно перетекает из одной части сосуда в другую. Температура газа в левой части сосуда равна T_1.

1. *(1 балл)* Найдите изменение температуры небольшой порции газа в процессе его перетекания, если он идеальный.

Уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - b\nu) = \nu RT.$$

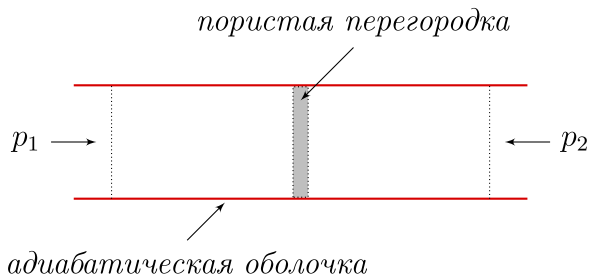
Внутренняя энергия одного моля такого газа подчиняется закону

$$U = C_V T - \frac{a}{V}.$$

2. *(7 баллов)* Считая перепад давлений $p_1 - p_2 \ll p_1$, найдите изменение температуры небольшой порции газа Ван-дер Ваальса. Считайте, что газ достаточно разрежен. Другими словами, слагаемыми содержащие a и b являются малыми поправками и можно ограничиться линейным приближением.

3. *(2 балла)* Найдите изменение температуры для небольшой порции газа, если в сосуде слева он достаточно плотный и описывается моделью газа Ван-дер-Ваальса, а в сосуде справа моделью идеального газа. Такой случай реализуется если перепад давлений $p_1 - p_2$ достаточно большой.

Во всех процессах считайте, что теплоёмкость C_V известна.



Автор задачи: Лорд Кельвин

Решение

1. Пусть объём газа слева был сначала V_1, а после перетекания в правый сосуд его объём стал V_2 и температура T_2 (эти обозначения будем использовать во всех последующих пунктах). Запишем уравнения состояния идеального газа для сосуда слева и справа

$$P_1V_1 = \nu RT_1; \quad P_2V_2 = \nu RT_2.$$

Откуда находим

$$P_1V_1 - P_2V_2 = \nu R(T_1 - T_2).$$

Запишем закон сохранения энергии

$$A_1 + A_2 + U_1 = U_2.$$

Здесь $A_1 = P_1V_1$, $A_2 = -P_2V_2$. Из записанных уравнений получаем

$$P_1V_1 - P_2V_2 = C_V\nu(T_2 - T_1); \quad \Longrightarrow \quad T_1 = T_2.$$

Или $\Delta T = T_2 - T_1 = 0$.

2. Запишем аналогичные уравнения для газа Ван-дер-Ваальса

$$\left(P_1 + \frac{a\nu^2}{V_1^2}\right)(V_1 - b\nu) = \nu RT_1; \quad \left(P_2 + \frac{a\nu^2}{V_2^2}\right)(V_2 - b\nu) = \nu RT_2.$$

Откуда находим (пренебрегая произведением ab)

$$P_1V_1 = \nu RT_1 + P_1b\nu - \frac{a\nu^2}{V_1}; \quad P_2V_2 = \nu RT_2 + P_2b\nu - \frac{a\nu^2}{V_2}.$$

Запишем закон сохранения энергии

$$P_1V_2 + \nu C_VT_1 - \frac{a\nu^2}{V_1} = P_2V_2 + \nu C_VT_2 - \frac{a\nu^2}{V_2}.$$

Откуда находим

$$\nu T_1(C_V + R) + P_1b\nu - 2\frac{a\nu^2}{V_1} = \nu R_2(C_V + R) + P_2b\nu - 2\frac{a\nu^2}{V_1};$$

$$b(P_1 - P_2) - 2a\nu\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = \Delta(C_V + R).$$

Объёмы V_1 и V_2 найдём из уравнений состояния, записанных выше

$$P_1V_1^2 - \nu V_1(RT_1 + P_1b) + a\nu^2 = 0.$$

Порция газа маленькая, поэтому слагаемым $a\nu^2$ можно пренебречь. Тогда

$$V_1 \approx \frac{\nu RT_1}{P_1} + \nu b; \quad V_2 \approx \frac{\nu RT_2}{P_2} + \nu b.$$

Найдём разность обратных объёмов

$$\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}=\frac{1}{\frac{\nu RT_1}{P_1}\left(1+\frac{P_1b}{RT_1}\right)}-\frac{1}{\frac{\nu RT_2}{P_2}\left(1+\frac{P_2b}{RT_2}\right)}=\frac{P_1}{\nu RT_1}\left(1-\frac{P_1b}{RT_1}\right)-\frac{P_2}{\nu RT_2}\left(1-\frac{P_2b}{RT_2}\right)=$$

$$=\frac{P_1}{\nu RT_1}-\frac{P_2}{\nu RT_2}-\frac{P_1^2b}{\nu R^2T_1^2}+\frac{P_2^2b}{\nu R^2T_2^2}.$$

Здесь мы использовали приближёние $(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$, справедливое для малых x. Подставляя последнее выражение в ЗСЭ, получим

$$b\left(P_1-P_2\right)-\left(\frac{2aP_1}{RT_1}-\frac{2aP_2}{RT_2}-\frac{2P_1^2ab}{R^2T_1^2}+\frac{2P_2^2ab}{R^2T_2^2}\right)=\Delta T(C_V+R).$$

Так как $P_1-P_2\ll P_1$, то $T_1\approx T_2$, тогда

$$b(P_1-P_2)-\frac{2a}{RT_1}(P_1-P_2)=\Delta T(C_V+R).$$

Откуда находим

$$\Delta T=\frac{P_1-P_2}{C_V+R}\left(b-\frac{2a}{RT_1}\right).$$

3. Запишем закон сохранения энергии

$$P_1V_1+\nu C_VT_1-\frac{a\nu^2}{V_1}=P_2V_2+\nu C_VT_2.$$

Используя уравнением состояния, получим

$$P_1b+\nu T_1\left(C_V+R\right)-2\frac{a\nu}{V_1}=RT_2\left(C_V+R\right).$$

Преобразуем последнее выражение

$$P_1b-2\frac{a\nu}{V_1}=\Delta T\left(C_V+R\right).$$

Откуда окончательно находим

$$P_1b-2a\frac{P_1}{RT_1}\left(1-\frac{P_1b}{RT_1}\right)=\Delta T\left(C_V+R\right);\qquad \Delta T=\frac{P_1}{C_V+R}\left(b-\frac{2a}{RT_1}\right).$$

Альтернативная задача

1. *(3 балла)* Ракета движется за счёт реактивной тяги, возникающей при выбросе газа, нагретого до очень высокой температуры. В камере сгорания ракеты (на входе в сопло) постоянно образуется горячий газ высокого давления p_1 и температуры T_1. Пройдя по соплу, газ через узкое отверстие вылетает в атмосферу, где давление p_2. Молярная масса газа — μ. Процесс течения газа в сопле считайте равновесным и адиабатическим. Найдите температуру газа на выходе из сопла и скорость истечения газа на выходе.

2. *(2 балла)* 1 моль газа Ван-дер-Ваальса находится в равновесном состоянии при давлении p_1 и объёме V_1. В квазистатическом процессе его давление увеличили на 1%, при этом объём уменьшился на 3%. На сколько процентов изменится температура газа? Найдите это изменение с точностью до слагаемых линейных по коэффициентам a и b. **Примечание.** Здесь и далее Считайте константы a и b в уравнении газа Ван-дер-Ваальса известными.

3. Для идеального газа корректно, что произведение $pV = \text{const}$ при постоянном значении температуры. Проанализируем как ведёт себя это произведение при постоянной температуре T для газа Ван-дер-Ваальса при изменении его плотности.

   a. *(0 баллов)* Найдите как зависит от плотности газа Ван-дер-Ваальса произведение pV.

   b. *(2 балла)* Найдите значение плотности газа при котором достигается минимум произведение pV.

   c. *(1 балл)* Найдите при каком значении температуры T минимум произведения pV достигается при нулевом значении плотности газа.

4. *(2 балла)* Решите задачу, аналогичную предыдущей для газа, подчиняющегося уравнению Дитеричи. Уравнение состояния такого газа имеет вид

$$p(V-b) = RT\exp\left(-\frac{a}{RTV}\right).$$

   Примечание. 2 балла ставится за пункт c.

Решение альтернативной задачи

1. Так как процесс адиабатический и газ идеальный

$$PV^{\gamma} = \text{const}; \quad \frac{PV}{T} = \text{const}.$$

Здесь $\gamma = \dfrac{C_V + R}{C_V}$ — показатель адиабаты идеального газа. Из записанных уравнений находим

$$\frac{P^{\gamma-1}}{T^{\gamma}} = \text{const}.$$

Тогда

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Рассмотрим порцию газа $\Delta\nu$. Запишем ЗСЭ

$$U_1 + W_1 + A_{\text{над газом}} = U_2 + W_2.$$

Здесь U_i — внутренняя энергия газа, W_i — кинетическая энергия центра масс газа, которые равны

$$U_i = \Delta\nu C_V T_i; \quad W_i = \frac{mv_i^2}{2}.$$

Работа, совершённая над порцией газа равна

$$A_{\text{над газом}} = P_1V_1 - P_2V_2,$$

где

$$V_i = \frac{\Delta\nu RT_i}{P_i};.$$

Из записанных уравнений и условия $v_1 = 0$ находим

$$(C_V + R)\Delta\nu(T_1 - T_2) = \frac{\mu\Delta\nu \cdot v_2^2}{2}; \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2(C_V+R)T_1\left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}{\mu}}.$$

2. Уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

Изменение давления, объёма и температуры обозначим за ΔP, ΔV и ΔT соответственно, а их относительные изменения за α_P, α_V и α_T. Тогда, считая эти изменения очень малыми, получим

$$\Delta(V - b) - \frac{2a}{V^3}\Delta V(V - b) + \left(P + \frac{a}{V^2}\right)\Delta V = R\Delta T.$$

После нетрудных преобразований получим

$$\alpha_P P(V - b) + \left(P - \frac{a}{V^2}\right)\alpha_V V = R\alpha_T T.$$

Поделим это уравнение на изначальное

$$\frac{PV(\alpha_P + \alpha_V) - \alpha_P Pb - \alpha_V \frac{a}{V}}{\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)} = \alpha_T.$$

Раскроем скобки в знаменателе, пренебрегая членами второй и выше степеней по a и b,

$$\alpha_T = \frac{PV(\alpha_P + \alpha_V) - \alpha_P Pb - \alpha_V \frac{a}{V}}{PV - Pb + \frac{a}{V}} = \frac{PV\left(\alpha_P + \alpha_V - \alpha_P \frac{b}{V} - \alpha_V \frac{a}{PV^2}\right)}{PV\left(1 - \frac{b}{V} + \frac{a}{PV^2}\right)} =$$
$$= \frac{\alpha_P + \alpha_V - \alpha_P \frac{b}{V} - \alpha_V \frac{a}{PV^2}}{1 - \frac{b}{V} + \frac{a}{PV^2}}.$$

Последнее с точностью до линейных членов по a и b равно

$$\alpha_T = \left(\alpha_P + \alpha_V - \alpha_P \frac{b}{V} - \alpha_V \frac{a}{PV^2}\right)\left(1 + \frac{b}{V} - \frac{a}{PV^2}\right) = \alpha_P + \alpha_V - \alpha_P \frac{b}{V^2} - \alpha_V \frac{a}{PV^2} +$$
$$+ (\alpha_P + \alpha_V)\left(\frac{b}{V} - \frac{a}{PV^2}\right) = \alpha_P\left(1 - \frac{a}{PV^2}\right) + \alpha_V\left(1 - \frac{b}{V} - \frac{2a}{PV^2}\right).$$

3a. Рассмотрим 1 моль газа Ван-дер-Ваальса. Перепишем уравнение состояния

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

Заметим, что его плотность $\rho = \dfrac{\mu}{V}$. Тогда умножим всё на V и заменим в правой части V на $\dfrac{\mu}{\rho}$

$$PV = \frac{\mu RT}{\mu - b\rho} - \frac{a}{\mu}\rho.$$

3b. Найдём значение ρ при котором достигается минимум произведения PV. Для этого возьмём производную от последнего выражения по ρ и приравняем её к нулю

$$(PV)'(\rho) = \frac{\mu RTb}{(\mu - b\rho)^2} - \frac{a}{\mu} = 0.$$

Откуда получаем

$$\mu^2 RTb = a(\mu - b\rho)^2.$$

Учитывая, что $\mu > b\rho$, получим

$$\mu - b\rho = \mu\sqrt{\frac{RTb}{a}}.$$

Тогда

$$\rho = \frac{\mu}{b}\left(1 - \sqrt{\frac{RTb}{a}}\right).$$

3c. Фиксируя нулевым значение плотности, при котором PV достигает минимума, получим условие на температуру

$$1 = \sqrt{\frac{RTb}{a}}; \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{a}{Rb}.$$

4. Для уравнения Дитеричи уравнения состояния можно переписать как

$$P = \frac{RT}{V-b}\exp\left(-\frac{a}{RTV}\right).$$

Снова умножив всё на V и представив V в правой части как $\dfrac{\mu}{\rho}$ получим

$$PV = \frac{RT\mu}{\mu - b\rho}\exp\left(-\frac{aP}{RT\mu}\right).$$

Чтобы найти минимум, возьмём производную по ρ и приравняем её к нулю

$$0 = \frac{RT\mu b}{(\mu - b\rho)^2}\exp\left(-\frac{aP}{RT\mu}\right) - \left(\frac{RT\mu}{\mu - b\rho}\right)\frac{a}{RT\mu}\exp\left(-\frac{aP}{RT\mu}\right).$$

Откуда получаем

$$0 = \frac{1}{\mu - b\rho}\left(\frac{RT\mu b}{\mu - b\rho} - a\right)\exp\left(-\frac{aP}{RT\mu}\right).$$

Дробь и экспонента не равны нулю, поэтому

$$\frac{RT\mu b}{a} = \mu - b\rho; \quad \Longrightarrow \quad \rho = \frac{\mu}{b}\left(1 - \frac{RTb}{a}\right).$$

Откуда следует, что температура при которой искомая плотность равна нулю равна

$$T = \frac{a}{Rb}.$$