

## Инварианты.

1. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9, либо вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?
2. В каждой клетке доски  $7 \times 7$  клеток сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?
3. На доске написаны числа 1, 2 и 4. Разрешается стереть с доски два числа  $a$  и  $b$ , а вместо них записать числа  $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$  и  $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ . Можно ли с помощью таких операций получить  $\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2}$  и 3?
4. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число умножают или делят либо на 2, либо на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.
5. Можно ли таблицу  $5 \times 5$  заполнить числами так, чтобы сумма чисел в любой строке была положительной, а сумма чисел в любом столбце отрицательной?
6. На доске написаны многочлены  $P(x) = x^2 + 2$  и  $Q(x) = x + 1$ . Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых двух из уже выписанных на доску многочленов. Может ли на доске появиться многочлен  $R(x) = x^3 + 2$ ?
7. На доске написаны числа 3, 4, 5 и 6. Любую пару чисел  $a$ ,  $b$  можно заменить на пару чисел  $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$  и  $a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$ . Может ли на доске появиться число, меньшее 1?
8. От квадратной доски  $1001 \times 1001$  отрезали четыре угловых квадрата  $2 \times 2$ . Можно ли оставшуюся часть доски разбить на фигурки вида «т», «+» и «г»? (Все фигурки состоят из пяти клеточек  $1 \times 1$ )