Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Планиметрия (часть II)

Задание №5 для 9-х классов

(2020– 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2021

Составитель: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №5 для 9-х классов (2020 – 2021 учебный год), 2021, 25 с.

Дата отправки заданий по математике 06 марта 2021 г.

Составитель:
Пиголкина Татьяна Сергеевна
Подписано 25.01.21. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,56. Уч.-изд. л. 1,38.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

Содержание:

§ 1. Свойства касательных, хорд и секущих

1. Две касательные из одной точки

Пусть к окружности с центром в точке O проведены две касательные AM и AN, точки M и N лежат на окружности (рис. 1).

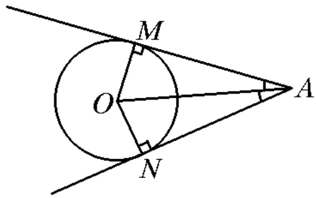


Рис. 1

По определению касательной $OM \perp AM$ и $ON \perp AN$. В прямоугольных треугольниках AOM и AON гипотенуза AO общая, катеты OM и ON равны, значит, $\Delta AOM = \Delta AON.$ Из равенства этих треугольников следует $AM = AN$ и $\angle MAO = \angle NAO.$ Таким образом, если из точки к окружности проведены две касательные, то:

1.1°. **отрезки касательных от этой точки до точек касания равны;**

1.2°. **прямая, проходящая через центр окружности и заданную точку, делит угол между касательными пополам.**

Используя свойство $1.1°$, легко решим следующие две задачи. (В решении используется тот факт, что в каждый треугольник можно вписать окружность).

Задача 1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка $D,$ при этом $DA = a,$ $DC = b$ (рис. 2). Окружности, вписанные в треугольники ABD и $DBC,$ касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти отрезок MN.

Δ Пусть $a > b$. Обозначим $x = MN, \ \ y = ND, \ z = BM.$

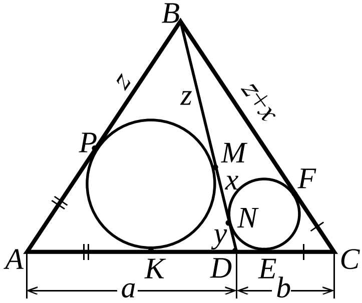


Рис. 2

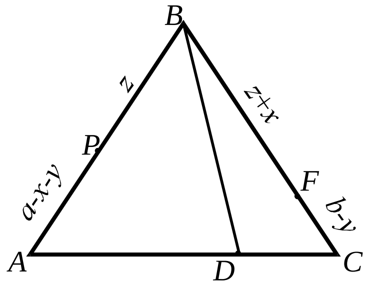


Рис. 2a

По свойству касательных $DE = y, \quad KD = x + y, \ AK = AP = a - (x + y),$ $CE = CF = b - y, \ \ BP = z$ и $BF = z + x.$ Выразим боковые стороны (рис. 2a): $AB = z + a - x - y, \ \ BC = z + x + b - y.$ По условию $AB = BC,$ поэтому $z + a - x - y = z + x + b - y$. Отсюда находим $x = (a - b)/2$, т. е. $MN = (a - b)/2.$ Если $a < b,$ то $MN = (b - a)/2$. Итак, $MN = \dfrac{1}{2}|a - b|.$ ▲

Ответ: $\dfrac{|a - b|}{2}.$

Задача 2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна удвоенной сумме радиусов вписанной и описанной окружностей, т. е. $a + b = 2R + 2r.$

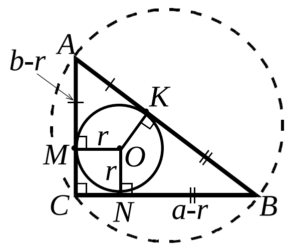


Рис. 3

Δ Пусть M, N и $K -$ точки касания окружностью сторон прямоугольного треугольника ABC (рис. 3), $AC = b, \ BC = a, \ \ r -$радиус вписанной окружности, $R-$ радиус описанной окружности. Вспомним, что гипотенуза есть диаметр описанной окружности: $AB = 2R.$ Далее, $OM \perp AC, \ BC \perp AC,$ значит, $OM \parallel BC,$ аналогично $ON \perp BC, \ AC \perp BC,$ значит, $ON \parallel AC$. Четырёхугольник $MONC$ по определению есть квадрат, все его стороны равны r, поэтому $AM = b - r$ и $BN = a - r.$

По свойству касательных $AK = AM$ и $BK = BN,$ поэтому $AB = AK + KB = a + b - 2r$, а т. к. $AB = 2R,$ то получаем $a + b = 2R + 2r.$ ▲

Свойство 1.2° сформулируем по-другому: центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Задача 3. Около окружности с центром в точке O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 4а).

а) Доказать, что $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$.

б) Найти радиус окружности, если $BO = \sqrt{5}$ и $AO = 2\sqrt{5}$. (рис. 4б)

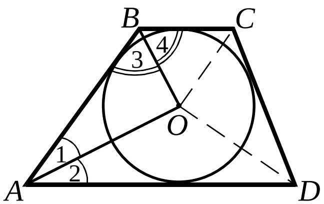


Рис. 4а

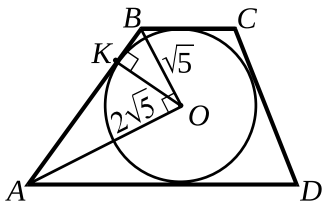


Рис. 4б

$\triangle$а) Окружность вписана в угол BAD, по свойству 1.2° AO – биссектриса угла A, $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle A$; BO – биссектриса угла B, $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle B$. Из параллельности прямых AD и BC следует, что $\angle A + \angle B = 180^\circ$, поэтому в треугольнике AOB из $\angle 1 + \angle 3 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90^\circ$ следует $\angle AOB = 90^\circ$.

Аналогично CO и DO биссектрисы углов C и D трапеции, $\angle COD = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D) = 90^\circ$.

б) Треугольник AOB прямоугольный с катетами $AO = 2\sqrt{5}$ и $BO = \sqrt{5}$. Находим гипотенузу $AB = \sqrt{20+5} = 5$. Если окружность касается стороны AB в точке K, то $OK \perp AB$ и OK – радиус окружности. По свойству прямоугольного треугольника $AB \cdot OK = AO \cdot BO$, откуда $OK = \frac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{5} = 2$. ▲

Ответ: 2.

2. Угол между касательной и хордой с общей точкой на окружности

Напомним, что градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Теорема 1. Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги, заключённой между его сторонами.

□ Пусть O – центр окружности, AN – касательная (рис. 5). Угол между касательной AN и хордой AB обозначим α. Соединим точки A и B с центром окружности. Так как $OA \perp AN$, $OA = OB$, то $\angle OAB = \angle OBA = 90° - \alpha$. Сумма углов треугольника равна $180°$, поэтому $\angle AOB = 2\alpha$.

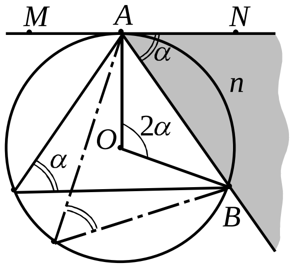


Рис. 5

Таким образом, градусная мера угла между касательной и хордой равна половине градусной меры дуги AnB, которая заключена между его сторонами, и, значит, угол BAN равен любому вписанному углу, опирающемуся на дугу AnB. (Аналогичные рассуждения можно провести и для угла MAB). ■

Задача 4. В окружность вписан треугольник ABC. Расстояния от точек A и C до касательной, проходящей через точку B, соответственно равны m и n. Найти высоту треугольника ABC, проведённую через вершину B.

Δ Опустим перпендикуляры AM и CN на касательную, проходящую через точку B, $AM = m$, $CN = n$. Угол ABM между касательной BM и хордой BA равен вписанному углу ACB. Следовательно, прямоугольные треугольники BHC и AMB подобные и $\dfrac{BH}{AM} = \dfrac{BC}{AB}$, откуда $BH = \dfrac{AM \cdot BC}{AB}$. Аналогично из подобия треугольников ABH и BCN имеем $\dfrac{BH}{CN} = \dfrac{AB}{BC}$ и $BH = \dfrac{CN \cdot AB}{BC}$. Перемножим выражения для BH, получим $BH^2 = AM \cdot CN = m \cdot n$, $BH = \sqrt{m \cdot n}$. ▲

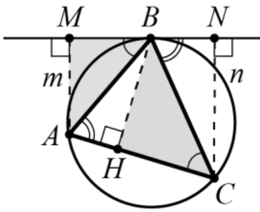


Рис. 6

Ответ: $\sqrt{m \cdot n}$.

Приём – проведение «недостающих» хорд, часто помогает в задачах и теоремах с окружностью и касательной, как, например, в доказательстве следующей теоремы **«о касательной и секущей».**

Теорема 2. Если из одной точки M к окружности проведены касательная MA и секущая MB, пересекающая окружность в точке C (рис. 7), то справедливо равенство $MA^2 = MB \cdot MC$, т. е. если из точки M к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки M до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки M до точек её пересечения с окружностью.

□ Проведём хорды AC и AB. Угол MAC между касательной и хордой равен вписанному углу ABC, оба измеряются половиной градусной меры дуги AnC. В треугольниках MAC и MBA равны углы MAC и MBA, а угол при вершине M общий. Эти треугольники подобны, из подобия имеем $MA/MB = MC/MA$, откуда следует $MA^2 = MB \cdot MC$. ■

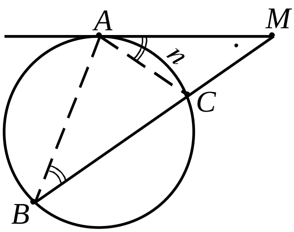


Рис. 7

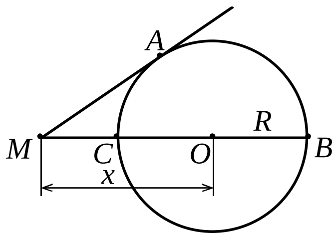


Рис. 8

Задача 5. Радиус окружности равен R. Из точки M проведены касательная MA и секущая MB, проходящая через центр O окружности (рис. 8). Найти расстояние между точкой M и центром окружности, если $MB = 2MA$.

Δ Обозначим искомое расстояние x: $x = MO$, тогда $MB = x + R$, $MC = x - R$ и по условию $MA = MB/2 = (x+R)/2$. По теореме о касательной и секущей $(x+R)^2/4 = (x+R)(x-R)$, откуда, сокращая на $(x+R)$, получаем $(x+R)/4 = (x-R)$. Легко находим $x = \frac{5}{3}R$. ▲

Ответ: $\frac{5}{3}R$.

3. Свойство хорд окружности

Полезно доказать эти свойства самостоятельно (лучше закрепляется), можете разобрать доказательства по учебнику.

1.3°. **Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам. Обратно: диаметр, проходящей через середину хорды (не являющуюся диаметром) перпендикулярен ей.**

1.4°. **Равные хорды окружности находятся на равном расстоянии от центра окружности. Обратно: на равном расстоянии от центра окружности находятся равные хорды.**

1.5°. **Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны (рис. 9 подскажет путь доказательства).**

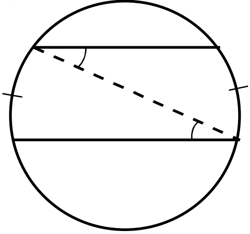


Рис. 9

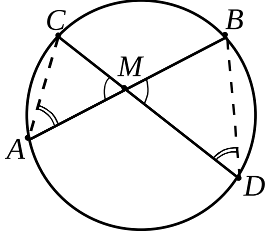


Рис. 10

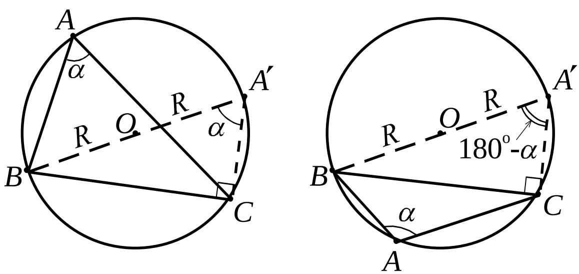
1.6°. **Если две хорды** AB **и** CD **пересекаются в точке** M, **то** $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, **т. е. произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды (на рис. 10** $\Delta AMC \sim \Delta DMB$**).**

Следующее утверждение докажем.

1.7°. **Если в окружности радиуса** R **вписанный угол, опирающийся на хорду длины** a, **равен** α, **то** $\boldsymbol{a = 2R\sin\alpha}$.

■ Пусть в окружности радиуса R хорда $BC = a$, вписанный угол BAC опирается на хорду a, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 11 а,б).

Проведём диаметр BA' и рассмотрим прямоугольный треугольник $BA'C$ ($\angle BCA' = 90^\circ$, опирается на диаметр).



а) **б)**

Рис. 11

Если угол A острый (рис. 11а), то центр O и вершина A лежат по одну сторону от прямой BC, $\angle A' = \angle A$ и $BC = BA' \cdot \sin A'$, т. е. $\underline{a = 2R\sin A}$.

Если угол A тупой, центр O и вершина A лежат по разные стороны от прямой BC (рис. 11б), тогда $\angle A' = 180^\circ - \angle A$ и $BC = BA' \cdot \sin A'$, т. е. $a = 2R\sin\left(180^\circ - A\right) = \underline{2R\sin A}$.

Если $\alpha = 90^\circ$, то $BC -$ диаметр, $BC = 2R = 2R\sin 90^\circ$.

Во всех случаях справедливо равенство $\underline{a = 2R\sin\alpha}$. ■

$$\text{Итак, } \boxed{a = 2R\sin\alpha} \text{ или } \boxed{R = \frac{a}{2\sin\alpha}}. \qquad (*)$$

Задача 6. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, в котором $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 2$ и угол $ABC = 150°$.

Δ В описанной около треугольника ABC окружности известен угол B, опирающийся на хорду AC. Из доказанной формулы следует $R = \dfrac{AC}{2\sin B}$.

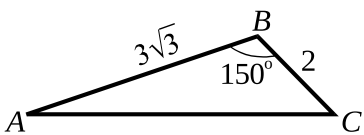


Рис. 12

Применим теорему косинусов к треугольнику ABC (рис. 12) при этом учтём, что

$$\cos 150^\circ = \cos\left(180^\circ - 30^\circ\right) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ получим}$$

$$AC^2 = 27 + 4 + 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 49, \ AC = 7.$$

Находим $R = \dfrac{AC}{2\sin 150^\circ} = \dfrac{7}{2\sin 30^\circ} = 7.$ ▲

Ответ: 7.

Используем свойство пересекающихся хорд для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть AD - биссектриса треугольника ABC, тогда $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$, т. е. если $AB = c,\ AC = b,\ BD = x,\ DC = y,$ то $AD^2 = bc - xy$ (рис. 13а).

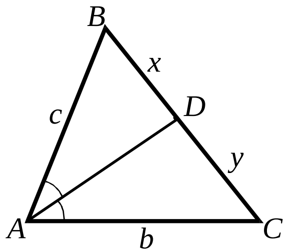


Рис. 13а

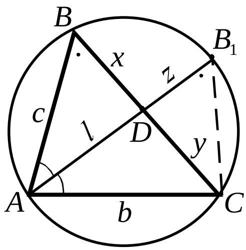
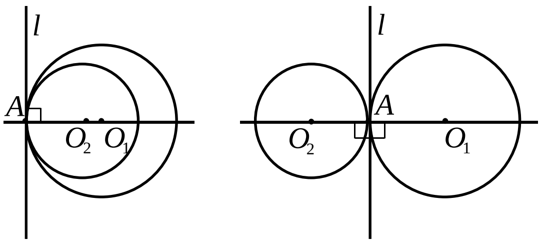


Рис. 13б

□ Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 13б) и точку пересечения продолжения биссектрисы AD с окружностью обозначим B_1. Обозначим $AD = l$ и $DB_1 = z$. Вписанные углы ABC и AB_1C равны, AD – биссектриса угла A, поэтому $\Delta ABD \sim \Delta AB_1C$ (по двум углам). Из подобия имеем $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AB_1}$, т. е. $\dfrac{l}{b} = \dfrac{c}{l+z}$, откуда $l^2 = bc - lz$. По свойству пересекающихся хорд $BD \cdot DC = AD \cdot DB_1$, т. е. $xy = lz$, поэтому получаем $l^2 = bc - xy$. ■

4. Две касающиеся окружности

В заключение параграфа рассмотрим задачи с двумя касающимися окружностями. Две окружности, имеющие общую точку и общую касательную в этой точке, называются касающимися. Если окружности расположены по одну сторону от общей касательной, они называются касающимися внутренне (рис. 14а), а если расположены по разные стороны от касательной, то они называются касающимися внешне (рис. 14б).



а) **б)**

Рис. 14

Если O_1 и O_2 – центры окружностей, то по определению касательной $AO_1 \perp l,\ AO_2 \perp l$, следовательно, в обоих случаях *общая точка касания лежит на линии центров.*

Задача 7. Две окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$) внутренне касаются в точке A. Через точку B, лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C (рис. 15). Найти AB, если $BC = a$.

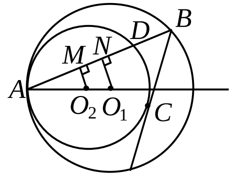


Рис. 15

Δ Пусть O_1 и O_2 – центры большей и меньшей окружностей, D – точка пересечения хорды AB с меньшей окружностью. Если $O_1N \perp AB$ и $O_2M \perp AB,$ то $AN = AB/2$ и $AM = AD/2$ (т. к. радиус, перпендикулярный хорде, делит её пополам). Из подобия треугольников AO_2M и AO_1N следует $AN : AM = AO_1 : AO_2$ и, значит, $AB : AD = R_1 : R_2.$

По теореме о касательной и секущей имеем:

$$BC^2 = AB \cdot BD = AB(AB - AD) = AB^2\left(1 - \frac{AD}{AB}\right),$$

$$\text{т. е.} \quad a^2 = AB^2\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right).$$

Итак, $AB = a\sqrt{\dfrac{R_1}{R_1 - R_2}}.$ ▲

Задача 8. Две окружности радиусов R_1 и R_2 внешне касаются в точке A (рис. 16). Их общая внешняя касательная касается большей окружности в точке B и меньшей – в точке C. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

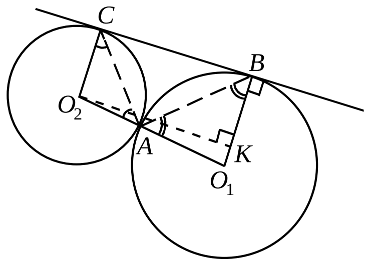


Рис. 16

Δ Соединим центры O_1 и O_2 с точками B и C. По определению касательной, $O_1B \perp BC$ и $O_2C \perp BC$. Следовательно, $O_1B \| O_2C$ и $\angle BO_1O_2 + \angle CO_2O_1 = 180°$. Так как $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BO_1A$ и $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle CO_2A,$ то $\angle ABC + \angle ACB = 90°$. Отсюда следует, что $\underline{\angle BAC = 90°}$, и поэтому радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника $ABC,$ равен половине гипотенузы $BC.$

Найдём BC. Пусть $O_2K \perp O_1B,$ тогда $KO_2 = BC,$ $O_1K = R_1 - R_2,$ $O_1O_2 = R_1 + R_2$. По теореме Пифагора находим

$$KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = 2\sqrt{R_1R_2}, \quad \underline{BC = 2\sqrt{R_1R_2}}.$$

Итак, радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен $\sqrt{R_1R_2}$. В решении $R_1 > R_2,$ при $R_1 < R_2$ ответ такой же. ▲

Ответ: $\sqrt{R_1R_2}$.

§ 2. Площадь треугольника

В школьном курсе геометрии доказано несколько формул площади треугольника. Напомним их.

Пусть A, B и $C-$углы треугольника ABC; a, b и $c-$противолежащие этим углам стороны; h_a, h_b и h_c-высоты к этим сторонам; $r-$радиус вписанной окружности; $R-$радиус описанной окружности; $2p=(a+b+c)-$периметр треугольника; $S-$площадь треугольника.

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c, \tag{1}$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A, \tag{2}$$

$$S = pr, \tag{3}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - \text{ формула Герона,} \tag{4}$$

$$S = \frac{abc}{4R}. \tag{5}$$

При вычислении площади из этих формул следует выбрать ту, которая в условиях конкретной задачи приводит к более простому решению.

В некоторых задачах полезно использовать две различные формулы площади одной фигуры.

Задача 9. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, в котором $AC = 7,$ $BC = 5$ и $\angle ABC = 120^\circ$ (рис. 17).

△ Обозначим сторону $AB = x$ и применим теорему косинусов к треугольнику ABC $\left(\cos\, 120^\circ = -\frac{1}{2}\right)$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos 120^\circ \Leftrightarrow 49 = x^2 + 25 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 24 = 0 \Leftrightarrow (x+8)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

По формуле пощади (2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Радиус вписанной окружности $r = \frac{S_{ABC}}{p}$ формула (3).

Находим $p = \frac{1}{2}(3+5+7) = \frac{15}{2}$ и $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

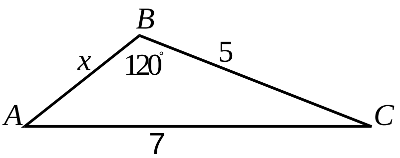


Рис. 17

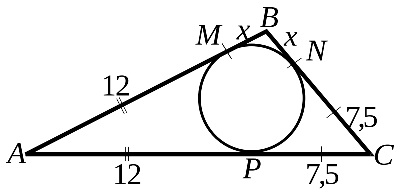


Рис. 18

Задача 10. Около окружности радиуса 5 описан треугольник. Найти его площадь, если одна из его сторон точкой касания делится на отрезки 12 и 7,5.

△ Пусть $AP = 12,\ PC = 7,5$ (рис. 18) и пусть $BM = x$. По свойству касательных $AM = AP,\ CN = CP$ и $BN = BM$, поэтому стороны треугольника таковы: $AC = 19,5,\ AB = 12 + x,\ BC = 7,5 + x,$ тогда $p = 19,5 + x.$ (Заметим, что $p = AC + BM$). По формулам площади (3) и (4) имеем: $S = pr = (19,5 + x) \cdot 5;\ S = \sqrt{(19,5 + x)x \cdot 7,5 \cdot 12}.$ Приравниваем правые части, возводим в квадрат, приводим подобные члены, получаем $x = 7,5$. Вычисляем площадь треугольника:

$$S = pr = (19,5 + 7,5) \cdot 5 = 135. \ ▲$$

Ответ: 135.

<u>Сравнение площадей треугольников</u> обычно опирается на одно из следующих утверждений:

2.1°. **<u>Площадь треугольников с одинаковой</u> высотой <u>относятся как длины соответствующих оснований</u>. В частности, если точка D лежит на основании AC (рис. 19), то $\frac{S_{DBC}}{S_{ABC}} = \frac{DC}{AC}$.**

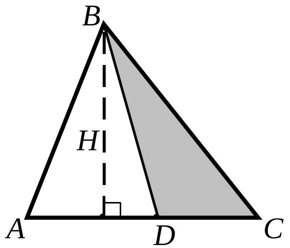


Рис. 19

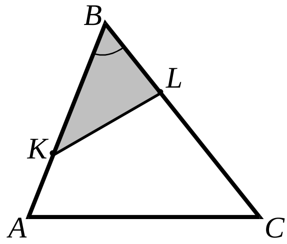
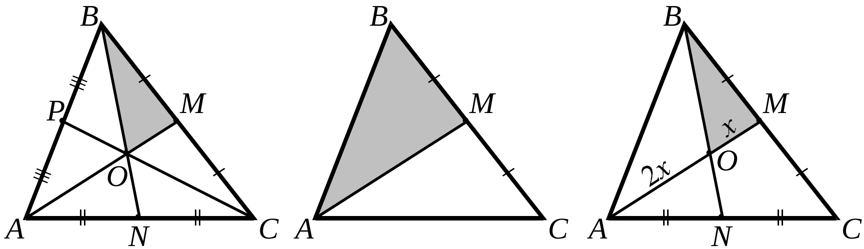


Рис. 20

2.2°. **<u>Площади треугольников с общим углом относятся как произведения сторон, заключающих этот угол</u> (рис. 20):**

$$\frac{S_{KBL}}{S_{ABC}} = \frac{BK \cdot BL}{BA \cdot BC}.$$

2.3°. **<u>Площади подобных треугольников относятся как квадраты их сходственных сторон</u>, т. е. если** $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, **то** $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{A_1B_1}{AB}\right)^2$.



а) **б)** **в)**

Рис. 21

Все эти утверждения легко доказываются с использованием соответственно формул площади (1) и (2).

Обратите внимание на важное свойство медиан треугольника.

Теорема 4. (о медианах). Три медианы треугольника разбивают его на 6 треугольников с общей вершиной и равными площадями.

□ Известно, что <u>три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1, считая от вершины</u>. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ΔABC площади S (рис. 21а). Надо доказать, что площади всех шести треугольников с вершиной в точке O, составляющих треугольник ABC, равны между собой, т. е. равны $\frac{1}{6}S$. Докажем, например, для треугольника BOM, что $S_{BOM} = \frac{1}{6}S_{ABC}$.

Точка M – середина стороны BC (рис. 21б), по утверждению $2.1°$ о сравнении площадей $S_{ABM} = \frac{1}{2}S.$ Медиана BN, пересекая медиану AM в точке O (рис. 21в), делит её в отношении $AO:OM = 2:1,$ т. е. $OM = \frac{1}{3}AM.$ По тому же утверждению $2.1°$ площадь треугольника BOM составляет $1/3$ площади треугольника $ABM,$ т. е.

$$S_{BOM} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S\right) = \frac{1}{6}S. \blacksquare$$

Задача 11. Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 3 и 7, а медиана к третьей стороне равна 4 (рис. 22).

△ Пусть $AB = 3,$ $BC = 7,$ $AM = MC$ и $BM = 4.$ Достроим треугольник ABC до параллелограмма, для этого на прямой BM отложим отрезок $MD = BM$ и соединим точки: A с D и C с $D.$ *Противоположные стороны параллелограмма равны:* $DC = AB.$ Равны и площади треугольников ABC и DBC (общее основание BC и равные высоты из вершин A и D). В треугольнике DBC известны все три стороны: $BC = 7,$ $DC = 3,$ $BD = 2BM = 8.$ Находим его площадь по формуле Герона: $p = 9,$ $S_{DBC} = 6\sqrt{3}.$

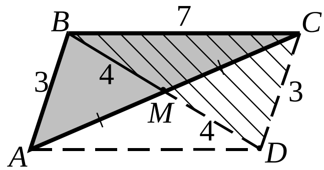


Рис. 22

Значит и $S_{ABC} = 6\sqrt{3}.$ ▲ **Ответ:** $6\sqrt{3}.$

В решении этой задачи дополнительным построение получен треугольник, площадь которого равна площади заданного и легко вычисляется по данным задачи. Приведём ещё одну задачу, где сначала вычисляется площадь дополнительно построенной фигуры, а затем легко находится искомая площадь.

Задача 12. Найти площадь треугольника, если его медианы равны 3, 4 и 5.

△ Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 23) и пусть $m_a = AM = 3,$ $m_b = BN = 4$ и $m_c = CP = 5.$

По свойству медиан $AO = \frac{2}{3}m_a,$ $CO = \frac{2}{3}m_c$ и $ON = \frac{1}{3}m_b.$ В треугольнике AOC известны две стороны AO и CO и медиана третьей стороны $ON.$ Площадь этого треугольника найдём как в предыдущей задаче. Достроим треугольник AOC до параллелограмма $AOCD,$ $S_{AOC} = S_{DOC},$ в треугольнике DOC известны три стороны:

$$DC = AO = \frac{2}{3}m_a, \quad DO = 2ON = \frac{2}{3}m_b, \quad OC = \frac{2}{3}m_c.$$

Площадь треугольника DOC вычисляем по формуле Герона $S_1 = S_{AOC} = S_{DOC} = \frac{8}{3}$. Сравним теперь площадь треугольника ABC (обозначим её S) с площадью треугольника AOC. Из теоремы 2 о медианах и площадях следует $S_{AOC} = S_{AON} + S_{NOC} = 2 \cdot \frac{1}{6} S = \frac{1}{3} S.$

Итак, $S = 3S_1 = 8.$ ▲ **Ответ:** 8.

Докажем теорему об отношении площади треугольника к площади другого треугольника, построенного из медиан первого. Её доказательство опирается на рассуждения задачи 12.

Теорема 5. Площадь треугольника составленного из медиан данного треугольника, составляет $\frac{3}{4}$ его площади, т. е. $S_{m_a m_b m_c} = \frac{3}{4} S_{abc}.$

□ Рассмотрим рис. 23. В построенном треугольнике OCD стороны таковы: $OC = \frac{2}{3} m_c,$ $OD = \frac{2}{3} m_b,$ $CD = \frac{2}{3} m_a.$ Очевидно, что треугольник со сторонами m_a, m_b, m_c подобен (по третьему признаку) треугольнику со сторонами $\frac{2}{3} m_a, \frac{2}{3} m_b, \frac{2}{3} m_c.$

Из решения предыдущей задачи следует, что $S_{OCD} = S_1 = \frac{1}{3} S$ (здесь $S -$ площадь треугольника ABC). Кроме того, площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон, поэтому $\frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Таким образом, имеем

$$S_0 = \frac{9}{4} S_1 = \frac{3}{4} S, \text{ т. е. } \boxed{S_{m_a m_b m_c} = \frac{3}{4} S_{abc}}. \ ■$$

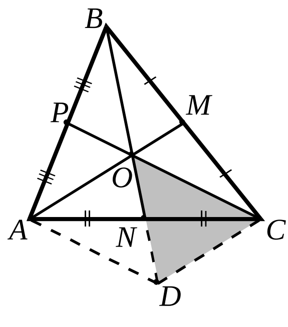


Рис. 23

Замечание. Из приведённых выше рассуждений в решении задачи 12 следует, что всегда существует треугольник со сторонами, равными медианам данного треугольника, поскольку всегда существует подобный ему треугольник со сторонами $\frac{2}{3} m_a, \frac{2}{3} m_b, \frac{2}{3} m_c$. Кроме того, становится ясным план построения треугольников по трём отрезкам, равным его медианам: сначала строится треугольник OCD (см. рис. 23) со сторонами $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c,$ затем точка N – середина отрезка $OD,$ потом точка A (из $AN = NC$) и точка B (из $OB = OD$). Это построение осуществимо, если существует треугольник OCD, т. е. если существует треугольник со сторонами m_a, m_b, m_c. Итак, вывод: *три отрезка могут быть медианами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда из них можно составить треугольник*.

§ 3. Площадь четырёхугольника

1. В школьном учебнике выведены следующие формулы площади параллелограмма:

$$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b, \tag{6}$$

$$S = a \cdot b \sin \varphi, \tag{7}$$

где a и b – стороны параллелограмма, h_a и h_b – высоты к ним, φ – величина угла между сторонами параллелограмма.

Докажем теорему о площади четырёхугольника.

Теорема 6. Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними, т. е.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha, \tag{8}$$

где d_1 и d_2 – диагонали четырёхугольника, α – величина угла между ними.

□ $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, диагонали которого AC и BD пересекаются в точке O под углом α (рис. 24). Через вершины A и C проведём прямые, параллельные диагонали $BD,$ а через вершины B и D проведём прямые, параллельные диагонали AC. Проведённые прямые в пересечении образуют параллелограмм со сторонами, равными диагоналям BD и $AC,$ и углом α. Площадь параллелограмма равна $AC \cdot BD \cdot \sin \alpha,$ а площадь четырёхугольника $ABCD$ равна, как легко видеть, половине его площади, т. е. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha.$ ■

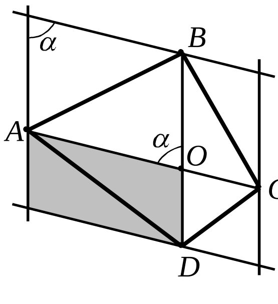


Рис. 24

Следствие. *Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей*. Это сразу следует из доказанной формулы, т. к. диагонали ромба перпендикулярны.

Задача 13. Дан параллелограмм $ABCD$ площадью S и тупым углом B. Из вершины B и D опущены перпендикуляры BH и DK на диагональ AC. Доказать, что $BHDK$ – параллелограмм и найти его площадь, если $AH = \frac{1}{5}AC.$

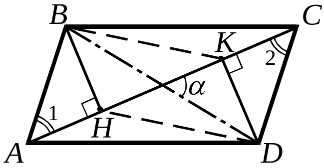


Рис. 25

$\triangle$1. По свойству параллелограмма $AB = CD$ и по теореме 6

$$S = S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha \text{ (рис. 25).}$$

Из $AB \parallel CD$ следует $\angle 1 = \angle 2,$ прямоугольные треугольники ABH и CDK равны (по гипотенузе и острому углу), поэтому $BH = DK$ и $AH = CK$. Далее, $BH \perp AC,\ DK \perp AC \Rightarrow BH \parallel KD.$

В четырёхугольнике $BHDK$ противолежащие стороны BH и DK – равны и параллельны, по теореме $BHDK$ – параллелограмм.

2. $S_1 = S_{BHDK} = \frac{1}{2}HK \cdot BD \cdot \sin\alpha,$ поэтому $\frac{S_1}{S} = \frac{HK}{AC}$. По условию $AH = \frac{1}{5}AC,\ AH = CK$ (доказано), следовательно $HK = AC - \frac{2}{5}AC = \frac{3}{5}AC$ и $\frac{S_1}{S} = \frac{3}{5}.$ ▲ **Ответ:** $\frac{3}{5}S$ **.**

2. Рассмотрим несколько задач, где определяется или используется площадь трапеции. Напомним, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на её высоту, т. е.

$$S = \frac{a+b}{2}h. \tag{9}$$

Задача 14. Найти площадь трапеции, если её основания равны 16 и 44, а боковые стороны равны 17 и 25.

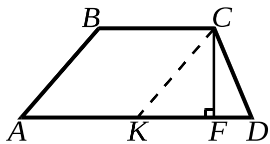


Рис. 26

$\triangle$ Через вершину C проведём $CK \parallel BA$ (рис. 26). $ABCK$ – параллелограмм, его противоположные стороны равны, поэтому в треугольнике KCD определены все стороны: $KC = AB = 25,\ CD = 17,$ $KD = AD - BC = 28.$ По формуле Герона вычисляем площадь этого треугольника: $p = 35,\ S_{KCD} = 210.$ С другой стороны, $S_{KCD} = \frac{1}{2}KD \cdot CF,$ если $CF \perp AD$. Отсюда находим $CF = \frac{2S_{KCD}}{KD} = 15$ и вычисляем площадь трапеции $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(BC + AD\right)CF = 450.$ ▲

Задача 15. Отрезок длины m, параллельный основаниям трапеции, разбивает её на две трапеции (рис. 27). Найти отношение площадей этих трапеций, если основания трапеции равны a и b $(b<a)$.

$\triangle$ Пусть $BC=b$, $AD=a$ и $MN=m$, и $MN \parallel AD$. Проведём $CE \parallel BA$ и $NF \parallel BA$, а так же $CK \perp MN$ и $NP \perp AD$. Обозначим $CK=h_1$, $NP=h_2$. Далее, т. к. $CE \parallel NF$, то $\angle ECN=\angle FND$, а из $MN \parallel AD$ следует $\angle ENC=\angle FDN$. Следовательно, треугольники ECN и FND имеют по два равных угла, они подобны. Из подобия имеем $\dfrac{EN}{FD}=\dfrac{CN}{ND}$. Прямоугольные треугольники KCN и PND также подобны и $\dfrac{CK}{NP}=\dfrac{CN}{ND}$, поэтому $\dfrac{EN}{FD}=\dfrac{CK}{NP}$, т. е. $\dfrac{m-b}{a-m}=\dfrac{h_1}{h_2}$. Если S_1 и S_2 – площади трапеций $MBCN$ и $AMND$, то

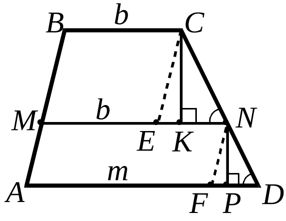


Рис. 27

$$S_1=\frac{1}{2}(b+m)h_1,\ S_2=\frac{1}{2}(a+m)h_2 \text{ и } \frac{S_1}{S_2}=\frac{(m+b)h_1}{(a+m)h_2}=\frac{m^2-b^2}{a^2-m^2}. \ \blacktriangle$$

В задании 1 для 9 класса были доказаны некоторые свойства трапеции. Полезно их повторить, а мы добавим ещё некоторые свойства (докажите их самостоятельно).

3.1°. **Диагонали трапеции разбивают её на 4 треугольника с общей вершиной. Треугольники, прилежащие к основанию подобны; треугольники, прилежащие к боковым сторонам, имеют равные площади (рис. 28).**

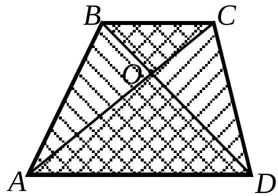


Рис. 28

3.2°. **Если трапеция** $ABCD$ **с основаниями** AD **и** BC **описана около окружности с центром в точке** O **(рис. 29), то**

1. $\angle AOB=\angle COD=90^\circ$ (доказано в задаче 3 §1 этого задания);

2. сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон;

3. площадь трапеции равна произведению суммы оснований на радиус окружности.

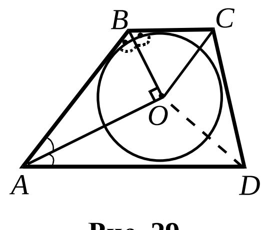


Рис. 29

Задача 16. Диагонали трапеции $ABCD$, пересекаясь, разбивают её на четыре треугольника с общей вершиной O (рис. 30). Найти площадь трапеции, если площади треугольников, прилежащих к основаниям равны S_1 и S_2.

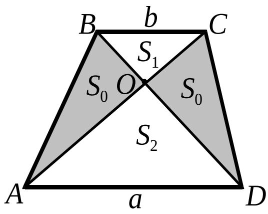


Рис. 30

$\triangle$ По свойству 3.1° $S_{ABO}=S_{CDO}$, обозначим эту площадь S_0 (действительно, $S_{ABD}=S_{ACD}$, т. к. у них общие основания и равные высоты, т. е. $S_{AOB}+S_{AOD}=S_{COD}+S_{AOD}$, откуда следует $S_{AOB}=S_{COD}$). Так как $S_{ABC}=S_0+S_1=\frac{1}{2}bh$ и $S_{ACD}=S_0+S_2=\frac{1}{2}ah,$ то $\frac{S_0+S_1}{S_0+S_2}=\frac{b}{a}.$

Далее, треугольники BOC и DOA подобны, площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, значит, $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{b}{a}\right)^2$. Таким образом, $\frac{S_0+S_1}{S_0+S_2}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}.$ Отсюда находим $S_0=\sqrt{S_1S_2},$ и поэтому площадь трапеции будет равна $S_1+S_2+2S_0=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$. ▲ **Ответ:** $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$.

Задача 17. Около окружности описана равнобокая трапеция с основаниями $AD=a$ и $BC=b$ (рис. 31). Найти:

1) радиус окружности r;

2) косинус угла при большем основании.

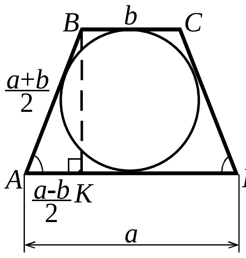


Рис. 31

$\triangle$ Трапеция описана около окружности, следовательно (свойство 3.2°, 2)

$$AB+CD=BC+AD.$$

Трапеция равнобокая, $AB=CD=\frac{a+b}{2}.$

Пусть $BK\perp AD,$ по свойству 5° из задания 1 $AK=\frac{a-b}{2}$. Из прямоугольного треугольника ABK следует

$$BK=2r=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{ab},$$

откуда $\boxed{r=\frac{1}{2}\sqrt{ab}}$. Кроме того $\boxed{\cos A=\frac{a-b}{a+b}}$. ▲

Ответ: $r=\frac{1}{2}\sqrt{ab},\ \cos A=\frac{a-b}{a+b}.$

Задача 18. Около трапеции $ABCD$ описана окружность. Основание AD образует со стороной AB угол 45° (рис. 32). Найти радиус окружности, если $AD = 8,\ BC = 6.$

$$\triangle \text{ Трапеция вписана в окружность: } \left.\begin{array}{r} \angle B + \angle D = 180^\circ, \\ BC \parallel AD: \quad \angle B + \angle A = 180^\circ, \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle D \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ трапеция равнобока, $\angle A = \angle D = 45^\circ.$

Если $CH \perp AD,$ то $HD = \dfrac{AD - BC}{2} = 1.$ Треугольник $CHD -$ прямоугольный равнобедренный $CH = HD = 1.$

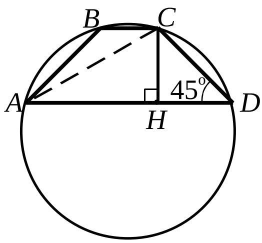


Рис. 32

На хорду AC опирается вписанный угол $ADC,$ по формуле (∗) §1 (на стр. 9) $R = \dfrac{AC}{2\sin 45^\circ}.$ Хорду AC найдём из прямоугольного треугольника ACH: $AC = \sqrt{\left(AD - HD\right)^2 + CH^2} = \sqrt{7^2 + 1} = 5\sqrt{2},$

тогда $R = \dfrac{5\sqrt{2}}{2 \cdot 1/\sqrt{2}} = 5.$ ▲ **Ответ:** 5.

Контрольные вопросы

1(4). а) В треугольник ABC вписана окружность. Может ли каждая из сторон делится точкой касания в отношении 2:1?

б) Около окружности описана трапеция. Докажите, что сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон.

в) Треугольник ABC описан около окружности, угол B равен 60°, $AC = 7,$ полупериметр $p = 10$. Найти стороны треугольника.

2(6). а) Когда около четырёхугольника можно описать окружность?

б) Около четырёхугольника $ABCD$ описана окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, а прямые AD и $BC -$ в точке M (рис. 1). Найти величину угла BAD, если угол K равен 45°, а угол $M = 25^\circ$.

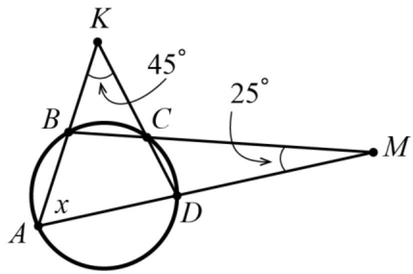


Рис. 1

в) Когда около трапеции можно описать окружность?

г) В треугольнике ABC угол ACB равен 60°, биссектрисы AK и BD пересекаются в точке O. Можно ли около четырёхугольника $DOKC$ описать окружность?

3(6). а) Доказать равенство $a = 2R\sin\alpha$, где $a-$ хорда окружности радиуса R, а $\alpha -$ величина вписанного угла, опирающегося на ходу a.

б) Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке S, $AC = CS = 5$. Чему равен угол ABC?

в) Около треугольника ABC описана окружность, угол A равен 15°, угол $B = 45^\circ$, $AB = 4\sqrt{3}$. Найти радиус окружности и длину стороны AC.

4(5). а) Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются в точке M и перпендикулярны друг другу (рис. 2). Доказать, что $AC^2 + BD^2 = CB^2 + AD^2 = 4R^2$.

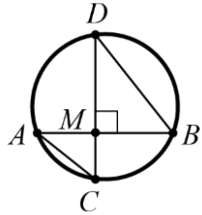


Рис. 2

б) Трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 8$ и $BC = 6$ вписана в окружность. Диагонали AC и BD перпендикулярны друг другу. Найти радиус окружности, боковые стороны, высоту трапеции.

5(5). а) Как измеряется угол между касательной и хордой с общей точкой на окружности?

б) $MA-$ касательная, $MB-$ секущая (рис. 3). Угол $AMB = 35^\circ$, угол $CAB = 65^\circ$. Чему равен угол ABM?

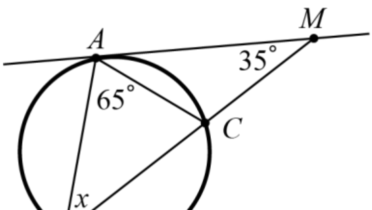


Рис. 3

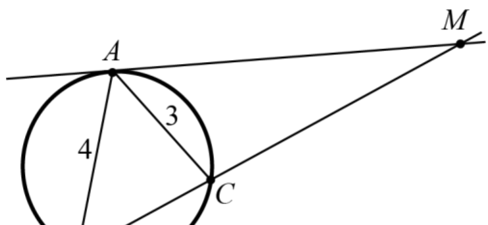


Рис. 4

в) Треугольник ABC со сторонами $AC = 3$ и $AB = 4$ вписан в окружность. Через точку A проведена касательная, которую прямая BC пересекает в точке M (рис. 4). Найти отношение площадей треугольника ABM и треугольника ABC.

г) Треугольник ABC со сторонами $AB=5,$ $BC=8,$ $AC=7$ вписан в окружность. Найти расстояние от точки C до касательной к окружности, проходящей через точку A.

6(4). Две окружности радиусов R и r $(R>r)$ внешне касаются в точке K. Одна прямая касается окружностей: большей в точке A, меньшей в точке C. Другая прямая касается окружностей: большей в точке B, меньшей в точке D. Через точку K проведена общая внутренняя касательная, пересекающая прямую AC в точке M, а $BD-$ в точке N.

а) Найти угол AKC.

б) Найти угол O_1MO_2, где O_1 и O_2- центры соответственно большей и меньшей окружностей.

в) Найти длину отрезка AC.

г) Доказать параллельность прямых AB, MN, CD.

7(6). Площадь треугольника ABC равна S. Найти площадь заштрихованной фигуры, если:

а) $MN-$ средняя линия, $MEFN-$ трапеция и $BF=\dfrac{1}{3}BC$ (рис. 5),

б) $AK:KB=2:1,$ $AM:MC=1:4$ и $BL:LC=3:2$ (рис. 6).

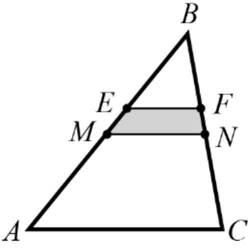


Рис. 5

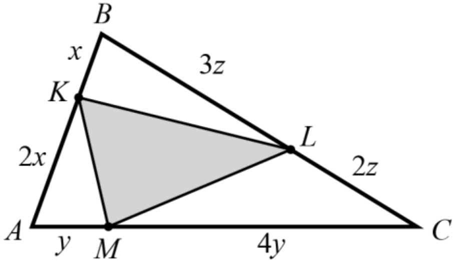


Рис. 6

8(3). Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S. Найти площадь заштрихованной фигуры, если:

а) $CM = MD$ (рис. 7),

б) $BK = \frac{1}{3}BC$ (рис. 8).

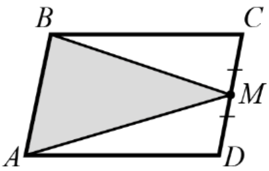


Рис. 7

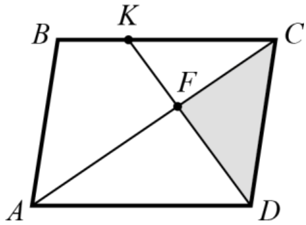


Рис. 8

9(6). а) Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Площадь треугольника BOC равна 2, а площадь треугольника COD равна 6. Найти площадь трапеции.

б) Отрезок MN с концами на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ параллелен основаниям трапеции, $AD = 7,$ $BC = 3,$ $MN = 4.$ Найти отношение площадей трапеций, на которые прямая MN разделила трапецию $ABCD.$

в) Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O, угол AOD равен 120°, $AC = 7$, длина средней линии трапеции равна 6,5. Найти площадь трапеции.

Задачи

1(5). Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, точкой касания делит гипотенузу на отрезки $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$. Найти площадь треугольника.

2(5). Продолжения высоты BD и биссектрисы BK треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках D_1 и K_1 соответственно, при этом $BD = DD_1$ и $BK : BK_1 = 3:8$. Найти радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 30.

3(5). Точка F лежит на продолжении стороны AD параллелограмма $ABCD$ $(AF > AD)$. Прямая BF пересекает диагональ AC в точке K, а сторону CD в точке P, при этом $BK = 2,$ $PF = 3$. Найти отношение площади треугольника BAK к площади треугольника CPK.

4(6). Треугольник $ABC-$ равнобедренный, $AB=BC,$ $AC=6.$ Окружность радиуса 6 касается отрезка AB и продолжения прямых BA и BC. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC,$ и площадь треугольника $ABC.$

5(6). В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ расстояние от точки $M,$ являющейся серединой стороны $AD,$ до всех вершин одинаково. Найти длину стороны $AD,$ если $BC=12,$ $\angle ABC=110^\circ,$ $\angle BCD=115^\circ.$

6(5). В прямоугольной трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания $BC.$ Окружность, построенная на большей боковой стороне CD как на диаметре, касается стороны AB в точке $M.$ Расстояние от точки M до стороны CD равно $6\sqrt{2}$. Найти радиус окружности.

7(6). В окружность радиуса 5 вписана трапеция $ABCD,$ диагонали которой взаимно перпендикулярны, и большее основание $AD=8$. Найти меньшее основание, боковую сторону и площадь трапеции.

8(6). Около окружности описана равнобокая трапеция $ABCD$. Окружность касается боковой стороны AB в точке $K,$ прямая DK пересекает окружность в точке $P,$ при этом $DP=4,$ $KP=5.$

Найти: **а)** длину основания $AD,$ **б)** косинус угла KAD и **в)** радиус окружности.

9(5). Внешняя касательная двух окружностей радиусов 2 и 5 в полтора раза больше внутренней касательной. Найти расстояние между центрами этих окружностей.

10(5). К двум окружностям радиусов R и r $(R>r),$ касающимся внешне, проведена общая внешняя касательная. В образовавшийся криволинейный треугольник вписана окружность (двух данных окружностей она касается внешне). Найти радиус этой окружности.