**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа**

МАТЕМАТИКА

Графики и множества на плоскости

Задание № 2 для 10-х классов

(2021 – 2022 учебный год)

г. Долгопрудный, 2021

Составитель: Ф.С. Стонякин, кандидат физико-математических наук.

Математика: задание № 2 для 10-х классов (2021 – 2022 учебный год), 2021, 32 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 31 октября 2021 г.

Учащийся должен стараться выполнить все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов, являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:

Стонякин Фёдор Сергеевич

Подписано 30.09.21. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,77.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

Во многих задачах бывает необходимо каким-то способом математически описать зависимость одной из изучаемых величин от другой величины. Вы сталкивались с этим на уроках физики, химии и других предметов. Зависимость разных величин друг от друга описывают по-разному. Это можно делать с помощью формул, уравнений, неравенств или систем. Но часто полезно наглядно показать рассматриваемую зависимость так, чтобы были видны её свойства при тех или иных значениях рассматриваемых величин. Тогда и возникает необходимость решать задачи на построение графиков функций и уравнений. Иногда это сделать нетрудно, а иногда возникают тонкости, с которыми связано множество задач повышенной сложности. Некоторые классы таких задач предлагаются на ЕГЭ, математических олимпиадах и вступительных экзаменах в ведущие высшие учебные заведения. Данное задание посвящено этим вопросам. Начнём с некоторого повторения школьного материала.

Графики функций и их построение

Одним из разделов школьной математики является изучение функциональных зависимостей или функций. Напомним, что функцией математики называют зависимость величины от одной или нескольких других величин. При этом независимые переменные величины принято называть *аргументами*, а зависимые – *функциями*. При этом важно не забывать, что каждому значению аргумента (или аргументов) ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной (функции). Наглядно функции изображают с помощью графика – специального набора точек на плоскости. Пусть имеется функция $y = f(x)$ одной переменной x. На плоскости введём декартову систему координат xOy и рассмотрим множество точек G с координатами $(x, f(x))$, где x принадлежит некоторому множеству M, которое называется *областью определения* функции. А множество G называется *графиком функции* $y = f(x)$ (рис. 1).

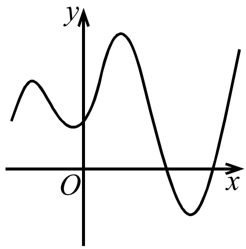


Рис. 1

В школьном курсе математики вы изучали такие типы функций:

1) Линейные функции $f(x) = kx + b$.
2) Квадратичные функции $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.
3) Степенные функции вида $f(x) = x^n$ при натуральных n.
4) Степенные функции вида $f(x) = \sqrt[n]{x}$ при натуральных n.
5) Обратная пропорциональность $f(x) = \frac{k}{x},\ k \neq 0$.

График линейной функции можно построить по двум точкам, поскольку это прямая линия. Однако стоит заметить, что не всякая прямая будет графиком линейной функции. Если взять вертикальную прямую $x = a$, то такая линия не может быть графиком никакой функции (рис. 2). Действительно, здесь одному значению переменной x ставится в соответствие несколько значений переменной y. Итак, *прямая на плоскости xOy – график некоторой линейной функции тогда и только тогда, когда она не вертикальна.*

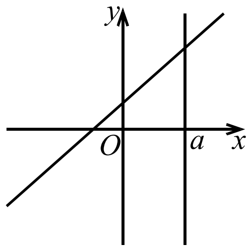


Рис. 2

Напомним геометрический смысл коэффициентов k и b в уравнении прямой $y = kx + b$: $k = \operatorname{tg}\alpha$ – тангенс угла наклона прямой к оси Ox, b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy. Поэтому две невертикальные прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

- параллельны $\Leftrightarrow$ $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$;
- совпадают $\Leftrightarrow$ $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$;
- перпендикулярны $\Leftrightarrow$ $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Условие перпендикулярности прямых несложно пояснить. Рассмотрим пару прямых, параллельных данным и проходящих через начало координат (см. рис. 3). Из перпендикулярности этих прямых следует, что $\alpha = \varphi$. Поэтому если точка $A(a_0; b_0)$ лежит на первой прямой, то точка $B(-b_0; a_0)$ лежит на второй. Ясно, что можно подобрать $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$, откуда $k_1k_2 = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{a_0}{-b_0} = -1$.

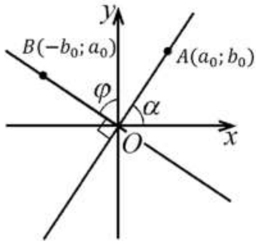


Рис. 3

Теперь напомним основные сведения о функциях вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Сразу отметим, что такая функция квадратична только при $a \neq 0$. В случае же $a = 0$ эта функция квадратичной уже не будет. Если в задаче возможна такая ситуация, то случай $a = 0$ обязательно нуждается в отдельном рассмотрении. ***Нужно всегда обращать на это внимание!***

Будем считать, что $a \neq 0$. Тогда графиком функции $y = f(x)$ будет парабола. Такие графики принято строить схематично, учитывая следующее:

- *знак числа a:* при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ – вниз;
- *координаты вершины параболы:* $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = f(x_0)$;
- для нахождения координат точек пересечения графика с осью Ox необходимо решить уравнение $f(x) = 0$, а с осью Oy – найти число $f(0)$.

Теперь поговорим о графиках степенной функции. Легко убедиться, что график функции $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) при $x \geq 0$ выглядит так, как показано на рис. 4. Для чётных n, очевидно, верно $f(-x) = f(x)$, а для нечётных n верно $f(-x) = -f(x)$ для всякого x. Поэтому в зависимости от чётности n графики функции $f(x) = x^n$ имеют такой вид (рис. 5 и 6).

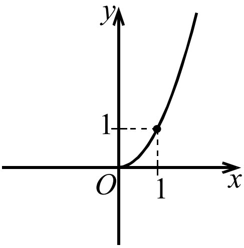


Рис. 4

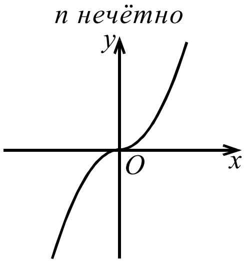


Рис. 5

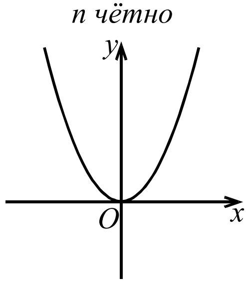


Рис. 6

Напомним, что функция, область допустимых значений которой симметрична относительно начала координат, называется ***чётной***, если справедливо равенство $f(-x) = f(x)$ и ***нечётной***, если $f(-x) = -f(x)$. Например, нетрудно проверить, что функция

$$f(x) = |x-2| + |x+2| \text{ – чётная,}$$

а функция

$$g(x) = |x-2| - |x+2| \text{ – нечётная.}$$

В случае нечётного n график симметричен относительно начала координат. Такие функции называют ***нечётными*** (рис. 5). Если же n четно, то график симметричен относительно оси ординат. Такие функции называют ***чётными*** (рис. 6).

Для построения графика $f(x) = \sqrt[n]{x}$ нужно записать уравнение $y = \sqrt[n]{x}$ или $x = y^n$. Это означает, что график имеет вид линии $y = x^n$, но при этом x и y меняются местами. Для чётных n при этом еще нужно учесть ОДЗ $x \geq 0$. Поэтому график функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$ имеет следующий вид в зависимости от чётности натурального числа n (рис. 7, 8):

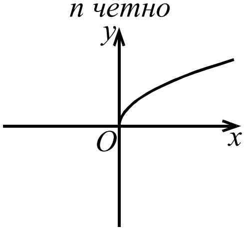


Рис. 7

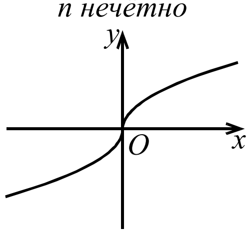


Рис. 8

Рассмотрим теперь функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Поскольку функция f нечётна, то график должен быть симметричным относительно начала координат. Схематический вид графика этой функции показан на рисунке 9.

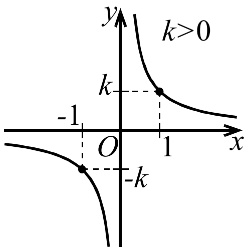


Рис. 9

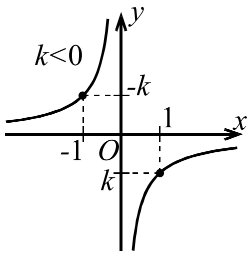


Рис. 10

Если $k < 0$, то график функции $y = \frac{k}{x}$ имеет примерно такой же вид, и его можно получить симметрией относительно оси *Oy* из графика функции $y = \frac{|k|}{x}$ (рис. 10).

Покажем, как меняется график функции $f(x) = \frac{k}{x}$ при изменении параметра k. Если $|k_2| > |k_1|$, то линия $f(x) = \frac{k_2}{x}$ более удалена от осей координат, чем $f(x) = \frac{k_1}{x}$. Схематично это изображено на рис. 11, 12.

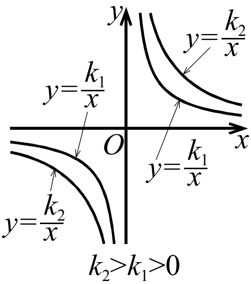


Рис. 11

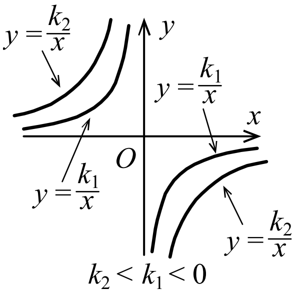


Рис. 12

Построение графиков функций, заданных на промежутках

Во многих случаях характер зависимости одной переменной от другой может существенно меняться в зависимости от области, которой принадлежит значение аргумента. Функции, которые по-разному задаются на различных интервалах числовой прямой, будем называть *кусочно-заданными*. Рассмотрим примеры, показывающие, как строить графики таких функций.

Пример 1. Построим график $y = x + |x|$. Ясно, что

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x, \text{при } x > 0, \\ 0, \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Получаем при $x > 0$ луч $y = 2x$, а при $x \le 0$ луч $y = 0$ (рис. 13).

Рассмотрим ещё несколько примеров построения графиков кусочно-заданных функций.

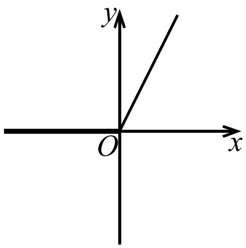


Рис. 13

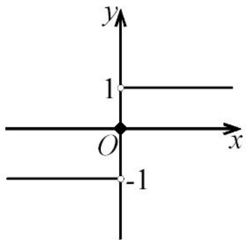


Рис. 14

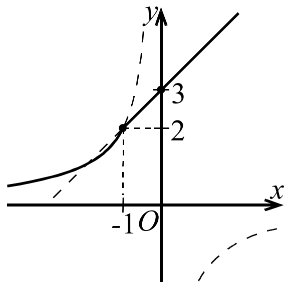


Рис. 15

Пример 2. Построим график функции $y = \operatorname{sgn}(x)$, где

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad \text{(рис. 14).}$$

Рассмотрим пример графика, содержащего часть гиперболы.

Пример 3. Построим график функции

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, & x \le -1, \\ x + 3, & x > -1. \end{cases}$$

График первой функции – гипербола $y = -\frac{2}{x}$. По условию берём только ту часть гиперболы, где $x \in (-\infty, -1]$. График второй функции – прямая $y = x + 3$ и мы учитываем только ту её часть, где $x \in (-1, +\infty)$. Получаем искомый график (см. рис. 15).

Построение графиков целой и дробной части числа

Рассмотрим интересный вид кусочно-заданных функций.

Определение. *Целой частью* $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

Например, $[1] = 1$, $[0.7] = 0$, а $[-0.7] = -1$. Функцию $f(x) = [x]$ легко можно задать на промежутках между парами соседних целых чисел:

$\boldsymbol{[x] = n}$ ***при*** $\boldsymbol{n \le x < n + 1}$ ***для всякого фиксированного целого числа*** $\boldsymbol{n}$. Поэтому график этой функции имеет следующий вид (рис. 16).

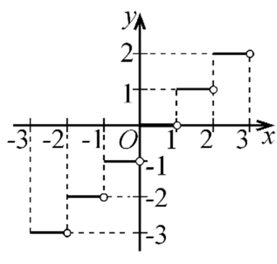


Рис. 16

Рассмотрим более трудный пример.

Пример 4. Построить график функции $f(x) = [2x + 3{,}5]$.

Ясно, что $[2x+3{,}5] = [2x+0{,}5]+3$. Далее, из определения целой части числа следует такое представление:

$$[2x+3{,}5] = n+3, \text{если } \frac{n}{2}-\frac{1}{4} \le x < \frac{n}{2}+\frac{1}{4}$$

для всякого целого n (рис. 17).

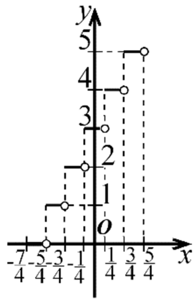


Рис. 17

Рассмотрим ещё такой пример.

Пример 5. Изобразим на координатной плоскости *xOy* множество точек (x, y), для которых $[x] = [y]$.

Ясно, что $[x] = [y]$ означает, что для некоторого целого n верны неравенства $n \le x < n+1$ и $n \le y < n+1$. Набор всех таких точек будет объединением квадратиков так, как показано на рисунке. Жирные участки границ входят в график, а пунктирные и выколотые точки – нет (рис. 18).

С целой частью числа тесно связана такая кусочно-линейная функция.

Определение. *Дробной частью* $\{x\}$ числа x называется число $\{x\} = x - [x]$. К примеру, $\{1\} = 0$, $\{0.7\} = 0.7$, а $\{-0.7\} = 0.3$.

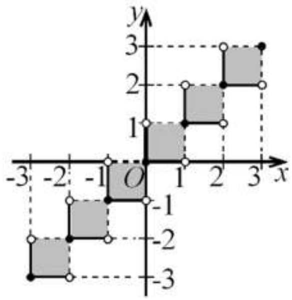


Рис. 18

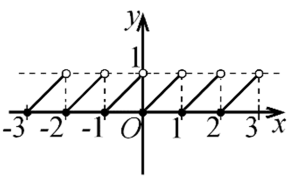


Рис. 19

Пример 6. Построим график функции $f(x) = \{x\}$. Ясно, что $f(x) = x - [x] = x - n$ при $n \le x < n+1$ (рис. 19).

Преобразования графиков функций и уравнений

Часто возникают задачи, в которых требуется по графику функции $y = f(x)$ построить график некоторой похожей функции. Такого типа задачи называют задачами на преобразование графиков функций. Наиболее известны два типа преобразований графиков – *линейные преобразования графиков*, а также *преобразования графиков, связанные с модулями*. Начнём со второго типа преобразований. Будем полагать, что нам задан график функции $y = f(x)$.

ПР1[1]. Как построить график функции $y = f(|x|)$**?** По определению модуля:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Поэтому график функции $y = f(|x|)$ состоит из двух частей: $y = f(x)$ – в правой полуплоскости, $y = f(-x)$ – в левой полуплоскости. Это означает, что можно сформулировать такое правило: ***для построения графика*** $\boldsymbol{y = f(|x|)}$ ***нужно сохранить часть графика*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x \geq 0}$ ***(т. е. на оси ординат и справа от неё), а также симметрично отразить эту часть относительно оси Оу; часть графика*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x < 0}$ ***(т. е. слева от оси ординат) при этом нужно стереть.***

ПР2. Как построить график функции $y = \left|f(x)\right|$? По определению модуля:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{при } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Поэтому можно сформулировать такое правило: ***для построения графика функции*** $y = |f(x)|$ ***нужно сохранить часть графика*** $\boldsymbol{y = f(x)}$***, лежащую выше оси*** *Ox*, ***а часть графика, лежащую ниже оси*** *Ox*, ***симметрично отразить относительно этой оси.***

Отметим, что для построения графика функции $y = |f(|x|)|$ нужно последовательно провести преобразования ПР1 и ПР2 (в любом порядке).

Рассмотрим ещё один тип преобразований графиков с модулями.

ПР3. Как построить множество точек (x, y) **таких, что** $|y| = f(x)$?

Сразу видно, что на новом графике не должно быть точек, для которых $f(x) < 0$. ***Поэтому нужно стереть часть графика функции*** $y = f(x)$***, лежащую ниже оси абсцисс.*** Если же $f(x) \geq 0$, то $y = \pm f(x)$ и на новом графике каждому такому значению *x* должно соответствовать две точки, симметричные относительно оси *Ox* (если $f(x) \geq 0$, то точка одна). ***Это означает, что часть графика функции*** $y = f(x)$***, лежащую выше оси абсцисс, нужно сохранить и симметрично отразить относительно оси Ox.***

Теперь перейдём к описанию так называемых ***линейных*** преобразований графиков. Выделяют, как правило, следующие три типа таких преобразований.

ПР4. Переход от графика $y = f(x)$ **к графику** $y = af(x)$**, где** $a \neq 1$.

Если a – положительное число, то имеем два возможных случая:

[1] ПР – преобразование

а) $a > 1$. В данном случае рассматриваемый переход является ***растяжением*** графика от оси абсцисс в a раз. Покажем на примере линейной функции $y = x$ (рис. 20). Положим $a = 2$ и получим график функции $y = 2x$ посредством растяжения имеющегося графика в два раза от оси абсцисс (рис. 21).

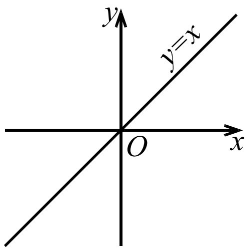


Рис. 20

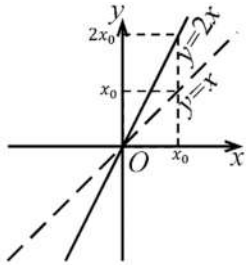


Рис. 21

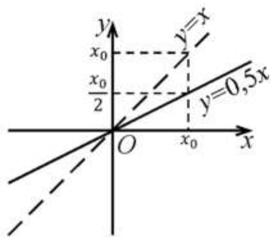


Рис. 22

б) $0 < a < 1$. В данном случае рассматриваемый переход является ***сжатием*** графика к оси абсцисс в $1/a$ раз. Пусть имеется линейная функция $y = x$. Если $a = 0{,}5$, то получим график функции $y = 0{,}5x$ посредством сжатия имеющегося графика в $1/a = 2$ раза к оси абсцисс (рис. 22).

Заметим, что при $a < 0$ нужно сначала построить график функции $\boldsymbol{y = |a|f(x)}$, а потом симметрично его отобразить относительно оси абсцисс. В частности, при $a = -1$ исходный график отражается относительно Ox.

<u>ПР5</u>. Переход от графика $y = f(x)$ к графику $y = f(x)+b$, где $b \neq 0$ – некоторое число. Рассматриваемый переход является ***параллельным переносом*** графика вдоль оси ординат на b единиц. Направление сдвига определяется знаком b: если $b > 0$, то график сдвигается вверх, а если $b < 0$, то вниз.

<u>ПР6</u>. Переход от графика $y = f(x)$ к графику $y = f(x+c)$, где $c \neq 0$ – некоторое число. В этом случае исходный график сдвигается вдоль оси абсцисс на величину $|c|$. Но направление сдвига противоположно знаку числа c: если $c > 0$, то график сдвигается влево, а если $c < 0$, то вправо.

Рассмотрим несколько примеров построения графиков с использованием упомянутого выше набора преобразований.

Пример 7. Построим ещё такой график $y = \big||x-1|-2\big|$.

Для этого нужно выполнить цепочку таких действий (рис 23).

а) Строим график функции $y = x - 1$.

b) Выполняем ПР2: часть полученного графика, лежащая над осью Ox, сохраняется; а его часть, лежащая под осью Ox, отображается симметрично относительно оси Ox.

c) Затем сдвигаем график вдоль оси Oy на 2 единицы вниз (ПР5).

d) Выполняем ПР2 снова: часть полученного в предыдущем пункте графика, лежащая выше оси Ox, сохраняется, а часть этого графика, которая лежит ниже оси Ox, отображается симметрично относительно неё.

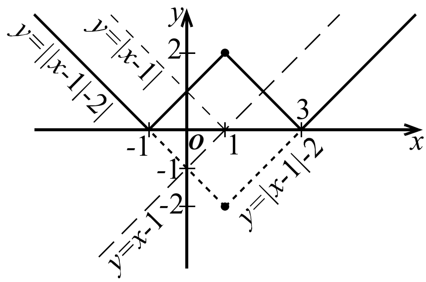


Рис. 23

Пример 8. Построим график функции $y = \frac{x^2-9}{|x|-3}$.

ОДЗ: $|x| - 3 \neq 0,\ |x| \neq 3, x \neq 3, x \neq -3$.

Воспользуемся известным тождеством $|x|^2 = x^2$. Имеем:

$$y = \frac{x^2-9}{|x|-3} = \frac{|x|^2-9}{|x|-3} = \frac{(|x|-3)(|x|+3)}{|x|-3} = |x| + 3.$$

Выполняем построения (рис. 24):

a) Строим график функции $y = |x|$.

b) График $y = |x|$ сдвигаем вдоль оси Oy на 3 единицы вверх (ПР5).

c) Исключаем из графика точки $x = 3, x = -3$.

Замечание. При решении задачи мы учли ОДЗ функции, исключив некоторые точки из графика. Такие точки изображаются, например, в виде выколотых точек (пустых незакрашенных кружков).

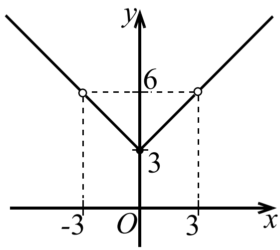


Рис. 24

Построение графиков дробно-линейных функций

Рассмотрим специальный класс функций, графиками которых будут гиперболы.

Определение. *Дробно-линейной* называют всякую функцию вида

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где c и d одновременно не равны 0. Поскольку случай $c = 0$ тривиален, то будем считать $c \neq 0$. Выполним преобразования:

$$f(x)=\frac{a}{c}\cdot\frac{cx+\frac{bc}{a}}{cx+d}=\frac{a}{c}\cdot\frac{cx+d+\frac{bc}{a}-d}{cx+d}=\frac{a}{c}\left(\frac{cx+d}{cx+d}+\frac{1}{a}\cdot\frac{bc-ad}{cx+d}\right)=$$
$$=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d},$$

то есть

$$f(x)=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Будем считать, что $bc-ad\neq 0$ (иначе коэффициенты в числителе и знаменателе пропорциональны, дробь можно сократить и функция есть постоянная величина на области определения). Это означает, что график дробно-линейной функции можно получить из графика функции $f_0(x)=\frac{1}{x}$, выполнив цепочку преобразований:

1. ПР6: $f_1(x)=\frac{1}{x+\frac{d}{c}}$; 2. ПР4: $f_2(x)=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$; 3. ПР5: $f_3(x)=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$.

На первом шаге нужно сдвинуть график $y=f_0(x)$ на $-\frac{d}{c}$ вдоль оси Ox, на втором – сжать его или растянуть и, возможно, отразить в зависимости от коэффициента $\frac{bc-ad}{c^2}$, а на третьем – сдвинуть вдоль оси Oy. Покажем на примере, как это нужно делать.

Пример 9. Построим график функции $f(x)=\frac{x}{x+2}$. Приведём данную функцию к такому виду:

$$y=\frac{x+2-2}{x+2}=1-\frac{2}{x+2}.$$

Построим график функции $y=-\frac{2}{x}$ (ветви гиперболы лежат во 2-ой и 4-ой четвертях) (рис. 25). Далее, необходимо, воспользовавшись преобразованием ПР6, сдвинуть график $y=-\frac{2}{x}$ на две единицы влево вдоль оси абсцисс (рис. 26). Получим график $y=-\frac{2}{x+2}$. Теперь используем преобразование ПР5 и поднимаем график на рис. 26 на единицу вверх. Получим необходимый график функции

$$y=1-\frac{2}{x+2} \text{ (рис. 27).}$$

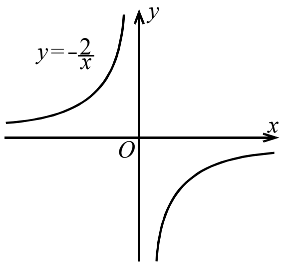


Рис. 25

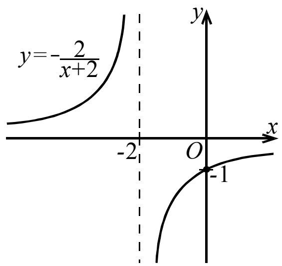


Рис. 26

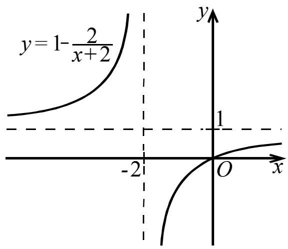


Рис. 27

Пример 10. Постройте график функции

$$y=\frac{3x+4}{5x+6}.$$

Будем выполнять построения в таком порядке:

1) Преобразуем данную функцию:

$$y=\frac{3x+4}{5x+6}=\frac{3x+4}{5x+6}-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{3}{5}+\frac{2/25}{x+6/5}.$$

2) Построим график функции

$$y=\frac{1}{x+6/5}$$ (ПР6, см. рис. 28).

Далее, построим график $y=\frac{2/25}{x+6/5}$, сжав график относительно оси абсцисс в 2/25 раз (ПР4, см. рис. 29).

3) Осталось сдвинуть график на 3/5 единиц вверх и получим окончательный график (ПР6, см. рис. 30)

$$y=\frac{3}{5}+\frac{2/25}{x+6/5}.$$

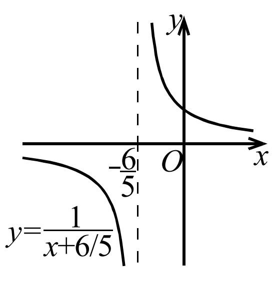


Рис. 28

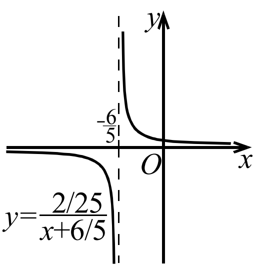


Рис. 29

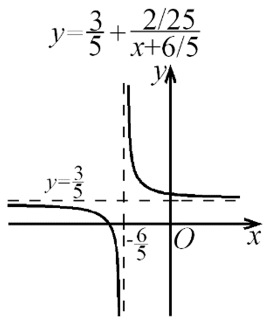


Рис. 30

Пример 11. Построим график функции

$$y = \left|\frac{2}{|x|-1}\right|.$$

Будем решать данный пример в таком порядке:

1. Построим гиперболу $y = \frac{2}{x}$ (рис. 31).

2. Воспользовавшись преобразованием ПР6, сдвинем эту гиперболу на единицу вправо (вдоль оси абсцисс) и получим график функции $y = \frac{2}{x-1}$ (рис. 32).

3. Теперь воспользуемся преобразованием ПР1 для построенного в п. 2. графика. Получим график функции $y = \frac{2}{|x|-1}$ (рис. 33).

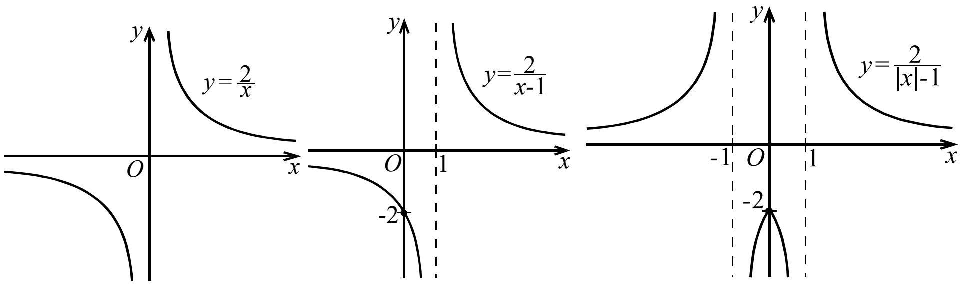


Рис. 31 **Рис. 32** **Рис. 33**

4. Воспользуемся преобразованием ПР2 и получим график искомой функции $y = \left|\frac{2}{|x|-1}\right|$ (рис. 34).

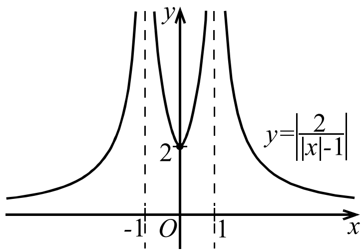


Рис. 34

Построение графиков с модулями методом интервалов

Если нужно построить график функции вида $y = f(|x-a_1|, |x-a_2|, \dots, |x-a_n|)$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – некоторые фиксированные числа, то в общем случае нет иного подхода, помимо раскрытия всех модулей. Ясно, что для всякого $k = 1, 2, 3, \dots, n$

$$|x-a_k|=\begin{cases}x-a_k, \text{если } x\ge a_k;\\ a_k-x, \text{если } x<a_k.\end{cases}$$

Однако, например, в случае $a_1<a_2$ невозможно выполнение одновременно двух условий: $x<a_1$ и $x>a_2$. Поэтому простое раскрытие модулей приведет к лишним действиям. Чтобы этого избежать, применяют так называемый ***метод интервалов***. Суть его состоит в следующем. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ упорядочивают по неубыванию и наносят на числовую ось (рис. 35). Если для определённости положить $a_1<a_2<\dots<a_n$, то это будет выглядеть так:

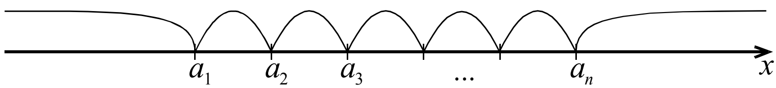


Рис. 35

Получаем, что числовая ось разбивается на $n+1$ интервалов. Если x лежит в любом из них, то мы однозначно можем определить знаки всех выражений под модулями и раскрыть модули. В каждом из получившихся интервалов график функции выстраивается отдельно. Граничную точку $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ можно включать в любой из промежутков, концом которого она является. Проиллюстрируем этот алгоритм на примере.

Пример 12 (**МГУ, химический факультет, 2000**)**.** Графически найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=|x-3|+|x|+|x+3|+|x+5|-12.$$

Как видим, функция зависит от четырёх модулей. Нанесём на числовую ось точки, в которых выражения под модулем обращаются в ноль.

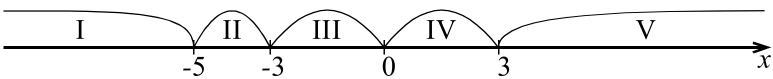


Рис. 36

Получено 5 интервалов (рис. 36). Для построения графика достаточно раскрыть модули в каждом из этих интервалов и построить соответствующую линию. В виде таблицы изобразим знаки подмодульных выражений и вид функции $f(x)$ в рассматриваемых интервалах (граничные точки можно включать в любой из промежутков).

	I	II	III	IV	V
	$(-\infty;-5)$	$[-5;-3)$	$[-3;0)$	$[0;3)$	$[3;+\infty)$
$x-3$	–	–	–	–	+
x	–	–	–	+	+
$x+3$	–	–	+	+	+
$x+5$	–	+	+	+	+
$f(x)$	$3-x-x-x-$ $-3-x-5-$ $-12=-4x-17$	$-x+3-x-x-$ $-3+x+5-12=$ $=-2x-7$	$-x+3-x+x+$ $+3+x+5-12=$ $=-1$	$-x+3-x+x+$ $+3+x+5-12=$ $=2x-1$	$x-3+x+x+$ $+3+x+5-$ $-12=4x-7$

Имеем:

$$f(x)=\begin{cases} -4x-17, \text{ если } x<5; \\ -2x-7, \text{ если } -5\le x<-3; \\ -1, \text{ если } -3\le x<0; \\ 2x-1, \text{ если } 0\le x<3; \\ 4x-7, \text{ если } x\ge 3. \end{cases}$$

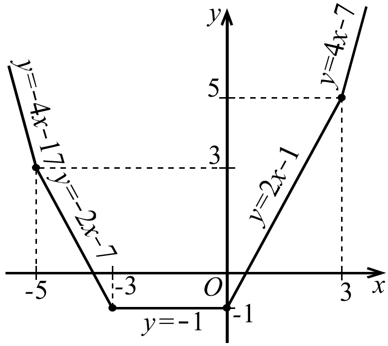


Рис. 37

Итак, график функции $f(x)$ построен (рис. 37). Перед тем как перейти к нахождению наименьшего значения, сделаем небольшое теоретическое отступление.

С помощью графиков удобно исследовать функции на возрастание и убывание. Функцию $y=f(x)$ называют ***строго возрастающей***, если $f(x_1)<f(x_2)$ при $x_1<x_2$. ***Строго убывающие*** функции определяются неравенством $f(x_1)>f(x_2)$ при $x_1<x_2$. Если при $x_1<x_2$ верно $f(x_1)\le f(x_2)$, то функцию $y=f(x)$ называют ***возрастающей***, а если $f(x_2)\le f(x_1)$, то – ***убывающей.*** Для линейных функций признаком возрастания и убывания является знак коэффициента при x. Если этот коэффициент отрицателен, то такая функция строго убывает на данном интервале. В случае положительности коэффициента функция строго возрастает. Таким образом, можно сделать такой вывод.

Характер возрастания (возрастание или убывание) функции вида

$$\boldsymbol{f(x)=c_1|x-a_1|+c_2|x-a_2|+\ \ldots+c_n|x-a_n|},$$

может меняться только в точках $\boldsymbol{x=a_1,a_2,\ldots,a_n}$ (здесь $a_1\le a_2\le$ $\le\ \ldots\le a_n$, а $c_1,c_2,\ldots,c_n$ – некоторые числа). ***Поэтому для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции такого вида сто́ит обратить внимание на то, возрастает или убывает такая функция при*** $\boldsymbol{x<a_1}$ ***и*** $\boldsymbol{x>a_n}$***, а также сравнить значения функции*** $\boldsymbol{f}$ ***в точках*** $\boldsymbol{x=a_1,a_2,\ldots,a_n}$***.***

Возвращаемся к нашей задаче. Как видим, наименьшее значение функции равно -1 и достигается при $x\in[-3;0]$. Чтобы это понять, нужно обратить внимание на знаки коэффициентов при x в разных интервалах в формуле для $f(x)$. Из выражения для $f(x)$ видно, что эта функция убывает при $x < -3$ и возрастает при $x > 0$. А при $x \in [-3; 0]$ как раз и достигается искомый минимум $f(x)$.

Похожую схему рассуждений можно применить и в задачах следующего типа.

Пример 13 (**ЕГЭ**). При каких a неравенство

$$\big||x-2a|+3a\big|+\big||3x+a|-4a\big| \le 5x+\ 24$$

верно при всех $x \in [0; 6]$?

Здесь стоит рассмотреть функцию

$$f(x)=\big||x-2a|+3a\big|+\big||3x+a|-4a\big|-5x.$$

Это кусочно-линейная функция, так как при раскрытии модуля на каждом из интервалов (их число и расположение зависит от a) получается линейная функция. После раскрытия первого модуля при x будет коэффициент ± 1, после раскрытия второго – ± 3. Поскольку $1 + 3 < 5$, то в итоге на каждом интервале знак коэффициента при x будет отрицательным, то есть $f(x)$ строго убывает всюду на числовой прямой. А это означает, что неравенство $f(x) \le 24$ при всех $x \in [0; 6]$ равносильно простому условию $f(0) \le 24$, то есть

$$\big||2a|+3a\big|+\big||a|-4a\big| \le 24.$$

Для решения последнего неравенства относительно a достаточно рассмотреть всего два случая: $a \ge 0$ и $a < 0$. При $a \ge 0$ имеем: $5a + 3a \le 24$, то есть $a \le 3$. При $a < 0$ получаем: $-a - 5a \le 24$, то есть $a \ge -4$.

Ответ: $a \in [-4; 3]$.

Метод областей на координатной плоскости

Аналог метода интервалов на числовой прямой естественно приме́ним и в случае наличия в задаче двух переменных – x и y. Только тогда вместо интервалов на прямой появляются области на координатной плоскости, в которых определены знаки всех подмодульных выражений и можно раскрыть модули.

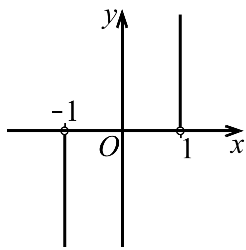


Рис. 38

Пример 14. Изобразим на координатной плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $\frac{|y|}{y} = x|x|$.

Переменных две, поэтому рассматривать нужно четыре области на плоскости xOy, задаваемые системами неравенств:

1) $\begin{cases} x \ge 0, \\ y > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0, \\ y > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \ge 0, \\ y < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0. \end{cases}$

В первом и четвёртом случае после раскрытия модулей получается $x^2 = 1$, то есть $x = \pm 1$. В то же время во втором и третьем случаях получаем $x^2 = -1$, что невозможно на действительной плоскости xOy. После учёта условий на x получаем множество точек, изображённое на рис. 38.

Построение множеств точек на плоскости

Пример 15. Построим множество точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $x^2 + xy = 0$.

Преобразуем уравнение: $x(x + y) = 0$. Таким образом, заданное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x = 0$ или $x + y = 0$ $(y = -x)$. Поэтому искомым множеством точек будет объединение этих двух прямых.

Пример 16. Построим множество точек (x, y) таких, что

$$x^2 + 4x + 4 + 4y^2 = 0.$$

Преобразуем уравнение с помощью выделения полного квадрата: $(x+2)^2 + 4y^2 = 0$. Поскольку точные квадраты неотрицательны, то такому уравнению может удовлетворять лишь одна точка (–2, 0).

Аналогично рассматривается следующий пример, в котором также существенно выделение полного квадрата.

Пример 17. Построим множество точек (x, y) таких, что $|x - y - 1| + x^2 + 2xy + y^2 = 0$. Преобразуем уравнение: $|x - y - 1| = -(x + y)^2$. Так как модуль равен неотрицательному числу, то

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ -(x + y)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

т. е. уравнению снова будет удовлетворять единственная точка (0.5; – 0.5) (см. рис. 39).

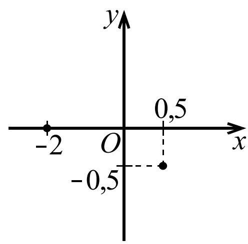


Рис. 39

Множеством точек может быть область на плоскости. Рассмотрим пример.

Пример 18. Построим множество точек (x, y) таких, что

$$\sqrt{(x-3)(y+2)} = \sqrt{3-x}\,\sqrt{-y-2}.$$

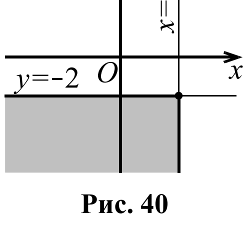


Рис. 40

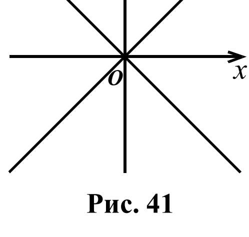


Рис. 41

Равенство $\sqrt{(x-3)(y+2)}$=$\sqrt{3-x}\sqrt{-y-2}$ будет верно для всяких x и y, удовлетворяющих ОДЗ. Поэтому искомым множество точек будет ОДЗ, т. е. часть плоскости, ограниченная двумя прямыми $y=-2$ и $x=3$ (рис. 40).

Покажем ещё пример построения множеств точек, удовлетворяющим уравнениям с модулями.

Пример 19. Построим множество точек, удовлетворяющих $|y|=|x|$.

По определению модуля получаем: $y=\pm x$. Поэтому множество точек – объединение двух прямых линий (рис. 41).

Построение окружности

Одним из самых известных уравнений, допускающих красивую геометрическую интерпретацию, является уравнение вида

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad \text{(ОКР)}$$

Если заданы числа a, b и r, то легко понять, что точка с координатами x и y удовлетворяет такому уравнению тогда и только тогда, когда она удалена от точки $O(a,b)$ на расстояние $|r|$. Поэтому данное уравнение – не что иное, как уравнение окружности с центром в точке $O(a,b)$ и радиусом $|r|$ (при $r=0$ – точки $O(a,b)$). К уравнению окружности (ОКР) часто приводятся уравнения, содержащие обе переменные как в первой, так и во второй степени. Например, приведём уравнение $2x^2+7x+2y^2-5y=0$ к виду (ОКР):

$$2x^2+7x+2y^2-5y=0$$

$$x^2+\frac{7}{2}x+y^2-\frac{5}{2}y=0$$

$$x^2+\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{2\cdot 2}\right)^2+y^2-\frac{5}{2}y+\left(\frac{5}{2\cdot 2}\right)^2=\left(\frac{7}{2\cdot 2}\right)^2+\left(\frac{5}{2\cdot 2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{7}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{74}{16}.$$

Покажем пример построения графика, связанного с уравнением (ОКР).

Пример 20. Построим график функции

$y=\sqrt{5+4x-x^2}$.

Имеем систему:

$$\begin{cases} y\ge 0, \\ y^2=5+4x-x^2; \end{cases} \text{или} \begin{cases} y\ge 0, \\ x^2-4x+y^2=5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\ge 0, \\ (x-2)^2+y^2=9. \end{cases}$$

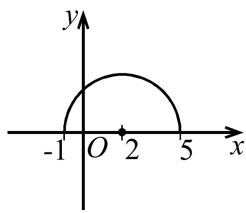


Рис. 42

График данной функции – полуокружность с центром в точке $O(2{,}0)$ и радиусом 3 (рис. 42). Отметим, что здесь также существенно преобразование выделения полного квадрата.

Графики в задачах с параметрами

Покажем, как задачи с параметрами можно решать графически.

Пример 21. Найдём количество решений уравнения

$$\sqrt{5+4|x|-x^2}=a$$

в зависимости от a.

Искомое количество решений совпадает с числом точек пересечения графиков функций

$$f_1(x)=\sqrt{5+4|x|-x^2} \quad \text{и} \quad f_2(x)=a.$$

График первой функции получается из графика функции, который был построен в предыдущем примере. Для этого нужно воспользоваться преобразованием вида ПР1 то есть график $y=f_1(x)$ имеет такой вид, как показано на рис. 43 ($f(0)=\sqrt{5}$).

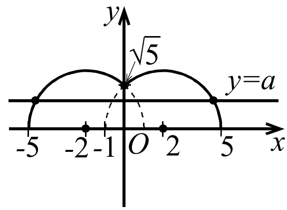


Рис. 43

Графиком функции $y=a$ будет прямая, параллельная оси Ox (рис. 43). При этом она пересекает ось ординат в точке $(0,a)$. Легко видеть, что при $a<0$ и $a>3$ прямая $y=a$ не имеет пересечений с графиком $y=f_1(x)$, при $a=3$ и $a\in[0;\sqrt{5})$ есть две точки пересечения, а при $a\in[\sqrt{5};3)$ – четыре общие точки и при $a=\sqrt{5}$ – три общие точки. Остаётся лишь сформулировать ответ.

Ответ: при $a\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$ решений нет, при $a\in[0;\sqrt{5})\cup\{3\}$ – два решения, при $a\in\{\sqrt{5}\}$ – три решения, при $a\in(\sqrt{5};3)$ – четыре решения.

Пример 22. Найдём количество решений уравнения в зависимости от a:

$$|x+5|+|x-3|=a.$$

Методом интервалов нетрудно построить график функции

$$f(x)=|x+5|+|x-3|.$$

Количество решений уравнения совпадает с числом точек пересечения этого графика с прямой $f(x)=a$ (рис. 44). Проанализировав график, несложно выписать ответ.

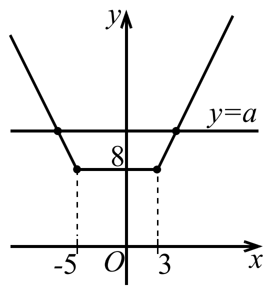


Рис. 44

Ответ: при $a\in(8;+\infty)$ уравнение имеет 2 решения, при $a=8$ уравнение имеет бесконечно много решений, при $a\in(-\infty;8)$ решений нет.

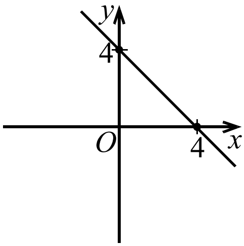
Рассмотрим ещё один пример задач с параметром, где используется построение множеств, задаваемых уравнениями с модулем. Напомним, что ***графиком уравнения*** называют линию на плоскости, на которой лежат те и только те точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Пример 23. Найдём количество решений системы уравнений

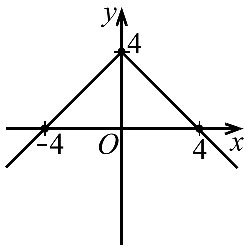
$$\begin{cases} |x| + |y| = 4; \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

в зависимости от a.

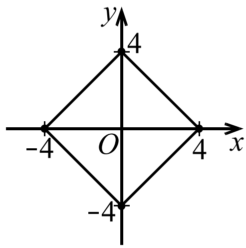
Для решения необходимо построить график уравнения $|x| + |y| = 4$. Это можно сделать, последовательно выполнив построения таких графиков:



1) $y = 4 - x$



2) $y = 4 - |x|$



3) $|y| = 4 - |x|$

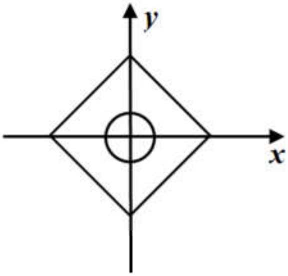
График второго уравнения – окружность с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом $|a|$. Изобразим оба этих графика на координатной плоскости xOy.

Как видим, при $|a| < 2\sqrt{2}$ и $|a| > 4$ графики не пересекаются. При $|a| = 2\sqrt{2}$ или $|a| = 4$ есть 4 точки пересечения. При остальных a есть 8 точек пересечения. Таким образом, можно сформулировать ответ.

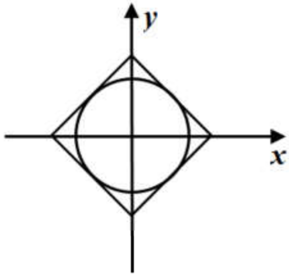
Ответ: при $a \in (-\infty; -4) \cup (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup (4; +\infty)$ система не имеет решений;

при $a \in \{-4;\ -2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2};\ 4\}$ система имеет 4 решения;

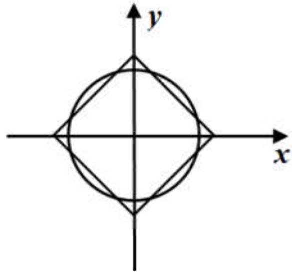
при $a \in (-4; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 4)$ система имеет 8 решений.



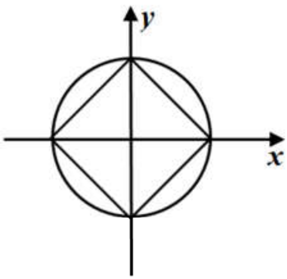
1) $|a| < 2\sqrt{2}$



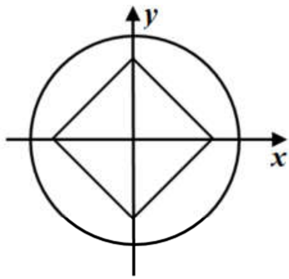
2) $|a| = 2\sqrt{2}$



3) $2\sqrt{2} < |a| < 4$



4) $|a| = 4$



5) $|a| > 4$

($2\sqrt{2}$ – расстояние от центра $O(0,0)$ до стороны квадрата).

В следующей задаче нам потребуется понятие локального экстремума функции. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет ***локальный максимум*** в точке x_0, если для некоторого числа $\varepsilon > 0$ при $|x - x_0| < \varepsilon$ (т. е. числа x и x_0 достаточно близки) верно неравенство $f(x) \le f(x_0)$. Если же для некоторого числа $\varepsilon > 0$ при $|x - x_0| < \varepsilon$ верно $f(x) \ge f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет ***локальный минимум*** в точке x_0. Точки локального максимума или минимума называют точками ***локального экстремума*** функции**.** В случае выполнения неравенств $f(x) \le f(x_0)$ или $f(x) \ge f(x_0)$ для произвольного x точку x_0 называют точкой ***глобального экстремума*** функции. Ясно, что всякий глобальный экстремум будет локальным. Примером такой точки для квадратичной функции будет точка, соответствующая вершине параболы.

Пример 24. (ЕГЭ) При каких a функция $f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$ имеет более двух точек локального экстремума?

$$|x - a^2| = \begin{cases} x - a^2, & \text{если } x \ge a^2, \\ a^2 - x, & \text{если } x < a^2. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 3a^2, & \text{если } x \ge a^2, \\ x^2 - 2x - 3a^2, & \text{если } x < a^2. \end{cases}$$

При $x \geq a^2$ график функции $f(x)$ есть часть параболы $y = x^2 - 8x +$ $+3a^2$, лежащая справа от $x = a^2$, а при $x < a^2$ $f(x) = x^2 - 2x - 3a^2$ и графиком функции будет часть параболы $y = x^2 - 2x - 3a^2$ в полуплоскости слева от прямой $x = a^2$. Наибольшее возможное количество точек экстремума этой функции равно 3 (две вершины парабол и точка их пересечения, см. рис. 45).

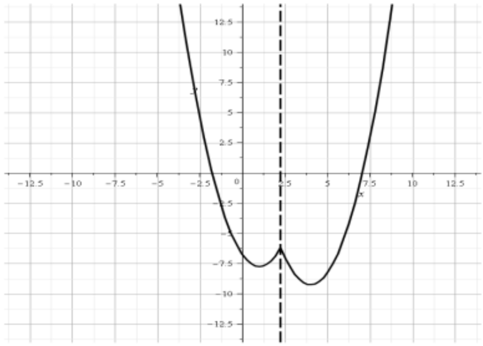


Рис. 45

Это возможно при условии $1 < a^2 < 4,$ то есть $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Ответ: $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Пример 25 (МФТИ, 2000). Найдём все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x - 9} = ax + 7a - 3$$

имеет единственное решение.

Решение. Полагая $x + 7 = t$, получим уравнение

$$\sqrt{t - 16} = at - 3. \qquad (1)$$

Требуется найти все значения a, при которых графики функций $y = \sqrt{t - 16}$ и $y = at - 3$ имеют единственную общую точку. Заметим, что все прямые, задаваемые уравнением $y = at - 3$ проходят через $(0; -3)$ (рис. 46).

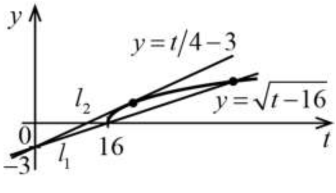


Рис. 46

Ясно, что если $a \leq 0$, то прямая $y = at - 3$ не имеет общих точек с параболой $y = \sqrt{t - 16}$. Угловой коэффициент прямой $y = at - 3$ равен a. Найдём угловые коэффициенты a_1 и a_2 прямых l_1 и l_2 (см. рис. 46) (обе задаются уравнением вида $y = at - 3$), первая из которых проходит через точку (16; 0), а вторая имеет ровно одну общую точку (касается) с линией $y = \sqrt{t - 16}$. Подставляя в уравнение значения $t = 16, y = 0$, находим $a_1 = \frac{3}{16}$. И при $0 < a < \frac{3}{16}$ уравнение (1) имеет единственное решение.

Число a_2 является ещё одним значением a, при котором уравнение (1) имеет единственный корень $t_1 > 16$. Возводя обе части (1) в квадрат, получаем уравнение $a^2t^2 - (6a+1)t + 25 = 0$, дискриминант которого $D = (6a+1)^2 - (10a)^2$. При $D = 0$ и a>0 график $y = at - 3$ касается линии $y = \sqrt{t-16}$ (см. рис. 46). Уравнение $D = 0$ имеет единственный положительный корень $a = \frac{1}{4}$. Следовательно, $a_2 = \frac{1}{4}$. Если $\frac{3}{16} \le a < \frac{1}{4}$, то прямая $y = at - 3$ и парабола $y = \sqrt{t-16}$ имеют две общих точки, а при $a > \frac{1}{4}$ они не имеют общих точек.

Ответ: $0 < a < \frac{3}{16},\ a = \frac{1}{4}$.

В следующем примере нам необходимо будет изобразить точки на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют некоторому неравенству $f(x,y) \le a_0$ для заданной функции двух переменных f и некоторого фиксированного числа a_0. ***Для этого нужно сначала выяснить вид множества точек $f(x,y) = a$ при различных значениях a и заштриховать все точки координатной плоскости, принадлежащие линиям $f(x,y) = a$ при $a \le a_0$.*** Часто это бывает область на плоскости внутри, либо вне некоторой фигуры, которая задаётся равенством $f(x,y) = a$. Например, неравенство $f(x,y) = (x-1)^2 + (y+1)^2 \le 1$ задаёт круг радиуса 1 с центром в точке A(1, –1).

Рассмотрим пример использования этого правила в задаче.

Пример 26 (МФТИ, 2009). Найдём все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 31 \le 8(|x| + |y|), \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Неравенство системы после выделения полных квадратов можно записать в виде $x^2 - 8|x| + 16 + y^2 - 8|y| + 16 \le 1$ или $(|x| - 4)^2 + (|y| - 4)^2 \le 1$. Множество E решений этого неравенства – объединение кругов K_1, K_2, K_3, K_4 (вместе с их границами) радиуса 1 (см. рис. 47) с центрами $O_1(4;4), O_2(4;-4), O_3(-4;-4), O_4(-4;4)$. Запишем уравнение системы в виде

$$x^2 + (y-1)^2 = a^2.$$

Это уравнение задаёт окружность L радиуса $|a|$ с центром в точке $M(0;1)$ или точку $(0;1)$ при $a = 0$. Исходная система имеет хотя бы одно решение при тех значениях a, при которых окружность L имеет общие точки с множеством E. При этом ввиду симметричного расположения соответствующих пар кругов относительно оси ординат достаточно выяснить, при каких значениях a окружность L имеет общие точки с кругами, центрами которых являются точки O_1 и O_2. Проведём из точки M лучи l_1 и l_2 в направлении точек O_1 и O_2. Пусть A_1 и B_1 – точки пересечения l_1 и окружности с центром O_1, A_2 и B_2 – точки пересечения l_2 и окружности с центром O_2. Тогда из геометрических соображений имеем:

$$MO_1 = 5,\ MO_2 = \sqrt{25+16} = \sqrt{41},$$
$$MA_1 = 4,\quad MB_1 = 6,\quad MA_2 = \sqrt{41} - 1,$$
$$MB_2 = \sqrt{41} + 1.$$

При $4 \le |a| \le 6$ окружность с центром M имеет общие точки с кругом ω_1, а при $\sqrt{41} - 1 \le |a| \le \sqrt{41} + 1$ – с кругом ω_2.

Так как $4 < \sqrt{41} - 1 < 6$, то объединение отрезков $[4; 6]$ и $[\sqrt{41} - 1; \sqrt{41} + 1]$ есть отрезок $[4; \sqrt{41} + 1]$, а искомое множество значений a определяется неравенством $4 \le |a| \le \sqrt{41} + 1$.

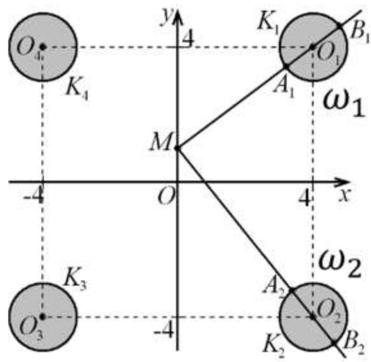


Рис. 47

Ответ: $4 \le |a| \le \sqrt{41} + 1$.

Пример 27 (МФТИ, 2011). Найдём все значения параметра b, при которых система уравнений $\begin{cases} y = |b - x^2|, \\ y = a(x - b) \end{cases}$ имеет решение при любом значении параметра a.

Решение. Рассмотрим три возможных случая: $b < 0$, $b = 0$, а также $b > 0$.

а) Если $b < 0$, то запишем систему в виде $\begin{cases} y = x^2 + d, \\ y = a(x + d), \end{cases}$ где $d = -b > 0$. Эта система не имеет решений при $a = 0$ и поэтому $b < 0$ не подходит.

б) Если $b = 0$, то система примет вид $\begin{cases} y = x^2, \\ y = ax. \end{cases}$ Легко видеть, что она имеет решение $(0; 0)$ при любом a, т. е. значение $b = 0$ подходит.

в) Пусть $b > 0$. Теперь мы прибегнем к графическому методу. Рассмотрим два случая: $0 < b \le 1$ и $b > 1$. Если $b > 1$, то $\sqrt{b} < b$. Пусть $a = 1$, тогда система примет вид $\begin{cases} y = |x^2 - b|, \\ y = x - b. \end{cases}$

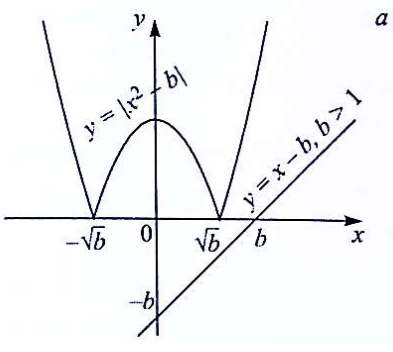


Рис. 48

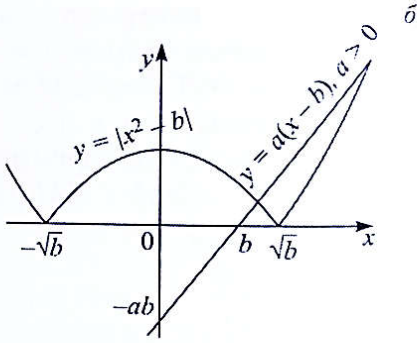


Рис. 49

Эта система не имеет решений, так как прямая $y = x - b$ не пересекает график функции $y = |x^2 - b|$ (см. рис. 48). Если $0 < b \leq 1$, то $\sqrt{b} \geq b$. В этом случае прямая $y = a(x - b)$ пересекает график функции $y = |x^2 - b|$ при любом a (на рис. 49 представлен случай $a > 0$).

Ответ: $0 \leq b \leq 1$.

В завершении разберём несколько задач с параметрами, которые удобно решать методом областей на координатной плоскости.

Пример 28 (МФТИ, 2021). На плоскости XOYданы точка A, координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$, и парабола с вершиной в точке B, заданная уравнением $ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x - y = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

Решение. Преобразуем первое уравнение:

$$(4y^2 + 4(2x - 5a)y) + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0,$$

$$((2y)^2 + 2 \cdot 2y(2x - 5a) + (2x - 5a)^2) - (2x - 5a)^2 + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0,$$

$$(2y + 2x - 5a)^2 + x^2 - 2ax + a^2 = 0,$$

$$(2y + 2x - 5a)^2 + (x - a)^2 = 0.$$

Поскольку сумма квадратов действительных чисел есть 0 в том и только в том случае, когда они оба нули, то координаты точки $A(x_A; y_A)$ удовлетворяют равенствам $2y + 2x - 5a = 0$ и $x - a = 0$. Это означает, что $x_A = a$, $y_A = \frac{3a}{2}$. Раз второе уравнение задаёт параболу, то $a \neq 0$. При этом условии второе уравнение можно переписать в виде $y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a}$. Поэтому координаты точки B следующие: $x_B = -a$, $y_B = \frac{1}{a}$.

Обозначим $f(x, y) = 3x - y - 4$. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x - y - 4 = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x_A, y_A)$ и $f(x_B, y_B)$ есть числа разных знаков. Это равносильно неравенству

$$f(x_A, y_A) \cdot f(x_B, y_B) < 0.$$

Далее, цепочкой простейших преобразований получаем

$$\left(3a - \frac{3a}{2} - 4\right)\left(-3a - \frac{1}{a} - 4\right) < 0,$$

$$\left(\frac{3a}{2} - (3a - 4)\right)\left(\frac{1}{a} - (-3a - 4)\right) < 0,$$

$$\frac{3}{2}+\frac{3a(3a+4)}{2}-\frac{3a-4}{a}+(3a-4)(-3a-4)<0,$$

$$\frac{3(3a^2+4a+1)}{2}-\frac{(3a-4)(3a^2+4a+1)}{a}<0,$$

$$\frac{3a^2+4a+1}{a}\left(\frac{3a}{2}-(3a-4)\right)<0,$$

$$-\frac{(3a+1)(a+1)}{a}\cdot\frac{3a-8}{2}<0,$$

$$\frac{(3a+1)(a+1)(3a-8)}{a}>0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ.

Ответ. $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$.

Пример 29 (МФТИ, 2016). Найдём все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(|y+9|+|x+2|-2)(x^2+y^2-3)=0,\\ (x+2)^2+(y+4)^2=a\end{cases}$$ имеет ровно три решения.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y+9|+|x+2|=2$ и $x^2+y^2=3$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-2;-9)$, диагонали которого равны 4 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0;0)$ радиуса $\sqrt{3}$ (см. рис. 50).

Второе уравнение исходной системы при $a>0$ задаёт окружность Ω с центром $(-2;-4)$ радиуса $R=\sqrt{a}$.

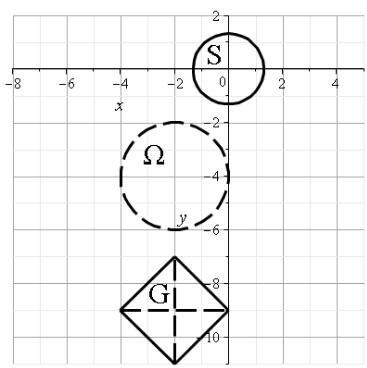


Рис. 50

Отметим, что при $a<0$ второе уравнение задаёт пустое множество, при $a=0$ одну точку $(-2;-4)$. Поэтому при $a\le 0$ трёх решений быть не может.

Рассмотрев случаи внешнего и внутреннего касания окружностей Ω и S, можно заключить, что они имеют ровно 1 общую точку при $R=\sqrt{20}\pm\sqrt{3}$, ровно 2 общие точки при $R\in\left(\sqrt{20}-\sqrt{3};\sqrt{20}+\sqrt{3}\right)$ и ни одной общей точки при остальных R. Поскольку центры окружности Ω и квадрата G лежат на прямой $x=-2$, то Ω

и G имеют ровно 1 общую точку при $R = 3$ или $R = 7$, ровно 2 общие точки при $R \in (3; 7)$ и ни одной общей точки при остальных значениях R. Для того чтобы у системы было 3 решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела 2 общие точки с квадратом G и 1 общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R, при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно 1 общую точку.

1) $R = \sqrt{20} + \sqrt{3}$. Тогда есть ровно 1 общая точка с окружностью S и ровно 2 общие точки с квадратом G (т. к. $3 < \sqrt{20} - \sqrt{3} < 7$), т. е. у системы 3 решения.

2) $R = \sqrt{20} - \sqrt{3}$. Тогда есть ровно 1 общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т. к. $\sqrt{20} + \sqrt{3} < 3$), т. е. у системы 1 решение.

3) $R = 3$. Тогда есть ровно 1 общая точка с квадратом G и ровно 2 общие точки с окружностью S (т. к. $\sqrt{20} - \sqrt{3} < 3 < \sqrt{20} + \sqrt{3}$), т. е. у системы 3 решения.

4) $R = 7$. Тогда есть ровно 1 общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т. к. $7 > \sqrt{20} + \sqrt{3}$), т. е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R = 3$ и $R = \sqrt{20} + \sqrt{3}$. Тогда искомые значения параметра $a = 3^2 = 9$ и $a = (\sqrt{20} + \sqrt{3})^2 = 23 + 4\sqrt{15}$.

Ответ: $a = 9, a = 23 + 4\sqrt{15}$.

Пример 30. В зависимости от значений параметра *a* найдём количество решений уравнения

$$a + [x] = \sqrt{2x - x^2}.$$

Решение. Количество решений соответствует количеству общих точек графиков $y = a + [x]$ и $y = \sqrt{2x - x^2}$. (рис. 51).

$$y = \sqrt{2x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

График функции $y = a + [x]$ представлен на рисунке ниже (рис. 52).

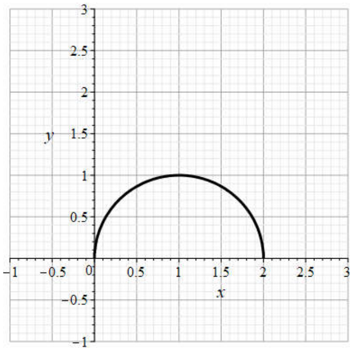


Рис. 51

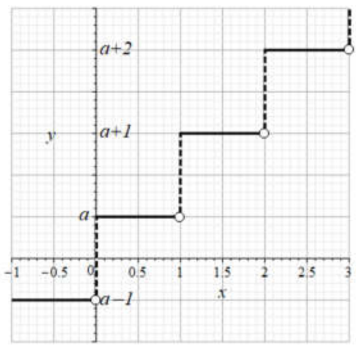


Рис. 52

Общие точки возможны лишь при $x \in [0; 2]$. Рассмотрим несколько случаев расположения графиков.

1) Если $0 \leq x < 1$, то $y = a + [x] = a$. В этом случае возможна одна общая точка с полуокружностью $y = \sqrt{2x - x^2}$ при $0 \leq a < 1$.

2) Если $1 \leq x < 2$, то $y = a + [x] = a + 1$. Теперь одна общая точка возможна при $0 < a + 1 \leq 1$, то есть $-1 < a \leq 0$.

3) Если $x = 2$, то $y = a + [x] = a + 2$. Точка $(2; a + 2)$ лежит на графике $y = \sqrt{2x - x^2} \Leftrightarrow a = -2$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [1; +\infty)$ нет решений, при $a \in \{-2\} \cup (-1; 0) \cup (0; 1)$ одно решение, при $a = 0$ два решения.

Контрольные вопросы

1(2). Постройте графики следующих функций.

а)(1) $y = \frac{x^2-1}{x-\frac{1}{x}}$. **б)(1)** $y = \begin{cases} -\frac{1}{1-x}, 0 \leq x \leq 2, \\ x - 1, \text{в противном случае.} \end{cases}$

2(4). Постройте графики следующих функций.

а)(1) $y = |x| - \frac{x}{2}$. **б)(1)** $y = \frac{x^2}{|x|}$. **в)(1)** $y = \frac{4-x^2}{|x|-2}$.

г)(1) $y = 2 - \frac{|x-1|}{2}$.

3(10). С помощью преобразований графиков функций постройте графики следующих функций.

а)(2) $y = |x^2 - 4|x| + 2|$. **б)(2)** $y = \left|\frac{x}{|x|-2x+2}\right|$.

в)(2) $y = \frac{3-x}{x-2}$. **г)(2)** $y = -\sqrt{4|x| + 5 - x^2}$.

д)(2) $y = \frac{|3-|1-x||}{2}$.

4(6). Постройте множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям.

а)(1) $2\frac{x^2}{y} - x^3 = 0$. **б)(1)** $y = \frac{x^2+y^2}{4} + x + 1$.

в)(1) $-\frac{|2x+y-1|+(x+1)^2}{4y} = x + y + 1$. **г)(1)** $2|x| + |y| = 4$.

д)(1) $\left|\frac{y+1}{2}\right| = 1 - x$. **е)(1)** $y|x| = \frac{|y|}{y+2}$.

5(3). Постройте графики следующих уравнений.

а)(1) $x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| - 2 = 0$.

б)(1) $\left|\frac{x}{3} - y\right| = |x + 3y|$.

в)(1) $\sqrt{(x-1)(1-y)} = \sqrt{1-x}\sqrt{y-1}$.

6 (2). Изобразите на плоскости Oxy множество точек.

$$\begin{cases} y \le -x^2 + 2x + 2, \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 \le 4. \end{cases}$$

7(2) (МГУ, мехмат, 2007). Графики функций $f(x) = 3x^2 - 5$ и $g(x) = \frac{x^2}{4} - x$ пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, походящей через те же точки.

8(2). В зависимости от значений параметра a найдите количество решений системы

$$\begin{cases} -|ax| + y = 2, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

9(3) (ЕГЭ). При каких a функция $f(x) = x^2 - 4|x - a^2| - 6x$ имеет хотя бы одну точку максимума?

10(3) (ЕГЭ). Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог в два раза (до $t_1 = 2t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге равном t рублей за единицу товара объем производства товара составляет $15\,000 - 3t$ единиц, если это число положительно?

Задачи

1(3). В зависимости от параметра a найдите количество решений уравнения

$$x^2 - 8|x| = a^2 - 20.$$

2(6). Постройте графики следующих функций.

а) (3) $f(x) = [2x - 0.8]$. **б) (3)** $f(x) = \{2x + 0.4\}$.

3(4) (ЕГЭ). Найдите все значения a, при которых уравнение

$$10a + \sqrt{-48 + 14x - x^2} = ax + 1$$

имеет единственный корень.

4(4) (ЕГЭ). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений имеет единственное решение.

$$\begin{cases}(x - 3a - 2)^2 + (y - a + 1)^2 = 25,\\(x - 2a - 1)^2 + (y - a + 1)^2 = 81.\end{cases}$$

5(5). Найдите количество решений следующего уравнения в зависимости от значений параметра a (где $[x]$ – целая часть числа x).

$$a + [x] = -\sqrt{9 - x^2}.$$

6(6). Для произвольного значения параметра a укажите количество различных корней уравнения

$$(a^2 - 1)x^{-2} - (a + 1)|x|^{-1} + a = -1.$$

7(6) (ЕГЭ). При каких a уравнение

$$\left|x + \frac{a^2}{x} + 1\right| + \left|x + \frac{a^2}{x} - 1\right| = 2$$

имеет хотя бы один корень?

8(6) (МФТИ, 2021). Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек $(x; y)$, таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2, \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b; 2). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M.

9(6) (МФТИ, 2021). На плоскости Oxy даны точка A, координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$, и окружность с центром в точке B, заданная уравнением $a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $y=1$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

10(6) (МФТИ, 2020). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y+6-x|+|y+6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

11(6) (ЕГЭ). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x)=|a+3|\sqrt[3]{x}$ имеет четыре решения, где f – четная периодическая функция с периодом $T=\frac{16}{3}$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x)=ax^2$, если $0 \le x \le \frac{8}{3}$.