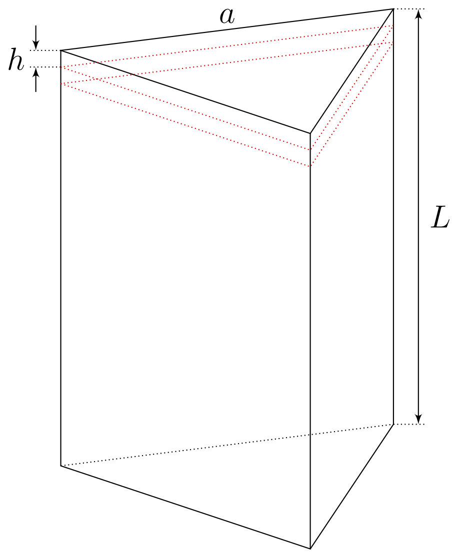
# Спасибо, что не куб

Тело в виде правильной треугольной призмы (стороны треугольника в основании $a$) высотой $L$ состоит из чётного количества заряженных правильных треугольных призм с высотой $h$. Объёмные плотности зарядов призм чередуются ($\rho$, $-\rho$, $\rho$, $-\rho$, и т. д.). Определите осевую составляющую силы $F$ (вдоль оси призмы), которая будет действовать со стороны тела на равномерно заряженную с зарядом $q$ тонкую квадратную пластинку со стороной $b$, если центр пластинки поместить на высоте $a$ от верхней грани призмы на её оси и расположить так, чтобы угол между осью призмы и нормалью к поверхности пластины был равен $\varphi = 30°$. Известно, что $h \ll a \ll b \ll L$.




*Автор задачи: А. А. Киреев*

# Решение

Воспользуемся методом виртуальных перемещений. Пусть мы отдалили призму от квадрата вдоль её оси, так что модуль смещения равен $2h$, то есть положительные слои переходят в положительные, а отрицательные — в отрицательные. Тогда изменение потенциальной энергии электрического взаимодействия по модулю равно работе электрической силы по перемещению

$$\delta W = -\delta A = -2hF,$$

где $F$ — искомая осевая компоненты силы, остающаяся примерно постоянной в течение перемещения.

Изменение энергии можно посчитать напрямую, ведь перемещение всей призмы эквивалентно перемещению двух верхних слоёв вниз на расстояние $L$. Пара этих слоёв является диполем с дипольным моментом

$$p = hq_{\text{слоя}} = h^2 S\rho,$$

где $S$ — площадь основания призмы. Изначально этот диполь помещён в однородное поле квадратной пластины ($a \ll b$), так что его потенциальная энергия задаётся выражением

$$W = -\left(\vec{E}, \vec{p}\right) = \frac{q}{2\varepsilon_0 b^2} h^2 S\rho\cos\varphi.$$

Энергией взаимодействия квадрата с диполем внизу призмы можно пренебречь, так как характерное расстояние между точками изменилось как минимум в $L/b \gg 1$ раз. Таким образом, можно считать, что $\delta W = 0 - W$. Геометрические параметры призмы

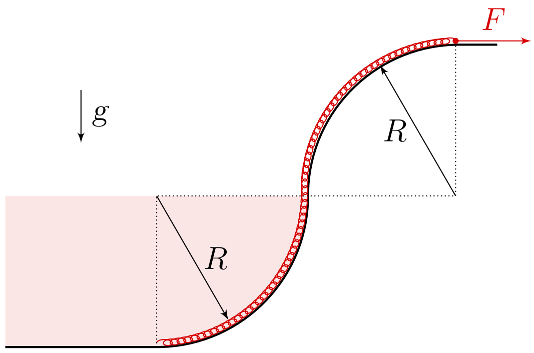
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2; \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Окончательно получаем

$$F = \frac{3}{32\varepsilon_0}\frac{q\rho h a^2}{b^2}.$$

# Альтернативная задача

1. *(5 баллов)* На гладкой поверхности лежит тонкая массивная цепочка массой $M$ (см. рис.). Нижняя половина цепочки находится в жидкости с плотностью втрое меньшей плотности материала цепочки. Поверхность состоит из двух частей, представляющих из себя четверти окружности одинакового радиуса. Какую силу $F$ необходимо приложить к верхнему концу цепочки, чтобы она не скользила? Ускорение свободного падения $g$.




2. *(5 баллов)* Соленоид имеет форму цилиндра площадью $S$ с плотностью намотки витков $n = N/l$. По соленоиду течёт ток $I$. В соленоид до середины вставлен стержень площадью $S$ с магнитной проницаемостью $\mu$. Найдите силу с которой стержень втягивается в соленоид.

# Решение альтернативной задачи

**1.** Воспользуемся методом виртуальных перемещений. Сместим цепочку на малую величину $x$, запишем ЗСЭ для цепочки

$$\sum A_{\text{внешн}} = 0.$$

На цепочку действуют четыре внешние силы: сила тяжести $Mg$, сила реакции опоры $N$, сила Архимеда $F_{\text{a}}$, искомая сила $F$, тогда

$$A_{mg} + A_{F_{\text{a}}} + A_N + A_{\text{F}} = 0.$$

Работа сил реакции опоры равна нулю, так как в каждой точке цепочки она направлена перпендикулярно касательной к поверхности. Работу силы тяжести можно найти как изменение потенциальной энергии кусочка $x$ со знаком минус (работа силы тяжести отрицательная)

$$A_{mg} = -mg2R = -\frac{M}{\pi R}xg2R.$$

Здесь мы использовали линейную плотность цепочки $\dfrac{M}{\pi R}$. Работа силы $F$ рассчитывается легко $A_F = Fx$ (сила сонаправлена с перемещением цепочки). Рассчитаем работу силы Архимеда, работа силы Архимеда равна изменению потенциальной энергии малого участка воды, занявшего свободное пространство

$$A_{F_{\text{a}}} = R\rho g dV = \frac{M}{3\pi R}xgR.$$

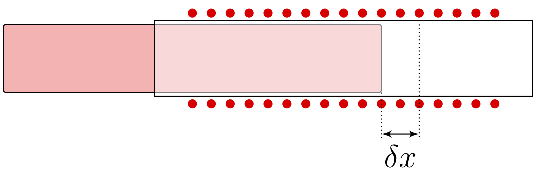
Получаем уравнение

$$Fx = \frac{M}{\pi R}xg2R - \frac{M}{3\pi R}xgR.$$

Окончательный ответ

$$F = \frac{5Mg}{3\pi}.$$

**2.** Будем предполагать, что ток в соленоиде неизменный.




Воспользуемся методом виртуальных перемещений для вычисления силы.

$$\delta A_{\text{поле}} = f\delta x = dW.$$

При смещении стержня на $\delta x$ изменяется магнитный поток, поскольку часть объёма соленоида заполняется веществом с магнитной проницаемостью $\mu$, и в этой части меняется индукция магнитного поля $B$. Энергия магнитного поля

$$W = \frac{I\Phi}{2}.$$

Получаем (при условии $I = \text{const}$), что

$$dW = \frac{Id\Phi}{2}.$$

Индукция внутри идеального однородного соленоида равна

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

Здесь $n$ — плотность намотки, $\mu$ — магнитная проницаемость среды соленоида.

Найдём теперь изменение магнитного потока при смещении стержня на $\delta x$. Магнитный поток $\Phi = BS$ меняется за счёт уменьшения длины области соленоида, в которой $\mu = 1$. При смещении стержня на $\delta x$ число витков соленоида, создающих поле в вакуумной части, уменьшается на $n\delta x$. На столько же увеличивается число витков в части соленоида, заполненной средой с магнитной проницаемостью $\mu$. Поэтому

$$d\Phi = n\delta x \left(BS\right)_{\text{стержень}} - n\delta x \left(BS\right)_{\text{вакуум}},$$

где $BS$ — поток через один виток. Если исключить из рассмотрения области неоднородно поля вблизи границы раздела сред и концов соленоида, объём которых практически не меняется, то

$$B_{\text{стержень}} = \mu\mu_0 nI; \quad B_{\text{вакуум}} = \mu_0 nI.$$

Поэтому

$$d\Phi = n\delta x(\mu - 1)\mu_0 nIS.$$

Подставляя это выражение в $dW$, получим

$$dW = \frac{n^2\delta x(\mu - 1)\mu_0 I^2 S}{2}.$$

Отсюда находим выражение для силы, действующей на стержень

$$f = \frac{n^2\mu_0 I^2 S}{2}(\mu - 1).$$

Отсюда, в частности, следует, что при $\mu > 1$ сила положительна — стержень втягивается в соленоид, а при $\mu < 1$ сила отрицательная — стержень выталкивается из соленоида. Первый случай описывает поведение парамагнетиков, а второй — диамагнетиков.