Лекция 12

ПРИВЕДЕНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

§ 1. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — это исходная декартова прямоугольная система координат на ориентированной плоскости, а $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ — это другая прямоугольная декартова система координат. Нужно получить формулы, связывающие координаты одной и той же точки в этих системах координат:

$$M(x, y) \quad \text{и} \quad M(x', y').$$

Сначала рассмотрим случай $O' = O$. Рассмотрим две системы полярных координат, связанных с системой координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и «повёрнутой» системой координат $\{O, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$: Пусть (ρ, φ) — это поляр-

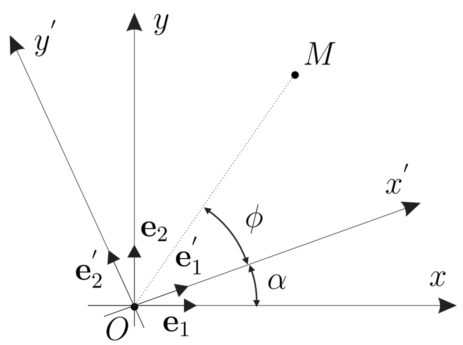

Рис. 1. Системы координат.

ные координаты точки M относительно системы координат $\{O, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$, т. е. с полярной осью Ox'. [1] Тогда $(\rho, \varphi + \alpha)$ — это полярные коорди-

[1] Здесь имеется в виду, что $\varphi \in [0, 2\pi)$ — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox' до радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$.

наты той же точки относительно системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, т. е. с полярной осью Ox. [1]) Тогда имеют место следующие формулы:

$$x = \rho\cos(\varphi + \alpha), \quad y = \rho\sin(\varphi + \alpha), \tag{1.1}$$

$$x' = \rho\cos\varphi, \quad y' = \rho\sin\varphi. \tag{1.2}$$

Справедливы следующие две цепочки равенств:

$$x = \rho\cos(\varphi + \alpha) = \rho\cos\varphi\cos\alpha - \rho\sin\varphi\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \tag{1.3}$$

$$y = \rho\sin(\varphi + \alpha) = \rho\sin\varphi\cos\alpha + \rho\cos\varphi\sin\alpha = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha. \tag{1.4}$$

Итоговые формулы (1.3) и (1.4) можно записать в следующем компактном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Теперь опять в случае $O' = O$ нужно получить формулы, связывающие базисы $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$: По правилу треугольника имеем

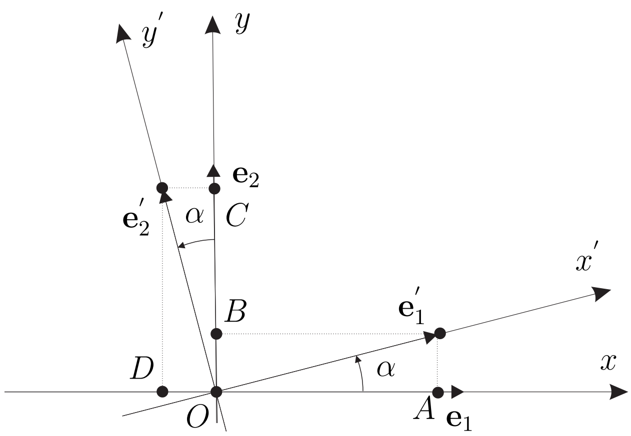

Рис. 2. Базисные векторы.

$$\mathbf{e}_1' = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OA} = OA \cdot \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{OB} = OB \cdot \mathbf{e}_2. \tag{1.6}$$

Справедливы следующие равенства:

$$OA = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}_1'||\mathbf{e}_1|\cos\alpha = \cos\alpha, \tag{1.7}$$

$$OB = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_1'||\mathbf{e}_2|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \tag{1.8}$$

[1]) Угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ и отсчитывается от оси Ox до оси Ox' против часовой стрелки.

где угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угол между осью Ox и осью Ox', отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox. Следовательно, из равенств (1.6)–(1.8) получаем равенство

$$\mathbf{e}_1' = \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\alpha \cdot \mathbf{e}_2. \tag{1.9}$$

Для вектора $\mathbf{e}_2^{'}$ справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{e}_2^{'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}. \tag{1.10}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{OC} = OC \cdot \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{OD} = OD \cdot \mathbf{e}_1, \tag{1.11}$$

$$OC = (\mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_2^{'}||\mathbf{e}_2| \cos\alpha, \tag{1.12}$$

$$OD = (\mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}_2^{'}||\mathbf{e}_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right). \tag{1.13}$$

Итак, из равенств (1.10)–(1.13) вытекает искомое выражение

$$\mathbf{e}_2^{'} = -\sin\alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_2. \tag{1.14}$$

Равенства (1.9) и (1.14) можно переписать в компактной форме с учётом правила умножения строчки на матрицу:

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

□ Действительно, согласно правилу «строчка на столбец» получим следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= (\mathbf{e}_1 \cdot \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \sin\alpha, -\mathbf{e}_1 \cdot \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \cos\alpha), \tag{1.16}$$

а из равенства строчек

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1 \cdot \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \sin\alpha, -\mathbf{e}_1 \cdot \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \cos\alpha)$$

мы получим равенства (1.9) и (1.14). ⊠

Теперь мы рассмотрим общую ситуацию: $O^{'} \neq O$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M}. \tag{1.17}$$

Пусть

$$\overrightarrow{OO^{'}} = \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \beta \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

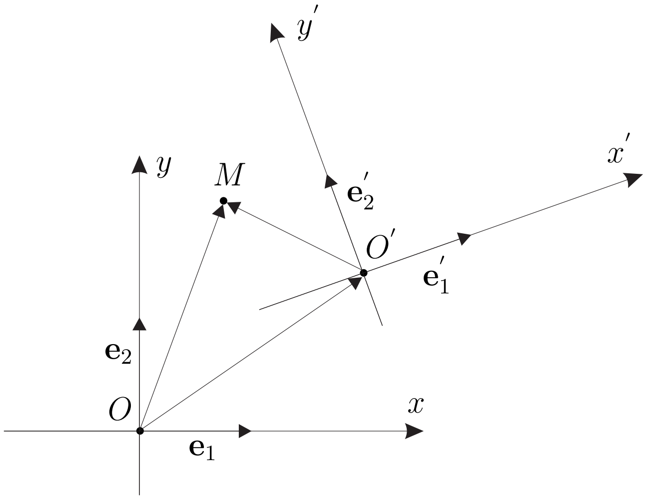

Рис. 3. Поворот и сдвиг системы координат.

$$\overrightarrow{O'M} = x' \cdot \mathbf{e}_1' + y' \cdot \mathbf{e}_2' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Из равенств (1.17)–(1.20) и из выражения (1.15) вытекает следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \\ + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.22}$$

□ Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + d_1\mathbf{e}_1 + d_2\mathbf{e}_2 = \\ = (c_1 + d_1)\mathbf{e}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \end{pmatrix} = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \quad \boxtimes$$

Произведение

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

— это некоторый столбец. Поэтому из равенства (1.21) в силу свойства (1.22) приходим к следующему равенству:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \tag{1.23}$$

где

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Заметим, что согласно правилу умножения «строчка на столбец» имеем

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2,$$

а в силу (1.23) мы приходим к следующему равенству:

$$z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \tag{1.25}$$

которое в силу линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ эквивалентно равенствам

$$z_1 = z_2 = 0.$$

Отсюда и из (1.24) получаем искомое равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

или в развёрнутой форме

$$x = x_0 + \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y',$$
$$y = y_0 + \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y'.$$

§ 2. Матричная форма записи преобразований на плоскости в однородных координатах

Введём следующие обозначения:

$$R := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Тогда матричное уравнение (1.26) с учётом обозначений (2.1), (2.2) можно переписать в следующей компактной матричной форме записи:

$$X = X_0 + RX'. \tag{2.3}$$

Отметим, что справедливо следующее утверждение:
Лемма 1. *Имеет место равенства* $|R| = 1$ *и* $R^T = R^{-1}$.