

Вписанные углы.

Угол между касательной и хордой.

1. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E ; AM – биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AE = EM$.
2. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M , проведена общая касательная. Докажите, что если A и B – точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$.
3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K . Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK , параллельна CD .
4. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC , M – середина AB . Окружность, описанная около треугольника AMA_1 , пересекает прямую A_1B_1 в точке X . Докажите, что AX – касательная к описанной окружности треугольника ABC .
5. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Точка M – середина BC . Докажите, что:
 - (a) касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC параллельна прямой B_1C_1 ;
 - (b) прямые MB_1 и MC_1 касаются описанной окружности треугольника AB_1C_1 .
6. Две прямые, касающиеся данной окружности в точках A и B , пересекаются в точке C . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.
7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высота из вершины A и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведённой из вершины A .
8. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB , проходящую через точки A_1 и B_1 , в точке D . Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M , BD и AA_1 – в точке N . Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

Биссектриса делит дугу пополам.

1. Отрезок AM – биссектриса треугольника ABC . Точка D принадлежит стороне AC , причём $\angle DMC = \angle BAC$. Докажите, что $BM = MD$.
2. Из точки A , расположенной вне окружности, проведены две касательные AM и AN (M и N – точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках P и Q . Пусть L – середина PQ . Докажите, что $\angle MLA = \angle NLA$.
3. В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины C , тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.
4.
 - (a) Восстановите треугольник по точкам пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведёнными из одной вершины.
 - (b) Объясните, как построить треугольник, если даны три отрезка, равные медиане, биссектрисе и высоте, проведённым из одной вершины.
5. Восстановите треугольник ABC по его инцентру (центру вписанной окружности), середине стороны BC и основанию биссектрисы, проведённой из вершины угла A .