Кубик ЛФИ

11.s02.e02

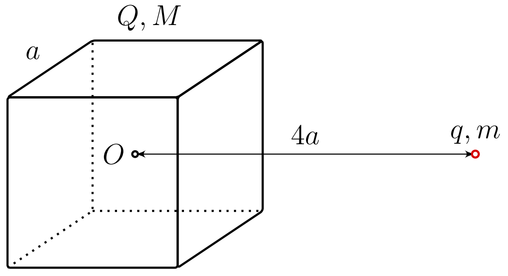
В Боге — три лица,
как у куба — шесть квадратов,
хотя он — одно тело.
Клайв Стейплз Льюис

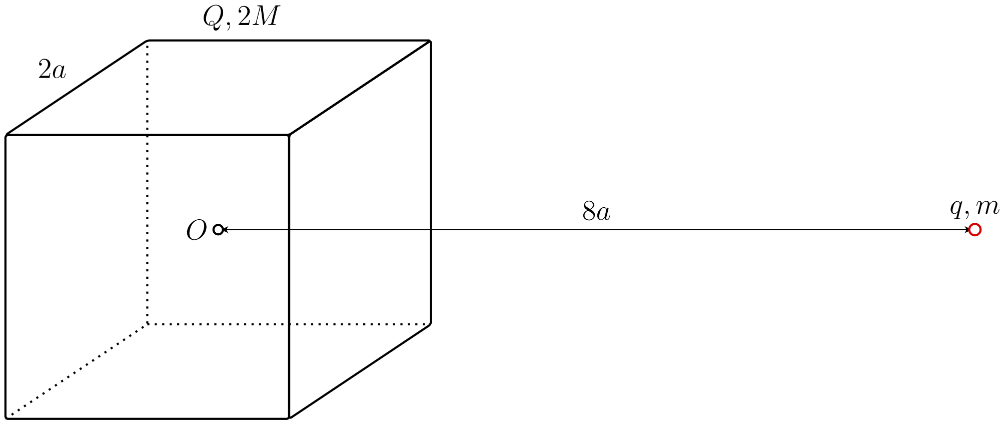
Кубик в кубе

На расстоянии $4a$ от сплошного идеально проводящего Кубика со стороной a и зарядом Q на линии, проходящей через центр Кубика и центр одной из его граней, располагается точечный заряд q (см. рис.). Масса Кубика M, масса заряда m. Начальные скорости Кубика и заряда равны нулю. Кубик и заряд отпускают, в результате чего расстояние между ними изменяется в два раза за время t.

Найдите время, за которое в два раза изменится расстояние между таким же точечным зарядом и идеально проводящим Кубиком со стороной $2a$, массой $2M$ и зарядом Q, если заряд располагается на линии, проходящей через центр Кубика и центр одной из его граней на расстоянии $8a$ (см. рис.). Начальные скорости Кубика и заряда равны нулю.

Примечание. Расстояние между Кубиком и зарядом измеряется от центра Кубика. Гравитационным и магнитным взаимодействием пренебречь.

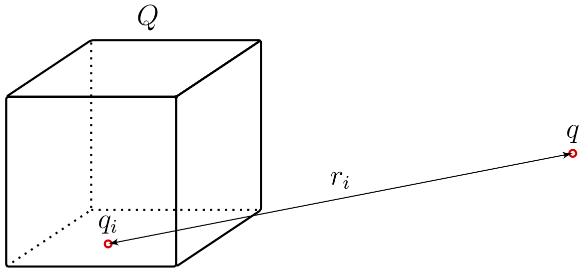




Решение

Способ 1

1. Найдём скорость сближения Кубика и точечного заряда. Для этого воспользуемся законами сохранения импульса и энергии.



Система Кубик и точечный заряд замкнута, следовательно суммарный импульс системы остаётся постоянным и равным нулю, откуда

$$mu_1 = Mv_1.$$

Здесь u_1 — скорость точечного заряда, v_1 — скорость Кубика. Кинетическая энергия всей системы равна

$$K = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

Потенциальная кулоновского взаимодействия по определению равна

$$\Pi = \sum_i \frac{kq_i q}{r_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j:i\neq j} \frac{kq_i q_j}{r_{ij}}.$$

Здесь первое слагаемое отвечает за взаимодействие Кубика и точки, второе слагаемое — энергия взаимодействия зарядов на Кубике, q_i и q_j — заряды маленьких кусочков Кубика, находящимися на расстоянии r_{ij} друг от друга.

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{Mv_1^2}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right) + \Pi = \Pi_0; \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2m}{M(m+M)}\left(\Pi_0 - \Pi\right)}.$$

Тогда скорость сближения равна

$$v_{\text{отн}} = v_1 + v_2 = \sqrt{\frac{2m}{M(m+M)}\left(\Pi_0 - \Pi\right)}\left(1 + \frac{M}{m}\right) = \sqrt{\frac{2(m+M)}{mM}\left(\Pi_0 - \Pi\right)} = \sqrt{2\frac{\Pi_0 - \Pi}{\mu}},$$

где $\mu = \frac{mM}{m+M}$ — приведённая масса системы.

Замечание. Этот результат можно написать сразу, если воспользоваться тем факто, что в системе отсчета, где центр масс покоится кинетическая энергия всей системы равна:

$$K = \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2}.$$

2. Для рассмотрения второго случая воспользуемся подобием задачи: $m \to m$; $M \to 2M$, $r \to 2r$; $a \to 2a$; $Q \to Q$. Заметим, что при увеличении Кубика в 2 раза закон распределения заряда не изменится. Действительно, площадь поверхности S увеличилась в 4 раза, следовательно, поверхностная плотность заряда σ уменьшилась в 4 раза, но $dq_i = \sigma dS$, откуда получаем $dq_{i2} = dq_{i1}$. Тогда «новые» значения величин, от которых зависит относительная скорость кубиков, будут равны

$$\mu_2 = \frac{2mM}{m+2M} = \frac{2(m+M)}{m+2M}\mu_1; \quad \Pi_2 = \frac{1}{2}\Pi_1.$$

Тогда скорость сближения во втором случае будет равна

$$v_{\text{отн}2} = \sqrt{2\frac{\Pi_0 - \Pi}{\mu}\frac{m+2M}{2(m+M)}\frac{1}{2}} = v_{\text{отн}1}\sqrt{\frac{m+2M}{4(m+M)}}.$$

3. Рассмотрим малый промежуток времени dt_2. За это время тела сблизятся на расстояние dx_2, которое в 2 раза больше расстояния dx_1 на которое тела сближались изначально за время dt_1 (т.к. все расстояния увеличились в два раза). Тогда

$$dt_2 = \frac{dx_2}{v_{\text{отн}2}} = \frac{2dx_1}{v_{\text{отн}2}} = 2\sqrt{\frac{4(m+M)}{m+2M}}dt_1.$$

Заметим, что это соотношение выполняется в каждый момент времени и не зависит от конкретного момента времени, поэтому суммарное время сближения будет равно

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{4(m+M)}{m+2M}}t_1.$$

Способ 2

Потенциальная энергия системы равна

$$U = k\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{x},$$

где $k\left(\frac{x}{a}\right)$ — некоторый геометрический фактор системы. Тогда сила, отвечающая этой потенциальной энергии, будет равна

$$F = -U' = -k'\frac{Qq}{xa} + k\frac{Qq}{x^2}.$$

Замечание. Используя метод размерностей, можно сразу записать, что

$$F = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{x^2},$$

где $\Gamma\left(\frac{x}{a}\right)$ — геометрический фактор. Запишем уравнение движения точки и Кубика (в уравнениях учтено, что силы притяжения противонаправлены)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{x^2}; \\ \ddot{x}_2 = -\frac{1}{M}\Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{x^2}; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{x^2}\frac{1}{\mu}.$$

Получаем, что относительное ускорение равно

$$a_{\text{отн}} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{\mu x^2}.$$

То есть относительное ускорение в первом и втором случаях равны

$$a_{\text{отн}1} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{\mu_1 x^2}; \quad a_{\text{отн}2} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{\mu_2 (2x)^2}.$$

Здесь μ_1 и μ_2 — приведённые массы в первом и втором случаях, которые равны

$$\mu_1 = \frac{Mm}{M+m}; \quad \mu_2 = \frac{2Mm}{2M+m}.$$

С другой стороны

$$a_{\text{отн}2} = \frac{d^2x_2}{dt_2^2} = \frac{2d^2x_1}{dt_2^2} = \frac{2}{\alpha^2}a_{\text{отн}1}.$$

Здесь $dt_2 = \alpha dt_1$, где α — масштаб по времени. Имеем

$$\frac{2}{\alpha^2}a_{\text{отн}1} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{4x^2}\frac{2M+m}{2Mm} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{x^2}\frac{M+m}{Mm}\cdot\frac{2M+m}{8(M+m)} = a_{\text{отн}1}\frac{2M+m}{8(M+m)}.$$

Откуда получаем

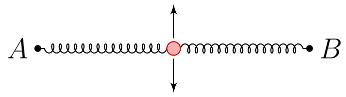
$$\frac{2}{\alpha^2} = \frac{2M+m}{8(M+m)}; \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \sqrt{16\frac{m+M}{m+2M}}.$$

То есть суммарное время сближения во втором случае будет равно

$$t_2 = \sqrt{\frac{16(m+M)}{m+2M}}t_1.$$

Альтернативная задача

1. *(2 балла)* Две тонкие лёгкие пружины жёсткостью k закрепили на гладком горизонтальном столе в точках A и B. Свободные концы пружин прикрепили к грузу массы m. Пружины не деформированы. Найдите во сколько раз изменится период колебаний такой системы, если их амплитуду увеличить в два раза.

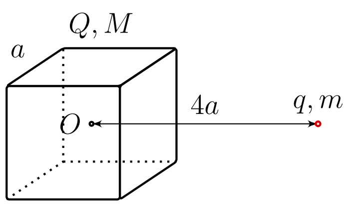


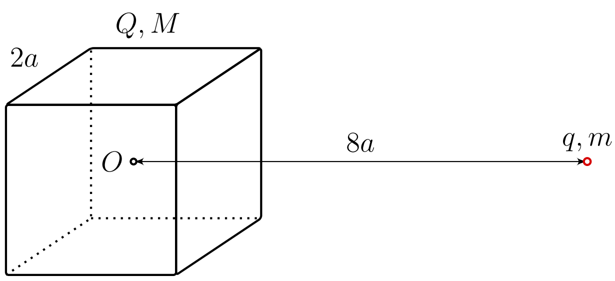
2. *(3 балла)* Два точечных заряда разлетаются из состояния покоя. Через время t расстояние между ними увеличивается в два раза по сравнению с первоначальным. Определите, как изменится это время, если начальное расстояние между зарядами увеличить в два раза.

3. *(5 баллов)* На расстоянии $4a$ от сплошного идеально проводящего Кубика со стороной a и зарядом Q на линии, проходящей через центр Кубика и центр одной из его граней, располагается точечный заряд q (см. рис.). Масса Кубика M, масса заряда m. Начальные скорости Кубика и заряда равны нулю. Кубик и заряд отпускают, в результате чего расстояние между ними изменяется в два раза за время t.

   Найдите время, за которое в два раза изменится расстояние между таким же точечным зарядом и идеально проводящим Кубиком со стороной $2a$, массой M и зарядом Q, если заряд располагается на линии, проходящей через центр Кубика и центр одной из его граней на расстоянии $8a$ (см. рис.). Начальные скорости Кубика и заряда равны нулю.

   Примечание. Расстояние между Кубиком и зарядом измеряется от центра Кубика. Гравитационным и магнитным взаимодействием пренебречь.





Решение альтернативной задачи

1. Найдём как зависит потенциальная энергия пружины при деформации, описанной в условии задачи. Пусть l — длина половины пружины, при смещении Δx вниз длина половины пружины становится равной

$$l_2 = \sqrt{l^2 + \Delta x^2} = l\left(1 + \frac{\Delta x^2}{l^2}\right)^{1/2}.$$

Тогда деформация пружины будет равна

$$l_2 - l = l\left(\left(1 + \frac{\Delta x^2}{l^2}\right)^{1/2} - 1\right) \approx l\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{l^2} - 1\right) = l + \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{l}.$$

Здесь мы использовали формулу приближённого вычисления справедливую для малых x: $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$. Потенциальная энергия пружины

$$U = 2 \cdot \frac{k(l_2 - l)^2}{2} = \frac{k\Delta x^4}{2l^2}.$$

Двойка в формуле появляется из-за деформации обеих половин пружинки. Запишем закон сохранения энергии и найдём скорость грузика

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^4}{2l^2} = \frac{kx_{01}^4}{2l^2}; \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{k}{ml^2}}\sqrt{x_1^4 - x_{01}^4}.$$

Скорость же по определению равна

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt}.$$

Рассмотрим колебания с другой амплитудой. Пусть масштаб по координате равен α: $x_2 = \alpha x_1$, а масштаб по времени $t_2 = \beta t_1$. Скорость во второй ситуации аналогично равна

$$v_2 = \sqrt{\frac{k}{ml^2}}\sqrt{x_2^4 - x_{02}^4} = \sqrt{k}ml^2\alpha^2\sqrt{x_1^4 - x_{01}^4} = \alpha^2 v_1.$$

С другой стороны

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt_2} = \frac{\alpha dx_1}{\beta dt_1} = \frac{\alpha}{\beta}v_1.$$

Имеем

$$\alpha^2 v_1 = \frac{\alpha}{\beta}v_1; \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}.$$

То есть период уменьшился в два раза!

2. Запишем закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Здесь m_1 и m_2 — массы зарядов, v_1 и v_2 — их скорости. Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{kq_1q_2}{r_0} = \frac{kq_1q_2}{r} + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}.$$

Из записанных уравнений

$$\frac{kq_1q_2}{r_0} - \frac{kq_1q_2}{r} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{m_2}v_1\right)^2; \quad \Longrightarrow \quad kq_1q_2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = \frac{m_1v_1^2}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

Откуда находим

$$v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2}{m_1}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}.$$

Скорость удаления частиц (т. е. относительная скорость) равна

$$v_{\text{отн}1} = v_1 + v_2 = v_1\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) = \sqrt{\frac{2kq_1q_2}{m_1m_2}(m_1 + m_2)\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}.$$

Скорость удаления частиц во втором случае будет равна (все расстояния увеличились в два раза)

$$v_{\text{отн}2} = \sqrt{\frac{2kq_1q_2}{m_1m_2}(m_1 + m_2)\left(\frac{1}{2r_0} - \frac{1}{2r}\right)}.$$

В первом случае частицы удаляются на расстояние dx_1 за время $dt_1 = \dfrac{dx_1}{v_{\text{отн}1}}$, во втором случае частицы удаляются на расстояние $dx_2 = 2dx_1$ (все расстояния увеличились в два раза) за время $dt_2 = \dfrac{dx_2}{v_{\text{отн}2}}$. Из записанных уравнений, находим

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{dx_1}{dx_2}\frac{v_{\text{отн}2}}{v_{\text{отн}1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

То есть время, за которое расстояние между частицами увеличится в два раза во втором случае, равно

$$t_2 = 2\sqrt{2}t_1.$$

Литература

Г. И. Хантли — Анализ размерностей

Объять необъятное, или Её преПодобие Размерность

Ландафшиц 1 Том §10

Метод механического подобия. [А. И.Власов; Потенциал, N9, 2019 год]