

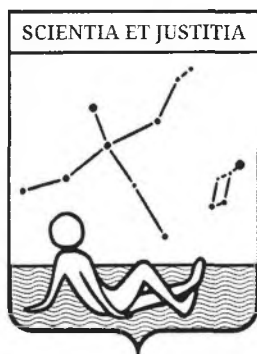
Астрофизический диверτισмент



Задачи и упражнения по астрономии и астрофизике

Под редакцией И. А. Утешева

А. В. Веселова, М. И. Волобуева, М. А. Пирогов, И. А. Утешев



Астрофизический дивертисмент

Задачи и упражнения
по астрономии
и астрофизике

Учебно-методическое пособие



Onebook.ru

Москва
2018

УДК 52(076.1)
ББК 22.6
А91

А91 *А. В. Веселова, М. И. Волобуева, М. А. Пирогов, И. А. Утешев*
Астрофизический дивертисмент. Задачи и упражнения
по астрономии и астрофизике / Под ред. И. А. Утешева.
— М.: ООО «Сам Полиграфист», 2018. — 154 с.
ISBN 978-5-00077-697-1

Книга представляет собой учебно-методическое пособие по астрономии и астрофизике, основанное на материалах учебно-тренировочных сборов кандидатов в сборную команду Российской Федерации для участия в международной олимпиаде школьников. В сборнике представлены 84 теоретических задачи разного уровня сложности с подробными решениями и упражнениями для самостоятельного решения.

Книга послужит пособием для педагогов и школьников старших классов при подготовке к астрономическим олимпиадам, а также для студентов высших учебных заведений, специализирующихся в области астрономии, физики или педагогики и желающих повысить свой уровень владения предметом.

УДК 52(076.1)
ББК 22.6

Авторы-
составители: И. А. Утешев, А. В. Веселова, М. А. Пирогов, Р. А. Исхаков,
М. И. Волобуева, А. С. Шепелев, В. В. Григорьев, И. Д. Маркозов,
М. В. Костина, К. А. Гришин

Иллюстрации Р. А. Исхаков
Вёрстка И. А. Утешев

Рецензент П. А. Тараканов, к. ф.-м. н.

Содержание

	Условия	Решения
1 Геометрия и время		
1.1 Северная столица	9	13
1.2 День Луны	9	14
1.3 Псевдомарс	9	14
1.4 Gloria Mundi	10	15
1.5 Вечернее Облако	10	16
1.6 Не шути со временем	10	17
1.7 Геосинхронный спутник	10	17
1.8 Сверхновая 1987A	11	18
1.9 Yellowknives	11	19
1.10 «Беглянка»	11	21
1.11 Вращающийся наблюдатель	11	21
1.12 Нейтралитет	12	22
1.13 Далёкий рукав	12	23
1.14 Вифлеемская звезда	12	23
2 Небесная сфера		
2.1 Полночь	25	29
2.2 А зори там тихие	25	31
2.3 Тени	25	32
2.4 Теория вероятностей	25	32
2.5 Три часа	26	34
2.6 Бейрут	26	34
2.7 Быть, а не казаться	26	36
2.8 Наблюдаемость	27	37
2.9 Pas de deux	27	38
2.10 Марибо	27	39
2.11 Реактивная тригонометрия	27	40
2.12 Кораблекрушение	28	41
2.13 Загадочный круг	28	42

3 Небесная механика

3.1	Псевдомеркурий	45	54
3.2	О бедной L_3 замолвите слово	45	55
3.3	Космодром на Юпитере	46	56
3.4	Звёздное трио	46	57
3.5	67 Р	47	60
3.6	К Сатурну!	47	61
3.7	Гравитация падает	47	63
3.8	Антипланеты	48	63
3.9	Годограф	48	65
3.10	Приказ 66	49	67
3.11	Mars Orbiter Mission	49	68
3.12	Масса Местной группы	50	69
3.13	Экзолуны	51	71
3.14	Мoon наш!	53	73

4 Оптика

4.1	Операция «Ag ⁺ »	77	83
4.2	В погоне за звёздами	77	84
4.3	Транзит через луч GMRT	77	85
4.4	Ускользящая звезда	78	86
4.5	Оптика телескопа	78	87
4.6	Ёжик в тумане	79	88
4.7	Горизонт событий	79	89
4.8	Go to	79	90
4.9	Гравитационно-линзовый телескоп	81	91
4.10	Коронадо	81	93

5 Частицы и поля

5.1	Циклотрон	95	100
5.2	Побег из атмосферы	95	100
5.3	Oxygen	95	101
5.4	Марсианская высота	96	102
5.5	Газы на Титане	96	102
5.6	Дальтоники	96	103
5.7	Обратный комптон-эффект	96	104
5.8	Солнышко	97	105
5.9	Пэ два — пэ четыре	98	107
5.10	Предел ГЗК	98	108
5.11	Две фамилии	98	108
5.12	Гравитационные волны	98	109

6 Законы излучения

6.1	Багровый ужас	111	118
6.2	Аккреция на нейтронную звезду	111	118
6.3	Тройной альфа-процесс	111	119
6.4	Нейтрино	112	119
6.5	Пульсация цефеиды	112	120
6.6	Одна фамилия	113	121
6.7	Давайте поговорим про это	113	122
6.8	Мегамазер	114	123
6.9	Спирт в космосе	114	124
6.10	Запрещённая зона	114	125
6.11	Dolce Vita	114	127
6.12	Довести до белого каления	115	127
6.13	Фотометрия в полосе U	115	128
6.14	AstroSat	116	129

7 Галактики

7.1	Утечка газа	133	136
7.2	Dark Matters	134	137
7.3	Теорема Рыбака	134	138
7.4	Энергия вакуума	134	138
7.5	Ранняя Вселенная	134	139
7.6	Истина в Вине	134	141
7.7	Обозревая 21 см	135	142

Справочные данные

D1	Физические и астрономические постоянные	145
D2	Единицы измерения	146
D3	Измерение углов	147
D4	Элементарные частицы	147
D5	Формулы сферической тригонометрии	148
D6	Параметры орбит больших планет	149
D7	Физические характеристики Солнца и планет	149
D8	Характеристики карликовых планет	149
D9	Характеристики спутников больших планет	150
D10	Исчисление времени	151
D11	Ярчайшие звёзды земного неба	152
D12	Координаты некоторых городов России и мира	153
D13	Некоторые общепринятые значения величин	153

Предисловие

Эта книга выходит в свет как раз в тот момент, когда курс астрономии массово возвращается в общеобразовательные школы после продолжительного забвения. Между тем история олимпиад школьников по астрономии в России не прерывалась: в 2018 году две крупнейшие в нашей стране астрономические олимпиады — Всероссийская и Санкт-Петербургская — разменяли четверть века, а Московская состоялась уже в 72-й раз. По сравнению с ними история международных олимпиад по астрономии выглядит более скромно: Международная астрономическая олимпиада (IAO) проводится с 1996 года, Международная олимпиада по астрономии и астрофизике (IOAA) — с 2007 года.

С появлением международных олимпиад при поддержке Минобрнауки России стали проводиться учебно-тренировочные сборы с целью обучения и подготовки талантливых школьников и формирования сборной команды России. Уже более 10 лет сборы проводятся в Санкт-Петербурге дважды в год. На них приглашаются победители и призёры заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по астрономии. Параллельно со сборами для заинтересованных школьников проводится открытая Астрономическая школа.

За десять лет с момента основания Международная олимпиада по астрономии и астрофизике приобрела внушительный размер: на сегодняшний день в ней принимают участие школьники из более чем полусотни стран со всех континентов, за исключением Антарктиды. В 2017 году Минобрнауки России официально закрепило за IOAA статус «главной» международной олимпиады по астрономии. К этому моменту Россия принимала участие в этой олимпиаде уже в седьмой раз, но выступления сборной были не слишком удачными; первую в истории золотую медаль для нашей страны завоевал редактор этой книги лишь в 2016 году на IX IOAA в Индонезии, в то время как с IAO сборная ежегодно привозила по несколько золотых медалей. Это привело к переосмыслению подхода к подготовке на учебно-тренировочных сборах.

С 2016 года отбор в сборную производится по оригинальным комплексам задач повышенной сложности, по стилю и формату существенно отличающихся от всех российских астрономических олимпиад. Хотя задачи формально были оставлены в рамках школьной программы, без требований к наличию у участников каких-либо чисто «вузовских» знаний по физике и математике (за исключением, конечно, специализированных знаний в области астрономии, традиционных для астрономических олимпиад школьников), все ограничения на сложность были сняты. Это позволило не только более эффективно формировать сборную команду, отбирая тех ребят, которые способны хорошо решать не только определенный набор привычных «классических» задач, но и познакомить остальных участников сборов с нестандартными методами решения, с редко затрагиваемыми на олимпиадах разделами физики и астрономии, а также мотивировать их на поиск собственных, отличных от «шаблонных», способов решения.

Молодой коллектив преподавателей учебно-тренировочных сборов взял на себя труд собрать и обобщить материалы за минувшие два года. В данный сборник вошли исправленные и дополненные задачи со сборов и избранные задачи с международных олимпиад, условно поделенные на 7 тематических разделов. К некоторым задачам приведены упражнения для самостоятельного решения. Отметим особо концепцию этих упражнений: это не базовые задачи «для самопроверки», а логичным образом вытекающие из условия основной задачи вопросы, которые, вполне возможно, не имеют не только относительно простого, но и вообще сколько-нибудь законченного решения. Это не должно приводить в смятение: жизнь задаёт нам именно такие вопросы.

Успехов!

1 Геометрия и время

Астрономия, как наука, стала существовать с тех пор, как она соединилась с математикой.

А. Герцен

1.1 Северная столица

Определите длину L тени, отбрасываемой вертикальной мачтой высотой $H = 8$ м и диаметром $D = 20$ см на горизонтальную палубу корабля в местный солнечный полдень 21 декабря в Петербурге ($\varphi = 60^\circ$ с. ш.).

1.2 День Луны

В последний день IPhO – 2016, 17 июля, Луна пересекла меридиан Цюриха в 23:46 по центральноевропейскому времени, а в августе того же года произошло полутеневое лунное затмение продолжительностью около получаса. Найдите его дату и охарактеризуйте условия наблюдения в Цюрихе. Орбиту Луну считайте круговой, уравнением времени пренебрегите.

Город	Цюрих
Страна	Швейцария
Координаты	$47^\circ 23'$ с. ш. $8^\circ 32'$ в. д.
Часовой пояс	Central Europe UT+1
Площадь	88 км^2
Население	400 тыс.
Летнее время	Да, +1

1.3 Псевдомарс

Как известно, самые успешные астрологи астрологией не занимаются. Некоторые же прочие в своих расчётах заменяют планету Марс на воображаемый Псевдомарс. Положим, Псевдомарс существует на самом деле, и большая полуось его орбиты на 4.00% меньше, чем у орбиты Марса при равных эксцентриситетах.

Оцените, как часто происходят великие противостояния Псевдомарса. Исходя из предположения о совпадении физических характеристик Псевдомарса и Марса, оцените разницу их блесков во время соответствующих великих противостояний. Орбиту Земли считайте круговой.

1.4 *Gloria Mundi*

Earth's Transit Zone (ETZ) — область пространства, в которой далёкие внеземные наблюдатели могут фиксировать прохождения Земли по диску Солнца. Для землянина эта область соответствует полосе небесной сферы, охватывающей эклиптику (рис. 1.1).

Считая орбиту Земли круговой, рассчитайте угловую ширину θ_z всей ETZ, а также ширину θ_f той её части, из которой могут наблюдаться *полные* прохождения — когда диск Земли полностью проецируется на солнечный.

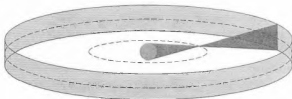


Рис. 1.1. К задаче *Gloria Mundi*

1.5 *Вечернее Облако*

В какой день 2017 года кульминация Большого Магелланова Облака ($\alpha \approx 5.4^{\text{h}}$, $\delta \approx -70^\circ$) наблюдалась в Пхукете ($\varphi = +8^\circ$, $\lambda = +98^\circ$, UT+7) в 9:00 вечера? Гринвичское звёздное время GST на 0^{h} UT 1 января того же года было равно $\text{GST}_0 = 6^{\text{h}} 43^{\text{m}}$.

1.6 *Не шути со временем*

Сегодня 24 сентября — самый длинный день в году.

Он вдвое длиннее, чем 25 марта.

В какой ближайшей к нынешнему Петербургу (60° с. ш., 30° в. д.) точке на поверхности Земли мог бы находиться путешественник во времени, будь приведённая запись правдива? Рефракцией и угловыми размерами Солнца пренебрегите.

1.7 *Геосинхронный спутник*

Наклонение круговой орбиты геосинхронного спутника к плоскости экватора составляет $\theta = 6.69^\circ$. Вычислите значение максимально возможной высоты этого спутника h для широты $\varphi = 51.49^\circ$. Землю считайте шаром, атмосферной рефракцией пренебрегите.

1.8 Сверхновая 1987A

SN 1987A на пике яркости 15 мая 1987 года имела видимую звёздную величину 3^m . Плавно уменьшая блеск, она перестала быть видимой невооружённым глазом к 4 февраля 1988 года. Предположим, что яркость объекта экспоненциально уменьшалась со временем.

Установите, когда сверхновая перестала быть доступна для визуального наблюдения в 6-дюймовый телескоп. Коэффициент светопередачи примите равным 70%.

1.9 Yellowknives

Ходят легенды, что в исчезнувшем племени Йеллоунайф существовал древний обычай: в момент, когда часовой угол Солнца составлял $13^h 29^m$, а пылающая звезда осеннего неба Альдебаран ($4^h 36^m$, $+16^\circ 31'$) пересекала небесный меридиан, главный жрец племени обращал свой взор на путеводную звезду — Полярную, в направлении которой небо озарялось разноцветными лентами, парящими в небе. Увидев ленты, согласно поверью, жрец запускал священные часы, отсчитывающие ровно 111 звёздных суток, по истечении которых члены племени должны увидеть первые талые воды. Эти часы отстают с ходом $\pi \cdot 10^{-3}$.

В 2017 году астрономическая весна наступила 20 марта в 10:28 по местному времени. Определите дату, когда йеллоунайфцы услышали бы первую капель в 2018 году.

1.10 «Беглянка»

Звезду Барнарда ($\alpha = 18.0^h$, $\delta = +4.7^\circ$), одиночную звезду в созвездии Змееносца, часто называют «летащей», поскольку она обладает самым большим из известных собственных движений: $\mu_\alpha = -798$ mas/год, $\mu_\delta = 10327$ mas/год. При параллаксе $\pi = 547$ mas её лучевая скорость составляет $v_r = -111$ км/с. Вычислите полную пространственную скорость звезды Барнарда относительно Солнечной системы.

1.11 Вращающийся наблюдатель

Спутник движется в обратном направлении по круговой экваториальной орбите на высоте $h = 5000$ км. Определите видимые угловые скорости ω_z и ω_h спутника в моменты, когда он находится в зените и на горизонте для наблюдателя на экваторе Земли. Ответ выразите в угловых минутах в секунду.

1.12 Нейтралитет

Будем считать, что за пределами солнечного круга кривая вращения Галактики плоская с $v = 240$ км/с, а диск нейтрального водорода простирается до галактоцентрического расстояния $R_{\text{max}} = 50$ кпк. На галактической долготе $\ell = 140^\circ$ наблюдается облако HI. Оцените минимально возможное значение его гелиоцентрической лучевой скорости.

1.13 Далёкий рукав

В 2010 году Dame и Thaddeus нашли новую часть внешнего рукава Млечного Пути, изучая линию CO на 1.2-метровом телескопе CfA. Они обнаружили начало рукава на галактической долготе $\ell = 13^\circ$ (точка A на рис. 1.2), где газ имеет гелиоцентрическую лучевую скорость -20.9 км/с. Полагая, что начиная с 5 кпк кривая вращения Галактики плоская (параметр плато $v = 240$ км/с), вычислите галакто- и гелиоцентрическое расстояние точки A.

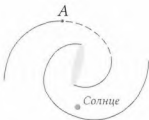


Рис. 1.2. К задаче *Далёкий рукав* (не в масштабе)

1.14 Вифлеемская звезда

Соединения Юпитера и Сатурна в древности именовали *великими*. Вычислите средний период P их наступления и среднее угловое перемещение Ω планет между двумя последовательными событиями.

Ближайшее великое соединение состоится 21 декабря 2020 года при восточной элонгации 30.3° . В каком созвездии* оно будет наблюдаться?

Иоганн Кеплер установил, что иногда великие соединения происходят трижды (!) за год благодаря попятному движению планет, как это было, например, в 7 году до н. э. В каком созвездии они тогда наблюдались? В каком созвездии находилось Солнце во время среднего из соединений такой серии?

* По возможности используйте полные или трёхбуквенные [латинские] обозначения созвездий, например, *Ursa Major* или *UMa*.

Решения

1.1 Северная столица

21 декабря Солнце проходит точку зимнего солнцестояния, его склонение $\delta_{\odot} = -\varepsilon = -23^{\circ} 26'$. В полдень, в момент верхней кульминации высота Солнца над горизонтом составит

$$h_{\odot} = 90^{\circ} - \varphi + \delta_{\odot} = 90^{\circ} - 60^{\circ} - 23^{\circ} 26' = 6^{\circ} 34',$$

и если бы светило являлось бесконечно удалённым точечным источником, то длина тени вдоль поверхности составила бы

$$\frac{H}{\operatorname{tg} h_{\odot}} \approx 8.7H \approx 70 \text{ м.}$$

Однако Солнце имеет конечный угловой размер ($2\rho_{\odot} \approx 32'$), поэтому геометрическая область тени представляет собой усечённую треугольную призму (рис. 1.3).

Вычислим длину тени, отбрасываемой мачтой на плоскость палубы:

$$L = \frac{D}{2 \operatorname{tg} \rho_{\odot}} \cdot \cos h_{\odot} = \frac{0.2 \text{ м} \times \cos 6^{\circ} 34'}{2 \times \operatorname{tg} 0^{\circ} 16'} = 21.3 \text{ м.}$$

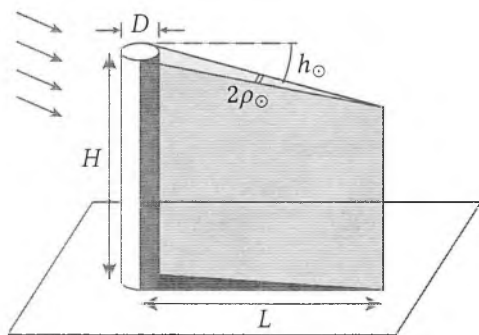


Рис. 1.3. Мачта и её тень

Упражнения.

1. Исследуйте форму области тени и её зависимость от геометрических параметров мачты D и H .
2. Нарисуйте качественный график зависимости относительной длины проекции тени мачты на горизонтальную плоскость L/H от параметра D/H .
3. Решите задачу в более правдоподобном случае конической мачты высотой H с диаметром основания D .
4. Найдите угловую скорость тени в рассматриваемый момент времени.

1.2 День Луны

Заметим, что летом в Швейцарии действует центральноевропейское летнее время UT+2. Поскольку по Гринвичу (по UT) верхняя кульминация Луны наблюдалась в $23^{\text{h}} 46^{\text{m}} - 2^{\text{h}} = 21^{\text{h}} 46^{\text{m}}$, а цюрихское время (долгота $8^{\circ} 32'$) опережает гринвичское на $8^{\circ} 32' / 15^{\circ} \approx 34^{\text{m}}$, по местному времени пересечение меридиана было зафиксировано в $21^{\text{h}} 46^{\text{m}} + 34^{\text{m}} = 22^{\text{h}} 20^{\text{m}}$. Следовательно, Луна «опережает» Солнце по прямому восхождению** на $22^{\text{h}} 20^{\text{m}} - 12^{\text{h}} = 10^{\text{h}} 20^{\text{m}}$.

Лунные затмения происходят в полнолуние, когда разница прямых восхождений Солнца и Луны составляет 12^{h} . Ближайшее полнолуние наступило ещё в июле — всего через пару дней, когда Луна прошла относительно Солнца $12^{\text{h}} - 10^{\text{h}} 20^{\text{m}} = 1^{\text{h}} 40^{\text{m}}$. До августовского полнолуния нужно «наверстать» ещё 24^{h} , суммарно — $1^{\text{h}} 40^{\text{m}} + 24^{\text{h}} = 25^{\text{h}} 40^{\text{m}}$.

Поскольку относительное движение Луны и Солнца происходит с периодом в 1 синодический месяц, такая разница накопится за

$$\frac{25^{\text{h}} 40^{\text{m}}}{24^{\text{h}}} \times 29.53^{\text{d}} \approx 31.6^{\text{d}}.$$

Следовательно, лунное затмение произошло

$$17 \text{ июля } (23^{\text{h}} 46^{\text{m}}) + 31.6^{\text{d}} \approx 18 \text{ августа } (14^{\text{h}})$$

и наблюдаться в Цюрихе не могло.

Упражнения.

1. Как долго Луна пересекала меридиан Цюриха 17 июля?
2. Определите, через какое время после затмения Луна прошла узел своей орбиты, если её верхняя кульминация 17 июля произошла на высоте 23.2° .

1.3 Псевдомарс

По третьему закону Кеплера орбитальный период Псевдомарса

$$T = T_{\odot} \cdot (1 - 0.04)^{3/2} = 686.98 \text{ сут.} \times 0.96^{1.5} = 646.18 \text{ сут.},$$

что соответствует синодическому периоду

$$S = \left(\frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{365.26 \text{ сут.}} - \frac{1}{646.18 \text{ сут.}} \right)^{-1} = 840.18 \text{ сут.}$$

** Пренебрежение уравнением времени эквивалентно утверждениям о нулевом эксцентриситете орбиты Земли и нулевом наклонении эклиптики к плоскости земного экватора. Про наклонение орбиты Луны тогда тем более можно забыть.

В великие противостояния планета и Земля находятся примерно в одних и тех же точках своих орбит, соответствующих наибольшему сближению. Заметим, что $S : T = 13 : 10$ с точностью $\sim 2 \cdot 10^{-4}$. Следовательно, великие противостояния Псевдомарса происходят каждые $13T \approx 10S = 23.00$ земных года.

Марс и Псевдомарс не излучают сами, а лишь отражают солнечный свет, поэтому разница их блесков обусловлена двумя «пространственными» факторами — близостью к наблюдателю и к Солнцу. Освещённость обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника, откуда

$$\Delta m = \underbrace{2.5 \lg \left(\frac{a_{\odot} (1 - e_{\odot}) - a_{\oplus}}{0.96 a_{\odot} (1 - e_{\odot}) - a_{\oplus}} \right)^2}_{\text{геоцентрическая } \Delta m_{\oplus \odot}} + \underbrace{2.5 \lg \left(\frac{a_{\odot} (1 - e_{\odot})}{0.96 a_{\odot} (1 - e_{\odot})} \right)^2}_{\text{гелиоцентрическая } \Delta m_{\odot \odot}} =$$

$$= 5 \lg \frac{1.38 - 1.00}{0.96 \times 1.38 - 1.00} - 5 \lg 0.96 = 0.43^m.$$

Упражнение.

Решите обратную задачу: по заданному промежутку времени между великими противостояниями Псевдомарса — 23 земных года — найдите возможную величину большой полуоси его орбиты.

1.4 Gloria Mundi

$$\theta_z \approx 2 \arcsin \frac{R_{\odot} + R_{\oplus}}{a_{\oplus}} = 0.538^\circ;$$

$$\theta_f \approx 2 \arcsin \frac{R_{\odot} - R_{\oplus}}{a_{\oplus}} = 0.528^\circ.$$

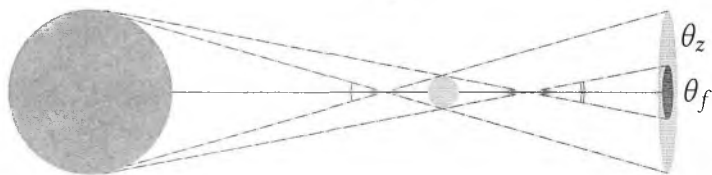


Рис. 1.4. Тень и полутень Земли

Упражнения.

1. Оцените длину конуса тени Земли.
2. Рассчитайте максимально возможную продолжительность прохождения Земли по диску Солнца для наблюдателя, покоящегося относительно центра Солнца.
3. Определите вариацию ширины ETZ, обусловленную эллиптичностью орбиты.
4. Вычислите угловую ширину части ETZ, соответствующей *центр*альным транзита, когда Земля пересекает луч, соединяющий наблюдателя и центр Солнца.

1.5 Вечернее Облако

В условии подразумевается, конечно, верхняя кульминация Облака — нижняя кульминация происходит под горизонтом, её наблюдать нельзя.

Гринвичское местное солнечное время в момент верхней кульминации БМО в Пхукете есть

$$UT = 21^h - 7^h = 14^h.$$

Выразим гринвичское звёздное время GST через местное звёздное время s , которое совпадает с прямым восхождением α Облака в момент его верхней кульминации:

$$GST = s - \lambda = \alpha - \lambda = 5.4^h - 98^\circ / 15^\circ = 22^h 52^m.$$

Оно связано с количеством прошедших с начала года дней N и всемирным временем UT соотношением

$$GST = GST_0 + \left(\frac{N}{365.2422} + \frac{UT}{23^h 56^m 04^s} \right) \times 24^h,$$

справедливость которого нетрудно проверить, используя его линейность по N и по UT: в самом деле, через 1 сидерические сутки и через 1 тропический год ожидаем увидеть на звёздных часах то же самое.^{***}

Теперь уже можно вычислить N :

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{GST - GST_0}{24^h} - \frac{UT}{23^h 56^m 04^s} \right) \times 365.2422 = \\ &= \left(\frac{22^h 52^m - 6^h 43^m}{24^h} - \frac{14^h}{23^h 56^m 04^s} \right) \times 365.2422 = 32.14 \approx 32. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Итак, Большое Магелланово Облако кульминировало в Пхукете в 21:00 2 февраля 2017 года.

Упражнения.

1. Обоснуйте законность округления при нахождении количества дней N в (1.1). Как дробная часть результата может повлиять на ответ задачи?
2. Решите эту задачу для 3007 года.
- 3'. Решите эту задачу в 3007 году.

^{***} Это — хитрый способ учесть прецессию и не усложнить расчёты.

1.6 Не шути со временем

Продолжительность дня 24 сентября максимальна, если около этого дня Солнце проходит точку солнцестояния. Тогда около 25 марта наступает противоположное солнцестояние.

Часовой угол захода Солнца t связан с его склонением δ и широтой φ соотношением

$$\cos t = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi,$$

а продолжительность дня составляет примерно $2t$. Тогда условие задачи формализуется как

$$\arccos(\mp \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \varphi) = 2 \arccos(\pm \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \varphi).$$

$$\therefore \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{1}{2};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\pm \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varepsilon}\right) \approx \begin{cases} +49^\circ, & \text{если } 24.09 - \text{летнее солнцестояние;} \\ -49^\circ, & \text{если } 24.09 - \text{зимнее солнцестояние.} \end{cases}$$

Подходящая точка, очевидно, находится в северном полушарии и имеет долготу, равную долготе Петербурга: 49° с. ш., 30° в. д.

Упражнение.

Оцените, в какое ближайшее тысячелетие могло занести путешественника, если он пользуется григорианским календарём? В каком веке запись будет верна для юлианского календаря?

1.7 Геосинхронный спутник

Спутник достигает максимальной высоты при пересечении плоскости меридиана (рис. 1.5). Заметим, что

$$R \sin(\varphi - \theta) = [r - R \cos(\varphi - \theta)] \operatorname{tg} \psi,$$

$$\psi = 90^\circ - (\varphi - \theta) - h.$$

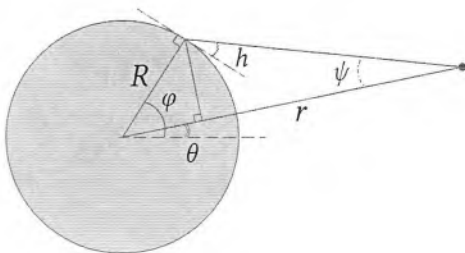


Рис. 1.5. К расчёту горизонтального параллакса спутника

$$\therefore h = \underbrace{90^\circ - (\varphi - \theta)}_{\text{«}90^\circ - \varphi + \delta\text{»}} - \underbrace{\arctg \left[\frac{R \sin(\varphi - \theta)}{r - R \cos(\varphi - \theta)} \right]}_{\text{суточный параллакс}}.$$

Осталось рассчитать радиус орбиты спутника, например, используя третий закон Кеплера в сравнении с Луной:

$$r \approx a_{\text{л}} \times \left(\frac{23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 04^{\text{s}}}{27.3217^{\text{d}}} \right)^{2/3} = 42.3 \cdot 10^3 \text{ км}, \quad (1.2)$$

или непосредственно:

$$r = \sqrt[3]{GM_{\oplus} \times \left(\frac{23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 04^{\text{s}}}{2\pi} \right)^2} = 42\,164 \text{ км}. \quad (1.3)$$

Выполнив подстановку, получаем

$$h = 90.00^\circ - 44.80^\circ - \arctg \left[\frac{6371 \times \sin 44.80^\circ}{42164 - 6371 \times \cos 44.80^\circ} \right] = 38.40^\circ.$$

Упражнения.

1. Вычислите значение минимально возможной высоты этого спутника h' .
2. Возможна ли при некоторой другой величине наклонения орбиты спутника θ_0 ситуация, когда его наблюдаемая траектория касается горизонта? Если да, найдите θ_0 .
3. Объясните разницу результатов вычислений (1.2) и (1.3).

1.8 Сверхновая 1987A

Рассчитаем проникающую способность данного телескопа, сравнивая его с невооружённым глазом:

$$m_t = 6^{\text{m}} + \underbrace{5 \lg \frac{6 \times 25.4 \text{ мм}}{6 \text{ мм}}}_{\text{отношение площадей}} + \underbrace{2.5 \lg 0.70}_{\text{светопередача}} \approx 12.6^{\text{m}}.$$

Экспоненциальное уменьшение яркости B сверхновой соответствует линейному увеличению её звёздной величины:

$$m - m_0 = -2.5 \lg \frac{B}{B_0} = -2.5 \lg \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) = \frac{2.5 \lg e}{\tau} \cdot t = kt.$$

С 15.05.1987 г. до 04.02.1988 г. прошло 265 ± 1 дней. Составим пропорцию:

$$\frac{t^*}{265^d} = \frac{12.6^m - 3^m}{6^m - 3^m} \Rightarrow t^* \approx 850^d.$$

Прибавляя 850 дней к 15 мая 1987 года, получим искомую дату — около 11 сентября 1989 года.

Упражнения.

1. Чем обусловлен экспоненциальный спад яркости сверхновой?
2. На самом деле, степенная связь яркости и времени устанавливается через некоторое время после пика. Решите задачу, используя кривую блеска 1.6.

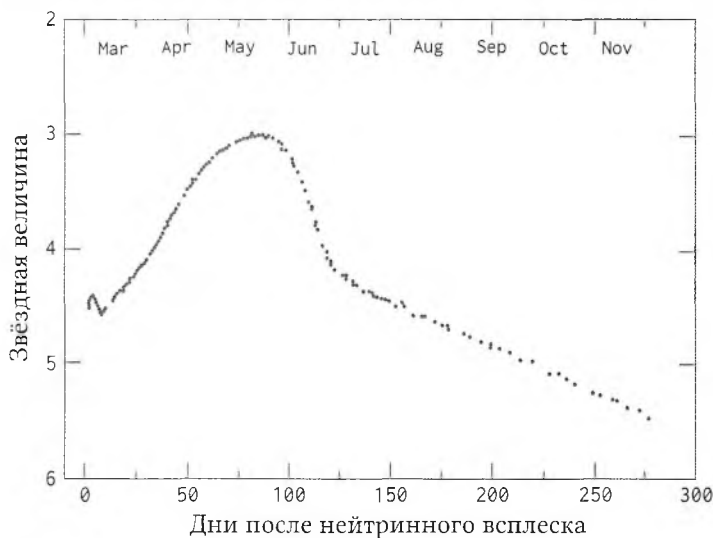


Рис. 1.6. Кривая блеска SN1987A
(R. Kirshner, E. Schlegel)

1.9 Yellowknives

В момент пересечения Альдебараном небесного меридиана его часовой угол составляет $t_1 = 12^h$ в нижней кульминации или $t_2 = 0^h$ — в верхней. Часовые углы и прямые восхождения Альдебарана и Солнца связаны соотношением

$$s = t + \alpha = t_{\odot} + \alpha_{\odot},$$

где s — местное звёздное время. Отсюда можно рассчитать прямое восхождение истинного Солнца.

В первом случае $\alpha_1 = 3^h 07^m$, так что через сотню дней прямое восхождение Солнца составит около 10^h . Поскольку видна Полярная и сменяются

времена года, наблюдатель, очевидно, находится в северном полушарии, вне экваториальной зоны. Конец лета. Капли быть не может.

Во втором случае $\alpha_2 = 15^{\text{h}} 07^{\text{m}}$. Найдём соответствующее прямое восхождение α_0 *среднего* Солнца. Заметим, что уравнение времени

$$\eta \equiv \begin{array}{c} \text{Среднее} \\ \text{солнечное} \\ \text{время} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Истинное} \\ \text{солнечное} \\ \text{время} \end{array} = t_{\text{ср}} - t_{\text{ист}} = \alpha_2 - \alpha_0.$$

Приходим к уравнению $\alpha_0 = \alpha_2 - \eta(\alpha_0)$, то есть[†]

$$\alpha_0 = 15^{\text{h}} 07^{\text{m}} - 7.53^{\text{m}} \cos \alpha_0 - 1.50^{\text{m}} \sin \alpha_0 + 9.87^{\text{m}} \sin 2\alpha_0.$$

Оно решается методом итераций, в результате имеем $\alpha_0 \approx 15^{\text{h}} 23^{\text{m}}$.

Прямое восхождение среднего Солнца линейно растёт со временем (с точностью до целого числа оборотов):

$$\alpha_{\odot} = \frac{\tau_{\gamma}}{T_{\oplus}} \times 24^{\text{h}},$$

где τ_{γ} — время с момента весеннего равноденствия. От начала 2017 года до запуска часов прошло

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau_{\gamma} + (31^{\text{d}} + 28^{\text{d}} + 19^{\text{d}}) + 10^{\text{h}} 28^{\text{m}} \simeq \\ &\simeq \frac{15^{\text{h}} 23^{\text{m}}}{24^{\text{h}}} \times 365.2422^{\text{d}} + 78.436^{\text{d}} \simeq 312.5 \text{ сут.} \end{aligned}$$

Продолжительность ожидания составляет

$$\tau_1 = \frac{111 \times 23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 04^{\text{s}}}{1 - \pi \cdot 10^{-3}} \simeq 111.0 \text{ сут.}$$

Промежуток времени между началом 2018 года и началом первой йеллоунайфской капли есть

$$\tau_2 = \tau_0 + \tau_1 - 365^{\text{d}} \simeq 312.5^{\text{d}} + 111.0^{\text{d}} - 365^{\text{d}} = 58.5 \text{ сут.},$$

что соответствует 28 февраля.

Упражнения.

1. Выполнив более точный расчёт, определите среднее солнечное время окончания отсчёта часов. Продолжительность тропического года считайте равной 365.242190^{d} .
2. Предложите способ модификации ритуала, который позволил бы точно предсказывать приход весны в 20018 году.

[†] Функциональная зависимость $\eta(\alpha_0)$ приведена в справочных данных.

1.10 «Беглянка»

Расстояние до звезды Барнарда

$$d = \frac{1000 \text{ пк}}{\pi \text{ (mas)}} = 1.828 \text{ пк.}$$

Полное собственное движение звезды

$$\mu = \sqrt{(\mu_\alpha \cos \delta)^2 + \mu_\delta^2} = 10358 \text{ mas/год},$$

что соответствует линейной скорости

$$\begin{aligned} \mu d &= 10.358''/\text{год} \times 1.828 \text{ пк} = (10.358 \times 1.828) \text{ а.е./год} \approx \\ &\approx 18.9 \text{ а.е./год} = 90 \text{ км/с.} \end{aligned}$$

Тогда полная пространственная скорость

$$v = \sqrt{(\mu d)^2 + v_r^2} \approx 143 \text{ км/с.}$$

Упражнения.

1. Когда звезда Барнарда была или будет пролетать ближе всего к Солнцу и на каком расстоянии? На сколько звёздных величин её блеск тогда отличается от нынешнего?
2. Найдите экваториальные координаты (на эпоху 2000 г.) звезды Барнарда во время максимального сближения.

1.11 Вращающийся наблюдатель

Геоцентрическая скорость спутника

$$V_{\text{абс}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}} \approx 5.92 \text{ км/с.}$$

Запишем закон сложения скоростей:

$$\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V}_{\text{абс}} - \vec{\omega}_\oplus \times \vec{r},$$

и заметим, что векторное произведение $(\vec{\omega}_\oplus \times \vec{r}) \parallel \vec{V}_{\text{абс}}$, следовательно, скорости $\vec{V}_{\text{отн}}$ и $\vec{V}_{\text{абс}}$ тоже коллинеарны.

Это означает, что величина относительной скорости спутника не зависит от положения наблюдателя и равна

$$V_{\text{отн}} = V_{\text{абс}} + (R_\oplus + h) \omega_\oplus = V_{\text{абс}} + \frac{2\pi (R_\oplus + h)}{23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 04^{\text{s}}} \approx 6.75 \text{ км/с.}$$

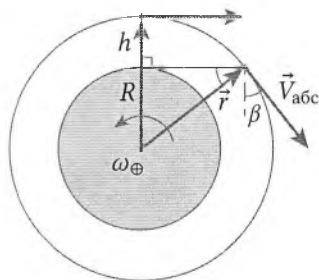


Рис. 1.7. К вычислению относительных скоростей спутника

Искомые угловые скорости (см. рис. 1.7):

$$\omega_z = \frac{V_{\text{отн}}}{h} = \frac{6.75 \text{ км/с}}{5000 \text{ км}} = 1.35 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с} = 4.6' / \text{с};$$

$$\begin{aligned} \omega_h &= \frac{V_{\text{отн}} \cos \beta}{(R_{\oplus} + h) \cos \beta} = \frac{V_{\text{отн}}}{R_{\oplus} + h} = \frac{6.75 \text{ км/с}}{6378 \text{ км} + 5000 \text{ км}} = \\ &= 5.93 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с} = 2.0' / \text{с}. \end{aligned}$$

Упражнения.

1. Рассчитайте видимую угловую скорость Марса в противостоянии, соединении и квадратурах; Венеры — в верхнем и нижнем соединении, а также в максимальных элонгациях.
2. Найдите элонгации *точек стояния* Венеры.

1.12 Нейтралитет

Если смотреть с северного полюса Галактики, галактическая долгота отсчитывается от направления на центр против часовой стрелки, а вращение самого Млечного Пути происходит по часовой.

Запишем теорему синусов для $\triangle CSG$ (рис. 1.8):

$$\sin \angle GCS = \frac{r_{\odot}}{r} \sin \angle GSC = \frac{r_{\odot}}{r} \sin \ell.$$

Лучевая скорость облака равна разности проекций скоростей облака и Солнца на луч SC :

$$\begin{aligned} v_r &= v \cos(90^\circ - \angle GCS) - v \cos(\ell - 90^\circ) = \\ &= v(\sin \angle GCS - \sin \ell) = v \left(\frac{r_{\odot}}{r} - 1 \right) \sin \ell. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ясно, что минимальное значение v_r достигается при $r = r_{\text{max}}$:

$$v_r^{\min} \approx 240 \text{ км/с} \times \sin 140^\circ \times \left(\frac{8 \text{ кпк}}{50 \text{ кпк}} - 1 \right) \approx -130 \text{ км/с}.$$

Упражнение.

Пусть кривая вращения Галактики задана графически: $v = v(r)$. Предложите способ нахождения минимально возможного значения лучевой скорости облака при заданной галактической долготе ℓ .

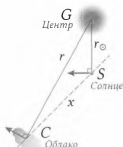


Рис. 1.8

1.13 Далёкий рукав

Обратимся к решению предыдущей задачи.

Из выражения (1.4) зависимости лучевой скорости объекта v_r от его галактоцентрического расстояния r и галактической долготы ℓ следует

$$r = \frac{r_{\odot}}{\frac{v_r}{v \sin \ell} + 1} = \frac{8 \text{ кпк}}{1 - \frac{20.9}{240 \times \sin 13^\circ}} \approx 13 \text{ кпк.}$$

Для нахождения гелиоцентрического расстояния x запишем[‡] теорему косинусов для $\triangle CSG$ (рис. 1.8) и решим полученное квадратное уравнение:

$$r^2 = x^2 + r_{\odot}^2 - 2xr_{\odot} \cos \ell.$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{1}{2} \left(2r_{\odot} \cos \ell + \sqrt{(2r_{\odot} \cos \ell)^2 - 4(r_{\odot}^2 - r^2)} \right) = \\ &= r_{\odot} \cos \ell + \sqrt{r^2 - r_{\odot}^2 \sin^2 \ell} \approx \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\approx r_{\odot} + r = 21 \text{ кпк.} \quad (1.6)$$

1.14 Вифлеемская звезда

Синодический период планеты S_x выражается через сидерические периоды планеты T_x и Земли T_{\oplus} :

$$\frac{1}{S_x} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_x}. \quad (1.7)$$

Средний промежуток времени между великими соединениями P связан с синодическими периодами планет соотношением

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{S_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{S_{\downarrow\uparrow}}, \quad (1.8)$$

в котором имеем право на основании (1.7) заменить синодические периоды на сидерические:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{T_{\downarrow}} - \frac{1}{T_{\uparrow}}. \quad (1.9)$$

$$\therefore P = \left(T_{\downarrow}^{-1} - T_{\uparrow}^{-1} \right)^{-1} = \left(11.862^{-1} - 29.458^{-1} \right)^{-1} \text{ лет} \approx 19.86 \text{ лет.}$$

[‡] Отметим, что строку-выражение (1.5) можно получить и непосредственно из геометрии задачи, а (1.6) — вовсе записать сразу (поскольку $\ell \ll 1$).

Уравнение (1.9) может быть интерпретировано как «усреднение» земной орбиты с эффективным переносом наблюдателя в центр Солнца. Такой подход позволяет сравнительно легко ответить на следующий вопрос: среднее угловое перемещение есть

$$\Omega = \frac{P}{T_x} \cdot 360^\circ = \left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{T_2} \cdot 360^\circ = \frac{19.86}{11.86} \times 360^\circ = 602.7^\circ \\ \frac{P}{T_1} \cdot 360^\circ = \frac{19.86}{29.46} \times 360^\circ = 242.7^\circ \end{array} \right\} \equiv 242.7^\circ \quad (1.10)$$

к востоку (по направлению прямого движения), или же $360^\circ - 242.7^\circ = 117.3^\circ$ — к западу.

21.12.2020 года эклиптическая долгота Солнца составляет около 270° , следовательно, планеты расположены на долготе $\lambda \simeq 270^\circ + 30^\circ = 300^\circ$, на границе Стрельца (Sagittarius, Sgr) и Козерога (Capricornus, Cap).

Между соединениями 7 г. до н. э. и 2020 г. н. э. прошло

$$n = \left[\frac{2020 + 7}{P} \right] = 102$$

средних периода великих соединений. «Отматывая» время вспять, рассчитаем соответствующую эклиптическую долготу:

$$\lambda - n\Omega = 300^\circ - 242.7^\circ \times 102 = -24455^\circ \equiv 25^\circ.$$

∴ Юпитер и Сатурн соединились в Рыбах (Pisces, Psc).

Во время среднего соединения серии планеты совершали попятные движения, будучи около противостояний. Следовательно, Солнце находилось напротив Рыб, в Деве (Virgo, Vir).

Упражнения.

1. Обоснуйте формулу (1.8) и вычисление (1.10). Оцените характерные разницы между наблюдаемыми и вычисленными средними промежутками времени и углами.
2. Рассчитайте длины дуг попятных движений внешних планет и времена их прохождения.
3. Опишите движения Юпитера и Сатурна в 7 г. до н. э.

Прежде всего, мы должны заметить, что мир является шарообразным, потому что эта форма совершеннейшая из всех. . .

Н. Коперник

2.1 Полночь

В течение года некоторое удалённое светило описывает на небе Земли параллактический эллипс, эксцентриситет которого $e = 0.987$. В ночь с четвёртого на пятое апреля можно наблюдать, как оно пересекает небесный меридиан в полночь. На какой высоте над горизонтом это происходит, если наблюдатель находится на широте $\varphi = 80^\circ$ с. ш.? Солнце прошло точку равноденствия в ночь с 20 на 21 марта.

2.2 А зори там тихие

Рыжая панда Миру устала от всеобщего внимания и улетела на Уран. Там, конечно, холодно, зато спокойно. И восходы красивые. . . В каких пределах может изменяться продолжительность восхода Солнца для Миру, находящейся на условной «поверхности» этого гиганта? Ураноцентрическая широта места наблюдения $\varphi = 10^\circ$.

2.3 Тени

Наблюдатель заметил, что минимальная длина тени тонкого метрового вертикального столба в течение дня составила $l_{\min} = 1.732$ м. В те же самые сутки её максимальная длина была равна $l_{\max} = 5.671$ м. Найдите широту места наблюдения φ и склонение Солнца δ_\odot в тот день. Солнце считайте точечным источником.

2.4 Теория вероятностей

Рассмотрим произвольный момент времени в пределах ближайших 10 тысяч лет. Оцените вероятность того, что в какой-либо точке на Земле в этот момент возможно наблюдать покрытие Луной звезды ι Leo (экваториальные координаты на эпоху J 2000.0: $11^h 23^m 56^s$, $+10^\circ 31' 46''$). Наличием у Земли атмосферы пренебрегите.

2.5 Три часа

Наибольшая высота над горизонтом, которой достигает некоторая звезда в Санкт-Петербурге ($\varphi = 60^\circ$ с. ш.), составляет $h_{\max} = +35^\circ$. Определите высоту этой звезды в момент, когда её астрономический азимут $A = 90^\circ$.

2.6 Бейрут

В какой момент по истинному солнечному времени 1 сентября Регул ($\alpha_1 = 10^{\text{h}} 09^{\text{m}}$, $\delta_1 = 11^\circ 53'$) и Хорт ($\alpha_2 = 11^{\text{h}} 15^{\text{m}}$, $\delta_2 = 15^\circ 20'$) находятся на одном альмукантарате в Бейруте (широта $\varphi = +33^\circ 53'$)?

2.7 Быть, а не казаться

Производится фотографирование области неба размером $\Delta h = 10.0'$ по высоте и $\Delta A = 10.0'$ по азимуту на высоте $h = 2.7^\circ$ над горизонтом. Определите истинные угловые размеры этой области. Зависимость величины атмосферной рефракции R от истинной высоты светила x имеет следующий приближённый вид:

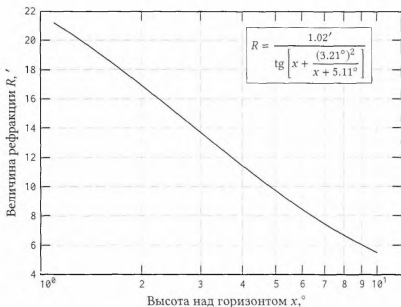


Рис. 2.1. График зависимости величины атмосферной рефракции от истинной высоты (T. Saemundsson)

2.8 Наблюдаемость

Некоторая звезда со склонением $\delta = +40.0^\circ$ наблюдается в Санкт-Петербурге (широта $\varphi = +60.0^\circ$). Известно, что когда её высота над горизонтом составила $h = 20.0^\circ$, видимая звёздная величина была равна 6.80^m . Поднявшись на $\Delta h = 10.0^\circ$, звезда стала ярче на 0.40^m . Будет ли эта звезда доступна для наблюдения невооруженным глазом (проницающая способность 6.0^m) в какой-либо момент времени? Если да, то как долго будет продолжаться период её непрерывной видимости?

2.9 *Pas de deux*

В момент захода Солнца азимут центра его диска был равен $A_\odot = 98.0^\circ$, а модуль скорости изменения этой величины $b = 12.87'/\text{мин}$. В момент наблюдений среднее солнечное время опережало истинное. Найдите дату наблюдения. Рефракцией пренебречь.

2.10 *Марибо*

Ночью 17 января 2009 года в Скандинавии многие люди наблюдали яркий след метеороида, сгорающего в атмосфере Земли.

Метеороид двигался равномерно и прямолинейно. Определите его скорость v по данным съёмки. Каково минимальное удаление траектории падения от точки наблюдения, если метеорит был найден на расстоянии 195 км от неё? Кривизной поверхности Земли пренебречь.

$t - t_0$	Азимут	Высота
2.46 с	197.4°	28.4°
5.28 с	222.3°	14.7°
	231.0°	0° точно
± 5 мс	$\pm 0.05^\circ$	$\pm 0.05^\circ$

2.11 *Реактивная тригонометрия*

Во время тура один из участников IOAA-2016 случайно отправился в космический полёт и оказался над городом проведения олимпиады — Бхубанешваром ($\varphi_0 = 20^\circ$ с. ш., $\lambda_0 = 86^\circ$ в. д.) — на высоте, равной радиусу Земли: $h = R_\oplus$.

1. Найдите, какая часть поверхности Земли открылась его взору.
2. Определите координаты самой западной и самой восточной точек этой области — $W(\varphi_W; \lambda_W)$ и $E(\varphi_E; \lambda_E)$.
3. Какой наибольшей широты φ_{\max} достигает в полёте самолёт, летящий из W в E по кратчайшей траектории?

Землю считайте идеальным шаром без атмосферы.

2.12 Кораблекрушение

Очнувшись после кораблекрушения, вы обнаружили, что попали на остров. Недавно стемнело. Ригель (β Ori: $\alpha = 5^{\text{h}} 15^{\text{m}}$, $\delta = -8^{\circ} 11'$) находится на высоте $h = 52.5^{\circ}$ при азимуте $A = 109^{\circ}$. Часы, установленные на бангкокское время (UT+7), показывают 01:00 21 ноября 2017 года. Найдите часовой угол Ригеля, текущее гринвичское звёздное время и ваши географические координаты, если гринвичское звёздное время на 0^{h} UT 1 января 2017 года было равно $\text{GST}_0 = 6^{\text{h}} 43^{\text{m}}$.

2.13 Загадочный круг

Рассчитайте астрономический азимут восхода звезды ϵ Большого Пса ($\alpha = 6^{\text{h}} 58^{\text{m}} 38^{\text{s}}$, $\delta = -28^{\circ} 58'$) при наблюдении из самой северной равноудалённой от Санкт-Петербурга ($\varphi_1 = 59^{\circ} 57'$ с. ш., $\lambda_1 = 30^{\circ} 19'$ в. д.) и Красной Поляны ($\varphi_2 = 43^{\circ} 41'$ с. ш., $\lambda_2 = 40^{\circ} 11'$ в. д.) точки земной поверхности. Землю считайте шаром.

Решения

2.1 Полночь

Из-за орбитального движения Земли траектория звезды относительно далёкого фона на земном небе представляет собой эллипс, большая полуось которого параллельна эклиптике. Понятно (см. рис. 2.2), что эксцентриситет e параллактического эллипса связан с эклиптической широтой β светила соотношением

$$e = \cos \beta.$$

$$\therefore \beta = \pm \arccos e = \pm \arccos 0.987 = \pm 9.2^\circ.$$

Ночь наблюдений отстоит от весеннего равноденствия всего на 15 суток. Для эклиптической долготы Солнца имеем

$$\lambda_{\odot} = 360^\circ \times \frac{15^{\text{d}}}{365.2422^{\text{d}}} = 15^\circ \times \frac{360}{365.2422} \simeq 15^\circ = 1^{\text{h}}.$$

Вблизи точки весеннего равноденствия координаты преобразуются следующим образом (поворот на рис. 2.3):

$$\begin{cases} \alpha = \lambda \cos \varepsilon - \beta \sin \varepsilon; \\ \delta = \beta \cos \varepsilon + \lambda \sin \varepsilon. \end{cases} \quad (2.1)$$

Рассчитаем прямое восхождение Солнца, зная, что его эклиптическая широта $\beta_{\odot} \equiv 0^\circ$:

$$\alpha_{\odot} = \lambda_{\odot} \cos \varepsilon = 1^{\text{h}} \times \cos 23.44^\circ = 13.76^\circ.$$

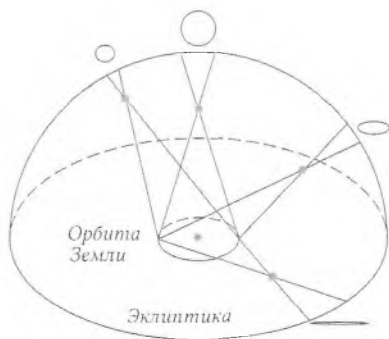


Рис. 2.2. Параллактические эллипсы

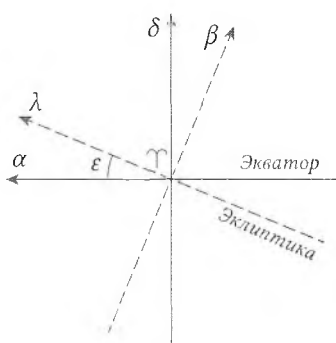


Рис. 2.3. Поворот координатных осей

Допустим, в полночь происходит нижняя кульминация светила; тогда его прямое восхождение $\alpha = \alpha_{\odot}$. Найдём склонение из системы (2.1):

$$\begin{aligned}\delta &= \beta \cos \varepsilon + \left(\frac{\alpha}{\cos \varepsilon} + \beta \operatorname{tg} \varepsilon \right) \sin \varepsilon = \alpha \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{\beta}{\cos \varepsilon} = \\ &= 13.76^{\circ} \operatorname{tg} 23.44^{\circ} \pm \frac{9.2^{\circ}}{\cos 23.44^{\circ}} = \begin{cases} \delta_1 = -4^{\circ}, \\ \delta_2 = +16^{\circ}. \end{cases}\end{aligned}$$

В первом случае светило в момент нижней кульминации находится под горизонтом ($\varphi + \delta_1 < 90^{\circ}$). Второй возможный результат даёт высоту

$$h_I = \varphi + \delta_2 - 90^{\circ} = 80^{\circ} + 16^{\circ} - 90^{\circ} = +6^{\circ}.$$

Теперь рассмотрим верхнюю кульминацию: $\alpha = \alpha_{\odot} + 12^h$. Аналогичные преобразования выполним в окрестности точки осени:

$$\begin{cases} \alpha - 12^h = (\lambda - 12^h) \cos \varepsilon + \beta \sin \varepsilon; \\ \delta = \beta \cos \varepsilon - (\lambda - 12^h) \sin \varepsilon. \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\therefore \delta = \frac{\beta}{\cos \varepsilon} - \alpha_{\odot} \operatorname{tg} \varepsilon = \begin{cases} \delta_3 = -\delta_2 = -16^{\circ}, \\ \delta_4 = -\delta_1 = +4^{\circ}. \end{cases}$$

При склонении -16° светило является невосходящим ($\delta_3 < \varphi - 90^{\circ}$). Четвёртый вариант, напротив, подходит:

$$h_{II} = 90^{\circ} - \varphi + \delta_4 = 90^{\circ} - 80^{\circ} + 4^{\circ} = +14^{\circ}.$$

Упражнения.

1. Покажите, что в общем случае для прямых восхождений и эклиптических долгот $\alpha_1 = \alpha_2 + 12^h \nRightarrow \lambda_1 = \lambda_2 + 12^h$. Каково минимальное возможное значение величины $|\lambda_1 - \lambda_2|$? В каком случае следствие выполнено?
- 2'. Рассмотрим подмножество точек небесной сферы T : $|\beta| \leq \beta_0 < 90^{\circ}$, где β_0 – заданная эклиптическая широта, и функцию $f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$, которая ставит в соответствие точкам $A, B \in T$ величину $|\lambda_A - \lambda_B|$ – модуль разности их эклиптических долгот. Множество

$$U = \left\{ f(A, B) \mid \forall A, B \in T: \alpha_A = \alpha_B + 12^h \right\}$$

содержит значения функции f для всех точек с противоположным прямым восхождением. Найдите $\min U$.

3. Оцените, на каком угловом расстоянии от точки весны линейные преобразования (2.1) перестают обеспечивать приемлемую точность вычислений. В качестве предельных погрешностей возьмите 0.05%, 0.5% и 5%.

2.2 А зори там тихие

Угловой размер Солнца при наблюдении с Урана составляет

$$P = 2\rho_{\odot} \cdot \frac{a_{\oplus}}{a_{\odot}} = 32' \times \frac{1.00 \text{ а. е.}}{19.19 \text{ а. е.}} \approx 100''.$$

Самые короткие восходы Солнца происходят, когда оно находится на небесном экваторе. Примем угловую скорость Солнца равной $\omega_{\odot} = 360^{\circ}/T_{\odot}$, где T_{\odot} — продолжительность суток* на Уране. Для минимальной продолжительности восхода имеем (рис. 2.4):

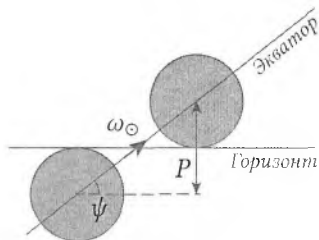


Рис. 2.4. Восход Солнца вдоль небесного экватора ($\psi \equiv 90^{\circ} - \varphi$)

$$t_{\min} = \frac{P}{\omega_{\odot} \sin(90^{\circ} - \varphi)} = \frac{P}{360^{\circ}} \cdot \frac{T_{\odot}}{\cos \varphi} = \\ = \frac{100''}{360^{\circ}} \times \frac{17.24^{\text{h}}}{\cos 10^{\circ}} \approx 5^{\text{s}}.$$

В месторасположении Миру может наступать полярная ночь. Нетрудно догадаться, что максимум длительности восхода приходится на день, когда Солнце едва заходит — в нижней кульминации касается горизонта (см. рис. 2.5). Полярное расстояние Солнца в этот день

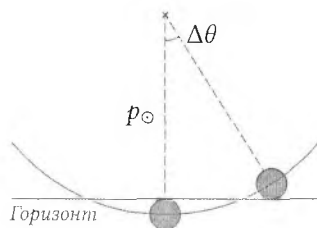


Рис. 2.5. Восход Солнца около полюса мира

$$p_{\odot} = \varphi + \frac{1}{2}P = 10^{\circ} + \frac{100''}{2}.$$

От нижней кульминации, начала восхода, до конца восхода Солнце поднимется на угол, равный своему угловому диаметру P . Его часовой угол изменится на величину

$$\Delta\theta = \arccos \frac{p_{\odot} - P}{p_{\odot}} = \arccos \frac{\varphi - P/2}{\varphi + P/2} = \arccos \frac{10^{\circ} - 50''}{10^{\circ} + 50''} \approx 4.3^{\circ}.$$

$$\therefore t_{\max} = \frac{\Delta\theta}{\omega_{\odot}} = \frac{\Delta\theta}{360^{\circ}} \cdot T_{\odot} = \frac{4.3^{\circ}}{360^{\circ}} \times 17.24^{\text{h}} \approx 12^{\text{m}}.$$

* Понятие синодических суток на Уране теряет смысл. Его ось вращения наклонена к плоскости орбиты на 8° , то есть векторы угловых скоростей орбитального и собственного вращения практически ортогональны, и складывать их алгебраически нельзя.

2.3 Тени

Очевидно, наблюдатель находится в условиях полярного дня. Минимальная длина тени достигается при наибольшей высоте Солнца h_{\max} , в момент его верхней кульминации, а максимальная длина — в момент нижней кульминации Солнца (высота h_{\min}).

Длины тени, длина столба $L \equiv 1.000$ м и искомые склонение Солнца и широта связаны следующими геометрическими соотношениями:

$$\begin{cases} h_{\max} = 90^\circ - \varphi + \delta_\odot = \operatorname{arctg} \frac{L}{l_{\min}} = \operatorname{arctg} 1.732^{-1} = 30^\circ, \\ h_{\min} = \varphi + \delta_\odot - 90^\circ = \operatorname{arctg} \frac{L}{l_{\max}} = \operatorname{arctg} 5.671^{-1} = 10^\circ. \end{cases}$$

Эта система линейных уравнений легко разрешается относительно неизвестных: $\varphi = 80^\circ$, $\delta_\odot = 20^\circ$. Не следует забывать про южное полушарие; допускается два случая: $(80^\circ \text{ с. ш.}, +20^\circ)$ и $(80^\circ \text{ ю. ш.}, -20^\circ)$.

Упражнение.

Определите возможную дату наблюдений.

2.4 Теория вероятностей

В связи с близостью звезды к точке осеннего равноденствия при нахождении её эклиптической широты β по заданным экваториальным координатам ($\alpha; \delta$) допустимо использовать «плоское» приближение.** Из (2.2, стр. 30) получим, что вблизи точки осеннего равноденствия

$$\begin{aligned} \beta &= \delta \cos \varepsilon + (\alpha - 12^h) \sin \varepsilon = \\ &= 10^\circ 31' 46'' \cos 23.44^\circ - (12^h - 11^h 23^m 56^s) \sin 23.44^\circ = \\ &= 10.529^\circ \cos 23.44^\circ - 9.017^\circ \sin 23.44^\circ = +6.07^\circ. \end{aligned}$$

Теперь необходимо принять принципиальное решение о продолжении решения задачи, несмотря на то, что эклиптическая широта светила превосходит наклонение лунной орбиты к эклиптике $i_\zeta = 5.15^\circ$.

** Даже при наличии острого желания использовать аппарат сферической тригонометрии, вместо преобразования координат достаточно решить более «популярную» задачу о нахождении расстояния между двумя точками на сфере, а именно — между светилом и северным полюсом эклиптики. Экваториальные координаты последнего — $18^h, 90^\circ - \varepsilon$. Теорема косинусов для Δ «полюс мира — полюс эклиптики — звезда» запишется в виде

$$\cos(90^\circ - \beta) = \cos(90^\circ - \delta) \cos \varepsilon + \sin(90^\circ - \delta) \sin \varepsilon \cos(18^h - \alpha),$$

$$\therefore \beta = \arcsin(\sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha) = +6.11^\circ.$$

Покрытие звезды Луной наблюдается на Земле, если геоцентрическое угловое расстояние между звездой и центром Луны не превышает суммы её углового радиуса и суточного параллакса

$$P = \rho_{\zeta} + \pi_{\zeta} = 0.26^{\circ} + 0.95^{\circ} = 1.21^{\circ}.$$

Заметив, что $i_{\zeta} + P = 6.36^{\circ} > \beta$, заключим, что покрытия возможны.

Поскольку период прецессии узлов лунной орбиты составляет 18.6 лет, что существенно меньше 10 тысяч лет, будем считать, что центр Луны равномерно распределён в «поясе» эклиптических широт $[-i_{\zeta}; +i_{\zeta}]$.

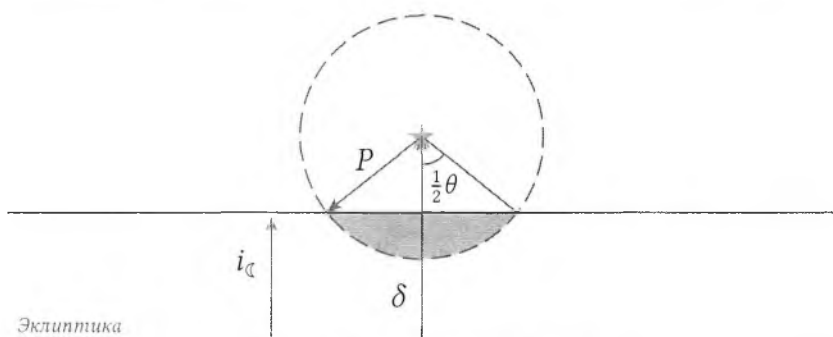


Рис. 2.6. Тень и полутень Земли

Задача свелась к нахождению отношения площади S_1 окрестности звезды радиуса P , попадающей в «пояс», к площади S последнего:

$$S_1 = \frac{1}{2}P^2(\theta - \sin \theta), \quad S = 2\pi \times 360^{\circ} \times 2i_{\zeta};$$

$$\text{где } \theta = 2 \arccos \frac{\beta - i_{\zeta}}{P} = 2 \arccos \frac{6.07^{\circ} - 5.15^{\circ}}{1.21^{\circ}} = 81^{\circ} = 1.41 \text{ рад.}$$

В результате искомая вероятность есть

$$\Phi = \frac{S_1}{S} = \frac{P^2(\theta - \sin \theta)}{8\pi \times 360^{\circ} \times i_{\zeta}} = \frac{(1.21^{\circ})^2(1.41 - \sin 81^{\circ})}{8\pi \times 360^{\circ} \times 5.15^{\circ}} \approx 1 \cdot 10^{-5}.$$

Упражнения.

1. Исследуйте асимптотическое поведение функции $\Phi(\beta)$ при $\beta \rightarrow \beta_{\max}$.
2. Оцените вероятность того, что в некоторой заданной точке на Земле в случайный момент времени возможно наблюдать покрытие Луной звезды ι Leo.
3. Как известно, покрытия звёзд Луной происходят сериями. Так, например, серия покрытий Альдебарана началась 29 января 2015 года и продолжится до 3 сентября 2018 года. Определите эклиптическую широту Альдебарана, долготу восходящего узла лунной орбиты в день окончания серии и дату начала очередной серии покрытий этой звезды Луной.

2.5 Три часа

Высота верхней кульминации к северу от зенита не может быть меньше высоты северного полюса мира, равной широте Петербурга $\varphi = +60^\circ$. Следовательно, кульминация происходит к югу от зенита. Поскольку склонение звезды δ связано с h_{\max} и φ соотношением $h_{\max} = 90^\circ - \varphi + \delta$,

$$\delta = h_{\max} + \varphi - 90^\circ = 35^\circ + 60^\circ - 90^\circ = +5^\circ.$$

Способ 1. Рассмотрим параллактический $\triangle ZPM$: зенит – северный полюс мира – звезда (рис. 2.7). Найдём высоту звезды в указанный момент, используя сферическую теорему косинусов:

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A;$$

$$\begin{aligned} h &= \arcsin \frac{\sin \delta + \cos h \cos \varphi \cos 90^\circ}{\sin \varphi} = \\ &= \arcsin \frac{\sin 5^\circ}{\sin 60^\circ} = +5.76^\circ \simeq +6^\circ. \end{aligned}$$

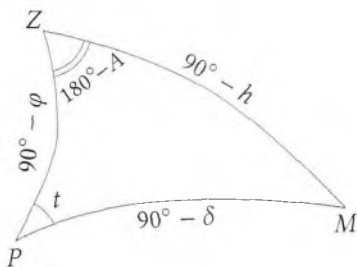


Рис. 2.7

Способ 2. Поскольку склонение звезды невелико, непосредственно из евклидовой геометрии рис. 2.8 получаем

$$h = \frac{\delta}{\sin \varphi} = \frac{5^\circ}{\sin 60^\circ} = +5.77^\circ \simeq +6^\circ.$$

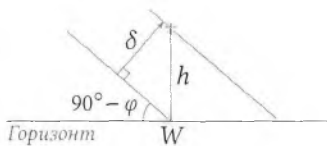


Рис. 2.8

2.6 Бейрут

Запишем сферическую теорему косинусов для параллактического $\triangle ZPM$ (зенит – северный полюс мира – светило):

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t.$$

Поскольку светила находятся на одном альмукантарате, их зенитные расстояния $z_1 = z_2$, поэтому после вычитания имеем

$$0 = \sin \varphi \cdot (\sin \delta_1 - \sin \delta_2) + \cos \varphi \cdot (\cos \delta_1 \cos t_1 - \cos \delta_2 \cos t_2).$$

Разность прямых восхождений Регула и Хорта

$$\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 11^h 15^m - 10^h 09^m = 1^h 06^m = 16.5^\circ.$$

Раскладывая $\cos t_2 = \cos(t_1 + \Delta t) = \cos(t_1 - \Delta\alpha)$ как косинус разности, приходим к уравнению

$$\underbrace{\sin \varphi \cdot (\sin \delta_1 - \sin \delta_2)}_{\equiv A} + \underbrace{\cos \varphi \cdot (\cos \delta_1 - \cos \delta_2 \cos \Delta\alpha)}_{\equiv B} \cdot \cos t_1 - \underbrace{\cos \varphi \cos \delta_2 \sin \Delta\alpha \cdot \sin t_1}_{\equiv C} = 0,$$

то есть

$$A + B \cos t_1 - C \sin t_1 = 0, \quad (2.3)$$

где введены коэффициенты

$$\begin{cases} A \equiv \sin 33^\circ 53' \times (\sin 11^\circ 53' - \sin 15^\circ 20') = -0.03262, \\ B \equiv \cos 33^\circ 53' \times (\cos 11^\circ 53' - \cos 15^\circ 20' \cos 16.5^\circ) = 0.04473, \\ C \equiv \cos 33^\circ 53' \cos 15^\circ 20' \sin 16.5^\circ = 0.22739. \end{cases}$$

Возведём (2.3) в квадрат и придём к квадратному уравнению относительно $\cos t_1$:

$$A^2 + B^2 \cos^2 t_1 + 2AB \cos t_1 = C^2 - C^2 \cos^2 t_1;$$

$$(B^2 + C^2) \cos^2 t_1 + 2AB \cos t_1 + (A^2 - C^2) = 0.$$

$$\therefore \cos t_1 = \frac{\pm C \sqrt{B^2 + C^2 - A^2} - AB}{B^2 + C^2} = \begin{cases} \cos t_1^I = +0.99859, \\ \cos t_1^{II} = -0.94426. \end{cases}$$

Корни соответствуют часовым углам $\pm 3.04^\circ$ и $\pm 160.78^\circ$. Подстановка в исходное уравнение (2.3) оставляет два варианта и два соответствующих значения звёздного времени:

$$\begin{aligned} t_1^I &= +3.04^\circ \approx 0^h 12^m, & s^I &= t_1^I + \alpha_1 = 0^h 12^m + 10^h 09^m = 10^h 21^m; \\ t_1^{II} &= -160.78^\circ \approx 13^h 17^m, & s^{II} &= t_1^{II} + \alpha_1 = 13^h 17^m + 10^h 09^m = 23^h 26^m. \end{aligned}$$

1 сентября, за 22 дня до осеннего равноденствия, солнечное время опережает звёздное примерно на

$$22 \times 3^m 56^s = 1^h 27^m,$$

и искомое солнечное время составляет, соответственно, $11^h 48^m$ и $0^h 53^m$.

Упражнение.

Решите данную задачу в частном случае, когда звёзды имеют равные склонения и различные прямые восхождения. Особо рассмотрите случай противоположных прямых восхождений.

2.7 Быть, а не казаться

Рефракция не изменяет азимуты светил. С уменьшением высоты её величина заметно растёт, из-за чего, например, диск закатного Солнца становится сплюснутым.

Пусть истинная высота центра поля зрения — h_0 , а истинный размер кадра — $\Delta_0 h$. Видимые высоты нижней и верхней границ кадра равны соответственно

$$\begin{aligned}h - \frac{1}{2}\Delta h &= h_0 - \frac{1}{2}\Delta_0 h + R\left(h_0 - \frac{1}{2}\Delta_0 h\right), \\h + \frac{1}{2}\Delta h &= h_0 + \frac{1}{2}\Delta_0 h + R\left(h_0 + \frac{1}{2}\Delta_0 h\right).\end{aligned}$$

Вычтем первое уравнение из второго и приближим функцию $R(h)$ в окрестности h_0 её линейной аппроксимацией:

$$\Delta h = \Delta_0 h + R\left(h_0 + \frac{1}{2}\Delta_0 h\right) - R\left(h_0 - \frac{1}{2}\Delta_0 h\right) \approx \Delta_0 h + R'(h_0) \cdot \Delta_0 h.$$

Производную $R'(h_0)$ можно рассчитать аналитически, но куда проще сделать это приближённо, полагая $R'(h_0) \approx R'(h)$:

$$R(x) = \frac{1.02'}{\operatorname{tg}\left[x + \frac{(3.21^\circ)^2}{x + 5.11^\circ}\right]}; \quad \begin{aligned}R(h - \Delta h/2) &= 14'46.26'', \\R(h + \Delta h/2) &= 14'16.14'';\end{aligned}$$

$$R'(h) \approx \frac{R(h + \Delta h/2) - R(h - \Delta h/2)}{\Delta h} = \frac{16.14'' - 46.26''}{10'} = -0.050.$$

В результате

$$\Delta_0 h = \frac{\Delta h}{1 + R'(h)} \approx \Delta h \cdot (1 - R'(h)) = 10' \times (1 + 0.050) = 10.5'.$$

Истинные размеры: 10.5' по высоте и 10.0' по азимуту.

Упражнения.

1. Оцените вызванное рефракцией отличие наблюдаемого и истинного размера изображения по горизонтали, а также его площади.
2. Вычислите $R'(h)$, используя график из условия задачи (рис. 2.1).

2.8 Наблюдаемость

Чем меньше путь, проходимый светом звезды в атмосфере Земли, тем ярче звезда и меньше значение её видимой звёздной величины, причём величина поглощения прямо пропорциональна оптическому пути. Пусть m_0 — звёздная величина звезды вне атмосферы, E_z — величина поглощения в зените. Тогда, считая атмосферу плоской (в силу достаточной для использования такого приближения высоты), можем записать, что наблюдаемая на высоте h звёздная величина

$$m(h) = m_0 + \frac{E_z}{\sin h}.$$

Разность приведённых в условии звёздных величин

$$m(h) - m(h + \Delta h) = E_z \left(\frac{1}{\sin h} - \frac{1}{\sin(h + \Delta h)} \right).$$

$$\therefore E_z = \frac{m(h) - m(h + \Delta h)}{\sin^{-1} h - \sin^{-1}(h + \Delta h)} = \frac{0.4^{\text{m}}}{\sin^{-1} 20^\circ - \sin^{-1} 30^\circ} = 0.433^{\text{m}}.$$

Определим, на какой высоте H должна находиться звезда, чтобы быть предельно доступной для наблюдения невооруженным глазом (проницающая способность $m_1 \equiv 6.0^{\text{m}}$):

$$m(h) - m_1 = E_z \left(\frac{1}{\sin h} - \frac{1}{\sin H} \right);$$

$$H = \arcsin \left(\frac{1}{\sin h} - \frac{m(h) - m_1}{E_z} \right)^{-1} = \arcsin \frac{1}{\frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{6.8 - 6.0}{0.433}} = 68.3^\circ.$$

Отметим, что $H < 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - 60^\circ + 40^\circ = 70^\circ$ — высоты верхней кульминации звезды, значит, звезда преодолет пороговый блеск 6.0^{m} . При помощи сферической теоремы косинусов для параллактического треугольника вычислим часовой угол, при котором достигается такая высота:

$$t = \arccos \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \arccos \frac{\sin 68.3^\circ - \sin 60^\circ \sin 40^\circ}{\cos 60^\circ \cos 40^\circ} \approx \pm 1^{\text{h}}.$$

Таким образом, период, в течение которого звезда формально доступна для наблюдения невооруженным глазом, составляет около 2 часов.

Упражнение.

Проведите расчёты для модели атмосферы — тонкого сферического слоя. Сравните результат с полученным в «плоской» модели.

2.9 *Pas de deux*

Рассчитаем склонение Солнца δ_{\odot} .

Способ 1. Запишем сферическую теорему синусов для параллактического $\triangle PZ\odot$ и продифференцируем по времени полученное равенство:

$$\cos h \sin A = \cos \delta_{\odot} \sin t,$$

$$\frac{dA}{d\tau} \cdot \cos h \cos A - \frac{dh}{d\tau} \cdot \sin h \sin A = \frac{dt}{d\tau} \cos \delta_{\odot} \cos t.$$

Заметим, что $dt/d\tau = \omega_{\odot} = 15'/\text{мин}$ — угловая скорость движения Солнца по небу. Подставим $h = h_{\odot} = 0$, $A = A_{\odot}$ в равенства выше:

$$\sin A_{\odot} = \cos \delta_{\odot} \sin t;$$

$$\frac{b}{\omega_{\odot}} \cos A_{\odot} = \cos \delta_{\odot} \cos t.$$

Возведём в квадрат и сложим эти уравнения:

$$\cos^2 \delta_{\odot} = \sin^2 A_{\odot} + \left(\frac{b}{\omega_{\odot}} \right)^2 \cos^2 A_{\odot} = 1 + \left[\left(\frac{b}{\omega_{\odot}} \right)^2 - 1 \right] \cos^2 A_{\odot}.$$

$$\therefore \delta_{\odot} = \pm \arccos \sqrt{1 + \left[\left(\frac{b}{\omega_{\odot}} \right)^2 - 1 \right] \cos^2 A_{\odot}} =$$

$$= \pm \arccos \sqrt{1 + \left[\left(\frac{12.87'/\text{мин}}{15'/\text{мин}} \right)^2 - 1 \right] \cos^2 98^{\circ}} = \pm 4.10^{\circ}.$$

Способ 2. Точка захода Солнца отстоит от точки запада всего на 8° . Имеем право решать «плоскую» задачу — см. рис. 2.9:

$$\pm b = \omega_{\odot} \cos \psi;$$

$$\delta_{\odot} = (A_{\odot} - 90^{\circ}) \sin \psi.$$

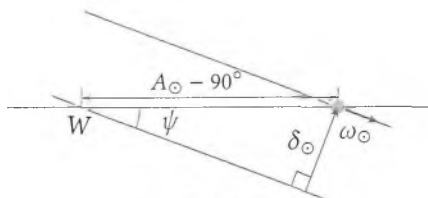


Рис. 2.9

Угол ψ нетрудно исключить из полученной системы. Таким образом,

$$\therefore \delta_{\odot} = \pm (A_{\odot} - 90^{\circ}) \sqrt{1 - \left(\frac{b}{\omega_{\odot}} \right)^2} = \pm 8^{\circ} \times \sqrt{1 - \left(\frac{12.87}{15} \right)^2} = \pm 4.11^{\circ}.$$

Оценим скорость изменения склонения Солнца вблизи равноденствий, сославшись, например, на (2.3):

$$\frac{d\delta_{\odot}}{dt} \simeq \frac{d\lambda_{\odot}}{dt} \operatorname{tg} \varepsilon \simeq 1^{\circ}/\text{сут.} \times \operatorname{tg} 23.44^{\circ} \simeq 0.4^{\circ}/\text{сут.}$$

Тогда день наблюдения отстоит от равноденствия на 10 дней.

Окрестность осеннего равноденствия не подходит, так как по условию уравнение времени положительно — среднее солнечное время опережает истинное. Случай с отрицательным склонением тоже не подходит, поскольку точка захода Солнца смещена к северу. Значит, наблюдения пришлось примерно на 1 апреля, с праздником вас.

Упражнения.

1. Определите широту места наблюдения, время захода Солнца, а также его продолжительность.
2. Найдите модуль скорости изменения высоты Солнца s в тот момент времени. Какой физический смысл имеет величина $b^2 + c^2$?

2.10 Марибо

Покажем, что ситуация невозможна. В самом деле, проекция траектории метеороида, отрезка прямой, на небесную сферу является дугой большого круга. Рассчитаем расстояния между всеми парами заданных точек, используя сферическую теорему косинусов:

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \arccos [\sin h_i \sin h_j + \cos h_i \cos h_j \cos(A_i - A_j)]; \\ \rho_{12} &= 26.82^{\circ}, \quad \rho_{23} = 17.03^{\circ}, \quad \rho_{13} = 42.89^{\circ}. \end{aligned}$$

Как видим, $\rho_{12} + \rho_{23} - \rho_{13} = 26.82^{\circ} + 17.03^{\circ} - 42.89^{\circ} \simeq 1.0^{\circ}$, что значительно от нуля. Значимость можно продемонстрировать, например, используя метод Корнфельда: рассчитаем соответствующие расстояния, варьируя координаты на величину их погрешностей, и убедимся², что

$$(\rho_{12} + \rho_{23})^{\min} - \rho_{13}^{\max} \simeq 0.6^{\circ} \gg 0.1^{\circ} > 0.$$

Данные три точки заведомо образуют сферический треугольник и не могут в совокупности принадлежать проекции траектории. \square

Упражнения.

1. Альтернативный способ доказательства основывается на следующем утверждении: если радиусы-векторы трёх точек линейно независимы, то эти точки не лежат на одной прямой. Выполните такое доказательство.
2. Проведите расчёт по методу Корнфельда самостоятельно.

2.11 Реактивная тригонометрия

1. Площадь поверхности сферического сегмента линейно зависит от его высоты, то есть искомое отношение площадей есть (рис. 2.10)

$$\begin{aligned}\frac{2\pi R_{\oplus} \cdot H}{2\pi R_{\oplus} \cdot 2R_{\oplus}} &= \frac{H}{2R_{\oplus}} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + H} \right) = \frac{1 - 1/2}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

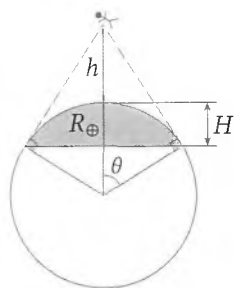


Рис. 2.10

2. Граница области видимости представляет собой малый круг радиусом θ с центром в $(\varphi_0; \lambda_0)$, поскольку угловое расстояние от точек границы до Бхубанешвара составляет θ . Значит, их координаты $(\varphi; \lambda)$ удовлетворяют уравнению

$$\cos \theta = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что максимум $|\lambda - \lambda_0|$ доставляет минимум функции

$$f(\varphi) = \cos(\lambda - \lambda_0) = \frac{\frac{1}{2} - \sin \varphi \sin \varphi_0}{\cos \varphi \cos \varphi_0}.$$

Найдём широту φ_1 , при которой этот минимум достигается.***

$$\begin{aligned}f'(\varphi_1) = 0: \quad \cos \varphi_1 \sin \varphi_0 \cos \varphi_1 \cos \varphi_0 &= \left(\frac{1}{2} - \sin \varphi_1 \sin \varphi_0 \right) \sin \varphi_1 \cos \varphi_0; \\ \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_0 &= \frac{1}{2} \sin \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_0; \\ \sin \varphi_1 &= 2 \sin \varphi_0.\end{aligned}$$

Таким образом, искомая широта $\varphi_1 = \arcsin(2 \sin 20^\circ) \simeq 43^\circ$.

Подставив её в выражение для $f(\varphi)$, получим

$$f(\varphi_1) = \cos(\lambda_1 - \lambda_0) = \frac{\frac{1}{2} - \sin \varphi \sin \varphi_0}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_0} = \frac{\frac{1}{2} - 2 \sin^2 20^\circ}{\cos 43^\circ \cos 20^\circ} = 0.387.$$

$$\therefore \Delta \lambda = \arccos f(\varphi_1) \simeq 67^\circ;$$

$$\lambda_W = \lambda_0 - \Delta \lambda = 86^\circ - 67^\circ = 19^\circ,$$

$$\lambda_E = \lambda_0 + \Delta \lambda = 86^\circ + 67^\circ = 153^\circ.$$

В результате найдены самая западная и восточная точки границы: $W(43^\circ \text{ с. ш.}; 19^\circ \text{ в. д.})$, $E(43^\circ \text{ с. ш.}; 153^\circ \text{ в. д.})$.

*** Проверку выполнения достаточных условий минимальности или утверждение об их очевидности оставляем внимательным читателям.

3. Самолёт летит по дуге большого круга, проходящего через W и E . Рассмотрим прямоугольный сферический $\triangle PEC$, где P — северный полюс, а точка C — самая северная точка маршрута; $\angle PCE = 90^\circ$ по определению точки C . Для прямоугольного сферического треугольника справедливо следующее соотношение:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_C) = \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_E) \cos \Delta\lambda,$$

откуда

$$\varphi_C = 90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\cos \Delta\lambda}{\operatorname{tg} \varphi_E} = 90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\cos 67^\circ}{\operatorname{tg} 43^\circ} \approx 67^\circ.$$

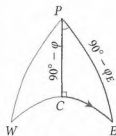


Рис. 2.11

2.12 Кораблекрушение

Имея астрономический азимут $A = 109^\circ \in (0^\circ; 180^\circ)$, Ригель располагается к западу от небесного меридиана. Его часовой угол определяется из сферической теоремы синусов для параллактического треугольника:

$$\frac{\sin A}{\cos \delta} = \frac{\sin t}{\cos h};$$

$$t = \arcsin \frac{\sin A \cos h}{\cos \delta} = \arcsin \frac{\sin 109^\circ \cos 52.5^\circ}{\cos(-8^\circ 11')} = 35.6^\circ = 2^h 22^m.$$

Местное звёздное время рассчитаем по формуле

$$\text{LST} = t + \alpha = 2^h 22^m + 5^h 15^m = 7^h 37^m.$$

Поскольку время на гринвичском меридиане отстаёт от бангкокского на 7 часов, там новогодняя полночь наступит через

$$\Delta t = 07^h 01.01.2018 \text{ г.} - 01^h 21.11.2017 \text{ г.} = 10^d + 31^d + 6^h = 41.25^d,$$

так что звёздное время на Гринвиче в заданный момент составляет

$$\begin{aligned} \text{GST} &= \text{GST}_0 + (365^d - \Delta t) \cdot \frac{24^h}{23^h 56^m 04^s} = \\ &= 6^h 43^m + (365^d - 41.25^d) \times \frac{24^h}{23^h 56^m 04^s} = \\ &= 324.9166^d \equiv 0.9166^d = 22^h 00^m. \end{aligned}$$

Искомая долгота острова есть

$$\lambda = \text{LST} - \text{GST} = 7^h 37^m - 22^h 00^m = -14^h 23^m \equiv 9^h 37^m = 144.25^\circ \text{ в. д.}$$

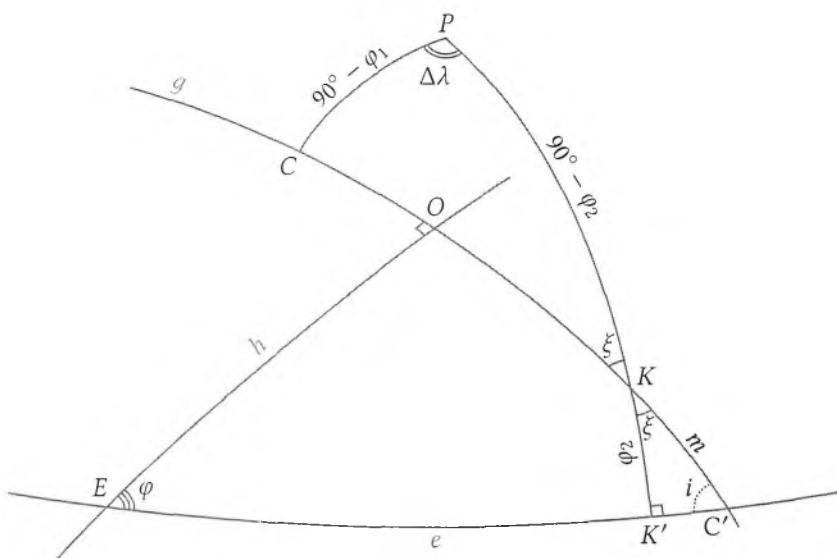


Рис. 2.12. Геометрические построения, используемые в решении

Затем вычислим наклонение i к экватору e большого круга g , используя сферическую теорему косинусов для углов в $\triangle KK'C'$:

$$\cos i = -\cos \xi \cos 90^\circ + \sin \xi \sin 90^\circ \cos \varphi_2;$$

$$i = \arccos(\sin \xi \cos \varphi_2) = \arccos(\sin 16.74^\circ \cos 43^\circ 41') = 77.98^\circ. \quad (2.4)$$

Нам также понадобится длина m дуги KC' , которую нетрудно рассчитать по сферической теореме синусов для $\triangle KK'C'$:

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin i} = \frac{\sin m}{\sin 90^\circ};$$

$$m = \arcsin \frac{\sin \varphi_2}{\sin i} = \arcsin \frac{\sin 43^\circ 41'}{\sin 77.98^\circ} = 44.92^\circ.$$

Равноудалённые от Санкт-Петербурга и Красной Поляны точки лежат на большом круге h , перпендикулярном g и проходящем через середину O дуги CK . По аналогии с (2.4), его наклонение к экватору

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos \left[\cos \left(m + \frac{l}{2} \right) \sin i \right] = \\ &= \arccos \left[\cos \left(44.92^\circ + \frac{17.33^\circ}{2} \right) \times \sin 77.98^\circ \right] = 54.51^\circ. \end{aligned}$$

Тогда, очевидно, самая северная точка большого круга h находится на широте φ . Найдём азимут A восхода звезды ϵ СМа на этой широте. Запишем сферическую теорему косинусов для параллактического треугольника:

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A;$$

$$A = -\arccos \frac{\sin \varphi \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi \cos h} = -\arccos \frac{\sin 28^\circ 58'}{\cos 54.51^\circ} = -33.5^\circ.$$

Упражнения.

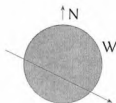
1. Запишите уравнение большого круга, проходящего через заданные точки $(\varphi_1; \lambda_1)$ и $(\varphi_2; \lambda_2)$, а также срединного перпендикуляра к нему.
2. Используя результат предыдущего упражнения, найдите широту φ .

Не видите ли вы, что орбита, по которой он движется, начертана заранее?

П. Чаадаев

3.1 Псевдомеркурий

В 2016 году Полярник Вася обыкновенно отмечал 9 мая, находясь на Северном полюсе и наблюдая, как маленькое небесное тело* долго и печально пересекает диск Солнца. Василий предполагал, что наблюдает транзит американского секретного спутника, обращающегося вокруг Земли по круговой орбите.



Геоцентрические расстояния Солнца и Меркурия во время прохождения составляли $r_{\odot} = 1.010$ а. е. и $r_M = 0.557$ а. е. соответственно.

Рис. 3.1. К задаче Псевдомеркурий

Найдите радиус орбиты такого спутника R и её наклонение i , а также линейный размер спутника d .

3.2 О бедной L_3 замолвите слово

Точки Лагранжа — точки в системе из двух массивных тел, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, испытывающее исключительно воздействие гравитационных сил со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным относительно этих тел. Точка Лагранжа L_3 лежит на соединяющей тела прямой и находится за телом с большей массой.

Выразите расстояние x между точкой L_3 и более массивным телом через расстояние R между телами и отношение их масс $\mu \ll 1$.

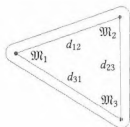
* Речь, конечно, о Меркурии, недавнее прохождение которого по диску Солнца состоялось как раз 9 мая 2016 года. В ближайшее время подобное произойдёт 11 ноября 2019 года, увы, при не самых благоприятных условиях наблюдения из России.

3.3 Космодром на Юпитере

Необъяснимо, но факт: на юпитерианской научной станции, парящей в верхних слоях атмосферы Юпитера, был построен космодром для межзвёздных перелетов! Дескать, поближе к границе Солнечной системы. Оцените минимальную скорость, с которой должен стартовать космический корабль с этого космодрома, чтобы действительно улететь к другим звёздам без дальнейших затрат топлива.

3.4 Звёздное трио

Цивилизация, живущая на далёкой планете, обращающейся вокруг звезды по орбите радиуса $a = 0.5$ а. е., построила и запустила устойчивый к высоким температурам звездолёт. Их целью было за одну экспедицию изучить сразу две близлежащие звезды. Примерная траектория движения звездолета показана на рис. 3.2. Инопланетяне обитают на планете около звезды массой \mathcal{M}_1 .



№	α	δ	π
2	$12^{\text{h}} 34^{\text{m}}$	$+80^{\circ} 12'$	$0.050''$
3	$08^{\text{h}} 06^{\text{m}}$	$+12^{\circ} 27'$	$0.040''$

Рис. 3.2. К задаче Звёздное трио

Таблица 3.1. Фрагмент каталога

В вашем распоряжении фрагмент звёздного каталога (таблица 3.1) жителей этой планеты, в котором указаны прямые восхождения, склонения и параллаксы звёзд 2 и 3. Все величины определены аналогично земным.

Известно, что прицельные расстояния пролёта мимо всех звёзд одинаковы и равны $q = 0.1$ а. е., а скорость звездолёта «на бесконечности» была бы равна $v_{\infty} = 70$ км/с.

1. Найдите расстояния d_{12} , d_{23} , d_{31} и соответствующие им углы треугольника φ_1 , φ_2 , φ_3 .
2. Оцените время полёта.
3. Оцените массы звёзд \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 .
4. Выясните, к какой из звёзд аппарат приблизится сильнее всего, и оцените это расстояние. Зацепит ли он её поверхность, если звезда принадлежит главной последовательности?

Относительные движения звёзд не учитывать.

3.5 67P

Используя приведённый ниже график, определите параметры орбиты объекта 67P: большую полуось a и эксцентриситет e . Части графика были утрачены в ходе постобработки.

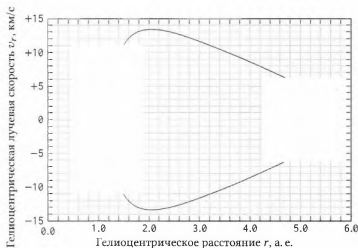


Рис. 3.3. График к задаче 67P

3.6 К Сатурну!

Космический корабль запустили с поверхности Земли к Сатурну по наиболее энергетически выгодной траектории. В своём движении корабль пролетел мимо астероида-тройнца (624) Гектор.

Определите большую полуось и эксцентриситет полученной орбиты, скорость старта с поверхности Земли, а также угол между направлениями на Солнце и на Сатурн в момент старта корабля. Оцените относительную скорость корабля и астероида во время сближения.

Орбиты планет считайте круговыми, атмосферой пренебрегите.

3.7 Гравитация падает

Рассмотрим следующую модификацию закона всемирного тяготения:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2 + \frac{r^4}{r_0^2}}.$$

Найдите первую поправку ко второй космической скорости для объекта массы \mathcal{M} и радиуса R в рамках данной теории, полагая $R \ll r_0$.

Подсказка: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{a} + \text{const.}$

3.8 Антипланеты

Астрономы Лупа и Пупа живут на антипланетах, обращающихся вокруг звезды с массой $\mathcal{M}_* \approx 10 \mathcal{M}_\odot$ по эллиптической орбите с фокальным параметром $p = 0.3$ а. е. и эксцентриситетом $e = 0.72$. Как и полагается антипланетам, время от времени центральная звезда находится точно между ними. В этот момент X истинная аномалия планеты Пупы составляет $\nu = 237^\circ$.

Однажды кто-то опять всё перепутал, и в момент X центральная звезда бесследно исчезла, а модули скоростей планет уменьшились в 217 раз. Установите, с каким периодом T планеты бедных астрономов будут обращаться в отсутствие звезды. Известно, что планеты относятся к классу горячих Юпитеров с массой $\mathcal{M} \approx \mathcal{M}_J$.

3.9 Годограф

Тело движется в центральном гравитационном поле звезды массы \mathcal{M} . Плоскость орбиты разбита на секторы с общей вершиной в центре звезды и одинаковыми малыми углами раствора $\Delta\varphi$. Удельный орбитальный момент импульса тела $|\vec{l}|$.

1. Найдите изменение скорости спутника $|\Delta\vec{v}|$ при прохождении сектора.

Годографом называют кривую, которую описывает конец вектора скорости, отложенного от начала координат. Известно, что для кеплерова движения годограф — дуга окружности или окружность.

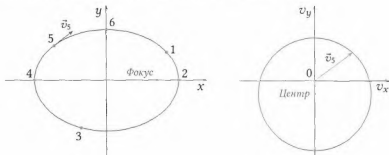


Рис. 3.4. К задаче *Годограф*: вид эллиптической орбиты и годографа скорости

2. Уточните годограф скорости для эллиптической орбиты, изображённой выше, с учётом её геометрических параметров. Укажите на годографе точки, соответствующие отмеченным (1 – 6) на орбите.
3. Изобразите качественно годограф скорости для гиперболической орбиты с эксцентриситетом $e = 2$. Отметьте на чертеже характерные элементы и соотношения между ними.

3.10 Приказ 66

Преследуемый эскадрой штурмовиков, мастер Кота решил укрыться на планете Мрлсст системы Меннаалии (орбитальный период $T \approx 60$ стандартных лет, эксцентриситет орбиты $e = 0.44$). Бортовой компьютер звездолёта Коты серьёзно повреждён, поэтому нам придётся помочь ему с расчётами.

1. Выразите секторную скорость σ материальной точки, движущейся в центральном поле, через её удельный момент импульса \vec{l} .
2. Запишите соотношение между удельным моментом импульса \vec{l} , удельной механической энергией E кеплерова движения тела и эксцентриситетом e его орбиты.

В момент, когда Мрлсст вступила в верхнее соединение с Меннаалии и находилась точно за её диском в апоцентре своей орбиты, Кота начал двигать корабль при помощи Силы. Через промежуток времени t , не превышающий трети T , корабль совершил жёсткую посадку на Мрлсст при астроцентрическом расстоянии r_1 , равном большой полуоси орбиты планеты.

3. Найдите t , пренебрегая гравитационным взаимодействием корабля и планеты.

3.11 Mars Orbiter Mission

Индийский аппарат Mars Orbiter Mission запустили с помощью ракеты-носителя Polar Satellite Launch Vehicle 5 ноября 2013 года. Масса аппарата вместе с топливом составила $m = 1352$ кг. Сначала аппарат вывели на эллиптическую орбиту вокруг Земли с высотами перигея $h_p = 264$ км и апогея $h_a = 23904$ км. После этого он 6 раз переходил на более высокую орбиту, а затем отправился к Марсу по гомановскому эллипсу.

Для того, чтобы впервые изменить траекторию, двигатели включили на очень короткий промежуток времени вблизи перигея. При этом сохранилось положение перигея и плоскость орбиты; аппарат приобрёл дополнительный импульс $J = 1.73 \cdot 10^5$ кг · м/с.

1. Найдите высоту нового апогея.
2. Рассчитайте эксцентриситет новой орбиты и период обращения по ней.

Изменением массы из-за горения топлива пренебрегите.

3.12 Масса Местной группы

Поскольку Местная группа галактик образует единую физически связанную систему, естественно предположить, что Млечный Путь и галактика Андромеды сформировались сравнительно недалеко друг от друга. Зная движение этих галактик, можно оценить их суммарную массу, которая составляет существенную часть массы всей Местной группы. Для оценки достаточно определить расстояние между галактиками, их относительную скорость и установить возраст Вселенной. Этим методом в 1959 году воспользовались Kahn и Woltjer; в этой задаче мы следуем по их пути.

Рассмотрим систему из двух точечных масс \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 с нулевым суммарным моментом импульса в инерциальной системе отсчёта их центра масс.

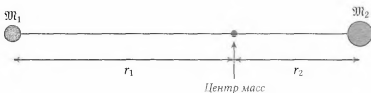


Рис. 3.5. К задаче Масса Местной группы

1. Чему равна полная механическая энергия системы E ? Выразите ответ через массы \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 , расстояния r_1 и r_2 , скорости v_1 и v_2 и гравитационную постоянную G .
2. Перепишите выражение для E в следующих обозначениях:

G — гравитационная постоянная;

$r \equiv r_1 + r_2$ — расстояние между телами;

$v \equiv \dot{r}$ — относительная скорость тел;

$\mu \equiv \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}$ — приведённая масса;

$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ — полная масса системы.

3. Покажите, что из полученного результата следует формула

$$v^2 = 2G\mathfrak{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right),$$

где r_0 — некоторая константа. Выразите эту константу через E , \mathfrak{M} , μ и G .

Решение уравнения движения тел в описанной системе при условии $r(t=0)=0$ в параметрическом виде представляется выражениями

$$\begin{cases} r(\theta) = \frac{r_0}{2} \cdot (1 - \cos \theta), \\ t(\theta) = \left(\frac{r_0^3}{8GM} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta - \sin \theta). \end{cases} \quad (3.1)$$

Параметр θ измеряется в радианах.

4. Используя (3.1), докажите, что

$$\frac{vt}{r} = \frac{(\theta - \sin \theta) \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}.$$

Пусть теперь \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 — соответственно массы Млечного Пути и галактики Андромеды. На данный момент $v_n = -118$ км/с и $r_n = 710$ кпк. Промежуток времени t_n можно принять равным возрасту Вселенной ($13.7 \cdot 10^9$ лет).

5. Вычислите соответствующее значение θ_n .
6. Оцените максимальное удаление галактик r_{\max} в описанном движении и их суммарную массу \mathcal{M} .

3.13 Экзолуны

При транзитном методе обнаружения экзопланет наличие у них спутников можно установить прямым способом: периодическое смещение планеты относительно центра масс системы планета – луна приводит к тому, что прохождение планеты по диску звезды наблюдается раньше или позже по сравнению с предсказанным без учёта луны. Меняется и наблюдаемая длительность прохождения.

Рассмотрим видимую с ребра систему со следующими параметрами:

\mathcal{M}_p — масса планеты;

\mathcal{M}_m — масса луны;

R_p — радиус планеты;

P_p — орбитальный период барицентра системы планета – луна;

P_m — период обращения луны вокруг планеты;

a_p — расстояние от барицентра до звезды;

a_m — расстояние от луны до барицентра;

f_m — фаза луны ($f_m = 0$, когда луна в противостоянии со звездой).

Будем считать, что луна всегда лежит в плоскости орбиты планеты, направление её обращения вокруг планеты совпадает с направлением вращения планеты вокруг звезды; все орбиты в системе круговые. На схеме ниже изображены несколько конфигураций с разными фазами.

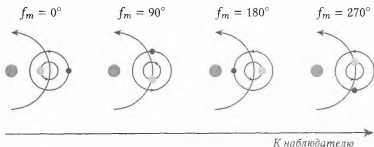


Рис. 3.6. К задаче Экзолуны: примеры конфигураций (определение фазы)

1. Пусть $\sigma_t \equiv t_m - t$, где t – предсказанное без учёта луны время начала прохождения, а t_m – наблюдаемое. Предположив, что скорость движения центра масс по орбите куда больше скорости движения луны вокруг него, покажите, что

$$\sigma_t = \frac{a_m \mathfrak{M}_m P_p}{2\pi a_p \mathfrak{M}_p} \sin f_m.$$

2. Пусть $\sigma_d = \tau_m - \tau$, где τ – предсказанная длительность прохождения, а τ_m – наблюдаемая. Из предположения о скоростях следует, что фазу во время прохождения можно считать постоянной. Покажите, что

$$\sigma_d = \tau \frac{P_p \mathfrak{M}_m a_m}{P_m \mathfrak{M}_p a_p} \cos f_m.$$

3. Некоторая экзопланета вращается вокруг звезды, аналогичной Солнцу. Эта система удовлетворяет модели настоящей задачи. Из наблюдений известно, что $P_p = 3.50$ сут, $\mathfrak{M}_p = 120 \mathfrak{M}_\oplus$ и $R_p = 12 R_\oplus$. Между σ_t и σ_d выполнено соотношение

$$\sigma_d^2 = -0.7432 \sigma_t^2 + 1.933 \cdot 10^{-8} \text{ сут}^2.$$

Исходя из соотношения $\mathfrak{M}_m \ll \mathfrak{M}_p$, найдите τ .

4. Найдите период обращения луны P_m в сутках.
5. Оцените расстояние от луны до центра масс a_m в радиусах Земли. Найдите массу луны \mathfrak{M}_m в массах Земли.

3.14 *Моя планета!*

Сфера Хилла — область пространства около небесного тела, в которой оно способно удерживать свои спутники несмотря на притяжение тела, вокруг которого обращается (например, звезды). Её радиус для Земли можно записать как

$$R_h = a_{\oplus} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{\alpha \mathfrak{M}_{\odot}}}.$$

Предел Роша — минимальный радиус орбиты, на котором спутник может выдержать приливные силы, создаваемые планетой. В системе Земля — Луна он равен

$$R_r = R_{\oplus} \sqrt[3]{\beta \cdot \frac{\rho_{\oplus}}{\rho_{\text{л}}}},$$

где ρ_{\oplus} и $\rho_{\text{л}}$ — плотности Земли и Луны соответственно.

1. Найдите значение коэффициента α , полагая $\mathfrak{M}_{\oplus} \ll \mathfrak{M}_{\odot}$.
2. Найдите значение коэффициента β , пренебрегая вращением и деформациями Луны.
3. При каких значениях плотности Земли ρ_{\oplus} система Земля — Луна могла бы существовать при нынешних значениях радиуса Земли R_{\oplus} и большой полуоси орбиты Луны $a_{\text{л}}$?

Решения

3.1 Псевдомеркурий

Такой спутник не может обращаться вокруг Земли. В самом деле, оценим видимую угловую скорость Меркурия в момент наблюдения, полагая скорости планет v_M и v_\oplus относительно Солнца равными круговым:

$$\omega = \frac{v_M - v_\oplus}{r_M} \approx \frac{\sqrt{\frac{GM_\odot}{a_M}} - \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}}}{r_M}. \quad (3.2)$$

Необходимо отметить, что тело на схеме из условия задачи движется, как и подобает внутренней планете в нижнем соединении, в западном (попятном) направлении.

С другой стороны, спутник, обращающийся по орбите радиуса R , имеет угловую скорость

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R^3}}.$$

Из совпадения видимых движений приходим к равенству $\omega = \bar{\omega}$, откуда

$$\begin{aligned} R &= \sqrt[3]{\frac{r_M^2 a_\oplus}{\left(\sqrt{\frac{a_\oplus}{a_M}} - 1\right)^2} \frac{M_\oplus}{M_\odot}} \approx \sqrt[3]{\frac{0.56^2}{\left(\sqrt{\frac{1.00}{0.39}} - 1\right)^2} \times \frac{1}{3.3 \cdot 10^5} \text{ а. е.}} \approx \\ &= 14 \cdot 10^{-3} \text{ а. е.} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ км.} \end{aligned}$$

Во время прохождения гелиоцентрическое расстояние Меркурия составляло

$$R_M = r_\odot - r_M = 1.010 \text{ а. е.} - 0.557 \text{ а. е.} = 0.453 \text{ а. е.},$$

что близко к его афелийному расстоянию

$$a_M(1 + e_M) = 0.3871 \text{ а. е.} \times 1.2056 \approx 0.467 \text{ а. е.}$$

Следовательно, выражение (3.2) преувеличивает значение относительной угловой скорости Меркурия и Земли, а полученная оценка R существенно занижена.

На таком расстоянии от Земли, за пределами сферы Хилла ($1.5 \cdot 10^6$ км), спутник обращаться не может (см. задачу 3.14, стр. 53). \square

3.2 О бедной L_3 замолвите слово

Рассмотрим две материальные точки с массами \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 и радиусами-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , обращающиеся вокруг общего центра масс с угловой скоростью ω . Для определённости положим $\mathfrak{M}_1 > \mathfrak{M}_2$.

По третьему закону Кеплера угловая скорость вращения системы

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{R^3}}.$$

Будем «работать» в системе отсчёта, связанной с более массивным телом. Второе тело сообщает ему ускорение

$$\vec{a}_{21} = \frac{G\mathfrak{M}_2}{R^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

поэтому на материальную точку массы m , расположенную в точке L_3 , на радиусе-векторе \vec{r} , действует сила инерции

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_{21} = \frac{G\mathfrak{M}_2 m}{R^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Запишем условие равновесия этой «пробной» материальной точки:

$$\underbrace{\frac{G\mathfrak{M}_1 m}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r})}_{\text{гравитация } \mathfrak{M}_1} + \underbrace{\frac{G\mathfrak{M}_2 m}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r})}_{\text{гравитация } \mathfrak{M}_2} + \underbrace{\frac{G\mathfrak{M}_2 m}{R^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{\text{сила инерции}} = \underbrace{m\omega^2(\vec{r}_1 - \vec{r})}_{\text{вращение}}.$$

Поскольку тела лежат на одной прямой, можно переписать это уравнение, заменив векторы на их проекции на направление этой прямой:**

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{x^2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{(R+x)^2} - \frac{\mathfrak{M}_2}{R^2} = \frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)x}{R^3}.$$

После умножения на $\frac{R^2}{\mathfrak{M}_1}$ условие равновесия выглядит симпатичнее:

$$(1 + \xi)^{-2} + \frac{\mu}{4} \left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^{-2} - \mu = (1 + \mu)(1 + \xi) \quad \left| \begin{array}{l} \xi \equiv \frac{x - R}{R} \ll 1; \\ \mu \equiv \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} \ll 1. \end{array} \right.$$

** Технически, эта фраза означает следующее: «значки» векторов можем опустить, заменив \vec{r} на $-x$, \vec{r}_1 на 0, \vec{r}_2 на R . Геометрия системы описана в условии задачи.

Раскладывая полученное выражение по формуле $(1+t)^\alpha \approx 1 + \alpha t$ и пренебрегая членами второго и высших порядков при раскрытии произведений, получим

$$1 - 2\xi + \frac{\mu}{4} - \mu \approx 1 + \xi + \mu.$$

$$\therefore \xi \approx -\frac{7}{12}\mu; \quad x \approx R \left(1 - \frac{7}{12} \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} \right).$$

Упражнения.

1. Где же находится точка L_3 : внутри или снаружи орбиты тела меньшей массы?
2. Получите аналогичный результат для точки L_1 , располагающейся *между* телами. В этом случае удобнее искать расстояние от тела с меньшей массой.
3. Докажите, что существуют ровно две точки Лагранжа, не лежащие на соединяющей тела прямой, причём каждая из них образует равносторонний треугольник с этими телами.
4. Пусть теперь тела имеют практически одинаковые массы. Найдите расстояние от центра масс системы до точки Лагранжа, находящейся вблизи него, выразив ответ через расстояние между телами R , сумму и разность их масс $\Sigma \mathfrak{M}$ и $\Delta \mathfrak{M}$.

3.3 Космодром на Юпитере

Очевидно, нам требуется посчитать третью космическую скорость для Юпитера. Пусть \vec{v}_+ — орбитальная скорость Юпитера, \vec{v} — скорость корабля в системе отсчёта Юпитера, когда он уже покинул его сферу влияния, а \vec{V} — скорость корабля в системе отсчёта Солнца в этот же момент.

Из закона сложения скоростей

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{v}_+ \quad \Rightarrow \quad V \leq v + v_+,$$

причём равенство достигается только тогда, когда \vec{v} и \vec{v}_+ сонаправлены. Поскольку нас интересует наименьшее значение v , будем считать, что так и есть.

Орбиту Юпитера будем считать круговой. Тогда, чтобы покинуть Солнечную систему, необходимо, чтобы гелиоцентрическая скорость корабля V составляла хотя бы $\sqrt{2}v_+$, откуда

$$v = (\sqrt{2} - 1)v_+.$$

Пусть v_0 — скорость, с которой корабль был запущен. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{G\mathfrak{M}_+}{R_+}.$$

В момент покидания сферы тяготения Юпитера полагаем потенциальную энергию его взаимодействия с последним равной нулю; влияние Солнца можно не учитывать, ибо относительно него корабль почти не менял своего положения.

Наконец, подставляя орбитальную скорость Юпитера

$$v_{\text{ж}} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\text{ж}}}},$$

находим

$$v_0 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 \frac{GM_{\odot}}{a_{\text{ж}}} + \frac{2GM_{\text{ж}}}{R_{\text{ж}}}} \approx 60 \text{ км/с}.$$

Идея запускать с Юпитера, честно говоря, не очень — с Земли куда проще...

Упражнение.

Для нахождения искомой скорости можно записать сразу закон сохранения энергии для моментов старта с Юпитера и вылета «на бесконечность»:

$$\frac{(v_0 - v_{\text{ж}})^2}{2} - \frac{GM_{\text{ж}}}{R_{\text{ж}}} - \frac{GM_{\odot}}{a_{\text{ж}}} = 0.$$

Найдите ошибку. Как её исправить?

3.4 Звёздное трио

1. Прежде всего, нужно перевести параллаксы звёзд в расстояния, не забыв о том, что орбита планеты в два раза меньше земной:

$$d_{12} = \frac{a}{\pi_2} = \frac{0.5 \text{ а. е.}}{0.05''} = 10.0 \text{ пк};$$

$$d_{31} = \frac{a}{\pi_3} = \frac{0.5 \text{ а. е.}}{0.04''} = 12.5 \text{ пк}.$$

Используя сферическую теорему косинусов, найдём угол между звёздами 2 и 3 на небе планеты:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arccos(\sin \delta_2 \sin \delta_3 + \cos \delta_2 \cos \delta_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3)) = \\ &= \arccos(\sin 80^\circ 12' \sin 12^\circ 27' + \\ &\quad + \cos 80^\circ 12' \cos 12^\circ 27' \cos(12^{\text{h}} 34^{\text{m}} - 8^{\text{h}} 06^{\text{m}})) = 73^\circ 54'. \end{aligned}$$

Теперь с помощью теоремы косинусов для плоского треугольника определяем d_{23} :

$$\begin{aligned} d_{23} &= \sqrt{d_{12}^2 + d_{31}^2 - 2d_{12}d_{31} \cos \varphi_1} = \\ &= \sqrt{10.0^2 + 12.5^2 - 2 \times 10.0 \times 12.5 \times \cos 73^\circ 54'} \text{ пк} \approx 13.7 \text{ пк}. \end{aligned}$$

Оставшиеся два угла находим при помощи теоремы синусов:

$$\frac{d_{31}}{\sin \varphi_2} = \frac{d_{23}}{\sin \varphi_1}, \quad \frac{d_{12}}{\sin \varphi_3} = \frac{d_{23}}{\sin \varphi_1}.$$

$$\varphi_2 = \arcsin \left(d_{31} \frac{\sin \varphi_1}{d_{23}} \right) = \arcsin \left(12.5 \cdot \frac{\sin 73^\circ 54'}{13.7} \right) \approx 61^\circ 14';$$

$$\varphi_3 = \arcsin \left(d_{12} \frac{\sin \varphi_1}{d_{23}} \right) = \arcsin \left(10.0 \cdot \frac{\sin 73^\circ 54'}{13.7} \right) \approx 44^\circ 32'.$$

2. На масштабах порядка расстояний между звёздами для оценки можно считать, что звездолёт движется равномерно и прямолинейно примерно с той же скоростью v_∞ . Вблизи звёзд его скорость существенно возрастает, и он находится там не очень долго, поэтому этим вполне допустимо пренебречь. Тогда время полёта t определяется как

$$t \approx \frac{d_{12} + d_{23} + d_{31}}{v_\infty} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ лет}.$$

3. По аналогичным причинам можно считать, что вблизи каждой из звёзд звездолёт движется по гиперболе. Необходимо связать между собой массу звезды, скорость «на бесконечности» и прицельное расстояние.

Заметим, что прямоугольные треугольники OAP и OMH (схема 3.7) равны по гипотенузе и углу. Значит,

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a} = \frac{q}{a}.$$

Из интеграла энергии для гиперболической орбиты (который совпадает с таковым для эллиптической с точностью до знака при a)

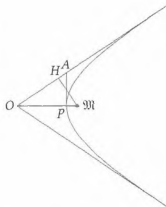


Рис. 3.7. Пролёт мимо звезды. $OM = OA \equiv c$; $AP \equiv b$; $HM \equiv q$.

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{GM}{a}} \equiv v_\infty,$$

откуда большая полуось гиперболы

$$a = \frac{G\mathfrak{M}}{v_\infty^2}.$$

Заметим, что

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{q}{a} = \frac{qv_\infty^2}{G\mathfrak{M}} \implies \mathfrak{M} = \frac{qv_\infty^2}{G \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}. \quad (3.3)$$

Прежде чем производить расчёты, переведём гравитационную постоянную в удобные единицы:

$$\begin{aligned} G &= 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = 6.674 \cdot 10^{-20} \frac{\text{км} \cdot \text{км}^2}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = \\ &= 4.461 \cdot 10^{-28} \frac{\text{а. е.} \cdot \text{км}^2}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = 923 \frac{\text{а. е.} \cdot \text{км}^2}{\mathfrak{M}_\odot \cdot \text{с}^2}. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{0.1 \times 70^2}{923} \mathfrak{M}_\odot / \operatorname{tg} \frac{73^\circ 54'}{2} \approx 0.7 \mathfrak{M}_\odot,$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{0.1 \times 70^2}{923} \mathfrak{M}_\odot / \operatorname{tg} \frac{61^\circ 14'}{2} \approx 0.9 \mathfrak{M}_\odot,$$

$$\mathfrak{M}_3 = \frac{0.1 \times 70^2}{923} \mathfrak{M}_\odot / \operatorname{tg} \frac{44^\circ 32'}{2} \approx 1.3 \mathfrak{M}_\odot.$$

4. Расстояние в периастре есть

$$p = a(e - 1) = a \left(\frac{c}{a} - 1 \right) = \frac{q}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \left(\frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} - 1 \right) = q \frac{1 - \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} = q \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}.$$

Оно минимально у третьей звезды по монотонности тангенса и равно

$$p_3 = q \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{4} = 0.1 \text{ а. е.} \times \operatorname{tg} \frac{44^\circ 32'}{4} = 0.020 \text{ а. е.} \approx 4.3 R_\odot.$$

Поскольку $R_3/R_\odot \sim \mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_\odot \approx 1.3$, аппарат не зацепит эту звезду. Тем не менее, инопланетным инженерам явно пришлось хорошо потрудиться!

Упражнения.

1. Предложите аналитический способ получения выражения (3.3).
2. Каковы условия на поверхности планеты, обжитой инопланетянами?
3. Оцените радиусы всех трёх звёзд.

3.5 67P

По теореме Пифагора квадрат гелиоцентрической скорости кометы

$$v^2 = v_t^2 + v_r^2,$$

где v_t и v_r — соответственно трансверсальная и радиальная компоненты скорости. С другой стороны, из интеграла энергии

$$v^2(r) = G\mathcal{M}_\odot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Найдём соответствующее выражение для v_r , исходя из ЗСМИ и равенства $v_r = 0$ в перигелии и афелии:

$$v_t^2 r^2 = G\mathcal{M}_\odot \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right) \cdot a^2(1-e)^2 = G\mathcal{M}_\odot a(1-e^2),$$

откуда сразу следует

$$v_r = \sqrt{v^2 - v_t^2} = \sqrt{G\mathcal{M}_\odot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{a(1-e^2)}{r^2} \right)}. \quad (3.4)$$

Нетрудно заметить, что касательная к графику горизонтальна в точке $\{r_0 = 2.04 \text{ а. е.}; v_{r_0} = 13.4 \text{ км/с}\}$, где

$$\begin{aligned} \frac{dv_r(r_0)}{dr} = 0 &\implies \frac{dv_r^2(r_0)}{dr} = 0 \implies \\ &\implies G\mathcal{M}_\odot \left(-\frac{2}{r_0^2} + \frac{2a(1-e^2)}{r_0^3} \right) = 0 \implies a = \frac{r_0}{1-e^2}. \end{aligned}$$

Подстановка a, r_0, v_{r_0} в (3.4) даёт уравнение относительно e , разрешив которое находим и a :

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{\frac{v_{r_0}^2 r_0}{G\mathcal{M}_\odot}} = \frac{v_{r_0}}{v_\oplus} \sqrt{\frac{r_0}{a_\oplus}} = \frac{13.4 \text{ км/с}}{29.8 \text{ км/с}} \times \sqrt{2.04} = 0.64; \\ a &= \frac{r_0}{1-e^2} = \frac{2.04 \text{ а. е.}}{1-0.64^2} = 3.46 \text{ а. е.} \end{aligned}$$

Упражнения.

1. Предложите способ определения большой полуоси и эксцентриситета орбиты тела, использующий идею линеаризации зависимости $v_r(r)$.
2. Табулируйте график, прилагаемый к условию настоящей задачи, и продемонстрируйте работоспособность предложенного метода.
3. Оцените погрешности расчётных величин a и e .

3.6 К Сатурну!

1. Корабль летит по гомановскому эллипсу, перигелий которого находится на орбите Земли, а афелий — на орбите Сатурна. Его большая полуось

$$a = \frac{a_{\oplus} + a_{\text{т}}}{2} = \frac{1.00 \text{ а. е.} + 9.54 \text{ а. е.}}{2} = 5.28 \text{ а. е.};$$

$$e = 1 - \frac{a_{\oplus}}{a} = 1 - \frac{1.00 \text{ а. е.}}{9.54 \text{ а. е.}} = 0.81.$$

Скорость, которую корабль должен иметь в точке перигелия, есть

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{a_{\oplus}} - \frac{1}{a} \right)} = v_{\oplus} \sqrt{2 - \frac{a_{\oplus}}{a}} = \\ &= 29.8 \text{ км/с} \times \sqrt{2 - \frac{1}{5.28}} \approx 40.1 \text{ км/с}. \end{aligned}$$

На границе сферы действия Земли корабль должен иметь скорость

$$u = v_p - v_{\oplus} = (40.1 - 29.8) \text{ км/с} = 10.3 \text{ км/с}.$$

Тогда из закона сохранения энергии скорость старта с поверхности Земли будет равна

$$v_0 = \sqrt{u^2 + v_{\text{II}}^2} = \sqrt{10.3^2 + 11.2^2} \text{ км/с} = 15.2 \text{ км/с},$$

где v_{II} — вторая космическая скорость для Земли.

Время движения корабля от Земли к Сатурну равно половине орбитального периода для эллипса Гомана:

$$T = \frac{T_{\oplus}}{2} \left(\frac{a}{a_{\oplus}} \right)^{3/2} = \frac{1 \text{ год}}{2} \left(\frac{5.28 \text{ а. е.}}{1.00 \text{ а. е.}} \right)^{3/2} \approx 6.1 \text{ года}.$$

2. Поскольку к моменту окончания полета корабль и Сатурн должны оказаться в непосредственной близости друг от друга, угол ξ , который за время полета корабля проходит Сатурн по своей орбите, равен

$$\xi = 360^\circ \cdot \frac{T}{T_{\text{т}}} \approx 74^\circ.$$

Рассмотрим треугольник $\triangle \oplus \ominus \hbar$ (Земля – Солнце – Сатурн) в момент старта корабля. Определим по теореме косинусов геоцентрическое расстояние Сатурна:

$$\begin{aligned}\oplus \hbar &= \sqrt{\ominus \oplus^2 + \ominus \hbar^2 - 2 \cdot \ominus \oplus \cdot \ominus \hbar \cdot \cos(180^\circ - \xi)} = \\ &= \sqrt{1.00^2 + 9.54^2 - 2 \times 1.00 \times 9.54 \times \cos(180^\circ - 74^\circ)} = 9.9 \text{ а. е.}\end{aligned}$$

Тогда по теореме синусов

$$\begin{aligned}\frac{\ominus \hbar}{\sin \angle \ominus \oplus \hbar} &= \frac{\oplus \hbar}{\sin \xi}; \\ \angle \ominus \oplus \hbar &= \arcsin \frac{\ominus \hbar \cdot \sin \xi}{\oplus \hbar} = \arcsin \frac{9.54 \text{ а. е.} \times \sin 74^\circ}{9.9 \text{ а. е.}} = 68^\circ.\end{aligned}$$

3. Гектор является троянским астероидом Юпитера и движется по его орбите с опережением на 60° . Закон сохранения момента импульса для точки старта и точки пересечения орбиты Юпитера:

$$a_{\oplus} v_p = a_{\gamma} v_T \sin \theta,$$

где θ — угол между радиусом-вектором и вектором скорости корабля, v_T — скорость корабля при пересечении орбиты Юпитера:

$$v_T = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{a_{\gamma}} - \frac{1}{a} \right)} \approx 13.2 \text{ км/с.}$$

$$\therefore \theta = \arcsin \frac{a_{\oplus} v_p}{a_{\gamma} v_T} = \arcsin \left(\frac{1.00 \text{ а. е.}}{5.20 \text{ а. е.}} \times \frac{40.1 \text{ км/с}}{13.2 \text{ км/с}} \right) = 36^\circ.$$

Вектор гелиоцентрической скорости Гектора ортогонален проведённой в эту точку радиусу-вектору. Угол между векторами скоростей

$$\Delta \theta = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ.$$

Скорость троянца равна круговой для орбиты Юпитера

$$v_{\gamma} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\gamma}}} = v_{\oplus} \sqrt{\frac{a_{\oplus}}{a_{\gamma}}} = \frac{29.8 \text{ км/с}}{\sqrt{5.20}} \approx 13.1 \text{ км/с.}$$

Относительную скорость Гектора и корабля рассчитываем по теореме косинусов:

$$\begin{aligned}v_{\text{отн}} &= \sqrt{v_{\gamma}^2 + v_T^2 - 2v_{\gamma} v_T \cos \Delta \theta} = \\ &= \sqrt{13.1^2 + 13.2^2 - 2 \times 13.1 \times 13.2 \times \cos 54^\circ} \approx 12 \text{ км/с.}\end{aligned}$$

3.7 Гравитация падает

Найдём выражение для потенциальной энергии тела $U(r)$:

$$\begin{aligned} U(r) &= - \int F(r) dr = -G\mathfrak{M}m \int \frac{dr}{r^2 + \frac{r^4}{r_0^2}} = -G\mathfrak{M}m \int \frac{r_0^2 dr}{r^2 (r_0^2 + r^2)} = \\ &= -G\mathfrak{M}m \int \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 + r_0^2} \right) dr = -G\mathfrak{M}m \left(\frac{1}{r} + \frac{\operatorname{arctg} \frac{r}{r_0}}{r_0} \right) + \text{const.} \end{aligned}$$

Важно отметить, что эта функция строго монотонна на $r \in (0; +\infty)$. Тогда из определения второй космической скорости и закона сохранения энергии имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{\text{II}}^2 + U(R) &= U(\infty) \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} U(r); \\ \frac{1}{2}v_{\text{II}}^2 - G\mathfrak{M} \left(\frac{1}{R} + \frac{\operatorname{arctg} \frac{R}{r_0}}{r_0} \right) &= -G\mathfrak{M} \left(\frac{\pi}{2r_0} \right); \\ \therefore v_{\text{II}}^2 &= 2G\mathfrak{M} \left(\frac{1}{R} + \frac{\operatorname{arctg} \frac{R}{r_0}}{r_0} - \frac{\pi}{2r_0} \right) \approx 2G\mathfrak{M} \left(\frac{1}{R} + \frac{R}{r_0^2} - \frac{\pi}{2r_0} \right) = \\ &= \frac{2G\mathfrak{M}}{R} \left(1 - \frac{\pi R}{2r_0} + \frac{R^2}{r_0^2} \right) \approx \frac{2G\mathfrak{M}}{R} \left(1 - \frac{\pi R}{2r_0} \right). \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$v_{\text{II}} \approx \sqrt{\frac{2G\mathfrak{M}}{R} \left(1 - \frac{\pi R}{2r_0} \right)} \approx \sqrt{\frac{2G\mathfrak{M}}{R}} \left(1 - \frac{\pi R}{4r_0} \right).$$

3.8 Антипланеты

В этом решении индексом p будем отмечать величины, относящиеся к Пупе и его планете, а l — относящиеся, соответственно, к Лупе.

Длина радиус-вектора для каждой из планет в момент исчезновения звезды определяется из уравнения эллипса (в полярных координатах). Учитывая, что в момент X планеты находились на одной прямой, получаем

$$\begin{aligned} r_{p1} &= \frac{p}{1 + e \cos \nu} = \frac{0.3 \text{ а. е.}}{1 + 0.72 \cos 237^\circ} = 0.494 \text{ а. е.}; \\ r_{l1} &= \frac{p}{1 + e \cos (\nu - 180^\circ)} = \frac{0.3 \text{ а. е.}}{1 + 0.72 \cos (237^\circ - 180^\circ)} = 0.215 \text{ а. е.} \end{aligned}$$

Для большой полуоси орбиты a справедливо выражение

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = 0.623 \text{ а. е.}$$

По теореме косинусов для треугольников $\triangle F_1 F_2 P$ и $\triangle F_1 F_2 L$ определяются расстояния от планет Пупы и Лупы до второго фокуса:

$$r_{p2} = \sqrt{4a^2e^2 + r_{p1}^2 - 2 \cdot 2ae \cdot r_{p1} \cos(\nu - 180^\circ)} = 0.752 \text{ а. е.};$$

$$r_{l2} = \sqrt{4a^2e^2 + r_{l1}^2 - 2 \cdot 2ae \cdot r_{l1} \cos(360^\circ - \nu)} = 1.030 \text{ а. е.}$$

Угол между направлениями на фокусы орбиты для Пупы и Лупы определяется из теоремы синусов для тех же треугольников:

$$\alpha_p = \arcsin\left(\frac{2ae \sin(\nu - 180^\circ)}{r_{p2}}\right) = 89.6^\circ;$$

$$\alpha_l = \arcsin\left(\frac{2ae \sin(360^\circ - \nu)}{r_{l2}}\right) = 46.9^\circ.$$

Вектор скорости точки, движущейся по некоторой траектории, в каждый момент времени направлен по касательной к этой траектории. Поэтому из «бильярдного» (оптического) свойства эллипса получаем угол между радиусами-векторами планет и векторами их скоростей:

$$\beta_p = \frac{180^\circ + \alpha_p}{2} = \frac{180^\circ + 89.6^\circ}{2} = 134.8^\circ;$$

$$\beta_l = \frac{180^\circ - \alpha_l}{2} = \frac{180^\circ - 46.9^\circ}{2} = 66.6^\circ.$$

Интеграл энергии поможет найти модули скоростей планет после события X:

$$V_p = \frac{1}{217} \sqrt{GM_\star \left(\frac{2}{r_{p1}} - \frac{1}{a} \right)} = 0.68 \text{ км/с};$$

$$V_l = \frac{1}{217} \sqrt{GM_\star \left(\frac{2}{r_{l1}} - \frac{1}{a} \right)} = 1.20 \text{ км/с}.$$

Теперь рассчитаем трансверсальную и радиальную компоненты относительной скорости планет:

$$V_\tau = V_p \sin \beta_p + V_l \sin \beta_l = 0.68 \sin 134.8^\circ + 1.20 \sin 66.6^\circ = 1.59 \text{ (км/с)};$$

$$V_r = V_p \cos \beta_p + V_l \cos \beta_l = 0.68 \cos 134.8^\circ + 1.20 \cos 66.6^\circ = 0.00 \text{ (км/с)}.$$

Отсутствие радиальной компоненты не может не обнадёживать: относительная скорость планет $V_{\text{отн}} \equiv V_{\tau}$.

Мысленно перенеся всю массу в одну из планет, «фиксируем» её и пускаем вторую обращаться вокруг неё с расчётной относительной скоростью $V_{\text{отн}}$. Используя интеграл энергии, определяем большую полуось a' новой системы:

$$a' = \left(\frac{2}{r_{p1} + r_{l1}} - \frac{V_{\text{отн}}^2}{G \cdot 2M_{\oplus}} \right)^{-1} = 0.355 \text{ а. е.}.$$

Период системы устанавливается при помощи обобщённого третьего закона Кеплера:

$$T = T_{\oplus} \sqrt{\frac{a'^3}{a_{\oplus}^3} \frac{M_{\odot}}{2M_{\oplus}}} \approx 4.7 \text{ года.}$$

Упражнения.

1. С какой относительной скоростью разлетались бы планеты через достаточно большое время после исчезновения звезды, если бы их скорости в момент X не изменились?
2. Определите вид зависимостей угла β между радиусом-вектором планеты и вектором её скорости от астроцентрического расстояния r и от истинной аномалии v . Когда $\beta(v)$ минимален?

3.9 Годограф

1. С одной стороны, из закона всемирного тяготения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{R^3} \vec{R};$$

$$|\Delta \vec{v}| \simeq a \cdot \Delta t = \frac{GM}{R^2} \Delta t.$$

С другой стороны, удельный момент импульса

$$|\vec{l}| = R^2 \omega = R^2 \frac{d\varphi}{dt};$$

$$\Delta t \approx \frac{R^2}{|\vec{l}|} \Delta \varphi.$$

Можем заключить, что

$$|\Delta \vec{v}| \simeq \frac{GM}{|\vec{l}|} \Delta \varphi.$$

2. Непосредственно измеряем оси эллипса:

$$2a = (37.0 \pm 0.5) \text{ мм};$$

$$2b = (26.0 \pm 0.5) \text{ мм}.$$

Отсюда сразу можно найти эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{2b}{2a}\right)^2} = 0.71 \pm 0.02,$$

а после — отношение скоростей в перигеетре и апогеетре:

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{1+e}{1-e} \approx 6 \pm 0.5.$$

Чтобы вычислить расстояние от точки O до центра окружности, нужно из радиуса годографа вычесть v_{\min} :

$$v_{y0} = \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2} - v_{\min} = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{2} \approx 3v_{\min}.$$

Теперь легко построить правильную картинку. Вектор скорости направлен по касательной к траектории, поэтому отметки точек на годографе сделать нетрудно:

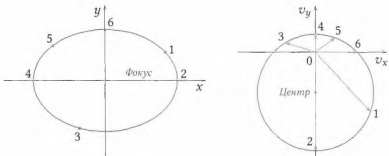


Рис. 3.8. Вид эллиптической орбиты и соответствующего годографа скорости

3. Скорость при движении по гиперболе зажата между её асимптотами, поэтому годограф не может быть целой окружностью.

Найдём угол θ_0 между асимптотой и вещественной осью гиперболы, используя уравнение гиперболы в полярных координатах:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \implies e \cos \theta_0 = 1;$$

$$\theta_0 = \arccos \frac{1}{e} = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ.$$

При помощи интеграла энергии установим, что скорость «на бесконечности»

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{GM}{a}},$$

а перицентрическая скорость

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{e+1}{e-1}},$$

где a — большая полуось гиперболы. Отношение этих скоростей

$$\frac{v_p}{v_{\infty}} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = \sqrt{3} \approx 1.73.$$

Можно переходить к построению.

Упражнения.

1. Каким будет годограф для круговой орбиты?
2. Постройте годограф для тела, брошенного под углом к горизонту в однородном гравитационном поле.
3. Докажите, что годограф в кеплеровой задаче имеет описанный в задаче вид.

3.10 Приказ 66

1. По определению секторной скорости имеем

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{r dr \sin(\widehat{\vec{r}, d\vec{r}})}{2 dt} = \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{2 dt} = \frac{|\vec{l}|}{2},$$

где \vec{l} — удельный момент импульса тела.

2. Удельная механическая энергия E — известный интеграл кеплерова движения:

$$E = -\frac{\mu}{2a}.$$

Остается выразить большую полуось орбиты тела a через удельный момент импульса, величину μ и эксцентриситет e . Для этого используем равенство нулю радиальной компоненты скорости в перицентре орбиты:

$$l = a(1-e) \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\mu a (1-e^2)};$$

$$a = \frac{l^2}{\mu (1-e^2)}.$$

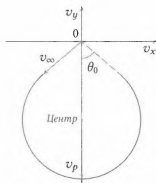


Рис. 3.9. Годограф скорости для гиперболической орбиты

Отсюда окончательно получаем

$$E = \frac{\mu^2 (1 - e^2)}{2l^2}.$$

3. Корабль мастера встречается с планетой в момент, когда её астроцентрическое расстояние составляет a . Заметим, что в силу симметрии и поскольку сумма расстояний от точек эллипса до фокусов равна $2a$, можно заключить, что в этот момент планета находится на малой оси своей орбиты. Воспользуемся вторым законом Кеплера (рис. 3.10):

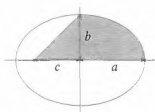


Рис. 3.10. К применению второго закона Кеплера

$$\frac{t}{T} = \frac{\frac{1}{4}\pi ab + \frac{1}{2}cb}{\pi ab} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2 \sqrt{1-e^2} + \frac{1}{2}ea \cdot a \sqrt{1-e^2}}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{4} + \frac{e}{2\pi},$$

$$t = T \left(\frac{1}{4} + \frac{e}{2\pi} \right) = 60 \text{ лет} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{0.44}{2\pi} \right) = 19.2 \text{ стандартных года.}$$

Очень долго, разве что стандартный год короче земного.

Упражнения.

1. Мог ли Мастер добраться до места встречи с Мрлсст по гомановской траектории (без применения Силы)?
2. Определите, за какое минимальное время Кота мог бы добраться до указанной точки по параболической траектории.

3.11 Mars Orbiter Mission

Пересчитаем высоты в расстояния до центра Земли:

$$r_p = R_{\oplus} + h_p = 6.64 \cdot 10^3 \text{ км};$$

$$r_a = R_{\oplus} + h_a = 30.28 \cdot 10^3 \text{ км.}$$

Вычислим круговую скорость на расстоянии r_p , изменение скорости при манёвре и эксцентриситет начальной орбиты:

$$V = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_p}} = 7.8 \cdot 10^3 \text{ м/с};$$

$$\Delta v = \frac{J}{m} = 1.3 \cdot 10^2 \text{ м/с};$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0.64.$$

Перицентрические скорости до и после манёвра связаны с V и эксцентриситетом орбиты соотношениями

$$\begin{aligned}v_p &= V\sqrt{1+e}; \\v'_p &= V\sqrt{1+e'}; \\v'_p &= v_p + \Delta v.\end{aligned}$$

Здесь штрихованные величины относятся к состоянию после «толчка». Приходим к соотношению

$$\begin{aligned}V\sqrt{1+e'} &= V\sqrt{1+e} + \Delta v; \\e' &= e + 2\frac{\Delta v}{V}\sqrt{1+e} + \frac{\Delta v^2}{V^2} = 0.68.\end{aligned}$$

Большая полуось, период обращения и высота апогея на новой орбите тогда равны

$$\begin{aligned}a' &= \frac{r_p}{1-e'} = 2.1 \cdot 10^4 \text{ км}; \\T' &= 2\pi\sqrt{\frac{a'^3}{GM_\oplus}} = 3.0 \cdot 10^4 \text{ с} = 8.4 \text{ ч}; \\h'_a &= r'_a - R_\oplus = a'(1+e') - R_\oplus = 2.9 \cdot 10^4 \text{ км}.\end{aligned}$$

3.12 Масса Местной группы

1–3. Полная механическая энергия системы есть

$$E = \frac{\mathfrak{M}_1 v_1^2}{2} + \frac{\mathfrak{M}_2 v_2^2}{2} - \frac{G\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{r_1 + r_2}.$$

Для центра масс $\mathfrak{M}_1 r_1 = \mathfrak{M}_2 r_2$. Поскольку $r_1 + r_2 \equiv r$,

$$\begin{cases} r_1 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} r; \\ r_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} r \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1^2 = \left(\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} \right)^2 v^2; \\ v_2^2 = \left(\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} \right)^2 v^2. \end{cases}$$

Подстановка даёт

$$E = \frac{v^2}{2} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2^2 + \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_1^2}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^2} - \frac{G\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{r} = \frac{\mu}{2} \left(v^2 - \frac{2G\mathfrak{M}}{r} \right).$$

$$\therefore v^2 = \frac{2E}{\mu} + \frac{2G\mathfrak{M}}{r} = 2G\mathfrak{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right), \quad \text{где } r_0 = -\frac{G\mathfrak{M}\mu}{E}.$$

4–6. Продифференцируем $r(\theta)$ по t , а $t(\theta)$ — по θ :

$$v = \frac{r_0}{2} \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt};$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \left(\frac{r_0^3}{8G\mathfrak{M}} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \theta) = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^{-1}.$$

Этот «трюк» позволяет прийти к выражению***

$$\frac{vt}{r} = \frac{\frac{r_0}{2} \sin \theta \times \left(\frac{r_0^3}{8G\mathfrak{M}} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta - \sin \theta)}{\frac{r_0}{2} (1 - \cos \theta)} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{(\theta - \sin \theta) \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}.$$

Подстановка современных значений v_n , t_n и r_n даёт значение

$$\left. \frac{vt}{r} \right|_{t=t_n} = -2.33 = \frac{(\theta_n - \sin \theta_n) \sin \theta_n}{(1 - \cos \theta_n)^2}.$$

Из того, что правая часть отрицательна, следует, что $\theta_n > \pi$. Получившееся уравнение относительно θ_n решается методом итераций:

$$\theta_0 = 4.28 \text{ рад.}$$

Вновь обратимся к связи $r(\theta)$:

$$r = \frac{r_0}{2} (1 - \cos \theta).$$

Видно, что $r_{\max} = r_0$. По известным r_n и θ_n не представляет труда вычислить

$$r_0 = \frac{2r_n}{1 - \cos \theta_n} \approx 1 \text{ Мпк.}$$

Из выражения второй связи находим общую массу галактик:

$$t = \left(\frac{r_0^3}{8G\mathfrak{M}} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta - \sin \theta) \implies \mathfrak{M} = 3.95 \cdot 10^{12} \mathfrak{M}_{\odot}.$$

Из оценки количества звёзд следует иной результат: $\mathfrak{M}_V \approx 6 \cdot 10^{11} \mathfrak{M}_{\odot}$, откуда можно сделать вывод, что тёмная материя составляет большую часть массы Местной группы.

*** То же самое можно получить, выразив v из закона сохранения энергии и выполнив подстановку, но это довольно мучительная процедура.

Для любознательных. Приведём вывод решений уравнений движения галактик (3.1) из условия. Запишем выражение для скорости $v(r)$ и разделим переменные:

$$v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{2G\mathfrak{M}} \left(\frac{r_0 - r}{r_0 r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{при } r < r_0;$$

$$\int \sqrt{2G\mathfrak{M}} \, dt = \int \left(\frac{r_0 r}{r_0 - r} \right)^{\frac{1}{2}} dr.$$

Правую часть интегрируем после введения замены $\sin^2 \varphi \equiv \frac{r_0}{r}$:

$$t = \left(\frac{r_0^3}{8G\mathfrak{M}} \right)^{\frac{1}{2}} (2\varphi - \sin 2\varphi) + D.$$

Мы выбрали начальное условие, при котором массы располагаются близко друг к другу в начальный момент, поэтому $\varphi = 0$ при $t = 0$ и, соответственно, $D = 0$:

$$t(\theta) = \left(\frac{r_0^3}{8G\mathfrak{M}} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta - \sin \theta), \quad \text{где } \theta \equiv 2\varphi.$$

Наконец,

$$r = r_0 \sin^2 \varphi = \frac{r_0}{2} (1 - \cos \theta). \quad \square$$

3.13 Экзолуны

1. Расстояние от центра масс до луны можно выразить через a_{pb} — расстояние от планеты до центра масс:

$$a_m = \frac{\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{M}_m} a_{pb}.$$

Для наблюдателя с Земли оно проецируется на картинную плоскость:

$$a_{pr} = a_{pb} \sin f_m.$$

Чтобы транзит произошёл, центр масс должен «довернуться» по орбите на величину этой проекции (так как скорость луны мала в сравнении с орбитальной скоростью планеты, можно учитывать лишь движение вокруг звезды):

$$\sigma_t = \frac{a_{pr}}{a_p} \bigg/ \frac{2\pi}{P_p} = \frac{P_p \cdot a_{pr}}{2\pi a_p} = \frac{a_m \mathfrak{M}_m P_p}{2\pi a_p \mathfrak{M}_p} \sin f_m.$$

2. Скорости обращения центра масс вокруг звезды и планеты вокруг центра масс равны соответственно

$$v_p = \frac{2\pi}{P_p} a_p;$$

$$v_{pb} = \frac{2\pi}{P_m} a_{pb}.$$

Первая из них и так лежит в картинной плоскости, а проекция второй на картинную плоскость равна

$$v_{pr} = -v_{pb} \cos f_m = -\frac{2\pi}{P_m} a_{pb} \cos f_m.$$

Длительность транзита без учёта луны составляет

$$\tau = \frac{D}{v_p},$$

где D — расстояние, которое планета должна пройти, чтобы завершить прохождение. С луной длительность получится другой:

$$\tau_m = \frac{D}{v_p + v_{pr}},$$

$$\therefore \sigma_d \equiv \tau_m - \tau = -\tau \frac{v_{pr}}{v_p + v_{pr}} \approx -\tau \frac{v_{pr}}{v_p} = \tau \frac{P_p \mathfrak{M}_m a_m}{P_m \mathfrak{M}_p a_p} \cos f_m.$$

3. Используя третий закон Кеплера, можем вычислить расстояние от центра масс до звезды:

$$\frac{p_p^2}{a_p^3} = \frac{4\pi^2}{G(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_p)};$$

$$a_p = 6.75 \cdot 10^9 \text{ м.}$$

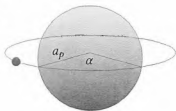


Рис. 3.11. Геометрия транзита

Теперь легко узнать, какой была бы длительность прохождения, если бы луны не было — см. чертёж 3.11:

$$\tau = P \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{P}{2\pi} \arcsin \frac{R_\odot + R_p}{a_p} = 0.128 \text{ сут.}$$

4–5. Из основного тригонометрического тождества следует

$$\left(\frac{P_m \mathfrak{M}_p a_p}{P_p \mathfrak{M}_m a_m \tau} \right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{2\pi a_p \mathfrak{M}_p}{a_m \mathfrak{M}_m P_p} \right)^2 \sigma_t^2 = 1;$$

$$\sigma_d^2 = \left(\frac{P_p \mathfrak{M}_m a_m \tau}{P_m \mathfrak{M}_p a_p} \right)^2 - \left(\frac{2\pi \tau}{P_m} \right)^2 \sigma_t^2.$$

Поэтому связь σ_t и σ_d , приведённая в условии, позволяет установить

$$-\left(\frac{2\pi \tau}{P_m} \right)^2 = -0.7432 \implies P_m = 0.933 \text{ сут.}$$

По третьему закону Кеплера (в пренебрежении массой луны)

$$a_m = \sqrt[3]{\frac{G \mathfrak{M}_p P_m^2}{4\pi^2}} = 31.2 R_\oplus.$$

Пришло время использовать второй коэффициент связи σ_t и σ_d :

$$\left(\frac{P_p \mathfrak{M}_m a_m \tau}{P_m \mathfrak{M}_p a_p} \right)^2 = 1.933 \cdot 10^{-8} \text{ сут}^2 \implies \mathfrak{M}_m = 1.18 \mathfrak{M}_\oplus.$$

3.14 *Моп наш!*

1. В первом приближении радиус сферы Хилла можно считать равным расстоянию от Земли до точки Лагранжа L_1 системы Солнце – Земля. Зафиксируем начало координат в её центре масс. Пусть Земля и Солнце вращаются вокруг него по круговым орбитам с угловой скоростью ω , их радиусы-векторы соответственно \vec{r}_\oplus и \vec{r}_\odot , а x — искомое расстояние. Из третьего закона Кеплера

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus)}{R^3}},$$

где R — расстояние между Землёй и Солнцем.

Пусть в точке L_1 , на радиусе-векторе \vec{r} , находится тело массы m . Перечислим силы, действующие на него в системе отсчёта Солнца. Во-первых, Земля придаёт Солнцу ускорение

$$\vec{a}_\odot = \frac{G \mathfrak{M}_\oplus}{R^3} (\vec{r}_\oplus - \vec{r}_\odot).$$

Поэтому на тело в точке L_1 действует сила инерции

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_\odot = -\frac{Gm\mathfrak{M}_\oplus}{R^3}(\vec{r}_\oplus - \vec{r}_\odot).$$

Во-вторых, Земля и Солнце притягивают тело, что приводит к появлению ещё двух сил:

$$\vec{F}_\oplus = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus m}{|\vec{r}_\oplus - \vec{r}|^3}(\vec{r}_\oplus - \vec{r}),$$

$$\vec{F}_\odot = \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{|\vec{r}_\odot - \vec{r}|^3}(\vec{r}_\odot - \vec{r}).$$

Точка Лагранжа вращается вокруг центра масс системы с той же угловой скоростью ω , поэтому сумма всех сил равняется центростремительной:

$$\frac{G\mathfrak{M}_\oplus m}{|\vec{r}_\oplus - \vec{r}|^3}(\vec{r}_\oplus - \vec{r}) + \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{|\vec{r}_\odot - \vec{r}|^3}(\vec{r}_\odot - \vec{r}) - \frac{Gm\mathfrak{M}_\oplus}{R^3}(\vec{r}_\oplus - \vec{r}_\odot) = m\omega^2\vec{r}.$$

Силы, действующие на пробную массу, коллинеарны — это условие нетрудно переписать в проекциях:

$$-\frac{\mathfrak{M}_\oplus}{x^2} + \frac{\mathfrak{M}_\odot}{(R-x)^2} + \frac{\mathfrak{M}_\oplus}{R^2} = \frac{\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus}{R^3}r.$$

Чтобы найти величину вектора \vec{r} , нужно вычесть x из расстояния от Земли до центра масс:

$$r = \frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus}R - x.$$

$$\therefore -\frac{\mathfrak{M}_\oplus}{x^2} + \frac{\mathfrak{M}_\odot}{(R-x)^2} + \frac{\mathfrak{M}_\oplus}{R^2} = \frac{\mathfrak{M}_\odot}{R^2} - \frac{x(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus)}{R^3}.$$

Если домножить это равенство на $\xi^2 \frac{R^2}{\mathfrak{M}_\odot}$, выражение станет элегантнее:

$$-\mu + \xi^2(1 - \xi)^{-2} + \mu\xi^2 = \xi^2 - \xi^3 - \xi^3\mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \equiv \frac{x}{R} \ll 1; \\ \mu \equiv \frac{\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{M}_\odot} \ll 1. \end{array} \right.$$

Используя формулу $(1+x)^\beta \approx 1 + \beta x$, получим

$$\mu \approx 3\xi^3 + \mu(\xi^2 + \xi^3) \implies \mu = \frac{3\xi^3}{1 - \xi^2 - \xi^3} \approx 3\xi^3.$$

В результате

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} \implies \alpha = \frac{1}{3}.$$

Замечание. Часто эту задачу решают, считая, что Солнце просто стоит на месте, а Земля на него никакого влияния не оказывает. Это приводит к исчезновению членов $\mu\xi^2$ и $-\xi^3\mu$ и не влияет на ответ. Однако, например, для L_3 такое же пренебрежение приводит к ошибке (см. задачу 3.2).

2. Теперь найдём выражение для предела Роша. Будем считать, что Луна абсолютно жёсткая и не деформируется под воздействием приливных сил (это приведёт к некоторому занижению ответа). Если приливное ускорение на её поверхности сравняется с ускорением, которое она создаёт своей гравитацией, её начнёт разрывать:

$$\frac{2G\mathfrak{M}_{\oplus}R_{\zeta}}{R_r^3} = \frac{GM_{\zeta}}{R_{\zeta}^2} \implies \frac{2\rho_{\oplus}R_{\oplus}^3}{R_r^3} = \rho_{\zeta},$$

где R_{\oplus} и R_{ζ} — радиусы Земли и Луны соответственно. Отсюда естественным образом вытекает

$$R_r = R_{\oplus} \sqrt[3]{\frac{2\rho_{\oplus}}{\rho_{\zeta}}} \implies \beta = 2.$$

3. Для того, чтобы Луна могла существовать как спутник Земли, нужно, чтобы её орбита лежала внутри сферы Хилла Земли, но не ближе предела Роша:

$$R_r \leq a_{\zeta} \leq R_h.$$

Подставим выражения для R_h и R_r :

$$R_{\oplus} \sqrt[3]{\frac{2\rho_{\oplus}}{\rho_{\zeta}}} \leq a_{\zeta} \leq a_{\oplus} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{3\mathfrak{M}_{\odot}}}.$$

Разделим неравенство на радиус Земли и возведём в куб, а затем «перевернём» дроби:

$$\frac{9\mathfrak{M}_{\odot}}{4\pi\rho_{\oplus}a_{\oplus}^3} \leq \frac{R_{\oplus}^3}{a_{\zeta}^3} \leq \frac{\rho_{\zeta}}{2\rho_{\oplus}} \implies \frac{9\mathfrak{M}_{\odot}a_{\zeta}^3}{4\pi R_{\oplus}^3 a_{\oplus}^3} \leq \rho_{\oplus} \leq \frac{\rho_{\zeta}a_{\zeta}^3}{2R_{\oplus}^3}.$$

$$9 \cdot 10^1 \text{ кг/м}^3 \leq \rho_{\oplus} \leq 2 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^3.$$

Как видим, простор для воображения весьма широк.

Есть свойства — существа без воплощения,
 С двойною жизнью: видимый их лик —
 В той сущности двоякой, чей родник —
 Свет в веществе, предмет и отраженье.

Э. По, пер. К. Бальмонта

4.1 Операция « Ag^+ »

По главной оптической оси тонкой плосковыпуклой линзы с постоянной скоростью V ползёт муха. В некоторый момент времени скорость её изображения составила aV . Линзу быстро заменяют на такую же с посеребрённой выпуклой поверхностью, и скорость изображения становится равной bV . Какие значения может принимать отношение b/a , если $a = 4$? Показатель преломления стекла $n = 1.4$.

4.2 В погоне за звёздами

Астроном поднялся на стратостате до высоты $h = 30$ км над поверхностью Земли. Пренебрегая атмосферным поглощением, оцените количество звёзд, которое он сможет наблюдать, используя подзорную трубу с апертурой $D = 100$ мм и увеличением $\Gamma = 10$.

4.3 Транзит через луч GMRT

Giant Metrewave Radio Telescope расположен в точке с географическими координатами $\varphi = 19^\circ 06'$ с. ш.; $\lambda = 74^\circ 03'$ в. д. Телескоп состоит из 30 тарелок, каждая из которых имеет диаметр $D = 45.0$ м. Одна из них направлена в точку с зенитным расстоянием $z = 39^\circ 42'$ на северной части небесного меридиана. Тарелка фиксирует прохождение точечного источника радиоизлучения при пересечении источником меридиана. Каково время транзита источника через луч диаграммы направленности данной тарелки при частоте излучения $f = 200$ МГц?

Подсказка. Каково угловое разрешение тарелки?

4.4 Ускользящая звезда

При фотографических наблюдениях рассеянного скопления М44 с помощью телескопа ТАЛ-1 (рефлектор Ньютона) и соосно закреплённого фотоаппарата (диаметр объектива $\Delta = 100$ мм), бедному астроному пришлось его гидировать вручную. К сожалению, в созвездии Рака неподалеку от скопления не нашлось ярких звёзд, кроме звезды ϵ Спс (видимая звёздная величина $m_* = 6.29^m$).

Вспомнив наставления своего преподавателя, астроном расфокусировал звезду насколько это было возможно и начал наблюдения, в ходе которых получил $N = 10$ фотографий с выдержкой каждой по $T = 2$ мин. Квантовая эффективность используемой камеры $\eta = 42\%$.

Количество отсчётов в каждом пикселе конечного изображения после компьютерной обработки прямо пропорционально квадратному корню количества фотографий; ошибка гидирования обратно пропорциональна размеру изображения звезды и для сфокусированной звезды составляет $1'$.

Определите предельную звёздную величину звёзд на изображении, полученном после компьютерной обработки, используя сведения о телескопе ТАЛ-1, приведённые в таблице.

Диаметр главного зеркала	$D = 110$ мм
Фокусное расстояние	$F = 806$ мм
Малая ось вторичного зеркала	$d = 20$ мм

4.5 Оптика телескопа

Телескоп-рефрактор системы Кеплера имеет относительное отверстие $f/5$ при фокусном расстоянии объектива $F = 100$ см.

1. Вычислите увеличение телескопа для окуляра с $f = 1$ см. Чему равна «длина трубы» телескопа — оптическое расстояние между объективом и окуляром?
2. На каком расстоянии от главного фокуса объектива нужно расположить линзу Барлоу с $f_B = 1$ см, чтобы получить двойное увеличение с тем же окуляром? На сколько при этом увеличится длина телескопа?
3. Пусть в фокальной плоскости объектива находится ПЗС-матрица с размером пиксела 10 мкм. Определите расстояние между центрами изображений двух звезд на полученном снимке (в пикселах), если на небе они разделены угловым расстоянием $20''$.

4.6 Ёжик в тумане

Для некоторой звезды, похожей на Вега, величина межзвездного поглощения в видимой области спектра составляет 2.4^m . Каков наблюдаемый показатель цвета $B - V$ этой звезды?

4.7 Горизонт событий

Оцените величину базы радиоинтерферометра, способного разрешить сверхмассивную чёрную дыру Sgr A* в центре Млечного Пути в диапазоне $230 \div 450$ ГГц. На иллюстрации приведён трек известной близкой к центральному объекту звезды S2.

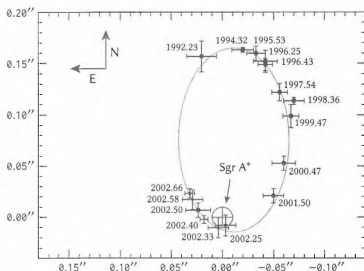


Рис. 4.1. К задаче *Горизонт событий*

4.8 Go to

Gravitational-wave Optical Transient Observer предназначен для поиска оптических остатков источников гравитационных волн различной природы в течение одного часа после их обнаружения системами LIGO и VIRGO. В обзоре необходимо покрыть большую площадь неба за короткое время, чтобы охватить всю указанную гравитационными детекторами область, пока источник не погас. Система GOTO состоит из 4 одинаковых рефлекторов с апертурой 40 см и относительным отверстием $1 : 2.5$, одновременно фотографирующих крупный участок неба. Для простоты положим, что поля телескопов не перекрываются.

1. Вычислите масштаб изображений, получаемых на этих телескопах в их фокальных плоскостях, в угловых единицах на мм.

Примем, что основными источниками ошибок матрицы являются шум считывания $RON = 10$ отсчётов на пиксел, и тепловой шум DN , составляющий 1 отсчёт в минуту на пиксел.* Используемые ПЗС-матрицы имеют пиксели размером 6 мкм и усиление (соотношение между количеством фотоэлектронов и отсчётами) $gain = 1$. Типичный размер атмосферных изображений звёзд в местоположении обсерватории $seeing = 1.0''$.

Соотношение сигнал-шум при продолжительности экспозиции t определяется как

$$SNR = \frac{\text{Полное число отсчётов}}{\sqrt{\sum_i \text{Шум}_i^2}} = \frac{\text{Полное число отсчётов}}{\sqrt{\sigma_{RON}^2 + \sigma_{DN}^2 + \dots}},$$

где $\sigma_{RON} = \sqrt{N_{px} \cdot RON^2}$, $\sigma_{DN} = \sqrt{N_{px} \cdot DN \cdot t}$,

где N_{px} — количество «задействованных» пикселей.

Нуль-пункт (когда частота отсчётов детектора составляет 1 в секунду) для данной системы составляет $m_0 = 18.5^m$.

2. Рассчитайте минимальное время накопления сигнала для точечного источника звёздной величины $m_{max} = 21.0^m$, если необходимо достичь соотношения сигнал/шум $SNR = 5$.
3. Определите соотношение между SNR и t в случае, когда время экспозиции и количество отсчётов достаточно велики, и основной вклад в погрешность вносит пуассоновский шум

$$\sigma_{src} = \sqrt{\text{Количество отсчётов}}.$$

Пересчитайте минимальное время экспозиции для источника со звёздной величиной m_{max} при $SNR = 5$ с учётом пуассоновского шума.

4. Характерная неопределённость определения положения источника гравитационных волн составляет около 0.03 ср. Необходимо покрыть данную площадь в течение часа с прониканием до m_{max} . Оцените минимальную длину стороны матриц (в пикселах), которые позволят осуществить эту мечту. Пренебрегите потерями времени на наведение оптической системы, считывание с ПЗС и прочее.

* На самом деле, фон ночного неба также вносит погрешность, причём систематическую, но в рамках данной задачи им предлагается пренебречь.

4.9 Гравитационно-линзовый телескоп

Общая теория относительности Эйнштейна предсказывает отклонение света вблизи массивных тел.

При малых углах отклонения можно пользоваться выражением

$$\theta = \frac{2R_S}{r},$$

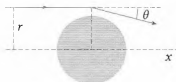


Рис. 4.2. К задаче Гравитационно-линзовый телескоп

где R_S — радиус Шварцшильда гравитирующего тела. Зададим прицельный параметр r как расстояние между лучом света и прямой, располагающейся параллельно оси x и проходящей через центр тела. Лучи, приходящие «с бесконечности» с одним и тем же прицельным параметром r , сходятся в точку на оси x на расстоянии $f(r)$ от центра массивного тела. Наблюдатель заметит увеличение яркости благодаря такому фокусированию — массивное тело становится гравитационным телескопом, усиливающим сигнал далёких галактик.

1. Пусть Солнце является таким гравитационным телескопом. Найдите наименьшее расстояние от центра Солнца f_{\min} , на котором лучи могут сфокусироваться.
2. Предположим, что маленький круглый детектор размером a установлен на расстоянии f_{\min} , центрирован на оси x и ориентирован перпендикулярно ей. Попасть в детектор могут только лучи, проходящие до некоторой высоты $h \ll R_\odot$ над поверхностью Солнца. Выразите усиление сигнала A через R_\odot и a .
3. Пусть луч света проходит через скопление галактик с неким сферически-симметричным распределением массы $\mathcal{M}(r)$. Найдите вид зависимости $\mathcal{M}(r)$, при котором такая гравитационная линза ведёт себя аналогично «классической» тонкой собирающей линзе.

4.10 Коронадо

Одна из разновидностей спектральных фильтров основана на эталоне Фабри – Перо. Такой фильтр представляет собой два расположенных параллельно обращённых друг к другу зеркала, между которыми формируется резонансная стоячая оптическая волна (см. рис. 4.3).

Если оба зеркала имеют коэффициент отражения R , функция пропускания фильтром света с длиной волны λ имеет вид

$$T(\beta) = \frac{1}{1 + F \sin^2 \beta}, \quad \text{где } F \equiv \frac{4R}{(1 - R)^2}, \quad \beta(\lambda) \equiv \frac{2\pi n l \cos \theta}{\lambda}.$$

Рассмотрим фильтр нормального падения, целевой максимум пропускания которого приходится на линию H_{α} ($\lambda_0 = 6562.8 \text{ \AA}$). Пространство между зеркалами заполнено газообразным гелием (показатель преломления $n = 1.0000$), длина эталона $l = 120.1 \text{ мкм}$, коэффициент $(1 - R) = 0.018$.

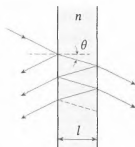


Рис. 4.3. К задаче Коронадо

1. Рассчитайте FSR фильтра — расстояние $\Delta\lambda$ между двумя соседними максимумами пропускания в окрестности λ_0 .
2. Рассчитайте FWHM фильтра — ширину $\delta\lambda$ спектрального диапазона, включающего λ_0 , пропускание на котором составляет не менее половины от максимального.
3. Оцените добротность фильтра $Q \equiv \Delta\lambda/\delta\lambda$.
4. Найдите ширину диапазона скоростей δv , соответствующих целевой полосе пропускания этого фильтра (например, при наблюдении солнечных протуберанцев).

Решения

4.1 Операция «Ag⁺»

Запишем формулу тонкой линзы, связывающую расстояния x и y от соответствующих фокусов до изображения и до объекта:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F+x} + \frac{1}{F+y} \implies xy = D^{-2}, \quad (4.1)$$

где F — фокусное расстояние линзы, $D \equiv 1/F$ — её оптическая сила. Продифференцируем уравнение (4.1):

$$\dot{x}y + y\dot{x} = 0,$$

откуда отношение скоростей изображения и объекта

$$k = \left| \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \right| = \left| \frac{x}{y} \right| = D^2 x^2.$$

Изначальная оптическая сила линзы

$$D_0 = \frac{1}{F} = \frac{n-1}{R},$$

и нетрудно выразить расстояние \tilde{x} от изображения до линзы, соответствующее скорости изображения aV :

$$a \equiv k|_{x=\tilde{x}} = D_0^2 \left(\tilde{x} - \frac{1}{D_0} \right)^2 = (D_0 \tilde{x} - 1)^2; \quad (4.2)$$

$$\tilde{x} = \frac{\sqrt{a} + 1}{D_0}.$$

Серебрение выпуклой поверхности линзы приводит к изменению её оптической силы. Возможны два варианта расположения линзы относительно объекта: либо линза будет действовать как выпуклое сферическое зеркало с радиусом кривизны R :

$$D_1 = -\frac{2}{R} = -\frac{2D_0}{n-1},$$

либо будет рассматриваться как система из линзы со сферическим вогнутым зеркалом позади, расположенным вплотную к ней:

$$D_2 = 2D_0 - D_1 = \frac{2nD_0}{n-1}.$$

Теперь можно по аналогии с (4.2) выразить коэффициент b :

$$b = D^2 \left(\hat{x} - \frac{1}{D} \right)^2 = D^2 \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{D_0} - \frac{1}{D} \right)^2 = \left(\left| \frac{D}{D_0} \right| (\sqrt{a} + 1) - \text{sign } D \right)^2.$$

Окончательно, подстановка выражений для D_1 и D_2 даёт

$$\frac{b}{a} = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(\frac{2(\sqrt{a} + 1)}{n - 1} + 1 \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{2 \times (\sqrt{4} + 1)}{1.4 - 1} + 1 \right)^2 = 64; \\ \frac{1}{a} \left(\frac{2n(\sqrt{a} + 1)}{n - 1} - 1 \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{2 \times 1.4 \times (\sqrt{4} + 1)}{1.4 - 1} - 1 \right)^2 = 100. \end{cases}$$

4.2 В погоне за звёздами

Оценим по формуле Погсона проникающую способность подзорной трубы, сравнивая её с глазом (диаметр зрачка $d_e = 6$ мм, проникающая способность $m_e = 6^m$):

$$m' = m_e + 5 \lg \frac{D}{d_e} = 6^m + 5 \lg \frac{100}{6} = 12.1^m.$$

Отметим, что выходной зрачок трубы

$$d = \frac{D}{\Gamma} = \frac{100}{10} = 10 \text{ мм} > d_e,$$

поэтому на деле необходимо учитывать частичную потерю света:

$$m = m' - 5 \lg \frac{d}{d_e} = 12.1^m - 5 \lg \frac{10}{6} = 11.0^m.$$

Звезду, видимую на пределе невооружённым глазом, нужно удалить в

$$\sqrt{10^{0.4(m-m_e)}} = 10^{0.2 \times (11-6)} = 10 \text{ раз},$$

чтобы она оказалась на грани видимости уже для трубы. Считая звёзды равномерно распределёнными в пространстве, заключаем, что подзорной трубе в принципе доступны для наблюдения в 10^3 раз больше звёзд, чем невооружённому глазу, то есть порядка $6000 \times 10^3 = 6 \cdot 10^6$ штук.

Необходимо определить долю небесной сферы, незакрытую Землёй. Геометрическое понижение горизонта составляет

$$\Delta h = \arccos \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h} = \arccos \frac{6371}{6371 + 30} = 5.55^\circ.$$

Также свой вклад вносит рефракция, величину которой для оценки возьмём равной величине удвоенной стандартной рефракции у горизонта:

$$r \approx 2r_0 = 2 \cdot 35' = 1.17^\circ.$$

Общее понижение составляет $5.55^\circ + 1.17^\circ \approx 6.7^\circ$. Телесный угол, соответствующий незакрытой части небесной сферы,

$$\Omega = 4\pi \sin^2 \frac{90^\circ + \Delta h + r}{2} = 4\pi \sin^2 \frac{90^\circ + 6.7^\circ}{2} = 2.23\pi \text{ ср.}$$

Следовательно, астроном сможет наблюдать

$$6 \cdot 10^6 \times \frac{\Omega}{4\pi} \approx 3.3 \cdot 10^6 \text{ звёзд.}$$

Упражнение.

Грубо оцените, как учёт атмосферного поглощения влияет на ответ.

4.3 Транзит через луч GMRT

Разрешающую способность тарелки на данной частоте излучения рассчитаем по формуле

$$\beta \approx \frac{\lambda}{D} = \frac{c}{fD} = \frac{2.998 \cdot 10^8}{200 \cdot 10^6 \times 45.0} \approx 0.033 \text{ рад} \approx 1.9^\circ.$$

Нетрудно понять, что разрешающая способность равна угловому радиусу луча диаграммы направленности, поскольку в таком случае пик сигнала одного источника приходится на «край» сигнала другого (критерий Рэлея). Угловая ширина луча равна $2\beta = 1.9^\circ \times 2 = 3.8^\circ$.

Кульминация наблюдаемого объекта происходит к северу от зенита, при этом $z < 90^\circ - \varphi$ — объект выше северного полюса мира, а потому находится в верхней кульминации. Определим его склонение:

$$\begin{aligned} 90^\circ - z &= \varphi + 90^\circ - \delta; \\ \delta &= \varphi + z = 19^\circ 06' + 39^\circ 42' = +58^\circ 48'. \end{aligned}$$

Угловая скорость суточного движения источника есть

$$\omega = \frac{360^\circ}{T_\star} \cdot \cos \delta = \frac{360^\circ \times \cos 58^\circ 48'}{23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 04^{\text{s}}} = 7.79^\circ/\text{ч} \approx 0.130^\circ/\text{мин},$$

Окончательно, искомое время транзита через луч составляет

$$\frac{2\beta}{\omega} = \frac{3.8^\circ}{0.130^\circ/\text{мин}} \approx 0.5 \text{ ч}.$$

4.4 Ускользящая звезда

Эффективная площадь входного отверстия телескопа определяется как разность площади главного зеркала и площади, затеняемой вторичным зеркалом:

$$S = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (110^2 - 20^2) \text{ мм}^2 = 9.2 \cdot 10^3 \text{ мм}^2.$$

Телескоп собирает в ξ раз больше света, чем невооруженный глаз, причём ξ равно отношению площадей входного отверстия и зрачка невооруженного глаза, диаметр которого примем равным $D_e = 6 \text{ мм}$:

$$\xi = \frac{S}{\pi D_e^2/4} = \frac{4 \times 9.2 \cdot 10^3}{\pi \times 6^2} = 325.$$

Пусть R_0 — радиус изображения сфокусированной звезды. Для оценки максимального радиуса R изображения звезды «в расфокусе», при котором её ещё видно ($m_e = 6^{\text{m}}$), используем формулу Погсона и значение ξ :

$$\frac{R}{R_0} = \sqrt{\xi} \cdot 10^{0.2(m_e - m_\star)} = \sqrt{325} \cdot 10^{0.2 \times (6 - 6.29)} = 15.8.$$

Согласно условию задачи, ошибка гидирования составляет

$$\sigma = 60'' \cdot \frac{R_0}{R} = \frac{60''}{15.8} = 3.8''.$$

Оценим дифракционное разрешение объектива фотоаппарата для видимого света (с длинами волн $\lambda \sim 0.5 \text{ мкм}$), которое по условию есть размер изображений звёзд:

$$\beta = \frac{1.22\lambda}{\Delta} = \frac{1.22 \times 0.5 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-3}} \approx 1.3''.$$

Примем квантовую эффективность глаза равной $\eta_e = 4\%$, его временное разрешение — $T_e \approx 0.1$ с, и рассчитаем искомую предельную звёздную величину на обработанной фотографии:

$$m_{\text{lim}} = m_e$$

Сравнение с глазом:

$$+ 5 \lg \frac{\Delta}{D_e}$$

фотоаппарат собирает больше света,

$$+ 2.5 \lg \frac{\eta}{\eta_e}$$

его матрица чувствительнее глаза,

$$+ 2.5 \lg \frac{T}{T_e}$$

а выдержка дольше;

$$- 5 \lg \frac{\beta + \sigma}{\beta}$$

ошибки гидирования увеличивают размер изображения звезды, уменьшая его поверхностную яркость;

$$+ 1.25 \lg N$$

эффект от постобработки.

$$m_{\text{lim}} = 6^{\text{m}} + 5 \lg \frac{100 \text{ мм}}{6 \text{ мм}} + 2.5 \lg \frac{42\%}{4\%} + 2.5 \lg \frac{2 \times 60 \text{ с}}{0.1 \text{ с}} - 5 \lg \frac{1.3'' + 3.8''}{1.3''} + 1.25 \lg 10 \approx 20.6^{\text{m}}.$$

4.5 Оптика телескопа

1. Увеличение телескопа определим как отношение фокусного расстояния объектива к фокусному расстоянию окуляра:

$$\Gamma = \frac{F}{f} = \frac{100}{1} = 100.$$

Оптическая сила окуляра в системе Кеплера положительна. Фокальные плоскости объектива и окуляра должны быть совмещены, следовательно, искомая длина составляет

$$L = F + f = 100 \text{ см} + 1 \text{ см} = 101 \text{ см}.$$

2. Объектив создаёт в своей фокальной плоскости изображения звёзд. Нетрудно понять, что линзу Барлоу нужно установить перед фокальной плоскостью объектива; по формуле тонкой рассеивающей линзы для линзы Барлоу имеем

$$-\frac{1}{f_B} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{v}.$$

Под u и v естественно понимать расстояния от линзы до «старой» и «новой» фокальных плоскостей телескопа, преобразование между которыми линза и осуществляет с увеличением $v/u = 2$:

$$-\frac{1}{f_B} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2u} = -\frac{1}{2u};$$

$$u = f_B/2 = 1 \text{ см}/2 = 0.5 \text{ см}.$$

Изменение длины телескопа составляет в таком случае

$$\Delta L = v - u = u = +0.5 \text{ см}.$$

3. Рассчитаем масштаб изображения в фокальной плоскости:

$$\mu = \frac{1}{F} = 1 \text{ рад/м} = 3.44' / \text{мм}.$$

Расстояние между центрами изображений звёзд

$$\Delta x = \frac{20''}{3.44' / \text{мм} \times 10 \text{ мкм/пиксел}} \approx 10 \text{ пикселов}.$$

Упражнение.

Установите, достаточно ли разрешение ПЗС матрицы, чтобы с максимальной эффективностью использовать данный телескоп.

4.6 Ёжик в тумане

“Вега — звезда спектрального класса A0, а значит, её истинный показатель цвета $(B - V)_0$ равен 0^m в точности. Известно, что для межзвездного поглощения A_V в полосе V в целом выполняется соотношение

$$A_V \approx 3 \cdot E_{B-V},$$

где $E_{B-V} \equiv (B - V) - (B - V)_0$ — избыток цвета.

Выражая избыток цвета через поглощение и подставляя численные значения, получаем

$$B - V = (B - V)_0 + E_{B-V} = (B - V)_0 + \frac{A_V}{3} = 0.0^m + \frac{2.4^m}{3} = 0.8^m.$$

Упражнения.

1. Грубо оцените расстояние до указанной звезды и её видимую звёздную величину.
2. Определите максимальную галактическую широту, которую может иметь такая звезда в модели «цилиндрического» галактического диска.

♦♦ Мы не знаем, почему эта задача находится здесь. И правда, ёжик в тумане заблудился...

4.7 Горизонт событий

Для оценки массы чёрной дыры необходимо найти большую полуось орбиты звезды S2 и период её обращения. Поскольку масштабы по осям иллюстрации совпадают, можем измерить угловой размер большой оси непосредственно (*пренебрегая, конечно, наклоном орбиты к картинной плоскости*); с периодом проблем также возникнуть не должно:

$$2\bar{a} \approx 0.2'' \implies a = 0.1'' \times 8 \text{ кпк} = 8 \cdot 10^2 \text{ а. е.};$$

$$T \approx 15 \text{ лет.}$$

По третьему закону Кеплера масса чёрной дыры равна

$$\mathfrak{M} = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \approx 2.3 \cdot 10^6 \mathfrak{M}_{\odot},$$

а её шварцшильдовский размер (линейный и угловой) составляет

$$D_s = \frac{4G\mathfrak{M}}{c^2} \approx 1.4 \cdot 10^{10} \text{ м} \approx 0.1 \text{ а. е.};$$

$$d_s = \frac{0.1 \text{ а. е.}}{8 \text{ кпк}} = 1.25 \cdot 10^{-5}'' \approx 6 \cdot 10^{-11} \text{ рад.}$$

Заданному диапазону частот соответствуют длины волн

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 0.67 \div 1.30 \text{ мм} \approx 1 \text{ мм.}$$

Для оценки длины базы L приравняем угловое разрешение интерферометра и угловой размер Sgr A*:

$$d_s = \frac{\lambda}{L} \implies L = \frac{\lambda}{d_s} \approx \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ м}}{6 \cdot 10^{-11} \text{ рад}} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ км.}$$

Упражнения.

1. Какие параметры орбиты удобно использовать в данной задаче для однозначного указания её формы и ориентации?
2. Возможно ли установить ориентацию орбиты в пространстве
 - по её проекции на картинную плоскость?
 - по треку обращающегося тела с достаточно плотным расположением точек?
3. Предложите способ определения периода движения S2 по данным трека из условия задачи с наибольшей возможной точностью.

4.8 Go to

1. Фокусное расстояние рефлекторов GOTO определим по известным значениям апертуры и относительного отверстия:

$$F = \frac{D}{1/2.5} = 0.4 \text{ м} \times 2.5 = 1.0 \text{ м}.$$

Теперь легко получить искомый масштаб получаемого изображения:

$$\mu = \frac{1 \text{ рад}}{F} = \frac{1 \text{ рад}}{1000 \text{ мм}} \approx 3.44' / \text{мм}.$$

2. Для ответа на следующий вопрос задачи прежде всего необходимо рассчитать линейный размер δ изображения точечного объекта в фокальной плоскости:

$$\delta = \frac{\text{seeing}}{\mu} = \frac{1''}{3.44' / \text{мм}} = 4.84 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 0.8 \text{ пиксела}.$$

Можно считать, что объект занимает единственный пиксел — $N_{\text{px}} = 1$.

Затем по формуле Погсона найдём скорость увеличения количества отсчётов в пикселе от объекта предельной звездной величины, выполняя сравнение с нуль-пунктом:

$$\text{CR} = 1 \text{ отсчёт/с} \cdot 10^{0.4(m_0 - m_{\text{max}})} = 1 \cdot 10^{0.4(18.5 - 21)} = 0.1 \text{ отсчёт/с}.$$

Подставляя полученные результаты в выражение для SNR, получаем квадратное уравнение относительно времени экспозиции t :

$$\text{SNR} = \frac{\text{CR} \cdot t}{\sqrt{\text{RON}^2 + \text{DN} \cdot t}},$$

$$\begin{aligned} \therefore t &= \frac{\text{SNR}^2 \cdot \text{DN} \pm \text{SNR} \sqrt{\text{SNR}^2 \cdot \text{DN}^2 + 4 \cdot \text{CR}^2 \cdot \text{RON}^2}}{2 \cdot \text{CR}^2} = \\ &= \frac{5^2 \cdot (1/60) \pm 5 \sqrt{5^2 \cdot (1/60)^2 + 4 \cdot 0.1^2 \cdot 10^2}}{2 \cdot 0.1^2} \text{ с} = 521 \text{ с} = 8.7 \text{ мин}. \end{aligned}$$

3. Заметим, что $\sigma_{\text{src}}^2 = \text{Количество отсчётов} = \text{CR} \cdot t$, поэтому аналогичное уравнение относительно t' переписывается в виде

$$\text{SNR} = \frac{\text{CR} \cdot t'}{\sqrt{\text{RON}^2 + \text{DN}' \cdot t'}}, \text{ где } \text{DN}' \equiv \text{DN} + \text{CR};$$

$$t' = \frac{\text{SNR}^2 \cdot \text{DN}' \pm \text{SNR} \sqrt{\text{SNR}^2 \cdot \text{DN}'^2 + 4 \cdot \text{CR}^2 \cdot \text{RON}^2}}{2 \cdot \text{CR}^2} = 11.1 \text{ мин}.$$

4. Заметим, что за один час после регистрации гравитационных волн на одном телескопе можно сделать всего

$$N = \left\lfloor \frac{60 \text{ минут}}{t'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{60}{11.1} \right\rfloor = \lfloor 5.4 \rfloor = 5 \text{ снимков.}$$

Следовательно, площадь, покрываемая одним из четырёх телескопов за одну экспозицию Ω , должна составлять

$$\Omega = \frac{0.03 \text{ ср}}{4 \times N} = \frac{0.03 \text{ ср}}{4 \cdot 5} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ ср} = 4.9 \square^\circ.$$

Предполагая, что используемая матрица имеет форму квадрата, найдём её линейный размер:

$$l = \frac{\sqrt{\Omega}}{\mu \times 6 \text{ мкм/пиксел}} = \frac{\sqrt{4.9 \square^\circ} \text{ пикселов}}{3.44' \times 6 \cdot 10^{-3}} \approx 6.4 \cdot 10^3 \text{ пикселов.}$$

4.9 Гравитационно-линзовый телескоп

1. Наибольшее отклонение претерпевают лучи, проходящие в непосредственной близости от поверхности тела, когда $r \approx R_\odot$, поэтому

$$f_{\min} = \frac{R_\odot}{\theta(R_\odot)} = \frac{R_\odot^2 c^2}{4G\mathcal{M}_\odot} \approx 545 \text{ а. е.}$$

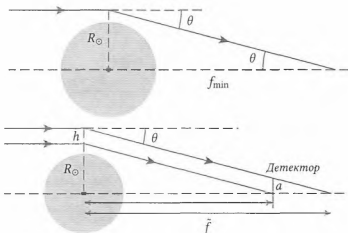


Рис. 4.4. Картина хода лучей: гравитационная «фокусировка»

2. В центр приемника приходят лучи, проходящие у поверхности Солнца, поскольку приёмник располагается на расстоянии f_{\min} от него. На край же попадают лучи, проходящие на расстоянии h от поверхности Солнца или $R_{\odot} + h$ от его центра. Они пересекают ось x на расстоянии \tilde{f} от центра Солнца,

$$\tilde{f} = \frac{R_{\odot} + h}{\theta(R_{\odot} + h)} = \frac{c^2(R_{\odot} + h)^2}{4G\mathfrak{M}_{\odot}}.$$

Из рисунка 4.4 имеем:

$$\begin{aligned} a &= (\tilde{f} - f_{\min}) \cdot \theta(R_{\odot} + h) = \left(\frac{c^2(R_{\odot} + h)^2}{4G\mathfrak{M}_{\odot}} - \frac{R_{\odot}^2 c^2}{4G\mathfrak{M}_{\odot}} \right) \frac{4G\mathfrak{M}_{\odot}}{c^2(R_{\odot} + h)} = \\ &= R_{\odot} + h - \frac{R_{\odot}^2}{R_{\odot} + h} \simeq R_{\odot} + h - (R_{\odot} - h) = 2h. \end{aligned}$$

Остаётся сравнить потоки от объекта в присутствии Солнца и без него. Отношение потоков равно отношению светособирающих площадей:

$$\frac{2\pi R_{\odot} h}{\pi a^2} = \frac{R_{\odot}}{a}.$$

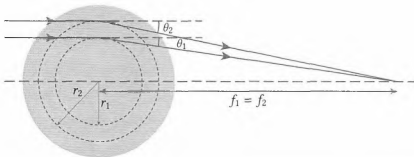


Рис. 4.5. «Гравитационно-оптическая аналогия» в смысле классической оптики

3. Чтобы гравитационная линза работала как идеальная оптическая, лучи, проходящие на разных расстояниях от центра гравитирующего тела, должны пересекать ось x в одной точке. Следовательно,

$$f = \frac{r^2 c^2}{4G\mathfrak{M}(r)} = \text{const} \implies \mathfrak{M}(r) \propto r^2.$$

4.10 Коронадо

Функция $T(\beta)$ — квазипериодическая: два её последовательных максимума отстоят на π . Отсюда находим расстояние между соответствующими этим максимумам длинами волн:

$$\Delta\beta = \pi = \frac{2\pi nl \cos \theta}{\lambda_0} - \frac{2\pi nl \cos \theta}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \approx 2\pi nl \cos \theta \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2};$$

$$\therefore \Delta\lambda \approx \frac{\lambda_0^2}{2nl \cos \theta} = 18 \text{ \AA}.^{***}$$

Ширину $\delta\lambda$ «пики» пропускания оценим по заданному значению коэффициента пропускания:

$$\frac{1}{1 + F \sin^2 \tilde{\beta}} = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{F} = \sin^2 \tilde{\beta} \approx \tilde{\beta}^2 = \left(\frac{2\pi nl \cos \theta}{\tilde{\lambda}} \right)^2.$$

Последнее верно в силу малости параметра β вблизи локального максимума (с точностью до целого π). Не будет ошибкой приблизить эффективное значение этого параметра выражением

$$\tilde{\beta} = \frac{d\beta}{d\lambda} \cdot \frac{\delta\lambda}{2}.$$

Подстановка приводит к уравнению

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{2\pi nl \cos \theta}{\lambda_0^2} \frac{\delta\lambda}{2} \right)^2,$$

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\pi nl \cos \theta \sqrt{F}} \approx 0.1 \text{ \AA};$$

$$\therefore Q \equiv \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} = \frac{18}{0.1} \approx 2 \cdot 10^2.$$

Диапазон скоростей, соответствующий целевой полосе пропускания фильтра, определяется доплеровским смещением линии Бальмер-альфа:

$$\delta v = \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \cdot c = \frac{0.1}{6562.8} \times 2.998 \cdot 10^8 \approx 4.6 \text{ км/с}.$$

Упражнение.

Оцените эффективное поглощение фильтра Фабри – Перо в видимом свете (в звёздных величинах).

*** Поскольку зависимость $T[\beta(\lambda)]$ имеет малый FSR, последовательно с таким фильтром обычно ставят более «грубый», отсекающий лишние максимумы.

Ад должен быть изотермальным. В противном случае помещённые туда инженеры смогли бы сконструировать тепловую установку, чтобы охладить часть своего окружения до любой наперёд заданной температуры.

Г. Бент

5.1 Циклотрон

Циклотронной частотой f называют частоту обращения заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} в плоскости, перпендикулярной \vec{B} .

Найдите модуль индукции магнитного поля B_{MW} , при которой циклотронная частота нерелятивистских свободных электронов совпадает с используемой в бытовых микроволновых печах ($f_{MW} = 2.45$ ГГц).

5.2 Побег из атмосферы

Предположим, что у Луны когда-то была изотермическая ($T = 300$ К) воздушная атмосфера. Грубо оцените минимальную высоту, на которой молекулы с энергией, равной средней квадратичной, были способны покинуть Луну. Выразите ответ в лунных радиусах.

5.3 Oxygen

Спутник летит в верхних слоях атмосферы на высоте $h = 100$ км. Концентрация молекул составляет $n = 1.4 \cdot 10^{13}$ см⁻³, температура $T = 237$ К. В лобовой части спутника установлен манометр, который соединяется с атмосферой через диафрагму радиуса $r = 0.5$ мм; поверхность диафрагмы перпендикулярна направлению движения спутника.

Температура в объёме манометра поддерживается постоянной и равной $T_1 = 300$ К. Оцените давление P , которое покажет манометр после установления равновесия.

5.4 Марсианская высота

Высота однородной атмосферы для Земли составляет примерно 8 км. Эта величина показывает, какой была бы высота атмосферы, если бы она имела всюду одинаковую плотность, равную нынешней плотности воздуха у поверхности.

Оцените высоту однородной атмосферы для Марса, если температура у его поверхности $T_0 \approx -30^\circ\text{C}$. Можно считать, что марсианская атмосфера состоит преимущественно из углекислого газа.

5.5 Газы на Титане

Молекулы газа в атмосферах планет обладают широким распределением скоростей. Если их среднеквадратичная тепловая скорость превосходит $1/6$ скорости убегания, то большая часть атмосферы быстро покинет планету. Чему равен минимальный атомный вес (относительная атомная масса) A_{\min} идеального одноатомного газа, который мог бы сохраниться в атмосфере Титана? Температуру поверхности Титана примите равной $T \approx 100\text{ K}$.

5.6 Дальтоники

Во время северных сияний высокоэнергетические электроны сталкиваются с атмосферными атомами кислорода, переводя их в возбужденное состояние. Если за время жизни в таком состоянии атом не испытывает соударения, он возвращается в более низкое возбужденное или в основное состояние с испусканием фотона соответствующей энергии.

Энергии уровней первого и второго возбужденных состояний по отношению к основному состоянию равны 1.96 эВ и 4.17 эВ, времена жизни этих состояний составляют 110 с и 0.8 с соответственно.

Определите цвета северных сияний на высотах 160 км и 220 км. Атмосферу Земли считайте изотермической.

5.7 Обратный комптон-эффект

Обратным эффектом Комптона (ОЭК) называют явление рассеяния фотона на ультрарелятивистском свободном электроне, при котором происходит перенос энергии от электрона к фотону. Рассмотрите ОЭК для фотонов реликтового излучения. При какой энергии электронов в направленном пучке рассеянное излучение можно будет зарегистрировать на фотоприёмнике с фильтром V?

5.8 Солнышко

1. Одна из ранних гипотез об источнике энергии Солнца гласила, что оно светит из-за астероидов, прилетающих на его поверхность. Пускай на значительном удалении от Солнца сферические астероиды массой m каждый распределены в пространстве равномерно с концентрацией n , их скорости равномерно распределены на промежутке $[v_1, v_2]$ и сонаправлены; v_1 и v_2 — соответственно первая и вторая космические скорости для Солнца.

Оцените установившуюся светимость Солнца, считая, что высвечивается вся кинетическая энергия аккрецируемых им объектов. Выразите ответ через m , n , M_\odot , R_\odot и физические постоянные.

2. Теория термоядерного синтеза долго не получала признания, поскольку в рамках классической физики температура на Солнце недостаточно велика для протекания термоядерных реакций.

Оцените температуру, при которой возможно сближение двух протонов на расстояние порядка ядерного.

3. Положим радиус ядра Солнца равным $0.3R_\odot$, мощность энерговыделения единицы объёма — q . Известно, что плотность потока тепловой энергии в ядре пропорциональна градиенту температуры:

$$F = -\kappa \frac{dT}{dr}, \quad \kappa > 0.$$

Ядро окружает зона лучистого переноса, простирающаяся от $0.3R_\odot$ до $0.7R_\odot$; там перенос энергии, как нетрудно понять из названия, происходит за счёт радиационных механизмов.

Найдите температуры T_1 на границе ядра и T_2 на границе зоны лучистого переноса, если температура в центре Солнца составляет T_0 .

4. Томсоновское рассеяние на свободном электроне является самым распространённым типом рассеяния фотонов в недрах Солнца. Его эффективное сечение $\sigma \approx 7 \cdot 10^{-29} \text{ м}^2$. Вследствие многократных рассеяний путь фотона выглядит как случайное блуждание.

Рассчитайте характерную длину свободного пробега фотона в солнечном веществе, считая концентрацию электронов n_e не зависящей от глубины, и грубо оцените время, за которое рождённый в центре Солнца фотон достигнет поверхности.

5.9 Пэ два — пэ четыре

При столкновении релятивистского протона космических лучей с его земным «собратом» возможно образование протон-антипротонной пары:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}.$$

Найдите порог такой реакции, то есть минимальную энергию E_0 протона космических лучей, при которой она осуществима.

5.10 Предел ГЗК

В 1966 году Георгием Зацепиным и Вадимом Кузьминым, и независимо от них Кеннетом Грайзенем было предсказано, что протоны с энергией выше определённого порога взаимодействуют с фотонами, рождая пионы:

$$\gamma + p \rightarrow \Delta^+ \rightarrow p + \pi^0 \text{ или } n + \pi^+.$$

Эта реакция приводит к тому, что космическое пространство, заполненное реликтовым излучением, становится непрозрачным для таких протонов, поэтому они не могут наблюдаться в космических лучах от отдалённых источников.

Оцените пороговую энергию протона, при которой возможен описанный процесс.

5.11 Две фамилии

Межгалактический маяк представляет собой изотропный, компактный и яркий источник. Для земного наблюдателя его болометрическая звёздная величина составляет $m = 5.2^m$. Какую болометрическую величину маяка m' измерят на ракете «Нейтрон-Н», пролетающей мимо Солнечной системы со скоростью $v = 0.7c$ в сторону маяка?

5.12 Гравитационные волны

Первый гравитационно-волновой сигнал наблюдался на детекторах LIGO в Хэнфорде и Ливингстоне в сентябре 2015 года (см. график 5.1).

В этой задаче мы будем исходить из предположения о том, что данный сигнал излучался при слиянии двух тел, масса одного из которых существенно превосходит массу другого, и постараемся установить возможную природу более массивного тела.

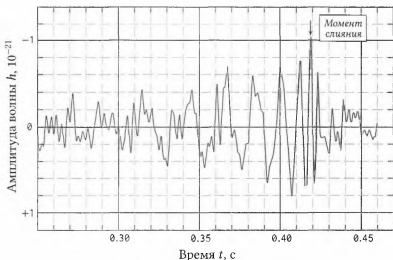


Рис. 5.1. К задаче Гравитационные волны
(LIGO Open Science Centre)

Объект меньшей массы теряет энергию вследствие излучения гравитационных волн, в результате чего его орбита уменьшается в размерах до тех пор, пока оно не достигнет поверхности центрального тела, или, в случае чёрной дыры, пока орбита не достигнет минимальной устойчивой круговой орбиты, радиус которой равен трём шварцшильдовским. В этот момент слияния амплитуда гравитационной волны максимальна, как и частота, которая вдвое превышает орбитальную. После слияния вид гравитационных волн существенно изменяется.

Основываясь только на частоте гравитационных волн в эпоху слияния, установите, может ли центральный объект быть звездой главной последовательности, белым карликом, нейтронной звездой или чёрной дырой. Определите массу центрального объекта в массах Солнца.

Подсказка 1: Для звезды главной последовательности её радиус R_{MS} и масса \mathcal{M}_{MS} связаны степенным законом

$$R_{\text{MS}} \propto \mathcal{M}_{\text{MS}}^{\alpha} \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 0.8, \quad \mathcal{M}_{\text{MS}} > \mathcal{M}_{\odot}; \\ \alpha = 1.0, \quad 0.08 \mathcal{M}_{\odot} \leq \mathcal{M}_{\text{MS}} \leq \mathcal{M}_{\odot}. \end{array} \right.$$

Подсказка 2: Для белого карлика справедливо соотношение $R \propto \mathcal{M}^{-1/3}$, причём $R(\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\odot}) \approx R_{\oplus}$. Предел Чандрасекара $\mathcal{M}_{\text{Ch}} \approx 1.4 \mathcal{M}_{\odot}$.

Подсказка 3: Самая массивная из открытых к настоящему времени нейтронная звезда имеет массу $2.0 \mathcal{M}_{\odot}$; радиусы нейтронных звёзд составляют от 10 до 20 км.

Решения

5.1 Циклотрон

На электрон, движущийся по ларморовской окружности в магнитном поле, действуют сила Лоренца и центробежная сила. Второй закон Ньютона для него запишется в виде

$$\frac{m_e(\omega r)^2}{r} = e|\vec{B}| \cdot \omega r \implies m_e \omega^2 r = e|\vec{B}| \omega r,$$

где r — радиус траектории электрона, ω — круговая частота движения. Нетрудно получить

$$B_{\text{MW}} = \frac{m_e \omega}{e} = \frac{m_e \cdot 2\pi f_{\text{MW}}}{e} = 87.5 \text{ мТл}.$$

Упражнения.

1. Произведите выкладки и вычисления, относящиеся к решению этой задачи, в системе СГС.
2. Как известно, движущийся с ускорением a электрический заряд e излучает электромагнитные волны мощностью (в СГС)

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}.$$

За какое время ларморовский радиус электрона из условия задачи уменьшается в два раза? Начальную кинетическую энергию положим равной $E_K = 0.01 m_e c^2$.

3. Решите задачу для релятивистского электрона с энергией $E = \gamma m_e c^2$.

5.2 Побег из атмосферы

Для того, чтобы молекула могла покинуть Луну, её тепловая скорость движения должна превосходить вторую космическую скорость для той высоты h над поверхностью Луны, на которой находится данная молекула. В качестве минимальной высоты рассмотрим такую, при которой тепловая скорость и вторая космическая скорость равны:

$$\sqrt{\frac{3\Re T}{\mu}} \approx \sqrt{\frac{2G\mathfrak{M}_\zeta}{h + R_\zeta}},$$

где $\mu \approx 29$ г/моль — молярная масса воздуха.

$$\therefore h = \frac{2\mu G\mathfrak{M}_\zeta}{3\Re T} - R_\zeta \approx 20R_\zeta.$$

5.3 Oxygen

Рассчитаем орбитальную скорость спутника и тепловую скорость движения молекул воздуха (молярная масса $\mu \approx 29$ г/моль) при температуре $T = 237$ К:

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}} = 7850 \text{ м/с};$$

$$v_t = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 450 \text{ м/с}.$$

Скорость спутника, таким образом, значительно превышает тепловую скорость молекул атмосферы.

В стационарном режиме поток молекул в полость манометра равен потоку из него. За единицу времени количество проходящих через площадку площадью σ частиц равно $nv\sigma$; вылетающих из манометра за то же время — $n_1v_1\sigma/4$,^{*} где n_1 и v_1 — соответственно концентрация и средняя скорость молекул в полости; в качестве v_1 примем среднеквадратичную скорость при температуре T_1 :

$$v_1 = \sqrt{\frac{3RT_1}{\mu}}.$$

Поскольку потоки равны, справедливо соотношение

$$nv\sigma = \frac{1}{4}n_1v_1\sigma \implies n_1 = 4n\frac{v}{v_1}.$$

С учётом вышеизложенного,

$$P = n_1k_B T_1 = \frac{4nv}{v_1}k_B T_1 \approx 4 \text{ Па}.$$

Упражнение.

Оцените значение длины свободного пробега для молекул воздуха при концентрации n_1 и температуре T_1 . Средний размер молекулы примите равным $\approx 10^{-8}$ см.

* Читателей, не изучавших добросовестно начала молекулярно-кинетической теории, задающихся вопросом о происхождении коэффициента $1/4$ в выражении для количества вылетающих молекул, авторы направляют в Google с запросом «число ударов о стенку», первая ссылка.

5.4 Марсианская высота

Поскольку высота атмосферы невелика, можем воспользоваться двумя приближениями. Во-первых, пренебрежём изменением ускорения свободного падения. Во-вторых, объём атмосферы выразим как объём сферической оболочки:

$$V_{\text{атм}} \simeq 4\pi R_{\text{с}}^2 h.$$

Подставим эту формулу в выражение для давления атмосферы:

$$p = \frac{gM_{\text{атм}}}{4\pi R_{\text{с}}^2} = \frac{4\pi R_{\text{с}}^2 h \rho g}{4\pi R_{\text{с}}^2} = \rho g h.$$

А что мы ожидали получить?

Запишем уравнение состояния идеального газа, в нашем случае, углекислого (молярная масса $\mu_{\text{CO}_2} = 12 + 16 + 16 = 44$ г/моль):

$$pV = \frac{m}{\mu} \Re T \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p\mu}{\Re T}.$$

Ускорение свободного падения для поверхности Марса вычислим по формуле

$$g = \frac{GM_{\text{с}}}{R_{\text{с}}^2} \approx 3.7 \text{ м/с}^2.$$

Итоговая оценка для высоты однородной атмосферы:

$$h \simeq \frac{p}{\rho g} = \frac{\Re T}{\mu g} = \frac{8.314 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \times 243 \text{ К}}{44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \times 3.7 \text{ м/с}^2} \approx 12 \text{ км}.$$

5.5 Газы на Титане

Для того, чтобы частица оставалась в атмосфере, должно выполняться условие, накладываемое на среднеквадратичную тепловую скорость v_{rms} и скорость убегания v_{esc} :

$$v_{\text{rms}} < \frac{v_{\text{esc}}}{6} : \quad \sqrt{\frac{3\Re T}{\mu}} < \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

$$\mu > \frac{54\Re TR}{GM} \approx 13.2 \text{ г/моль} \quad \Rightarrow \quad A_{\text{min}} = 13.2.$$

5.6 Дальтоники

Для изотермической атмосферы верна барометрическая формула

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right),$$

связывающая концентрацию молекул на высоте h и на уровне моря; $H \approx 8$ км — высота однородной атмосферы (см. задачу 5.4).

Зададимся целью оценить количество соударений молекулы за время её жизни в возбуждённом состоянии. Частота таких соударений выражается как отношение длины свободного пробега молекул воздуха и их средней скорости теплового движения:

$$\nu \approx v/\lambda \approx nd^2v,$$

где d — характерный размер молекул воздуха, который возьмём для оценки равным $\approx 10^{-10}$ м. Их среднеквадратичная скорость теплового движения при температуре $T \approx 300$ К составляет порядка $\approx 5 \cdot 10^2$ м/с.

На уровне моря

$$n_0 = \frac{P_0}{k_B T} = \frac{101\,325 \text{ Па}}{1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \times 300 \text{ К}} = 2.45 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3};$$

$$\nu_0 = n_0 d^2 v \approx 1.2 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Нетрудно заметить, что с высотой частота ударов падает экспоненциально ($\nu \propto n$). Выполним соответствующие расчёты количества соударений за время жизни T_l :

	$T_1 = 110 \text{ с}$	$T_2 = 0.8 \text{ с}$
$H_1 = 160 \text{ км}$	27	0.2
$H_2 = 220 \text{ км}$	0.02	$1 \cdot 10^{-4}$

$$N = T_l \cdot \nu(h) = T_l \cdot \nu_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right).$$

Видим, что на высоте 160 км атомы могут спокойно излучать только со второго уровня. Переходам на первый и основной уровни соответствуют фотоны с энергиями

$$\Delta E_{21} = (4.17 - 1.96) \text{ эВ} = 2.21 \text{ эВ}, \quad \Delta E_{20} = 4.17 \text{ эВ};$$

или же с соответствующими длинами волн

$$\lambda_{21} = \frac{hc}{\Delta E_{12}} \approx 570 \text{ нм}, \quad \lambda_{20} \approx 300 \text{ нм}.$$

Переход со второго уровня на первый соответствует «зелёному» фотону видимого света.

На высоте 220 км возможность излучать предоставлена атомам кислорода в обоих состояниях. Понятно, что в первом возбуждённом состоянии находится гораздо больше атомов, чем во втором. Их излучение будет доминировать.

$$\lambda_{10} = \frac{hc}{\Delta E_{10}} = \frac{hc}{1.96 \text{ эВ}} \approx 630 \text{ нм.}$$

Это — красные авроры, более редкие.

5.7 Обратный комптон-эффект

Данную задачу в действительности можно интерпретировать как задачу об отражении мячика от движущейся стенки. В самом деле, начальная и конечная энергии фотона $\ll m_e c^2$, поэтому можно считать, что в системе отсчёта покоящегося электрона изменяется только направление импульса фотона.

Очевидно, энергетически выгодно (как нам, так и фотону) рассматривать столкновение с поворотом направления движения фотона на 180° , при этом энергия фотона изменится наиболее сильно. В лабораторной системе отсчёта (ЛСО) начальная энергия фотона E , тогда в СО электрона

$$E' = E \sqrt{\frac{c+v}{c-v}},$$

а в ЛСО конечная энергия отражённого фотона

$$E'' = E' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = E \cdot \frac{c+v}{c-v}. \quad (5.1)$$

Энергии реликтового фотона E (температура $T \approx 3 \text{ К}$) и фотона на фотоприёмнике E'' (длина волны $\lambda \approx 0.5 \text{ мкм}$) есть

$$E \approx k_B \times 3 \text{ К} = 2.6 \cdot 10^{-4} \text{ эВ};^{**}$$

$$E'' = \frac{hc}{\lambda} \approx 2.5 \text{ эВ.}$$

^{**} На самом деле, можно показать, что средняя энергия фотона чёрнотельного излучения с температурой T составляет $E \approx 2.7 k_B T$.

Теперь уже нетрудно рассчитать энергию электрона:

$$\mathcal{E} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_e c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Преобразуем уравнение (5.1) к более удобному виду; поскольку электрон ультрарелятивистский, положим $(c + v)^2 \approx 4c^2$:

$$\frac{E''}{E} = \frac{c + v}{c - v} = \frac{(c + v)^2}{c^2 - v^2} \approx \frac{4c^2}{c^2 - v^2} \implies \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \approx \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{E''}{E}}.$$

Окончательно

$$\mathcal{E} = \frac{m_e c^2}{2} \sqrt{\frac{E''}{E}} \approx 0.5 \text{ МэВ} \times \frac{\sqrt{(2.5 \text{ эВ}) / (2.6 \cdot 10^{-4} \text{ эВ})}}{2} \approx 25 \text{ МэВ}.$$

5.8 Солнышко

1. Найдём число астероидов, падающих на Солнце за единицу времени, имеющих «на бесконечности» скорость в интервале от v до $v + dv$. Определим радиус сечения захвата:

$$\begin{cases} \text{ЗСМИ:} & vr = uR_{\odot}; \\ \text{ЗСЭ:} & \frac{v^2}{2} = \frac{u^2}{2} - \frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}} \end{cases} \implies r = \frac{R_{\odot}}{v} \sqrt{v^2 + \frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}}}.$$

Тогда темп аккреции N_v астероидов (количество падающих астероидов за единичный интервал времени) с такими скоростями вследствие равномерности распределения по скоростям

$$N_v = \pi r^2 v \, dn_v = \pi r^2 v \cdot \frac{n \, dv}{v_2 - v_1},$$

а соответствующая мощность

$$dL_v = \frac{1}{2} m u^2 N_v = \frac{m v^2 r^2}{2 R_{\odot}^2} \pi r^2 v \frac{n \, dv}{v_2 - v_1} = \frac{\pi m n R_{\odot}^2}{2(v_2 - v_1)} \left(v^2 + \frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}} \right)^2 \frac{dv}{v}.$$

Введём обозначения

$$A \equiv \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}}}; \quad B \equiv \frac{\pi m n R_{\odot}^2}{2(v_2 - v_1)}$$

и проинтегрируем по интервалу скоростей астероидов:

$$L = \int dL_v = B \int_{\frac{A}{\sqrt{2}}}^A \frac{(v^2 + A^2)^2}{v} dv = B \left(\frac{11}{16} + \ln \sqrt{2} \right) A^4.$$

2. Для сближения протонов на расстояние порядка $l_c \sim 10^{-15}$ м — ядерного масштаба — требуется действительно высокая температура. Для оценки сравним кулоновскую энергию с тепловой:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l_c} \sim k_B T_c;$$

$$T_c \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l_c k_B} \approx 10^{10} \text{ К.}$$

3. Рассмотрим тонкую шаровую оболочку радиуса $r < 0.3R_\odot$ и толщиной dr и запишем условие её теплового равновесия. Мощность энерговыделения в объёме внутри оболочки равна мощности теплоотвода, осуществляемого через её поверхность:

$$\frac{4\pi}{3} r^3 \cdot q = -4\pi r^2 \cdot \kappa \frac{dT}{dr} \implies dT = -\frac{q}{3\kappa} r dr.$$

Тогда на границе ядра температура составит

$$T_1 = T_0 - \frac{q}{3\kappa} \frac{(0.3R_\odot)^2}{2} = T_0 - \frac{3qR_\odot^2}{200\kappa}.$$

В зоне лучистого переноса поток энергии через сферические слои этой зоны сохраняется и обусловлен излучением. Тогда с учётом закона Стефана – Больцмана

$$T_1^4 R_1^2 = T_2^4 R_2^2 \implies T_2 = T_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \left(T_0 - \frac{3qR_\odot^2}{200\kappa} \right).$$

4. Концентрацию электронов в солнечном веществе оценим как

$$n_e = \frac{\mathfrak{M}_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3 m_p}.$$

Длина свободного пробега λ определяется математическим ожиданием одного взаимодействия при её прохождении:

$$\lambda \sigma n_e \sim 1 \implies \lambda \simeq \frac{1}{n_e \sigma} = \frac{4\pi m_p R_\odot^3}{3\sigma \mathfrak{M}_\odot} \simeq 2 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Усредняя перемещение фотона после n рассеяний ($n \gg 1$), приходим к соотношению

$$\overline{S^2} = \overline{(\vec{s}_1 + \dots + \vec{s}_n)^2} = \overline{s_1^2} + \dots + \overline{s_n^2} + \sum_{i \neq j} \overline{(\vec{s}_i, \vec{s}_j)} = n\lambda^2,$$

то есть перемещение фотона $S \propto \sqrt{n}$. Искомое время, при котором фотон «вылетит наружу», то есть $S \approx R_\odot$, есть

$$t = n \cdot \frac{\lambda}{c} = \frac{R_\odot^2}{\lambda c} \approx 10^{10} \text{ с} \approx 10^3 \text{ лет.}^{***}$$

5.9 Пэ два — пэ четыре

Для решения будем пользоваться идеей 4-импульсов — совокупностей энергии и импульса (E, \vec{p}) . Понятно, что 4-импульс сохраняется, поскольку сохраняются его компоненты по отдельности. Однако специальная теория относительности утверждает, что квадрат 4-импульса

$$(E, \vec{p})^2 = E^2 - p^2 c^2 := m^2 c^4,$$

где m — масса покоя частицы или эффективная масса системы, инвариантен относительно выбора системы отсчёта. Это позволяет применять законы сохранения гораздо эффективнее (конечно, эту задачу можно решить и «традиционными» способами).

До столкновения. Квадрат 4-импульса системы (лабораторная СО):

$$\begin{aligned} Q &= \left[(E_0, \vec{P}) + (m_p c^2, \vec{0}) \right]^2 = (E_0, \vec{P})^2 + (m_p c^2, \vec{0})^2 + 2(E_0, \vec{P}) \cdot (m_p c^2, \vec{0}) = \\ &= m_p^2 c^4 + m_p^2 c^4 + 2E_0 m_p c^2 - 2\vec{P} \cdot \vec{0} c^2 = 2m_p c^2 (m_p c^2 + E_0). \end{aligned}$$

После столкновения. Квадрат 4-импульса системы (СО центра масс):

$$Q \geq [4m_p c^2]^2, \quad (5.2)$$

причём равенство достигается, когда продукты реакции покоятся.

Квадрат 4-импульса не зависит от выбора системы отсчёта и сохраняется в такой реакции:

$$2m_p c^2 (m_p c^2 + E_0) = 16m_p^2 c^4.$$

$$\therefore E_0 = 7m_p c^2.$$

Упражнение.

Строго покажите справедливость формулы (5.2). Каков её физический смысл?

*** Полученная оценка является несколько заниженной. В действительности, конечно, томсоновский механизм реализуется в глубоких слоях Солнца, где концентрация электронов существенно выше средней, а при более низких температурах возможны более эффективные взаимодействия с веществом.

5.10 Предел ГЗК

Эта задача решается в точности как предыдущая. Для упрощения расчётов заметим, что наименьшей энергии протона, при которой реакция будет протекать, соответствует лобовое столкновение. Тогда

$$\begin{aligned} \left[(E, \vec{P}) + (E_\gamma, \vec{P}_\gamma) \right]^2 &= [m_p c^2 + m_\pi c^2]^2; \\ (m_p + m_\pi)^2 c^4 &= m_p^2 c^4 + 0 + 2E E_\gamma - 2\vec{P} \cdot \vec{P}_\gamma c^2. \end{aligned}$$

Здесь величины с индексом γ относятся к реликтовому фотону; его энергия $E_\gamma \approx k_B \times 3 \text{ K} \approx 0.3 \text{ мэВ}$, импульс $P_\gamma = E_\gamma/c$.

Импульс протона свяжем с его энергией и массой:

$$Pc = \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4}.$$

Скалярное произведение $\vec{P} \cdot \vec{P}_\gamma$ при противоположно направленных импульсах равно $-PP_\gamma$. Приходим к уравнению относительно E :

$$E + \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4} = \frac{(m_p + m_\pi)^2 c^4 - m_p^2 c^4}{2E_\gamma}.$$

Полагая протон ультрарелятивистским, пренебрежём $m_p^2 c^4$ по сравнению с E . Окончательно получим

$$E \approx \frac{(m_p + m_\pi)^2 c^4 - m_p^2 c^4}{4E_\gamma} \approx 2 \cdot 10^{20} \text{ эВ}.$$

5.11 Две фамилии

Вследствие продольного эффекта Доплера энергии регистрируемых на ракете фотонов источника изменятся в

$$k_1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \text{ раз}.$$

Также вследствие лоренцева сокращения длины приходящийся в расчёте на один фотон объём уменьшится в

$$k_2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ раз};$$

концентрация возрастет во столько же раз.

Таким образом, измеряемая на ракете энергия излучения от маяка за секунду будет больше в $k_1 k_2$ раз по сравнению с измеряемой на Земле. Звёздную величину m' определим по формуле Погсона:

$$m' = m - 2.5 \lg(k_1 k_2) = m - 2.5 \lg \frac{c}{c - v} = 3.9^m.$$

5.12 Гравитационные волны

По данным графика, непосредственно перед пиком излучения период гравитационной волны составлял приблизительно 0.007 с — частота гравитационных волн f_0 составляет около 140 Гц.

По третьему закону Кеплера орбитальная частота

$$f_{\text{orb}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{r^3}},$$

где M — масса центрального тела, r — радиус орбиты. Следовательно, частота гравитационных волн

$$f_{\text{gr}} = 2f_{\text{orb}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (5.3)$$

Звезда главной последовательности. Частота излучения гравитационных волн будет наибольшей при $r \approx R_{\text{MS}}$. Подставим выражение для R_{MS} в формулу для частоты:

$$f_{\text{MS}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM_{\text{MS}}}{R_{\odot}^3}} \left(\frac{M_{\odot}}{M_{\text{MS}}} \right)^{\frac{3\alpha}{2}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}^3}} \left(\frac{M_{\text{MS}}}{M_{\odot}} \right)^{\frac{1-3\alpha}{2}}$$

Для указанных в условии значений α величина $\frac{1-3\alpha}{2}$ отрицательна. Частота достигнет максимума при наименьшей возможной массе звезды главной последовательности $M_{\text{min}} = 0.08 M_{\odot}$ (при этом $\alpha = 1$):

$$f_{\text{MS,max}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}^3}} \cdot \frac{M_{\odot}}{M_{\text{min}}} \approx 2.5 \text{ МГц}.$$

Белый карлик. Понятно, что максимальная частота гравитационных волн достигается при $r \approx R_{\text{WD}}$. Для белых карликов по условию выполняется соотношение

$$R_{\text{WD}}^3 = R_{\oplus}^3 \frac{M_{\odot}}{M_{\text{WD}}}.$$

Подставляем выражение для радиуса в формулу (5.3):

$$f_{\text{WD}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\text{WD}}}{R_{\text{WD}}^3}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{R_{\oplus}^3}} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{\text{WD}}}{\mathfrak{M}_{\odot}}.$$

Частота будет максимальной в случае наибольшей возможной массы белого карлика \mathfrak{M}_{Ch} :

$$f_{\text{WD,max}} \approx 0.36 \text{ Гц}.$$

Нейтронная звезда. Для нейтронных звезд зависимость частоты от массы и радиуса также описывается соотношением (5.3). Приведённая в условии третья подсказка является «ловушкой»: частота будет минимальной при *наименьшей* массе и *наибольшем* радиусе нейтронной звезды. Для оценки возьмём $\mathfrak{M}_{\text{NS}} = \mathfrak{M}_{\odot}$ и $R = 15 \text{ км}$: сильно варьироваться результат не будет, поскольку диапазон возможных масс и радиусов нейтронных звёзд узок. Итак,

$$f_{\text{NS}} \sim 2 \text{ кГц}.$$

Можем заключить, что едва ли центральный объект в рассматриваемой модели является звездой главной последовательности, белым карликом или нейтронной звездой. Остался один вариант.

Чёрная дыра. Радиус Шварцшильда и масса объекта связаны:

$$R_S = \frac{2G\mathfrak{M}}{c^2} \implies \frac{R_S}{R_{S\odot}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{\odot}},$$

где $R_{S\odot} \approx 3 \text{ км}$ — шварцшильдовский радиус Солнца.

В случае черной дыры в качестве минимального расстояния подставим $R_I = 3R_S$:

$$f_{\text{BH}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\text{BH}}}{R_I^3}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{27R_{S\odot}^3}} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{\odot}}{\mathfrak{M}_{\text{BH}}} = 4.396 \text{ кГц} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{\odot}}{\mathfrak{M}_{\text{BH}}}.$$

Полученная в начале решения оценка частоты составила $f_0 \approx 140 \text{ Гц}$. Центральный объект, как нетрудно видеть, может являться чёрной дырой, масса которой

$$\mathfrak{M} = \frac{4.4 \cdot 10^3}{140} \cdot \mathfrak{M}_{\odot} \approx 31 \mathfrak{M}_{\odot}.$$

6 Законы излучения

Я больше не верю ни в Свет, ни в Тьму.
Свет — это просто поток фотонов.
Тьма — это просто отсутствие света.

С. Лукьяненко

6.1 Багровый ужас

Расстояния до звёзд столь велики, что лишь у некоторых звёзд угловые размеры диска позволяют «восстановить» изображение звезды. Тем не менее, какие-то разведанные у нас есть. Для некоторой яркой звезды (болометрическая звёздная величина $m = 0.9^m$) измерения углового диаметра дали значение $\gamma \approx 10 \text{ mas}$. Какого она цвета?

6.2 Аккреция на нейтронную звезду

На нейтронную звезду радиусом $R = 10 \text{ км}$ и массой $M = 1.4 M_\odot$ происходит аккреция холодного межзвёздного газа с темпом 10^{15} г/с . Из-за магнитного поля, искажающего сферическую аккрецию, вещество выпадает на две площадки в районе полюсов нейтронной звезды, суммарная площадь которых составляет 2 км^2 . Считая, что нагрев и свечение полюсов нейтронной звезды происходят благодаря полной передаче энергии аккрецирующего вещества поверхности нейтронной звезды, определите температуру её полярных областей.

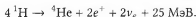
6.3 Тройной альфа-процесс

Оцените, сколько ядер углерода ^{12}C каждую секунду образуется в звезде с абсолютной болометрической звёздной величиной -0.3^m , если известно, что вклад горения гелия в светимость этой звезды составляет 30%. Массы ядер гелия ^4He и углерода ^{12}C составляют 4.002603 а.е.м. и 12.000000 а.е.м. соответственно.

Как можно догадаться из названия, в сокращённом виде реакцию горения гелия можно записать как $3 \text{ } ^4\text{He} \rightarrow \text{}^{12}\text{C} + \gamma$.

6.4 Нейтрино

В 1938 году Бете предположил, что ядерная реакция синтеза гелия из водорода, происходящая в ядре Солнца, — это его источник энергии. Результирующее уравнение ядерной реакции:



Электронные нейтрино ν_e , которые получаются в этой реакции, можно считать безмассовыми. Эти частицы вылетают из Солнца, а их обнаружение на Земле подтверждает то, что внутри Солнца происходят ядерные реакции.

1. Рассчитайте плотность потока нейтрино Φ_ν , достигающих Земли. Считайте, что энергия, излучаемая Солнцем, полностью получается в реакции, приведённой выше. Вы можете пренебречь энергией, уносимой нейтрино.

На пути к Земле часть электронных нейтрино превращается в нейтрино других типов ν_μ . Эффективность детектирования ν_μ составляет $1/6$ эффективности детектирования ν_e . Если бы не происходило превращения нейтрино, мы бы детектировали N_1 нейтрино в год. Однако из-за этих превращений детектируется N_2 нейтрино в год (ν_e и ν_μ вместе).

2. Какая доля f частиц ν_e превращается в ν_μ , если $N_1/N_2 = 2.25$?

6.5 Пульсация цефеиды

Звезда β Золотой Рыбы — переменная класса цефеид с периодом пульсации $T = 9.84$ сут. Предположим, что звезда является наиболее яркой в момент наибольшего сжатия (радиус R_1) и наиболее слабой в момент наибольшего расширения (радиус R_2), сохраняет сферическую форму и ведёт себя подобно абсолютно чёрному телу в каждый момент в течение всего цикла пульсаций.

Болометрическая звёздная величина этой звезды меняется от 3.46^m до 4.08^m . По измерениям доплеровского смещения известно, что в течение периода пульсаций поверхность звезды сжимается и расширяется со средней радиальной скоростью $v = 12.8$ км/с; спектральный максимум излучения колеблется от $\lambda_1 = 531.0$ нм до $\lambda_2 = 649.1$ нм.

1. Найдите отношение радиусов звезды R_1/R_2 в моменты наибольшего сжатия и наибольшего расширения и оцените величины этих радиусов.
2. Вычислите поток F_2 от звезды в момент её наибольшего расширения.
3. Определите расстояние D до звезды.

6.6 Одна фамилия

Межгалактический маяк представляет собой изотропный, компактный и яркий абсолютно чёрный источник. Для земного наблюдателя его болометрическая звёздная величина составляет $m = 5.2^m$.

Какую спектральную плотность потока излучения маяка на частоте $f = 32$ ГГц измерят на ракете «Нейтрон-Н», находящейся на стартовом столе космодрома «Восточный», если максимальная интенсивность излучения приходится на длину волны $\lambda_0 = 500$ нм? Выразите ответ в янских. Поглощением пренебречь.

6.7 Давайте поговорим про это

Одним из вероятных мест для поиска жизни являются планеты, обращающиеся вокруг звёзд главной последовательности. Исходить будем из того, что планеты имеют диапазон температур, подобный земному, с малыми температурными колебаниями. Примем для звёзд главной последовательности следующее усреднённое соотношение масса – светимость:

$$L \propto M^{3.5}.$$

Предположим, что полная выделяемая за время жизни звезды энергия $E \propto M$, а время жизни Солнца на главной последовательности составит около 10 млрд лет.

Спектральная классификация звёзд приведена в таблице ниже; подклассы (0 – 9) присваиваются в линейной зависимости от $\lg(M/M_\odot)$.

Спектральный класс	O5V	B0V	A0V	F0V	G0V	K0V	M0V
Масса, M_\odot	60	17.5	2.9	1.6	1.05	0.79	0.51

1. Пусть разумной жизни нужно по крайней мере 4 млрд лет, чтобы развиваться. Какой спектральный класс (с точностью до подкласса) может иметь самая массивная звезда, в окрестностях которой имеет смысл искать разумную жизнь?
2. Рассмотрим планету, имеющую такую же излучательную способность ϵ и альбедо a , что и Земля, а помимо того – такую же температуру. Выразите расстояние d (в а. е.) между планетой и её светилом при массе светила M .
3. Наличие планеты можно установить по вариации лучевой скорости звезды; наименьший регистрируемый сдвиг длины волны составляет $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-10}$. Какую наименьшую массу m (в массах Земли) может иметь планета из (2), которую можно обнаружить у звезды из (1)?

6.8 Мегамазер

В туманности Клеймана–Лоу наблюдают компактный радиоисточник в мазерной линии водяного пара $\lambda = 1.35$ см. Известно, что источник имеет радиус около 0.05 а. е., а его яркостная температура на данной длине волны достигает 10^{17} К. Оцените расстояние до источника, если измеренная плотность потока излучения от него составила 1.7 МЯн.

6.9 Спирт в космосе

Астрономы проводят наблюдения молекулярного облака в мазерной линии метанола на частоте 6.66 ГГц. Плотность потока излучения при этом составила 120 Ян. Определите длину волны, на которой проводились наблюдения. Оцените яркостную температуру метанолового облака, если известно, что его диаметр равен 1600 а. е., а параллакс составляет 0.77 mas.

6.10 Запрещённая зона

У полупроводника, из которого изготовлен солнечный элемент, ширина запрещенной зоны равна E_g . Каждый фотон с энергией $E \geq E_g$ позволяет электрону преодолеть запрещенную зону. Возбуждённый электрон может преобразовать в полезную только энергию E_g , остальная часть энергии рассеивается.

Введём безразмерный параметр $x_g \equiv E_g/(k_B T_\odot)$. Нарисуйте качественный график зависимости $\eta(x_g)$ КПД солнечного элемента от x_g . Найдите максимально возможный КПД солнечного элемента.

6.11 Dolce Vita

Оцените, во сколько раз отличаются количества видимых звёзд на квадратный градус в зените при наблюдениях в чистом поле и лёжа на дне бассейна глубиной в два метра в алмазных очках для плавания?

Показатель преломления воды $n_w = 1.33$, алмаза $n_d = 2.42$, температура воздуха $t_a = +26^\circ\text{C}$. Поглощением, дисперсией и поляризацией света в средах можно пренебречь, границы раздела сред гладкие, звёзды распределены в пространстве равномерно.

Подсказка: в случае нормального падения света на границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 энергетический коэффициент отражения

$$R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2.$$

6.12 Довести до белого каленья

Находясь на вершине горы над морем (широта — 35° с.ш., высота $h = 963$ м), наблюдатель видит в морской бинокль небольшой корабль у горизонта. На корабле установлена сигнальная лампа. Относительная световая отдача лампы $\eta = 2\%$.

На какую электрическую мощность P она рассчитана, если её можно перепутать с восходящей Вегой? Боллометрическими поправками пренебречь. Зенитное поглощение на уровне моря примите равным $\zeta = 0.2^m$.

6.13 Фотометрия в полосе U

Звезда обладает видимой звёздной величиной $m_U = 15.0^m$ в полосе U . Фильтр в полосе U является идеальным, то есть обладает пропусканием 100% в пределах полосы U и 0% вне полосы. Центр полосы пропускания фильтра имеет длину волны 360 нм, ширина полосы — 80 нм.

Предполагается, что звезда имеет плоское распределение энергии по спектру относительно частоты. Переход от звёздной величины m в произвольной полосе к плотности потока излучения f , выраженной в янских, определяется выражением

$$f = 3631 \cdot 10^{-0.4m} \text{ Ян.}$$

1. Оцените количество фотонов (N_0) полосы U от данной звезды, проходящих ортогонально через область площадью 1 м^2 на верхней границе земной атмосферы каждую секунду.

Звезда наблюдается в полосе U с помощью наземного телескопа с диаметром главного зеркала 2.0 м. Можно считать, что в течение наблюдений видимость ограничивается дифракцией, атмосферная экстинкция в полосе U составляет 50%. Средняя поверхностная яркость ночного неба в полосе U равна $22.0^m / \square''$.

2. Чему равно отношение R количества фотонов, принимаемых за секунду от звезды, к количеству фотонов, регистрируемых от ночного неба, если наблюдения проводятся с круговой апертурой диаметром $2''$?
3. На практике регистрируются только 20% фотонов полосы U , падающих на главное зеркало. Какое количество N_t фотонов от звезды регистрируется каждую секунду?

6.14 AstroSat

На индийском астрономическом спутнике AstroSat, запущенном в сентябре 2015 года, есть 5 различных инструментов. В данной задаче мы будем обсуждать 3 из них: SXT, LAXPC и CZTI. Эти инструменты наблюдают в рентгеновском диапазоне и имеют общее поле:



Инструмент	Полоса (кэВ)	Площадь (м ²)	Квантовая эфф.	Уровень насыщения (отсчёты)	Число пикселей
SXT	0.3÷8.0	0.067	60%	15000 всего	512 × 512
LAXPC	3÷80*	1.5	40%	50000 в любом из 8 счётчиков или 200000 всего	—
CZTI	10÷150	0.09	50%	—	4 × 4096

Пусть спутник наблюдает точечный рентгеновский источник, энергетический спектр которого имеет степенной характер: спектральная плотность потока фотонов с энергией E

$$F(E) \propto KE^{-2/3},$$

где $K = 10$ фотонов/(кэВ^{1/3} · м² · с).

1. Найдите спектральные плотности потока фотонов с энергиями 1 кэВ, 5 кэВ, 40 кэВ и 100 кэВ для данного источника. Для каждой плотности потока рассчитайте полное число отсчётов в единичном интервале энергий, зафиксированное каждым из инструментов за время экспозиции $t = 200$ с.
2. Вычислите для наблюдаемого источника максимальное время экспозиции t_s , при котором не достигается насыщение матрицы SXT.
3. Предположив, что источник стал в 3500 раз ярче, вычислите ожидаемое полное число отсчётов в секунду на счётчиках 1 и 8 LAXPC. Что окажется причиной насыщения при длительной экспозиции: переполнение какого-либо отдельного счётчика или общее по всем счётчикам?

* Энергетический диапазон LAXPC распределён на 8 счётчиков с равной шириной полос без перекрытия.

4. Источник считается зарегистрированным, если отношение сигнал/шум $SNR \geq 3$. Среднеквадратическая погрешность отсчётов CZTI вследствие случайных флуктуаций составляет 0.00014 отсчёт/(с · кэВ · пиксел). Каково минимальное время накопления t_c , необходимое для регистрации всё того же источника на CZTI?
5. Представим себе, что наш источник демонстрирует переменность, при которой коэффициент K «скачком» возрастает на 20%. AstroSat наблюдал источник в течение 1 с до изменения яркости и 1 с после него. Вычислите количество отсчётов, измеренное каждым из инструментов в обоих наблюдениях. Какой инструмент наилучшим образом подходит для регистрации подобных изменений?
6. У некоторых рентгеновских источников, таких как Cas A, наблюдается линия излучения, соответствующая радиоактивному распаду ^{44}Ti , с длиной волны 0.01825 нм. Представим себе, что существует источник, который излучает только одну яркую линию, соответствующую этому распаду. Какова должна быть минимальная (по модулю) лучевая скорость v такого источника, чтобы регистрируемая линия и линия лабораторного источника соответствовали различным счётчикам LAXPC?

Решения

6.1 Багровый ужас

В соответствии с законом Стефана – Больцмана светимость звезды

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

а создаваемая ей освещённость на расстоянии d равна

$$E = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi d^2} = \frac{R^2}{d^2} \sigma T^4 = \frac{\gamma^2 \sigma}{4} T^4.$$

Сопоставим полученное значение с солнечной постоянной E_\odot , используя формулу Погсона:

$$\frac{E}{E_\odot} = 10^{0.4(m_\odot - m)} \implies T = \left(\frac{4E_\odot \cdot 10^{0.4(m_\odot - m)}}{\gamma^2 \sigma} \right)^{0.25} \approx 4200 \text{ K}.$$

Такая температура соответствует оранжевому цвету звезды.

Упражнения.

1. К какому спектральному классу и типу может принадлежать эта звезда?
2. Оцените возможное расстояние до неё.

6.2 Аккреция на нейтронную звезду

Светимость определяется полной передачей энергии аккрецирующего вещества: по условию на «подлёте» потенциальная энергия газа обращается в кинетическую, чтобы затем вся кинетическая энергия потока перешла в тепловую — поверхности нейтронной звезды. В согласии со сказанным ранее, при темпе аккреции \dot{M} светимость равна

$$L = \frac{GM\dot{M}}{R},$$

при этом мы пренебрегаем начальной внутренней энергией газа вследствие её малости по сравнению с его потенциальной энергией.

Считая создаваемое на полюсах излучение чернотельным, запишем закон Стефана – Больцмана, откуда уже нетрудно выразить температуру:

$$L = S \cdot \sigma T^4 \implies T = \left(\frac{GM\dot{M}}{RS\sigma} \right)^{1/4} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ K}.$$

6.3 Тройной альфа-процесс

Звезда имеет абсолютную звёздную величину на 5^m меньше солнечной, значит, её светимость в 100 раз больше солнечной: $L = 3.88 \cdot 10^{28}$ Вт.

При синтезе одного ядра углерода выделяется энергия

$$E = \Delta mc^2 = (3m_{\text{He}} - m_{\text{C}})c^2 = 1.17 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

Количество образующихся за 1 секунду ядер углерода равно отношению создаваемой за счёт горения гелия светимости к энергии, выделяемой при синтезе одного ядра углерода:

$$\frac{0.3 \times 3.88 \cdot 10^{28} \text{ Вт}}{1.17 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}} \times 1 \text{ с} \approx 1 \cdot 10^{40}.$$

6.4 Нейтрино

1. Поскольку мы предполагаем, что излучаемая Солнцем энергия образуется в указанной реакции, то на каждые $\delta E = 25$ МэВ солнечной энергии приходится 2 нейтрино. Тогда, зная величину солнечной постоянной E_{\odot} , рассчитаем плотность потока нейтрино:

$$\Phi_{\nu} = 2 \times \frac{E_{\odot}}{\delta E} = 2 \times \frac{1360}{25 \cdot 10^6 \times 1.6 \cdot 10^{-19}} \approx 7 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

2. Количества детектируемых нейтрино связаны соотношением

$$N_2 = N_1 \left((1 - f) + \frac{1}{6} f \right),$$

отсюда доля превращающихся частиц

$$f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \right) = \frac{2}{3}.$$

Упражнения.

1. Оцените, сколько солнечных нейтрино в настоящее время находятся в пределах сферы с радиусом 1 а. е., окружающей Солнце.
2. Установите, как должен меняться со временем поток солнечных нейтрино, чтобы их концентрация в некоторой окружающей Солнце области пространства оказалась одинаковой и не зависящей от расстояния до него.

6.5 Пульсация цефеиды

1. Сначала определим отношение потоков, затем оценим потоки по закону Стефана – Больцмана. Запишем формулу Погсона:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \lg \left(\frac{F_1}{F_2} \right);$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{-0.4(m_1 - m_2)} = 10^{-0.4(3.46 - 4.08)} = 1.77.$$

Светимость определим по закону Стефана – Больцмана, откуда выразим потоки и отношение радиусов:

$$L_i = 4\pi R_i^2 \sigma T_i^4 \quad \Rightarrow \quad F_i = \frac{4\pi R_i^2 \sigma T_i^4}{4\pi D^2};$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \times \frac{T_1^4}{T_2^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} \times \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2.$$

Воспользуемся также законом смещения Вина:

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} &= \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} \times \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 = \\ &= \sqrt{1.77} \times \left(\frac{531.0}{649.1} \right)^2 = 0.890. \end{aligned}$$

Поскольку средняя скорость расширения и период пульсаций известны, можно записать выражение для разности радиусов

$$R_2 - R_1 = v \times \frac{P}{2} = 12.8 \cdot 10^3 \times 86400 \times \frac{9.84}{2} \text{ м.}$$

Подставим в формулу полученное ранее отношение радиусов:

$$(1 - 0.890)R_2 = 5.441 \cdot 10^9 \text{ м} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_2 = 4.95 \cdot 10^{10} \text{ м,} \\ R_1 = 4.41 \cdot 10^{10} \text{ м.} \end{cases}$$

2. Для определения абсолютной величины потока F_2 сравним его с наблюдаемым потоком от Солнца:

$$m_2 - m_{\odot} = -2.5 \lg \left(\frac{F_2}{F_{\odot}} \right) \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_{\odot} \cdot 10^{-0.4(m_2 - m_{\odot})}.$$

В качестве солнечного потока подставим солнечную постоянную:

$$F_2 = E_{\odot} \times 10^{-0.4(4.08 + 26.72)} \approx 6.51 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/м}^2.$$

3. Запишем выражение для расстояния до звезды через радиус, поток и температуру в момент наибольшего расширения:

$$D = \sqrt{\frac{L_2}{4\pi F_2}} = \sqrt{\frac{R_2^2 \sigma T_2^4}{F_2}} = R_2 T_2^4 \sqrt{\frac{\sigma}{F_2}}.$$

По закону смещения Вина

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_2} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}}{649.1 \cdot 10^{-9} \text{ м}} = 4465 \text{ К}.$$

$$\therefore D \approx 9.208 \cdot 10^{18} \text{ м} \approx 300 \text{ пк}.$$

6.6 Одна фамилия

По закону смещения Вина эффективная температура источника равна

$$T = \frac{b}{\lambda_0} = \frac{0.0029 \text{ м} \cdot \text{К}}{500 \times 10^{-9} \text{ м}} = 5800 \text{ К} \approx T_{\odot}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что спектральная кривая источника похожа на солнечную.

По формуле Погсона находим, во сколько раз источник слабее Солнца:

$$\xi = \frac{E_{\odot}}{E_{\text{src}}} = 10^{0.4(m-m_{\odot})} = 10^{0.4(5.2+26.8)} = 6.3 \cdot 10^{12} \text{ раз}.$$

В радиодиапазоне, где справедливо соотношение $c/f \gg \lambda_0$, применимо приближение Рэлея – Джинса. Тогда искомая плотность потока определяется следующим соотношением:

$$F_f = F_{\odot} \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{2\pi f^2 kT}{c^2} \cdot \frac{4\pi R_{\odot}^2}{4\pi a_{\odot}^2} \cdot \frac{1}{\xi} \approx 2.0 \cdot 10^{-32} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гц}} \approx 2.0 \cdot 10^{-6} \text{ Ян}.$$

Упражнения

1. Оцените, как сильно изменился бы ответ, если бы вместо приближения Рэлея – Джинса была применена формула Планка.
2. Ракета начала двигаться в направлении на маяк с ускорением g . Опишите, как измеряемая на ракете спектральная плотность потока зависит от времени.

6.7 Давайте поговорим про это

1. Поскольку выделяемая энергия $E = L\tau$ пропорциональна массе \mathcal{M} , и при этом $L \propto \mathcal{M}^{3.5}$, то время существования звезды (на главной последовательности)

$$\tau \propto \mathcal{M}^{-2.5} \quad \Rightarrow \quad \tau = \tau_{\odot} \left(\frac{\mathcal{M}_{\odot}}{\mathcal{M}} \right)^{2.5}.$$

Отсюда получим оценку наибольшей массы звезды:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\odot} \left(\frac{\tau_{\odot}}{\tau} \right)^{1/2.5} = \mathcal{M}_{\odot} \left(\frac{10^{10}}{4 \cdot 10^9} \right)^{1/2.5} = 1.44 \mathcal{M}_{\odot}.$$

Оценим спектральный класс такой звезды. Масса заключена в интервале от $1.05\mathcal{M}_{\odot}$ до $1.6\mathcal{M}_{\odot}$, что соответствует спектральному классу F.

Интерполируем зависимость подкласса от логарифма массы:

$$10 \times \frac{\lg 1.6 - \lg 1.44}{\lg 1.6 - \lg 1.05} = 2.5.$$

Таким образом, звезда имеет спектральный класс F2V.

2. Мощности излучения, принимаемого планетой радиуса r на расстоянии d от звезды и испускаемого этой планетой, равны соответственно

$$P_{\text{in}} = (1 - a) \frac{\pi r^2 L}{4\pi d^2} = (1 - a) \frac{r^2 L}{4d^2};$$

$$P_{\text{out}} = 4\pi r^2 \varepsilon \sigma T^4.$$

Мы предположили, что планета излучает как абсолютно серое тело (в ε раз хуже абсолютно чёрного). Запишем равенство принимаемой и излучаемой мощности:

$$(1 - a) \frac{r^2 L}{4d^2} = 4\pi r^2 \varepsilon \sigma T^4.$$

Из равенства температур планеты и Земли следует выражение

$$T^4 = \frac{(1 - a)L}{16\pi\varepsilon\sigma d^2} = \frac{(1 - a)L_{\odot}}{16\pi\varepsilon\sigma a_{\oplus}^2}.$$

$$\therefore \frac{d}{a_{\oplus}} = \sqrt{\frac{L}{L_{\odot}}} = \left(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_{\odot}} \right)^{\frac{3.5}{2}} \quad \Rightarrow \quad d = \left(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_{\odot}} \right)^{\frac{7}{4}} \text{ а. е.}$$

3. Выразим угловую скорость движения планеты вокруг центра масс системы при помощи третьего закону Кеплера:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(\mathfrak{M} + m)} \implies \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(\mathfrak{M} + m)}{d^3}}.$$

Пусть d_s и d — расстояния от звезды и планеты до центра масс, тогда

$$d_s = \frac{m}{\mathfrak{M}} d.$$

Выразим линейную скорость через угловую:

$$v = \omega d_s = \omega d \frac{m}{\mathfrak{M}} = \frac{m}{\mathfrak{M}} \sqrt{\frac{G(\mathfrak{M} + m)}{d}} \approx m \sqrt{\frac{G}{\mathfrak{M} d}}.$$

Из соотношения для эффекта Доплера получим выражение для массы планеты:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{m}{c} \sqrt{\frac{G}{\mathfrak{M} d}} \implies m = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c \sqrt{\frac{\mathfrak{M} d}{G}}.$$

Подставим полученное выше выражение для расстояния d :

$$m = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c \sqrt{\frac{\mathfrak{M} \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot} \right)^{\frac{7}{4}} \cdot a_\oplus}{G}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c \sqrt{\frac{\mathfrak{M} \times 1.44^{1.75} \times a_\oplus}{G}}.$$

Итоговое значение массы равно $m = 3.31 \cdot 10^{24}$ кг или $0.554 \mathfrak{M}_\oplus$.

6.8 Мегамазер

Плотность потока излучения связана с яркостью источника B_ν и телесным углом Ω , под которым виден этот источник, соотношением

$$S_\nu = B_\nu \Omega, \quad \text{где } \Omega = \frac{\pi R^2}{d^2},$$

где R — радиус источника, d — расстояние до него. Отсюда выразим расстояние:

$$d = \sqrt{\frac{\pi R^2 B_\nu}{S_\nu}}.$$

Яркость источника найдём по формуле Рэля – Джинса:

$$B_\nu = \frac{2k_B T_b \nu^2}{c^2} = \frac{2k_B T_b}{\lambda^2}.$$

Подставим выражение для яркости в формулу для расстояния и выполним расчёт:

$$d = \sqrt{\frac{2\pi R^2 k_B T_b}{S_\nu \lambda^2}} \approx 400 \text{ пк.}$$

Упражнение.

Оцените яркость метанольного мазера (частота излучения $\nu = 6.7$ ГГц) с яркостной температурой $T = 2 \cdot 10^{10}$ К.

6.9 Спирт в космосе

Определим длину волны, на которой проводились наблюдения:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 4.5 \text{ см.}$$

Расстояние до облака вычислим из параллакса:

$$d = \frac{1 \text{ пк}}{\pi''} = 1.3 \text{ кпк} = 4 \cdot 10^{19} \text{ м.}$$

Плотность потока излучения равна

$$S_\nu = 120 \text{ Ян} = 1.2 \cdot 10^{-24} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{Гц})$$

и связана с яркостью источника B_ν соотношением $S_\nu = B_\nu \Omega$, где Ω — телесный угол, под которым виден источник:

$$\Omega = \pi \frac{R^2}{d^2} = \frac{\pi D^2}{4d^2},$$

где R — радиус источника, D — его диаметр, d — расстояние до него.

Выразим яркость источника по формуле Рэлея – Джинса:

$$B_\nu = \frac{2kT_b \nu^2}{c^2}.$$

Отсюда определяем яркостную температуру:

$$T_b = \frac{B_\nu c^2}{2k_B \nu^2} = \frac{S_\nu c^2}{2\Omega k_B \nu^2} = \frac{2S_\nu c^2 d^2}{k_B \nu^2 \pi D^2} = 3 \cdot 10^6 \text{ К.}$$

6.10 Запрещённая зона

Определим мощность падающего излучения, приходящего на ортогональную лучам площадку A . Распределение энергии в спектре приближаем законом Вина:

$$P_{\text{in}} = \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_{\odot}}\right) d\nu.$$

Введём новое обозначение:

$$x \equiv \frac{h\nu}{k_B T_{\odot}} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \nu = \frac{k_B T_{\odot}}{h} x, d\nu = \frac{k_B T_{\odot}}{h} dx. \right.$$

Преобразуем подынтегральное выражение и возьмём этот интеграл:**

$$\begin{aligned} P_{\text{in}} &= \frac{2\pi h A R_{\odot}^2}{c^2 d_{\odot}^2} \frac{(k_B T_{\odot})^4}{h^4} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \\ &= \frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \cdot 6 = \frac{12\pi k_B^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2}. \end{aligned}$$

Полезная мощность в данном случае равна полезной энергии в расчёте на один фотон, $E_g \equiv h\nu_g$, умноженной на количество фотонов с энергией выше пороговой ($E \geq E_g$):

$$\begin{aligned} P_{\text{out}} &= h\nu_g \int_{\nu_g}^{\infty} n_{\nu}(\nu) d\nu = h\nu_g A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi}{c^2} \int_{\nu_g}^{\infty} \nu^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_{\odot}}\right) d\nu = \\ &= k_B T_{\odot} x_g A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi}{c^2} \left(\frac{k_B T_{\odot}}{h}\right)^3 \int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \\ &= \frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}. \end{aligned}$$

** Интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-x} dx &= -x^3 e^{-x} + \int 3x^2 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} - 3 \left(x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx \right) = \\ &= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6 \left(x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right) = - \left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6 \right) e^{-x}. \end{aligned}$$

КПД солнечного элемента η выразим через x_g :

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{\frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d^2} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}}{\frac{12\pi k_B^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d^2}} = \frac{x_g}{6} (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}.$$

Преобразуем полученное выражение перед построением графика, а также найдем значения $\eta(0)$ и $\eta(\infty)$:

$$\eta = \frac{1}{6} (x_g^3 + 2x_g^2 + 2x_g) e^{-x_g} \implies \eta(0) = 0, \quad \eta(\infty) = 0.$$

У полиномиального множителя все коэффициенты положительны, следовательно, он монотонно возрастает; экспоненциальный множитель, наоборот, монотонно убывает. Таким образом, график имеет только один максимум:

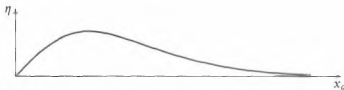


Рис. 6.1. Качественный график зависимости $\eta(x_g)$

В точке x_0 максимума η производная должна быть равной нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx_g} &= \frac{1}{6} (-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g} = 0; \\ p(x_g) &\equiv x_g^3 - x_g^2 - 2x_g - 2 = 0. \end{aligned}$$

Корень этого уравнения можно найти методом бисекции:

$$\begin{aligned} p(0) &= -2, \\ p(1) &= -4, \\ p(2) &= -2, \\ p(3) &= 10 & 2 < x_0 < 3, \\ p(2.5) &= 2.375 & 2 < x_0 < 2.5, \\ p(2.25) &= -0.171 & 2.25 < x_0 < 2.5. \end{aligned}$$

В итоге $x_0 \approx 2.27$, что соответствует максимальному КПД

$$\eta_{\text{max}} = \eta(x_0) \approx 46\%.$$

6.11 Dolce Vita

Коэффициент пропускания и коэффициент отражения в сумме должны давать 100%:

$$T = 1 - R = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Перед попаданием в глаз наблюдателя в бассейне, свет проходит три границы раздела сред (воздух — вода, вода — алмаз и алмаз — воздух). Показатель преломления воздуха считаем равным $n_a = 1.00$. Результирующий коэффициент пропускания τ равен произведению коэффициентов пропускания для трёх границ разделов сред:

$$\tau = \frac{4n_a n_w}{(n_a + n_w)^2} \times \frac{4n_w n_d}{(n_w + n_d)^2} \times \frac{4n_d n_a}{(n_d + n_a)^2} \approx 0.74.$$

Угловые масштабы на переходе воздух — вода — алмаз — воздух не искажаются, поскольку в итоге эта «оптическая система» ведёт себя как плоскопараллельная пластина. Наблюдаемая дайвером освещённость прямо пропорциональна τ . Значит, расстояние до наблюдаемых на пределе видимости звёзд уменьшится:

$$E \propto \tau, \quad E \propto \frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad R \propto 1/\sqrt{\tau}.$$

По сравнению с наземным наблюдателем для дайвера «горизонт видимости» стал ближе в 1.16 раз. Количество видимых звёзд при этом уменьшилось в $(\tau^{-0.5})^3 \approx 1.6$ раза.

6.12 Довесть до белого каленья

Расстояние от наблюдателя до корабля равно

$$l = \sqrt{(R_{\oplus} + h)^2 - R_{\oplus}^2} \approx \sqrt{2R_{\oplus}h}.$$

Сопоставим освещённость от лампы с солнечной постоянной:

$$\frac{E}{E_{\odot}} = 10^{-0.4(m_0 - m_{\odot})} \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta P}{4\pi l^2} = E_{\odot} \cdot 10^{-0.4(m_0 - m_{\odot})}.$$

Получаем выражение для мощности лампы:

$$P = \frac{1}{\eta} 4\pi l^2 E_{\odot} \cdot 10^{-0.4(m_0 - m_{\odot})}.$$

Если не учитывать поглощение и указать $m_0 = 0.0^m$, то мощность лампы получается равной $P_0 = 200$ кВт — не лампа, а прожектор!

Пусть $H_0 \approx 8$ км — высота однородной атмосферы, тогда путь луча от Веги через атмосферу составляет приблизительно

$$L = l + \sqrt{2R_{\oplus}H_0}.$$

Величина поглощения прямо пропорциональна длине пути луча через атмосферу:

$$\Delta m_1 = \zeta \frac{l}{H_0}, \quad \Delta m_2 = \zeta \frac{L}{H_0}.$$

Тогда равенство освещённостей примет вид

$$\frac{\eta P}{4\pi l^2} \cdot 10^{-0.4\zeta l/H_0} = E_{\odot} \cdot 10^{-0.4(m_0 - m_{\odot})} \cdot 10^{-0.4\zeta L/H_0}.$$

Итоговое выражение для мощности:

$$P = \frac{1}{\eta} 4\pi l^2 E_{\odot} \times 10^{-0.4(m_0 - m_{\odot})} \times 10^{-0.4\zeta(L-l)/H_0} \implies P \approx 130 \text{ Вт}.$$

Упражнение.

Сравните результаты при наблюдениях звезды на высотах 20° и 45° над горизонтом и в зените.

6.13 Фотометрия в полосе U

1. Область полосы U задана как диапазон длин волн (360 ± 40) нм. Следовательно, максимальная, минимальная и средняя частоты для полосы будут равны

$$\nu_{\max} = \frac{c}{\lambda_{\min}} = 9.369 \cdot 10^{14} \text{ Гц},$$

$$\nu_{\min} = 7.495 \cdot 10^{14} \text{ Гц}, \quad \nu_{\text{avg}} = 8.432 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

Ширина полосы в терминах частоты равна

$$\Delta\nu = \nu_{\max} - \nu_{\min} = 1.874 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

Плотность потока излучения для данной полосы

$$f_{\text{st1}} = 3631 \times 10^{-0.4 \times 15} \text{ Ян} = 3.631 \text{ мЯн} = 3.631 \cdot 10^{-29} \text{ Вт} \cdot \text{Гц}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Искомое количество фотонов связано с плотностью потока следующим образом (используем сведения о плоском спектре):

$$N_0 \cdot h\nu_{\text{avg}} = \Delta\nu \cdot f_{\text{st1}} \cdot A \cdot \Delta t,$$

где $A = 1 \text{ м}^2$ и $\Delta t = 1 \text{ с}$. Итоговое выражение имеет вид

$$N_0 = \frac{\Delta\nu \cdot f_{\text{st1}} \cdot A \cdot \Delta t}{h\nu_{\text{avg}}} = \frac{1.874 \cdot 10^{14} \times 3.631 \cdot 10^{-29} \times 1 \times 1}{6.626 \cdot 10^{-34} \times 8.432 \cdot 10^{14}} \approx 12180.$$

2. Введём следующие обозначения: Φ — поток от неба в расчёте на квадратную секунду, ϕ_{sky} — полный поток от неба для заданной апертуры, ϕ_{st} — полный поток от звезды. Отметим, что

$$\phi_{\text{sky}} = A\Phi = \pi \times (1'')^2 \times \Phi = \pi\Phi.$$

Перейдём к звёздным величинам:

$$m_{\text{sky}} = 22.0^{\text{m}} + 2.5 \lg \left(\frac{\Phi}{\phi_{\text{sky}}} \right) = 22.0^{\text{m}} - 2.5 \lg(\pi) = 20.76^{\text{m}}.$$

Поскольку экстинкция достигает 50%,

$$R = \frac{\phi'_{\text{st}}}{\phi_{\text{sky}}} = \frac{0.5\phi_{\text{st}}}{\phi_{\text{sky}}} = 0.5 \cdot 10^{0.4(20.76-15)} \simeq 100.$$

3. Число регистрируемых фотонов равно произведению N_0 , коэффициентов экстинкции и эффективности приёмника, а также апертуры телескопа, выраженной в м^2 :

$$N_t = 12180 \times 0.5 \times 0.2 \times \pi \left(\frac{2.0}{2} \right)^2 = 1233\pi \simeq 3813.$$

6.14 AstroSat

1. Проведём вычисления для детектора с площадью A и квантовой эффективностью α . Число отсчётов в единичном интервале энергий за время t есть

$$C_{\alpha,A}(E) = F(E) \cdot \alpha A \cdot t = Kt \cdot \alpha A \cdot E^{-2/3},$$

где по условию коэффициент $K = 10$ отсчётов/(кэВ $^{1/3} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}$).

Результаты расчётов занесём в таблицу:

Энергия (кэВ)	Плотность потока (y. e.)	SXT	LAXPC	CZTI
1	10	80	—	—
5	3.42	27	410	—
40	0.86	—	103	8
100	0.46	—	—	4

2. Плотность потока фотонов с энергиями $E \in [E_1; E_2]$

$$G(E_1, E_2) = \int_{E_1}^{E_2} F(E) dE = 3K \left(E_2^{1/3} - E_1^{1/3} \right),$$

поэтому число отсчётов, фиксируемых SXT за секунду

$$C_0 = \alpha A G(E_{\min}^{\text{SXT}}, E_{\max}^{\text{SXT}}) = 1.605 \text{ отсчётов/с.}$$

Максимальное время экспозиции определяем как время, за которое достигается уровень насыщения:

$$t_S = \frac{C_{\max}^{\text{SXT}}}{C_0} = \frac{15000}{1.605} \approx 9350 \text{ с.}$$

3. Полоса каждого из восьми счётчиков LAXPC имеет ширину, равную $(80 - 3)/8 = 9.625$ кэВ. Расчёт производим аналогично предыдущему. Быстрее всего наступит насыщение счётчика 1:

Счётчик	E_{\min} (кэВ)	E_{\max} (кэВ)	Отсчёты/с 10^3
1	3.0	12.625	55.8
8	70.375	80.0	11.4
Всего	3.0	80.0	180.6

4. Рассчитаем число отсчётов от источника и шум на CZTI, а затем наложим условие на их отношение ($\text{SNR} \geq 3$), помня о том, что математическое ожидание сигнала s линейно зависит от времени накопления:

$$E\{s\} = E\{s\}_0 \cdot \frac{t}{t_0},$$

а среднеквадратическое отклонение пропорционально \sqrt{t} :

$$\sigma\{s\} = \sigma\{s\}_0 \sqrt{\frac{t}{t_0}}.$$

Определим значения $E\{s\}_0$ и $\sigma\{s\}_0$:

$$E\{s\}_0 = 3K \left(E_{\max}^{1/3} - E_{\min}^{1/3} \right) \alpha A \approx 4.26 \text{ отсчётов/с,}$$

$$\sigma\{s\}_0 = 0.00014 \cdot (E_{\max} - E_{\min}) \cdot (4 \times 4096) \approx 321 \text{ отсчёт/с.}$$

Выражение для отношения «сигнал/шум» за время t имеет вид

$$\text{SNR}(t) = \frac{E\{s\}}{\sigma\{s\}} = \frac{E\{s\}_0 \cdot t/t_0}{\sigma\{s\}_0 \sqrt{t/t_0}} = \frac{E\{s\}_0}{\sigma\{s\}_0} \sqrt{\frac{t}{t_0}}.$$

Минимальное время накопления сигнала соответствует $\text{SNR}(t_c) = 3$:

$$\text{SNR}(t_c) = 3 \implies t_c \approx 51 \cdot 10^3 \text{ с}.$$

5. Лучшее всего подходит LAXPC:

Инструмент	Число отсчётов до	Число отсчётов после
SXT	$1.60 \approx 2$	$1.93 \approx 2$
LAXPC	$51.60 \approx 52$	$61.92 \approx 62$
CZTI	$4.26 \approx 4$	$5.11 \approx 5$

6. Линии $\lambda = 0.01825 \text{ нм} = 18.25 \text{ пм}$ соответствует энергия

$$E_\lambda = \frac{hc}{\lambda e} = 67.95 \text{ кэВ}.$$

Фотоны с такой энергией регистрируются счётчиком 7. Чтобы попасть в полосу счётчика 6, энергия фотонов должна стать меньше $E'_1 = 60.75 \text{ кэВ}$, для счётчика 8 — больше $E'_2 = 70.375 \text{ кэВ}$. Очевидно, для минимальности модуля лучевой скорости должен реализовываться второй вариант (различие энергий меньше; источник приближается):

$$\lambda' = \frac{hc}{E'_2 e} = 17.62 \text{ пм},$$

$$v = \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda}\right) c \approx 10.4 \cdot 10^3 \text{ км/с}.$$

Не походит ли галактика на сливки в чашке кофе, где каждая сверкающая точка — звезда?

Т. Пратчетт

7.1 Утечка газа

На радиоинтерферометре VLA проведены наблюдения в линии HI дисковой галактики с активным звездообразованием IRAS 0833+6517, находящейся на расстоянии 80.2 Мпк. Угол наклона её оси к лучу зрения составляет около 23° . Наблюдаемая лучевая скорость газа на расстоянии 7.8 кпк от её центра составляет 5850 км/с; по претерпевшим голубое смещение линиям межзвёздного поглощения на фоне континуума звёздного излучения здесь обнаружено истечение газа.

1. Вычислите скорость вращения галактики v_c и скорость убегания v_e для пробной частицы в газовом потоке на радиусе 7.8 кпк.
2. Определите, может ли истекающий газ на данном радиусе преодолеть гравитацию галактики, используя данные рис. 7.2.



Рис. 7.1. Вид «сбоку»

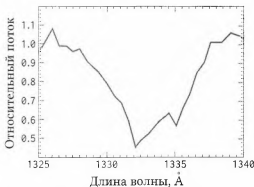


Рис. 7.2. Спектрометрия линии поглощения C II $\lambda 1335$, исправленная на космологические эффекты (Cannon et al.)

7.2 *Dark Matters*

В состав скопления входят 70 спиральных и 30 эллиптических галактик. Абсолютная звездная величина эллиптических галактик равна -20^m , отношение масса–светимость составляет $15 M_{\odot}/L_{\odot}$; скорость вращения спиральных галактик — 210 км/с при соотношении $5 M_{\odot}/L_{\odot}$.

Оцените долю тёмной материи внутри скопления, если масса межгалактического газа на порядок превышает массу галактик, характерные скорости галактик достигают 10^3 км/с, а размер скопления — 7 Мпк.

7.3 *Теорема Рыбака*

При наблюдении галактики, находящейся на расстоянии $R = 90$ Мпк и наблюдающей «с ребра», было обнаружено, что отношение максимального и минимального смещения некоторой линии относительно лабораторного эталона составляет 1.15. Пренебрегая пекулярной скоростью этой галактики, оцените её абсолютную видимую звёздную величину.

7.4 *Энергия вакуума*

Определите отношение плотности энергии реликтового излучения (температура $T \approx 3$ К) к плотности энергии покоя протонов в межгалактическом веществе (концентрация $n \sim 1 \text{ м}^{-3}$).

7.5 *Ранняя Вселенная*

Современные значения параметра плотности — отношения плотности к критической плотности энергии Вселенной ρ_c — для вещества и излучения соответственно равны $\Omega_{m_0} = 0.3$ и $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$.

1. Определите значение красного смещения z_e , при котором плотности энергии вещества и излучения совпадали.
2. Оцените температуру T_e и характерную энергию фотонов реликтового излучения ϵ_e , соответствующую эпохе с красным смещением z_e .

7.6 *Истина в Вине*

В радиодиапазоне наблюдаются два абсолютно чёрных объекта с совпадающими физическими характеристиками. Один находится на орбите Земли, а другой — в галактике с красным смещением $z = 0.1$. Найдите отношение спектральных плотностей мощности излучения данных объектов, регистрируемых наблюдателем на Земле на некоторой частоте, и их светимостей, приведённых к текущему расстоянию до объекта.

7.7 Обозревая 21 см

Радиотелескоп оборудован приёмником излучения, способным принимать излучение в диапазоне частот от 1.32 до 1.52 ГГц. Для типичной галактики в рамках проводимого обзора светимость в линии Н I составляет 10^{28} Вт при ширине линии 1 МГц и лабораторной частоте 1.42 ГГц. Предел чувствительности приёмника составляет 0.5 мЯн за 1 минуту накопления сигнала в луче диаграммы направленности, причём луч достаточно широк, чтобы область излучения Н I далёкой галактики можно было считать точечным источником. Галактика с каким наибольшим красным смещением z может быть зарегистрирована на данном радиотелескопе, если время накопления сигнала составляет 1 минуту?

Решения

7.1 Утечка газа

1. Скорость v_s космологического удаления галактики (систематическую скорость) можно определить из закона Хаббла:

$$v_s = 68 \text{ (км/с)/Мпк} \times 80.2 \text{ Мпк} = 5450 \text{ км/с.}$$

Наблюдаемая лучевая скорость v_r складывается из систематической скорости удаления и скорости вращения галактики v_c с учётом угла наклона оси галактики к лучу зрения i :

$$v_r = v_s + v_c \sin i.$$

$$\therefore v_c = \frac{v_r - v_s}{\sin i} = \frac{(5850 - 5450) \text{ км/с}}{\sin 23^\circ} = 1020 \text{ км/с.}$$

В случае галактики, в которой преобладает упорядоченное вращение, по теореме вириала для динамической массы и скорости убегания имеем выражения

$$\mathfrak{M} = \frac{v_c^2 R}{G} \implies v_e = \sqrt{\frac{2G\mathfrak{M}}{R}} = \sqrt{2}v_c = 1440 \text{ км/с.}$$

2. Получим значение скорости истечения газа на основе сведений о доплеровском смещении линии поглощения:

$$\frac{\Delta v}{c} = \left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right|.$$

На основании обозначения линии С П $\lambda 1335$ нетрудно соотнести с ней лабораторную длину волны $\lambda = 1335 \text{ \AA}$ и определить величину её смещения:

$$\Delta v = \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} c = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с} \times \frac{1335 - 1332}{1335} \approx 670 \text{ км/с.}$$

Это значение оказывается вдвое меньше вычисленной ранее скорости убегания. Таким образом, рассматриваемый поток газа не сможет преодолеть притяжение галактики.



Рис. 7.3. Смещенная линия (1332 Å)

7.2 Dark Matters

Определим светимость и массу эллиптической галактики по данным абсолютной звёздной величины и соотношению масса–светимость:

$$L_E = 10^{0.4(M_\odot - M)} \cdot L_\odot = 10^{0.4(4.8+20)} \cdot L_\odot \simeq 8 \cdot 10^9 L_\odot.$$

$$\mathfrak{M}_E = 8 \cdot 10^9 L_\odot \times (15 \mathfrak{M}_\odot / L_\odot) = 1.2 \cdot 10^{11} \mathfrak{M}_\odot.$$

Для спиральных галактик выполняется соотношение Талли–Фишера, связывающее светимость и скорость вращения: $L \propto v^4$. Светимость Млечного Пути рассчитаем из известного значения абсолютной звёздной величины, чтобы затем определить светимости спиральных галактик скопления и их массы:

$$L_{MW} = 10^{0.4(M_\odot - M_{MW})} \cdot L_\odot = 10^{0.4(4.8+21.5)} \cdot L_\odot \simeq 3 \cdot 10^{10} L_\odot;$$

$$L_S = L_{MW} \cdot \left(\frac{V_{\text{rot}}}{V_{MW}} \right)^4 = \left(\frac{210}{240} \right)^4 \times 3 \cdot 10^{10} L_\odot \simeq 1.8 \cdot 10^{10} L_\odot,$$

$$\mathfrak{M}_S = 1.8 \cdot 10^{10} \times (5 \mathfrak{M}_\odot / L_\odot) \simeq 9 \cdot 10^{10} \mathfrak{M}_\odot.$$

Суммарная масса галактик оказывается равной

$$\mathfrak{M}_G = 30 \mathfrak{M}_E + 70 \mathfrak{M}_S =$$

$$= 30 \times 1.2 \cdot 10^{11} \mathfrak{M}_\odot + 70 \times 9 \cdot 10^{10} \mathfrak{M}_\odot \approx 1 \cdot 10^{13} \mathfrak{M}_\odot.$$

С другой стороны, из теоремы вириала получаем оценку динамической массы скопления:

$$\mathfrak{M}_V \approx \frac{v^2 R}{G} = \frac{10^3 \text{ км/с} \times 3.5 \text{ Мпк}}{G} \approx 8 \cdot 10^{14} \mathfrak{M}_\odot.$$

Поскольку масса межзвёздного газа на порядок превышает массу галактик, то суммарная масса галактик и газа оказывается порядка $10 \mathfrak{M}_G \approx 1 \cdot 10^{14} \mathfrak{M}_\odot$, а доля тёмной материи

$$\eta_{DM} \approx 1 - \frac{10 \mathfrak{M}_G}{\mathfrak{M}_V} \simeq 1 - \frac{1 \cdot 10^{14}}{8 \cdot 10^{14}} = \frac{7}{8} \approx 90\%.$$

Упражнение.

Определите значение отношения масса–светимость для скопления в целом, сравните со значением для эллиптической галактики.

7.3 Теорема Рыбака

Рассчитаем скорость удаления галактики по закону Хаббла:

$$V_H = HR = 68 \text{ (км/с)/Мпк} \times 90 \text{ Мпк} \approx 6100 \text{ км/с} \ll c.$$

На одном краю галактики скорость её вращательного движения направлена к нам, на другом — от нас. Определим эту скорость V_{rot} из отношения доплеровских смещений

$$k \equiv \frac{(\Delta\lambda)_{\text{max}}}{(\Delta\lambda)_{\text{min}}} = \frac{V_H + V_{\text{rot}}}{V_H - V_{\text{rot}}} = 1.15;$$

$$V_{\text{rot}} = V_H \cdot \frac{k - 1}{k + 1} = 6100 \text{ км/с} \times \frac{0.15}{2.15} \approx 430 \text{ км/с}.*$$

Взяв в качестве эталона для сравнения Млечный Путь ($V_{\text{MW}} = 240 \text{ км/с}$, $M_{\text{MW}} = -21.5^{\text{m}}$), используем соотношение Талли – Фишера:

$$\frac{L}{L_{\text{MW}}} = \left(\frac{V_{\text{rot}}}{V_{\text{MW}}} \right)^4 = \left(\frac{430}{240} \right)^4 \approx 10,$$

$$\therefore M = M_{\text{MW}} - 2.5 \log \left(\frac{V_{\text{rot}}}{V_{\text{MW}}} \right)^4 = \left(\frac{430}{240} \right)^4 - 2.5^{\text{m}} = -24^{\text{m}}.$$

Упражнения.

1. Показатель степени в законе Талли – Фишера зависит от фотометрической полосы. Оцените абсолютную звёздную величину галактики в полосе B , если показатель степени для данной полосы равен 3. Абсолютная звёздная величина Млечного Пути в полосе B равна -20.7^{m} .
2. Найдите функциональную зависимость показателя цвета галактики от скорости её вращения: $B - V = f(V_{\text{rot}})$.
3. Оцените хаббловское покраснение галактики $\Delta(B - V)$.

7.4 Энергия вакуума

Зная концентрацию протонов n и их массу m_p , нетрудно вычислить их плотность энергии покоя**:

$$w_p = nm_p c^2 \approx 1 \text{ м}^{-3} \times 938 \text{ МэВ} = 9.4 \cdot 10^8 \text{ эВ/м}^3 \approx 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ Дж/м}^3.$$

Реликтовое излучение является чернотельным и подчиняется закону Стефана – Больцмана. Рассмотрим малую абсолютно чёрную площадку

* Галактики с такими высокими скоростями вращения действительно могут существовать: так, галактика UGC 12591, одна из наиболее массивных спиральных галактик, имеет скорость вращения около 500 км/с.

** Под энергией покоя вещества здесь, конечно, понимается эквивалент его массы $E = mc^2$.

площадью δs , находящуюся в термодинамическом равновесии с фотонным газом. Пусть средняя энергия фотона равна $\bar{\epsilon}_\gamma$, соответствующая концентрация фотонов — n_γ . В единицу времени на площадку падают и поглощаются (по аналогии с известным результатом из МКТ)

$$N = \frac{1}{4} n_\gamma c \cdot \delta s$$

фотонов, что соответствует мощности

$$P = \bar{\epsilon}_\gamma N = \frac{1}{4} w_\gamma c \cdot \delta s,$$

где $w_\gamma = n_\gamma \bar{\epsilon}_\gamma$ — плотность энергии излучения. Для площадки справедливо следующее условие теплового равновесия:

$$P = \underbrace{\frac{1}{4} w_\gamma c \cdot \delta s \cdot dt}_{\text{поглощено}} = \underbrace{\sigma T^4 \cdot \delta s \cdot dt}_{\text{излучено}}.$$

$$\therefore w_\gamma = \frac{4\sigma T^4}{c} = \frac{4 \times 3^4 \times 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2)}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \approx 6 \cdot 10^{-14} \text{ Дж/м}^3;$$

$$\frac{w_\gamma}{w_p} = \frac{6 \cdot 10^{-14}}{1.5 \cdot 10^{-10}} \approx 4 \cdot 10^{-4}.$$

7.5 Ранняя Вселенная

1. По Фридману, расширение Вселенной описывается масштабным фактором $a = a(t)$, так что в момент времени t расстояние $r(t) = a(t)r_0$. Понятно, что плотность энергии вещества

$$\rho_m \propto n \propto a^{-3},$$

где n — концентрация частиц.

При расширении Вселенной изменяется не только концентрация фотонов, но и соответствующие длины волн: $\lambda(t) = a(t)\lambda_0$, так что для излучения

$$\rho_r \propto n/\lambda \propto a^{-4}.$$

Для красного смещения имеем по определению

$$z = \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t)}{\lambda(t)} = \frac{1 - a(t)}{a(t)} = \frac{1}{a(t)} - 1;$$

$$a(t) = (1 + z)^{-1}.$$

Полученное соотношение связывает эпоху, соответствующую данному красному смещению z , и масштабный фактор этой эпохи.

Отношение плотностей энергии вещества и излучения в момент времени t , таким образом, есть

$$\frac{\rho_m(t)}{\rho_r(t)} = \frac{\rho_m(t_0) \cdot a^{-3}(t)}{\rho_r(t_0) \cdot a^{-4}(t)} = \frac{\Omega_{m_0} \rho_c}{\Omega_{r_0} \rho_c} \cdot a(t) = \frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{r_0}} \cdot \frac{1}{1+z}. \quad (7.1)$$

Для нахождения z_e достаточно приравнять отношение (7.1) к единице, откуда получаем

$$z_e = \frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{r_0}} - 1 \approx \frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{r_0}} = \frac{0.3}{10^{-4}} = 3 \cdot 10^3.$$

2. Согласно закону Стефана – Больцмана, плотность энергии излучения пропорциональна четвёртой степени температуры:

$$\begin{cases} \rho_r \propto T^4, \\ \rho_r \propto a^{-4} \end{cases} \implies T \propto a^{-1} = 1+z.$$

$$\therefore T_e = (1+z_e) \cdot T_0 \approx 2.7 \text{ К} \times 3 \cdot 10^3 \approx 8 \cdot 10^3 \text{ К}.$$

Получим числовую оценку энергии фотона.

Способ 1. Реликтовое излучение — это фотонный газ:

$$\varepsilon_e \sim k_B T_e = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \times 8 \cdot 10^3 \text{ К} \approx 1 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 0.7 \text{ эВ}.$$

Способ 2. Характерную длину волны реликтового фотона получим, используя закон Вина:

$$\lambda_e = \frac{b}{T_e} = \frac{2900 \text{ мкм} \cdot \text{К}}{8 \cdot 10^3 \text{ К}} \approx 360 \text{ нм}.$$

По длине волны уже нетрудно рассчитать энергию:

$$\varepsilon_e \sim \frac{hc}{\lambda_e} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \times 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{360 \cdot 10^{-9} \text{ м}} \approx 6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 3.5 \text{ эВ}.$$

Упражнения.

1. Обоснуйте применимость предложенных способов оценки ε_e . Почему результаты различаются в пять раз?
2. Используя закон излучения Вина, получите выражение для наиболее вероятной энергии фотона: $\bar{\varepsilon} = \alpha k_B T$, где α — безразмерный коэффициент. Как α зависит от температуры?

7.6 Истина в Вине

Тело, расположенное на орбите Земли, достаточно горячо, чтобы возможно было использовать для описания его излучения в радиодиапазоне закон Рэлея – Джинса, который определяет спектральную плотность мощности*** его излучения при заданной частоте ν_0 и температуре T с единицы поверхности (в предположении изотропного излучения):

$$f_0 = f(\nu_0) = \frac{2\pi\nu_0^2}{c^2} k_B T.$$

Обратимся теперь к удалённому телу. Принимаемое в диапазоне частот $\nu_0 \pm \delta_0 \nu$ излучение было на самом деле излучено им в диапазоне $\nu_0(1+z) \pm \delta_0 \nu(1+z)$. Соответствующая спектральная плотность мощности

$$f = \frac{f(\nu) \cdot \delta \nu}{\delta_0 \nu} = \frac{2\pi\nu_0^2(1+z)^2}{c^2} k_B T \cdot (1+z) = f_0(1+z)^3.$$

Пусть фотоны были излучены в момент времени t_e и приняты в момент времени t_0 . За время распространения излучения фотоны «покраснели» (длины волн увеличились) и «поредели» (увеличились расстояния между фотонами). Если светимость источника равна L , то создаваемая им освещённость равна в таком случае

$$E = \frac{L}{4\pi r_0^2} \cdot \frac{a^2(t_e)}{a^2(t_0)} = \frac{L}{4\pi r_0^2} \cdot \frac{1}{(1+z)^2},$$

где r_0 — расстояние в момент приёма излучения. Таким образом, приведённая к текущему расстоянию до объекта r_0 светимость есть

$$L = 4\pi r_0^2 E \cdot (1+z)^2 \propto (1+z)^2.$$

Отношения спектральных плотностей мощности излучения и «приведённых» светимостей далёкого и близкого источника равны соответственно

$$f/f_0 = (1+z)^3 \approx 1 + 3z = 1.3;$$

$$L/L_0 = (1+z)^2 \approx 1 + 2z = 1.2.$$

Далёкий источник кажется ярче!

*** По определению, спектральная плотность мощности есть мощность, приходящаяся на единичный интервал частот.

7.7 Обозревая 21 см

Действие первое. Рассмотрим только интервал частот, в котором приёмник телескопа может зарегистрировать излучение. Предельное красное смещение соответствует сдвигу частоты линии $\nu_0 = 1.42$ ГГц на край $\nu = 1.32$ ГГц этой полосы:

$$z_1 = \frac{\nu_0}{\nu} - 1 = \frac{1.42}{1.32} - 1 = 0.076.$$

Действие второе. Оценим теперь предельное значение красного смещения, используя информацию о пределе чувствительности приёмника. Поскольку $z_1 \ll 1$, будем использовать нерелятивистское приближение. Расстояние до галактики на красном смещении z

$$d = \frac{cz}{H_0}.$$

Выразим плотность потока излучения в спектральной линии HI через светимость галактики L в этой линии, расстояние до неё d и ширину линии $\Delta\nu$:

$$\Phi = \frac{L}{4\pi d^2} \cdot \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{LH_0^2}{4\pi c^2 \Delta\nu} \cdot z^{-2}. \quad (7.2)$$

Получившаяся величина потока должна превосходить чувствительность данного приёмника:

$$\Phi > \Phi_c = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ Ян} = 0.5 \cdot 10^{-29} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{Гц}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{H_0}{c} \sqrt{\frac{L}{4\pi\Phi_c \Delta\nu}} = \\ &= \frac{68 \text{ (км/с)}/\text{Мпк}}{3 \cdot 10^5 \text{ км/с}} \times \sqrt{\frac{10^{28} \text{ Вт}}{4\pi \times 10^6 \text{ Гц} \times 0.5 \cdot 10^{-29} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{Гц})}} = \\ &= 2.86 \cdot 10^{21} \text{ м}/\text{Мпк} = \frac{2.86 \cdot 10^{21}}{3.08 \cdot 10^{16} \times 10^6} = 0.093. \end{aligned}$$

Действие третье, уточняющее. Повторяя рассуждения, приведённые в решении предыдущей задачи, можно прийти к выводу, что, во-первых, ширина полосы, принимаемой радиотелескопом на Земле, отличается от излучаемой галактикой, и равна

$$\Delta\nu' = \frac{\Delta\nu}{1+z};$$

во-вторых, выражение (7.2) подлежит коррекции на космологические эффекты. В классической фридмановской модели такая коррекция соответствует замене

$$\Phi \mapsto \frac{\Phi}{(1+z)^2}.$$

Таким образом,

$$\Phi' = \frac{LH_0^2}{4\pi c^2 \Delta\nu'} \cdot z^{-2} \cdot (1+z)^{-2} = \frac{LH_0^2}{4\pi c^2 \Delta\nu} \cdot \frac{1}{z^2(1+z)} > \Phi_c$$

$$(z'_2)^2 (1+z'_2) = z_2^2 \implies z'_2 = 0.089.$$

Заключение. Большее ограничение на красное смещение галактики накладывает полученная в первом действии оценка, обусловленная границей полосы приёма радиотелескопа: $z_{\max} = z_1 = 0.076$.

Справочные данные

D1 Физические и астрономические постоянные

Скорость света в вакууме	c	$= 2.998 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$
Гравитационная постоянная	G	$= 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Постоянная Планка	h	$= 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Элементарный электрический заряд	e	$= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Постоянная Больцмана	k_B	$= 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$
Ускорение свободного падения на поверхности Земли (стандартное)	g	$= 9.806 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$
Электрическая постоянная	ϵ_0	$= 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$
Магнитная постоянная	μ_0	$= 12.566 \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}$
Постоянная тонкой структуры	α	$= 7.297 \cdot 10^{-3} \approx 1/137$
Атомная единица массы (дальтон)	1 Да	$= 1.661 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Электрон-вольт	1 эВ	$= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$
Боровский радиус	r_B	$= 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Постоянная Авогадро	N_A	$= 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	$= 8.314 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
Стандартная атмосфера	1 атм	$= 101\,325 \text{ Па}$
Молярный объём идеального газа при нормальных условиях	V_m	$= 22.414 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}$
Градус Цельсия	$[^{\circ}\text{C}]$	$= [\text{K}] - 273.15$
Постоянная Стефана - Больцмана	σ	$= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$
Постоянная Вина	b	$= 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Астрономическая единица длины	1 а. е.	$= 149.6 \cdot 10^6 \text{ км} = 499 \text{ с} \cdot c$
Радиус Земли экваториальный	R_{\oplus}^e	$= 6\,378 \text{ км}$
Радиус Земли полярный	R_{\oplus}^p	$= 6\,357 \text{ км}$
Радиус Земли средний	R_{\oplus}	$= 6\,371 \text{ км}$
Наклон экватора Земли к эклиптике	ϵ	$= 23.44^{\circ}$
Световой год	1 ly	$= 9.46 \cdot 10^{15} \text{ м}$
Парсек	1 пк	$= 206\,265 \text{ а. е.} = 3.26 \text{ ly}$
Постоянная Хаббла	H_0	$= 68 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

D2 Единицы измерения

Величина	СИ	СГС*
Длина	метр	10^{-2} м = 1 см (сантиметр)
Масса	килограмм	10^{-3} кг = 1 г (грамм)
Сила	ньютон	10^{-5} Н = 1 дин (дина)
Работа, энергия	джоуль	10^{-7} Дж = 1 эрг
Мощность	ватт	10^{-7} Вт = 1 эрг · с ⁻¹
Давление	паскаль	10^{-1} Па = 1 дин · см ⁻²
Сила тока	ампер	$10 \cdot \text{с}^{-1}$ А
Электрический заряд	кулон	$10 \cdot \text{с}^{-1}$ Кл
Электрический потенциал	вольт	$10^{-8} \cdot \text{с}$ В
Электрическая напряжённость	$\text{В} \cdot \text{м}^{-1}$	$10^{-6} \cdot \text{с}$ В · м ⁻¹
Электрическое сопротивление	ом	$10^{-9} \cdot \text{с}^2$ Ом
Электрическая ёмкость	фарад	$10^9 \cdot \text{с}^{-2}$ Ф
Магнитная напряжённость	$\text{А} \cdot \text{м}^{-1}$	$10^3/4\pi$ А · м ⁻¹ = 1 Э (эрстед)
Магнитная индукция	тесла	10^{-4} Тл = 1 Гс (гаусс)
Магнитный поток	вебер	10^{-8} Вб = 1 Мкс (максвелл)
Индуктивность	генри	$10^{-9} \cdot \text{с}^2$ Гн
Яркость	$\text{кд} \cdot \text{м}^{-2}$	10^4 кд · м ⁻² = 1 сб (стильб)
Время	секунда (с)	
Сила света	кандела (кд)	
Световой поток	люмен (лм)	
Освещённость	люкс (лк)	

Приставка	Prefix	×
йотта (И)	Yotta (Y)	10^{24}
зетта (З)	Zetta (Z)	10^{21}
экса (Э)	Hexa (E)	10^{18}
пета (П)	Peta (P)	10^{15}
тера (Т)	Tera (T)	10^{12}
гига (Г)	Giga (G)	10^9
мега (М)	Mega (M)	10^6
кило (к)	kilo (k)	10^3
гекто (г)	hecto (h)	10^2
дека (да)	deca (da)	10^1

Приставка	Prefix	×
деци (д)	deci (d)	10^{-1}
санти (с)	centi (c)	10^{-2}
милли (м)	milli (m)	10^{-3}
микро (мк)	micro (μ)	10^{-6}
нано (н)	nano (n)	10^{-9}
пико (п)	pico (p)	10^{-12}
фемто (ф)	femto (f)	10^{-15}
атто (а)	atto (a)	10^{-18}
zepto (з)	zepto (z)	10^{-21}
йокто (и)	yocto (y)	10^{-24}

* $c = 29\,979\,245\,800 \approx 3 \cdot 10^{10}$ — числовое значение скорости света в СГС.

Величина	СИ	Внесистемная единица	
Длина	метр	1 морская миля	= 1852 м
		1 ярд	= 0.9144 м
		1 фут	= 30.48 см
		1 дюйм	= 25.4 мм
		1 ангстрем	= 10^{-10} м
Масса	килограмм	1 тонна	= 1000 кг
		1 фунт	= 453.592 г
		1 унция	= 31.1 г
Работа, энергия	джоуль	1 калория	= 4.1868 Дж
Площадь	м^2	1 гектар	= 10^4 м^2
Объем	м^3	1 литр	= 10^{-3} м^3
Температура	К	[°F]	= $(9/5) \cdot [^\circ\text{C}] + 32$
Плотность потока излучения	$\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$	1 янский	= $10^{-26} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$

D3 Измерение углов

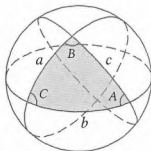
	1°	1'	1''	1 ^h	1 ^m	1 ^s	рад		1□°	1□'	1□''	ср
1°	1	60	3600		4	240		1□°	1	3600		
1'		1	60			4		1□'		1	3600	
1 ^h	15	900		1	60	3600						
1 ^m		15	900		1	60						
1 ^s			15			1						
рад	57.30	3438	206265				1	ср	3283			1
об.	360			24	1440	86400	2π	сф.	41253			4π

D4 Элементарные частицы

Название	Энергия покоя		Заряд	Спин
Фундаментальные бозоны				
Фотон	0		0	1
Глюон	0		0	1
W-бозон	80.4	ГэВ	±1	1
Z-бозон	91.2	ГэВ	0	1
Бозон Хиггса	125	ГэВ	0	0

Название	Энергия покоя		Заряд	Спин	
Фундаментальные фермионы					
Электрон e	0.51	МэВ	-1	1/2	
Электронное нейтрино ν_e	< 2.2	эВ	0	1/2	
u -кварк	2.4	МэВ	2/3	1/2	
d -кварк	4.8	МэВ	-1/3	1/2	
Мюон μ	105.7	МэВ	-1	1/2	
Мюонное нейтрино ν_μ	< 1.7	МэВ	0	1/2	
s -кварк	104	МэВ	2/3	1/2	
c -кварк	1.27	ГэВ	-1/3	1/2	
Тау-лептон τ	1.7	ГэВ	-1	1/2	
Тау-нейтрино ν_τ	< 15.5	МэВ	0	1/2	
t -кварк	172.4	ГэВ	2/3	1/2	
b -кварк	4.2	ГэВ	-1/3	1/2	
Некоторые составные частицы					
Протон p^+	uud	938.2	МэВ	+1	1/2
Нейтрон n	udd	939.5	МэВ	0	1/2
Пион π^\pm, π^0	$u\bar{d}, d\bar{u}, u\bar{u} - d\bar{d}$	134 ÷ 139	МэВ	± 1	0
Каон K	$u\bar{s}, d\bar{s}, \frac{d\bar{s} \pm s\bar{d}}{\sqrt{2}}$	494 ÷ 498	МэВ	± 1	0

D5 Формулы сферической тригонометрии



Сферическая теорема синусов

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

Сферическая теорема косинусов

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A;$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a;$$

Формула пяти элементов

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A;$$

$$\sin A \cos c = \sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a.$$

D6 Параметры орбит больших планет

	Большая полуось, а. е.	Эксцент- риситет	Наклонение к эклиптике	Период обращения
☿ Меркурий	0.3871	0.2056	7.004°	87.97 сут.
♀ Венера	0.7233	0.0068	3.394°	224.70 сут.
⊕ Земля	1.0000	0.0167	0.000°	365.26 сут.
♂ Марс	1.5237	0.0934	1.850°	686.98 сут.
♃ Юпитер	5.2028	0.0483	1.308°	11.862 лет
♄ Сатурн	9.5388	0.0560	2.488°	29.458 лет
♅ Уран	19.1914	0.0461	0.774°	84.01 лет
♆ Нептун	30.0611	0.0097	1.774°	164.79 лет

D7 Физические характеристики Солнца и планет

	Масса, кг	Радиус, 10 ³ км	Период вращения	Наклон оси вращения	Альбедо
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	697	25.38 сут.	7.25°	
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	2.44	58.65 сут.	0.00°	0.10
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	6.05	243.02 сут.	177.36°	0.65
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	6.37	23.93 ч	23.44°	0.37
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	3.40	24.62 ч	25.19°	0.15
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	71.5	9.92 ч	3.13°	0.52
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	60.3	10.66 ч	25.33°	0.47
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	25.6	17.24 ч	97.86°	0.51
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	24.7	16.11 ч	28.31°	0.41

D8 Характеристики карликовых планет

	Масса, кг	Диаметр, 10 ³ км	Большая полуось, а.е.	Эксцент- риситет
Церера	$9.4 \cdot 10^{20}$	0.95	2.77	0.079
Плутон	$1.3 \cdot 10^{22}$	2.24	39.48	0.249
Хаумеа	$4 \cdot 10^{21}$	1.63	43.13	0.195
Макемаке	$3 \cdot 10^{21}$	1.43	45.79	0.159
Эрида	$1.7 \cdot 10^{22}$	2.33	67.67	0.442

D9 Характеристики спутников больших планет

	Масса, кг	Радиус, км	Большая полуось, 10^3 км	Эксцент- риситет
<i>Земля</i>				
Луна	$7.34 \cdot 10^{22}$	1737	384.4	0.055
<i>Марс</i>				
Фобос	$1.07 \cdot 10^{16}$	11.1	9.38	0.015
Деймос	$1.48 \cdot 10^{15}$	6.2	23.46	0.000
<i>Юпитер</i>				
Ио	$8.93 \cdot 10^{22}$	1818.1	421.8	0.004
Европа	$4.80 \cdot 10^{22}$	1560.7	671.1	0.009
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2634.1	1 070	0.001
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2408.4	1 883	0.007
<i>Сатурн</i>				
Энцелад	$1.08 \cdot 10^{20}$	252.3	238.0	0.005
Тетия	$6.17 \cdot 10^{20}$	536.3	294.7	0.000
Диона	$1.09 \cdot 10^{21}$	562.5	377.4	0.002
Рей	$2.31 \cdot 10^{21}$	764.5	527.1	0.001
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575.5	1 222	0.029
Япет	$1.81 \cdot 10^{21}$	734.5	3 561	0.029
Феба	$8.29 \cdot 10^{18}$	106.6	12 948	0.156
<i>Уран</i>				
Миранда	$6.59 \cdot 10^{19}$	235.8	129.9	0.001
Ариэль	$1.35 \cdot 10^{21}$	578.9	190.9	0.001
Умбриэль	$1.17 \cdot 10^{21}$	584.7	266.0	0.004
Титания	$3.53 \cdot 10^{21}$	788.9	436.3	0.001
Оберон	$3.01 \cdot 10^{21}$	761.4	583.5	0.001
<i>Нептун</i>				
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1353.4	354.8	0.000
Нереида	$3 \cdot 10^{19}$	170	5 514	0.751

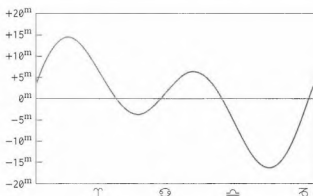
D10 *Исчисление времени*

	с	м	ч	сут.	неделя	месяц	год	век
с	1							
м	60	1						
ч	3600	60	1					
сут.	86400	1440	24	1				
неделя		10080	168	7	1			
месяц**			720	30	[4]	1		
год***	$3.16 \cdot 10^7$			365.25	[52]	12	1	
век						1200	100	1

	сутки	месяц	год
сидерические	$23^h 56^m 04^s$	27.3217 сут.	365.2564 сут.
синодические	$24^h 00^m 00^s$	29.5306 сут.	–
тропические	–	27.3216 сут.	365.2422 сут.
драконические	–	27.2122 сут.	–
аномалистические	–	27.5546 сут.	365.2596 сут.

Уравнение времени

$$\eta \equiv \text{CCB} - \text{ICB} = 7.53^m \cos \alpha_{\odot} + 1.50^m \sin \alpha_{\odot} - 9.87^m \sin 2\alpha_{\odot}.$$



** Средний календарный

*** При исчислении срока в один год (выражение периодов обращений небесных тел, полураспада долгоживущих радионуклидов; определение светового года и т.п.) используется юлианский год.

D11 Ярчайшие звёзды земного неба

Название		Расстояние, пк	m	M	Спектр
Солнце	—		−26.7	4.8	G2 V
Сириус	α CMa	2.5	−1.5	1.4	A0mA1 Va, DA2
Канопус	α Car	95	−0.7	−5.5	A9II
Толиман	α Cen	1.4	−0.3	4.1	G2 V, K1 V
Арктур	α Boo	11.3	−0.0	−0.3	K0 III
Вега	α Lyr	7.7	0.0	0.6	A0 Va
Капелла	α Aur	12.8	0.1	−0.5	K0 III, G1 III
Ригель	β Ori	264	0.1	−7	B8 Ia
Процион	α CMi	3.4	0.3	2.6	F5 IV-V
Ахернар	α Eri	42.9	0.5	−1.3	B6 Vep
Бетельгейзе	α Ori	196	0.5	−5.1	M1-M2 Ia-ab
Хадар	β Cen	107	0.6	−4.4	B1 III
Альтаир	α Aql	5.2	0.8	2.3	A7 V
Акрукс	α Cru	98	0.8	−4.6	B0.5 IV, B1 V
Альдебаран	α Tau	19.9	0.9	−0.3	K5 III
Антарес	α Sco	184	1.0	−5.2	M1.5 Iab-Ib, B2.5 V
Спика	α Vir	79.7	1.0	−3.2	B1 III-IV, B2 V
Поллукс	β Gem	10.4	1.1	0.7	K0 III
Фомальгаут	α PsA	7.7	1.2	2.0	A3 V
Мимоза	β Cru	107	1.3	−4.7	B0.5 III, B2 V
Денеб	α Cyg	797	1.3	−7.2	A2 Ia
Регул	α Leo	23.6	1.4	−0.3	B8 IVn
Адара	ϵ CMa	132	1.5	−4.8	B2 II
Кастор	α Gem	15.9	1.6	−0.5	A1 V, Am
Шаула	λ Sco	215	1.6	−3.5	B2 IV
Гакрукс	γ Cru	27.0	1.6	−1.2	M3.5 III
Беллатрикс	γ Ori	73.6	1.6	−2.8	B2 III
Эль-Нат	β Tau	39.9	1.7	−1.4	B7 III
	β Car	33.7	1.7	−1.0	A1 III
Альнилам	ϵ Ori	613	1.7	−6.9	B0 Ia
	γ Vel	256	1.7	−4.2	WC8, O7.5III
Альнаир	α Gru	30.7	1.7	−0.7	B6 V
Алиот	ϵ UMa	24.8	1.8	−0.2	A1 III-IVp kB9
Альнитак	ζ Ori A	251	1.8	−4.1	O9.5 Iab, B1 IV, B0 III
Дубхе	α UMa	36.8	1.8	−1.1	K0 III, F0 V

D12 Координаты некоторых городов России и мира

Город	φ	λ	Город	φ	λ
Гонолулу, США	+21°	-158°	Саранск	+54°	+45°
Лос-Анджелес, США	+34	-118	Тегеран, Иран	+36	+51
Мехико, Мексика	+19	-99	Екатеринбург	+57	+61
Лима, Перу	-12	-77	Омск	+55	+73
Нью-Йорк, США	+41	-74	Дели, Индия	+28	+77
Сан-Паулу, Бразилия	-23.5	-47	Новосибирск	+55	+83
Лондон, Англия	+52	+0	Красноярск	+56	+93
Берлин, Германия	+53	+13	Бангкок, Тайланд	+14	+100
Калининград	+55	+21	Иркутск	+52	+104
Йоханнесбург, ЮАР	-26	+28	Джакарта, Индонезия	-6	+107
Санкт-Петербург	+60	+30	Пекин, КНР	+40	+116
Каир, Египет	+30	+31	Якутск	+62	+130
Севастополь	+45	+33	Владивосток	+43	+132
Мурманск	+69	+33	Токио, Япония	+36	+140
Москва	+56	+38	Канберра, Австралия	-35	+149
Ростов-на-Дону	+47	+40	Анадырь	+65	+178

D13 Некоторые общепринятые значения величин

Расстояние до центра Галактики	r_{\odot}	= 8 клк
Абсолютная звёздная величина Млечного Пути	M_{MW}	= -21.5 ^m
Скорость вращения Млечного Пути	V_{MW}	= 240 км · с ⁻¹
Светимость Солнца	L_{\odot}	= 3.88 · 10 ²⁶ Вт
Видимая звёздная величина Солнца	m_{\odot}	= -26.7 ^m
Абсолютная звёздная величина Солнца	M_{\odot}	= +4.7 ^m
Показатель цвета Солнца	$(B - V)_{\odot}$	= +0.67 ^m
Эффективная температура Солнца	T_{\odot}	= 5800 К
Солнечная постоянная	E_{\odot}	= 1360 Вт · м ⁻²
Эксцентриситет орбиты Луны	e_{ζ}	= 0.055
Наклонение орбиты Луны	i_{ζ}	= 5.15°
Видимая звёздная величина Луны в среднее полнолуние	m_{ζ}	= -12.7 ^m
Проницающая способность глаза		= 6 ^m
Разрешающая способность глаза		= 1'
Диаметр зрачка глаза в темноте		= 6 мм



Штаб сборной команды Российской Федерации
на Международной олимпиаде по астрономии и астрофизике



Астрономические олимпиады
vk.com/astroolympiads

Астрофизический дивертисмент

Задачи и упражнения по астрономии и астрофизике

Учебно-методическое пособие

Веселова Ангелина Владимировна

Волобуева Мария Игоревна

Пирогов Михаил Александрович

Утешев Иван Александрович

Подписано в печать 13.03.2018 г.

Формат 60х90/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.

Тираж 300 экз. Заказ № 74313.

Отпечатано в типографии «Onebook.ru»

ООО «Сам Полиграфист»

129090 г. Москва, Протопоповский переулок, 6

www.onebook.ru