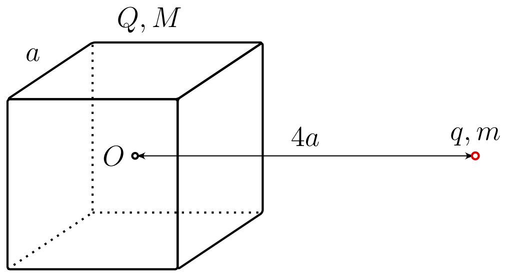
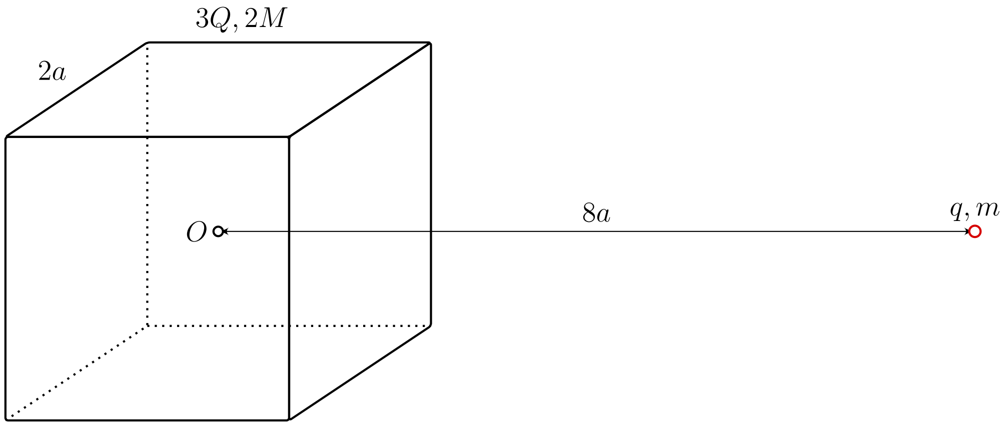
Кубик в кубе

На расстоянии $4a$ от сплошного равномерно заряженного по объему Кубика со стороной a и зарядом Q на линии, проходящей через его центр и центр одной из его граней, располагается точечный заряд q (см. рис.). Масса Кубика M, масса заряда m. Начальные скорости Кубика и заряда равны нулю. Кубик и заряд отпускают, в результате чего расстояние между ними изменяется в два раза за время t.

Найдите время, за которое в два раза изменится расстояние между таким же точечным зарядом и равномерно заряженным Кубиком со стороной $2a$, зарядом $3Q$ и массой $2M$, если заряд располагается на линии, проходящей через центр Кубика и центр одной из его граней на расстоянии $8a$ (см. рис.). Начальные скорости Кубика и заряда равны нулю.

Примечание. Расстояние между Кубиком и точечным зарядом измеряется от центра Кубика. Гравитационным и магнитным взаимодействием пренебречь.

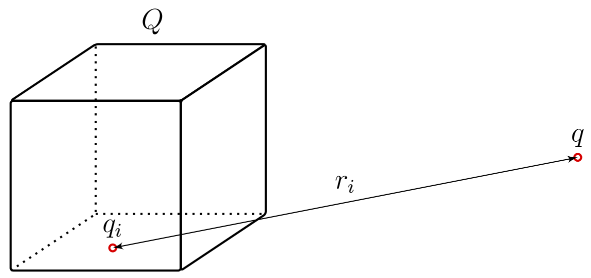




Решение

Способ 1

1. Найдём скорость сближения Кубика и точечного заряда. Для этого воспользуемся законами сохранения импульса и энергии.



Система Кубик и точечный заряд замкнута, следовательно суммарный импульс системы остаётся постоянным и равным нулю, откуда

$$mu_1 = Mv_1.$$

Здесь u_1 — скорость точечного заряда, v_1 — скорость Кубика. Кинетическая энергия всей системы равна

$$K = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mu_1^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия по определению равна

$$\Pi = \sum_i \frac{kq_iq}{r_i},$$

Здесь суммирование ведётся по всем кусочкам Кубика зарядом q_i, находящимися на расстоянии r_i от кубичка. Тогда начальная энергия взаимодействия

$$\Pi_0 = \sum_i \frac{kq_iq}{r_{i0}}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{Mv_1^2}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right) + \Pi = \Pi_0; \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2m}{M(m+M)}(\Pi_0 - \Pi)}.$$

Тогда скорость сближения равна

$$v_{\text{отн}} = v_1 + v_2 = \sqrt{\frac{2m}{M(m+M)}(\Pi_0 - \Pi)}\left(1 + \frac{M}{m}\right) = \sqrt{\frac{2(m+M)}{mM}(\Pi_0 - \Pi)} = \sqrt{2\frac{\Pi_0 - \Pi}{\mu}},$$

где $\mu = \frac{mM}{m+M}$ — приведённая масса системы.

Замечание. Этот результат можно написать сразу, если воспользоваться тем фактом, что в системе отсчета, где центр масс покоится кинетическая энергия всей системы равна:

$$K = \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2}.$$

2. Для рассмотрения второго случая воспользуемся подобием задачии: $m \to m$; $M \to 2M$, $r \to 2r$; $a \to 2a$; $Q \to 3Q$. Тогда «новые» значения величин, от которых зависит относительная скорость сближения кубиков, будут равны

$$\mu_2 = \frac{m2M}{m+2M} = 2\frac{m+M}{m+2M}\mu_1; \quad \Pi_2 = \frac{3}{2}\Pi_1.$$

Тогда скорость сближения во втором случае будет равна

$$v_{\text{отн}2} = \sqrt{2\frac{\Pi_0 - \Pi}{\mu}\frac{3}{2}\frac{m+2M}{2(m+M)}} = v_{\text{отн}1}\sqrt{\frac{3}{4}\frac{m+2M}{m+M}}.$$

3. Рассмотрим малый промежуток времени dt_2. За это время тела сблизятся на расстояние dx_2, которое в 2 раза больше расстояния dx_1 на которое тела сближались изначально за время dt_1 (т.к. все расстояния увеличились в два раза). Тогда

$$dt_2 = \frac{dx_2}{v_{\text{отн}2}} = \frac{2dx_1}{v_{\text{отн}2}} = 2\sqrt{\frac{4}{3}\frac{m+M}{m+2M}}dt_1.$$

Заметим, что это соотношение выполняется в каждый момент времени и не зависит от конкретного момента времени, поэтому суммарное время сближения будет равно

$$t_2 = \sqrt{\frac{16}{3}\frac{m+M}{m+2M}}t_1.$$

Способ 2

Потенциальная энергия системы равна

$$U = k\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{x},$$

где $k\left(\frac{x}{a}\right)$ — некоторый геометрический фактор системы. Тогда сила, отвечающая этой потенциальной энергии, будет равна

$$F = -U' = -k'\frac{Qq}{xa} + k\frac{Qq}{x^2}.$$

Замечание. Используя метод размерностей, можно сразу записать, что

$$F = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{x^2},$$

где $\Gamma\left(\frac{x}{a}\right)$ — геометрический фактор. Запишем уравнение движения точки и Кубика (в уравнениях учтено, что силы притяжения противонаправлены)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{1}{m}\Gamma\left(\dfrac{x}{a}\right)\dfrac{Qq}{x^2}; \\ \ddot{x}_2 = -\dfrac{1}{M}\Gamma\left(\dfrac{x}{a}\right)\dfrac{Qq}{x^2}; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{x^2}\frac{1}{\mu}.$$

Получаем, что относительное ускорение равно

$$a_{\text{отн}} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{\mu x^2}.$$

То есть относительное ускорение в первом и втором случаях равны

$$a_{\text{отн}1} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{\mu_1 x^2}; \quad a_{\text{отн}2} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{3Qq}{\mu_2 (2x)^2}.$$

Здесь μ_1 и μ_2 — приведённые массы в первом и втором случаях, которые равны

$$\mu_1 = \frac{Mm}{M+m}; \quad \mu_2 = \frac{2Mm}{2M+m}.$$

С другой стороны

$$a_{\text{отн}2} = \frac{d^2x_2}{dt_2^2} = \frac{2d^2x_1}{dt_2^2} = \frac{2}{\alpha^2}a_{\text{отн}1}.$$

Здесь $dt_2 = \alpha dt_1$, где α — масштаб по времени. Имеем

$$\frac{2}{\alpha^2}a_{\text{отн}1} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{3Qq}{4x^2}\frac{2M+m}{2Mm} = 3\cdot\Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Qq}{x^2}\frac{M+m}{Mm}\cdot\frac{2M+m}{8(M+m)} = a_{\text{отн}1}\frac{3(2M+m)}{8(M+m)}.$$

Откуда получаем

$$\frac{2}{\alpha^2} = \frac{3(2M+m)}{8(M+m)}; \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \sqrt{16\frac{m+M}{3(m+2M)}}.$$

То есть суммарное время сближения во втором случае будет равно

$$t_2 = \alpha t_1 = t_1\sqrt{16\frac{m+M}{m+8M}}.$$

Альтернативная задача

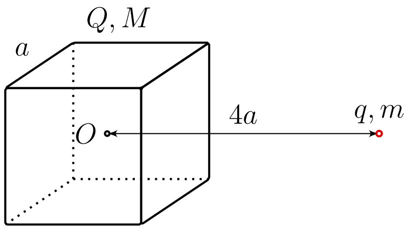
1. *(2 балла)* Точечное тело массы m находится на гладкой горизонтальной поверхности и прикреплено к вертикальной стене «нелинейной» пружиной, такой, что возвращающая сила пропорциональна квадрату её деформации. Во сколько раз изменится период колебаний тела, если их амплитуду увеличить в два раза?

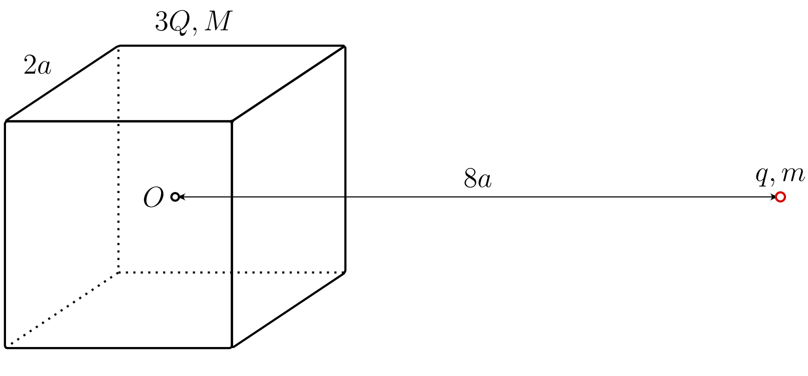
2. *(3 балла)* Два точечных заряда разлетаются из состояния покоя. Через время t расстояние между ними увеличивается в два раза по сравнению с первоначальным. Определите, как изменится это время, если начальное расстояние между зарядами увеличить в два раза.

3. *(5 баллов)* На расстоянии $4a$ от сплошного равномерно заряженного по объёму Кубика со стороной a и зарядом Q на линии, проходящей через его центр и центр одной из его граней, располагается точечный заряд q (см. рис.). Масса Кубика M, масса заряда m. Начальные скорости Кубика и заряда равны нулю. Кубик и заряд отпускают, в результате чего расстояние между ними изменяется в два раза за время t.

   Найдите время, за которое в два раза изменяется расстояние между таким же точечным зарядом и равномерно заряженным Кубиком со стороной $2a$, зарядом $3Q$ и массой M, если заряд располагается на линии, проходящей через центр Кубика и центр одной из его граней на расстоянии $8a$ (см. рис.). Начальные скорости Кубика и заряда равны нулю.

   Примечание. Расстояние между Кубиком и точечным зарядом измеряется от центра Кубика. Гравитационным и магнитным взаимодействием пренебречь.





Решение альтернативной задачи

2. Запишем закон сохранения энергии и найдём зависимость скорости от расстояния между телами

$$2\frac{mv^2}{2} + G\frac{m^2}{r} = G\frac{m^2}{a}; \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2Gm\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}.$$

Здесь r_0 — расстояние между телами в начальный момент времени. Во втором случае, при увеличении всех расстояний в два раза, скорость будет равна

$$v_2 = \sqrt{2Gm\left(\frac{1}{2r_0} - \frac{1}{2r}\right)} = \frac{v_1}{\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим малый промежуток времени dt_2. За это время тела сблизятся на расстояние dx_2, которое в 2 раза больше расстояния dx_1 на которое тела сближались изначально за время dt_1 (т.к. все расстояния увеличились в два раза). Тогда

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt_2} = \frac{2dx_1}{\beta dt_1} = \frac{2}{\beta}v_1.$$

Здесь $dt_2 = \beta dt_1$, где β — масштаб по времени. Откуда находим

$$\beta = 2\sqrt{2}.$$

3. Решение аналогично решению основной задачи.

Литература

Г. И. Хантли — Анализ размерностей

Объять необъятное, или Её преПодобие Размерность

Ландафшиц 1 Том §10

Метод механического подобия. [А. И.Власов; Потенциал, N9, 2019 год]