Эффект Холла. Часть №3

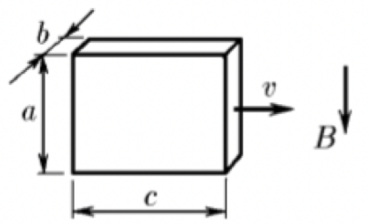
Задачи из mathus

Если проводник находится в магнитном поле, то упорядоченное движение свободных зарядов проводника приводит к появлению поперечной разности потенциалов (эффект Холла). Упорядоченное движение зарядов — это либо ток в проводнике, либо перемещение самого проводника в магнитном поле.

Посмотреть задачи по теме **«Движение проводников в магнитном поле.»**
Ссылка на файл

Задача 2

Металлический брусок, размеры которого $a \times b \times c$ ($b \ll a, c$), движется со скоростью v в магнитном поле индукции B так, как показано на рисунке. Найдите разность потенциалов между боковыми сторонами бруска и поверхностную плотность зарядов на них.



Решение:

Если стороны b и a перпендикулярны $\vec{B}$, брусок движется стороной a вперед. Тогда сила Лоренца, действующая на электроны будет компенсироваться силой со стороны электрического поля

$$qvB = qE, \text{ т. е. } E = vB.$$

Поскольку $E = \frac{U}{b}$, значит $U = vBb$.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = vB\varepsilon_0,$$

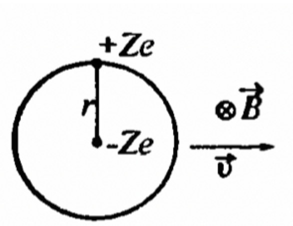
где σ — поверхностная плотность заряда.

Задача 3

Предположим, что атом можно представить как шар радиуса r с равномерно распределённым отрицательным зарядом, в центре которого находится точечное ядро с положительным зарядом Ze. Найдите, с какой скоростью может, не распадаясь, двигаться такой атом поперёк магнитного поля с индукцией B.

Решение:

При движении атома в магнитном поле на его положительно заряженное ядро и отрицательно заряженный шар будут действовать одинаковые по модулю, но противоположные по направлению силы Лоренца. Это приведет к смешению положительного заряда Ze относительно центра отрицательного заряда атома. Центр отрицательного заряда атома совпадает с центром атома (отрицательный заряд равномерно распределен по шару).



Максимальная сила притяжения между ядром и отрицательным зарядом атома возникнет в случае, когда ядро атома сместится на границу отрицательно заряженного шара (см. рисунок).
Движущийся в магнитном поле атом не распадется при условии $F \geq F_L$, где F — сила притяжения ядра и отрицательного шара ($F = kZe \cdot Ze/r^2$) , F_L — сила Лоренца ($F_L = ZeBv$).
Отсюда

$$\frac{k(Ze)^2}{r^2} \geq ZeBv; \frac{kZe}{r^2} \geq Bv$$

$$v \leq \frac{kZe}{Br^2}; k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}; v \leq \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 Br^2}$$

$v_{\max} = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 Br^2}$ — максимальная скорость атома, с которой он может двигаться в магнитном поле, не распадаясь.

Доп Задача к Задаче 5

В однородном магнитном поле с индукцией B расположены вертикально на расстоянии L два металлических прута, замкнутых наверху. Плоскость, в которой расположены прутья, перпендикулярна к направлению индукции магнитного поля. По прутьям без трения и без нарушения контакта скользит вниз с постоянной скоростью v перемычка ab массы m (рис. 129).
Определить электрическое сопротивление R перемычки b, если сопротивлением остальной части системы можно пренебречь.
$B = 10^{-2}$ Тл, $v = 1$ м/сек, $m = 1$ г, $L = 50$ см.

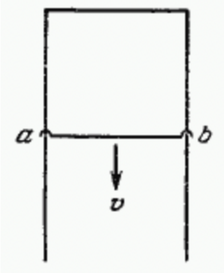


Рис. 129.

Решение:

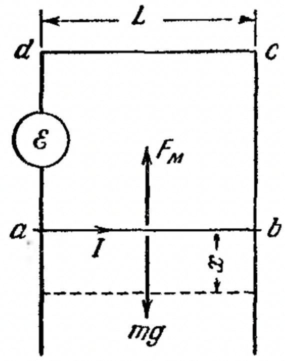


Рис. 290.

Так как перемычка движется вниз с постоянной скоростью, то сила тяжести уравновешена силой, действующей на перемычку со стороны магнитного поля (рис, 290):

$$mg = F$$

Определим теперь силу F. При движении перемычки в контуре abcda наводится э. д. с. индукции $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Мощность джоулевых потерь равна

$$W = \frac{\mathscr{E}^2}{R}.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$W = Fv, \quad \text{или} \quad F = \frac{\mathscr{E}^2}{Rv}.$$

Но

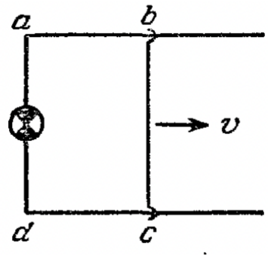
$$\mathscr{E} = -BL\frac{\Delta x}{\Delta t} = -BLv.$$

Решая систему уравнений, получаем

$$R = \frac{B^2L^2v}{mg} = 2,55 \cdot 10^{-3}\text{Ом}$$

Задача 5

Плоскость прямоугольной проволочной рамки $abcd$ перпендикулярна однородному магнитному полю с индукцией $B = 10^{-3}$ Тл (см. рисунок). Сторона рамки bc длиной $l = 1$ см может скользить без нарушения контакта с постоянной скоростью $v = 10$ см/с по сторонам ab и dc. Между точками a и d включена лампочка сопротивлением $R = 5$ Ом. Какую силу необходимо приложить к стороне bc для осуществления такого движения? Сопротивлением остальной части рамки пренебречь.



Решение:

Для осуществления равномерного движения перемычки к ней необходимо приложить силу

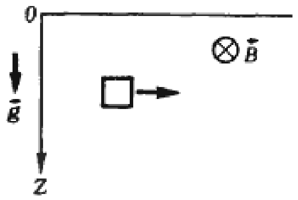
$$F = \frac{\mathscr{E}^2}{Rv} = \frac{B^2L^2v}{R}$$

(см. доп. задачу выше). Подставляет числовые значения получим

$$F = 2 \cdot 10^{-12}\text{Н}.$$

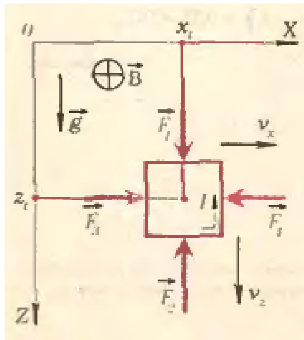
Задача 8

Проволочной квадратной рамке с периметром $4a$ и массой m сообщают в горизонтальном направлении некоторую начальную скорость. Рамки движется в вертикальной плоскости, все время, находясь в магнитном поле, перпендикулярном плоскости рамки (См. рисунок). Индукция поля меняется по закону $B(z) = B(0) + kz$, где $k = const$. Сопротивление рамки равно R. Через некоторое время скорость рамки становится постоянной и равной v. Найти начальную скорость, сообщаемую рамке. Ускорение свободного падения g.



Решение:

В отсутствие магнитного поля рамка двигалась бы в поле тяжести Земли с постоянной горизонтальной скоростью $\vec{v}_0$ вдоль оси X и равноускорено с ускорением свободного падения $\vec{g}$ вдоль оси Z. Очевидно, что движение рамки не изменилось бы, если бы она падала в однородном магнитном поле. В нашем случае поле — не однородное (вдоль оси Z) $B(z) = B_0 + kz$, то есть индукция ноля линейно растет с ростом z; поэтому при падении рамки поток магнитной индукции Φ, пронизывающим контур рамки, будет меняться и в контуре рамки, будет возникать ЭДС индукции. Поскольку рамка является замкнутым проводящим контуром, по ней потечет индукционный ток. В этом случае, согласно закону Ампера, на стороны рамки будут действовать силы со стороны магнитного поля. Найдем направления и величины этих сил.



Пусть в некоторый момент времени центр масс рамки находится в точке с координатами x_l, z_l и проекции скорости центра масс на оси X и Z равны v_x и v_z (см. рисунок). Поток магнитной индукции Φ, пронизывающий рамку в этот момент времени, равен

$$\Phi = \frac{(B_0 + k\,(z_l - a/2)) + (B_0 + k\,(z_l + a/2))}{2} a^2 = (B_0 + kz_l)\, a^2$$

Здесь $B_0{+}k\,(z_l - a/2)$ и $B_0{+}k\,(z_l + a/2)$ — значения индукции магнитного ноля соответственно у верхней и нижней сторон рамки, поскольку зависимость $B(z)$ — линейная, для вычисления Φ мы пользуемся средним (по высоте z) значением индукции.
ЭДС индукции в рамке в данный момент времени равна

$$|\mathcal{E}| = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} = ka^2\frac{|\Delta z|}{\Delta t} = ka^2\,|v_z|$$

индукционный ток равен

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{ka^2}{R}\,|v_z|$$

Согласно правилу Ленца, возникающий в рамке индукционный ток будет течь против часовой стрелки. По закону Ампера со стороны магнитного ноля на верхнюю сторону рамки будет действовать сила

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left(B_0 + k\left(z_l - \frac{a}{2}\right)\right) Ia = \left(B_0 + k\left(z_l - \frac{a}{2}\right)\right)\frac{ka^3}{R}\,|v_z|$$

на нижнюю сторону — сила

$$\left|\vec{F}_2\right| = \left(B_0 + k\left(z_l + \frac{a}{2}\right)\right) Ia = \left(B_0 + k\left(z_l + \frac{a}{2}\right)\right)\frac{ka^3}{R}\,|v_z|$$

Силы $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ действующие на боковые стороны рамки, очевидно, будут равны по величине и противоположны по знаку:

$$\left|\vec{F}_3\right| = \left|\vec{F}_4\right| = \frac{\left(B_0 + k\left(z_l - \frac{a}{2}\right)\right) + \left(B_0 + k\left(z_l + \frac{a}{2}\right)\right)}{2} Ia = \left(B_0 + kz_l\right)\frac{ka^3}{R}\left|v_z\right|.$$
$$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

Следовательно, $v_x = \text{const}$, то есть рамка будет двигаться вдоль оси X с постоянной скоростью, равной начальной скорости v_0 Таким образом, характер движения рамки в направлении оси Z определяется силами $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ и силой тяжести $m\vec{g}$. При установившейся скорости v рамки проекции скорости на ось Z постоянна, то есть ускорение $\vec{a}_z$ вдоль оси Z равно нулю: $m\left|\vec{a}_z\right| = m|\vec{g}| + \left|\vec{F}_1\right| - \left|\vec{F}_2\right| = mg - \frac{k^2a^4}{R}\left|v_z\right| = 0$ Отсюда находим проекцию $v_{\text{уст.z}}$ на ось Z установившейся скорости рамки:

$$v_{\text{уст.}z} = \frac{mgR}{k^2a^4}.$$

Установившаяся скорость рамки равна $v = \sqrt{v_0^2 + v_{\text{уст. }z}^2}$, где v_0 — проекция скорости v на ось X, равная, как мы показали, начальной скорости, сообщенной рамке. Таким образом.

$$v_0 = \sqrt{v_0^2 + v_{\text{ус.}z}^2} = \sqrt{v^2 - \left(\frac{mgR}{k^2a^4}\right)^2}$$

Скорость $v_{\text{уст.z}}$ может быть найдена и из энергетических соображений. При установившемся движении рамки изменение за время Δt потенциальной энергии рамки в поле тяжести Земли равно тепловой энергии, выделяющейся за это время в рамке:

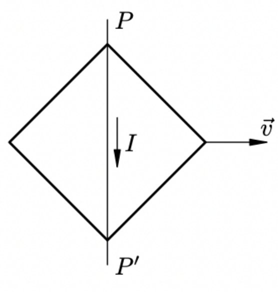
$$mgv_{\text{уст.}z}\Delta t = I_{\text{уст}}^2 R\Delta t = \left(\frac{ka^2}{R}\right)^2 v_{\text{уст.}z}^2 R\Delta t$$

Отсюда

$$v_{\text{уст.}z} = \frac{mgR}{k^2a^4}$$

Задача 10

Неподвижная проволочная перемычка PP' расположена в однородном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости рисунка. По перемычке скользит в плоскости рисунка проволочная квадратная рамка со скоростью $\vec{v}\,(\vec{v} \perp PP')$ без нарушения электрического контакта.

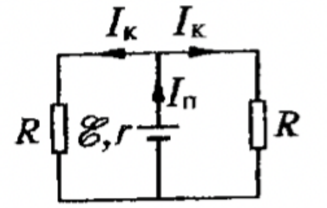


В тот момент, когда центр рамки пересекает перемычку, по ней течёт ток силой I. Определить направление и величину индукции магнитного поля. Рамка и перемычка выполнены из одного куска проволоки с удельным электрическим сопротивлением ρ и площадью поперечного сечения S.

Решение:

Рассмотрим эквивалентную схему (см. рис). Здесь $\mathscr{E} = Bva\sqrt{a}$ (a — длина стороны квадрата),

$$r = \rho\frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad R = \rho\frac{2a}{S},$$



тогда $I_п = I = 2I_text$ и

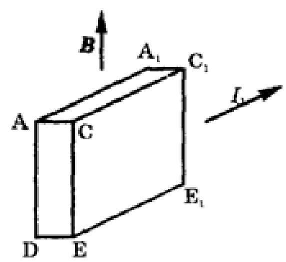
$$I = \frac{\mathscr{E}}{R/2 + r} = \frac{\sqrt{2}BvS}{\rho(1+\sqrt{2})},$$

откуда

$$B = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I\rho}{vS}.$$

Задача 11

По металлической ленте течет ток силой I. Лента помещена в однородное магнитное поле с индукцией B (см. рисунок). При этом между точками A и возникает разность потенциалов (эффект Холла). Объясните это явление.
Определите разность потенциалов U_{AC}, если $AC = a$, $AD = b$; концентрация свободных электронов равна n.



Решение:

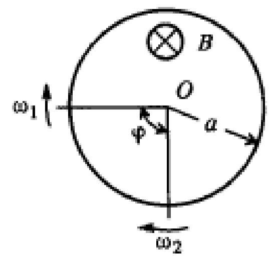
При упорядоченном движении электронов (в направлении, противоположном направлению тока) на них действует сила Лоренца. В результате они отклоняются в сторону поверхности CC_1E_1E, на этой поверхности происходит накопление отрицательного заряда, а на противоположной — положительного. Процесс разделения зарядов продолжается до тех пор, пока возникающее электрическое поле $\boldsymbol{E}$ не скомпенсирует действие на электрон силы Лоренца: $eE = evB$, или $E = vB$ (здесь v — скорость упорядоченного движения электронов). Учитывая, что $\varphi_A - \varphi_C = Ea$ и $I = envS = envab$, получим

$$U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = \frac{IB}{enb}.$$

Рассмотревный зффект дает возможность достаточно точно измерять кондентрацию свободных заряженых частиц в проводнике или индукцию магнитного поля.

Задача 23 (аналогичная), и аналог к 22

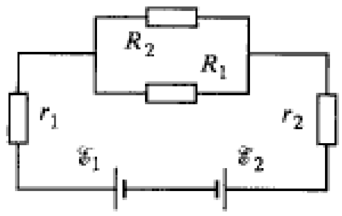
Тонкое проволочное кольцо радиусом a расположено в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной плоскости кольца. По кольцу скользят в противоположных направлениях две перемычки с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 (см. рисунок). Перемычки и кольцо сделаны из одного куска провода, сопротивление единицы длины которого равно ρ. Определить величину и направление тока через перемычки, когда угол $\varphi = \pi/2$. Между перемычками в точке O и между кольцом и перемычками хороший электрический контакт.



Решение:

Пересечение перемычками линий магнитного поля приводит к появлению в них ЭДС индукции. Численно эти ЭДС равны магнитным потокам, которые пронизывают площади, заметаемые стержнями за единицу времени:

$$\mathcal{E}_{i1} = \frac{\omega_1 B a^2}{2}, \mathcal{E}_{i2} = \frac{\omega_2 B a^2}{2}$$



Каждая из перемычек будет эквивалентна батарее с ЭДС, равной ЭДС индукции, и внутренним сопротивлением, равным омическому сопротивлению перемычки. Эквивалентная электрическая схема будет иметь вид, изображенный на рис. Здесь r_1 и r_2 — сопротивления перемычек:

$$r_1 = r_2 = \rho a$$

а R_1 и R_2– сопротивления двух частей проволочного кольца, заключенных между перемычками:

$$R_1 = \frac{\pi \rho a}{2}, R_2 = \frac{3\pi \rho a}{2}$$

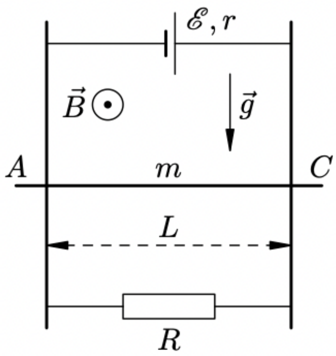
Согласно закону Ома,

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I\left(r_1 + r_2\right) + I\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Отсюда находим ток через перемычки:

$$I = \frac{8\left(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2\right)}{(16 + 3\pi)\rho a} = \frac{4aB\left(\omega_1 - \omega_2\right)}{(16 + 3\pi)\rho}$$

Задача 24



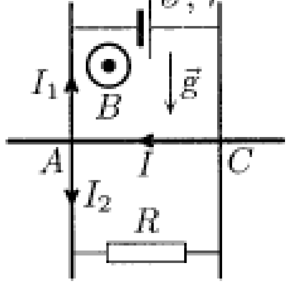
Две вертикальные проводящие рейки (см. рисунок), расстояние между которыми $L = 25$ см, находятся в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 1$ Тл направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Сверху рейки соединены через батарею с ЭДС $\mathscr{E} = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом, а снизу — через резистор с сопротивлением $R = 6$ Ом. В начальный момент проводящую перемычку AC массой $m = 100$ г удерживают неподвижной, а затем отпускают. Через некоторое время перемычка движется вниз с установившейся скоростью.

1) Найдите ток через перемычку при этой скорости.

2) Найдите установившуюся скорость перемычки.

Сопротивлением реек и перемычки пренебречь. При расчёте принять $g = 10$ м /с^2.

Решение:



В установившемся режиме ускоренно перемычки равно пулю и сила Ампера равна силе тяжести: $BIL = mg$. Ток но перемычке течёт влево и равен $I = \frac{mg}{BL} = 4$ А. Скорость находим из системы уравнений.

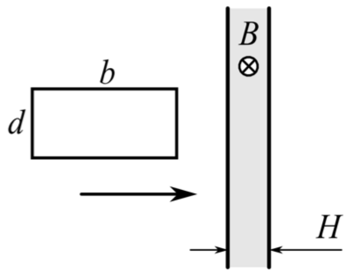
$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \mathcal{E}_{\text{и}} + \mathcal{E} = I_1 r \\ \mathcal{E}_{\text{и}} = I_2 R \\ \mathcal{E}_{\text{и}} = BvL \\ BIL = mg \end{cases}$$

$$v = \left(\frac{mg}{BL} - \frac{\varepsilon}{r}\right)\frac{Rr}{Bl(R+r)} = 6 \text{ м/с}$$

Задача 33

Прямоугольная проводящая рамка массой m со сторонами d и $b = 2d$ движется по гладкой горизонтальной поверхности стола со скоростью V_0 перпендикулярно правой стороне рамки (см. рис.). Сопротивление рамки R. На пути рамки находится область однородного магнитного поля с индукцией B. Ширина поля $H = d/3$, индукция поля вертикальна, скорость рамки перпендикулярна границе поля. Известно, что рамка, двигаясь поступательно, проходит поле и покидает его. Индуктивность рамки не учитывать. Заданными считать m, d, V_0, R, B.

1. Определить ускорение рамки сразу после вхождения в поле.
2. Найти скорость V_1 рамки при выходе правой стороны рамки из поля.
3. Найти скорость V_2 рамки после выхода рамки из поля.



Решение:

1) ЭДС в рамке $E = BV_0 d$, ток $I_0 = \frac{BV_0 d}{R}$, сила

$$F_0 = BI_0 d = \frac{B^2 V_0 d^2}{R},$$

ускорение

$$a_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{B^2 V_0 d^2}{mR}.$$

2) В некоторый момент при движении правой стороны в поле

$$m\frac{\Delta V}{\Delta t} = -BId = -B\frac{BVd}{R}d.$$

Здесь V скорость, ΔV — изменение скорости за малое время Δt. Отсюда

$$m\Delta V = -\frac{B^2 d^2}{R} V\Delta t = -\frac{B^2 d^2}{R}\Delta S.$$

Здесь ΔS — путь за Δt. Суммируем за время нахождения правой стороны в поле:

$$m\left(V_1 - V_0\right) = -\frac{B^2 d^2}{R} H.$$

Окончательно

$$V_1 = V_0 - \frac{B^2 d^3}{5mR}.$$

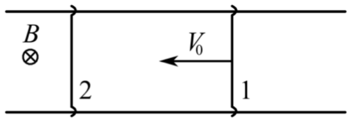
3) Когда левая и правая стороны рамки вне поля, скорость постоянна. После вхождения левой стороны в поле идет торможение аналогичное торможению правой стороны в поле:

$$m\left(V_2 - V_1\right) = -\frac{B^2 d^2}{R} H.$$

В итоге

$$V_2 = V_0 - \frac{2B^2 d^2}{mR} H, \qquad V_2 = V_0 - \frac{2B^2 d^3}{5mR}.$$

Задача 50



По двум параллельным хорошо проводящим рельсам, находящимся в одной горизонтальной плоскости и в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B, могут скользить без трения две перемычки (см. рис.). Расстояние между рельсами L. Перемычка 1 имеет массу m и сопротивление R, у перемычки 2 масса $2m$ и сопротивление $2R$. Вначале перемычки покоились. Затем перемычке 1 сообщили скорость V_0 в направлении второй перемычки. Известно, что перемычки не столкнулись. Индуктивность контура из перемычек и рельсов не учитывать.

1. Найдите ускорение перемычки 2 в начальный момент.
2. Найдите скорость каждой перемычки через продолжительный промежуток времени.
3. Найдите расстояние между перемычками через продолжительный промежуток времени, если в начальный момент расстояние между ними было S_0.

Решение:

1) Начальный ток

$$I_0 = \frac{BV_0L}{R_1 + R_2}.$$

Ускорение второй перемычки

$$a_{02} = \frac{BI_0L}{m_2} = \frac{B^2V_0L^2}{m_2\left(R_1 + R_2\right)} = \frac{1}{6}\frac{B^2V_0L^2}{mR}.$$

2) Суммарная сила на перемычки равна нулю. Поэтому

$$m_1V_0 = \left(m_1 + m_2\right)V.V = V_0/3.$$

3) Пусть в произвольный момент V_1 и V_2 — скорости перемычек, S_1 и S_2 — их пути, I — ток. Тогда

$$m_2\frac{\Delta V_2}{\Delta t} = BIL = BL\frac{BV_1L - BV_2L}{R_1 + R_2}$$

$$m_2\Delta V_2 = BL\frac{BV_1\Delta tL - BV_2\Delta tL}{R_1 + R_2} = \frac{B^2L^2}{R_1 + R_2}\left(\Delta S_1 - \Delta S_2\right).$$

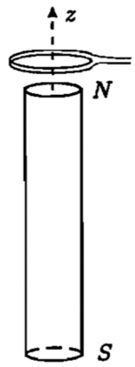
Суммируем:

$$m_2(V - 0) = \frac{B^2L^2}{R_1 + R_2}\left(S_1 - S_2\right).$$

Надо найти $S = S_0 - \left(S_1 - S_2\right)$. С учетом $V = V_0/3$ находим

$$S = S_0 - \frac{2V_0Rm}{B^2L^2}.$$

Задача 52



Вблизи северного полюса вертикально расположенного намагниченного стержня (постоянного магнита) находится тонкая кольцевая катушка массой $m = 10$ г (рис.). Катушка может свободно перемещаться вдоль вертикальной оси z. Если катушку заставить колебаться по гармоническому закону около этого положения с амплитудой $A = 5$ мм и частотой $\nu = 50$ Гц, то на её разомкнутых концах появится переменное напряжение с амплитудой $\mathscr{E}_0 = 1$ В. Какой постоянный ток (по величине и направлению) нужно пропустить через катушку, чтобы она зависла в исходном положении?

Решение:

У северного полюса цилиндра вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ имеет горизонтальную составляющую, направленную по радиусу цилиндра (рис. 258). Обозначим эту составляющую в месте расположения витков катушки через B_r. Перемещение витков вдоль оси z запишем в виде

$$z(t) = A\sin(2\pi\nu t).$$

Скорость катушки

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} = 2\pi\nu A\cos(2\pi\nu t)$$

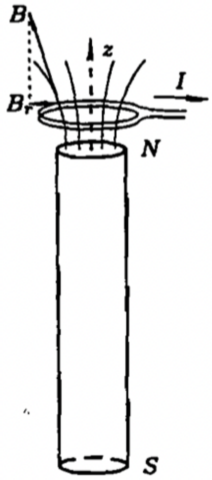


Рис. 258

Рис. 258 ЭДС индукции, наводимая в ней при колебаниях,

$$\mathscr{E}(t) = 2\pi RNB_r v_x = 2\pi RNB_r A\cdot 2\pi\nu\cos(2\pi v t),$$

где R — радиус витков, N — их число. Амплитуда переменного напряжения на концах катушки

$$\mathscr{E}_0 = 4\pi^2\nu RNB_1 A.$$

Если теперь через нее пропустить постоянный ток I по часовой стрелке (если смотреть сверху), то на катушку вдоль оси z будет действовать направленная вверх сила Ампера

$$F_2 = 2\pi RIB_r N = \frac{\mathscr{E}_0 I}{2\pi\nu A}.$$

$$\frac{\mathscr{E}_0 I}{2\pi\nu A} = mg,$$

$$I = \frac{2\pi\nu Amg}{\mathscr{E}_0} = 0,154 \text{ А}$$