Интегралы

Q1

$$\int \tan^5 x \sec^3 x \ dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x} \ dx = -\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} \ d(\cos x) = \cdots$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}; \ \cos x = y$$

$$\cdots = -\int (\tan^2 x)^2 \ \frac{dy}{y^4} = -\int \frac{\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)^2}{y^4} dy = -\int \frac{1}{y^8} - \frac{2}{y^6} + \frac{1}{y^4} \ dy =$$

$$= \frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{2}{5\cos^5 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C$$

Q2

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx = \int \cos x - \sin x \ dx =$$

$$= \sin x + \cos x + C$$

Q3

$$\int \frac{x^2+1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int \frac{1/2}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} + \frac{1/2}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \int \frac{dx}{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) =$$

$$= \arctan(2x + \sqrt{3}) + \arctan(2x - \sqrt{3}) + C$$

Q4

$$\int xe^x \ dx = \cdots$$
$$u = x \Rightarrow du = dx; \ dv = e^x \ dx \Rightarrow v = e^x$$
$$\cdots = uv - \int v \ du = xe^x - \int e^x \ dx = xe^x - e^x + C$$
$$\int (x + e^x)^2 \ dx = \int x^2 + 2xe^x + e^{2x} \ dx = \frac{x^3}{3} + 2xe^x - 2e^x + \frac{e^2 x}{2} + C$$

Q5

$$\int \csc^3 x \sec x \ dx = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{dx}{\frac{1}{2}\sin 2x \sin^2 x} = \cdots$$
$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2\cot x}{1+\cot^2 x}; \ \cot x = y$$
$$\cdots = -2\int \frac{1+y^2}{2y} dy = -\int y + \frac{1}{y} \ dy = -\frac{y^2}{2} - \ln|y| + C =$$
$$= \ln|\tan x| - \frac{1}{2\tan^2 x} + C$$

Q6

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x - 6} \ dx = \cdots$$
$$y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x \ dx$$
$$\cdots = \int \frac{dy}{(y-6)(y+1)} = \int \frac{1/7}{y-6} - \frac{1/7}{y+1} \ dy =$$
$$= \frac{1}{7}(\ln|y-6| - \ln|y+1|) + C = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{\sin x - 6}{\sin x + 1}\right| + C$$

Q7

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx = \int e^{-0,5x} \ dx = -\frac{2}{\sqrt{e^x}} + C$$

Q8

$$y = e^x;\ z = \sqrt{y-1}$$

$$\int \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \int \frac{\sqrt{y-1}}{y+3}dy = \frac{2}{2}\int \frac{y-1}{y+3}\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = 2\int \frac{y-1}{y+3}\ d\sqrt{y-3} =$$

$$= \int \frac{z^2}{z^2+4}\ dz = 2\int 1 - \frac{4}{z^2+4}\ dz = z - 4\int \frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2+1} =$$

$$= 2z - 4\arctan\frac{z}{2} + C = 2\sqrt{e^x-1} - 4\arctan\frac{\sqrt{e^x-1}}{2} + C$$

Q9

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = 2\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} =$$

$$= 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

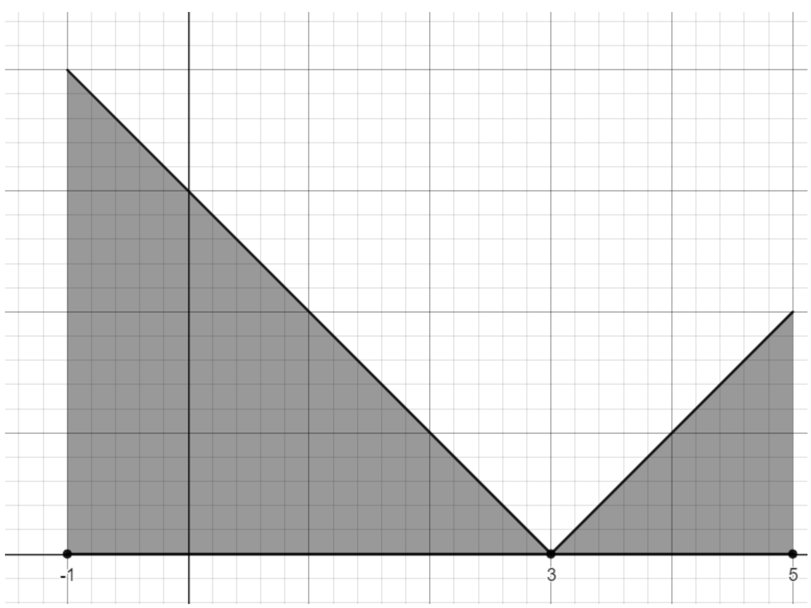

Рис. 1: $f(x) = |x-3|$

Q10

$$\int\limits_{-1}^{5} |x-3|\ dx = \int\limits_{-1}^{3} |x-3|\ dx + \int\limits_{3}^{5} |x-3|\ dx = \frac{1}{2}(4\cdot 4 + 2\cdot 2) = 10$$

Q11

$$\int \frac{\sin x}{\sec^{2019} x} dx = \int \cos^{2019} x \sin x\ dx = -\int \cos^{2019} x\ d(\cos x) = -\frac{\cos^{2020} x}{2020} + C$$

Q12

$$y = \arcsin x$$

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int x \arcsin x\ d(\arcsin x) = \int y \sin y\ dy =$$

$$= -y\cos y - \int -\cos y\ dy = -y\cos y + \sin y + C =$$

$$-x\sqrt{1-x^2} + x + C$$

Q13

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\int \frac{2\sin x}{\sin 2x} dx = \int \frac{2\sin x}{2\sin x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2dy}{1-y^2} = 2\operatorname{arth} y + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{1+2\tan\frac{x}{2}+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right| + C$$

Q14

$$\int \cos^2 2x \; dx = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 4x \; dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C =$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C$$

Q15

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \; dx =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1} \; dx\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} \; dx + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2-x+1} \; dx\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Q16

$$\int x\sin^2 x \; dx = \frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x) \; dx = \frac{1}{2}\int x \; dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\cdot 2x\cos 2x \cdot \frac{1}{2} \; d(2x) =$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\left(2x\sin 2x - \int \sin 2x \; d(2x)\right) = -\frac{x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{x^2}{4} + C$$

Q17

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \; dx = \int x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \; dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$$

Q18

$$\int \frac{3}{x^2+4x+29}dx = 3\int \frac{dx}{(x+2)^2+5^2} = \frac{3}{5}\arctan\frac{x+2}{5} + C$$

Q19

$$\sin x = y$$

$$\int \cot^5 x \; dx = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^5 x} \; d(\sin x) = \int \frac{(1-y^2)^2}{y^5} \; dy =$$
$$= \int \frac{1}{y^5} - \frac{2}{y^3} + \frac{1}{y} \; dy = -\frac{1}{4y^4} + \frac{1}{y^2} + \ln|y| + C =$$
$$= -\frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \ln|\sin x| + C$$

Q20

$$f(x) = \frac{\tan x}{x^4 - x^2 + 1}; \; f(-x) = f(x)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{x^4 - x^2 + 1} \; dx = \int_{-1}^{0} f(x) \; dx + \int_{0}^{1} f(x) \; dx = -\int_{0}^{1} f(x) \; dx + \int_{0}^{1} f(x) \; dx = 0$$

Q21

$$\cos x = y$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \; dx = -\int \sin^2 x \cos^2 x d(\cos x) = -\int (1-y^2)y^2 \; dy =$$
$$= \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Q22

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}} = -\int \frac{y \; dy}{\sqrt{y^2+1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{\sqrt{y^2+1}} =$$
$$= -\sqrt{y^2+1} + C = -\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} + C$$

Q23

$$\int \sin x \sec x \tan x \; dx = \int \tan^2 x \; dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \; dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \; dx =$$
$$= \tan x - x + C$$

Q24

$$\tan x = \operatorname{sh} y$$
$$\int \sec^3 x \; dx = \int \frac{1}{\cos x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sqrt{\tan^2 x + 1} \; d(\tan x) =$$
$$= \int \operatorname{ch} y \; d(\operatorname{sh} y) = \int \operatorname{ch}^2 y \; dy = \frac{1}{2} \int 1 + \operatorname{ch} 2y \; dy = \frac{y}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2y}{4} + C =$$
$$= \frac{\operatorname{arsh} \tan x}{2} + \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{2} + C = \frac{\operatorname{arsh} \tan x}{2} + \frac{\tan x}{2 \cos x} + C$$

Q25

$$y = \frac{1}{3x}$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 1}} = \int \frac{d(3x)}{3x\sqrt{9x^2 - 1}} = -\int \frac{dy}{y^2 \cdot \frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} =$$
$$= \arccos \frac{1}{3x} + C$$

Q26

$$\int \cos \sqrt{x} \; dx = 2 \int \frac{\sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \; dx = 2 \int \sqrt{x} \cos \sqrt{x} \; d\sqrt{x} =$$
$$= 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} - 2 \int \sin \sqrt{x} \; d\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$$

Q27

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\int \csc x \; dx = \int \frac{1+y^2}{2y}\frac{2\;dy}{1+y^2} = \int \frac{dy}{y} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Q28

$$\frac{x+2}{3} = \operatorname{sh} y$$

$$\int \sqrt{x^2+4x+13}\; dx = \int \sqrt{(x+2)^2+3^2}\; dx = 3\int \sqrt{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\; dx =$$

$$= 9\int \operatorname{ch}^2 y\; dy = \frac{3y}{2} + \frac{3\operatorname{sh} 2y}{4} + C = \frac{9}{2}\operatorname{arsh}\frac{3(x+2)}{3} + \frac{x+2}{2}\sqrt{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} + C =$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arsh}\frac{x+2}{3} + \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+13} + C$$

Q29

$$\int e^{2x}\cos x\; dx = e^{2x}\sin x - \int 2e^{2x}\sin x\; dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - \int 4e^{2x}\cos x\; dx$$

$$5\int e^{2x}\cos x\; dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x + C \Rightarrow \int e^{2x}\cos x\; dx =$$

$$= \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C$$

Q30

$$\int\limits_3^5 (x-3)^9\; dx = \frac{(x-3)^{10}}{10}\Bigg|_3^5 = \frac{2^{10}}{10} = 102,4$$

Q31

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^{3/2}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} =$$
$$= -4\sqrt{1-\sqrt{x}} + C$$

Q32

$$x = \frac{1}{y}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-1)^2}} =$$
$$= \int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \arcsin(2x-1) + C$$

Q33

$$\int e^{2\ln x}\ dx = \int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Q34

$$\int \ln x\ dx = x\ln x - \int x\ d(\ln x) = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$$
$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx = 2\int \ln x\ d\sqrt{x} = 4\int \ln\sqrt{x}\ d\sqrt{x} = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \sqrt{x} + C) =$$
$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

Q35

$$y = e^x$$
$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x\ dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan e^x + C$$

Q36

$$
\begin{aligned}
\int \log_2 x \; dx = \int \frac{\ln x}{\ln 2} \; dx = \frac{1}{\ln 2}(x \ln x - x + C) = \\
= x \log_2 x - \frac{x}{\ln 2} + C
\end{aligned}
$$

Q37

$$
\begin{aligned}
\int x^3 \sin 2x \; dx = \frac{1}{16} \int (2x)^3 \sin 2x \; d(2x) = \\
= \frac{1}{16} \left(-(2x)^3 \cos 2x + \int 3(2x)^2 \cos 2x \; d(2x) \right) = \\
= \frac{1}{16} \left(-(2x)^3 \cos 2x + 3 \left((2x^2) \sin 2x - \int 2(2x) \sin 2x \; d(2x) \right) \right) = \\
= \frac{1}{16} \left(-(2x)^3 \cos 2x + 3 \left((2x^2) \sin 2x - 2 \left(-(2x) \cos 2x + \int \cos 2x \; d(2x) \right) \right) \right) = \\
= \frac{1}{16} \left(-8x^3 \cos 2x + 3 \left(4x^2 \sin 2x - 2 \left(-2x \cos 2x + \sin 2x + C \right) \right) \right) = \\
= -\frac{x^3 \cos 2x}{2} + \frac{3x^2 \sin 2x}{4} + \frac{3x \cos 2x}{4} - \frac{3 \sin 2x}{8} + C
\end{aligned}
$$

Q38

$$
\int x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} \; dx = \frac{1}{3}(1 + x^3)^{1/3} \; d(x^3) = \frac{(1 + x^3)^{4/3}}{4} + C
$$

Q39

$$\frac{x}{2} = \operatorname{sh} y;\ \operatorname{th} y = \cos z$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{dx}{16\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\operatorname{ch} y\ dy}{\operatorname{ch}^4 y} = \frac{1}{8}\int \frac{dy}{\operatorname{ch} y \operatorname{ch}^2 y} = \frac{1}{8}\int \sqrt{1-\operatorname{th}^2 y}\ d(\operatorname{th} y) =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin z\ d(\cos z) = -\frac{1}{8}\int \sin^2 z\ dz = -\frac{1}{16}\int 1-\cos 2z\ dz =$$

$$= -\frac{z}{16} + \frac{\sin 2z}{32} + C = -\frac{\arccos \operatorname{th} \operatorname{arsh} \frac{x}{2}}{16} + \frac{\sin z \cos z}{16} + C =$$

$$= -\frac{1}{16}\arccos \frac{x/2}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}} + \frac{1}{16}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}\frac{x/2}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}} + C =$$

$$= -\frac{1}{16}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{1}{8}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C$$

Q40

$$x = \operatorname{ch} y$$

$$\int\limits_1^2 \sqrt{x^2-1}\ dx = \int\limits_0^{\operatorname{arch} 2} \operatorname{sh}^2 y\ dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\operatorname{arch} 2} \operatorname{ch} 2y - 1\ dy = \frac{\operatorname{sh} 2y}{4} - \frac{y}{2}\bigg|_0^{\operatorname{arch} 2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{2} - \frac{y}{2}\bigg|_0^2 = \left[\frac{2\sqrt{2^2-1}}{2} - \frac{\operatorname{arch} 2}{2}\right] - \left[\frac{1\cdot 0}{2} - \frac{0}{2}\right] = \sqrt{3} - \frac{\operatorname{arch} 2}{2}$$

Q41

$$\int \operatorname{sh} x\ dx = \operatorname{ch} x + C$$

Q42

$$\int \operatorname{sh}^2 x\ dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2x - 1\ dx = \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{x}{2} + C$$

Q43

$$\begin{cases} \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))$$

$$\int \operatorname{sh}^3 x \; dx = \int \operatorname{sh} x \; \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} \; dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} 2x \; dx - \frac{1}{2} \int \operatorname{sh} x \; dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \operatorname{sh} 3x \; dx - \frac{1}{4} \int \operatorname{sh} x \; dx - \frac{1}{2} \int \operatorname{sh} x \; dx = \frac{\operatorname{ch} 3x}{12} - \frac{3 \operatorname{ch} x}{4} + C$$

Q44

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsh} x + C$$

Q45

$$x = \operatorname{sh} y$$

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \; dx = \int \operatorname{arsh} x \; dx = \int y \; d(\operatorname{sh} y) = y \operatorname{sh} y - \int \operatorname{sh} y \; dy =$$

$$= y \operatorname{sh} y - \operatorname{ch} y + C = x \operatorname{arsh} x - \sqrt{x^2+1} + C$$

Q46

$$\int \operatorname{th} x \; dx = \int \frac{\operatorname{sh} x \; dx}{\operatorname{ch} x} = \ln|\operatorname{ch} x| + C$$

Q47

$$y = \operatorname{th} \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{1 - \operatorname{th}^2 x}{1 + \operatorname{th}^2 x} \; dx = 2 \int \frac{dy}{1+y^2} = 2 \arctan y + C =$$

$$= 2 \arctan \operatorname{th} \frac{x}{2} + C$$

Q48

$$\int \operatorname{arth} x \; dx = \frac{1}{2}\int \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\; dx = \frac{1}{2}\left(\int \ln(1+x)\; dx - \int \ln(1-x)\; dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left((1+x)\ln(1+x) - (1+x) + (1-x)\ln(1-x) - (1-x) + C\right) =$$
$$= \frac{\ln(1-x^2)}{2} + \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$$

Q49

$$y = \sqrt{\operatorname{cth} x}$$
$$\int \sqrt{\operatorname{th} x}\; dx = \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{cth} x}} = -2\int \frac{-\operatorname{sh}^2 x}{2\operatorname{sh}^2 x}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{cth} x}} = -2\int \operatorname{sh}^2 x\; d\sqrt{\operatorname{cth} x} =$$
$$= -2\int \frac{dy}{y^4-1} = \int \frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2-1}\; dy = \arctan y + \operatorname{arcth} y + C =$$
$$= \arctan\sqrt{\operatorname{cth} x} + \operatorname{arcth}\sqrt{\operatorname{cth} x} + C$$

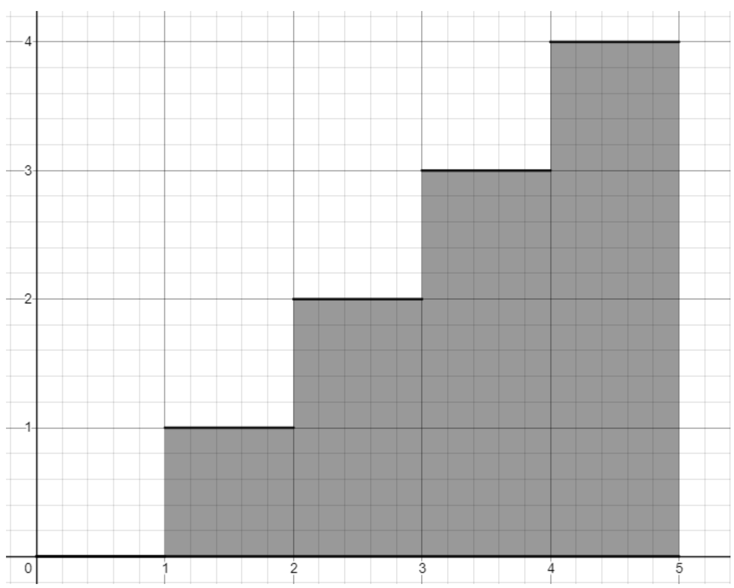

Рис. 2: $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Q50

$$\int_0^5 \lfloor x \rfloor \; dx = 1 \cdot (1+2+3+4) = 10$$

Q51

$$y = \tan x$$

$$\int \sec^6 \; dx = \int \frac{1}{\cos^4 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (\tan^2 x + 1)^2 \; d(\tan x) = \int y^4 + 2y + 1 \; dy =$$

$$= \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{2\tan^3 x}{3} + \tan x + C$$

Q52

$$\int \frac{dx}{(5x-2)^4} = \frac{1}{5}\frac{(5x-2)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{15(5x-2)^3} + C$$

Q53

$$\int \ln(1+x^2) \; dx = x\ln(1+x^2) - \int x \frac{2x}{1+x^2} \; dx =$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int 1 - \frac{1}{1+x^2} \; dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$$

Q54

$$\int \frac{dx}{x^4+x} = \int \frac{dx}{(x^2+x)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{2x+3}{x^2+x} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}\ dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{2}{x^2+x}\ dx - \int \frac{(2x-1)\ dx}{x^2-x+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{d(x^2+x)}{x^2+x} + 2\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln|x^2+x| - 4\,\operatorname{arth}\frac{x+\frac{1}{2}}{1/2} - \ln|x^2-x+1|\right) =$$

$$= \frac{\ln|x^2+x|}{3} - \frac{4}{3}\operatorname{arth}_c(2x+1) - \frac{\ln|x^2-x+1|}{3} + C$$

$$\operatorname{arth}_c x = \begin{cases} \operatorname{arth} x, & |x|<1 \\ \operatorname{arcth} x, & |x|>1 \end{cases}$$

Q55

$$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int \frac{-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\ dx =$$

$$= -\int \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ dx = \ln\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Q56

$$\int x\sec x\tan x\ dx = \int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{x\ d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\int \arccos y\ \frac{dy}{y^2} =$$

$$= \frac{\arccos y}{y} - \int \frac{1}{y}\ \frac{dy}{-\sqrt{1-y^2}} = \frac{\arccos y}{y} - \operatorname{arch}\frac{1}{y} + C =$$

$$= \frac{x}{\cos x} - \operatorname{arch}\frac{1}{\cos x} + C$$

Q57

$$\int \operatorname{arcsec} x\ dx = x\operatorname{arcsec} x - \int \frac{x\ dx}{x\sqrt{x^2-1}} = x\operatorname{arcsec} x - \operatorname{arch} x + C$$

Q58

$$y = \tan\frac{x}{2}$$

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2y^2}{2}\frac{2dy}{1+y^2} = 2\int 1 - \frac{1}{y^2+1}\ dy =$$

$$= 2y - 2\arctan y + C = 2\tan\frac{x}{2} - x + C$$

Q59

$$y = \sqrt{x+4}$$

$$\int x^2\sqrt{x+4}\ dx = 2\int \frac{x^2(x+4)}{2\sqrt{x+4}}dx = 2\int x^2(x+4)\ d\sqrt{x+4} =$$

$$= 2\int (y^2-4)^2 y^2\ dy = 2\int y^6 - 8y^4 + 16y^2\ dy = \frac{2y^7}{7} - \frac{16y^5}{5} + \frac{32y^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{x+4}^7}{7} - \frac{16\sqrt{x+4}^5}{5} + \frac{32\sqrt{x+4}^3}{3} + C$$

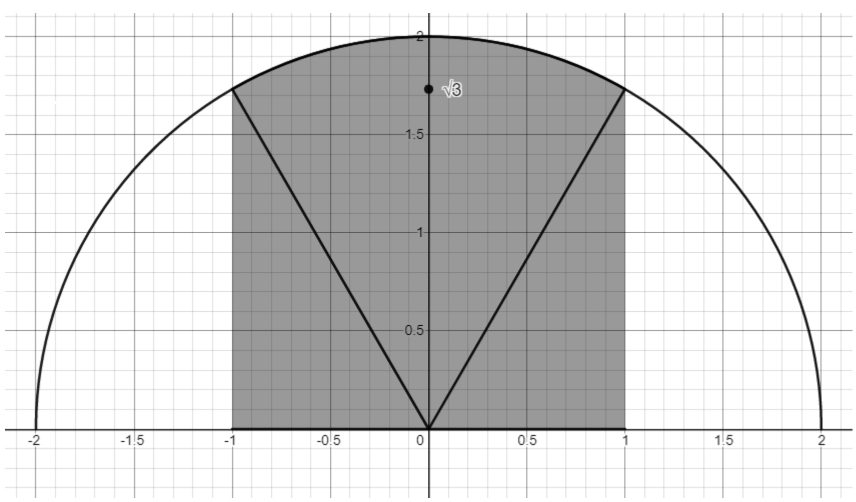

Рис. 3: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

Q60

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}\cdot 2^2\right) = 1\cdot\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\cdot 2^2 = \sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$$

Q61

$$\frac{x+2}{2} = \operatorname{ch} y$$

$$\int \sqrt{x^2+4x}\ dx = \int \sqrt{(x+2)^2-2^2}\ dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 - 1}\ dx =$$

$$= 4\int \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}\ d(\operatorname{ch} y) = 4\int \operatorname{sh}^2 y\ dy = 2\int \operatorname{ch} 2y - 1\ dy =$$

$$= \operatorname{sh} 2y - 2y + C = \frac{\sqrt{x^2+4x}(x+2)}{2} - 2\operatorname{arch}\frac{x+2}{2} + C$$

Q62

$$\int x^2 e^{x^3}\ dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\ d(x^3) = \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

Q63

$$\int x^3 e^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int x^2 e^{x^2}\ d(x^2) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Q64

$$\int \tan x \ln(\cos x)\ dx = -\int \ln\cos x\ d(\ln\cos x) = -\frac{(\ln\cos x)^2}{2} + C$$

Q65

$$\int \frac{dx}{x^3-4x^2} = \frac{1}{16}\int \frac{1}{x-4} - \frac{x+4}{x^2}\ dx = \frac{1}{16}\left(\int \frac{dx}{x-4} - \int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2}\right) =$$
$$= \frac{\ln|x-4|}{16} - \frac{\ln|x|}{16} + \frac{1}{4x} + C$$

Q66

$$\int \sin x \cos 2x\ dx = \frac{1}{2}\int \sin 3x - \sin x\ dx = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 3x}{6} + C$$

Q67

$$\int 2^{\ln x}\ dx = \int e^{\ln 2 \ln x}\ dx = \int x^{\ln 2}\ dx = \frac{x^{\ln 2e}}{\ln 2e} + C$$

Q68

$$\int \sqrt{1+\cos 2x}\ dx = \int \sqrt{1+2\cos^2 x - 1}\ dx = \int \sqrt{2}\cos x\ dx =$$
$$= \sqrt{2}\sin x + C$$

Q69

$$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{1+\tan x - \tan x}{1+\tan x}\ dx = \int \frac{\frac{1}{2} + \frac{\tan x}{2} - \left(\frac{\tan x}{2} - \frac{1}{2}\right)}{1+\tan x}\ dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int 1 - \frac{\tan x - \tan(\pi/4)}{1+\tan x \tan(\pi/4)}\ dx = \frac{1}{2}\int 1 - \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\ dx =$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\ln\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{2} + C$$

Q70

$$y = \ln x$$
$$\int\limits_{1/e}^{e} \frac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x}\ dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\ dy = \frac{\pi}{2}$$

Q71

$$y = x^{1/3}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1} = \int \frac{3y^2\ dy}{1+y} = 3\int y - 1 + \frac{1}{1+y}\ dy =$$
$$= 3\ \frac{y^2}{2} - 3y + 3\ln|1+y| + C = \frac{3x^{2/3}}{2} - 3x^{1/3} + 3\ln|1+x^{1/3}| + C$$

Q72

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{3\,\sqrt[3]{x+1}^{\,2}}{2} + C$$

Q73

$$\int (\sin x + \cos x)^2\ dx = \int \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos x\ dx = \int 1 + \sin 2x\ dx =$$
$$= x - \frac{\cos 2x}{2} + C$$

Q74

$$\int 2x\ln(1+x)\ dx = x^2\ln(1+x) - \int x^2\ \frac{1}{1+x}\ dx =$$
$$= x^2\ln(1+x) - \int x - 1 + \frac{1}{1+x}\ dx =$$
$$= x^2\ln(1+x) - \ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x + C$$

Q75

$$y = \tan \ln x$$

$$\int \frac{dx}{x(1+\sin^2(\ln x))} = \int \frac{d(\ln x)}{1+\sin^2(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{2-\cos^2(\ln x)} =$$

$$= \int \frac{\cos^2(\ln x)\ d(\tan \ln x)}{2-\cos^2(\ln x)} = \int \frac{1}{y^2+1}\ \frac{1}{2-\frac{1}{y^2+1}}\ dy = \int \frac{dy}{2y^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} y + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan \ln x)}{2} + C$$

Q76

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Q77

$$\int x^{\frac{x}{\ln x}}\ dx = \int \exp\left(\ln x\ \frac{x}{\ln x}\right)\ dx = \int e^x\ dx = e^x + C$$

Q78

$$\int \arcsin x\ dx = x \arcsin x - \int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C$$

$$x = y^2;\ \ y = \sin z$$

$$\int \arcsin\sqrt{x}\ dx = \int 2y\arcsin y\ dy =$$
$$= 2y(y\arcsin y + \sqrt{1-y^2}) - 2\int y\arcsin y + \sqrt{1-y^2}\ dy =$$
$$= 2y(y\arcsin y + \sqrt{1-y^2}) - 2\int y\arcsin y\ dy - y\sqrt{1-y^2} - \arcsin y$$
$$4\int y\arcsin y\ dy = 2y^2\arcsin y + y\sqrt{1-y^2} - \arcsin y + C$$
$$2\int \arcsin\sqrt{x}\ dx = x\arcsin\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{2} - \frac{\arcsin\sqrt{x}}{2} + C$$

Q79

$$\int \arctan x\ dx = x\arctan x - \int \frac{x\ dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^2} =$$
$$= x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C$$

Q80

$$f(x) = \begin{cases} 10,\ x \leqslant 2 \\ 3x^2-2,\ x > 2 \end{cases}$$
$$\int\limits_0^5 f(x)\ dx = \int\limits_0^2 10\ dx + \int\limits_2^5 3x^2 - 2\ dx = 10\cdot 2 + \left.(x^3-2x)\right|_2^5 =$$
$$= 20 + 115 - 4 = 131$$

Q81

$$\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^3}\ dx = -\int \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\ d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} - \int \cos\frac{1}{x}\ d\left(\frac{1}{x}\right) =$$
$$= \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} + C$$

Q82

$$\int \frac{x-1}{x^4-1}\,dx = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{\ln|x+1|}{2} - \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2)}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= \frac{\ln|x+1|}{2} - \frac{\ln|x^2+1|}{4} + \frac{\arctan x}{2} + C$$

Q83

$$\int \sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}\,dx = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx =$$
$$= \int x + \frac{1}{4x}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\ln|x|}{4} + C$$

Q84

$$\int \frac{\exp\tan x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int e^{\tan x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \int e^{\tan x}\,d(\tan x) = e^{\tan x} + C$$

Q85

$$x = \frac{1}{y}$$
$$\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = -\int \arctan\frac{1}{y}\,dy = -\int \operatorname{arccot} y\,dy =$$
$$= -y\operatorname{arccot} y - \int \frac{y\,dy}{1+y^2} = -y\operatorname{arccot} y - \frac{\ln|1+y^2|}{2} + C =$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{1}{x^2}\right| + C$$

Q86

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int \arctan x\,d(\arctan x) = \frac{\arctan^2 x}{2} + C$$

Q87

$$\int \ln^2 x \; dx = x\ln^2 x - \int x \; \frac{2\ln x}{x} \; dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x \; dx =$$
$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

Q88

$$\frac{x}{2} = \operatorname{sh} y$$
$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} \; dx = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \; d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{\operatorname{ch} y \operatorname{ch} y \; dy}{\operatorname{sh}^2 y} =$$
$$= \int 1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} \; dy = y - \operatorname{cth} y + C =$$
$$= \operatorname{arsh}\frac{x}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 1} + C = \operatorname{arsh}\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + C$$

Q89

$$y = \sqrt{x+4}$$
$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} \; dx = 2\int \frac{x+4}{2x\sqrt{x+4}} \; dx = 2\int \frac{y^2}{y^2-4} \; dy =$$
$$= 2\int 1 + \frac{4}{y^2-4} \; dy = 2\int 1 + \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2} \; dy =$$
$$= 2y + 2\ln|y-2| - 2\ln|y+2| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

Q90

$$\frac{1}{1+\cot^3 x} = \frac{1}{1+\tan^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$y = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cot^3 x} = -\int\limits_{\pi/2}^{0} \frac{dy}{1+\tan^3 y} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dy}{1+\tan^3 y}$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\ dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cot^3 x} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} 1 - \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\ dx = \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^3 x}\ dx = \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cot^3 x}$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cot^3 x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\ dx = \frac{\pi}{4}$$

Q91

$$\int \frac{x}{1+x^4}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^4} = \frac{\arctan x^2}{2} + C$$

Q92

$$x = y^2$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx = 2\int ye^y\ dy = 2ye^y - 2e^y + C =$$

$$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

Q93

$$\int \frac{1}{\csc^3 x} dx = \int \sin^2 x \sin x \ dx = -\int 1 - \cos^2 x \ d(\cos x) =$$
$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

Q94

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = \int \arcsin x \ d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$$

Q95

$$\int \sqrt{1+\sin(2x)} \ dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} \ dx = \int \sin x + \cos x \ dx =$$
$$= \sin x - \cos x + C$$

Q96

$$\int \sqrt[4]{x} \ dx = \frac{4\sqrt[4]{x}^5}{5} + C$$

Q97

$$x = \ln y$$
$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \ dy = \ln y - \ln(y+1) + C =$$
$$= x - \ln(e^x - 1) + C$$

Q98

$$y=\sqrt{1+e^x}\int\sqrt{1+e^x}\ dx=2\int\frac{1+e^x}{e^x}\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\ dx=2\int\frac{y^2}{y^2-1}\ dy=$$
$$=2\int 1+\frac{1}{y^2-1}\ dy=\frac{y}{2}+\int\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\ dy=\frac{y}{2}+\ln|y-1|-\ln|y+1|+C=$$
$$=\frac{\sqrt{1+e^x}}{2}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$$

Q99

$$\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}\ dx=\int\frac{dx}{2\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x}^3}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 x\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}}=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\tan x)}{\tan^{1/2}x}=\sqrt{\tan x}+C$$

Q100

$$y=\tan\frac{x}{2}$$
$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x}=\int\limits_0^1\frac{1+y^2}{1+y^2+2y}\frac{2dy}{1+y^2}=2\int\limits_0^1\frac{dy}{(y+1)^2}=$$
$$=-\left.\frac{2}{y+1}\right|_0^1=1$$

Q101

Так как этот интеграл последний, ожидаемо увидеть от него что–то неожиданное. И в самом деле: разбить интеграл на сумму не выйдет, так как интеграл от $\dfrac{\sin x}{x}$ неберующийся.

Что же делать? Из опыта взятия предыдущих интегралов мы знаем, что полезно иногда бывает продифференцировать что-то в подынтегральной функции. Продифференцируем $\ln x\cos x$:

$$d(\ln x \cos x) = \left(-\ln x \sin x + \frac{\cos x}{x}\right)\ dx$$

Как мы видим, получилась практически подыинтегральная функция. Чтобы поменять синусы на косинусы, попробуем продифференцировать $\ln x \sin x$:

$$d(\ln x \sin x) = \left(\ln x \cos x + \frac{\sin x}{x}\right)\ dx$$

Таким образом,

$$\int \frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x\ dx = \ln x \sin x + C$$

Уравнение Кеплера

Обозначим за ν истинную аномалию. Тогда закон сохранения момента импульса можно написать как $r^2\dot{\nu} = \text{const} = \sqrt{GMp}$, где M — масса центрального тела, p — фокальный параметр орбиты.

Тогда $r^2\dfrac{d\nu}{dt} = \sqrt{GMp} \Rightarrow dt = \dfrac{r^2\ d\nu}{\sqrt{GMp}} = \sqrt{\dfrac{p^3}{GM}}\dfrac{d\nu}{(1+e\cos\nu)^2}$; e — эксцентриситет орбиты

Пусть $\tan\frac{\nu}{2} = x$. Тогда

$$t = \sqrt{\frac{p^3}{GM}}\int \frac{1}{\left(1+e\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\frac{2dx}{1+x^2} = 2\sqrt{\frac{p^3}{GM}}\int \frac{1+x^2}{(1+e+(1-e)x^2)^2}\ dx$$

Эллипс

Здесь $e<1$. Тогда проведём замену $x = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}y$:

$$t = 2\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int \frac{1 + \dfrac{1+e}{1-e} y^2}{(1+e+(1+e)y^2)^2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ dy =$$

$$= 2\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int \frac{(1+e)\left(\dfrac{1}{1+e} + \dfrac{y^2}{1-e}\right)}{(1+e)^2(1+y^2)^2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ dy =$$

$$= 2\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int \frac{1-e+y^2+ey^2}{1-e^2} \frac{1}{(1+e)(1+y^2)^2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ dy =$$

$$= 2\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}^3} \int \frac{1-e+y^2+ey^2}{(1+y^2)^2}\ dy = 2\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \int \frac{1}{1+y^2} - \frac{e(1-y^2)}{(1+y^2)^2}\ dy$$

Снова произведём замену: $y = \tan \frac{E}{2}$

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\int \cos^2 \frac{E}{2} \frac{dE}{\cos^2 \frac{E}{2}} - e \int \cos E \cos^2 \frac{E}{2} \frac{dE}{\cos^2 \frac{E}{2}} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{a^3}{GM}} (E - e \sin E) + C$$

Отметим, что при $C = 0$ выходит, что t означает время, прошедшее с ближайшего прохождения перицентра

Парабола

Здесь $e = 1$. Тогда (принимая, что $p = 2r_p$, где r_p — перицентрическое расстояние)

$$t = 2\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int \frac{1+x^2}{2^2}\ dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C =$$

$$= \sqrt{\frac{2r_p^3}{GM}} \left(\tan\frac{\nu}{2} + \frac{1}{3}\tan\frac{\nu}{2}\right) + C$$

Здесь, как и в предыдущем случае, при $C = 0$ получается, что t — время после прохождения перицентра.

Гипербола

Здесь $e > 1$. Тогда проведём замену $x = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} y$:

$$
\begin{aligned}
t = 2\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int \frac{1 + \frac{e+1}{e-1} y^2}{(e + 1 - (e+1)y^2)^2} \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\, dy = \\
= 2\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int \frac{(e+1)\left(\frac{1}{e+1} + \frac{y^2}{e-1}\right)}{(e+1)^2(1-y^2)^2} \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\, dy = \\
= 2\sqrt{\frac{p^3}{GM}} \int \frac{e - 1 + ey^2 + y^2}{e^2 - 1} \frac{1}{(e+1)(1-y^2)^2} \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\, dy = \\
= 2\sqrt{\frac{-a^3}{GM}} \int \frac{e(1+y^2)}{(1-y^2)^2} - \frac{1-y^2}{(1-y^2)^2}\, dy
\end{aligned}
$$

Здесь большая полуось отрицательная.

Отметим, что $\cos\nu > -1/e$, т. е. $\tan\frac{\nu}{2} > \sqrt{\frac{1-\frac{1}{e}}{1+\frac{1}{e}}} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}$. Тогда $y < 1$ и можно провести замену $y = \operatorname{th}\frac{E}{2}$:

$$
\begin{aligned}
y = \sqrt{\frac{-a^3}{GM}} \left(\int e \operatorname{ch} E \operatorname{ch}^2\frac{E}{2} \frac{dE}{\operatorname{ch}^2\frac{E}{2}} - \int \operatorname{ch}^2\frac{E}{2} \frac{dE}{\operatorname{ch}^2\frac{E}{2}} \right) = \\
= \sqrt{\frac{-a^3}{GM}} (e \operatorname{sh} E - E) + C
\end{aligned}
$$

При $C = 0$ время t имеет тот же смысл, что и в предыдущих случаях.

Постоянная Стефана-Больцмана

Из формулы Планка известно, что

$$
B_\nu = \frac{\delta E}{dt d\omega d\nu dS \cos\theta} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}
$$

Здесь δE — количество излучённой энергии за время dt площадкой площадью dS под углом θ к нормали в телесный угол $d\omega$ на частоте $d\nu$ со спектральной плотностью излучения B_ν.

Тогда, принимая, что излучение изотропно, получаем, что

$$H_\nu = \frac{\delta E}{dtdSd\nu} = \int\limits_{\Omega} B_\nu d\omega = B_\nu \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \; d\theta \int\limits_0^{2\pi} \; d\varphi = \frac{B_\nu}{2} \int\limits_0^{2\pi} \; d\varphi = \pi B_\nu$$

Здесь Ω — полусфера, ограниченная плоскостью площадки.
Тогда светимость с единичной площадки будет равна будет равна

$$J = \int\limits_0^\infty H_\nu \; d\nu = \int\limits_0^\infty \frac{2\pi h\nu^3/c^2}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \; d\nu$$

Пусть $\dfrac{h\nu}{kT} = x$:

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{2\pi k^3T^3x^3}{h^2c^2} \frac{1}{e^x - 1} \frac{kT}{h} \; dx = \frac{2\pi k^4T^4}{h^3c^2} \int\limits_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \; dx$$

Возьмём следующий интеграл:

$$\int x^3 e^{-nx} \; dx = -\frac{1}{n} \int x^3 e^{-nx} \; d(-nx) = -\frac{1}{n} \left(x^3 e^{-nx} - \int 3x^2 e^{-nx} \; dx \right) =$$
$$= -\frac{1}{n} \left(x^3 e^{-nx} + \frac{3}{n} \left(x^2 e^{-nx} - \int 2x e^{-nx} \; dx \right) \right) =$$
$$= -\frac{1}{n} \left(x^3 e^{-nx} + \frac{3}{n} \left(x^2 e^{-nx} + \frac{2}{n} \left(x e^{-nx} + \frac{1}{n} e^{-nx} \right) \right) \right) + C =$$
$$= -\frac{x^3 e^{-nx}}{n} - \frac{3x^2 e^{-nx}}{n^2} - \frac{6x e^{-nx}}{n^3} - \frac{6e^{-nx}}{n^4} + C$$

Затем вычислим $\zeta(4)$. Для этого сначала разложим в ряд Фурье функцию $f(x) = x^4$:

$$a_0^{x^4} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^4 \; dx = \frac{x^5}{10\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^4}{5}$$

$$a_n^{x^4} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos nx\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{24\sin nx}{n^5} - \frac{24x\cos nx}{n^4} - \frac{12x^2\sin nx}{n^3} + \frac{4x^3\cos nx}{n^2} + \frac{x^4\sin nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{48(-1)^n}{n^4} + \frac{8\pi^2(-1)^n}{n^2}$$

$\sin x$ — нечётная функция, так что

$$b_n^{x^4} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin nx\ dx = 0$$

В итоге

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 8\pi^2}{n^2} - \frac{(-1)^n 48}{n^4}\right)\cos nx$$

Однако мы хотим вычислить $\zeta(4)$, то есть нужно как-то избавиться от члена $\frac{(-1)^n 8\pi^2}{n^2}$. Для этого разложим в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$:

$$a_0^{x^2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi} x^2\ dx = \frac{x^3}{6\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n^{x^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\sin nx}{n^3} + \frac{2x\cos nx}{n^2} + \frac{x^2\sin nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{(-1)^n 4}{n^2}$$

$$b_n^{x^2} = 0$$

Значит для того, чтобы "убрать" мешающий нам член, нужно из x^4 вычесть $2\pi^2 x^2$.

Значит, итоговое разложение:

$$x^4 - 2\pi^2 x^2 = \frac{\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n 8\pi^2}{n^2} - \frac{(-1)^n 48}{n^4} - \frac{(-1)^n 8\pi^2}{n^2} \right) \cos nx =$$

$$= -\frac{7\pi^4}{15} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 48}{n^4} \cos nx$$

Подставим $x = \pi$:

$$\pi^4 - 2\pi^4 = -\frac{7\pi^4}{15} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 48}{n^4} (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{48}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{15} + \pi^4 = \frac{8\pi^4}{15}$$

Отсюда

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{48} \frac{8\pi^4}{15} = \frac{\pi^4}{90}$$

Вернёмся, однако, к вычислению постоянной Стефана-Больцмана:

$$J = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}}\, dx =$$

$$= \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots)\, dx =$$

$$= \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int\limits_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}\, dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-nx} =$$

$$= \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^3 e^{-nx}}{n} - \frac{3x^2 e^{-nx}}{n^2} - \frac{6x e^{-nx}}{n^3} - \frac{6 e^{-nx}}{n^4} \right) \Bigg|_0^{\infty}$$

Так как e^{-x} убывает много быстрее, чем возрастает даже x^3, то

$$J = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^4} = \frac{12\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \zeta(4) = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4$$

В итоге

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2} \approx 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$$