Кубок ЛФИ

11.s03.e04

Человек создает гипотезы всегда,
даже если он очень осторожен,
даже если совсем об этом не догадывается.
Станислав Лем

Колкость глаз не колет

Каждую весну Ёжик проводит серию астрономических наблюдений. В этом году~~, посмотрев в телескоп два раза~~, он смог обнаружить звезду, вокруг которой обращаются две интересные планеты.

Спорная планета

(5 баллов). Первая планета состоит из пористого материала, заполненного многоатомным идеальным газом. У Ёжика нет оснований полагать, что плотность пористого материала много больше плотности газа. Ёжику стало интересно, устойчива ли газовая составляющая планеты к «дыханию», то есть может ли её размер слабо самопроизвольно гомотетично и адиабатично осциллировать. Помогите Ёжику решить этот вопрос.

Примечание. В последующих пунктах задачи будем считать, что если планета устойчива к дыханию, то она в принципе устойчива и может существовать.

Горячая планета

(2 балла). Анализ второй планеты показал, что она целиком состоит из идеального двухатомного газа, без твёрдого или жидкого ядра. Теплоёмкость газа планеты при постоянном объеме зависит от температуры по следующему закону:

$$C_V = \frac{5}{2}R + \left(\frac{A}{T}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2(A/T)} R,$$

где $A = 5000$ K. Определите максимально возможную температуру в центре второй планеты, считая, что для данного газа она ниже критической. Считайте, что в процессе дыхания планеты температура изменяется незначительно, и C_V можно считать постоянной.

Тайная планета

(3 балла). Вечером Ёжик рассказал о своем открытии Медвежонку, на что его друг ответил, что видел Третью планету, которая состоит из вещества, калорическое и термическое уравнения состояния которого имеют вид:

$$U = \alpha V T^4$$

$$p = \frac{U}{3V},$$

где U — внутренняя энергия, V — объем, занимаемым веществом, T — температура вещества, p — давление, α — известный коэффициент пропорциональности.

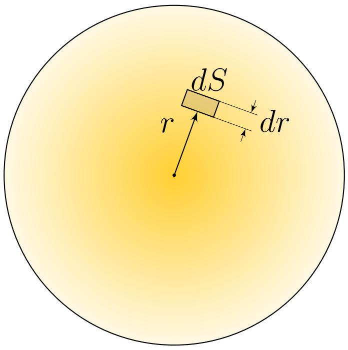
«Псих» – подумал Ёжик. Почему он сделал такой вывод?

Автор задачи: С. Кухарев

Решение основной задачи

Общее рассуждение

Для начала получим условие механического равновесия самогравитирующего сферически симметричного облака газа без других тел. Рассмотрим малый объём газа площадью dS и толщиной dr, находящийся на расстоянии r от центра системы:



Запишем условие равенства нулю суммы действующих на него сил:

$$P(r)dS = dm_{\text{г}} g(r) + P(r + dr)dS,$$

где $dm_{\text{г}}$ — масса газа, P — давление, а g — ускорение свободного падения в данной точке. Заметим, что $dm_{\text{г}} = \rho(r)dSdr$ и $g(r) = G\frac{M(r)}{r^2}$, где $M(r)$ — суммарная масса вещества внутри сферы радиуса r.

Преобразуем изначальное уравнение

$$P(r) - P(r + dr) = \rho_{\text{г}}(r)dr \cdot G\frac{M(r)}{r^2}$$

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{\rho_{\text{г}}(r)M(r)}{r^2}$$

Это уравнение будем называть уравнением механического равновесия. Иногда удобнее смотреть на это уравнение, воспринимая как независимый параметр M, а не r. В случае, когда всю массу планеты составляет только газ:

$$dM = 4\pi r^2 \rho_{\text{г}}(r)dr$$

$$\frac{dP}{dM_{\text{г}}} = -G\frac{M_{\text{г}}}{4\pi r^4(M_{\text{г}})}$$

Это уравнение будем называть уравнением механического равновесия в терминах Лагранжа.

Теперь проанализируем устойчивость этого равновесия к гомотетичной адиабатической деформации. Пусть все линейные размеры газа адиабатически изменились в α раз, для простоты будем считать $\alpha < 1$. Запишем уравнение адиабаты идеального газа:

$$PV^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}$$

$$Pr^{3\gamma} = P_1 r_1^{3\gamma} = P_1 \alpha^{3\gamma} r^{3\gamma}$$

$$P_1 = P\alpha^{-3\gamma}$$

Получается, при сжатии в α раз фактическое давление газа возрастёт. Но возрастёт также и требуемое для равновесия давление. Проанализируем это изменение. Для этого сделаем замену $r \to \alpha r$ в уравнении механического равновесия в терминах Лагранжа. Видно, что требуемое давление изменится как $P \to \alpha^{-4} P$.

При $\alpha < 1$ для устойчивости требуемое давление должно быть меньше фактического. Тогда давление "побеждает гравитацию и система возвращается в начальное состояние:

$$P\alpha^{-3\gamma} > \alpha^{-4} P$$

$$\alpha^{3\gamma} < \alpha^4$$

$$3\gamma > 4$$

$$\gamma > \frac{4}{3}$$

Полученное выражение - условие устойчивости равновесия самогравитирующего газового облака.

Спорная планета

Наличие пористого материала изменяет уравнение механического равновесия, т.к. гравитирует теперь не только газ:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{\rho_{\text{г}}(r)(M_{\text{г}}(r) + M_{\text{п}}(r))}{r^2}$$

Уравнение в терминах Лагранжа:

$$\frac{dP}{dM_{\text{г}}} = -G \frac{M_{\text{г}} + M_{\text{п}}(M_{\text{г}})}{4\pi r^4(M_{\text{г}})}$$

Видно, что если теперь заменить r на αr, то также изменится вид функции $M_{\text{п}}(M_{\text{г}})$. То есть при сжатии меняется масса пористого материала, который находится ближе к центру, чем данная масса газа. Очевидно, это уменьшит изменение требуемого для равновесия давления, что должно привести к тому, что многоатомный газ с $\gamma = \frac{4}{3}$ станет устойчивым.

Альтернативно можно ничего не записывать, и просто понять, что если раньше газ был на границе устойчивости, то с пористым материалом при сжатии сила тяжести не только увеличивается (за счёт того, что газ «ближе сам к себе»), но и уменьшается (за счёт того, что на газ действует меньше пористого материала). А значит, условие равновесия «съедет» и газ станет устойчивым.

Ответ: планета устойчива.

Горячая планета

В этой задаче надо понять, что отсутствие жидкой или твёрдой фазы означает, что газ устойчив и не коллапсирует. Правда, γ газа в этой ситуации разная в разных точках из-за разной температуры. Но мы можем рассмотреть малый объём газа в центре планеты (где температура, очевидно, максимальная), и написать уравнение для него. Наличие газа вокруг никак не меняет рассуждение про то, что $\gamma < \frac{4}{3}$. Получаем:

$$\frac{\frac{5}{2} + (\frac{A}{T_{\max}})^2 \cdot \frac{1}{sh^2(\frac{A}{T_{\max}})} + 1}{\frac{5}{2} + (\frac{A}{T_{\max}})^2 \cdot \frac{1}{sh^2(\frac{A}{T_{\max}})}} = \frac{4}{3},$$

откуда $T_{\max} = 3352.48$ К

Комментарий: многие спрашивали, может ли у двухатомного идеального газа теплоёмкость зависеть от температуры. Отвечаем: да, может. Связано это с тем, что на высоких температурах расстояние между атомами перестаёт быть постоянным, и наравне с поступательными и вращательными «включаются» и так называемые колебательные степени свободы. Причём чем выше температура, тем у большего числа молекул присутствуют колебания размера.

Тайная планета

Найдём уравнение адиабаты вещества из третьего пункта. Из условия следует, что $U = 3PV$. Уравнение адиабаты в таком случае не будет отличаться от такового для многоатомного идеального газа:

$$0 = \delta Q = PdV + dU = PdV + 3d(PV)$$

Тогда показатель адиабаты $\gamma = \dfrac{4}{3}$, а мы уже знаем, что это соответствует безразличному равновесию. Получается, такая планета не должна быть устойчивой и при малейшей флуктуации должна распасться.

Комментарий о физическом смысле задачи

Вы не поверите, но этот тур - классическая астрофизическая задача и изначально она формулируется для звёзд. Условие $\gamma > \frac{4}{3}$ действительно необходимо для механической устойчивости звёзды. Здесь нужны несколько пояснений.

1. Устойчивость к «дыханию», которую мы разбирали в задаче, означает устойчивость к флуктуациям объёма, которые постоянно происходят в звезде как минимум из-за теплового движения частиц.

2. Вас может смутить, что условие устойчивости к гомотетическим колебаниям мы выдали за условие общей устойчивости. На это ответим, что можно честно рассчитать условие на γ из того, что суммарная энергия равновесной звезды должна быть отрицательна. Результат получается аналогичный.

3. Также многих смущало, что «дыхание» адитабатично. И правда, как минимум, нагретое тело должно излучать. Здесь важны две вещи. Во-первых, если говорить про звёзды, то их излучение почти идеально скомпенсировано энерговыделением при термоядерных реакциях в ядре. Во-вторых, вопрос адиабатичности часто сводится к вопросу скорости: быстрые процессы можно считать адиабатическими. Для звёзд обычно выделяют три характерных масштаба времени:

   t_N — ядерное время, или время, за которое «сгорит» весь доступный звезде водород. Для Солнца это порядка 10 млрд лет.

   t_T — тепловое время, или время, за которое звезда излучила бы всю свою тепловую энергию при современной светимости. Для Солнца это порядка 10 млн лет.

   t_H — гидродинамическое время, или время, которое понадобится звезде для «схлопывания», если отключить силы давления. Для Солнца это порядка получаса.

   Соотношение $t_N \gg t_T \gg t_H$ выполняется для любой звезды, и поэтому излучением можно пренебрегать при любых механических процессах.

4. В реальности, конечно, для расчёта условий механической устойчивости звезды, нужно учитывать общую теорию относительности. Это на порядок сложнее, но для общего развития полезно знать лишь, что учёт общей теории относительности увеличивает критическое значение γ на величину порядка $\dfrac{GM}{Rc^2}$, где M — масса звезды, R — её радиус, а c — скорость света. Таким образом, поправка обычно мала, но всегда положительна.

Теперь, понимая, о чём был тур, посмотрим ещё раз на отдельные задачи в нём.

Спорная планета

Пористый материал в первой задаче можно заменить на любой устойчивый газ, и задача практически не поменяется. По сути мы доказали, что добавка устойчивого газа может стабилизировать конструкцию из неустойчивого. По этой причине, например, в атмосфере Земли может устойчиво присутствовать водяной пар или углекислый газ. Заметьте, что самой планеты для этого недостаточно: важно, чтобы устойчивое вещество располагалось там же, где и неустойчивый газ, иначе в области неустойчивого газа $M_{\text{примеси}}$ не будет зависеть от r и предыдущие рассуждения станут неверными.

Горячая планета

Вторая задача объясняет сразу несколько фактов.

1. Конечно, двухатомный газ имеет слабое отношение к звёздам, а тем более к их недрам: на таких температурах химические связи разрушаются. Однако теплоёмкость звездного вещества тоже может зависеть от температуры напрямую или кос-

венно: через давление, плотность, степень ионизации и т.п. Поэтому вопрос устойчивости реальных звёзд сложнее чем «посчитаем атомы в молекуле».

2. Неустойчивые облака скорее склонны к коллапсу, чем к разлёту: при расширении температура падает и это может вернуть системе устойчивость.

3. Обычно коллапс прекращается, когда вещество в центре испытывает фазовый переход: часто при этом повышается его упругость. Так образуются нейтронные звёзды, белые карлики и даже планеты. Впрочем, стоит сказать, что теоретически возможна ситуация, когда фазовый переход в ядре наоборот является причиной коллапса.

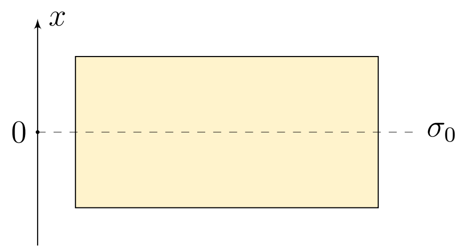
Тайная планета

Третья задача - классический пример на устойчивойсть звёзд. Уравнения состояния, данные в условии, описывают газ фотонов. Получается, мы доказали, что не может существовать устойчивой звезды из фотонного газа, то есть света. Разумеется, более честное доказательство должно включать элементы общей теории относительности, но результат получается такой же: звёзд из света существовать не может. А представьте, какой интересный это мог бы быть объект...

Альтернативная задача

1. *(0 баллов)* Ускорение свободного падения на поверхности планеты из несжимаемой жидкости равно $a = 9,8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Найдите давление в центре планеты.

2. *(0 баллов)*



Рассмотрим узкий слой вещества толщиной Δx и площадью S такой, что с одной стороны он нагрет до температуры T_1, а с другой – до температуры T_2. Мощность, равная количеству теплоты, которое передается за небольшой интервал времени Δt от одной поверхности другой, равна:

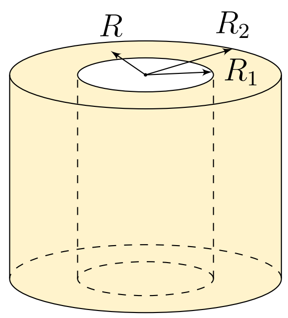
$$P = \frac{\varkappa}{\Delta x} S(T_2 - T_1),$$

где $\varkappa$ – **коэффициент теплопроводности**.

Ножка парты из материала с переменной теплопроводностью имеет форму цилиндра радиусом R_2 с вырезанным из него цилиндром радиусом R_1. Теплопроводность зависит от радиуса как

$$\varkappa(R) = \varkappa_1 \cdot \frac{R^2}{R_1^2}.$$

Цилиндры R_1 и R_2 поддерживаются при температурах T_1 и T_2 соответственно. Найдите распределение $T(R)$.



3. *(0 баллов)* Точка K - это точка на PV-диаграмме, описывающая состояние постоянного количества одноатомного идеального газа. Угол наклона изотермы в этой точке к оси V равен α. Каков угол наклона адиабаты в этой точке к оси V?

4. *(3 балла)* Ёжик ходил по физической лаборатории и нашел интересную установку. Установка представляет из себя горизонтальную теплоизолированную цилиндрическую трубку, внутри которой находятся два металлических поршня, подключенных к источнику постоянного напряжения. Между поршнями находится идеальный одноатомный газ. Напряжение источника U, расстояние между поршнями d. Ёжик захотел обозначать $P_{\text{г}}$ давление на поршни, вызванное идеальным газом, и $P_{\text{эл}}$ давление на поршни, вызванное электрическим взаимодействием друг с другом. Ёжику

известно, что в некоторый момент времени $d = d_1$, $P_{эл} = P_{эл_1}$ Считайте, что $d \ll R$, где R - радиус цилиндра. Трением поршней о стенки сосуда, атмосферным давлением и теплом в подводящих проводах пренебречь.

(a) *(1 балл)* Помогите, пожалуйста, Ёжику найти расстояние между поршнями d_0 в положении равновесия.

(b) *(1 балл)* Ёжик захотел построить графики зависимости $P_г(d)$ и $P_{эл}(d)$, но у него лапки. Сделайте это за него.

(c) *(1 балл)* Помогите Ёжику понять, будет ли положение равновесия, найденное в пункте 1 устойчивым?

5. *(8 баллов)* Прогуливаясь на слоне, Ёжик обнаружил Плоский Мир. Плоский Мир представляет собой тонкую бесконечную однородную пластину с поверхностной плотностью σ_0. Атмосфера Плоского Мира представляет собой два симметричных слоя одноатомного газа по обе стороны от пластины.

(a) *(2 балла)* Найдите зависимость ускорения свободного падения в атмосфере Плоского Мира в зависимости от расстояния x до Плоского Мира. Считайте известной функцию $\sigma(x)$ (на картинке).

(b) *(1 балл)* Выразите равновесный градиент давления $\dfrac{dP}{dx}$ через $\rho(x)$ и $\sigma(x)$.

(c) *(2 балла)* Выразите градиент давления по массе $\dfrac{dP}{d\sigma}$.

(d) *(1 балл)* Найдите давление газа на поверхности Плоского мира, если известна его суммарная поверхностная плотность $\sigma(x_{\max})$.

(e) *(1 балл)* Укажите, устойчива ли атмосфера Плоского Мира к дыханию?

Решение альтернативной задачи

1. Ускорение свободного падения в зависимости от расстояния до центра x:

$$g(x) = \frac{GM(r)}{r^2}$$

$$M(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

где ρ - плотность планеты.

$$g(x) = \frac{4\pi G\rho}{3}x$$

Тогда давление в центре планеты:

$$p = \int\limits_0^R \rho g(x)dx = \frac{2\pi G\rho^2 R^2}{3}$$

С учётом $a = \frac{4}{3}\pi G\rho R$ окончательно получаем:

$$p = \frac{3a^2}{8\pi G}$$

2. Рассмотрим тонкостенный цилиндр высотой H, радиусом R, толщиной dR. Пусть на его внутренней поверхности температура T, на внешней $T + dT$. Тогда поток тепла через него:

$$P = \frac{dT}{dR}\varkappa S.$$

Площадь поверхности цилиндра равна $S = 2\pi RH$. Тогда:

$$P = \frac{dT}{dR}\varkappa \cdot 2\pi RH = \frac{dT}{dR}\varkappa_1 \frac{R^2}{R_1^2} \cdot 2\pi RH.$$

С другой стороны, в стационарном состоянии $P = \text{const}$. Тогда:

$$\frac{PdR}{R^3} = \frac{\varkappa_1 2\pi H \cdot dT}{R_1^2}.$$

Проинтегрируем данное выражение от R_1, T_1 до R_x, T_x:

$$P\int\limits_{R_1}^{R_x} \frac{dR}{R^3} = \frac{\varkappa_1 2\pi H \cdot}{R_1^2}\int\limits_{T_1}^{T_x} dT$$

$$-2P\left(\frac{1}{R_x^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) = \frac{\varkappa_1 2\pi H}{R_1^2}(T_1 - T_x)$$

откуда, подставив R_2, T_2:

$$P = \frac{\varkappa_1 \pi H R_1^2 R_2^2 (T_1 - T_2)}{R_2^2 - R_1^2}$$

Если $P > 0$, то тепло передается от T_2 к T_1. Если $P < 0$ — от T_1 к T_2. Отсюда легко получить $T(R)$:

$$\frac{\varkappa_1 \pi H R_1^2 R_2^2 (T_1 - T_2)}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{\varkappa_1 \pi H R_1^2 R^2 (T_1 - T(R))}{R^2 - R_1^2}$$

$$\frac{R_2^2 (T_1 - T_2)}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{R^2 (T_1 - T(R))}{R^2 - R_1^2}$$

$$T(R) = T_1 - \frac{R_2^2 (R^2 - R_1^2)(T_1 - T_2)}{R^2 (R_2^2 - R_1^2)}$$

3. Пусть (P_0, V_0) - координаты точки K на PV - диаграмме. Тогда уравнения изотермы и адиабаты, проходящих через эту точку $PV = P_0 V_0$ и $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$ соответственно. Тангенсы углов наклона касательных к изотерме и адиабате в точке K:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dP}{dV}\right)_T = -\frac{P_0 V_0}{V_0^2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \left(\frac{dP}{dV}\right)_Q = -\gamma \frac{P_0 V_0^\gamma}{V_0^{\gamma+1}}$$

Разделив одно на другое, получаем ответ:

$$\beta = \operatorname{arctg} \gamma \operatorname{tg} \alpha$$

4. Так как сосуд теплоизолирован, то параметры $P_\text{п}$ и V удовлетворяют уравнению адиабаты:

$$P_\text{г} V^{\frac{5}{3}} = P_{\text{г}1} V_1^{\frac{5}{3}}$$

$$P_\text{г} d^{\frac{5}{3}} = P_{\text{г}1} d_1^{\frac{5}{3}}$$

$$P_\text{г}(d) = P_{\text{г}1} \frac{d_1^{\frac{5}{3}}}{d^{\frac{5}{3}}}$$

Так как выполнено условие $d \ll R$, то поршни можно считать плоским конденсатором. Посчитаем силы, с которыми притягиваются пластины плоского конденсатора. $E = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$, где q - заряд одной обладки. Тогда сила, действующая на одну пластину $F = \dfrac{Eq}{2}$ (делим пополам, потому что вклад в поле вносят обе пластины, но при подсчёте силы нас интересует лишь поле одной пластины).

$$F = \frac{q^2U^2}{2\varepsilon_0 S}, \quad q = CU, \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$F = \frac{\varepsilon_0^2 S^2 U^2}{2\varepsilon_0 d^2 S} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2},$$

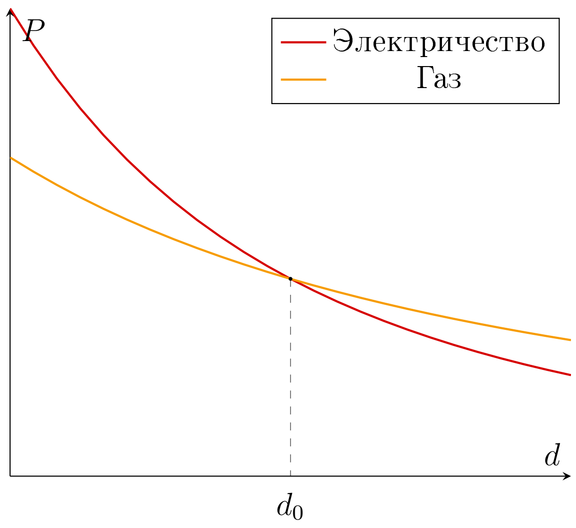
тогда

$$P_{\text{эл}} = \frac{F}{S} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2}$$

Соответственно, в положении равновесия $P_{\text{эл}} = P_{\text{г}}$

$$\frac{\varepsilon_0 U^2}{2d_0^2} = P_{\text{г}1}\frac{d_1^{\frac{5}{3}}}{d_0^{\frac{5}{3}}}$$

$$d_0 = \left(\frac{\varepsilon_0 U^2}{2P_{\text{г}1} d_1^{\frac{5}{3}}}\right)^3$$



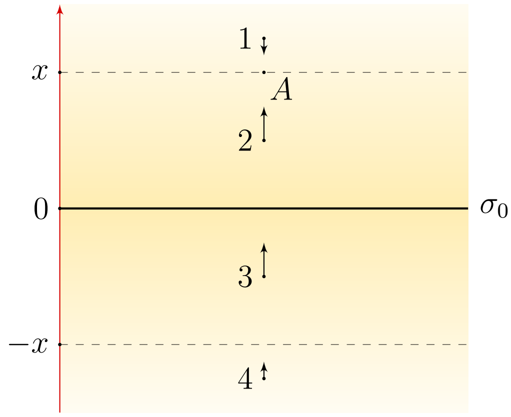
Ка видно из графиков, при малом увеличении d $P_{\text{г}} > P_{\text{эл}}$ и система стремится расшириться, аналогично при малом уменьшении d $P_{\text{г}} < P_{\text{эл}}$ и система стремится сжаться. Следовательно, равновесие неустойчиво.

5. (a) Сначала рассчитаем ускорение свободного падения, создаваемое пластиной. Поскольку закон всемирного тяготения имеет тот же вид, что и закон Кулона, эта задача аналогична вопросу об электрическом поле бесконечной заряженной пластины. Тогда очевидно:

$$g_{\sigma 0}(x) = 2\pi G\sigma_0$$

Ускорение свободного падения, создаваемое плоскостью, не зависит от расстояния до неё.

Теперь поймём, какое гравитационное поле создаёт газ в точке с произвольной координатой. Разделим газ на несколько областей:



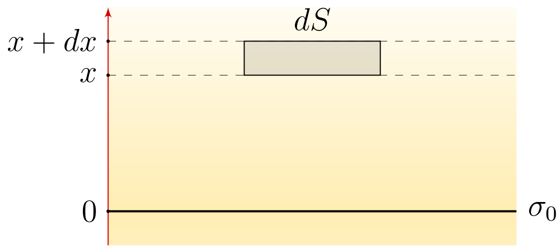
Из симметрии задачи очевидно, что воздействие первой и четвёртой областей будут компенсироваться, а второй и третьей - складываться, причём между собой они равны. То есть $g_{\text{газ}} = 2g_2$. Поле g_2 можно найти, разбив вторую область на тонкие слои тощиной dx_1 и поверхностной плотностью $\rho(x_1)dx_1$. Тогда:

$$\int_0^x dg(x_1) = 2\pi G \int_0^x \rho(x_1)\,dx_1 = 2\pi G\sigma(x)$$

Итого:

$$g(x) = 2\pi G(\sigma_0 + 2\sigma(x))$$

(b) Рассмотрим малый объём газа с площадь dS, толщиной dx и координатой x:



Сумма сил, действующих на этот газ, должна быть равна нулю:

$$P(x+dx)dS - g(x)dm - P(x)dS = 0(P(x) - P(x+dx))dS = g(x)dm$$

Используя $dm = \rho(x)dSdx$ и ранее полученную формулу для $g(x)$, получаем:

$$\frac{dP}{dx} = -2\pi G\rho(x)(\sigma_0 + 2\sigma(x))$$

(c) Свяжем переменные x и σ:

$$d\sigma = \rho dx \Rightarrow dx = \frac{d\sigma}{\rho}$$

Подставим в уравнение градиента давления:

$$\frac{dP}{d\sigma} = -2\pi G(\sigma_0 + 2\sigma)$$

(d) Проинтегрируем уравнение из предыдущего пункта от нижней границы атмосферы до верхней:

$$\int\limits_{P_{\text{низ}}}^{P_{\text{верх}}} dP = \int\limits_{\sigma_{\text{низ}}}^{\sigma_{\text{верх}}} -2\pi G(\sigma_0 + 2\sigma)\, d\sigma$$
$$P_{\text{верх}} - P_{\text{низ}} = -2\pi G(\sigma_0(\sigma_{\text{верх}} - \sigma_{\text{низ}}) + \sigma_{\text{верх}}^2 - \sigma_{\text{низ}}^2)$$

Заметим, что $P_{\text{верх}} = 0$, а также $\sigma_{\text{низ}} = 0$. Тогда:

$$P_{\text{низ}} = 2\pi G(\sigma_0\sigma_{\max} + \sigma_{\max}^2)$$

(e) Заметим, что интегрирование в четвёртом пункте не обязательно проводить до $\sigma_{\max}$. Значит, равновесное давление произвольного кусочка газа зависит только от массы газа под ним. При «дыхании» слои не перемешиваются, поэтому для любой малой порции газа равновесное давление не меняется. При этом, если газ расширяется, то его фактическое давление падает, то есть становится недостаточным для сопротивления гравитации. Значит, на атмосферу действует возвращающая сила и равновесие устойчивое. Случай сжатия рассматривается аналогично.