Инвариант

1. На доске записано 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Вам предлагается 14 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркнуть любые два числа и если они одинаковые, то допишите к оставшимся числам нуль, а если разные, то единицу. Какое число останется на доске?
2. На доске написаны числа от 1 до 125. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них остаток от деления их суммы на 11. Какое однозначное число останется на доске?
3. Круг разбит на 6 равных секторов, в каждом из которых расставлены числа 0, 1, 2, 0, 2 и 1 (в указанном порядке). Разрешается за ход одновременно прибавлять одно и то же число к двум стоящим рядом числам. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все числа, стоящие в секторах, были равны?
4. Круг разбит на 6 равных секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?
5. На плоскости расположено 13 шестеренок, соединенных по цепочке. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно? А если шестеренок 14?
6. Три кузнечика играют на прямой в чехарду. Каждый раз один из них прыгает через другого (но не через двух сразу!). Могут ли они после 1991 прыжка оказаться на прежних местах?
7. Числа 1, 2, 3,……,n расположены в некотором порядке. Разрешается менять местами любые два рядом стоящих числа. Докажите, что если проделать нечётное число таких операций, то наверняка получится отличное от первоначального расположение чисел 1, 2, 3,…,n.
8. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 19, 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число a) $a + b – 1$, b) $ab + a + b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?
9. На доске написано 8 плюсов и 13 минусов. Разрешается стирать любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак останется после выполнения 20 таких операций?
10. 2021 человек выстроились в шеренгу. Можно ли расставить их по роту, если разрешается переставлять только двоих людей, стоящих через одного?
11. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $a + 1$ и $b + 1$; второй по карточке с четными числами a и b выдает карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами a, b и b, c выдает карточку с числами a, c. Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки (5, 19) получить карточку (1, 2020)?
12. На доске написано число 8 в степени 2021. У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр, и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число?
13. В пробирке находятся марсианские амебы трех типов: *A*, *B* и *C*. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба. Каков ее тип, если в начале амеб типа *A* было 20 штук, типа *B* - 21 штука и типа *C* - 22 штуки?

14. Докажите, что выпуклый 13-угольник нельзя разрезать на параллелограммы.
15. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7 в степени 1998. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 1998 в степени 7?
16. Вокруг поляны стоят 12 домиков, покрашенных в белый и красный цвет, в которых поселилось 12 гномов. У каждого гномика нечетное число друзей. В январе первый гном красит свой дом в тот цвет, в который окрашены большинство домов его друзей. В феврале это делает второй (по часовой стрелке) и т.д. Докажите, что наступит момент, после которого цвет дома у каждого гнома перестанет меняться.

Раскраски

1. На каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного жука, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Докажите, что при этом незанятых клеток будет не меньше 9.
2. Докажите, что шахматную доску 8х8 невозможно покрыть 15 Г-тетрамино и 1 квадратным тетрамино.
3. Можно ли шахматную доску 8х8 с вырезанным полем покрыть плитками размером 1х3 клетки?
4. В таблице 3х3 угловая клетка закрашена чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.
5. Дно прямоугольной коробки было вымощено прямоугольными плитками 1х4 и 2х2. Плитки высыпали из коробки, и одна плитка 2х2 потерялась. Её заменили на плитку 1х4. Докажите, что теперь дно коробки вымостить не удастся.
6. Фигура "верблюд" ходит по доске 10 × 10 ходом типа (1, 3) (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа (1, 2)). Можно ли пройти ходом "верблюда" с какого-то исходного поля на соседнее с ним?
7. Можно ли доску размерами 4 × N обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернуться на исходное поле?

   Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить три его грани, имеющие общую вершину, 16 бумажными прямоугольными полосками размером 1×3?