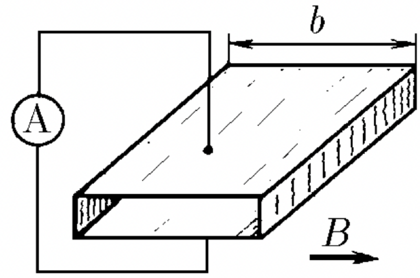
Сила Ампера. Часть №3. Эксклюзив

Задачи из mathus

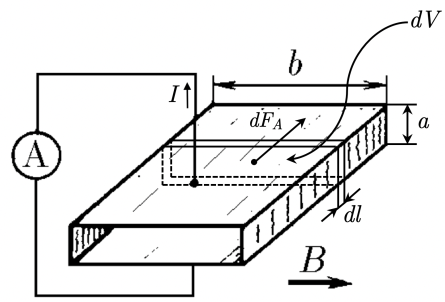
Задача 13

В трубе прямоугольного сечения $a \times b$ находится газ плотности ρ. Вертикальные стенки трубы — изоляторы, горизонтальные — электроды. В одном из концов трубы зажигают разряд, после чего ток I поддерживается постоянным. Возникшая область горения разряда магнитными силами вталкивается внутрь трубы, «сгребая» перед собой газ. Определите установившуюся скорость плазменной «пробки», считая, что она все время больше скорости звука в газе. Магнитное поле индукции B перпендикулярно вертикальным стенкам трубы.



Решение:

Пусть ток течет по часовой стрелке (см. рис). Рассмотрим маленький объём dV в трубе с площадью $S = a \cdot b$ и толщиной dl. Масса газа в этом объёме равна:



$$dm = \rho \cdot dV = \rho ab \cdot dl$$

Вектор силы Ампера $d\vec{F}_A$, действующая на эту массу, будет направлен вдоль трубки. Сила Ампера равна:

$$dF_A = B \cdot I \cdot \frac{a}{2}$$

Почему $\frac{a}{2}$? Так как молекула газа одна находится уже у верхней пластины, т.е. электрон с нее моментально упадет на пластину. А другая молекула находиться находиться у другой пластины, и ей надо пройти путь a. И двигаясь вниз от верхней к нижней, мы будем находить пары у которых одинаковое расстояние до центра между пластинами. В итоге, просуммировав расстояния и поделив на количество электронов получим среднее расстояние $\frac{a}{2}$.

Работа силы δA_{F_A} равна:

$$\delta A_{F_A} = dF_A \cdot dl = \frac{B}{2} \cdot I \cdot a \cdot dl$$

Она же равна кинетической энергии газа:

$$\delta A_{F_A} = \frac{B}{2} \cdot I \cdot a \cdot dl = E_{\text{кин}} = \frac{dm \cdot v^2}{2} = \frac{\rho ab \cdot dl \cdot v^2}{2}$$

Отсюда скорость плазменной «пробки» равна:

$$v = \sqrt{\frac{BI}{\rho b}}$$

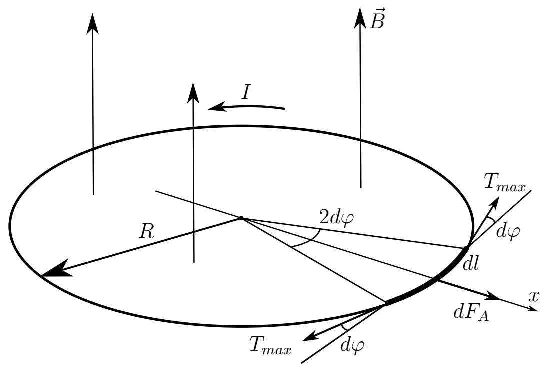
Задача 10

Из медной проволоки с площадью сечения S сделано кольцо радиусом R, по которому течет ток I. Кольцо помещается в однородное магнитное поле так, что его ось совпадает с направлением линий магнитной индукции. Найдите максимальное значение индукции B магнитного поля, при которой кольцо не разорвется, если прочность меди на разрыв равна σ (этот параметр равен отношению силы, которая требуется для разрыва проволоки, к площади её поперечного сечения).

Решение:

Направим ток по кольцу по часовой стрелке. Тогда, чтобы кольцо растягивалось, направим магнитное поле $\vec{B}$ вниз вдоль оси кольца. По условию σ равна:

$$\sigma = \frac{T_{max}}{S} \qquad \text{и} \qquad T_{max} = S\sigma$$



Рассмотрим маленький кусочек проволки сектора с углом $2 \cdot d\varphi$ у кольца (см. рис.). На кусочек действует сила Ампера dF_A и две силы натяжения проволоки T_{max} в предельном случае. Тогда, спроецировав силы на ось, направленную через центр кольца, получим:

$$dF_A = 2T_{max} \cdot \sin d\varphi = 2T_{max} \cdot d\varphi \qquad (d\varphi \text{ — очень маленький угол})$$

Также сила dF_A равна:

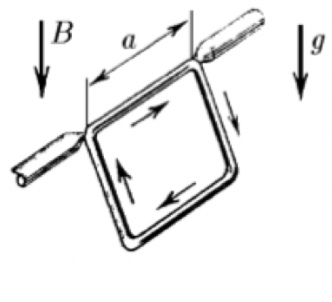
$$dF_A = IB_{max} \cdot dl = IB_{max} \cdot R \cdot 2d\varphi,$$

где dl — длина кусочка проволоки. Приравняем два выражения друг к другу и найдём B_{max}:

$$2IB_{max}Rd\varphi = 2\sigma S d\varphi \;\Rightarrow\; B_{max} = \frac{S\sigma}{IR}$$

Задача 20

Квадратная рамка с током закреплена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтально расположенной стороны. Рамка находится в вертикальном однородном магнитном поле индукции B. Угол наклона рамки к горизонту α, её масса m, длина стороны a. Найдите ток в рамке.



Решение:

Площадь квадратной рамки равна a^2. Магнитный момент $\vec{\mu}$ рамки равен:

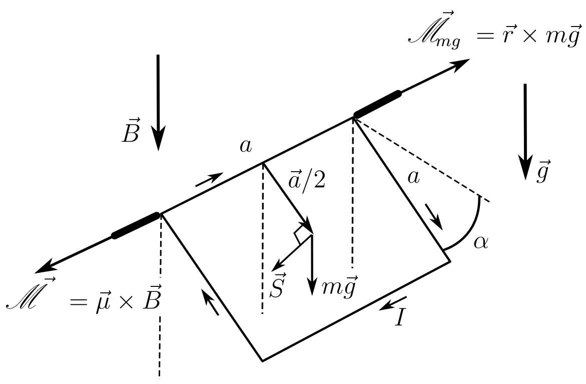
$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{S},$$

где $\vec{S}$ — вектор площади рамки, который направлен перпендикулярно поверхности рамки в направлении, которое можно найти по правилу «буравчика» (см. рис.). Момент магнитного поля в рамке равен:

$$\vec{\mathscr{M}} = (\vec{\mu} \times \vec{B}) = I \cdot \vec{S} \times \vec{B}$$

По модулю он равен:

$$\mathscr{M} = IBS\sin\alpha$$



Момент силы тяжести равен:

$$\vec{\mathscr{M}}_{mg} = \frac{\vec{a}}{2} \times m\vec{g}$$

По модулю он равен:

$$\mathscr{M}_{mg} = mg \cdot \frac{a}{2}\sin(90^\circ - \alpha)$$

Так как рамка должна находиться в покое, то сумма векторов моментов равна нулю:

$$\sum_i \vec{\mathscr{M}}_i = 0$$

$$\vec{\mathscr{M}} + \vec{\mathscr{M}}_{mg} = 0$$

Спроецируем вектора моментов на ось вращения:

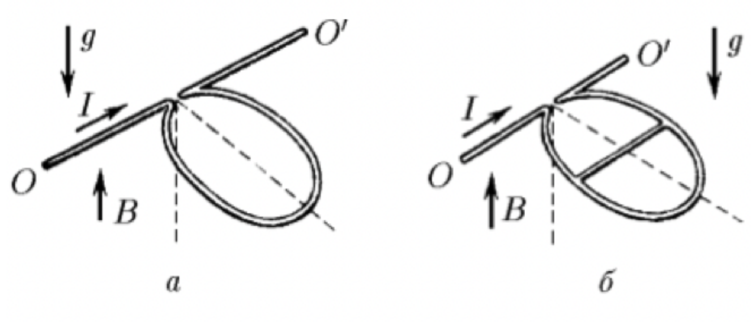
$$IBS\sin\alpha - mg \cdot \frac{a}{2}\sin(90^\circ - \alpha) = 0$$

Находим ток I:

$$I = \frac{mg}{2Ba}\operatorname{ctg}\alpha$$

Задача 24

а) Проволочная рамка в виде окружности с током может вращаться вокруг горизонтальной оси OO'. Масса единицы длины проволоки ρ, ток в рамке I. Рамка находится в магнитном поле индукции B, направленном вдоль поля тяжести. Определите угол отклонения плоскости окружности от вертикали.
б) Проволочная рамка в виде окружности имеет по диаметру проволочную перемычку, параллельную горизонтальной оси OO', вокруг которой рамка может вращаться. Масса единицы длины рамки и перемычки одинакова и равна ρ. Ток, входящий в рамку, равен I. Рамка находится в магнитном поле индукции B, направленном параллельно полю тяжести. На какой угол от вертикали отклонится рамка?

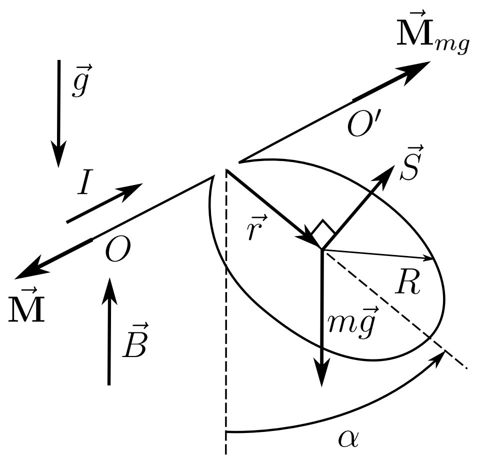


Решение:

а) Пусть радиус рамки равен R. Тогда масса рамки равна $m = \rho \cdot 2\pi R$. Направим вектор площади $\vec{S}$ перпен-дикулярно поверхности рамки вверх, так как ток I идёт против часовой стрелки (правило «буравчика»). Найдем момент магнитного поля $\vec{\mathbf{M}}$ и момент силы тяжести $\vec{\mathbf{M}}_{mg}$:

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{mg} = \vec{r} \times m\vec{g}$$



Найдем момент магнитного поля по модулю:

$$\mathbf{M} = I \cdot S \cos\alpha \cdot B = I \cdot \pi R^2 \cos\alpha \cdot B$$

Найдем момент силы тяжести по модулю:

$$\mathbf{M}_{mg} = r \sin\alpha \cdot mg = R \sin\alpha \cdot 2\pi R\rho \cdot g$$

Так как вектора моментов направлены в противоположные стороны и рамка должна быть в состоянии покоя, то:

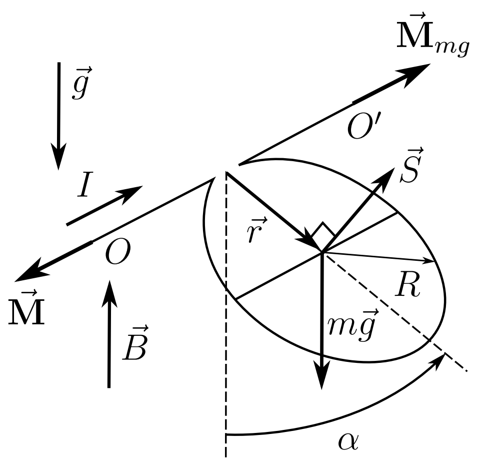
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{mg}$$

$$I \cdot \pi R^2 \cos\alpha \cdot B = R \sin\alpha \cdot 2\pi R\rho \cdot g$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{IB}{2\rho g}$$

б) Заметим, что добавилась перемычка на диаметре рамки, а значит ток будет расходиться в точке A и сходиться в точке B (см. рис.). Найдем ток в перемычке. Пусть в точке C течет ток I_0. Так как напряжения на перемычке AB и ACB равны, то:

$$I_0 \cdot \lambda \cdot \pi R = I_{AB} \cdot \lambda \cdot 2R,$$



где λ — погонное удельное сопротивление [Ом/м]. Тогда ток в перемычке AB равен $I_{AB} = \frac{\pi}{2} I_0$. Теперь найдем магнитные моменты $\vec{\mu}_1$ и $\vec{\mu}_2$, рассматривая два контура по отдельности: зелёный и красный соответственно.

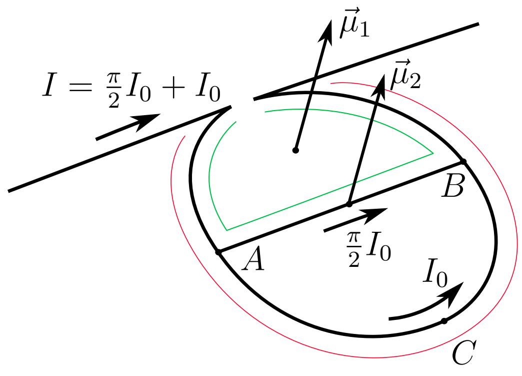
По зелёному контуру идёт ток $\frac{\pi}{2} I_0$. Тогда:

$$\vec{\mu}_1 = \frac{\pi}{2} I_0 \cdot \frac{\vec{S}}{2}$$

По зелёному контуру идёт ток I_0. Тогда:

$$\vec{\mu}_1 = I_0 \cdot \vec{S}$$

Найдем общий магнитный момент $\vec{\mu}$ рамки:



$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_1 = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) I_0 \cdot \vec{S}$$

Момент силы Ампера равен:

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) I_0 \cdot \vec{S} \times \vec{B}$$

Момент силы тяжести $\vec{\mathbf{M}}_{mg}$ равен:

$$\vec{\mathbf{M}}_{mg} = \vec{r} \times m\vec{g}$$

Найдём их значения по модулю:

$$\mathbf{M} = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) I_0 \cdot \pi R^2 \cdot B\cos\alpha$$

$$\mathbf{M}_{mg} = (2\pi R + 2R)\rho \cdot g \cdot R\sin\alpha$$

Так как $\vec{\mathbf{M}}$ и $\vec{\mathbf{M}}_{mg}$ направлены в противоположные стороны, и рамка должна быть в состоянии покоя, то эти моменты равны (по модулю):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{mg}$$

$$\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) I_0 \cdot \pi R^2 \cdot B\cos\alpha = (2\pi R + 2R)\rho \cdot g \cdot R\sin\alpha$$

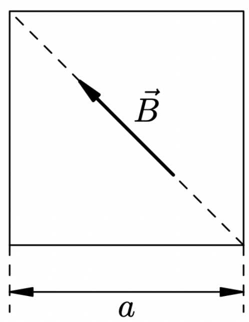
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(\pi+4)\pi \cdot I_0 B}{(\pi+1)\cdot 8\rho g}$$

Так как $I = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) I_0$, то обратно заменим I_0 на I:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(\pi+4)\pi}{(\pi+1)} \cdot \frac{2I}{(\pi+2)} \cdot \frac{B}{8\rho g} = \frac{(\pi+4)\pi}{(\pi+1)(\pi+2)}\frac{IB}{4\rho g}$$

Задача 28

На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жёсткая тонкая квадратная рамка из однородного куска проволоки со стороной, равной a. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого параллельны одной из диагоналей квадрата рамки (см. рисунок). Масса рамки m, величина индукции B. Какой силы ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин квадрата?



Решение:

Пусть ток I будет идти по часовой стрелке (см. рис.). Тогда вектор $\vec{S}$ площади будет направлен от нас по правилу «буравчика» («винта»). И магнитный момент $\vec{\mu}$ будет тоже направлен от нас:

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{S}.$$

Момент $\vec{\mathbf{M}}$ силы Ампера будет равен:

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B}.$$

А по модулю он равен:

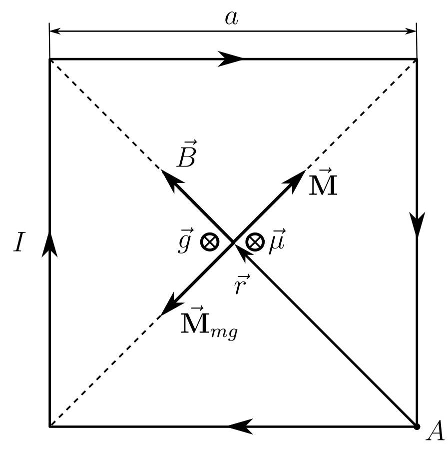
$$\mathbf{M} = I \cdot a^2 \cdot B$$

Тогда, чтобы квадратная рамка оставалась в покое, нужно направить момент $\vec{\mathbf{M}}_{mg}$ силы тяжести, равный по модулю моменту $\vec{\mathbf{M}}$ силы Ампера, в противоположную сторону. Тогда радиус вектор $\vec{r}$ будет отсчитываться от точки A. На эту точку и будет опираться рамка. Момент силы тяжести равен:

$$\vec{\mathbf{M}}_{mg} = \vec{r} \times m\vec{g},$$

и по модулю он равен:

$$\mathbf{M}_{mg} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot mg.$$



Чтобы рамка оставалась в состоянии покоя, моменты сил должны быть равны:

$$\mathbf{M}_{mg} = \mathbf{M}$$

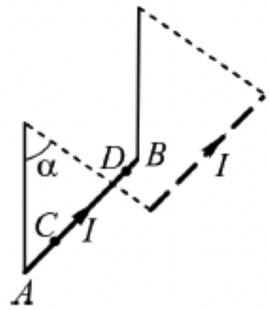
$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot mg = I \cdot a^2 \cdot B$$

Находим силу тока I из равенства:

$$I = \frac{mg}{aB\sqrt{2}}$$

Задача 6

Тяжёлый металлический стержень AB подвешен в горизонтальном положении на двух лёгких вертикальных проводах в лаборатории, где в некотором объёме создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Участок CD стержня всё время находится в магнитном поле, а провода-подвески — вне поля. В первом опыте на стержень подали напряжение, и в нём очень быстро возник ток силой I. Максимальный угол, на который подвески стержня отклонились от вертикали, был при этом равен $\alpha = 60°$. Во втором опыте силу тока через стержень плавно увеличивали от нуля до того же значения I. На какой угол β отклонились подвески во втором опыте?



Решение:

На стержень действуют(см. рис.): сила тяжести $m\vec{g}$ сила натяжения проводов $\vec{T}$ и сила Ампера $\vec{F}_A$, направленная горизонтально и по модулю равная

$$F_A = BlI$$

Силы Ампера, действующие на два провода подвеса, не учитываем, поскольку они взаимно компенсируются (проверьте это, определив направление сил). При отклонении подвеса, длину которого обозначим l_1, на максимальный угол α сила F_A совершит работу

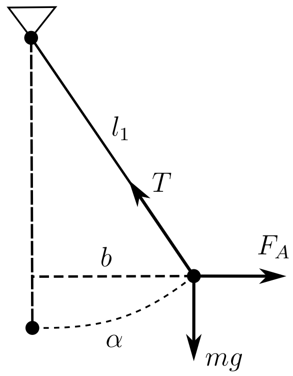
$$F_A b = BlIl_1 \sin\alpha,$$

которая пойдет на увеличение потенциальной энергии стержня в поле сил тяжести:

$$BlIl_1 \sin\alpha = mgl_1 (1 - \cos\alpha).$$

Записывая

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \qquad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$



найдем угол максимального отклонения:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{BlI}{mg}$$

Угол отклонения β, соответствующий равновесному положению, определяется из условия

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A = 0$$

которое в проекции на направление, перпендикулярное проводам подвеса, дает

$$mg\sin\beta - F_A\cos\beta = 0$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{F_A}{mg} = \frac{BlI}{mg}$$

Тогда:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$