Памятка юного экспериментатора

В данной памятке мы попытались кратко и ёмко описать большинство деталей экспериментальной работы. Конечно, все моменты в таком формате отразить не получилось, поэтому крайне рекомендуем дополнительно изучить:
культуру построения графиков (М. Ю. Замятнин)
искусство использования калькулятора
книга «экспериментальный тур» (А.И. Слободянюк)
как пользоваться калькулятором? При обнаружении неточностей писать Лёше или Кириллу. Успехов!

Отделение физики ОШ

Перед олимпиадой

1. Покушать.
2. Проверить калькулятор.
3. Взять запасные батарейки для калькулятора.
4. Взять письменные принадлежности (линейка обязательно).

По приходе на эксперимент

1. Пока не выдали условие, *не трогайте оборудование*, чтобы ничего не сломать.
2. Прочитайте условие.
3. Сразу после прочитайте условие *ещё раз*!
4. Проверьте оборудование. То, которое вам выдали, с тем, что указано в условии.

Про оформление

Замечание. Если у вас плохой почерк - пишите печатными буквами.

1. Работа должна быть структурирована. Разбейте все на пункты. В начале которых дайте краткое пояснение, что в нем происходит. Например

   - Снимем зависимость x(t), для этого...
   - Запишем результаты в таблицу и построим график...
   - По углу наклона найдем...
   - Сделаем вывод о...

В ваших интересах написать так, чтобы проверяющий понял, что вы делаете. Любая неточность и необоснованность будет использовано против вас. Апелляция проводится всегда *по написанному*, так что в вашей работе не должно остаться *«ну это и так понятно»* или *«я это подразумевал»*. Помните об этом.

2. Делайте большие поясняющие рисунки. Хороший рисунок к установке сэкономит как ваше время, так и проверяющего. Гораздо быстрее нарисовать и подписать, чем словесно все описывать.

3. Всю необходимую теорию выводите подробно.

4. Промежуточные и финальные ответы не лишнем будет обвести в рамочку.

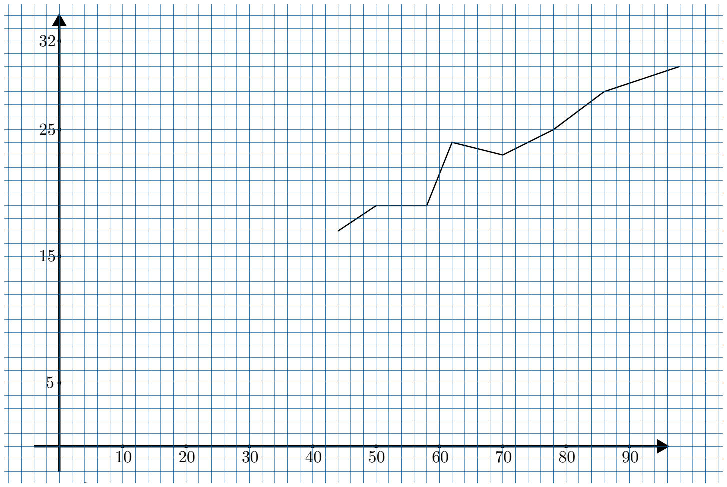
5. И на финалочку — вывод. Например

   «Построив график $\ln(x)$ от $\ln(t)$, мы определили, что $\operatorname{tg}\alpha = 2$, следовательно, можно сделать вывод о том, что $x \propto t^2$».

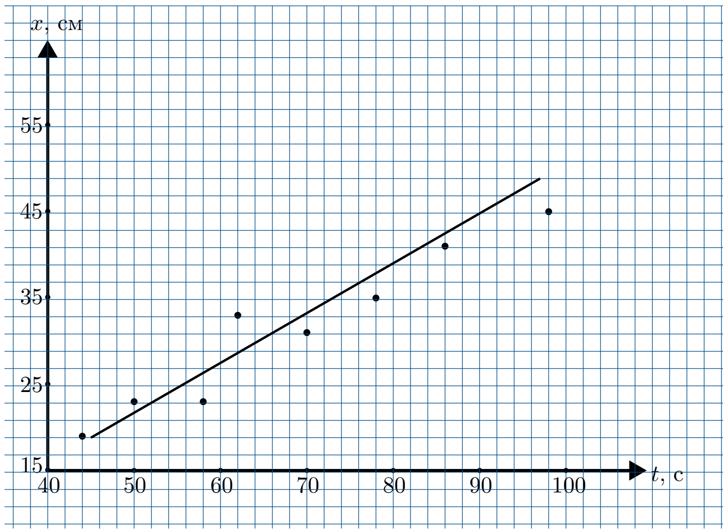
Замечание. Ваша работа **всегда** должна удовлетворять следующему утдверждению:
«Если дать ваш прак *любому* Пете, то он должен понять, что вы делали, какие величины измеряли. Каким методом и какие результаты получили. А самое главное, этот Петя должен смочь повторить ваш эксперимент и получить схожие с вашими значениями»

Про измерения

1. Чем их больше, тем лучше.
2. Табличка должна быть ровная.
3. Обычное количество измерений - круглые значения: 7, 10, 15, 20...
4. Не забываем про серии из 3-5 измерений.
5. Минимум 7 точек на каждый участок прямой.
6. Должна быть таблица с исходными данными. Т.е. нужно *всё* заносить в табличку.
   - Если просят найти угол, то в табличке должны быть столбцы с теми величинами, которые нужны, чтобы этот угол посчитать.
   - Если вы проводите серию измерений, то в таблицу нужно занести их все. А не только усредненное.
7. Указывайте размерность.
8. Последний, но возможно самый важный совет: будьте честны перед собой — подгонка результатов иногда может принести несколько лишних баллов, но чаще видна не вооруженным глазом (особенно если авторы задания заложили некоторый подвох).



Пример плохого графика



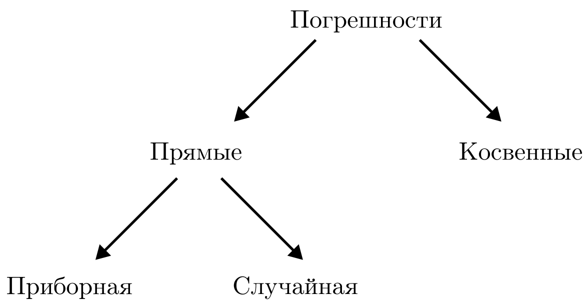
Пример хорошего графика

Про графики

1. Площадь графика должна быть не менее 70% от общей площади листа выданной миллиметровой бумаги A5 (не считая отступы).
2. Оси должны быть подписаны.
3. Отступы от края должно составлять 1см.
4. Чаще всего, ваш график будет предоставлен в виде прямой. Поэтому вот примеры как нужно, и как нельзя:
5. Цена деления (2, 4, 8, 5, 25) Пример
6. Подробнее про графики читайте тут.

Про погрешности

Погрешности бывают двух видов: погрешности прямых измерений и погрешности косвенных измерений.



Прямые измерения — это непосредственно проводимые измерения с помощью какого-либо измерительного прибора (измерение линейкой диаметра шарика, омметром сопротивления и т д).
Косвенные измерения — это расчет по каким-либо формулам некоторых величин, которые не имеется возможности измерить непосредственно прибором,(расчет объема из длинны ширины и высоты, расчет массы из плотности и объема).

Погрешности прямых измерений

Пусть есть некоторая величина x. Введем следующие обозначения:

Δx — абсолютная погрешность

$\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{x}$ — относительная погрешность

Проведем серию измерений величины x. Занесем результаты в таблицу

x, см	12,1	13,5	12,7	12,9	13,2	12,4	12,0	12,8	12,5

Таблица 1: Серия измерения величины x

Необходимо найти истинное значение величины x и значение погрешности определения этой величины. Чтобы это сделать, нужно понять, что такое погрешность, и что значат слова *погрешность определения величины.*

Суть этих слов заключается в том, что невозможно с абсолютной точностью ничего измерить. Если вы измерили ширину стола и увидели на линейке 40 см, то на самом деле длина ее не равна 40 см (строго математически, вероятность такого события равна нулю).

Правильнее будет сказать длина стола лежит *вблизи* 40 см. То есть вблизи 40 см определяется интервал, в который скорее всего входит истинное значение ширины стола. Этот интервал записывается так $x = (\langle x\rangle \pm \Delta x)$, где Δx — ширина нашего интервала.

Чем меньше Δx, тем меньше интервал. Следовательно, и измерение точнее. Логично, да? Поэтому величина Δx и характеризует погрешность. Для того, чтобы найти значение *абсолютной* погрешности нужно посчитать *случайную* погрешность и *приборную.*

Начнем с приборной, приборная погрешность, как ни странно, погрешность измерительного прибора, обычна равна половине цены деления или трем значащим цифрам у мультиметра. Обозначается она как $\Delta x_{\text{приб}}$. В нашем случае $\Delta x_{\text{приб}} = 0.05$ см.

Со случайной погрешностью дела обстоят сложнее. Если приборная погрешность характеризовала погрешность измерительного прибора, то случайная погрешность характеризует погрешность, вызванную большим набором случайных факторов, влияющих на измерения. Поэтому для ее нахождения нужна серия измерений.

Вы спросите, как посчитать случайную погрешность. А мы вам ответим — по формуле. Вот такой

$$\Delta x_{случ} = \sqrt{\frac{(x_1 - \langle x\rangle)^2 + \ldots + (x_n - \langle x\rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \langle x\rangle)^2}{n(n-1)}}$$

Не пугайтесь. Ничего сложного в ней нет. Осталось ввести только

$$\langle x\rangle = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ — среднее значение.}$$

Теперь мы готовы. Берем в руки калькулятор и считаем.
Абсолютную погрешность считаем по формуле

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{случ}^2 + \Delta x_{\text{приб}}^2} \approx \Delta x_{случ} + \Delta x_{\text{приб}} = 0.26 \text{ см.}$$

Получаем $\Delta x = (12.68 \pm 0.26)$ см. Осталось немного «причесать» наш ответ.

Замечание. Погрешность округления идет до первой значащей цифры, если она не равна 1, иначе до двух. Т.е.

$0.102 \longrightarrow 0.10$

$0.234 \longrightarrow 0.2$

Окончательно получаем $\Delta x = (12.7 \pm 0.3)$ см.

Погрешности косвенных измерений

z	Δz	$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z}$
Cx	$C\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x}$
$x \pm y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x \pm y}$
$x \cdot y$	$xy\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)$	$\varepsilon_x + \varepsilon_y$
$\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y}\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)$	$\varepsilon_x + \varepsilon_y$
x^n	$x^n\|n\|\varepsilon_x = \|x\|x^{n-1}\Delta x$	$\|n\|\varepsilon_x$
$\sin x$	$\cos x \Delta x$	$\operatorname{ctg} x \varepsilon_x$
e^x	$e^x \Delta x$	Δx
$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x} = \varepsilon_x$	
a^x	$\ln(a) a^x \Delta x$	

Таблица 2: Формулы для расчета погрешностей

Предположим, что у вас получилась весьма сложная формула и вы хотите посчитать погрешность.

Пример. Пусть x, y — измеряемые величины и f вычисляется по формуле

$$f = \frac{x^3 y}{\frac{1}{x} + 5x \sin y} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Введём обозначения $f_1 = x^3 y$, $f_2 = \dfrac{1}{x} + 5x \sin y$. Тогда $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ и согласно таблице $\varepsilon_f = \varepsilon_{f_1} + \varepsilon_{f_2}$. Осталось найти погрешности ε_{f_1} и ε_{f_2}.

$$f_1 = x^3 y \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_{f_1} = \varepsilon_{x^3} + \varepsilon_y = 3\varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

$$f_2 = \frac{1}{x} + 5x \sin y \quad \Longrightarrow \quad \Delta f_2 = \Delta\left(\frac{1}{x}\right) + \Delta(5x \sin y).$$

Определим погрешности в правой части равенства:

$$\varepsilon_{\frac{1}{x}} = |-1|\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}; \quad \Delta\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon_{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} = \frac{\Delta x}{x^2};$$

$$\begin{aligned} \Delta(5x \sin y) = 5\Delta(x \sin y) &= \\ &= 5\varepsilon_{x \sin y} \cdot x \sin y = 5x \sin y \left(\varepsilon_x + \varepsilon_{\sin y}\right) = \\ &= 5x \sin y \left(\varepsilon_x + \operatorname{ctg} y \Delta y\right). \end{aligned}$$

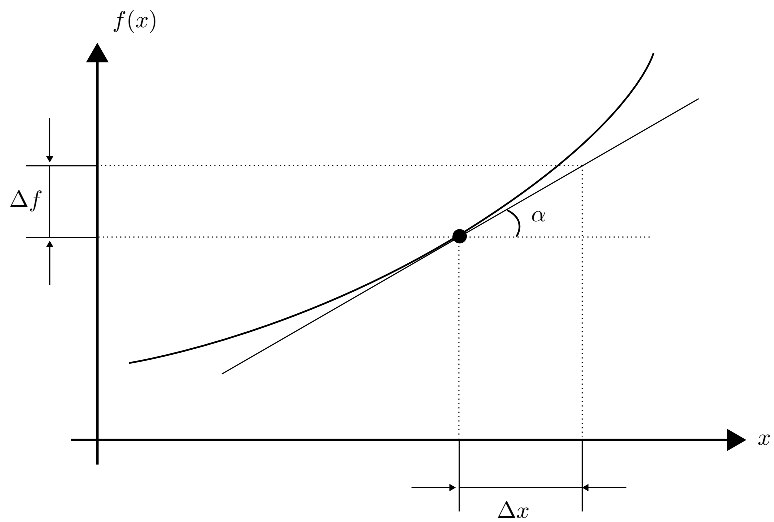
Окончательно получаем

$$\varepsilon_f = 3\varepsilon_x + \varepsilon_y + \frac{\frac{\Delta x}{x^2} + 5x \sin y((\varepsilon_x + \operatorname{ctg} y \Delta y)}{\frac{1}{x} + 5x \sin y}.$$

Можно не пользоваться приведёнными правилами, а сразу использовать общую формулу для нахождения погрешности величины $f = f(x, y, \ldots)$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \ldots} \qquad (1)$$

Чтобы лучше понять смысл данной формулы рассмотрим случай одной переменной, когда $f = f(x)$.



Из графика видно, что изменение x на Δx влечет изменение функции f на Δf. Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'_x$ Откуда находим, что $\Delta f = f'_x \Delta x$, где $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ — производная функции «*эф по икс*». Что как раз согласуется с формулой в случае одной переменной.

Сложение погрешностей

В реальных опытах присутствуют как систематические (постоянная от измерения к измерению), так и случайные ошибки. Пусть они характеризуются погрешностями $\sigma_{\text{сист}}$ и $\sigma_{\text{случ}}$. Суммарная погрешность находится по формуле

$$\sigma^2_{\text{полн}} = \sigma^2_{\text{сист}} + \sigma^2_{\text{случ}},$$

которая показывает, что при наличии как случайной, так и систематической погрешности полная ошибка больше, чем каждая из них в отдельности.

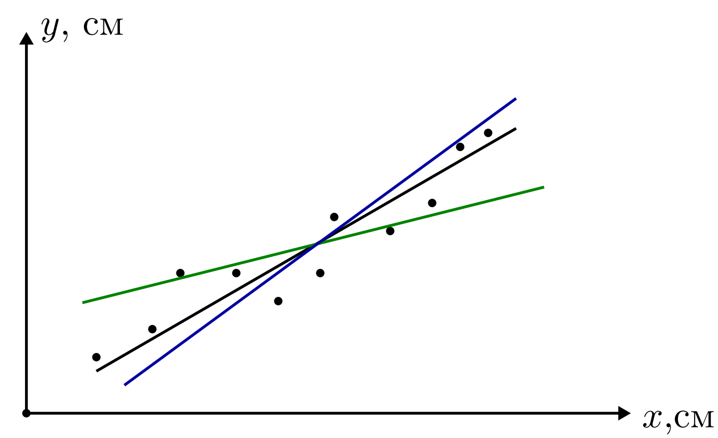
Обратим внимание на важную особенность формулы. Пусть одна из ошибок, например, $\sigma_{\text{случ}}$ в 2 раза меньше другой — в нашем случае $\sigma_{\text{сист}}$. Тогда

$$\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{сист}} + \sigma^2_{\text{случ}}} = \sqrt{\frac{5}{4}}\sigma_{\text{сист}} \approx 1{,}12\sigma_{\text{сист}}.$$

В нашем примере с точностью 12% $\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{сист}}$. Таким образом, меньшая погрешность почти ничего не добавляет к больше, даже если она составляет половину от неё. Данный вывод очень важен. В том случае, когда случайная ошибка опытов хотя бы вдвое меньше систематической, нет смысла производить многократные измерения, так как полная погрешность опыта при этом практически не уменьшается. Измерения достаточно произвести $2-3$ раза, чтобы убедиться, что случайная ошибка действительно мала.

Графическая обработка результатов

Построим график некоторой «придуманной» зависимости $y = a + bx$. Воспользуемся этим рисунком, чтобы продемонстрировать порядок обработки результатов, целью которого является оценка параметров зависимости и их погрешностей.



Проведём определение параметров зависимости «на глаз». Для этого проведём прямую, которая «ближе всего» лежит к экспериментальным точкам (на рисунке чёрная прямая). Чтобы её построить можно воспользоваться следующим правилом: количество точек над прямой равно количеству точек под прямой. Для оценки погрешностей параметров зависимости нужно провести две «граничные» прямые (примерные): обе проходят через «центр», а область между прямыми должна захватывать большинство экспериментальных точек (на рисунке синяя и зелёная прямые). Так же как и для основной, для этих «граничных» прямых можно определить параметры (заметим, что прямая у которой угловой коэффициент максимальный $b_{\max}$, имеет параметр $a_{\min}$, и наоборот), которые и будут являться нижними и верхними границами величин a, b. Погрешности соответственно:

$$\Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2}; \quad \Delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2}.$$

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов основан на минимазции суммы квадратов отклонений точек от прямой. Это означает, что коэффициенты a и b в линейной зависимости $y = a + bx$ находятся из условия минимума функции

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 .$$

Здесь x_i и y_i — координаты экспериментальных точек. Приведём окончательные формулы для a и b и их погрешностей через средние значения x_i и y_i:

$$b = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2};$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}.$$

Погрешности этих коэффициентов соответственно равны:

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\overline{x^2} - \overline{y}^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} - b^2},$$

$$\sigma_a = \sigma_b \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2},$$

где n — число измерений. Если известно, что точки должны описываться линейной зависимостью $y = kx$, проходящей через начало координат, то для коэффициента k и погрешности его определения получаем

$$k = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}};$$

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\overline{x^2} \cdot \overline{y^2} - \overline{xy}^2}{n\overline{x^2}^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\overline{y^2}}{\overline{x^2}} - k^2}.$$

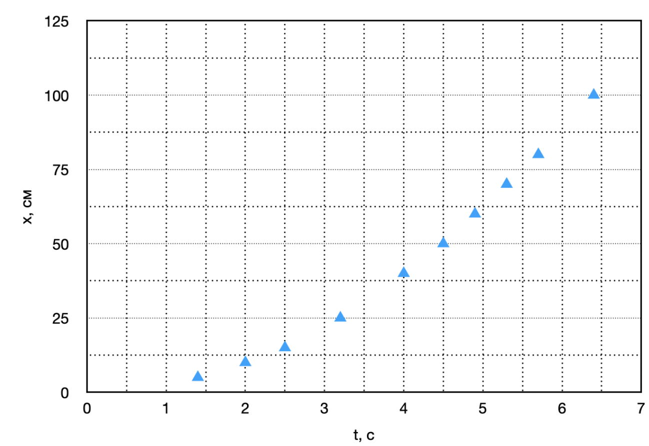
Этот метод довольно трудоёмкий, но при наличии калькулятора он является наиболее предпочтительным (большинство инженерных калькуляторов могут рассчитывать коэффициенты и погрешности коэффициентов за вас).

Линеаризация

Довольно часто в экспериментальных задачах вас просят исследовать отличные от линейных зависимости. В этих случаях довольно полезно попытаться найти такие координаты, чтобы исследуемая зависимость была линейной.

Рассмотрим на примере. Пусть мы хотим исследовать скатывание шара по наклонной плоскости. Будем измерять координату тела x в зависимости от времени t. Результаты занесем в таблицу. Построим график $x(t)$.

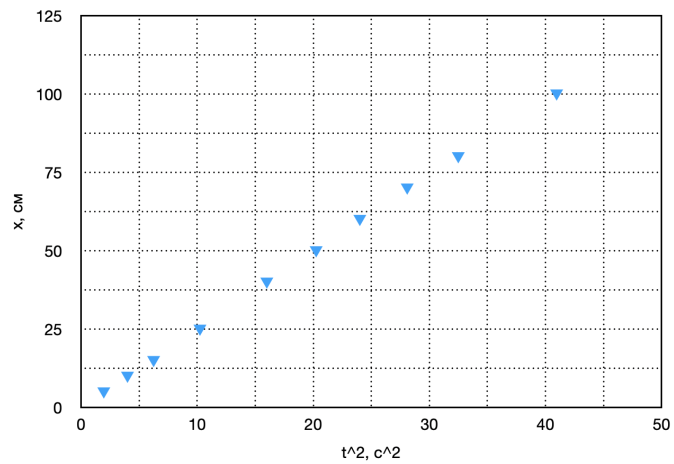
t, с	1,4	2	2,5	3,2	4	4,5	4,9	5,3	5,7	6,4
x, см	5	10	15	25	40	50	60	70	80	100



Как определить связь между величинами x и t? Конечно, мы понимаем что из теории следует $x \propto t^2$, однако из графика мы это определить не можем. Это может быть парабола 3 или 4 степени. А что, а вдруг.

Но если есть подозрения, что ваша зависимость все-таки квадратичная, то строим график $x(t^2)$. Для этого строим еще один столбец в нашей таблице t^2.

t^2, с	2	4	6,3	10,2	16	20,3	24	28,1	32,5	41
x, см	5	10	15	25	40	50	60	70	80	100



Перамога! В координатах $x(t^2)$ мы получили прямую. Следовательно, можем сделать вывод о том, что $x \propto t^2$.

Сам процесс нахождения координат, в которых исследуемая зависимость будет линейной, называется линеаризацией. Заметим, что в координатах $x(t^2)$ мы могли и не получить прямую, тогда пришлось бы думать о причинах такого отклонения от теории: возможно это большие погрешности при снятии данных, возможно это влияние сопротивление воздуха.

Логарифмические координаты

Чаще всего в экспериментах возникают степенные зависимости вида $y = ax^b$, в которых необходимо найти коэффициенты a и b. Как поступать в общем случае, когда не удаётся «угадать» координаты?

Для решения этой проблемы необходимо ввести функцию логарифма, которую определим следующим образом:

$$a = b^c \quad \Longleftrightarrow \quad c = \log_b a.$$

Читается последнее равенство следующим образом: «c равно логарифму числа a по основанию b». При этом будем считать все числа положительными, $b \neq 1$. Наиболее широкое применение имеют следующие логарифмы:

- натуральный логарифм: $\log_e a = \ln a$, где число $e \approx 2{,}71828$;
- десятичный логарифм: $\log_{10} a = \lg a$, (децибельная шкала громкости).

У логарифмов есть много интересных свойств, однако нам понадобятся всего 3.

- $a^{\log_a b} = b$.
- $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$.
- $\log_a x^p = p \log_a x$.

Как теперь найти коэффициенты зависимости? Чаще всего в физике используется $\log_e x = \ln x$. Так что «возьмем» натуральный логарифм от левой и правой части. Или, что тоже самое, прологарифмируем наше равенство $y = ax^b$.

$$\ln y = \ln(ax^b)$$

$$\ln y = \ln a + \ln(x^b)$$

$$\ln y = \ln a + b \ln x.$$

Таким образом, можем построить график $\ln y(\ln x)$, который будет *линейным*. Откуда уже достаем коэффициент a (как точку пересечения прямой с осью ординат) и степень b (как тангенс угла наклона прямой).

Итог. Если ваша зависимость нелинейна, при этом вас в задании просят установить связь между исследуемыми величинами, почти наверно придётся строить график в логарифмических координатах. Если в таких координатах вы не получаете прямую, то возможны два варианта: «кривые» измерения, зависимость не может быть представлена в виде $y = ax^b$.