**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа**

МАТЕМАТИКА

Уравнения и неравенства с модулем. Метод интервалов. Графики функций

Задание №3 для 9-х классов

(2020 – 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2020

Составитель: Я.С. Агаханова, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №3 для 9-х классов (2020 – 2021 учебный год), 2020, 41 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 17 декабря 2020 г.

Составители:
Агаханова Яна Сергеевна
Подписано 29.10.20. Формат 60x90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,27.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

§1. Свойства модуля. Уравнения с модулем

Напомним определение модуля числа:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Для произвольной функции $f(x)$:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \ge 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отметим следующие свойства модуля, вытекающие непосредственно из определения.

$1°.\ |a| \ge 0.$ $2°.\ |a| \ge a.$ $3°.\ |ab| = |a| \cdot |b|.$ $4°.\ \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}.$ $5°.\ |-a| = |a|.$

$6°.\ |a^2| = |a|^2 = a^2.$

$7°.\ |a+b| \le |a| + |b|$ (здесь равенство достигается, когда числа a и b одного знака или одно из них равно нулю; если же числа a и b разных знаков, то выполняется строгое неравенство).

$8°.\ |a-b| \ge \big||a| - |b|\big|.$

$9°.\ |a| -$ это расстояние от точки a на числовой оси до точки 0.

$10°.\ |a-b| -$ это расстояние между точками a и b на числовой оси.

$11°.\ \sqrt{a^2} = |a|.$

Докажем свойство $7°$. Остальные свойства проверьте самостоятельно. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, возведение их в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$|a+b|^2 \le \left(|a| + |b|\right)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 \Leftrightarrow ab \le |ab|.$$

Последнее неравенство верно (свойство $2°$). Заметим, что оно обращается в равенство, когда числа a и b одного знака (или одно из них равно нулю).

При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, применяются чаще всего следующие методы:

1) раскрытие модуля по определению;
2) возведение обеих частей уравнения в квадрат;
3) использование свойств модуля;
4) метод разбития на промежутки, и др.

Простейшие уравнения с модулем.

Уравнение	$c>0$	$c=0$	$c<0$
$\lvert x\rvert=c$	$\lvert x\rvert=c\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=c,\\x=-c.\end{array}\right.$	$\lvert x\rvert=0\Leftrightarrow x=0$	$\lvert x\rvert=c$ нет решения
$\lvert f(x)\rvert=c$	$\lvert f(x)\rvert=c\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=c,\\f(x)=-c.\end{array}\right.$	$\lvert f(x)\rvert=0\Leftrightarrow f(x)=0$	$\lvert f(x)\rvert=c$ нет решения

Уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$

$$|f(x)|=|g(x)|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\f(x)=-g(x).\end{array}\right.$$

Уравнение вида $|f(x)|=g(x)$

$$|f(x)|\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\f(x)=-g(x).\end{array}\right.\end{cases}$$

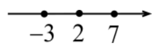
Пример 1. Решите уравнение:

а) $|x-2|=5$; б) $|2x-1|=-1$; в) $|x-2|=|x+6|$.

Воспользуемся свойством 10°.

Решение. а) $|x-2|$ – это расстояние между точками x и 2 на числовой прямой (свойство 10°). Поэтому уравнение можно прочитать так: точка x удалена от точки 2 на расстояние 5. Иначе говоря, мы ищем точки, удалённые от точки 2 на расстояние 5. Ясно, что это точки –3 и 7.

Записать решение короче всего так:

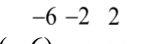


$$|x-2|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=5,\\x-2=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7,\\x=-3.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=-3; x=7$.

б) Левая часть уравнения неотрицательна (свойство 1°), а правая отрицательная. Поэтому уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.



в) Задачу можно сформулировать так: расстояние от точки x до точки 2 равно расстоянию от точки x до точки (– 6), то есть мы ищем точку на прямой, равноудалённую от точек 2 и (– 6). Ясно, что это середина отрезка, соединяющего эти точки, т. е. $x=-2$.

Покажем ещё один способ решения:

$$|x-2|=|x+6|\Leftrightarrow(x-2)^2=(x+6)^2\Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: $x=-2$.

Пример 2. Решите уравнение $\left|x^2-x-3\right|=-x-1$.

Решение. По определению модуля уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$(1)\ \begin{cases} x^2-x-3=-x-1, \\ x^2-x-3\ge 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad (2)\ \begin{cases} -\left(x^2-x-3\right)=-x-1, \\ x^2-x-3<0; \end{cases}$$

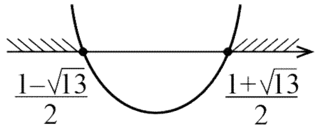
$$\begin{cases} x^2-2=0, \\ x^2-x-3\ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2+2x+4=0, \\ x^2-x-3<0; \end{cases}$$

$$\underline{x=\pm\sqrt{2}} \qquad x^2-2x-4=0.$$

$$x^2-x-3\ge 0. \qquad D=4-4\cdot(-4)=20$$

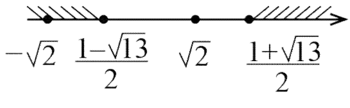
$$D=1-4\cdot(-3)=13 \qquad x_1=\frac{2+\sqrt{20}}{2}=1+\sqrt{5},\quad \underline{x_2=1-\sqrt{5}}.$$

$$x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2},\quad x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}.$$



Итак, для системы (1)

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{2}, \\ x\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right) \end{cases}$$



$$3<\sqrt{13}<4\Rightarrow\frac{1+\sqrt{13}}{2}>\sqrt{2},\quad \frac{1-\sqrt{13}}{2}>-\sqrt{2}.$$

Решение системы (1) $x=-\sqrt{2}$.

Для системы (2). Сравним $1+\sqrt{5}$ и $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

$$2\cdot\left(1+\sqrt{5}\right) \text{ и } 1+\sqrt{13}$$

$$2+2\sqrt{5} \text{ и } 1+\sqrt{13}$$

$$1+2\sqrt{5} \text{ и } \sqrt{13}$$

$$1+4\sqrt{5}+20 \text{ и } 13$$

$$21+4\sqrt{5}>13,$$

$$1+\sqrt{5}>\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

Сравним $1-\sqrt{5}$ и $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

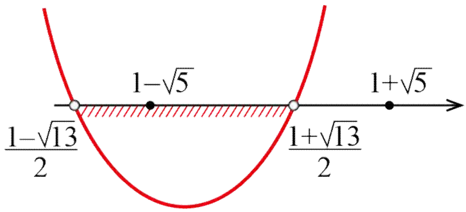
$$2-2\sqrt{5} \text{ и } 1-\sqrt{13}$$

$$\sqrt{13}+1 \text{ и } 2\sqrt{5}$$

$$13+2\sqrt{13}+1 \text{ и } 20$$

$$14+2\sqrt{13}>20,$$

$$1-\sqrt{5}>\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$



Решение системы (2) $x=1-\sqrt{5}$.

Ответ: $x=-\sqrt{2}$, $x=1-\sqrt{5}$.

Пример 3. Решите уравнение: $|x+1|+11=|2x+11|+|1-x|$.

Решение. Отметим на числовой прямой точки $x=-1$, $x=-\dfrac{11}{2}$, $x=1$. Получаем 3 точки, которые разбивают числовую прямую на 4 интервала. Раскрываем модули на каждом из этих интервалов (см. рис. 1).

	$(а)$ $-\frac{11}{2}$	$(б)$ -1	$(в)$ 1	$(г)$
$\lvert x+1\rvert$	$-(x+1)$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$
$\lvert 2x+11\rvert$	$-(2x+11)$	$2x+11$	$2x+11$	$2x+11$
$\lvert 1-x\rvert$	$1-x$	$1-x$	$1-x$	$-(1-x)$

Рис. 1

Рассмотрим 4 случая: а) $x\le -\dfrac{11}{2}$. Тогда

$$-(x+1)+11=-(2x+11)+(1-x)\Leftrightarrow x=-10.$$

Убеждаемся, что $x=-10$ удовлетворяет условию $x\le -\dfrac{11}{2}$, поэтому $x=-10$ является решением данного уравнения.

б) $-\frac{11}{2}<x<-1$. Тогда $-(x+1)+11=(2x+11)+(1-x)\Leftrightarrow x=-1$.

Однако $x=-1$ не удовлетворяет условию $-\frac{11}{2}<x<-1$, поэтому $x=-1$ не подходит.

в) $-1\le x\le 1$. Тогда $(x+1)+11=(2x+11)+(1-x)\Leftrightarrow 12=12$. Получилось верное равенство, поэтому все x, удовлетворяющие условию $-1\le x\le 1$, являются решениями.

г) $x>1$. Тогда $(x+1)+11=(2x+11)-(1-x)\Leftrightarrow x=1$. Условие $x>1$ не выполнено, поэтому данный корень не подходит.

Объединяем полученные решения и получаем $x\in\{-10\}\cup[-1;1]$.

Ответ: $x\in\{-10\}\cup[-1;1]$.

Замечания. 1) При таком методе решения необходимо проверять принадлежат ли найденные корни рассматриваемому в данный момент промежутку – иначе можно получить неверный ответ.

2) Точки, в которых выражения под модулями обращаются в ноль, можно включать в любой из двух промежутков, для которых они являются границами. Например, если бы в случае б) мы взяли $-\frac{11}{2}<x\le -1$, то число $x=-1$ попало бы в промежуток. В случае в) мы бы рассматривали $-1<x\le 1$ и здесь корня $x=-1$ мы бы не получили. При этом объединение всех решений было бы тем же самым.

Пример 4. Решите уравнение $\left|x-|2x+3|\right|=3x-1$.

Решение. Раскроем сначала, пользуясь определением, «внутренний» модуль. Получим равносильную уравнению совокупность систем:

$$(1)\ \begin{cases}2x+3\ge 0,\\ \left|x-(2x+3)\right|=3x-1;\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases}2x+3<0,\\ \left|x+(2x+3)\right|=3x-1.\end{cases}$$

$$(1)\ \begin{cases}x\ge -\frac{3}{2},\\ |-x-3|=3x-1;\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases}x<-\frac{3}{2},\\ |3x+3|=3x-1.\end{cases}$$

Решим систему (1). Раскрывая модуль по определению, получим совокупность систем, равносильную системе (1).

а) $\begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2}, \\ -x-3 \ge 0, \\ -x-3 = 3x-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2}, \\ -x-3 < 0, \\ -(-x-3) = 3x-1. \end{cases}$

а) $\begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2}, \\ x \le -3, \\ x = -1. \end{cases}$ Система решений не имеет.

б) $\begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2}, \\ x > -3, \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = 2}.$

Теперь решим систему (2).

а) $\begin{cases} x < -\dfrac{3}{2}, \\ 3x+3 \ge 0, \\ 3x+3 = 3x-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -\dfrac{3}{2}, \\ 3x+3 < 0, \\ -(3x+3) = 3x-1. \end{cases}$

а) $\begin{cases} x < -\dfrac{3}{2}, \\ x \ge -1, \\ 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$ б) $\begin{cases} x < -\dfrac{3}{2}, \\ x < -1, \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $x = 2$.

Пример 5. Решите уравнение $(x-3)^2 - |x-3| = 30.$

Решение. В этом уравнении удобно сделать замену переменных: $|x-3| = t, \quad t \ge 0.$ Задача свелась к решению системы:

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ t^2 - t - 30 = 0, \end{cases}$$

$t^2 - t - 30 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot (-30) = 121$

$t_1 = \dfrac{1+11}{2} = 6; \quad t_2 = \dfrac{1-11}{2} = -5;$

$\begin{cases} t \ge 0, \\ t_1 = 6, t_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow t = 6.$

$|x-3| = 6$

$x - 3 = 6$ или $x - 3 = -6$

$\underline{x = 9}$ $\quad \underline{x = -3}.$

Ответ: $x = -3, \quad x = 9.$

Пример 6. Решите уравнение $x^2 - 2x + 2 + |x-2| = 2|x-1|$.

Решение. Данное уравнение можно решить раскрывая модули с помощью определения, и рассматривать различные случаи. Но можно и по-другому.

Заметим $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$, тогда

$$x^2 - 2x + 2 + |x-2| = 2|x-1|,$$

$$\underbrace{(x-1)^2 - 2|x-1| + 1} + |x-2| = 0,$$

$$(\underbrace{|x-1|-1)^2}_{\ge 0} + \underbrace{|x-2|}_{\ge 0} = 0.$$

Значит, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} |x-1| - 1 = 0, \\ |x-2| = 0 \end{cases}$

$|x-1| = 1$ $\qquad\qquad$ $|x-2| = 0$

$x - 1 = 1$ или $x - 1 = -1$ $\qquad$ $\underline{x = 2}$

$\underline{x = 2}$ $\quad x = 0$

$\begin{cases} x = 2, x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Ответ: $x = 2.$

§2. Рациональные неравенства. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов

Определение 1. Рациональным неравенством называют неравенство, обе части которого являются рациональными выражениями.

Определение 2. Целым неравенством называется рациональное неравенство, обе части которого являются целыми выражениями.

Определение 3. Дробно-рациональным неравенством называется рациональное неравенство, одна из частей которого является целым рациональным выражением, а другая – дробно-рациональным, или обе части которого являются дробно-рациональными выражениями.

Равносильными неравенствами называют неравенства, решения которых совпадают. Равносильными считают также неравенства, которые не имеют решений.

Рассмотрим примеры решения целых неравенств. Некоторые из них – линейные и квадратные, мы уже умеем решать.

Выведем на этой основе общий способ решения любых рациональных неравенств.

Пример 7. Решите неравенство $x^2+7x-8\geq 0$.

Решение. **<u>1 способ.</u>** Найдём нули функции $y=x^2+7x-8$ и определим её знак на каждом из образовавшихся интервалов (рис. 2).

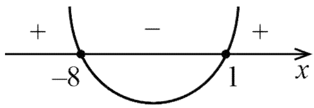


Рис. 2

$$x^2+7x-8=0,\quad D=49+32=81$$

$$x_1=\frac{-7+9}{2}=1,\quad x_2=\frac{-7-9}{2}=-8.$$

Корнями трёхчлена являются числа -8 и 1 (точки на оси закрашены, так как неравенство нестрогое), ветви параболы направлены вверх. Поэтому неравенству удовлетворяет любой x из множества $\left(-\infty;-8\right]\cup\left[1;+\infty\right)$.

В общем случае график функции степени больше 2 простроить непросто. Но для решения неравенств требуется не сам график, а лишь знание интервалов по оси x, где многочлен сохраняет свой знак «+» или «–». Такие интервалы называют *интервалами* (промежутками) *знакопостоянства.*

Решим теперь наше неравенство другим способом.

<u>2 способ.</u> Разложим квадратный трёхчлен на множители:

$$x^2+7x-8=\left(x-1\right)\left(x+8\right)$$

$$\left(x-1\right)\left(x+8\right)\geq 0.$$

Отметим на оси Ox закрашенными точками числа 1 и -8, и определим знак каждого множителя и знак всего произведения на полученных промежутках (рис. 3).

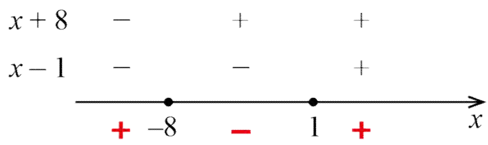


Рис. 3

$$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

$$x-1<0 \Leftrightarrow x<1$$

Значит, двучлен $x-1$ положителен справа от своего корня 1 и отрицателен слева от 1.

Аналогично, второй множитель $x+8$ положителен справа от -8 и отрицателен слева от -8. Знак произведения определим по правилам знака произведения двух множителей.

Получим тот же результат $(-\infty;-8]\cup[1;+\infty)$.

Приведённый способ решения называют **методом интервалов**.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов:

1. Привести неравенство к виду $f(x)<0$ ($f(x)>0$, $f(x)\le 0$, $f(x)\ge 0$).

2. Многочлен $f(x)$ разложить в произведение линейных множителей и, возможно, квадратных трёхчленов с отрицательным дискриминантом. Все коэффициенты при x сделаем равными 1.

3. На числовой оси x расставить нули функции $f(x)=0$.

4. Определить знак выражения на каждом из интервалов.

5. Выбрать те интервалы, которые соответствуют знаку неравенства.

6. Если неравенство нестрогое, включить в ответ концы интервалов.

Пример 8. Решить неравенство $(2x-1)^2(x-2)^3(-5x+15)<0$.

Решение. 1 п. уже выполнен.

2. Упростим данное неравенство: все коэффициенты при x сделаем равными 1.

$$4(x-0,5)^2(x-2)^3\cdot(-5)(x-3)<0.$$

$$-20(x-0,5)^2(x-2)^3(x-3)<0.$$

Разделим неравенство на (-20), при этом не забудем, что делим на отрицательное число, и значит, знак неравенства нужно поменять

$$(x-0,5)^2(x-2)^3(x-3)>0.$$

3. Нули функции $x=0,5$, $x=2$, $x=3$, отметим их на оси x. Т. к. неравенство строгое, то точки не закрашенные.

4. Определим знаки.

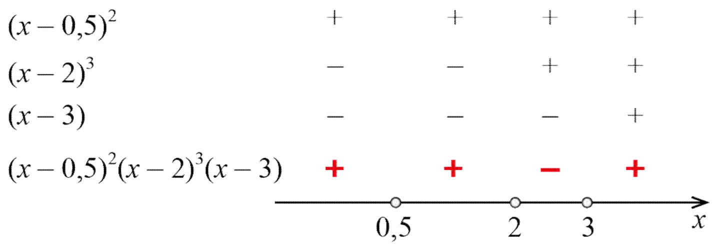


Рис. 4

5. В соответствии со знаком неравенства выберем промежутки, на которых левая часть неравенства положительна, и запишем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; 2) \cup (3; +\infty)$.

Заметим, что знаки на интервалах можно получить быстрее. Так как все точки первого справа интервала расположены правее любого из отмеченных нами корней, то на нём любой из двучленов нашего неравенства вида $x-a$ имеет знак «+». Значит, и знак произведения этих двучленов и их степеней «+».

При этом смена знака одного из множителей приведёт к смене знака всего произведения. Поэтому зафиксировав знак «+» на самом правом интервале, знаки произведения множителей вида $(x-a)^n$ на остальных интервалах, можно определить без всяких вычислений по следующему правилу.

Правило смены знаков произведения множителей вида $(x-a)^n$.

При переходе через точку *a* знак произведения:

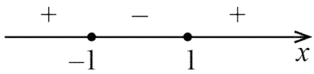
- не меняется, если множитель $(x-a)$ имеет чётную степень;
- меняется на противоположный, если множитель $(x-a)$ имеет нечётную степень.

Пример 9. Решить неравенство $x(x^3+2) \ge 2x+1$.

Решение. $x^4+2x-2x-1 \ge 0,\quad x^4-1 \ge 0,\quad (x-1)(x+1)(x^2+1) \ge 0.$

Квадратный трёхчлен x^2+1 имеет отрицательный дискриминант, а старший коэффициент $a=1>0$, поэтому он всегда положителен, и при решении неравенства его можно не учитывать. $(x-1)(x+1) \ge 0$. Отметим на числовой прямой точки 1 и -1. Учитывая, что неравенство нестрогое, точки закрашиваем, их следует включить в решение неравенства.

На первом интервале справа ставим знак «+», а при переходе через отмеченные нами точки меняем знак на противоположный.



Выберем промежутки, которые удовлетворяют знаку неравенства.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Рассмотрим решения дробно-рациональных неравенств. Любое дробно-рациональное неравенство можно привести с помощью равносильных преобразований (перенос слагаемых, приведение к общему знаменателю) к одному из неравенств вида:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0.$$

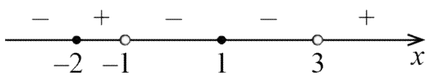
Поскольку знаки произведения и частного чисел совпадают, то метод интервалов можно использовать и для дробно-рациональных неравенств.

Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{(x^3+8)(x^4-1)^2}{(x-3)^3(x+1)} \geq 0.$

Решение. $\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)(x-1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2+1)^2}{(x-3)^3 \cdot (x+1)} \geq 0.$

Квадратные трёхчлены x^2-2x+4 и x^2+1 всегда положительны. $(D<0,$ коэффициент при x^2 равен $1>0)$, поэтому при решении неравенства их можно не учитывать $\dfrac{(x+2)(x-1)^2(x+1)^2}{(x-3)^3(x+1)} \geq 0.$

У нас неравенство нестрогое, поэтому точки -2, 1 и -1 будут закрашены, но 3 и -1 обращают знаменатель в ноль, значит, 3 и -1должны быть не закрашенными.



В соответствии со схемой, помимо двух промежутков, знаку неравенства удовлетворяет и отдельно стоящая точка 1, включим её в ответ.

Ответ: $x \in [-2; -1) \cup \{1\} \cup (3; +\infty)$.

Замечание. Заметим, что в неравенстве в числителе $(x+1)^2$, а в знаменателе $x+1$, можно сократить на $(x+1)$, **<u>но</u>** точку $x=-1$ необходимо изобразить не закрашенной, т. к. она обращает знаменатель в 0.

Пример 11. Решите неравенства:

а) $\dfrac{(x^2+5x+6)(x-4)}{x^2-x} \geq 0;$

б) $(x-3)^2(x-4)^3(x-5)(x-6)^4 \leq 0;$

в) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3};$

г) $\dfrac{(x^2-x-2)(2x-3-x^2)}{(x^2+4x+5)(2x^2-x-6)} \leq 0;$

д) $\dfrac{3}{x^3-3x^2+4} - \dfrac{10}{x^3-7x^2+4x+12} > \dfrac{1}{x^2-5x-6}.$

Решение. а) Раскладывая числитель и знаменатель дроби на множители, получаем

$$\frac{(x+2)(x+3)(x-4)}{x(x-1)} \geq 0. \tag{1}$$

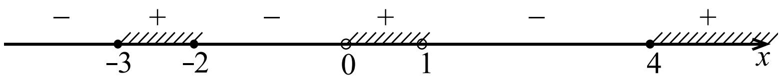


Рис. 5

Ответ: $x \in [-3;-2] \cup (0;1) \cup [4;+\infty).$

б) Здесь левая часть уже разложена на множители, и нам остаётся лишь расставить знаки. Для этого отмечаем на числовой прямой точки $x=3, x=4, x=5, x=6$ (все они невыколотые и являются решениями неравенства) и приступаем к расстановке знаков.

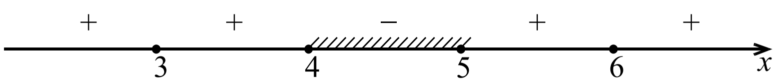


Рис. 6

Не забываем также включить в ответ все точки, отмеченные на прямой жирными кружочками.

Ответ: $x \in \{3\} \cup [4;5] \cup \{6\}.$

в) Переносим $\frac{1}{3}$ влево и приводим дроби к общему знаменателю: $\frac{3-x}{3x}<0$. Расставляем знаки левой части на числовой прямой (для строгого неравенства все точки на прямой выколотые, так как нули числителя решениями неравенства не являются (рис. 7)).

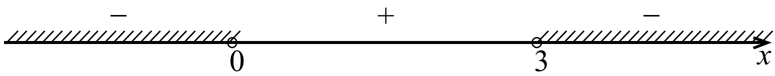


Рис. 7

Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

Замечание. При решении этой задачи часто допускают следующие ошибки.

1) Умножают обе части неравенства на x. Этого делать нельзя, так как если мы умножаем обе части неравенства на отрицательное число, то знак неравенства надо поменять, если на положительное, то знак надо оставить таким, какой он и был. Поскольку знак x нам неизвестен, то мы не можем корректно выбрать знак нового неравенства.

2) В исходном неравенстве требуется сравнить две дроби с одинаковыми числителями. Значит, больше та дробь, у которой знаменатель меньше. Так рассуждать нельзя, поскольку это свойство справедливо лишь для тех дробей, у которых числитель и знаменатель положительны. Если числитель или знаменатель отрицательны, то это свойство неверно (например, $-3<3$ и $\frac{1}{-3}<\frac{1}{3}$).

г) Находим нули числителя и знаменателя. Получаем:

1. $x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=2$ или $x=-1$ (поэтому $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$);

2. $2x-3-x^2=0\Leftrightarrow\varnothing$ (т. к. дискриминант отрицателен). Следовательно, выражение $-x^2+2x-3$ отрицательно при всех x (графиком функции $f(x)=-x^2+2x-3$ является парабола с ветвями вниз, при этом она не пересекает ось абсцисс, так как у уравнения $f(x)=0$ нет корней; значит, эта парабола целиком расположена ниже оси абсцисс, то есть $f(x)<0$ при всех x).

3. $x^2+4x+5=0\Leftrightarrow\varnothing$, поэтому $x^2+4x+5>0$ при всех x.

4. $2x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=2$ или $x=-\dfrac{3}{2}$. Значит,

$$2x^2-x-6=2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x-2)(2x+3).$$

Исходное неравенство равносильно следующему

$$\frac{(x-2)(x+1)\left(2x-3-x^2\right)}{\left(x^2+4x+5\right)(x-2)(2x+3)}\le 0.$$

Отбросив множители $\left(2x-3-x^2\right)$ и $\left(x^2+4x+5\right)$, знаки которых не зависят от x, получаем

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(2x+3)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{2x+3}\ge 0, \\ x\ne 2. \end{cases}$$

Решая первое неравенство системы методом интервалов, получаем

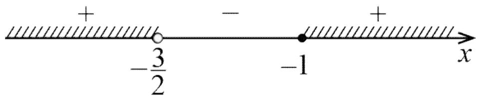


Рис. 8

С учётом второго неравенства $x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup[-1;2)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup[-1;2)\cup(2;+\infty)$.

д) Прежде всего, необходимо привести дроби к общему знаменателю. Чтобы сделать это, раскладываем знаменатели дробей на множители.

Заметим, что $x=-1$ является корнем каждого из знаменателей в левой части неравенства. Выполняя деление на $(x+1)$, получаем следующие разложения на множители:

$$x^3-3x^2+4=(x+1)\left(x^2-4x+4\right)=(x+1)(x-2)^2;$$

$$x^3-7x^2+4x+12=(x+1)\left(x^2-8x+12\right)=(x+1)(x-2)(x-6);$$

$$x^2-5x-6=(x+1)(x-6).$$

Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{3}{(x+1)(x-2)^2}-\frac{10}{(x+1)(x-2)(x-6)}>\frac{1}{(x+1)(x-6)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3(x-6)-10(x-2)-(x-2)^2}{(x+1)(x-2)^2(x-6)}>0\Leftrightarrow\frac{-x^2-3x-2}{(x+1)(x-2)^2(x-6)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)^2(x-6)}>0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+2}{(x-2)^2(x-6)}<0,\\ x\neq-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-6}<0,\\ x\neq-1,\ x\neq 2.\end{cases}$$

Решая первое неравенство системы методом интервалов, находим, что $x\in(-2;6)$. Исключая точки $x=-1$ и $x=2$, получаем

$$x\in(-2;-1)\cup(-1;2)\cup(2;6).$$

Ответ: $x\in(-2;-1)\cup(-1;2)\cup(2;6)$.

Заметим, что знаки следующих выражений совпадают:

$$\begin{aligned}&|a|-|b| \quad \text{и} \quad a^2-b^2,\\ &a^{2n}-b^{2n}\ (n\in\mathbb{N}) \ \text{ и } \ a^2-b^2,\\ &a^{2n+1}-b^{2n+1}\ (n\in\mathbb{N}) \ \text{ и } \ a-b.\end{aligned}\tag{2}$$

Это свойство иногда оказывается полезным при решении неравенств. Когда мы решаем дробно-рациональное неравенство (возможно, содержащее знак модуля), мы приводим его к виду «дробь >0» (или «дробь ≥ 0»), после чего числитель и знаменатель дроби раскладываем на множители. Так как мы сравниваем дробь с нулём, то нас интересуют только знаки каждого из множителей в числителе и знаменателе. Следовательно, если мы некоторые из них заменим на выражения тех же самых знаков по формулам (2), то получим равносильное неравенство.

Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{(x^8-256)(|3x+4|-|2x-7|)}{243-x^5}\geq 0$.

Решение. Заменим множитель $x^8-256=x^8-2^8$ на x^2-2^2; множитель $|3x+4|-|2x-7|$ на $(3x+4)^2-(2x-7)^2$; множитель $243-x^5=3^5-x^5$ на $3-x$. Получаем

$$\frac{(x^2-2^2)\left((3x+4)^2-(2x-7)^2\right)}{3-x}\geq 0.$$

Каждую из скобок в числителе раскладываем на множители по формуле разности квадратов.

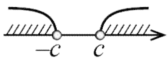
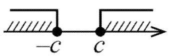
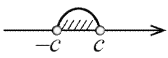
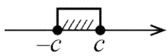
$$\frac{(x-2)(x+2)(3x+4+2x-7)(3x+4-2x+7)}{3-x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)(5x-3)(x+11)}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -11] \cup \left[-2; \frac{3}{5}\right] \cup [2; 3).$$

Ответ: $x \in (-\infty; -11] \cup \left[-2; \frac{3}{5}\right] \cup [2; 3)$.

§3. Неравенства с модулем

Простейшие неравенства решаются с помощью свойств модуля.

Неравенство	$c>0$			$c=0$	$c<0$
	Запись без модуля		Множество решений	Множество решений	Множество решений
$\lvert x\rvert > c$	$\left[\begin{array}{l} x>c \\ x<-c \end{array}\right.$		$(-\infty;-c)\cup(c;+\infty)$	$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
$\lvert x\rvert \geq c$	$\left[\begin{array}{l} x\geq c \\ x\leq -c \end{array}\right.$		$(-\infty;-c]\cup[c;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
$\lvert x\rvert < c$	$\begin{cases} x<c \\ x>-c \end{cases}$		$(-c;c)$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\lvert x\rvert \leq c$	$\begin{cases} x\leq c \\ x\geq -c \end{cases}$		$[-c;c]$	$\{0\}$	$\varnothing$

Пример 13. Решите неравенство:

а) $|x-2| \geq -1$; б) $|x-4| < -2$; в) $|1-x| \leq 4$; г) $|3+x| > 5$.

Решение. а) $|x-2| \geq 0 > -1$ – верно для всех x**.**

Ответ: x – любое число.

б) Решений нет, т. к. $|x-4| \geq 0$ для всех x.

Ответ: нет решений.

в) Воспользуемся снова свойством 10° (см. стр. 3). Тогда условие звучит так: расстояние от точки x до точки 1 не превосходит 4. То есть, мы ищем все точки прямой, удалённые от точки 1 на расстояние, не большее 4 (см. рис. 9).

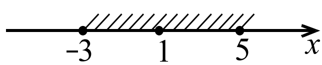


Рис. 9

Запишем решение так:

$$|1-x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq 1-x \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5.$$

Ответ: $x \in [-3; 5]$.

г) $|x+3|=|x-(-3)|$. Поэтому $|x+3|-$это расстояние между точками x и (–3). Ищем все точки на прямой, удалённые от точки (–3) на расстояние, большее 5 (см. рис. 10). Запишем решение:

$$|3+x|>5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3+x>5, \\ 3+x<-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-8. \end{array}\right.$$

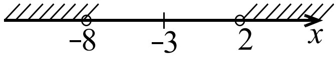


Рис. 10

Ответ: $x\in(-\infty;-8)\cup(2;\infty)$.

При решении неравенств, содержащих знак модуля, часто бывают полезны следующие равносильные переходы.

12°. $|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$.

13°. $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x), \\ f(x)<-g(x). \end{array}\right.$

14°. $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x). \end{cases}$

15°. $|f(x)|\le a^2 \Leftrightarrow \left(f(x)+a^2\right)\left(f(x)-a^2\right)\le 0$

$|f(x)|\ge a^2 \Leftrightarrow \left(f(x)+a^2\right)\left(f(x)-a^2\right)\ge 0$

Докажем некоторые из них.

12°. Если обе части неравенства неотрицательны, то его можно возвести в квадрат. Таким образом, $|f(x)|>|g(x)| \Rightarrow f^2(x)>g^2(x)$. Докажем в обратную сторону:

$$f^2(x)>g^2(x) \Leftrightarrow |f(x)|^2-|g(x)|^2>0 \Leftrightarrow \left(|f(x)|-|g(x)|\right)\cdot\left(|f(x)|+|g(x)|\right)>0.$$

Последнее условие означает, что числа $|f(x)|+|g(x)|$ и $|f(x)|-|g(x)|$ имеют один знак; $|f(x)|+|g(x)|$ не может быть отрицательным, поэтому оба числа должны быть положительны $\Rightarrow |f(x)|-|g(x)|>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)|>|g(x)|$. Утверждение доказано.

14°. Рассмотрим 2 случая.

(1) $g(x)\le 0$. Тогда неравенство $|f(x)|<g(x)$ не имеет решений; не имеет решений и система, так как $\begin{cases} f(x)<g(x)\le 0, \\ f(x)>-g(x)\ge 0, \end{cases}$ откуда следует, что $f(x)>0$ и $f(x)<0$, что невозможно. Значит, если $g(x)\le 0$, система и неравенство равносильны.

(2) $g(x)>0$. Тогда наше утверждение сводится к простейшему неравенству с модулем: $|t|<a \Leftrightarrow -a<t<a$.

Аналогично, $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

Пример 14. Решите неравенство:

а) $|2x^2-3x+1| \le 3x-2x^2-1$; б) $|3x-7| \ge |1-4x|$;

в) $\left||x^2-8x+2|-x^2\right| \ge 2x+2$.

Решение. а) $|2x^2-3x+1| \le 3x-2x^2-1 \Leftrightarrow |2x^2-3x+1| \le -(2x^2-3x+1) \overset{*}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x+1 \le 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 1.$$

***** (т. к. $|a| \le -a \Leftrightarrow a \le 0$).

Ответ: $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

б) $|3x-7| \ge |1-4x| \overset{12^\circ}{\Leftrightarrow} (3x-7)^2 \ge (1-4x)^2 \Leftrightarrow (3x-7)^2-(1-4x)^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (3x-7-1+4x)(3x-7+1-4x) \ge 0 \Leftrightarrow (7x-8)(-6-x) \ge 0 \Leftrightarrow -6 \le x \le \frac{8}{7}.$$

Ответ: $\left[-6;\frac{8}{7}\right]$.

в) $\left||x^2-8x+2|-x^2\right| \ge 2x+2 \overset{13^\circ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2|-x^2 \ge 2x+2, \\ |x^2-8x+2|-x^2 \le -2x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2| \ge x^2+2x+2, \\ |x^2-8x+2| \le x^2-2x-2 \end{array}\right. \overset{13^\circ,14^\circ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-8x+2 \ge x^2+2x+2, \\ x^2-8x+2 \le -x^2-2x-2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-8x+2 \le x^2-2x-2, \\ x^2-8x+2 \ge -x^2+2x+2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x^2-3x+2 \le 0, \\ \left\{\begin{array}{l} 6x \ge 4, \\ x^2-5x \ge 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ 1 \le x \le 2 \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 2/3, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 5, \\ x \le 0. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ 1 \le x \le 2, \\ x \ge 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$.

В некоторых случаях применение выше рассмотренных свойств нецелесообразно, и проще раскрыть модули по определению (рассмотрев знаки выражений под модулями).

Пример 15. Решите неравенство $6\left|x^2-3x-4\right|+1>5\left|x+5\right|$.

Решение проводится по той же схеме, что и в примере 2. Отмечаем на числовой прямой точки $x=4$, $x=-1$ и $x=-5$, в которых подмодульные выражения равны нулю (рис. 11).

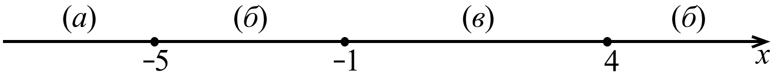


Рис. 11

а) $x \le -5$. Здесь $x^2-3x-4>0$, $x+5 \le 0$, поэтому получаем

$$6x^2-18x-24+1>-5x-25 \Leftrightarrow 6x^2-13x+2>0 \Leftrightarrow (x-2)(6x-1)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right) \cup (2; +\infty).$$

С учётом ограничения $x \le -5$: $x \in (-\infty; -5]$.

б) $x \in (-5; -1] \cup (4; +\infty)$. На этих двух промежутках $x^2-3x-4 \ge 0$, $x+5>0$, поэтому получаем $6\left(x^2-3x-4\right)+1>5(x+5) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6x^2-23x-48>0 \Leftrightarrow (3x-16)(2x+3)>0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{16}{3}; +\infty\right).$$

Учитывая рассматриваемые значения переменной, получаем

$$x \in \left(-5; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{16}{3}; +\infty\right).$$

в) $x \in (-1; 4]$. Тогда $x^2-3x-4 \le 0$, $x+5>0$ и неравенство принимает вид $-6\left(x^2-3x-4\right)+1>5(x+5) \Leftrightarrow 6x^2-13x<0 \Leftrightarrow 6x\left(x-\frac{13}{6}\right)<0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0<x<\frac{13}{6}.$$

Объединяя результаты, получаем $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(0; \frac{13}{6}\right) \cup \left(\frac{16}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(0; \frac{13}{6}\right) \cup \left(\frac{16}{3}; +\infty\right)$.

§4. Построение графиков функций

1п. Линейная функция.

Напомним, что линейной функцией называется функция вида $y = kx + b,$ где k и b – действительные числа.

Её графиком является прямая (рис. 12). $k = \operatorname{tg}\varphi$ – называется угловым коэффициентом прямой, число b равно ординате точки пересечения прямой: $y = kx + b$ с осью Oy.

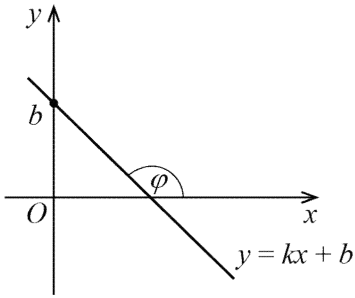


Рис. 12

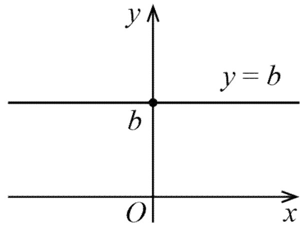


Рис. 13

Если $b = 0,$ то график функции $y = kx$ проходит через начало координат.

Если же $k = 0,$ $b \neq 0,$ то графиком функции является прямая параллельная оси Ox (рис. 13).

Положение прямой полностью определяется заданием двух любых её точек, поэтому для задания линейной функции достаточно знать её значения для двух значений аргумента – это позволит нам найти k и b.

2п. Функции $y = |x|$.

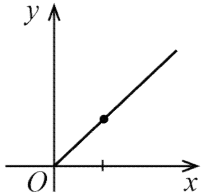
В первом параграфе дано определение модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Построим график этой функции. Если $x \geq 0,$ то $|x| = x,$ и графиком этой функции является биссектриса I координатного угла (рис. 14).

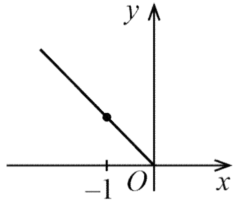
Если же $x < 0,$ то $|x| = -x$. Графиком этой функции является биссектриса II координатного угла (рис. 15).

Объединяя эти 2 случая, получим график функции $y = |x|$ для $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 16).



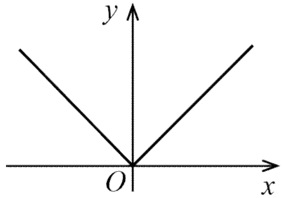
$y=|x|,\ x\geqslant 0$

Рис. 14



$y=|x|,\ x<0$

Рис. 15



$y=|x|,\ x\in\mathbb{R}$

Рис. 16

Пример 16. Постройте график функции $y=|2x-1|$.

Решение. Выражение $2x-1$ обращается в ноль при $x=\dfrac{1}{2}$ и на интервалах $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ сохраняет постоянный знак.

$$y=\begin{cases}2x-1, \text{ если } 2x-1\geq 0,\\ -(2x-1), \text{ или } 2x-1<0;\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}2x-1,\ x\geq\dfrac{1}{2},\\ 1-2x,\ x<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

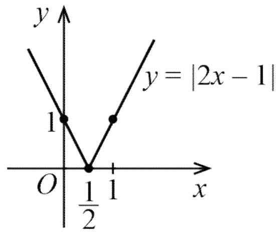


Рис. 17

Получили кусочную функцию, график на рис. 17.
Но данный график функции $y=|2x-1|$ можно построить другим способом – с помощью преобразования графиков.

Основные приёмы преобразования графиков:

1. Параллельный перенос вдоль оси абсцисс $y=f(x+a)$, Строим график $y=f(x)$, а затем: если $a>0$, параллельным переносом вдоль оси Ox сдвигаем график влево на a (рис. 18);

если $a<0$, параллельным переносом вдоль оси Ox сдвигаем вправо на a (рис. 18).

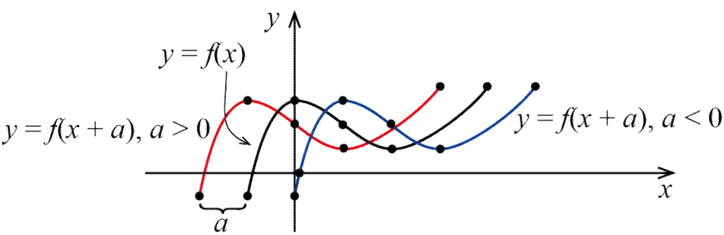


Рис. 18

2. Параллельный перенос вдоль оси Oy $y = f(x) + b$. Строим график $y = f(x)$, а затем: если $b > 0$, то переносим график функции вдоль оси Oy вверх на b (рис. 19);

если $b < 0$, то переносим график функции вдоль оси Oy вниз на b (рис. 19).

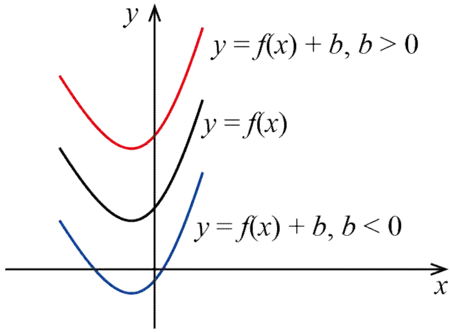


Рис. 19

График функции $y = f(x + a) + b$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ в результате последовательного выполнения двух параллельных переносов: сдвиг вдоль оси Ox на a единиц и сдвиг графика функции $y = f(x + a)$ вдоль оси Oy на b единиц.

3. График функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси ординат (рис. 20).

График функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси абсцисс (рис. 20).

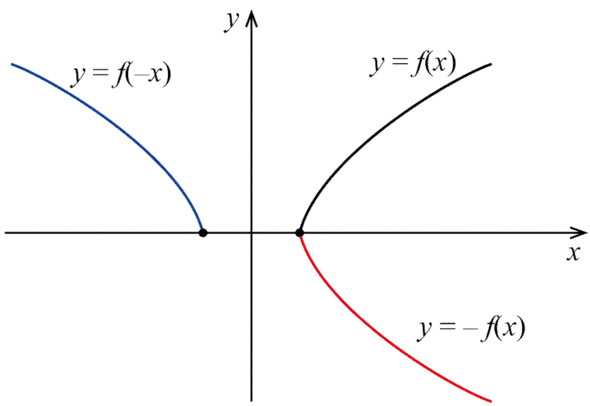


Рис. 20

4. Сжатие или растяжение. График функции $y = f(kx)$ при $k > 1$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси ординат (рис. 21).

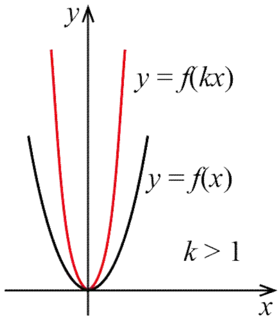


Рис. 21

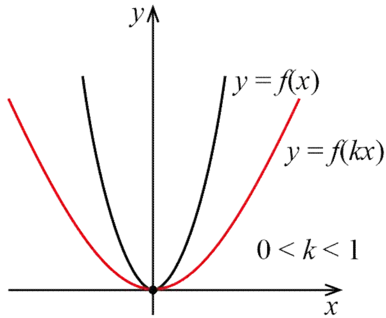


Рис. 22

График функции $y = f(kx)$ при $0 < k < 1$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси ординат (рис. 22).

Для построения графика функции $y = f(kx + b)$ из графика $y = f(x)$:

1) записывают функцию $y = f(kx + b)$ в виде $y = f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$;

2) строят $y = f(x)$, затем $y = f(kx)$;

3) из полученного $y = f(kx)$ получают $y = f(kx + b)$.

5. Графики $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$. Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, то строим $y = f(x)$, а затем нужно оставить на месте ту его часть, где $f(x) \geq 0$, и симметрично отобразить относительно оси *Ox* другую его часть, где $f(x) < 0$ (рис. 23).

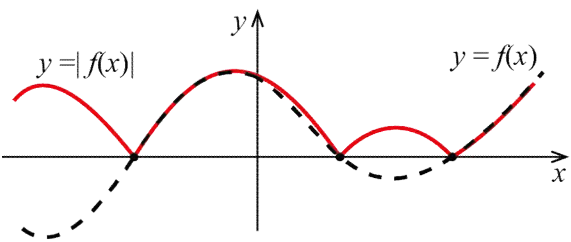


Рис. 23а

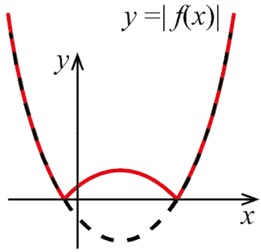


Рис. 23б

Чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, то строим $y = f(x)$, а затем нужно оставить на месте ту часть графика функции $y = f(x)$, которая соответствует неотрицательной части области определения функции $y = f(x)$, Отобразив эту часть симметрично относительно оси Oy, получим другую часть графика, соответствующую отрицательной части области определения (рис. 24).

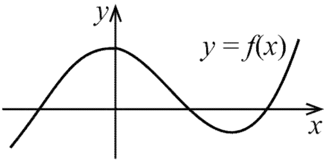


Рис. 24а

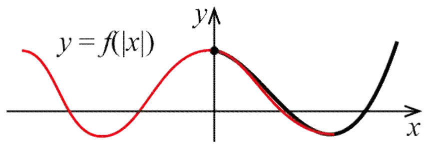


Рис. 24б

Вспомним пример $y = |2x - 1|$. График функции можно построить следующим способом, сначала построить $y = 2x - 1$ – это прямая, а затем, что ниже оси Ox отобразить симметрично оси Ox вверх (рис. 25).

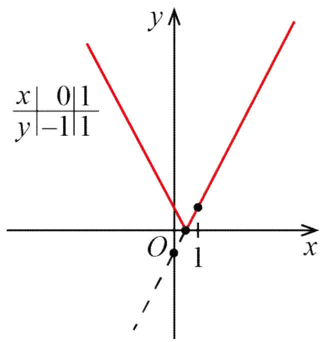


Рис. 25

Пример 17. Постройте графики функций

а) $y = |x - 3|$; б) $y = 1 - |x|$;

в) $y = |1 - 2x| + 1$;

г) $y = 2|x + 4| + |x - 3| + 2x - 3|x + 1|$;

д) $y = \left|\left||x| - 3\right| - 1\right|$.

Решение. а) $y = |x - 3|$, построим $y = |x|$, а затем с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox сдвигаем график вправо на 3 единицы (рис. 26).

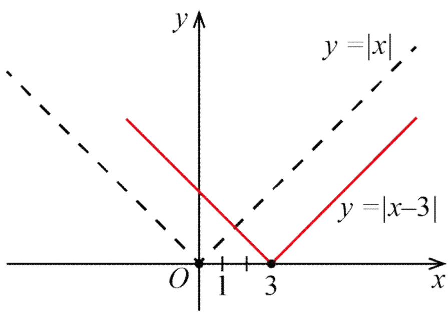


Рис. 26

б) $y = 1 - |x|$.

1) Построим $y = |x|$;

2) получим $y = -|x|$, симметрично отразив относительно оси Ox;

3) параллельным переносом сдвигаем на 1 единицу вверх (рис. 27).

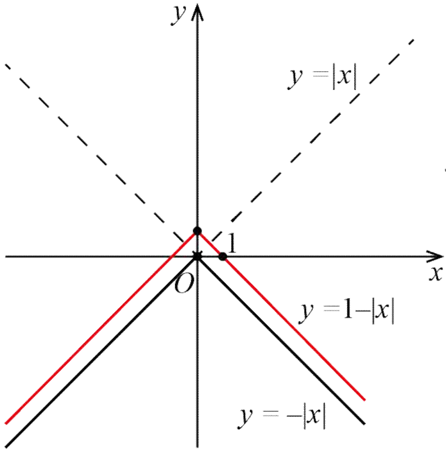


Рис. 27

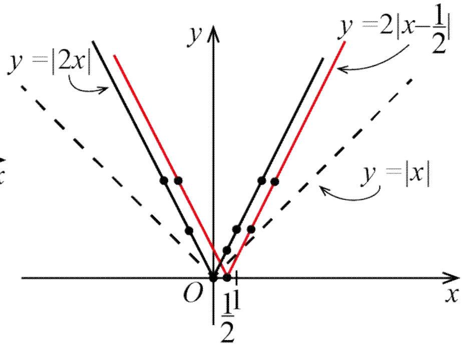


Рис. 28

в) $y = |1-2x|+1$.

$$|1-2x|+1 = |2x-1|+1 = 2\left|x-\frac{1}{2}\right|+1.$$

1) построим $y=|x|$ (рис. 28);

2) $y=2|x|$ получается из $y=|x|$ сжатием в два раза к оси Oy (рис. 28);

3) строим $y=2\left|x-\frac{1}{2}\right|$: сдвигаем $y=2|x|$ вправо на $\frac{1}{2}$ вдоль оси Ox (рис. 28);

4) строим $y=2\left|x-\frac{1}{2}\right|+1$: сдвигаем вверх $y=2\left|x-\frac{1}{2}\right|$ на 1 единицу вдоль оси Oy (рис. 29).

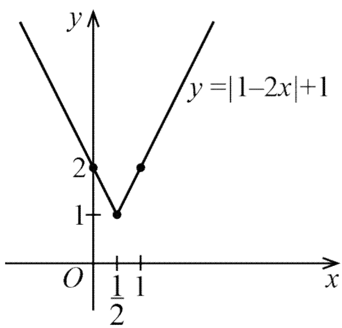


Рис. 29

г) Отметим на числовой прямой точки, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль (рис. 30а). Эти три точки делят числовую прямую на четыре части, причём на каждой из частей знаки выражений, стоящих под модулями, не меняются.

Возможны 4 случая. 1) $\underline{x \le -4.}$ Тогда $x+4 \le 0, x-3<0, x+1<0,$ поэтому $y = 2\cdot(-x-4)-(x-3)+2x+3(x+1) = 2x-2.$

Получаем луч (часть прямой $y = 2x-2,$ лежащую слева от прямой $x=-4$).

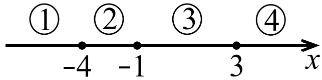


Рис. 30а

2) $\underline{-4 < x \le -1.}$ Тогда $x+4>0,\ \ x-3<0,$ $x+1 \le 0,$ поэтому

$y = 2(x+4)-(x-3)+2x+3(x+1) = 6x+14.$

Получаем отрезок (часть прямой $y = 6x+14$, лежащая между прямыми $x=-4$ и $x=-1$).

3) $\underline{-1 < x \le 3.}$ Тогда $x+4>0,\ \ x-3 \le 0,\ \ x+1>0,$ поэтому

$$y = 2(x+4)-(x-3)+\ 2x-3(x+1) = 8.$$

Получаем отрезок (часть прямой $y=8,$ заключённая между прямыми $x=-1$ и $x=3$).

4) $\underline{x>3.}$ Тогда $x+4>0,\quad x-3>0,$ $x+1>0,$ поэтому

$y = 2(x+4)+(x-3)+2x-3(x+1) = 2x+2.$

Получаем луч (часть прямой $y = 2x+2,$ находящуюся справа от прямой $x=3$). График см. на рис. 30б.

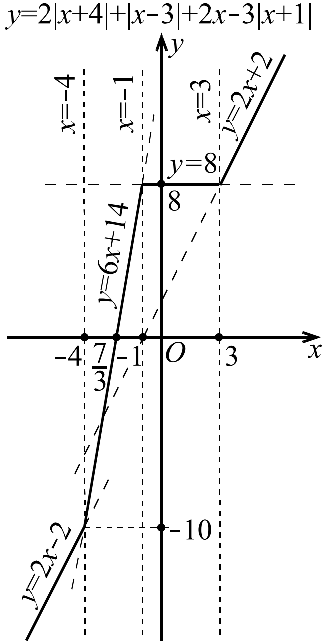


Рис. 30б

Укажем второй способ построения. На каждом из четырёх участков

$$(-\infty;-4],\ [-4;-1],\ [-1;3],\ [3;+\infty)$$

после раскрытия модулей получим линейную функцию, графиком которой является прямая. Чтобы построить прямую, достаточно знать две её точки. Отсюда вытекает следующий способ построения. Вычислим значения функции в точках $x=-4,$ $x=-1$ и $x=3,$ а также в каких-либо точках, лежащих на промежутках $(-\infty;-4)$ и $(3;+\infty),$ например, $x=-5$ и $x=4$. Получаем пять точек, принадлежащих графику:

$$A(-4;-10), B(-1;8),\ C(3;8),\ D(-5;-12),\ E(4;10).$$

Проводим отрезки AB и BC, лучи AD и CE и получаем график.

д) Построим сначала график функции $f_1(x)=|x|-3$ (рис. 31а). График $f_2(x)=\left||x|-3\right|$ получается из графика функции $f_1(x)$ так: точки, лежащие выше оси Ox и на оси Ox, сохраняются, а все точки, лежащие ниже оси Ox, отражаются относительно оси Ox в верхнюю полуплоскость (рис. 31б). Действительно, если $f_1(x)\geq 0$, то $f_2(x)=|f_1(x)|=f_1(x)$, а если $f_1(x)<0$, то $f_2(x)=|f_1(x)|=-f_1(x)$. Таким образом, если при некотором x оказалось, что $f_1(x)\geq 0$, то точки на графике для $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают. Если же $f_1(x)<0$, то для $y=f_2(x)$ абсцисса точки не поменяется, а ордината сменит знак. График функции $f_3(x)=\left||x|-3\right|-1$ получается из графика функции $f_2(x)$ сдвигом на единицу вниз (рис. 31в).

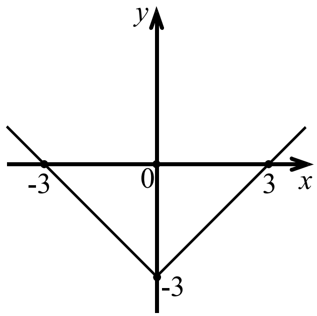


Рис. 31а

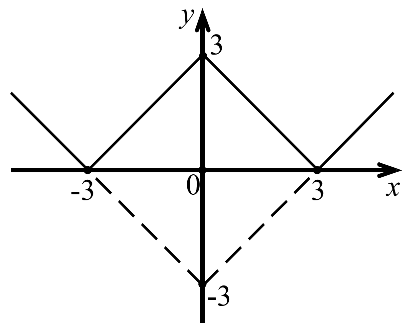


Рис. 31б

График функции $f_4(x)=\left|\left||x|-3\right|-1\right|$ получается из $f_3(x)$ отражением всех точек, лежащих ниже оси Ox, относительно оси Ox наверх (рис. 31г).

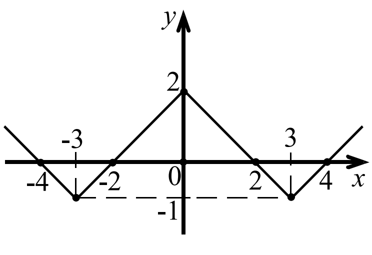


Рис. 31в

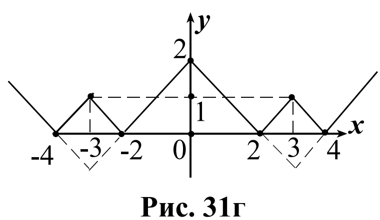


Рис. 31г

3п. Квадратичная функция

Любую квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ можно задать формулой $y = a(x-m)^2 + n.$ Докажем это.

Выделив из квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена, получим $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a},$ где $D = b^2 - 4ac.$

Обозначим $-\frac{b}{2a} = m,$ $-\frac{D}{4a} = n,$ $y = ax^2 + bx + c = a(x-m)^2 + n.$

Следовательно, график функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов – сдвига вдоль оси Ox и сдвига вдоль оси Oy.

График функции $y = ax^2$ – парабола $(a \neq 0)$.

Значит, и графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершинами в точке $(m, n),$ где $m = -\frac{b}{2a},$ $n = -\frac{D}{4a}.$ Осью симметрии параболы является прямая $x = m.$

Если $a > 0,$ то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ – вниз.

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ ***при*** $a > 0$:

1. Область определения функции – множество действительных чисел.

2. Если $D > 0,$ то нули функций $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},$

или $D = 0,$ $x = -\frac{b}{2a},$

или $D < 0,$ то функция нулей не имеет.

3. Если $D > 0,$ то функция принимает положительные значения в каждом из промежутков $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и отрицательные на промежутке $(x_1; x_2).$

Если $D = 0,$ то функция принимает только положительные значения при любых $x \in \mathbb{R},$ кроме $x = -\frac{b}{2a}.$

Если $D < 0,$ то функция положительная на всей области определения.

4. Функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. При $x = -\frac{b}{2a}$ функция принимает наименьшее значение, равное $-\frac{D}{4a}$.

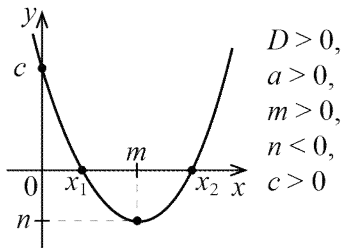


Рис. 32а

5. Область значений функции – множество $\left[-\frac{D}{4a}; +\infty\right)$.

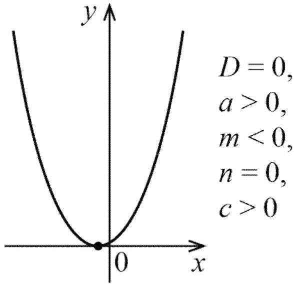


Рис. 32б

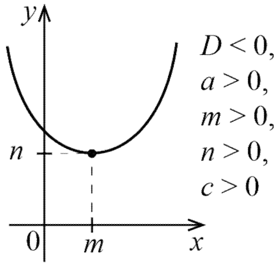


Рис. 32в

На рис. 32 (а,б,в) показано, какой вид имеют графики функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ и в зависимости от знака *D*.

Пример 18. Постройте график функции $y = -2x^2 + 8x - 5$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$y = -2x^2 + 8x - 5 = -2\left(x^2 - 4x\right) - 5 =$$

$$= -2\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) - 5 =$$

$$= -2\left(x - 2\right)^2 + 8 - 5 = -2\left(x - 2\right)^2 + 3.$$

График функции $y = -2\left(x - 2\right)^2 + 3$ – парабола, полученная из параболы $y = 2x^2$ с помощью симметрии относительно оси абсцисс, затем параллельного переноса на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и, наконец, параллельного переноса на 3 единицы вверх вдоль оси ординат (см. рис. 33).

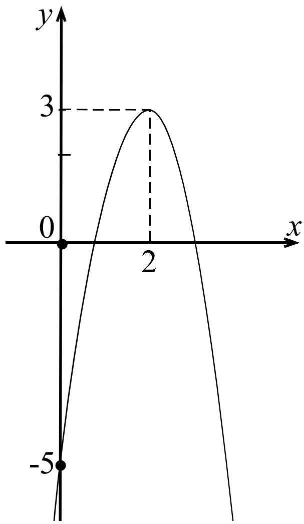


Рис. 33

При помощи построения графика квадратичной функции можно решать квадратные неравенства.

Пример 19. Решите неравенство:

а) $x^2-x-2>0$; б) $4x^2+4x+1\le 0$; в) $3x^2-2x+1>0$.

Решение. а) График квадратного трёхчлена $y=x^2-x-2-$ парабола, её ветви направлены вверх (коэффициент при x^2 положителен), абсциссы точек пересечения с осью Ox: $x_1=-1$, $x_2=2$ (корни квадратного уравнения $x^2-x-2=0$). Все точки оси абсцисс, для которых парабола находится выше этой оси (т. е. решения данного неравенства), расположены вне промежутка между корнями x_1 и x_2. Значит, множество решений данного неравенства – объединение открытых лучей: $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

б) $4x^2+4x+1\le 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2\le 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-0{,}5$.

Ответ: $x=-0{,}5$.

в) График квадратного трёхчлена $y=3x^2-2x+1-$ парабола, её ветви направлены вверх (коэффициент при x^2 положителен), она не пересекает ось абсцисс, т. к. уравнение $3x^2-2x+1=0$ не имеет решений (его дискриминант отрицателен). Поэтому все точки параболы расположены выше оси Ox. Следовательно, данное неравенство истинно для всех x.

Ответ: $x\in\mathbb{R}$.

Заметим, что эти неравенства могли быть решены также с помощью метода интервалов, изложенного выше (см. §2).

Пример 20. Парабола $y=2016x^2-1941x-76-$ пересекает ось абсцисс в точках x_1 и x_2. Определите, где на этой прямой расположены точки 1; –1; –5 (т. е. вне промежутка между x_1 и x_2 или внутри него?).

Решение: Так как $a>0$ и $c<0$, то $D>0$ и данное уравнение имеет корни.

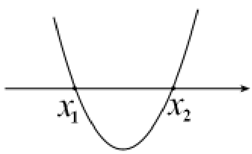


Рис. 34

График функции $f(x)=2016x^2-1941x-76-$ это парабола, ветви которой направлены вверх. Видно, что точка лежит в промежутке между корнями тогда и только тогда, когда $f(x)<0$ и вне этого промежутка, если $f(x)>0$ (см. рис. 34).

$$f(1)=-1<0\Rightarrow 1\in(x_1;x_2);$$

$$f(-1)=2016+1941-76>0\Rightarrow 1\notin(x_1;x_2);$$

$$f(-5)=2016\cdot 25+1941\cdot 5-76>0\Rightarrow 5\notin(x_1;x_2).$$

Пример 21. Определите знаки коэффициентов квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$, график которого изображён на рис. 35.

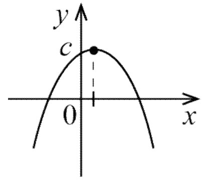


Рис. 35

Решение: 1) Заметим, что $y(0) = c$, откуда $c > 0$.

2) Ветви параболы направлены вниз $\Rightarrow a < 0$.

3) Ось симметрии параболы – это прямая $x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a}$, по рисунку видно, что $-\dfrac{b}{2a} > 0$, откуда $b > 0$.

Ответ: $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$.

Пример 22. Найти все значения l, при которых неравенство

$$lx^2 - 2(l-6)x + 3(l-2) < 0$$

верно для всех значений x.

Решение. Коэффициент при x^2 зависит от l и равен 0 при $l = 0$. В этом случае данное неравенство не квадратное, а линейное: $12x - 6 < 0$. Это неравенство неверно, например, при $x = 1$, значит, при $l = 0$ данное неравенство не является верным <u>для всех</u> значений x.

Рассмотрим значения $l \neq 0$. Для них данное неравенство квадратное. Видно, что все числа являются его решениями только в одном случае: во-первых, если старший коэффициент отрицателен, (т. е. ветви параболы направлены вниз), и во-вторых, если дискриминант отрицателен, (т. е. парабола не пересекает ось абсцисс).

Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} l < 0, \\ \dfrac{D}{4} = (l-6)^2 - 3l(l-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l < 0, \\ -2l^2 - 6l + 36 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l < 0, \\ (-2l+6)(l+6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l < 0, \\ l \in (-\infty; -6) \cup (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow l < -6.$$

Ответ: $l < -6$.

Пример 23. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4x + 3$, б) $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$, в) $y = x^2 - 4|x| + 3$,

г) $y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right|$.

Решение: а) $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1$.

График функции $y = x^2 - 4x + 3$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на 2 вправо и на 1 вниз (рис. 36а).

б) Отразим все точки графика пункта а), лежащие ниже оси абсцисс, относительно этой оси (рис. 36б).

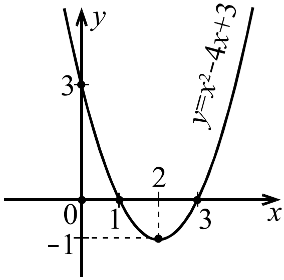


Рис. 36а

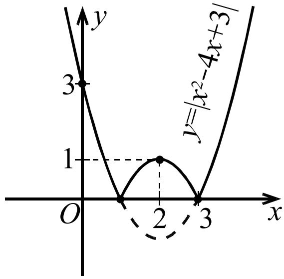


Рис. 36б

в) Заметим, что функция $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ чётная (т. е. удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$), поэтому её график симметричен относительно оси ординат. Кроме того, при $x \geq 0$ этот график совпадает с графиком функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Отсюда вытекает следующий способ построения. От графика функции $y = x^2 - 4x + 3$ оставим точки, лежащие справа от оси Oy, отразим их симметрично относительно этой оси, а точки, лежащие слева от оси Oy, отбросим (рис. 36в).

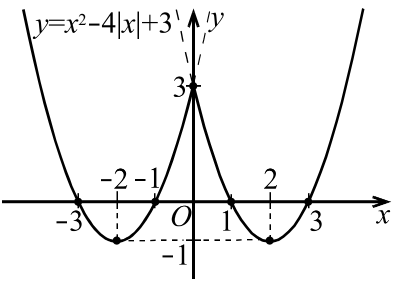


Рис. 36в

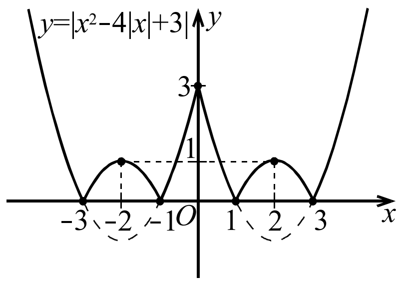


Рис. 36г

г) Есть 2 способа построения.

(1) Все точки графика из пункта (в), лежащие ниже оси абсцисс, отражаем относительно этой оси.

(2) От графика пункта (б) отбрасываем точки, лежащие слева от оси ординат; все точки, находящиеся справа от оси ординат, отражаем относительно неё. Разумеется, в обоих случаях получается одинаковый результат (рис. 36г).

4п. Дробно-линейная функция

Функция, которую можно задать формулой вида $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где x – независимая переменная, a, b, c, d – произвольные числа, $c\neq 0$ и $ad-bc\neq 0$, называется дробно-линейной функцией.

Ограничения $c\neq 0$ и $ad-bc\neq 0$ существенны. Если $c=0$, то мы получим линейную функцию, а при $ad-bc=0$ – сократимую дробь, значение которой равно $\dfrac{b}{d}$, т. е. числу.

Из $ad-bc=0$ выразим с $bc=ad$, $c=\dfrac{ad}{b}$. В $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ подставим

$$c=\frac{ad}{b};\quad \frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+b}{\frac{ad}{b}x+d}=\frac{(ax+b)\cdot b}{d(ax+b)}=\frac{b}{d}.$$

Графиком дробно-линейной функции является гипербола.

Пример 24. Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{6}{2x+3}$; б) $y=\dfrac{6-3x}{2x+1}$.

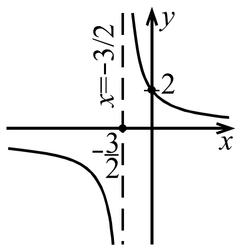


Рис. 37

Решение. а) $y=\dfrac{3}{x+{}^{3}\!/_{2}}$. Это график получается из гиперболы $y=\dfrac{3}{x}$ параллельным переносом на $\dfrac{3}{2}$ влево (см. рис. 37).

Асимптотами этой гиперболы являются прямые $x=-\dfrac{3}{2}$ и $y=0$. (У каждой гиперболы есть две асимптоты. Горизонтальная асимптота $y=\text{const}$ – это та прямая, к которой график приближается при x, стремящемся к бесконечности. Вертикальная асимптота $x=\text{const}$ возникает при том значении x, где знаменатель дроби обращается в ноль. При x, приближающемся к данной точке, функция стремится к бесконечности).

б) Отношение коэффициентов при x в числителе и знаменателе дроби равно $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$. Преобразуем данную дробь, добавляя и вычитая $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$:

$$y=-\frac{3}{2}+\left(\frac{6-3x}{2x+1}+\frac{3}{2}\right).$$

Дроби в скобках приводим к общему знаменателю:

$$y=-\frac{3}{2}+\frac{12-6x+6x+3}{2(2x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}+\frac{15}{4x+2}\Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}+\frac{15/4}{x+1/2}.$$

Этот график получается из графика $y=\frac{15/4}{x}$ параллельным переносом на $\frac{3}{2}$ вниз и на $\frac{1}{2}$ влево (рис. 38).

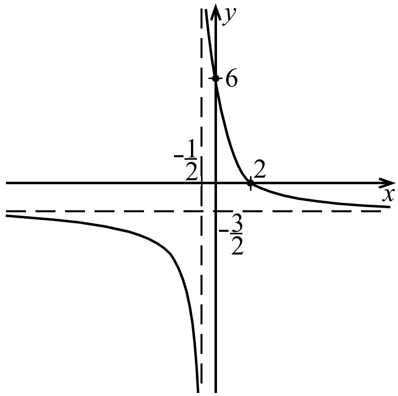


Рис. 38

Пример 25. Постройте график функции $y=-\frac{2x+10}{x+3}$.

Решение. Выделим из дроби $\frac{2x+10}{x+3}$ целую часть

$$\frac{2x+10}{x+3}=\frac{2(x+3)+4}{x+3}=2+\frac{4}{x+3};\;\; y=-2-\frac{4}{x+3}.$$

Заметим, что выделение целой части из дроби $\frac{2x+10}{x+3}$ можно выполнить иначе. Разделим двучлен $2x+10$ на двучлен $x+3$:

$$\begin{array}{r|l} -\;2x+10 & x+3 \\ \underline{2x+6} & \overline{2} \\ 4. & \end{array}$$

Значит, $\frac{2x+10}{x+3}=2+\frac{4}{x+3}$. Следовательно, $y=-\frac{4}{x+3}-2.$

График функции $y=-\frac{4}{x+3}-2$ можно получить из графика функции $y=-\frac{4}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвиг на 3 единицы влево и сдвиг на 2 единицы вниз.

Асимптоты гиперболы – прямые $x=-3$ и $y=-2$.

Составим две таблицы для $x<-3$ и для $x>-3$.

x	–2	–1	1	2	7

y	–6	–4	–3	–2,8	–2,4

x	–4	–5	–7	–8	–11
y	2	0	–1	–1,2	–1,5

Построив точки в координатной плоскости и проведя через них ветви гиперболы, получим график функции $y=-\dfrac{2x+10}{x+3}$ (рис. 39).

Докажем теперь, что графиком любой дробно-линейной функции является гипербола, которая получается из графика функции $y=\dfrac{k}{x}$ с помощью параллельных переносов вдоль осей координат. Для этого нужно показать, что формула $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ можно представить в виде $y=\dfrac{k}{x-m}+n$, где k, m и n – числа, определяемые значениями коэффициентов a, b, c и d, причём $k\neq 0$.

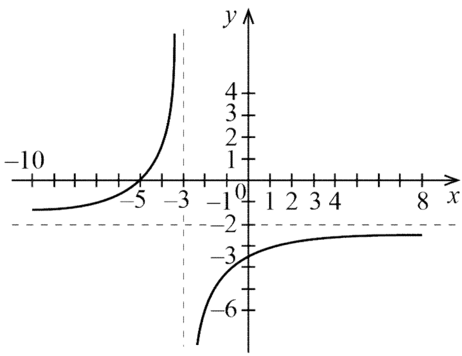


Рис. 39

Выделим из дроби $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ целую часть, учитывая, что $c\neq 0$ и $ad-bc\neq 0$. Для этого разделим двучлен $ax+b$ на двучлен $cx+d$:

$$\begin{array}{r|l} ax+b & cx+d \\ -\left(ax+\dfrac{ad}{c}\right) & \dfrac{a}{c} \\ \hline b-\dfrac{ad}{c}. & \end{array}$$

Значит, $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b-\dfrac{ad}{c}}{cx+d}$.

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на c, получим

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}.$$

Пусть $\frac{a}{c}=n,\ \frac{bc-ad}{c^2}=k$ и $-\frac{d}{c}=m.$ Тогда $\frac{ax+b}{cx+d}=n+\frac{k}{x-m}.$

Значит, произвольную дробно-линейную функцию можно задать формулой $y=\frac{k}{x-m}+n,$ где $k\neq 0.$ Следовательно, график функции $y=\frac{k}{x-m}+n$ можно получить из графика функции $y=\frac{k}{x}$ с помощью двух соответствующих параллельных переносов.

График функции $y=\frac{k}{x}$ – гипербола, значит, и график функции $y=\frac{k}{x-m}+n$ также является гиперболой, для которой прямые $x=m$ и $y=n$ являются асимптотами.

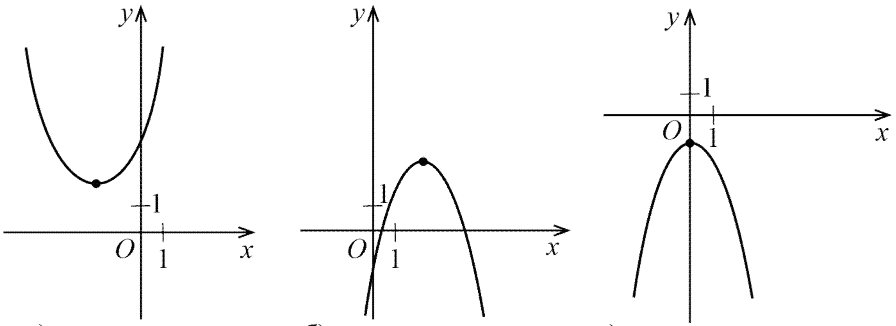
Так как $m=-\frac{d}{c}$ и $n=\frac{a}{c},$ то для гиперболы $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ асимптотами являются прямые: $x=-\frac{d}{c}$ и $y=\frac{a}{c}.$

При построении конкретного графика дробно-линейной функции нужно формулу $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ представить в виде $y=\frac{k}{x-m}+n.$

Контрольные вопросы

1(1). Сформулируйте свойства функции $y=ax^2+bx+c$ при $a<0$ по образцу из §4 п. 3 и постройте эскизы графиков для разных знаков D.

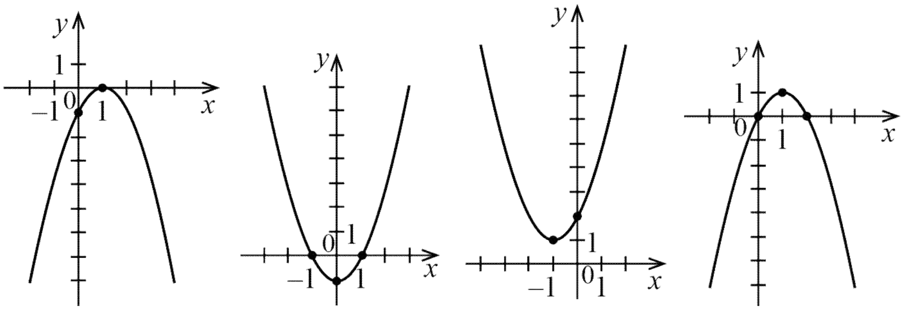
2(1). Квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ задана графически. Определите знаки коэффициентов a, b, c и дискриминанта D соответствующего квадратного трёхчлена:



а) б) в)

3(1). Установите соответствие между квадратичной функцией и её графиком.

1) $y=-(x-1)^2+1$; 2) $y=(x+1)^2+1$; 3) $y=-(x-1)^2$; 4) $y=x^2-1$.



А) **Б)** **В)** **Г)**

4(1). Найдите координаты вершины параболы $y=2x^2+x-15$:

а) $\left(-\frac{1}{4};-15\frac{1}{8}\right)$; б) $\left(\frac{1}{4};-14\frac{5}{8}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{2};-15\right)$; г) $(-1;-16)$.

5(1). Решите неравенство $5x^2-4x-1\geq 0$:

а) $(-\infty;+\infty)$; б) $\left[-\frac{1}{5};1\right]$; в) $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right)\cup(1;+\infty)$; г) $(-\infty;-0,2]\cup[1;+\infty)$.

6(2). Для каждого значения параметра a решите уравнение $|x-5|=a-1$.

7(2). Дана функция $f(x)=2x-2$. Постройте график данной функции и графики функций:

а) $y=f(-x)$; б) $y=f(2x)$; в) $y=|f(x)|$; г) $y=f(|x|)$.

В каждом случае задайте функцию формулой.

8(2). Для каждого значения параметра a решите неравенство $|3-2x| \geq a$.

9(6). Постройте графики функций (Требуется не только построить график функции, но и пояснить как вы его построили.):

а)(1) $y=-3(x+1)^2+2$; **б)(1)** $y=x^2-3x-\sqrt{(3x-9)^2}$;

в)(1) $y=x^2-3x-\left(\sqrt{3x-9}\right)^2$; **г)(1)** $y=x^2-\dfrac{|x|}{x}$;

д)(1) $y=\left|-x^2+6x-8\right|$; **е)(1)** $y=\dfrac{2x+1}{8x-1}$.

10(2). Решите неравенство $\dfrac{9}{x+1}+1<\dfrac{14}{x-1}$.

Задачи

1(8). Решите неравенства:

а)(3) $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2+6x+9}<0$; **б)(1)** $\dfrac{(x+5)(2x+3)}{x+4}>0$;

в)(2) $\dfrac{(x+1)(x-7)^5(x-4)^2}{(x+1)^2(x-2)^3}\geq 0$; **г)(2)** $\dfrac{5}{5-x}\geq\dfrac{x+1}{x-3}$.

2(6). Решите неравенства с модулями:

а)(2) $|x-2|+|x-3|<6-3x$;

б)(2) $\left|4-|2x-1|\right|\leq 3$;

в)(2) $\dfrac{|x-7|-|x+3|}{|x+13|-|x+4|}\geq 0$.

3(2). Постройте график функции $y=\dfrac{1-2x}{2x^2-x}$. Найдите, при каких значениях a прямая $y=ax$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку.

4(4). Постройте график функции $y=\left|\dfrac{x^2-5|x|+6}{x^2-6|x|+8}\right|$.

5(1). Напишите уравнение какой-нибудь прямой, которая с гиперболой $y=\dfrac{6}{x}$:

а) имеет только одну общую точку;

б) имеет только две общие точки;
в) не имеет общих точек.

6(2). Постройте график функции $y=\dfrac{2|x|+2}{|x|-1}$ и определите, при каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{2|x|+2}{|x|-1}=a$ не имеет корней.

7(3). На рисунке 40 дан график функции $y=x^2+ax+b$, $AB\parallel Ox$, $CD\parallel Ox$. Найдите расстояние между прямыми, если известно, что $AB=3$, $CD=13$.

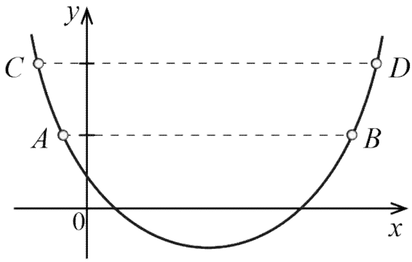


Рис. 40

8(3). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\dfrac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}\geq a$ является верным для всех $x\in\mathbb{R}$.

9(2). При каких значениях параметра k вершина параболы $y=kx^2-7x+4k$ лежит во второй четверти.

10(3). Найдите все значения параметра k, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2+2(k-1)x+3k+1=0$ удовлетворяет неравенству $x<-1$.