Сила Лоренца. Часть №2

Задачи из mathus

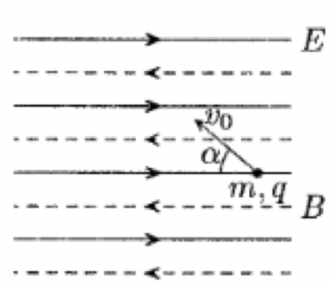
Движение заряда в параллельных полях

Задача 30

Частица массой m с положительным зарядом q находится в однородных электрическом и магнитном полях. Напряжённость электрического поля равна E. Линии индукции магнитного поля параллельны силовым линиям электрического поля. В начальный момент частице сообщают скорость v_0, направленную под углом α к линиям индукции (см. рисунок). Через некоторое время частица возвращается в начальную точку.

а) Чему равно это время?

б) Найти индукцию магнитного поля B, при которой возвращение в начальную точку возможно.



Решение:

На частицу с зарядом q будут действовать две силы: сила со стороны электростатического поля $F_э = gE$ и сила Лоренца $F_Л = qv_0 \sin\alpha B$. Под действием электрической силы частица движется сначала равнозамедленно, а потом после остановки равноускоренно, и после возвращения в начальную точку ее скорость вдоль горизонтального направления снова равна $v_0 \cos\alpha$:

$$-v_0 \cos\alpha = v_0 \cos\alpha - \frac{q}{m} E t_1$$

где t_1 — время возврата частицы в начальную точку. Отсюда

$$t_1 = \frac{2mv_0 \cos\alpha}{qE}$$

В плоскости, перпендикулярной силовым линиям E и B, под действием силы Лоренца частица совершает круговые движения. Найдем период обращения частицы T по окружности радиуса R. Уравнение движения по окружности

$$\frac{m(v_0 \sin\alpha)^2}{R} = qv_0 \sin\alpha B$$

Период обращения

$$T = \frac{2\pi R}{v_0 \sin\alpha} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Условие возвращения частицы в начальную точку

$$t_1 = NT = \frac{2\pi m N}{qB_N}, \text{ где } N = 1, 2, 3, \cdots$$

Отсюда набор значений B_N, при которых частица возвращается в начальную точку

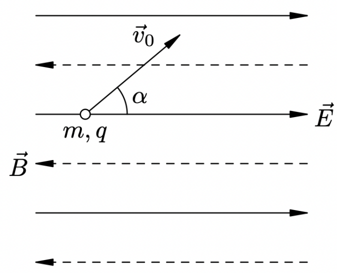
$$B_N = \frac{2\pi m N}{qt_1} = \frac{\pi E N}{v_0 \cos\alpha}$$

Задача 31

Частица массой m с положительным зарядом q находится в однородных электрическом и магнитном полях. Линии индукции магнитного поля параллельны силовым линиям электрического поля. В начальный момент частице сообщают скорость v_0, направленную под углом α к силовым линиям (см. рисунок). Через время τ частица оказывается вновь на той же силовой линии электрического поля, с которой она стартовала, на расстоянии L от первоначальной точки.

а) Чему равна напряжённость электрического поля E?

б) Найти индукцию магнитного поля B.



Решение:

Общая сила, действующая на частицу будет определяться как:

$$\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{q}\vec{\mathrm{E}} + \mathrm{q} \cdot [\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}]$$

Электическое поле будет ускорять частицу.

$$L = V_0 \cos \alpha \tau + \frac{qE}{m}\frac{\tau^2}{2}$$

Отсюда можно получить ответ для напряженности электрического поля.

$$\mathrm{E} = \frac{2m}{\mathrm{q}\tau^2}(L - v_0 \cos \alpha \tau)$$

Магнитное поле будет закручивать частицу по окружности с центростремительным ускорением $\frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{R}$:

$$\frac{qv_0 \ \mathrm{B} \sin \alpha}{\mathrm{m}} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{\mathrm{R}} \ (*)$$

Частица совершит полный оборот за время τ. Из этого условия найдем радиус:

$$\mathrm{R} = \frac{v_0 \sin \alpha \tau}{2\pi} \ (**)$$

Решая совместно (*) и (**)

$$B = \frac{2\pi m}{\tau q}$$

Задача 33

Шарик массой m с зарядом q брошен с поверхности Земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту. В области, где движется шарик, наряду с гравитационным полем создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Через некоторое время шарик возвращается в точку старта. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

1) Найти продолжительность полёта.

2) Найти возможные величины индукции магнитного поля.

Решение:

Шарик будет двигаться сначала вверх по винтовой линии с уменьшающимся шагом, а затем вниз по винтовой линии с увеличивающимся шагом.

$$0 = v \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \text{ Отсюда } t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

$$\frac{m(v_0\cos\alpha)^2}{R} = q(v_0\cos\alpha)B. \text{ Отсюда } R = \frac{mv_0\cos\alpha}{qB}.$$

Период

$$T = \frac{2\pi R}{v_0\cos\alpha} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Шарик целое число оборотов:

$$t = nT = n\cdot\frac{2\pi m}{qB}. \text{ Отсюда } B = \frac{2\pi m}{qt}\cdot n.$$

Окончательно:

$$B = \frac{\pi mg}{qv_0\sin\alpha}\cdot n, \text{ где } n = 1, 2, 3...$$

Задача 34

Шарик массой m с зарядом q брошен с поверхности Земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту. В области, где движется шарик, наряду с гравитационным полем создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Через время τ шарик оказался на некоторой высоте и на одной вертикали с точкой старта. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

1) На какой высоте оказался шарик через время τ?
2) Найти возможные величины индукции магнитного поля.

Решение:

Шарик будет двигаться сначала вверх по винтовой линии с уменьшающимся шагом, а затем вниз по винтовой линии с увеличивающимся шагом.
1) Высота h будет равна:

$$h = v_0\sin\alpha\cdot\tau - \frac{1}{2}g\tau^2.$$

2)

$$\frac{m(v_0\cos\alpha)^2}{R} = q(v_0\cos\alpha)B. \text{ Отсюда } R = \frac{mv_0\cos\alpha}{qB}.$$

Период

$$T = \frac{2\pi R}{v_0\cos\alpha} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Шарик целое число оборотов:

$$t = nT = n\cdot\frac{2\pi m}{qB}. \text{ Отсюда } B = \frac{2\pi m}{qt}\cdot n.$$

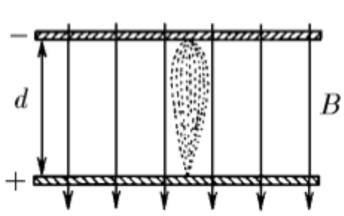
Окончательно:

$$B = \frac{\pi mg}{qv_0\sin\alpha}\cdot n, \text{ где } n = 1, 2, 3...$$

Задача 35 (аналогично 33 и 34)

Задача 36

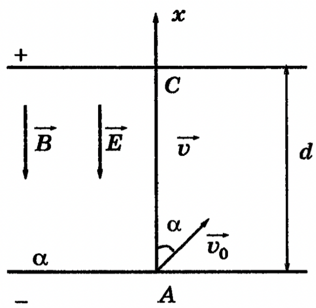
Пластины плоского конденсатора с шириной зазора между ними d расположены перпендикулярно магнитному полю индукции B. Около катода расположен источник медленных электронов, вылетающих в разных направлениях к пластинам. При каком напряжении на конденсаторе электроны будут фокусироваться на аноде? Чем определяется размер пятна?



Решение:

Рассмотрим движение электрона, вылетевшего из катода со скоростью v_0, направленной под углом α к линиям магнитной индукции.
Согласно закону Ньютона:

$$\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{F}_{\text{л}} = m\vec{a}, \qquad (1)$$



где сила со стороны электрического поля:

$$F_{\text{эл}} = eE, \qquad (2)$$

направлена в сторону, противоположную вектору напряженности E, сила Лоренца:

$$F_{\text{л}} = qvB\sin\alpha. \qquad (3)$$

Представим скорость электрона в виде:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}. \qquad (4)$$

На составляющую скорости $v_\perp$ электрическое поле не влияет, следовательно при $v_\perp = 0$ движение электрона представляло бы равномерное вращение с ларморовским радиусом и периодом:

$$T = \frac{2\pi m_e}{eB}. \qquad (5)$$

а составляющую $v_\parallel$, наоборот, не влияет магнитное поле, так что при $v_\perp = 0$ движение электрона представляло бы равноускоренное движение с ускорением $a = \frac{eE}{m}$; при этом смещение электрона по оси x:

$$x = v_0\cos\alpha \cdot t + \frac{at^2}{2} \approx \frac{at^2}{2}. \qquad (6) \qquad (6)$$

с учетом малости начальной скорости v_0. Обозначив время движения электрона до положительной пластины через τ, перепишем (6) в виде:

$$d = \frac{a\tau^2}{2}. \qquad (7)$$

Таким образом, движение электрона представляет собой двиясение по спирали ларморовского радиуса с увеличивающимся после каждого витка шагом.
Условие фокусировки сводится к тому, чтобы, долетев до положительной пластины, электрон сделал полное число оборотов n, то есть

$$\tau = nT. \qquad (8)$$

При этом, очевидно, точка вылета электрона и точка фокусировки лежат на одном перпендикуляре к поверхности пластин конденсатора.

$$U = Ed. \qquad (9)$$

окончательно получаем:

$$U = \frac{e^2B^2d^2}{2\pi mn^2}, \text{ где } n = 1, 2, 3...$$

Движение заряда в скрещенных полях

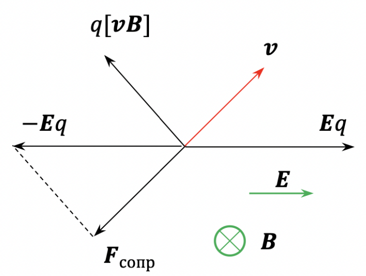
Задача 37

Частица с зарядом q движется вдоль прямой с постоянной скоростью v в однородных скрещенных электрическом и магнитном полях с напряжённостью E и индукцией B , т. е. векторы полей перпендикулярны друг другу ($\vec{E} \perp \vec{B}$). Найдите модуль силы вязкого трения, действующей на эту частицу.

Решение:

Так как частица движется вдоль прямой с постоянной скоростью v, то

$$\vec{E}q + q[\vec{v}\vec{B}] + \vec{F}_{\text{сопр}} = 0.$$



Пусть заряд q – положительный. Сила Лоренца $q[\vec{v}\vec{B}]$ перпендикулярна индукции магнитного поля и скорости частицы, сила вязкого трения $\vec{F}_{\text{сопр}}$ направлена против скорости частицы, сила $\vec{E}q$ направлена вдоль напряжённости электрического поля (см. рисунок). Используя теорему Пифагора, получаем

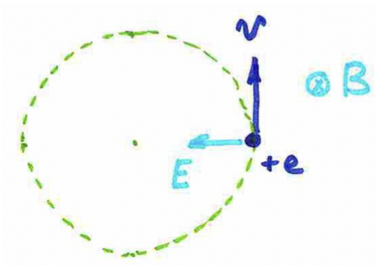
$$F = \sqrt{(Eq)^2 - (qvB)^2}.$$

Задача 39

Задача 5. Протон (заряд $+e$, масса m) движется в электромагнитном поле по окружности радиуса R. В каждой точке траектории электрическое поле направлено к центру окружности и равно E. Индукция магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости окружности и равна B. При каких условиях на параметры задачи протон движется со скоростью, много меньшей скорости света? Какой может быть кинетическая энергия протона? Решите задачу в общем случае и получите численный ответ в двух частных случаях: (а) $R = 1$ м, $E = 1$ кВ/м, $B = 0$; (б) $R = 1$ м, $E = 1$ кВ/м, $B = 0,1$ Тл. Ответ представьте в электронвольтах (1 эВ — энергия, получаемая протоном при прохождении разности потенциалов 1 В). Элементарный заряд составляет $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение:

Пусть v — скорость движения протона по окружности (если протон движется в направлении, противоположном указанному на рисунке, будем считать скорость отрицательной).



Действующая на протон сила равна $eE + evB$ и направлена к центру окружности. Поскольку ускорение протона равно v^2/R, из второго закона Ньютона получим:

$$m\frac{v^2}{R} = e(E + vB)$$

Решая квадратное уравнение, находим возможные значения скорости протона:

$$v = \frac{eBR}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{eBR}{2m}\right)^2 + \frac{eER}{m}}$$

Эти значения много меньше скорости света при соблюдении двух условий:

$$BR \ll \frac{mc}{e}, \quad ER \ll \frac{mc^2}{e}.$$

Поскольку $mc^2/e \simeq 10^9$ В, а $ER = 10^3$ В и $BcR = 3 \cdot 10^7$ В, данные условия в задаче выполняются. Кинетическую энергию протона можно выразить из второго закона Ньютона:

$$K = m\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}eRE(1 + vB/E)$$

Величину vB/E удобно выразить через параметр:

$$\alpha = \frac{eB^2R}{2mE}$$

тогда

$$\frac{vB}{E} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}$$

и

$$K = \frac{1}{2}eRE\left(\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}\right)$$

Проведём подстановку числовых значений. В случае (а) $\alpha = 0$, и кинетическая энергия протона может принимать только одно значение $K = eRE/2$. Чтобы выразить ее в электронвольтах, рассчитаем отношение $K/e = RE/2 = 500$ В; отсюда $K = 500$ эВ.
В случае (б) $\alpha \simeq 471$. Кинетическая энергия протона может принимать два значения. Одно из них равно:

$$K = \frac{1}{2}eRE\left(\alpha + 1 + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}\right) \simeq eRE\alpha \simeq 470 \text{ кэВ}$$

Второе значение энергии равно:

$$K = \frac{1}{2}eRE\left(\alpha + 1 - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}\right) = \frac{1}{2}eRE\frac{1}{\alpha + 1 + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}} \simeq \frac{eRE}{4\alpha} \simeq 0,53 \text{ эВ}$$

Ответ:

Скорость протона много меньше скорости света при условиях

$$BR \ll mc/e \text{ и } ER \ll mc^2/e.$$

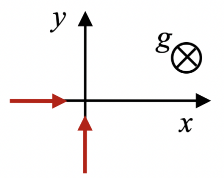
Кинетическая энергия протона может быть равна

$$K = eRE/2 \cdot \left(\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}\right),$$

где $\alpha = eB^2R/(2mE)$.
В случае (а) $K = 500$ эВ, в случае (б) $K = 470$ кэВ или $K = 0,53$ эВ.

Задача 40

Электростатическая пушка «выстреливает» наночастицы с удельным зарядом $\beta = +5 \cdot 10^{-5}$ Кл/кг со скоростью $v = 3500$ м/с. Выстрелы производились горизонтально в вакуумированном пространстве, в котором было создано магнитное поле, линии индукции которого также горизонтальны. Оказалось, что существуют два взаимно перпендикулярных направления, в которых наночастицы двигаются после выстрела прямолинейно. Связав с этими направлениями систему координат, найдите направление и величину индукции магнитного поля. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



Решение:

Прямолинейное движение частицы при наличии магнитного поля и поля тяжести возможно только как дрейфовое движение, описанное в ответе на вопрос. Поэтому линии индукции магнитного поля должны проходить так, чтобы перпендикулярные $\vec{B}$ составляющие скоростей вдоль обоих «особых» направлений, которые у нас выбраны в качестве направлений осей x и y, были равны. Для этого перпендикуляр к $\vec{B}$ должен быть биссектрисой угла между скоростями, а величина индукции должна быть равной

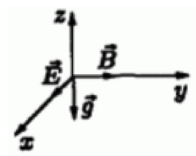
$$B = \frac{mg}{qv_\perp} = \frac{g\sqrt{2}}{\beta v} \approx 80.8 \text{ Тл}.$$

С учетом знака заряда (сила Лоренца в обоих случаях должна быть направлена вверх) находим, что $\vec{B}$ должна быть направлена «влево-вверх», под углом 45° к оси y. В выбранной системе координат

$$\vec{B} = \left(-\frac{g}{\beta v}, \frac{g}{\beta v}\right) = \left(-\frac{400}{7}, +\frac{400}{7}\right) \text{ Тл}$$

Задача 42

Частица массы m с зарядом q движется с постоянной по модулю скоростью в области пространства, где имеются три взаимно перпендикулярных поля: электрическое с напряжённостью E, магнитное с индукцией B и поле тяжести g (рис.). В некоторый момент поля E и B выключают. Минимальная кинетическая энергия частицы в процессе движения составляет половину начальной. Найдите проекции скорости частицы на направления полей E, B и g в момент выключения полей.



Решение:

Результирующая сила $\vec{F}$, действующая на частицу со стороны полей $\vec{E}$ и $\vec{g}$, постоянна по модулю и направлению. Сила Лоренца не совершает работы, поэтому частица должна двигаться в плоскости перпендикулярной силе $\vec{F}$, чтобы не изменялась абсолютная величина ее скорости. Вектор магнитной индукции тоже лежит в этой плоскости, значит, частица движется прямолинейно, то есть результирующая всех сил равна нулю. Запишем это условие в проекции на ось Ox :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qE - qv_zB = 0, \qquad \text{откуда} \qquad v_z = \frac{E}{B}$$

Когда кинетическая энергия достигает минимума, скорость частицы направлена горизонтально. В начальный момент времени кинетическая энергия частицы в 2 раза больше, значит, вертикальная и горизонтальная составляющие начальной скорости одинаковые. Поэтому $v_0 = \sqrt{2}v_z = E\sqrt{2}/B$. При движении в скрещеных полях силы, действующие на частицу вдоль оси Oz, скомпенсированы:

$$mg = qv_xB$$

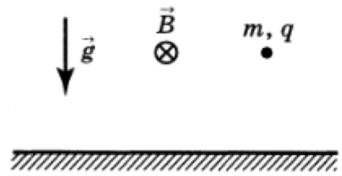
$$\text{а это значит} \quad v_x = \frac{m}{q}\frac{g}{B}.$$

Составляющую скорости v_y найдем из условия $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2$. Откуда следует

$$v_y = \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 - \left(\frac{m}{q}\frac{g}{B}\right)^2}$$

Задача 44

Маленький шарик массой m с зарядом $q > 0$ начинает двигаться из состояния покоя в гравитационном и однородном магнитном полях (рис.). Индукция магнитного поля равна B, вектор $\vec{B}$ направлен параллельно поверхности Земли, причем $qcB >> mg$, где c — скорость света в вакууме. На какое расстояние и в каком направлении шарик сместится от первоначального положения через достаточно большое время τ? Какое время τ можно считать достаточно большим? Шарик в течение всего времени τ не достигает поверхности Земли.



Решение:

Перейдем в систему отсчета K, движущуюся вправо с некоторой скоростью v_0. В этой системе отсчета появится электрическое поле с напряженностью $E = v_0B$, направленное вертикально вверх. Выражение для E можно получить, приравняв силы, действующие на заряд со стороны электромагнитного поля в неподвижной и движущейся системах. Подберем скорость v_0 такой, чтобы сила электрического поля была равна силе тяжести:

$$qv_0B = mg.$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{mg}{qB}.$$

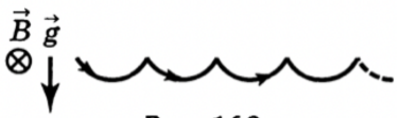


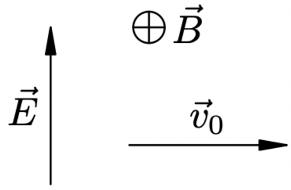
Рис. 168

В системе K шарик будет иметь скорость v_0, направленную вначале влево. Результирующая сила, действующая на шарик, сила со стороны магнитного поля индукцией B. В системе K шарик будет двигаться в плоскости чертежа против часовой стрелки со скоростью v_0 по окружности радиуса $R = \frac{mv_0}{qB}$ с периодом $T = \frac{2\pi m}{qB}$. Относительно Земли шарик будет дрейфовать со скоростью системы K, т.е. со скоростью v_0 и за достаточно большое время $\tau(\tau \gg T)$ сместится относительно Земли вправо на расстояние $l = v_0\tau = \frac{mg\tau}{qB}$. Траектория шарика показана на рисунке 168.

Замечание. Задачу можно решить и другим способом, представив скорость шарика $\vec{v}$ в виде суммы $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$, где $\vec{v}_0 = \text{const}$ и выбрана так, чтобы $q\vec{v}_0 \times \vec{B} + m\vec{g} = 0$, т.е. $\vec{v}_0$ направлена вправо. Тогда только скорость $\vec{v}_1$ будет отвечать за движение шарика в магнитном поле. В начальный момент $\vec{v}_1 = \vec{v}_0$, и это вызовет движение по окружности радиусом $R = \frac{mv_0}{qB}$ с периодом $T = \frac{2\pi m}{qB}$. Общее движение шарика можно представить как движение по окружности и равномерное движение со скоростью v_0 вправо.

Задача 45

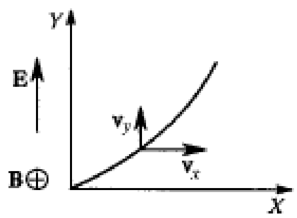
Положительно заряженная частица движется в однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях (см. рисунок). В некоторый момент времени скорость частицы перпендикулярна векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и равна v_0. Чему будет равна скорость этой частицы в те моменты, когда вектор её скорости будет составлять $180°$ с вектором v_0, при условии, что $E = v_0 B$? Поле тяжести не учитывать.



Решение:

На заряженную частицу, движущуюся в электрическом и магнитном полях, действуют сила Кулона со стороны электрического поля и сила Лоренца со стороны магнитного поля.

Движение заряженной частицы вдоль оси обусловлено действием на нее силы Лоренца. Уравнение движения имеет вид



$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -qv_yB, \qquad (1)$$

т. е. ускорение вдоль оси X связано с движением частицы вдоль оси Y. Из уравнения (1) имеем

$$\Delta v_x = -\frac{qB}{m}v_y\Delta t = -\omega_0 v_y \Delta t = -\omega_0 \Delta y, \qquad (2)$$

где $\omega_0 = \frac{qB}{m}$ называется циклотронной частотой. Решая уравнение (2) для v_x, получим

$$v_x = v_0 - \omega_0 y. \qquad (3)$$

При движении частица приобретает энергию, обусловленную работой электрического поля $A = qEy$. Сила Лоренца работы не совершает. Поэтому закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv_0^2}{2} + qEy = \frac{mv_x^2}{2} \qquad (v_y = 0). \qquad (4)$$

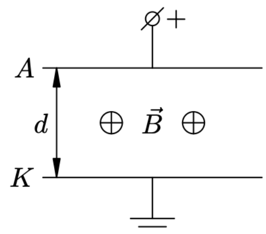
Подставляя (3) в (4) и учитывая, что $E = v_0 B$ для v_x получим уравнение

$$v_x^2 + 2v_0v_x - 3v_0^2 = 0$$

решая которое относительно v_x, находим $v_x = v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 3v_0^2} = 3v_0$ (берем с плюсом).

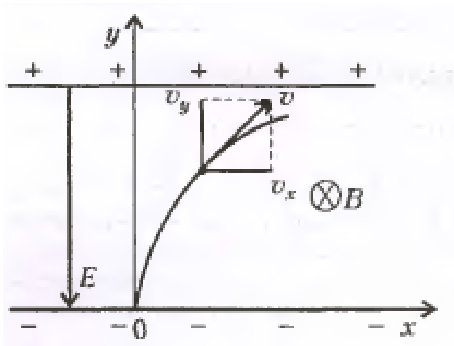
Задача 46

Вакуумный плоский диод, в котором расстояние между катодом K и анодом A равно d, находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна B и направлена параллельно плоскости электродов (см. рисунок). При каком минимальном напряжении на диоде электроны с поверхности катода смогут достичь анода? Электроны у поверхности катода можно считать неподвижными, а полем тяжести пренебречь.



Решение:

Будем рассматривать такие напряжения на диоде, при которых электроны, покинувшие катод, снова возвращаются на него, не достигнув анода. На рисунке изображен начальный участок траектории электрона при заданном направлении индукции магнитного поля. Пусть электрон находится в некоторой точке траектории и имеет две проекции скорости v_x и v_y, а между пластинами существует однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$. Тогда на электрон действуют силы как со стороны магнитного поля, так и со стороны электрического. Запишем уравнения движения электрона по осям x и y:



$$m_e \frac{dv_x}{dt} = ev_yB, \; m_e \frac{dv_y}{dt} = eE - ev_xB$$

где m_e и e — масса и заряд электрона. Перепишем эти уравнения в преобразованном виде:

$$v_x' = \omega_ц v_y,$$

$$v_y' = \frac{e}{m_e}E - \omega_ц v_x,$$

где коэффициент $\omega_ц = \frac{eB}{m_e}$ называется циклотронной частотой. Циклотронная частота — это частота обращения электрона или любой другой частицы с таким же удельным зарядом по круговой орбите в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$. Продифференцируем обе части второго уравнения по времени и подставим сюда выражение для $v\prime x$ из первого уравнения. Получившееся относительно v_y уравнение будет иметь вид

$$v_y'' + \omega_ц^2 v_y = 0.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания. Решение этого уравнения запишем в виде

$$v_y(t) = A \sin \omega_ц t + C \cos \omega_ц t,$$

где A и C — константы, которые найдем из начальных условий. При $t = 0 v_y(0) = 0$ и $v\prime y = eEme$. Отсюда следует, что $C = 0$ и $A = \frac{eE}{m_e \omega_ц}$. Окончательное выражение для $v_y(t)$ будет иметь вид

$$v_y(t) = \frac{eE}{m_e \omega_ц} \sin \omega_ц t$$

Теперь можно найти смешение электрона по оси y:

$$y(t) = \int_0^t v_y(t)dt = \int_0^t \frac{eE}{m_e \omega_ц} \sin \omega_ц t \cdot dt = \frac{eE}{m_e \omega_ц^2}(1 - \cos \omega_ц t)$$

Из уравнения для $v_y(t)$ мы можем найти те моменты времени t_N, когда электрон максимально удаляется от катода и в этот момент проекция его скорости на ось y равна нулю:

$$\omega_ц t_N = (2N + 1)\pi, \text{где } N = 1, 2, 3...$$

В эти моменты времени смещение электрона y_N будет равно

$$y_N = \frac{2eE}{m_e \omega_ц^2} = \frac{2m_eE}{eB^2}$$

Когда траектория электрона своей вершиной коснется анода, смещение y_N будет равно расстоянию d между катодом и анодом, а напряжение на диоде будет равно искомому минимальному напряжению U_{min}:

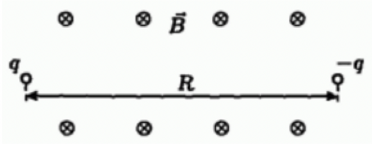
$$d = \frac{2m_eU_{min}}{edB^2},$$

откуда

$$U_{min} = \frac{ed^2B^2}{2m_e}$$

Задача 49

Две частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ начинают с нулевыми начальными скоростями двигаться в однородном магнитном поле $\vec{B}$, перпендикулярном соединяющему их отрезку длины R (рис.).



1) Найдите минимальное значение индукции магнитного поля $B = B_0$ (критическое поле), при котором частицы не столкнутся друг с другом.

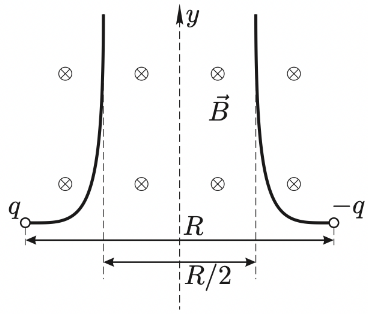
2) На каком расстоянии r друг от друга они окажутся при наибольшем сближении, если $B > B_0$?

3) Найдите скорости частиц и расстояние между ними в момент наибольшего сближения при критическом значении магнитного поля. Как в этом случае будут двигаться частицы после их наибольшего сближения? Нарисуйте качественный график траектории частиц.

Решение:

Из закона сохранения энергии для обеих частиц находим:

$$mv^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$



где v - их скорость в момент наибольшего сближения. Пусть ось x направлена параллельно отрезку, соединяющему заряды, а ось y - перпендикулярна ему. Найдем проекцию ускорения левой частицы на ось y:

$$m\frac{dv_y}{dt} = qB\frac{dx}{dt}$$

где dx/dt - проекция ее скорости на ось x, откуда

$$mdv_y = qBdx.$$

Учитывая симметричный характер движения частиц относительно оси y, найдем полное изменение импульса вдоль оси y имеем:

$$mv = \frac{qB(R-r)}{2}.$$

Исключая из (1) и (2), получим уравнение:

$$\frac{B^2(R-r)^2}{m} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right),$$

которое после сокращения на $(R-r)$ приводится к виду:

$$r^2 - Rr + \frac{m}{\pi\varepsilon_0 B^2 R} = 0.$$

Корни этого уравнения (1) Если $B < B_0$, то магнитная сила (сила Лоренца) недостаточна для разворота частиц и произойдет столкновение. При выполнении условия (1) из двух корней квадратного уравнения следует выбрать больший корень:

$$\frac{R}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\varepsilon_0 R^3 B^2}}\right),$$

так как при достижении этого значения сближение частиц прекращается. При критическом значении магнитного поля $B = B_0$ частицы сблизятся на расстояние $r = R/2$. В этом случае на них действует электрическая сила

$$F_e = \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R^2},$$

и противоположная по направлению магнитная сила Лоренца

$$F_L = qvB_0.$$

Подставляя в (3) значения критического поля B_0 и скорости v(из закона сохранения энергии), найдем

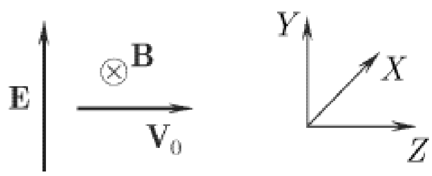
$$F_L = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R^2} = F_e$$

Это значит, что при критическом поле частицы после максимального сближения на расстояние $r = R/2$ будут двигаться параллельно друг другу с постоянными скоростями (рис. 18).

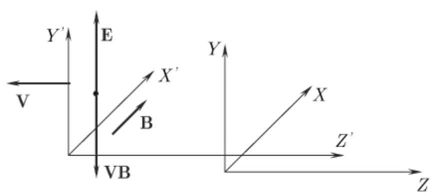
Аналогичная задача к 47

Заряженная частица движется в однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях. В некоторый момент времени ее скорость $\vec{v}_0$ перпендикулярна $\vec{E}$ и $\vec{B}$. При этом выполняется условие $E/(v_0 B) \ll 1$. В те моменты времени, когда скорость частицы направлена противоположно $\vec{v}_0$, отношение кинетической энергии частицы к ее начальной кинетической энергии равно β. Определить по этим данным $E/(v_0 B)$.

Решение:



Выберем направление осей системы координат как показано на рис. 1. Движение частицы будет происходить в плоскости YZ. Направление силы, действующей на частицу со стороны магнитного поля, когда она имеет указанную на рис. 1 скорость, зависит от знака заряда частицы. Если заряд положителен, то эта сила, как и сила со стороны электрического поля, направлена вверх. Если заряд отрицателен, то обе силы направлены вниз.



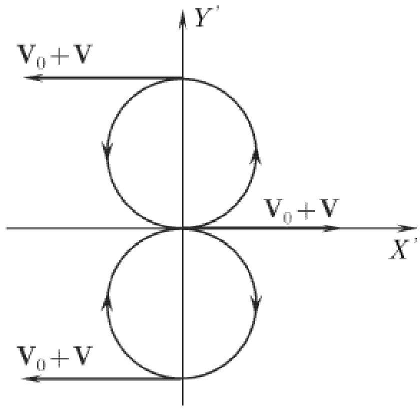
Из закона сохранения энергии видно, что когда частица изменит направление скорости на противоположное, величина скорости будет больше v_0. Действительно, при движении положительной частицы вверх (вдоль линий напряженности $\vec{E}$), а отрицательной — вниз (против линий напряженности $\vec{E}$), потенциальная энергия частиц уменьшается, а, значит, растет кинетическая, т. е. увеличивается скорость частицы.

Перейдем теперь в систему отсчета, в которой существует только магнитное поле. Эта система движется относительно исходной со скоростью $V = E/B$ влево (рис. 2). В ней частица в начальный момент имеет скорость $v_0 + v$, направленную вдоль оси Z (рис. 3) и, в зависимости от знака заряда, движется по одной из изображенных на рис. 2 окружностей. В момент, когда скорость частицы противоположна начальной в исходной системе отсчета, модуль скорости равен $v_0 + 2v$. Таким образом, изменение кинетической энергии

$$\Delta W_k = \frac{m(v_0+2v)^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

По условию $\Delta W_k = \beta m v_0^2/2$, откуда:

$$4v(v_0+v) = 4\frac{E}{B}\left(v_0 + \frac{E}{b}\right) = \beta v_0^2$$



Поскольку по условию $v_0 \gg E/B$, то вторым слагаемым в скобках можно пренебречь по сравнению с первым. Поэтому

$$\frac{E}{Bv_0} = \frac{\beta}{4}.$$

При решении предполагалось $E \ll cB$, что соответствует пренебрежению релятивистскими эффектами.

Ответ: $E(Bv_0) = \beta/4$

Задача 48 (короткое решение)

Два длинных коаксиальных цилиндра расположены внутри катушки, создающей в них однородное магнитное поле с индукцией B, направленное вдоль оси системы. К цилиндрам приложено электрическое напряжение, благодаря чему между ними возникает электрическое поле напряженностью E, направленное от внешнего цилиндра к внутреннему вдоль их радиусов. Внутренний цилиндр разогрет и испускает электроны. Начальные скорости электронов можно считать малыми. Найдите максимальное расстояние между цилиндрами, при котором еще возможно протекание электрического тока между ними. Расстояние между цилиндрами значительно меньше их радиусов. Масса электрона m, заряд электрона e.

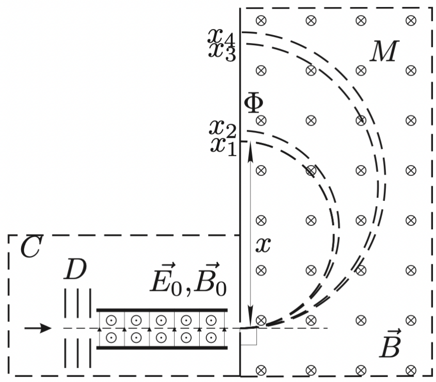
Решение:

1. $$ma_x = F_x = |e|Bv_y$$
2. $$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = |e|B\frac{\Delta y}{\Delta t}$$
3. $$mv_x = |e|By$$
4. $$\frac{mv_1^2}{2} = |e|Ey_{\max}$$
5. $$y_{\max} = \frac{mE}{|e|B^2}$$

Задача 50

Устройство для определения изотопного состава атомов состоит из двух основных частей: селектора скоростей C и масcспектрографа M (рис.). В селектор скоростей через систему диафрагм с отверстиями влетают ионизированные атомы некоторого элемента, обладающие различными скоростями. Они движутся в селекторе в скрещенных однородных электрическом $\vec{E_0}$ и магнитном $\vec{B_0}$ полях и далее влетают через малое отверстие в масс-спектрограф, в котором создано однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Попадая на фотопластинку Ф, ионы оставляют на ней свой след на некотором расстоянии x от точки влёта в масс-спектрограф. Предположим, что эксперимент был выполнен при следующих значениях полей: $E_0 = 360$ В/см, $B_0 = 0.26$ Тл, $B = 0.24$ Тл. На фотопластинке были зарегистрированы следы ионов при $x_1 = 23.2$ см, $x_2 = 24.4$ см, $x_3 = 46.4$ см, $x_4 = 48.8$ см.

Используя таблицу изотопов химических элементов (см. ниже), определите, ионы какого элемента оставили свои следы на фотопластинке. Запишите химические формулы ионов, соответствующих различным значениям x. Элементарный заряд $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ Кл, атомная единица массы 1 а. е. м. $= 1.66 \cdot 10^{-27}$ кг. Примечание. Изотопами называются атомы одного и того же элемента, ядра которых обладают одинаковыми зарядовыми числами Z, но разными массовыми числами А.



Решение:

1. Скорость, с которой ионы влетают в масс-спектрограф, не зависит от массы и заряда иона:

$$qE_0 = qvB_0, \quad v = \frac{E_0}{B_0} \approx 1,38 \cdot 10^5 \text{ m/c}.$$

Скорости ионов являются нерелятивистскими: $v \ll c$.

2. Масса иона $M = A \cdot 1$ а.е.м., где A - массовое число. Заряд иона $q = n \cdot e$, где n - кратность ионизации.

3. В масс-спектрографе ионы движутся по полуокружностям:

$$\frac{Mv^2}{R} = qvB,$$

следовательно,

$$A = nR\frac{eB}{v \cdot 1 \text{ а.е.м.}} = nx\frac{eB}{2v \cdot 1 \text{ а.е.м.}}.$$

Здесь $x = 2R$.

4. Подставляя числовые данные, получим: $A \approx 84nx$, причем $A-$ целое число.

5. Поскольку $x_1 = x_3/2, x_2 = x_4/2$, то можно предположить, что x_3 и x_4 соответствуют однозарядным ионам, а x_1 и x_2- двухзарядным ионам соответствующих изотопов. 6. Для однозарядных ионов $n = 1, A = 84x$.
Для $x_3 : A_3 = 84 \cdot 0,464 \approx 39$.
Для $x_4 : A_4 = 84 \cdot 0,488 \approx 41$.
Для двухзарядных ионов $n = 2, A = 168x$.
Для $x_1 : A_1 = 168 \cdot 0,232 \approx 39$.
Для $x_2 : A_2 = 168 \cdot 0,244 \approx 41$.

7. С помощью таблицы изотопов определяем для x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$^{39}\text{ K}^{++}, \quad ^{41}\text{ K}^{++}, \quad ^{39}\text{ K}^{+}, \quad ^{41}\text{ K}^{+}.$$

Аналогично, рассматривая пару двухзарядных ионов и пару четырехзарядных, находим:

$$^{78}\text{Se}^{4+}, \quad ^{82}\text{Se}^{4+}, \quad ^{78}\text{Se}^{2+}, \quad ^{82}\text{Se}^{2+}$$
$$^{78}\text{Kr}^{4+}, \quad ^{82}\text{Kr}^{4+}, \quad ^{78}\text{Kr}^{2+}, \quad ^{82}\text{Kr}^{2+}.$$