Подборка «Поверхностное натяжение». Решения от *fizmat.ga :)*

Внимательно смотрите, что дано в задаче, а что дано в решении!

Задача 1

В дне сосуда со ртутью имеется круглое отверстие диаметра $d = 70$мкм. При какой максимальной толщине слоя ртути она еще не будет вытекать через это отверстие?

Решение:

Давление внутри отверстия будет меньше внешнего давления на $4\alpha/d$. Это может поддерживать высоту h ртути, где

$$\rho g h = \frac{4\alpha}{d} \text{ или } h = \frac{4\alpha}{\rho g d} = \frac{4 \cdot 490 \cdot 10^{-3}}{13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 70 \cdot 10^{-6}} = \frac{200}{13{,}6 \cdot 70} \approx 0{,}21\text{м}$$

Задача 2

В закрытом сосуде с воздухом при давлении p_0 находится мыльный пузырек диаметром d. Давление воздуха в сосуде изотермически уменьшили в n раз, в результате чего диаметр пузырька увеличился в κ раз. Найти коэффициент поверхностного натяжения σ мыльной воды.

Мыльный пузырь – сфера. Мыльная пленка имеет две стороны, учтем это в формуле, введя коэффициент 2. Добавочное давление, создаваемое пленкой, будет равно по формуле

$$\Delta p = 2\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

R_1 и R_2 – радиусы сферы в продольном и поперечном направлении, в данном случае они равны, поэтому

$$\Delta p = 2\sigma \left(\frac{2}{d} + \frac{2}{d}\right) = \frac{8\sigma}{d}$$

Теперь запишем условие существования пузыря, то есть условие равновесия давлений. Сначала до уменьшения:

$$p_1 = p_0 + \frac{8\sigma}{d}$$

После уменьшения давления:

$$p_2 = \frac{p_0}{n} + \frac{8\sigma}{\kappa d}$$

Так как температура не менялась, то

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

И

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2}$$

Отношение объемов пузырька равно

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\frac{4\pi R^3 \kappa^3}{3}} = \frac{1}{\kappa^3}$$

Таким образом,

$$p_2 = \frac{p_1}{\kappa^3}$$

Подставим давления:

$$\frac{p_0}{n} + \frac{8\sigma}{\kappa d} = \frac{1}{\kappa^3} \cdot p_0 + \frac{8\sigma}{d}$$

$$p_0 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\kappa^3} \right) = \frac{8\sigma}{d} \left(\frac{1}{\kappa^3} - \frac{1}{\kappa} \right)$$

$$\sigma = \frac{p_0 d \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\kappa^3} \right)}{8 \left(\frac{1}{\kappa^3} - \frac{1}{\kappa} \right)}$$

$$\sigma = \frac{p_0 d (\kappa^3 - n)}{8n(1 - \kappa^2}$$

Ответ:

$\sigma = \frac{p_0 d(\kappa^3 - n)}{8n(1 - \kappa^2}$

Задача 3

В двух капиллярных трубках разного диаметра, опущенных в воду, установилась разность уровней $\Delta h_1 = 2{,}6$ см. При опускании этих же трубок в спирт разность уровней оказалась $\Delta h_2 = 1$ см. Зная коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma_1 = 73$ мН/м, найти коэффициент поверхностного натяжения спирта σ_2.

Решение. Уровень идеально смачивающей (несмачивающей) жидкости в капилляре радиуса R выше (ниже), чем в сообщающемся с ним широком сосуде, на высоту

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R}, \qquad (1)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения. Изменение уровня возникает благодаря силе поверхностного натяжения. Как следует из формулы (1), для двух капилляров разных радиусов R_1 и R_2 разность уровней жидкости равна:

$$\Delta h = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

а отношение величин h для различных жидкостей имеет вид

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \frac{\sigma_1 \rho_2}{\rho_1 \sigma_2}.$$

Из этого соотношения можно получить формулу для коэффициента поверхностного натяжения спирта:

$$\sigma_с = \sigma_в \frac{\rho_с \Delta h_1}{\rho_в \Delta h_2},$$

где $\sigma_в$ — коэффициент поверхностного натяжения воды, $\rho_с$ и $\rho_в$ — плотность спирта и воды, $\Delta h_с$ и $\Delta h_в$ — разность уровней жидкости для капилляров разного диаметра в спирте и воде.

Вычисления:

$$\sigma_с = 73 \text{ мН/м} \, \frac{0{,}79 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3}{10^3 \text{ кг/м}^3} \, \frac{1 \text{ см}}{2{,}6 \text{ см}} \approx 22 \text{ мН/м}.$$

Ответ: $\sigma_с = 22$ мН/м.

Задача 4

Капля ртути массой 1,36 г введена между параллельными стеклянными пластинками. Какую силу следует приложить для того, чтобы расплющить каплю до толщины 0,1 мм? Коэффициент поверхностного натяжения ртути 500 дн/см. Считать, что ртуть абсолютно не смачивает стекло.

Решение:

Сдавленная капля ртути примет вид очень топкого диска с выпуклой боковой поверхностью, имеющей двоякую кривизну. Дополнительное давление Δp, возникающее вследствие кривизны поверхности, уравновешивается внешним давлением, производимым силой F:

$$\Delta p = \frac{F}{S},$$

где S — площадь соприкосновения капли ртути с пластинкой. Давление Δp выражается формулой

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right),$$

где R — радиус диска и $r = \frac{d}{2}$. Площадь равна

$$S = \frac{V}{d} = \frac{m}{\rho d},$$

где V - объем капли ртути; m — ее масса и ρ — плотность. С другой стороны, $S = \pi R^2$. Поэтому

$$R = \sqrt{\frac{m}{\pi \rho d}}.$$

Подставляя значения Δp и S в формулу $F = \Delta p \cdot S$, получим

$$F = \frac{m\sigma}{\rho d}\left(\sqrt{\frac{\pi \rho d}{m}} + \frac{2}{d} \right),$$

$$F = \frac{1{,}36 \cdot 10^{-3}\text{кг} \cdot 0{,}5\text{н/м}}{13600\text{кг/м}^3 \cdot 10^{-4}\text{м}} \left(\sqrt{\frac{3{,}1413600\text{кг/м}^3 \cdot 10^{-4}\text{м}}{1{,}36 \cdot 10^{-3}\text{кг}}} + \frac{2}{10^{-4}\text{м}} \right) = 10,3\text{н}.$$

Задача 5

Какую работу надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь радиусом R? Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ. Давление окружающего воздуха p_0

Решение:

Работа, которую необходимо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь радиусом R, равна

$A = A_1 + A_2$, (1)

где

$A_1 = 2\sigma\Delta S = 2\sigma 4\pi R^2 = 8\pi R^2\sigma$ (2)

— работа, затраченная на увеличение потенциальной энергии поверхностного стоя жидкости при увеличении площади поверхности на $\Delta S = 4\pi R^2$. Коэффициент 2 появляется потому, что у пленки две поверхности. A_2 - работа, совершаемая против внешних сил при образовании пузыря. Пусть процесс надувания пузыря происходит изотермически, тогда

$A_2 = \frac{m}{M}RTln\frac{p_1}{p_2} = p_1 Vln\left(1 + \frac{4\sigma}{p_0 R}\right)$, (3)

где $\frac{m}{M}RT = p_1 V$ (по закону Клапейрона-Менделеева), p_1 -давление газа внутри пузыря, $p_1 = p_0 + \frac{4\sigma}{R}, p_2 = p_0$ - атмосферное давление, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ - объем пузыря. Следует отметить, что $A_1 \ll A_1$. Подставив (2) и (3) в уравнение (1), получаем:

$A = 8\pi R^2\sigma + \left(p_0 + \frac{4\sigma}{R}\right) ln\left(1 + \frac{4\sigma}{p_0 R}\right)\frac{4}{3}\pi R^3$

Задача 6

В городе площадью 400 км^2 за 10 мин во время ливневого дождя выпало 20 мм воды. Подсчитайте энергию и мощность выделения тепла от слияния капель во время дождя, если капли, достигшие поверхности Земли, имели диаметр 3 мм, а образовались из мелких капель диаметром $3 \cdot 10^{-3}$ мм.

Решение:

Выделение тепла происходит вследствие уменьшения поверхностной энергии жидкости при слиянии малых капель в более крупные. Энергия, которая выделяется при образовании одной большой капли из n маленьких, равна

$$\Delta E = \sigma(S_1 - S_2), \qquad (1)$$

где $S_1 = 4\pi\frac{d^2}{4}\cdot n = \pi d^2 n$ — поверхность n малых капель, $S_2 = \pi D^2$ — поверхность одной большой капли, σ - коэффициент поверхностного натяжения воды.

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = n\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3, \qquad (2)$$

откуда находим

$$n = \frac{D^3}{d^3}. \qquad (3)$$

Подставляя S_1,S_2 и n в (1), получаем:

$$\Delta E = \sigma\left(\pi d^2\frac{D^3}{d^3} - \pi D^2\right) = \sigma\pi\left(\frac{D^3}{d} - \pi D^2\right) = \sigma\pi D^2\left(\frac{D}{d} - 1\right). \qquad (4)$$

Число больших капель можно найти, зная общий объем выпавшей воды.

$$N = \frac{F\cdot h}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3} = \frac{6Fh}{\pi D^3}. \qquad (5)$$

где F - площадь территории города, h - высота слоя воды, выпавшей во время дождя. Тогда полная выделившаяся энергия

$$E = N\Delta E = \frac{6Fh\sigma}{D}\left(\frac{D}{d} - 1\right). \qquad (6)$$

Подставляя числовые значения, для E получаем:

E=1,168 $\cdot 10^{12}$ Дж.

Мощность тепловыделения за время дождя равна

$$N = \frac{E}{\tau},$$

где τ — продолжительность дождя.

N=1,95 $\cdot 10^9$ Дж/с=1,95 $\cdot 10^6$ кВт.

Ответ: за время дождя в городе выделилось 1,168$\cdot 10^{12}$ Дж энергии, при этом мощность тепловыделения равна 1,95 $\cdot 10^6$ кВт.