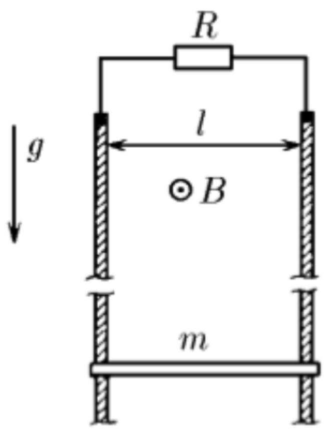
Эффект Холла

Задачи из mathus

Если проводник находится в магнитном поле, то упорядоченное движение свободных зарядов проводника приводит к появлению поперечной разности потенциалов (эффект Холла). Упорядоченное движение зарядов — это либо ток в проводнике, либо перемещение самого проводника в магнитном поле.

Задача 6

В однородном магнитном поле индукции B находятся две вертикальные рейки, расположенные в плоскости, перпендикулярной линиям поля. По рейкам, расстояние между которыми равно l, может скользить проводник массы m. Определите установившуюся скорость этого проводника, если верхние концы реек замкнуты на сопротивление R. В какие виды энергии переходит работа силы тяжести?



Решение:

На скользящий проводник действуют две силы: тяжести mg и Ампера IBL. При установившемся движении

$$mg - IBL = 0.$$

ЭДС индукции

$$E_{\text{инд}} = vBL = IR.$$

Выражая ток из второго уравнения и подставляя в первое, получим ответ:

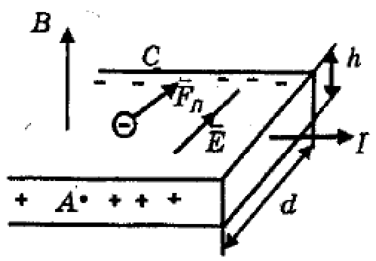
$$v = \frac{mgR}{B^2L^2}.$$

Можно получить ответ другим способом. Мощность силы тяжести в установившемся режиме переходит в тепло, выделяющееся на сопротивлении:

$$mgv = I^2R$$

Задача 12

По металлической ленте толщиной h течет ток I. Лента помещена в однородное магнитное поле с индукцией B, направленной перпендикулярно поверхности ленты (рис.). Опреде-лить разность потенциалов между точками A и C ленты, если концентрация свободных электро-нов в металле равна ρ.



Решение:

В металле электрический ток — это направленное движение свободных электронов, причем $I = |e|\rho Sv$, где $|e|$ — модуль заряда электрона, v — скорость упорядоченного движения электронов, $S = dh$ — площадь поперечного сечения ленты (d — ее ширина). Магнитное поле действует на свободные электроны с силой Лоренца, направленной перпендикулярно току в ленте, как показано на рисунке. Поскольку на одной из поверхностей ленты образуется избыток электронов, между торцами лента возникнет электрическое поле $\vec{B}$, следовательно, между точками и будет существовать разность потенциалов. Перемещение электронов будет продолжаться до тех пор, пока сила Лоренца не будет уравновешена силой со стороны электрического поля, т.е.

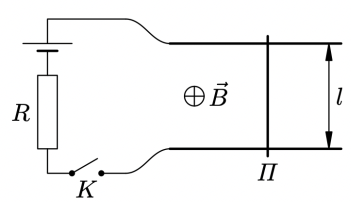
$$F_{\text{к}} = F_{\text{л}} \Rightarrow |e|E = |e|vB \Rightarrow E = vB \; (*).$$

Скорость электронов выражаем из уравнения (1): $v = I|e|\rho S$. Напряженность поля связана с разностью потенциалов соотношением $E = \frac{U}{d}$. Подставляя в равенство (*), получаем

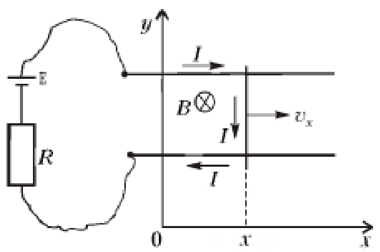
$$\frac{U}{d} = \frac{IB}{|e|\rho dh} \to U = \frac{IB}{|e|\rho h}$$

Задача 16

На двух длинных гладких параллельных и горизонтально расположенных проводящих штангах лежит проводящая перемычка массой M. Расстояние между штангами равно l. Через резистор сопротивлением R и разомкнутый ключ К к штангам подключена батарея с некоторой постоянной ЭДС (см. рисунок). Штанги расположены в области однородного магнитного поля с вертикально направленной индукцией B. Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи, сопротивлением штанг и перемычки, определить ускорение перемычки сразу после замыкания ключа, если известно, что после замыкания ключа максимальная установившаяся скорость, которую приобретает перемычка, равна v_0.



Решение:



Сначала найдем ЭДС батареи E. Это можно сделать, зная величину установившейся скорости перемычки. Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. По перемычке течет ток I и со стороны магнитного поля на нее действует сила Ампера, равная $F = BIl$ и направленная вправо. Выберем неподвижную систему координат, в которой будем рассматривать движение перемычки (рис.). Перемычка движется вдоль оси x. Уравнение движения имеет вид $Ma = F$, или $Mv_x' = BIl$ Запишем теперь закон Ома для замкнутого контура:

$$E - Blv_x = lR$$

Подставляя выражение для тока из этого равенства в предыдущее, получим

$$Mv_x' = \frac{(E - Blv_x)}{R} Bl$$

или, после арифметических преобразований,

$$v_x' + \frac{(\text{B}l)^2}{MR} v_x = \frac{EBl}{MR}$$

Это уравнение описывает зависимость скорости v_x перемычки от времени. Очевидно, что скорость перемычки достигнет постоянного значения, когда ускорение станет равным нулю. Итак, при $v'_x = 0 v_x = v_0$ и, следовательно, $E = Blv_0$ Теперь мы можем ответить на поставленный в задаче вопрос. Сразу после замыкания ключа в цепи течет ток

$$I_1 = \frac{E}{R} = \frac{Blv_0}{R}$$

На перемычку действует сила Ампера, равная

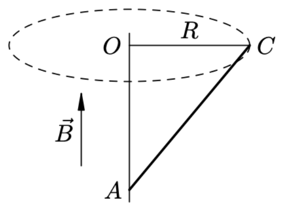
$$F_1 = BI_1 l = \frac{(Bl)^2 v_0}{R}$$

Поэтому ускорение перемычки в начальный момент равно

$$a_1 = \frac{F_1}{M} = \frac{(Bl)^2 v_0}{MR}$$

Задача 19

Металлический стержень AC одним концом (точка A) шарнирно закреплён на вертикальном диэлектрическом стержне AO. Другой конец (точка C) связан с вертикальным стержнем с помощью нерастяжимой непроводящей горизонтальной нити OC длиной $R = 1$ м (см. рисунок). Стержень AC вращается вокруг стержня АО в однородном магнитном поле, индукция которого вертикальна и равна $B = 10^{-2}$ Тл. Угловая скорость вращения стержня AC равна $\omega = 60$ рад/с. Определить разность потенциалов между точками A и C.

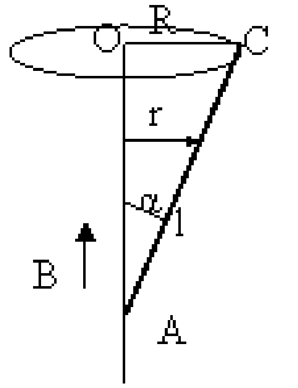


Решение:

На свободные электроны стержня будет действовать сила Лоренца $F = qvB$ Нетрудно показать, что составляющая силы вдоль длины стержня, которая приведет к разделению зарядов равна:

$$F_l = qvB\sin\alpha = qE_l$$

Линейная скорость равна $V = \omega r = \omega l \sin\alpha$. Отсюда получим выражение для напряженности поля.



$$E_l = q\omega l \cdot \sin\alpha \cdot B \cdot \sin\alpha$$

Интегрируя по длине проводника (l), получим разность потенциалов:

$$U = \frac{B\omega R^2}{2}$$

Аналогичное решение:

В однородном магнитном поле ($B = 0{,}1$ Тл) вращается с постоянной угловой скоростью ($\omega = 50$ с$^{-1}$) вокруг вертикальной оси стержень длиной $l = 0{,}4$ м. Определите ЭДС индукции, возникающей в стержне, если ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям магнитной индукции.

$B = 0{,}1$ Тл
$\omega = 50$ с$^{-1}$
$l = 0{,}4$ м

$|\varepsilon_i|$ — ?

Закон Фарадея

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $d\Phi = BdS = B \cdot \pi l^2 \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}$,

dS — площадь сектора.

За время dt стержень опишет угол $d\varphi$:

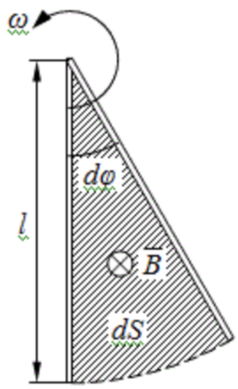
$$d\varphi = \omega \cdot dt.$$

В результате получим

$$d\Phi = B\pi l^2 \cdot \frac{\omega \cdot dt}{2\pi} = \frac{Bl^2\omega \cdot dt}{2};$$

$$|\varepsilon_i| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \frac{Bl^2\omega}{2};$$

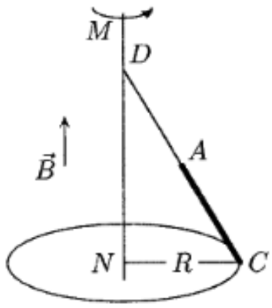
$$|\varepsilon_i| = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}4^2 \cdot 50}{2} = 0{,}4 \text{ В}.$$



Ответ: $|\varepsilon_i| = 0{,}4$ В.

Задача 20

Составной стержень, состоящий из проводящего стержня AC и непроводящего стержня AD (см. рисунок), вращается с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с вокруг вертикальной оси MN в вертикально направленном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0.01$ Тл. Длины стержней одинаковы. Определить разность потенциалов между точками A и C, если точка C описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса $R = 0.4$ м.



Решение:

Распишем закон Фарадея аналогично 19-ой задаче. По закону Фарадея

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Тогда $d\Phi$ равно

$$d\Phi = B \cdot dS = B \cdot \left(\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right) \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}$$

где dS — заметенная площадь стержнем (площадь дырявого бублика). За время dt стержень опишет угол $d\varphi$

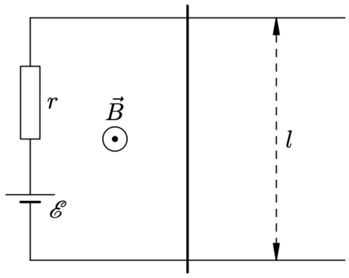
$$d\varphi = \omega \cdot dt$$

В результате получим:

$$d\Phi = B \cdot \left(\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right) \cdot \frac{\omega \cdot dt}{2\pi} = \frac{3}{8} \cdot BR^2\omega \cdot dt$$

$$|\mathscr{E}_i| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \frac{3}{8} \cdot BR^2\omega$$

Задача 26



По длинным параллельным проводящим горизонтальным рельсам, находящимся на расстоянии l друг от друга, может без трения скользить, не теряя электрического контакта и оставаясь перпендикулярной рельсам, проводящая перемычка (на рисунке изображён вид сверху). Рельсы соединены через резистор с сопротивлением r и идеальную батарею с ЭДС $\mathscr{E}$. Сопротивлением остальных участков цепи можно пренебречь. Система находится в вертикальном постоянном однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном плоскости рисунка. Если к перемычке приложить параллельно рельсам силу F, то перемычка будет оставаться неподвижной, а при вдвое большей силе (в том же направлении) через некоторое время устанавливается равномерное движение перемычки со скоростью v.

1) Найдите величину силы F.

2) Найдите величину и направление скорости v.

Считайте заданными $\mathscr{E}, r, B, l$.

Решение:

Сначала перемычку удерживают, так как в ней протекает ток и возникает сила Ампера, старающаяся сдвинуть перемычку влево. Поэтому силу F надо прикладывать вправо.

$$F_{A1} = BI_1 l = F \Rightarrow F = \frac{\mathscr{E}Bl}{r}$$

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{r}$$

Далее силу удваивают, и перемычка начинает двигаться, следовательно, она подобна батарейке с ЭДС:

$$\mathscr{E}_i = Blv$$

$$I_2 = \frac{\mathscr{E} + \mathscr{E}_i}{r} = \frac{\mathscr{E} + Blv}{r}$$

Тогда новая сила Ампера:

$$F_{A2} = BI_2 l$$

$$F_{A2} = 2F = 2BI_1 l$$

Откуда $I_2 = 2I_1$:

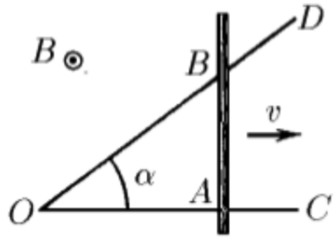
$$I_2 = \frac{2\mathscr{E}}{r}$$

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_i = Blv$$

$$v = \frac{\mathscr{E}}{Bl}$$

Задача 30

Металлический стержень AB, сопротивление единицы длины которого ρ, движется с постоянной скоростью v, перпендикулярной AB, замыкая два идеальных проводника OC и OD, образующих друг с другом угол α. Длина OC равна l, и $AB \perp OC$. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле индукции B, перпендикулярном плоскости системы. Найдите полное количество теплоты, которое выделится в цепи за время движения стержня от точки O до точки C.



Решение:

Пусть $OA = x$, тогда длина части стержня AB, образующего замкнутый контур, $y = x \operatorname{tg} \alpha$. ЭДС индукции, которая возникает в подвижном стержне и действует во всем замкнутом контуре, $\mathcal{E}_i = By\nu$. Индукционный ток в контуре $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$, где R - сопротивление контура, равное сопротивлению участка стержня длиной y. Поэтому

$$R = \rho y \text{ и } I = \frac{Byv}{\rho y} = \frac{Bv}{\rho} = \text{const}.$$

Таким образом, в контуре протекает постоянный ток. Выделяющаяся в нем мощность

$$P = I^2 R = \left(\frac{Bv}{\rho}\right)^2 \rho y = \frac{(Bv)^2}{\rho} x \operatorname{tg} \alpha = \frac{(Bv)^2}{\rho} (vt) \operatorname{tg} \alpha = \frac{B^2 v^3}{\rho} \operatorname{tg} \alpha t.$$

Здесь учтено, что при равномерном движении стержня в любой момент времени $x = vt$. Таким образом, мощность, выделяющаяся в контуре, не является постоянной, а линейно возрастает с течением времени. Для того, чтобы найти полное количество выделившейся теплоты, построим график зависимости $P(t)$, который представляет собой прямую линию (рис.). Время движения стержня до точки $C t_C = \frac{l}{v}$. Количество теплоты численно равно площади ΔOMN, причем его катет

$$MN = P_C = P\left(t_C\right) = \frac{B^2 v^3}{\rho} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{l}{v}\right) = \frac{(Bv)^2 l}{\rho} \operatorname{tg} \alpha.$$

Итак

$$Q = \frac{1}{2} P_C \cdot t_C = \frac{1}{2} \frac{(Bv)^2 l}{\rho} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{l}{v}\right) = \frac{B^2 v l}{2\rho} \operatorname{tg} \alpha$$