СПбАО. 11 класс

1

Условие

На экваторе и на полюсе планеты, имеющей форму шара, установлены два одинаковых математических маятника. Период колебаний маятника на экваторе на 2% больше, чем на полюсе. Если же маятник на полюсе поднять на высоту 130 км, то периоды колебаний маятников станут равными. Планета совершает оборот вокруг своей оси за 10 земных часов. С какой максимальной скоростью можно двигаться по поверхности такой планеты без использования двигателей?

Решение

Обозначим ускоредние свободного падения на экваторе как g_e, на полюсе — как g_p, массу и радиус планеты — за M и R соответственно, угловую скорость вращения — как ω.

Как известно, период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Тогда периоды колебаний маятника на экваторе и на полюсе будут относиться как $\sqrt{g_p/g_e} = \eta$. По условию $\eta = 1,02$.

Отметим, что $g_p = GM/R^2$, а $g_e = GM/R^2 - \omega^2 R$. Тогда можно записать следующее выражение:

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{GM/R^2}{\dfrac{GM}{R^2}\left(1 - \dfrac{\omega^2 R^3}{GM}\right)} = \eta^2$$

Полагая (и в общем, это будет разумным предположением), что вращение планеты не слишком велико, можем сказать, что

$$1 + \frac{\omega^2 R^3}{GM} = \eta^2 \Rightarrow \frac{GM}{R^3} = \frac{\omega^2}{\eta^2 - 1}$$

В то же время из условия видно, что $g_e = GM/(R+h)^2$, где h — высота, на которую подняли маятник на полюсе, т. е. 130 км. Полагая, что $h \ll R$,

$$\frac{g_e}{g_p} = \frac{GM/R^2}{GM/(R+h)^2} = \frac{GM/R^2}{\dfrac{GM}{R^2}\left(1 - \dfrac{2h}{R}\right)} = 1 + \frac{2h}{R} = \eta^2 \Rightarrow R = \frac{2h}{\eta^2 - 1}$$

Отметим, что наибольшую скорость передвижения по поверхности будет иметь спутник, двигающийся на низкой орбите (прямо на очень низкой). А наибольшую скорость относительно поверхности он будет иметь, когда он будет двигаться "навстречу" вращению планеты. То есть его скорость в этом случае будет равна

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} + \omega R = \left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} + \omega\right) R$$

Учитывая изложенные выше рассуждения, можно записать следующее:

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{\eta^2 - 1}} + 1\right) \frac{2\omega h}{\eta^2 - 1}$$

Учитывая, что $\eta = 1,02$ и в сущности не очень отличается от единицы, можно получить $1/(\eta^2 - 1) \approx 1/(1,04 - 1) = 25$ и $1/\sqrt{\eta^2 - 1} \approx 1/\sqrt{0,04} = 5$. Тогда $v = 300\omega h$.

Обратим внимание, что $\omega = 2\pi/36000\ c^{-1} = \pi/(1,8 \cdot 10^{-4})\ c^{-1}$. Получаем окончательный ответ $v = 6,8$ км/с

2

Условие

На небе наблюдаются две двойных звезды, компоненты которых разрешимы в оптическом диапазоне. Известно, что их четырёх звёзд, образующих эти систмемы, две являются карликами, две — гигантами, две — красного цвета, две —голубого, при этом светимости двух гигантов совпадают, двух карликов — также совпадают. Определите, какая из звёзд с какой входит в состав одной системы. Какая из двух систем старше?

Решение

Заметим, что системы разрешимы в оптическом диапазоне, то есть это явно не тесные двойные системы, а значит, каждая звезда развивается отдельно.

Отметим, что Вселенная у нас достаточно молодая и поэтому голубых карликов точно не может быть — они не успели ещё образоваться. Значит, есть два красных карликов и, исходя из условия, остальные две звезды — два голубых гиганта.

Заметим, что голубые гиганты — звёзды главной последовательности. Также отметим, что их характерный срок жизни порядка 10^8 лет. Однако красные карлики образуются очень долго и они находятся в состоянии "перед главной последовательностью" порядка 10^9 лет. Поэтому красный карлик и голубой гигант не могут быть в одной системе — пока красный карлик сформировался бы в звезду, голубой гигант прошёл бы все стадии звёздной эволюции.

Следовательно, наблюдаются две системы, в одной из которой находятся два красных карлика, а в другой — два голубых гиганта. Система из красных карликов старше.

3

Условие

Оцените минимальное расстояние, начиная с которого у галатик не будет наблюдаться фиолетовое смещение линий в спектре.

Решение

Отметим, что наблюдаемая скорость галактики состоит из двух компонентов: космологической (она всегда направлена от наблюдателя) и пекулярной v_{pec}. В идеальном для фиолетового смещения пекулярная скорость будет направлена точно к нам.

Чтобы оценить пекулярную скорость, предположим, что всякая галактика входит в скопление массой с N галактиками, каждая массой M, а всё скопление — радиусом R. Тогда его гравитационная энергия $U \sim -G(NM)^2/R$, а кинетическая энергия, по теореме вириала, $T = -U/2$. Отсюда

$$\frac{NMv^2}{2} \sim \frac{G(NM)^2}{2R} \Rightarrow v \sim \sqrt{\frac{GNM}{R}}$$

Заметим, что NM — масса скопления. Так как требуется минимальная оценка расстояния, то также оценим снизу скорость. Допустим, что у нас довольно маленькое скопление радиусом $R \sim 1$ Мпк, а масса скопления $M \sim 10^{13}\mathfrak{M}_\odot$. Тогда характерная скорость галактик будет

$$v \sim \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 10^{13}}{2 \cdot 10^{11}}} \simeq \sqrt{2000} \approx 45 \text{ а. е./год} \approx 210 \text{ км/с}$$

Исходя из этого, и беря параметр Хаббла как 70 км/с/Мпк (большей точности и не нужно) получаем ограничение на расстояние 210/70=3 Мпк.

4

Условие

При наблюдении двойной системы, один из компонентов которой — белый карлик, обнаружено, что линия H_α расходится с полуамплитудой 0,46 ангстрем. При этом, в полосе V фиксируются падения блеска с периодом 0,5 лет. В каких пределах может быть заключена масса звезды–компаньона белого карлика? Луч зрения находится в орбитальной плоскости системы, орбиты круговые.

Решение

Сначала обратим внимание на то, что линия H_α — это линия перехода электрона в атоме водорода с 3 уровня на 2. Сначала рассмотрим случай, когда этой линии в спектре белого карлика не будет или будет малозаметной. Тогда смещение такой линии говорит о движении звезды–компаньона.

Так как луч зрения лежит в плоскости орбиты, то максимальная лучевая скорость звезды будет равна её полной скорости. В итоге орбитальная скорость звезды–компаньона будет равна $v = c\Delta\lambda/\lambda$, где $\Delta\lambda = 0,46\text{Å}$(полуамплитуда движения). а $\lambda = 6563\text{Å}$(длина волны H_α). Тогда $v = 21$ км/с.

Обратим внимание, что в описываемой ситуации будут 2 падения блеска за период обращения. Первый — это прохождение белого карлика по диску звезды–компаньона, а второй — покрытие звездой белого карлика. Тогда период обращения $T = 2 \cdot 0,5 = 1$ год.

Обозначим за $\mathfrak{M}_{\rm BD}$ и $\mathfrak{M}_{\rm S}$ — массу белого карлика и звезды–компаньона соответственно, а за $a_{\rm BD}$ и $a_{\rm S}$ — их расстояния до барицентра системы. Тогда будет справедливо $\mathfrak{M}_{\rm BD}\, a_{\rm BD} = \mathfrak{M}_{\rm S}\, a_{\rm S}$.

Запишем обобщённый третий закон Кеплера:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G(\mathfrak{M}_{\rm BD} + \mathfrak{M}_{\rm S})}{(a_{\rm BD} + a_{\rm S})^3}$$

Выражая всё в системе а. е. – год – $\mathfrak{M}_\odot$, получаем следующее выражение: $\mathfrak{M}_{\rm BD} + \mathfrak{M}_{\rm S} = (a_{\rm BD} + a_{\rm S})^3$.

Учитывая, что $\mathfrak{M}_{\rm S} = \mathfrak{M}_{\rm BD}\, a_{\rm BD} \,/\, a_{\rm S}$, получаем

$$\mathfrak{M}_{\rm BD}\left(1 + \frac{a_{\rm BD}}{a_{\rm S}}\right) = (a_{\rm BD} + a_{\rm S})^3 \Rightarrow a_{\rm BD} = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_{\rm BD}}{a_{\rm S}}} - a_{\rm S}$$

В свою очередь $v = 2\pi\, a_{\rm S} \,/T$. Так как $v = 21/4,74 = 4,43$ а. е./год, то $a_{\rm S} = 4,43/2\pi = 0,706$ а. е.

Ограничим массу белого карлика снизу $0{,}5\mathfrak{M}_\odot$ (так как наименее массивные звёзды, которые успели бы стать белыми карликами имеют массу порядка солнечной и они сбрасывают примерно половину массы), а сверхну — 1,4 массы Солнца (как предел Чандрассекара). Тогда $a_{\rm BD}$ будет лежать в пределах от 0,14 а. е. до 0,70 а. е.

Подставляя данные значения в выражение для $\mathfrak{M}_{\rm S}$, получаем, что масса звезды–компаньона ограничена снизу $0{,}1\mathfrak{M}_\odot$, а сверху — $1{,}4\mathfrak{M}_\odot$.

Отметим, что расстояние между звёздами достаточно большое, то есть это не тесная двойная звезда. Тогда белый карлик просто обязан был образоваться из звезды, более быстро проэволюционировавшей и, как следствие, более массивной. Так что в том, что белый карлик более массивный, нет ничего удивительного.

Также можно убедиться, что при нижней оценке массы звезда всё ещё является звездой, а не белым карликом. Правда, есть один нюанс: в атмосфере красных карликов начинают уже преобладать линии поглощения молекул, а серия Бальмера исчезает. Тогда разумно поднять нижнюю границу возможной массы до наиболее массивных красных карликов, то есть примерно до $0{,}5\mathfrak{M}_\odot$

Если же спектральная линия принадлежит белому карлику, то тогда $\mathfrak{M}_{\rm S}$ находится от 0,1 до 0,5 масс Солнца, а $a_{\rm BD} = 0,706$ а. е. Для радиуса орбиты звезды–компаньона будет справедливо $a_{\rm S} = \sqrt{\mathfrak{M}_{\rm S} \,/\, a_{\rm BD}} - a_{\rm BD}$. Тогда нижняя граница получается меньше 0 (и нижняя граница массы — также меньше 0), а верхняя граница $a_{\rm S} = 0,14$ а. е. и верхняя граница массы белого карлика $\mathfrak{M}_{\rm BD} = \mathfrak{M}_{\rm S}\, a_{\rm S} \,/\, a_{\rm BD} = 0,1\mathfrak{M}_\odot$. Очевидно, что таких маломассивных белых карликов просто нет во Вселенной, так как соответствующие красные карлики бы просто не успели проэволюционировать.

Оба компонента не могут испускать линию Бальмера, так как она в процессе будет раздваиваться и определять смещение не будет иметь особого смысла.

В итоге масса звезды–компаньона лежит в пределах от $0{,}5\mathfrak{M}_\odot$ до $1{,}4\mathfrak{M}_\odot$.

5 По СССР ходила большая крокодила

Условие

В 1961 году при расчёте траектории орбитальных спутников советские инжерены моделировали потенциал сплюснутой Земли при помощи двух негравитирующих масс (каждая равна половине массы Земли), находящихся на некотором расстоянии друг от друга вдоль оси вращения Земли. Современная модель потенциала Земли в третьем приближении описывается формулой $V(r,\varphi) = \frac{G\,M_\oplus}{r}\left[1 + J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 \frac{3\sin^2\varphi - 1}{2}\right]$, где r — расстояние от центра Земли до данной точки, φ — широта, G — гравитационная постоянная, $M_\oplus$ и $R_\oplus$ — радиус и масса Земли, $J_2 \approx 1,08 \cdot 10^{-3}$ — коэффициент. Определите расстояние между этими двумя массами.

Решение

Нарисуем расположение масс (рис. 1). Отметим, что вообще потенциал Земли и так неплохо моделируется одной массой. То есть расстояние между массами довольно мало.

Теперь напишем выражение для потенциала Земли у советских инженеров:

$$V_{USSR} = \frac{G\,M_\oplus\,/2}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi - x)^2}} + \frac{G\,M_\oplus\,/2}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi + x)^2}}$$

Немного преобразуем выражение:

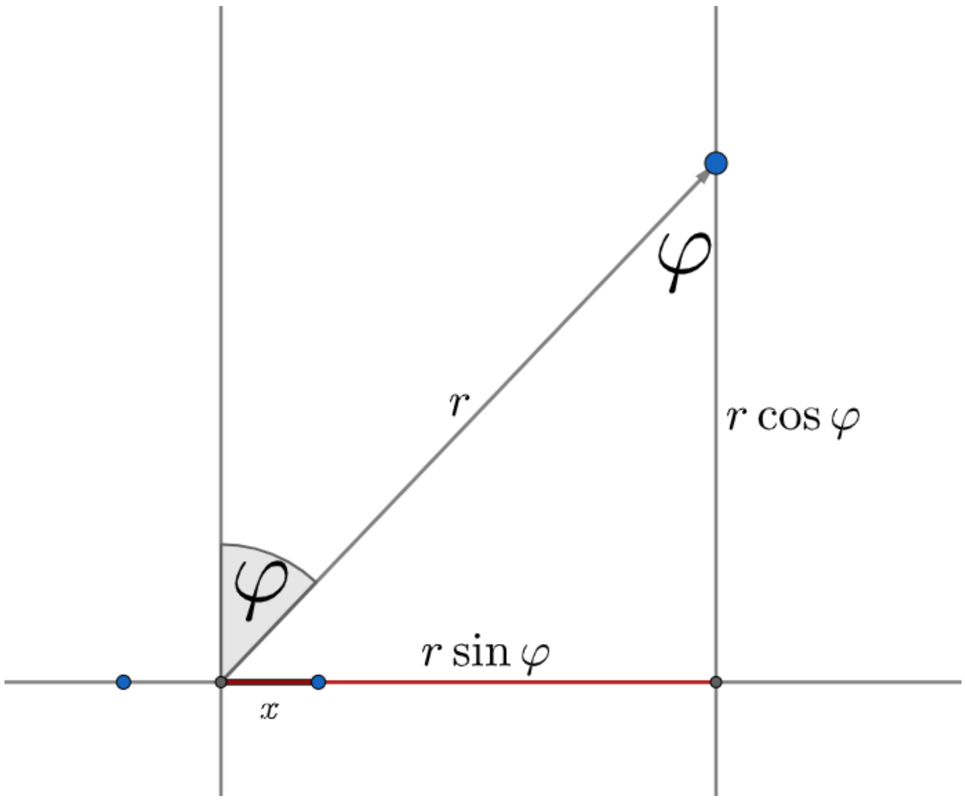

Рис. 1.

$$V_{USSR} = \frac{G\,M_{\oplus}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2xr\sin\varphi + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2xr\sin\varphi + x^2}}\right) =$$

$$= \frac{G\,M_{\oplus}}{2r}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2}}}\right)$$

Заметим, что если воспользоваться слишком грубым приближением, то членов с $\sin^2\varphi$ не возникнет, что не поможет ответить на условие в задаче. Однако, можно разложить в ряд и дальше:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\chi}} = (1+\chi)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\chi + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2}\chi^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{6}\chi^3 + \cdots$$

Но нам нужно третье приближение, то есть разложить до второго порядка. Тогда

$$V_{USSR} = \frac{G\,M_\oplus}{2r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2} + \frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}\left(\frac{4x^2}{r^2}\sin^2\varphi - \frac{4x^3}{r^3}\sin\varphi + \frac{x^4}{r^4} + \frac{4x^2}{r^2}\sin^2\varphi + \frac{4x^3}{r^3}\sin\varphi + \frac{x^4}{r^4}\right)\right)$$

Очевидно, что членом x^4/r^4 можно пренебречь. Тогда результат можно записать в виде

$$V_{USSR} = \frac{G\,M_\oplus}{2r}\left(2 - \frac{x^2}{r^2} + \frac{3x^2}{r^2}\sin^2\varphi\right) = \frac{G\,M_\oplus}{r}\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\frac{3\sin^2\varphi - 1}{2}\right)$$

Из выражения, приведённого в условии, видно, что $-J\,{R_\oplus}^2 = x^2$. Тогда расстояние между массами будет равно $2x = 2\sqrt{-J\,{R_\oplus}^2} =$
$= 2 \cdot 6370\sqrt{-1,08 \cdot 10^{-3}} \approx 420i$ км.