Кубок ЛФИ

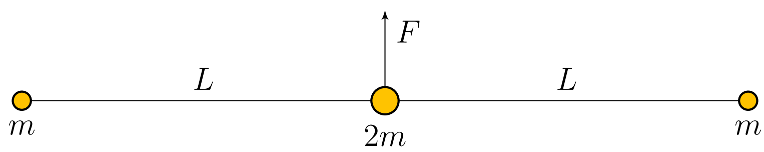
11.s03.e02

Ничего не понимаю, но,
похоже, нас ожидает что-то эпическое.
Крош, «Смешарики Пин-Код»

Карам

Часть 1

На концах двух стержней длиной L закреплены две смешайбы массой m. Стержни соединены смешарниром массой $2m$. Система расположена на гладкой горизонтальной поверхности, причём изначально смешайбы и смешарниры располагаются на одной прямой.



На смешарнир начинают действовать постоянной горизонтальной силой F, направленной перпендикулярно стержням. Оказалось, что в следующий раз угловая скорость стержней равна нулю в момент, когда расстояние между смешайбами равнялось $L\sqrt{3}$. Найдите:

1. (1,5 балла) количество теплоты, выделившееся при первом соударении грузов;
2. (1 балл) количество теплоты, выделившееся при соударениях грузов за большое время;
3. (3,5 балла) найдите скорость смешарнира в момент следующего обнуления угловой скорости стержней.

Часть 2

Однородная цепочка длины $2L$ массы M вытянута в прямую линию и расположена на гладкой горизонтальной поверхности. К центру цепочки прикладывают постоянную силу F, направленную перпендикулярно к цепочке. Считая, что удары звеньев абсолютно неупругие найдите:

4. (1,5 балла) Сколько энергии выделится за все соударения звеньев.

Часть 3. Нецентральный удар смешайб

В данной части задачи надо будет анализировать частично упругие удары смешайбочек с коэффициентом восстановления k, который определяется соотношением

$$k = 1 - E_\text{п}/W,$$

где $E_\text{п}$ — потери энергии, а W — максимальная энергия деформации во время удара.

Например, смешайба падает с высоты H и ударяется о пол. Максимальная энергия деформации mgH. Если коэффициент восстановления равен k, то энергия смешайбы после удара равна $mgHk$ и она поднимется на высоту Hk.

Две смешайбочки одинакового радиуса R располагаются на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения смешайбочек о поверхность одинаков и равен μ. Смешайбочка массы m_1 налетает на покоящуюся смешайбочку массы m_2. В момент удара с коэффициентом восстановления k скорость первой смешайбы равна v_0. После удара вторая смешайба к моменту остановки прошла путь L_2. Найдите

5. (1,5 балла) количество теплоты Q, выделившееся за время соударения;
6. (1 балла) расстояние L_1, пройденное первой смешайбой после соударения.

Между смешайбочками трения нет.

Автор задачи: А. Уймин

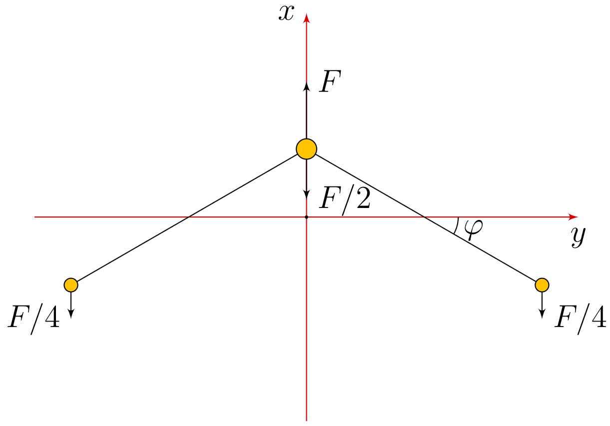
Решение основной задачи

Часть 1

1. Запишем теорему о движении центра масс

$$4ma_c = F; \quad \Longrightarrow \quad a_c = \frac{F}{4m} = \text{const}.$$

Заметим, что ускорение центра масс постоянно. Для удобства перейдём в систему отсчёта центра масс. Кинетическая энергия системы равна работе силы F по перемещению шарнира (работа сил инерции равна нулю, см. альтернативную задачу). Обозначим угол между стержнями и их изначальными положениями за φ.



Работа силы F будет равна $\frac{FL}{2}\sin\varphi$. В следующий раз угловая скорость обнулится, когда $\varphi = 90^\circ - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$. Тогда из закона сохранения энергии

$$Q_1 = \frac{FL}{2}\sin 30^\circ = \frac{FL}{4}.$$

2. Ясно, что в результате большого числа соударений стержни придут в положение $\varphi = 90^\circ$. Тогда аналогично

$$Q_2 = \frac{FL}{2}\sin 90^\circ = \frac{FL}{2}.$$

3. Введём ось x вдоль линии действия силы, а ось y перпендикулярно ей. Тогда скорость шарнира будет равна

$$\left(v_x^{2m},\ v_y^{2m}\right) = \left(\frac{L}{2}\cos(\varphi)\dot{\varphi},\ 0\right),$$

а скорости грузов равны

$$\left(v_x^{m},\ v_y^{m}\right) = \left(-\frac{L}{2}\cos(\varphi)\dot{\varphi},\ \pm\frac{L}{2}\sin(\varphi)\dot{\varphi}\right).$$

Кинетическая энергия равна

$$K = 2\cdot\frac{mv_m^2}{2} + \frac{2mv_{2m}^2}{2} = \frac{mL^2}{2}\left(1+\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная энергия постоянной силы, как известно, равна произведению силы на перемещение вдоль линии действия силы. Тогда

$$\Pi = -\frac{FL}{2}\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right),$$

где φ_0 — угол, при котором обнуляется угловая скорость. Заметим также, что в результате соударения максимальная кинетическая энергия системы изменяется в

$$\frac{\Pi(30^\circ)}{\Pi(0^\circ)} = \frac{1-\sin 30^\circ}{1-\sin 0^\circ} = \frac{1}{2}$$

раза, поэтому после второго соударения угловая скорость обнулится при $\varphi_0 = \arcsin\frac{3}{4}$. Таким образом, для времени, прошедшего до второго обнуления угловой скорости, можем записать

$$K + \Pi = 0.$$

Подставляя выражения для кинетической и потенциальной энергии, выразим зависимость угловой скорости $\dot\varphi$ от угла поворота φ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{F}{mL}}\sqrt{\frac{\sin\varphi - \sin\varphi_0}{1+\sin^2\varphi}}.$$

Теперь можем найти время T, прошедшее до второго обнуления угловой скорости. Разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение

$$T = \sqrt{\frac{mL}{F}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi}}d\varphi + 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi - \frac{1}{2}}}d\varphi + \int_{\arcsin\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi - \frac{3}{4}}}d\varphi\right].$$

Здесь первое слагаемое отвечает за движение до первого столкновения ($\varphi_0 = 0^\circ$), второе — за движение между первым и вторым столкновениями ($\varphi_0 = 30^\circ$), а третье — за движение от второго столкновения до второго обнуления угловой скорости $\left(\varphi_0 = \arcsin\frac{3}{4}\right)$. Поскольку в момент второго обнуления угловой скорости грузов равны скорости шарнира, то

$$v = a_c T; \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{FL}{m}}\sqrt{\frac{\sin\varphi - \sin\varphi_0}{1+\sin^2\varphi}}.$$

После несложных подстановок, находим

$$v = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{FL}{m}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi}}d\varphi + 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi - \frac{1}{2}}}d\varphi + \int_{\arcsin\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi - \frac{3}{4}}}d\varphi\right) =$$

$$= 3{,}00675\sqrt{\frac{FL}{m}}.$$

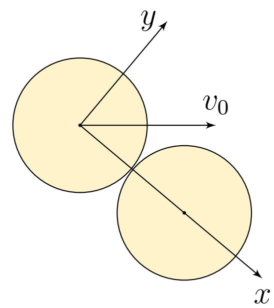
Часть 2

4. Аналогично пункту 2, две половины цепочки выпрямится вдоль силы F. Середина цепочки смещается относительно центра масс на расстояние $\frac{L}{2}$, и вся эта работа переходит в тепло

$$Q_4 = \frac{FL}{2}.$$

Часть 3

5. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся со скоростью $v_{0x}\frac{m_1}{m_1+m_2}$ вдоль оси x. В этой системе отсчёта проекции скоростей смешайбочек на ось x равны



$$v'_{1x} = v_{0x}\frac{m_2}{m_1+m_2}; \quad v'_{2x} = -v_{0x}\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

Проекция импульса системы на ось x равна нулю. Тогда после удара получаем, что проекции скоростей смешайбочек равны

$$u'_{1x} = -u\frac{m_2}{m_1+m_2}; \quad u'_{2x} = u\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

Когда смешайбочки максимально деформированы, проекции их скоростей на ось x равны нулю. Тогда

$$W = \frac{m_1}{2}\left(\frac{v_{0x}m_2}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{v_{0x}m_1}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{v_{0x}^2}{2}.$$

Найдём u из закона сохранения энергии

$$\frac{m_1}{2}\left(\frac{v_{0x}m_2}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{v_{0x}m_1}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_1}{2}\left(\frac{um_2}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{um_1}{m_1+m_2}\right)^2 + (1-k)W,$$

После несложных преобразований, находим

$$W = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{u^2}{2} + (1-k)W, \quad \Longrightarrow \quad u = v_{0x}\sqrt{k}.$$

Тогда проекция скорости второй смешайбочки на ось x в лабораторной системе отсчёта равна

$$u_{2x} = u'_{2x} + v_{0x}\frac{m_1}{m_1+m_2} = v_{0x}\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(1+\sqrt{k}\right).$$

С другой стороны, так как после удара вторая смешайба к моменту остановки прошла путь L_2, то

$$\frac{m_2u_{2x}^2}{2} = \mu m_2 g L_2; \quad \Longrightarrow \quad u_{2x} = \sqrt{2\mu g L_2}.$$

Откуда получаем

$$v_{0x} = \frac{m_1+m_2}{m_1\left(1+\sqrt{k}\right)}\sqrt{2\mu g L_2}.$$

Тогда количество теплоты, выделившееся с момента соударения равно

$$Q = (1-k)W = (1-k)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1^2\left(1+\sqrt{k}\right)^2}\frac{2\mu g L_2}{2} = (1-k)\frac{m_2}{m_1}\frac{m_1+m_2}{(1+\sqrt{k})^2}\mu g L_2.$$

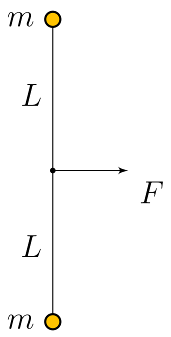
6. Расстояние L_1 найдём из закона сохранения энергии

$$\frac{m_1v_0^2}{2} = Q + \mu g L_1 m_1 + \mu m_2 g L_2.$$

Окончательно

$$L_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g} - L_2\frac{m_2}{m_1} - (1-k)\frac{m_2}{m_1^2}\frac{m_1+m_2}{(1+\sqrt{k})^2}L_2.$$

Альтернативная задача



1. *(2,5 балла)* Две смешайбы соединены нитью длиной $2l$ и покоятся на льду. Нить начинают тянуть за середину с постоянной горизонтальной силой F. Найдите, какое количество теплоты выделится при абсолютно неупругом ударе смешайб.
2. *(1,5 балла)* Смешайбу, которая покоилась на доске, начинают тянуть с постоянной силой F. Найдите суммарную работу сил инерции в системе отсчета центра масс.
3. *(2 балла)* Центр масс системы из N материальных точек движется с ускорением a. Найдите суммарную работу сил инерции в системе отсчета центра масс.
4. *(2 балла)* Решите пункт 5 основной задачи для $k = 0$ и $k = 1$.
5. *(2 балла)* Решите пункт 6 основной задачи для $k = 0{,}5$.

Решение альтернативной задачи

1. Рассмотрим две системы шайб: первую, которая описана в условии, и вторую, изображенную на нижнем рисунке. Направим ось x вдоль линии действия силы. Пусть все шайбы начинают движение из положения $x = 0$. Заметим, что на любую шайбу вдоль оси x действует сила $F/2$. Тогда зависимость $x(t)$, а значит и $v(t)$, для всех шайб одинаковая. Предположим, что координата точки, в которой произошел удар шайб первой системы $x = d$. Тогда по определению суммарная работа, совершенная над первой системой равна

$$A_1 = F(d + l),$$

так как точка приложения внешней силы сместилась на расстояние $d + l$. Над второй системой была совершена работа

$$A_2 = Fd.$$

После соударения кинетическая энергия шайб в обоих системах будет одинаковой, поэтому тепло, выделившееся во время соударения, можно найти как разность работ, совершенныъх над системой

$$Q = A_1 - A_2 = Fl.$$

2. По теореме о движении центра масс ускорение центра масс системы смешайба-доска равно

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{F}}{m + M},$$

где m — масса смешайбы, M — масса доски. Перейдем в систему отсчета центра масс. Тогда на доску и смешайбу будут действовать силы инерции

$$\vec{F}_{\text{с}} = -m\vec{a}_c, \quad \vec{F}_{\text{д}} = -M\vec{a}_c.$$

Введем горизонтальную ось x. Координата центра масс не изменяется, значит для малых перемещений смешайбы и доски выполнено равенство

$$m\Delta x_{\text{с}} + M\Delta x_{\text{д}} = 0.$$

Посчитаем работу сил инерции

$$A = F_{\text{с}}\Delta x_{\text{с}} + F_{\text{д}}\Delta x_{\text{д}} = -ma_c\Delta x_{\text{с}} - Ma_c\Delta x_{\text{д}} = -a_c(m\Delta x_{\text{с}} + M\Delta x_{\text{д}}) = 0.$$

3. Перейдем в систему отсчета центра масс. Пусть массы точек равны m_i, где $i = 1, 2, \ldots, N$. Тогда инерции, действующая на i-ю точку равна

$$\vec{F}_i = -m_i\vec{a}.$$

Радиус-вектор центра масс не изменяется, поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} m_i d\vec{r}_i = 0.$$

Посчитаем суммарную работу сил инерции

$$A = \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i, d\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{N}(-m_i\vec{a}, d\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{N}(-\vec{a}, m_i d\vec{r}_i) = \left(-\vec{a}, \sum_{i=1}^{N} m_i d\vec{r}_i\right) = 0.$$

4. k = 0. В этом случае $Q = W$, т.е. происходит абсолютно неупругий удар. Тогда после удара проекции скоростей шайб на ось x равны

$$u = v_{0x}\frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Из закона сохранения энергии получаем, что

$$\frac{m_2u^2}{2} = \mu m_2 g L_2 \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{2\mu g L_2}.$$

Тогда, подставляя v_0 из выражения для u, получаем, что выделившееся тепло равно

$$Q = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} - \frac{m_1 v_{0x}^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_{0x}^2}{2} = \frac{m_2}{m_1}(m_1 + m_2)\mu g L_2.$$

k = 1. В этом случае

$$1 - \frac{Q}{W} = 1,$$

значит $Q = 0$, т. е. происходит абсолютно упругий удар и тепло не выделяется.

5. Смотрите решение пункта 6 основной задачи.