1

Задача 2. Идеальному газу, находящемуся в вертикальном цилиндре под невесомым подвижным поршнем, сообщают количество теплоты $Q = 300$ Дж. Внутренняя энергия газа при этом увеличивается на $\Delta U = 200$ Дж. Найдите изменение объёма газа и определите его молярную теплоёмкость при постоянном объёме. Внешнее атмосферное давление равно $P_A = 100$ кПа.

Возможное решение. Процесс изобарический, поэтому работа газа равна $P_A \Delta V$. Из первого начала термодинамики следует:

$$Q = \Delta U + P_A \Delta V \;\; \Rightarrow \;\; \Delta V = \frac{Q - \Delta U}{P_A} = 1 \text{ л}.$$

Изменение внутренней энергии равно:

$$\Delta U = \nu c_V \Delta T = c_V \frac{P_A \Delta V}{R} \;\; \Rightarrow \;\; c_V = \frac{\Delta U R}{P_A \Delta V} = 2R.$$

2

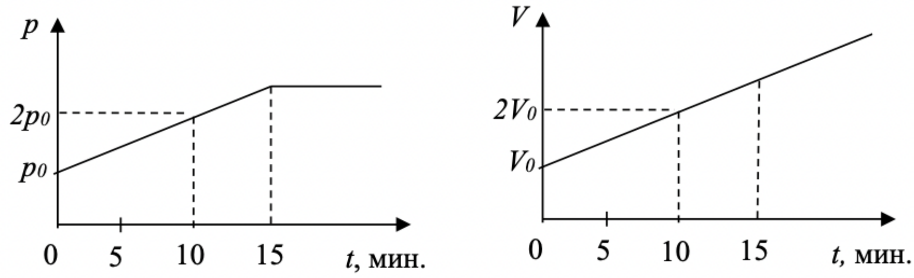
Задача: Постоянное количество гелия участвует в процессе, в котором его давление сначала остается постоянным, затем возрастает в $n = 2$ раза так, что его объем изменяется пропорционально давлению, а затем снова остается постоянным. Зная, что конечная температура гелия в $k = 1{,}2$ раза больше начальной, и что полное количество теплоты, которым гелий обменялся с окружающими телами в этом процессе, равно нулю, найдите отношение максимального и минимального объема гелия в этом процессе.

Решение задачи: Заданный процесс 1→2→3→4 состоит из изобары (молярная теплоемкость $c_p = \frac{5}{2}R$), процесса с $p = \alpha V$ $(c = 2R)$ и еще одной изобары. Таким образом, температуры состояний удовлетворяют соотношению $\frac{5}{2}R(T_2 - T_1) + 2R(T_3 - T_2) + \frac{5}{2}R(T_4 - T_3) = 0$. Из этого соотношения следует, что $5T_4 + T_2 - T_3 - 5T_1 = 0$. По условию $T_4 = kT_1$, а в процессе 2→3 давление возрастает в n раз, и во столько же раз возрастает объем, поэтому $T_3 = \frac{1}{\nu R} p_3 V_3 = n^2 \frac{1}{\nu R} p_2 V_2 = n^2 T_2$. Объединяя эти соотношения, найдем, что $T_2 = \frac{5(k-1)}{n^2 - 1} T_1 = \frac{1}{3} T_1$. С учетом этого и характера процессов $V_2 = \frac{1}{3} V_1$, $V_3 = 2V_2 = \frac{2}{3} V_1$ и $V_4 = \frac{3}{5} V_1$. Таким образом, $V_{\max} = V_1$ и $V_{\min} = V_2$. Значит, $\frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{n^2 - 1}{5(k-1)} = 3$.

ОТВЕТ: $\frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{n^2 - 1}{5(k-1)} = 3$.

Задача 3

3 На графиках приведены зависимости от времени t давления p и объёма V одного моля одноатомного идеального газа. Определите, как со временем изменялась теплоёмкость данного количества газа. Постройте график зависимости этой теплоёмкости от времени.



Возможное решение

В течение первых 15 минут зависимость давления газа от его объёма имеет вид $p(V) = \frac{p_0}{V_0}V$. Пусть в некоторый произвольный момент времени (в интервале от 0 мин. до 15 мин.) давление газа равно p_1, а занимаемый им объём равен V_1. Запишем для процесса перехода из состояния (p_0, V_0) в состояние (p_1, V_1) первое начало термодинамики:

$$C\Delta T = \frac{3}{2}R\Delta T + \Delta A.$$

Здесь C – теплоёмкость одного моля газа в рассматриваемом процессе, ΔT – изменение температуры газа, ΔA – работа, которую совершает газ. Она численно равна площади фигуры под графиком зависимости $p(V)$, и эта фигура – трапеция.

Перепишем последнее выражение, воспользовавшись уравнением состояния $pV = RT$ для одного моля идеального газа:

$$\frac{C}{R}\Delta(pV) = \frac{3}{2}\Delta(pV) + \Delta A$$

или

$$\left(\frac{C}{R} - \frac{3}{2}\right)\Delta(pV) = \left(\frac{C}{R} - \frac{3}{2}\right)(p_1V_1 - p_0V_0) = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_1 - V_0).$$

Учтём, что $p_1 = \frac{p_0}{V_0}V_1$. Тогда

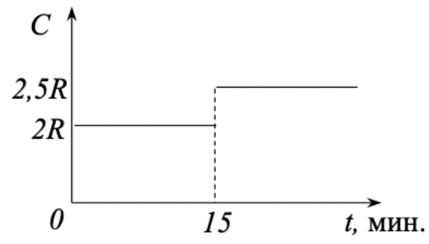
$$\left(\frac{C}{R} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{p_0}{V_0}V_1^2 - p_0V_0\right) = \frac{1}{2}\left(p_0 + \frac{p_0}{V_0}V_1\right)(V_1 - V_0),$$

откуда следует

$$\frac{C}{R} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

то есть $C = 2R$.

Заметим, что давление p_1 и объём V_1, взятые в произвольный момент времени, при проведении выкладок сокращаются. Это справедливо, в том числе и для двух произвольных состояний газа, разделённых очень малым промежутком времени. Это доказывает, что теплоёмкость в рассматриваемом процессе является постоянной величиной, то есть она будет равна $2R$ в любой момент в течение первых 15 минут.



По истечении первых пятнадцати минут процесс становится изобарическим. Следовательно, при этом $C = \frac{5}{2}R$.

Соответствующий график зависимости теплоёмкости одного моля одноатомного идеального газа от времени изображён на рисунке.

4 Аналогично решается

Гелий из состояния с температурой T1 = 100 K расширяется в процессе (p^2)*V = const (p - давление, V -объём газа) с постоянной теплоёмкостью C . К газу подвели количество теплоты 2910 Дж.
Конечное давление газа вдвое меньше начального.
1 - Определить конечную температуру гелия.
2 - Определить теплоёмкость C.

$p_1^2 * V_1 = p_2^2 * V_2 \Rightarrow (2 * p_2)^2 * V_1 = p_2^2 * V_2 \Rightarrow 4 * V_1 = V_2$
$p_1 * V_1 = v * R * T_1$
$p_2 * V_2 = v * R * T_2$
$p_1 * V_1 / (p_2 * V_2) = T_1 / T_2$
$2 / 4 = T_1 / T_2 \Rightarrow T_2 = 50$ K
$Q = C * \Delta T \Rightarrow C = Q / \Delta T = 2910$ Дж / 50 K = 58,2 Дж/K

5

2. Газообразный гелий нагревается (непрерывно повышается температура) от температуры T_0 в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа зависит от температуры T по закону $C = \alpha R \dfrac{T}{T_0}$, где α - неизвестная численная константа.

1) Найти α, если известно, что при нагревании до температуры $T_1 = 5T_0/4$ газ совершил работу, равную нулю.
2) Найти температуру T_2, при достижении которой газ занимал минимальный объём в процессе нагревания.

2. $\nu C\Delta T = \nu C_V \Delta T + \Delta A$. $\nu\left(C - C_V\right)\Delta T = \Delta A$.

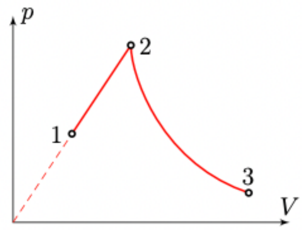
1) $\nu\alpha R \dfrac{T}{T_0}\Delta T = \nu \dfrac{3}{2}R\Delta T + \Delta A$. $\nu\alpha R \dfrac{1}{T_0}\cdot\dfrac{1}{2}\Delta\left(T^2\right) = \nu\dfrac{3}{2}R\Delta T + \Delta A$. Суммируем:

$\dfrac{1}{2}\nu\alpha R\dfrac{1}{T_0}\left(T_1^2 - T_0^2\right) = \dfrac{3}{2}\nu R\left(T_1 - T_0\right) + \Sigma\Delta A$. Так как $\Sigma\Delta A = 0$ и $T_1 = \dfrac{5}{4}T_0$, то $\alpha = \dfrac{4}{3}$.

2) При минимальном объеме $\Delta A = 0$ и $\nu\left(C - C_V\right)\Delta T = 0$, т.е. $C = C_V = \dfrac{3}{2}R$. Имеем $\dfrac{4}{3}R\dfrac{T_2}{T_0} = \dfrac{3}{2}R$.

Отсюда $T_2 = \dfrac{9}{8}T_0$.

6 Моль гелия, расширяясь в процессе 1-2 (см. рисунок), где его давление p меняется прямо пропорционально объёму V, совершает работу A. Из состояния 2 гелий расширяется в процессе 2-3, в котором его теплоёмкость C остаётся постоянной и равной $C = R/2$ (R — газовая постоянная). Какую работу A_{23} совершит гелий в процессе 2-3, если его температура в состоянии 3 равна температуре в состоянии 1?



Рассмотрим процесс применительно к 1 моль гелия.

На участке 1-2 имеем $\frac{V}{p}=const$, поэтому на этом участке

$$p_1V_2=p_2V_1. \qquad (1)$$

Для этого участка с учётом формулы (1)

$$A_{12}=A=\frac{1}{2}\left(p_1+p_2\right)\left(V_2-V_1\right)=\frac{1}{2}\left(p_2V_2-p_1V_1\right)=\frac{1}{2}R\left(T_2-T_1\right). \qquad (2)$$

Из закона сохранения полной энергии на участке 2-3 получим

$$C\left(T_3-T_2\right)=C_V\left(T_3-T_2\right)+A_{23},$$

$$A_{23}=\left(C-C_V\right)\left(T_3-T_2\right)=\left(\frac{R}{2}-\frac{3R}{2}\right)\left(T_3-T_2\right)=-R\left(T_3-T_2\right)=R\left(T_2-T_3\right)=R\left(T_2-T_1\right). \qquad (3)$$

Сопоставляя выражения (2), (3), получим, что

$$\frac{A_{23}}{A}=\frac{R\left(T_2-T_1\right)}{\frac{1}{2}R\left(T_2-T_1\right)}=2,$$

$$A_{23}=2A.$$

7 Экспериментально определить отношение теплоёмкостей газа при постоянном давлении и постоянном объёме $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ можно следующим методом. Определённое количество молей газа ν, начальные значения объёма и давления которого равны V и p, нагревают дважды с помощью спирали, по которой пропускают один и тот же ток в течение одинакового времени: сначала — при постоянном объёме, причём конечное давление составляет p_1, затем — при постоянном давлении, причём конечный объём составляет V_2. Найдите по этим данным γ, считая газ идеальным. Теплоёмкостью спирали и стенок сосуда можно пренебречь.

Решение:

Поскольку электрический нагреватель в обоих случаях работает одинаковое время, то и подводимое к газу количество теплоты будет одинаковым: $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$. Будем считать, что условия эксперимента обеспечивают отсутствие теплообмена газа с окружающей средой, т. е. сосуд с газом адиабатически изолирован. Поэтому можно написать

$\Delta Q_1 = \nu C_V \Delta T_1, \Delta Q_2 = \nu C_p \Delta T_2$, (1)

где C_V и C_p — молярные теплоемкости исследуемого газа при постоянном объеме и при постоянном давлении, а ΔT_1 и ΔT_2 — изменения температуры, газа в первом и втором случаях. Так как $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$, то из формул (1) для $\gamma = C_p/C_V$ получаем

$\gamma = \Delta T_1/\Delta T_2$. (2)

Поскольку в описываемом эксперименте измеряются не температура, а объем и давление газа, то изменение температуры следует выразить через изменение объема и давления. Для того чтобы сделать это, нужно воспользоваться уравнением состояния.

Формула (2) справедлива для любого газа, не обязательно идеального. Поэтому если бы мы могли измерять с достаточной точностью изменение температуры, то по формуле (2) мы бы непосредственно находили отношение теплоемкостей реального газа. Однако измерять изменение температуры газа трудно, так как такое измерение требует значительного времени, пока термометр придет в тепловое равновесие с газом. А это, в свою очередь, накладывает жесткие требования на степень теплоизоляции газа от окружающей среды. При измерении изменения объема и давления газа такие требования не возникают. Но за удобство измерений приходиться платить тем, что теперь необходимо знать уравнение состояния газа.

Если условия опыта таковы, что газ с достаточной точностью можно считать идеальным, то можно воспользоваться уравнением Менделеева — Клапейрона

$pV = \nu RT$. (3)

Тогда в первом случае, при нагревании газа при постоянном объеме V, имеем

$p(V_2 - V) = \nu R \Delta T_1$. (4)

Во втором случае, при нагревании при постоянном давлении p, из (3) имеем

$p(V_2 - V) = \nu R \Delta T_2$. (5)

Выражая ΔT_1 и ΔT_2 из равенств (4) и (5) и подставляя их значения в соотношение (2), находим

$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{(p_1 - p)V}{p(V_2 - V)} = \frac{p_1/p - 1}{V_2/V - 1}$ (6)