Кубок ЛФИ

10.s03.e02

Не надо строить иллюзий, которые могут закончиться травмпунктом.
Кар Карыч, «Смешарики Искусство кройки и житья»

Карум

В данной задаче надо будет анализировать частично упругие удары смешариков с коэффициентом восстановления k, который определяется соотношением

$$k = 1 - E_{\text{п}}/W,$$

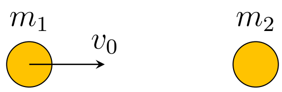
где $E_{\text{п}}$ — потери энергии, а W — максимальная энергия деформации во время удара.

Например, смешарик падает с высоты H и ударяется о пол. Максимальная энергия деформации mgH. Если коэффициент восстановления равен k, то энергия смешарика после удара равна $mgHk$ и он поднимется на высоту Hk.

Во всех пунктах считайте, смешариков гладкими, шарообразными, однородными, а их движение исключительно поступательным.

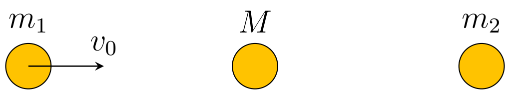
Часть 1. Центральный удар

A. Копатыч фиксированной массы m_1 налетает на Кроша массы m_2 и происходит центральный удар с коэффициентом восстановления k.



1. *(1 балл)* Найдите, при каком значении массы Кроша m_2 его кинетическая энергия после удара будет максимальной.

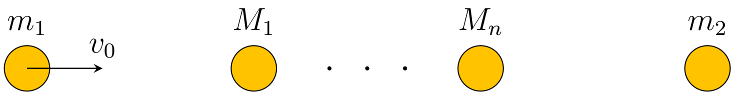
B. Между Копатычем и Лосяшем с известными массами m_1 и m_2 расположили другого вспомогательного смешарика, массу M которого мы можем изменять. Первому смешарику сообщили скорость v_0, остальные смешарики покоятся ~~с миром~~.



2. *(1,5 балла)* При каком значении массы вспомогательного смешарика, кинетическая энергия Лосяша массы m_2 будет максимальной?

Все удары центральные, коэффициенты восстановления одинаковы и равны k.

C. Между Копатычем и Совуньей с известными массами m_1 и m_2 расположили N вспомогательных смешариков, массы которых мы можем изменять. Первому смешарику сообщили скорость v_0, остальные смешарики покоятся.

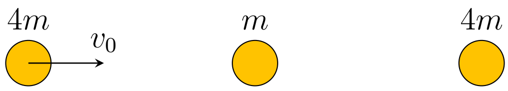


3. *(1 балл)* При каких значениях масс вспомогательных смешариков, кинетическая энергия Совуньи массы m_2 будет максимальной? Все удары центральные, коэффициенты восстановления одинаковы и равны k.

4. *(1,5 балла)* При каком значении k кинетическая энергия Совуньи будет больше, чем если бы не было вспомогательных смешариков?

Массы вспомогательных малышариков можно изменять независимо.

D. В качестве частного примера рассмотрим следующую ситуацию. Три смешарика Копатыч, Крош и Лосяш массами $4m$, m и $4m$ соответственно расположились в этом порядке вдоль одной прямой линии. Копатычу сообщили скорость v_0 по направлению к двум другим смешарикам, которые находились в состоянии покоя. Коэффициент восстановления всех ударов 0,5.



5. *(2 балла)* Какое количество теплоты выделится за сколько угодно большое время?

Часть 2. Нецентральный удар

Две смешайбочки одинакового радиуса R располагаются на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения смешайбочек о поверхность одинаков и равен μ. Смешайбочка массы m_1 налетает на покоящуюся смешайбочку массы m_2. В момент удара с коэффициентом восстановления k скорость первой смешайбы равна v_0. После удара вторая смешайба к моменту остановки прошла путь L_2. Найдите:

6. (1,5 балла) количество теплоты Q, выделившееся за время соударения;

7. (1,5 балла) расстояние L_1, пройденное первой смешайбой после соударения.

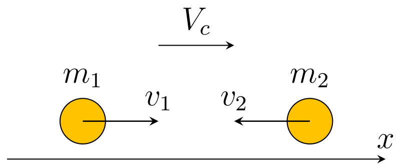
Авторы задачи: Л. Колдунов, П. Шишкин, А. Уймин

Решение основной задачи

Часть 1. Центральный удар

A. Перейдем в систему центра масс Копатыча и Кроша, которая будет двигаться с постоянной скоростью

$$V_c = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2},$$



так как на систему не действуют внешние силы по горизонтали. Тогда проекция скорости Копатыча на горизонтальную ось будет равна

$$v_{1x} = v_0 - V_c = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2},$$

а скорость Кроша

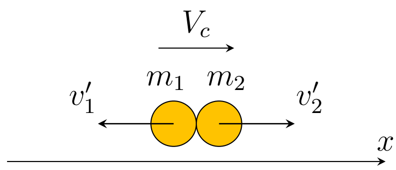
$$v_{2x} = -V_c = -\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Модули импульсов Копатыча и Кроша в системе центра масс будут равны друг другу

$$p_{1x} = \frac{m_1}{m_2 v_0 m_1 + m_2}; \quad p_{2x} = -\frac{m_1 m_2 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Проекция импульса на ось x для системы тел, состоящей из Копатыча и Кроша, будет сохраняться, так как по горизонтали на них не действуют другие силы.

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} = 0,$$



где p'_{1x} и p'_{2x} — проекции импульсов Копатыча и Кроша после соударения соответственно. В системе центра масс импульс системы будет равен 0. Следовательно, $p'_{1x} = -p'_{2x}$.

Запишем уравнение сохранения энергии с учётом коэффициента восстановления

$$k\left(\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}\right) = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}.$$

Выразим коэффициент k с учётом $p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} = 0$

$$k = \frac{p_1'^2}{p_1^2} = \frac{p_2'^2}{p_2^2}.$$

Скорость Кроша после удара в лабораторной системе отсчёта будет равна

$$v_2^* = v'_{2x} + V_c = V_c(\sqrt{k} + 1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0(\sqrt{k} + 1)$$

Кинетическая энергия Кроша после удара будет равна

$$E_k = m_2 (v_2^*)^2 = m_2 V_c^2 (\sqrt{k} + 1)^2 = \left[(\sqrt{k} + 1) m_1 v_0\right]^2 \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2} = A \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Здесь A — константа. Задача поиска максимума E_k

$$E_k = A\frac{1}{\left(\dfrac{m_1}{\sqrt{m_2}} + \sqrt{m_2}\right)^2}.$$

сводится к поиску минимума выражения в знаменателе

$$\frac{m_1}{\sqrt{m_2}} + \sqrt{m_2} \to \min .$$

Следовательно, максимум E_k достигается при:

$$\frac{m_1}{\sqrt{m_2}} + \sqrt{m_2} \geqslant 2\sqrt{m_1}.$$

Окончательно получаем

$$\boxed{m_2 = m_1.}$$

B. Используя предыдущий пункт, легко определить скорость малышарика массой M после соударения с Копатычем

$$v_M = \frac{m_1 v_0}{m_1 + M}(\sqrt{k} + 1).$$

Аналогично определим скорость Лосяша после столкновения с малышариком массой M

$$v_2 = \frac{M v_M}{M + m_2}(\sqrt{k} + 1).$$

Подставим v_M в предыдущую формулу

$$v_2 = \frac{m_1 M v_0}{(m_1 + M)(m_2 + M)}(\sqrt{k} + 1)^2.$$

Кинетическая энергия Лосяша равна

$$E_k = m_2 v_2^2 = m_2 \left[m_1 v_0 (\sqrt{k} + 1)^2 v_0 \frac{M}{(m_1 + M)(m_2 + M)}\right]^2$$

$$E_k = A^* \left[\frac{M}{(m_1 + M)(m_2 + M)}\right]^2,$$

где A^* — константа. Максимум кинетической энергии Лосяша будет достигаться при

$$\frac{M}{(m_1 + M)(m_2 + M)} \to \max; \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{M + \dfrac{m_1 m_2}{M} + m_1 + m_2} \to \max; \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad M + \frac{m_1 m_2}{M} \to \min .$$

Используя неравенство о среднем, получаем

$$M + \frac{m_1 m_2}{M} \geqslant 2\sqrt{m_1 m_2}$$

Максимум E_k достигается при

$$\boxed{M = \sqrt{m_1 m_2}.}$$

В случае $k = 0$ смешные шарики слипнутся и покатятся дальше вместе. Законы сохранения теперь запишутся так:

$$\begin{cases} m_1 v_0 = (m_1 + M + m_2) v_1, \\ m_1 \frac{v_0^2}{2} = (m_1 + M + m_2) \frac{v_1^2}{2}. \end{cases}$$

Тогда $v_1 = v_0 \frac{m_1}{m_1 + M + m_2}$, и $E_{\text{Лось}} = \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + M + m_2)^2} \cdot \frac{v_0^2}{2}$. Для максимизации этого выражения достаточно минимизировать его знаменатель, для этого необходимо взять $M = 0$.

C. Воспользуемся результатами предыдущего пункта для определения скорости Лосяшеньки после всех столкновений

$$v_2 = \frac{m_1 M_1 M_2 \dots M_n}{(m_1 + M_1)(M_1 + M_2) \dots (M_{n-1} + M_n)(M_n + m_2)} v_0 (\sqrt{k} + 1)^{n+1}.$$

Кинетическая энергия Совуньи будет равна

$$E_k = m_2 v_2^2.$$

Её максимум будет достигаться при максимуме выражения:

$$\frac{M_1 M_2 \dots M_n}{(m_1 + M_1)(M_1 + M_2) \dots (M_{n-1} + M_n)(M_n + m_2)} \to \max.$$

Рассмотрим более простые выражения для максимизации:

$$\frac{M_1}{(m_1 + M_1)(M_1 + M_2)} \to \max, \text{ при } M_1 = \sqrt{m_1 M_2},$$
$$\frac{M_2}{(M_1 + M_2)(M_2 + M_3)} \to \max, \text{ при } M_2 = \sqrt{M_1 M_3},$$
$$\frac{M_3}{(M_2 + M_3)(M_3 + M_4)} \to \max, \text{ при } M_3 = \sqrt{M_2 M_4},$$
$$\vdots$$
$$\frac{M_n}{(M_{n-1} + M_n)(M_n + m_2)} \to \max, \text{ при } M_n = \sqrt{M_{n-1} m_2}.$$

Выразим M_2 из первого уравнения, M_3 из второго уравнения и так далее:

$$M_2 = \frac{M_1^2}{m_1};$$
$$M_3 = \frac{M_2^2}{M_1} = \frac{M_1^3}{m_1^2};$$
$$M_4 = \frac{M_3^2}{M_2} = \frac{M_1^4}{m_1^3};$$
$$\vdots$$
$$M_{n-1} = \frac{M_1^{n-1}}{m_1^{n-2}};$$
$$M_n = \frac{M_1^n}{m_1^{n-1}}.$$

Из выражений M_{n-1}, M_n через M_1 и m_1 с помощью уравнения $M_n = \sqrt{M_{n-1}m_2}$ можно найти M_1

$$\frac{M_1^{2n}}{m_1^{2n-2}} = \frac{M_1^{n-1}}{m_1^{n-2}}m_2$$
$$M_1 = \sqrt[n+1]{m_1^n m_2}$$

Выразим M_j

$$\boxed{M_j = M_1^j m_1^{1-j} = m_1^{1-\frac{j}{n+1}} m_2^{\frac{j}{n+1}}}$$

В случае $k=0$ абсолютно все то же самое, что и в предыдущем пункте для $k=0$, только с индексами. Законы сохранения почти такие же:

$$\begin{cases} m_1 v_0 = (m_1 + M_1 + \dots + M_n + m_2)v_1, \\ m_1\frac{v_0^2}{2} = (m_1 + M_1 + \dots + M_n + m_2)\frac{v_1^2}{2}. \end{cases}$$

Скорость Совуньи отсюда $v_1 = v_0\frac{m_1}{m_1+M_1+\dots+M_n+m_2}$, и $E_{\text{Сова}} = \frac{m_1^2 m_2}{(m_1+M_1+\dots+M_n+m_2)^2}\cdot\frac{v_0^2}{2}$. Опять таки, для максимизации всего выражения достаточно минимизировать знаменатель, то есть взять все $M_i = 0$.

Зная выражение для M_j, вычислим максимальную скорость Совуньи после соударений v_2. Для этого посчитаем 2 произведения:

$$m_1 M_1 M_2 \dots M_n = M_1^{1+2+\dots+n} m_1^{n-(1+2+\dots+n)} = m_1 M_1^{\frac{n(n+1)}{2}} m_1^{\frac{n(1-n)}{2}} = m_1^{\frac{n+2}{2}} m_2^{\frac{n}{2}}$$

$$(m_1+M_1)(M_1+M_2)(M_2+M_3)\dots(M_{n-1}+M_n)(M_n+m_2) =$$
$$= \left(m_1 + m_1^{1-\frac{1}{n+1}} m_2^{\frac{1}{n+1}}\right)\left(m_1^{1-\frac{1}{n+1}} m_2^{\frac{1}{n+1}} + m_1^{1-\frac{2}{n+1}} m_2^{\frac{2}{n+1}}\right)\dots\left(m_1^{1-\frac{n}{n+1}} m_2^{\frac{n}{n+1}} + m_1^0 m_2^1\right) =$$
$$= m_1\left(1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right) m_1^{1-\frac{1}{n+1}} m_2^{\frac{1}{n+1}}\left(1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)\dots m_1^{1-\frac{n}{n+1}} m_2^{\frac{n}{n+1}}\left(1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right) =$$
$$= m_1^{\frac{n+2}{2}} m_2^{\frac{n}{2}}\left(1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}.$$

Тогда скорость Совуньи будет равна:

$$v_2 = \left(1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{-n-1} v_0(\sqrt{k}+1)^{n+1}.$$

Кинетическая энергия Совуньи с вспомогательными малышариками будет больше при условии

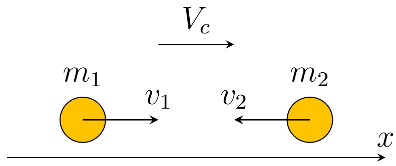
$$\left(1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{-n-1} v_0(\sqrt{k}+1)^{n+1} > \frac{m_1}{m_1+m_2}v_0(\sqrt{k}+1)$$

$$(\sqrt{k}+1)^n > \frac{\left(1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}}{1+\frac{m_2}{m_1}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k > \left[\frac{\left(1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{n}}} - 1\right]^2}$$

D. До этого мы рассматривали только удары, в которых один из малышариков изначально покоился. Получим преобразования скоростей в общем случае: когда сталкиваются два малышарика массами m_1 и m_2, движущиеся со скоростями v_1 и v_2 соответсвенно ($v_1 > v_2$).

Перейдем в систему центра масс малышариков, которая будет двигаться с постоянной скоростью

$$V_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$



так как на систему не действуют внешние силы по горизонтали. Тогда проекции скоростей малышариков на горизонтальную ось будут равны:

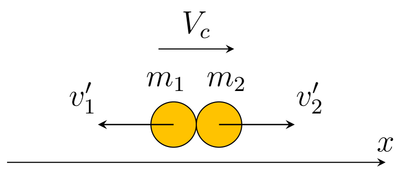
$$\begin{cases} v_{1x} = v_1 - V_c = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2); \\ v_{2x} = v_2 - V_c = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1). \end{cases}$$

Модули импульсов малышариков системе центра масс будут равны друг другу:

$$\begin{cases} p_{1x} = \dfrac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}; \\ p_{2x} = \dfrac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}. \end{cases}$$

Проекция импульса на ось x для системы малышариков будет сохраняться, так как по горизонтали на них не действуют другие силы.

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} = 0,$$



где p'_{1x} и p'_{2x} — проекции импульсов малышариков после соударения соответственно. В системе центра масс импульс системы будет равен 0. Следовательно, $p'_{1x} = -p'_{2x}$.

Запишем уравнение сохранения энергии с учётом коэффициента восстановления:

$$k\left(\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}\right) = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}.$$

Выразим коэффициент k с учётом $p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} = 0$:

$$k = \frac{p_1'^2}{p_1^2} = \frac{p_2'^2}{p_2^2}.$$

Скорости малышариков после удара в лабораторной системе отсчёта будут равны

$$\begin{cases} v_1^* = v'_{1x} + V_c = \dfrac{p'_1}{m_1} + V_c = \sqrt{k} v_1 + V_c; \\ v_2^* = \sqrt{k} v_2 + V_c. \end{cases}$$

Окончательно:

$$\begin{cases} v_1^* = \dfrac{1}{m_1+m_2}\left(\left(m_1 - m_2\sqrt{k}\right)v_1 + m_2\left(1+\sqrt{k}\right)v_2\right); \\ v_2^* = \dfrac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\left(1+\sqrt{k}\right)v_1 + \left(m_2 - m_1\sqrt{k}\right)v_2\right). \end{cases}$$

Изначально $v_1 = v_0$, $v_2 = 0$ и $v_3 = 0$.

Путём несложных вычислений, которые мы оставим читателю, можно получить, что после пятого удара скорости равны, соответственно

$$\begin{cases} v_1 = 0.256v_0; \\ v_2 = 0.271v_0; \\ v_3 = 0.677v_0. \end{cases}$$

$v_1 < v_2 < v_3$, а значит, больше ударяться малышарики не будут.

Окончательно получаем

$$Q = 4\frac{mv_0^2}{2} - \left(\frac{4mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{4mv_3^2}{2}\right) = 0{,}91714m_0v_0^2.$$

Но проще всего сделать при помощи компьютерного моделирования. Каждое соударение — линейное преобразование скоростей, которое удобно записать в форме умножения на матрицу

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1+m_2}\begin{pmatrix} m_1 - \sqrt{k}m_2 & m_2(1+\sqrt{k}) \\ m_1(1+\sqrt{k}) & m_2 - \sqrt{k}m_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Примечание. Смотрите видео Кубка ЛФИ про матрицы.

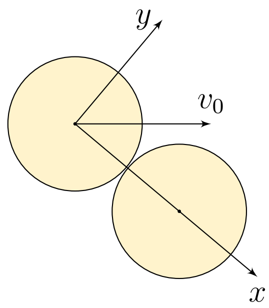
Этот пункт проще всего сделать при помощи компьютерного моделирования. Каждое соударение — линейное преобразование скоростей, которое удобно записать в форме умножения на матрицу:

Затем следует провести несколько последовательных столкновений, каждый раз проверяя, не выстроились ли скорости по порядку.

Результат вычислений для изменения энергии

$$\Delta E = -0{,}91714m_0v_0^2.$$

Часть 2. Нецентральный удар



6. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся со скоростью $v_{0x}\frac{m_1}{m_1+m_2}$ вдоль оси x. В этой системе отсчёта проекции скоростей смешайбочек на ось x равны

$$v'_{1x} = v_{0x}\frac{m_2}{m_1+m_2}; \quad v'_{2x} = -v_{0x}\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

Проекция импульса системы на ось x равна нулю. Тогда после удара получаем, что проекции скоростей смешайбочек равны

$$u'_{1x} = -u\frac{m_2}{m_1+m_2}; \quad u'_{2x} = u\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

Когда смешайбочки максимально деформированы, проекции их скоростей на ось x равны нулю. Тогда

$$W = \frac{m_1}{2}\left(\frac{v_{0x}m_2}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{v_{0x}m_1}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{v_{0x}^2}{2}.$$

Найдём u из закона сохранения энергии

$$\frac{m_1}{2}\left(\frac{v_{0x}m_2}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{v_{0x}m_1}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_1}{2}\left(\frac{um_2}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{um_1}{m_1+m_2}\right)^2 + (1-k)W,$$

После несложных преобразований, находим

$$W = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{u^2}{2} + (1-k)W, \quad \Longrightarrow \quad u = v_{0x}\sqrt{k}.$$

Тогда проекция скорости второй смешайбочки на ось x в лабораторной системе отсчёта равна

$$u_{2x} = u'_{2x} + v_{0x}\frac{m_1}{m_1+m_2} = v_{0x}\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(1+\sqrt{k}\right).$$

С другой стороны, так как после удара вторая смешайба к моменту остановки прошла путь L_2, то

$$\frac{m_2u_{2x}^2}{2} = \mu m_2 gL_2; \quad \Longrightarrow \quad u_{2x} = \sqrt{2\mu gL_2}.$$

Откуда получаем

$$v_{0x} = \frac{m_1+m_2}{m_1\left(1+\sqrt{k}\right)}\sqrt{2\mu gL_2}.$$

Тогда количество теплоты, выделившееся с момента соударения равно

$$Q = (1-k)W = (1-k)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1^2\left(1+\sqrt{k}\right)^2}\frac{2\mu gL_2}{2} = (1-k)\frac{m_2}{m_1}\frac{m_1+m_2}{(1+\sqrt{k})^2}\mu gL_2.$$

7. Расстояние L_1 найдём из закона сохранения энергии

$$\frac{m_1v_0^2}{2} = Q + \mu gL_1m_1 + \mu m_2gL_2.$$

Окончательно

$$L_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g} - L_2\frac{m_2}{m_1} - (1-k)\frac{m_2}{m_1^2}\frac{m_1+m_2}{(1+\sqrt{k})^2}L_2.$$

Альтернативная задача

0. Совунья массой m_1 со скоростью v_1 налетает на покоящегося Лосяша массой m_2. Удар центральный.
   (a) *(0,5 балла)* Рассчитайте скорости Совуньи и Лосяша в момент, когда расстояние между ними минимально.
   (b) *(0,5 балла)* Рассчитайте максимальную энергию деформации.
1. *(1,5 балла)* Решите пункт 1 основной задачи для $k = 1$, $k = 0{,}5$ и $k = 0$.
2. *(1,5 балла)* Решите пункт 2 основной задачи при $k = 1$, $k = 0{,}5$ и $k = 0$.
3. *(1,5 балла)* Решите пункт 3 основной задачи при $k = 1$, $k = 0{,}5$ и $k = 0$.
4. *(0,5 балла)* Докажите, что в 4 пункте основной задачи при $k = 1$ энергии может передаться больше чем без вспомогательных малышариков.
5. *(1 балл)* Решите пункт 5 основной задачи для масс $2m$, m, $2m$ и $k = 0{,}25$.
6. *(2 балла)* Решите пункт 6 основной задачи при $k = 1$ и $k = 0$.
7. *(1 балл)* Решите пункт 7 основной задачи при $k = 0{,}5$.

Решение альтернативной задачи

0. Расстояние между Лосяшом и Совуньей минимально, когда их скорости равны, т. к. до этого они сближаются, а после — отдаляются.

В этот момент их скорости равны скорости центра масс

$$v_1 = v_2 = V_c = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Энергия деформации максимальна при максимальной деформации, то есть максимальном сближении. Рассчитаем её из закона сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = W + \frac{m_1 V_c^2}{2} + \frac{m_2 V_c^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad W = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

1. Отдельно рассмотрим случай неупругого удара с $k = 0$. В этом случае в СО центра масс вся энергия теряется, и малышарики «слипаются»

$$\begin{cases} m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_1, \\ m_1 \frac{v_0^2}{2} = (m_1 + m_2) \frac{v_1^2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $v_1 = v_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$, и кинетическая энергия Кроша $E_k = \frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2} \cdot \frac{v_0^2}{2}$. Введя параметр $\alpha = \frac{m_1}{m_2}$, получим, что надо максимизировать выражение $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}$. Заметим, что $(1+\alpha)^2 \geqslant 4\alpha$, причем равенство достигается только при $\alpha = 1$. Отсюда $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \leqslant \frac{1}{4}$ и достигает верхней границы только при $\alpha = 1$, то есть когда $m_1 = m_2$.

Случай $k \neq 0$ разобран в части A основной задачи.

2. Смотрите решение основной задачи при $k \neq 0$ и при $k = 0$.

3. Смотрите решение основной задачи при $k \neq 0$ и при $k = 0$.

4. Смотрите решение части С основной задачи.

5. В этом случае ударов будет всего три и итоговые скорости

$$\begin{cases} v_1 = 0.25 v_0; \\ v_2 = 0.5 v_0; \\ v_3 = 0.5 v_0. \end{cases}$$

Выделившаяся теплота равна

$$Q = 2\frac{m v_0^2}{2} - \left(\frac{2 m v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} + \frac{2 m v_3^2}{2} \right) = 0{,}625 m_0 v_0^2.$$

6. $\mathbf{k = 0}$. В этом случае $Q = W$, т.е. происходит абсолютно неупругий удар. Тогда после удара проекции скоростей шайб на ось x равны

$$u = v_{0x} \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Из закона сохранения энергии получаем, что

$$\frac{m_2u^2}{2} = \mu m_2 g L_2; \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{2\mu g L_2}.$$

Тогда, подставляя v_0 из выражения для u, получаем, что выделившееся тепло равно

$$Q = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} - \frac{m_1 v_{0x}^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{v_{0x}^2}{2} = \frac{m_2}{m_1}(m_1+m_2)\mu g L_2.$$

$\mathbf{k=1}$. В этом случае

$$1 - \frac{Q}{W} = 1,$$

значит $Q = 0$, т. е. происходит абсолютно упругий удар и тепло не выделяется.

7. Смотрите решение части 2 основной задачи.