Пробный тур финального этапа

9 класс

Московская область *2 марта 2022*

1. Метеокульминация 10 баллов

На некоторой российской метеостанции нижняя кульминация Солнца 10 июня совпадает с высотой в верхней кульминации 15 сентября. Найдите географическую широту метеостанции. Величина рефракции у горизонта — $34'$.

Решение. Заметим, что рефракция не повлияет на ответ в задаче, так как Солнце будет располагаться на одной высоте и рефракция будет вносить одинаковый вклад в любом случае. Найдём склонения солнца на заданные даты. Для этого воспользуемся следующей формулой:

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\frac{360^\circ}{365^d}n$$

где n — количество дней от весеннего равноденствия (21 марта). $n_1 = 81$ сут., $n_2 = 178$ сут. — количество дней от весеннего равноденствия до 10 июня и 15 сентября соответственно. Получаем $\delta_1 = 23^\circ 6'$, $\delta_2 = 1^\circ 46'$.

Формулы верхней и нижней кульминации для общих случаев:

$$h_{\text{вк}} = 90^\circ - |\varphi - \delta_2| \text{ — верхняя кульминация;}$$

$$h_{\text{нк}} = |\varphi + \delta_1| - 90^\circ \text{ — нижняя кульминация.}$$

Из условия задачи известно, что $h_{\text{нк}} = h_{\text{вк}}$, тогда получим 4 возможных варианта этого уравнения раскрывая модуль

$$90^\circ - \varphi + \delta_2 = \varphi + \delta_1 - 90^\circ$$

— возможно;

$$90^\circ - \varphi + \delta_2 = -\varphi - \delta_1 - 90^\circ$$

— невозможно;

$$90^\circ + \varphi - \delta_2 = \varphi + \delta_1 - 90^\circ$$

— невозможно;

$$90^\circ + \varphi - \delta_2 = -\varphi - \delta_1 - 90^\circ$$

— невозможно ($\varphi < -90^\circ$).

Таким образом получаем единственный возможный случай:

$$90^\circ - \varphi + \delta_2 = \varphi + \delta_1 - 90^\circ,$$

$$\varphi = \frac{180^\circ - \delta_1 + \delta_2}{2} = \boxed{79^\circ 20'}$$

Критерии оценивания **10**

Определение склонения Солнца на дату 2

выражение *1*

значения *1*

Запись выражений для высот кульминаций в общем случае 4

Анализ подходящих значений и получение ответа 4

анализ *3*

численный ответ *1*

2. Трио из галактики

10 баллов

Три звезды типа Солнца расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 5 млн км. Нарисуйте кривую блеска для наблюдателя в плоскости орбиты звёзд на расстоянии 10 пк от системы.

Решение. В равностороннем треугольнике расстояние $a = r\sqrt{3}$. Звёзды движутся по окружности радиусом $r = a/\sqrt{3} = 4.1R_\odot$. Пускай их период p, скорость $v = 2\pi r/p$. Нас интересует относительная скорость звёзд, из Рис. 1b

$$v_{\text{отн.}} = 2v\cos\alpha = 2\sqrt{3}\pi r/p.$$

Значит общая продолжительно покрытия (вхождения и выхождения)

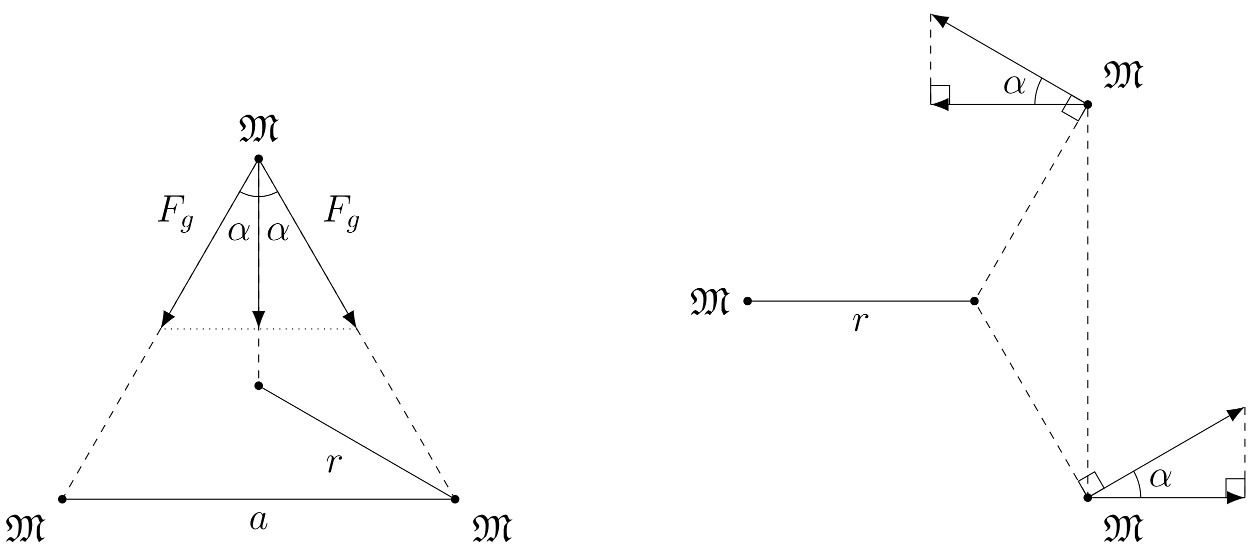
$$\tau = \frac{4R_\odot}{v_{\text{отн.}}} = \frac{4R_\odot}{2\sqrt{3}\pi r/p} = 0.09p.$$

> Для вычисления периода запишем второй закон ньютона для звезды: $F = ma$. Распишем:
>
> $$F = 2F_g\cos\alpha = 2\frac{G\mathfrak{M}\mathfrak{M}}{a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathfrak{M}\omega^2 r,$$
>
> $$\frac{G\mathfrak{M}}{a^2}\sqrt{3} = \omega^2\frac{a}{\sqrt{3}},$$
>
> $$\sqrt{3\frac{G\mathfrak{M}}{r^3}} = \omega.$$
>
> Значит, период $p = 2\pi/\omega \approx 31^h$. Этот материал изложен в образовательных целях.

При покрытии плато не будет, иначе говоря, сразу после вхождения начнётся выхождение. При вхождении можно честно посчитать вид зависимости площади покрытия от времени, но весьма допустимо считать его прямолинейным участком. Значит, нужно посчитать звёздные величины в максимуме и минимуме. Максимум соответствует трём звездам, минимум — двум. На расстоянии 10 пк звёздная величина звезды типа Солнца $m_\odot = 4.8^m$. Тогда

$$m_2 = m_\odot - 2.5\log 2 = 4.0^m,$$
$$m_3 = m_\odot - 2.5\log 3 = 3.6^m.$$

Остаётся выяснить, когда будут минимумы. В силу симметрии происходящего, минимумы будут равномерно распределены по периоду, то есть каждые $p/6 \approx 0.17p$. Теперь строим зависимость блеска от фазы (доли периода).



(a) К расчёту периода. (b) К расчёту скоростей.

Рис. 1 К задаче Трио из галактики.

Критерии оценивания	**10**
Относительная скорость	3
Время вхождения и выхождения	1
Звёздные величины	3
Построение графика	3

3. Полёт к соседям 10 баллов

Спутнику на геостационарной орбите придают удельный импульс 20 км/с. Определите длительность полёта до ближайшей экзопланеты. Аппарат взаимодействовал только с Землёй и Солнцем.

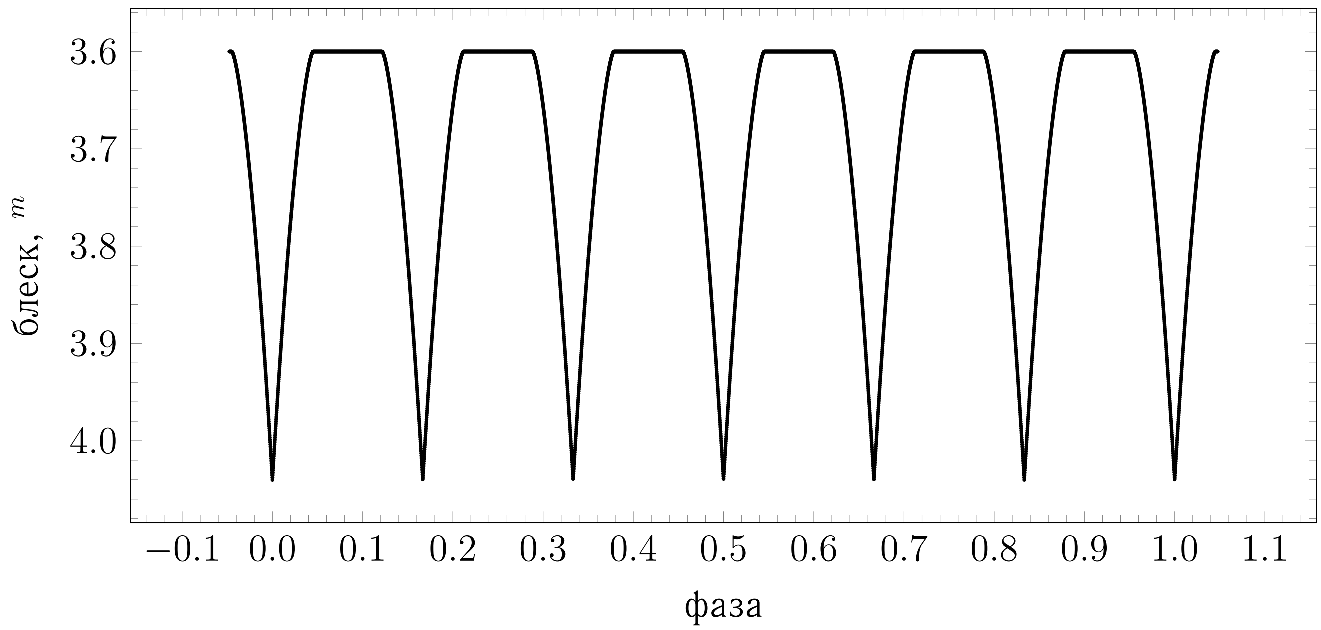


Рис. 2 Кривая блеска системы.

Решение. Радиус геостационарной орбиты $r_{\text{г}} = 42\,000$ км. Определим скорость спутника:

$$v_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{T_\oplus} = 3 \text{ км/с}.$$

Значит, после манёвра скорость будет $v = v_0 + \Delta v = 23$ км/с. Из закона сохранения энергии определим скорость, когда гравитационное влияние Земли перестанет вносить существенный вклад. Тогда:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{G\mathfrak{M}}{r_{\text{г}}} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{G\mathfrak{M}}{r_\infty} \approx \frac{v_\infty^2}{2},$$

Выразим отсюда v_∞:

$$v_\infty = \sqrt{v^2 - \frac{2G\mathfrak{M}}{r_{\text{г}}}} = \sqrt{v^2 - 2v_{\text{кр}}^2} = 22.6 \text{ км/с}.$$

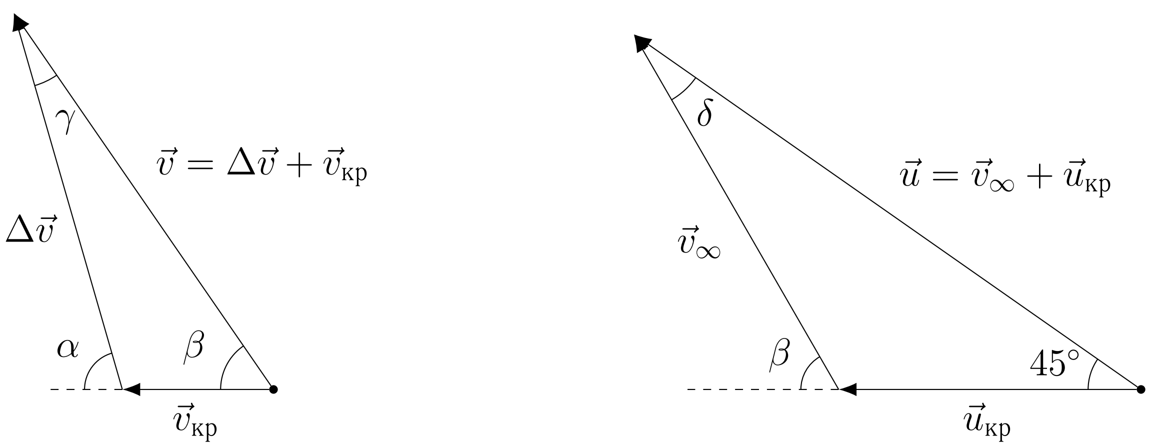
После вылета из зоны действия Земли скорость относительно Солнца $\vec{u}$ будет векторной суммой скорости Земли $\vec{u}_{\text{кр}}$ и относительной скорости $\vec{v}_\infty$. При оптимальной траектории их модули будут просто складываться: $u = u_{\text{кр}} + v_\infty = 52.6$ км/с. По аналогии с предыдущими выкладками:

$$u_\infty = \sqrt{u^2 - 2u_{\text{кр}}^2} = 31.1 \text{ км/с} \approx 1 \cdot 10^{-4}\ c.$$

Ближайшая экзопланета находится у звезды Проксима Центавра, расстояние до неё $d = 4.3$ св. лет. При перелёте по гиперболической траектории для оценки продолжительности полёта можно считать, что аппарат летит прямолинейно со скоростью u_∞. Тогда продолжительность:

$$\tau = \frac{d}{u_\infty} \approx \boxed{43\,000 \text{ лет}}$$

До сих пор мы считали, что Проксима находится в плоскости эклиптики, однако это не так. Её эклиптическая широта примерно -45°. Решение с учётом эклиптической широты трудоёмко и мы не будем его здесь излагать. При решении могут быть полезны следующие рисунки:



(a) Манёвр на геостационарной орбите. (b) Вычсисление гелиоцентрической скорости.

Рис. 3 К вычислению скоростей.

Критерии оценивания	**10**
Скорость после манёвра на геостационарной орбите	1
Выражение для скорости на ∞	2
Вычисление гелиоцентрической скорости	1
Расположение экзопланеты	2
Проксима Центавра	*1*
расстояние	*1*
Продолжительность полёта в прямолинейном приближении	2
Верное заврешние решения в рамках модели участника	1
Обоснованный учёт ненулевой эклиптической широты	1

4. Бухгалтерский календарь 10 баллов

Разработайте календарь для нужд бухгалтеров. В нём должно быть максимально возможное целое количество недель. Предложите простой и эффективный календарь, в котором необходимо вставлять один или несколько високосных лет (високосный год отличается от обычного дополнительной високосной неделей) за фиксированный короткий период (не более 20 бухгалтерских лет). Оцените, за какое время в таком календаре будет накапливаться ошибка в 1 неделю. Предложите более точный календарь, в котором ошибка в 1 неделю накапливается более 10 000 лет, а сам календарный цикл, т. е. количество лет, по прошествии которых последовательность вставки високосных годов полностью повторяется, не больше 1000 лет.

Решение. Тропический год составляет 365.24219 суток или

$$\alpha = \frac{365.24219}{7} \approx 52.177456 \text{ недель.}$$

Каждый календарь будет состоять из серий невисокосных (по 52 недели) и високосных (по 53 недели) годов.

Для построения календарей необходимо подобрать приближение величины α через простую дробь с небольшим знаменателем. Наиболее простой способ это сделать – использовать цепные дроби:

$$52.177456 = [52, 5, 1, 1, 1, 2, 1, 6, 2, 3, 44, ...]$$

Список приближений, получающихся из цепных дробей:

- $52\frac{1}{5} = 5.2$
  1 високосный год из 5;
  ошибка: $+0.022544$ недель/год, "плюс" неделя за 44.4 лет.
- $52\frac{1}{6} \approx 5.166667$
  1 високосный год из 6;
  ошибка: -0.010789 недель/год, "минус" неделя за 92.7 лет.
- $52\frac{2}{11} \approx 5.181818$
  2 високосных года из 11;
  ошибка: $+0.004362$ недель/год, "плюс" неделя за 229.2 лет.
- $52\frac{3}{17} \approx 5.176471$
  3 високосных года из 17;
  ошибка: -0.000985 недель/год, "минус" неделя за 1015.1 лет.
- $52\frac{8}{45} \approx 5.177778$
  8 високосных лет из 45;
  ошибка: $+0.000322$ недель/год, "плюс" неделя за 3105.0 лет.
- $52\frac{11}{62} \approx 5.177419$
  11 високосных лет из 62;
  ошибка: -0.000036 недель/год, "минус" неделя за 27503.2 лет.

- $52\frac{74}{417} \approx 5.177458$
  74 високосных года из 417;
  ошибка: $+0.000002$ недель/год, "плюс" неделя за 431166.9 лет.
- $52\frac{159}{896} \approx 5.177455$
  159 високосных лет из 896;
  ошибка: -0.000000 недель/год, "минус" неделя за 2800000.0 лет.

Первому вопросу удовлетворят календари типов 1/5, 1/6, 2/11, 3/17. Ни один из них не даст точность, требуемую во втором вопросе.

Второму вопросу удовлетворят календари типов 11/62, 74/417, 159/896.

Критерии оценивания **10**

Количество недель, содержащихся в тропическом году 1
Выбор календаря, удовлетворяющего первому вопросу 2
Точность календаря, полученного для 1-ого вопроса 2
Выбор календаря, удовлетворяющего второму вопросу 3
Доказательство точности календаря для 2-ого вопроса 2

Выбор календаря может производиться без использования цепных дробей. Достаточно найти любой календарь, удовлетворяющий условию, необязательно оптимальный.

5. Наблюдения 10 баллов

Звезда с параллаксом 0.03 mas и температурой 4500 K едва заметна при наблюдении в телескоп с диаметром 30 см. Отыщите радиус звезды.

Решение. Для начала найдем предельную звездную величину, видимую в телескоп:

$$m = m_0 + 5\lg\frac{D}{d_г} = 14.5^m.$$

Такую звездную величину будет иметь звезда. Запишем освещенность, которую она создает на Земле:

$$E = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{4\pi R^2\sigma T^4}{4\pi r^2} = \frac{R^2T^4\sigma}{r^2},$$

$$r = \frac{1}{\pi_0} = 33.3 \text{ кпк}$$

Сравним с Солнечной постоянной и запишем формулу Погсона:

$$\frac{E}{E_\odot} = \frac{R^2T^4\sigma}{r^2E_\odot} = 10^{0.4(m_\odot - m)}.$$

Выразим радиус:

$$R = \frac{10^{0.2(m_\odot - m)} r}{T^2}\sqrt{\frac{E_\odot}{\sigma}} = \boxed{64.8 R_\odot}$$

Критерии оценивания **10**

Проницающая способность телескопа 2
Запись закона Стефана-Больцмана 2
Запись освещенности 1
Запись закона Погсона 2
Верное нахождение радиуса 3
выражение *2*
численный ответ *1*

6. То вдаль, то вблизь 10 баллов

Вам предоставлен график с положением некоторых ближайших к Солнцу звезд на протяжении 100 000 лет. По данному графику определите:

1. у какой из звёзд будет наибольшее собственное движение в момент максимальной яркости;
2. у какой из звёзд наибольшая полная пространственная скорость;
3. момент времени, когда собственное движение звезды Каптейна будет равно собственному движению звезды Барнарда.

Решение.

Рассмотрим, как выглядит движение одной звезды на этом графике в указанных осях. Для каждой звезды мы можем снять следующие данные:

- r_{min} — минимальное расстояние пролетающей звезды от Солнца.
- r_0 — расстояние от звезды до Солнца в некоторый произвольный момент.
- Δt — период времени, который потребовался звезде для перемещения в пространстве.

Занесем полученные данные в таблицу

Звезда	r_{min}, св.год	r_0, св.год	Δt_1, тыс. лет
Ross 248	3.10	10	34.7
Ross 128	6.55	10	63.4
Gliese 445	3.35	10	24.8
Звезда Барнарда	3.81	10	19.7
Звезда Каптейна	7.00	10	$7.2 \cdot 10^3$

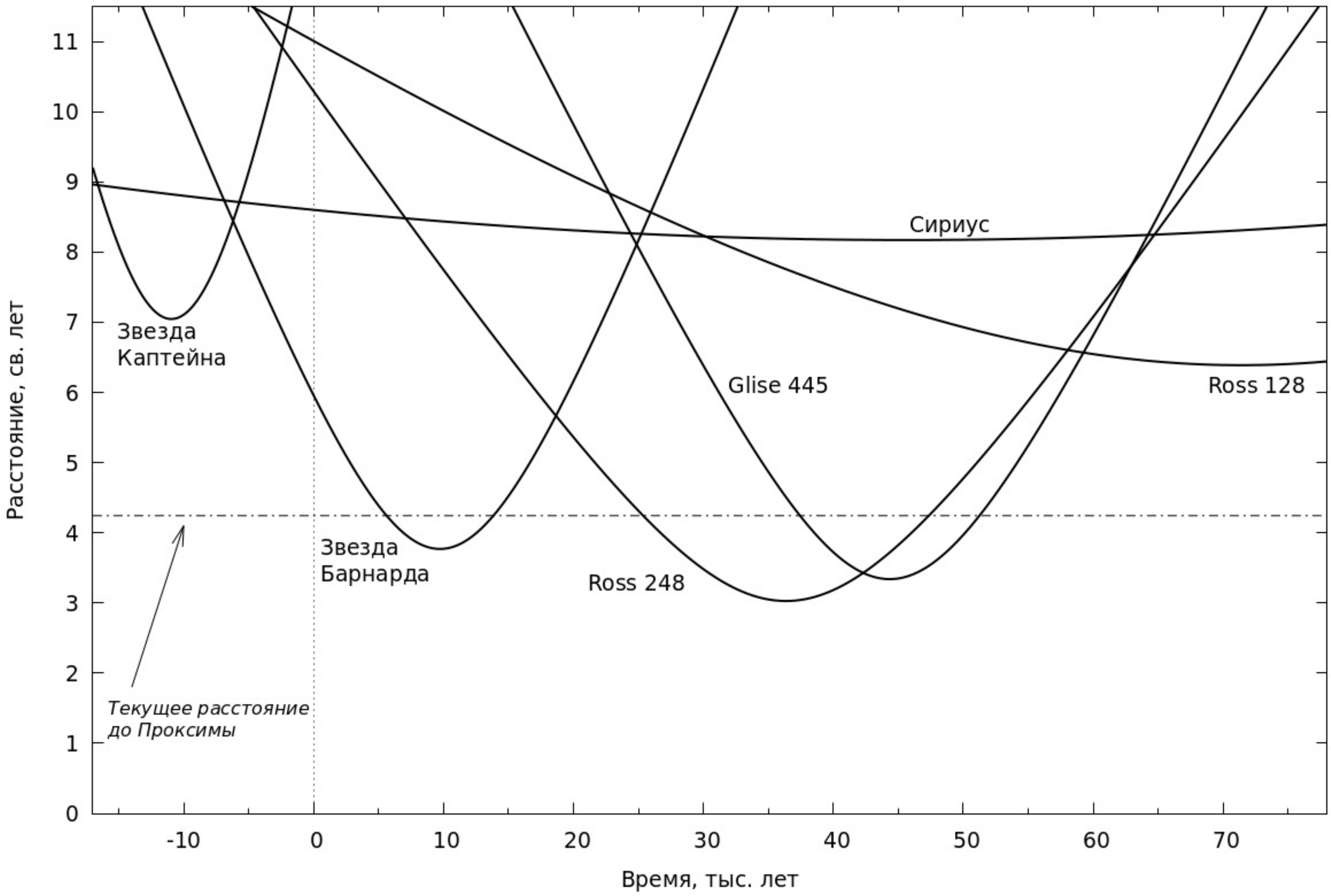


Рис. 4 График к задаче То вдаль, то вблизь.

Рассмотрим рисунок 6. На нем изображены наблюдатель в точке O, звезда, которую мы рассматриваем, а также найденные нами из исходного графика r_0 и r_{min}.

Стоит заметить, что этот треугольник прямоугольный, следовательно легко можно найти третью сторону треугольника и угол при звезде α_1. Найденная третья сторона позволит определить полную пространственную скорость звезды v, так как мы знаем время Δt_1, за которое звезда переместится из точки S в положение минимального расстояния (и, соответственно, максимальной яркости).

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{r_{min}}{r_0}\right)$$

А полная скорость равна:

$$v = \frac{\sqrt{r_0^2 - r_{min}^2}}{\Delta t_1}$$

Занесем полученные данные в таблицу.

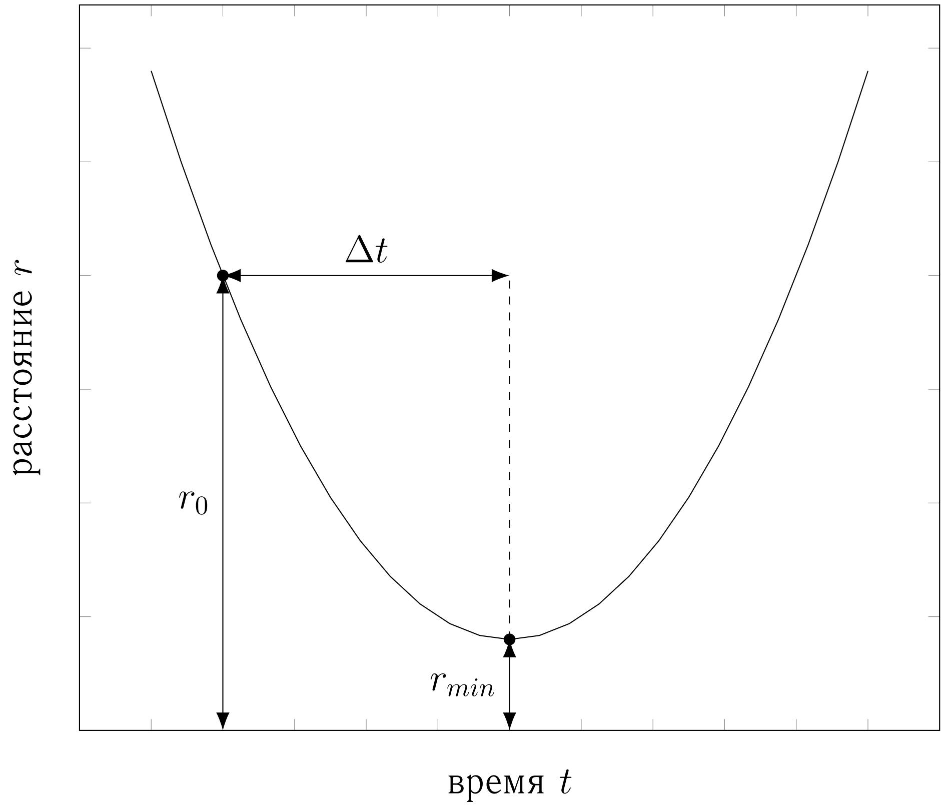


Рис. 5 Пояснения к исходным данным

Звезда	r_{min}, пк	r_0, пк	Δt_1, тыс. лет	α_1	v, км/с
Ross 248	0.95	3.07	34.7	18.1°	82.6
Ross 128	2.01	3.07	63.4	40.9°	35.8
Gliese 445	1.03	3.07	24.8	19.6°	114.2
Звезда Барнарда	1.17	3.07	19.7	22.4°	141.6
Звезда Каптейна	2.15	3.07	7.2	44.4°	296.8

Для ответа на первый вопрос задачи нужно понять, что у звезды в момент минимального сближения не будет компоненты лучевой скорости, а вся скорость будет перпендикулярна лучу зрения. То есть, трансверсальная скорость v_τ будет равна полной скорости звезды v.

Запишем формулу для трансверсальной скорости в этот момент:

$$v_\tau = 4.74\frac{\mu}{\pi} = 4.74\mu \cdot r_{min}$$

Поскольку, $v_\tau = v$, то для нахождения собственного движения все данные уже имеются.

$$\mu_{max} = \frac{v}{4.74 r_{min}}$$

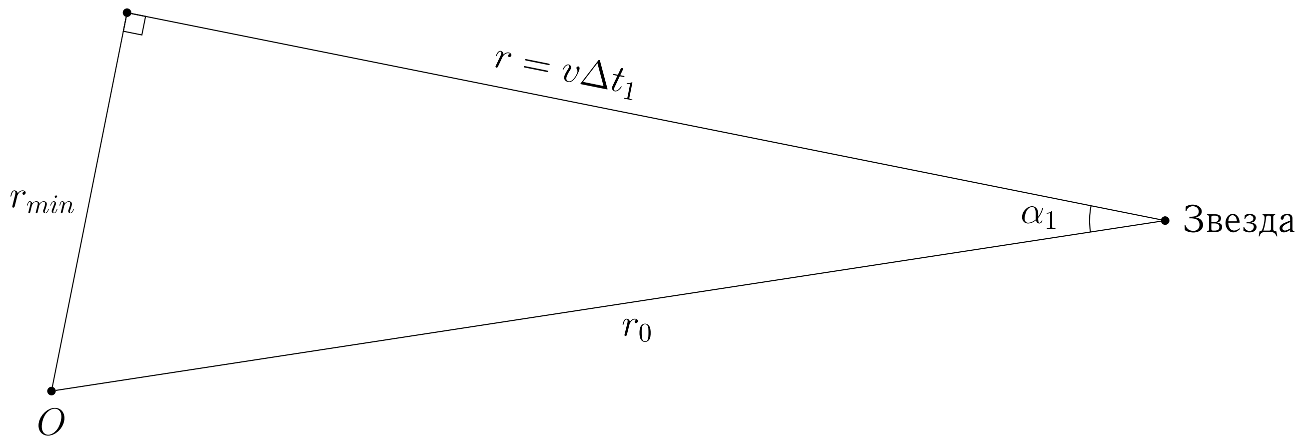


Рис. 6 Треугольник пространственного движения

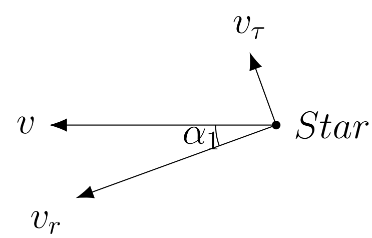


Рис. 7 Треугольник скоростей звезды

Звезда	r_{min}, пк	r_0, пк	Δt_1, тыс.лет	v, км/с	μ_{max}, ″/год
Ross 248	0.95	3.07	34.655	82.6	18.32
Ross 128	2.01	3.07	63.448	35.8	3.76
Gliese 445	1.03	3.07	24.828	114.2	23.45
Звезда Барнарда	1.17	3.07	19.655	141.6	25.56
Звезда Каптейна	2.15	3.07	7.241	296.8	29.16

Как мы можем увидеть, в момент максимальной яркости максимальное собственное движение было у звезды Каптейна.

Ответ на **второй вопрос** задачи был найден в рамках решения первого вопроса. При решении задач на собственное движение звезд только полная скорость звезды остается постоянной величиной, а все остальные величины — переменные. То есть, значение собственного движения, лучевой и трансверсальной скоростей, расстояния и параллакса будет меняться при перемещении звезды, а величина полной скорости останется постоянной.

Этот результат можно было понять и графически: чем у́же парабола пролета звезды, тем больше у нее будет полная скорость.

Максимальная полная скорость у звезды Каптейна 296.8 км/с. В реальности величина полной скорости этой звезды 293 км/с. Полученное расхождения является следствием ошибки при снятии данных с исходного графика.

Перейдем к **третьему вопросу** задачи: поиск момента времени, когда собственное движение звезды Каптейна будет равно собственному движению звезды Барнарда.

Приравняем собственные движения звезд:

$$\frac{v_{\tau K}(t)}{r_K(t)} = \frac{v_{\tau B}(t)}{r_B(t)}$$

Используя рисунок 6, выразим значение тангенциальной скорости

$$v_\tau = v \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{r_{min}}{r(t)}$$

$$v_\tau = v\frac{r_{min}}{r(t)}$$

Тогда подставляя в первое равенство, получим

$$v_K\frac{r_{minK}}{r_K^2(t)} = v_B\frac{r_{minB}}{r_B^2(t)}$$

Теперь выразим расстояние через время. Нам поможет рис. 6

$$r = \sqrt{r_{min}^2 + (v(t-t_0))^2},$$

где t_0 — время максимального сближения.

Тогда итоговое равенство будет выглядеть следующим образом:

$$v_K\frac{r_{minK}}{r_{minK}^2 + (v_K(t-t_{0K}))^2} = v_B\frac{r_{minB}}{r_{minB}^2 + (v_B(t-t_{0B}))^2}$$

$t_{0K} \approx -10$ тыс. лет, $t_{0B} = 10$ тыс. лет.

Осталось выразить искомое время t:

$$\frac{v_K}{v_B}\frac{r_{minK}}{r_{minB}}r_{minB}^2 + \frac{v_K}{v_B}\frac{r_{minK}}{r_{minB}}v_B^2\left(t-t_{0B}\right)^2 = r_{minK}^2 + v_K^2\left(t-t_{0K}\right)^2$$

$$\frac{r_{minB}}{V_B} + \frac{v_B}{r_{minB}}\left(t^2 - 2t\cdot t_{0B} + t_{0B}^2\right) = \frac{r_{minK}}{v_K} + \frac{v_K}{r_{minK}}\left(t^2 - 2t\cdot t_{0K} + t_{0K}^2\right)$$

$$t^2\left(\frac{v_B}{r_{minB}} - \frac{v_K}{r_{minK}}\right) - 2t\left(\frac{v_Bt_{0B}}{r_{minB}} - \frac{v_Kt_{0K}}{r_{minK}}\right) + \frac{v_B}{r_{minB}}t_{0B}^2 + \frac{r_{minB}}{v_B} - \frac{v_K}{r_{minK}}t_{0K}^2 - \frac{r_{minK}}{v_K} = 0$$

Рассчитаем коэффициенты численно

$$-5.5 \cdot 10^{-13} t^2 - 5.28t - 4 \cdot 10^{11} = 0$$

Это уравнение имеет корни

$$t_1 = -2410 \text{ лет}, \; t_2 = -301300 \text{ лет}$$

Это и будут ответы на третий вопрос.

Критерии оценивания **10**

Описание метода решения 2
Графическое нахождение r_0, r_{min}, Δt для всех звезд 2
Ответ на первый вопрос задачи 2
Определение звезды с максимальной полной скоростью 2
Определение моментов равенства собственных движений 2

Допустимая точность полученных значений 15%. *Штраф за меньшую точность — 1 балл*