

Троль Теоретический тур

Введение (№№ 1–3)

Как известно, Земля обладает постоянным магнитным полем, структура которого аналогична структуре магнитного поля обычного магнита. Дипольное магнитное поле Земли искажается солнечным ветром, который является высокоскоростным потоком горячей плазмы (плазмой называют квазинейтральный ионизированный газ). Этот поток плазмы вылетает из Солнца, его интенсивность зависит от солнечной активности. Солнечный ветер деформирует магнитное поле Земли, которое защищает Землю от солнечного ветра. Солнечный ветер «обтекает» магнитное поле Земли, как вода обтекает судно.

Когда направление магнитного поля солнечного ветра антипараллельно магнитному полю Земли, имеет место магнитное воссоединение на дневной стороне магнитопаузы, что позволяет некоторым заряженным частицам солнечного ветра переместиться в магнитный след на ночной стороне. Мощный солнечный ветер способен сдвинуть дневную магнитопаузу очень близко к Земле, что может привести к тому, что солнечный ветер полностью овладеет высокоорбитальным спутником (например, геостационарным). Высокоэнергетичные частицы солнечного ветра могут повредить высокотехнологичные электронные компоненты спутника, поэтому важно изучать движение заряженных частиц в магнитных полях. В частности, такое движение объясняет появление северного сияния и может помочь в понимании механизма взаимодействия между солнечным ветром и магнитным полем Земли.

Если на дневной стороне магнитопаузы происходит магнитное воссоединение, линии индукции воссоединенного магнитного поля дрейфуют по направлению к ночной области потому, что солнечный ветер течет по направлению к следу. После того, как электроны появляются в области магнитного следа, некоторые электроны могут быть ускорены до энергий порядка 1 кэВ. Таким образом, частицы могут достичь термосферы (высота термосферы составляет около 85 км ÷ 800 км). Эти высокоэнергетичные электроны могут сталкиваться с нейтральными атомами и переводить их в возбужденное состояние. Если за время жизни возбужденного состояния нейтральный атом не испытывает соударения, он из более высокого возбужденного состояния возвращается в нижнее возбужденное состояние или в основное состояние с испусканием фотона соответствующей длины волны. Таким образом, цвет северного сияния обусловлен этим явлением. Установлено, что северное сияние в основном обусловлено фотонами, испущенными атомами кислорода. Значения энергии уровней первого и второго возбужденных состояний по отношению к основному состоянию равны 1.96 эВ и 4.17 эВ, соответственно, времена жизни двух возбужденных состояний атома кислорода составляют 110 с и 0.8 с.

Задача 1. Нечем дышать!

Получите выражение для плотности атмосферы как функцию высоты и найдите отношение плотности кислорода на высотах $H_1 = 160$ км и $H_2 = 220$ км. Для простоты предположите, что температура атмосферы не зависит от высоты и что воздух является идеальным газом. Считать известным, что $\rho_0 g / P_0 = 0.13 \text{ км}^{-1}$, где ρ_0 и P_0 — плотность воздуха и атмосферное давление на уровне моря.

Задача 2. Дальтоники

Определите цвета северных сияний на высотах $H_1 = 160$ км и $H_2 = 220$ км.

Подсказка: Зависимость частоты соударений молекул атмосферы от плотности атмосферы выглядит как $\nu = \nu_0 \cdot \rho / \rho_0$, где $\nu_0 = 10^9$ Гц — константа для уровня моря.

Задача 3. В окно дуло...

Дипольное магнитное поле Земли слабо изменяется, когда солнечный ветер его сжимает, а плотностью плазмы в магнитосфере можно пренебречь. Определите минимальную скорость солнечного ветра, способную вызвать повреждение геостационарного спутника, если индукция магнитного поля и плотность плазмы солнечного ветра составляют $B_s = 5$ нТл и $\rho_s = 50$ протонов/см³ соответственно.

Подсказка: Сила на единицу площади, вызванная магнитным полем, равна $f = B^2/2\mu_0$, где магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [СИ].

Задача 4. Запрещённая зона

У полупроводника, из которого изготовлен солнечный элемент, ширина запрещенной зоны равна E_g . Каждый фотон с энергией $E \geq E_g$ позволяет электрону преодолеть запрещенную зону. Возбужденный электрон может преобразовать в полезную только энергию E_g , остальная часть энергии рассеивается в виде тепла (не может быть преобразована в полезную).

Считайте, что $x_g \equiv h\nu_g/k_B T_\odot$, где $E_g = h\nu_g$. Найдите КПД солнечного элемента η . Нарисуйте качественный график зависимости $\eta(x_g)$. Найдите x_0 , при котором КПД $\eta(x_g = x_0)$ максимален.

Задача 5. Коварные карлики

Предположим, что звезда состоит только из водорода, который находится в ионизированном состоянии, процесс термоядерного синтеза прекратился. Электроны подчиняются принципу запрета Паули и их полная энергия может быть вычислена методами квантовой статистики. Считайте, что полная энергия электронов (пренебрегая энергией фотонов)

$$E_e = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{R_{\text{WD}}^2},$$

где N_e — полное число электронов. Получите уравнение устойчивого состояния звезды, выразив её радиус R_{WD} через её массу M . Этот радиус называется радиусом белого карлика. Вычислите $R_{\text{WD}}(M = M_\odot)$.

Задача 6. Сыграть в ящик

Предполагая, что распределение электронов по радиусу однородно, вычислите среднее расстояние r_s между электронами, используя значение радиуса звезды R_{WD} , полученное в предыдущей задаче.

Используя гипотезу де Бройля, вычислите скорость v электронов в нижнем энергетическом состоянии, полагая, что каждый электрон находится в одномерном ящике длиной r_s .

Задача 7. Потенциальное дно

Рассмотрим звезду радиуса R , массы M и постоянной плотности. Получите выражение для гравитационной потенциальной энергии E_G звезды, обусловленной её гравитационным полем (собственной гравитационной энергии).

Задача 8. Chernodyr.io

Будем изучать двойную систему чёрных дыр с равными массами, которая никак не взаимодействует со своим окружением. Даже в этом случае система теряет энергию из-за излучения гравитационных волн. Скорость потерь энергии из-за гравитационных волн равна

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1024}{5} \frac{G}{c^5} (\omega^3 I)^2,$$

где ω — угловая скорость системы, $I = 2Ma^2$ — квадрупольный момент системы.

1. Когда радиус a орбиты системы становится близким к гравитационному радиусу чёрной дыры, найдите скорость изменения радиуса бинарной системы da/dt за счёт излучения гравитационных волн.
2. Когда радиус a орбиты системы становится близким к гравитационному радиусу чёрной дыры r_g , две черные дыры быстро сливаются. Обозначим начальный радиус системы как $a_2 \gg r_g$. Оцените время T_{GW} , за которое система сжимается до радиуса r_g за счёт излучения гравитационных волн.
3. Вычислите начальный радиус a_H системы с равными массами $M = 10^8 M_\odot$, время слияния которой равно возрасту Вселенной.

Задача 9. Финал Астротурнира

Дабы определить победителя, О.С. отправил Илюшу и Витю на космическую станцию. Космическая станция представляет собой гигантское колесо радиуса R , которое вращается вокруг своей оси, тем самым создавая для новоиспечённых космонавтов искусственную гравитацию. Космонавты живут на внутренней стороне обода колеса. Силой гравитационного притяжения космической станции и кривизной пола можно пренебречь.

1. С какой циклической частотой ω_{SS} должна вращаться станция, чтобы Илюша и Витя испытывали такое же ускорение свободного падения g_E , что и во время тура?

Илюша решил «убедить» Витю, что они действительно живут на космической станции. Для этого он прикрепил небольшой спиннер массы m к пружине с жёсткостью k и заставил её колебаться в вертикальном направлении.

2. Полагая, что ускорение свободного падения на Земле постоянно и равно g_E , чему будет равна циклическая частота колебаний ω_E , измеренная О.С. на Земле?
3. Какую циклическую частоту ω измерит Илюша на космической станции?

Однако, Витя утверждает, что если принять во внимание изменение силы притяжения по мере поднятия над поверхностью Земли, получится то же самое.

4. Получите выражение для ускорения свободного падения $g_E(h)$ для небольших высот h над поверхностью Земли и вычислите циклическую частоту колебаний $\tilde{\omega}_E$ колеблющегося спиннера (достаточно использовать линейное приближение). Вращением Земли и спиннера можно пренебречь.

Разумеется, для данной космической станции Илюша обнаружил, что пружинный маятник колеблется с той частотой, которую предсказал Витя.

5. Для какого радиуса космической станции R частота колебаний ω совпадает с частотой колебаний $\tilde{\omega}_E$ на поверхности Земли? Выразите свой ответ через R_\oplus .

Задача 10. А время-то идёт...

Согласно принципу эквивалентности, наблюдатель в небольшом закрытом помещении не может обнаружить различия между ускорением силы тяжести \vec{g} и ускорением, вызванным силой инерции, действующей в системе отсчета, ускоряющейся с ускорением \vec{g} . Отсюда можно сделать вывод, что двое часов, находящихся при различных гравитационных потенциалах, будут иметь различную скорость течения времени.

Теперь рассмотрим спутник системы GPS, который вращается вокруг Земли с периодом обращения, равным 12 часам.

1. Чему равен радиус орбиты спутника GPS? Чему равна скорость спутника?
2. Через одни сутки показания часов на поверхности Земли и на спутнике будут различаться вследствие эффектов как специальной, так и общей теории относительности. Вычислите разницу, вызванную каждым из этих эффектов в отдельности. Вычислите полную разницу за одни сутки. Какие часы идут быстрее, часы на поверхности Земли или часы на спутнике?
3. Через сутки оцените погрешность определения координаты, связанную с данным эффектом.

Желаем удачи!