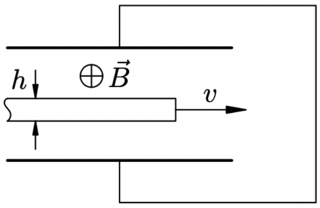
Эффект Холла. Часть №2

Задачи из mathus

Если проводник находится в магнитном поле, то упорядоченное движение свободных зарядов проводника приводит к появлению поперечной разности потенциалов (эффект Холла). Упорядоченное движение зарядов — это либо ток в проводнике, либо перемещение самого проводника в магнитном поле.

Задача 13

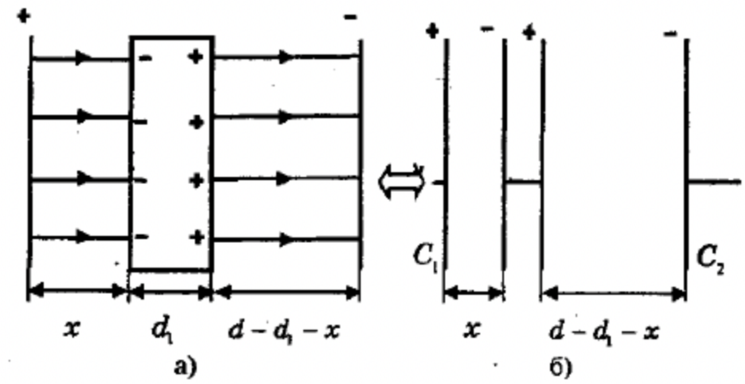
Между закороченными пластинами плоского конденсатора с площадью пластин S и расстоянием d между ними движется параллельно пластинам с постоянной скоростью v проводящая лента толщиной h (см. рисунок). Ширина ленты больше размеров конденсатора. Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией B, направленной вдоль пластин и перпендикулярно скорости ленты. Найдите наведённый заряд на пластинах конденсатора.



Решение:

Предположим, что на пластины конденсатора, в который введена пластинка, подано напряжение. Так как электростатическое поле не проникает внутрь металлического проводника, то поле внутри конденсатора существует только в пространстве, не занятом пластинкой (рис. а).

На поверхности пластинки наводятся заряды разных знаков, но вся пластинка при этом является поверхностью равного потенциала (эквипотенциальной поверхностью). Поэтому конденсатор с введенной металлической пластинкой эквивалентен двум последовательно соединенным конденсаторам (рис. б). Емкость $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$, а емкость $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d-d_1-x}$.



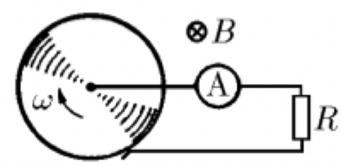
Искомая емкость C вычисляется по формуле для последовательного соединения:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\varepsilon_0 S} + \frac{d-d_1-x}{\varepsilon_0 S} = \frac{d-d_1}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S}{d-d_1} \qquad (d_1 = h)$$

Как видно, емкость C не зависит от x, т. е. от того, в каком месте введена пластинка. Если толщина пластинки мала ($h \to 0$), то емкость конденсатора не изменяется.

Задача 14

Проводящий диск вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле индукции B, перпендикулярном плоскости диска. Что покажет амперметр, включённый через сопротивление R? Найдите ток, если $R = 1$ Ом, радиус диска $r = 0.05$ м, $\omega = 2\pi \cdot 50$ рад/с, $B = 1$ Тл.



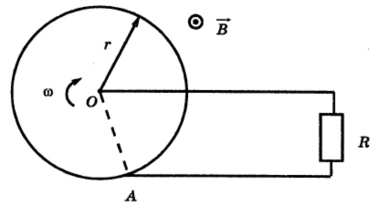
Решение:

Вычислим ЭДС индукции между центром диска О и скользящим контактом А, воспользовавшись определением ЭДС:

$$\mathcal{E}_i = \frac{A_{\text{cT}}}{q}, (1)$$

где $A_{\text{ст}}$ — работа сторонних сил (в данном случае это сила Лоренца) при перемещении положительного заряда из точки А в точку О. Обозначим через x — расстояние от заряда q до центра О. Сила Лоренца, действующая на заряд:

$$F_{\text{л}} = qvB = q\omega xB \, (\alpha = 90^\circ) \;\; (2)$$



Работа $A_{\text{ст}}$ силы Лоренца:

$$A_{\text{cT}} = \int_0^r F_{\text{J}} dx = \int_r^0 q\omega xB dx = q\omega B \int_0^r x dx = \frac{1}{2} q\omega r^2 B \;\; (3)$$

может быть вычислена так же элементарно с помощью разбиения отрезка АО на малые участк $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, вычисления работы на каждом участке $A_i = q\omega B \frac{x_{i+1}+x_i}{2} (x_{i+1} - x_i)$ и суммирования:

$$A = \sum A_i = \sum q\omega B \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} = \frac{1}{2} q\omega B r^2$$

Подставляя (3) в (1), получаем:

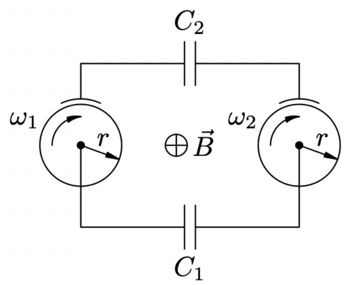
$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\omega B r^2$$

Согласно закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega B r^2}{2R}$$

Задача 15

Два одинаковых проводящих диска радиусами r вращаются с угловыми скоростями $\omega_1 \omega_2$ $(\omega_1 > \omega_2)$ в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной их плоскостям (см. рисунок). Центры дисков с помощью проводников присоединены к конденсатору ёмкостью C_1, а ободы — через скользящие контакты к конденсатору ёмкостью C_2. Найти напряжения, которые установятся на конденсаторах.



Решение:

Сначала рассмотрим, что происходит со свободными зарядами проводящего диска, вращающегося с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (рис.6). На электроны, вращающиеся вместе с диском, действует сила

Лоренца. В нашем случае сила Лоренца, действующая на свободный электрон, направлена к центру диска, поэтому электроны смещаются к центру, а на периферии остаются положительно заряженные атомы (атомы без внешнего электрона). Перераспределение заряда приводит к появлению радиального электрического поля $\vec{E}$, направленного к центру. Устанавливается такое распределение зарядов и, соответственно, такое электрическое поле $E(r)$, что сила Лоренца, действующая на электрон, уравновешивается электростатической силой: $e\omega rB = eE(r)$, где e — заряд электрона. Отсюда мы получаем распределение напряженности электрического поля по r:

$$E(r) = \omega Br.$$

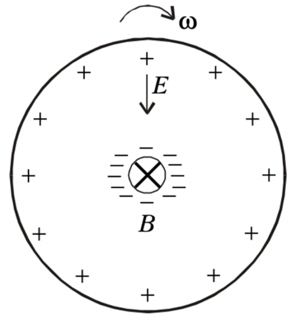


Рис. 6

Теперь мы можем найти разность потенциалов между центром диска и ободом, т.е. ЭДС индукции:

$$\mathrm{E}_i = \int_0^R E(r)dr = \omega B \int_0^R rdr = \frac{\omega BR^2}{2}.$$

В нашем случае для левого диска получим

$$E_{i1} = \frac{\omega_1 BR^2}{2},$$

а для правого -

$$\mathrm{E}_{i2} = \frac{\omega_2 BR^2}{2}.$$

Очевидно, что установившиеся заряды на конденсаторах будут равны по величине, но противоположны по знаку. Поскольку $\mathrm{E}_{i1} > \mathrm{E}_{i2}$ (так как $\omega_1 > \omega_2$), то на левой пластине конденсатора емкостью C_2 будет «+», а на левой пластине конденсатора емкостью C_1 будет «—» Обозначим величину заряда на конденсаторах через q. По закону Ома для нашего замкнутого контура можно записать

$$\mathrm{E}_{i1} - \mathrm{E}_{i2} = \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_1}.$$

Отсюда находим

$$q = \frac{(\mathrm{E}_{i1} - \mathrm{E}_{i2})\, C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{BR^2\,(\omega_1 - \omega_2)\, C_1 C_2}{2\,(C_1 + C_2)}.$$

Напряжения, которые установятся на конденсаторах, будут равны

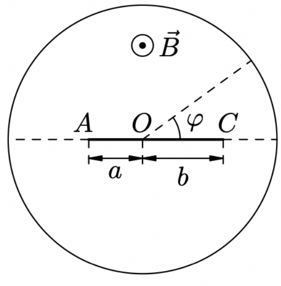
$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{BR^2\,(\omega_1 - \omega_2)\, C_2}{2\,(C_1 + C_2)}$$

и

$$U_2 = -\frac{q}{C_2} = \frac{BR^2\,(\omega_2 - \omega_1)\, C_1}{2\,(C_1 + C_2)}.$$

Задача 18

На горизонтальном непроводящем диске по его диаметру укреплён тонкий проводящий стержень AC. Диск находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл, перпендикулярной плоскости диска (см. рисунок), и совершает крутильные колебания относительно вертикальной оси, проходящей через точку O: $\varphi = \varphi_0 \cos\omega t$, где t — время. Длина стержня $L = a + b$, где $a = 0,5$ м, а $b = 1$ м. Определить максимальную разность потенциалов между концами стержня A и C, если $\varphi_0 = 0.6$ рад, а $\omega = 0.2$ рад/с.



Решение:

Решение При вращении стержня в магнитном поле на свободные электроны стержня будет действовать сила Лоренца (см. рис). Под действием этой силы произойдет перераспределение зарядов, которое приведет к появлению в стержне электростатического поля, направленного вдоль стержня Распределение напряженности электрического поля по радиусу $E(r)$ находится из условия равновесия свободных зарядов

$$qvB = qE(r).$$

Поскольку линейная скорость зарядов v скорость зарядов

$$v = \dot{\varphi} r = -\varphi_0 \omega \sin(\omega t) \cdot r,$$

То $E(r) = -\varphi_0 \omega B r \sin(\omega t)$. Разность потенциалов между концами стержня A и C.

$$\Delta\varphi_{AC} = \int_0^b E(r)dr - \int_0^a E(r)dr.$$

После подстановки выражений для $E(r)$ получим

$$\Delta\varphi_{AC} = -\int_0^b \varphi_0 B\omega r \sin(\omega t)dr + \int_0^a \varphi_0 B\omega r \sin(\omega t)dr =$$

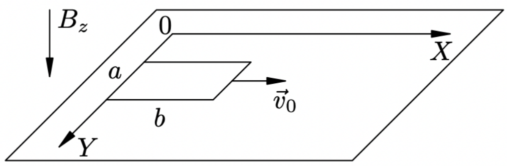
$$= -\varphi_0 B\omega \frac{(b^2 - a^2)}{2} \sin(\omega t).$$

Очевидно, что максимальная разность потенциалов между концами стержня будет равна

$$\Delta\varphi_{AC\,\max} = \varphi_0 B\omega \frac{(b^2 - a^2)}{2} = 4,5 \cdot 10^{-4} B.$$

Задача 34

На гладкой горизонтальной поверхности стола расположена проволочная прямоугольная рамка массой m со сторонами a и b (см. рисунок). Рамка находится в магнитном поле, составляющая вектора индукции которого вдоль оси Z зависит только от координаты x и изменяется по линейному закону: $B_z(x) = B_0(1 - \alpha x)$, где B_0 и α — заданные константы. Рамке сообщают вдоль оси X скорость v_0. Пренебрегая самоиндукцией рамки, определить расстояние, пройденное рамкой



до полной остановки. Омическое сопротивление рамки равно R. Рамка движется поступательно.

Решение:

Пусть в некоторый момент времени левый край рамки имеет координату x, а скорость рамки равна $v = \frac{dx}{dt}$ (рис.). Две стороны рамки пересекают линии магнитного поля, и в них возникают ЭДС индукции, равные

$$\mathcal{E}_{i1} = avB_{x+b}$$

и

$$\mathcal{E}_{i2} = avB_x$$

где B_x — индукция в точках с координатой x, а B_{x+b} — с координатой $x + b$. Общая ЭДС индукции в контуре рамки равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{i2} - \mathcal{E}_{i1} = av\left(B_x - B_{x+b}\right) = \alpha abB_0v$$

Под действием этой ЭДС в рамке возникнет ток

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\alpha abB_0}{R}v$$

На каждую сторону рамки с током будет действовать сила Ампера:

$$F_{12} = aI_iB_{x+b} = \frac{\alpha a^2bB_0}{R}vB_{x+b}$$

$$F_{34} = \frac{\alpha a^2bB_0}{R}vB_x$$

Результирующая сила вдоль оси x равна

$$F_x = F_{12} - F_{34} = \frac{\alpha a^2bB_0}{R}v\left(B_{x+b} - B_x\right) = -\frac{\alpha^2a^2b^2B_0^2}{R}v$$

Уравнение движения рамки имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{\left(\alpha abB_0\right)^2}{R}v$$

Поскольку $dx = vdt$, уравнение движения можно записать так:

$$\frac{mR}{\left(\alpha abB_0\right)^2}dv = -dx$$

Обозначим путь, пройденный рамкой до остановки, через l и возьмем конечные приращения от обеих частей нашего уравнения:

$$\frac{mR}{\left(\alpha abB_0\right)^2}\int_{v_0}^{0}dv = -\int_0^l dx$$

Отсюда получаем

$$l = \frac{mv_0R}{\left(\alpha abB_0\right)^2}$$

Задача 40

В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл расположен плоский проволочный виток так, что его плоскость перпендикулярна линиям индукции. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при повороте витка, равен $Q = 7,5$ мКл. На какой угол повернули виток? Площадь, охватываемая витком, $S = 1000$ см^2, сопротивление витка $R = 2$ Ом.

Решение:

Пусть нормаль $\vec{n}$ к плоскости витка совпадает по направлению с вектором магнитной индукции $\vec{B}$ (рис.). Начальный магнитный поток через площадь, ограниченную витком,

$$\Phi_1 = BS\cos 0^\circ = BS.$$

При повороте плоскости витка на угол α нормаль, связанная с витком, также поворачивается на угол α, поэтому магнитный поток становится равным $\Phi_2 = BS\cos\alpha$. Так как магнитный поток изменился, то в витке возникла ЭДС индукции. Однако, закон изменения магнитного потока во времени не задан. Нельзя утверждать также, что поток изменялся равномерно во времени. Поэтому для вычисления ЭДС индукции воспользуемся формулой $\mathcal{E}_i = -\Phi'(t)$. По витку протекает индукционный ток

$$i(t) = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{\Phi'(t)}{R}.$$

Заряд, протекающий по витку и регистрируемый гальванометром,

$$q = S_{ABCD} = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt.$$

Здесь t_1 - начальный, а t_2 — конечный моменты времени. После подстановки $i(t)$ получим

$$q = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{\Phi'(t)}{R}dt = -\frac{1}{R}\int_{t_1^{t_2}} \Phi'(t)dt = -\frac{1}{R}\Phi(t)\Big|_{t_1}^{t_2} =$$
$$= -\frac{1}{R}\left(\Phi\left(t_2\right) - \Phi\left(t_1\right)\right) = -\frac{1}{R}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) = -\frac{1}{R}\Delta\Phi$$

Итак, независимо от того, как поворачивали виток, протекающий через замкнутый контур заряд вычисляется по формуле

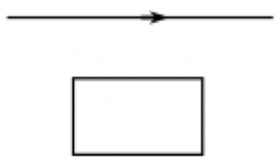
$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R}\,(^*)$$

Формула выведена в предположении, что индуктивность контура (витка) пренебрежимо мала ($L \to 0$). Эта формула будет использована при решении других задач, в которых выполняется указанное условие. В нашей задаче $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS\cos\alpha - BS = BS(\cos\alpha - 1)$ После подстановки в (*) находим

$$q = -\frac{BS(\cos\alpha - 1)}{R} \Rightarrow 1 - \cos\alpha = \frac{qR}{BS} \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{qR}{BS} = -0,5.$$

Следовательно, $\alpha = \arccos(-0,5) = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$.

Задача 41



Около очень длинного прямого провода, по которому течет постоянный ток, находится прямоугольная проводящая рамка. Длинная сторона рамки параллельна проводу. Если повернуть рамку на угол 180° вокруг дальней от провода стороны, по ней пройдет заряд q_1. Если рамку из исходного положения, не поворачивая, сдвинуть так, что ближняя к проводу сторона займет место дальней, по рамке пройдет заряд q_2. Какой заряд пройдет по рамке, если из первоначального положения унести её на очень большое расстояние?

Решение:

Согласно закону электромагнитной индукции в каждый момент времени в контуре течет ток
$$I = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t},$$
где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока через контур за малый интервал времени Δt вблизи рассматриваемого момента, R сопротивление контура. Из (*) получаем, что заряд, протекший через контур за малый интервал времени Δt определяется изменением магнитного потока через контур за этот интервал времени

$$\Delta q = I\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R}. \quad (**)$$

Разбивая время вращения контура вокруг своей дальней стороны на бесконечно малые интервалы времени $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots$, находя заряды, протекшие через контур за этот интервал времени и складывая, найдем заряд, протекший через контур

$$q = \Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3 + \ldots = I_1\Delta t_1 + I_2\Delta t_2 + I_3\Delta t_3 + \ldots = \frac{\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_3 + \ldots}{R}.$$

Или
$$q = \frac{(\Phi_2 - \Phi_1) + (\Phi_3 - \Phi_2) + (\Phi_4 - \Phi_3) + \ldots}{R} = \frac{\Phi_{\text{кон}} - \Phi_{\text{нач}}}{R}.$$
где $\Phi_{\text{нач}}$ и $\Phi_{\text{кон}}$ — начальный и конечный магнитные потоки через контур. Пусть магнитный поток через контур в начальном первое условие дает

$$q_1 = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}. \quad (*)$$

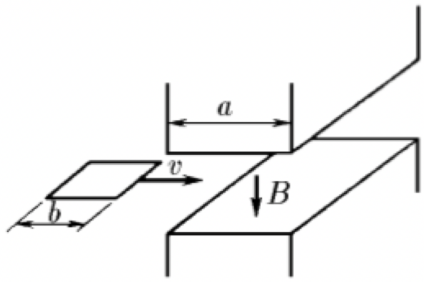
Когда контур поворачивают относительно дальней стороны, он занимает такое же место, как и при сдвиге, но по-другому ориентирован. Поэтому поток через него будет таким же по величине и противоположен по знаку — $(-\Phi_2)$. И второе условие дает

$$q_2 = \frac{-\Phi_2 - \Phi_1}{R}. \quad (**)$$

Когда контур уносят на очень большое расстояние, поток через становится равным нулю, и изменение потока при унесении его из первоначального положения равно $-\Phi_1$. Поэтому заряд, протекший через него в этом случае, есть $q_3 = \frac{-\Phi_1}{R}$. И из формул $(*)$ – $(**)$ заключаем
$$q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

Задача 29

Квадратный замкнутый виток проволоки, длина стороны которого b, а сопротивление единицы длины ρ, проходит с постоянной скоростью v зазор электромагнита. Магнитное поле в зазоре однородное, его индукция равна B. Считая поле вне этого зазора равным нулю, определите энергию, превратившуюся в тепло, для случаев, когда протяжённость зазора a в направлении движения витка меньше b и больше b, а в перпендикулярном направлении — больше b.



Решение:

1) Рассмотрим первый случай, когда $a > b$. Запишем закон Фарадея:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -Bvb$$

Тогда ток I, протекающий в рамке будет равен:

$$I = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{Bvb}{4b \cdot \rho} = \frac{Bv}{4\rho}$$

Сила Ампера F_A, действующая на правую грань рамка, равна:

$$F_A = IBb = \frac{B^2vb}{4\rho}$$

Чтобы полностью передвинуть рамку в зазор электромагнита, нужно совершить работу, равную

$$A_{F_A} = F_A \cdot b = \frac{B^2vb^2}{4\rho}$$

Заметим, что энергия системы сохраняется до передвижения рамки в магнитное поле и после вытаскивания рамки из зазора электромагнита. Тогда работа A_{F_A}, помноженная на два (рамку *запихиваем* и *вытаскиваем* из магнитного поля), совершенная нами, равна энергии W — энергия, превратившаяся в тепло, равна:

$$W = 2 \cdot A_{F_A} = \frac{B^2vb^2}{2\rho}.$$

Можно решить другим способом. Электрическая мощность P в рамке равна

$$P = I^2R = I^2 \cdot 4\rho b$$

За $2 \cdot \frac{b}{v}$ — время перемещения рамки, выделится энергия, равная

$$W = P \cdot 2\frac{b}{v} = I^2 \cdot 4\rho b \cdot 2 \cdot \frac{b}{v} = \left(\frac{Bv}{4\rho}\right)^2 \cdot \frac{8\rho \cdot b^2}{v} = \frac{B^2vb}{4\rho}$$

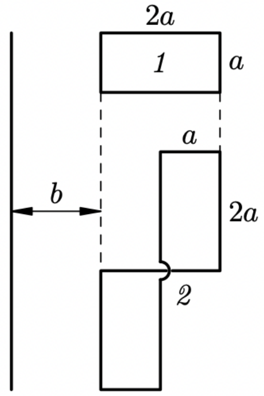
2) Теперь рассмотрим второй случай, когда $a < b$.
Здесь площадь рамки внутри магнита, S будет постоянна и равна $S = ab$. Тогда, нам нужно совершить работу A_2, равную удвоенной силе Ампера F_A (из предыдущего пункта) и умноженная на перемещение, которое равно ширине магнита — a:

$$A_2 = 2 \cdot F_A \cdot a = \frac{B^2vba}{2\rho}$$

Она же и равна энергии W, выделившейся на рамке:

$$W = A_2 = \frac{B^2 vba}{2\rho}.$$

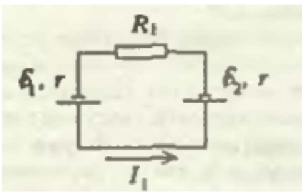
Задача 31



Два проволочных контура, изготовленные из одного куска провода, движутся к длинному прямолинейному проводу с постоянным током. Контур 1 является прямоугольником со сторонами a и $2a$. Контур 2 состоит из двух прямоугольников со сторонами $2a$ и a (см. рисунок). Когда оба контура находились на расстоянии $b = a$ от провода, токи в контурах были равны. Определить отношение скоростей контуров в этот момент времени, если известно, что индукция магнитного поля, создаваемая током провода, обратно пропорциональна расстоянию от провода. Провод и оба контура расположены в одной плоскости.

Решение:

Запишем выражение для индукции магнитного поля провода с током в виде $B(x) = \frac{A}{x}$, где A — некоторая константа, а x — расстояние от провода. Пусть скорость проволочных контуров равна v. Эквивалентная схема для первого контура изображена на рисунке. Здесь ЭДС источников равны

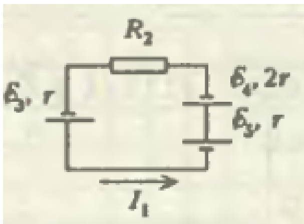


$$\mathcal{E}_1 = \frac{aAv}{b} = \frac{Av}{2} \text{ и } \mathcal{E}_2 = \frac{aAv}{a+b} = \frac{Av}{3},$$

внутренние сопротивления источников одинаковы и равны r (сопротивление провода длиной a), внешнее сопротивление $R_1 = 2r$ (сопротивление провода длиной $2a$). Величина силы тока в этом контуре равна

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + 2r} = \frac{Av}{24r}$$

На рисунке показана эквивалентная схема для второго контура. В ней



$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 = \frac{Av}{2}, \mathcal{E}_4 = \frac{2aAv}{b+a} = \frac{2Av}{3}, \mathcal{E}_5 = \frac{aAv}{b+2a} = \frac{Av}{4}, R_2 = 4r.$$

Ток в этом контуре равен

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_4}{R_2 + 4r} = \frac{Av}{96r}$$

Сравнивая два выражения для токов, получаем

$$I_2 = \frac{I_1}{4}$$