Задача 30. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10*) Рабочим телом тепловой машины является идеальный одноатомный газ. Цикл состоит из изобарного расширения $(1,2)$, адиабатического расширения $(2,3)$ и изотермического сжатия $(3,1)$. Модуль работы при изотермическом сжатии равен A_{31}. Определите, чему может быть равна работа газа при адиабатическом расширении A_{23}, если у указанного цикла КПД $\eta \leqslant 40\%$.

$\boxed{\frac{3}{5}A_{31} < A_{23} \leqslant A_{31}}$

В данном цикле теплота подводится на участке (1, 2), отводится на (3, 1). Тогда КПД равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{31}}{Q_{12}}.$$

Поскольку на изотерме изменение внутренней энергии равно нулю, то $Q_{31} = A_{31}$. Получим выражение для Q_{12}:

$$Q_{12} = \frac{Q_{31}}{1-\eta} = \frac{A_{31}}{1-\eta}.$$

Воспользуемся первым началом термодинамики и тем, что газ идеальный одноатомный:

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = p\Delta V_{12} + \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} = \frac{5}{3}\Delta U_{12}.$$

Процесс (2, 3) адиабатический (теплота не подводится, работа совершается за счёт уменьшения внутренней энергии), и изменение внутренней энергии в цикле равно нулю, поэтому:

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = \Delta U_{12} + \Delta U_{31} = \Delta U_{12} + 0 = \Delta U_{12}.$$

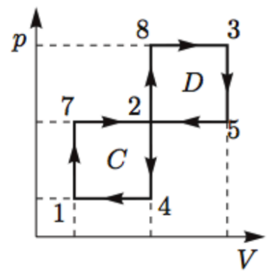
Выражаем работу при адиабатическом расширении A_{23} через работу на изотерме A_{31} и КПД η:

$$A_{23} = \Delta U_{12} = \frac{3}{5}Q_{12} = \frac{3}{5(1-\eta)}A_{31}. \tag{12}$$

КПД принимает значения $\eta \in (0,\ 0{,}4]$, поэтому работа при адиабатическом расширении A_{23} принимает значения:

$$\frac{3}{5}A_{31} < A_{23} \leqslant A_{31}.$$

Задача 32. (*Всеросс., 2008, ОЭ, 11*) Идеальный одноатомный газ совершает циклический процесс C, состоящий из двух изохор и двух изобар. Затем тот же газ совершает аналогичный процесс D (рис.). КПД какого процесса больше? Полагая КПД процесса C заданным и равным η_C, вычислите η_D. В обоих процессах $\Delta p_{21} = \Delta p_{32} = \Delta p$ и $\Delta V_{21} = \Delta V_{32} = \Delta V$, но их числовые значения неизвестны.



$\boxed{\eta_D = \frac{\eta_C}{1+4\eta_C} < \eta_C}$

Пусть за цикл газ совершает работу $A_0 = \Delta p \Delta V$. Тогда $\eta_C = A_0/Q_{172}$, где подведённое к газу количество теплоты $Q_{172} = U_{12} + A_{72}$. Аналогично $\eta_D = A_0/Q_{283}$, где $Q_{283} = U_{23} + A_{83}$. Заметим, что $A_{83} = A_{72} + A_0$. Сравним изменения внутренних энергий U_{12} и U_{23}. Выражение для U_{12}:

$$U_{12} = \frac{C_V}{R}(T_2 - T_1) = \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1) = \\ = \frac{C_V}{R}(p_1\Delta V + V_1\Delta p + \Delta p\Delta V) = \frac{C_V}{R}(p_1\Delta V + V_1\Delta p + A_0).$$

Аналогичным образом получим, что

$$U_{23} = \frac{C_V}{R}(p_3V_3 - p_2V_2) = \frac{C_V}{R}(p_2\Delta V + V_2\Delta p + A_0) = \\ = \frac{C_V}{R}(p_1\Delta V + V_1\Delta p + 3A_0) = U_{12} + 2\frac{C_V}{R}A_0.$$

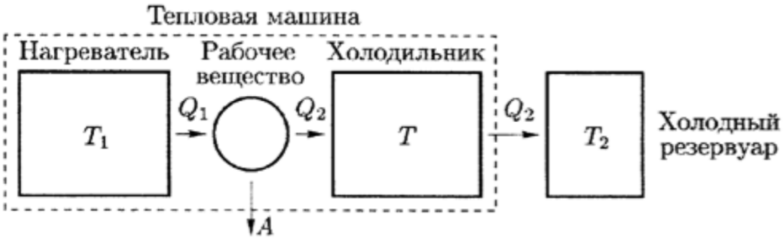
Отсюда

$$\eta_C = \frac{A_0}{Q_{172}} = \frac{A_0}{U_{12} + A_{72}},$$

$$\eta_D = \frac{A_0}{Q_{283}} = \frac{A_0}{U_{23} + A_{83}} = \frac{A_0}{U_{12} + A_{72} + \dfrac{2C_V + R}{R}A_0} = \\ = \frac{\eta_C}{1 + \dfrac{C_V + C_p}{R}\eta_C} = \frac{\eta_C}{1 + 4\eta_C}.$$

Откуда $\eta_D < \eta_C$.

Задача 35. (*Всеросс., 2010, финал, 11*) У тепловой машины, работающей по циклу Карно, температура нагревателя $T_1 = 800$ К, а температура T холодильника зависит от полезной мощности P машины. Холодильник представляет собой массивное теплоизолированное от окружающей среды тело, которое посредством теплопроводности передаёт холодному резервуару с температурой $T_2 = 300$ К всю тепловую энергию Q_2, полученную за время Δt работы машины. Теплопроводность осуществляется по закону $Q_2 = \alpha(T - T_2)\Delta t$, где $\alpha = 1{,}0$ кВт/К.



1) Выразите мощность P тепловой машины через температуры T_1, T и T_2.
2) Вычислите температуру T_m холодильника, при которой мощность машины максимальна.
3) Определите эту максимальную мощность $P_{\max}$.
4) Найдите КПД η тепловой машины при работе с максимальной мощностью.

$P = \frac{\alpha(T_1 - T)(T - T_2)}{T}$; $T_m = \sqrt{T_1T_2} \approx 490$ К; $P_{\max} = \alpha\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2 \approx 120$ кВт; $\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \approx 0{,}39$

Рассмотрим работу тепловой машины за время $\Delta t = 1$ с. Запишем выражение для КПД η цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{P}{P + P_2} = \frac{T_1 - T}{T_1}.$$

Здесь P — полезная мощность машины, P_2 — тепловая мощность, передаваемая холодильнику. Из этого выражения следует:

$$P = P_2\frac{T_1 - T}{T}.$$

Согласно условию задачи $P_2 = (Q_2)_{\Delta t = 1\text{ с}} = \alpha(T - T_2)$.

Из этих соотношений следует:

$$P = \alpha\frac{(T - T_2)(T_1 - T)}{T} = \alpha\left[T_1 + T_2 - \left(T + \frac{T_1T_2}{T}\right)\right].$$

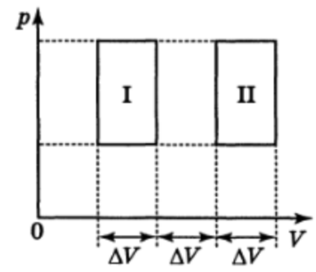
Величина $(T + T_1T_2/T)$ принимает минимальное значение при $T = T_m = \sqrt{T_1T_2} = 489{,}9$ К ≈ 490 К. Следовательно:

$$P_{\max} = \alpha\left[T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1T_2}\right] = \alpha\left[\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right]^2 \approx 120 \text{ кВт},$$

при этом:

$$\eta = \frac{T_1 - T_m}{T_m} = 38{,}7\ \%.$$

Задача 36. (*Всеросс., 1998, финал, 10*) В тепловой машине в качестве рабочего тела используется один моль идеального одноатомного газа. На рисунке представлены циклы I и II, совершаемые этим газом. Найдите коэффициенты полезного действия (КПД) η_1 и η_2 этих циклов, если их отношение равно $\alpha = \eta_1/\eta_2 = 1{,}6$.



$\eta_1 = \frac{1}{5}$, $\eta_2 = \frac{1}{8}$

10.61. Пусть за цикл *1–2–3–4* (рис. 108) совершается работа A_0. Тогда $\eta_1 = \dfrac{A_0}{Q_{123}}$, где подведенное к газу количество теплоты $Q_{123} = U_{13} + A_{23}$. Рассмотрим промежуточный цикл I* *4–3–6–5*:

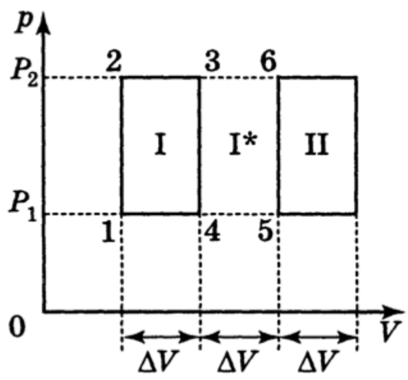


Рис. 108

$$\eta_{1*} = \frac{A_0}{Q_{436}},\ Q_{436} = U_{46} + A_{36}.$$

Так как ΔV и Δp в циклах I, I* и II равны, то и $A_{23} = A_{36}$.

$$U_{13} = C_V(T_3 - T_1),$$

$$U_{46} = C_V(T_6 - T_4),$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона ($pV = RT$) имеем

$$\Delta T = \frac{p\Delta V}{R} \text{ (при } p = \text{const).} \qquad (1)$$

Из (1) следует

$$T_6 = T_3 + \frac{p_2\Delta V}{R},\ T_4 = T_1 + \frac{p_1\Delta V}{R},$$

$$T_6 - T_4 = (T_3 - T_1) + \frac{\Delta p\Delta V}{R} = (T_3 - T_1) + \frac{A_0}{R},$$

где $\Delta p = p_2 - p_1$.

Изменение внутренней энергии на интервале *4–6* равно

$$U_{46} = C_V(T_6 - T_4) = C_V\left(T_3 - T_1 + \frac{A_0}{R}\right) =$$

$$= U_{13} + \frac{C_V}{R}A_0,$$

$$\eta_{1*} = \frac{A_0}{U_{46} + A_{23}} = \frac{A_0}{Q_{123} + \frac{C_V}{R} A_0} = \frac{\eta_1}{1 + \frac{C_V}{R}\eta_1}.$$

(Напомним, что $\eta_1 = \frac{A_0}{Q_{123}}$.)

Из этого выражения получим связь между η_1 и η_{1*}:

$$\frac{1}{\eta_{1*}} = \frac{1}{\eta_1} + \frac{C_V}{R}. \qquad (2)$$

Аналогично для циклов I* и II:

$$\frac{1}{\eta_2} = \frac{1}{\eta_{1*}} + \frac{C_V}{R}. \qquad (3)$$

Исключая η_{1*} из (2) и (3), находим

$$\frac{1}{\eta_2} = \frac{1}{\eta_1} + \frac{2C_V}{R}.$$

Используя из условия соотношение $\eta_1 = \alpha\eta_2$ для КПД, получаем

$$\eta_1 = (\alpha - 1)\frac{R}{2C_V} = 0{,}2,$$

$$\eta_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \frac{R}{2C_V} = 0{,}125.$$