Графы.

Знакомство с графами. Степень вершины.

1. В трёх вершинах пятиугольника расположили по фишке (см. рис. 1а).Разрешается двигать их по диагонали в свободную вершину. Можно ли такими действиями добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами (см. рис. 1б).

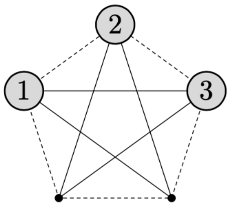

Рис. 1а

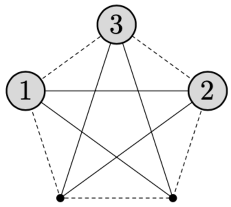

Рис. 1б

2. Четыре шахматных коня – два чёрных и два белых – расположены в угловых клетках доски 3×3. Кони могут передвигаться на свободные клетки по обычным правилам. Можно ли сделать так, чтобы в верхних углах стояли белые кони, а в нижних – чёрные?

3. Можно ли выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих цифр делилась либо на 5, либо на 7, либо на 13?

4. а) В фирме 50 компьютеров, некоторые пары компьютеров должны быть соединены кабелями. От каждого компьютера должно отходить по 8 кабелей. Сколько всего понадобится кабелей?

   б) В графе 40 вершин, каждая степени 7. Сколько рёбер в графе?

   в) На концерте каждую песню исполняли двое артистов, и никакая пара не выступала вместе более одного раза. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?

5. В стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно, проезжая через другие города).

6. На дискотеке каждый мальчик танцевал ровно с десятью девочками, а каждая девочка – ровно с девятью мальчиками. Кого было больше: мальчиков или девочек.

Двудольные графы. Лемма о рукопожатиях.

1. Нарисуйте двудольный граф, где чёрные и белые вершины – это соответственно чёрные и белые клетки доски 3×3, а рёбра соответствуют ходам коня.

2. Каждый граф можно превратить в двудольный, покрасив все его вершины в белый цвет и добавив чёрную врешниу в середину каждого ребра. Сколько вершин каждого цвета и сколько рёбер у полученного графа, если у исходного было v вершин и r рёбер?

3. В классе 20 человек. На праздник каждый мальчик подарил каждой девочке по цветку. par а) Какое наибольшее число цветков могло быть подарено?

   б) Тот же вопрос, если в классе 21 человек.

   в) Сформулируйте теорему о максимальном количестве рёбер в двудольном графе с $2n$ вершинами; с $2n + 1$ вершинами.

4. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

5. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 по 4 друга, а 10 по 5 друзей?

6. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там, на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

7. Докажите, что связный граф, в котором степень каждой вершины чётна, при удалении любого ребра остаётся связным.