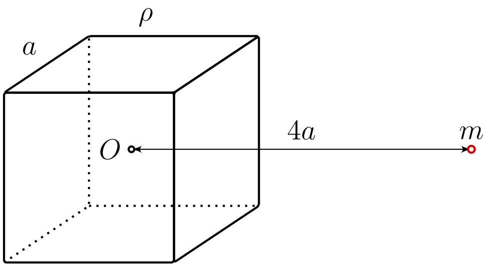
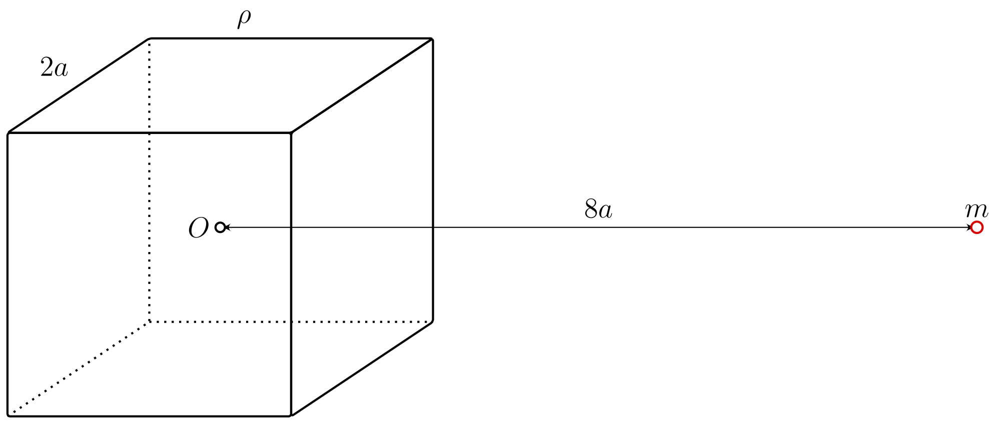
Кубик в кубе

На расстоянии $4a$ от сплошного Кубика со стороной a и плотностью ρ на линии, проходящей через его центр и центр одной из его граней, располагается точечный кубичек массы m (см. рис.). Начальные скорости кубиков равны нулю. Кубики отпускают, в результате чего расстояние между ними изменяется в два раза за время t_1.

Найдите время t_2, за которое расстояние изменится в два раза между точно таким же кубичком и сплошным Кубиком со стороной $2a$ из точно такого же материала, если кубичек располагается на линии, проходящей через центр Кубика и центр одной из его граней на расстоянии $8a$ от Кубика (см. рис.). Начальные скорости кубиков равны нулю.

Примечание. Расстояние между кубиками измеряется от центра Кубика.

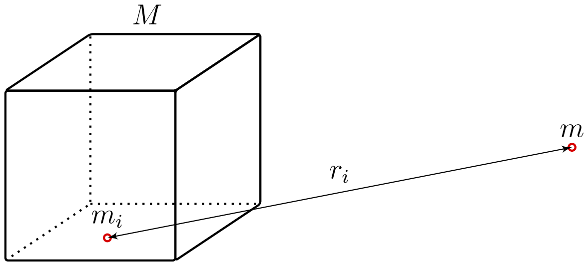




Решение

Способ 1

1. Найдем скорость сближения кубиков. Для этого воспользуемся законами сохранения импульса и энергии.



Система из двух кубиков замкнута, следовательно суммарный импульс системы все время равен нулю, откуда:

$$mu_1 = Mv_1.$$

Здесь u_1 — скорость кубичка, а v_1 — скорость Кубика.

Кинетическая энергия системы будет равна:

$$K = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия по определению равна

$$\Pi = \sum_i G\frac{m_i m}{r_i},$$

где суммирование ведётся по всем кусочкам куба массой m_i, находящихся на расстоянии r_i (см. рис.). Тогда начальная потенциальная энергия равна

$$\Pi_0 = \sum_i G\frac{m_i m}{r_{i0}}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{Mv_1^2}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right) = \Pi_0 - \Pi \Longrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2m}{(m+M)M}(\Pi_0 - \Pi)}.$$

Тогда скорость сближения тел равна

$$v_{\text{отн}1} = v_1 + u_1 = v_1\frac{m+M}{m} = \sqrt{\frac{2(\Pi_0 - \Pi)}{\mu}},$$

где $\mu = \frac{mM}{m+M}$ — приведённая масса системы.

Замечание. Этот результат можно написать сразу, если воспользоваться тем факто, что в системе отсчета, где центр масс покоится кинетическая энергия всей системы равна:

$$K = \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2}.$$

2. Для рассмотрения второго случая воспользуемся подобием задачи: $m \to m$; $M \to 8M$, $r \to 2r$; $a \to 2a$. Тогда «новые» значения величин, от которых зависит относительная скорость сближения кубиков, будут равны

$$\mu_2 = \frac{8mM}{m+8M} = 8\frac{m+M}{m+8M}\mu; \quad \Pi_2 = \sum_i G\frac{8m_i m}{2r_i} = 4\Pi.$$

Тогда скорость сближения во втором случае будет равна

$$v_{\text{отн}2} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\frac{m+8M}{8(m+M)}4\left(\Pi - \Pi_0\right)}.$$

3. Рассмотрим малый промежуток времени dt_2. За это время тела сблизятся на расстояние dx_2, которое в 2 раза больше расстояния dx_1 на которое тела сближались изначально за время dt_1 (т.к. все расстояния увеличились в два раза). Тогда

$$dt_2 = \frac{dx_2}{v_{\text{отн}2}} = \frac{2dx_1}{v_{\text{отн}1}}\sqrt{\frac{2(m+M)}{m+8M}} = \sqrt{\frac{8(m+M)}{m+8M}}dt_1.$$

Заметим, что это соотношение выполняется в любой момент при времени в процессе сближения тел, поэтому суммарное время сближения будет равно:

$$t_2 = \sqrt{\frac{8(m+M)}{m+8M}}t_1.$$

Способ 2

Потенциальная энергия системы равна

$$U = k\left(\frac{x}{a}\right)\frac{Mm}{x},$$

где $k\left(\frac{x}{a}\right)$ — некоторый геометрический фактор системы. Тогда сила, отвечающая этой потенциальной энергии, будет равна

$$F = -U' = -k'\frac{Mm}{xa} + k\frac{Mm}{x^2}.$$

Замечание. Используя метод размерностей, можно сразу записать, что

$$F = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{mM}{x^2},$$

где $\Gamma\left(\frac{x}{a}\right)$ — геометрический фактор.

Запишем уравнение движения кубиков (в уравнениях учтено, что силы притяжения противонаправлены)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{1}{m}\Gamma\left(\dfrac{x}{a}\right)\dfrac{mM}{x^2}; \\ \ddot{x}_2 = -\dfrac{1}{M}\Gamma\left(\dfrac{x}{a}\right)\dfrac{mM}{x^2}; \end{cases} \implies \quad \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{mM}{x^2}\frac{1}{\mu}.$$

Получаем, что относительное ускорение равно

$$a_{\text{отн}} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{m+M}{x^2}.$$

То есть относительное ускорение в первом и втором случаях равны

$$a_{\text{отн}1} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{m+M}{x^2}; \quad a_{\text{отн}2} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{m+8M}{4x^2}.$$

С другой стороны

$$a_{\text{отн}2} = \frac{d^2x_2}{dt_2^2} = \frac{2d^2x_1}{dt_2^2} = \frac{2}{\alpha^2}a_{\text{отн}1}.$$

Здесь $dt_2 = \alpha dt_1$, где α — масштаб по времени. Получаем, что

$$\frac{2}{\alpha^2}a_{\text{отн}1} = \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\frac{m+8M}{4x^2}\frac{m+M}{m+M} = \frac{m+8M}{4(m+M)}a_{\text{отн}1}.$$

Откуда получаем

$$\frac{2}{\alpha^2} = \frac{m+8M}{4(m+M)}; \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \sqrt{8\frac{m+M}{m+8M}}.$$

То есть суммарное время сближения во втором случае будет равно

$$t_2 = \alpha t_1 = t_1\sqrt{8\frac{m+M}{m+8M}}.$$

Альтернативная задача

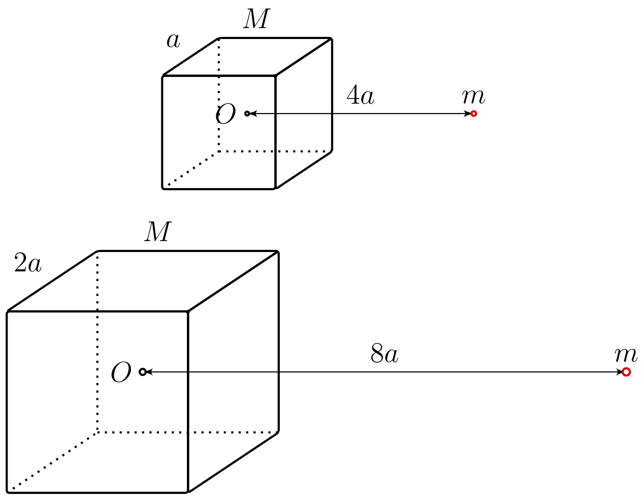
1. *(2 балла)* Точечное тело массы m находится на гладкой горизонтальной поверхности и прикреплено к вертикальной стене «нелинейной» пружиной, такой, что возвращающая сила пропорциональна квадрату её деформации. Во сколько раз изменится период колебаний тела, если их амплитуду увеличить в два раза?

2. *(3 балла)* Два точечных тела одинаковой массой удерживают на расстоянии a друг от друга. Тела отпускают и расстояние между ними уменьшается в два раза за время T. Найдите за какое время расстояние также уменьшится в два раза, если тела покоились на расстоянии $2a$ друг от друга.

3. *(5 баллов)* На расстоянии $4a$ от сплошного Кубика со стороной a и массы M на линии, проходящей через его центр и центр одной из его граней, располагается точечный кубичек массы m (см. рис.). Начальные скорости кубиков равны нулю. Кубики отпускают, в результате чего расстояние между ними изменяется в два раза за время t.

   Найдите время, за которой расстояние изменится в два раза между точно таким же кубичком и сплошным Кубиком со стороной $2a$ и точно такой же массы M, если кубичек располагается на линии, проходящей через центр Кубика и центр одной из его граней на расстоянии $8a$ от Кубика (см. рис.). Начальные скорости кубиков равны нулю.

   Примечание. Расстоянием между кубиками измеряется от центра Кубика.



Решение альтернативной задачи

1. Потенциальная энергия «нелинейной» пружины при её деформации на Δx равна

$$U = \frac{k\Delta x^3}{3}.$$

Доказательство этого выражения требует навыки интегрирования. Запишем закон сохранения энергии и найдём скорость грузика

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^3}{3} = \frac{kx_{01}^3}{3}; \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}\sqrt{x_{01}^3 - x_1^3}.$$

Скорость же по определению равна

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt}.$$

Рассмотрим колебания с другой амплитудой. Пусть масштаб по координате равен α: $x_2 = \alpha x_1$, а масштаб по времени $t_2 = \beta t_1$. Скорость во второй ситуации аналогично равна

$$v_2 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}\sqrt{x_{02}^3 - x_2^3} = \sqrt{\frac{2k}{3m}}\alpha^{\frac{3}{2}}\sqrt{x_{01}^3 - x_1^3} = \alpha^{\frac{3}{2}}v_1.$$

С другой стороны

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt_2} = \frac{\alpha dx_1}{\beta dt_1} = \frac{\alpha}{\beta}v_1.$$

Имеем

$$\alpha^{3/2}v_1 = \frac{\alpha}{\beta}v_1; \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

То есть период уменьшится в $\sqrt{2}$ раз!

2. Запишем закон сохранения энергии и найдём зависимость скорости от расстояния между телами

$$2\frac{mv^2}{2} + G\frac{m^2}{r} = G\frac{m^2}{a}; \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2Gm\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}.$$

Здесь r_0 — расстояние между телами в начальный момент времени. Во втором случае, при увеличении всех расстояний в два раза, скорость будет равна

$$v_2 = \sqrt{2Gm\left(\frac{1}{2r_0} - \frac{1}{2r}\right)} = \frac{v_1}{\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим малый промежуток времени dt_2. За это время тела сблизятся на расстояние dx_2, которое в 2 раза больше расстояния dx_1 на которое тела сближались изначально за время dt_1 (т.к. все расстояния увеличились в два раза). Тогда

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt_2} = \frac{2dx_1}{\beta dt_1} = \frac{2}{\beta}v_1.$$

Здесь $dt_2 = \beta dt_1$, где β — масштаб по времени. Откуда находим

$$\beta = 2\sqrt{2}.$$

3. Решение аналогично решению основной задачи.

Литература

Г. И. Хантли — Анализ размерностей

Объять необъятное, или Её преПодобие Размерность

Ландафшиц 1 Том §10

Метод механического подобия. [А. И.Власов; Потенциал, N9, 2019 год]