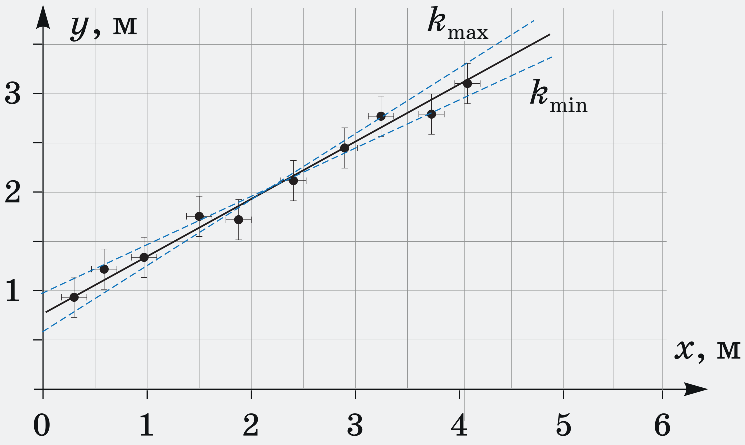
А.Ю. Вергунов
М.Ю. Замятнин

К ОЛИМПИАДАМ ПО ФИЗИКЕ

Действия с приближенными величинами. Погрешность



ФИЗТЕХ ЛИЦЕЙ ИМ. П.Л. КАПИЦЫ

2021

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ НА ОЛИМПИАДАХ ПО ФИЗИКЕ

Физика – наука, имеющая дело с величинами, измеренными с определенной точностью. Поэтому на экспериментальных турах регионального и заключительного этапов Всероссийской олимпиады школьников по физике в 9 – 11 классах и на заключительном этапе олимпиады им. Максвелла в 8 классе важно продемонстрировать умение рассчитывать погрешность полученных результатов. Допускается, правда, что этот расчет будет произведен **самым простым** способом, который, вероятно, повергнет в ужас профессионального метролога.

Причин тому несколько.

- Жесткий лимит времени. На одно экспериментальное задание на олимпиаде отводится чуть более двух часов. Выполнив его, можно набрать 15 или 20 баллов, но из них за погрешность дают всего 1 балл (редко 2). Поэтому из всего времени на расчет погрешности должно тратиться не более 10 – 15 минут. Важнее не потерять «большие» баллы за: описание метода (3 – 4 балла), таблицы с результатами (3 – 4 балла), графики (2 – 3 балла).

- То, чем участники проводят измерения (деревянные линейки, портновская мерная лента, мензурки, шприцы, недорогие мультиметры и т.п.) назвать измерительными приборами можно весьма условно. Класс точности таких средств измерений зачастую не знает никто.

- Математический аппарат школьников не подразумевает уверенного знания основ теории вероятностей и статистических методов. От участников нельзя требовать осознанного применения метода наименьших квадратов, использования коэффициентов Стьюдента, работы с дисперсиями, средними квадратичными отклонениями и т.п.

Попытки в такой ситуации применять «правильные» методы обработки данных совершенно избыточны и принесут скорее больше вреда, чем пользы. Лишних баллов заработать не получится, но время будет потеряно. Впрочем, использовать такие методы не запрещается и за безошибочное их применение будет поставлен полный балл.

К счастью, олимпиада все-таки не по метрологии, а по физике и есть определенные «правила игры», касающиеся погрешности.

Коротко их суть можно сформулировать так:

- во время проведения эксперимента надо стремиться применять методы, повышающие точность измерений (например, не пытаться «в лоб» измерить толщину листа бумаги линейкой, а использовать метод рядов, или если вдруг известна плотность бумаги и есть точные весы, то толщину листа можно рассчитать, разделив его массу на плотность и площадь);

- получив результаты, необходимо лишь **оценить** их погрешность, продемонстрировав самые простые умения работы с приближенными величинами.

Попробуем понять, где же тот необходимый минимум, позволяющий получить участнику баллы за оценку погрешности, без потерь при этом драгоценного времени. Сначала определим общие термины и разберемся с причинами возникновения погрешности.

ЧАСТЬ 1.

КУЛЬТУРА ЗАПИСИ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

ЗНАЧАЩИЕ И ПОРЯДКОВЫЕ ЦИФРЫ. СТАНДАРТНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА

Все цифры числа называются **значащими**, кроме нулей, стоящих слева. Нули слева – это **порядковые** цифры. В приведенных ниже примерах синим выделены цифры порядковые, а черные – это значащие.

123,01 21,0 0,023 0,123 0,0001

В **стандартной форме записи числа** запятая ставится после первой значащей цифры. Порядковые нули, таким образом, исчезают. Правильное число получается умножением на 10^n, где n – целое число.

$$108{,}0 = 1{,}080 \cdot 10^2; \qquad 0{,}000083 = 8{,}3 \cdot 10^{-5};$$

$$0{,}110 \cdot 10^2 = 1{,}10 \cdot 10^1; \qquad 234 \cdot 10^2 = 2{,}34 \cdot 10^4$$

То, что записывать очень большие и малые числа в стандартной форме удобнее – понимают все. Никого не смущает запись:

$$6{,}02 \cdot 10^{23}; \qquad 9{,}1 \cdot 10^{-31}$$

Даже наоборот, возникает радость, что такая форма записи существует. Иначе пришлось бы каждый раз выписывать, а затем пересчитывать огромное количество нулей.

Проблемы появляются, когда число «короткое» (содержит одну или две значащие цифры и степень n в стандартной форме записи равна ± 1 или ± 2). Тогда стандартная форма записи числа становится более громоздкой, чем обычная, и трудно заставлять себя записывать так:

$$10{,}8 = 1{,}08 \cdot 10^1; \qquad 0{,}02 = 2 \cdot 10^{-2}; \qquad 15 = 1{,}5 \cdot 10^1$$

В школьных заданиях редко увидишь такие (кстати, правильные) формы:

$$l = 1 \cdot 10^2 \text{ м}, \; m = 2 \cdot 10^{-1} \text{ кг или } \rho = 1{,}000 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Чаще встречается:

$$l = 100 \text{ м}, \; m = 0{,}2 \text{ кг или } \rho = 1000 \text{ кг/м}^3.$$

Логика понятна, в стандартной форме записи такие числа выглядят слишком громоздко. И прибегать к ней следует лишь если возникают явные недоразумения, связанные с точностью записанных величин. Про это поговорим далее.

ЗАПИСЬ ЧИСЕЛ ПО УМОЛЧАНИЮ. СОМНИТЕЛЬНЫЕ И ВЕРНЫЕ ЦИФРЫ

Как при записи численного значения величины отразить точность (качество, с которым были проведены измерения)? Можно, конечно, каждый раз записывать величину в виде диапазона, но это не удобно, если мы не записываем конечный результат. Чаще с полученным числом предстоит производить дальнейшие арифметические действия, и они станут слишком громоздкими.

Цифра называется **верной**, если погрешность приближенного числа не превосходит единицы того разряда, в котором написана эта цифра. В противном случае цифра называется **сомнительной**.

Пример

Экспериментально определено, что масса гайки находится где-то в диапазоне (2,312 – 2,316) г. Видно, что первые три цифры границ диапазона одинаковые 2,31. Это *верные* цифры. Но, точность измерений не может гарантировать для массы гайки какую-либо определенную цифру в разряде тысячных. Поэтому последняя двойка у левой границы и шестерка у правой – *сомнительные* цифры.

По умолчанию в физике значения величин записывают так, чтобы они содержали **только верные** цифры. Сомнительные округляют по правилам округления. Если же в конце числа содержатся нули, оказавшиеся сомнительными, то их отбрасывают, записывая число в стандартном виде.

В приведенных ниже примерах синим выделены сомнительные цифры.

$1{,}02345 = 1{,}02$; $0{,}02545 = 0{,}03$; $1{,}999 = 2{,}00$;

$1{,}999 = 2{,}0$; $1{,}0021 = 1{,}00$; $-1{,}29 = -1$;

$1000 = 1{,}0 \cdot 10^3$; $200 = 2 \cdot 10^2$

Два последних примера показывают, что только стандартная форма записи числа дает возможность однозначно задавать количество верных цифр. Нужно понимать, что в физике записи $m = 1000$ г и $m = 1$ кг не равнозначны. Первая может означать что угодно от очень точного измерения $m = 1{,}000 \cdot 10^3$ г до совсем неточного $m = 1 \cdot 10^3$ г и из-за этой неопределенности неудачна.

Иногда, если хотят подчеркнуть, что в числе все нули справа верные, но не хотят применять стандартную форму записи, то в круглых скобках пишут слово – **точно.** Например, $Q = 3600$ Дж (точно). К сожалению, так делают редко.

Важно! Все табличные величины считаются состоящими только из верных цифр, даже если это нули справа при записи числа в нестандартном виде. Иными словами, табличные величины $\rho = 1000$ кг/м^3 или $c = 4200$ Дж/(кг·К), всегда следует воспринимать как $\rho = 1{,}000 \cdot 10^3$ кг/м^3 и $c = 4{,}200 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

ЗАПИСЬ ЧИСЛА С ЯВНО ЗАДАННОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ

Почти у каждой физической величины x есть **истинное значение x_0**. Но оно в большинстве случаев не известно. В результате измерений нам удается получить **измеренное значение x** этой величины. В идеале x и x_0 должны совпадать. Но в силу ряда обстоятельств, о которых будет сказано позже, истинное и измеренное значения могут отличаться. Задача экспериментатора получить некоторый диапазон значений величины, в котором почти наверняка будет находиться ее истинное значение. Чем более узким будет этот диапазон, тем лучше.

Возможное отклонение истинного значения от измеренного называется **абсолютной погрешностью** $\Delta x = |x - x_0|$.

Истинное значение может быть записано в виде $x_0 = x \pm \Delta x$. Эту запись надо понимать так: истинное значение находится где-то в диапазоне от $x - \Delta x$ до $x + \Delta x$. Это **доверительный интервал** величины x.

Пример

В миске находится 13458 зерен пшена. Это *истинное значение* числа зерен N_0. Но мы его не знаем. В результате эксперимента нам удалось найти число зерен без прямого пересчета (допустим мы разделили общую массу всех зерен на примерную массу одного зернышка). У нас получился результат 13,5 тыс. Это *измеренное значение* N. Но проанализировав возможности наших измерительных приборов и недостатки примененного метода измерения, мы честно признали, что допускаем отклонение, например, в 400 зерен. Это и будет абсолютная погрешность ΔN.

Окончательно результат запишется так: $N_0 = (1{,}35 \pm 0{,}04) \cdot 10^4$ зерен.

Измеренное значение $1{,}35 \cdot 10^4$, но мы допускаем, что истинное значение лежит где-то в интервале от $1{,}31 \cdot 10^4$ до $1{,}39 \cdot 10^4$ зерен.

*) На самом деле все еще сложнее. Определяя границы доверительного интервала, мы не гарантируем на 100%, что истинное количество зерен попадет в него. Но мы можем задать нашу уверенность попадания в виде некоторой вероятности попадания в доверительный интервал. Например, с 95% вероятностью N_0 попадет. Если же от нас потребуют вероятность попадания 99%, то нам придется расширить границы интервала. Для упрощения оставим доверительную вероятность за рамками школьных олимпиад.

Абсолютная погрешность важна, но она не характеризует качество проведенных измерений. Допустим мы определили длину с погрешностью 1 мм. Хорошо это или плохо? Ответить однозначно нельзя. Если мы измеряли длину железнодорожного рельса, то это хорошо. Даже подозрительно «слишком» хорошо. Ну а если мы измеряли диаметр волоса, то измерение плохое.

Чтобы оценить качество выполненного измерения величины x, вводится **относительная погрешность** ε_x, равная отношению абсолютной погрешности Δx к измеренному значению x. Это безразмерная величина, которую можно записывать как в виде десятичной дроби, так и в процентах.

В приведенном выше примере с зернами $\varepsilon_N = 0{,}04/1{,}35 = 0{,}03 = 3\%$. Это вполне хорошая точность для быстрого измерения.

Важно! Округление результатов измерений надо начинать с погрешности. Окончательно в абсолютной погрешности необходимо оставлять одну или две значащие цифры. Две цифры сохраняют только при особо точных измерениях или, если в старшем разряде стоит цифра 2 или 1. Если в старшем разряде цифра больше чем 2, то оставляют одну значащую цифру. Погрешность всегда округляется только с избытком (в большую сторону).

После того, как погрешность записана, округляют сам результат измеренной величины до младшего разряда погрешности (уже по обычным правилам округления). Заметим, если измеренная величина ранее уже была округлена и впоследствии выяснилось, что слишком грубо, то недопустимо просто дорисовывать недостающие нули в младших разрядах. Необходимо вернуться и заново пересчитать измеренную величину, сохранив в ней дополнительные младшие разряды.

Пример

$143{,}8716 \pm 0{,}0261 = 143{,}872 \pm 0{,}027$

$143{,}8784 \pm 0{,}0361 = 143{,}88 \pm 0{,}04$

$143{,}8714 \pm 0{,}031 = 143{,}87 \pm 0{,}04$

$1253 \pm 47 = (1{,}25 \pm 0{,}05) \cdot 10^3$

Часто приходится рассчитывать абсолютную погрешность по известным значениям измеренной величины x и ее относительной погрешности ε_x. Тогда, сначала рассчитывается абсолютная погрешность $\Delta x = \varepsilon_x \cdot x$, а затем приводится в соответствие количество значащих цифр.

> **Пример**
> $h = 23{,}21$ см, $\varepsilon_h = 0{,}05$. Находим $\Delta h = 23{,}21 \cdot 0{,}05 = 1{,}16$ см и записываем $h = (23{,}2 \pm 1{,}2)$ см.

Когда проверяют согласуется ли теоретическое значение величины с экспериментальным, смотрят попадает ли теоретическое значение в доверительный интервал результата эксперимента.

Если сравнивают две величины, полученные экспериментально, то обычно смотрят перекрываются или нет их доверительные интервалы.

Важно! При сравнении результата, полученного участником на олимпиаде, с авторским результатом обычно проверяют попадает ли измеренное участником значение величины **(не границы ее доверительного интервала!)** в доверительный интервал авторских результатов (авторские ворота). Логика тут такая, участник может искусственно завышать абсолютную погрешность и тогда его доверительный интервал наверняка будет пересекаться с авторским.

> **Пример**
> На олимпиаде получены следующие результаты:
>
> результат участника $m = (12{,}1 \pm 0{,}4)$ г,
> авторский результат $m = (12{,}0 \pm 0{,}2)$ г. Совпадение есть;
>
> результат участника $m = (12{,}1 \pm 0{,}8)$ г,
> авторский результат $m = (12{,}4 \pm 0{,}2)$ г. Совпадения нет.

ЧАСТЬ 2. ДЕЙСТВИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

ДЕЙСТВИЯ С ВЕЛИЧИНАМИ С ЯВНО ЗАДАННОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ

Пусть есть два независимых числа x и y, заданные в виде $x \pm \Delta x$ и $y \pm \Delta y$, с ε_x и ε_y. И нам необходимо произвести с ними какие-либо математические действия, чтобы получить число z. Как рассчитывается погрешность числа z?

Ограничимся простейшими операциями, которые часто встречаются на олимпиадах. Сначала находим само значение z, а затем считаем ту погрешность (относительную или абсолютную), которая выделена в таблице синим фоном и уже через нее определяем другую погрешность.

Действие	Результат	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
Сложение	$z = x + y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$	$\varepsilon_z = \Delta z / z$
Вычитание	$z = x - y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$	$\varepsilon_z = \Delta z / z$
Умножение на константу	$z = A \cdot x$	$\Delta z = A \cdot \Delta x$	$\varepsilon_z = \varepsilon_x$
Умножение	$z = x \cdot y$	$\Delta z = \varepsilon_z \cdot z$	$\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y$
Деление	$z = x / y$	$\Delta z = \varepsilon_z \cdot z$	$\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y$
Возведение в степень	$z = x^n$	$z = \varepsilon_z \cdot z$	$\varepsilon_z = \lvert n \rvert \cdot \varepsilon_x$

При вычислении следующих значений z необходимо следить, чтобы аргумент x был безразмерным.

Действие	Результат	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
Экспонента	$z = e^x$	$\Delta z = \Delta x \cdot e^x$	$\varepsilon_z = \Delta z / z = \Delta x$
Синус	$z = \sin(x)$	$\Delta z = \Delta x \cdot \cos(x)$	$\varepsilon_z = \Delta z / z$
Косинус	$z = \cos(x)$	$\Delta z = \Delta x \cdot \sin(x)$	$\varepsilon_z = \Delta z / z$

Возможны разные комбинации приведенных в таблице действий. Например, для $z = x^n \cdot y^k$ относительная погрешность равна $\varepsilon_z = |n| \cdot \varepsilon_x + |k| \cdot \varepsilon_y$, а абсолютная $\Delta z = \varepsilon_z \cdot z$.

Примеры

1. $C = A + B$, где $A = 10 \pm 1$; $B = 8 \pm 2$

   $C = 10 + 8 = 18$; $\Delta C = \Delta A + \Delta B = 1 + 2 = 3$; $C = 18 \pm 3$

2. $P = 2(A + B)$, где $A = 10 \pm 1$; $B = 8 \pm 2$

   $P = 2\,(10 + 8) = 36$; $\Delta P = 2(1 + 2) = 6$; $P = 36 \pm 6$

3. $D = A \cdot B$, где $A = 2{,}0 \pm 0{,}4$; $B = 4{,}0 \pm 0{,}4$

   $D = 2{,}0 \cdot 4{,}0 = 8{,}0$; $\varepsilon_D = \varepsilon_A + \varepsilon_B$; $\varepsilon_A = 0{,}4/2{,}0 = 0{,}2$; $\varepsilon_B = 0{,}4/4 = 0{,}1$;
   $\varepsilon_D = 0{,}20 + 0{,}10 = 0{,}30$; $\Delta D = \varepsilon_D \cdot D = 2{,}4$; $D = 8{,}0 \pm 2{,}4$

4. $K = \sqrt{B - A}$, где $A = 2{,}0 \pm 0{,}4$; $B = 4{,}0 \pm 0{,}4$

   $K = \sqrt{2,0} = 1{,}4$; $R = B - A$; $\Delta R = \Delta A + \Delta B = 0{,}8$; $\varepsilon_R = 0{,}8/2{,}0 = 0{,}4$;
   $\varepsilon_K = 0{,}4/2 = 0{,}20$; $\Delta K = \varepsilon_K \cdot K = 0{,}3$; $K = 1{,}4 \pm 0{,}3$

5. $M = (A + B)/A$, где $A = 2{,}0 \pm 0{,}4$; $B = 4{,}0 \pm 0{,}4$

   $M = 1 + B/A = 3{,}0$; $\varepsilon_M = \varepsilon_B + \varepsilon_A = 0{,}4/4{,}0 + 0{,}4/2{,}0 = 0{,}3$

$\Delta M = \varepsilon_M \cdot M = 0{,}3 \cdot 3{,}0 = 0{,}9;$ $M = 3{,}0 \pm 0{,}9$

6. $M = (A+B)/C$, где $A = 2{,}0 \pm 0{,}4$; $B = 4{,}0 \pm 0{,}4$; $C = 2{,}0 \pm 0{,}4$;

$M = 3{,}0$; $S = A + B$; $\Delta S = \Delta A + \Delta B = 0{,}8$; $\varepsilon_S = 0{,}8/6{,}0 = 0{,}14$;
$\varepsilon_M = \varepsilon_S + \varepsilon_C = 0{,}14 + 0{,}4/2{,}0 = 0{,}34$; $\Delta M = \varepsilon_M \cdot M = 1{,}0$;
$M = 3{,}0 \pm 1{,}0$, но можно рассчитать погрешность и так:

$M = A/C + B/C = 3{,}0$; $\varepsilon_A = 0{,}4/2{,}0 = 0{,}2$; $\varepsilon_B = 0{,}4/4{,}0 = 0{,}1$;
$\varepsilon_C = 0{,}4/2{,}0 = 0{,}20$; $\varepsilon_{A/C} = \varepsilon_A + \varepsilon_C = 0{,}20 + 0{,}20 = 0{,}40$;
$\Delta(A/C) = 0{,}40 \cdot 1{,}0 = 0{,}4$; $\varepsilon_{B/C} = \varepsilon_B + \varepsilon_C = 0{,}10 + 0{,}20 = 0{,}30$;
$\Delta(B/C) = 0{,}3 \cdot 2{,}0 = 0{,}6$; $\Delta M = \Delta(A/C) + \Delta(B/C) = 0{,}4 + 0{,}6 = 1{,}0$;
$M = 3{,}0 \pm 1{,}0$

ДЕЙСТВИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ, ЗАПИСАННЫМИ ПО УМОЛЧАНИЮ

Если числа записаны с погрешностью по умолчанию, то можно применять упрощенные правила расчетов. Точность независимых величин x и y определяется количеством значащих цифр, причем последняя цифра считается верной. Нам необходимо произвести математические действия, чтобы получить число z и правильно записать его по умолчанию.

Действие	Результат	Как записывать z
Сложение	$z = x + y$	Последний разряд числа z определяется последним разрядом того из чисел x и y, у которого этот разряд старше
Вычитание	$z = x - y$	

При сложениии и вычитании у некоторых чисел может оказаться больше цифр в младших разрядах, чем у других тогда их можно предварительно округлить, сохраняя лишь одну запасную цифру.

Действие	Результат	Как записывать z
Умножение на константу	$z = A \cdot x$	Сохраняется такое же количество значащих цифр, как в исходном числе, в котором их меньше. Допускается оставлять одну дополнительную (запасную) значащую цифру, особенно если с полученным числом предстоят дальнейшие действия
Умножение	$z = x \cdot y$	
Деление	$z = x/y$	
Возведение в степень	$z = x^{n}$	Сохраняется такое же количество значащих цифр, как в исходном числе. Допускается оставлять одну дополнительную (запасную) значащую цифру, особенно если с полученным числом предстоят дальнейшие действия
Экспонента	$z = e^{x}$	
Синус	$z = \sin(x)$	
Косинус	$z = \cos(x)$	

Если некоторые данные имеют больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну запасную цифру.

Точные коэффициенты не изменяют точность приближенных чисел.

Примеры

Синим цветом выделены порядковые нули

$5100 + 156 = 5300 = 5{,}3 \cdot 10^{3}$;
$27{,}48 + 12{,}0 = 39{,}5$;
$1{,}08 \cdot 10^{2} + 1{,}10 \cdot 10^{3} = 1{,}21 \cdot 10^{3}$;
$(2{,}56 \cdot 10^{2})^{2} = 6{,}55 \cdot 10^{4}$;
$35{,}6 : 4$ (точно) $= 8{,}90$;

$15{,}7 + 158{,}82 + 125 = 300 = 3 \cdot 10^{2}$;
$15 - 158{,}80 = -144$;
$18 \cdot 125 = 2{,}3 \cdot 10^{3}$;
$35{,}6 : 4 = 9$
$2\pi \cdot 2{,}2 = 14$

ЧАСТЬ 3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

ВИДЫ ПОГРЕШНОСТИ И ПРИЧИНЫ ИХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ

Причин почему измеренное значение x отличается от истинного x_0 много.

- Неточным может оказаться сам прибор. В таком случае говорят о **приборной погрешности $\Delta x_{пр}$**. Например, изготовители не очень старались при нанесении делений шкалы, или в силу свойств материала (портновская мерная лента), расстояния между делениями изменяются в зависимости от внешних условий. Внутри прибора может возникать трение. Комплектующие из которых изготавливали прибор случайным образом отличаются друг от друга.

При желании можно изготовить средство измерения тщательнее, но это всегда обойдется дороже, что не всегда оправданно.

Если прибор со шкалой, и погрешность явно не указана, то по умолчанию в качестве приборной можно брать половину цены деления шкалы (если у вас недоверие к производителю, то можно брать целиком цену деления).

Для справки

Деревянная линейка	± 1 мм
Стальная линейка	± 0,5 мм
Штангенциркуль	± 0,1 мм или ± 0,05 мм
Термометр	± 1 цена деления
Мензурка, шприц	± 1 цена деления
Стрелочные амперметры и вольтметры	± 1/2 цены деления

Для цифровых приборов все сложнее. Как правило в условии олимпиадного задания приводится погрешность прибора. Тут возможны варианты.

1. Задается только относительная погрешность (например, 3%) от измеряемой величины.

2. Задается количество единиц последнего разряда (например, $\pm$ 2 ед. последнего разряда).

3. Задается комбинация относительной погрешности и количества единиц последнего разряда (например, 2% $\pm$ 1 ед. последнего разряда).

4. Задается минимальная граница относительной погрешности (например, $\pm$ 2 ед. последнего разряда, но не менее 1%).

Третий вариант – самый правильный. Но он требует больше всего времени для расчетов. Поэтому авторы часто «идут навстречу» и упрощают требования до первого или второго.

Первый вариант дает заниженную погрешность при измерениях величин близких к минимуму диапазона измерений. Так если на дисплее прибора 0,02 В при погрешности 1%, создается иллюзия, что абсолютная погрешность 0,0002 В.

Второй вариант расчета занижает погрешность при измерениях в середине и у верхней границы диапазона. Теперь если на дисплее прибора 9,82 В при погрешности $\pm$ 2 ед. последнего разряда, создается иллюзия, что относительная погрешность 0,2%.

При расчетах по третьему варианту, как правило сразу становится понятно, что вклад от одного из слагаемых (2% или $\pm$ 1 ед. последнего разряда) пренебрежимо мал на фоне другого. И тогда автоматически далее можно считать по первому или второму варианту.

Четвертый вариант представляет собой некоторый компромисс, он довольно удобен и недалек от истины.

Для справки

(не руководство к применению, в условии может быть сказано иное)

Мультиметр	2% ± 2 ед. последнего разряда
Штангенциркуль электронный	± 0,05 мм, но не менее 1%
Электронный секундомер	
при ручном запуске с учетом времени реакции	0,2 с
при электронном запуске	0,05 с
Электронные весы (0 – 200) г	0,05 г
Электронный термометр	2%

- Иногда (не всегда) измеряемая величина зависит от множества малозначительных внешних факторов (движение потоков воздуха, трение, колебания температуры, неоднородности поверхностей и т.п.), которые случайным образом способны влиять на измерения в одну или другую сторону. Причем, влияния таких факторов могут как складываться, так и компенсировать друг друга. В результате каждое новое измерение будет давать новое значение величины.

Например, мы 10 раз бросаем скомканный лист бумаги с высоты 5 м и измеряем секундомером время падения. Показания заносим в таблицу. Приборная погрешность измерений времени с учетом реакции того, кто запускает и останавливает секундомер равна 0,2 с.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, с	5,52	5,71	5,45	5,36	5,60	5,79	5,25	5,87	5,55	5,60

Среднее значение времени полета можно найти либо как среднее арифметическое 5,57 с, либо воспользовавшись методом медиан (поочередно отбрасывая максимальное и минимальное из оставшихся значений величины) 5,58 с. При большом количестве измерений оба способа дают примерно одинаковые результаты.

Видно, что в некоторых измерениях время (5,25 или 5,87) отличается от среднего больше, чем на приборную погрешность. В такой ситуации говорят о существенной роли **случайной погрешности $\Delta x_{сл}$**.

Самый простой способ оценки величины случайной погрешности состоит в усреднении модулей отклонений измеряемой величины от ее среднего значения.

Дополним таблицу еще одной строкой.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, с	5,52	5,71	5,45	5,36	5,63	5,79	5,25	5,87	5,55	5,60
$\lvert t_i - t_{ср}\rvert$, с	0,05	0,04	0,12	0,21	0,06	0,22	0,32	0,30	0,02	0,03

Средний модуль отклонения от среднего равен 0,14 с. Эту величину и примем за случайную погрешность. Итак, $\Delta x_{сл} = 0{,}14$ с.

*) Более строго при сериях измерений в экспериментах для учета случайного разброса следует использовать среднеквадратичное отклонение среднего $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}{n(n-1)}}$. Но в олимпиадном эксперименте такой подход, требующий в разы больше времени на расчеты, нецелесообразен.

- Часто в ходе работы используются упрощенные модели (пренебрегающие сопротивлением среды, силой Архимеда в воздухе, тепловыми потерями, считающие горошины шариками и т.п.). В результате, в формулы заведомо вносятся отклонения от истинных значений. Такие отклонения принято называть **погрешностью метода $\Delta x_м$**. Как правило корректный учет этой погрешности сложен, так как он требует «честного» решения задачи с последующим анализом возникшего отклонения. К погрешности метода можно отнести и систематические погрешности: искажение измеряемой величины самим прибором (сжатие мягкого тела штангенциркулем, нагревание тела термометром), сбитая шкала прибора, и т.п.

- Погрешность измерений может возникнуть из-за ошибок экспериментатора (не обнулил показания секундомера перед следующим измерением, отвлекся и пропустил очередное значение, не туда записал результат, неправильно считал показания прибора, не заметил сбой аппаратуры и т.п.). В таком случае говорят о **субъективной погрешности или о промахах**. Промахи обнаруживаются при повторных измерениях/сериях, или при построении графиков. Усреднять промахи ни в коем случае не надо. Такие измерения, если нет возможности восстановить правильные значения, после выяснения причины промаха, необходимо отбрасывать.

На олимпиадах для упрощения можно считать, что при выборе метода уже учтено, что его погрешность мала на фоне приборной и/или случайной, а субъективная погрешность отсутствует. Поэтому, достаточно обращать внимание только на приборные и случайные погрешности.

Если приборная и случайная погрешности отличаются друг от друга более чем в 5 раз, то одной из них можно пренебречь на фоне другой.

Если же обе погрешности сопоставимы, то можно воспользоваться упрощенной формулой: $\Delta x = \Delta x_{\text{пр}} + \Delta x_{\text{сл}}$.

*) В силу того, что на практике погрешности редко вызывают отклонения величины в одну сторону, а могут частично компенсировать друг друга, лучше при расчете абсолютной погрешности использовать формулу $\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{пр}}^2 + \Delta x_{\text{сл}}^2}$, но на олимпиадах это не принципиально и избыточно.

Пример

Мы 7 раз бросаем металлический шарик с высоты $h = 50$ см, с целью рассчитать ускорение свободного падения. Время падения измеряется автоматическим (без участия экспериментатора) секундомером с абсолютной погрешностью 10 мс. Высота падения измерена с абсолютной погрешностью 0,5 см. Результаты измерения времени t приведены в таблице ниже.

№	1	2	3	4	5	6	7
t, мс	325	325	326	325	323	325	325
$\|t_i - t_{ср}\|$, мс	0	0	1	0	2	0	0

Видно, что случайная погрешность измерения времени на порядок меньше приборной погрешности секундомера и ей можно пренебречь.

Ускорение свободного падения $g = 2h/t^2$, и $\varepsilon_g = \varepsilon_h + 2\varepsilon_t$, где $\varepsilon_h = 0{,}01$, $\varepsilon_t = 10/325 = 0{,}03$. Следовательно, $\varepsilon_g = 0{,}07$, в таком случае $\Delta g = 9{,}47 \cdot 0{,}07 = 0{,}7$ м/с^2. Окончательно, $g = (9{,}5 \pm 0{,}7)$ м/с^2.

Пример

Снимаются показания динамометра, к которому на нити подвешен равномерно вращающийся по окружности груз массой m. Погрешность динамометра равна $\Delta F_{пр} = 0{,}002$ Н. Результаты измерений занесены в таблицу.

№	1	2	3	4	5
F, Н	0,717	0,772	0,736	0,784	0,723
$\|F_i - F_{ср}\|$, Н	0,029	0,026	0,010	0,038	0,023

Средний модуль отклонения от среднего равен 0,026 Н. Эту величину и примем за случайную погрешность. Итак, $\Delta F_{сл} = 0{,}026$ Н, что более чем в 10 раз превышает приборную погрешность, а значит приборной можно пренебречь. Окончательно $F = (0,\ 746 \pm 0{,}026)$ Н.

«Разумные» значения погрешности в олимпиадном эксперименте (не руководство к действию)

Относительная погрешность, %	Примечания
менее 1	Встречается редко. Либо это действительно очень тонкий эксперимент, либо, что вероятнее, экспериментатор забыл учесть или некорректно учел отдельные погрешности
1 – 3	Точный эксперимент
3 – 5	Хорошая точность для большинства экспериментов
5 – 10	Удовлетворительная точность. Повод начать задумываться, нельзя ли поточнее измерить самый «слабый» результат, вносящий наибольший вклад в погрешность
10 – 25	Плохая точность. Надо искать способы уменьшения погрешности
25 – 50	Это не измерение, а оценка «по порядку величины». Может представлять интерес при планировании дальнейшего более точного эксперимента

ЧАСТЬ 4. ГРАФИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Часто на олимпиадном эксперименте необходимо сначала снять зависимость одной физической величины от других, и затем, после обработки, получить требуемые результаты. Рассмотрим простейший случай, когда теория предсказывает, что зависимость линейная.

НАХОЖДЕНИЕ УГЛОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПО СРЕДНЕМУ

Допустим, необходимо найти сопротивление резистора по имеющимся парам значений напряжений и сил тока $U(I)$. После измерения нескольких экспериментальных точек, может возникнуть желание воспользоваться законом Ома $R = U/I$. С его помощью найти сопротивление резистора для каждого измерения, а затем усреднить полученные R_i. К сожалению, при всей кажущейся разумности описанного подхода, он неудачен по ряду причин:

- Применять процедуру усреднения можно при повторении **однотипных** измерений. В данном примере значения R_i относятся к **разным** измерениям (изменялись U и I).

- Не получится проверить линейность зависимости, а, как известно, существуют нелинейные элементы, для которых закон Ома не выполняется.

- Даже если зависимость линейная, нет гарантии что из-за систематических отклонений она проходит через начало координат. В таком случае потребуется введение поправок.

- Погрешности измерения отдельных точек (чаще начальных) могут сильно отличаться, а усреднение величин, измеренных с разной точностью – отдельная задача.

- Среднее значение R_i, пропорционально среднему угловых коэффициентов наклона линий, которые при углах $\alpha > \pi/4$ резко возрастают. В таком случае небольшое «шевеление» экспериментальной точки, особенно если она находится близко к оси ординат, приведет к резкому увеличению вклада этой точки в итоговый результат.

- Легко пропустить промахи.

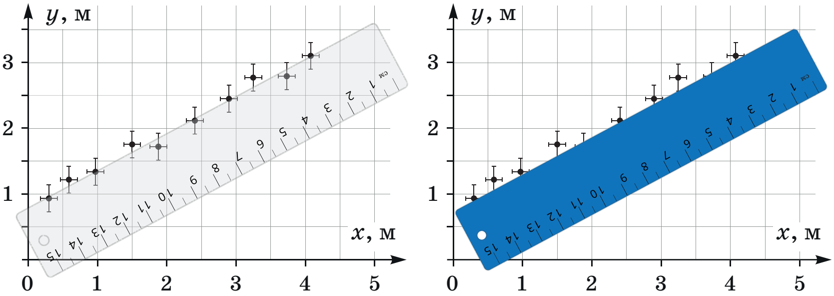
Самым простым и верным методом в данном случае является построение графика и проведение наилучшей прямой.

НАХОЖДЕНИЕ УГЛОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА С ПОМОЩЬЮ ГРАФИКА

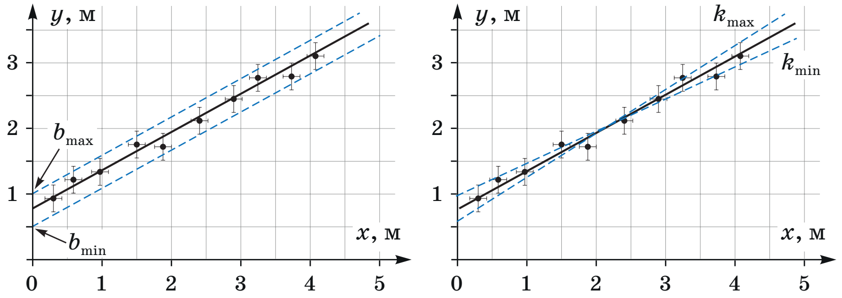
В физике «хорошая» прямая строится не менее чем по 5, а кривая не менее чем по 11 точкам. По возможности точки должны распределяться равномерно по исследуемому диапазону.

Измерив пары значений $(x_i; y_i)$, изобразим их на графике. Каждая величина обладает погрешностью Δx и Δy, которые на графиках принято изображать в виде «крестов» или прямоугольников (при условии, что они видны в масштабе графика).

Далее, для быстрой оценки результатов нужно приложить к точкам линейку так, чтобы кресты всех экспериментальных точек находились как можно ближе к проводимой линии, а по обе стороны оказалось примерно одинаковое количество точек (метод медиан). Очевидно, что удобнее это делать с помощью прозрачной линейки, как показано на рисунке.



Построив таким образом «наилучшую» прямую для зависимости $y = kx + b$, можно найти ее параметры: угловой коэффициент k и вертикальное смещение b. Таким же способом можно оценить ошибку определения k и b. Смещая линейку вертикально в пределах крестов погрешностей, оценим погрешность Δb, и, изменяя наклон линейки относительно условного «центра масс» экспериментального графика, получим оценку для погрешности углового коэффициента Δk.



Оценить погрешности Δb и Δk можно по формулам:

$$\Delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}; \ \Delta k = \frac{k_{max} - k_{min}}{2}.$$

Существуют и более точные аналитические методы подбора параметров (метод наименьших квадратов или метод парных точек). Все они достаточно трудоемки и для олимпиадного эксперимента избыточны.

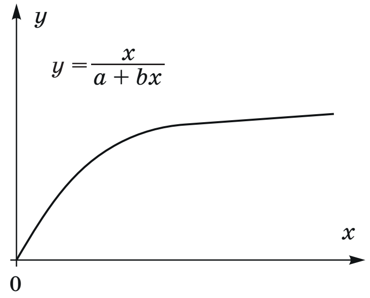
НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

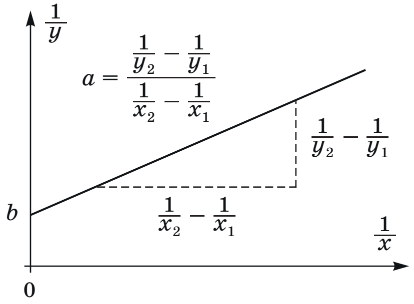
Если теория предсказывает **нелинейную** связь между величинами, то как правило можно сделать **замену переменных** так, чтобы в определенных осях график получился линейным. Такая процедура называется линеаризация.

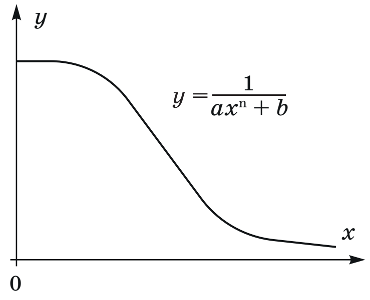
Исходная функция	Замена переменных	Новая функция
$y = Ax^{n}$	$X = x^{n}$ или $z = \sqrt[n]{y}$	$y = AX$ или $z = \sqrt[n]{A}\,x$
$y = ax^{n} + b$	$X = x^{n}$	$y = aX + b$
$y = \dfrac{1}{ax^{n} + b}$	$Y = \dfrac{1}{y}$, $X = x^{n}$	$Y = aX + b$
$y = \dfrac{x}{a + bx}$	$Y = \dfrac{1}{y}$, $X = \dfrac{1}{x}$	$Y = aX + b$
$y = ax^{n} + bx^{m}$	$Y = yx^{-m}$, $X = x^{n-m}$	$Y = aX + b$
$y = a\sin x + b\cos x$	$Y = \dfrac{y}{\cos x}$, $X = \operatorname{tg} x$	$Y = aX + b$
$y = Ax^{n}$	$Y = \ln y$, $X = \ln x$; $a = n$, $b = \ln A$	$Y = aX + b$
$y = Ae^{kx}$	$Y = \ln y$, $b = \ln A$	$Y = kx + b$

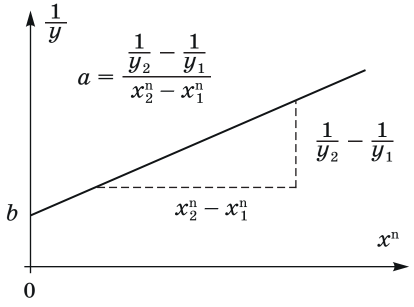
Важно помнить, что при переходе к новым переменным необходимо пересчитывать и погрешности. Делать это можно, применяя правила для погрешностей из Части 2. Например, при замене $z = x^{n}$ погрешности z будут равны $\varepsilon_z = |n| \cdot \varepsilon_x$ и $\Delta z = \varepsilon_z \cdot z$, что скажется на крестах ошибок на графике.

Приведем несколько примеров линеаризации.

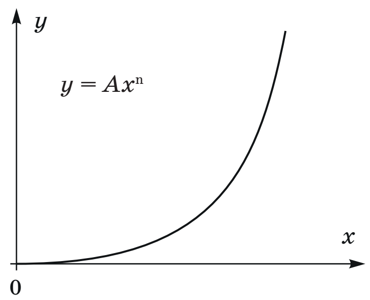


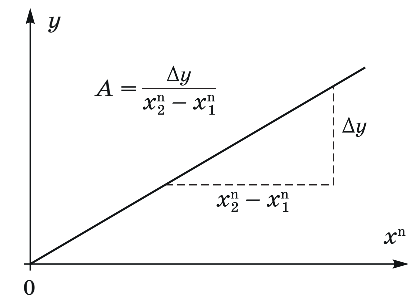


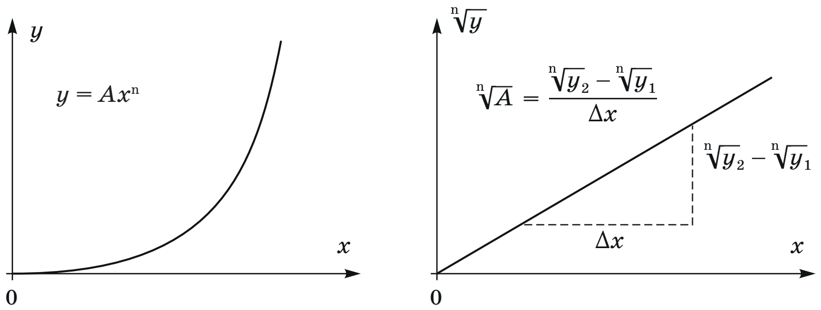




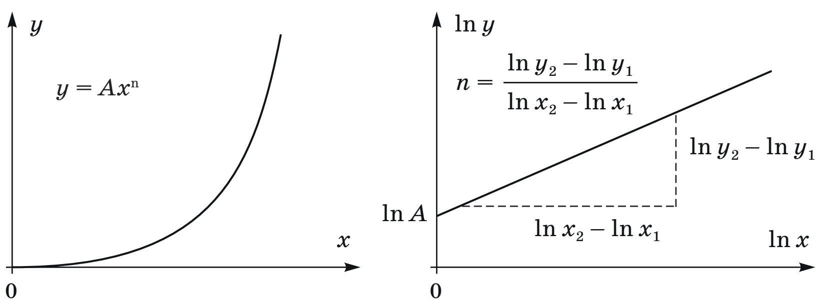
Из таблицы видно, что линеаризовать зависимость $y = Ax^{\mathrm{n}}$ можно по-разному. Если известна величина n, то есть два способа:







Если показатель степени n надо найти, то придется логарифмировать.



*) О логарифмировании размерных величин

Логарифмировать можно только безразмерные величины! Не имеет смысла логарифм из 5 кг. Но при формальном логарифмировании уравнения возникают выражения типа $\ln(m)$. Как это понимать?

Говорят, что величины x или y измерены, если известно, сколько раз в x или y содержатся соответствующие им единицы измерений $[x]$ или $[y]$. Это и есть числовые значения $\{x\}$ или $\{y\}$ величин x и y. Иными словами, каждую размерную величину x можно представить в виде произведения числовой части $\{x\}$ и единицы измерения $[x]$. Масса 25 кг это 25 раз по килограмму: $m = 25$ кг $= \{25\} \cdot [$кг$]$

Пример

$y = gt^2/2$. Здесь $y = \{y\}\cdot[y]$, $g = \{9{,}8\}\cdot[\text{м/с}^2]$, $t = \{3\}\cdot[\text{с}]$.

Тогда мы получим: $y = \{y\}\cdot[\text{м}] = \{9{,}8/2\}[\text{м/с}^2]\cdot\{3\}^2\cdot[\text{с}]^2$.

Для размерных единиц верно равенство: $[\text{м}] = [\text{м/с}^2]\cdot[\text{с}]^2$,

а для числовых значений: $\{y\} = \{9{,}8/2\}\{3\}^2 = \{44{,}1\}$.

В рассмотренном примере ($y = Ax^n$) связи между размерными величинами и числовыми значениями определяются уравнениями:

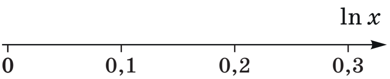
$$[y] = [A][x]^n.$$

$$\{y\} = \{A\}\{x\}^n.$$

Прологарифмируем второе выражение: $\ln\{y\} = \ln\{A\} + n\ln\{x\}$, в которе входят только безразмерные числа. График этой линейной зависимости и следует строить.

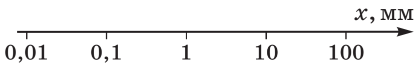
Есть три варианта оформления осей в логарифмическом масштабе.

- Самый очевидный (но не самый удобный вариант) когда по оси с равными делениями откладываются логарифмы численных значений величин. Ось тогда подписывается как **$\ln x$, а единицы измерения не указываются.**

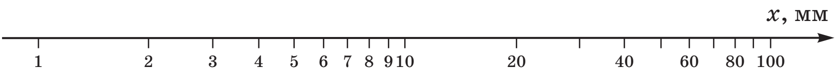


Такой подход оправдан при построении качественных графиков, но при наличии чисел не всегда легко быстро догадываться какой величине x соответствует $\ln x = 0{,}456$.

- Чтобы избежать указанных трудностей, договариваются о следующем. На координатной оси реально откладывают логарифмы соответствующих значений аргумента, но эти точки оцифровываются значениями аргумента, логарифмы которых откладываются. Координатная ось обозначается соответствующим обозначением данной величины **x без указания символа логарифма и указывается размерность** данного аргумента, например, x, мм; f, Гц и т.д.



- Иногда применяется логарифмическая сетка с делениями, не равными друг другу. Координатная ось обозначается соответствующим обозначением данной величины **x без указания символа логарифма и указывается размерность** данного аргумента. Такой вариант используется, если в наличии есть бланк с готовой логарифмической сеткой. На олимпиадах встречается редко.



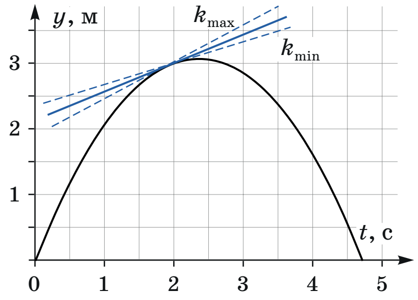
КАСАТЕЛЬНЫЕ К ГРАФИКУ И ПЛОЩАДЬ ПОД НИМ

Для нахождения быстроты изменения одних величин при изменении других необходимо строить касательные к графику в одной или нескольких точках, а затем рассчитывать их угловые коэффициенты наклона.

*) Заметим. Не *тангенс угла наклона*, а именно **угловой коэффициент наклона**. Это разные понятия. Тангенс – величина безразмерная и зависящая от выбора масштаба по осям графика, а угловой коэффициент имеет размерность скорости изменения величины и сохраняется при изменении масштаба.

Качество построения касательных зависит от точности и аккуратности построения самой экспериментальной кривой. Проведение касательной «на глаз» приводит к неточности определения углового коэффициента k. Абсолютную погрешность Δk можно оценить, изменяя наклон линейки относительно точки касания.

В примере, на рисунке ниже, угловой коэффициент «сплошной» касательной пропорционален скорости объекта вдоль оси Oy в момент времени равный $t = 2$ с.



Погрешность k определяется угловыми коэффициентами «пунктирных» касательных.

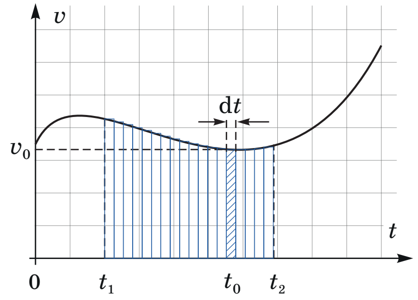
$$k = 0{,}44 \text{ м/с}; \qquad \Delta k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{2} = 0{,}13 \text{ м/с}; \qquad v = (0{,}44 \pm 0{,}13) \text{ м/с}.$$

Часто информативной оказывается площадь под графиком (иногда слева от графика). Для линейных зависимостей ее можно находить просто, рассчитывая по формулам из геометрии для площадей треугольников, прямоугольников или трапеций.

В случае, когда функция нелинейная, ее приходится разбивать на малые участки с последующим суммированием их площадей.

Рассмотрим зависимость проекции скорости от времени $v(t)$. Проекция элементарного перемещения $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$ пропорциональна площади вертикального столбика.

*) Тут опять заметим. Площадь не *равна* и не *численно равна*, а **пропорциональна** искомой величине!



Полное перемещение можно найти через сумму площадей всех таких столбиков, заключенных между t_1 и t_2.

Расчет площади производится, как правило, так. Сначала находится количество N_0 целых клеток. Затем подсчитывается число N клеток, входящих частично, и оно делится на 2. Абсолютная погрешность полученного числа неполных клеток N оценочно принимается равной $\sqrt{N}$ (N_0 считается точным).

Сумма $N_0 + N/2$ умножается на коэффициент пропорциональности k, устанавливающий соответствие между площадью одной клетки и интересующей нас физической величиной:

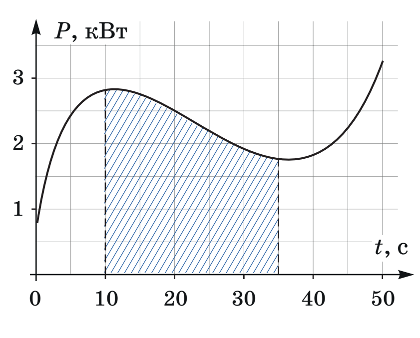
$$s = k(N_0 + N/2).$$

Если существенна погрешность величин, отложенных по осям графика, то нужно ее учесть, рассчитав, по правилам нахождения погрешности для произведения:

$$\Delta s = s \cdot \varepsilon_s, \text{ где } \varepsilon_s = \varepsilon_v + \varepsilon_t.$$

Чтобы окончательно записать абсолютную погрешность искомой величины, имеет смысл сравнить вклады в нее от величин, отложенных по осям, и от подсчета нецелых клеток. Если один из них окажется существенно меньше, то им можно пренебречь.

Пример



По экспериментальной зависимости мощности нагревателя от времени $P(t)$ необходимо найти количество теплоты Q, выделившееся за время от 10 с до 35 с. Известно, что относительные погрешности нагревателя и часов равны $\varepsilon_P = 2\%$ и $\varepsilon_t = 1\%$ соответственно.

Количество теплоты Q пропорционально площади под графиком в указанном интервале времени. Для оценки площади посчитаем количество $N_0 = 20$ целых клеток и $N = 6$ нецелых.

$$Q = Q_0(N_0 + N/2)$$

Площадь одной клетки пропорциональна $Q_0 = 0{,}5 \cdot 10^3$ Вт $\cdot$ 5 с $= 2{,}5$ кДж, тогда количество теплоты

$$Q = 2{,}5 \cdot 10^3\,(20 + 6/2) = 58 \text{ кДж}.$$

Рассчитаем вклады в ΔQ от подсчета клеток и от погрешности величин P и t. Абсолютная погрешность полученного числа неполных клеток пропорциональна погрешности количества теплоты

$$\Delta Q_1 = Q_0 \cdot \sqrt{N} = 7 \text{ кДж}.$$

С другой стороны, погрешность величин, отложенных по осям графика:

$$\Delta Q_2 = Q \cdot \varepsilon_Q = Q \cdot (\varepsilon_P + \varepsilon_t) = 58 \cdot 10^3 \cdot 0{,}03 = 1{,}8 \text{ кДж}.$$

Видно, что в данном примере ΔQ_1 и ΔQ_2 сравнимы, поэтому в качестве абсолютной погрешности ΔQ можно взять их сумму, тогда окончательно:

$$Q = (58 \pm 9) \text{ кДж}.$$

ЗАДАНИЯ

1. Определите количество значащих цифр в числе

1,2 2,30 0,3 1,00 0,01 23,40 0,234 $0{,}11 \cdot 10^4$

2. Округлите число до двух значащих цифр.

1234 1664 151 150,3 0,0307

3. Запишите в стандартной форме числа из задания 2.

4. Определите относительную погрешность физической величины и приведите запись (если это требуется) к **культурному** виду.

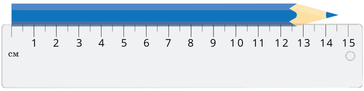
Физическая величина	Культурная запись	Относительная погрешность
$F = (4{,}0 \pm 0{,}35)$ Н	$F =$ $\pm$	$\varepsilon_F =$
$H = (1625 \pm 52)$ мм	$H =$ $\pm$	$\varepsilon_H =$
$U = (9{,}99 \pm 0{,}2)$ В	$U =$ $\pm$	$\varepsilon_U =$
$p = (23{,}45 \cdot 10^3 \pm 2160)$ Па	$p =$ $\pm$	$\varepsilon_p =$
$P = (0{,}983 \pm 0{,}011)$ кВт	$P =$ $\pm$	$\varepsilon_P =$
$t = (120 \pm 5{,}8)$ °С	$t =$ $\pm$	$\varepsilon_t =$
$t = (0{,}21 \pm 1)$ °С	$t =$ $\pm$	$\varepsilon_t =$
$t = (-40{,}1 \pm 2)$ °С	$t =$ $\pm$	$\varepsilon_t =$

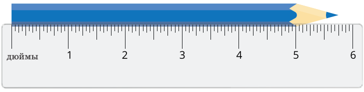
5. Определите абсолютную погрешность величины. Запишите величину в культурном виде с учетом погрешности.

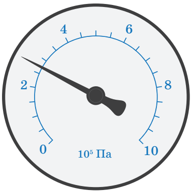
Физическая величина	Абсолютная погрешность	Культурная запись
$M = 5{,}6789$ кг ($\varepsilon_M = 5\%$)	$\Delta M =$	$M = \qquad \pm$
$I = 0{,}0015$ А ($\varepsilon_I = 12\%$)	$\Delta I =$	$I = \qquad \pm$
$t = 20$ °C ($\varepsilon_t = 10\%$)	$\Delta t =$	$t = \qquad \pm$
$t = 2$ °C ($\varepsilon_t = 5\%$)	$\Delta t =$	$t = \qquad \pm$
$T = -2{,}08$ °C ($\varepsilon_T = 2\%$)	$\Delta T =$	$T = \qquad \pm$

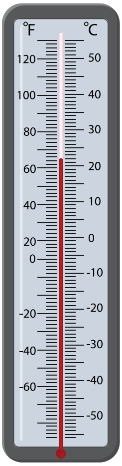
6. Запишите в культурном виде показания прибора с учетом приборной погрешности

а) Приборная погрешность равна цене деления.









б) Приборная погрешность равна 2 ед. последнего разряда

в) Приборная погрешность равна 2 ед. последнего разряда, но не менее 1%

г) Приборная погрешность равна 0,02 с для каждого интервала (0,1 – 60) с

д) Приборная погрешность равна 2%+2 ед. последнего разряда

7. Обработайте экспериментальные данные, представленные в таблице. Результат запишите в культурном виде.

Шарик диаметром $d = 18$ мм после падения с некоторой высоты пролетает мимо фотоэлемента (время перекрытия датчика фиксируется автоматически). По результатам девяти измерений найдите скорость шарика во время пролета мимо датчика.

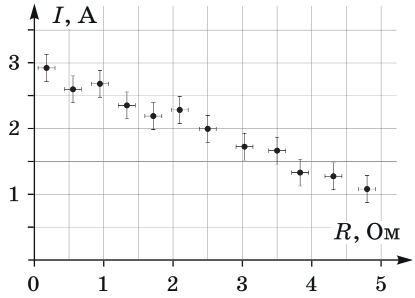
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t, мс	4,2	4,2	4,1	4,0	4,1	4,0	4,1	3,9	3,7
v, м/с									

8. В каких осях зависимость величины x от величины y будет линейной? Здесь a и b постоянные величины, значения которых необходимо определить.

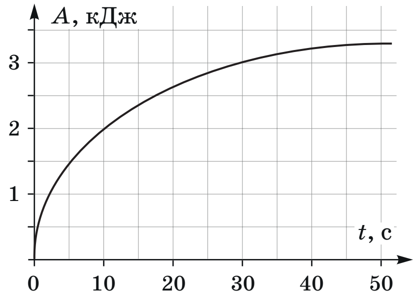
$$x = \frac{1}{ay+b}; \qquad x = \frac{a}{y+b}; \qquad x = by^2 + a; \qquad x = y^2 + ay;$$

$$x = \frac{a+by}{y}; \qquad x = \frac{y}{a+by}; \qquad x = \sqrt{a+by}; \qquad x = \sqrt{y^2+ay}$$

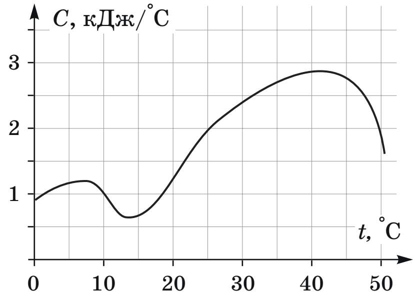
9. Найдите угловой коэффициент наклона зависимости и силу тока I_0 при $R = 0$. Оцените погрешности найденных значений.



10. По известной зависимости работы A от времени t найдите мощность, развиваемую силой, в момент времени 10 с. Оцените погрешность полученного результата.



11. Оцените количество теплоты, подведенное к телу (теплоемкость которого зависит от температуры как показано на графике) при нагревании от 0°C до 40°C. Относительные погрешности теплоемкости и температуры равны $\varepsilon_C = 2\%$ и $\varepsilon_t = 1\%$ соответственно.



УДК 373.176.1:53 + 53(075.3)
ББК 22.3я721

А.Ю. Вергунов, М.Ю. Замятнин

Учебное издание

Компьютерная верстка *А.Ю. Вергунов*

Подписано в печать 13.11.21. Формат 60 × 90 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,0. Тираж 500 экз.
Печать офсетная.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами.
Полиграфический салон «Шанс», г. Москва