Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Квадратные уравнения. Многочлены

Задание №2 для 9-х классов

(2020 – 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2020

Составители: С.Е. Городецкий, доцент кафедры высшей математики МФТИ.
Е.Ю. Редкозубова, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №2 для 9-х классов (2020 – 2021 учебный год), 2020, 29 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 06 ноября 2020 г.

Учащийся должен стараться выполнять все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов, являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составители:
Городецкий Сергей Евгеньевич
Редкозубова Елена Юрьевна
Подписано 17.07.20. Формат 60х90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,81. Уч.-изд. л. 1,61.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-55-80 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru
Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Введение

Вспомним некоторые понятия и определения, изученные вами ранее.

Число a называется *решением* (или *корнем*) *уравнения*, если при его подстановке в уравнение вместо неизвестной уравнение превращается в верное равенство. Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Точно так же определяется понятие *решения неравенства*, а именно: число a называется решением неравенства, если при подстановке числа a вместо переменной в неравенство получается верное неравенство. Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Совокупность всех решений уравнения (неравенства) называют *множеством решений уравнения* (*неравенства*). Если уравнение (неравенство) не имеет решений, то говорят, что его множество решений пусто (обозначается значком $\varnothing$).

Уравнения (неравенства) называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Заметим также, что уравнение и неравенство могут быть равносильны друг другу. (Обозначение: (1) $\Leftrightarrow$ (2)).

Пример 1. Среди следующих пар уравнений и неравенств выберите равносильные:

а) $|x|=2$ и $x^4-x^2-12=0$; б) $\sqrt{x-12}=24-x$ и $x-12=(24-x)^2$;

в) $x^2\le x$ и $x\le 1$; г) $x\ge 0$ и $|x|=x$; д) $x^2<0$ и $x^2+3x+3=0$.

Решение. а) По определению модуля $|x|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-2.\end{array}\right.$

Решим уравнение $x^4-x^2-12=0$. Сделаем замену $x^2=t$. Получаем $t^2-t-12=0$, откуда $\left[\begin{array}{l}t=4,\\ t=-3.\end{array}\right.$

Поэтому $x^4-x^2-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4,\\ x^2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-2.\end{array}\right.$

Значит, уравнения равносильны.

б) $x-12=(24-x)^2\Leftrightarrow x-12=x^2-48x+576\Leftrightarrow x^2-49x+588=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=21,\\ x=28.\end{array}\right.$

Заметим, что $x=28$ не является решением первого уравнения (при подстановке $x=28$ получаем неверное равенство $4=-4$), поэтому уравнения не равносильны.

в) Число $x=-1$ является решением второго неравенства, но не является решением первого. Значит, их множества решений не совпадают, и неравенства равносильными не являются.

г) По определению модуля, уравнению $|x|=x$ удовлетворяет любое $x \geq 0$. Отрицательных решений это уравнение не имеет, т. к. при $x<0$ левая часть положительна, а правая отрицательна. Получаем, что данные уравнение и неравенство равносильны.

д) И уравнение, и неравенство не имеют решений, поэтому они равносильны.

При решении уравнений можно действовать двумя способами.

1) Все выполняемые преобразования равносильны. Тогда мы сразу получаем ответ.

2) Если мы делаем какие-то неравносильные преобразования, то **ни одно из них не должно приводить к потере корней**. (Если корень потерян, то его невозможно вернуть). Значит, нам можно делать только такие неравносильные преобразования, в результате которых мы можем приобрести лишние корни. В таком случае в конце решения необходимо сделать отбор корней: подставляя все найденные значения переменной в исходное уравнение, отбираем те из них, которые являются его корнями. Естественно, этот способ не проходит, если уравнение имеет бесконечно много решений (так как при отборе корней нельзя подставить бесконечное количество значений в уравнение). Тогда приходится делать только равносильные преобразования.

Некоторые преобразования всегда приводят нас к равносильным уравнениям, например, перенесение слагаемых из одной части уравнения в другую, умножение обеих частей уравнения на отличное от нуля число и др. Применяя другие преобразования (приведение подобных слагаемых, сокращение дробей, возведение обеих частей уравнения в квадрат и пр.), мы иногда получаем равносильные уравнения, а иногда нет. Когда мы решаем неравенства, почти всегда отбор корней сделать невозможно (так как неравенства обычно имеют бесконечно много решений), поэтому необходимо делать только равносильные преобразования.

Рассмотрим два уравнения

$$f_1(x)=g_1(x) \tag{1}$$

и

$$f_2(x)=g_2(x). \tag{2}$$

Говорят, что уравнение (2) является *следствием* уравнения (1) (пишут $(1)\Rightarrow(2)$), если каждый из корней уравнения (1) является также и корнем уравнения (2). *Иначе говоря, множество решений уравнения* (1) *содержится в множестве решений уравнения* (2).

Несложно видеть, что если из (1) следует (2), а из (2) следует (1), то уравнения (1) и (2) *равносильны*.

Например, $x=2\Rightarrow(x-2)(x-3)=0;$ $x^2+1=0\Rightarrow x=5$ (действительно, множество решений первого уравнения пусто, а пустое множество является подмножеством любого множества).[1]

§2. Квадратный трёхчлен. Квадратные уравнения. Теорема Виета

Квадратным называют уравнение

$$ax^2+bx+c=0, \tag{3}$$

где $a\neq 0$.

Если разделить обе части уравнения (3) на a (это можно сделать, так как $a\neq 0$) и обозначить коэффициенты $p=b/a$ и $q=c/a,$ то получим уравнение

$$x^2+px+q=0, \tag{4}$$

называемое *приведённым* квадратным уравнением.

Левую часть в (3) и (4) называют *квадратным трёхчленом.* Корни уравнения называют также *корнями трёхчлена*.

Все вы, конечно же, знаете формулу корней квадратного уравнения. Ввиду особой важности метода выделения полного квадрата, напомним способ её получения. Преобразуем левую часть (3):

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right). \tag{5}$$

Выражение b^2-4ac называется **дискриминантом** и обозначается буквой D. С учётом этого обозначения уравнение (3) можно переписать в виде:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}. \tag{6}$$

---

[1] Таким образом, если уравнение (неравенство) не имеет корней, то из него следует любое другое уравнение (неравенство).

Из (6) при $D \geq 0$ получаем $x_1 = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{D}}{2a}$; $\quad x_2 = -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{D}}{2a}$.
Эти формулы можно объединить одной записью

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \tag{7}$$

Обратим внимание, что при $D = 0$ выходит, что $x_1 = x_2$. В этом случае говорят, что квадратное уравнение имеет один корень кратности 2. Если в уравнении (3) коэффициент b имеет вид $b = 2k$ (например, если b – чётное число), то удобнее использовать формулы, получаемые из (7) сокращением на 2 числителя и знаменателя:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \tag{7'}$$

Например, корни уравнения $81x^2 - 42x + 5 = 0$ проще найти по формулам $(7')$, чем (7). Здесь $b = -42 = 2(-21)$, поэтому

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 81 \cdot 5}}{81} = \frac{21 \pm \sqrt{9\left(7^2 - 9 \cdot 5\right)}}{81} = \frac{21 \pm 3\sqrt{4}}{81} = \frac{7 \pm 2}{27},$$

$$x_1 = \frac{5}{27}, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Если дискриминант квадратного трёхчлена неотрицателен, то выкладки (5) можно продолжить:

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) =$$

$$= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right) = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right).$$

Таким образом, если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни, то он раскладывается на множители: $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$. В случае $D = 0$ корни совпадают $\left(x_1 = x_2 = x_0\right)$, и тогда получаем

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_0\right)^2.$$

Заметим, что если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни, то

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Полученный результат называют *теоремой Виета*. Для приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ теорема Виета выглядит так: если есть корни x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 = -p,\ x_1 x_2 = q.$

Имеет место и *теорема, обратная теореме Виета:*
если числа x_1 и x_2 удовлетворяет условиям $x_1 + x_2 = p,\ \ x_1 \cdot x_2 = q,$ то эти числа являются корнями уравнения $x^2 - px + q = 0.$ Доказательство этой теоремы – это один из контрольных вопросов Задания. Иногда для краткости обе теоремы Виета (прямую и обратную) называют просто теорема Виета.

Пример 2. Решите уравнение:

а) $x^2 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{17}\right)x + \sqrt{51} = 0;$ б) $2016x^2 + 2017x + 1 = 0;$

в) $\sqrt{3}x^2 + \left(5 - 2\sqrt{3}\right)x + \left(\sqrt{3} - 5\right) = 0;$

Решение: а) По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = -\sqrt{17} -$ корни данного уравнения.

Ответ: $x = -\sqrt{3};\ x = -\sqrt{17}.$

б) Заметим, что $x_1 = -1$ является корнем данного уравнения. Значит, уравнение имеет корни, и, по теореме Виета, их произведение $x_1 \cdot x_2 = 1/2016$, откуда $x_2 = -1/2016$.

Ответ: $x = -1;\ x = -1/2016$.

в) Заметим, что $x_1 = 1$ является корнем (*это легко видеть, т. к. сумма всех коэффициентов в уравнении равна нулю*). Из условия $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\sqrt{3} - 5}{\sqrt{3}}$ получаем, что $x_2 = 1 - \dfrac{5}{\sqrt{3}}.$

Ответ: $x = 1;\ x = 1 - \dfrac{5}{\sqrt{3}}.$

Пример 3. Найдите наибольшее значение выражения $4 + 7x - 3x^2.$

Решение будем осуществлять *методом выделения полного квадрата*.

$$4+7x-3x^2=-3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+4=-3\left(x^2-2\cdot\frac{7}{6}x+\frac{49}{36}-\frac{49}{36}\right)+4=$$

$$=-3\left(\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}\right)+4=-3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{49}{12}+4=-3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{97}{12}.$$

$-3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2\le 0$ при всех x, поэтому максимальное значение выражения достигается, если $-3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2=0.$ Значит, это максимальное значение равно $\frac{97}{12}$ (при $x=\frac{7}{6}$).

Ответ: $\frac{97}{12}$.

Пример 4. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0.$ Выразите $x_1{}^2+x_2{}^2$ через коэффициенты уравнения.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a},$ $x_1x_2=\frac{c}{a}.$ Преобразуем $x_1{}^2+x_2{}^2$, *выделяя полный квадрат*:

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1\cdot x_2-2x_1\cdot x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1\cdot x_2.$$

Отсюда $x_1{}^2+x_2{}^2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}.$

Ответ: $\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

Пример 5. Решите уравнения с параметром

а) $ax^2+1=0;$

б) $\left(a-5\right)x^2-2ax+a-4=0.$

Решение. Уравнения кроме неизвестной x содержат букву a, обозначающую заданное число, **– параметр.** Решить такое уравнение – это значит, **для каждого допустимого значения параметра *a***, указать обоснованно все решения или доказать, что решений нет.

а) $ax^2+1=0\Leftrightarrow ax^2=-1.$

Если $a=0,$ то уравнение принимает вид $0\cdot x^2=-1.$ Полученное равенство невозможно ни при каких x – решений нет.

Если $a \neq 0,$ то $x^2 = -\frac{1}{a}$ и возможны подслучаи.

При $a > 0$ правая часть – отрицательное число, а левая при любых действительных значениях x – не отрицательное, т. е. при $a > 0$ решений нет.

При $a < 0$ правая часть $-\frac{1}{a} > 0$ и $x^2 = -\frac{1}{a} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{-\frac{1}{a}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{1}{a}}.$

Ответ: если $a \geq 0,$ то решений нет; если $a < 0,$ то $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{a}}.$

б) $(a-5)x^2 - 2ax + a - 4 = 0.$

При $a = 5$ данное уравнение не квадратное:

$-10x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$ – единственное решение.

При $a \neq 5$ уравнение квадратное и вычисляем дискриминант

$$D_1 = a^2 - (a-5)(a-4) = 9a - 20.$$

Если $9a - 20 < 0,$ т. е. $a < \frac{20}{9},$ то уравнение решений не имеет.

Если $9a - 20 = 0,$ т. е. $a = \frac{20}{9},$ то уравнение имеет одно решение $x_0 = \frac{a}{a-5} = -\frac{4}{5}$ кратности два.

Если $9a - 20 > 0,$ т. е. $a > \frac{20}{9},$ но $a \neq 5,$ то $D_1 > 0$ и уравнение имеет два решения $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{9a-20}}{a-5}.$

Ответ: $\varnothing$ при $a < \frac{20}{9};$ $-\frac{4}{5}$ при $a = \frac{20}{9};$ $\frac{1}{10}$ при $a = 5;$ $\frac{a \pm \sqrt{9a-20}}{a-5}$ при $a \in \left(\frac{20}{9}; 5\right) \cup (5; +\infty).$

Заметим, что при решении задачи 5б) дискриминант D_1 получился линейным выражением от a. Часто в таких задачах дискриминант является квадратным трёхчленом и тогда возникает необходимость в умении решать квадратные неравенства.

Поэтому давайте обсудим приёмы решения квадратных неравенств. Для этого вспомним, что функция вида $y = ax^2 + bx + c,$ где $a \neq 0,$ называется квадратичной функцией. Графиком квадратичной функции является парабола.

Квадратными неравенствами называются неравенства вида: $ax^2+bx+c\geq 0,$ $ax^2+bx+c>0,$ $ax^2+bx+c\leq 0,$ $ax^2+bx+c<0,$ где $a\neq 0.$ Для их решения **полезно** знать расположение графика квадратичной функции относительно оси абсцисс. Оно определяется знаками коэффициента a и дискриминанта D квадратного трёхчлена.

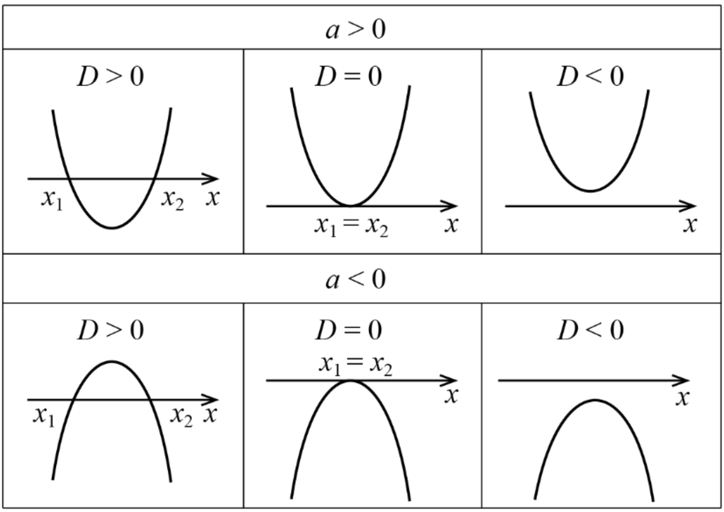
1) Если $a>0,$ то ветви параболы $y=ax^2+bx+c$ направлены вверх, а если $a<0,$ то, соответственно, вниз.

2) а) Если $D>0,$ то квадратное уравнение $ax+bx+c=0$ имеет два различных действительных корня, и, следовательно, парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.

б) Если $D=0,$ то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет один корень, и, следовательно, парабола касается оси абсцисс.

в) Если $D<0,$ то уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней, и, следовательно, парабола не пересекается с осью Ox, а, значит, она целиком лежит либо выше оси абсцисс, либо ниже её.

Полученные выводы систематизируем в таблице.



Для решения любого квадратного неравенства достаточно знать, как расположен график квадратичной функции относительно оси абсцисс, и чему равны корни квадратного уравнения (в случае, когда $D\geq 0$).

Алгоритм решения квадратного неравенства $ax^2+bx+c\geq 0\left(>,\leq,<\right).$

1. Найти дискриминант квадратного трёхчлена D.

2. В случае, когда $D \geq 0$, найти корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

3. Учитывая знаки a и D, изобразить схематически график функции $y=ax^2+bx+c$.

4. Найти множество решений квадратного неравенства.

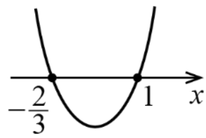
Пример 6. Решите неравенства:

а) $3x^2-x-2\geq 0$; б) $2x-3-x^2<0$; в) $2x-\frac{1}{2}x^2-2\geq 0$;

г) $3x^2+1\leq 0$; д) $x^2<4$.

Решение. а) $3x^2-x-2\geq 0$.

1. Находим дискриминант $D=1+4\cdot 3\cdot 2=25>0$.

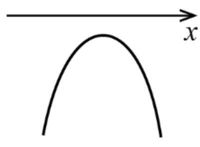


2. Поскольку $D>0$, то находим корни $x_{1,2}=\frac{1\pm 5}{6}$, т. е. $x_1=1$, $x_2=-\frac{2}{3}$.

3. Учитывая, что $a=3>0$ и $D>0$, делаем эскиз графика квадратичной функции $y=3x^2-x-2$ (см. таблицу).

4. Так как требуется решить неравенство $3x^2-x-2\geq 0$, то решением его будут все абсциссы точек параболы, лежащих либо выше оси Ox, либо на оси. Следовательно, множество решений неравенства $3x^2-x-2\geq 0$ есть объединение промежутков $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup[1;+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup[1;+\infty)$.



б) Решением этого неравенства уже оформим кратко.

$$2x-3-x^2<0,\quad D_1=1-1\cdot 3=-2<0.$$

Следовательно, уравнение $2x-3-x^2=0$ не имеет корней.

Эскиз: $a=-1<0$; $D<0$.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

в) $2x-\frac{1}{2}x^2-2\geq 0$. Для удобства вычислений умножим неравенство на (-2) и будем искать решения равносильного неравенства $x^2-4x+4\leq 0$.

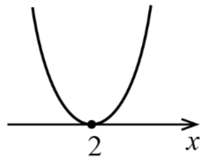
Заметим, что левая часть является полным квадратом, то есть неравенство можно переписать в виде $(x-2)^2 \le 0.$

Квадрат действительного числа не может быть отрицательным, то неравенство $(x-2)^2 \le 0$ может выполняться только тогда, когда $(x-2)^2 = 0,$ т. е. при $x=2.$

Ответ: $x=2.$

Замечание. Если использовать алгоритм, то рисуем эскиз

$$a=1>0,\ x_1=x_2=2\ (D=0).$$



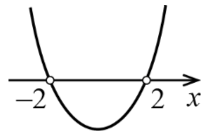
В ответ записываем абсциссы тех точек квадратичной функции $y=x^2-4x+4,$ которые не положительны, а это только $x=2.$

г) Заметим, что $3x^2+1\ge 1.$ Следовательно, неравенство $3x^2+1\le 0$ решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$

д) $x^2<4 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)<0 \Leftrightarrow a=1>0;\ D>0.$

Ответ: $(-2;2).$



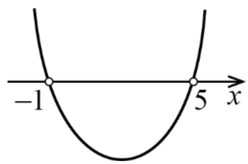
Отметим, что точки графика с абсциссами $x=2$ и $x=-2$ мы нарисовали выколотыми, поскольку решали строгое неравенство и эти x решениями не являются.

Пример 7. Решить уравнение $5(4-a)x^2-10x-a=0.$

Решение. При $4-a=0,$ т. е. $a=4$ уравнение не квадратное: $-10x-4=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{5}.$

При $a\ne 4$ находим дискриминант

$D_1=25+a\cdot 5(4-a)=-5(a^2-4a-5)$



1. $D_1<0,$ т. е. $a^2-4a-5>0.$ По обратной теореме Виета 5 и -1 корни уравнения

$a^2-4a-5>0 \Leftrightarrow (a+1)(a-5)>0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty).$

При $a\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$ уравнение решений не имеет.

2. $D_1=0,$ т. е. $a^2-4a-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5, \\ a=-1. \end{array}\right.$

Уравнение имеет один корень $x=\dfrac{5}{5(4-a)}$ кратности два.

$a=5,\ \ x=-1;\ \ a=-1\ \ x=\dfrac{1}{5}.$

3. $D>0$ т. е. $a^2-4a-5<0 \Leftrightarrow a\in(-1;5)$ и $a\neq 4.$

Уравнение имеет два корня, вычисляемые по формуле

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+20a-5a^2}}{5(4-a)}.$$

Ответ: если $a\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty),$ то решений нет;

если $a=5,$ то $x=-1;$

если $a=-1,$ то $x=\dfrac{1}{5};$

если $a=4,$ то $x=-\dfrac{2}{5};$

если $a\in(-1;4)\cup(4;5),$ то $x=\dfrac{5\pm\sqrt{25+20a-5a^2}}{5(4-a)}.$

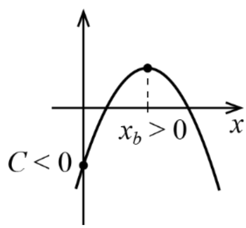
Пример 8. По виду графика функции $y=ax^2+bx+c$ определите знаки коэффициентов *a, b, c*.

Решение. Ветви параболы направлены вниз, это возможно лишь при $a<0.$

Парабола пересекает отрицательную полуось *Oy*, значит, $c=y(0)<0.$

Выделяя полный квадрат $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{D}{4a},$ получаем,

что абсцисса вершины параболы $x_b=-\dfrac{b}{2a}$ (это абсцисса точки, в которой квадратичная функция принимает наименьшее / наибольшее значение). Абсцисса вершины данной параболы, как видно, положительна: $x_b=-\dfrac{b}{2a}>0,$ откуда $\dfrac{b}{a}<0,$ и т. к. $a<0,$ то $b>0.$



Ответ: $a<0,\ b>0,\ c<0.$

§3. Многочлены

Многочленом с одной переменной называется выражение вида

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \left(a_n \neq 0\right). \qquad (8)$$

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – это *коэффициенты* многочлена; a_n называют *старшим коэффициентом*, a_0 – *свободным членом*.

Степенью многочлена называют наибольшую степень переменной, входящую в многочлен.

Например, степень многочлена $P = x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 1$ равна 4; степень многочлена $25 + x^5 - 3x$ равна 5; степень многочлена 17 равна 0, т. к. переменная в это выражение не входит; наконец, выражение $3x^2 + x + 5 + \dfrac{2}{x}$ многочленом не является, поэтому о его степени говорить бессмысленно. Многочлен $P(x) = 0$ называют нулевым многочленом. Степень нулевого многочлена не определена.

Два многочлена называются *равными*, если равны все их коэффициенты. Многочлен равен нулю, если все его коэффициенты равны нулю.

Число α называется *корнем многочлена* $F(x)$, если $F(\alpha) = 0$.

Приведём основные сведения о многочленах.

Теорема 1. (*Деление многочленов с остатком*) (без доказательства). Для любых двух многочленов $F(x)$ и $G(x)$ существует единственная пара многочленов $P(x)$ (*частное*) и $Q(x)$ (*остаток*) такая, что $F(x) = G(x)\cdot P(x) + Q(x)$, причём степень остатка $Q(x)$ меньше степени делителя $G(x)$, или $Q(x)$ есть нулевой многочлен. Покажем, как на практике находят частное и остаток от деления многочленов.

Пример 9. Разделите с остатком многочлен

$$F(x) = 18x^5 + 27x^4 - 37x^3 - 14x + 20$$

на многочлен $G(x) = 2x^2 + 3x - 5$.

Решение. Процедура деления многочленов очень похожа на деление целых чисел. Если степень делимого не меньше степени делителя, то делаем следующее: делим старший член многочлена $F(x)$ на старший член многочлена $G(x)$, получившийся результат записываем в частное.

Умножаем результат на весь делитель $G(x)$ и вычитаем полученное из исходного многочлена $F(x)$. После этих действий член со старшей степенью x сокращается. Если в результате вычитания у оставшегося многочлена степень не меньше, чем степень делителя, то можно сделать ещё один шаг деления и т. д.

Деление закончится тогда, когда степень делимого будет меньше степени делителя. В случае, когда в делимом отсутствуют некоторые степени переменных, для удобства записи лучше оставить пустые места для соответствующих членов (хотя это не обязательно).

Вернёмся к нашему примеру. Первый член частного равен $\dfrac{18x^5}{2x^2}=9x^3$. При умножении на делитель $2x^2+3x-5$ получаем $18x^5+27x^4-45x^3$. После вычитания из исходного многочлена от него остаётся $8x^3-14x+20$. Степень многочлена, оставшегося после вычитания, равна 3. Это больше степени делителя, поэтому можно сделать следующий шаг деления. Делим $8x^3$ на $2x^2$ и получаем $4x$, умножаем $4x$ на $2x^2+3x-5$, получаем $8x^3+12x^2-20$; вычитаем этот многочлен из $8x^3-14x+20$ и т. д.

$$
\begin{array}{l|l}
18x^5+27x^4-37x^3+0\cdot x^2-14x+20 & \underline{2x^2+3x-5} \\
\underline{18x^5+27x^4-45x^3} & 9x^3+4x-6 \\
\qquad\qquad 8x^3+0\cdot x^2-14x & \\
\qquad\qquad \underline{8x^3+12x^2-20x} & \\
\qquad\qquad\qquad -12x^2+6x+20 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-12x^2-18x+30} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 24x-10 &
\end{array}
$$

Ответ: частное равно $9x^3+4x-6$; остаток равен $24x-10$.

Замечание. Таким образом, $18x^5+27x^4-37x^3-14x+20=$ $=\left(2x^2+3x-5\right)\left(9x^3+4x-6\right)+\left(24x-10\right)$.

Теорема 2. (*Теорема Безу и следствия из неё*).

1) Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $F\left(x\right)$ на многочлен $\left(x-\alpha\right)$ равен $F\left(\alpha\right)$.

2) Число α является корнем многочлена $F(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен $F(x)$ делится на многочлен $(x-\alpha)$.

3) Два различных действительных числа α и β являются корнями многочлена $F(x)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен делится на $(x-\alpha)(x-\beta)$.

4) Многочлен степени n не может иметь более n корней.

Доказательство. 1) Разделим с остатком многочлен $F(x)$ на многочлен $(x-\alpha)$. Тогда остаток либо равен нулю, либо является многочленом нулевой степени (т. к. степень остатка меньше степени делителя, а степень делителя равна 1). Поэтому можно записать, что

$$F(x)=(x-\alpha)G(x)+C \tag{9}$$

Через $G(x)$ здесь обозначено частное от деления, вид которого нас не интересует.

Равенство (9) верно при всех значениях x. Подставим в него $x=\alpha$.

Тогда $F(\alpha)=(\alpha-\alpha)G(\alpha)+C$, или $F(\alpha)=C$.

Подставим $C=F(\alpha)$ в (9) и получим

$$F(x)=(x-\alpha)G(x)+F(\alpha). \tag{10}$$

Первая часть доказана.

2) Из (10) следует, что $F(x)$ делится на $(x-\alpha)$ тогда и только тогда, когда $F(\alpha)=0$, т. е. тогда и только тогда, когда α есть корень многочлена $F(x)$.

3) $\alpha -$ корень $F(x) \Rightarrow F(x)$ делится на $(x-\alpha) \Rightarrow F(x)=$ $=(x-\alpha)G(x)$. Подставим в последнее равенство (которое верно для всех значений переменной x) $x=\beta$. Тогда $F(\beta)=(\beta-\alpha)G(\beta)$. $F(\beta)=0$ (т. к. $\beta -$ корень $F(x)$), поэтому $(\beta-\alpha)G(\beta)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow G(\beta)=0$ (т. к. $\beta\neq\alpha$); отсюда $G(x)$ делится на $(x-\beta)$, т. е. $G(x)=H(x)\cdot(x-\beta)$. Подведём итог:

$F(x)=(x-\alpha)G(x)=(x-\alpha)(x-\beta)H(x)$, т. е. $F(x)$ делится на $(x-\alpha)(x-\beta)$.

Обратное очевидно. Если $F(x)$ делится на $(x-\alpha)(x-\beta)$, то $F(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot G(x)$ и α и β являются корнями $F(x)$ по пункту 2).

4) Теперь становится понятным, что многочлен степени n не может иметь больше, чем n корней.

Пример 10. Остатки от деления многочлена $F(x)$ на многочлены $(x-3)$ и $(x+5)$ равны 2 и (-9) соответственно. Найдите остаток от деления многочлена $F(x)$ на многочлен $x^2+2x-15$.

Решение. Заметим, что $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$.

По теореме Безу $F(3)=2$; $F(-5)=-9$.

Поделим $F(x)$ с остатком на $x^2+2x-15$:

$$F(x)=\left(x^2+2x-15\right)G(x)+r(x).$$

Степень остатка не превосходит степени делителя, поэтому остаток – это либо многочлен первой степени, либо нулевой степени, либо равен нулю. В любом случае, остаток представим в виде $r(x)=ax+b$ (если $a\neq 0,$ то получим многочлен первой степени; если $a=0,$ $b\neq 0,$ то будет многочлен нулевой степени; если $a=b=0,$ то получим нулевой многочлен). Итак,

$$F(x)=\left(x^2+2x-15\right)G(x)+ax+b. \qquad (11)$$

Подставим в равенство (11) $x=3$ и $x=-5$:

$F(3)=0\cdot G(3)+3a+b;$ $F(-5)=0\cdot G(-5)-5a+b,$ откуда $\begin{cases}3a+b=2,\\-5a+b=-9.\end{cases}$

Решая эту систему, находим, что $a=\dfrac{11}{8},\quad b=-\dfrac{17}{8}.$

Ответ: остаток равен $\dfrac{11}{8}x-\dfrac{17}{8}.$

Пример 11. Докажите, что

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=4. \qquad (12)$$

Решение. Пусть $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=x.$ Возведём обе части этого равенства в куб и преобразуем:

$$26-15\sqrt{3}+3\sqrt[3]{\left(26-15\sqrt{3}\right)^2}\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+3\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\sqrt[3]{\left(26+15\sqrt{3}\right)^2}+$$

$$+26+15\sqrt{3}=x^3;$$

$$52+3\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\right)=x^3;$$

$$52+3\sqrt[3]{26^2-\left(15\sqrt{3}\right)^2}\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\right)=x^3;$$

$$52+3\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\right)=x^3;\quad 52+3x=x^3;$$

$$x^3-3x-52=0. \tag{13}$$

Число $x=4$ является корнем этого уравнения. Докажем, что других корней нет (и тем самым будет доказана справедливость равенства (12)). Поскольку $x=4$ является корнем, многочлен $x^3-3x-52$ делится на $x-4$ без остатка. Выполняя деление, получаем:

$$x^3-3x-52=0 \Leftrightarrow (x-4)\left(x^2+4x+13\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ x^2+4x+13=0. \end{array}\right.$$

У квадратного трёхчлена $x^2+4x+13$ отрицательный дискриминант, поэтому уравнение (13) имеет ровно один корень $x=4$.

Пример 12. При каких a и b многочлен $F(x)=x^4+ax^3-2x^2+19x+b$ делится на многочлен x^2-3x+2?

Решение. Воспользуемся пунктом 3) теоремы 2: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Многочлен делится на $(x-1)(x-2)$ тогда и только тогда, когда $x=1$ и $x=2$ являются корнями многочлена. То есть,

$$\begin{array}{l} F(1)=1+a-2+19+b=0, \\ F(2)=16+8a-8+38+b=0, \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 18+a+b=0, \\ 46+8a+b=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4, \\ b=-14. \end{cases}$$

Ответ: $a=-4,\ b=-14$.

Замечание. Из правила «деления уголком» непосредственно видно, что если $F(x)$ и $G(x)$ многочлены с целыми коэффициентами, причём старший коэффициент $G(x)$ равен единице, то и частное и остаток являются многочленами с целыми коэффициентами.

Пример 13. Доказать, что число $2^{35}+1$ делится на 11.

Решение. Рассмотрим многочлен $F(x)=x^7+1$; поскольку $F(-1)=0$, то $F(x)=(x+1)\cdot Q(x)$, причём $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами (по замечанию выше). Следовательно, $F\left(2^5\right)=2^{35}+1$ делится на $2^5+1=33$, то есть делится на 11 и на 3.

§4. Некоторые приёмы решения алгебраических уравнений

Нам уже известны формулы для решения квадратных уравнений. А что делать, если встретится уравнение более высокой степени? Оказывается, что для уравнений третьей и четвёртой степени есть формулы, позволяющие найти корни (но они редко используются на практике ввиду их громоздкости), а для уравнений пятой степени и выше доказано, что таких формул не существует. Таким образом, у нас не выйдет в общем случае решить уравнение третьей или более высокой степени. Но существует ряд приёмов, позволяющих решить некоторые специальные виды уравнений. К их рассмотрению мы сейчас и перейдём.

Пример 14. Решите уравнение: $x^3+4x^2-2x-3=0$.

Решение: Заметим, что $x=1$ является корнем уравнения (*значение многочлена при* $x=1$ *равно сумме коэффициентов многочлена*). Тогда по теореме Безу многочлен x^3+4x^2-2x-3 делится на многочлен $x-1$. Выполнив деление, получаем: $x^3+4x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+5x+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x^2+5x+3=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=1;\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Обычно кубические уравнения решают именно так: подбирают один корень, выполняют деление уголком, после чего остаётся решить только квадратное уравнение. А что делать, если у нас уравнение четвёртой степени? Тогда придётся подбирать корень два раза. После подбора первого корня и деления останется кубическое уравнение, у которого надо будет подобрать ещё один корень. Возникает вопрос. Что делать, если такие «простые» числа как $\pm 1,\ \pm 2$ не являются корнями уравнения? Неужели тогда надо перебирать всевозможные числа? Ответ на этот вопрос даёт следующее утверждение.

Теорема 3. Если несократимая дробь p/q (p – целое, q – натуральное) является корнем многочлена **с целыми коэффициентами**, то свободный член делится на p, а старший коэффициент делится на q.

***Доказательство.** Пусть несократимая дробь p/q – корень многочлена (8). Это означает, что

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\ldots+a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0.$$

Умножив обе части на q^n, получаем:

$$a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\ldots+a_2p^2q^{n-2}+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0.$$

Перенесём a_0q^n в правую часть, а из оставшихся слагаемых вынесем p за скобки:

$$p\left(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+a_{n-2}p^{n-3}q^2+\ldots+a_2pq^{n-2}+a_1q^{n-1}\right)=-a_0q^n. \qquad (14)$$

Справа и слева в (14) записаны целые числа. Левая часть делится на $p \Rightarrow$ правая часть также делится на p. Числа p и q взаимно просты (т. к. дробь p/q несократимая), откуда следует, что $a_0 \vdots p$.

Аналогично доказывается, что $a_n \vdots q$. Теорема доказана.

Замечание. *Как правило, предлагаемые вам уравнения имеют целые корни, поэтому в большинстве задач используется следующее: если у многочлена с целыми коэффициентами есть целые корни, то они являются делителями свободного члена.*

Пример 15. Решите уравнение

а) $x^4+4x^3-102x^2-644x-539=0;$ (15)

б) $6x^4-35x^3+28x^2+51x+10=0.$ (16)

Решение. а) Попробуем найти целые корни уравнения. Пусть p – корень. Тогда $539 \vdots p$; чтобы найти возможные значения p, разложим число 539 на простые множители: $539=7^2\cdot 11.$

Поэтому p может принимать значения:

$$\pm1, \pm7, \pm11, \pm49, \pm77, \pm539.$$

Подстановкой убеждаемся, что $x=-1$ является корнем уравнения. Разделим многочлен в левой части (15) уголком на $x+1$ и получим:

$$(x+1)\left(x^3+3x^2-105x-539\right)=0.$$

Далее подбираем корни у получившегося многочлена третьей степени. Получаем $x=-7$, а после деления на $(x+7)$ остаётся $(x+1)(x+7)\left(x^2-4x-77\right)=0$. Решая квадратное уравнение, находим окончательное разложение левой части на множители:

$$(x+1)(x+7)(x+7)(x-11)=0.$$

Ответ: $x=-7; x=-1; x=11.$

Замечания. 1. *После того, как найден первый корень, лучше сначала выполнить деление уголком, и только потом приступать к поиску последующих корней. Тогда вычислений будет меньше.*

2. *В разложении многочлена на множители множитель* $(x+7)$ *встретился дважды. Тогда говорят, что* (–7) *является корнем кратности два. Аналогично говорят о корнях кратности три, четыре и т. д.*

б) Если уравнение имеет рациональный корень $x_0=\dfrac{p}{q}$, то $10 \vdots p$, $6 \vdots q$, т. е. $p\in\{\pm1;\ \pm2;\ \pm5;\ \pm10\}$; $q\in\{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$. Возможные варианты для x_0:

$$\pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}.$$

Начинаем перебирать числа из этого списка. Первым подходит число $x=\dfrac{5}{2}$. Делим многочлен в левой части (16) на $(2x-5)$ и получаем

$$(2x-5)\left(3x^3-10x^2-11x-2\right)=0.$$

Заметим, что для получившегося кубического уравнения выбор рациональных корней заметно сузился, а именно, следующие числа могут быть корнями: $x_0=\pm1,\ \pm2,\ \pm\dfrac{1}{3},\ \pm\dfrac{2}{3}$, причём мы уже знаем, что числа ±1 и ±2 корнями не являются (так как мы их подставляли раньше, и они не подошли). Находим, что $x=-\dfrac{2}{3}$ – корень; делим $3x^3-10x^2-11x-2$ на $3x+2$ и получаем:

$$(2x-5)(3x+2)\left(x^2-4x-1\right)=0.$$

Решаем квадратное уравнение: $x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{5}.$

Ответ: $x=\frac{5}{2};\ x=-\frac{2}{3};\ x=2\pm\sqrt{5}.$

К сожалению, уравнения не всегда имеют рациональные корни. Тогда приходится прибегать к другим методам.

Пример 16. Разложите на множители:

а) $x^4+4;$

б)* $x^3-3x^2-3x-1;$

в) $x^4-x^3+2x^2-2x+4;$

г)* $x^4-4x^3-20x^2+13x-2.$

Решение.

а) $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-\left(2x\right)^2=\left(x^2+2-2x\right)\left(x^2+2+2x\right).$

Замечание. Таким образом, сумму четвёртых степеней, в отличие от суммы квадратов, можно разложить на множители:

$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=\left(a^2-\sqrt{2}ab+b^2\right)\left(a^2+\sqrt{2}ab+b^2\right).$$

б)* $x^3-3x^2-3x-1=2x^3-\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=\left(\sqrt[3]{2}x\right)^3-\left(x+1\right)^3=$

$$=\left(\sqrt[3]{2}x-x-1\right)\left(\sqrt[3]{4}x^2+\sqrt[3]{2}x\left(x+1\right)+\left(x+1\right)^2\right).$$

в) Вынесем x^2 за скобки и сгруппируем:

$$x^4-x^3+2x^2-2x+4=x^2\left(x^2-x+2-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=x^2\left(\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-\left(x+\frac{2}{x}\right)+2\right).$$

Обозначим $x+\frac{2}{x}=t.$ Тогда $x^2+4+\frac{4}{x^2}=t^2,$ $x^2+\frac{4}{x^2}=t^2-4,$ выражение в скобках принимает вид:

$$t^2-4-t+2=t^2-t-2=\left(t+1\right)\left(t-2\right)=\left(x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{2}{x}-2\right).$$

В итоге получаем:

$$x^2\left(x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{2}{x}-2\right)=\left(x^2+2+x\right)\left(x^2+2-2x\right)=\left(x^2+x+2\right)\left(x^2-2x+2\right).$$

Замечание. *Этот приём иногда используется для решения уравнений четвёртой степени; в частности, с его помощью решают возвратные уравнения* (см. пример 17е).

г)* Можно убедиться, что никакой из рассмотренных выше методов не помогает решить задачу, а именно: рациональных корней уравнение не имеет (числа ± 1 и ± 2 – не корни); вынесение числа x^2 за скобки и группировка слагаемых приводит к выражению

$$x^2\left(x^2-\frac{2}{x^2}-\left(4x-\frac{13}{x}\right)-20\right).$$

Если здесь обозначить $4x-\dfrac{13}{x}=t,$ то $x^2-\dfrac{2}{x^2}$ через t рационально не выражается.

Прибегнем к *методу неопределённых коэффициентов*. Пусть

$$x^4-4x^3-20x^2+13x-2=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right). \qquad (17)$$

Попробуем подобрать коэффициенты a, b, c, d так, чтобы (17) обратилось в верное равенство. Для этого раскроем скобки в правой части и приведём подобные слагаемые:

$$x^4-4x^3-20x^2+13x-2=x^4+\left(a+c\right)x^3+\left(b+ac+d\right)x^2+\left(ad+bc\right)x+bd. \quad (18)$$

Приравняем в (18) коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях уравнения. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a+c=-4, \\ b+ac+d=-20, \\ ad+bc=13, \\ bd=-2. \end{cases} \qquad (19)$$

Мы будем пытаться найти целочисленные решения системы (19). Найти все решения системы (19) не проще, чем решить исходную задачу, однако нахождение целочисленных решений – разумеется, если они есть – нам по силам.

Рассмотрим четвёртое уравнение. Возможны только два принципиально различных случая:

1) $b=1$ и $d=-2$; 2) $b=2$ и $d=-1$. Рассмотрим каждый из них. Подставляем значения b и d в первые три уравнения:

1) $\begin{cases} a+c=-4, \\ ac=-19, \\ -2a+c=13. \end{cases}$ Из первого и третьего уравнений системы получаем $c=\dfrac{5}{3};\quad a=-\dfrac{17}{3},$ что не удовлетворяет второму уравнению, поэтому система решений не имеет; пара чисел $b=1$ и $d=-2$ не подходит.

2) $\begin{cases} a + c = -4, \\ ac = -21, \\ -a + 2c = 13. \end{cases}$ Эта система имеет одно решение $a = -7, c = 3.$

Значит, числа $a = -7, b = 2, c = 3, d = -1$ являются решением системы (19), поэтому $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2 = \left(x^2 - 7x + 2\right)\left(x^2 + 3x - 1\right).$

Далее каждый из квадратных трёхчленов можно разложить на множители.

Во многих ситуациях степень уравнения можно понизить с помощью замены переменных.

Пример 17. Решите уравнение:

а) $\left(x-4\right)^2 + \left|x-4\right| - 2 = 0;$ б) $\left(x-7\right)^4 + \left(x+1\right)^4 = 706;$

в) $\dfrac{1}{x^2+2x-3} + \dfrac{18}{x^2+2x+2} = \dfrac{18}{(x+1)^2};$

г) $\left(x-2\right)\left(x-4\right)\left(x+5\right)\left(x+7\right) = 360;$

д) $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7} + \dfrac{3x}{4x^2-10x+7} = 1;$

е) $25x^4 - 150x^3 + 94x^2 + 150x + 25 = 0.$

Решение. а) Обозначим $\left|x-4\right| = t.$ Тогда $\left(x-4\right)^2 = t^2$ и получаем

$$t^2 + t - 2 = 0, \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Если $t = -2,$ то решений нет.

Если $t = 1,$ то $\left|x-4\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 5. \end{array}\right.$

Ответ: $x = 3; x = 5.$

б) Обозначим $x - 3 = t.$ Тогда получим

$$\left(t-4\right)^4 + \left(t+4\right)^4 = 706 \Leftrightarrow \left(t^4 - 16t^3 + 96t^2 - 256t + 256\right) +$$

$$+\left(t^4 + 16t^3 + 96t^2 + 256t + 256\right) = 706 \Leftrightarrow 2t^4 + 192t^2 - 194 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 96t^2 - 97 = 0 \Leftrightarrow \left(t^2 - 1\right)\left(t^2 + 97\right) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Значит, $x_1 = 4, x_2 = 2.$

Ответ: $x = 2, x = 4.$

Замечание. *Уравнения вида* $(x-a)^4+(x-b)^4=c$ *с помощью замены* $x-\dfrac{(a+b)}{2}=t$ *сводятся к биквадратным.*

в) Обозначим $x^2+2x+1=t.$ Тогда $\dfrac{1}{t-4}+\dfrac{18}{t+1}=\dfrac{18}{t}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2+t+18\left(t^2-4t\right)=18\left(t^2-3t-4\right)\\ t(t+1)(t-4)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-17t+72=0,\\ t(t+1)(t-4)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&t=8,\\ &t=9.\end{aligned}\right.$$

Теперь найдём x: $\left[\begin{aligned}&(x+1)^2=8,\\ &(x+1)^2=9\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x+1=\pm2\sqrt{2},\\ &x+1=\pm3\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-1-2\sqrt{2},\\ &x=-1+2\sqrt{2},\\ &x=2,\\ &x=-4.\end{aligned}\right.$

Ответ: $x=-1\pm2\sqrt{2};\ x=2;\ x=-4.$

г) Перемножим первую скобку с третьей, а вторую с четвёртой (убедитесь сами, что только такая группировка сомножителей помогает свести уравнение к квадратному).

$$\big((x-2)(x+5)\big)\cdot\big((x-4)(x+7)\big)=360\Leftrightarrow\left(x^2+3x-10\right)\left(x^2+3x-28\right)=360.$$

Обозначим $x^2+3x-19=t.$ Тогда уравнение принимает вид:

$(t+9)(t-9)=360\Leftrightarrow t^2=441\Leftrightarrow t=\pm21,$ откуда

$$\left[\begin{aligned}&x^2+3x-19=21,\\ &x^2+3x-19=-21\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x^2+3x-40=0,\\ &x^2+3x+2=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=5,\\ &x=-8,\\ &x=-1,\\ &x=-2\end{aligned}\right.$$

Ответ: $x=-8;\ x=-2;\ x=-1;\ x=5.$

д) Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x ($x=0$ не является решением уравнения):

$\dfrac{4}{4x-8+\dfrac{7}{x}}+\dfrac{3}{4x-10+\dfrac{7}{x}}=1.$ Обозначим $4x+\dfrac{7}{x}-8=t.$ Тогда

$$\frac{4}{t}+\frac{3}{t-2}=1\Leftrightarrow\begin{cases}4(t-2)+3t=t^2-2t,\\ t(t-2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-9t+8=0,\\ t(t-2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&t=1,\\ &t=8.\end{aligned}\right.$$

Теперь найдём x: $\left[\begin{aligned} &4x+\frac{7}{x}-8=1, \\ &4x+\frac{7}{x}-8=8 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &4x^2-9x+7=0, \\ &4x^2-16x+7=0. \end{aligned}\right.$

Уравнение $4x^2-9x+7=0$ не имеет решений, а у уравнения $4x^2-16x+7=0$ корнями являются числа $x=\frac{7}{2}$ и $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{7}{2}$.

е) $x\neq 0$ (убеждаемся подстановкой), поэтому при делении обеих частей уравнения на x^2 получим уравнение, равносильное исходному:

$$25x^2-150x+94+150\cdot\frac{1}{x}+25\cdot\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(25x^2+25\cdot\frac{1}{x^2}\right)-\left(150x-150\cdot\frac{1}{x}\right)+94=0 \Leftrightarrow 25\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-150\left(x-\frac{1}{x}\right)+94=0.$$

Обозначим $x-\frac{1}{x}=t$. Тогда $t^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$. Подставляем и решаем уравнение относительно t:

$$25\left(t^2+2\right)-150t+94=0 \Leftrightarrow 25t^2-150t+144=0 \Leftrightarrow 5t^2-30t+\frac{144}{5}=0.$$

Коэффициент при t чётный; по формуле четверти дискриминанта:

$\frac{D}{4}=15^2-5\cdot\frac{144}{5}=225-144=81;\ t_1=\frac{15+9}{5}=\frac{24}{5};\ t_2=\frac{15-9}{5}=\frac{6}{5}.$

Теперь найдём x:

$$\left[\begin{aligned} &x-\frac{1}{x}=\frac{24}{5} \\ &x-\frac{1}{x}=\frac{6}{5} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &5x^2-24x-5=0 \\ &5x^2-6x-5=0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=-\frac{1}{5}; \\ &x=5; \\ &x\frac{3\pm\sqrt{34}}{5}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: 5; $-\frac{1}{5}$; $\frac{3\pm\sqrt{34}}{5}$.

Замечания. 1) *Уравнения вида* $ax^4+bx^3+cx^2\pm bx+a=0$ *называются возвратными. Для их решения делят обе части уравнения на* x^2 *и вводят замену* $x\pm\frac{1}{x}=t.$

2) *Некоторые другие уравнения четвёртой степени решаются с помощью замены* $ax+\frac{b}{x}=t.$ (См. пример 16в).

Контрольные вопросы

1(1). Запишите формулы корней квадратного уравнения $ax^2+2b_1x+c=0,\ a\neq 0$ и решите уравнение $49x^2-70x+16=0.$

2(1). Числа 4 и 5 – корни уравнения $2x^2+bx+c=0.$ Верно ли, что дискриминант этого уравнения больше 5?

3(2). Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет ненулевые корни x_1 и x_2. Запишите квадратное уравнение с корнями $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ (укажите ограничения на коэффициенты a, b, c).

4(1). Выделяя полный квадрат, найдите наибольшее значение квадратного трёхчлена $3+5x-2x^2$ (укажите $x_{\text{наиб.}}$).

5*(2). Докажите формулы «двойного радикала»: если $a>0, b>0$ и $a^2-b>0,$ то

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

6(1). Используя формулу из контрольного вопроса 5, освободитесь от внешнего радикала в выражении $\sqrt{94-\sqrt{8820}}.$

7(1). Выберите верные утверждения:

1) $(x+1)(3x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0,\\3x-2=0;\end{array}\right.$

2) $(x+1)(3x-2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=0,\\3x-2=0;\end{cases}$

3) $(x+1)(3x-2)\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1\neq 0, \\ 3x-2\neq 0; \end{array}\right.$

4) $(x+1)(3x-2)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\neq 0, \\ 3x-2\neq 0. \end{cases}$

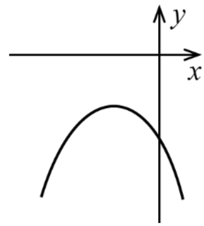


Рис. 1

8(1). По виду параболы $y=ax^2+bx+c$, изображённой на рис. 1, определить знаки коэффициентов $a, b, c.$

9(2). Докажите *теорему, обратную теореме Виета.*

Если числа x_1 и x_2 удовлетворяет условиям $x_1+x_2=p,\ \ x_1\cdot x_2=q,$ то эти числа являются корнями уравнения $x^2-px+q=0.$

10(4). Разделите с остатком многочлен $F(x)$ на многочлен $G(x)$. Запишите равенство $F(x)=p(x)\cdot G(x)+r(x),$ где $p(x)-$ частное, а $r(x)-$ остаток от деления.

Проверьте справедливость этого равенства, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые в правой части.

а)(1) $F(x)=x^3+x^2+1,\ G(x)=x^4;$

б)(1) $F(x)=x^5+x-1,\ G(x)=3x^5+x^2-2;$

в)(2) $F(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6,\ G(x)=x^2-3x.$

11(2). Запишите теорему Безу. Найдите остаток от деления многочлена $F(x)=4x^3+19x^2-3x+8$ на $(x+5)$. Сделайте проверку, выполнив деление уголком $F(x)$ на $(x+5)$.

12(1). Не выполняя деление уголком, докажите, что многочлен $F(x)=3x^4-14x^3+12x^2+11x-6$ делится на квадратный трёхчлен $G(x)=x^2-5x+6.$

13(3). **а)(1)** Найдите остаток от деления многочлена $F(x)=6x^3-7x^2-17x+17$ на многочлен $G(x)=3x-5$ с помощью деления уголком.

б)(2) Докажите, что остаток от деления многочлена $F(x)$ на $G(x)=\alpha x+\beta, \alpha\neq 0$ равен $F\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$. Проверьте результат пункта а) с помощью доказанного.

Задачи

1(3). Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $3x^2+15x+2=0$. Не вычисляя их, найдите значение выражения:

а)(1) $x_1^2-3x_1x_2+x_2^2$;

б)(2) $x_1^4+x_2^4$.

Решите уравнения 2-6

2(5). а)(2) $x^4+8x^3+18x^2-27=0$;

б)(3) $2x^4-9x^3+25x^2-21x-18=0$.

3(3). $24x^4-110x^3+27x^2+110x+24=0$.

4(2). $\left(4x^2+4x-15\right)\left(x^2-4\right)=5$.

5(3). $3x^2+x=\sqrt{15x^2-x-2}$.

6(3). $\dfrac{4x}{8x^2-3x-1}+\dfrac{3x}{8x^2+2x-1}=\dfrac{3}{5}$.

7(3). Найдите остаток от деления $x^{99}-3x^{98}+x^2+1$ на x^2-4x+3.

8(2). Доказать, что число $3^{60}+1$ делится на 82.

9(4). а)(2) Докажите, что многочлен $F(x)=x^n-a^n\left(n\in\mathbb{N},a>0\right)$ делится на многочлен $(x-a)$, и найдите частное от деления.

б)(2) Докажите, что многочлен $G(x)=x^{2n-1}+a^{2n-1}\left(n\in\mathbb{N},a>0\right)$ делится на многочлен $(x+a)$, и найдите частное от деления.

10(7). Решите уравнения с параметром

а)(2) $\left(a^2-6a+5\right)x=a-1$.

б)(2) $(a-2)x^2+3ax+2(a+1)=0$;

в)(3) $a^2x^2-4x+a^2+3=0$.

11(3). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2+(2a-5)x+(a-6)=0$ имеет на отрезке $[0;2]$ единственный корень.