

293. Марс и Антарес

Каким должно быть фокусное расстояние наземного телескопа с апертурой 20 см, чтобы количество энергии, приходящее от Марса и Антареса (1.1^m) на один пиксель ПЗС-матрицы, было одинаковым? Считать Марс находящимся в великом противостоянии: его блеск -2.9^m , расстояние до Земли 56 млн км. Размер квадратного пикселя ПЗС-матрицы равен 10 мкм.

Решение:

Для начала найдем угловой размер Марса:

$$\alpha_M \approx \frac{D_M}{r_M} = \frac{2 \cdot 3400 \text{ км}}{56 \cdot 10^6 \text{ км}} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 25'' \quad (1)$$

Заметим, что Антарес является точечной звездой. Физически рассмотреть его диск нельзя, а его угловые размеры при наблюдении в телескоп будут определяться дифракцией и атмосферным дрожанием. Размер дифракционного диска (кружка Эри) для телескопа с диаметром объектива D равен

$$\theta_{A0} = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \frac{550 \cdot 10^{-9} \text{ м}}{20 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 0.69'' \quad (2)$$

Атмосферное дрожание увеличивает видимый диск до размера δ_A порядка $1''$. Тогда запишем равенство, при котором один пиксель ПЗС-матрицы будет получать одинаковое количество энергии, приходящее от Марса и Антареса:

$$\frac{E_M \cdot \pi \frac{D^2}{4}}{\pi(\alpha_M/2 \cdot F)^2} = \frac{E_A \cdot \pi \frac{D^2}{4}}{\pi(\alpha_A/2 \cdot F)^2} \quad (3)$$

Однако, в равенстве сокращается F , которую нужно найти. Значит условие задачи может быть выполнено, если маленькое изображение Антареса поместится в один пиксель. Тогда перепишем равенство с учетом выше сказанного:

$$\frac{E_M \cdot \pi \frac{D^2}{4}}{\pi(\alpha_M/2 \cdot F)^2} = \frac{E_A \cdot \pi \frac{D^2}{4}}{a^2} \quad (4)$$

где a – размер пикселя 10 мкм. Используем формулу Погсона для уравнения (4):

$$\frac{E_M}{\pi(\alpha_M/2 \cdot F)^2} = \frac{E_A}{a^2}$$
$$\pi(\alpha_M/2 \cdot F)^2 = a^2 \cdot \frac{E_M}{E_A} = a^2 \cdot 10^{-0.4(m_M - m_A)}$$

$$F = \sqrt{\frac{4a^2 \cdot 10^{-0.4(m_M - m_A)}}{\pi \alpha_M^2}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 180^\circ}{25'' \cdot \pi} \sqrt{\frac{10^{-0.4(-2.9 - 1.1)}}{\pi}} \text{ (м)} \approx 0.6 \text{ м}$$

Ответ: $F = 60 \text{ см}$

Пояснение к $\alpha_M/2$ в (3) и (4) уравнениях: так как угловым размером мы считаем диаметральный — α_M , то в телескопе площадь пятнышка Марса считаем через угловой радиальный размер — $\alpha_M/2$, который домножается на фокус F и получаем линейный радиус пятнышка.