Пробный тур финального этапа

11 класс

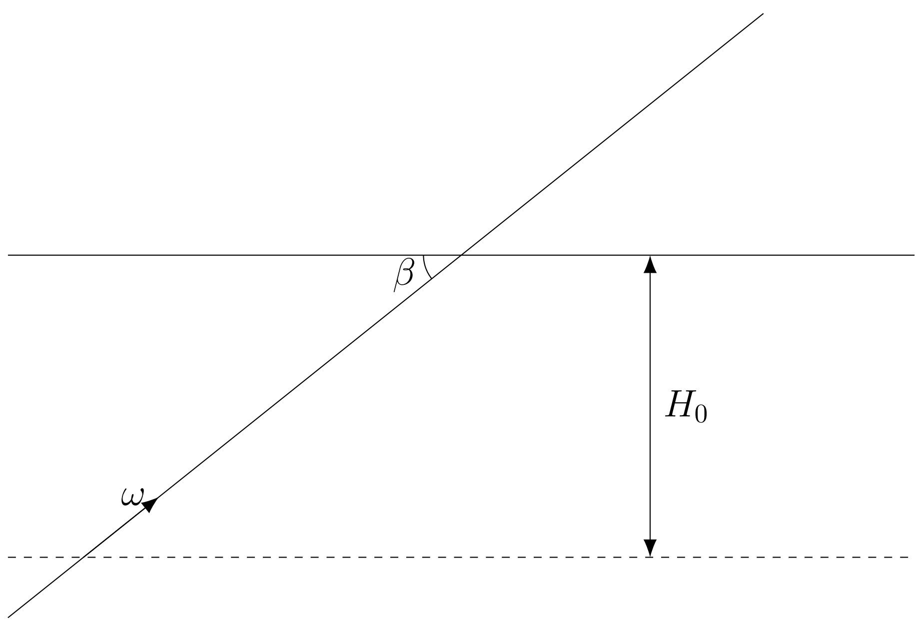
Московская область *2 марта 2022*

1. Под горизонтом 10 баллов

Определите дату с точностью до нескольких дней, когда в Левково продолжительность утренних и вечерних сумерек отличается сильнее всего.

Решение. Для решения данной задачи будем пользоваться приближением, считая, что Солнце в течение сумерек движется по прямой, не меняя свою угловую скорость и угол между между направлением движения и небесным экватором.

Теперь поймём, почему вообще изменяется длина сумерек. Во-первых меняется угловая скорость движения Солнца в течение года. Однако также меняется угол, под которым Солнце заходит и восходит, а значит меняется и длина пути, который необходимо пройти Солнцу в течение суток.



В плоском приближении видим, что длина сумерек равна:

$$t = \frac{H_0}{\omega_0 \cdot \cos\delta \sin\beta} = \frac{H_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \sin\varepsilon^2 \sin\alpha^2} \sin\beta},$$

где $H_0 = 6°, \omega_0 = 15°/h$. Чтобы понять, в какой день длительность сумерек максимально изменится, необходимо понять когда t меняется быстрее всего за время между сумерками. Её изменение за время между сумерками можно оценить так:

$$\Delta = \frac{dt}{d\alpha} \cdot T_d,$$

где T_d – длина светового дня, $\frac{dt}{d\alpha}$ – скорость изменения длительности сумерек. От нас требуется точность в несколько дней, поэтому в первом приближении изменением времени между сумерками пренебрежём. Теперь выразим угол восхода β в зависимости от склонения (в дальнейшем — даты). Для этого нам нужно посчитать $\frac{dh}{dA}$ в точке пересечения круга дневного движения Солнца и горизонта. Пусть A_0 – азимут точки восхода. Тогда мы знаем, что:

$$-\cos(A_0)\cos(\varphi) = \sin\delta.$$

Теперь запишем сферическую теорему косинусов для треугольника с полюсом мира, зенитом, и точкой на суточном круге Солнца, соседней с точкой восхода. Её координаты равны: $A_0 + dA;\ -dh$.

$$\begin{aligned}\sin(\delta) &= \sin(-dh)\sin(\varphi) - \cos(-dh)\cos(\varphi)\cos(A_0 + dA) = \\ &= -dh\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\cos(A_0)\cos(dA) + \cos(\varphi)\sin(A_0)\sin(dA) = \\ &= -\sin(\varphi)dh - \cos(\varphi)\cos(A_0) + \cos(\varphi)\sin(A_0)dA.\end{aligned}$$

Теперь подставим $\sin(\delta)$:

$$-\cos(A_0)\cos(\varphi) = -\sin(\varphi)dh - \cos(\varphi)\cos(A_0) + \cos(\varphi)\sin(A_0)dA,$$

$$\tan(\beta) = \frac{dh}{dA} = \frac{\sin(A_0)}{\sin(\varphi)} = \sqrt{\frac{1-\cos(A_0)^2}{\sin(\varphi)^2}} = \sqrt{\frac{\cos(\varphi)^2 - \sin(\delta)^2}{\sin(\varphi)^2}}.$$

Пусть:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin(\beta)\cos(\delta)}.$$

Нам нужно найти максимум этой величины, скорости изменения длины сумерек:

$$f(\alpha)' = \left(\frac{1}{\sin(\beta)\cos(\delta)}\right)'.$$

Преобразовывая $f(\alpha)$, получим:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin(\arctan(\sqrt{\frac{\cos(\varphi)^2 - \sin(\delta)^2}{\sin(\varphi)^2}}))\sqrt{1-\sin\varepsilon^2\sin\alpha^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin\varepsilon^2\sin\alpha^2}\sqrt{\frac{\frac{\cos(\varphi)^2-\sin(\delta)^2}{\sin(\varphi)^2}}{1+\frac{\cos(\varphi)^2-\sin(\delta)^2}{\sin(\varphi)^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin\varepsilon^2\sin\alpha^2}\sqrt{\frac{\frac{\cos(\varphi)^2-\sin(\delta)^2}{\sin(\varphi)^2}}{\frac{1-\sin(\delta)^2}{\sin(\varphi)^2}}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi)^2 - \sin(\delta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi)^2 - \sin(\varepsilon)^2\sin(\alpha)^2}}.$$

Нужно взять от этого производную, как от сложной функции. Получим:

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{\sin(\varepsilon)^2\sin(\alpha)cos(\alpha)}{(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varepsilon)^2\sin(\alpha)^2)^{1.5}}.$$

Теперь возьмём от этого ещё одну производную и приравняем 0. Корнем и будет то значение α, при котором изменение длины сумерек будет максимально.

$$\frac{d^2t}{d\alpha^2} = 0 = \frac{\sin(\varepsilon)^2(cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2)}{(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varepsilon)^2\sin(\alpha)^2)^{1.5}} + \frac{3\sin(\varepsilon)^4cos(\alpha)^2\sin(\alpha)^2}{(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varepsilon)^2\sin(\alpha)^2)^{2.5}}.$$

Решим это уравнение, введя замену $\sin(\delta)^2 = x$:

$$\begin{gathered}
\sin(\varepsilon)^2(2x-1)\cdot(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varepsilon)^2x) = 3\sin(\varepsilon)^4x(1-x) \\
2x\cos(56)^2 - \cos(56)^2 + \sin(\varepsilon)^2x - 2x^2\sin(\varepsilon)^2 = 3\sin(\varepsilon)^2x - 3\sin(\varepsilon)^2x^2 \\
\sin(\varepsilon)^2x^2 + x(2\cos(56)^2 - 2\sin(\varepsilon)^2) - \cos(56)^2 = 0.
\end{gathered}$$

Это — просто квадратное уравнение. Решая его получаем:

$$x \approx 0.735;\ \ \alpha \approx 59^\circ \approx \boxed{60^d}$$

То есть, максимальные изменения длины сумерек в течении дня происходят в 60 днях от точек равноденствий. На самом деле, если всё считать честно (через разность $\arccos$'инусов), получается весьма близкий ответ в 65 дней.

Рассмотрим способ учесть более сложные эффекты, а именно изменение длины светового дня. Решение задачи не предполагало учёт этих эффектов, однако интересно посмотреть на то, насколько сильно они влияют. Вернёмся к формуле:

$$\Delta = \frac{dt}{d\alpha} \cdot T_d$$

Как мы знаем $T_d = \arccos\left(\tan\left(\varphi\right)\tan\left(\arcsin\left(\sin\varepsilon\sin\alpha\right)\right)\right)$. Однако можем заметить, что арккосинус на области, в которой мы работаем (α от 0 до 90) очень неплохо приближается прямой:

$$T_d = \arccos\left(\tan\left(\varphi\right)\tan\left(\arcsin\left(\sin\varepsilon\sin\alpha\right)\right)\right) = \arccos\left(-\tan(56)\sqrt{\frac{\sin\varepsilon^2\sin\alpha^2}{1-\sin\varepsilon^2\sin\alpha^2}}\right)$$

Видим, что знаменатель под корнем очень близок к единице при всех α, арксинус примерно равен самому углу, сумма арккосинуса и арксинуса равны $\pi/2$, а значит можем ещё преобразовать:

$$T_d = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\tan\left(56\right)\sin\left(\varepsilon\right)\sin\alpha\right) = \frac{\pi}{2} + \tan\left(56\right)\sin\left(\varepsilon\right)\alpha$$

Так как нам нужен только максимум, можем поделить на $\pi/2$, и считать относительно равноденствий, на ответ это не повлияет. Получим, что:

$$T_d \sim 1 + \frac{\tan\left(56\right)\sin\left(\varepsilon\right)}{\pi/2}\alpha$$

Подставив полученный ранее результат для $\frac{dt}{d\alpha}$ можем получить:

$$\Delta = \frac{\sin\left(\varepsilon\right)^2\sin\left(\alpha\right)cos(\alpha)}{(\cos\left(\varphi\right)^2 - \sin\left(\varepsilon\right)^2\sin\left(\alpha\right)^2)^{1.5}} \cdot (1 + \frac{\tan\left(56\right)\sin\left(\varepsilon\right)}{\pi/2}\alpha)$$

Теперь возьмём из этого производную и приравняем к 0. Это и будет ответ.

$$\frac{d\Delta}{d\alpha} = 0 = (\frac{\sin\left(\varepsilon\right)^2(cos(\alpha)^2 - \sin\left(\alpha\right)^2)}{(\cos\left(\varphi\right)^2 - \sin\left(\varepsilon\right)^2\sin\left(\alpha\right)^2)^{1.5}} + \frac{3\sin\left(\varepsilon\right)^4 cos(\alpha)^2\sin\left(\alpha\right)^2}{(\cos\left(\varphi\right)^2 - \sin\left(\varepsilon\right)^2\sin\left(\alpha\right)^2)^{2.5}})\cdot$$
$$\cdot(1 + \frac{\tan\left(56\right)\sin\left(\varepsilon\right)}{\pi/2}\alpha) + \frac{\sin\left(\varepsilon\right)^2\sin\left(\alpha\right)cos(\alpha)}{(\cos\left(\varphi\right)^2 - \sin\left(\varepsilon\right)^2\sin\left(\alpha\right)^2)^{1.5}}\frac{\tan\left(56\right)\sin\left(\varepsilon\right)}{\pi/2}\alpha$$

Немного преобразовав получим:

$$(cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2) + \frac{3\sin(\varepsilon)^2 cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2}{\cos(\varphi)^2 - \sin(\varepsilon)^2 \sin(\alpha)^2} \cdot (1 + \frac{\tan(56)\sin(\varepsilon)}{\pi/2}\alpha) =$$
$$= -\sin(\alpha) cos(\alpha) \frac{\tan(56)\sin(\varepsilon)}{\pi/2}\alpha$$

Как мы видим, мы получили недостаточно сложное уравнение большого порядка, вы можете решить его в качестве упражнения. Ответ будет не сильно отличаться от полученного ранее, всего на 2 градуса:

$$\alpha \approx 61^\circ \approx 62^d$$

2. Трио из галактики 10 баллов

Три звезды типа Солнца расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 5 млн км. Нарисуйте кривую блеска для наблюдателя в плоскости орбиты звёзд на расстоянии 10 пк от системы.

Решение. В равностороннем треугольнике расстояние $a = r\sqrt{3}$. Звёзды движутся по окружности радиусом $r = a/\sqrt{3} = 4.1R_\odot$. Пускай их период p, скорость $v = 2\pi r/p$. Нас интересует относительная скорость звёзд, из Рис. 1b

$$v_{\text{отн.}} = 2v\cos\alpha = 2\sqrt{3}\pi r/p.$$

Значит общая продолжительно покрытия (вхождения и выхождения)

$$\tau = \frac{4R_\odot}{v_{\text{отн.}}} = \frac{4R_\odot}{2\sqrt{3}\pi r/p} = 0.09p.$$

Для вычисления периода запишем второй закон ньютона для звезды: $F = ma$. Распишем:

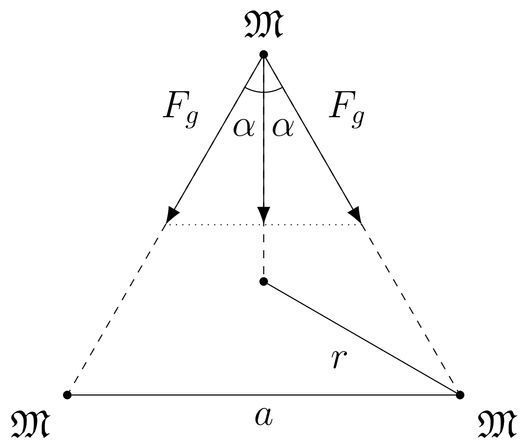
$$F = 2F_g\cos\alpha = 2\frac{G\mathfrak{M}\mathfrak{M}}{a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathfrak{M}\omega^2 r,$$
$$\frac{G\mathfrak{M}}{a^2}\sqrt{3} = \omega^2\frac{a}{\sqrt{3}},$$
$$\sqrt{3\frac{G\mathfrak{M}}{r^3}} = \omega.$$

Значит, период $p = 2\pi/\omega \approx 31^h$. Этот материал изложен в образовательных целях.

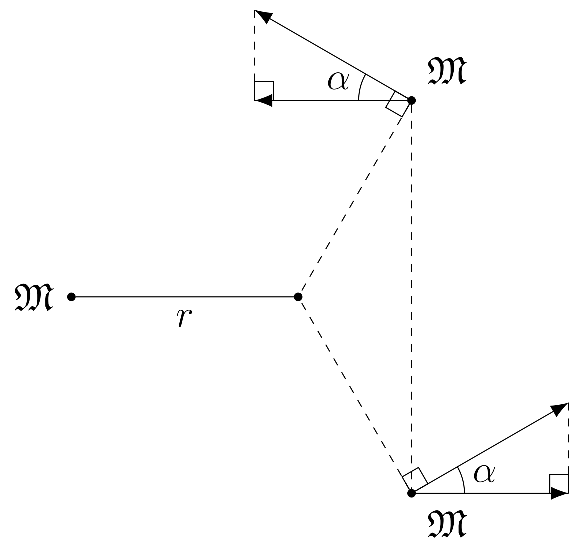
При покрытии плато не будет, иначе говоря, сразу после вхождения начнётся выхождение. При вхождении можно честно посчитать вид зависимости площади покрытия от времени, но весьма допустимо считать его прямолинейным участком. Значит, нужно посчитать звёздные величины в максимуме и минимуме. Максимум соответствует трём звездам, минимум — двум. На расстоянии 10 пк звёздная величина звезды типа Солнца $m_\odot = 4.8^m$. Тогда

$$m_2 = m_\odot - 2.5\log 2 = 4.0^m,$$
$$m_3 = m_\odot - 2.5\log 3 = 3.6^m.$$

Остаётся выяснить, когда будут минимумы. В силу симметрии происходящего, минимумы будут равномерно распределены по периоду, то есть каждые $p/6 \approx 0.17p$. Теперь строим зависимость блеска от фазы (доли периода).



(a) К расчёту периода.



(b) К расчёту скоростей.

Рис. 1 К задаче Трио из галактики.

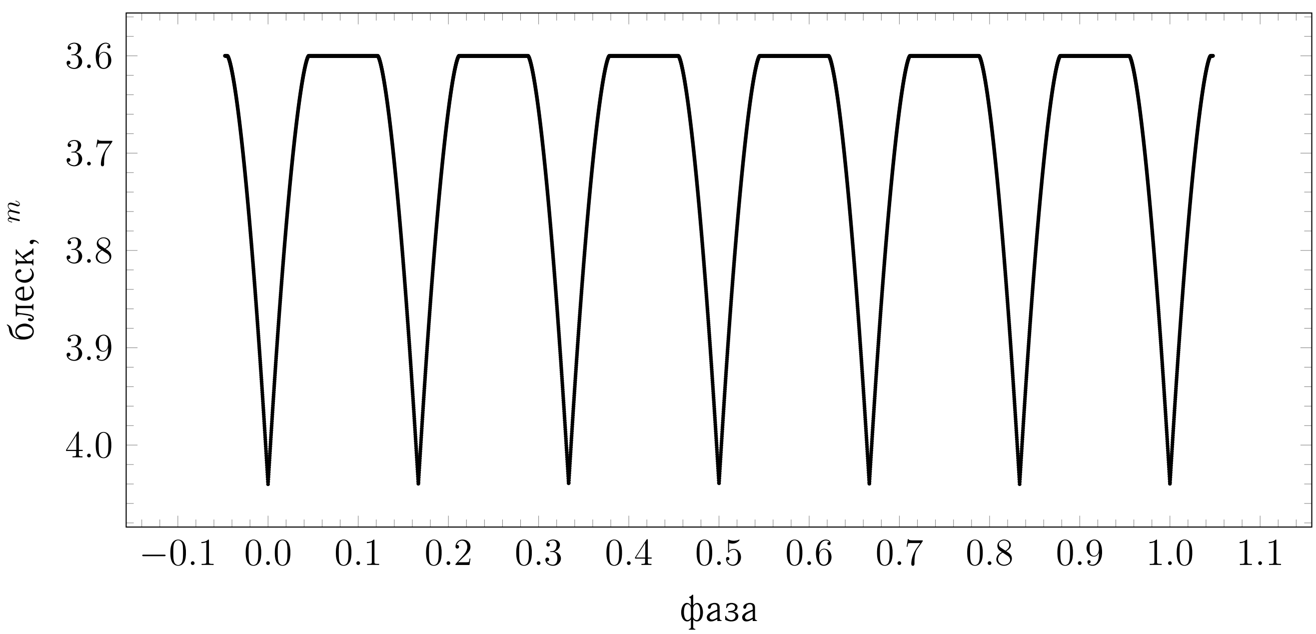


Рис. 2 Кривая блеска системы.

Критерии оценивания **10**

Относительная скорость 3
Время вхождения и выхождения 1
Звёздные величины 3
Построение графика 3

3. Полёт к соседям 10 баллов

Спутнику на геостационарной орбите придают удельный импульс 20 км/с. Определите длительность полёта до ближайшей экзопланеты. Аппарат взаимодействовал только с Землёй и Солнцем.

Решение. Радиус геостационарной орбиты $r_\text{г} = 42\,000$ км. Определим скорость спутника:

$$v_\text{кр} = \frac{2\pi}{T_\oplus} = 3 \text{ км/с}.$$

Значит, после манёвра скорость будет $v = v_0 + \Delta v = 23$ км/с. Из закона сохранения энергии определим скорость, когда гравитационное влияние Земли перестанет вносить существенный вклад. Тогда:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{G\mathfrak{M}}{r_\text{г}} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{G\mathfrak{M}}{r_\infty} \approx \frac{v_\infty^2}{2},$$

Выразим отсюда v_∞:

$$v_\infty = \sqrt{v^2 - \frac{2G\mathfrak{M}}{r_\text{г}}} = \sqrt{v^2 - 2v_\text{кр}^2} = 22.6 \text{ км/с}.$$

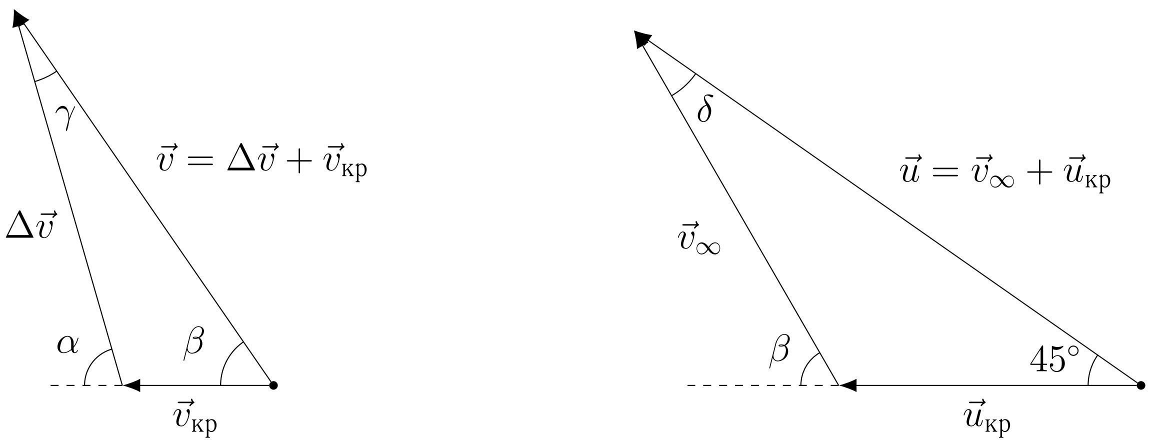
После вылета из зоны действия Земли скорость относительно Солнца $\vec{u}$ будет векторной суммой скорости Земли $\vec{u}_\text{кр}$ и относительной скорости $\vec{v}_\infty$. При оптимальной траектории их модули будут просто складываться: $u = u_\text{кр} + v_\infty = 52.6$ км/с. По аналогии с предыдущими выкладками:

$$u_\infty = \sqrt{u^2 - 2u_\text{кр}^2} = 31.1 \text{ км/с} \approx 1 \cdot 10^{-4}\ c.$$

Ближайшая экзопланета находится у звезды Проксима Центавра, расстояние до неё $d = 4.3$ св. лет. При перелёте по гиперболической траектории для оценки продолжительности полёта можно считать, что аппарат летит прямолинейно со скоростью u_∞. Тогда продолжительность:

$$\tau = \frac{d}{u_\infty} \approx \boxed{43\,000 \text{ лет}}$$

До сих пор мы считали, что Проксима находится в плоскости эклиптики, однако это не так. Её эклиптическая широта примерно -45°. Решение с учётом эклиптической широты трудоёмко и мы не будем его здесь излагать. При решении могут быть полезны следующие рисунки:



(a) Манёвр на геостационарной орбите. (b) Вычсисление гелиоцентрической скорости.

Рис. 3 К вычислению скоростей.

Критерии оценивания	**10**
Скорость после манёвра на геостационарной орбите	1
Выражение для скорости на ∞	2
Вычисление гелиоцентрической скорости	1
Расположение экзопланеты	2
Проксима Центавра	*1*
расстояние	*1*
Продолжительность полёта в прямолинейном приближении	2
Верное заврешние решения в рамках модели участника	1
Обоснованный учёт ненулевой эклиптической широты	1

4. Либретто 10 баллов

Определите положение Луны на своей орбите, где либрация по долготе будет максимальна.

Решение. Либрация определяется как разность аномалии луны на её орбите и угла, на который луна повернулась при вращении вокруг своей оси. В самом общем случае либрация λ задаётся как:

$$\lambda = \int_0^{\tau} (\omega_0 - \omega) dt,$$

Где ω_0 — угловая скорость Луны при вращении вокруг своей оси, ω — скорость её орбитального движения, τ — время, прошедшее после прохождения перицентра орбиты. Чтобы найти максимум данной величины, найдём производную по времени:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \omega_0(\tau) - \omega(\tau),$$

что очевидно из теоремы Ньютона-Лейбница. В экстремуме первая производная должна занулиться. Поэтому, в максимуме либрации:

$$\omega_0 = \omega.$$

Далее, по определению:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{GMp}}{r^2}$$

Подставляя период обращения Луны вокруг своей оси, который, как известно, равен ее сидерическому периоду, получим следующее соотношение:

$$\sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \frac{\sqrt{GMp}}{r^2}$$

$$r = a\sqrt[4]{1-e^2} \approx \boxed{384\,100 \text{ км}}$$

Если очень хочется, можно посчитать истинную аномалию на данном расстоянии:

$$\varphi \approx \boxed{92.4^\circ}$$

Критерии оценивания **10**

Верное определение понятия либрации 2
Математическое выражение для условия максимума 2
Значения угловых скоростей 4
обращения вокруг своей оси *1*
обращения по орбите *3*
Ответ в виде расстояния или истинной аномалии 2
любой не абсолютно точно совпадающий ответ *0*