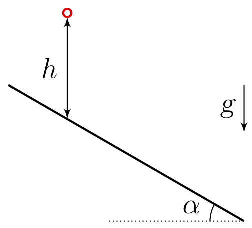
Кубок ЛФИ

11.s02.e01

И что ты скажешь, физика?
Охлаждение отношений между людьми,
как следствие трения между ними.

Станислав Ежи Лец

Фактор Уймина



Материальная точка падает на наклонную плоскость с высоты h без начальной скорости. Соударения точки и плоскости абсолютно упругие. Коэффициент трения между точкой и плоскостью равен μ. Сопротивление воздуха не учитывать.

1. За всё время движения точка оказывается на высоте первого удара три раза (считая первый). Найдите угол α между наклонной плоскостью и горизонтом в случаях

   а) (*2,5 балла*) $\mu = 0$;

   б) (*2,5 балла*) $\mu > \operatorname{tg}\alpha$.

2. Пусть $\alpha = \pi/6$. Найдите перемещение материальной точки за время $t \gg \sqrt{\dfrac{h}{g}}$ в случаях

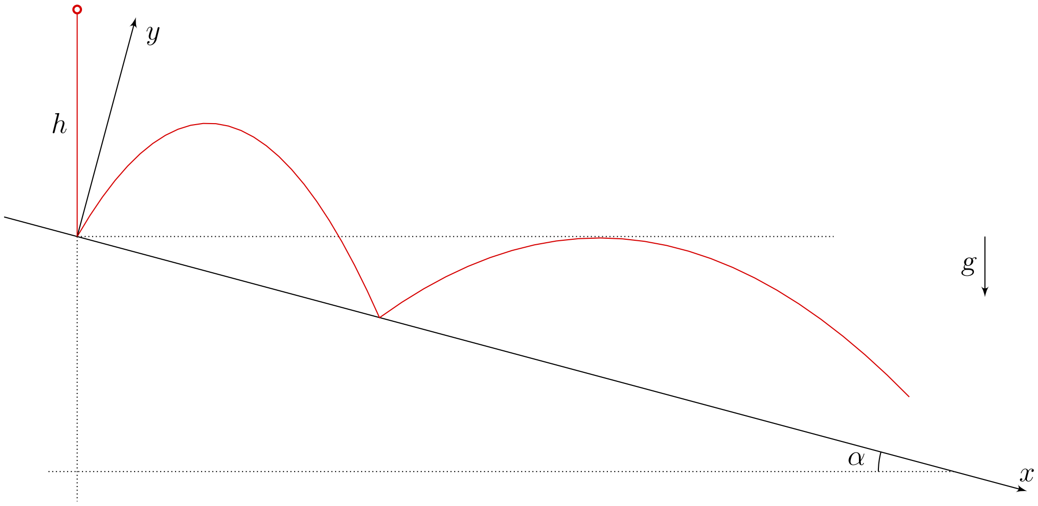
   а) (*2,5 балла*) $\mu = 0{,}5$;

   б) (*2,5 балла*) $\mu = 0{,}8$.

Примечание. Абсолютно упругий удар при наличии трения — такой удар, что компонента импульса, перпендикулярная поверхности, при ударе изменяется на противоположную.

Автор задачи: Р. В. Сафонов

Решение



Скорость точки перед первым ударом о плоскость будет равна

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Рассмотрим случай $\mu = 0$. При отсутствии трения в момент удара продольная составляющая скорости не меняется, а поперечная изменяется на противоположную. Введём ось координат x вдоль плоскости, а y — перпендикулярно, как показано на рисунке. Проекция ускорения свободного падения на ось x равна $g \sin \alpha$, а на ось y равна $g \cos \alpha$. Запишем зависимость координаты y материальной точки от t, где t — время *после первого удара*.

$$y(t) = v_{0y}t - g\cos\alpha \frac{t^2}{2} = 0.$$

Здесь $v_{0y} = v_0 \cos\alpha$ — проекция скорости на ось y после первого удара.

В момент второго удара t_0 координата y материальной точки равна нулю

$$y(t_0) = v_{0y}t_0 - g\cos\alpha \frac{t_0^2}{2} = 0; \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \frac{2v_0\cos\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{2v_0}{g}.$$

Заметим, что t_0 - время между любой парой ударов, и оно не меняется. Это нам пригодится во второй части задачи. Проекции скорости v_y и v_x зависят от времени t следующим образом

$$v_y(t) = v_{0y} - g\cos\alpha t; \quad v_x(t) = v_{0x} + g\sin\alpha t.$$

Проекции скорости в момент второго удара t_0 равны

$$v_y(t_0) = v_{0y} - g\cos\alpha t_0 = -v_0\cos\alpha; \quad v_x(t_0) = v_{0x} + g\sin\alpha t_0 = 3v_0\sin\alpha.$$

Если точка оказывается на высоте первого удара три раза, то траектория между вторым и третьим ударом касается горизонтальной прямой, проходящей на этой высоте. Скорость в точке касания из закона сохранения энергии будет равна v_0 (так как высота этой точки совпадает с высотой первого удара). Тогда горизонтальная составляющая скорости после второго удара должна быть равна v_0

$$v_0 = v_0\cos\alpha\sin\alpha + 3v_0\sin\alpha\cos\alpha = 2v_0\sin 2\alpha; \quad \Longrightarrow \alpha = 15^\circ.$$

Здесь мы отбросили корень $\alpha = 75°$, так как в этом случае точка полетит вниз и никогда не окажется на прежней высоте.

Рассмотрим случай $\mu > \operatorname{tg}\alpha$. Изменение скорости по x во время удара должно быть в μ раз больше изменения скорости по y ($v'_x = v_x - 2\mu v_y$). Но в случае, если v'_x по формуле получается меньше нуля, это означает, что проскальзывание прекращается во время удара, и $v'_x = 0$. Нетрудно проверить, что если $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, то и после первого, и после второго удара (и после дальнейших тоже) скорость по x каждый раз зануляется. Тогда

$$x(t_0) = \frac{g\sin\alpha t^2}{2} = \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g}.$$

Смещение по вертикали между первым и вторым ударом

$$h_0 = \frac{2v_0^2\sin^2\alpha}{g}.$$

Максимальная высота, на которую поднимется точка между вторым и третьим ударом равна

$$h_{\max} = \frac{v_0^2\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2\cos^4\alpha}{2g}.$$

Приравнивая h_0 и максимальное поднятие, получим $\cos^4\alpha = 4\sin^2\alpha$, откуда

$$\alpha = \arccos\left(\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) \approx 24{,}5°$$

При $\alpha = \pi/6$, $\mu = 0{,}8$ скорость по x зануляется при каждом ударе, следовательно, движение устанавливается

$$\langle v_x\rangle = v_0\sin\alpha.$$

Тогда

$$S = v_0 t\sin\alpha = \frac{v_0 t}{2}.$$

При $\mu = 0{,}5$

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} + 2v_{y,n}(\operatorname{tg}\alpha - \mu); \quad v_{y,n} = v_0\cos\alpha.$$

Здесь $v_{x,n}$ — скоростью по x после n-го удара. Тогда по x движение в среднем равноускоренное с

$$a_x = \frac{2v_0\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{\frac{2v_0}{g}} = g\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \mu).$$

Перемещение найдём по известной формуле

$$S \approx \frac{gt^2}{2}\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \mu) = \frac{gt^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right).$$

Решение (метод Уймина)

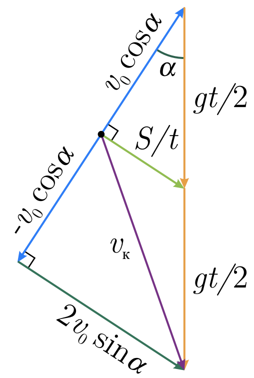
Понятно, что $v_0 = \sqrt{2gh}$. В случае без трения при каждом ударе точка получает импульс $p_0 = 2mv_0\cos\alpha$, перпендикулярный плоскости. Тогда при каждом ударе горизонтальная компонента импульса увеличивается на $p_0\sin\alpha$. Если точка трижды оказывается на изначальной высоте, то в третий раз её скорость равна v_0 и направлена горизонтально. К этому моменту произошло два удара. Тогда $4v_0\sin\alpha\cos\alpha = 2v_0\sin 2\alpha = v_0$. Откуда находим

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}; \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{12}.$$

При наличии трения при каждом ударе

$$\Delta p_y = 2mv_0\cos\alpha; \quad \Delta p_x \geqslant -\mu\Delta p_y.$$

Если при ударе $p_x > \mu\Delta p_y$, то $\Delta p_x = -\mu\Delta p_y$. Иначе $\Delta p_x = -p_x$. Рассмотрим первый удар $p_x = mv_0\sin\alpha < 2m\mu v_0\cos\alpha$, так как $\mu > \operatorname{tg}\alpha$.



После первого удара скорость точки равна $v_0\cos\alpha$ и перпендикулярна плоскости. Треугольник скоростей для последующего полёта представлен на рисунке. При последующем ударе $p_x = 2mv_0\sin\alpha < 2m\mu v_0\cos\alpha$, так как $\mu > \operatorname{tg}\alpha$. Тогда точка каждый раз отскакивает перпендикулярно плоскости. Условие трёх попаданий на изначальную высоту следующее: $S\sin\alpha = H_{\max}$, где S — расстояние между двумя точками соударений, $H_{\max}$ — максимальная высота, на которую поднимается точка над местом последнего удара. Имеем

$$\frac{S}{t} = v_0\sin\alpha; \quad \frac{gt}{2} = v_0; \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad H_{\max} = \frac{2v_0^2}{g}\sin^2\alpha.$$

С другой стороны по закону сохранения энергии максимальная высота подъёма равна

$$H_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2\cos^4\alpha}{2g}.$$

Откуда получаем

$$4\sin^2\alpha = \cos^4\alpha; \quad \Longrightarrow \quad \cos^4\alpha + 4\cos^2\alpha + 4 = 8; \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{2\sqrt{2}-2}.$$

Перейдём к решению второй части задачи. Заметим, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0{,}5 = \mu$. Тогда при каждом ударе $\Delta p_x = -2\mu m v_0\cos\alpha$, а удары происходят каждые $\Delta t = \frac{2v_0}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Поскольку $t \gg \sqrt{\frac{h}{g}}$, можно считать, что сила трения действует непрерывно и равна

$$F_{тр} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = -\mu mg\cos\alpha.$$

Также $x \gg y$, поэтому перемещение определяется только движением вдоль оси x и равно

$$x(t) = \frac{gt^2}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

В другом случае $\mu = 0{,}8 > \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\alpha$. Тогда расстояние между двумя последовательными ударами равно $S = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha$. Средняя скорость движения вдоль оси x равна $\overline{v} = \frac{S}{\Delta t} = v_0\sin\alpha$. Таким образом

$$x(t) = \overline{v}t = v_0 t\sin\alpha = \sqrt{2gh}\,t\sin\alpha.$$

Альтернативная задача

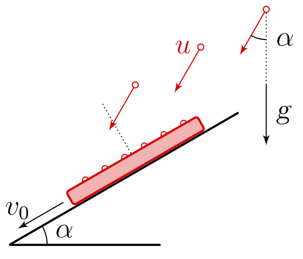
На майских праздниках, пользуясь объявленными выходными и аномальной погодой, Чебурашка и его злой брат-близнец Чебурашка Вуду вышли покататься на санках. Во всех дальнейших пунктах считайте, что масса осадков, попадающая на санки в единицу времени, равна γ, а скорость осадков около земли равна u.

1. (*2,5 балла*) Чебурашка тянет санки массой m с постоянной скоростью v по шероховатой дороге с коэффициентом трения μ_0, прикладывая силу F. Начался дождь. Капли воды, попадая на сани, приобретают их скорость, после чего сразу стекают с них. Какую силу F_1 нужно прикладывать Чебе, чтобы продолжать движение со скоростью v? Вода падает на санки вертикально.

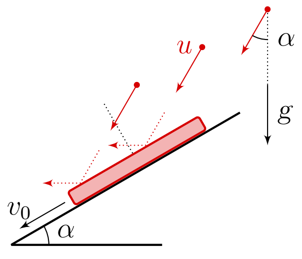
2. (*2,5 балла*) Дождь сменился градом. Считая град абсолютно гладким и упругим, найдите силу F_2, которую нужно прикладывать Чебе к саням, чтобы продолжать движение со скоростью v. Град падает исключительно вертикально.

3. (*2,5 балла*) Дойдя до горки, братья решили испытать сани и скатить их без пассажира. Считайте, что горка — это наклонная плоскость, составляющая угол α с горизонтом. Коэффициент трения саней о горку равен $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. Град к тому моменту ещё не прекратился, но он уже шёл под углом α к вертикали (см. рисунок). Чеба запустил сани с начальной скоростью $v_0 = \mu u$. Считая град всё так же абсолютно гладким и упругим, найдите зависимость скорости санок от времени $v(t)$. Каждая градина попадает на санки *не более одного раза.*

4. (*2,5 балла*) Во второй раз Чебурашка Вуду предложил своему брату скатиться на санках. К этому моменту град опять превратился в дождь, но направление падения осадков не изменилось. Начальная скорость санок равна $v_0 = \mu u$. Найдите зависимость скорости санок от времени $v(t)$, а также время T, требуемое, чтобы санки преодолели расстояние s. *Примечание.* Масса Чебурашки не равна нулю. Шерсть Чебурашки намокает под дождём.



под дождём



под градом

Авторы задачи: А. Д. Бугрова
И. Т. Русских

Решение альтернативной задачи

1. У капли, попадающей на сани, гасится импульс по вертикали, но появляется импульс по горизонтали. За время Δt суммарное изменение импульса капель по вертикали $\Delta p_x = \gamma u \Delta t$. Пользуясь теоремой о движении центра масс в импульсной форме

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

получаем, что изменение силы нормальной реакции опоры, действующей на сани, равно $\Delta N = \gamma u$. За то же время изменение импульса капель по горизонтали $\Delta p_y = \gamma v \Delta t$.

Изменение силы, которую прикладывает Чебурашка, складывается из двух частей: первая часть из-за дополнительной силы трения $\mu_0 \Delta N = \mu_0 \gamma u$, а вторая из-за необходимости изменения импульса капель по горизонтали γv. Таким образом окончательный ответ

$$F_1 = F + \gamma\mu_0 u + \gamma v = \mu m g + \gamma\mu_0 u + \gamma v.$$

2. Ситуация отличается от предыдущей тем, что у града не меняется импульс по горизонтали, но зато изменение по вертикали в два раза больше, чем у дождя. Таким образом, ответ

$$F_2 = F + 2\mu_0\gamma u.$$

3. Угол между направлением падения осадков и нормалью к горке 2α. Тогда изменение импульса града вдоль нормали к горке за время Δt равно $\Delta p_n = \gamma u \cos 2\alpha \Delta t$. Дополнительная сила трения, действующая на санки, $\Delta F_{\text{тр}} = 2\mu\gamma u \cos 2\alpha$. Таким образом, у санок появляется ускорение, направленное против скорости

$$a = \frac{2\mu\gamma u \cos 2\alpha}{m}.$$

Тогда зависимость скорости санок от времени следующая

$$v(t) = v_0 - at = \mu u - \frac{2\mu\gamma u \cos 2\alpha t}{m} = \mu u \left(1 - \frac{2\gamma t}{m}\cos 2\alpha\right).$$

Санки остановятся через

$$t = \frac{m}{2\gamma\cos 2\alpha}.$$

После этого их скорость постоянна и равна 0.

4. Пусть скорость санок в некоторый момент равна v. Направим ось x вниз вдоль горки, а y перпендикулярно ей. Изменение импульса налетающих капель вдоль оси x за время Δt равно

$$\Delta p_x = \gamma(v - u\sin 2\alpha)\Delta t.$$

Возникающая из-за этого сила, действующая на санки вдоль горки, равна

$$F_1 = -\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \gamma(u\sin 2\alpha - v).$$

Дополнительная сила трения из-за дополнительной силы реакции опоры, по аналогии с предыдущим пунктом, $\Delta F_{\text{тр}} = \mu\gamma u \cos 2\alpha$.

Суммируя силы, возникающие из-за дождя, получаем, что на санки действует дополнительная сила

$$F = \gamma(u \sin 2\alpha - v) - \mu\gamma u \cos 2\alpha.$$

Подставляя $v = v_0 = \mu u$, получаем

$$F = \gamma(u \sin 2\alpha - \mu u) - \mu\gamma u \cos 2\alpha = \gamma u(\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cos 2\alpha).$$

Тогда ускорение санок будет равно

$$a = \frac{\gamma u}{m}(\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cos 2\alpha) = \frac{\gamma u}{m}\big(2 \sin\alpha \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2 \operatorname{tg}\alpha \cos^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha\big) = 0.$$

Таким образом, ускорение санок равно 0, а их скорость постоянна

$$v(t) = v_0 = \mu u.$$

Время, за которое санки преодолеют расстояние s,

$$T = \frac{s}{v_0} = \frac{s}{\mu u}.$$

Упражнение

Подборка задач на ударные силы

Литература

Как шарик о плиту ударился

Векторные уравнения в кинематике