1. Написанное на доске четырёхзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9, либо вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002? равны.

$$a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \vdots 11 \Longleftrightarrow$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n \vdots 11.$$

Было: $1234 \not\vdots 11$, т.к. $4-3+2-1 \not\vdots 11$.

Стало: $2002 \vdots 11$, т.к. $2-0+0-2=0 \vdots 11$

При любой операции текущее число $\not\vdots 11$.

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d =$$

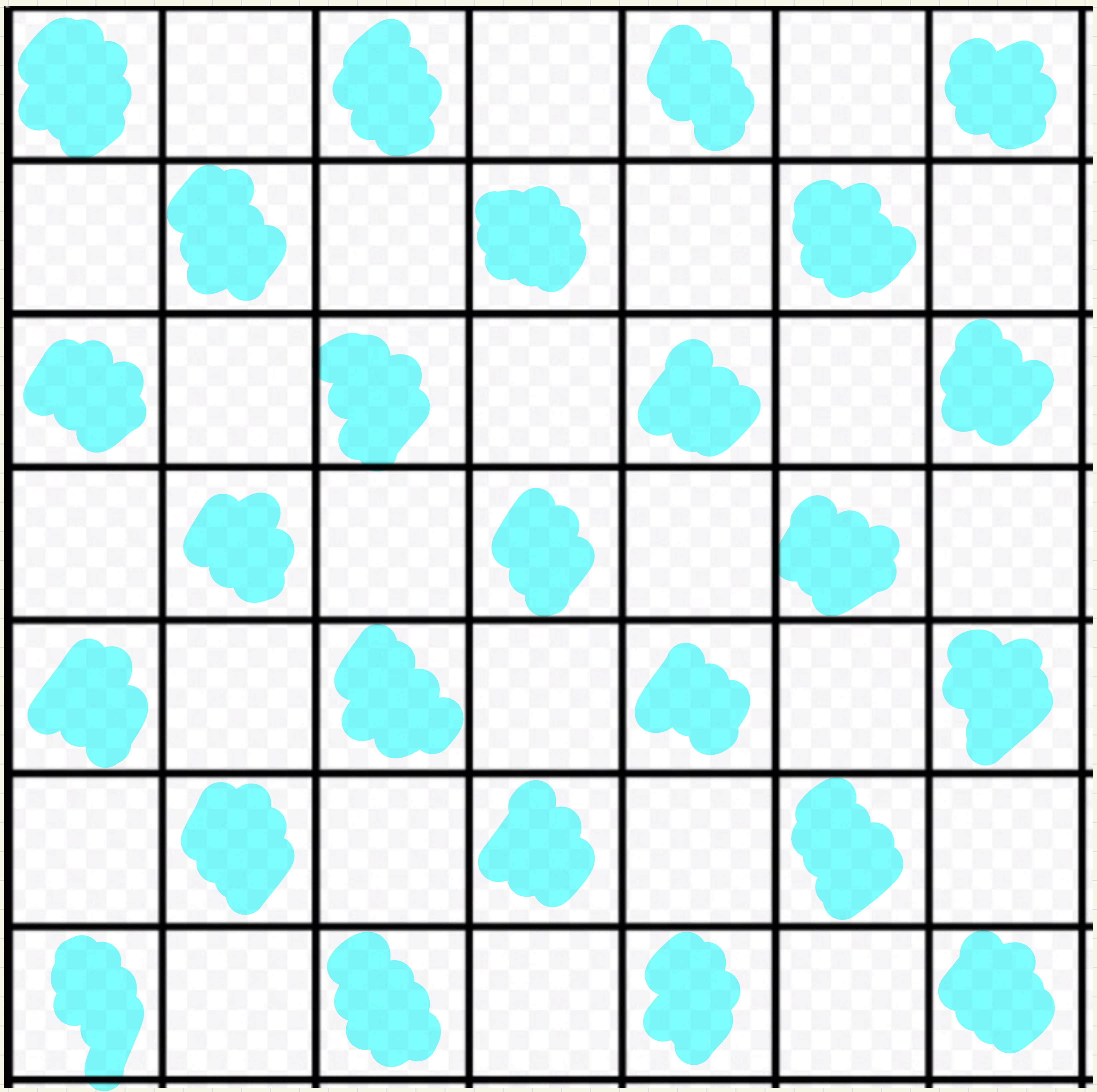
$$= (1100a + 110b + 11c) - (100a + 10b + c) + d =$$

$$= (\ldots) - (110a + 11b) + (10a + b) - c + d$$

$$= \underbrace{(\ldots)}_{\vdots 11} - \underbrace{(\ldots)}_{\vdots 11} + \underbrace{11a}_{\vdots 11} \underbrace{- a + b - c + d}$$

ост-к от деления на 11 этого числа совп. с ост-ом от дел. на 11 $\overline{abcd}$.

2. В каждой клетке доски 7×7 сидит жук. В какой-то момент времени все жуки взлетают, и после этого каждый из жуков садится в клетку, соседнюю по стороне с той, из которой он взлетел. Докажите, что в какую-то клетку не сядет ни одного жука.



Голубые клетки;

$18+7=25$

Белые клетки;

24.

Жукам с голубых клеток не хватит мест на белых клетках.

3. На доске написаны числа 1, 2 и 4. Разрешается стереть с доски два числа a и b, а вместо них записать числа $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить на доске числа $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ и 3?

$$a \quad b \quad c$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}} \quad \frac{a-b}{\sqrt{2}} \quad c$$

$$a^2+b^2$$

$$\Vert$$

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{2}=$$

$$=a^2+b^2$$

Инвариант: $a^2+b^2+c^2$

Было:

$1^2+2^2+4^2=21$ $\neq$

Стало:

$2+8+9=19$

4. На доске написано число 12. Каждую минуту число умножают или делят либо на 2, либо на 3 и результат записывают на доске вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

Было:

$2^2 \cdot 3^1$ $\xrightarrow[60\text{м.}]{}$ $2^1 \cdot 3^3$

Стало:

Кажд. минуту ст. 2 или 3 растёт или падает на 1

Сумма ст. растёт или падает на 1.

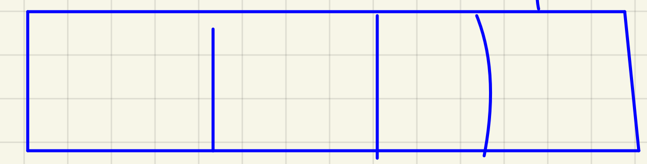
$\sum = \underbrace{2+1}_{\text{нeч.}}$

$\underbrace{1+3}_{\text{чётн.}}$

5. Можно ли доску 10×10 разрезать на прямоугольники 4×1?

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	
3	4	1	2	3	4	1	2		
4	1	2	3	4	1	2			
1	2	3	4	1	2				2
2	3	4	1	2				2	
3	4	1	2				2		
4	1	2				2			
1	2				2				2
2				2				2	

Предположим противное,



содержит цвета 1, 2, 3, 4 по 1 шт.

Всего цветов 1, 2, 3, 4: 25×1

2-ых цветов: 26.

7. На доске написаны многочлены $P(x) = x^2 + 2$ и $Q(x) = x + 1$. Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых двух из уже выписанных на доску многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $R(x) = x^3 + 2$?

Мн-ны совп., если их значения в любой т. $\in \mathbb{R}$ совп.

$\underline{x = 0:}$

$P(0) = 2$; $Q(0) = 1$ $\xrightarrow{\text{можно}}$ $R(0) = 2$.

$\underline{x = 1:}$

$P(1) = 3$; $Q(1) = 2$ $\xrightarrow{\text{можно}}$ $R(1) = 3$

$\underline{x = 2:}$

$\underset{\vdots 3}{P(2) = 6}$; $\underset{\vdots 3}{Q(2) = 3}$ $\not\xrightarrow{\text{нельзя.}}$ $\underset{\not\vdots 3}{R(2) = 10}$

5. *У Васи есть 20 гирь, среди которых нет трёх, равных по весу. Он может разложить эти все гири как на 10, так и на 11 куч с равными весами. Докажите, что у Васи найдутся две гири, веса которых различаются ровно в 4 раза.* (С. Берлов)

Суммарная масса: 110 у.е.

<u>11 куч по 10 у.е:</u>

В одной из этих куч ~~1~~ 2 гир~~я~~и, иначе в кажд. куче ≥ 2 гирь и всего гирь будет ≥ 2~~2~~1.

10 10

Массы всех гирь ≤ 10 у.е.

<u>10 куч. по 11 у.е.:</u>

В кажд. из этих куч ≥ 2 гирь

С другой стороны в кажд. из этих куч ≤ 2 гирь.,

иначе гирь будет ≥ 21.

1 1

Ещё одной гири в 10 у.е не может быть

Значит среди кучек массой 10 у.е только 2 кучки с одной гирей, а остальные кучки с ≥2 гирями.

Среди этих кучек: 2 кучки с 1 гирей

9 кучек с 2 гирями,

иначе кол-во гирь будет ≥21.

10 10 1+9 1+9 2+8 2+8

10+1 10+1 9+2 9+2 8+3 8+3

③ $m; n \in \mathbb{N}$: $m+n+1$ – простое число

$$\left(2(m^2+n^2)-1\right) \vdots (m+n+1)$$

Док-те: $m=n$.

$m+n+1=p$ – простое число

$m=p-n-1$

$$2(m^2+n^2)-1=2\left((m+n)^2-2mn\right)-1=$$

$$=2\left(\underbrace{(m+n+1-1)}_{p}^2-2mn\right)-1=$$

$$=2\left(p^2-2p+1-2mn\right)-1 \vdots p \Rightarrow$$

$1-4mn \vdots p$ $\quad$ $1-4mn=1-4pn+4n^2+4n \vdots p$

$(p-n-1)$

$$\underbrace{1+4n^2+4n}_{(1+2n)^2} \vdots p$$

$1+2n \vdots p$ $\Leftarrow$

$(1+n+n) \vdots (1+m+n) \Rightarrow n \geq m$

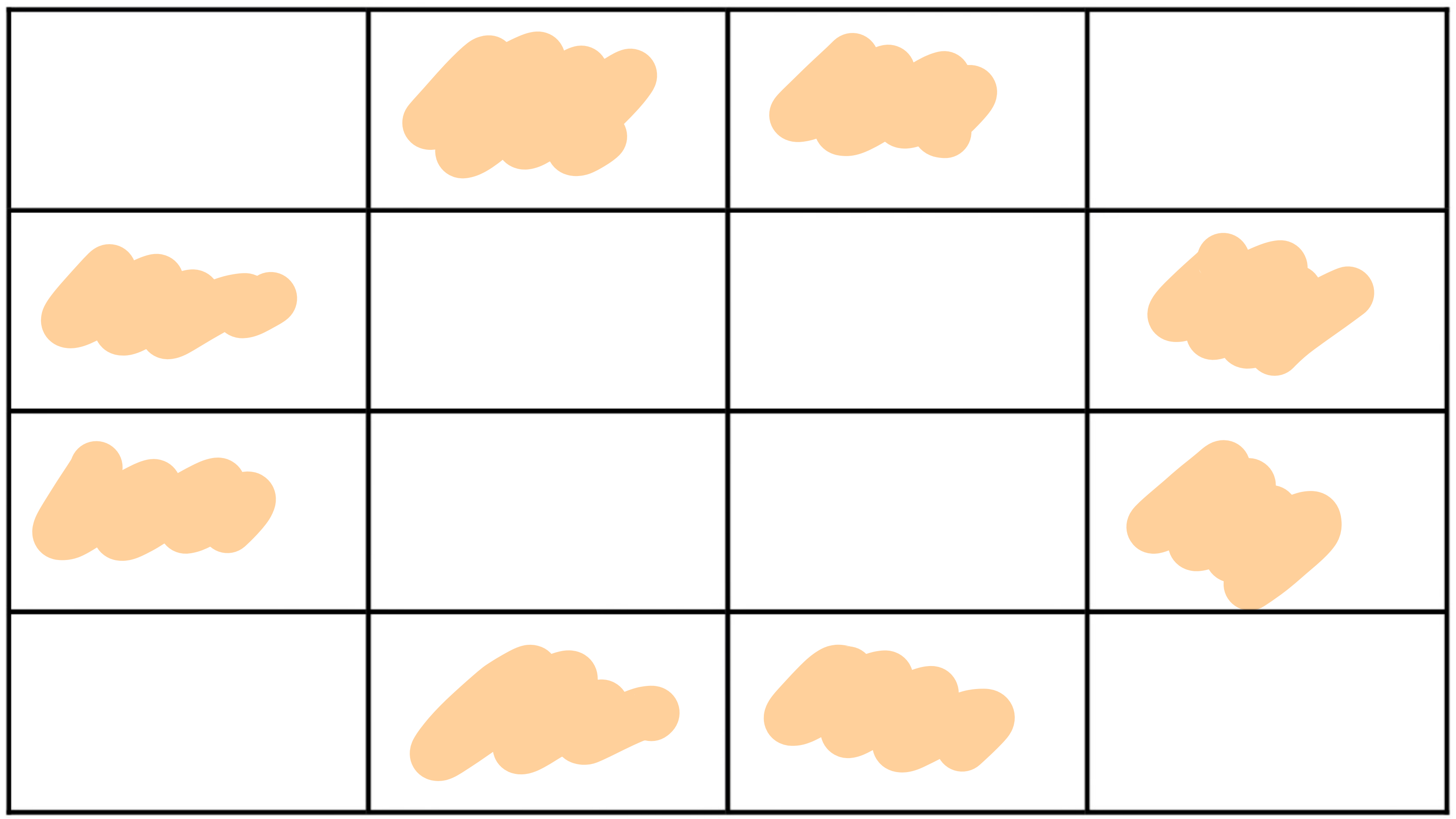
Аналогично, можно док-ть: $m \geq n$.

$m = n$.

8. клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки «+»» и «-», как показано на (Рис. 1). Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных либо в одной строке, либо в одном столбце, либо на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что, сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис. 1: задача №8.



При любой операции мы затрагиваем 0 или 2 оранж. клетки, значит, чётность кол-ва „минусов" в клетках не будет меняться!

Изначально кол-во минусов в ; 1 Должно стать ; 0.

9. На доске написаны числа 3, 4, 5, 6. Любую пару чисел a, b можно заменить на пару чисел $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Может ли на доске появиться число, меньшее 1?

$x \cdot y$:

было: xy

стало: $(x+y)^2-(x^2+y^2)=2xy$

Идея: $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$

$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$:

инвариант!

было: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

стало:

$$\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{2x+2y}{(x+y)^2-(x^2+y^2)}=\frac{2(x+y)}{2xy}=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

Наш инвариант равен:

$$\frac{1}{3}^{\times 20} + \frac{1}{4}^{\times 15} + \frac{1}{5}^{\times 12} + \frac{1}{6}^{\times 10} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20} < 1.$$

Предположим, что одно из чисел окажется < 1, то наш инвариант будет > 1.

А изначально он < 1.

10. В шести коробках лежат конфеты. В первой – 1, во второй – 2, в третьей – 3, ... в шестой – 6. За один ход разрешается в любые две коробки добавить по одной конфете. Можно ли за несколько ходов уравнять количество конфет в коробках?

Каждый ход добавляется чётное число конфет. Изначально $(1+2+3+4+5+6) = 21$ – нечёт. число

число конфет.

Следовательно, всегда будет нечёт. число конфет. Их не поделишь на 6 равных частей.

11. На столе стоят вверх дном 25 стаканов. За один ход Вася может перевернуть любые 2 стакана. Сможет ли Вася за несколько ходов поставить все стаканы правильно?

Было: 25 плохих стаканов

Будет: 0 плохих стаканов

Сценарии:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Х, Х} \xrightarrow{+2} \text{П, П} \\ \text{П, П} \xrightarrow{-2} \text{Х, Х} \\ \text{Х, П} \xrightarrow{+0} \text{П, Х} \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$\Rightarrow$ чётность кол-ва плохих стаканов не меняется.

12. В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: A, B и C. Две амёбы любых двух разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каким может быть её тип, если исходно амёб типа A было 20 штук, типа B – 21 штука и типа C – 22 штуки?

$$A + B \longrightarrow C$$

$$N_A \longrightarrow N_A - 1$$
$$N_B \longrightarrow N_B - 1$$
$$N_C \longrightarrow N_C + 1$$

Инварианты: чётность разностей

$N_A - N_B$; $N_B - N_C$; $N_A - N_C$.

В начале: $N_A - N_B = -1$

$N_B - N_C = -1$

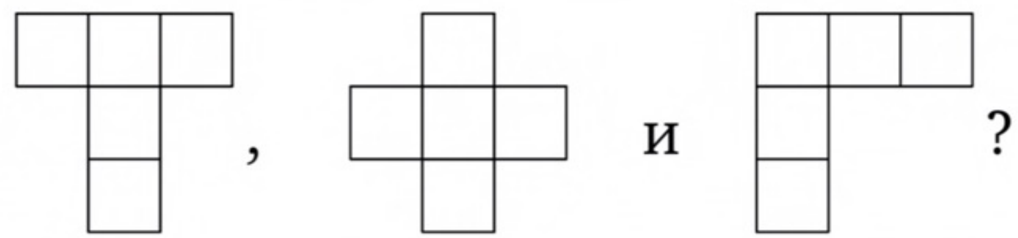
$N_A - N_C = -2$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ чётности N_A и N_C всегда совп.

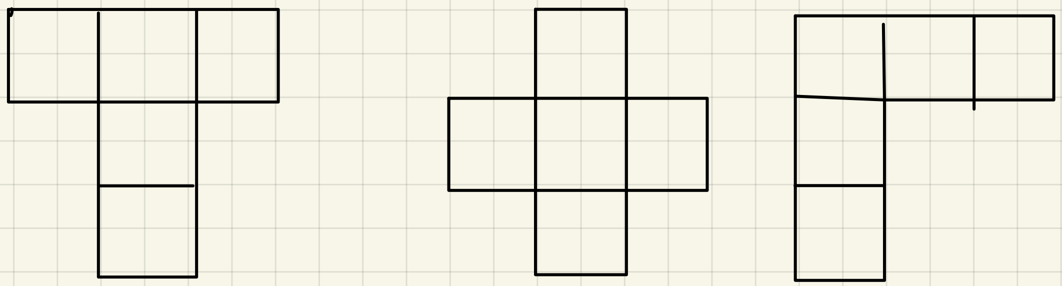
Значит, в конце $N_A = N_C = 0$

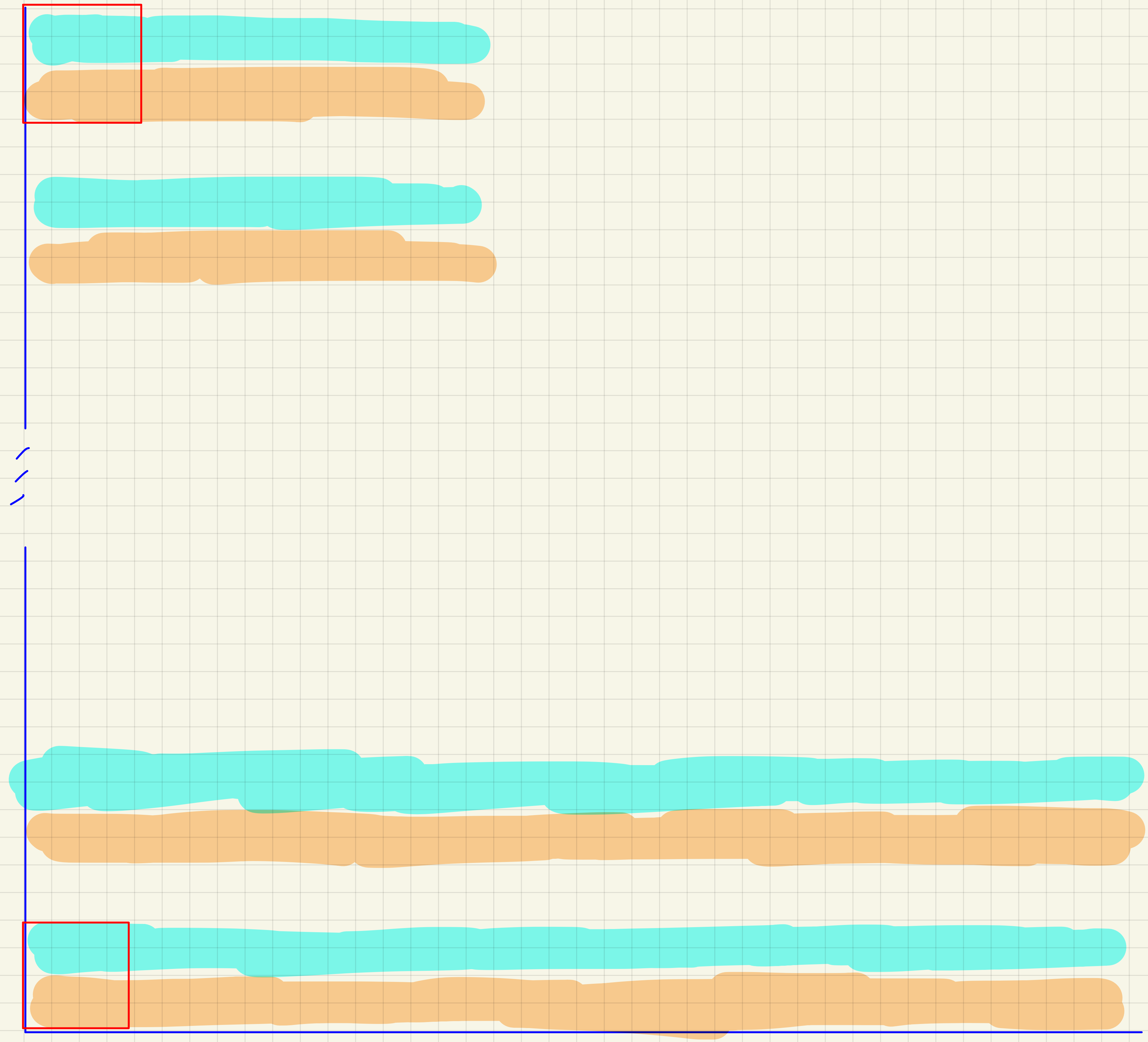
$N_B = 1$.

13. От квадратной доски 1001×1001 отрезали четыре угловых квадрата 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разбить на фигурки вида



(Все фигурки состоят из пяти клеточек 1×1, их можно поворачивать.)





: $334 \cdot 1001 -$

$- 8$ чётн.

: $334 \cdot 1001 - 8$ чётн.

: $333 \cdot 1001$ нет.

В наших фигурках будет нет. число клеток

Кол-во фигурок $\frac{1001^2-16}{5}$) нет.