Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

ФИЗИКА

Векторы в физике
(вводное задание)

Решение задания №1 для 9-х классов

(2020 – 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2020

Составитель: А. А. Лукьянов, кандидат физико-математических наук, доцент;

Физика: решение задания №1 для 9-х классов (2020 – 2021 учебный год), 2020, 8 с.

Составитель:
Лукьянов Андрей Александрович

Подписано в печать 09.09.20. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,44.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-6 3-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

Контрольные вопросы (лёгкие задачи)

1. $|\vec{a}| = \sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{1089 + 3136} = \sqrt{4225} = 65$,

$|\vec{b}| = \sqrt{(-63)^2 + 16^2} = \sqrt{3969 + 256} = \sqrt{4225} = 65 = |\vec{a}|$

Заметьте: в прямоугольных треугольниках (33;56;65) и (63;16;65) все стороны – целые числа! Причем, при разных катетах гипотенузы равны друг другу!

2.

$$v_x = -v \cdot \cos 45^\circ = -v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -14 \text{ м/с}$$

$$v_y = v \cdot \cos 45^\circ = v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 14 \text{ м/с}$$

(Рис. 1).

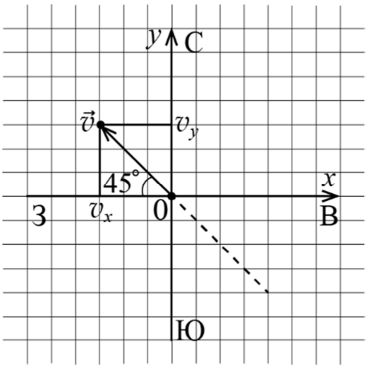

Рис. 1

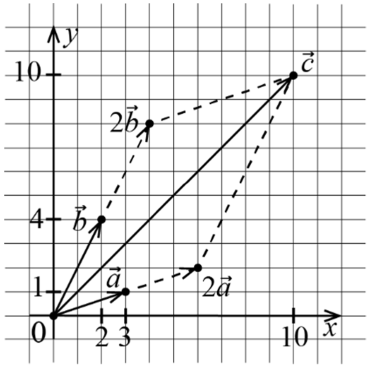

Рис. 2

3. Требуется подобрать числа λ и μ так, чтобы выполнялось равенство $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$, то есть $(10;10) = \lambda \cdot (3;1) + \mu \cdot (2;4)$. Для проекций на оси это дает систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными λ и μ:

$$\begin{cases} 3\lambda + 2\mu = 10 \\ \lambda + 4\mu = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda + 4\mu = 20 \\ \lambda + 4\mu = 10 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \mu = \frac{10-2}{4} = 2$$

В результате искомое разложение есть $\vec{c} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$ (см. рис. 2).

4. а) $\vec{a}_x = -3\vec{i}$, б) $\vec{a} \cdot \vec{i} = -3$, в) $a_x = -3$, г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 0$ (векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны друг другу).

5. $(100\vec{a}-\vec{b})^2=(100\vec{b}-\vec{a})^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10^4a^2-200\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2=10^4b^2-200\vec{a}\cdot\vec{b}+a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9999(a^2-b^2)=0 \Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|.$$

6. $(\vec{a}-1000\vec{b})^2=(\vec{a}+1000\vec{b})^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2-2000\vec{a}\cdot\vec{b}+10^6b^2=a^2+2000\vec{a}\cdot\vec{b}+10^6b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4000\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi=90^\circ.$$

7. $\lambda=-9$. Векторы $\vec{a}(-3;-4)$ и $\vec{b}(-9;-12)$ направлены в одну сторону, так как скалярный множитель, связывающий эти векторы, положительный.

8. Смещаем векторы параллельно самим себе так, чтобы совместить начала векторов. Видно, что углы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны 45°. (Рис. 3).

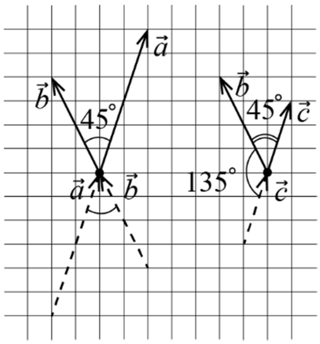

Рис. 3

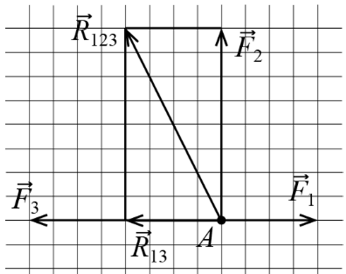

Рис. 4

9. Сначала складываем друг с другом силы, направленные вдоль одной прямой; затем – по правилу параллелограмма. (Рис. 4).

$$|\vec{R}_{13}|=|\vec{F}_1+\vec{F}_3|=4\,\text{Н},$$

$$|\vec{R}_{123}|=|\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3|=|\vec{R}_{13}+\vec{F}_2|=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\approx 9\,\text{Н}.$$

10. Сначала сложим силы, действующие вдоль одной прямой $\vec{R}_{13}=\vec{F}_1+\vec{F}_3$, далее – по правилу параллелограмма $\vec{R}_{123}=\vec{F}_2+\vec{R}_{13}$. Чтобы скомпенсировать силу $\vec{R}_{123}$, дополнительная сила $\vec{F}_4$ должна быть направлена «вертикально вниз», а её модуль должен быть равен модулю силы $\vec{F}_2$. (См. рис. 5).

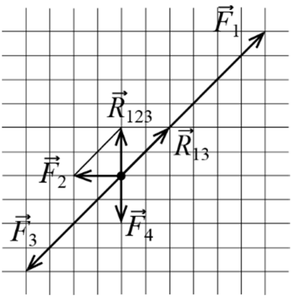

Рис. 5

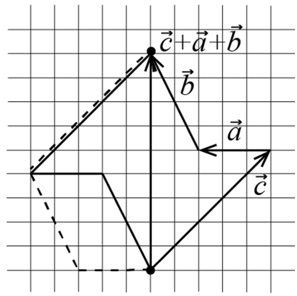

Рис. 6

11. $\vec{a} = (-3;0)$, $\vec{b} = (-2;4)$, $\vec{c} = (5;5)$,
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{a} + \vec{b} = (0;9)$. (Рис. 6).

12. Нулевой вектор. Решение аналогично разобранному в Примере 11 Задания.

Задачи

1. Выполнив несложное построение, получаем равнобедренный прямоугольный треугольник. Острые углы его равны 45°. (Рис. 7).

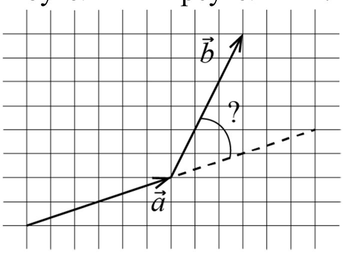

Рис. 7а

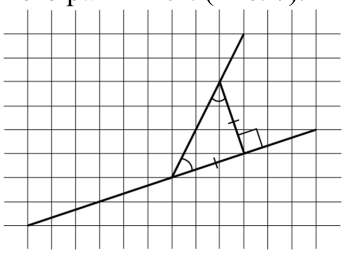

Рис. 7б

2*. Требуется подобрать числа λ и μ так, чтобы выполнялось равенство $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$, то есть

$$(3;4) = \lambda \cdot (3;-1) + \mu \cdot (1;-2) .$$

Для проекций на оси это дает систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными λ и μ :

$$\begin{cases} 3\lambda + \mu = 3 \\ -\lambda - 2\mu = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda + 2\mu = 6 \\ -\lambda - 2\mu = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\lambda = 10 \\ \mu = 3 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -3 \end{cases}.$$

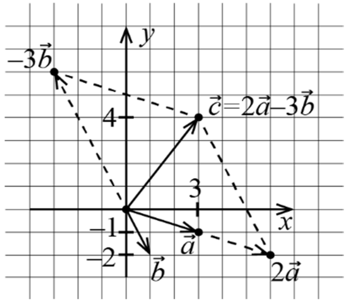

Рис. 8

В результате искомое разложение есть $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ (см. рис. 8).

3. Складывая равенства $(\vec{a} + \vec{b})^2 = a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2 = x^2$ и $(\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + b^2$, получаем уравнение для определения x: $x^2 = 2(a^2 + b^2) - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 400$. Отсюда находим $x = 20$.

4. $(\vec{a} + 2\vec{b})(5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \Rightarrow 5a^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8b^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 3a^2 \Rightarrow 6a^2 \cos\varphi = 3a^2 \Rightarrow \cos\varphi = 1/2 \Rightarrow \varphi = 60^\circ$

5. Параллельным переносом совмещаем начала векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (рис. 9а, 9б). Из рисунка видно, что $\vec{e}_2 = \vec{e}_1 + \Delta\vec{e}$, $\Delta\vec{e} = -2(\vec{e}_1, \vec{n})\vec{n}$ (рис 9б): вектор $\Delta\vec{e}$ направлен вдоль вектора нормали $\vec{n}$, а проекция вектора $\Delta\vec{e}$ на направление $\vec{n}$ в 2 раза больше проекции вектора $\vec{e}_1$ на направление $\vec{n}$, но имеет другой с ней знак.

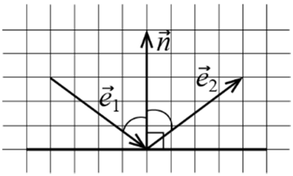

Рис. 9а

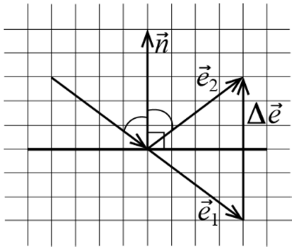

Рис. 9б

6. Равнодействующая всех **2021** сил есть нулевой вектор. Решение аналогично рассмотренному в Примере 12 Задания.

7*. К левой части веревки (которая левее самой низкой точки) приложены три силы: $\vec{T}_1$, $m_1\vec{g}$ (причём, масса левой части верёвки m_1 пропорциональна длине этой части верёвки l_1) и сила $\vec{T}_{12}$ со стороны правой части веревки (рис. 10б). К правой части веревки приложено также три силы: $\vec{T}_2$, $m_2\vec{g}$ (причём, масса правой части верёвки m_2 пропорциональна длине своей части верёвки l_2) и сила $\vec{T}_{21}$ со стороны левой части веревки (рис. 10б). Силы $\vec{T}_{12}$ и $\vec{T}_{21}$ направлены вдоль *горизонтали*, т.е. *имеют равные нулю проекции на вертикальное направление*. Поэтому для вертикального направления равенство нулю суммы проекций сил, действующих на каждую часть веревки, запишется в виде: $m_1 g = T_1 \cos\alpha$ (1) и $m_2 g = T_2 \cos\beta$ (2) (рис 10а, 10б). Деля одно уравнение на другое и учитывая пропорциональность масс длинам $m_1 \sim l_1$, $m_2 \sim l_2$, получаем $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{T_1 \cos\alpha}{T_2 \cos\beta}$ (3). Отношение натяжений веревки вблизи разных концов найдем из условия равенства проекций на горизонтальное направление **внешних** сил, действующих **на всю** веревку (рис. 10а): $T_1 \sin\alpha = T_2 \sin\beta$ (4), откуда найдём отношение сил натяжения $T_1 / T_2 = \sin\beta / \sin\alpha$ (4'). Подстановка (4') в (3) даёт:

$$l_1/l_2 = \mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}60°/\mathrm{tg}45° = \sqrt{3}\ .$$

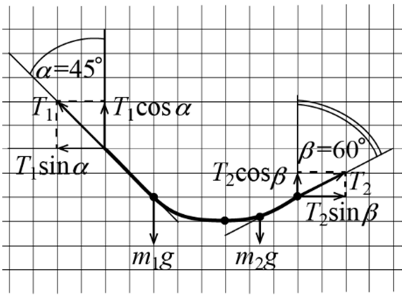

Рис. 10а

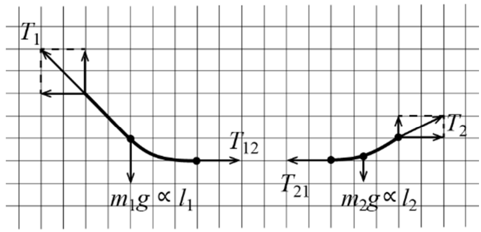

Рис. 10б

8. Равенство нулю компоненты силы $\vec{R}$ перпендикулярно каналу даёт связь между P и Q (рис. 11):

$$Q\sin 45^\circ = P\sin 27^\circ\,, \qquad (1)$$

откуда находим отношение сил $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 27^\circ} \approx 1{,}56 \approx 1{,}6.$ (1')

Модуль силы $\vec{R}$ равен сумме компонент отдельных сил вдоль канала:

$$R = Q\cos 45^\circ + P\cos 27^\circ\,, \qquad (2)$$

или с учётом (1')

$$R = Q\left(\cos 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\sin 27^\circ}\cos 27^\circ\right) \qquad (2')$$

Отсюда находим

$$Q = \frac{\sin 27^\circ}{\sin 27^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 27^\circ} R \approx 0{,}76 \text{ кН}.$$

$$P = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 27^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 27^\circ} R \approx 1{,}19 \text{ кН} \approx 1{,}2 \text{ кН}.$$

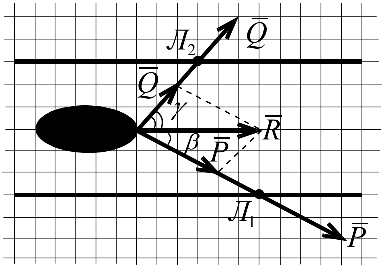

Рис. 11

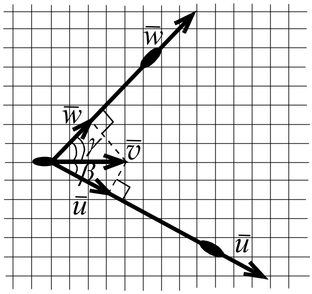

Рис. 12

9*. $u = v\cos\beta = v\cos 27°, \quad w = v\cos\gamma = v\cos 45°.$

Отсюда $\dfrac{u}{w} = \dfrac{\cos 27^\circ}{\cos 45^\circ} \approx 1{,}26 \approx 1{,}3$. (Рис. 12).

10*. В точке B приложены четыре сходящиеся силы – сила со стороны груза E, равная весу груза P, и три равные по модулю силы со стороны ножек («усилия в ножках») (рис 13): $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$; $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = F$. Модули этих сил равны друг другу в силу симметрии (каждая ножка ничуть не лучше и не хуже, чем любая другая). Эти силы не лежат в одной плоскости: каждая из них действует вдоль своей ножки. Их можно представить в виде суммы двух сил – перпендикулярной горизонтальной поверхности $\vec{F}_{i\perp}$ и параллельной ей $\vec{F}_{i\parallel}$: $\vec{F}_i = \vec{F}_{i\perp} + \vec{F}_{i\parallel}$, причём $F_{i\perp} = F\cdot\cos 30^\circ$.

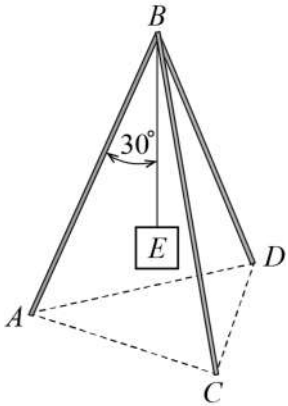

Рис. 13

Сумма сил $\vec{F}_{1\parallel} + \vec{F}_{2\parallel} + \vec{F}_{3\parallel} = 0$ (см. Пример 10 Задания), что необходимо для равновесия. В условиях равновесия равна нулю и сумма сил (приложенных к точке B), направленных вдоль вертикального направления: $\vec{P} + \vec{F}_{1\perp} + \vec{F}_{2\perp} + \vec{F}_{3\perp} = 0$.

Отсюда получаем:

$$3F\cos 30° = P \quad\Rightarrow\quad F = \frac{2P}{3\sqrt{3}} \approx 38{,}5\ \text{Н}.$$