СПбАО. 10 класс

1

Условие

В некотором российском селе полярная ночь длится 60 дней. Определите склонение наблюдающейся в этом селе звезды, если известно, что при наблюдении в верхней кульминации звезда над горизонтом находится вдвое выше, чем в нижней кульминации.

Решение

Угловой радиус Солнца составляет $16'$, величина рефракции — $35'$, то есть Солнце показывается, когда оно реально находится под горизонтом на $51'$. В итоге для того, чтобы полярная ночь закончилась, нужно, чтобы верхняя кульминация Солнца $h_0 = -51'$.

Спустя 30 дней после зимнего солнцестояния (именно тогда и будет полярная ночь) Солнце будет иметь склонение $\delta_\odot = -23,4\cos(30\cdot 360°/365) \approx -23,4\sqrt{3}/2 \approx -20,3°$

Тогда будет верно $h_0 = 90 - \varphi + \delta \Rightarrow \varphi = 90 + \delta - h_0 = 90 - 20,3 + 51' \approx 70,5°$.

Российское село точно находится в северном полушарии, так что рассматривать южное полушарие не нужно.

Заметим, что высота полюса мира находится на высоте $70,5°$. Тогда, если представить, что звезда находится в зените в верхней кульминации, то её полярное расстояние $19,5°$. Тогда в нижней кульминации она будет кульминировать к северу на высоте $70,5° - 19,5° = 51°$. То есть даже в этом крайнем случае, когда звезда оба раза кульминирует к северу и меняет свою высоту максимально, отношение высот составляет менее 2, что не удовлетворяет условию.

В итоге звезда в верхней кульминации находится на юге, а её высота равна $h_H = 90 - \varphi + \delta$; в нижней кульминации звезда находится на севере, а её высота $h_L = \varphi - 90 + \delta$. Тогда верно

$$90 - \varphi + \delta = 2(\varphi - 90 + \delta) \Rightarrow \delta = 3(90 - \varphi) = 3\cdot 19,5 = 58,5°$$

Это и будет склонением звезды.

2

Условие

Для ретрансляционных спутников существует такое явление, как "засветка" антенн земных станций Солнцем — зашумление радиосигнала, принимаемого со спутника в результате смешения полезного радиосигнала с излучением Солнца, при нахождении Солнца на небе рядом со спутником. Определите примерные диапазоны дат, когда возникает засветка, если известно, что наземная станция принимает сигнал со спутника на частоте 12 ГГц и представляет собой неподвижную параболическую антенну с диаметром 2 м.

Решение

Угловой радиус Солнца — $16'$. Также у параболической антенны будет заметный дифракционный предел, равный

$$\theta_D = 1,22\frac{c/\nu}{D} = 1,22\frac{3\cdot 10^8}{1,2\cdot 10^{10}\cdot 2} \approx 0,15^\circ \approx 0,86^\circ = 51'$$

В итоге Солнце будет создавать вокруг себя область засветки не только из–за своего углового размера, но и из–за дифрационного кружка, то есть радиус этой засветки будет равен $16' + 51' = 67' = 1,1^\circ$

Дальше хорошо бы понять, где именно находится спутник. Для того, чтобы неподвижная антенна принимала сигнал со спутника, нужно, чтобы спутник "висел" в небе. То есть спутник должен находиться на геостационарной орбите и в плоскости экватора.

В моменты равноденствий склонение Солнца меняется примерно на $0,4^\circ$ в сутки, то есть оно будет проходить половину области засветки за $1,1/0,4 \approx 3$ суток. В итоге, если принять, что равноденствия наступают 21 марта и сентября, то примерные диапазоны дат — с 18 по 24 марта и сентября.

3

Условие

Вокруг звезды массой 2 массы Солнца по круговым орбитам в одной плоскости и в одном направлении обращаются две планеты. Радиусы орбит равны 0.5 а.е. и 0.8 а.е., экваторы планет лежат также в этой плоскости. Известно, что продолжительность местных "солнечных" суток на планетах совпадает, но при этом внешняя планета совершает оборот вокруг своей оси вдвое дольше, чем внутренняя. Определите периоды осевого вращения планет, считая их длительность меньше длительности орбитальных периодов для каждой планеты.

Решение

В системе а. е. — год — $\mathfrak{M}_\odot$ третий закон Кеплера записывается как $MT^2 = a^3$. У нас масса звезды $M = 2\mathfrak{M}_\odot$, большие полуоси или радиусы — 0,5 а. е. и 0,8 а. е. Тогда периоды обращения планет составляют $T_1 = \sqrt{0,5^3/2} = 0,25$ лет и $T_2 = \sqrt{0,8^3/2} = \sqrt{0,256} = \sqrt{0,25(1+0,024)} \approx 0,5(1+0,012) = 0,506$ лет.

Пусть у внутренней планеты период вращения вокруг своей оси P_1, а у внешней — $|P_2| = 2|P_1|$. Известно, что солнечные сутки — это период вращения вокруг своей оси относительно движения вокруг звезды, т. е. если солнечные сутки длятся t, то $t^{-1} = |P^{-1} - T^{-1}|$

Тогда остаётся разобрать случаи. Если обе планеты вращаются вокруг своей оси так же, как и вокруг звезды, то $P_2 = 2P_1$ и получается система:

$$\frac{1}{P_1} - \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2P_1} - \frac{1}{T_2} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}} = \frac{1}{2}\frac{0,25 \cdot 0,506}{0,506 - 0,25} = \frac{0,25 \cdot 0,506}{0,512} =$$

$$= \frac{0,25 \cdot 0,5(1+0,012)}{0,5(1+0,024)} \approx 0,25(1+0,012)(1-0,024) \approx 0,25(1-0,012) = 0,247 \text{ лет}$$

У внешней планеты период $P_2 = 0,476$ лет.

Теперь предположим, что внутренняя планета вращается против вращения по орбите, а внешняя — по направлению вращения:

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2P_1} - \frac{1}{T_2} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{-\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}} < 0$$

Этот случай невозможен.

Предположим, что теперь только внешняя планета вращается вокруг своей оси против вращения по орбите:

$$\frac{1}{P_1} - \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2P_1} + \frac{1}{T_2} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{\dfrac{1}{T_1} + \dfrac{1}{T_2}} \approx \frac{1}{2}\frac{1}{4+2} = \frac{1}{12} \text{ года}$$

То есть внутренняя планета в этом случае совершает оборот за 30 суток, а внешняя — за 60 суток.

Наконец, пусть обе планеты вращаются вокруг своей оси против движения по орбите:

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2P_1} + \frac{1}{T_2} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{-\dfrac{1}{T_1} + \dfrac{1}{T_2}} < 0$$

Такой случай также невозможен.

В итоге получаются два ответа: 0,247 лет и 0,476 лет; 30 суток и 60 суток.

4

Условие

Переменные звезды типа W UMa представляют собой две одинаковых звезды Главной последовательности, соприкасающихся поверхностями. Оцените характерное время обращения такой пары для звезд типа Солнца. Что можно сказать о периодах таких двойных если обе принддежат спектральному классу F? Спектральному классу K?

Решение

Расстояние между звёздами составляет $2R$, а их масса — $2M$ где R и M — их радиус и масса соответственно. Тогда, записывая закон Кеплера в системе а. е. — год — $\mathfrak{M}_\odot$, получаем, что период обращения такой пары будет равен

$$T = \sqrt{\frac{(2R)^3}{2M}} = 2\sqrt{\frac{R^3}{M}}$$

Солнечный радиус равен $R = (0,7 \cdot 10^6 \text{ км})/(150 \cdot 10^6 \text{ км})$ а. е., а масса Солнца — 1 солнечной. Тогда

$$T = 2\left(\frac{7}{1500}\right)^{3/2} = 2\sqrt{\frac{7}{1500}}\frac{7}{1500} \approx \frac{0,2 \cdot 0,7 \cdot 7}{1500} \text{ лет} \approx$$
$$\approx \frac{0,2 \cdot 0,7 \cdot 7 \cdot 360}{1500} \approx 0,24 \text{ сут.}$$

Оценим зависимость M от R. Пусть $M \propto R^3$. Тогда, если учесть, что характерный радиус гигантов — 100 солнечных, то как раз такой размер имели бы звёзд главной последовательности, имеющие массу меньше 5 масс Солнца. Очевидно, что такого не наблюдается. То есть зависимость менее резкая, чем $M \propto R^3$. Значит, период обращения с увеличением массы звёзд должен увеличиваться. Тогда период у звёзд F будет больше, чем у солнечных, а у звёзд класса K — меньше.

5

Условие

Как известно, масса центрального объекта нашей Галактики составляет $4,5 \times 10^6$ масс Солнца. Предполагается, что это сверхмассивная черная дыра. Может ли быть так, что вместо этой сверхмассивной черной дыры в центре нашей Галактики находится шаровое скопление равномерной концентрации, состоящее из черных дыр звездных масс? Обоснуйте свой ответ максимально полно.

Отметим, что чёрную дыру Sgr A* открыли косвенным путём: оценили размеры объекта и его массу и он оказался настолько мал, что ничто иное, как чёрная дыра, это не могло оказаться. А почему не может быть скопление чёрных дыр? Интуитивно кажется, что там очень большие скорости, а чёрных дыр много, поэтому скопление очень быстро сольётся в одну сверхмассивную чёрную дыру. Проверим это предположение.

Ближе всего к Sgr A* приближается звезда S2, имеющая в перицентре скорость, сравнимую со скоростью света. Разумно её оценить, как несколько процентов световой, т. е. примерно в 30 раз меньше световой. Скорость света примерно $6 \cdot 10^4$ а. е./год, то есть разумно сказать, что скорость звезды в перицентре $u = 2 \cdot 10^3$ а. е./год. Также разумно предположить, что орбита сильно вытянута, т. е. скорость в перицентре практически параболическая. Тогда радиус предполагаемого скопления (максимальный) $R = 2GM/v^2 = 2 \cdot 4\pi^2 \cdot 4,5 \cdot 10^6/(2 \cdot 10^3)^2 \approx 90$. На самом деле перицентрическое расстояние звезды S2 составляет 120 а. е., так что оценка оказалась немного заниженной.

Попробуем оценить свободный пробег чёрной дыры (естественно, уподобляя такое скопление идеальному газу). При свободном пробеге l можно сказать, что одна чёрная дыра находится в цилиндре с площадью, максимальным для столкновения чёрных дыр (т. е. диаметр составляет $4R_0$, а площадь основания — $4\pi R_0^2$) и длиной l, а в таком цилиндре содержится примерно 1 чёрная дыра. То есть $4\pi R_0^2 ln \sim 1$.

В свою очередь, концентрация чёрных дыр $n = 3N/4\pi R^3$, где N — их количество.

Предположим, что скопление однородно. Тогда его гравитационная энергия $U = -3GM^2/5R$, а кинетическая энергия $T = Mv^2/2 = -U/2$. В итоге

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{3GM^2}{2 \cdot 5R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{GM}{R}}$$

В итоге время свободного пробега

$$\tau_0 = \frac{l}{v} = \frac{1}{4\pi R_0^2 n}\sqrt{\frac{5R}{3GM}} = \frac{R^3}{3R_0^2 N}\sqrt{\frac{5R}{3GM}}$$

Но это время жизни только одной чёрной дыры. Сама она может столкнуться с любой из N чёрных дыр. То есть среднее время между столкновениями

$$\tau = \frac{2\tau_0}{N} = \frac{2R^3}{3(R_0 N)^2}\sqrt{\frac{5R}{3GM}}$$

Заметим, что масса чёрной дыры пропорциональна радиусу её, то есть складывая все радиусы чёрной дыры, мы получим шварцшильдовский радиус тела с массой $4,5 \cdot 10^6 \mathfrak{M}_\odot$. В итоге $NR_0 = 2GM/c^2$. Также нам нужна только оценка, так что все коэффициенты можно отбросить. В итоге

$$\tau = \frac{R^3 c^4}{(2GM)^2}\sqrt{\frac{R}{GM}}$$

Здесь видно, что чем больше R, тем больше τ. Тогда для верхней оценки возьмём наибольшее R, а также воспользуемся тем, что $u = \sqrt{2GM/R}$:

$$\tau = \sqrt{2}R\frac{R^2}{(2GM)^2}\sqrt{\frac{R}{2GM}}c^4 = \frac{\sqrt{2}R}{u}\left(\frac{c}{u}\right)^4$$

Известно, что при наибольшем $R = 90$ а. е. $u = 2000$ а. е./год, $c/u = 30$. Тогда

$$\tau = \sqrt{2}\frac{90}{2000}\cdot 30^4 \approx \frac{0,7\cdot 90\cdot 81\cdot 10^4}{10^3} \approx 5\cdot 10^4 \text{ лет}$$

В то же время чёрных дыр в скоплении максимум 10^6 (если каждая по 4,5 массы Солнца). Тогда время жизни каждой чёрной дыры — примерно $2,5\cdot 10^{10}$ лет. Если принять это, как характерное слияние скопления, то получается, что за всё время существования Галактики оно всё же, при всех допустимых завышениях, успеет значительно слиться пусть не в одну, но в несколько сверхмассивных чёрных дыр. А учитывая то, что и скопление скорее всего точно меньше, и чёрные дыры там массивнее, то скопление точно бы к моменту наблюдений слилось в одну чёрную дыру. Так что не может на месте Sgr A* находиться скопление чёрных дыр звёздных масс.