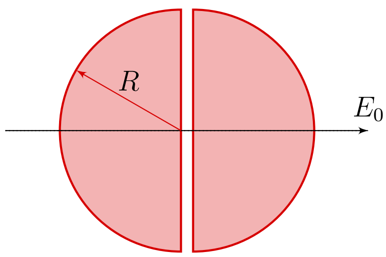
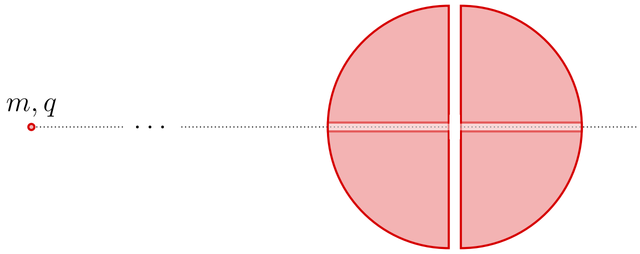
Разрез

Незаряженный проводящий шар радиуса R, разрезали вдоль его диаметра пополам и его половины раздвинули на расстояние $h \ll R$, после чего поместили в однородное поле $\vec{E}_0$ перпендикулярное плоскости разреза.



1. *(2 балла)* Найдите закон распределения заряда по поверхности проводника.
2. *(3 балла)* Найдите силу взаимодействия полушарий друг с другом.

Внешнее поле отключили, шар заменили на диэлектрический, с точно таким же распределением заряда по его поверхности, найденным в пункте 1. В шаре проделали узкий прямолинейный канал, проходящий через его центр, перпендикулярно плоскости разреза. На большом расстоянии вдоль оси канала располагается точечный заряд q массы m так, как показано на рисунке. Заряд отпускают и он начинает своё движение к центру шара.



3. *(1 балл)* Найдите скорость заряда v_1 в центре шара.
4. *(1,5 балла)* Найдите скорость заряда v_2 на расстоянии $r_1 = \dfrac{R}{3}$ от центра шара.
5. *(2,5 балла)* Найдите скорость заряда v_3 на расстоянии $r_2 = 100R$ от центра шара.

Влиянием поля движущегося заряда на распределение зарядов по поверхности полушарий можно пренебречь. Диэлектрический шар закреплён.

Авторы задачи: А. И. Уймин
Л. М Колдунов

Решение

1. Поле внутри проводника должно быть равно нулю. В том случае, если мы отгадаем распределение заряда, которое обеспечивает это условие, то это и будет ответом на задачу, т.к. решение задачи электростатики существует и единственно.

После того, как шар разрезали и раздвинули его половины, его можно представить как сферу и два круга. Если по поверхности сферы распределить заряд также, как он был распределен до того, как ее разрезали, а на основаниях равномерно, но с разным знаком, то поле внутри проводника будет равно нулю. При этом заряд на круглых основаниях будет по модулю равен заряду соответствующей полусферы, но обратного знака, т.к. суммарный заряд полусфер должен быть равен нулю. Найдем данные распределения.

Рассмотрим неразрезанный шар, помещённый в однородное поле $\vec{E}_0$. Внутри шара электрическое поле равно нулю, поэтому индуцированные на его поверхности заряды создают однородное поле, равное $-\vec{E}_0$. Вне шара поле индуцированных зарядов эквивалентно полю точечного диполя с дипольным моментом $\vec{p}$, расположенном в центре шара:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3\left(\vec{p},\vec{r}\right)\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right).$$

Шар проводящий, следовательно его поверхность эквипотенциальна, откуда мы получаем, что вектор $\vec{E}$ должен быть перпендикулярен его поверхности. Требуя, чтобы тангенциальная компонента вектора $\vec{E}$ была равна нулю, мы получаем, что дипольный момент шара будет равен:

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_0.$$

Зная значение дипольного момента мы можем найти значение напряженности электрического поля на поверхности шара. С другой стороны, внутри шара электрическое поле равно нулю. Используя известное соотношение, что скачек нормальной компоненты $\vec{E}$ равен σ/ε_0 получаем, что:

$$\sigma_1(\theta) = 3E_0\varepsilon_0\cos\theta.$$

Заметим, что этот факт можно получить и другими способами, и т.к. он классический и представлен в литературе, то его можно было считать известным.

Таким образом, правая полусфера будет заряжена положительно, тогда как левая – отрицательно. Заряд на основаниях полусфер будет равен по модулю заряду соответствующей полусферы. Для того, чтобы его найти, проинтегрируем плотность заряда по поверхности полусферы:

$$q = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_1(\theta)\cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = 6\pi R^2 E_0\varepsilon_0 \int\limits_0^1 x dx = 3\pi R^2 E_0 \varepsilon_0.$$

Откуда:

$$\sigma_2 = \frac{q}{\pi R^2} = 3E_0\varepsilon_0.$$

Зависимости $\sigma_1(\theta)$ и $\sigma_2(\theta)$ и дают ответ на первый вопрос задачи.

2. Внешнее поле однородное, части не заряжение, поэтому внешнее поле не действует. Вся сила, действующая на половину шара, это сила взаимодействия частей. Найдём давление действующее на поверхностный заряд. Пусть поле, создаваемое всеми зарядами кроме рассматриваемого участка в рассматривой точке E_1.

Внутри проводника E_1 и поле кусочка должны компенсировать друг друга, следовательно,

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Поле E_1 перпендикулярно поверхности. Давление на поверхность

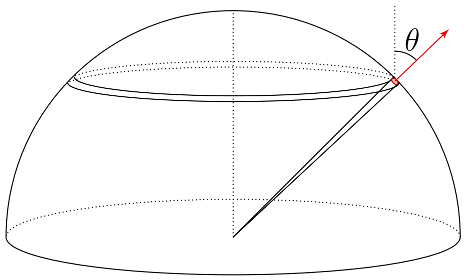
$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.$$

Сила давления направлена от проводника независимо от знака σ. Рассмотрим одну из половин и найдём силу, действующую на неё. Сила, действующая на поверхность разреза

$$F_1 = \pi R^2 \frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0}.$$

Здесь $\sigma_0 = 3E_0\varepsilon_0$.

Сила, действующая на маленькое колечко, равна



$$dF_2 = p(\theta)dS\cos\theta = \frac{\sigma^2(\theta)}{2\varepsilon_0}\cos\theta 2\pi R\sin\theta R d\theta =$$
$$= 2\pi R^2 \frac{\sigma_0^2\cos^2\theta}{2\varepsilon_0}\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{\pi R^2\sigma_0^2}{\varepsilon_0}\cos^3\theta\sin\theta d\theta.$$

После суммирования

$$F_2 = \frac{\pi R^2\sigma_0^2}{\varepsilon_0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta d\theta = \frac{\pi R^2\sigma_0^2}{\varepsilon_0}\int\limits_{-1}^{0}\cos^3\theta d(-\cos\theta) = \frac{\pi R^2\sigma_0^2}{4\varepsilon_0}.$$

Суммарная сила, действующая на половину сферу,

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\pi R^2\sigma_0^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\pi R^2\sigma_0^2}{4\varepsilon_0} = \frac{\pi R^2\sigma_0^2}{4\varepsilon_0}.$$

Полушария притягиваются с силой

$$F = \frac{9}{4}\pi\varepsilon_0 R^2 E_0^2.$$

3. Потенциал в центре шара оказывается равным нулю, что следует из полученного распределения заряда. Поскольку изначально заряд находился очень далеко от центра шара

$$v_1 = 0.$$

4. В объёме шара поле является однородным и равным $-\vec{E}_0$. Отсюда при движении вдоль канала

$$\varphi(r) = -E_0 r.$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{qE_0R}{3}.$$

Откуда находим

$$v_2 = \sqrt{\frac{2qE_0R}{3m}}.$$

5. На больших расстояниях от центра шара его поле эквивалентно полю электрического диполя. Аналогично диполю как поле конденсатора, так и поле зарядов, индуцированных на боковой поверхности. При этом для дипольного момента конденсатора имеем

$$\vec{p}_C = -3\pi R^2 \varepsilon_0 h \vec{E}_0.$$

При $h = 0$ дипольный момент зарядов, индуцированных на боковой поверхности, был найден в пункте 1), а изменение дипольного момента при раздвигании его половинок

$$\Delta\vec{p} = -\vec{p}_C.$$

Отсюда следует, что дипольный момент в первом приближении постоянен. Из закона сохранения энергии получим

$$\frac{mv_3^2}{2} = \frac{pq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{E_0R^3}{r^2}.$$

Окончательно

$$v_3 = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{2qE_0R}{m}}.$$

Альтернативная задача

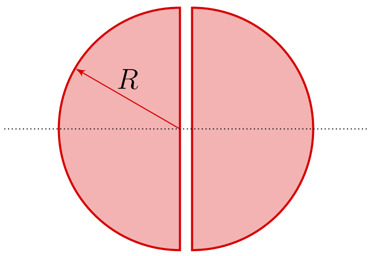
1. *(0 баллов)* В равномерно заряженном шаре радиуса R вырезали сферическую полость радиуса r, центр которой находится на расстоянии l от центра шара. Объемная плотность заряда ρ. Найдите напряженность электрического поля в полости.

При пересечении двух шаров радиуса R, центры которых находятся на расстоянии l друг от друга, образуются два «полумесяца», равномерно заряженные разноименными электрическими зарядами. Объемная плотность электрического заряда слева $-\rho$, справа ρ.

2. *(0 баллов)* Найдите напряженность электрического поля.

3. *(0 баллов)* В пределе $l \to 0$ найдите плотность заряда на поверхности получившейся сферы.

4. *(0 баллов)* Распространено мнение, что тела с одноимёнными зарядами всегда отталкиваются друг от друга. Вовсе нет! Такой эффект наблюдается далеко не всегда. Представьте себе, что сплошной металлический шар радиуса R распилили пополам, а получившиеся половины сблизили плоскими сторонами так, что зазор d между ними оказался предельно мал ($d \ll R$). Найдите силу электростатического взаимодействия полушарий с одноимёнными зарядами q_1 и q_2. При каком отношении зарядов они будут притягиваться? **Примечание.** Сила, действующая на единицу поверхности заряженного проводника произвольной формы, связана с напряжённостью электрического поля вблизи поверхности тем же соотношением, что и в плоском конденсаторе.



5. *(2 балла)* Две изолированные проводящие концентрические сферы, радиус внутренней — r_1, а внешней — r_2. На внутренней сфере находится положительный заряд Q_1, а на внешней — отрицательный Q_2. Найдите электростатическое давление, действующее на внешнюю сферу.

6. *(4 балла)* Металлический шар разрезали на две части, так что плоскость разреза находится от центра шара на расстоянии 1/4 его диаметра. При прижатых друг к другу частях шар зарядили до потенциала $\varphi = 300$ В. Чему равна сила отталкивания этих частей шара, обусловленная его зарядом?

Плоский конденсатор с площадью пластин S заряжен до напряжения U и отсоединен от источника напряжения. Расстояние между пластинами d. Положительный заряд q, массы m удерживается у положительно заряженной пластины. Заряд отпускают

7. *(0 баллов)* Найдите скорость заряда в центре конденсатора.

8. *(0 баллов)* Найдите скорость заряда вблизи отрицательной пластины.

9. *(2 балла)* Пусть в отрицательно заряженной пластине проделано небольшое отверстие, через которое заряд q вылетает из конденсатора. Найдите скорость заряда на

расстоянии $50d$ от центра конденсатора.

10. *(2 балла)* Найдите скорость заряда на бесконечно большом расстоянии от конденсатора.

Решение альтернативной задачи

Сформулируем теоремы электростатики, которые понадобятся при решении задачи.

Теорема Гаусса для электрического поля. Пусть $\mathcal{D}$ — замкнутая поверхность. Тогда поток вектора напряжённости $\vec{E}$ через эту поверхность равен

$$\Phi_E = \sum_i E_i dS_i \cos\alpha_i = \oint_{\mathcal{D}} \left(\vec{E}_i, d\vec{S}_i\right) = \frac{q_{\text{внутр}}}{\varepsilon_0}.$$

Здесь суммирование ведётся по всем малым площадкам поверхности $\mathcal{D}$, E_i — значение напряжённости на i-ой площадке, $\vec{S}_i = S_i\vec{n}_i$ — вектор площади i-ой площадки, $\vec{n}_i$ смотрит наружу поверхности $\mathcal{D}$, α_i — угол между $\vec{E}_i$ и $\vec{n}_i$.

Теорема единственности. Электрический заряд распределяется по поверхности проводника единственным образом.

Замечание 1. Теорема Гаусса позволяет рассчитывать поля тогда, когда распределние заряда обладает симметрией.

Замечание 2. Теорема единственности позволяет «угадывать» распределение зарядов по поверхности проводника. Если мы нашли распределение, при котором поле внутри проводника равно нулю и все граничные условия выполняются, то именно это (и никакое другое) распределение будет реализовываться.

1. Найдём поле равномерно заряженной сферы. Для начала рассмотрим случай $r \leqslant R$, где r — расстояние от центра шара до точки наблюдения. В данной системе есть сферическая симметрия — поле в каждой точке пространства направлено радиально (см. рис.), также понятно, что поле одинаково по величине на сфере радиуса r с центром в центре шара. Эти утверждения легко доказываются от противного (попробуйте сами).

Выберем в качетсве поверхности для теоремы Гаусса сферу радиуса r. Тогда поток (с учётом написанного) вектора напряжённости $\vec{E}$ будет равен

$$\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{q_{\text{внутр}}}{\varepsilon_0}.$$

Заряд внутри поверхности равен

$$q_{\text{внутр}} = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Здесь ρ — объёмная плотность распределения заряда. Тогда поле внутри шара равно

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

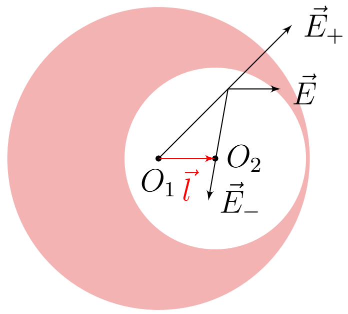
Аналогично находится поле вне шара, однако следует учесть что теперь суммарный заряд внутри поверхности будет просто равен заряду шара Q, тогда

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Запишем полученный результат в векторном виде, для этого необходимо домножить модуль напряжённости на единичный вектор, задающий радиальное направление, то есть на

$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$. Тогда

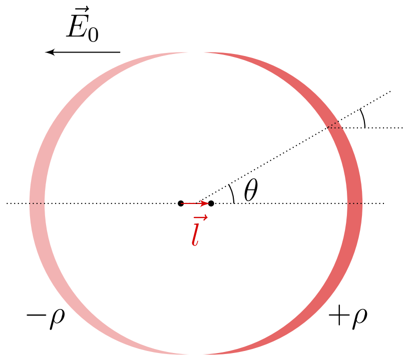
$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}, & \text{при } r \geqslant R; \\ \vec{E} = \dfrac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}, & \text{при } r \leqslant R. \end{cases}$$



Теперь приступим к решению исходного пункта. Будем рассматривать полость внутри шара как результат наложения положительно заряженного шара с плотностью $+\rho$ и отрицательно заряженного шара $-\rho$. Тогда по принципу суперпозиции поле внутри полости равно

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0} + \frac{(-\rho)\vec{r}_2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0}.$$

Здесь $\vec{r}_1$ — вектор, направленный от центра шара к точке наблюдения, $\vec{r}_2$ — вектор, направленный от центра полости к точке наблюдения, $\vec{l}$ — вектор, направленный от центра полости к центру шара. Заметим, что поле внутри полости однородное!



2. Воспользуемся результатом предыдущего пункта задачи. Если мы рассмотрим смещённые на малое расстояние $\vec{l}$ шары, то поле внутри них окажется однородным и равным

$$\vec{E}_0 = -\frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0}.$$

Здесь $\vec{l}$ — вектор, направленный от центра отрицательно заряженной сферы к центру положительно заряженной полусферы.

3. Удобно рассматривать поверхностную плотность заряда как функцию угла θ между направлением $\vec{l}$ и направлением на точку наблюдения. Толщина заряженного слоя в точке, определяемого углом θ, равна $h = l\cos\theta$. Поэтому поверхностная плотность заряда будет равна

$$\sigma = \rho h = \rho l\cos\theta = 3\varepsilon_0\cos\theta.$$

4. В пределе при малом зазоре суммарный заряд полушарий $Q = q_1 + q_2$ равномерно распределён по сферической поверхности (теорема единственности). Заряды же на плоских поверхностях полушарий равны q и $-q$, причём

$$q = q_1 - \frac{Q}{2} = \frac{q_1 - q_2}{2}.$$

Можно считать, что эти поверхности образуют плоский конденсатор. В этом приближении напряжённость электрического поля в зазоре между гранями

$$E_C = \frac{q}{\varepsilon_0\pi R^2},$$

а вблизи (снаружи) сферической поверхности

$$E_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Заметные отклонения напряжённости поля от приведённых выше величин будут наблюдаться только в малой окрестности у краёв плоских поверхностей, но в пределе «нулевого» зазора они не скажутся на искомой силе взаимодействия. Поле, создаваемое каждое из плоских поверхностей,

$$E_{C1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2},$$

а сила, с которой они притягиваются,

$$F_C = qE_{C1} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Взаимодействие между зарядами на внешних поверхностях полусфер можно заменить эффективным давлением p, действующим на них. Сила взаимодействия между зарядами, находящимися на внешних поверхностях полусфер, $F_R = Sp$, где $S = \pi R^2$, а давление

$$p = \sigma\frac{E_R}{2}.$$

Отсюда

$$F_R = \pi R^2 \frac{Q}{4\pi R^2}\frac{E_0}{2} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Результирующая сила

$$F_R = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q^2 - (4q)^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{(Q-4q)(Q+4q)}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

После подстановки значений Q и q окончательно получим

$$F_R = \frac{(3q_2 - q_1)(3q_1 - q_2)}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Притяжение полусфер будет возникать при одноимённых зарядах на них в случае, когда заряды отличаются больше чем втрое.

5. Давление электрического поля равно объёмной плотности энергии

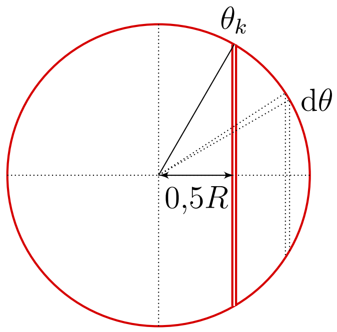
$$P = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Пусть поле с наружной стороны поверхности внешней сферы — E_0, а с внутренней — E_1. Тогда

$$E_0 = \frac{kQ_1}{r_2^2} - \frac{kQ_2}{r_2^2}.$$

Давление на внешнюю сферу равно разности объёмных плотностей энергии

$$\Delta P = P_0 - P_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_0^2 - E_1^2\right) = \frac{\varepsilon_0\left(Q_2^2 - 2Q_1Q_2\right)}{2r_2^4}.$$



6. Заряд шара $q = \varphi R/k$. Поле вблизи шара

$$E = \frac{kq}{R^2} = \frac{\varphi}{R}.$$

Давление поля

$$p = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Проекция сил на ось z, перпендикулярная разрезу,

$$F_z = pR^2 \int\limits_0^{\theta_k} 2\pi \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{pR^2}{2}\left(1 - \cos 2\theta_k\right) = p\pi R^2 \sin^2\theta_k = pS_\perp.$$

Здесь $S_\perp = \pi a^2$ — площадь разреза. По теореме Пифагора

$$a^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}R^2.$$

Сила, с которой части расталкиваются,

$$F_z = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\pi\frac{3}{4}R^2 = \frac{3}{32}\varphi^2 \approx 0{,}9 \cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$

7. Будем считать, что потенциал электрического поля равен нулю на бесконечности. Заметим, что потенциал плоскости параллельной пластинам конденсатора и проходящей через его середину равен нулю (в силу симмметрии, попытайтесь доказать это от противного). Тогда потенциалы положительной и отрицательной пластин соответственно равны

$$\varphi_+ = \frac{U}{2}; \quad \varphi_- = -\frac{U}{2}.$$

По закону сохранения энергии

$$q\frac{U}{2} = \frac{mv_0^2}{2}; \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{qU}{m}}.$$

8. Решение аналогично решению предыдущего пункта. Запишем закон сохранения энергии

$$q\frac{U}{2} = \frac{mv_1^2}{2} - q\frac{U}{2}; \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

9. Поле конденсатора вдалеке такое же как поле двух точечных зарядов. Запишем закон сохранения энергии

$$q\frac{U}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{kqQ}{50d} + \frac{kqQ}{51d}; \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \sqrt{qU + \frac{qUS}{5100\pi d^2}}.$$

Здесь Q — заряд конденсатора, который равен

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

10. Потенциал конденсатора на бесконечно большом расстоянии стремится к нулю, поэтому

$$\frac{qU}{2} = \frac{mv_3^2}{2}; \quad \Longrightarrow \quad v_3 = \sqrt{\frac{qU}{m}} = v_0.$$

Литература

Квант. Давление поля