Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Планиметрия (часть II)

Решение задания №5 для 9-х классов

(2020– 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2021

Составитель: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: решение задания №5 для 9-х классов (2020 – 2021 учебный год), 2021, 20 с.

Составитель:

Пиголкина Татьяна Сергеевна

Подписано 22.03.21. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,11.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: zftsh.online

Контрольные вопросы

1(4). а) В треугольник ABC вписана окружность. Может ли каждая из сторон делиться точкой касания в отношении 2:1?

б) Около трапеции описана окружность. Докажите, что сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон.

в) Треугольник ABC описан около окружности, угол B равен 60°, $AC=7$, полупериметр $p=10$. Найти стороны треугольника.

Δ 1 а(1). Пусть $E,F,K-$ точки касания сторон AC,AB,BC и пусть $AE=2EC, EC=x$ (рис. 1). По свойству касательных $AF=2x, CK=x$ и $BF=BK$. Если сторона AB делится в том же отношении, то либо $BF=4x$, либо $BF=x$. Если $BF=4x$, то и $BK=4x$ и $BK:KC=4:1$. Если же $BF=x$, то $BK=x$ и $BK:KC=1:1$.

Ответ: не может.

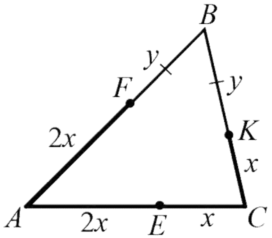


Рис. 1

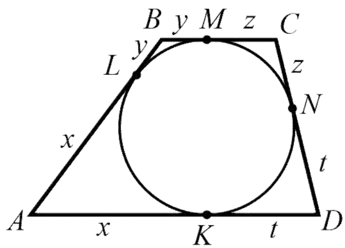


Рис. 2

1б(1). Пусть $K,L,M,N-$ точки касания сторон трапеции (рис. 2). Отметив равные отрезки касательных через x,y,z и t, получим $AB+CD=x+y+z+t$ и $AD+BC=x+t+y+z \Leftrightarrow AB+CD=AD+BC$, ч. т. д.

1в(2). Если $AK=x$ (рис. 3),то

$AM=x,\ MC=7-x=CL\Rightarrow$

$\Rightarrow 2p=2y+2x+2(7-x)\Rightarrow$

$\Rightarrow 2p=2y+2\cdot 7 \Rightarrow p=y+7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{y=10-7=3}}.$

Итак $AB=x+3,\ \ AC=7,$

$BC=3+7-x=10-x.$

Теорема косинусов:

$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos 60^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49=(x+3)^2+(10-x)^2-(x+3)(10-x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2-21x+30=0 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow$

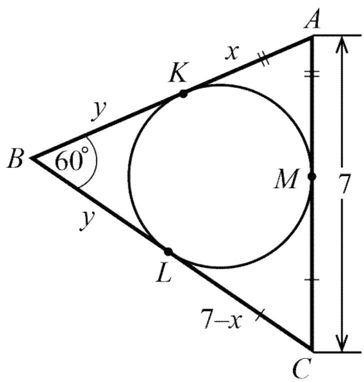


Рис. 3

$\Leftrightarrow (x-2)(x-5) \Rightarrow$ Стороны 5, 8, 7. ▲

2(6). а) Когда около четырёхугольника можно описать окружность?

б) Около четырёхугольника $ABCD$ описана окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, а прямые AD и BC – в точке M (рис. 4). Найти величину угла BAD, если угол K равен 45°, а угол $M = 25^\circ$.

в) Когда около трапеции можно описать окружность?

г) В треугольнике ABC угол ACB равен 60°, биссектрисы AK и BD пересекаются в точке O. Можно ли около четырёхугольника $DOKC$ описать окружность?

Δ 2 а(1). Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов равна 180°.

2 б(2). Около четырёхугольника $ABCD$ описана окружность (рис. 4). Обозначим $\angle BAD = x$, тогда $\angle BCD = 180^\circ - x$. Углы BCD и BCK – смежные, как и углы BCD и MCD, поэтому $\angle BCK = \angle MCD = x$. Угол ABC – внешний для треугольника KBC, по теореме $\angle ABC = x + 45^\circ$. Угол ADC – внешний для треугольника MCD, $\angle ADC = x + 25^\circ$. Углы ADC и ABC в сумме дают 180°: $2x + 70^\circ = 180^\circ$, $\underline{x = 55^\circ}$.

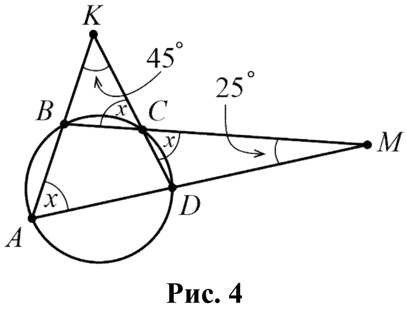


Рис. 4

2 в(2). Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая. Докажем это. 1) Если трапеция $ABCD$ – равнобокая (рис. 5), то $\angle A = \angle D$, а из параллельности $AD \parallel BC$ следует $\angle A + \angle B = 180^\circ$. В это равенство вместо $\angle A$ подставляем равный ему $\angle D$, получаем $\angle D + \angle B = 180^\circ \Rightarrow$ около равнобокой трапеции можно описать окружность.

2) Пусть трапеция $KLMN$ вписана (рис. 6). Проведём диагональ KM. Накрест лежащие углы 1 и 2 равны. Равные вписанные углы опираются

на равные хорды: $KL = 2R\sin(\angle 1)$, $MN = 2R\cdot\sin(\angle 2) \Rightarrow KL = MN$, трапеция равнобокая.

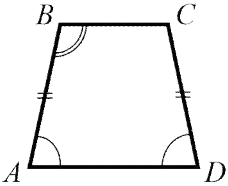


Рис. 5

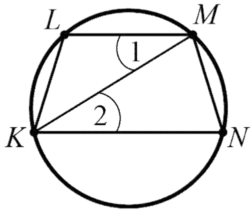


Рис. 6

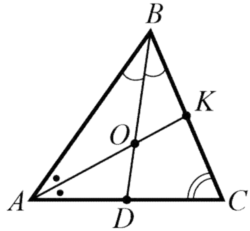


Рис. 7

2 г(1). В треугольнике AOB углы, прилежащие к стороне AB, равны $A/2$ и $B/2$ (рис. 7), угол AOB равен $180^\circ - \dfrac{A+B}{2}$, вертикальный к ним угол DOK, $\angle DOK = \angle AOB = 180^\circ - \dfrac{A+B}{2}$. По условию $\angle C = 60^\circ$; из $A+B+C = 180^\circ$ следует $A+B = 120^\circ$, $\dfrac{A+B}{2} = 60^\circ$, $\angle DOK = 120^\circ$. В четырёхугольнике $DOKC$ имеем $\angle DOK + \angle KCD = 180^\circ \Rightarrow$ около него можно описать окружность. ▲

3(6). а) Доказать равенство $a = 2R\sin\alpha$, где $a-$ хорда окружности радиуса R, а $\alpha -$ величина вписанного угла, опирающегося на ходу a.

б) Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке S, $AC = CS = 5$. Чему равен угол ABC (рис. 9)?

в) Около треугольника ABC описана окружность, угол A равен 15°, угол $B = 45^\circ$, $AB = 4\sqrt{3}$. Найти радиус окружности и длину стороны AC.

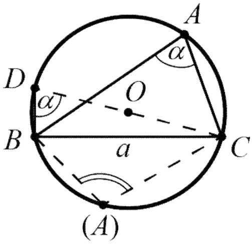


Рис. 8

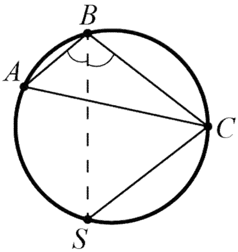


Рис. 9

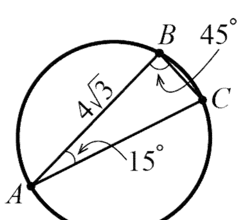


Рис. 10

Δ 3 а(2). Пусть $BC-$ хорда окружности с центром в точке O и радиуса R, $BC=a$ и опирающийся на хорду BC вписанный угол равен α (рис. 8). Проведём диаметр CD. Если точка A и центр O лежат по одну сторону от прямой BC, то угол BAC, опирающийся на хорду BC, острый и $\angle BDC=\angle BAC=\alpha.$ Из прямоугольного треугольника BDC следует $BC=CD\sin(\angle BDC)$, т. е. $a=2R\sin\alpha.$

Если угол BAC – тупой (центр O и вершина A лежат по разные стороны от прямой BC), то $\angle BDC=180^\circ-\alpha$ и $a=2R\sin\left(180^\circ-\alpha\right)=2R\sin\alpha.$ Если угол $\alpha-$ прямой, то $a=2R\sin 90^\circ=2R.$

3 б(2). По доказанной формуле $AC=2R\sin B$, $CS=2R\sin\dfrac{B}{2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{AC}{CS}=1\Rightarrow\frac{2R\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2R\sin\frac{B}{2}}=2\cos\frac{B}{2}=1\Rightarrow\ \frac{B}{2}=60^\circ,\qquad \underline{\angle ABC=120^\circ}$$

(рис. 9).

3 в(2). В треугольнике сумма углов $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$, $\angle A+\angle B=60^\circ$ (рис. 10) $\Rightarrow\angle C=120^\circ$. По формуле $a=2R\sin\alpha$ имеем $R=\dfrac{AB}{2\sin 120^\circ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4$, $\underline{R=4}$, тогда $AC=2R\sin 45^\circ=\underline{4\sqrt{2}}$. ▲

4(5). а) Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются в точке M и перпендикулярны друг другу (рис. 11). Доказать, что $AC^2+BD^2=CB^2+AD^2=4R^2$.

б) Трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=8$ и $BC=6$ вписана в окружность. Диагонали AC и BD перпендикулярны друг другу. Найти радиус окружности, боковые стороны, высоту трапеции.

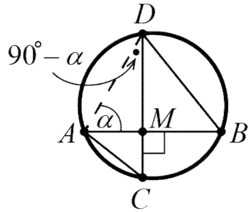


Рис. 11

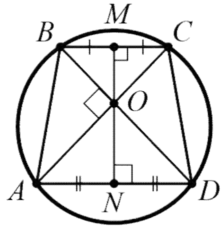


Рис. 12

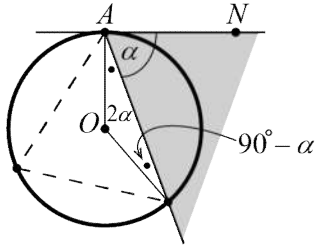


Рис. 13

Δ 4 а(2). Проведём хорду AD и обозначим $\alpha = \angle DAB$ (рис. 11). Угол DAB опирается на хорду $DB \Rightarrow DB = 2R\sin\alpha$. На хорду AC опирается угол
$ADC = 90^\circ - \alpha \;\Rightarrow\; AC = 2R\sin(90^\circ - \alpha) = 2R\cos\alpha \;\Rightarrow\; DB^2 + AC^2 =$
$= 4R^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4R^2$. Аналогично доказывается, что $BC^2 + AD^2 = 4R^2$.

4 б(3). Диагонали AC и $BD-$ взаимно ортогональные хорды окружности, пусть её радиус R (рис. 12). По доказанному в **4 а)** $BC^2 + AD^2 = 4R^2$, $4R^2 = 36 + 64 = 100$, $R^2 = 25$, $\underline{R = 5}$. Трапеция вписана, она равнобокая, стороны $AB = CD$ и $AB^2 + CD^2 = 4R^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2AB^2 = 100, AB^2 = 50, AB = CD = \underline{5\sqrt{2}}.$

Три точки – середины оснований и точка пересечения диагоналей, лежат на одной прямой $MN = MO + ON$, отрезок $MO-$ медиана прямоугольного треугольника BOC, $OM = \frac{1}{2}BC = 3$, аналогично $ON = \frac{1}{2}AD = 4$, тогда $MN = OM + ON = 7$. $MN-$ высота трапеции, $\underline{MN = 7}$. ▲

5(5). а) Как измеряется угол между касательной и хордой с общей точкой на окружности?

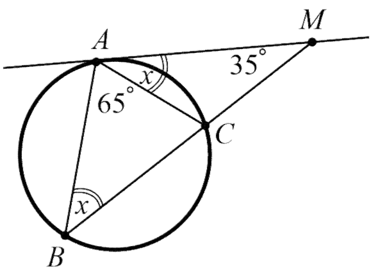
б) $MA-$ касательная, $MB-$ секущая (рис. 14). Угол $AMB = 35^\circ$, угол $CAB = 65^\circ$. Чему равен угол ABM?

в) Треугольник ABC со сторонами $AC = 3$ и $AB = 4$ вписан в окружность. Через точку A проведена касательная, которую прямая BC пересекает в точке M (рис. 15). Найти отношение площадей треугольника ABM и треугольника ABC.

г) Треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$ вписан в окружность. Найти расстояние от точки C до касательной к окружности, проходящей через точку A.

Δ 5 а(1). Угол между касательной и хордой с общей точкой на окружности равен половине угловой меры дуги, заключённой между его сторонами, и равен любому вписанному углу, опирающемуся на эту дугу (рис. 13 напоминает доказательство).

5 б(1). Угол между касательной MA и хордой AC равен вписанному углу ABC (рис. 14). Обозначим его x, тогда из суммы углов треугольника легко находим x: $2x+65^\circ+35^\circ=180^\circ$, $2x=80^\circ$, $\underline{x=40^\circ}$.



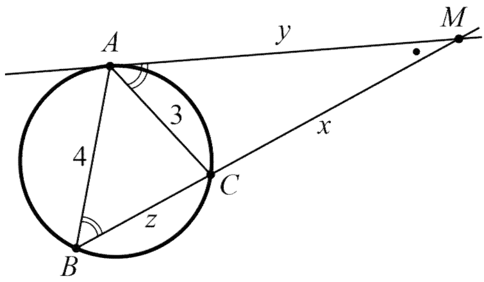


Рис. 14 **Рис. 15**

5 в(1). Имеем $\Delta AMC \sim \Delta BMA$ (рис. 15), $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{MC}{MA}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x+z}=\frac{3}{4}=\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{4}{3}x, \\ \dfrac{4}{3}x=\dfrac{3}{4}(x+z)\Rightarrow z=\dfrac{7}{9}x. \end{array}\right.$$

Треугольники ABM и ABC имеют общую высоту из вершины A, их площади относятся как длины оснований:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}=\frac{BM}{BC}=\frac{z+x}{z}=\frac{\frac{7}{9}x+x}{\frac{7}{9}x}=\underline{\frac{16}{7}}.$$

5 г(2). Угол между касательной AK и хордой AC равен вписанному углу ABC (рис. 16). Находим этот угол по теореме косинусов: $7^2=64+25-2\cdot8\cdot5\cdot\cos B$, $\quad \cos B=\dfrac{40}{2\cdot8\cdot5}=\dfrac{1}{2}$, $\angle ABC=60^\circ=\angle CAK$. Если $CD\perp AK$, то $CD=AC\cdot\sin B=7\cdot\sin 60^\circ=\underline{\dfrac{7\sqrt{3}}{2}}$. ▲

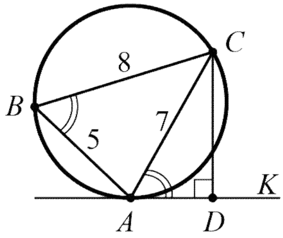


Рис. 16

6(4). Две окружности радиусов R и r $(R>r)$ внешне касаются в точке K. Одна прямая касается окружностей: большей в точке A, меньшей в точке C. Другая прямая касается окружностей: большей в точке B, меньшей в точке D. Через точку K проведена общая внутренняя касательная, пересекающая прямую AC в точке M, а $BD -$ в точке N.

а) Найти угол AKC.

б) Найти угол O_1MO_2, где O_1 и $O_2 -$ центры соответственно большей и меньшей окружностей.

в) Найти длину отрезка AC.

г) Доказать параллельность прямых AB, MN, CD.

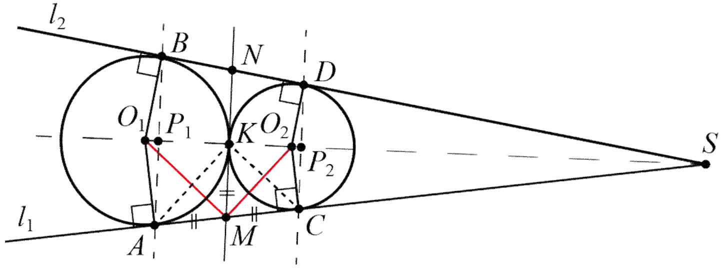


Рис. 17

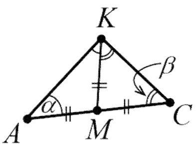


Рис. 17 а

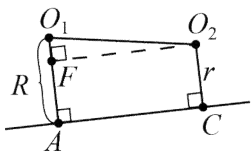


Рис. 17б

Δ Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке S (рис. 17). Обе окружности вписаны в угол BSA, значит, центр O_1, как и центр O_2, лежат на биссектрисе угла BSA. Биссектриса SO_1 является осью симметрии.

6 а(1). По свойству касательных $MA = MK$ и $MC = MK \Rightarrow$ $\Rightarrow AM = MK = MC$.

В треугольнике AKC медиана KM равна половине стороны AC. Получаем два равнобедренных треугольника (рис. 17а): $2\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90^\circ$, $\underline{\angle AKC = 90^\circ}$.

6 б(1). Окружность с центром в точке O_1 вписана в угол AMN, а окружность с центром в точке $O_2 -$ в угол CMN. Центр O_1 лежит на биссектрисе $\angle AMK$, центр $O_2 -$ на биссектрисе $\angle CMK$. Углы AMK и

CMK – смежные, поэтому их биссектрисы MO_1 и MO_2 образуют прямой угол: $\underline{\angle O_1MO_2 = 90^\circ}$.

6 в(1). Пусть $O_2F \perp O_1A$ (рис. 17б), тогда четырёхугольник AFO_2C – прямоугольник, $FO_2 = AC$ и $FA = O_2C$ $\Rightarrow O_1F = R - r$. Из ΔFO_1O_2 находим $FO_2 = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (O_1F)^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} =$ $= 2\sqrt{Rr}$.

Следовательно, и $\underline{AC = 2\sqrt{Rr}} \Rightarrow KM = \sqrt{Rr}$, а в силу симметрии относительно биссектрисы SO_1 также имеем $BD = 2\sqrt{Rr}$ и $MN = 2\sqrt{Rr}$.

6 г(1). По свойству касательных $SC = SD, SA = SB \Rightarrow SA - SC =$ $= AC = SD - SB = BD$. Далее, треугольники CSD, ASB – равнобедренные, их биссектрисы являются высотами, т. е. $SP_2 \perp DC$ и $SP_1 \perp AB$. Наконец, линия центров перпендикулярна общей касательной MN $\Rightarrow MN \perp SK$. Три прямые AB, CD и MN перпендикулярны одной прямой и, следовательно, параллельны. ▲

7(6). Площадь треугольника ABC равна S. Найти площадь заштрихованной фигуры, если:

а) MN – средняя линия, $MEFN$ – трапеция и $BF = \frac{1}{3}BC$ (рис. 18),

б) $AK : KB = 2:1$, $AM : MC = 1:4$ и $BL : LC = 3:2$ (рис. 19).

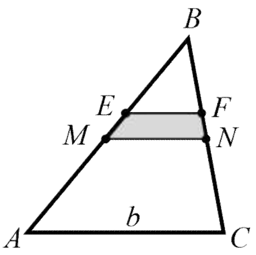


Рис. 18

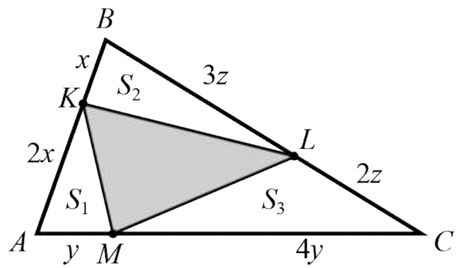


Рис. 19

Δ 7 а(3). Отрезок MN – средняя линия треугольника ABC (рис. 18), $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$ $\Rightarrow \Delta MBN \sim \Delta ABC$. $S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Далее, $MEFN$ – трапеция $\Rightarrow$ $EF \parallel MN$ $\Rightarrow$ $EF \parallel AC$ $\Rightarrow$ $\Delta EBF \sim \Delta ABC$,

$EF : AC = BF : BC \quad \Rightarrow EF = \dfrac{1}{3}AC \Rightarrow S_{EBF} = \dfrac{1}{9}S_{ABC}$. Находим

$$S_{MEFN} = S_{MBN} - S_{EBF} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)S,\ S_{MEFN} = \underline{\frac{5}{36}S.}$$

7 б(3). Используем утверждение 2.2° о сравнении площадей треугольников с общими углом. Введём обозначения (рис. 19):
$S_1 = S_{AKM}$, $S_2 = S_{BKL}$, $S_3 = S_{CML}$ и у нас $S = S_{ABC}$.

Имеем: $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{2x \cdot y}{3x \cdot 5y} = \dfrac{2}{15},\ S_1 = \dfrac{2}{15}S;$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{x \cdot 3z}{3x \cdot 5z} = \frac{1}{5},\ S_2 = \frac{1}{5}S;$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{4y \cdot 2z}{5y \cdot 5z} = \frac{8}{25},\ S_3 = \frac{8}{25}S.$$

Находим $S_1 + S_2 + S_3 = \left(\dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25}\right)S = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{25}\right)S = \dfrac{49}{75}S.$

Искомая площадь равна $\left(1 - \dfrac{49}{75}\right)S = \underline{\dfrac{26}{75}S}$. ▲

8(3). Площадь параллелограмма $ABCD$ равна *S*. Найти площадь заштрихованной фигуры, если:

а) $CM = MD$ (рис. 20);

б) $BK = \dfrac{1}{3}BC$ (рис. 21).

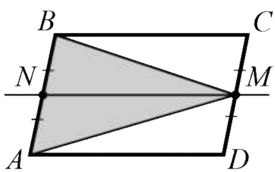


Рис. 20

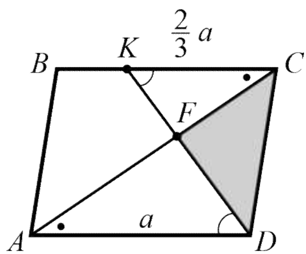


Рис. 21

Δ 8 а(1). Проведём через точку *M* прямую, параллельную стороне *AD* до пересечения в точке *N* с прямой *AB* (рис. 20). По построению *ANMD* и *NBCM* – равные параллелограммы: $BC = NM = AD$, $AN = NB = CM = MD$. Площади их равны и равны $\dfrac{1}{2}S$.

Далее, диагональ параллелограмма делит его площадь пополам $\Rightarrow$ $\Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{4}S = S_{BMN}$. Итак, $\underline{S_{ABM} = \frac{1}{2}S.}$

8 б(2). Пусть $AD = a$, по условию $KC = \frac{2}{3}a$ (рис. 21). Площадь треугольника ACD равна половине площади параллелограмма $ABCD$, т. е. $S_{ACD} = \frac{1}{2}S.$ Далее, $\Delta AFD \sim \Delta CFK$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AD}{CK}$, $\frac{AF}{FC} = \frac{a}{\frac{2}{3}a}$, $AF = \frac{3}{2}FC.$ Из $AC = AF + FC$ следует $AC = \left(\frac{3}{2}+1\right)FC \Rightarrow FC = \frac{2}{5}AC.$ По утверждению 2.1° о сравнении площадей $S_{DFC} = \frac{2}{5}S_{DAC} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}S\right)$. Итак, $\underline{S_{DFC} = \frac{1}{5}S.}$ ▲

9(6). а) Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Площадь треугольника BOC равна 2, а площадь треугольника COD равна 6. Найти площадь трапеции.

б) Отрезок MN с концами на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ параллелен основаниям трапеции, $AD = 7$, $BC = 3$, $MN = 4$. Найти отношение площадей трапеций, на которые прямая MN разделила трапецию $ABCD$.

в) Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O, угол AOD равен 120°, $AC = 7$, длина средней линии трапеции равна 6,5. Найти площадь трапеции.

Δ 9 а(2). Площади треугольников с общей вершиной относятся как длины оснований (рис. 22) $\frac{S_{BCO}}{S_{COD}} = \frac{2}{6} = \frac{BO}{OD}$ $\Rightarrow$ $\frac{BO}{OD} = \frac{1}{3}.$ Так как $\Delta BOC \sim \Delta DOA$, то $\frac{CO}{AO} = \frac{BO}{OD}$ $\Rightarrow \frac{CO}{AO} = \frac{1}{3}.$ Треугольники AOD и COD имеют общую высоту из вершины D $\Rightarrow \frac{S_{AOD}}{S_{COD}} = \frac{AO}{CO} = 3 \Rightarrow S_{AOD} =$ $= 3 \cdot 6 = 18.$ Наконец, нам известно, что $S_{AOB} = S_{DOC}$, поэтому имеем $S_{ABCD} = 2S_{COD} + S_{BOC} + S_{AOD}$, $S_{ABCD} = 2 \cdot 6 + 2 + 18 = \underline{32}.$

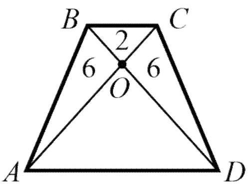


Рис. 22

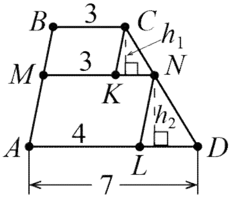


Рис. 23

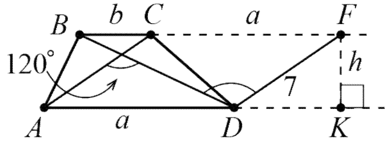


Рис. 24

9 б(2). Задача аналогична Задаче 15 Задания (см. рис. 23): $CK \parallel BA$, $NL \parallel BA$, $\Delta KCN \sim \Delta LND$, $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{KN}{LD} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \dfrac{(3+4)h_1}{(4+7)h_2} = \dfrac{7}{11} \cdot \dfrac{1}{3} = \underline{\dfrac{7}{33}}$.

9 в(2). Через точку D проведём прямую параллельно диагонали AC до пересечения в точке F с прямой BC (рис. 24).

$ACFD$ – параллелограмм, $CF = AD$, $DF = AC = 7$, $\angle BDF = 120^\circ$. Площадь треугольника BDF равна площади трапеции: $S_{BDF} = \dfrac{1}{2} \cdot BF \cdot FK = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = S_{ABCD}$.

В треугольнике BDF угол BDF равен 120°, $BF = 13$. Пусть $\underline{BD = x}$. По теореме косинусов $BF^2 = BD^2 + DF^2 - 2 \cdot BD \cdot DF \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 169 = x^2 + 49 + 7x \Leftrightarrow x^2 + 7x - 120 = 0$, $x = \dfrac{-7 + \sqrt{49+480}}{2} = \dfrac{\sqrt{529} - 7}{2} = 8$.

Тогда $S_{ABCD} = 14\sqrt{3}$. ▲

Задачи

1(5). Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, точкой касания делит гипотенузу на отрезки $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$. Найти площадь треугольника.

Ответ: mn.

∆ Пусть K, L, M – точки касания вписанной окружности сторон (рис. 25), $BK = m, KA = n$. По свойству касательных $BL = m$ и $AM = n$, также знаем, что $CL = CM = r$ – радиус вписанной окружности. По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow (m+r)^2 + (n+r)^2 = (m+n)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow r^2 + r(m+n) = mn$, а площадь треугольника равна $S = \dfrac{1}{2} BC \cdot AC =$ $= \dfrac{1}{2}(m+r)(n+r) = \dfrac{1}{2}\left(r^2 + r(m+n) + mn\right)$. Подставляем в скобку значение $r^2 + r(m+n)$ и получаем $S = \dfrac{1}{2}(mn + mn) = mn$. ▲

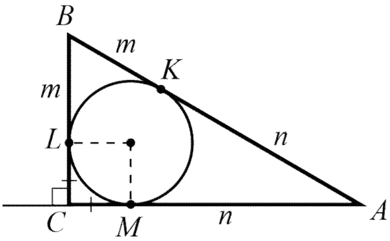


Рис. 25

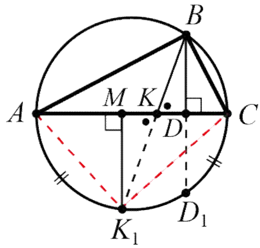


Рис. 26

2(5). Продолжения высоты BD и биссектрисы BK треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках D_1 и K_1 соответственно, при этом $BD = DD_1$ и $BK : BK_1 = 3 : 8$. Найти радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 30.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Δ 1. Точка D – середина хорды BD_1, центр окружности лежит на перпендикуляре, проходящем через точку D, т. е. на прямой AC, $\Rightarrow AC$ – диаметр окружности (рис. 26). Пусть радиус окружности равен R.

2. Вписанный угол ABC опирается на дугу AC, содержащую точку K_1; BK_1 – биссектриса угла $ABC \Rightarrow AK_1 = K_1C$ (т. к. $\angle ABK_1 = \angle K_1BC$). Равные дуги стягиваются равными хордами, $AK_1 = K_1C$, треугольник AK_1C – равнобедренный, если $K_1M \perp AC$, то точка M – середина диаметра AC, т. е. точка M – центр окружности и $K_1M = R$.

3. $\Delta MK_1K \sim \Delta DBK$, $\dfrac{K_1M}{BD} = \dfrac{K_1K}{BK}$. По условию $\dfrac{BK}{K_1K} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{R}{BD} = \dfrac{5}{3}$, $BD = \dfrac{3}{5}R$. $\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = \dfrac{1}{2} \cdot 2R \cdot \dfrac{3}{5}R$. По условию $S_{ABC} = 30$. Из $\dfrac{3}{5}R^2 = 30$ следует $R = 5\sqrt{2}$. ▲

3(5). Точка F лежит на продолжении стороны AD параллелограмма $ABCD$ ($AF > AD$). Прямая BF пересекает диагональ AC в точке K, а сторону CD в точке P, при этом $BK = 2$, $PF = 3$. Найти отношение площади треугольника BAK к площади треугольника CPK.

Ответ: 4:1.

Δ Пусть $DF = x$, $KP = y$, $BC = a$, тогда $AD = a$ (рис. 27).

1. Имеем: $\Delta BPC \sim \Delta FPD \Rightarrow \dfrac{BC}{FD} = \dfrac{BP}{FP} = \dfrac{PC}{PD} \Leftrightarrow$

$$\frac{a}{x} = \frac{2+y}{3} \qquad (1)$$

и

$$\frac{a}{x} = \frac{PC}{PD} \qquad (1')$$

2. Далее: $\Delta AKF \sim \Delta CKB \Rightarrow \dfrac{AF}{BC} = \dfrac{KF}{KB} \Leftrightarrow \dfrac{a+x}{a} = \dfrac{3+y}{2} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{x}{a} =$ $= \dfrac{3+y}{2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{x}{a} = \frac{1+y}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $\dfrac{2+y}{3} = \dfrac{2}{1+y} \Leftrightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (y+4)(y-1) = 0 \Rightarrow y = 1$ $(y > 0)$. При $y = 1$ из (2) следует $x = a$, т. е. $DF = a$, а из $(1')$ будем иметь $PC = PD$, т. е. точка $P -$ середина стороны CD.

3. Из подобия $\Delta BAK \sim \Delta PCK$ (коэффициент подобия $k = \dfrac{BK}{KP} = \dfrac{2}{1}$) следует $\dfrac{S_{BAK}}{S_{PCK}} = \left(\dfrac{2}{1}\right)^2 = 4$. ▲

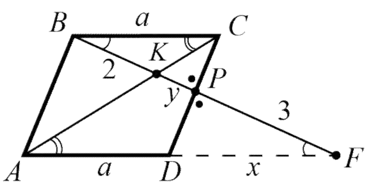


Рис. 27

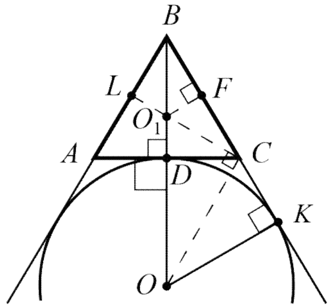


Рис. 28

4(6). Треугольник $ABC -$ равнобедренный, $AB = BC$, $AC = 6$. Окружность радиуса 6 касается отрезка AC и продолжения прямых BA и BC. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, и площадь треугольника ABC.

Ответ: $r = \dfrac{3}{2}, S = 12.$

Δ 1. Центр O_1 окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на пересечении биссектрис BD и CL; центр O вписанной окружности лежит на биссектрисе угла ABC, т. е. на прямой BD, и на биссектрисе угла ACK (рис. 28).

Имеем: $BD \perp AC$, $AD = DC = 3$; углы BCD и $DCK -$ смежные, поэтому биссектрисы CO_1 и CO этих углов образуют прямой угол O_1CO. В прямоугольном треугольнике O_1CO отрезок $CD -$ высота к гипотенузе. По свойству высоты прямоугольного треугольника $CD^2 = DO_1 \cdot DO$, откуда $DO_1 = \dfrac{CD^2}{DO} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$, $DO_1 -$ радиус r вписанной в треугольник ABC окружности, $r = \dfrac{3}{2}$.

2. Пусть $O_1F \perp BC$ и $OK \perp BK, O_1F = r, OK = 6$. Треугольники BO_1F и BOK подобны, $\dfrac{O_1F}{OK} = \dfrac{BO_1}{BO}$. Обозначим $BO_1 = y$, вычислим $O_1O = O_1D + DO = \dfrac{3}{2} + 6 = \dfrac{15}{2}$ и перепишем пропорцию: $\dfrac{y}{y + 15/2} = \dfrac{3/2}{6} \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}$. Высота треугольника ABC равна BD. $BD = BO_1 + O_1D = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2} = 4, S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD = 12$. ▲

5(6). В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ расстояние от точки M, являющейся серединой стороны AD, до всех вершин одинаково. Найти длину стороны AD, если $BC = 12$, $\angle ABC = 110^\circ$, $\angle BCD = 115^\circ$.

Ответ: $12\sqrt{2}$.

Δ Заметим, что точки A, B, C и D лежат на окружности с диаметром AD и точка $M -$ центр этой окружности.

Проведём отрезки BM и CM, треугольники AMB и $DMC -$ равнобедренные (рис. 29). Равные углы в треугольнике AMB обозначим α, а в треугольнике $DMC - \beta$.

Сумма углов выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна 360° и равна $\alpha + 110^\circ + 115^\circ + \beta$, находим $\alpha + \beta = 135^\circ$.

Угол $BMC -$ центральный угол, опирающийся на хорду BC. Вычислим $\angle BMC$: $\angle BMC = 180^\circ - \angle AMB - \angle CMD = 180^\circ - \left(180^\circ - 2\alpha\right) -$

$-\left(180^\circ - 2\beta\right) = 2\left(\alpha + \beta\right) - 180^\circ = 270^\circ - 180^\circ = 90^\circ$, и выразим BC по формуле $BC = 2R \cdot \sin\dfrac{\angle BMC}{2}$, получаем $AD = 2R = \dfrac{12}{\sin 45^\circ} = 12\sqrt{2}$. ▲

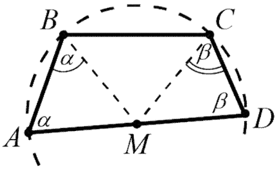


Рис. 29

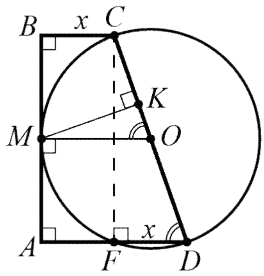


Рис. 30

6(5). В прямоугольной трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Окружность, построенная на большей боковой стороне CD как на диаметре, касается стороны AB в точке M. Расстояние от точки до M стороны CD равно $6\sqrt{2}$. Найти радиус окружности.

Ответ: 9.

Δ 1. Боковая сторона $CD -$ диаметр окружности, её середина – точка $O -$ центр окружности: $CO = OD = R$ (рис. 30). Окружность касается боковой стороны AB в точке M, $OM \perp AB$. Из $AB \perp AD$ следует $OM \parallel AD$ и $OM -$ средняя линия. Итак, $OM = R$ и $OM = \dfrac{AD + BC}{2}$. Если $BC = x$, то по условию $AD = 2x$ и $R = \dfrac{3}{2}x$.

2. Пусть $CF \perp AD$, $FD = AD - BC = x$. Из треугольника CFD определяем угол $\alpha = \angle ADC : \cos\alpha = \dfrac{FD}{CD} = \dfrac{x}{2R} = \dfrac{\frac{2}{3}R}{2R} = \dfrac{1}{3}$.

3. Пусть $MK \perp CD$. По условию $MK = 6\sqrt{2}$, а из треугольника MKO следует $MK = MO \cdot \sin\alpha$. Находим $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и $R = MO = \dfrac{MK}{\sin\alpha} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}/3} = 9$. ▲

7(6). В окружность радиуса 5 вписана трапеция $ABCD$, диагонали которой взаимно перпендикулярны, и большее основание $AD = 8$. Найти меньшее основание, боковую сторону и площадь трапеции.

Ответ: $BC = 6$; $AB = CD = 5\sqrt{2}$; $S = 49$.

Δ 1. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность S, она равнобокая. Её диагонали AC и $BD -$ это две взаимно перпендикулярно пересекающиеся в точке O хорды окружности радиуса 5 (рис. 31). Как следует из ответа на контрольный вопрос 4а) $BC^2 + AD^2 = 4R^2$ и $AB^2 + CD^2 = 4R^2$. Зная $R = 5$ и $AD = 8$ находим $BC^2 = 100 - 64 = 36$, $\underline{BC = 6}$; боковые стороны равны $\Rightarrow 2AB^2 = 4R^2$, $AB^2 = 50$, $\underline{AB = CD = 5\sqrt{2}}$.

2. Если $CF \perp AD$, то по свойству равнобокой трапеции $FD = \dfrac{a-b}{2} = 1$.

Из треугольника CFD находим $CF -$ высоту трапеции: $OF = \sqrt{CD^2 - FD^2} = 7$ и вычисляем площадь трапеции $S = \dfrac{1}{2}(6+8)\cdot 7 = 49$.

(Можно было найти отрезок MN, соединяющий середины оснований – он равен высоте и равен $\dfrac{1}{2}\left(AD + BC\right) = 7$.) ▲

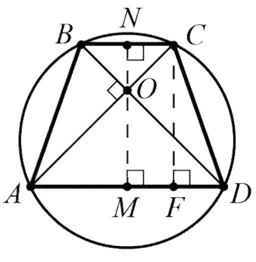


Рис. 31

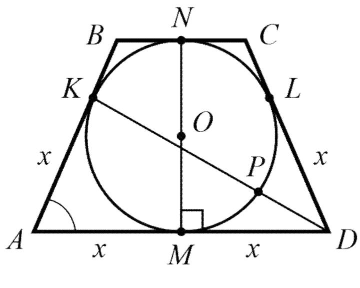


Рис. 32

8(6). Около окружности описана равнобокая трапеция $ABCD$. Окружность касается боковой стороны AB в точке K, прямая DK пересекает окружность в точке P, при этом $DP = 4$, $KP = 5$.

Найти: **а)** длину основания AD, **б)** косинус угла KAD и **в)** радиус окружности.

Ответ: а) 12; **б)** $\dfrac{11}{16}$; **в)** $\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$.

Δ 1. Трапеция равнобокая, если M и N – середины оснований, то $MN \perp AD$ и MN – ось симметрии (рис. 32). По свойству касательных

$AK = AM$, $DL = DM$, M – середина AD. (Если O – центр вписанной окружности, то AO и DO – биссектрисы углов A и D, $\angle A = \angle D \Rightarrow \Delta AOD -$ равнобедренный, $OM \perp AD \Rightarrow AM = DM$). Пусть $AD = 2x$. По теореме о касательной и секущей имеем $MD^2 = DP \cdot DK \Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot 9$, $x = 6$. В треугольнике AKD известны все три стороны $AK = 6$, $AD = 12$, $KD = 9$.

2. В равнобедренной описанной трапеции с основаниями a и b $(a > b)$ нам известно (задача 17 из Задания) $\angle A = \angle D$, $\cos A = \dfrac{a-b}{a+b}$, $h = \sqrt{ab}$. Находим $\cos A$ из ΔAKD:

$$KD^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cos A \Leftrightarrow 81 = x^2 (5 - 4\cos A) \Leftrightarrow 5 - 4\cos A =$$

$$= \frac{81}{36} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \cos A = \frac{11}{16}.$$ Тогда $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{11}{16}$, $16a - 16b = 11a + 11b$, $5a = 27b$,

$b = \dfrac{5}{27} \cdot 12 = \dfrac{20}{9}$, $h = \sqrt{ab} = \dfrac{4}{3}\sqrt{15}$, радиус окружности $r = \dfrac{1}{2}h = \dfrac{2}{3}\sqrt{15}$. ▲

9(5). Внешняя касательная двух окружностей радиусов 2 и 5 в полтора раза больше внутренней касательной. Найти расстояние между центрами этих окружностей.

Ответ: 9.

Δ 1. Пусть O_1 – центр окружности радиуса 2 и O_2 – центр окружности радиуса 5 (рис. 33) и пусть они касаются прямой l_1 в точках A и B соответственно, а прямой l_2 в точках C и D соответственно. AB – их внешняя касательная, CD – их внутренняя касательная. По условию $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{3}{2}$. Обозначим $CD = x$, тогда $AB = \dfrac{3}{2}x$.

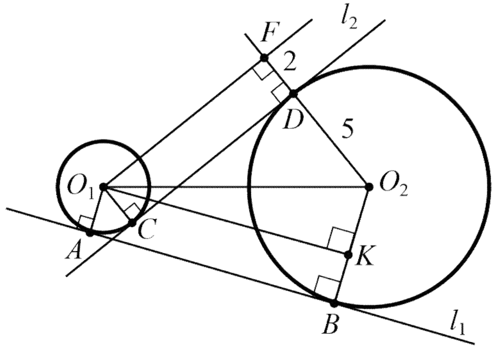


Рис. 33

2. Имеем: $O_1C \perp CD$, $O_2D \perp CD$. Через точку O_1 проведём прямую, параллельную CD до пересечения в точке F с прямой O_2D. Четырёхугольник $O_1CDF -$ прямоугольник, $O_1F = CD = x$ и $FD = O_1C = 2 \Rightarrow FO_2 = 7$. Проведём также прямую O_1O_2. Треугольник O_1FO_2 прямоугольный, $O_1O_2 = O_1F^2 + (FO_2)^2 \Leftrightarrow$

$$O_1O_2^2 = x^2 + 49 \qquad (1)$$

3. Проведём $O_1K \parallel AB$, $O_2K = O_2B - O_1A = 3$, $O_1K = AB = \frac{3}{2}x$. Из треугольника O_1O_2K следует $O_1O_2^2 = O_2K^2 + O_1K^2 \Leftrightarrow$

$$O_1O_2^2 = 9 + \frac{9}{4}x^2 \qquad (2)$$

Из (1)и (2) имеем $9 + \frac{9}{4}x^2 = x^2 + 49 \Rightarrow \frac{5}{4}x^2 = 40 \Rightarrow x^2 = 32.$

Подставляем в (1) и находим $O_1O_2 = \sqrt{32 + 49} = 9.$ ▲

10(5). К двум окружностям радиусов R и r $(R > r)$, касающимся внешне, проведена общая внешняя касательная. В образовавшийся криволинейный треугольник вписана окружность (двух данных окружностей она касается внешне). Найти радиус этой окружности.

Ответ: $\frac{Rr}{\left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)^2}$.

Δ Пусть Q – центр третьей окружности, обозначим её радиус x, радиус большей окружности обозначим R, меньшей – r (рис. 34). Имеем: $O_1Q = R + x$, $O_2Q = r + x$. Нам известно, что $AB = 2\sqrt{Rr}$, $AC = 2\sqrt{Rx}$, $BC = 2\sqrt{rx}$ (ответ на контрольный вопрос 6в)). Из $AB = AC + CB$ получаем уравнение $\sqrt{Rx} + \sqrt{rx} = \sqrt{Rr} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}} \Leftrightarrow x = \frac{Rr}{\left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)^2}$. ▲

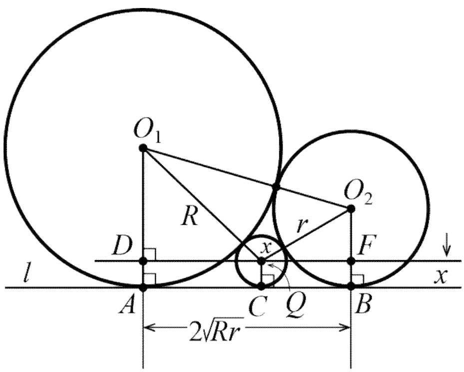


Рис. 34