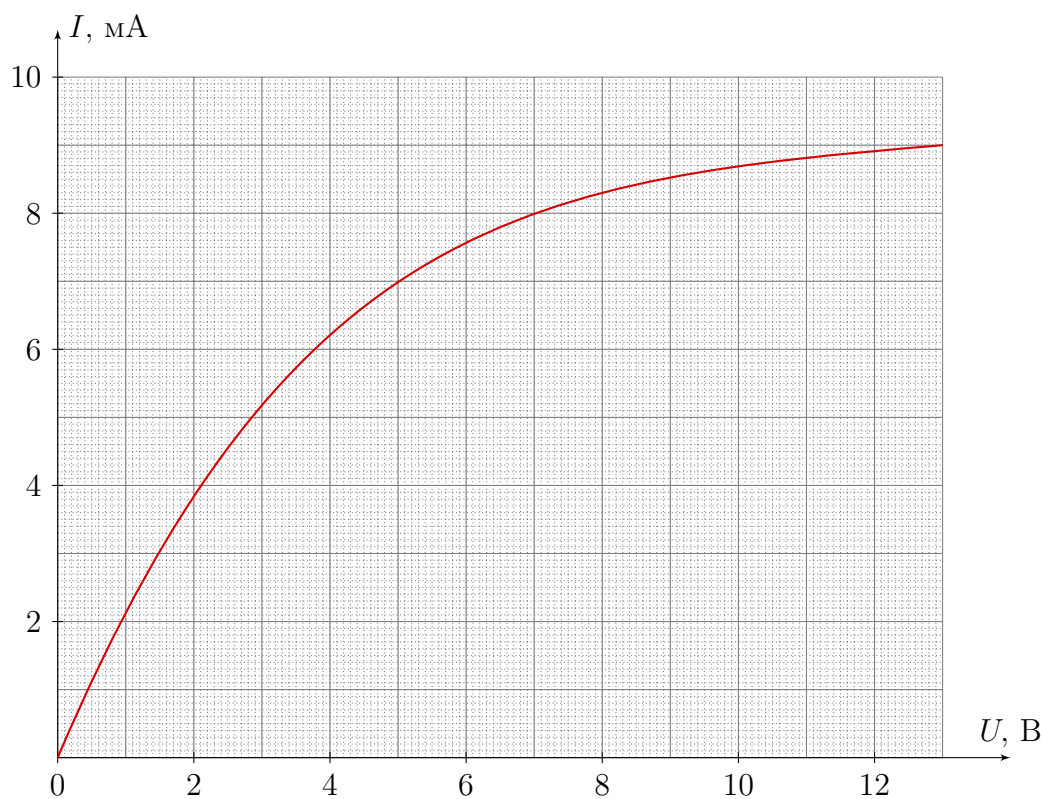
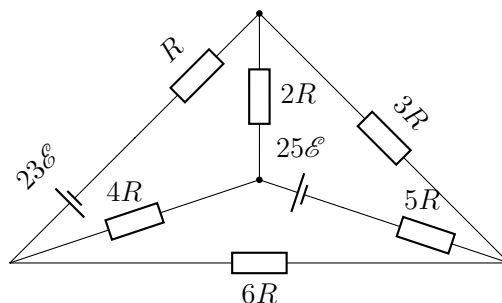


Déjà vu

Электрическая цепь состоит из двух идеальных батареек с ЭДС $23\mathcal{E}$ и $25\mathcal{E}$ и шести резисторов с известными сопротивлениями (см. рис.). В одну из веток цепи последовательно с резистором сопротивлением R подключают нелинейный элемент $НЭ$ и сила тока через него оказывается равной 7 мА . Определите силу тока через $НЭ$ при его подключении в другую ветку цепи последовательно с резистором сопротивлением $5R$. Вольтамперная характеристика нелинейного элемента $НЭ$ представлена также на рисунке. $\mathcal{E} = 0,4\text{ В}$.



Автор задачи: А. А. Киреев

Решение

Метод 1 (Авторский)

Можно показать, что сопротивление эквивалентного источника и ЭДС (подключенного к НЭ в первом случае) равны соответственно $R_1 = 23R/5$ и $\mathcal{E}_1 = 23\mathcal{E}$. Сопротивление эквивалентного источника и ЭДС (подключенного к НЭ во втором случае) равны соответственно $R_2 = 25R/3$ и $\mathcal{E}_2 = 25\mathcal{E}$.

Построив нагрузочную прямую для первого источника, найдём $I_{кз1} = 15,2$ мА. Из параметров эквивалентных источников

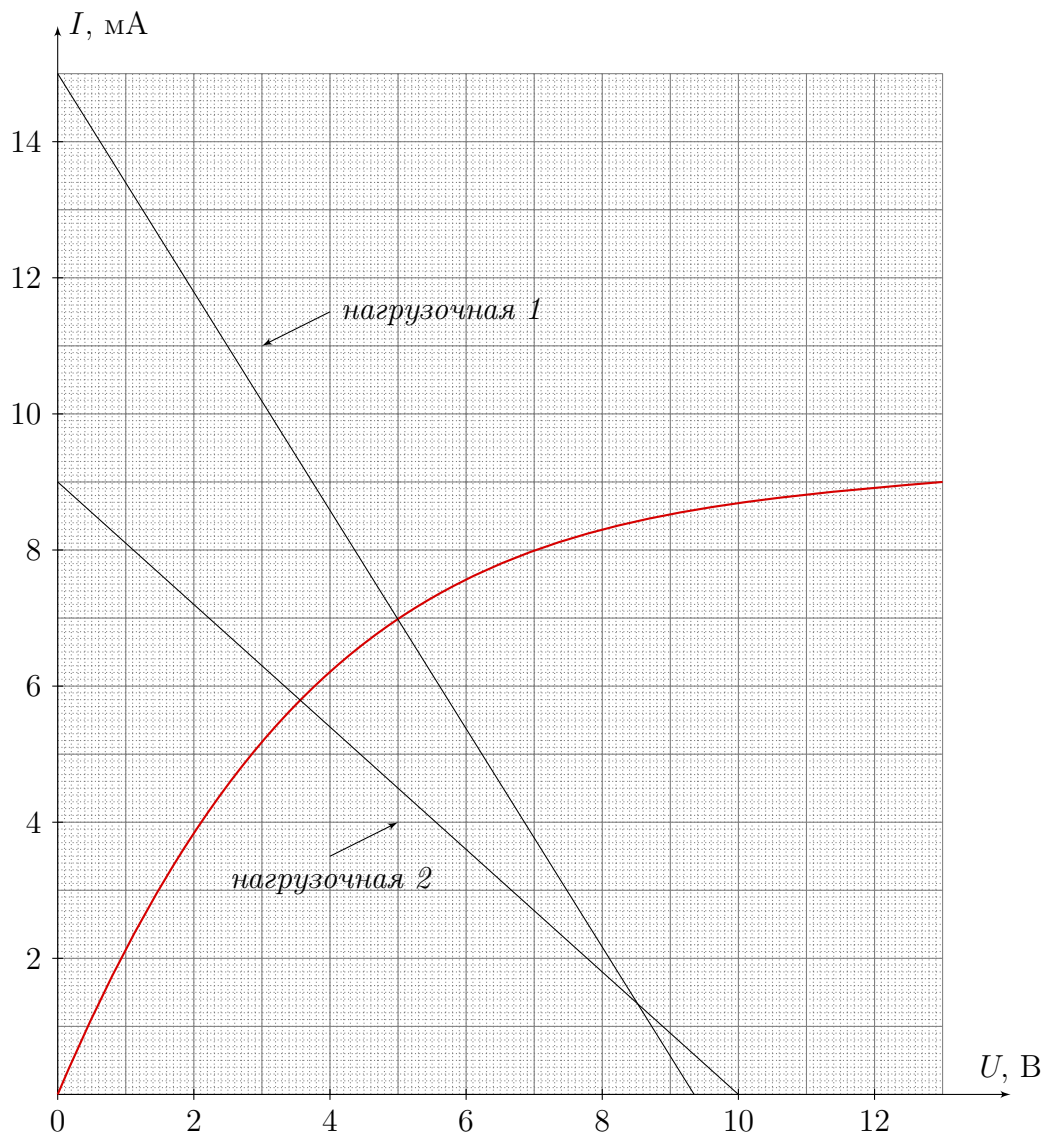
$$\frac{I_{кз2}}{I_{кз1}} = \frac{3}{5}.$$

Откуда находим

$$I_{кз2} = 0,6I_{кз1} \approx 9,1 \text{ мА}.$$

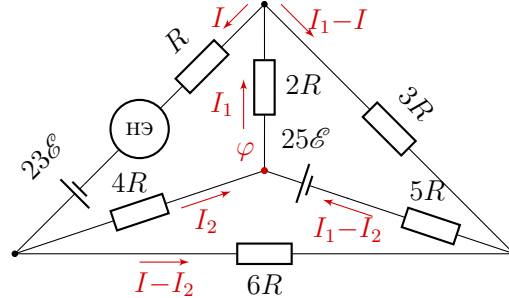
Построив нагрузочную прямую для второго источника, находим

$$I_2 \approx 5,8 \text{ мА}.$$



Метод 2

Расставим токи в цепи, введя следующие обозначения: I — ток через НЭ, I_1 — ток через $2R$, I_2 — ток через R . Расставим токи в цепи (см. рис.).



Обозначим потенциал в центральном узле за φ . Получим систему из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными — φ , I_1 , I_2 , R (она получена с помощью расстановки потенциалов в схеме)

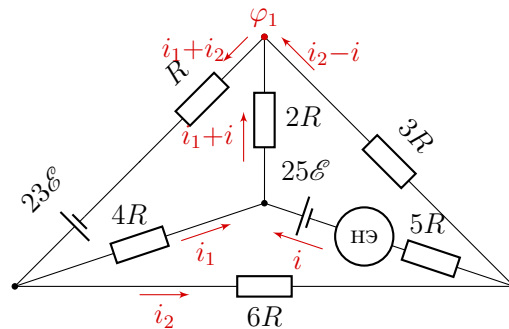
$$\begin{cases} 23\mathcal{E} - \varphi = 4I_2R; \\ 23\mathcal{E} - U_1 - IR = R(4I_2 + 2I_1); \\ 48\mathcal{E} - \varphi - 5R(I_1 - I_2) = 6R(I - I_2); \\ \varphi - 25\mathcal{E} + 5R(I_1 - I_2) - U_1 - IR = 3R(I - I_1). \end{cases}$$

В этих уравнениях U_1 — напряжение на НЭ (его значение можно получить из ВАХ; $U_1 = 5$ В). Из этой системы нам необходимо получить только численное значение R . Найдём, что $R = 130,435$ Ом (решая систему также убедимся, что токи мы расставили в правильных направлениях). Аппроксимируем зависимость $I(U)$. Получим с очень высокой точностью, что

$$I(U) = \frac{0,00637U^3 - 0,2016644U^2 + 2,239542U + 0,0535}{1000} \text{ А.}$$

Здесь все величины в СИ.

Обозначим через i_1 ток через резистор $4R$ во 2 цепи, через i_2 ток через резистор $6R$, а через i ток через НЭ. Расставим токи во 2 цепи с учётом 1 правила Кирхгофа. Предположим они текут в направлениях, показанном на рисунке.



Пусть напряжение на НЭ равно U_2 . Тогда

$$i = \frac{0,00637U_2^3 - 0,2016644U_2^2 + 2,239542U_2 + 0,0535}{1000} \text{ А.}$$

Расставляя потенциалы в схеме также можем записать систему из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными — φ_1, i_1, i_2, U_2 , i не считаем за неизвестные так как оно выражается через U , где φ_1 — потенциал верхнего узла. Запишем второе правило Кирхгофа

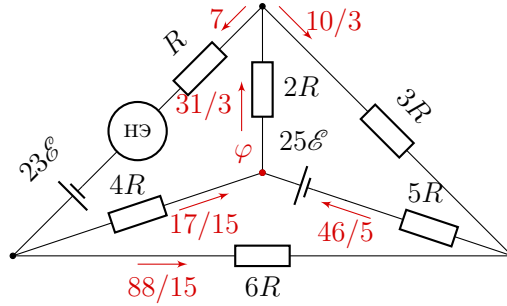
$$\begin{cases} 25\mathcal{E} - \varphi_1 = 2R(i_1 + i); \\ 6i_2R = 25\mathcal{E} + 4i_1R - U_2 - 5iR; \\ \varphi_1 - 2\mathcal{E} - 4i_1R = R(i_1 + i_2); \\ U_2 + 5iR - \varphi_1 = 3R(i_2 - i). \end{cases}$$

Подставляя i и решая систему, находим, что $U_2 = 3,65$ В, также убеждаемся, что направления токов совпадают с предполагаемыми. Тогда находим, что

$$i = 0,00585 \text{ А} = 5,85 \text{ мА}.$$

Метод 3

Расставим токи в цепи с учётом правил Кирхгофа.



Пусть I_i — ток, текущий через резистор сопротивлением iR . Тогда $I_1 = 7$ мА. Первое правило Кирхгофа даёт уравнения

$$I_1 = I_4 + I_6; \quad I_5 = I_3 + I_6; \quad I_2 = I_4 + I_5; \quad I_2 = I_1 + I_3.$$

Запишем второе правило Кирхгофа

$$23\mathcal{E} = U_{\text{НЭ}}(I_1) + I_1 R + 4I_4 R + 2I_2 R; \quad 25\mathcal{E} = 5I_5 R + 2I_2 R + 3I_3 R.$$

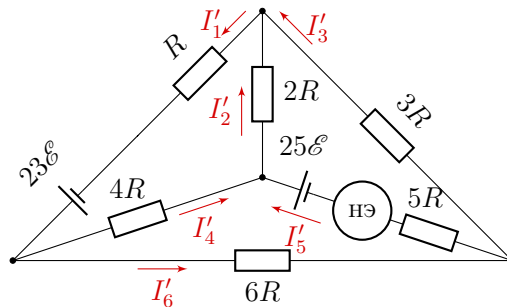
Тогда недостающее уравнение

$$\frac{23\mathcal{E} - U_{\text{НЭ}}(I_1)}{25\mathcal{E}} = \frac{I_1 + 4I_4 + 2I_2}{5I_5 + 3I_3 + 2I_2}.$$

Отсюда найдём величины и направления всех токов и укажем их на рисунке (в мА), а также найдём сопротивление

$$R = \frac{25\mathcal{E}}{5I_5 + 3I_3 + 2I_2} \approx 130,4 \text{ Ом}.$$

Перейдём ко второму случаю.



Пусть при токе I'_5 напряжение на НЭ равно $U_{\text{НЭ}}(I'_5)$. Воспользуемся первым правилом Кирхгофа

$$I'_1 = I'_4 + I'_6; \quad I'_6 = I'_3 + I'_5; \quad I'_2 = I'_4 + I'_5; \quad I'_1 = I'_2 + I'_3.$$

Запишем второе правило Кирхгофа

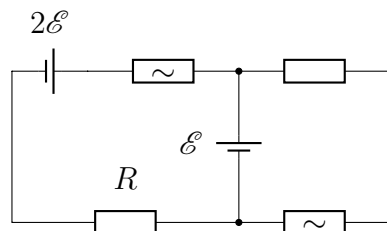
$$23\mathcal{E} = I'_1 R + 4I'_4 R + 2I'_2 R; \quad 25\mathcal{E} - U_{\text{НЭ}}(I'_5) = 5I'_5 R + 2I'_2 R - 3I'_3 R.$$

Заметим, что для каждого значения I'_5 мы знаем $U_{\text{НЭ}}(I'_5)$ по ВАХ. Тогда будем перебирать и подставлять различные значения I'_5 , постепенно уменьшая шаг, и подберём такой, при котором все уравнения системы верны. Получаем ответ

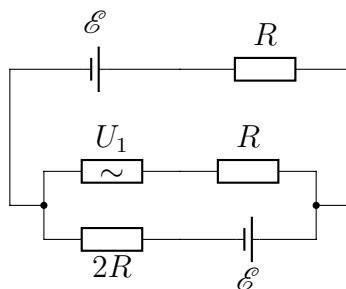
$$I'_5 \approx 5,85 \text{ мА}; \quad U_{\text{НЭ}}(I'_5) \approx 3,6 \text{ В}.$$

Альтернативная задача

1. (3 балла) В электрической цепи, показанной на рисунке, содержатся два одинаковых нелинейных элемента. Вольт-амперные характеристики НЭ задаются уравнением $I = \alpha U^2$. Все параметры, указанные на рисунке, считайте известными. Определите токи в цепи.

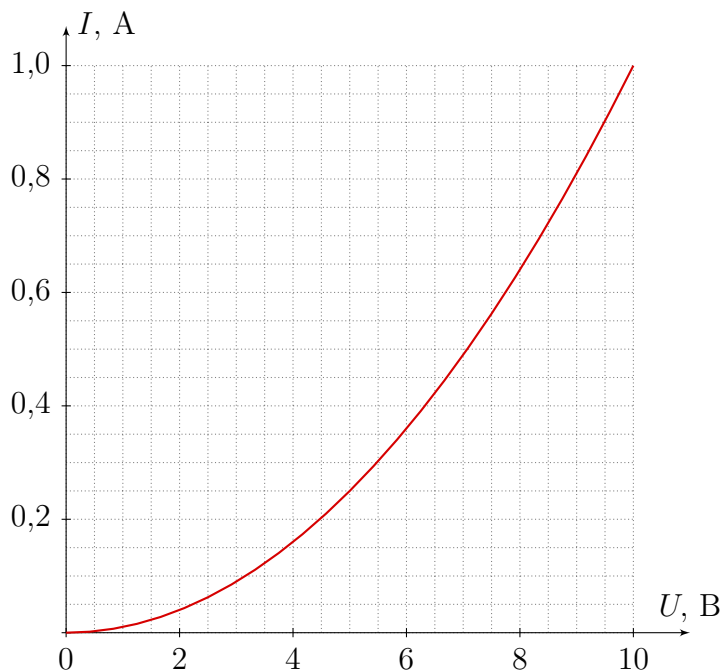


2. В электрической цепи, показанной на рисунке, содержится нелинейный элемент. Параметры цепи: $\mathcal{E} = 10$ В, $R = 10$ Ом.



- а. (2 балла) Найдите зависимость тока от напряжения $I(U)$ на нелинейном элементе в данной схеме.

Вольт-амперная характеристика НЭ представлена на графике ниже.



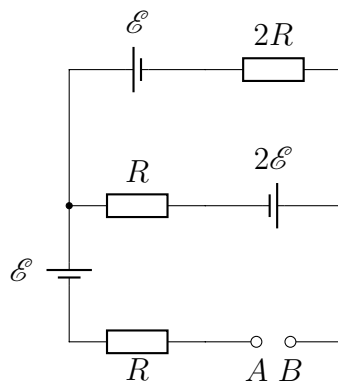
- б. (1 балл) Найдите значение тока, протекающего через нелинейный элемент.

3. Определите показания

а. (2 балла) амперметра,

б. (2 балла) вольтметра,

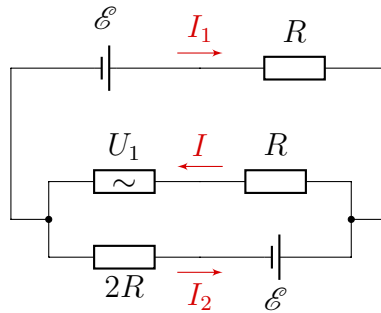
подключённых к контактам AB цепи, представленной на рисунке.



Решение альтернативной задачи

1. Распишем правила Кирхгофа для двух контуров

$$\begin{cases} \mathcal{E} = I_1 R + IR + U_1; \\ 0 = 2RI_2 - I_1 R; \\ I = I_1 + I_2. \end{cases}$$



Находим

$$I_1 = 2I_2; \quad I_1 = \frac{2}{3}.$$

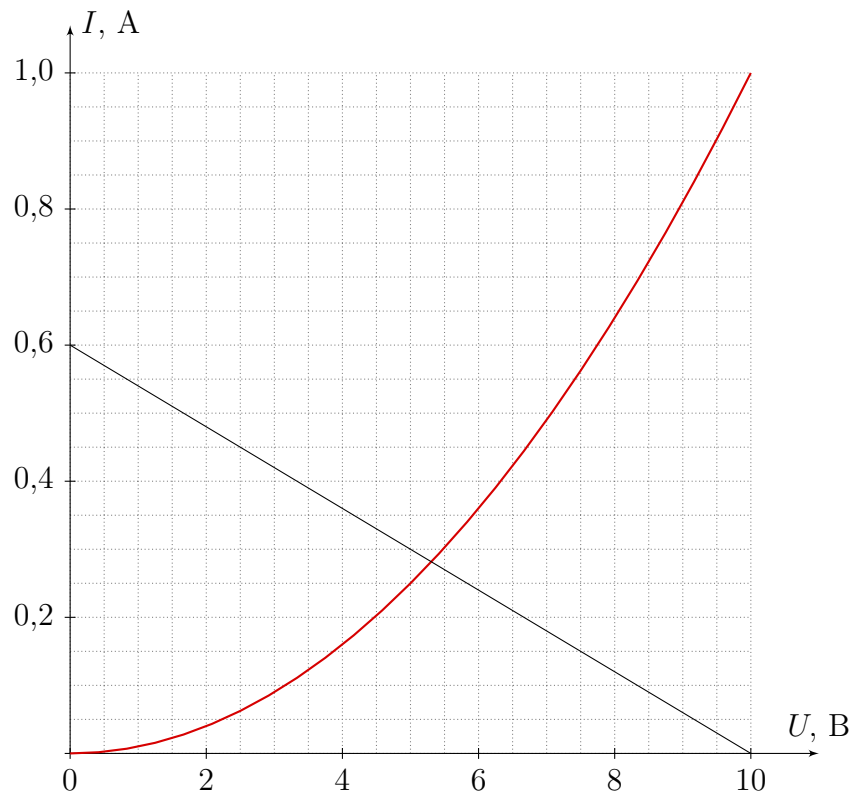
Подставляя данное соотношение в первое уравнение системы, получим

$$\mathcal{E} = \frac{5}{3}IR + U_1.$$

Откуда находим уравнение нагрузочной прямой

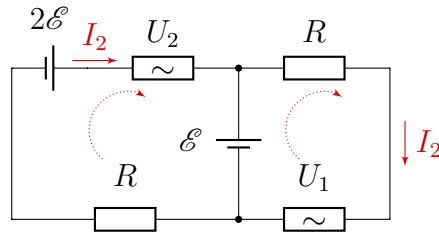
$$I = \frac{3}{5} \frac{\mathcal{E} - U_1}{R}.$$

Найдём пересечение нагрузочной прямой с ВАХ нелинейного элемента.



2. Запишем уравнение Кирхгофа для левого и правого контуров

$$\begin{cases} \mathcal{E} = I_1 R + \frac{I_1}{\alpha}; \\ \mathcal{E} = I_2 R + \sqrt{\frac{I_2}{\alpha}}. \end{cases}$$



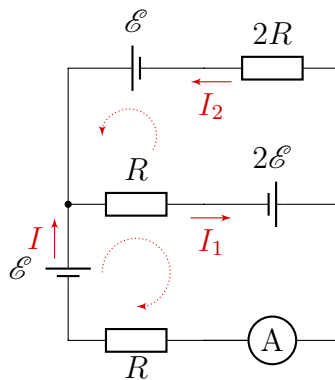
Решая каждое уравнение в отдельности, получим

$$I_1 = I_2 = \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 4\mathcal{E}R}}{2R} \right)^2.$$

Метод наложения использовать нельзя так как в цепи есть нелинейный элементы и уравнения Кирхгофа становятся нелинейными.

3а. Запишем уравнения Кирхгофа

$$\begin{cases} I + I_2 = I_1; \\ 3\mathcal{E} = I_1 R; \\ 3\mathcal{E} = I_1 R + I_2 2R. \end{cases}$$



Откуда находим

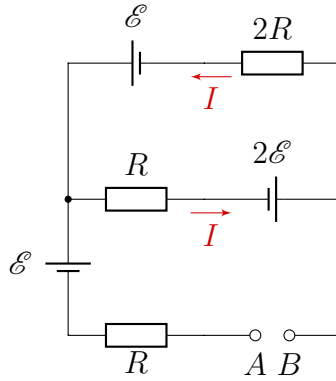
$$I_1 = \frac{3\mathcal{E}}{R}; \quad I_2 = 0.$$

Ток через амперметр равен

$$I = \frac{3\mathcal{E}}{R}.$$

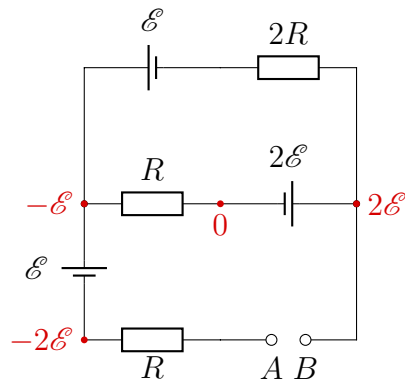
3b. Найдём ток в цепи при подключении вольтметра

$$I = \frac{3\mathcal{E}}{3R} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$



Расставим потенциалы

$$U_V = 4\mathcal{E}.$$



3*. Представим изначальную схему с помощью эквивалентного источника

$$I_{\text{кз}} = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0} = \frac{3\mathcal{E}}{R}; \quad r_0 = \frac{R}{3}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_0 = 4\mathcal{E}.$$

