Точки Лагранжа.

Вопрос по выбору (2021-2022 уч. г.)

Бычков Георгий Денисович, Б02-108

15.01.2022

МФТИ.

Содержание.

1. Теория.

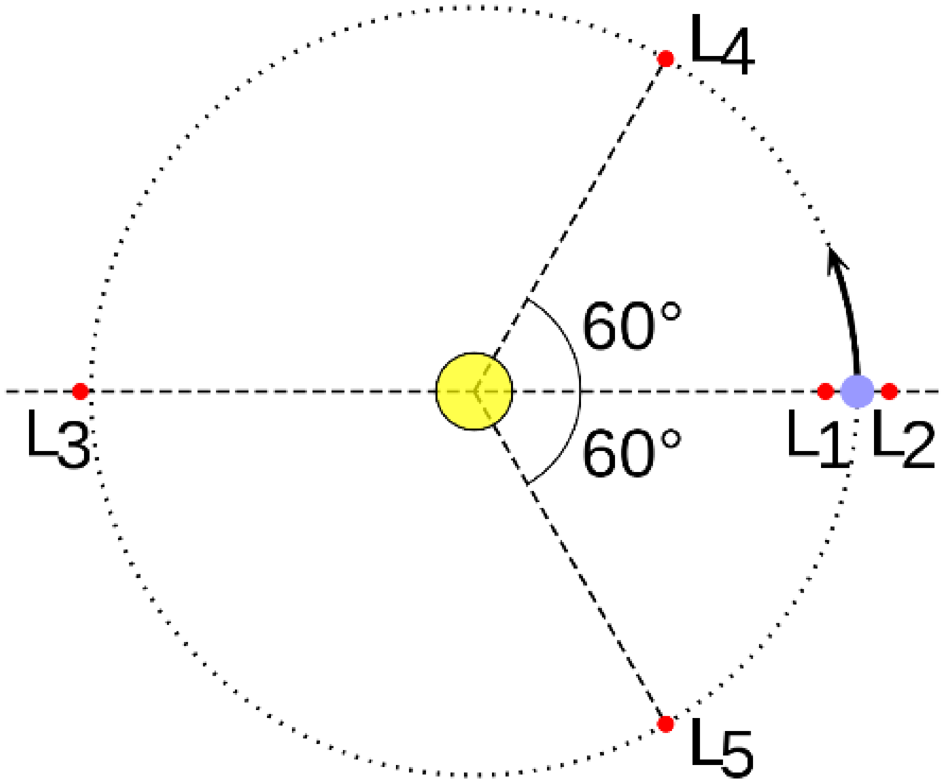
1.1. Необходимые условия существования точек Лагранжа.

Рассмотрим систему из двух тел в пространстве. Для существования в данной системе точек Лагранжа необходимо, чтобы орбиты двух данных тел вокруг центра масс были круговыми, то есть их угловая скорость вращения была постоянной, это используется при выводе точек Лагранжа.

1.2. Определение точек Лагранжа.

При выполнении необходимых условий в пространстве вокруг ранее рассмотренных двух тел существуют пять точек, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, не испытывающее воздействия никаких других сил,кроме гравитационных со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным во вращающейся системе отсчёта, связанной с массивными телами. В этих точках гравитационные силы, действующие на малое тело, уравновешиваются центробежной силой.

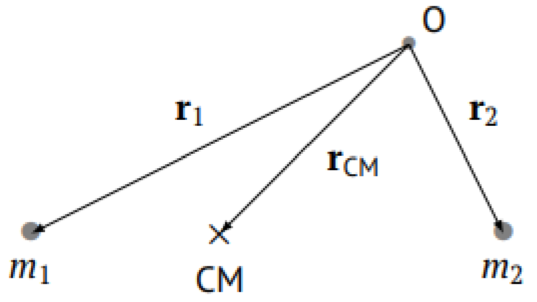
Все точки Лагранжа лежат в плоскости орбит массивных тел и обозначаются заглавной латинской буквой L с числовым индексом от 1 до 5. Первые три точки расположены на линии, проходящей через оба массивных тела. Эти точки Лагранжа называются коллинеарными и обозначаются L1, L2 и L3. Точки L4 и L5 называются треугольными или троянскими. Точки L1, L2, L3 являются точками неустойчивого равновесия, в точках L4 и L5 равновесие устойчивое. Фактически, точки Лагранжа представляют собой частный случай при решении так называемой ограниченной задачи трех тел — когда орбиты всех тел являются круговыми и масса одного из них намного меньше массы любого из двух других.



1.3. Вывод точек Лагранжа

1.3.1. Вывод L4, L5

m1, m2 - рассматриваемые тела, O - положение пробного тела с пренебрежимо малой массой.
CM - положение центра масс тел m1 и m2
Фиксируем линию 1-2, переходя в соответствующую ей вращающуюся система отсчета.



Ускорение пробного тела:

$$\mathbf{a} = \frac{Gm_1}{r_1^3}\mathbf{r}_1 + \frac{Gm_2}{r_2^3}\mathbf{r}_2 - \omega^2\mathbf{r}_{CM}$$

С учётом $\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{l^3}$, где $l = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ - расстояние между 1 и 2, приобретает вид:

$$\mathbf{a} = Gm_1\mathbf{r}_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{l^3}\right) + Gm_2\mathbf{r}_2\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{l^3}\right)$$

Сделав замену получаем:

$$\mathbf{a} = Gm_1\mathbf{r}_1 \cdot \mathfrak{F}(r_1) + Gm_2\mathbf{r}_2 \cdot \mathfrak{F}(r_2)$$

Из определения искомых точек Лагранжа мы знаем что пробное тело должно быть неподвижным в это СО, а значит его ускорение **a** должно быть равно 0, тогда:

$$\mathbf{a} = Gm_1\mathbf{r}_1 \cdot \mathfrak{F}(r_1) + Gm_2\mathbf{r}_2 \cdot \mathfrak{F}(r_2) = \mathbf{0}$$

1 случай: $\mathbf{r}_1 \nparallel \mathbf{r}_2$. Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathfrak{F}(r_1) = 0 \\ \mathfrak{F}(r_2) = 0 \end{cases}$

Но тогда, вспоминая что $\mathfrak{F}(r) = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{l^3}$, получаем:

$$\boxed{r_1 = r_2 = l}$$

Этому условию могут удовлетворять только 2 точки, находящиеся в вершинах двух равносторонних треугольниках. Таким образом мы получили *неколлинеарные* точки Лагранжа - L4 и L5

1.3.2. Вывод L1, L2

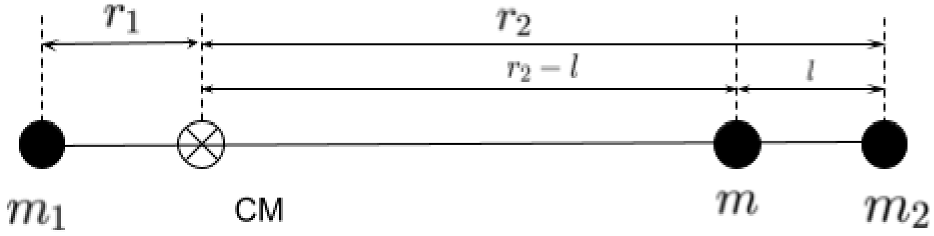
Теперь рассмотрим случай, когда $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2$, то есть все три массы лежат на одной прямой.

Пусть пробное тело находится между массивными телами.

Предполагаем, что $l << L = r_1 + r_2$, тогда введем обозначение: $l = L\alpha$

где $\alpha \ll 1$

Так-же скажем что $\frac{m_2}{m_1} = \eta$, причем $m_2 << m_1$, в ином случае получится уравнение 5 степени, которое не имеет аналитического решения



Также из определения центра масс получаем:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

Но тогда получается, что:

$$r_1 = \eta r_2$$

$$L - r_2 = \eta r_2$$

$$r_2 = \frac{L}{1+\eta}$$

$$r_1 = L - r_2 = \frac{\eta L}{1+\eta}$$

Таким образом проекции сил, действующих на пробное тело выражаются как:

$$F_1 = \frac{-G m_1 m}{(r_1 + r_2 - l)^2} \qquad F_2 = \frac{G m_2 m}{l^2} \quad F_w = \frac{G(m_1 + m_2)m}{L^3} \cdot (r_2 - l)$$

Тогда по определению точек Лагранжа:

$$F_1 + F_2 + F_w = 0$$

$$\frac{-Gm_1m}{(r_1+r_2-l)^2}+\frac{Gm_2m}{l^2}+\frac{G(m_1+m_2)m}{L^3}\cdot(r_2-l)=0$$

Тогда вспоминая те замены, которые мы ввели до этого, а также сократив то что можно сократить, получаем:

$$-\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{\eta}{\alpha^2}+\frac{(1+\eta)(1-\alpha-\eta)}{(1+\eta)}=0$$

Пользуясь тем, что величины малые, а также приближением $(1+x)^a\approx 1+xa, x\to 0$

$$(1+2\alpha)\alpha^2+\eta+\alpha^2-\alpha^3-\eta\alpha^3=0$$

$$\alpha^3(3+\eta)=\eta$$

$$\alpha^3=\frac{\eta}{3+\eta}\approx\frac{\eta}{3}$$

$$\alpha=\sqrt[3]{\frac{\eta}{3}}$$

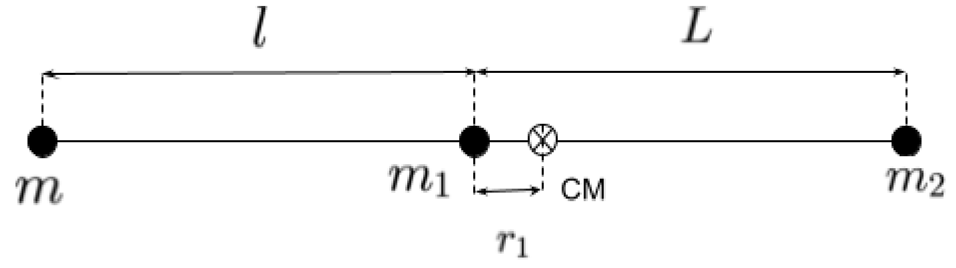
И окончательно получаем то что:

$$l=\alpha\cdot L=\sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}}$$

Это будет точка L1 аналогичным образом выводится L2, которая находится справа от тела m2. Формула для неё будет такая же.

1.3.2. Вывод L3

Теперь рассмотрим ситуацию если пробное тело находится слева от обоих тел



Тогда уравнение на ускорения примет вид:

$$\frac{Gm_1}{l^2}+\frac{Gm_2}{(L+l)^2}-\frac{G\left(m_1+m_2\right)\left(l+r_1\right)}{L^3}=0$$

Введем обозначения:

$$l=(1+\beta)\,L \quad \frac{m_2}{m_1}=\eta$$

Тогда получаем:

$$r_1=L-\frac{L}{1+\eta}=\frac{\eta L}{1+\eta}$$

$$l+r_1=(1+\beta)\,L+r_1=\left(1+\beta+\frac{\eta}{1+\eta}\right)L=\frac{1+\beta\eta+\beta+2\eta}{1+\eta}$$

Тогда:

$$\frac{1}{(1+\beta)^2L^2}+\frac{\eta}{(2+\beta)^2\,L^2}-\frac{(1+\eta)\,(1+\beta\eta+\beta+2\eta)\,L}{L^3\,(1+\eta)}=0$$

$$\frac{1}{(1+\beta)^2}+\frac{\eta}{(2+\beta)^2}-(1+\beta\eta+\beta+2\eta)=0$$

Тогда пользуясь малостью β получаем:

$$1-2\beta+\frac{\eta}{4}\,(1-\beta)-(1+\beta\eta+\beta+2\eta)=0$$

$$\beta=\frac{-7}{12}\eta$$

И как итог мы вывели L3:

$$l=(1+\beta)\,L=\left(1-\frac{7}{12}\eta\right)L$$

$$l_0=l+r_1=\left(1+\frac{5}{12}\eta\right)L$$

1.4. Связь точек Лагранжа и сферы Хилла.

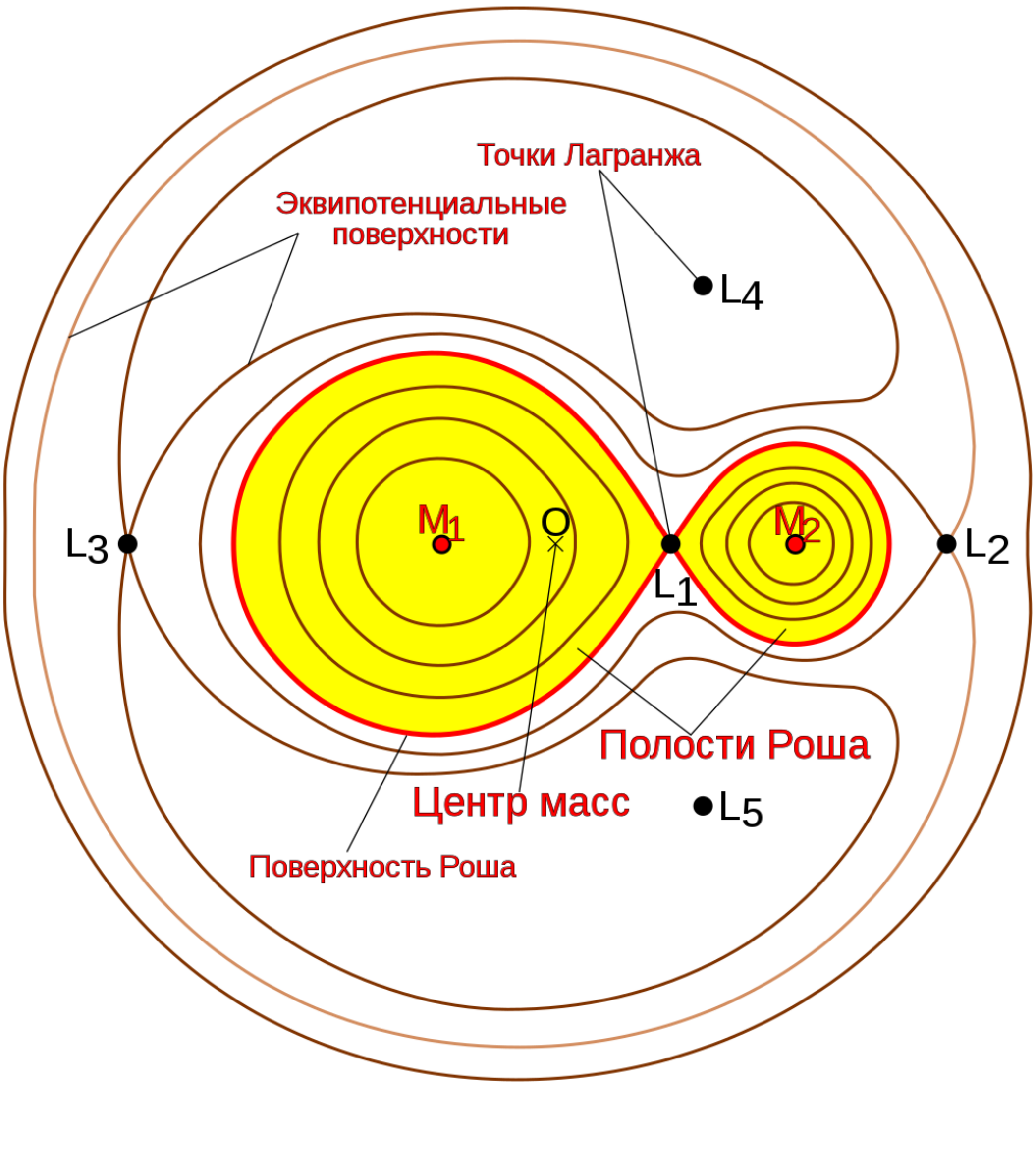
Сфера Хилла — в первом приближении — пространство вокруг астрономического объекта (например, планеты), в котором он способен удерживать свой спутник, несмотря на притяжение объекта, вокруг которого обращается сам (например, звезды).

Если планета много меньше по массе, чем звезда, то точки L1 и L2 находятся на примерно одинаковом расстоянии от планеты, равном радиусу сферы Хилла.

1.5. Связь точек Лагранжа и полости Роша.

Полость Роша — область вокруг звезды в двойной системе.В системе координат, вращающейся вместе с двойной звездой, для пробного тела, находящегося в этой области, притяжение звезды, находящейся в полости Роша, преобладает и над притяжением звезды-компаньона, и над центробежной силой.

В точке Лагранжа L1 полости Роша компонентов двойной системы соприкасаются: равнодействующая притяжений обеих звёзд обращается в ней в нуль. Это приводит к возможности перетекания вещества от одной звезды к другой при заполнении одной из них полости Роша в ходе её эволюции. Такие перетекания играют важную роль при эволюции тесных двойных звёздных систем.



2. Примеры из жизни.

2.1. Явления, связанные с точками Лагранжа.

В 2010 году в системе Солнце — Земля в троянской точке L4 обнаружен астероид. В L5 пока не обнаружено троянских астероидов, но там наблюдается довольно большое скопление межпланетной пыли.

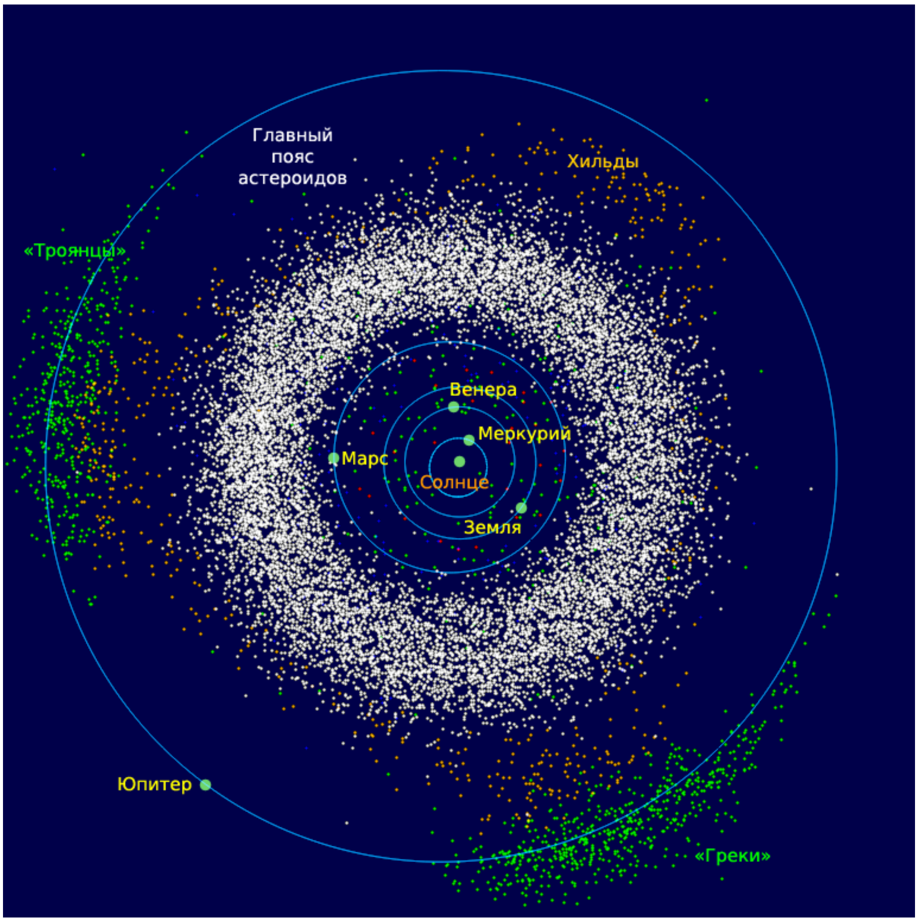
По некоторым наблюдениям, в точках L4 и L5 системы Земля — Луна находятся очень разреженные скопления межпланетной пыли — облака Кордылевского.

В системе Солнце — Юпитер в окрестностях точек L4 иL5 находятся так называемые троянские астероиды. По состоянию на 21 октября 2010 известно около четырёх с половиной тысяч астероидов в точках L4 и L5.

Троянские астероиды в точках L4 и L5 есть не только у Юпитера, но и у других планет-гигантов.

Другим интересным примером является спутник Сатурна Тефия, в точках L4 и L5 которой находятся два небольших спутника — Телесто и Калипсо. Ещё одна пара спутников известна в системе Сатурн — Диона: Елена в точке L4 и Полидевк в точке L5. Тефия и Диона в сотни раз массивнее своих «подопечных», и гораздо легче Сатурна, что делает систему стабильной.

Один из сценариев модели ударного формирования Луны предполагает, что гипотетическая протопланета (планетезималь) Тейя, в результате столкновения которой с Землей образовалась Луна, сформировалась в точке Лагранжа L4 или L5 системы Солнце — Земля.



2.2. Практическое применение точек Лагранжа человеком.

В системе Солнце—Земля точка L1 может быть хорошим местом для размещения космической обсерватории для наблюдения Солнца, которое в этом месте никогда не перекрывается ни Землёй, ни Луной. Первым аппаратом, работавшим вблизи этой точки, был запущенный в августе 1978 года аппарат ISEE-3. На такой же орбите работают аппараты SOHO, ACE и WIND.

В системе Земля—Луна точка L1 (несмотря на относительную нестабильность из-за несколько эллиптичной орбиты Луны) может стать местом для строительства космической пилотируемой орбитальной станции, которая, располагаясь на пути между Землёй и Луной, позволила бы легко добраться до Луны с минимальными затратами топлива и стать ключевым узлом грузового потока между Землёй и её спутником.

Точка L2 системы Солнце—Земля является идеальным местом для расположения орбитальных космических обсерваторий и телескопов, так как в данной точке аппарат постоянно находится в тени Земли и Солнце не мешает наблюдениям. Однако эта точка расположена немного дальше земной тени (в области полутени) так что солнечная радиация блокируется не полностью. На орбитах вокруг этой точки на данный момент находятся аппараты Gaia и Спектр-РГ. Туда также направлен телескоп Джеймс Уэбб (в 2021 году).

Точка L2 системы Земля—Луна может использоваться для обеспечения спутниковой связи с объектами на обратной стороне Луны. Впервые эту возможность реализовал в 2018 году китайский спутник Цюэцяо, ретранслятор первой в истории миссии на обратной стороне Луны Чанъэ-4.

Орбитальные космические аппараты и спутники, расположенные вблизи точки L3, могут постоянно следить за различными формами активности на поверхности Солнца — в частности, за появлением новых пятен или вспышек, — и оперативно передавать информацию на Землю (например, в рамках системы раннего предупреждения о космической погоде NOAA Space WeatherPrediction Center). Кроме того, информация с таких спутников может быть использована для обеспечения безопасности дальних пилотируемых полётов, например к Марсу или астероидам.

Точки L4 и L5 системы Солнце—Земля (Земля—Луна) не имеют столь же широкого спектра применений, как вышеперечисленные точки, однако через них иногда проходят орбиты межпланетных аппаратов. Также выдвигались предложения о строительстве автономных поселений в данных точках, которые были бы стабильны без активного позиционирования.

3. Список использованной литературы.

https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point

https://en.wikipedia.org/wiki/Hill_sphere

https://en.wikipedia.org/wiki/Roche_lobe