Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Уравнения и неравенства с модулем. Графики функций

Решение задания № 3 для 9-х классов

(2020 – 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2020

Составитель: Я.С. Агаханова, к.ф.м.н., доцент кафедры высшей математики МФТИ

Математика: решение задания № 3 для 9-х классов (2020 – 2021 учебный год), 2020, 22 с.

Составитель:
Агаханова Яна Сергеевна

Подписано 18.11.2020. Формат 60х90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,38. Уч.-изд. л. 1,22.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

Контрольные вопросы

1(1). Для функции $y = ax^2 + bx + c,\ a < 0.$

1) Область определения $x \in \mathbb{R}.$

2) Если $D > 0,$ то нули функции $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$

Если $D = 0,\ x = -\dfrac{b}{2a}.$

Если $D < 0,$ то функция нулей не имеет.

3) Если $D > 0,$ то функция принимает положительные значения на промежутке $(x_1; x_2)$, а отрицательные $(-\infty; x)$ и $(x_2; +\infty).$

Если $D = 0,$ то функция принимает только отрицательные значения при любых $x \in \mathbb{R},$ кроме $x = -\dfrac{b}{2a}.$

Если $D < 0,$ то функция отрицательна на всей области определения.

4) Функция возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ и убывает $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$. При $x = -\dfrac{b}{2a}$ функция принимает наибольшее значение, равное $-\dfrac{D}{4a}.$

5) Область значений функции – множество $\left(-\infty; -\dfrac{D}{4a}\right].$

6)

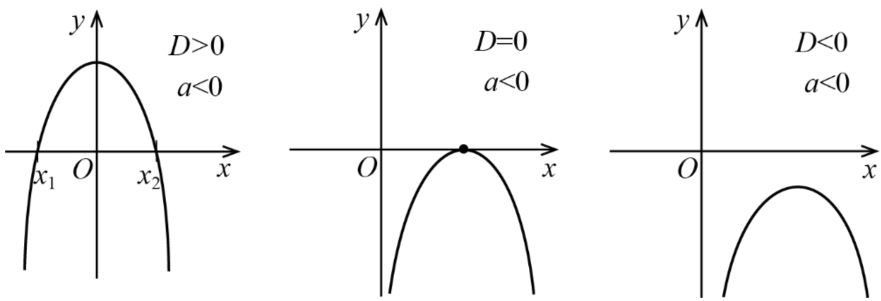


Рис. 1

2(1). На **рис. 2а** мы видим, что ветви параболы вверх, значит, $a>0$, парабола не пересекает ось $Ox \Rightarrow$ функция $y=ax^2+bx+c$ не имеет нулей функции, значит $D<0$. Парабола пересекает ось Oy в точке $(0;c)$, тогда $c>0$. Вершина параболы находится во II четверти, $x_в<0, x_в=-\frac{b}{2a}$, но $a>0$,

$$-\frac{b}{2a}<0, -b<0, \underline{b>0}.$$

Ответ: $a>0, b>0, c>0, D<0.$

На **рис. 2б**:

ветви вниз $\underline{a<0}$,

2 нуля функции $\underline{D>0}$

пересекает ось Oy ниже Ox $\underline{c<0}$

вершина в I четверти

$-\frac{b}{2a}>0,$ но $a<0$

$-b<0, \underline{b>0}.$

Ответ: $a<0, b>0, c<0, D>0.$

На **рис. 2в**:

ветви вниз $a<0$,

нулей функции нет $D<0$

ось Oy пересекает ниже $Ox: c<0$

$x_в=0 \Rightarrow b=0.$

Ответ: $a<0, b=0, c<0, D<0.$

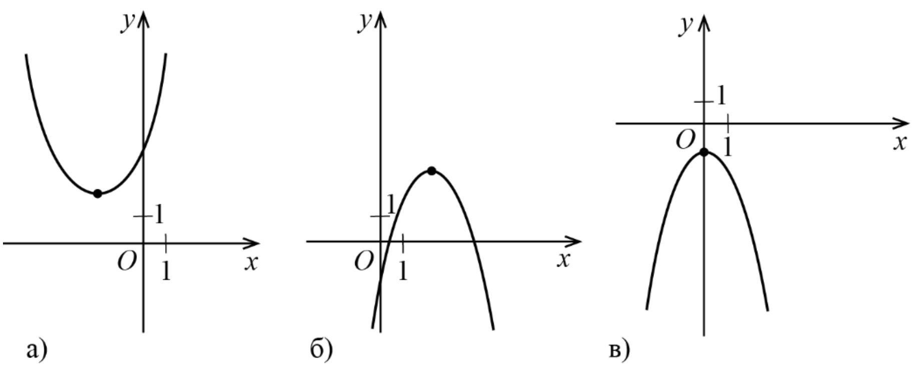


Рис. 2

3(1). 1) $y=-(x-1)^2+1,$ ветви параболы вниз, координаты вершины $(1;1)$. Этим параметрам удовлетворяет график Г).

2) $y=(x+1)^2+1,$ ветви вверх, вершина $(-1;1)-$ это В).

3) $y=-(x-1)^2,$ ветви вниз, вершина $(1;0)-$ это А).

4) $y=x^2-1,$ ветви вверх, вершина $(0;-1)-$ это Б).

4(1). $y=2x^2+x-15$

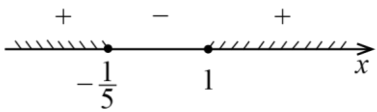
$x_{\text{в}}=-\dfrac{b}{2a},\ x_{\text{в}}=\dfrac{-1}{2\cdot 2}=-\dfrac{1}{4},$ это ответ А).

5(1). $5x^2-4x-1\geq 0$

$D=16+20=36$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 6}{2\cdot 5}=\left[\begin{array}{l}1,\\ -\dfrac{1}{5}.\end{array}\right.$$

$$5(x-1)\left(x+\frac{1}{5}\right)\geq 0$$



$$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty),$$

т. к. $-\dfrac{1}{5}=-0,2,$ то ответ Г).

6(2). $|x-5|=a-1$

1) Если $a-1<0,$ то уравнение решений не имеет, т. к. $|x-5|\geq 0,$ $a-1<0,$ $\underline{a<1}-$ нет решений.

2) Если $a-1=0,$ то 1 корень.

$a-1=0,$ $\underline{a=1}: x=5.$

3) Если $a-1>0,$ то 2 корня.

$a-1>0,$ $\underline{a>1},$

$|x-5|=a-1,$

$$\left[\begin{array}{l} x-5=a-1, \\ -(x-5)=a-1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=a+4, \\ x=-a+6. \end{array}\right.$$

7(2). $f(x)=2x-2,$ графиком этой функции является прямая, для её построения достаточно двух точек (рис. 3).

x	0	1
y	–2	0

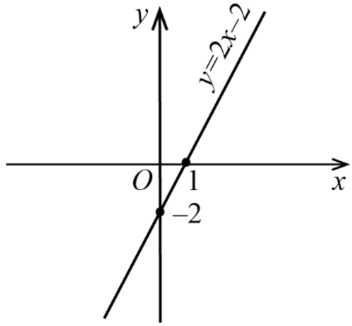


Рис. 3

а) $y=f(-x),$

$y=2(-x)-2;\ y=-2x-2$ (рис. 4).

б) $y=f(2x),$

$y=2\cdot 2x-2=4x-2$ (рис. 5).

в) $y=\left|f(x)\right|,$

$y=\left|2x-2\right|,$ строим график $y=2x-2,$ затем, что ниже оси Ox отражаем симметрично оси Ox ту часть, где $f(x)<0$ (рис. 6).

г) $y=f\left(\left|x\right|\right),$

$y=2\left|x\right|-2.$

Построим $y=2x-2$, отметим ту часть графика, где $x\geq 0,$ и оставшуюся часть отражаем симметрично оси Oy (рис. 7).

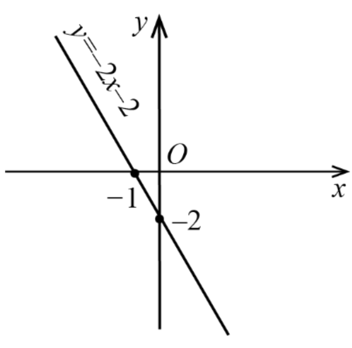


Рис. 4

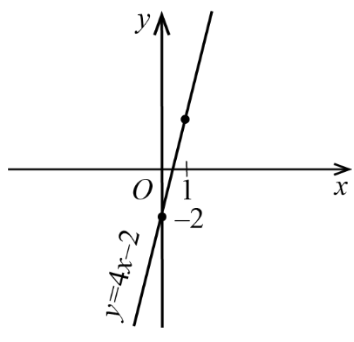


Рис. 5

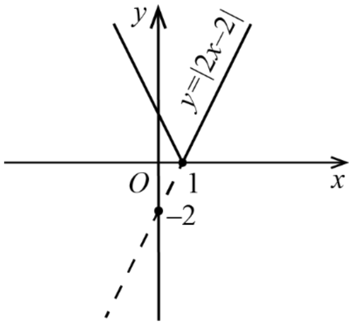


Рис. 6

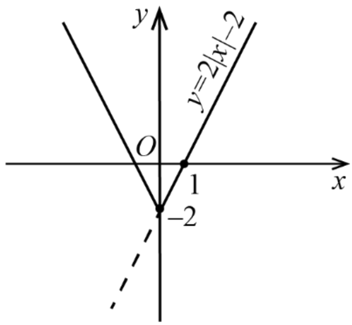


Рис. 7

8(2). $|3-2x|\ge a$

Решение: если $a\le 0,$ то $x-$ любой, т. к. $|3-2x|\ge 0,$

Если $a>0,$ то $|3-2x|\ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x\ge a, \\ 3-2x\le -a, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -2x\ge a-3, \\ -2x\le -a-3, \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x\le \dfrac{3}{2}-\dfrac{a}{2}, \\ x\ge \dfrac{a}{2}+\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: при $a\le 0, x\in\mathbb{R},$

при $a>0$ $x\in\left(-\infty;\dfrac{3}{2}-\dfrac{a}{2}\right]\bigcup\left[\dfrac{a}{2}+\dfrac{3}{2};+\infty\right).$

9(6). а)(1) $y=-3\left(x+1\right)^2+2,$ графиком является парабола, ветви которой направлены вниз; вершина параболы $(-1;2).$

График функции $y=-3(x+1)^2+2,$ получен из параболы $y=3x^2$ с помощью симметрии относительно оси абсцисс, затем параллельного переноса на 1 единицу влево и на 2 единицы вверх вдоль оси ординат (рис. 8).

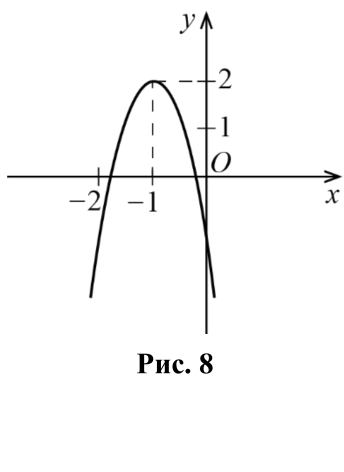


Рис. 8

б)(1) $y = x^2 - 3x - \sqrt{(3x-9)^2}$

$x^2 - 3x - \sqrt{(3x-9)^2} = x^2 - 3x - |3x-9|,$

$$y = \begin{cases} x^2 - 3x - 3x + 9, \text{ если } 3x - 9 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 3x - 9, \text{ если } 3x - 9 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 9, x \geq 3, \\ x^2 - 9, x < 3 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} (x-3)^2, x \geq 3, \\ x^2 - 9, x < 3. \end{cases}$$

Мы получили кусочно-заданную функцию.

При $x \geq 3, y = (x-3)^2$, графиком является парабола, ветви которой вверх, её график получили из графика $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Ox на 3 единицы вправо, и оставим только часть графика при $x \in [3; +\infty)$ (рис. 9).

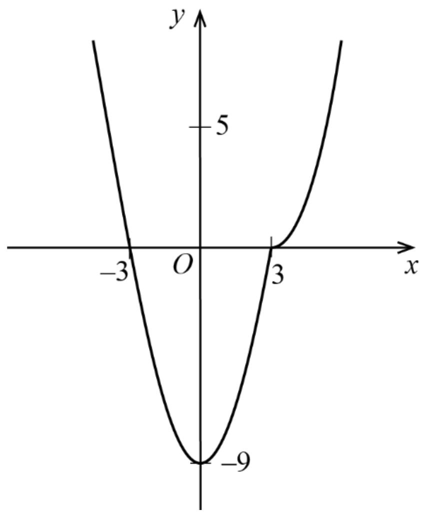


Рис. 9

При $x < 3, y = x^2 - 9$ графиком является парабола, ветви которой вверх, её график получили из графика $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Oy на 9 единиц вниз, и оставим часть параболы при $x \in (-\infty; 3)$ (рис. 9).

в)(1) $y = x^2 - 3x - \left(\sqrt{3x-9}\right)^2.$

Упростим

$x^2 - 3x - (\sqrt{3x-9})^2 = x^2 - 3x - (3x-9),$

при условии $3x - 9 \geq 0, x \geq 3.$

$y = x^2 - 6x + 9,$

$y = (x-3)^2$ при $x \geq 3.$

Графиком является часть параболы при $x \geq 3$, полученной из $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Ox на 3 единицы вправо (рис. 10).

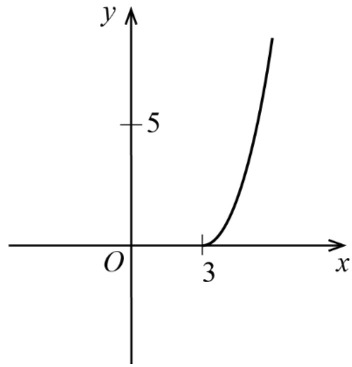


Рис. 10

г(1) $y = x^2 - \dfrac{|x|}{x}$.

Раскроем модуль по определению и получим кусочно-заданную функцию, учитывая, что $x \neq 0$

$$y = \begin{cases} x^2 - \dfrac{x}{x}, x > 0, \\ x^2 + \dfrac{x}{x}, x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 1, x > 0, \\ x^2 + 1, x < 0. \end{cases}$$

1) $y = x^2 - 1$, при $x > 0$ графиком является часть параболы при $x > 0$, полученной из $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Oy на 1 единицу вниз.

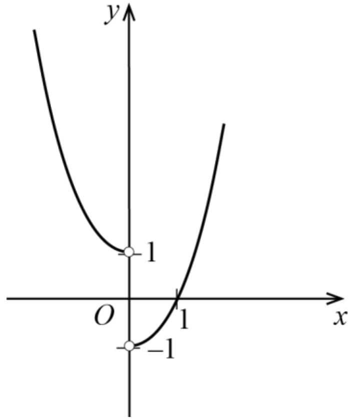


Рис. 11

2) $y = x^2 + 1$, при $x < 0$ графиком является часть параболы при $x < 0$, полученной из $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Oy на 1 единицу вверх (рис. 11). Не забываем «выколоть» точки $(0;1)$ и $(0;-1)$.

д)(1) $y = \left|-x^2 + 6x - 8\right| =$

$= \left|x^2 - 6x + 8\right|$.

Построим сначала $y = x^2 - 6x + 8$.

$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 1 =$
$= (x-3)^2 - 1$.

$y = (x-3)^2 - 1$, графиком является парабола, полученная параллельным переносом вдоль Ox на 3 единицы вправо и вдоль Oy на 1 единицу вниз параболы $y = x^2$.

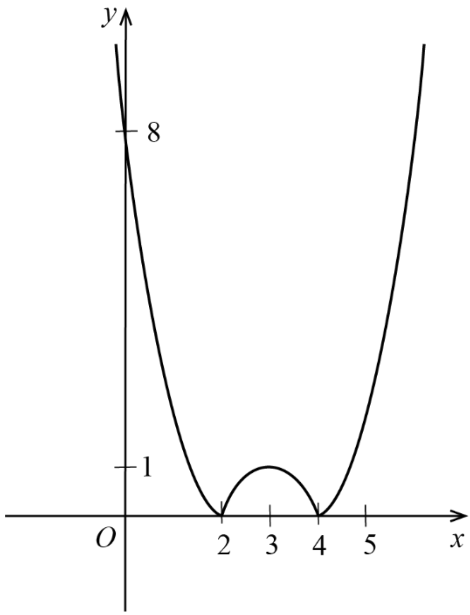


Рис. 12

Для того, чтобы получить $y=\left|-x^2+6x-8\right|$, мы используем преобразование графиков $y=\left|f(x)\right|$, т. е. оставляем ту часть графика, где $f(x)\geq 0,$ а ту часть, которая $f(x)<0,$ отобразим симметрично оси Ox (рис. 12).

е)(1) $y=\dfrac{2x+1}{8x-1}.$

Выделим из дроби целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 2x\ \ +1 \\ \underline{2x-1/4} \\ 5/4 \end{array} & \begin{array}{l} 8x-1 \\ \hline \ \ 1/4 \end{array} \end{array}$$

$\dfrac{2x+1}{8x-1}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\frac{5}{4}}{8x-1},$ разделим числитель и знаменатель дроби на 8, получим $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\frac{5}{4}:8}{x-\frac{1}{8}}.$

Итак, $y=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\frac{5}{32}}{x-\frac{1}{8}}.$

График функции $y=\dfrac{2x+1}{8x-1}$ можно получить из графика функции $y=\dfrac{5/32}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига на $\dfrac{1}{8}$ вправо и на $\dfrac{1}{4}$ вверх. Асимптоты гиперболы – прямые $x=\dfrac{1}{8}$ и $y=\dfrac{1}{4}.$

Составляем таблицу значений:

x	–2	–1	0	1	2
y	$\dfrac{3}{17}$	$\dfrac{1}{9}$	–1	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{5}{15}$

Построим график (рис. 13).

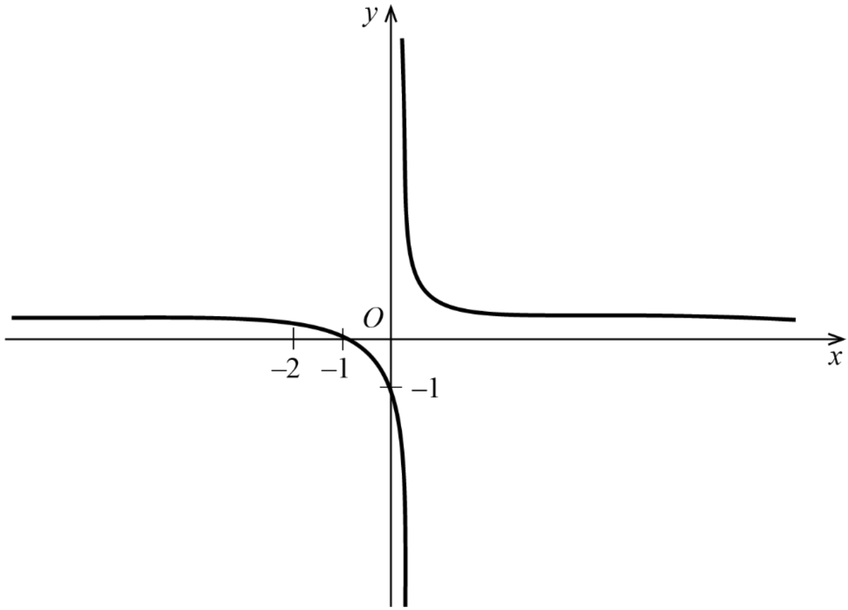


Рис. 13

10(2). $\dfrac{9}{x+1}+1<\dfrac{14}{x-1}$,

$\dfrac{9+x+1}{x+1}-\dfrac{14}{x-1}<0,$

$\dfrac{10+x}{x+1}-\dfrac{14}{x-1}<0,$

$\dfrac{(10+x)(x-1)-14(x+1)}{(x+1)(x-1)}<0,$

$\dfrac{10x-10+x^2-x-14x-14}{(x+1)(x-1)}<0,$

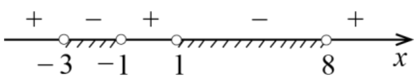
$\dfrac{x^2-5x-24}{(x+1)(x-1)}<0,$

$x^2-5x-24=0$

$D=25-4\cdot(-24)=25+96=121$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm 11}{2}=\left[\begin{array}{l}8\\ -3.\end{array}\right.$

$\dfrac{(x-8)(x+3)}{(x+1)(x-1)}<0$



Ответ: $x \in (-3;-1) \cup (1;8)$.

Задачи

1(8). а)(3) $\dfrac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 + 6x + 9} < 0$

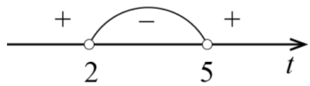
$$\frac{x^2 - 7|x| + 10}{(x+3)^2} < 0.$$

$(x+3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, но при $x = -3$ $(x+3)^2 = 0$, тогда исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 7|x| + 10 < 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$

Решим неравенство $x^2 - 7|x| + 10 < 0$, заменим $x^2 = |x|^2$, и тогда сделаем замену $|x| = t$.

$t^2 - 7t + 10 < 0$

$D = 49 - 40 = 9,\ t_{1,2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} = \left[\begin{array}{l} 5, \\ 2. \end{array}\right.$



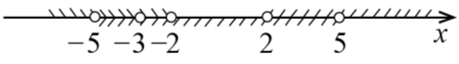
$t \in (2;5)$.

Получили $2 < t < 5$,

$2 < |x| < 5$,

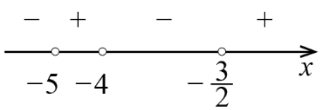
$\begin{cases} 2 < |x|, \\ |x| < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 2, \end{array}\right. \\ -5 < x < 5 \end{cases}$

и у нас $x \neq -3$.



Ответ: $x \in (-5;-3) \cup (-3;-2) \cup (2;5)$.

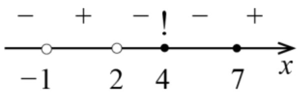
б)(1) $\dfrac{(x+5)(2x+3)}{(x+4)} > 0$



Ответ: $x \in (-5;-4) \cup \left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right).$

в)(2) $\dfrac{(x+1)(x-7)^5(x-4)^2}{(x+1)^2(x-2)^3} \geq 0$

$$\frac{(x-7)^5(x-4)^2}{(x+1)(x-2)^3} \geq 0$$



Ответ: $x \in (-1;2) \cup \{4\} \cup [7;+\infty).$

г)(2) $\dfrac{5}{5-x} \geq \dfrac{x+1}{x-3}$

$$\frac{5}{5-x} - \frac{x+1}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{5(x-3)-(x+1)(5-x)}{(5-x)(x-3)} \geq 0$$

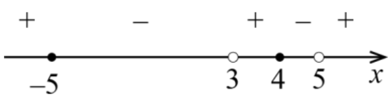
$$\frac{5x-15-(5x-x^2+5-x)}{(5-x)(x-3)} \geq 0$$

$$\left.\frac{x^2+x-20}{-(x-5)(x-3)} \geq 0 \right| \quad \cdot(-1)$$

$$\frac{x^2+x-20}{(x-5)(x-3)} \leq 0$$

$$x^2+x-20=0$$
$$D=1-4\cdot(-20)=81$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 9}{2}=\left[\begin{array}{l}-5,\\ 4\end{array}\right.$$

$$\frac{(x+5)(x-4)}{(x-5)(x-3)} \leq 0$$



Ответ: $x \in [-5;3) \cup [4;5)$.

2(6). а)(2) $|x-2| + |x-3| < 6 - 3x$

$x = 2,\ x = 3 -$ нули модулей.

1) $(-\infty; 2)$

$-(x-2) - (x-3) < 6 - 3x$

$-x + 2 - x + 3 < 6 - 3x$

$x < 1$

2) $[2;3]$

$x - 2 - (x-3) < 6 - 3x$

$x - 2 - x + 3 < 6 - 3x$

$3x < 5$

$x < \frac{5}{3}$, с учётом $x \in [2;3]$ решений нет.

3) $(3;+\infty)$

$x - 2 + x - 3 < 6 - 3x$

$5x < 11$

$x < \frac{11}{5}$, с учётом $x \in (3;+\infty)$ решений нет.

Ответ: $(-\infty;1)$.

б)(2) $\big|4 - |2x-1|\big| \le 3$

Воспользуемся переходом 15° из § 3.

$\big|4 - |2x-1|\big| \le 3 \Leftrightarrow \left(4 - |2x-1| - 3\right)\left(4 - |2x-1| + 3\right) \le 0$

$\left(1 - |2x-1|\right)\left(7 - |2x-1|\right) \le 0$

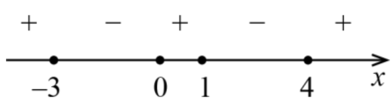
$\left(|2x-1| - 1\right)\left(|2x-1| - 7\right) \le 0.$

А теперь применим переход 15° из § 3.

$(2x-1-1)(2x-1+1)(2x-1-7)(2x-1+7) \le 0$

$(2x-2)2x(2x-8)(2x+6) \le 0$

$x(x-1)(x-4)(x+3) \le 0$



Ответ: $x \in [-3;0] \cup [1;4]$.

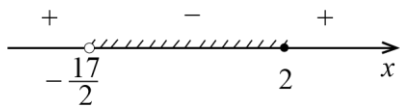
в)(2) $\dfrac{|x-7|-|x+3|}{|x+13|-|x+4|} \geq 0$

Применим переход 12° из § 3 для числителя и знаменателя.

$$\frac{(x-7+x+3)(x-7-x-3)}{(x+13+x+4)(x+13-x-4)} \geq 0$$

$$\frac{(2x-4)\cdot(-10)}{(2x+17)\cdot(+9)} \geq 0$$

$$\frac{x-2}{x+\frac{17}{2}} \leq 0$$



Ответ: $x \in (-8{,}5;2]$.

3(2). $y = \dfrac{1-2x}{2x^2-x}$, упростим

$$\frac{1-2x}{2x^2-x} = \frac{1-2x}{x(2x-1)} = \frac{-(2x-1)}{x(2x-1)} = \frac{-1}{x},\text{ но}$$

$$x(2x-1) \neq 0, \quad x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}.$$

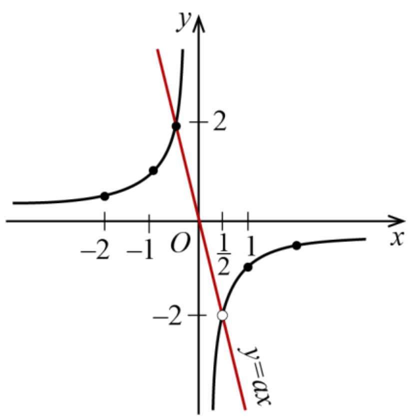


Рис. 14

$x = \dfrac{1}{2},\ y = -2$

$-2 = a \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow \underline{a = -4}.$

Ответ: при $a = -4$.

4(4). $y = \left| \dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{x^2 - 6|x| + 8} \right|$

Упростим с учётом $|x| \neq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq 2, \\ x \neq -2 \end{array} \right.$

$$\left| \frac{(|x|-3)(|x|-2)}{(|x|-4)(|x|-2)} \right| = \left| \frac{|x|-3}{|x|-4} \right| = \left| \frac{|x|-4+1}{|x|-4} \right| = \left| 1 + \frac{1}{|x|-4} \right|.$$

Построим сначала график функции $y = 1 + \dfrac{1}{x-4}$.

Строим график $y = \dfrac{1}{x}$ и с помощью двух параллельных переносов: сдвиг на 4 вправо и на 1 вверх, получим $y = 1 + \dfrac{1}{x-4}$. Асимптоты гиперболы $x = 4$ и $y = 1$.

Затем из графика функции $y = 1 + \dfrac{1}{x-4}$ получим $y = 1 + \dfrac{1}{|x|-4}$ с помощью преобразования графиков $y = f(|x|)$ § 4.

График $y = \left| 1 + \dfrac{1}{|x|-4} \right|$ получим с помощью графика $y = 1 + \dfrac{1}{|x|-4}$ преобразованием (см. § 4 $y = |f(x)|$) и не забудем исключить точки $x = 2,\ x = -2$ (рис. 15).

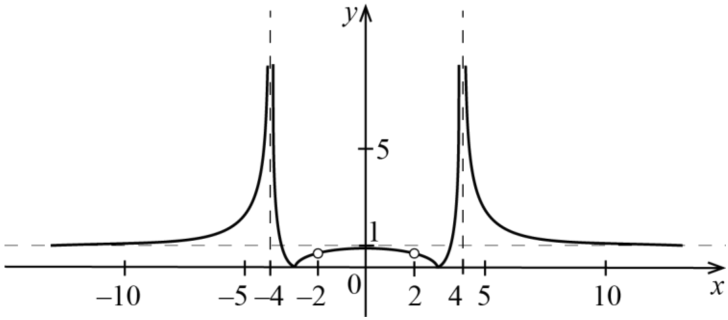


Рис. 15

5(1). а) $y=\dfrac{6}{x}$

Уравнения прямой могут иметь вид: $y=ax+b,\quad y=ax,\quad y=b.$

Графиком функции $y=\dfrac{6}{x}$ является гипербола, расположенная в I и III четвертях.

а) На рисунке 16 видно, что прямые вида $y=ax$ и $y=ax+b$ имеют 2 общие точки с $y=\dfrac{6}{x}$, а прямая вида $y=b-$ одну точку $b\neq 0$. Значит, такой прямой может быть, например $y=5$.

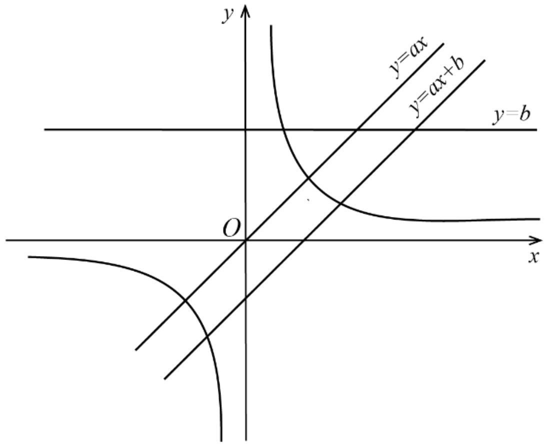


Рис. 16

б) Учитывая рассуждения в пункте а), $y=ax$ и $y=ax+b$ подходят, но при определённых значениях a и b, т. к. если прямая $y=ax$ будет с Ox составлять угол больше 90°, то прямая $y=ax$ вообще не будет иметь общих точек с $y=\dfrac{6}{x}$.

При $a > 0$ угол меньше 90°, значит, в качестве примера можно взять $a = 1$ и прямая $y = x$ будет иметь 2 точки.

в) Учитывая рассуждения пункта б), a должно быть отрицательно. Пусть $a = -1$, $y = -x$ подойдёт.

6(2). $y = \dfrac{2|x| + 2}{|x| - 1}$

Упростим $\dfrac{2|x| + 2}{|x| - 1} = \dfrac{2(|x| - 1) + 4}{|x| - 1} = 2 + \dfrac{4}{|x| - 1}$.

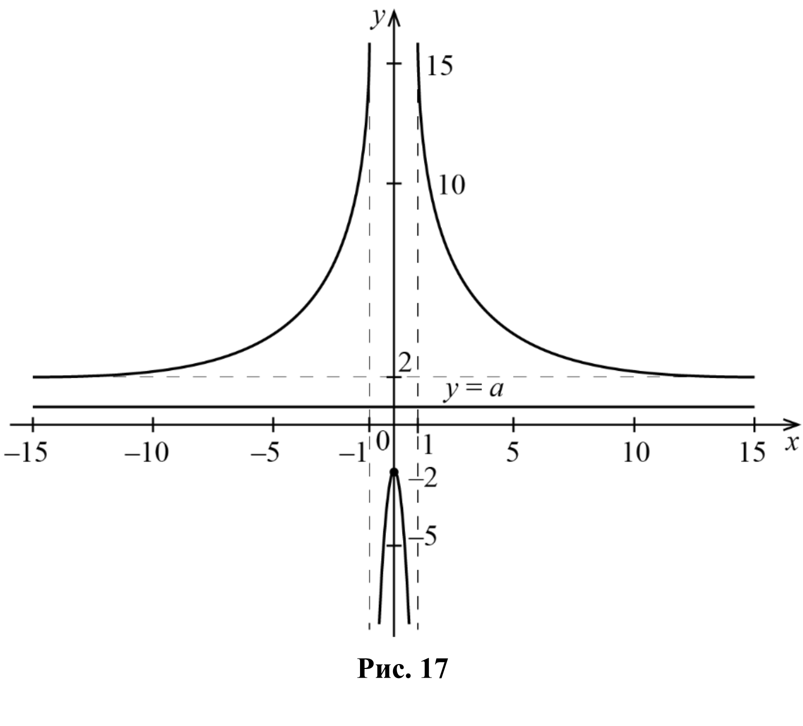


Рис. 17

С помощью правил преобразования построим график (рис. 17). При $-2 < a \le 2$ прямая $y = a$ не имеет точек пересечения с графиком функции $y=\dfrac{2|x|+2}{|x|-1}$. Следовательно, при $-2<a\le 2$ уравнение $\dfrac{2|x|+2}{|x|-1}=a$ не имеет корней.

Ответ: $a\in(-2;2]$.

7(3). $y=x^2+ax+b$

Вершина параболы имеет координаты $\left(-\dfrac{a}{2};y\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right)$ (рис. 18).

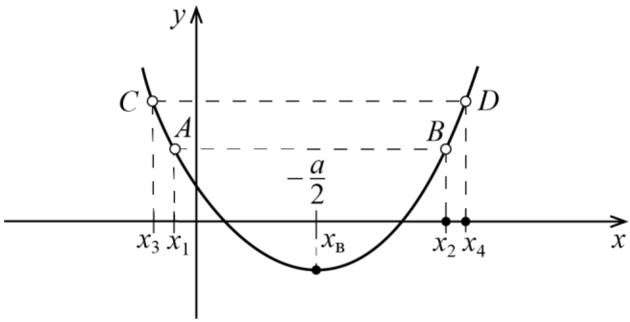


Рис. 18

Так как $x=-\dfrac{a}{2}$ – ось симметрии параболы, а $AB=3$, то $x_2=x_в+1{,}5=-\dfrac{a}{2}+\dfrac{3}{2}$.

$CD=13$, то $x_4=x_в+\dfrac{13}{2}=-\dfrac{a}{2}+\dfrac{13}{2}$.

Нам необходимо найти расстояние между прямыми AB и CD, т. е. $y(x_4)-y(x_2)$.

$y(x_4)=x_4^2+ax_4+b,\ y(x_2)=x_2^2+ax_2+b,$

$y(x_4)-y(x_2)=x_4^2+ax_4+b-x_2^2-ax_2^2-b=x_4^2+ax_4-x_2^2-ax_2.$

Вместо x_2 и x_4 подставим $x_4=-\dfrac{a}{2}+\dfrac{13}{2}$ и $x_2=-\dfrac{a}{2}+\dfrac{3}{2}$.

$$y(x_4)-y(x_2)=\left(\frac{13}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+a\left(\frac{13}{2}-\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{2}\right)^2-a\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{2}\right)=$$

$$=\frac{169}{4}-2\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{a}{2}+\underline{\underline{\frac{a^2}{4}}}+\frac{13}{2}a-\underline{\frac{a^2}{2}}-\frac{9}{4}+2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{a}{2}-\underline{\underline{\frac{a^2}{4}}}-\frac{3}{2}a+\underline{\frac{a^2}{2}}=$$

$$=40-\frac{13a}{2}+\frac{13a}{2}+\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}a=40.$$

Ответ: 40.

8(3). $\dfrac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}\ge a$

Разложим на множители $9x^2-3x+1.$

$9x^2-3x+1=0$

$D=9-4\cdot 9\cdot 1<0,$ значит, т. к. $9>0,$ то $9x^2-3x+1>0$ для всех $x\in\mathbb{R},$ тогда можно умножить неравенство на выражение $9x^2-3x+1.$

$6x^2-2x+1\ge a\left(9x^2-3x+1\right)$

$6x^2-2x+1-9ax^2+3ax-a\ge 0$

$(6-9a)x^2+(3a-2)x-a+1\ge 0.$

Для того, чтобы данное неравенство было верным для всех $x\in\mathbb{R},$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось: $\begin{cases}6-9a>0,\\ D\le 0\end{cases}.$

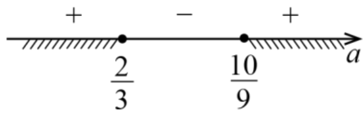
$$D=(3a-2)^2-4(6-9a)(1-a)=9a^2-12a+4-4\left(6-6a-9a+9a^2\right)=$$

$$=9a^2-12a+4-24+60a-36a^2=-27a^2+48a-20$$

$$\begin{cases}6-9a>0,\\ -27a^2+48a-20\le 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a<\dfrac{2}{3},\\ 27a^2-48a+20\ge 0\end{cases}$$

$$\frac{D}{4}=24^2-27\cdot 20=576-540=36\Rightarrow a_{1,2}=\frac{24\pm 6}{27}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{10}{9}\end{array}\right..$$



Решением системы будет $a<\dfrac{2}{3}$. Но необходимо проверить неравенство при $6-9a=0$, т. е. при $a=\dfrac{2}{3}$.

$0\cdot x^2+\left(3\cdot\dfrac{2}{3}-2\right)x-\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{1}{3}>0,$ значит, $a=\dfrac{2}{3}$ тоже подходит.

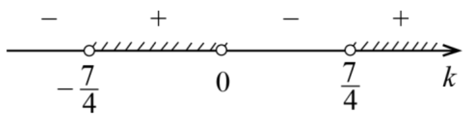
Ответ: $a\le\dfrac{2}{3}.$

9(2). $y=kx^2-7x+4k$

Если вершина во второй четверти, то $\begin{cases}x_в<0,\\ y_в>0\end{cases}$

$$x_в=\frac{7}{2k},\quad y_в=k\left(\frac{7}{2k}\right)^2-7\left(\frac{7}{2k}\right)+4k=\frac{49}{4k}-\frac{49}{2k}+4k=-\frac{49}{4k}+4k$$

$$\begin{cases}\dfrac{7}{2k}<0,\\ -\dfrac{49}{4k}+4k>0,\end{cases}\qquad \begin{cases}k<0,\\ -\dfrac{49-16k^2}{4k}>0,\end{cases}$$



$$\begin{cases}k<0,\\ k\in\left(-\dfrac{7}{4};0\right)\cup\left(\dfrac{7}{4};+\infty\right)\end{cases}\Rightarrow k\in\left(-\frac{7}{4};0\right).$$

Ответ: $k\in\left(-\dfrac{7}{4};0\right).$

10(3). $x^2+2(k-1)x+3k+1=0.$ Рассмотрим случай, когда $D=0.$

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(3k+1)=k^2-2k+1-3k-1=k^2-5k,$$

$k^2-5k=0$

$k(k-5)=0$

$k=0$ и $k=5.$

Если $k=0,\ x^2-2x+1=0,\ \underline{x=1}-$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $k=5,\ x^2+8x+16=0,\ (x+4)^2=0,\ \underline{x=-4}<-1-$ подходит.

Теперь рассмотрим случай $D>0,$ тогда уравнение имеет два корня. Для того, чтобы ровно один корень уравнения удовлетворял условию $x<-1,$ необходимо и достаточно, чтобы значение квадратного трёхчлена в точке $x=-1$ было отрицательно или $x=-1$ являлся бы бóльшим корнем трёхчлена.

$f(-1)=(-1)^2+2(k-1)(-1)+3k+1<0$

$1-2k+2+3k+1<0$

$\underline{k<-4}$

$D>0,\ k(k-5)>0,\ k\in(-\infty;0)\cup(5;+\infty).$

Значит, $\underline{k<-4}.$

Если же $x_1=-1,$ то $k=-4,$ тогда $x_2=11,\ x_2>x_1$ и, значит, полученное значение параметра не удовлетворяет условию.

Ответ: $k<-4,\ k=5.$