Часть I

Сферическая астрономия

Глава 1

Сфера – ГМТ, равноудалённых от данной точки в пространстве. Окружности, целиком лежащие на сфере называются её кругами. Существует два типа кругов: большие и малые. Центром всех больших кругов является центр сферы. Малые круги – все остальные.

1.1 Координаты на сфере

Возьмём произвольный большой круг на сфере радиуса R. Две точки на её поверхности, равноудаленые от каждой точки данного круга называются его полюсами. Любую точку на ней можно задать двумя числами: углом, откладываемым в плоскости круга, и углом, отсчитываемым от круга к полюсу.

1.2 Сферическая геометрия

1.2.1 Треугольники на сфере

Введём некоторые понятия.

Определение 1.2.1 *Двуугольник – это часть сферы, ограниченная двумя большими кругами, аналогично дуге окружности с углом раствора* α.

Определение 1.2.2 *Сферическим треугольником называется область на сфере, ограниченная тремя большими кругами. Стороны такого треугольника – дуги больших кругов, а углы равны углам между плоскостями, содержащими стороны и, соответственно, центр сферы.*

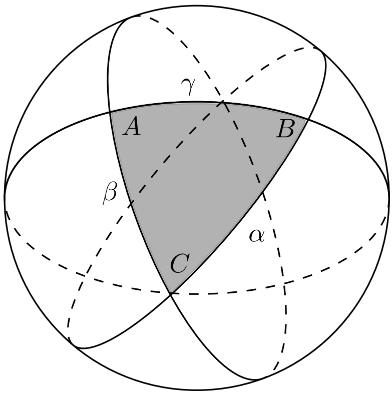

Рис. 1

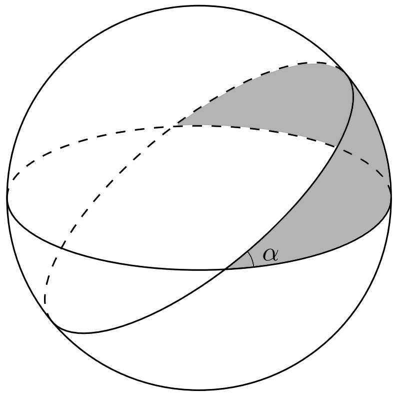

Рис. 2

Как и плоский, сферический треугольник с углами A, B и C имеет площадь, равную

$$S_{\Delta} = R^2 \cdot (A + B + C - \pi). \tag{1.1}$$

Площадь двуугольника с углом раствора α выражается формулой: $S = 2\alpha R^2$. Двуугольники, создаваемые углами треугольника покрывают площадь, большую 1/2 площади сферы на две площади треугольника. Соответственно, получим такое равенство:

$$4\pi R^2 = 2(2AR^2 + 2BR^2 + 2CR^2 - 2S_{\Delta}), \tag{1.2}$$

откуда легко найти S_{Δ}.

1.2.2 Тригонометрические формулы

Для сферических треугольников справедливы некоторые тригонометрические соотношения между сторонами и углами.

1. *Теоремы косинусов:*

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A \tag{1.3}$$

$$cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha \tag{1.4}$$

2. *Теорема синусов:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C} \tag{1.5}$$

3. *Формулы пяти элементов:*

$$\sin\alpha\cos C = \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma\cos A \tag{1.6}$$

$$\sin A\cos\gamma = \sin B\sin C + \cos B\cos C\cos\alpha \tag{1.7}$$

При малых центральных углах, обазующих стороны треугольника, дуги можно считать отрезками, а, соответственно, сферический треугольник – плоским. Используя формулы приближённого вычисления для синуса и косинуса угла ($\sin\xi \approx \xi$, а $\cos\xi \approx 1 - \frac{\xi^2}{2}$, где ξ – какая-то из сторон треугольника), можно получить привычные нам теоремы синусов и косинусов из сферических.

1.2.3 Вывод формул

Теорема косинусов:

Поместим имеющийся треугольник в декартову систему координат, так, чтобы одна из вершин треугольника лежала на одной из осей, строна, содержащая эту верщину, лежала в какой-то из координатных плосклсьей, а цетр сферу совпаал с началом координат. Распишем координаты радиус-векторов вершин:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \vec{C} = \begin{pmatrix} \sin\beta\cos A \\ \sin\beta\cos A \\ \cos\beta \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Найдем скалярное произведение векторов $\vec{C}$ и $\vec{B}$:

$$(\vec{C}, \vec{B}) = |\vec{C}||\vec{B}| \cos\alpha = \cos\beta \; cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos A \tag{1.9}$$

Поскольку $|\vec{C}| = |\vec{B}| = 1$,

$$\cos\alpha = \cos\beta \; cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos A \tag{1.10}$$

Теорема синусов:

Немного преобразуем теорему косинусов:

$$1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right)^2 \tag{1.11}$$

$$\sin^2 A = \frac{(\sin\beta\sin\gamma)^2 - \cos^2\alpha + 2\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha - (\cos\beta\cos\gamma)^2}{(\sin\beta\sin\gamma)^2}$$

Поскольку $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$,

$$\sin^2 A = \frac{(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma) - \cos^2\alpha + 2\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha - (\cos\beta\cos\gamma)^2)}{(\sin\beta\sin\gamma)^2}$$

Раскроем скобки и поделим на $\sin^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\alpha} = \frac{1 - \cos^2\gamma - \cos^2\beta - \cos^2\alpha + 2\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma} \tag{1.12}$$

Видно, что правая часть (1.12) очень симметрична, поэтому остаётся неизменной для $\frac{\sin^2 B}{\sin^2\beta}$ и $\frac{\sin^2 C}{\sin^2\gamma}$. Из этого получаем теорему синусов:

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma} \tag{1.13}$$

Формула пяти элементов

Снова запишем теорему косинусов, только теперь для двух сторон:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A \tag{1.14}$$

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos B \tag{1.15}$$

Подставим $\cos\beta$ из (1.15) в (1.14):

$$\cos\alpha = (\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos B)\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A =$$

$$= \cos\alpha\cos^2\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos\gamma\cos B + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

Перенесём $\cos\alpha\cos^2\gamma$ в левую часть и вынесем за скобки $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha - \cos\alpha\cos^2\gamma = \cos\alpha(1-\cos^2\gamma) = \cos\alpha\sin^2\gamma =$$

$$= \sin\alpha\sin\gamma\cos\gamma\cos B + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

Сократив на $\sin\gamma$, получим формулу пяти элементов:

$$\cos\alpha\sin\gamma = \sin\alpha\cos\gamma\cos B + \sin\beta\cos A$$

или

$$\sin\beta\cos A = \sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha\cos B$$

1.2.4 Круги и полюса

Допустим, что мы действуем в системе сферических координат $(\alpha;\delta)$. Получим уравнение малого круга угловым радиусом ρ с координатами центра $(\alpha;\delta_0)$. Для этогозапишем теорему косинусов для точки $(alpha;\delta)$:

$$\cos\rho = \sin\delta\sin\delta_0 + \cos\delta\cos\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0) \tag{1.16}$$

это и есть уравнение малого круга. Но гораздо интереснее уравнение, задающее большой круг, то есть при $\rho = 90°$:

$$0 = \sin\delta \sin\delta_0 + \cos\delta \cos\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0),$$

или

$$\tan\delta_0 \tan\delta = -\cos(\alpha - \alpha_0) \tag{1.17}$$

1.3 Небесная сфера

Небесная сфера – это сфера произвольного радиуса, на которую спроецированы звёзды и космические объекты.

Существует несколько важных и наиболее известных точек и больших кругов на небесной сфере.

1. *Математический горизонт* – это большой круг, плоскость которого совпадает с полноскостью горизонта для наблюдателя.

2. *Небесный экватор* – также большой круг. Его плоскость совпадает с плоскостью экватора Земли.

3. *Эклиптика* – большой круг, являющийся проекцией орбиты Земли на небесную сферу. Угол между ней и небесным экватором $\varepsilon \simeq 23.4°$

4. *Галактический экватор.* Плоскость этого большого круга лежит в плоскости нашей Галактики. Он наклонён к небесному экватору на $\sim 62.9°$.

1.3.1 Системы координат

Существует несколько систем небесных координат – экваториальная $(\alpha; \delta)$, горизонтальная $(A; h)$, эклиптическая $(\lambda; \beta)$, и галактическая $(l; b)$.