Глава 5. Статика

Задача 1. *Две пружины, жесткости которых 5 Н/м и 20 Н/м, соединяют последовательно. Чему равна жесткость получившейся системы из двух пружин?*

При растяжении этой системы пружин силой F ее деформация будет равна сумме деформаций составляющих ее пружин

$$x = x_1 + x_2.$$

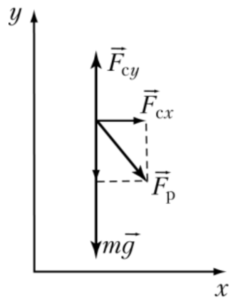
Так как каждую отдельную пружину мы при этом растягиваем с той же силой F, то приходим к уравнению

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2},$$

откуда

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 4 \text{ Н/м}.$$

Задача 2. *На парашютиста массой 80 кг в начале прыжка действует сила сопротивления воздуха, вертикальная составляющая которой 400 Н, а горизонтальная 300 Н. Найдите равнодействующую всех сил. g = 10 м/с^2.*

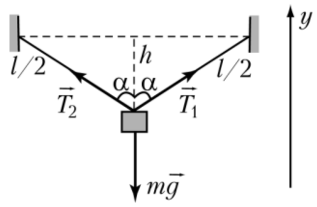


Вертикальная составляющая равнодействующей силы равна $F_{py} = F_{cy} - mg$, а горизонтальная $F_{px} = F_{cx}$. Зная две составляющие силы, находим ее модуль

$$F_p = \sqrt{\left(F_{cy} - mg\right)^2 + F_{cx}^2} = 500 \text{ Н}.$$

Задача 3. *Между зданиями натянута проволока длиной 20 м, к середине которой прикреплен осветитель массой 20 кг. Каково натяжение проволоки, если она провисает на 50 см от того горизонтального уровня, на котором закреплены концы проволоки? g = 10 м/с^2. Массу проволоки не учитывать.*

Из соображений симметрии ясно, что натяжения проволоки справа и слева от груза одинаковы: $T_1 = T_2 = T$ (впрочем, в этом можно убедиться, записав 2-ой закон Ньютона в проекции на горизонтальное направление). В проекции на ось y 2-ой закон Ньютона имеет вид



$$2T\cos\alpha - mg = 0.$$

Из рисунка находим $\cos\alpha = \dfrac{h}{l/2}$ = 0,05, откуда

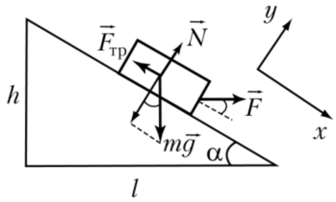
$$T = \frac{mg}{2\cos\alpha} = 2000 \text{ Н}.$$

Задача 4. *Тело массой 6 кг лежит на наклонной плоскости высотой 40 см и длиной основания 100 см. Какую минимальную горизонтальную силу надо приложить к телу, чтобы стащить его с наклонной плоскости, если коэффициент трения равен 0,5? g = 10 м/с*^{2}.

Рассмотрим момент, когда тело еще покоится, но сила трения покоя достигла максимального значения

$$F_{тр} = \mu N.$$

Запишем 2-ой закон Ньютона в проекциях на оси x и y



$$F\cos\alpha + mg\sin\alpha - F_{тр} = 0$$

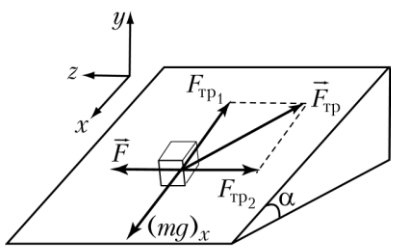
$$N + F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0.$$

Решив полученную систему уравнений, получим

$$F = mg\frac{\mu - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mu\,\mathrm{tg}\alpha} = 5\ \text{Н}$$

(из рисунка видно, что $\mathrm{tg}\,\alpha = h/l$).

Задача 5. *На наклонной плоскости высотой 3 м и длиной 9 м лежит тело массой 6 кг. Какую минимальную горизонтальную силу, направленную вдоль плоскости, надо приложить к телу, чтобы сдвинуть его с места? Коэффициент трения 0,5. g = 10 м/с*^{2}.



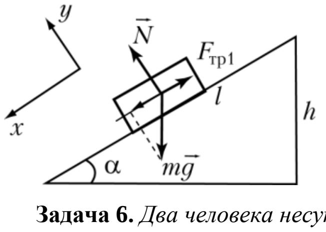
В этой задаче нам придется рассмотреть проекции не на две, как обычно, а на три оси. Сила трения имеет проекции $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$ на две взаимно перпендикулярные оси x и z, параллельные наклонной поверхности

$$mg\sin\alpha - F_{тр1} = 0 \qquad (\text{ось } x)$$

$$F - F_{тр2} = 0 \qquad (\text{ось } z),$$

где $\sin\alpha = h/l = 1/3$. Условие начала проскальзывания имеет вид

$$F_{тр} = \mu N,$$



где $F_{тр} = \sqrt{F_{тр1}^2 + F_{тр2}^2}$, а силу нормальной реакции находим из проекции на ось y

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

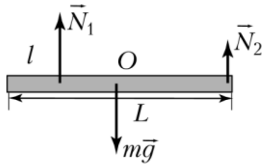
Решая уравнения, получаем

$$F = mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 20\ \text{Н}.$$

Задача 6. *Два человека несут металлическую трубу, положив ее себе на плечи. Первый человек поддерживает трубу на расстоянии 1 м от ее конца, второй* *держит противоположный конец трубы. Во сколько раз нагрузка, приходящаяся на первого человека, больше, чем на второго, если длина трубы 2,5 м*?

Уравнение моментов не содержит силы, проходящие через ось вращения, поэтому при удачном выборе оси можно исключить ненужные силы и упростить уравнения. В данном примере нам надо установить соотношение между N_1 и N_2, поэтому удобно исключить силу тяжести трубы, выбирая ось, проходящую через ее центр тяжести. Уравнение моментов относительно этой оси имеет вид

$$N_1\left(\frac{L}{2}-l\right)-N_2\frac{L}{2}=0.$$



Получаем

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{L}{L-2l}=5.$$

Задача 7. *При взвешивании на неравноплечных рычажных весах вес тела на одной чашке получился 36 Н, на другой — 49 Н. Определите истинный вес тела.*

Запишем уравнение моментов относительно точки опоры (правило рычага) для первого взвешивания

$$P_1l_1 = Pl_2$$

и для второго взвешивания

$$Pl_1 = P_2l_2$$

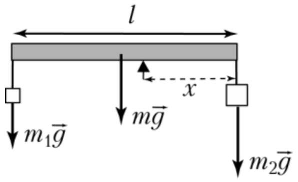
(P — истинный вес груза, P_1, P_2 — вес разновесков при первом и втором взвешиваниях). Поделив уравнения друг на друга, получим

$$\frac{P_1}{P}=\frac{P}{P_2},$$

откуда

$$P=\sqrt{P_1P_2}= 42\text{ Н}.$$

Задача 8. *К концам горизонтального стержня длиной 0,9 м и массой 2 кг подвешены два груза: слева — массой 1 кг, справа — массой 3 кг. На каком расстоянии (в см) от большей массы следует подпереть стержень, чтобы он оставался в равновесии*?



В этом примере в уравнение моментов (относительно точки опоры) войдут не две силы, а три

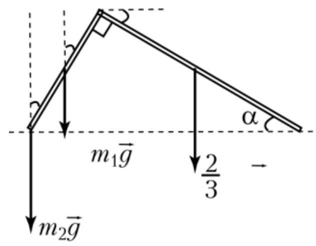
$$m_2g\cdot x - m_1g\cdot(l - x) - mg(l/2 - x) = 0.$$

Из этого уравнения находим x

$$x=\frac{m_1l+m(l/2)}{m_1+m_2+m} = 30\text{ см}.$$

Замечание. Решенная задача эквивалентна задаче об определении положения центра тяжести системы.

Задача 9. *Стержень массой 300 г согнули под прямым углом в точке, которая делит его в отношении 1:2, и подвесили на нити, привязанной к точке сгиба. Грузик какой массы (в г) надо прикрепить к концу короткой стороны угла, чтобы концы стержня находились на одном уровне*?



Запишем уравнение моментов относительно точки подвеса

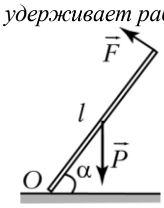
$$\frac{2}{3}m_1g\left(\frac{l}{3}\cos\alpha\right)-\frac{1}{3}m_1g\left(\frac{l}{6}\sin\alpha\right)-m_2g\left(\frac{l}{3}\sin\alpha\right)=0$$

,

где l — длина стержня, m_1 — его масса. Получаем

$m_2=m_1\left(\frac{2}{3}\mathrm{ctg}\alpha-\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{6}m_1$ = 350 г (из рисунка видно, что $\mathrm{ctg}\,\alpha = 2$).

Задача 10. *Рабочий удерживает за один конец доску массой 16 кг так, что она опирается другим концом на землю и образует угол 60° с горизонтом. С какой силой удерживает рабочий доску, если эта сила перпендикулярна доске*? *g = 10 м/с^2*.



Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку опоры доски. Плечо искомой силы равно длине доски l, а плечо силы тяжести $(l/2)\cos\alpha$. Получаем

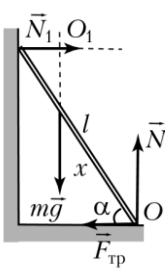
$$mg\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha-F\cdot l=0,\ \text{т.е.}\quad F=\frac{mg}{2}\cos\alpha=40\ \text{Н}.$$

Задача 11. *Лестница длиной 4 м приставлена к гладкой стене под углом 60° к горизонту. Коэффициент трения между лестницей и полом 0,25. На какое расстояние (в см) вдоль лестницы может подняться человек, прежде чем лестница начнет скользить? Массой лестницы пренебречь. $\sqrt{3}$ = 1,7.*

Условие начала проскальзывания нижнего конца лестницы имеет вид

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Искомое расстояние может войти только в уравнение моментов. Так как это уравнение является самым сложным в задаче, выберем ось так, чтобы сил было поменьше и геометрия попроще — в точке O



$$N_1(l\sin\alpha) - mg(x\cos\alpha) = 0.$$

Чтобы исключить все силы, придется записать еще два уравнения — проекции 2-го закона Ньютона на горизонтальную и вертикальную оси координат

$$N_1 - F_{\text{тр}} = 0,\qquad N - mg = 0.$$

Исключая силы из этих уравнений, получаем

$$x = \mu l\,\mathrm{tg}\,\alpha = 170\ \text{см}.$$

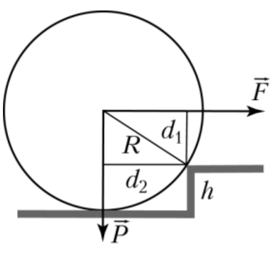
Замечание. Отметим, что при специальном выборе оси вместо последних трех уравнений можно было бы обойтись одним уравнением моментов. Если записать его относительно оси O_1, то силы N_1 и mg будут исключены

$$F_{тр}(l\sin\alpha) - N(x\cos\alpha) = 0.$$

Подставляя сюда $F_{тр} = \mu N$, приходим к тому же ответу для x.

Задача 12. *Колесо радиусом 0,5 м и массой 10 кг стоит перед ступенькой высотой 0,1 м. Какую наименьшую горизонтальную силу надо приложить к оси колеса, чтобы поднять его на ступеньку? g = 10 м/с^2.*

Если записать правило моментов относительно угла ступеньки, то сила, действующая на колесо со стороны ступеньки, в уравнение не войдет. Так как нас интересует момент отрыва колеса от пола, то сила реакции пола равна нулю, и в уравнение моментов войдут только две силы



$$Fd_1 - mgd_2 = 0.$$

Плечо силы F находим сразу

$$d_1 = R - h,$$

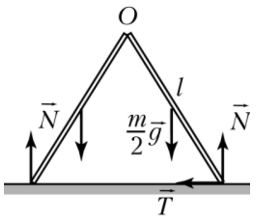
а плечо силы тяжести — из теоремы Пифагора

$$d_2^2 = R^2 - d_1^2\,.$$

Окончательно получаем

$$F = mg\frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R - h} = 75 \text{ Н}.$$

Задача 13. *Нижние концы лестницы-стремянки массой 10 кг соединены веревкой. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол 45°. Считая пол абсолютно гладким, найдите натяжение веревки. g = 10 м/с^2.*



Особенность данной задачи состоит в том, что сила натяжения не может быть определена из условия равновесия лестницы как целого, так как является внутренней силой и не входит в уравнения равновесия. Чтобы найти эту силу, надо записать уравнение моментов для одной из половинок лестницы относительно оси соединения двух сторон (верхняя точка O на рисунке). При этом мы предполагаем, что две части стремянки соединены шарнирно и могут свободно поворачиваться относительно места соединения. Получаем

$$\frac{mg}{2}\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha + T\cdot l\sin\alpha - N\cdot l\cos\alpha = 0\,.$$

Силу N находим из проекции 2-го закона Ньютона на вертикальную ось

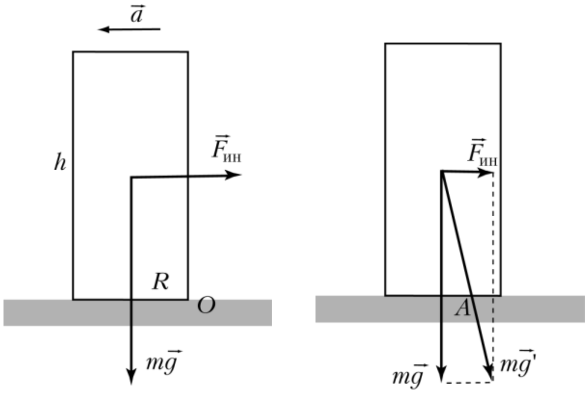
$$2N - mg = 0,$$

и выражаем силу натяжения веревки

$$T = \frac{mg}{4}\operatorname{ctg}\alpha = 25\ \text{Н}.$$

Задача 14*. *В кузове грузовика стоит цилиндр, радиус основания которого 10 см, а высота 50 см. С каким максимальным ускорением может тормозить грузовик, чтобы цилиндр не опрокинулся?* $g = 10$ *м/с*^{2}.

В системе отсчета, связанной с грузовиком, цилиндр покоится, и поставленная задача становится задачей статики. Однако, переходя в систему отсчета, которая движется поступательно с ускорением $\vec{a}$, мы должны к силе тяжести $\Delta m\vec{g}$, действующей на каждый элемент массы, добавить силу инерции $-\Delta m\vec{a}$ (см. Глава 2 задача 7). Равнодействующая сил инерции, как и сил тяжести, приложена к



центру тяжести. В тот момент, когда цилиндр находится на грани опрокидывания, он взаимодействует с опорой в одной точке O. Запишем относительно этой точки уравнение моментов

$$F_{\text{ин}} \cdot \frac{h}{2} - mg \cdot R = 0\,.$$

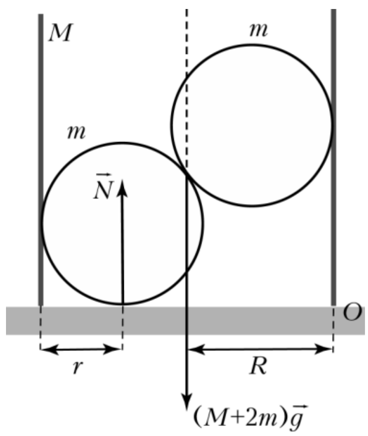
(момент силы реакции равен нулю). Подставляя $F_{\text{ин}} = ma$, получаем $a = 2gR/h =$ $= 4$ м/с^2.

Замечание. Вместо того, чтобы в явном виде вводить силу инерции, можно считать, что вместо силы тяжести $m\vec{g}$ действует сила тяжести $m\vec{g}'$, где $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$. Тогда мы можем применить общее условие того, что поставленное на опору тело не опрокидывается. Для этого линия действия силы тяжести $m\vec{g}'$ не должна выходить за пределы опоры. Действительно, нетрудно установить, что равнодействующая сил нормальной реакции должна быть приложена в точке *A* пересечения силы тяжести с опорой. (Относительно этой точки равны нулю моменты силы трения и силы тяжести $m\vec{g}'$. Значит, должен быть равен нулю и момент силы нормальной реакции.) Когда точка *A* окажется на краю опоры, сила реакции будет действовать только в этой точке.

Задача 15. *Два одинаковых шара радиусом 10 см и массой 600 г каждый положили в вертикальный открытый с обеих сторон тонкостенный цилиндр радиусом 15 см, стоящий на горизонтальной плоскости. Пренебрегая трением, найдите, при какой минимальной массе (в г) цилиндра шары его не опрокидывают.*

Если цилиндр находится на грани опрокидывания, то он взаимодействует с плоскостью только в точке *O*. Если начать с уравнения моментов для цилиндра, то придется вычислять силы давления шаров на его стенки, а для этого нужно будет записать еще и уравнение моментов для верхнего шара. Попробуйте проделать такие расчеты самостоятельно, а мы покажем, как удачный выбор объекта для записи условий равновесия может заметно упростить задачу. Исследуем равновесие системы (цилиндр + шары) и запишем уравнение моментов для точки *O*. Силы взаимодействия шаров с цилиндром и между собой являются теперь внутренними, и их учитывать не надо. Получаем уравнение

$$N\cdot(2R - r) - (M + 2m)g\cdot R = 0.$$



Силу реакции плоскости находим из 2-го закона Ньютона для системы двух шаров (в проекции на вертикальную ось)

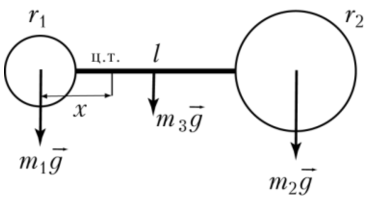
$$N - 2mg = 0.$$

Получаем $M = 2m(R - r)/R = 400$ г.

Задача 16. *Два шара радиусами 1см и 6 см соединены однородным стержнем длиной 10 см. Масса первого шара 60 г, масса второго 72 г, масса стержня 12 г. Найдите расстояние (в см) от центра тяжести системы до центра меньшего шара.*

Суммарный момент сил тяжести, приложенных к частям системы, относительно центра тяжести должен быть равен нулю. Обозначив искомое расстояние через *x*, запишем это уравнение моментов

$$-m_1g\cdot x + m_2g\cdot(r_1 + r_2 + l - x) + m_3g(r_1 + \frac{l}{2} - x) = 0 .$$



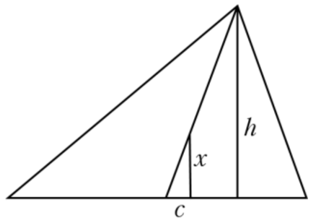
Выразив отсюда x, получим

$$x = \frac{m_2(r_1 + r_2 + l) + m_3(r_1 + \frac{l}{2})}{m_1 + m_2 + m_3} = 9 \text{ см.}$$

Получилось, что центр тяжести лежит не слева, а справа от середины стержня.

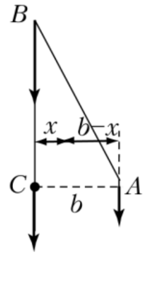
Задача 17. *Однородная тонкая пластина имеет форму треугольника со сторонами 13, 14 и 15 см. На каком расстоянии (в см) от второй стороны находится центр тяжести пластины*?

Докажем, что центр тяжести однородной пластины в форме треугольника лежит на пересечении медиан. Для этого разобьем треугольник на тонкие полоски, параллельные одной из сторон. Положение центра тяжести системы не изменится, если мы заменим каждую полоску точечной массой, лежащей в ее центре. Все эти массы лежат на медиане CD, значит, центр тяжести лежит на медиане. Поскольку это



рассуждение годится для любой медианы, то центр тяжести лежит на их пересечении.

Известно, что точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 1:2. Значит, центр тяжести находится от каждой стороны на расстоянии, равном трети опущенной на нее высоты. Чтобы найти высоту, вычислим сначала площадь треугольника по формуле Герона. Проверьте, что она равна $S = 84$ см^2. Используя равенство $S = 0{,}5ñh$, находим $h = 12$ см. Значит, искомое расстояние равно $x = h/3 =$ 4 см.



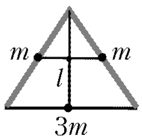
Задача 18. *В вершинах треугольника ABC находятся соответственно массы 4, 6 и 10 г. Стороны треугольника равны: AB = 50 см, BC = 40 см и CA = = 30 см. На каком расстоянии (в см) от стороны BC находится центр тяжести системы*?

Стороны треугольника удовлетворяют равенству $a^2 + b^2 = c^2$, значит, угол C — прямой. Расположим треугольник так, чтобы сторона BC была вертикальна. Тогда в уравнение моментов относительно центра тяжести войдет искомое расстояние x

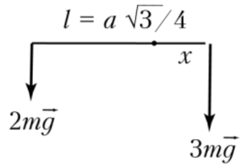
$$m_A g \cdot (b - x) - (m_B + m_C) g \cdot x = 0.$$

Получаем $x = bm_A/(m_A + m_B + m_C) = 6$ см.

Задача 19. *Две стороны проволочной рамки, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 1 м, сделаны из алюминиевой проволоки, а третья — из медной такого же диаметра. На каком расстоянии (в см) от середины медной проволоки находится центр тяжести системы? Плотность меди в 3 раза больше плотности алюминия.* $\sqrt{3} = 1{,}7$.



Если массу боковой стороны треугольника обозначить m, то масса основания будет равна $3m$. Каждую из сторон можно заменить соответствующей точечной массой, лежащей в середине стороны. Так как эти массы не лежат на одной прямой, задачу удобно решать в два этапа. Сначала заменим две массы m массой $2m$, лежащей на середине высоты треугольника. Теперь мы имеем две точечных массы $2m$ и $3m$, расстояние между которыми равно $l = a\sqrt{3}/4$. Расположив эти массы на горизонтальной прямой и записав правило моментов

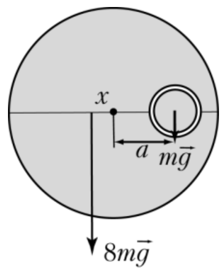


$$3mg \cdot x - 2mg \cdot (l - x) = 0,$$

найдем искомое расстояние

$$x = \frac{2a\sqrt{3}}{20} = 17 \text{ см.}$$

Задача 20. *В однородном диске радиусом R вырезано круглое отверстие радиусом R/3. Центр выреза находится на расстоянии 24 см от центра диска. На каком расстоянии (в см) от центра диска находится центр масс этого тела*?



Если возвратить на место вырезанную часть диска, то получим полный диск. Значит, центр тяжести системы, состоящей из двух тел — рассматриваемого диска с вырезом и вырезанного куска — лежит в центре диска. Обозначим массу вырезанного куска m, тогда масса полного диска равна $9m$ (его площадь в 9 раз больше), т.е. масса диска с вырезом равна $8m$. Записав правило моментов относительно центра диска

$$(mg)a - (8mg)x = 0,$$

выразим расстояние от центра тяжести диска с вырезом до центра диска

$$x = \frac{a}{8} = 3 \text{ см.}$$