

# Universidade Federal do Rio de Janeiro

## Trabalho Final de Sistemas Lineares I

Alunos	Igor Abreu da Silva
DRE	112053874
Curso	Engenharia Eletrônica
Turma	2016/1
Professor	Natanael Nunes de Moura Junior

Rio de Janeiro, 15 de Julho de 2016

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Questão 1</b>	<b>1</b>
1.1	Circuito 1 . . . . .	1
1.1.1	Determinar a função do circuito . . . . .	1
1.1.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	4
1.1.3	Resposta a rampa unitário . . . . .	4
1.1.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	5
1.2	Circuito 2 . . . . .	7
1.2.1	Determinar a função do circuito . . . . .	7
1.2.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	10
1.2.3	Resposta a rampa unitário . . . . .	10
1.2.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	11
1.3	Circuito 3 . . . . .	13
1.3.1	Determinar a função do circuito . . . . .	13
1.3.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	16
1.3.3	Resposta a rampa unitário . . . . .	16
1.3.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	17
1.4	Circuito 4 . . . . .	19
1.4.1	Determinar a função do circuito . . . . .	19
1.4.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	20
1.4.3	Resposta a rampa unitário . . . . .	21
1.4.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	21
1.5	Circuito 5 . . . . .	24
1.5.1	Determinar a função do circuito . . . . .	24
1.5.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	26
1.5.3	Resposta a rampa unitária . . . . .	26
1.5.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Questão 2</b>	<b>30</b>
2.1	Equações do diagrama . . . . .	30
2.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	33
2.3	Resposta a rampa unitária . . . . .	33
2.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Questão 3</b>	<b>37</b>
3.1	E.D.O dos sistemas . . . . .	37
3.1.1	Sistema 1 . . . . .	37
3.1.2	Sistema 2 . . . . .	37
3.2	Polos e zeros . . . . .	38
3.2.1	Variando em $\alpha$ . . . . .	38

3.2.2	Variando em $\beta$ . . . . .	38
3.3	Diagrama de Bode . . . . .	39
3.3.1	Variando em $\alpha$ . . . . .	39
3.3.2	Variando em $\beta$ . . . . .	39
3.4	Resposta ao Degrau Unitário . . . . .	40
3.4.1	Variando em $\alpha$ . . . . .	40
3.4.2	Variando em $\beta$ . . . . .	40
3.5	Resposta a Rampa Unitária . . . . .	41
3.5.1	Variando em $\alpha$ . . . . .	41
3.5.2	Variando em $\beta$ . . . . .	41
3.6	Resposta a onda quadrada . . . . .	42
3.6.1	Variando em $\alpha$ . . . . .	42
3.6.2	Variando em $\beta$ . . . . .	45
3.7	Resposta a cossenoides . . . . .	47
3.7.1	Variando frequências nos valores de $\alpha$ . . . . .	47
3.7.2	Variando frequências nos valores de $\beta$ . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>Referências</b>	<b>54</b>

## Lista de Figuras

1	Circuito 1 . . . . .	1
2	Circuito 1 - Polos e Zeros . . . . .	2
3	Circuito 1 - Diagrama de Bode . . . . .	3
4	Circuito 1 - Resposta ao degrau unitário . . . . .	4
5	Circuito 1 - Resposta a rampa unitária . . . . .	4
6	Circuito 1 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	5
7	Circuito 1 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	5
8	Circuito 1 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	6
9	Circuito 1 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	6
10	Circuito 1 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	7
11	Circuito 2 . . . . .	7
12	Circuito 2 - Polos e Zeros . . . . .	9
13	Circuito 2 - Diagrama de Bode . . . . .	9

14	Circuito 2 - Resposta ao degrau unitário . . . . .	10
15	Circuito 2 - Resposta a rampa unitária . . . . .	10
16	Circuito 2 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	11
17	Circuito 2 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	11
18	Circuito 2 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	12
19	Circuito 2 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	12
20	Circuito 2 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	13
21	Circuito 3 . . . . .	13
22	Circuito 3 - Polos e Zeros . . . . .	15
23	Circuito 3 - Diagrama de Bode . . . . .	15
24	Circuito 3 - Resposta ao degrau unitário . . . . .	16
25	Circuito 3 - Resposta a rampa unitária . . . . .	16
26	Circuito 3 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	17
27	Circuito 3 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	17
28	Circuito 3 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	18
29	Circuito 3 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	18
30	Circuito 3 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	19
31	Circuito 4 . . . . .	19
32	Circuito 4 - Diagrama de Bode . . . . .	20
33	Circuito 4 - Resposta ao degrau unitário . . . . .	20
34	Circuito 4 - Resposta a rampa unitária . . . . .	21
35	Circuito 4 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	21
36	Circuito 4 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	22
37	Circuito 4 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	22
38	Circuito 4 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	23
39	Circuito 4 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	23
40	Circuito 5 . . . . .	24
41	Circuito 5 - Polos e Zeros . . . . .	25
42	Circuito 5 - Diagrama de Bode . . . . .	25

43	Circuito 5 - Resposta ao degrau unitário . . . . .	26
44	Circuito 5 - Resposta a rampa unitária . . . . .	26
45	Circuito 5 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	27
46	Circuito 5 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	27
47	Circuito 5 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	28
48	Circuito 5 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	28
49	Circuito 5 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	29
50	Diagrama de Blocos . . . . .	30
51	Polos e Zeros . . . . .	31
52	Diagrama de Bode . . . . .	32
53	Resposta ao degrau unitário . . . . .	33
54	Resposta a rampa unitária . . . . .	33
55	Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	34
56	Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$ . . . . .	34
57	Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$ . . . . .	35
58	Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$ . . . . .	35
59	Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$ . . . . .	36
60	Polos e Zeros variando em $\alpha$ . . . . .	38
61	Polos e Zeros variando em $\beta$ . . . . .	38
62	Diagrama de Bode variando em $\alpha$ . . . . .	39
63	Diagrama de Bode variando em $\beta$ . . . . .	39
64	Resposta ao Degrau Unitário variando em $\alpha$ . . . . .	40
65	Resposta ao Degrau Unitário variando em $\beta$ . . . . .	40
66	Resposta a rampa Unitária variando em $\alpha$ . . . . .	41
67	Resposta a rampa Unitária variando em $\beta$ . . . . .	41
68	Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	42
69	Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	42
70	Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	43
71	Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	43

72	Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	44
73	Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	45
74	Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	45
75	Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	46
76	Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	46
77	Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	47
78	Resposta para $\alpha = 0.001$ em frequências variantes . . . . .	47
79	Resposta para $\alpha = 0.01$ em frequências variantes . . . . .	48
80	Resposta para $\alpha = 0.1$ em frequências variantes . . . . .	48
81	Resposta para $\alpha = 1$ em frequências variantes . . . . .	49
82	Resposta para $\alpha = 10$ em frequências variantes . . . . .	49
83	Resposta para $\alpha = 100$ em frequências variantes . . . . .	50
84	Resposta para $\alpha = 1000$ em frequências variantes . . . . .	50
85	Resposta para $\beta = 0.001$ em frequências variantes . . . . .	51
86	Resposta para $\beta = 0.01$ em frequências variantes . . . . .	51
87	Resposta para $\beta = 0.1$ em frequências variantes . . . . .	52
88	Resposta para $\beta = 1$ em frequências variantes . . . . .	52
89	Resposta para $\beta = 10$ em frequências variantes . . . . .	53

# 1 Questão 1

## 1.1 Circuito 1

Nesta sessão será resolvida toda a parte necessária para encontrar a função/utilidade de cada um dos circuitos. Analisaremos todos os pontos correspondentes aos itens (a), (b), (c), (d), (e) e (f) do trabalho final.

Serão assumidos aqui que os sistemas encontram-se zerados no instante  $t = 0^-$ .

### 1.1.1 Determinar a função do circuito

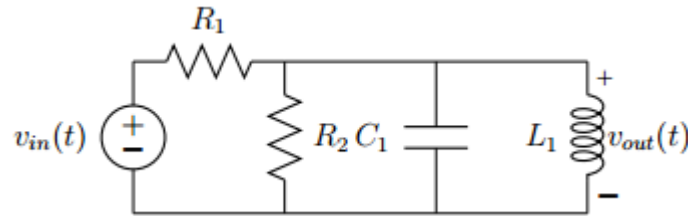


Figura 1: Circuito 1

Podemos modelar o circuito 1 em relação ao nó após  $R_1$ . Teríamos a seguinte equação:

$$\frac{V_{in} - V_{out}}{R_1} - \frac{V_{out}}{R_2} - \frac{C \partial V_{out}}{\partial t} - \frac{1}{L} \int V_{out} \partial t = 0$$

Para encontrarmos a E.D.O do circuito, vamos derivar toda esta expressão e separar  $V_{out}$  e  $V_{in}$ , encontrando a seguinte relação:

$$\frac{\partial V_{in}}{\partial t} \left( \frac{1}{R_1} \right) = \frac{C \partial^2 V_{out}}{\partial t^2} + \frac{\partial V_{out}}{\partial t} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{V_{out}}{L}$$

Em posse da E.D.O, utilizaremos Laplace para encontrar a função de Transferência do Circuito.

$$X(S) \left( \frac{1}{R_1} \right) = Y(S) \left( S^2 C + S \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{L} \right) \Rightarrow$$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{S R_2 L}{S^2 (R_1 R_2 L C) + S (R_1 L + R_2 L) + R_1 R_2}$$

Afim de facilitar os cálculos, tomaremos os seguintes valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 10\Omega$ ;
- $R_2 = 100\Omega$ ;
- $C = 1F$ ;
- $L = 1H$ ;

Apos aplicar os valores comerciais em  $H(S)$ , temos:

$$H(S) = \frac{100S}{1000S^2 + 110S + 110}$$

Utilizando essa função no MatLab para encontrar os polos (quando se zera o denominador), zeros (quando se zera o numerador) e o diagrama de Bode, obtemos o seguintes gráficos:

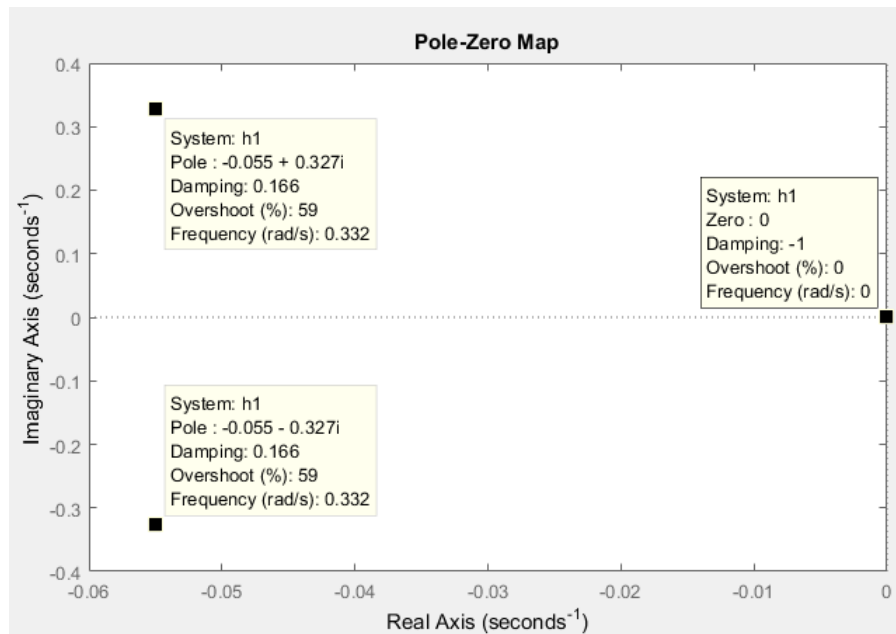


Figura 2: Circuito 1 - Polos e Zeros



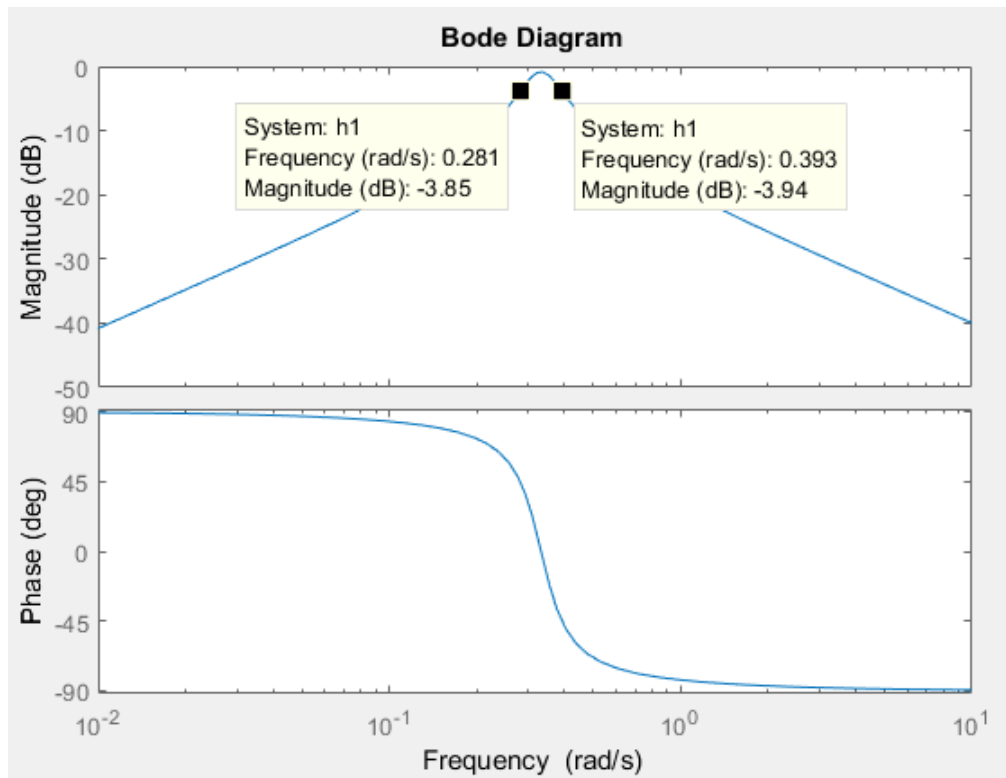


Figura 3: Circuito 1 - Diagrama de Bode

Analisando-se este circuito, pode-se afirmar que o mesmo é um filtro passa faixa operando na largura de banda de aproximadamente 0.11 rad/sec em um intervalo  $[0.28, 0.39]$  rad/sec.

### 1.1.2 Resposta ao degrau unitário

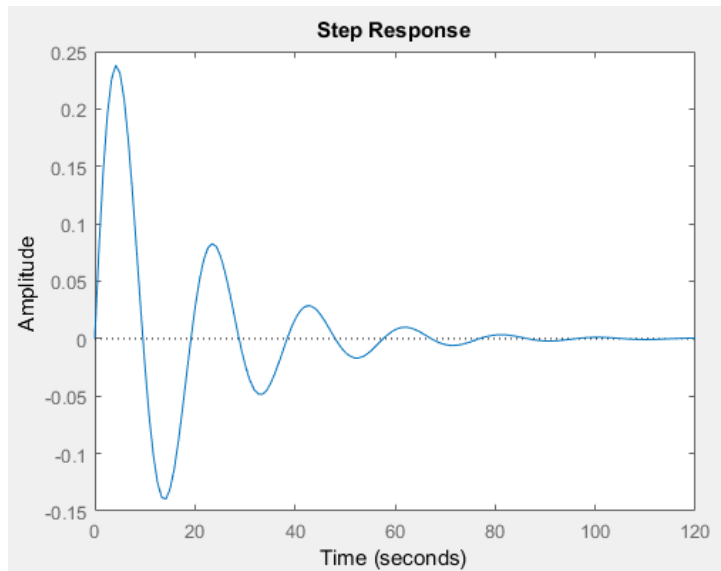


Figura 4: Circuito 1 - Resposta ao degrau unitário

### 1.1.3 Resposta a rampa unitário

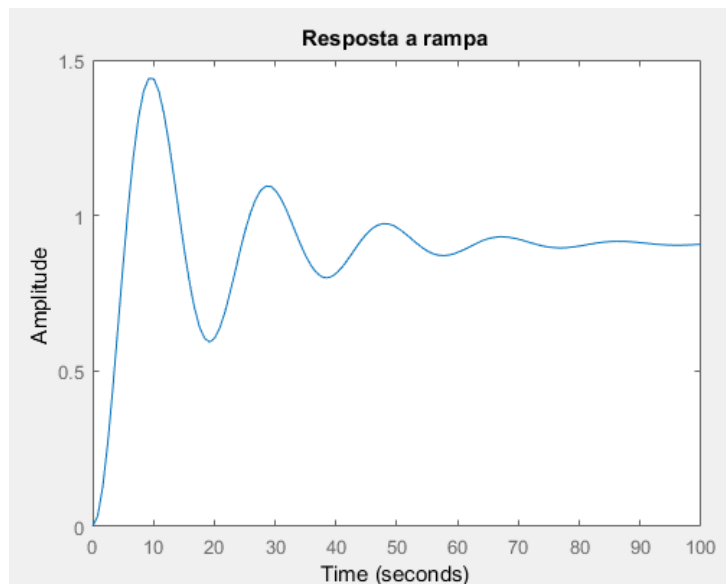


Figura 5: Circuito 1 - Resposta a rampa unitária

#### 1.1.4 Resposta a onda quadrada

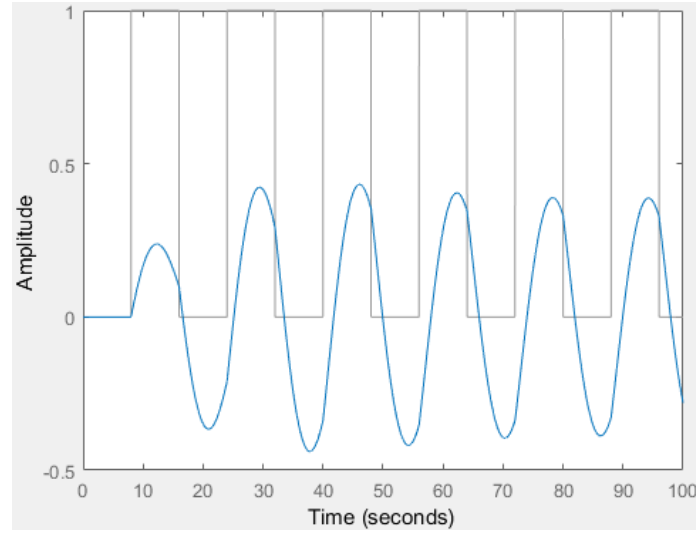


Figura 6: Circuito 1 - Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

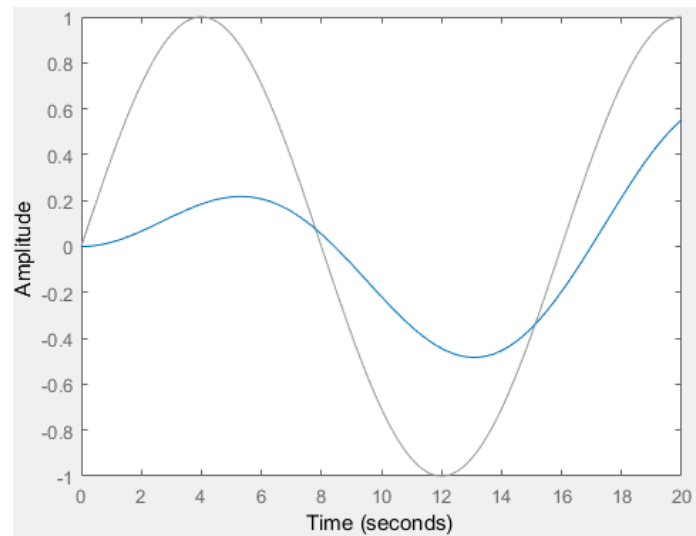


Figura 7: Circuito 1 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

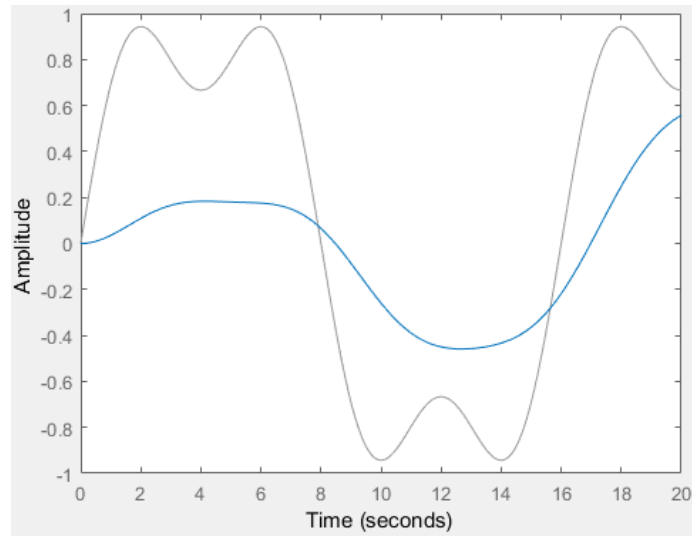


Figura 8: Circuito 1 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

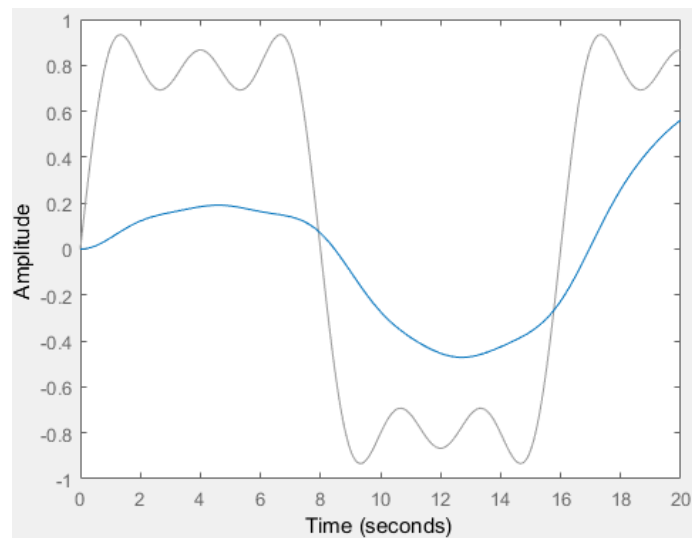


Figura 9: Circuito 1 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

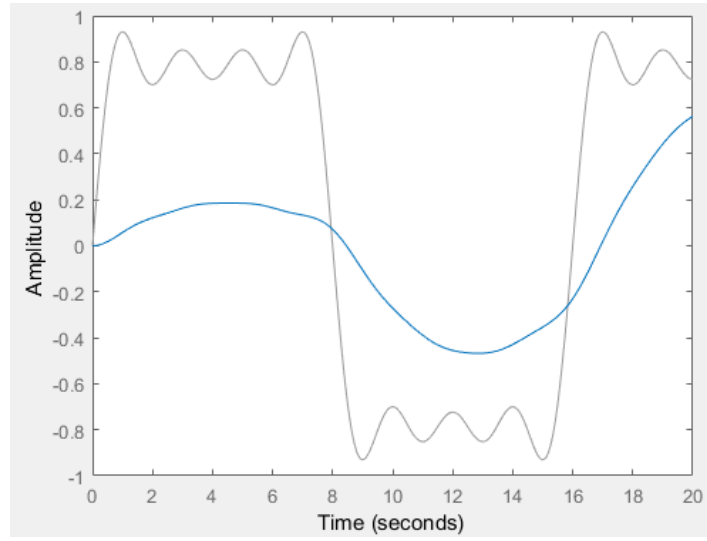


Figura 10: Circuito 1 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

## 1.2 Circuito 2

### 1.2.1 Determinar a função do circuito

Para modelarmos utilizaremos as seguintes equações:

$$I_1 = I_{in} - I_{out}$$

$$R_2 I_{out} + \frac{L \partial I_{out}}{\partial t} - R_1 I_1 + \frac{1}{C} \int I_{out} \partial t = 0$$

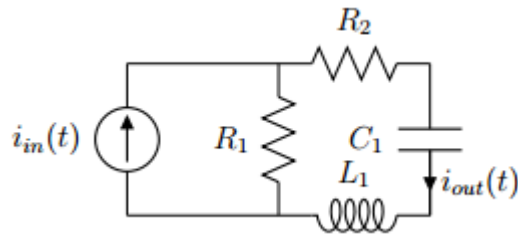


Figura 11: Circuito 2

Substituindo  $I_1$  para colocarmos a equação em função de  $I_{in}$  e  $I_{out}$  e derivando-a para removermos a Integral, temos a E.D.O:

$$\frac{\partial I_{in}}{\partial t}(R_1) = \frac{\partial^2 I_{out}}{\partial t^2}(L) + \frac{\partial I_{out}}{\partial t}(R_1 + R_2) + \frac{I_{out}}{C}$$

Transformando essa E.D.O em Laplace, obtemos:

$$X(S)(SR_1) = Y(S)\left(S^2 + S(R_1 + R_2) + \frac{1}{C}\right) \Rightarrow$$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{S(R_1 C)}{S^2(LC) + S(R_1 C + R_2 C) + 1}$$

Escolhendo os seguintes valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 10\Omega$ ;
- $R_2 = 100\Omega$ ;
- $C = 1F$ ;
- $L = 1H$ ;

Encontramos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{10S}{S^2 + 110S + 1}$$

A partir dessa função obtemos os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

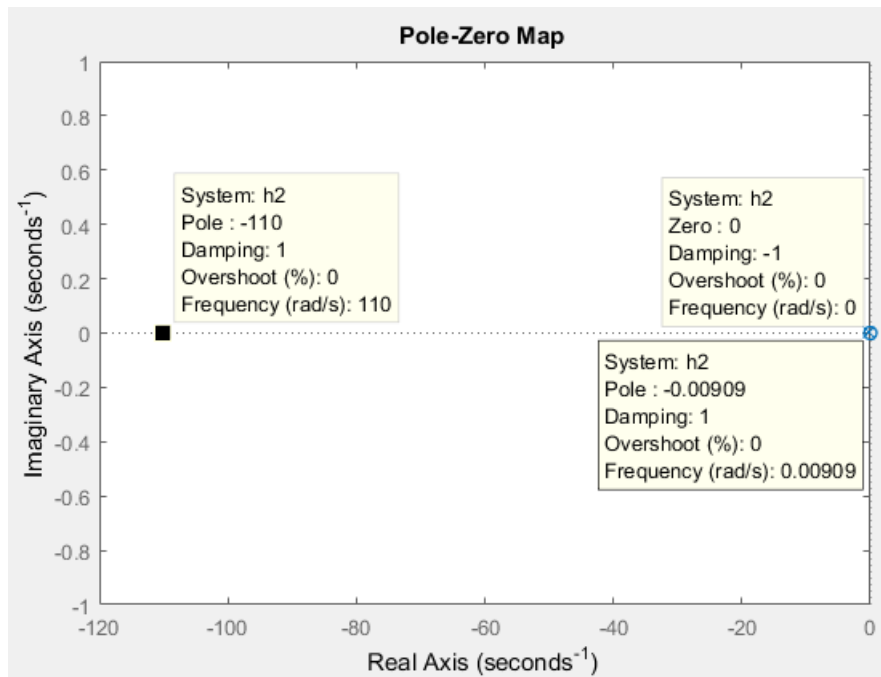


Figura 12: Circuito 2 - Polos e Zeros

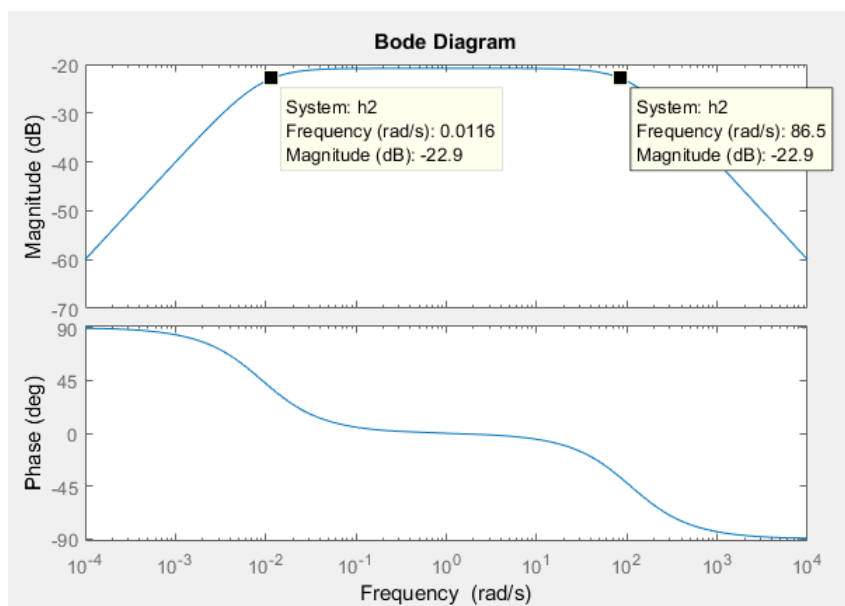


Figura 13: Circuito 2 - Diagrama de Bode

Assim como o circuito da figura 1, temos também um filtro passa faixa que opera nas faixas entre 0.01 rad/seg e 86.5 rad/seg

### 1.2.2 Resposta ao degrau unitário

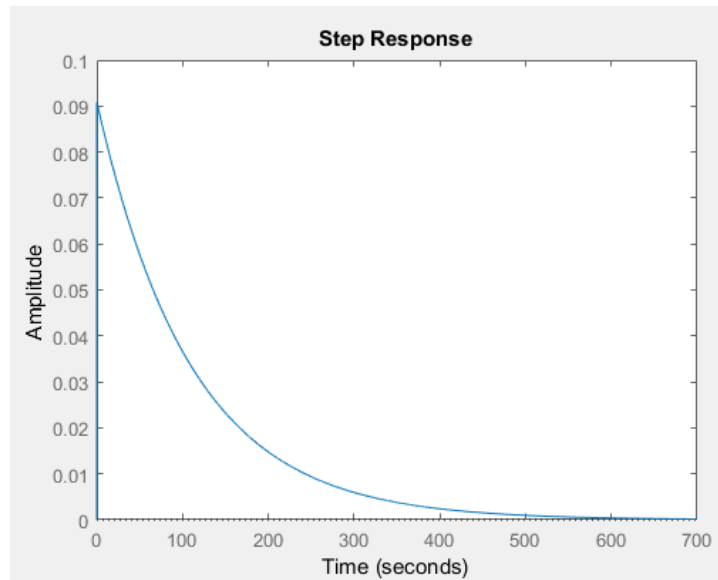


Figura 14: Circuito 2 - Resposta ao degrau unitário

### 1.2.3 Resposta a rampa unitário

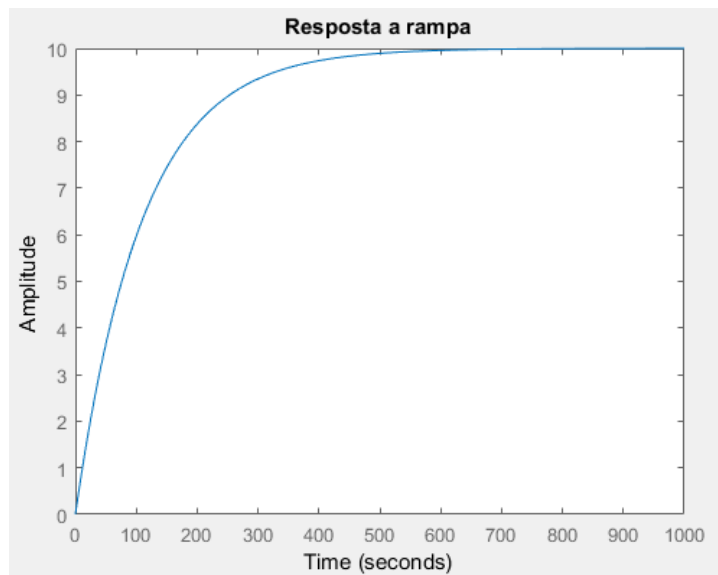


Figura 15: Circuito 2 - Resposta a rampa unitária



### 1.2.4 Resposta a onda quadrada

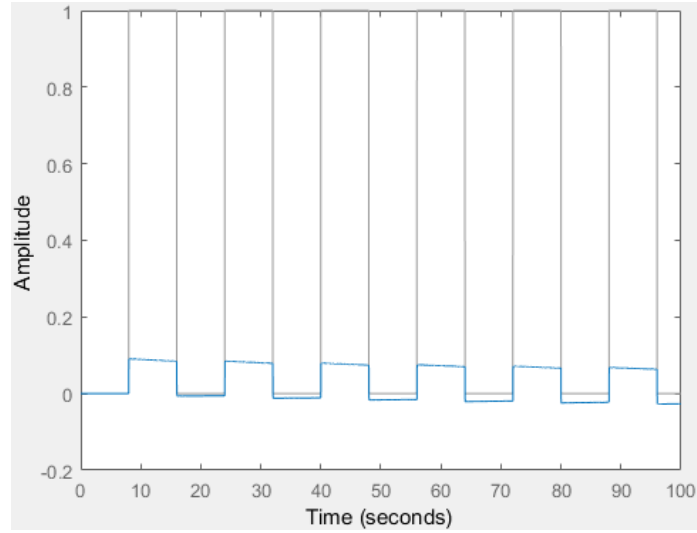


Figura 16: Circuito 2 - Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

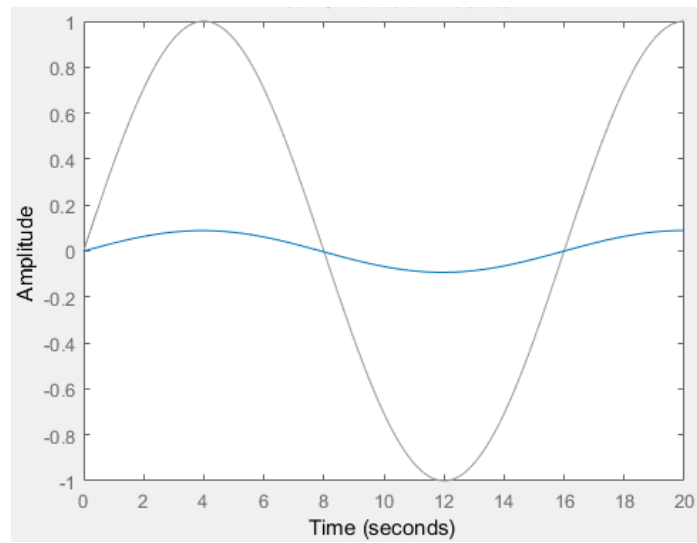


Figura 17: Circuito 2 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

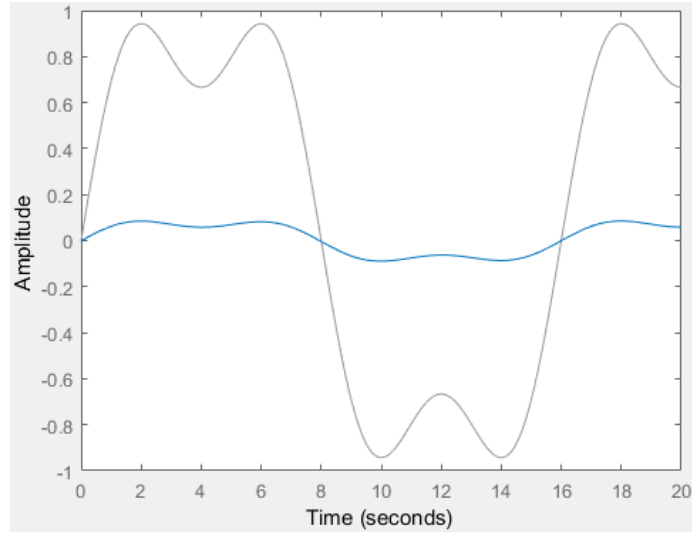


Figura 18: Circuito 2 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

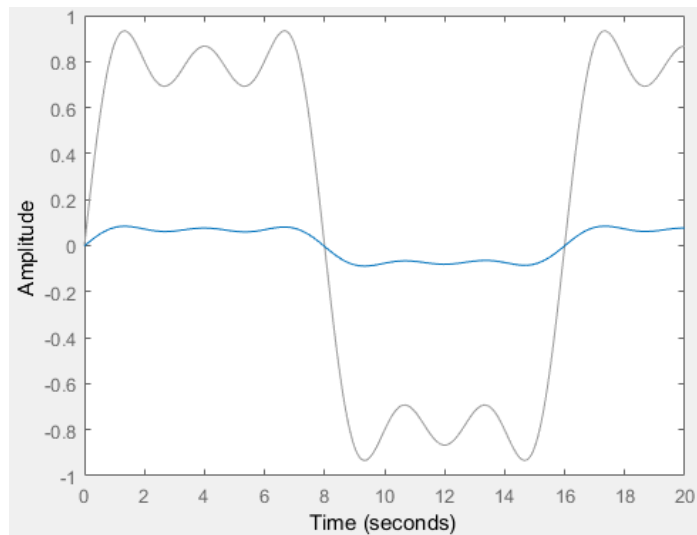


Figura 19: Circuito 2 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

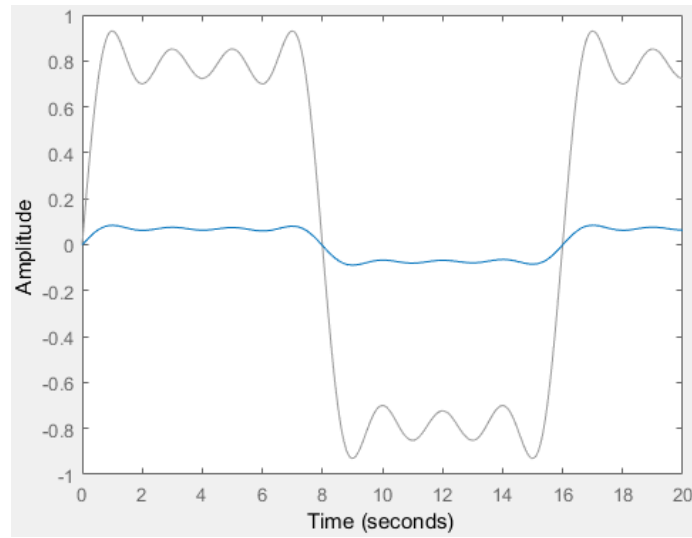


Figura 20: Circuito 2 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

### 1.3 Circuito 3

#### 1.3.1 Determinar a função do circuito

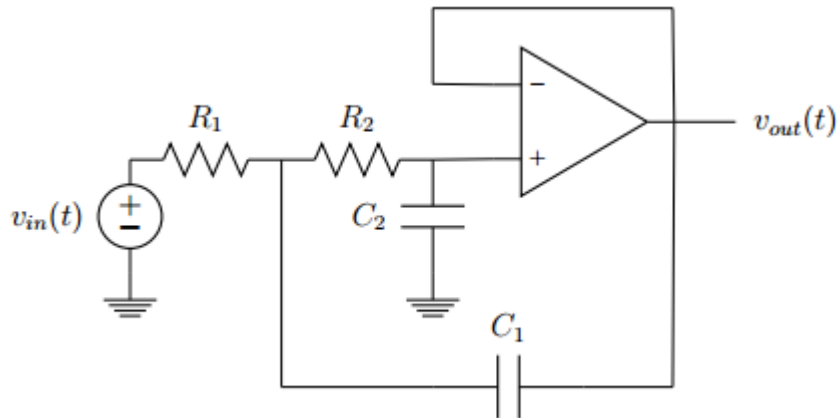


Figura 21: Circuito 3

Este circuito, também conhecido como topologia de Sallen-Key, sabendo que o AmpOp possui impedância infinita em sua entrada, que  $V^- = V^+$ , que  $V^- = V_{out}$  e chamando  $V_a$  da tensão que passa por  $C_1$ , obtemos:

$$V_a = V_{out} + R_2 C_2 \frac{\partial V_{out}}{\partial t}$$

Utilizando a lei dos nós entre  $R_1$  e  $R_2$  e já substituindo  $V_a$  por  $V_{out}$  temos:

$$\frac{V_{in}}{R_1} = R_2 C_1 C_2 \frac{\partial^2 V_{out}}{\partial t^2} + \left( C_2 + \frac{R_2 C_2}{R_1} \right) \frac{\partial V_{out}}{\partial t} + \frac{V_{out}}{R_1}$$

Com esta E.D.O, podemos encontrar a seguinte função de transferência utilizando o mesmo método empregado nos circuitos anteriores, com isso temos:

$$H(S) = \frac{1}{S^2 (R_1 R_2 C_1 C_2) + S (R_1 C_2 + R_2 C_2) + 1}$$

Utilizando os valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 10\Omega$ ;
- $R_2 = 100\Omega$ ;
- $C_1 = 2F$ ;
- $C_2 = 1F$ ;

Encontramos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{1}{2000S^2 + 110S + 1}$$

Que nos gera os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

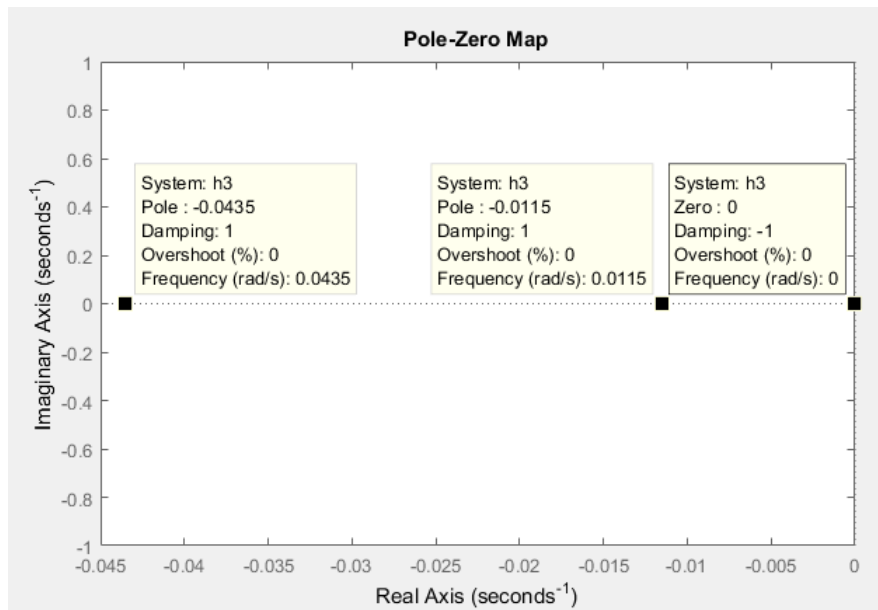


Figura 22: Circuito 3 - Polos e Zeros

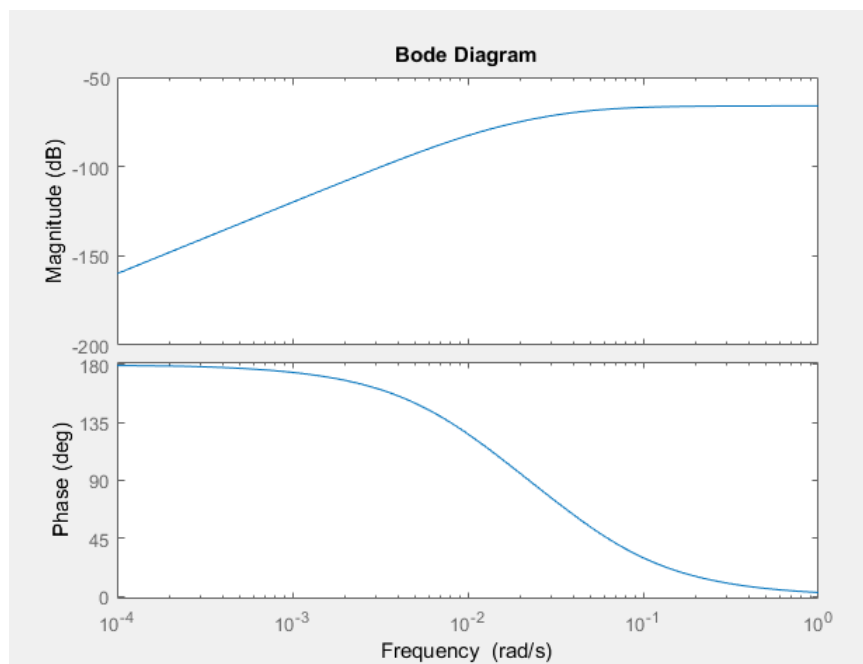


Figura 23: Circuito 3 - Diagrama de Bode

Pela análise do diagrama de Bode, pode-se afirmar que esse circuito é um filtro passa alta com frequência no seu menor polo de 0.01 rad/sec.

### 1.3.2 Resposta ao degrau unitário

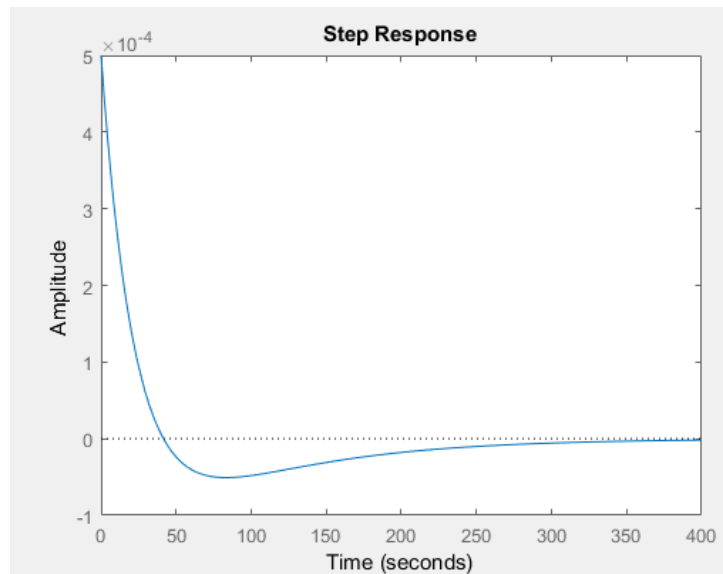


Figura 24: Circuito 3 - Resposta ao degrau unitário

### 1.3.3 Resposta a rampa unitário

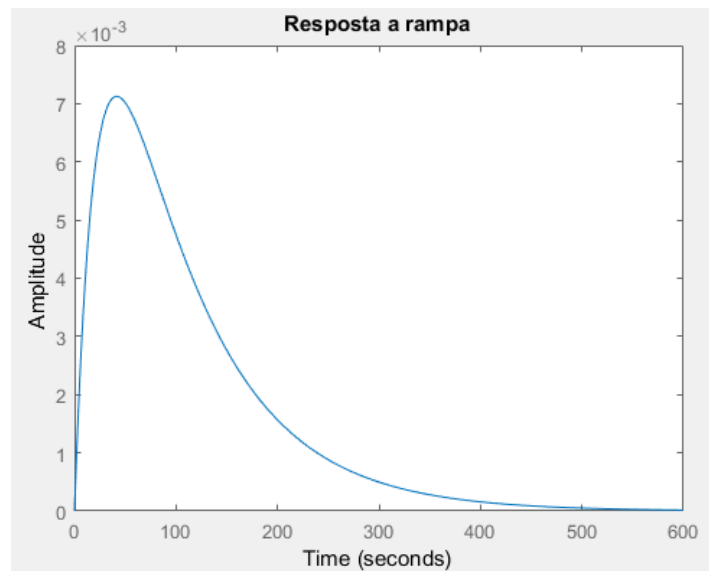


Figura 25: Circuito 3 - Resposta a rampa unitária

### 1.3.4 Resposta a onda quadrada

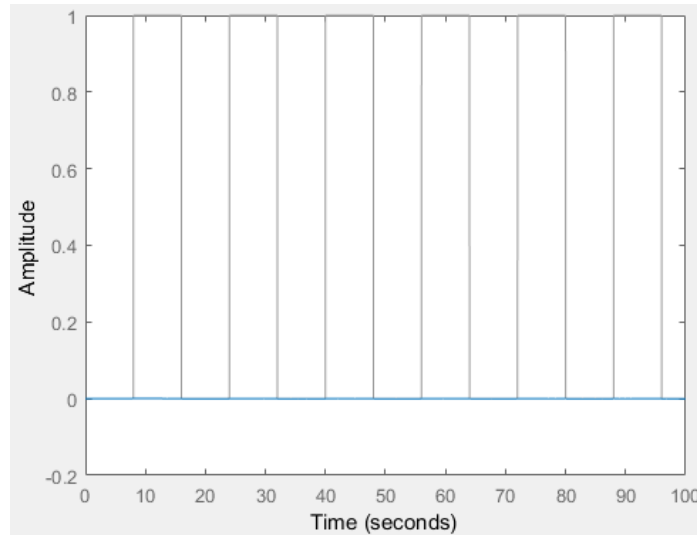


Figura 26: Circuito 3 - Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

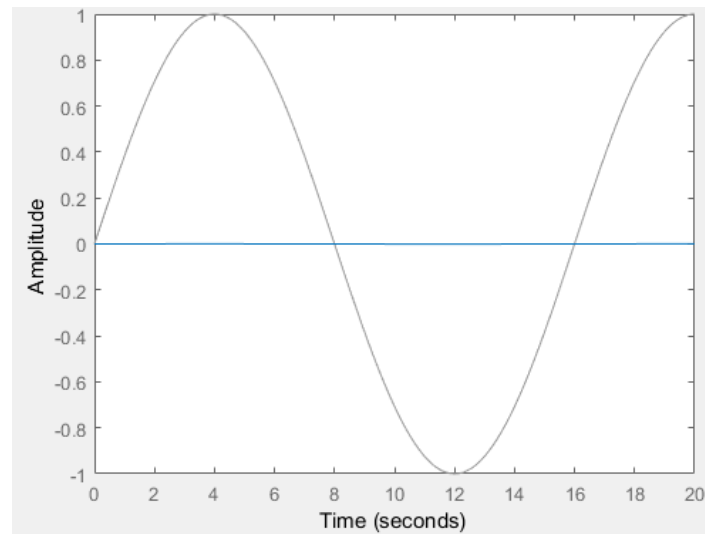


Figura 27: Circuito 3 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

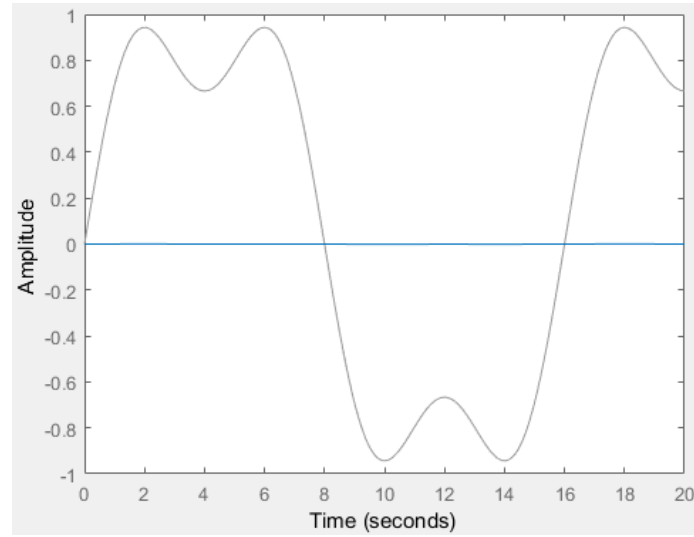


Figura 28: Circuito 3 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

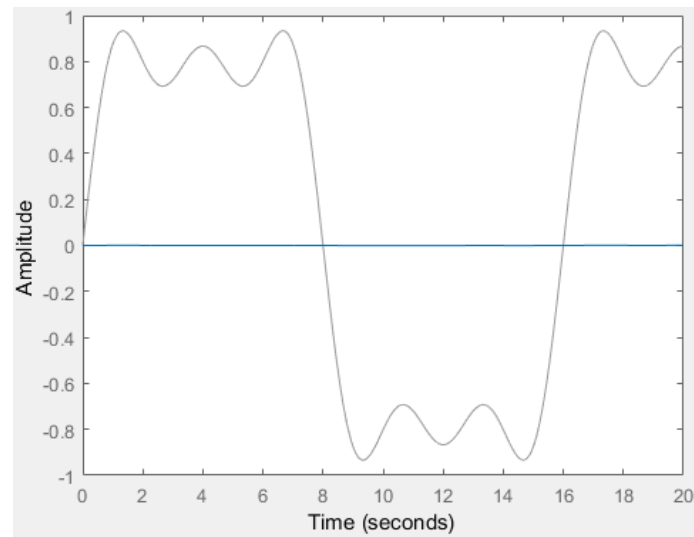


Figura 29: Circuito 3 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$



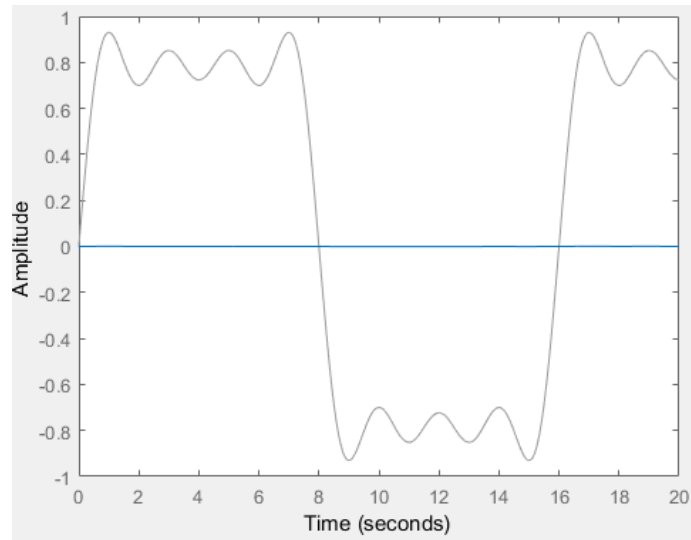


Figura 30: Circuito 3 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

## 1.4 Circuito 4

### 1.4.1 Determinar a função do circuito

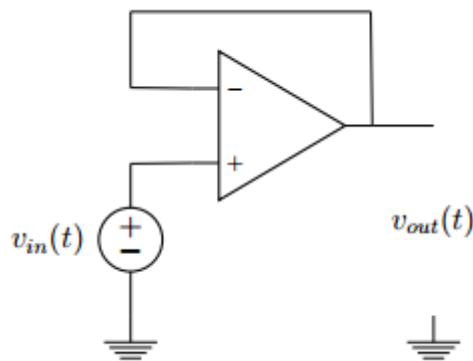


Figura 31: Circuito 4

Esse circuito, conhecido como buffer, é utilizado como um isolador. Como  $V_{in}$  é igual a  $V_{out}$ , sua função de transferência  $H(S) = 1$ . Não existem polos nem zeros para esse circuito e seu diagrama de Bode permanece em 0.

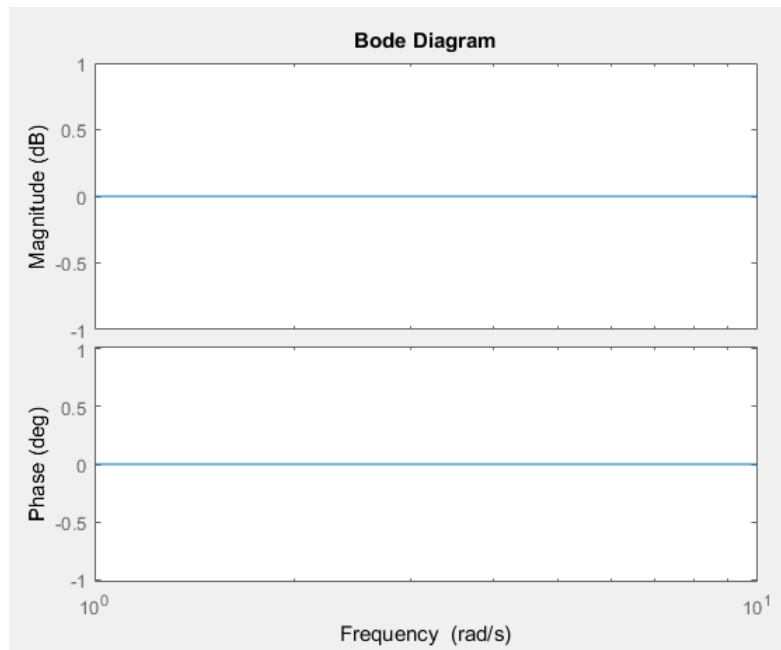


Figura 32: Circuito 4 - Diagrama de Bode

#### 1.4.2 Resposta ao degrau unitário

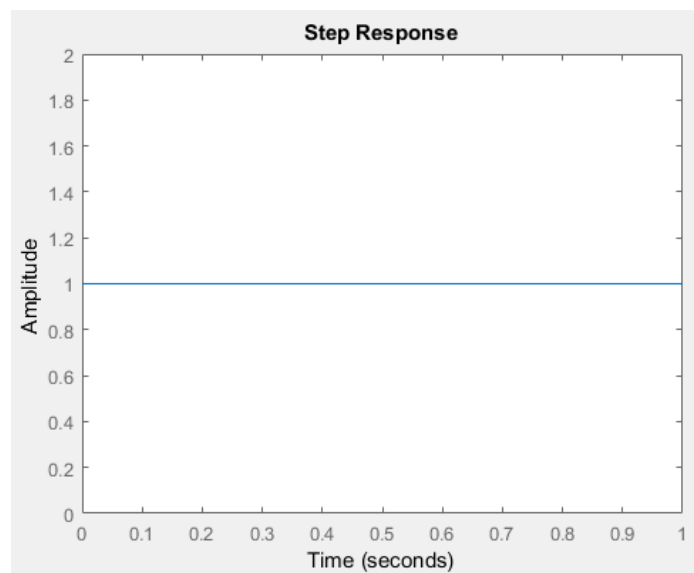


Figura 33: Circuito 4 - Resposta ao degrau unitário

### 1.4.3 Resposta a rampa unitário

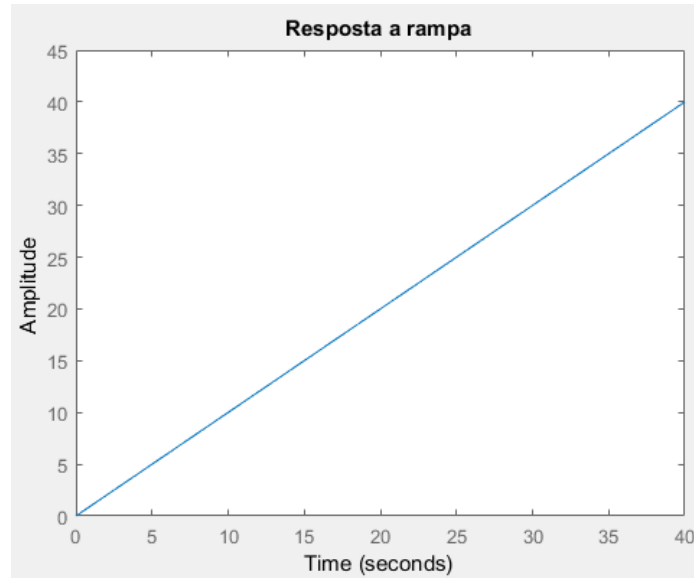


Figura 34: Circuito 4 - Resposta a rampa unitária

### 1.4.4 Resposta a onda quadrada

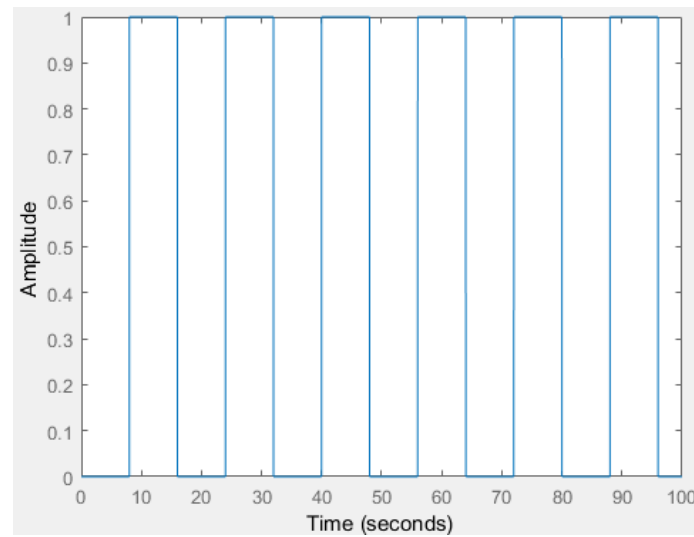


Figura 35: Circuito 4 - Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

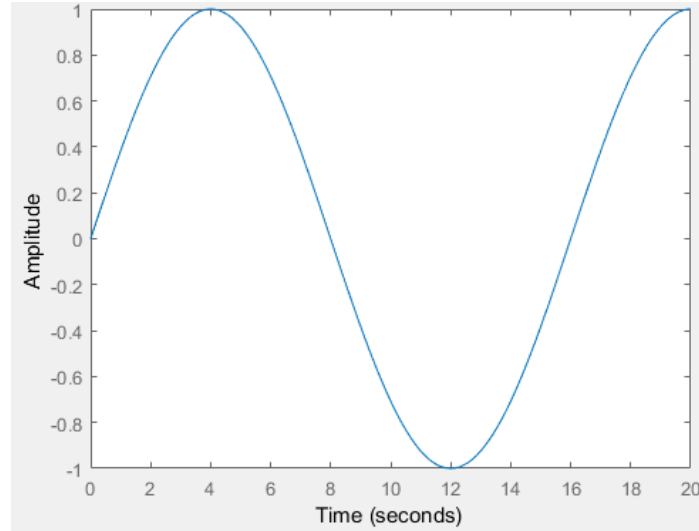


Figura 36: Circuito 4 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

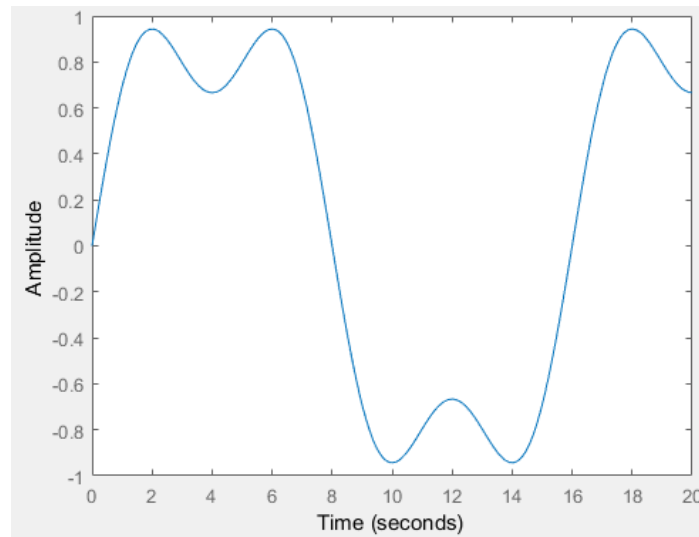


Figura 37: Circuito 4 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

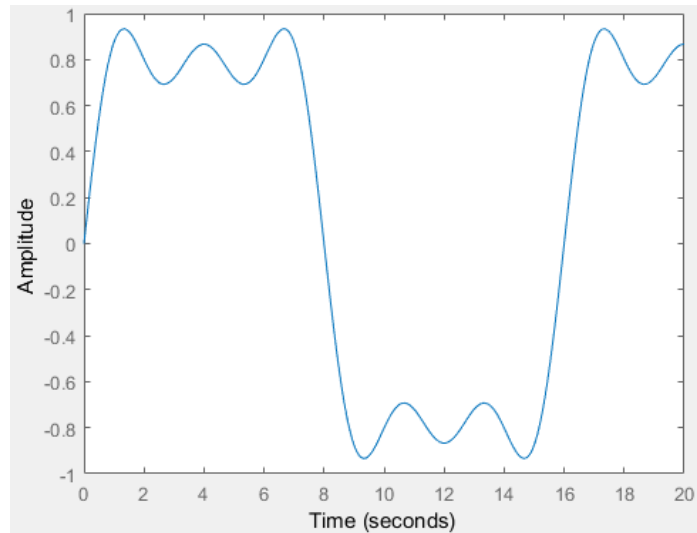


Figura 38: Circuito 4 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

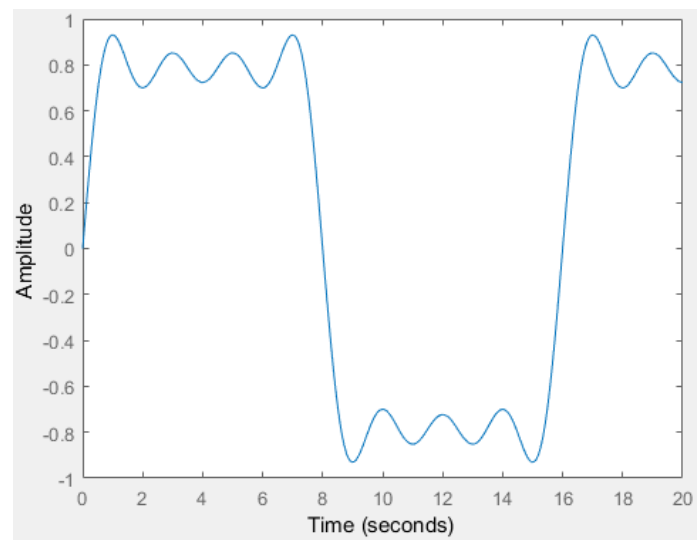


Figura 39: Circuito 4 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

## 1.5 Circuito 5

### 1.5.1 Determinar a função do circuito

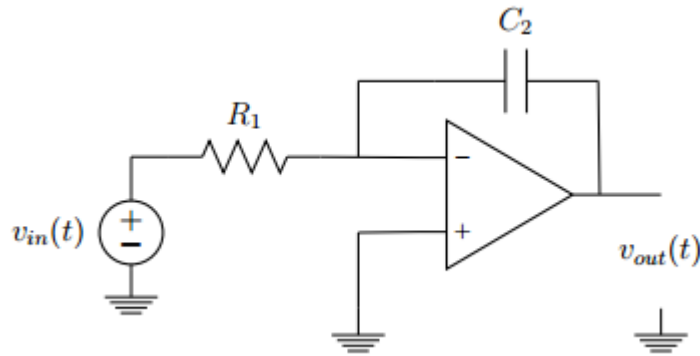


Figura 40: Circuito 5

Esse circuito pode ser escrito como:

$$\frac{V_{in}}{R} + C \frac{\partial V_{out}}{\partial t} = 0$$

Transformando esta E.D.O com Laplace utilizando o mesmo método dos circuitos passados, obtemos:

$$H(S) = \frac{-1}{RCS}$$

Tomando os seguintes valores para os elementos do circuito:

- $R = 10\Omega$ ;
- $C = 1F$ ;

Temos a seguinte equação de transferência:

$$H(S) = \frac{-1}{10S}$$

A partir dessa equação, obtemos os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

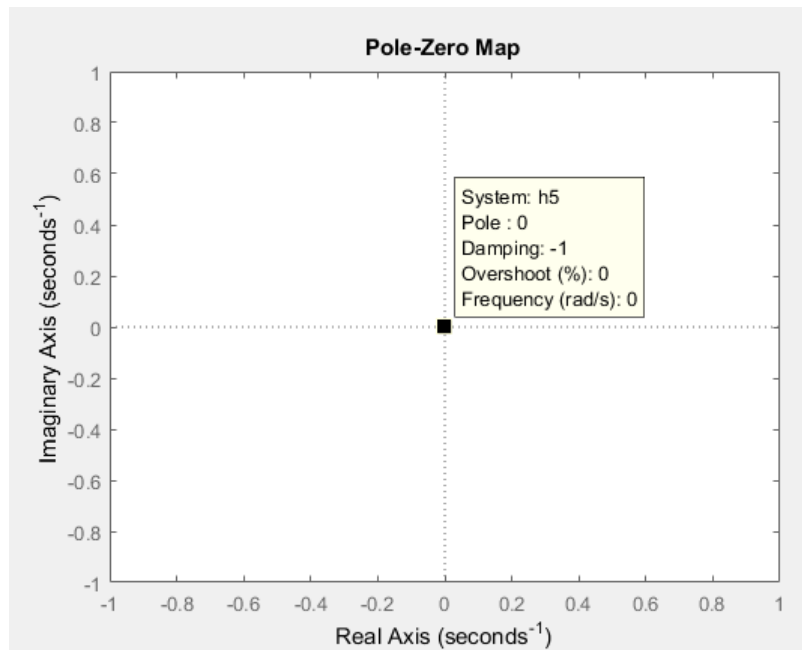


Figura 41: Circuito 5 - Polos e Zeros

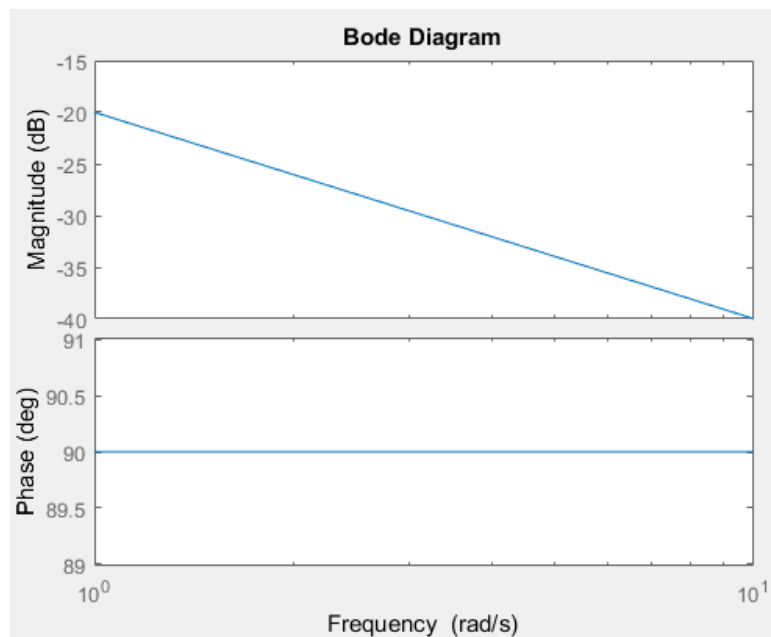


Figura 42: Circuito 5 - Diagrama de Bode

Este circuito corresponde a um filtro passa baixa integrador de apenas um polo.

### 1.5.2 Resposta ao degrau unitário

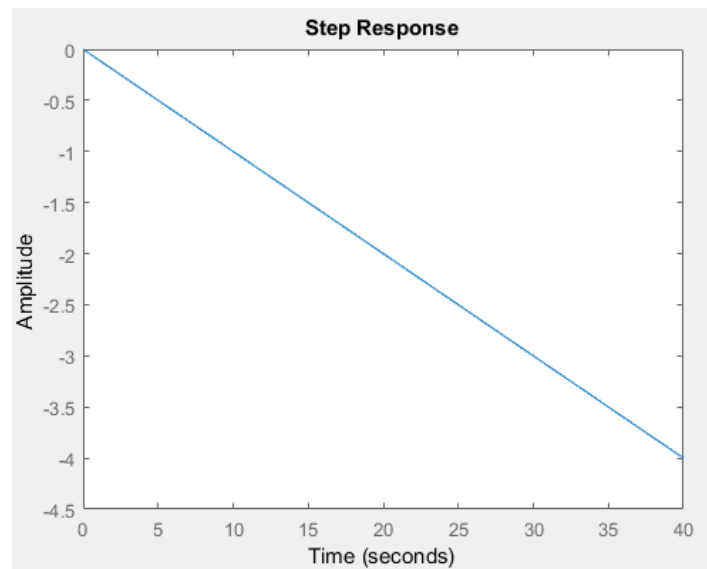


Figura 43: Circuito 5 - Resposta ao degrau unitário

### 1.5.3 Resposta a rampa unitária

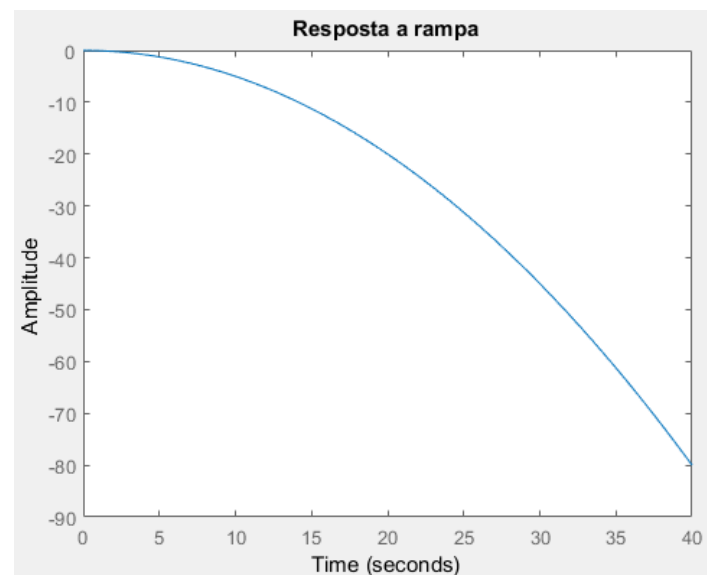


Figura 44: Circuito 5 - Resposta a rampa unitária



#### 1.5.4 Resposta a onda quadrada

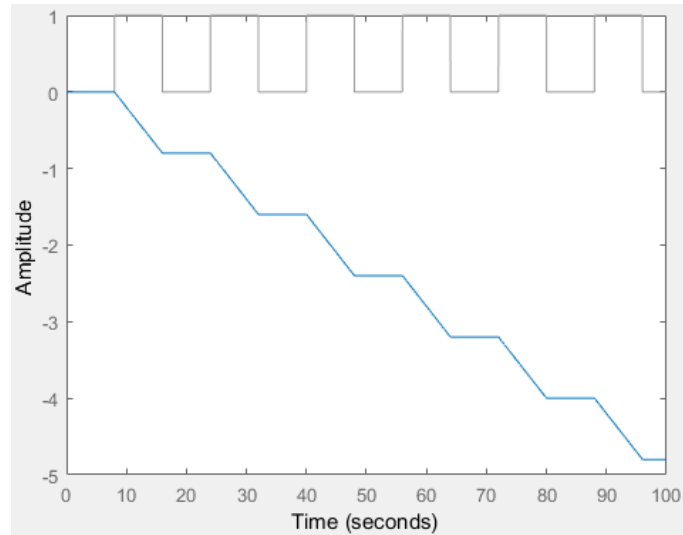


Figura 45: Circuito 5 - Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

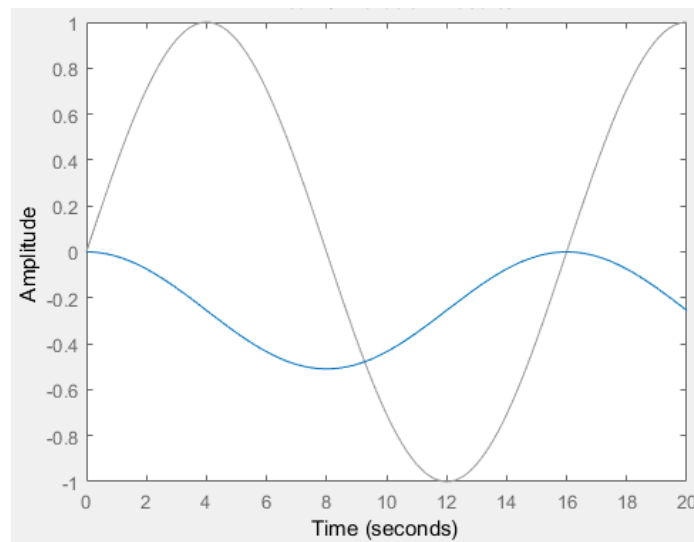


Figura 46: Circuito 5 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

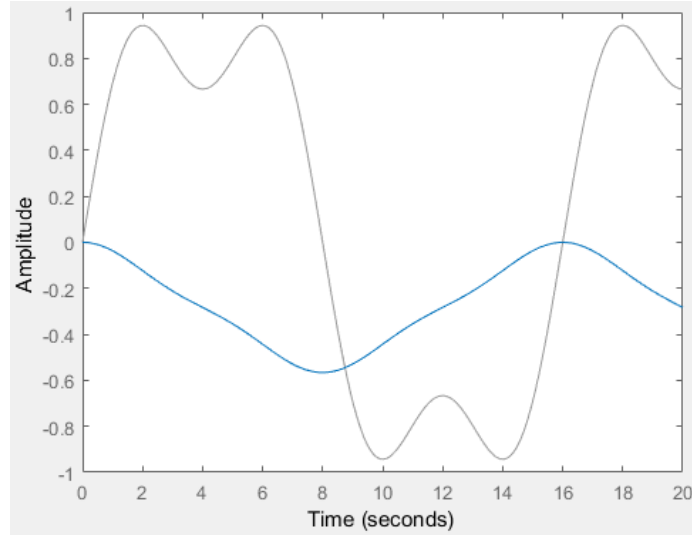


Figura 47: Circuito 5 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

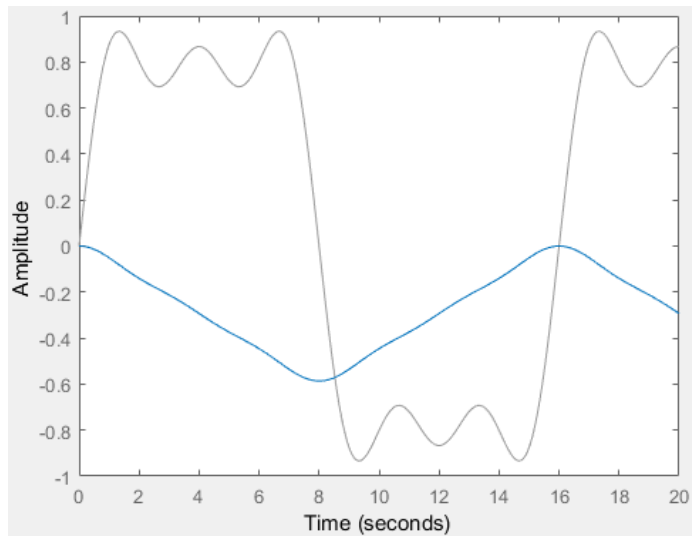


Figura 48: Circuito 5 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

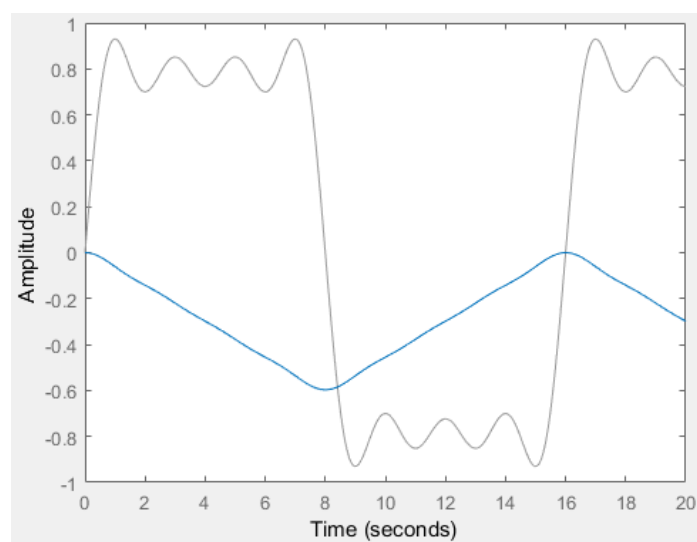


Figura 49: Circuito 5 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

## 2 Questão 2

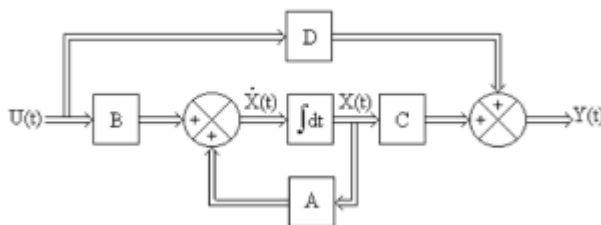


Figura 50: Diagrama de Blocos

### 2.1 Equações do diagrama

Seguindo as regras definidas no trabalho em relação aos valores de A, B, C e D para o diagrama de blocos, temos:

- $a = -22$ ;
- $b = 7$ ;
- $c = 3$ ;
- $d = 4$ ;

Pare que o circuito possua estabilidade BIBO, precisamos que o valor de A seja negativo, caso contrario, o circuito é instável.

Com esses valores obtemos as seguintes equações para o diagrama de blocos abaixo:

- $y(t) = 4u(t) + 3x(t)$  (Item (e) da questão 2);
- $B = 7u(t)$ ;
- $C = 3x(t)$ ;
- $D = 4u(t)$ ;
- $x'(t) = 7u(t) - 22x(t)$  (Item (d) da questão 2);

Sabendo que  $x(t) = \frac{y(t)-4u(t)}{3}$  e  $x' = \frac{y'(t)-4u'(t)}{3}$ , obtemos a seguinte E.D.O:

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 22y(t) = 4\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 109u(t)$$

Aplicando Laplace, obtemos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{4S + 109}{S + 22}$$

De posse da função de transferência, podemos encontrar os seguintes polos e zeros e o diagrama de Bode:

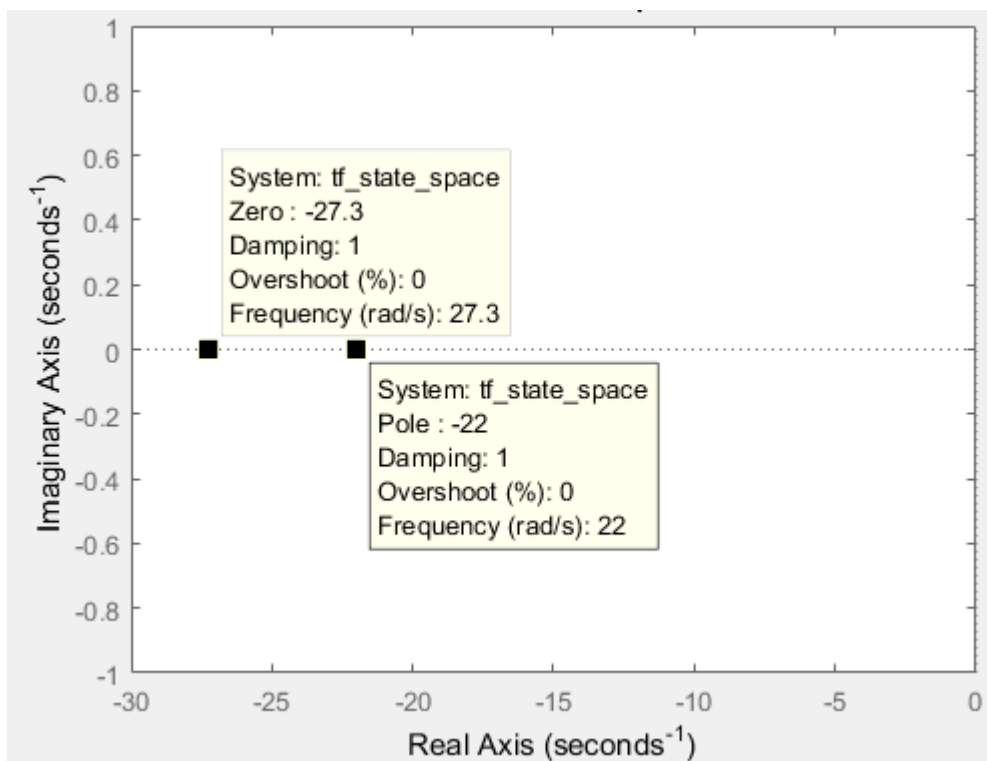


Figura 51: Polos e Zeros

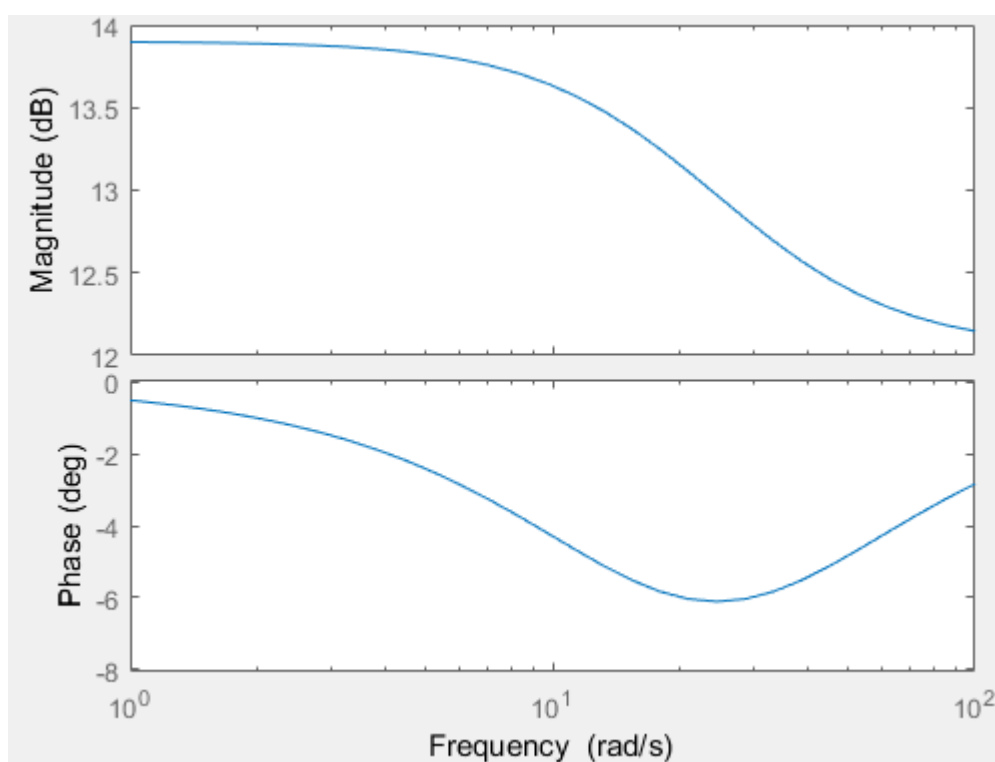


Figura 52: Diagrama de Bode

## 2.2 Resposta ao degrau unitário

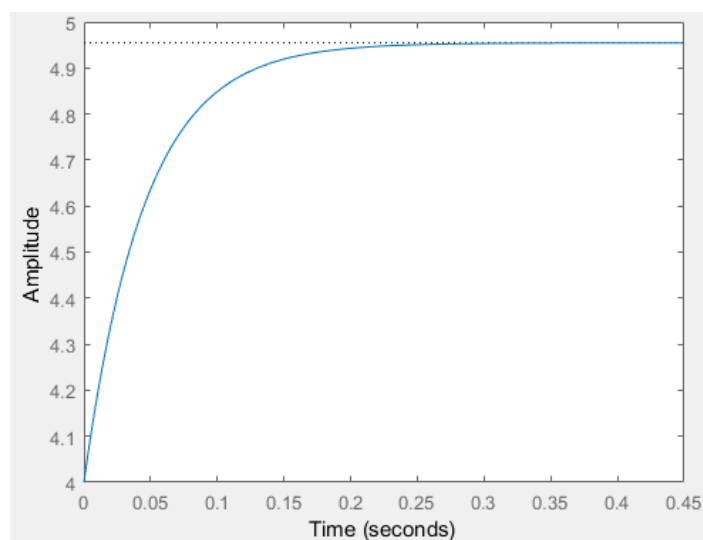


Figura 53: Resposta ao degrau unitário

## 2.3 Resposta a rampa unitária

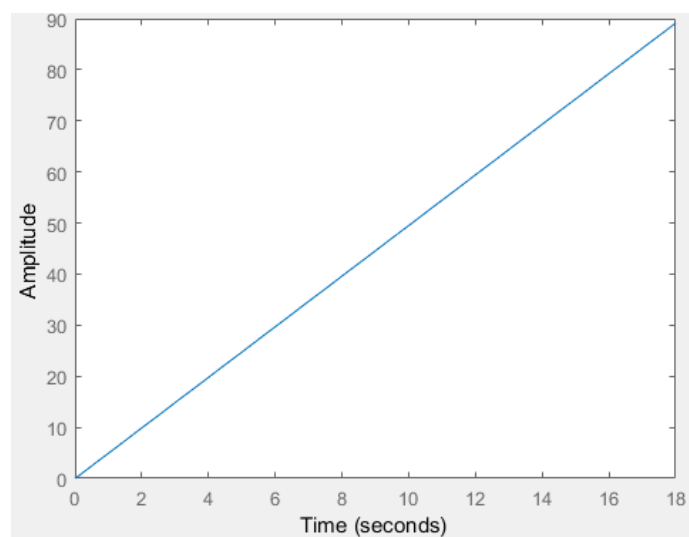


Figura 54: Resposta a rampa unitária

## 2.4 Resposta a onda quadrada

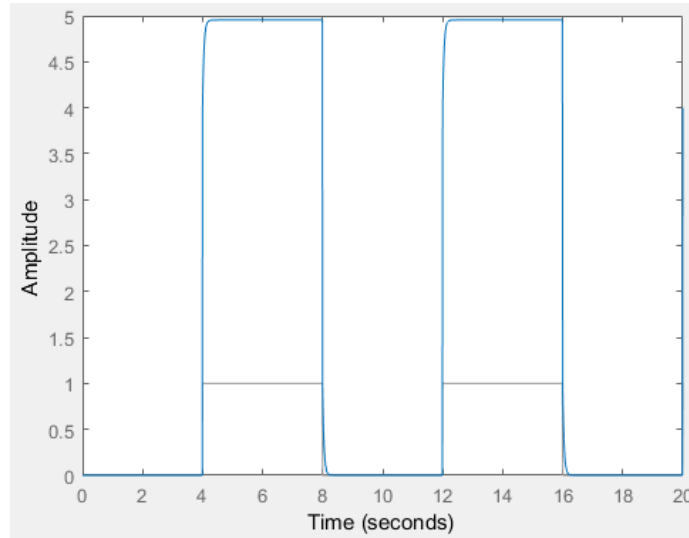


Figura 55: Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

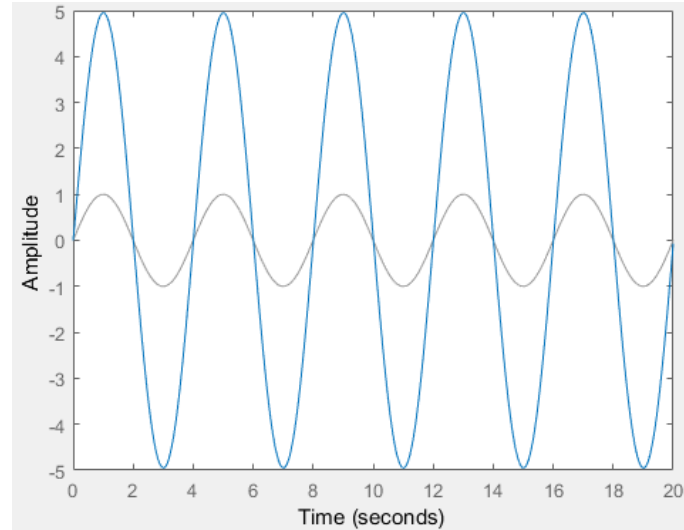


Figura 56: Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{2}\pi$



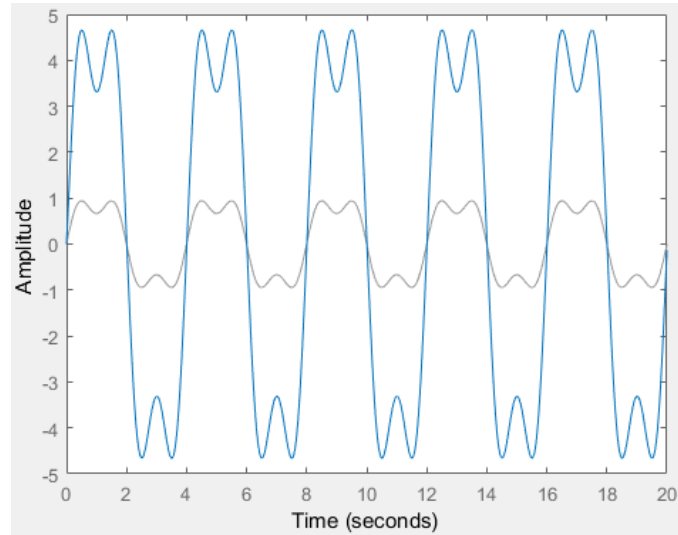


Figura 57: Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{2}\pi$

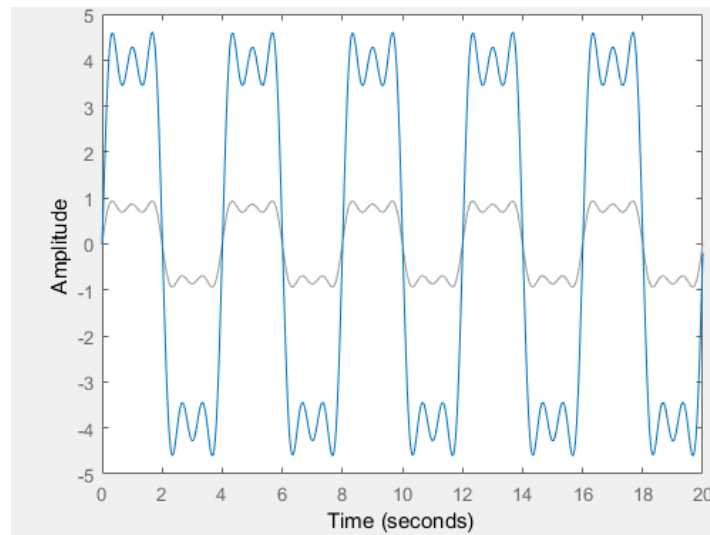


Figura 58: Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{2}\pi$

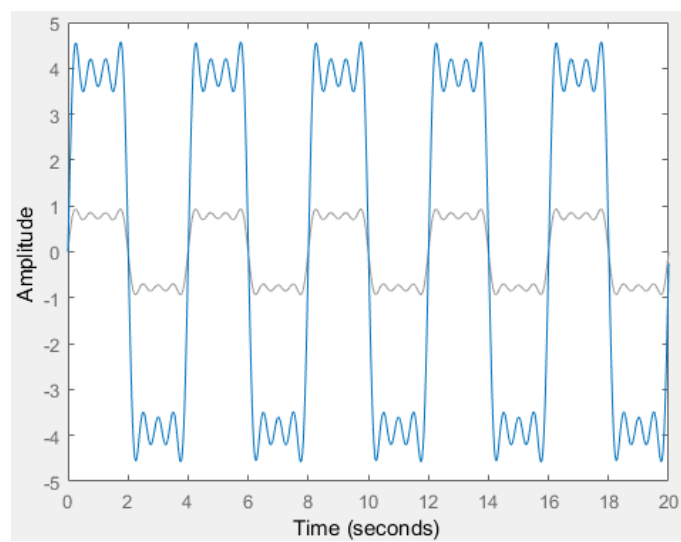


Figura 59: Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{2}\pi$

### 3 Questão 3

Resolva as questões para os sistemas descritos pelas seguintes funções de transferência:

$$H(S) = \frac{1 + \alpha S}{S^2 + 2S + 2}$$

$$H(S) = \frac{S + 10^4}{S^2 + 2\beta S + 100}$$

#### 3.1 E.D.O dos sistemas

##### 3.1.1 Sistema 1

$$X(S)[1 + \alpha S] = Y(S)[S^2 + 2S + 2] \Rightarrow$$

$$\alpha \frac{\partial x(t)}{\partial t} + x(t) = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial^2 t} + 2 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 2y(t)$$

##### 3.1.2 Sistema 2

$$X(S)[S + 10^4] = Y(S)[S^2 + 2\beta S + 100] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} + 10^4 x(t) = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial^2 t} + 2\beta \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 100y(t)$$

## 3.2 Polos e zeros

### 3.2.1 Variando em $\alpha$

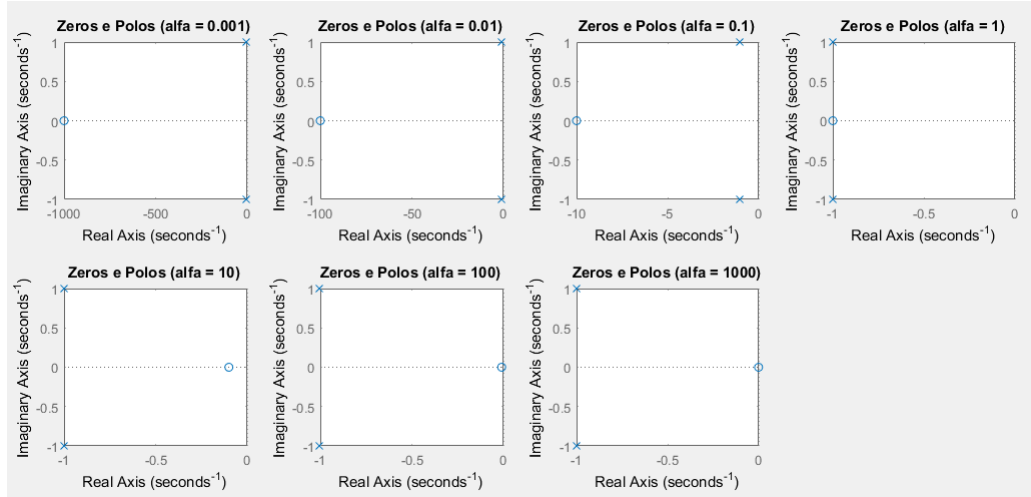


Figura 60: Polos e Zeros variando em  $\alpha$

### 3.2.2 Variando em $\beta$

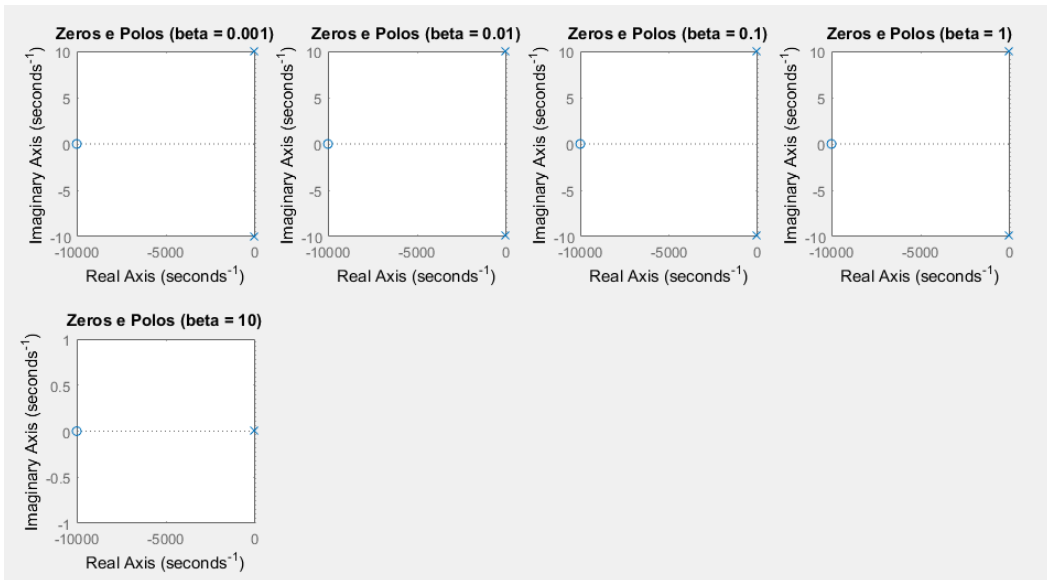


Figura 61: Polos e Zeros variando em  $\beta$

### 3.3 Diagrama de Bode

#### 3.3.1 Variando em $\alpha$

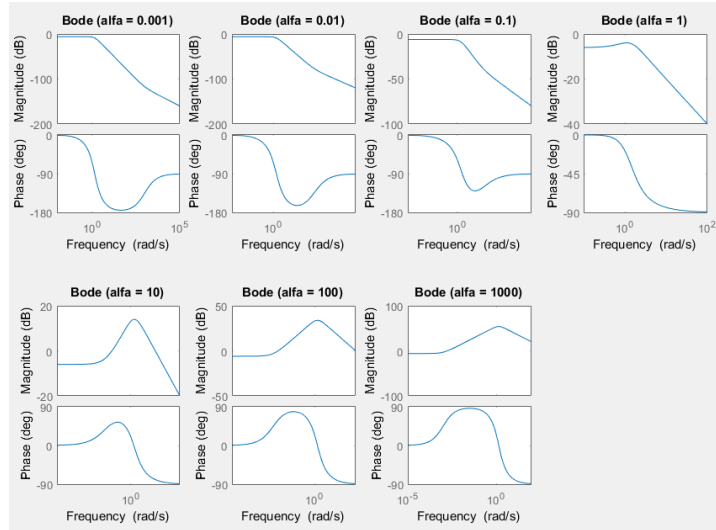


Figura 62: Diagrama de Bode variando em  $\alpha$

#### 3.3.2 Variando em $\beta$

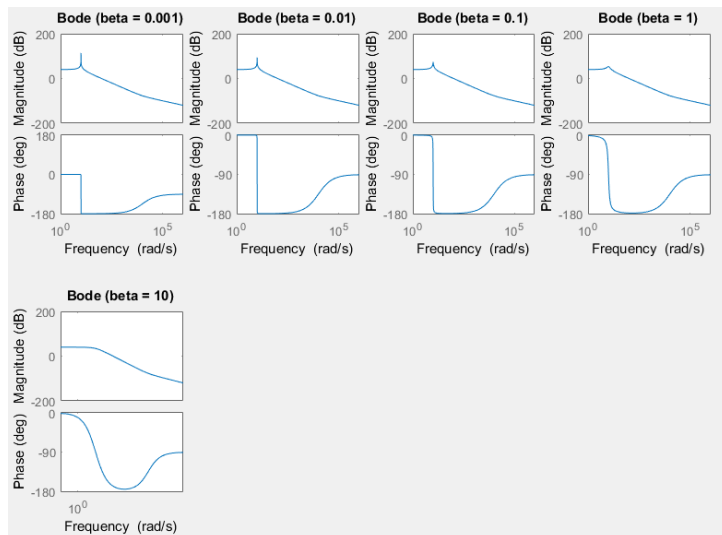


Figura 63: Diagrama de Bode variando em  $\beta$

## 3.4 Resposta ao Degrau Unitário

### 3.4.1 Variando em $\alpha$

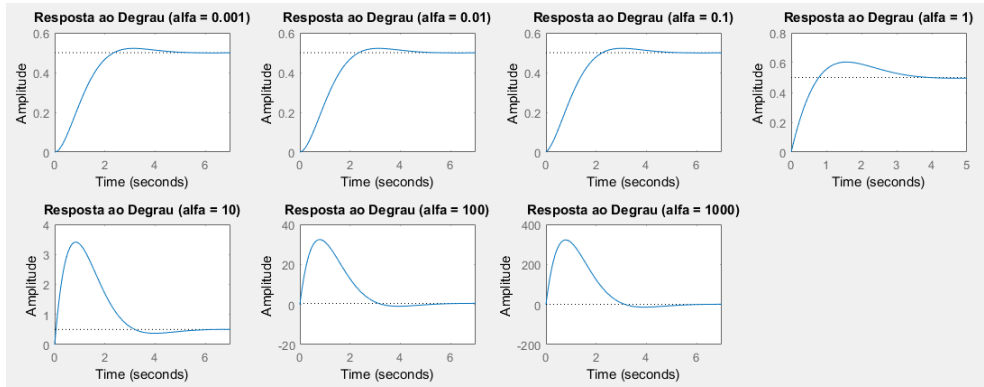


Figura 64: Resposta ao Degrau Unitário variando em  $\alpha$

### 3.4.2 Variando em $\beta$

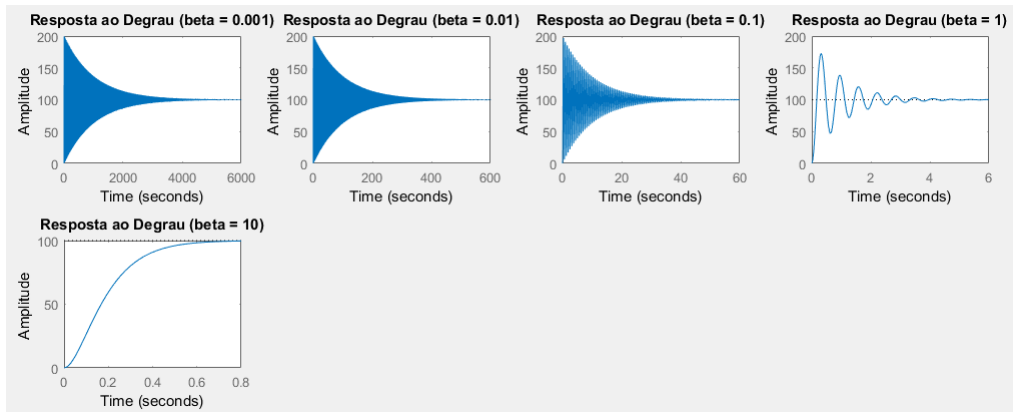


Figura 65: Resposta ao Degrau Unitário variando em  $\beta$

## 3.5 Resposta a Rampa Unitária

### 3.5.1 Variando em $\alpha$

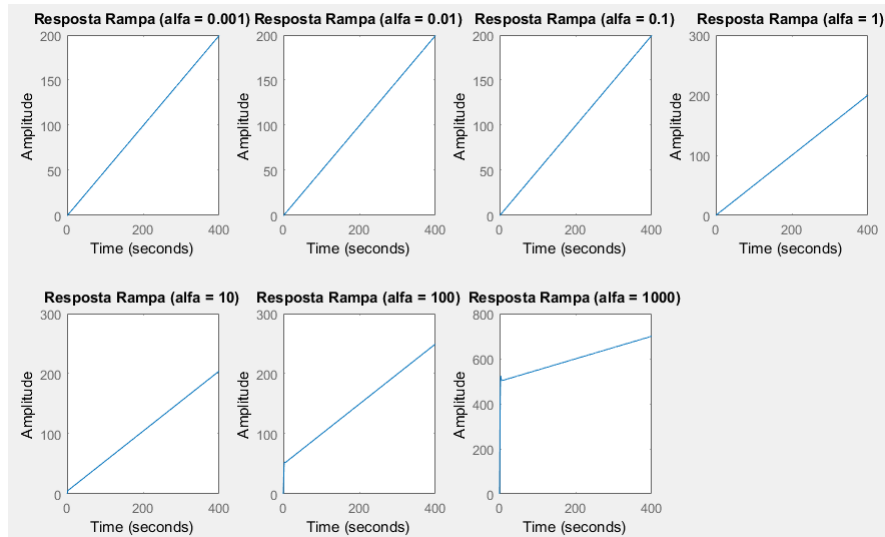


Figura 66: Resposta a rampa Unitária variando em  $\alpha$

### 3.5.2 Variando em $\beta$

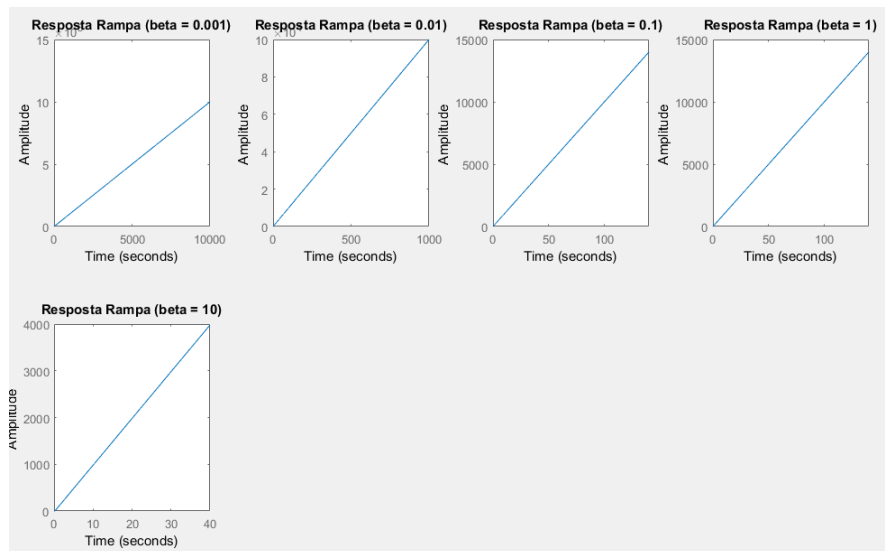


Figura 67: Resposta a rampa Unitária variando em  $\beta$

## 3.6 Resposta a onda quadrada

### 3.6.1 Variando em $\alpha$

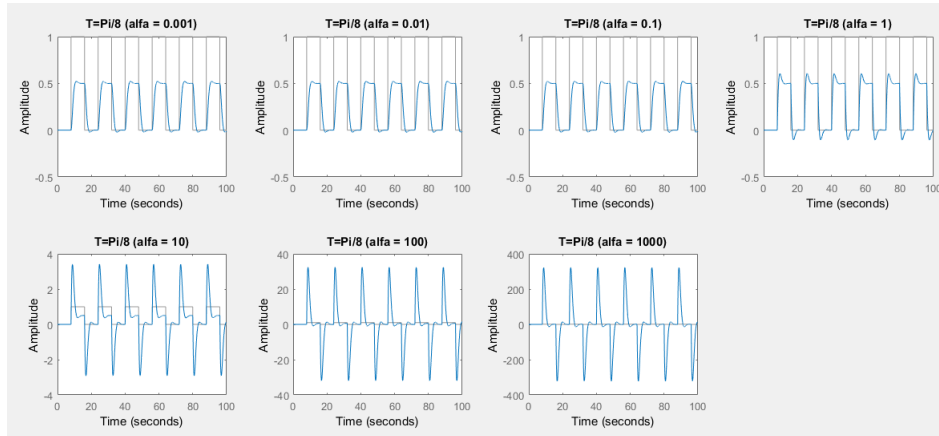


Figura 68: Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

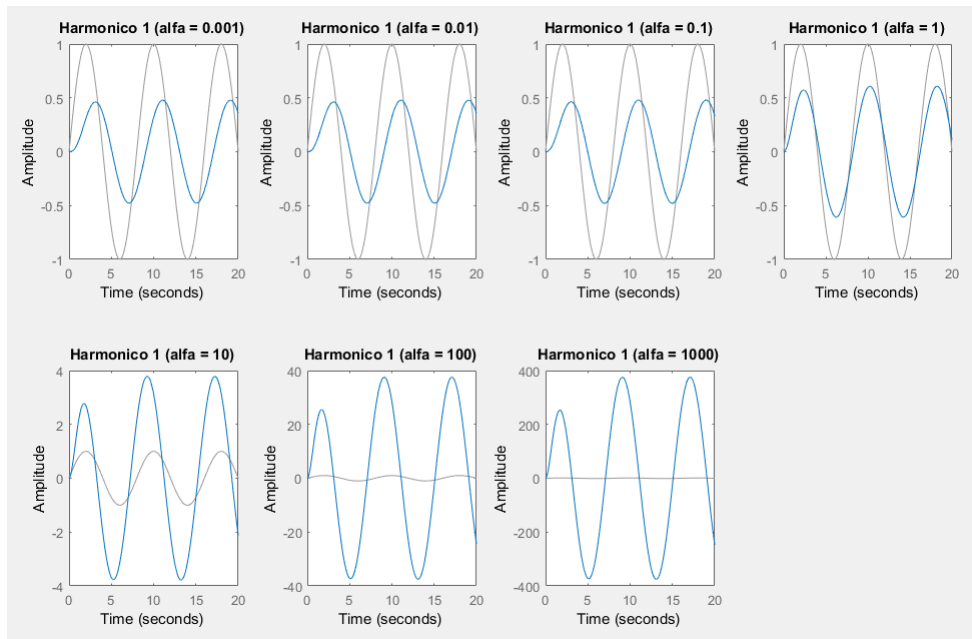


Figura 69: Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$



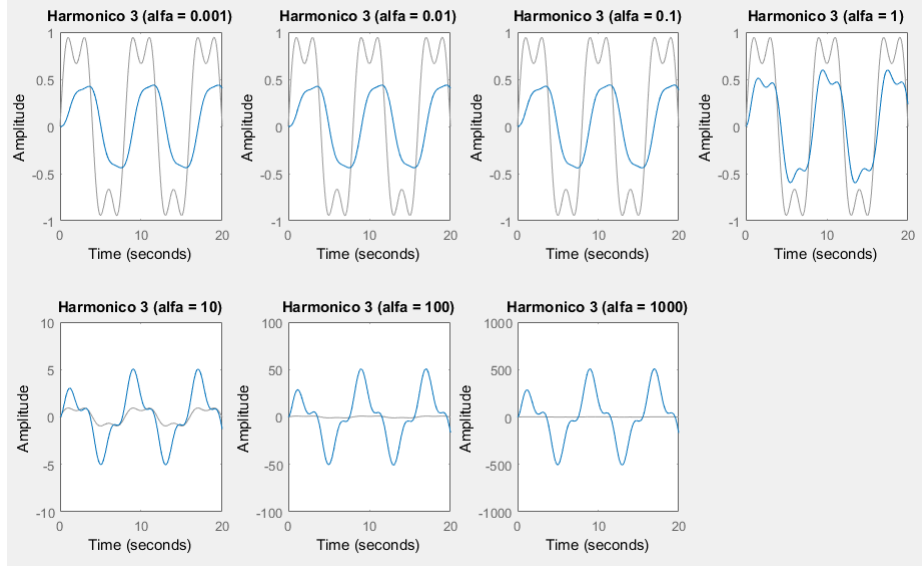


Figura 70: Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

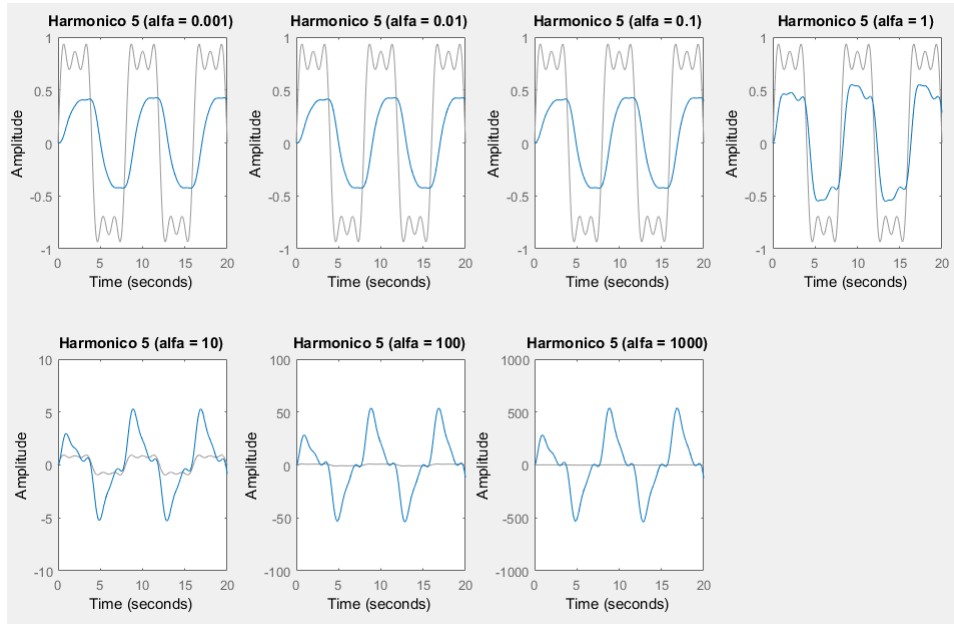


Figura 71: Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

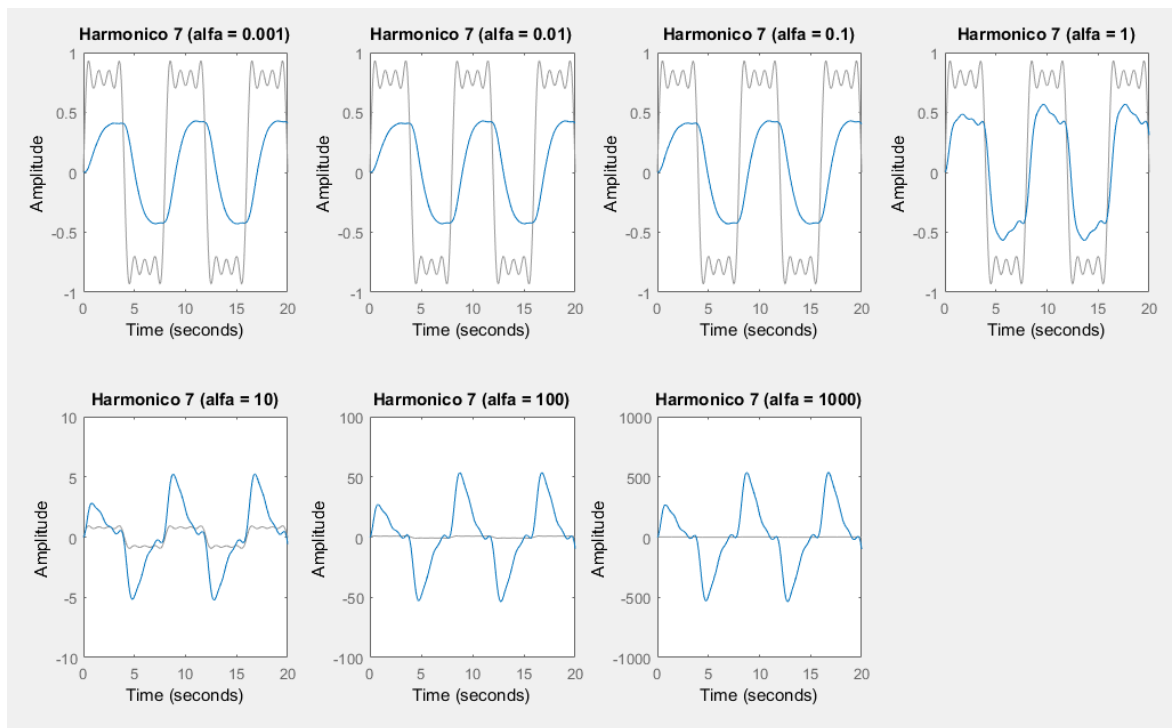


Figura 72: Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

### 3.6.2 Variando em $\beta$

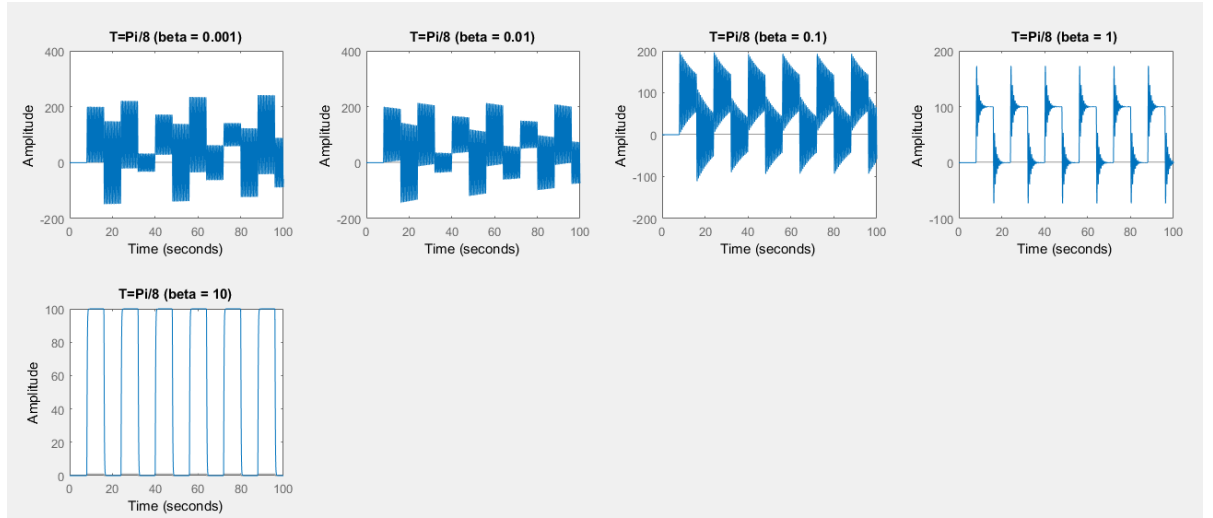


Figura 73: Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

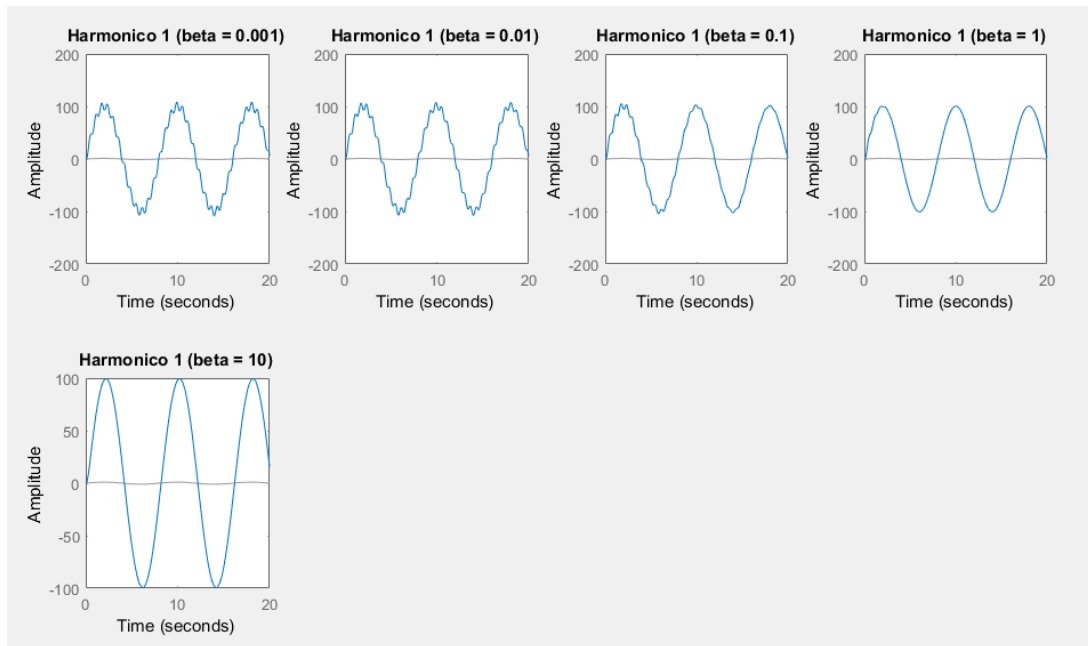


Figura 74: Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

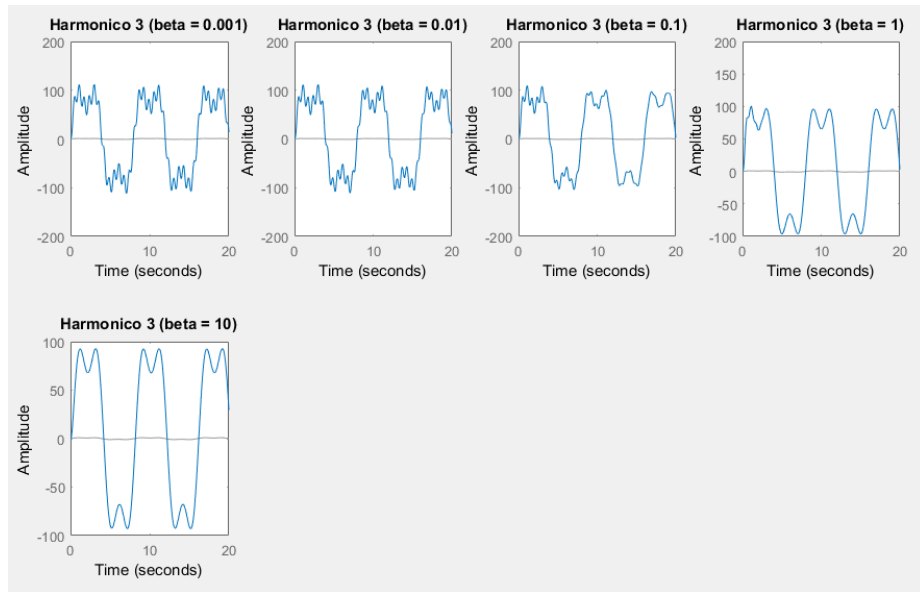


Figura 75: Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

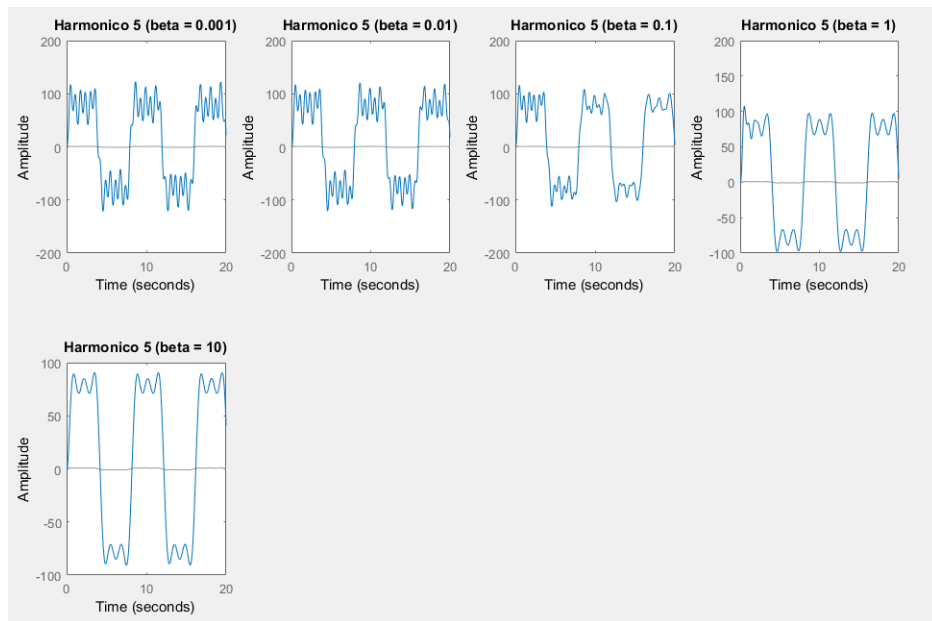


Figura 76: Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

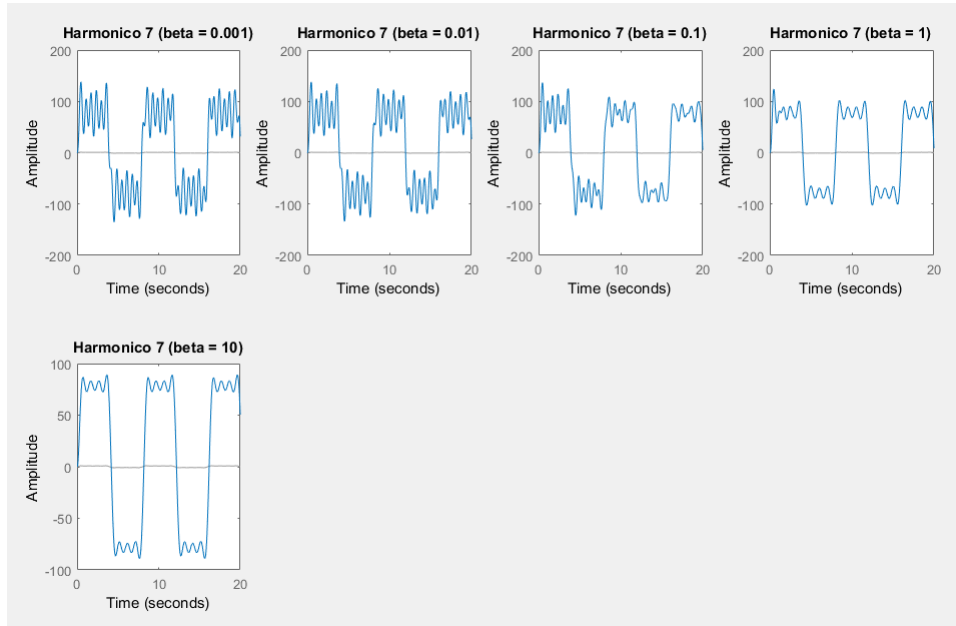


Figura 77: Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

### 3.7 Resposta a cossenoides

#### 3.7.1 Variando frequências nos valores de $\alpha$

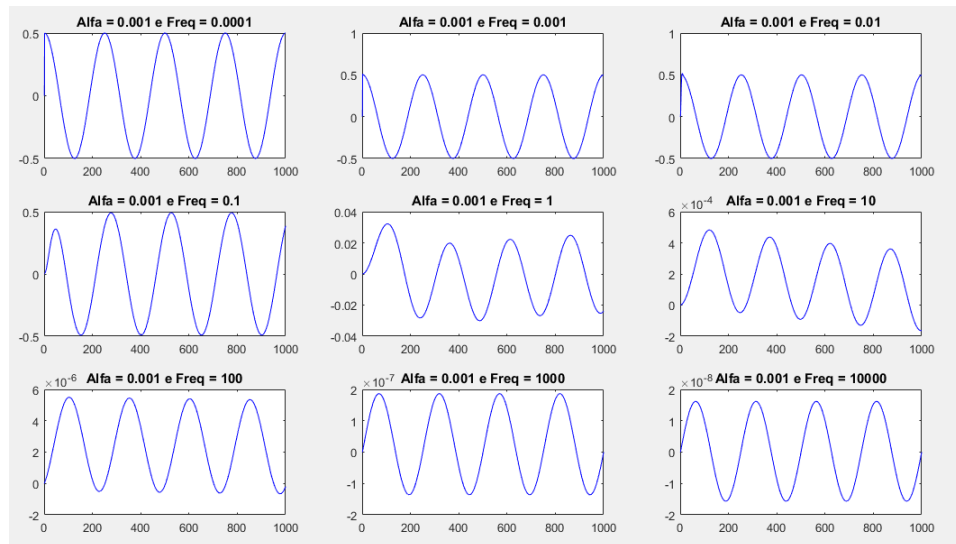


Figura 78: Resposta para  $\alpha = 0.001$  em frequências variantes

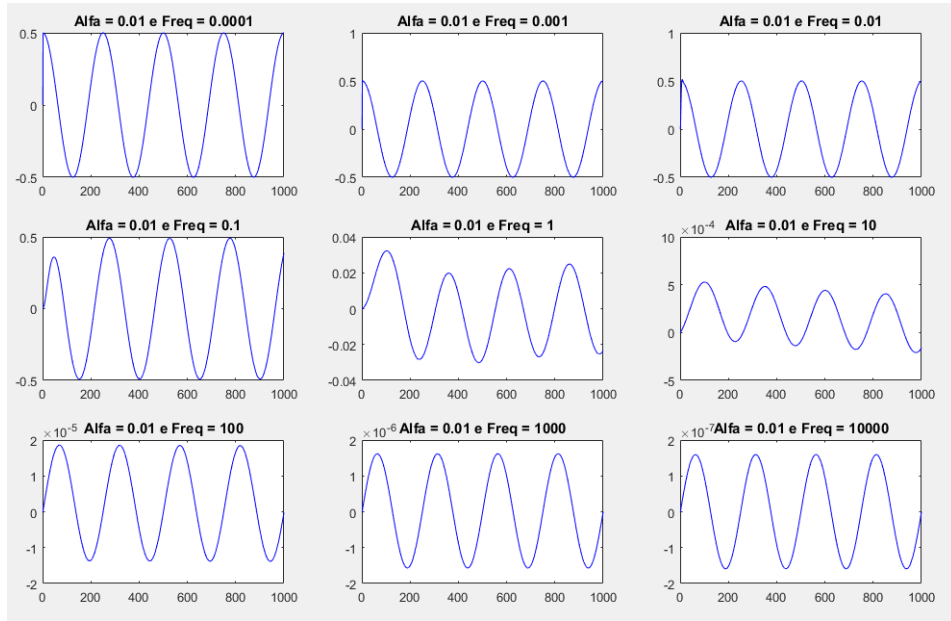


Figura 79: Resposta para  $\alpha = 0.01$  em frequências variantes

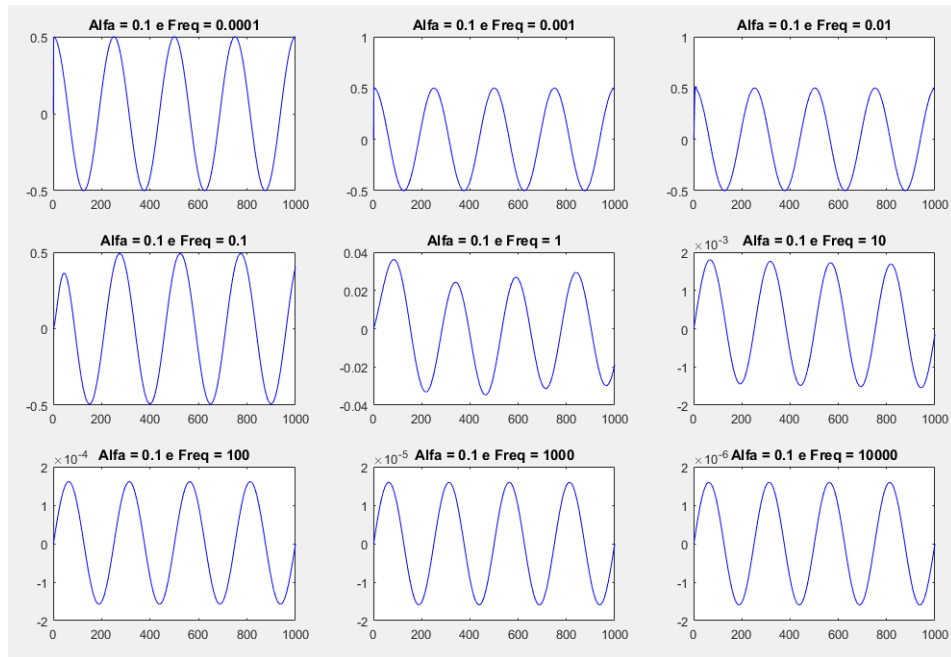


Figura 80: Resposta para  $\alpha = 0.1$  em frequências variantes

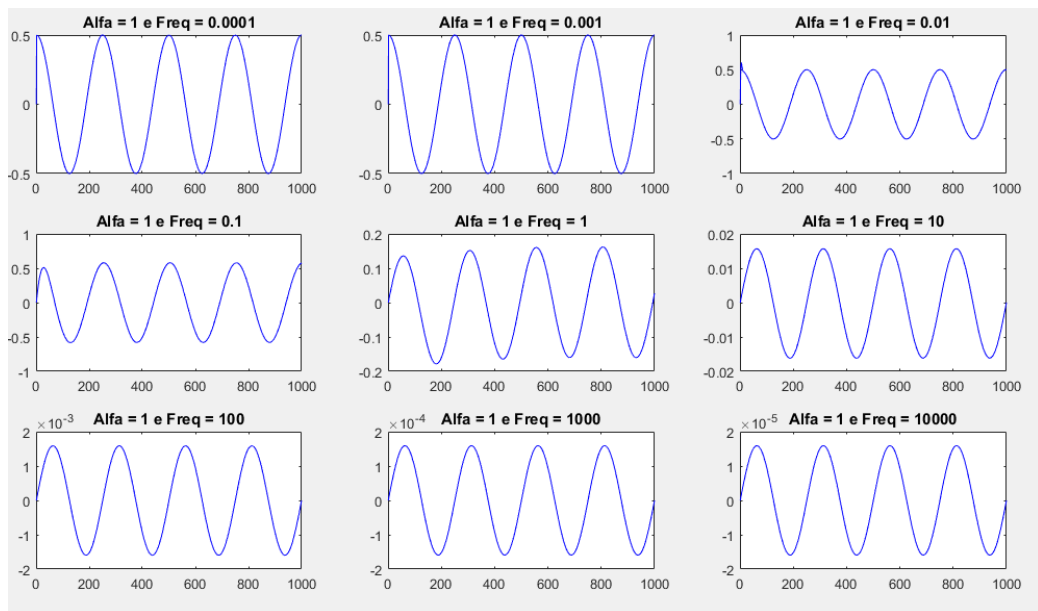


Figura 81: Resposta para  $\alpha = 1$  em frequências variantes

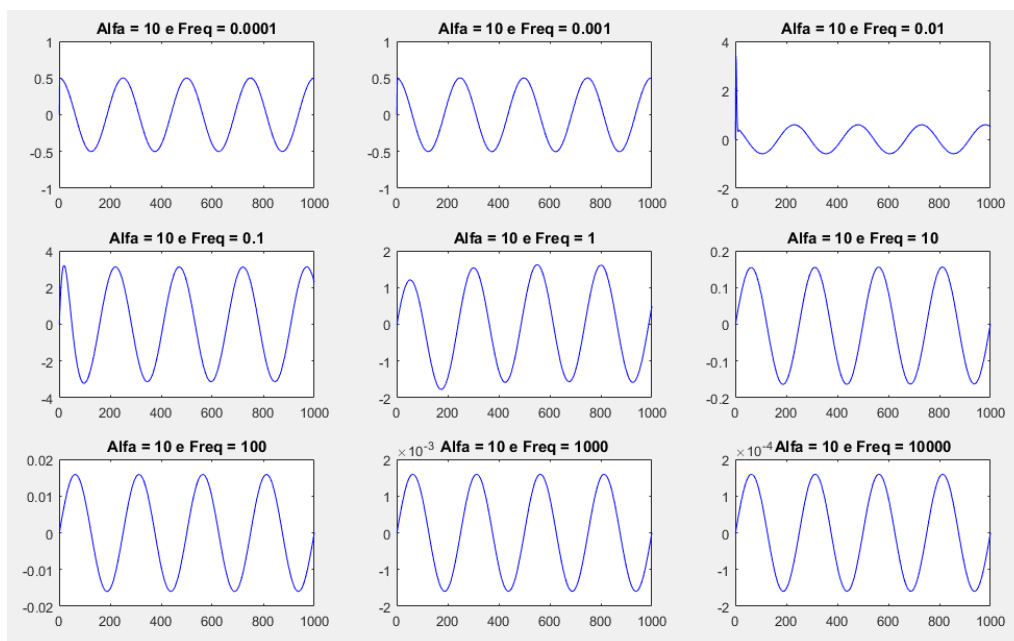


Figura 82: Resposta para  $\alpha = 10$  em frequências variantes

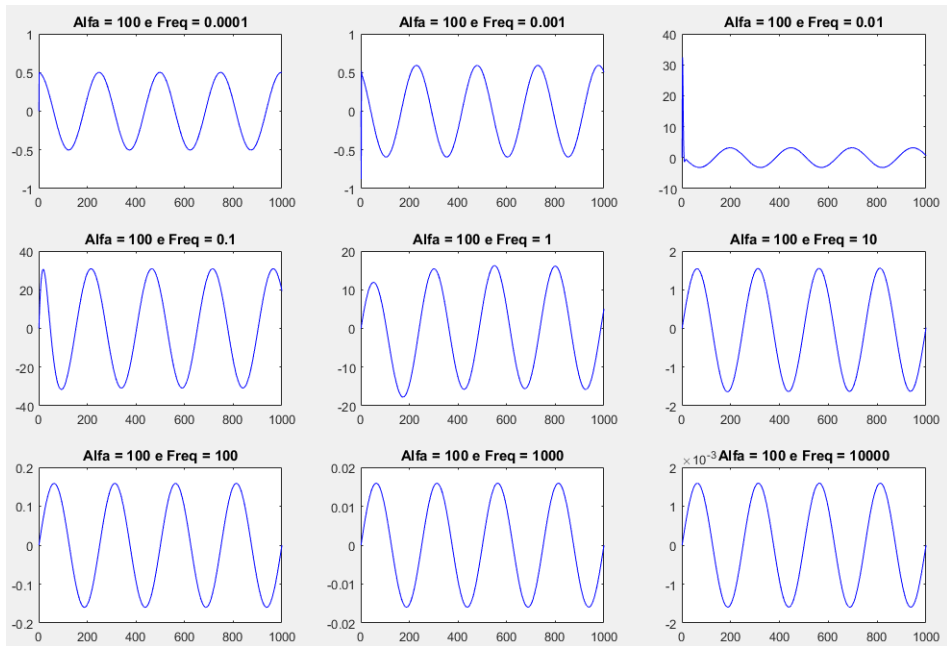


Figura 83: Resposta para  $\alpha = 100$  em frequências variantes

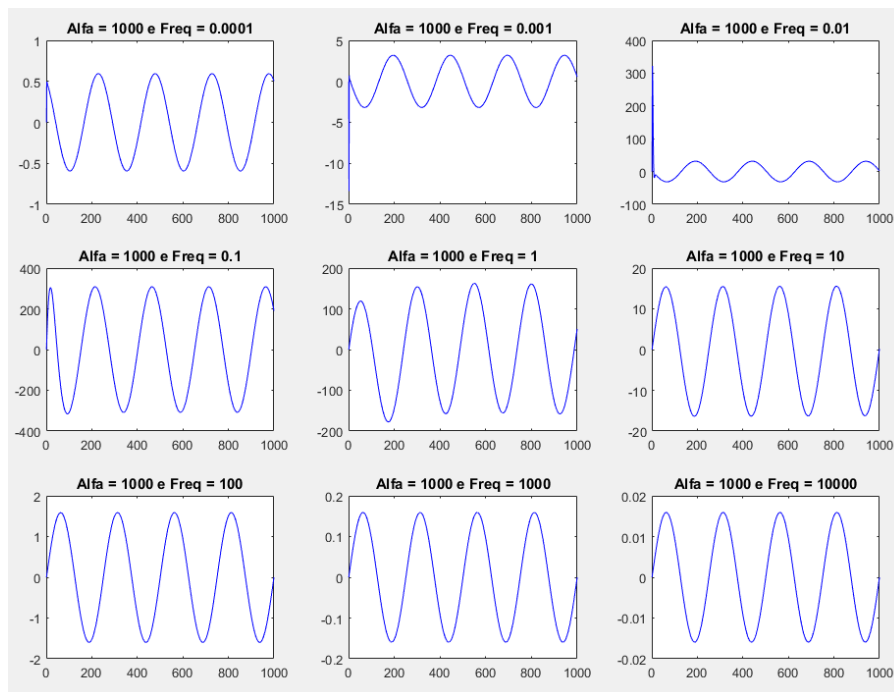


Figura 84: Resposta para  $\alpha = 1000$  em frequências variantes



### 3.7.2 Variando frequências nos valores de $\beta$

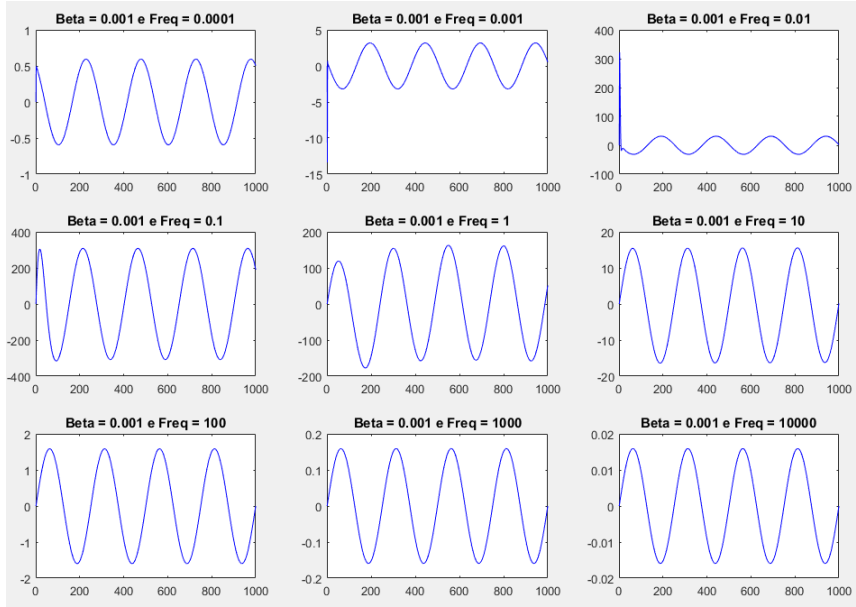


Figura 85: Resposta para  $\beta = 0.001$  em frequências variantes

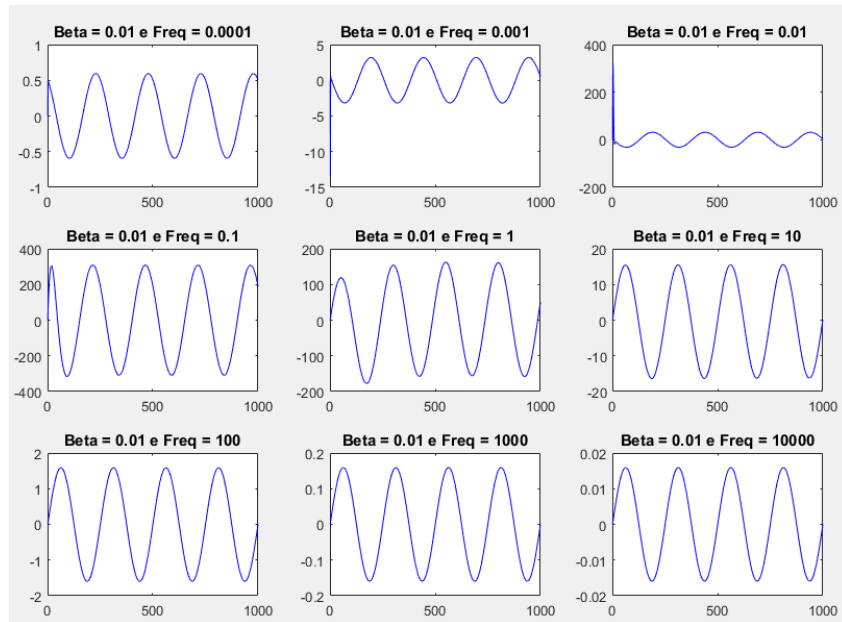


Figura 86: Resposta para  $\beta = 0.01$  em frequências variantes

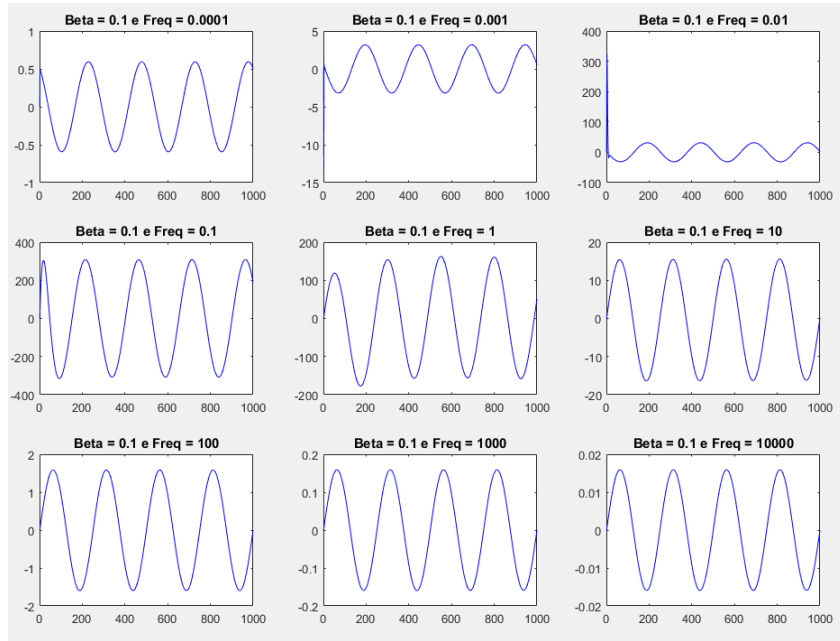


Figura 87: Resposta para  $\beta = 0.1$  em frequências variantes

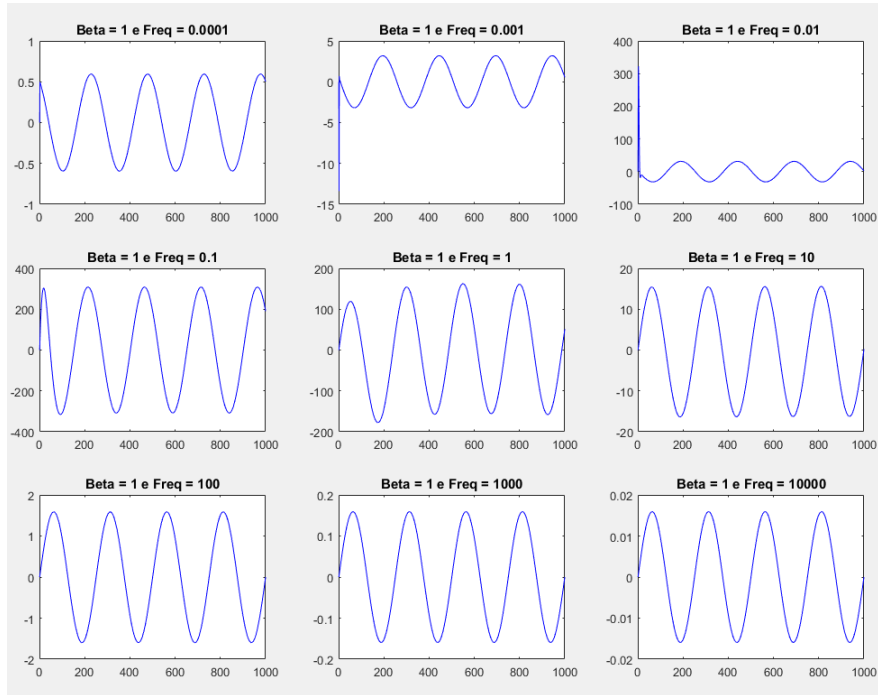


Figura 88: Resposta para  $\beta = 1$  em frequências variantes

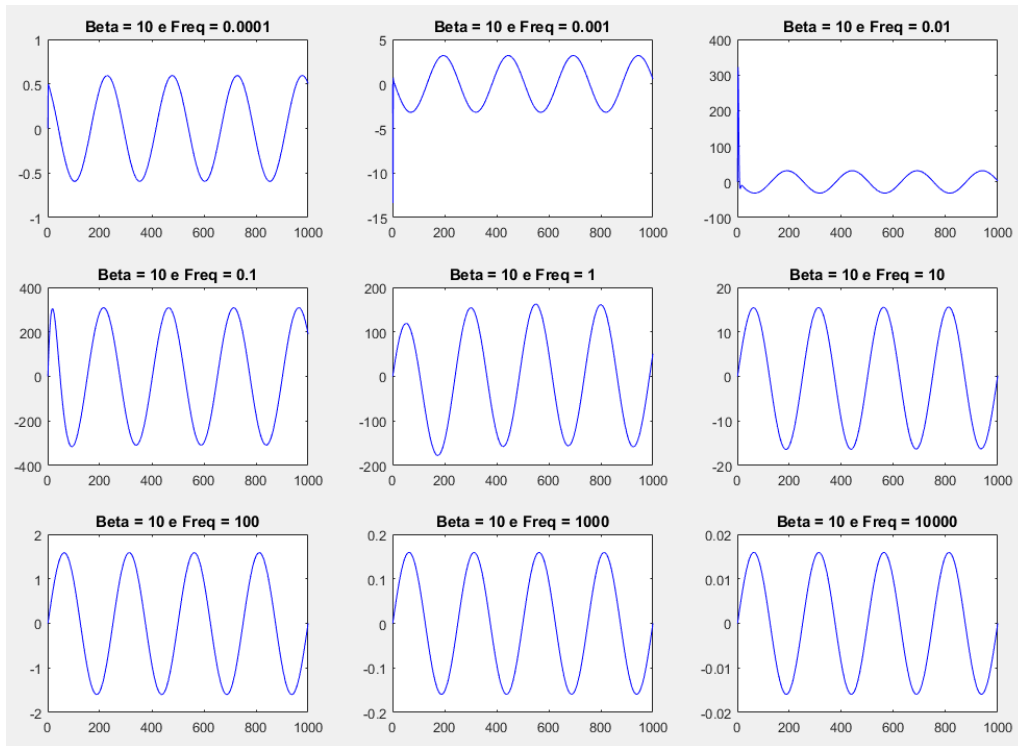


Figura 89: Resposta para  $\beta = 10$  em frequências variantes

## 4 Conclusão

## 5 Referências

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Buffer\\_amplifier](https://en.wikipedia.org/wiki/Buffer_amplifier);
- [2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_filter);
- [3] [https://en.wikipedia.org/wiki/Low-pass\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Low-pass_filter);
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Band-pass\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Band-pass_filter);
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter);
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Sallen-Key\\_topology](https://en.wikipedia.org/wiki/Sallen-Key_topology);
- [7] <https://en.wikipedia.org/wiki/Integrator>;
- [8] [https://en.wikibooks.org/wiki/Signals\\_and\\_Systems](https://en.wikibooks.org/wiki/Signals_and_Systems);
- [9] [http://www.lps.ufrj.br/~natmourajr/EEL350/2016\\_01/slides\\_SL1.pdf](http://www.lps.ufrj.br/~natmourajr/EEL350/2016_01/slides_SL1.pdf);
- [10] B. P. Lathi, Linear Systems and Signals. Oxford, UK: Oxford University Press, 2nd ed., 2009.
- [11] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, Signals and Systems (2Nd Ed.). Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.