

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Trabalho Final de Sistemas Lineares I

Alunos	Igor Abreu da Silva
DRE	112053874
Curso	Engenharia Eletrônica
Turma	2016/2
Professor	Natanael Nunes de Moura Junior

Rio de Janeiro, 09 de Dezembro de 2016

Conteúdo

1	Conhecimentos	1
1.1	Leis de kirchhoff	1
1.1.1	Lei das Correntes	1
1.1.2	Lei das Tensões	1
1.2	Propriedades de Laplace	1
1.2.1	Propriedade da diferenciação	1
1.3	Função de Transferência	1
1.4	Pólos e Zeros	1
1.5	Diagrama de Bode	1
1.6	Resposta à sinas	3
1.7	Série Trigonométrica de Fourier	3
2	Questão 1	4
2.1	Circuito 1	4
2.1.1	Determinar a função do circuito	4
2.1.2	Resposta ao degrau unitário	7
2.1.3	Resposta a rampa unitário	7
2.1.4	Resposta a onda quadrada	8
2.2	Circuito 2	10
2.2.1	Determinar a função do circuito	10
2.2.2	Resposta ao degrau unitário	13
2.2.3	Resposta a rampa unitário	13
2.2.4	Resposta a onda quadrada	14
2.3	Circuito 3	16
2.3.1	Determinar a função do circuito	16
2.3.2	Resposta ao degrau unitário	19
2.3.3	Resposta a rampa unitário	19
2.3.4	Resposta a onda quadrada	20
2.4	Circuito 4	22
2.4.1	Determinar a função do circuito	22
2.4.2	Resposta ao degrau unitário	23
2.4.3	Resposta a rampa unitário	24
2.4.4	Resposta a onda quadrada	24
2.5	Circuito 5	27
2.5.1	Determinar a função do circuito	27
2.5.2	Resposta ao degrau unitário	29
2.5.3	Resposta a rampa unitária	29
2.5.4	Resposta a onda quadrada	30

3 Questão 2	33
3.1 Equações do diagrama	33
3.2 Resposta ao degrau unitário	35
3.3 Resposta a rampa unitária	36
3.4 Resposta a onda quadrada	36
4 Questão 3	39
4.1 E.D.O dos sistemas	39
4.1.1 Sistema 1	39
4.1.2 Sistema 2	39
4.2 Polos e zeros	40
4.2.1 Variando em α	40
4.2.2 Variando em β	40
4.3 Diagrama de Bode	41
4.3.1 Variando em α	41
4.3.2 Variando em β	41
4.4 Resposta ao Degrau Unitário	42
4.4.1 Variando em α	42
4.4.2 Variando em β	42
4.5 Resposta a Rampa Unitária	43
4.5.1 Variando em α	43
4.5.2 Variando em β	43
4.6 Resposta a onda quadrada	44
4.6.1 Variando em α	44
4.6.2 Variando em β	47
4.7 Resposta a cossenoides	49
4.7.1 Variando frequências nos valores de α	49
4.7.2 Variando frequências nos valores de β	53
5 Questão 4	56
5.1 Circuito III	56
5.1.1 Análise da resposta na Frequência de Corte	56
5.1.2 Análise da resposta na Frequência em $0.1w_c$	56
5.1.3 Análise da resposta na Frequência em $10w_c$	57
5.1.4 Harmônicos de Fourier	57
5.1.5 Respostas para diferentes frequências	60
6 Conclusão	61
7 Referências	63

Lista de Figuras

1	Círculo 1	4
2	Círculo 1 - Polos e Zeros	6
3	Círculo 1 - Diagrama de Bode	6
4	Círculo 1 - Resposta ao degrau unitário	7
5	Círculo 1 - Resposta a rampa unitária	7
6	Círculo 1 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	8
7	Círculo 1 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	8
8	Círculo 1 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	9
9	Círculo 1 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	9
10	Círculo 1 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	10
11	Círculo 2	10
12	Círculo 2 - Polos e Zeros	12
13	Círculo 2 - Diagrama de Bode	12
14	Círculo 2 - Resposta ao degrau unitário	13
15	Círculo 2 - Resposta a rampa unitária	13
16	Círculo 2 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	14
17	Círculo 2 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	14
18	Círculo 2 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	15
19	Círculo 2 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	15
20	Círculo 2 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	16
21	Círculo 3	16
22	Círculo 3 - Polos e Zeros	18
23	Círculo 3 - Diagrama de Bode	18
24	Círculo 3 - Resposta ao degrau unitário	19
25	Círculo 3 - Resposta a rampa unitária	19
26	Círculo 3 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	20
27	Círculo 3 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	20
28	Círculo 3 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	21

29	Círculo 3 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	21
30	Círculo 3 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	22
31	Círculo 4	22
32	Círculo 4 - Diagrama de Bode	23
33	Círculo 4 - Resposta ao degrau unitário	23
34	Círculo 4 - Resposta a rampa unitária	24
35	Círculo 4 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	24
36	Círculo 4 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	25
37	Círculo 4 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	25
38	Círculo 4 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	26
39	Círculo 4 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	26
40	Círculo 5	27
41	Círculo 5 - Polos e Zeros	28
42	Círculo 5 - Diagrama de Bode	28
43	Círculo 5 - Resposta ao degrau unitário	29
44	Círculo 5 - Resposta a rampa unitária	29
45	Círculo 5 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	30
46	Círculo 5 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	30
47	Círculo 5 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	31
48	Círculo 5 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	31
49	Círculo 5 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	32
50	Diagrama de Blocos	33
51	Polos e Zeros	34
52	Diagrama de Bode	35
53	Resposta ao degrau unitário	35
54	Resposta a rampa unitária	36
55	Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$	36
56	Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$	37
57	Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$	37

58	Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$	38
59	Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$	38
60	Polos e Zeros variando em α	40
61	Polos e Zeros variando em β	40
62	Diagrama de Bode variando em α	41
63	Diagrama de Bode variando em β	41
64	Resposta ao Degrau Unitário variando em α	42
65	Resposta ao Degrau Unitário variando em β	42
66	Resposta a rampa Unitária variando em α	43
67	Resposta a rampa Unitária variando em β	43
68	Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	44
69	Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$	44
70	Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$	45
71	Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$	45
72	Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$	46
73	Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$	47
74	Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$	47
75	Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$	48
76	Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$	48
77	Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$	49
78	Resposta para $\alpha = 0.001$ em frequências variantes	49
79	Resposta para $\alpha = 0.01$ em frequências variantes	50
80	Resposta para $\alpha = 0.1$ em frequências variantes	50
81	Resposta para $\alpha = 1$ em frequências variantes	51
82	Resposta para $\alpha = 10$ em frequências variantes	51
83	Resposta para $\alpha = 100$ em frequências variantes	52
84	Resposta para $\alpha = 1000$ em frequências variantes	52
85	Resposta para $\beta = 0.001$ em frequências variantes	53
86	Resposta para $\beta = 0.01$ em frequências variantes	53
87	Resposta para $\beta = 0.1$ em frequências variantes	54
88	Resposta para $\beta = 1$ em frequências variantes	54

89	Resposta para $\beta = 10$ em frequências variantes	55
90	Análise da resposta na Frequência de corte	56
91	Análise da resposta na Frequência de corte uma década antes .	56
92	Análise da resposta na Frequência de corte uma década depois .	57
93	Primeiro harmônico	57
94	Terceiro harmônico	58
95	Quinto harmônico	58
96	Sétimo harmônico	59
97	Cossenóide 100Hz	60
98	Cossenóide 1kHz	60
99	Cossenóide 10kHz	61

1 Conhecimentos

1.1 Leis de kirchhoff

1.1.1 Lei das Correntes

A soma das correntes em um nó é igual a zero.

1.1.2 Lei das Tensões

A soma das tensões em uma malha fechada é nula.

1.2 Propriedades de Laplace

1.2.1 Propriedade da diferenciação

$$x(t) \Rightarrow X(S) \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt \Rightarrow s \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt - x(0^-) = sX(s) - x(0^-)$$

1.3 Função de Transferência

É a relação da saída sobre as entradas $H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}$

1.4 Pólos e Zeros

Pólos são valores de s onde temos uma indefinição na função de transferência, ou seja quando o denominador é zero.

Zeros são todos os valores de s que zera a função de transferência, em outras palavras fazem com que o numerador seja igual a zero.

1.5 Diagrama de Bode

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} \Rightarrow \frac{k(\color{red}s + a_1)}{\color{brown}s(\color{blue}s + b_1)(\color{orange}s^2 + b_2s + b_3)}$$

Organizando esta equação, temos:

$$\frac{k(\color{red}a_1(\frac{s}{a_1} + 1))}{\color{brown}s\color{blue}b_1\color{brown}b_3(\frac{s}{b_1} + 1)(\frac{s^2}{b_3} + \frac{b_2s}{b_3} + 1)}$$

Com isso, teremos:

$$|H(jw)| = \frac{k(a_1(\frac{jw}{a_1} + 1))}{jwb_1b_3(\frac{jw}{b_1} + 1)(\frac{(jw)^2}{b_3} + \frac{b_2jw}{b_3} + 1)}$$

Por questões práticas, com o objetivo de facilitar as contas, adaptaremos essa função para utilizar como a representação magnitude de decibel, logo teremos:

$$\begin{aligned} 20\log(|H(jw)|) &= 20\log(|\frac{ka_1}{b_1b_3}|) + 20\log(|\frac{jw}{a_1} + 1|) - 20\log(|jw|) - 20\log(|\frac{jw}{b_1} + 1|) \\ &\quad - 20\log(|\frac{(jw)^2 + b_2jw}{b_3} + 1|) \end{aligned}$$

Como fase, teremos:

$$\angle H(jw) = \angle(\frac{jw}{a_1} + 1) - \angle jw - \angle(\frac{jw}{b_1} + 1) - \angle(\frac{(jw)^2 + b_2jw}{b_3} + 1)$$

Para o termo constante: $\frac{ka_1}{b_1b_3}$

Modulo começa em $20\log(\frac{ka_1}{b_1b_3})$

Fase será π , $\frac{ka_1}{b_1b_3} > 0$ ou 0 , $\frac{ka_1}{b_1b_3} \leq 0$

Termo: $j\omega$

Modulo -20db/dec (Pólo) ou +20db/dec (zero)

Fase $-arctg(\frac{\omega}{0})$, ou seja, -90° (pólo) $+90^\circ$ (zero)

Primeira Ordem: $\frac{jw}{b_1} + 1$

Modulo, começando na frequência de corte b_1 , -20db/dec (Pólo) ou +20db/dec (zero)

Fase 0_o em $\frac{b_1}{10}$, -45° (pólo) $+45^\circ$ (zero) em b_1 e por fim -90° (pólo) $+90^\circ$ (zero) em $100b_1$

Segunda Ordem: $\frac{(jw)^2 + b_2jw}{b_3} + 1$

Modulo, começando na frequência de corte b_3 , -40db/dec (Pólo) ou +40db/dec (zero)

Fase 0_o em $\frac{b_3}{10}$, -90° (pólo) $+90^\circ$ (zero) em b_3 e por fim -180° (pólo) $+180^\circ$ (zero) em $100b_3$

1.6 Resposta à sinas

Exemplo de como encontrar à resposta da função de transferência para um determinado sinal:

Tendo $H(S) = \frac{S+2}{S^2+5S+4}$, iremos encontrar a resposta para $x(t) = 5\cos(2t + 30^\circ)$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{-\omega^2 + 5j\omega + 4}$$

sabemos que:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{(\text{Re}_1)^2 + (\text{Im}_1)^2}}{\sqrt{(\text{Re}_2)^2 + (\text{Im}_2)^2}} \leftrightarrow \angle = \arctan\left(\frac{\text{Im}_1}{\text{Re}_1}\right) - \arctan\left(\frac{\text{Im}_2}{\text{Re}_2}\right)$$

e que:

$$y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \phi + \angle H(j\omega))$$

logo, substituindo os valores em:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 4}}{\sqrt{(5j\omega)^2 + (4 - \omega^2)}} \leftrightarrow \angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{5\omega}{4 - \omega^2}\right)$$

temos:

$$y(t) = \sqrt{2} \cos(2t - 15^\circ)$$

1.7 Série Trigonométrica de Fourier

A série de fourier serve para representar sinais periódicos em função de senos e cossenos.

com isso, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(\frac{2n\pi x}{T}) + b_n \sin(\frac{2n\pi x}{T})) \\ & a_n = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_f} f(x) \cos(\frac{2n\pi x}{T}) dx \\ & b_n = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_f} f(x) \sin(\frac{2n\pi x}{T}) dx \end{aligned}$$

2 Questão 1

Nesta sessão serão resolvidas todas as partes necessárias para encontrar as funções/utilidades de cada um dos circuitos, bem como a análise de resposta a determinados sinais e todos os itens solicitados na **Questão 1** do trabalho final de sistemas lineares.

O primeiro passo é modelar cada circuito, essa modelagem utilizara as leis de kirchhoff explicadas em 1.1. Apos a modelagem, encontraremos as E.D.O's, aplicaremos Laplace utilizando a propriedade da Derivação (1.2.1) e com isso encontraremos a função de transferência H(S). Em posse da função de transferência em função dos componentes do circuito, escolheremos o valor comercial de cada componente de acordo com o nosso objetivo, encontraremos os polos e zeros e o diagrama de bode conforme explicado em (1.4) e (1.5).

2.1 Circuito 1

2.1.1 Determinar a função do circuito

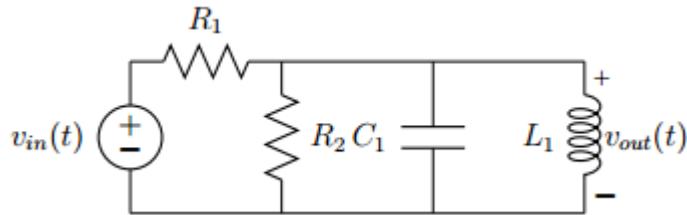


Figura 1: Circuito 1

Podemos modelar o circuito 1 em relação ao nó após R1. Teríamos a seguinte equação:

$$\frac{V_{in} - V_{out}}{R1} - \frac{V_{out}}{R2} - \frac{C\partial V_{out}}{\partial t} - \frac{1}{L} \int V_{out} dt = 0$$

Para encontrarmos a E.D.O do circuito, vamos derivar toda esta expressão e separar V_{out} e V_{in} , encontrando a seguinte relação:

$$\frac{\partial V_{in}}{\partial t} \left(\frac{1}{R_1} \right) = \frac{C\partial^2 V_{out}}{\partial t^2} + \frac{\partial V_{out}}{\partial t} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{V_{out}}{L}$$

Em posse da E.D.O, utilizaremos Laplace para encontrar a função de Trans-

ferência do Circuito.

$$X(S) \left(\frac{1}{R_1} \right) = Y(S) \left(S^2 C + S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{L} \right) \Rightarrow$$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{SR_2L}{S^2(R_1R_2LC) + S(R_1L + R_2L) + R_1R_2}$$

Afim de facilitar os cálculos, tomaremos os seguintes valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 56\Omega$;
- $R_2 = 100\Omega$;
- $C = 2.2\mu F$;
- $L = 23.2mH$;

Apos aplicar os valores comercias em $H(S)$, temos:

$$H(S) = \frac{2.32S}{0.000285824S^2 + 3.6192S + 5600}$$

Utilizando essa função no MatLab para encontrar os polos (quando se zera o denominador), zeros (quando se zera o numerador) e o diagrama de Bode, obtemos o seguintes gráficos:

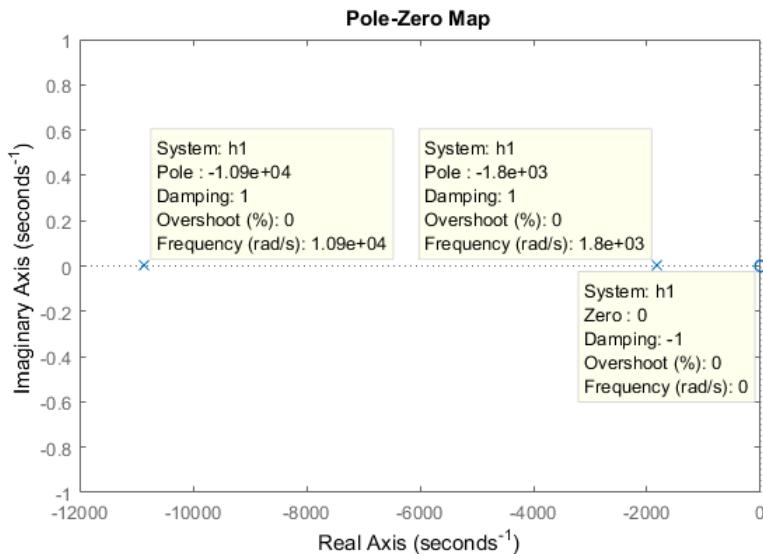


Figura 2: Circuito 1 - Polos e Zeros

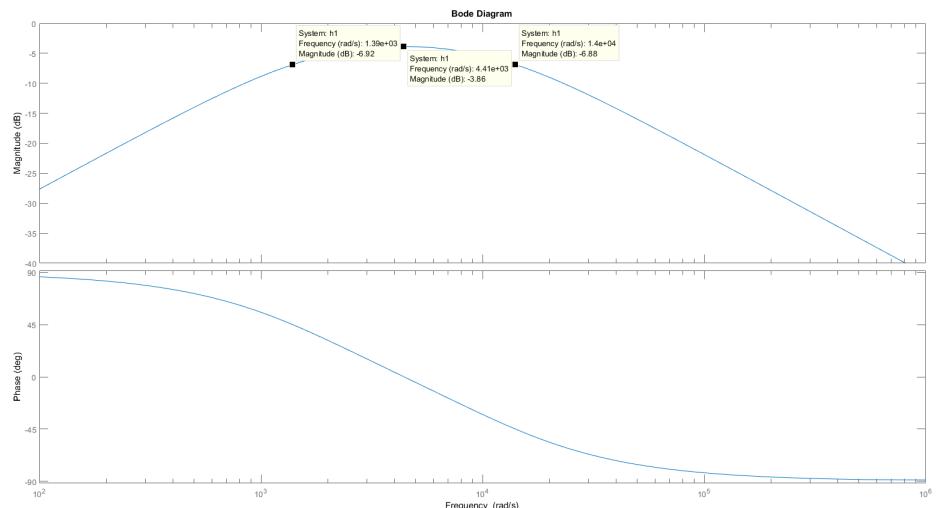


Figura 3: Circuito 1 - Diagrama de Bode

Analisando-se este circuito, pode-se afirmar que o mesmo é um filtro passa faixa operando na largura de banda de aproximadamente 12610 rad/sec em um intervalo [1390, 14000] rad/sec.

2.1.2 Resposta ao degrau unitário

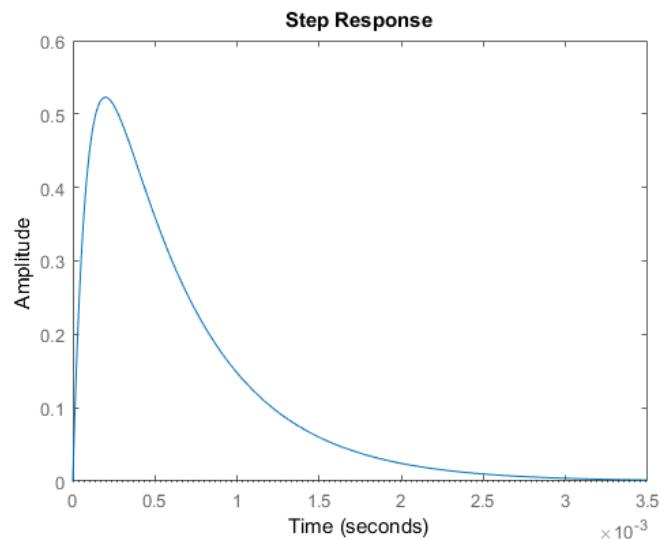


Figura 4: Circuito 1 - Resposta ao degrau unitário

2.1.3 Resposta a rampa unitária

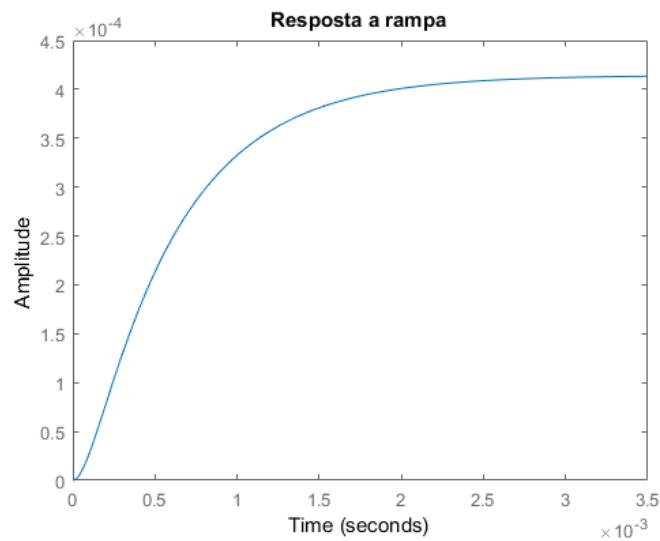


Figura 5: Circuito 1 - Resposta a rampa unitária

2.1.4 Resposta a onda quadrada

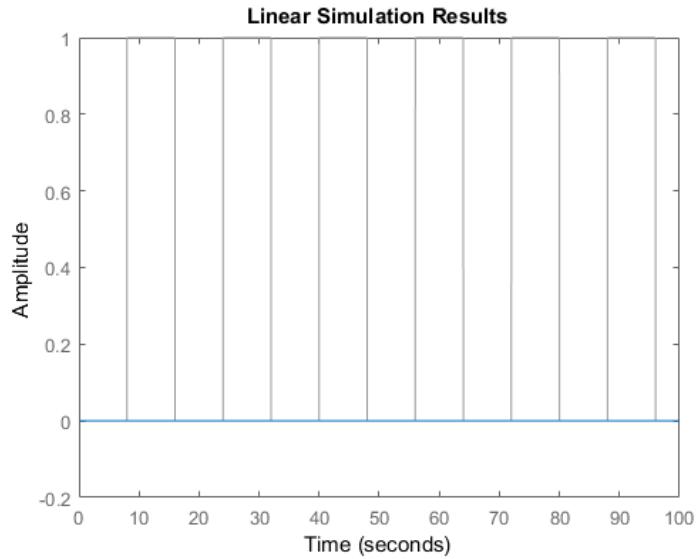


Figura 6: Circuito 1 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

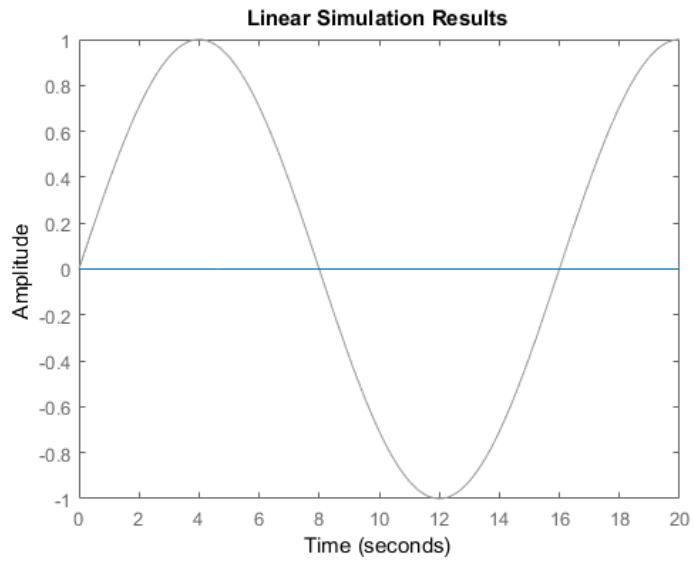


Figura 7: Circuito 1 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

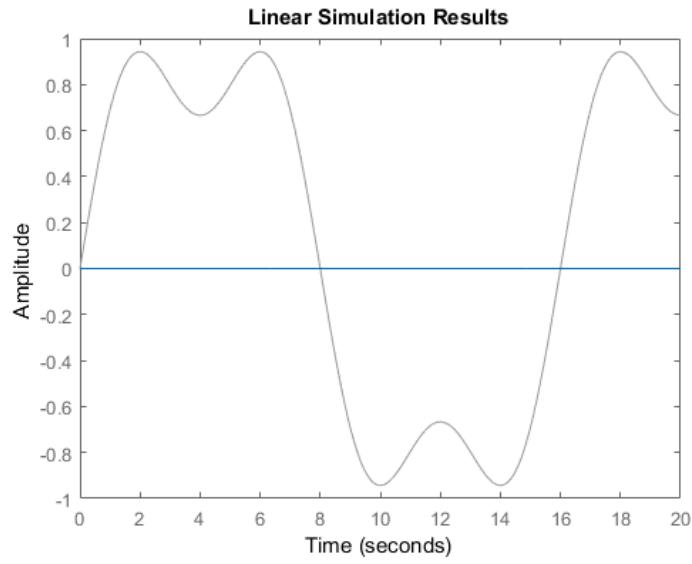


Figura 8: Circuito 1 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

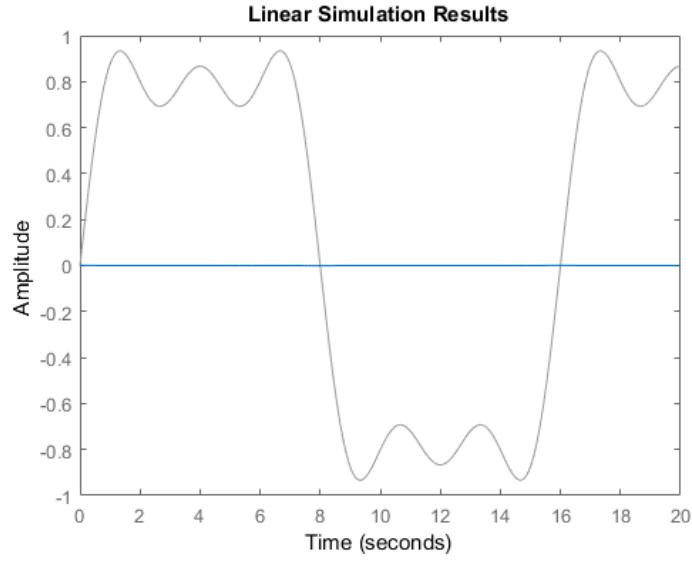


Figura 9: Circuito 1 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

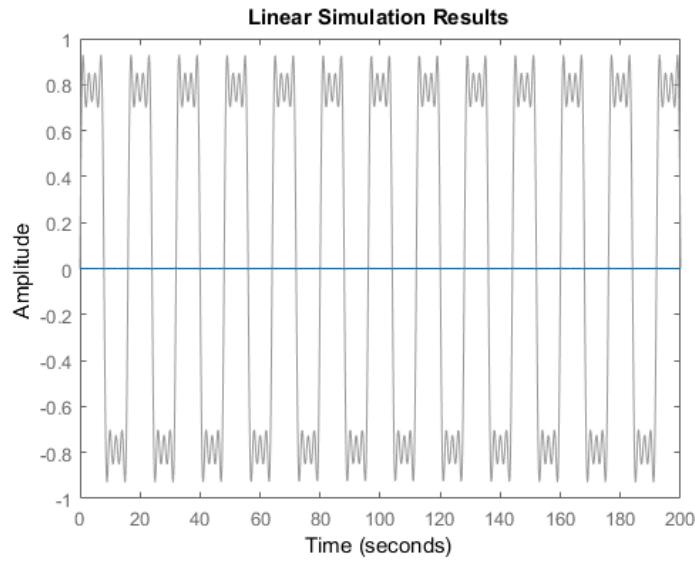


Figura 10: Circuito 1 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

2.2 Circuito 2

2.2.1 Determinar a função do circuito

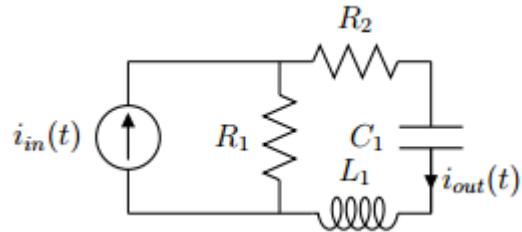


Figura 11: Circuito 2

Para modelarmos utilizaremos as seguintes equações:

$$I_1 = I_{in} - I_{out}$$

$$R_2 I_{out} + \frac{L \partial I_{out}}{\partial t} - R_1 I_1 + \frac{1}{C} \int I_{out} dt = 0$$

Substituindo I_1 para colocarmos a equação em função de I_{in} e I_{out} e derivando-a para removermos a Integral, temos a E.D.O:

$$\frac{\partial I_{in}}{\partial t} (R_1) = \frac{\partial^2 I_{out}}{\partial t^2} (L) + \frac{\partial I_{out}}{\partial t} (R_1 + R_2) + \frac{I_{out}}{C}$$

Transformando essa E.D.O em Laplace, obtemos:

$$X(S)(SR_1) = Y(S) \left(S^2 + S(R_1 + R_2) + \frac{1}{C} \right) \Rightarrow$$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{S(R_1C)}{S^2(LC) + S(R_1C + R_2C) + 1}$$

Escolhendo os seguintes valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 1M\Omega$;
- $R_2 = 100\Omega$;
- $C = 2.2\mu F$;
- $L = 23.2mH$;

Encontramos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{2.2S}{0.000000051S^2 + 2.20022S + 1}$$

A partir dessa função obtemos os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

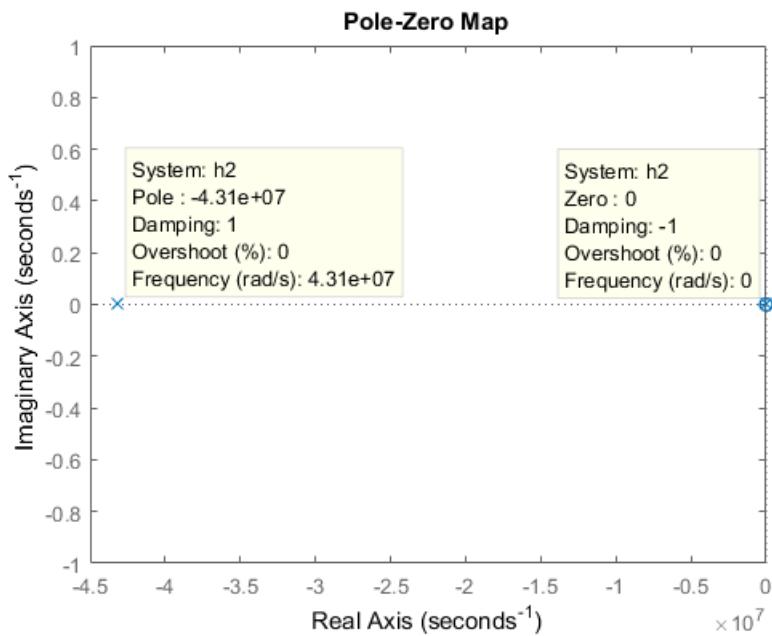


Figura 12: Circuito 2 - Polos e Zeros

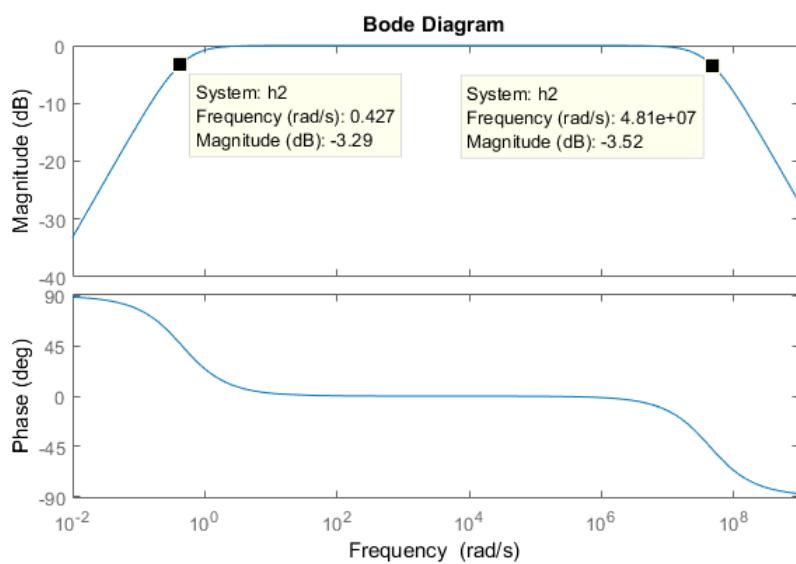


Figura 13: Circuito 2 - Diagrama de Bode

Assim como o circuito da figura 1, temos também um filtro passa faixa que opera nas faixas entre 0.427 rad/seg até $48.1 \times 10^7 \text{ rad/seg}$

2.2.2 Resposta ao degrau unitário

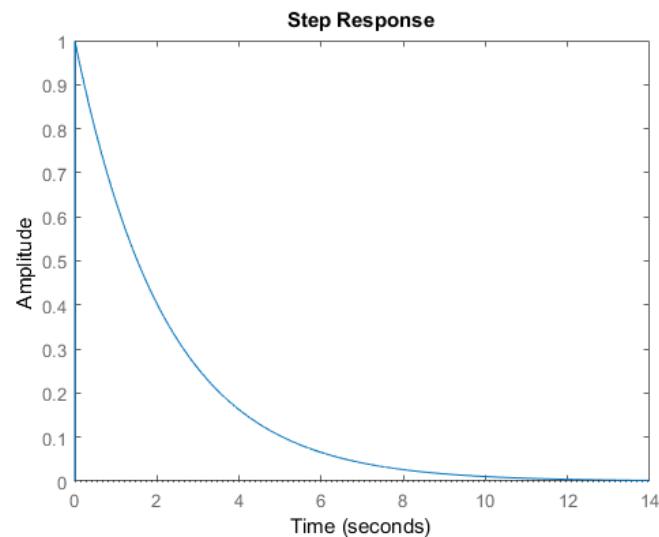


Figura 14: Circuito 2 - Resposta ao degrau unitário

2.2.3 Resposta a rampa unitário

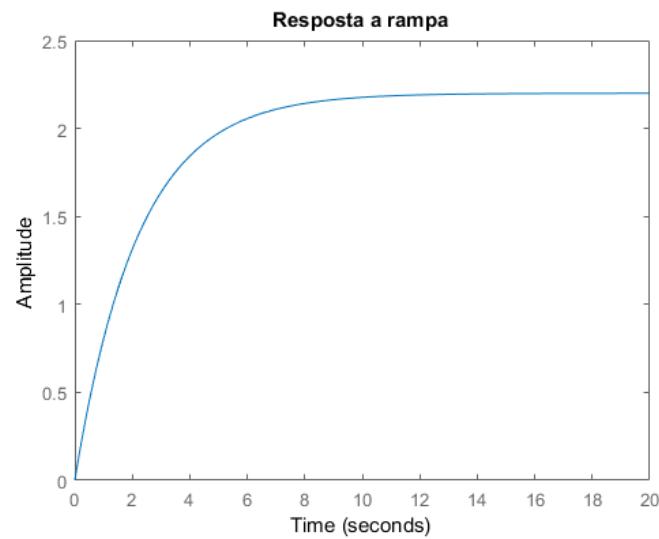


Figura 15: Circuito 2 - Resposta a rampa unitária

2.2.4 Resposta a onda quadrada

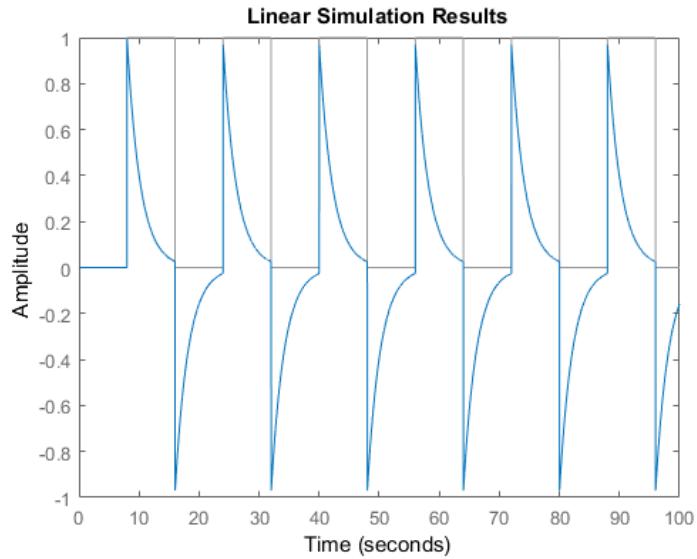


Figura 16: Circuito 2 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

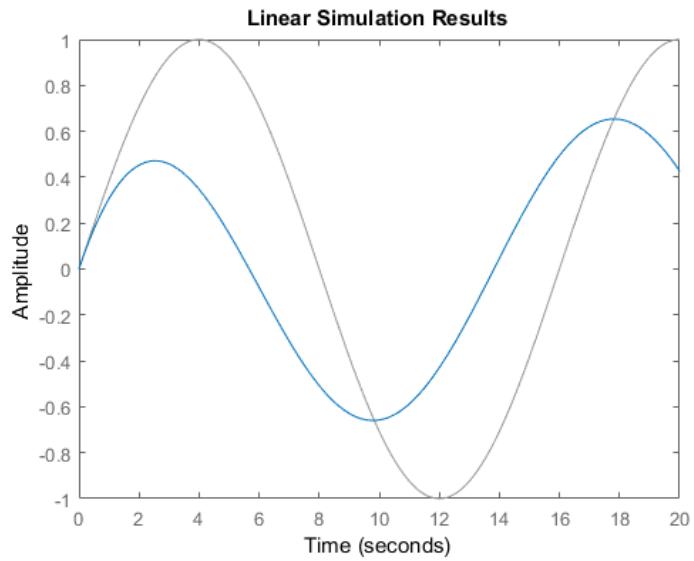


Figura 17: Circuito 2 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

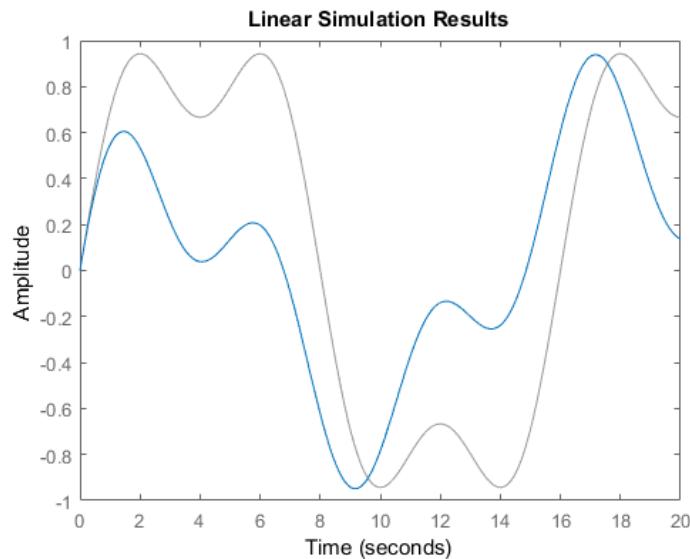


Figura 18: Circuito 2 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

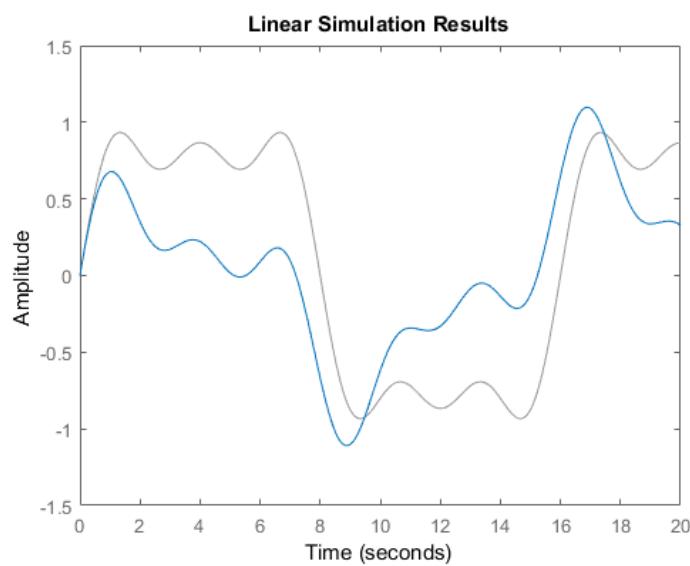


Figura 19: Circuito 2 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

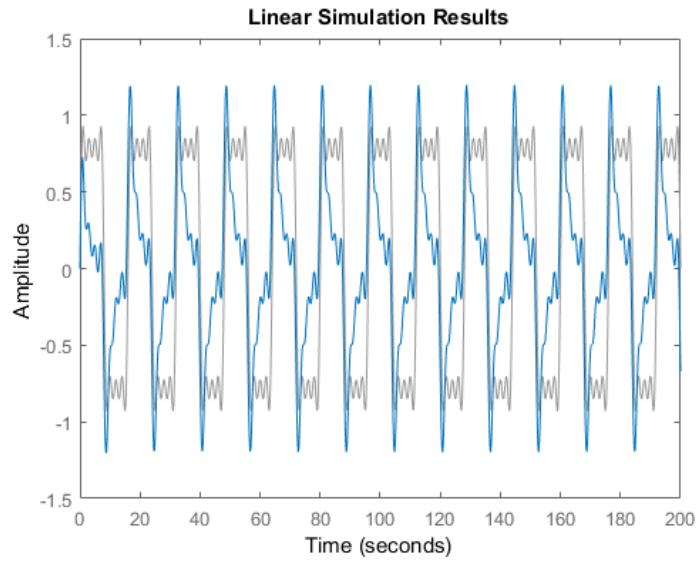


Figura 20: Circuito 2 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

2.3 Circuito 3

2.3.1 Determinar a função do circuito

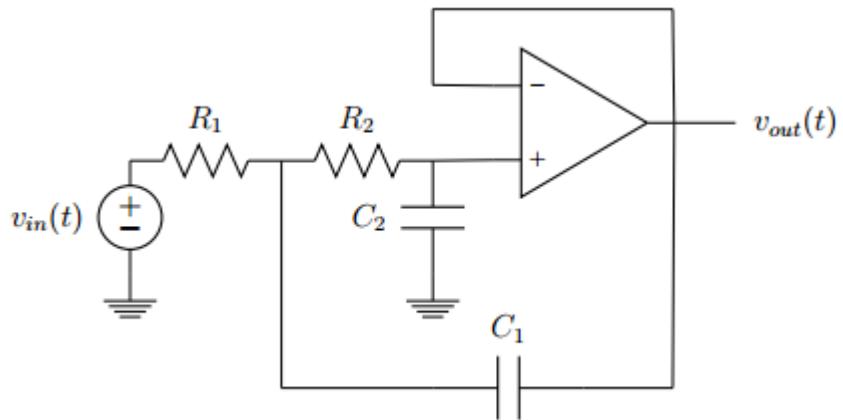


Figura 21: Circuito 3

Este circuito, também conhecido como topologia de Sallen-Key, sabendo que o AmpOp possui impedância infinita em sua entrada, que $V^- = V^+$, que

$V^- = V_{out}$ e chamando V_a da tensão que passa por C_1 , obtemos:

$$V_a = V_{out} + R_2 C_2 \frac{\partial V_{out}}{\partial t}$$

Utilizando a lei dos nós entre R_1 e R_2 e já substituindo V_a por V_{out} temos:

$$\frac{V_{in}}{R_1} = R_2 C_1 C_2 \frac{\partial^2 V_{out}}{\partial t^2} + \left(C_2 + \frac{R_2 C_2}{R_1} \right) \frac{\partial V_{out}}{\partial t} + \frac{V_{out}}{R_1}$$

Com esta E.D.O, podemos encontrar a seguinte função de transferência utilizando o mesmo método empregado nos circuitos anteriores, com isso temos:

$$H(S) = \frac{1}{S^2 (R_1 R_2 C_1 C_2) + S (R_1 C_2 + R_2 C_2) + 1}$$

Utilizando os valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 10k\Omega$;
- $R_2 = 1k\Omega$;
- $C_1 = 50nF$;
- $C_2 = 50nF$;

Encontramos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{1}{0.000000025S^2 + 0.00055S + 1}$$

Que nos gera os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

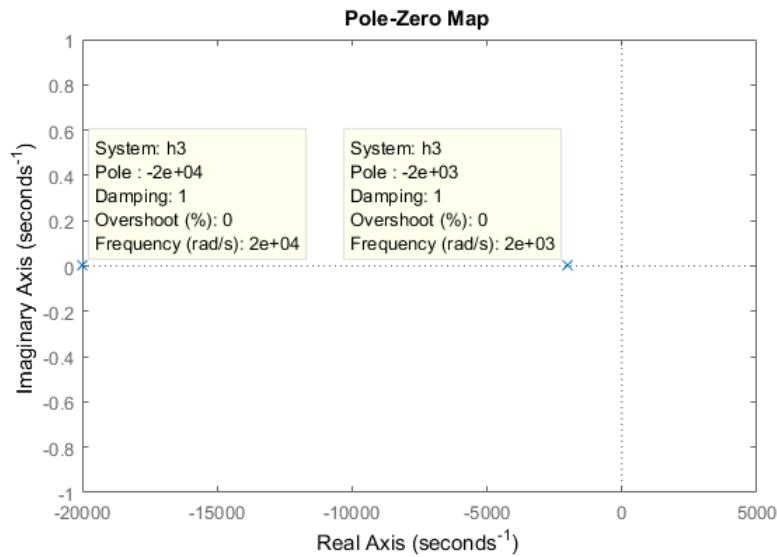


Figura 22: Circuito 3 - Polos e Zeros

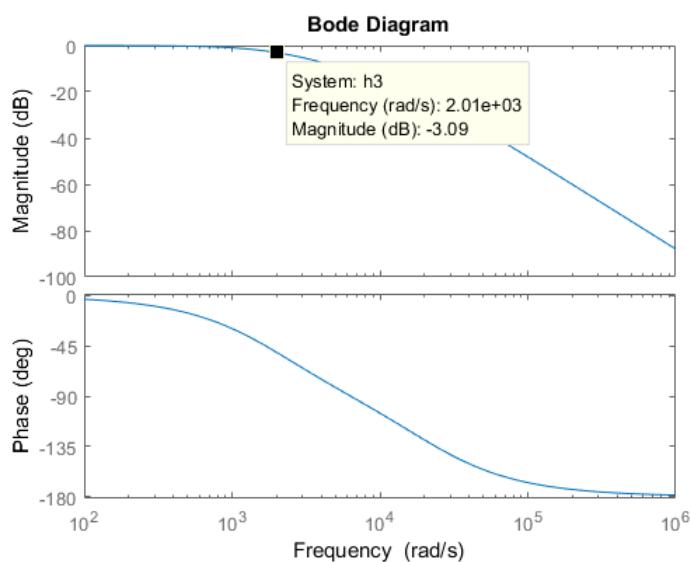


Figura 23: Circuito 3 - Diagrama de Bode

Pela analise do diagrama de Bode, pode-se afirmar que esse circuito é um filtro passa baixa com frequência de corte igual a 2000 rad/s.

2.3.2 Resposta ao degrau unitário

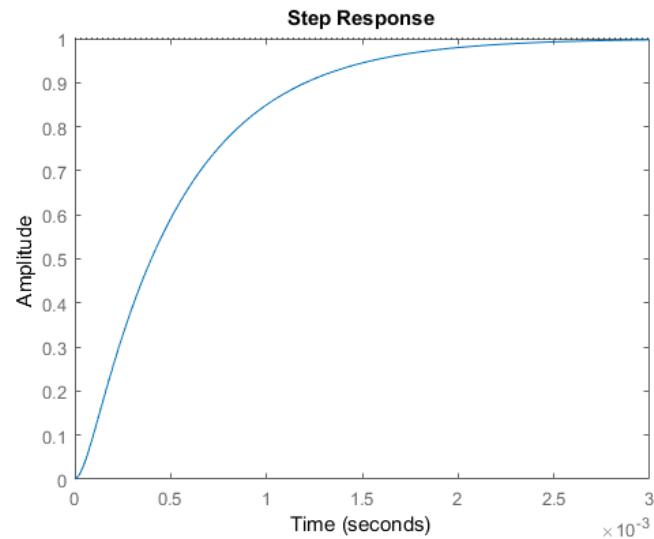


Figura 24: Circuito 3 - Resposta ao degrau unitário

2.3.3 Resposta a rampa unitário

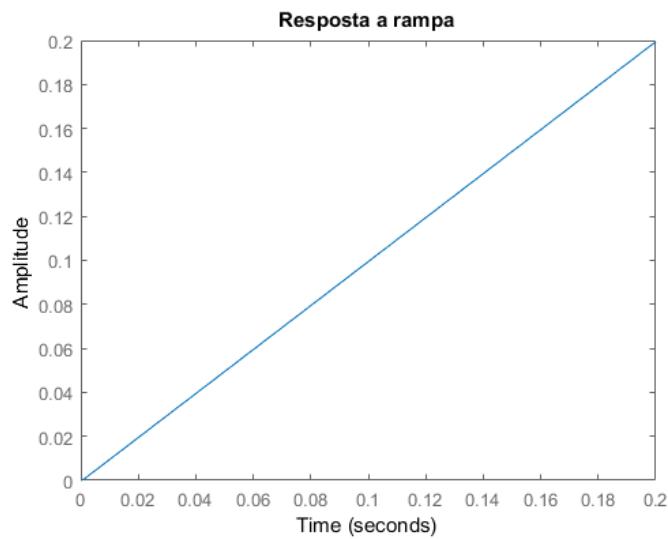


Figura 25: Circuito 3 - Resposta a rampa unitária

2.3.4 Resposta a onda quadrada

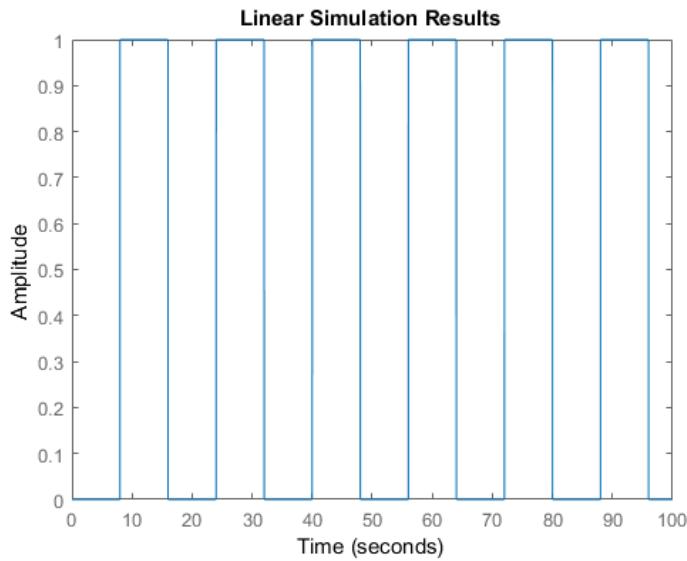


Figura 26: Circuito 3 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

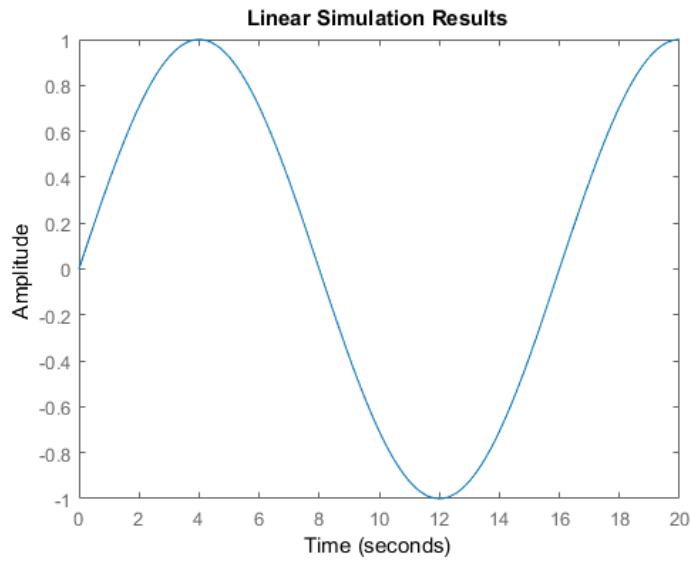


Figura 27: Circuito 3 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

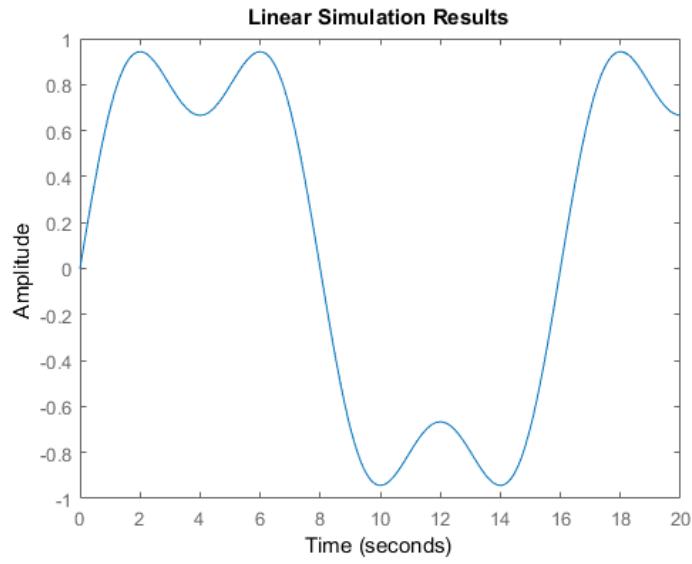


Figura 28: Circuito 3 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

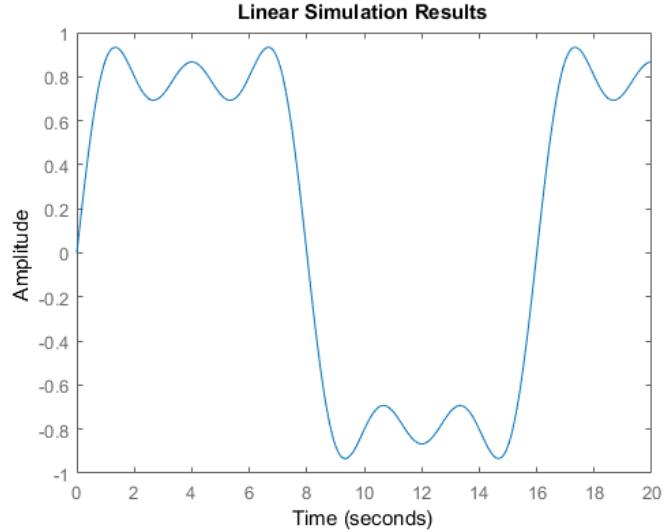


Figura 29: Circuito 3 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

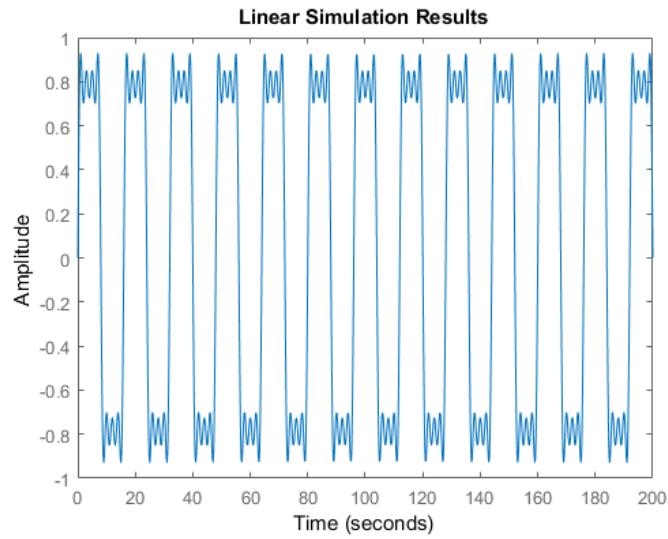


Figura 30: Circuito 3 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

2.4 Circuito 4

2.4.1 Determinar a função do circuito

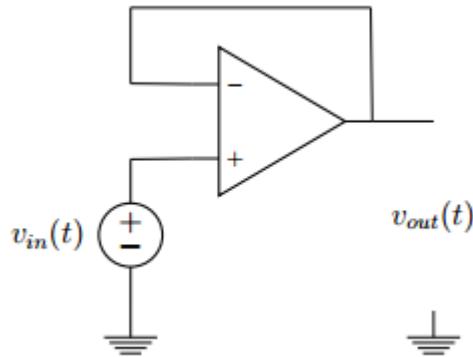


Figura 31: Circuito 4

Esse circuito, conhecido como buffer, é utilizado como um isolador. Como V_{in} é igual a V_{out} , sua função de transferência $H(S) = 1$. Não existem polos nem zeros para esse circuito e seu diagrama de Bode permanece em 0.

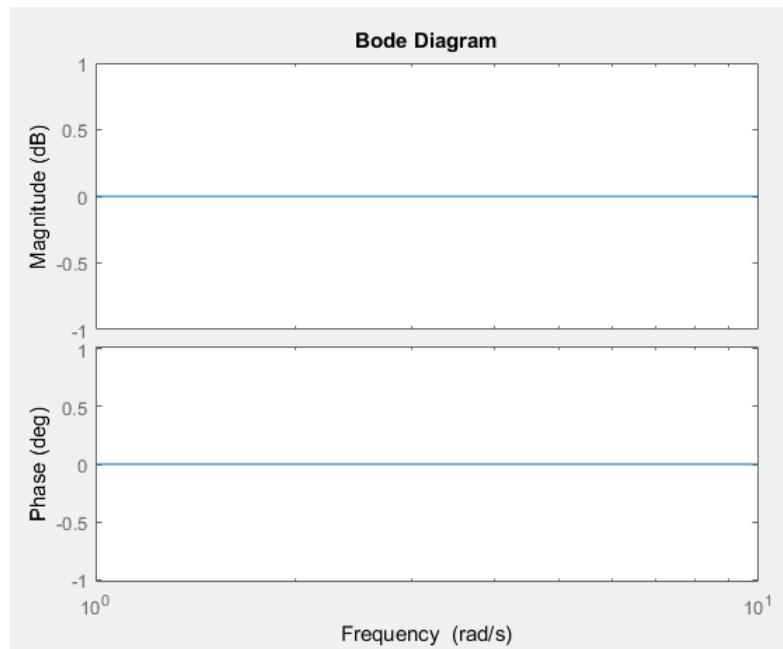


Figura 32: Circuito 4 - Diagrama de Bode

2.4.2 Resposta ao degrau unitário

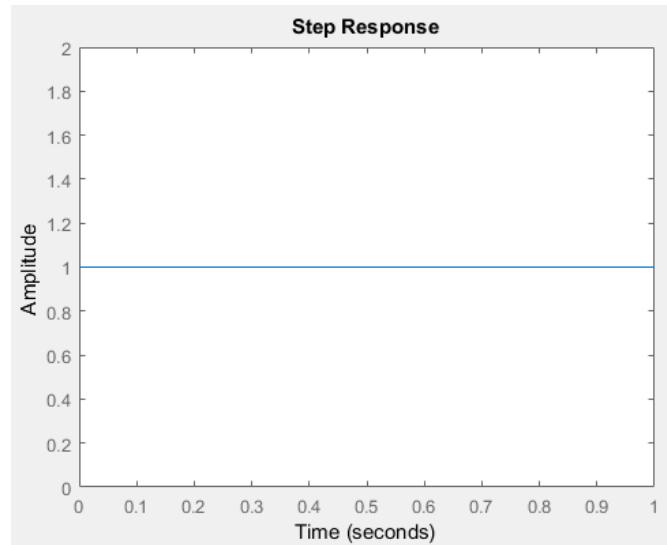


Figura 33: Circuito 4 - Resposta ao degrau unitário

2.4.3 Resposta a rampa unitário

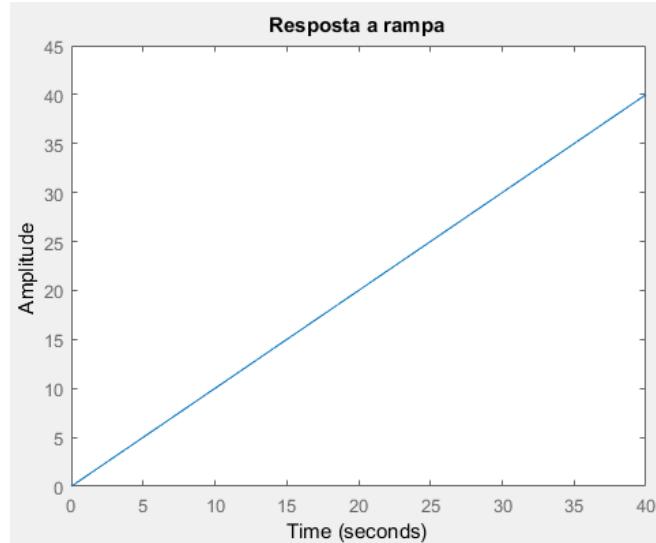


Figura 34: Circuito 4 - Resposta a rampa unitária

2.4.4 Resposta a onda quadrada

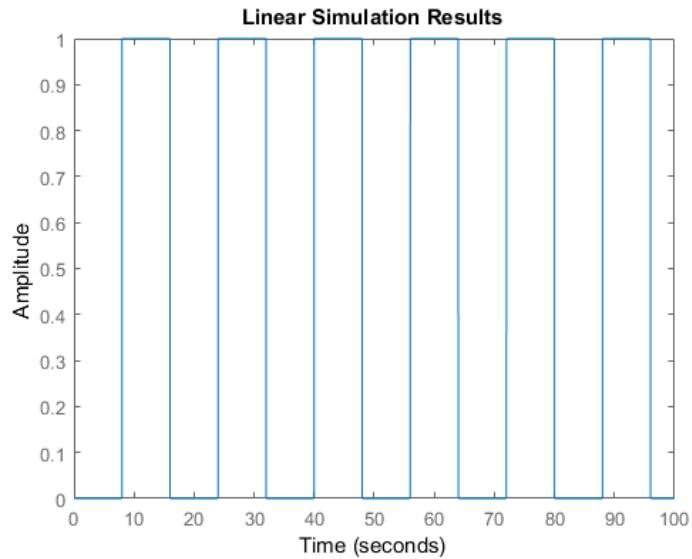


Figura 35: Circuito 4 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

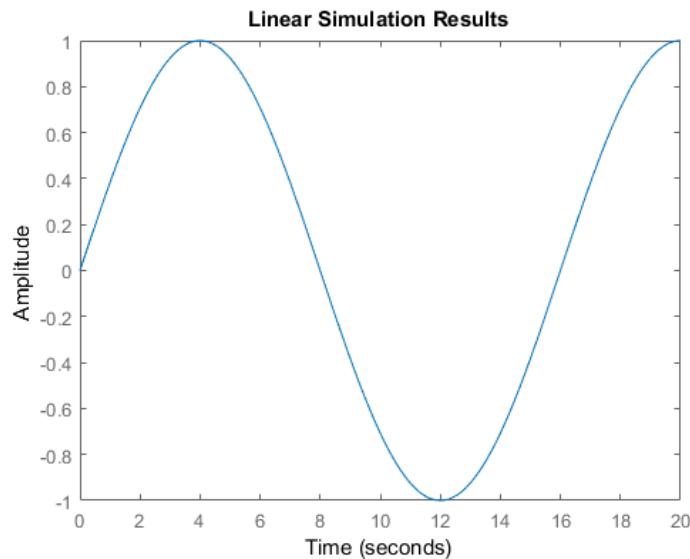


Figura 36: Circuito 4 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

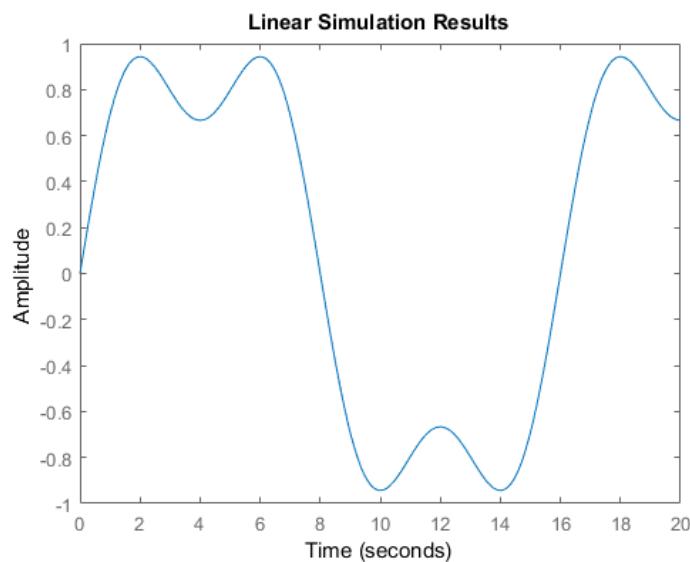


Figura 37: Circuito 4 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

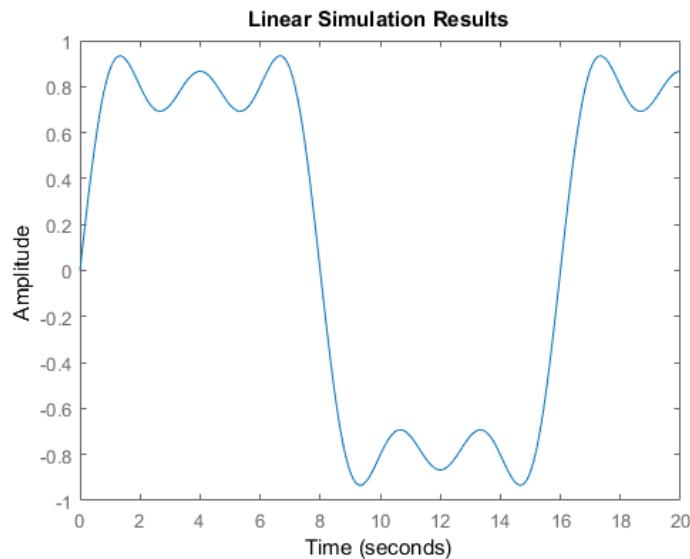


Figura 38: Circuito 4 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

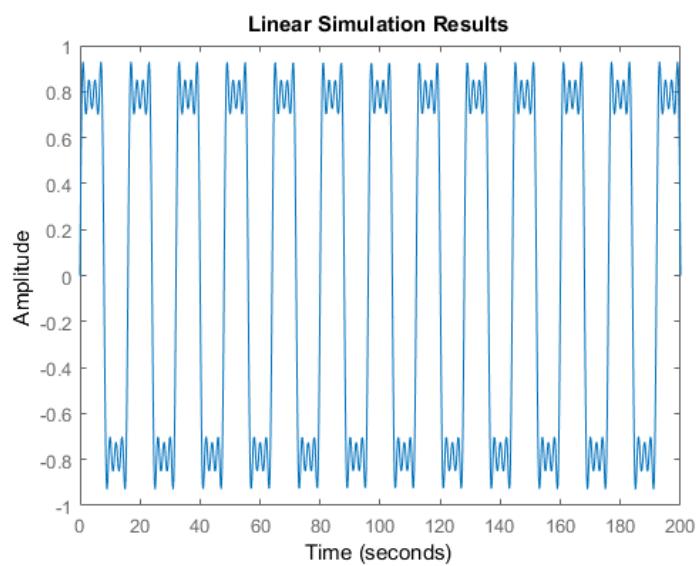


Figura 39: Circuito 4 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

2.5 Circuito 5

2.5.1 Determinar a função do circuito

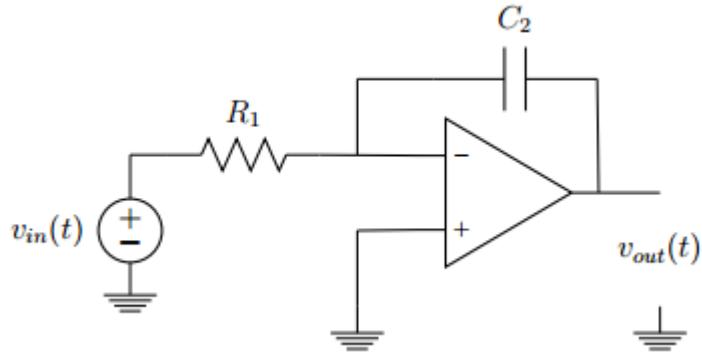


Figura 40: Circuito 5

Esse circuito pode ser escrito como:

$$\frac{V_{in}}{R} + C \frac{\partial V_{out}}{\partial t} = 0$$

Transformando esta E.D.O com Laplace utilizando o mesmo método dos circuitos passados, obtemos:

$$H(S) = \frac{-1}{RCS}$$

Tomando os seguintes valores para os elementos do circuito:

- $R = 1M\Omega$;
- $C = 50nF$;

Temos a seguinte equação de transferência:

$$H(S) = \frac{-1}{0.05S}$$

A partir dessa equação, obtemos os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

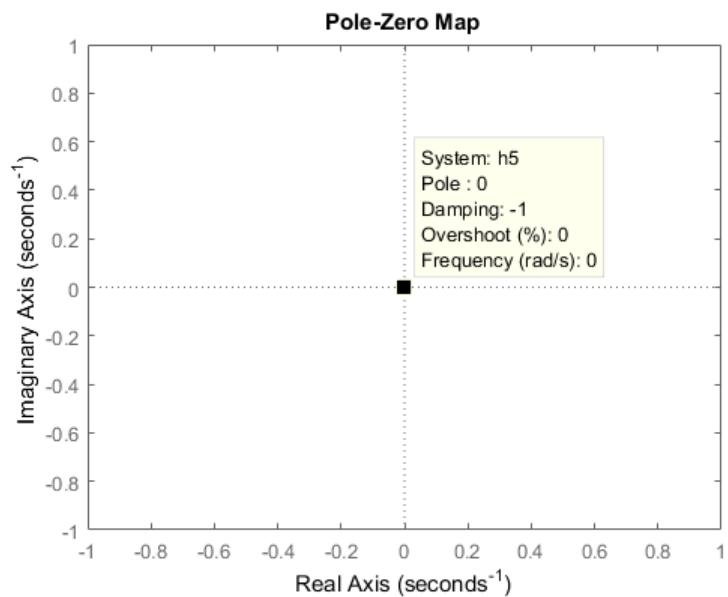


Figura 41: Circuito 5 - Polos e Zeros

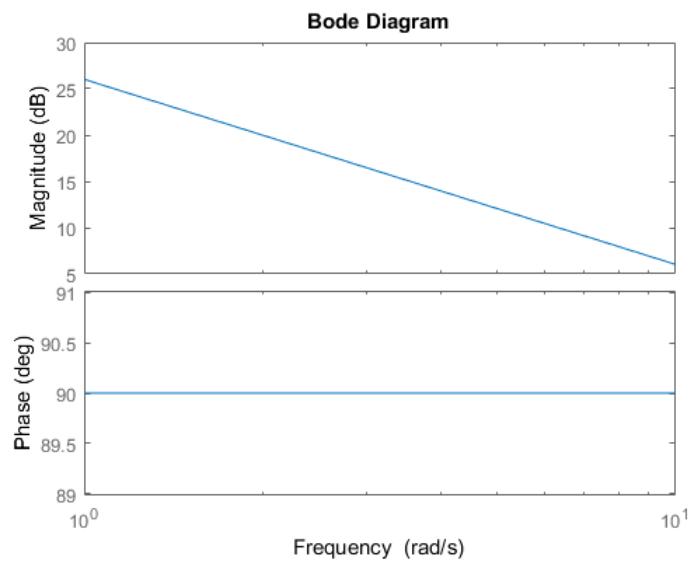


Figura 42: Circuito 5 - Diagrama de Bode

Este circuito corresponde a um filtro passa baixa integrador de apenas um polo.

2.5.2 Resposta ao degrau unitário

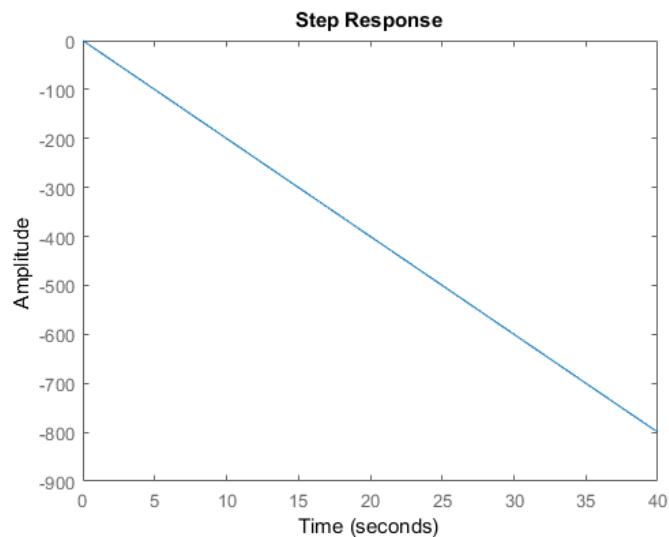


Figura 43: Circuito 5 - Resposta ao degrau unitário

2.5.3 Resposta a rampa unitária

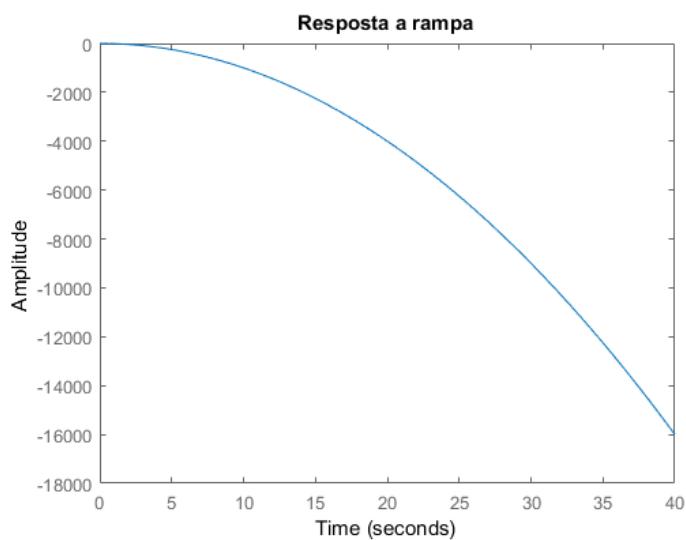


Figura 44: Circuito 5 - Resposta a rampa unitária

2.5.4 Resposta a onda quadrada

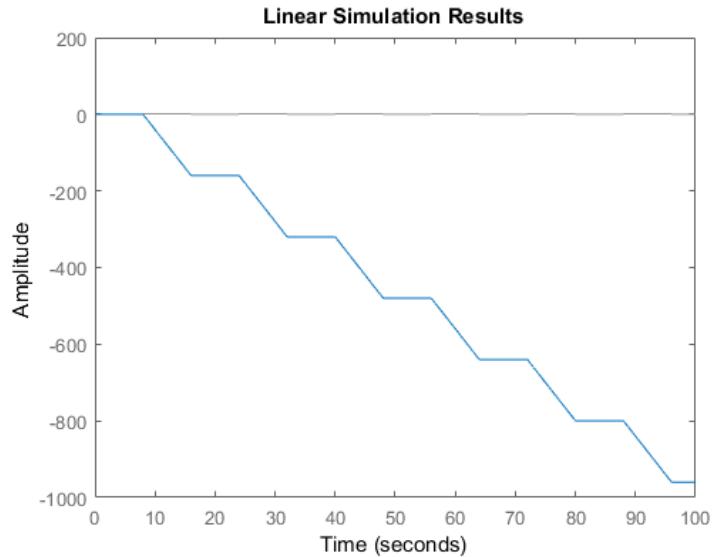


Figura 45: Circuito 5 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

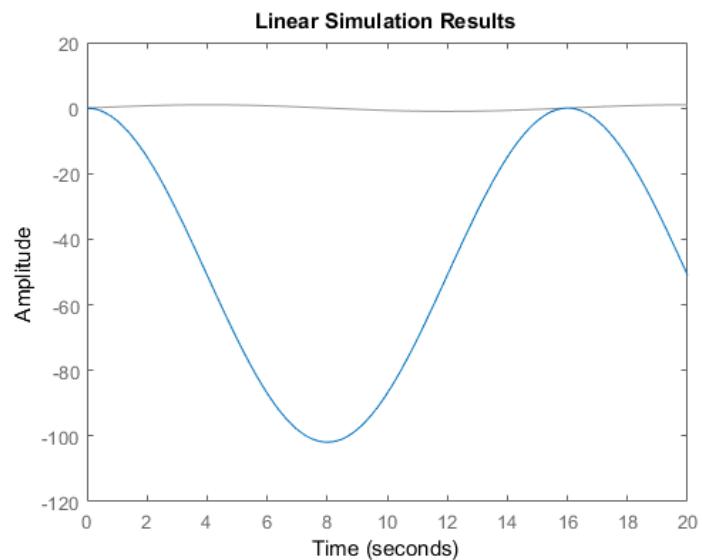


Figura 46: Circuito 5 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

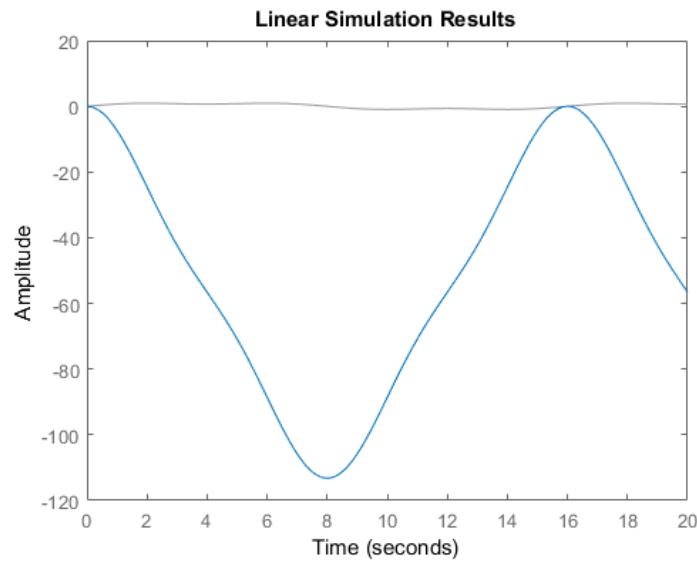


Figura 47: Circuito 5 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

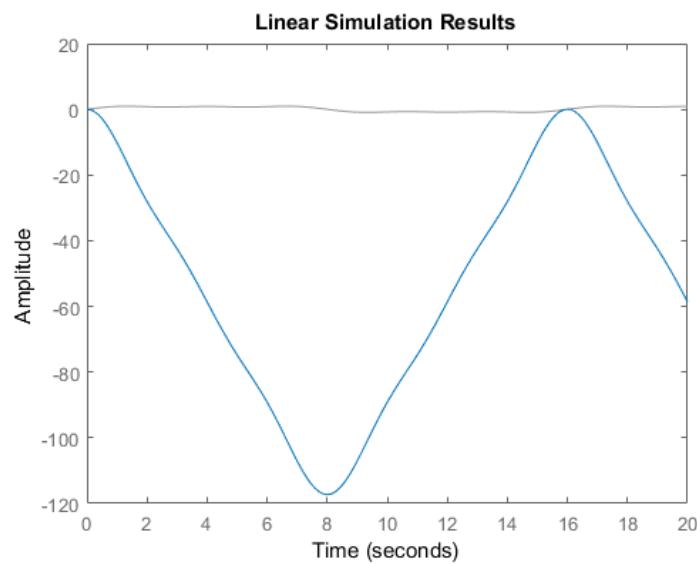


Figura 48: Circuito 5 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

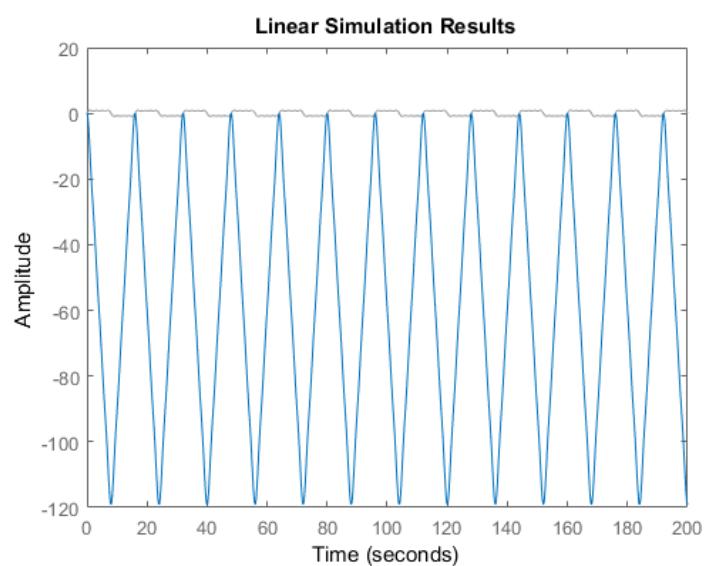


Figura 49: Circuito 5 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

3 Questão 2

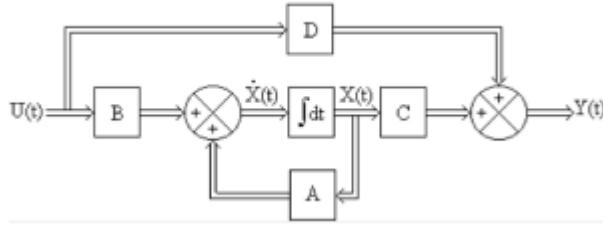


Figura 50: Diagrama de Blocos

3.1 Equações do diagrama

Seguindo as regras definidas no trabalho em relação aos valores de A, B, C e D para o diagrama de blocos, temos:

- a = -22;
- b = 7;
- c = 3;
- d = 4;

Pare que o circuito possua estabilidade BIBO, precisamos que o valor de A seja negativo, caso contrario, o circuito é instável.

Com esses valores obtemos as seguintes equações para o diagrama de blocos abaixo:

- $y(t) = 4u(t) + 3x(t)$ (*Item (e) da questão 2*);
- $B = 7u(t)$;
- $C = 3x(t)$;
- $D = 4u(t)$;
- $x'(t) = 7u(t) - 22x(t)$ (*Item (d) da questão 2*);

Sabendo que $x(t) = \frac{y(t)-4u(t)}{3}$ e $x' = \frac{y'(t)-4u'(t)}{3}$, obtemos a seguinte E.D.O:

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 22y(t) = 4\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 109u(t)$$

Aplicando Laplace, obtemos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{4S + 109}{S + 22}$$

De posse da função de transferência, podemos encontrar os seguintes polos e zeros e o diagrama de Bode:

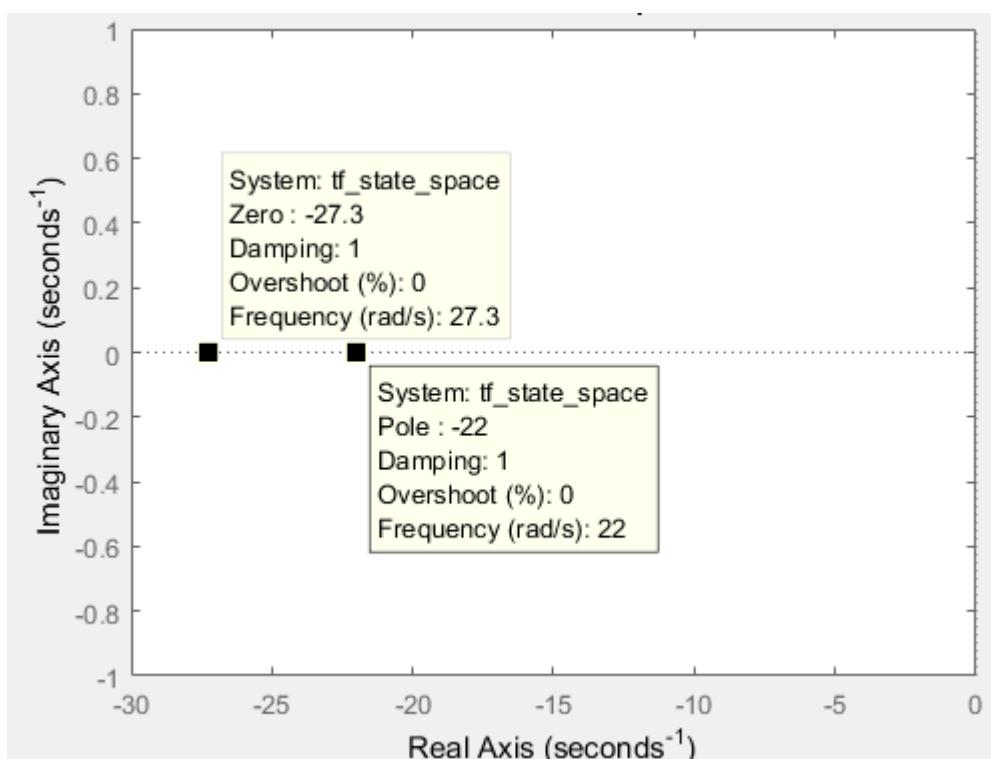


Figura 51: Polos e Zeros

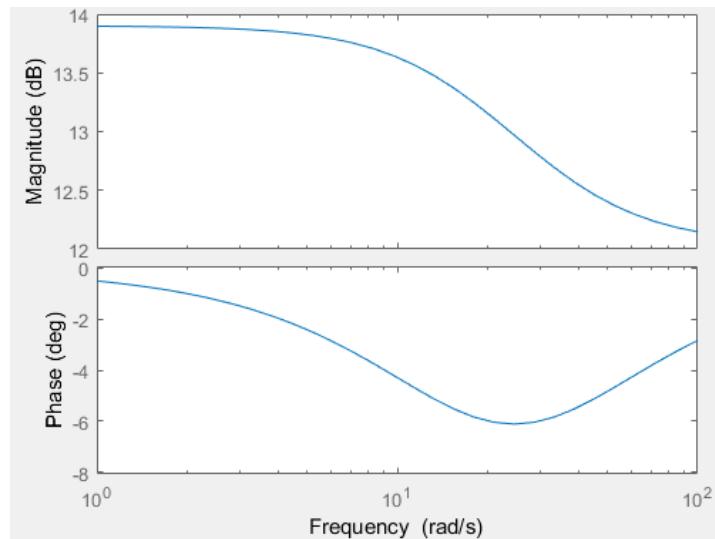


Figura 52: Diagrama de Bode

3.2 Resposta ao degrau unitário

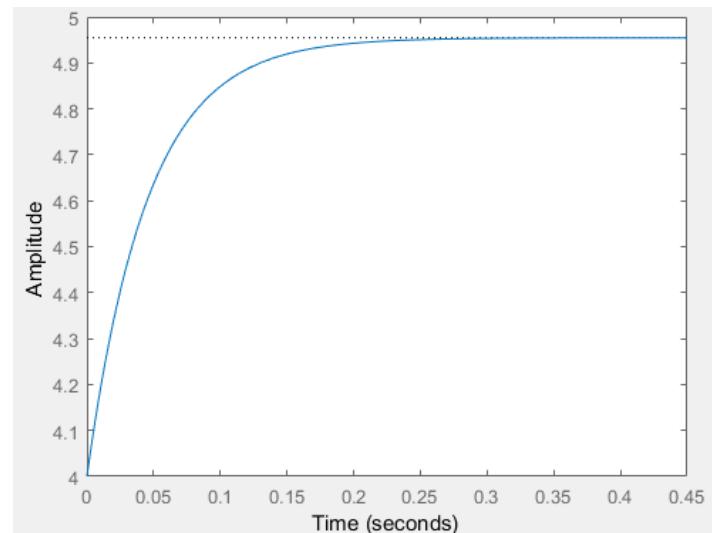


Figura 53: Resposta ao degrau unitário

3.3 Resposta a rampa unitária

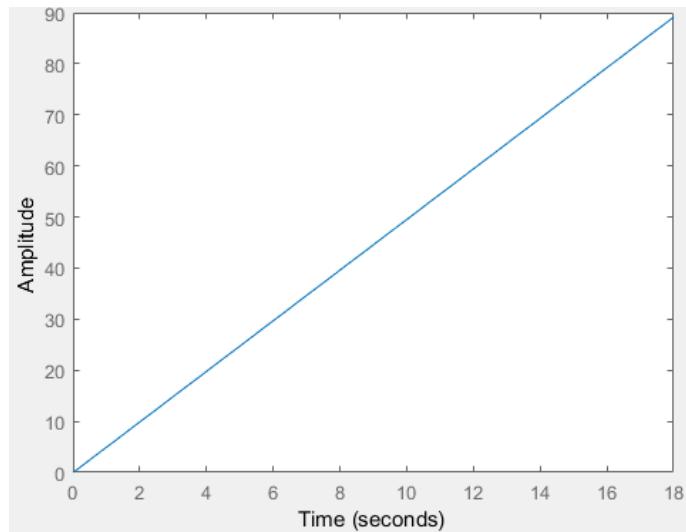


Figura 54: Resposta a rampa unitária

3.4 Resposta a onda quadrada

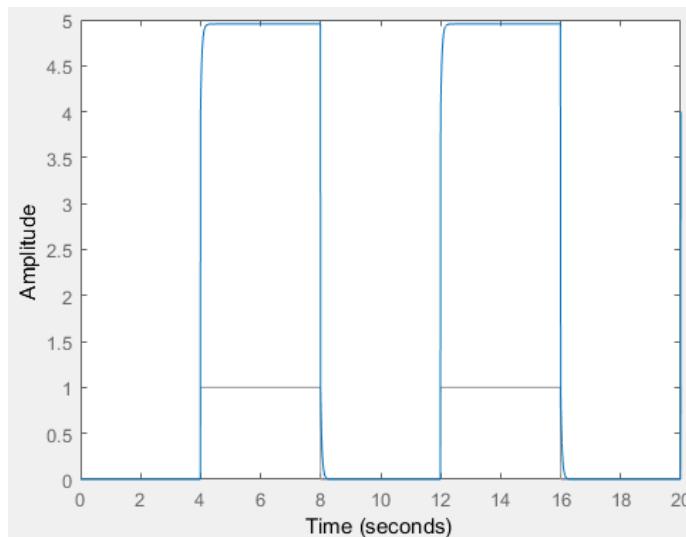


Figura 55: Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$

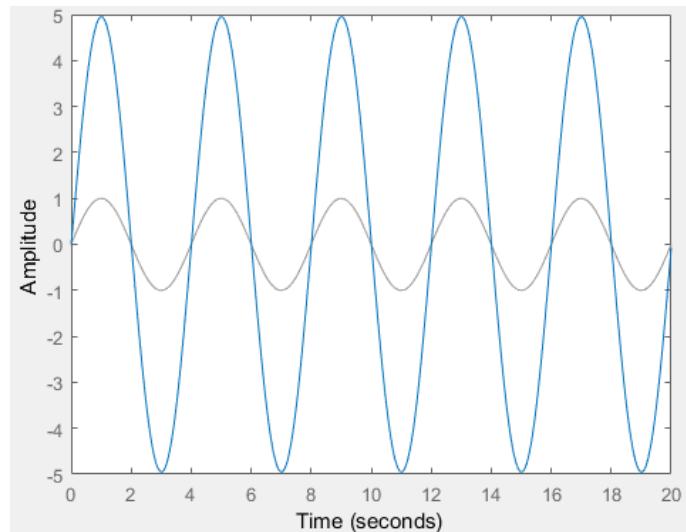


Figura 56: Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$

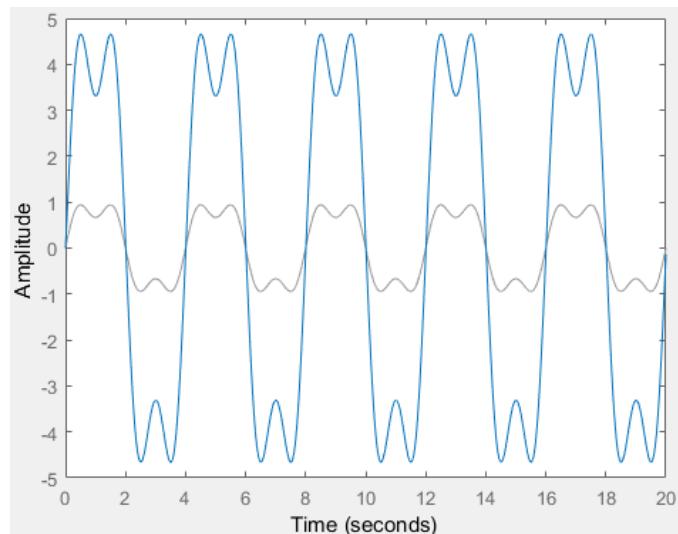


Figura 57: Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$

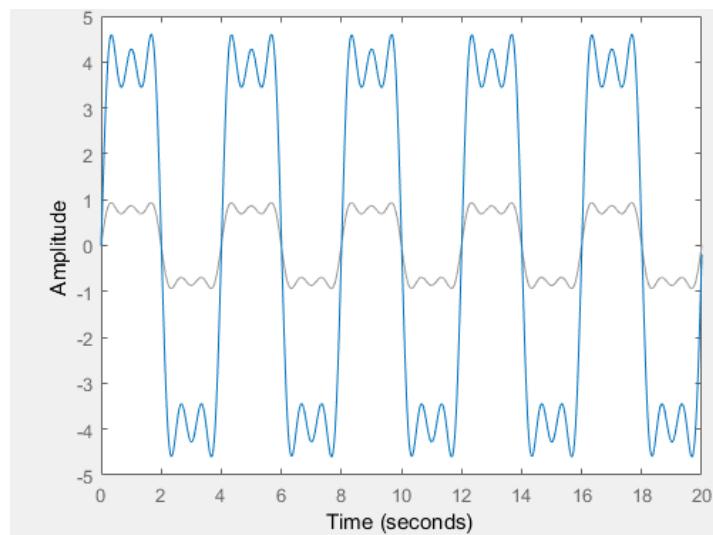


Figura 58: Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$

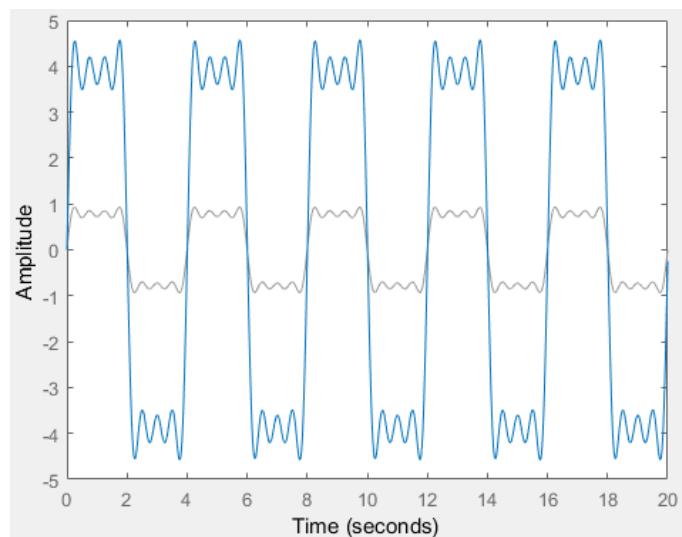


Figura 59: Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$

4 Questão 3

Resolva as questões para os sistemas descritos pelas seguintes funções de transferência:

$$H(S) = \frac{1 + \alpha S}{S^2 + 2S + 2}$$

$$H(S) = \frac{S + 10^4}{S^2 + 2\beta S + 100}$$

4.1 E.D.O dos sistemas

4.1.1 Sistema 1

$$X(S)[1 + \alpha S] = Y(S)[S^2 + 2S + 2] \Rightarrow$$

$$\alpha \frac{\partial x(t)}{\partial t} + x(t) = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial^2 t} + 2 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 2y(t)$$

4.1.2 Sistema 2

$$X(S)[S + 10^4] = Y(S)[S^2 + 2\beta S + 100] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} + 10^4 x(t) = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial^2 t} + 2\beta \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 100y(t)$$

4.2 Polos e zeros

4.2.1 Variando em α

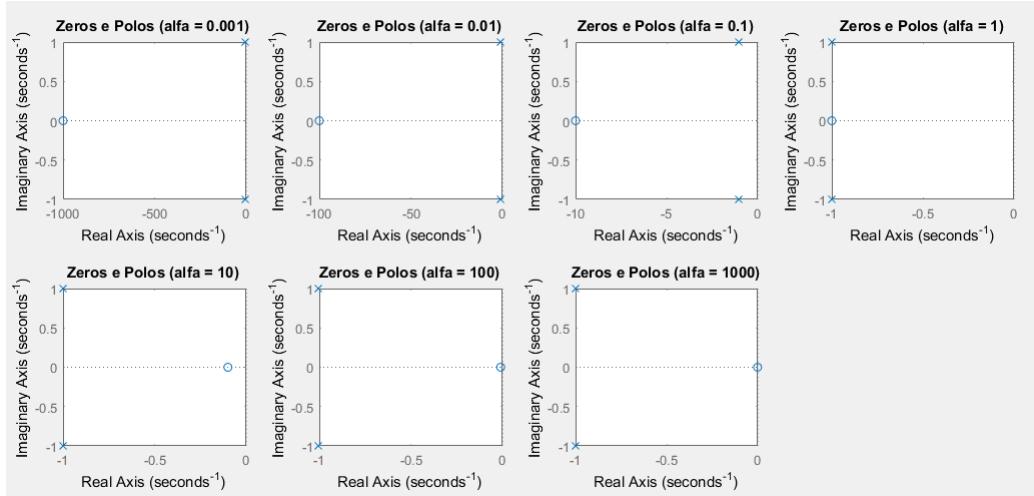


Figura 60: Polos e Zeros variando em α

4.2.2 Variando em β

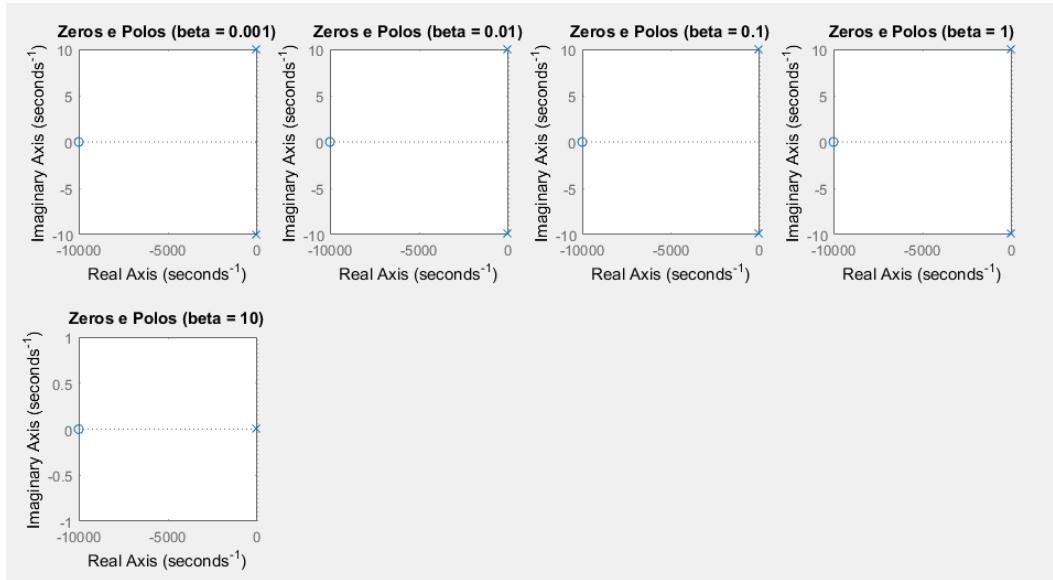


Figura 61: Polos e Zeros variando em β

4.3 Diagrama de Bode

4.3.1 Variando em α

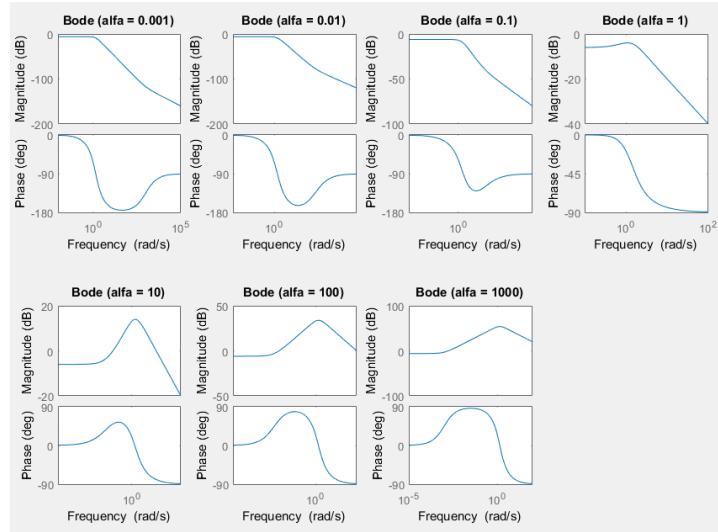


Figura 62: Diagrama de Bode variando em α

4.3.2 Variando em β

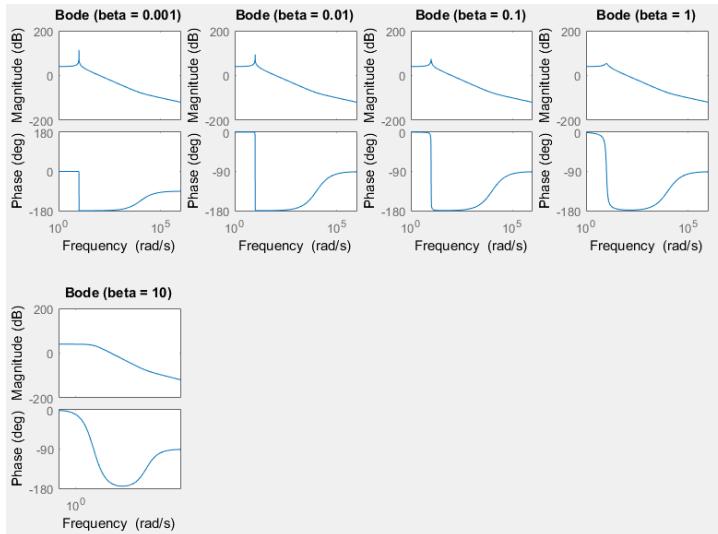


Figura 63: Diagrama de Bode variando em β

4.4 Resposta ao Degrau Unitário

4.4.1 Variando em α

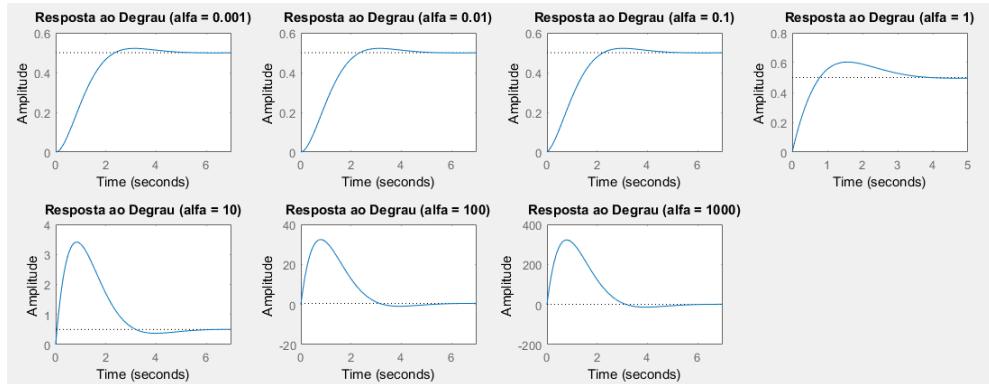


Figura 64: Resposta ao Degrau Unitário variando em α

4.4.2 Variando em β

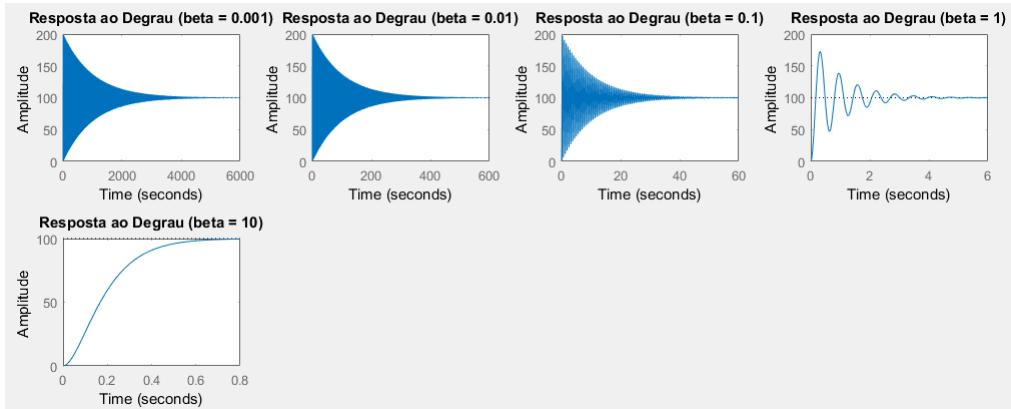


Figura 65: Resposta ao Degrau Unitário variando em β

4.5 Resposta a Rampa Unitária

4.5.1 Variando em α

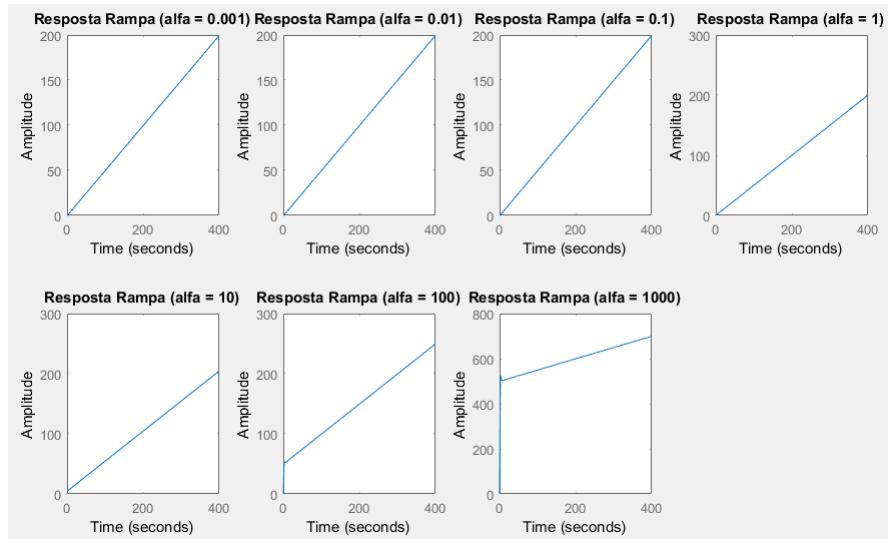


Figura 66: Resposta a rampa Unitária variando em α

4.5.2 Variando em β

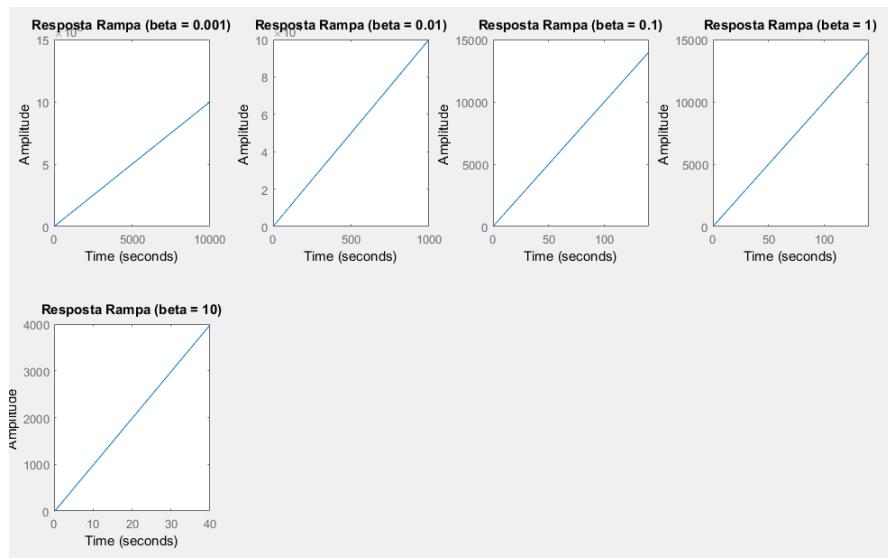


Figura 67: Resposta a rampa Unitária variando em β

4.6 Resposta a onda quadrada

4.6.1 Variando em α

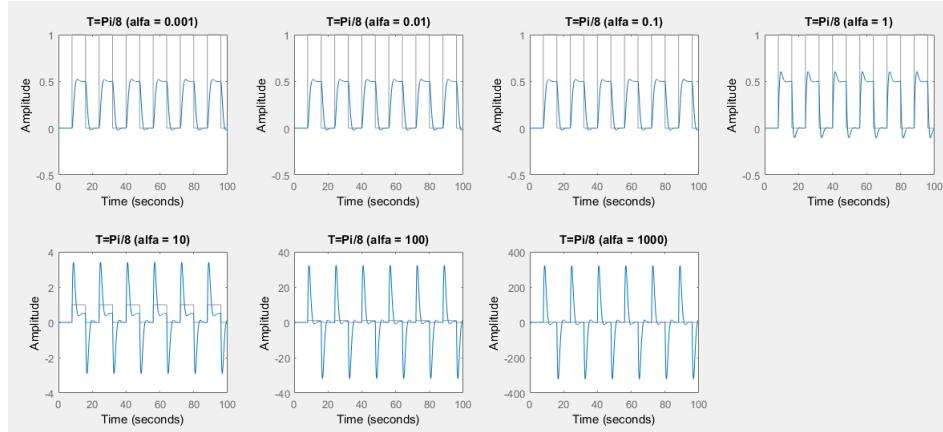


Figura 68: Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

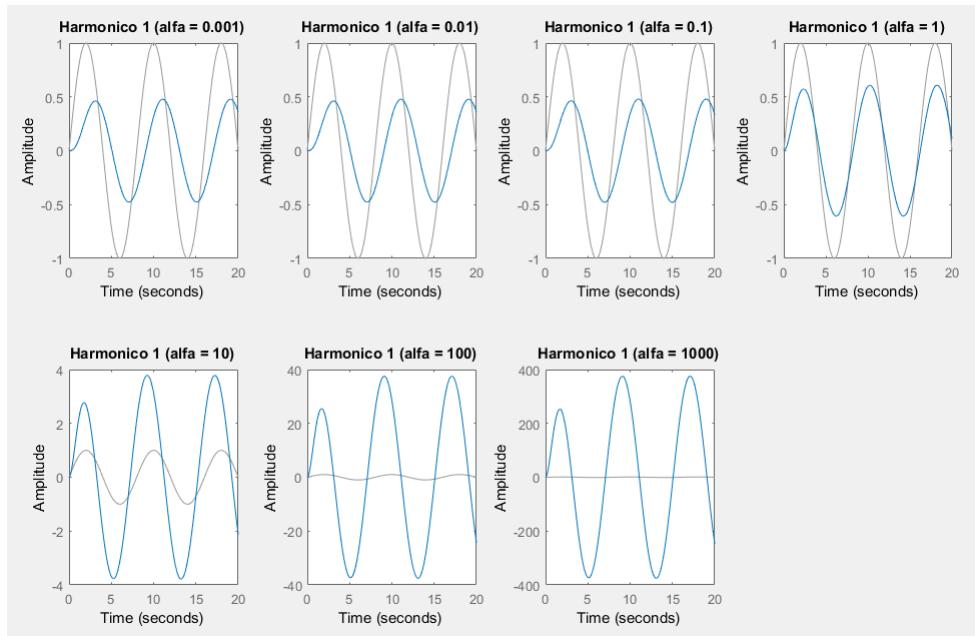


Figura 69: Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$

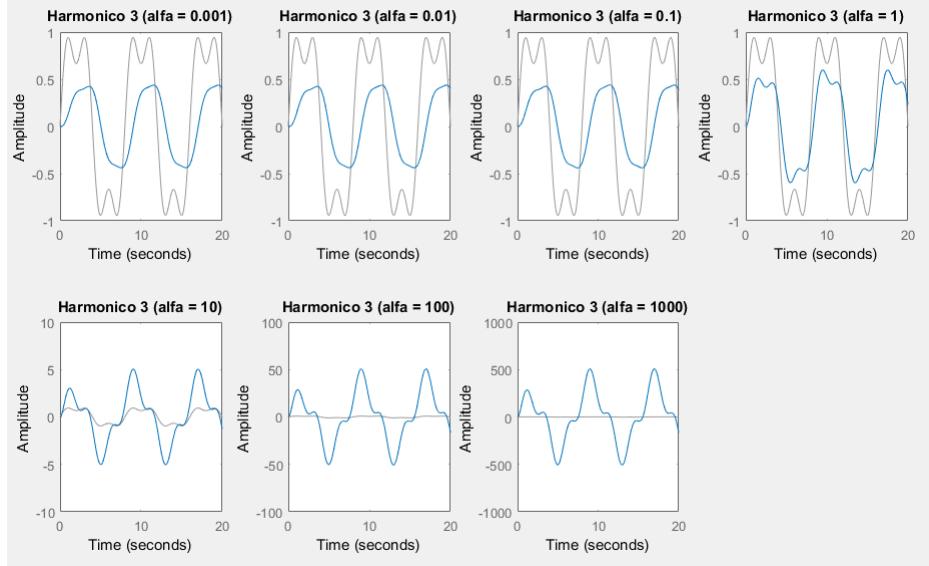


Figura 70: Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$

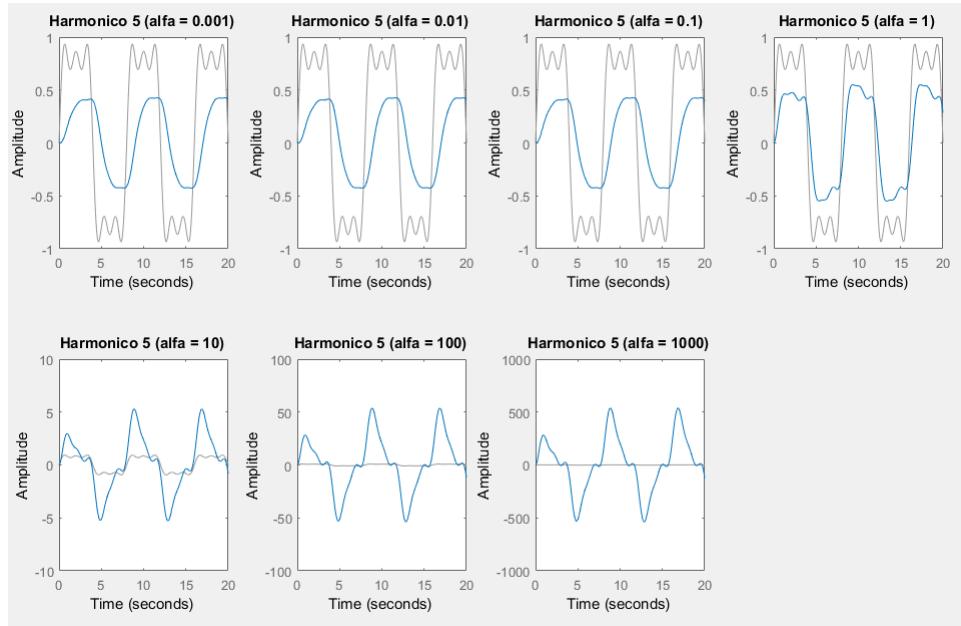


Figura 71: Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$

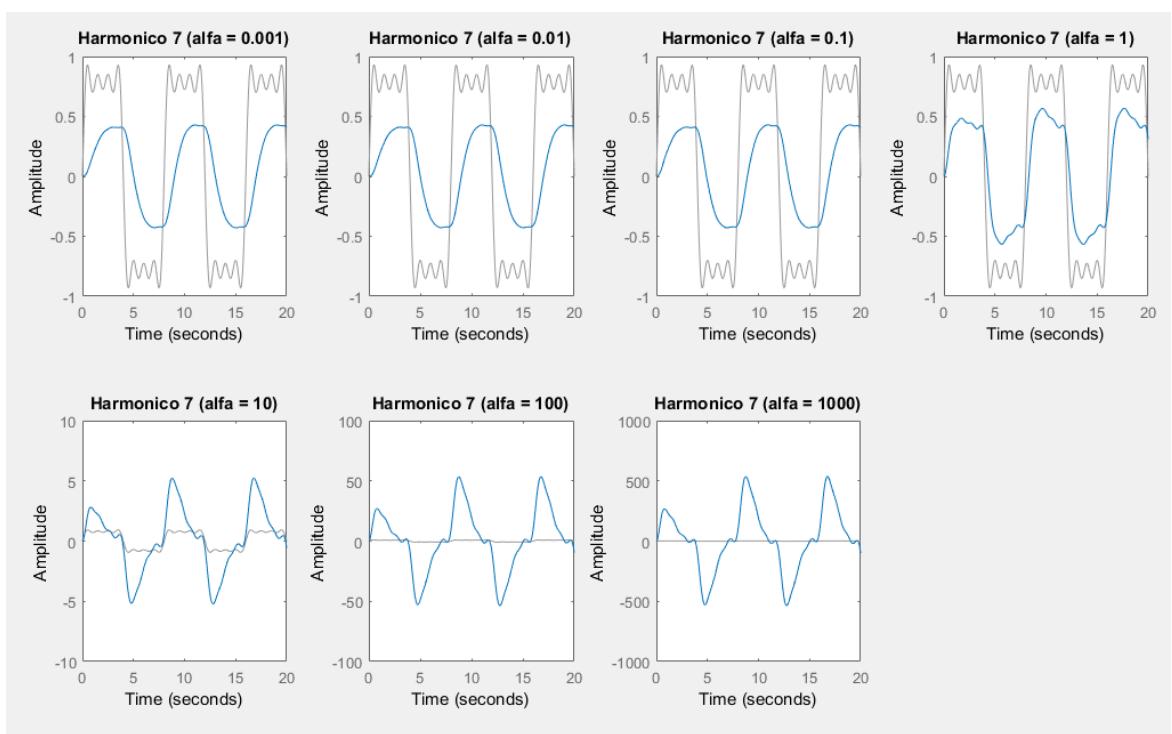


Figura 72: Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$

4.6.2 Variando em β

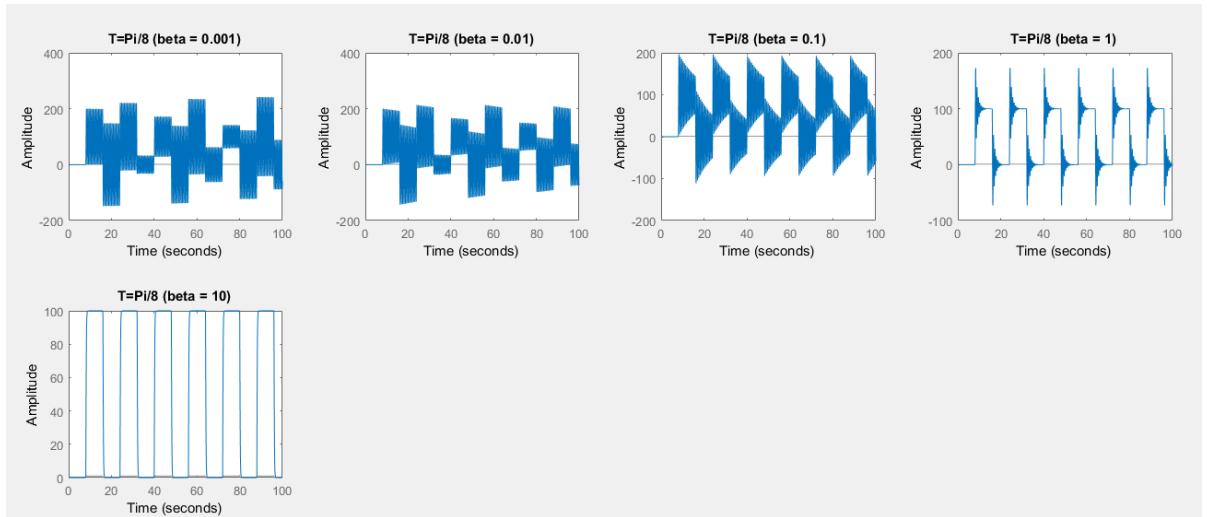


Figura 73: Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

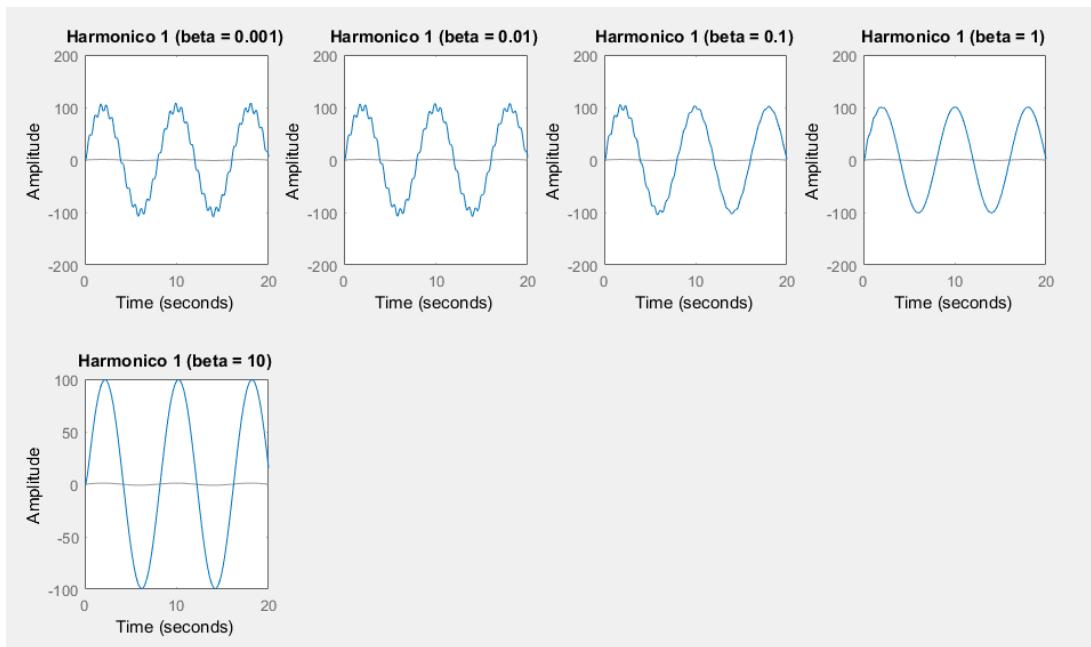


Figura 74: Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$

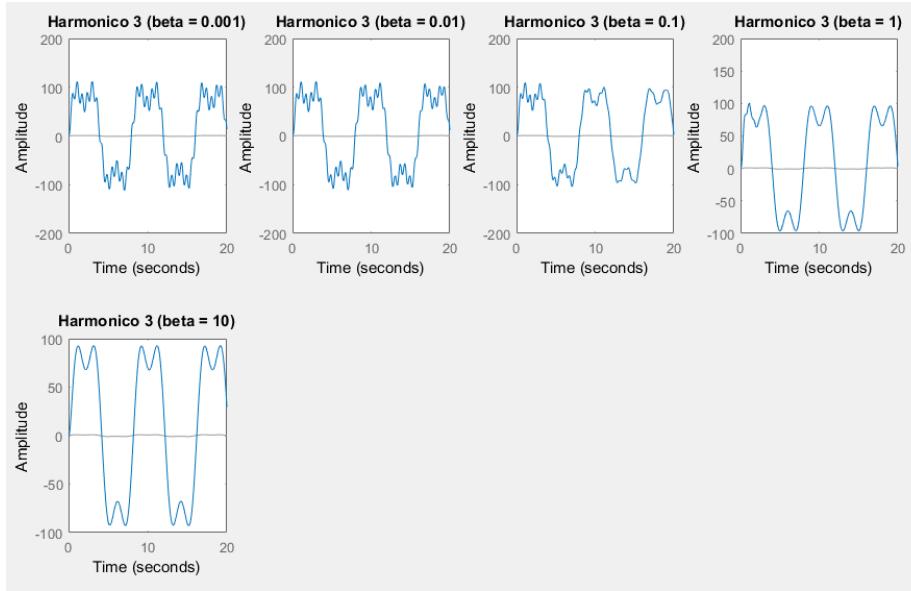


Figura 75: Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$

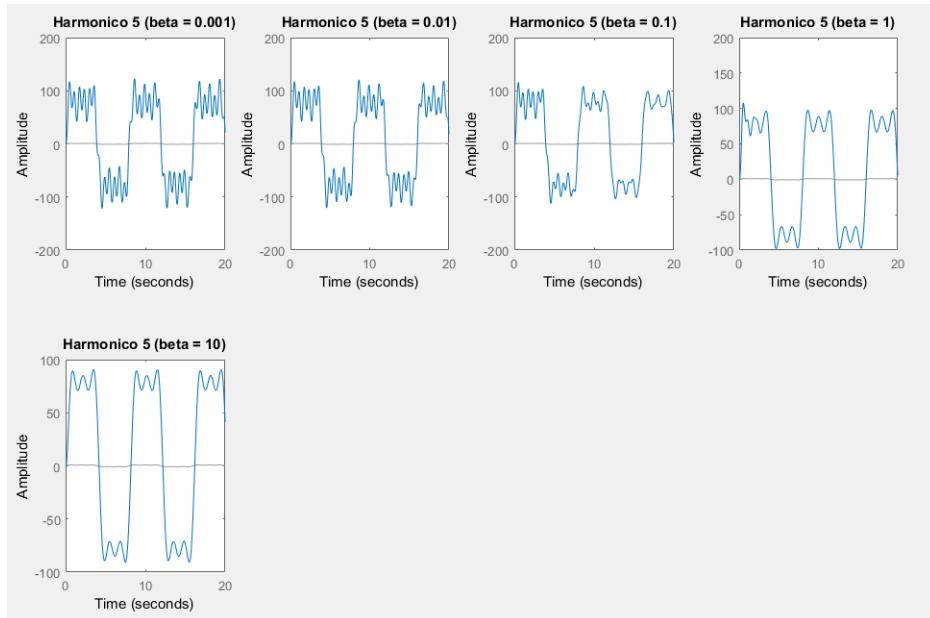


Figura 76: Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$

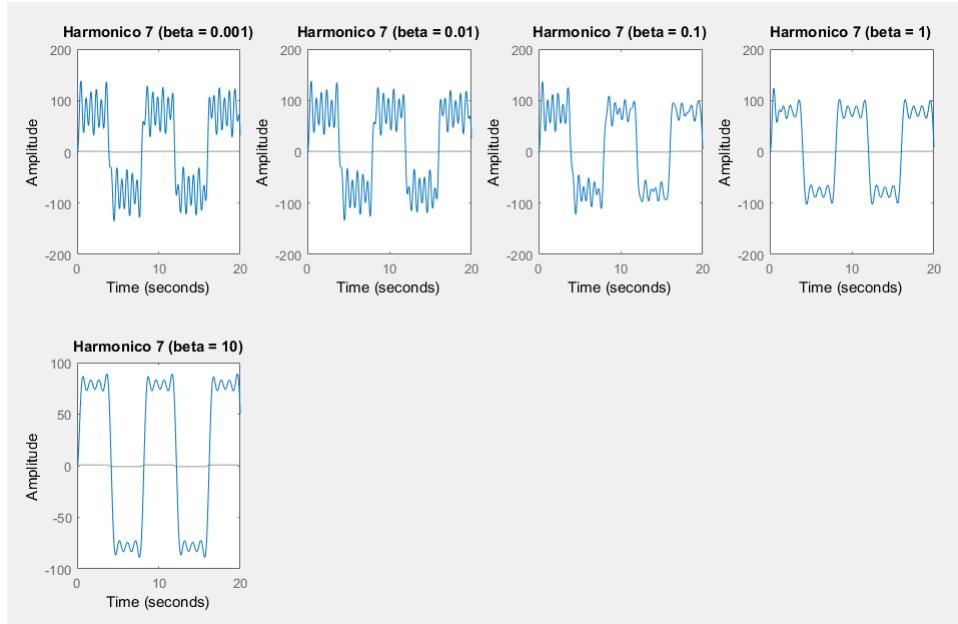


Figura 77: Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$

4.7 Resposta a cossenoides

4.7.1 Variando frequências nos valores de α

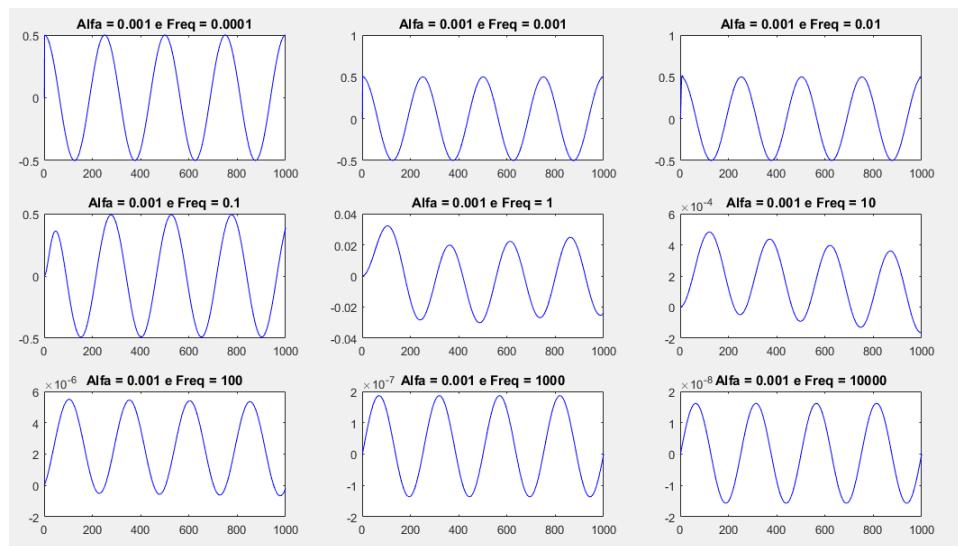


Figura 78: Resposta para $\alpha = 0.001$ em frequências variantes

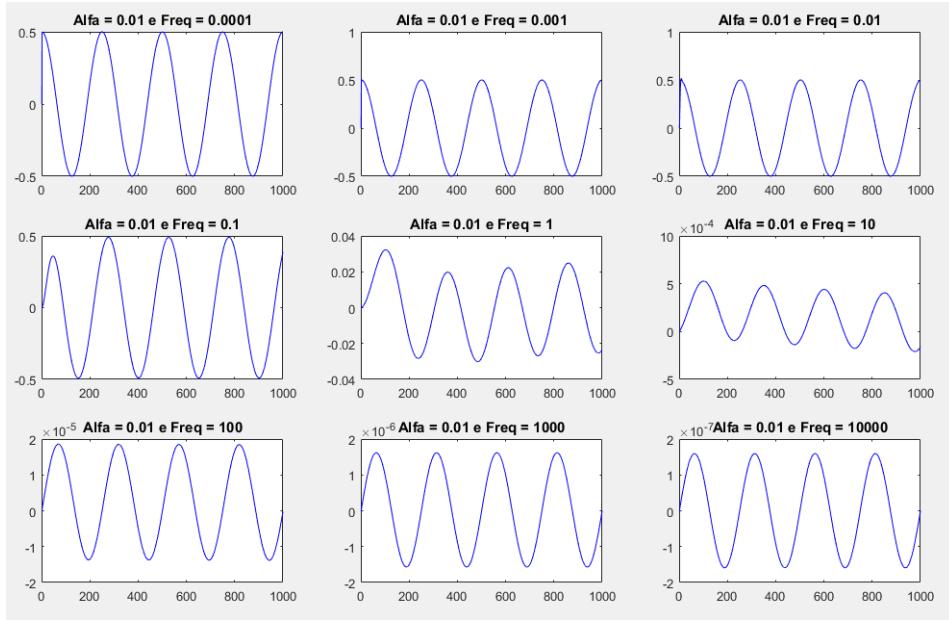


Figura 79: Resposta para $\alpha = 0.01$ em frequências variantes

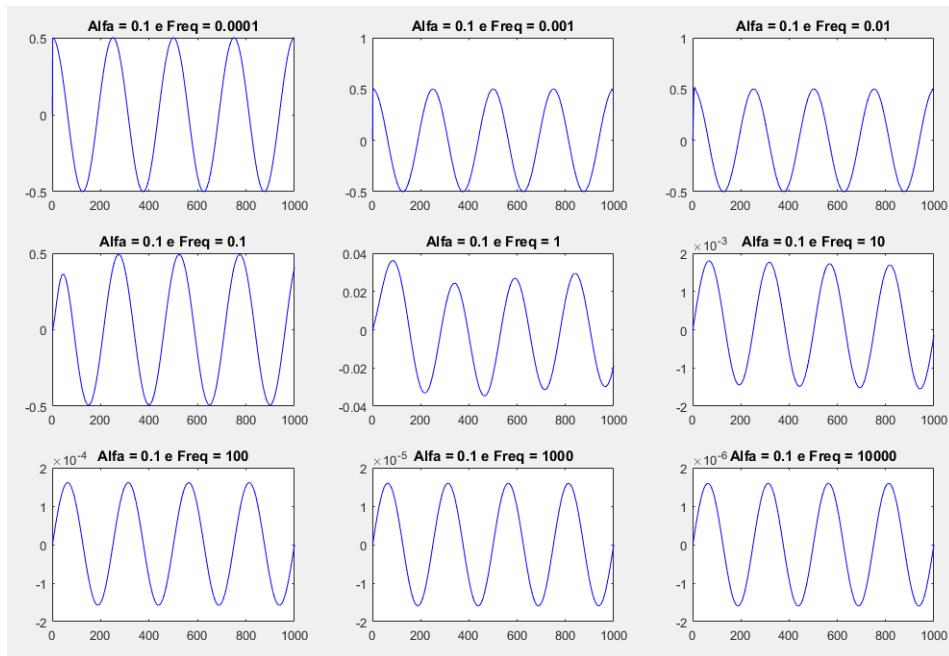


Figura 80: Resposta para $\alpha = 0.1$ em frequências variantes

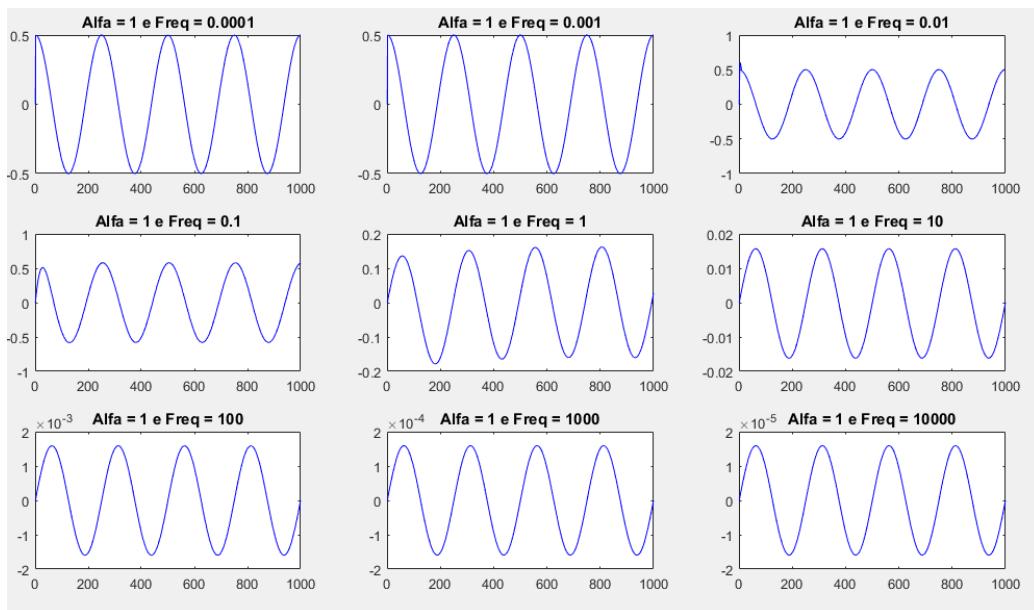


Figura 81: Resposta para $\alpha = 1$ em frequências variantes

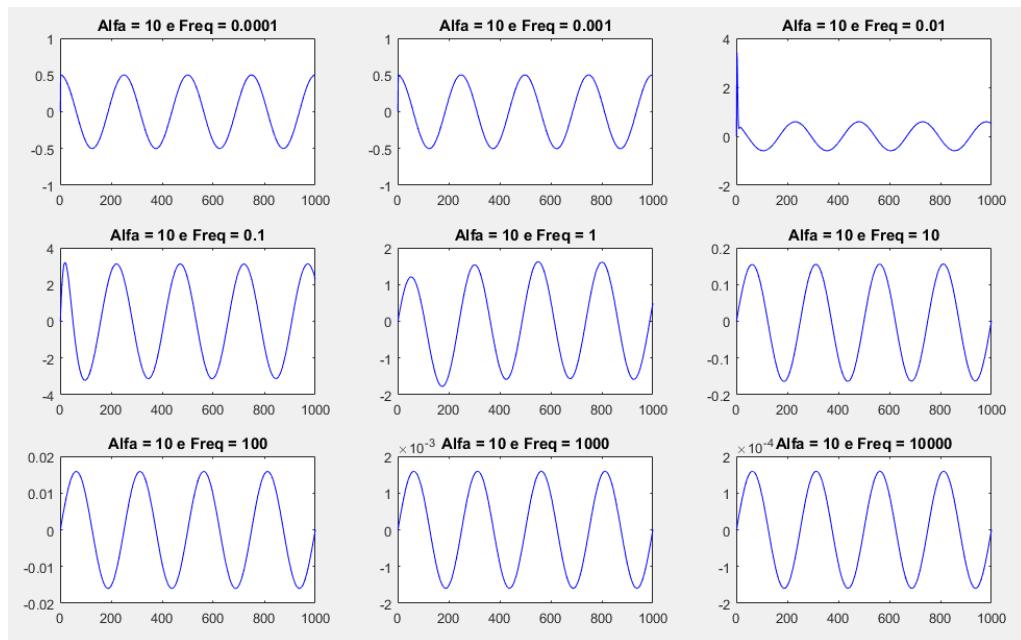


Figura 82: Resposta para $\alpha = 10$ em frequências variantes

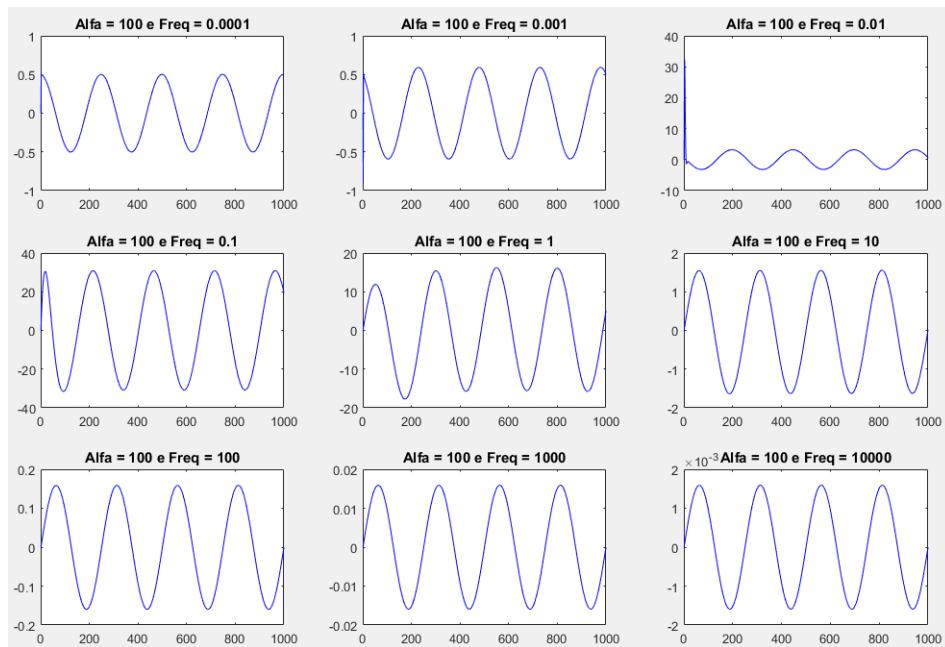


Figura 83: Resposta para $\alpha = 100$ em frequências variantes

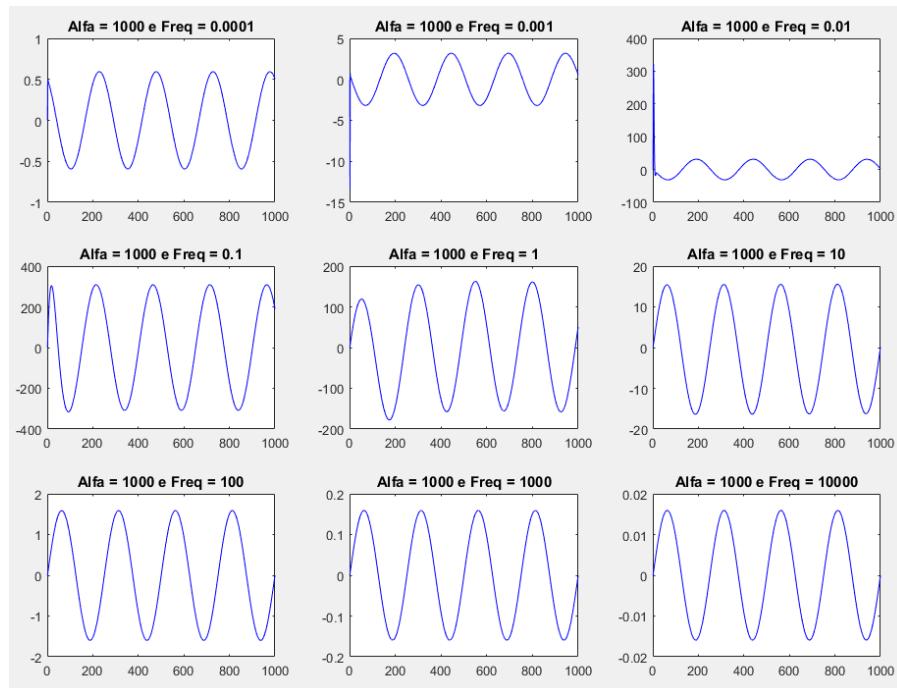


Figura 84: Resposta para $\alpha = 1000$ em frequências variantes

4.7.2 Variando frequências nos valores de β

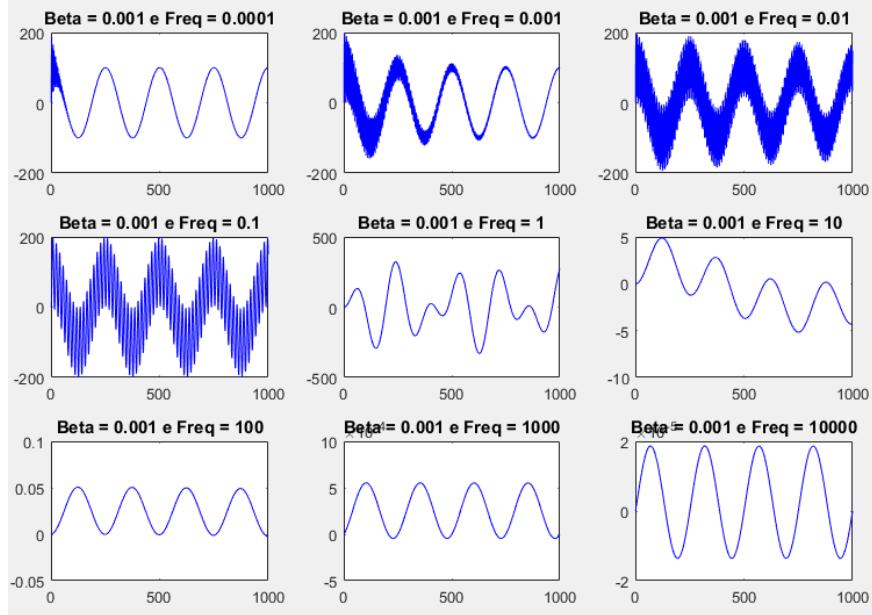


Figura 85: Resposta para $\beta = 0.001$ em frequências variantes

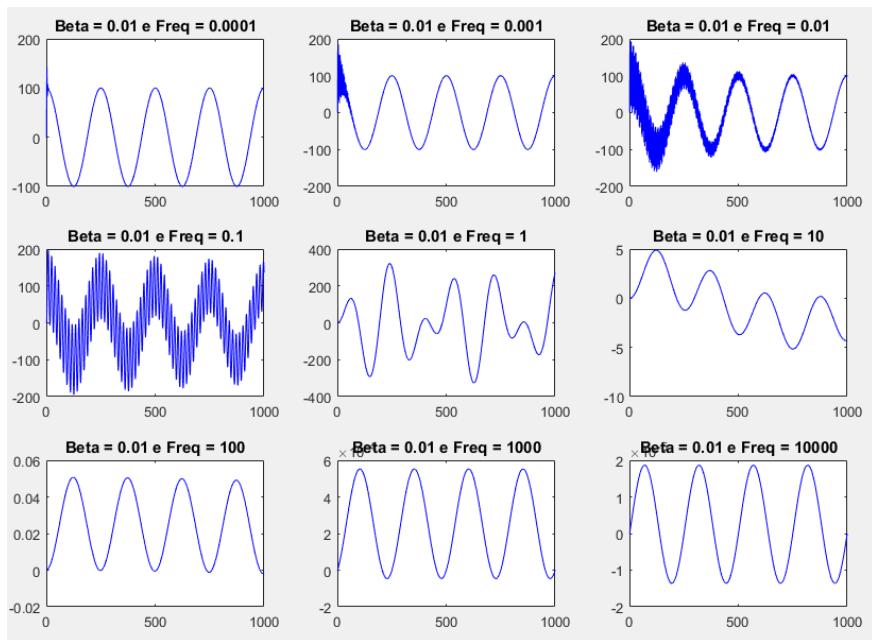


Figura 86: Resposta para $\beta = 0.01$ em frequências variantes

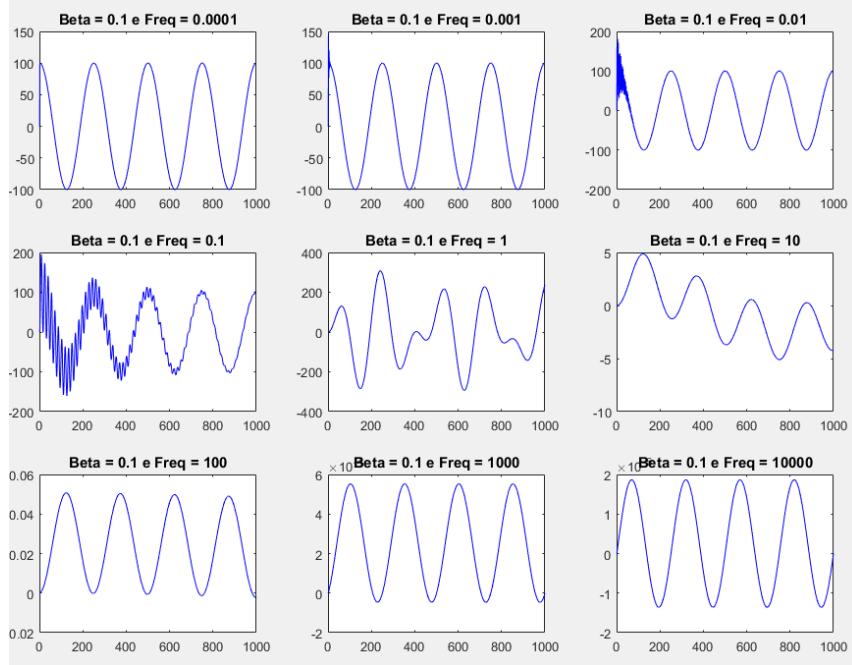


Figura 87: Resposta para $\beta = 0.1$ em frequências variantes

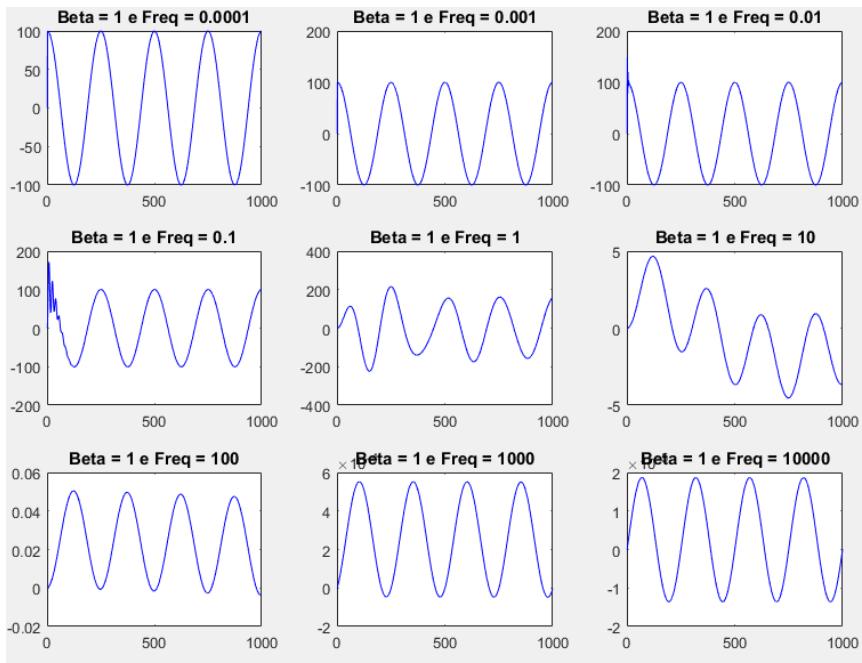


Figura 88: Resposta para $\beta = 1$ em frequências variantes

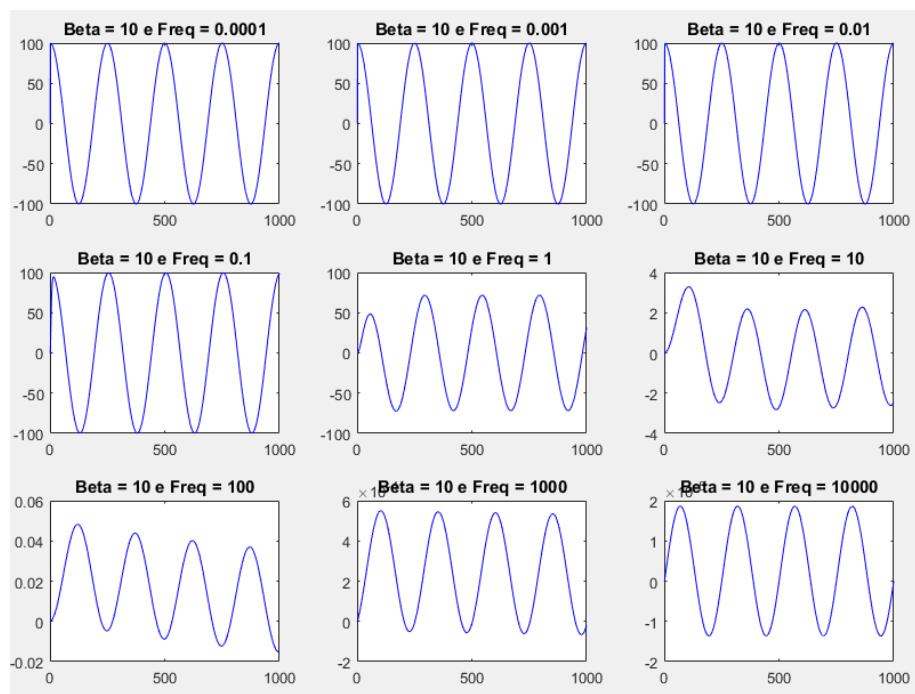


Figura 89: Resposta para $\beta = 10$ em frequências variantes

5 Questão 4

5.1 Circuito III

5.1.1 Análise da resposta na Frequência de Corte

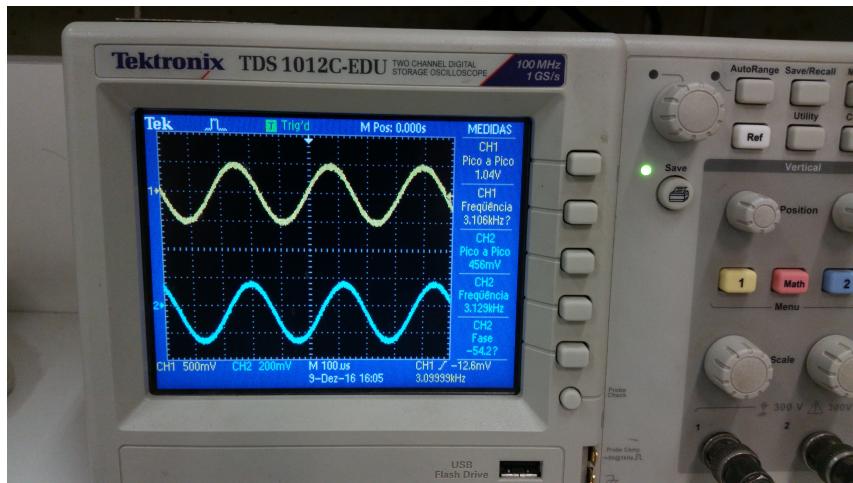


Figura 90: Análise da resposta na Frequência de corte

5.1.2 Análise da resposta na Frequência em $0.1w_c$

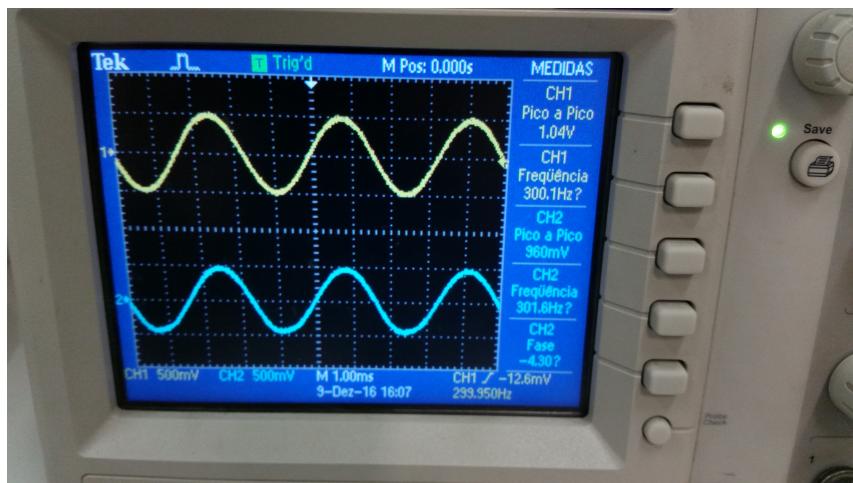


Figura 91: Análise da resposta na Frequência de corte uma década antes

5.1.3 Análise da resposta na Frequência em $10w_c$

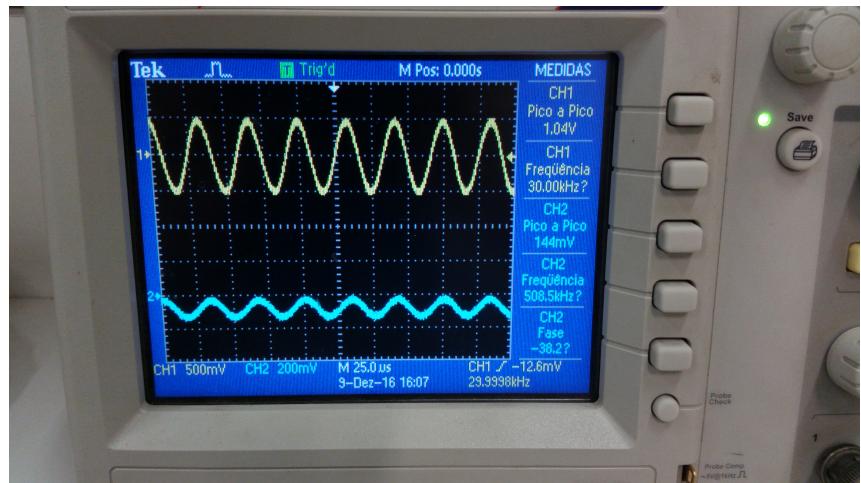


Figura 92: Análise da resposta na Frequência de corte uma década depois

5.1.4 Harmônicos de Fourier

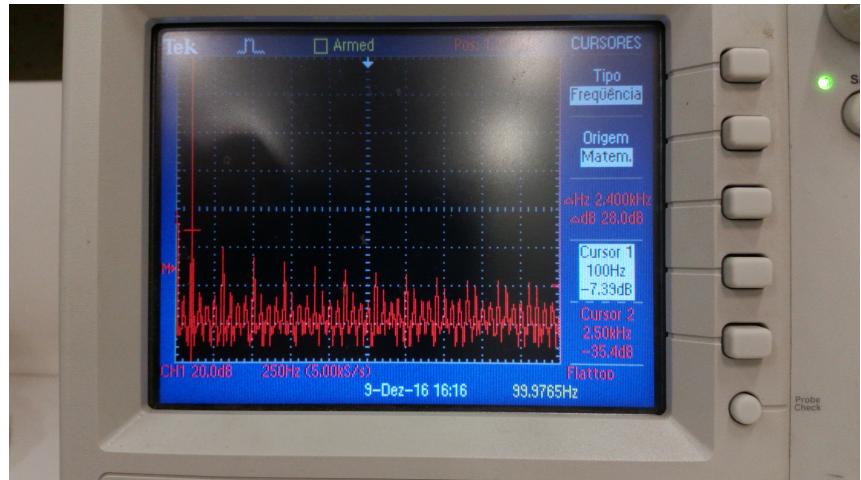


Figura 93: Primeiro harmônico

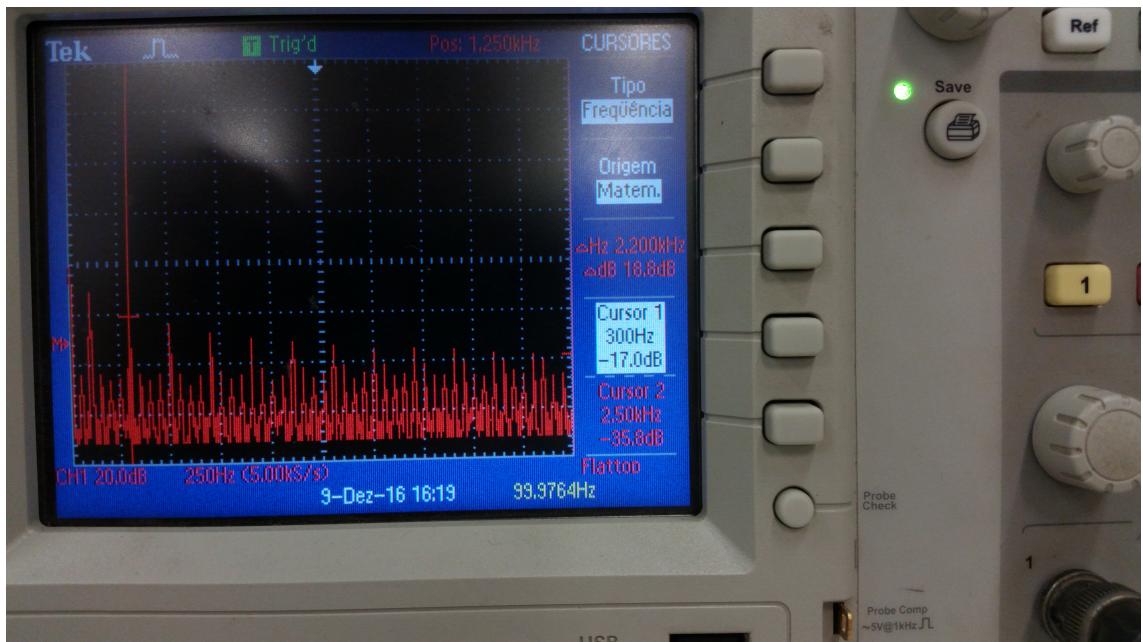


Figura 94: Terceiro harmônico

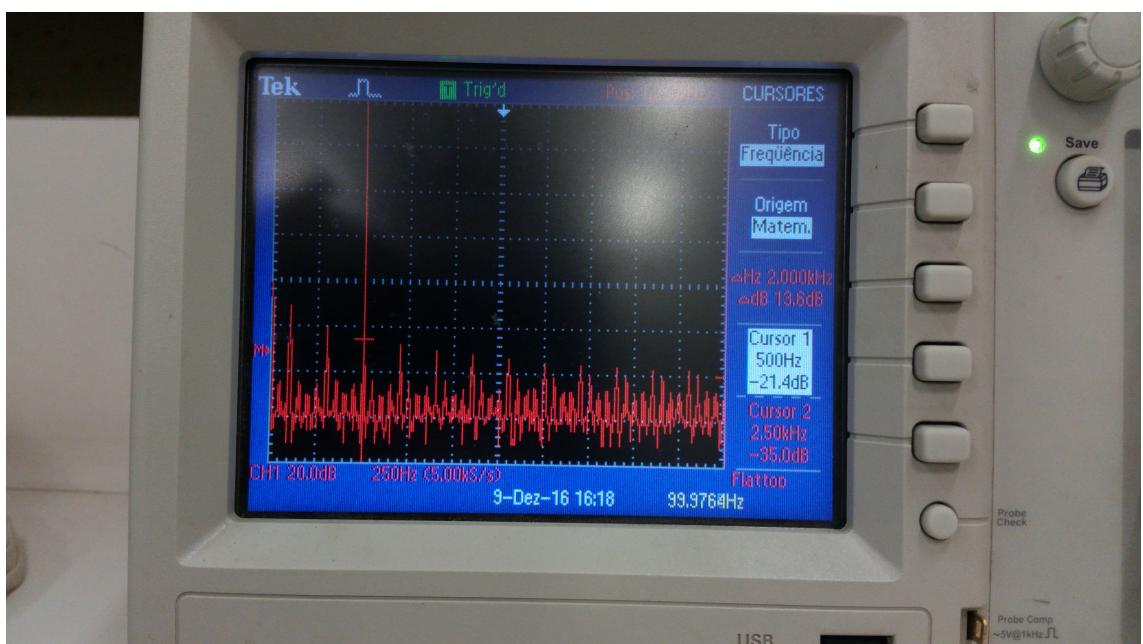


Figura 95: Quinto harmônico

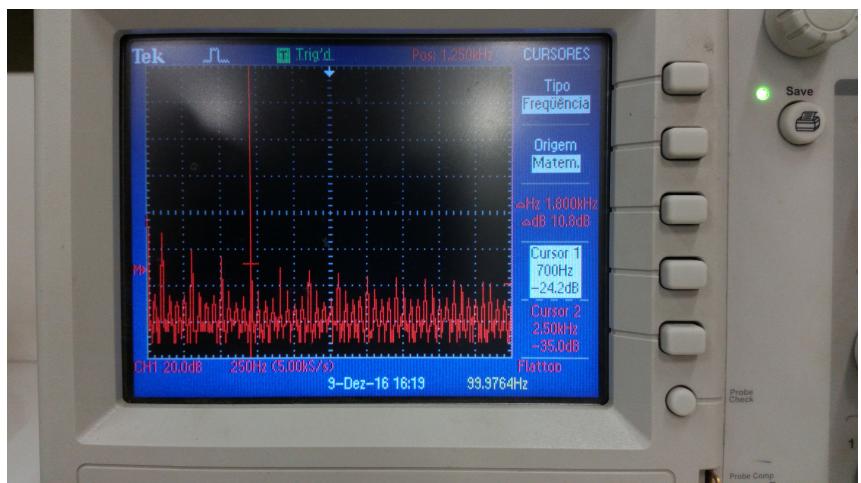


Figura 96: Sétimo harmônico

5.1.5 Respostas para diferentes frequências

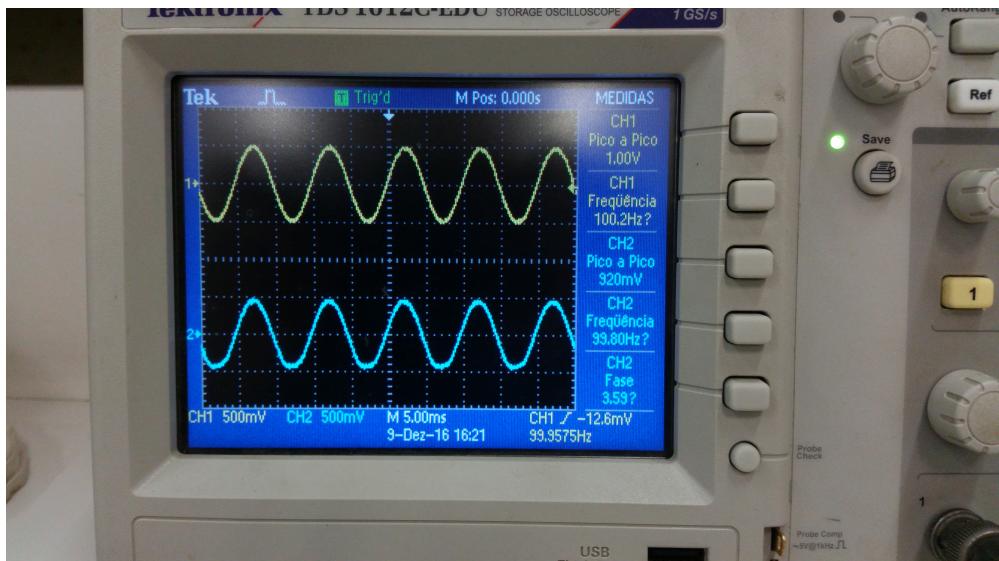


Figura 97: Cossenóide 100Hz

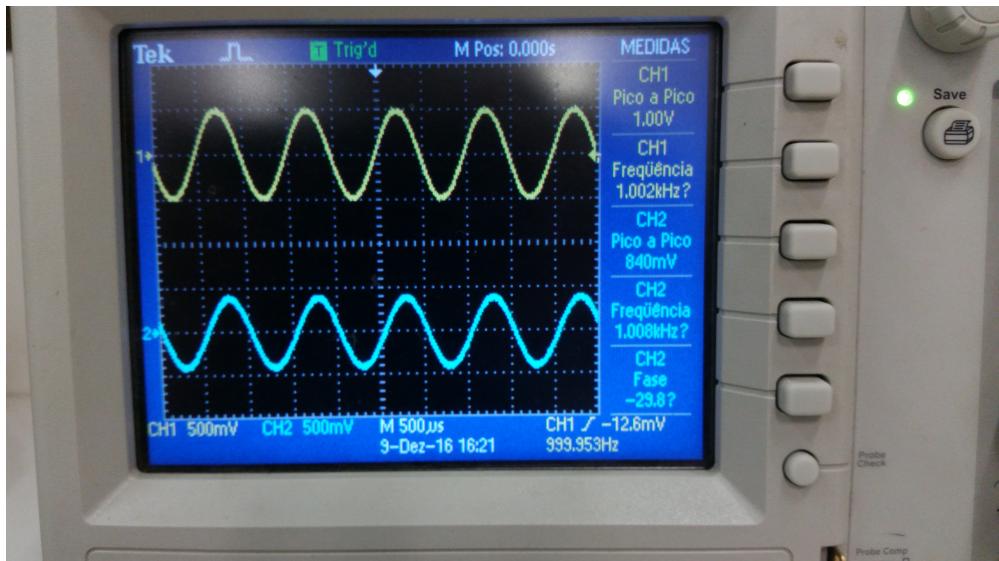


Figura 98: Cossenóide 1kHz

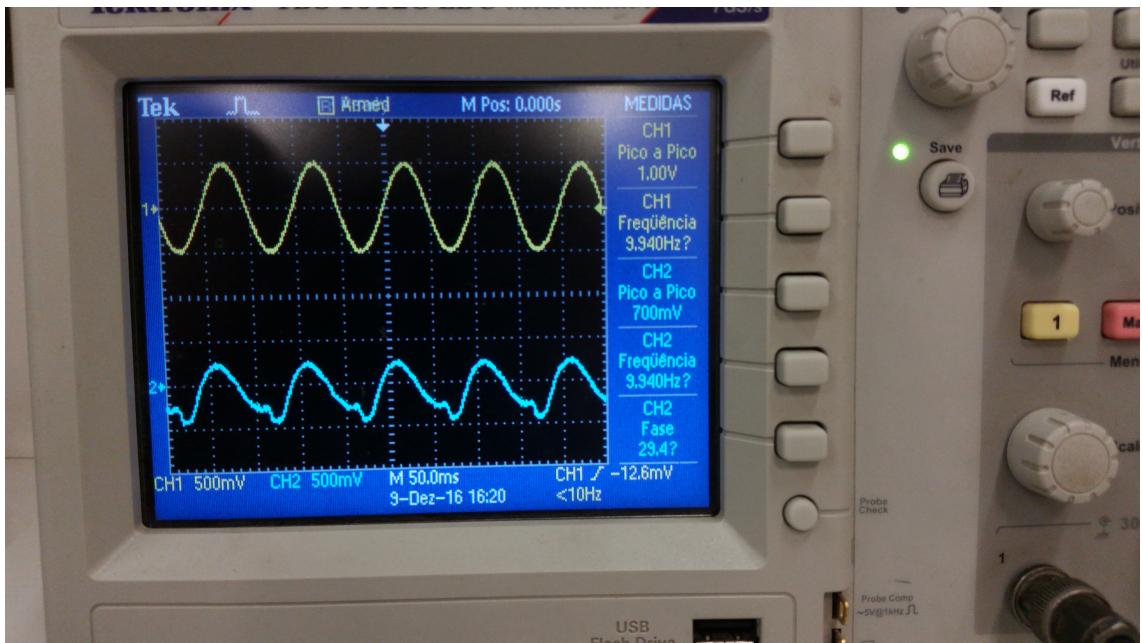


Figura 99: Cossenoide 10kHz

6 Conclusão

Boa parte desse trabalho foi reaproveitado do meu trabalho feito no período passado, com exceção das seções 1 2 e 5. Em especial adicionei os conhecimentos utilizados para resolver o trabalho explicando todos os artifícios para resolver cada um dos itens solicitados e remodelei os circuitos com valores realísticos (Removi os indutores de 1H :) é muito fio para enrolar!!) .

O trabalho foi bastante importante para fixar alguns conceitos aprendidos na sala, dos quais eu posso listar como mais importante:

- Analise dos circuitos;
- Transformar E.D.O do circuito em funções de transferência através da transformada de Laplace;
- Verificar como os polos e o zeros influenciam na pratica a plotagem do diagrama de bode;
- Entender como o valor dos componentes influenciam nos polos e zeros e nas frequências de filtragem;
- Compreender superficialmente o funcionamento de filtros;

- Representação de circuitos em diagrama de blocos;
- Encontrar a resposta do sistema para diferentes sinais através de sua função de transferência.
- Verificar que a resposta ao somatório dos harmônicos de fourier se aproxima do sinal normal conforme o numero de harmônicos crescem;
- Aprender a realizar simulações no MatLab e no Octave;
- Montagem de circuito na prática;

7 Referências

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Buffer_amplifier;
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_filter;
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Low-pass_filter;
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/Band-pass_filter;
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter;
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Sallen-Key_topology;
- [7] <https://en.wikipedia.org/wiki/Integrator>;
- [8] https://en.wikibooks.org/wiki/Signals_and_Systems;
- [9] http://www.lps.ufrj.br/~natmourajr/EEL350/2016_01/slides_SL1.pdf;
- [10] B. P. Lathi, Linear Systems and Signals. Oxford, UK: Oxford University Press, 2nd ed., 2009.
- [11] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, Signals and Systems (2Nd Ed.). Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.