Universidade Federal do Rio de Janeiro

Trabalho Final de Sistemas Lineares I

Alunos	Igor Abreu da Silva
DRE	112053874
Curso	Engenharia Eletrônica
Turma	2016/1
Professor	Natanael Nunes de Moura Junior

Rio de Janeiro, 15 de Julho de 2016

Conteúdo

Lista de Figuras

1 Questão 1

1.1 Circuito 1

Nesta sessão será resolvida toda a parte necessária para encontra a função/utilidade de cada um dos circuitos. Analisaremos todos os pontos correspondentes aos itens **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(d)**, **(e)** e **(f)** do trabalho final.

Serão assumidos aqui que os sistemas encontram-se o zerados no instante $t = 0^{-}$.

1.1.1 Determinar a função do circuto

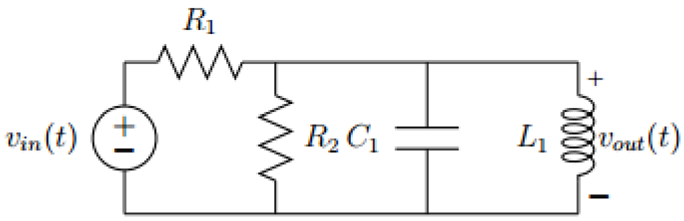

Figura 1: Circuito 1

Podemos modelar o circuito 1 em relação ao nó após R1. Teríamos a seguinte equação:

$$\frac{V_{in} - V_{out}}{R1} - \frac{V_{out}}{R2} - \frac{C\partial V_{out}}{\partial t} - \frac{1}{L}\int V_{out}\partial t = 0$$

Para encontrarmos a E.D.O do circuito, vamos derivar toda esta expressão e separar V_{out} e V_{in}, encontrando a seguinte relação:

$$\frac{\partial V_{in}}{\partial t}\left(\frac{1}{R_1}\right) = \frac{C\partial^2 V_{out}}{\partial t^2} + \frac{\partial V_{out}}{\partial t}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{V_{out}}{L}$$

Em posse da E.D.O, utilizaremos Laplace para encontrar a função de Transferência do Circuito.

$$X(S)\left(\frac{1}{R_1}\right) = Y(S)\left(S^2 C + S\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{L}\right) \Rightarrow$$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{SR_2L}{S^2\left(R_1R_2LC\right) + S\left(R_1L + R_2L\right) + R_1R_2}$$

Afim de facilitar os cálculos, tomaremos os seguintes valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 10\Omega$;
- $R_2 = 100\Omega$;
- $C = 1F$;
- $L = 1H$;

Apos aplicar os valores comercias em H(S), temos:

$$H(S) = \frac{100S}{1000S^2 + 110S + 110}$$

Utilizando essa função no MatLab para encontrar os polos (quando se zera o denominador), zeros (quando se zera o numerador) e o diagrama de Bode, obtemos o seguintes gráficos:

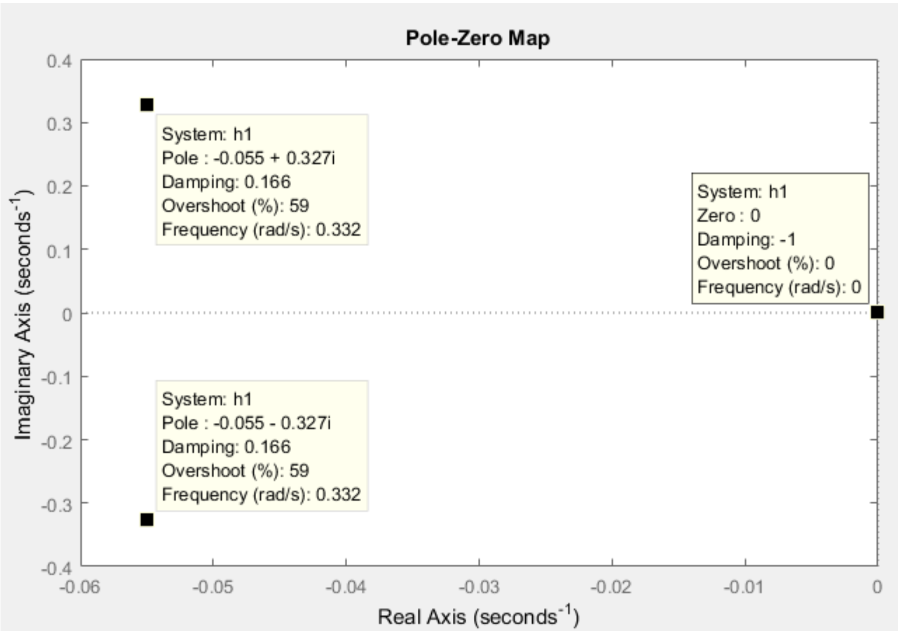

Figura 2: Circuito 1 - Polos e Zeros

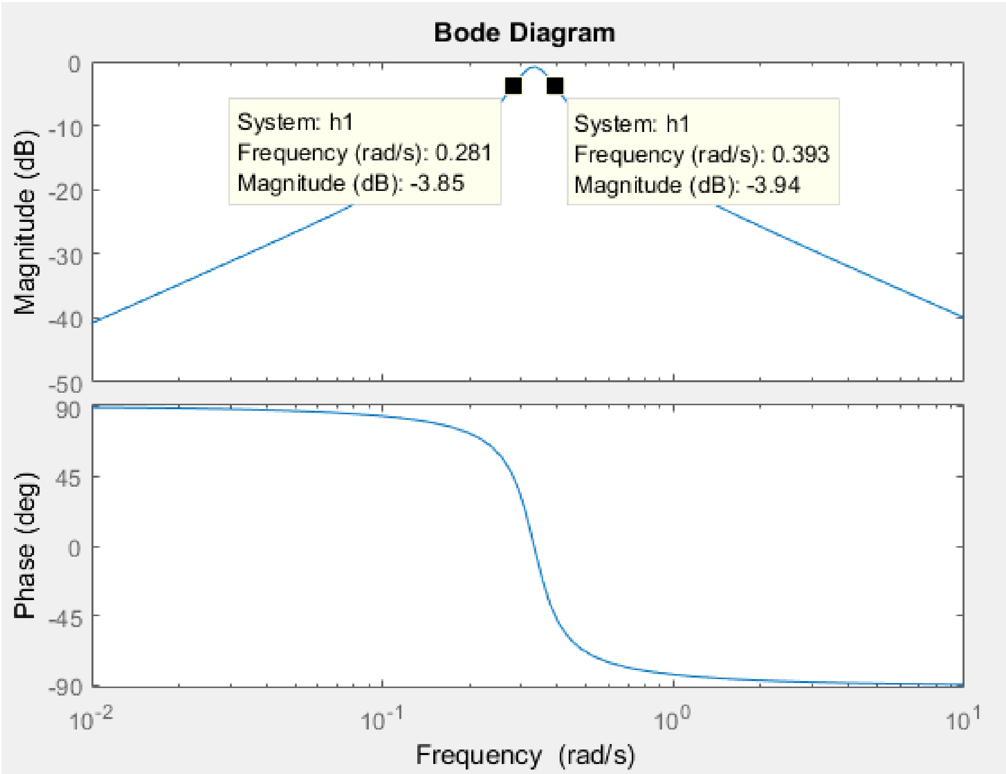

Figura 3: Circuito 1 - Diagrama de Bode

Analisando-se este circuito, pode-se afirmar que o mesmo é um filtro passa faixa operando na largura de banda de aproximadamente 0.11 rad/sec em um intervalo [0.28, 0.39] rad/sec.

1.1.2 Resposta ao degrau unitário

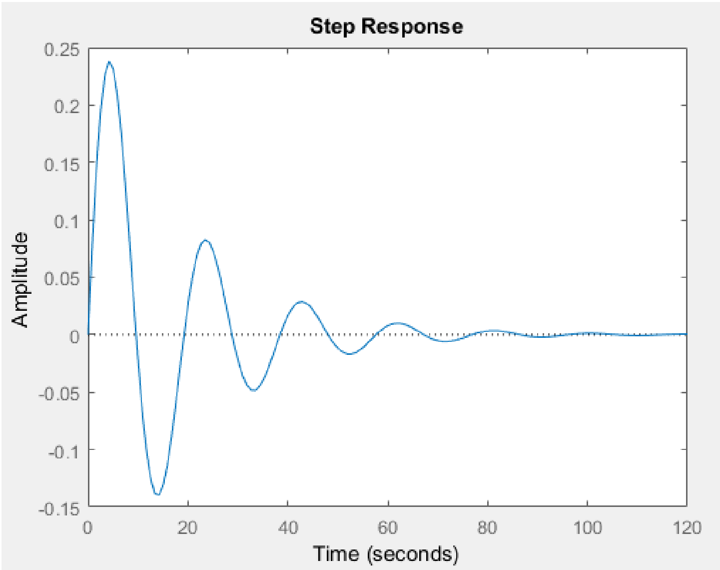

Figura 4: Circuito 1 - Resposta ao degrau unitário

1.1.3 Resposta a rampa unitário

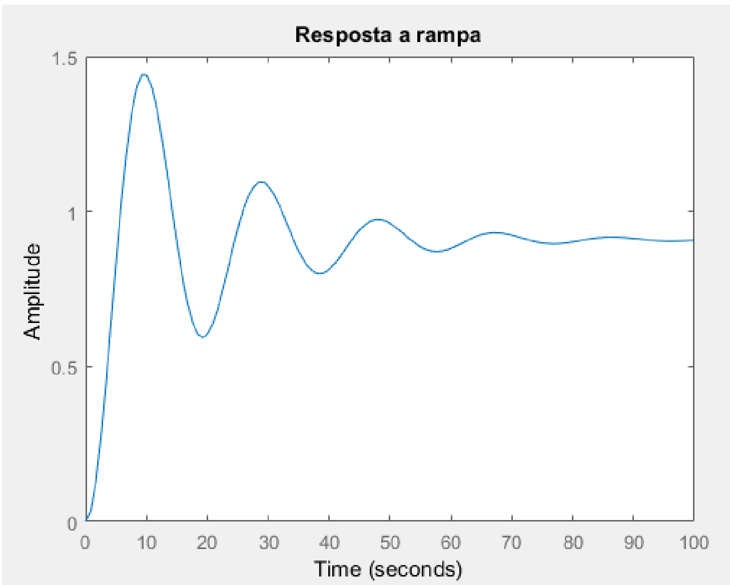

Figura 5: Circuito 1 - Resposta a rampa unitária

1.1.4 Resposta a onda quadrada

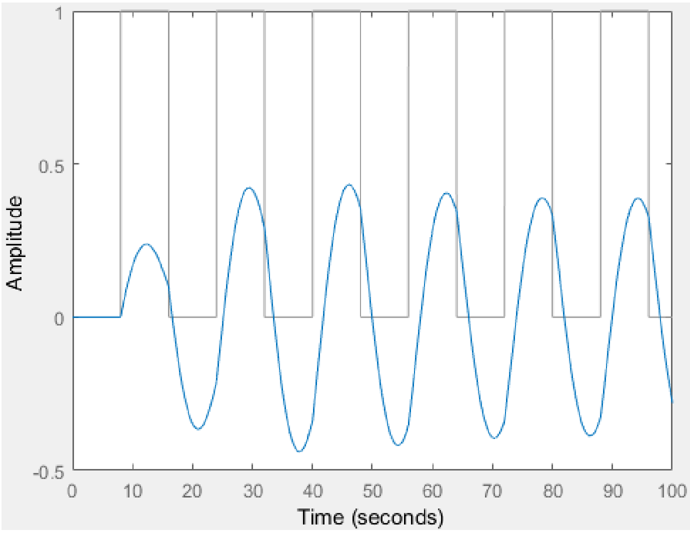

Figura 6: Circuito 1 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

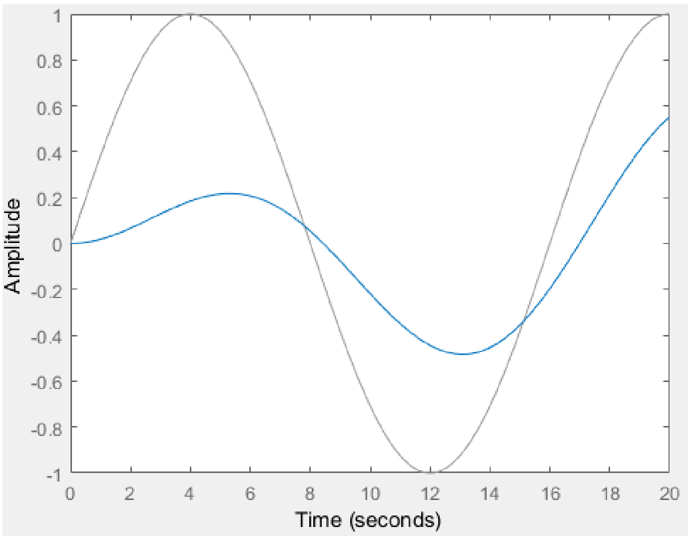

Figura 7: Circuito 1 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

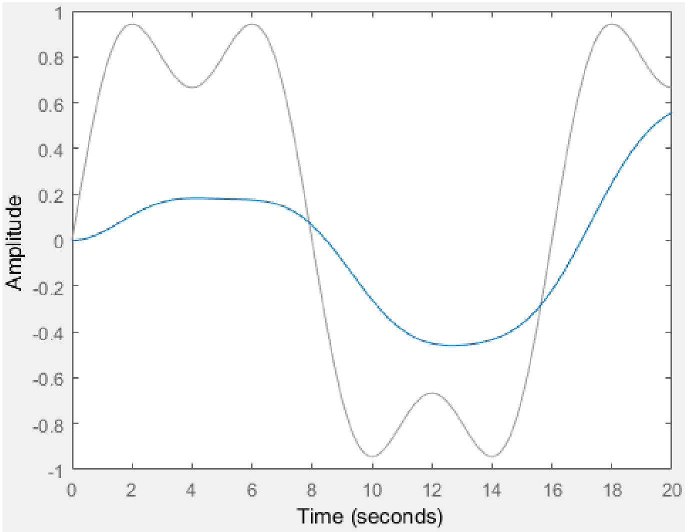

Figura 8: Circuito 1 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

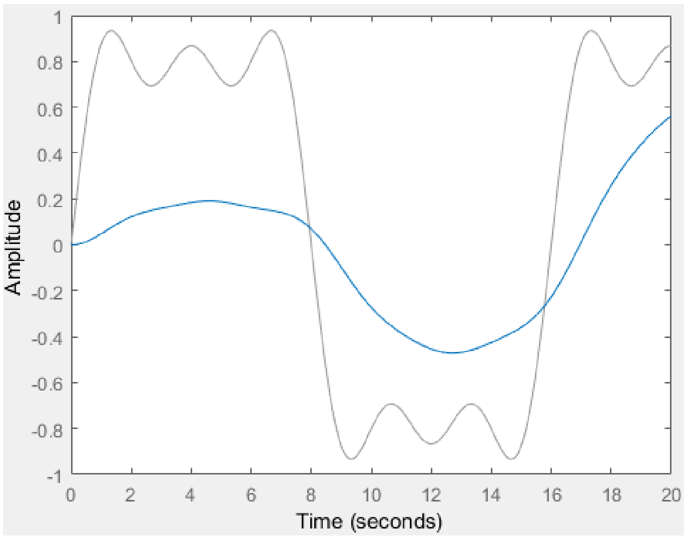

Figura 9: Circuito 1 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

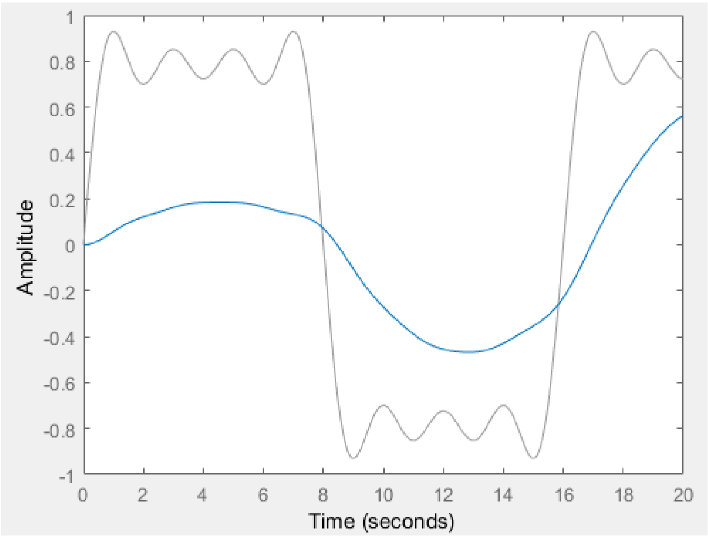

Figura 10: Circuito 1 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

1.2 Circuito 2

1.2.1 Determinar a função do circuto

Para modelarmos utilizaremos as seguintes equações:

$$I_1 = I_{in} - I_{out}$$

$$R_2 I_{out} + \frac{L \partial I_{out}}{\partial t} - R_1 I_1 + \frac{1}{C} \int I_{out} \partial t = 0$$

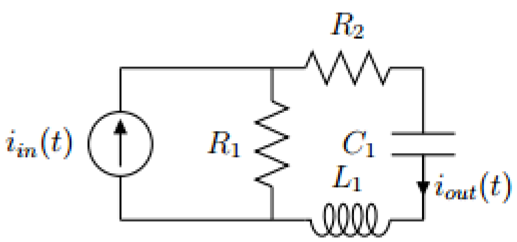

Figura 11: Circuito 2

Substituindo I_1 para colocarmos a equação em função de I_{in} e I_{out} e derivando-a para removermos a Integral, temos a E.D.O:

$$\frac{\partial I_{in}}{\partial t}\left(R_1\right) = \frac{\partial^2 I_{out}}{\partial t^2}\left(L\right) + \frac{\partial I_{out}}{\partial t}\left(R_1 + R_2\right) + \frac{I_{out}}{C}$$

Transformando essa E.D.O em Laplace, obtemos:

$$X(S)\left(SR_1\right) = Y(S)\left(S^2 + S\left(R_1 + R_2\right) + \frac{1}{C}\right) \Rightarrow$$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{S\left(R_1 C\right)}{S^2\left(LC\right) + S\left(R_1 C + R_2 C\right) + 1}$$

Escolhendo os seguintes valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 10\Omega$;
- $R_2 = 100\Omega$;
- $C = 1F$;
- $L = 1H$;

Encontramos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{10S}{S^2 + 110S + 1}$$

A partir dessa função obtemos os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

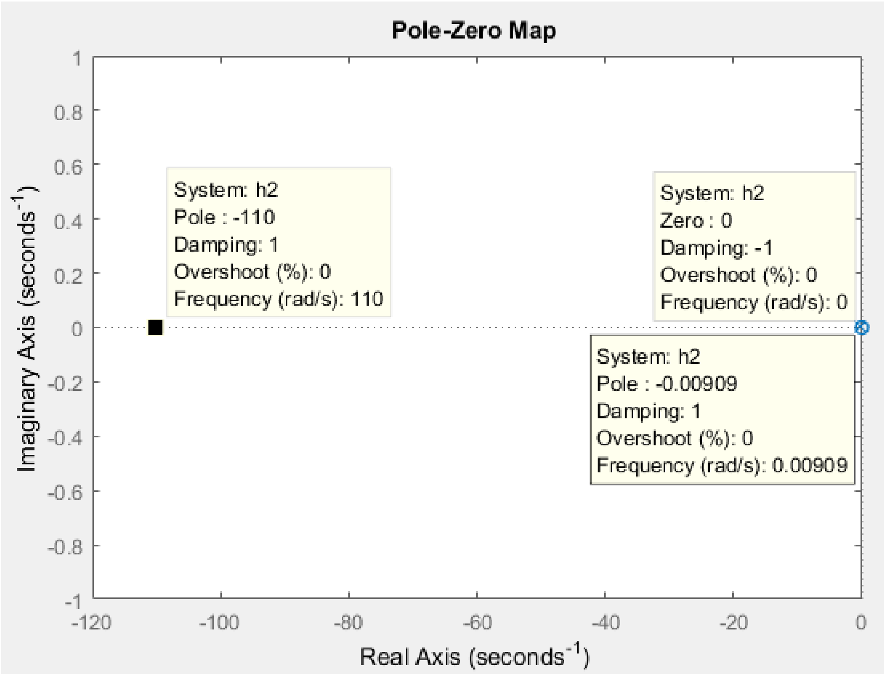

Figura 12: Circuito 2 - Polos e Zeros

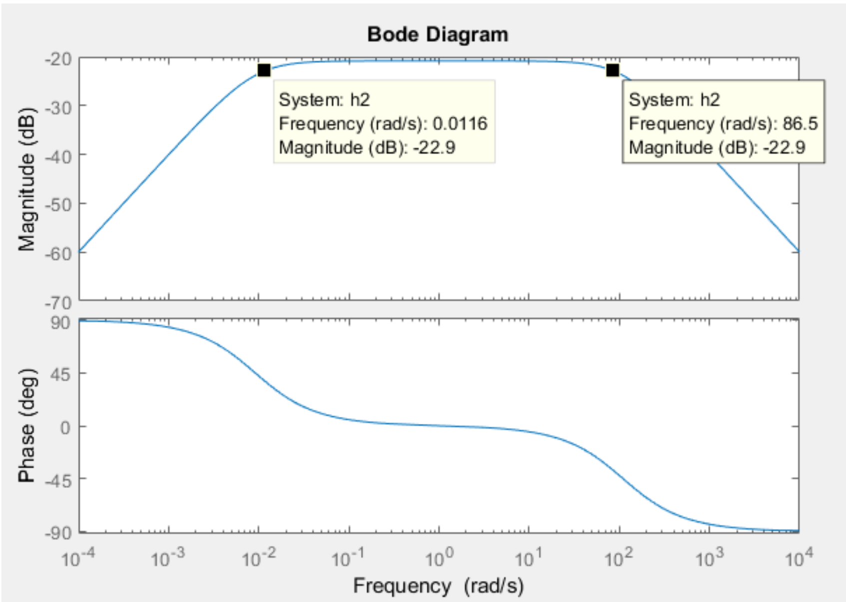

Figura 13: Circuito 2 - Diagrama de Bode

Assim como o circuito da figura 1, temos também um filtro passa faixa que opera nas faixas entre 0.01 rad/seg e 86.5 rad/seg

1.2.2 Resposta ao degrau unitário

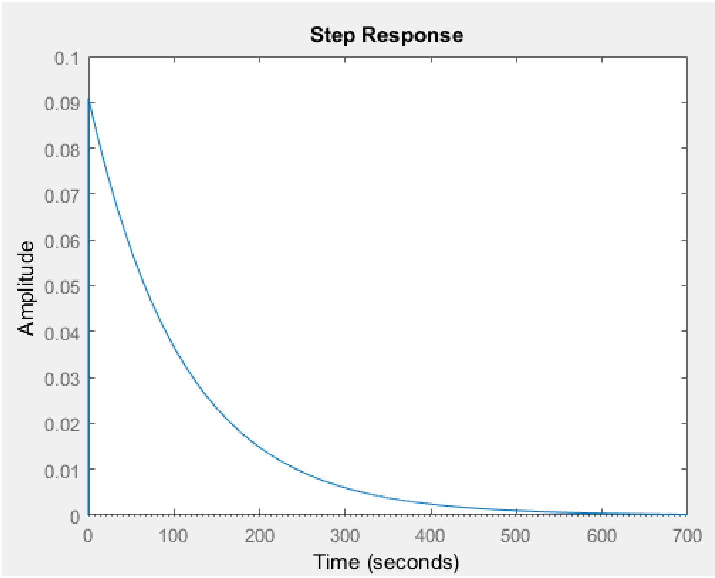

Figura 14: Circuito 2 - Resposta ao degrau unitário

1.2.3 Resposta a rampa unitário

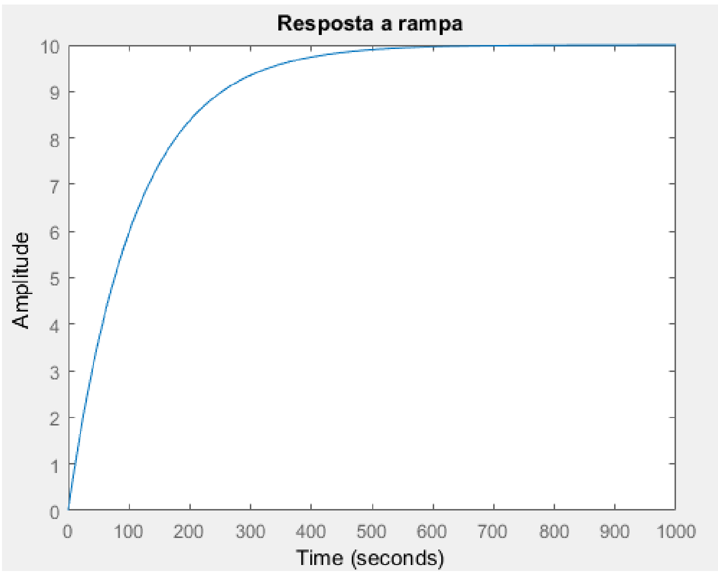

Figura 15: Circuito 2 - Resposta a rampa unitária

1.2.4 Resposta a onda quadrada

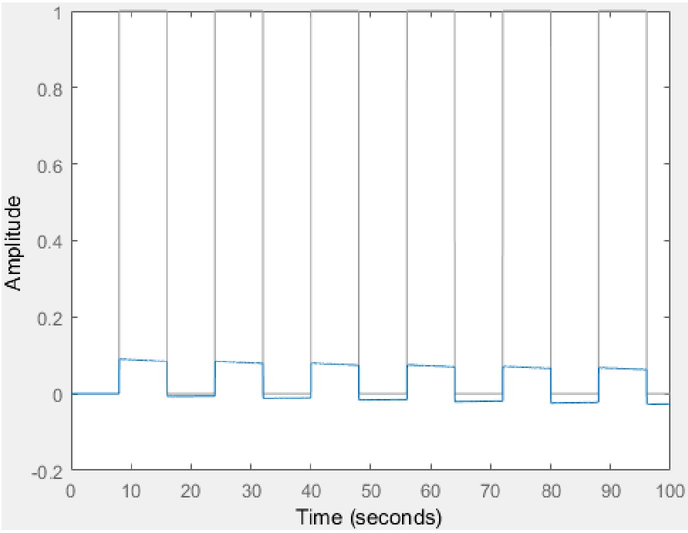

Figura 16: Circuito 2 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

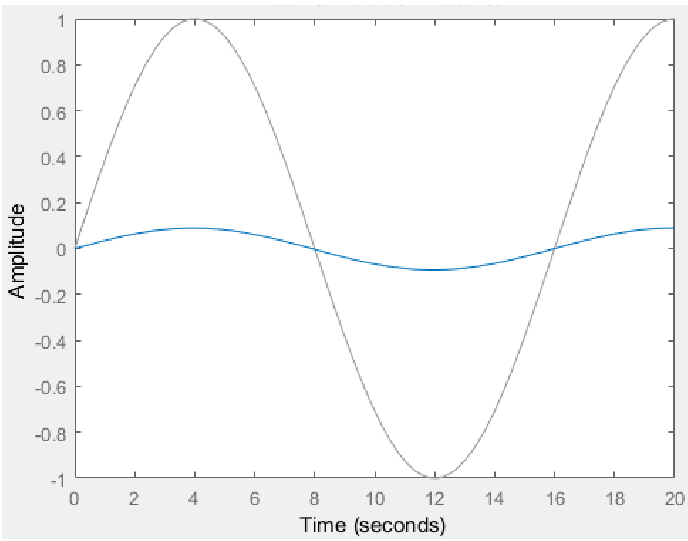

Figura 17: Circuito 2 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

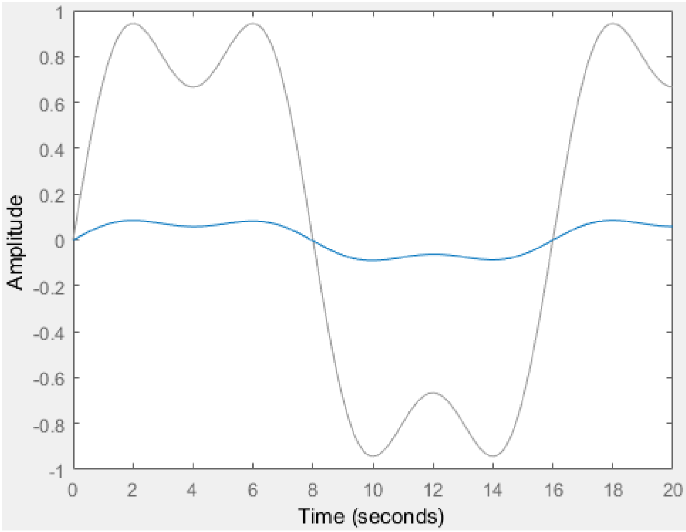

Figura 18: Circuito 2 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

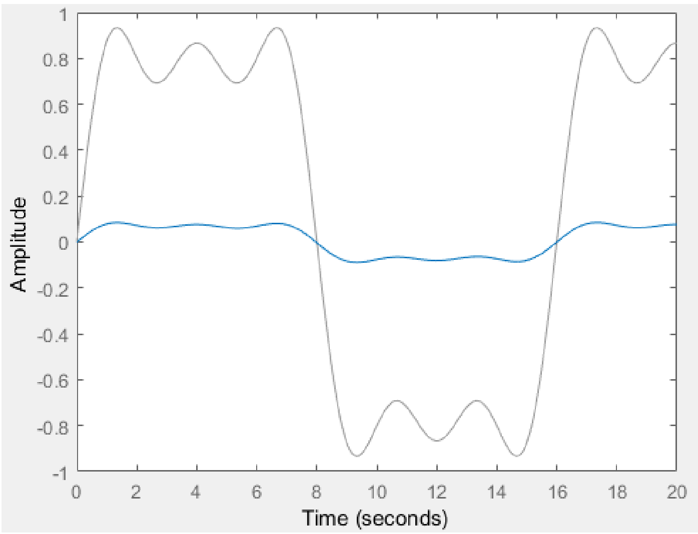

Figura 19: Circuito 2 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

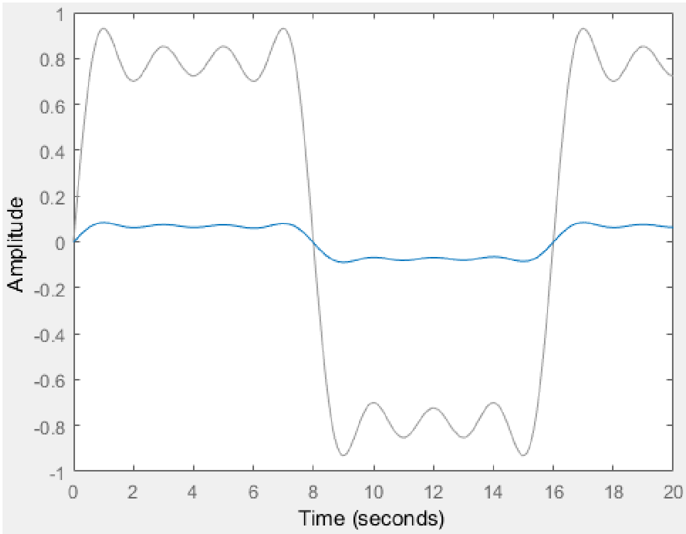

Figura 20: Circuito 2 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

1.3 Circuito 3

1.3.1 Determinar a função do circuto

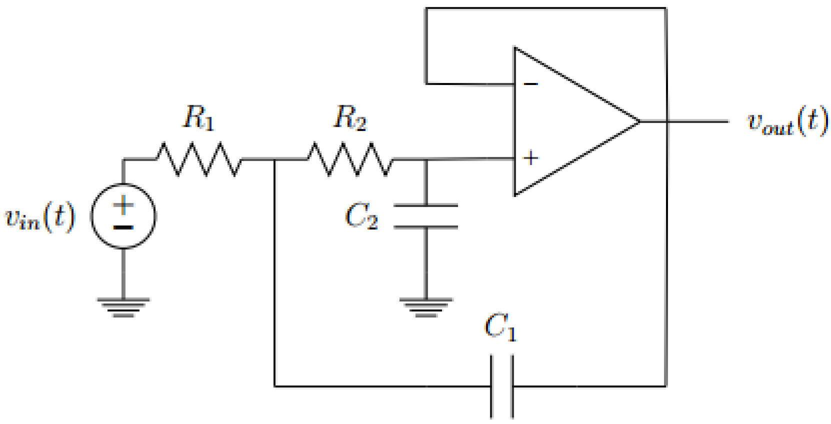

Figura 21: Circuito 3

Este circuito, também conhecido como topologia de Sallen-Key, sabendo que o AmpOp possui impedância infinita em sua entrada, que $V^- = V^+$, que $V^- = V_{out}$ e chamando V_a da tensão que passa por C_1, obtemos:

$$V_a = V_{out} + R_2C_2\frac{\partial V_{out}}{\partial t}$$

Utilizando a lei dos nós entre R_1 e R_2 e já substituindo V_a por V_{out} temos:

$$\frac{V_{in}}{R_1} = R_2C_1C_2\frac{\partial^2 V_{out}}{\partial t^2} + \left(C_2 + \frac{R_2C_2}{R_1}\right)\frac{\partial V_{out}}{\partial t} + \frac{V_{out}}{R_1}$$

Com esta E.D.O, podemos encontrar a seguinte função de transferência utilizando o mesmo método empregado nos circuitos anteriores, com isso temos:

$$H(S) = \frac{1}{S^2\left(R_1R_2C_1C_2\right) + S\left(R_1C_2 + R_2C_2\right) + 1}$$

Utilizando os valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 10\Omega$;
- $R_2 = 100\Omega$;
- $C_1 = 2F$;
- $C_2 = 1F$;

Encontramos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{1}{2000S^2 + 110S + 1}$$

Que nos gera os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

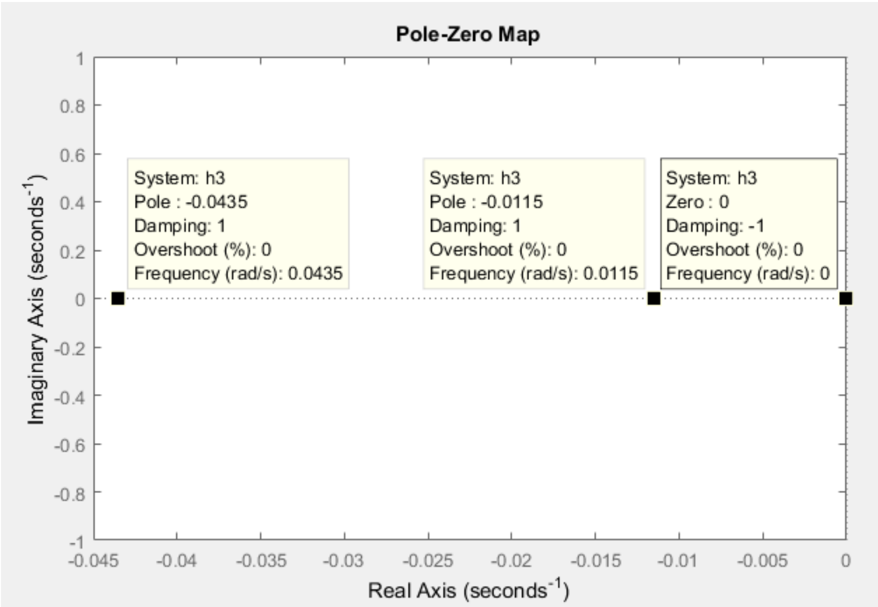

Figura 22: Circuito 3 - Polos e Zeros

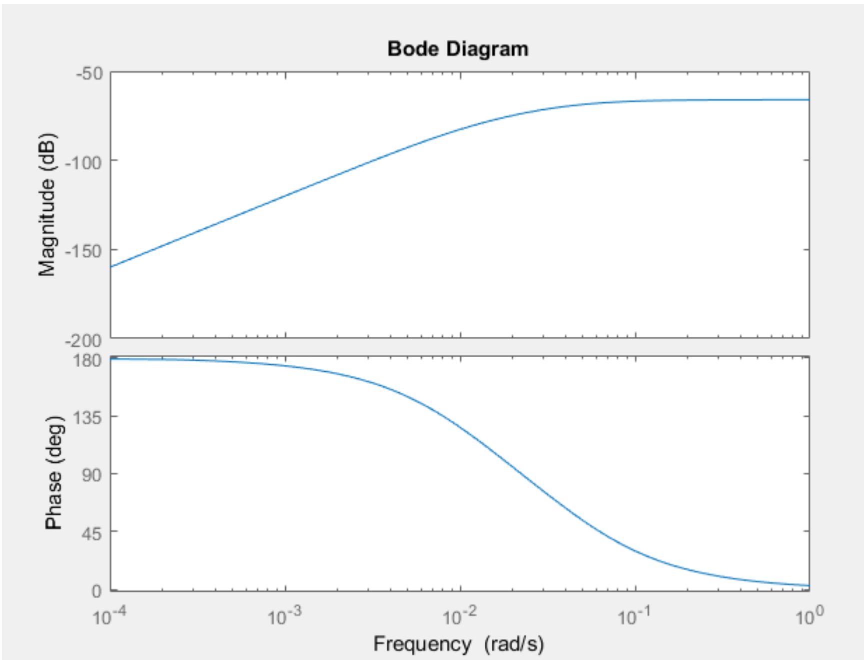

Figura 23: Circuito 3 - Diagrama de Bode

Pela a analise do diagrama de Bode, pode-se afirmar que esse circuito é um filtro passa alta com frequência no seu menor polo de 0.01 rad/sec.

1.3.2 Resposta ao degrau unitário

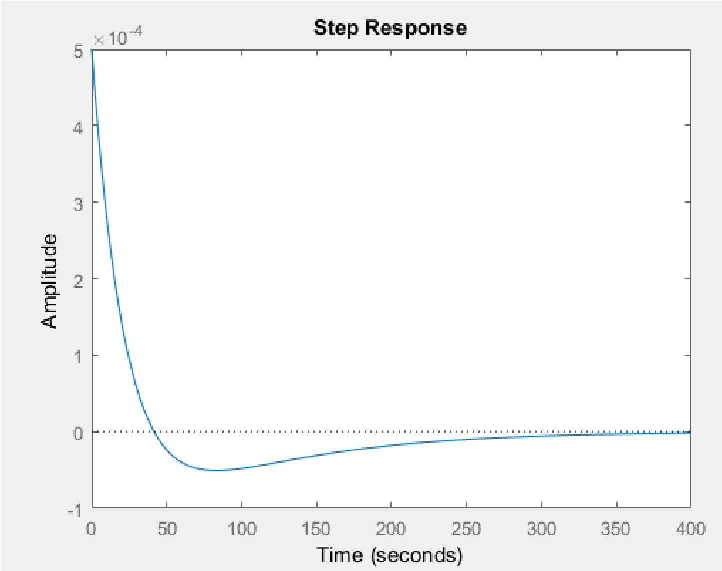

Figura 24: Circuito 3 - Resposta ao degrau unitário

1.3.3 Resposta a rampa unitário

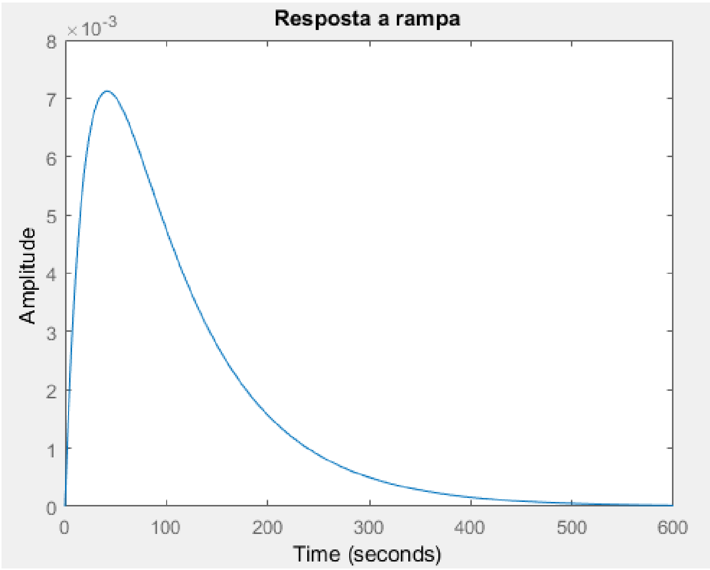

Figura 25: Circuito 3 - Resposta a rampa unitária

1.3.4 Resposta a onda quadrada

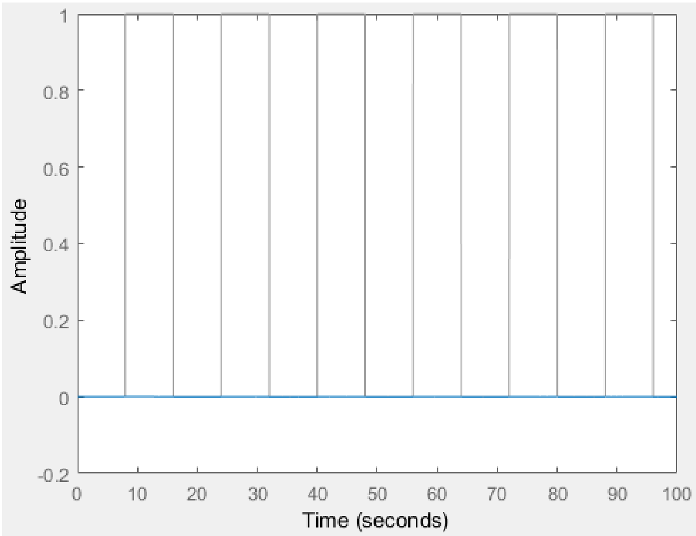

Figura 26: Circuito 3 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

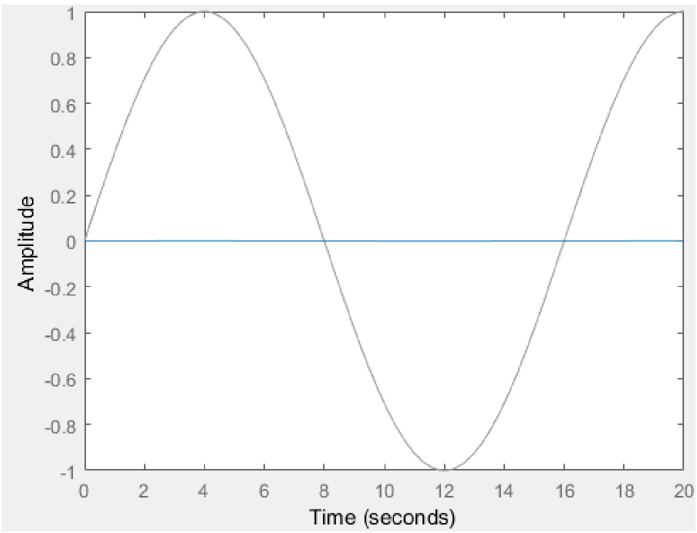

Figura 27: Circuito 3 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

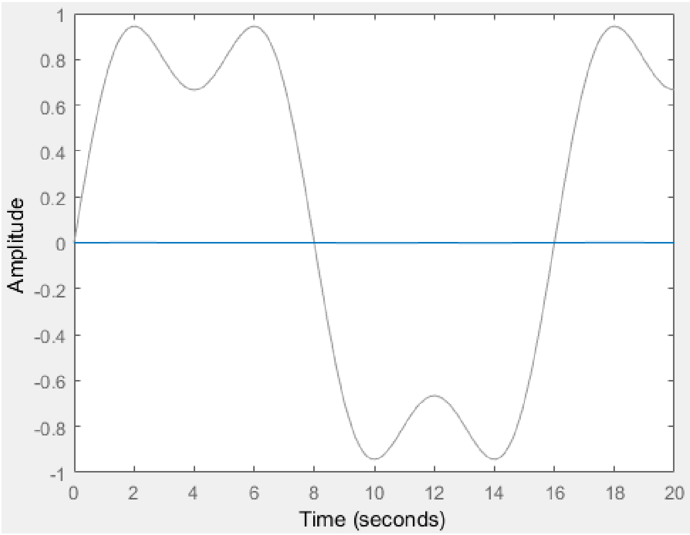

Figura 28: Circuito 3 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

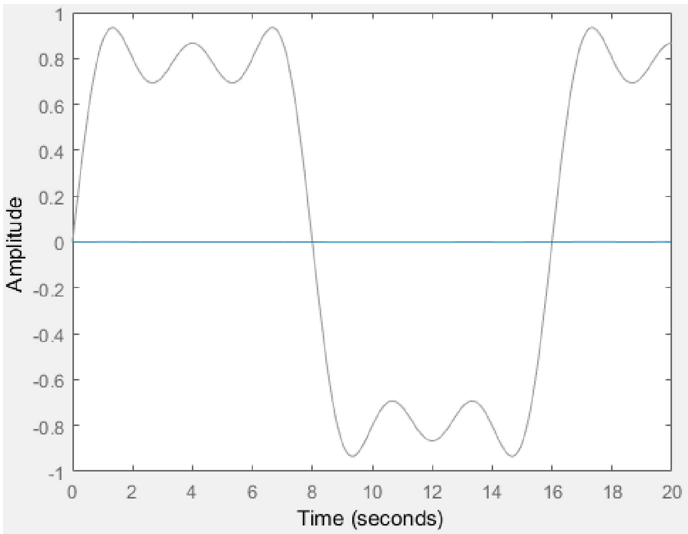

Figura 29: Circuito 3 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

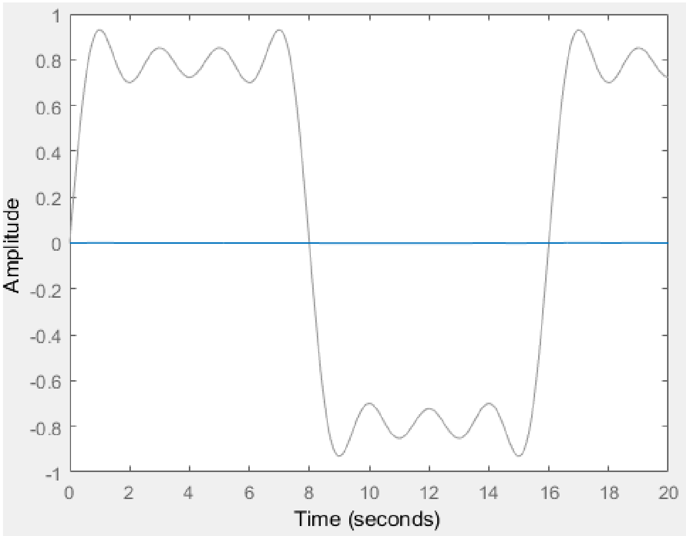

Figura 30: Circuito 3 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

1.4 Circuito 4

1.4.1 Determinar a função do circuto

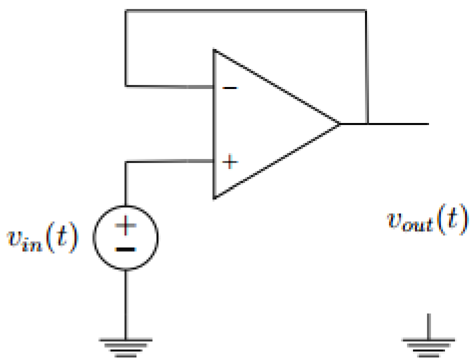

Figura 31: Circuito 4

Esse circuito, conhecido como buffer, é utilizado como um isolador. Como V_{in} é igual a V_{out}, sua função de transferência H(S) = 1. Não existem polos nem zeros para esse circuito e seu diagrama de Bode permanece em 0.

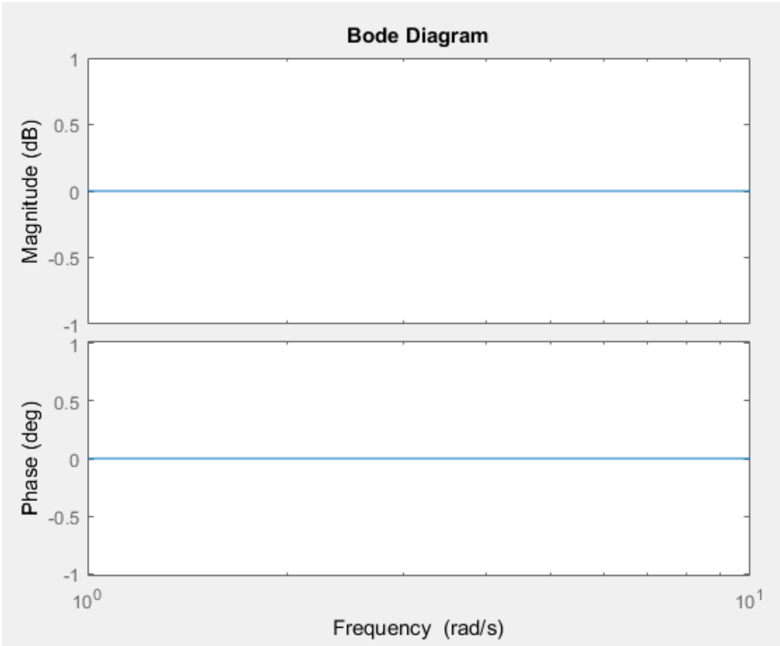

Figura 32: Circuito 4 - Diagrama de Bode

1.4.2 Resposta ao degrau unitário

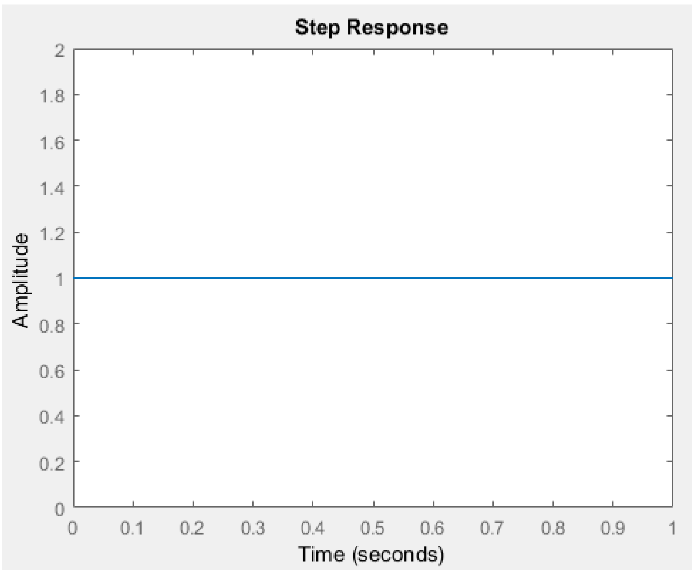

Figura 33: Circuito 4 - Resposta ao degrau unitário

1.4.3 Resposta a rampa unitário

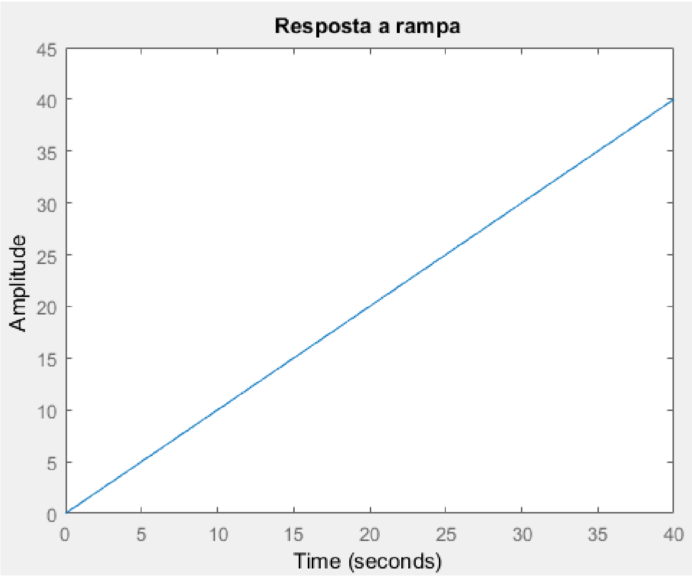

Figura 34: Circuito 4 - Resposta a rampa unitária

1.4.4 Resposta a onda quadrada

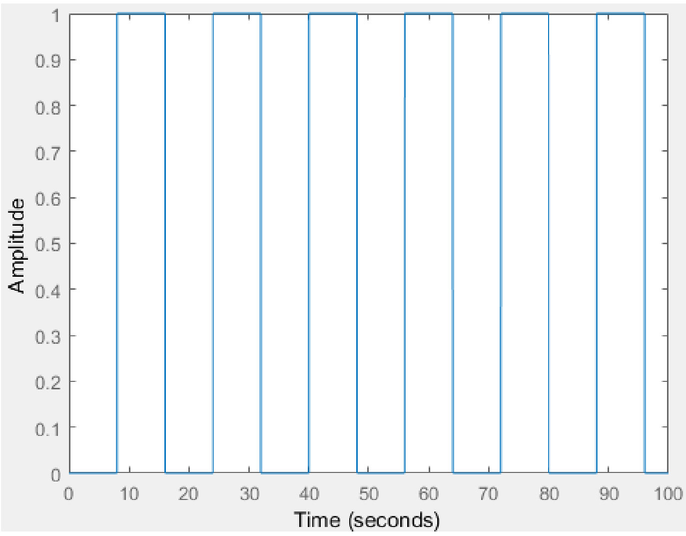

Figura 35: Circuito 4 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

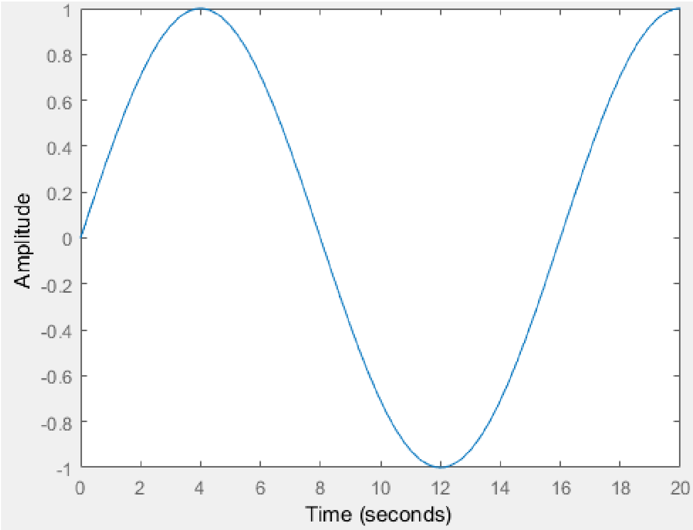

Figura 36: Circuito 4 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

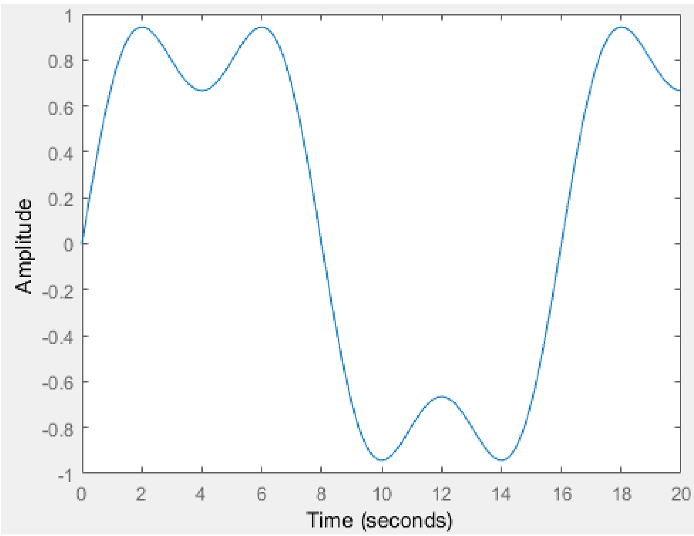

Figura 37: Circuito 4 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

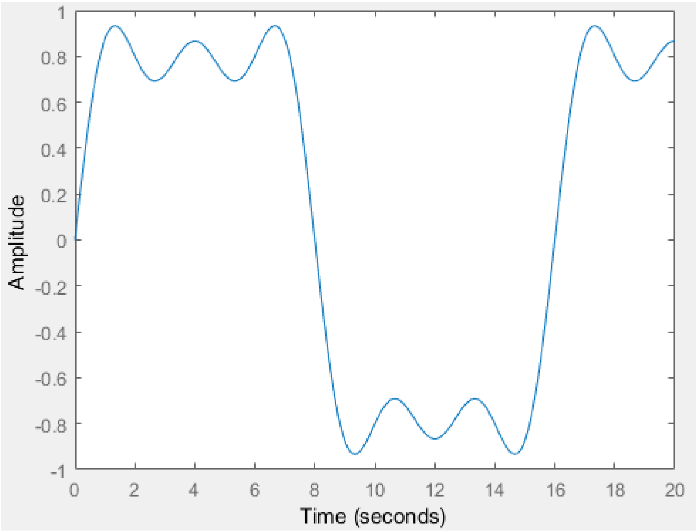

Figura 38: Circuito 4 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

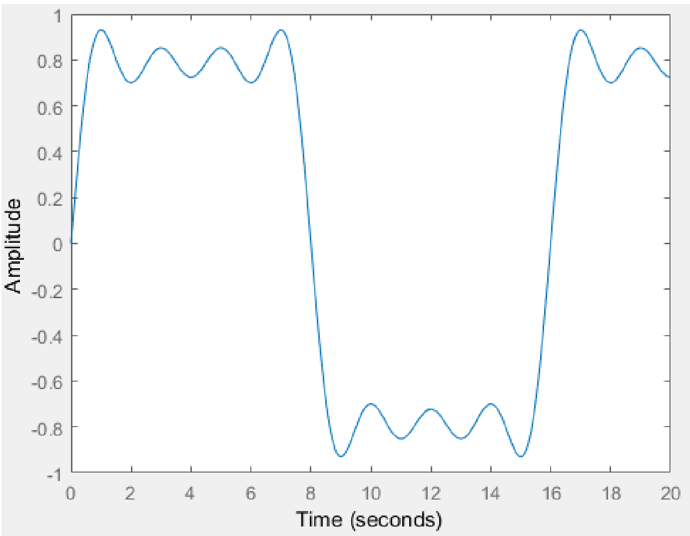

Figura 39: Circuito 4 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

1.5 Circuito 5

1.5.1 Determinar a função do circuto

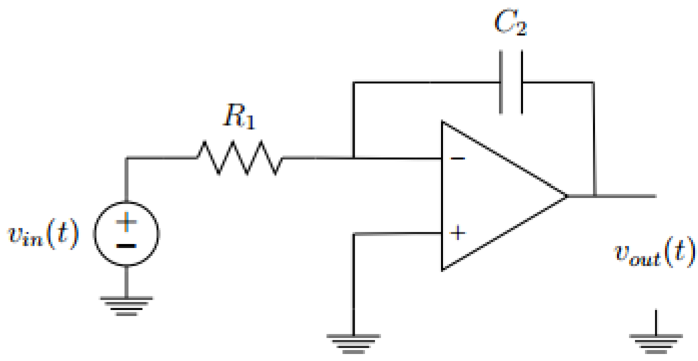

Figura 40: Circuito 5

Esse circuito pode ser escrito como:

$$\frac{V_{in}}{R} + C\frac{\partial V_{out}}{\partial t} = 0$$

Transformando esta E.D.O com Laplace utilizando o mesmo método dos circuitos passados, obtemos:

$$H(S) = \frac{-1}{RCS}$$

Tomando os seguintes valores para os elementos do circuito:

- $R = 10\Omega$;
- $C = 1F$;

Temos a seguinte equação de transferência:

$$H(S) = \frac{-1}{10S}$$

A partir dessa equação, obtemos os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

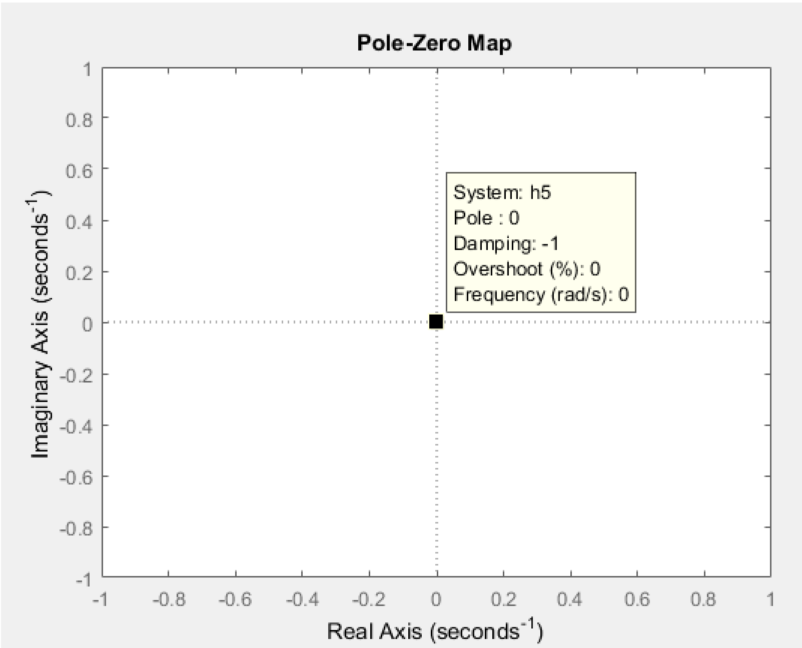

Figura 41: Circuito 5 - Polos e Zeros

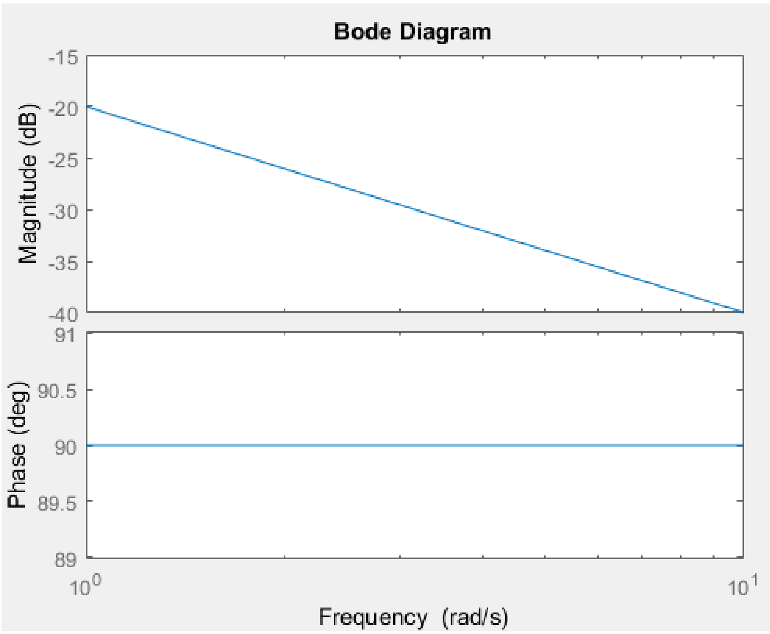

Figura 42: Circuito 5 - Diagrama de Bode

Este circuito corresponde a um filtro passa baixa integrador de apenas um polo.

1.5.2 Resposta ao degrau unitário

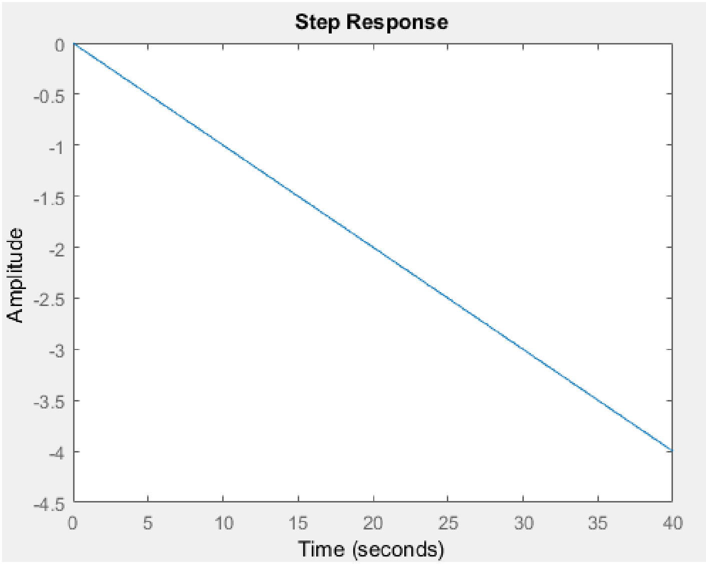

Figura 43: Circuito 5 - Resposta ao degrau unitário

1.5.3 Resposta a rampa unitária

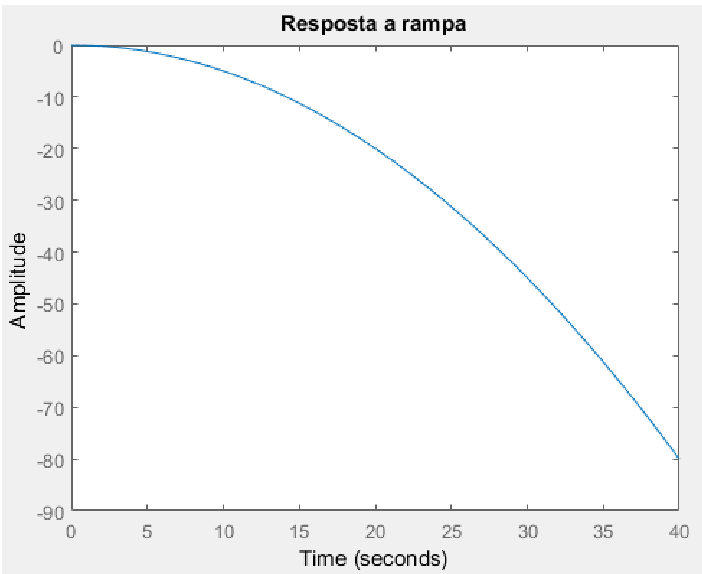

Figura 44: Circuito 5 - Resposta a rampa unitária

1.5.4 Resposta a onda quadrada

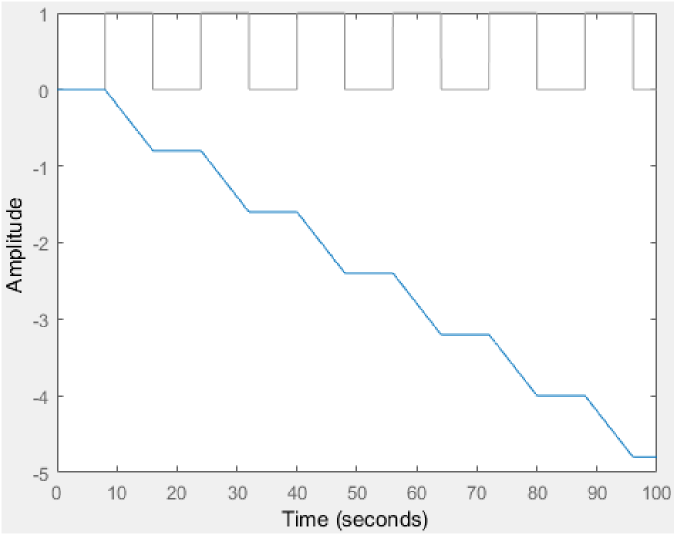

Figura 45: Circuito 5 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

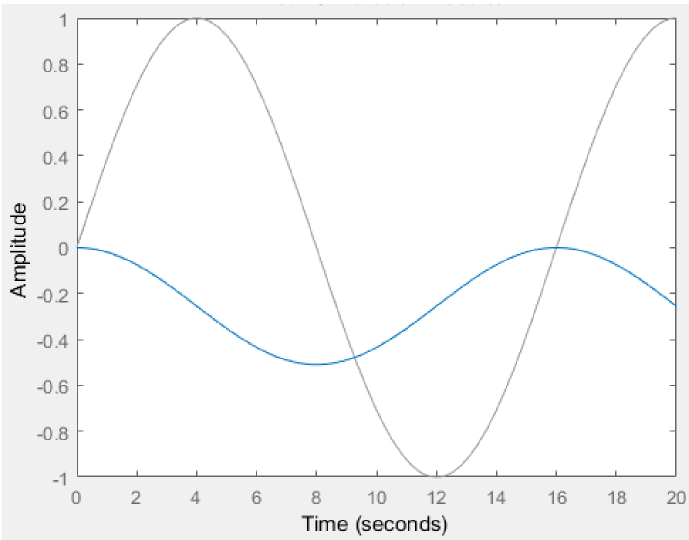

Figura 46: Circuito 5 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

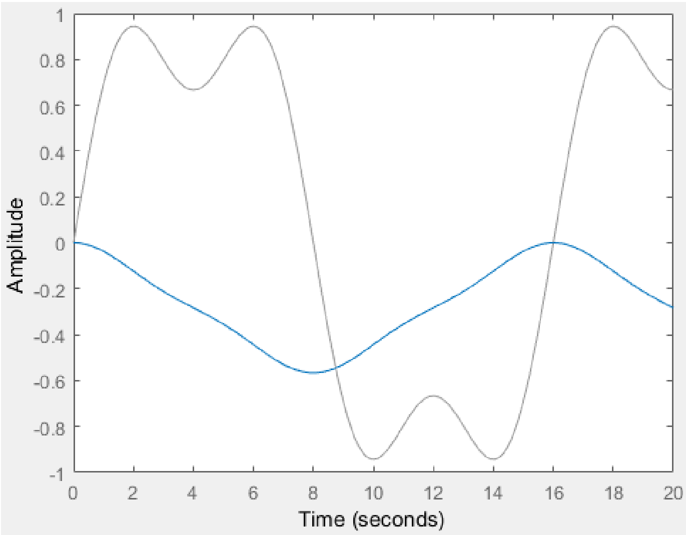

Figura 47: Circuito 5 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

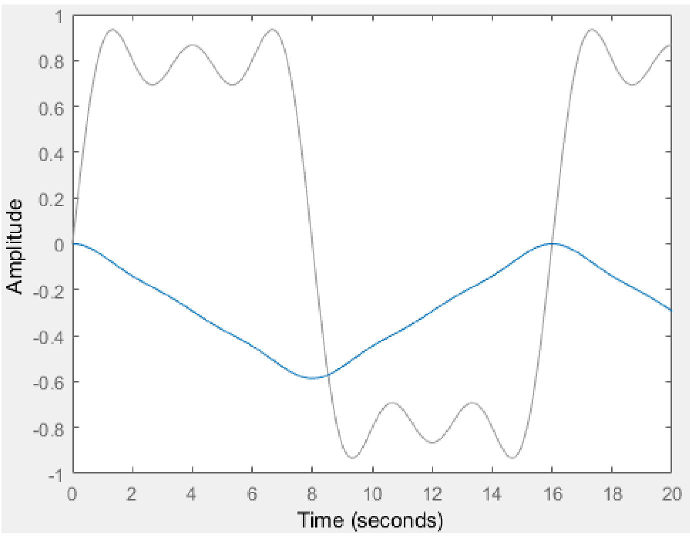

Figura 48: Circuito 5 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

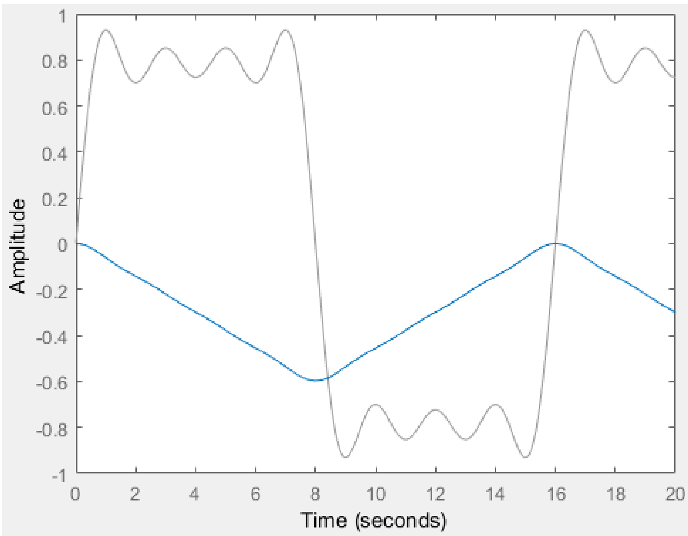

Figura 49: Circuito 5 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$

2 Questão 2

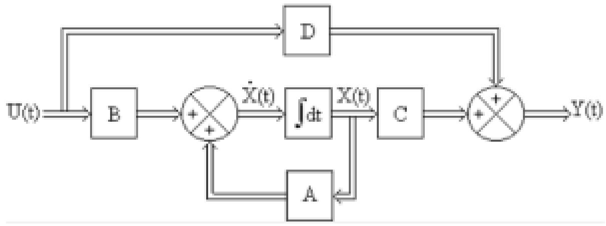

Figura 50: Diagrama de Blocos

2.1 Equações do diagrama

Seguindo as regras definidas no trabalho em relação aos valores de A, B, C e D para o diagrama de blocos, temos:

- a = -22;
- b = 7;
- c = 3;
- d = 4;

Pare que o circuito possua estabilidade BIBO, precisamos que o valor de A seja negativo, caso contrario, o circuito é instável.

Com esses valores obtemos as seguintes equações para o diagrama de blocos abaixo:

- y(t) = 4u(t) + 3x(t) *(Item (e) da questão 2)*;
- B = 7u(t);
- C = 3x(t);
- D = 4u(t);
- $x^{'}(t) = 7u(t) - 22x(t)$ *(Item (d) da questão 2)*;

Sabendo que $x(t) = \frac{y(t)-4u(t)}{3}$ e $x^{'} = \frac{y^{'}(t)-4u^{'}(t)}{3}$, obtemos a seguinte E.D.O:

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 22y(t) = 4\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 109u(t)$$

Aplicando Laplace, obtemos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{4S + 109}{S + 22}$$

De posse da função de transferência, podemos encontrar os seguintes polos e zeros e o diagrama de Bode:

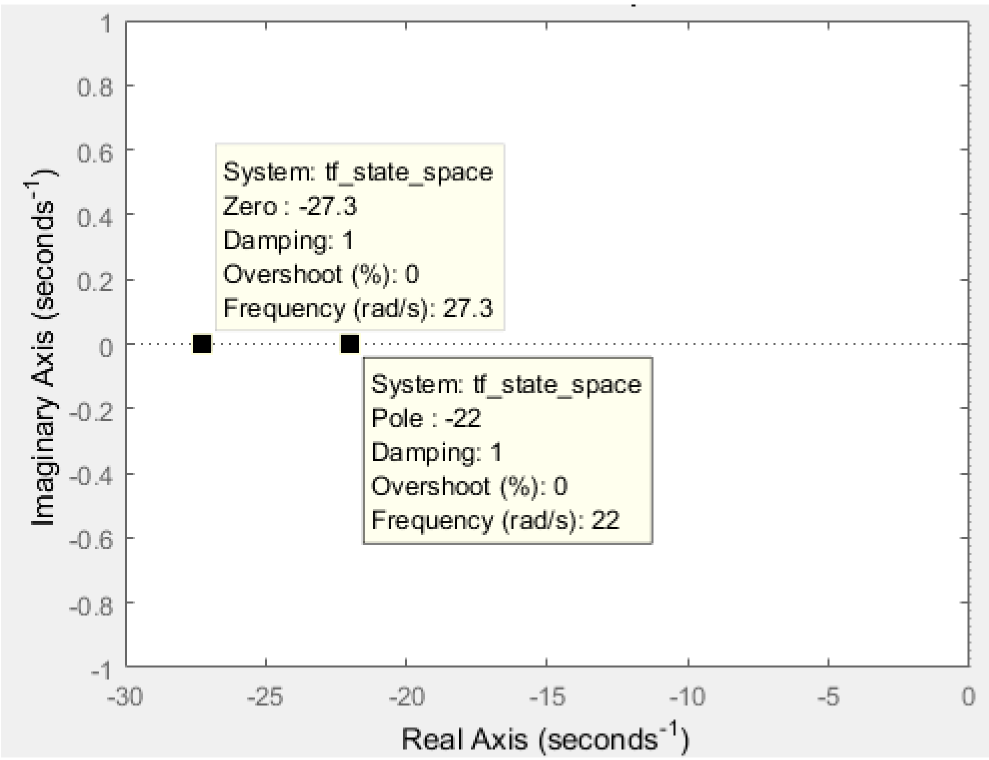

Figura 51: Polos e Zeros

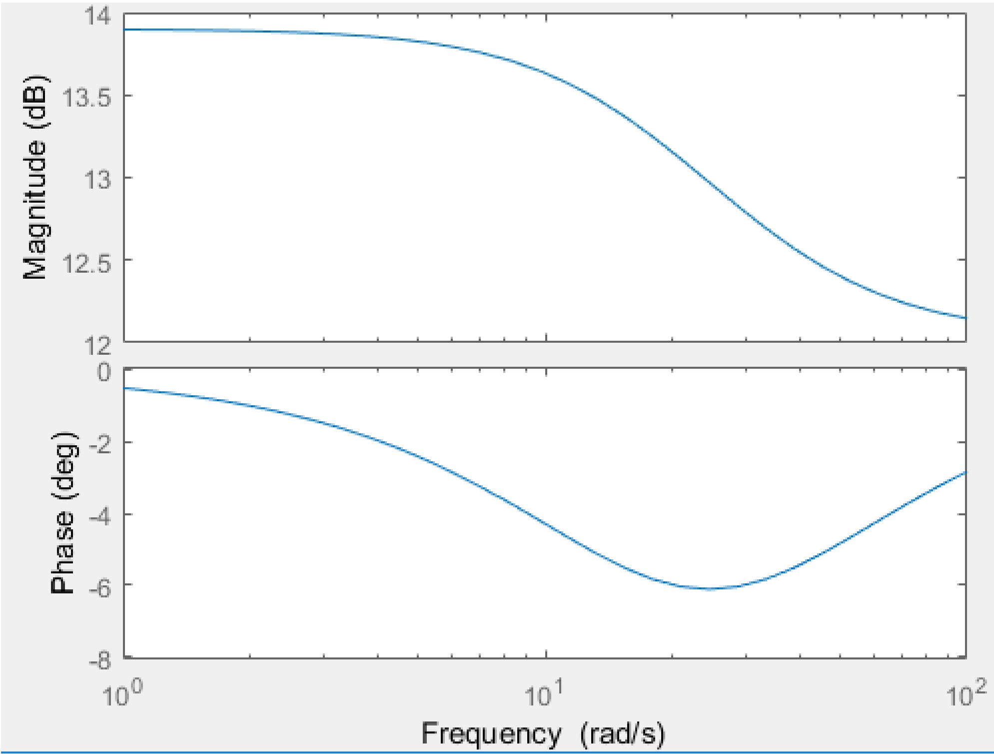

Figura 52: Diagrama de Bode

2.2 Resposta ao degrau unitário

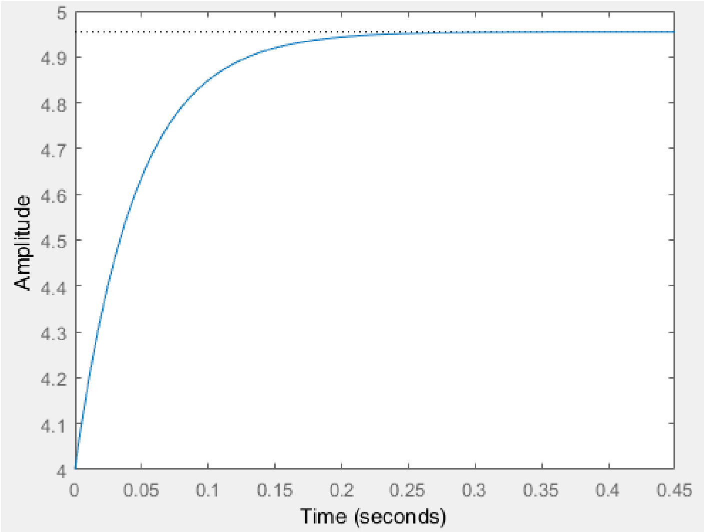

Figura 53: Resposta ao degrau unitário

2.3 Resposta a rampa unitária

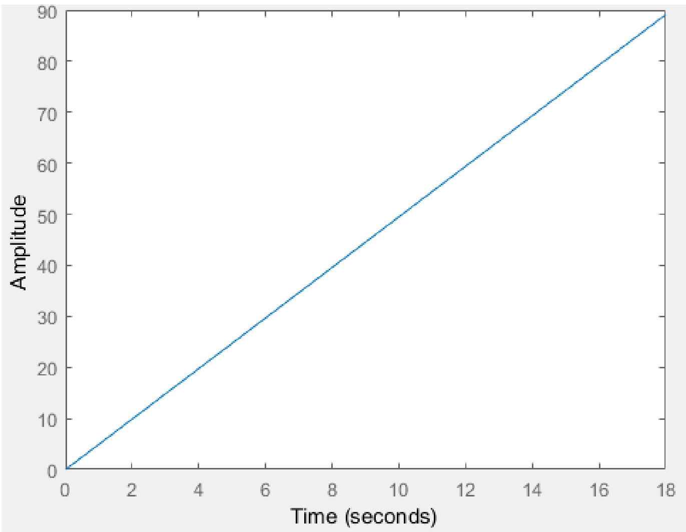

Figura 54: Resposta a rampa unitária

2.4 Resposta a onda quadrada

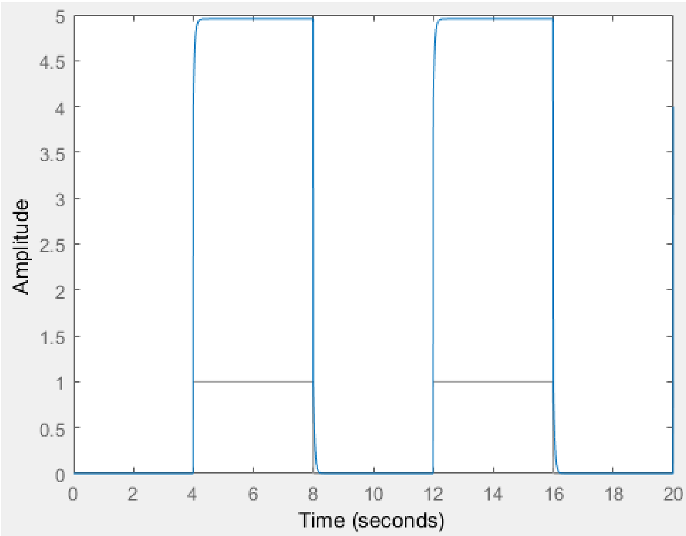

Figura 55: Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$

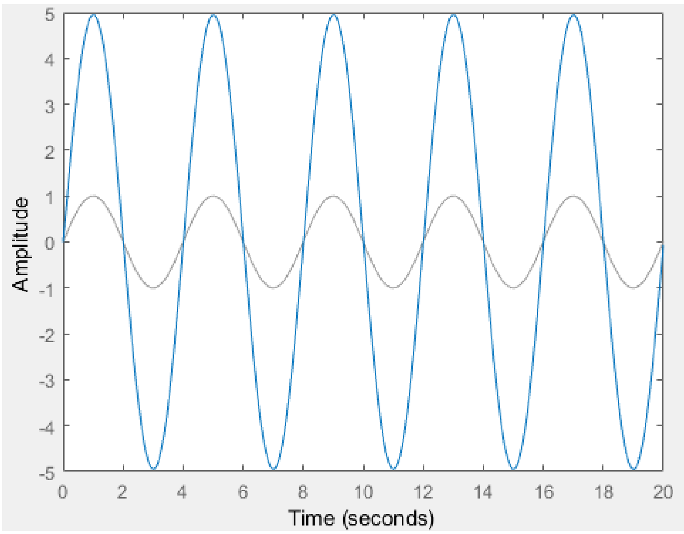

Figura 56: Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$

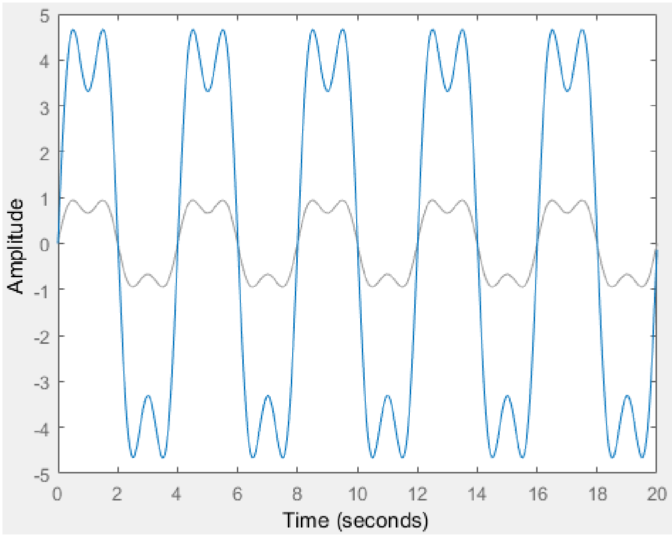

Figura 57: Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$

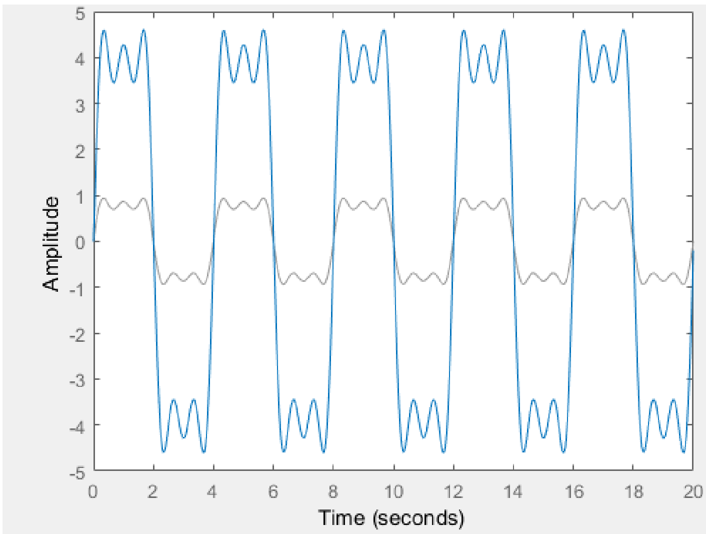

Figura 58: Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$

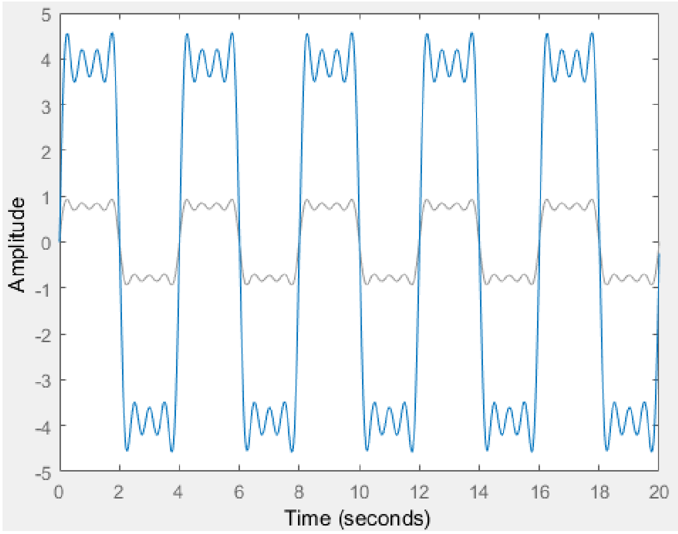

Figura 59: Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$

3 Questão 3

3.1 Item a

3.1.1 Variando em α

3.1.2 Variando em β

3.2 Item b

3.2.1 Variando em α

3.2.2 Variando em β

3.3 Item c

3.3.1 Variando em α

3.3.2 Variando em β

3.4 Item d

3.4.1 Variando em α

3.4.2 Variando em β

3.5 Item e

3.5.1 Variando em α

3.5.2 Variando em β

3.6 Item f

3.6.1 Variando em α

3.6.2 Variando em β

5 Referências

[1] Chapman, S.J. – Electric Machinery Fundamentals, 4th Edition;
[2] Fitzgerald, A. E. – Máquinas Elétricas, 2da Edição;