

# Universidade Federal do Rio de Janeiro

## Trabalho Final de Sistemas Lineares I

Alunos	Igor Abreu da Silva
DRE	112053874
Curso	Engenharia Eletrônica
Turma	2016/2
Professor	Natanael Nunes de Moura Junior

Rio de Janeiro, 09 de Dezembro de 2016

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Conhecimentos</b>	<b>1</b>
1.1	Leis de kirchhoff . . . . .	1
1.1.1	Lei das Correntes . . . . .	1
1.1.2	Lei das Tensões . . . . .	1
1.2	Propriedades de Laplace . . . . .	1
1.2.1	Propriedade da diferenciação . . . . .	1
1.3	Função de Transferência . . . . .	1
1.4	Pólos e Zeros . . . . .	1
1.5	Diagrama de Bode . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Questão 1</b>	<b>3</b>
2.1	Circuito 1 . . . . .	3
2.1.1	Determinar a função do circuito . . . . .	3
2.1.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	5
2.1.3	Resposta a rampa unitário . . . . .	5
2.1.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	5
2.2	Circuito 2 . . . . .	7
2.2.1	Determinar a função do circuito . . . . .	7
2.2.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	12
2.2.3	Resposta a rampa unitário . . . . .	12
2.2.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	13
2.3	Circuito 3 . . . . .	15
2.3.1	Determinar a função do circuito . . . . .	15
2.3.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	18
2.3.3	Resposta a rampa unitário . . . . .	18
2.3.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	19
2.4	Circuito 4 . . . . .	21
2.4.1	Determinar a função do circuito . . . . .	21
2.4.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	22
2.4.3	Resposta a rampa unitário . . . . .	23
2.4.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	23
2.5	Circuito 5 . . . . .	26
2.5.1	Determinar a função do circuito . . . . .	26
2.5.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	28
2.5.3	Resposta a rampa unitária . . . . .	28
2.5.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Questão 2</b>	<b>32</b>
3.1	Equações do diagrama . . . . .	32
3.2	Resposta ao degrau unitário . . . . .	35
3.3	Resposta a rampa unitária . . . . .	35
3.4	Resposta a onda quadrada . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Questão 3</b>	<b>39</b>
4.1	E.D.O dos sistemas . . . . .	39
4.1.1	Sistema 1 . . . . .	39
4.1.2	Sistema 2 . . . . .	39
4.2	Polos e zeros . . . . .	40
4.2.1	Variando em $\alpha$ . . . . .	40
4.2.2	Variando em $\beta$ . . . . .	40
4.3	Diagrama de Bode . . . . .	41
4.3.1	Variando em $\alpha$ . . . . .	41
4.3.2	Variando em $\beta$ . . . . .	41
4.4	Resposta ao Degrau Unitário . . . . .	42
4.4.1	Variando em $\alpha$ . . . . .	42
4.4.2	Variando em $\beta$ . . . . .	42
4.5	Resposta a Rampa Unitária . . . . .	43
4.5.1	Variando em $\alpha$ . . . . .	43
4.5.2	Variando em $\beta$ . . . . .	43
4.6	Resposta a onda quadrada . . . . .	44
4.6.1	Variando em $\alpha$ . . . . .	44
4.6.2	Variando em $\beta$ . . . . .	47
4.7	Resposta a cossenoides . . . . .	49
4.7.1	Variando frequências nos valores de $\alpha$ . . . . .	49
4.7.2	Variando frequências nos valores de $\beta$ . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>Referências</b>	<b>57</b>

## Lista de Figuras

1	Circuito 1 . . . . .	3
2	Circuito 1 - Polos e Zeros . . . . .	5
3	Circuito 1 - Diagrama de Bode . . . . .	6
4	Circuito 1 - Resposta ao degrau unitário . . . . .	6
5	Circuito 1 - Resposta a rampa unitária . . . . .	7
6	Circuito 1 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	7

7	Circuito 1 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	8
8	Circuito 1 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	8
9	Circuito 1 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	9
10	Circuito 1 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	9
11	Circuito 2 . . . . .	10
12	Circuito 2 - Polos e Zeros . . . . .	11
13	Circuito 2 - Diagrama de Bode . . . . .	11
14	Circuito 2 - Resposta ao degrau unitário . . . . .	12
15	Circuito 2 - Resposta a rampa unitária . . . . .	12
16	Circuito 2 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	13
17	Circuito 2 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	13
18	Circuito 2 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	14
19	Circuito 2 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	14
20	Circuito 2 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	15
21	Circuito 3 . . . . .	15
22	Circuito 3 - Polos e Zeros . . . . .	17
23	Circuito 3 - Diagrama de Bode . . . . .	17
24	Circuito 3 - Resposta ao degrau unitário . . . . .	18
25	Circuito 3 - Resposta a rampa unitária . . . . .	18
26	Circuito 3 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	19
27	Circuito 3 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	19
28	Circuito 3 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	20
29	Circuito 3 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	20
30	Circuito 3 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	21
31	Circuito 4 . . . . .	21
32	Circuito 4 - Diagrama de Bode . . . . .	22
33	Circuito 4 - Resposta ao degrau unitário . . . . .	22
34	Circuito 4 - Resposta a rampa unitária . . . . .	23
35	Circuito 4 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	23

36	Circuito 4 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	24
37	Circuito 4 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	24
38	Circuito 4 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	25
39	Circuito 4 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	25
40	Circuito 5 . . . . .	26
41	Circuito 5 - Polos e Zeros . . . . .	27
42	Circuito 5 - Diagrama de Bode . . . . .	27
43	Circuito 5 - Resposta ao degrau unitário . . . . .	28
44	Circuito 5 - Resposta a rampa unitária . . . . .	28
45	Circuito 5 - Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	29
46	Circuito 5 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	29
47	Circuito 5 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	30
48	Circuito 5 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	30
49	Circuito 5 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	31
50	Diagrama de Blocos . . . . .	32
51	Polos e Zeros . . . . .	33
52	Diagrama de Bode . . . . .	34
53	Resposta ao degrau unitário . . . . .	35
54	Resposta a rampa unitária . . . . .	35
55	Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	36
56	Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$ . . . . .	36
57	Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$ . . . . .	37
58	Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$ . . . . .	37
59	Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{2}\pi$ . . . . .	38
60	Polos e Zeros variando em $\alpha$ . . . . .	40
61	Polos e Zeros variando em $\beta$ . . . . .	40
62	Diagrama de Bode variando em $\alpha$ . . . . .	41
63	Diagrama de Bode variando em $\beta$ . . . . .	41
64	Resposta ao Degrau Unitário variando em $\alpha$ . . . . .	42

65	Resposta ao Degrau Unitário variando em $\beta$ . . . . .	42
66	Resposta a rampa Unitária variando em $\alpha$ . . . . .	43
67	Resposta a rampa Unitária variando em $\beta$ . . . . .	43
68	Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	44
69	Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	44
70	Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	45
71	Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	45
72	Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	46
73	Resposta a onda quadrada com $\omega = \frac{1}{8}\pi$ . . . . .	47
74	Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	47
75	Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	48
76	Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	48
77	Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com $\omega = \frac{1}{4}\pi$ . . . . .	49
78	Resposta para $\alpha = 0.001$ em frequências variantes . . . . .	49
79	Resposta para $\alpha = 0.01$ em frequências variantes . . . . .	50
80	Resposta para $\alpha = 0.1$ em frequências variantes . . . . .	50
81	Resposta para $\alpha = 1$ em frequências variantes . . . . .	51
82	Resposta para $\alpha = 10$ em frequências variantes . . . . .	51
83	Resposta para $\alpha = 100$ em frequências variantes . . . . .	52
84	Resposta para $\alpha = 1000$ em frequências variantes . . . . .	52
85	Resposta para $\beta = 0.001$ em frequências variantes . . . . .	53
86	Resposta para $\beta = 0.01$ em frequências variantes . . . . .	53
87	Resposta para $\beta = 0.1$ em frequências variantes . . . . .	54
88	Resposta para $\beta = 1$ em frequências variantes . . . . .	54
89	Resposta para $\beta = 10$ em frequências variantes . . . . .	55

# 1 Conhecimentos

## 1.1 Leis de Kirchhoff

### 1.1.1 Lei das Correntes

A soma das correntes em um nó é igual a zero.

### 1.1.2 Lei das Tensões

A soma das tensões em uma malha fechada é nula.

## 1.2 Propriedades de Laplace

### 1.2.1 Propriedade da diferenciação

$$x(t) \Rightarrow X(S) \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt \Rightarrow s \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt - x(0^-) = sX(s) - x(0^-)$$

## 1.3 Função de Transferência

É a relação da saída sobre as entradas  $H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}$

## 1.4 Pólos e Zeros

Pólos são valores de  $s$  onde temos uma indefinição na função de transferência, ou seja quando o denominador é zero.

Zeros são todos os valores de  $s$  que zera a função de transferência, em outras palavras fazem com que o numerador seja igual a zero.

## 1.5 Diagrama de Bode

$$H(S) = \frac{Y(s)}{X(S)} \Rightarrow \frac{k(s + a_1)}{s(s + b_1)(s^2 + b_2s + b_3)}$$

Organizando esta equação, temos:

$$\frac{k(a_1(\frac{s}{a_1} + 1))}{sb_1b_3(\frac{s}{b_1} + 1)(\frac{s^2}{b_3} + \frac{b_2s}{b_3} + 1)}$$

Com isso, teremos:

$$|H(jw)| = \frac{k(a_1(\frac{jw}{a_1} + 1))}{jwb_1b_3(\frac{jw}{b_1} + 1)(\frac{(jw)^2}{b_3} + \frac{b_2jw}{b_3} + 1)}$$

Por questões praticas, com o objetivo de facilitar as contas, adaptaremos essa função para utilizar como a representação magnitude de decibel, logo teremos:

$$20\log(|H(jw)|) = 20\log(|\frac{ka_1}{b_1b_3}|) + 20\log(|\frac{jw}{a_1} + 1|) - 20\log(|jw|) - 20\log(|\frac{jw}{b_1} + 1|) - 20\log(|\frac{(jw)^2}{b_3} + \frac{b_2jw}{b_3} + 1|)$$

Como fase, teremos:

$$\angle H(jw) = \angle(\frac{jw}{a_1} + 1) - \angle jw - \angle(\frac{jw}{b_1} + 1) - \angle(\frac{(jw)^2}{b_3} + \frac{b_2jw}{b_3} + 1)$$

**Para o termo constante:**  $\frac{ka_1}{b_1b_3}$

Modulo começa em  $20\log(\frac{ka_1}{b_1b_3})$

Fase será  $\pi$ ,  $\frac{ka_1}{b_1b_3} > 0$  ou  $0$ ,  $\frac{ka_1}{b_1b_3} \leq 0$

**Termo:**  $jw$

Modulo -20db/dec (Pólo) ou +20db/dec (zero)

Fase  $-\arctg(\frac{w}{0})$ , ou seja,  $-90^\circ$  (pólo)  $+90^\circ$  (zero)

**Primeira Ordem:**  $\frac{jw}{b_1} + 1$

Modulo, começando na frequência de corte  $b_1$ , -20db/dec (Pólo) ou +20db/dec (zero)

Fase  $0^\circ$  em  $\frac{b_1}{10}$ ,  $-45^\circ$  (pólo)  $+45^\circ$  (zero) em  $b_1$  e por fim  $-90^\circ$  (pólo)  $+90^\circ$  (zero) em  $100b_1$

**Segunda Ordem:**  $\frac{(jw)^2 + b_2jw}{b_3} + 1$

Modulo, começando na frequência de corte  $b_3$ , -40db/dec (Pólo) ou +40db/dec (zero)

Fase  $0^\circ$  em  $\frac{b_3}{10}$ ,  $-90^\circ$  (pólo)  $+90^\circ$  (zero) em  $b_3$  e por fim  $-180^\circ$  (pólo)  $+180^\circ$  (zero) em  $100b_3$



## 2 Questão 1

Nesta sessão serão resolvidas todas as partes necessárias para encontrar as funções/utilidades de cada um dos circuitos, bem como a análise de resposta a determinados sinais e todos os itens solicitados na **Questão 1** do trabalho final de sistemas lineares.

O primeiro passo é modelar cada circuito, essa modelagem utilizara as leis de kirchhoff explicadas em 1.1. Após a modelagem, encontraremos as E.D.O's, aplicaremos Laplace utilizando a propriedade da Derivação (1.2.1) e com isso encontraremos a função de transferência  $H(S)$ . Em posse da função de transferência em função dos componentes do circuito, escolheremos o valor comercial de cada componente de acordo com o nosso objetivo, encontraremos os polos e zeros e o diagrama de bode conforme explicado em (1.4) e (1.5).

### 2.1 Circuito 1

#### 2.1.1 Determinar a função do circuito

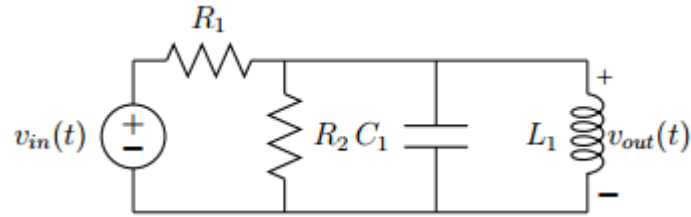


Figura 1: Circuito 1

Podemos modelar o circuito 1 em relação ao nó após  $R_1$ . Teríamos a seguinte equação:

$$\frac{V_{in} - V_{out}}{R_1} - \frac{V_{out}}{R_2} - \frac{C \partial V_{out}}{\partial t} - \frac{1}{L} \int V_{out} \partial t = 0$$

Para encontrarmos a E.D.O do circuito, vamos derivar toda esta expressão e separar  $V_{out}$  e  $V_{in}$ , encontrando a seguinte relação:

$$\frac{\partial V_{in}}{\partial t} \left( \frac{1}{R_1} \right) = \frac{C \partial^2 V_{out}}{\partial t^2} + \frac{\partial V_{out}}{\partial t} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{V_{out}}{L}$$

Em posse da E.D.O, utilizaremos Laplace para encontrar a função de Trans-

ferência do Circuito.

$$X(S) \left( \frac{1}{R_1} \right) = Y(S) \left( S^2 C + S \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{L} \right) \Rightarrow$$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{SR_2L}{S^2 (R_1R_2LC) + S (R_1L + R_2L) + R_1R_2}$$

Afim de facilitar os cálculos, tomaremos os seguintes valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 1K\Omega$ ;
- $R_2 = 10K\Omega$ ;
- $C = 220\mu F$ ;
- $L = 166\eta H$ ;

Apos aplicar os valores comerciais em  $H(S)$ , temos:

$$H(S) = \frac{100S}{1000S^2 + 110S + 110}$$

Utilizando essa função no MatLab para encontrar os polos (quando se zera o denominador), zeros (quando se zera o numerador) e o diagrama de Bode, obtemos o seguintes gráficos:

Analisando-se este circuito, pode-se afirmar que o mesmo é um filtro passa faixa operando na largura de banda de aproximadamente 0.11 rad/sec em um intervalo  $[0.28, 0.39]$  rad/sec.

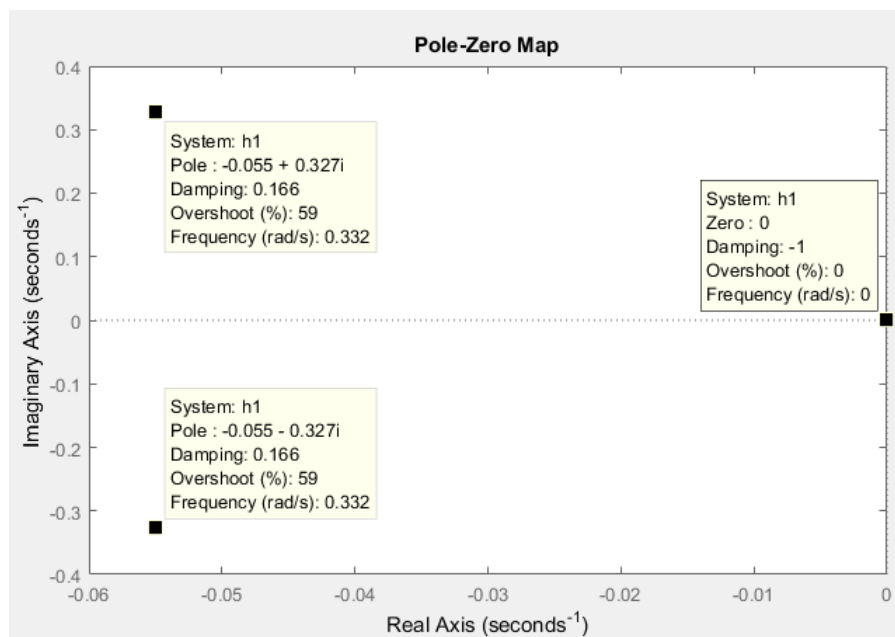


Figura 2: Circuito 1 - Polos e Zeros

2.1.2 Resposta ao degrau unitário

2.1.3 Resposta a rampa unitário

2.1.4 Resposta a onda quadrada

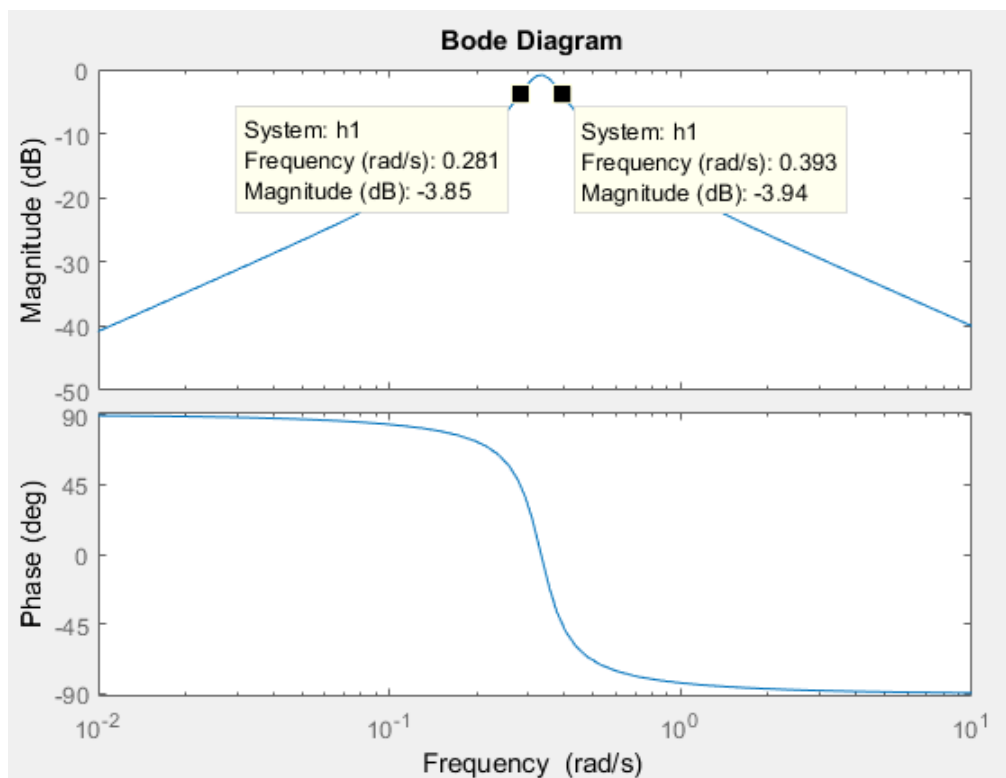


Figura 3: Circuito 1 - Diagrama de Bode

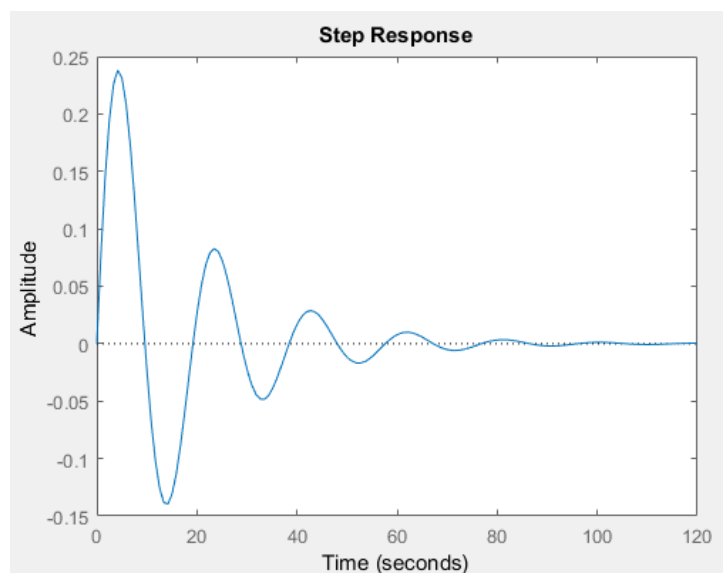


Figura 4: Circuito 1 - Resposta ao degrau unitário

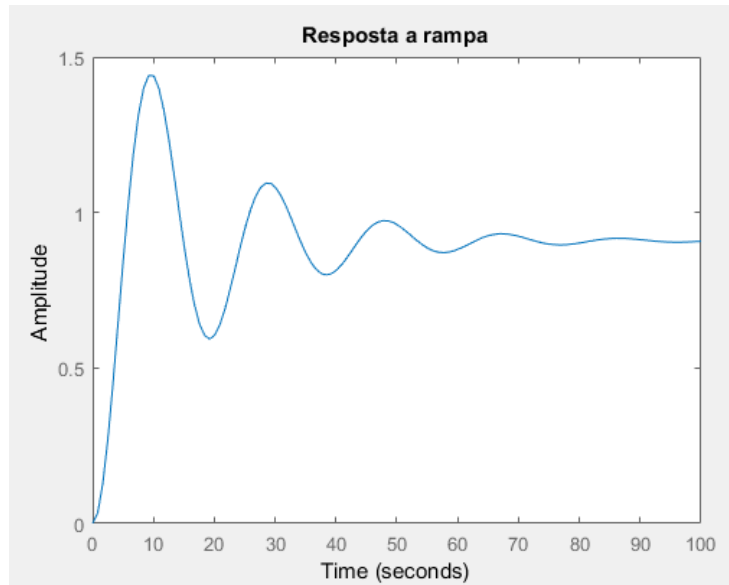


Figura 5: Circuito 1 - Resposta a rampa unitária

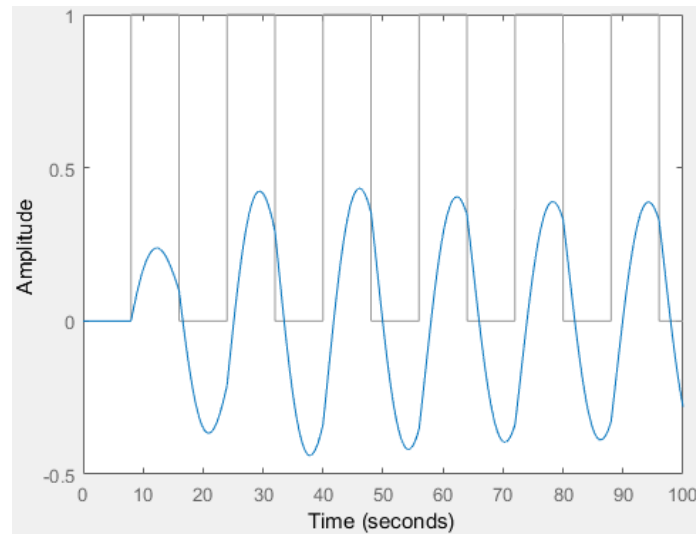


Figura 6: Circuito 1 - Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

## 2.2 Circuito 2

### 2.2.1 Determinar a função do circuito

Para modelarmos utilizaremos as seguintes equações:

$$I_1 = I_{in} - I_{out}$$

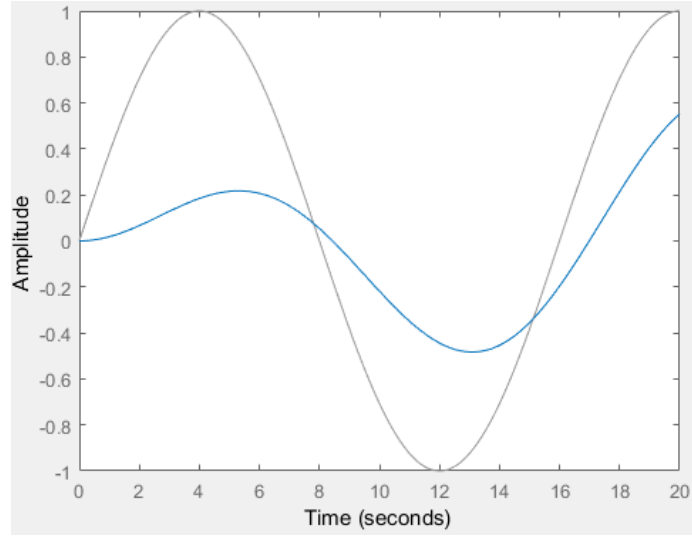


Figura 7: Circuito 1 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

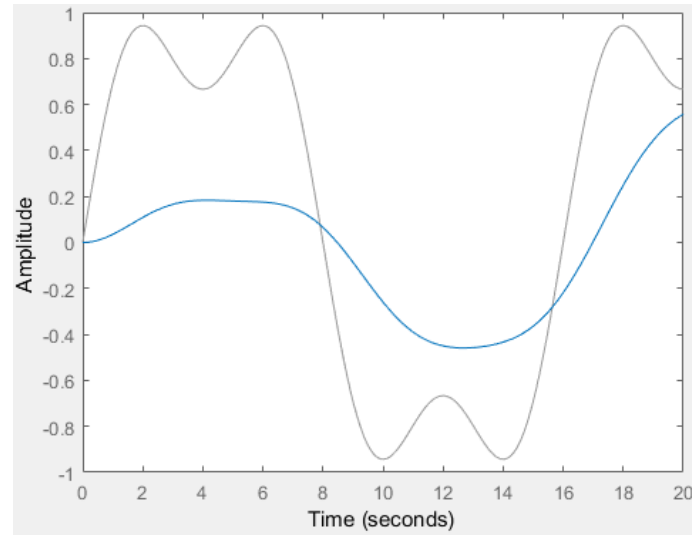


Figura 8: Circuito 1 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

$$R_2 I_{out} + \frac{L \partial I_{out}}{\partial t} - R_1 I_1 + \frac{1}{C} \int I_{out} \partial t = 0$$

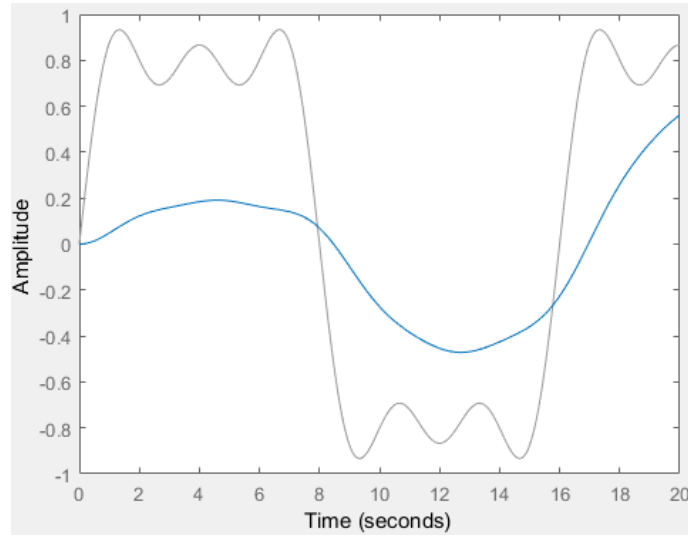


Figura 9: Circuito 1 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

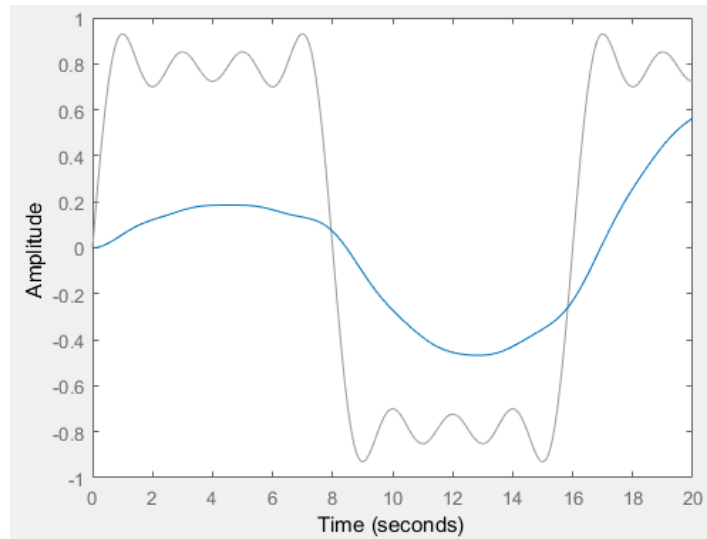


Figura 10: Circuito 1 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

Substituindo  $I_1$  para colocarmos a equação em função de  $I_{in}$  e  $I_{out}$  e derivando-a para removermos a Integral, temos a E.D.O:

$$\frac{\partial I_{in}}{\partial t}(R_1) = \frac{\partial^2 I_{out}}{\partial t^2}(L) + \frac{\partial I_{out}}{\partial t}(R_1 + R_2) + \frac{I_{out}}{C}$$

Transformando essa E.D.O em Laplace, obtemos:

$$X(S)(SR_1) = Y(S)\left(S^2 + S(R_1 + R_2) + \frac{1}{C}\right) \Rightarrow$$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{S(R_1C)}{S^2(LC) + S(R_1C + R_2C) + 1}$$

Escolhendo os seguintes valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 10\Omega$ ;
- $R_2 = 100\Omega$ ;
- $C = 220\mu F$ ;
- $L = 166\eta H$ ;

Encontramos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{10S}{S^2 + 110S + 1}$$

A partir dessa função obtemos os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

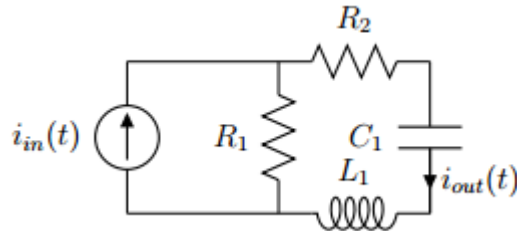


Figura 11: Circuito 2



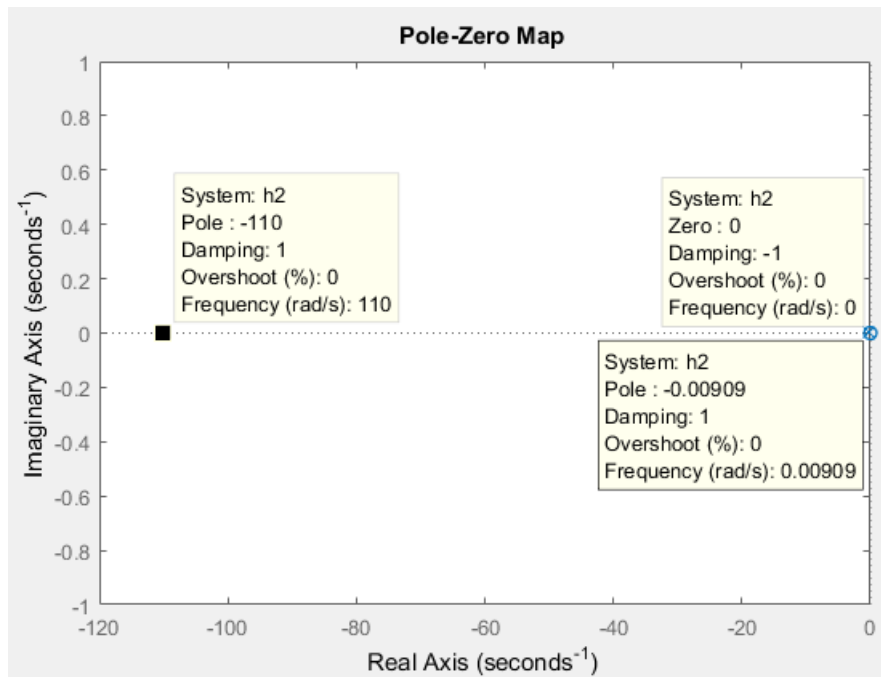


Figura 12: Circuito 2 - Polos e Zeros

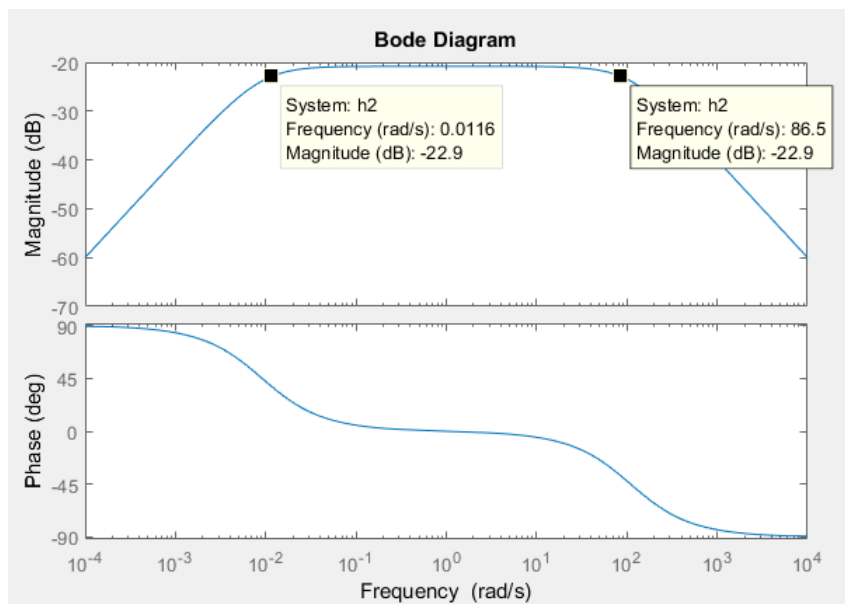


Figura 13: Circuito 2 - Diagrama de Bode

Assim como o circuito da figura 1, temos também um filtro passa faixa que opera nas faixas entre 0.01 rad/seg e 86.5 rad/seg

### 2.2.2 Resposta ao degrau unitário

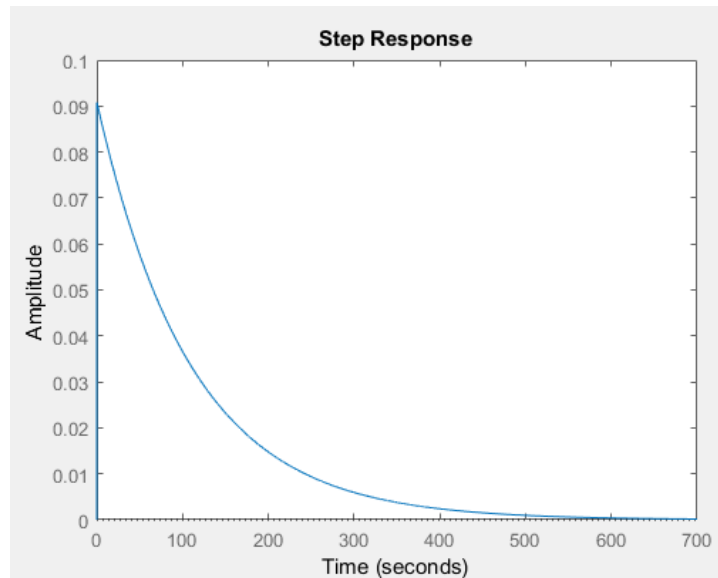


Figura 14: Circuito 2 - Resposta ao degrau unitário

### 2.2.3 Resposta a rampa unitário

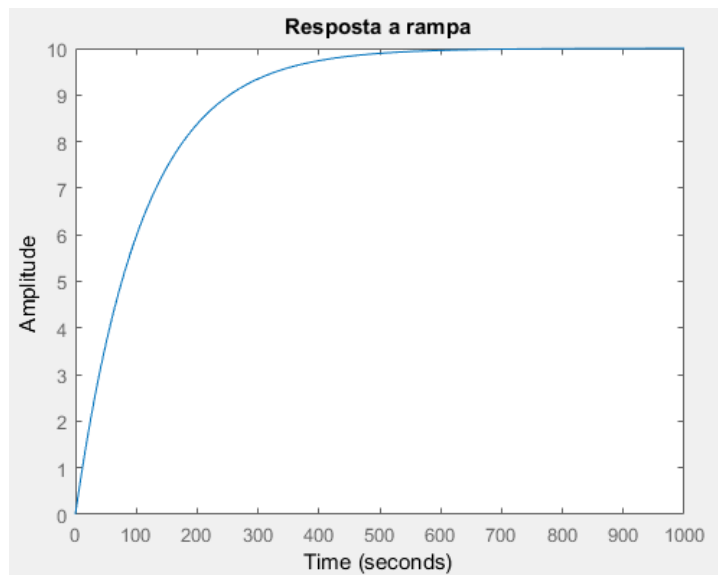


Figura 15: Circuito 2 - Resposta a rampa unitária

### 2.2.4 Resposta a onda quadrada

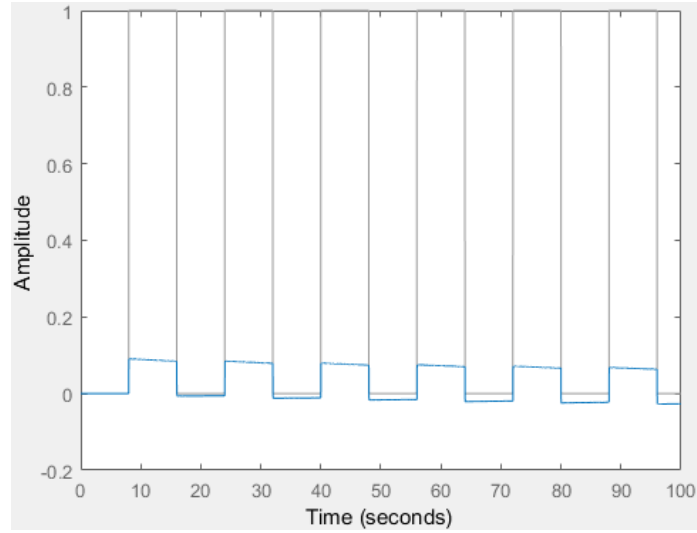


Figura 16: Circuito 2 - Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

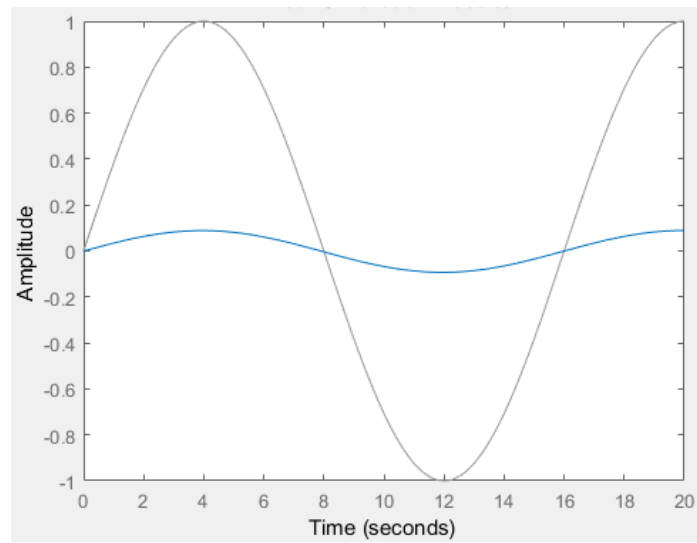


Figura 17: Circuito 2 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

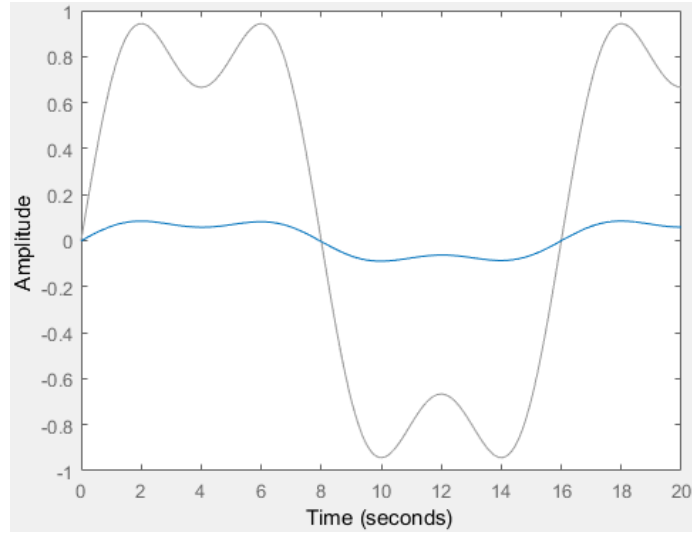


Figura 18: Circuito 2 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

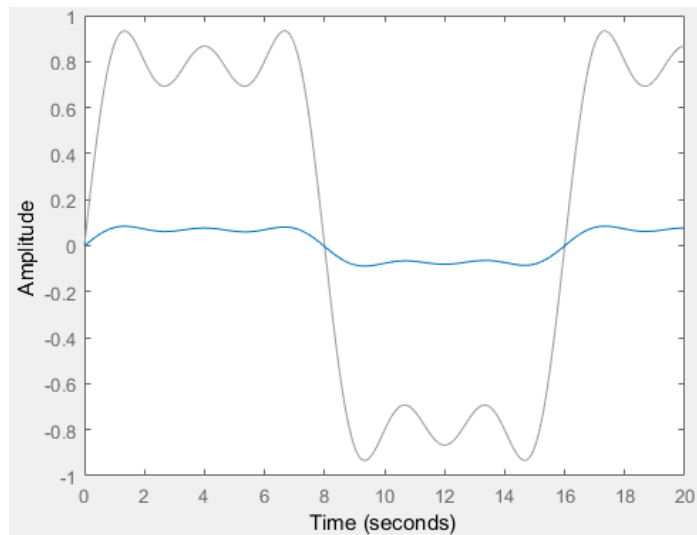


Figura 19: Circuito 2 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

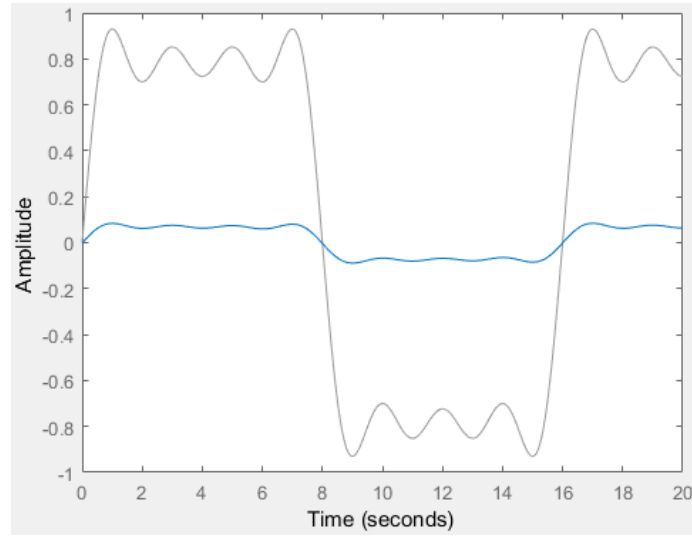


Figura 20: Circuito 2 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

## 2.3 Circuito 3

### 2.3.1 Determinar a função do circuito

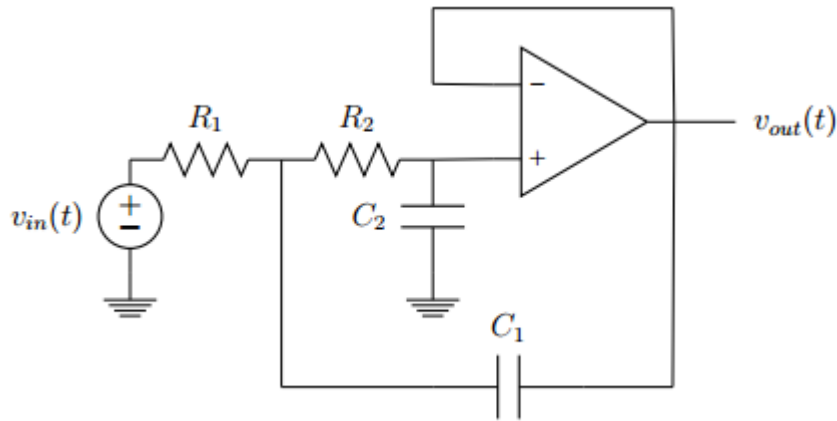


Figura 21: Circuito 3

Este circuito, também conhecido como topologia de Sallen-Key, sabendo que o AmpOp possui impedância infinita em sua entrada, que  $V^- = V^+$ , que  $V^- = V_{out}$  e chamando  $V_a$  da tensão que passa por  $C_1$ , obtemos:

$$V_a = V_{out} + R_2 C_2 \frac{\partial V_{out}}{\partial t}$$

Utilizando a lei dos nós entre  $R_1$  e  $R_2$  e já substituindo  $V_a$  por  $V_{out}$  temos:

$$\frac{V_{in}}{R_1} = R_2 C_1 C_2 \frac{\partial^2 V_{out}}{\partial t^2} + \left( C_2 + \frac{R_2 C_2}{R_1} \right) \frac{\partial V_{out}}{\partial t} + \frac{V_{out}}{R_1}$$

Com esta E.D.O, podemos encontrar a seguinte função de transferência utilizando o mesmo método empregado nos circuitos anteriores, com isso temos:

$$H(S) = \frac{1}{S^2 (R_1 R_2 C_1 C_2) + S (R_1 C_2 + R_2 C_2) + 1}$$

Utilizando os valores para cada elemento do circuito:

- $R_1 = 10k\Omega$ ;
- $R_2 = 1k\Omega$ ;
- $C_1 = 50nF$ ;
- $C_2 = 50nF$ ;

Encontramos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{1}{2000S^2 + 110S + 1}$$

Que nos gera os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:

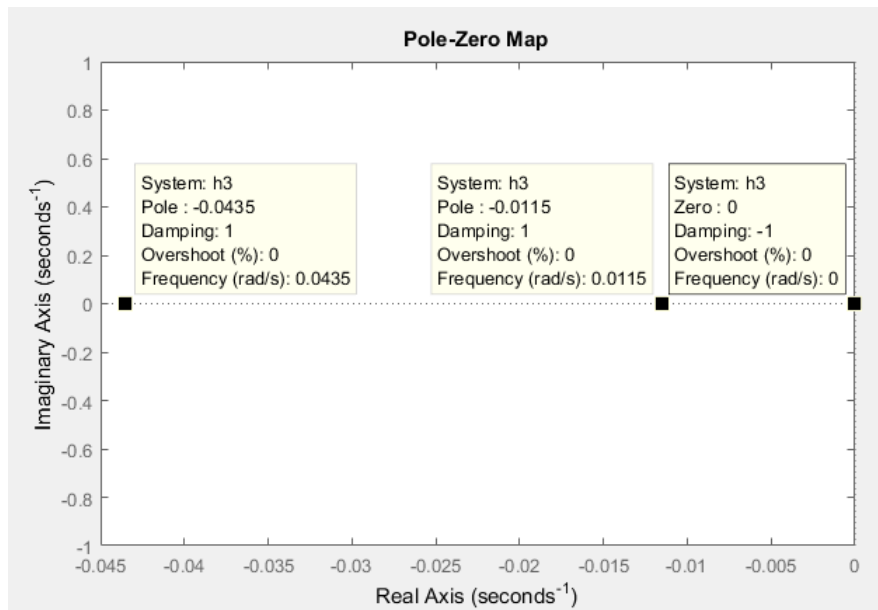


Figura 22: Circuito 3 - Polos e Zeros

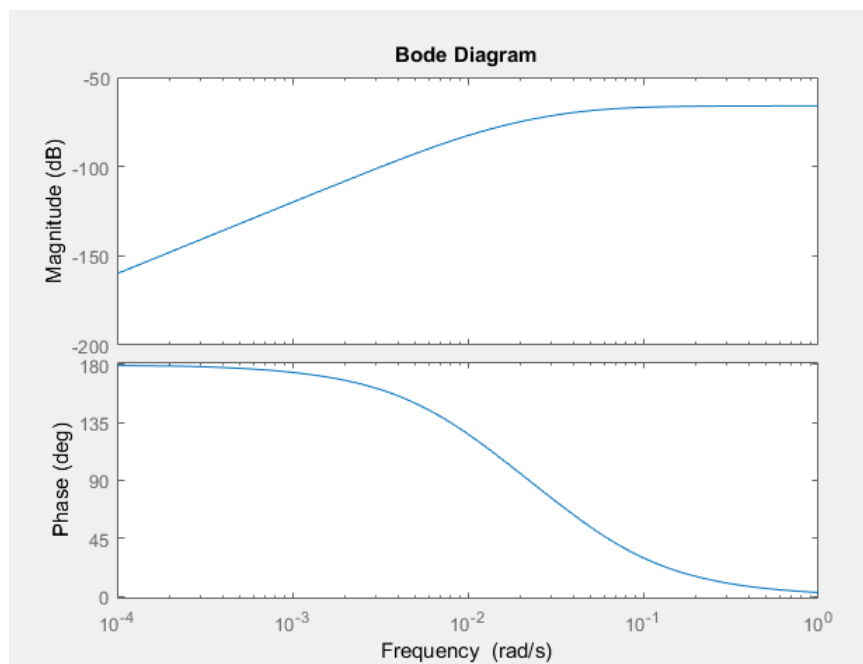


Figura 23: Circuito 3 - Diagrama de Bode

Pela análise do diagrama de Bode, pode-se afirmar que esse circuito é um filtro passa alta com frequência no seu menor polo de 0.01 rad/sec.

### 2.3.2 Resposta ao degrau unitário

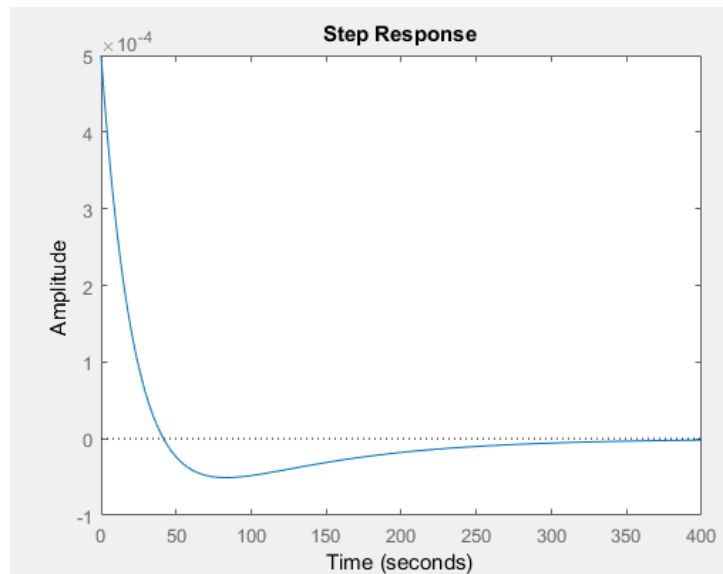


Figura 24: Circuito 3 - Resposta ao degrau unitário

### 2.3.3 Resposta a rampa unitário

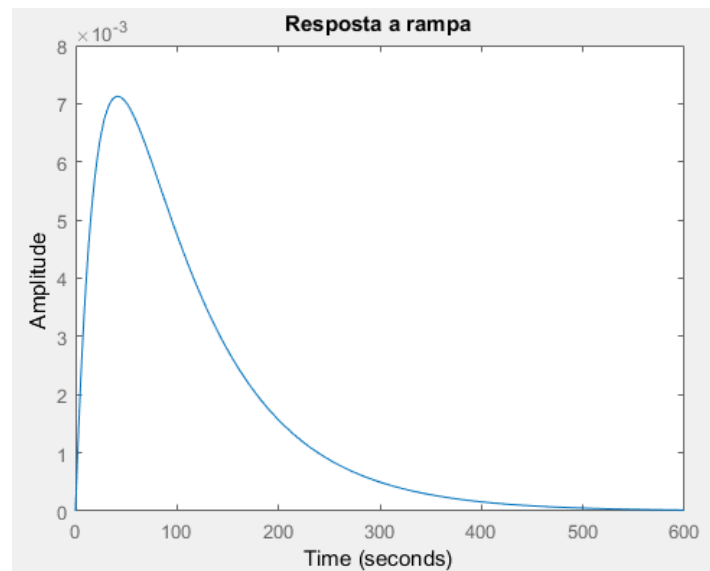


Figura 25: Circuito 3 - Resposta a rampa unitária



### 2.3.4 Resposta a onda quadrada

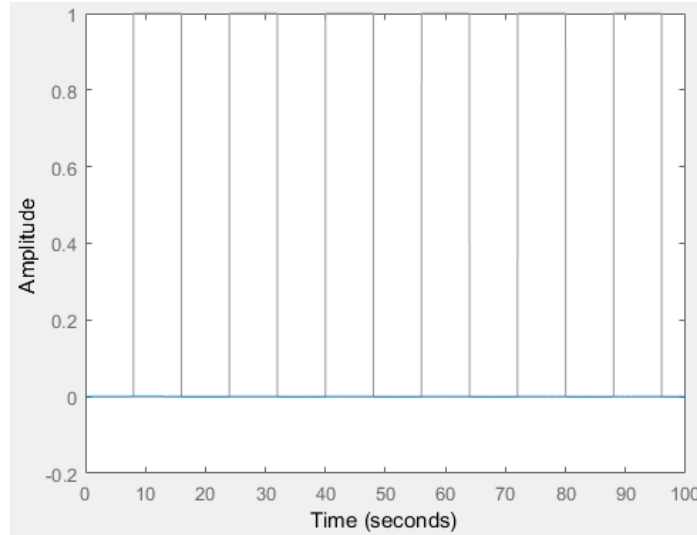


Figura 26: Circuito 3 - Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

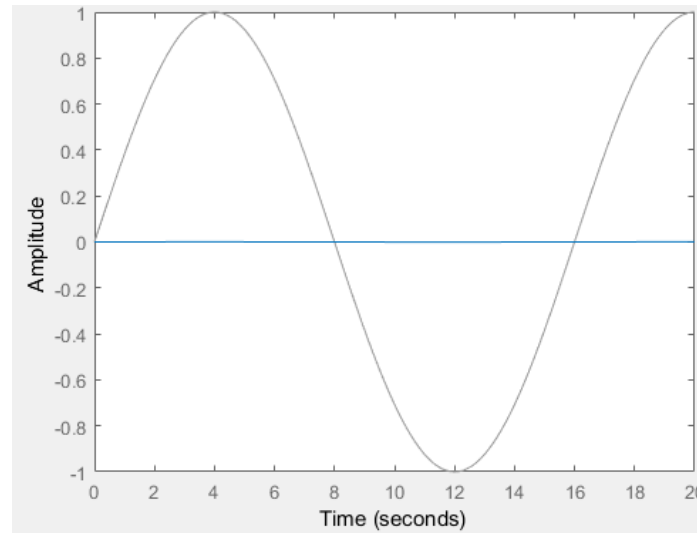


Figura 27: Circuito 3 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

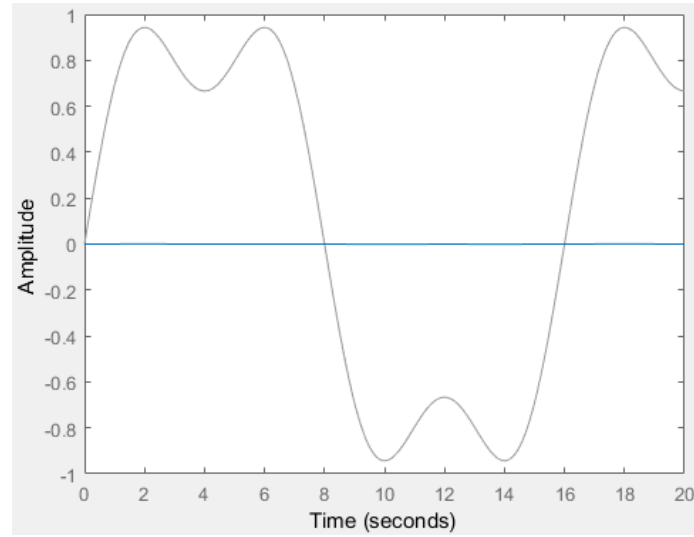


Figura 28: Circuito 3 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

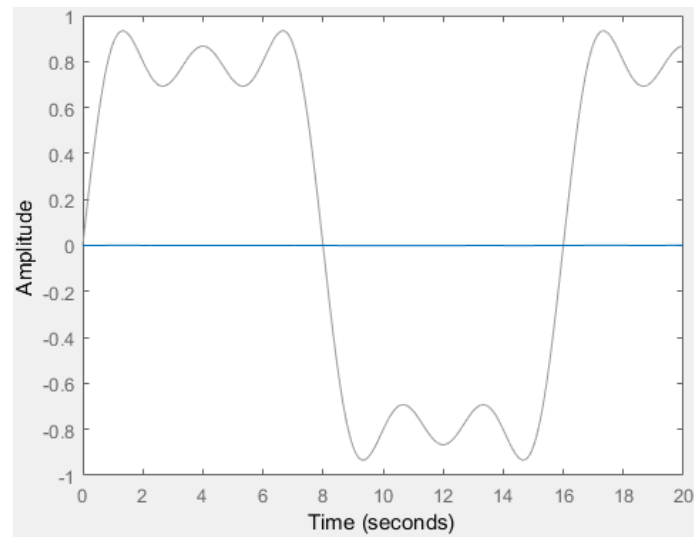


Figura 29: Circuito 3 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

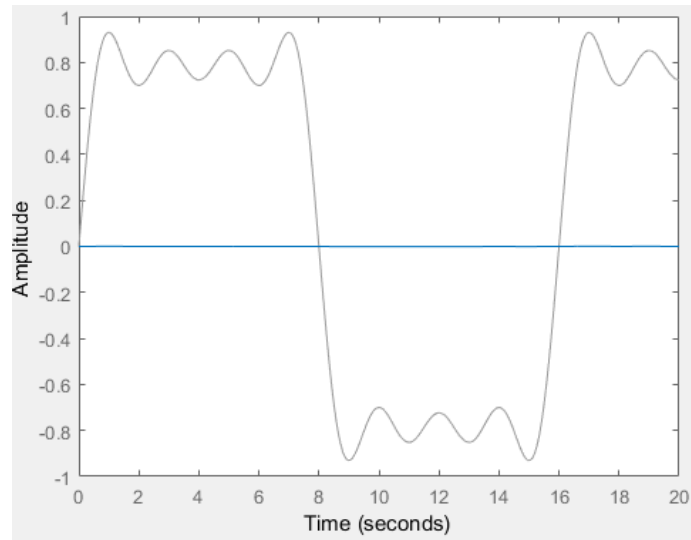


Figura 30: Circuito 3 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

## 2.4 Circuito 4

### 2.4.1 Determinar a função do circuito

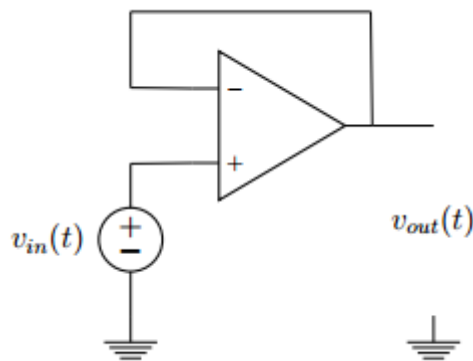


Figura 31: Circuito 4

Esse circuito, conhecido como buffer, é utilizado como um isolador. Como  $V_{in}$  é igual a  $V_{out}$ , sua função de transferência  $H(S) = 1$ . Não existem polos nem zeros para esse circuito e seu diagrama de Bode permanece em 0.

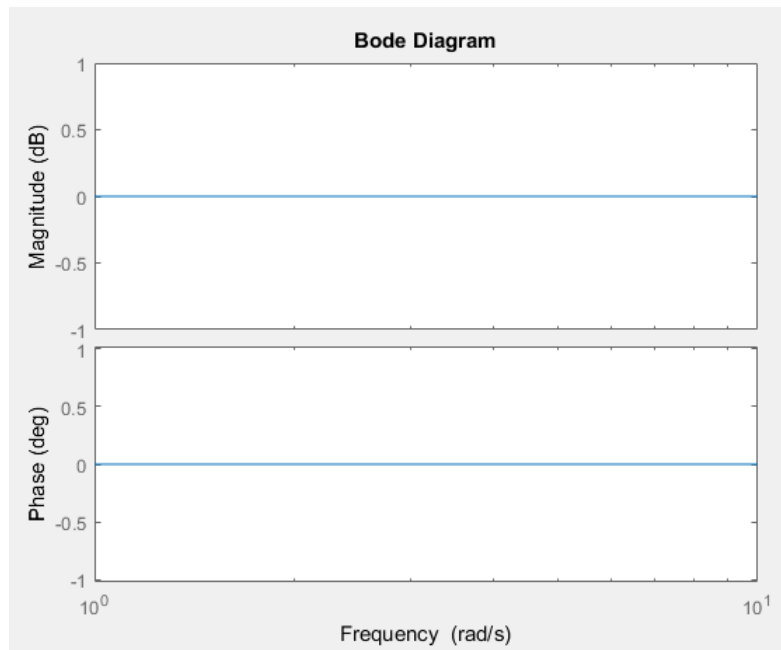


Figura 32: Circuito 4 - Diagrama de Bode

#### 2.4.2 Resposta ao degrau unitário

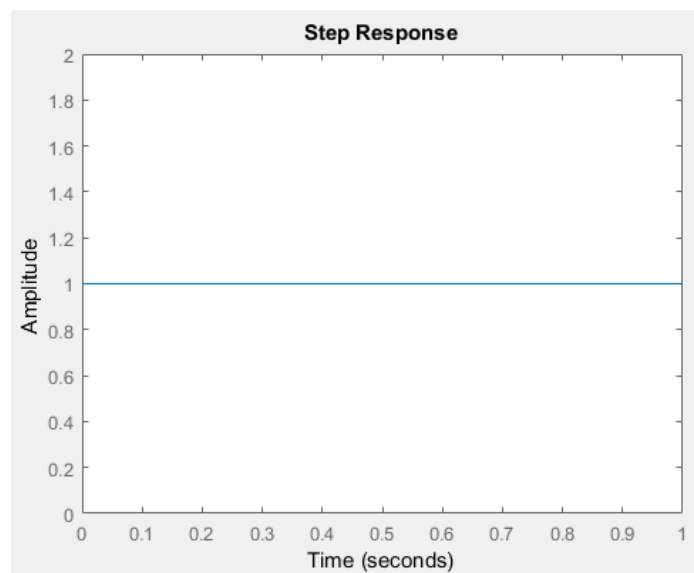


Figura 33: Circuito 4 - Resposta ao degrau unitário

### 2.4.3 Resposta a rampa unitário

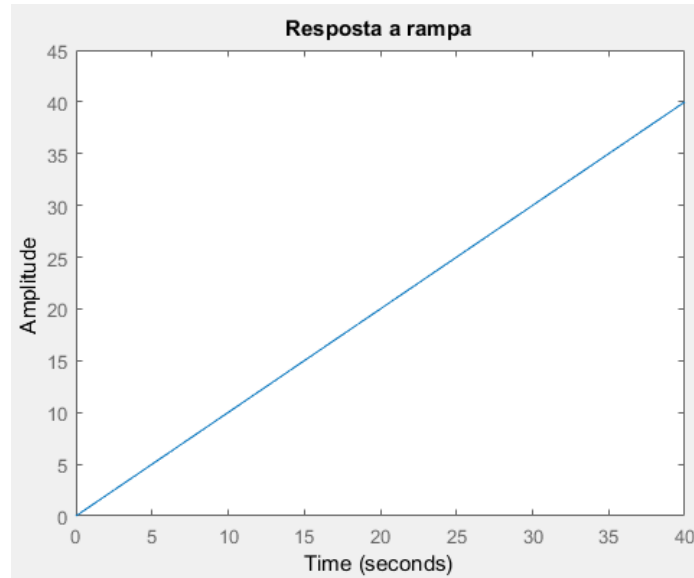


Figura 34: Circuito 4 - Resposta a rampa unitária

### 2.4.4 Resposta a onda quadrada

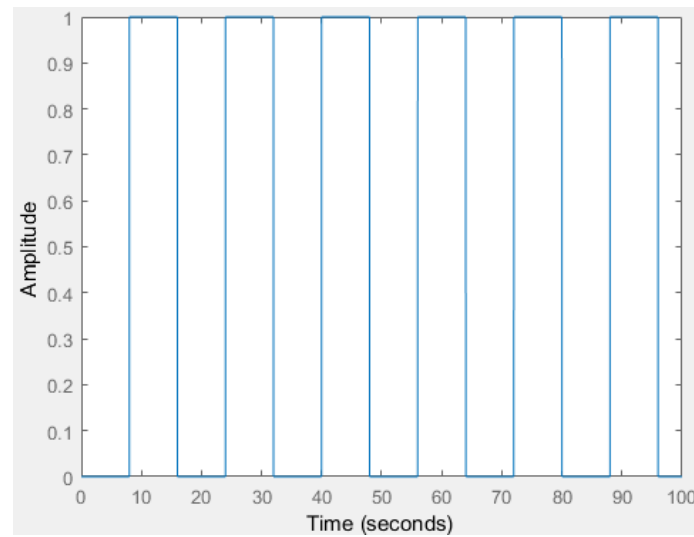


Figura 35: Circuito 4 - Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

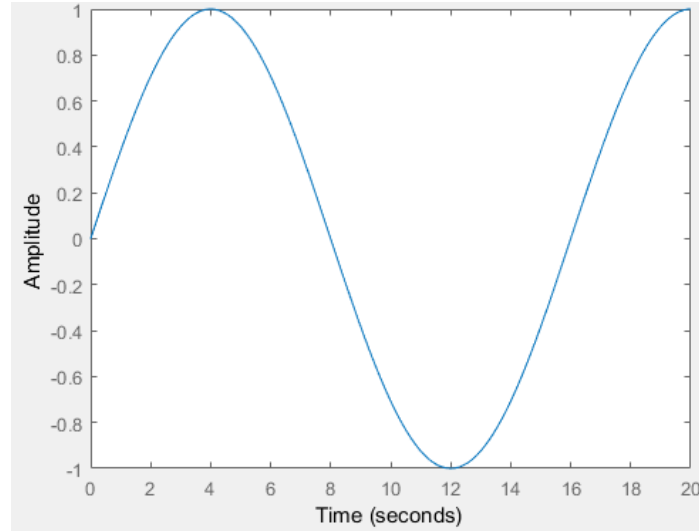


Figura 36: Circuito 4 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

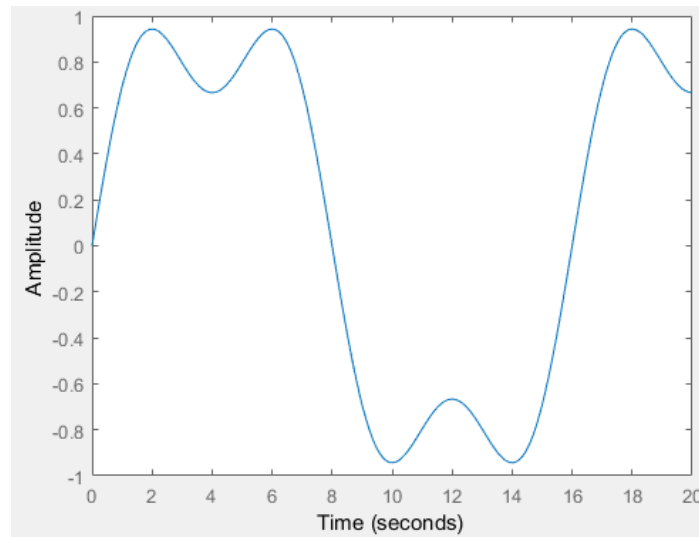


Figura 37: Circuito 4 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

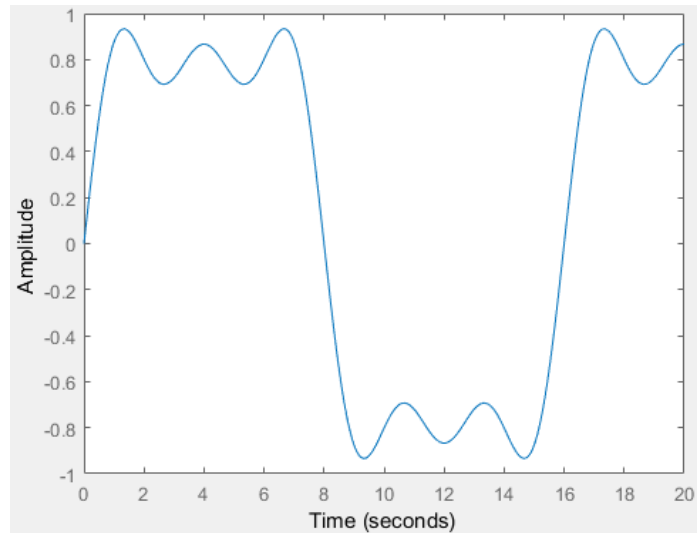


Figura 38: Circuito 4 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

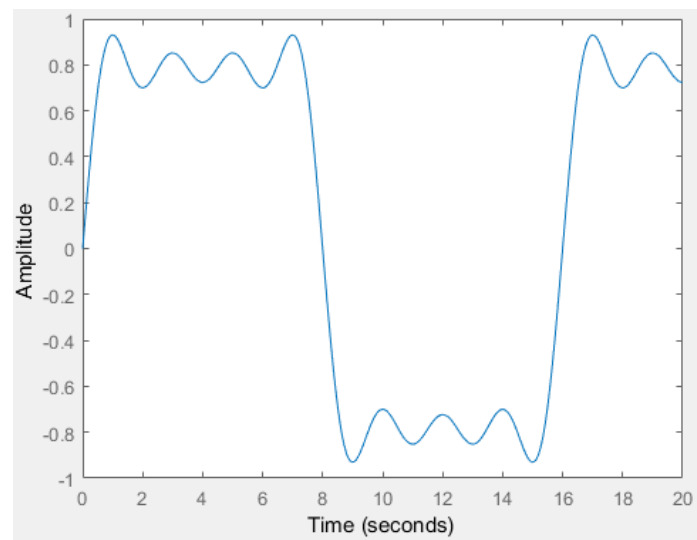


Figura 39: Circuito 4 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

## 2.5 Circuito 5

### 2.5.1 Determinar a função do circuito

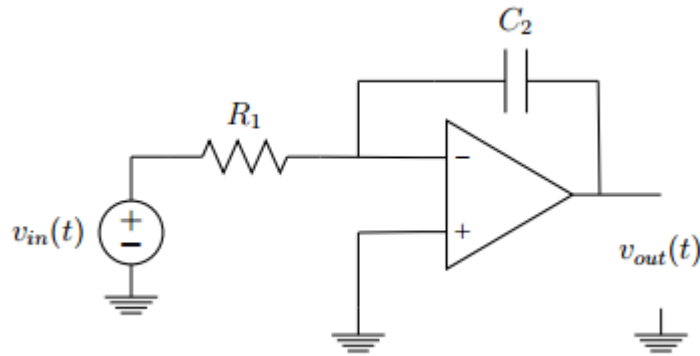


Figura 40: Circuito 5

Esse circuito pode ser escrito como:

$$\frac{V_{in}}{R} + C \frac{\partial V_{out}}{\partial t} = 0$$

Transformando esta E.D.O com Laplace utilizando o mesmo método dos circuitos passados, obtemos:

$$H(S) = \frac{-1}{RCS}$$

Tomando os seguintes valores para os elementos do circuito:

- $R = 10\Omega$ ;
- $C = 1F$ ;

Temos a seguinte equação de transferência:

$$H(S) = \frac{-1}{10S}$$

A partir dessa equação, obtemos os seguintes polos, zeros e diagrama de Bode:



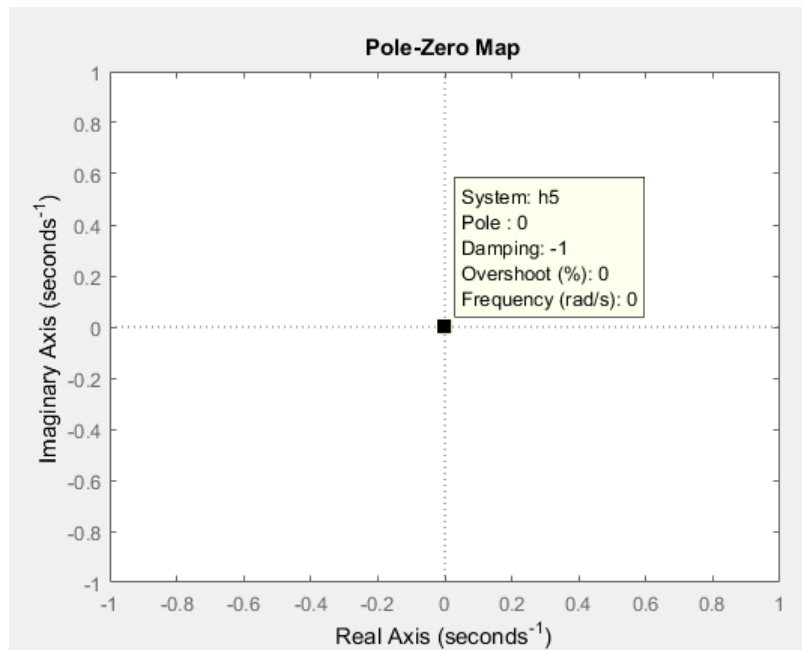


Figura 41: Circuito 5 - Polos e Zeros

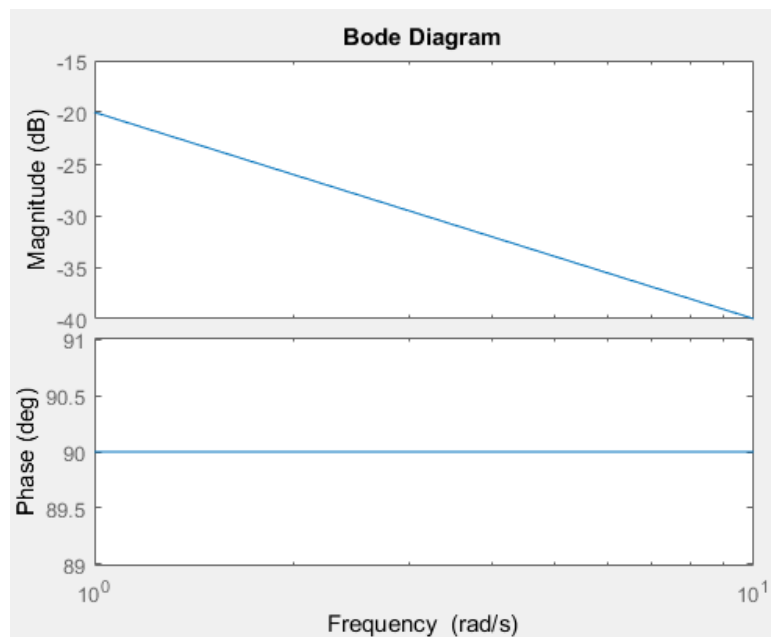


Figura 42: Circuito 5 - Diagrama de Bode

Este circuito corresponde a um filtro passa baixa integrador de apenas um polo.

### 2.5.2 Resposta ao degrau unitário

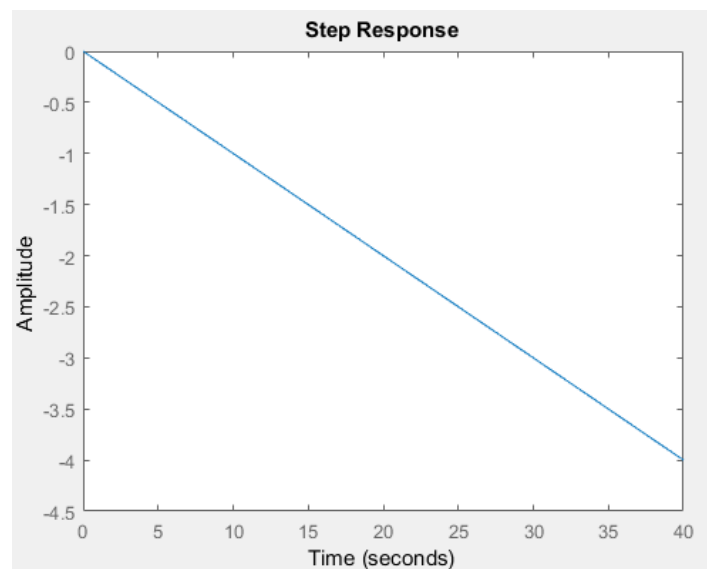


Figura 43: Circuito 5 - Resposta ao degrau unitário

### 2.5.3 Resposta a rampa unitária

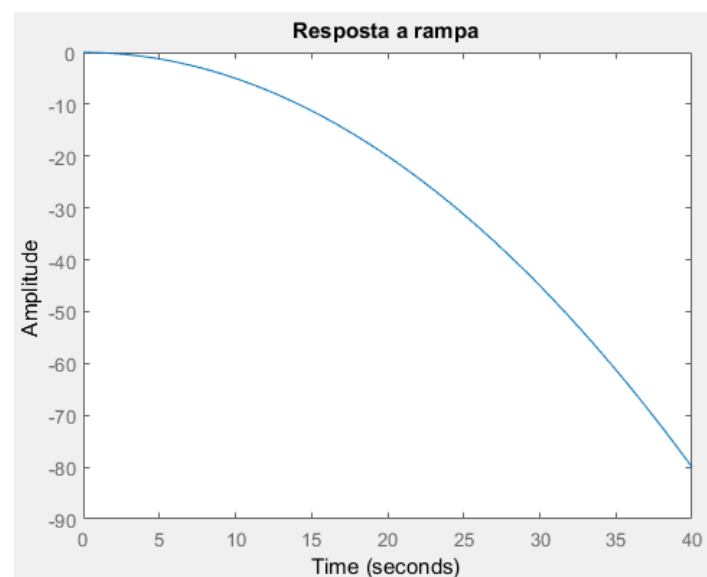


Figura 44: Circuito 5 - Resposta a rampa unitária

### 2.5.4 Resposta a onda quadrada

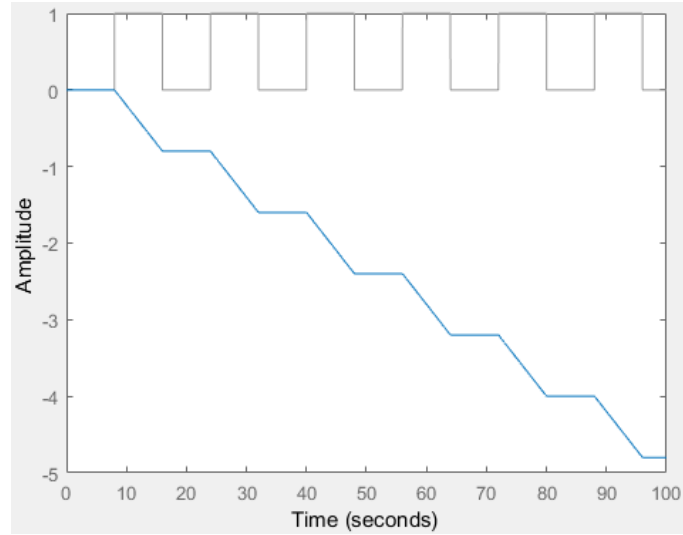


Figura 45: Circuito 5 - Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

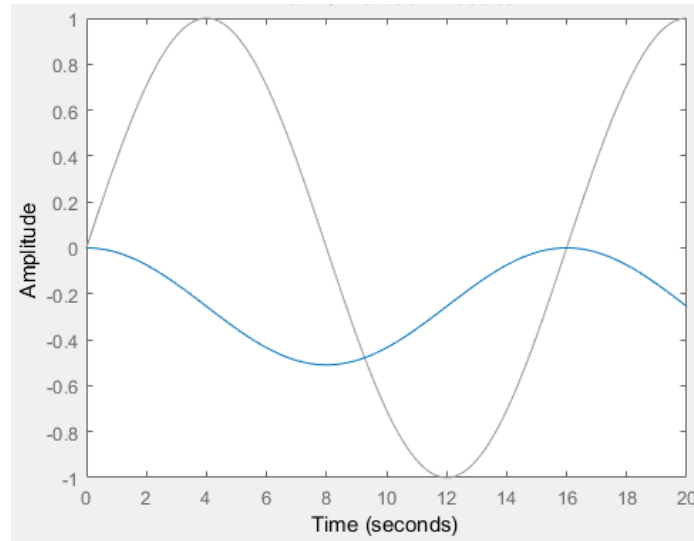


Figura 46: Circuito 5 - Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

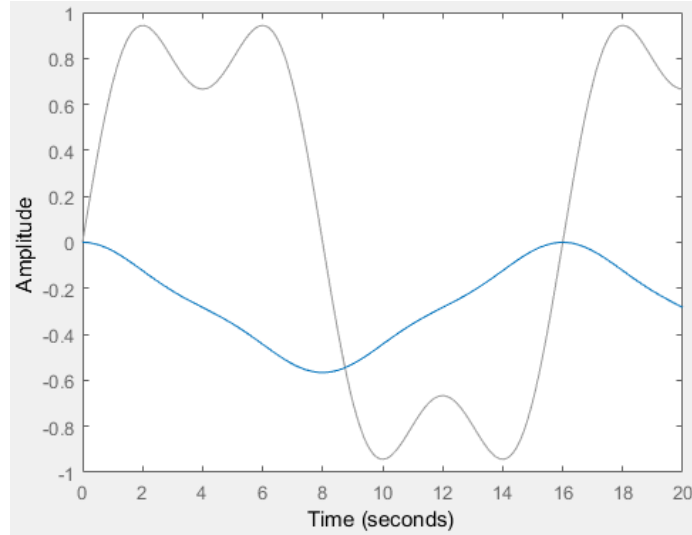


Figura 47: Circuito 5 - Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

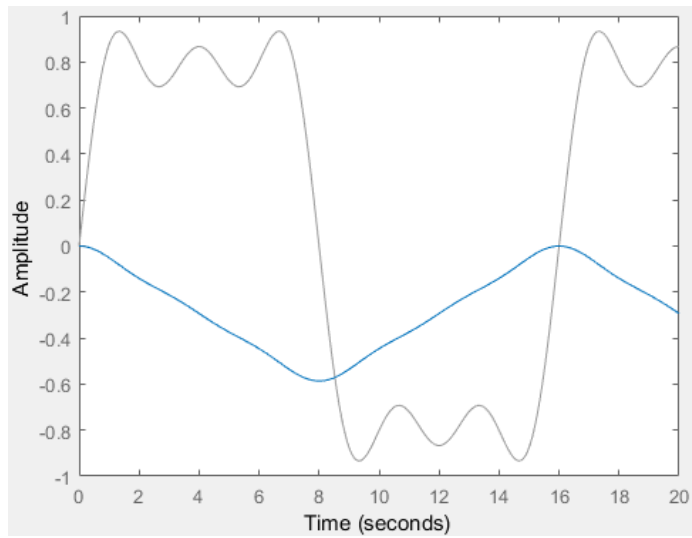


Figura 48: Circuito 5 - Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

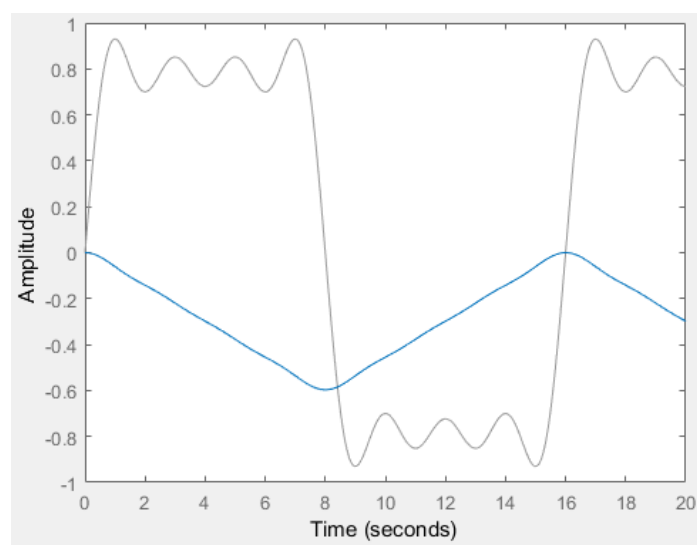


Figura 49: Circuito 5 - Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

### 3 Questão 2

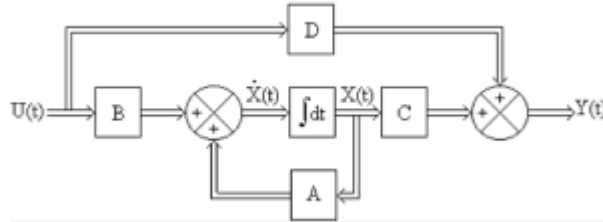


Figura 50: Diagrama de Blocos

#### 3.1 Equações do diagrama

Seguindo as regras definidas no trabalho em relação aos valores de A, B, C e D para o diagrama de blocos, temos:

- $a = -22$ ;
- $b = 7$ ;
- $c = 3$ ;
- $d = 4$ ;

Pare que o circuito possua estabilidade BIBO, precisamos que o valor de A seja negativo, caso contrario, o circuito é instável.

Com esses valores obtemos as seguintes equações para o diagrama de blocos abaixo:

- $y(t) = 4u(t) + 3x(t)$  (Item (e) da questão 2);
- $B = 7u(t)$ ;
- $C = 3x(t)$ ;
- $D = 4u(t)$ ;
- $x'(t) = 7u(t) - 22x(t)$  (Item (d) da questão 2);

Sabendo que  $x(t) = \frac{y(t)-4u(t)}{3}$  e  $x' = \frac{y'(t)-4u'(t)}{3}$ , obtemos a seguinte E.D.O:

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 22y(t) = 4\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 109u(t)$$

Aplicando Laplace, obtemos a seguinte função de transferência:

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{4S + 109}{S + 22}$$

De posse da função de transferência, podemos encontrar os seguintes polos e zeros e o diagrama de Bode:

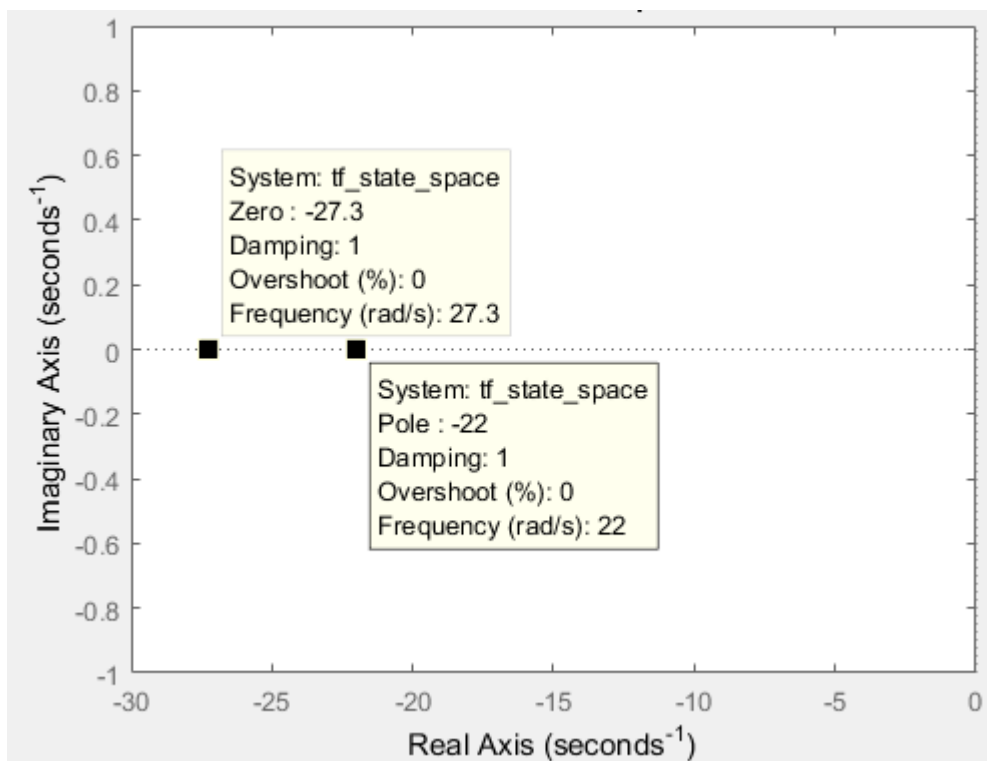


Figura 51: Polos e Zeros

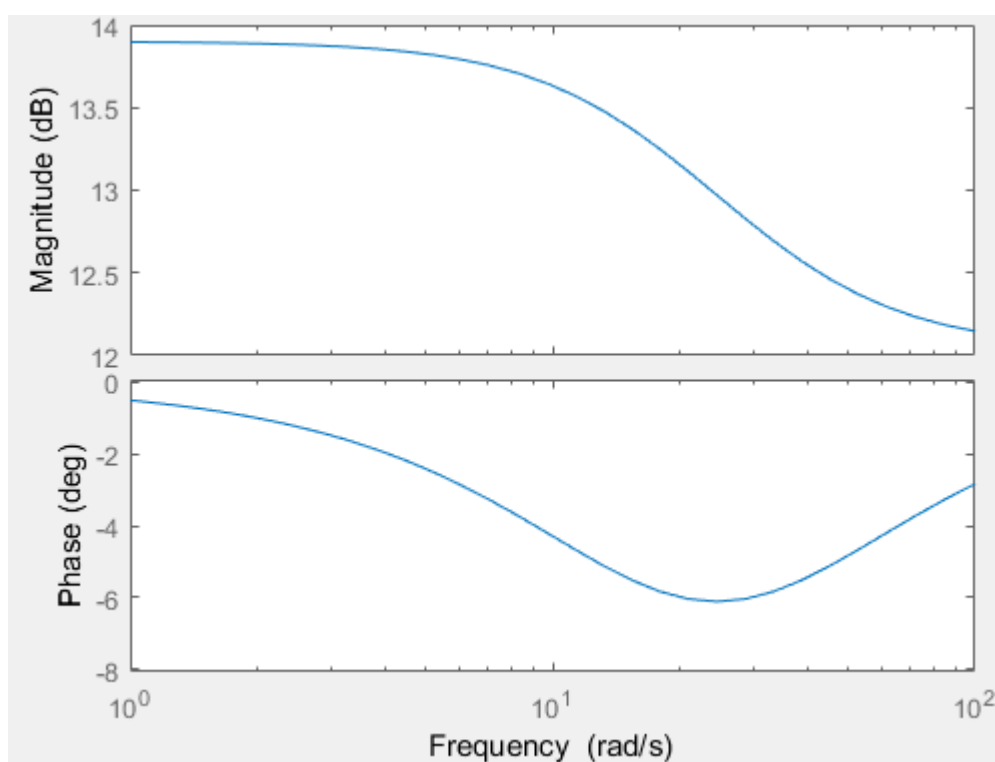


Figura 52: Diagrama de Bode



### 3.2 Resposta ao degrau unitário

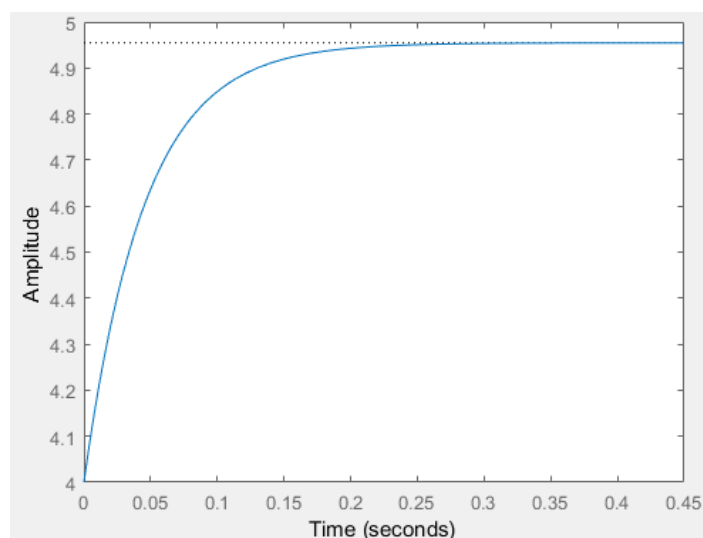


Figura 53: Resposta ao degrau unitário

### 3.3 Resposta a rampa unitária

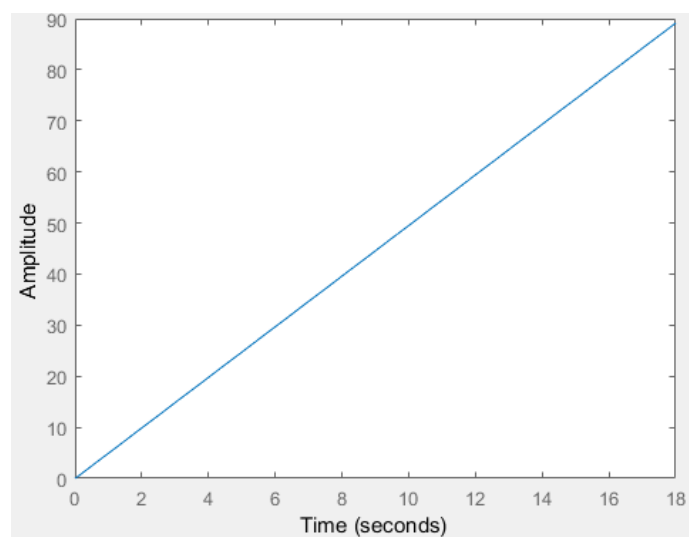


Figura 54: Resposta a rampa unitária

### 3.4 Resposta a onda quadrada

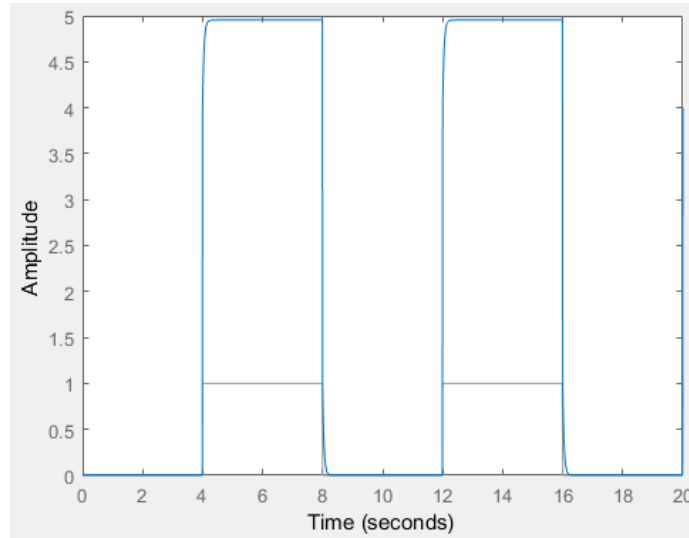


Figura 55: Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

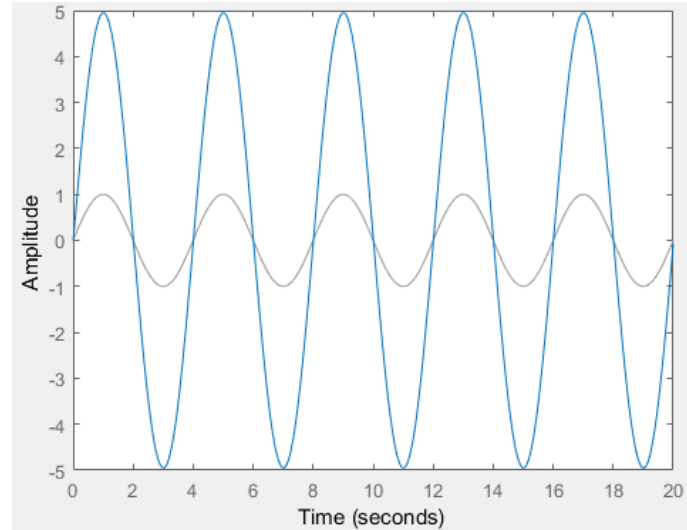


Figura 56: Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{2}\pi$

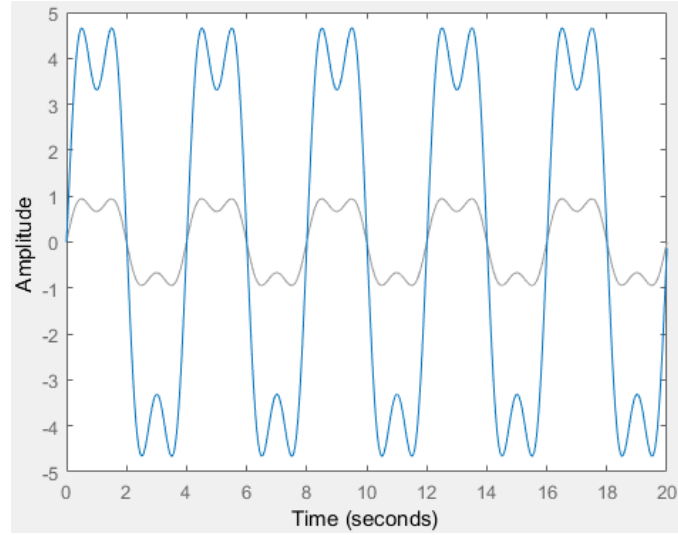


Figura 57: Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{2}\pi$

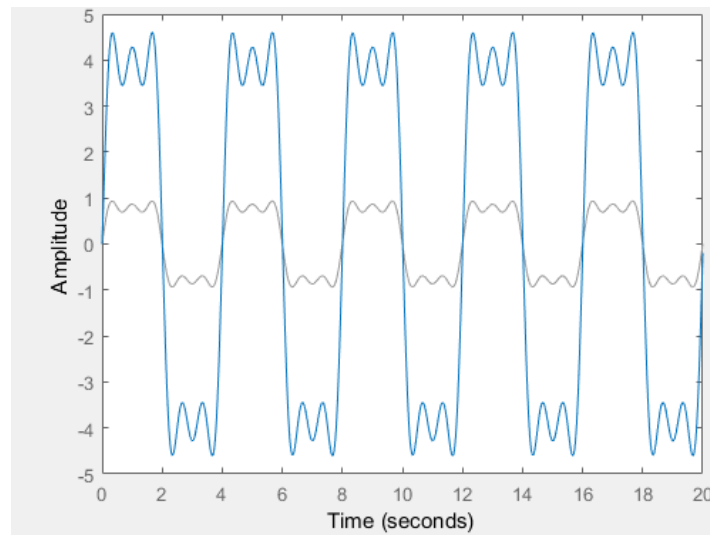


Figura 58: Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{2}\pi$

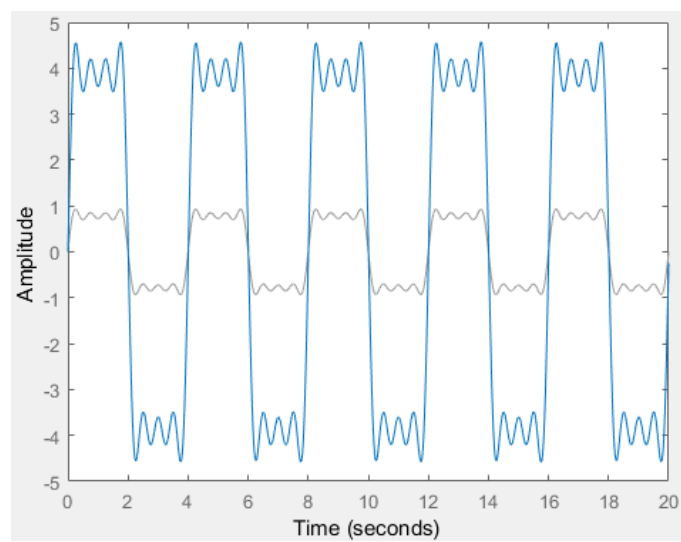


Figura 59: Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{2}\pi$

## 4 Questão 3

Resolva as questões para os sistemas descritos pelas seguintes funções de transferência:

$$H(S) = \frac{1 + \alpha S}{S^2 + 2S + 2}$$

$$H(S) = \frac{S + 10^4}{S^2 + 2\beta S + 100}$$

### 4.1 E.D.O dos sistemas

#### 4.1.1 Sistema 1

$$X(S)[1 + \alpha S] = Y(S)[S^2 + 2S + 2] \Rightarrow$$

$$\alpha \frac{\partial x(t)}{\partial t} + x(t) = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial^2 t} + 2 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 2y(t)$$

#### 4.1.2 Sistema 2

$$X(S)[S + 10^4] = Y(S)[S^2 + 2\beta S + 100] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} + 10^4 x(t) = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial^2 t} + 2\beta \frac{\partial y(t)}{\partial t} + 100y(t)$$

## 4.2 Polos e zeros

### 4.2.1 Variando em $\alpha$

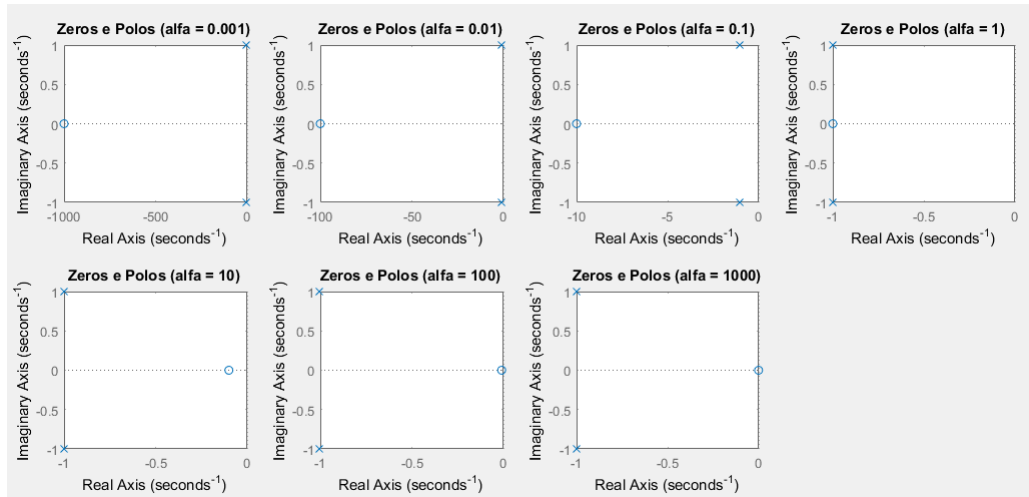


Figura 60: Polos e Zeros variando em  $\alpha$

### 4.2.2 Variando em $\beta$

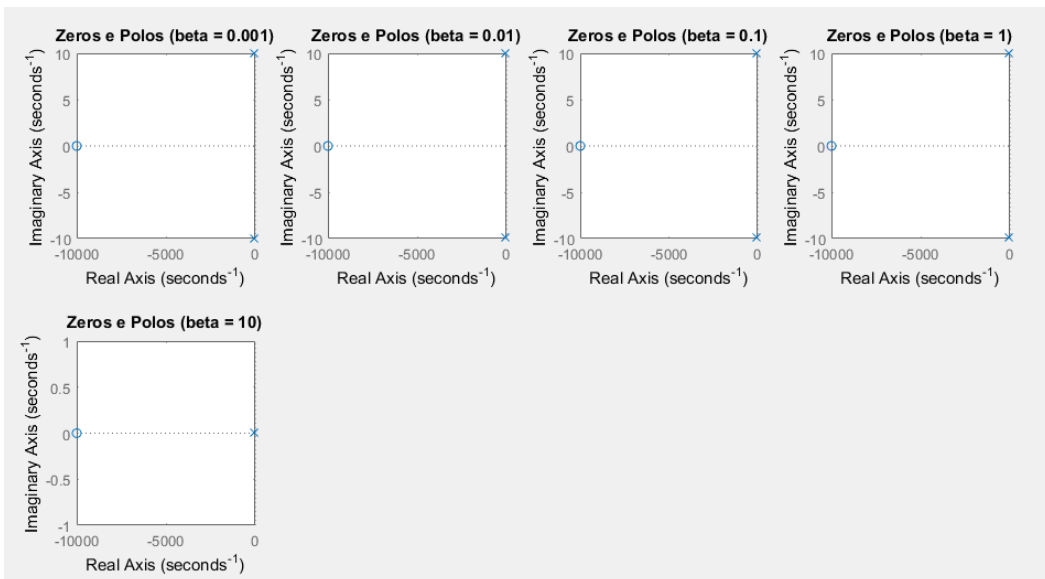


Figura 61: Polos e Zeros variando em  $\beta$

## 4.3 Diagrama de Bode

### 4.3.1 Variando em $\alpha$

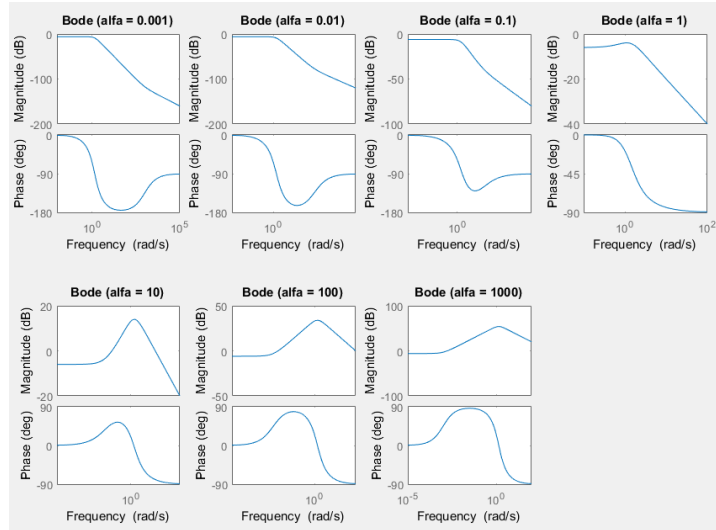


Figura 62: Diagrama de Bode variando em  $\alpha$

### 4.3.2 Variando em $\beta$

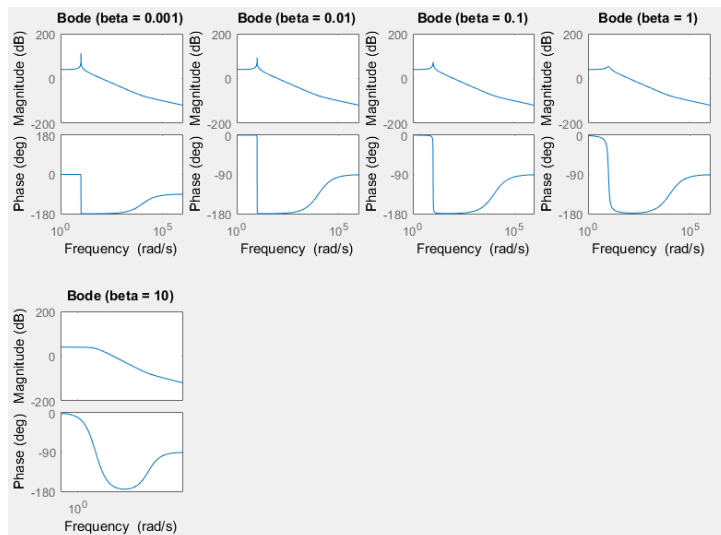


Figura 63: Diagrama de Bode variando em  $\beta$

## 4.4 Resposta ao Degrau Unitário

### 4.4.1 Variando em $\alpha$

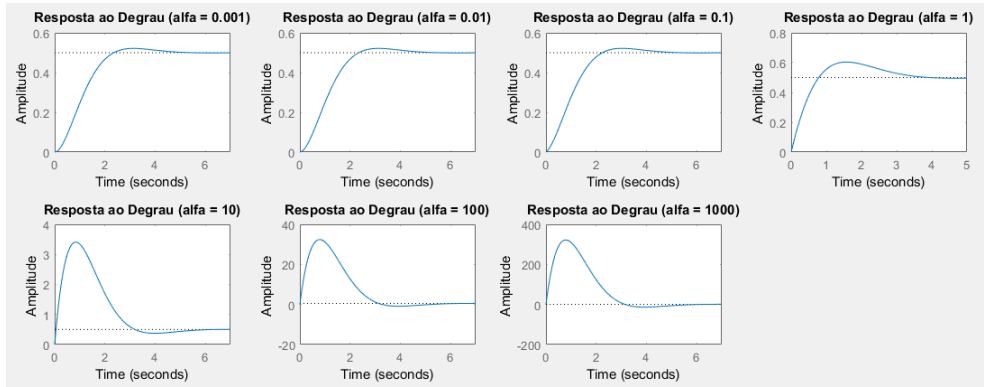


Figura 64: Resposta ao Degrau Unitário variando em  $\alpha$

### 4.4.2 Variando em $\beta$

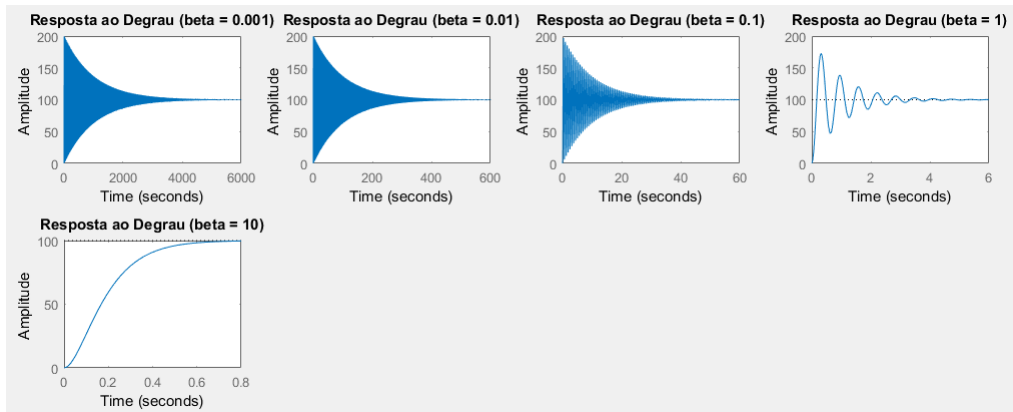


Figura 65: Resposta ao Degrau Unitário variando em  $\beta$



## 4.5 Resposta a Rampa Unitária

### 4.5.1 Variando em $\alpha$

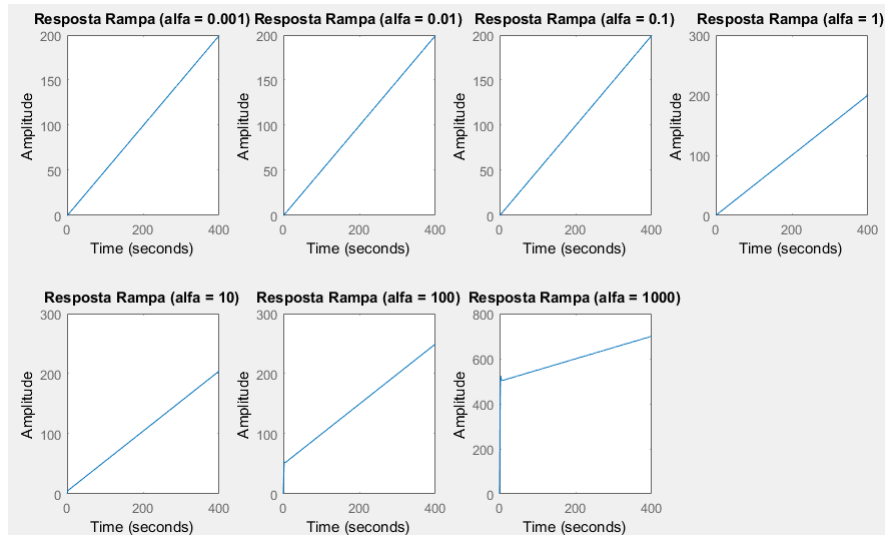


Figura 66: Resposta a rampa Unitária variando em  $\alpha$

### 4.5.2 Variando em $\beta$

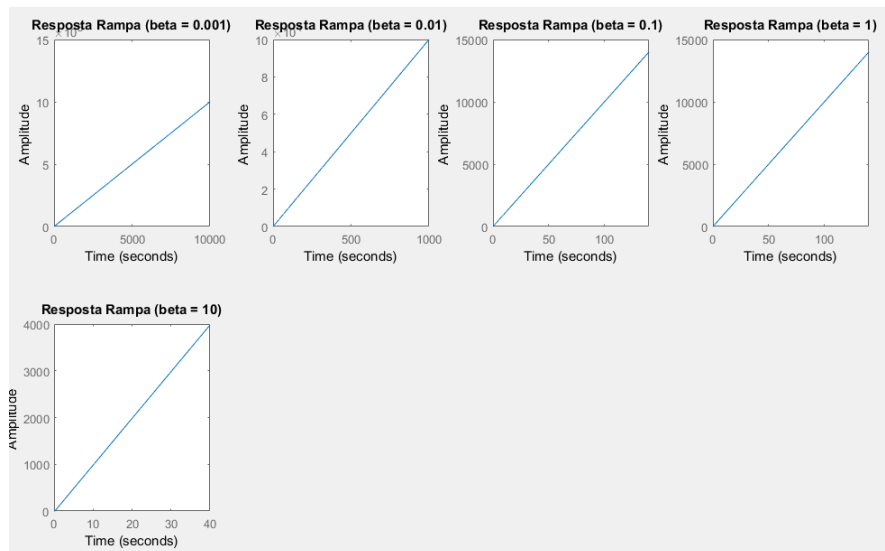


Figura 67: Resposta a rampa Unitária variando em  $\beta$

## 4.6 Resposta a onda quadrada

### 4.6.1 Variando em $\alpha$

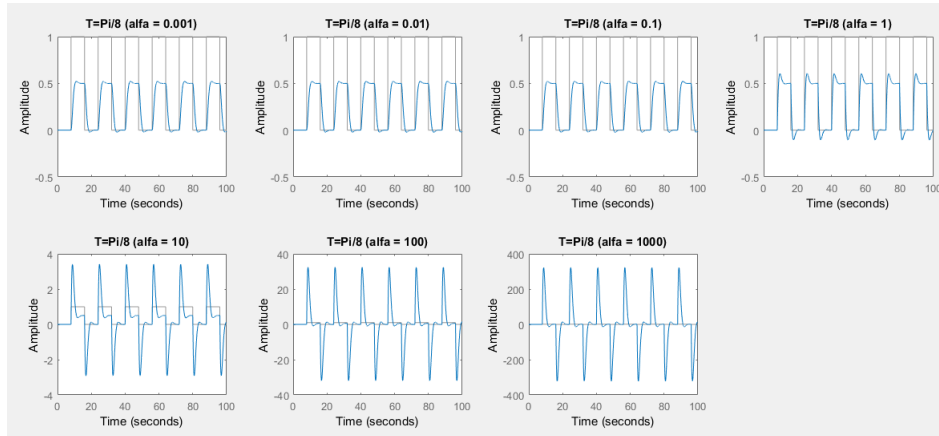


Figura 68: Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

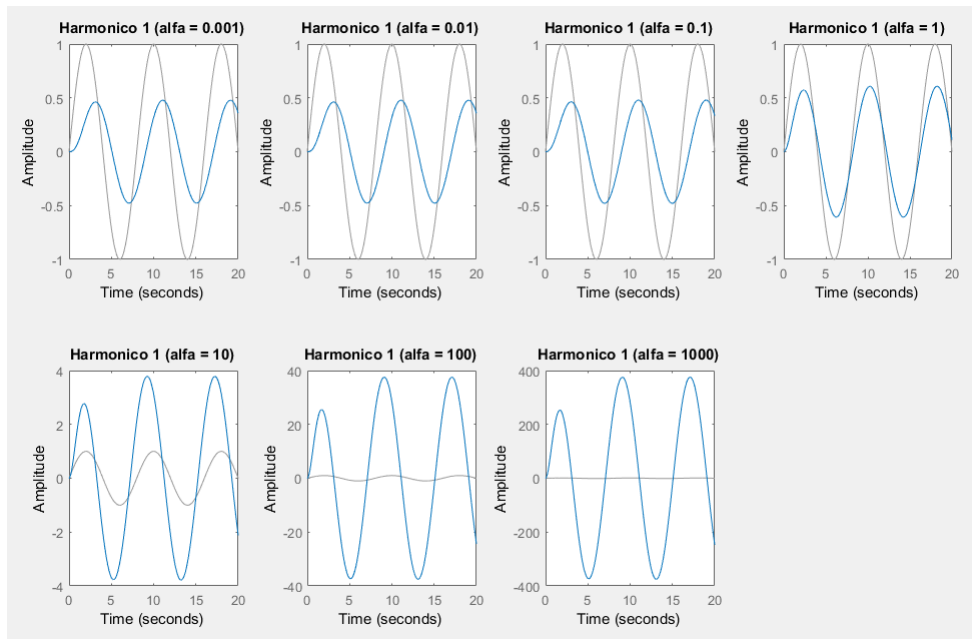


Figura 69: Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

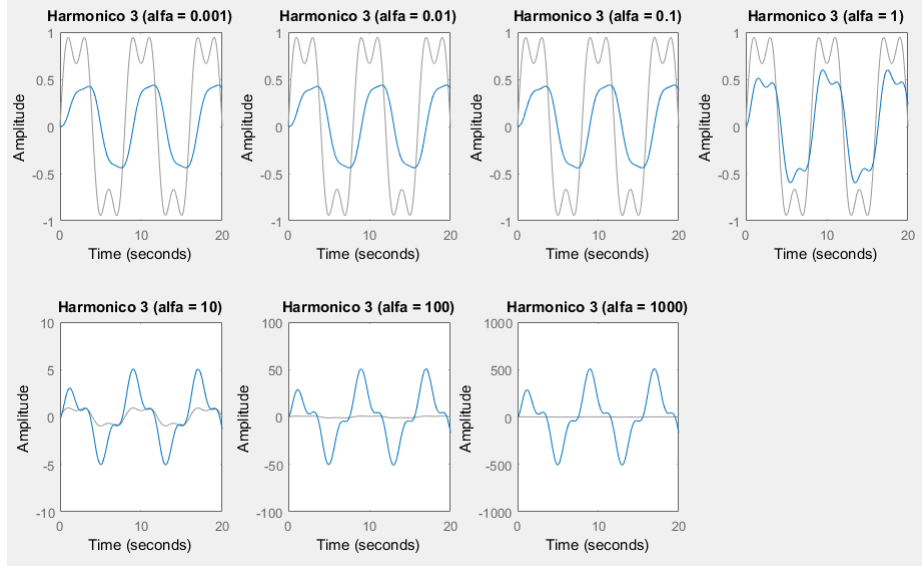


Figura 70: Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

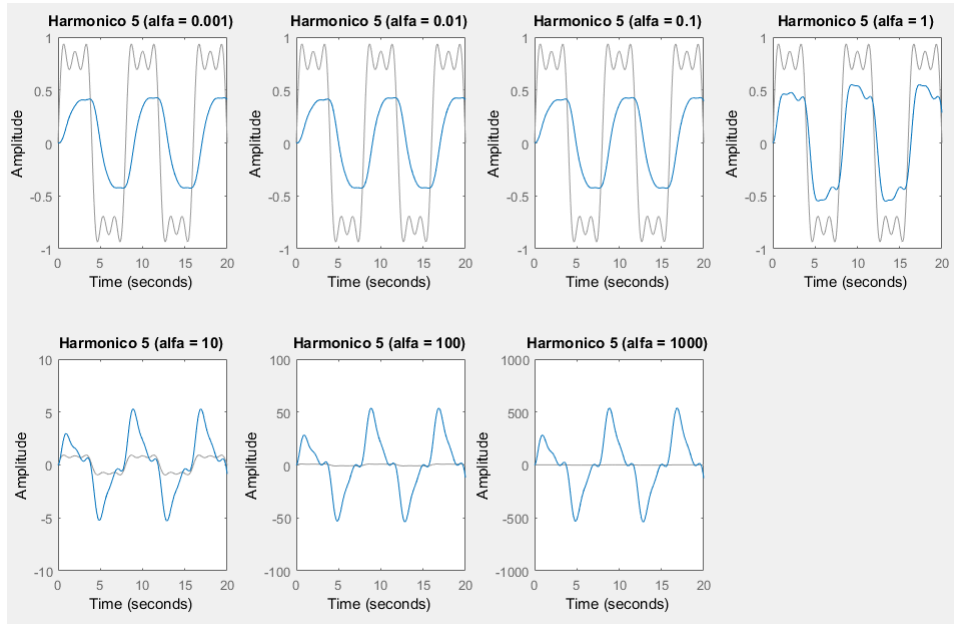


Figura 71: Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

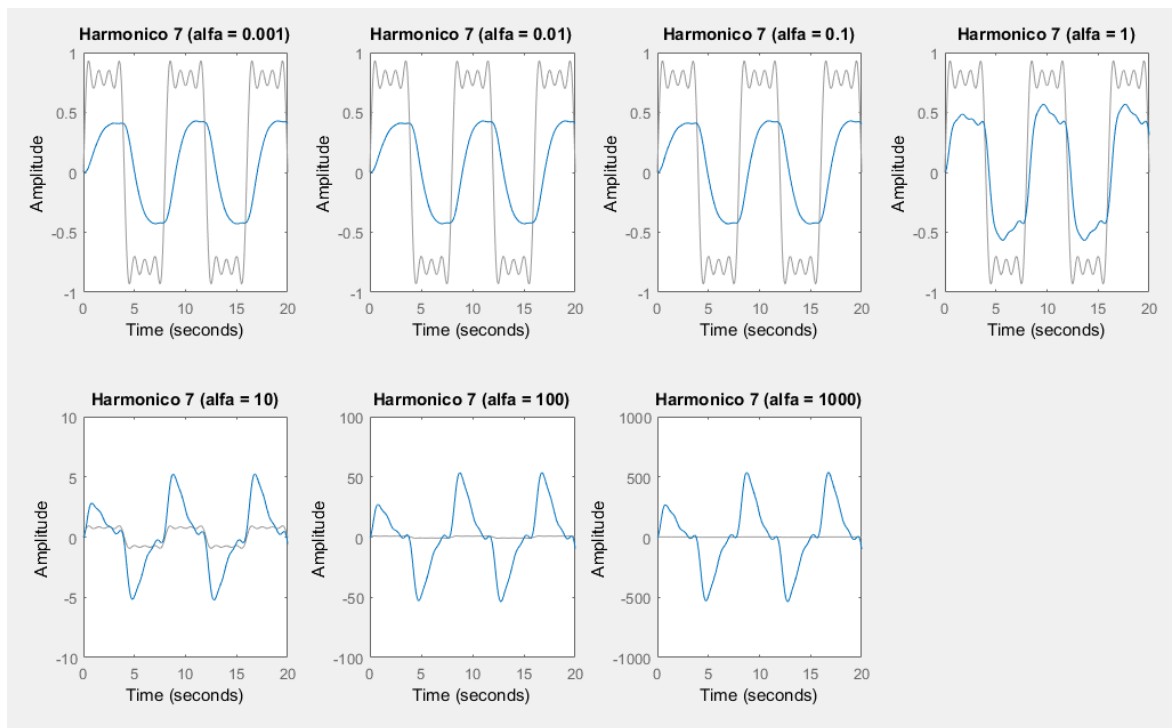


Figura 72: Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

#### 4.6.2 Variando em $\beta$

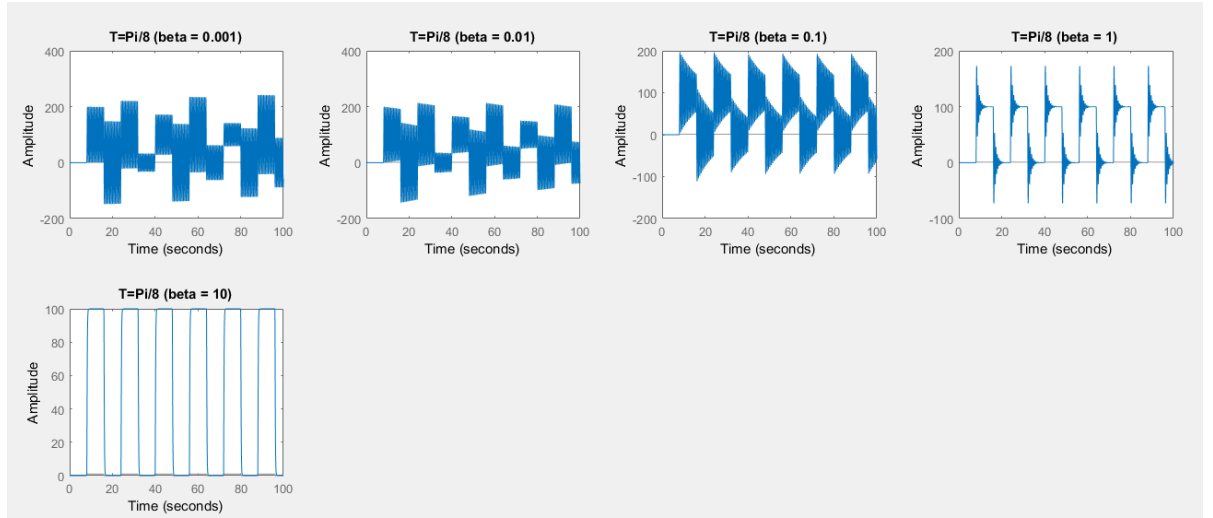


Figura 73: Resposta a onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{8}\pi$

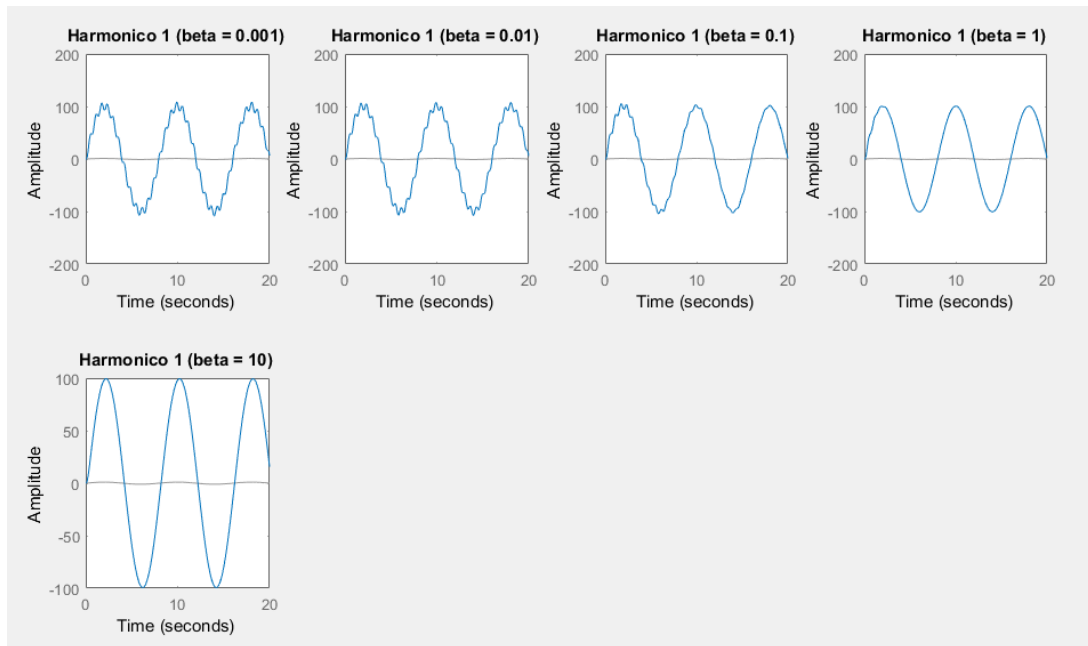


Figura 74: Resposta ao primeiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

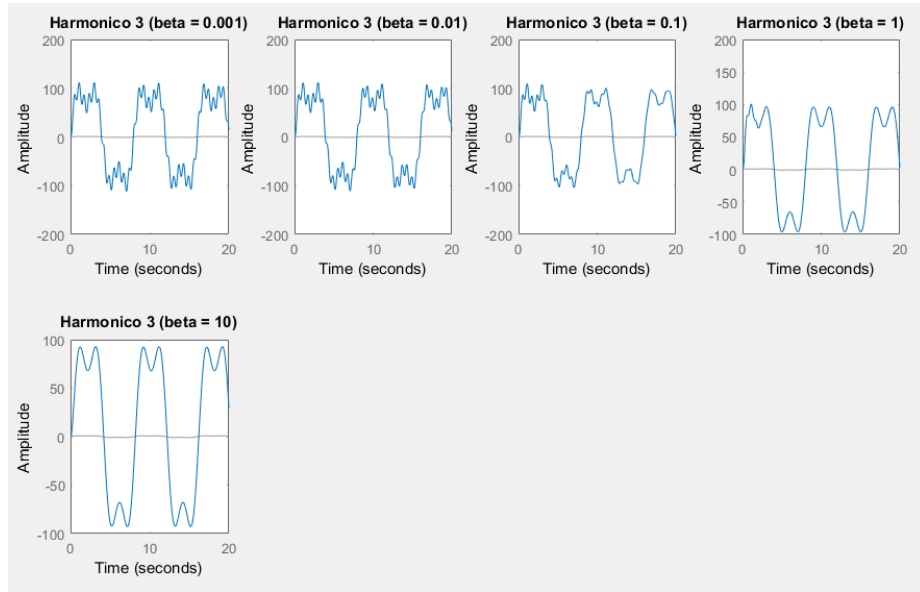


Figura 75: Resposta ao terceiro harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

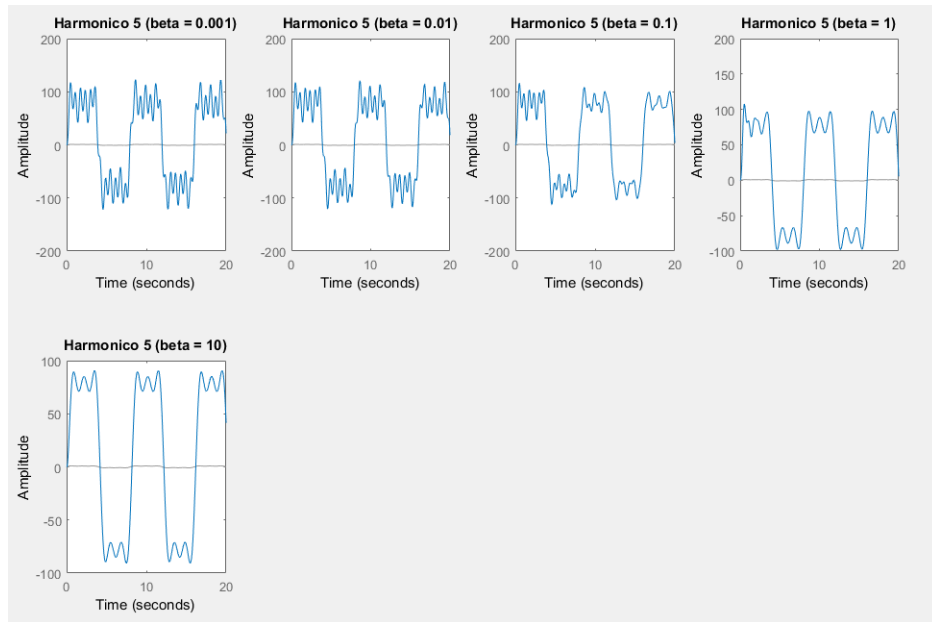


Figura 76: Resposta ao quinto harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

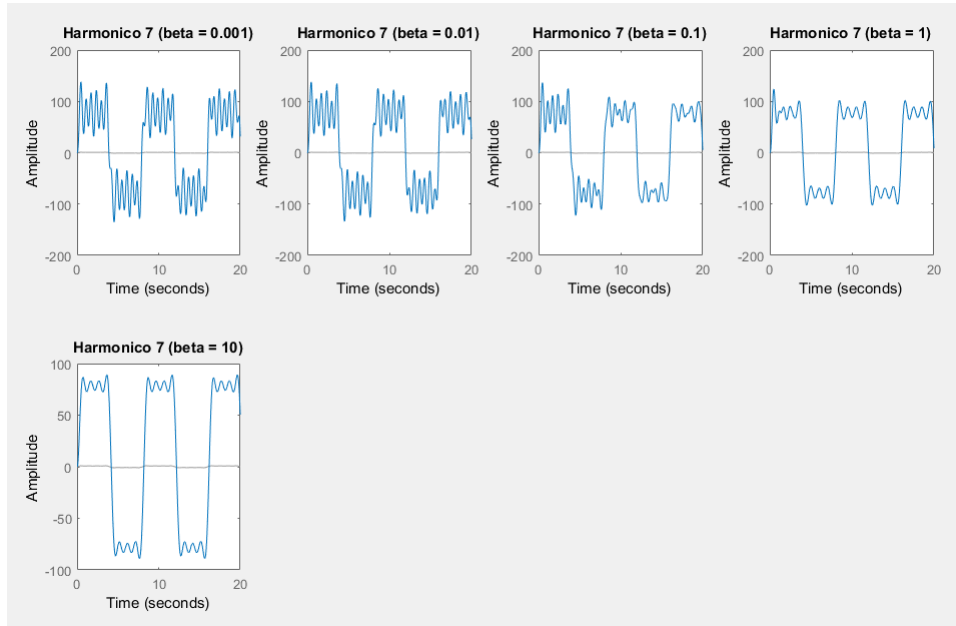


Figura 77: Resposta ao sétimo harmônico da série de Fourier de um onda quadrada com  $\omega = \frac{1}{4}\pi$

## 4.7 Resposta a cossenoides

### 4.7.1 Variando frequências nos valores de $\alpha$

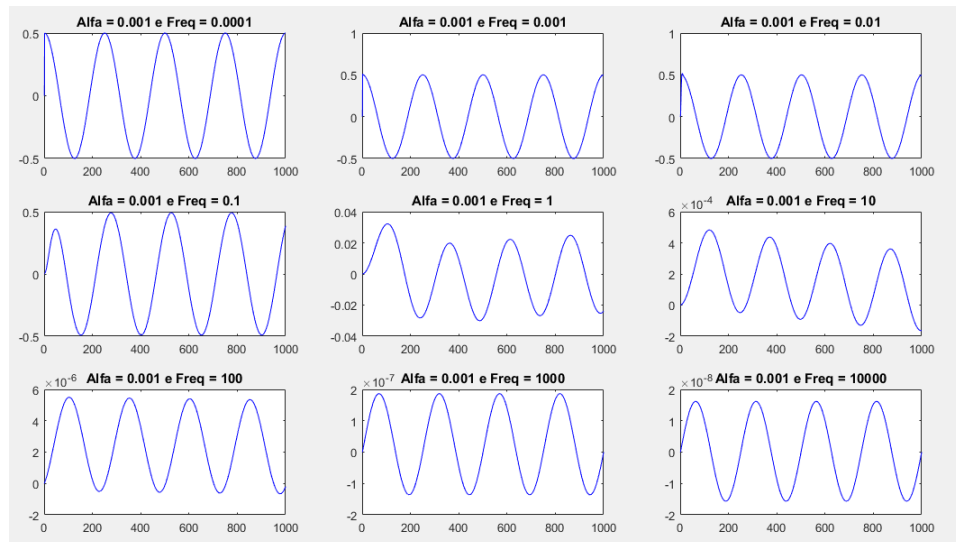


Figura 78: Resposta para  $\alpha = 0.001$  em frequências variantes

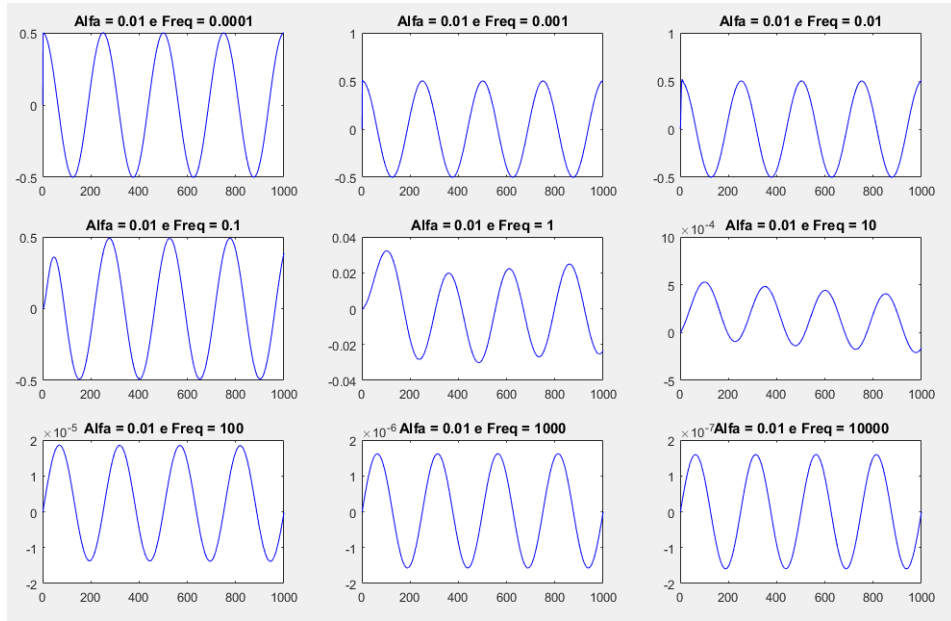


Figura 79: Resposta para  $\alpha = 0.01$  em frequências variantes

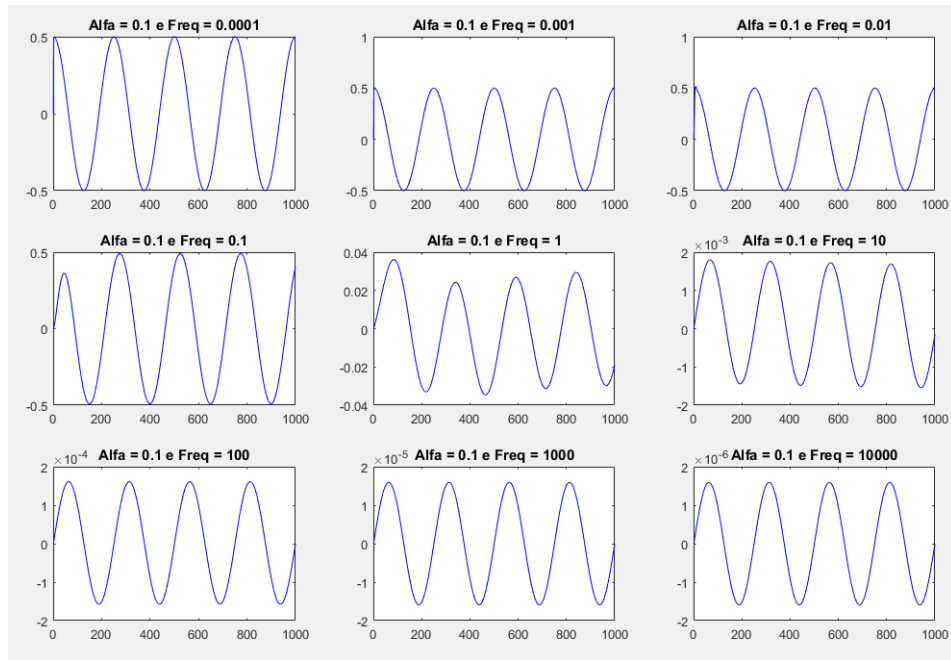


Figura 80: Resposta para  $\alpha = 0.1$  em frequências variantes



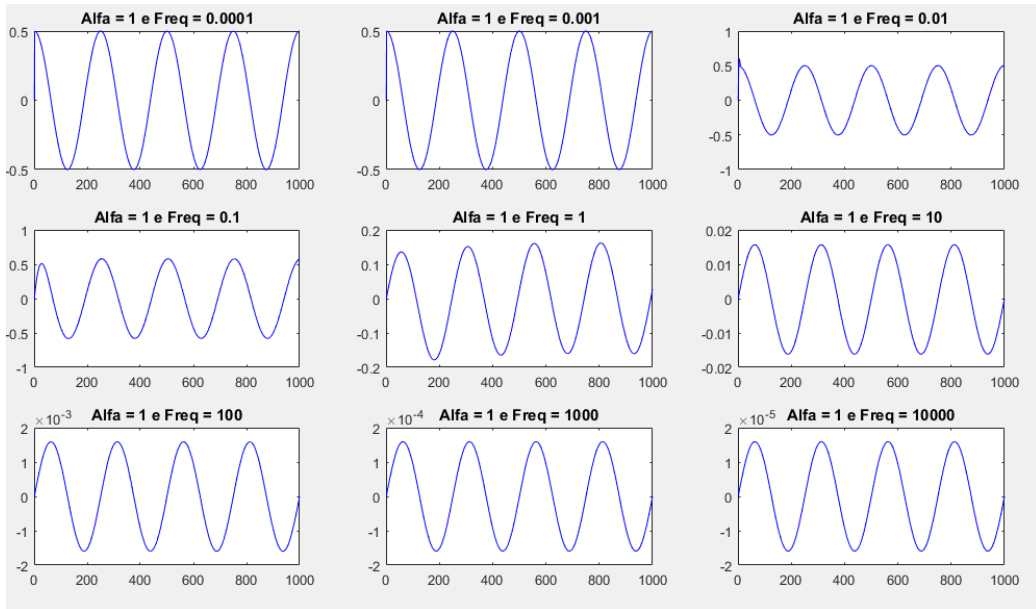


Figura 81: Resposta para  $\alpha = 1$  em frequências variantes

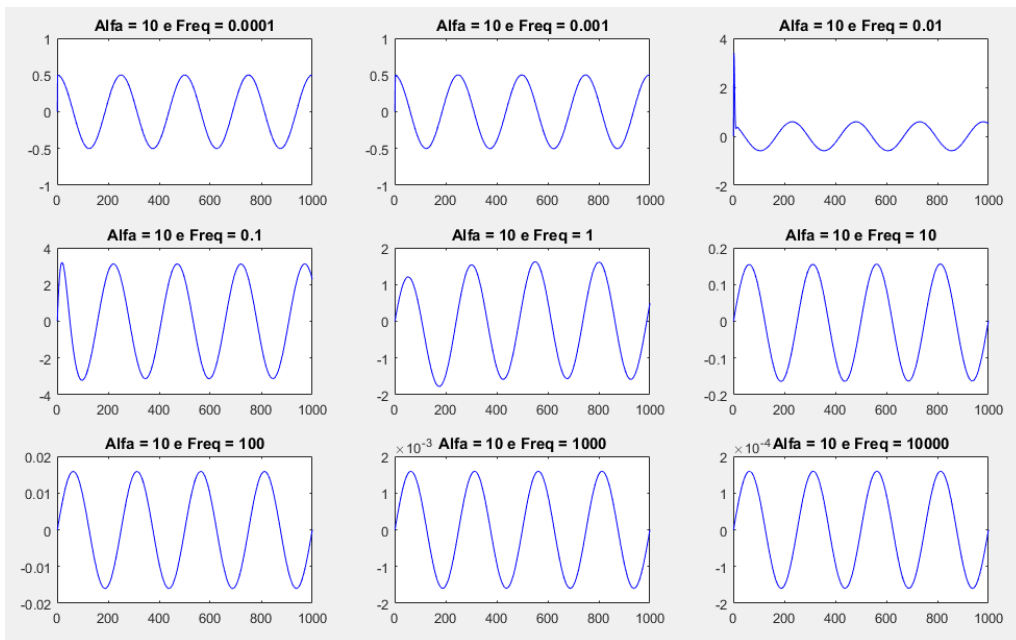


Figura 82: Resposta para  $\alpha = 10$  em frequências variantes

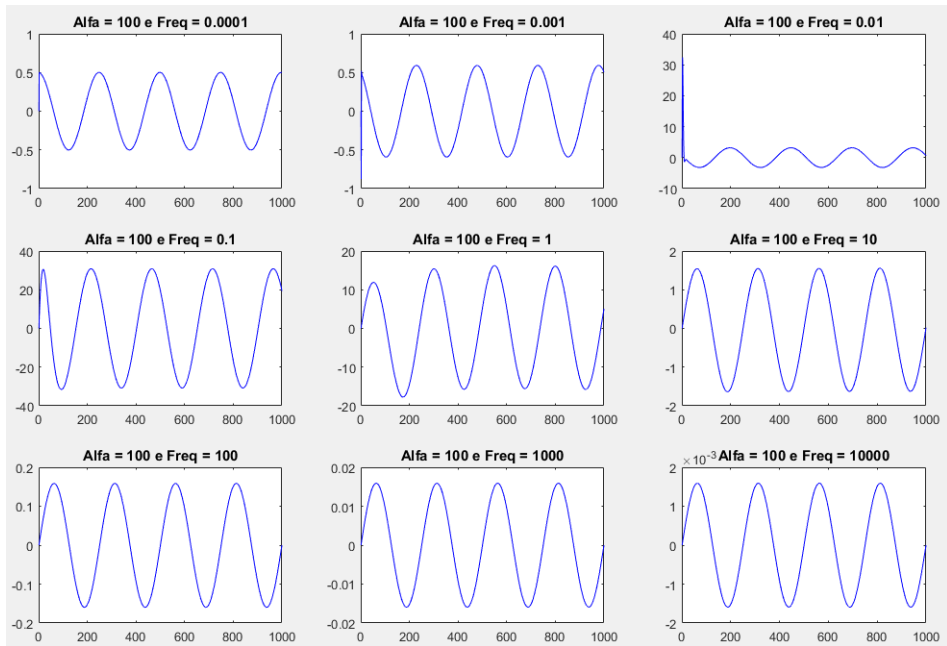


Figura 83: Resposta para  $\alpha = 100$  em frequências variantes

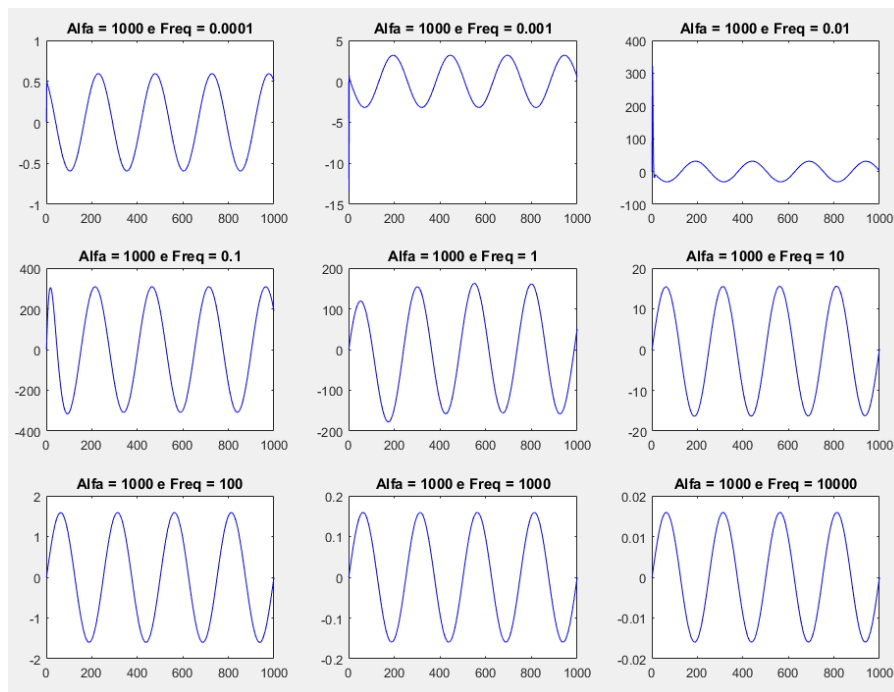


Figura 84: Resposta para  $\alpha = 1000$  em frequências variantes

#### 4.7.2 Variando frequências nos valores de $\beta$

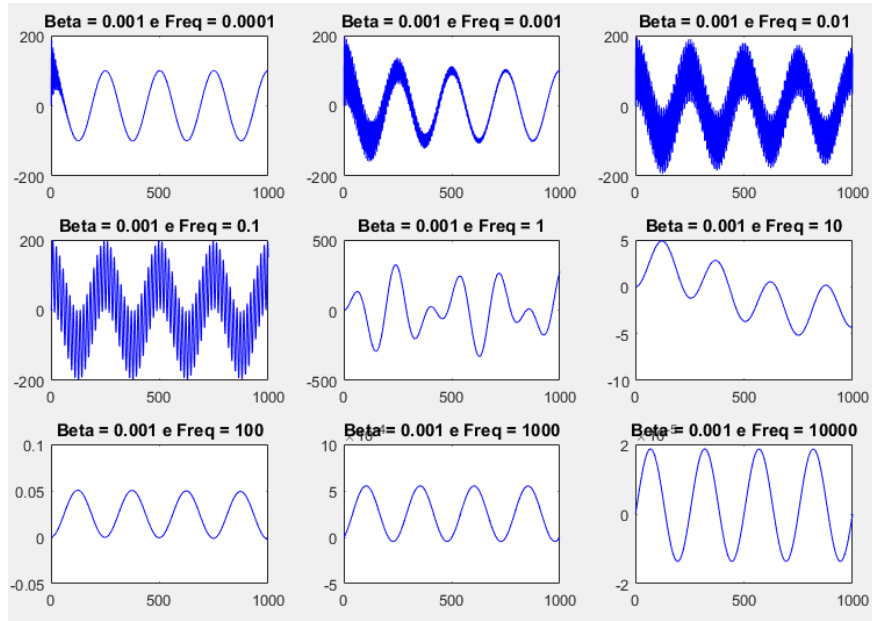


Figura 85: Resposta para  $\beta = 0.001$  em frequências variantes

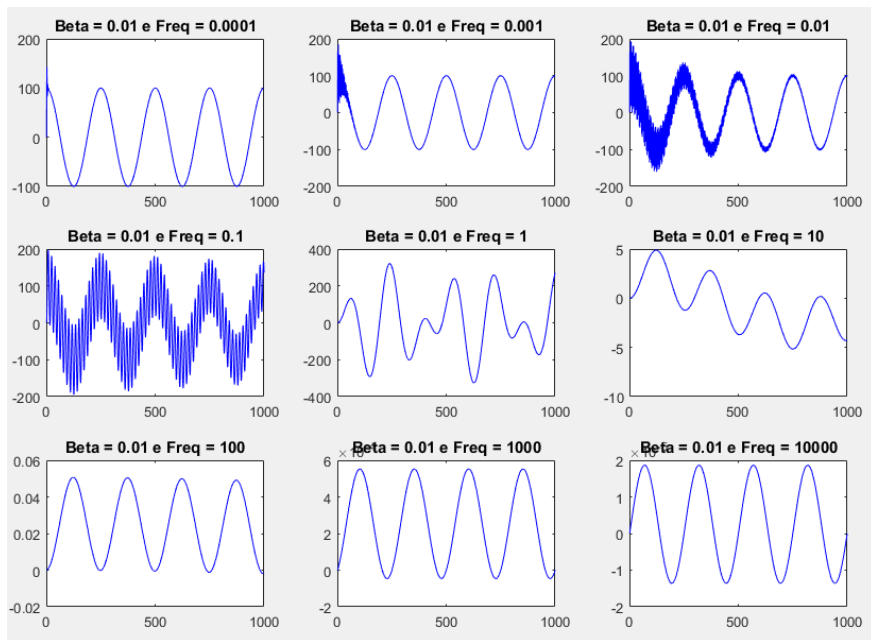


Figura 86: Resposta para  $\beta = 0.01$  em frequências variantes

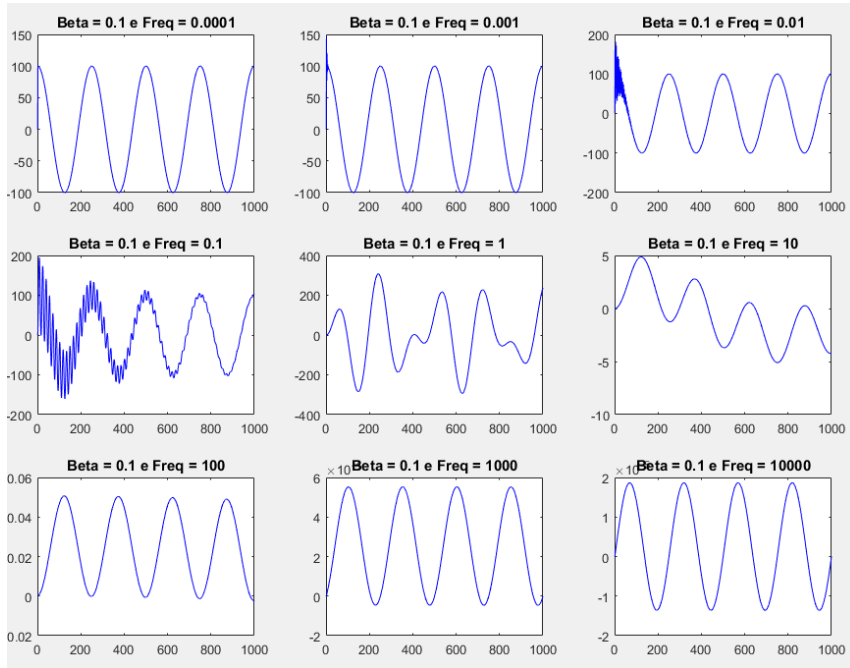


Figura 87: Resposta para  $\beta = 0.1$  em frequências variantes

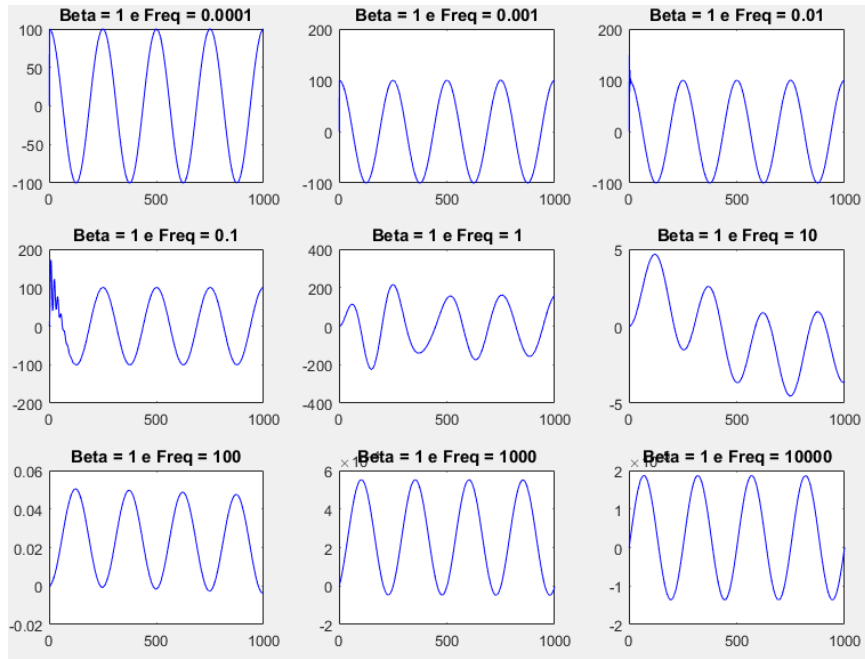


Figura 88: Resposta para  $\beta = 1$  em frequências variantes

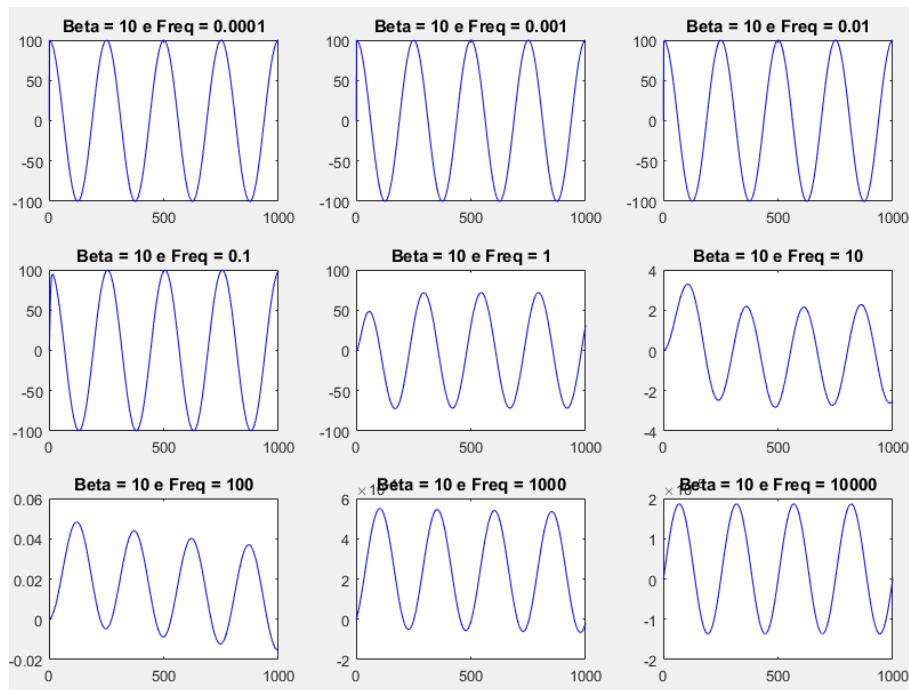


Figura 89: Resposta para  $\beta = 10$  em frequências variantes

## 5 Conclusão

O Trabalho é muito importante para o aprendizado, ele trás a pratica para alguns temas muito abstratos falados durante a aula. A compreensão pratica do problema nos mostra a real utilidade da matéria.

Embora a parte de analise de circuito seja algo extra que só sera aprendido profundamente na matéria de Circuitos Elétricos, com dependência curricular de Sistemas Lineares I, os circuitos mostrados são de fácil modelagem. Em relação ao diagrama de blocos, esta matéria faltou nos slides da aula, entretanto, por ser um conceito gráfico bem simples, foi de fácil entendimento após minutos de pesquisa.

O trabalho foi bastante importante para fixar alguns conceitos aprendidos na sala, dos quais eu posso listar como mais importante:

- Analise dos circuitos;
- Transformar E.D.O do circuito em funções de transferência através da transformada de Laplace;
- Verificar como os polos e o zeros influenciam na pratica a plotagem do diagrama de bode;

- Entender como o valor dos componentes influenciam nos polos e zeros e nas frequências de filtragem;
- Compreender superficialmente o funcionamento de filtros;
- Representação de circuitos em diagrama de blocos;
- Encontrar a resposta do sistema para diferentes sinais através de sua função de transferência. O qual eu acredito que valha a pena colocar um exemplo para consultas futuras:

Exemplo: Encontre a resposta da função de transferência:  $H(S) = \frac{S+2}{S^2+5S+4}$  para o sinal  $x(t) = 5\cos(2t + 30^\circ)$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{-\omega^2 + 5j\omega + 4}$$

sabemos que:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{(\text{Re}_1)^2 + (\text{Im}_1)^2}}{\sqrt{(\text{Re}_2)^2 + (\text{Im}_2)^2}} \leftrightarrow \angle = \arctan\left(\frac{\text{Im}_1}{\text{Re}_1}\right) - \arctan\left(\frac{\text{Im}_2}{\text{Re}_2}\right)$$

e que:

$$y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \phi + \angle H(j\omega))$$

logo, substituindo os valores em:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 4}}{\sqrt{(5j\omega)^2 + (4 - \omega^2)}} \leftrightarrow \angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{5\omega}{4 - \omega^2}\right)$$

temos:

$$y(t) = \sqrt{2} \cos(2t - 15^\circ)$$

- Verificar que a resposta ao somatório dos harmônicos de fourier se aproxima do sinal normal conforme o numero de harmônicos crescem;
- Aprender a realizar simulações no MatLab;

## 6 Referências

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Buffer\\_amplifier](https://en.wikipedia.org/wiki/Buffer_amplifier);
- [2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_filter);
- [3] [https://en.wikipedia.org/wiki/Low-pass\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Low-pass_filter);
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Band-pass\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Band-pass_filter);
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter);
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Sallen-Key\\_topology](https://en.wikipedia.org/wiki/Sallen-Key_topology);
- [7] <https://en.wikipedia.org/wiki/Integrator>;
- [8] [https://en.wikibooks.org/wiki/Signals\\_and\\_Systems](https://en.wikibooks.org/wiki/Signals_and_Systems);
- [9] [http://www.lps.ufrj.br/~natmourajr/EEL350/2016\\_01/slides\\_SL1.pdf](http://www.lps.ufrj.br/~natmourajr/EEL350/2016_01/slides_SL1.pdf);
- [10] B. P. Lathi, Linear Systems and Signals. Oxford, UK: Oxford University Press, 2nd ed., 2009.
- [11] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, Signals and Systems (2Nd Ed.). Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.