Линейное программирование

Лекция по дисциплине «Исследование операций

Содержание

Основные обозначения

R – множество действительных чисел.
R^n – арифметическое векторное пространство размерности n, множество всех векторов- столбцов вида $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, где $x_i \in R$ для всех i; $R^1 = R$.
Мы будем рассматривать только модели, для которых выполнено предположение:

> В модели конечное число переменных, все они принимают действительные значения.

Задача математического программирования

Математическое программирование – область математики, изучающая оптимизационные процессы посредством поиска экстремума функции при заданных ограничениях.

Задача математического программирования

$f(x) \to max$ при условии $x \in X \subseteq R^n$.

Задачу минимизации на множестве $X \subseteq R^n$ можно привести к задаче максимизации, используя следующую теорему.

Теорема о замене минимизации максимизацией

Точка x_0 минимизирует функцию $f(x)$ на множестве , если и только если она максимизирует функцию -$f(x)$ на том же множестве.

Задача нелинейного программирования

$$
\begin{gathered}
f(x) \to \max \\
g_i(x) \leqslant 0,\ i \in [1, m_1] \\
g_j(x) = 0,\ j \in [m_1 + 1, m] \\
x \in R^n
\end{gathered}
\tag{1}
$$

В этой задаче m ограничений.
Вектор $x \in R^n$ является допустимым решением задачи, если он удовлетворяет ограничениям g_i, g_j.

Задача нелинейного программирования

- Задача 1 совместна, если множество ее допустимых решений непусто.
- Для задачи 1 с множеством допустимых решений X вектор $x^* \in X$ является оптимальным решением, если $f(x^*) \geqslant f(x)$ для всех $x \in X$.
- Задача 1 с множеством допустимых решений X ограниченна, если $f(x) \leqslant M$ для всех $x \in X$ и некоторого $M \in R$.
- Задача 1 разрешима, если множество ее оптимальных решений непусто.
- Ограничения, первоначально записанные в форме $g(x) \geqslant b$ приводятся к виду 1 умножением на -1 с изменением знака неравенства.

Задача линейного программирования

Линейным программированием (ЛП) Т. Купманс в 1951 г. предложил назвать оптимизацию (максимизацию или минимизацию) линейной функции при линейных ограничениях (равенствах и/или нестрогих неравенствах).
Несколько ранее, в 1947 г., Дж. Данциг разработал метод решения задач ЛП – симплекс-метод.
Еще раньше (начиная с 1939 г.) были опубликованы работы Л. В. Канторовича, посвященные теории и приложениям ЛП.
В 1975 году. Л. В. Канторович и Т. Купманс получили Нобелевскую премию по экономике «за вклад в теорию оптимального использования ресурсов».

Задача линейного программирования

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min)$$

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j = b_i, i \in [1; m_1]$$

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j \geqslant b_i, i \in [m_1 + 1; m_2]$$

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_i, i \in [m_2 + 1; m]$$

$$x_j \geqslant (\leqslant) 0$$

Задача линейного программирования в стандартной форме

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min)$$

$$\sum_{j} a_{ij} \cdot x_j \leqslant (\geqslant) b_i, i \in [1; m]$$

$$x_j \geqslant 0$$

Задача линейного программирования в канонической форме

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min)$$

$$\sum_{j} a_{ij} \cdot x_j = b_i, i \in [1; m]$$

$$x_j \geqslant 0$$

Геометрический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП с двумя переменными:

$$f(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \to \max(\min)$$

при условиях

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 \leqslant (\geqslant) b_i, i \in [1; m]$$
$$x_j \geqslant 0$$

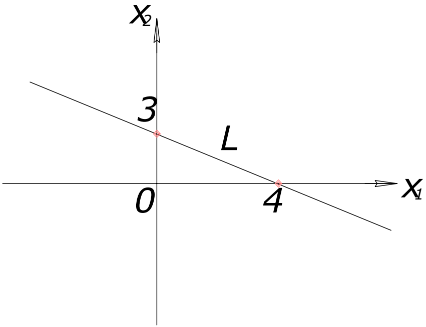
Геометрический метод решения задач линейного программирования

Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с произвольными двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

Справедливо утверждение: пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.
Каждое неравенство системы ограничений геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 = b_i$, или $x_1 = 0$, или $x_2 = 0$.

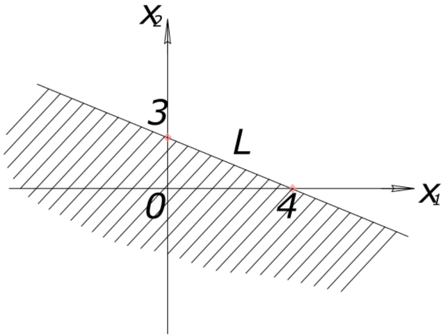
Геометрический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим, например, неравенство $3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 12$



Геометрический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим, например, неравенство $3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 12$



Алгоритм решения ЗЛП геометрическим методом.

1. Строится многоугольник решений.
2. Строится вектор набла, перпендикулярно ему проводятся линии уровня и при этом учитывают, что оптимальное решение ЗЛП находится в угловой точке многоугольника решений.
3. Первая точка встречи линии уровня с многоугольником решений определяет минимум целевой функции.
4. Последняя точка встречи линии уровня с многоугольником решений определяет максимум целевой функции.
5. Если линия уровня параллельна одной из сторон многоугольника решений, то экстремум достигается во всех точках этой стороны . ЗЛП в этом случае имеет бесконечное множество решений.
6. Для нахождения координаты точки экстремума решают систему из двух уравнений прямых, дающих в пересечении эту точку.

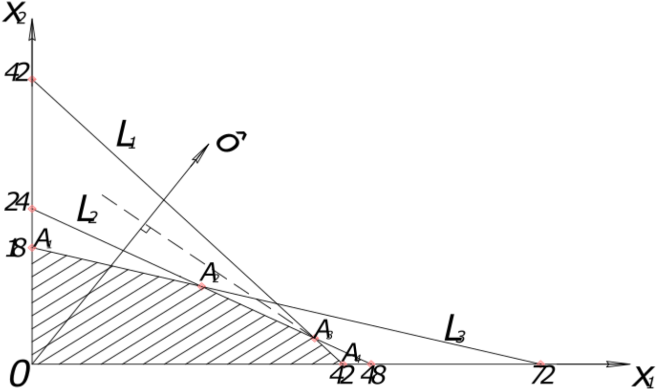
Пример 1. Экономико-математическая модель задачи о планировании производства

На заводе имеются запасы трех видов сырья: S_1, S_2 и S_3, из которого можно наладить производство двух видов товаров: T_1 и T_2. Запасы сырья, норма его расхода на производство единицы товаров, а также прибыль от реализации единицы каждого товара приведены в таблице (цифры условные).

Товары \ Сырье	S_1	S_2	S_3	Прибыль
T_1	3	1	1	25
T_2	3	2	4	34
Запасы	126	48	72	

Необходимо составить такой план производства товаров, при котором прибыль от их реализации будет максимальной.

Геометрический метод решения задач линейного программирования



Пример 1. Экономико-математическая модель задачи о диете

Имеются два вида продуктов: P_1 и P_2. Содержание в 1 кг питательных веществ A, B и C, ежесуточные потребности организма V в них и стоимость S 1 кг продуктов приведены в таблице

Витамины / Продукты	A	B	C	S
P_1	1	3	1	8
P_2	3	1	8	16
V	6	9	8	

Составить такую ежесуточную диету, которая обеспечивает необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на продукты.

Геометрический метод решения задач линейного программирования