

Умножение в дополнительном коде с ручной коррекцией (без коррекции множителем)

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «информатика»
(17 марта 2017 г.)

Содержание

1 Обоснование корректности

- Точка зрения на дополнительный код
- Нужна коррекция

2 Коррекция вовремя

- Технические ограничения
- Примеры

Точка зрения на дополнительный код

С помощью дополнительного кода в n -разрядной сетке можно представить целые числа из отрезка

$$X \in [-2^{n-1}, +(2^{n-1} - 1)].$$

В этом случае:

$$\text{ДК}(X) = \begin{cases} |X|, & \text{если } X \geq 0, \\ 2^n - |X|, & \text{если } X < 0. \end{cases}$$

Масштабированный дополнительный код

Если выполнить масштабирование с масштабом $M = 2^n$:

$$X = x \cdot 2^n.$$

Тогда:

$$\text{ДК}(X) = \begin{cases} |x| \cdot 2^n, & \text{если } X \geq 0, \\ (1 - |x|) \cdot 2^n, & \text{если } X < 0. \end{cases}$$

Для дробных представлений x справедливо:

$$\text{ДК}(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \geq 0, \\ 1 - |x|, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Дополнительный код

Согласно формуле (1) дополнительный код после масштабирования можно рассматривать как

положительное дробное число.

Так как $X \in [-2^{n-1}, +(2^{n-1} - 1)]$, то $x \in [-2^{-1}, \leq +(2^{-1} - 2^{-n})]$, следовательно

$$(1 - |x|) > 0.$$

Пусть

$$A = a \cdot 2^n,$$

$$B = b \cdot 2^n,$$

далее выполняются операции с дробными a, b .

Коррекция псевдопроизведения $\text{ДК}(a) \cdot \text{ДК}(b)$

- *Оба сомножителя положительны.* Поправок не требуется.
- *Один из сомножителей отрицателен.* Пусть $a < 0$, $b \geq 0$, тогда правильный код результата: $\text{ДК}(ab) = (1 - |ab|)$.

Псевдопроизведение:

$$\text{ДК}(a) \cdot \text{ДК}(b) = (1 - |a|) \cdot |b| = |b| - |a| \cdot |b|.$$

Нужна поправка: $(1 - |b|) = \text{ДК}(-b)$.

- *Оба сомножителя отрицательны.* Правильный код результата: $\text{ДК}(ab) = |ab|$. Псевдопроизведение:

$$\text{ДК}(a) \cdot \text{ДК}(b) = (1 - |a|)(1 - |b|) = 1 - |a| - |b| + |ab|$$

Прибавив поправку $(|a| + |b|)$, получим $(1 + |ab|)$, который, вследствие переноса единицы в целую часть, эквивалентен правильному $|ab|$.

Коррекция множителем представляет проблему, так как для этого требуются дополнительные аппаратные затраты^a.

^aКоррекция множимым проблемы не представляет, так как множимое в любом случае прибавляется к СЧП

Пусть a — множитель, а b — множимое.

Дополнительный код множимого

В представлении дополнительного кода множимого b

$$\text{ДК}(b) = \begin{cases} |b|, & \text{если } b \geq 0, \\ 1 - |b|, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

можно заменить $(1 - |b|)$ на выражение $(2^n - |b|)$, где $n > 0$:

$$\text{ДК}(b) = \begin{cases} |b|, & \text{если } b \geq 0, \\ 2^n - |b|, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

Действительно, по смыслу, для дробно-масштабированного b :

$$1 \equiv 2^n \equiv \text{«любое целое»} \equiv 0.$$

- $a \geq 0, b \geq 0$: поправок не нужно.

$$\text{ДК}(a) \cdot \text{ДК}(b) = |a| \cdot |b| = \text{ДК}(ab).$$

- $a \geq 0, b < 0$: поправок не нужно.

$$\text{ДК}(a) \cdot \text{ДК}(b) = |a| \cdot (2^n - |b|) = \underbrace{|a| \cdot 2^n}_{\text{целое} \equiv 1} - |ab| = \text{ДК}(ab).$$

- $a < 0, b \geq 0$: поправка множимым $+(2^n - |b|)$.

$$\text{ДК}(a) \cdot \text{ДК}(b) = (1 - |a|) \cdot |b| = |b| - |ab| = |b| + \text{ДК}(ab).$$

- $a < 0, b < 0$: поправка множимым $+|b|$

$$\begin{aligned} \text{ДК}(a) \cdot \text{ДК}(b) &= (1 - |a|) \cdot (2^n - |b|) = \\ &= \underbrace{2^n}_0 - |b| - \underbrace{|a| \cdot 2^n}_{\text{целое} \equiv 0} + |ab| = \text{ДК}(ab) - |b| \end{aligned}$$

Резюме: $ДК(ab) = \dots$

a — множитель, b — множимое

- $a \geq 0, b \geq 0$: $ДК(ab) = ДК(a) \cdot ДК(b)$.
- $a \geq 0, b < 0$: $ДК(ab) = ДК(a) \cdot ДК(b)$.
- $a < 0, b \geq 0$: $ДК(ab) = ДК(a) \cdot ДК(b) + ДК(-b)$.
- $a < 0, b < 0$: $ДК(ab) = ДК(a) \cdot ДК(b) + ДК(-b)$.

Упрощенное правило ручной коррекции

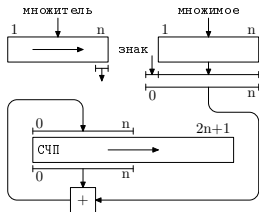
Если множитель отрицателен, то из псевдопроизведения *вычитается* множимое.

```
1: if  $a < 0$  then
2:   СЧП := СЧП -  $b$ ;
3: end if
```

Основные способы умножения

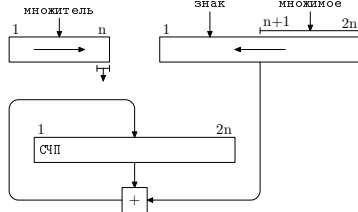
Сдвиг СЧП

shr(Mn-ль)

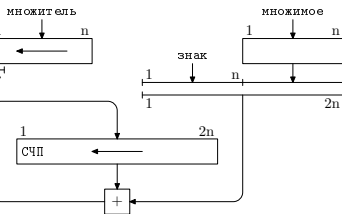


Ⓘ

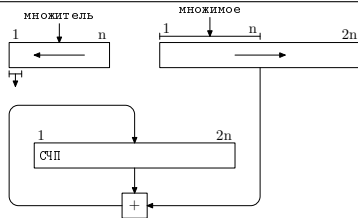
Сдвиг множимого



Ⓜ



Ⓜ



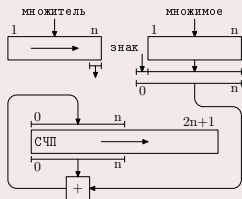
Ⓜ

shl(Mn-ль)

Коррекции подлежит *старшая* половина $2n$ разрядного псевдопроизведения^a.

^a n -разрядное множимое вычитается из *старшей* половины псевдопроизведения

I-й способ: технические ограничения



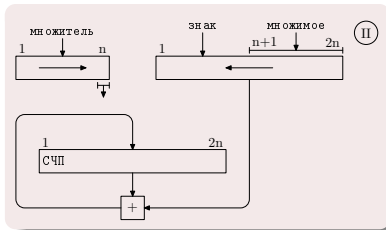
Особенности I-го способа

- СЧП сдвигается вправо;
- Множимое прибавляется к старшей половине СЧП;
- Множимое не сдвигается.

- Коррекция выполняется *только в конце* цикла умножения. В противном случае все поправки «уедут» в младшие разряды СЧП.

Так как в цикле умножения к СЧП прибавляется *половина* множимого, а при коррекции нужно вычесть *целое* множимое, то нужно СЧП расширить одним разрядом справа (младшим) и, выполнив цикл, сделать последний сдвиг. Коррекцию выполнить половиной множимого и в качестве результата выдать младшие 2^n разрядов (без старшего бита). Учесть, что нужно выполнять «знаковые сдвиги» СЧП.

II-й способ: технические ограничения

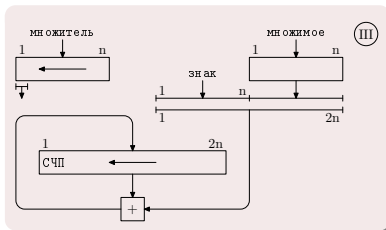


Особенности II-го способа

- СЧП не сдвигается;
- Множимое заносится в младшую часть $2n$ -разрядного регистра.
- Множимое сдвигается влево;

- Поправка множимым без дополнительных затрат выполняется в конце цикла, когда после серии сдвигов множимое выходит в старшую часть $2n$ -разрядного регистра.

III-й способ: технические ограничения

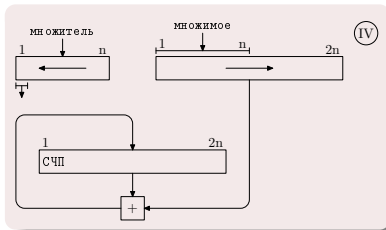


Особенности III-го способа

- СЧП сдвигается влево;
- Множимое прибавляется к младшей половине $2n$ -разрядной СЧП.
- Множимое сдвигается влево;

- Поправка множимым без дополнительных затрат выполняется в начале цикла умножения. В конце цикла, после серии сдвигов СЧП, она станет правильной.

IV-й способ: технические ограничения



Особенности IV-го способа

- СЧП не сдвигается;
 - Множимое заносится в старшую часть $2n$ -разрядного регистра.
 - Множимое сдвигается вправо;
- Поправка множимым без дополнительных затрат выполняется до цикла умножения. После поправки выполняется сдвиг регистра множимого и цикл выполняется как обычно.

Операнды для примеров

В качестве примера будем перемножать числа 9 и 11 с различными комбинациями знаков.

Выбрав масштаб $M = 2^5$, получим следующие представления:

$$\begin{aligned}\text{ДК}(9) &= ,01001, \\ \text{ДК}(-9) &= ,10111, \\ \text{ДК}(11) &= ,01011, \\ \text{ДК}(-11) &= ,10101.\end{aligned}$$

l-способ: $-9 \cdot 11$. ДК(-99) = ,11100 11101

мн-ль →	СЧП →	прим.
,1011 <u>1</u>	$ \begin{array}{r} + \text{,00000 000000} \\ \text{, .0101 1} \\ \hline \text{,00101 100000} \end{array} $	+мн-е/2; сдвиг
,.101 <u>1</u>	$ \begin{array}{r} + \text{, .0010 110000} \\ \text{, .0101 1} \\ \hline \text{,01000 010000} \end{array} $	+мн-е/2; сдвиг
,...10 <u>1</u>	$ \begin{array}{r} + \text{, .0100 001000} \\ \text{, .0101 1} \\ \hline \text{,01001 101000} \end{array} $	+мн-е/2; сдвиг
,...1 <u>0</u>	,.0100 110100	сдвиг
,... <u>1</u>	$ \begin{array}{r} + \text{, . .010 011010} \\ \text{, .0101 1} \\ \hline \text{,00111 111010} \end{array} $	+мн-е/2
	,.0011 111101	сдвиг; Рез-т?
	$ \begin{array}{r} + \text{, .0011 111101} \\ \text{, .1010 1} \\ \hline \text{, .1110 011101} \end{array} $	корр: +ДК(-11)/2=ДК(-мн-е/2); Рез-т/2!
	,11100 11101	Рез-т!

l-способ ($b < 0$): $-9 \cdot -11$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль →	СЧП →	прим.
,1011 $\underline{1}$	+ ,00000 000000 ,11010 1..... ,11010 100000	+мн-е/2; сдвиг
,.1011 $\underline{1}$	+ ,11101 010000 ,11010 1..... ,10111 110000	+мн-е/2; сдвиг
,..101 $\underline{1}$	+ ,11011 111000 ,11010 1..... ,10110 011000	+мн-е/2; сдвиг
,...10 $\underline{1}$,11011 001100	сдвиг
,....1 $\underline{1}$	+ ,11101 100110 ,11010 1..... ,11000 000110	+мн-е/2; сдвиг;
	,11100 000011	Рез-т?
	+ ,11100 000011 ,.0101 1..... ,10001 100011	корр: +ДК(11)=ДК(-мн-е/2); Рез-т/2!
	,00011 00011	Рез-т!

II-способ: $-9 \cdot -11$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль \rightarrow	мн-е \leftarrow	СЧП	прим.
,1011 <u>1</u>	,11111 10101	+ ,00000 00000 ,11111 10101 ,11111 10101	+мн-е; сдвиг
,.1011 <u>1</u>	,11111 0101.	+ ,11111 10101 ,11111 0101. ,11110 11111	+мн-е; сдвиг
,..101 <u>1</u>	,11110 101..	+ ,11110 11111 ,11110 101.. ,11101 10011	+мн-е; сдвиг
,...10 <u>1</u>	,11101 01...		сдвиг
,....1 <u>1</u>	,11010 1....	+ ,11101 10011 ,11010 1.... ,11000 00011	+мн-е;
	,10101	+ ,11000 00011 ,01011	корр: +ДК(11); Рез-т!
		,00011 00011	

III-способ: $-11 \cdot -9$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль ←	СЧП ←	прим.
	$ \begin{array}{r} + \text{,00000 00000} \\ \text{,..... 01001} \\ \hline \text{,00000 01001} \end{array} $	корр: +ДК(9)=ДК(-мн-е)
	,00000 1001.	сдвиг
$\text{,}\underline{\underline{1}}\text{0101}$	$ \begin{array}{r} + \text{,00000 1001.} \\ \text{,11111 10111} \\ \hline \text{,00000 01001} \end{array} $	+мн-е; сдвиг
$\text{,}\underline{\underline{0}}\text{101.}$,00000 1001.	сдвиг
$\text{,}\underline{\underline{1}}\text{01..}$	$ \begin{array}{r} + \text{,00001 001..} \\ \text{,11111 10111} \\ \hline \text{,00000 11011} \end{array} $	+мн-е; сдвиг
$\text{,}\underline{\underline{0}}\text{1...}$,00001 1011.	сдвиг
$\text{,}\underline{\underline{1}}\text{....}$	$ \begin{array}{r} + \text{,00011 011..} \\ \text{,11111 10111} \\ \hline \text{,00011 00011} \end{array} $	Рез-т!

IV-способ:: $-11 \cdot -9$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль ←	мн-е →	СЧП	прим.
	,10111	$ \begin{array}{r} + ,00000 \ 00000 \\ ,01001 \ \dots\dots \\ \hline ,01001 \ 00000 \end{array} $	корр: +ДК(9)=ДК(-мн-е); сдвиг
, <u>1</u> 0101	,11011 1....	$ \begin{array}{r} + ,01001 \ 00000 \\ ,11011 \ 1\dots\dots \\ \hline ,00100 \ 10000 \end{array} $	+мн-е; сдвиг;
, <u>0</u> 101.	,11101 11...		сдвиг
, <u>1</u> 01..	,11110 111..	$ \begin{array}{r} + ,00100 \ 10000 \\ ,11110 \ 111\dots \\ \hline ,00011 \ 01100 \end{array} $	+мн-е; сдвиг
, <u>0</u> 1...	,11111 0111.		сдвиг
, <u>1</u>	,11111 10111	$ \begin{array}{r} + ,00011 \ 01100 \\ ,11111 \ 10111 \\ \hline ,00011 \ 00011 \end{array} $	+мн-е; Рез-т!

1)

Какая разрядность результата должна получиться, если дополнительные коды операндов занимают n бит?

2)

Перемножить числа:

- ❶ 26 и -13 I-м способом;
- ❷ -26 и 13 II-м способом;
- ❸ -26 и -13 III-м способом;
- ❹ -13 и -26 IV-м способом.

Обосновать выбор масштаба.

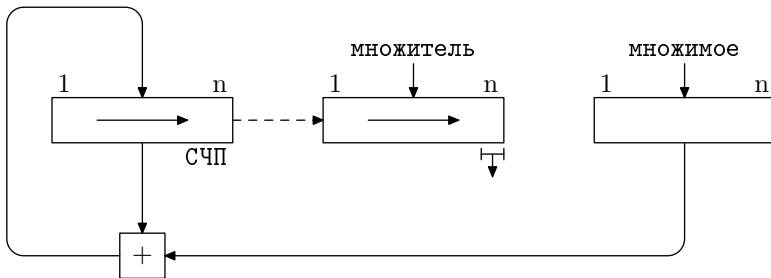
3)

Прорешать одним из методов «краевые» случаи в n -разрядной сетке:

- $-2^n \cdot -2^n$;
- $-2^n \cdot x$, где $x > 0$;
- $(2^n - 1) \cdot (2^n - 1)$.

4)


Модифицируйте схему умножения первым способом с учетом работы в ДК (можно использовать условный блок «получение ДК» и мультиплексор):



Советы самоучке

Рекомендуется почитать разделы посвященные работе с битами в [1].

Библиография I

 *Г.Уоррен-мл. Алгоритмические трюки для программистов /*
Г.Уоррен-мл. —
2 изд. —
М.: Издательский дом «Вильямс», 2014. —
512 с.