

Умножение в дополнительном коде (с автоматической коррекцией)

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «информатика»
(31 января 2017 г.)

Содержание

- 1 Обоснование корректности
 - Структурная точка зрения на число
 - Не нужна коррекция
- 2 Автоматическая коррекция
 - Технические ограничения
 - Примеры
 - Заключение

Точка зрения на число

Положительное двоичное число будем рассматривать как последовательность непрерывных групп единиц, разделённых непрерывными группами нулей.

Минимальная длина группы при этом будет равна одному символу.

Рассмотрим группу:

$$\dots 0001111100 \dots$$

Соответствующее ей число можно получить как разность:

$$\begin{array}{r} \dots 0010000000 \dots \\ - \quad \dots 0000000100 \dots \\ \hline \dots 0001111100 \dots \end{array}$$

Вклады разрядов

$$\begin{array}{r} \dots 0010000000 \dots \\ - \dots 0000000100 \dots \\ \hline \dots 0001111100 \dots \end{array}$$

Ненулевой вклад вносят только *переходы из группы в группу*:

01 и 10

Обозначим пару разрядов, образующих переход (a_i, a_{i-1}) . Тогда:

- переход $(a_i, a_{i-1}) = 01$ вносит положительный вклад 2^i ,
- переход $(a_i, a_{i-1}) = 10$ вносит отрицательный вклад (-2^i) .

Отрицательное число

Например, представление положительного числа 118:

...0001110110

Две группы вносят следующие вклады:

- первая группа вносит: -2^1 и 2^3 ;
- вторая: -2^4 и 2^7 .
- *итого*: $(2^7 - 2^4 + 2^3 - 2^1) = (128 - 16 + 8 - 2) = 118$.

Отрицательное число? Дополнительный код

Инверсия разрядов числа 118:

...0001110110

не приводит к результату с противоположным знаком:

...1110001001

- Ожидалось: $(-2^7 + 2^4 - 2^3 + 2^1) = (-128 + 16 - 8 + 2) = -118$.
- Но?: $(-2^7 + 2^4 - 2^3 + 2^1 - 2^0) = (-128 + 16 - 8 + 2 - 1) = -119$.

Корректируем на единицу:

...1110001010

Получаем: $(-2^7 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2^1) = (-128 + 16 - 8 + 4 - 2) = -118$.

Операнды для примеров

В качестве примера будем перемножать числа 9 и 11 с различными комбинациями знаков.

Выбрав масштаб $M = 2^5$, получим следующие представления:

$$\text{ДК}(9) = ,01001$$

$$\text{ДК}(-9) = ,10111$$

$$\text{ДК}(11) = ,01011$$

$$\text{ДК}(-11) = ,10101$$

l-способ: $-9 \cdot 11$. ДК(-99) = ,11100 11101

мн-ль \rightarrow	СЧП \rightarrow	прим.
,10111 <u>0</u>	$ \begin{array}{r} + \text{ ,00000 00000} \\ \text{ ,11010 1....} \\ \hline \text{ ,11010 10000} \end{array} $	-мн-е/2; сдвиг;
,.1011 <u>1</u>	,11101 01000	сдвиг;
,..101 <u>1</u>	,11110 10100	сдвиг;
,...10 <u>1</u>	$ \begin{array}{r} + \text{ ,11111 01010} \\ \text{ ,.0101 1....} \\ \hline \text{ ,00100 11010} \end{array} $	+мн-е/2; сдвиг;
,....1 <u>0</u>	$ \begin{array}{r} + \text{ ,00010 01101} \\ \text{ ,11010 1....} \\ \hline \text{ ,11100 11101} \end{array} $	-мн-е/2; Рез-т!

II-способ: $-9 \cdot -11$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль \rightarrow	мн-е \leftarrow	СЧП	прим.
,10111 <u>0</u>	,11111 10101	+ ,00000 00000 ,00000 01011 ,00000 01011	-мн-е; сдвиг;
,.1011 <u>1</u>	,11111 0101.		сдвиг;
,..101 <u>1</u>	,11110 101..		сдвиг;
,...10 <u>1</u>	,11101 01...	+ ,00000 01011 ,11101 01... ,11101 10011	+мн-е; сдвиг;
,....1 <u>0</u>	,11010 1....	+ ,11101 10011 ,00101 1.... ,00011 00011	-мн-е; Рез-т!

III-способ: $11 \cdot -9$. ДК(-99) = ,11100 11101

мн-ль ←	СЧП ←	прим.
, <u>0</u> 1011	+ ,00000 00000 ,11111 10111 ,11111 10111	+мн-е; сдвиг;
, <u>1</u> 011.	+ ,11111 0111. ,..... 01001 ,11111 10111	-мн-е; сдвиг;
, <u>0</u> 11..	+ ,11111 0111. ,11111 10111 ,11111 00101	+мн-е; сдвиг;
, <u>1</u> 1...	,11110 0101.	сдвиг;
, <u>1</u>	+ ,11100 101.. ,..... 01001 ,11100 11101	-мн-е; Рез-т!

IV-способ:: $11 \cdot 9$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль \leftarrow	мн-е \rightarrow	СЧП	прим.
, <u>0</u> 1011	,.0100 1....	$ \begin{array}{r} + \text{ ,00000 00000} \\ \text{ ,.0100 1....} \\ \hline \text{ ,00100 10000} \end{array} $	+мн-е; сдвиг;
, <u>1</u> 011.	,..010 01...	$ \begin{array}{r} + \text{ ,00100 10000} \\ \text{ ,11101 11...} \\ \hline \text{ ,00010 01000} \end{array} $	-мн-е; сдвиг;
, <u>0</u> 11..	,...01 001..	$ \begin{array}{r} + \text{ ,00010 01000} \\ \text{ ,...01 001..} \\ \hline \text{ ,00011 01100} \end{array} $	+мн-е; сдвиг
, <u>1</u> 1...	,....0 1001.		сдвиг;
, <u>1</u>	,..... 01001	$ \begin{array}{r} + \text{ ,00011 01100} \\ \text{ ,11111 10111} \\ \hline \text{ ,00011 00011} \end{array} $	-мн-е; Рез-т!

1)

Какая разрядность результата должна получиться, если дополнительные коды операндов занимают n бит?

2)

Перемножить числа:

- ❶ 26 и -13 I-м способом;
- ❷ -26 и 13 II-м способом;
- ❸ -26 и -13 III-м способом;
- ❹ -13 и -26 IV-м способом.

Обосновать выбор масштаба.

3)

Прорешать одним из методов «краевые» случаи в n -разрядной сетке:


- $-2^n \cdot -2^n$;
- $-2^n \cdot x$, где $x > 0$;
- $(2^n - 1) \cdot (2^n - 1)$.

4)

Советы самоучке

Рекомендуется почитать разделы посвященные работе с битами в [1].

Библиография I

 *Г.Уоррен-мл. Алгоритмические трюки для программистов /*
Г.Уоррен-мл. —
2 изд. —
М.: Издательский дом «Вильямс», 2014. —
512 с.