

Деление вещественных чисел (в формате с плавающей точкой)

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «информатика»
(2 июля 2016 г.)

Содержание

1 Беззнаковое деление мантисс

- Деление мантисс с восстановлением остатков
- Деление без восстановления остатков

2 Деление мантисс со знаком

Деление чисел в формате с плавающей точкой

$$\frac{A}{d} = q = \frac{m_A \cdot 2^{p_A}}{m_d \cdot 2^{p_d}} = \left(\frac{m_A}{m_d} \right) \cdot 2^{(p_A - p_d)},$$

где A — делимое, d — делитель, q — частное.

Отдельно обрабатываются исключительные случаи:

- 1 деления на ноль;
- 2 деления нуля.

Алгоритм деления ненулевых чисел $\frac{A}{B}$

- 1 Вычитанием из порядка делимого порядка делителя определяется порядок частного: $p_q = (p_A - p_d)$.
- 2 Делением мантиссы делимого на мантиссу делителя определяется мантисса частного: $m_q = \frac{m_A}{m_d}$. Деление мантисс см. далее.
- 3 Выполняется нормализация частного q . Фиксируется результат или ошибка.

Пример деления дробных чисел (10СС, $n = 3$)

Англо-американская система: $0.738/0.345 \approx 2.139$

		— мантисса частного
0 , 7 3 8	:0,345	— мантиссы делимого:делителя

Пример деления дробных чисел (10СС, $n = 3$)

Англо-американская система: $0.738/0.345 \approx 2.139$

2 ,		— мантисса частного
0 , 7 3 8	:0,345	— мантиссы делимого:делителя
0 , 7 3 8		
- 0 , 6 9 0		
= 0 , * 4 8		$q_0 = 2$

Пример деления дробных чисел (10СС, $n = 3$)

Англо-американская система: $0.738/0.345 \approx 2.139$

2 , 1		— мантисса частного
0 , 7 3 8	:0,345	— мантиссы делимого:делителя
0 , 7 3 8		
- 0 , 6 9 0		
= 0 , * 4 8		$q_0 = 2$
0 , * 4 8 0		
- 0 , * 3 4 5		
= 0 , * 1 3 5		$q_{-1} = 1$

Пример деления дробных чисел (10СС, $n = 3$)

Англо-американская система: $0.738/0.345 \approx 2.139$

2 , 1 3		— мантисса частного
0 , 7 3 8	:0,345	— мантиссы делимого:делителя
0 , 7 3 8		
- 0 , 6 9 0		
= 0 , * 4 8		$q_0 = 2$
0 , * 4 8 0		
- 0 , * 3 4 5		
= 0 , * 1 3 5		$q_{-1} = 1$
0 , * 1 3 5 0		
- 0 , * 1 0 3 5		
= 0 , * * 3 1 5		$q_{-2} = 3$

Пример деления дробных чисел (10СС, $n = 3$)

Англо-американская система: $0.738/0.345 \approx 2.139$

2 , 1 3 9		— мантисса частного
0 , 7 3 8	:0,345	— мантиссы делимого:делителя
0 , 7 3 8		
- 0 , 6 9 0		
= 0 , * 4 8		$q_0 = 2$
0 , * 4 8 0		
- 0 , * 3 4 5		
= 0 , * 1 3 5		$q_{-1} = 1$
0 , * 1 3 5 0		
- 0 , * 1 0 3 5		
= 0 , * * 3 1 5		$q_{-2} = 3$
0 , * * 3 1 5 0		
- 0 , * * 3 1 0 5		
= 0 , * * * * 4 5		$q_{-3} = 9$

Пример деления дробных чисел (10СС, $n = 3$)

Англо-американская система: $0.738/0.345 \approx 2.139$

2 , 1 3 9 1		— мантисса частного
0 , 7 3 8	:0,345	— мантиссы делимого:делителя
0 , 7 3 8		
- 0 , 6 9 0		
= 0 , * 4 8		$q_0 = 2$
0 , * 4 8 0		
- 0 , * 3 4 5		
= 0 , * 1 3 5		$q_{-1} = 1$
0 , * 1 3 5 0		
- 0 , * 1 0 3 5		
= 0 , * * 3 1 5		$q_{-2} = 3$
0 , * * 3 1 5 0		
- 0 , * * 3 1 0 5		
= 0 , * * * * 4 5		$q_{-3} = 9$
0 , * * * * 4 5 0		
- 0 , * * * * 3 4 5		
= 0 , * * * * 1 0 5		$q_{-4} = 1$ — для округления!

Целочисленное деление (2СС, $n = 3$), $0.625/0.75$

Англо-американская система $(0.101)_2/(0.110)_2 \approx (0.111)$

	Частное
0 , 1 0 1	:0.110 Делимое

Целочисленное деление (2СС, $n = 3$), $0.625/0.75$

Англо-американская система $(0.101)_2/(0.110)_2 \approx (0.111)$

0 ,		Частное
0 , 1 0 1	:0.110	Делимое
0 , 1 0 1		
- 0 , 0 0 0		
= 0 , 1 0 1		$q_0 = 0$

Целочисленное деление (2СС, $n = 3$), $0.625/0.75$

Англо-американская система $(0.101)_2/(0.110)_2 \approx (0.111)$

0 , 1		Частное
0 , 1 0 1	:0.110	Делимое
0 , 1 0 1		
- 0 , 0 0 0		
= 0 , 1 0 1		$q_0 = 0$
0 , 1 0 1 0		
- 0 , * 1 1 0		
= 0 , * 1 0 0		$q_{-1} = 1$

Целочисленное деление (2СС, $n = 3$), $0.625/0.75$ Англо-американская система $(0.101)_2/(0.110)_2 \approx (0.111)$

0 , 1 1		Частное
0 , 1 0 1	:0.110	Делимое
0 , 1 0 1		
- 0 , 0 0 0		
= 0 , 1 0 1		$q_0 = 0$
0 , 1 0 1 0		
- 0 , * 1 1 0		
= 0 , * 1 0 0		$q_{-1} = 1$
0 , * 1 0 0 0		
- 0 , * * 1 1 0		
= 0 , * * * 1 0		$q_{-2} = 1$

Целочисленное деление (2СС, $n = 3$), $0.625/0.75$ Англо-американская система $(0.101)_2/(0.110)_2 \approx (0.111)$

0 , 1 1 0		Частное
0 , 1 0 1	:0.110	Делимое
0 , 1 0 1		
- 0 , 0 0 0		
= 0 , 1 0 1		$q_0 = 0$
0 , 1 0 1 0		
- 0 , * 1 1 0		
= 0 , * 1 0 0		$q_{-1} = 1$
0 , * 1 0 0 0		
- 0 , * * 1 1 0		
= 0 , * * * 1 0		$q_{-2} = 1$
0 , * * * 1 0 0		
- 0 , * * * 0 0 0		
= 0 , * * * 1 0 0		$q_{-3} = 0$

Целочисленное деление (2СС, $n = 3$), $0.625/0.75$ Англо-американская система $(0.101)_2/(0.110)_2 \approx (0.111)$

0 , 1 1 0 $\tilde{1}$		Частное
0 , 1 0 1	:0.110	Делимое
0 , 1 0 1		
- 0 , 0 0 0		
= 0 , 1 0 1		$q_0 = 0$
0 , 1 0 1 0		
- 0 , * 1 1 0		
= 0 , * 1 0 0		$q_{-1} = 1$
0 , * 1 0 0 0		
- 0 , * * 1 1 0		
= 0 , * * * 1 0		$q_{-2} = 1$
0 , * * * 1 0 0		
- 0 , * * * 0 0 0		
= 0 , * * * 1 0 0		$q_{-3} = 0$
0 , * * * 1 0 0 0		
- 0 , * * * * 1 1 0		
= 0 , * * * * * 1 0		$q_{-4} = 1$, только для округления!

Схема деления мантисс I-м способом

Потенциально бесконечная точность

Начальное состояние:

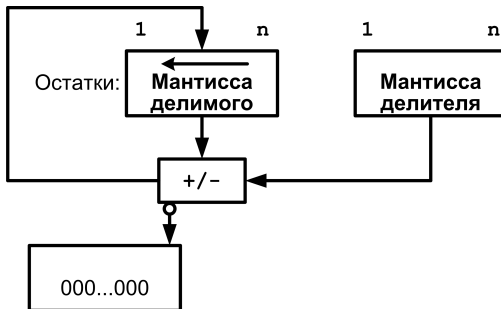


Схема деления мантисс I-м способом

Потенциально бесконечная точность

Конечное состояние:

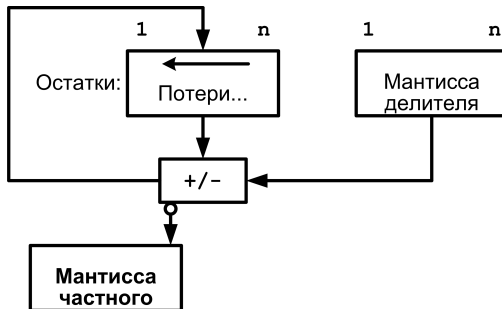


Схема деления мантисс II-м способом

Начальное состояние:

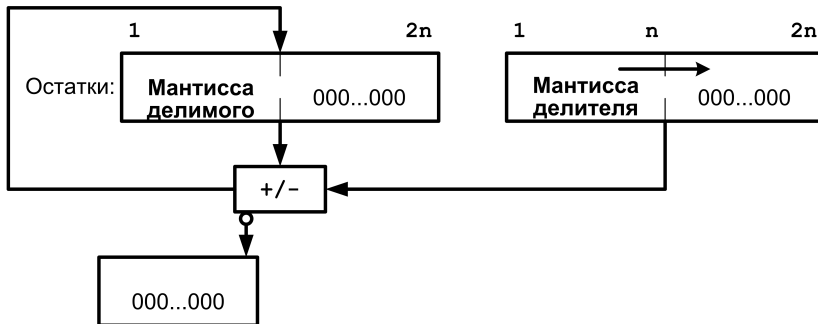
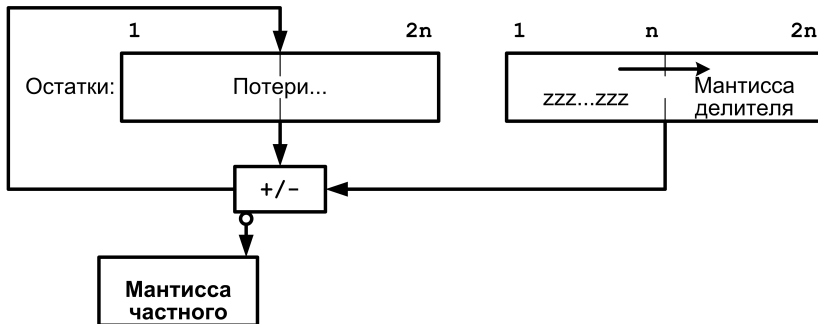


Схема деления мантисс II-м способом

Конечное состояние:



Деление нормализованных двоичных мантисс

Нормализованная мантисса вещественного числа $X \neq 0$

m_X представляет собой число, целая часть которого — ноль, а в старшем разряде дробной части — единица: $(0.\underbrace{1xxx \cdots xxx}_\text{мантисса})_2$

Так как нормализованная мантисса — это число из интервала: $[\frac{1}{2}, 1)$, то результат деления мантисс будет находиться в $(\frac{1}{2}, 2)$.

Результат либо нормализован, либо нет:

$$(0.1xxx \cdots xxx)_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$(1.xxxx \cdots xxx)_2 \in [1, 2)$$

Ситуации ПРС и ПМР

Как и в умножении с плавающей точкой, возможны ситуации:

- ПРС, возникающей, когда результат вычитания порядков операндов выходит за пределы представления *положительных* порядков. При делении ситуация ПРС является неустранимой, так как в процессе нормализации порядок результата может только увеличиваться. В случае ПРС — фиксируется ошибка вычислений.
- ПМР, возникающей, когда результат вычитания порядков операндов выходит за пределы представления *отрицательных* порядков. При делении ситуация ПМР является устранимой, так как в процессе нормализации порядок результата может увеличиваться и порядок результата может «вернуться» в диапазон. В случае ПМР — в качестве результата выдается ноль (и при необходимости устанавливается ПМР-флаг).

Алгоритм деления мантисс с восстановлением остатков

Вход: n -разрядные мантиссы операндов, p_q — порядок результата

- 1 $i \leftarrow 0$; в соответствии со схемой способа инициализировать регистры: остатка Δ , делителя d , частного q .
- 2 Получить новый остаток $\Delta \leftarrow (\Delta - d)$;
- 3 Если $\Delta \geq 0$, то в младший разряд частного занести 1. Если $i = 0$ (ненормализованный результат), то $i \leftarrow (i + 1)$; $p_q \leftarrow (p_q + 1)$.
- 4 Если $\Delta < 0$, то в младший разряд частного занести 0 и выполнить восстановление старого значения остатка: $\Delta \leftarrow (\Delta + d)$.
- 5 В соответствии со схемой выполнить сдвиги регистров: q , Δ , d .
- 6 $i \leftarrow (i + 1)$. Если $i \leq n$, то к шагу 2.
- 7 Выполнить округление (не обязательный шаг), получив еще один остаток $\Delta \leftarrow (\Delta - d)$ и увеличив частное на единицу, если $\Delta \geq 0$.

Форматы для примеров

1 С порядком:

9	8	4	3	2	0
X	XXXXX	X	XXX		

где разряды $[9 : 4]$ — ПК мантиссы, $[9]$ — знак числа, $[8 : 4]$ — разряды нормализованного модуля мантиссы, $[3 : 0]$ — ПК порядка, $[3]$ — знак порядка, $[2 : 0]$ — модуль порядка.

2 С характеристикой:

9	8	4	3	0
X	XXXXX	XXXX		

где разряды $[9 : 4]$ — ПК мантиссы, $[9]$ — знак числа, $[8 : 4]$ — разряды нормализованного модуля мантиссы, $[4 : 0]$ — характеристика.

Деление $(-29)/50$ с восстановлением остатков I-й способ

Операнды и получение порядка частного

$$A = -29 = \begin{array}{c} 9 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \\ \boxed{1} \quad \boxed{11101} \quad \boxed{0} \quad \boxed{101} \end{array}$$
$$d = 50 = \begin{array}{c} 9 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \\ \boxed{0} \quad \boxed{11001} \quad \boxed{0} \quad \boxed{110} \end{array}$$

Определяется предварительный порядок частного. Используем для работы с порядками модифицированный дополнительный код:

$$\begin{array}{r} 00,101 \\ + 11,010 \\ \hline 11,111 \end{array}$$

$$\text{МДК}(p_q) = 11,111.$$

Деление $(-29)/50$ с восстановлением остатков I-й способ

Деление мантисс

Частное q, \leftarrow	дел-е, $\Delta \leftarrow$	дел-ль, d	прим.
.....	0,11101	0,11001	операнды; $i = 0$
....1	$0,11101+1,00111=0,00100$		$\Delta_1 = \Delta_0, p_q \leftarrow (p_q + 1);$ МДК(p_q) = 00,000;
...1.	0,0100.		Сдвиги;
...10	$0,0100.+1,00111=1,01111$		$\Delta_2 < 0;$
	$1,01111+0,11001=0,0100.$		Восстановление Δ_2
..10.	0,100..		Сдвиги;
..100	$0,100..+1,00111=1,10111$		$\Delta_3 < 0;$
	$1,10111+0,11001=0,100..$		Восстановление Δ_3
.100.	1,00...		Сдвиги;
.1001	$1,00...+1,00111=0,00111$		$\Delta_4 \geq 0;$
1001.	0,0111.		Сдвиги;
10010	$0,0111.+1,00111=1,10101$		$\Delta_5 < 0;$
Округление необязательно			
	$1,10101+0,11001=0,0111.$		Восстановление Δ_5
	0,111..		Сдвиг Δ , но не q ;
10011	$0,111..+1,00111=0,00011$		$\Delta_6 \geq 0, m_q \leftarrow (m_q + 1);$

Деление $(-29)/50$ с восстановлением остатков I-й способ

Фиксация результата

- Инкремент мантиссы из-за округления не повлек её ПРС — нормализация не нужна.
- Переполнения порядка частного не было: $\text{МДК}(p_q) = 00,000$.
- Знак результата $1 \oplus 0 = 1$.

Результат с округлением:

$$\begin{array}{c} 9 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \\ \boxed{1} \mid \boxed{10011} \mid \boxed{0} \mid \boxed{000} \end{array} = 0.59375,$$

$$\Delta = |0.58 - 0.59375| = 0.01375, \delta = \frac{0.01375}{0.58} \approx 2.37\%$$

Результат без округления:

$$\begin{array}{c} 9 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \\ \boxed{1} \mid \boxed{10010} \mid \boxed{0} \mid \boxed{000} \end{array} = 0.5625, \Delta = 0.0175, \delta \approx 3.02\%$$

Деление без восстановления остатков

Если новый остаток Δ получается отрицательным, то к нему прибавляется делитель, чтобы восстановить старое (положительное) значение остатка. Чтобы не тратить на это время — проследим, что происходит к моменту получения следующего остатка Δ' .

- В первом способе:

$$\Delta' = \begin{cases} 2 \cdot \Delta + d, & \text{если } \Delta < 0: 2 \cdot (\underbrace{\Delta + d}_{\text{B.O.}}) - d = 2 \cdot \Delta + d, \\ 2 \cdot \Delta - d, & \text{если } \Delta \geq 0. \end{cases}$$

- Во втором способе:

$$\Delta' = \begin{cases} \Delta + d/2, & \text{если } \Delta < 0: (\underbrace{\Delta + d}_{\text{B.O.}}) - d/2 = \Delta + d/2, \\ \Delta - d/2, & \text{если } \Delta \geq 0. \end{cases}$$

Алгоритм деления мантисс без восстановления остатков

Вход: n -разрядные мантиссы операндов, p_q — порядок результата

- 1 $i \leftarrow 0$; в соответствии со схемой способа инициализировать регистры: остатка Δ , делителя d , частного q .
- 2 Получить новый остаток: если $\Delta \geq 0$, то $\Delta \leftarrow (\Delta - d)$, иначе $\Delta \leftarrow (\Delta + d)$.
- 3 Если $\Delta \geq 0$, то в младший разряд частного занести 1. Если $i = 0$ (ненормализованный результат), то $i \leftarrow (i + 1)$; $p_q \leftarrow (p_q + 1)$.
- 4 Если $\Delta < 0$, то в младший разряд частного занести 0.
- 5 В соответствии со схемой выполнить сдвиги регистров: q , Δ , d .
- 6 $i \leftarrow (i + 1)$. Если $i \leq n$, то к шагу 2.
- 7 Выполнить округление (не обязательный шаг), получив еще один остаток (см. шаг 2) и увеличив частное на единицу, если $\Delta \geq 0$.

Деление $50/(-29)$ без ВО I-й способ

Операнды и получение характеристики частного

$$A = 50 = \begin{array}{c} 9 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \\ \boxed{0} \mid \boxed{11001} \mid \boxed{1110} \end{array}$$

$$B = -29 = \begin{array}{c} 9 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \\ \boxed{1} \mid \boxed{11101} \mid \boxed{1101} \end{array}$$

Определяется характеристика частного: $c_q = (c_A - c_d) + \Delta$. Используем для работы с характеристиками МДК:

$$00,1110 + 11,0011 + 00,1000 = 00,1001.$$

$$\text{МДК}(c_q) = 00,1001.$$

Деление $50/(-29)$ без ВО I-й способ

Деление мантисс

Частное m_q, \leftarrow	дел-е, $\Delta \leftarrow$	дел-ль, d	прим.
.....	00,11001	00,11101	операнды;
....0	$00,11001+11,00011=11,11100$		$-d, \Delta_0 < 0$; Р-т нормализован!
...0.	11,1100.		сдвиг;
...01	$11,1100.+00,11101=00,10101$		$+d, \Delta_1 \geq 0$;
..01.	01,0101.		сдвиг;
..011	$01,0101.+11,00011=00,01101$		$-d, \Delta_2 \geq 0$;
.011.	00,1101.		сдвиг;
.0110	$00,1101.+11,00011=11,11101$		$-d, \Delta_3 < 0$;
0110.	11,1101.		сдвиг;
01101	$11,1101.+00,11101=00,10111$		$+d, \Delta_4 \geq 0$;
1101.	01,0111.		сдвиг; Нормализация!
11011	$01,0111.+11,00011=00,10001$		$-d, \Delta_5 \geq 0$;
Округление необязательно			
	01,0001.		сдвиг;
11100	$01,0001.+11,00011=00,00101$		$-d, \Delta_6 \geq 0, m_q \leftarrow (m_q + 1)$;

Деление $50/(-29)$ с восстановлением остатков I-й способ

Фиксация результата

- Инкремент мантиссы из-за округления не повлек её ПРС — нормализация не нужна.
- Переполнения характеристики частного не было:

$$\text{МДК}(c_q) = 00,1001.$$

- Знак результата $(1 \oplus 0) = 1$.

Результат с округлением:

$$\begin{array}{c} 9 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \\ \boxed{1} \mid \boxed{11100} \mid \boxed{1001} \end{array} = 1.75, \Delta \approx 0.0259, \delta = 1.5\%$$

Результат без округления:

$$\begin{array}{c} 9 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \\ \boxed{1} \mid \boxed{11011} \mid \boxed{1001} \end{array} = 1.6875, \Delta \approx 0.0366, \delta = 2.125\%$$

Деление мантисс со знаком

Представления мантисс в дополнительном или обратном кодах встречается редко, поэтому приводится только алгоритм подобного деления.

Алгоритм деления мантисс в ДК без ВО

Вход: n -разрядные знаковые мантиссы ДК, p_q — порядок частного

- ❶ $i \leftarrow 0$; Инициализируются регистры q , Δ и d .
- ❷ Если знаки Δ и d совпадают, то $\Delta \leftarrow (\Delta - d)$, иначе $\Delta \leftarrow (\Delta + d)$.
- ❸ Если знаки делимого и Δ совпадают, то $q_0 \leftarrow 1$. Если $i = 0$ (ненормализованный результат), то $i \leftarrow (i + 1)$; $p_q \leftarrow (p_q + 1)$.
- ❹ Если знаки d и Δ совпадают, то $q_0 \leftarrow 1$, иначе $q_0 \leftarrow 0$. Обр. код!
- ❺ $i \leftarrow (i + 1)$. Если $i > n$, то к шагу 8.
- ❻ В соответствии со схемой выполняются сдвиги регистров: q , Δ , d .
- ❼ Выполняется переход шагу 2.
- ❽ Выполняется коррекция частного (см. следующий слайд).

Процедура коррекции частного

Вход: A — делимое, d — делитель, q — частное, Δ — остаток. Выход: q

	$d \geq 0$	$d < 0$
$A \geq 0$	$q \leftarrow q,$	$q \leftarrow (q + 1),$
$A < 0$	$q \leftarrow \begin{cases} q, & (\Delta = 0) \vee (\Delta = -d), \\ (q + 1), & \text{иначе,} \end{cases}$	$q \leftarrow \begin{cases} (q + 1), & (\Delta = 0) \vee (\Delta = d), \\ q, & \text{иначе.} \end{cases}$

В процессе коррекции может возникать ПРС мантиссы частного q , которое должно устраняться в ходе нормализации.

1)

Выполнить деление чисел (выбрав формат с плавающей точкой самостоятельно):

- ❶ $27/9$, первым способом без восстановления остатков;
- ❷ $39/10$, вторым способом без восстановления остатков.

2)

Подобрать пример, когда в результате округления возникает временное ПРС мантиссы.

Советы самоучке

Подробно об особенностях целочисленного деления см. в [1].
«Длинные» алгоритмы умножения и деления, см. в четвертой главе
«Арифметика» [2]

Библиография I



Г.Уоррен-мл. Алгоритмические трюки для программистов /
Г.Уоррен-мл. —
2 изд. —
М.: Издательский дом «Вильямс», 2014. —
512 с.



Д.Э.Кнут. Искусство программирования, получисленные
алгоритмы / *Д.Э.Кнут.* —
3 изд. —
М.: Вильямс, 2005. —
Т. 2. —
832 с.