Интерполяция по формулам Лагранжа и Ньютона

Интерполяционные многочлены строятся на основе соблюдения условий совпадения значений многочлена в узлах интерполяции с табличными значениями. Степень интерполяционного многочлена на 1 меньше, чем количество узлов интерполяции.

Интерполяционный многочлен Лагранжа используют в таблицах с неравноотстоящими значениями аргумента.

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}).....(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1).....(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}).....(x_i-x_n)}y_i \quad .$$

Перед вычислениями формулу удобно преобразовать, чтобы вычисления вести в следующей таблице.

$x-x_0$	x_0-x_1	x_0-x_2	x_0-x_3	…	…	…	x_0-x_n	D_0	y_0/D_0
x_1-x_0	**$x-x_1$**	X_1-x_2	x_1-x_3	…	…	…	x_1-x_n	D_1	y_1/D_1
x_2-x_0	x_2-x_1	**$x-x_2$**	x_2-x_3	…	…	…	x_2-x_n	D_2	y_2/D_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	x_n-x_3	…	…	…	**$x-x_n$**	D_n	y_n/D_n

Преобразованная формула принимает вид:

$L_n(x)=\Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i}$. В формуле введены следующие обозначения:

$\Pi_{n+1}(x)-$произведение элементов главной диагонали таблицы,

D_i – произведение элементов i-ой строки таблицы, включая диагональный элемент. Погрешность интерполяции можно оценить по формуле:

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{\left|\Pi_{n+1}(x)\right|\max\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!} \quad .$$

<u>Пример 1.</u> Для таблично заданной функции найти значение y при x=0,527 с шестью значащими цифрами после запятой, используя интерполяционный многочлен Лагранжа.

K	0	1	2	3	4	5
X_k	0,43	0,48	0,55	0,62	0,70	0,75
Y_k	1,63597	1,73234	1,87686	2,03345	2,22846	2,83973

Составляется таблица разностей.

						D_k 10^{-6}	Y_k/D_k 10^6
0,097	-0,050	-0,120	-0,190	-0,270	-0,320	-9,55411	-0,171232
0,050	***0,047***	-0,070	-0,140	-0,220	-0,270	1,36798	1,266347
0,120	0,070	***-0,023***	-0,070	-0,150	-0,200	0,40572	4,625998
0,190	0.140	0,070	***-0,093***	-0,080	-0,130	-1,80093	-1,129113
0,270	0,220	0,150	0,080	***-0,173***	-0,050	6,18572	0,361427
0,320	0,270	0,200	0,130	0,050	***-0,223***	-25,04736	-0,113374

Сумма элементов последнего столбца таблицы разностей:

S = 4,840053 10^6.

Произведение элементов главной диагонали:

$\Pi_{n+1}(x) - 0,3762 \; 10^{-6}$.

Искомое значение функции при x=0,527 найдено:

Y(x=0,527)=1,82083.

Проверка в системе MathCAD y=1,8208805.

Интерполяционные формулы Ньютона применяют в таблицах с постоянным шагом h=const, причём, **1-ую формулу Ньютона** используют для интерполяции в начале таблицы, **2-ую формулу Ньютона** используют для интерполяции в конце таблицы.

В основе формул Ньютона – аппарат конечных разностей.

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0;(1)$$

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + ... + \frac{q(q+1)...(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0;(2)$$

Для расчёта по формулам Ньютона к исходной таблице присоединяют справа таблицу конечных разностей.

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	
3	x_3	y_3	Δy_3		
4	x_4	y_4			

В ***1-ую*** интерполяционную формулу Ньютона подставляют значения из ***первой строки*** таблицы конечных разностей, а значение параметра q вычисляют по формуле: $q = (x-x_0)/h>0$.
Во ***2-ую*** интерполяционную формулу Ньютона подставляют значения с ***диагонали*** таблицы конечных разностей, а значение параметра q вычисляют по формуле: $q = (x-x_n)/h<0$.
Степень интерполяционного многочлена Ньютона определяется порядком тех конечных разностей, которые оказываются практически постоянными в построенной таблице конечных разностей.
Эти формулы используют и для ***экстраполяции***, точность которой невелика: 1-ую формулу – для интерполяции “вперёд” и экстраполяции “назад”; 2-ую формулу – для интерполяции “назад” и экстраполяции “вперёд”.

Пример 2. Функция задана таблицей с равноотстоящими значениями аргумента. Найти значения y для x=1,217 и x=1,253.

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$
1,215	0,106044	0,000447	-0,000003
1,220	0,106491	0,000444	-0,000002
1,225	0,106935	0,000442	-0,000001
1,230	0,107377	0,000441	-0,000002
1,235	0,107818	0,000439	0,000000
1,240	0,108257	0,000439	-0,000001
1,245	0,108696	0,000438	-0,000001
1,250	0,109134	0,000437	0,000000
1,255	0,109571	0,000437	
1,260	0,110008		

В данном примере конечные разности первого порядка практически постоянны, а это приводит к тому, что конечные разности второго порядка близки к нулю.

Чтобы найти значение функции для аргумента x=1,217, находящегося вблизи начала таблицы, воспользуемся 1-ой формулой Ньютона и вычислим:

$$q =(1{,}217 – 1{,}215) : 0{,}005 = 0{,}4$$

Подставляем в 1-ую формулу значения из первой строки таблицы:

$$y(x=1{,}217) = 0{,}106044 + 0{,}4 (0{,}000447) + (0{,}4 (-0{,}6): 2)(-0{,}000003)=$$
$$= 0{,}106044 + 0{,}000179 + 0{,}0000003 = 0{,}106223$$

Чтобы найти значение функции для аргумента x=1,253, находящегося вблизи конца таблицы, воспользуемся 2-ой формулой Ньютона и вычислим:

$$q =(1{,}253 – 1{,}260) : 0{,}005 = -1{,}4$$

Подставляем во 2-ую формулу значения конечных разностей с диагонали таблицы:

$$y(x=1{,}253) = 0{,}110008 + (-1{,}4)\ 0{,}000437 = 0{,}110008 - 0{,}000612 = 0{,}109396$$