

Умножение в формате с плавающей точкой

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «информатика»
(3 мая 2016 г.)

Содержание

1 Порядок

- Правила умножения в формате
- Примеры умножения

2 Характеристика

- Правила умножения
- Примеры умножения

Формат с плавающей точкой

$$X = m_X \cdot 2^{p_X},$$

где m_X — нормализованная мантисса числа X , p_X — порядок числа X , подобранный так, чтобы m_X была нормализованной.

Правила нормализации $X \neq 0$

Мантисса m_X получается из двоичного представления X переносом точки в такую позицию, чтобы целая часть была равна нулю, а в старшем разряде дробной части была единица:

$$(0. \underbrace{1xxx \cdots xxx}_\text{разряды мантиссы})_2$$

порядок p_X определяет на сколько разрядов нужно передвинуть запятую в мантиссе, чтобы получить исходное число.

Формат для примеров

15	14	6	5	4	0
X	XXXXXXXXXX	X	XXXXX		

- Разряды нормализованной мантииссы в прямом коде хранятся в разрядах [15 : 6].
- Порядок в прямом коде хранится в разрядах [5 : 0].

Правила умножения

$$R = X \cdot Y = m_X \cdot 2^{p_X} \cdot m_Y \cdot 2^{p_Y} = (m_X \cdot m_Y) \cdot 2^{(p_X + p_Y)}.$$

- 1 Порядок результата определяется сложением порядков операндов:
 $p_R \leftarrow p_X + p_Y$.
- 2 Мантисса результата определяется перемножением мантисс операндов по правилам умножения чисел с фиксированной запятой: $m_R \leftarrow m_X \cdot m_Y$.
- 3 Выполняется нормализация результата, если он получился не нормализованным.
- 4 Фиксируется результат, или ситуации ПРС/ПМР.

$$37 \cdot 86 = 3182$$

15	14	6	5	4	0	×	15	14	6	5	4	0
0	100101000	0	00110				0	101011000	0	00111		

m	p	прим.
0,100101000	0,00110	$X = 37$, ПК
0,101011000	0,00111	$Y = 86$, ПК
	+ 00,00110 00,00111 00,01101	сложение порядков в МДК
$\begin{array}{r} 0,100101000 \\ \times 0,101011000 \\ \hline 0,011000110 \quad 111000000 \\ 0,011000110 \quad 111000000 \\ \hline 0,110001101 \end{array}$		$m_R = m_X \cdot m_Y$, ненормализованная
0,110001101	00,01101	Нормализация! $m_R \leftarrow m_R \ll 1$; $p_R \leftarrow p_R - 1$
0,110001101	0,01100	Рез-т!

15	14	6	5	4	0
0	110001101	0	01100		

$$37 \cdot 86 \approx 3176. \Delta = 6, \delta \approx 0,00189$$

ПРС

15	14	6	5	4	0		15	14	6	5	4	0
1	110000000	0	11000			×	0	110000000	0	10000		

m	p	прим.
1,110000000	0,11000	X, ПК
0,110000000	0,10000	Y, ПК
	+ 00,11000 00,10000 01,01000	Сложение в МДК. ПРС порядков
$\begin{array}{r} 1,110000000 \\ \times 0,110000000 \\ \hline 1,100100000 \quad 000000000 \\ 1,100100000 \quad 000000000 \end{array}$		$m_R = m_X \cdot m_Y$, нормализованная
1,100100000 000000000	01,01000	ПРС! Слишком большой порядок.

Ошибка вычислений — ПРС формата с плавающей запятой.

Устранимое ПРС

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 100000000 & 0 & 11000 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 100000000 & 0 & 01000 \\ \hline \end{array}$$

m	p	прим.
1,100000000	0,11000	X, ПК
1,100000000	0,10000	Y, ПК
	$ \begin{array}{r} + 00,11000 \\ 00,01000 \\ \hline 01,00000 \end{array} $	Сложение в МДК. ПРС порядков?
$ \begin{array}{r} \times 1,100000000 \\ 1,100000000 \\ \hline 0,010000000 \quad 000000000 \end{array} $		$m_R = m_X \cdot m_Y$, ненормализованная
0,010000000 000000000	01,00000	Нормализация! $m_R \leftarrow m_R \ll 1$; $p_R \leftarrow p_R - 1$
0,100000000 000000000	00,11111	ПРС нет!
0,100000000	0,11111	Рез-т!

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 100000000 & 0 & 11111 \\ \hline \end{array}$$

ПМР

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 100000000 & 1 & 11000 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 100000000 & 1 & 01100 \\ \hline \end{array}$$

m	p	прим.
1,100000000	1,11000	X, ПК
0,100000000	1,01100	Y, ПК
	$ \begin{array}{r} 11,01000 \\ + 11,10100 \\ \hline 10,11100 \end{array} $	Сложение в МДК. ПРС порядков «в минус».

ПМР не устрояется!

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 000000000 & 0 & 00000 \\ \hline \end{array}$$

Характеристика

$$X = m_X \cdot 2^{p_X}.$$

Диапазон представления порядка p_X в n -разрядной сетке будет¹:

$$p_X \in [-2^{n-1}, +(2^{n-1} - 1)]$$

Характеристика получается из порядка прибавлением фиксированной поправки Δ , такой, что левая граница представления обращается в ноль. Таким образом,

характеристика c_X — всегда положительное число.

$$c_X = p_X + \Delta, \tag{1}$$

где^a $\Delta = +2^{n-1}$, а $c_X \in [0, 2^n - 1]$.

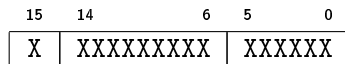
^aОпять же только в случае использования дополнительного кода

¹Если использовать дополнительный код

Свойства n -разрядной характеристики

- Характеристика — положительное число.
- Разность характеристик равна разности порядков.
- Если в процессе нормализации (или денормализации) порядок увеличивается (или уменьшается), то то же самое происходит и с характеристикой.
- Если для работы с характеристиками использовать ДК или МДК, о ПРС при нормализации легко судить по знаковому разряду: он не должен быть 1.
- Если используется поправка $\Delta = 2^{n-1}$, то характеристика получается из дополнительного кода порядка инверсией знакового разряда.

Формат для примеров



- Разряды нормализованной мантииссы в прямом коде хранятся в разрядах [15 : 6].
- Характеристика хранится в разрядах [5 : 0].
- $\Delta = 2^5 = 32 = (100000)_2$

Правила умножения

$$R = X \cdot Y = m_X \cdot 2^{c_X - \Delta} \cdot m_Y \cdot 2^{c_Y - \Delta} = (m_X \cdot m_Y) \cdot 2^{c_X + c_Y - 2\Delta}$$

- 1 Хаарактеристика результата определяется по формуле:
 $c_R \leftarrow (c_X + c_Y - \Delta)$.
- 2 Мантисса результата определяется перемножением мантисс операндов по правилам умножения чисел с фиксированной запятой: $m_R \leftarrow m_X \cdot m_Y$.
- 3 Выполняется нормализация результата, если он получился не нормализованным.
- 4 Фиксируется результат, или ситуации ПРС/ПМР.

$$2.5 \cdot 6 = 15$$

15	14	6	5	0		15	14	6	5	0
0	101000000	100010	×			0	110000000	100011		

<i>m</i>	<i>c</i>	прим.
0,101000000	100010	$X = 2.5$, ПК
0,110000000	100011	$Y = 6$, ПК
	$ \begin{array}{r} 00,100010 \\ + 00,100011 \\ \hline 01,000101 \end{array} $	$(c_X + c_Y)$ в МДК
	$ \begin{array}{r} 01,000101 \\ + 11,100000 \\ \hline 00,100101 \end{array} $	$(c_X + c_Y - \Delta)$ в МДК
$ \begin{array}{r} 0,101000000 \\ \times 0,110000000 \\ \hline 0,011110000 \ 000000000 \end{array} $		$m_R = m_X \cdot m_Y$, ненормализованная
0,011110000 000000000	00,100101	Нормализация! $m_R \leftarrow m_R \ll 1$; $c_R \leftarrow c_R - 1$;
0,111100000	100100	Рез-т!

15	14	6	5	0
0	111100000	100100		

ПРС

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 100000000 & 111000 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 100000000 & 101100 \\ \hline \end{array}$$

m	c	прим.
0,100000000	111000	$X = 0.5 \cdot 2^{56-32}$, ПК
0,100000000	101100	$Y = 0.5 \cdot 2^{44-32}$, ПК
	$ \begin{array}{r} 00,111000 \\ + 00,101100 \\ \hline 01,100100 \end{array} $	$(c_X + c_Y)$ в МДК
	$ \begin{array}{r} 01,100100 \\ + 11,100000 \\ \hline 01,000100 \end{array} $	$(c_X + c_Y - \Delta)$ в МДК, ПРС
$ \begin{array}{r} 0,100000000 \\ \times 0,100000000 \\ \hline 0,010000000 \ 000000000 \end{array} $		$m_R = m_X \cdot m_Y$, ненормализованная
0,010000000 000000000	01,000100	Нормализация! $m_R \leftarrow m_R \ll 1$; $c_R \leftarrow c_R - 1$;
0,100000000 000000000	01,000011	ПРС! Слишком большой порядок.

Ошибка вычислений — ПРС формата с плавающей запятой.

Устранимое ПРС

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 100000000 & 111000 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 100000000 & 101000 \\ \hline \end{array}$$

m	c	прим.
0,100000000	111000	$X = 0.5 \cdot 2^{56-32}$, ПК
0,100000000	101000	$Y = 0.5 \cdot 2^{40-32}$, ПК
	$ \begin{array}{r} 00,111000 \\ + 00,101000 \\ \hline 01,100000 \end{array} $	$(c_X + c_Y)$ в МДК
	$ \begin{array}{r} 01,100000 \\ + 11,100000 \\ \hline 01,000000 \end{array} $	$(c_X + c_Y - \Delta)$ в МДК, ПРС
$ \begin{array}{r} 0,100000000 \\ \times 0,100000000 \\ \hline 0,010000000 \quad 000000000 \end{array} $		$m_R = m_X \cdot m_Y$, ненормализованная
0,010000000 000000000	01,000000	Нормализация! $m_R \leftarrow m_R \ll 1$; $c_R \leftarrow c_R - 1$;
0,100000000 000000000	00,111111	ПРС устраняется.
0,100000000	111111	$R = 0.5 \cdot 2^{63-32}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 15 & 14 & 6 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 100000000 & 111111 \\ \hline \end{array}$$

ПМР

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc} 15 & 14 & & 6 & 5 & 0 \end{array} \\
 \boxed{0} \mid \boxed{100000000} \mid \boxed{000001}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc} 15 & 14 & & 6 & 5 & 0 \end{array} \\
 \boxed{0} \mid \boxed{100000000} \mid \boxed{011110}
 \end{array}$$

m	c	прим.
0,100000000	111000	$X = 0.5 \cdot 2^{1-32}$, ПК
0,100000000	101000	$Y = 0.5 \cdot 2^{30-32}$, ПК
	$ \begin{array}{r} 00,000001 \\ + 00,011110 \\ \hline 00,011111 \end{array} $	$(c_X + c_Y)$ в МДК
	$ \begin{array}{r} 00,011111 \\ + 11,100000 \\ \hline 11,111111 \end{array} $	$(c_X + c_Y - \Delta)$ в МДК, ПРС «в минус»

ПМР не устраняется!

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc} 15 & 14 & & 6 & 5 & 0 \end{array} \\
 \boxed{0} \mid \boxed{000000000} \mid \boxed{000000}
 \end{array}$$

1)

Придумать правила определения ПРС/ПМР при работе

- с порядками в прямом коде;
- с характеристиками.

2)

Разработать собственный 10-разрядный формат² и перемножить в нем числа:

- ❶ 9 и -11 ;
- ❷ 10 и 7;
- ❸ 0.625 и 0.75;
- ❹ -0.625 и 0.375.

²Преподавателю: обязательно проследить, чтобы были использованы и порядки и характеристики

3)

Придумать пример из последовательности трех чисел, произведение которых зависит от порядка перемножения.

Советы самоучке

Классика жанра: [1].

Библиография I



*Б.Г.Лысов. Арифметические и логические основы цифровых автоматов / Б.Г.Лысов. —
2 изд. —
Мн.: Выш. школа, 1980. —
336 с.*