Умножение в прямом коде (с ускорением второго и третьего порядков)

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «информатика»
(2 июля 2016 г.)

Содержание

1. Ускорение второго порядка
   - Обоснование корректности
   - Примеры
2. Ускорение третьего порядка
   - Обоснование корректности
   - Примеры

Двоично-кодированные четверичные числа

Два разряда двоичного числа $\equiv$ один четверичный разряд.

- Разряды двоичного числа группируются по *два* и сдвиги множителя (а также множимого или суммы частичных произведений) выполняются сразу на *два* двоичных разряда.
- Количество разрядов двоичной сетки выбирается кратным *двум*.
- Такой подход теоретически сокращает количество шагов умножения *вдвое*.

Правила умножения четверичной системы

$$X = (a_n \cdots a_0)_4 = (b_m \cdots b_0)_2.$$

Если на некотором шаге анализируется i-й четверичный разряд a_i, то в двоичном представлении анализируется пара (b_{2i+1}, b_{2i}) множителя X:

a_i	$(b_{2i+1},$	$b_{2i})$	Действие над СЧП
0	0	0	$+0$, просто!
1	0	1	$+M$, прибавить множимое M, просто!
2	1	0	$+2M$, просто! `shl(M,1)`
3	1	1	$+3M$, *долго?!*

$+3M$-проблема!

Четверичная система счисления с отрицательными цифрами

В четверичной системе счисления используются цифры $\{0, 1, 2, 3\}$.

Нас не устраивает цифра 3

Мы можем использовать 4СС с другим набором цифр: $\{-1, 0, 1, 2\}$.

Обозначим для удобства

$$-1 \equiv \bar{1}$$

a_i	Действие над СЧП
0	$+0$, просто!
1	$+M$, просто!
2	$+2M$, просто!
$\bar{1}$	$-M$, просто!

Представим *множитель*

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами

$$3 = 4 - 1 = (10)_4 - 1 = \underbrace{(10)_4}_{\text{перенос}} + (\bar{1})_4$$

Чтобы выполнить перевод из 4СС достаточно

цифру 3 (пусть она встретилась в i-м разряде) заменить на цифру $\bar{1}$, и распространить перенос из i-го разряда далее по числу.

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

Начав с младших разрядов, не встречаем трудностей:

Перенос:							
Исходное число:	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:							
Результат:							

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

Начав с младших разрядов, не встречаем трудностей:

Перенос:						1	0
Исходное число:	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:							3
Результат:							$\bar{1}$

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

Начав с младших разрядов, не встречаем трудностей:

Перенос:					1	1	0
Исходное число:	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:						3	3
Результат:						$\bar{1}$	$\bar{1}$

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

Начав с младших разрядов, не встречаем трудностей:

Перенос:				0	1	1	0
Исходное число:	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:					1	3	3
Результат:					1	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

Начав с младших разрядов, не встречаем трудностей:

Перенос:			1	0	1	1	0
Исходное число:	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:				3	1	3	3
Результат:				$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

Начав с младших разрядов, не встречаем трудностей:

Перенос:		0	1	0	1	1	0
Исходное число:	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:			2	3	1	3	3
Результат:			2	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

Начав с младших разрядов, не встречаем трудностей:

Перенос:	0	0	1	0	1	1	0
Исходное число:	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:		2	2	3	1	3	3
Результат:		2	2	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

Начав с младших разрядов, не встречаем трудностей:

Перенос:	1	0	0	1	0	1	1	0
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:		3	2	2	3	1	3	3
Результат:		$\bar{1}$	2	2	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

Начав с младших разрядов, не встречаем трудностей:

Перенос:	1	0	0	1	0	1	1	0
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:	1	3	2	2	3	1	3	3
Результат:	1	$\bar{1}$	2	2	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

Начав с младших разрядов, не встречаем трудностей:

Перенос:	1	0	0	1	0	1	1	0
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:	1	3	2	2	3	1	3	3
Результат:	1	$\bar{1}$	2	2	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Проверка:

$$(3213023)_4 = 3 \cdot 4^6 + 2 \cdot 4^5 + 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 0 + 2 \cdot 4 + 3 \quad = 14795$$

$$(1\bar{1}22\bar{1}1\bar{1}\bar{1})_4 = 4^7 - 4^6 + 2 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 - 4^3 + 4^2 - 4 - 1 \quad = 14795$$

Алгоритм перевода с младших разрядов

Вход: $(a_n \cdots a_0)_4$ — исходное число в 4СС, $(a_n + 1) < 3$
Выход: $(d_n \cdots d_0)_{\pm 4}$— число в 4СС с отрицательными цифрами

$p \leftarrow 0$;
for $i = 0$ to n **do**
    if $(a_i + p) \geq 3$ **then**
        $d_i \leftarrow (a_i - 4)$; $p \leftarrow 1$;
    else
        $d_i \leftarrow a_i$; $p \leftarrow 0$;
    end if
end for
return $(d_n \cdots d_0)_{\pm 4}$

Совмещение с умножением

Нельзя выполнять преобразование множителя заранее — иначе получить выигрыш во времени не получится.

Перевод множителя из обычной 4СС в

4СС с отрицательными цифрами должен выполняться «на лету», прямо в цикле умножения.

Рассмотренный перевод с младших разрядов легко совмещается с I и II способами умножения.

Но в III и IV способах требуется

«на лету» перевести множитель в 4СС с отрицательными цифрами, продвигаясь со *старших* разрядов!

Алгоритм перевода со старших разрядов

Так как переносы распространяются от младших разрядов к старшим, то

при переводе от старших разрядов к младшим требуется

правильно *предсказать* перенос из предыдущего младшего разряда.

Допустим, анализируется четверичная цифра a_i.

Можно ли по значению a_{i-1} определенно сказать

будет ли в i-й разряд перенос из предыдущего при переводе?

a_{i-1}	Перенос
0	нет
1	нет
2	??? Если в a_{i-1} будет перенос — да, иначе — нет...
3	да

Проблема предсказания переноса при $a_{i-1} = 2$

Выход из положения —

выполнять замену

$$2 = 4 - 2 = \underbrace{(10)_4}_{\text{перенос}} + (\bar{2})_4.$$

Тогда неопределенность устраняется: перенос из $a_{i-1} = 2$ будет всегда, а цифру

$$\bar{2} \equiv -2.$$

легко получить «на лету».

В этом случае будем иметь дело с 4СС с цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$[1].

[1] Цифр больше, чем надо, но цифра 2 будет получаться, когда в текущем разряде 1, и прогнозируется перенос. Страдает только однозначность представления числа, например, $8 = (1\bar{2}0)_4 = (20)_4$.

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Выполняя перевод со старших разрядов,

прогнозируем переносы из младших разрядов:

Перенос:								
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:								
Результат:								

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Выполняя перевод со старших разрядов,

прогнозируем переносы из младших разрядов:

Перенос:	1							
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:	1							
Результат:	1							

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Выполняя перевод со старших разрядов,

прогнозируем переносы из младших разрядов:

Перенос:	1	1						
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:	1	0						
Результат:	1	0						

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Выполняя перевод со старших разрядов,

прогнозируем переносы из младших разрядов:

Перенос:	1	1	0					
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:	1	0	2					
Результат:	1	0	$\bar{2}$					

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Выполняя перевод со старших разрядов,

прогнозируем переносы из младщих разрядов:

Перенос:	1	1	0	1				
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:	1	0	2	2				
Результат:	1	0	$\bar{2}$	2				

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Выполняя перевод со старших разрядов,

прогнозируем переносы из младших разрядов:

Перенос:	1	1	0	1	0			
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:	1	0	2	2	3			
Результат:	1	0	$\bar{2}$	2	$\bar{1}$			

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Выполняя перевод со старших разрядов,

прогнозируем переносы из младщих разрядов:

Перенос:	1	1	0	1	0	1		
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:	1	0	2	2	3	1		
Результат:	1	0	$\bar{2}$	2	$\bar{1}$	1		

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Выполняя перевод со старших разрядов,

прогнозируем переносы из младщих разрядов:

Перенос:	1	1	0	1	0	1	1	
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3
Сумма с переносом:	1	0	2	2	3	1	3	
Результат:	1	0	$\bar{2}$	2	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Выполняя перевод со старших разрядов,

прогнозируем переносы из младших разрядов:

Перенос:	1	1	0	1	0	1	1	0	
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3	,0
Сумма с переносом:	1	0	2	2	3	1	3	3	
Результат:	1	0	$\bar{2}$	2	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	

Представим *множитель* $(3213023)_4$

в четверичной системе счисления с отрицательными цифрами $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Выполняя перевод со старших разрядов,

прогнозируем переносы из младщих разрядов:

Перенос:	1	1	0	1	0	1	1	0	
Исходное число:	0	3	2	1	3	0	2	3	,0
Сумма с переносом:	1	0	2	2	3	1	3	3	
Результат:	1	0	$\bar{2}$	2	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	

Проверка:

$$(3213023)_4 = 3 \cdot 4^6 + 2 \cdot 4^5 + 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 0 + 2 \cdot 4 + 3 = 14795$$

$$(10\bar{2}2\bar{1}1\bar{1}\bar{1})_4 = 4^7 - 2 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 - 4^3 + 4^2 - 4 - 1 = 14795$$

Алгоритм перевода со старших разрядов

Вход: $(a_n \cdots a_0)_4$ — исходное число в 4СС, где $a_n < 2, a_{-1} = 0$
Выход: $(d_n \cdots d_0)_{\pm 4}$— число в 4СС с отрицательными цифрами

```
for i = n to 0 do
    c ← a_i;
    if a_i ≥ 2 then
        c ← c − 4; // этот перенос был учтён на предыдущем шаге
    end if
    if a_{i−1} ≥ 2 then
        c ← c + 1; // учтём перенос, который будет на следующем
    end if
    d_i ← c;
end for
return (d_n · · · d_0)_{±4}
```

Универсальный подход

Перевод i-го разряда

Правило преобразования $a_i \mapsto d_i$ со старших разрядов

можно использовать и для преобразования с младших.

Вход: a_i, a_{i-1} — две четверичных цифры исходного числа в 4СС
Выход: d_i — цифра в 4СС с отрицательными цифрами

```
c ← a_i;
if a_i ≥ 2 then
    c ← c − 4; // перенос из i-го разряда
end if
if a_{i−1} ≥ 2 then
    c ← c + 1; // перенос в i-й разряд
end if
d_i ← c;
```

Универсальный подход

Правила преобразования и действий в цикле умножения

a_i	a_{i-1}	$d_i \cdot M$ — прибавляется к СЧП
0	$\{0,1\}$	0
0	$\{2,3\}$	$+M$
1	$\{0,1\}$	$+M$
1	$\{2,3\}$	$+2M$
2	$\{0,1\}$	$-2M$
2	$\{2,3\}$	$-M$
3	$\{0,1\}$	$-M$
3	$\{2,3\}$	0

Универсальный подход в 2СС

Правила преобразования и действий в цикле умножения

$$X = (a_n \cdots a_0)_4 = (b_m \cdots b_0)_2.$$

Тек как в двоичном представлении

четверичные цифры $\{0, 1\}$ в старшем разряде содержат 0, а $\{2, 3\}$ содержат 1, то для составления таблицы действий в двоичной системе счисления, достаточно анализа трех двоичных разрядов:

$$b_{2i+1}, b_{2i}, b_{2i-1},$$

где $a_i \equiv (b_{2i+1}, b_{2i})$ и $a_{i-1} \equiv (b_{2i-1}, b_{2i-2})$.

Универсальный подход в 2СС

Таблица действий в цикле умножения

a_i (b_{2i+1},	b_{2i})	a_{i-1} (b_{2i-1},	$d_i \cdot M$ — прибавляется к СЧП
0	0	0	0
0	0	1	$+M$
0	1	0	$+M$
0	1	1	$+2M$
1	0	0	$-2M$
1	0	1	$-M$
1	1	0	$-M$
1	1	1	0

Резюме

- Разряды двоичного числа группируются по *два* и сдвиги множителя (а также множимого или суммы частичных произведений) выполняются сразу на *два* двоичных разряда.
- Количество разрядов двоичной сетки выбирается кратным *двум*.
- Перевод в 4СС с отрицательными цифрами совмещается с основным циклом умножения.
- В цикле умножения выполняется анализ *трех* двоичных разрядов.
- Множитель, представленный в 4СС с отрицательными цифрами может занять на один четверичный разряд больше, например: $(30)_4 \equiv (1\bar{1}0)_{\pm 4}$. Этого не происходит, если старшая значащая четверичная цифра меньше двух.

Умножение I сп.

$(100110)_2 \cdot (100001)_2 = (10011100110)_2$, масштаб операндов $4^3 = 2^6$.

мн-ль →	СЧП →	прим.
00,1001$\underline{\underline{10}}$|.	+ 00,000000 000000 10,11111. ...... 10,111110 000000	$-2M$; сдвиг(2);
..,0010$\underline{\underline{01\|1}}$	+ 11,101111 100000 01,00001. ...... 00,110001 100000	$+2M$; сдвиг(2);
..,..00$\underline{\underline{10\|0}}$	+ 00,001100 011000 10,11111. ...... 11,001010 011000	$-2M$; сдвиг(2);
..,....$\underline{\underline{00\|1}}$	+ 11,110010 100110 00,100001 ...... 00,010011 100110	$+M$; Рез-т!

Умножение I сп.

$(100110)_2 \cdot (100001)_2 = (10011100110)_2$

Следует обратить внимание на следующие детали приведенного выше примера:

- Так как старшая цифра множителя — 2, то будет сгенерирован перенос, и число в 4СС с отрицательными цифрами станет на разряд длиннее.
- Этот разряд также нужно анализировать и учитывать его вклад.
- Поэтому в множителе добавлен нулевой разряд (до запятой), что объясняет почему в каждом такте к СЧП множимое прибавляется (в 4СС) не сдвинутым (т.к. вклад последнего разряда — 2^0).
- К СЧП добавлен один четверичный разряд, чтобы не терять перенос.

Умножение II сп.

$(100111)_2 \cdot (100001)_2 = (10100000111)_2$, масштаб операндов $4^3 = 2^6$.

мн-ль $\rightarrow$	мн-е $\leftarrow$; СЧП	прим.
00,100111|0	мн-е: ,000000 100001 ,000000 000000 + ,111111 011111 ,111111 011111	$-M$; сдвиг(2);
..,001001|1	мн-е: ,000010 0001.. ,111111 011111 + ,000100 001... ,000011 100111	$+2M$; сдвиг(2);
..,..0010|0	мн-е: ,001000 01.... ,000011 100111 + ,101111 1..... ,110011 000111	$-2M$; сдвиг(2);
..,....00|1	мн-е: ,100001 ...... ,110011 000111 + ,100001 ...... ,010100 000111	$+M$; Рез-т!

Умножение II сп.

$(100111)_2 \cdot (100001)_2 = (10100000111)_2$

Следует обратить внимание на следующие детали приведенного выше примера:

- К множителю добавлен нулевой разряд (обоснование см. выше).
- К СЧП нулевой четверичный разряд не добавляется — он не оказывает влияния на СЧП.

Умножение III сп.

$(100111)_2 \cdot (100001)_2 = (10100000111)_2$, масштаб операндов $4^3 = 2^6$.

мн-ль $\leftarrow$	СЧП $\leftarrow$	прим.
00,100111	+ ,000000 000000 ,...... 100001 ,000000 100001	$+M$; сдвиг(2);
10,0111..	+ ,000010 0001.. ,111110 11111. ,000001 000010	$-2M$; сдвиг(2);
01,11....	+ ,000100 0010.. ,.....1 00001. ,000101 001010	$+2M$; сдвиг(2);
11,......	+ ,010100 1010.. ,111111 011111 ,010100 000111	$-M$; Рез-т!

Умножение III сп.
$(100111)_2 \cdot (100001)_2 = (10100000111)_2$

Следует обратить внимание на следующие детали приведенного выше примера:

- К множителю добавлен нулевой разряд.
- В СЧП нулевой четверичный разряд не добавляется.

Умножение IV сп.

$(100111)_2 \cdot (100001)_2 = (10100000111)_2$, масштаб операндов $4^3 = 2^6$.

мн-ль ←	мн-е →; СЧП	прим.
00,100111	мн-е: ,100001 ...... ,000000 000000 + ,100001 ...... ,100001 000000	$+M$; сдвиг(2);
10,0111..	мн-е: ,..1000 01.... ,100001 000000 + ,101111 1..... ,010000 100000	$-2M$; сдвиг(2);
01,11....	мн-е: ,....10 0001.. ,010000 100000 + ,...100 001... ,010100 101000	$+2M$; сдвиг(2);
11,......	мн-е: ,...... 100001 ,010100 101000 + ,111111 011111 ,010100 000111	$-M$; Рез-т!

Умножение IV сп.
$(100111)_2 \cdot (100001)_2 = (10100000111)_2$

Следует обратить внимание на следующие детали приведенного выше примера:

- Множимое на первом шаге на четверичный разряд не сдвигается, так как к множителю добавлен нулевой разряд, который вносит вклад $M \cdot 4^0$.
- В СЧП нулевой четверичный разряд не добавляется.

Двоично-кодированные восмеричные числа

Три разряда двоичного числа $\equiv$ один восьмеричный разряд.

$$X = (a_n \cdots a_0)_8 = (b_m \cdots b_0)_2.$$

Если на некотором шаге анализируется i-й восьмеричный разряд a_i, то в двоичном представлении анализируется тройка $(b_{3i+2}, b_{3i+1}, b_{3i})$ множителя X:

- Разряды двоичного числа группируются по *три* и сдвиги множителя (а также множимого или суммы частичных произведений) выполняются сразу на *три* двоичных разряда.
- Количество разрядов двоичной сетки выбирается кратным *трем*.
- Такой подход теоретически сокращает количество шагов умножения *втрое*.

Правила умножения восьмеричной системы

a_i	К СЧП прибавляется
0	0, просто!
1	$+M$, просто!
2	$+2M$, просто! `shl(`M`,1)`.
3	$+3M$, *долго?!*
4	$+4M$, просто! `shl(`M`,2)`.
5	$+5M$, *долго?!*
6	$+6M$, *долго?!*
7	$+7M$, *долго?!*

Переход к отрицательным цифрам

Вычитанием из восьмерки степеней двойки[a] можем получить цифры:

- $7 = 8 - 1$;
- $6 = 8 - 2$;
- $4 = 8 - 4$. Пока и без этого все хорошо!

[a] $\{1, 2, 4\}$ — эти цифры нас устраивают: их можно получить сдвигом

Остаются проблемные 3 и 5, которые выражаются друг через друга:

$$5 = 8 - 3.$$

Утроенное множимое придется вычислить *заранее*!

Новые действия над суммой

a_i	К СЧП прибавляется
0	0, просто!
1	$+M$, просто!
2	$+2M$, просто! `shl(`M`,1)`.
3	$+3M$, *Вычислим заранее*
4	$+4M$, просто! `shl(`M`,2)`.
5	$-3M$, просто: $5 = 8 - 3$, но учесть перенос в a_{i+1}.
6	$-2M$, просто: $6 = 8 - 2$, но учесть перенос в a_{i+1}.
7	$-M$, просто: $7 = 8 - 1$, но учесть перенос в a_{i+1}.

Навстречу переносу

В III и IV способах умножения выполняестя анализ старших разрядов.

Поэтому при анализе вклада a_i нужно уметь предсказать

будет ли перенос из младшего восьмеричного разряда a_{i-1}?

a_{i-1}	Будет перенос в a_i?
0	нет.
1	нет.
2	нет.
3	нет.
4	???
5	да.
6	да.
7	да.

Неоднозначность возникновения переноса из $a_{i-1} = 4$

Если перенос в $a_{i-1} = 4$

- отсутствовал, то из a_{i-1} переноса не будет: $4M = \texttt{shl}(M,2)$;
- был, то 5 преобразуется $5M = 8M - 3M$ и из a_{i-1} будет перенос.

Чтобы перенос из $a_{i-1} = 4$ был всегда, при отсутствии переноса в этот разряд будем получать $4M$ как:

$$4M = 8M - 4M = 8M - \texttt{shl}(M,2).$$

Из восьмеричного разряда a_{i-1} будет перенос в a_i, если $a_{i-1} \geq 4$.

Восьмеричные цифры ≥ 4, в двоичном представлении содержат единицу в старшем разряде: $(1{*}{*})_2$.

Следовательно, в двоичном представлении анализируется 4 разряда: три разряда a_i и старший разряд a_{i-1}.

Таблица действий в цикле умножения в 2СС

a_i (b_{3i+2},	b_{3i+1},	b_{3i})	a_{i-1} (b_{3i-1},	$d_i \cdot M$ прибавляется к СЧП
0	0	0	0	0
0	0	0	1	$+M$
0	0	1	0	$+M$
0	0	1	1	$+2M$
0	1	0	0	$+2M$
0	1	0	1	$+3M$
0	1	1	0	$+3M$
0	1	1	1	$+4M$
1	0	0	0	$-4M$
1	0	0	1	$-3M$
1	0	1	0	$-3M$
1	0	1	1	$-2M$
1	1	0	0	$-2M$
1	1	0	1	$-M$
1	1	1	0	$-M$
1	1	1	1	0

Резюме

- Множитель представляется в 8СС системе счисления с цифрами $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Разряды двоичного числа группируются по *три* и сдвиги множителя (а также множимого или суммы частичных произведений) выполняются сразу на *три* двоичных разряда.
- Количество разрядов двоичной сетки выбирается кратным *трем*.
- Перевод в 8СС с отрицательными цифрами совмещается с основным циклом умножения.
- В цикле умножения выполняется анализ *четырех* двоичных разрядов.
- Множитель, представленный в 8СС с отрицательными цифрами может занять на один восьмеричный разряд больше, например: $(40)_8 \equiv (1\bar{4}0)_{\pm 4}$. Этого не происходит, если старшая значащая четверичная цифра меньше двух.

Умножение I сп.

$(101011111)_2 \cdot (111000001)_2 = (100110011110011111)_2$, масштаб операндов $8^3 = 2^9$

$3 \cdot (111000001)_2 = (1110000010)_2 + (111000001)_2 = 010,101000011$

мн-ль $\to$	СЧП $\to$	прим.
000,101011111|.	+ 000,000000000 000000000 111,000111111 .... 111,000111111 000000000	$-M$; сдвиг(3);
...,000101011|1	+ 111,111000111 111000000 011,1000001.. .... 011,011001011 111000000	$+4M$; сдвиг(3);
...,...000101|0	+ ...,011011001 011111000 101,010111101 .... 101,110010110 011111000	$-3M$; сдвиг(3);
...,......000|1	+ 111,101110010 110011111 000,111000001 .... 000,100110011 110011111	$+M$; Рез-т!

Умножение II сп.

$(101011111)_2 \cdot (111000001)_2 = (100110011110011111)_2$, масштаб операндов $8^3 = 2^9$

мн-ль $\rightarrow$	мн-е $\leftarrow$; СЧП	прим.
$000,101011\underline{\underline{111}}\,\vert\,0$	M: ,000000000 111000001 $3M$: ,000000010 101000011 + ,000000000 000000000 ,111111111 000111111 ,111111111 000111111	$-M$; сдвиг(3);
$\ldots,000101\underline{\underline{011}}\,\vert\,1$	M: ,000000111 000001... $3M$: ,000010101 000011... + ,111111111 000111111 ,000011100 0001..... ,000011011 001011111	$+4M$; сдвиг(3);
$\ldots,\ldots000\underline{\underline{101}}\,\vert\,0$	M: ,000111000 001...... $3M$: ,010101000 011...... + ,000011011 001011111 ,101010111 101...... ,101110010 110011111	$-3M$; сдвиг(3);
$\ldots,\ldots\ldots\underline{\underline{000}}\,\vert\,1$	M: ,111000001 .... $3M$: ,101000011 .... + ,101110010 110011111 ,111000001 .... ,100110011 110011111	$+M$; Рез-т!

Умножение III сп.

$(101011111)_2 \cdot (111000001)_2 = (100110011110011111)_2$, масштаб операндов $8^3 = 2^9$

$3 \cdot (111000001)_2 = (1110000010)_2 + (111000001)_2 = 10\ \ 101000011$

мн-ль ←		СЧП ←	прим.
$\underline{\underline{000}}$,101011111	+	,000000000 000000000 ,......... 111000001 ,000000000 111000001	$+M$; сдвиг(3);
$\underline{\underline{101}}$,011111...	+	,000000111 000001... ,111111101 010111101 ,000000100 011000101	$-3M$; сдвиг(3);
$\underline{\underline{011}}$,111......	+	,000100011 000101... ,........11 1000001.. ,000100110 100101100	$+4M$; сдвиг(3);
$\underline{\underline{111}}$,.........	+	,100110100 101100... ,111111111 000111111 ,100110011 110011111	$-M$; Рез-т!

Умножение IV сп.

$(101011111)_2 \cdot (111000001)_2 = (100110011110011111)_2$, масштаб операндов $8^3 = 2^9$

<table>
<tr><th>мн-ль ←</th><th>мн-е →; СЧП</th><th>прим.</th></tr>
<tr><td>000,101011111</td><td>M: . . . ,111000001 . . . .
3M:010,101000011 . . . .
+ ,000000000 000000000
,111000001 . . . .
,111000001 000000000</td><td>+M; сдвиг(3);</td></tr>
<tr><td>101,011111. . .</td><td>M: . . . , . . .111000 001. . . . . .
3M: . . . ,010101000 011. . . . . .
+ ,111000001 000000000
,101010111 101. . . . . .
,100011000 101000000</td><td>−3M; сдвиг(3);</td></tr>
<tr><td>011,111. . . . . .</td><td>M: . . . , ...111 000001. . .
3M: . . . , . . .010101 000011. . .
+ ,100011000 101000000
, ...11100 0001. . . . .
,100110100 101100000</td><td>+4M; сдвиг(3);</td></tr>
<tr><td>111, ...</td><td>M: . . . , ... 111000001
3M: . . . , ...010 101000011
+ ,100110100 101100000
,111111111 000111111
,100110011 110011111</td><td>−M; Рез-т!</td></tr>
</table>

1)

Какой масштаб результата результата должен получиться, если модули перемножаемых двоичных чисел имеют разрядность 7 и используется метод ускорения

- второго порядка;
- третьего порядка.

2)

Перемножить числа:

1. множитель — 103, множимое — 81 III-м способом с ускорением второго порядка;
2. множитель — 231, множимое — 81 IV-м способом с ускорением второго порядка.
3. множитель — 226, множимое — 161 I-м способом с ускорением третьего порядка;
4. множитель — 495, множимое — 161 II-м способом с ускорением третьего порядка;

Обосновать выбор масштаба.

3)

Разработать метод ускорения четвертого порядка.

Советы самоучке

Классика жанра: [1].

Библиография I

Б.Г.Лысиков. Арифметические и логические основы цифровых автоматов / Б.Г.Лысиков. —
2 изд. —
Мн.: Выш. школа, 1980. —
336 с.