Двоично-десятичные коды

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «информатика»
(19 мая 2016 г.)

Содержание

Введение

Двоично-десятичные коды могут быть использваны для выполнения высокоточных вычислений в десятичной системе счисления с помощью двоичной вычислительной техники.

Обратный код в десятичной системе счисления

$$\text{ОК}(X) = \begin{cases} \overline{|X|}, & \text{если } X < 0, \\ |X|, & \text{если } X \geq 0, \end{cases}$$

где $\overline{|X|}$ — порязрядное дополнение цифр десятичного числа X до 9, то есть разряд x_i числа находится как $(9 - x_i)$.

$$X = \begin{cases} -(\overline{\text{ОК}(X)}), & \text{если } msb(\text{ОК}(X)) = 9, \\ \text{ОК}(X), & \text{если } msb(\text{ОК}(X)) = 0, \end{cases}$$

где $msb(x)$ — функция, возвращающая старший значащий бит последовательности x.

При сложении, как в двоичной системе счисления, единицу переноса из старшего разрядя следует прибавить к младшему разряду.

Примеры сложения в обратном коде в 10СС

4-х разрядная сетка

$731 - 485 = 246$

$$\begin{array}{r} 0731 \\ +\;9514 \\ \hline 10245 \end{array}$$

Поправка:

$$\begin{array}{r} 0245 \\ +\;0001 \\ \hline 0246 \end{array}$$

$204 - 690 = -486$

$$\begin{array}{r} 0204 \\ +\;9309 \\ \hline 9513 \end{array}$$

$-247 - 585 = -832$

$$\begin{array}{r} 9752 \\ +\;9414 \\ \hline 19166 \end{array}$$

Поправка:

$$\begin{array}{r} 9166 \\ +\;0001 \\ \hline 9167 \end{array}$$

Признаками ПРС являются значения в знаковом разряде, отличные от 0 или 9: 1 — положительное переполнение, 8 — отрицательное.

Инверсия разрядов тетрады

Арифметически, инверсия разрядов двоичной тетрады соответствует дополнению до 15:

$$\overline{(\mathtt{xxxx})_2} \Leftrightarrow (1111)_2 - (\mathtt{xxxx})_2.$$

Например $(1001)_2 = 9$:

$$\overline{(1001)_2} = (0110)_2 = 6 = (15 - 9).$$

Код “8421”

Код с естественными весами: “8421”$(a) = a$

a в 10СС	“8421”(a)	“8421”$(9-a)$
0	0000	1001
1	0001	1000
2	0010	0111
3	0011	0110
4	0100	0101
5	0101	0100
6	0110	0011
7	0111	0010
8	1000	0001
9	1001	0000

$$\text{“8421”}(9-a) = 9-a = (15-a)-6 = \overline{\text{“8421”}(a)}-6 = \overline{\text{“8421”}(a)}+1010.$$

Код "8421"

Сложение $S = A + B$, где $A = (a_{n-1} \cdots a_0)$ и $B = (b_{n-1} \cdots b_0)$

$$s_k = a_k + b_k + c_k,$$

где c_k — перенос в k-й разряд, а s_k, a_k, b_k — десятичные цифры.

1. $(a_k + b_k + c_k) < 10$; $c_{k+1} = 0$. Код $(a_k + b_k + c_k)$ корректен.
2. $10 \leq (a_k + b_k + c_k) \leq 15$; $c_{k+1} = 0$. Неверно! Перенос в 10СС должен быть, но в 16СС его не случилось. Правильная 10СС цифра $(a_k + b_k + c_k - 10)$, и перенос: $(a_k + b_k + c_k - 10) + 16 = (a_k + b_k + c_k + 6)$. Поправка: $+6 = 0110$.
3. $(a_k + b_k + c_k) \geq 16$; $c_{k+1} = 1$. Неверно! Перенос корректен, а полученная цифра $(a_k + b_k + c_k - 16)$ неправильна. Правильный код $(a_k + b_k + c_k - 10)$. Поправка: $+6 = 0110$. При такой поправке переноса не будет.

Код “8421”
Упрощение условий поправок

$$s_k = a_k + b_k + c_k,$$

Из предыдущего слайда ясно, что:

1. Если $0 \leq (a_k + b_k + c_k) \leq 9$, то поправок не надо.
2. Если $10 \leq (a_k + b_k + c_k) \leq 19$, то нужна поправка $(+6) = 0110$. Переносы из тетрады в тетраду при этом возникают автоматически.

Поэтому поправку $(+6) = 0110$ можно прибавить к обратному коду одного из операндов заранее. И тогда, если переноса из тетрады не будет (только в случае условия из п. 1) поправку нужно вычесть из тетрады.

Алгоритм сложения в коде "8421"

1. Перевести слагаемые в обратный "8421"-код. Каждая тетрада модуля отрицательного слагаемого инвертируются и к результату прибавляется код $(-6) = 1010$. Переносы между тетрадами не распространяются.
2. К каждой тетраде одного из слагаемых прибавляется поправка $(+6) = 0110$. Переносов между тетрадами при этом не возникает[1].
3. Выполняется сложение по правилам двоичной арифметики. Переносы распространяются.
4. Корректируются тетрады, из которых не было переносов. К каждой такой тетраде прибавляется -6, т.е. тетрада 1010. Переносы не распространяются.
5. Результат получен в обратном "8421"-коде.

[1] Если одно из слагаемых отрицательно, то поправки перевода в ОК (-6) и поправка данного шага $(+6)$ друг друга компенсируют!

Код "8421" I

Пример сложения −57 и 894.

1. Перевод в ОК (добавлены два знаковых двоичных разряда МОК):

$$-57 \Rightarrow -0000\ \ 0101\ \ 0111 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow + \begin{array}{r} 1111\ \ 1010\ \ 1000 \\ 1010\ \ 1010\ \ 1010 \\ \hline 1001\ \ 0100\ \ 0010 \end{array}$$

$$\text{ОК}(-57) = 11\ \ 1001\ \ 0100\ \ 0010$$

$$\text{ОК}(894) = 00\ \ 1000\ \ 1001\ \ 0100$$

Код "8421" II

Пример сложения -57 и 894.

2. К каждой тетраде ОК(-57) прибавлена тетрда 0110.

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{cccc} 11 & 1001 & 0100 & 0010 \\ .. & 0110 & 0110 & 0110 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{cccc} 11 & 1111 & 1010 & 1000 \end{array}
\end{array}
$$

3. Выполняется сложение полученного числа с ОК(894).

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{cccc} 11 & 1111 & 1010 & 1000 \\ 00 & 1000 & 1001 & 0100 \end{array} \\
\hline
1{*}00{*}1000{*}0011 \;\; 1100
\end{array}
$$

Коррекция переносом из знакового разряда:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 00{*}1000{*}0011 \;\; 1100 \\ ..\;\; ....\;\; ....\;\; ...1 \end{array} \\
\hline
00{*}1000{*}0011 \;\; 1101
\end{array}
$$

Код "8421" III

Пример сложения −57 и 894.

4. Корректируются тетрады из которых не было переносов. Переносы между тетрадами не распространяются.

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 00{*}1000{*}0011\ \ 1101 \\ ..\ \ \ ....\ \ \ ....\ \ \ 1010 \end{array} \\
\hline
00\ \ 1000\ \ 0011\ \ 0111
\end{array}
$$

ПРС не возникло, $\mathrm{OK}(S) = 00\ \ 1000\ \ 0011\ \ 0111$, $S = 837$

Код "8421+3"

Код с избытком 3: "8421+3"$(a) = (a+3)$

a в 10СС	"8421+3"(a)	"8421+3"$(9-a)$
0	0011	1100
1	0100	1011
2	0101	1010
3	0110	1001
4	0111	1000
5	1000	0111
6	1001	0110
7	1010	0101
8	1011	0100
9	1100	0011

$$\overline{\text{“8421+3”}(a)} = 15-(a+3) = 12-a = (9-a)+3 = \text{“8421+3”}(9-a).$$

Код "8421+3"

Сложение $S = A + B$, где $A = (a_{n-1} \cdots a_0)$ и $B = (b_{n-1} \cdots b_0)$

$$s_k = a_k + b_k + c_k.$$

1. $s_k < 10$; При сложении кодов:

   $$(a_k + 3) + (b_k + 3) + c_k = (a_k + b_k + c_k) + 6 = (s_k + 6).$$

   Так как $(s_k + 6) \leq 15$, то переноса не возникает. Правильная тетрада должна быть $(s_k + 3)$, следовательно, нужна поправка $-3 = 1101$. Перенос игнорируется.

2. $s_k \geq 10$; При сложении кодов возникнет перенос:

   $$(a_k + 3) + (b_k + 3) + c_k - 16 = (a_k + b_k + c_k) - 10 = s_k - 10.$$

   Для получения правильного: $(s_k - 10) + 3$, нужна поправка $+3 = 0011$. Перенос игнорируется.

Код "8421+3"

Алгоритм сложения

1. Перевести слагаемые в обратном "8421+3"-коде. Каждая тетрада модуля отрицательного числа инвертируется.
2. Выполняется сложение полученных операднов по правилам двоичной арифметики.
3. К тетрадам, из которых не было переноса, прибавляется 1101, а к остальным прибавляется 0011. Переносы игноритуются.
4. Результат получен в обратном "8421+3"-коде.

Код "8421+3" I

Пример сложения −894 и 57.

1. Перевод в ОК (добавлены два знаковых двоичных разряда МОК):

$$-894 \Rightarrow -1011\ \ 1100\ \ 0111$$
$$\text{ОК}(-894) = 11\ \ 0100\ \ 0011\ \ 1000$$
$$\text{ОК}(57) = 00\ \ 0011\ \ 1000\ \ 1010$$

2. Выполняется сложение обратных кодов.

$$\begin{array}{r} 11\ \ 0100\ \ 0011\ \ 1000 \\ +\ 00\ \ 0011\ \ 1000\ \ 1010 \\ \hline 11\ \ 0111\ \ 1100{*}0010 \end{array}$$

Код “8421+3” II

Пример сложения -894 и 57.

3. Выполняется коррекция. Переносы между тетрадами не распространяются.

$$
+\begin{array}{r}
11\ \ 0111\ \ 1100{*}0010\\
..\ \ 1101\ \ 1101\ \ 0011\\
\hline
11\ \ 0100\ \ 1001\ \ 0101
\end{array}
$$

ПРС не возникло,

$$\text{ОК}(S) = 11\ \ 0100\ \ 1001\ \ 0101, \overline{\text{ОК}(S)} = 00\ \ 1011\ \ 0110\ \ 1010,$$

$S = -837.$

Код "2421"

Код Айкена: "2421"$(a) \equiv t_3 t_2 t_1 t_0$, $a = 2t_3 + 4t_2 + 2t_1 + 1t_0$

a в 10СС	"2421"(a)	"2421"$(9-a)$
0	0000	1111
1	0001	1110
2	$0010 \leftrightarrow 1000$	$1101 \leftrightarrow 0111$
3	$0011 \leftrightarrow 1001$	$1100 \leftrightarrow 0110$
4	$0100 \leftrightarrow 1010$	$1011 \leftrightarrow 0101$
5	$0101 \leftrightarrow 1011$	$1010 \leftrightarrow 0100$
6	$0110 \leftrightarrow 1100$	$1001 \leftrightarrow 0011$
7	$0111 \leftrightarrow 1101$	$1000 \leftrightarrow 0010$
8	1110	0001
9	1111	0000

$$\overline{T} = \overline{t_3 t_2 t_1 t_0} = (2 - 2t_3) + (4 - 4t_3) + (2 - 2t_2) + (1 - 1t_0) = 9 - T,$$

$$\overline{\text{“2421”}(a)} = \text{“2421”}(9 - a).$$

Код "2421"

Код Айкена: "2421"$(a) \equiv t_3 t_2 t_1 t_0$, $a = 2t_3 + 4t_2 + 2t_1 + 1t_0$

Обобщая таблицу с предыдущего слайда:

1. если $0 \leq a \leq 1$, то "2421"$(a) = a$;
2. если $2 \leq a \leq 7$, то "2421"$(a) = a$ или "2421"$(a) = (a + 6)$;
3. если $8 \leq a \leq 9$, то "2421"$(a) = (a + 6)$.

Преследуя цель «пусть будет»: «однозначность», «перенос» и «самодополняемость», формулируются новые правила:

1. если $0 \leq a \leq 4$, то "2421"$(a) = a$:
$$\overline{\text{“2421”}(a)} = (15 - a) = \underbrace{(9 - a) + 6}_{\text{см. п.2}} = \text{“2421”}(9 - a);$$
2. если $5 \leq a \leq 9$, то "2421"$(a) = (a + 6)$:
$$\overline{\text{“2421”}(a)} = 15 - (a + 6) = \underbrace{(9 - a)}_{\text{см. п.1}} = \text{“2421”}(9 - a).$$

Код "2421"

a в 10СС	"2421"(a)	"2421"$(9-a)$
0	0000	1111
1	0001	1110
2	0010	1101
3	0011	1100
4	0100	1011
5	1011	0100
6	1100	0011
7	1101	0010
8	1110	0001
9	1111	0000

$$\overline{\text{“2421”}(a)} = \text{“2421”}(9-a).$$

Код "2421"

$$s_k = a_k + b_k + c_k.$$

1. Если $0 \le a_k, b_k \le 4$, то сложение кодов $(a_k + b_k + c_k)$:
   1. если $0 \le (a_k + b_k + c_k) \le 4$, то поправок не нужно;
   2. если $5 \le (a_k + b_k + c_k) \le 9$, то неверно! Должно быть: $(a_k + b_k + c_k) + 6$. Поправка: $+6 = 0110$.
2. Если $0 \le a_k \le 4$ и $5 \le b_k \le 9$, то код $(a_k + b_k + c_k + 6)$:
   1. если $5 \le (a_k + b_k + c_k) \le 9$, то код верен;
   2. если $10 \le (a_k + b_k + c_k) \le 14$, то формируется перенос и $(a_k + b_k + c_k + 6) - 16$. Код $(a_k + b_k + c_k - 10)$ верен.
3. Если $5 \le a_k \le 9$ и $0 \le b_k \le 4$ код верен (аналогично п.2).
4. Если $5 \le a_k, b_k \le 9$, то код $(a_k + b_k + c_k - 10) + 6$:
   1. если $0 \le (a_k + b_k + c_k - 10) \le 4$, то неверно! Должно быть: $(a_k + b_k + c_k - 10)$. Поправка: $-6 = 1010$.
   2. если $5 \le (a_k + b_k + c_k - 10) \le 9$, то код верен!

Код "2421"

Когда нужны поправки?

$$s_k = a_k + b_k + c_k.$$

Запрещенные комбинации кода:

$$\text{“2421”} \notin \{0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010\}.$$

Правила коррекции:

1. Если $0 \leq a_k, b_k \leq 4$ и $5 \leq (a_k + b_k + c_k) \leq 9$, то поправка: $+6 = 0110$. При этом $msb(\text{“2421”}(a_k)) = msb(\text{“2421”}(b_k)) = 0$ и в результате получается одна из запрещенных комбинаций.
2. Если $5 \leq a_k, b_k \leq 9$ и $0 \leq (a_k + b_k + c_k - 10) \leq 4$, то поправка: $-6 = 1010$. При этом $msb(\text{“2421”}(a_k)) = msb(\text{“2421”}(b_k)) = 1$ и в результате получается одна из запрещенных комбинаций.

Код “2421”

Алгоритм сложения

1. Перевести слагаемые в обратный “2421”-код. Каждая тетрада модуля отрицательного числа инвертируется.
2. Выполняется сложение полученных операднов по правилам двоичной арифметики.
3. В соответствии с изложенными выше правилами, выполняется коррекция результата. Переносы при коррекциях не распространяются.
4. Результат получен в обратном “2421”-коде.

Код "2421" I

Пример сложения −365 и 783.

1. Перевод в ОК (добавлены два знаковых двоичных разряда МОК):

$$-365 \Rightarrow -0011\ \ 1100\ \ 1011$$
$$\text{ОК}(-365) = 11\ \ 1100\ \ 0011\ \ 0100$$
$$\text{ОК}(783) = 00\ \ 1101\ \ 1110\ \ 0011$$

Код "2421" II

Пример сложения −365 и 783.

2. Выполняется сложение обратных кодов.

$$\begin{array}{r} 11\ 1100\ 0011\ 0100 \\ +\ 00\ 1101\ 1110\ 0011 \\ \hline 1{*}00\ 1010\ 0001\ 0111 \end{array}$$

Коррекция переносом:

$$\begin{array}{r} 00\ 1010\ 0001\ 0111 \\ +\ ..\ ....\ ....\ ...1 \\ \hline 00\ 1010\ 0001\ 1000 \end{array}$$

Код "2421" III

Пример сложения −365 и 783.

3. Выполняется коррекция. Переносы между тетрадами не распространяются.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{OK}(-365) & = & 11\ \ 1100\ \ 0011\ \ 0100 \\
\mathrm{OK}(783) & = & 00\ \ 1101\ \ 1110\ \ 0011
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
00\ \ 1010\ \ 0001\ \ 1000 \\
+\quad ..\ \ 1010\ \ ....\ \ 0110 \\
\hline
00\ \ 0100\ \ 0001\ \ 1110
\end{array}$$

ПРС не возникло,

$$\mathrm{OK}(S) = 00\ \ 0100\ \ 0001\ \ 1110,$$

$S = 418.$

Код "3a+2"

Пентадный код: "3a+2"$(a) = (3 \cdot a + 2)$

a в 10СС	"3a+2"(a)	"3a+2"$(9-a)$
0	00010	11101
1	00101	11010
2	01000	10111
3	01011	10100
4	01110	10001
5	10001	01110
6	10100	01011
7	10111	01000
8	11010	00101
9	11101	00010

$$\overline{\text{“3a+2”}(a)} = 31 - (3a+2) = 3(9-a) + 2 = \text{“3a+2”}(9-a)$$

Код “3a+2”

Сложение $S = A + B$, где $A = (a_{n-1} \cdots a_0)$ и $B = (b_{n-1} \cdots b_0)$

$$s_k = a_k + b_k + c_k.$$

1. Если $0 \le a_k + b_k + c_k \le 9$:
    1. если $c_k = 0$, то код $3(a_k + b_k) + 4$. Верный код: $3(a_k + b_k) + 2$. Поправка: $-2 = 11110$:
    2. если $c_k = 1$, то код $(3a_k + 2) + (3b_k + 2) + 1 = 3(a_k + b_k + 1) + 2$. Код верен!
2. Если $a_k + b_k + c_k \ge 10$:
    1. если $c_k = 0$, то код $(3a_k + 2) + (3b_k + 2) - 32 = 3(a_k + b_k - 10) + 2$. Код верен!
    2. если $c_k = 1$, то код $(3a_k + 2) + (3b_k + 2) + 1 - 32$, т.е. $3((a_k + b_k + 1) - 10)$. Верный код: $3((a_k + b_k + 1) - 10) + 2$. Поправка: $+2 = 00010$.

Код “3a+2”

Алгоритм сложения

1. Перевести слагаемые в обратный “3a+2”-код. Каждая тетрада модуля отрицательного числа инвертируется.
2. Выполняется сложение полученных операднов по правилам двоичной арифметики.
3. Выполняется коррекция. Прибавляется код 11110_2 к пентадам, в которые и из которых не формировались единицы переноса. Прибавляется код 00010_2 к пентадам, в которые и из которых формировались единицы переноса. В процессе коррекции переносы из пентады в пентаду не распространяются.
4. Результат получен в обратном “3a+2”-коде.

Код "3a+2" I

Пример сложения -6425 и 4985

1. Перевод в ОК (добавлены два знаковых двоичных разряда МОК):

$$
\begin{aligned}
-6425 &\Rightarrow -10100\ \ 01110\ \ 01000\ \ 10001\\
\mathrm{OK}(-6425) &= 11\ \ 01011\ \ 10001\ \ 10111\ \ 01110\\
\mathrm{OK}(4985) &= 00\ \ 01110\ \ 11101\ \ 11010\ \ 10001
\end{aligned}
$$

2. Выполняется сложение обратных кодов.

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{l}
11\ \ 01011\ \ 10001\ \ 10111\ \ 01110\\
00\ \ 01110\ \ 11101\ \ 11010\ \ 10001
\end{array}\\
\hline
11\ \ 11010{*}01111{*}10001\ \ 11111
\end{array}
$$

Код "3a+2" II

Пример сложения −6425 и 4985

3. Выполняется коррекция. Переносы между тетрадами не распространяются.

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{l}
11\ \ 11010{*}01111{*}10001\ \ 11111 \\
..\ \ .....\ \ 00010\ \ .....\ \ 11110
\end{array} \\
\hline
11\ \ 11010\ \ 10001\ \ 10001\ \ 11101
\end{array}
$$

ПРС не возникло,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OK}(S) &= 11\ \ 11010\ \ 10001\ \ 10001\ \ 11101, \\
\overline{\mathrm{OK}(S)} &= 00\ \ 00101\ \ 01110\ \ 01110\ \ 00010, \\
S &= -1440.
\end{aligned}
$$

1)

Всеми рассмотренными способами решить «универсальные» примеры:

1. $$+\begin{array}{r}+27837\\-14657\\\hline+13180\end{array}$$
2. $$+\begin{array}{r}-53043\\-31776\\\hline-84819\end{array}$$

Советы самоучке

Двоично-десятичные коды обсуждаются, например, в [1, 2].

Библиография I

В.Зубчук. Справочник по цифровой схемотехнике / В.Зубчук, В.Сигорский, А.Шкуро. —
К.: Выш. школа, 1990. —
448 с.

Б.Г.Лысиков. Арифметические и логические основы цифровых автоматов / Б.Г.Лысиков. —
2 изд. —
Мн.: Выш. школа, 1980. —
336 с.