

Умножение в дополнительном коде (с ручной коррекцией)

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «информатика»
(17 марта 2017 г.)

Содержание

1 Обоснование корректности

- Точка зрения на дополнительный код
- Нужна коррекция

2 Коррекция вовремя

- Технические ограничения
- Примеры

Точка зрения на дополнительный код

С помощью дополнительного кода в n -разрядной сетке можно представить целые числа из отрезка

$$X \in [-2^{n-1}, +(2^{n-1} - 1)].$$

В этом случае:

$$\text{ДК}(X) = \begin{cases} |X|, & \text{если } X \geq 0, \\ 2^n - |X|, & \text{если } X < 0. \end{cases}$$

Масштабированный дополнительный код

Если выполнить масштабирование с масштабом $M = 2^n$:

$$X = x \cdot 2^n.$$

Тогда:

$$\text{ДК}(X) = \begin{cases} |x| \cdot 2^n, & \text{если } X \geq 0, \\ (1 - |x|) \cdot 2^n, & \text{если } X < 0. \end{cases}$$

Для дробных представлений x справедливо:

$$\text{ДК}(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \geq 0, \\ 1 - |x|, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Дополнительный код — положительное число?!

Согласно формуле (1) дополнительный код после масштабирования можно рассматривать как

положительное дробное число.

Так как $X \in [-2^{n-1}, +(2^{n-1} - 1)]$, то $x \in [-2^{-1}, \leq +(2^{-1} - 2^{-n})]$, следовательно

$$(1 - |x|) > 0.$$

Поэтому основной цикл умножения масштабированных представлений дополнительных кодов

нужно выполнять по правилам перемножения беззнаковых чисел.

Пусть

$$A = a \cdot 2^n,$$

$$B = b \cdot 2^n,$$

далее выполняются операции с дробными a, b .

Коррекция псевдопроизведения $ДК(a) \cdot ДК(b)$

- *Оба сомножителя положительны.* Поправок не требуется.
- *Один из сомножителей отрицателен.* Пусть $a < 0$, $b \geq 0$, тогда правильный код результата: $ДК(ab) = (1 - |ab|)$.

Псевдопроизведение:

$$ДК(a) \cdot ДК(b) = (1 - |a|) \cdot |b| = |b| - |a| \cdot |b|.$$

Нужна поправка: $(1 - |b|) = ДК(-b)$.

- *Оба сомножителя отрицательны.* Правильный код результата: $ДК(ab) = |ab|$. Псевдопроизведение:

$$ДК(a) \cdot ДК(b) = (1 - |a|)(1 - |b|) = 1 - |a| - |b| + |ab|$$

Прибавив поправку $(|a| + |b|)$, получим $(1 + |ab|)$, который, вследствие переноса единицы в целую часть, эквивалентен правильному $|ab|$.

Резюме: $ДК(ab) = \dots$

- $a \geq 0, b \geq 0$: $ДК(ab) = ДК(a) \cdot ДК(b)$.
- $a \geq 0, b < 0$: $ДК(ab) = ДК(a) \cdot ДК(b) + ДК(-a)$.
- $a < 0, b \geq 0$: $ДК(ab) = ДК(a) \cdot ДК(b) + ДК(-b)$.
- $a < 0, b < 0$: $ДК(ab) = ДК(a) \cdot ДК(b) + ДК(-a) + ДК(-b)$.

Упрощенное правило ручной коррекции

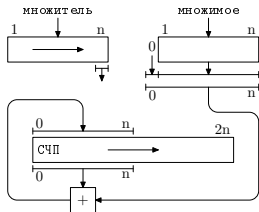
Достаточно проверить знак каждого аргумента и, если этот аргумент отрицателен, то из псевдопроизведения *вычитается парный* отрицательному аргумент:

```
1: if  $a < 0$  then
2:   СЧП := СЧП -  $b$ ;
3: end if
4: if  $b < 0$  then
5:   СЧП := СЧП -  $a$ ;
6: end if
```


Основные способы умножения

Сдвиг СЧП

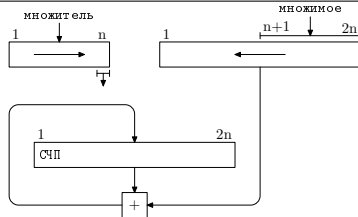
shr(Мн-ль)



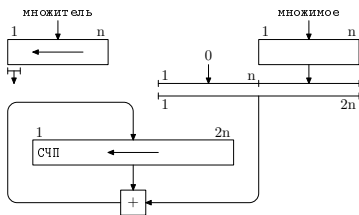
I

Сдвиг множимого

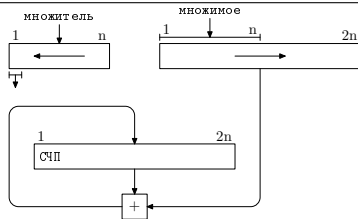
II



III



IV

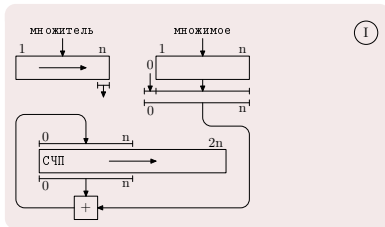


shl(Мн-ль)

Коррекции подлежит *старшая* половина $2n$ разрядного псевдопроизведения^a.

^a n -разрядные множимое и множитель вычитаются из *старшей* половины псевдопроизведения

I-й способ: технические ограничения



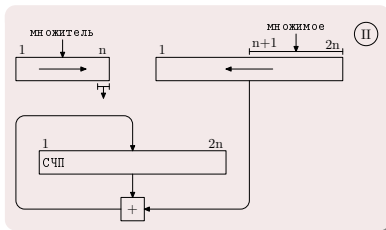
Особенности I-го способа

- СЧП сдвигается вправо;
- Множимое прибавляется к старшей половине СЧП;
- Множимое не сдвигается.

- Коррекция выполняется *только в конце* цикла умножения. В противном случае все поправки «уедут» в младшие разряды СЧП.
- Исходное значение множителя нужно *сохранять*.

Так как в цикле умножения к СЧП прибавляется половина множимого, а при коррекции нужно вычесть *целое* множимое, то можно изменить алгоритм: в цикле прибавлять к СЧП *целое* множимое (при этом СЧП в конце цикла окажется *вдвое больше* правильного результата) и сдвинуть всю СЧП перед коррекцией.

II-й способ: технические ограничения

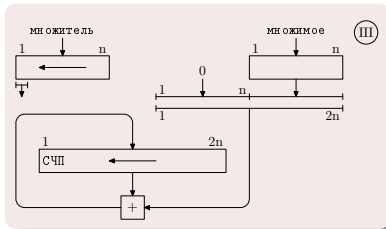


Особенности II-го способа

- СЧП не сдвигается;
- Множимое заносится в младшую часть $2n$ -разрядного регистра.
- Множимое сдвигается влево;

- Поправка множителем может выполняться как в начале (проще всего), так и в конце цикла умножения. В конце цикла сложнее — нужно сохранять множитель.
- Поправка множимым без дополнительных затрат выполняется в конце цикла, когда после серии сдвигов множимое выходит в старшую часть $2n$ -разрядного регистра.

III-й способ: технические ограничения

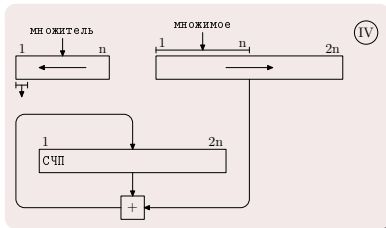


Особенности III-го способа

- СЧП сдвигается влево;
- Множимое прибавляется к младшей половине $2n$ -разрядной СЧП.
- Множимое сдвигается влево;

- Поправка множителем выполняется либо к младшей части СЧП в начале цикла умножения, либо в конце цикла — к старшей части (при этом множитель нужно сохранять).
- Поправка множимым без дополнительных затрат выполняется в начале цикла умножения. В конце цикла, после серии сдвигов СЧП, она станет правильной.

IV-й способ: технические ограничения



Особенности IV-го способа

- СЧП не сдвигается;
- Множимое заносится в старшую часть $2n$ -разрядного регистра.
- Множимое сдвигается вправо;

- Поправка множителем к старшей половине СЧП может выполняться либо в начале цикла умножения, либо в конце (позабывшись о спасении исходного значения множителя от «сдвиговой» смерти).
- Поправка множимым без дополнительных затрат выполняется до цикла умножения. После поправки выполняется сдвиг регистра множимого и цикл выполняется как обычно.

Операнды для примеров

В качестве примера будем перемножать числа 9 и 11 с различными комбинациями знаков.

Выбрав масштаб $M = 2^5$, получим следующие представления:

$$\begin{aligned}\text{ДК}(9) &= ,01001, \\ \text{ДК}(-9) &= ,10111, \\ \text{ДК}(11) &= ,01011, \\ \text{ДК}(-11) &= ,10101.\end{aligned}$$

l-способ: $-9 \cdot 11$. ДК(-99) = ,11100 11101

мн-ль →	СЧП →	прим.
,10111	$ \begin{array}{r} + \text{,00000 00000} \\ \text{, .0101 1....} \\ \hline \text{,00101 10000} \end{array} $	+мн-е/2; сдвиг
,.1011	$ \begin{array}{r} + \text{,.0010 11000} \\ \text{, .0101 1....} \\ \hline \text{,01000 01000} \end{array} $	+мн-е/2; сдвиг
,...101	$ \begin{array}{r} + \text{,.0100 00100} \\ \text{, .0101 1....} \\ \hline \text{,01001 10100} \end{array} $	+мн-е/2; сдвиг
,...10	,.0100 11010	сдвиг
,....1	$ \begin{array}{r} + \text{,...010 01101} \\ \text{, .0101 1....} \\ \hline \text{,00111 11101} \end{array} $	+мн-е/2; Рез-т?
	$ \begin{array}{r} + \text{,00111 11101} \\ \text{,10101} \\ \hline \text{,11100 11101} \end{array} $	+ДК(-11)=ДК(-мн-е); Рез-т!

l-способ (модиф.): $-9 \cdot -11$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль →	СЧП →	прим.
,1011 $\underline{1}$	$ \begin{array}{r} + \quad 0,00000 \ 00000 \\ \quad \quad \cdot,10101 \ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \quad \quad 0,10101 \ 00000 \end{array} $	+мн-е; сдвиг
,.1011 $\underline{1}$	$ \begin{array}{r} + \quad \cdot,01010 \ 10000 \\ \quad \quad \cdot,10101 \ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \quad \quad 0,11111 \ 10000 \end{array} $	+мн-е; сдвиг
,..101 $\underline{1}$	$ \begin{array}{r} + \quad \cdot,01111 \ 11000 \\ \quad \quad \cdot,10101 \ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \quad \quad 1,00100 \ 11000 \end{array} $	+мн-е; сдвиг
,...10 $\underline{1}$,.10010 01100	сдвиг
,....1 $\underline{1}$	$ \begin{array}{r} + \quad \cdot,1001 \ 00110 \\ \quad \quad \cdot,10101 \ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \quad \quad 0,11110 \ 00110 \end{array} $	+мн-е; сдвиг;
	,.01111 00011	Рез-т?
	$ \begin{array}{r} + \quad \cdot,01111 \ 00011 \\ \quad \quad \cdot,01011 \ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \quad \quad 0,11010 \ 00011 \end{array} $	+ДК(11)=ДК(-мн-е);
	$ \begin{array}{r} + \quad 0,11010 \ 00011 \\ \quad \quad \cdot,01001 \ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \quad \quad 1,00011 \ 00011 \end{array} $	+ДК(9)=ДК(-мн-ль); Рез-т!

II-способ: $-9 \cdot -11$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль \rightarrow	мн-е \leftarrow	СЧП	прим.
,10111		$ \begin{array}{r} + \text{,00000 00000} \\ \text{,01001} \\ \hline \text{,01001 00000} \end{array} $	+ДК(9)=ДК(-мн-ль);
,1011 <u>1</u>	,..... 10101	$ \begin{array}{r} + \text{,01001 00000} \\ \text{,..... 10101} \\ \hline \text{,01001 10101} \end{array} $	+мн-е; сдвиг
,.101 <u>1</u>	,.....1 0101.	$ \begin{array}{r} + \text{,01001 10101} \\ \text{,.....1 0101.} \\ \hline \text{,01010 11111} \end{array} $	+мн-е; сдвиг
,...10 <u>1</u>	,...10 101..	$ \begin{array}{r} + \text{,01010 11111} \\ \text{,...10 101..} \\ \hline \text{,01101 10011} \end{array} $	+мн-е; сдвиг
,...1 <u>0</u>	,...101 01...		сдвиг
,.... <u>1</u>	,.1010 1....	$ \begin{array}{r} + \text{,01101 10011} \\ \text{,.1010 1....} \\ \hline \text{,11000 00011} \end{array} $	+мн-е; Рез-т?
	,10101	$ \begin{array}{r} + \text{,11000 00011} \\ \text{,01011} \\ \hline \text{,00011 00011} \end{array} $	+ДК(11)=ДК(-мн-е); Рез-т!

III-способ: $-11 \cdot -9$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль ←	СЧП ←	прим.
	$ \begin{array}{r} + \text{,00000 00000} \\ \text{,..... 01001} \\ \hline \text{,00000 01001} \end{array} $	+ДК(9)=ДК(-мн-е);
	$ \begin{array}{r} + \text{,00000 01001} \\ \text{,..... 01011} \\ \hline \text{,00000 10100} \end{array} $	+ДК(11)=ДК(-мн-ль);
	$ \begin{array}{r} \text{,00001 0100.} \end{array} $	сдвиг
<u>,10101</u>	$ \begin{array}{r} + \text{,00001 0100.} \\ \text{,..... 10111} \\ \hline \text{,00001 11111} \end{array} $	+мн-е; сдвиг
<u>,0101.</u>	$ \begin{array}{r} \text{,00011 1111.} \end{array} $	сдвиг
<u>,101..</u>	$ \begin{array}{r} + \text{,00111 111..} \\ \text{,..... 10111} \\ \hline \text{,01000 10011} \end{array} $	+мн-е; сдвиг
<u>,01...</u>	$ \begin{array}{r} \text{,10001 0011.} \end{array} $	сдвиг
<u>,1....</u>	$ \begin{array}{r} + \text{,00010 011..} \\ \text{,..... 10111} \\ \hline \text{,00011 00011} \end{array} $	Рез-т!

IV-способ:: $-11 \cdot -9$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль \leftarrow	мн-е \rightarrow	СЧП	прим.
,10101		$ \begin{array}{r} + \text{ ,00000 00000} \\ \text{ ,01011} \\ \hline \text{ ,01011 00000} \end{array} $	+ДК(11)=ДК(-мн-ль);
	,10111	$ \begin{array}{r} + \text{ ,01011 00000} \\ \text{ ,01001} \\ \hline \text{ ,10100 00000} \end{array} $	+ДК(9)=ДК(-мн-е);сдвиг
, <u>1</u> 0101	,.1011 1....	$ \begin{array}{r} + \text{ ,10100 00000} \\ \text{ ,.1011 1....} \\ \hline \text{ ,11111 10000} \end{array} $	+мн-е; сдвиг;
, <u>0</u> 101.	,..101 11...		сдвиг
, <u>1</u> 01..	,...10 111..	$ \begin{array}{r} + \text{ ,11111 10000} \\ \text{ ,...10 111..} \\ \hline \text{ ,00010 01100} \end{array} $	+мн-е; сдвиг
, <u>0</u> 1...	,....1 0111.		сдвиг
, <u>1</u>	,..... 10111	$ \begin{array}{r} + \text{ ,00010 01100} \\ \text{ ,..... 10111} \\ \hline \text{ ,00011 00011} \end{array} $	+мн-е; Рез-т

1)

Какая разрядность результата должна получиться, если дополнительные коды операндов занимают n бит?

2)

Перемножить числа:

- ❶ 26 и -13 I-м способом;
- ❷ -26 и 13 II-м способом;
- ❸ -26 и -13 III-м способом;
- ❹ -13 и -26 IV-м способом.

Обосновать выбор масштаба.

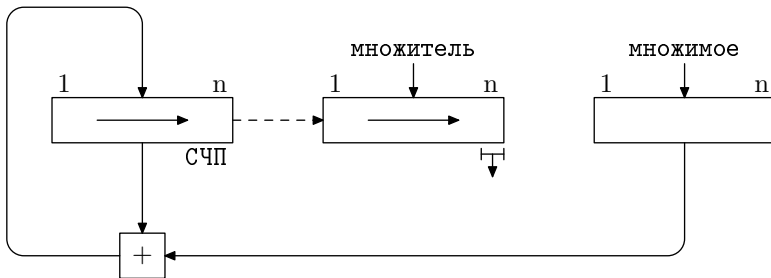
3)

Прорешать одним из методов «краевые» случаи в n -разрядной сетке:

- $-2^n \cdot -2^n$;
- $-2^n \cdot x$, где $x > 0$;
- $(2^n - 1) \cdot (2^n - 1)$.

4)


Модифицируйте схему умножения первым способом с учетом работы в ДК (можно использовать условный блок «получение ДК» и мультиплексор):



Советы самоучке

Рекомендуется почитать разделы посвященные работе с битами в [1].

Библиография I

 *Г.Уоррен-мл. Алгоритмические трюки для программистов /*
Г.Уоррен-мл. —
2 изд. —
М.: Издательский дом «Вильямс», 2014. —
512 с.