Вычисления в позиционных системах счисления

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «дискретная математика»
(8 февраля 2017 г.)

Содержание

1. Двоичная система счисления
   - Сводимо к сложению
   - Дополнительный код
   - Обратный код
2. Оптимальная позиционная система счисления
3. Троичная симметричная система счисления
   - Особенности
   - Сложение $\Rightarrow$ вычитание, умножение, деление
   - Перевод в троичную симметричную СС

Двоичная система счисления

Таблица сложения

$+$	0	1
0	$\overset{0}{\leftarrow} 0$	$\overset{0}{\leftarrow} 1$
1	$\overset{0}{\leftarrow} 1$	$\overset{1}{\leftarrow} 0$

Например, $1 + 1 = 2 \equiv (10)_2 \equiv \overset{1}{\leftarrow} 0$.

Двоичная система счисления

Сложение чисел

Example (Задача)

Сложить двоичные числа: $A \equiv (101.1101)_2$ и $B \equiv (11.010111)_2$.

Решение.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
A & \equiv & & 1 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
B & \equiv & & 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\overset{c}{\leftarrow} & & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & & 1 & & & \\
A+B & \equiv & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

$\square$

Роль сложения в 2 СС

- Сложение $\Rightarrow$ умножение.
- Вычитание $\Rightarrow$ деление.

Вычитание?

- Сложение $\Rightarrow$ вычитание.

На пути к вычитанию

Трюки на конечной разрядной сетке

m-разрядная сетка способна представить 2^m натуральных чисел:

$$[0, 2^m - 1].$$

Например,

		7	6	5	4	3	2	1	0
x		1	1	1	1	1	1	1	1
x+1	$\overset{1}{\leftarrow}$	0	0	0	0	0	0	0	0

Вывод: в m-разрядной сетке $2^m \equiv 0$.

На пути к вычитанию

Сведение к сложению

Известно, что

$$A - B = A + (-B).$$

$\Rightarrow$Как представить отрицательное число $-B$?

Дополнительный код

Представление отрицательного числа $-B$: $-B = 0 - B = 2^m - B$

- В n-разрядной сетке старший $(n-1)$-й разряд считается знаковым;
- 0 в знаковом разряде соответствует знаку плюс $(+)$, а 1 — знаку минус $(-)$;
- перед выполнением сложения, разрядная сетка на время проведения вычислений дополняется n-м разрядом, который дублирует значение знакового[1], и сетка становится $m = n + 1$ разрядной.

И тогда $-B = (2^m - 1) - B + 1 = (\underbrace{11\cdots11}_{m})_2 - B + 1 = \bar{B} + 1$,

где $\bar{B} + 1$ — дополнительный[2] код числа $-B$.

[1] Это нужно, чтобы выявить ошибку переполнения разрядной сетки

[2] $\bar{B}$— инверсия всех разрядов B. Т.е. бит 1 переходит в 0, а 0 в 1

Дополнительный код в n-разрядной сетке

$$ДК(B) = \begin{cases} \overline{|B|} + 1, & \text{если } B < 0, \\ B, & \text{если } B \geq 0. \end{cases}$$

В n-разрядной сетке диапазон изменения B:

$$-2^{n-1} \leq B \leq 2^{n-1} - 1.$$

Обратный перевод из (n+1)-разрядного ДК результата вычислений:

$$B = \begin{cases} \text{Ошибка}, & \text{если } ДК_n \neq ДК_{n-1}, \\ -(\overline{ДК} + 1), & \text{если } ДК_n = ДК_{n-1} = 1, \\ ДК, & \text{если } ДК_n = ДК_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Арифметически в n-разрядной сетке

Дополнительный код, целые числа

$$ДК(B) = \begin{cases} 2^n - B, & \text{если } B < 0, \\ B, & \text{если } B \geq 0. \end{cases}$$

Дополнительный код в n-разрядной сетке

Пример для $n = 8$

		7	6	5	4	3	2	1	0
14	0	0	0	0	0	1	1	1	0
-14	1	1	1	1	1	0	0	1	0
127	0	0	1	1	1	1	1	1	1
-127	1	1	0	0	0	0	0	0	1
-128	1	1	0	0	0	0	0	0	0
-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Дополнительный код в n-разрядной сетке

Признак ошибки вычислений: $a_n \neq a_{n-1}$

Например, $120 + 31 = 151$:

		7	6	5	4	3	2	1	0
120	0	0	1	1	1	1	0	0	0
+									
31	0	0	0	0	1	1	1	1	1
=									
?	0	1	0	0	1	0	1	1	1

Дополнительный код в n-разрядной сетке

Признак ошибки вычислений: $a_n \neq a_{n-1}$

Например, $-120 - 31 = -151$:

		7	6	5	4	3	2	1	0
-120	1	1	0	0	0	1	0	0	0
+									
-31	1	1	1	1	0	0	0	0	1
=									
?	1	0	1	1	0	1	0	0	1

Дополнительный код в n-разрядной сетке

Например, $-120 + 31 = -89$:

		7	6	5	4	3	2	1	0
-120	1	1	0	0	0	1	0	0	0
+									
31	0	0	0	0	1	1	1	1	1
=									
-89	1	1	0	1	0	0	1	1	1

Обратный код

Представление отрицательного числа $-B$ инверсией разрядов $\bar{B} = -B - 1$

- В n-разрядной сетке старший $(n-1)$-й разряд считается знаковым;
- 0 в знаковом разряде соответствует знаку плюс $(+)$, а 1 — знаку минус $(-)$;
- перед выполнением сложения, разрядная сетка на время проведения вычислений дополняется n-м разрядом, который дублирует значение знакового, и сетка становится $m = n + 1$ разрядной.

$$-B = (2^m - 1) - B + 1 = (\underbrace{11\cdots11}_{m})_2 - B + 1 = \bar{B} + 1,$$

$$\bar{B} = -B - 1,$$

где $\bar{B}$ — *обратный* код числа $-B$.

Обратный код в n-разрядной сетке

$$\mathrm{OK}(B) = \begin{cases} \overline{|B|}, & \text{если } B < 0 \\ B, & \text{если } B \geq 0. \end{cases}$$

В n-разрядной сетке диапазон изменения B следующий[3]:

$$-2^{n-1} + 1 \leq B \leq 2^{n-1} - 1.$$

Обратный перевод из (n+1)-разрядного ОК результата вычислений:

$$B = \begin{cases} \text{Ошибка}, & \text{если } \mathrm{OK}_n \neq \mathrm{OK}_{n-1}, \\ -(\overline{\mathrm{OK}}), & \text{если } \mathrm{OK}_n = \mathrm{OK}_{n-1} = 1, \\ \mathrm{OK}, & \text{если } \mathrm{OK}_n = \mathrm{OK}_{n-1} = 0. \end{cases}$$

[3] Диапазон представления меньше, чем в дополнительном коде: $0 \neq -0$

Арифметически в n-разрядной сетке

Обратный код, целые числа

$$\mathrm{OK}(B) = \begin{cases} (2^n - 1) - B, & \text{если } B < 0, \\ B, & \text{если } B \geq 0, \end{cases}$$

т.е. поразрядная инверсия бит числа эквивалентна

$$\overline{B} = (2^n - 1) - B.$$

Обратный код в n-разрядной сетке

Пример для $n = 8$

		7	6	5	4	3	2	1	0
14	0	0	0	0	0	1	1	1	0
-14	1	1	1	1	1	0	0	0	1
127	0	0	1	1	1	1	1	1	1
-127	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Обратный код в n-разрядной сетке

Необходимость поправок. К младшему разряду прибавляется перенос из a_n

1. $A+B$:
$$\text{ОК}(A)+\text{ОК}(B)=A+B.$$
Поправок нет. Переноса из a_n нет.
2. $A-B$
$$\text{ОК}(A)+\text{ОК}(-B)=A+\bar{B}=A-B-1.$$
В этом случае возможны два варианта.
   1. $A-B<0$. Поправок (переноса) нет, результат в ОК: $(A-B)-1$.
   2. $A-B\geq 0$. Поправка $+1$ (нужно $A-B$). Перенос из a_n есть.
3. $-A-B$
$$\text{ОК}(-A)+\text{ОК}(-B)=-A-1-B-1.$$
Поправка $+1$ (нужно $(-A-B)-1$). Перенос из a_n есть.

Обратный код в n-разрядной сетке

Признак ошибки вычислений: $a_n \neq a_{n-1}$

Например, $-120 - 31 = -151$:

		7	6	5	4	3	2	1	0
-120	1	1	0	0	0	0	1	1	1
+									
-31	1	1	1	1	0	0	0	0	0
=									
?	$\xleftarrow{1}1$	0	1	1	0	0	1	1	1
?	1	0	1	1	0	1	0	0	0

Обратный код в n-разрядной сетке

Например, $-120 + 31 = -89$:

		7	6	5	4	3	2	1	0
-120	1	1	0	0	0	0	1	1	1
+									
31	0	0	0	0	1	1	1	1	1
=									
-89	1	1	0	1	0	0	1	1	0

Обратный код в n-разрядной сетке

Например, $120 - 31 = 89$:

		7	6	5	4	3	2	1	0
120	0	0	1	1	1	1	0	0	0
+									
-31	1	1	1	1	0	0	0	0	0
=									
88	$\overset{1}{\leftarrow}0$	0	1	0	1	1	0	0	0
89	0	0	1	0	1	1	0	0	1

Оптимальная позиционная система счисления

С основанием k

В качестве критерия оптимальности представления числа A возьмём произведение количества цифр (т.е. основания СС — k) на длину представления A:

$$f(k) = k \cdot \log_k A.$$

Находя экстремум:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = k' \cdot \log_k A + k \cdot (\log_k A)' =$$

$$\log_k A + k \cdot \left(\frac{\ln A}{\ln k}\right)' = \frac{\ln A}{\ln k} - k \cdot \left(\frac{\ln A}{\ln^2 k} \cdot \frac{1}{k}\right) =$$

$$\frac{\ln A}{\ln k} \cdot \left(1 - \frac{1}{\ln k}\right) = 0$$

Оптимальная позиционная система счисления

С основанием k

В качестве критерия оптимальности представления числа A возьмём произведение количества цифр (т.е. основания СС — k) на длину представления A:

$$f(k) = k \cdot \log_k A.$$

Находя экстремум:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = k' \cdot \log_k A + k \cdot (\log_k A)' =$$
$$\log_k A + k \cdot \left(\frac{\ln A}{\ln k}\right)' = \frac{\ln A}{\ln k} - k \cdot \left(\frac{\ln A}{\ln^2 k} \cdot \frac{1}{k}\right) =$$
$$\frac{\ln A}{\ln k} \cdot \left(1 - \frac{1}{\ln k}\right) = 0$$

$k = e \approx 2.7182$

Троичная симметричная система счисления

Оптимальная из систем счисления с целым основанием: $round(e) = 3$

- ПСС с основанием 3.
- Цифрам соответствуют числа из сдвинутого на единицу влево диапазона $[0, 2]$, т.е. из диапазона $[-1, 1]$.
- Далее используются символьные обозначения цифр: символу «n» (negative — отрицательное) соответствует число -1, символу «0» соответствует число 0, символу «p» (positive — положительное) соответствует число 1.

Например:

$$\begin{aligned} pnp0p &= 1 \cdot 3^4 + (-1) \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = \\ &= 81 - 27 + 9 + 0 + 1 = \\ &= 64 \end{aligned}$$

Троичная симметричная система счисления

Отрицательные числа

Если старшая значащая цифа числа равна p, то число положительное, иначе (n) — отрицательное. Чтобы сменить знак числа, нужно сменить знак каждой цифры.

Example

Известно: $64 = pnp0p$, тогда $-64 = npn0n$.

Проверка:

$$\begin{aligned} npn0n &= (-1)\cdot 3^4 + 1\cdot 3^3 + (-1)\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + (-1)\cdot 3^0 = \\ &= -81 + 27 - 9 + 0 - 1 = \\ &= -64. \end{aligned}$$

Троичная симметричная система счисления

Вещественные числа

$$p.np n = 1 \cdot 3^0 + (-1) \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + (-1) \cdot 3^{-3} =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = \frac{27-9+3-1}{27} = \frac{20}{27} =$$
$$= 0.(740)$$

Троичная симметричная система счисления

Таблица сложения. Остальные операции сводимы к сложению

Например, $n + n = -1 + -1 = -2 = -3 + 1 \equiv np \equiv \overset{n}{\leftarrow} p$ и т.д.:

$+$	n	0	p
n	$\overset{n}{\leftarrow} p$	$\overset{0}{\leftarrow} n$	$\overset{0}{\leftarrow} 0$
0	$\overset{0}{\leftarrow} n$	$\overset{0}{\leftarrow} 0$	$\overset{0}{\leftarrow} p$
p	$\overset{0}{\leftarrow} 0$	$\overset{0}{\leftarrow} p$	$\overset{p}{\leftarrow} n$

Пересчёт в троичной симметричной СС

$\dots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\dots$
$\dots$	npp	nn	$n0$	np	n	0	p	pn	$p0$	pp	pnn	$\dots$

Троичная симметричная система счисления

Сложение чисел

Example (Задача)

Сложить двоичные числа: $A \equiv pppn.0pn0n$ и $B \equiv ppn.npppn$.

Решение.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
A & \equiv & & p & p & p & n & \cdot & 0 & p & n & 0 & n \\
B & \equiv & & 0 & p & p & n & \cdot & n & p & p & p & n \\
\xleftarrow{c} & & p & p & & n & & & p & & & n & \\
A+B & \equiv & p & n & n & p & p & \cdot & 0 & n & 0 & 0 & p
\end{array}
$$

$\square$

Перевод в троичную симметричную СС

Целая часть X

Цифры представления

$$X \equiv (a_n \cdots a_0)_{\pm 3}$$

Находятся так:

$$X = 3 \cdot X^{(1)} + a_0,$$

где $-1 \leq a_0 \leq 1$. Далее, как обычно, продолжается поиск остальных цифр:

$$X^{(i)} = 3 \cdot X^{(i+1)} + a_i,$$

где $i > 0$ и $-1 \leq a_0 \leq 1$. До тех пор, пока $X^{(i+1)} \neq 0$.

Перевод в троичную симметричную СС

Дробная часть Y $(0 \le Y < 1)$

Представление $Y \equiv (a_0.a_{-1}\cdots a_{-m})_{\pm 3}$ можно получить из представления Y в обычной троичной системе:

$$Y \equiv (.b_{-1}\cdots b_{-m})_3,\ Y = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot 3^{-i}.$$

Для этого достаточно выполнить замены слагаемых:

$$\begin{cases} 0\cdot 3^{-i} \to 0\cdot 3^{-i}, \\ 1\cdot 3^{-i} \to p\cdot 3^{-i}, \\ 2\cdot 3^{-i} \to pn\cdot 3^{-i} = p\cdot 3^{-i+1} + n\cdot 3^{-i}, \end{cases}$$

и пересчитать результат по правилам симметричной системы[4].

[4] $0.9 \approx (.220022)_3 = (p.0n0p0n)_{\pm 3}$

Перевод в троичную симметричную СС числа 187.92

Целая часть

Example (Задача)

Перевести в троичную симметричную систему счисления число 187.

Решение.

$$\begin{aligned}
187 &= 3 \cdot 62 + 1, && \Rightarrow a_0 = p,\\
62 &= 3 \cdot 21 - 1, && \Rightarrow a_1 = n,\\
21 &= 3 \cdot 7 + 0, && \Rightarrow a_2 = 0,\\
7 &= 3 \cdot 2 + 1, && \Rightarrow a_3 = p,\\
2 &= 3 \cdot 1 - 1, && \Rightarrow a_4 = n,\\
1 &= 3 \cdot 0 + 1, && \Rightarrow a_5 = p.
\end{aligned}$$

$187 = (pnp0np)_{\pm 3}$. $\square$

Перевод в троичную симметричную СС числа 187.92

Дробная часть

Example (Задача)

Перевести в троичную систему счисления число .92.

Решение.

Найдём приближённое решение в 3-СС:

$$\begin{aligned}
.92 \cdot 3 &= 2 + .76, &\Rightarrow a_{-1} &= 2,\\
.76 \cdot 3 &= 2 + .28, &\Rightarrow a_{-2} &= 2,\\
.28 \cdot 3 &= 0 + .84, &\Rightarrow a_{-3} &= 0,\\
.84 \cdot 3 &= 2 + .52, &\Rightarrow a_{-4} &= 2,\\
.52 \cdot 3 &= 1 + .56, &\Rightarrow a_{-5} &= 1,
\end{aligned}$$

$.92 \approx (.22021)_3$. □

Перевод в троичную симметричную СС числа 187.92

Дробная часть

Example (Задача)

Перевести в троичную симметричную СС число $.92 \approx (.22021)_3$.

Решение.

$$
\begin{array}{ccccccc}
p & . & p &   & p &   &   \\
  & . & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\
  & . & n & n & 0 & n & 1 \\
p & . & 0 & n & p & n & 1
\end{array}
$$

Т.е. $(.22021)_3 = (p.p0p00)_{\pm 3} + (.nn0n1)_{\pm 3} = (p.0npn1)_{\pm 3}$ $\square$

Перевод в троичную симметричную СС числа 187.92

Дробная часть

Example (Задача)

Перевести в троичную симметричную систему счисления число 187.92.

Решение.

$$187 \equiv (pnp0np)_{\pm 3}$$

$$.92 \approx (p.0npn1)_{\pm 3}$$

□

Перевод в троичную симметричную СС числа 187.92

Дробная часть

Example (Задача)

Перевести в троичную симметричную систему счисления число 187.92.

Решение.

$$187 \equiv (pnp0np)_{\pm 3}$$

$$.92 \approxeq (p.0npn1)_{\pm 3}$$

$$187.92 \approxeq (pnp00n.0npn1)_{\pm 3}$$

□

1. Чему эквивалентно умножение (деление) на 2 в двоичном представлении?
2. Как вы думаете, дополнительный или обратный код используется в компьютерах для представления целых чисел со знаком? Выделите достоинства и недостатки этих кодов.
3. Какие базовые числовые типы в языках программирования высокого уровня вы знаете? В чём их особенности?
4. Как работать с БОЛЬШИМИ числами?
5. Как представляются буквы текста в компьютере? Текстовые строки?

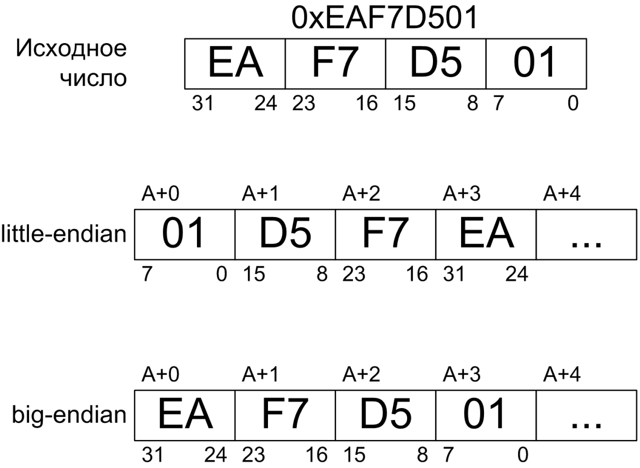
Справочные данные

Некоторые числовые типы процессоров Intel и AMD

Тип	байт(бит)	Пределы (в 10 СС)
Байт (целое)	1(8)	$-128\dots127$
Короткое слово (целое)	2(16)	$-32768\dots32767$
Слово (целое)	4(32)	$-2^{31}\dots2^{31}-1$
Длинное слово (целое)	8(64)	$-2^{63}\dots2^{63}-1$
Короткое вещественное	4(32)	$1.18\cdot10^{-38}\dots3.40\cdot10^{38}$
Длинное вещественное	8(64)	$2.23\cdot10^{-308}\dots1.79\cdot10^{308}$
Расширенное вещественное	10(80)	$3.37\cdot10^{-4932}\dots1.18\cdot10^{4932}$

Справочные данные

little-endian (интеловский) vs big-endian (сетевой)



Справочные данные

Плавающая запятая: $x = M \cdot 2^E$. Короткое вещественное

-0.625=-0.101b

$-.625 \equiv (0.101)_2 \equiv (1.01)_2 \cdot 2^{-1}$. По соглашению, в таком формате не хранится целая часть мантиссы (всегда равна 1) и к экспоненте прибавляется 127.

$$-.625 \equiv (.01)_2 \cdot 2^{126} \equiv (.01)_2 \cdot 2^{(11111110)_2}$$

В заключение

Подробнее о ситемах счисления см. [1, 2].

Библиография I

В.А.Горбатов. Фундаментальные основы дискретной математики / В.А.Горбатов. — М.: Физматлит, 1999. — 544 с.

С.В.Судоплатов. Дискретная математика: Учебник / С.В.Судоплатов, Е.В.Овчинникова. — М.: ИНФРА-М;Новосибирск;Изд-во НГТУ, 2005. — 256 с.