Позиционные системы счисления

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «дискретная математика»
(8 февраля 2017 г.)

Содержание

Римская система счисления

1	I	лат. unus
5	V	лат. quinque
10	X	лат. decem
50	L	лат. quinquaginta
100	C	лат. centum
500	D	лат. quingenti
1000	M	лат. mille

- II — 2;
- IV — 4;
- VI — 6;
- XCIX — 99;
- MMMCMXCIX — 3999... и это предел!

Натуральное число

В позиционной системе счисления с основанием K

Представление числа в K-ичной системе счисления:

$$(a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_K,$$

Число, соответствующее представлению [1]:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot K^i.$$

[1] Замкнутая запись суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Вклад разряда

Каким бы большим не было натуральное число, рано или поздно все цифры в разрядах старше некоторого $(n-1)$-го будут нулевыми:

$$(\cdots 0000000 a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_K,$$

где $a_{n-1} \neq 0$. Поэтому бесконечный ряд нулей слева в записи числа опускают.

Вклад n-го разряда

Вклад n-го разряда при $a_n \neq 0$ больше вклада младших[2]:

$$a_n \cdot K^n \geq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot K^i.$$

Рано или поздно для сколь угодно большого числа:

$$(\cdots 0000000 a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_K,$$

где $a_{n-1} \neq 0$.

[2] $100 > 99$, $1000 > 999$,...

Example (Число в десятичной СС)

Записи $(78642)_{10}$ (большинство запишет просто **78642**) соответствует число

$$7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 = 78642.$$

Example (Число в двоичной СС)

Записи $(10101)_2$ соответствует число

$$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
$$= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$$
$$= 21.$$

Example (Число в троичной СС)

Записи $(10221)_3$ соответствует число

$$\begin{aligned} & 1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^1+1\cdot 3^0= \\ & =1\cdot 81+0\cdot 27+2\cdot 9+2\cdot 3+1\cdot 1= \\ & =106. \end{aligned}$$

Example (Символ цифры)

В ручной записи *числа* каждой *цифре* соответствует *символ* определенного начертания. Поэтому, если оговорено, например, что $K = 3$ и цифре α соответствует ноль, β — один, γ — два, то записи

$$(\beta\alpha\gamma\gamma\beta)_3$$

соответствует число 106.

Вещественное число

Дробная часть Y, $0 \leq Y < 1$

В позиционной системе счисления с основанием K представляется так:

$$Y \equiv (.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}\cdots)_K,$$

где $m > 0$ — натуральное число.
Дробная на основе своего представления формируется так:

$$Y = \sum_{i=-m}^{-1} a_i \cdot K^i = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{-i}}{K^i}.$$

Иррациональные числа

Для записи иррациональных чисел, например таких, как число

$$\pi = 3.14159265358979323846264 3\cdots$$

понадобится *бесконечное* количество цифр для представления дробной части в позиционной системе счисления с *любым* целым основанием.

Потеря точности

Example

$0.5 = (.1)_2.$
$0.3 = (.0[1001])_2 \approx (.010011001\cdots)_2.$

Число, представимое в одной позиционной СС точно, в ПСС с другим основанием может быть представлено только периодической дробью, а на практике лишь приближённо...

Вклад m-го разряда

$a_{-m} \neq 0$

Вклад m-го разряда дробной части при $a_{-m} \neq 0$ больше вклада младших[3]:

$$a_{-m} \cdot K^{-m} > \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{a_{-i}}{k^i}.$$

[3] $0.1 > 0.099999 \cdots$

Example (Дробная часть в двоичной СС)

Записи дробной части $(.10111)_2$ соответствует число Y:

$$Y = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} =$$
$$= 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.125 + 1 \cdot 0.0625 + 1 \cdot 0.03125 =$$
$$= 0.71875$$

Представление вещественного числа

Число

$$X = \sum_{i=-m}^{-1} a_i \cdot K^i + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot K^j = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i \cdot K^i.$$

можно представить как

$$X \equiv (a_{n-1} \cdots a_1 a_0 \boxed{.} a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m+1} a_{-m})_K.$$

Записи отрицательного числа будет предшествовать знак минус:

$$X \equiv (-a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m+1} a_{-m})_K.$$

Обсуждение

Как представить число в физической среде?

Перевод чисел
Условия

Необходимо число, представленное в L-ичной СС, представить в K-ичной СС:

- $A \equiv (\pm \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots)_L$;
- $A \to B$;
- $B \equiv (\pm \cdots b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \cdots)_K$;
- Вычислитель считает в M-ичной СС.

Перевод числа в систему счисления вычислителя

Люди привыкли считать в десятичной

Исходное число

$$A \equiv (\pm a_n \cdots a_0 . a_{-1} \cdots a_{-m})_L$$

достаточно пересчитать в СС вычислителя

$$A = \pm \sum_{i=-m}^{n} a_i \cdot L^i,$$

представив[4] в ней же L и a_i.

[4] Не представляет сложности

Число в 16-ичной СС

Данный слайд создан вычислителем, которому удобно считать в десятичной системе

Пусть дано число $Z \equiv (-7AFC.4)_{16}$.
В шестнадцатиричной системе счисления цифры обозначены следующим образом: цифрам от нуля до девяти соответствуют цифры десятичной системы, а далее используются латинские буквы от A до F в алфавитном порядке, которым соответствуют числа от 10 до 15 соответственно:

$$
\begin{gathered}
Z = -(7 \cdot 16^3 + A \cdot 16^2 + F \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1}) = \\
= -(7 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1}) = \\
= -(7 \cdot 4096 + 10 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 12 \cdot 1 + 4 \cdot 0.0625) = \\
= -31484.25
\end{gathered}
$$

Перевод в K-ичную СС

Целая часть

Допустим, что целая часть (X) уже представлена в K-ичной системе: $X \equiv (b_n \cdots b_0)_K$. X делится нацело на основание K:

$$X = K \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot K^{i-1} \right) + b_0,$$

получая в остатке $b_0 \in [0, K-1]$.

$$X = K \cdot X^{(1)} + b_0.$$

Перевод в K-ичную СС

Целая часть

$$X^{(1)} = K \cdot \left(\sum_{i=2}^{n} b_i \cdot K^{i-2} \right) + b_1 = K \cdot X^{(2)} + b_1,$$
$$X^{(2)} = K \cdot X^{(3)} + b_2,$$
$$X^{(3)} = K \cdot X^{(4)} + b_3,$$
$$\ldots$$
$$X^{(n)} = K \cdot 0 + b_n.$$

Перевод в K-ичную СС

Дробная часть Y, $0 \leq Y < 1$

Представим, что дробная часть (Y) числа уже представлена в K-ичной системе: $(.b_{-1} \cdots b_{-m})_K$. Умножая дробную часть на K.

$$Y \cdot K = K \cdot \left(\sum_{i=-m}^{-1} b_i \cdot K^i \right) = b_{-1} + \sum_{i=-m}^{-2} b_i \cdot K^{i+1},$$

находим $b_{-1} = \lfloor Y \cdot K \rfloor$ и справедливо $b_{-1} \in [0, K-1]$.

$$Y \cdot K = b_{-1} + Y^{(1)}.$$

Перевод в K-ичную СС

Дробная часть

$$
\begin{aligned}
&Y^{(1)} \cdot K = \left(\sum_{i=-m}^{-2} b_i \cdot K^{i+1} \right) \cdot K = b_{-2} + Y^{(2)}, \\
&Y^{(2)} \cdot K = b_{-3} + Y^{(3)}, \\
&Y^{(3)} \cdot K = b_{-4} + Y^{(4)}, \\
&\dots \\
&Y^{(m-1)} \cdot K = \left(\sum_{i=-m}^{-m} b_i \cdot K^{i+m-1} \right) \cdot K = b_{-m} + 0.
\end{aligned}
$$

Перевод чисел

Точность представления дробной части $(Y)_L \to (Y)_K$.

$$(.a_{-1} \cdots a_{-m_L})_L \approx (.b_{-1} \cdots b_{-m_K})_K.$$

Сколько разрядов m_K необходимо?

$$\begin{array}{ccc}
\Delta_K & \leq & \Delta_L, \\
K^{-m_K} & \leq & L^{-m_L}, \\
\log_K K^{-m_K} & \leq & \log_K L^{-m_L}, \\
-m_K & \leq & -m_L \cdot \log_K L,
\end{array}$$

$m_k \geq m_L \cdot \log_K L$.

$X \equiv -31484.25$ в 3-ичную СС

Целая часть

$$
\begin{aligned}
&31484 = 10494 \cdot 3 + 2, && \Rightarrow b_0 = 2,\\
&10494 = 3498 \cdot 3 + 0, && \Rightarrow b_1 = 0,\\
&3498 = 1166 \cdot 3 + 0, && \Rightarrow b_2 = 0,\\
&1166 = 388 \cdot 3 + 2, && \Rightarrow b_3 = 2,\\
&388 = 129 \cdot 3 + 1, && \Rightarrow b_4 = 1,\\
&129 = 43 \cdot 3 + 0, && \Rightarrow b_5 = 0,\\
&43 = 14 \cdot 3 + 1, && \Rightarrow b_6 = 1,\\
&14 = 4 \cdot 3 + 2, && \Rightarrow b_7 = 2,\\
&4 = 1 \cdot 3 + 1, && \Rightarrow b_8 = 1,\\
&1 = 0 \cdot 3 + 1, && \Rightarrow b_9 = 1
\end{aligned}
$$

$31484 \equiv (1121012002)_3.$

$X \equiv -31484.25$ в 3-ичную СС

Дробная часть

$$
\begin{aligned}
0.25 \cdot 3 &= 0.75, &&\Rightarrow b_{-1} = 0,\\
0.75 \cdot 3 &= 2.25, &&\Rightarrow b_{-2} = 2,\\
0.25 \cdot 3 &= 0.75, &&\Rightarrow b_{-3} = 0,\\
0.75 \cdot 3 &= 2.25, &&\Rightarrow b_{-4} = 2,\\
\ldots
\end{aligned}
$$

$0.25 \equiv (0.[02])_3.$

$X \equiv (-7AFC.4)_{16} \equiv -31484.25$ в 3-ичную СС

$$X \equiv (-7AFC.4)_{16} \equiv -31484.25 \equiv (-1121012002.[02])_3$$

Двоичная система счисления

- Система счисления с основанием 2.
- Цифры всего две: 0 и 1.
- Разряд $\equiv$ бит[5].

10-я СС	2-я СС	10-я СС	2-я СС
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	10	1010
3	0011	11	1011
4	0100	12	1100
5	0101	13	1101
6	0110	14	1110
7	0111	15	1111

[5] bit — binary digit. Двоичная цифра.

Двоичная система счисления

Таблица сложения

$+$	0	1
0	$\overset{0}{\leftarrow} 0$	$\overset{0}{\leftarrow} 1$
1	$\overset{0}{\leftarrow} 1$	$\overset{1}{\leftarrow} 0$

Например, $1 + 1 = 2 \equiv (10)_2 \equiv \overset{1}{\leftarrow} 0$.

Двоичная система счисления
Сложение чисел

Example (Задача)

Сложить двоичные числа: $A \equiv (101.1101)_2$ и $B \equiv (11.010111)_2$.

Решение.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
A & \equiv & & 1 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
B & \equiv & & 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\overset{c}{\leftarrow} & & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & & 1 & & & \\
A+B & \equiv & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

□

Двоичная система счисления

Закономерности

- В n двоичных разрядах можно представить
$$2^n$$
чисел. $[0, 2^n - 1] \equiv [(\underbrace{0 \cdots 0}_{n})_2, (\underbrace{1 \cdots 1}_{n})_2]$

- Чтобы пронумеровать m объектов, требуется
$$\lceil \log_2 m \rceil$$
разрядное 2-ичное число.

Вспомогательные системы счисления
8, 16 СС

Системы счисления, основание которых есть степень двух:

- $8 = 2^3$;
- $16 = 2^4$.

Восьмиричная СС

$X = (\pm \cdots \boxed{a_8 a_7 a_6}\boxed{a_5 a_4 a_3}\boxed{a_2 a_1 a_0}.\boxed{a_{-1} a_{-2} a_{-3}}\boxed{a_{-4} a_{-5} a_{-6}}\boxed{a_{-7} a_{-8} a_{-9}}\cdots)_2$

$$X = \begin{array}{c} \ldots + \\ +a_8 \cdot 2^8 + a_7 \cdot 2^7 + a_6 \cdot 2^6 + \\ +a_5 \cdot 2^5 + a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + \\ +a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 + \\ +\frac{a_{-1}}{2^1} + \frac{a_{-2}}{2^2} + \frac{a_{-3}}{2^3} + \\ +\frac{a_{-4}}{2^4} + \frac{a_{-5}}{2^5} + \frac{a_{-6}}{2^6} + \\ +\frac{a_{-7}}{2^7} + \frac{a_{-8}}{2^8} + \frac{a_{-9}}{2^9} + \\ + \ldots \end{array}$$

Восьмиричная СС

$$X = (\pm \cdots \boxed{a_8 a_7 a_6}\boxed{a_5 a_4 a_3}\boxed{a_2 a_1 a_0}.\boxed{a_{-1} a_{-2} a_{-3}}\boxed{a_{-4} a_{-5} a_{-6}}\boxed{a_{-7} a_{-8} a_{-9}} \cdots)_2$$

$$X = \begin{array}{c} \ldots + \\ + \left(a_8 \cdot 2^2 + a_7 \cdot 2^1 + a_6 \cdot 2^0\right) \cdot 8^2 + \\ + \left(a_5 \cdot 2^2 + a_4 \cdot 2^1 + a_3 \cdot 2^0\right) \cdot 8^1 + \\ + \left(a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0\right) \cdot 8^0 + \\ + \dfrac{(a_{-1} \cdot 2^2 + a_{-2} \cdot 2^1 + a_{-3} \cdot 2^0)}{8^1} + \\ + \dfrac{(a_{-4} \cdot 2^2 + a_{-5} \cdot 2^1 + a_{-6} \cdot 2^0)}{8^2} + \\ + \dfrac{(a_{-7} \cdot 2^1 + a_{-8} \cdot 2^2 + a_{-9} \cdot 2^3)}{8^3} + \\ + \ldots \end{array}$$

Восьмиричная СС

$X = (\pm \cdots \boxed{a_8 a_7 a_6}\boxed{a_5 a_4 a_3}\boxed{a_2 a_1 a_0}.\boxed{a_{-1} a_{-2} a_{-3}}\boxed{a_{-4} a_{-5} a_{-6}}\boxed{a_{-7} a_{-8} a_{-9}} \cdots)_2$

Получили запись числа:

$$X = \sum_{i=-m'}^{n'} b_i \cdot 8^i,$$

где

$$b_i = \sum_{j=0}^{2} a_{3 \cdot i+j} \cdot 2^j$$

и $b_i \in [0, 2^3 - 1]$, те $b_i \in [0, 7]$.
b_i — восмиричная цифра.

Восьмиричные числа в языках программирования

- `C++`,`java`,`C#` и т.д.: если справа перед числом записан ноль, то число в восьмиричной системе. `015720` - восьмиричное число (равное 7120). `0189` - ошибка: недопустимы цифры 8 и 9. Без ведущего нуля число считается десятичным;
- В ассемблере[6] после цифр восьмиричного числа пишется латинская буква «о» (octal). 15720o. Ну, а 189o. . .

[6] masm

Шестнадцатиричная система

$$X = (\pm \cdots \boxed{a_7 a_6 a_5 a_4}\boxed{a_3 a_2 a_1 a_0}.\boxed{a_{-1} a_{-2} a_{-3} a_{-4}}\boxed{a_{-5} a_{-6} a_{-7} a_{-8}} \cdots)_2$$

16-я СС	10-я СС	2-я СС	16-я СС	10-я СС	2-я СС
0	0	0000	8	8	1000
1	1	0001	9	9	1001
2	2	0010	A	10	1010
3	3	0011	B	11	1011
4	4	0100	C	12	1100
5	5	0101	D	13	1101
6	6	0110	E	14	1110
7	7	0111	F	15	1111

Шестнадцатиричные числа в языках программирования

- C++, java, C# и т.д.: если слева от цифр цисла есть префикс «0x», то число в шестнадцатеричной системе. 0xAF - шестнадцатеричное число (равное 175). 0x1h - ошибка: недопустима цифра h.
- pascal: если слева от цифр цисла есть префикс «$», то число в шестнадцатеричной системе. $AF - шестнадцатеричное число (равное 175). $1h - ошибка: недопустима цифра h.
- В некоторых ассемблерах после цифр шестнадцатиричного числа пишется латинская буква «h» (hexadecimal): 1beh, 0afh, 0AFh, 0AFH.

Вспомогательные системы счисления

$8, 16$ СС

Example (Задача)

Дано двоичное число $(1110011.0101101)_2$. Перевести его в системы счисления с основанием 8 и 16.

Вспомогательные системы счисления

8, 16 СС

Example (Задача)

Дано двоичное число $(1110011.0101101)_2$. Перевести его в системы счисления с основанием 8 и 16.

Решение.

$$(\underbrace{001}_{1}\,\underbrace{110}_{6}\,\underbrace{011}_{3}\,.\,\underbrace{010}_{2}\,\underbrace{110}_{6}\,\underbrace{100}_{4})_2 \equiv (163.264)_8 \equiv$$

$$\equiv (\underbrace{0111}_{7}\,\underbrace{0011}_{3}\,.\,\underbrace{0101}_{5}\,\underbrace{1010}_{A})_2 \equiv (73.5A)_{16}$$

$\square$

Вспомогательные $(8, 16)$ системы счисления

Example (Задача)

Дано восьмиричное число $(673245.471)_8$. Перевести его в систему счисления с основанием 16.

Вспомогательные (8, 16) системы счисления

Example (Задача)

Дано восьмиричное число $(673245.471)_8$. Перевести его в систему счисления с основанием 16.

Решение.

Переводим в двоичную систему, а из двоичной в шестнадцатеричную:

$$(110\ 111\ 011\ 010\ 100\ 101.100\ 111\ 001)_2 =$$
$$= (0011\ 0111\ 0110\ 1010\ 0101.1001\ 1100\ 1000)_2 =$$
$$= (376A5.9C8)_{16}$$

□

Вспомогательные $(8, 16)$ системы счисления

Example (Задача)

Дано число 65045.875. Перевести его в 2 СС.

Вспомогательные (8, 16) системы счисления

Example (Задача)

Дано число 65045.875. Перевести его в 2 СС.

Решение.

Переводим в шестнадцатеричную систему целую часть:

$$
\begin{aligned}
&65045 = 4065 \cdot 16 + 5, \Rightarrow a_0 = 5,\\
&4065 = 254 \cdot 16 + 1, \Rightarrow a_1 = 1,\\
&254 = 15 \cdot 16 + 14, \Rightarrow a_2 = E,\\
&15 = 0 \cdot 16 + 15, \Rightarrow a_3 = F.
\end{aligned}
$$

Дробную часть:

$$0.875 \cdot 16 = 14.0, \Rightarrow a_{-1} = E.$$

В двоичной системе: $(FE15.E)_{16} = (1111111000010101.1110)_2$. □

Удобство представления двоичных чисел в 8 и 16 СС

Example (Компактность уменьшает количество ошибок)

$$(11111110101000000001011111001101)_2 =$$
$$= (37650013715)_8 =$$
$$= (FEA017CD)_{16}$$

В менее короткой записи числа ошибиться сложнее.

Информатика и 2 СС

- Бит (bit — binary digit).
- Байт (byte).
- Октет.
- Ниббл, тетрада.
- Килобайт?

Война префиксов закончена 19 марта 2005 года!

IEEE 1541. 1000 байт — 1 kB (килобайт), 1024 байт — 1KiB (кибибайт)

Префиксы для формирования крупных единиц измерения информации

Множитель	СИ/SI	Множитель	IEEE 1541
$10^3 = 1000^1$	*kilo* (k) кило	$2^{10} = 1024^1$	*kibi* (Ki) киби
$10^6 = 1000^2$	*mega* (M) мега	$2^{20} = 1024^2$	*mebi* (Mi) меби
$10^9 = 1000^3$	*giga* (G) гига	$2^{30} = 1024^3$	*gibi* (Gi) гиби
$10^{12} = 1000^4$	*tera* (T) тера	$2^{40} = 1024^4$	*tebi* (Ti) теби
$10^{15} = 1000^5$	*peta* (P) пета	$2^{50} = 1024^5$	*pebi* (Pi) пеби
$10^{18} = 1000^6$	*exa* (E) экса	$2^{60} = 1024^6$	*exbi* (Ei) эксби
$10^{21} = 1000^7$	*zetta* (Z) зетта	$2^{70} = 1024^7$	*zebi* (Zi) зеби
$10^{24} = 1000^8$	*yotta* (Y) йотта	$2^{80} = 1024^8$	*yobi* (Yi) йоби

Обсуждение

Как представляются числа в современных компьютерах?

В заключение

Подробнее о ситемах счисления см. [1, 2].

Библиография I

В.А.Горбатов. Фундаментальные основы дискретной математики / В.А.Горбатов. — М.: Физматлит, 1999. — 544 с.

С.В.Судоплатов. Дискретная математика: Учебник / С.В.Судоплатов, Е.В.Овчинникова. — М.: ИНФРА-М;Новосибирск;Изд-во НГТУ, 2005. — 256 с.