ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

Метод Гаусса - метод последовательного исключения неизвестных – относится к группе ***точных методов,*** и если бы отсутствовала погрешность вычислений, можно было бы получить точное решение.

При ручных расчётах вычисления целесообразно вести в таблице, содержащей столбец контроля. Ниже представлен общий вариант такой таблицы для решения системы линейных уравнений 4-го порядка.

Прямой ход:

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Столбец контроля
a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45}	$a_{16}=\sum_1^5 a_{1i}$ $a_{26}=\sum_1^5 a_{2i}$ $a_{36}=\sum_1^5 a_{3i}$ $a_{46}=\sum_1^5 a_{4i}$
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	$b_{16}=\sum_2^5 b_{1i}+1$
	$a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$ $a_{42}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{43}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$ $a_{35}^{(1)}$ $a_{45}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}=\sum_2^5 a_{2i}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}=\sum_2^5 a_{3i}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}=\sum_2^5 a_{4i}^{(1)}$
	1	$b_{23}^{(1)}$	$b_{24}^{(1)}$	$b_{25}^{(1)}$	$b_{26}^{(1)}=\sum_3^5 b_{2i}^{(1)}+1$

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Столбец контроля
		$a_{33}^{(2)}$ $a_{43}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$ $a_{44}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$ $a_{45}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}=\sum_{3}^{5}a_{3i}^{(2)}$ $a_{46}^{(2)}=\sum_{3}^{5}a_{4i}^{(2)}$
		1	$b_{34}^{(2)}$	$b_{35}^{(2)}$	$b_{36}^{(2)}=b_{34}^{(2)}+b_{35}^{(2)}+1$
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}=a_{44}^{(3)}+a_{45}^{(3)}$
			1	$\frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}=x_4$	$\frac{a_{46}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}=\overline{x_4}$

Обратный ход:

$x_4=a_{45}^{(3)}/a_{44}^{(3)}$ $x_3=b_{35}^{(2)}-b_{34}^{(2)}x_4$ $x_2=b_{25}^{(1)}-b_{24}^{(1)}x_4-b_{23}^{(1)}x_3$ $x_1=b_{15}-b_{14}x_4-b_{13}x_3-b_{12}x_2$	$\overline{x}_4=x_4+1$ $\overline{x}_3=x_3+1$ $\overline{x}_2=x_2+1$ $\overline{x}_1=x_1+1$

Пример 1. Методом Гаусса решить систему уравнений 4-го порядка:

$$\begin{cases} 2x_1+x_3+4x_4=9 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=8 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-1 \end{cases}$$

Вычисления следует вести в таблице со столбцом контроля, образец которой приведён выше.

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Столбец контроля
<u>**2**</u> 1 2 1	0 2 1 -1	1 -1 1 2	4 1 1 1	9 8 5 -1	16 11 10 2
1	***0***	***0,5***	***2***	***4,5***	***8***
	<u>**2**</u> 1 -1	-1,5 0 1,5	-1 -3 -1	3,5 -4 -5,5	3 -6 -6
	1	***-0,75***	***-0,5***	***1,75***	***1,5***
		<u>***0,75***</u> 0,75	-2,5 -1,5	-5,75 -3,75	-7,5 -4,5
		1	***-3,33***	***-7,67***	***-10***
			1	2	3
				$x_4 = 2$ $x_3 = -1$ $x_2 = 2$ $x_1 = 1$	$\bar{x}_4 = 3$ $\bar{x}_3 = 0$ $\bar{x}_2 = 3$ $\bar{x}_1 = 2$

Пример 2. Найти корни линейной системы уравнений 3-го порядка:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = 11{,}33 \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42 \end{cases}$$

Составляется аналогичная таблица для определения значений трёх неизвестных корней системы уравнений.

x_1	x_2	x_3	Свободные члены	Столбец контроля
6 -1 -1	-1 6 -1	-1 -1 6	11,33 32 42	15,33 36 46
1	***-,167***	***-0,167***	***1,89***	***2,56***
	5,83 -1,17	-1,17 5,83	33,9 43,9	38,6 48,6
	1	***-0,20***	***5,80***	***6,60***
		5,60	50,7	56,3
		1	***9,05***	***10,05***
			$x_3 = 9{,}05$ $x_2 = 5{,}80 + 0{,}2 \cdot 9{,}05 = 7{,}62$ $x_1 = 1{,}89 + 0{,}167 \cdot (9{,}05 + 7{,}62) = 4{,}67$	$\bar{x}_3 = 10{,}5$ $\bar{x}_2 = 8{,}62$ $\bar{x}_1 = 5{,}67$

Эти приближённые значения корней можно подставить в исходную систему уравнений и вычислить ***невязки*** - $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, являющиеся разностями между правой и левой частями каждого уравнения системы при подстановке в левую часть найденных корней. Затем подставляются в качестве свободных членов системы невязки и получают ***поправки***
корней - $\delta_1, \delta_2, \delta_3$:

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 = 0{,}02 & & \delta_1 = -0{,}0039 & & x_1^{(1)} = 4{,}6661 \\ \varepsilon_2 = 0 & \Rightarrow & \delta_2 = -0{,}0011 & \Rightarrow & x_2^{(1)} = 7{,}6189 \\ \varepsilon_3 = -0{,}01 & & \delta_3 = -0{,}0025 & & x_3^{(1)} = 9{,}0475 \end{matrix}$$