Умножение с фиксированной точкой (прямой код)

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «информатика»
(17 марта 2017 г.)

Содержание

Дробно-нормализованные числа
Для обоснований выкладок мы используем дробное масштабирование

$$x = y \cdot M$$

Для обоснования выкладок будут использоваться y.

y — дробное число, его целая часть y равна нолю.

Рарзядная сетка хранит разряды дробной части y.

$$0.\overset{\quad n-1 \qquad\qquad\qquad 0}{\boxed{\texttt{yyyyy}\cdots\texttt{yyyyy}}}$$

Чтобы зафиксировать запятую между k и $(k-1)$ разрядами n-разрядной сетки, выбирается масштаб

$$M = 2^{(n-k)}.$$

Умножение «столбиком»

Пусть для положительных чисел A и B имеются дробно-масштабированные представления в двоичной системе счисления. Пусть

$$A \equiv (0, a_1 \cdots a_n)_2.$$

Тогда результат произведения $A \times B$ в двоичной системе счисления будет определяться по формуле:

$$A \times B = B \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{-i} = \sum_{i=1}^{n} (B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} (B \gg i) \cdot a_i.$$

Пример умножения

Операнды

Требуется найти произведение $A \times B$, где $A = 23$ и $B = 25$. Дробные представления (с масштабирующим множителем $M = 2^5$) будут:

$$A \equiv 0,10111,$$
$$B \equiv 0,11001.$$

Результатоом произведения будет дробное число, но с масштабом

$$M^2 = 2^{10}$$

Пример умножения «столбиком» чисел без знака

$$A \equiv \texttt{,10111},$$
$$B \equiv \texttt{,11001}.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
	Результат:	,10001 11111

$$(\texttt{,10001 11111})_2 \cdot 2^{10} = (\texttt{10001 11111,})_2 = 575 = 23 \cdot 25.$$

I-й способ

I-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-5	1	.1100 1....
		01100 10000

I-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-4	...1.	.1100 1....
-5	1	..110 01...
		10010 11000

I-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-3	..1..	.1100 1....
-4	...1.	..110 01...
-5	1	...11 001..
		10101 11100

I-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-2	.0...	....
-3	..1..	..110 01...
-4	...1.	...11 001..
-5	1	....1 1001.
		01010 11110

I-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
	Результат:	10001 11111

I способ: аналитически

$$a_n B \cdot 2^{-n} + a_{(n-1)} B \cdot 2^{-(n-1)} + \dots + a_2 B \cdot 2^{-2} + a_1 B \cdot 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow$$

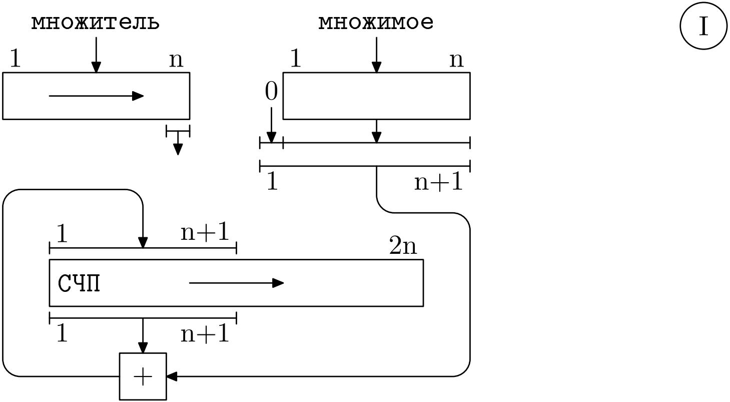
$$\left(\left(\cdots\left(\left(a_n \frac{B}{2}\right) \cdot 2^{-1} + a_{(n-1)} \frac{B}{2}\right) \cdot 2^{-1} + \dots + a_2 \frac{B}{2}\right) \cdot 2^{-1} + a_1 \frac{B}{2}\right)$$

В реккурентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_n \frac{B}{2}, & \text{если } i = n, \\ S_{(i+1)} \cdot 2^{-1} + a_i \frac{B}{2}, & \text{если } i < n. \end{cases}$$

S_1 — результат $(S_n \to S_{n-1} \to \dots \to S_2 \to S_1)$

I способ: реализация



II-й способ

II-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-5	1	 11001
		00000 11001

II-й способ

$$A \equiv\ ,10111,$$
$$B \equiv\ ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
		00010 01011

II-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
		00101 01111

II-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
		00101 01111

II-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
	Результат:	10001 11111

II способ: аналитически

$$a_n \cdot \frac{B}{2^n} + a_{(n-1)} \cdot \frac{B}{2^{(n-1)}} + a_{(n-2)} \cdot \frac{B}{2^{(n-2)}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{B}{2^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow$$

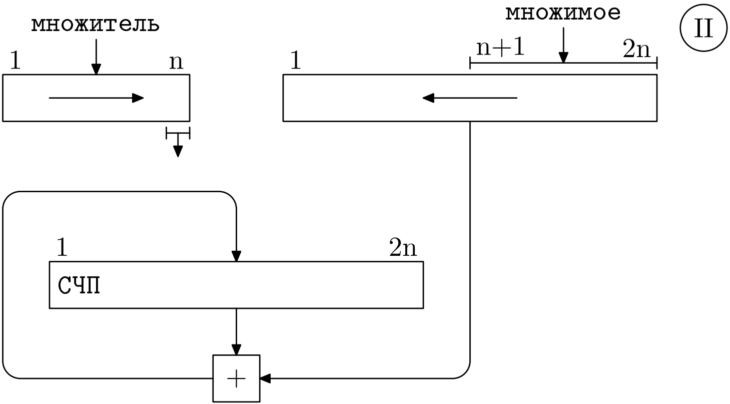
$$\left(\cdots\left(\left(\left(a_n \cdot \frac{B}{2^n}\right) + a_{(n-1)} \cdot \frac{B}{2^{(n-1)}}\right) + a_{(n-2)} \cdot \frac{B}{2^{(n-2)}}\right) + \cdots + a_1 \cdot \frac{B}{2^{-1}}\right)$$

В реккурентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_n \cdot \dfrac{B}{2^n}, & \text{если } i = n, \\ S_{(i+1)} + a_i \cdot \dfrac{B}{2^i}, & \text{если } i < n. \end{cases}$$

S_1 — результат ($S_n \to S_{n-1} \to \cdots \to S_2 \to S_1$)

II-способ: реализация



III-й способ

III-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1	 11001
		00000 11001

III-й способ

$$A \equiv\ ,10111,$$
$$B \equiv\ ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	....1 1001.
-2	.0...	....
		00001 10010

III-й способ

$$A \equiv\ ,10111,$$
$$B \equiv\ ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	...11 001..
-2	.0...	....
-3	..1..	.....11 001
		00011 11101

III-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	..110 01...
-2	.0...	....
-3	..1..	....11 001.
-4	...1.	.....1 1001
		01000 10011

III-й способ

$$A \equiv \,,10111,$$
$$B \equiv \,,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
	Результат:	10001 11111

III способ: аналитически

$$a_1 B \cdot 2^{-1} + a_2 B \cdot 2^{-2} + \cdots + a_{(n-1)} B \cdot 2^{-(n-1)} + a_n B \cdot 2^{-n}$$

$$\Leftrightarrow$$

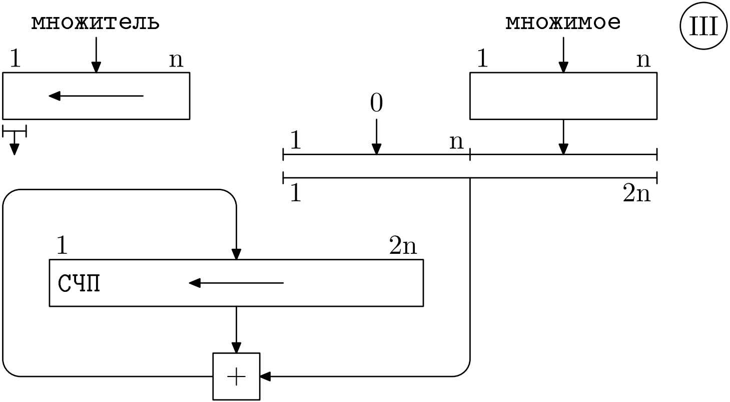
$$\left(\left(\cdots\left(\left(a_1 \frac{B}{2^n}\right) \cdot 2 + a_2 \frac{B}{2^n}\right) \cdot 2 + \cdots + a_{(n-1)} \frac{B}{2^n}\right) \cdot 2 + a_n \frac{B}{2^n}\right)$$

В реккурентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_1 \dfrac{B}{2^n}, & \text{если } i = 1, \\ S_{(i-1)} \cdot 2 + a_i \dfrac{B}{2^n}, & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

S_n — результат $(S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_{n-1} \to S_n)$

III-способ: реализация



IV способ

IV способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1	.1100 1 . . . .
		01100 10000

IV способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1. . . .	.1100 1. . . .
-2	.0. . .	. . . .
		01100 10000

IV способ

$$A \equiv\ ,10111,$$
$$B \equiv\ ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1	.1100 1. . . .
-2	.0 . . .	. . . .
-3	. . 1 . .	. . .11 001. .
		01111 10100

IV способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
		10001 00110

IV способ

$$A \equiv \text{,}10111,$$
$$B \equiv \text{,}11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
	Результат:	10001 11111

IV способ: аналитически

$$a_1 B \cdot 2^{-1} + a_2 B \cdot 2^{-2} + a_3 B \cdot 2^{-3} + \cdots + a_{(n)} B \cdot 2^{-n}$$

$$\Leftrightarrow$$

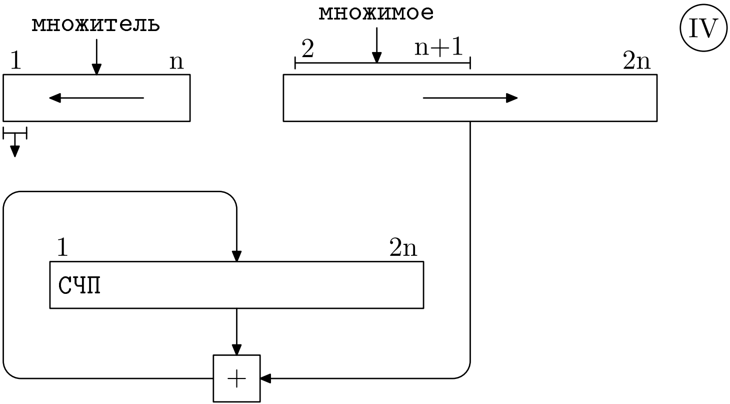
$$(\cdots(((a_1 B \cdot 2^{-1}) + a_2 B \cdot 2^{-2}) + a_3 B \cdot 2^{-3}) + \cdots + a_n B \cdot 2^{-n})$$

В реккурентной форме:

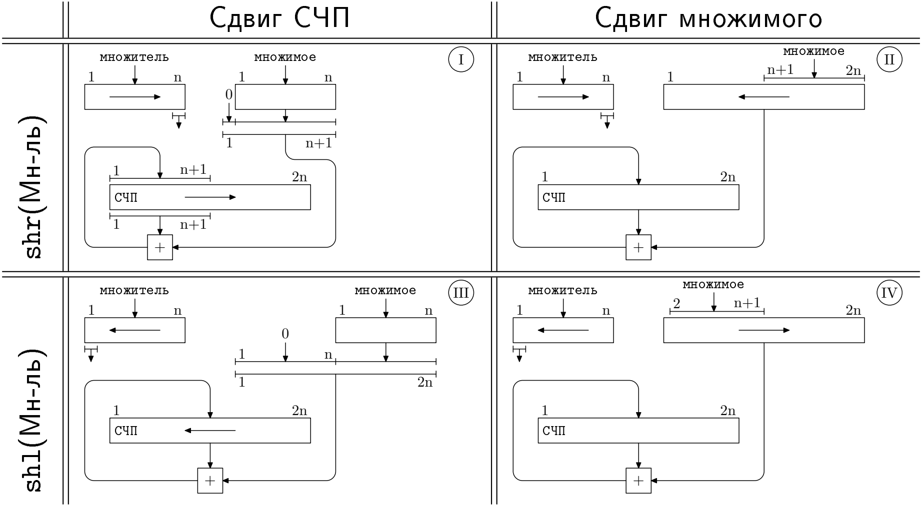
$$S_i = \begin{cases} a_1 B \cdot 2^{-1}, & \text{если } i = 1, \\ S_{(i-1)} + a_i B \cdot 2^{-i}, & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

S_n — результат $(S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_{n-1} \to S_n)$

IV-способ: реализация



Резюме:


Сдвиг СЧП
Сдвиг множимого
shr(Мн-ль)
shl(Мн-ль)
I
II
III
IV
множитель
множимое
1
n
0
n+1
2n
2
СЧП
+

Умножение в прямом коде

При умножении в прямом коде знак результата и результат умножения модулей формируются независимо.

1. Знак результата

получается сложением «по модулю два» (XOR) знаков множителя и множимого.

2. Модуль (мантисса) результата получается беззнаковым перемножением мантисс операндов.
3. Корректируется, если нужно, запрещенная комбинация «минус ноль».

Операнды

Перемножить числа в прямом коде

Множитель:

$$-25 = (-11001)_2.$$

Множимое:

$$-23 = (-10111)_2.$$

Используем дробное масштабирование с множителем 2^5.

Знак получаем отдельно: $1 \oplus 1 = 0$. Результат положителен.

Далее показано только получение мантиссы результата разными способами. В таблицах отражаются состояния основных регистров по тактам.

I-способ

мн-ль →	СЧП →	прим.
,11001	+ ,00000 00000 ,.1011 1.... ,01011 10000	+мн-е/2; сдвиг
,.1100	,00101 11000	сдвиг
,..110	,00010 11100	сдвиг
,...11	+ ,00001 01110 ,.1011 1.... ,01100 11110	+мн-е/2; сдвиг
,....1	+ ,00110 01111 ,.1011 1.... ,10001 11111	+мн-е/2; Рез-т!

II-способ

множитель →	мн-е ←	СЧП	прим.
,1100$\underline{\underline{1}}$	,..... 10111	+ ,00000 00000 ,..... 10111 ,00000 10111	+мн-е; сдвиг
,.110$\underline{\underline{0}}$	,....1 0111.		сдвиг
,..11$\underline{\underline{0}}$	,...10 111..		сдвиг
,...1$\underline{\underline{1}}$	,..101 11...	+ ,00000 10111 ,..101 11... ,00110 01111	+мн-е; сдвиг
,....$\underline{\underline{1}}$	,.1011 1....	+ ,00110 01111 ,.1011 1.... ,10001 11111	+мн-е; Рез-т!

III-способ

мн-ль ←	СЧП ←	прим.
,11001	+ ,00000 00000 ,..... 10111 ,00000 10111	+мн-е; сдвиг
,1001.	+ ,00001 0111. ,..... 10111 ,00010 00101	+мн-е; сдвиг
,001..	,00100 0101.	сдвиг
,01...	,01000 101..	сдвиг
,1....	+ ,10001 01... ,..... 10111 ,10001 11111	+мн-е; Рез-т!

IV-способ

мн-ль ←	мн-е →	СЧП	прим.
,11001	,.1011 1....	+ ,00000 00000 ,.1011 1.... ,01011 10000	+мн-е; сдвиг;
,1001.	,..101 11...	+ ,01011 10000 ,..101 11... ,10001 01000	+мн-е; сдвиг
,001..	,...10 111..		сдвиг
,01...	,....1 0111.		сдвиг
,1....	,..... 10111	+ ,10001 01000 ,..... 10111 ,10001 11111	+мн-е; Рез-т!

1)

Какова минимальная разрядность результата перемножения n-разрядных прямых кодов?

2)

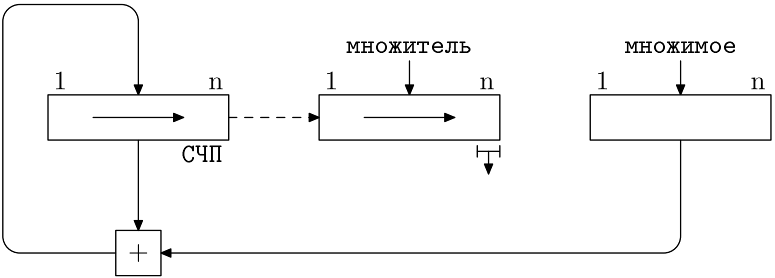
Перемножить числа -91 и 114. Самостоятельно выбрать масштаб.

3)

Выявить ситуации получения неправильных прямых кодов.

4)

Обосновать, работает ли схема умножения модулей первым способом:



- Как её модифицировать, если она работает неправильно?
- Где получается результат?

Советы самоучке

Классика жанра: [1, 2].
Рекомендуется почитать разделы, посвященные работе с суммами и рекуррентными соотношениями в книге [3].

Библиография I

Б.Г.Лысиков. Арифметические и логические основы цифровых автоматов / Б.Г.Лысиков. —
2 изд. —
Мн.: Выш. школа, 1980. —
336 с.

А.Я.Савельев. Прикладная теория цифровых автоматов / А.Я.Савельев. —
М.: Высшая школа, 1987. —
272 с.

Р.Грэхем. Конкретная математика. Основание информатики / Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник. —
М.: Мир, 1998. —
703 с.