

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Scienze Statistiche

Corso di Laurea Magistrale in  
Scienze Statistiche



## Dipendenza di coda e rischio sistemico: un approccio basato su reti dinamiche

Relatore

Prof. Massimiliano Caporin

Correlatore

Prof./Dr. Nome Cognome

Laureando

Alessandro Iadevito

Anno Accademico 2024/2025



# *Abstract*

Il presente lavoro propone un *framework* per l'analisi del rischio sistemico DA  
FINIRE



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Dipendenza di coda</b>	<b>1</b>
1.1 Regressione quantilica . . . . .	1
1.1.1 Specificazione . . . . .	2
1.1.2 Inferenza . . . . .	7
1.2 Regressione quantilica penalizzata . . . . .	18
1.2.1 Una specificazione alternativa . . . . .	19
1.2.2 Inferenza post-selezione . . . . .	20
1.3 Comovimenti, interdipendenza e contagio . . . . .	20
<b>2 Grafi aleatori</b>	<b>23</b>
2.1 Introduzione . . . . .	23
2.1.1 Definizioni . . . . .	23
2.1.2 Statistiche di rete . . . . .	23
2.1.3 Alcune proprietà interessanti . . . . .	25
2.2 Architetture di rete . . . . .	26
2.2.1 <i>Core-periphery</i> . . . . .	26
2.3 Modelli per dati di rete . . . . .	26
2.3.1 Modello di Erdos-Rényi . . . . .	26
2.3.2 Modello $p_1$ . . . . .	27
2.3.3 Modello $\beta$ . . . . .	27
2.3.4 Procedure di stima . . . . .	27
2.4 <i>Dynamic exponential random graphs</i> . . . . .	27

<b>3</b>	<b>A step further: PCA, VAR e SSM</b>	<b>29</b>
3.1	Limiti di un approccio . . . . .	29
3.2	Analisi delle componenti principali . . . . .	29
3.3	Modelli autoregressivi vettoriali (VAR) . . . . .	29
3.4	Modelli spazio-stato . . . . .	29
3.4.1	Modelli spazio-stato e dati mancanti . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Il caso del mercato finanziario europeo</b>	<b>31</b>
4.1	Descrizione dei dati . . . . .	31
4.2	Dipendenza di coda . . . . .	34
4.2.1	Festival delle specificazioni . . . . .	35
4.2.2	Variabili esogene . . . . .	37
4.2.3	Stima del $VaR$ . . . . .	39
4.2.4	Stima dei modelli di regressione quantilica . . . . .	40
4.2.5	Confronto tra i modelli . . . . .	41
4.3	Rete di dipendenza di coda . . . . .	41
4.3.1	Costruzione della rete . . . . .	41
4.3.2	Statistiche di rete . . . . .	41
4.3.3	Componenti, <i>Clustering</i> e <i>community detection</i> . . . . .	42
4.3.4	Rappresentazione <i>Bow-tie</i> . . . . .	42
4.3.5	Distribuzione dei gradi . . . . .	42
4.4	Modellazione dinamica della rete . . . . .	42
4.5	Modelli spazio-stato . . . . .	42
4.5.1	Interpretazione dei fattori latenti . . . . .	42
4.5.2	Analisi della capacità predittiva . . . . .	42
<b>A</b>	<b>Descrizione dei dati</b>	<b>47</b>
A.1	Descrizione dei titoli . . . . .	47
A.2	Variabili macroeconomiche . . . . .	51
<b>B</b>	<b>Titolo appendice B</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>55</b>

# Introduzione

L'analisi del rischio sistemico è un tema divenuto centrale nell'economia a partire dalle prime crisi finanziarie degli anni '90 del ventesimo secolo: la crisi dei paesi asiatici del 1997 e il default della Federazione Russa e conseguente fallimento di *Long-Term Capital Management (LTCM)* del 1998. Questo tema ha assunto una rilevanza ancora maggiore ed è divenuto centrale nella ricerca economica a seguito delle crisi dei mutui *subprime* (indicativamente periodo 2006-2009) e dei debiti sovrani dell'Eurozona (indicativamente dal 2009 al 2012).

Il rischio sistemico presenta una natura multidimensionale che si evidenzia principalmente in due fatti: la difficoltà di darne una definizione chiara ed univoca e la conseguente molteplicità di metodi che sono stati proposti per misurarlo. Problema intrinseco della misurazione del rischio sistemico è quello della rarità con cui eventi sistemici si manifestano.

Marginalmente, il rischio di fallimento di un'impresa può essere catturato dal *debt-to-equity ratio* o dalla *leverage* secondo una prospettiva contabile.

Conseguenza della globalizzazione maggior interdipendenza tra le istituzioni del settore finanziario comportato sia maggior efficienza che aumento del rischio che shock si propaghino tra Stati che tra mercati fino all'economia reale. Lo studio del contagio dell'interdipendenza nasce attorno alla fine degli anni '90 del ventesimo secolo a seguito di quella che è possibile individuare come la prima crisi finanziaria nel mercato globalizzato: crisi paesi asiatici del 1997 e default Russia e fallimento LTCM del 1998.

Non sorprende dunque che in letteratura siano stati proposti i più diversi approcci per lo studio del rischio sistemico.

Strumenti classici per lo studio di relazioni di interdipendenza quali i modelli

autoregressivi vettoriali (Vectori Autoregressive *VAR* e i modelli eteroschedasticità generalizzati multivariati (*mGARCH*) Diebold e Yilmaz, 2009 introducono un indice di *spillover* ipotizzando per i rendimenti che per le varianze (da intendersi come particolare misura di volatilità) un modello della classe VAR. Hong et al., 2009 introducono un test per la causalità tra quantili a partire dal Kritzman et al., 2011 studiano il rischio sistemico mediante l'analisi delle componenti principali

Sono stati proposti diversi indicatori economici della sistematicità delle istituzioni, quali ad esempio *Systemic Expected Shortfall* (SES) introdotto in V. Acharya et al., 2012, ripreso in Brownlees e Engle, 2017 *Conditional Value-at-Risk* (CoVaR) introdotto in Adrian e Brunnermeier, 2016 e sue estensioni come il *Quantile Located Conditional Autoregressive Value-at-Risk* (QL-CoCaViaR) proposto in Bonaccolto, Caporin e Paterlini, 2019, *Distressed Insurance Premium* (DIP) introdotto in Huang et al., 2012, che misura il prezzo di una assicurazione contro il rischio di stress sistemico del sistema bancario, Engle et al., 2015 V. V. Acharya et al., 2017 *Capital Shortfall* (CS) *Systemic Risk* (SRISK)

Pelletier, 2006 introduce i modelli *Markov Switching CCC-GARCH*, generalizzato in Billio e Caporin, 2005 considerando Markov Switching DCC-GARCH (with an interesting application to contagion analysis).

**Topologia** Un sistema economico o finanziario viene visto come rete i cui nodi sono le istituzioni finanziarie e i collegamenti relazioni economico-finanziarie

ambienti con un alto livello di interdipendenza In ambito finanziario, , due sono le questioni che maggiormente hanno interessato la ricerca:

Il rischio sistemico è legato alla topologia del sistema finanziario

Billio et al., 2012 causalità di Granger entro i VAR Diebold e Yilmaz, 2014 propongono diverse misure di connessione a partire dalla *FEVD* dei modelli VAR.

Allen e Babus, 2009 per una rassegna sull'utilizzo delle reti in economia e in finanza.

Poledna et al., 2015 studiano, nel contesto del sistema bancario messicano, il contributo al rischio sistemico e la perdita attesa in caso di *distress/default* di una o più istituzioni attraverso reti multistrato (*multi-layer networks*)<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Per identificare la centralità di un'istituzione entro ciascun *layer* viene qui utilizzata l'indicatore *DebtRank*, introdotto in Battiston et al., 2012; tale metrica misura la frazione del valore economico di un sistema a rischio di perdita in seguito al o al *default* di uno o più nodi della rete



In [Kaminsky e Reinhart, 2002](#) studia la sincronia nei picchi e i comovimenti nei valori di (quattro) diverse variabili finanziarie tra mercati di diverse attività per diversi gruppi di nazioni, concludendo che l'integrazione tra mercati dei capitali l'interdipendenza dipende dalla variabile economico finanziaria studiata

Recentemente, sono stati proposti approcci basati sul *machine learning*, con particolare interesse posto nei *big data* a disposizione nei mercati finanziari (*sentiment analysis* e analisi dei dati ad alta frequenza). vedi [Kou et al., 2019](#) per una breve rassegna

[Neveu, 2018](#) *survey* sull'approccio *network-based*

[Bräuning e Koopman, 2020](#) modello latente semplice per analisi di reti dinamiche applicazione al mercato delle banane

Analisi empirica condotta sui rendimenti perché reagiscono 'meglio' rispetto ad altre variabili economiche considerate in letteratura

It has also been studied the relation between different financial instruments and their impact on systemic risk ([Kou et al., 2019](#))

More recently, due to the availability of big data in different , new tools have been developed and

CDS as a source of systemic risk during the 2007-2008 credit turmoil. see [Hull, 2023](#)

Analisi di contagio utile anche nell'ambito dello studio delle cause della *default correlation*

[Calabrese et al., 2017](#) propongono di studiare l'interdipendenza tra *default* di istituzioni bancarie mediante modelli di regressione spaziale logistica; in particolare, costruiscono la *connectivity matrix*  $W$  a partire dalle esposizioni creditizie tra le istituzioni considerate.

We use Value at Risk (VaR) as a measure of market risk, as in other [Hong et al., 2009](#) [Hautsch et al., 2015](#) il contributo di una banca al rischio sistemico è definito come l'impatto che una variazione del proprio  $VaR$  ha sul  $VaR$  del sistema.

---

stessa.

<sup>2</sup>Negli articoli qui citati, e nel prosieguo di tale lavoro, le reti sono utilizzate per descrivere Nella letteratura finanziaria le reti sono state utilizzate anche

Sono stati proposti anche diversi modelli della classe *agent-based*, si vedano ad esempio da Cruz e Lind, 2012, in cui, a partire da un modello fisico per la relazione creditore-debitore, si studiano gli effetti che un aumento di capitale ha in termini di stabilità di un sistema bancario; Pericoli e Sbracia, 2003, paragrafo 3 per un'applicazione al problema di costruzione di un portafoglio entro un mercato internazionale dei capitali; Eisenberg e Noe, 2001 in cui viene proposta una misura di fragilità di una banca sulla base del numero di *default* a partire da un argomento, Allen et al., 2012 analizzano il ruolo che l'interazione tra la condivisione di portafogli tra banche e le rispettive strutture temporali dei finanziamenti ha nel generare rischio sistemico attraverso un meccanismo di contagio informativo<sup>3</sup>; Acemoglu et al., 2015 mostrano come la struttura di una rete interbancaria (in particolare la densità) abbia effetto diverso e contrapposto sul contagio e sulla stabilità del sistema a seconda del numero e/o della magnitudine degli shock negativi che lo colpiscono.

4

5 6

Il presente lavoro punta

Il presente lavoro è organizzato come segue. Nel capitolo 1 presentiamo i principali risultati riguardanti la regressione quantilica e la sua generalizzazione mediante penalizzazione  $l_1$ . Successivamente, nel capitolo 2 richiamiamo la teoria dei grafi e i modelli per dati di rete. Nel capitolo 3 si presentano alcuni risultati riguardanti i modelli spazio-stato, proponendo una . Infine, nel capitolo 4 si presenta un'applicazione della metodologia proposta al mercato finanziario europeo.

---

<sup>3</sup>Qui il rischio sistemico viene misurato in termini di welfare totale del sistema economico.

<sup>4</sup>Si veda ad esempio Bisias et al., 2012 per una rassegna sulle diverse proposte di quantificazione del rischio sistemico dal punto di vista del regolatore (fini di *policymaking* e *supervision*).

<sup>5</sup>Una distinzione diversa da quella qui proposta basata sulla natura (disponibilità) dell'informazione utilizzata a priori nella specificazione dei modelli e a posteriori nelle applicazioni proposte sarebbe stata altrettanto significativa. Si vedano ad esempio il già citato lavoro di Poledna et al., 2015, in cui vengono utilizzati dati riservati relativi al mercato interbancario messicano, e Boss, Elsinger et al., 2004, che studia invece la struttura di rete del mercato interbancario austriaco.

<sup>6</sup>Si veda Benoit et al., 2017 per una rassegna basata sul più completa, sebbene non aggiornata, di quella qui proposta.

# Capitolo 1

## Dipendenza di coda

La dipendenza di coda è stata utilizzata nell'analisi economica della trasmissione degli shock per tenere conto di un aspetto particolare osservato empiricamente: sono le code - e non le parti centrali - delle distribuzioni delle variabili finanziarie d'interesse (tipicamente rendimenti) ad evidenziare legami tra loro, soprattutto nei momenti di turbolenza dei mercati.

Ad esempio, [Corsi et al., 2018](#) utilizzano l'approccio proposto in [Hong et al., 2009](#) per costruire un modello che permetta di individuare - idealmente di anticipare - il fenomeno cd. di *flight-to-quality*, ossia della fuga, durante tempi di crisi, del capitale da strumenti ad alto rischio a strumenti a basso rischio. [Jeong et al., 2012](#) e [Song e Taamouti, 2021](#) propongono due test non parametrici per la verifica di causalità per i quantili della distribuzione condizionata di una variabile aleatoria, estendendo dunque ai quantili la tradizionale nozione di causalità di Granger.

In questa sezione si presentano i principali risultati riguardanti la regressione quantilica e la sua generalizzazione LASSO.

### 1.1 Regressione quantilica

La regressione quantilica, introdotta in [Koenker e Bassett, 1978](#), nasce per estendere la regressione lineare tradizionale, passando dallo studio della media a quello dei quantili della distribuzione condizionata della variabile risposta.

Il materiale seguente è tratto principalmente da [Koenker, 2005](#), a cui si rimanda per le dimostrazioni dei risultati e approfondimenti.

### 1.1.1 Specificazione

Data una variabile aleatoria  $Y$ , si definisce quantile di ordine (o livello)  $\alpha$  di  $Y$ , con  $\alpha \in (0, 1)$  il valore  $y_\alpha$  tale che

$$y_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \inf \{y \in S_Y \text{ t. c. } F(y) \geq \alpha\}, \quad (1.1)$$

dove  $F(y)$  è la funzione di ripartizione di  $Y$  e  $S_Y$  è il suo supporto.

L'idea alla base della regressione quantilica deriva dall'osservazione per cui la ricerca di un quantile può essere trasformata da un problema di ordinamento a un problema di ottimizzazione.

Dato un campione  $y_1, \dots, y_n$ , il quantile di ordine  $\alpha$  può essere stimato mediante il quantile empirico di ordine  $\alpha$ , definito come l'elemento in posizione  $n\alpha$  del campione ordinato  $y_{(1)}, \dots, y_{(n)}$ , se  $n\alpha$  è un intero, mentre se  $n\alpha$  non è intero, si considera tipicamente l'elemento del campione ordinato in posizione  $\lceil n\alpha \rceil$ , il più piccolo intero maggiore di  $n\alpha$ , o una media dei valori in posizione  $\lfloor n\alpha \rfloor$ , il più grande intero minore di  $n\alpha$ , e  $\lceil n\alpha \rceil$ .

Ma il quantile empirico di ordine  $\alpha$  può essere ottenuto anche come soluzione di un particolare problema di ottimizzazione. Data la funzione  $\rho_\alpha(u)$  (detta *check* o *tick loss function*), con  $\alpha \in (0, 1)$ , definita come

$$\rho_\alpha(u) = u(\alpha - I(u < 0)) = \begin{cases} u\alpha & \text{se } u > 0, \\ u(\alpha - 1) & \text{se } u < 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

consideriamo il seguente problema di ottimizzazione

$$\min_{\xi \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [\rho_\alpha(X - \xi)]. \quad (1.3)$$

La funzione da minimizzare può essere scritta come

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\rho_\alpha(X - \xi)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \xi)(\alpha - I(x < \xi))dF_X(x) \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \xi)dF_X(x) - \int_{-\infty}^{\xi} (x - \xi)dF_X(x)\end{aligned}$$

e, differenziando rispetto a  $\xi$  e ponendo la derivata prima uguale a 0, si ha che

$$-\alpha + F_X(\xi) \equiv 0, \quad (1.4)$$

da cui  $\hat{\xi} = F_X^{-1}(\alpha)$ , ossia il valore che minimizza la quantità  $\mathbb{E} [\rho_\alpha(X - \xi)]$  è il quantile di ordine  $\alpha$  di  $X$ .<sup>1</sup>

Il corrispondente empirico del problema (1.3), ottenuto sostituendo alla vera funzione di ripartizione di  $X$  la funzione di ripartizione empirica di un campione  $(X_1, \dots, X_n)$ , ossia  $F_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x)$ , è

$$\min_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(X_i - \xi) \quad (1.5)$$

e ha come soluzione  $\hat{\xi}_\alpha$ , quantile empirico di ordine  $\alpha$  di  $(X_1, \dots, X_n)$ . Pertanto, si è trasformato il reperimento di un quantile è stato trasformato da un problema di ordinamento ad uno di ottimizzazione.

In un contesto di regressione quantilica, interessa studiare la relazione che esiste tra il quantile condizionato di ordine  $\alpha$  della variabile risposta e un insieme di covariate. Analogamente a quanto accade nel modello di regressione lineare, se il quantile empirico di ordine  $\alpha$  è soluzione del problema (1.5), allora qualora interessi studiare il quantile condizionato di ordine  $\alpha$  di una variabile  $Y_i$  date  $p$  covariate  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$  e assumendo che tale quantile sia una funzione lineare delle covariate, ossia  $Q_\alpha(y_i|x_i) = x_i' \beta_\alpha$ , con  $\beta_\alpha \in \mathbb{R}^p$ , è naturale stimare i parametri di

---

<sup>1</sup>In generale, non è detto che esista un unico valore di  $\xi$  che minimizza la perdita attesa; nel caso in cui l'insieme  $\{\xi \text{ t. c. } F_X(\xi) = \alpha\}$  abbia cardinalità maggiore di 1, se ne considera l'elemento più piccolo.

regressione come

$$\hat{\beta}_\alpha = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - x_i' \beta), \quad (1.6)$$

dove è messa in evidenza la possibile dipendenza dello stimatore  $\hat{\beta}_\alpha$  dal livello  $\alpha$  del quantile d'interesse. La stima del quantile condizionato di ordine  $\alpha$  diventa dunque

$$\hat{Q}_\alpha(y_i | x_i) = x_i' \hat{\beta}_\alpha \quad (1.7)$$

e al variare di  $\alpha \in (0, 1)$  si otterrà una famiglia di curve che descrivono la distribuzione condizionata della variabile risposta. Pertanto, si ha un'immagine più completa della distribuzione condizionata della variabile risposta rispetto a quella fornita dal modello di regressione lineare.

Vediamo ora un semplice esempio di relazione identificabile mediante regressione lineare quantilica, ma non tramite regressione lineare in media.

**Esempio 1.1** Sia  $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$  un processo stocastico la cui dinamica è definita dall'equazione

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + (\delta X_{t-1})^{1/2} \varepsilon_t,$$

con  $\delta \geq 0$ ,  $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$  processo tale che  $\mathbb{E}[X_t] = \mu_X, \forall t$ ,  $V(X_t) = \sigma_X, \forall t$  e  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0; 1), \forall t$ .

Dunque, la distribuzione condizionata di  $Y_t$  è

$$Y_t | I_{t-1} \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 Y_{t-1}, \delta X_{t-1}),$$

dove il condizionamento si riferisce all'intera storia passata dei processi  $X_t$  e  $Y_t$ . Pertanto, non esiste una relazione in media tra le due variabili di interesse: infatti  $\mathbb{E}[Y_t | I_{t-1}] = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1}$  non dipende da  $X_t$ . Invece, se consideriamo il quantile di livello  $\alpha \in (0, 1)$  della distribuzione condizionata di  $Y_t$ , ossia

$$Q_\alpha(Y_t | I_{t-1}) = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + (\delta X_{t-1})^{1/2} \Phi^{-1}(\alpha),$$

con  $\Phi(\cdot)$  funzione di ripartizione della distribuzione normale standard, notiamo che questo dipende da  $X_{t-1}$ , dunque esiste una relazione tra il quantile della di-

sistribuzione condizionata di  $Y_{t-1}$  e il processo  $X_t$  che non verrebbe rilevata da un modello di regressione lineare. ▲

### Stima del modello di regressione quantilica lineare

Il problema di ottimizzazione (1.6) non ammette una soluzione in forma chiusa e va quindi risolto numericamente. Si può verificare (abbastanza facilmente) che la funzione obiettivo  $L(\beta) = \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - \beta'x_i)$  è continua, lineare a tratti e differenziabile ovunque, tranne nei punti in cui i residui  $y_i - x_i'\beta$  sono pari a 0. Inoltre, il problema di stima (1.6) può essere riformulato come problema di ottimizzazione vincolata, con funzione obiettivo e vincoli entrambi lineari. Pertanto, la minimizzazione di (1.6) è un problema di ottimizzazione lineare e può essere risolto mediante algoritmi di programmazione lineare, quali il metodo del simplesso o il metodo dei punti interni, computazionalmente più efficiente del primo.

### Proprietà dello stimatore $\hat{\beta}_\alpha$

Lo stimatore (1.6) gode di alcune utili proprietà. Indicate con  $\hat{\beta}_\alpha(y, X)$  le stime dei parametri ottenute dalle osservazioni  $(y, X)$  per un dato livello  $\alpha$ , valgono le seguenti proprietà dette di equivarianza

- (i) (invarianza di scala I)  $\hat{\beta}_\alpha(ay, X) = a\hat{\beta}_\alpha(y, X)$ ,  $\forall a > 0$ ,
- (ii) (invarianza di scala II)  $\hat{\beta}_\alpha(-ay, X) = -a\hat{\beta}_{1-\alpha}(y, X)$ ,  $\forall a > 0$ ,
- (iii) (invarianza di regressione)  $\hat{\beta}_\alpha(y + X\gamma, X) = \hat{\beta}_\alpha(y, X) + \gamma$ ,  $\forall \gamma \in \mathbb{R}^p$ ,
- (iv) (invarianza per riparametrizzazioni di  $X$ )  $\hat{\beta}_\alpha(y, XA) = A^{-1}\hat{\beta}_\alpha(y, X)$  con  $A$  matrice invertibile di dimensione  $p \times p$ .

Di tali proprietà gode, come facilmente si verifica, anche lo stimatore dei minimi quadrati. Vi è però un'ulteriore proprietà di equivarianza di cui gode lo stimatore (1.6), ma non quello dei minimi quadrati: l'equivarianza rispetto a trasformazioni monotone. Sia  $h(\cdot); \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione monotona non decrescente; allora, data una variabile aleatoria  $Y$  si ha che

$$\mathcal{Q}_\alpha(h(Y)) = h(\mathcal{Q}_\alpha(Y)), \quad (1.8)$$

ossia i quantili della trasformazione  $h(Y)$  sono semplicemente i quantili trasformati della variabile  $Y$ .<sup>2</sup> Tale proprietà deriva dalla semplice osservazione

$$\alpha = \mathbb{P}(Y \leq \mathcal{Q}_\alpha(Y)) = \mathbb{P}(h(Y) \leq h(\mathcal{Q}_\alpha(Y))), \quad (1.10)$$

d cui segue che  $h(\mathcal{Q}_\alpha(Y))$  è il quantile di ordine  $\alpha$  di  $h(Y)$ , ossia  $\mathcal{Q}_\alpha(h(Y)) = h(\mathcal{Q}_\alpha(Y))$ . Pertanto, è possibile stimare i coefficienti di regressione a partire da una data variabile ed ottenere i quantili di una sua qualsiasi trasformazione monotona non-decrescente senza bisogno di stimare nuovamente i parametri.

Questa proprietà ha un'importante conseguenza anche per quanto riguarda l'interpretazione dei parametri del modello. In generale,  $\beta_{\alpha,j}$  mantiene la stessa interpretazione che ha nel modello di regressione lineare poiché anche nel contesto della regressione quantilica lineare si ha che

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_\alpha(y_i|x_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial x'_i \beta_\alpha}{\partial x^j} = \beta_{\alpha,j}, \quad (1.11)$$

dove  $x^j$  indica la  $j$ -esima covariata di  $x_i$ . Dunque a fronte di un incremento unitario della covariata  $x^j$  ci si attende una variazione nel quantile della variabile risposta pari a  $\beta_{\alpha,j}$ .

Qualora invece si sia specificato un modello di regressione quantilica per una trasformazione monotona della variabile originaria, ossia  $\mathcal{Q}_\alpha(h(y_i)|x_i) = x'_i \beta_\alpha$ , è possibile quantificare l'effetto sul quantile della variabile originaria  $y_i$  come

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_\alpha(y_i|x_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial h^{-1}(x'_i \beta_\alpha)}{\partial x^j}. \quad (1.12)$$

Tale relazione è conseguenza immediata di (1.8).

---

<sup>2</sup>In generale, per la media riesce che (si pensi alla disuguaglianza di Jensen quando  $h$  è convessa)

$$\mathbb{E}[h(Y)] \neq h(\mathbb{E}[Y]), \quad (1.9)$$

se non in casi particolari, ad esempio  $h(Y) = aY + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , trasformazione affine di  $Y$ .



### *Quantile crossing*

Un problema della stima indipendente di  $m$  quantili della distribuzione condizionata della variabile risposta è il cosiddetto *quantile crossing*, ossia la possibilità che, per un dato valore delle covariate, le curve stimate dei quantili si intersechino, violando così la monotonia della funzione quantile.

Formalmente, dati due livelli  $\tau_i, \tau_j$  tali che  $\tau_i, \tau_j \in (0, 1)$  e  $\tau_i < \tau_j$ , la teoria assicura ed impone che, fissato  $x \in \mathbb{R}^p$ ,

$$\mathcal{Q}_{\tau_i}(Y|x) \leq \mathcal{Q}_{\tau_j}(Y|x), \quad (1.13)$$

mentre nella pratica può accadere che

$$\hat{\mathcal{Q}}_{\tau_i}(y_i|x_i) > \hat{\mathcal{Q}}_{\tau_j}(y_i|x_i). \quad (1.14)$$

Tipicamente, tale violazione è osservata in regioni dello spazio delle covariate con poche osservazioni.<sup>3</sup> Inoltre, è possibile dimostrare il seguente risultato sulla monotonia (rispetto a  $\tau$ ) di  $\mathcal{Q}_{\tau}(y|x)$  in corrispondenza della parte centrale della distribuzione delle covariate

$$\mathcal{Q}_{\tau_2}(y|\bar{x}) = \bar{x}'\hat{\beta}_{\tau_2} \geq \mathcal{Q}_{\tau_1}(y|\bar{x}) = \bar{x}'\hat{\beta}_{\tau_1}, \quad \forall \tau_2 > \tau_1, \quad (1.15)$$

dove  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$  è il centroide di  $X$ .

Le violazioni della monotonia di  $\hat{\mathcal{Q}}_{\tau}(y|x_i)$  sono state proposte anche come strumento diagnostico dell'adeguatezza del modello: qualora si osservassero tali violazioni in corrispondenza di diversi valori delle covariate, allora queste sarebbero da interpretare come evidenza di un'errata specificazione degli effetti delle covariate.

### 1.1.2 Inferenza

Sono state proposte diverse procedure inferenziali per la regressione quantilica, sia nel contesto della teoria per campioni finiti che in quello della teoria asintotica.

---

<sup>3</sup>Nelle applicazioni in finanza non di rado l'interesse è sulle code delle distribuzioni delle variabili oggetto di studio, pertanto il problema di *quantile crossing* va tenuto in considerazione.

In questo paragrafo vengono presentati i principali risultati riguardanti solamente quest'ultima.

### Proprietà e distribuzione asintotica dello stimatore (1.6)

Un primo, importante risultato asintotico degli stimatori considerati riguarda la loro consistenza. Sia  $\hat{\xi}_\alpha$  lo stimatore del quantile  $\xi_\alpha$  di ordine  $\alpha$  di una variabile  $Y$  ottenuto a partire da un campione i.i.d.  $y_1, \dots, y_n$ , ossia

$$\hat{\xi}_\alpha = \arg \min_{\xi \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - \xi), \quad (1.16)$$

dunque  $\hat{\xi}_\alpha$  è il quantile empirico di ordine  $\alpha$ ; se il modello per  $\hat{\xi}_\alpha$  è identificabile, ossia il quantile  $\xi_\alpha$  è unico, e sotto deboli condizioni di regolarità (si veda [2005](#), paragrafo 4.1.1),  $\hat{\xi}_\alpha$  è consistente, cioè  $\hat{\xi}_\alpha \xrightarrow{P} \xi_\alpha$  per  $n \rightarrow \infty$ . Per quanto riguarda lo stimatore (1.6), questo è consistente, ossia  $\hat{\beta}_\alpha \xrightarrow{P} \beta$  per  $n \rightarrow \infty$ , se il modello è correttamente specificato, cioè

$$\mathcal{Q}_\alpha(Y_i|x_i) = \beta_1 + \beta_2 x_{i,2} + \dots + \beta_p x_{i,p},$$

e sotto ulteriori, più forti condizioni di regolarità (si veda [2005](#), paragrafo 4.1.2).

Passiamo ora allo studio delle distribuzioni asintotiche e consideriamo anzitutto il caso più semplice, ovvero quello in cui sia d'interesse studiare il comportamento asintotico dello stimatore quantile empirico (1.16). Assumendo che  $Y$  abbia funzione di ripartizione  $F$ , dunque  $\xi_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ , e densità  $f$  tale che  $f(F^{-1}(\alpha)) > 0$ , si può dimostrare che

$$\sqrt{n} (\hat{\xi}_\alpha - \xi_\alpha) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0; \omega^2), \quad (1.17)$$

dove  $\omega^2 = \alpha(1 - \alpha)/f^2(F^{-1}(\alpha))$ . Pertanto, la precisione dello stimatore  $\hat{\xi}_\alpha$  varia nel seguente modo: aumenta al diminuire di  $\alpha(1 - \alpha)$  e aumenta con l'aumentare di  $f(\xi_\alpha)$ . Siccome il secondo effetto, legato alla densità, tende a dominare il primo, legato al livello del quantile,  $\hat{\xi}_\alpha$  è (relativamente) meno preciso nelle zone a minor densità, ossia nelle code della distribuzione  $F$ .

Se consideriamo invece la distribuzione congiunta di  $M$  stimatori del tipo  $\hat{\xi}_{\alpha_i}$ ,

posto  $\hat{\zeta}_n = (\hat{\xi}_{\alpha_1}, \dots, \hat{\xi}_{\alpha_M})'$  e  $\zeta = (\xi_{\alpha_1}, \dots, \xi_{\alpha_M})'$ , si ha che

$$\sqrt{n}(\hat{\zeta}_n - \zeta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_M(0; \Omega), \quad (1.18)$$

con  $\Omega = (\omega_{i,j})$  matrice  $M \times M$  tale che

$$\omega_{i,j} = (\min(\alpha_i, \alpha_j) - \alpha_i \alpha_j) / (f(F^{-1}(\alpha_i))f(F^{-1}(\alpha_j))). \quad (1.19)$$

Consideriamo ora l'introduzione di covariate nel modello di regressione quantilica lineare più semplice, ossia quello in cui si assume che  $\mathcal{Q}_\alpha(y_i|x_i) = x_i' \beta_\alpha$  e che i termini di errore  $u_i$  siano indipendenti e identicamente distribuiti, ossia

$$y_i = x_i' \beta + u_i, \quad (1.20)$$

e supponiamo che siano di interesse le stime di  $M$  quantili  $\mathcal{Q}_{\alpha_1}(y_i|x_i), \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_M}(y_i|x_i)$ . Indicate con  $F$  e  $f$ , rispettivamente, le comuni funzioni di ripartizione e di densità degli errori  $u_i$  e assumendo che  $f(F^{-1}(\alpha_i)) > 0$ , per  $i = 1, \dots, M$  e che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} \sum_1^n x_i x_i' = Q_0$  matrice  $p \times p$  definita positiva, il vettore  $\hat{\zeta}_n = (\hat{\beta}'_{\alpha_1}, \dots, \hat{\beta}'_{\alpha_M})'$ , di dimensione  $Mp \times 1$ , ha distribuzione asintotica

$$\sqrt{n}(\hat{\zeta}_n - \zeta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{Mp}(0; \Omega \otimes Q_0^{-1}), \quad (1.21)$$

dove  $\zeta = (\beta'_{\alpha_1}, \dots, \beta'_{\alpha_M})'$ ,  $\otimes$  indica il prodotto di Kronecker tra due matrici<sup>4</sup> e  $\Omega$  ha elementi come specificato in (1.19).

Qualora invece si rilassi l'ipotesi di indipendenza e identica distribuzione, fissato un livello  $\alpha$  d'interesse, si può dimostrare il seguente risultato sulla distribuzione asintotica dello stimatore  $\hat{\beta}_\alpha$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_\alpha - \beta_\alpha) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_p(0; \alpha(1-\alpha)H_n^{-1}J_nH_n^{-1}), \quad (1.22)$$

---

<sup>4</sup>Data una matrice  $A = (a_{i,j})$  di dimensione  $n \times p$  e una matrice  $B$  di dimensione  $m \times k$ , il prodotto di Kronecker  $A \otimes B$  tra le due matrici è una matrice di dimensione  $nm \times kp$  definita come

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1p}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{np}B \end{pmatrix}.$$

dove

$$J_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i', \quad (1.23)$$

e

$$H_n = H_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i' f_i(F_i^{-1}(\alpha)), \quad (1.24)$$

dove  $F_i$  e  $f_i$  indicano, rispettivamente, la funzione di ripartizione e di densità condizionate di  $y_i$ . Nel caso sia d'interesse la distribuzione asintotica congiunta degli stimatori per diversi quantili, posto  $\hat{\zeta}_n = (\hat{\beta}'_{\alpha_1}, \dots, \hat{\beta}'_{\alpha_M})'$  e  $\zeta = (\beta'_{\alpha_1}, \dots, \beta'_{\alpha_M})'$  si ha che

$$\sqrt{n}(\hat{\zeta}_n - \zeta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{Mp}(0; C), \quad (1.25)$$

dove la matrice  $C$  di covarianza asintotica, di dimensione  $Mp \times Mp$ , ha una struttura a blocchi del tipo

$$\text{Cov}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\alpha_i} - \beta_{\alpha_i}), \sqrt{n}(\hat{\beta}_{\alpha_j} - \beta_{\alpha_j})) = (\min(\alpha_i, \alpha_j) - \alpha_i \alpha_j) H_n(\alpha_i)^{-1} J_n H_n(\alpha_i)^{-1}, \quad (1.26)$$

per  $i, j = 1, \dots, M$ , con le matrici  $J_n$  e  $H_n$  definite, rispettivamente, in (1.23) e (1.24).

In tutti i casi considerati, la matrice di covarianza asintotica dipende dalla ignota densità  $f$  (o  $f_i$  in generale) degli errori, ed in particolare dalla funzione

$$s(\alpha) = \frac{1}{f(F^{-1}(\alpha))}, \quad (1.27)$$

nota come *sparsity function*. Come già osservato, la relazione che lega la precisione degli stimatori considerati e  $s(\alpha)$  è la seguente: se il quantile d'interesse è in una regione a bassa densità, dunque  $s(\alpha)$  è (relativamente) grande, la precisione è (relativamente) piccola, mentre nelle regioni ricche di osservazioni  $s(\alpha)$  è minore e la precisione maggiore.

Pertanto, per stimare la precisione degli stimatori è necessario stimare  $s(\alpha)$ . Sono state proposte diverse alternative per la stima di  $s(\alpha)$ , sia nell'ipotesi di errori i.i.d che nel caso più generale in cui sia la densità che la funzione di ripartizione

dipendono da  $i^5$ . Nel primo caso, osservato che  $s(\alpha)$  altro non è che la derivata della funzione quantile  $F^{-1}(t)$ , ossia

$$\frac{d}{dt}F^{-1}(t) = s(t), \quad (1.28)$$

una soluzione naturale consiste nel considerare uno stimatore basato sulle differenze prime di una stima  $\hat{F}^{-1}(t)$  di  $F^{-1}(t)$ , ossia

$$\hat{s}_n(t) = \frac{\hat{F}_n^{-1}(t + h_n) - \hat{F}_n^{-1}(t - h_n)}{2h_n}, \quad (1.29)$$

noto come stimatore di Siddiqui, dove l'ampiezza di banda  $h_n$  è tale che  $h_n \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Nel secondo caso invece, ricordato che se il modello di regressione quantilica lineare  $\mathcal{Q}_\alpha(y_i|x_i) = x_i'\beta_\alpha$  è correttamente specificato allora  $\hat{\beta}_\alpha$  è uno stimatore consistente di  $\beta_\alpha$  qualunque sia  $\alpha$ , possiamo stimare  $s_i(\alpha)$  sostituendo a  $\hat{F}_n^{-1}(t \pm h_n)$  in (1.29) la forma per il quantile di ordine  $t \pm h_n$  implicata dal modello, ottenendo

$$\hat{s}_{i,n}(t) = \frac{x_i'\hat{\beta}_{t+h_n} - x_i'\hat{\beta}_{t-h_n}}{2h_n} \quad (1.30)$$

$$= \frac{x_i'(\hat{\beta}_{t+h_n} - \hat{\beta}_{t-h_n})}{2h_n}, \quad (1.31)$$

noto come stimatore di Hendricks-Koenker.<sup>6</sup>

In realtà, la stima della *sparsity function* non è strettamente necessaria per la stima delle matrici di covarianza asintotiche degli stimatori d'interesse: infatti, sono disponibili e preferite nella pratica soluzioni alternative. In particolare, consideriamo ora la stima diretta delle matrici di covarianza asintotiche attraverso

---

<sup>5</sup>Pertanto, anche la *sparsity function* dipenderà da  $i$ , diventando

$$s_i(\alpha) = \frac{1}{f_i(F_i^{-1}(\alpha))}.$$

<sup>6</sup>Si osservi che nella pratica tale stimatore può non essere ben definito: infatti per il problema del *quantile crossing* può accadere che  $x_i'\hat{\beta}_{t+h_n} < x_i'\hat{\beta}_{t-h_n}$ , e dunque  $\hat{s}_{i,n}(t) < 0$ ; ma ciò non è ammissibile poiché la quantità  $s_i(t)$  stimata è sempre non negativa essendo la derivata prima della funzione  $F_i^{-1}(t)$ , non decrescente in  $(0, 1)$  per definizione.

metodi di tipo *bootstrap*.

Si presentano qui le due soluzioni *bootstrap* più semplici, ma comunque efficaci, e soltanto per il caso dello stimatore dei coefficienti di regressione quantilica, essendo immediato l'adattamento al contesto marginale. Una prima variante è quella del *residual bootstrap*, in cui, data la stima  $\hat{\beta}_\alpha$  ottenuta dal campione completo  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, n}$ , ossia

$$\hat{\beta}_\alpha = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - x_i' \beta),$$

si calcolano i corrispondenti residui di regressione  $e_i = y_i - x_i \hat{\beta}_\alpha$  e il  $b$ -esimo, per  $b = 1, 2, \dots, B$ , campione *bootstrap*  $\{(x_{b_i}, y_{b_i}^*)\}_{i=1, 2, \dots, k}$  si ottiene estraendo con reinserimento  $k$  valori  $e_{b_1}, \dots, e_{b_k}$  e ponendo  $y_{b_i}^* = x_{b_i}' \hat{\beta}_\alpha + e_{b_i}$ . La  $b$ -esima realizzazione *bootstrap* dello stimatore sarà pertanto

$$\hat{\beta}_{\alpha}^{*,b} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^k \rho_\alpha(y_{b_i}^* - x_{b_i}' \beta).$$

Questo tipo di *bootstrap* presenta un limite: presuppone che le osservazioni siano i.i.d., ipotesi poco verosimile nella pratica. La seconda soluzione considerata, il  $(x, y)$  *bootstrap*, è adatta proprio alle situazioni in cui le osservazioni sono indipendenti, ma non identicamente distribuite. In tal caso, il  $b$ -esimo campione *bootstrap*  $\{(x_{b_i}^*, y_{b_i}^*)\}_{i=1, 2, \dots, k}$  si ottiene estraendo con ripetizione  $k$  coppie  $(x_i^*, y_i^*)$  dal campione di partenza  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, n}$  e la  $b$ -esima realizzazione *bootstrap* dello stimatore sarà

$$\hat{\beta}_{\alpha}^{*,b} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^k \rho_\alpha(y_{b_i}^* - x_{b_i}^{*'} \beta).$$

Infine, date le  $B$  stime *bootstrap*  $\{\hat{\beta}_{\alpha}^{*,b}, b = 1, 2, \dots, B\}$  è possibile calcolare la stima empirica della matrice di covarianza asintotica di  $\hat{\beta}_\alpha$  come

$$\hat{\text{Cov}}(\hat{\beta}_{\alpha,i}, \hat{\beta}_{\alpha,j}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (\hat{\beta}_{\alpha,i}^{*,b} - \bar{\hat{\beta}}_{\alpha,i}^*)(\hat{\beta}_{\alpha,j}^{*,b} - \bar{\hat{\beta}}_{\alpha,j}^*), \quad (1.32)$$

con  $\bar{\hat{\beta}}_{\alpha,i}^* = B^{-1} \sum_{b=1}^B \hat{\beta}_{\alpha,i}^{*,b}$  e dove  $\hat{\beta}_{\alpha,i}$  ( $\hat{\beta}_{\alpha,i}^{*,b}$ ) indica l' $i$ -esima componente di  $\hat{\beta}_\alpha$  (di

$\hat{\beta}_{\alpha}^{*,b}$ ).<sup>7</sup>

Qualora sia d'interesse la stima della matrice di covarianza asintotica nel contesto di stima congiunta di quantili di più livelli, si procede nello stesso modo descritto sopra avendo cura di stimare, ad ogni replicazione *bootstrap*,  $M$  regressioni quantiliche, una per ciascun livello  $\alpha_1, \dots, \alpha_M$  d'interesse. Date le  $M$  serie di  $B$  stime *bootstrap*  $\{\hat{\beta}_{\alpha_m}^{*,b}, b = 1, 2, \dots, B\}_{m=1,2,\dots,M}$  è possibile stimare la matrice di covarianza asintotica tra  $\hat{\beta}_{\alpha_i}$  e  $\hat{\beta}_{\alpha_j}$  come

$$\hat{\text{Cov}}(\hat{\beta}_{\alpha_i}, \hat{\beta}_{\alpha_j}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (\hat{\beta}_{\alpha_i}^{*,b} - \bar{\hat{\beta}}_{\alpha_i}^*)(\hat{\beta}_{\alpha_j}^{*,b} - \bar{\hat{\beta}}_{\alpha_j}^*), \quad (1.33)$$

con  $\bar{\hat{\beta}}_{\alpha_i}^* = B^{-1} \sum_{b=1}^B \hat{\beta}_{\alpha_i}^{*,b}$ .

### Problemi di verifica d'ipotesi

Noti tutti gli ingredienti della distribuzione asintotica degli stimatori, è possibile procedere alla costruzione di test sui parametri di regressione.

Anche in questo contesto sono disponibili diverse alternative, ma si considera qui quella più semplice e computazionalmente più efficiente: i test di Wald per restrizioni lineari sui parametri. In generale, dati  $M$  quantili d'interesse  $\alpha_1, \dots, \alpha_M$  e indicato con  $\zeta = (\beta'_{\alpha_1}, \dots, \beta'_{\alpha_M})'$  il vettore  $Mp \times 1$  dei parametri di regressione, consideriamo l'ipotesi nulla

$$H_0 : R\zeta = r, \quad (1.34)$$

dove  $R$  è una matrice  $k \times Mp$  e  $r$  è un vettore  $k \times 1$ , e la statistica test

$$T_n = n(R\hat{\zeta}_n - r)'(RCR')^{-1}(R\hat{\zeta}_n - r), \quad (1.35)$$

dove  $C$  è la matrice di covarianza asintotica di  $\sqrt{n}(\hat{\zeta}_n - \zeta)$  con generico blocco come visto in (1.26). Si verifica facilmente che la statistica test  $T_n$  ha distribuzione asintotica nulla  $\chi_q^2$ , con  $q$  rango della matrice dei vincoli  $R$  (ossia  $q = k$  numero di restrizioni lineari imposte).

---

<sup>7</sup>Esistono importanti risultati di ottimalità riguardo la scelta dei due parametri degli schemi *bootstrap* considerati: il numero  $B$  di replicazioni e la numerosità  $k$  dei campioni *bootstrap*. Si vedano i riferimenti forniti in [2005](#), sezione 3.9.

In particolare, due problematiche rilevanti possono essere formalizzate come ipotesi lineari: la prima, comune nel contesto dei modelli parametrici, riguarda la verifica della significatività dei coefficienti; la seconda, propria della regressione quantilica, concerne la valutazione dell'adeguatezza del modello.

Per quanto riguarda la valutazione della significatività dei parametri, si supponga fissato un livello  $\alpha$  del quantile d'interesse. Allora è possibile studiare la significatività dell' $i$ -esima componente  $\beta_{\alpha,i}$  di  $\beta_\alpha$  ponendo in (1.34) l' $i$ -esimo elemento di  $R$ , vettore  $1 \times p$ , uguale ad 1 e i rimanenti uguali a 0, ossia  $R_j = 1$  per  $j = i$ ,  $R_j = 0$  altrimenti, e  $r = 0$ . Dunque la statistica test avrà forma

$$T_n = \frac{n\hat{\beta}_{\alpha,i}^2}{\alpha(1-\alpha)RH_n^{-1}J_nH_n^{-1}R'} \quad (1.36)$$

e distribuzione asintotica nulla  $\chi_1^2$ . Nel caso in cui sia d'interesse valutare congiuntamente la significatività di tutti i parametri, intercetta esclusa, basterà porre

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

matrice di dimensione  $(p-1) \times p$ , e  $r = 0_{p-1}$  vettore di 0 di dimensione  $(p-1) \times 1$ . La statistica test sarà

$$T_n = n(R\hat{\beta}_\alpha)' (R [\alpha(1-\alpha)H_n^{-1}J_nH_n^{-1}] R')^{-1} (R\hat{\beta}_\alpha), \quad (1.38)$$

con distribuzione asintotica  $\chi_{p-1}^2$ . Situazioni intermedie in cui si voglia valutare la significatività di blocchi di coefficienti sono di analoga risoluzione.

Passiamo ora al secondo problema. La dipendenza dello stimatore  $\hat{\beta}_\alpha$  dal livello  $\alpha$  evidenziata in (1.6) è, in generale, possibile, ma non necessaria. Solamente l'intercetta, includendo il quantile del termine d'errore  $\mathcal{Q}_\alpha(\varepsilon_i)$ , è quasi sempre dipendente dal livello  $\alpha$ . Un classico esempio in cui gli stimatori  $\hat{\beta}_{\alpha_i}$  variano con i livelli  $\alpha_1, \dots, \alpha_M$  per il solo effetto dell'intercetta è il modello di regressione lineare



tradizionale in cui si assume

$$Y_i = x_i' \beta + \varepsilon_i, \quad (1.39)$$

con  $\varepsilon_i$  indipendenti e con comune funzione di ripartizione  $F_\varepsilon$ . In tal caso infatti si ha che

$$\mathcal{Q}_{\alpha_i}(Y_i|x_i) = \beta_1 + \beta_2 x_{i,2} + \cdots + \beta_p x_{i,p} + F_\varepsilon^{-1}(\alpha_i) \quad (1.40)$$

e lo stimatore  $\hat{\beta}_{\alpha_i}$  converge in probabilità a  $(\beta_1 + F_\varepsilon^{-1}(\alpha_i), \beta_2, \dots, \beta_p)$ . Se la distribuzione degli errori è simmetrica attorno al valore atteso  $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ , allora lo stimatore  $\hat{\beta}_{0.5}$  converge in probabilità a  $\beta$ , ma è meno efficiente dello stimatore  $\hat{\beta}_{OLS}$  dei minimi quadrati (sotto l'ulteriore ipotesi che gli errori siano normali<sup>8</sup>).

Poiché le situazioni d'interesse sono quelle in cui lo stimatore  $\hat{\beta}_\alpha$  varia, non trivialmente mediante la sola intercetta, con  $\alpha$  - evidenziandosi in questi casi un'effettiva eterogeneità nei quantili della variabile risposta legata alle covariate - un test di verifica d'ipotesi sui coefficienti associati alle covariate del tipo

$$H_0 : \beta_{\alpha_1}^{(-1)} = \beta_{\alpha_2}^{(-1)} = \cdots = \beta_{\alpha_M}^{(-1)}, \quad (1.41)$$

dove l'apice  $(-1)$  indica la non inclusione dell'intercetta (convenzionalmente in prima posizione del vettore  $\beta_{\alpha_i}$ ), equivale a valutare l'opportunità della regressione quantilica: in caso di rifiuto dell'ipotesi nulla ha senso adottare un modello di regressione lineare quantilica. Tale test può essere espresso in forma lineare con matrice dei vincoli

$$R = \begin{pmatrix} 0_{p-1} & \mathbf{I}_{p-1} & 0_{p-1} & -\mathbf{I}_{p-1} & 0_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1} & \cdots & 0_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1} & 0_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1} \\ 0_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1} & 0_{p-1} & \mathbf{I}_{p-1} & 0_{p-1} & -\mathbf{I}_{p-1} & \cdots & 0_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1} & 0_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1} & 0_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1} & 0_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1} & \cdots & 0_{p-1} & \mathbf{I}_{p-1} & 0_{p-1} & -\mathbf{I}_{p-1} \end{pmatrix},$$

di dimensione  $(M-1)(p-1) \times Mp$ , dove  $\mathbf{0}_{p-1}$  matrice quadrata di dimensione  $p-1$  costituita solo da zeri,  $\mathbf{I}_{p-1}$  matrice identità di dimensione  $p-1$  e  $r = 0_{(M-1)(p-1) \times 1}$ .

---

<sup>8</sup>Senza ipotesi di normalità sulla distribuzione degli errori, nulla si può dire sulla maggior efficienza dello stimatore  $\hat{\beta}_{OLS}$ : questo risultato segue infatti dalla teoria di verosimiglianza, e non dal teorema di Gauss-Markov, il quale non si applica allo stimatore  $\hat{\beta}_{0.5}$  poiché non è lineare in  $Y_i$ .

La statistica test sarà

$$T_n = n(R\hat{\zeta}_n)'(RCR')^{-1}(R\hat{\zeta}_n), \quad (1.42)$$

con distribuzione asintotica  $\chi^2_{(M-1)(p-1)}$ .

In entrambi i casi presentati la statistica test  $T_n$  dipende dalla matrice di covarianza dello stimatore utilizzato: questa può facilmente essere stimata mediante i metodi presentati in precedenza.

### Indicatori di bontà di adattamento e selezione del modello

Infine, si pone il problema di reperire strumenti per valutare la bontà di adattamento di un modello di regressione quantilica e per la scelta tra modelli in competizione tra loro.

Koenker e Machado, 1999 hanno proposto un indicatore della bontà di adattamento, noto come pseudo- $R^2$ , che è il corrispondente naturale dell'usuale  $R^2$  nel contesto della regressione quantilica lineare. Sia  $\mathcal{Q}_\alpha(y_i|x_i) = x_i'\beta_\alpha$ , con  $\beta_\alpha \in \mathbb{R}^p$ , e supponiamo di partizionare il vettore dei parametri in due blocchi  $\beta_\alpha^1 \in \mathbb{R}^q$  e  $\beta_\alpha^2 \in \mathbb{R}^{p-q}$ , ossia

$$\mathcal{Q}_\alpha(y_i|x_i) = x_{i1}'\beta_\alpha^1 + x_{i2}'\beta_\alpha^2.$$

Siano inoltre

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_\alpha &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - x_i'\beta) \\ \hat{\beta}_\alpha^1 &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^q} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - x_{i1}'\beta) \end{aligned}$$

gli stimatori ottenuti, rispettivamente, nel modello completo e nel modello vincolato in cui  $\beta_\alpha^2 = 0_{p-q}$ . Lo pseudo- $R^2$  è definito come

$$\begin{aligned} R^2(\alpha) &\equiv 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - x_i'\hat{\beta}_\alpha)}{\sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - x_{i1}'\hat{\beta}_\alpha^1)} \\ &= \frac{\sum_{y_i \geq x_{i1}'\hat{\beta}_\alpha^1} \alpha(y_i - x_{i1}'\hat{\beta}_\alpha^1) + \sum_{y_i < x_{i1}'\hat{\beta}_\alpha^1} (\alpha - 1)(y_i - x_{i1}'\hat{\beta}_\alpha^1)}{\sum_{y_i \geq x_{i1}'\hat{\beta}_\alpha^1} \alpha(y_i - x_{i1}'\hat{\beta}_\alpha^1) + \sum_{y_i < x_{i1}'\hat{\beta}_\alpha^1} (\alpha - 1)(y_i - x_{i1}'\hat{\beta}_\alpha^1)}. \end{aligned}$$

Come nel caso dell' $R^2$ , anche  $R^2(\alpha) \in (0, 1)$  per costruzione e a valori vicini ad 1 corrisponde un buon adattamento del modello. Lo pseudo- $R^2$  misura la variazione relativa della funzione obiettivo della regressione quantilica nel passaggio dal modello vincolato, che svolge il ruolo di modello di riferimento, al modello completo. Tipicamente, il modello di riferimento è il modello nullo, ossia include solo l'intercetta: dunque  $\beta_\alpha^1 = \beta_{\alpha,1}$  e  $\beta_\alpha^2 = (\beta_{\alpha,2}, \dots, \beta_{\alpha,p})$ . La dipendenza da  $\alpha$  dell'indicatore sottolinea la sua natura di misura di adattamento locale, ossia relativa al quantile  $\alpha$  della distribuzione condizionata della variabile risposta.<sup>9</sup>

Per confrontare modelli non annidati, esistono anzitutto estensioni degli usuali criteri d'informazione alla regressione quantilica, tra cui si ricordano l'*Akaike Information Criterion* (AIC), definito come

$$\text{AIC}(j) = \log \hat{\sigma}_j + p_j, \quad (1.43)$$

e il *Bayesian* o *Schwarz Information Criterion* (BIC), definito come

$$\text{BIC}(j) = \log \hat{\sigma}_j + \frac{1}{2} p_j \log n, \quad (1.44)$$

dove la dipendenza da  $j$  indica che gli indicatori sono calcolati con riferimento al modello  $j$ -esimo,  $\hat{\sigma}_j = n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - \hat{y}_i^{(j)})$  è il valore assunto dalla funzione obiettivo in corrispondenza dei residui riscalato per  $n^{-1}$ ,  $\hat{y}_i^{(j)}$  è la previsione per  $\mathcal{Q}_\alpha(y_i|x_i)$  prodotta dal modello  $j$ -esimo e  $p_j$  indica il numero di parametri del  $j$ -esimo modello. Come accade nel caso del modello di regressione lineare l'AIC non è consistente, ossia, per  $n \rightarrow \infty$ , con probabilità positiva non seleziona il modello corretto.<sup>10</sup>

Inoltre, rimangono disponibili le soluzioni basate sulla convalida incrociata, dove una scelta usuale per la metrica di confronto è, non sorprendentemente, la funzione di perdita asimmetrica  $\rho_\alpha$ , ma sono disponibili anche sue versioni modificate più efficienti nell'identificazione del modello corretto (si veda ad esempio [Shin et al., 2022](#)).

---

<sup>9</sup>Ciò significa che la stessa specificazione del modello può avere adattamento diverso al variare di  $\alpha$ .

<sup>10</sup>In particolare, tende a sovrastimare la dimensione del modello.

## 1.2 Regressione quantilica penalizzata

Così come nella regressione tradizionale, anche nel contesto della regressione quantilica è disponibile un'altra soluzione per la selezione del modello: quella basata sui metodi di penalizzazione. In generale, tali metodi definiscono uno stimatore dei coefficienti di regressione come soluzione di un problema di ottimo vincolato, in cui alla funzione di perdita propria della regressione quantilica (1.6) viene aggiunta una componente di penalizzazione, considerando dunque il seguente stimatore penalizzato dei coefficienti di regressione

$$\hat{\beta}_\alpha^{\text{pen}}(\lambda) = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - x'_i \beta) + P_\lambda(\beta, \theta), \quad (1.45)$$

dove  $P_\lambda(\beta, \theta)$  indica la componente di penalizzazione sui coefficienti di regressione  $\beta$ ,  $\lambda \geq 0$  il parametro, tipicamente ad effetto moltiplicativo, di regolarizzazione e  $\theta$  un ulteriore parametro da cui la penalizzazione può dipendere.

La più semplice penalizzazione che permette di operare una selezione del modello è quella cosiddetta *LASSO* (*Least Absolute Shrinkage and Selector Operator*) o  $l^1$ , introdotta in per la regressione tradizionale in [Tibshirani, 1996](#), in cui la penalizzazione è posta uguale a

$$P_\lambda(\beta, \theta) = \lambda \|\beta - \theta\|_1, \quad (1.46)$$

dove  $\|\cdot\|_1$  indica la norma  $l^1$ , e pertanto lo stimatore  $\hat{\beta}_\alpha^{\text{lasso}}(\lambda)$  risulta definito come

$$\hat{\beta}_\alpha^{\text{lasso}}(\lambda) = \arg \min_{\substack{\beta_0 \in \mathbb{R} \\ \beta \in \mathbb{R}^p}} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(y_i - \beta_0 - x'_i \beta) + \lambda \|\beta - \theta\|_1, \quad (1.47)$$

in cui si è esplicitata la presenza dell'intercetta per sottolineare la sua assenza tra i parametri costretti. Il vettore  $\theta \in \mathbb{R}^p$  è il valore verso cui vengono costrette le stime e tipicamente  $\theta = 0_p$ .

La regressione quantilica penalizzata introdotta in [Belloni e Chernozhukov, 2011](#) è una tecnica standard per trattare i casi in cui il numero di regressori potenzialmente rilevanti è grande. In particolare, se  $p > n$  non è possibile stimare

un modello di regressione quantilica con le tecniche viste nella sottosezione 1.6 portano a stime imprecise e numericamente instabili.

L'utilizzo della regressione quantilica penalizzata nel contesto dell'analisi del rischio sistemico è stata adottata proprio per permettere di trattare lo studio di contesti complessi in termini di dimensionalità (si vedano ad esempio [Hautsch et al., 2014](#), [Hautsch et al., 2015](#) e [Betz et al., 2016](#)).

[van de Geer, 2008](#) studiano le proprietà dello stimatore LASSO (*Least*) tradizionale [Sherwood e Wang, 2016](#) forniscono un modello di regressione quantilica non lineare con penalizzazione LASSO

11

### 1.2.1 Una specificazione alternativa

La regressione quantilica con penalizzazione  $l_1$  risolve il problema di stima dei parametri di regressione nel modello risolvendo il seguente problema di ottimo

$$\hat{\beta}_\alpha^{\text{lasso}} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(Y_i - \beta' x_i) + \lambda \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{n} \sum_{k=1}^p \sigma_k |\beta_k| \quad (1.48)$$

dove  $\beta_0$  è l'intercetta (dunque  $x_{i,0} = 1, \forall i$ ) e  $\sigma_k$  è la deviazione standard di  $x_k$ .  $\lambda_i \geq 0$  è un parametro di penalizzazione che va fissato prima della stima e da cui dunque dipendono le variabili selezionate. In particolare, per  $\lambda = 0$  si torna al caso della regressione quantilica non penalizzata (1.6), per  $\lambda \rightarrow 0$  la componente

---

<sup>11</sup>Così come nella regressione in media, anche nella regressione quantilica la penalizzazione  $l^1$  non è l'unica scelta possibile: [Wu e Liu, 2009](#) dimostrano che sia una penalizzazione (non convessa) *SCAD* (*Smoothly Clipped Absolute Deviation*), ossia con  $P_\lambda(\beta, \theta) = \sum_k p_\lambda(\beta_k, \theta)$  tale che abbia derivata prima

$$\frac{d}{d\beta_k} p_\lambda(\beta_k, \theta) = \lambda \left[ I(\beta_k \leq \lambda) + \frac{(\theta\lambda - \beta_k)_+}{(\theta - 1)\lambda} I(\beta_k > \lambda) \right],$$

con  $\theta \in \mathbb{R}, \theta > 2$  e  $x_+ = \max(x, 0)$ , che LASSO adattivo, in cui nella penalizzazione (1.46) vengono introdotti dei pesi specifici per ciascun coefficiente, ossia

$$P_\lambda(\beta, \theta) = \lambda \sum_{k=1}^p \omega_k |\beta_k - \theta_k|,$$

con  $\omega_k > 0$ , per migliorare la procedura di selezione del set ottimo di regressori, conservano le proprietà oracolari tipiche del *LASSO*, ma producono direttamente stime non distorte.

di penalizzazione, mentre per  $\lambda \rightarrow +\infty$  (per valori di  $\lambda$  sufficientemente grandi) vengono escluse dal modello tutte le variabili).

Per selezionare  $\lambda$  sono state proposte diverse alternative. [Belloni e Chernozhukov, 2011](#) suggeriscono un approccio di simulazione: definita la variabile aleatoria

$$\Lambda = \tag{1.49}$$

si simula dalla sua distribuzione e si pone

$$\lambda = \tag{1.50}$$

L'ottimalità del valore  $\lambda$  così selezionato

### 1.2.2 Inferenza post-selezione

Le stime  $\hat{\beta}_{\text{lasso}}$  ottenute mediante (1.48) sono tipicamente distorte, la distorsione essendo dovuta proprio alla penalizzazione introdotta. Per ottenere delle stime non distorte dei coefficienti di regressione associato alle variabili selezionate mediante *LASSO* si stima semplicemente

[Lee et al., 2014](#)

## 1.3 Comovimenti, interdipendenza e contagio

Definizione forte di contagio: discontinuità nei meccanismi di propagazione.

Storicamente contagiosità di uno shock è stata studiata a livello internazionale  
 è: transmission of country-specific shocks

Interdependence is the result of strong transmission mechanisms that exist in both tranquil and crisis periods

Versioni più debole e più forte di contagio: la prima identifica come contagio guardando alla magnitudine

Il rapporto tra le nozioni di contagio e interdipendenza in finanza sono state analizzate in [Forbes e Rigobon, 2001](#). La nozione di contagio implica in qualche misura la presenza di causalità nella trasmissione di uno shock, quella di interdipendenza contemporaneità, comovimento senza direzionalità. La nozione di con-

tagio è più forte di quella di interdipendenza: passiamo da una nozione assoluta ad una relativa. L'interesse nel concetto di contagio è nato negli anni 90 del 20esimo secolo con riferimento all'effetto che shocks country specific hanno avuto su altri paesi. La nozione di contagio prevede inoltre un cambio nei meccanismi di trasmissione. Duplice fonte di significativo aumento delle connessioni: rafforzamento nei canali di trasmissione pre-esistenti, introduzione di nuovi canali crisis-contingent.

Una nozione così restrittiva di contagio ha però come conseguenza un tetto alla possibilità di verificarne la presenza, dopo il quale l'ipotesi di presenza di contagio non potrebbe mai essere, strutturalmente, accettata.

Nozione forte perché si richiede che la maggior dipendenza derivi da nuovi canali di trasmissione creati dallo shock unilaterale.

La letteratura economica non si è limitata a studiare empiricamente l'interdipendenza dei mercati; si veda [Claessens et al., 2001](#) per un'analisi dei canali di trasmissione determinanti teoriche proposte in letteratura.

[Forbes e Rigobon, 2002](#) pone un problema statisticamente rilevante: l'eteroschedasticità rende gli stimatori della correlazione distorti positivamente, con conseguente i test sulla <sup>12</sup> Viene qui proposta una correzione al coefficiente di correlazione condizionato tale da rendere il test per la presenza di contagio non distorto. In particolare si nota come tre crisi degli anni '90 il crollo azionario del mercato azionario statunitense del 1987, la svalutazione del Peso messicano del 1994 e la crisi asiatica del 1997,

See [Pericoli e Sbracia, 2003](#) for an easy example of theoretical approach to the study of international transmission mechanism and for an analysis on the role of structural breaks in the data-generating process (i.e. )

Il mercato azionario qui considerato è solo uno dei canali di trasmissione

quello qui proposto è un approccio simmetrico rispetto alla fonte di contagio? quanto pesa il paese shockato?: tanto, ma non è importante identificarlo come nell'approccio correlation based di [Forbes e Rigobon, 2002](#)

[Rigobon, 2003](#) propone, a partire da un modello a fattori latenti strutturale per i rendimenti azionari, un test (*DCC - Determinant of the Change in the Co-*

---

<sup>12</sup>Nell'articolo si dimostra tale risultato per modelli di regressione lineari sotto ipotesi piuttosto restrittive: assenza di endogeneità e di variabili omesse e. Nel capitolo 3 vedremo che l'approccio adottato permette di superare quest'ultimo limite

*variance matrix* - test) robusto alla presenza di endogeneità, variabili omesse ed eteroschedasticità.<sup>13</sup>

Corsetti et al., 2005 osservano che i test proposti per verificare l'ipotesi di contagio sono distorti nella direzione dell'ipotesi nulla di sola interdipendenza e dunque la conclusioni tratte

It is a stylized fact that market variables are more influenced by recent events

---

<sup>13</sup>Si veda Billio e Pelizzon, 2003 per una discussione critica dei test per l'identificazione di contagio proposti in Forbes e Rigobon, 2002, Corsetti et al., 2005 e Rigobon, 2003 evidenziati empiricamente i problemi di distorsione legati alla presenza di variabili omesse, endogeneità ed eteroschedasticità e di sensibilità alla finestra di stima utilizzata (infatti tutti questi test sono sviluppati in un ambiente statico, in cui i periodi di quiete e di crisi devono essere fissati a priori).



# Capitolo 2

## Grafi aleatori

Le reti sono uno strumento per l'analisi di dati utilizzato negli ambiti più diversi: nelle scienze sociali per l'analisi delle reti sociali, nelle scienze naturali per , in economia per lo studio del mercato del lavoro

In questo capitolo ci proponiamo di riassumere le principali caratteristiche delle reti di interesse nel contesto del rischio sistemico e di introdurre alcuni temi più avanzati, quale la modellazione dinamica [Kolaczyk, 2009](#)

### 2.1 Introduzione

#### 2.1.1 Definizioni

Un grafo  $G$  è definito formalmente come una coppia di insiemi  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_K\}$  è un insieme, di cardinalità  $K$ , i cui elementi vengono detti nodi o vertici della rete e  $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, \dots, l_N\}$  i cui elementi sono detti connessioni, con  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ .

Una rappresentazione sintetica di un grafo  $G$  è fornita dalla relativa matrice di adiacenza  $W = (w_{i,j})$ , di dimensione  $K \times K$ , i cui elementi

#### 2.1.2 Statistiche di rete

In questo paragrafo richiamiamo la definizione delle principali statistiche proposte per descrivere le caratteristiche di una rete. Per non appesantire la trattazione

presentiamo unicamente i casi di reti orientate e non orientate, tralasciando dunque quello di reti pesate<sup>1</sup>.

### Reti non orientate

$d$  densità della rete

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \quad (2.1)$$

$d_i$  grado del nodo  $i$

$$d_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{A_i}(n_j), \quad (2.2)$$

dove  $A_i$  è l'insieme dei nodi connessi con il nodo  $n_i$ .

$b_i$  *betweenness* del nodo  $i$

$$b_i = \sum_{j,k:j,k \neq i} \frac{n_{jik}}{n_{jk}}, \quad (2.3)$$

dove  $n_{jk}$  è il numero di geodetiche tra i nodi  $j$  e  $k$  e  $n_{jik}$  è il numero di geodetiche tra i nodi  $j$  e  $k$  in cui è presente il nodo  $i$ . La *betweenness* misura la centralità di un nodo in termini relativi alle geodetiche in cui è presente.

2

assortatività del nodo  $i$

*Eigenvector centrality* del nodo  $i$

### Reti orientate

$d_i^{\text{out}}$  grado in uscita (*out-degree*) del nodo  $i$

$$d_i^{\text{out}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{A_i^{\text{out}}}(n_j), \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>L'estensione delle statistiche qui proposte Si veda [Latora et al., 2017](#), cap. 10 per una alcune possibili proposte.

<sup>2</sup>La *betweenness* di un nodo è un parametro molto importante nel contesto del rischio sistemico: [Boss, Summer e Thurner, 2004](#) trovano una relazione lineare tra *betweenness* e *contagiosità* di una banca.

dove  $A_i^{\text{out}}$  è l'insieme dei nodi connessi in uscita con il nodo  $n_i$ .

$d_i^{\text{in}}$  grado in entrata (*in-degree*) del nodo  $i$

$$d_i^{\text{in}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{A_i^{\text{in}}}(n_j), \quad (2.5)$$

dove  $A_i^{\text{in}}$  è l'insieme dei nodi connessi in entrata con il nodo  $n_i$ .

$b_i^{\text{in}}$  *betweenness* in entrata (*in-betweenness*) del nodo  $i$

$$b_i^{\text{in}} =, \quad (2.6)$$

dove

$b_i^{\text{out}}$  *betweenness* in uscita (*out-betweenness*) del nodo  $i$

$$b_i^{\text{out}} =, \quad (2.7)$$

dove

### 2.1.3 Alcune proprietà interessanti

#### *Small-world effect*

$l \propto \log n$ , con  $l$  distanza media della rete definita come  $l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{i,j}$  e  $n$  numero dei nodi della rete stessa.

L'ipotesi *small-world effect* consiste nell'affermare che  $l$  sia piccola.

#### *Scale-free networks*

Sia  $p_k$  la frazione dei nodi con grado pari a  $k$ . Le quantità  $p_0, p_1, \dots, p_K$  rappresentano la distribuzione dei nodi della rete.

[Barabási e Albert, 1999](#) introducono la proprietà di invarianza di scala (*scale-free property*) un andamento di tipo *power-law* nella distribuzione del grado dei

---

<sup>3</sup>Il concetto di centralità di un nodo è anche strettamente legato a quello, più generale, di controllabilità di una rete. Si veda [Nicosia et al., 2012](#) per un esempio di controllo di una rete attraverso la regolazione di una misura di centralità.

nodi, ossia pochi nodi hanno molti archi, mentre la maggior parte ne ha pochi. L'invarianza di scala di una rete si può formalizzare come

$$P(k) \propto \exp \{-\gamma k\}, \quad (2.8)$$

dove  $\gamma$  è detto indice di coda della distribuzione.  $\gamma$  determina la velocità a cui la funzione tende a 0 ed assume un ruolo importante in termini di interpretazione dei risultati

[Albert et al., 2000](#) [Albert e Barabási, 2000](#)

## 2.2 Architetture di rete

Un'architettura di rete si indica una particolare e interessante configurazione dei nodi e degli archi.

### 2.2.1 *Core-periphery*

## 2.3 Modelli per dati di rete

### 2.3.1 Modello di Erdos-Rényi

Introdotta in [Erdos e Rényi, 1959](#), la probabilità di formare un arco tra due nodi è costante e indipendente dai nodi considerati

Il parametro  $\theta = \pi$

Nell'articolo dimostrano che

$$s_{max} \approx \frac{\ln N}{\ln E(\pi)}, \quad (2.9)$$

ossia che il diametro di una rete di questo tipo cresce molto lentamente all'aumentare del numero di nodi; questa altro non è che la caratterizzazione matematica della proprietà *small world*<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>cenno alla teoria dei sei gradi di separazione e calcolo per popolazione mondiale/italiana con  $E(\pi) = 20$ . Sia  $\mathcal{N}^{\text{ita}}$  la popolazione italiana, dunque  $N^{\text{ita}} \approx 60 \times 10^6$ , e supponiamo che  $E(\pi) = 20$ , ossia in media ogni persona ha - o ritiene di avere - una relazione di amicizia con

### 2.3.2 Modello $p_1$

La più semplice estensione del modello presentato in 2.3.1

[Holland e Leinhardt, 1981](#) introducono il modello  $p_1$  per tenere conto

### 2.3.3 Modello $\beta$

modello che si basa sulla proprietà di invarianza di scala proposta in [Barabási e Albert, 1999](#) e qui viene introdotto: la probabilità di osservare una connessione  $(i, j)$  tra i nodi  $i$  e  $j$  dipende dal numero  $k_{out,i}$  uscenti da  $i$  e dal numero di nodi  $k_{in,j}$ ; le connessioni si formano dunque su base preferenziale

### 2.3.4 Procedure di stima

[Robins, Pattison et al., 2007](#) [Robins, Snijders et al., 2007](#) stima degli ERGM

## 2.4 *Dynamic exponential random graphs*

Nella quasi totalità dei fenomeni economici le relazioni tra gli agenti coinvolti evolvono nel tempo, Per cogliere tale dinamica temporale sono stati proposti/sviluppati modelli statistici opportuni che richiamiamo brevemente in questo paragrafo

[Holme e Saramäki, 2012](#) [Zhang et al., 2017](#)

---

altre 20 persone. Allora, se si assume che le relazioni di amicizia si formino in modo casuale con probabilità  $\pi$ , utilizzando l'approssimazione (2.9) si ottiene che  $s_{max} = 6$ , ossia che . Se si estende l'universo alla popolazione mondiale  $\mathcal{N}^{\text{world}}$ , assumendo che  $N^{\text{world}} \approx 8 \times 10^9$  e



# Capitolo 3

## A step further: PCA, VAR e SSM

[Buccheri e Mazzarisi, 2022](#) [Doz et al., 2011](#) [Connor e Korajczyk, 1993](#) [Durbin e Koopman, 2012](#)

### 3.1 Limiti di un approccio

### 3.2 Analisi delle componenti principali

[Jolliffe, 2002](#)

L'uso delle componenti principali [Kritzman et al., 2011](#) introducono una misura di  $\alpha$ , l'*absorption ratio*

### 3.3 Modelli autoregressivi vettoriali (VAR)

### 3.4 Modelli spazio-stato

[Hamilton, 1994](#)

#### 3.4.1 Modelli spazio-stato e dati mancanti





# Capitolo 4

## Il caso del mercato finanziario europeo

Si è condotta un'analisi empirica del rischio sistemico nel mercato finanziario europeo per il periodo 2004-2022. La scelta del periodo non è casuale: questo permette infatti di coprire diverse fasi del mercato, in particolare di crisi: la crisi dei mutui *subprime*, la crisi europea dei debiti sovrani, la crisi legata alla pandemia di COVID-19 e, almeno nella sua prima parte, la crisi legata all'invasione dell'Ucraina da parte della Russia.

Dopo una breve presentazione dei dati a disposizione nella sezione 4.1, il capitolo segue quanto visto nei primi tre capitoli: la sezione 4.2 è dedicata alla rappresentazione della dipendenza di coda, le sezioni 4.3 e 4.4, rispettivamente, a una analisi descrittiva delle reti stimate e alla loro modellazione e infine, nella sezione 4.5, si propone un metodo per la modellazione dinamica delle reti basato sui modelli spazio-stato.

### 4.1 Descrizione dei dati

Per rappresentare il mercato finanziario europeo nella finestra temporale d'interesse si sono scelte le istituzioni incluse nell'indice *STOXX<sup>®</sup> Europe 600* appartenenti ai settori bancario, assicurativo e dei servizi finanziari di cui si dispone delle rela-

tive serie dei prezzi per il periodo comprendente i comuni giorni di apertura delle principali borse europee tra il 01 gennaio 2004 e il 31 dicembre 2022.

Il campione include  $N = 76^1$  istituzioni così ripartite entro le tre categorie d'interesse: 38 banche, 21 assicurazioni e 17 servizi finanziari. Per ciascuna di queste, si sono considerati i rendimenti logaritmici settimanali, definiti a partire dai rendimenti logaritmici giornalieri come

$$r_{j,t} = \sum_{h=5(t-1)+1}^{5t} r_{j,h}^d,$$

dove  $r_{j,h}^d$  indica il rendimento logaritmico dell'azione  $j$  il giorno  $h$ , calcolato come differenza prima dei logaritmi dei prezzi ed espressi su scala percentuale, ossia  $r_{j,h}^d = 100 \times (\log P_{j,h} - \log P_{j,h-1})$ , con  $P_{j,h}$  prezzo di chiusura dell'azione  $j$  il giorno  $h$ .<sup>2</sup> In totale si dispone di  $T = 976$  osservazioni settimanali.

Nell'appendice A.1 sono riportate la lista dei titoli compresi nel campione e le principali statistiche descrittive delle relative serie dei rendimenti settimanali.<sup>3</sup>

Una condizione necessaria per le analisi seguenti è la stazionarietà debole delle serie  $r_{j,t}$ . Questa è stata verificata globalmente (i.e. sulla intera finestra di osservazione) combinando tre approcci diversi: si è prima effettuato il test aumentato di Dickey-Fuller (ADF) al livello di confidenza  $\alpha = 0.05$  con specificazione

---

<sup>1</sup>Le aziende dei tre settori considerati incluse al 31 dicembre 2022 nell'indice *STOXX<sup>®</sup> Europe 600* sono 107. Di queste se ne considerano 76 perché delle rimanenti 31 (7 banche, 10 assicurazioni e 14 servizi finanziari) non si dispone delle serie dei prezzi complete per il periodo d'interesse.

<sup>2</sup>Si noti che, a differenza del rendimento semplice, il rendimento logaritmico può assumere valori inferiori a 1 o, su scala percentuale, a 100. Siano  $\tilde{r}_{t:T}$  e  $r_{t:T}$ , rispettivamente, i rendimenti semplice e logaritmico sull'orizzonte temporale  $[t, T]$ , ossia  $\tilde{r}_{t:T} = \frac{P_T - P_t}{P_t}$  e  $r_{t:T} = \log P_T - \log P_t$ . Allora, se  $P_T \rightarrow 0$  si ha che  $\tilde{r}_{t:T} \rightarrow -1$ , mentre  $r_{t:T} \rightarrow -\infty$ .

<sup>3</sup>Gli indici di asimmetria e curtosi per un campione  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sono stati calcolati, rispettivamente, come

$$S(x) = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}$$

$$K(x) = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4}$$

con  $\hat{\mu}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^p$ ,  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  e  $\hat{\sigma} = \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \right)^{1/2}$ .

dell'equazione di regressione

$$\Delta r_{j,t} = \delta_j r_{j,t-1} + \sum_{i=1}^{p_j} \beta_{j,i} \Delta r_{j,t-i} + \varepsilon_{j,t},$$

con  $\varepsilon_{j,t}$  *white noise* con media 0 e varianza  $\sigma^2$ ,  $\forall j$ , comune nella componente deterministica (senza intercetta né trend),  $\Delta r_{j,t-i} = r_{j,t-i} - r_{j,t-i-1}$ , per  $i = 0, 1, \dots, p_j$ , dove il numero  $p_j$  di ritardi considerati è stato selezionato dai dati mediante minimizzazione del *BIC*. Il valore critico del test per la specificazione adottata è pari a  $-1.95$  (si veda [1994](#), Tabella B.6), mentre il maggiore dei valori delle statistiche test è pari a  $-10.52$ : pertanto, si rifiuta l'ipotesi nulla di presenza di una radice unitaria per tutte le serie.

Successivamente, per corroborare la stazionarietà debole delle serie, si è condotto il test KPSS, proposto in [Kwiatkowski et al., 1992](#), sempre al livello di confidenza  $\alpha = 0.05$ . Si è utilizzata la specificazione del modello con sola intercetta, ossia

$$r_{j,t} = x_{j,t} + \varepsilon_{j,t},$$

dove  $x_{j,t} = x_{j,t-1} + u_{j,t}$ ,  $u_{j,t}$  è un *white noise* con media 0 e varianza  $\sigma_u^2$  e  $\varepsilon_{j,t}$  è un processo stazionario. Il valore critico del test per la specificazione scelta è pari a 0.463 e il massimo dei valori delle statistiche test è pari a 0.21: dunque, non si rifiuta l'ipotesi nulla di stazionarietà per tutte le serie.

Infine, poiché i test ADF e KPSS ipotizzano una decomposizione delle serie poco realistica in questo contesto, si è effettuato uno studio sui parametri di un modello GARCH, classe che ben rappresenta il comportamento delle serie finanziarie. In particolare, si è ipotizzato che  $r_{j,t}$  segua un GARCH(1, 1) con innovazioni

$t$  di Student asimmetriche standard,<sup>4</sup> ossia

$$\begin{aligned} r_{j,t} &= \mu_j + \sigma_{j,t} \varepsilon_{j,t}, \\ \sigma_{j,t}^2 &= \omega_j + \alpha_{1,j} (r_{j,t} - \mu_j)^2 + \beta_{1,j} \sigma_{j,t-1}^2, \\ \varepsilon_{j,t} &\sim \text{skew-}t(\nu_j, \xi_j). \end{aligned}$$

Poiché un processo GARCH(1,1) è stazionario in senso debole se e solo se  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ , si è verificata questa condizione sulle stime ottenute. Nella tabella 4.1 sono riportati risultati per le 9 serie in cui si è osservato un valore di  $\hat{\alpha}_{1,j} + \hat{\beta}_{1,j}$  maggiore di 1. Poiché solamente in corrispondenza della serie relativa a Bper Banca si è ottenuto un valore molto elevato, si è deciso di rimuovere dal campione soltanto questo titolo. La stazionarietà debole è stata confermata, o almeno non rifiutata, per le rimanenti serie.

Pertanto, il campione considerato in seguito è costituito da  $T = 976$  osservazioni di rendimenti logaritmici settimanali (espressi su scala percentuale) di  $N = 75$  titoli azionari.

## 4.2 Dipendenza di coda

Di particolare interesse nel contesto dell'analisi del rischio sistemico è lo studio delle relazioni tra le code delle distribuzioni delle variabili economico-finanziarie d'inte-

---

<sup>4</sup>La variabile aleatoria  $X$  ha distribuzione  $t$  di Student asimmetrica standard con parametro di forma  $\nu$  e parametro di asimmetria  $\xi$ , in breve  $X \sim \text{skew-}t(\nu, \xi)$ , se

$$f_X(x; \nu, \xi) = \frac{2\sigma_\xi}{\xi + \xi^{-1}} f_Z \left( z_{\mu_\xi \sigma_\xi} \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}; \nu \right) \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}},$$

dove  $f_Z(\cdot; \nu)$  è la funzione di densità di una  $t$  di Student con  $\nu$  gradi di libertà,  $z_{\mu_\xi \sigma_\xi} = \xi^{-\text{sign}(\sigma_\xi x + \mu_\xi)} (\sigma_\xi x + \mu_\xi)$  e

$$\begin{aligned} \mu_\xi &= M_1(\xi - \xi^{-1}), \\ \sigma_\xi^2 &= (M_2 - M_1^2)(\xi^2 + \xi^{-2}) + 2M_1^2 - M_2, \\ M_r &= 2 \int_0^\infty z^r f_Z \left( z \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}; \nu \right) \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} dz. \end{aligned}$$

Azienda	$\hat{\alpha}_{1,j}$	$\hat{\beta}_{1,j}$	$\hat{\alpha}_{1,j} + \hat{\beta}_{1,j}$
UNICREDIT	0.18	0.84	1.02
NATWEST GROUP	0.15	0.85	1.01
BANCO BPM	0.12	0.88	1.01
AIB GROUP	0.25	0.81	1.06
BANCO DE SABADELL	0.09	0.91	1.00
BANK OF IRELAND GROUP	0.16	0.86	1.01
BPER BANCA	1.00	0.97	1.97
SANTANDER BANK POLSKA	0.15	0.87	1.02
SYDBANK	0.15	0.88	1.03

**Tabella 4.1:** Stime dei parametri di un modello GARCH(1, 1) relative alle serie per cui  $\hat{\alpha}_{1,j} + \hat{\beta}_{1,j} > 1$ .

resse. In particolare, interessa considerare la relazione in caso di eventi negativi la coda sinistra

In particolare, si è scelto di rappresentare la dipendenza di coda e di misurarla tramite i modelli di regressione quantilica lineare.

### 4.2.1 Festival delle specificazioni

Il punto di partenza della nostra analisi è stato In generale, si

$$\mathcal{Q}_\alpha(Y_{i,t}|I_{t-1}) = \beta_{0,\alpha,t} + \phi'_{i,\alpha,t}g_i(\mathcal{Y}_{i,t-1}) + \sum_{j=1}^p \beta_{j,\alpha,t}f_j(\mathcal{Y}_{j,t-1}) + \gamma'_{\alpha,t}M_{t-1}, \quad (4.1)$$

dove  $\mathcal{Y}_{j,t} = \{ Y_{j,s}, s \leq t \}$  indica la traiettoria del processo  $Y_{j,s}$  fino al punto  $t$ .

Per verificare l'efficacia della regressione quantilica penalizzata, si sono stimati diversi modelli, tra loro differenti a seconda dei *driver* del rischio di coda e dei metodi di stima delle quantità non osservabili.

$$\mathcal{Q}_\alpha(Y_{i,t}|\mathcal{F}_{t-1}) = \beta_{0,\alpha,t} + \phi_{\alpha,t}|Y_{i,t-1}| + \beta_{(i,j),\alpha,t}Y_{j,t-1} + \beta_{(i,j),\alpha,t}|Y_{j,t-1}| + \gamma'_{\alpha,t}M_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (4.2)$$

dove

$$\mathcal{Q}_\alpha(Y_{i,t}|\mathcal{F}_{t-1}) = \beta_{0,\alpha,t} + \phi_{\alpha,t}Y_{i,t-1} + \sum_{j \neq i}^p \beta_{j,\alpha,t} \mathcal{Q}_\tau(Y_{j,t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) + \gamma'_{\alpha,t}M_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (4.3)$$

dove

$$\mathcal{Q}_\alpha(Y_{i,t}|I_{t-1}) = \beta_{0,\alpha,t} + \phi_{\alpha,t}Y_{i,t-1} + \sum_{j \neq i}^p \beta_{j,\alpha,t} I(Y_{j,t-1} < \mathcal{Q}_\tau(Y_{j,t-1}|I_{t-1})) + \gamma'_{\alpha,t}M_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (4.4)$$

dove

$$\mathcal{Q}_\alpha(Y_{i,t}|\mathcal{F}_{t-1}) = \beta_{0,\alpha,t} + \phi_{\alpha,t}Y_{i,t-1} + \sum_{j \neq i}^p \beta_{j,\alpha,t} \mathcal{Q}_\tau(Y_{j,t}|\mathcal{F}_{t-1}) + \gamma'_{\alpha,t}M_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (4.5)$$

dove

$$\mathcal{Q}_\alpha(Y_{i,t}|I_{t-1}) = \beta_{0,\alpha,t} + \phi_{\alpha,t}Y_{i,t-1} + \sum_{j \neq i}^p \beta_{j,\alpha,t} I(Y_{j,t} < \mathcal{Q}_\tau(Y_{j,t}|I_{t-1})) + \gamma'_{\alpha,t}M_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (4.6)$$

dove

Le diverse componenti di queste specificazioni hanno una chiara interpretazione statistica:

- $|Y_{i,t-1}|$  permette di tenere in considerazione in maniera semplice la dipendenza dei rendimenti finanziari (un'altra scelta diffusa è  $Y_{i,t-1}^2$ );
- $M_{t-1}$  serve per controllare la relazione d'interesse rispetto a variabili macroeconomiche.

In entrambe le specificazioni si utilizzano solamente variabili ritardate per una precisa ragione di tipo economico: in questo modo si il problema dell'endogeneità, ossia

### 4.2.2 Variabili esogene

Per tenere conto del livello generale dell'economia dell'eurozona, si sono utilizzate le variabili le osservazioni settimanali di otto variabili macroeconomiche ritardate  $M_{t-1}$ . Queste variabili vanno interpretate come variabili di controllo, non come fattori

- (i) la variazione della curva del tasso rf a tre mesi

$$\Delta r_{3m,t} = r_{3m,t} - r_{3m,t-1}$$

- (ii) la variazione della curvatura della curva dei tassi rf

$$\Delta = r_{10y,t} - r_{3m,t}$$

- (iii) una misura del rischio di finanziamento della liquidità a breve termine

$$\text{STLR}_t = r_{3m,t}^{\text{Euribor}} - r_{3m,t}^{\text{AAA}}$$

- (iv) misura di *credit spread* calcolata come differenza tra i tassi interni di rendimento di un e

- (v) rendimento di mercato statunitense, calcolato a partire dall'indice *S&P500*  
5

$$r_t = \frac{r_{t-1}^{S\&P500} + r_t^{S\&P500}}{2}$$

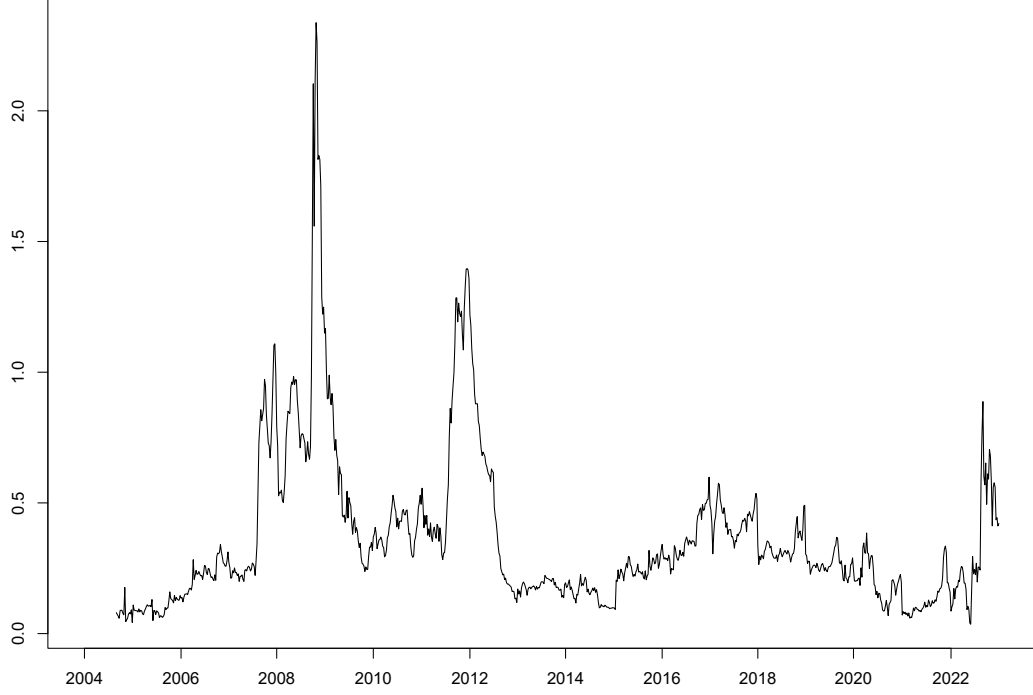
- (vi) rendimento di mercato europeo

- (vii) una misura di volatilità calcolata a partire dalla serie VSTOXX calcolata come? controllare soprattutto la vita residua delle opzioni!

$$\Delta\sigma_t = \sigma_t - \sigma_{t-1}$$

---

<sup>5</sup>Utilizzando i rendimenti settimanali, non si presenta il problema dell'asincronia tra i mercati europeo e statunitense.



**Figura 4.1:** Andamento di .

(viii) housing

6

Variabili macroeconomiche sono state scaricate da Refinitiv Eikon, eccetto i dati relativi alle curve dei tassi dell'Euro che sono disponibili pubblicamente (si veda [European Central Bank, 2024](#)).

Usiamo il tasso interno di rendimento<sup>7</sup> (*redemption yield*) per le obbligazioni

<sup>6</sup>Rispetto ai lavori simili che si concentrano sul sistema finanziario statunitense, manca qui una misura dei livelli dei prezzi delle case, non disponibile (e non facilmente costruibile).

<sup>7</sup>Richiamiamo la definizione di tasso interno di rendimento di un'obbligazione. Data un'obbligazione con valore facciale  $C$ , scadenza  $t_n$  e pagante  $n$  cedole di importo  $I$  negli istanti  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , si definisce tasso interno di rendimento in  $t < t_1$  dell'obbligazione quel tasso  $r^* > -1$  tale che

$$f(r^*) := I \sum_{j=1}^n (1 + r^*)^{-(t_j - t)} + C(1 + r^*)^{-(t_n - t)} = P_t,$$

dove  $P_t$  è il prezzo (di mercato) in  $t$  dell'obbligazione. Nel seguito si è utilizzato il tasso interno di rendimento di un portafoglio di obbligazioni, ottenuto come un'opportuna media ponderata



*corporate*.

Invece per i titoli di Stato dei paesi dell'Eurozona usiamo il tasso di parità<sup>8</sup> (*par yield*).

In generale il tasso interno di rendimento e il tasso di parità di un'obbligazione sono diversi tra loro; essi coincidono nel caso in cui il tasso cedolare coincide con il tasso di parità.

Per stimare il quantile condizionato  $\mathcal{Q}$

### 4.2.3 Stima del $VaR$

Tra le variabili esplicative delle specificazioni 4.2 e 4.3 sono presenti i quantili empirici dei rendimenti diversi da quelle assunte; queste quantità vanno opportunamente stimate. Scelta standard è quello di considerare il quantile empirico della distribuzione marginale di  $Y_{j,t-1}$ , ossia

$$\hat{Q}_\tau(Y_{j,t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) = \quad (4.7)$$

Per introdurre una maggior precisione Un semplice quantile empirico, il modello CaViAR proposto in [Engle e Manganeli, 2004](#), un modello EGARCH(1,1) con innovazioni distribuite secondo una  $t$  di Student

9

L'adeguatezza delle stime dei  $VaR$  è stata testata mediante un test standard in letteratura: il test di Christoffersen, proposto in [Christoffersen, 1998](#).

---

dei tassi interni di rendimento delle obbligazioni che lo compongono, con pesi ottenuti a partire dal prezzo, dalla *duration* e dal valore totale in circolazione di ciascuna obbligazione.

<sup>8</sup>Richiamiamo la definizione di tasso di parità di un'obbligazione. Sempre con riferimento ad un'obbligazione con valore facciale  $C$ , scadenza  $t_n$  e pagante  $n$  cedole di importo  $I$  negli istanti  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , si definisce tasso di parità in  $t$  quel valore del tasso cedolare  $\bar{I}/C$  per cui il prezzo del titolo uguaglia il suo valore facciale  $C$ . Riesce che

$$\bar{I} = \frac{1 - v(t, t_n)}{\sum_{j=1}^n v(t, t_j)},$$

con  $v(t, t_j)$  il fattore di sconto in vigore al tempo  $t$  per il periodo  $(t, t_j)$ .

<sup>9</sup>La specificazione nota come *indirect GARCH(1, 1)*

Sia  $I_{j,t}$  una variabile indicatrice che descrive l'occorrenza, al tempo  $t$ , di uno sforamento del  $\text{VaR}_{\alpha,j,t}$

$$I_{j,t} = \begin{cases} 1, & \text{se } r_{j,t} < \text{VaR}_{\alpha,j,t}, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se il modello per il  $\text{VaR}_{\alpha,j,t}$  è correttamente specificato, allora  $I_{j,t} \sim \text{Bern}(\alpha)$ ,  $\forall t$ . Il test, di copertura non condizionata, di Kupiec sottopone a verifica l'ipotesi nulla  $H_0 : \mathbb{E}[I_{j,t}] = \alpha$  contro  $H_1 : \mathbb{E}[I_{j,t}] \neq \alpha$ , mentre quello, di copertura condizionata, di Christoffersen

due test standard in letteratura: il test di Kupiec, proposto in [Kupiec, 1995](#), e quello di Christoffersen, sviluppato in . Entrambi questi test sono particolari test del rapporto di verosimiglianza, che sottopongono a verifica la stessa ipotesi nulla, contro diverse ipotesi alternative: il test di Kupiec prevede come ipotesi alternativa un numero di sforamenti maggiore di quello atteso (pari a  $n\alpha$ ), mentre quello di Christoffersen <sup>10</sup>

Si è scelto  $\tau = 0.1$ , ritenendo necessario un compromesso tra l'identificazione di eventi estremi e la necessità di disporre di un numero adeguato di osservazioni, in accordo con quanto proposto nella letteratura esistente<sup>11</sup>. L'idea è quella di considerare come potenzialmente rilevanti quelle contrazioni negative dei regressori.

#### 4.2.4 Stima dei modelli di regressione quantilica

I modelli si sono stimati su finestre mobili di ampiezza pari a  $m = 52$  osservazioni (un anno) <sup>12</sup>. L'uso di finestre mobili permette di introdurre una dinamica temporale locale per i parametri, rientrando nella classe dei cosiddetti *time-varying parameter (TVP) models*, in modo da considerare la dinamica temporale della relazione strutturale tra i regressori e la variabile risposta.

<sup>10</sup>In letteratura esistono test più potenti di quelli qui utilizzati: si veda il *Dynamic Quantile (DQ)* test di [Engle e Manganelli, 2004](#) o quelli derivanti proposto in

<sup>11</sup>Un'altra scelta diffusa in accordo con questo compromesso è  $\tau = 0.2$ .

<sup>12</sup>Il numero di osservazioni incluse nella finestra di stima risponde ad un'esigenza : ampiezze maggiori garantiscono migliori proprietà statistiche delle stime, ma

Per stimare i modelli mediante regressione quantilica penalizzata è necessario fissare il valore di

La bontà di adattamento dei modelli di regressione post-selezione  $l_1$  è stata valutata tramite pseudo- $R^2$  in cui il modello di riferimento non è il modello nullo, ma quello che include l'intercetta e definito come

$$R_{i,j}^2 = 1 - \frac{\frac{1}{T} \sum_t \rho_\alpha(y_{i,t} - f_j(\hat{\phi}_\alpha, \hat{\beta}_\alpha, \mathcal{Y}_{t-1}, \mathcal{X}_{t-1}) - \hat{\gamma}'_\alpha M_{t-1})}{\frac{1}{T} \sum_t \rho_\alpha(y_{i,t} - \hat{\gamma}'_\alpha M_{t-1})},$$

dove  $i$  identifica la variabile risposta e  $j$  la specificazione considerata tra quelle proposte nel paragrafo 4.2.1. Dunque valori di  $\bar{R}^2$  vicini a 1 indicano un buon adattamento ai dati.

Nel grafico si riporta il profilo temporale dell'indice

Come scegliere  $\lambda_i$  in  $l_1$  penalized lasso: simulazione come proposto in belloni o tecniche di convalida incrociata, vedi [Shao, 1993](#) e miglioramento di [Racine, 2000](#) che introducono una procedura di convalida incrociata per dati dipendenti

## 4.2.5 Confronto tra i modelli

# 4.3 Rete di dipendenza di coda

## 4.3.1 Costruzione della rete

La significatività dei parametri

Come proposto in [Billio et al., 2012](#), e ripreso in [Corsi et al., 2018](#), è interessante valutare l'ipotesi di significatività. A tal fine si è implementato uno studio di simulazione Monte Carlo come segue. Per  $M = 1000$  repliche,  $n_j = 400$  osservazioni con rimpiazzo.

## 4.3.2 Statistiche di rete

Evoluzione nel tempo delle principali statistiche di rete. Densità, pairwise degree and weight correlation calcolate come medie di periodi ([Poledna et al., 2015](#) usa medie annuali, a me sembra eccessivo)

Assortatività per settore e assortatività per paese di appartenenza

### 4.3.3 Componenti, *Clustering* e *community detection*

La rete è connessa? (cioè esiste un'unica componente?) oppure esistono sottinsiemi tra cui il rischio non si propaga -> breadth-first search algorithm in

[Newman, 2018](#), capitolo 14 per una approfondita rassegna delle tecniche di *community detection*.

*Core-periphery structure*

### 4.3.4 Rappresentazione *Bow-tie*

[Battiston et al., 2012](#) [Broder et al., 2000](#) introduce the bow tie diagram/architecture to rpereset syntethically the components of a directed graph

### 4.3.5 Distribuzione dei gradi

Importante sottolineare il valore dell'esponente della funzione esponenziale stimata e paragoanrlo a valori di altre reti del mondo reale

## 4.4 Modellazione dinamica della rete

Se non sono in grado o non ho tempo posso non fare il modello  $\beta$

## 4.5 Modelli spazio-stato

### 4.5.1 Interpretazione dei fattori latenti

### 4.5.2 Analisi della capacità predittiva

Per valutare la bontà del modello, abbiamo utilizzato la procedura *Model Confidence Set* (MCS) proposta in [Hansen et al., 2011](#).

La distribuzione nulla della statistica test viene stimata utilizzando il *bootstrap* stazionario proposto in [Politis e Romano, 1994](#).

# Conclusioni

Il *framework* proposto può essere utilizzato nello studio del rischio sistemico secondo tre prospettive temporali: quella *ex-ante*, in quanto è possibile simulare la topologia delle rete mediante simulazione delle componenti principali, dunque in particolare è possibile il modello nella costruzione di scenari di stress test ad esempio; contemporanea, poiché l'aggiornamento settimanale (estendibile a frequenza giornaliera) permette di la fragilità del sistema e delle singole istituzioni tempestivamente ed infine *ex-post*, per recuperare informazioni sulla topologia del sistema in periodi di dissesto dello stesso.

Gli utilizzi e i possibili miglioramenti sono molteplici. Per quanto riguarda i primi,

La topologia del sistema finanziario è solo un aspetto del rischio sistemico e delle sue conseguenze

[Buccheri e Mazzarisi, 2022](#)

[Artzner et al., 1999](#) studia e descrive le proprietà ottimali delle misure di rischio standard; quelle *network-based* qui proposte sono della stessa natura e dunque dovrebbero soddisfarle oppure no? in [Adrian e Brunnermeier, 2016](#), pp. 1714-1715 vi è una rassegna di alcune delle proprietà ottimali per una misura di rischio sistemico

Problema aperto interventi di *policy* (*macroprudential policy*) per ridurre il contagio? Rischio che venga adottata la più semplice delle misure: un irrigidimento generalizzato delle regole o una tassa pigouviana per far fronte alle esternalità derivanti dal contributo al rischio sistemico delle singole istituzioni.

Da un punto di vista regolamentare due applicazioni: l'identificazione delle cosiddette *Systemic Important Financial Institutions* (*SIFI*) e il calcolo di misure

di *early-warning detection*.<sup>13</sup>

Tutte queste proposte appaiono ingenuie se si assume il punto di vista del regolatore contemporaneo: un novello grande fratello orwelliano

Tipo di analisi facilmente estendibile/adattabile all'analisi dell'interdipendenza tra mercati finanziari nazionali

Studiare le caratteristiche economiche delle istituzioni più vulnerabili

Introdurre componenti istituzionali e microeconomiche

tenere conto degli effetti di calendario

Aumentare la trasparenza informativa ha un effetto negativo sulla volatilità, come dimostrato in [Bushee e Noe, 2000](#)<sup>14</sup>

È sottintesa l'ipotesi che i fondamentali economici delle istituzioni analizzate non siano cambiati durante il periodo d'interesse, e che dunque i movimenti estremi di mercato siano generati esclusivamente da un meccanismo di contagio. Ipotesi problematica che si può risolvere tenendo in considerazione attraverso dati di bilancio varie misure degli stessi, ma in tal caso bisognerebbe affrontare la questione della bassa frequenza - rispetto ai dati di mercato - con cui questi sono disponibili.

Coherent measures of risk as features in the quantile regression

da un punto di vista applicativo, l'approccio proposto permette di soddisfare le esigenze sia microeconomiche che macroeconomiche, ossia a

Il *framework* proposto, in particolare la modellazione dinamica della rete, appare come la soluzione più adatta da utilizzare in esercizi di *stress testing*.

Il metodo proposto permette di passare da un utilizzo descrittivo ad uno predittivo delle reti statistiche.

Un'altra estensione riguarda possibili esercizi di *stress testing*, similmente a quanto proposto in [Huang et al., 2009](#). Si veda [Liu et al., 2011](#) per esempio sul significato di controllabilità di una rete e una possibile proposta per l'individuazione dei nodi attraverso cui provare a controllare la rete qui proposta. Non sembra opportuno però utilizzare direttamente

Seguendo [Billio et al., 2023](#) la metodologia qui proposta può essere utilizzata per introdurre una struttura di dipendenza tra le variabili in un modello (multi-

---

<sup>13</sup>Attenzione alla critica di Lucas però!

<sup>14</sup>Gli autori spiegano tale effetto come cambio nella tipologia di investitori istituzionali conseguente ad una maggior trasparenza.

)fattoriale (*network-augmented linear factor model*) o, più in generale, può essere combinata con altre reti per catturare la dipendenza cross-sezionale secondo prospettive diverse, come proposto in [Bonaccolto, Caporin e Panzica, 2019](#) sempre nel contesto dei modelli fattoriali.

Sempre [2019](#) propongono inoltre di utilizzare le reti di dipendenza di coda nella costruzione di portafogli.

Introdurre misure di volatilità realizzata

Le misure di interconnessione qui proposte possono essere utilizzate assieme agli altri indicatori del rischio sistemico esistenti (e.g. VaR, CoVaR,  $\Delta$ CoVaR, etc.) per ottenere una misura composita del rischio sistemico, come proposto ad esempio in [Caporin et al., 2022](#).

Possibile è anche il passaggio da semplici reti binarie a reti pesate sfruttando quanto osservato nella sezione 1.2.2 sulla regressione post-selezione *LASSO*: infatti

### **Possibili miglioramenti**





# Appendice A

## Descrizione dei dati

### A.1 Descrizione dei titoli

Azienda	Ticker	Refinitiv	Paese	Media	Mediana	Dev. Std.	Max	Min	Asimmetria	Curiosi
HSBC HOLDINGS	HSBA		Regno Unito	0.05	0.06	3.57	23.62	-24.29	-0.30	11.29
BNP PARIBAS	BNP		Francia	0.09	0.28	5.32	37.07	-29.86	-0.15	10.29
BANCO SANTANDER	SAN		Spagna	-0.01	0.09	4.92	24.88	-31.67	-0.23	7.51
UNICREDIT	UCG		Italia	-0.18	0.07	6.55	37.32	-47.76	-0.56	10.14
INTESA SANPAOLO	ISP		Italia	0.06	0.27	5.38	25.16	-33.58	-0.67	9.16
BARCLAYS	BARC		Regno Unito	-0.05	0.03	6.45	39.24	-74.09	-1.53	25.39
LLOYDS BANKING GROUP	LLOY		Regno Unito	-0.10	0.09	6.42	30.21	-77.24	-2.88	34.81
BBVA	BBVA		Spagna	0.02	0.13	5.04	23.22	-31.54	-0.10	7.21
ING GROEP	INGA		Paesi Bassi	0.04	0.26	6.58	38.96	-45.77	-0.71	12.97
NATWEST GROUP	NWVG		Regno Unito	-0.25	0.08	8.36	34.14	-155.63	-7.20	129.69
CREDIT AGRICOLE	CRDA		Francia	0.02	0.18	5.91	25.12	-38.18	-0.30	7.50
SOCIETE GENERALE	SGE		Francia	-0.03	0.24	6.53	32.01	-38.23	-0.20	8.39
DANSKE BANK	DAB		Danimarca	0.05	0.18	4.69	29.39	-31.05	-0.20	11.56
DNB BANK	DNB		Norvegia	0.23	0.32	4.80	31.64	-32.65	-0.83	14.28
KBC GROUP	KB		Belgio	0.10	0.24	6.73	35.22	-54.16	-0.85	13.65
STANDARD CHARTERED	STAN		Regno Unito	0.03	-0.06	4.89	24.50	-24.86	-0.12	7.39
SKANDINAVISKA ENSKILDA BANKEN (classe A)	SEA		Svezia	0.16	0.49	4.71	34.21	-29.44	-0.20	13.21
SVENSKA HANDELSBANKEN (classe A)	SVK		Svezia	0.17	0.26	3.67	31.15	-22.46	0.28	12.07
SWEDBANK (classe A)	SWED		Svezia	0.13	0.31	4.97	29.63	-27.04	-0.35	10.90
BANCO BPM	BP		Italia	-0.25	0.02	6.75	30.60	-39.14	-0.73	6.83
CLOSE BROTHERS GROUP	CBG		Regno Unito	0.13	0.21	4.16	22.96	-20.51	-0.11	8.47
ERSTE GROUP BANK	ERS		Austria	0.07	0.28	6.17	28.74	-32.69	-0.51	7.89
INVESTEC	INVP		Regno Unito	0.21	0.38	5.33	28.20	-51.24	-1.05	14.26
AIB GROUP	A3G		Irlanda	-0.63	-0.19	11.24	75.65	-126.90	-1.29	27.06
BANCO DE SABADELL	BSAB		Spagna	-0.06	0.07	5.38	28.40	-44.51	-0.29	10.64
BANK OF IRELAND GROUP	BIRG		Irlanda	-0.25	0.00	9.96	67.77	-100.44	-0.61	23.35
BANKINTER	BKT		Spagna	0.13	0.19	4.76	21.93	-25.45	0.15	5.79
BPER BANCA	BPE		Italia	-0.09	0.00	5.79	23.18	-41.01	-0.33	7.64
JYSKE BANK	JYS		Danimarca	0.12	0.28	4.62	22.31	-28.77	-0.48	7.36
AVANZA BANK HOLDING	AZA		Svezia	0.44	0.32	5.10	18.26	-26.81	-0.28	5.33
BANK POLSKA KASA OPIEKI	PKA		Polonia	0.06	0.00	4.80	18.89	-42.89	-0.93	11.47
BC VAUD N	BCVN		Svizzera	0.29	0.21	3.35	21.76	-21.20	0.12	10.55
COMMERZBANK	CBKX		Germania	-0.23	-0.26	6.95	28.65	-39.44	-0.67	8.42
DEUTSCHE BANK	DBKX		Germania	-0.12	0.07	5.96	33.46	-36.88	-0.26	9.58
RINGJOBING LANDBOBANK	RIL		Danimarca	0.30	0.29	3.37	21.46	-27.28	-1.12	15.35
SANTANDER BANK POLSKA	BZW		Polonia	0.16	0.15	4.80	20.03	-43.84	-0.72	11.40
SYDBANK	SYD		Danimarca	0.18	0.32	4.74	34.11	-38.37	-0.64	13.57
NORDEA BANK	NBH		Finlandia	0.17	0.25	4.49	31.68	-33.51	-0.13	12.01

Tabella A.1: Statistiche descrittive *full sample* dei rendimenti settimanali delle aziende del settore *bank*.

Azienda	Ticker	Refinitiv	Paese	Media	Mediana	Dev. Std.	Max	Min	Asimmetria	Curtosi
ZURICH INSURANCE GROUP	ZURN		Svizzera	0.19	0.33	3.62	21.92	-29.41	-0.48	13.08
AXA	MIDI		Francia	0.14	0.34	5.33	32.24	-34.16	-0.34	10.20
ASSICURAZIONI GENERALI	G		Italia	0.06	0.13	3.80	17.82	-28.82	-0.56	8.81
PRUDENTIAL	PRU		Regno Unito	0.17	0.35	5.32	37.84	-37.48	-0.10	13.92
SWISS RE	SREN		Svizzera	0.10	0.23	4.76	25.23	-45.23	-1.66	21.69
SAMPO (classe A)	SAMA		Finlandia	0.30	0.44	3.48	16.89	-33.37	-1.15	14.68
AEFON	AGN		Paesi Bassi	-0.02	0.23	6.22	40.51	-47.67	-0.61	13.56
AVIVA	AV.		Regno Unito	0.10	0.24	5.00	28.72	-41.30	-1.15	17.04
LEGAL & GENERAL	LGEN		Regno Unito	0.20	0.21	5.28	39.33	-45.63	-0.45	18.89
SWISS LIFE HOLDING	SLHN		Svizzera	0.15	0.34	4.47	28.95	-41.52	-1.05	15.86
ALLIANZ	ALVX		Germania	0.15	0.40	4.25	25.75	-28.60	-0.27	10.44
BEAZLEY	BEZ		Regno Unito	0.30	0.25	3.95	17.33	-29.22	-0.70	8.81
AGEAS (EX-FORTIS)	AGS		Belgio	-0.05	0.16	7.31	31.92	-151.65	-9.37	193.21
BALOISE HOLDING	BALN		Svizzera	0.18	0.29	3.80	22.16	-26.79	-0.13	11.39
HANNOVER RUECK	HNR1X		Germania	0.27	0.40	3.81	17.97	-34.88	-1.24	14.84
HELVETIA HOLDING N	HELN		Svizzera	0.18	0.24	4.03	25.94	-27.31	-0.56	12.53
HISCOX DI	HSX		Regno Unito	0.25	0.13	3.70	17.57	-26.28	-0.23	8.36
MUENCHENER RUCK.	MUV2X		Germania	0.20	0.26	3.47	16.29	-35.56	-1.07	16.38
SCOR SE	SCO		Francia	0.14	0.28	4.35	27.40	-41.41	-0.74	14.51
STOREBRAND	STB		Norvegia	0.13	0.34	6.02	41.85	-42.62	-0.67	13.07
TOPDANMARK	TOP		Danimarca	0.28	0.27	3.34	14.31	-23.66	-0.95	9.68

**Tabella A.2:** Statistiche descrittive *full sample* per le aziende del settore *insurance*.

Azienda	Ticker	Refinitiv	Paese	Media	Mediana	Dev. Std.	Max	Min	Asimmetria	Curiosi
3I GROUP	III		Regno Unito	0.19	0.35	4.82	33.84	-31.10	-0.32	12.60
UBS GROUP	UBSG		Svizzera	-0.03	0.19	5.26	30.45	-39.31	-0.75	11.03
LONDON STOCK EXCHANGE GROUP	LSEG		Regno Unito	0.36	0.45	4.74	30.80	-28.77	0.23	10.61
INVESTOR (Classe B)	ISBF		Svezia	0.30	0.37	3.36	13.99	-22.15	-0.63	6.84
MEDIOBANCA BC.FIN	MB		Italia	0.08	0.24	4.99	27.64	-42.72	-0.83	11.45
EURAZEO	ERF		Francaia	0.13	0.20	4.35	27.97	-30.12	-0.18	9.09
GBL NEW	GBLN		Belgio	0.10	0.30	2.93	13.87	-33.51	-1.65	22.01
ST.JAMES'S PLACE ORD	STJ		Regno Unito	0.25	0.43	4.45	24.78	-25.58	-0.29	6.26
DEUTSCHE BOERSE	DBIX		Germania	0.26	0.27	4.05	25.04	-26.23	0.06	7.78
INTERMEDIATE CAPITAL GP.	ICP		Regno Unito	0.19	0.44	6.13	33.04	-46.53	-0.90	16.97
KINNEVIK (Classe B)	KIVB		Svezia	0.22	0.47	4.62	23.57	-27.13	-0.76	7.49
LUNDBERGFORETAGEN (Classe B)	LNBFI		Svezia	0.24	0.40	3.21	16.99	-20.66	-0.39	7.42
MAN GROUP	EMG		Regno Unito	0.10	0.27	5.92	22.63	-72.49	-2.15	27.60
SCHROEDERS	SDR		Regno Unito	0.20	0.29	4.25	19.71	-28.00	-0.37	6.66
SOFINA	SOF		Belgio	0.20	0.29	3.07	20.00	-18.20	-0.30	9.54
WENDEL	MF@F		Francaia	0.14	0.43	5.29	30.70	-31.87	-0.45	10.14
INDUSTRI/VARDEN (Classe C)	IUCF		Svezia	0.23	0.44	3.74	20.21	-22.15	-0.50	8.53

Tabella A.3: Statistiche descrittive *full sample* per le aziende del settore *financial services*.

<i>Variabile</i>	Media	DS	Asimmetria	Curtosi
UFC	2	1	1	11

**Tabella A.4:** Statistiche descrittive *full sample* per le variabili macroeconomiche descritte in 4.2.2.

## A.2 Variabili macroeconomiche



## Appendice B

### Titolo appendice B





# Bibliografia

- Acemoglu, D., Ozdaglar, A., & Tahbaz-Salehi, A. (2015). Systemic Risk and Stability in Financial Networks. *American Economic Review*, 105(2), 564–608 (cit. a p. vi).
- Acharya, V., Engle, R., & Richardson, M. (2012). Capital Shortfall: A New Approach to Ranking and Regulating Systemic Risks. *American Economic Review*, 102(3), 59–64 (cit. a p. iv).
- Acharya, V. V., Pedersen, L. H., Philippon, T., & Richardson, M. (2017). Measuring Systemic Risk. *The Review of Financial Studies*, 30(1), 2–47 (cit. a p. iv).
- Adrian, T., & Brunnermeier, M. K. (2016). CoVaR. *American Economic Review*, 106(7), 1705–1741 (cit. alle pp. iv, 43).
- Albert, R., & Barabási, A.-L. (2000). Topology of Evolving Networks: Local Events and Universality. *Physical Review Letters*, 85(24), 5234–5237 (cit. a p. 26).
- Albert, R., Jeong, H., & Barabási, A.-L. (2000). Error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, 406(6794), 378–382 (cit. a p. 26).
- Allen, F., & Babus, A. (2009). Networks in Finance. In *The network challenge: strategy, profit, and risk in an interlinked world* (1st ed). Wharton School Pub. (Cit. a p. iv).
- Allen, F., Babus, A., & Carletti, E. (2012). Asset commonality, debt maturity and systemic risk. *Journal of Financial Economics*, 104(3), 519–534 (cit. a p. vi).
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228 (cit. a p. 43).

- Barabási, A.-L., & Albert, R. (1999). Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286(5439), 509–512 (cit. alle pp. 25, 27).
- Battiston, S., Puliga, M., Kaushik, R., Tasca, P., & Caldarelli, G. (2012). DebtRank: Too central to fail? financial networks, the FED and systemic risk. *Scientific Reports*, 2(1), 541 (cit. alle pp. iv, 42).
- Belloni, A., & Chernozhukov, V. (2011).  $\ell_1$ -penalized quantile regression in high-dimensional sparse models. *The Annals of Statistics*, 39(1), 82–130 (cit. alle pp. 18, 20).
- Benoit, S., Colliard, J. E., Hurlin, C., & Pérignon, C. (2017). Where the risks lie: A survey on systemic risk. *Review of Finance*, 21(1), 109–152 (cit. a p. vi).
- Betz, F., Hautsch, N., Peltonen, T. A., & Schienle, M. (2016). Systemic risk spillovers in the European banking and sovereign network. *Journal of Financial Stability*, 25, 206–224 (cit. a p. 19).
- Billio, M., & Caporin, M. (2005). Multivariate Markov switching dynamic conditional correlation GARCH representations for contagion analysis. *Statistical Methods & Applications*, 14(2), 145–161 (cit. a p. iv).
- Billio, M., Caporin, M., Panzica, R., & Pelizzon, L. (2023). The impact of network connectivity on factor exposures, asset pricing, and portfolio diversification. *International Review of Economics & Finance*, 84, 196–223 (cit. a p. 44).
- Billio, M., Getmansky, M., Lo, A. W., & Pelizzon, L. (2012). Econometric measures of connectedness and systemic risk in the finance and insurance sectors. *Journal of Financial Economics*, 104(3), 535–559 (cit. alle pp. iv, 41).
- Billio, M., & Pelizzon, L. (2003). Contagion and interdependence in stock markets: Have they been misdiagnosed? *Journal of Economics and Business*, 55(5), 405–426 (cit. a p. 22).
- Bisias, D., Flood, M., Lo, A. W., & Valavanis, S. (2012). A Survey of Systemic Risk Analytics. *Annual Review of Financial Economics*, 4, 255–296 (cit. a p. vi).
- Bonaccolto, G., Caporin, M., & Panzica, R. (2019). Estimation and model-based combination of causality networks among large US banks and insurance companies. *Journal of Empirical Finance*, 54, 1–21 (cit. a p. 45).

- Bonaccolto, G., Caporin, M., & Paterlini, S. (2019). Decomposing and backtesting a flexible specification for CoVaR. *Journal of Banking & Finance*, 108, 105659 (cit. a p. iv).
- Boss, M., Elsinger, H., Summer, M., & Thurner 4, S. (2004). Network topology of the interbank market. *Quantitative Finance*, 4(6), 677–684 (cit. a p. vi).
- Boss, M., Summer, M., & Thurner, S. (2004). Contagion flow through banking networks. In M. Bubak, G. D. van Albada, P. M. A. Soot & J. Dongarra (Cur.), *Computational science - ICCS 2004* (pp. 1070–1077). Springer. (Cit. a p. 24).
- Bräuning, F., & Koopman, S. J. (2020). The dynamic factor network model with an application to international trade. *Journal of Econometrics*, 216(2), 494–515 (cit. a p. v).
- Broder, A., Kumar, R., Maghoul, F., Raghavan, P., Rajagopalan, S., Stata, R., Tomkins, A., & Wiener, J. (2000). Graph structure in the Web. *Computer Networks*, 33(1), 309–320 (cit. a p. 42).
- Brownlees, C., & Engle, R. F. (2017). SRISK: A Conditional Capital Shortfall Measure of Systemic Risk. *The Review of Financial Studies*, 30(1), 48–79 (cit. a p. iv).
- Buccheri, G., & Mazzarisi, P. (2022, agosto 23). Realized random graphs, with an application to the interbank network. (Cit. alle pp. 29, 43).
- Bushee, B. J., & Noe, C. F. (2000). Corporate Disclosure Practices, Institutional Investors, and Stock Return Volatility. *Journal of Accounting Research*, 38, 171–202 (cit. a p. 44).
- Calabrese, R., Elkink, J. A., & Giudici, P. S. (2017). Measuring bank contagion in europe using binary spatial regression models. *Journal of the Operational Research Society*, 68(12), 1503–1511 (cit. a p. v).
- Caporin, M., Costola, M., Garibal, J. C., & Maillet, B. (2022). Systemic risk and severe economic downturns: A targeted and sparse analysis. *Journal of Banking and Finance*, 134, 106339 (cit. a p. 45).
- Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 841–862 (cit. a p. 39).

- Claessens, S., Dornbusch, R., & Park, Y. C. (2001). Contagion: Why crises spread and how this can be stopped. In S. Claessens & K. J. Forbes (Cur.), *International financial contagion* (pp. 19–41). Springer US. (Cit. a p. 21).
- Connor, G., & Korajczyk, R. A. (1993). A Test for the Number of Factors in an Approximate Factor Model. *The Journal of Finance*, 48(4), 1263–1291 (cit. a p. 29).
- Corsetti, G., Pericoli, M., & Sbracia, M. (2005). ‘some contagion, some interdependence’: More pitfalls in tests of financial contagion. *Journal of International Money and Finance*, 24(8), 1177–1199 (cit. a p. 22).
- Corsi, F., Lillo, F., Pirino, D., & Trapin, L. (2018). Measuring the propagation of financial distress with granger-causality tail risk networks. *Journal of Financial Stability*, 38, 18–36 (cit. alle pp. 1, 41).
- da Cruz, J. P., & Lind, P. G. (2012). The dynamics of financial stability in complex networks. *The European Physical Journal B*, 85(8), 256 (cit. a p. vi).
- Diebold, F. X., & Yilmaz, K. (2009). Measuring Financial Asset Return and Volatility Spillovers, with Application to Global Equity Markets. *The Economic Journal*, 119(534), 158–171 (cit. a p. iv).
- Diebold, F. X., & Yilmaz, K. (2014). On the network topology of variance decompositions: Measuring the connectedness of financial firms. *Journal of Econometrics*, 182(1), 119–134 (cit. a p. iv).
- Doz, C., Giannone, D., & Reichlin, L. (2011). A two-step estimator for large approximate dynamic factor models based on Kalman filtering. *Journal of Econometrics*, 164(1), 188–205 (cit. a p. 29).
- Durbin, J., & Koopman, S. J. (2012). *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford University Press. (Cit. a p. 29).
- Eisenberg, L., & Noe, T. H. (2001). Systemic risk in financial systems. *Management Science* (cit. a p. vi).
- Engle, R., Jondeau, E., & Rockinger, M. (2015). Systemic Risk in Europe. *Review of Finance*, 19(1), 145–190 (cit. a p. iv).
- Engle, R., & Manganelli, S. (2004). CAViaR. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(4), 367–381 (cit. alle pp. 39, 40).

- Erdoes, P., & Rényi, A. (1959). On Random Graphs. *Publicationes Mathematicae*, 6, 290–297 (cit. a p. 26).
- European Central Bank. (2024, giugno 18). *Euro area yield curves* [European central bank]. Recuperato aprile 6, 2025, da [https://www.ecb.europa.eu/stats/financial\\_markets\\_and\\_interest\\_rates/euro\\_area\\_yield\\_curves/html/index.en.html](https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html) (cit. a p. 38).
- Forbes, K., & Rigobon, R. (2001). Measuring contagion: Conceptual and empirical issues. In S. Claessens & K. J. Forbes (Cur.), *International financial contagion* (pp. 43–66). Springer US. (Cit. a p. 20).
- Forbes, K., & Rigobon, R. (2002). No contagion, only interdependence: Measuring stock market comovements. *The Journal of Finance*, 57(5), 2223–2261 (cit. alle pp. 21, 22).
- Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis*. Princeton University Press. (Cit. alle pp. 29, 33).
- Hansen, P. R., Lunde, A., & Nason, J. M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, 79(2), 453–497 (cit. a p. 42).
- Hautsch, N., Schaumburg, J., & Schienle, M. (2015). Financial Network Systemic Risk Contributions. *Review of Finance*, 19(2), 685–738 (cit. alle pp. v, 19).
- Hautsch, N., Schaumburg, J., & Schienle, M. (2014). Forecasting systemic impact in financial networks. *International Journal of Forecasting*, 30(3), 781–794 (cit. a p. 19).
- Holland, P. W., & Leinhardt, S. (1981). An Exponential Family of Probability Distributions for Directed Graphs. *Journal of the American Statistical Association*, 76(373), 33–50 (cit. a p. 27).
- Holme, P., & Saramäki, J. (2012). Temporal networks. *Physics Reports*, 519(3), 97–125 (cit. a p. 27).
- Hong, Y., Liu, Y., & Wang, S. (2009). Granger causality in risk and detection of extreme risk spillover between financial markets. *Journal of Econometrics*, 150(2), 271–287 (cit. alle pp. iv, v, 1).
- Huang, X., Zhou, H., & Zhu, H. (2009). A framework for assessing the systemic risk of major financial institutions. *Journal of Banking & Finance*, 33(11), 2036–2049 (cit. a p. 44).

- Huang, X., Zhou, H., & Zhu, H. (2012). Systemic risk contributions. *Journal of Financial Services Research*, 42(1), 55–83 (cit. a p. iv).
- Hull, J. C. (2023). *Risk management and financial institutions*. John Wiley & Sons. (Cit. a p. v).
- Jeong, K., Härdle, W. K., & Song, S. (2012). A consistent nonparametric test for causality in quantile. *Econometric Theory*, 28(4), 861–887 (cit. a p. 1).
- Jolliffe, I. T. (2002). *Principal component analysis*. Springer-Verlag. (Cit. a p. 29).
- Kaminsky, G. L., & Reinhart, C. M. (2002). Financial markets in times of stress. *Journal of Development Economics*, 69(2), 451–470 (cit. a p. v).
- Koenker, R. (2005). *Quantile Regression*. Cambridge University Press. (Cit. alle pp. 2, 8, 13).
- Koenker, R., & Bassett, G. (1978). Regression Quantiles. *Econometrica*, 46(1), 33–50 (cit. a p. 1).
- Koenker, R., & Machado, J. A. F. (1999). Goodness of Fit and Related Inference Processes for Quantile Regression. *Journal of the American Statistical Association*, 94(448), 1296–1310 (cit. a p. 16).
- Kolaczyk, E. D. (2009). *Statistical analysis of network data: Methods and models*. Springer. (Cit. a p. 23).
- Kou, G., Chao, X., Peng, Y., Alsaadi, F. E., & Herrera-Viedma, E. (2019). Machine learning methods for systemic risk analysis in financial sectors. *Technological and Economic Development of Economy*, 25(5), 716–742 (cit. a p. v).
- Kritzman, M., Li, Y., Page, S., & Rigobon, R. (2011). Principal Components as a Measure of Systemic Risk. *The Journal of Portfolio Management*, 37(4), 112–126 (cit. alle pp. iv, 29).
- Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84 (cit. a p. 40).
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*, 54(1), 159–178 (cit. a p. 33).

- Latora, V., Nicosia, V., & Russo, G. (2017). *Complex Networks: Principles, Methods and Applications*. Cambridge University Press. (Cit. a p. 24).
- Lee, E. R., Noh, H., & Park, B. U. (2014). Model Selection via Bayesian Information Criterion for Quantile Regression Models. *Journal of the American Statistical Association*, 109(505), 216–229 (cit. a p. 20).
- Liu, Y.-Y., Slotine, J.-J., & Barabási, A.-L. (2011). Controllability of complex networks. *Nature*, 473(7346), 167–173 (cit. a p. 44).
- Neveu, A. R. (2018). A survey of network-based analysis and systemic risk measurement. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, 13(2), 241–281 (cit. a p. v).
- Newman, M. (2018). *Networks*. Oxford University Press. (Cit. a p. 42).
- Nicosia, V., Criado, R., Romance, M., Russo, G., & Latora, V. (2012). Controlling centrality in complex networks. *Scientific Reports*, 2(1), 218 (cit. a p. 25).
- Pelletier, D. (2006). Regime switching for dynamic correlations. *Journal of Econometrics*, 131(1), 445–473 (cit. a p. iv).
- Pericoli, M., & Sbracia, M. (2003). A primer on financial contagion. *Journal of Economic Surveys*, 17(4), 571–608 (cit. alle pp. vi, 21).
- Poledna, S., Molina-Borboa, J. L., Martínez-Jaramillo, S., van der Leij, M., & Thurner, S. (2015). The multi-layer network nature of systemic risk and its implications for the costs of financial crises. *Journal of Financial Stability*, 20, 70–81 (cit. alle pp. iv, vi, 41).
- Politis, D. N., & Romano, J. P. (1994). The Stationary Bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, 89(428), 1303–1313 (cit. a p. 42).
- Racine, J. (2000). Consistent cross-validatory model-selection for dependent data: hv-block cross-validation. *Journal of Econometrics*, 99(1), 39–61 (cit. a p. 41).
- Rigobon, R. (2003). On the measurement of the international propagation of shocks: is the transmission stable? *Journal of International Economics*, 61(2), 261–283 (cit. alle pp. 21, 22).
- Robins, G., Pattison, P., Kalish, Y., & Lusher, D. (2007). An introduction to exponential random graph ( $p^*$ ) models for social networks. *Social Networks*, 29(2), 173–191 (cit. a p. 27).

- Robins, G., Snijders, T., Wang, P., Handcock, M., & Pattison, P. (2007). Recent developments in exponential random graph ( $p^*$ ) models for social networks. *Social Networks*, 29(2), 192–215 (cit. a p. 27).
- Shao, J. (1993). Linear Model Selection by Cross-validation. *Journal of the American Statistical Association*, 88(422), 486–494 (cit. a p. 41).
- Sherwood, B., & Wang, L. (2016). Partially linear additive quantile regression in ultra-high dimension. *The Annals of Statistics*, 44(1), 288–317 (cit. a p. 19).
- Shin, W., Kim, M., & Jung, Y. (2022). Efficient information-based criteria for model selection in quantile regression. *Journal of the Korean Statistical Society*, 51(1), 245–281 (cit. a p. 17).
- Song, X., & Taamouti, A. (2021). Measuring Granger Causality in Quantiles. *Journal of Business and Economic Statistics*, 39(4), 937–952 (cit. a p. 1).
- Tibshirani, R. (1996). Regression Shrinkage and Selection Via the Lasso. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 58(1), 267–288 (cit. a p. 18).
- van de Geer, S. A. (2008). High-dimensional generalized linear models and the lasso. *The Annals of Statistics*, 36(2), 614–645 (cit. a p. 19).
- Wu, Y., & Liu, Y. (2009). Variable Selection in Quantile Regression. *Statistica Sinica*, 19(2), 801–817 (cit. a p. 19).
- Zhang, X., Moore, C., & Newman, M. E. (2017). Random graph models for dynamic networks. *European Physical Journal B*, 90(10), 1–14 (cit. a p. 27).