UNIFESSPA | Faculdade de Computação e Engenharia Elétrica

PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Prof. Claudio Coutinho

Turma EC
2018

Aula 12

Transformada Z
(Cont.)

Exemplo

- Considere o sinal $x[n] = -\alpha^n u[-n-1] = \begin{cases} -\alpha^n, & n \leq -1 \\ 0, & n > -1 \end{cases}$
- Ou seja, esta é uma sequência de *lado esquerdo*
- A Transformada Z dela é, então:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\alpha^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

Exemplo

$$X(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} z^{n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^{n} \rightarrow |\alpha^{-1} z| < 1$$

- Então

$$|z| < |\alpha|$$

Exemplo

- Continuando:

$$X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^n = 1 - \frac{1 - \left({}^{z}/_{\alpha}\right)^{\infty+1}}{1 - \left({}^{z}/_{\alpha}\right)} = 1 - \frac{1}{1 - \left({}^{z}/_{\alpha}\right)}$$

- Ou:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-\alpha^{-1}z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}$$

Exemplo

- Note que, para $|\alpha| < 1$, a sequência $-\alpha^n u[-n-1]$ cresce exponencialmente conforme $n \to -\infty$, e a Transformada de Fourier não existe, pois:
$$|z| < |\alpha| < 1$$
- Mas se $|\alpha| > 1$, a Transformada de Fourier existe e é dada por:
$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$
- Semelhante à relação do exemplo interior, mas esta só é válida para $-\alpha^n u[-n-1]$ quando $|\alpha| > 1$
- E é válida para $\alpha^n u[n]$ quando $|\alpha| < 1$

Exemplo

- Temos, então a ROC:

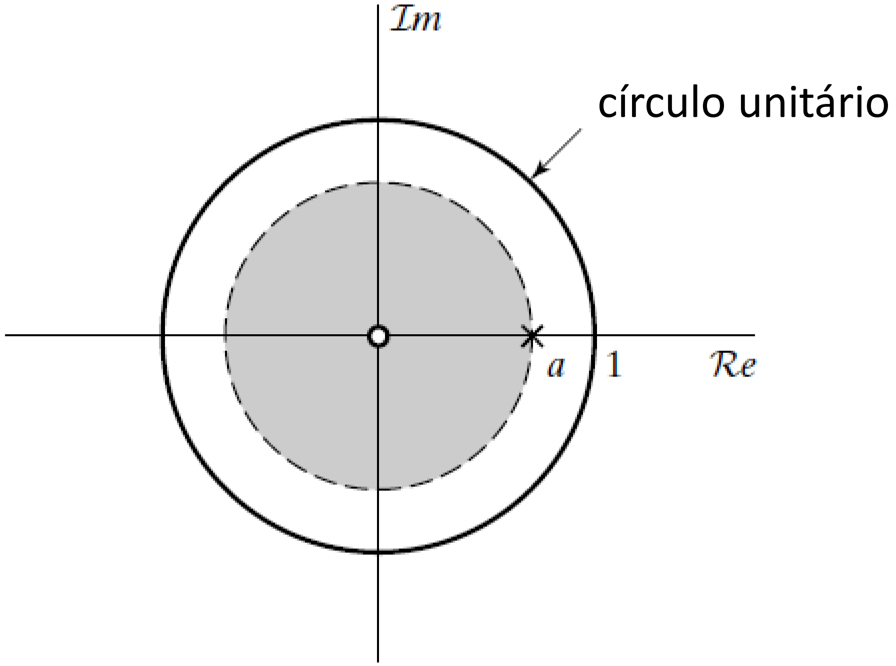


TABLE 1 SOME COMMON z-TRANSFORM PAIRS

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
7. $na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
9. $\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
10. $\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
11. $r^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
12. $r^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > 0$

Função de Sistema

- Sabe-se que, para um determinado sistema LTI, $h[n]$ é conhecida como ***resposta ao impulso***. Uma espécie de comportamento padrão para qualquer sinal de entrada.
- Ao calcular a Transformada Z desse sinal, $\mathcal{Z}\{h[n]\}$, encontramos $H(z)$, a chamada ***função de sistema***

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

Função de Sistema

- Ou seja:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

- Representando uma multiplicação simples na frequência
- Ou seja, o produto na frequência é equivalente a uma convolução no tempo.

Função de Sistema

- A relação da Função de Sistema é muito útil para encontrarmos entrada, saída e a própria função no tempo, a partir das outras duas e, assim, analisar sua região de convergência.
- A partir da fórmula fechada, podemos encontrar, através da tabela de pares de transformada, os sinais no tempo.
- Método proposto por Oliver Heaviside (1850-1925)

Função de Sistema – Exemplo

- Considere uma sequência cuja Transformada Z é:

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right)}$$

Primeiro, localizamos os valores dos polos (multipliquemos por z):

$$X(z) = \frac{z}{\left(z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}\right)}$$

$$\Delta = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Função de Sistema – Exemplo

$$\Delta = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$z = \frac{-(-{}^{3}/_{4}) \pm \sqrt{{}^{1}/_{16}}}{2 \cdot 1} = \frac{{}^{3}/_{4} \pm {}^{1}/_{4}}{2}$$

$$z' = {}^{1}/_{2}$$

$$z'' = {}^{1}/_{4}$$

Função de Sistema – Exemplo

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

Para separar as frações, utilizamos o método de expansão por frações parciais, ou seja:

$$X(z) = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

Função de Sistema – Exemplo

$$X(z) = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

- Aplicando-se o método do resíduo, temos:

$$A = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Bigg|_{z={}^{1}/_{2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4} \cdot 2\right)} = 2$$

Função de Sistema – Exemplo

$$X(z) = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

- Aplicando-se o método do resíduo, temos:

$$B = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\Bigg|_{z = 1/4} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot 4\right)} = -1$$

Função de Sistema – Exemplo

- Então:

$$X(z) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

- Então:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right\}$$

$$= 2 \cdot \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right\}$$

Função de Sistema – Exemplo

- Da tabela de pares de transformada:

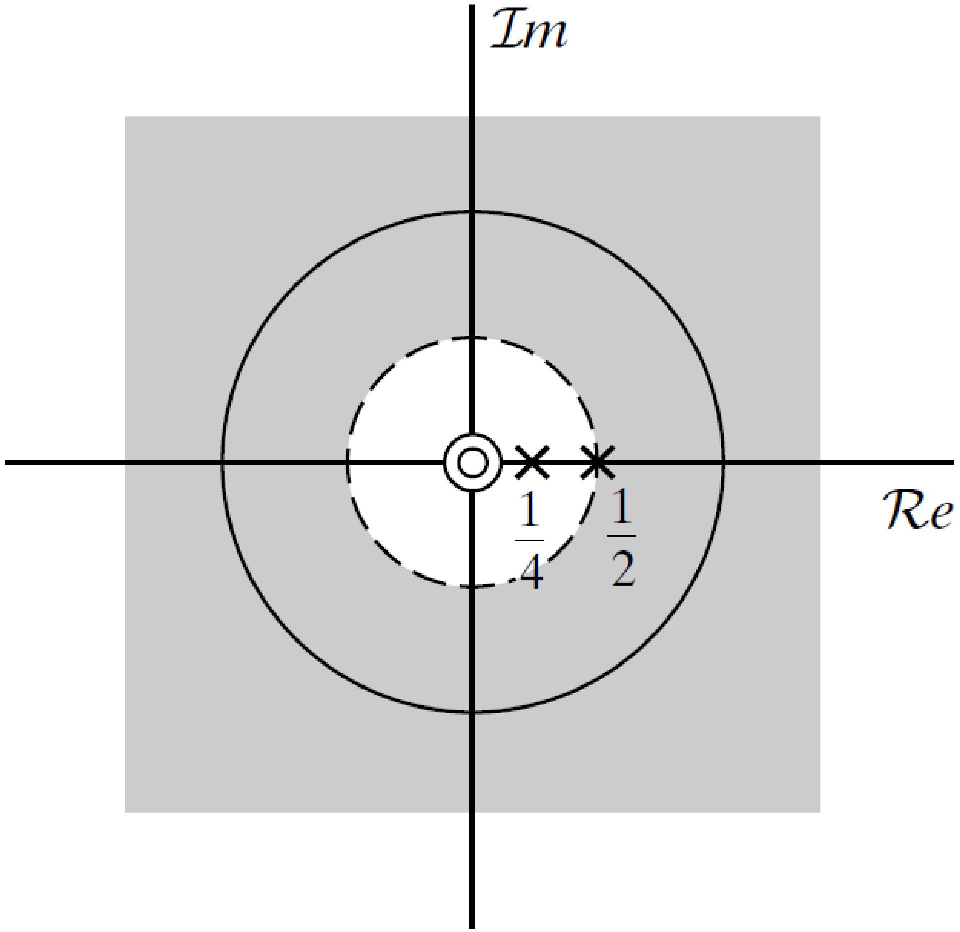
$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\right\} = \alpha^n u[n], \qquad |z| > |\alpha|$$

- Então:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = 2\cdot\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right\}$$

$$x[n] = 2\cdot\left({}^{1}/{}_{2}\right)^n u[n] - \left({}^{1}/{}_{4}\right)^n u[n]$$

Função de Sistema – Exemplo (ROC)



Exercício

- Considere $h[n] = \alpha^n u[n]$, $|\alpha| < 1$ e $x[n] = Au[n]$.
- Encontre $y[n]$ utilizando a relação da função de sistema (sem convoluir).

- Resp:

$$y[n] = \frac{A}{1-\alpha}(1 - \alpha^{n+1})u[n]$$

Exercício

- Resp:

$$y[n] = \frac{A}{1-\alpha}(1-\alpha^{n+1})u[n]$$