Faculdade de Computação e Engenharia Elétrica

PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Prof. Claudio Coutinho

Turma EC
2018

Aula 04

Sistemas LIT (Cont.), Resposta ao Impulso e Convolução

Sistemas Invariantes no tempo

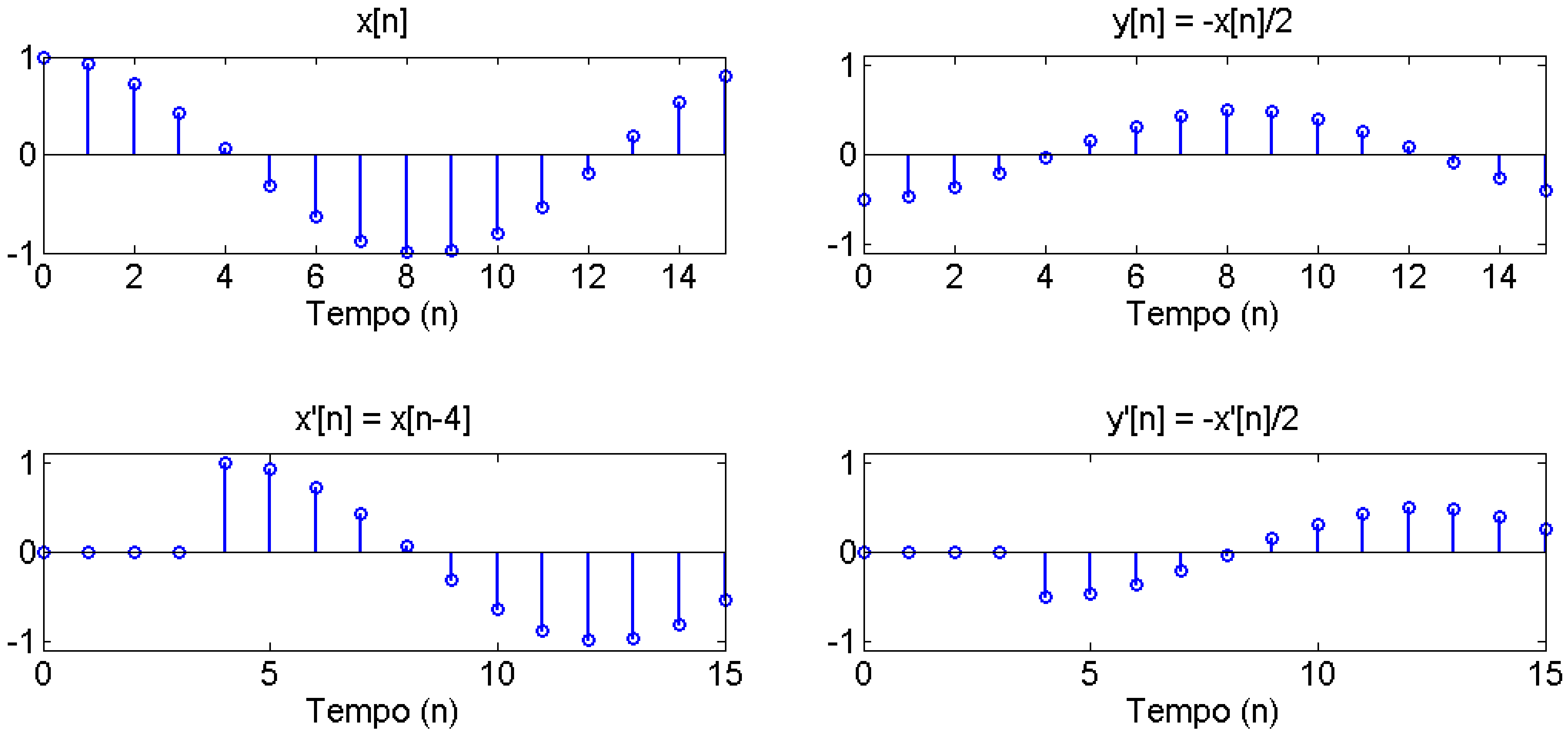
- Um sistema invariante no tempo é um sistema onde um atraso (ou deslocamento) na entrada causa um atraso equivalente na saída

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n]$$

$$x' = x_1[n+k] \longrightarrow y' = y_1[n+k]$$

- Onde $k \in \mathbb{Z}$, e representa k amostras de atraso no tempo.
- Para que um sistema seja invariante no tempo, a equação acima deve ser verdade para qualquer entrada e qualquer k.

Sistemas Invariantes no tempo - Exemplo



Sistemas Invariantes no tempo - Exemplo

- Prova:

$$x'[n] = x[n-4]$$

$$y[n] = -{}^{x[n]}/_{2}$$

$$y'[n] = -{}^{x'[n]}/_{2} = -{}^{(x[n-4])}/_{2} = y[n-4]$$

Sistemas Invariantes no tempo - Exemplo

- Outro exemplo:

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1]$$

Invariante no tempo?

Sistemas Invariantes no tempo - Exemplo

- Outro exemplo:

$$y[n] = x[n^2]$$

Invariante no tempo?

Sistemas Invariantes no tempo - Exemplo

- Outro exemplo:

$$y[n] = n \cdot x[n]$$

Invariante no tempo?

Sistemas causais

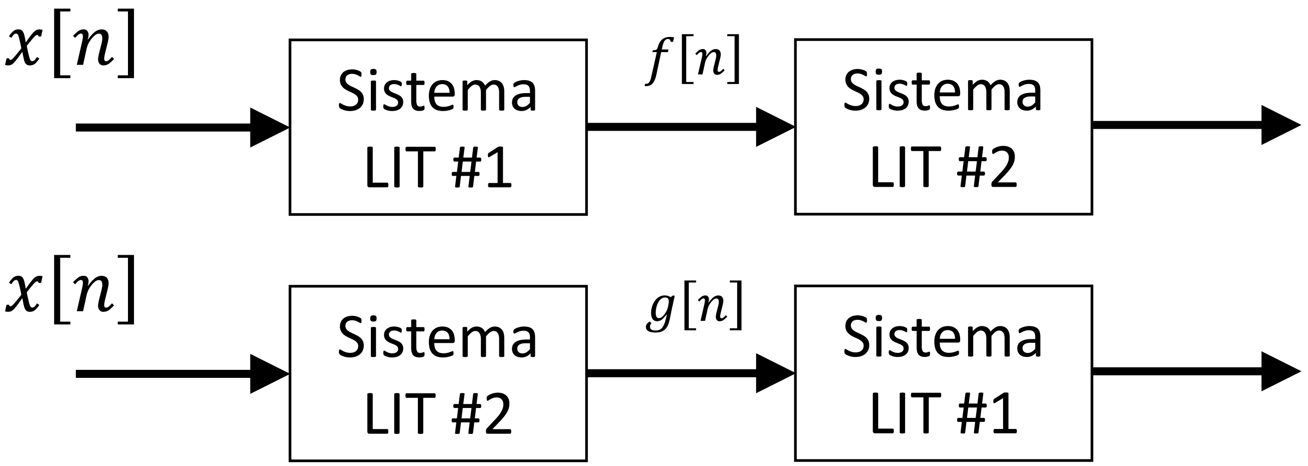
- Um sistema é dito causal se a sua saída em um dado "tempo" n depende apenas de valores da entrada n_0, onde $n \geq n_0$

- $y[n] = x[n] - 2x[n-1]$ causal. Ex: carro

- $y[n] = x[n+3]$ não-causal. Ex: filtro de suavizamento de imagens

Propriedade comutativa de Sistemas LIT

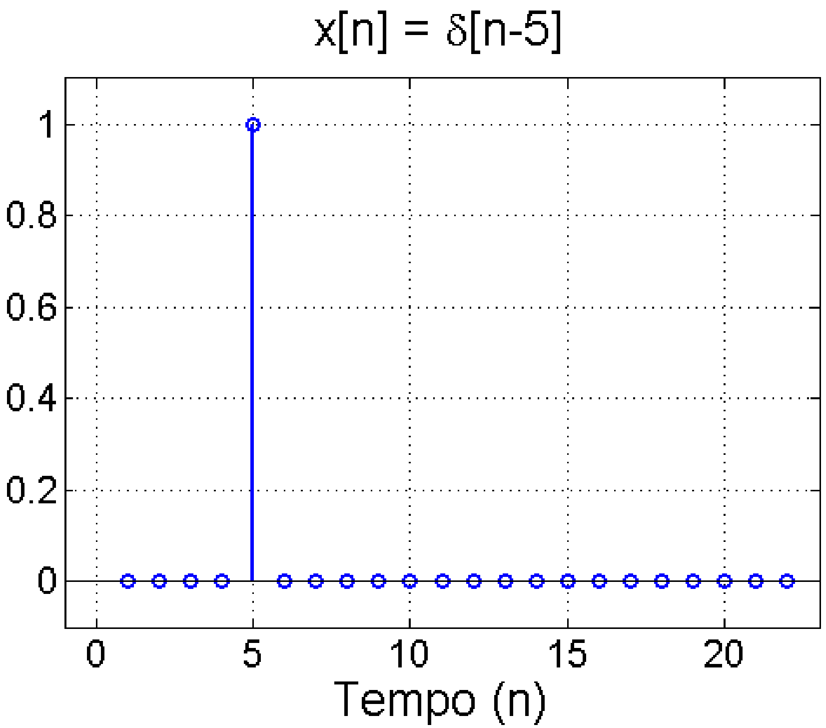
- Sistemas LIT podem ser rearranjados de forma que sua ordem não interfere na saída final
- Essa propriedade é muito útil para a construção de ***filtros digitais***

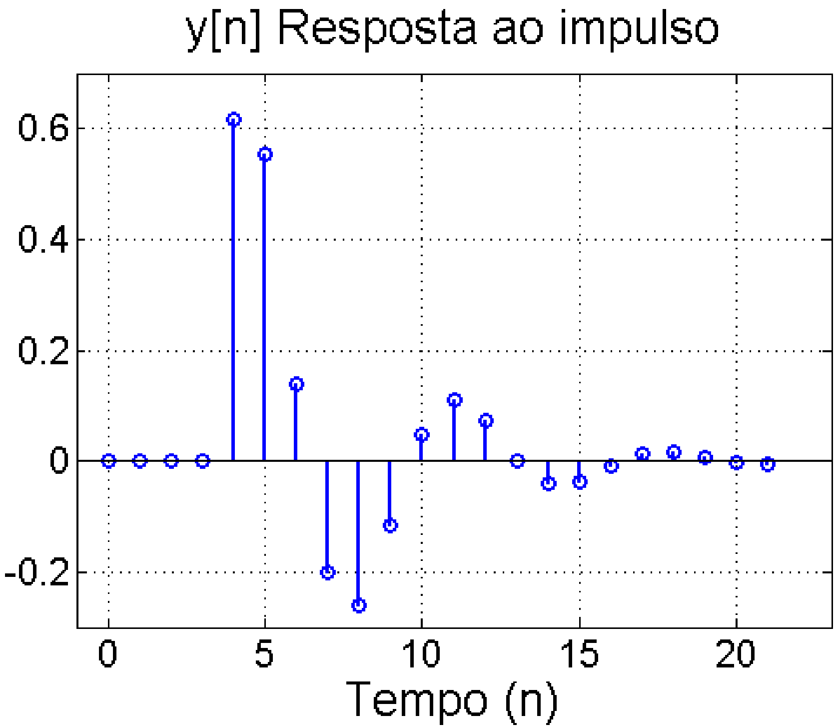


- Apesar de $f[n]$ e $g[n]$ serem diferentes, $y[n]$ sempre será igual

Resposta ao impulso

- Todo sistema LIT pode ser completamente caracterizado por sua ***resposta ao impulso***, ou seja, a sua saída quando um *impulso unitário* $\delta[n]$ é aplicado à sua entrada.





Resposta ao impulso

- Lembre que todo sinal discreto pode ser representado com uma *soma infinita* de impulsos deslocados escalados por cada amostra do sinal, ou seja:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Resposta ao impulso

- Então, se aplicarmos $x[n]$ à entrada, temos que:

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, T\{\delta[n-k]\}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h_k[n]$$

Onde $h_k[n] = T\{\delta[n-k]\}$ é a resposta do sistema a um impulso deslocado de k

Resposta ao impulso

- Se o sistema é invariante no tempo e, também, se para $k = 0$

$$T\{\delta[n-0]\} = h_0[n] = h[n]$$

- Através da linearidade (atraso na entrada, atraso na saída), podemos concluir que:

$$T\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$$

Resposta ao impulso

- Logo:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Ou seja, um sistema LIT é completamente caracterizado por sua resposta ao impulso unitário

A equação acima é chamada de ***soma de convolução***

Soma de convolução

- Se, na soma de convolução:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Fizermos a troca de variáveis: $l = n - k$, a equação é escrita como:

$$y[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-l]h[l]$$

E dizemos que $y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

Soma de convolução - Exemplo

- Suponha agora que a resposta ao impulso de um sistema serve de ***entrada*** para outro sistema:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Mantemos a forma antiga para usar variáveis distintas e não fazer confusão!

$$y'[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y[l]h'[n-l] =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[l-k]\right] h'[n-l] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l-k]h'[n-l]\right]$$

Soma de convolução – Exemplo (Cont.)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l-k]h'[n-l]\right]$$

Fazemos, agora, uma troca de variáveis: $r = n - l$, ou $l = n - r$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[n-k-r]h'[r]\right] =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\big[h[n-k] * h'[n-k]\big]$$

Soma de convolução – Exemplo (Cont.)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\big[h[n-k] * h'[n-k]\big] =$$

$$\boxed{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-l]\big[h[l] * h'[l]\big]}$$

- Em outras palavras, um sistema que é formado por dois subsistemas tem, como resposta ao impulso, a convolução das respostas ao impulso de cada subsistema.