UNIFESSPA | Faculdade de Computação e Engenharia Elétrica

PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Prof. Claudio Coutinho

Turma EC
2018

Aula 08

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Introdução

- Como já é sabido, um sinal no domínio do tempo, pode ser representado no domínio da frequência.
- Isso significa que é possível analisar a magnitude de cada componente de frequência isoladamente.
- Essa prática é útil para podermos manipular o sinal de outra ótica.
- Por exemplo, em um sinal de voz, pode-se atenuar ou amplificar certas frequências, alterando características do sinal original

Números complexos

- Antes de iniciarmos o estudo da DFT, é válido rever alguns conceitos de *números complexos*.

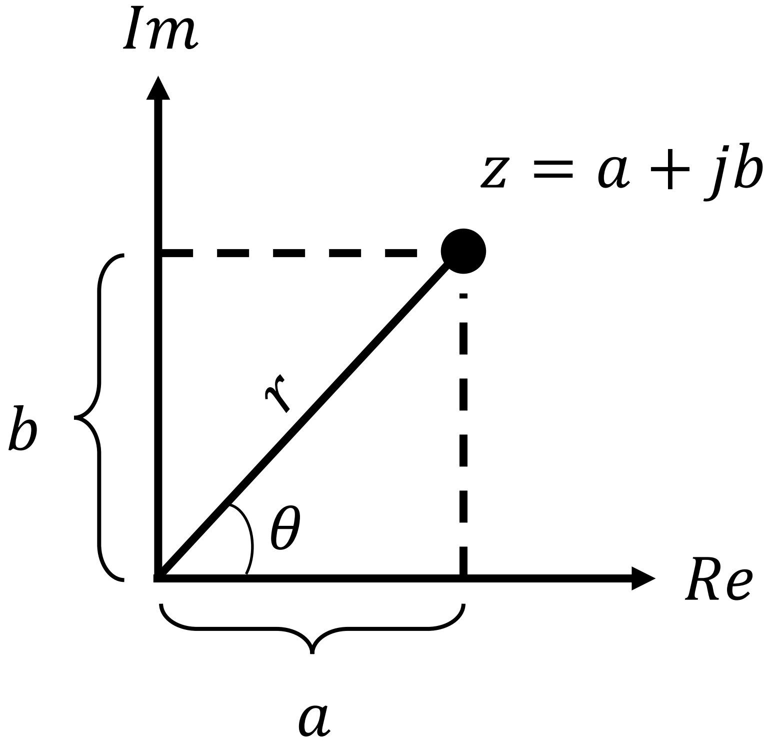
- Um número complexo é dado por:

$$z = a + jb$$

- Onde a é a parte real ($Re\{z\}$) e b é a parte imaginária ($Im\{z\}$)

Números complexos

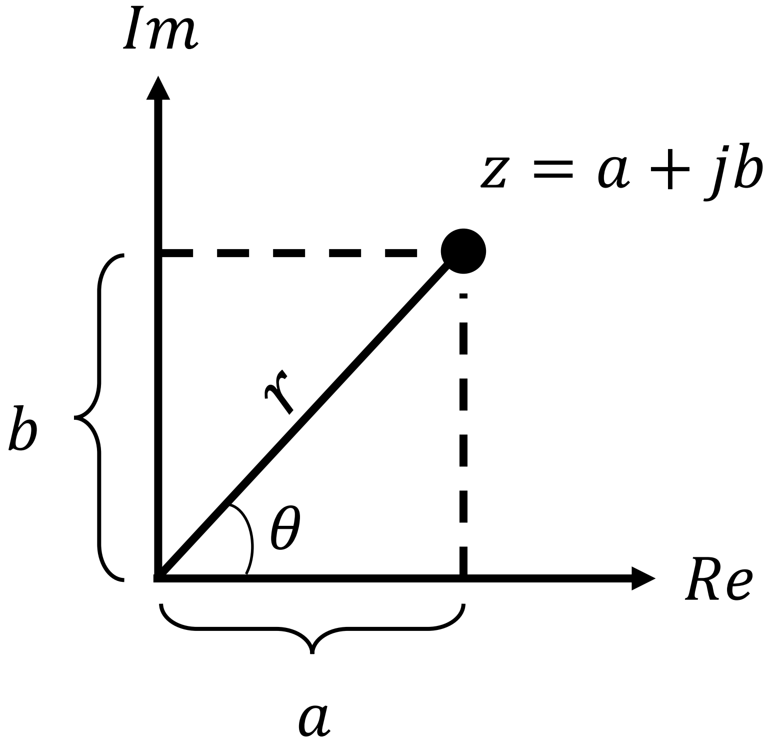
- Um número complexo representa um ponto no plano cartesiano.



- O número complexo forma uma relação com a origem
- Dessa relação, surgem dois valores:
  - Magnitude
  - Ângulo

Números complexos

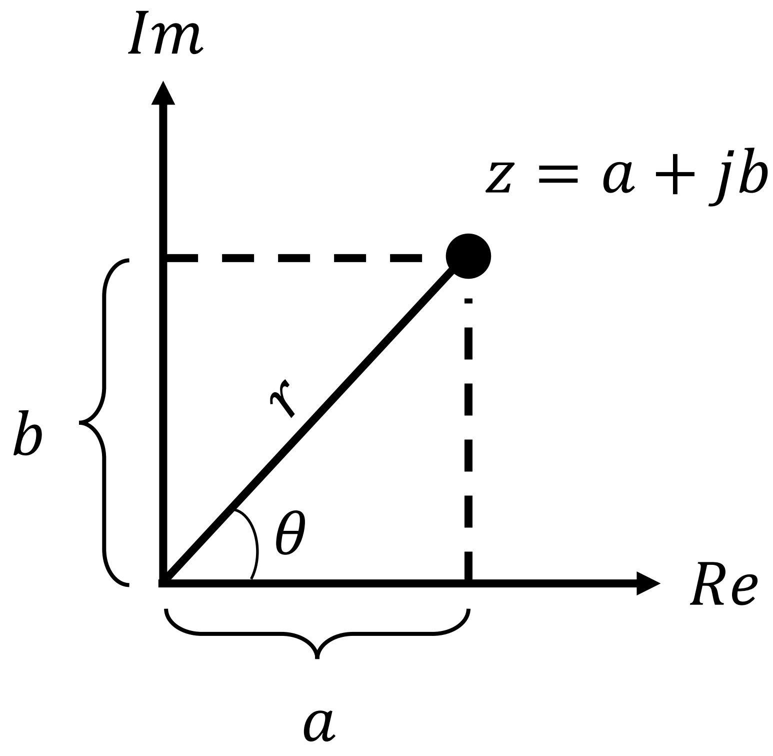
- Um número complexo representa um ponto no plano cartesiano.



- A magnitude de z, ou seja, $|z|$, ou r é dada pelo Teorema de Pitágoras
  - $|z| = r^2 = a^2 + b^2$
  - logo: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Números complexos

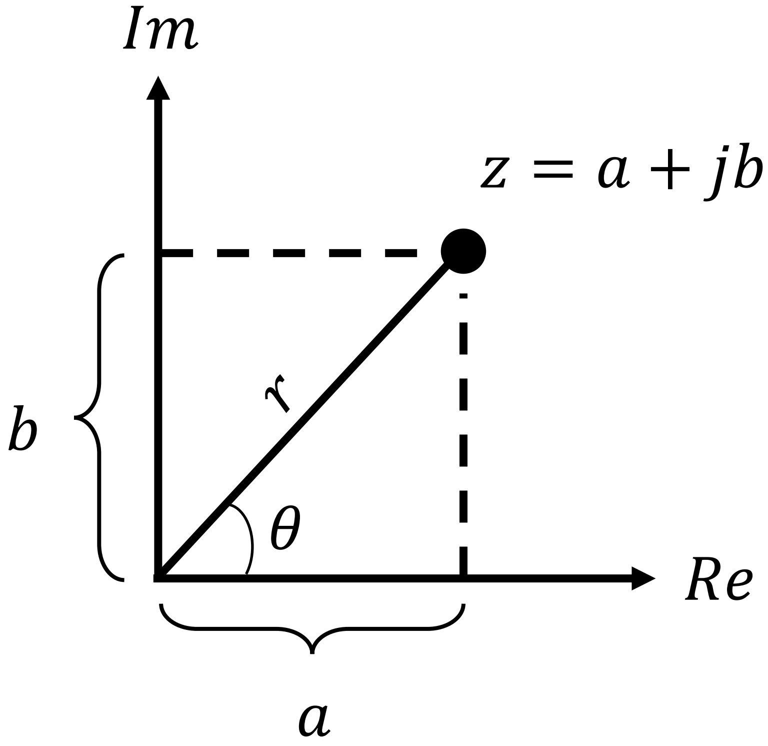
- Um número complexo representa um ponto no plano cartesiano.



- O ângulo, ou fase, θ é dado pela relação de tangente:
- $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$
- logo: $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Números complexos

- Um número complexo representa um ponto no plano cartesiano.



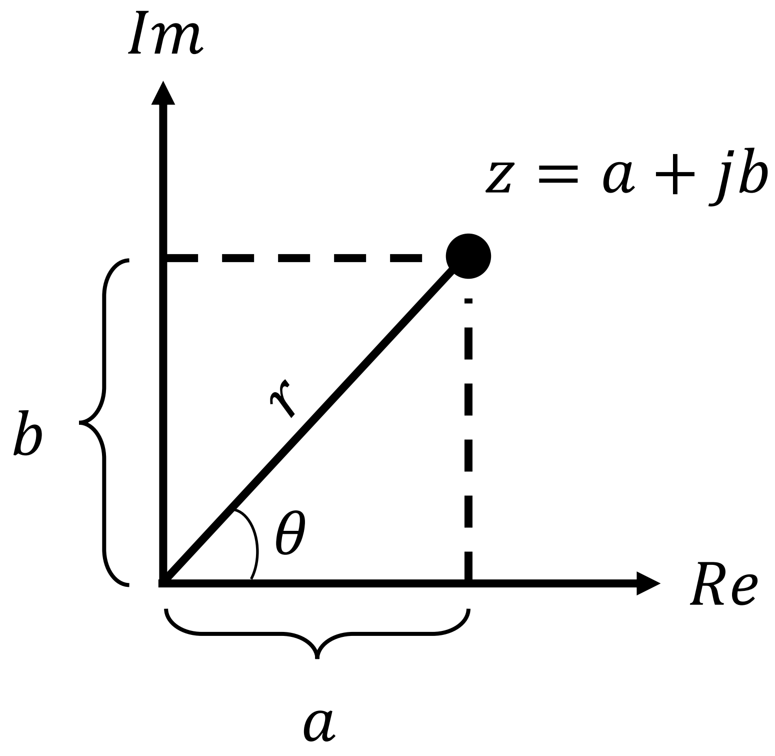
- Aplicando-se a mesma ideia, encontramos as relações:
- $\text{sen}(\theta) = \frac{b}{r} \rightarrow b = r \cdot \text{sen}(\theta)$
- $\cos(\theta) = \frac{a}{r} \rightarrow a = r.\cos(\theta)$

Então:

- $z = a + jb$
- $z = r \cdot \cos(\theta) + jr \cdot sen(\theta)$

Números complexos

- Um número complexo representa um ponto no plano cartesiano.



- $z = r \cdot \cos(\theta) + jr \cdot sen(\theta)$
- $z = r \cdot (\cos(\theta) + jsen(\theta))$

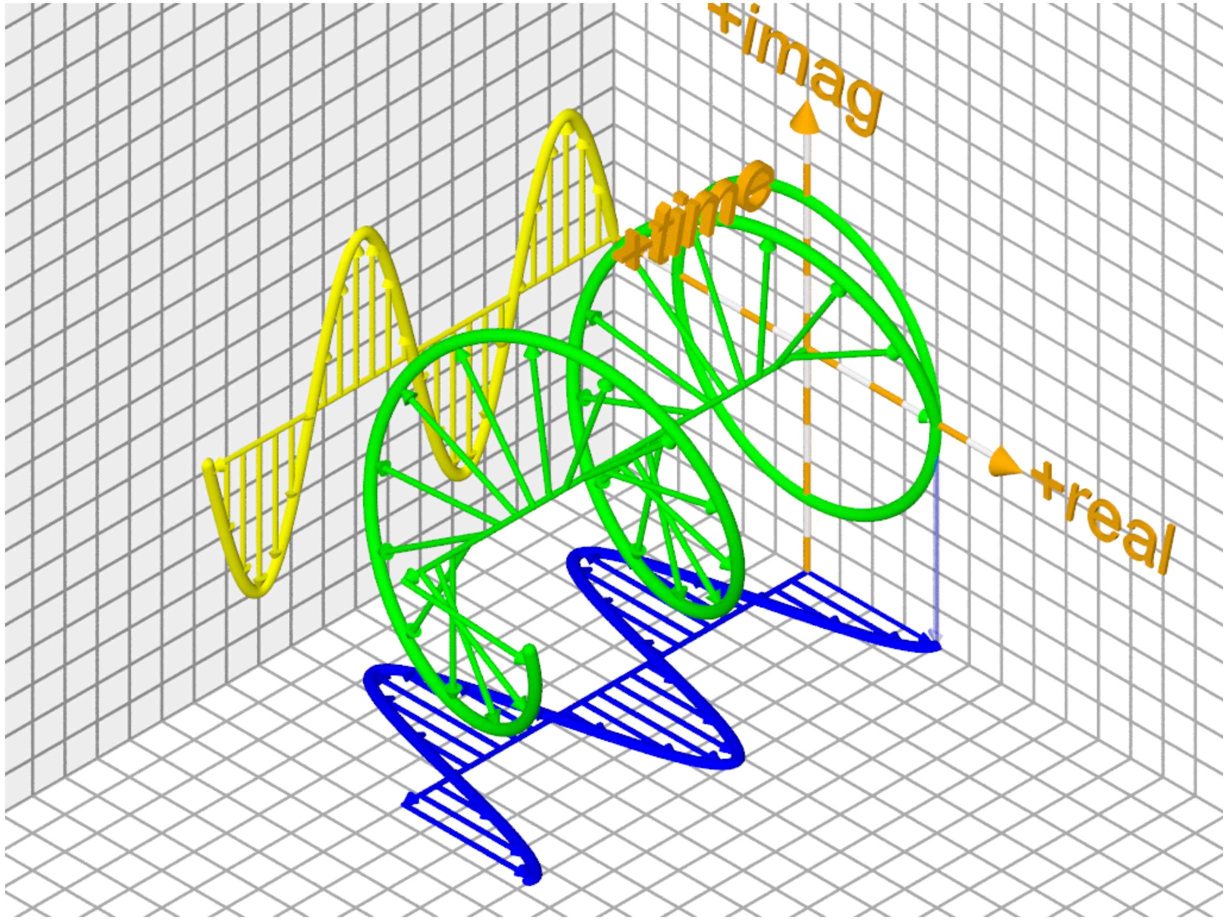
E, da *Identidade de Euler*:

- $z = r \cdot e^{j\theta}$

Outra representação:

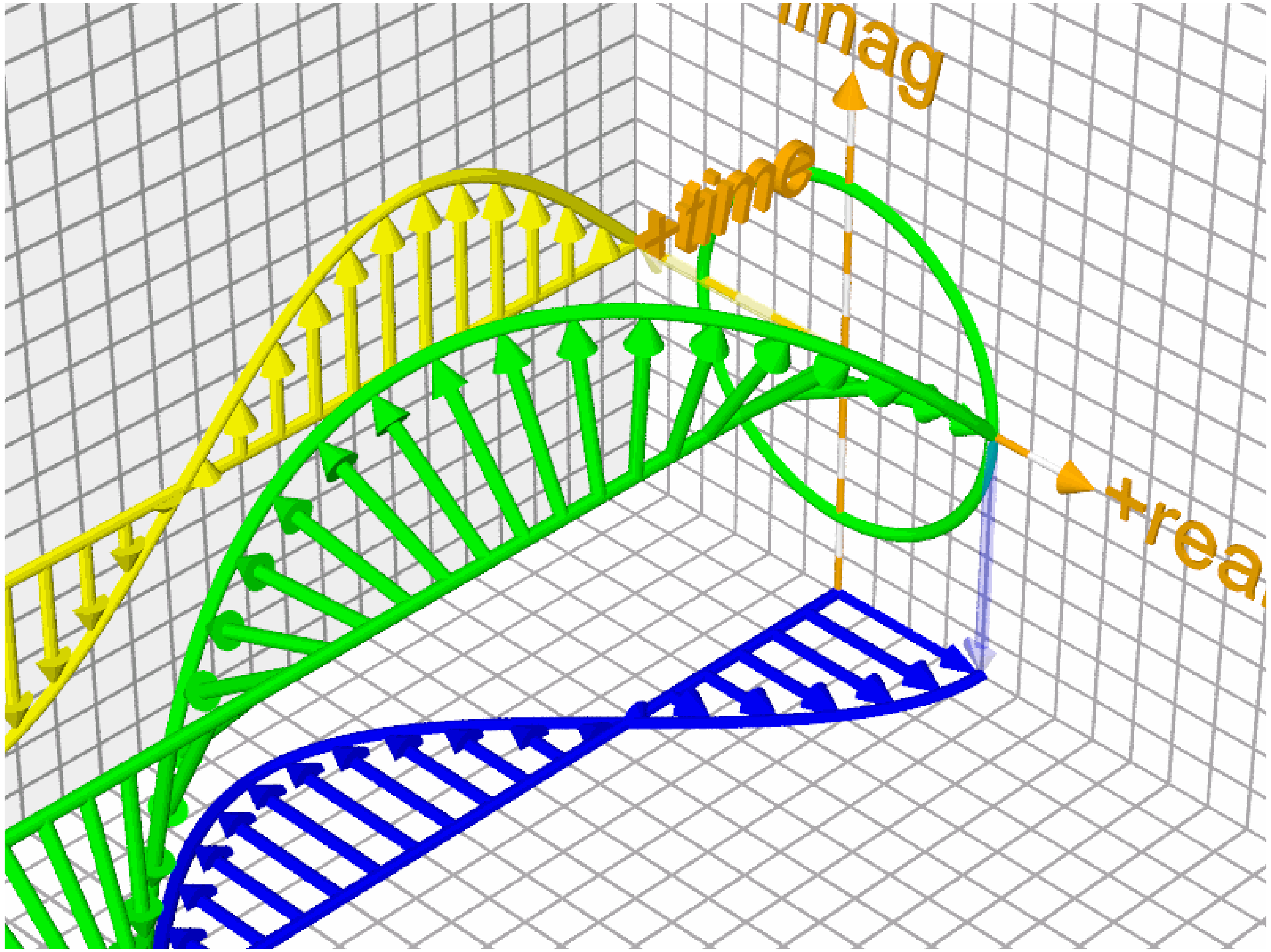
$$z = |z|\angle\theta° = r\angle\theta°$$

Números complexos



$$e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + j\text{sen}(2\pi ft)$$

Números complexos



DFT

- Agora, podemos visualizar melhor o que se pretende com a Transformada de Fourier. Vamos analisar a forma contínua:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Onde $x(t)$ é o sinal no domínio do tempo
- Se isolarmos o componente $x(t)e^{-j2\pi f t}$, notamos que se trata de um número complexo, cuja magnitude é dada por cada valor de $x(t)$ e a fase é $-2\pi f t$

DFT

- Ou seja, cada frequência f é obtida pela soma (integral) de vários números complexos, cuja magnitude é o valor de $x(t)$ a cada instante

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

DFT

- Então, trazendo essa ideia para o domínio discreto, temos:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{\frac{-j2\pi mn}{N}}$$

- Onde $X[m]$ é uma sequência de valores de componentes em frequência e m é o índice de cada uma.
- $x[n]$ é o sinal discreto no tempo e n é o índice de cada amostra
- N é o total de amostras a se considerar para a transformada (geralmente, o número total de amostras da sequência)

DFT

- Então, trazendo essa ideia para o domínio discreto, temos:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{\frac{-j2\pi mn}{N}}$$

- Em constrate com a transformada contínua, temos que:
- $\frac{m}{N} \approx f$
- $n \approx t$

DFT

- Podemos expandir, para uma melhor compreensão:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n][\cos(2\pi nm/N) - j\mathrm{sen}(2\pi nm/N)]$$

DFT - Exemplo

- Se, por exemplo, consideramos $N = 4$ e $n = m = 0\ a\ 3$,temos:
- $$\begin{aligned} X[0] &= x[0]\cos(2\pi \cdot 0 \cdot 0/4) - jx[0]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 0 \cdot 0/4) + \\ &= x[1]\cos(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) - jx[1]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) + \\ &= x[2]\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 0/4) - jx[2]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 2 \cdot 0/4) + \\ &= x[3]\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 0/4) - jx[3]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 3 \cdot 0/4) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} X[1] &= x[0]\cos(2\pi \cdot 0 \cdot 1/4) - jx[0]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 0 \cdot 1/4) + \\ &= x[1]\cos(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) - jx[1]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) + \\ &= x[2]\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 1/4) - jx[2]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 2 \cdot 1/4) + \\ &= x[3]\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 1/4) - jx[3]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 3 \cdot 1/4) \end{aligned}$$

DFT - Exemplo

- Se, por exemplo, consideramos $N = 4$ e $n = m = 0\ a$ 3,temos:
- $$\begin{aligned} X[2] &= x[0]\cos(2\pi \cdot 0 \cdot 2/4) - jx[0]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 0 \cdot 2/4) + \\ &= x[1]\cos(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) - jx[1]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) + \\ &= x[2]\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 2/4) - jx[2]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 2 \cdot 2/4) + \\ &= x[3]\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 2/4) - jx[3]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 3 \cdot 2/4) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} X[3] &= x[0]\cos(2\pi \cdot 0 \cdot 3/4) - jx[0]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 0 \cdot 3/4) + \\ &= x[1]\cos(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) - jx[1]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) + \\ &= x[2]\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 3/4) - jx[2]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 2 \cdot 3/4) + \\ &= x[3]\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 3/4) - jx[3]\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 3 \cdot 3/4) \end{aligned}$$

DFT – Espaçamento ou resolução

- Cada valor de $X[m]$ é um número complexo que nos ajuda a analisar a magnitude de uma determinada frequência no espectro.
- Entretanto, para diferentes sinais, é necessário saber quais frequências exatamente são representadas no espectro.
- Para isso, calculamos o ***espaçamento*** ou ***resolução de frequência***. Ou seja, o intervalo entre uma frequência para outra no eixo x do espectro.

DFT – Espaçamento ou resolução

- O espaçamento é dado por:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

- Ou seja, a frequência de amostragem em que o sinal foi amostrado dividida pelo total de amostras.

DFT – Espaçamento ou resolução – Exemplo

- Se $f_s = 500\ amostras/segundo$ e $N = 16$, então:

$$\Delta f = \frac{500}{16} = 31{,}25\ Hz$$

- Isso significa que cada valor de $X[m]$ ficará $31{,}25\ Hz$ distante do outro:
- $X[0] = 0 \cdot 31{,}25 = 0\ Hz$ (Componente DC)
- $X[1] = 1 \cdot 31{,}25 = 31{,}25\ Hz$
- $X[2] = 2 \cdot 31{,}25 = 62{,}50\ Hz$
- $X[3] = 3 \cdot 31{,}25 = 93.75\ Hz$
- $\vdots$
- $X[15] = 15 \cdot 31{,}25 = 468{,}75\ Hz$

DFT – Espaçamento ou resolução

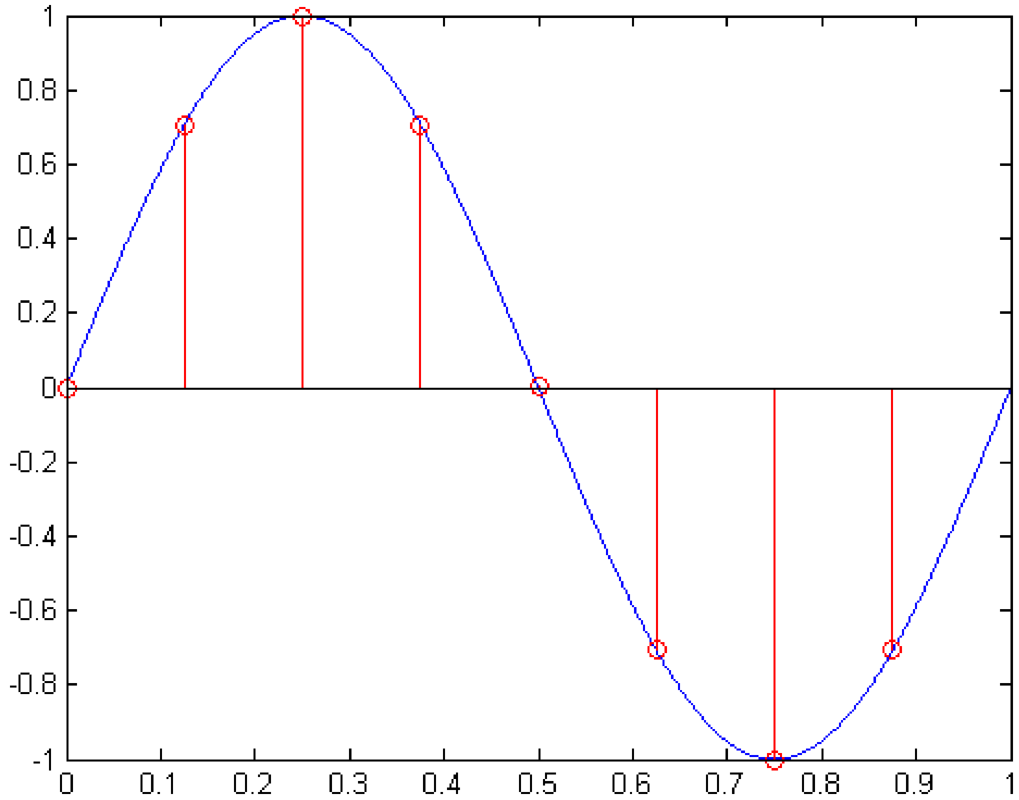
- Agora que já sabemos calcular os componentes de frequência, precisamos achar a ***magnitude*** e a ***fase*** do espectro

- $X_{mag}[m] = |X[m]| = \sqrt{X_{real}[m]^2 + X_{imag}[m]^2}$
- $X_{\phi}[m] = \arctan\left(\frac{X_{imag}[m]}{X_{real}[m]}\right)$

DFT exemplo

- Consideremos uma senoide, com f $1\,Hz,\, f_s = 8\,Hz,\, N = 8$
- Amostrando-se esse sinal, com

$x[n] = \mathrm{sen}(2\pi f n t_s)$, encontramos o pontos:



DFT exemplo

- Para $X[0]$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{7} x[n][\cos(2\pi n \cdot 0/8) - j\text{sen}(2\pi n \cdot 0/8)]$$

$$\begin{aligned}
&= x[0][\cos(2\pi \cdot 0 \cdot 0/8) - j\text{sen}(2\pi \cdot 0 \cdot 0/8)] + \\
&= x[1][\cos(2\pi \cdot 1 \cdot 0/8) - j\text{sen}(2\pi \cdot 1 \cdot 0/8)] + \\
&= x[2][\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 0/8) - j\text{sen}(2\pi \cdot 2 \cdot 0/8)] + \\
&\dots \\
&= x[7][\cos(2\pi \cdot 7 \cdot 0/8) - j\text{sen}(2\pi \cdot 7 \cdot 0/8)] +
\end{aligned}$$

$$X[0] = 0$$

Todos os termos de $x[n]$ irão se cancelar, por isso é igual a 0

DFT exemplo

- Para $X[1]$

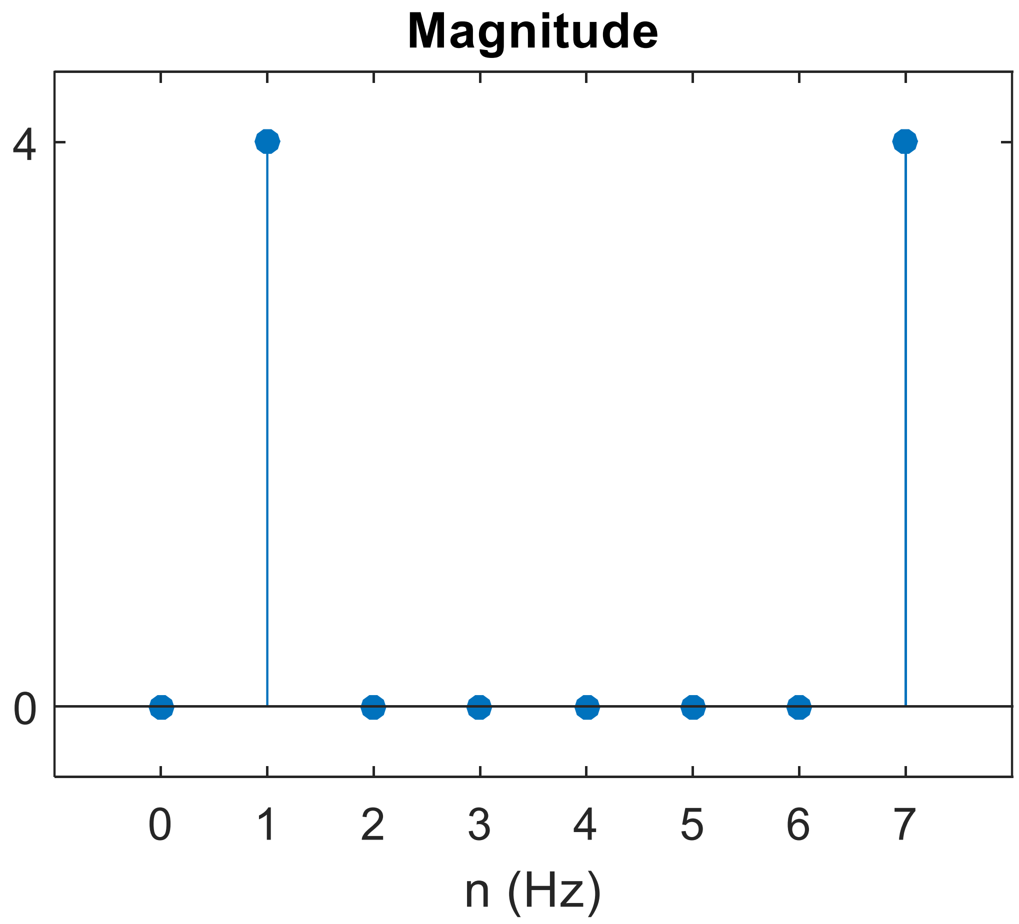
$$X[1] = \sum_{n=0}^{7} x[n][\cos(2\pi n \cdot 1/8) - j\text{sen}(2\pi n \cdot 1/8)]$$

$$\begin{aligned}
&= x[0][\cos(2\pi \cdot 0 \cdot 1/8) - j\text{sen}(2\pi \cdot 0 \cdot 1/8)] + \\
&= x[1][\cos(2\pi \cdot 1 \cdot 1/8) - j\text{sen}(2\pi \cdot 1 \cdot 1/8)] + \\
&= x[2][\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 1/8) - j\text{sen}(2\pi \cdot 2 \cdot 1/8)] + \\
&\dots \\
&= x[7][\cos(2\pi \cdot 7 \cdot 1/8) - j\text{sen}(2\pi \cdot 7 \cdot 1/8)] +
\end{aligned}$$

$$X[1] = 0 - 4j$$

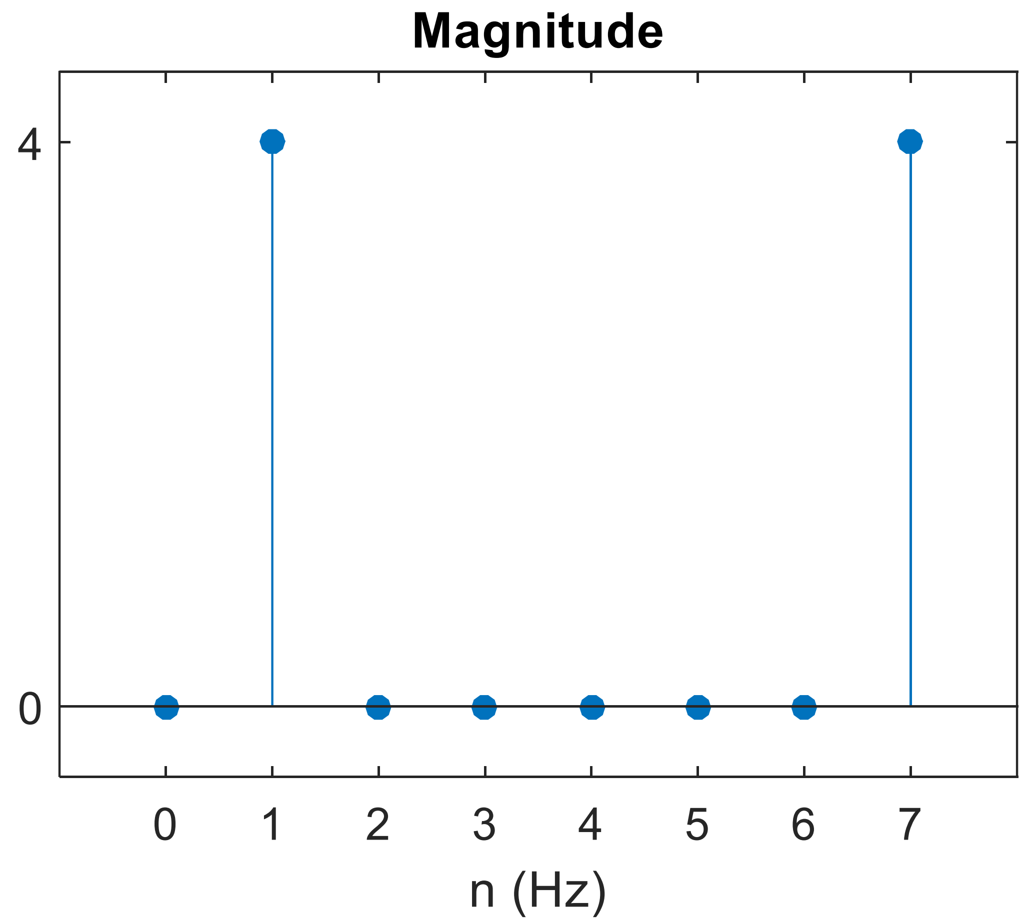
DFT exemplo

- Se continuarmos...
- $X[0] = 0$
- $X[1] = 0 - 4j \quad |X[1]| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$
- $X[2] = 0$
- $X[3] = 0$
- $X[4] = 0$
- $X[5] = 0$
- $X[6] = 0$
- $X[7] = 0 + 4j \quad |X[7]| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$



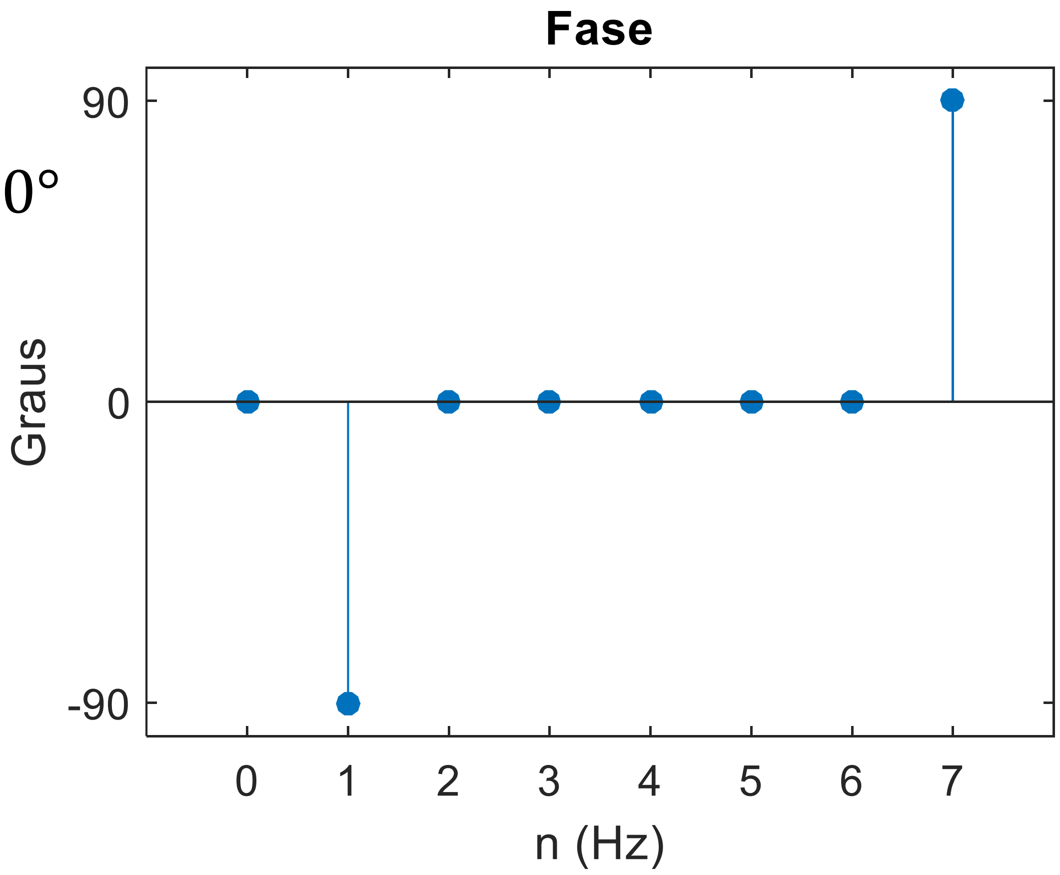
DFT exemplo

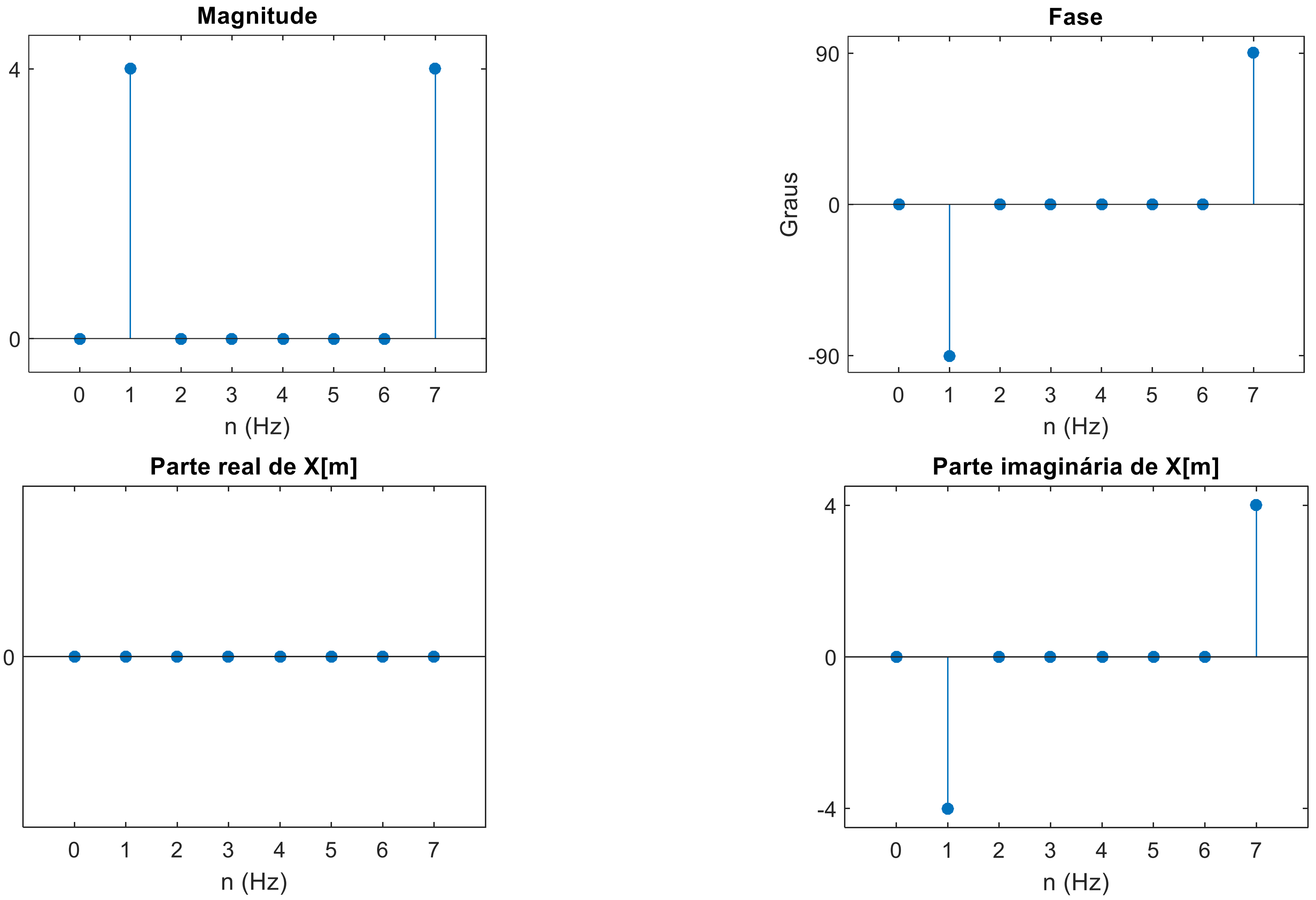
- A resolução de frequência:
- $\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{8}{8} = 1\ Hz$
- Então teremos os pontos:
- $1\ Hz, 2\ Hz, \ldots, 7\ Hz$



DFT exemplo

- Agora a fase
- $X[0] = 0$ $X_\phi[0] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[1] = 0 - 4j$ $X_\phi[1] = \arctan(-4/0) = -90°$
- $X[2] = 0$ $X_\phi[2] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[3] = 0$ $X_\phi[3] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[4] = 0$ $X_\phi[4] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[5] = 0$ $X_\phi[5] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[6] = 0$ $X_\phi[6] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[7] = 0 + 4j$ $X_\phi[7] = \arctan(4/0) = 90°$




Magnitude
4
0
0 1 2 3 4 5 6 7
n (Hz)
Fase
90
0
-90
Graus
0 1 2 3 4 5 6 7
n (Hz)
Parte real de X[m]
0
0 1 2 3 4 5 6 7
n (Hz)
Parte imaginária de X[m]
4
0
-4
0 1 2 3 4 5 6 7
n (Hz)

Exercício

- Faça o espectro completo de:

$$x(t) = \text{sen}(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + 0{,}5\text{sen}(2\pi \cdot f_2 \cdot t + 3\pi/4)$$

- Com $f_1 = 1000$, $f_2 = 2000$, $f_s = 8000$ e $N = 8$