UNIFESSPA | Faculdade de Computação e Engenharia Elétrica

PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Prof. Claudio Coutinho

Turma EC
2018

Aula 11

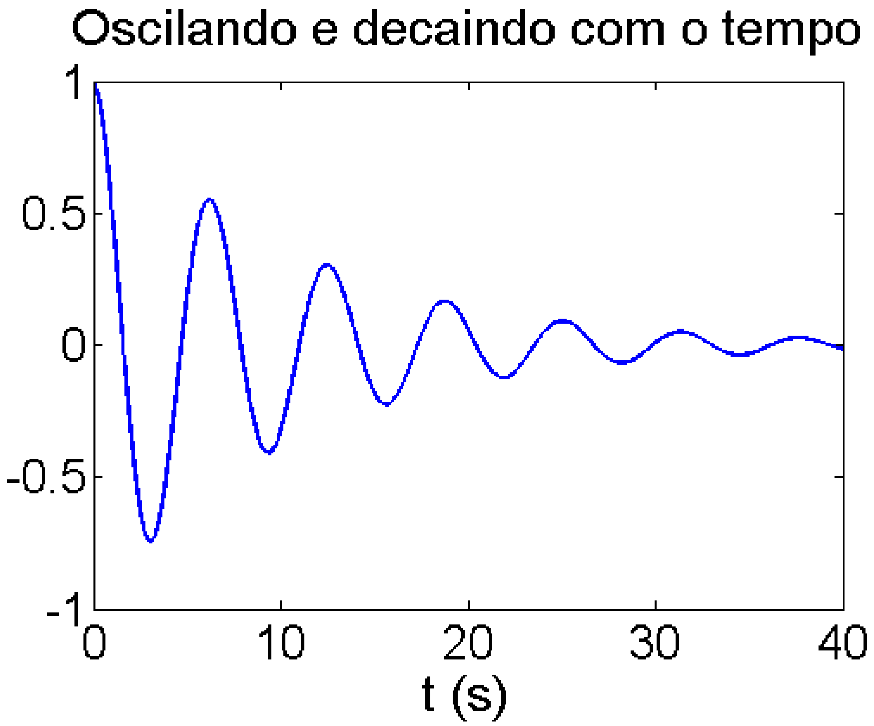
Transformada Z

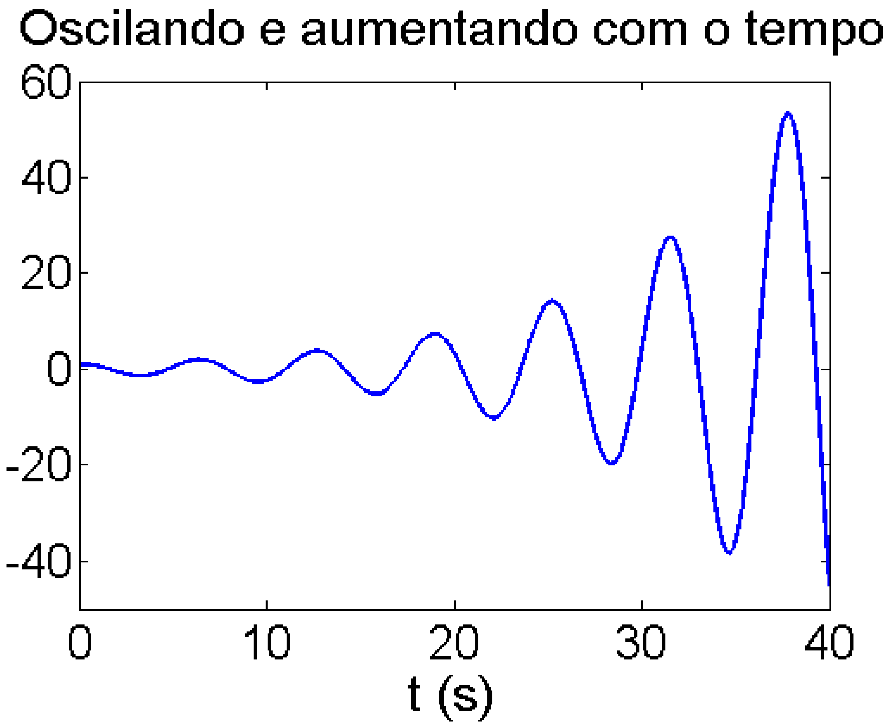
Introdução

- No tempo contínuo, utilizamos a Transformada de Laplace para definir a convergência (estabilidade) de um sistema
- No tempo discreto, sua correspondente é a Transformada Z
- Do estudo de Sinais e Sistemas, sabe-se que a Transformada de Fourier não existe para todos os sinais
- A análise da chamada Região de Convergência (ROC) nos permite analisar a sua existência ou não, assim como a estabilidade ou não da saída do sistema.

Introdução

- A verificação da estabilidade de um sistema é feita a partir da detecção de oscilações crescentes ou decrescentes em um sinal

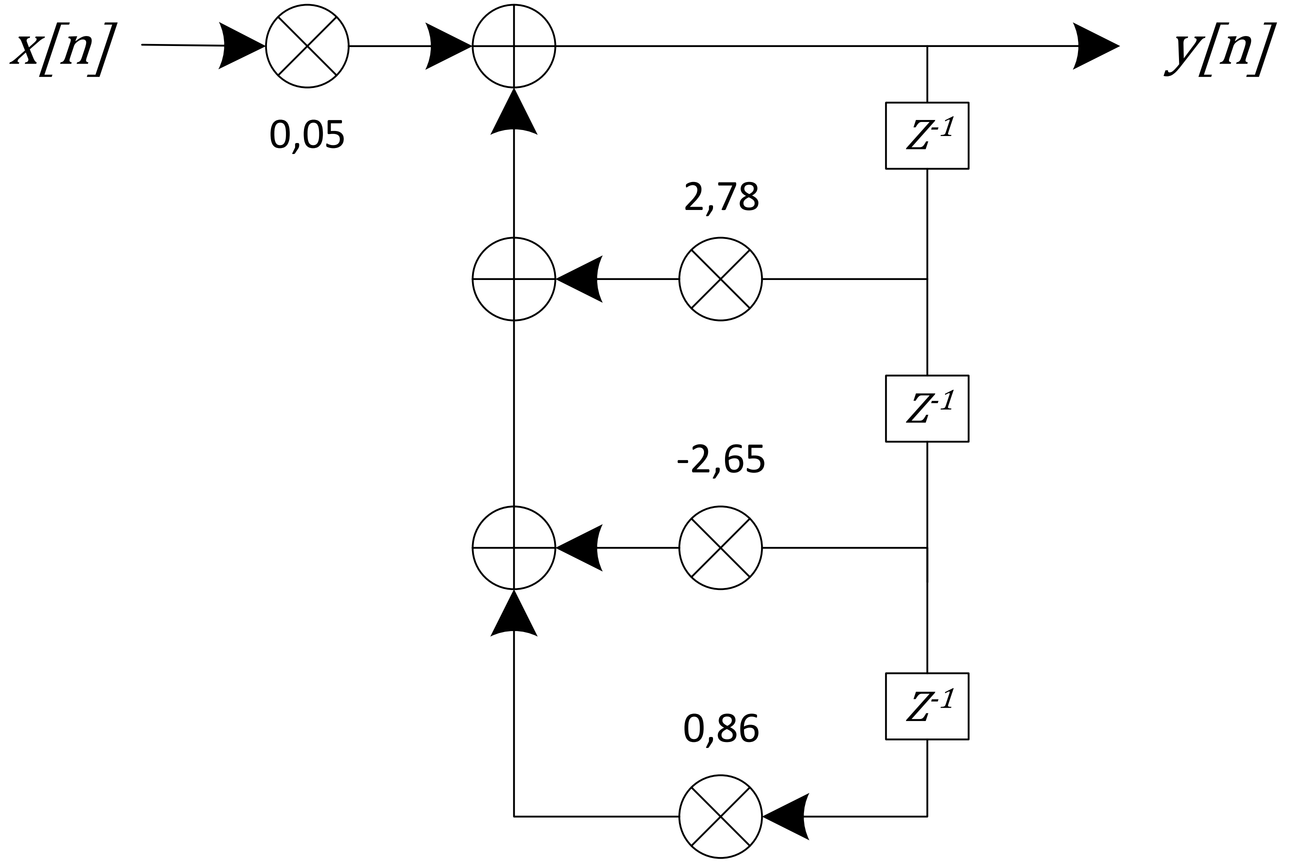




Introdução

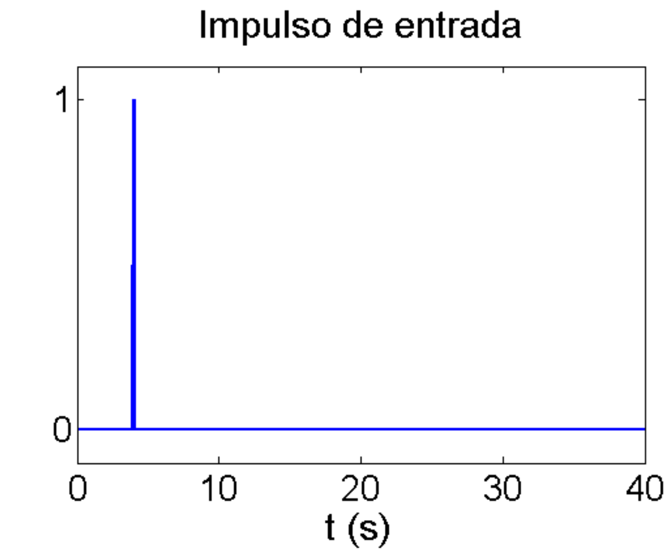
$$y[n] = 0{,}05x[n] + 2{,}78y[n-1] - 2{,}65y[n-2] + 0{,}86y[n-3]$$

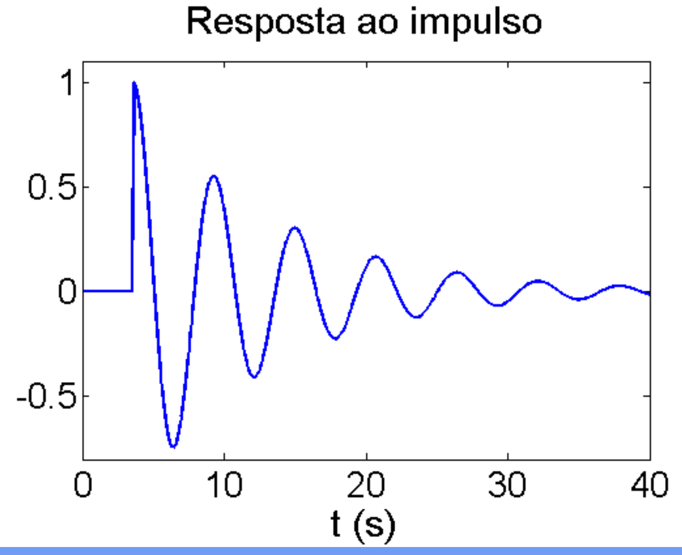
- Ao analisarmos sistemas com *feedback*, através da sua resposta ao impulso, podemos ter uma ideia da estabilidade ou não.

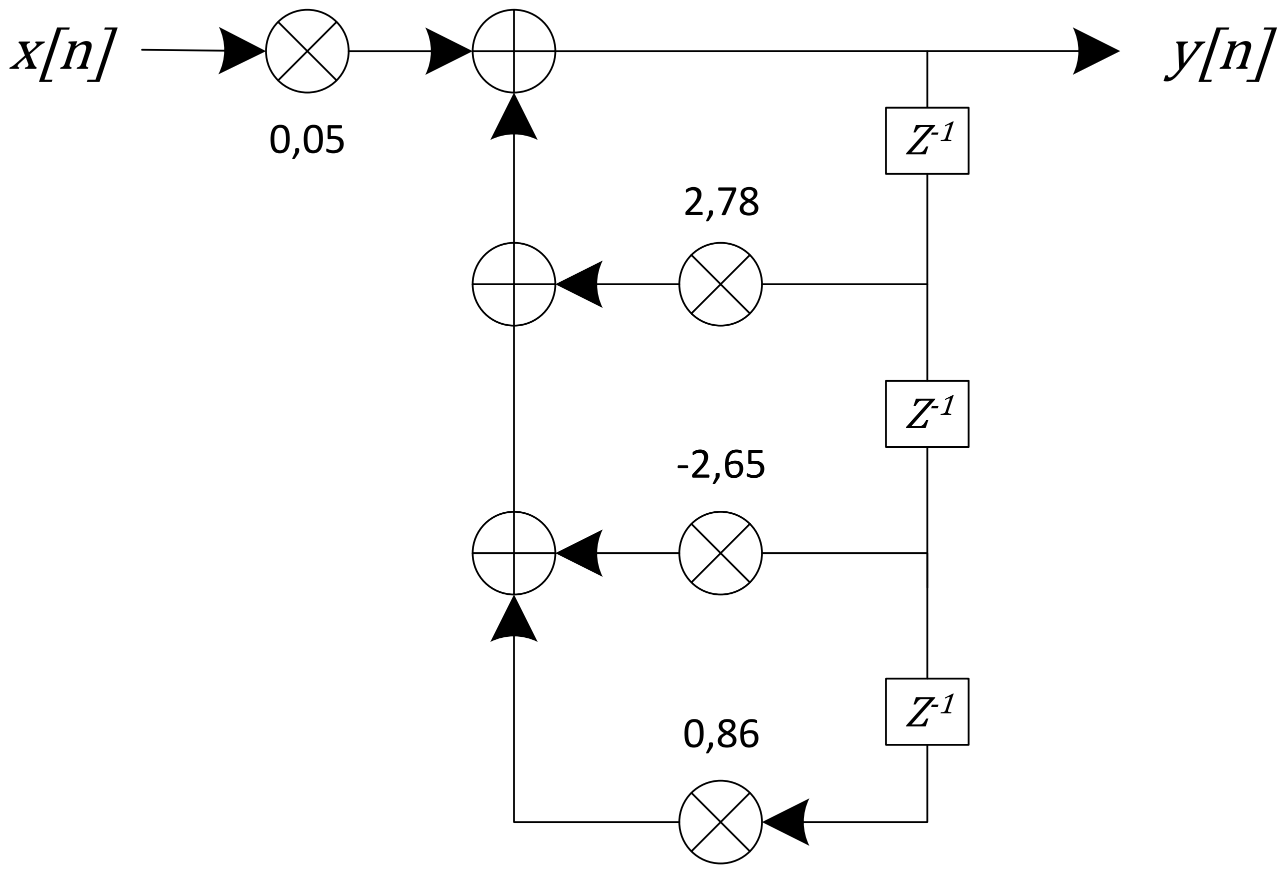


Introdução

$$y[n] = 0{,}05x[n] + 2{,}78y[n-1] - 2{,}65y[n-2] + 0{,}86y[n-3]$$

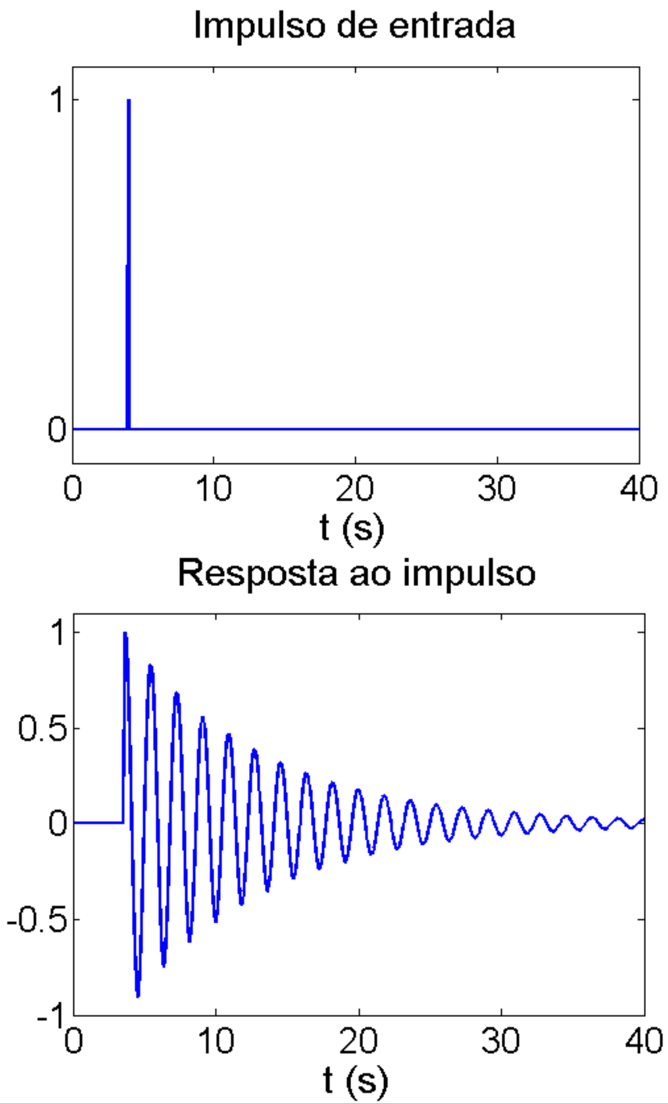


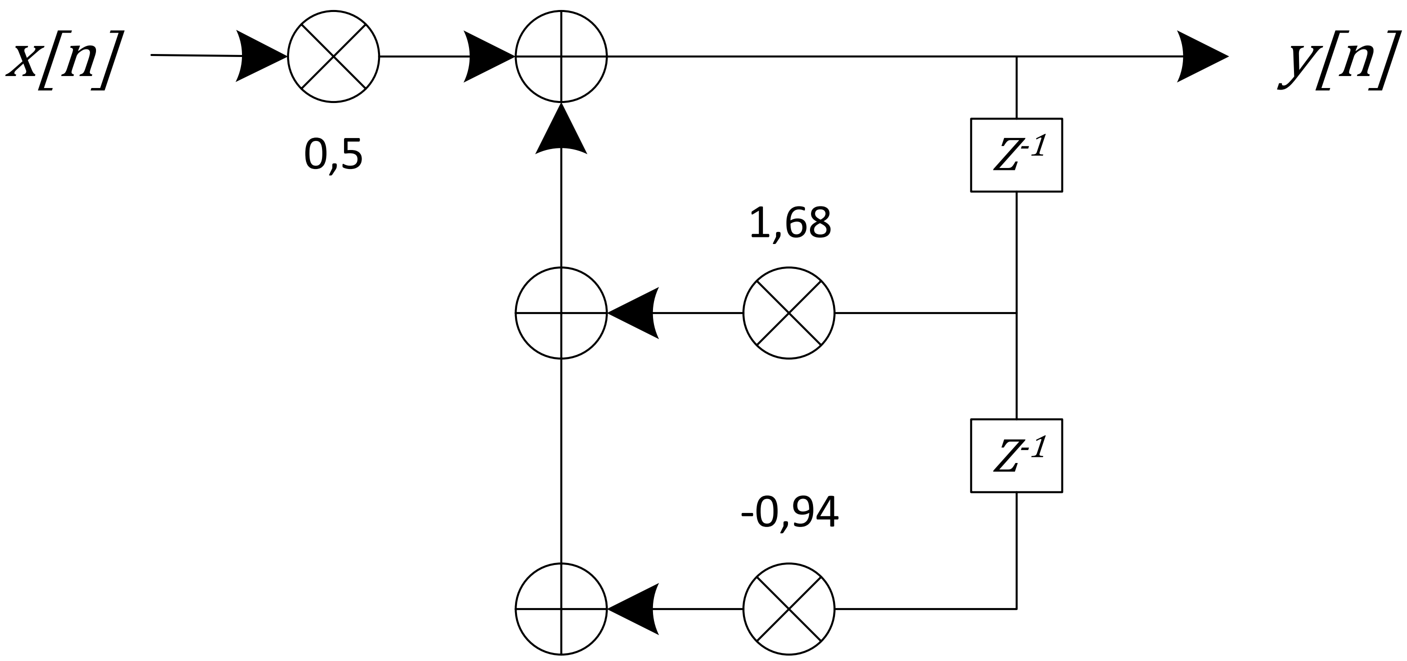




Introdução

$$y[n] = 0{,}5x[n] + 1{,}68y[n-1] - 0{,}94y[n-2]$$





A Transformada Z

- A Transformada de Fourier Discreta é dada por:

$$X[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi mn}$$

- Utilizando a representação padrão, temos:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

A Transformada Z

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Enquanto que a Transformada Z é dada por:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Notação

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Onde z é uma variável complexa e a aplicação da Transformada pode ser expressa pelo operador $\mathcal{Z}\{\cdot\}$, ou seja:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)$$

- Podemos também usar a notação

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X(z)$$

Relação com Fourier

- Há claramente uma relação entre as duas transformadas:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Se substituirmos z por $e^{j\omega}$, então a Transformada Z é "reduzida" à transformada de Fourier.

Relação com Fourier

- Em outras palavras: caso a Transformada de Fourier exista, é simplesmente a Transformada Z com $z = e^{j\omega}$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Ou seja, $|z| = 1$

Relação com Fourier

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

- Mais genericamente, podemos definir

$$z = re^{j\omega}$$

- A transformada passa, então, a ser

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n}$$

A variável complexa z

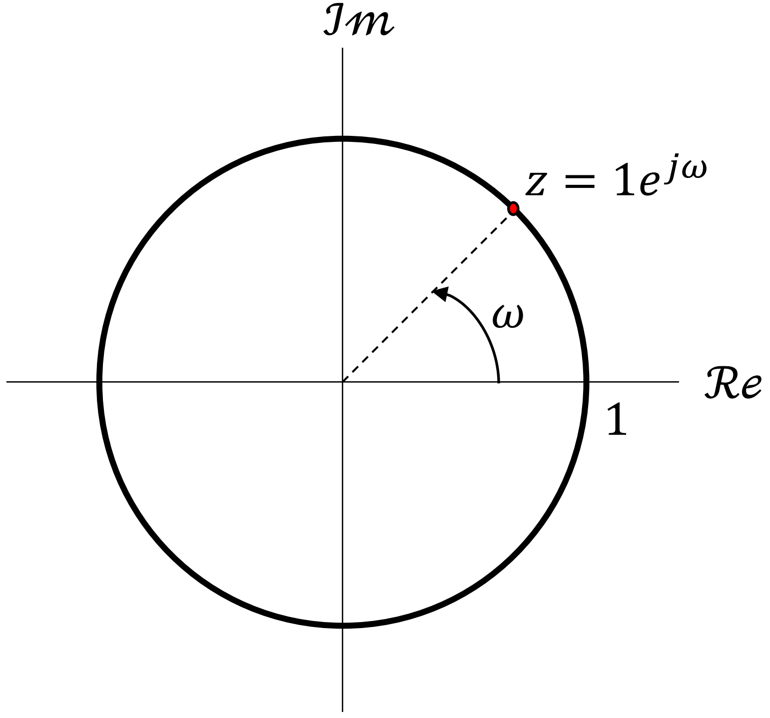
- Prosseguindo:

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

- Ou seja, pode ser entendida como a Transformada de Fourier do produto da sequência original com a sequência exponencial r^{-n} (se $r = 1$, a equação se torna a Transformada de Fourier)

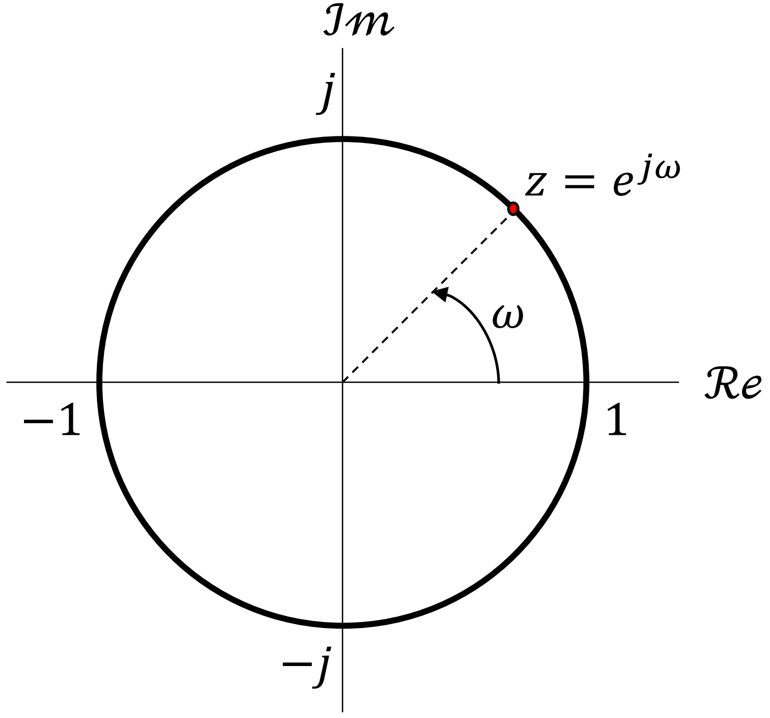
O plano Z

- Como A Transformada Z é uma função de uma variável complexa, é coerente interpretá-la usando o plano complexo Z



O plano Z

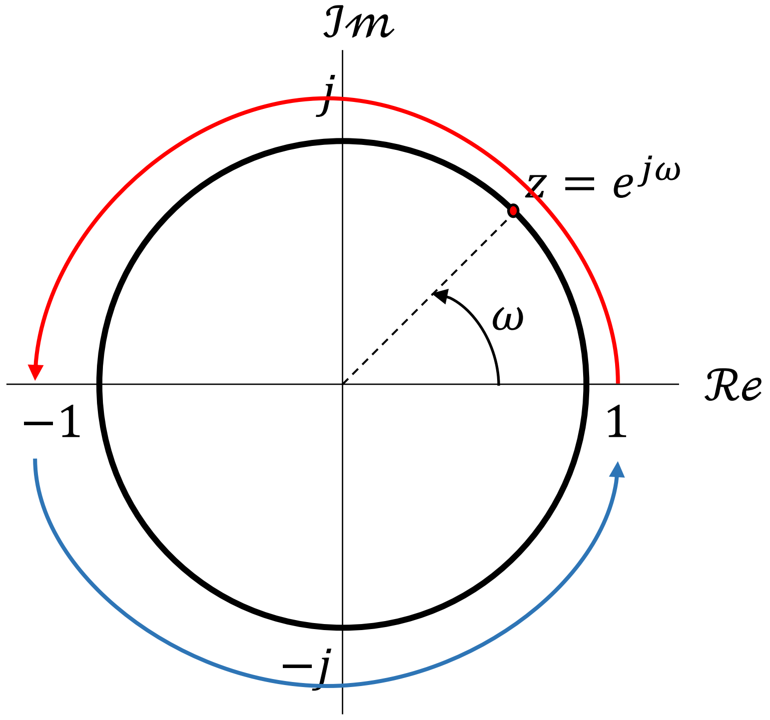
- Se caminharmos pelo círculo unitário, temos os seguintes valores de z



- $z = 1\ (\omega = 0)$
- $z = j\ (\omega = \pi/2)$
- $z = -1 (\omega = \pi)$
- $z = -j\ (\omega = 3\pi/2)$

O plano Z

- Entretanto, o intervalo de análise válido para a observação da Transformada de Fourier ocorre entre $0 \leq \omega \leq \pi$

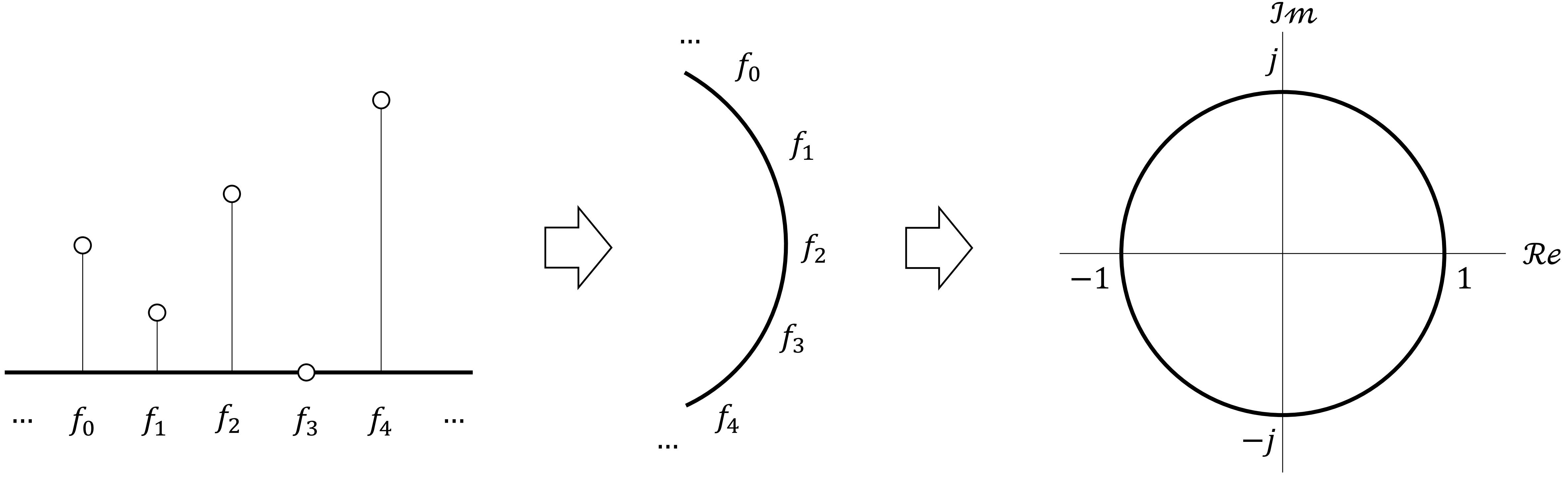


- $z = 1\ (\omega = 0)$
- $z = j\ (\omega = \pi/2)$
- $z = -1(\omega = \pi)$
- $z = -j\ (\omega = 3\pi/2)$

Se continuarmos caminhando pelo círculo unitário, seria o equivalente a analisar a Transformada de Fourier no intervalo $\pi \leq \omega \leq 2\pi$ ou, mais especificamente, $-\pi \leq \omega \leq 0$

O plano Z

- Seria como se "dobrássemos" o eixo de frequências do espectro ao redor do círculo unitário



Convergência

- A Transformada de Fourier não converge para todos os sinais
- Da mesma forma, a Transformada Z não converge para todos os sinais ***para todos os valores de z***
- Por essa razão, para cada sequência em particular, existe um conjunto de valores de ***z*** para os quais a sequência converge
- Esse conjunto de valores é chamado de ***Região de Convergência***

Convergência

- Se a sequência de entrada é *absolutamente somável*, ou seja, se a Transformada de Fourier converge para uma função contínua de ω, considerando a soma do módulo da sequência, então temos a relação:

$$\left|X\left(re^{j\omega}\right)\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

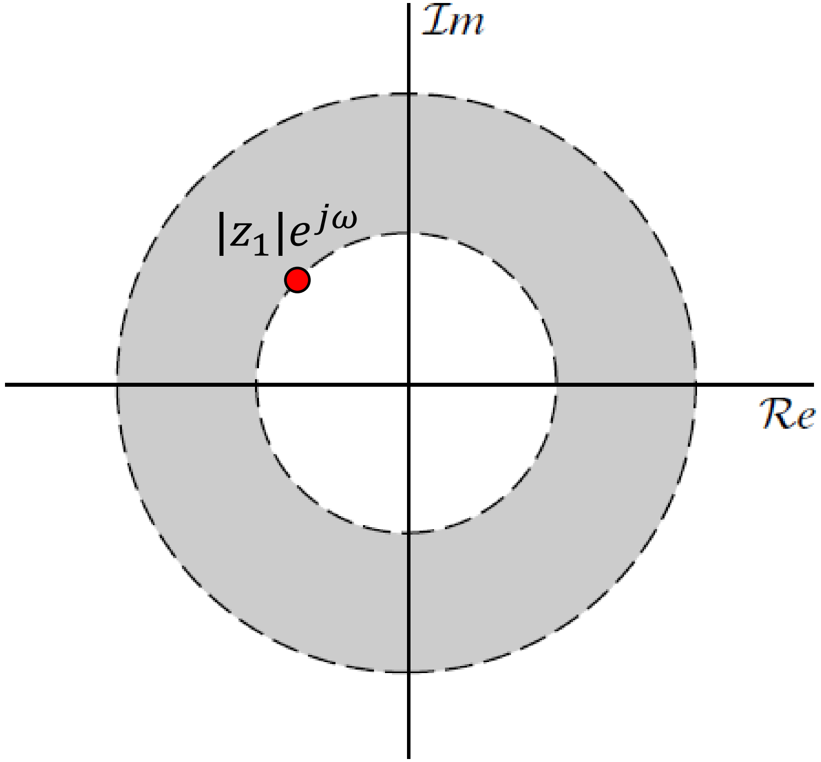
- Chamada de condição de convergência da Transformada Z

ROC

- Com essa relação, podemos mostrar que a Transformada Z pode convergir mesmo quando a Transformada de Fourier não converge
- Por exemplo, para Fourier, a sequência de entrada $x[n] = u[n]$ não é absolutamente somável
- Entretanto, a sequência $r^{-n}u[n]$ é absolutamente somável se $r > 1$
- Isso significa que a Transformada Z do degrau unitário existe para uma ROC $r = |z| > 1$

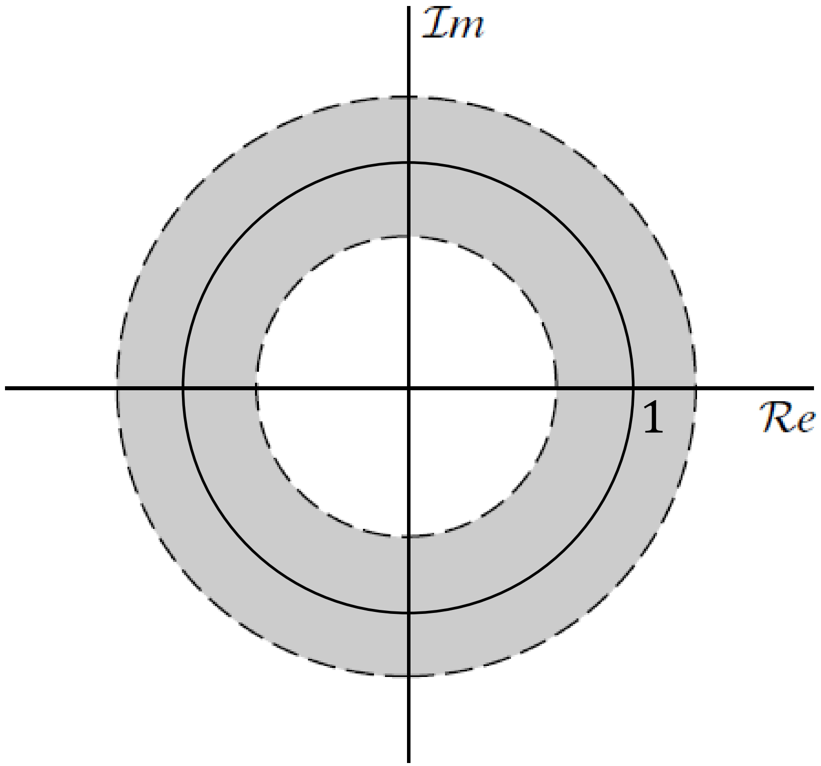
ROC

- Dessa ideia, concluímos que a convergência da Transformada Z depende apenas de z (seus valores)
- Ou seja, se um valor de z, digamos, z_1, promove a convergência da Transformada Z, então todos os pontos no plano com $|z_1|$ também promovem.
- Eles estarão localizados em um círculo ao redor da origem.



ROC

- A ROC possui limites interior e exterior.
- O seu limite interior pode expandir até a origem
- O seu limite exterior pode expandir até infinito
- Lembre-se: se a ROC compreender o círculo unitário, então a Transformada de Fourier existe



ROC

- A Transformada Z é muito mais útil quando a sua soma infinita pode ser expressa em forma fechada, isto é, quando pode ser expressa como uma simples fórmula matemática.
- Dentre as relações mais importantes, estão aquelas em que $X(z)$ é igual a uma função racional dentro da ROC, isto é,:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- Onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios em z

ROC

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- Em geral, os valores de z para os quais $X(z) = 0$ são chamado ***zeros*** de $X(z)$, e os valores de z para os quais $X(z)$ tende ao infinito são os ***polos*** e $X(z)$.
- Na equação acima, os ***zeros*** são as raízes do numerador e os ***polos*** são as raízes do denominador.

Exemplo

- Considere o sinal $x[n] = \alpha^n u[n]$. Encontre sua forma fechada e sua ROC.
- Então, a sua transformada Z é dada por

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

- Para a sua convergência, precisamos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha z^{-1}|^n < \infty$$

Exemplo - ROC

- Então, na ROC, os valores de z para os quais

$$|\alpha z^{-1}| < 1$$

Ou

$$|{}^{\alpha}/_{z}| < 1$$

Ou

$$\frac{|\alpha|}{|z|} < 1$$

Ou seja,

$$|z| > |\alpha|$$

Exemplo – Forma fechada

- Podemos, então, rearranjar a relação para:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^n$$

- Aplicamos a relação da uma PG:

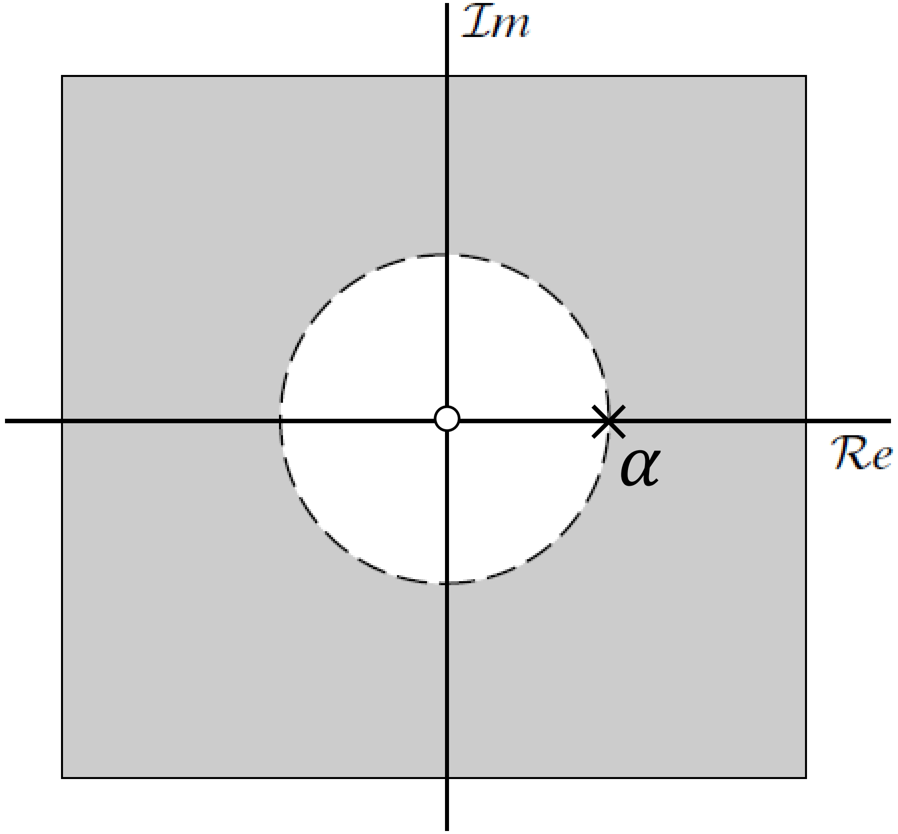
$$\sum_{i=0}^{n}\lambda^i = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^n = \frac{1-({}^{\alpha}/_{z})^{\infty}}{1-({}^{\alpha}/_{z})}, |z| > |\alpha| = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}$$

Exemplo - ROC

- Então, a ROC será:

$$|z| > |\alpha|$$



Dizemos que α é um ***polo*** de $X(z)$, pois quando $|z| = |\alpha|$, $X(z) \rightarrow \infty$. E 0 é um ***zero***.

Exemplo

- E a Transformada de Fourier?
- Para $\alpha = 1$, $x[n] = u[n]$
- E

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

- E para $|\alpha| < 1$, a Transf. de Fourier existe:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

Exemplo

- Para $|\alpha| > 1$, A Transf. de Fourier não é definida, pois a ROC não inclui o círculo unitário ($|z| > |\alpha|$)