UNIFESSPA | Faculdade de Computação e Engenharia Elétrica

PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Prof. Claudio Coutinho

Turma EC
2018

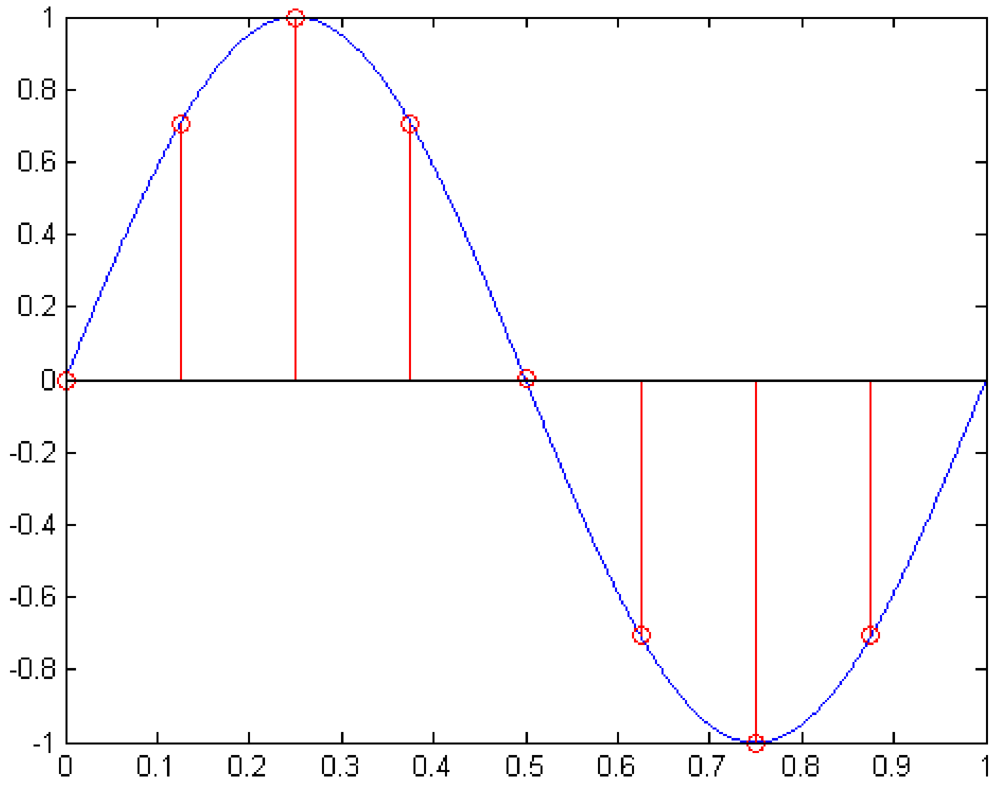
Aula 09

Transformada de Fourier Discreta (DFT) (Cont.)

Simetria da DFT

- Voltemos à senoide da aula passada:
- Uma senóide, com $f = 1\,Hz$, $f_s = 8\,Hz$, $N = 8$
- Amostrando-se esse sinal, com

$x[n] = \text{sen}(2\pi f n t_s)$, encontramos os pontos:

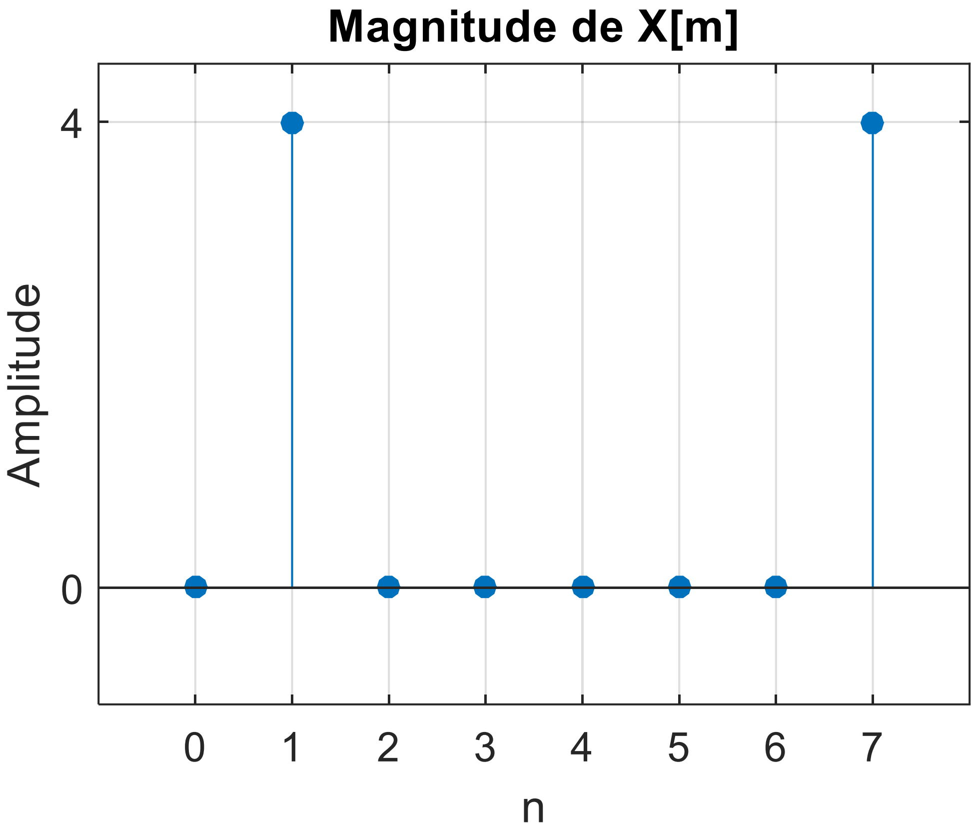


Simetria da DFT

- $X[0] = 0$
- $X[1] = 0 - 4j$
- $X[2] = 0$
- $X[3] = 0$
- $X[4] = 0$
- $X[5] = 0$
- $X[6] = 0$
- $X[7] = 0 + 4j$

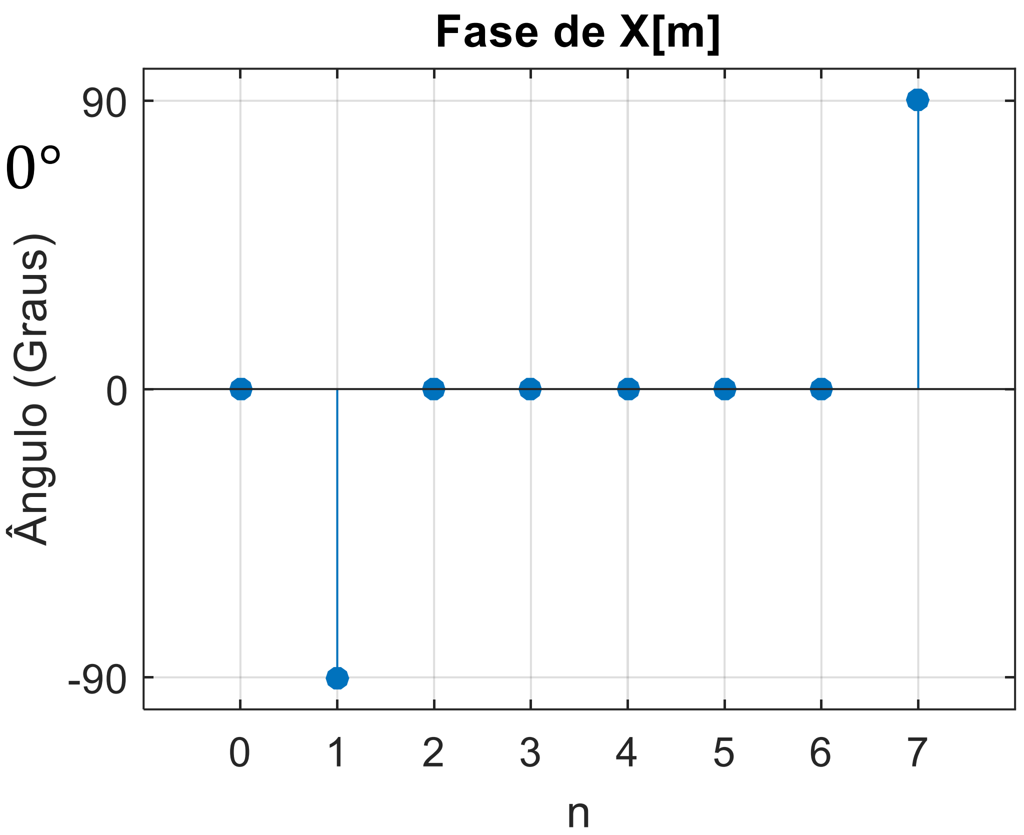
$$|X[1]| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$$

$$|X[7]| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$



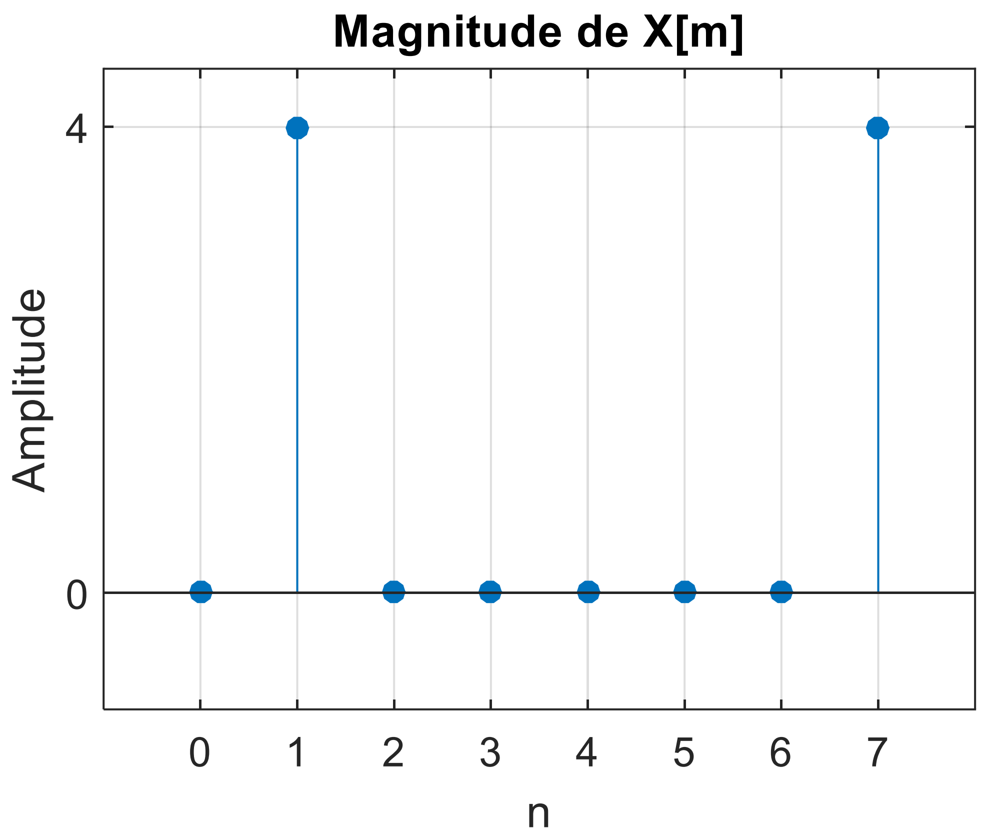
Simetria da DFT

- Agora a fase
- $X[0] = 0$ $\quad X_\phi[0] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[1] = 0 - 4j$ $\quad X_\phi[1] = \arctan(-4/0) = -90°$
- $X[2] = 0$ $\quad X_\phi[2] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[3] = 0$ $\quad X_\phi[3] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[4] = 0$ $\quad X_\phi[4] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[5] = 0$ $\quad X_\phi[5] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[6] = 0$ $\quad X_\phi[6] = \arctan(0/0) = 0$
- $X[7] = 0 + 4j$ $\quad X_\phi[7] = \arctan(4/0) = 90°$



Simetria da DFT

- Pode-se notar que o valor da amostra de índice 7 é *não-nulo*
- Qual o significado disso?
- E por que as magnitudes parecem ser 4 vezes maior que o esperado ($f = 1\ Hz$)?
- Essa característica persiste, não importando o tamanho N nem a taxa f_s



Simetria da DFT

- Quando a o sinal de entrada de uma DFT é real, as amostras de saída $m = 1$ até $m = (N/2) - 1$ são redundantes com as amostras $m > (N/2)$
- Ou seja, a m-ésima amostra terá a mesma magnitude da $(N - m)$-ésima amostra.
- Por outro lado, a *fase* de uma será a ***negativa*** da outra, criando a relação:

$$\begin{aligned} X[m] &= |X[m]|, com\ X_{\phi}[m]\ graus \\ &= |X[N-m]|, com - X_{\phi}[N-m]\ graus \end{aligned}$$
$$1 \le m \le (N/2) - 1$$

- Em outras palavras, quando a entrada da DFT é ***real***, $X[m]$ é o ***complexo conjugado*** de $X[N-m]$, ou: $X[m] = X^{*}[N-m]$

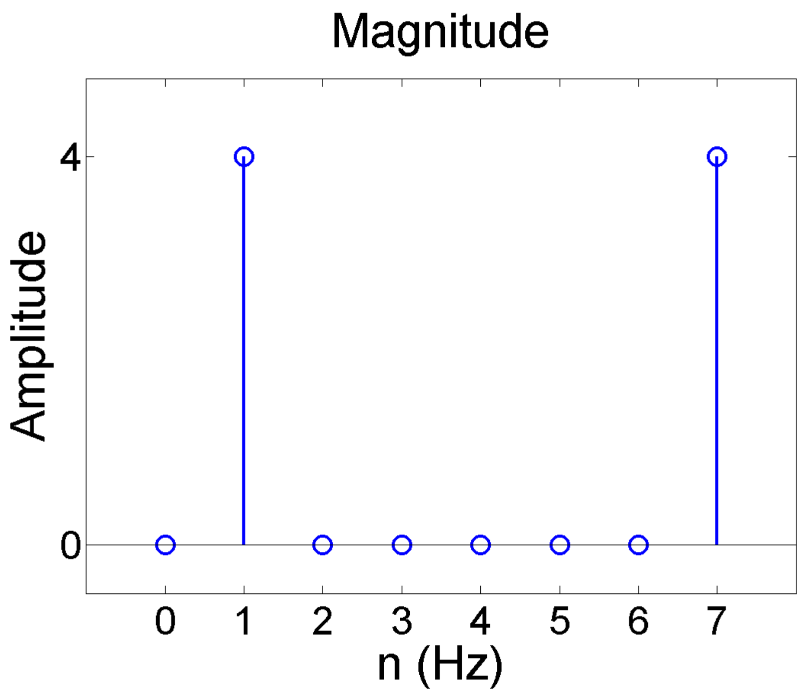
Simetria da DFT

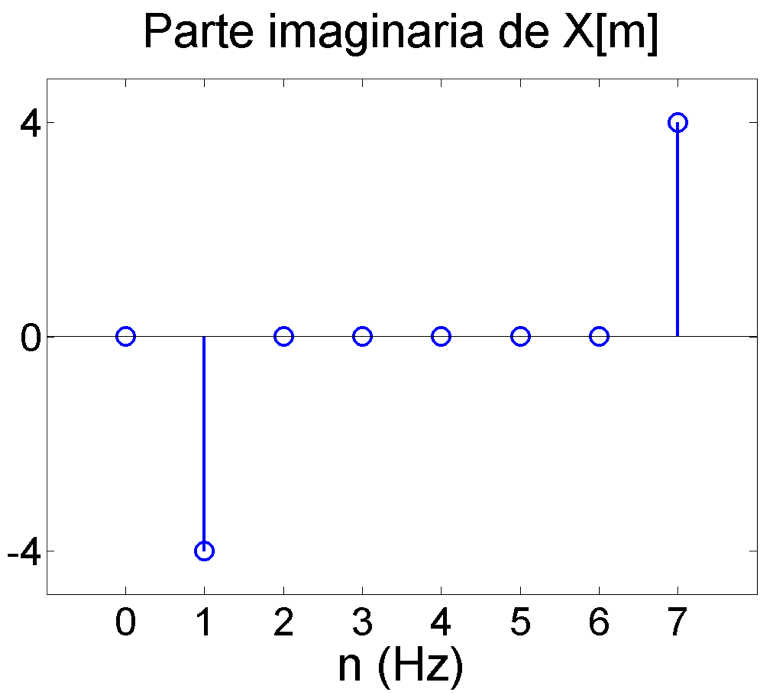
$$X[m] = X^*[N - m]$$

- O complexo conjugado de $z = a + jb$ é definido como $z^* = a - jb$
- Ou $z = e^{j\phi}$ e $z^* = e^{-j\phi}$
- Ou seja, é apenas a inversão do sinal da parte imaginária.

Simetria da DFT

- Então, no nosso exemplo, $X[5]$, $X[6]$ e $X[7]$ são os complexos conjugados de $X[3]$, $X[2]$ e $X[1]$, respectivamente

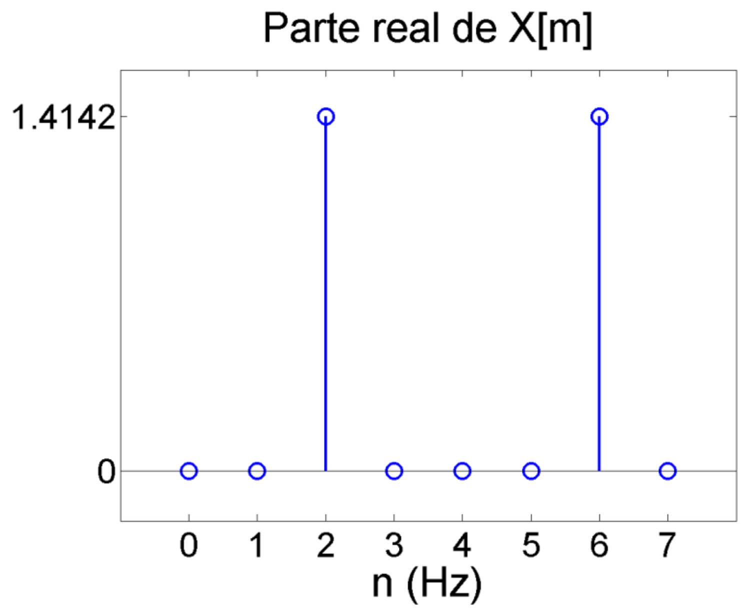


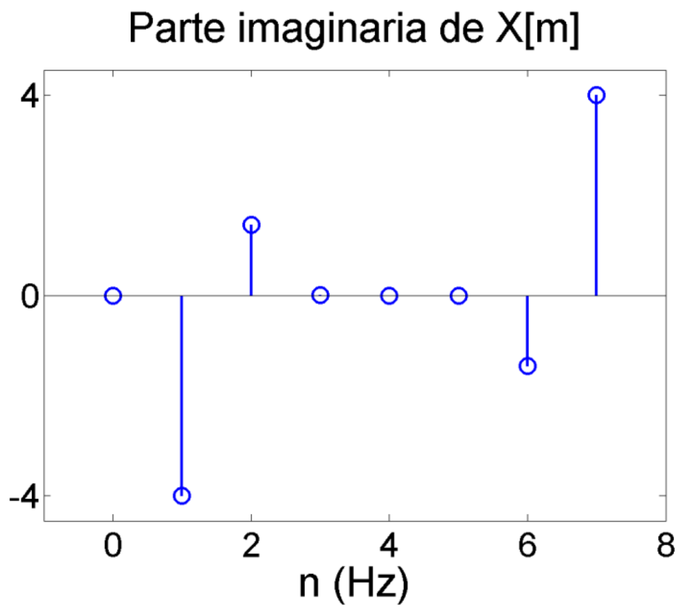


Paridade da simetria

- Ao se aplicar a DFT a uma entrada real, temos que a parte *real* possui ***simetria par***, enquanto que a parte *imaginária* possui ***simetria ímpar***

$$x[n] = \text{sen}(2\pi \cdot 1000 \cdot nt_s) + 0{,}5sen(2\pi \cdot 2000 \cdot nt_s + 3\pi/4)$$





Paridade da simetria

- Por essa razão, diz-se que a DFT é ***simétrica conjugada***
- Significa que, ao se calcular a DFT de N pontos de uma entrada real, o resultado serão N termos complexos de saída
- Mas apenas os primeiros $N/2+1$ termos são independentes
- Em outras palavras, precisamos apenas calcular $X[m]$ para $0 \leq m \leq (N/2)$. Os termos $X[N/2+1]$ a $X[N-1]$ não acrescentam nenhuma informação importante sobre o espectro da sequência de interesse.

Paridade da simetria

- A regra anterior procede quando a entrada for ***real*** e N, par.
- Se ocorrer de N ser ímpar, então apenas as primeiras $(N+1)/2$ amostras são independentes

Paridade da simetria

- Para provarmos a simetria de entradas reais, substituiremos m por $N - m$ na fórmula da DFT:

$$X[N-m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi n(N-m)/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nN/N}e^{-j2\pi n(-m)/N}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi n}e^{j2\pi nm/N}$$

Paridade da simetria

$$X[N-m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n} e^{j2\pi nm/N}$$

- Como $e^{-j2\pi \mathrm{n}} = \cos(2\pi n) - j\mathrm{sen}(2\pi n) = 1\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$

$$X[N-m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j2\pi nm/N}$$

- Ou seja, temos apenas que é o *complexo conjugado* de $X[m]$, pois o sinal da exponencial está invertido.

Paridade da simetria

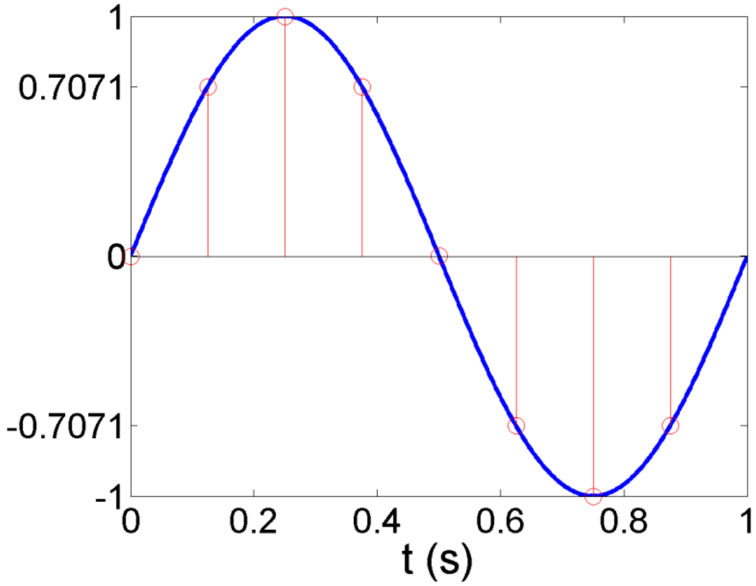
- Outra característica importante é saber que:
- Se o sinal de entrada for uma função *par*, ou seja, $x[n] = x[-n]$, então $X[m]$ será sempre *real* e *par*
  - $X_{real}[m]$ em geral será não-nulo e $X_{imag}[m]$ será nulo.

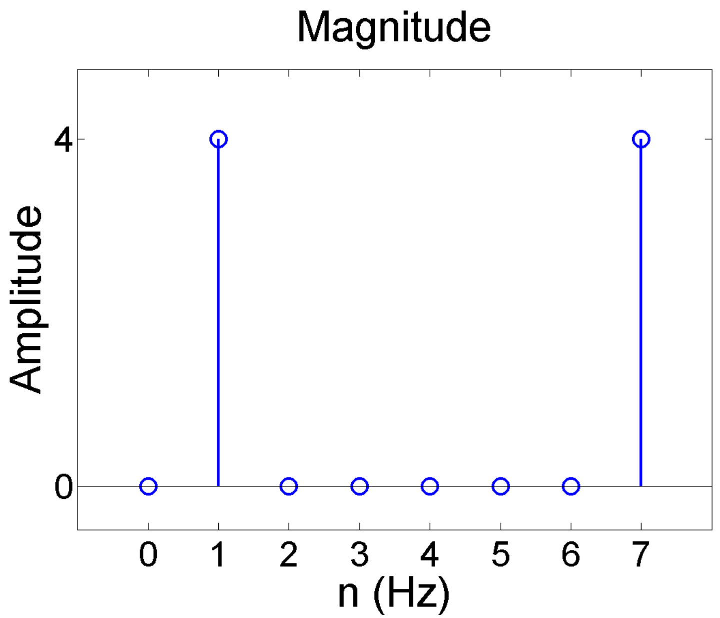
- Se o sinal de entrada for uma função *ímpar*, ou seja, $x[n] = -x[-n]$, então $X[m]$ será sempre *imaginário* e *ímpar*
  - $X_{real}[m]$ em geral será nulo e $X_{imag}[m]$ será não-nulo.

Magnitudes da DFT

- Se voltarmos ao exemplo inicial, temos que a senoide com $f = 1\ Hz$ possui amplitude de pico 1, mas o espectro mostra magnitudes iguais a 4.
- Isso se deve à característica quadrática do cálculo da magnitude.
- Para uma senoide real de amplitude de pico A_0, temos que a magnitude para essa componente de frequência específica é dada por:

$$M_{real} = \frac{A_0 N}{2}$$

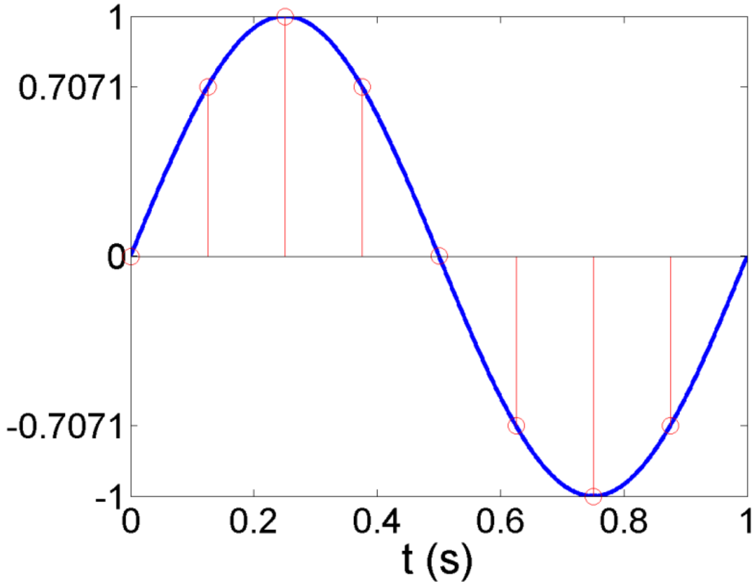




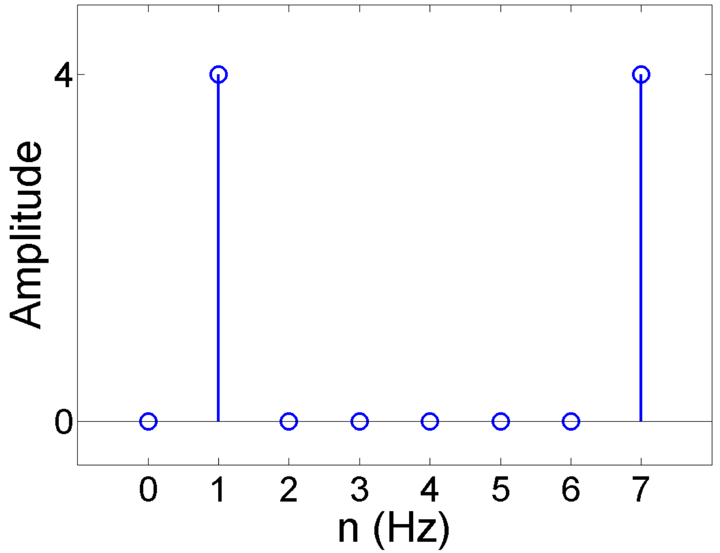
Magnitudes da DFT

- Então, para $A_0 = 1$ e $N = 8$, temos:

$$M_{real} = \frac{A_0 N}{2} = \frac{(1 \cdot 8)}{2} = 4$$



Magnitude



Magnitudes da DFT

- Por essa razão, é comum encontrar representações da DFT como:

$$X[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nm/_N}$$

- Dessa forma, fixamos o valor da magnitude em metade da amplitude da senoide no domínio do tempo