Faculdade de Computação e Engenharia Elétrica

# PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Prof. Claudio Coutinho

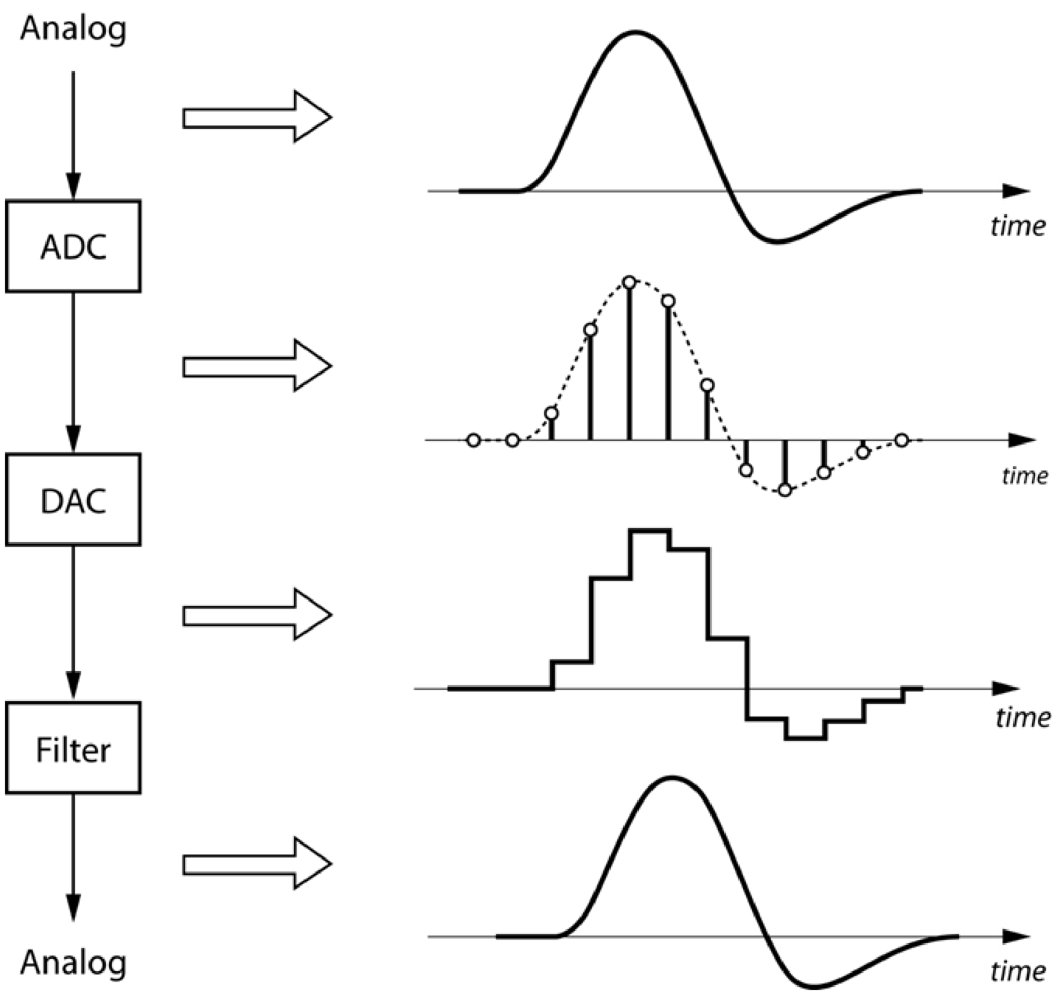
Turma EC
2018

# Aula 06

# Amostragem

# Amostragem

- A amostragem periódica é uma forma de se representar um sinal *contínuo* com uma sequência de valores discretos.
- Na prática, o sinal contínuo é passado através de um conversor A/D (Analógico-Digital) para que seja gerada a sequência.



# Amostragem

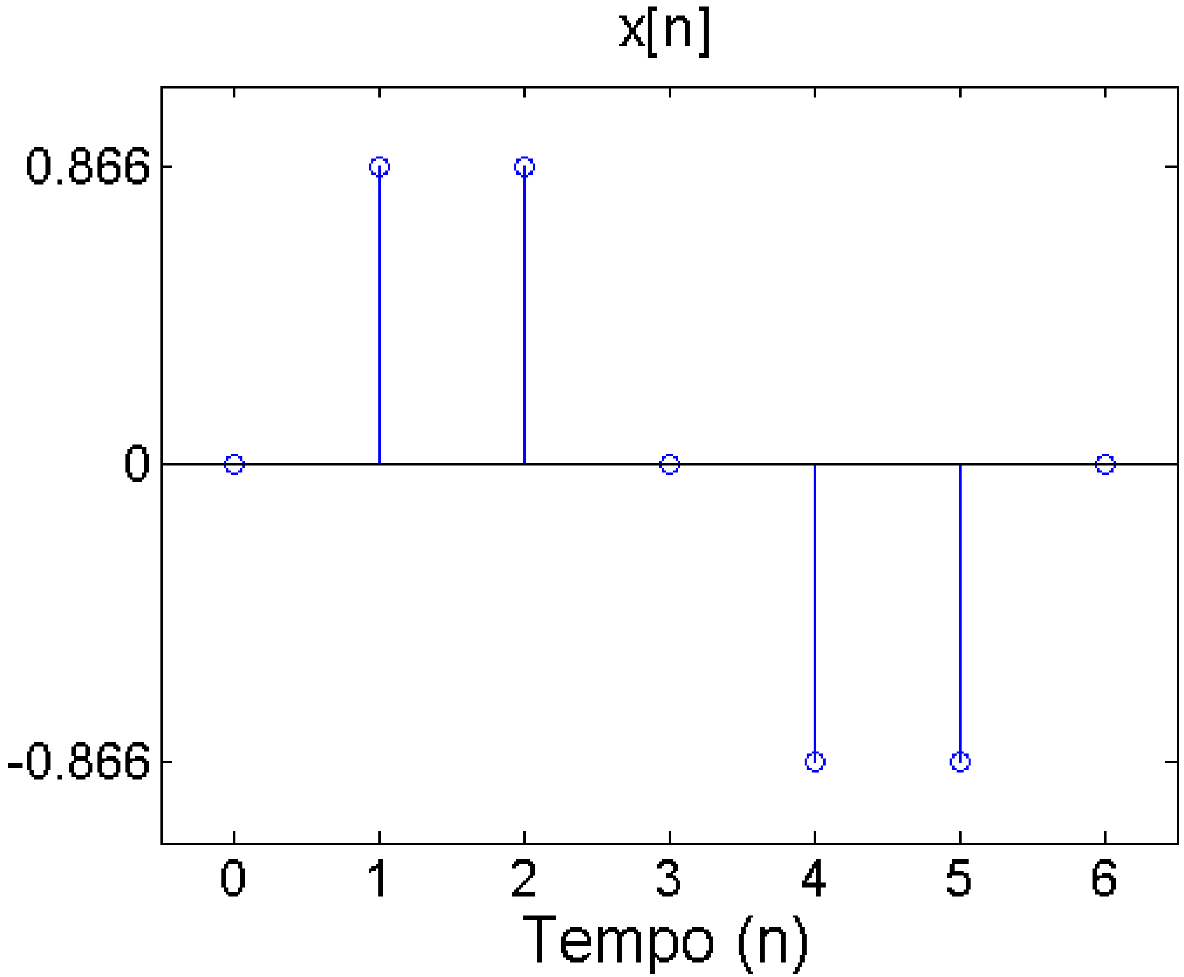
- Resumidamente, o ***Teorema da Amostragem*** envolve saber *quão rápido* um sinal contínuo deve ser *amostrado* para que se preserve sua informação original sem perdas.
- A ***frequência de amostragem*** é um valor arbitrário, mas seu valor irá impactar diretamente na representação do sinal original.

# *Aliasing*

- Considere o sinal discreto

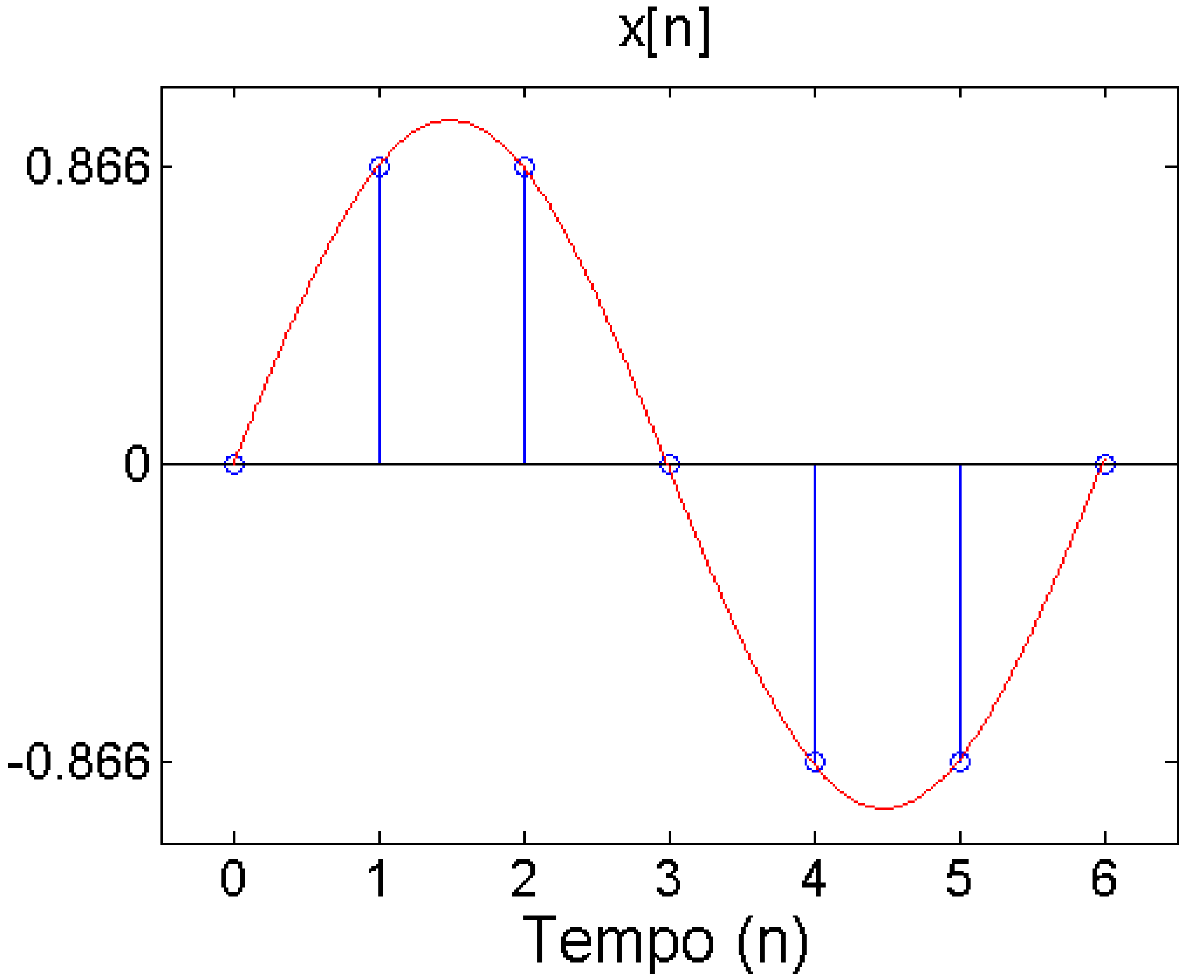
- $x[n] =$

$\{0, 0.866, 0.866, 0, -0.866, -0.866, 0\}$



# *Aliasing*

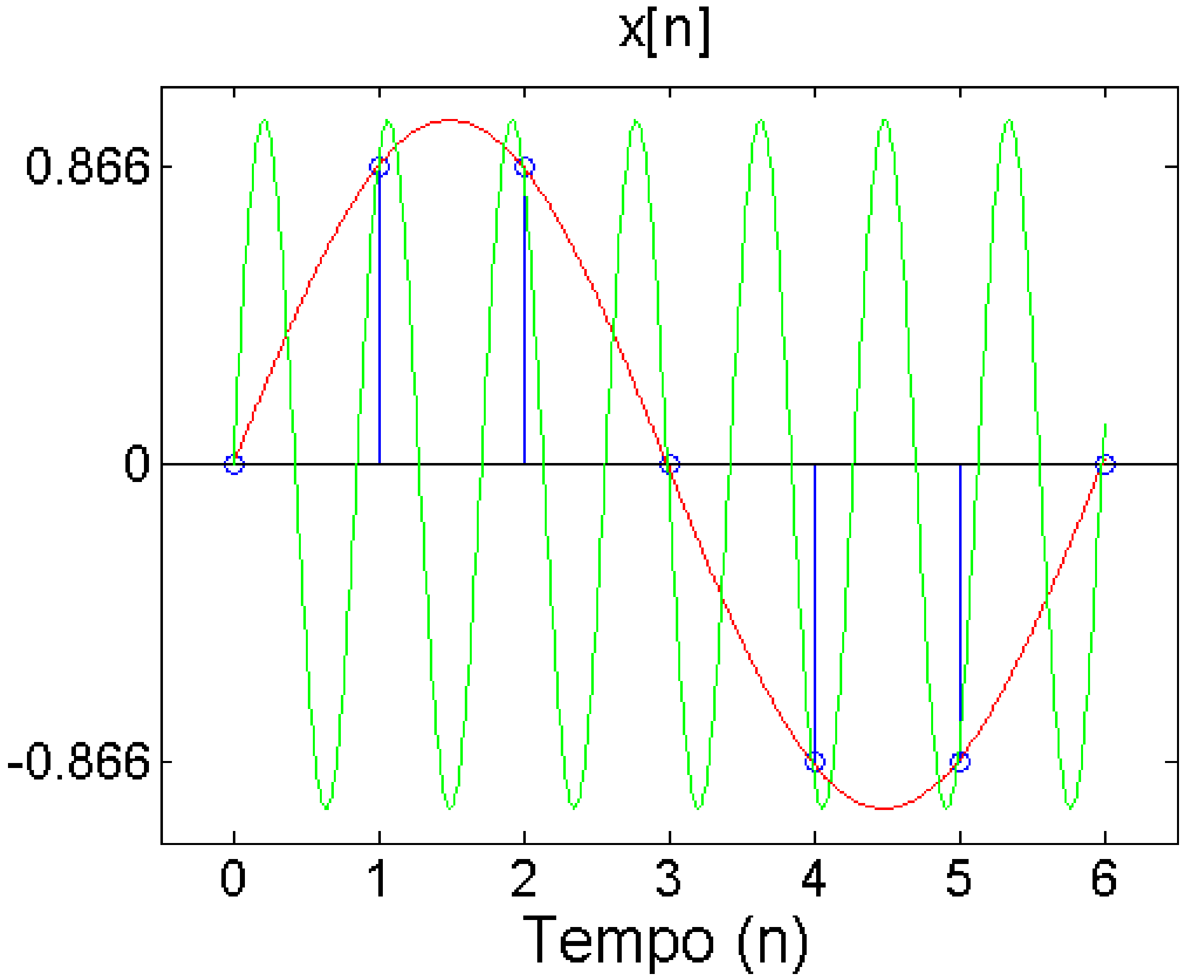
- Parece reprensentar uma senoide contínua no tempo



# *Aliasing*

- Mas qual delas!?

- Não há como saber, pois o valor da frequência de amostragem permite representarmos duas senoides de frequências diferentes



# *Aliasing*

- Considere uma senoide padrão:

$$x[n] = sen(2\pi f_0 n t_s)$$

- $f_0$ é a frequência natural da senoide
- Vamos, agora, amostrar o $x[n]$ a uma frequência de amostragem $f_s$ *amostras/segundo*. Ou seja, quantas amostras a cada segundo serão criadas?
- O ***período de amostragem*** $t_s = {}^{1}/_{f_s}$ é o inverso: quanto tempo há entre uma amostra e outra?

# *Aliasing*

- Se começarmos a *amostrar* em $n = 0$, então teremos:

| | |
|---|---|
| $0^{\underline{a}}$ amostra | $x[0] = sen(2\pi f_0 0 t_s)$ |
| $1^{\underline{a}}$ amostra | $x[1] = sen(2\pi f_0 1 t_s)$ |
| $2^{\underline{a}}$ amostra | $x[2] = sen(2\pi f_0 2 t_s)$ |
| ... | |
| $n^{\underline{a}}$ amostra | $x[n] = sen(2\pi f_0 n t_s)$ |

# *Aliasing*

- Sabe-se, da trigonometria, que

$$sen(\psi) = sen(\psi + 2\pi m), m \in \mathbb{Z}$$

- Então, aplicando-se a relação de amostragem:

$$x[n] = sen(2\pi f_0 n t_s) = sen(2\pi f_0 n t_s + 2\pi m)$$
$$= sen\big(2\pi(f_0 n t_s + m)\big) = sen\left(2\pi\left(f_0 + {}^{m}/_{nt_s}\right)nt_s\right)$$

- Considerando que $m$ pode ser múltiplo de $n$, ou seja, $m = kn$ e que $t_s = {}^{1}/_{f_s}$…

# *Aliasing*

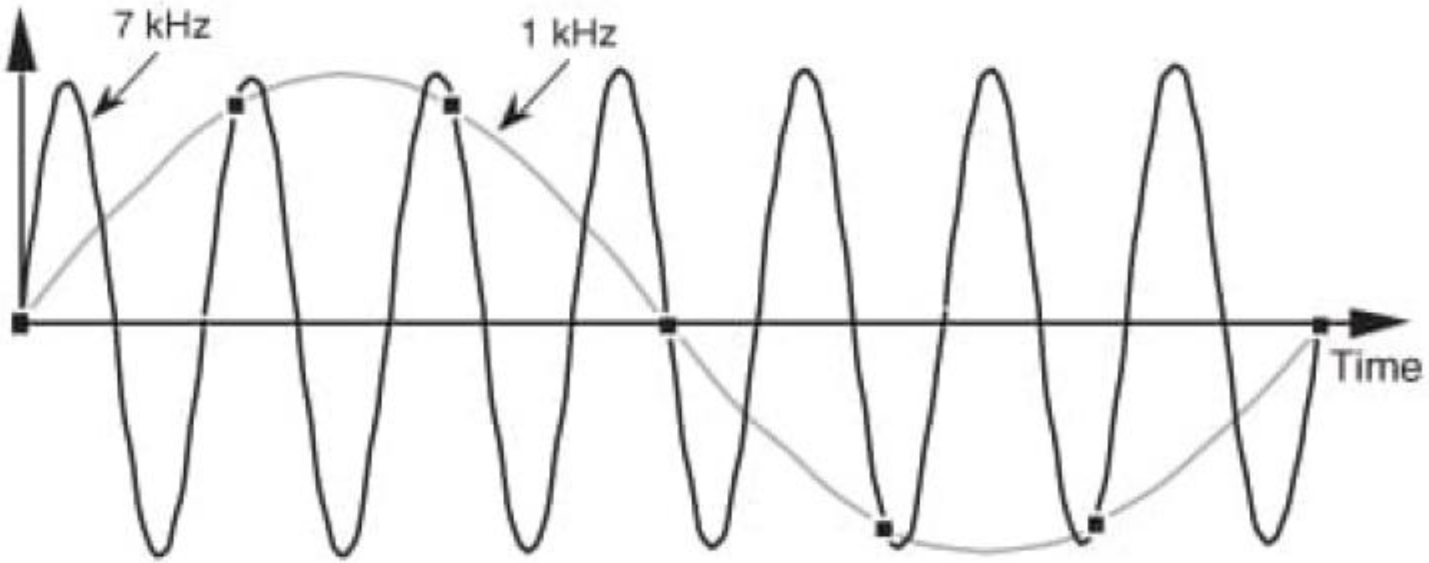
$$x[n] = sen\left(2\pi\left(f_0 + {}^{m}/_{nt_s}\right)nt_s\right) = sen(2\pi(f_0 + kf_s)nt_s)$$

$$\boxed{x[n] = sen(2\pi f_0 nt_s) = sen(2\pi(f_0 + kf_s)nt_s)}$$

- Ou seja, $f_0 = f_0 + kf_s$
- Isso significa que, ao se amostrar uma senoide de frequência $f_0$, não há como diferenciar essas amostras das de uma senoide de frequência $f_0 + kf_s$

# *Aliasing* - Exemplo

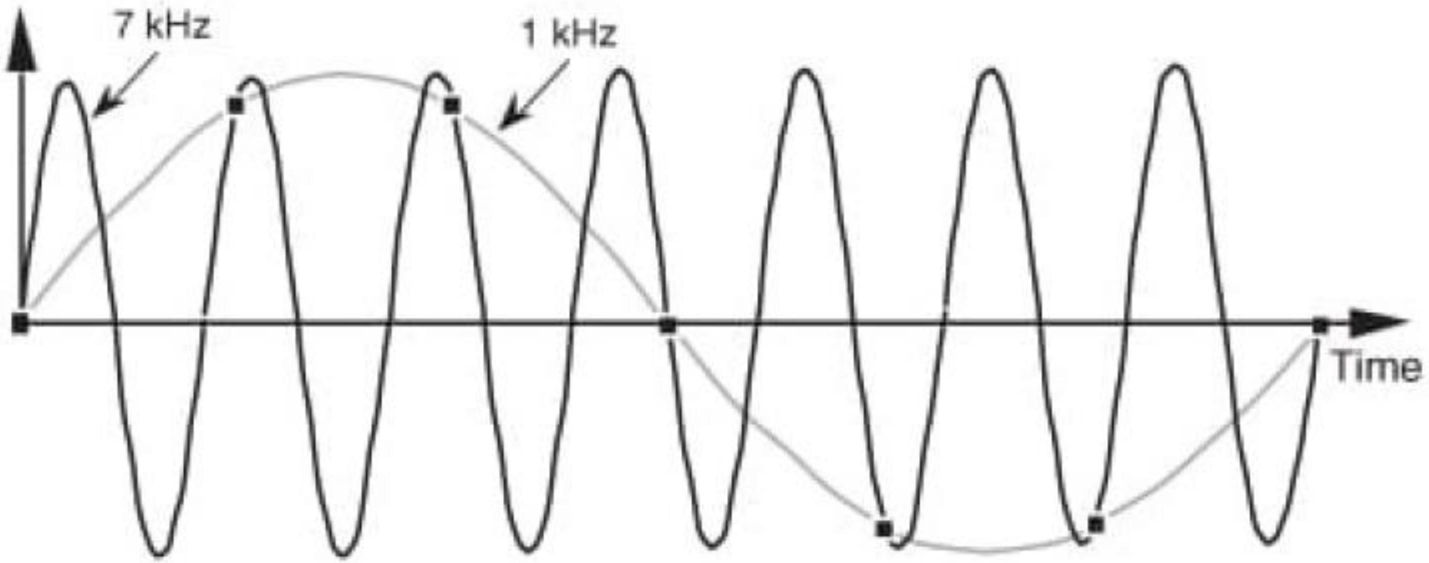
- **Exemplo:** caso queiramos amostrar uma senoide de frequência $7\ kHz$ a uma taxa de $6000$ amostras/segundo ($f_s = 6\ kHz, t_s = {}^{1}/_{6000}\ s$)



$f_0 + kf_s$

# *Aliasing* - Exemplo

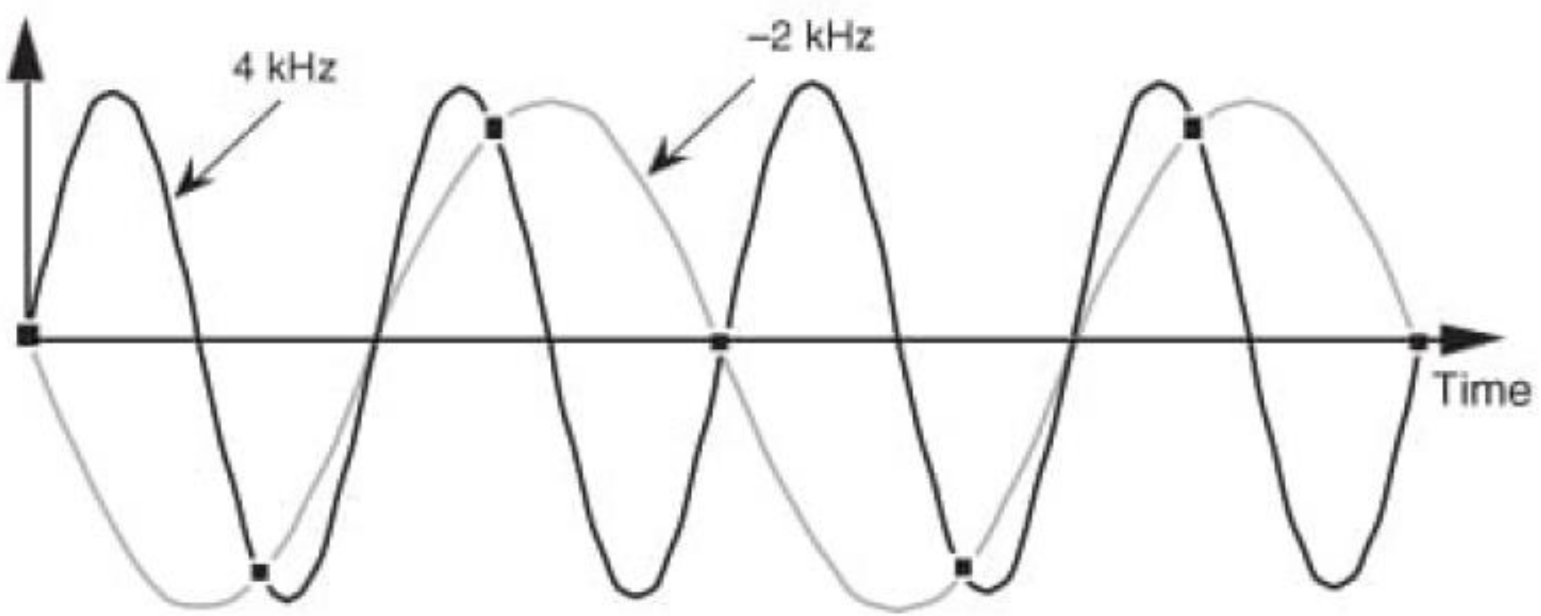
- As amostras encontradas são as mesmas que as de uma senoide de frequência $f_0 = 1\ kHz$, pois $7\ kHz = 7\ kHz + kf_s = 7 + (-1 \cdot 6) = 1\ kHz$



$$f_0 + kf_s$$

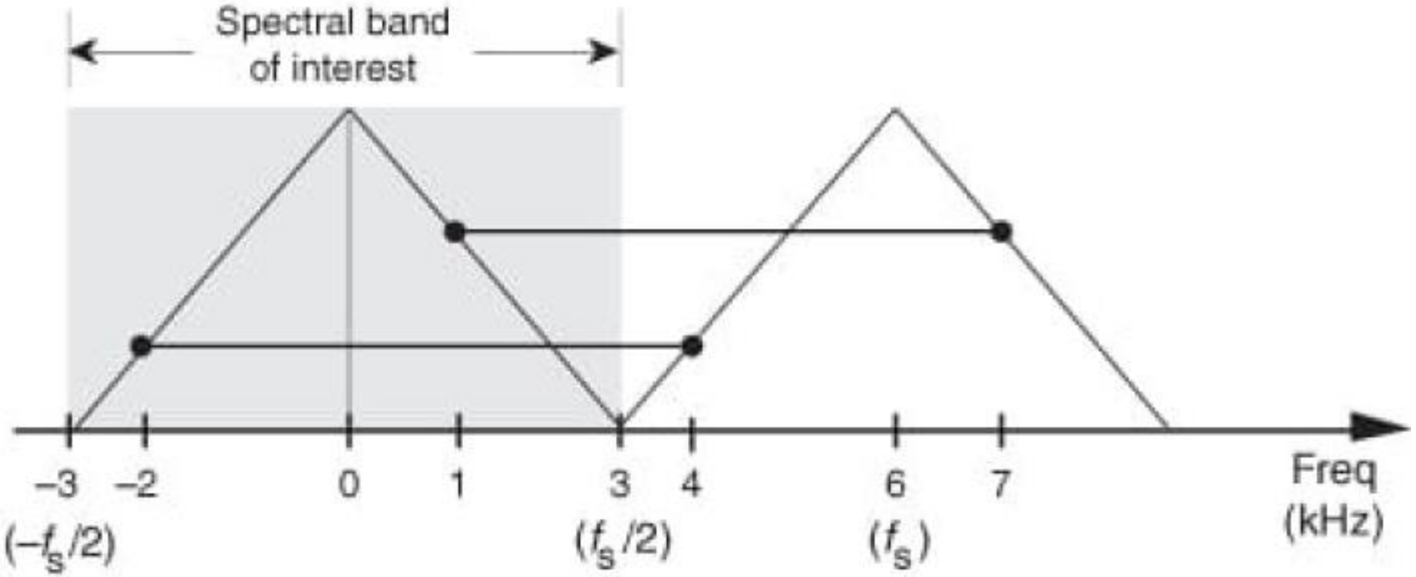
# *Aliasing* - Exemplo

- O mesmo ocorre com uma senoide de frequência $4\ kHz$ a uma taxa de $6000$ amostras/segundo. Pois $4 + (-1) \cdot 6 = -2\ kHz$



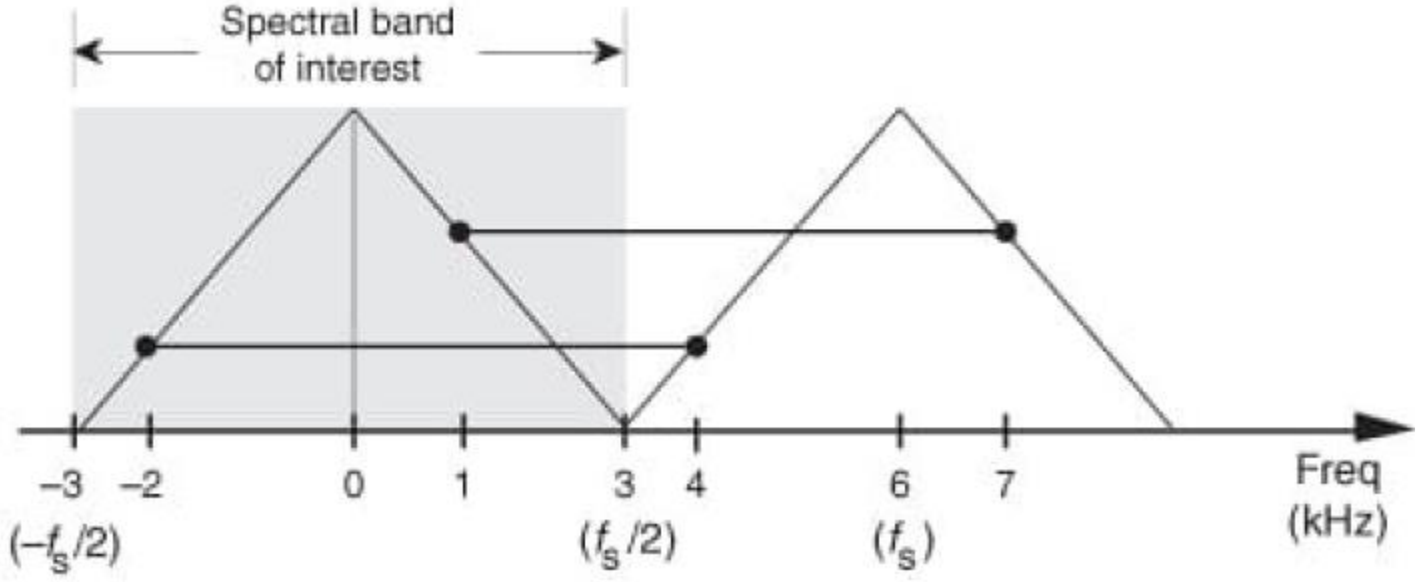
# *Aliasing* - Exemplo

- Observando o domínio da frequência, vemos que, a cada intervalo de $f_s = 6$, há uma réplica do espectro, pois não há como saber de qual réplica são as amostras exatamente.



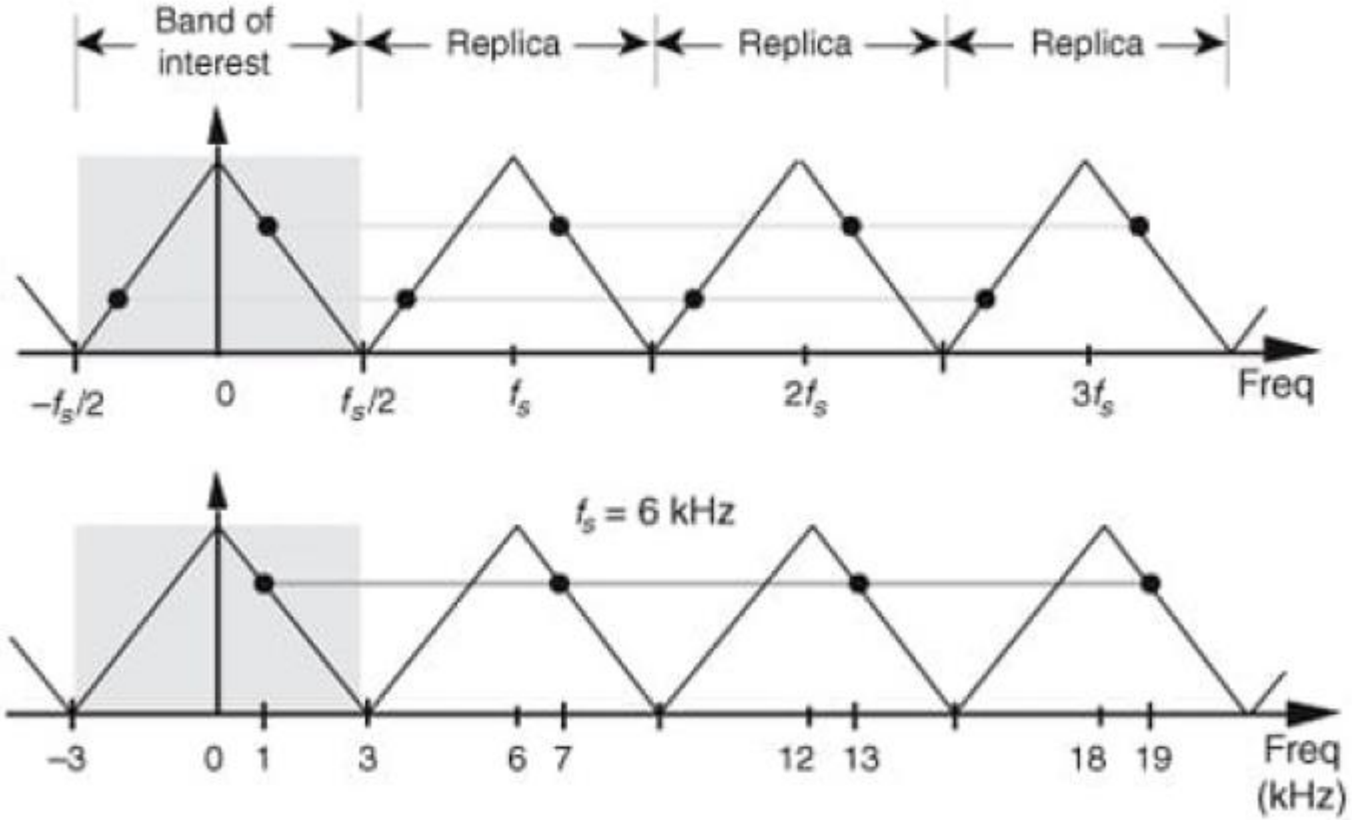
# *Aliasing* - Exemplo

- As intersecções das linhas horizontais com as curvas demonstram que há componentes de energia naquele ponto. Perceba como esses componentes são iguais nas frequências com *aliasing* (-2 e 4; 1 e 7).



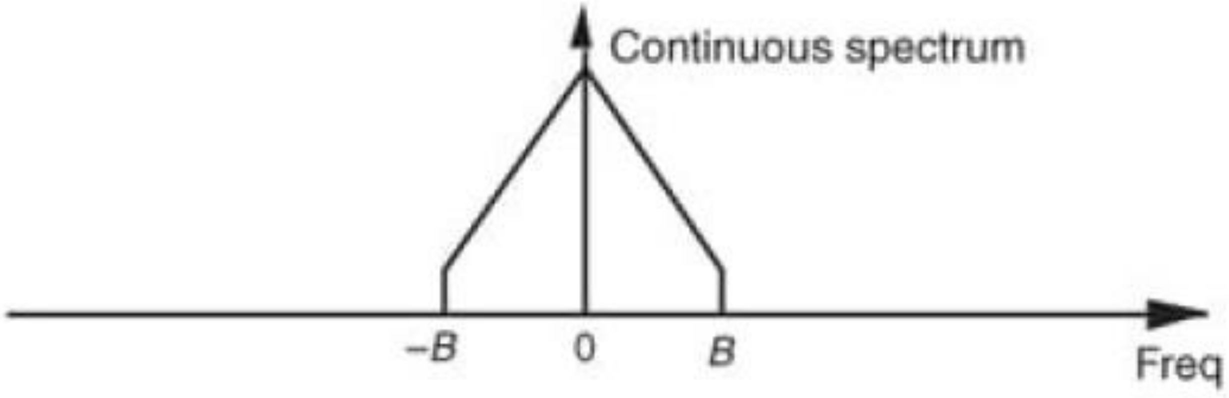
# *Aliasing* - Exemplo

- Generalizando mais ainda



# *Aliasing* - Exemplo

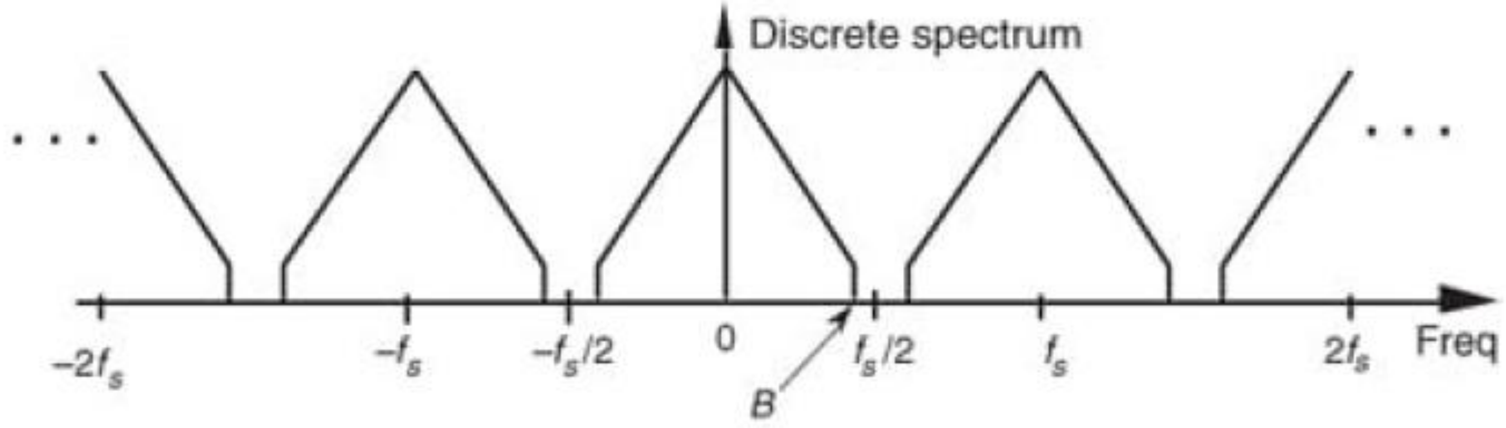
- Agora, considere o espectro de um sinal contínuo *passa-baixas* (com banda limitada)




- O seu espectro está situado entre as frequências $-B$ e $B$

# *Aliasing* - Exemplo

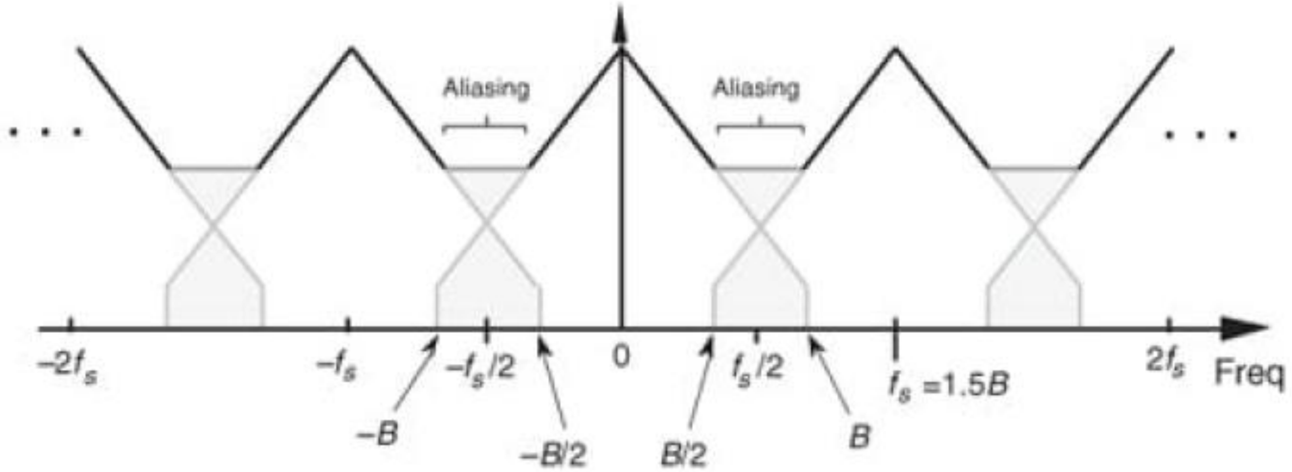
- Ao amostrarmos, nos deparamos com as réplicas




- No caso acima, a *frequência de amostragem* escolhida é maior que $2B$, ou seja, ${f_s}/{2} > B$

# *Aliasing* - Exemplo

- Agora, se $B > {}^{f_s}/_{2}$, ou seja, se a frequência de amostragem for muito baixa,




- Acontecerá *aliasing* entre os espectros, impedindo que filtremos a *banda-base*