Agenda

- Modelagem no espaço de estados
- Modelagem matemática de sistemas elétricos

Modelagem matemática de sistemas elétricos

- Com a forma padrão

1 $$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

2
$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\vdots \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0\overset{(n-1)}{u} - \beta_1\overset{(n-2)}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}
\end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 = 0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m} \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2
\end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1}u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned}$$

Modelagem matemática de sistemas elétricos

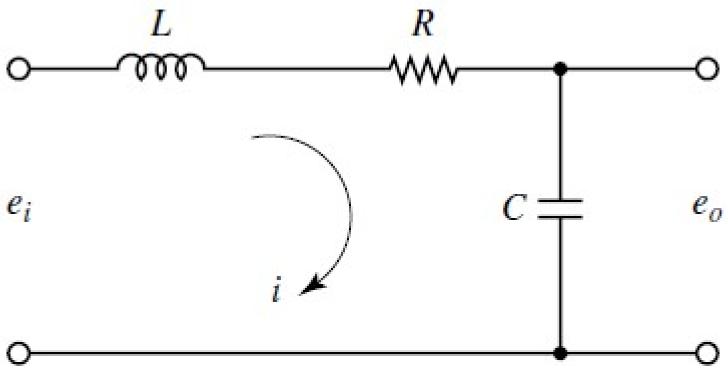
- Exemplo

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_i$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt = e_o$$

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_o(s)$$



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Modelagem matemática de sistemas elétricos

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 u$$

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L} \dot{e}_o + \frac{1}{LC} e_o = \frac{1}{LC} e_i$$

Modelagem matemática de sistemas elétricos

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\ \ \vdots \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0\overset{(n-1)}{u} - \beta_1\overset{(n-2)}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u
\end{aligned}$$

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= e_o \\
x_2 &= \dot{e}_o
\end{aligned}$$

Modelagem matemática de sistemas elétricos

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i$$

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

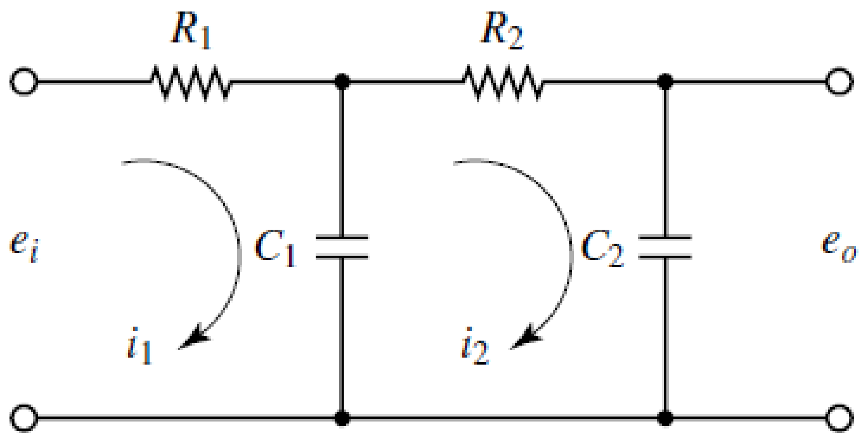
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= e_i \\
y &= e_o = x_1 \\
x_1 &= e_o \\
x_2 &= \dot{e}_o
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Modelagem matemática de sistemas elétricos em cascada

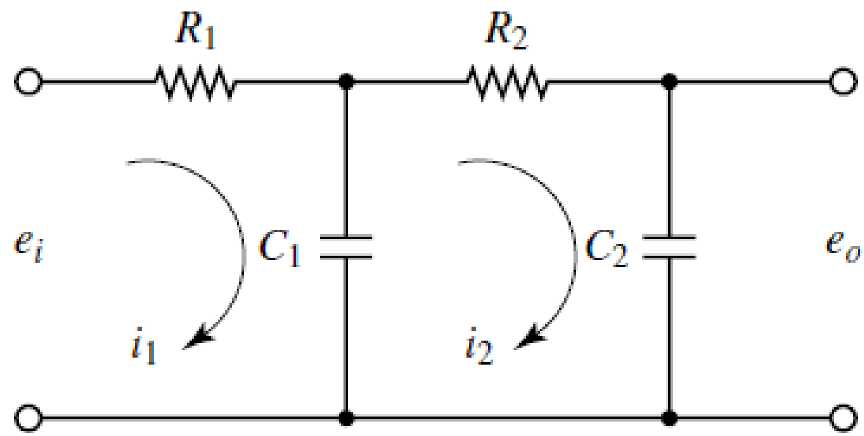


$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\,dt + R_1 i_1 = e_i$$

$$\frac{1}{C_1}\int (i_2 - i_1)\,dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = 0$$

$$\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = e_o$$

Modelagem matemática de sistemas elétricos em cascada



$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\,dt + R_1 i_1 = e_i$$

$$\frac{1}{C_1 s}\left[I_1(s) - I_2(s)\right] + R_1 I_1(s) = E_i(s)$$

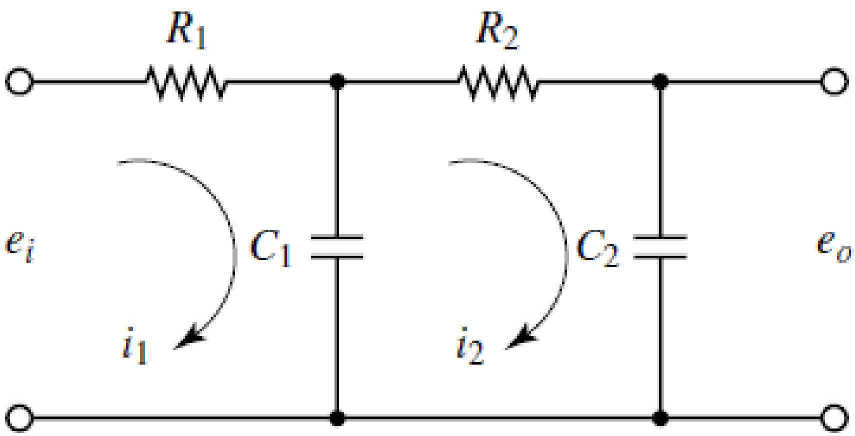
$$\frac{1}{C_1}\int (i_2 - i_1)\,dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = 0$$

$$\frac{1}{C_1 s}\left[I_2(s) - I_1(s)\right] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = 0$$

$$\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = e_o$$

$$\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = E_o(s)$$

Modelagem matemática de sistemas elétricos em cascada



$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\,dt + R_1 i_1 = e_i$$

$$\frac{1}{C_1 s}\left[I_1(s) - I_2(s)\right] + R_1 I_1(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C_1}\int (i_2 - i_1)\,dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = 0$$

$$\frac{1}{C_1 s}\left[I_2(s) - I_1(s)\right] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = 0$$

$$\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = e_o$$

$$\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = E_o(s)$$

Modelagem matemática de sistemas elétricos em cascada

$$\frac{1}{C_1 s}\left[I_1(s) - I_2(s)\right] + R_1 I_1(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C_1 s}\left[I_2(s) - I_1(s)\right] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = 0$$

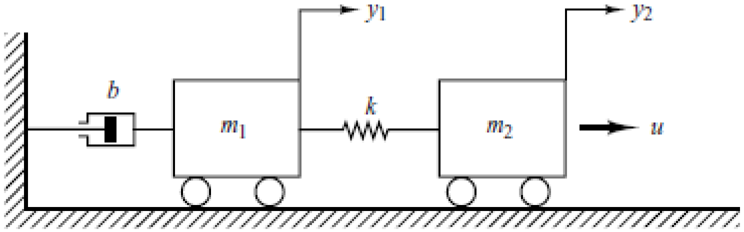
$$\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s}$$

$$= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

Exemplo de sistema mecânico e elétrico

- Obtenha a representação em espaço de estados do sistema mostrado na seguinte figura.



Exemplo de sistema mecânico e elétrico

- Encontre a função de transferência

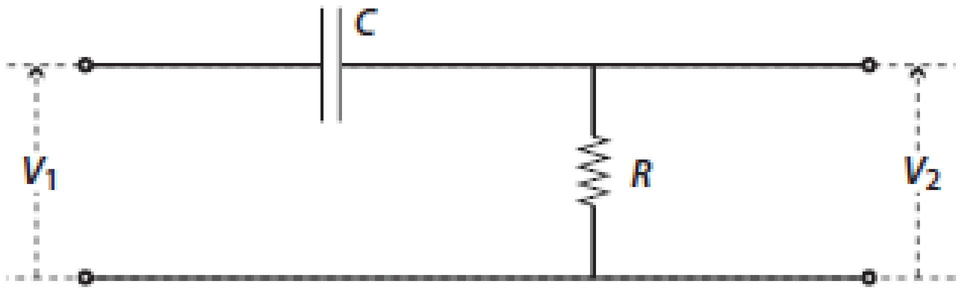


FIGURA 4.2 Circuito do Exemplo 4.1.