Transformadas Geométricas

Matrizes Homogêneas de Transformações Geométricas 3D

Translação: consiste em adicionar constantes de deslocamento a todos os vértices, ou seja, trocando o objeto ou cena de lugar. Na forma matricial consiste na operação mostrada na equação 1.

$$[x'y'z'1] = [xyz1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & tz & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Escalonamento:

A transformação geométrica de escala serve para definir a escala a ser usada para exibir o objeto ou cena. Matematicamente, esta operação consiste em multiplicar um valor de escala por todos os vértices do objeto (ou conjunto de objetos) que terá seu tamanho aumentado ou diminuído. Como se trata de uma multiplicação, para aumentar o tamanho deve ser aplicado um fator de escala maior que 1.0, em um ou nos três eixos. Para diminuir o tamanho basta aplicar um valor de escala entre 0.0 e 1.0. No caso de se aplicar um fator de escala negativo, o objeto terá os sinais de suas coordenadas invertidos, gerando como resultado o seu "espelhamento" no eixo que teve o fator de escala negativo. Na forma matricial a escala consiste na operação apresentada na Equação 2. As variáveis ex, ey e ez indicam, respectivamente, os valores de escala que devem ser aplicados nos eixos x, y e z.

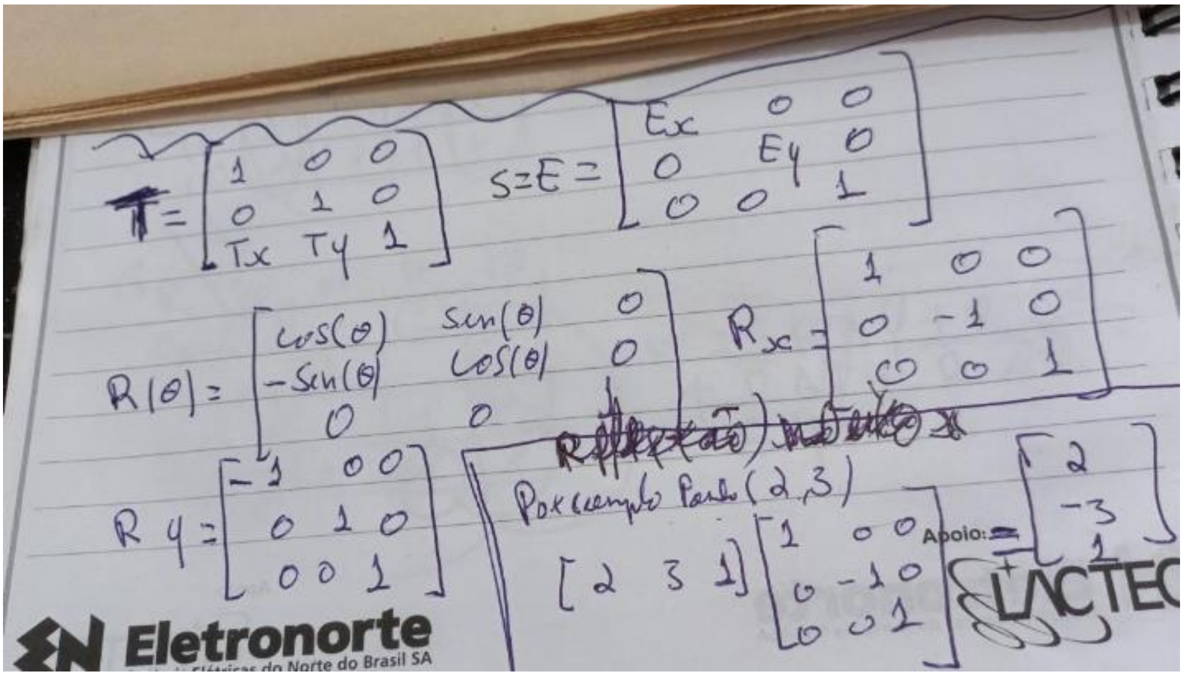
$$[x'y'z'1] = [xyz1] \begin{bmatrix} ex & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ey & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ez & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Rotação

A transformação geométrica de rotação é usada para rotacionar um objeto ou cena em torno de um eixo. Matematicamente, esta operação consiste em aplicar uma composição de cálculos utilizando o seno e cosseno do ângulo de rotação a todas as coordenadas dos vértices que compõem o objeto ou cena. Quando se trabalha em 3D, também se deve definir em torno de qual eixo se procederá a rotação. Portanto, conforme apresentado na Equação 3, três matrizes diferentes são definidas, uma para cada eixo. O símbolo α indica o ângulo de rotação. Seguindo a convenção da regra de mão direita, quando o valor do ângulo de rotação é positivo, a rotação é feita no sentido anti-horário. Isso porque se considera que o eixo z (ou x, ou y) é "envolvido" pela mão direita, alinhando o polegar com o sentido positivo do primeiro, e fechando os demais dedos no sentido positivo da rotação, ou seja, anti-horário.

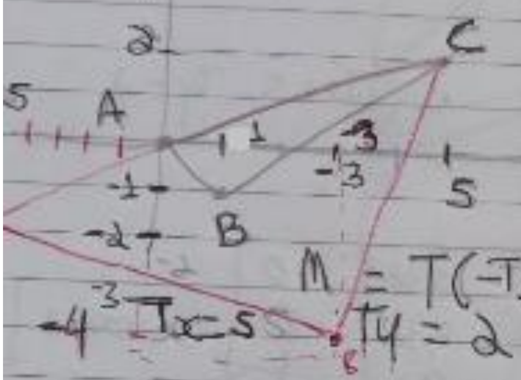
$$r_z = \begin{bmatrix} cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 \\ -sen\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & -sen\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r_y = \begin{bmatrix} cos\alpha & 0 & sen\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & 0 & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Matrizes Homogêneas de Transformações Geométricas 2D



Um Exemplo em Coordenadas Homogêneas 2D

Amplie o tamanho do triângulo com vértices A(0,0), B(1, -1) e C(5,2) para o dobro mantendo o ponto C fixo.



$A' = ?$

$B' = ?$

$C' = ?$

$M = T(-T_x, -T_y)\, S(S_x, S_y)\, T(T_x, T_y)$

$T_x = 5 \quad T_y = 2 \quad S_x = S_y = 2$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ -T_x S_x & -T_y S_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix} =$$

$$M = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ -T_x S_x + T_x & -T_y S_y + T_y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1+8

3×3

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$