UNIFESSPA
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará

Disciplina: Avaliação de Desempenho de Sistemas

Aula 5 – *CARACTERÍSTICAS DAS FILAS*

Prof. JVictor – jvictor@unifesspa.edu.br

2021

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Processos de Chegada e de Atendimento

- Pode-se ter uma modelagem determinística (D) ou com as distribuições de probabilidade. Comumente vemos:

- D – determinística
- M – markoviano (exponencial)
- G – geral ou arbitrária

Avaliação de Desempenho de Sistemas

NOTAÇÃO DE KENDALL

1/2/3/4/5/6

1 – processo de chegada (D, M, G)

2 – processo de atendimento (D, M, G)

3 – número de atendentes (em paralelo)

4 – número máximo de clientes no sistema

5 – tamanho da população

6 – regra da fila (disciplina de atendimento)

Avaliação de Desempenho de Sistemas

NOTAÇÃO DE KENDALL

Exemplo:

- Fila M/M/3/20/300/LIFO com $\lambda = 3/h$ e $\mu = 5/h$.
  - Muitas vezes, os três últimos símbolos são omitidos. Nestes casos assume-se:
    - Capacidade ilimitada;
    - População Infinita;
    - Disciplina de atendimento FIFO.

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo

M/M/1

1 – Processo de chegada exponencial

2 – Processo de atendimento exponencial

3 – Número de atendentes = 1

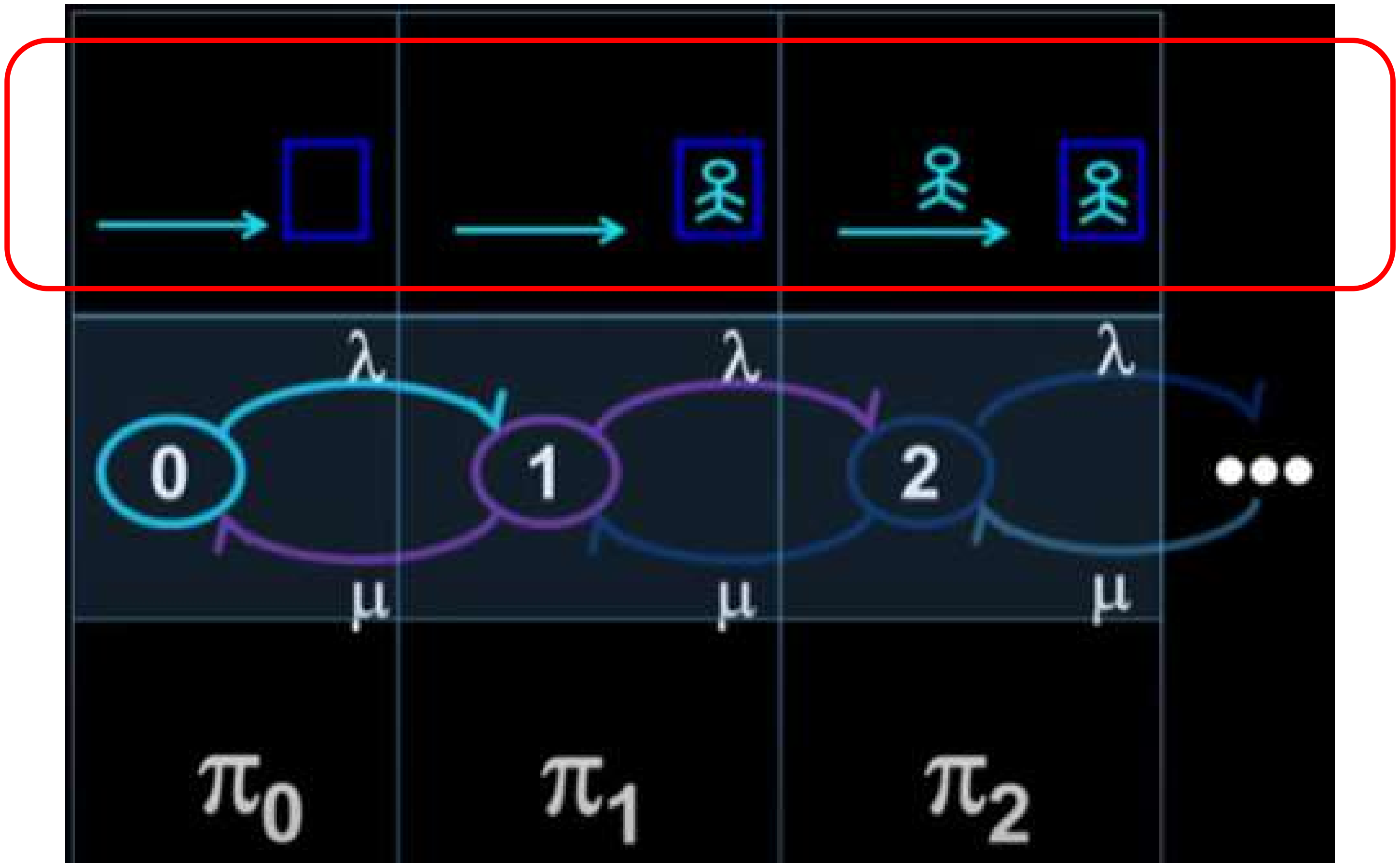
4 – Número máximo de clientes no sistema = ∞

5 – Tamanho da população = ∞

6 – Regra da fila = FIFO

Avaliação de Desempenho de Sistemas

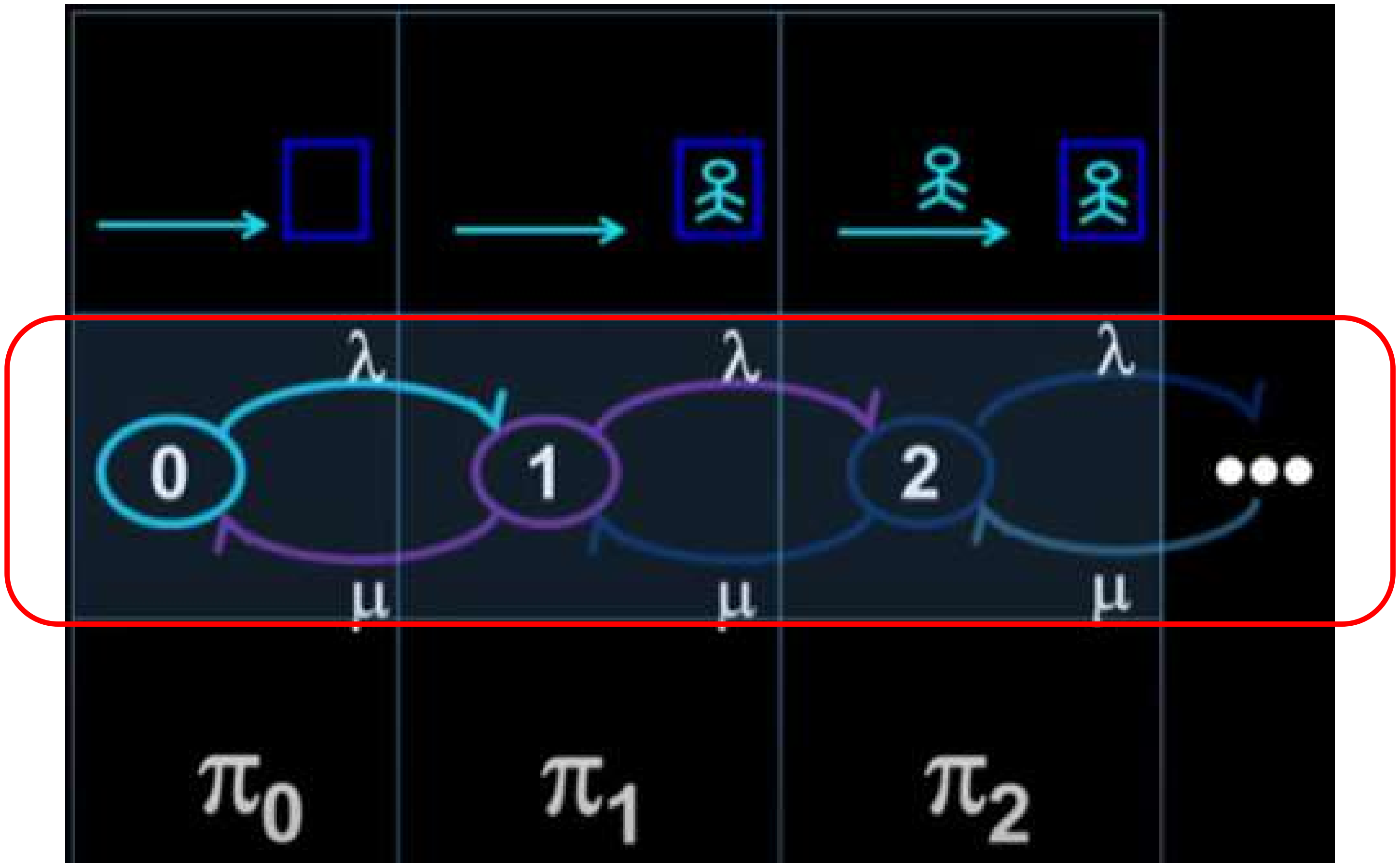
Equacionamento para M/M/1



O que significa fisicamente

Avaliação de Desempenho de Sistemas

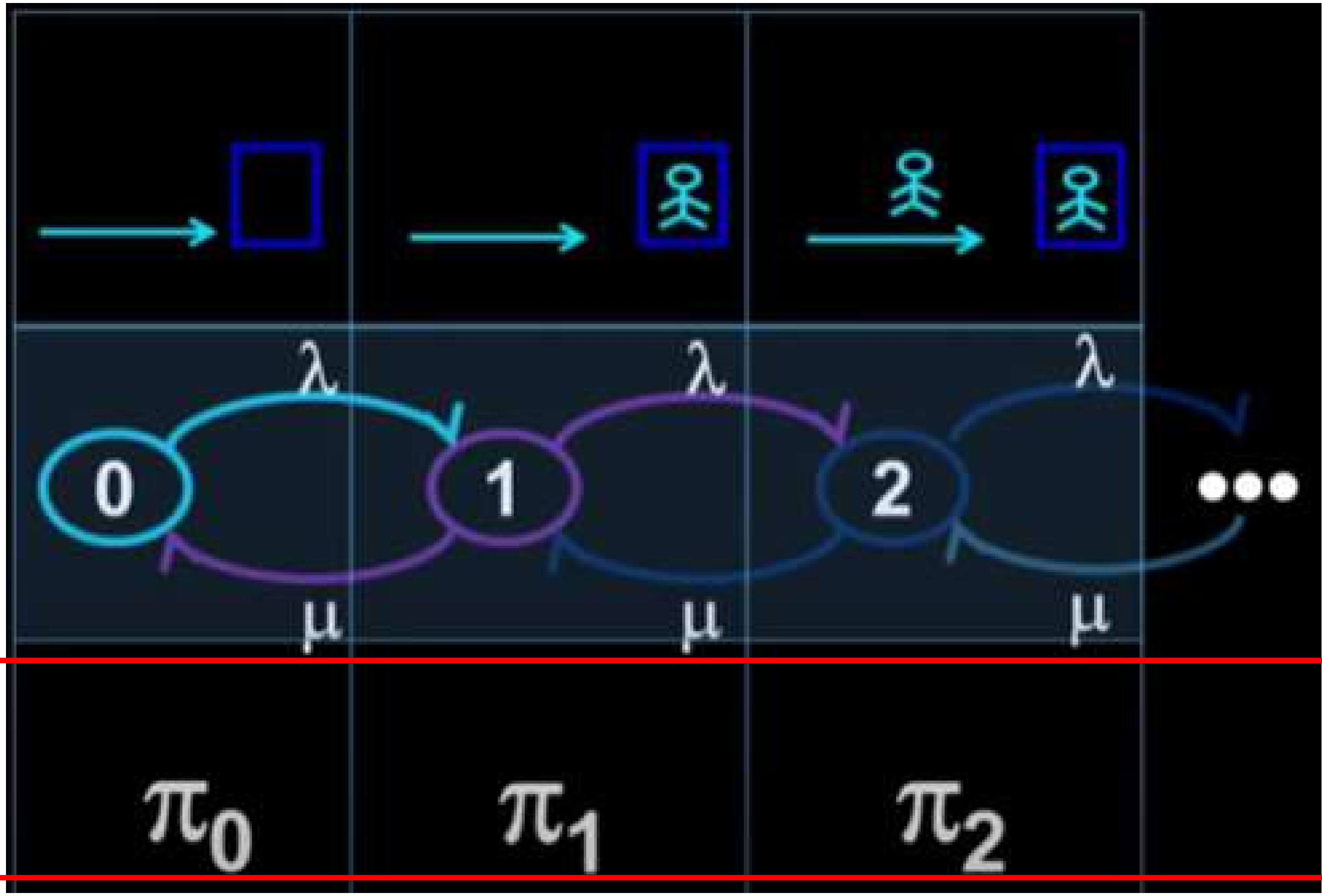
Equacionamento para M/M/1



Estados 0, 1 e 2

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Equacionamento para M/M/1



Probabilidades π_0, π_1 e π_2 (associadas a cada estado)

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Equacionamento para M/M/1

Probabilidade de ter '0' clientes no sistema

$$\pi_0 = (1 - \rho)$$

Probabilidade de ter 'j' clientes no sistema

$$\pi_j = \rho^j (1 - \rho) \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Métricas de Avaliação M/M/1

	Sistema	Fila	Serviço
Tempo Médio	W	Wq	Ws
# Médio Clientes	L	Lq	Ls

π_j probabilidade de que existam j clientes no sistema.

fração de tempo na qual j clientes estão no sistema.

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Métricas de Avaliação M/M/1

	Sistema	Fila	Serviço
Tempo Médio	W	Wq	Ws
# Médio Clientes	L	Lq	Ls

$$L = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Métricas de Avaliação M/M/1

	Sistema	Fila	Serviço
Tempo Médio	W	Wq	Ws
# Médio Clientes	L	Lq	Ls

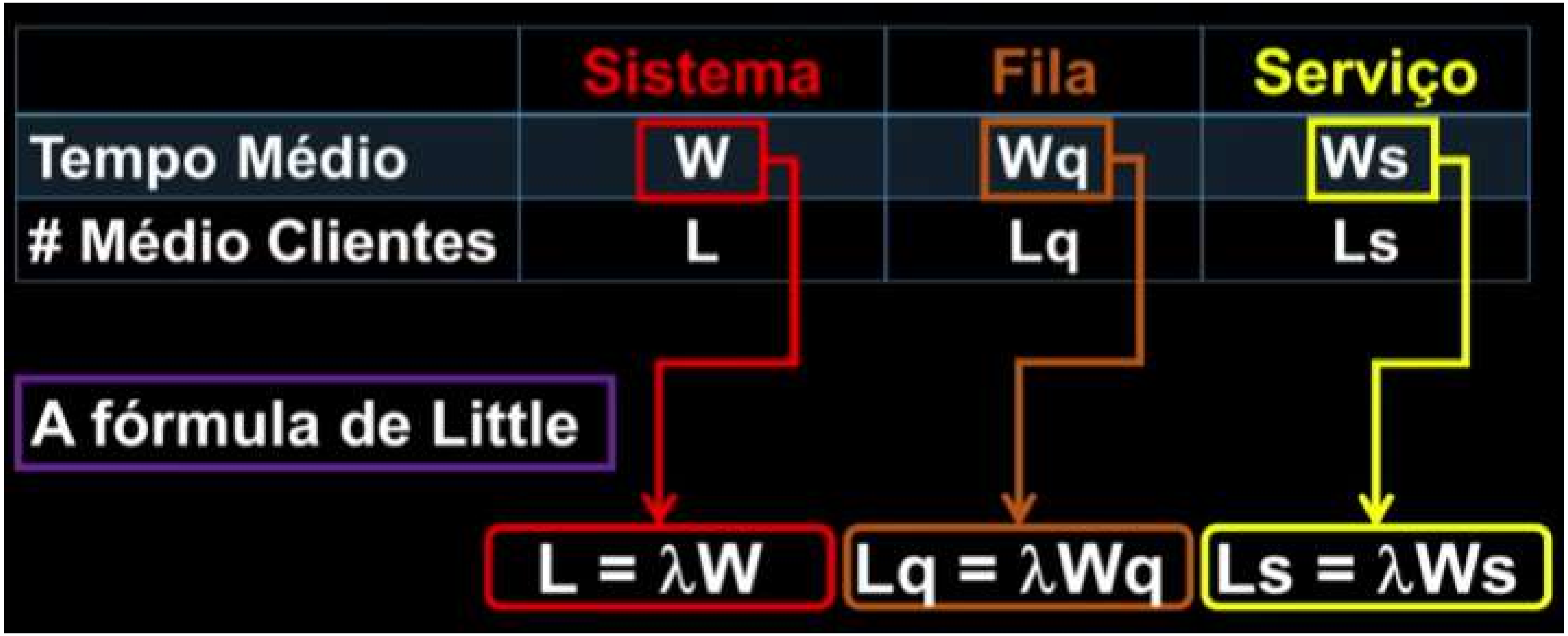
$$Lq = L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

	Sistema	Fila	Serviço
Tempo Médio	W	Wq	Ws
# Médio Clientes	L	Lq	Ls

$$Ls = \rho$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Métricas de Avaliação M/M/1



Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo

Em um drive-thru com 1 atendente, 10 carros chegam por hora. Assumir que o tempo médio de serviço por cliente é de 4 minutos. E tanto o tempo entre as chegadas e o tempo de atendimento seguem distribuição exponenciais.

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo

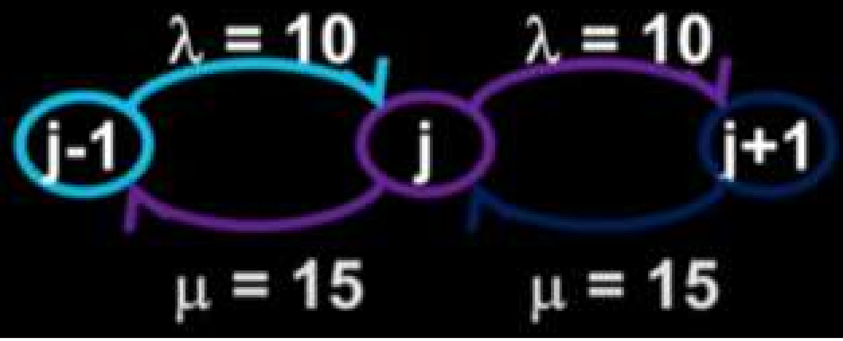
1) Qual a probabilidade do servidor está ocioso ?

1º - sabendo que o modelo de filas segue M/M/1/GD/∞/ ∞, que a taxa de chegadas é λ = 10 carros por hora, e de atendimento é de μ = 15 carros por hora, e que $\rho = \lambda/\mu = 10/15 = 2/3$. Como $\rho < 1$ existe estado estacionário e pode-se empregar as equações

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo

Se a taxa de chegadas é de $\lambda = 10$ carros por hora e de atendimento é de $\mu = 15$ carros por hora e que $\rho = \lambda/\mu = 10/15 = 2/3$, então:



$$\pi_0 = (1 - \rho) = (1 - 2/3) = 1/3$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo

2) Em média qual o tamanho da fila ?

$$Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(2/3)^2}{1-(2/3)} = \frac{(4/9)}{(1/3)} = (4/3)$$

3) Em quanto tempo um carro gasta no sistema?

$$L = \lambda W \rightarrow W = L/\lambda$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

$$L = \lambda W \rightarrow W = L/\lambda$$

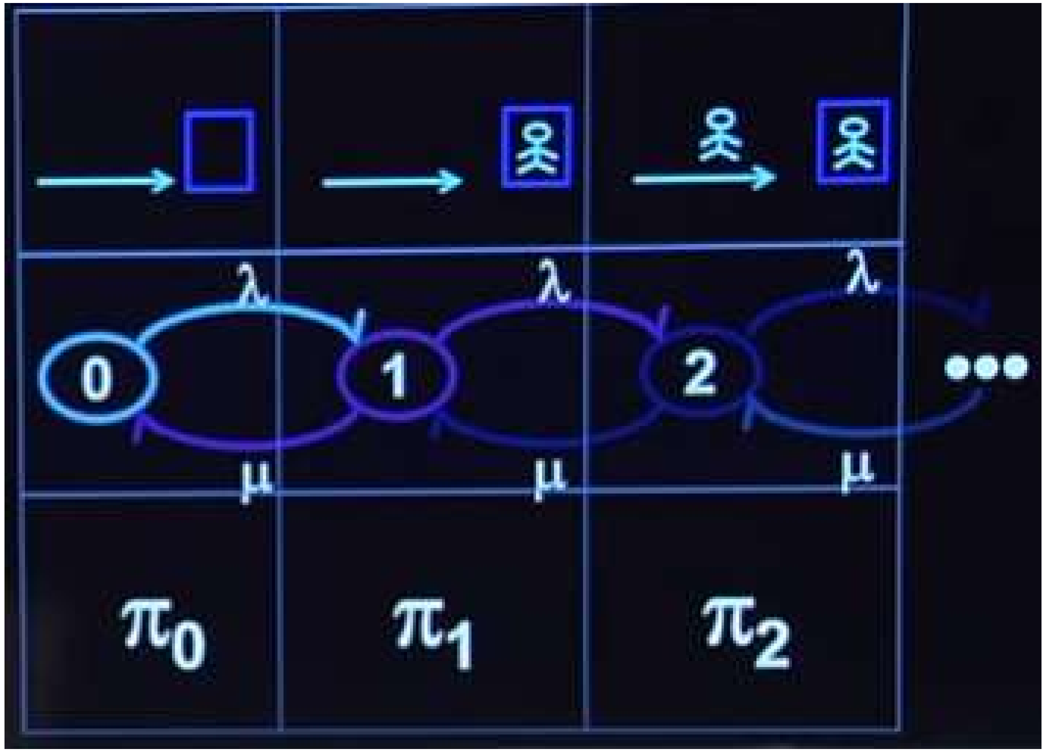
$$L = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{2/3}{(1-2/3)} = 2$$

W = 2/10 = 1/5 hora = 12 minutos

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo

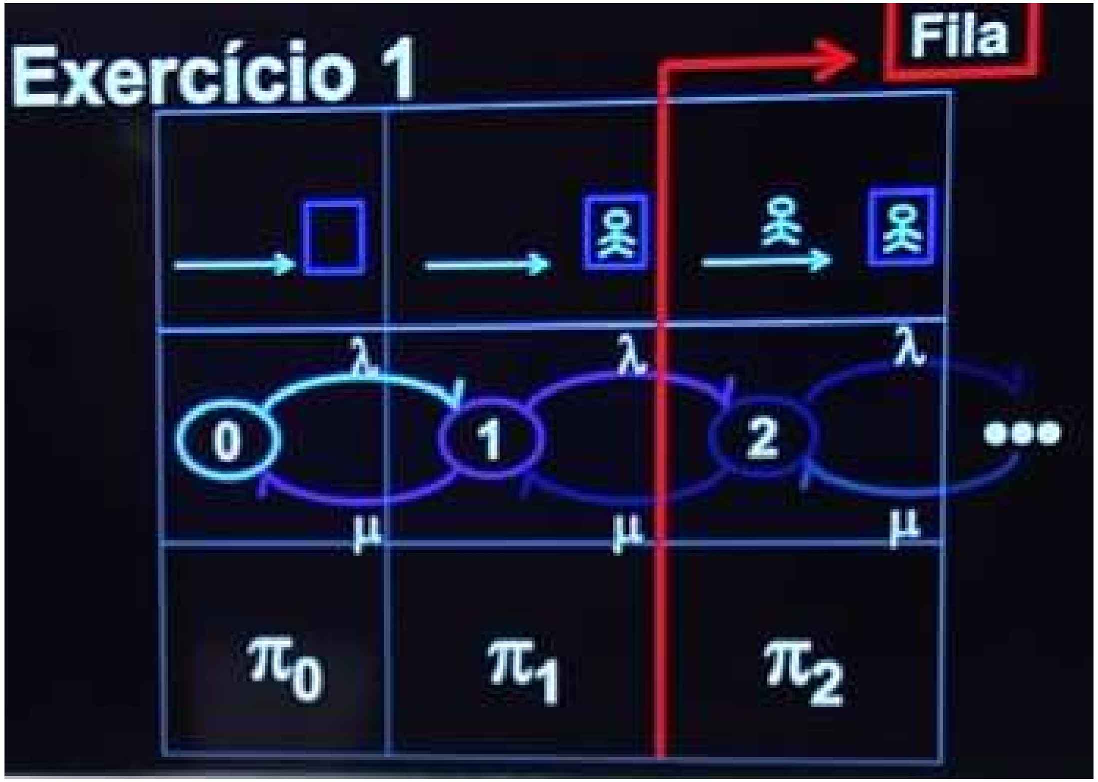
1) Qual a probabilidade de encontrar o sistema com Fila ?



Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo

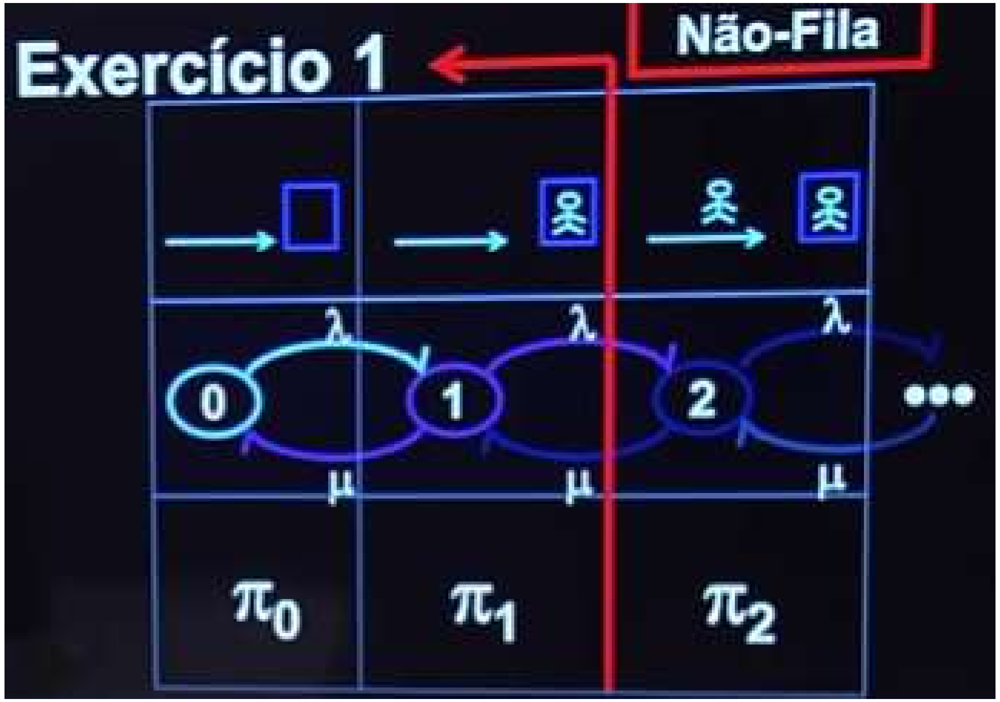
1) Qual a probabilidade de encontrar o sistema com Fila ?

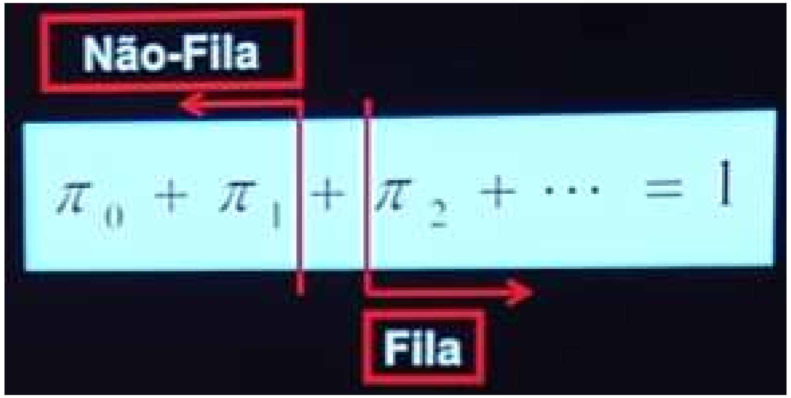


Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo

1) Qual a probabilidade de encontrar o sistema com Fila ?





Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo

1) Qual a probabilidade de encontrar o sistema com Fila ?

$$p(\tilde{n}fila) = \pi_0 + \pi_1$$

$$p(fila) = 1 - p(\tilde{n}fila)$$

$$p(\tilde{n}fila) = (1 - \rho) + \rho(1 - \rho)$$

$$p(fila) = 1 - (1 - \rho^2) = \rho^2 = 0,44$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Equacionamento para M/M/1

1 – Processo de chegada exponencial

2 – Processo de atendimento exponencial

3 – Número de atendentes = 1

4 – Número máximo de clientes no sistema = ∞

5 – Tamanho da população = ∞

6 – Regra da fila = FIFO

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Desempenho do Sistema

Considere as duas especificações de filas:

- Fila1 M / M / 8 / 15 / 20 / FIFO
- Fila2 M / M / 6 / 20 / 20 / FIFO

Qual delas oferece melhor qualificação relativa ao desempenho ?

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Desempenho do Sistema

Considere as duas especificações de filas:

- Fila1 M / M / $\boxed{8}$ / 15 / 20 / FIFO
- Fila2 M / M / $\boxed{6}$ / 20 / 20 / FIFO

Qual delas oferece melhor qualificação relativa ao desempenho ?

Fila se destaca com 8 servidores

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Desempenho do Sistema

Considere as duas especificações de filas:

- Fila1 M / M / 8 / 15 / 20 / FIFO
- Fila2 M / M / 6 / 20 / 20 / FIFO

Qual delas oferece melhor qualificação relativa ao desempenho ?

Capacidade do sistema não influenciará

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo: Um Atendente / Limite K de Clientes

O sistema comporta K clientes, onde K = Qtd na fila + 1 em atendimento

- Em média, vinte clientes chegam a cada hora
- Em média, um funcionário pode servir trinta clientes por hora

M/M/1/K

Portanto:

$\lambda = 20$

$\mu = 30$

$M = 1$

$K = 10$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo: Um Atendente / Limite K de Clientes

A média de clientes no sistema

$$L = K - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} + (1 - P_0) + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}$$

A média de clientes na Fila

$$L_q = K - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} + (1 - P_0) + \frac{\lambda}{\mu}$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo: Um Atendente / Limite K de Clientes

E assim toda a formulação se altera

O tempo médio que um cliente permanece no sistema:

$$W = \frac{K}{\lambda} - \frac{(\lambda + \mu).(1 - P_0)}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu}$$

O tempo médio que um cliente permanece na Fila:

$$W_q = \frac{K}{\lambda} - \frac{(\lambda + \mu).(1 - P_0)}{\lambda^2}$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exemplo: Um Atendente / Limite K de Clientes

Probabilidade de haver n clientes no sistema

$$P_n = \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k-n}}{(k-n).\sum_{j=0}^{k} \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j}}{j!}}$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Exercício

Um banco tem três agentes de crédito trabalhando, cada um dos quais pode servir quatro clientes por hora. A cada hora, dez candidatos a empréstimos chegam ao departamento, e junta-se a fila única. Quais são as características de funcionamento do sistema ?

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Vários Atendentes / Fila Única

Características:

- Taxa de chegada segue Poisson;
- Taxa de atendimento segue uma exponencial negativa;
- População infinita;
- FIFO.

10/12/3

Portanto:

$\lambda = 10$

$\mu = 4$

$M = 3$

$M\mu = 12$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Vários Atendentes / Fila Única

Probabilidade de que o sistema esteja livre (P_0)

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=M-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{M!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M - \left[\frac{M\mu}{M\mu - \lambda}\right]}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{1}{0!}\left(\frac{10}{4}\right)^0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{10}{4}\right)^1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{10}{4}\right)^2\right] + \frac{1}{3!}\left(\frac{10}{4}\right)^3 - \frac{12}{12-10}}$$

$P_0 = 0{,}45 \quad = 4{,}5\%$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Vários Atendentes / Fila Única

A média de clientes no sistema

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{M}}{(M-1)!\,(M\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \frac{(10)(4)\left(\frac{10}{4}\right)}{(3-1)!\,(12-10)^2}(0,045) + \frac{10}{4} \approx 6$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Vários Atendentes / Fila Única

A média de clientes na Fila:

$$L_q = L - (\lambda - \mu)$$

$$L_q = 6 - (10/4) = 3,5$$

O tempo médio que um cliente permanece no sistema:

$$W = L/\lambda$$

$$W = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ horas } (36 \text{ minutos})$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Vários Atendentes / Fila Única

O tempo médio que um cliente permanece na Fila:

$$W_q = W - \left(\frac{1}{\mu}\right) \; ou \; \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{3,5}{10} = 0,35 \text{ horas } (21 \text{ minutos})$$

Vários Atendentes / Fila Única

Probabilidade de que todos os servidores estejam ocupados:

$$P_w = \frac{1}{M!}\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^M \frac{M\mu}{M\mu-\lambda} P_0$$

$$P_w = \frac{1}{3!}\left[\frac{10}{4}\right]^3 \frac{12}{12-10}\, 0,45 = 0,703 = 70,3\%$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Formulações de LITTLE

As formulações vistas são válidas desde que **o sistema esteja em situação de equilíbrio**, isto é, em um intervalo grande de observação, o **número de saídas é igual ao número de chegadas do sistema**;

Este resultado é independente das distribuições dos intervalos de chegada e dos tempos de atendimento

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Testes de Aderência

- Verifica a qualidade na escolha da distribuição que melhor representa os dados da população;
- Medem e avaliam os desvios entre as distribuições amostral e teórica;
- Teste Qui-quadrado;
- Kolmogorov – Smirnov (K–S)