ADL 16

3.6 Convertendo do Espaço de Estados para a Função de Transferência

Dadas as equações de estado e de resposta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \qquad (3.68a)$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \qquad (3.68b)$$

aplique a transformada de Laplace. supondo condições iniciais nulas:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \qquad (3.69a)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) \qquad (3.69b)$$

Explicitando *X(s)* na Eq. (3.69a),

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{BU}(s) \qquad (3.70)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s) \qquad (3.71)$$

onde **I** é a matriz identidade.

Substituindo a Eq. (3.71)naEq. *(3,69b),* resulta

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s) + \mathbf{DU}(s)$$
$$= [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) \qquad (3.72)$$

Chamamos a matriz $[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]$ de matriz função de transferência, uma vez que ela relaciona o vetor i saída, $\mathbf{Y}(s)$. ao vetor de entrada, $\mathbf{U}(s)$. Mesmo quando $\mathbf{U}(s) = U(s)$ e $\mathbf{Y}(s) = Y(s)$ forem escalares, podemos i a função de transferência.

Exemplo 3.6

Representação no espaço de estados para função de transferência

Problema Dado o sistema definido pelas Eqs. (3.74). obter a função de transferência, $T(s) = Y(s)/U(s)$, onde $U(s)$ é a entrada e $Y(s)$ é a saída.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u \quad (3.74a)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x} \quad (3.74b)$$

Solução A solução gira em tomo da obtenção do termo $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ na Eq. (3.73).

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Formemos agora $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \qquad \frac{\begin{bmatrix} (s^2 + 3s + 2) & s+3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0] \qquad \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

$$T(s) = \frac{10(s^2 + 3s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \quad (3.77)$$

Exemplo 3.7

Representando um sistema não-linear

Problema Primeiro, represente o pêndulo simples mostrado na figura abaixo no espaço de estados: Mg é o peso, T *é* um torque aplicado na direção θ *e* L é o comprimento do pêndulo. Admita que a massa seja uniformemente distribuída com o centro de massa em $L/2$ Em seguida, linearize as equações de estado em torno da posição de equilíbrio do pêndulo — a posição ver com velocidade angular nula.

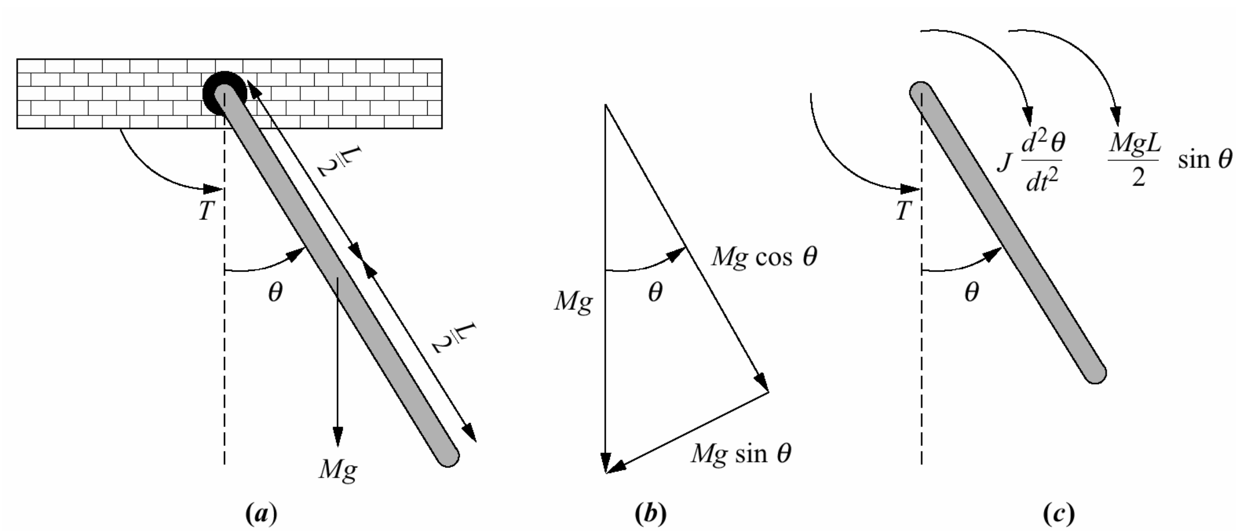
Solução Primeiro, desenhe um diagrama de corpo livre como mostrado. Somando os torques, temos:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgL}{2}\,\mathrm{sen}\theta = T \qquad (3.78)$$

onde J *é* o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto de rotação. Selecione as variáveis de estado x_1 *e* x_2 como variáveis de fase. Fazendo $x_1 = \theta$ e $x_2 = d\theta/dt$, escrevemos as equações de estado como:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (3.79)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{MgL}{2J}\,\mathrm{sen}\,x_1 + \frac{T}{J} \qquad (3.80)$$



Portanto, representamos um sistema não-linear no espaço de estados. É interessante notar que as Eqs. (3.80) não-lineares representam um modelo válido e completo do pêndulo, no espaço de estados, mesmo quando as condições iniciais não são nulas e mesmo quando os parâmetros, como a massa, variam no tempo. Em conseqüência, se desejarmos aplicar as técnicas clássicas e converter estas equações de estado em função de transferência, devemos linearizá-las. Façamos agora a linearização da equação em torno do ponto de equilíbrio, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, isto é, $\theta = 0$ e $d\theta/dt = 0$.

Perturbemos x_1 e x_2 em torno do ponto de equilíbrio, ou seja,

$$x_1 = 0 + \delta x_1 \qquad (3.81a)$$

$$x_2 = 0 + \delta x_2 \qquad (3.81b)$$

Usando a Eq. (2.182), obtemos

$$\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} 0 = \left.\frac{d(\operatorname{sen} x_1)}{dx_1}\right|_{x_1=0} \delta x_1 = \delta x_1 \qquad (3.82)$$

da qual.

$$\operatorname{sen} x_1 = \delta x_1$$

Substituindo as Eqs. (3.81) e (3.82) na Eq. (3.80), resultam as seguintes equações de estado:

$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2 \qquad (3.83a)$$

$$\dot{\delta x}_2 = -\frac{MgL}{2J}\delta x_1 + \frac{T}{J} \qquad (3.83b)$$

que são lineares e constituem uma boa aproximação das Eqs. (3.80) para pequenas excursões em tomo do ponto de equilíbrio. Qual é a equação de saída?