Agenda

- Modelagem no espaço de estados
- Modelagem matemática de sistemas mecânicos

Modelagem no espaço de estados

Estado: De um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis, tais que o conhecimento dessas varáveis em t=t0 junto ao conhecimento de entrada t>=t0, determina completamente o comportamento do sistema para qualquer t >=t0

Variáveis de estado: x1,x2,x3,...xn

Vetor de estado: n variáveis de estado forman um vetor **x com n componentes**

Equações no espaço de estados: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. Um sistema dinâmico deve ter elementos que memorizem (integradores) os valores de entrada para t>=t1.

Modelagem no espaço de estados

O número de integradores existentes no sistemas determina o número de variáveis que definem completamente a dinâmica do sistema.

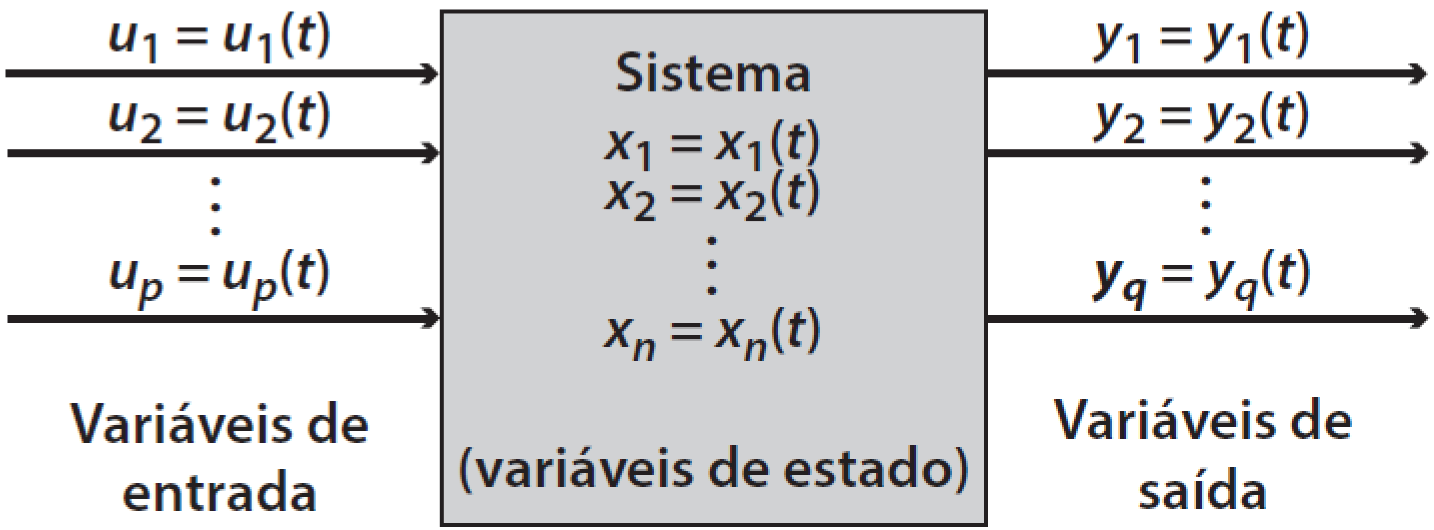


FIGURA 14.2 Sistema *LIT* dotado de *p* entradas e *q* saídas.

Modelagem no espaço de estados

- Equações de estado

$$\dot{x}_i = f_i\,[x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t); u_1(t), u_2(t), \ldots u_p(t)]$$

onde $\dot{x}_i = d(x_i(t)/dt)$;
e f_i representa uma função das variáveis indicadas,
sendo $i = 1, 2, 3, \ldots n$.

$$y_j(t) = g_j[x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t); u_1(t), u_2(t), \ldots u_p(t)]$$

onde g_j representa uma função das variáveis indicadas,
sendo $j = 1, 2, 3, \ldots q$.

Tais são as equações de saída.

As funções:

f_i com $i = 1, 2, \ldots n$ e g_j *com* $j = 1, 2, \ldots q$

Modelagem no espaço de estados

- Forma matricial

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Modelagem no espaço de estados

- Sistema linear variante no tempo

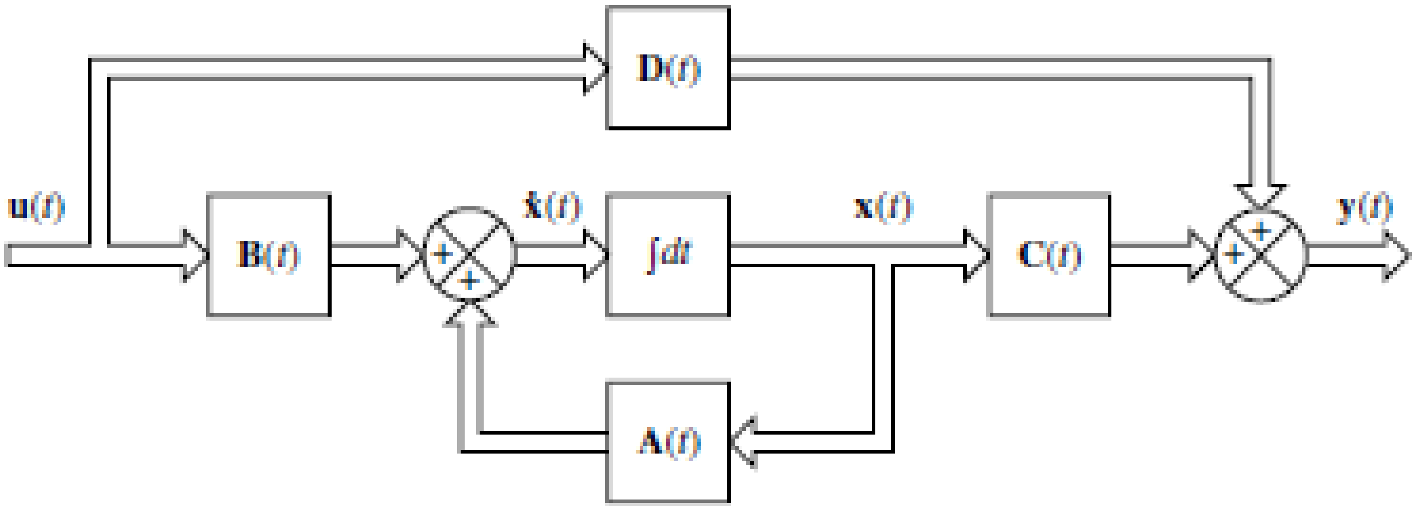
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

- A (t) matriz de estado
- B (t) matriz de entrada
- C (t) matriz de saída
- D (t) matriz de transmissão direta

Modelagem no espaço de estados

- Representação do diagrama de blocos das equações de estado para um sistema linear variante no tempo



Modelagem no espaço de estados

- Sistema linear invariante no tempo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

- A (t) matriz de estado
- B (t) matriz de entrada
- C (t) matriz de saída
- D (t) matriz de transmissão direta

Modelagem no espaço de estados

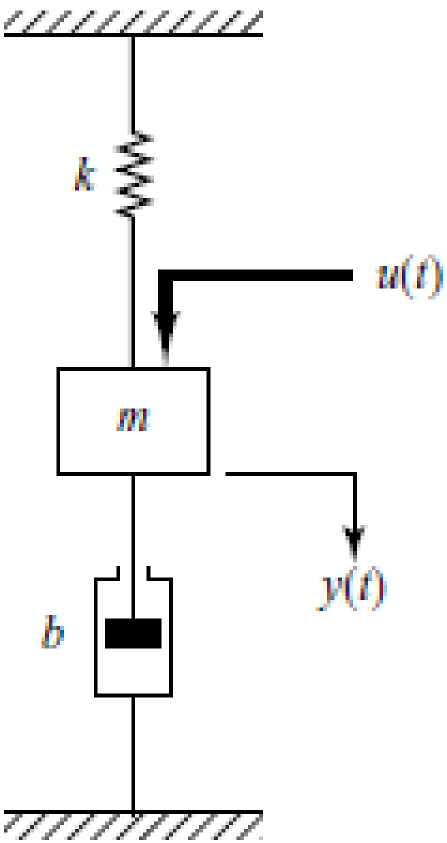


Figure 2–15
Mechanical system.

- Exemplo: Considere um sistema mecânico indicado na Fig.2.15. Admitimos que o sistema seja linear. A força externa u(t) é a entrada do sistema, e o deslocamento y(t) da massa é a saída. O deslocamento y(t) é medido a partir da posição de equilíbrio, na ausência da força externa. Este é um sistema de entrada e saída únicas.

$$ma = \sum F$$

Modelagem no espaço de estados

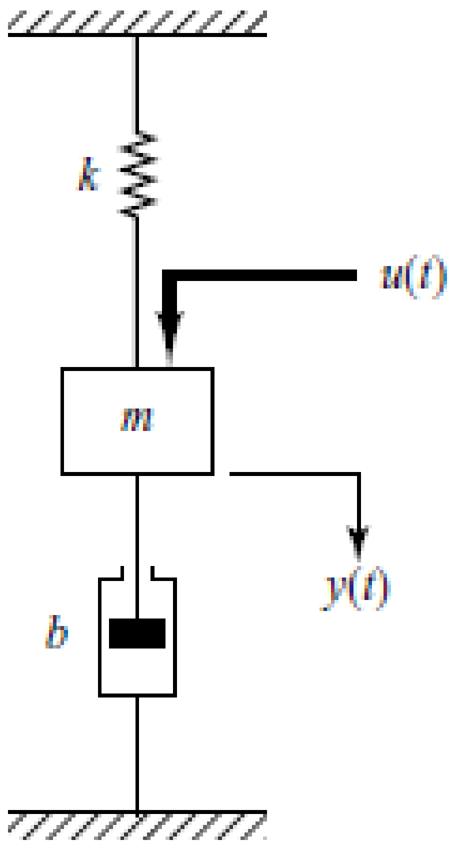


Figure 2–15
Mechanical system.

- As variáveis para descrever o movimento de translação são: aceleração, velocidade e deslocamento.

$$f(t) = Ma(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = M\frac{dv(t)}{dt}$$

- A equação que descreve a fig. 2.15 é:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

Modelagem no espaço de estados

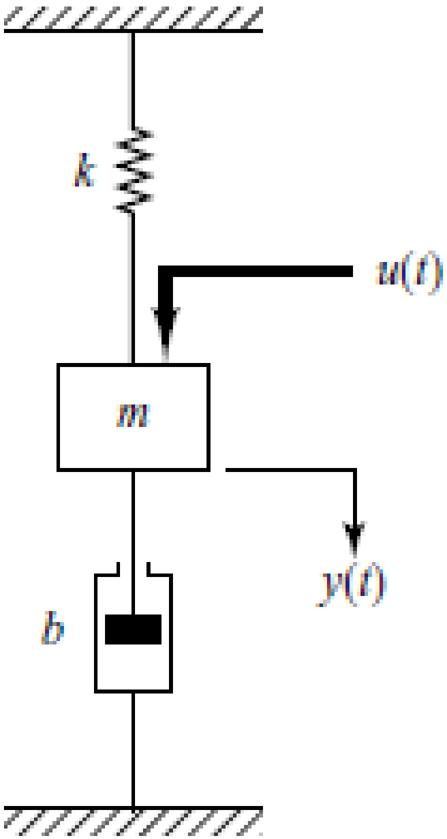


Figure 2–15
Mechanical system.

- Força na mola para uma deformação pequena

$$f(t) = Ky(t)$$

- Fricção viscosa: Força de fricção

$$f(t) = B\frac{dy(t)}{dt}$$

Modelagem no espaço de estados

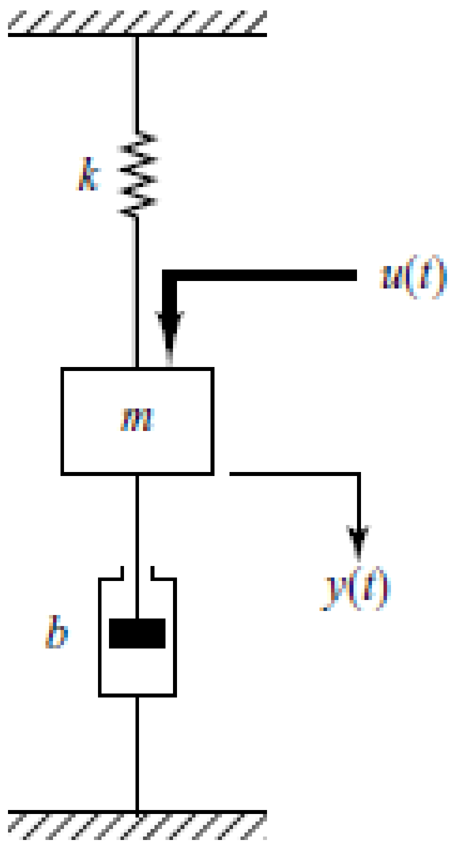


Figure 2–15
Mechanical system.

- Equação geral:

$$ma = \sum F$$

- Reorganizando:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

equation:

EXAMPLE 2–2 Consider the mechanical system shown in Figure 2–15. We assume that the system is linear. The external force $u(t)$ is the input to the system, and the displacement $y(t)$ of the mass is the output. The displacement $y(t)$ is measured from the equilibrium position in the absence of the external force. This system is a single-input, single-output system.

From the diagram, the system equation is

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \tag{2–16}$$

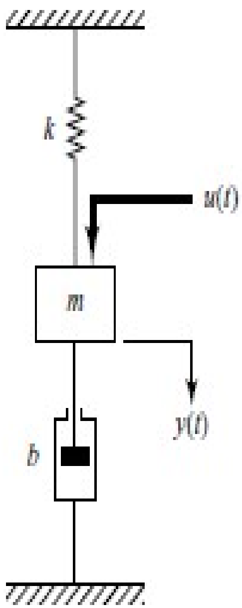


Figure 2–15 Mechanical system.

This system is of second order. This means that the system involves two integrators. Let us define state variables $x_1(t)$ and $x_2(t)$ as

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Then we obtain

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

or

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2–17}$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \tag{2–18}$$

The output equation is

$$y = x_1 \tag{2–19}$$

Duas variáveis de estado (Sistema de segunda ordem): deslocamento e velocidade:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Obtemos que:

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t)$$

Colocando em evidência :

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

or

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (2\text{–}17)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \qquad (2\text{–}18)$$

The output equation is

$$y = x_1 \qquad (2\text{–}19)$$

In a vector-matrix form, Equations (2–17) and (2–18) can be written as

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u \tag{2–20}$$

The output equation, Equation (2–19), can be written as

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2–21}$$

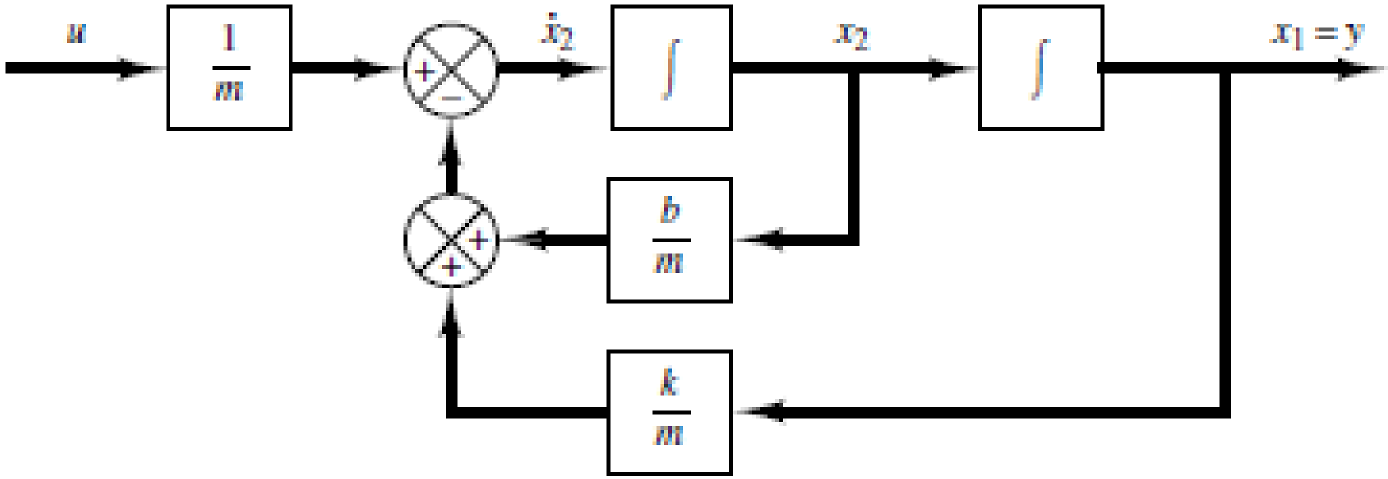
Equation (2–20) is a state equation and Equation (2–21) is an output equation for the system. They are in the standard form:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

where

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \qquad D = 0$$

Figure 2–16 is a block diagram for the system. Notice that the outputs of the integrators are state variables.



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

where

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

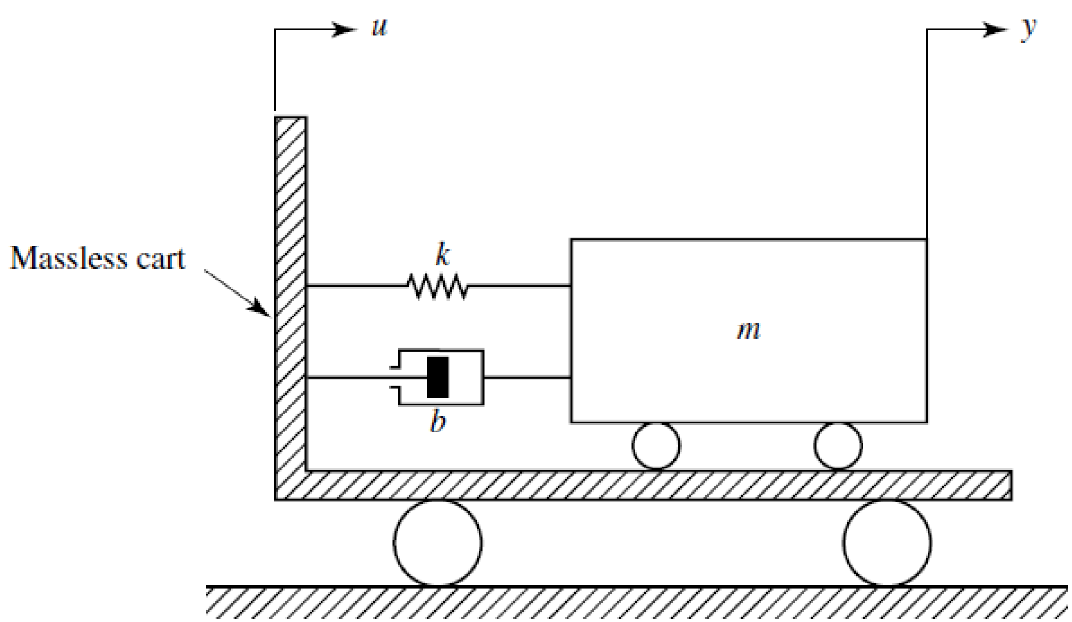
- A lei fundamental que governa os sistemas mecânicos é a segunda Ley de Newton.
- Exemplo:

Consider the spring-mass-dashpot system mounted on a massless cart as shown in Figure 3–3. Let us obtain mathematical models of this system by assuming that the cart is standing still for $t < 0$ and the spring-mass-dashpot system on the cart is also standing still for $t < 0$. In this system, $u(t)$ is the displacement of the cart and is the input to the system. At $t = 0$, the cart is moved at a constant speed, or $\dot{u}$ = constant. The displacement $y(t)$ of the mass is the output. (The displacement is relative to the ground.) In this system, m denotes the mass, b denotes the viscous-friction coefficient, and k denotes the spring constant. We assume that the friction force of the dashpot is proportional to $\dot{y} - \dot{u}$ and that the spring force is proportional to $y - u$.

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- Para sistemas translacionais, a segunda Lei de Newton diz que:

$$ma = \sum F$$



Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- Aplicando a segunda lei de Newton temos:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y - u)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

- Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais zero.

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

$$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$$

$$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- Encontramos a função de transferência:

$$\text{Transfer function} = G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

- Em seguida obteremos o modelo em espaço de estados:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku \longrightarrow$$

Equação diferencial

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u \rightarrow$$

Com a forma padrão $\rightarrow$

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2u$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- Usando a equação 2.34

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\ \ \vdots \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0\overset{(n-1)}{u} - \beta_1\overset{(n-2)}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u
\end{aligned} \qquad (2\text{–}34)$$

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- A partir da equação 2.36 temos:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\ \ \vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned}$$

Eq. 2.36

Resultado anterior

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 u$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m} u$$

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m} u$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m} u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{b}{m} x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right] u$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- Dos resultados anteriores temos

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

- A equação de saída é:

$$y = x_1$$

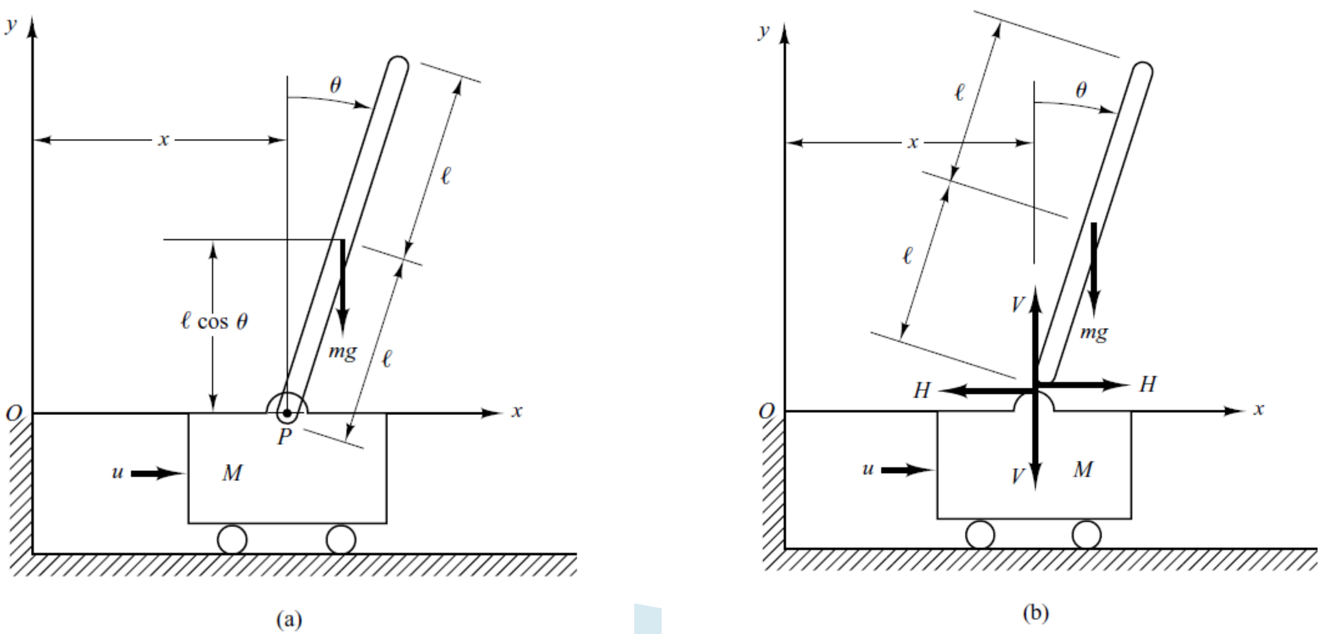
- Ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- Exemplo

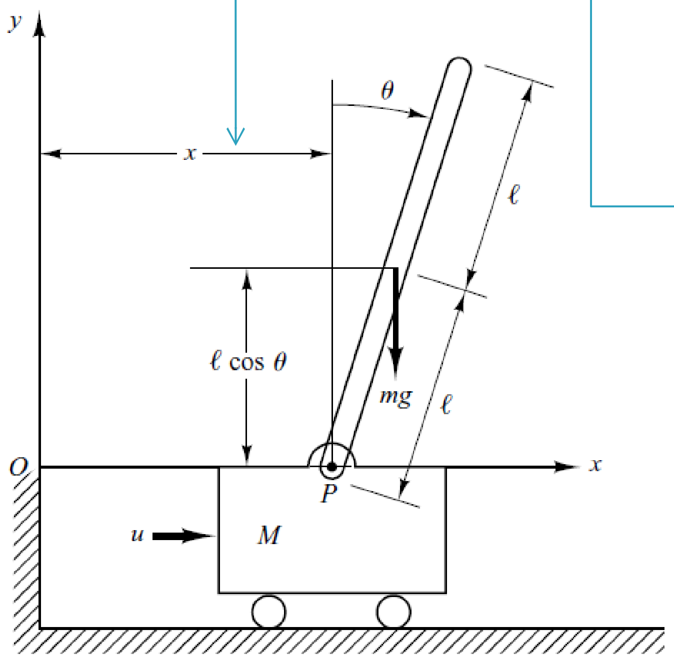
An inverted pendulum mounted on a motor-driven cart is shown in Figure 3–5(a). This is a model of the attitude control of a space booster on takeoff. (The objective of the attitude control problem is to keep the space booster in a vertical position.) The inverted pendulum is unstable in that it may fall over any time in any direction unless a suitable control force is applied. Here we consider



Modelagem matemática de sistemas mecânicos

only a two-dimensional problem in which the pendulum moves only in the plane of the page. The control force u is applied to the cart. Assume that the center of gravity of the pendulum rod is at its geometric center. Obtain a mathematical model for the system.

Define the angle of the rod from the vertical line as θ. Define also the (x, y) coordinates of the center of gravity of the pendulum rod as (x_G, y_G). Then



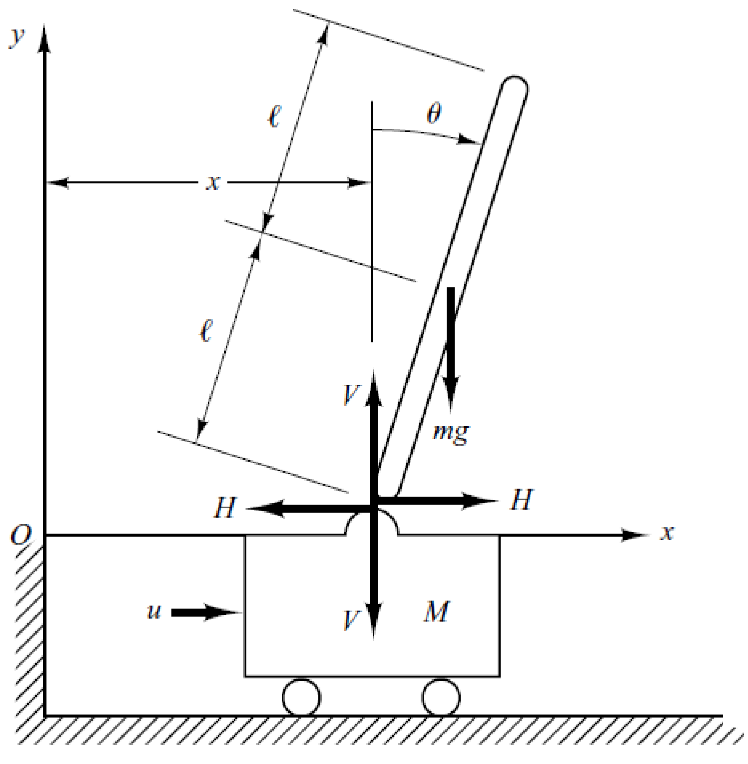
(a)

$$x_G = x + l \sin\theta$$

$$y_G = l \cos\theta$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- O movimento rotacional da haste do pêndulo em torno de seu centro de gravide:



(b)

A lei de Newton para o movimento de rotação estabelece que a soma algébrica dos momentos ou pares ao redor de um eixo fixo é igual ao produto da inercia pela aceleração angular ao redor do eixo.

$$x_G = x + l\sin\theta$$

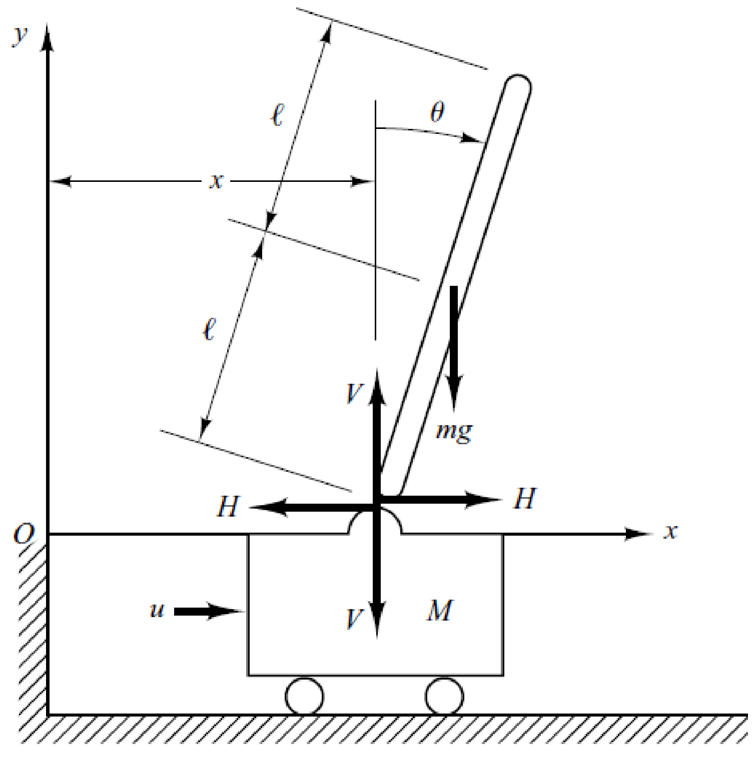
$$y_G = l\cos\theta$$

Momento=F *d

$$I\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - Hl\cos\theta$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- O movimento horizontal do centro de gravidade da hasta do pêndulo é:



(b)

Resultados anteriores:

$$x_G = x + l\sin\theta$$

$$y_G = l\cos\theta$$

$$I\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - Hl\cos\theta$$

Resultado atual:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin\theta) = H$$

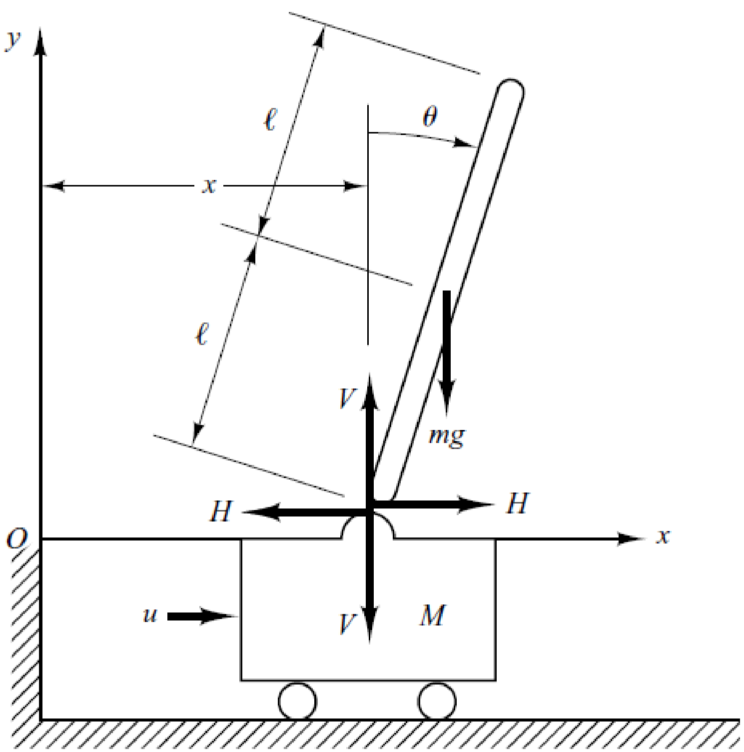
O movimento vertical do centro de gravidade da haste do pêndulo é:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta) = V - mg$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- O movimento horizontal do carro é descrito por:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = u - H$$



(b)

Como o pêndulo invertido deve ser mantido na posição vertical, então
, e As equações podem ser linearizadas :

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- Equações linearizadas

Supondo: , e

Resultados anteriores:

$$I\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - Hl\cos\theta \quad (3.9)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin\theta) = H \quad (3.10)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta) = V - mg \quad (3.11)$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = u - H \quad (3.12)$$

Resultados atuales:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \quad (3.13)$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \quad (3.14)$$

$$0 = V - mg \quad (3.15)$$

- Usando as equações 3.12 e 3.14, obtemos:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- A partir das equações 3.13, 3.14 e 3.15, obtemos:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \qquad (3.13)$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \qquad (3.14)$$

$$0 = V - mg \qquad (3.15)$$

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= mgl\theta - Hl \\ &= mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

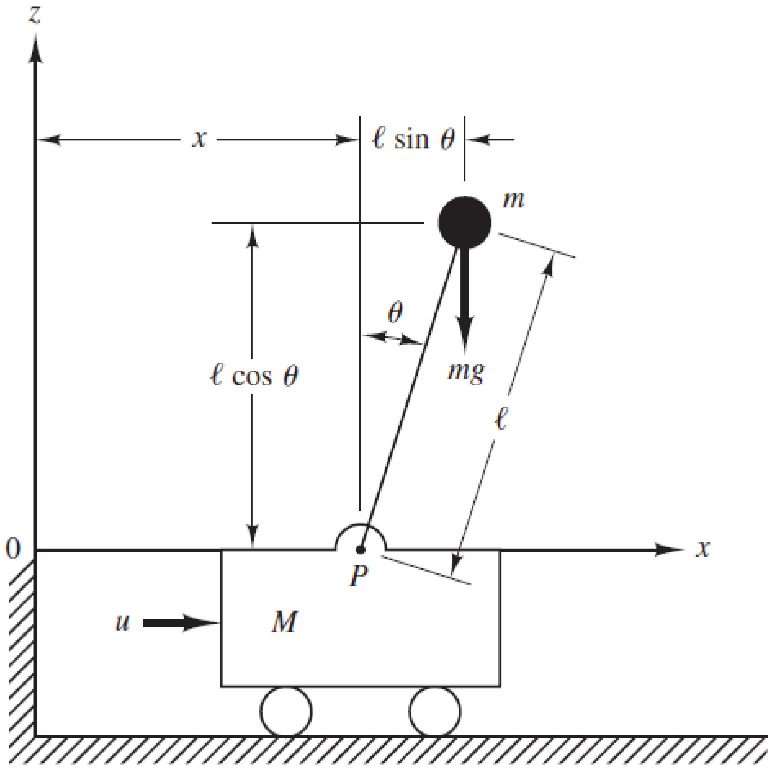
$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

Equações do movimento do sistema de pêndulo invertido sobre o carro

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \qquad (3.16) \qquad (I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \qquad (3.17)$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

Consider the inverted-pendulum system shown in Figure 3–6. Since in this system the mass is concentrated at the top of the rod, the center of gravity is the center of the pendulum ball. For this case, the moment of inertia of the pendulum about its center of gravity is small, and we assume $I = 0$ in Equation (3–17). Then the mathematical model for this system becomes as follows:



$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \qquad (3.16)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \qquad (3.17)$$

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- As equações podem ser modificadas para:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \qquad (3.18)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \qquad (3.19)$$

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \qquad (3.20)$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \qquad (3.21)$$

- A Equação 3.20 foi obtida pela eliminação de das equações 3.18 e 3.19
- A Equação 3.20 foi obtida pela eliminação de das equações 3.18 e 3.19

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- Aplicando a transformada de Laplace na equação 3.20 temos:

$$Ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u \qquad \mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$$

g-U(s)

$$\frac{\Theta(s)}{-U(s)} = \frac{1}{Mls^2 - (M+m)g}$$

$$= \frac{1}{Ml\left(s + \sqrt{\frac{M+m}{Ml}g}\right)\left(s - \sqrt{\frac{M+m}{Ml}g}\right)}$$

l

polo no semieixo negativo
polo no semieixo positivo

O sistema é instável em malha aberta

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- Definir as variáveis de estado como:

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$x_3 = x$$
$$x_4 = \dot{x}$$

- Teta é a rotação do pêndulo e x a localização do carro, como saídas do sistema:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

- A partir das equações 3.20 e 3.21 temos:

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \quad (3.20)$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \quad (3.21)$$

Saídas

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$x_3 = x$$
$$x_4 = \dot{x}$$

Reorganizando como na forma padrão:

$$Ml\ddot{\theta} - (M+m)g\theta = -u$$
$$M\ddot{x} + mg\theta = u$$

$$\dddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u \longrightarrow$$ forma padrão:

$$\ddot{\theta} - \frac{(M+m)g\theta}{Ml} = \frac{-u}{Ml}$$

$$\ddot{x} + \frac{mg\theta}{M} = \frac{u}{M}$$

$$\beta_0 = b_0$$
$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0$$
$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0$$
$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0$$
$$\vdots$$
$$\beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0$$

$$x_1 = y - \beta_0 u$$
$$x_2 = \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

Modelagem matemática de sistemas mecânicos

Equações das variáveis de estado:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

$$\ddot{\theta} - \frac{(M+m)g\theta}{Ml} = \frac{-u}{Ml}$$

$$\ddot{x} + \frac{mg\theta}{M} = \frac{u}{M}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u$$

$$\beta_0 = b_0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{M+m}{Ml}gx_1 - \frac{1}{Ml}u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M}gx_1 + \frac{1}{M}u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Modelagem mecância

- Exemplo

Obtain the transfer function $Y(s)/U(s)$ of the system shown in Figure 3–21. The input u is a displacement input. (Like the system of Problem **A–3–1**, this is also a simplified version of an automobile or motorcycle suspension system.)