COMUNICAÇÕES DIGITAIS

Prof. Claudio Coutinho

Turma EC
2018

Aula 04

Sistemas e espectro

Relacionando Frequências Analógicas e Discretas

- Quando lidamos com análise de espectro em computadores, precisamos relacionar as frequências contínuas com as discretas.
- Relacionamos frequências contínuas com as discretas através de

$$\Omega = \frac{\omega}{F_s} = \frac{2\pi f}{F_s}$$

- em que F_s é a frequência de amostragem e f é a frequência que está sendo avaliada.

Transmissão sem distorção

Sistemas Ideais

- Sistemas ideais são aqueles que aplicam atenuação e atraso aos sinais de entrada, mas não causam distorções.

- A forma da onda é mantida a passar pelo sistema. Assim, tais sistemas podem ser descritos como

$$y(t) = Kx(t - t_0)$$

- Aplicando-se a Transformada de Fourier, temos:

$$Y(f) = KX(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

Resposta em Frequência de um Sistema Ideal

- Da equação anterior, podemos concluir que um sistema ideal tem resposta em frequência do tipo

$$H(f) = Ke^{-j2\pi f t_0}$$

- Ou seja, sua magnitude é constante e a fase é linear com a frequência.
- O que deve ser notado, é que um sistema ideal mantém a relação entre as magnitudes e fases das várias componentes de frequência (senóides).

Atraso de Grupo

- Uma medida para avaliar a distorção de um sistema é o *atraso de envelope* ou *atraso de grupo*.

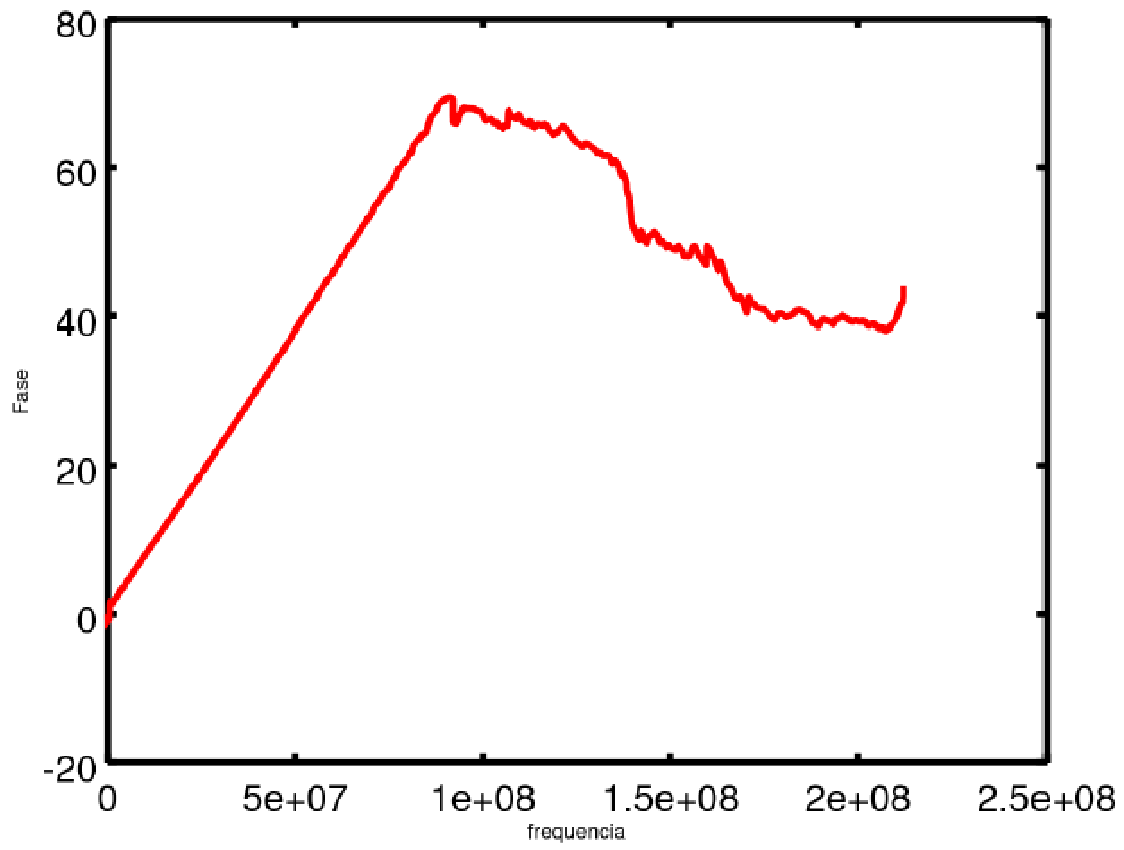
$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}\theta(f)$$

- Onde $\theta(f)$ é deslocamento de fase.
- Para sistemas ideais, o atraso de grupo é constante.

Atraso não-linear

- Atraso não linear pode ocorrer em sistemas em que o sinal passa por vários meios.

- Ao lado temos a fase de um canal de *crosstalk* entre pares trançados de cobre.



Atraso de Grupo em Sistemas Discretos

- Em sistemas discretos o efeito de atraso no tempo sobre o espectro é dado por:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{DTFT} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{-j\Omega n_0}$$

- Assim, o atraso de grupo para esses sinais é calculado como:

$$\tau(\Omega) = -\frac{d}{d\Omega}\theta(\Omega)$$

Filtros ideais

Introdução

- Podemos determinar a saída de um sistema com reposta ao $h(t)$, a uma entrada $x(t)$, através da relação:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

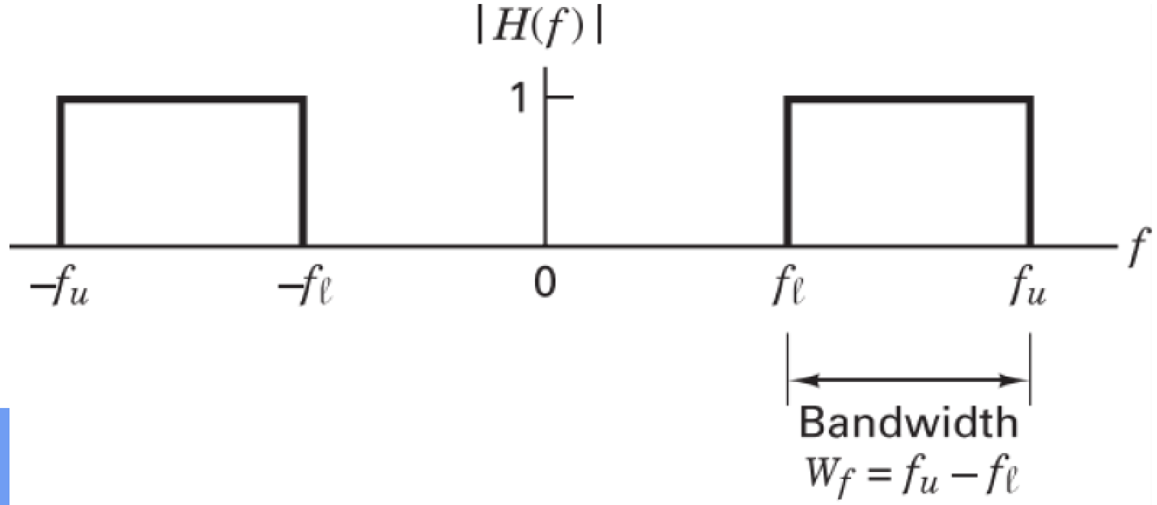
- Pela propriedade de convolução da **Transformada de Fourier**, podemos representar essa relação no **domínio da frequência** por:

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

- Filtros são sistemas que selecionam componentes espectrais de um sinal que passa por ele.
- Assim, para determinarmos a ação de um filtro sobre um sinal, no domínio da frequência, avaliamos a equação acima.

Introdução

- O grande problema com a definição de canal (sistema) ideal, é o suporte para uma largura de banda infinita.
  - *Largura de banda* é o intervalo de frequências positivas para o qual $|H(f)|$ mantém um valor especificado.
- Como aproximação, determinamos um sistema truncado que mantém a magnitude constante em um intervalo $f_l < f < f_{\mathrm{u}}$ (f_l: limite inferior, f_u: limite superior).



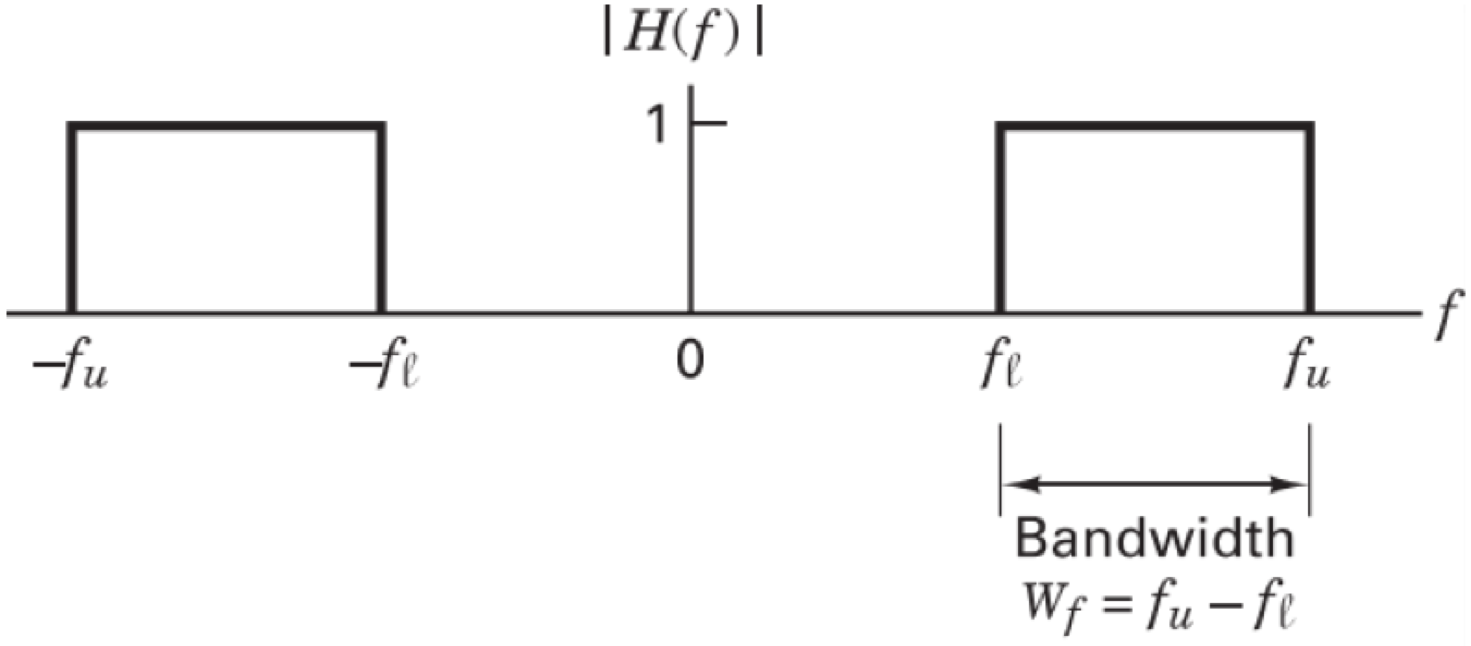
Filtro Ideal

- **Filtro ideal** é aquele mantém um ganho constante em uma região do espectro, mas vale zero caso contrário.

- A região $f_l < f < f_u$ é chamada de banda passante.
- A largura da banda passante é definida por $W_f = f_u - fl\ Hz$ (hertz).

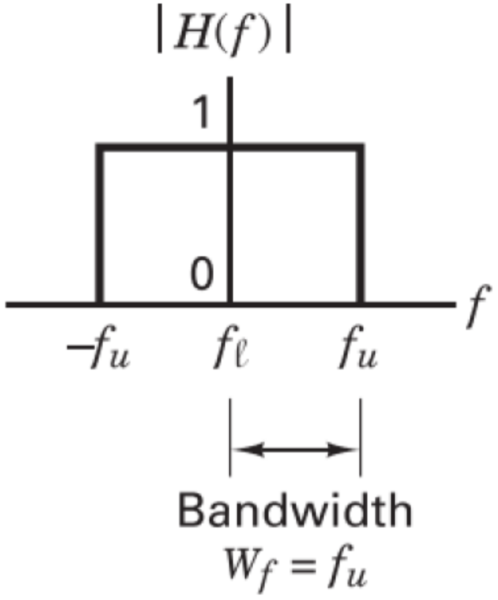
Filtro Passa Banda Ideal

- Quando $f_l \neq 0$ e $f_u \neq \infty$, dizemos que o filtro ideal é do tipo *passa-banda*.



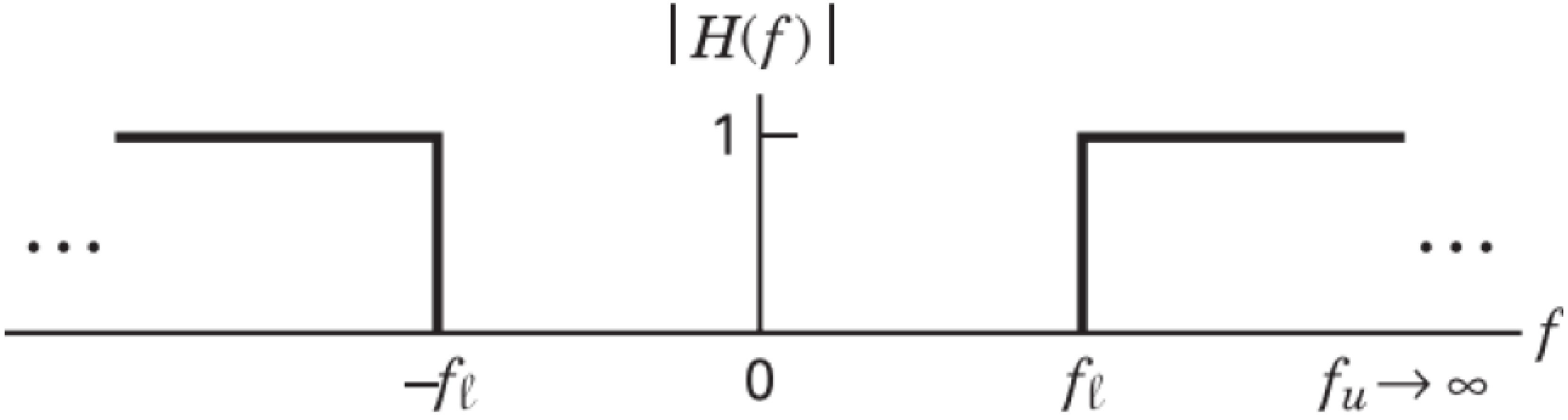
Filtro Passa Baixa Ideal

- Quando $f_l = 0$ e f_u é finito, dizemos que o filtro ideal é do tipo *passa-baixa*.



Filtro Passa Alta Ideal

- Quando $f_l \neq 0$ e $f_u \to \infty$, dizemos que o filtro ideal é do tipo *passa-alta*.



Resposta em Frequência do Filtro Passa-Baixa Ideal

- Seguindo a definição de sistema ideal, e considerando $K = 1$, o espectro de um filtro passa baixa ideal pode ser dado por:

$$H(f) = |H(f)|e^{-j\theta(f)}$$

Onde:

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, |f| < f_u \\ 0, |f| \geq f_u \end{cases}$$

E:

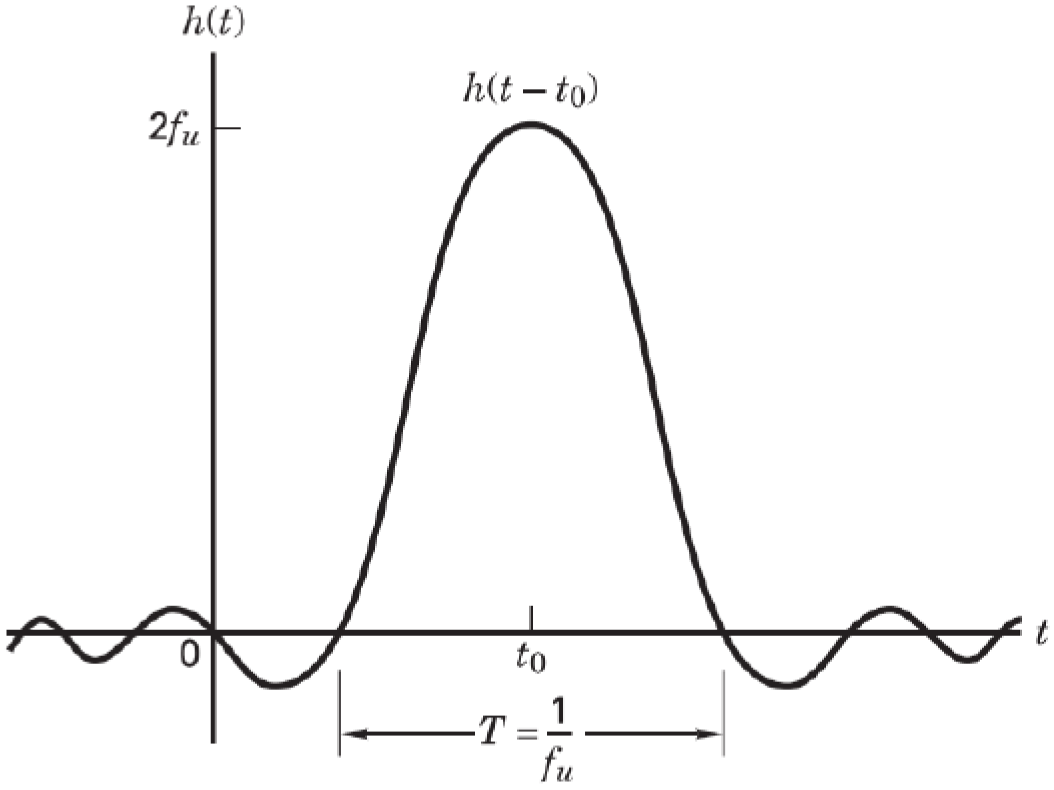
$$e^{-\theta(f)} = e^{-j2\pi f t_0}$$

Resposta ao Impulso do Filtro Passa Baixa Ideal

- Usando a **IFFT**, podemos escrever a reposta ao impulso de um filtro passa banda ideal como:

$$h(t) = 2f_u \mathrm{sinc}[f_u(t - t_0)]$$

- Um problema desse filtro é que ele é não causal e, portanto, irrealizável.



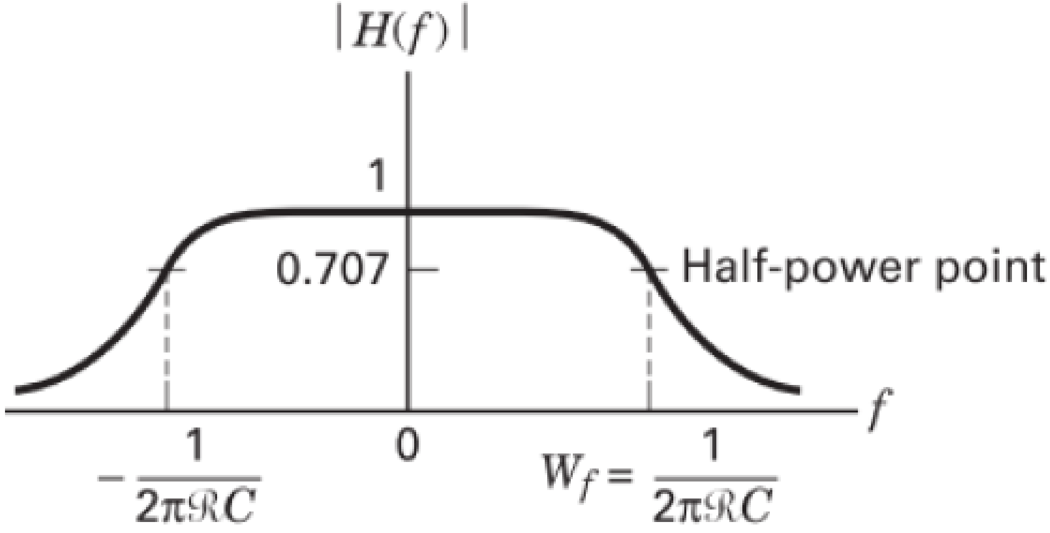
Filtros realizáveis

Parâmetros de Filtros Realizáveis

- Em filtros reais, costumamos definir largura de banda como o ponto em que a potência cai pela metade.
- Esse ponto geralmente é definido em *decibel*, dB, especificamente $-3dB$, ou $70{,}7\%$ do ganho em DC.
- Um valor de decibel é definido como:

$$dB = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

- Onde P_1 e P_2 são valores de potência



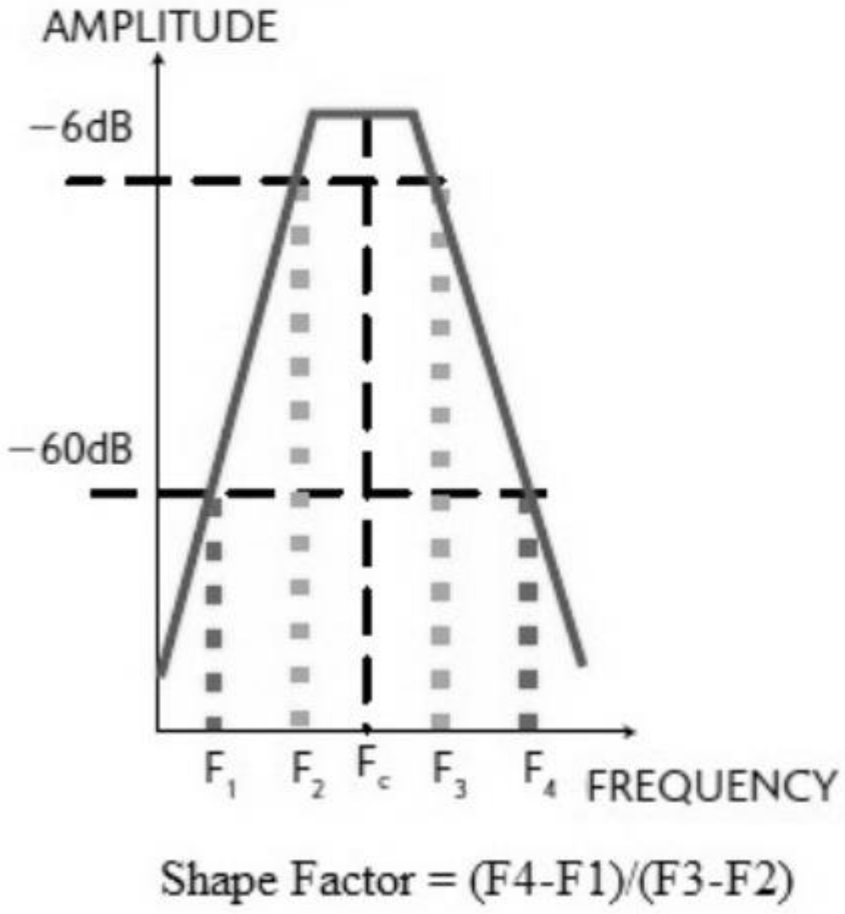
Parâmetros de Filtros Realizáveis

- Para respostas em frequência, costumamos calcular *decibéis* com uma referência fixa de $1\ W$.

$$|H(f)|_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{|H(f)|^2}{1}\right) = 20\log_{10}(|H(f)|)$$

Parâmetros de Filtros Realizáveis

- Outro parâmetro que deve ser avaliado é a forma do filtro.
- O *fator de forma* avalia o quanto a forma de um filtro real se aproxima de um ideal (o quão íngreme).
- É definido como a razão entre as frequências de $-60\ dB$ e $-6\ dB$.
- Bons filtros podem ter fator de forma igual a 2.
- O **Filtro RC** tem fator de forma igual a 600.



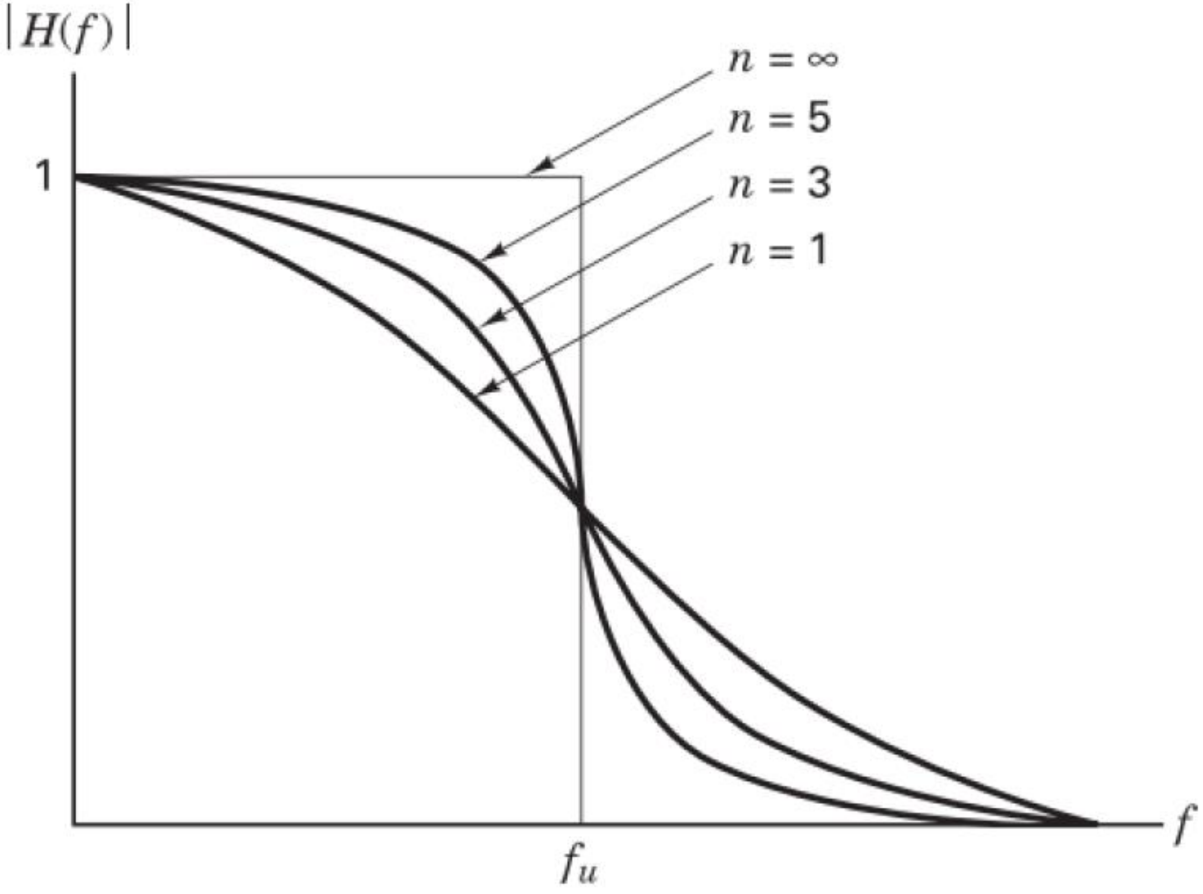
Filtro de Butterworth

- Uma das aproximações de filtros ideais é o **filtro de Butterworth**.
- Esse filtro foi desenvolvido para ter um ganho o mais plano possível na banda passante, o qual é definido por:

$$|H_n(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_u)^{2n}}}, \qquad n \geq 1$$

- onde f_u é o ponto de $-3\ dB$ e n é a ordem do filtro
- Quanto maior o valor de n, mais próximo de um filtro ideal, porém mais custoso de implementar.

Filtro de Butterworth



Filtros digitais FIR

Desenvolvimento de Filtros FIR

- Com um filtro FIR é sempre possível desenvolver uma resposta em frequência com fase linear.
- Deixe $h[n]$ representar a **Transformada inversa de Fourier** de um filtro FIR com resposta em frequência $H(e^{j\Omega})$.
- Deixe M representar a ordem do filtro, que possui comprimento $M + 1$.
- O desenvolvimento de um filtro envolve encontrar os coeficientes $h[n], n = 0, 1, 2, \dots, M$.
- A resposta em frequência desse filtro $H(e^{j\Omega})$ deve ser o mais próximo possível de um filtro desejado $H_d(e^{j\Omega})$, no intervalo $-\pi < \Omega < \pi$.

Desenvolvimento de Filtros FIR

- A energia do erro de aproximação entre $h[n]$ e $h_d[n]$ (a resposta ao impulso do filtro desejado), é dada por:

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} |h_d[n] - h[n]|^2$$

- Podemos perceber nessa equação que os únicos parâmetros ajustáveis são os coeficientes de $h[n]$.
- Logo, para minimizar a energia do erro, podemos definir $h[n] = h_d[n]$, no intervalo $n = 0, 1, \dots, M$.

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Desenvolvimento de Filtros FIR

- Esse processo de tomar os coeficientes de $h_d[n]$ no intervalo $0 \leq n \leq M$ pode ser definido pela equação:

$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

- Em que $w[n]$ é definido como:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

- Esse processo é chamado de **janelamento** de $h_d[n]$, pois tomamos as $M + 1$ amostras de $h_d[n]$ de acordo com a duração de $w[n]$.

Desenvolvimento de Filtros FIR

- Assim, o processo de desenvolvimento de um filtro FIR consiste em:

  - Definir a resposta ao impulso do filtro desejado (ideal) $h_d[n]$;
  - Aplicar o janelamento para extrairmos $M + 1$ amostras de $h[n]$.

Janelamento

Definição

- Janelamento consiste em extrair um determinado número de amostras de um sinal $h_d[n]$ através da multiplicação desse sinal por um sinal $w[n]$ (chamado **janela**), que possui duração finita, como abaixo:

$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

- Todavia, existem várias formas de se definir $w[n]$ de maneira a se obter um resultado desejado no domínio da frequência, que será dado por:

$$H(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j\Omega}) * W(e^{j\Omega})$$

Janela retangular

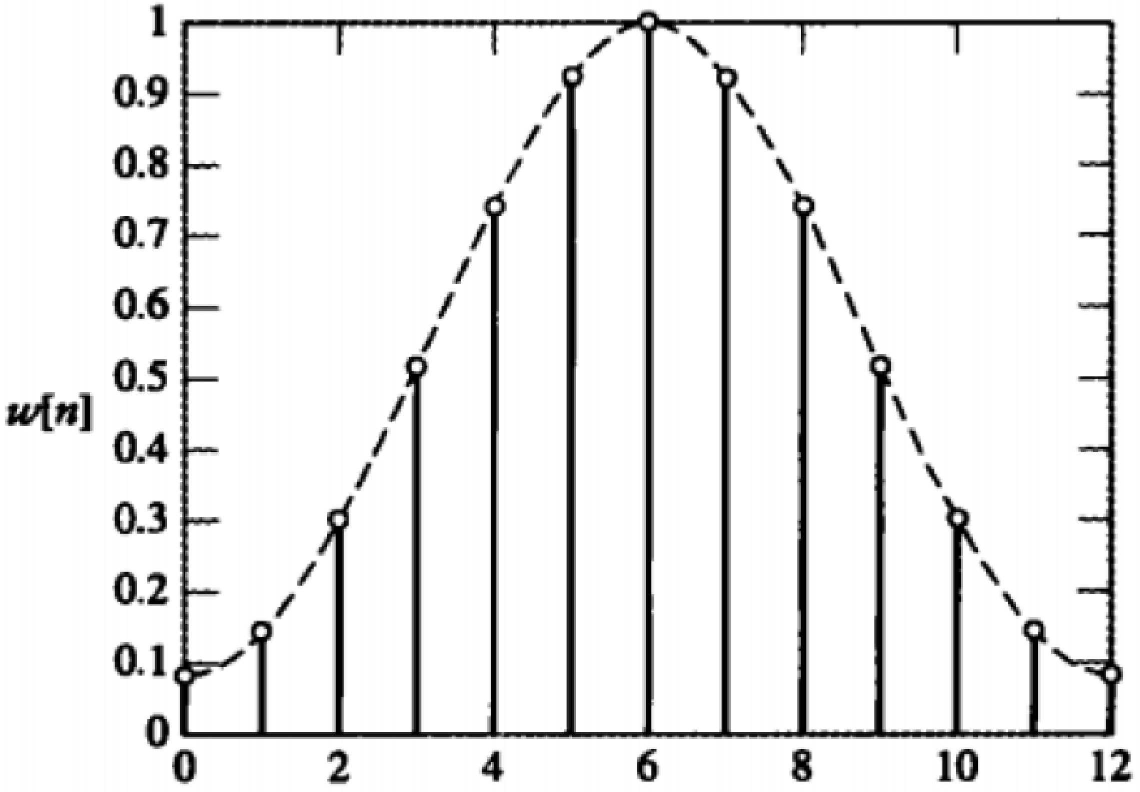
- É um sinal $w[n]$ que vale 1 em um intervalo determinado, como equação abaixo:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Janela de Hamming

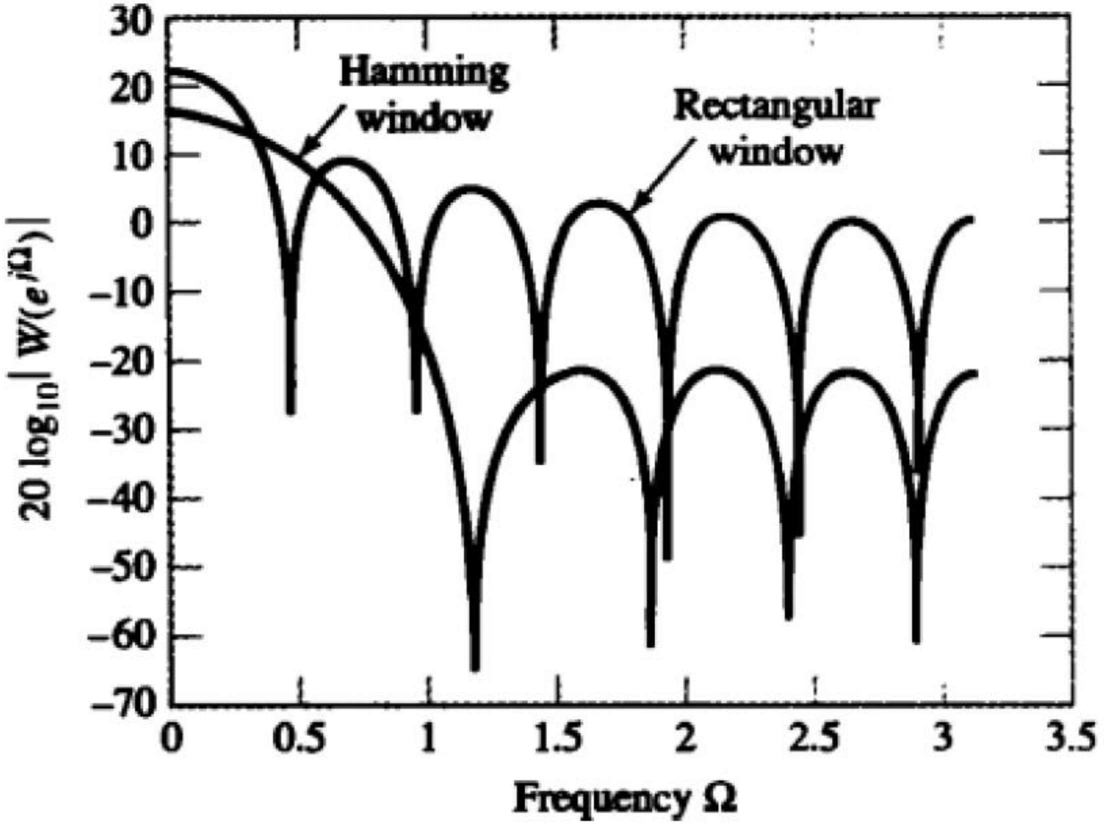
- É um sinal $w[n]$ definido por:

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & c.c. \end{cases}$$



Comparação entre Janela Retangular e de Hamming

- Ao lado, temos a resposta em frequência da janela retangular e de Hamming.



Largura de transição

Tipo de janela	Largura de transição aproximada do lóbulo principal	Largura de transição exata	Pico do lóbulo lateral (dB)
Retangular	$4\pi/M$	$1{,}8\pi/M$	-21
Bartlett	$8\pi/M$	$6{,}1\pi/M$	-25
Hanning	$8\pi/M$	$6{,}2\pi/M$	-44
Hamming	$8\pi/M$	$6{,}6\pi/M$	-53
Blackman	$12\pi/M$	$11\pi/M$	-74

Comparação entre Janela Retangular e de Hamming

- A largura do lobo principal da janela retangular é menos da metade daquela de Hamming.

- A intensidade dos lobos laterais comparados ao do principal, são bem menores no de Hamming do que na retangular.

- Essas características devem ser avaliadas de acordo com cada caso, afim de se identificar como as modificações no filtro desejado afetarão a aplicação.

Implementação de Filtros FIR

O Filtro Desejado

- Considere que tentaremos implementar um filtro FIR a partir do filtro desejado:

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, & |\Omega| \leq |\Omega_c| \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

- que é um filtro passa-baixa ideal com fase linear, e que possui resposta ao impulso

$$h_d[n] = \frac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Omega_c}{\pi}\left(n - \frac{M}{2}\right)\right], \qquad -\infty < n < \infty$$

O Filtro com Janela Retangular

- O filtro FIR $h[n]$ com janela retangular, dado por $h[n] = h_d[n]w[n]$, resume-se nas amostras de $h_d[n]$ na duração de $w[n]$:

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\dfrac{\Omega_c}{\pi}\left(n - \dfrac{M}{2}\right)\right], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

O Filtro com Janela de Hamming

- O filtro FIR $h[n]$ com janela de Hamming, dado por $h[n] = h_d[n]w[n]$, será dado por:

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\dfrac{\Omega_c}{\pi}\left(n - \dfrac{M}{2}\right)\right]\left(0.54 - 0.46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right)\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Representação em Diagrama de Blocos

- A estrutura para representação da implementação de qualquer um dos dois filtros é mostrada na Figura abaixo, que é uma forma de implementação de convolução em tempo real.