PROPRIEDADES DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

DCE692 - Pesquisa Operacional

Atualizado em: 30 de julho de 2021

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

Problemas de programação linear são descritos utilizando um conjunto de equações lineares

- Função objetivo
- Variáveis
- Restrições

Apesar de parecer complicado, existem diversas propriedades que nos ajudam no entendimento destes sistemas

POLITOPO

Um politopo é um objeto geométrico n-dimensional com faces "retas"

POLITOPO

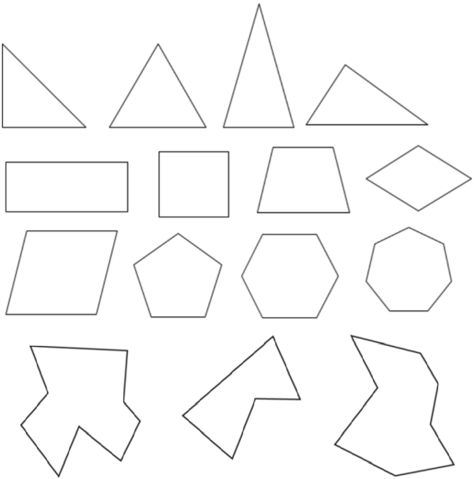
Um politopo é um objeto geométrico n-dimensional com faces "retas"

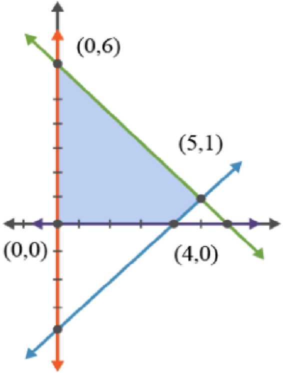
POLITOPO

Um politopo é um objeto geométrico n-dimensional com faces "retas"

POLITOPO

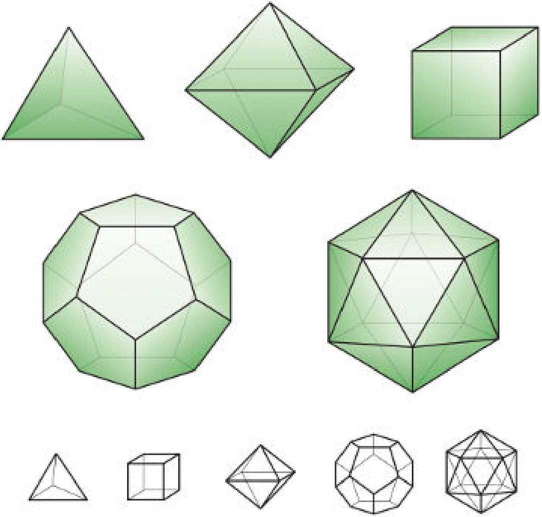
Um politopo é um objeto geométrico n-dimensional com faces "retas"





POLITOPO

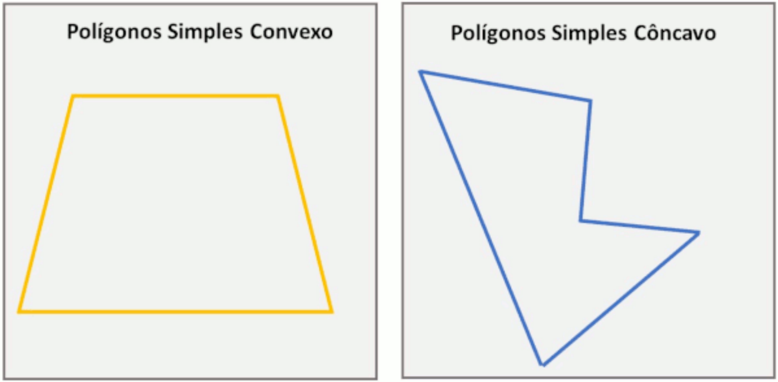
Um politopo é um objeto geométrico n-dimensional com faces "retas"



POLITOPO CONVEXO

Em programação linear, todo politopo é um conjunto convexo

- Espaço afim fechado sobre combinações convexas Link



HIPÓTESE DA ADITIVIDADE

O conceito de aditividade da função objetivo diz que o custo total da função objetivo é a soma das parcelas associadas a cada atividade

- O todo é igual a soma de suas partes

$$\min \sum_{i=0}^{n} c_i x_i$$

Por exemplo, se em 100ml de leite achocolatado encontramos 70mg de cálcio e, em 100g de pão de forma encontramos 2,5mg do mesmo componente, então na refeição composta por 100ml de leite achocolatado e 100g de pão de forma ingerimos 72,5mg de cálcio

HIPÓTESE DA PROPORCIONALIDADE

O custo de cada atividade é proporcional ao nível de operação da atividade

$$\min \sum_{i=0}^{n} c_i x_i$$

Por exemplo, 100ml de leite possui 70mg de cálcio

- Então, 50ml de leite contém 35mg de cálcio

HIPÓTESE DA SEPARABILIDADE (OU DIVISIBILIDADE)

As atividades podem ser divididas em qualquer nível fracionário

$$\min \sum_{i=0}^{n} c_i x_i$$

Por exemplo, se uma porção de leite contém 100ml

- Você pode servir qualquer fração de uma porção
  - 50% $\longrightarrow$ 50ml
  - 0% $\longrightarrow$ 0ml
  - 89% $\longrightarrow$ 89ml
  - $\ldots$

HIPÓTESE DA CERTEZA

Assume-se que todos os parâmetros do modelo são conhecidos

Problema da dieta:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i \in F} x_i c_i & \\
& \sum_{i \in F} x_i a_{ij} \geq m_j, & \forall j \in N \\
& x_i \geq 0 & \forall i \in F
\end{array}
$$

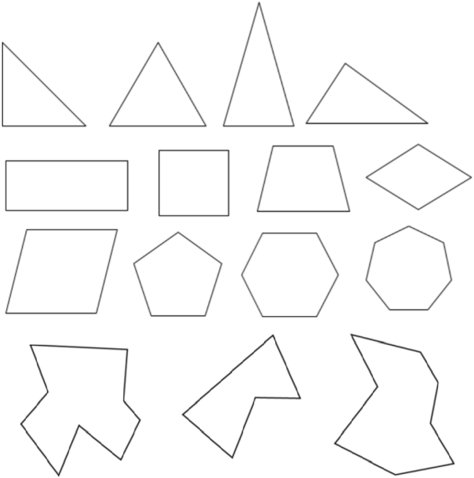
Os parâmetros a_{ij} e m_j devem ser conhecidos

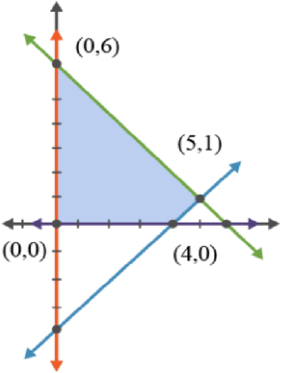
- Caso contrário, é impossível montarmos um modelo de otimização linear

PONTOS EXTREMOS

Um ponto extremo ocorre no encontro de duas ou mais linhas

- No encontro entre duas ou mais restrições
- É um vértice

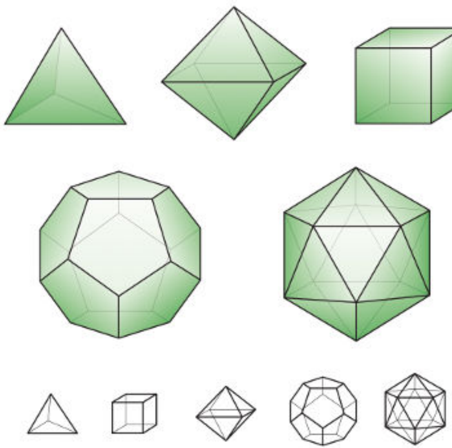




PONTOS EXTREMOS

Um ponto extremo ocorre no encontro de duas ou mais linhas

- No encontro entre duas ou mais restrições
- É um vértice



O máximo (ou mínimo) de uma função objetivo linear sob um politopo convexo ocorre em um ponto extremo

Prova: Link

Suppose, for the sake of contradiction, that $x^* \in \operatorname{int}(P)$. Then there exists some $\epsilon > 0$ such that the ball of radius ϵ centered at x^* is contained in P, that is $B_\epsilon(x^*) \subset P$. Therefore,

$$x^* - \frac{\epsilon}{2}\frac{c}{||c||} \in P \text{ and}$$

$$c^T\left(x^* - \frac{\epsilon}{2}\frac{c}{||c||}\right) = c^T x^* - \frac{\epsilon}{2}\frac{c^T c}{||c||} = c^T x^* - \frac{\epsilon}{2}||c|| < c^T x^*.$$

Hence x^* is not an optimal solution, a contradiction. Therefore, x^* must live on the boundary of P. If x^* is not a vertex itself, it must be the convex combination of vertices of P, say $x_1, \ldots, x_t$. Then $x^* = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i$ with $\lambda_i \geq 0$ and $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1$. Observe that

$$0 = c^T\left(\left(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i\right) - x^*\right) = c^T\left(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i (x_i - x^*)\right) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i (c^T x_i - c^T x^*).$$

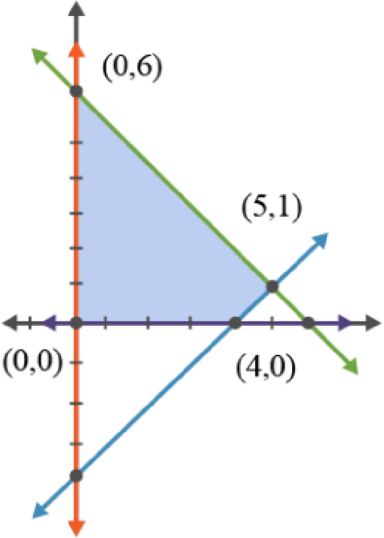
Since x^* is an optimal solution, all terms in the sum are nonnegative. Since the sum is equal to zero, we must have that each individual term is equal to zero. Hence, $c^T x^* = c^T x_i$ for each x_i, so every x_i is also optimal, and therefore all points on the face whose vertices are $x_1, \ldots, x_t$, are optimal solutions.

CONJUNTO DE SOLUÇÕES VIÁVEIS É UM CONJUNTO CONVEXO

Um conjunto de equações lineares produz um politopo

Soluções viáveis estão dentro deste politopo

Portanto, o conjunto é convexo



POLITOPO TEM UM NÚMERO FINITO DE PONTOS EXTREMOS

Nós ainda não discutimos o tema, mas...

- Pode-se representar os coeficientes de problema de programação linear utilizando uma matriz bi-dimensional
  - Cada linha representa uma restrição (m)
  - Existe uma coluna para cada variável do problema (n)
  - O valor de cada célula representa o coeficiente de uma variável em uma restrição

O número máximo de pontos extremos em um politopo convexo é

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

MODELOS DE PROGRAMAÇAO LINEAR SEM SOLUÇÃO

Modelos mal construídos podem não ter nenhuma solução

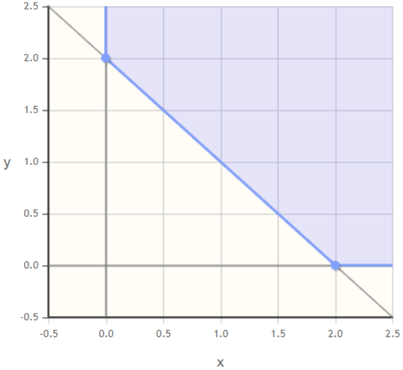
- Não é possível construir um politopo
- Em Algebra Linear, dizemos que é um sistema impossível (SI)

$$
\begin{array}{lll}
\max & x+y+z & \\
& x+y & \geq 5 \\
& x+z & \geq 5 \\
& x+y+z & \leq 4 \\
& x & \geq 0 \\
& y & \geq 0 \\
& z & \geq 0
\end{array}
$$

MODELOS COM SOLUÇÃO ÓTIMA NÃO CONHECIDA

Sistema Possível e Indeterminado (SPI)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x+y \\
& x+y \geq 2 \\
& x \geq 0 \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$



MODELOS COM MÚLTIPLAS SOLUÇÕES ÓTIMAS

Sistema Possível e Indeterminado (SPI)

$$\begin{aligned} \max \quad & x+y & \\ & x+y & \leq 5 \\ & x & \geq 0 \\ & y & \geq 0 \end{aligned}$$