# REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

DCE692 - Pesquisa Operacional

Atualizado em: 28 de agosto de 2023

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

# PROGRAMAÇÃO LINEAR

Problemas de programação linear são descritos utilizando um conjunto de equações lineares

- Função objetivo
- Variáveis
- Restrições

É possível representar graficamente um problema de programação linear

- 3 variáveis
- Poucas restrições

E problemas maiores?

# PROGRAMAÇÃO LINEAR - REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

De forma geral, um problema de programação linear é representado como

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} c &= \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \\ x^T &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ b^T &= \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \end{aligned}$$

# REPRESENTAÇÃO COMO SOMATÓRIOS

Representação matricial

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Representação com somatórios

$$\begin{array}{lccl} \min & \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i & & \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \, x_i & \leqslant b_j, & \forall j \in \{1,2,\ldots,m\} \\ & x_i & \geqslant 0 & \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \end{array}$$

# REPRESENTAÇÃO MATRICIAL EXTENDIDA

Representação matricial

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ & Ax & \leqslant b \\ & x & \geqslant 0 \end{array}$$

Representação extendida

$$\begin{array}{lccccccccc} \min & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + & \dots & + & c_n x_n & & \\ & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \dots & + & a_{1n} x_n & \leqslant & b_1 \\ & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \dots & + & a_{2n} x_n & \leqslant & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \dots & + & a_{mn} x_n & \leqslant & b_m \\ & x_1, & & x_2, & & \dots & & x_n & \geqslant & 0 \end{array}$$

# FORMA PADRÃO

Um modelo de Programação Linear é dito estar na forma padrão se

1. A função objetivo é de minimização (opcional)
2. Todas as variáveis são não-negativas
3. Todas as restrições são de igualdade

Usualmente, todas as variáveis são não-negativas

Entretanto, no geral, as restrições são desigualdades ao invés de igualdades

- $\leq$ ou $\geq$

# TRANSFORMANDO MAXIMIZAÇÃO EM MINIMIZAÇÃO

Fazer esta transformação é bem simples

- Basta multiplicar a função objetivo por $-1$

$$
\begin{array}{lll}
\max & c^T x & \\
& Ax & \leqslant b \\
& x & \geqslant 0
\end{array}
$$

# TRANSFORMANDO MAXIMIZAÇÃO EM MINIMIZAÇÃO

Fazer esta transformação é bem simples

- Basta multiplicar a função objetivo por $-1$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -c^T x & \\
& Ax & \leqslant b \\
& x & \geqslant 0
\end{aligned}
$$

# USANDO SEMPRE VARIÁVEIS NÃO-NEGATIVAS

Caso existam variáveis negativas, pode-se transforma-las em **duas** variáveis não negativas

Suponha uma variável $x_1 \in \mathbb{R}$

- Vamos criar duas variáveis $x_1^+, x_1^- \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- A variável $x_1^+$ representa a parte **positiva** de $x_1$
- Analogamente, a variável $x_1^-$ representa a parte **negativa** de $x_1$
- Podemos assumir que $x_1 = x_1^+ + x_1^-$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$\downarrow$$
$$3x_1^+ + 3x_1^- + 2x_2 \geq 6$$

# TRANSFORMANDO DESIGUALDADES EM IGUALDADES

Podemos converter uma desigualdade em igualdade utilizando **variáveis de folga**

Uma variável de folga representa o valor que *sobra* na desigualdade quando transformado em uma igualdade

Vamos utilizar aqui variáveis de folga $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

# USO DE VARIÁVEIS DE FOLGA

O sinal associado a variável de folga pode ser de adição ou de subtração, assim fazendo a restrição ser **justa**

- Justa, no sentido de apertada
- O lado esquerdo e direito tornam-se iguais

Utilizamos subtração para indicar o valor que resta na restrição

- Útil para desigualdades do tipo $\geq$

Utilizamos adição para indicar o valor que falta na restrição

- Útil para desigualdades do tipo $\leq$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6 \quad\quad\quad 50x_1 + 35x_2 \leq 300$$

$$\downarrow \quad\quad\quad \downarrow$$

$$3x_1 + 2x_2 - y_1 = 6 \quad\quad\quad 50x_1 + 35x_2 + y_1 = 300$$

# VARIÁVEIS DE FOLGA

Representação matricial

$$
\begin{array}{lll}
\min & c^T x & \\
 & Ax + y & = b \\
 & x & \geqslant 0 \\
 & y & \geqslant 0
\end{array}
$$

Representação extendida

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\min & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + & \dots & + & c_n x_n & & & & \\
 & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \dots & + & a_{1n} x_n & + & y_1 & = & b_1 \\
 & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \dots & + & a_{2n} x_n & + & y_2 & = & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \dots & + & a_{mn} x_n & + & y_m & = & b_m \\
 & x_1, & & x_2, & & \dots & & x_n & & & \geqslant & 0
\end{array}
$$

# EXERCÍCIO

# FORMA PADRÃO

Coloquem a restrição abaixo na forma padrão

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + x_2 \\
& x_1 \geq 3 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 - x_2 = 3 \\
& x_1 \geqslant 0 \\
& x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

# FORMA PADRÃO

Passo 1: obter uma função objetivo de minimização

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 - x_2 \\
& x_1 && \geq 3 \\
& x_1 + x_2 && \leq 4 \\
& 2x_1 - x_2 && = 3 \\
& x_1 && \geq 0 \\
& x_2 && \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

# FORMA PADRÃO

Passo 2: tornar todas as variáveis não-negativas

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 - x_2^+ - x_2^- & \\
& x_1 & \geq 3 \\
& x_1 + x_2^+ - x_2^- & \leq 4 \\
& 2x_1 - x_2^+ - x_2^- & = 3 \\
& x_1, x_2^+, x_2^- & \geq 0
\end{aligned}
$$

Passo 3: adicionar as variáveis de folga

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 - x_2^+ - x_2^- \\
& x_1 - y_1 = 3 \\
& x_1 + x_2^+ - x_2^- + y_2 = 4 \\
& 2x_1 - x_2^+ - x_2^- = 3 \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$