UNIVERSIDADE FEDERAL ALFENAS (UNIFAL)
Bacharelado em Ciência da Computação

Disciplina	Método de entrega	Data de entrega
DCE692 - Pesquisa operacional	Moodle da disciplina	25/08/2021 às 8h00

Professor
Iago Augusto de Carvalho (iago.carvalho@unifal-mg.edu.br)

Prova 01

Cada aluno deverá submeter um único arquivo .pdf com a resolução da prova.
A prova pode ser realizada de duas maneiras:

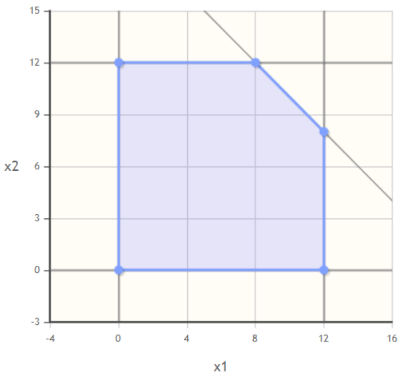
- Com papel e caneta, sendo posteriormente escaneada e enviada
- Digitada em algum editor de texto, e.g., Word ou LaTeX

A prova deverá ser entregue no Moodle da disciplina até a data limite.

- Atrasos não serão tolerados

Exercício 1 (20 %)

Observe o modelo de Programação Linear abaixo representado na forma gráfica



Com base neste modelo, responda se cada afirmação é verdadeira ou falsa e justifique.

a) Suponha que a função objetivo seja de maximização. Desta forma, é impossível que a solução ótima seja o ponto $(x_1 = 0, x_2 = 0)$

b) Pode ser que existam múltiplas soluções ótimas

c) O ponto $(x_1 = 12, x_2 = 12)$ é uma solução viável para este modelo

d) O ponto $(x_1 = 8, x_2 = 8)$ pode ser a solução ótima deste modelo

Exercício 2 (25%)

Observe o tableau abaixo que representa um modelo de programação linear e responda:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 24 \end{bmatrix}$$

a) Quantas variáveis tem este modelo?

b) Quantas restrições tem este modelo? Quais são elas?

c) Identifique os vetores (ou matrizes) **A**, **B**, **y** e **c**

d) Desenhe o modelo em um plano 2D, indicando

- Qual linha representa cada restrição
- A área de soluções viáveis

e) Supondo que o problema seja de maximização, diga:

- Qual é o valor da solução ótima?
- Qual é a solução ótima?

Exercício 3 (20%)

Observe o modelo de otimização linear a direita e responda:

$$\begin{array}{lll} \min & x - 3y & \\ & x + y & \leq 10 \\ & x + y & \geq 2 \\ & x & \geq 1 \\ & x & \geq 0 \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

a) A solução ($x = 1,5, y = 1,5$) é viável para este modelo? Porquê?

b) Desenhe o modelo em um plano 2D, indicando

- Qual linha representa cada restrição
- A área de soluções viáveis

c) Qual é a solução ótima deste modelo? Qual é o seu valor?

d) Identifique os vetores (ou matrizes) **A**, **B** e **c** deste modelo

Exercício 4 (35%)

Joãozinho é diretor de uma empresa de prestação de serviços localizada no centro de Alfenas. A empresa de Joãozinho está lançando um novo *software* no mercado. Após o lançamento, a empresa deverá fornecer assistência remota 24h por dia para os usuários deste novo *software*.

Joãozinho fez um estudo preliminar para identificar o número de usuários do *software* em cada momento do dia e, assim, fazer o planejamento da equipe de suporte. Ele identificou que o número mínimo de atendentes necessários em cada momento do dia, conforme a tabela abaixo:

Período do dia	Número mínimo de atendentes
8h - 12h	4
12h - 16h	8
16h - 20h	10
20h - 24h	8
24h - 8h	2

Joãozinho deve, então, contratar atendentes e distribuir seus horários de trabalho de tal forma que:

- O número mínimo de atendentes em cada período do dia seja respeitado
- O número de atendentes seja minimizado

Considere que cada atendente faz um turno de 8h por dia de forma ininterrupta. Além disso, um atendente pode começar a trabalhar as 8h, as 12h, as 16h, as 20h ou as 24h.

Para resolver este problema, Joãozinho resolveu utilizar técnicas de programação linear. Entretanto, ele não é muito bom em modelagem. Ajude Joãozinho a modelar este problema, apresentando:

a) A função objetivo do problema de programação linear

b) As restrições que incidem sobre este problema

c) Qual é o número mínimo de atendentes que Joãozinho precisa contratar?

d) Em cada horário, quantos atendentes devem começar a trabalhar?

Gabarito

Exercício 1

a) Falso. Caso a função objetivo seja $max\ -x_1 - x_2$, o ponto $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ representa a solução ótima

b) Verdadeiro. Caso a função objetivo seja $max\ x_1 + x_2$, então existem múltiplas soluções ótimas localizadas sob a reta da restrição $x_1 + x_2 \leq 20$

c) Falso. Este ponto viola a restrição $x_1 + x_2 \leq 20$.

d) Falso. Soluções ótimas são localizadas em um ponto extremo do politopo (caso ela seja única) ou sob a reta de uma equação (caso múltiplas soluções ótimas existam). O ponto $(x_1 = 8, x_2 = 8)$ não é nem ponto extremo e não está sob nenhuma restrição deste modelo

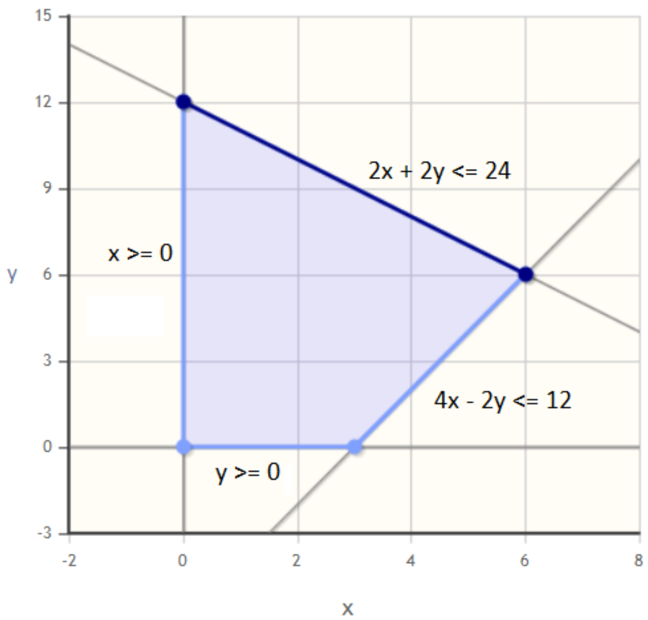
Exercício 2

a) Duas variáveis

b) Duas restrições. Elas são:

- $4x - 2y \leq 12$
- $2x + 2y \leq 24$

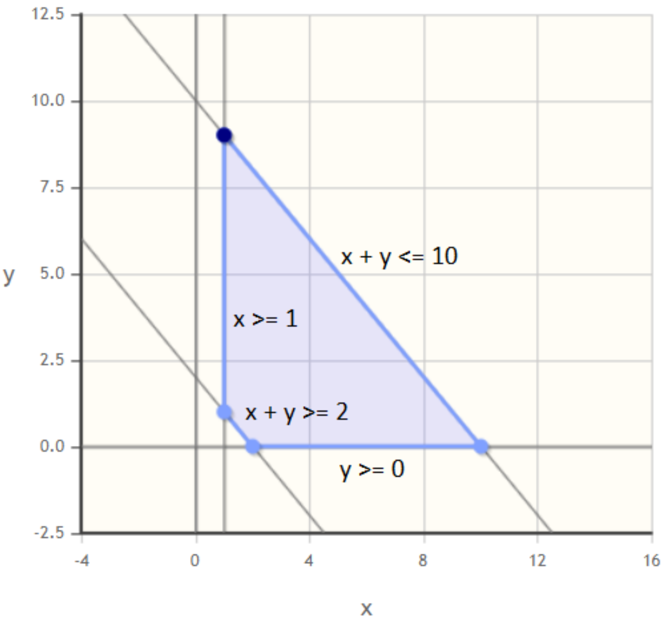
c) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) 

e) O valor da solução ótima é 12. Existem múltiplas soluções ótimas e elas estão localizadas sobre a reta da equação $2x + 2y \leq 24$.

Exercício 3

a) Sim, ela é viável pois respeita todas as restrições do modelo



b)

c) A solução ótima do modelo é o ponto $(x = 1, y = 9)$. O valor da solução ótima é -26.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$

Exercício 4

a) Seja x_1 o número de atendentes que entram as 8h, x_2 o número de atendentes que entram as 12h, x_3 o número de atendentes que entram as 16h, x_4 o número de atendentes que entram as 20h e x_5 o número de atendentes que entram as 24h. Uma função objetivo para este problema é

$$min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 \quad & \geq 4 \\ x_1 + x_2 & \geq 8 \\ x_2 + x_3 & \geq 10 \\ x_3 + x_4 & \geq 8 \\ x_5 \quad & \geq 2 \end{aligned}$$

c) São necessários um mínimo de 18 funcionários, sendo que:

- 4 atendentes começam a trabalhar às 8h
- 4 atendentes começam a trabalhar às 12h
- 6 atendentes começam a trabalhar às 16h
- 2 antedentes começam a trabalhar às 20h
- 2 atendentes começam a trabalhar às 24h