Módulo 02 - Resolução Gráfica dos Problemas de Programação Linear

Um problema de programação linear consiste em determinar valores não-negativos para as variáveis de decisão, satisfazendo as restrições impostas de forma a otimizar (maximizar ou minimizar) a função linear.

Para problemas que apresentam duas variáveis de decisão, a solução ótima pode ser encontrada graficamente. Um problema com três variáveis também pode ser resolvido graficamente, mas na maioria das vezes, torna-se uma tarefa árdua. A partir de quatro variáveis a resolução somente será possível algebricamente.

Retornando ao exemplo do módulo anterior, apresenta-se a sua resolução gráfica.

Seja o seguinte problema de programação linear:

Função Objetivo: $máx\ Z = 200x_1 + 300x_2$

Sujeitos a:
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 20 \\ 4x_1 \quad\; &\le 32 \\ x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Solução:

Variáveis de decisão:

x_1 - quantidade do produto A_1 a ser produzido.

x_2 - quantidade do produto A_2 a ser produzido.

Inicialmente, determina-se o conjunto de pontos (x_1, x_2) que satisfaçam as restrições. Para isso, determinam-se os pontos no plano cartesiano que satisfaçam cada uma das inequações das restrições a seguir:

1^a) restrição: $2x_1 + x_2 \le 20$

2^a) restrição: $4x_1 \le 32$

3^a) restrição: $x_2 \le 10$

4^a) restrição: $x_1 \ge 0\ e\ x_2 \ge 0$

Conforme gráfico (1) a seguir, os pontos que satisfazem todas as restrições estão na intersecção das regiões encontradas pelas 1^a), 2^a), 3^a) e 4^a) restrições.

As flechas indicam o semiplano que satisfaz cada uma das restrições.

O conjunto de pontos que satisfazem todas as restrições é chamado de *região viável* ou *conjunto dos pontos viáveis*.

Para se determinar, caso exista, um ponto (x_1^*, x_2^*) que pertence ao conjunto de pontos viáveis, de forma que a função $Z = 200x_1 + 300x_2$ assuma o maior valor possível, o problema torna-se:

Estabelece-se alguns valores para a função Z e obtêm-se as suas curvas de nível. Por exemplo:

$$200x_1 + 300x_2 = 1200$$
$$200x_1 + 300x_2 = 2400$$
$$200x_1 + 300x_2 = 3600$$

As respectivas curvas de nível também estão representadas no gráfico (1).

Observe que as curvas de nível são todas retas paralelas e que a função assume valor cada vez maior num determinado sentido.

Deve-se provar ainda, que as curvas de nível sejam perpendiculares as vetor gradiente da função, isto é, as curvas de nível da função $Z = 200x_1 + 300x_2$ são perpendiculares ao vetor $\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2}\right) = (200, 300)$. O vetor gradiente fornece o sentido do crescimento da função.

Assim, pode-se determinar uma solução para o problema, se existir:

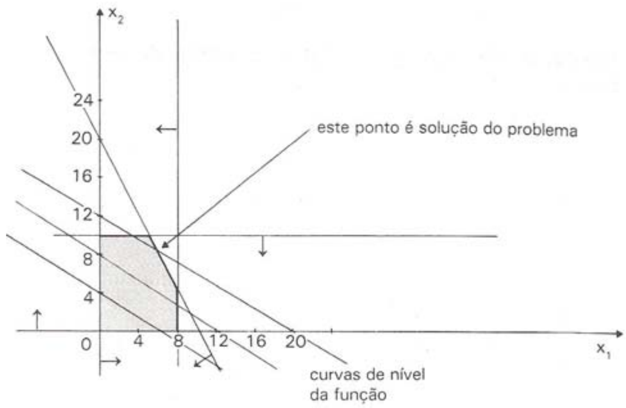


Gráfico (1): Região Viável e curvas de nível.

Portanto, o ponto (x_1^*, x_2^*) = (5, 10) é a *solução ótima* e o maior valor que a função pode assumir é 4000 (*valor ótimo*) do problema.

Resposta:

Devem-se produzir 5 unidades do produto A_1 e 10 unidades do produto A_2 e a receita bruta máxima é 4000 u.m.

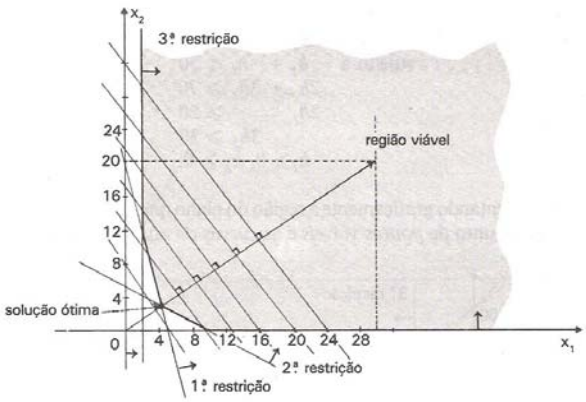
Outros exemplos:

Represente graficamente e determine, se existir, a solução ótima dos seguintes problemas.

1) Função Objetivo: $\min Z = 30x_1 + 20x_2$

$$\text{Sujeitos a:} \quad \begin{aligned} 4x_1 + \ \ x_2 &\geq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ x_1 \qquad &\geq \ 2 \\ x_1,\, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução:



Observação: Como é um problema de minimização, pesquisam-se as curvas de nível no sentido oposto ao gradiente.

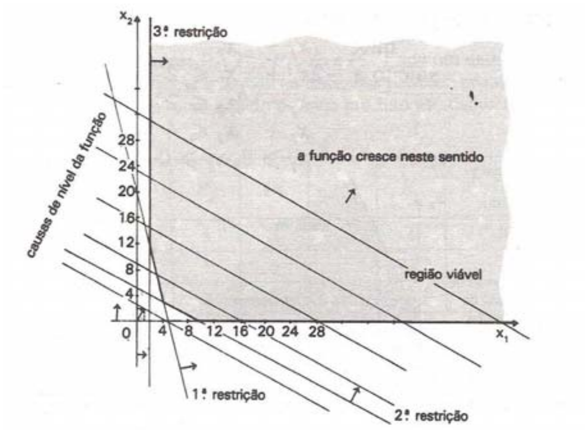
Solução ótima: $(x_1^*, x_2^*) = \left(\dfrac{30}{7}, \dfrac{20}{7}\right)$;

Valor ótimo para um custo mínino: $\dfrac{1300}{7}$.

3) Função Objetivo: $máx\, f(x_1, x_2) \ = \ x_1 + 2x_2$

$$\text{Sujeitos a:} \quad \begin{aligned} 4x_1 + \ \ x_2 &\geq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ x_1 \qquad &\geq \ 2 \\ x_1,\, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução:

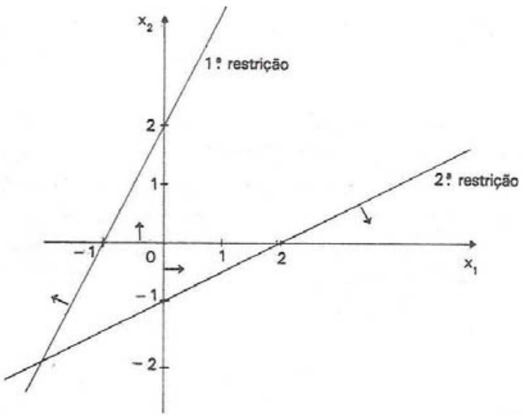


Para este problema não existe *solução ótima* finita, pois o valor da função cresce indefinidamente dentro da região viável. Diz-se que é um problema *ilimitado*.

4) Função Objetivo: $\min f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$$\text{Sujeitos a:} \quad \begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução:

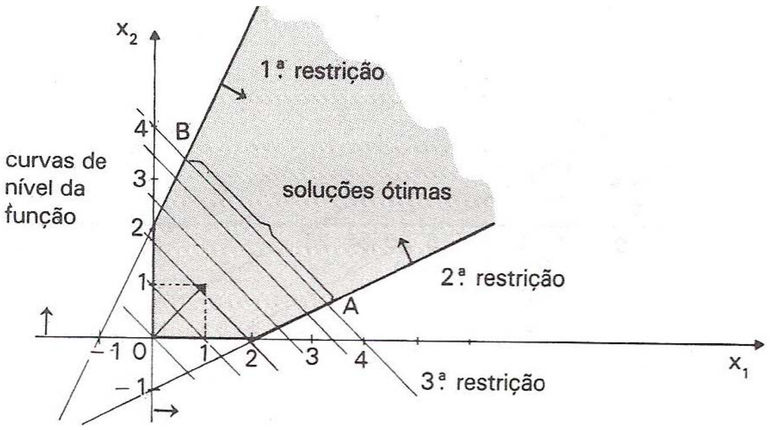


O conjunto de pontos viáveis para este problema é um conjunto vazio, pois não há região do plano que satisfaz as quatro restrições. Portanto, o problema é *inviável*.

5) Função Objetivo: máx $Z = x_1 + x_2$

$$\text{Sujeitos a:} \quad \begin{aligned} -2x_1 + \ \ x_2 &\leq 2 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_1 + \ \ x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução:



Este problema possui *infinitas soluções ótimas*, pois o segmento de reta de extremidades A e B é solução ótima, ou seja, qualquer ponto H escrito da forma $H = \beta A + (1-\beta)B$, com $\beta \in [0,1]$ é solução ótima do problema.