

OTIMIZAÇÃO LINEAR

DCE692 - Pesquisa Operacional

Atualizado em: 22 de agosto de 2023

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação



OTIMIZAÇÃO LINEAR

Apesar deste curso ser sobre Pesquisa Operacional, nós vamos nos concentrar em tópicos de Otimização Linear

O objetivo da otimização linear é resolver modelos matemáticos lineares

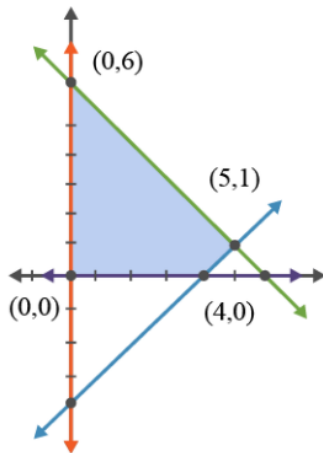
- Sistema de equações lineares
- Uma (ou mais) funções objetivo
- Conjunto de restrições
- Variáveis no domínio dos reais (\mathbb{R})

Deve-se atribuir um valor para cada uma das variáveis do problema de tal forma que

- A função objetivo seja minimizada (ou maximizada)
- Todas as restrições sejam respeitadas

PROGRAMAÇÃO LINEAR

$$\begin{array}{ll}\min & 2x + y \\ & x + y \leq 6 \\ & x - y \leq 4 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0\end{array}$$



O principal uso de modelos de programação linear é para otimizar (encontrar o mínimo ou o máximo) de algo

- Maximizar o lucro
- Minimizar as perdas
- Minimizar o tempo gasto
- Minimizar número de funcionários
- Maximizar o número de produtos produzidos
- Minimizar gasto de combustível
- ...

OTIMIZAÇÃO LINEAR

Modelos de otimização linear normalmente tentam representar um problema de mundo real através de um sistema de equações

A **função objetivo** representa aquilo que você quer otimizar

- Minimizar ou maximizar

As **variáveis** representam a tomada de decisão

- Vou utilizar esta rota ou aquela?
- Quantos produtos deste tipo eu vou produzir?

As **restrições** representam as limitações existentes

- Qual é o número máximo de horas por dia que estes funcionários podem trabalhar?
- Quantos metros cúbicos de madeira eu tenho para produzir estes móveis?
- Quantos caminhões eu possuo para fazer entregas?

min $2x + y$

$$x + y \leq 6$$

$$x - y \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Função objetivo

Restrições

min $2\mathbf{x} + \mathbf{y}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \leq 6$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} \leq 4$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\mathbf{y} \geq 0$$

Direção da função objetivo

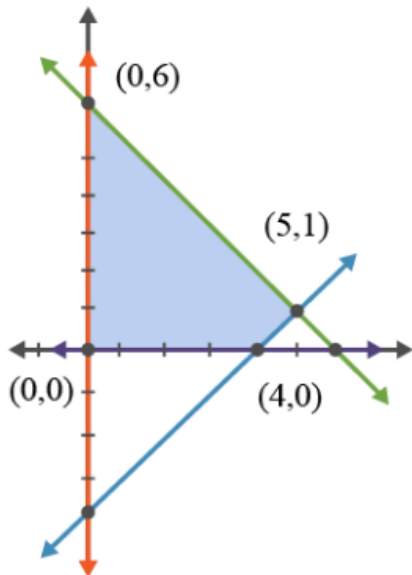
Função objetivo

Restrições

Variáveis (em negrito)

Restrições de domínio das
variáveis

OTIMIZAÇÃO LINEAR



$$x + y \leq 6$$

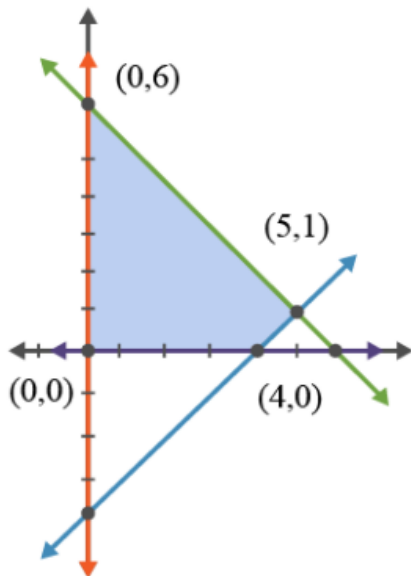
$$x - y \leq 4$$

$$y > 0$$

$$x > 0$$

Soluções viáveis

OTIMIZAÇÃO LINEAR



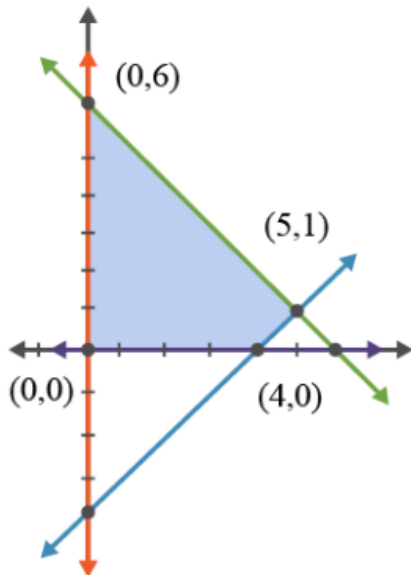
O espaço azul representa o conjunto de soluções viáveis de nosso problema

- Soluções ótimas
- Soluções sub-ótimas

Solução ótima está em um vértice

- Encontro de duas ou mais restrições

OTIMIZAÇÃO LINEAR



$$\min 2x + y$$

x	y	resultado
0	0	0
0	6	6
5	1	11
4	0	8

EXEMPLO DE MODELAGEM

Uma fábrica produz dois produtos, A e B .

- Cada um deve ser processado por duas máquinas M_1 e M_2

Devido à programação de outros produtos que também usam estas máquinas, estão disponíveis para os produtos A e B apenas 24 horas da máquina M_1 e 16 horas da máquina M_2 .

EXEMPLO DE MODELAGEM

Para produzir uma unidade do produto A são necessárias

- 4 horas da máquina M_1
- 4 horas da máquina M_2

Para produzir uma unidade do produto B são necessárias

- 6 horas da máquina M_1
- 2 horas da máquina M_2

O produto A é vendido com um lucro de R\$ 80,00, enquanto o produto B é vendido com um lucro de R\$ 60,00

EXEMPLO DE MODELAGEM

Existe uma previsão de demanda máxima de 3 unidades para B , mas nenhuma restrição de demanda para A .

Deseja-se saber: quanto produzir de cada produto para maximizar o lucro?

Produto	Horas de M_1	Horas de M_2	Demanda Max	Lucro Unitário
A	4	4	-	80
B	6	2	3	60
Horas Disp.	24	16	-	-

EXEMPLO DE MODELAGEM

$$\max \quad 80\mathbf{Xa} + 60\mathbf{Xb}$$

$$4\mathbf{Xa} + 6\mathbf{Xb} \leq 24$$

$$4\mathbf{Xa} + 2\mathbf{Xb} \leq 16$$

$$\mathbf{Xb} \leq 3$$

$$\mathbf{Xa} \geq 0$$

$$\mathbf{Xb} \geq 0$$

Direção da função objetivo

Função objetivo

Restrições

Variáveis (em negrito)

Restrições de domínio das
variáveis

MODELAGEM DE PROBLEMAS COMO PROGRAMAÇÃO LINEAR

É possível modelar problemas polinomiais

- A resolução de um modelo de programação linear é um problema polinomial
- Não é possível utilizar programação linear para modelar problemas NP-Completo

Exemplos de problemas

- Problema da árvore geradora mínima
- Problema do caminho mínimo
- Problemas de sequenciamento
- Problemas de atribuição
- Problemas de roteamento
- Problemas de fluxo em redes

Veremos alguns destes com o decorrer da disciplina