Programação Linear
Prof. Moretti

Método Simplex na Forma de Tableau

Considere as equações
$$Bx_B + Nx_N = b$$
$$z - c_B x_B - c_N x_N = 0$$

Podemos rescrevê-las como
$$0z + Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$
$$1z - 0x_B + \left(c_B B^{-1}N - c_N\right)x_N = c_B B^{-1}b$$

O Método Simplex na forma tableau é dado então por:

	z	x_B	x_N	
z	1	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$
x_B	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Exemplos:

1) Considere o seguinte PPL:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = x_1 + x_2 - 4x_3 \\ &\text{sa} \\ &\quad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ &\quad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2 \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ &\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Colocando este problema na forma padrão, temos:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = x_1 + x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\ &\text{sa} \\ &\quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ &\quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\ &\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0 \end{aligned}$$

Tableau inicial

	z	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	
z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
x_4	0	1	1	2	1	0	0	9
x_5	0	1	1	-1	0	1	0	2
x_6	0	-1	1	1	0	0	1	4

Iteração 1

Como $z_3 - c_3 = 4$ é o único custo reduzido, x_3 entra na base.

	z	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**		
z	1	-1	-1	4	0	0	0	0	**TR**
x_4	0	1	1	**2**	1	0	0	**9**	9/2
x_5	0	1	1	**-1**	0	1	0	**2**	-
x_6	0	-1	1	**1**	0	0	1	**4**	4/1

Temos que min { 9/2, 4 } = 4 $\Rightarrow$ x_6 sai da base.

Como o valor do elemento pivô já é igual a 1, temos apenas que anular os demais componentes da coluna de x_3.

	z	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	
z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
x_4	0	3	-1	0	1	0	-2	1
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

Iteração 2

Temos $z_1 - c_1 = 3$, que é positivo. Logo, x_1 é candidata para entrar na base.

	z	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**		
z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16	**TR**
x_4	0	**3**	-1	0	1	0	-2	**1**	1/3
x_5	0	**0**	2	0	0	1	1	**6**	-
x_3	0	**-1**	1	1	0	0	1	**4**	-

x_4 sai da base.

O valor do elemento pivô é 3. Dividindo a linha do pivô por 3, e anulando os demais componentes da coluna de x_1 , temos o seguinte tableau:

	z	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	
z	1	0	-4	0	-1	0	-2	-17
x_1	0	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3

Como todos os custos reduzidos são negativos, estamos na solução ótima, que é dada por $z = -17$, com $x_1 = 1/3$, $x_3 = 13/3$, $x_5 = 6$ e as demais variáveis iguais a zero.

2) Considere o seguinte PPL:

$$\text{Max } z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

sa

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$
$$x_1 \geq 0 ,\ x_2 \geq 0 ,\ x_3 \geq 0 ,\ x_4 \geq 0$$

Colocando este problema na forma padrão, temos:

$$\text{Max } z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

sa

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 = 100$$
$$x_1 \geq 0 ,\ x_2 \geq 0 ,\ x_3 \geq 0 ,\ x_4 \geq 0 ,\ x_5 \geq 0 ,\ x_6 \geq 0 ,\ x_7 \geq 0$$

Tableau inicial

	z	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{x_7}$	
z	1	4	5	9	11	0	0	0	0
$\mathbf{x_5}$	0	1	1	1	1	1	0	0	15
$\mathbf{x_6}$	0	7	5	3	2	0	1	0	120
$\mathbf{x_7}$	0	3	5	10	15	0	0	1	100

Observe que as variáveis de folga formam uma base canônica.

Iteração 1

Como temos $z_j - c_j > 0$, devemos escolher uma variável para entrar na base.
Como $z_4 - c_4$ é o maior valor dos custos reduzidos, x_4 entra na base.

A variável x_7 sai da base, pois min { 15/1, 120/2, 100/15} = 100/15

	z	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{x_7}$	
z	1	4	5	9	11	0	0	0	0
$\mathbf{x_5}$	0	1	1	1	**1**	1	0	0	**15**
$\mathbf{x_6}$	0	7	5	3	**2**	0	1	0	**120**
$\mathbf{x_7}$	0	3	5	10	**15**	0	0	1	**100**

O valor do pivô é quinze, mostrado na célula sombreada. Para realizarmos o pivoteamento, devemos igualar este valor a 1, e anular os demais componentes da respectiva coluna.

Após o pivoteamento, temos o seguinte tableau:

	z	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	
z	1	9/5	4/3	5/3	0	0	0	-11/15	-220/3
x_5	0	4/5	2/3	1/3	0	1	0	-1/15	25/3
x_6	0	33/5	13/3	5/3	0	0	1	-2/15	320/3
x_4	0	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/15	20/3

Iteração 2
x_1 entra na base e x_5 sai.

	z	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	
z	1	0	-1/6	11/12	0	0	0	-11/15	-1105/12
x_1	0	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/15	125/12
x_6	0	0	-7/6	-13/12	0	-33/4	1	-2/15	455/12
x_4	0	0	1/6	7/12	1	-1/4	0	1/15	55/12

Iteração 3
x_3 entra na base e x_4 sai.

	z	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	
z	1	0	-3/7	0	-11/7	-13/7	0	-11/15	-695/7
x_1	0	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	-1/15	50/7
x_6	0	0	-6/7	0	13/7	-61/7	1	-2/15	325/7
x_3	0	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/15	55/7

Estamos no ótimo, pois todos os $z_j - c_j \leq 0$.

A solução ótima é dada então por z = 695/7, com x_1 = 50/7; x_6 = 325/7 e x_3 = 55/7.

Exercício: Considere o seguinte quadro:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	1	b	1	f	g	6
x_3	0	c	0	1	1/5	4
x_1	0	d	e	0	2	a

a) Ache os valores de a, b, c, d, e, f e g.
b) Ache B^{-1}
c) Estamos no ótimo?