

DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

DCE692 - Pesquisa Operacional

Atualizado em: 6 de setembro de 2021

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação



PROBLEMAS DUAIS

Problemas de programação linear são descritos utilizando um conjunto de equações lineares

- Função objetivo
- Variáveis
- Restrições

Estes são chamados de problemas *primais*

Todo problema de programação linear possui um problema *dual* associado

- Problema de programação linear
- Cada variável do primal torna-se uma restrição no dual
- Cada restrição do primal torna-se uma variável no dual
- Sentido da função objetivo é invertida

PROBLEMAS DUAIS

Primal

$$\min \quad cx$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Dual

$$\max \quad zb$$

$$zA \geq c$$

$$z \geq 0$$

CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

Uma indústria deseja produzir três tipos de molhos a partir de ketchup e mostarda.

- A indústria possui, ao todo, 80kg de ketchup e 30kg de mostarda
- O objetivo é produzir molhos de tal forma que o lucro da venda seja maximizado

$$\begin{array}{rcllcl} \max & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & & \\ & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 80 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 30 \\ & & & x_i & & & \geq 0, & \forall i \in \{1,2,3\} \end{array}$$

CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

Suponha que outra empresa deseje adquirir a fábrica de molhos

- Esta segunda empresa deseja realizar uma boa compra para poder lucrar
- Deseja-se precificar o preço de venda de cada kg de ketchup e mostarda

Para que o vendedor não saia no prejuízo, ele também tem que ter algum lucro

- Para isto, pode-se utilizar o dual do modelo de programação linear

CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

$$\begin{array}{rclclcl} \max & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & \\ & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq 80 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq 30 \\ & & & x_i & & \geq 0, & \forall i \in \{1,2,3\} \end{array}$$

Uma unidade do molho x_1 é vendido por 10. Além disso, consome

- 5kg de ketchup
- 2kg de mostarda

Deste modo, só vale a pena vender 5kg de ketchup e 2kg de mostarda por 10 ou mais unidades monetárias, isto é

$$5z_1 + 2z_2 \geq 10$$

CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

$$\begin{array}{rcll} \max & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 \\ & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 80 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 30 \\ & & & x_i & & \geq & 0, & \forall i \in \{1,2,3\} \end{array}$$

Da mesma forma para os outros dois molhos. Ao fim, temos que

$$\left. \begin{array}{rcl} 5z_1 & + & 2z_2 & \geq & 10 \\ 4z_1 & + & 3z_2 & \geq & 7 \\ z_1 & + & 5z_2 & \geq & 15 \end{array} \right\} \leftarrow \text{vantagem do vendedor}$$

CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

Já o comprador quer minimizar seus gastos ao adquirir a empresa de molhos.

Seja z_1 o valor que ele desembolsará para comprar cada kg de ketchup e z_2 por cada kg de mostarda.

Então, temos que o comprador deseja

$$\min 80z_1 + 30z_2$$

CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

Ao fim, temos que o comprador deseja otimizar um problema de otimização linear

- Este problema é o dual associado ao problema de produção primal

$$\begin{array}{llllll} \min & 80z_1 & + & 30z_2 & & \\ & 5z_1 & + & 2z_2 & \geq & 10 \\ & 4z_1 & + & 3z_2 & \geq & 7 \\ & z_1 & + & 5z_2 & \geq & 15 \\ & & & z_i & \geq & 0, \quad \forall i \in \{1, 2\} \end{array}$$

CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

Primal

$$\begin{array}{llllll} \max & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 \\ & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq 80 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq 30 \\ & & & x_i & & \geq 0, & \forall i \in \{1,2,3\} \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{llllll} \min & 80z_1 & + & 30z_2 & & \\ & 5z_1 & + & 2z_2 & \geq & 10 \\ & 4z_1 & + & 3z_2 & \geq & 7 \\ & z_1 & + & 5z_2 & \geq & 15 \\ & & & z_i & \geq & 0, & \forall i \in \{1,2\} \end{array}$$

PRIMAL-DUAL: FORMA GERAL

Primal

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + & \dots & + & c_n x_n \\
 & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \dots & + & a_{1n} x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \dots & + & a_{2n} x_n & \leq & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \dots & + & a_{mn} x_n & \leq & b_m \\
 & x_1, & & x_2, & & \dots & & x_n & \geq & 0
 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{llllllll}
 \min & b_1 z_1 & + & b_2 z_2 & + & \dots & + & b_m z_m \\
 & a_{11} z_1 & + & a_{12} x_2 & + & \dots & + & a_{1n} z_m & \geq & c_1 \\
 & a_{21} z_1 & + & a_{22} x_2 & + & \dots & + & a_{2n} z_m & \geq & c_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{n1} z_1 & + & a_{n2} z_2 & + & \dots & + & a_{nm} z_m & \geq & c_n \\
 & z_1, & & z_2, & & \dots & & z_m & \geq & 0
 \end{array}$$