ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

DCE692 - Pesquisa Operacional

Atualizado em: 3 de outubro de 2023

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Na análise de sensibilidade, nós estamos interessados em investigar variações da solução ótima de um problema de programação linear

Também estamos interessados em analisar diferentes valores para os coeficientes do modelo

- Matriz A e vetores b e c

Variações nestes coeficientes podem ter 3 diferentes resultados

1. A solução ótima não é alterada
2. A solução ótima atual torna-se inviável
3. É possível encontrar outra solução com valor melhor que o ótimo atual

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Podemos analisar a sensibilidade do modelo quanto a variação de diversos parâmetros

- Inserção de variáveis do problema (avaliar novos produtos/serviços)
- Variações nos valores da matriz A (alterações nas restrições do problema)
- Mudanças nos valores do vetor b (também implica alterações nas restrições)
- Alterações nos valores do vetor c (variações na função de custo)

Análise de sensibilidade é uma ferramenta útil para realizar um planejamento futuro

- O que pode acontecer com meu modelo caso alguma coisa mude?

Vamos trabalhar com exemplos. Considere o modelo abaixo

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	2	0	1	0	-6	11
0	1	1	3	-2	-1	6
1	2	1	3	-1	-5	13
3	2	-3	-6	10	-5	0

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A solução ótima x' do modelo possui variáveis básicas x_1, x_2 e x_3

- $x' = (3,4,2,0,0,0)$
- $z^* = 11$
- $B' = (x_1, x_2, x_3) \leftarrow$ base ótima

VB	T			b'
x_1	-1	-2	2	3
x_2	1	1	-1	4
x_3	-1	0	1	2
-z	-2	4	-1	-11

$-\pi$

INCLUSÃO DE UMA NOVA VARIÁVEL

INCLUSÃO DE UMA NOVA VARIÁVEL

Vamos incluir uma variável x_{n+1} no modelo. Seja $X = (x, x_{n+1})$

A base B' continua sendo viável para este modelo

- $X' = (x', 0)$ é uma solução viável para o problema aumentado

Pode-se dizer que X' é ótima caso o custo relativo da nova variável x_7 seja não-negativo em relação a base B'

$$c'_{n+1} = c_{n+1} + (-\pi)A_{n+1} \geq 0$$

INCLUSÃO DE UMA NOVA VARIÁVEL - EXEMPLO

Levando em consideração o modelo anterior, vamos inserir uma variável x_7 tal que $A_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $c_7 = -7$

Desta forma, o custo relativo da inserção de c_7 é

$$c_7' = c_7 + (-\pi)A_7 = -7 + \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2$$

Como c_7' é maior do que 0, então a base B' ainda é ótima

- Solução viável é $X' = (3,4,2,0,0,0,0)$
- $z^* = 11$

INCLUSÃO DE UMA NOVA VARIÁVEL - SEGUNDO EXEMPLO

Levando em consideração o modelo anterior, vamos inserir uma variável x_7 tal que $A_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $c_7 = 4$

Desta forma, o custo relativo da inserção de c_7 é

$$c_7' = c_7 + (-\pi)A_7 = 4 + \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -7$$

Como c_7' é menor do que 0, então a base B' não é ótima

- Deste modo, é necessário incluir a variável x_7 na base

INCLUSÃO DE UMA NOVA VARIÁVEL - SEGUNDO EXEMPLO

Vamos calcular os novos coeficientes relativos a coluna de x_7

$$A'_7 = B'A_7 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Levando em consideração o modelo anterior, vamos inserir uma variável x_7 tal que $A_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $c_7 = 4$

Desta forma, o custo relativo da inserção de c_7 é

$$c'_7 = c_7 + (-\pi)A_7 = 4 + \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -7$$

INCLUSÃO DE UMA NOVA VARIÁVEL - SEGUNDO EXEMPLO

Como c'_7 é menor do que 0, então a base B' não é ótima

- Deste modo, é necessário incluir a variável x_7 na base

A inclusão de x_7 é realizada utilizando pivoteamento do algoritmo Simplex

Após sua inclusão, deve-se checar os custos reduzidos de todas as outras variáveis e continuar a execução do algoritmo

INCLUINDO UMA NOVA RESTRIÇÃO

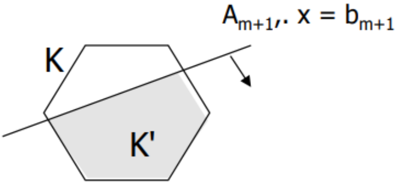
INCLUSÃO DE UMA NOVA RESTRIÇÃO DE DESIGUALDADE

Vamos considerar uma nova restrição $A_{m+1}x \leq b_{m+1}$

- Esta é a $(m+1)$-ésima linha do modelo
- É a mesma coisa que adicionar uma nova linha ao modelo anteriormente definido

Seja K o espaço de soluções viáveis do problema original

- A inclusão de uma nova restrição fará com que o espaço de soluções viáveis K seja diminuído
- Novo espaço de soluções viáveis $K' \subset K$



INCLUSÃO DE UMA NOVA RESTRIÇÃO DE DESIGUALDADE

Seja x' a solução ótima para o problema original

Caso $x' \in K'$, ou seja, se x' for viável para K'

- x' continua sendo a solução ótima do problema aumentado

Caso $x' \notin K'$, ou seja, se x' vila a nova restrição inserida

- Devemos calcular uma nova solução ótima para o modelo

INCLUSÃO DE UMA NOVA RESTRIÇÃO DE DESIGUALDADE

Para calcular esta nova solução ótima, devemos então definir uma nova variável de folga x_{n+1} como

$$x_{n+1} = -A_{m+1}x + b_{m+1}$$

Neste caso, sabemos que $x_{n+1} < 0$, pois x' não satisfaz a nova restrição

INCLUSÃO DE UMA NOVA RESTRIÇÃO DE DESIGUALDADE

Podemos montar o problema aumentado como

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + 0 x_{n+1}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ A_{m+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b_{m+1} \end{pmatrix}$$

INCLUSÃO DE UMA NOVA DESIGUALDADE - EXEMPLO

Considere o modelo anterior. Seja $x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 7$ a nova restrição

- A solução ótima anterior $x' = (3,4,2,0,0,0)$ não satisfaz essa nova restrição

Temos uma nova variável de folga $x_7 = -x_1 + x_2 - 3x_3 - 7$

- Vamos calcular a nova linha relativa a variável x_7 caso ela estivesse na base

$$A_{m+1}B' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Temos que $x_7 = -x_1 + x_2 - 3x_3 - 7 = -3 + 4 - 3(2) - 7 = -12$