DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

DCE692 - Pesquisa Operacional

Atualizado em: 26 de setembro de 2023

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

PROBLEMAS DUAIS

Problemas de programação linear são descritos utilizando um conjunto de equações lineares

- Função objetivo
- Variáveis
- Restrições

Estes são chamados de problemas *primais*

Todo problema de programação linear possui um problema *dual* associado

- Problema de programação linear
- Cada variável do primal torna-se uma restrição no dual
- Cada restrição do primal torna-se uma variável no dual
- Sentido da função objetivo é invertida

PROBLEMAS DUAIS

Primal	Dual
$\min \quad z = cx$	$\max \quad z = yb$
$Ax \leq b$	$yA \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

Uma indústria deseja produzir três tipos de molhos a partir de ketchup e mostarda.

- A indústria possui, ao todo, 80kg de ketchup e 30kg de mostarda
- O objetivo é produzir molhos de tal forma que o lucro da venda seja maximizado

$$
\begin{array}{llcccccl}
\max \quad z = & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & & \\
 & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq 80 & \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq 30 & \\
 & & & x_i & & & \geq 0, & \forall i \in \{1,2,3\}
\end{array}
$$

CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

Suponha que outra empresa deseje adquirir a fábrica de molhos

- Esta segunda empresa deseja realizar uma boa compra para poder lucrar
- Deseja-se precificar o preço de venda de cada kg de ketchup e mostarda

Para que o vendedor não saia no prejuízo, ele também tem que ter algum lucro

- Para isto, pode-se utilizar o dual do modelo de programação linear

CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & z = & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & \\
& & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq 80 \\
& & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq 30 \\
& & & & x_i & & & \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\}
\end{array}
$$

Uma unidade do molho x_1 é vendido por 10. Além disso, consome

- 5kg de ketchup
- 2kg de mostarda

Deste modo, só vale a pena vender 5kg de ketchup e 2kg de mostarda por 10 ou mais unidades monetárias, isto é

$$5y_1 + 2y_2 \geq 10$$

CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & z = & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & \\
 & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq 80 \\
 & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq 30 \\
 & & & & x_i & & & \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\}
\end{array}
$$

Da mesma forma para os outros dois molhos. Ao fim, temos que

$$
\left.\begin{array}{ccccc}
5y_1 & + & 2y_2 & \geq & 10 \\
4y_1 & + & 3y_2 & \geq & 7 \\
y_1 & + & 5y_2 & \geq & 15
\end{array}\right\} \leftarrow \text{vantagem do vendedor}
$$

Já o comprador quer minimizar seus gastos ao adquirir a empresa de molhos.

Seja y_1 o valor que ele desembolsará para comprar cada kg de ketchup e y_2 por cada kg de mostarda.

Então, temos que o comprador deseja

$$\min \quad z = 80y_1 + 30y_2$$

Ao fim, temos que o comprador deseja otimizar um problema de otimização linear

- Este problema é o dual associado ao problema de produção primal

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\min \ z = & 80y_1 & + & 30y_2 & & & \\
& 5y_1 & + & 2y_2 & \geq & 10 & \\
& 4y_1 & + & 3y_2 & \geq & 7 & \\
& y_1 & + & 5y_2 & \geq & 15 & \\
& & y_i & & \geq & 0, & \forall i \in \{1,2\}
\end{array}
$$

Primal

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & z = & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & \\
 & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq 80 \\
 & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq 30 \\
 & & & & x_i & & & \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\}
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lllllll}
\max & z = & 80y_1 & + & 30y_2 & & \\
 & & 5y_1 & + & 2y_2 & \geq & 10 \\
 & & 4y_1 & + & 3y_2 & \geq & 7 \\
 & & y_1 & + & 5y_2 & \geq & 15 \\
 & & & y_i & & \geq & 0, \quad \forall i \in \{1,2\}
\end{array}
$$

PRIMAL-DUAL: FORMA GERAL

Primal

$$
\begin{array}{llccccccccc}
\min & z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & & \\
& & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
& & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
& & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
& & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
& & x_1, & & x_2, & & \dots & & x_n & \geq & 0
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{llccccccccc}
\max & z = & b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & \dots & + & b_my_m & & \\
& & a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \dots & + & a_{1n}y_m & \geq & c_1 \\
& & a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \dots & + & a_{2n}y_m & \geq & c_2 \\
& & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
& & a_{n1}y_1 & + & a_{n2}y_2 & + & \dots & + & a_{nm}y_m & \geq & c_n \\
& & y_1, & & y_2, & & \dots & & y_m & \geq & 0
\end{array}
$$