MODELAGEM DE PROBLEMAS USANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR

DCE692 - Pesquisa Operacional

Atualizado em: 27 de julho de 2021

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

MODELAGEM DE PROBLEMAS

É a *arte* de descrever um problema de otimização como um conjunto de equações

- Função objetivo
- Variáveis
- Restrições

Como estamos trabalhando com Programação Linear, então temos que garantir que

- Variáveis pertencem ao domínio dos reais ($\mathbb{R}$)
- Função objetivo e restrições são lineares

MODELAGEM DE PROBLEMAS

Como toda arte, a modelagem de problemas é muito difícil de ser ensinada

- A maneira mais simples é através da prática, de exemplos e de observação

Deste modo, vamos tentar aprender modelagem através de exemplos!

- Problema da dieta
- Problema de corte
- Problema do transporte
- Linha de produção
- Escala de funcionários

PROBLEMA DA DIETA

Este foi um dos primeiros problemas de Otimização Linear estudados ▸ Link

- Segunda guerra mundial
- Criar um conjunto de refeições baratas
- Requisitos nutricionais eram atendidos

PROBLEMA DA DIETA

Alimento	Porção	Calorias (kcal)	Proteínas (g)	Calcio (mg)	Preço ($)	Limite
Nozes	28 g	110	4	2	30	4
Frango	100 g	205	32	12	240	3
Ovos	2 (grandes)	160	13	54	130	2
Leite	237 ml	160	8	285	90	8
Bolo	170 g	420	4	22	200	2
Feijão	260 g	260	14	80	60	2

PROBLEMA DA DIETA

Conjuntos:

F Conjunto de alimentos
N Conjunto de nutrientes

Parâmetros:

a_{ij} Quantidade do nutriente j no alimento i, $\forall i \in F, j \in N$
c_i Custo de uma porção do alimento i, $\forall i \in F$
m_j Requisito mínimo do nutriente j, $\forall j \in N$

Variáveis:

$x_i \geq 0$ Quantidade servida do alimento i, $\forall i \in F$

PROBLEMA DA DIETA

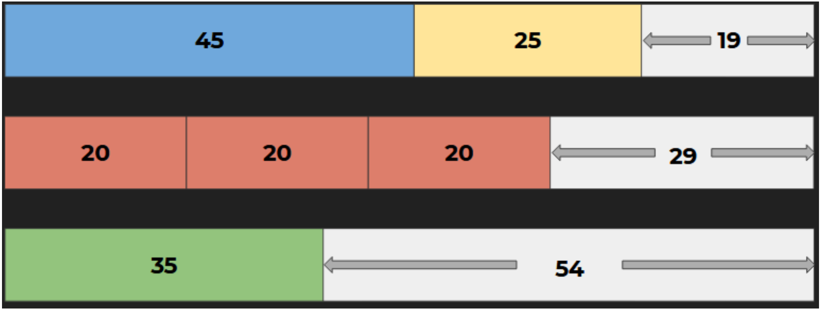
$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in F} x_i c_i \\
& \sum_{i \in F} x_i a_{ij} \geq m_j, \quad \forall j \in N \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in F
\end{aligned}
$$

PROBLEMA DO CORTE DE PRODUTOS

Problema do corte de produtos teve suas origens na indústria de papéis ▸ Link

- Rolos de papel muito grandes, de dimensões fixas
- Deve-se cortar estes rolos em itens menores
  - Diferentes tamanhos
  - 1D
- O objetivo é cortar todos os itens pedidos
  - Minimizar a quantidade de perda de papel

PROBLEMA DO CORTE DE PRODUTOS



PROBLEMA DO CORTE DE PRODUTOS

Conjuntos:

I Conjunto de tamanho dos pedidos
J Conjunto de padrões de corte

Parâmetros:

a_{ij} Número de itens de tamanho i no padrão j, $\forall i \in I, j \in J$
b_i Demanda por itens de tamanho i, $\forall i \in I$

Variáveis:

$x_j \in \mathbb{I}_{\geq 0}$ Número de padrões de corte j utilizados, $\forall j \in J$

PROBLEMA DO CORTE DE PRODUTOS

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \textstyle\sum_{j \in J} x_j \\
& \textstyle\sum_{j \in J} x_j a_{ij} \geq b_i, \quad \forall i \in I \\
& x_j \geq 0 \quad \forall j \in J
\end{aligned}
$$

PROBLEMA DO TRANSPORTE

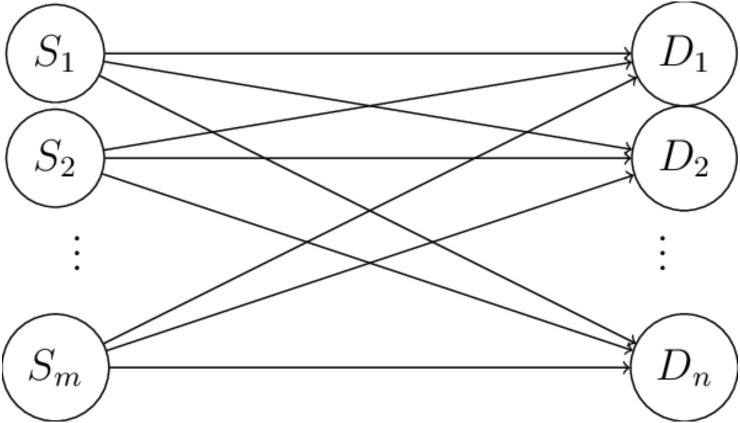
Uma empresa produz um produto em diversas fábricas Link

- Diferentes clientes demandam os produtos

O objetivo é entregar os produtos a todos os clientes

- Atender a todas as demandas
- Minimizar os custos de entrega
  - Dependentes da distância entre a fábrica e o cliente

PROBLEMA DO TRANSPORTE



PROBLEMA DO TRANSPORTE

Conjuntos:

F Conjunto de fábricas
C Conjunto de clientes

Parâmetros:

a_i Produção disponível na fábrica i, $\forall i \in F$
b_j Demanda do cliente j, $\forall j \in C$
c_{ij} Custo de entrega entre a fábrica i e o cliente j, $\forall i \in F, j \in C$

Variáveis:

$x_{ij} \geq 0$ Volume de entregas da fábrica i para o cliente j, $\forall i \in F, j \in C$

PROBLEMA DO TRANSPORTE

$$\min \quad \sum_{i \in F} \sum_{j \in C} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in C} x_{ij} &\leq a_i, && \forall i \in I \\ \sum_{i \in F} x_{ij} &\geq b_j && \forall j \in J \\ x_{ij} &\geq 0 && \forall i \in F, j \in C \end{aligned}$$

ESCALA DE FUNCIONÁRIOS

Uma companhia aérea deseja abrir novas rotas

- Origem ou destino em seu aeroporto base

Para isto, é necessário contratar mais funcionários

- Alocar funcionários nas novas rotas
  - Dependente do horário das rotas

Vamos fazer um pouco diferente desta vez...

- Vamos mostrar um caso numérico!

ESCALA DE FUNCIONÁRIOS

	Turno					
Horários	1	2	3	4	5	Funcionários necessários
6-8	x					48
8-10	x	x				79
10-12	x	x				65
12-14	x	x	x			87
14-16		x	x			64
16-18			x	x		73
18-20			x	x		82
20-22				x		43
22-24				x	x	52
24-06					x	15
Custo	170	160	175	180	195	

ESCALA DE FUNCIONÁRIOS

Considere a variável

$x_i \geq 0$ Número de funcionários alocados no turno $i, \quad i \in \{1,2,3,4,5\}$

PROBLEMA DO CORTE DE PRODUTOS

$$
\begin{array}{llrr}
\min & 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5 & & \\
& x_1 & \geq 48 & (6-8) \\
& x_1 + x_2 & \geq 79 & (8-10) \\
& x_1 + x_2 & \geq 65 & (10-12) \\
& x_1 + x_2 + x_3 & \geq 87 & (12-14) \\
& x_2 + x_3 & \geq 64 & (14-16) \\
& x_3 + x_4 & \geq 73 & (16-18) \\
& x_3 + x_4 & \geq 82 & (18-20) \\
& x_4 & \geq 43 & (20-22) \\
& x_4 + x_5 & \geq 52 & (22-24) \\
& x_5 & \geq 15 & (24-6) \\
& x_i & \geq 0 & i \in \{1,2,3,4,5\}
\end{array}
$$

OUTROS PROBLEMAS

Problema de atribuição de tarefas

- Resolvido como um problema de transporte

Problema do máximo fluxo em redes

- Um caso mais específico (e difícil) do problema de transporte