ALGORITMO SIMPLEX
DCE692 - Pesquisa Operacional

Atualizado em: 4 de setembro de 2023

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

PROGRAMAÇÃO LINEAR

Problemas de programação linear são descritos utilizando um conjunto de equações lineares

- Função objetivo
- Variáveis
- Restrições

É possível representar graficamente um problema de programação linear

- 3 variáveis
- Poucas restrições

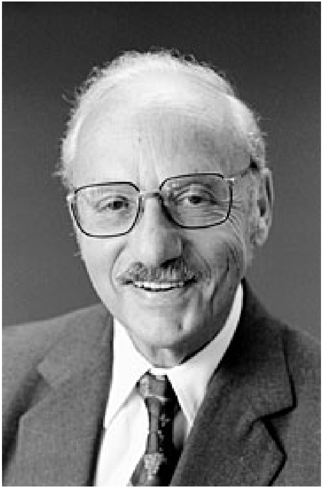
E problemas maiores?

- Algoritmo Simplex!

ALGORITMO SIMPLEX

Criado por George Dantzig em 1940s

- Inicialmente, feito como um trabalho de uma disciplina
- Usado para resolver sistemas de equações lineares



O Simplex (e demais trabalhos) renderam uma série de prêmios para Dantzig

- Prêmio Teoria John von Neumann (1975)
- Medalha Nacional de Ciências (1975)
- Prêmio Harvey (1985)
- Prêmio Harold Pender (1995)

Durante seu desenvolvimento, Dantzig viu a oportunidade de minimizar/maximizar uma função objetivo

- Assim, ao invés de simplesmente resolver sistemas lineares, foi possível otimizar a solução destes sistemas

Assim, nascia a programação linear!

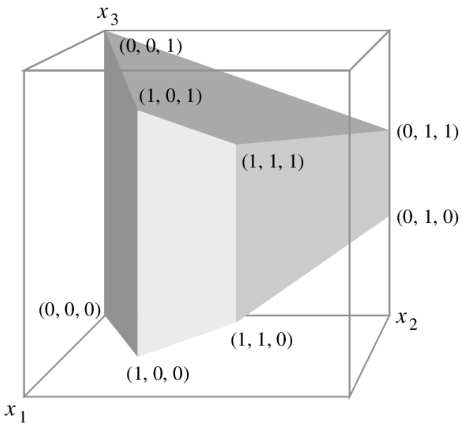
COMPLEXIDADE DO ALGORITMO SIMPLEX

Problemas de programação linear podem ser resolvidos em tempo polinomial

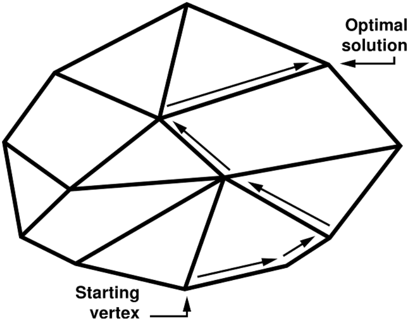
Entretanto, o Simplex é um algoritmo exponencial! ▸ Link

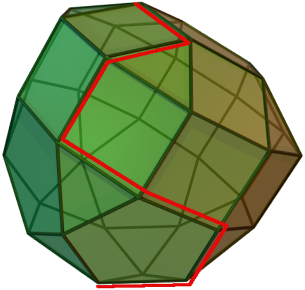
- Demonstrado em um caso extremamente particular
- Politopo de Klee–Minty

No caso médio, ele tem tempo polinomial



VISUALIZAÇÃO DO ALGORITMO SIMPLEX





PASSOS DO ALGORITMO SIMPLEX

1. Obter um problema de programação linear na forma padrão
2. Obter uma solução básica viável
3. Teste de otimalidade
4. Caso a solução não seja ótima
   - Verificar qual variável não-básica pode entrar na base
   - Qual variável básica irá sair da base
5. Realizar operações de pivoteamento
   - Seleciona uma nova soluçao básica viável

SOLUÇÃO BÁSICA VIÁVEL

Uma soluçao básica viável é um conjunto de variáveis que satisfaz todas as restrições do problema

Um pouco difícil de definir com as variáveis x

Entretanto, é muito fácil encontrar uma solução básica viável utilizando as variáveis de folga y

RELEMBRANDO A AULA PASSADA

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax + y &= b \\ & x &\geqslant 0 \\ & y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

$$x^T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$b^T = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y_m \end{bmatrix}$$

Representação matricial

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ & Ax + y & = b \\ & x & \geqslant 0 \\ & y & \geqslant 0 \end{array}$$

Representação extendida

$$\begin{array}{lccccccccccc} \min & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + & \dots & + & c_n x_n & & & & \\ & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \dots & + & a_{1n} x_n & + & y_1 & = & b_1 \\ & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \dots & + & a_{2n} x_n & + & y_2 & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \dots & + & a_{mn} x_n & + & y_m & = & b_m \\ & x_1, & & x_2, & & \dots & & x_n & & & \geqslant & 0 \end{array}$$

SOLUÇÃO BÁSICA

Uma solução básica inicial pode ser formada por todas as variáveis de folga y

Entretanto, deve-se observar o sinal delas

Caso a variável seja positiva, não é preciso tomar nenhuma medida

Caso a variável seja negativa, é preciso de um outro algoritmo

- Assunto para nossa próxima aula
- Por hora, vamos assumir que todas são positivas

TABLEAU SIMPLEX

Vamos montar nosso *tableau*

variáveis do problema (incluindo as variáveis de folga)

$$
\begin{array}{cccc|c|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & -z & b \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & b_1 \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & 0 & b_i \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & b_m \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 1 & 0
\end{array}
$$

matriz de restrições

termos independentes

coeficientes de custo (função-objetivo)

TABLEAU SIMPLEX - EXEMPLO

Considere o problema abaixo em sua forma inicial e sua forma padrão, além de seu *tableau*

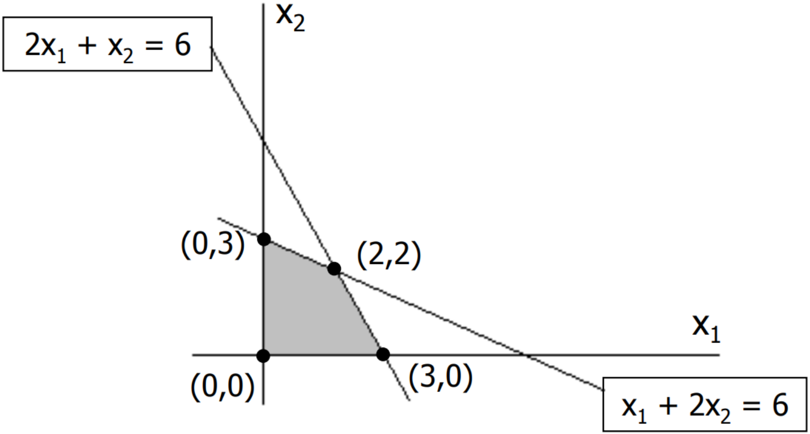
$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

forma padrão:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

x1	x2	x3	x4	-z	b
1	2	1	0	0	6
2	1	0	1	0	6
-1	-1	0	0	1	**0**

TABLEAU SIMPLEX - EXEMPLO



MÉTODO SIMPLEX - EXEMPLO

Solução básica viável (SBV) = $\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6, x_4 = 6\}$

- As variáveis básicas são x_4 e x_4
- Vetores-coluna das variáveis básicas constituem uma matriz identidade

Neste caso, o valor da função objetivo (FO) é $z = -x_1 - x_2 = 0$

x1	x2	x3	x4	-z	b
1	2	1	0	0	6
2	1	0	1	0	6
-1	-1	0	0	1	**0**

valor de –z (negativo do valor da FO)

MÉTODO SIMPLEX - EXEMPLO

O próximo passo é adicionar as variáveis básicas a nossa tabela

variáveis básicas

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	1	2	1	0	0	6
x_4	2	1	0	1	0	6
-z	-1	-1	0	0	1	0

A partir de agora, devemos pensar

- O que fazer para melhorar o valor da função objetivo?

Para fazermos isto, devemos aumentar o valor das variáveis não-básicas que possam melhorar a função objetivo

- Em nosso caso, são as variáveis x_1 e x_2

Ambas as variáveis tem a mesma contribuição para a função objetivo

- Assim, podemos escolher qualquer uma delas
- Para prosseguirmos, vamos escolher x_1
- Além disso, vamos manter $x_2 = 0$
  - A ideia é trabalhar com uma variável por vez

MÉTODO SIMPLEX - EXEMPLO

Seja $x_1 = \lambda \geq 0$. Qual é o maior valor de λ que atende a todas as nossas restrições?

- $x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$
- $2x_1 + x_2 + x_4 = 6$
- Lembrem-se que $x_2 = 0, x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$

Temos que

- $\lambda + (2 * 0) + x_3 = 6 \longrightarrow x_3 = 6 - \lambda$
- $2\lambda + 0 + x_4 = 6 \longrightarrow x_4 = 6 - 2\lambda$

O maior valor de λ que satisfaz ambas as restrições é $\lambda = 3$

- Este valor é na restrição relativa a x_4
- Desta forma, temos que x_1 entra na SBV e x_4 sai
- O valor da função objetivo passa a ser $z = -x_1 - x_2 = -3$

MÉTODO SIMPLEX - EXEMPLO

Agora que x_1 e x_3 fazem parte da SBV, é necessário que os vetores-coluna relacionados a ambas as variáveis formem uma matriz identidade

Para isto, devemos

- Identificar o pivô
- Realizar operações de Eliminação de Gauss para transformar o vetor-coluna de x_1 para eliminar seus coeficientes
  - Exceto o coeficiente do pivô

Em nosso caso, o pivô é como abaixo

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	1	2	1	0	0	6
x_4	2	1	0	1	0	6
-z	-1	-1	0	0	1	0

MÉTODO SIMPLEX - EXEMPLO

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	1	2	1	0	0	6
x_4	2	1	0	1	0	6
-z	-1	-1	0	0	1	0

- Linha de x_4 é dividida por 2 para obtermos o coeficiente 1 no pivô
- Subtrair a linha de x_3 da linha de x_4
- Subtrair a linha de $-z$ da linha de x_4

Tabela inicial

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	1	2	1	0	0	6
x_4	2	1	0	1	0	6
-z	-1	-1	0	0	1	0

Novo *tableau*. Note que as colunas de x_1 e x_3 formam uma matriz-identidade

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	0	3/2	1	-1/2	0	3
x_1	1	1/2	0	1/2	0	3
-z	0	-1/2	0	1/2	1	$\boxed{3}$

Notar que –z = 3, ou seja, **z = -3**

MÉTODO SIMPLEX - EXEMPLO

Ainda é possível melhorar o valor da função objetivo

- Para isto, devemos
  1. Escolher uma variável para entrar na SBV
  2. Escolher uma variável para sair da SBV
  3. Realizar nova operação de pivoteamento

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	0	3/2	1	-1/2	0	3
x_1	1	1/2	0	1/2	0	3
-z	0	-1/2	0	1/2	1	3

MÉTODO SIMPLEX - EXEMPLO

Ainda é possível melhorar o valor da função objetivo

- Para isto, devemos
  1. Escolher uma variável para entrar na SBV
  2. Escolher uma variável para sair da SBV
  3. Realizar nova operação de pivoteamento

Nosso novo pivô está marcado abaixo

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	0	3/2	1	-1/2	0	3
x_1	1	1/2	0	1/2	0	3
-z	0	-1/2	0	1/2	1	3

MÉTODO SIMPLEX - EXEMPLO

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	b
x_3	0	3/2	1	-1/2	0	3
x_1	1	1/2	0	1/2	0	3
$-z$	0	-1/2	0	1/2	1	3

1. Dividir o valor da linha de x_1 pelo valor do pivô
2. Subtrair metade do valor da primeira linha à segunda linha
3. Adicionar metade do valor da primeira linha à última linha

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	b
x_2	0	1	2/3	-1/3	0	2
x_1	1	0	-1/3	2/3	0	2
$-z$	0	0	1/3	1/3	1	4

O valor da função objetivo agora é ótima

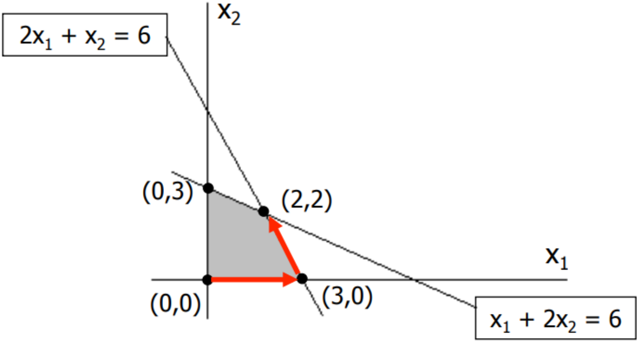
- Não existe nenhum coeficiente negativo na linha $-z$
- A SBV é $\{x_1 = 2, x_2 = 2\}$
- O valor da função objetivo é -4

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_2	0	1	2/3	-1/3	0	2
x_1	1	0	-1/3	2/3	0	2
-z	0	0	1/3	1/3	1	4

MÉTODO SIMPLEX - INTERPRETAÇÃO

Notem que o método Simplex percorreu os vértices de nossa solução gráfica

1. $SBV_1 = \{0,0,6,6\}$
2. $SBV_2 = \{3,0,3,0\}$
3. $SBV_3 = \{2,2,0,0\}$



MÉTODO SIMPLEX - CONSIDERAÇÕES

No *tableau*, os custos referentes às variáveis básicas devem ser iguais a zero

Os demais valores da linha de custos são denominados **coeficientes de custo relativo**.

- O termo *relativo* é utilzado porque os valores destes coeficientes dependem do vetor-base escolhido
- Os valores destes coeficientes correspondem a quanto é possível alterar o valor da função objetivo para cada alteração unitária da variável não-básica correspondente
    - Isto sempre mantendo a viabilidade da SBV

MÉTODO SIMPLEX - CONSIDERAÇÕES

Toda variável não-básica com valor negativo na linha $-z$ é uma candidata a entrar na SBV

Pode-se escolher

- A de menor valor
- Uma aleatória
- A primeira variável encontrada com valor negativo

Não existe melhor opção

- Caso o problema seja muito grande (milhões de variáveis), inspecionar todas elas é inviável

MÉTODO SIMPLEX - OUTRO EXEMPLO

max	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$
s.a	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15$
	$2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20$
	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$
	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

forma padrão

min	$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$
s.a	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15$
	$2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20$
	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 10$
	$x_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, 7)$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_5	1	2	3	0	1	0	0	15
x_6	2	1	5	0	0	1	0	20
x_7	1	2	1	1	0	0	1	10
-FO	-1	-2	-3	1	0	0	0	0

MÉTODO SIMPLEX - OUTRO EXEMPLO

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	razões
x_5	1	2	3	0	1	0	0	15	15/3 = 5
x_6	2	1	5	0	0	1	0	20	20/5 = 4 $\Leftarrow \theta$
x_7	1	2	1	1	0	0	1	10	10/1 = 10
-FO	-1	-2	-3	1	0	0	0	0	

variável que sai: linha do pivô

variável que entra: coluna do pivô

pivô = 5

Variável que entra é a variável não-básica que possui o menor valor associado na última linha

Variável que sai é aquela que com a menor razão computada

MÉTODO SIMPLEX - OUTRO EXEMPLO

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	razões
x_5	-1/5	7/5	0	0	1	-3/5	0	3	3/(7/5) = 15/7
x_3	2/5	1/5	1	0	0	1/5	0	4	4/(1/5) = 20
x_7	3/5	9/5	0	1	0	-1/5	1	6	6/(9/5) = 30/9
-FO	1/5	-7/5	0	1	0	3/5	0	12	

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	0	15/7
x_3	15/35	0	1	0	-5/35	10/35	0	25/7
x_7	30/35	0	0	1	-45/35	20/35	1	15/7
-FO	0	0	0	1	1	0	0	15

MÉTODO SIMPLEX - OUTRO EXEMPLO

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	0	15/7
x_3	15/35	0	1	0	-5/35	10/35	0	25/7
x_7	30/35	0	0	1	-45/35	20/35	1	15/7
-FO	0	0	0	1	1	0	0	15

- A SBV $\left\{0, \frac{15}{7}, \frac{25}{7}, 0, 0, 0, \frac{15}{7}\right\}$ é ótima
- $z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2\frac{15}{7} - 3\frac{25}{7} = -15$