REPRESENTAÇÃO E SOLUÇÃO GRÁFICA

DCE692 - Pesquisa Operacional

Atualizado em: 26 de agosto de 2023

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

MÉTODO GRÁFICO

O método gráfico é eficiente para resolver pequenos problemas de otimização

- Duas variáveis
- Pequeno número de restrições

Necessário conhecimentos básicos em geometria analítica

- Equação geral da reta
- Interseção entre retas

EQUAÇÃO GERAL DA RETA

A equação geral de uma reta pode ser representada por

$$ax + by + c = 0,$$

onde a, b e c são constantes. Além disso, x e y são valores que não podem ser simultanemente nulos.

Também podemos representar uma reta utilizando sua equação reduzida ou segmentária

- Estas duas formas não nos serão úteis aqui

ENCONTRANDO A EQUAÇÃO GERAL DA RETA

De forma genérica, podemos dizer que uma reta é definida por dois únicos pontos

- Podemos utilizar desta propriedade para encontrar sua equação geral
- Utilização de determinante

Seja $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ dois pontos

Seja $C = (x, y)$ um terceiro ponto genérico

Pode-se encontrar a equação geral da reta resolvendo o determinante ao lado

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

COMO RESOLVER UM DETERMINANTE

Nós vamos **sempre** lidar com matrizes $3x3$.

Podemos utilizar três bons métodos para obter o determinante destas matrizes

- Expansão de Laplace
- Regra de Sarrus
- Calculadora científica

Além destes três, existem diversos outros métodos na literatura

- Qualquer método válido pode ser utilizado

EXPANSÃO DE LAPLACE

A Expansão de Laplace computa o determinante de uma matriz utilizando os determinantes de suas sub-matrizes, conhecidas como *minors*.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Basta resolver os pequenos determinantes das *minors* e você terá o resultado do determinante

EXPANSÃO DE LAPLACE - EXEMPLO

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$x(3-9) - y(2-4) + 1(18-12) =$$

$$-6x + 2y + 6 = 0.$$

Caso necessário, podemos computar a equação reduzida da reta isolando o termo y:

$$y = 3x - 3$$

REGRA DE SARRUS

A Regra de Sarrus é uma técnica mnemônica para auxiliar na resolução de determinantes de matrizes $3x3$

Ela pode ser realizada em três passos

1. Expansão (vertical ou horizontal) da matriz original
2. Multiplicação de suas diagonais
3. Resolução do cálculo obtido

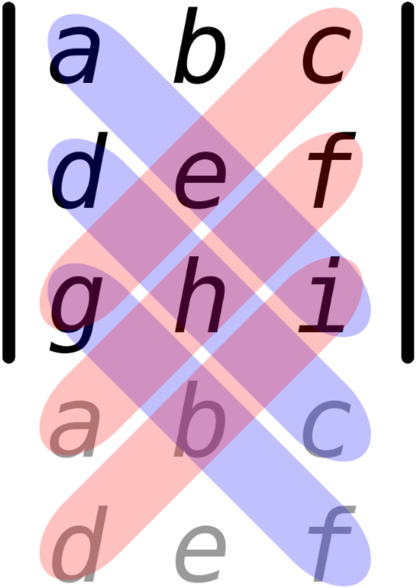
REGRA DE SARRUS

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi$$

O determinante acima pode ser obtido fazendo a expansão abaixo e multiplicando as diagonais

$$\begin{array}{|ccc|} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ \hline a & b & c \\ d & e & f \end{array}$$

$$+aei$$
$$+dhc$$
$$+gbf$$
$$-gec$$
$$-ahf$$
$$-dbi$$



REGRA DE SARRUS - EXEMPLO

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ \hline x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3x + 18 + 4y - 12 - 9x - 2y = -6x + 2y + 6 = 0.$$

INTERSEÇÃO DE RETAS

Para obtermos a interseção entre duas retas, basta resolver um sistema linear dado por suas duas equações gerais

Considere as retas

- $-6x + 2y + 6 = 0$
- $3x + y + 1 = 0$

Podemos montar o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} -6x & + & 2y & + & 6 & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 1 & = & 0 \end{cases}$$

INTERSEÇÃO DE RETAS

Resolvendo o sistema de equações do slide anterior pelo método da adição, temos

$$\begin{cases} -6x + 2y + 6 = 0 \\ 3x + y + 1 = 0 \quad (*2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 2y + 6 = 0 \\ 6x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

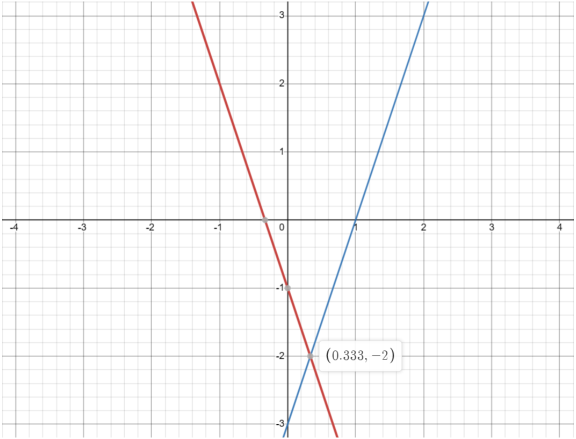
$$4y + 8 = 0$$

$$y = -2$$

INTERSEÇÃO DE RETAS

Substituindo $y = -2$ na equação $3x + y + 1 = 0$, temos que $3x - 2 + 1 = 0$. Então, $3x - 1 = 0$, o que implica que $x = \frac{1}{3}$

- O ponto de interseção é $(\frac{1}{3}, -2)$



RESOLUÇÃO GRÁFICA

Veja o modelo de programação linear abaixo. Vamos encontrar sua solução ótima utilizando o método de resolução gráfica

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2,5x_2 \\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 800 \\ & x_1 + x_2 \geq 170 \\ & 4x_1 + 6x_2 \geq 170 \\ & x_1 \geq 60 \\ & x_2 \geq 80 \end{aligned}$$

Primeiro passo: Considerar as restrições como igualdades

$$4x_1 + 5x_2 = 800$$
$$x_1 + x_2 = 170$$
$$4x_1 + 6x_2 = 170$$
$$x_1 = 60$$
$$x_2 = 80$$

Segundo passo: Computar a interseção de cada restrição com os eixos x_1 e x_2

$4x_1 + 5x_2 = 800$

Se $y = 0$: $4x_1 = 800$

- $x_1 = 200$

Se $x = 0$: $5x_2 = 800$

- $x_2 = 160$

RESOLUÇÃO GRÁFICA

Segundo passo: Computar a interseção de cada restrição com os eixos x_1 e x_2

$4x_1 + 5x_2 = 800$

Se $y = 0$: $4x_1 = 800$

- $x_1 = 200$

Se $x = 0$: $5x_2 = 800$

- $x_2 = 160$

$x_1 + x_2 = 170$

Se $y = 0$: $x_1 = 170$

Se $x = 0$: $x_2 = 170$

Segundo passo: Computar a interseção de cada restrição com os eixos x_1 e x_2

$4x_1 + 5x_2 = 800$

Se $y = 0$: $4x_1 = 800$

- $x_1 = 200$

Se $x = 0$: $5x_2 = 800$

- $x_2 = 160$

$x_1 + x_2 = 170$

Se $y = 0$: $x_1 = 170$

Se $x = 0$: $x_2 = 170$

$4x_1 + 6x_2 = 170$

Se $y = 0$: $4x_1 = 170$

- $x_1 = 42,5$

Se $x = 0$: $6x_2 = 170$

- $x_2 = 28,3$

RESOLUÇÃO GRÁFICA

Segundo passo: Computar a interseção de cada restrição com os eixos x_1 e x_2

$4x_1 + 5x_2 = 800$

Se $y = 0$: $4x_1 = 800$

- $x_1 = 200$

Se $x = 0$: $5x_2 = 800$

- $x_2 = 160$

$x_1 + x_2 = 170$

Se $y = 0$: $x_1 = 170$

Se $x = 0$: $x_2 = 170$

$4x_1 + 6x_2 = 170$

Se $y = 0$: $4x_1 = 170$

- $x_1 = 42,5$

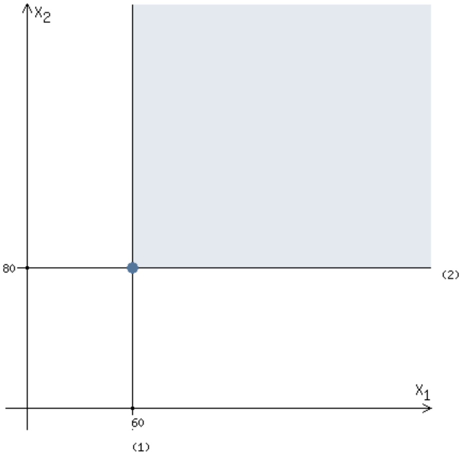
Se $x = 0$: $6x_2 = 170$

- $x_2 = 28,3$

$x_1 = 60$

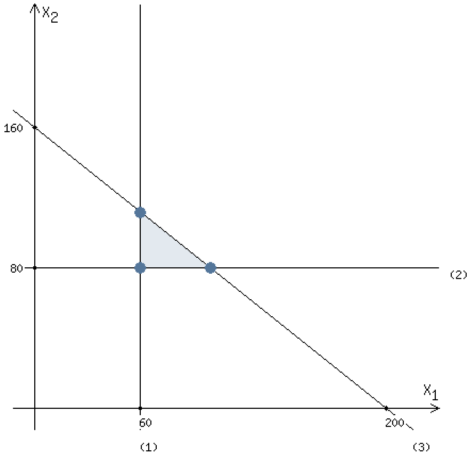
$x_2 = 80$

Vamos plotar os limites inferiores das variáveis

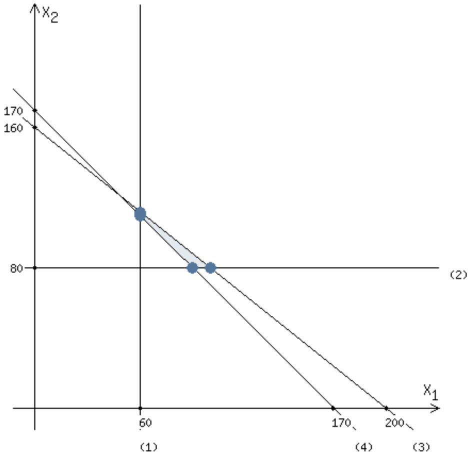


RESOLUÇÃO GRÁFICA

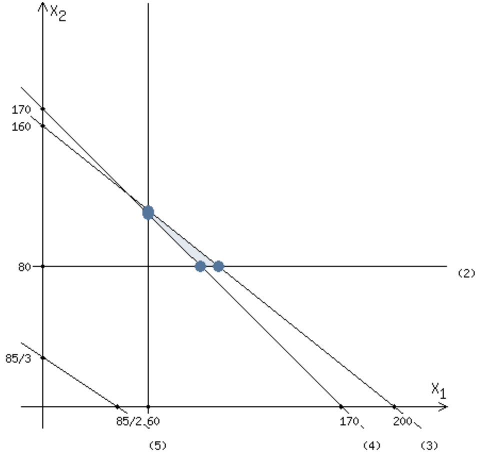
Agora, vamos adicionar a restrição $4x_1 + 5x_2 \leq 800$



Também temos que adicionar a restrição $x_1 + x_2 \geq 170$



Por fim, falta a restrição $4x_1 + 6x_2 \geq 170$



PONTO ÓTIMO

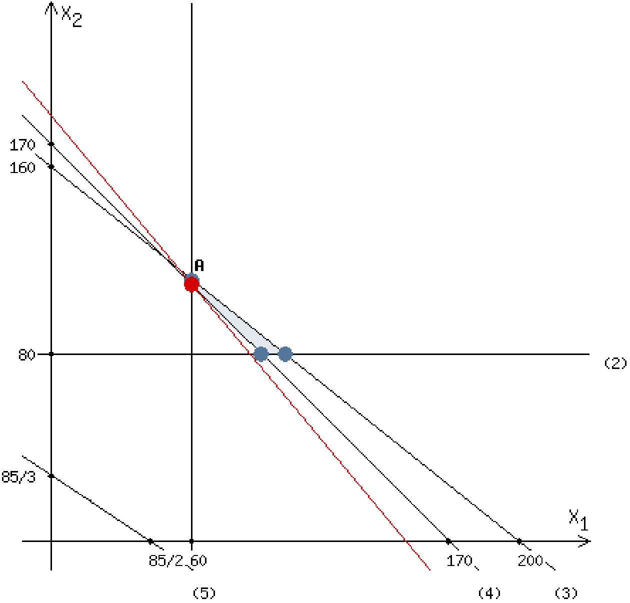
Nosso gráfico resultante tem 4 vértices

- Temos que escolher aquele que induz o melhor valor da função objetivo min $3x_1 + 2,5x_2$

Podemos imaginar uma linha construída pela equação $3x_1 + 2,5x_2 = 0$

- Como esta é uma função de minimização, nós movemos a linha sempre *para baixo* no gráfico
- O último ponto que ela toca é o valor ótimo da função objetivo

PONTO ÓTIMO



PONTO ÓTIMO

Alternativamente, também podemos computar o valor de todos os vértices do gráfico

- Interseção de retas

Substituir todos os pontos na função objetivo

- O ponto ótimo é aquele que melhor otimiza a função objetivo

Em nosso caso, o ponto ótimo é $(60, 110)$

- $3 * 60 + 2,5 * 110 = 455$