PRINCIPAIS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO EM REDES

DCE692 - Pesquisa Operacional

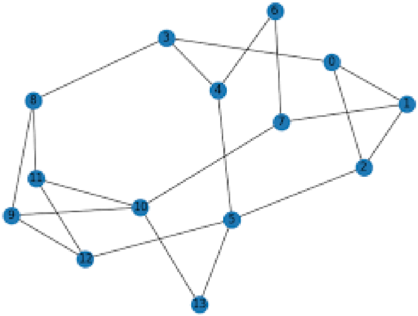
Atualizado em: 16 de outubro de 2023

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

Problemas em redes são aqueles que podem ser representados como uma rede

- Conjunto de elementos
  - Nós
  - Vértices
- Conexões entre os elementos
  - Arcos
  - Arestas



PRINCIPAIS PROBLEMS EM REDES

Existem diversos problemas de otimização em redes

- Alguns podem ser modelados utilizando programação linear
- Outros utilizam programação inteira
  - São problemas NP-Completos

Aqui nós vamos falar de alguns deles

1. **Fluxo em redes**
   - **Fluxo máximo**
   - **Fluxo de custo mínimo**
2. Caminho mínimo
3. Árvore Geradora Mínima

FLUXO MÁXIMO

PROBLEMAS DE FLUXO

Estes problemas abordam o processo de produção

- Produtos tem origem em um ponto do grafo
- Produtos são consumidos em um outro ponto do grafo
- As arestas (ou arcos) indicam as possíveis ligações (caminhos) que o produto pode percorrer

Problemas de fluxo ocorrem naturalmente em diversas aplicações

- Plantas industriais
- Sistemas de comunicação e de transporte
- Distribuição de água e energia
- ...

FLUXO EM REDES

Em redes, problemas de fluxo normalmente são bem definidos

- A oferta de cada produto é conhecida
- A demanda por cada produto é conhecida
- O processo de transporte destes produtos permite pontos intermediários
  - Centros ou depósitos de distribuição
  - Restrições de capacidade nos depósitos
  - Restrições de tráfego e custos entre cada ponto

Podemos definir uma rede $R = (V, A, F, U)$ como um grafo **direcionado** $G = (V, A)$ atravessado por um fluxo

- Vértice **s**: *source* (fonte), origem do fluxo
- Vértice **t**: *terminal* (sumidouro), destino do fluxo

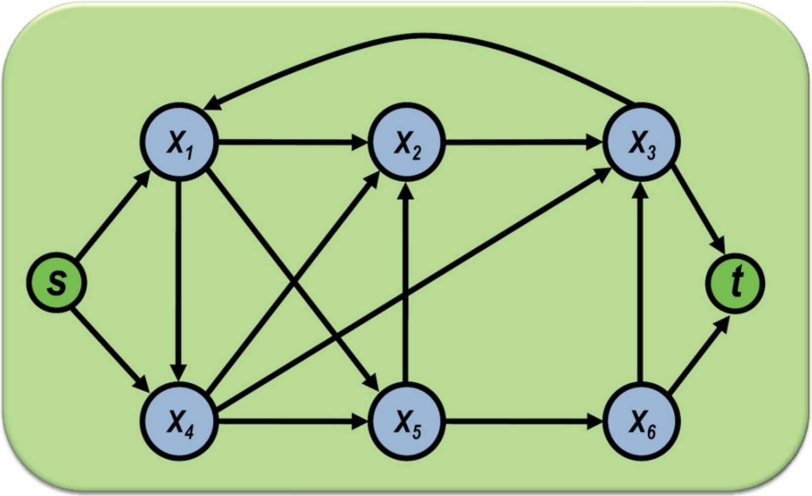
Um fluxo F pode ser definido como $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ circulando pelos $|A| = m$ arcos da rede

- Também pode ser definido como $F = \{f(i,j)\}, (i,j) \in A$

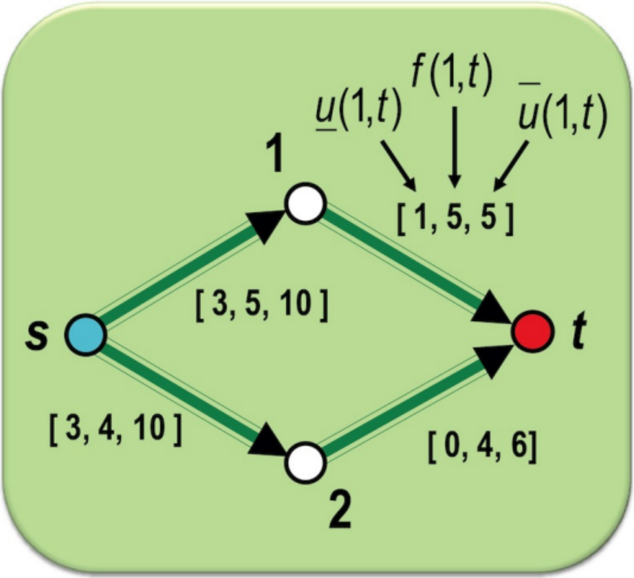
O conjunto $U = \{u(i,j)\}, (i,j) \in A$ é o conjunto de **limites de fluxo** associado aos arcos de A

- $\overline{u}(i,j)$ é o limite máximo
- $\underline{u}(i,j)$ é o limite mínimo

REDE DE FLUXO

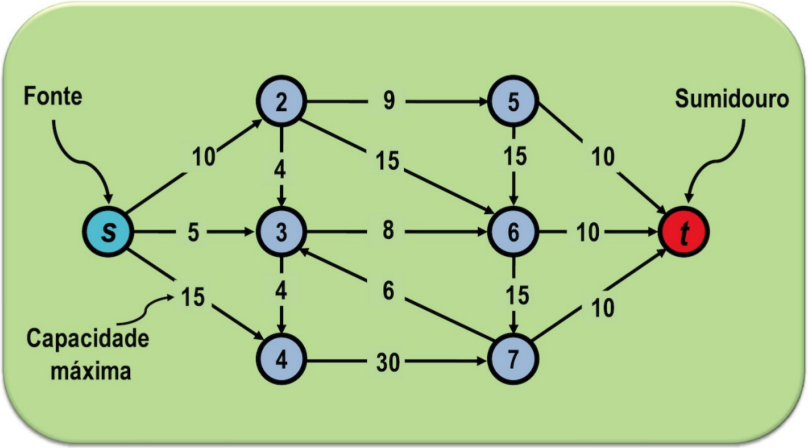


ROTULAÇÃO COM OS LIMITES DE FLUXO



ROTULAÇÃO MAIS COMUM

Inclui somente o fluxo máximo, sendo que o mínimo sempre é zero



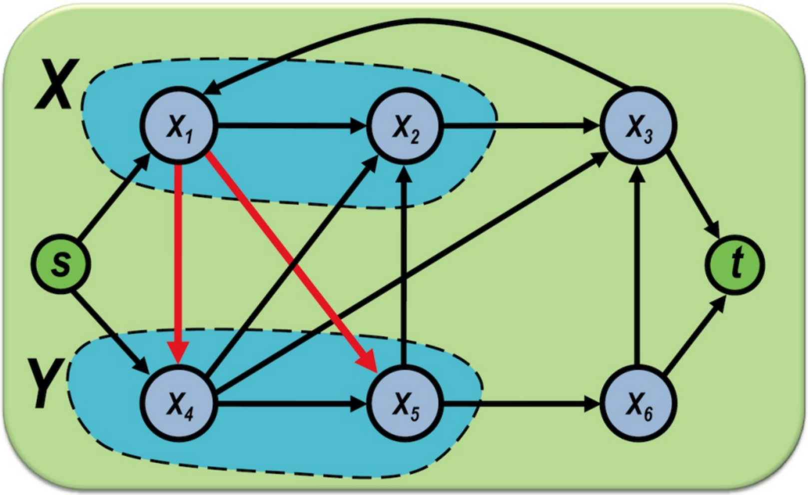
FLUXO ENTRE CONJUNTO DE VÉRTICES

Dado dois subconjuntos de vértices $X, Y \subset V$ de uma rede

- $X \cap Y = \emptyset$
- Fluxo ocorre de X para Y ou vice-versa - $f(X, Y)$ ou $f(Y, X)$

$$f(X, Y) = \sum_{e \in S} f_e \qquad S = \{e | (x_i, x_j), x_i \in X, x_j \in Y\}$$

FLUXO ENTRE CONJUNTO DE VÉRTICES

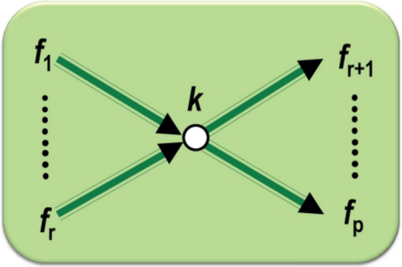


$$f(X,Y) = f(x_1,x_4) + f(x_1,x_5)$$

CONSERVAÇÃO DE FLUXO

O fluxo que sai de um vértice de transbordo deve ser igual ao fluxo que chega neste mesmo vértice

- Primeira lei de Kirchoff
- Vértices que atendem a esta propriedade são chamados de **vértices conservativos**



$$f_1 + \ldots + f_r \quad = \quad f_{r+1} + \ldots + f_p$$

CONSERVAÇÃO DE FLUXO

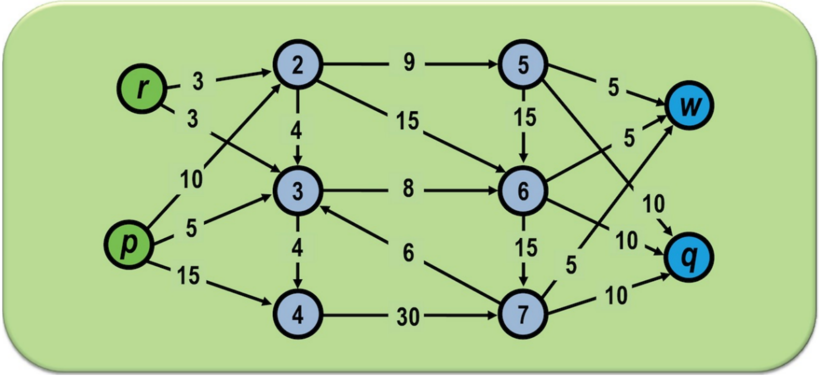
Vértices fonte e sumidouro não atendem a lei de conservação de fluxo

Entretanto, é fácil fazer uma pequena adaptação para fazer com que a lei seja verdade também para s e t

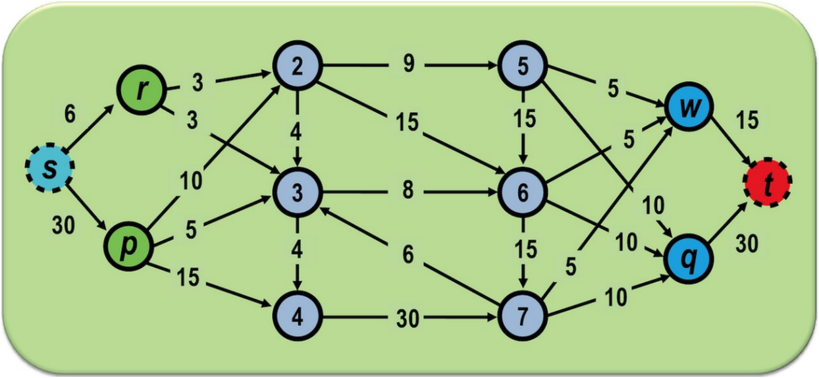
São necessários 2 passos

1. Unificação dos vértices de oferta e dos vértices de consumo
2. Transformação dos novos vértices em vértices conservativos

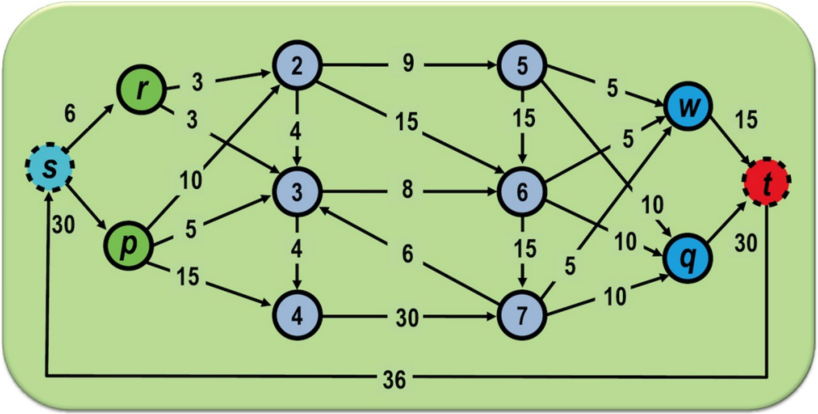
REDE ORIGINAL



PRIMEIRO PASSO



SEGUNDO PASSO



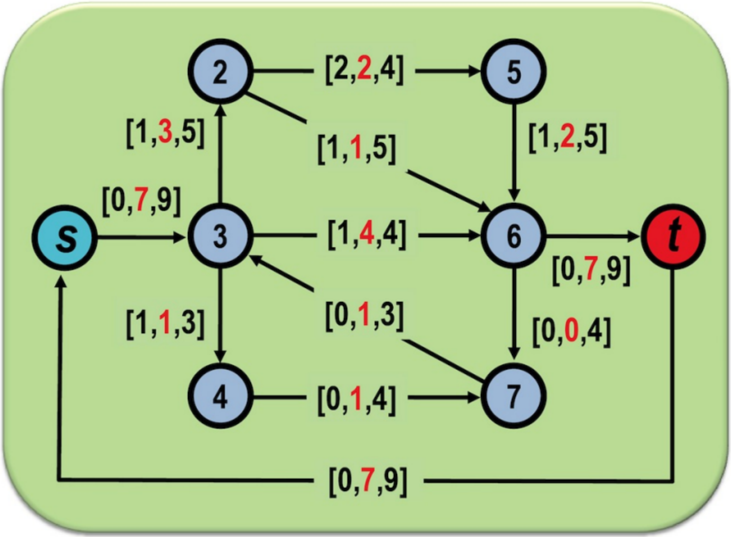
Capacidade do arco: menor valor entre oferta (36) e demanda (45)

FLUXO VIÁVEL

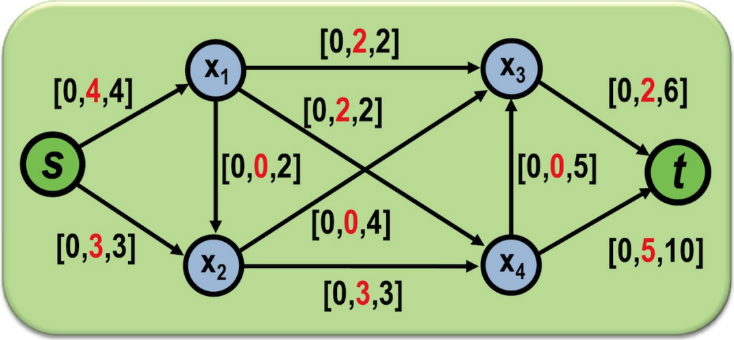
Um fluxo $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ é dito ser viável se

1. É conservativo
2. $\exists\ \underline{u}(i,j) \wedge \overline{u}(i,j)\ \forall (i,j) \in A$
3. $\underline{u}(i,j) \leq f_{ij} \leq \overline{u}(i,j)\ \forall f_{ij} \in F$
4. $0 \leq \underline{u}(i,j) \leq \overline{u}(i,j)\ \forall f_{ij} \in F$

FLUXO VIÁVEL



O **problema do fluxo máximo** consiste em fazer circular a maior quantidade possível de fluxo entre *s* e *t* em uma rede R



O fluxo máximo neste exemplo é igual a 7

Seja $G = (N, A)$ um grafo que representa uma rede de fluxo

- O conjunto N são os vértices
- O conjunto A são os arcos

Todo arco a_{ij} possui uma capacidade máxima $\overline{u}_{ij}$ e uma capacidade mínima $\underline{u}_{ij}$

O problema do fluxo máximo é definido utilizando variáveis $f_{ij} > 0$

- Existe uma variável f_{ij} para todo arco $a_{ij} \in A$

A função objetivo do modelo tenta maximizar o fluxo total da rede

- Isto é equivalente a maximizar a quantidade de fluxo de sai do vértice s

$$\max \quad z = \sum_{v:(s,v)\in A} f_{sv}$$

FLUXO MÁXIMO POR PROGRAMAÇÃO LINEAR

Temos que garantir a viabilidade do fluxo

- Fazemos isto garantindo a conservação do fluxo no grafo

$$\sum_{u \in N} f_{uv} - \sum_{w \in N} f_{vw} = 0, \qquad v \in N \setminus \{s, t\}$$

Também temos que garantir os limites de fluxo em cada arco

- O fluxo não pode ser menor ou maior que os limites de cada arco

$$\underline{u}_{ij} \leq f_{ij} \leq \overline{u}_{ij} \qquad (i,j) \in A$$

Neste tipo de problema, é muito comum que exista somente um limite superior u_{ij} ao invés de limites superiores e inferiores.

Deste modo, é muito comum escrevermos

$$f_{ij} \leq u_{ij} \qquad (i,j) \in A$$

Por fim, devemos dizer que todas as variáveis são reais e positivas

$$f_{ij} > 0 \qquad (i,j) \in A$$

FLUXO MÁXIMO POR PROGRAMAÇÃO LINEAR

O modelo de programação linear de fluxo máximo pode ser descrito como

$$\max \quad z = \sum_{v:(s,v)\in A} f_{sv}$$

$$\sum_{u\in N} f_{uv} - \sum_{w\in N} f_{vw} = 0, \qquad v \in N \setminus \{s,t\}$$

$$f_{vw} \leq u_{vw} \qquad (v,w) \in A$$

$$f_{vw} > 0 \qquad (v,w) \in A$$

FLUXO DE CUSTO MÍNIMO

FLUXO DE CUSTO MÍNIMO

Podemos estar interessados em encontrar maneiras de escoar nossa produção

- Temos uma fábrica que quer entregar seus produtos para diversos clientes

Pode-se modelar este problema utilizando fluxo em redes

- Existe um único vértice de origem s
- Existem múltiplos vértices de destino
  - Cada vértice de destino $v \in N$ tem uma demanda b_v
- Todo arco a_{vw} é associado a um custo c_{vw}

Como resolver isto com programação linear?

FLUXO DE CUSTO MÍNIMO

A função objetivo minimiza o custo do fluxo por cada aresta

$$\min \quad z = \sum_{(v,w)\in A} c_{vw} f_{vw}$$

Temos as restrições de capacidade igual no problema anterior

$$f_{vw} \leq u_{vw} \qquad (v,w) \in A$$

Também temos que as variáveis f_{vw} são reais e positivas

$$f_{vw} > 0 \qquad (v,w) \in A$$

FLUXO DE CUSTO MÍNIMO

Só nos resta suprir as demandas de cada vértice

$$\sum_{u \in N} f_{uv} - \sum_{w \in N} f_{vw} = b_v, \qquad v \in N \setminus \{s, t\}$$

Note que esta restrição é diferente pois o fluxo não é mais conservativo

Ao invés disso, deve-se deixar b_v unidades de fluxo (produtos) em cada vértice

- Simboliza uma entrega sendo realizada

FLUXO DE CUSTO MÍNIMO

O modelo completo do problema de fluxo mínimo é

$$\min \ z = \sum_{(v,w)\in A} c_{vw} f_{vw}$$

$$f_{vw} \leq u_{vw} \qquad (v,w) \in A$$

$$\sum_{u\in N} f_{uv} - \sum_{w\in N} f_{vw} = b_v, \qquad v \in N \setminus \{s,t\}$$

$$f_{vw} > 0 \qquad (v,w) \in A$$

PRÓXIMA AULA:
CAMINHO MÍNIMO
E
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA