DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

DCE692 - Pesquisa Operacional

Atualizado em: 27 de setembro de 2023

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

PROBLEMAS DUAIS

Problemas de programação linear são descritos utilizando um conjunto de equações lineares

- Função objetivo
- Variáveis
- Restrições

Estes são chamados de problemas *primais*

Todo problema de programação linear possui um problema *dual* associado

- Problema de programação linear
- Cada variável do primal torna-se uma restrição no dual
- Cada restrição do primal torna-se uma variável no dual
- Sentido da função objetivo é invertida

PROBLEMAS DUAIS

Primal	Dual
$\min \quad z = cx$	$\max \quad z = yb$
$Ax \leq b$	$yA \leq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

COMO TRANSFORMAR UM PROBLEMA PRIMAL EM UM DUAL

1. A função objetivo do primal e do dual são invertidas
   - Minimização e maximização
2. Os elementos do vetor b do primal são os coeficientes da função objetivo do dual
3. Os elementos do vetor c do primal formam o *rhs* do dual
4. O sentido das restrições são invertidas
   - Restrições de $\leq$ e $\geq$
5. O número de variáveis do dual é igual ao número de restrições do primal
6. O número de restrições do dual é igual ao número de variáveis do dual
7. A matriz A no dual é a transposta de A no primal

PROPRIEDADES DA PROBLEMAS DUAIS

O dual do dual é igual ao problema primal

Primal

$$
\begin{array}{lccccccl}
\min \;\; z = & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & & \\
 & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq 80 & \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq 30 & \\
 & & & x_i & & & \geq 0, & \forall i \in \{1,2,3\}
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lcccccl}
\max \;\; z = & 80y_1 & + & 30y_2 & & & \\
 & 5y_1 & + & 2y_2 & \geq & 10 & \\
 & 4y_1 & + & 3y_2 & \geq & 7 & \\
 & y_1 & + & 5y_2 & \geq & 15 & \\
 & & y_i & & \geq & 0, & \forall i \in \{1,2\}
\end{array}
$$

PROPRIEDADES DE PROBLEMAS DUAIS

Se a k-ésima restriçãodo primal é uma igualdade, então a variável y_k do dual é irrestrita (pertence aos reais)

Primal

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\min \ z = & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & \\
& 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = 80 \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq 30 \\
& & & x_i & & & \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\}
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max \ z = & 80y_1 & + & 30y_2 & & \\
& 5y_1 & + & 2y_2 & \geq & 10 \\
& 4y_1 & + & 3y_2 & \geq & 7 \\
& y_1 & + & 5y_2 & \geq & 15 \\
& & y_1 & & \in & \mathbb{R} \\
& & y_2 & & \geq & 0
\end{array}
$$

PROPRIEDADES DE PROBLEMAS DUAIS

Se a k-ésima restrição do primal é maior ou igual, então a variável y_k do dual é não positiva

Primal

$$\begin{array}{lccccccl}
\min \; z = & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & & \\
 & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq 80 & \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \geq 30 & \\
 & & & x_i & & & \geq 0, & \forall i \in \{1,2,3\}
\end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{lccccc}
\max \; z = & 80y_1 & + & 30y_2 & & \\
 & 5y_1 & + & 2y_2 & \geq & 10 \\
 & 4y_1 & + & 3y_2 & \geq & 7 \\
 & y_1 & + & 5y_2 & \geq & 15 \\
 & & y_1 & & \geq & 0 \\
 & & y_2 & & \leq & 0
\end{array}$$

Se a variável x_n do primal é sem restrição de sinal, então a n-ésima restrição do dual é uma igualdade

Primal

$$
\begin{array}{llllllll}
\min \quad z = & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & \\
 & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq 80 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \geq 30 \\
 & & & x_1, x_2 & & & \geq 0 \\
 & & & x_3 & & & \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{llllll}
\max \quad z = & 80y_1 & + & 30y_2 & & \\
 & 5y_1 & + & 2y_2 & \geq & 10 \\
 & 4y_1 & + & 3y_2 & \geq & 7 \\
 & y_1 & + & 5y_2 & = & 15 \\
 & & y_1, y_2 & & \geq & 0
\end{array}
$$

Se a variável x_n do primal é não-positiva, então a n-ésima restrição do dual é de menor ou igual

Primal

$$\begin{array}{llllllll} \min & z = & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & \\ & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq 80 \\ & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \geq 30 \\ & & & & x_1, x_2 & & & \geq 0 \\ & & & & x_3 & & & \leq 0 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{llllllll} \max & z = & 80y_1 & + & 30y_2 & & \\ & & 5y_1 & + & 2y_2 & \geq & 10 \\ & & 4y_1 & + & 3y_2 & \geq & 7 \\ & & y_1 & + & 5y_2 & \leq & 15 \\ & & & y_1, y_2 & & \geq & 0 \end{array}$$

RESUMO DAS PROPRIEDADES

Primal (min)	$\longrightarrow$	Dual (max)
k-ésima restrição é $\leq$		y_k ≥ 0
k-ésima restrição é =		$y_k \in \mathrm{R}$
k-ésima restrição é $\geq$		$y_k \leq 0$
$x_n \geq 0$		n-ésima restrição é $\geq$
$x_n \in \mathrm{R}$		n-ésima restrição é =
$x_n \leq 0$		n-ésima restrição é ≤ 0
Primal (max)	$\longleftarrow$	Dual (min)

TEOREMA FRACO DA DUALIDADE

Se x for uma solução viável para o problema primal e y for uma solução viável para o problema dual, então[1]

$$cx \geq yb$$

Isto é, o valor da função objetivo do primal sempre é maior ou igual que o valor da função objetivo do dual

Em outras palavras, o valor do dual é um limitante inferior para o valor do primal

[1]Considerando problemas na forma normal

TEOREMA FRACO DA DUALIDADE - PROVA

Temos que $Ax = b$, pois x é uma solução viável

Podemos multiplicar ambos os termos por um vetor y

$$yAx = yb$$

Além disso, sabemos que $yA \leq c$, pois y é viável para o dual

Logo, assumindo que $x \geq 0$, temos que

$$yAx \leq cx$$

Assim, temos que

$$cx \geq yAx = yb$$

Isto quer dizer que $cx \geq yb$ para todas as soluções viáveis x e y

TEOREMA FRACO DA DUALIDADE - COLORÁRIOS

1. Qualquer solução primal viável é um limitante superior para o valor da função objetivo do dual
2. Qualquer solução dual viável é um limitante inferior para o valor da função objetivo do primal
3. Se o primal é viável e sua solução ilimitada, então o dual é inviável
    - Solução ilimitada $\longrightarrow$ Sistema Possível Indeterminado
4. Se o dual é viável e sua solução ilimitada, então o primal é inviável

CONDIÇÃO SUFICIENTE DE OTIMALIDADE

Seja x^* uma solução primal e y^* uma solução dual

- $z(x^*)$ representa o valor da função objetivo do primal
- $z(y^*)$ representa o valor da função objetivo do dual

Se $z(x^*) = z(y^*)$, então ambos x^* e y^* são soluções ótimas

CONDIÇÃO SUFICIENTE DE OTIMALIDADE - PROVA

Pelo teorema fraco da dualidade, sabemos que $z(x) \geq z(y^*)$ para quaisquer solução viável x

Vamos supor que $z(x^*) = z(y^*)$

Então, temos que $z(x) \geq z(x^*)$ para quaisquer solução viável x

Isto implica que x^* é a solução ótima do primal

Pelo teorema fraco da dualidade, sabemos que $z(y) \leq z(x^*)$ para quaisquer solução viável y

Vamos supor que $z(x^*) = z(y^*)$

Então, temos que $z(y) \leq z(y^*)$ para quaisquer solução viável y

Isto implica que y^* é a solução ótima do dual

TEOREMA FORTE DA DUALIDADE

Em par primal-dual

- Se um dos problemas tem uma solução viável ótima
- O segundo problema também tem uma solução viável ótima

Além disso, os valores das funções objetivo são iguais

TEOREMA DA DUALIDADE FORTE - COLORÁRIOS

1. **Forma alternativa do teorema forte da dualidade**: Se ambos os problemas em um par primal-dual têm soluções viáveis, então ambos têm solução ótima e os valores ótimos de ambos os problemas são iguais
2. **Valor objetivo ilimitado**: Se o problema primal (dual) é viável e o problema dual (primal) é inviável, então o problema primal (dual) não pode ter uma solução viável ótima, ou seja, o valor objetivo primal (dual) é ilimitado
3. **Separação dos valores objetivo**: O valor da função objetivo $z(x^*)$ é exatamente igual ao valor da função objetivo $z(y^*)$

EXERCÍCIO

EXERCÍCIO

Deseja-se consumir quantidades de determinados alimentos de tal forma a satisfazer as necessidades mínimas de 2 nutrientes (proteínas e sais minerais) exigidas a um custo mínimo

	Alimentos					Necessidades mínimas de nutrientes (g)
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
Proteínas (g)	3	4	5	3	6	42
Sais minerais (g)	2	3	4	3	3	24
Custos (R$)	25	35	50	33	36	

1. Modele este problema utilizando programação linear
2. Construa o modelo dual
3. Encontre a solução ótima do primal (ou dual)
4. Como você pode provar que a solução é ótima?