GRAFOS E OTIMIZAÇÃO

DCE770 - Heurísticas e Metaheurísticas

Atualizado em: 5 de outubro de 2022

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

GRAFOS

Problemas de otimização em redes são definidos sob grafos

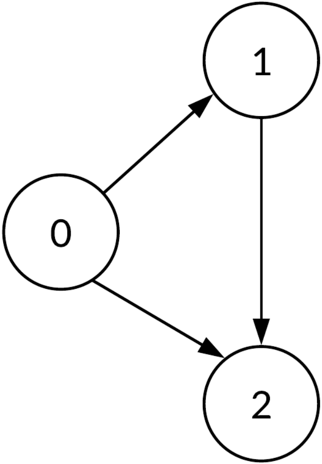
- Uma estrutura de dados especial
- Representação de uma rede
- Talvez seja a estrutura mais útil em toda a Ciência da Computação

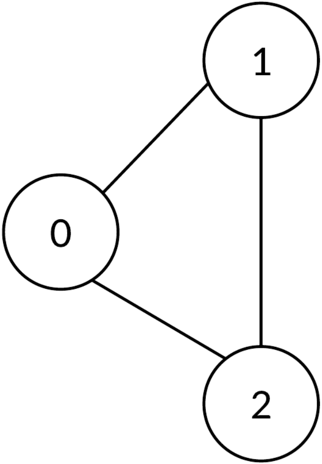
Um grafo G é definido como $G = (V, E)$

- $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é o conjunto de vértices
- $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$
  - $e_i = (u, v) \mid u, v \in V$

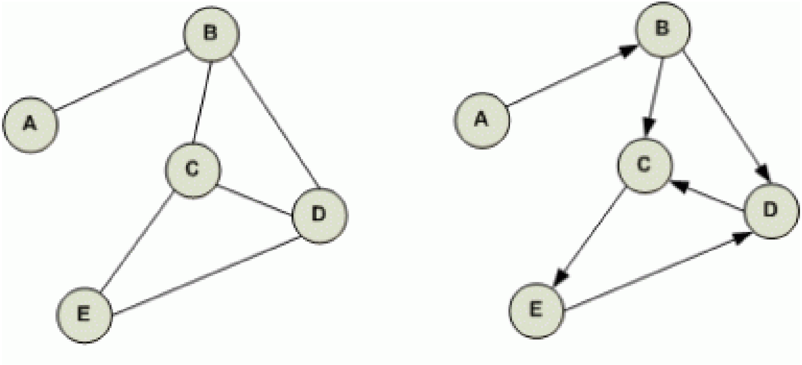
DIREÇÃO

Um grafo pode ser direcionado ou não-direcionado

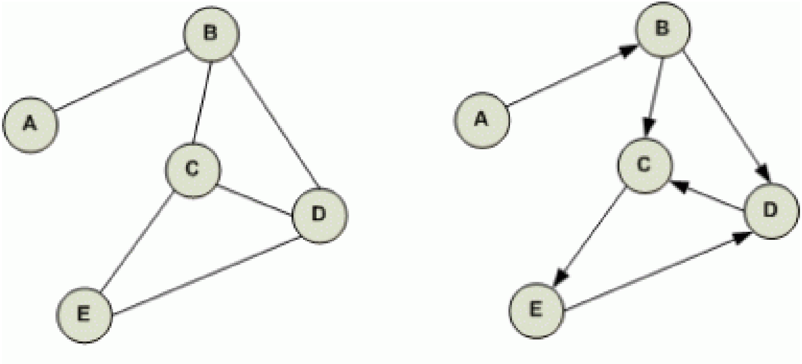




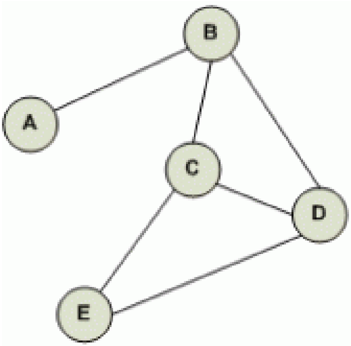
Caminho $C =< c, e, d, c >$

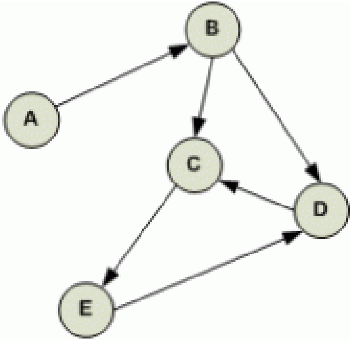


ADJACÊNCIA E GRAU

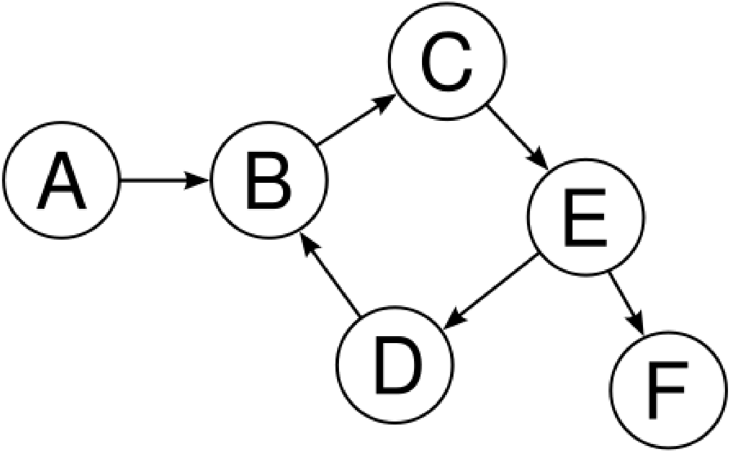


Direto e inverso

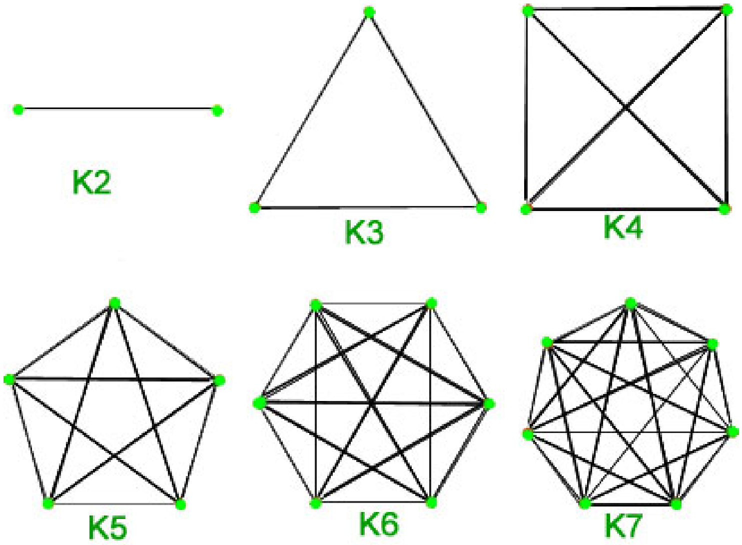




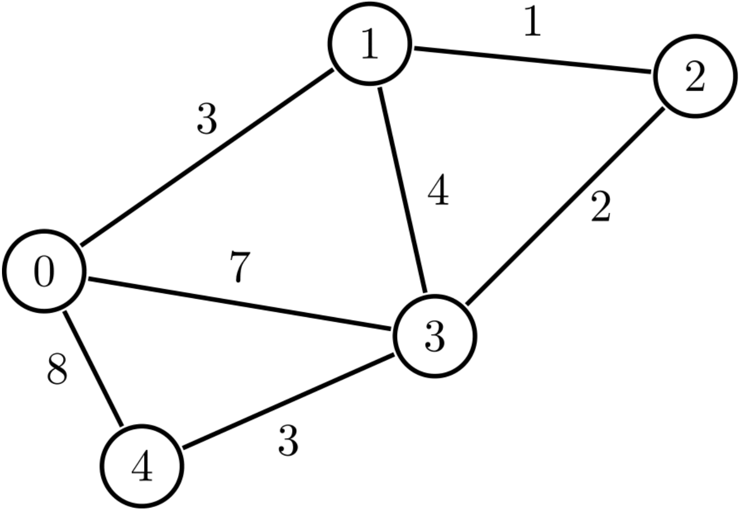
FONTE E SUMIDOURO



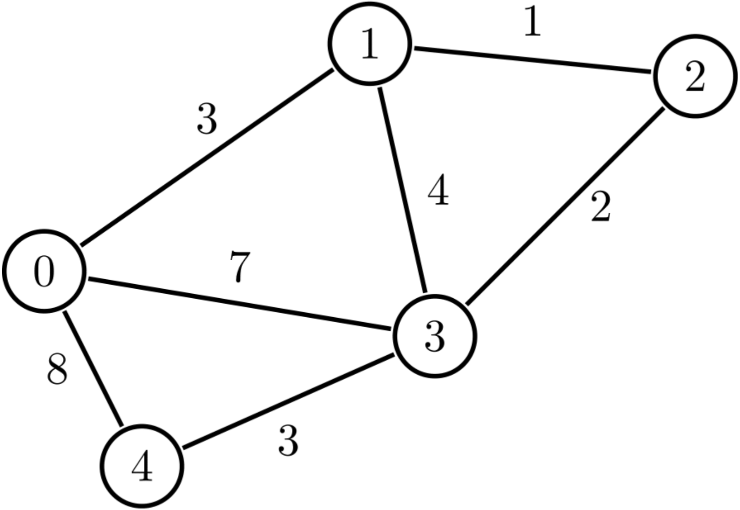
GRAFO COMPLETO



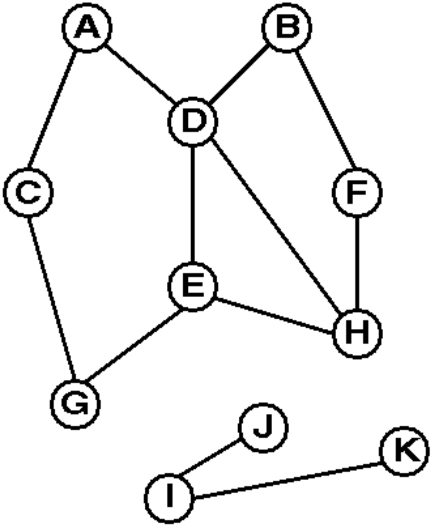
GRAFO COM PESOS



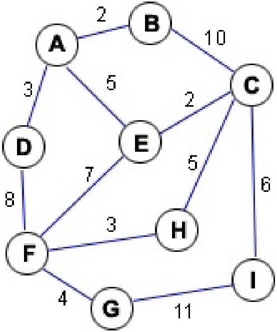
GRAFO CONEXO

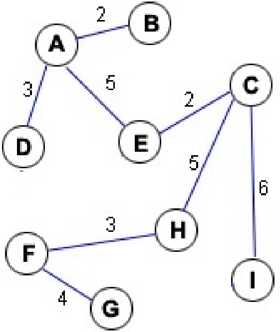


GRAFO DESCONECTADO E COMPONENTES CONEXAS

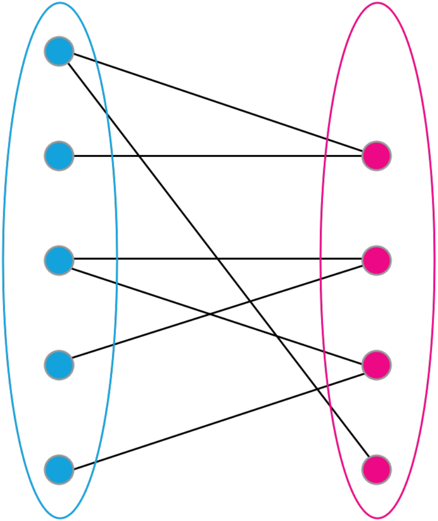


ÁRVORE GERADORA (MÍNIMA)





GRAFO BIPARTIDO



PROPRIEDADES ADICIONAIS

Diversas destas propriedades serão utilizadas no decorrer deste curso

Grafos são uma das estruturas mais importantes em Ciência da Computação, tendo aplicações em uma infinidade de áreas

- Redes
- Biologia
- Eletrônica
- Pesquisa Operacional
- . . . ▸ Link

Interessados em um pouco mais de propriedades de grafos podem acessar o seguinte link ▸ Link

Apesar deste curso ser sobre heurísticas, é muito importante conhecermos conceitos de otimização

- Otimização linear
- Otimização inteira

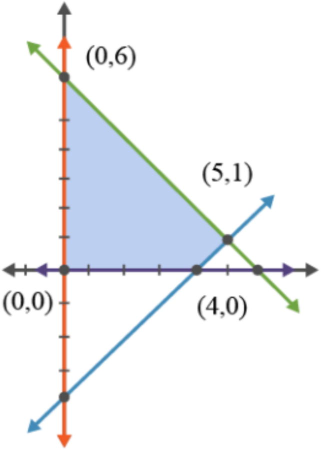
O objetivo da otimização linear é resolver modelos matemáticos lineares

- Sistema de equações lineares
- Uma (ou mais) funções objetivo
- Conjunto de restrições
- Variáveis no domínio dos reais ($\mathbb{R}$)

Deve-se atribuir um valor para cada uma das variáveis do problema de tal forma que

- A função objetivo seja minimizada (ou maximizada)

$$\begin{array}{lll} \min & 2x + y & \\ & x + y & \leq 6 \\ & x - y & \geq 4 \\ & x & \geq 0 \\ & y & \geq 0 \end{array}$$



O principal uso de modelos de programação linear é para otimizar (encontrar o mínimo ou o máximo) de algo

- Maximizar o lucro
- Minimizar as perdas
- Minimizar o tempo gasto
- Minimizar número de funcionários
- Maximizar o número de produtos produzidos
- Minimizar gasto de combustível
- ...

OTIMIZAÇÃO LINEAR

Modelos de otimização linear normalmente tentam representar um problema de mundo real através de um sistema de equações

A **função objetivo** representa aquilo que você quer otimizar

- Minimizar ou maximizar

As **variáveis** representam a tomada de decisão

- Vou utilizar esta rota ou aquela?
- Quantos produtos deste tipo eu vou produzir?

As **restrições** representam as limitações existentes

- Qual é o número máximo de horas por dia que estes funcionários podem trabalhar?
- Quantos metros cúbicos de madeira eu tenho para produzir estes móveis?
- Quantos caminhões eu possuo para fazer entregas?

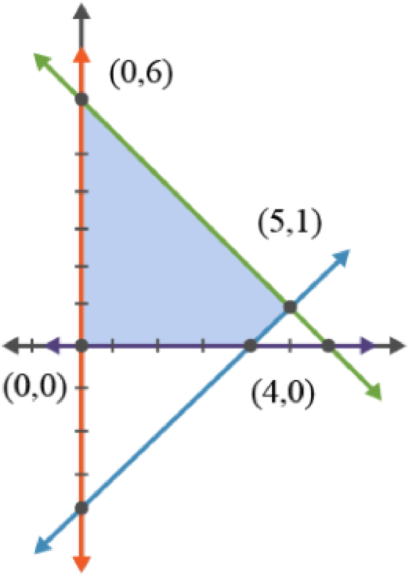
$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x + y \\
& x + y \leq 6 \\
& x - y \geq 4 \\
& x \geq 0 \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

Função objetivo

Restrições

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2\mathbf{x} + \mathbf{y} \\
& \mathbf{x} + \mathbf{y} \leq 6 \\
& \mathbf{x} - \mathbf{y} \geq 4 \\
& \mathbf{x} \geq 0 \\
& \mathbf{y} \geq 0
\end{aligned}
$$

Direção da função objetivo
Função objetivo
Restrições
Variáveis (em negrito)
Restrições de domínio das variáveis



$$x + y \leq 6$$

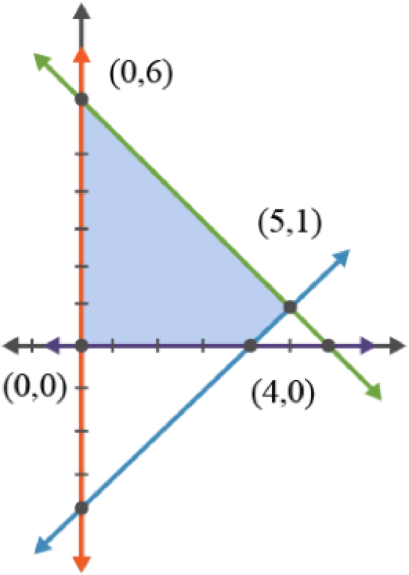
$$x - y \geq 4$$

$$y > 0$$

$$x > 0$$

Soluções viáveis

OTIMIZAÇÃO LINEAR



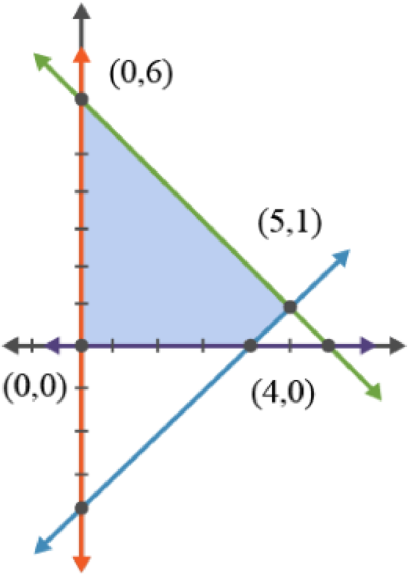
O espaço azul representa o conjunto de soluções viáveis de nosso problema

- Soluções ótimas
- Soluções sub-ótimas

Solução ótima está em um vértice

- Encontro de duas ou mais restrições

OTIMIZAÇÃO LINEAR



$$\min \quad 2x + y$$

x	y	resultado
0	0	0
0	6	6
5	1	11
4	0	8