Ejercicios Tema 1

1. Elige, entre las ecuaciones siguientes en las incógnitas x_1, x_2, x_3, las que son lineales:

   (a) $4x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$

   (b) $\sin^3(\alpha)x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$

   (c) $\frac{1}{x_1} - 2x_2 + 3x_3 = -2$

   (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}x_1 + x_2 + \pi x_3 = 3$

   (e) $-x_1 + x_2x_3 = -2$

   (f) $x_1^2 + x_2^2 = 1$

   (g) $(\int_1^2 p(t)dt)x_1 - x_2 = 0$, donde $p(t)$ designa un polinomio arbitrario

2. Decide si las siguientes matrices están en forma escalonada, escalonada reducida, o ninguna de las anteriores:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Sea S el sistema lineal a coeficientes reales que tiene como matriz ampliada la matriz E del ejercicio anterior. Elige la opción correcta:

   (a) La matriz E tiene exactamente 2 pivotes y S admite una infinidad de soluciones;

   (b) La matriz E tiene exactamente 2 pivotes y S no admite solución;

   (c) La matriz E tiene exactamente 3 pivotes y S tiene una infinidad de soluciones;

   (d) La matriz E tiene exactamente 3 pivotes y S no admite solución.

4. Consideramos los dos sistemas de ecuaciones lineales S y S' dados por:

$$S = \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -x + \quad + z = 0 \\ \quad y - z = -1 \end{cases} \qquad S' = \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -7x + \quad + 7z = 0 \\ -x + y \quad = -1 \end{cases}$$

   Encuentra:

   (a) la matriz de coeficientes A del sistema S;

   (b) la matriz ampliada A^* del sistema S';

   (c) el coeficiente $A_{31} =$

   (d) el coeficiente $A^*_{14} =$

   (e) Demuestra que los sistemas S y S' son equivalentes.

5. Sea S un sistema lineal en las variables $x_1, \ldots, x_n$, y sea A su matriz ampliada. Si la matriz A es escalonada y contiene exactamente n pivotes, entonces el sistema admite una única solución:

   (a) Siempre

   (b) Depende

   (c) Nunca

6. Escalonar y reducir la matriz a coeficientes reales

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

   indicando las operaciones elementales efectuadas en cada paso.

7. Resolver el sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas x, y, z asociado a la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ -3 & 2 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

8. Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} -3x & + & 2y & + & 3z & - & t & = & -2 \\ 6x & - & 4y & - & 5z & + & 3t & = & 7 \\ & & & & z & + & t & = & 3, \\ -9x & + & 6y & + & 12z & & & = & 3 \end{array} \right.$$

   (a) Facilitar la matriz ampliada asociada al sistema dado;

   (b) Escalonar y reducir la matriz ampliada;

   (c) ¿Quienes son las variables libres? ¿Y las directoras?

   (d) Encontrar la solución general del sistema.

9. Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & & & + & t & = & 5 \\ -x & + & y & + & 5z & + & 3t & = & 2 \\ & & y & - & z & - & t & = & 0. \end{array} \right.$$

   (a) Facilitar la matriz ampliada asociada al sistema dado;

   (b) Escalonar y reducir la matriz ampliada;

   (c) ¿Quienes son las variables libres? ¿Y las principales?

   (d) Encontrar la solución general del sistema.

10. Aplica el algoritmo de eliminación de Gauss a cada uno de los sitemas de ecuaciones lineales siguientes y deduce si si es compatible determinado, compatible indeterminado, o incompatible. Calcula las soluciones cuando sea posible:

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ -x_1 & + & & & 6x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 14x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & & & x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$

$$S_4 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & & & x_3 & + & x_4 & = & -5 \\ x_1 & - & & & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & & & 2x_3 & & & = & -2 \end{array} \right.$$

11. Calcula el conjunto de soluciones el sistema de ecuaciones lineales:

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & & & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & & & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

12. Estudia, en función de los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, la solución general del sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left. \begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & & & + & bx_3 & = & 2 \\ ax_1 & + & ax_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ & & ax_2 & + & 2x_3 & = & b \end{array} \right\}$$

13. Calcula la ecuación de la curva $y = f(x) = a + bx + cx^2$ que pasa por los puntos $(-2, 4)$, $(1, 1)$ y $(-1, -3)$.

14. Calcula la ecuación de la curva $y = f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ que pasa por los puntos $(-1, 5)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ y $(-2, 7)$.

15. La suma de las tres cifras de un número es 16 y la suma de la primera y la tercera es igual a la segunda. Permutando entre sí la primera y la tercera cifra resulta un número que supera en 198 unidades al número dado. ¿Cuál es dicho número?