Universidade Vigo

CURSO 2022–2023
MATEMÁTICAS: ÁLGEBRA
Escuela de Ingeniería Industrial
Departamento de Matemática Aplicada II

Boletín de Problemas número 6.

Problemas de aplicaciones lineales

(1) Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales sobre $\mathbb{R}^2$.
   a) $f(x,y) = (x, 1+y)$.
   b) $f(x,y) = (x, sen(y))$.
   c) $f(x,y) = (x^2, y^2)$.
   d) $f(x,y) = (x-y, -2x+y)$

(2) Determinar si las siguientes aplicaciones de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son lineales.
   a) $f(X) = 2X$
   b) $f(X) = X + X^t$
   c) $f(X) = X + I_n$.

(3) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2, -x_1+x_2)\,, \qquad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

   a) Calcular una base y la dimensión del subespacio $Im(f)$. ¿Es f sobreyectiva? Razónese.
   b) Obtener unas ecuaciones cartesianas del subespacio $Im(f)$ respecto de la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
   c) ¿Pertenece el vector $\mathbf{v} = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ al subespacio $Im(f)$? Razónese.
   d) Hallar el rango de f y la dimensión del subespacio núcleo de f. ¿Es f inyectiva? Razonar las respuestas.
   e) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y de la base $\mathcal{H} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   f) Hallar la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{D} = \{(2,3),(1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (2,2)_{\mathcal{B}}$ respecto de la base $\mathcal{D}$.
   g) Hallar las coordenadas del vector $f(\mathbf{x})$ respecto de la base $\mathcal{H}$.

(4) Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación definida por:

$$L(x,y,z) = (-x-z\,,\, x+y+z\,,\, 0, y), \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Probar que L es una aplicación lineal.
   b) Hallar la matriz asociada a L respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.
   c) Calcular el rango de L. ¿Es L inyectiva? ¿Es L sobreyectiva? Razonar las respuestas.
   d) Hallar la dimensión y una base de la imagen de L.

(5) Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar el rango de f. ¿Es f inyectiva?
   b) Determinar un sistema generador del núcleo de f.
   c) Calcular una base de la imagen de f.
   d) Hallar la matriz asociada a f respecto de la bases $\mathcal{C}$ canónica de $\mathbb{R}^5$ y

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$$

   de $\mathbb{R}^4$.

(6) Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_3, x_2 - 2x_3)\,, \qquad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Calcula la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (0,1,-1), (1,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
b) ¿Es f inyectiva? ¿ es f sobreyectiva? ¿ es f un isomorfismo? Razona las respuestas.

(7) Se considera la aplicación $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$f(A) = NA - AN, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

siendo

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que f es lineal.
b) Hallar la matriz asociada al endomorfismo f respecto de la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Hallar el rango de f y una base de la imagen de f. ¿Es f es biyectiva?
d) Hallar un sistema generador del subespacio $f(U)$, siendo $U = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, A^t = A\}$.

(8) Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x, y, z, t) = (x - y, -y - z, x - z, x + t), \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

a) Calcular el rango de f. ¿Es f biyectiva? Razonar la respuesta.
b) Estudiar si existe f^{-1} y, en caso afirmativo, calcular la matriz asociada a f^{-1} respecto de la base

$$\mathcal{D} = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}.$$

c) Hallar las coordenadas del vector $f(1,2,3,4)$ respecto de la base $\mathcal{D}$.

(9) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$f(1,0,0) = (1,1), \quad f(0,1,0) = (1,0), \quad f(0,0,1) = (1,2).$$

a) Obtén la expresión de $f(x_1, x_2, x_3)$, $\qquad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
b) Determina una base y la dimensión de $Ker(f)$.
c) Halla una base y la dimensión de la $Im(f)$.
d) Calcula el rango de f. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razona las respuestas.
e) Calcula la matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{D} = \{(1,1,1), (1,0,1), (2,1,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{E} = \{(1,0), (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(10) Sea $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2)\,, \qquad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Demuestra que L es una aplicación lineal.
b) Calcula la matriz asociada a L respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
c) ¿Es L inyectiva? ¿Es L sobreyectiva? Razona la respuesta.

(11) Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, x_2 + x_3, 0)\,, \qquad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Calcula la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
b) ¿Es f inyectiva? ¿ es f sobreyectiva? Razona las respuestas.
c) Calcula una base del subespacio $\mathrm{Im}(f)$.
d) Halla las coordenadas del vector $f(1,2,3)$ en la base $\mathcal{C} = \{1,2,1), (0,1,2), (0,1,1)\}$.

(12) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, x - z, x + y + z, 2x + \alpha).$$

(a) Determinar el valor de α para que f sea lineal.
(b) Para el valor de α obtenido en el apartado anterior:
(b.1) Hallar una matriz asociada a f.
(b.2) Encontrar una base de $Im(f)$ y determinar la dimensión del $Ker(f)$.

(13) Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación dada por:

$$f(x, y, z, t) = (2x - 2z + t, -x + z + 2t, 2x - 2z + t, 0).$$

(a) Probar que f es una aplicación lineal.
(b) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
(c) Hallar una base de la imagen de f. ¿Es f un isomorfismo? Justificar la respuesta.

(14) Sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar el rango de f_A ¿Es f_A sobreyectiva? Razonar la respuesta.
b) Determinar, si es posible, un sistema generador del núcleo de f_A formado por dos vectores.
c) Calcular una base del subespacio imagen de f_A.
d) Hallar la matriz asociada a f_A respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(15) Sea $V = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, A = A^t\}$ y sea $f : \mathbb{R}^4 \to V$, la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x + y & x + z \\ x + z & -z \end{pmatrix}, \qquad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Hallar una base de Ker(f). ¿Es f sobreyectiva? Razonar la respuesta.
b) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ y la base

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de V.

(16) En el espacio vectorial ordinario complejo $\mathbb{C}^4$, se considera el sistema de vectores:

$$\mathcal{S} = \{(-1, 1, 1, 1), (1, -2 - i, -1, i), (1 + i, -2 - 2i, -1 - i, 0), (1, i, -1, -2 - i)\}.$$

a) ¿Es $\mathcal{S}$ es un sistema ligado? En caso afirmativo, encontrar una relación de dependencia.
b) ¿Es $\mathcal{S}$ un sistema generador de $\mathbb{C}^4$? Razonar la respuesta.
c) Hallar la dimensión y una base $\mathcal{B}$ del subespacio vectorial $\mathbf{U}$ de $\mathbb{C}^4$ engendrado por el sistema de vectores $\mathcal{S}$.
d) Hallar una base de $\mathbb{C}^4$ que contenga los vectores de la base $\mathcal{B}$ del subespacio $\mathbf{U}$.

(17) Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_4), \qquad \forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

a) Hallar el rango de f ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f inyectiva? Razonar las respuestas.
b) Calcular una base y la dimensión del núcleo de f.
c) Calcular, si es posible, el conjunto de todos los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 3)$. Expresar dichos vectores en forma vectorial paramétrica.
d) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y de la base $\mathcal{C} = \{(2, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(18) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Obtén la matriz asociada a f respecto de la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ y de la base canónica $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^2$.
b) Determina una base y la dimensión de $Ker(f)$ e $Im(f)$. Calcula el rango de f. ¿Es f inyectiva? ¿Es sobreyectiva? Razona las respuestas.
c) Considérese la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Calcula la matriz de cambio de la base $\mathcal{C}'$ a la base $\mathcal{B}'$ y la matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$.
d) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por: $g(u, v) = (u + 2v, u - v, -v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ y sea $h = f \circ g$ la composición de g con f. Calcula la matriz asociada a h respecto de la base canónica $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^2$.

(19) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, se consideran el vector $\mathbf{v} = (1, -5, -5, -2)$ y el sistema de vectores

$$\mathcal{S} = \{(1, 3, 3, 0), (-1, -1, 2, 4), (0, -2, 1, 3), (-1, -5, -2, 3)\}.$$

Sea H el subespacio vectorial generado por el sistema $\mathcal{S}$.

a) ¿Es el sistema $\mathcal{S}$ libre? Razonar la respuesta. Calcula, además, la dimensión del subespacio H y una base $\mathcal{B}$ de H.

b) ¿ Pertenece el vector $\mathbf{v}$ al subespacio H? En caso afirmativo, halla el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto de la base $\mathcal{B}$ obtenida en el apartado anterior.

(20) Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas $\mathcal{C}_3$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}_2$ de $\mathbb{R}^2$ es:

$$\mathcal{M}(f)_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula la matriz asociada a f respecto de la bases $\mathcal{C}_3$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

b) ¿Es f inyectiva? ¿ Es f sobreyectiva? ¿ Es f biyectiva? Razona las respuestas.

c) Calcula el conjunto de vectores $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x_1, x_2, x_3) = (1, 2)$.

(21) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_1 + x_2), \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Calcula la matriz asociada a f respecto de la base canónica $\mathcal{C}_1$ de $\mathbb{R}^2$ y la base canónica $\mathcal{C}_2$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Determina el subespacio $Ker(f)$ y su dimensión.

c) Halla una base y la dimensión del subespacio $Im(f)$.

d) Calcula el rango de f. ¿Es f inyectiva? ¿Es sobreyectiva? Razona las respuestas.

e) Dada la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$, halla las matrices de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C}_1$ y de la base canónica $\mathcal{C}_1$ a la base $\mathcal{B}$.

f) Calcula la matriz asociada a f respecto de la bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ y la base canónica $\mathcal{C}_2$ de $\mathbb{R}^3$.

(22) Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases distintas de $\mathbb{R}^3$ y sea

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$.

a) Halla las coordenadas del vector $\mathbf{u} = (1, 1, 1)_{\mathcal{C}}$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por: $f(v_1) = v_3$, $f(v_2) = -3v_2$ y $f(v_3) = v_1$.

i) Calcula la matriz asociada a la aplicación f respecto de la base $\mathcal{B}$.

ii) Calcula las coordenadas del vector $f(\mathbf{u})$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

iii) ¿Es f biyectiva? Razona la respuesta.

iv) Calcula la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{C}$.

(23) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que su matriz asociada respecto de la bases $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ es:

$$M(f)_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula las coordenadas del vector $f(3u_1 + 2u_2 - u_3)$ respecto de la base $\mathcal{B}_2$.

b) Halla una base y la dimensión de $Ker(f)$ y una base de $Im(f)$.

c) Calcula el rango de f. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razona las respuestas.

d) Calcula el conjunto $\{w \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(w) = v_1 - 3v_3 - v_4\}$.

(24) Sea $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(1,0,0) = (2,0,1)\,, \quad f(0,1,0) = (1,1,1)\,, \quad f(0,0,1) = (1,1,1)\,.$$

a) Halla el vector $f(\mathbf{v})$, siendo $\mathbf{v} = (1,1,1)_{\mathcal{B}}$.
b) Calcula la dimensión del subespacio imagen de f. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f biyectiva? Razona las respuestas.
c) Halla la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
d) Calcula, si es posible, un vector no nulo $\mathbf{u}$ tal que $f(\mathbf{u}) \in <\{\mathbf{u}\}>$.

(25) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio $\mathcal{W} =< S >$ engendrado por el sistema de vectores:

$$S = \{(1,0,0,1),(2,-1,0,1),(1,-1,0,0)\}\,.$$

a) Determina la dimensión del subespacio vectorial $\mathcal{W}$.
b) Calcula, si es posible, una base B de $\mathcal{W}$ que contenga al vector $\mathbf{w} = (5,-3,0,2)$, razonando la respuesta.
c) Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x,y,z,t) = (-x,-y+t,0,y-t), \qquad \forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$

i) Halla una base del subespacio $f(\mathcal{W})$.
ii) Calcula el rango de f ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razona las respuestas.
iii) Calcula la matriz asociada a f respecto de la base

$$E = \{(0,2,1,1),(0,2,1,0),(1,1,0,0),(0,1,0,0)\}\,.$$

iv) Sea la aplicación lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$g(x,y,z,t) = (x-y,z-t), \qquad \forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$

Calcula la matriz asociada a $g \circ f$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

(26) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$f(2,0,1) = (6,\,3)\,, \qquad f(2,0,3) = (14,\,9)\,, \qquad f(0,4,0) = (8,\,-4)\,.$$

a) ¿Está la aplicación lineal f bien determinada y de modo único? Razónese. En caso afirmativo, calcula: $f(x,y,z)\,, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
b) Halla la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y de la base $\mathcal{C} = \{(1,3),(2,5)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
c) Halla el rango de f. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razónese.
d) Se considera el subespacio $W = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x_3 - x_2 = 0\}$. Calcula la dimensión del subespacio $f(W)$.

(27) Sean $\Pi_2(\mathbb{R})$ y $\Pi_3(\mathbb{R})$ los espacios vectoriales de los polinomios de grado menor o igual a dos y menor o igual a tres, respectivamente, y sea $T : \Pi_2(\mathbb{R}) \to \Pi_3(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por:

$$T(p(x)) = xp(x), \qquad \forall\, p(x) \in \Pi_2(\mathbb{R}).$$

a) Determina la matriz M_1 asociada a T respecto de las bases $\mathcal{B} = \{1,x,x^2\}$ y $\mathcal{C} = \{1,x,x^2,x^3\}$.
b) Obtén la matriz M_2 asociada a T respecto de las bases $\mathcal{D} = \{1-x^2, 1+3x+2x^2, 5+4x+4x^2\}$ y $\mathcal{C} = \{1,x,x^2,x^3\}$.
c) Obtén la matriz M_3 asociada a T respecto de las bases $\mathcal{B} = \{1,x,x^2\}$ y $\mathcal{E} = \{1+x+x^2+x^3, x^2+x+1, x+1, 1\}$.
d) Encuentra la relación que existe entre las matrices M_1, M_2 y M_3.
e) Halla la imagen del vector $q(x) = 1+5x-x^2$ por la aplicación T, utilizando la definición y las dos matrices obtenidas en los apartados a) y b).

(28) Sea $T : \Pi_3(\mathbb{R}) \to \Pi_3(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por:

$$T(p(x)) = p''(x) - 4p'(x) + p(x), \qquad \forall\, p(x) \in \Pi_3(\mathbb{R}).$$

a) Obtén la matriz asociada a T respecto de la base $\mathcal{C} = \{x, 1+x, x+x^2, x^3\}$.
c) Calcula el rango de T. ¿Es T biyectiva? Razónese.
d) Halla, si es posible, la matriz asociada a T^{-1} respecto de la base $\mathcal{C} = \{x, 1+x, x+x^2, x^3\}$.

(29) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^5$, se considera el sistema de vectores:

$$\mathcal{S} = \{(-1,1,0,0,0), (-1,0,1,0,0), (-3,2,1,0,0), (0,0,0,-1,-1)\}.$$

a) ¿Es el sistema $\mathcal{S}$ ligado? Razónese. En caso afirmativo, halla una relación de dependencia.
b) Calcula la dimensión y una base $\mathcal{H}$ del subespacio vectorial $\mathcal{W} =< \mathcal{S} >$.
c) Sea el vector $\mathbf{v} = (0,0,0,1,-1) \in \mathbb{R}^5$. ¿Pertenece el vector $\mathbf{v}$ al subespacio W? Razona la respuesta.
d) Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por: $f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t \in \mathbb{R}^5$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   d.1.) Prueba que f es una aplicación lineal.
   d.2.) Halla el rango de f. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razona las respuestas.
   d.3.) Calcula la dimensión y una base del subespacio vectorial $f(\mathcal{W})$.
   d.4.) Calcula una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^5$ y la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ es

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

   d.5.) Calcula las coordenadas del vector $f(\mathbf{w})$ respecto de la base $\mathcal{B}$, siendo $\mathbf{w} = (1,1,1,1,1)$.

(30) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(1,1,1) = (1,2,-1)\,, \qquad f(1,2,2) = (1,2,-1)\,, \qquad f(1,2,3) = (2,1,1)\,.$$

a) ¿Está el endomorfismo f bien determinado y de modo único? Razónese. En caso afirmativo, calcula: $f(x,y,z)\,, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
b) ¿Pertenece el vector $\mathbf{b} = (1,1,1)$ al subespacio $Im(f)$? Razónese.
c) Se considera el subespacio $W = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 - x_2 = 0\}$. Calcula la dimensión del subespacio $f(W)$.
d) Halla el rango de f. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razónese.
e) Halla la matriz M asociada a f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(31) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y) = (x,\, x+y,\, 3x-y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Sea la matriz real $P = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{E} = \{(1,1), (1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Halla una base G de $\mathbb{R}^2$ tal que P sea la matriz de cambio de la base G a la base $\mathcal{E}$.
b) Sea el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas respecto de la base G son $[\mathbf{x}]_G = (18,11)$. Calcula las coordenadas de dicho vector $\mathbf{x}$ respecto de la base $\mathcal{E}$.
c) Halla la matriz M asociada a f respecto de la base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$ y de la base $\mathcal{F} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
d) Halla el rango de f. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razónese.
e) ¿El vector $\mathbf{y} = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ pertenece al subespacio $Im(f)$? Razónese.
f) ¿Cuál es la relación que existe entre la matriz M y la matriz asociada a f respecto de la bases G de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$? Razónese.