Universida de Vigo

CURSO 2022–2023
MATEMÁTICAS: ÁLGEBRA
Escuela de Ingeniería Industrial
Departamento de Matemática Aplicada II

Boletín de Problemas número 5.

Problemas de espacios vectoriales

(1) En $\mathbb{R}^2$ se definen las operaciones: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, y
   a) $\lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
   b) $\lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
   c) $\lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_2, \lambda x_1), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
   d) $\lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_1^2, \lambda x_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
   ¿Es $(\mathbb{R}^2, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial? Justificar la respuesta.

(2) Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales estrictamente positivos y consideremos las operaciones:

$$x * y = x.y, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^+,$$

$$\lambda \circ x = x^\lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Demostrar que $(\mathbb{R}^+, *, \circ)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(3) En el espacio vectorial ordinario $\mathbb{R}^4$, estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:
   a) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 \in \mathbb{Z}\}$
   b) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 - 2x_3 + x_4 = 2\}$
   c) $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1.x_4 = 0\}$
   d) $D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ |x_1| = |x_2|\}$
   e) $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 - x_3 = x_2\}$.

(4) Sea $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden dos. Estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos U_i son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.
   $U_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \ ; \ tr(A) = b = 0 \right\}$.
   $U_2 = \{ A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \ ; \ rang(A) = 1 \}$.
   $U_3 = \{ A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \ ; \ det(A) = 0 \}$.
   $U_4 = \{ A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \ ; \ A + A^t = 0 \}$.

(5) Se consideran los siguientes subconjuntos del espacio vectorial real $\Pi_2(\mathbb{R})$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos. Estudiar cuáles de ellos son subespacios vectoriales.
   a) $A = \left\{ p(x) \ / \ \int_0^1 p(x)dx = 0 \right\}$
   b) $B = \{p(x) \ / \ p'(x) = 0\}$
   c) $C = \{p(x) \ / \ p(1) = p'(-1) = 0\}$

(6) Determinar cuáles de los siguientes conjuntos constituyen un sistema generador de $\Pi_2(\mathbb{R})$.
   a) $A = \{1, x^2, x^2 - 2\}$.
   b) $B = \{2, x^2, 4 - x - x^2, 2x + 3\}$.
   c) $C = \{x + 2, x + 1, x^2 - 1\}$.

(7) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos generan $\mathbb{R}^3$?
   a) $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 2, 3), (0, 0, 1), (2, 2, 2)\}$.
   b) $B = \{(2, 1, -2), (3, 2, -2), (2, 2, 0)\}$.
   c) $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 1)\}$.
   d) $D = \{(1, 2, 4), (2, 1, 3), (4, -1, 1)\}$.

(8) ¿Para qué valores de α el vector $\mathbf{y}=(-4, 3, \alpha)$ pertenecerá al subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $v_1=(1, -1, -2)$, $v_2=(5, -4, -7)$, $v_3=(-3, 1, 0)$?

(9) Probar que $\mathbf{w}=(-9, 7, 4, 8)$ no pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto:

$$\{(7, -4, -2, -9), (-4, 5, -1, -7), (-9, 4, 4, -7)\}.$$

(10) En el espacio vectorial ordinario $\mathbb{R}^4$ se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

a) $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 = x_4, x_2 = x_3 = 0\}$.

b) $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 - 2x_3 + x_4 = 0\}$.

c) $I = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$.

Determinar un sistema generador de cada uno de ellos.

(11) En el espacio vectorial ordinario $\mathbb{R}^4$, se considera el sistema de vectores:

$$\mathcal{S} = \{(1,2,3,1), (2,2,1,3), (-1,2,7,-3), (1,4,8,0)\}.$$

a) ¿Es $\mathcal{S}$ es un sistema libre? En caso negativo, encontrar una relación de dependencia.

b) ¿Es $\mathcal{S}$ un sistema generador de $\mathbb{R}^4$? Razonar la respuesta.

c) Hallar la dimensión y una base $\mathcal{B}$ del subespacio vectorial $\mathbf{U}$ de $\mathbb{R}^4$ engendrado por el sistema de vectores $\mathcal{S}$.

d) Sea $\mathbf{v} = (0,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$. Estudiar si el vector $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$. En caso afirmativo, hallar las coordenadas de dicho vector respecto de la base $\mathcal{B}$.

(12) Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las matrices cuadradas reales de orden dos. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$U_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ ; \ tr(A) = 0 \right\}$$

$$U_2 = \{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ A = A^t \}$$

$$U_3 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ ; \ a = c = 0 \right\}$$

Encontrar un sistema generador de cada uno de ellos.

(13) En $\mathbb{R}^4$, se consideran el vector $\mathbf{v} = (3,0,3,0)$ y el sistema de vectores

$$\mathcal{S} = \{(1,0,1,0), (0,-1,0,1), (1,1,1,-1)\}.$$

a) Estudiar si $\mathcal{S}$ es linealmente independiente. Si S es ligado, obtener la relación de dependencia de los vectores de $\mathcal{S}$.

b) ¿Se puede representar $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{S}$? En caso afirmativo, hallar todas las representaciones posibles.

(14) En el espacio vectorial ordinario $\mathbb{R}^4$, estudiar la dependencia o independencia lineal de los siguientes sistemas de vectores:

a) $A = \{(1,-2,1,0), (-1,1,0,1)\}$

b) $B = \{(1,0,-3,2), (0,1,2,-3), (-3,-4,1,6)\}$

c) $C = \{(1,0,-3,2), (0,1,2,-3), (-3,-4,1,6), (1,-3,-8,7), (2,1,-6,9)\}$

d) $D = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,-2)\}$

En el caso de ser dependientes obtener la relación de dependencia entre ellos.

(15) Sea U el subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 3y + z - t = 0, \ x + y - z + 2t = 0\right\}.$$

a) Obtener un conjunto de generadores de U y calcular la dimensión de U.

b) Comprobar que el vector $\mathbf{v} = (-3,-2,5,5) \in U$, y calcular las coordenadas de $\mathbf{v}$ en una base de U.

(16) Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ forman un sistema libre:

a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \right\}$

b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

En el caso de ser dependientes dar la relación de dependencia entre ellos.

(17) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, hallar la dimensión y una base de los siguientes subespacios vectoriales:

a) $U = < \{(1,-1,2,3), (-2,2,-4,-6), (2,-1,6,8), (1,0,4,5), (0,0,0,1)\} >$

b) $U = < \{(1,-2,-3,1), (0,1,2,0), (3,-2,-1,3)\} >$

c) $U = < \{(1,0,-3,2), (0,1,2,-3), (-3,-4,1,6), (1,-3,-8,7), (2,1,-6,9)\} >$

d) $U = < \{(7,4,-9,-5),(4,-7,2,5),(1,-5,3,4),(2,16,-14,-14)\} >$

Completar cada una de estas bases obtenidas a una base de $\mathbb{R}^4$.

(18) En el espacio vectorial $\Pi_2(\mathbb{R})$, hallar la dimensión y una base de los siguientes subespacios vectoriales:

a) $U = < \{x^2-2x+3, 2x^2+x+8, x^2+8x+7\} >$

b) $U = < \{1-x-5x^2, 7+x+4x^2, 8-x^2\} >$

c) $U = < \{1+2x+x^2, 1+2x^2, 5+6x+7x^2\} >$

d) $U = < \{1+x+x^2, 1, -1-x^2, x^2\} >$

(19) En el espacio vectorial real de las matrices cuadradas reales de orden dos $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los siguientes subespacios:

$U_1 = \{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ tr(A) = b = 0 \}$

$U_2 = \{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ A + A^t = 0 \}$

$U_3 = \{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ a = c = 0 \}$

$U_4 = \{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) / \ a+b+c+d = 0 \}$

$U_5 = \{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) / \ A = A^t \}$

a) Encontrar dos bases distintas de cada uno de ellos. Hallar su dimensión.

b) Completar las bases obtenidas anteriormente a una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

c) Dadas las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

estudiar a qué subespacios pertenecen y calcular sus coordenadas respecto de las bases halladas en el apartado a).

(20) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, se consideran el vector $\mathbf{v} = (1,0,-4,6)$ y el sistema de vectores

$$\mathcal{S} = \{(1,1,-1,2),(2,3,1,0),(0,-1,-3,4)\}.$$

Sea $\mathbf{F}$ el subespacio vectorial generado por el sistema $\mathcal{S}$.

a) Calcular la dimensión del subespacio $\mathbf{F}$ y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{F}$.

b) ¿ Pertenece el vector $\mathbf{v}$ al subespacio $\mathbf{F}$? En caso afirmativo, calcula el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto de la base $\mathcal{B}$ obtenida en el apartado anterior.

c) Calcular unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas del subespacio $\mathbf{F}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(21) En $\mathbb{R}^4$ se considera, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$S_\alpha = \{(1,1,1,\alpha),(0,\alpha,\alpha,\alpha),(0,1,\alpha,\alpha),(1,\alpha,1,1)\}.$$

Hallar, según los valores de α, la dimensión del subespacio $< S_\alpha >$. ¿Para qué valores de α es S_α una base de $\mathbb{R}^4$?

(22) En el espacio vectorial ordinario real $\mathbb{R}^4$:

a) Determinar todos los valores de δ para que el vector $\mathbf{b} = (\delta,2,2,1)$ sea una combinación lineal de los vectores del sistema:

$$\mathcal{S} = \{(-1,0,1,1),(3,2,3,2),(0,0,1,0),(3,2,4,2)\}.$$

b) ¿Es $\mathcal{S}$ es un sistema ligado? En caso afirmativo, encontrar una relación de dependencia.

c) ¿Es $\mathcal{S}$ un sistema generador de $\mathbb{R}^4$? Razonar la respuesta.

d) Hallar la dimensión y una base $\mathcal{B}$ del subespacio vectorial $\mathbf{U}$ de $\mathbb{R}^4$ engendrado por el sistema de vectores $\mathcal{S}$.

e) Hallar una base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^4$, si es posible, que contenga los vectores de la base $\mathcal{B}$ del subespacio $\mathbf{U}$.

(23) Sea la matriz real

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

y los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

de $\mathbb{R}^3$.

a) Probar que $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar una base $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz P sea la matriz de cambio de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{B}$.

c) Hallar una base $\mathcal{D} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz P sea la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{D}$.

(24) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los siguientes sistemas de vectores:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1), (2,3,2), (1,5,4)\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{C} = \{(1,1,0), (1,2,0), (1,2,1)\}.$$

a) Probar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$.

c) Hallar la matriz de cambio de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{B}$.

d) Hallar las coordenadas del vector $x = (3, 2, -1)_{\mathcal{B}}$ respecto de la base $\mathcal{C}$.

e) Hallar las coordenadas del vector $y = (-8, 2, 3)_{\mathcal{C}}$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

f) Hallar las coordenadas del vector $z = (1, 1, 1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$ y respecto de la base $\mathcal{C}$.

(25) a) Hallar las coordenadas del vector $v = (1, 1, 1)$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 2), (2, 2, -3), (0, 2, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar la matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sabiendo que su vector de coordenadas respecto a la base

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

es $[A]_{\mathcal{C}} = (-1, -2, -4, 3)$.

c) Hallar las matrices de cambio de base en el espacio $\Pi_3(\mathbb{R})$ siendo $\mathcal{B} = \{1, x, 1 + x^2, x + x^3\}$ y $\mathcal{C} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$ dos bases dadas.

(26) Determinar una base y la dimensión de los cuatro subespacios fundamentales (espacio de columnas, espacio de filas, espacio nulo de A y espacio nulo de A^t) asociados con la matriz

$$a)\, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad b)\, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(27) Se considera la matriz real $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcula una base y la dimensión del subespacio vectorial $\mathbf{C}$ generado por las columnas de la matriz A.

b) Halla un sistema libre y la dimensión del subespacio vectorial $\mathbf{F}$ generado por las filas de la matriz A.

c) Calcula, si es posible, el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineales:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en forma vectorial paramétrica.

(28) De la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 12 & 4 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

se sabe que una forma escalonada de filas es

$$E(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & -2 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula la forma escalonada reducida de filas de A y el rango de A.
b) Halla una base $\mathcal{B}$ del subespacio vectorial columna, $Col(A)$, engendrado por las columnas de la matriz A y las coordenadas, respecto de dicha base, de las restantes columnas de A que no pertenecen a dicha base.
c) Calcula la dimensión del subespacio $Ker(A) = Nul(A)$.
d) Halla una base del subespacio fila, $Fil(A)$, engendrado por las filas de la matriz A.

(29) En el espacio vectorial ordinario $\mathbb{R}^4$, se considera el sistema de vectores:

$$\mathcal{S} = \{(1, 1, 2, 1), (1, 1, 3, -1), (2, -2, -2, 2)\}.$$

a) Probar que $\mathcal{S}$ es libre.
b) ¿Es $\mathcal{S}$ una base de $\mathbb{R}^4$? Razonar la respuesta.
c) Hallar, si es posible, una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ que contenga los tres vectores del sistema $\mathcal{S}$ y uno de los siguientes:

$$(0, 4, 7, -2), \quad (1, 2, 0, 0), \quad (2, -2, -1, 0).$$

d) Hallar, si es posible, la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(30) En el espacio vectorial de las matrices reales de tamaño 2×2, se consideran las matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \ M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \ M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y el subespacio vectorial $\mathcal{U}$ engendrado por las matrices M_1, M_2 y M_3.

a) Determina la dimensión y una base $\mathcal{B}$ del subespacio vectorial $\mathcal{U}$.
b) Estudia si M_4 y M_5 pertenecen o no al subespacio $\mathcal{U}$ y justifica la respuesta.
c) Calcula, si es posible, las coordenadas de la matriz M_5 respecto de la base $\mathcal{B}$ obtenida en el apartado a).