Ejercicios Tema 2

1. Consideramos A, B, C y D las siguientes matrices a coeficientes reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

De las siguientes expresiones, calcular aquellas que existan:

$$\begin{array}{cccccccc} A^2 & AB & AC & AD & BA & B^2 & BC & BD \\ CA & CB & C^2 & CD & DA & DB & DC & D^2 \end{array}$$

2. Consideramos las matrices $A, B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Elegir la respuesta correcta:

(a) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(\lambda A + B)^T$ es escalonada, pero no escalonada reducida;

(b) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(\lambda A + B)^T$ es escalonada reducida;

(c) No existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(\lambda A + B)^T$ sea escalonada.

3. Elegir la respuesta correcta. Las únicas matrices $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que $XA = AX$ para toda $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ son:

(a) la matriz nula y la matriz identidad I_2;

(b) las matrices de la forma λI_2 para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$;

(c) las matrices diagonales.

4. Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, tales que $AB = 0$. ¿Se cumple que $BA = 0$? En caso afirmativo dar una demostración. En caso negativo, dar un contraejemplo.

5. Sean A, B, C matrices con coeficientes reales tales que $AC = BC$. ¿Se cumple entonces que $A = B$? En caso afirmativo dar una demostración. En caso negativo, dar un contraejemplo.

6. Sean $A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), n \geq 2$ matrices invertibles. ¿Es su suma $A_1 + A_2$ invertible? Razonar la respuesta.

7. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), n \geq 2$, una matriz cuya k-ésima potencia, para $k \geq 2$, satisface
$$A^k = I_n.$$
¿Es A invertible? Razonar la respuesta.

8. Sea $T = \left\{ A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
   (a) Decidir si $A \in T$ es invertible.
   (b) Sea B una matriz equivalente por filas a A. ¿Es B invertible?

9. El mismo ejercicio que el anterior con $T = \left\{ A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

10. Decidir qué matrices no son matrices elementales, y expresarlas cuando sea posible, como producto de matrices elementales:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Utilizar operaciones elementales para calcular la inversa, si existe, de las siguientes matrices elementales. Expresar las inversas como producto de matrices elementales.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, calcular la solución general de los sistemas lineales siguientes:
$$A_1X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A_2X = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad A_3X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

13. Utilizar la factorización LU para resolver el sistema $AX = B$ siguiente:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

14. Queremos resolver el sistema de ecuaciones siguiente

$$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \ A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

a través de una factorización LU de la matriz A. Utilizando operaciones elementales en las filas de A, obtenemos:

$$A \underset{F_2 \to F_2 + 4F_1}{\longrightarrow} A' \underset{F_3 \to F_3 - 2F_1}{\longrightarrow} A'' \underset{F_3 \to F_3 + 3F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Hallar la matriz L, y resolver el sistema de ecuaciones inicial.

15. Para la matriz $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ sabemos que se cumple la igualdad siguiente:

$$E_{21}(3)E_{13}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} E_1\left(\frac{2}{3}\right)E_{12}$$

Sin calcular los coeficientes de la matriz A:

(a) Expresar A^{-1} como producto de matrices elementales;

(b) Facilitar la solución general del sistema de ecuaciones $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.