Álgebra Lineal

Curso 2019/20

Boletín nº 1

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS

Los ejercicios marcados con **(*)** se consideran de mayor dificultad. El resto son ejercicios para practicar procedimientos estándar y los resultados se incluyen al final.

1. Calcular la forma escalonada reducida de filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Probar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 3 y calcular su inversa.

3. Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se considera la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Calcular el determinante de A.

5. Estudiar, según los distintos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, cuándo el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente:

$$T = \{(\alpha, 1, 1), (1, \alpha, 1), (1, 1, \alpha)\}.$$

6. **(*)** Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz ortogonal. Probar que $\det(A) = \pm 1$.

7. Clasificar las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$:

   a) $\omega(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$.

   b) $\omega(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$.

   c) $\omega(x,y,z) = -x^2 + 2xz - y^2 + 2yz - 4z^2$.

8. **(*)** Utilizar formas cuadráticas para probar que si $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es una matriz no nula entonces $\operatorname{tr}(A^t A) > \det(A)$.

9. Calcular el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z + 2t = 0 \\ 2x + 4y + z + 3t = 0 \\ 3x + 6y + z + 4t = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \\ 3x + 6y + 6z = 0 \end{array} \right.$$

10. Hallar el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z + 2t = 3 \\ 2x + 4y + z + 3t = 4 \\ 3x + 6y + z + 4t = 5 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z + 2t + u = 1 \\ 2x + 2y + 4z + 4t + 3u = 1 \\ 2x + 2y + 4z + 4t + 2u = 2 \\ 3x + 5y + 8z + 6t + 5u = 3 \end{array} \right.$$

11. **(*)** Sean $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^3$. Calcular el valor de γ para que el vector $(3,1,\gamma)$ sea solución del sistema $Ax = b$, sabiendo que

$$\operatorname{Ker}(A) = < \{(1,1,0),(0,1,-1)\} >$$

y que $v = (2,1,2)$ es solución del sistema $Ax = b$.

12. Determinar la solución en el sentido de mínimos cuadrados y el error cometido en la aproximación para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

13. Hallar los ajustes lineal y cuadrático en el sentido de mínimos cuadrados para los siguientes datos:

   a)

x	-1	0	1	2
y	1	2	3	0

   b)

x	0	0	1	-1
y	0	2	4	0

SOLUCIONES

1. La forma escalonada reducida de A es
$$\operatorname{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. La inversa de A es
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2\alpha \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

3. $|A| = -1$.

4. $|A| = (\alpha + 2\beta)(\alpha - 1)^2$.

5. Es linealmente independiente para α distinto de 1 y -2.

7. *a*) Definida positiva.
   b) Indefinida y no degenerada.
   c) Definida negativa.

9. *a*) $S =< \{(-2, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1)\} >$.
   b) $S = \{(0, 0, 0)\}$.

10. *a*) $S = (1, 0, 2, 0)+ < \{(-2, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1)\} >$.
    b) $S = (1, 1, 0, 0, -1)+ < \{(-1, -1, 1, 0, 0), (-2, 0, 0, 1, 0)\} >$.

12. La solución es $x = (3, 0)$ y el error es $\sqrt{2}$.

13. *a*) Ajuste lineal: $y = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x$; Ajuste cuadrático: $y = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}x - x^2$.

    b) Ajuste lineal: $y = \frac{3}{2} + 2x$; Ajuste cuadrático: $y = 1 + 2x + x^2$.