## Ejercicios Tema 3

1. Justifica en cada caso si el conjunto es un subespacio vectorial o no lo es:

   (a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$

   (b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \quad \text{ó} \quad x_2 = 0\}$

   (c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - 2x_3 = 0\}$

   (d) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$

   (e) $\{(a + b - 2c, 3b + c, a - c) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

   (f) $\{A \in M_{2\times3}(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{12} = 0, a_{21} + a_{22} = 0\}$

   (g) $\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid Tr(A) = 0\}$

   (h) $\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$

   (i) $\{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid A$ es equivalente por filas a $I_3\}$

   (j) $\{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$

2. Para las siguientes matrices estudia el subespacio de soluciones del sistema homogéneo $A_iX = 0$, $i = 1, 2$, esto es, el espacio vectorial $NullA_i$, $i = 1, 2$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Comprueba si los vectores $(1, 2, 3)$ y $(1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ son combinación lineal de los vectores del conjunto $S = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

4. Demuestra que el vector $v = (1, 5, -4, 6) \in \mathbb{R}^4$ está en el subespacio vectorial $L(S) \subset \mathbb{R}^4$ generado por $S = \{v_1 = (1, 2, 0, 3), v_2 = (2, 1, 4, 3), v_3 = (0, 3, -4, 3)\}$. Razona si hay una o varias formas de expresar $v$ como combinación lineal de los vectores de $S$.

5. Decide si existen valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el vector $(1, 4, a, b) \in \mathbb{R}^4$ pertenece al subespacio generado por $S = \{v_1 = (1, 2, -1, -2), v_2 = (0, 1, 2, 1)\}$.

6. Sea $S = \{(1, 2, -1, 3), (2, 0, 1, 1), (1, -6, 5, -7)\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Demuestra que $S$ es un conjunto linealmente dependiente (o equiv. que $S$ es ligado).

   (b) Considera el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $S$, $W = \mathcal{L}(S)$. Extrae del conjunto $S$ una base de $W$ y calcula $\dim W$.

7. Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ un conjunto de vectores de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

   (a) Demuestra que $S$ es un conjunto linealmente dependiente.

   (b) Extrae del conjunto $S$ una base de $W = \mathcal{L}(S)$ y calcula $\dim W$.

8. Sea $W$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto $S$:

$$S = \{v_1 = (1,1,3,-1),\ v_2 = (1,0,1,1),\ v_3 = (2,1,4,0), v_4 = (2,2,6,2)\}.$$

Utilizando que las siguientes matrices son equivalentes por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

extrae de $S$ una base $B$ de $W = \mathcal{L}(S)$ y calcula $\dim W$.

9. Sea $W$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \end{array}$$

   (a) Calcula una base $B$ de $W$.
   (b) Comprueba que el vector $v = (0,-3,8,-2)$ está en $W$.

10. Consideramos el siguiente subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ :

$W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A \text{ es triangular superior y } (A)_{11} - 2(A)_{12} + 3(A)_{21} + 4(A)_{22} = 0\}$

Calcula una base $B$ de $W$ y $\dim W$.

11. Sea $W$ el subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por:

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$$

Calcula una base $B$ de $W$ y $\dim W$.

12. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$:

   (a) calcula su rango por filas;
   (b) encuentra una base $B$ de su espacio de filas;
   (c) describe su espacio de filas como Null $H$, donde $H$ es una matriz;
   (d) completa la base $B$ a una base de todo $\mathbb{R}^5$.

13. Para los siguientes conjuntos $S$, calcula su rango, encuentra una base $B$ del subespacio $\mathcal{L}(S)$, y por último, describe $\mathcal{L}(S)$ como el subespacio solución de un sistema lineal homogéneo:

   (a) $S = \{(1,2,0)\} \subset \mathbb{R}^3$

(b) $S = \{(1,0,1), (-1,2,4), (1,3,3), (2,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$

(c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

14. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$:

    (a) calcula su rango por columnas;

    (b) describe su espacio de columnas como Null $H$ donde $H$ es una matriz;

    (c) Si $V = \mathcal{L}((1,2,3,2), (1,2,1,0), (1,2,2,1)) \subset \mathbb{R}^4$, calcula una base $B$ de $V$, y cuando sea posible, calcula las coordenadas $[(2,3,4,1)]_B$ y $[(2,4,1,-1)]_B$.

15. Sea $v = (1,-6,5,-7) \in \mathcal{L}(B)$ donde $B = \{(1,2,-1,3), (2,0,1,1)\}$. Calcula las coordenadas de $v$ con respecto a la base $B$.

16. En el Ejercicio 11, calcula las coordenadas de $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ con respecto a $B$: $[A]_B =$

17. Calcula una base $B$ del subespacio $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A$ triangular inferior y $a_{11} + a_{21} = 0\}$. y las coordenadas del vector $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in W$, en la base calculada.

18. Sea $P_2(\mathbb{R})$ el subespacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2, y sea $B = \{1, x, x^2\}$ una base de este subespacio. Calcula las coordenadas del vector $p(x) = 3 + 2x^2$ en la base $B$.

19. Comprueba que $B = \{w_1 = (1,1,0), w_2 = (0,1,1), w_3 = (1,0,1\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula el vector $v \in \mathbb{R}^3$ sabiendo que sus coordenadas con respecto a esta base son $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

20. Sean $B = \{w_1 = (1,1), w_2 = (1,-1)\}$ y $B' = \{u_1 = (1,2), u_2 = (4,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Encuentra el vector $v \in \mathbb{R}^2$ sabiendo que $[v]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ a \end{pmatrix}$ y que $[v]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

21. Consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $C_2 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ y la base $B$ de $\mathbb{R}^2$, $B = \{v_1 = (1,-3), v_2 = (2,0)\}$.

    (a) Calcula las coordenadas: $[e_1]_B$, $[e_2]_B$, $[v_1]_{C_2}$, $[v_2]_{C_2}$.

    (b) Sabiendo que las coordenadas de $w \in \mathbb{R}^2$ son $[w]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, encuentra $[w]_{C_2}$.

    (c) Para el vector $v = (4,6)$, encuentra $[v]_B$.

22. Sean $B = \{v_1, v_2\}$ y $B' = \{w_1, w_2\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ tales que :

$$v_1 = 4w_1 - 2w_2, \qquad v_2 = -3w_1 + 3w_2, \qquad w_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{3}v_2, \qquad w_2 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{2}{3}v_2$$

Calcula las coordenadas del vector $u = 6w_2 - v_1$ en las bases $B$ y $B'$ respectivamente.