Escola de Enxeñaría de
Minas e Enerxía

Universida de Vigo

Álgebra Lineal

Curso 2019/20

Boletín nº 2

ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES

Los ejercicios marcados con **(*)** se consideran de mayor dificultad. El resto son ejercicios para practicar procedimientos estándar.

1. Determinar la dimensión y una base de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

   a) $U_1 = \{(x, y, z, t) \;/\; x = t,\; y = z = 0\}$.

   b) $U_2 = \{(x, y, z, t) \;/\; x + y + t = y + z = 0\}$.

2. Calcular la dimensión y una base de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

   a) $U_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, AB = BA\}$, donde $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) $U_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, MA \text{ es simétrica}\}$, donde $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. **(*)** Calcular la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

   a) $U_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,/\, \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

   b) $U_2 = \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,/\, A^t = A\right\}$.

4. En $\mathbb{R}^3$ se considera el conjunto $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

   a) Probar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Hallar $P_{\mathcal{CB}}$, donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   c) Hallar las coordenadas de $v = (2, 0, -3)$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

   d) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, donde

$$\mathcal{B}' = \{(1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, 1, 1)\}.$$

5. Sea $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ de la que se sabe que la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ a la base $\mathcal{B}$ es

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar la matriz $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

   b) Calcular el vector $w = w_1 + w_2$.

6. Se considera el plano de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y + 2z\right\}.$$

   a) Hallar una base ortonormal de U.

   b) Calcular la matriz P de proyección ortogonal sobre U.

   c) Hallar la distancia de $v = (1, 1, 1)$ a U.

7. **(*)** Se considera la rotación de α grados en $\mathbb{R}^2$, en el sentido positivo de giro (contrario al movimiento de las agujas de un reloj).

   a) Calcular la matriz asociada a la transformación lineal.

   b) Obtener las fórmulas de la rotación.

8. **(*)** Se considera la aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(v) = Av$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Hallar la expresión matricial de L respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

SOLUCIONES

Observación importante: Las bases de un espacio vectorial no son únicas, así que podríais obtener resultados diferentes pero que podrían ser correctos.

1. *a*) $\dim(U_1) = 1$ y una base es $B_1 = \{(1, 0, 0, 1)\}$.

   b) $\dim(U_2) = 2$ y una base es $B_2 = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, -1)\}$.

2. *a*) $\dim(U_1) = 2$ y una base es $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   b) $\dim(U_2) = 3$ y una base es $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

4. *b*) $P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) $v = (-3, 3, 2)_{\mathcal{B}}$.

   d) $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. *a*) $P_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) $w = (1, 0)$.

6. *a*) Base ortonormal de U: $B = \left\{ \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right), \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) \right\}$.

   b) $P = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   c) $d(v, U) = \|Pv - v\| = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.