Ejercicios Tema 4

1. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son lineales

   (a) $f(x, y, z) = (x, 1, z)$,
   (b) $f(x, y, z) = (y, z, 0)$.
   (c) $f(x, y, z) = (2x, y, 3y)$,
   (d) $f(x, y, z) = (x - 1, x, y)$.

2. Estudia si la aplicación $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (0, x - y, y)$ es lineal y en caso afirmativo calcula $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ y sus dimensiones respectivas

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(1, 0, 0) = (2, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$ y $f(0, 0, 1) = (3, 1, 0)$. Calcula bases y las dimensiones respectivas de $\operatorname{Ker} f$ y de $\operatorname{Im} f$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(1, 1, 0, 0) = (1, 1, 0)$, $f(0, 1, 1, 0) = (1, 1, 0)$, $f(0, 0, 1, 1) = (1, 2, 1)$, $f(0, 0, 0, 1) = (1, 2, 1)$. Calcula bases y las dimensiones respectivas de $\operatorname{Ker} f$ y de $\operatorname{Im} f$.

5. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x - y, y, x + z)$.

   (a) Calcula una base de $\operatorname{Ker} f$;
   (b) Decide si el vector $(8, 1, 5) \in \operatorname{Im} f$;
   (c) Para $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 4y + z = 0\}$, calcula $\dim f(U)$.

6. Estudia si existe una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ satisfaciendo:

   (a) $\operatorname{Ker} f = \mathcal{L}(\{(1, 2, -1)\})$ y $f(u) = u$ para todo $u \in \mathcal{L}(\{(1, 1, 0), (2, 2, 3)\})$.
   (b) $\operatorname{Ker} f = \mathcal{L}(\{(1, -3, -1)\})$, $f(-2, 1, 3) = (-2, 1, 3)$, y $f(5, 5, -9) = (5, 5, -9)$.

7. ¿Existe una aplicación lineal inyectiva $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla $f(1, 1) = (1, 0, 2)$?

8. ¿ Existe una aplicación lineal sobreyectiva $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla $f(1, 1) = (1, 0, 2)$?

9. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal entonces f es inyectiva.
   (b) Si $f\colon V \to W$ es una aplicación lineal, f es inyectiva si y sólo si $\dim V = \dim f(V)$.

10. Para una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ razona si, para algún valor $a \in \mathbb{R}$ existe una aplicación lineal sobreyectiva $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Ker} f = \mathcal{L}(\{(1, 1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1, 2), (2, 3, 0, 3, a)\})$$

11. Estudia si puede existir una aplicación lineal:

    (a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ inyectiva tal que $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(\{(1, 0, 0, 1, 2), (0, 1, 2, 1, 0)\})$;
    (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobreyectiva tal que $f(1, -2, 0) = (0, 0, 0)$;
    (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobreyectiva tal que $f(1, -1, 2) = (0, 0)$;
    (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 3)\})$ y $f(1, 0, 0) = (0, 1, 0, 1)$.

12. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz asociada con respecto a las bases canónicas es la que sigue:

$$[T]_{C_3C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcula la expresión general de T;
   $T(x_1, x_2, x_3) =$
   (b) Calcula el rango de T;
   (c) Para la base $B = \{v_1 = (1,-1,0), v_2 = (-1,0,1), v_3 = (0,1,1)\}$ calcula $[T]_{BC_4}$;
   (d) Calcula $T(u)$ y $T(v)$ sabiendo que $[u]_{C_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y que $[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

13. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la aplicación lineal cuya expresión general viene dada por:

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & -3x_1 + x_3 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Calcula la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas C_3, C_4;
   (b) Calcula una base de $\operatorname{Ker} T$;
   (c) Expresa $\operatorname{Im} T$ como $\operatorname{Null} H$, el subespacio de soluciones de un sistema $HX = \mathbf{0}$;
   (d) Si $B = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,2,1), v_3 = (0,0,3)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, calcula $[T]_{BC}$;
   (e) Sabiendo que $[v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcula $T(v)$ utilizando $[T]_{BC_4}$ y $[T]_{C_3C_4}$.

14. De una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ se sabe que la matriz asociada en las bases canónicas es:

$$[T]_{C_4C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 2 & 4 & 1 & b \\ -3 & -6 & 2 & c \end{pmatrix} \qquad \text{y que} \qquad T(2,3,3,-2) = (2,3,-8)$$

   (a) Calcula $a, b, c \in \mathbb{R}$ para completar la matriz $[T]_{C_4C_3}$;
   (b) Calcula una base de $\ker T$;
   (c) Calcula un sistema de ecuaciones para el cual $\operatorname{Im} T$ es el subespacio solución.

15. Sea $T\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que satisface: $T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,1,0)$,
$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,1,0)$, $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,1)$, $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,1)$.

   (a) Calcula la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas C_4, C_3;
   (b) Decide si $(2,1,-1) \in \operatorname{Im} T$;

16. Considera la aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es:

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$ donde $w_1 = v_1$, $w_2 = 2v_2$ y $w_3 = -v_1 + v_2 + v_3$, calcula las matrices $[Id_{\mathbb{R}^3}]_{BB'}$, $[Id_{\mathbb{R}^3}]_{B'B}$, $[T]_{BB'}$, $[T]_{B'B}$ y $[T]_{B'B'}$, y expresa las relaciones que existen entre ellas.

17. Considera las bases $B_1 = \{(1,2),(1,0)\}$ y $B_2 = \{(2,1),(3,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, y la base de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}.$$

Para la aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (2x-y, 3x+z)$:

(a) Calcula las matrices $[T]_{BB_1}$, $[T]_{BB_2}$ y la matriz cambio de base $[Id_{\mathbb{R}^2}]_{B_1B_2}$;

(b) Calcula $\operatorname{Ker} T$ y $\operatorname{Im} T$ dando una base de cada uno de estos subespacios.

18. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $T(x,y) = (x-y, x, -y)$. Para las bases $B = \{(1,0),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$:

(a) Calcula la matriz de cambio de base de C_3 a B';

(b) Si $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcula las coordenadas de $T(v)$ respecto a B' y a C_3.

19. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que cumple:

$$T(u_1) = u_1 + u_2 + u_3, \quad T(u_2) = u_2 - u_3, \quad \operatorname{Ker} T = \mathcal{L}(2u_1 + u_3).$$

(a) Calcula la matriz $[T]_{BB}$;

(b) Sea $D = \{u_1, u_2 - u_1, u_3 - u_1\}$. Demuestra que D es base de $\mathbb{R}^3$ y calcula $[T]_{DD}$.

20. Sean $B = \{(-1,2,0),(2,-1,1),(1,3,2)\}$ y $B' = \{(2,1,-1),(1,2,3),(1,0,-2)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Para $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada $[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$:

(a) Calcula las matrices $[T]_{BC_3}$, $[T]_{C_3B'}$;

(b) Calcula $T(1,3,2)$;

(c) Calcula las dimensiones de $\operatorname{Ker} T$ y de $\operatorname{Im} T$.

21. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ una base de un espacio vectorial V. Define una aplicación lineal $T : V \to V$ que cumpla todas y cada una las condiciones siguientes:

- $u_1 - u_2 \in \operatorname{Ker} T$, • $T(u_1) = u_2 + u_4$, • $T(u_1 + u_3) = u_2$,
- $T(u_4) = T(u_2)$, • $u_1 - u_5 \in \operatorname{Im} T$.

Calcula las dimensiones de $\operatorname{Ker} T$ y de $\operatorname{Im} T$. Estudia si T es un isomorfismo.