# АЛГОРИТМ СРАВНЕНИЯ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

**В. Е. Гай**

**Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева**
**603950, г. Нижний Новгород, ул. К. Минина, д. 24, iamuser@inbox.ru**

В статье рассматривается возможность применения U-преобразования к решению задачи оценки искажения одномерного сигнала.

Ключевые слова: цифровая обработка сигналов, преобразование Уолша, отношение сигнал/шум.

## Введение

Одна из задач цифровой обработки сигналов – сравнение форм сигналов. Данная задача решается при оценке качества сжатия, восстановления сигнала, автоматического определения степени похожести музыкальных композиций, при разработке аудио кодека для проверки качества кодирования звука, сравнения полученных результатов кодирования с другими кодеками и т.д.

Рассмотрим метрики, применяемые при сравнении сигналов [4]:

1) максимальное отклонение амплитуд сигналов:

$$D = \max_{i \in [1;n]} \left| x(i) - y(i) \right|,$$

где $x$ и $y$ – сравниваемые сигналы, $n$ – длина сигнала $x$ ($y$). Данная метрика чувствительна к единичным отличиям в амплитудах сигналов;

2) среднеквадратичное отклонение амплитуд сигналов (root mean square, RMS):

$$RMS = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( x(i) - y(i) \right)^2 / n} \; ;$$

3) отношение пикового уровня сигнала к шуму (peak signal-to-noise ratio, PSNR), модификация метрики RMS:

$$PSNR = 20 \cdot \log_{10} \left( A / RMS \right),$$

где $A$ – максимальное возможное значение амплитуды сигнала. Один из недостатков данной метрики – высокая чувствительность к среднему отличию сигналов по амплитуде. В связи с этим PSNR используется совместно с расчетом средне интегрального значения для сравниваемых сигналов:

$$DI_x = \sum_{i=1}^{n} \left| x(i) \right| / n \, , \; DI_y = \sum_{i=1}^{n} \left| y(i) \right| / n \, ;$$

Если у сигналов совпадают средне интегральные значения, то у них совпадает и средняя амплитуда, что означает возможность применения метрики PSNR.

4) отношение сигнал / шум:

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\sum_{i=1}^{n} x(i)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left( x(i) - y(i) \right)^2} \right).$$

Перечисленные выше метрики вычисляются во временной области.

5) частотно-временная метрика основана на сравнении спектрограмм, построенных по сигналам. Для получения данной метрики входные сигналы сначала последовательно покрываются небольшими интервалами с некоторым шагом $T$ по времени. В каждом из этих интервалов сигнала вычисляется спектр Фурье (без учета фаз частотных составляющих). Полученные спектры записываются в двумерный массив (время, частота) – спектрограмму. Амплитуды значений спектрограммы в каждой конкретной области представляются в логарифмической шкале.

Для сравнения полученных спектрограмм можно использовать следующую метрику, которая будет сравнивать сигналы, согласно данным о восприятии человеком той или иной частотной составляющей:

$$D = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{F} \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{T} \left( Sx(i,j) - Sy(i,j) \right)^2}}{F \cdot T},$$

где $Sx$, $Sy$ – двумерные массивы амплитуд спектрограмм сигналов $x$ и $y$, коэффициент

$\alpha_i$ зависит от чувствительности уха в $i$-ой частотной полосе.

Для использования данной оценки необходимо, чтобы сигналы содержали одинаковую энергию, то есть среднеквадратичное отклонение в спектрах для всего звукового сигнала должно быть минимальным. По сравнению с обыкновенной PSNR метрикой в данной мере практически решается проблема сравнения сигналов с различными амплитудами и учитывается неравномерная чувствительность уха к различным частотным составляющим.

## Предлагаемый алгоритм

В настоящей работе для решения задачи сравнения сигналов предлагается алгоритм, основанный на $U$-преобразовании [1]. $U$-преобразование заключается в формировании многоуровневого (грубо-точного) представления сигнала с помощью фильтров Уолша системы Хармута [1, 2], причём:

1) для построения каждого уровня разложения используются фильтры одинаковой длины, которые масштабируются до размера анализируемого участка сигнала;
2) сначала фильтры применяются ко всему сигналу, затем – к его частям.

При оценке расстояния между сигналами не требуется формирования всего дерева разложения: достаточно построения одного уровня разложения. В этом случае, результат применения $U$-преобразования к исходному сигналу $g(t)$ ($D = U[g(t)]$) представляет собой набор спектров, $D = \{D_i\}$, где $D_i$ – $i$-ый спектр разложения. Каждый спектр состоит из $L$ коэффициентов $D_i = \{d_0, ..., d_{L-1}\}$, вычисленных по сегменту сигнала длиной $M$ отсчётов, $L$ – число фильтров Уолша системы Хармута, используемых при формировании спектра, $D_{ij}$ – $j$-ый коэффициент $i$-го спектра.

Анализируя модельные сигналы (синусы с разными частотами) можно выделить следующие свойства $U$-преобразования:

1) инвариантность к растяжению/сжатию: синус частотой 33 Гц – масштабированная во времени (растянутая) версия синуса частотой 66 Гц; подобие разложений указанных синусов (одинаковые позиции максимумов в спектре, а также одинаковые относительные значения откликов), включающих один период, указывает на инвариантность описания сигнала к его растяжению / сжатию. Указанная особенность разложения может быть использована при решении задач обработки речи, в частности, она позволит указать на эквивалентность сигналов, один из которых получен при замедлении / ускорении темпа речи;
2) инвариантность к масштабированию амплитуды сигнала: если выполнить сравнение разложений исходного сигнала и его масштабированных копий, то максимальные отклики в их спектральных представлениях будут отличаться по значению (по абсолютной величине), но сохранят своё положение вне зависимости от выбранного коэффициента масштабирования.

В табл. 1 приведены данные, подтверждающие указанные свойства $U$-преобразования.

Таблица 1. Разложения модельных сигналов

| | | | |
|---|---|---|---|
| 33 Гц, 1 период | | | |
| 1: **-154.32**, 1.84, 0.42 | 2: -0.29, **32.52**, 0.12 | -2.16, **-32.51**, 0.89 | |
| 3: **15.90**, 3.04, **-7.64** | **-15.41**, 3.14, **7.41** | **-15.99**, -3.03, **7.68** | **15.32**, -3.16, **-7.36** |
| 66 Гц, 1 период | | | |
| 1: **-78.16**, 0.42, 0.21 | 2: 1.09, **15.55**, -0.45 | -1.30, **-15.55**, 0.54 | |
| 3: **8.00**, 1.51, **-3.85** | **-7.55**, 1.60, **3.63** | **-8.24**, -1.46, **3.96** | **7.29**, -1.64, **-3.50** |
| 33 Гц, 4 периода | | | |
| 1: -0.50, 0.50, 0.50 | 2: 0.00, -0.03, **308.61** | 0.00, -0.04, **308.55** | |
| 3: **-154.32**, 1.84, 0.42 | **-154.29**, 3.54, 0.42 | **-154.24**, 5.23, 0.42 | **-154.18**, 6.92, 0.42 |
| 33 Гц, 4 периода, коэффициент масштаба амплитуды = 0.3 | | | |
| 1: -0.17, 0.17, 0.17 | 2: 0.00, -0.01, **102.87** | 0.00, -0.01, **102.87** | |
| 3: **-51.44**, 0.61, 0.14 | **-51.43**, 1.18, 0.14 | **-51.41**, 1.74, 0.14 | **-51.39**, 2.31, 0.14 |
| 33 Гц, 4 периода, коэффициент масштаба амплитуды = 3 | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1: -1.66, 1.66, 1.66 | 2: 0.02, -0.10, **1028.71** | 0.02, -0.15, **1028.50** | |
| 3: **-514.40**, 6.14, 1.41 | **-514.30**, 11.78, 1.41 | **-514.14**, 17.42, 1.41 | **-513.92**, 23.06, 1.41 |

Сравнивая *U*-разложения двух сигналов, один из которых получен из другого с помощью некоторого оператора искажения, можно отметить подобие данных разложений (см. табл. 2).

Следовательно, сравнивая указанные разложения, можно оценить степень отклонения искажённого сигнала от исходного.

Таблица 2. Разложения искажённых сигналов

| | | | |
|---|---|---|---|
| Синус 33 Гц, 4 периода, искажённый гауссовым шумом (ОСШ = -4 Дб) | | | |
| 1: 95.10, -1.25, -27.82 | 2: 13.52, 8.29, **307.87** | 12.36, -11.09, **315.32** | |
| 3: **-149.79**, -17.68, 12.81 | **-158.08**, 8.52, -29.49 | **-161.65**, 3.92, 62.15 | **-149.34**, -46.52, 5.12 |
| Синус 33 Гц, 4 периода, искажённый равномерным шумом (ОСШ = -4 Дб) | | | |
| 1: 20.20, 20.33, 31.44 | 2: -5.56, -17.29, **328.55** | -23.47, 5.40, **320.75** | |
| 3: **-172.92**, -12.52, 25.05 | **-155.63**, -14.07, -8.40 | **-158.07**, 21.33, 6.26 | **-162.28**, 13.31, -1.18 |

Предлагаемый алгоритм сравнения сигналов основан на описанных свойствах разложения сигнала, полученного в результате применения *U*-преобразования, и состоит из следующих шагов:

1) построить спектральные разложения сигналов *x* и *y* с использованием *U*-преобразования для одномерных сигналов [1, 2, 3]:

$X = U[x]$, $Y = U[y]$;

2) выполнить огрубление разложений *X* и *Y*.

Рассмотрим алгоритм формирования огрубленного представления. Входные данные для алгоритма – спектральное разложение *X* и степень огрубления *k*:

1) генерация множества чисел *K* на отрезке [0; 1] с шагом $1/k$. Например, для $k = 3$ будет получен следующий набор: $K = [0.33, 0.66, 1]$;

2) выполнить для каждого спектра разложения *X* следующие действия (отклик нулевого фильтра не учитывается):

3.1) выбрать максимальный по абсолютной величине элемент спектра (*M*);

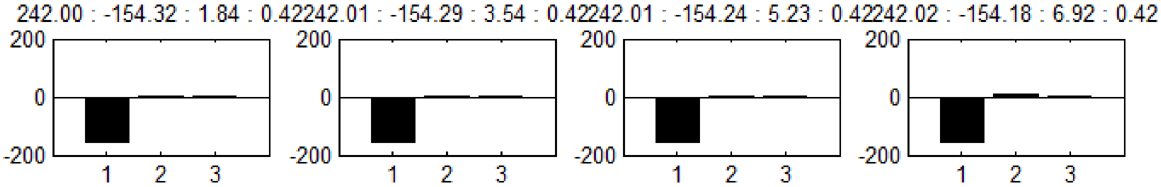
3.2) умножить каждый элемент множества *K* на *M*: допустим, $M = 23$, тогда $K = [7.66, 15.33, 23]$;

3.3) вычислить к какому из полуинтервалов [0; 7.66), [7.66, 15.33), [15.33, 23] (с учётом знака) нужно отнести *i*-ый элемент спектра, в зависимости от полученного ответа рассматриваемому *i*-му элементу спектра присваивается одно из значений: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

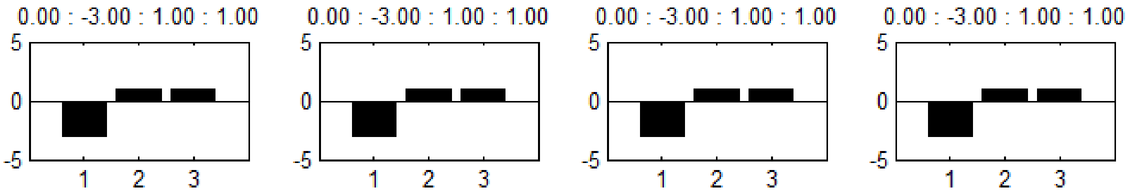
Разложение, полученное в результате такого огрубления, может быть использовано при решении различных задач, например, при сравнении двух сигналов.

Выше было указано, что при масштабировании сигнала (по времени и по амплитуде) положение максимумов в спектрах сохраняется. Разложения масштабированных версий от разложения исходного сигнала отличаются только амплитудой максимумов. Огрубление указанных разложений позволит доказать, что сигналы, по которым они были построены, являются масштабированными версиями одного и того же сигнала.

На рис. 1 показан пример огрубления спектрального разложения синуса на 4 уровне (частота – 33 Гц, длина сигнала – 4 периода, $M = 488$).




а)




б)

Рис. 1. Огрубление спектрального представления сигнала:
а) исходное разложение; б) огрублённое разложение

3) Сравнить разложения $X$ и $Y$:

$\forall\, i \in [1; M]$:

$\forall\, j \in [1; N-1]$:

если $X_{ij} = Y_{ij}$

$E = E + k \cdot 2$

если $S_{D,\,i}(j) \neq Y_{ij}$

$E = E - |\, X_{ij} - Y_{ij}\,|$.

Нормируем полученное значение $E$ к отрезку [0; 1]: $E = E \,/\, (M \cdot k \cdot N \cdot 2)$.

Примечание:

1) максимальное расстояние между элементами спектров составляет $k \cdot 2$;

2) если спектральные коэффициенты $X_{ij}$ и $Y_{ij}$ эквивалентны, то к оценке $E$ прибавляется $k \cdot 2$;

3) чем больше отличаются спектральные коэффициенты $X_{ij}$ и $Y_{ij}$, тем большее значение вычитается из $E$.

После окончания работы алгоритма значение $E$ будет содержать величину, характеризующую расстояние между сигналами $x$ и $y$.

Разработанный алгоритм инвариантен к изменению частоты и амплитуды сигналов. При сравнении двух сигналов одинаковой формы, но разной частоты и амплитуды предлагаемый алгоритм укажет на их эквивалентность.

## Вычислительный эксперимент

Рассмотрим возможность применения алгоритма для оценки эффективности алгоритма очистки сигнала от шума. В качестве тестового сигнала выбран синус, частота – 33 Гц, 4 периода. Предполагается, что сигнал искажает аддитивный шум (нормальный и равномерный). В табл. 3 приведена оценка искажения тестового сигнала, в табл. 4 приведены результаты работы предложенного алгоритма при различных параметрах. Параметр $q$ определяет долю шума в сигнале.

Фильтрация сигналов выполнялась на основе следующего алгоритма [5]:

1) формирование $N$-уровневого вейвлет-разложения;

2) пороговая обработка детализирующих коэффициентов;

3) восстановление сигнала с использованием старых аппроксимирующих коэффициентов и новых детализирующих.

Таблица 3. Оценка уровня искажения сигнала

| $q$ | равномерный шум | | нормальный шум | |
|---|---|---|---|---|
| | SNR | $U$-пр. | SNR | $U$-пр. |
| 0,05 | 26,49 | 0,45 | 21,69 | 0,39 |
| 0,1 | 20,49 | 0,41 | 15,71 | 0,38 |
| 0,2 | 14,53 | 0,39 | 9,54 | 0,37 |

Параметр $P$ в табл. 4 определяет длину анализируемого сегмента сигнала $L$, которая вычисляется по следующей формуле: $L = P \cdot F$.

Таблица 4. Результаты тестирования алгоритма

| $q$ | SNR | Разработанный алгоритм | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $P = 1$ | $P = 2$ | $P = 5$ | $P = 10$ |
| | равномерный шум | | | | |
| 0,05 | 33,31 | 0,87 | 0,87 | 0,86 | 0,92 |
| 0,1 | 27,71 | 0,82 | 0,81 | 0,80 | 0,88 |
| 0,2 | 22,29 | 0,74 | 0,72 | 0,70 | 0,75 |
| | нормальный шум | | | | |
| 0,05 | 23,76 | 0,76 | 0,75 | 0,75 | 0,83 |
| 0,1 | 18,68 | 0,68 | 0,68 | 0,64 | 0,71 |
| 0,2 | 14,72 | 0,60 | 0,59 | 0,50 | 0,56 |

Необходимо отметить, что при увеличении $P$ уменьшается время расчёта метрики. Проведённые исследования доказывают адекватность разработанного алгоритма.

## Заключение

В работе рассматривается алгоритм, предназначенный для сравнения двух сигналов. Алгоритм может использоваться при: оценке эффективности работы алгоритмов фильтрации и компрессии. Разработанный алгоритм основан на механизме огрубления спектрального сигнала. К несомненным достоинствам алгоритма относятся:

1) простота реализации: при вычислении метрики используются только операции сложения и сравнения;

2) скорость работы: по сравнению с преобразованием Фурье преобразование Уолша выполняется быстрее, так как в нём выполняется работа с действительными, а не с комплексными числами;

3) инвариантность к амплитуде и частоте сравниваемых сигналов: если сравниваемые сигналы обладают разной частотой, но одинаковой формой (допустим, один из сигналов получен из другого ресемплированием), то алгоритм укажет на их эквивалентность. Аналогично алгоритм укажет на эквивалентность сигналов, если один из них получен из другого масштабированием амплитуды (коэффициент масштабирования – произвольный).

## Литература


1. Утробин В. А. Физические интерпретации элементов алгебры изображений // Успехи физических наук, Т. 174, № 10, 2004, С. 1089–1104.
2. Henning F. Harmuth Application of the methods of information theory in physics. M.: Mir, 1975. 344 P. [in Russian]
3. Х. Ф. Хармут Передачи информации ортогональными функциями // М.: Связь, 1975. 272 с.
4. В. Вербовой Метрики для сравнения звуковых сигналов с учетом особенностей человеческого слуха // Компьютерная графика и мультимедиа №3 (1) / 2005, http://cgm.computergraphics.ru/content/view/73
5. Donoho, D.L.; I.M. Johnstone (1994), "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage" Biometrika, Vol. 81, P. 425–455.