

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Р. Е. АЛЕКСЕЕВА»

Кафедра «Вычислительные системы и технологии»

**МОДЕЛИ ЗВУКОВЫХ СИГНАЛОВ С ПОЗИЦИЙ ТЕОРИИ
АКТИВНОГО ВОСПРИЯТИЯ**

*Методические указания
к лабораторным работам по курсу
«Моделирование информационных процессов и систем»
для студентов вузов направления 09.04.01 – «Информатика и
вычислительная техника»
всех форм обучения*

Нижний Новгород 2017

Составители: В. Е. Гай, В. А. Утробин, Е. Н. Викулова

УДК: 528.854

Модели звуковых сигналов с позиций теории активного восприятия: методические указания к лабораторным работам по курсу «Моделирование информационных процессов и систем» для студентов вузов направления 09.04.01 – «Информатика и вычислительная техника» всех форм обучения / НГТУ им. Р. Е. Алексеева; сост.: В. Е. Гай, В. А. Утробин, Е. Н. Викулова. – Нижний Новгород, 2017. – 35 с.

Приводятся теоретические сведения по использованию теории активного восприятия при решении задач моделирования звуковых сигналов.

Материалы учебно-методического пособия предназначены для магистрантов высших учебных заведений по направлению 09.04.01 – «Информатика и вычислительная техника».

Редактор Э. Б. Абросимова

Подп. к печ. 27.09.2017. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2. Тираж 150 экз. Заказ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева. Типография НГТУ, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный
технический университет
им. Р.Е. Алексеева, 2017

1. Структура системы распознавания образов

С позиций системного анализа структуру системы распознавания можно представить в виде трёх этапов (см. рис. 1).

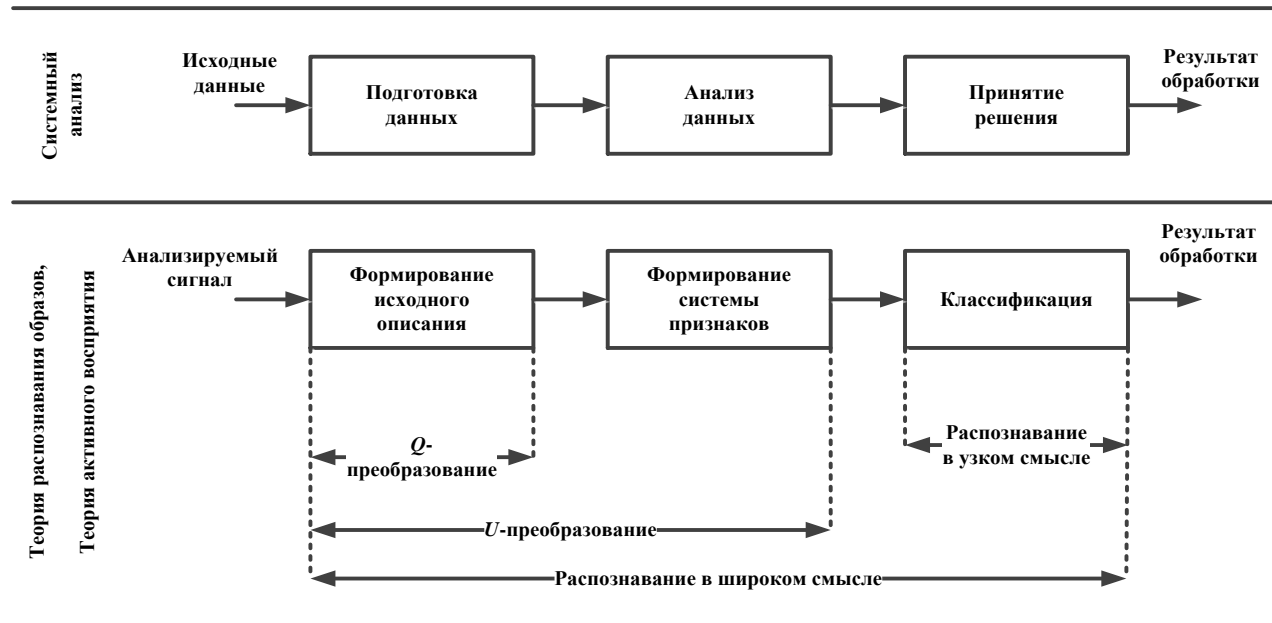


Рис. 1. Структура системы распознавания

Этап предварительной обработки обычно состоит в выполнении фильтрации сигнала, а также, в ряде случаев, в делении исходного сигнала на сегменты, по которым в дальнейшем вычисляются признаки. Для создания описания входного сигнала вычисляются признаки: коэффициенты спектра Фурье, кепстральные коэффициенты, мел-частотные кепстральные коэффициенты, коэффициенты линейного предсказания, коэффициенты вейвлет-спектра и т. д. Этап принятия решения заключается в отнесении входного сигнала по имеющимся признакам к одному из известных классов. На этапе принятия решения используются нейронные сети, метод опорных векторов, решающие деревья, метод K -ближайших соседей и др.

При решении задачи распознавания имеющиеся данные обычно делятся на обучающую, тестовую и контрольную выборки. Обучающая выборка используется для оценки параметров классификатора, тестовая и контрольная – для оценки обобщающих возможностей классификатора.

Настоящее методическое пособие содержит описание использования теории активного восприятия (ТАВ), первоначально разработанной для решения задач распознавания изображений, в обработке одномерных сигналов. ТАВ предназначена для разработки реализаций этапов предварительной обработки и формирования признакового описания сигнала.

2. Формирование спектрального представления звукового сигнала с позиций ТАВ

Непрерывным звуковым сигналом называется непрерывная действительная функция $s_a(t)$ действительного аргумента t , определённая на конечном интервале времени $\bar{T} (t \in \bar{T} \subset R^1)$.

Дискретным звуковым сигналом s_{dsc} называется числовая последовательность, каждый элемент которой n есть значение непрерывного звукового сигнала $s_a(t)$ в момент времени $n\Delta t$:

$$s_{dsc}[n] = \begin{cases} s_a(n\Delta t), & \text{если } t \in \bar{T} \subset R^1, \\ 0, & \text{если } t \notin \bar{T}, \end{cases}$$

где Δt – шаг дискретизации, $n = \overline{0, (N-1)}$, N – число отсчётов дискретного звукового сигнала.

Цифровой звуковой сигнал s_{dig} формируется в результате квантования по уровню отсчётов дискретного звукового сигнала s_{dsc} .

Учитывая, что неизвестны статистические характеристики звукового сигнала и помех его искажающих, обработка звукового сигнала выполняется в условиях априорной неопределённости.

Цифровой звуковой сигнал s_{dig} можно рассматривать как системное образование, представляющее собой совокупность элементов (отсчётов), между которыми существуют связи. Следующие признаки позволяют считать цифровой звуковой сигнал системным образованием:

1) целостность и членимость звукового сигнала: с одной стороны, звуковой сигнал представляет собой целостное образование, с другой стороны, в цифровом звуковом сигнале можно выделить элементы (отсчёты);

2) наличие связей (отношений) между элементами звукового сигнала, которые определяют его интегративные свойства: без наличия связей между элементами сигнала, ограничений на возможные комбинации элементов невозможна передача информации с использованием звуковых сигналов; звуковой сигнал с некоторой долей упрощения можно сравнить с набором детских кубиков, на боковые поверхности каждого нанесены части изображения; каждая сторона кубика несёт какую-то часть общего изображения; чтобы получить общее изображение, надо соединить эти части, составив кубики; произвольно складывать кубики нельзя; их можно складывать только по правилу, устанавливая между кубиками связи; эти правила представляют собой ограничения, накладываемые на комбинацию элементов;

3) наличие интегративных свойств, присущих звуковому сигналу как системе в целом, но не присущих его элементам (отсчётам) в отдельности;

4) наличие в звуковом сигнале как системе организации, выражающейся в том числе в устойчивости звукового сигнала к искажающим воздействиям.

Таким образом, цифровой звуковой сигнал s_{dig} представляет собой системное образование, а не является лишь «суммой свойств» составляющих его отсчётов.

Цифровой звуковой сигнал s_{dig} конечен, следовательно, данный сигнал, а также любой его подынтервал допускает применение операции сложения:

$$m(\bar{T}) = \sum_{n=0}^{N-1} s_{dig}[n], \quad (1)$$

где N – число отсчётов сигнала s_{dig} , $m(\bar{T})$ – сумма отсчётов сигнала.

Результат операции (1), с позиций теории активного восприятия (ТАВ), можно интерпретировать как структурный элемент сигнала, выявляемый на самом грубом уровне разрешения. В ТАВ, в приложении к изображению, данная операция названа Q -преобразованием. Q -преобразование соответствует этапу предварительной обработки сигнала. Информационная интерпретация данного преобразования следующая: отличие получаемого значения $m(\bar{T})$ от нуля указывает на присутствие сигнала на интервале наблюдения \bar{T} . Для корректной интерпретации результата операции (1) цифровой сигнал s_{dig} необходимо привести к положительной области значений (как один из возможных вариантов, к отрезку $[0;1]$). Например, результат применения операции (1) к сигналу $s_{dig} = \{-1, -1, 1, 1\}$ равен нулю. В этом случае результат операции (1) покажет отсутствие сигнала на интервале наблюдения, а не его наличие.

Звуковой сигнал s_{dig} в условиях априорной неопределённости, рассматриваемый как система, допускает декомпозицию с использованием операции дихотомии ($\bar{T} = \bar{T}_1 \cup \bar{T}_2$). Тогда по результатам дихотомии, используя (1), можно вычислить два структурных элемента: $m(\bar{T}_1)$ и $m(\bar{T}_2)$, а для выявления отношения между структурными элементами, с позиций ТАВ, использовать операцию вычитания:

$$\mu = m(\bar{T}_1) - m(\bar{T}_2). \quad (2)$$

Рассмотрим возможные значения μ :

1) $\mu = 0$: сигнал симметричен относительно центра, следовательно, на данном уровне разрешения локализовать положение экстремума нельзя и следует перейти на следующий (более точный) уровень;

2) $\mu < 0$: экстремум расположен слева от центра интервала \bar{T} ;

3) $\mu > 0$: экстремум расположен справа от центра интервала \bar{T} .

Таким образом, дихотомия интервала наблюдения сигнала позволяет проверить гипотезу об однородности (симметрии) сигнала.

Использование операции (1) на грубых уровнях анализа сигнала позволяет учитывать только его низкочастотные компоненты, в этом случае шумы и помехи как бы исчезают.

Деление отрезка на четыре равных интервала (уточнение положения экстремума, см. рис. 2,в) и использование операции (1) ставит в соответствие каждому из интервалов сумму отсчётов сигнала S_{dig} : $m_{2,1}$, $m_{2,2}$, $m_{2,3}$, $m_{2,4}$. Шарик на рис. 1 обозначает экстремум в сигнале. Отношение между данными величинами вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (m_{2,2} + m_{2,3}) - (m_{2,1} + m_{2,4}), \\ \mu_2 &= (m_{2,1} + m_{2,3}) - (m_{2,2} + m_{2,4}).\end{aligned}\quad (3)$$

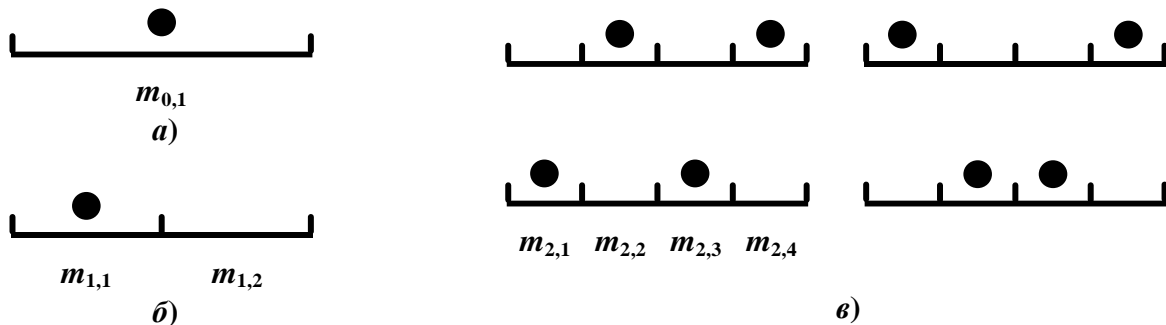


Рис. 2. Дихотомия отрезка: а) на ноль частей; б) пополам; в) на четыре части

Анализ значений μ_1 и μ_2 позволяет определить положение экстремума: в трёх случаях получаем, что в сигнале находится два экстремума (т. е. один экстремум на нулевом уровне, см. рис. 2,а, разделился на два экстремума на втором уровне, см. рис. 2,в), в одном случае (два шарика по центру) получаем, что для локализации экстремума требуется переместиться на уровень ниже (выполнить более тонкий анализ, см. рис. 3).

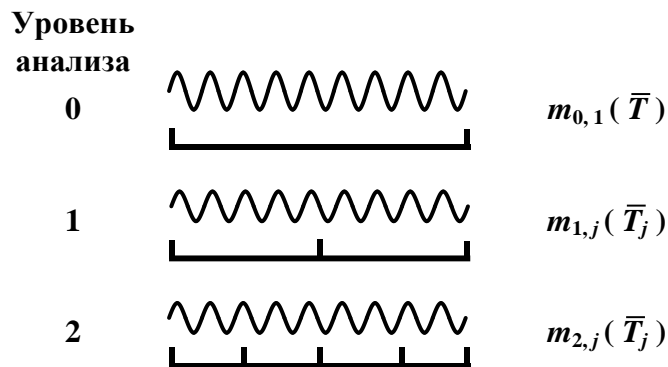


Рис. 3. Уровни анализа сигнала

Выше приведены операции анализа структуры сигнала на трёх уровнях разрешения. На первом уровне вычислялась и интерпретировалась сумма отсчётов сигнала в целом (один структурный элемент, см. формулу (1)), на втором – отношение между двумя структурными элементами (см. формулу (2)), на третьем – отношение между четырьмя элементами (см. формулу (3)).

Необходимо отметить, что на каждом следующем уровне анализа число вычисляемых отношений, по сравнению с суммарным количеством предыдущих найденных отношений, удваивается. Данные операции можно записать в следующем виде:

$$\mu_i = \sum_{j=0}^3 m_j F_i[j], i = \overline{0,3}, \quad (4)$$

где m_i – результат вычисления суммы отсчётов по i -му интервалу сигнала $i = \overline{1,4}$, $F_0 = (+1, +1, +1, +1)$, $F_1 = (+1, +1, -1, -1)$, $F_2 = (-1, +1, +1, -1)$, $F_3 = (+1, -1, +1, -1)$, $F_i[j]$ – j -й отсчёт i -го фильтра.

Формула (4) описывает U -преобразование – базовое преобразование ТАВ, выполняющее разложение сигнала по системе дискретных базисных функций (фильтров) F (см. рис. 4). В результате вычисления U -преобразования формируется спектральное разложение сигнала. U -преобразование соответствует этапу формирования признакового описания сигнала.

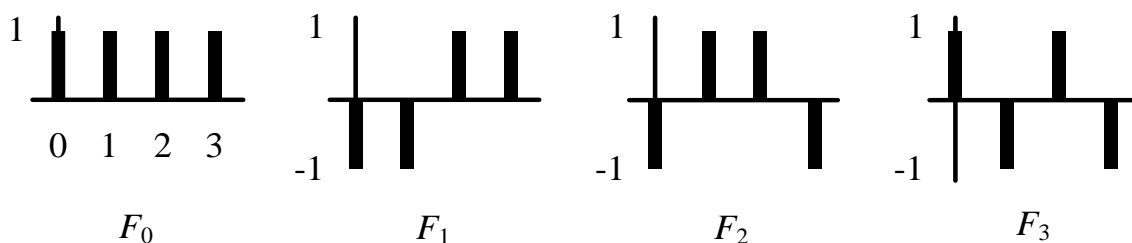


Рис. 4. Дискретные базисные функции

Результатом применения указанных фильтров к анализируемому сигналу является вектор μ спектральных коэффициентов. Приведённая система базисных функций обладает свойствами:

1) ортогональности – взаимная мощность любой пары функций равна нулю:

$$\sum_{i=0}^{N-1} F_k[i] \cdot F_l[i] = 0, k \neq l,$$

где N – число дискретных функций;

2) полноты – нельзя убрать и нельзя добавить новую функцию;

3) базисные функции являются двоичными – элементы базисных функций принимают значения «-1», «+1»;

4) модуль функции равен единице, а среднее – для всех, кроме F_0 , – равно нулю.

Приведённые фильтры внешне похожи на систему дискретных базисных функций Уолша системы Хармута. Специфика использования данных фильтров заключается в том, что они применяются после реализации Q -преобразования.

В общем виде U -преобразование записывается следующим образом:

$$\mu_i = \sum_{j=0}^{M-1} \left(\sum_{k \in T_i} s_{dig}[k] \right) F[j],$$

где $\overline{T_i}$ – i -й подынтервал сигнала s_{dig} , M – число используемых фильтров.

Рассмотрим процесс вычисления двухуровневого U -представления тестового сигнала (сигнал включает 16 отсчётов).

Уровень 1. Q -преобразование. Сигнал разбивается на четыре части, амплитуды отсчётов, которые отнесены к каждой части, складываются (см. рис. 5, части отделены пунктиром). В результате генерируется вектор частичных сумм: $m = \{3; 3,25; 2; 2,5\}$.

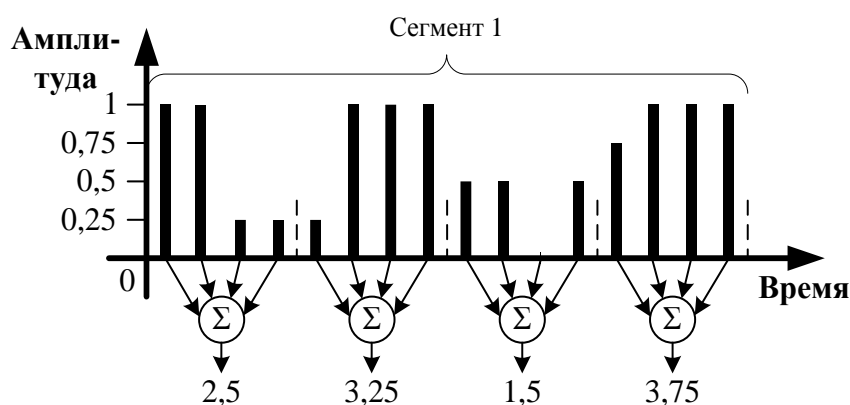


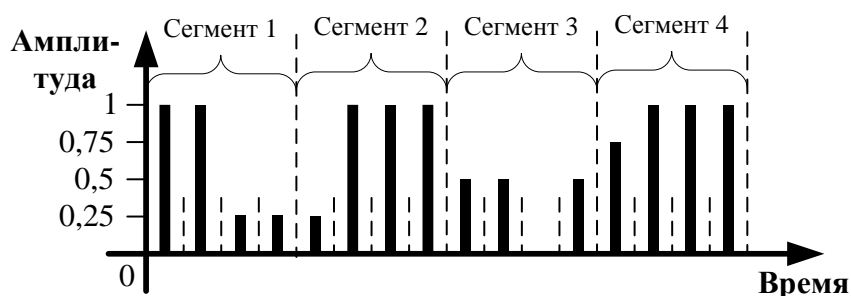
Рис. 5. Q -преобразование (первый уровень)

Уровень 1. Использование фильтров. Применяя к массиву сумм m фильтры, показанные на рис. 4, вычисляются значения спектральных коэффициентов. Для этого каждый фильтр поэлементно умножается на вектор частичных сумм. Например, для второго фильтра в результате умножения будет сгенерирован следующий массив: $\{-2,5; -3,25; 1,5; 3,75\}$. Далее выполняют сложение элементов полученного массива: $(-2,5) + (-3,25) + 1,5 + 3,75 = -0,5$. Результат сложения представляет собой спектральный коэффициент μ_i (см. табл. 1).

Табл. 1. Вычисление спектральных коэффициентов первого уровня

Результат умножения				Фильтр	Спектральные коэффициенты μ_i
2,5	3,25	1,5	3,75	F_0	11
-2,5	-3,25	1,5	3,75	F_1	-0,5
-2,5	3,25	1,5	-3,75	F_2	-1,5
2,5	-3,25	1,5	-3,75	F_3	-3

Уровень 2. Q -преобразование. Сигнал разбивается на четыре сегмента, каждый сегмент разбивается на 4 части, вычисляется сумма отсчётов, которые относятся к каждой части (см. рис. 6).

Рис. 6. Q -преобразование (второй уровень)

Уровень 2. Использование фильтров. С помощью фильтров, приведённых на рис. 4, и частичных сумм вычисляются значения спектральных коэффициентов (см. табл. 2).

Табл. 2. Вычисление спектральных коэффициентов второго уровня

Результат умножения								Фильтр	Спектральные коэффициенты μ_i	
Сегм. 1				Сегм. 2					Сегм. 1	Сегм. 2
1	1	0,25	0,25	0,25	1	1	1	F_0	2,5	3,25
-1	-1	0,25	0,25	-0,25	-1	1	1	F_1	-1,5	0,75
-1	1	0,25	-0,25	-0,25	1	1	-1	F_2	0	0,75
1	-1	0,25	-0,25	0,25	-1	1	-1	F_3	0	-0,75
Сегм. 3				Сегм. 4				Фильтр	Сегм. 3	Сегм. 4
0,5	0,5	0	0,5	0,75	1	1	1	F_0	1,5	3,75
-0,5	-0,5	0	0,5	-0,75	-1	1	1	F_1	0,5	0,25
-0,5	0,5	0	-0,5	-0,75	1	1	-1	F_2	-0,5	-0,5
0,5	-0,5	0	-0,5	0,75	-1	1	-1	F_3	-0,5	-0,25

3. Алгебра групп

Дальнейшие описания будут касаться случая, когда используется 16 фильтров. Приводимые ниже алгоритмы и описания легко обобщаются на использование большего и меньшего числа фильтров.

В ТАВ каждому фильтру F_i ставится в соответствие бинарный оператор V_i . В этом случае компоненте $\mu_i \neq 0$ вектора μ соответствует оператор V_i или \bar{V}_i в зависимости от знака компоненты, а вектору μ соответствует подмножество операторов из V_i , имеющих аналогичную фильтрам конструкцию, но разное значение элементов матрицы: «+1» соответствует «1», «-1» соответствует «0». Аналогичные процедуры можно реализовать для звукового сигнала. В этом случае фильтры переопределяются в одномерные булевы операторы по следующему алгоритму (см. рис. 7):

- 1) если $\mu_i > 0$, то имеем прямой оператор V_i ;
- 2) $\mu_i < 0$, то имеем инверсный оператор \bar{V}_i (см. рис. 8);
- 3) если $\mu_i = 0$, то оператор V_i отсутствует в описании сигнала.

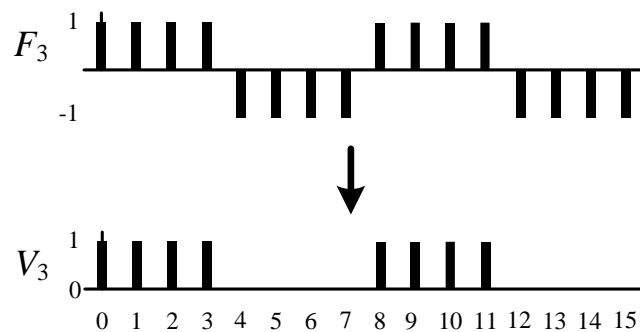


Рис. 7. Формирование образа оператора по фильтру

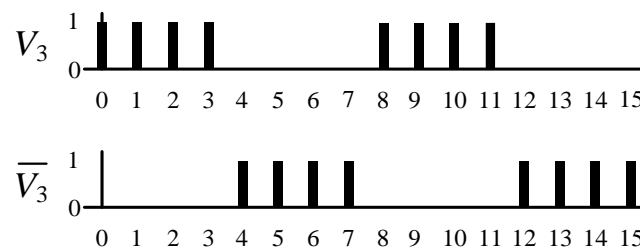


Рис. 8. Прямой и инверсный операторы

Задавая на множестве $\{V_i\}$ операции теоретико-множественного умножения и сложения, операцию, аналогичную отрицанию, два элемента: 1 – « V_0 » (e_0) и 0 – « \bar{V}_0 » (e_1), получаем алгебру описания сигнала в одномерных булевых функциях: $A_V = \langle \{V_i\}: +, \times, \neg, e_1, e_0 \rangle$. Для любых V_i, V_j

и $V_k \in V$ выполняются законы коммутативности, ассоциативности, идемпотентности и дистрибутивности.

На рис. 9 приведены 16 фильтров, а на рис. 10 – 16 операторов, соответствующих данным фильтрам.

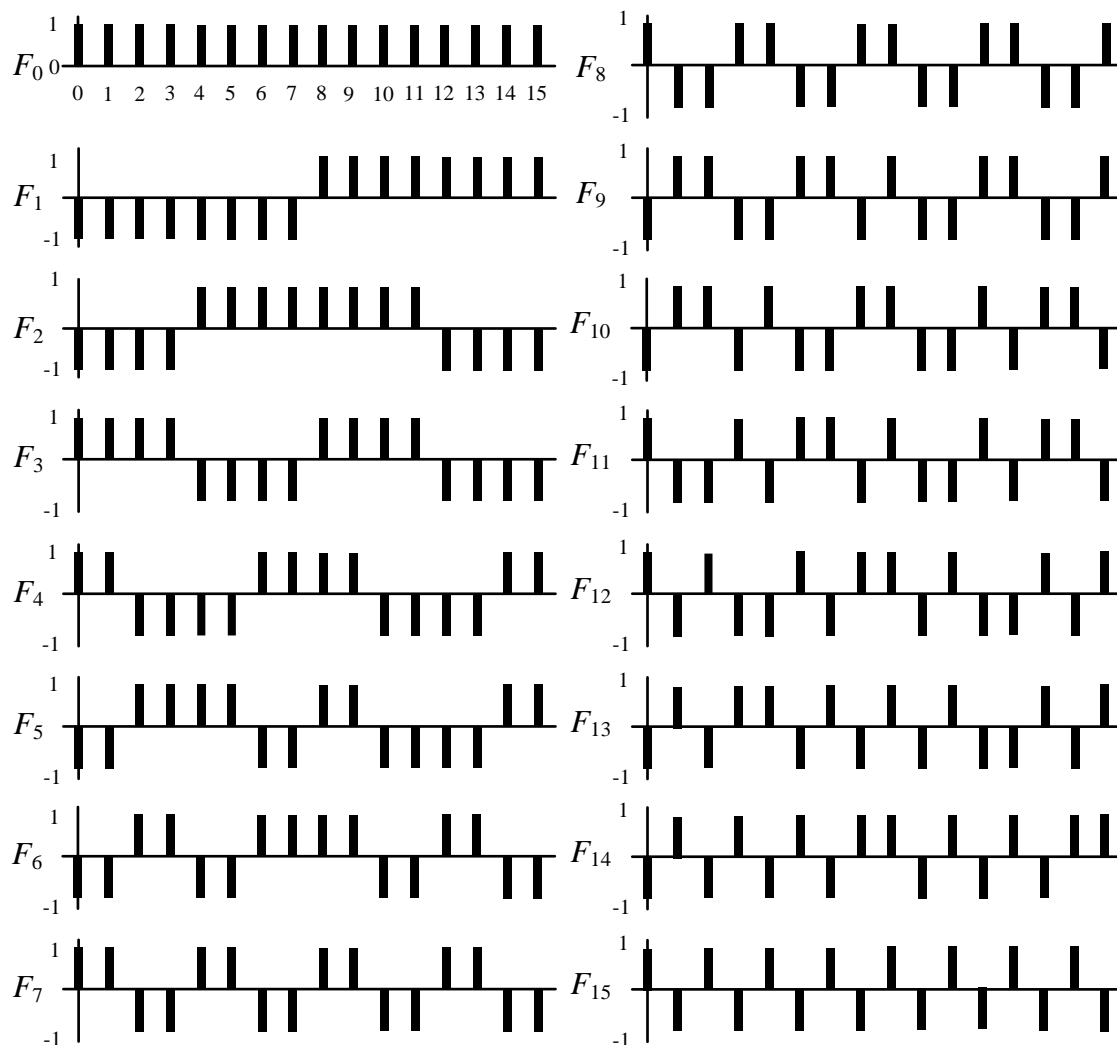


Рис. 9. Фильтры

На множестве одномерных операторов можно по аналогии с ТАВ сформировать алгебру групп, которая включает:

- 1) семейство алгебраических структур P_n мощности 35 (для 16 операторов), названных полными группами;
- 2) семейство алгебраических структур P_s мощности 105 (для 16 операторов), названных замкнутыми группами.

С помощью замкнутых и полных групп выполняется спектрально-корреляционный анализ. Полные группы позволяют выявить корреляционные связи между операторами. Замкнутые группы позволяют выявить корреляционные связи между полными группами.

Проводя аналогию между алгеброй групп и языком, можно ввести следующие соответствия: оператор – алфавит языка, полная группа – слово, замкнутая группа – словосочетание (см. рис. 11).

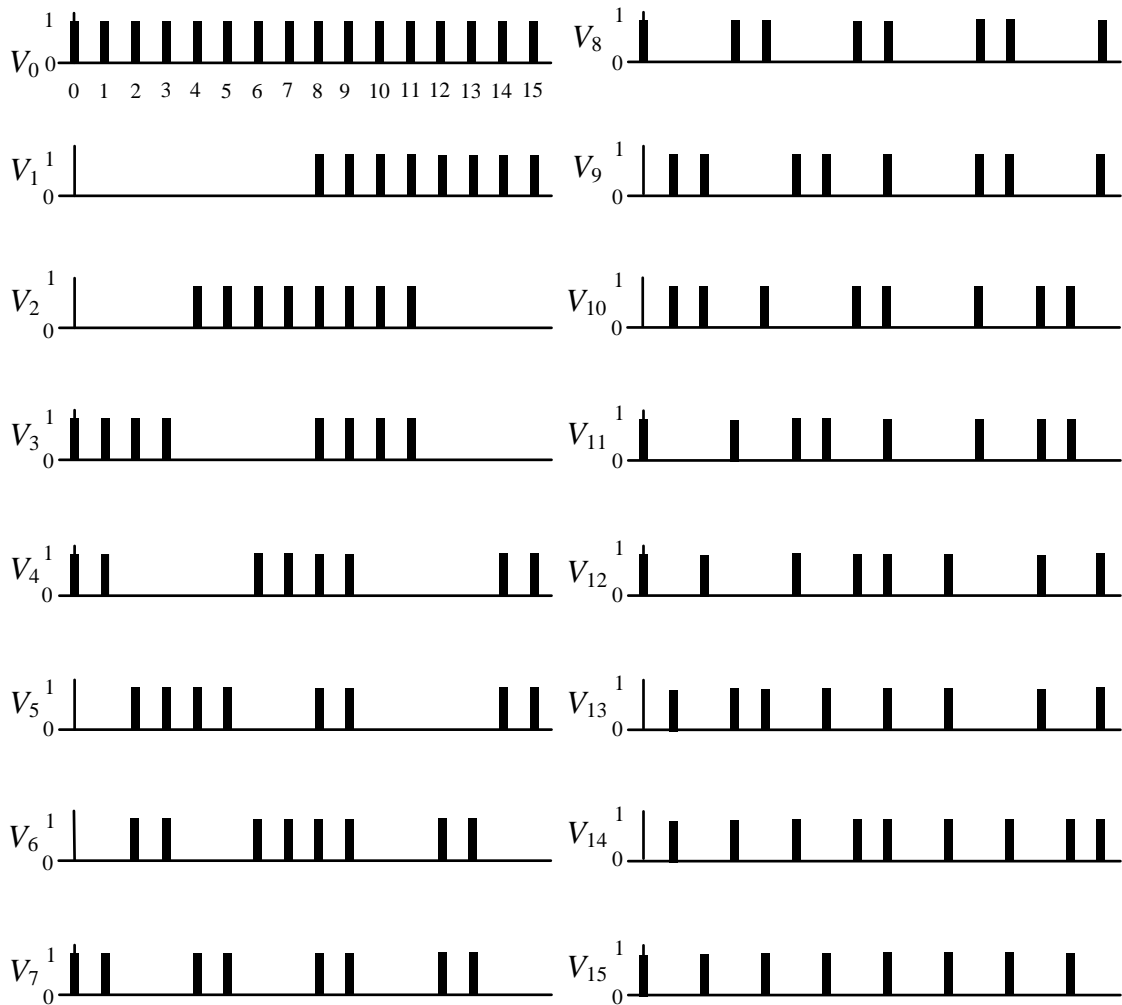


Рис. 10. Операторы

Каждой группе (полной или замкнутой), а также оператору можно поставить в соответствие характеристику – сумму элементов вектора частичных сумм, соответствующих единичным элементам образа группы (полной или замкнутой):

$$S = \sum_{j=0}^{M-1} I_j \cdot m_j, \quad (5)$$

где I – образ группы (оператора), m_j – j -й элемент вектора частичных сумм. Образ группы формируется в результате применения операций сложения и умножения к операторам, входящим в состав группы.

Рассмотрим пример вычисления суммы отсчётов, находящихся под образом оператора V_1 для сигнала, показанного на рис. 5, с помощью фор-

мулы (5). В этом случае m_j соответствует отсчёту сигнала. Образ оператора V_1 показан на рис. 10:

$$S = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,25 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + \\ + 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,75 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5,25.$$

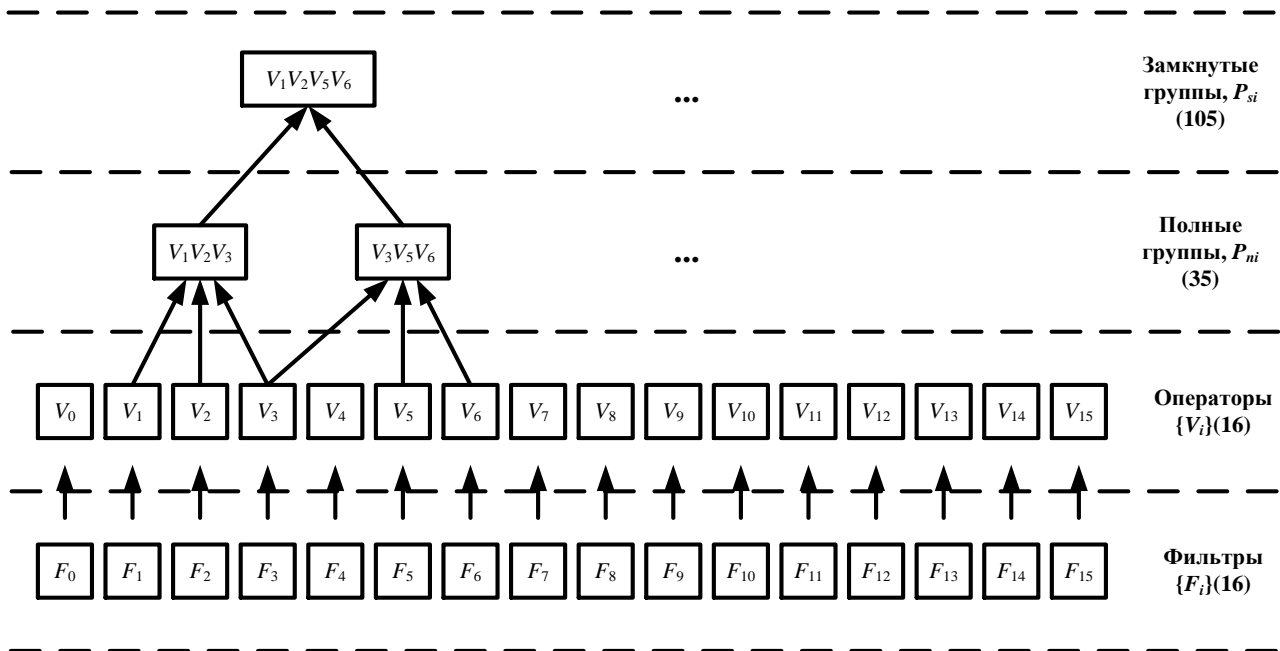


Рис. 11. Иерархия операторов и групп

В табл. 4. приведены значения спектральных коэффициентов и сумм отсчётов сигнала, находящихся под образом оператора, для сигнала, показанного на рис. 5.

Табл. 4. Спектральное разложение сигнала на 16 фильтрах

μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7
11	-0,5	-1,5	-3,0	3,0	-1,5	-0,5	1,0
μ_8	μ_9	μ_{10}	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{14}	μ_{15}
-0,5	1,0	0,0	1,5	0,5	-1,0	0,0	-1,5
V_0	$\overline{V_1}$	$\overline{V_2}$	$\overline{V_3}$	V_4	$\overline{V_5}$	$\overline{V_6}$	V_7
11	5,25	4,75	4	7	4,75	5,25	6
$\overline{V_8}$	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	$\overline{V_{13}}$	V_{14}	$\overline{V_{15}}$
5,25	6	—	6,25	5,75	5	—	4,75

Операторы V_{10} и V_{14} отсутствуют в описании сигнала, поскольку соответствующие им спектральные коэффициенты равны нулю.

4. Полные группы

Свойства полных групп:

1) полная группа образуется на тройке операторов (V_i, V_j, V_k);

2) известны полные группы на операции умножения (число инверсий операторов, входящих в описание полной группы, должно быть чётно) и полные группы на операции сложения (число инверсий операторов, входящих в описание полной группы, должно быть нечётно); операция «сложение» или «умножение» в данном случае обозначает способ, которым формируется образ полной группы на основе операторов: $V_i \cdot V_j \cdot V_k$ или $V_i + V_j + \overline{V_k}$;

3) число возможных образов полных групп, с учётом инверсий операторов, входящих в их состав, равно четырём; образ полной группы на операции умножения включает 4 единичных элемента и 12 нулевых, на операции сложения – 12 единичных элементов и 4 нулевых (при использовании для формирования групп 16 операторов);

4) каждая полная группа образована на тройке спектральных компонент, поэтому она позволяет выявлять корреляционные (энергетические) связи между этими компонентами: если полная группа присутствует в описании сигнала, тогда связь между этими компонентами есть;

5) полная группа на операции сложения выделяет сегмент сигнала, на котором сумма его отсчётов минимальна, на операции умножения – сегмент сигнала, на котором сумма его отсчётов максимальна; точность определения зависит от того, насколько хорошо образ полной группы соответствует форме сигнала.

Алгоритм генерации полных групп заключается в следующем: перебираются все возможные сочетания троек операторов V_i, V_j, V_k ; три оператора составляют полную группу, если $V_i + V_j + V_k \equiv e_1$. Примечание: оператор V_0 в переборе не участвует. После выполнения данного алгоритма на 16 операторах будут сгенерированы следующие полные группы: $V_1V_2V_3, V_1V_4V_5, V_1V_6V_7, V_1V_8V_9, V_1V_{10}V_{11}, V_1V_{12}V_{13}, V_1V_{14}V_{15}, V_2V_4V_6, V_2V_5V_7, V_2V_8V_{10}, V_2V_9V_{11}, V_2V_{12}V_{14}, V_2V_{13}V_{15}, V_3V_4V_7, V_3V_5V_6, V_3V_8V_{11}, V_3V_9V_{10}, V_3V_{12}V_{15}, V_3V_{13}V_{14}, V_4V_8V_{12}, V_4V_9V_{13}, V_4V_{10}V_{14}, V_4V_{11}V_{15}, V_5V_8V_{13}, V_5V_9V_{12}, V_5V_{10}V_{15}, V_5V_{11}V_{14}, V_6V_8V_{14}, V_6V_9V_{15}, V_6V_{10}V_{12}, V_6V_{11}V_{13}, V_7V_8V_{15}, V_7V_9V_{14}, V_7V_{10}V_{13}, V_7V_{11}V_{12}$.

Данный список можно рассматривать как список «моделей» полных групп, поскольку после определения наличия каждой группы в сигнале у операторов, входящих в состав полных групп, появятся инверсии, а некоторые полные группы будут отсутствовать в описании сигнала, поскольку в их составе будут операторы, принимающие значение 0.

На рис. 12 показаны варианты записи полных групп в зависимости от знаков, входящих в их состав операторов.

V_i	V_j	V_k	Знак		V_i	V_j	V_k
0	0	0	+		$\bar{V}_i + \bar{V}_j + \bar{V}_k$		
1	0	0	×		$V_i \times \bar{V}_j \times \bar{V}_k$		
0	1	0	×		$\bar{V}_i \times V_j \times \bar{V}_k$		
1	1	0	+	→	$V_i + V_j + \bar{V}_k$		
0	0	1	×		$\bar{V}_i \times \bar{V}_j \times V_k$		
1	0	1	+		$V_i + \bar{V}_j + V_k$		
0	1	1	+		$\bar{V}_i + V_j + V_k$		
1	1	1	×		$V_i \times V_j \times V_k$		

0 – инверсный
1 – прямой
+ – нечётное кол-во инв.
× – чётное кол-во инв.

Варианты образов полных групп

Рис. 12. Варианты записи полных групп

Рассмотрим алгоритм вычисления полных групп, описывающих сигнал на примере сигнала, показанного на рис. 5:

1) вычисляется спектр сигнала s_{dig} ;

2) каждому элементу спектра ставится в соответствие оператор из множества $\{V_i\}$ (элементы спектра нумеруются с нуля, номера операторов и элементов спектра совпадают).

3) проверяется наличие i -й полной группы в сигнале s_{dig} :

3.1) из спектра выбираются три элемента, номера которых соответствуют номерам операторов, входящих в i -ю группу;

3.2) определяется количество инверсных операторов: если значение j -го элемента спектра меньше нуля, то считается, что соответствующий элементу оператор – инверсный; рассматривается две ситуации:

3.2.1) число инверсных операторов чётно: вычисляется образ полной группы на операции умножения. Пусть из спектра выбраны три элемента, соответствующие операторам V_1, V_4, V_5 . На рис. 13 показан процесс вычисления образа полной группы $\bar{V}_1 \bar{V}_4 \bar{V}_5$; образ данной группы выделяет область сигнала с максимальной суммой отсчётов;

3.2.2) число инверсных операторов нечётно: вычисляется образ полной группы на операции сложения. На рис. 14 показан процесс вычисле-

ния образа полной группы $\overline{V_1 V_2 V_3}$; образ данной полной группы выделяет области сигнала с минимальной суммой отсчётов;

4) вычисляется сумма отсчётов сигнала, находящихся под образом группы.

Шаги 3-4 выполняются для всех 35 полных групп. В результате, формируется два массива сумм отсчётов, находящихся под образами полных групп: для полных групп на операции сложения и операции умножения.

В состав полной группы входит три оператора. Для каждой «модели» полной группы можно, с учётом инверсий операторов (см. рис. 12), поставить в соответствие четыре полных группы на операции сложения и четыре полных группы на операции умножения. Таким образом, всего, с учётом инверсий, существует $4 \cdot 35 = 140$ полных групп на операции сложения и столько же полных групп на операции умножения. В связи с этим каждой полной группе (на операции сложения или операции умножения) можно поставить в соответствие число от 1 до 140.

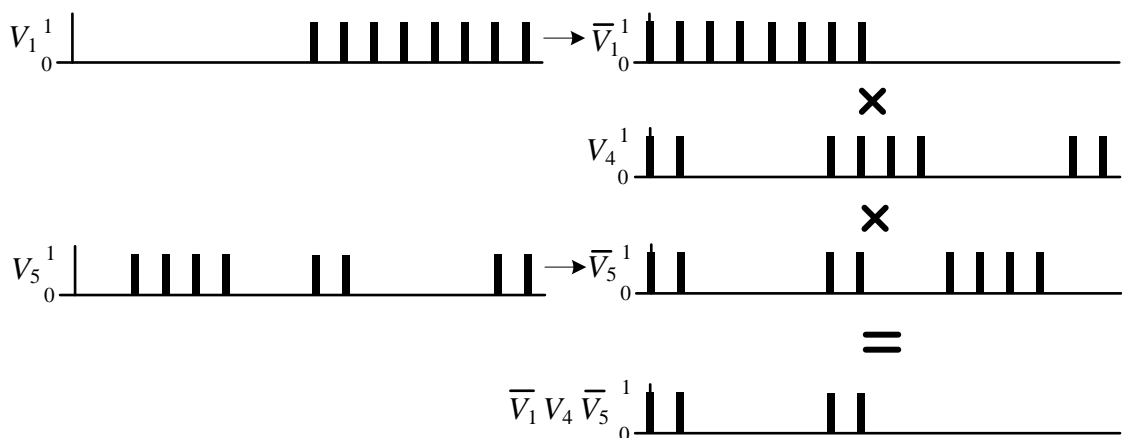


Рис. 13. Вычисление образа полной группы на операции умножения

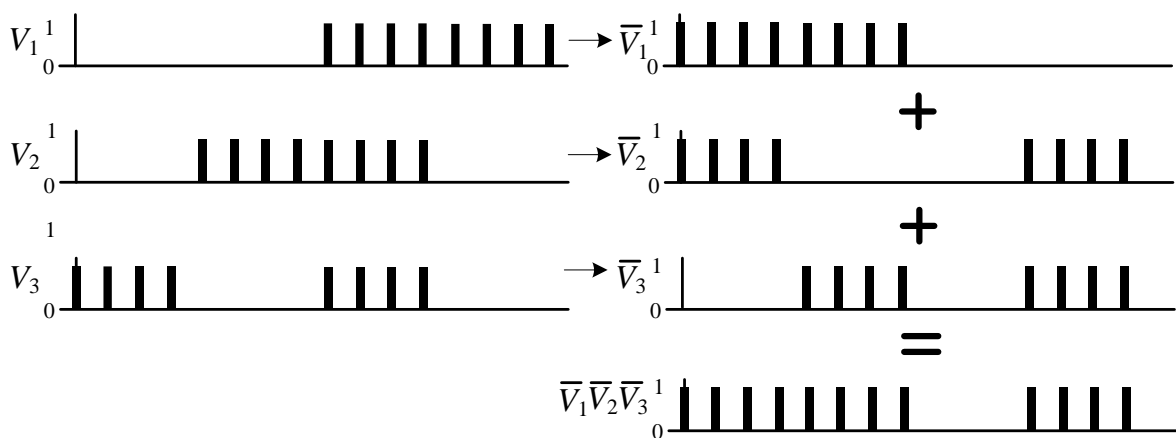


Рис. 14. Вычисление образа полной группы на операции сложения

Несмотря на то, что всего, с учётом инверсий, существует 140 полных групп на операции сложения и 140 на операции умножения по сигналу можно вычислить не более 35 групп (на операции сложения и умножения). В табл. 5 показаны полные группы, описывающие сигнал, показанный на рис. 5.

Табл. 5. Полные группы, входящие в описание сигнала

Группа	$\overline{V_1} \overline{V_2} \overline{V_3}$	$\overline{V_1} \overline{V_4} \overline{V_5}$	$\overline{V_1} \overline{V_6} \overline{V_7}$	$\overline{V_1} \overline{V_8} \overline{V_9}$	$\overline{V_1} \overline{V_{10}} \overline{V_{11}}$	$\overline{V_1} \overline{V_{12}} \overline{V_{13}}$	$\overline{V_1} \overline{V_{14}} \overline{V_{15}}$
Пояснение	+	×	×	×	0	×	0
Сумма отсчётов	9,5	4	3,25	3,25	-	3,25	-
Группа	$\overline{V_2} \overline{V_4} \overline{V_6}$	$\overline{V_2} \overline{V_5} \overline{V_7}$	$\overline{V_2} \overline{V_8} \overline{V_{10}}$	$\overline{V_2} \overline{V_9} \overline{V_{11}}$	$\overline{V_2} \overline{V_{12}} \overline{V_{14}}$	$\overline{V_2} \overline{V_{13}} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_3} \overline{V_4} \overline{V_7}$
Пояснение	×	×	0	+	0	+	+
Сумма Отсчётов	4	3,75	-	9,25	-	9,25	10
Группа	$\overline{V_3} \overline{V_5} \overline{V_6}$	$\overline{V_3} \overline{V_8} \overline{V_{11}}$	$\overline{V_3} \overline{V_9} \overline{V_{10}}$	$\overline{V_3} \overline{V_{12}} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_3} \overline{V_{13}} \overline{V_{14}}$	$V_4 \overline{V_8} \overline{V_{12}}$	$V_4 \overline{V_9} \overline{V_{13}}$
Пояснение	+	×	0	×	0	+	+
Сумма Отсчётов	9,5	4	-	4	-	9,25	9,5
Группа	$V_4 \overline{V_{10}} \overline{V_{14}}$	$V_4 \overline{V_{11}} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_5} \overline{V_8} \overline{V_{13}}$	$\overline{V_5} \overline{V_9} \overline{V_{12}}$	$\overline{V_5} \overline{V_{10}} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_5} \overline{V_{11}} \overline{V_{14}}$	$\overline{V_6} \overline{V_8} \overline{V_{14}}$
Пояснение	0	+	+	+	0	0	0
Сумма Отсчётов	-	9,75	9	9	-	-	-
Группа	$V_6 \overline{V_9} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_6} \overline{V_{10}} \overline{V_{12}}$	$\overline{V_6} \overline{V_{11}} \overline{V_{13}}$	$V_7 \overline{V_8} \overline{V_{15}}$	$V_7 \overline{V_9} \overline{V_{14}}$	$V_7 \overline{V_{10}} \overline{V_{13}}$	$V_7 \overline{V_{11}} \overline{V_{12}}$
Пояснение	×	0	×	×	0	0	×
Сумма Отсчётов	3,5	-	3,5	3,5	-	-	3,5

В табл. 5 используются следующие обозначения: «0» – соответствующая группа не входит в описание сигнала, так как содержит нулевой оператор, «+» – полная группа на операции сложения, «×» – полная группа на операции умножения.

5. Замкнутые группы

Свойства замкнутых групп:

1) замкнутые группы образованы на четвёрке операторов (V_i, V_j, V_p, V_m) с описанием $V_i V_j + V_p \overline{V_m}$ (число инверсий операторов нечетно);

2) замкнутые группы, образованные на четвёрке операторов с чётным числом инверсий, называются замкнутыми множествами; допускается два варианта записи замкнутого множества: на операции сложения

($V_i + V_j + V_p + \dots + V_m$, образ составляет 14 элементов) и операции умножения ($V_i V_j V_p V_m$, образ составляет 2 элемента);

3) число возможных образов замкнутых групп, с учётом инверсий операторов, равно восьми; образ замкнутой группы составляет 8 элементов;

4) каждая замкнутая группа образована на паре полных групп путем их склейки на общем операторе. Поэтому она позволяет выявлять корреляционные (энергетические) связи между данными анализа этих полных групп. Результатом является иерархия анализа спектральных компонент (откликов фильтров);

5) для замкнутой группы $V_i V_j V_k V_l$ существует восемь вариантов записи с учётом инверсий: $\overline{V_i} V_j + V_k V_l$, $V_i \overline{V_j} + V_k V_l$, $V_i V_j + \overline{V_k} V_l$, $V_i V_j + V_k \overline{V_l}$, $V_i \overline{V_j} + \overline{V_k} V_l$, $\overline{V_i} V_j + \overline{V_k} V_l$, $\overline{V_i} \overline{V_j} + V_k V_l$, $\overline{V_i} \overline{V_j} + \overline{V_k} V_l$;

6) если один из операторов замкнутой группы – инверсный, то сумма операторов представляет собой единичный вектор;

7) образы замкнутых групп, получаемые при разном порядке операторов, одинаковые;

8) замкнутая группа выделяет сегмент сигнала, на котором сумма отсчётов сигнала максимальна;

9) в ТАВ определены два варианта записи замкнутого множества: на операции сложения и операции умножения;

10) для замкнутого множества $V_i V_j V_k V_l$ существует восемь вариантов записи с учётом инверсий: $V_i V_j V_k V_l$, $\overline{V_i} \overline{V_j} V_k V_l$, $\overline{V_i} V_j \overline{V_k} V_l$, $V_i \overline{V_j} \overline{V_k} V_l$, $\overline{V_i} V_j V_k \overline{V_l}$, $V_i \overline{V_j} V_k \overline{V_l}$, $\overline{V_i} \overline{V_j} \overline{V_k} \overline{V_l}$ (знак операции: сложение или умножение, в этой записи знак не указан).

Алгоритм генерации замкнутых групп заключается в следующем: перебираются все возможные сочетания троек операторов V_i , V_j , V_k , V_l , четыре оператора составляют замкнутую группу, если:

1) любые три оператора из четырёх, составляющих замкнутую группу, не образуют полную группу (операторы рассматриваются без инверсий);

2) сумма четырёх прямых операторов не составляет единицу (e_1 , единичный вектор);

3) пусть N – число операторов, тогда образ замкнутой группы (число инверсий операторов нечётно, т.е. образ строится с нечётным числом операторов), включает $((1/2) \cdot N)$ нулей и $((1/2) \cdot N)$ единиц.

После выполнения данного алгоритма на 16 операторах будут сгенерированы следующие замкнутые группы: $V_8 V_9 V_{10} V_{11}$, $V_4 V_5 V_6 V_7$, $V_{12} V_{13} V_{14} V_{15}$, $V_8 V_9 V_{14} V_{15}$, $V_2 V_3 V_4 V_5$, $V_{10} V_{11} V_{12} V_{13}$, $V_8 V_9 V_{12} V_{13}$, $V_2 V_3 V_6 V_7$,

$V_{10}V_{11}V_{14}V_{15}$, $V_8V_{11}V_{12}V_{15}$, $V_1V_2V_5V_6$, $V_9V_{10}V_{13}V_{14}$, $V_8V_{11}V_{13}V_{14}$, $V_1V_2V_4V_7$,
 $V_9V_{10}V_{12}V_{15}$, $V_8V_{10}V_{13}V_{15}$, $V_1V_3V_4V_6$, $V_9V_{11}V_{12}V_{14}$, $V_8V_{10}V_{12}V_{14}$, $V_1V_3V_5V_7$,
 $V_9V_{11}V_{13}V_{15}$, $V_6V_7V_8V_9$, $V_2V_3V_{12}V_{13}$, $V_4V_5V_{10}V_{11}$, $V_4V_5V_8V_9$, $V_2V_3V_{14}V_{15}$,
 $V_6V_7V_{10}V_{11}$, $V_4V_7V_8V_{11}$, $V_1V_2V_{13}V_{14}$, $V_5V_6V_9V_{10}$, $V_5V_6V_8V_{11}$, $V_1V_2V_{12}V_{15}$,
 $V_4V_7V_9V_{10}$, $V_5V_7V_8V_{10}$, $V_1V_3V_{12}V_{14}$, $V_4V_6V_9V_{11}$, $V_4V_6V_8V_{10}$, $V_1V_3V_{13}V_{15}$, $V_5V_7V_9V_{11}$,
 $V_4V_5V_{12}V_{13}$, $V_6V_7V_{14}V_{15}$, $V_2V_3V_{10}V_{11}$, $V_2V_3V_8V_9$, $V_6V_7V_{12}V_{13}$, $V_4V_5V_{14}V_{15}$,
 $V_5V_6V_{13}V_{14}$, $V_4V_7V_{12}V_{15}$, $V_1V_2V_9V_{10}$, $V_1V_2V_8V_{11}$, $V_4V_7V_{13}V_{14}$, $V_5V_6V_{12}V_{15}$,
 $V_4V_6V_{12}V_{14}$, $V_5V_7V_{13}V_{15}$, $V_1V_3V_9V_{11}$, $V_1V_3V_8V_{10}$, $V_5V_7V_{12}V_{14}$, $V_4V_6V_{13}V_{15}$,
 $V_2V_5V_{10}V_{13}$, $V_3V_4V_{11}V_{12}$, $V_1V_6V_9V_{14}$, $V_1V_6V_8V_{15}$, $V_3V_4V_{10}V_{13}$, $V_2V_5V_{11}V_{12}$,
 $V_1V_7V_8V_{14}$, $V_3V_5V_{10}V_{12}$, $V_2V_4V_{11}V_{13}$, $V_2V_4V_{10}V_{12}$, $V_3V_5V_{11}V_{13}$, $V_1V_7V_9V_{15}$,
 $V_3V_4V_8V_{15}$, $V_1V_6V_{10}V_{13}$, $V_2V_5V_9V_{14}$, $V_2V_5V_8V_{15}$, $V_1V_6V_{11}V_{12}$, $V_3V_4V_9V_{14}$, $V_2V_4V_8V_{14}$,
 $V_1V_7V_{11}V_{13}$, $V_3V_5V_9V_{15}$, $V_3V_5V_8V_{14}$, $V_1V_7V_{10}V_{12}$, $V_2V_4V_9V_{15}$, $V_3V_7V_8V_{12}$,
 $V_1V_5V_{10}V_{14}$, $V_2V_6V_9V_{13}$, $V_2V_6V_8V_{12}$, $V_1V_5V_{11}V_{15}$, $V_3V_7V_9V_{13}$, $V_2V_7V_8V_{13}$,
 $V_1V_4V_{11}V_{14}$, $V_3V_6V_9V_{12}$, $V_3V_6V_8V_{13}$, $V_1V_4V_{10}V_{15}$, $V_2V_7V_9V_{12}$, $V_2V_6V_{10}V_{14}$,
 $V_3V_7V_{11}V_{15}$, $V_1V_5V_9V_{13}$, $V_1V_5V_8V_{12}$, $V_3V_7V_{10}V_{14}$, $V_2V_6V_{11}V_{15}$, $V_1V_4V_8V_{13}$,
 $V_3V_6V_{10}V_{15}$, $V_2V_7V_{11}V_{14}$, $V_2V_7V_{10}V_{15}$, $V_3V_6V_{11}V_{14}$, $V_1V_4V_9V_{12}$.

Примечание: оператор V_0 в переборе не участвует. На рис. 15 показаны варианты записи замкнутых групп (Γ) или множеств (M) в зависимости от знаков, входящих в их состав операторов.

V_i	V_j	V_k	V_l	Γ/M	V_i	V_j	V_k	V_l	V_i	V_j	V_k	V_l	Γ/M	V_i	V_j	V_k	V_l	
0	0	0	0	M	$\bar{V}_i \oplus \bar{V}_j \oplus \bar{V}_k \oplus \bar{V}_l$	0	0	0	1	Γ	$\bar{V}_i \times \bar{V}_j + \bar{V}_k \times V_l$	1	Γ	$\bar{V}_i \times \bar{V}_j + \bar{V}_k \times V_l$	0	0	0	1
1	0	0	0	Γ	$V_i \times \bar{V}_j + \bar{V}_k \times \bar{V}_l$	1	0	0	1	M	$V_i \oplus \bar{V}_j \oplus \bar{V}_k \oplus V_l$	1	M	$V_i \oplus \bar{V}_j \oplus \bar{V}_k \oplus V_l$	1	0	0	1
0	1	0	0	Γ	$\bar{V}_i \times V_j + \bar{V}_k \times \bar{V}_l$	0	1	0	1	M	$\bar{V}_i \oplus V_j \oplus \bar{V}_k \oplus V_l$	0	M	$\bar{V}_i \oplus V_j \oplus \bar{V}_k \oplus V_l$	0	1	0	1
1	1	0	0	M	$V_i \oplus V_j \oplus \bar{V}_k \oplus \bar{V}_l$	1	1	0	1	Γ	$V_i \times V_j + \bar{V}_k \times V_l$	1	Γ	$V_i \times V_j + \bar{V}_k \times V_l$	1	1	0	1
0	0	1	0	Γ	$\bar{V}_i \times \bar{V}_j + V_k \times \bar{V}_l$	0	0	1	1	M	$\bar{V}_i \oplus \bar{V}_j \oplus V_k \oplus V_l$	0	M	$\bar{V}_i \oplus \bar{V}_j \oplus V_k \oplus V_l$	0	0	1	1
1	0	1	0	M	$V_i \oplus \bar{V}_j \oplus V_k \oplus \bar{V}_l$	1	0	1	1	Γ	$V_i \times \bar{V}_j + V_k \times V_l$	1	Γ	$V_i \times \bar{V}_j + V_k \times V_l$	1	0	1	1
0	1	1	0	M	$\bar{V}_i \oplus V_j \oplus V_k \oplus \bar{V}_l$	0	1	1	1	Γ	$\bar{V}_i \times V_j + V_k \times V_l$	0	Γ	$\bar{V}_i \times V_j + V_k \times V_l$	0	1	1	1
1	1	1	0	Γ	$V_i \times V_j + V_k \times \bar{V}_l$	1	1	1	1	M	$V_i \oplus V_j \oplus V_k \oplus V_l$	1	M	$V_i \oplus V_j \oplus V_k \oplus V_l$	1	1	1	1

Рис. 15. Варианты записи замкнутых групп и множеств

Рассмотрим алгоритм вычисления замкнутых групп, описывающих сигнал:

- 1) вычислить для сигнала s_{dig} спектр на основе U -преобразования;
- 2) каждому элементу спектра ставится в соответствие оператор из множества $\{V_i\}$ (элементы спектра нумеруются с нуля, номера операторов и элементов спектра совпадают);

3) выполняется проверка наличие i -й замкнутой группы в сигнале S_{dig} :

3.1) из спектра выбираются четыре элемента, номера которых соответствуют номерам операторов, входящих в i -ю группу;

3.2) определяется количество инверсных операторов: если значение j -го элемента спектра меньше нуля, то считается, что соответствующий элементу оператор – инверсный; рассматривается две ситуации:

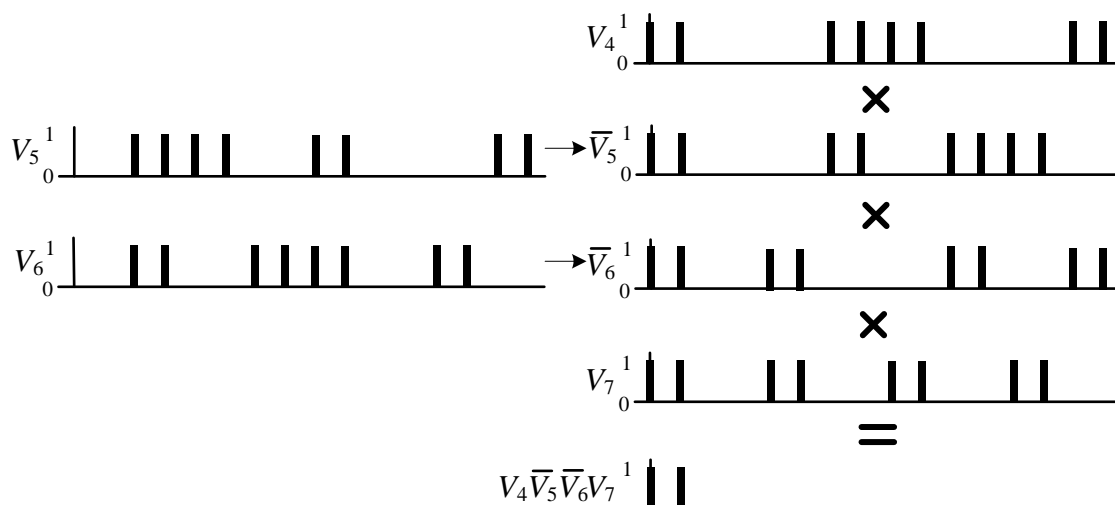
3.2.1) число инверсных операторов чётно: вычисляется образ замкнутого множества. Пусть из спектра выбраны четыре элемента, соответствующие операторам V_8, V_9, V_{10}, V_{11} . На рис. 16 показан пример вычисления образа замкнутого множества на операции сложения: $V_8 + V_9 + V_{10} + V_{11}$, и на операции умножения: $V_8 V_9 V_{10} V_{11}$;

3.2.2) число инверсных операторов нечётно: вычисляется образ замкнутой группы. На рис. 17 показан пример вычисления образа замкнутой группы $\bar{V}_8 V_9 + V_{10} V_{11}$;

4) вычисляется сумма отсчётов сигнала, находящихся под образом группы.

Каждой замкнутой группе, присутствующей в сигнале, в зависимости от числа инверсий можно поставить в соответствие число от 1 до 840. Данная операция выполняется отдельно для замкнутых групп и замкнутых множеств.

Несмотря на то, что всего, с учётом инверсий, существует 840 замкнутых групп и $840 + 840$ замкнутых множеств, по сигналу можно вычислить не более 140 замкнутых групп и 280 замкнутых множеств (140 – на операции сложения и 140 – на операции умножения). В табл. 6 показаны полные группы, описывающие сигнал, показанный на рис. 5.



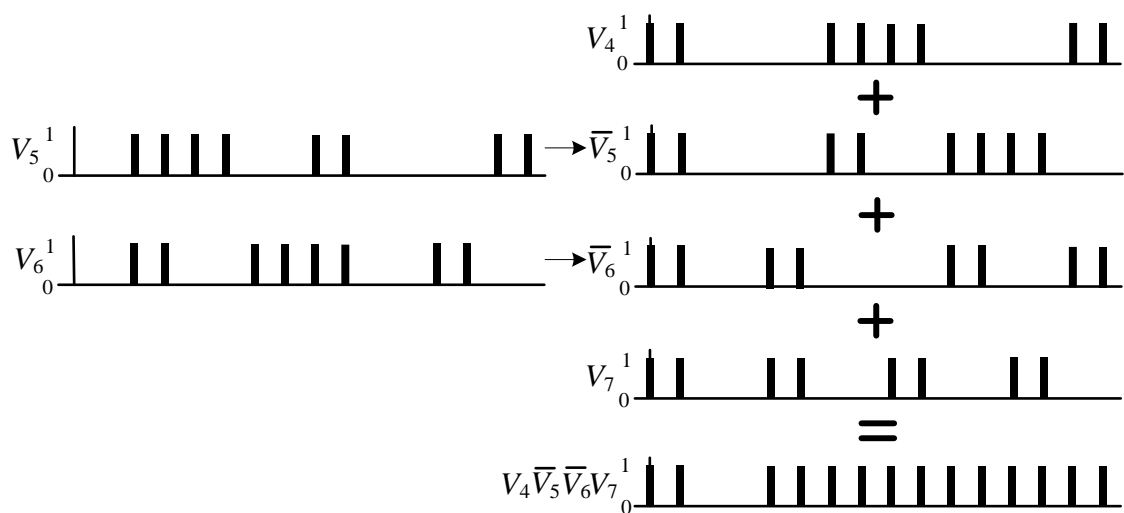


Рис. 16. Вычисление образа замкнутого множества

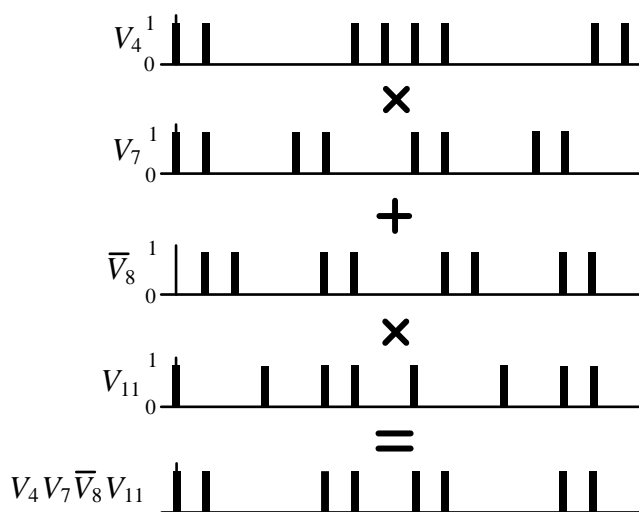


Рис. 17. Вычисление образа замкнутой группы

Табл. 6. Замкнутые группы, входящие в описание сигнала

Группа	$\overline{V}_8 V_9 V_{10} V_{11}$	$V_4 \overline{V}_5 \overline{V}_6 V_7$	$V_{12} \overline{V}_{13} V_{14} \overline{V}_{15}$	$\overline{V}_8 V_9 V_{14} \overline{V}_{15}$	$\overline{V}_2 \overline{V}_3 V_4 \overline{V}_5$
Пояснение	0	Мн.	0	0	Гр.
Сумма отсчётов	-	2 (10,5)	-	-	7,75
Группа	$V_{10} V_{11} V_{12} \overline{V}_{13}$	$\overline{V}_8 V_9 V_{12} \overline{V}_{13}$	$\overline{V}_2 \overline{V}_3 \overline{V}_6 V_7$	$V_{10} V_{11} V_{14} \overline{V}_{15}$	$\overline{V}_8 V_{11} V_{12} \overline{V}_{15}$
Пояснение	0	Мн.	Гр.	0	Мн.
Сумма Отсчётов	-	1,25 (10,5)	7	-	2 (10)
Группа	$\overline{V}_1 \overline{V}_2 \overline{V}_5 \overline{V}_6$	$V_9 V_{10} \overline{V}_{13} V_{14}$	$\overline{V}_8 V_{11} \overline{V}_{13} V_{14}$	$\overline{V}_1 \overline{V}_2 V_4 V_7$	$V_9 V_{10} V_{12} \overline{V}_{15}$
Пояснение	Мн.	0	0	Мн.	0
Сумма Отсчётов	2 (10)	-	-	2 (10,5)	-

Продолжение табл. 6

Группа	$\overline{V_8} V_{10} \overline{V_{13}} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_1} \overline{V_3} V_4 \overline{V_6}$	$V_9 V_{11} V_{12} V_{14}$	$\overline{V_8} V_{10} V_{12} V_{14}$	$\overline{V_1} \overline{V_3} \overline{V_5} V_7$
Пояснение	0	Гр.	0	0	Гр.
Сумма Отсчётов	-	7,25	-	-	7
Группа	$V_9 V_{11} \overline{V_{13}} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_6} V_7 \overline{V_8} V_9$	$\overline{V_2} \overline{V_3} V_{12} \overline{V_{13}}$	$V_4 \overline{V_5} V_{10} V_{11}$	$V_4 \overline{V_5} \overline{V_8} V_9$
Пояснение	Мн.	Мн.	Гр.	0	Мн.
Сумма Отсчётов	1,5 (10,75)	2 (9,75)	7	-	2 (10,5)
Группа	$\overline{V_2} \overline{V_3} V_{14} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_6} \overline{V_7} V_{10} V_{11}$	$V_4 V_7 \overline{V_8} V_{11}$	$\overline{V_1} \overline{V_2} \overline{V_{13}} V_{14}$	$\overline{V_5} \overline{V_6} V_9 V_{10}$
Пояснение	0	0	Гр.	0	0
Сумма Отсчётов	-	-	7	-	-
Группа	$\overline{V_5} \overline{V_6} \overline{V_8} V_{11}$	$\overline{V_1} \overline{V_2} V_{12} \overline{V_{15}}$	$V_4 V_7 V_9 V_{10}$	$\overline{V_5} V_7 \overline{V_8} V_{10}$	$\overline{V_1} \overline{V_3} V_{12} V_{14}$
Пояснение	Гр.	Гр.	0	0	0
Сумма Отсчётов	6,5	6,5	-	-	-
Группа	$V_4 \overline{V_6} V_9 V_{11}$	$V_4 \overline{V_6} \overline{V_8} V_{10}$	$\overline{V_1} \overline{V_3} \overline{V_{13}} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_5} V_7 V_9 V_{11}$	$V_4 \overline{V_5} V_{12} \overline{V_{13}}$
Пояснение	Гр.	0	Мн.	Гр.	Мн.
Сумма Отсчётов	7	-	2 (10,5)	6,75	2 (10,5)
Группа	$\overline{V_6} V_7 V_{14} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_2} \overline{V_3} V_{10} V_{11}$	$\overline{V_2} \overline{V_3} \overline{V_8} V_9$	$\overline{V_6} V_7 V_{12} \overline{V_{13}}$	$V_4 \overline{V_5} V_{14} \overline{V_{15}}$
Пояснение	0	0	Гр.	Мн.	0
Сумма Отсчётов	-	-	7	2 (9,75)	-
Группа	$\overline{V_5} \overline{V_6} \overline{V_{13}} V_{14}$	$V_4 V_7 V_{12} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_1} \overline{V_2} V_9 V_{10}$	$\overline{V_1} \overline{V_2} \overline{V_8} V_{11}$	$V_4 V_7 \overline{V_{13}} V_{14}$
Пояснение	0	Гр.	0	Гр.	0
Сумма Отсчётов	-	7	-	6,5	-
Группа	$\overline{V_5} \overline{V_6} V_{12} \overline{V_{15}}$	$V_4 \overline{V_6} V_{12} V_{14}$	$\overline{V_5} V_7 \overline{V_{13}} \overline{V_{15}}$	$\overline{V_1} \overline{V_3} V_9 V_{11}$	$\overline{V_1} \overline{V_3} \overline{V_8} V_{10}$
Пояснение	Гр.	0	Гр.	Мн.	0
Сумма Отсчётов	6,5	-	6,75	2 (10,5)	-
Группа	$\overline{V_5} V_7 V_{12} V_{14}$	$V_4 \overline{V_6} \overline{V_{13}} V_{15}$	$\overline{V_2} \overline{V_5} V_{10} \overline{V_{13}}$	$\overline{V_3} V_4 V_{11} V_{12}$	$\overline{V_1} \overline{V_6} V_9 V_{14}$
Пояснение	Гр.	Гр.	0	Гр.	0
Сумма Отсчётов	0	7	-	7,5	-

Окончание табл. 6

Группа	$\overline{V_1 V_6 V_8 V_{15}}$	$\overline{V_3 V_4 V_{10} V_{13}}$	$\overline{V_2 V_5 V_{11} V_{12}}$	$\overline{V_1 V_7 V_8 V_{14}}$	$\overline{V_3 V_5 V_{10} V_{12}}$
Пояснение	Мн.	0	Мн.	0	0
Сумма Отсчётов	2 (9,75)	-	2 (10,25)	-	-
Группа	$\overline{V_2 V_4 V_{11} V_{13}}$	$\overline{V_2 V_4 V_{10} V_{12}}$	$\overline{V_3 V_5 V_{11} V_{13}}$	$\overline{V_1 V_7 V_9 V_{15}}$	$\overline{V_3 V_4 V_8 V_{15}}$
Пояснение	Мн.	0	Гр.	Мн.	Гр.
Сумма Отсчётов	2 (10,75)	-	7,25	2 (10)	7,5
Группа	$\overline{V_1 V_6 V_{10} V_{13}}$	$\overline{V_2 V_5 V_9 V_{14}}$	$\overline{V_2 V_5 V_8 V_{15}}$	$\overline{V_1 V_6 V_{11} V_{12}}$	$\overline{V_3 V_4 V_9 V_{14}}$
Пояснение	0	0	Мн.	Мн.	0
Сумма Отсчётов	-	-	2 (10,25)	2 (9,75)	-
Группа	$\overline{V_2 V_4 V_8 V_{14}}$	$\overline{V_1 V_7 V_{11} V_{13}}$	$\overline{V_3 V_5 V_9 V_{15}}$	$\overline{V_3 V_5 V_8 V_{14}}$	$\overline{V_1 V_7 V_{10} V_{12}}$
Пояснение	0	Мн.	Гр.	0	Гр.
Сумма Отсчётов	-	2 (10)	7,25	-	0
Группа	$\overline{V_2 V_4 V_9 V_{15}}$	$\overline{V_3 V_7 V_8 V_{12}}$	$\overline{V_1 V_5 V_{10} V_{14}}$	$\overline{V_2 V_6 V_9 V_{13}}$	$\overline{V_2 V_6 V_8 V_{12}}$
Пояснение	Мн.	Мн.	0	Гр.	Гр.
Сумма Отсчётов	2 (10,75)	2 (10,25)	-	6,5	6,25
Группа	$\overline{V_1 V_5 V_{11} V_{15}}$	$\overline{V_3 V_7 V_9 V_{13}}$	$\overline{V_2 V_7 V_8 V_{13}}$	$\overline{V_1 V_4 V_{11} V_{14}}$	$\overline{V_3 V_6 V_9 V_{12}}$
Пояснение	Гр.	Мн.	Гр.	0	Мн.
Сумма Отсчётов	6,75	1,75 (10,75)	6,5	-	2 (10,25)
Группа	$\overline{V_3 V_6 V_8 V_{13}}$	$\overline{V_1 V_4 V_{10} V_{15}}$	$\overline{V_2 V_7 V_9 V_{12}}$	$\overline{V_2 V_6 V_{10} V_{14}}$	$\overline{V_3 V_7 V_{11} V_{15}}$
Пояснение	Мн.	0	Гр.	0	Мн.
Сумма Отсчётов	2 (10,25)	-	6,5	-	2 (10,75)
Группа	$\overline{V_1 V_5 V_9 V_{13}}$	$\overline{V_1 V_5 V_8 V_{12}}$	$\overline{V_3 V_7 V_{10} V_{14}}$	$\overline{V_2 V_6 V_{11} V_{15}}$	$\overline{V_1 V_4 V_8 V_{13}}$
Пояснение	Гр.	Гр.	0	Гр.	Гр.
Сумма Отсчётов	6,5	6,25	-	6,75	6,75
Группа	$\overline{V_3 V_6 V_{10} V_{15}}$	$\overline{V_2 V_7 V_{11} V_{14}}$	$\overline{V_2 V_7 V_{10} V_{15}}$	$\overline{V_3 V_6 V_{11} V_{14}}$	$\overline{V_1 V_4 V_9 V_{12}}$
Пояснение	0	0	0	0	Гр.
Сумма Отсчётов	-	-	-	-	6,75

В табл. 6 используются следующие обозначения: «0» – соответствующая группа не входит в описание сигнала, так как содержит нулевой оператор, «Гр.» – замкнутая группа на операции сложения, «Мн.» – замкнутое множество. Для замкнутых множеств в поле «Сумма отсчётов»

сначала указывается сумма при записи множества на операции умножения, а в скобках – на операции сложения.

6. Выбор размерности признакового описания

Рассмотрим вопрос выбора количества фильтров, операторов и групп, используемых при построении описания звукового сигнала. В табл. 7 приведена зависимость числа полных и замкнутых групп от количества используемых операторов (фильтров): с увеличением числа используемых операторов (фильтров) увеличивается число полных и замкнутых групп. Поэтому при выборе количества операторов (фильтров) для формирования признакового описания сигнала необходимо учитывать, что с увеличением размерности признакового пространства размер выборки должен увеличиваться нелинейно («проклятие размерности»). При увеличении объёма обучающей выборки также возрастают требования к объёму используемой памяти и увеличивается время работы алгоритмов принятия решения. В связи с этим для формирования описания сигнала допустимо использовать 8, 16 или 32 оператора (фильтра). Использование указанного количества признаков обеспечивает компромиссное решение между точностью описания сигнала, размером обучающей выборки и временем работы алгоритмов принятия решения. В колонке «Полные группы с инверсиями» показано число полных групп на операции сложения и умножения, в колонке «Замкнутые группы с инверсиями» показано число замкнутых групп и замкнутых множеств (на операции сложения и умножения).

Табл. 7. Связь между количеством операторов и групп

№	Операторы	Полные группы	Замкнутые группы	Полные группы с инверсиями	Замкнутые группы с инверсиями
1	4	1	0	$4 + 4$	0
2	8	7	7	$21 + 21$	$56 + 2 \cdot 56$
3	16	35	105	$140 + 140$	$840 + 2 \cdot 840$
4	32	155	1085	$620 + 620$	$8680 + 2 \cdot 8680$
5	64	651	9765	$2604 + 2604$	$78120 + 2 \cdot 78120$
6	128	2667	82677	$10668 + 10668$	$661416 + 2 \cdot 661416$
7	256	10795	680085	$43180 + 43180$	$5440680 + 2 \cdot 5440680$

Количество замкнутых групп для заданного числа операторов связано с количеством полных групп следующим соотношением:

$$N_c = N_f (2^{\log_2 N_o - 2} - 1),$$

где N_c – количество замкнутых групп, N_f – количество полных групп, N_o – количество операторов. Минимальное количество операторов в табл. 7 выбрано равным четырём, так как полную группу можно построить только по трём операторам.

7. Формирование признакового описания звукового сигнала

Полные и замкнутые группы удобно использовать для описания сегмента сигнала. Для получения описания сигнала в целом предлагается использовать «интегрирующие» описания, объединяющие описания отдельных сегментов сигнала.

Используя спектральное представление сигнала μ , можно сформировать описание сигнала на основе операторов, полных и замкнутых групп:

$$DV = GV[\mu], P_{na} = GP_{na}[\mu, V], P_{nm} = GP_{nm}[\mu, V], \\ P_s = GP_s[\mu, V, P_{na}, P_{nm}], P_c = GP_c[\mu, V, P_{na}, P_{nm}],$$

где GV – оператор вычисления по спектральному представлению сигнала признакового описания DV на основе операторов, GP_{na} (GP_{nm}) – на основе полных групп на операции сложения P_{na} (умножения, P_{nm}), GP_c (GP_s) – на основе замкнутых групп P_s (замкнутых множеств, P_c), P_{na} – множество полных групп на операции сложения, P_{nm} – множество полных групп на операции умножения, P_s – множество замкнутых групп, P_c – множество замкнутых множеств.

7.1. Гистограммы операторов, полных, замкнутых групп

Метод, предлагаемый для создания признакового описания в виде гистограммы:

1) отсчёты сигнала s_{dig} разбиваются на множество сегментов $s_{dig} = \{s_{dig, k}\}$, $k = \overline{1, N}$, длиной M отсчётов, со смещением в T отсчётов;

2) к каждому сегменту $s_{dig, k}$ применяется U -преобразование, в результате формируется спектральное представление каждого сегмента: $\mu_k = U[s_{dig, k}]$, $\mu = \{\mu_k\}$;

3) по вычисленному спектральному представлению μ_k сегмента $s_{dig, k}$ формируется описание с помощью одной или нескольких структур, входящих в алгебру групп. В алгебре групп существуют следующие структуры, которые могут использоваться для создания описания (допустимо использование сочетаний данных структур):

3.1) операторы (значимыми являются 15 операторов из 16, зная, что операторы могут принимать значения -1, 0 и 1, т.е. инверсный оператор, оператор отсутствует в описании сигнала и прямой оператор, пространство признаков на основе операторов включает 45 элементов; учитывая, что нулевые значения операторов встречаются не часто, можно использовать только значения -1 и 1, и, следовательно, сократить пространство признаков до 30 элементов);

3.2) полные группы (P_n), известны полные группы на операции умножения (P_{nm} , 140 элементов), полные группы на операции сложения (P_{na} , 140 элементов);

3.3) замкнутые группы (P_s , 840 элементов), замкнутые множества (P_{ca} – на операции сложения, 840 элементов, P_{cm} – на операции умножения, 840 элементов).

4) для объединения данных, полученных от разных сегментов анализируемого сигнала, вычисляется гистограмма элементов структур, использованных при создании описания сегмента сигнала (см. рис. 18, 19):

$$h_v = H [DV, \Gamma], h_{na} = H [P_{na}, \Gamma], h_{nm} = H [P_{nm}, \Gamma], h_s = H [P_s, \Gamma], \\ h_c = H [P_c, \Gamma], h_{nam} = H [P_{na}, P_{nm}, \Gamma], h_{sc} = H [P_s, P_c, \Gamma],$$

где h_v – гистограмма операторов, h_{na} – гистограмма полных групп на операции сложения, h_{nm} – гистограмма полных групп на операции умножения, h_s – гистограмма замкнутых групп, h_c – гистограмма замкнутых множеств, h_{nam} – гистограмма полных групп на операции сложения и умножения, H – оператор вычисления гистограммы заданной размерности, Γ – размерность гистограммы: $1d$ – одномерная гистограмма, $2d$ – двумерная гистограмма, $3d$ – трёхмерная гистограмма. В двумерной гистограмме учитываются частота возможных появлений пар групп (операторов) в описании одного сегмента сигнала, в трёхмерной – троек.

Ниже приведены алгоритмы формирования гистограмм различных размерностей. Признаковое описание, на основе которого формируется гистограмма h_D , обозначается как D . В качестве данного описания могут использоваться операторы, полные и замкнутые группы (см. рис. 18, 19).

Алгоритм формирования одномерной гистограммы признаков:

$$\forall i = \overline{1, M}$$

$$\forall j = \overline{1, |D_i|}$$

$$h_D (D_{i,1} [j]) = h_{D,1} (D_i [j]) + 1.$$

Алгоритм формирования двумерной гистограммы признаков:

$$\forall i = \overline{1, M}$$

$$\forall j = \overline{1, |D_i|}$$

$$\forall k = \overline{(j+1), |D_i|}$$

$$h_{D,2}(D_i[j], D_i[k]) = h_{D,2}(D_i[j], D_i[k]) + 1.$$

Алгоритм формирования трёхмерной гистограммы признаков:

$$\forall i = \overline{1, M}$$

$$\forall j = \overline{1, |D_i|}$$

$$\forall k = \overline{(j+1), |D_i|}$$

$$\forall l = \overline{(k+1), |D_i|}$$

$$h_{D,3}(D_i[j], D_i[k], D_i[l]) = h_{D,3}(D_i[j], D_i[k], D_i[l]) + 1.$$

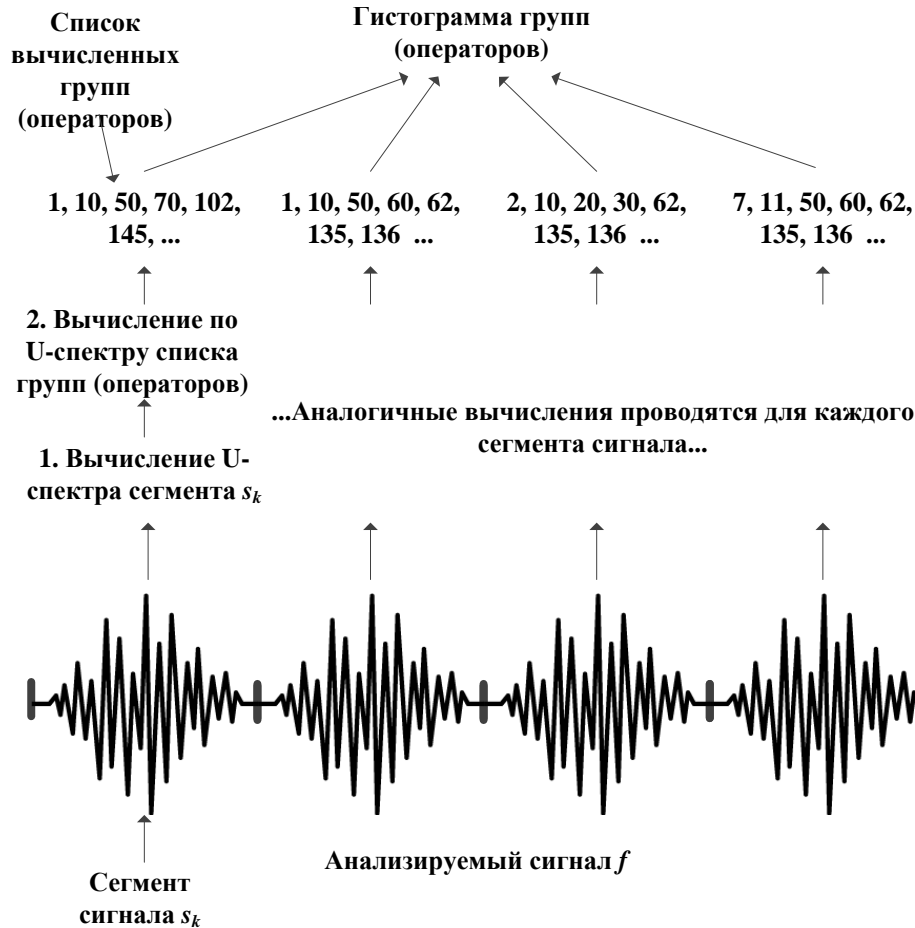


Рис. 18. Формирование одномерной гистограммы признаков

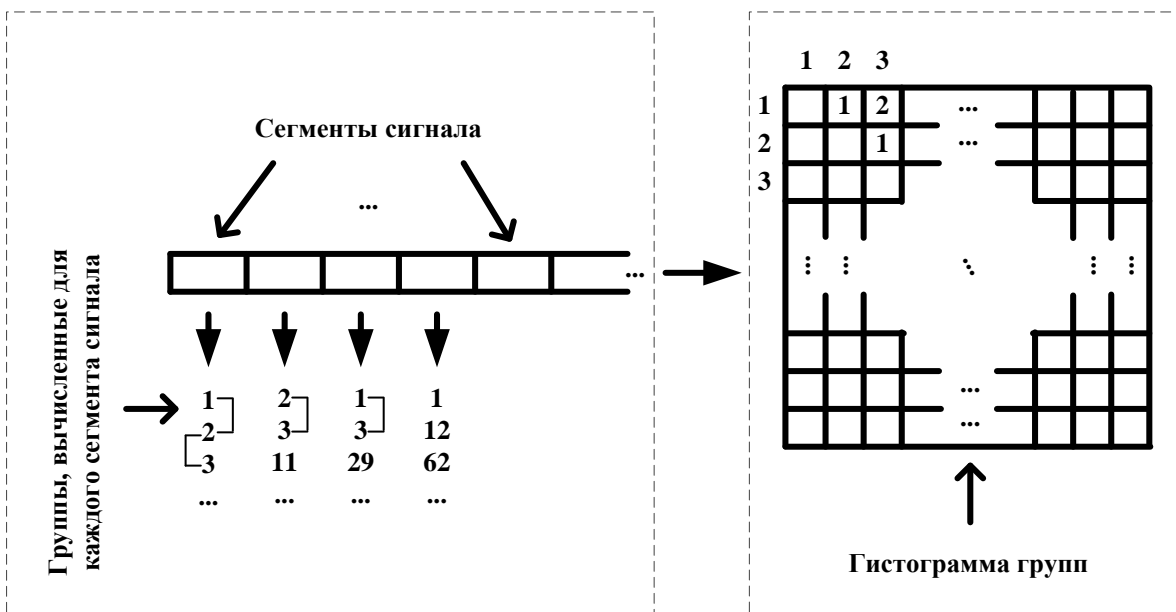


Рис. 19. Формирование двумерной гистограммы признаков

7.2. Матрицы вероятностей переходов

Предлагается модель признакового описания, в которой учитываются связи между соседними сегментами сигнала. Метод вычисления признакового описания в таком случае состоит в формировании матрицы вероятностей переходов между описаниями соседних сегментов.

Предлагаются следующие системы признаков, основанные на матрицах вероятностей переходов:

1) система признаков *PVI*, описывающая вероятности переходов между значениями операторов (оператор может принимать три возможных значения: прямое, инверсное и равное нулю), вычисленными по соседним сегментам сигнала, без учёта связей между различными операторами, размерность пространства признаков – $3 \times 3 \times 15$ (см. рис. 20);

2) система признаков *PVD*, описывающая вероятности переходов между значениями операторов, вычисленными по соседним сегментам сигнала, с учётом связи между операторами, размерность пространства признаков – 45×45 (см. рис. 21);

3) система признаков, описывающая вероятности переходов между описаниями сегментов, представленных в виде полных групп, размерность пространства признаков – 140×140 ; при использовании полных групп допустимо использовать только несколько максимальных по сумме отсчётов, находящихся под их образами, групп (граф переходов для полных групп подобен графу переходов для операторов, см. рис. 21);

4) система признаков, описывающая вероятности переходов между описаниями сегментов, представленных в виде замкнутых групп, размерность пространства признаков – 840×840 ; при использовании замкнутых

групп допустимо использовать группы, сумма отсчётов под образом которых максимальна.

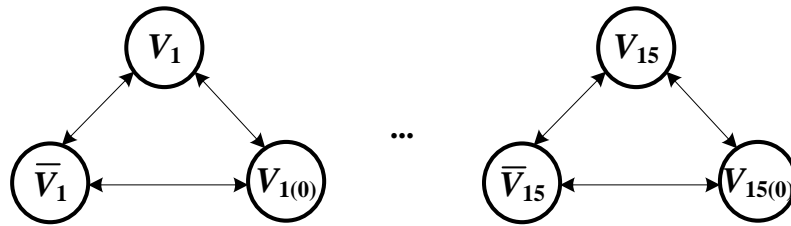


Рис 20. Графы переходов между операторами (без учёта связей между операторами)

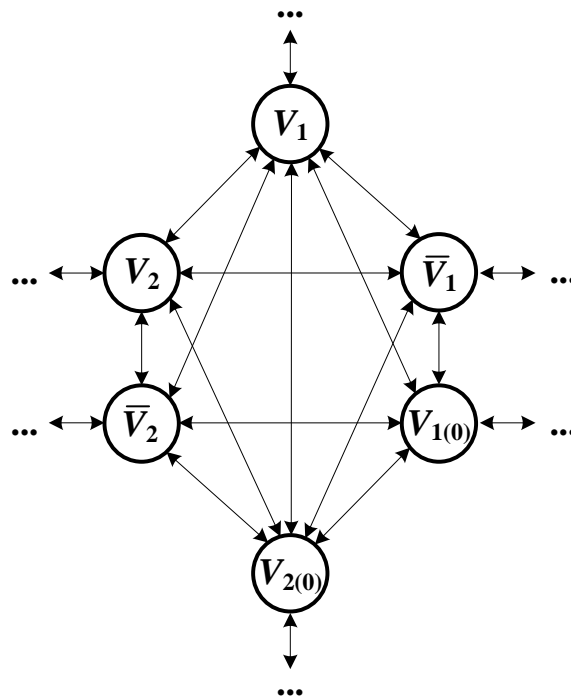


Рис 21. Граф переходов между операторами (с учётом связей между операторами)

Алгоритм формирования матрицы вероятностей переходов на основе полных (замкнутых) групп, D_i – описание i -го сегмента сигнала в виде полных (замкнутых) групп:

$$\forall i = \overline{1, (N-1)}$$

$$\forall k = \overline{1, |D_i|}$$

$$\forall l = \overline{1, |D_{i+1}|}$$

$$MPG_{D_i}[D_i[k], D_{i+1}[l]] = MPG_{D_i}[D_i[k], D_{i+1}[l]] + 1.$$

После выполнения описанного выше алгоритма выполняется нормировка строк матрицы таким образом, чтобы сумма элементов в строке равнялась единице.

Далее будут использоваться следующие обозначения PP_{na} (PP_{nm}) – матрица вероятностей переходов между полными группами на операции сложения (умножения), PP_s – между замкнутыми группами, PP_{ca} – между замкнутыми множествами на операции сложения, PP_{cm} – между замкнутыми множествами на операции умножения.

При формировании описания сигнала на основе матрицы вероятностей переходов можно учитывать связи не только между i и $(i + 1)$ сегментом сигнала, но и между другими соседними сегментами.

Учитывать связь не только между i и $(i + 1)$ сегментом, но также между i -м сегментом и другими его соседями. Например, между i -м и $(i + 1)$, $(i + 2)$, $(i - 1)$, $(i - 2)$ сегментами.

Пример формирования признакового описания сигнала в виде матрицы вероятностей переходов размером 140×140 элементов для полных групп показан на рис. 22. При вычислении значений матрицы рассматривались связи между описаниями только пары соседних сегментов.

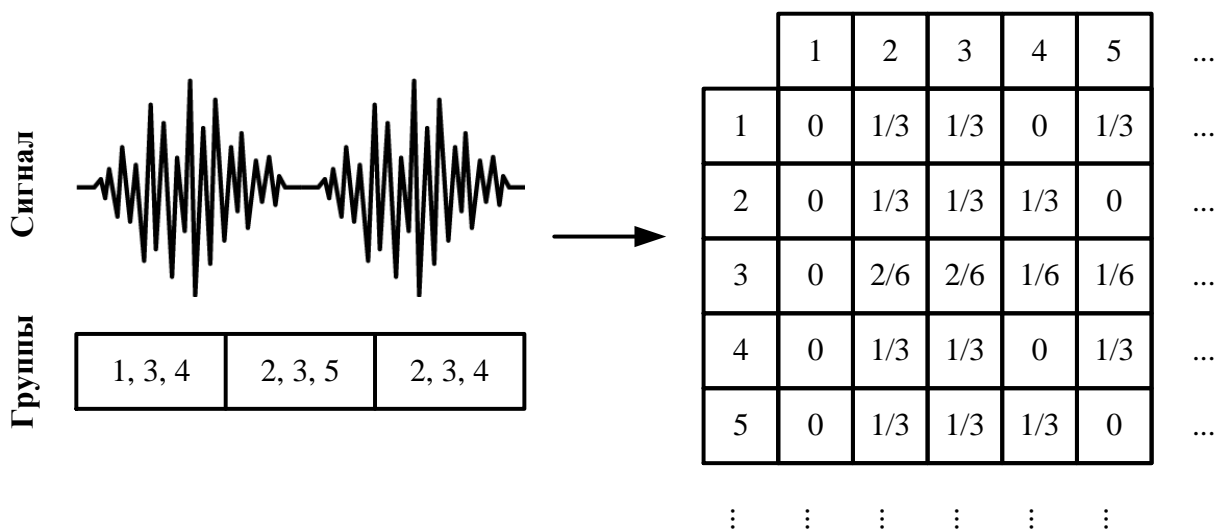


Рис. 22. Матрица вероятностей переходов между группами

Пример формирования признакового описания сигнала в виде 15 независимых матриц вероятностей переходов для операторов показан на рис. 23 (отображены только матрицы для двух операторов). При вычислении значений матрицы рассматривались связи между описаниями только пары соседних сегментов (i -го и $(i+1)$ -го) и учитываются вероятности переходов только для одного оператора.

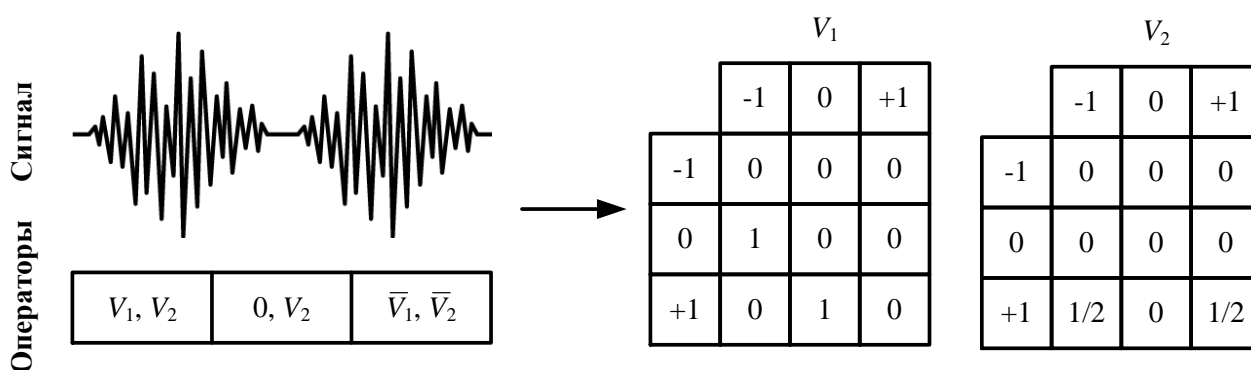


Рис. 23. Матрицы вероятностей переходов между операторами

Пример формирования признакового описания сигнала в виде матрицы вероятностей переходов для операторов размером 45×45 показан на рис. 24. При вычислении значений матрицы рассматривались связи между описаниями только пары соседних сегментов (i -го и $(i+1)$ -го). В описаниях сегментов приведены значения только операторов V_1 и V_2 .

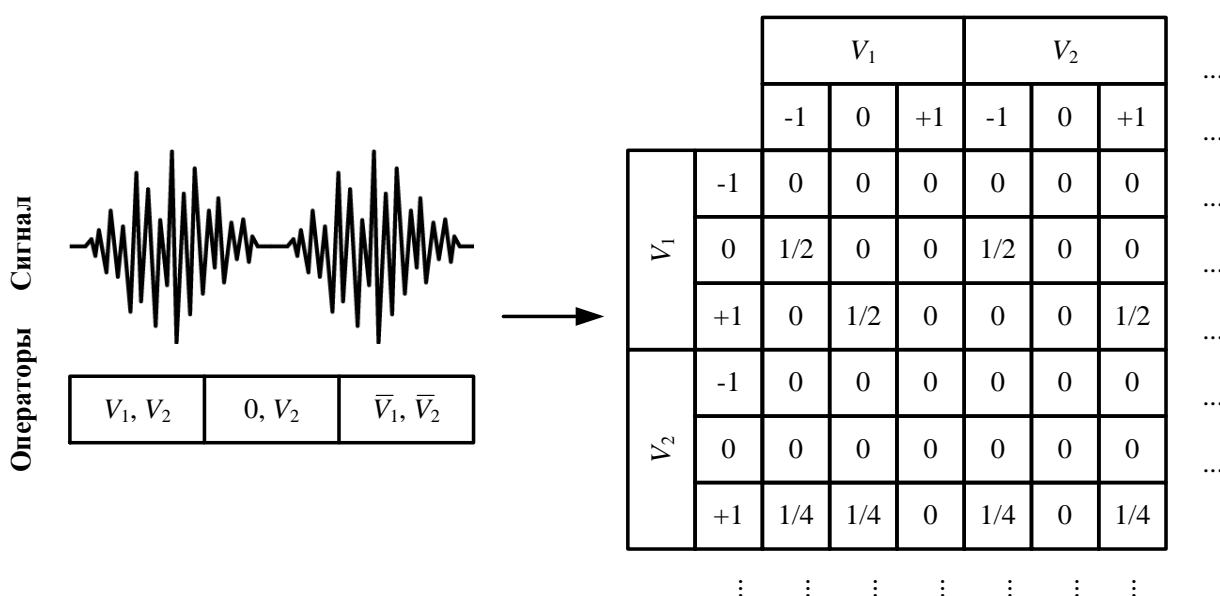


Рис. 24. Матрица вероятностей переходов между операторами

7.3. Выбор систем признаков для описания сигналов

В табл. 8 приведена размерность систем признаков, построенных на основе вероятностей переходов.

Табл. 8. Число элементов в системах признаков, построенных на основе вероятностей переходов

Количество операторов	PVD	PVI	$PP_{na} (PP_{nm})$	$PP_s (PP_{ca}, P_{cm})$
8	63	21^2	21^2	56^2
16	135	45^2	140^2	840^2
32	279	93^2	620^2	8680^2

В табл. 9 приведена размерность систем признаков, построенных на основе гистограмм.

Размерность приведённых в табл. 9 систем признаков ограничена тремя измерениями, так как с увеличением количества используемых измерений рост числа элементов в признаковом описании сигнала описывается показательной функцией.

Табл. 9. Число элементов в системах признаков, построенных на основе гистограмм

	Количество операторов	$1d$	$2d$	$3d$
h_V	8	14^1	14^2	14^3
	16	30^1	30^2	30^3
	32	62^1	62^2	62^3
h_{na}, h_{nm}	8	21^1	21^2	21^3
	16	140^1	140^2	140^3
	32	620^1	620^2	620^3
h_s, h_c	8	56^1	56^2	56^3
	16	840^1	840^2	840^3
	32	8680^1	8680^2	8680^3
h_{nam}	8	42^1	42^2	42^3
	16	280^1	280^2	280^3
	32	1240^1	1240^2	1240^3
h_{sc}	8	112^1	112^2	112^3
	16	1680^1	1680^2	1680^3
	32	17360^1	17360^2	17360^3

Серым цветом в табл. 8 и табл. 9 выделены системы признаков, использование которых накладывает высокие требования на производительность и объём памяти вычислительной машины.

Можно отметить следующие свойства систем признаков, построенных на основе гистограмм:

- 1) нулевая главная диагональ;
- 2) симметричность относительно главной диагонали.

Таким образом, без потери информации, можно не учитывать элементы, находящиеся на главной диагонали и под главной диагональю.

Также при построении систем признаков, приведённых в табл. 8 и 9, необходимо учитывать:

1) несовместимость операторов: два оператора называются несовместимыми, если они имеют одинаковые номера, но разные знаки (например, операторы V_1 и \bar{V}_1);

2) несовместимость групп: две группы (полные или замкнутые) называются несовместимыми, если в их состав входят операторы с одинаковыми номерами, но с разными знаками.

Учитывая несовместимость операторов и групп, можно отметить, что в двумерных и трёхмерных гистограммах, а также в матрицах вероятностей переходов нулевыми элементами будут те, которые стоят на пересечении строки и столбца, соответствующих несовместимым операторам или группам.

В табл. 10 приведены результаты сокращения размерности некоторых из описанных систем признаков.

Табл. 10. Результаты сокращения размерности систем признаков

Система признаков	Размер до сжатия	Размер после сжатия	Коэффициент сжатия
$PP_{na} (PP_{nm})$	19600	14140	1,38
$h_{na}, h_{nm} (2d)$	19600	7000	2,80
$h_V (2d)$	900	420	2,14
$h_V (3d)$	27000	3640	7,41

8. Задания для выполнения

8.1. Методика проведения эксперимента

Тестирование точности решения задачи должно быть основано на использовании метода перекрёстной проверки. Перекрёстная проверка (cross-validation) – метод оценки аналитической модели и её поведения на независимых данных. При оценке модели, данные, имеющиеся в наличии, разбиваются на k частей. Затем на $(k - 1)$ частях данных производится обучение модели, а оставшаяся часть данных используется для тестирования. Процедура повторяется k раз; в итоге каждая из k частей данных используется для тестирования. В результате получается оценка эффективности выбранной модели с наиболее равномерным использованием имеющихся данных.

Перекрёстная проверка имеет два основных преимущества перед применением одного множества для обучения и одного для тестирования модели. Во-первых, распределение целевых значений оказывается более равномерным, что улучшает качество обучения. Во-вторых, если при каж-

дом проходе оценить выходную ошибку модели и усреднить ее по всем проходам, то полученная её оценка будет более достоверной.

На практике чаще всего выбирается $k = 10$ (10 – проходная перекрестная проверка), когда модель обучается на 9/10 данных и тестируется на 1/10. Исследования показали, что в этом случае получается наиболее достоверная оценка выходной ошибки модели.

8.2. Варианты заданий

8.2.1. Решение практических задач

При решении приведённых ниже задач необходимо выбрать три различных системы признаков. В качестве классификаторов допустим использовать нейронные сети, метод k -ближайших соседей, метод опорных векторов и т. д.

1. Решить задачу оценки уровня глюкозы в крови по электрокардиографическому сигналу. Оценку точности решения задачи выполнить с использованием метода перекрёстной проверки, диаграммы Кларка и коэффициента корреляции Спирмена. Данные расположены по адресу: <https://goo.gl/aegtctx>.

2. Решить задачу оценки уровня давления в крови по электрокардиографическому сигналу. Оценку точности решения задачи выполнить с использованием метода перекрёстной проверки, коэффициента корреляции Спирмена и критерий Британского общества артериальной гипертензии:

Оценка	Абсолютная разница между эталоном и предсказанным значением		
	≤ 5 мм. рт. ст.	≤ 10 мм. рт. ст.	≤ 15 мм. рт. ст.
<i>A</i>	60	85	95
<i>B</i>	50	75	90
<i>C</i>	40	65	85
<i>D</i>	Хуже, чем <i>C</i>		

Данные расположены по адресу: <https://goo.gl/uMPmdQ>.

3. Решить задачу оценки уровня давления в крови по фотоплетизмографическому сигналу. Оценку точности решения задачи выполнить с использованием метода перекрёстной проверки, коэффициента корреляции Спирмена и критерий Британского общества артериальной гипертензии. Данные расположены по адресу: <https://goo.gl/8W7wK2>.

4. Решить задачу вибродиагностики состояния подшипника качения. Оценку точности решения задачи выполнить с использованием метода пе-

рекрёстной проверки. Данные расположены по адресу: <https://goo.gl/b4By8S>.

5. Решить задачу прогнозирования состояния подшипника качения. Данные расположены по адресу: <https://goo.gl/ks13hv>.

6. Решить задачу классификации птиц по голосу. Оценку точности решения задачи выполнить с использованием метода перекрёстной проверки. Данные расположены по адресу: <https://goo.gl/Gnwq2X>.

8.2.2. Разработка новых систем признаков

1. Разработайте и выполните тестирование на одной из приведённых выше задач признаковое описание сигнала в виде двумерной гистограммы:

1.1. по одной из осей которых отложены операторы, а по другой – полные группы (на операции сложения, умножения) – две системы признаков;

1.2. по одной из осей которых отложены замкнутые группы, а по другой – полные группы (на операции сложения, умножения) – две системы признаков;

1.3. по одной из осей которых отложены операторы, а по другой – замкнутые группы – одна система признаков;

1.4. по одной из осей которых отложены операторы, а по другой – замкнутые множества (на операции сложения, умножения) – две системы признаков;

1.5. по одной из осей которых отложены замкнутые группы, а по другой – замкнутые множества (на операции сложения, умножения) – две системы признаков;

2. Разработайте и выполните тестирование на одной из приведённых выше задач признаковое описание сигнала в виде матрицы вероятностей переходов:

2.1. между операторами и полными группами (на операции сложения, умножения) – две системы признаков;

2.2. между замкнутыми группами и полными группами (на операции сложения, умножения) – две системы признаков;

2.3. между операторами и замкнутыми группами – одна система признаков;

2.4. между операторами и замкнутыми множествами (на операции сложения, умножения) – две системы признаков;

2.5. между замкнутыми группами и замкнутыми множествами (на операции сложения, умножения) – две системы признаков.