УДК 004.932

В.Е. ГАЙ

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МНОГОМАСШТАБНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

V.E. GAI

DEVELOPING THE MODELS OF MULTISCALE DIGITAL IMAGES REPRESENTATION

Муромский институт (филиал)
Владимирского государственного университета
E-mail: iamuser@inbox.ru

В работе рассмотрены вопросы разработки многомасштабных моделей цифровых изображений, которые в качестве исходных данных используют многомасштабное разложение изображения, построенное с коэффициентом сжатия не кратным двум.

In this article the questions of multiscale digital images models developing, which use the multiple scale image decomposition, that is built with compression coefficient, not a number divisible by 2, as source data, are reviewed.

Введение

В настоящее время при решении различных задач обработки изображений используется многомасштабное представление изображений. Большинство алгоритмов обработки многомасштабных данных ориентированы на работу с многомасштабным разложением изображения, построенным с коэффициентом сжатия $k = 2$. Однако, актуальной является задача построения и использования адаптивного многомасштабного разложения, при вычислении которого, для более точного описания многомасштабной структуры изображения, может использоваться множество различных коэффициентов сжатия. В этом случае, возникает проблема адаптации разработанных алгоритмов и моделей к такому разложению. В работе рассматривается ряд возможных проблем, которые могут возникнуть при адаптации многомасштабных моделей и алгоритмов обработки изображений к адаптивному многомасштабному разложению, а также предлагаются их решения.

Описание связей между элементами многомасштабной последовательности

Задача описания связей между элементами R^i и R^{i+1} многомасштабной последовательности R, находящихся на соседних уровнях разрешения, может возникать при установлении соответствия между коэффициентом - предком и его потомками в различных многомасштабных моделях изображений (например, в модели многомасштабного марковского случайного поля, модели скрытого марковского дерева) [1, 2] и алгоритмах обработки многомасштабных данных. В рассматриваемом случае под предком и потомком понимаются коэффициенты многомасштабного разложения, которые принадлежат элементам последовательности R^i и R^{i+1}, находящихся на соседних уровнях разрешения (см. рис. 1).

При выполнении многомасштабного разложения с коэффициентом сжатия $k = 2$ при переходе к каждому следующему масштабу, размер элемента многомасштабной последовательности уменьшается в два раза. В этом случае, описать связь между соседними уровнями разрешения просто: каждому коэффициенту - предку соответствует четыре коэффициента - потомка (см. рис. 1).

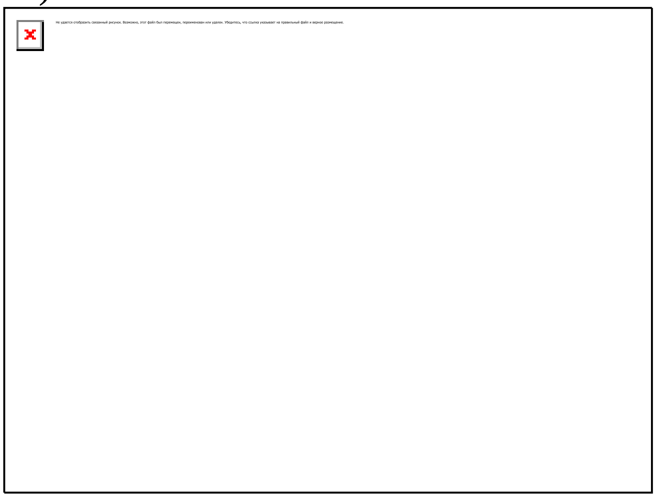


Рис. 1. Связи между предком и потомками в многомасштабном разложении, построенном с коэффициентом сжатия $k = 2$

Однако, когда при выполнении многомасштабного разложения, коэффициент изменения масштаба не кратен двум, возникает проблема описания связей между элементами последовательности R^i и R^{i+1} на соседних уровнях разрешения.

Пусть элемент последовательности R^i содержит $N_1 x N_1$ коэффициентов, элемент R^{i+1} - $N_2 x N_2$ коэффициентов ($N_1 > N_2, N_2 = N_1 / k$, где k - коэффициент изменения масштаба).

Возникает задача поиска соответствия между коэффициентами, принадлежащими указанным выше элементам многомасштабной последовательности.

Одним из возможных решений данной проблемы является разбиение множества коэффициентов, принадлежащих элементам последовательности, на группы и описание связей между коэффициентами соответствующих групп. Число связей между группами коэффициентов элементов, находящихся на соседних уровнях разложения может быть избыточным (т.е. пара соседних коэффициентов может иметь одного или нескольких общих потомков).

Для вычисления числа коэффициентов, которые будут включены в группу на дочернем и родительском уровнях разрешения, можно использовать следующий метод: необходимо найти такие два числа $M_1, M_2, M_2 < M_1, M_1 \in [1;10], M_2 \in [1;10]$, чтобы:

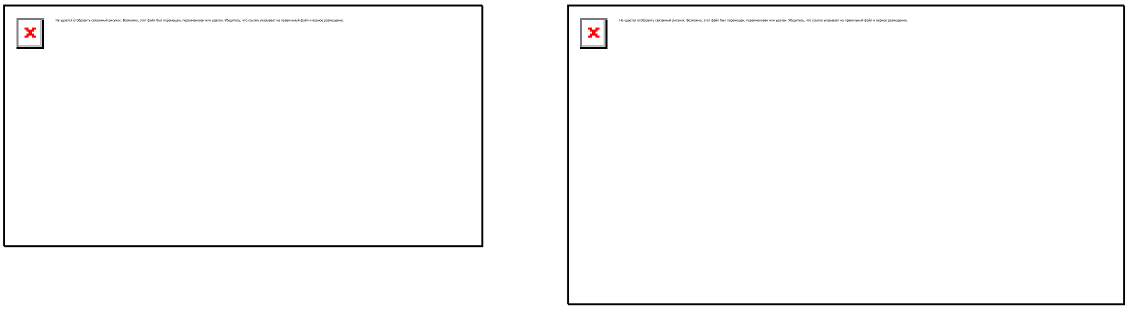
1) $M_1 / M_2 > k$;

2) $|M_1 - M_2| = \min$ (разница между M_1 и M_2 минимальна);

3) $M_1 = \min\{1..10\}, M_2 = \min\{1..10\}$ (числа M_1 и M_2 являются минимальными из возможного набора их значений).

Условия 2 и 3 непосредственно влияют на число связей в группе. Если два таких числа M_1 и M_2 найдены, то число M_1 будет определять количество коэффициентов, которые будут включены в рассматриваемую группу на дочернем уровне разрешения, а M_2 - на родительском.

Так, например, при построении многомасштабной последовательности, используя коэффициент сжатия $k = 25/16 = 0.64$, наиболее подходящей будет пара чисел $M_1 = 3; M_2 = 2$ или $M_1 = 5; M_2 = 3$ (однако, первая пара позволяет получить меньшее число связей в группе, чем вторая, поэтому она и выбирается).



а. б.

Рис. 2. Формирование связей между коэффициентами соседними уровнями разрешения, а. разбиение коэффициентов на группы, б. связи между коэффициентами в группе

На рис. 2.а показан пример описания связей между элементами последовательности на соседних уровней разрешения при $k = 3/2$, серым выделены группы коэффициентов. На рис. 2.б показана выделенная группа коэффициентов (P обозначает родительский уровень разрешения, C - дочерний).

Конечно, не всегда можно разбить множество коэффициентов, принадлежащих элементам на соседних уровнях разрешения на целое число групп. В таком случае можно добавить коэффициенты к элементу последовательности слева или справа и добиться целого разбиения. При возникновении такой ситуации на число добавляемых коэффициентов будут оказывать влияние пара чисел $(M_1; M_2)$: чем меньше данные числа, тем меньше коэффициентов необходимо будет добавить.

В табл. 1 показаны пары чисел $(M_1; M_2)$, которые могут быть использованы при описании связей между коэффициентами, принадлежащих элементам многомасштабной последовательности на соседних уровнях разрешения.

Табл. 1. Пары чисел $(M_1; M_2)$

M_1	2	3	5	4	5	3	4	5
M_2	1	2	2	3	4	1	1	3

Выравнивание размеров элементов многомасштабной последовательности

Выше было указано, что не всегда возможно выполнить разбиение множеств коэффициентов, принадлежащих элементам R^i и R^{i+1} многомасштабной последовательности на целое число групп. В таком случае предварительно требуется выровнять друг относительно друга размеры этих элементов. Ниже представлен алгоритм определения числа дополнительных коэффициентов, необходимых для выравнивания размеров элементов последовательности на соседних уровнях разрешения по горизонтали (вертикали). Входными параметрами алгоритма является размеры элементов по горизонтали (вертикали): ss - размер по горизонтали (вертикали) родительского элемента R^{i+1} , sb - размер по горизонтали (вертикали) дочернего элемента R^i; выходными: as - число добавляемых коэффициентов по горизонтали (вертикали) к родительскому элементу R^{i+1}, ab - число добавляемых коэффициентов по горизонтали (вертикали) к дочернему элементу R^i.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1) $as = 0, ab = 0$

2) если $(ss + as)/(sb + ab) < k$, то $as = as + 1$, иначе переход на шаг 3;

3) если $(ss + as)/(sb + ab) > k$, то $ab = ab + 1$, иначе переход на шаг 4;

4) если $(ss + as)/(sb + ab) = k$, то переход на шаг 5, иначе переход на шаг 2;

5) окончание работы алгоритма.

После расчёта необходимо выполнить расширение родительского R^{i+1} и дочернего R^{i} элемента на рассчитанное число коэффициентов.

Взаимное влияние коэффициентов элементов многомасштабной последовательности

При разработке многомасштабных моделей представления изображения необходимо также формализовать алгоритмы обработки многомасштабных данных. Такие алгоритмы могут иметь различное направление работы (в различном порядке обрабатывая полученное многомасштабное разложение): "сверху - вниз" (обрабатываются сначала самые грубые масштабы, а потом - более точные), или "снизу - вверх" (сначала обрабатываются элементы многомасштабной последовательности, находящиеся на точных масштабах, затем, на грубых). Существуют алгоритмы, которые комбинируют оба способа обработки. Также, при формализации многомасштабной модели с каждым коэффициентом связывается некоторый параметр, который может быть включён в набор параметров, определяющих модель и изменяться во время вычисления параметров модели.

В таком случае, при работе алгоритмов определения параметров модели или алгоритмов обработки многомасштабного разложения изображения могут возникать следующие конфликтные ситуации:

1) несколько коэффициентов - предков пытаются влиять на одного потомка (см. рис. 3, на рисунке показаны не все существующие связи между коэффициентами, стрелкой на рисунке указано направление работы алгоритма);

2) один коэффициент - потомок пытается влиять на несколько коэффициентов - предков (см. рис. 4).

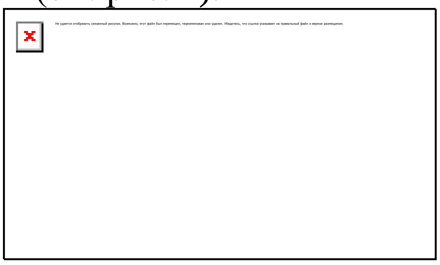


Рис. 3. Конфликт между четырьмя коэффициентами - предками

Первая ситуация возникает для алгоритма, работающего "сверху - вниз". Для решения конфликта можно ввести некоторый критерий, который будет оценивать влияние каждого коэффициента предка на коэффициент - потомок. Одним из таких критериев может быть абсолютная разница между коэффициентами - предками:

1) если разница невелика, то можно усреднить влияние всех коэффициентов - предков на рассматриваемый коэффициент - потомок;

2) если разница велика, то надо рассмотреть величину каждого коэффициента - предка, соотнести её с величиной коэффициента - потомка и выбрать наиболее подходящий коэффициент - предок, при этом, учитывать в дальнейшем только его влияние.

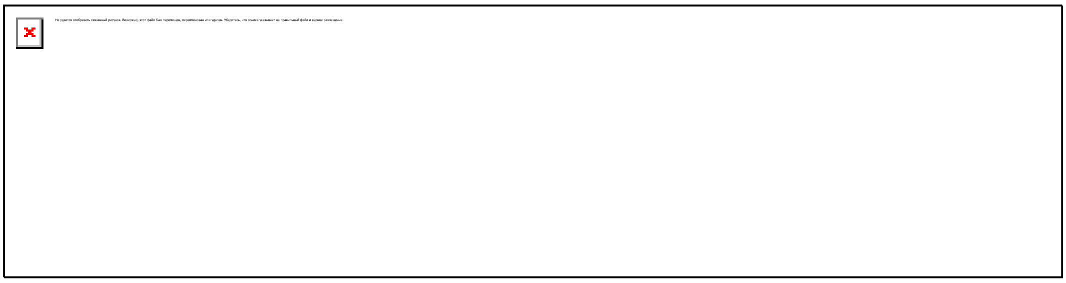


Рис. 4. Влияние коэффициента потомка на два коэффициента - предка

Вторая ситуация возникает при работе алгоритма "снизу-вверх". Решение проблемы достаточно простое: можно увеличить число коэффициентов элемента последовательности, находящегося на более точном уровне разрешения повторив те коэффициенты, которые влияют одновременно на несколько коэффициентов - предков.

Изображения могут иметь различные статистические свойства в различных направлениях. Это можно увидеть, рассмотрев величины коэффициентов корреляции по строкам и по столбцам. В связи с этим возникает необходимость использования различных шагов разложения по горизонтали k_h и по вертикали k_v. Это, в свою очередь, приводит к тому, что деление коэффициентов на группы необходимо проводить отдельно по горизонтали и по вертикали.

Экспериментальная часть

В [2] предложена модель скрытого марковского дерева изображения, которая в качестве исходных данных используется многомасштабное разложение с изображения W коэффициентом сжатия $k=2$, полученное на основе вейвлет – преобразования: $W=\{L,H_1,H_2,H_3\}$. Разложение W представляет собой совокупность трёх последовательностей дополнений H_1,H_2,H_3 и приближения L. Модель скрытого марковского дерева основывается на свойстве «компактности» коэффициентов элемента последовательности дополнений. Компактность заключается в том, что множество коэффициентов элемента детализирующей последовательности можно разделить на два подмножества по их величине: $H_i^j=\{H_i^j[m,t]\}=S\cup B$, где $S[m,t]=H_i^j[x,y],|H_i^j[x,y]|<Thr$, $B[m,t]=H_i^j[x,y],|H_i^j[x,y]|\geq Thr$), Thr - порог. С каждым вейвлет коэффициентом связывается переменная, описывающая скрытое состояние вейвлет коэффициента: $D_i\in\{S,B\}$. Состояние вейвлет коэффициента показывает, к какому из подмножеств S или B он относится. В связи с

этим, для описания гистограммы вейвлет коэффициентов используется двухкомпонентная гауссова смесь:

$$f(w)=P_B g(w,\mu_B,\sigma_B)+P_S g(w,\mu_S,\sigma_S),$$

где $f(w)$ - аппроксимация гистограммы вейвлет – коэффициентов дополнения H_i^j, $g(\bullet)$ - гауссово распределение, μ_B,μ_S - математические ожидания гауссовых распределений, σ_B,σ_S - дисперсии гауссовых распределений, P_B, P_L - доли каждой компоненты в смеси. Для описания взаимосвязей между коэффициентами на соседних масштабах используется матрица вероятностей переходов между состояниями $A=\begin{bmatrix} A_{SS} & A_{SB} \\ A_{BS} & A_{BB} \end{bmatrix}$. Вычисление параметров модели осуществляется на основе алгоритма ожидания – максимизации. Для оценки возможности использования описанных выше методик для решения поставленной задачи адаптации многомасштабных моделей к многомасштабному разложению, построенному с коэффициентом сжатия не кратным 2, был проведен эксперимент. Эксперимент заключался в вычислении параметров модели скрытого марковского дерева, которая в качестве исходных данных использует многомасштабное разложение изображения с коэффициентом сжатия $k=3/2$. В табл. 2 показаны вычисленные значения параметров модели для некоторых элементов последовательности дополнений H_1. Для вычисления параметров был разработан модифицированный алгоритм ожидания – максимизации, который учитывает замечания по поиску соответствия между коэффициентом – потомком и коэффициентом – предком.

Табл. 2. Экспериментальные данные

Элемент многомасштабной последовательности	Параметры модели			
3	A_{SS}	A_{SB}	P_S	P_B
	0.974664	0.025336	0.516664	0.483336
	A_{BS}	A_{BB}	σ_S	σ_B
	0.167629	0.832371	0.003212	0.064603
7	A_{SS}	A_{SB}	P_S	P_B
	0.990630	0.009370	0.697175	0.302825
	A_{BS}	A_{BB}	σ_S	σ_B
	0.163773	0.836227	0.000227	0.013656

Вычисленные значения параметров соответствуют ожидаемым величинам, а также, не противоречат возможным значениям параметров модели скрытого марковского дерева, указанным в [3].

Результаты

Использование адаптивного многомасштабного разложения в многомасштабных моделях и алгоритмах обработки изображений приводит к необходимости решения задачи установления соответствия между коэффициентами элементов многомасштабной последовательности. В работе проведен анализ этой задачи, также представлены возможные способы её решения. Результаты эксперимента по использованию в качестве исходных данных для модели скрытого марковского дерева многомасштабного разложения с коэффициентом сжатия $k = 3/2$ подтверждает возможность использования предложенных методик для решения поставленной задачи.

Список литературы

1. Besag, J. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems / J. Besag // Journal of Royal society. –1974. – Series E. – Vol. 26. – P. 192-236.

2. Baraniuk, R. Bayesian tree-structured image modeling using wavelet domain hidden Markov trees / R. Baraniuk, H. Choi, J. Romberg // In Proceedings of SPIE technical conference on Mathematical modeling, Bayesian Estimation and Inverse Problems. – Colorado, Denver. – July 1999. – Vol. 3816. – P.31-44.

3. Baraniuk, R. Wavelet – based statistical signal processing using hidden Markov models / R. Baraniuk, M. Course, R. Nowak // IEEE Transactions on signal processing. – 1998. – Vol. 46. – P. 886-902.

Научный руководитель – к.т.н., доцент Жизняков А.Л.