
spanishListingExtracto de cdigo spanishList of ListingsExtractos de cdigo
listingextractoextractos

Segmentación de imágenes a través de lógica difusa y funciones REF, de Dombi y penalti



Grado en Ingeniería Informática

Trabajo Fin de Grado

Iñigo Aguas Ardaiz

Humberto Bustince Sola

Fco. Javier Fernández Fernández

Pamplona, 25 de junio de 2015

Abstract

traducir al inglés cuando haya una versión definitiva

Muchas técnicas para la resolución de problemas específicos de computación dependen fuertemente de las funciones utilizadas para procesar la información y de la determinación de los mejores parámetros para las mismas. Esto es así, en particular, en problemas de procesamiento de imagen (segmentación) con técnicas difusas en los que, en gran medida, las funciones y variables dependen del problema considerado. En concreto, en este proyecto se propone utilizar funciones de Dombi para sustituir las funciones REF en la segmentación de imágenes en blanco y negro de forma que encontremos la mejor forma de segmentar o umbralizar un conjunto de imágenes y poder llevar este proceso a la práctica de forma general. Después, por medio de funciones penalti intentamos obtener una umbralización lo más parecida posible a todas las llevadas a cabo.

Resumen

Muchas técnicas para la resolución de problemas específicos de computación dependen fuertemente de las funciones utilizadas para procesar la información y de la determinación de los mejores parámetros para las mismas. Esto es así, en particular, en problemas de procesamiento de imagen (segmentación) con técnicas difusas en los que, en gran medida, las funciones y variables dependen del problema considerado. En concreto, en este proyecto se propone utilizar funciones de Dombi para sustituir las funciones REF en la segmentación de imágenes en blanco y negro de forma que encontremos la mejor forma de segmentar o umbralizar un conjunto de imágenes y poder llevar este proceso a la práctica de forma general. Después, por medio de funciones penalti intentamos obtener una umbralización lo más parecida posible a todas las llevadas a cabo.

Índice general

Abstract	I
Resumen	III
Índice general	v
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Definición del problema	2
1.3. Solución propuesta	3
1.4. Reelevancia	5
1.5. Propósito y objetivos	5
1.6. Análisis bibliográfico	6
2. Conceptos básicos	7
2.1. Lógica difusa	7
2.2. Funciones de equivalencia restringida	9
2.3. Funciones de agregación	10
2.3.1. Funciones OWA	11
2.3.2. Integral Choquet	12
2.4. Funciones de similitud	13
	v

2.5. Funciones penalti	13
2.6. Funciones de Dombi	14
2.7. Notación	14
3. Segmentación de imágenes con un solo umbral	17
4. Segmentación de imágenes con varios umbrales	19
5. Conclusiones y líneas de futuro	21
Bibliografía	23

CAPÍTULO 1

Introducción

En este capítulo se da una visión general del problema que se ha estudiado así como la motivación para investigar y contribuir en este área. Se explica, también, la relevancia del problema en el marco del procesamiento de imagen y la segmentación. Finalmente, se especifican el propósito y los objetivos que se han guiado esta investigación

1.1. Motivación

El desarrollo de mecanismos que permiten a las máquinas el aprendizaje de técnicas que les permitan la resolución automática de problemas es un campo fundamental dentro del área de la Computación y la Inteligencia Artificial. Este tipo de procesos se utilizan en la vida diaria de muchos seres humanos y resultan innatos en ellos, en cambio, su implementación para que las máquinas los implementen se convierte en todo un reto debido a la dificultad de la imitación de los procesos cerebrales de las personas.

Muchos autores [1, 9, 20, 24] han propuesto ideas sobre esta cuestión pero debe destacarse a R. Penrose [19] que en su libro *La nueva mente del Emperador*, se proclama un claro detractor de la idea de que las máquinas puedan llegar a tener la opción de discernir de una forma similar al cerebro humano. Llega incluso a preguntarse “¿cómo podremos siquiera *empezar* a explicar la substancia de tales problemas a una entidad que no sea ella misma consciente...?”

En definitiva, en este trabajo se motiva en la idea de hacer posible lo que muchos creen

imposible, lo que es imposible sin una correcta segmentación de la imagen que pudiera ser

1.2. Definición

El problema de la segmentación de una imagen es diferenciar claramente las partes de ella pertenecientes a diferentes objetos. La dificultad para diferenciarlos a veces durante el procesamiento puede resultar muy costosa, como en el caso de ser como aquel



Figura 1.1: Distinguir el molino del pueblo del fondo no es difícil para un humano aunque sí para una máquina.

Es importante el problema de la segmentación Autores como González y Woods en [13] enuncian el problema de “segmentación de imágenes no triviales como una de las tareas más difíciles en el procesamiento de imágenes”. En este sentido, insisten en que “la exactitud de la segmentación determina el éxito o error de los procesos de análisis

computerizados”. Otros autores [21] hablan de la segmentacin como una “tcnica en la que se divide la imagen en partes que tienen una correlacin con objetos o reas del mundo real contenidas en la imagen”. Definido formalmente:

Definicin 1.2.1. Dada una imagen Q que se puede subdividir en n regiones R_1, \dots, R_n , y sabemos que P es una cierta propiedad booleana que cumplen todos los pxeles de la regin $R_i, \forall i = 1, \dots, n$, se deber cumplir siempre que:

- (1) $\bigcup_{i=1}^n R_i = Q$;
- (2) En una regin $R_i, \forall i = 1, \dots, n$ todos sus pxeles estn conectados;
- (3) $R_i \cap R_j = \emptyset, \forall i, j : i \neq j$;
- (4) $P(R_i) = \text{VERDADERO}, \forall i = 1, \dots, n$;
- (5) $P(R_i \cup R_j) = \text{FALSO}, \forall i = 1, \dots, n$.

En conclusin, en este proceso se lleva a cabo la divisin de la imagen en regiones donde cada una (desde 2 hasta n , este nmero depender del problema que estemos resolviendo) harn mencin al fondo y a cada objeto. Adems, todas las regiones sern independientes entre s, esto es, un pixel pertenecer solamente a la regin i cuando hablemos de segmentacin completa. Centrando el problema nicamente en aquellas imgenes en escala de grises, nuestra pretensin ser obtener aquellas regiones que contienen a un objeto centrndonos en sus tonalidades, esto es, por medio de tcnicas de umbralizacin **seguro?**.

1.3. Solucin propuesta

Nosotros vamos a utilizar tcnicas difusas, para empezar. ¿Por qu? (Incertidumbre en torno a los pxeles, prdida de informacin captacin imgenes,...)

Existen tres tcnicas para poder llevar a cabo la segmentacin de una imagen: **explicacin y referencia**

- a) Segmentacin basada en umbralizacin.
- b) Tcnicas basada en agrupamiento de pxeles en regiones.

c) Técnicas basadas en la detección de bordes.

En este trabajo se va a centrar la segmentación por medio de las técnicas de umbralización. Para ello lo que tendremos que hacer será calcular los umbrales que separen las regiones que se hayan encontrado, de forma que situaremos las regiones entre un umbral t_i y uno t_{i+1} . Para ejemplificar esto, tomaremos la umbralización binaria en la cual se dispondrá de un único umbral t . De esta forma, todos los elementos de la imagen que se encuentren por encima del umbral pertenecerán a una región y los que estén por debajo a la segunda. Esta técnica se basa únicamente en detectar los diferentes tonos de gris de la imagen, así que mirando el histograma de la imagen (fig. 1.2, podremos ver cómo existe una frontera entre la intensidad $t = 71$ y el resto creando diferencias en los niveles de gris. [2]

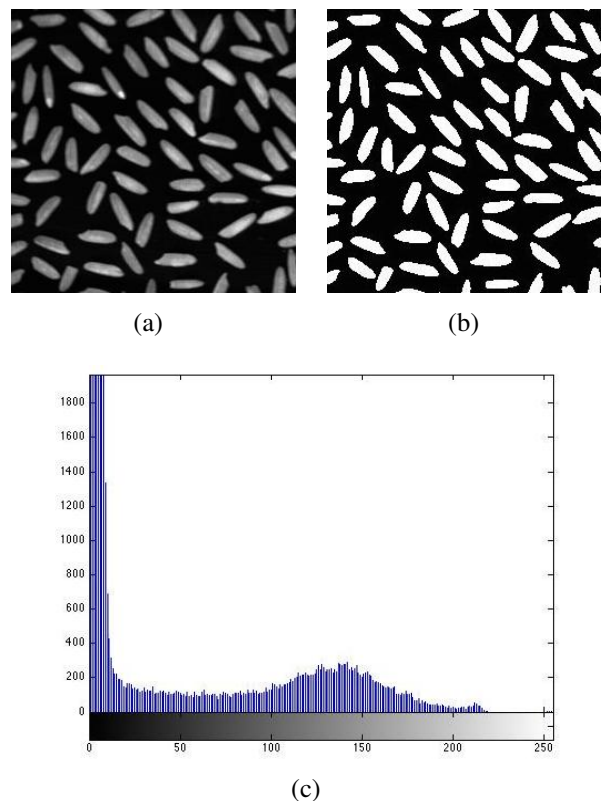


Figura 1.2: (a) Imagen original. (b) Imagen segmentada. (c) Histograma de la imagen original. Se puede ver que en $t=71$ se produce un mínimo con respecto a los otros niveles de gris y que por eso se escoge como umbral.

solución al pq... Se debe tener en cuenta que la umbralización es un método rápido y de coste computacional bajo por lo que se puede realizar en tiempo real. Como solo basa su algorítmica en el histograma de la imagen hace que sea un método sencillo e intuitivo

aunque esto también hace que tenga problemas ante el ruido y objetos o fondos que no sean uniformes.

La solución que se presenta en este trabajo se haya por medio de lógica difusa. Se han utilizado funciones REF, de Dombi, de agregación y penalti. En el capítulo 2 se hace mención a todos estos conceptos y se explican poniéndose en práctica a partir del capítulo 3. En el capítulo ?? se presentan todas las conclusiones obtenidas así como las líneas de trabajo futuro.

1.4. Relevancia

En el campo de la medicina [22] se ha experimentado una mejora sustancial en la efectividad de las pruebas médicas gracias a diferentes opciones como los rayos X, la tomografía computerizada, la resonancia magnética, la tomografía por emisión de positrones (PET), imágenes de ultrasonidos y otras. La revolución digital y el gran poder de procesamiento que disponen los ordenadores ha conseguido que los profesionales comprendan la compleja anatomía humana, aunque esto no ha sido suficiente ya que se ha visto necesario poder obtener los bordes, las superficies y la segmentación de los órganos. Estos órganos segmentados y sus bordes son clave para poder conseguir que un especialista médico pueda hacer una cirugía adecuada para muchas ramas de la medicina, debido a la importancia de tener datos en tiempo real. **[Insertar figura que vaya con esto].**

Pruebas médicas Localización de tumores y otras patologías Medida de volúmenes de tejido Cirugía guiada por ordenador Diagnóstico Planificación del tratamiento Estudio de la estructura anatómica

Análisis automático de detección de errores.

Sensor de huella digital Localización de objetos en imágenes de satélite (teledetección). **Alargar esto**

1.5. Propósito y objetivos

Este proyecto se centra en estudiar técnicas de segmentación para un único umbral y la generalización de estas en múltiples umbrales en imágenes en blanco y negro e intentar mejorar las técnicas de las que actualmente se disponen intentando generalizarlas de forma que los parámetros no dependan del problema.

Además, para poder conseguir el propósito anterior se estipularon los siguientes objetivos:

- Investigar y conocer técnicas actuales de segmentación de imagen de forma que estas sean el punto de partida.
- Analizar y evaluar las funciones que J. Dombi propone en [10]. Comparar estas con las funciones REF y sustituirlas en la construcción de los conjuntos difusos para conocer sus efectos.
- Implementar diferentes algoritmos de segmentación con el conocimiento adquirido anteriormente evaluando su mejora y haciendo las correcciones necesarias con la intención de generalizar el método de forma máxima.
- Implementar diferentes algoritmos que incluyan la agregación de las diferentes funciones estudiadas para la segmentación en los puntos anteriores comprobando si esto mejora los resultados anteriores.
- Analizar todos los puntos anteriores a fin de concluir los resultados del trabajo así como determinar si se ha podido conseguir cumplir el propósito inicial.

1.6. Análisis bibliográfico

No tengo claro aún qué poner aquí. Próximamente.

CAPÍTULO 2

Conceptos bsicos

Este captulo pretende ser una introduccin a todos los conceptos tericos necesarios para la correcta comprensin del trabajo que se detalla en esta memoria.

2.1. Lgica difusa

La lgica difusa fue ideada por el matemtico L. A. Zadeh [26] en 1965 con la intencin de poder extender la lgica clsica o *crisp* de forma que permitiera manejar y procesar la informacin que se compone de trminos inexactos, imprecisos o subjetivos. Es, al fin y al cabo, un intento de imitar la forma de deduccin del cerebro humano para trasladarlo a las mquinas. Se comenzar recordando la lgica clsica para despus extender los conceptos a la difusa.

En primer lugar, definiremos el conjunto del universo finito, U , con el que se trabajar, de forma que se contengan todos aquellos elementos con los que se desee trabajar, esto es, $U = u_1, u_2, \dots, u_n$. En la lgica clsica simplemente asignamos verdadero o falso a cada uno de los elementos del conjunto que se estudia. Por esta razn, al definir un conjunto A podremos decir que este contiene o no a los elementos del universo U con una certeza absoluta. De esta manera, daremos un valor de 1 cuando u_i est incluido en A (verdadero) y un valor de 0 cuando no lo est (falso). En esta ltima idea se refleja por medio de la funcin

de pertenencia al conjunto A , μ_A (ecuacin 2.1).

$$\begin{aligned}
 A &= \{(u_i, \mu_A(u_i)) | u_i \in U\} \\
 \mu_A : U &\rightarrow \{0, 1\} \text{ tal que} \\
 \mu_A(u) &= \begin{cases} 1 & \text{si } u \in U \\ 0 & \text{si } u \notin U \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se puede plantear el problema que nos d a conocer si una persona es alta o no. Para la lgica clsica, este razonamiento se simplificar en buscar un valor a partir del cual podamos definir que cierta persona es alta. Para el siguiente ejemplo, tomaremos 1,75 metros como referencia. De este modo, $\mu_A = 1$ si $u > 1,75$ y en otro caso $\mu_A = 0$. En la figura 2.1 se puede ver la representacin del concepto ‘alto’ para las posibles alturas que se pueden presentar.

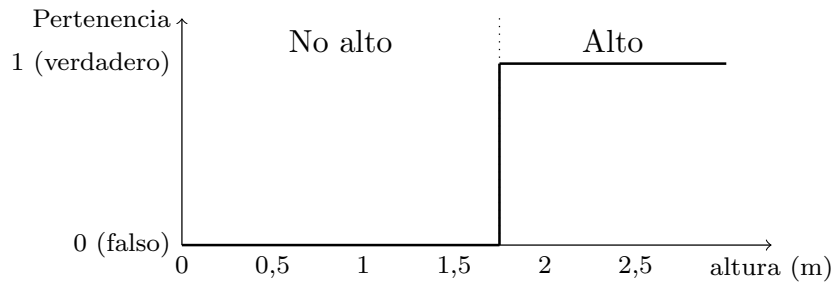


Figura 2.1: Representacin de la pertenencia de los elementos para la lgica clsica.

Por otra parte, la lgica difusa dispone de la funcin de pertenencia ms compleja, lo que nos hace poder decir que alguien es ‘poco alto’ o ‘bastante alto’ ya que no daremos un par de valores ($\{0, 1\}$) sino todos los contenidos en el intervalo que definen. As μ_A ser una funcin que asigna un valor entre 0 y 1 a cada elemento de A .

$$\begin{aligned}
 A &= \{(u_i, \mu_A(u_i)) | u_i \in U\} \\
 \mu_A : U &\rightarrow [0, 1]
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Si continuamos con el ejemplo se ver que el conjunto alto (A) esta vez se define como explica la ecuacin 2.3.

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq 2 \\ 2u + 1,5 & \text{si } 1,5 > u > 2 \\ 0 & \text{si } u \leq 1,5 \end{cases} \quad (2.3)$$

Esta nueva funcin de pertenencia hace que podamos distinguir 3 zonas dentro de su representacin (figura 2.2). Se tendr de nuevo el rea ‘alto’ y ‘no alto’ que hacen que su pertenencia sea certera. Se dispondr, tambin, una parte de la pertenencia a la que llamaremos ‘difuso’ donde el conjunto no afirma ser ni ‘alto’ ni ‘no alto’ sino que est en una situacin intermedia. En este caso se habla de que el elemento a_i que se encuentra ah pertenece a A con grado $\mu_A(a_i)$.

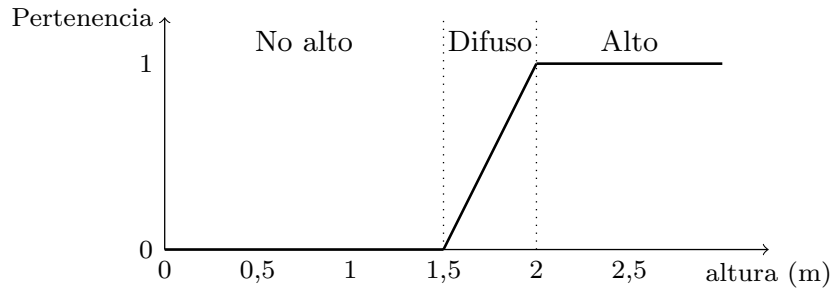


Figura 2.2: Representacin de la pertenencia de los elementos para la lgica difusa.

Ms formalmente, denotaremos al conjunto que incluye a todos los conjuntos difusos como $\mathcal{F}(X)$ a todos aquellos que se encuentran definidos sobre un referencial finito ($|X| = n$) por lo que X no ser un conjunto vaco.

2.2. Funciones de equivalencia restringida

El concepto de funcin de equivalencia restringida (REF por sus siglas en ingls) surge del concepto de equivalencia y el de similitud [2]. Este concepto es muy utilizado para la comparacin de imgenes y su intencin es dar una medida de cmo de iguales o similares son dos elementos x e y . Para poder definir el concepto de REF, necesitamos varios previamente.

Definicin 2.2.1. Una negacin estricta es aquella funcin $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que cumple que

$c(0) = 1$ y $c(1) = 0$ y es estrictamente decreciente y continua. Adems, si c es involutiva se considera que se habla de una negacin fuerte.

Definicin 2.2.2. Llamaremos automorfismo (φ) a todas aquellas funciones del intervalo unidad tal que $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sea continua y estrictamente creciente propiciando que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$.

En 1979, E. Trillas [23] enunci el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3 (Teorema de Trillas). *Una funcin $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una negacin fuerte si, y slo si, existe un automorfismo del intervalo unidad tal que $c(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$.*

Definicin 2.2.4. Una funcin $REF : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es llamada de equivalencia restringida cuando cumple que:

- (1) $REF(x, y) = REF(y, x), \forall x, y \in [0, 1]$;
- (2) $REF(x, y) = 1$, si y slo si, $x = y$;
- (3) $REF(x, y) = 0$, si y slo si, $x = 1$ e $y = 0$ si $x = 0$ e $y = 1$;
- (4) $REF(x, y) = REF(c(x), c(y)), \forall x, y \in [0, 1]$, siendo c una negacin fuerte.
- (5) $\forall x, y, z \in [0, 1]$, si $x \leq y \leq z$, entonces $REF(x, y) \geq REF(x, z)$ y $REF(y, z) \leq REF(x, z)$

Proposicin 2.2.5. *Para construir funciones REF nicamente necesitaremos de dos automorfismos φ_1 y φ_2 de forma que:*

$$REF(x, y) = \varphi_1^{-1}(1 - |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|) \quad \text{con} \quad c(x) = \varphi_2^{-1}(1 - \varphi_2(x)).$$

Adems, si tenemos una REF y un automorfismo en $[0, 1]$, la aplicacin de estos ($F = \varphi \circ REF$) es otra REF.

Teorema que hace que estos automorfismos puedan ser 1 solo?

2.3. Funciones de agregacin

funciones de agregacin vs operadores de agregacin Las funciones de agregacin tienen como propsito reducir las dimensiones de la informacin a partir de

la combinacin de los datos de entrada obteniendo una salida que los represente [7, 15]. Su aplicacin se extiende en muchos casos prcticos y tericos como la lgica multievaluada, control difuso, la toma de decisin, etc **cita** []. Se definir una funcin de agregacin como sigue:

Definicin 2.3.1. Se dice que $M : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ es una funcin de agregacin de dimensin n siempre que satisfaga:

- (1) $M(x_1, \dots, x_n) = 0$ si y slo si $x_1 = \dots = x_n = 0$;
- (2) $M(x_1, \dots, x_n) = 1$ si y slo si $x_1 = \dots = x_n = 1$;
- (3) M es una funcin estrictamente creciente.

Definicin 2.3.2. Una funcin de agregacin M ser llamada media si

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq M(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n).$$

En este proyecto se utilizarn mayoritariamente las funciones de agregacin idempotentes, esto es, que cumplen que $M(x, \dots, x) = x, \forall x$. Entre las funciones que utilizaremos encontramos la media aritmtica, el mnimo, el mximo o la media geomtrica. Adems, se definen a continuacin otras que no son de uso tan comn.

2.3.1. Funciones OWA

En esta seccin se introduce el concepto de las funciones de media ponderada ordenada (OWA, *ordered weighted averaging*) [4, 18, 25]. Basa su idea en generar una media, ordenando primero los elementos a agregar, para luego darles mayor relevancia a una parte de ellos. Este tipo de funcin generaliza la media aritmtica, siendo esta aquella en la que todos los elementos del vector de pesos son iguales.

Definicin 2.3.3. Una funcin $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ ser una funcin OWA de dimensin n si existe un vector de pesos $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ siempre que $\sum_i w_i = 1$ de forma que

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n w_j x_{\sigma(j)}$$

sabiendo que $x_{\sigma(j)}$ es el j -simo mayor elemento del vector (x_1, \dots, x_n) .

Por tanto para poder obtener un resultado adecuado, deber utilizarse un vector de pesos w que se adecue a las necesidades del problema. En este trabajo se emplea la versin ‘menor que la mitad’ que tiene como vector de pesos a $w = (w_1 \dots w_i, w_{i+1} \dots w_n)$ sabiendo que $|1, \dots, n| = |i+1, \dots, n|$ de forma que $w_j = \frac{1}{2^n}$ si $1 \leq j \leq i$ y $w_j = 0$ en el resto de los casos.

2.3.2. Integral Choquet

Este otro tipo de funcin [8, 16] de agregacin pretende dar una nueva de forma de representar un conjunto de datos en una nica salida. De esta forma, se define primeramente una medida a travs de la cual se calcular la forma en la que cada elemento del conjunto de datos tendr reelevancia en la agregacin final. Para ello definimos el concepto de medida difusa.

Definicin 2.3.4. Dado U un universo finito; $\mathcal{P}(U)$ el conjunto de todos los subconjuntos de U . Una medida difusa ser aquella funcin $\mu : \mathcal{P}(U) \rightarrow [0, 1]$ que satisface que:

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(U) = 1$.
- (2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B), \forall A, B \subseteq U$.

A continuacin definimos la funcin Integral Choquet conociendo que tomaremos su versin discreta por el contexto en el que se est trabajando.

Definicin 2.3.5. Dada una funcin σ con correspondencia directa con todos los elementos de un vector x de forma que $x_k = \sigma(k), \forall k \in \{1, \dots, n\}$. Sabiendo que $x_{\sigma(j)}$ es el j -simo mayor elemento del vector (x_1, \dots, x_n) . La integral discreta de Choquet con respecto a la medida difusa μ es

$$Ch_\mu(x) = \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)} (\mu(\{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}) - \mu(\{\sigma(i+1), \dots, \sigma(n)\}))$$

tomando la convencin de que $\{\sigma(n+1), \sigma(n)\} = \emptyset$.

Proposicin 2.3.6. Si denotamos a $w_{\sigma,i}^\mu = \mu(\{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}) - \mu(\{\sigma(i+1), \dots, \sigma(n)\})$ se obtiene la siguiente definicin de la integral Choquet en funcin de los operadores OWA definidos en 2.3.3:

$$\sum_{i=1}^n w_{\sigma,i}^\mu \cdot x_{\sigma(i)}.$$

2.4. Funciones de similitud

El concepto de similitud [11, 12] surge cuando queremos medir cmo de parecidos son dos conjuntos difusos. Este concepto es muy parecido al de REF, pero su diferencia radica en que en este caso se utilizan conjuntos y no elementos. Por esta razn, utilizamos las REF como base para definir las funciones de similitud.

Definicin 2.4.1. Dada una funcin M de agregacin (definicin 2.3.1) y una funcin REF (definicin 2.2.4) llamaremos a SM funcin de similitud si $SM : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ est definida tal que $SM(A, B) = M_{i=1}^n REF(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))$ y satisface las siguientes condiciones:

- (1) $SM(A, B) = SM(B, A), \forall A, B \in \mathcal{F}(X)$;
- (2) $SM(A, A_c) = 0$, si y slo si A no es difuso;
- (3) $SM(A, B) = 1$ si y slo si $A = B$;
- (4) Si $A \leq B \leq C$, entonces $SM(A, B) \geq SM(A, C)$ y $SM(C, B) \geq SM(C, A)$;
- (5) $SM(A_c, B_c) = SM(A, B)$

Durante el desarrollo de este trabajo se buscar la similitud entre conjuntos difusos y el conjunto \tilde{I} . Se define el conjunto $\tilde{I} = \{(u_i, \mu_{\tilde{I}}(x) = 1) | u_i \in U\}$, esto es, aquel en el que todos sus elementos tienen pertenencia absoluta.

2.5. Funciones penalti

Una funcin penalti [6] es una funcin de agregacin, por lo que dispone de un vector de entradas del que devuelve un nico resultado. Si todos los elementos del vector son iguales, entonces, claramente, la salida ser eso mismo. Ahora bien, el problema surge cuando hay algun elemento diferente ya que en ese momento la idea ser buscar una salida todo lo parecida posible a la entrada. En este sentido, es elemento o elementos diferentes tendrn una cierta discrepancia con los dems y justamente esto es lo que se pretende minimizar, la discrepancia, para dar una salida adecuada.

Definicin 2.5.1. La funcin $P : [0, 1]^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^+ = [+, \infty]$ es una funcin penalti si y slo si satiface que:

- (1) $P(x, y) \geq 0, \forall x, y$
- (2) $P(x, y) = 0$ si $x_i = y \forall i = 1, \dots, n$
- (3) para cualquier x fijado, el conjunto de minimizadores de $P(x, y)$ o bien un **pro-ducto nico** o un intervalo. **reescrito** $P(x, y)$ es cuasiconvexa en y para cualquier x , esto es, $P(x, \lambda \cdot y_1 + (1 - \lambda) \cdot y_2) \leq \max(P(x, y_1), P(x, y_2))$.

La funcin en la que se basan las penalti es

$$f(x) = \arg \min_y P(x, y)$$

si y es el nico mnimo e $y = \frac{a+b}{2}$ si el conjunto de minimizadores es el intervalo (a, b) .

Teorema 2.5.2. *Todas las funciones de agregacin llamadas medias pueden ser escritas como una funcin basada en una funcin penalti expresada en la definicin 2.5.1.*

2.6. Funciones de Dombi

Las funciones de Dombi [10] son operadores de equivalencia con una definicin diferente a las REF presentadas en la seccin 2.2. Con esta relacin lo que se pretende conocer es como de iguales son dos elementos de un conjunto difuso dado, pero aplicando nuevas ideas para la construccin del resultado. **Definin completa?**

Definin 2.6.1. Denotaremos D como una funcin de equivalencia de Dombi cuando tengamos que

$$D(w, x) = \frac{1}{2} \left(1 + \prod (1 - 2x_i)^{w_i} \right)$$

propiedades

Existe tambien el operador con pesos

2.7. Notacin

A lo largo del trabajo se asumir la notacin que sigue para estos conceptos.

Imagen : la denotaremos con Q .

Coordenadas de un pixel : (x, y) .

Máximo tono de color : L .

Intensidad de un pixel : $q(x, y)$ de forma que $0 \leq q(x, y) \leq L - 1, \forall (x, y) \in Q$.

Histograma : $h(q)$. Función para conocer el número de píxeles con la intensidad q .

Media de una imagen :

$$m_Q = \frac{\sum_{q=0}^{L-1} qh(q)}{\sum_{q=0}^{L-1} h(q)}$$

Área de una imagen :

$$A(Q) = \sum_{q=0}^{L-1} qh(q)$$

CAPÍTULO 3

Segmentacin de imgenes con un solo umbral

a

CAPÍTULO 4

Segmentacin de imgenes con varios umbrales

a

CAPÍTULO 5

Conclusiones y lineas de futuro

Bibliografía

- [1] M. A. Boden, *Inteligencia artificial y hombre natural*, Tecnos, 1984.
- [2] H. Bustince, E. Barrenechea y M. Pagola, *Restricted equivalence functions*, Fuzzy sets and systems **157** (2006), nº 17, 2333–2346.
- [3] H. Bustince, E. Barrenechea y M. Pagola, *Image thresholding using restricted equivalence functions and maximizing the measures of similarity*, Fuzzy sets and systems **158** (2007), nº 5, 496–516.
- [4] H. Bustince, T. Calvo, B. de Baets, J. Fodor, R. Mesiar, J. Montero, D. Paternain y A. Pradera, *A class of aggregation functions encompassing two-dimensional OWA operators*, Information Sciences **180** (2010), 1977–1989.
- [5] H. Bustince, A. Jurio, A. Pradera, R. Mesiar y G. Beliakov, *Generalization of the weighted voting method using penalty functions constructed via faithful restricted dissimilarity functions*, European Journal of operational research **225** (2013), 472–478.
- [6] T. Calvo y G. Beliakov, *Aggregation functions based on penalties*, Fuzzy sets and systems **161** (2010), 1420–1436.
- [7] T. Calvo y R. Mesiar, *Aggregation operators: ordering and bounds*, Fuzzy sets and systems **139** (2003), 685–697.
- [8] G. Choquet, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier **5** (1955), 131–295.
- [9] P. M. Churchland y P. S. Churchland, *¿Podría pensar una máquina?*, Investigación y ciencia (1990), nº 162, 18–25.
- [10] J. Dombi, *Equivalence operators that are associative*, Information Sciences **281** (2014), 281–294.

- [11] J. Fan y W. Xie, *Some notes on similarity measure and proximity measure*, Fuzzy sets and systems **101** (1999), 403–412.
- [12] J. Fan, W. Xie y J. Pei, *Subsethood measures: new definitions*, Fuzzy sets and systems **106** (1999), 201–209.
- [13] R. C. Gonzalez y R. E. Woods, *Digital image procesing*, Pearson Prentice Hall, 2008.
- [14] F. M. McNeill y E. Thro, *Fuzzy logic. A practical approach.*, AP Professional, 1994.
- [15] J. Montero, D. Gómez, V. López, J. T. Rodríguez y B. Victoriano, *Sobre funciones y reglas de agregación*, ESTYLF, 2010.
- [16] T. Murofushi y M. Sugeno, *A theory of fuzzy measures: representations, teh Choquet Integral and Null Sets*, Journal of mathematical analysis and applications **159** (1990), 532–549.
- [17] N. Otsu, *A threshold selection method from gray-level histograms*, IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics **9** (1979), nº 1, 62–66.
- [18] D. Paternain, J. Fernández, H. Bustince, R. Mesiar y G. Beliakov, *Construction of image reduction operators using averaging aggregation functions*, Fuzzy sets and systems **261** (2015), 87–111.
- [19] R. Penrose, *La nueva mente del emperador*, Mondadori, 1991.
- [20] J. R. Searle, *¿Es la mente un programa informático?*, Investigación y ciencia (1990), nº 162, 10–17.
- [21] M. Sonka, V. Halvac y R. Boyle, *Image processing, analysis and machine vision*, Thomson, 2008.
- [22] J. S. Suri, S. K. Setarehdan y S. Singh, *Advanced algorithmic approaches to medical image segmentation*, Springer, 2002.
- [23] E. Trillas, *Sobre las funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos*, Stochastica **III** (1979), nº 1, 47–59.
- [24] A. M. Turing, M. Scriven, J. R. Lucas, K. Gunderson, H. Putnam, P. Ziff, J. J. C. Smart y N. Smart, *Controversia sobre mentes y máquinas*, Ediciones Orbis, 1985.

-
- [25] R. R. Yager, *Families of OWA operators*, Fuzzy sets and systems **59** (1993), 125–148.
- [26] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Inform. Control 8 (1965), 338–353.