# Множественный аукцион с полной оплатой в условиях ограниченности бюджетов

Анна Лисаченко, Яков Каюмов

15 мая 2023 г.

**Аннотация**

В работе исследовались стратегии агентов, участвующих в аукционе закрытого типа с полной оплатой, в котором ставки делаются одновременно на несколько товаров различной ценности. Существенной особенностью предложенной модели является ограниченность бюджета участников. Были рассмотрены три варианта игры, отличающиеся степенью информированности участников о бюджетах конкурентов.

## 1 Введение

Аукцион с полной оплатой (All-pay auction) – это аукцион, на котором каждый участник торгов должен платить, независимо от того, выигрывает он приз или нет [1]. При этом приз, как и в обычном аукционе, достается участнику с наибольшей ставкой или одному из таких участников. Реальным примером такого аукциона являются гранты на жилищное строительство и городское развитие в США: несколько городов подают заявки, и комиссия решает, какой город получит грант в этом году. Формально подача заявки бесплатна, однако города могут потратить часть средств из городского бюджета для того, чтобы более качественно написать заявку и повысить свои шансы на получение гранта, который превосходит затраченные ресурсы. Если все города придерживаются такой стратегии, а грант при этом получает из них только один, то суммарные затраты средств могут превосходить размер гранта [2]. Также модель аукциона с полной оплатой применима во многих других ситуациях, когда агенты вкладывают ресурсы, конкурируя за некий приз: правительственную должность, повышение по службе, награду в спортивных соревнованиях [3]. Победителем во всех случаях становится участник, вложивший больше остальных, однако затраченные средства не возвращаются никому.

В данной работе был исследован аукцион закрытого типа с полной оплатой с двумя существенными особенностями. Во-первых, торгуется не один товар, а несколько товаров различной ценности одновременно, причем ценности одинаковы для всех участников. В приведенном выше примере с грантами США это соответстволо бы существованию нескольких грантов, отличающихся призовой суммой. Следует ожидать, что такое изменение условий заставило бы города каким-то образом распределять ресурсы между заявками на разные гранты. И во-вторых, ресурсы агентов ограничены небольшим числом по сравнению с ценностью торгуемых призов, причем количество ресурсов у участников различно. Выигрыши игроков складываются из остатка на счете и ценности приобретенных товаров. В том же примере это означало бы различие бюджета городов и достаточно высокое значение выигрываемых сумм по сравнению с бюджетами. Как видно, обе предпосылки являются достаточно реалистичными, а предложенная усложненная модель на практике может более точно описывать конкуренцию, чем базовая модель аукциона с полной оплатой.

Ожидается, что исходное количество ресурсов будет существенно влиять на стратегию агентов: игроки с большим количеством ресурсов будут претендовать на более ценные призы, чем игроки с небольшим количеством ресурсов. Причем, вероятно, роль играет именно размер бюджета относительно других игроков. Для проверки этой гипотезы были предложены три модификации игры, отличающиеся степенью информированности игроков о бюджетах конкурентов. В первом варианте информированность полная: бюджеты всех игроков общеизвестны. Во втором варианте каждый игрок знает только свой бюджет, а про бюджеты остальных известно только, что они

они равномерно распределены на заданном отрезке. И наконец, третьему варианту соответствует частичная информированность: для каждого из оставшихся игроков известно, в каком диапазоне лежит его бюджет, но неизвестно точное значение.

# 2 Цели работы и проверяемые гипотезы

Основной целью работы является изучение поведения агентов в условиях предложенного аукциона. В частности, мы намерены исследовать, как стратегии игроков зависят от их начального бюджета и от информации о бюджетах других игроков. Были сформулированы следующие гипотезы:

- Чем больше начальный бюджет, тем большую долю средств игрок вкладывает в соревнование за наиболее ценные товары
- Игроки используют стратегии, близкие к *однозначным*. А именно, ставят значительную долю средств на единственный приз, который определяется их начальным бюджетом.
- Информация о бюджетах других игроков используется для оценки своего положения относительно остальных и влияет на выбор приза, на который делается наибольшая ставка.

Первая и третья гипотезы соответствуют здравому смыслу. Вторая гипотеза оперирует понятием однозначных стратегий: так для краткости мы будем называть стратегии, при которых игрок делает ненулевую ставку не более, чем на один товар. Эта гипотеза основывается на том, что, поскольку игроков больше, чем товаров, большой шанс приобретения единственного товара более привлекателен, чем сильно меньшие шансы, распределенные по нескольким товарам. Также, поскольку исходные суммы денег небольшие по сравнению с ценностью призов, мы предполагаем, что безрисковая стратегия – поставить 0 на все товары – не будет популярной. Однако, она может быть использована игроком с наименьшим количеством средств, если эта информация доступна. Поэтому, четвертая гипотеза:

- Безрисковая стратегия применяется редко, однако тем чаще, чем больше информации доступно. При этом к безрисковой стратегии прибегают в основном игроки с небольшим бюджетом.

И наконец, рассмотрим не стратегии отдельных игроков, а результат аукциона в целом. Ожидается, что при большем количестве доступной информации, результаты должны стать более предсказуемыми и "справедливыми а именно:

- Чем больше информации доступно, тем лучше выигрыши игроков согласуются с их исходными бюджетами.

Цель работы состоит в проверке этих гипотез.

# 3 Описание эксперимента

В работе рассматривались следующие три вариации игры.

## 3.1 Игра 1 – неполная информация

Первый вариант представляет собой статическую игру с неполной информацией:

$G = \{A_i, T_i, u_i, p_i, i \in N\}$,

$N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков,

$M = \{1, \dots, m\}$ – множество товаров,

$v = \left(v^j, j \in M\right)$ – вектор ценностей товаров.

$A_i$ – множество действий $a_i$ игрока $i$, где $a_i = \left(a_i^j, j \in M\right)$ – вектор ставок игрока $i$ на каждый из товаров $j$.

$T_i$ – множество типов $t_i$ игрока $i$. Тип игрока соответствует его начальному бюджету и для всех игроков является целым неотрицательным числом, ограниченным сверху:

$$T_i = T = \{0, \ldots, t_{max} - 1\}.$$

Для каждого игрока бюджет задает ограничение на сумму его ставок:

$$\sum_{j \in M} a_i^j \leq t_i, \quad \forall i \in N$$

$u_i(a, t)$ – выигрыш игрока $i$ при заданных действиях и типах всех игроков. Выигрыш складывается из суммарной ценности приобретенных товаров и остатка на счете:

$$u_i(a, t) = \sum_{i \in N} \theta_i^j v^j + \left(t_i - \sum_{j \in M} a_i^j\right),$$

где $\theta_i^j$ показывает, достался ли товар $j$ игроку $i$. Каждый товар достается игроку, сделавшему на него наибольшую ставку, при равенстве – случайно:

$$\theta_i^j = \begin{cases} 1/k, & \text{если } i \in \operatorname*{Argmax}_{i \in N} a_i^j \text{ и } \left|\operatorname*{Argmax}_{i \in N} a_i^j\right| = k \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$p_i\big(t_{-i} \big| t_i\big)$ – представление о типах других игроков при известном своем типе. Общеизвестно, что типы выбираются независимо и равновероятно из набора $T$, поэтому представления соответствуют этому распределению.

Стратегией в данной игре является отображение $s_i : T_i \to A_i$ множества типов игрока $i$ во множество его действий.

## 3.2 Игра 2 – полная информация

Вторая игра – статическая игра с полной информацией. Все пареметры в ней совпадают с первым вариантом, за исключением последнего: в данном варианте типы не являются приватной информацией, поэтому каждый игрок точно знает не только свой тип, но и типы всех остальных игроков.

## 3.3 Игра 3 – промежуточный вариант

И наконец, третья игра является промежуточным вариантом между первой и второй. Также как и первая, это игра с неполной информацией. Однако, кроме исходного распределения вероятностей, в этом случае игрокам известно также, в каком из равновеликих диапазонов лежит значение $t_i$ для каждого из оставшихся игроков. Если $r$ – количество диапазонов и $T_{max} \vdots r$, то возможные диапазоны имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} T^1 &= \left\{0, \ldots, \frac{t_{max}}{r} - 1\right\} \\ T^2 &= \left\{\frac{t_{max}}{r}, \ldots, \frac{2t_{max}}{r} - 1\right\} \\ &\vdots \\ T^r &= \left\{\frac{(r-1)t_{max}}{r}, \ldots, t_{max} - 1\right\} \end{aligned}$$

# 4 Параметры эксперимента

Поскольку эксперимент проводился на небольшой группе студентов (около 16 человек), для обеспечения разнообразия состава участников в каждом аукционе они разбивались на еще более мелкие группы по $n = 4$ человека. Мы посчитали, что это число достаточно большое, чтобы взаимодействие в группах было интересным и достаточно сложным, но при этом не слишком большое, так что каждый участник может оказать существенное влияние на исход игры.

Количество товаров $m = 3$ было выбрано так, чтобы приз достался не всем, но при этом у игроков был достаточно большой простор возможных действий. Обозначим товары $A$, $B$ и $C$. Их ценности $v_A = 400, v_B = 200, v_C = 100$ образуют геометрическую прогрессию, а ограничение бюджета участников: $T_{max} = 100$. Изначально эти числа были выбраны таким образом для того, чтобы товары существенно отличались по ценности и были ценнее, чем любой возможный остаток на счете. Позже стало понятно, что подобранные таким образом значения также существенно упрощают теоретический анализ, так как "жадные"стратегии оказываются оптимальными. Подробнее об этом смотрите в разделе 5.2.

Наконец, количество диапазонов в третьем варианте игры $r = 4$ было выбрано так, чтобы позволить игрокам ориентировочно определить свое положение относительно остальных, не давая слишком конкретной информации. Мы отказались от другого подходящего варианта $\tilde{r} = 3$, так как посчитали, что совпадение количества товаров и диапазонов давало бы неявную подсказку о том, на какой товар стоит рассчитывать, и эта информация могла бы быть использована как негласная договоренность.

# 5 Теоретический анализ игр

## 5.1 Симметричное равновесие Нэша в Игре 2 в классе однозначных стратегий

Вторая игра с полной информацией является самой простой для теоретического анализа, поэтому с нее мы начнем. Для начала рассмотрим класс стратегий, который, согласно нашей гипотезе, может оказаться популярным. А именно, будем рассматривать такие стратегии, в которых каждый участник принимает участие в борьбе не более чем за один товар и распределяет средства между ставкой на этот товар и остатком на счете. В дальнейшем для краткости будем называть такие стратегии *однозначными*. Мы не будем рассматривать ситуацию, когда начальное количество средств у нескольких игроков совпадает, так как вероятность этого крайне мала, а в случае непрерывного распределения начальных средств на отрезке вообще была бы нулевой. Поэтому, в этом предположении игроков можно отсортировать по величине начального бюджета. Пусть, не умаляя общности, у первого игрока наибольший бюджет, у второго – второй по величине, а у четвертого – наименьший. Тогда очевидно, что равновесию Нэша соответствует профиль стратегий, когда первый игрок покупает товар $A$, второй – товар $B$ и третий – товар $C$. Ставки игроков должны не давать остальным возможность купить более ценный товар и получить выгоду, отклонившись. Поэтому, ставки должны быть заведомо больше, чем количество средств у следующего по счету игрока. Таким образом, равновесие Нэша в классе однозначных стратегий:

$$\begin{cases} a_1^A = t_2 + 1, \quad a_1^B = a_1^C = 0 \\ a_2^B = t_3 + 1, \quad a_2^A = a_2^C = 0 \\ a_3^C = t_4 + 1, \quad a_3^B = a_3^C = 0 \\ a_4^A = a_4^B = a_4^C = 0 \end{cases}$$

## 5.2 Симметричное равновесие Нэша в Игре 2 в классе всех стратегий

Рассмотрим теперь равновесие Нэша в общем случае, взяв за основу предыдущие рассуждения. Как уже упоминалось ранее, выбранные значения ценностей товаров и ограничение на начальный бюджет обеспечивают эффективность "жадных"стратегий. А именно, можно заметить, что выбирая из двух альтернатив: купить более ценный товар, или нет, всегда следует выбирать первую. Например, приобретя товар $A$, игрок получит больший выигрыш чем при наилучшем раскладе в противном случае, так как $400 > 200 + 100 + 99$. Аналогично, если уже зафиксирован факт приобретения или не приобретения игроком товара $A$ и есть возможность приобрести $B$, то надо ей пользоваться, так как выигрыш от этой сделки будет больше, чем лучшая из альтернатив: $200 > 100 + 99$. Исходя из этого, нетрудно описать равновесие Нэша в классе всех стратегий, расстматривая приобретение товаров последовательно от наиболее ценного к меннее ценному. Пусть, как и в предыдущем пункте, игроки отсортированы по количеству средств. Тогда первому игроку однозначно выгодно купить товар $A$. Он может гарантированно сделать это, если поставит на него $t_2 + 1$. Бо́льшая ставка не принесет выгоду, но при этом уменьшит остаток, а меньшая позволит второму игроку отклониться и приобрести товар $A$ вместо первого. После этой ставки у первого игрока на счету останется $t_1 - (t_2 + 1)$. Остальные игроки делают на товар $A$ нулевые ставки. Таким образом мы зафиксировали ставку всех игроков на товар $A$ и перешли к подыгре, в которой количество товаров на 1 меньше. После этого игроков необходимо заново отсортировать по количеству оставшихся средств и продолжить аналогично: теперь игрок с наибольшим остатком покупает товар $B$ по цене, на единицу большей, чем величина следующего остатка. Далее то же самое повторяется с товаром $C$. Этот профиль статегий построен таким образом, что на каждом мысленном шаге ни одному из участников не выгодно отклониться, поэтому он является равновесием Нэша.

## 5.3 Симметричное РБН в Игре 1 в классе однозначных пороговых стратегий

Теперь рассмотрим более сложный случай – первый вариант игры, в котором каждому участнику известен только собственный бюджет. Если считать, что игроки пользуются однозначными стратегиями, то единственный товар, на который будет сделана ненулевая ставка, определяется величиной этого бюджета. Одна из наших гипотез состоит в том, что чем больше бюджет, тем на более ценный товар делается ставка. Кроме того, в условиях, когда бюджеты соперников неизвестны, выглядит разумным ставить всю сумму на желаемый товар, то есть либо ставить 0 на всё, либо ставить все средства на единственный товар без промежуточных вариантов. Исходя из этих предположений, мы решили рассмотреть сужение класса однозначных стратегий до *однозначных пороговых стратегий*, которые имеют следующий вид:

$$\begin{cases} a_i^A = t_i, \quad a_i^B = a_i^C = 0, & \text{если } t_i \geq t_A \\ a_i^B = t_i, \quad a_i^A = a_i^C = 0, & \text{если } t_B \leq t_i < t_A \\ a_i^C = t_i, \quad a_i^B = a_i^C = 0, & \text{если } t_C \leq t_i < t_B \\ a_i^A = a_i^B = a_i^C = 0, & \text{если } t_i < t_C, \end{cases}$$

где $t_A, t_B$ и $t_C$ – некоторые константы, одинаковые для всех игроков.

Покажем, что **в этом классе стратегий не существует симметричного равновесия Байеса-Нэша**. Для этого сначала рассмотрим игрока (пусть будет 1) с большим количеством средств $t_1 \geq t_A$. Если он не отклоняется, то получает выигрыш 400, если его бюджет является наибольшим из всех игроков, и 0 в противном случае. Для упрощения выкладок вместо дискретного будем рассматривать непрерывный случай и введем величину $h_i = \frac{t_i}{t_{max}}$, которая равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ и соответствующие величины $h_A, h_B$ и $h_C$. Тогда ожидаемый выигрыш первого игрока, если он не будет отклоняться:

$$u_1(A) = h_1^{n-1} v_A = h_1^3 \cdot 400$$

Если же он отклонится и выберет $B$, то гарантированно приобретет товар, так как на товар $B$ другие игроки ставят меньшие суммы $t_i < t_A \leq t_1$.

$$u_1(B) = v_B = 200$$

При начальной сумме $t_A = h_A \cdot t_{max}$ первому игроку не выгодно отклонятся. Поэтому,

$$u_1(A) \geq u_1(B)$$

$$h_A^3 \cdot 400 \geq 200$$

$$h_A \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.79.$$

Теперь рассмотрим другого игрока (например, 2), у которого начальная сумма не такая большая: $t_B \le t_2 < t_A$. Если он не будет отклоняться, то получит товар $B$ при условии, что у всех остальных игроков либо меньше средств, чем у него, либо не меньше, чем пороговое значение $t_A$. Поэтому, ожидаемый выигрыш

$$u_2(B) = \big(h_2 + (1 - h_A)\big)^{n-1} v_B = \big(h_2 + (1 - h_A)\big)^3 \cdot 200$$

Если этот игрок отклонится и выберет $A$, то ему достанется этот приз в случае, если больше никто не претендует на него, то есть если у всех остальных средств меньше, чем $t_A$. Ожидаемый выигрыш в этом случае

$$u_2(A) = h_A^{n-1} v_A = h_A^3 \cdot 400$$

Условие, при котором второму игроку не выгодно отклоняться:

$$u_2(B) \ge u_2(A)$$

$$\big(h_2 + (1 - h_A)\big)^3 \cdot 200 \ge h_A^3 \cdot 400$$

$$2 \le \left( \frac{h_2 + (1 - h_A)}{h_A} \right)^3 < \frac{1}{h_A^3},$$

где последнее неравенство следует из условия $h_2 < h_A$. Следовательно,

$$h_A < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Это условие противоречит полученному выше для первого игрока. Таким образом, при любом выборе $h_A$ игрокам в одном из диапазонов $t_i$ выгодно отклониться от предложенного профиля стратегий, поэтому симметричного равновесия Байеса-Нэша в данном классе стратегий не существует.

# 6 Инструкция для участников эксперимента

Перед проведением эксперимента участникам предлагается ознакомиться со следующей инструкцией.

## 6.1 Общие правила

- Изначально у каждого случайное целое количество денег, равномерно распределенное на отрезке от 0 до 99.
- Торгуются 3 единицы товара ценностями 100, 200 и 400.
- Ставки делаются в закрытую, одновременно на каждый из трех товаров.
- Товар получает игрок с максимальной ставкой, при равенстве — случайно.
- Деньги тратятся у всех, а не только у победителя.
- Выигрыш игрока = остаток на счете + ценность купленных товаров.
- Игра играется несколько раундов, четверки случайно меняются.

## 6.2 Игра 1

В этом варианте игры каждый игрок знает только свой бюджет, а про бюджеты остальных известно только, что они они равномерно распределены на заданном отрезке от 0 до 99.

## 6.3 Игра 2

В этом варианте информированность полная: бюджеты всех игроков общеизвестны.

## 6.4 Игра 3

В этом варианте для каждого из оставшихся игроков известно, в каком диапазоне лежит его бюджет, но неизвестно точное значение. Доступные диапазоны:

- $[0; 25)$
- $[25; 50)$
- $[50; 75)$
- $[75; 100)$

# 7 Структура протокола эксперимента

Программа эксперимента разработана на языке `Python` (3.10) с использованием библиотеки `OTree` (версия 5.10.3). Исходный код программы доступен в публичном репозитории на GitHub.

## 7.1 Запуск эксперимента

Для запуска программы эксперимента необходимо развернуть экземпляр программмы на сервере с доступом в интернет. Далее, необходимо открыть веб-страницу с настройками сессии. Настройки сессии состоят из двух параметров:

- `show_others_score: bool` – определяет, видят ли участники эксперимента количество денег других игроков в группе.
- `show_others_score_as_interval: bool` – определяет, видят ли участники эксперимента конкретное количество денег других игроков в группе или только интервал, в котором находится сумма денег других игроков.

Параметры запуска игр представлены в таблице:

| № игры | Параметры |
|---|---|
| 1 | `show_others_score = False`<br>`show_others_score = False` |
| 2 | `show_others_score = True`<br>`show_others_score = False` |
| 3 | `show_others_score = True`<br>`show_others_score = True` |

Таблица 1: Параметры сессии

## 7.2 Выгрузка результатов сессии

После проведения эксперимента данные доступны для выгрузки в формате `.csv`. Описание основных полей представлено в следующей таблице:

| Название поля | Описание |
|---|---|
| `participant.id_in_session` | Номер игрока |
| `participant.label` | ФИО игрока |
| `participant.payoff` | Выигрыш за игру |
| `player.id_in_group` | Номер игрока в группе |
| `player.bid_a` | Ставка игрока на товар A (100) |
| `player.bid_b` | Ставка игрока на товар B (200) |
| `player.bid_c` | Ставка игрока на товар C (400) |
| `player.available_money` | Начальное количество денег |
| `player.did_win_a` | Выиграл ли игрок товар A |
| `player.did_win_b` | Выиграл ли игрок товар B |
| `player.did_win_c` | Выиграл ли игрок товар C |
| `player.money_left` | Остаток денежных средств игрока |

Таблица 2: Описание параметров эксперимента

## 8 Рекомендации по анализу результатов

При анализе данной игры предлагается ответить на следующие вопросы

1. Как распределены ставки на товары во всех играх? Чему равны средние ставки на каждый из трех товаров? Какие ставки наиболее популярны?
2. Как распределены цены покупки товаров во всех играх? Чему равны средние цены на каждый из трех товаров?
3. Как зависят ставки игроков на каждый из трех товаров от начального количества денег? Сравните абсолютную величину ставок, а также размер ставок на определенные товары относительно начального бюджета. Сравните результаты в различных играх.
4. Как в среднем зависит выигрыш игроков от начального бюджета? В какой игре зависимость ярче выражена?
5. Предложите объяснение различия поведения игроков в трех играх. Является ли третья игра промежуточным вариантом между первой и второй, исходя из рассчитанных метрик?

## Список литературы


[1] Riley, John; Samuelson, William (1981). "Optimal Auctions". American Economic Review (3). doi:10.1257/aer.100.2.597

[2] https://blogs.cornell.edu/info2040/2012/09/25/losing-to-win-tullock-auctions/

[3] Baye, Michael R.; Kovenock, Dan; de Vries, Casper G. (1996). "The All-Pay Auction with Complete Information". Economic Theory. 8 (2): 291–305. ISSN 0938-2259