

TD4 d'Analyse Numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

19/03/2024

1 Méthode des différences finies

1. Si u est de classe C^4 au voisinage de x , on fait un développement de Taylor à l'ordre 4 de u :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_1),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_2),$$

Donc

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + \frac{h^4}{24} \left(u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2) \right),$$

D'où

$$\left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|$$

pour tout $x \in [h, 1-h]$. L'approximation

$$u''(x) \simeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

est donc consistante d'ordre 2.

2. Approximation de la dérivée seconde :

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)}{h^2} \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

D'où le problème approché

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + cu_i = f_i, & \text{pour } i \in \{1, \dots, N\}, \\ u_0 = 0, & u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$.

On obtient N équations à N inconnues u_1, \dots, u_N .

$$\begin{aligned} i = 1 : & \quad -\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} + cu_1 = f_1, \\ i = 2 : & \quad -\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2} + cu_2 = f_2, \\ & \dots \\ i = N : & \quad -\frac{u_{N-1} - 2u_N + u_{N+1}}{h^2} + cu_N = f_N, \end{aligned}$$

D'où le système

$$\begin{cases} -\frac{2u_1 + u_2}{h^2} + cu_1 = f_1, \\ -\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2} + cu_2 = f_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{u_{N-1} - 2u_N}{h^2} + cu_N = f_N, \end{cases}$$

3. Matriciellement, le problème s'écrit :

$$AU = b \tag{2}$$

avec

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + cI_n$$

4. Soit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On

$$\langle A_0 x, x \rangle = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

On a alors $\langle A_0 x, x \rangle \geq 0$ et

$$\langle A_0 x, x \rangle = 0 \implies x_1^2 = x_n^2 = 0 \text{ et } (x_i - x_{i+1})^2 = 0 \quad \forall i = 1, n-1$$

Donc $\implies x = 0$ et A_0 définie positive donc A est définie positive.

2 Problème aux limites d'ordre 4

$$\begin{cases} \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = f(x) & \text{dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

1. On a $0 = u'(0) \simeq \frac{u(h) - u(0)}{h} \implies u_1 = u(h) = 0$ de même $u_{N+1} = 0$. Nous avons donc 4 valeurs de u connues, il reste $N - 1$ valeurs de (u_i) à déterminer pour i allant de 2 à N .

2. On a

$$\Delta u(x) = \frac{T_{\frac{h}{2}} u(x) - T_{-\frac{h}{2}} u(x)}{h} = \frac{u(x + \frac{h}{2}) - u(x - \frac{h}{2})}{h} \simeq u'(x) \quad (\text{cf cours})$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta^4 &= \left(\frac{1}{h} (T_{h/2} - T_{-h/2}) \right)^4 \\ &= \frac{1}{h^4} (T_{h/2}^4 - 4T_{h/2}^3 T_{-h/2} + 6T_{h/2}^2 T_{-h/2}^2 - 4T_{h/2} T_{-h/2}^3 + T_{-h/2}^4) \\ &= \frac{1}{h^4} (T_{2h} - 4T_{3h/2} T_{-h/2} + 6T_h T_{-h} - 4T_{h/2} T_{-3h/2} + T_{-2h}) \\ &= \frac{1}{h^4} (T_{2h} - 4T_h + 6I - 4T_{-h} + T_{-2h}) \\ \Delta^4 u(x_i) &= \frac{1}{h^4} (u(x_i + 2h) - 4u(x_i + h) + 6u(x_i) - 4u(x_i - h) + u(x_i - 2h)) \\ \Delta^4 u(x_i) &= \frac{1}{h^4} (u(x_{i+2}) - 4u(x_{i+1}) + 6u(x_i) - 4u(x_{i-1}) + u(x_{i-2})) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d^4 u_i}{dx^4} = \frac{1}{h^4} (u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2})}$$

Cette approximation est d'ordre 2 : On fait un développement de Taylor à l'ordre 6 de u :

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \frac{h^3}{6} u'''(x) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120} u^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720} u^{(6)}(x) + o(h^6), \\ u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - \frac{h^3}{6} u'''(x) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120} u^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720} u^{(6)}(x) + o(h^6), \\ u(x+2h) &= u(x) + 2hu'(x) + 2h^2 u''(x) + \frac{4h^3}{3} u'''(x) + \frac{2h^4}{3} u^{(4)}(x) + \frac{4h^5}{15} u^{(5)}(x) + \frac{4h^6}{45} u^{(6)}(x) + o(h^6), \\ u(x-2h) &= u(x) - 2hu'(x) + 2h^2 u''(x) - \frac{4h^3}{3} u'''(x) + \frac{2h^4}{3} u^{(4)}(x) - \frac{4h^5}{15} u^{(5)}(x) + \frac{4h^6}{45} u^{(6)}(x) + o(h^6), \end{aligned}$$

En faisant une combinaison des 4 dernières lignes ; on trouve :

$$-4u(x+h) - 4u(x-h) + u(x+h) + u(x-h) = 6u(x) + h^4 u^{(4)}(x) + \frac{h^6}{6} u^{(6)}(x) + o(h^6),$$

D'où

$$\frac{u(x-2h) - 4u(x-h) + 6u(x) - 4u(x+h) + u(x+2h)}{h^4} = u^{(4)}(x) + O(h^2)$$

3.

$$\begin{cases} \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{h^4} = f_i & 2 \leq i \leq N \\ u_0 = u_{N+2} = 0 \\ u_1 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

où $f_i = f(x_i)$.

4. On pose $U = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$. Le problème approché se ramène à une résolution d'un système linéaire $AU = b$ où A est la matrice pentadiagonale : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

3 Équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 & \forall (x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}_+^* \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, 1] \end{cases}$$

On subdivise l'intervalle $[0; 1]$ en $N + 2$ points d'abscisses $x_i = ih$ où $0 \leq i \leq N + 1$ avec $h = \frac{1}{N+1}$ et soit τ le pas de temps. On note u_i^n la valeur approchée de $u(x_i, t_n)$ avec $t_n = n\tau$ et on considère le schéma dit d'Euler implicite qui est le suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \nu \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

1. Posons $t = t_{n+1}$ et $x = x_i$ pour alléger les notations. Pour déterminer l'erreur de troncature, on va dans le schéma remplacer u_i^n par $u(x, t - \tau)$, u_{i-1}^{n+1} par $u(x - h, t)$, u_i^{n+1} par $u(x, t)$ et u_{i+1}^{n+1} par $u(x + h, t)$. A l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2 de u suivant t , on a

$$u(x, t - \tau) = u(x, t) - \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau^2)$$

D'où

$$\frac{u(x, t) - u(x, t - \tau)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau)$$

Par ailleurs, en considérant la variation de x , on a

$$u(x + h, t) = u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^4)$$

et de la même façon

$$u(x - h, t) = u(x, t) - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^4)$$

Donc

$$\frac{u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^2)$$

En remplaçant u_i^n dans le schéma par $u(x_i, t_n)$, on se retrouve avec l'erreur de troncature :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau) - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^2) \right) = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\tau + h^2)$$

qui converge bien vers 0 pour $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. Le schéma est bien consistant, et précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

2. On pose $u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$. Dans le schéma, isolons u_i^n , en posant $c = \frac{\nu\tau}{h^2}$:

$$u_i^n = -cu_{i-1}^{n+1} + (1 + 2c)u_i^{n+1} - cu_{i+1}^{n+1}$$

Précisons les équations, en notant leur forme particulières pour $i = 1$ et $i = N$ lorsque l'on prend en compte les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u_1^n &= (1 + 2c)u_1^{n+1} - cu_2^{n+1} \\ u_2^n &= -cu_1^{n+1} + (1 + 2c)u_2^{n+1} - cu_3^{n+1} \\ u_3^n &= -cu_2^{n+1} + (1 + 2c)u_3^{n+1} - cu_4^{n+1} \\ &\vdots \\ u_{N-1}^n &= -cu_{N-2}^{n+1} + (1 + 2c)u_{N-1}^{n+1} - cu_N^{n+1} \\ u_N^n &= -cu_{N-1}^{n+1} + (1 + 2c)u_N^{n+1} \end{aligned}$$

On a bien $Mu^{n+1} = u^n$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 1+2c & -c & 0 & \cdots & 0 \\ -c & 1+2c & -c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -c & 1+2c & -c \\ 0 & \cdots & 0 & -c & 1+2c \end{pmatrix}$$

3. Expliquer rapidement comment on programmerait l'algorithme :

u^0 étant connu par la condition initiale, on calcule de proche en proche les u^n successifs. u^1 est la solution du système $Mu^1 = u^0$. Puis u^2 est la solution du système $Mu^2 = u^1$ et ainsi de suite...

Il faut donc résoudre successivement des systèmes décrits par $Mu^{n+1} = u^n$

4. On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit λ une valeur propre de A et v un vecteur propre associé. On développe la composante i_0 de l'égalité matricielle : $Av = \lambda v$ où i_0 est un indice tel que $v_{i_0} = \max_i |v_i|$:

$$-v_{i_0-1} + 2v_{i_0} - v_{i_0+1} = \lambda v_{i_0}$$

$$(2 - \lambda)v_{i_0} = v_{i_0-1} + v_{i_0+1}$$

$$|2 - \lambda| \times |v_{i_0}| \leq |v_{i_0-1}| + |v_{i_0+1}|$$

$$|2 - \lambda| \leq 2$$

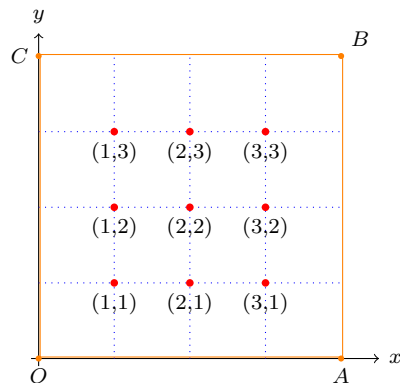
$$0 < \lambda < 4$$

Comme M s'écrit $M = I + cA$ et que toutes les valeurs de A sont entre 0 et 4, il s'avère que M a ses valeurs propres comprises entre 1 et $1 + 4c > 1$ donc M^{-1} a ses valeurs propres comprises entre $\frac{1}{1+4c}$ et 1. Comme M^{-1} est symétrique définie positive, sa norme 2 est la plus grande valeur propre (cf cours) et donc $\|M^{-1}\| \leq 1$.

5. On a $u^{n+1} = M^{-1}u^n$ donc $\|u^{n+1}\| \leq \|M^{-1}\|\|u^n\| \leq \|u^n\|$ et par récurrence $\|u^n\| \leq \|u^0\|$. Donc le schéma est stable.

4 Problème de Dirichlet

- 1.
2. Le système avec u en deux indices :

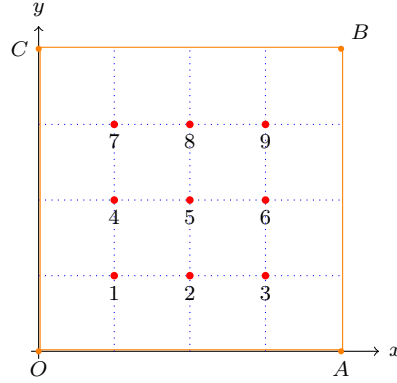


$$\begin{aligned}
 i = 1, j = 1 : & \quad -\frac{u_{0,1} - 2u_{1,1} + u_{2,1}}{\delta x^2} - \frac{u_{1,0} - 2u_{1,1} + u_{1,2}}{\delta y^2} = f_{1,1} \\
 i = 2, j = 1 : & \quad -\frac{u_{1,1} - 2u_{2,1} + u_{3,1}}{\delta x^2} - \frac{u_{2,0} - 2u_{2,1} + u_{2,2}}{\delta y^2} = f_{2,1} \\
 i = 3, j = 1 : & \quad -\frac{u_{2,1} - 2u_{3,1} + u_{4,1}}{\delta x^2} - \frac{u_{3,0} - 2u_{3,1} + u_{3,2}}{\delta y^2} = f_{3,1} \\
 i = 1, j = 2 : & \quad -\frac{u_{0,2} - 2u_{1,2} + u_{2,2}}{\delta x^2} - \frac{u_{1,1} - 2u_{1,2} + u_{1,3}}{\delta y^2} = f_{1,2} \\
 i = 2, j = 2 : & \quad -\frac{u_{1,2} - 2u_{2,2} + u_{3,2}}{\delta x^2} - \frac{u_{2,1} - 2u_{2,2} + u_{2,3}}{\delta y^2} = f_{2,2} \\
 i = 3, j = 2 : & \quad -\frac{u_{2,2} - 2u_{3,2} + u_{4,2}}{\delta x^2} - \frac{u_{3,1} - 2u_{3,2} + u_{3,3}}{\delta y^2} = f_{3,2} \\
 i = 1, j = 3 : & \quad -\frac{u_{0,3} - 2u_{1,3} + u_{2,3}}{\delta x^2} - \frac{u_{1,2} - 2u_{1,3} + u_{1,4}}{\delta y^2} = f_{1,3} \\
 i = 2, j = 3 : & \quad -\frac{u_{1,3} - 2u_{2,3} + u_{3,3}}{\delta x^2} - \frac{u_{2,2} - 2u_{2,3} + u_{2,4}}{\delta y^2} = f_{2,3} \\
 i = 3, j = 3 : & \quad -\frac{u_{2,3} - 2u_{3,3} + u_{4,3}}{\delta x^2} - \frac{u_{3,2} - 2u_{3,3} + u_{3,4}}{\delta y^2} = f_{3,3}
 \end{aligned}$$

Avec les conditions aux bords :

$$\begin{aligned}
i = 1, j = 1 : & \quad -\frac{0 - 2u_{1,1} + u_{2,1}}{\delta x^2} - \frac{0 - 2u_{1,1} + u_{1,2}}{\delta y^2} = f_{1,1} \\
i = 2, j = 1 : & \quad -\frac{u_{1,1} - 2u_{2,1} + u_{3,1}}{\delta x^2} - \frac{0 - 2u_{2,1} + u_{2,2}}{\delta y^2} = f_{2,1} \\
i = 3, j = 1 : & \quad -\frac{u_{2,1} - 2u_{3,1} + 0}{\delta x^2} - \frac{0 - 2u_{3,1} + u_{3,2}}{\delta y^2} = f_{3,1} \\
i = 1, j = 2 : & \quad -\frac{0 - 2u_{1,2} + u_{2,2}}{\delta x^2} - \frac{u_{1,1} - 2u_{1,2} + u_{1,3}}{\delta y^2} = f_{1,2} \\
i = 2, j = 2 : & \quad -\frac{u_{1,2} - 2u_{2,2} + u_{3,2}}{\delta x^2} - \frac{u_{2,1} - 2u_{2,2} + u_{2,3}}{\delta y^2} = f_{2,2} \\
i = 3, j = 2 : & \quad -\frac{u_{2,2} - 2u_{3,2} + 0}{\delta x^2} - \frac{u_{3,1} - 2u_{3,2} + u_{3,3}}{\delta y^2} = f_{3,2} \\
i = 1, j = 3 : & \quad -\frac{0 - 2u_{1,3} + u_{2,3}}{\delta x^2} - \frac{u_{1,2} - 2u_{1,3} + 0}{\delta y^2} = f_{1,3} \\
i = 2, j = 3 : & \quad -\frac{u_{1,3} - 2u_{2,3} + u_{3,3}}{\delta x^2} - \frac{u_{2,2} - 2u_{2,3} + 0}{\delta y^2} = f_{2,3} \\
i = 3, j = 3 : & \quad -\frac{u_{2,3} - 2u_{3,3} + 0}{\delta x^2} - \frac{u_{3,2} - 2u_{3,3} + 0}{\delta y^2} = f_{3,3}
\end{aligned}$$

Le système avec u en seul indice :



$$(i, j) \mapsto i + (j - 1)N$$

$$\begin{aligned}
m = 1 : & \quad -\frac{0 - 2u_1 + u_2}{\delta x^2} - \frac{0 - 2u_1 + u_4}{\delta y^2} = f_1 \\
m = 2 : & \quad -\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{\delta x^2} - \frac{0 - 2u_2 + u_5}{\delta y^2} = f_2 \\
m = 3 : & \quad -\frac{u_2 - 2u_3 + 0}{\delta x^2} - \frac{0 - 2u_3 + u_6}{\delta y^2} = f_3 \\
m = 4 : & \quad -\frac{0 - 2u_4 + u_5}{\delta x^2} - \frac{u_1 - 2u_4 + u_7}{\delta y^2} = f_4 \\
m = 5 : & \quad -\frac{u_4 - 2u_5 + u_6}{\delta x^2} - \frac{u_2 - 2u_5 + u_8}{\delta y^2} = f_5 \\
m = 6 : & \quad -\frac{u_5 - 2u_6 + 0}{\delta x^2} - \frac{u_3 - 2u_6 + u_9}{\delta y^2} = f_6 \\
m = 7 : & \quad -\frac{0 - 2u_7 + u_8}{\delta x^2} - \frac{u_4 - 2u_7 + 0}{\delta y^2} = f_7 \\
m = 8 : & \quad -\frac{u_7 - 2u_8 + u_9}{\delta x^2} - \frac{u_5 - 2u_8 + 0}{\delta y^2} = f_8 \\
m = 9 : & \quad -\frac{u_8 - 2u_9 + 0}{\delta x^2} - \frac{u_6 - 2u_9 + 0}{\delta y^2} = f_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = 1 : & \quad 2 \left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right) u_1 - \frac{1}{\delta x^2} u_2 - \frac{1}{\delta y^2} u_4 = f_1 \\
m = 2 : & \quad -\frac{1}{\delta x^2} u_1 + 2 \left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right) u_2 - \frac{1}{\delta x^2} u_3 - \frac{1}{\delta y^2} u_5 = f_2 \\
m = 3 : & \quad -\frac{1}{\delta x^2} u_2 + 2 \left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right) u_3 - \frac{1}{\delta y^2} u_6 = f_3 \\
m = 4 : & \quad -\frac{1}{\delta y^2} u_1 + 2 \left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right) u_4 - \frac{1}{\delta x^2} u_5 - \frac{1}{\delta y^2} u_7 = f_4 \\
m = 5 : & \quad -\frac{1}{\delta y^2} u_2 - \frac{1}{\delta x^2} u_4 + 2 \left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right) u_5 - \frac{1}{\delta x^2} u_6 - \frac{1}{\delta y^2} u_8 = f_5 \\
m = 6 : & \quad -\frac{1}{\delta y^2} u_3 - \frac{1}{\delta x^2} u_5 + 2 \left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right) u_6 - \frac{1}{\delta y^2} u_9 = f_6 \\
m = 7 : & \quad -\frac{1}{\delta y^2} u_4 + 2 \left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right) u_7 - \frac{1}{\delta x^2} u_8 = f_7 \\
m = 8 : & \quad -\frac{1}{\delta y^2} u_5 - \frac{1}{\delta x^2} u_7 + 2 \left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right) u_8 - \frac{1}{\delta x^2} u_9 = f_8 \\
m = 9 : & \quad -\frac{1}{\delta y^2} u_6 - \frac{1}{\delta x^2} u_8 + 2 \left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right) u_9 = f_9
\end{aligned}$$

Pour simplifier, on pose $\beta = \frac{1}{\delta x^2}$, $\gamma = \frac{1}{\delta y^2}$ et $\alpha = 2(\beta + \gamma)$:

$$\begin{aligned}
m=1: & \quad \alpha u_1 - \beta u_2 - \gamma u_4 = f_1 \\
m=2: & \quad -\beta u_1 + \alpha u_2 - \beta u_3 - \gamma u_5 = f_2 \\
m=3: & \quad -\beta u_2 + \alpha u_3 - \gamma u_6 = f_3 \\
m=4: & \quad -\gamma u_1 + \alpha u_4 - \beta u_5 - \gamma u_7 = f_4 \\
m=5: & \quad -\gamma u_2 - \beta u_4 + \alpha u_5 - \beta u_6 - \gamma u_8 = f_5 \\
m=6: & \quad -\gamma u_3 - \beta u_5 + \alpha u_6 - \gamma u_9 = f_6 \\
m=7: & \quad -\gamma u_4 + \alpha u_7 - \beta u_8 = f_7 \\
m=8: & \quad -\gamma u_5 - \beta u_7 + \alpha u_8 - \beta u_9 = f_8 \\
m=9: & \quad -\gamma u_6 - \beta u_8 + \alpha u_9 = f_9
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & -\beta & 0 & -\gamma & & \\ -\beta & \alpha & -\beta & & -\gamma & \\ 0 & -\beta & \alpha & & & -\gamma \\ \hline -\gamma & & & \alpha & -\beta & 0 \\ & -\gamma & & -\beta & \alpha & -\beta \\ & & -\gamma & 0 & -\beta & \alpha \\ \hline & & & -\gamma & & \\ & & & & -\gamma & \\ & & & & & -\gamma \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \hline u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ \hline u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{array} \right] = h^2 \left[\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \hline f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ \hline f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{array} \right]$$

La matrice A peut s'écrire en blocs de la façon suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \beta K + 2\gamma I_3 & -\gamma I_3 & \\ \hline -\gamma I_3 & \beta K + 2\gamma I_3 & -\gamma I_3 \\ \hline & -\gamma I_3 & \beta K + 2\gamma I_3 \end{array} \right]$$

où K est la matrice symétrique définie positive suivante :

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soit le vecteur en blocs :

$$X = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \right]$$

On a

$$\begin{aligned}
\langle AX, X \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} \beta K + 2\gamma I_3 & -\gamma I_3 & \\ -\gamma I_3 & \beta K + 2\gamma I_3 & -\gamma I_3 \\ & -\gamma I_3 & \beta K + 2\gamma I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X_1}{X_2} \\ \frac{X_2}{X_3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{X_1}{X_2} \\ \frac{X_2}{X_3} \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \beta ({}^t X_1 K X_1 + {}^t X_2 K X_2 + {}^t X_3 K X_3) \\
&\quad + \gamma (2\|X_1\|^2 + 2\|X_2\|^2 + 2\|X_3\|^2 - 2{}^t X_1 X_2 - 2{}^t X_2 X_3) \\
&= \beta ({}^t X_1 K X_1 + {}^t X_2 K X_2 + {}^t X_3 K X_3) \\
&\quad + \gamma (\|X_1\|^2 + \|X_1 - X_2\|^2 + \|X_2 - X_3\|^2 + \|X_3\|^2) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

et $\langle AX, X \rangle = 0 \implies X = 0$ et donc A est bien une matrice symétrique définie positive.

3. Appliquons la matrice A au vecteur ligne par ligne :

$$(Au(p, q))_{i,j} = \underbrace{\frac{-u(p, q)_{i-1,j} + 2u(p, q)_{i,j} - u(p, q)_{i+1,j}}{\delta x^2}}_{A_1} + \underbrace{\frac{-u(p, q)_{i,j-1} + 2u(p, q)_{i,j} - u(p, q)_{i,j+1}}{\delta y^2}}_{A_2}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{-u(p, q)_{i-1,j} + 2u(p, q)_{i,j} - u(p, q)_{i+1,j}}{\delta x^2} \\
&= \frac{-\sin\left(p\pi \frac{(i-1)\delta x}{a}\right) + 2\sin\left(p\pi \frac{i\delta x}{a}\right) - \sin\left(p\pi \frac{(i+1)\delta x}{a}\right)}{\delta x^2} \sin\left(q\pi \frac{j\delta y}{b}\right) \\
&= \frac{-2\sin\left(p\pi \frac{i\delta x}{a}\right) \cos\left(p\pi \frac{\delta x}{a}\right) + 2\sin\left(p\pi \frac{i\delta x}{a}\right)}{\delta x^2} \sin\left(q\pi \frac{j\delta y}{b}\right) \\
&= 2 \frac{1 - \cos\left(p\pi \frac{\delta x}{a}\right)}{\delta x^2} \sin\left(p\pi \frac{i\delta x}{a}\right) \sin\left(q\pi \frac{j\delta y}{b}\right) \\
&= \frac{4}{\delta x^2} \sin^2\left(p\pi \frac{\delta x}{2a}\right) \sin\left(p\pi \frac{i\delta x}{a}\right) \sin\left(q\pi \frac{j\delta y}{b}\right) \\
&= \frac{4}{\delta x^2} \sin^2\left(p\pi \frac{\delta x}{2a}\right) u(p, q)_{i,j}
\end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{4}{\delta x^2} \sin^2\left(p\pi \frac{\delta x}{2a}\right) u(p, q)_{i,j}$$

Il en est de même pour A_2 :

$$A_2 = \frac{4}{\delta y^2} \sin^2\left(q\pi \frac{\delta y}{2b}\right) u(p, q)_{i,j}$$

D'où

$$(Au(p, q))_{i,j} = A_1 + A_2 = \left[\frac{4}{\delta x^2} \sin^2\left(p\pi \frac{\delta x}{2a}\right) + \frac{4}{\delta y^2} \sin^2\left(q\pi \frac{\delta y}{2b}\right) \right] u(p, q)_{i,j}$$

et

$$\lambda_{p,q} = \frac{4}{\delta x^2} \sin^2 \left(p\pi \frac{\delta x}{2a} \right) + \frac{4}{\delta y^2} \sin^2 \left(q\pi \frac{\delta y}{2b} \right)$$

4.

$$\max \lambda_{p,q} = \lambda_{N,M} \simeq \frac{4}{\delta x^2} \times 1 + \frac{4}{\delta y^2} \times 1 = 4 \left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right)$$

$$\min \lambda_{p,q} = \lambda_{1,1} \simeq \frac{4}{\delta x^2} \times \left(\pi \frac{\delta x}{2a} \right)^2 + \frac{4}{\delta y^2} \times \left(\pi \frac{\delta y}{2b} \right)^2 = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

D'où

$$\text{cond}_2 A = \frac{4}{\pi^2} \frac{\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Si $M = N$ et $a = b$ alors

$$\text{cond}_2 A \sim \frac{4N^2}{\pi^2}$$