TECE Projet 6: Calcul matriciel

Ibrahim ALAME

09/11/2023

1. Soit $\mathscr{N}$ l'algèbre des matrices triangulaires supérieurs strictes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$N \in \mathscr{N} \Longleftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On associe à $\mathscr{N}$ l'ensemble $\mathscr{U}$ des matrices $U = I + N$, où I est la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que le produit de trois matrices quelconques de $\mathscr{N}$ est nul. En particulier $N^3 = 0$ si $N \in \mathscr{N}$.

   (b) Montrer que $\mathscr{U}$ est un sous groupe non commutatif du groupe linéaire de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   (c) Pour tout réel α, on définit la matrice U^α par

$$U^\alpha = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$

   Il sera commode de poser $N_\alpha = \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$. Vérifier que pour α et β réels arbitraires, on a

$$U^\alpha U^\beta = U^{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad (U^\alpha)^\beta = U^{\alpha\beta}$$

   (d) Que peut-on dire de U^α pour $\alpha \in \mathbb{Z}$?

   (e) On définit une application dite exponentielle, noté exp, de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{U}$:

$$\forall N \in \mathscr{N}, \qquad \exp(N) = I + N + \frac{N^2}{2}$$

   Montrer que l'application exp est une bijection de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{U}$.

   (f) On définit également l'application dite logarithme notée ln de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{N}$ par :

$$\text{Si } U = I + N, \quad \ln(U) = N - \frac{N^2}{2}$$

   Prouver que l'application ln est la bijection réciproque de exp.

   (g) Établir les formules

$$\exp(\alpha N) = (\exp(N))^\alpha, \quad \ln(U^\alpha) = \alpha \ln U, \quad U^\alpha = \exp(\alpha \ln U)$$

(h) Application numérique : Soit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp(U-I)$, $\ln U$, U^{-1} et U^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} A^{2k} = (-1)^k I \\ A^{2k+1} = (-1)^k A \end{cases}$$

(b) On définit l'exponentielle matricielle par la somme de la série $e^M = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{M^p}{p!}$. Montrer que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

3. Montrer que la matrice suivante est diagonalisable : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$ En déduire A^{-1} et A^n où $n \in \mathbb{Z}$

4. Soit la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que A est diagonalisable.

(b) Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $0 \leq \lambda \leq 2$. On pourra utiliser le théorème d'Hadamart :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Longrightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

(c) On pose $\lambda = 2\cos\theta$ où $\theta \in [0, \pi]$. Soit le determinant $D_n = \det(\lambda I_n - A)$. Montrer que

$$\begin{cases} D_n = 2\cos\theta\, D_{n-1} - D_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ D_0 = 1, \quad D_1 = 2\cos\theta \end{cases}$$

(d) Calculer D_n en fonction de n. En déduire les valeurs propres de A.