Chapitre 4: Échantillonnage et Théorème de Shannon

Ibrahim ALAME

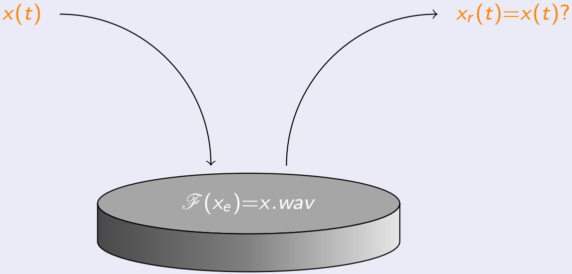
ESTP

25/03/2022

Dans ce chapitre nous étudions le lien entre l'échantillonnage d'un signal et sa reconstitution par la FFT.
Nous allons dans un premier temps décrire les outils nécessaires pour une approche mathématique de l'échantillonnage.

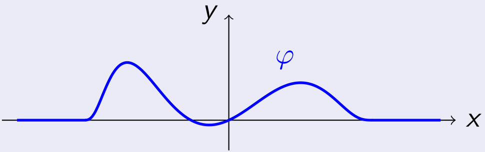
- Distributions, Convolution et Transformation de Fourier.
- Échantillonnage Théorème de Shannon
- Exemples
- Conclusion

Position du problème



Distribution

$\mathscr{D}(\mathbb{R})$: Ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.



$\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions :

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathscr{D}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & < T, \varphi > \end{array}$$

Distribution

- Si f est intégrable on définit : $< T_f, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$. En physique on assimile la distribution T_f à f en écrivant

$$\boxed{< T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} T(t)\varphi(t)\mathrm{d}t}$$

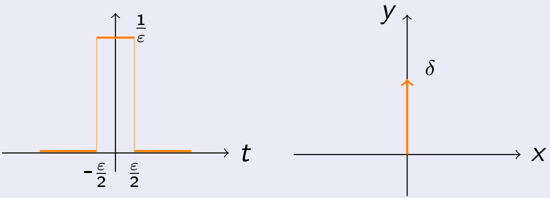
- On définit la distribution de Dirac δ par

$$\boxed{< \delta, \varphi >= \varphi(0)}$$

Plus généralement

$$\boxed{< \delta_a, \varphi >= \varphi(a)}$$

La fonction porte Π_ε



$$\boxed{<\Pi_\varepsilon,\varphi>=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi_\varepsilon(t)\varphi(t)\mathrm{d}t}=\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\varphi(\varepsilon u)\mathrm{d}u$$

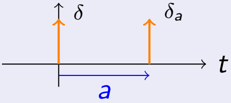
$$\lim_{\varepsilon\to 0}<\Pi_\varepsilon,\varphi>=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\varphi(0)\mathrm{d}u=\varphi(0)=<\delta,\varphi>$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}<\Pi_\varepsilon,\varphi>=<\delta,\varphi>\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{\varepsilon\to 0}\Pi_\varepsilon=\delta$$

$$\boxed{<\delta,\varphi>=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t}$$

Notation :

$$\boxed{\delta = \delta(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta_a = \delta(t-a)}$$



Produit d'un signal par δ

Le produit $x(t)\delta$ est une mesure définie par :

$$< x\delta_a, \varphi >=< \delta_a, x.\varphi >= x(a)\varphi(a) = x(a) < \delta_a, \varphi >=< x(a)\delta_a, \varphi >$$

$$\boxed{x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a)}$$

Produit de convolution avec δ

$$\boxed{\delta \star g = g} \quad \boxed{(\delta_a \star g)(\tau) = g(\tau - a)}$$

Transformation de Fourier de δ

- Dans $L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x t} \mathrm{d}t$$

- Dans $L^2(\mathbb{R})$ nous avons

$$< \hat{f}, g > = < f, \hat{g} >$$

- Dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ nous avons

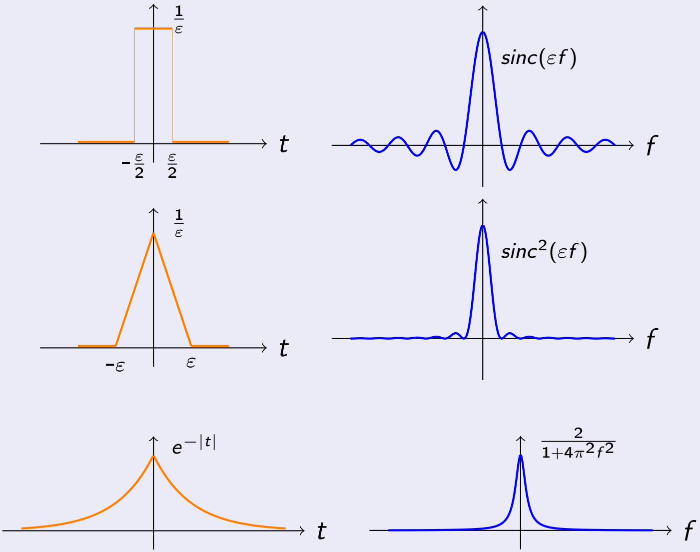
$$\boxed{< \hat{T}, g > = < T, \hat{g} >}$$

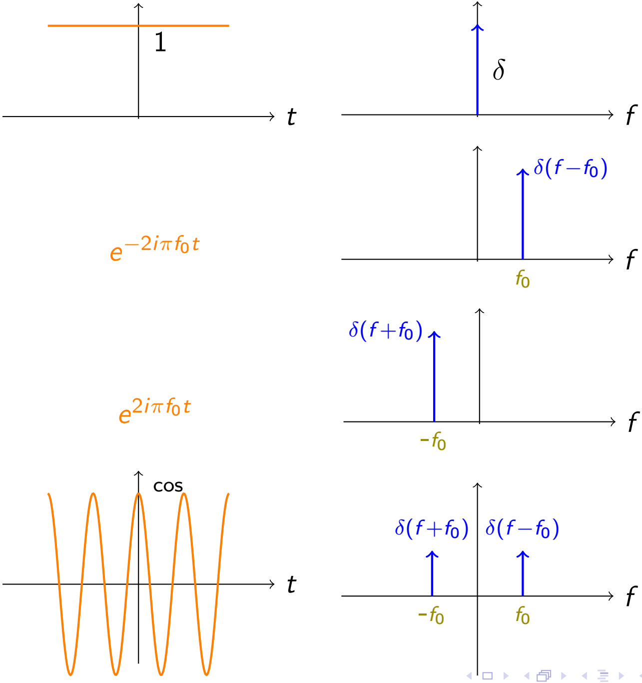
Donc

$$< \hat{\delta}, \varphi > = < \delta, \hat{\varphi} > = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2i\pi t \times 0} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{d}t = < 1, \varphi >$$

D'où $\boxed{\hat{\delta} = 1}$ plus généralement $\boxed{\hat{\delta}_a(t) = e^{-2i\pi a t}}$

Cas particuliers importants




1
t
δ
f
δ(f−f0)
f0
f
e−2iπf0t
δ(f+f0)
-f0
f
e2iπf0t
cos
t
δ(f+f0)
δ(f−f0)
-f0
f0
f

Formulaire

$$\Pi(t) \rightleftharpoons \frac{\sin \pi f}{\pi f}$$

$$\delta(t) \rightleftharpoons 1$$

$$\delta(t - t_0) \rightleftharpoons e^{-2i\pi t_0 f}$$

$$\cos 2\pi f_0 t \rightleftharpoons \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

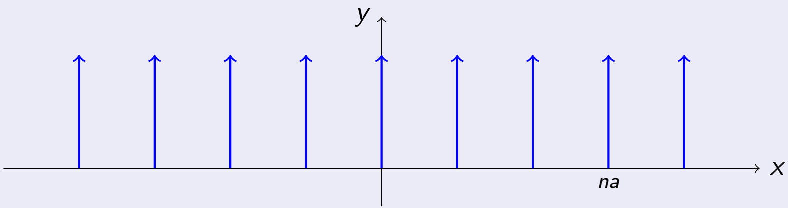
$$\sin 2\pi f_0 t \rightleftharpoons \frac{i}{2}\left[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)\right]$$

$$x(t) \star y(t) \rightleftharpoons \widehat{x}(f) \cdot \widehat{y}(f)$$

$$x(t) \cdot y(t) \rightleftharpoons \widehat{x}(f) \star \widehat{y}(f)$$

Peigne de Dirac

$$\text{Ш}_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na}$$



$$< a\text{Ш}_a, \varphi >= a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} < \delta_{na}, \varphi >= a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na)$$

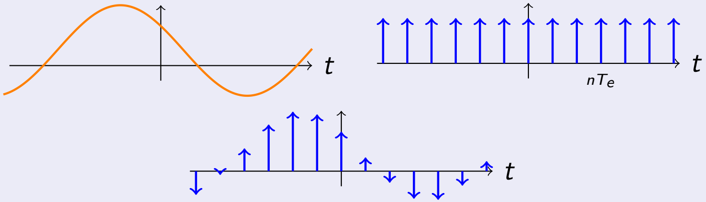
En général, φ est à support compact inclut dans $[-Na, Na]$

$$a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na) = a \sum_{n=-N}^{N-1} \varphi(na) \simeq \int_{-Na}^{Na} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$$

Définition

On appelle échantillonnage de $x(t)$ de période T_e la distribution :

$$x_e(t) = x(t)\, T_e Ш_{T_e}(t)$$



$$x_e(t) = T_e x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT_e)$$

$$\boxed{x_e(t) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)}$$

Théorème

La limite au sens des distributions du signal échantillonné $x_e(t)$ lorsque $Te \to 0$ n'est autre que $x(t)$.

$$\boxed{\lim_{T_e \to 0} x_e \;=\; x}$$

$$\begin{aligned}
< x_e(t), \varphi > &= T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) < \delta_{nT_e}, \varphi > \\
&= T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\varphi(nT_e) \\
&= T_e \sum_{n=-N}^{N-1} x(nT_e)\varphi(nT_e) \\
&\to \int_{-Na}^{Na} x(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\varphi(t)\mathrm{d}t =< x, \varphi >
\end{aligned}$$

Série de Fourier de $Ш_{T_e}$

$$c_n = \frac{1}{T_e}\int_{-T_e/2}^{T_e/2} Ш_{T_e}(t)e^{-2i\pi n\frac{t}{T_e}}\mathrm{d}t = \frac{1}{T_e}\int_{-T_e/2}^{T_e/2}\delta(t)e^{-2i\pi n\frac{t}{T_e}}\mathrm{d}t$$

$$c_n = \frac{1}{T_e}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-2i\pi n\frac{t}{T_e}}\mathrm{d}t = \frac{1}{T_e} < \delta, e^{-2i\pi n\frac{t}{T_e}} >= \frac{1}{T_e}$$

D'où

$$\boxed{Ш_{T_e}(t) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi n\frac{t}{T_e}}}$$

En remplaçant t par f et T_e par $\frac{1}{T_e}$.

$$\boxed{Ш_{\frac{1}{T_e}}(f) = T_e\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi nT_e f}}$$

Transformation de Fourier de Ш_{T_e}

$$\text{Ш}_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

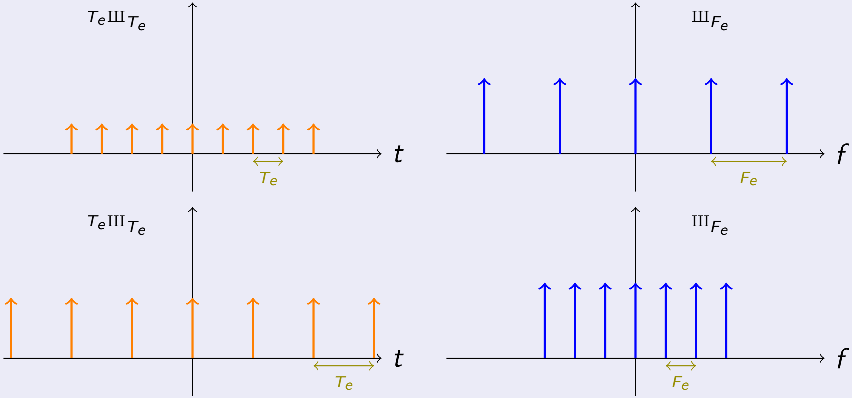
$$\widehat{\text{Ш}_{T_e}(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\widehat{t - nT_e})$$

$$\widehat{\text{Ш}}_{T_e}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi n T_e f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi n T_e f} = \frac{1}{T_e}\text{Ш}_{\frac{1}{T_e}}(f)$$

D'où

$$\boxed{\widehat{T_e \text{Ш}_{T_e}} = \text{Ш}_{F_e}}$$

Spectre de Ш



Spectre de x_e

$$x_e(t) = x(t) \cdot T_e \text{Ш}_{T_e}(t)$$

$$\mathscr{F}[x_e(t)] = \mathscr{F}[x(t) \cdot T_e \text{Ш}_{T_e}(t)]$$

$$\mathscr{F}[x_e(t)] = \mathscr{F}[x(t)] \star \mathscr{F}[T_e \text{Ш}_{T_e}(t)]$$

$$\widehat{x_e} = \widehat{x} \star \text{Ш}_{F_e}$$

$$\widehat{x_e} = \widehat{x} \star \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{x} \star \delta(f - nF_e)$$

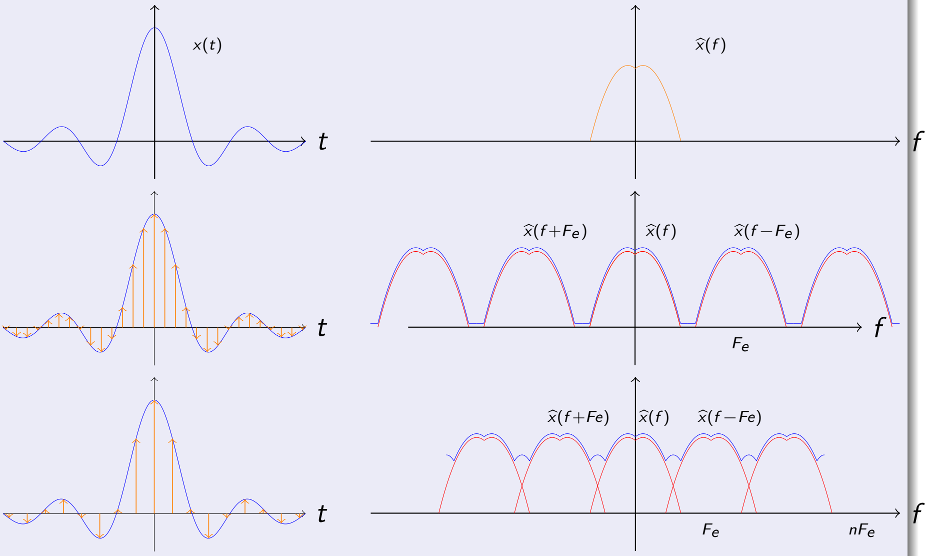
D'où

$$\boxed{\widehat{x_e} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f - nF_e)}$$

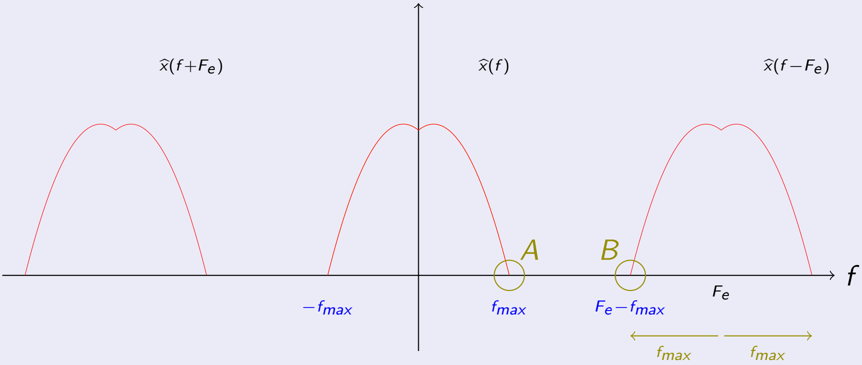
ou bien

$$\boxed{\widehat{x_e}(f) = ... + \widehat{x}(f + 2F_e) + \widehat{x}(f + F_e) + \widehat{x}(f) + \widehat{x}(f - F_e) + \widehat{x}(f - 2F_e) + ...}$$

Échantillonnage



Condition de non-repliement spectral



Pour éviter le repliement spectral, il faut que $B > A$

$$F_e - f_{max} > f_{max}$$

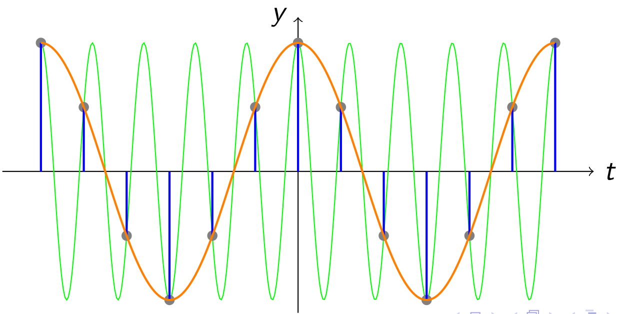
$$\boxed{F_e > 2f_{max}}$$

Exemple

Soit le signal $x(t) = A\cos 2\pi f_0 t \quad$ où $f_0 = 5$Hz
Déterminer $x_e(t)$ et sa transformée de Fourier $X_e(f)$ lorsque $F_e = 6$Hz et $F_e = 12$Hz.

Nous avons $x_e(t) = T_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$, en prenant $F_e = 6$Hz :

$$\boxed{x_e(t) = \frac{1}{6}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\frac{n\pi}{3})\delta(t - \frac{n}{6})}$$



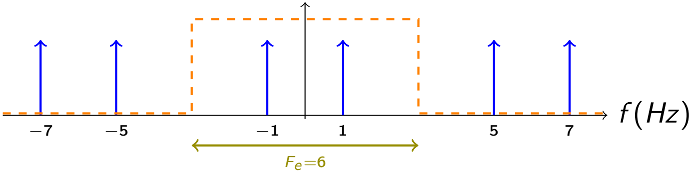
Exemple

Nous avons $\widehat{x_e} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f - nF_e)$ avec $\widehat{x}(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right]$
D'où

$$\widehat{x_e} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\delta(f - nF_e + f_0) + \delta(f - nF_e - f_0)\right]$$

$$\widehat{x_e} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\delta(f - 6n + 5) + \delta(f - 6n - 5)\right]$$

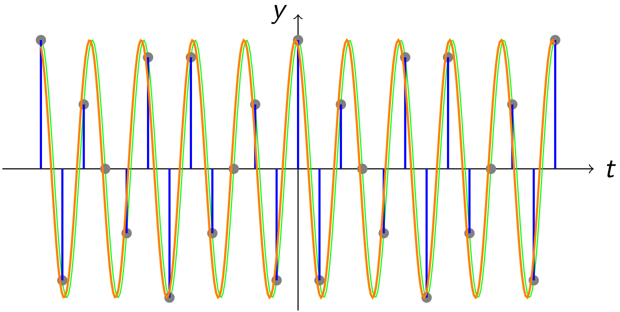
$$\widehat{x_e} = \frac{1}{2}\left[\cdots + \delta(f+5) + \delta(f+1) + \delta(f-1) + \delta(f-5) + \cdots\right]$$



$$\widehat{x_r}(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f+1) + \delta(f-1)\right] \Longrightarrow x_r(t) = \cos 2\pi t$$

En prenant $F_e = 12$Hz, nous avons :

$$\boxed{x_e(t) = \frac{1}{12}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\frac{5n\pi}{6})\delta(t - \frac{n}{12})}$$

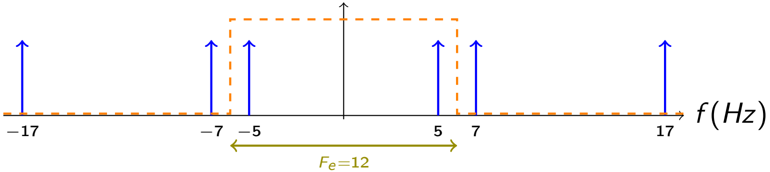


Nous avons

$$\widehat{x_e} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\delta(f - nF_e + f_0) + \delta(f - nF_e - f_0)\right]$$

$$\widehat{x_e} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\delta(f - 12n + 5) + \delta(f - 12n - 5)\right]$$

$$\widehat{x_e} = \frac{1}{2}\left[\cdots + \delta(f+7) + \delta(f+5) + \delta(f-5) + \delta(f-7) + \cdots\right]$$



$$\widehat{x_r}(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f+5) + \delta(f-5)\right] \Longrightarrow x_r(t) = \cos 10\pi t$$

Conclusion

Soit un signal réel $x(t)$ dont la transformée de Fourier, est à bande limitée $(\forall |f| > F_{max},\ X(f) = 0)$. Soit Fe une fréquence d'échantillonnage

- Si $Fe > 2F_{max}$, alors $x(t)$ peut être reconstruit de manière unique à partir des échantillons par :

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)}$$

- Si $Fe \leq F_e$, la reconstruction est impossible.

Problème de CD

L'oreille humaine détecte les fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz, donc $f_{max} = 20\text{kHz}$. F_e doit être supérieur à 40Hz. À la fin des années 70, Sony et Philips ont décidé de choisir pour leurs appareils audionumériques la fréquence d'échantillonnage standard de F_e =44,1 kHz .