MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

29 mars 2022

Objectifs

La motivation principale est le calcul numérique (approximation) de solutions d'équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires ou d'équations différentielles linéaires.

La méthode des différences finies consiste à élaborer des schémas d'approximation qui sont convergents. L'analyse théorique préalable de ces schémas est nécessaire (notions de **consistance** et de **stabilité**).

La méthode des différences finies est une des plus anciennes méthodes de simulation numérique qui est encore utilisée pour certaines applications comme la propagation d'ondes (sismiques ou électromagnétiques) ou la mécanique des fluides compressibles. Pour d'autres applications telles que la mécanique du solide ou celle des fluides incompressibles, on lui préfère souvent la méthode des éléments finis. Néanmoins, de nombreux concepts en différences finies se retrouvent dans toutes les autres méthodes numériques.

La mise en œuvre pratique de ces schémas peut nécessiter l'utilisation des méthodes d'algèbre linéaire numérique.

Taux d'accroissement et approximation d'une dérivée

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On peut donc considérer l'approximation :

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{pour} \quad x - x_0 \text{ petit}$$

Modélisation de l'équation de diffusion

On va dans un premier temps étudier les méthodes de différences finies pour un cas très classique d'équation aux dérivées partielles, l'équation de la chaleur.
Soit Ω un domaine de l'espace $\mathbb{R}^N$ ($N \in \{1, 2, 3\}$) occupé par un matériau homogène, isotrope et conducteur de la chaleur. On note :

- x la variable d'espace, et t la variable de temps.
- $f(x, t)$ les sources de chaleurs,
- $\theta(x, t)$ la température.

On note k la conductivité thermique et c la chaleur spécifique, deux constantes du problème (positives).

Modélisation de l'équation de diffusion

L'équation de la chaleur s'écrit alors

$$c\frac{\partial \theta}{\partial t} - k\Delta\theta = f \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*$$

Mais cette équation aux dérivées partielles doit être assortie de conditions supplémentaires pour avoir une et une seule solution. On fixe une condition initiale, qui décrit θ au temps d'origine.

Condition initiale

$$\theta(x, t = 0) = \theta_0(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Cela ne suffit pas, il faut aussi donner des conditions aux limites, qui décrivent les contraintes qui s'imposent à θ au bord du domaine (noté $\partial\Omega$). Il y en a de plusieurs sortes. On étudiera le cas le plus simple, celui de la condition de Dirichlet.

Condition aux limites

Condition aux limites de Dirichlet : le domaine baigne dans un thermostat (température constante égale à 0 ici)

$$\theta(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, t > 0.$$

Problème aux limites ou problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcll} c\dfrac{\partial \theta}{\partial t} - k\Delta\theta & = & f & \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ \theta(x,t) & = & 0 & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ \theta(x, t=0) & = & \theta_0(x) & \forall x \in \Omega. \end{array}\right.$$

C'est aussi l'équation de diffusion : diffusion/migration d'une concentration/densité (un polluant, une espèce chimique migrant dans un substrat...)
On va encore simplifier le problème en considérant le cas le domaine Ω est l'intervalle $[0,1]$ et où il n'y a pas de source de chaleur.

Toy model

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= & 0 & \forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(0,t) = u(1,t) &= & 0, & \\ u(x,0) &= & u_0(x) & \forall x \in [0,1]. \end{cases}$$

Approximation numérique

Discrétisation du domaine $[0,1] \times \mathbb{R}_+^*$ en espace $h = \Delta x = \frac{1}{N+1}$ et en temps $\tau = \Delta t > 0$:

- Nœuds de discrétisation :
  $(x_j, t_n) = (jh, n\tau) \quad \forall n \in \mathbb{N}, j \in \{0, 1, \ldots, N+1\}$;
- Discrétisation de la fonction u : on remplace $u(x,t)$ par u_j^n qui dépend de deux indices (u_j^n étant l'approximation de $u(x_j, t_n)$).
- Condition initiale : $u_j^0 = u_0(x_j)$ $\forall j \in \{0, 1, \ldots, N+1\}$
- Conditions au bord : $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Approximation des dérivées par la formule de Taylor en négligeant les restes :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) \simeq \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \simeq \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2}$$

On peut, maintenant, définir le schéma suivant par N équations (en chaque point $x_j, 1 \leq j \leq N$) qui permettent de calculer les valeurs des u_j^n de proche en proche.

Euler explicite : $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \dfrac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} = 0\,;$

À chaque itération temporelle n, on calcule une approximation de la solution de l'équation en tout point x_j du domaine spatial.

Nototons $u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$.

Le schéma d'équations permet de calculer u^{n+1} à partir de u^n. On calculera de proche en proche les u^n successivement à partir de u^0.

Les composantes de u^{n+1} se calculent toutes en fonction de celles de u^n en écrivant :

$$u_j^{n+1} = \frac{\nu\tau}{h^2} u_{j-1}^n + (1 - 2\frac{\nu\tau}{h^2}) u_j^n + \frac{\nu\tau}{h^2} u_{j+1}^n$$

En tenant compte du fait que $u_0^n = 0$ et $u_{N+1}^n = 0$ (c'est la discrétisation de la condition aux limites), on arrive à une écriture possible de la récurrence sous forme matricielle $u^{n+1} = M_e u^n$ avec

$$M_e = \begin{pmatrix} 1-2c & c & 0 & \cdots & 0 \\ c & 1-2c & c & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & c & 1-2c & c \\ 0 & \cdots & 0 & c & 1-2c \end{pmatrix}$$

(avec $c = \frac{\nu\tau}{h^2}$).

Consistance et précision

Bien que pour l'instant nous ne considérons que l'équation de la chaleur, nous allons introduire des notions valables pour n'importe quelle équation aux dérivées partielles (EDP) :
$F(u) = 0$.
De manière générale un schéma aux différences finies est défini pour tous les indices possibles n et j par la formule

$$F_{\tau,h}(\{u_{j+k}^{n+m}\}_{m^- \leq m \leq m^+,\, k^- \leq k \leq k^+}) = 0.$$

où les entiers k^-, k^+, m^- et m^+ définissent la largeur du stencil (pochoir) du schéma.
Dans le cas du schéma explicite étudié plus haut, on a $k^- = -1$, $k^+ = 1$, $m^- = 0$ et $m^+ = 1$.

Définition - Consistance

Le schéma est dit consistant avec l'EDP $F(u) = 0$, ssi, pour toute solution u suffisamment régulière de cette équation, l'erreur de troncature du schéma, définie par

$$F_{\tau,h}(\{u(x+kh, t+m\tau)\}_{m^- \leq m \leq m^+,\, k^- \leq k \leq k^+}) \xrightarrow[h\to 0, \tau \to 0]{} 0,$$

tend vers zéro, uniformément par rapport à (t, x).

De plus, on dit que le schéma est précis à l'ordre $\boldsymbol{p}$ en espace et à l'ordre $\boldsymbol{q}$ en temps si l'erreur de troncature tend vers zéro comme $\mathcal{O}(h^{\boldsymbol{p}} + \tau^{\boldsymbol{q}})$.

Remarque

Concrètement, on calcule l'erreur de troncature d'un schéma en remplaçant u_{j+k}^{n+m} par $u(x+kh, t+m\tau)$ dans la formule du schéma et en estimant le reste de la formule de Taylor.

Euler explicite pour l'équation de la chaleur

Le schéma d'Euler explicite pour l'équation de la chaleur est consistant, précis à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace.

Ecrivons les formules de Taylor en (x,t).
En considérant la variation de t, on a
$u(x,t+\tau) = u(x,t) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + o(\tau^2)$
Donc

$$\frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + o(\tau)$$

En considérant la variation de x, on a

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^4)$$

et de la même façon

$$u(x-h,t) = u(x,t) - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^4)$$

D'où, après calculs :

$$\frac{u(x-h,t)-2u(x,t)+u(x+h,t)}{h^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+o(h^2)$$

Quand on remplace dans le schéma u_j^n par $u(x_j, t_n)$ et donc u_j^{n+1} par $u(x_j, t_n + \tau)$, etc, on se retrouve avec :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}) + o(\tau + h^2)$$

Or comme u est une solution de l'EDP de la chaleur, il demeure :

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\tau + h^2)$$

Soit une erreur de troncature d'ordre 1 en τ et d'ordre 2 en h (on dit que le schéma est précis d'ordre 1 en temps, et d'ordre 2 en espace).

Stabilité

Afin d'étudier la stabilité des schémas, il est nécessaire de définir une norme pour la solution numérique $u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$.
Nous travaillerons avec deux normes classiques sur $\mathbb{R}^N$ que nous pondérons par le pas d'espace h :

$$||u^n||_2 = \left(\sum_{j=1}^{N} h \left| u_j^n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad ||u^n||_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} \left| u_j^n \right|.$$

Définition – Stabilité

Un schéma est dit stable pour une norme $||.||$ (comme la norme L^2 ou L^∞), s'il existe $K > 0$ indépendante de τ et h (lorsque ces valeurs tendent vers zéro) telle que

$$||u^n|| \leq K||u^0|| \quad (\forall n \geq 0),$$

quelle que soit la donnée initiale u^0.

Si l'inégalité ci-dessus n'a lieu que pour des pas τ et h astreints à certaines inégalités, on dit que le schéma est conditionnellement stable.

Etude de la stabilité du schéma Euler Explicite.

On a vu que le schéma se présente sous la forme $u^{n+1} = M_e u^n$.
On peut donc écrire que $u^n = (M_e)^n u^0$ où $(M_e)^n$ désigne bien la puissance n-ième de M_e.
M_e est une matrice symétrique réelle et donc diagonalisable. Le comportement de $(M_e)^n$ sera déterminé par les valeurs propres de M_e.

La matrice M_e peut s'écrire $M_e = I - cA$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Donc les valeurs propres de M_e s'écrivent $\lambda_k = 1 - c\theta_k$ avec θ_k les différentes valeurs propres de A, dont on sait qu'elles s'écrivent pour k entre 1 et N : $\theta_k = 4\sin^2 \dfrac{k\pi}{2(N+1)} = 4\sin^2\left(k\dfrac{\pi}{2}h\right)$.

Les valeurs propres vérifient donc $1 - 4c < \lambda_k < 1$, avec une valeur propre très voisine de $1 - 4c$.
Si $1 - 4c \geq -1$ toutes les valeurs propres seront comprises dans $[-1, 1[$ et donc $\|M_e\| \leq 1$ et donc $\|(M_e)^n\| \leq 1$.
On aura donc $\|u^n\| = \|(M_e)^n u^0\| \leq \|M_e\|^n \|u^0\| \leq \|u^0\|$.
Ce qui prouve que la méthode est stable.
Si en revanche $1 - 4c < -1$, la matrice $(M_e)^n$ deviendra infiniment grande, et $u^n = (M_e)^n u^0$ sera infinimement grande pour certaines valeurs de u^0. La méthode sera dite instable.
On est face à un cas de schéma conditionnellement stable. Il est stable si et seulement si $c \leq \dfrac{1}{2}$. Cette condition $2\nu\tau < h^2$ est appelée condition CFL (d'après les noms de Courant, Friedrichs et Lewy).

Ici, on a pu étudier la stabilité de façon relativement simple, car la matrice et ses valeurs propres étaient bien connues, ce qui n'est pas toujours le cas.
Deux approches permettent dans bien des situations d'étudier la stabilité d'un schéma numérique : le principe du maximum discret (qui est une façon d'analyser la stabilité en norme L^∞) et la condition de stabilité de Von Neumann (qui est une façon d'analyser la stabilité en norme L^2).

Principe du maximum discret

Définition

Un schéma aux différences finies vérifie le principe du maximum discret si

$$\min_{0\leq j\leq N+1} u_j^0 \leq u_j^n \leq \max_{0\leq j\leq N+1} u_j^0$$

pour tous $n \geq 0,\ 0 \leq j \leq N+1$, quelque soit la donnée initiale u^0.

Un schéma qui vérifie le principe du maximum discret est stable pour la norme L^∞.

Lemme – Stabilité des schémas d'Euler pour l'équation de la chaleur

Le schéma explicite est stable en norme L^∞ ssi la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) $2\nu\tau \leq h^2$ est satisfaite.

Preuve Si la condition CFL est vérifiée, alors en réécrivant le schéma explicite

$$u_j^{n+1} = c u_{j-1}^n + (1-2c) u_j^n + c u_{j+1}^n$$

on remarque que u_j^{n+1} est une combinaison convexe des valeurs au temps précédent, puisque $c \leq \dfrac{1}{2}$.
Si les valeurs de u_j^n sont comprises dans $[m, M]$, c'est donc aussi le cas de u_j^{n+1}.

Et donc, de proche en proche, si
$m \leq u^0 \leq M \quad \Rightarrow \quad m \leq u^n \leq M$, ce qui montre que le principe du maximum discret est vérifié.

Si la condition CFL n'est pas vérifiée, on peut constater qu'avec la situation où $u_j^0 = (-1)^j$, on a

$$u_j^n = (-1)^j (1 - 4c)^n$$

qui devient infiniment grand pour $n \to \infty$ puisque $1 - 4c < -1$.

Stabilité en norme L^2

De nombreux schémas ne vérifient pas le principe du maximum discret mais sont néanmoins de « bons » schémas. La norme L^2 se prête très bien à l'étude de la stabilité grâce à l'outil très puissant de l'analyse de Fourier (cf. Ma311).
L'idée fondamentale est d'étudier le comportement du schéma lorsque la condition initiale est une fonction élémentaire d'une décomposition de Fourier de la forme $u_0(x) = e^{i\omega x}$, et d'étudier la stabilité pour une telle fonction.

Pour des schémas simples, on procède ainsi : on recherche les solutions du schéma qui ont la forme

$$u_j^n = A(\omega)^n e^{i\omega jh}$$

avec ω un réel fixé, et $A(\omega) \in \mathbb{C}$ à déterminer en fonction de ω.
Lorsque pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre $|A(\omega)| \leq 1$, on dit que la condition de stabilité de Von Neumann est vérifiée pour ce schéma aux différences finies.
Lorsque cette condition est vérifiée, le schéma est stable pour la norme L^2.

Appliquons le principe de Von Neumann pour le schéma d'Euler explicite.
On remplace u_j^n par $A(\omega)^n e^{i\omega jh}$ dans le schéma :

$$A(\omega)^{n+1}e^{i\omega hj} = cA(\omega)^n e^{i\omega h(j-1)} + (1-2c)A(\omega)^n e^{i\omega hj} + cA(\omega)^n e^{i\omega h(j+1)}$$

En divisant par $A(\omega)^n e^{i\omega hj}$, on a

$$A(\omega) = ce^{-i\omega h} + (1-2c) + ce^{i\omega h} = 1 - 2c + 2c\cos(\omega h)$$

On constate que $A(\omega)$ est un réel compris entre $1-4c$ et 1. Pour avoir $|A(\omega)| \leq 1$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, il faut $1-4c \geq -1$ et donc $c \leq \dfrac{1}{2}$: on retrouve la condition CFL de stabilité pour ce schéma.

Convergence des schémas : Théorème de Lax

Soit $u(x, t)$ la solution suffisamment régulière de l'équation de la chaleur. Soit u_j^n la solution numérique discrète obtenue par un schéma avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$. On suppose que le schéma est linéaire, à deux niveaux, consistant, et stable pour une norme $||.||$. Alors le schéma est convergent au sens où

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\tau, h \to 0} \left(\sup_{t_n \leq T} ||e^n|| \right) = 0,$$

avec e^n le vecteur *erreur* défini par ses composantes $e_j^n = u_j^n - u(t_n, x_j)$. De plus, si le schéma est précis à l'ordre p en espace et à l'ordre q en temps, alors

$$\forall T > 0, \ \exists C_T > 0 : \quad \sup_{t_n \leq T} ||e^n|| \leq C_T \left(h^p + \tau^q \right).$$

Preuve On va la traiter dans le cas du schéma explicite pour le problème pris en exemple en considérant la norme L^2, mais le théorème s'applique dans un cadre plus général.
On a vu que le schéma se présentait $u^{n+1} = M_e u^n$ où M_e est une matrice carrée.
On note $\tilde{u}_j^n = u(x_j, t_n)$ $(1 \leq j \leq N)$. Comme le schéma est consistant, il existe un vecteur ε^n tel que

$$\tilde{u}^{n+1} = M\tilde{u}^n + \tau\varepsilon^n$$

avec $\lim_{\tau,h\to 0} ||\varepsilon^n|| = 0$ (le vecteur ε_n reprend les erreurs de troncature du schéma).

Suite de la preuve

La précision implique que $||\varepsilon^n|| \leq C\,(h^2+\tau)$.
En posant $e_j^n = u_j^n - u(x_j, t_n)$ (et donc $e^n = u^n - \tilde{u}^n$), on obtient par soustraction

$$e^{n+1} = M_e e^n - \tau\varepsilon^n$$

On se situe dans un cas où le schéma est stable (la condition CFL est vérifiée) et on avait établi que sous cette condition, $||M_e||_2 \leq 1$.
On a donc

$$||e^{n+1}||_2 \leq ||e^n||_2 + \tau||\varepsilon^n||_2$$

Fin de la preuve

Par ailleurs, comme $e^0 = 0$, on a

$$||e^n|| \leq \tau \sum_{k=1}^{n} ||\varepsilon^{k-1}||_2 \leq n\,\tau\,C\left(h^2 + \tau\right),$$

ce qui donne l'inégalité recherchée avec $C_T = T\,C$ et la convergence en découle directement. $\square$

Autres schémas pour l'équation de la chaleur

D'autres schémas sont utilisés pour l'équation de la chaleur. Citons-en quelques uns.

Euler implicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

C'est un schéma inconditionnellement stable en normes L^2 et L^∞, qui est consistant, d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

θ-schéma

En faisant une combinaison convexe des deux schémas précédents (explicite et implicite), pour $0 \leq \theta \leq 1$, on obtient le θ-schéma :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + \theta\nu\frac{-u_{j-1}^{n+1}+2u_j^{n+1}-u_{j+1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta)\nu\frac{-u_{j-1}^{n}+2u_j^{n}-u_{j+1}^{n}}{h^2} = 0$$

Lorsque $\theta = \frac{1}{2}$, il s'agit du schéma de Crank-Nicolson.

Schémas à trois niveaux

Remarque

Tous les schémas qui précèdent sont dits à deux niveaux car ils ne font intervenir que deux indices de temps. On peut construire bien sûr des schémas multi-niveaux : les plus populaires étant à trois niveaux. En voici un exemple :

Schéma de DuFort-Frankel

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + \nu \frac{-u_{j-1}^{n} + u_j^{n+1} + u_j^{n-1} - u_{j+1}^{n}}{h^2} = 0.$$

Autres conditions aux limites pour l'équation de la chaleur

La condition aux limites de Dirichlet n'est pas la seule condition aux limites qu'on est amené à poser dans le cadre de la résolution d'une équation de la chaleur. Voici deux autres conditions et comment on est amené à les discrétiser. Noter que la condition aux limites posée a un impact sur la façon dont on met en œuvre les schémas, et notamment sur sa formulation matricielle.

Condition au limite de Neumann

C'est la condition : $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$. (La dérivée suivant x est nulle aux bords).

- $\frac{u_1^n - u_0^n}{h} = \frac{u_{N+1}^n - u_N^n}{h} = 0 \quad \Rightarrow$ on élimine u_0^n et u_{N+1}^n et on ne calcule que les N valeurs $(u_j^n)_{1\leq j\leq N}$. Il faudra donc dans le schéma tenir compte du fait que $u_0^n = u_1^n$ et $u_{N+1}^n = u_N^n$.
- Il existe une autre manière de la discrétiser. $\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} = \frac{u_{N+2}^n - u_N^n}{2h} = 0 \quad \Rightarrow$ ajout de deux points "fictifs" x_{-1} et x_{N+2}, il reste $N+2$ valeurs à calculer $(u_j^n)_{0\leq j\leq N+1}$.

Condition aux limites de périodicité

C'est la condition $u(1, t) = u(0, t)$ $\forall t \geq 0$. (On peut considérer qu'on recherche $u(x, t)$ une fonction périodique suivant x de période 1).
On pourra la discrétiser avec $u_0^n = u_{N+1}^n$ et plus généralement $u_j^n = u_{j+N+1}^n$.
Noter qu'il faut donc considérer comme inconnues les u_j^n avec $0 \leq j \leq N$ (le vecteur u^n sera cette fois constitué de $N + 1$ composantes.

Equation de la chaleur en dimension 2

Si l'équation de la chaleur est considéré sur le domaine $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, on cherche une fonction $u(x,y,t)$ à trois variables.
Si on choisit le même pas h sur les deux directions d'espace, la discrétisation fera apparaître des noeuds de la forme (x_i, y_j, t_n) avec $x_i = ih$, $y_j = jh$, $t_n = n\tau$.
On sera amené à considérer une discrétisation avec $u^n_{i,j}$ et des schémas comme celui d'Euler explicite :

$$\frac{u^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{\tau} - \nu \left(\frac{u^n_{i-1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u^n_{i,j-1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j+1}}{h^2} \right) = 0$$