

# Méthode des éléments finis

Ibrahim ALAME

ESTP

19/10/2022

# Éléments finis d'Hermite

$\varphi_i$  des éléments finis de Lagrange est construite pour être continue d'un élément à l'autre, mais pas sa dérivée...

Un élément fini d'Hermite est un triplet  $(K, \Sigma, P)$  tel que :

- $K$  est un élément géométrique de  $\mathbb{R}^n$ , compact, connexe, et d'intérieur non vide ;
- $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$  un ensemble de  $N$  formes linéaires sur l'espace des fonctions définies sur  $K$ , ou sur un sous-espace plus régulier contenant  $P$  ;
- $P$  est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur  $K$ , et tel que  $\Sigma$  soit  $P$ –unisolvant.

# Opérateur de $P$ –interpolation

- Un opérateur de  $P$ –interpolation sur  $\Sigma$  est un opérateur  $\Pi$  qui à toute fonction  $v$  définie sur  $K$  associe la fonction  $\Pi v$  de  $P$  définie par :

$$\Pi v = \sum_{i=1}^N \sigma_i(v) \varphi_i$$

- $\Pi v$  est l'unique élément de  $P$  qui prend les mêmes valeurs que  $v$  sur les points de  $\Sigma$ .

- 

$$\sigma_j(\varphi_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N$$

- Suivant les éléments utilisés, ces fonctions de base pourront être de classe  $C^1$  ou même plus, et il en sera donc de même pour la solution approchée  $u_h$ .

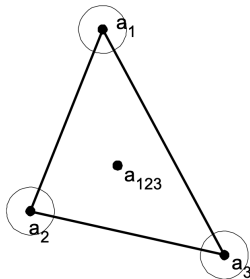
# Éléments unidimensionnels



Élément	cubique	quintique
$K$	segment $[a ; b]$	segment $[a ; b]$
$\Sigma$	$\{p(a), p'(a), p(b), p'(b)\}$	$\{p(a), p'(a), p''(a), p(b), p'(b), p''(b)\}$
$P$	$P_3$	$P_3$
Régularité	$C^1$ et $H^2$	$C^2$ et $H^3$

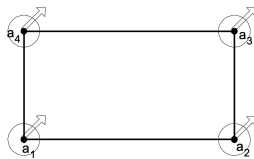
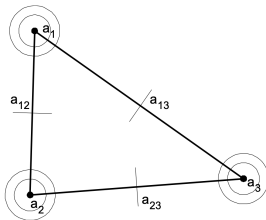
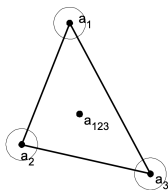
Élément	
$K$	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
$\Sigma$	$\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), i = 1, 2, 3\} \cup \{p(a_0)\}$
$P$	$P_3$
Régularité	$C^0$ , mais pas $C^1$

# Élément triangle



Élément	
$K$	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
$\Sigma$	$\left\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), i = 1, 2, 3\right\} \cup \{p(a_0)\}$
$P$	$P_3$
Régularité	$C^0$ , mais pas $C^1$

# Éléments bidimensionnels



Élément	
$K$	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
$\Sigma$	$\left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, 2, 3 \right\} \cup \left\{ \frac{\partial p}{\partial n}(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3 \right\}$
$P$	$P_5$
Régularité	$C^1$

Élément	$Q_3$
$K$	rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes
$\Sigma$	$\left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, \dots, 4 \right\}$
$P$	$P_3$
Régularité	$C^1$

# Les fonctions de base

- $\Phi_i(x)$  les fonctions de base associées aux valeurs nodales de la fonction  $v_i$ .
- $\Psi_i(x)$  les fonctions de base associées aux valeurs nodales de la dérivée  $(\frac{dv}{dx})_i$ ,

$$\Pi v(x) = \sum_{i=1}^n v_i \Phi_i(x) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{dv}{dx}\right)_i \Psi_i(x)$$

Sur un élément  $[x_1, x_2]$ , cette approximation s'écrit :

$$v^h(x) = v_1 \Phi_1(x) + \left(\frac{dv}{dx}\right)_1 \Psi_1(x) + v_2 \Phi_2(x) + \left(\frac{dv}{dx}\right)_2 \Psi_2(x)$$

$\Phi_i$  et  $\Psi_i$  vérifient les conditions :

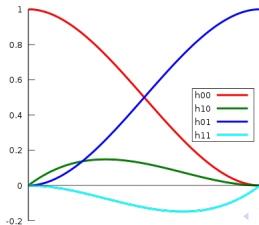
$$\begin{cases} \Phi_i(x_j) = \delta_{ij} & \Phi'_i(x_j) = 0 \\ \Psi_i(x_j) = 0 & \Psi'_i(x_j) = \delta_{ij} \end{cases}$$

# Les fonctions de base

$$\begin{cases} \Phi_i(x) = [1 - 2(x - x_i)\lambda'_i(x_i)] \lambda_i^2(x) \\ \Psi_i(x) = (x - x_i)\lambda_i^2(x) \end{cases}$$

- élément de référence de longueur  $h$  :  $x_1 = 0$  et  $x_2 = h$ ,
- $\lambda_1(x) = 1 - \frac{x}{h}$  et  $\lambda_2(x) = \frac{x}{h}$ . On pose  $\xi = \frac{x}{h}$  :

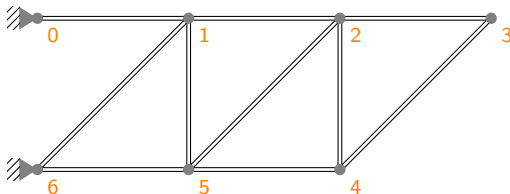
$$\begin{cases} \Phi_1(x) = (1 + 2\xi)(1 - \xi)^2 \\ \Phi_2(x) = (3 - 2\xi)\xi^2 \\ \Psi_1(x) = h\xi(1 - \xi)^2 \\ \Psi_2(x) = h(\xi - 1)\xi^2 \end{cases}$$





# Maillage en dimension 1 : Liste des sommets

- Les sommets sont numérotés  $0, \dots, N_s - 1$ ,



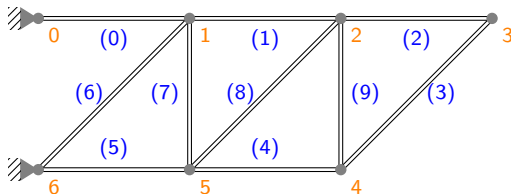
- On définit dans un tableau les coordonnées de chaque sommet  $i$  :

$i$	0	1	...	$N_s - 1$
$x$	$x_0$	$x_1$	...	$x_{N_s-1}$
$y$	$y_0$	$y_1$	...	$y_{N_s-1}$

- Si les sommets sont alignés :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$  et si la grille est uniforme, elle est donnée de façon implicite par

$$x_i = a + ih, \quad \text{où } i = 0, \dots, n+1 \text{ et } h = \frac{1}{n+1}$$

# Maillage en dimension 1 : Table de connectivité



- On définit dans un tableau les extrémités de chaque élément  $e$  :

$e$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
origine	0	1	2	3	4	5	6	1	2	2
extrémité	1	2	3	4	5	6	1	5	5	4

- Pour le cas mono-dimensionnel, la table de connectivité est implicite à partir de la liste des sommets. Pour chaque élément  $e = 0, \dots, n$ ,

$$n_{e,1} = e, \quad n_{e,2} = e + 1$$

## Liste des sommets en dimension 2

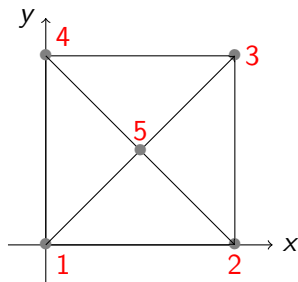
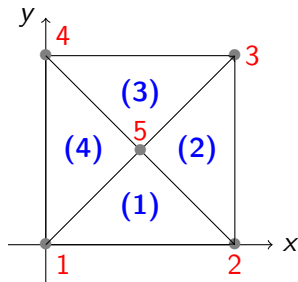


Tableau des coordonnées  $\{(x_{1i}, x_{2i})\}_{i=1}^{N_s}$ .

i	1	2	3	4	5
$x_{1i}$	0	$L$	$L$	0	$L/2$
$x_{2i}$	0	0	$H$	$H$	$H/2$
$\Gamma$	1	1	1	1	0

# Table de connectivité en dimension 2



- $N_e$  nombre de triangles,
- $n_{e,j} : e = 1, \dots, N_e, j = 1, 2, 3$

e	1	2	3	4
1	5	5	3	1
2	1	2	4	5
3	2	3	5	4

## Table de connectivité en dimension 2

L'ordre dans lequel sont donnés les numéros de sommet n'est pas important. Si on peut, il faut respecter un sens comme ici le sens trigonométrique. Cela peut faciliter pour certains problèmes quelques points de programmation.

Souvent on ajoute un numéro de référence pour pouvoir introduire une caractérisation des équations au niveau de chaque élément.

e	1	2	3	4
1	5	5	3	1
2	1	2	4	5
3	2	3	5	4
4	1	2	1	2

les éléments 1 et 3 ont les mêmes caractéristiques, de même que les éléments 2 et 4 .

# L'assemblage

Soit  $K^{[e]}$  la matrice de rigidité de l'élément  $e$ . La matrice globale du système  $K^\#$  est donnée par

$$\left[ K^\# \right]_{ij} = \sum_{K^{[e]} \in \mathcal{T}^h, n_{[e]i_e}=i, n_{[e]j_e}=j} \left[ K^{[e]} \right]_{i_e j_e}$$

Pour former  $K^\#$ , il suffit de parcourir les éléments en ajoutant successivement la contribution de chaque de chaque matrice élémentaire  $\left[ K^{[e]} \right]_{i_e j_e}$  à la matrice totale  $\left[ K^\# \right]_{ij}$  avec  $i = n_{[e]i_e}$ ,  $j = n_{[e]j_e}$ .

---

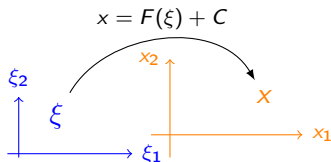
**Algorithm 1** Algorithme général schématisant un assemblage

---

```
 $K^\# := 0$ ; {Initialisation des éléments de  $K^\#$  stockés en mémoire}  
do  $e = 1, N_E$  {Boucle sur les éléments}  
   $K_{\text{elem}} := \text{form}(e)$ ; {Formation de la matrice élémentaire}  
  do  $i_e = 1, \ell$  {Boucle sur les lignes de la matrice élémentaire}  
     $i := n(e, i_e)$ ; {Indice de ligne du coefficient à incrémenter}  
    do  $j_e = 1, \ell$  {Boucle sur les colonnes de la matrice élémentaire}  
       $j := n(e, j_e)$ ; {Indice de colonne du coefficient à incrémenter}  
       $K^\#(i, j) := K^\#(i, j) + K_{\text{elem}}(i_e, j_e)$ ; {Assemblage}  
    enddo  
  enddo  
enddo
```

---

# Rappel de calcul tensoriel



- Changement de coordonnées entre  $(x_i)_{i=1,n}$  et  $(\xi_i)_{i=1,n}$
- Repère naturel :  $(e_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \quad e_2 = \frac{\partial x}{\partial \xi_2}, \quad \dots)$
- Tenseur symétrique :  $g_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$ ,  $g^{i,j} = (g_{i,j})^{-1}$ ,  $|g| = \det(g)$
- On a alors

$$\int_{K_e} (\dots) dx dy = \int_{\hat{K}} (\dots) \sqrt{|g|} d\xi d\eta$$

$$\int_{K_e} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy = \int_{\hat{K}} \frac{1}{\sqrt{|g|}} g^{ij} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \xi_j} d\xi d\eta = \int_{\hat{K}} \frac{1}{|J|} \nabla \hat{\varphi}_i^t G \nabla \hat{\varphi}_j d\xi d\eta$$



# Éléments finis 1D

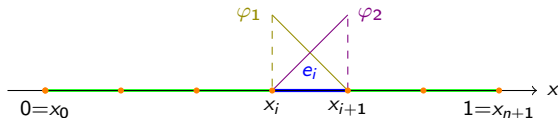
Considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = p & \text{dans } \Omega = ]0, L[ \\ \frac{du}{dx}(0) = -f_1, \quad \frac{du}{dx}(L) = f_2 & \text{sur } \Gamma = \{0, L\} \end{cases}$$

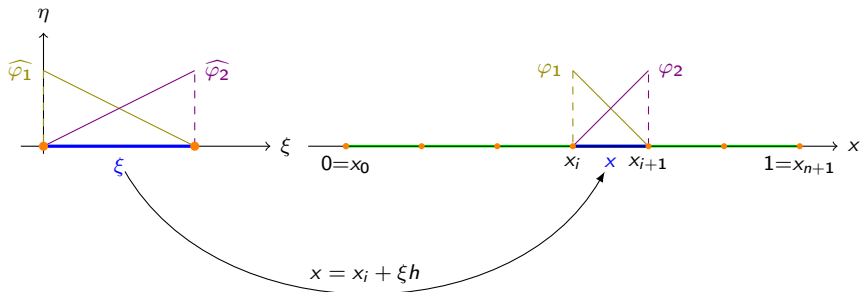
Formulation variationnelle :  $(\mathcal{P}_v)$   $\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ vérifiant} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$   
où

$$a(u, v) = \int_0^L \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_0^L p \cdot v(x) dx + f_1 \cdot v(0) + f_2 \cdot v(L)$$

Maillage en éléments finis : segment de type (1) :



# Éléments finis 1D



Nous avons

$$\begin{cases} \widehat{\varphi}_1(\xi) = 1 - \xi \\ \widehat{\varphi}_2(\xi) = \xi \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi_1(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \\ \varphi_2(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{cases}$$

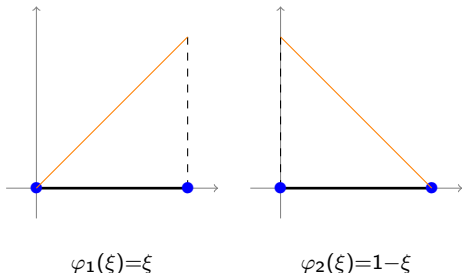
## Rappel : Élément fini segment de type 1 (Chapitre 2)

- $k = 1$  le segment de type (1) est obtenu pour

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1^{(1)}, \quad \Sigma = \Sigma_1^{(1)} = \{a_1 = 1, a_2 = 0\}$$

Les fonctions de base sont les fonctions coordonnées barycentriques par rapport à  $(a_1, a_2)$ , i.e.

$$\varphi_1 = \lambda_1 = \xi, \quad \varphi_2 = \lambda_2 = 1 - \xi$$



# Matrice élémentaire

$$m_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_1, \varphi_2) \\ a(\varphi_2, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_2) \end{pmatrix}, \quad b_e = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \ell(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

On fait le changement de variable  $x = x_i + \xi h$  :

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = \frac{d\hat{\varphi}_i}{d\xi} \times \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d\hat{\varphi}_i}{d\xi}$$

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = h \int_0^1 \left( \frac{1}{h} \frac{d\hat{\varphi}_i}{d\xi} \right) \left( \frac{1}{h} \frac{d\hat{\varphi}_j}{d\xi} \right) d\xi$$

D'où

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d\hat{\varphi}_i}{d\xi} \frac{d\hat{\varphi}_j}{d\xi} d\xi$$

De même

$$\ell(\varphi_i) = \frac{1}{h} \int_0^1 \hat{p}(\xi) \hat{\varphi}_i(\xi) d\xi + f_0 \hat{\varphi}_i(0) + f_1 \hat{\varphi}_i(1)$$

# Matrice élémentaire

On a

$$a(\varphi_1, \varphi_1) = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \frac{d\widehat{\varphi_1}}{d\xi} \right)^2 d\xi = \frac{1}{h} \int_0^1 (-1)^2 d\xi = \frac{1}{h}$$

$$a(\varphi_1, \varphi_2) = a(\varphi_2, \varphi_1) = \frac{1}{h} \int_0^1 (-1 \times 1) d\xi = -\frac{1}{h}$$

$$a(\varphi_2, \varphi_2) = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \frac{d\widehat{\varphi_2}}{d\xi} \right)^2 d\xi = \frac{1}{h} \int_0^1 (+1)^2 d\xi = \frac{1}{h}$$

Par hypothèse , Nous avons  $p(x) = 0$  donc

$$\ell(\varphi_1) = 0 + f_0 \widehat{\varphi_1}(0) + f_1 \widehat{\varphi_1}(1) = f_1 \text{ et } \ell(\varphi_2) = f_2$$

Le système élémentaire s'écrit :

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

## Cas particulier $n = 4$



La matrice élémentaire de l'élément  $e_i$ ,  $i = 0, 3$  est donnée par

$$m = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit explicitement pour chacune des 4 barres :

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## Cas particulier $n = 4$



$$M = \begin{matrix} & & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## Cas particulier $n = 4$



$$M = \begin{matrix} & & & 2 & 3 \\ & & & & \\ & & & & \\ 2 & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 3 & \end{matrix}$$



## Cas particulier $n = 4$



$$M = \begin{matrix} & & & & 3 & 4 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ 3 & & & & 0 & 0 \\ 4 & & & & 0 & 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Assemblage en dim=1

La matrice d'assemblage s'obtient en sommant les 4 matrices élémentaires :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 = 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

On  $u_0 = 0$ , La première ligne nous donne la réaction à l'origine  $f_0 = -\frac{1}{h}u_1$ .  
Le système n'a que 4 inconnues, on obtient le système d'ordre 4 en supprimant la première ligne et la première colonne :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

```

import numpy as np

N=4 # 4 éléments ==> 5 sommets

M=np.zeros((N+1,N+1),dtype=float)

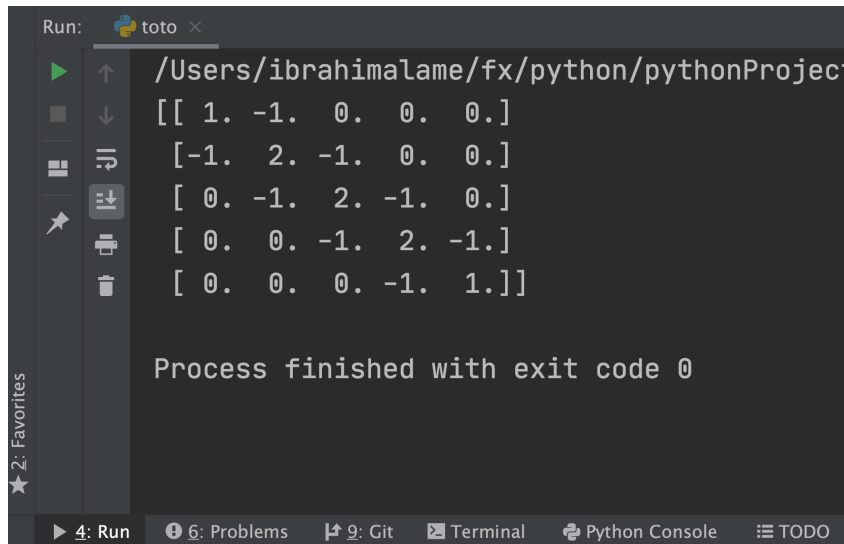
def n(e,i):
    return e+i

for e in range(N):
    m=np.mat([[1,-1],[-1,1]])
    for i in range(2):
        I = n(e,i)
        for j in range(2):
            J =n(e,j)
            M[I,J] += m[i,j]

print(M)

```

# Code python



The screenshot shows a Python IDE interface. At the top, a 'Run:' tab is active, displaying the output of a script. The output consists of a 5x5 matrix of floating-point numbers, followed by the message 'Process finished with exit code 0'. The matrix is:

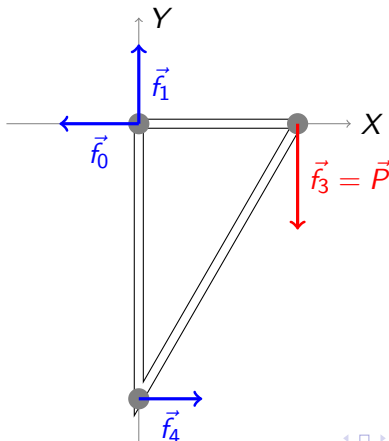
$$\begin{bmatrix} 1. & -1. & 0. & 0. & 0. \\ -1. & 2. & -1. & 0. & 0. \\ 0. & -1. & 2. & -1. & 0. \\ 0. & 0. & -1. & 2. & -1. \\ 0. & 0. & 0. & -1. & 1. \end{bmatrix}$$

The IDE's left sidebar shows a '2: Favorites' section. The bottom status bar indicates the current state: '4: Run', '6: Problems', '9: Git', 'Terminal', 'Python Console', and 'TODO'.

# Treillis soumis à une force nodale

trois poutres de même nature et de même section droite.

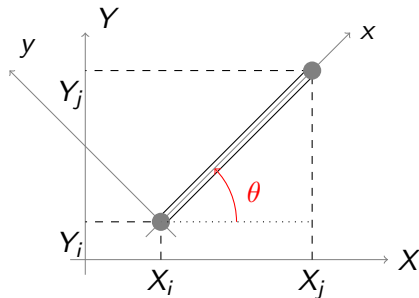
- Le noeud 1 est articulé et le noeud 3 repose sur un appui simple dont la normale est horizontale.
- Le noeud 2 porte une charge de composantes  $(0, P)$ .



# Treillis soumis à une force nodale

Le système élémentaire s'écrit :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$



# Formules de passage

Les formules de passage entre les deux repères local  $(x, y)$  et global  $(X, Y)$  :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1^x \\ F_1^y \\ F_2^x \\ F_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

# Matrice de rigidité élémentaire dans le repère global

$$\begin{pmatrix} F_1^x \\ F_1^y \\ F_2^x \\ F_2^y \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \end{pmatrix}$$

Changement de notations !

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$



# Nœuds et connectivité

Les caractéristique géométriques du système se résume en :

nœud	$x$	$y$
0	0	0
1	$L$	0
2	0	$-\sqrt{3}L$

poutre	$\ell$	$\theta$	$C = \cos \theta$	$S = \sin \theta$
(0,1)	$L$	0	1	0
(1,2)	$2L$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
(2,0)	$\sqrt{3}L$	$\frac{\pi}{2}$	0	1

## Matrice élémentaire de la barre (0,1) :

$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La connectivité est définie par  $n : (q, r) \mapsto [2q, 2q + 1, 2r, 2r + 1]$  donc  $n(0, 1) = [0, 1, 2, 3]$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## Matrice élémentaire de la barre (1,2) :

$$\frac{EA}{8L} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

La connectivité de l'élément (1, 2) est définie par la liste  $n(1, 2) = [2, 3, 4, 5]$

$$M = \begin{matrix} & & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \frac{EA}{8L}$$

## Matrice élémentaire de la barre (2,0) :

$$\frac{EA}{\sqrt{3}L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La connectivité de l'élément (2,0) est définie par la liste  $n(2,0) = [4, 5, 0, 1]$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \frac{EA}{\sqrt{3}L}$$

# Matrice d'assemblage

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & 0 & 1 + \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

Les trois déplacements nuls  $u_0 = u_1 = u_4 = 0$  nous permettent de réduire le système et de supprimer de la matrice globale les trois lignes 0,1,4 et les trois colonnes 0,1,4. D'où le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

# Résolution du système

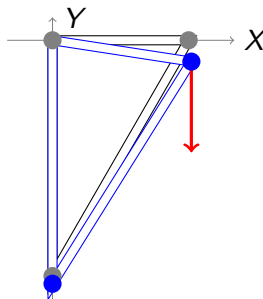
Après avoir résolu le système linéaire réduit, on reprend les équations éliminées du système globale pour déterminer les réactions aux appuis :

$$f_0 = -\frac{EA}{L} u_2$$

$$f_1 = -\frac{EA}{L} \frac{1}{\sqrt{3}} u_5$$

$$f_4 = \frac{EA}{L} \left( -\frac{\sqrt{3}}{8} u_2 - \frac{3}{8} u_3 + \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) u_5 \right)$$

On trouve  $u_2 \simeq 0.06\text{mm}$ ,  $u_3 \simeq -0.47\text{mm}$ ,  $u_5 \simeq -0.17\text{mm}$ .  
et  $f_0 \simeq -5.8 \times 10^3\text{N}$ ,  $f_1 \simeq 1.0 \times 10^4\text{N}$ ,  $f_4 \simeq 5.8 \times 10^3\text{N}$ .



# Mise en œuvre numérique

## Géométrie du problème

$$Points = ([x_i, y_i])_{i=0, n-1}$$

$$Barres = ([p_i, p_j])_{(i,j) \in G}$$

En python  $N$  et  $B$  sont codés par les deux listes suivantes :

```
L = .7
```

```
Points = [[0, 0], [0, L], [L, 0]]
```

```
Barres = [[0, 1], [1, 2], [2, 0]]
```

Un nœud peut être articulé en un point fixe qui empêche tout déplacement  $u_1 = u_2 = 0$ , ou un appui simple horizontal ( $u_2 = 0$ ) ou vertical ( $u_1 = 0$ ). On représente la fixation d'un nœud par un triplet  $(p_i, \alpha_i, \beta_i)$  où  $p_i$  est le point considéré,  $\alpha_i$  est un boolean qui vaut 1 si le déplacement horizontal est libre, 0 sinon, et  $\beta_i$  est un boolean qui vaut 1 si le déplacement vertical est libre, 0 sinon. Pour notre exemple :

```
Conditions = [[0,0,0], [2,0,1]]
```

## Les constantes et grandeurs physiques

La section des barres  $A$  exprimée en  $\text{m}^2$ . Les longueurs des barres  $L_i$  sont calculées à partir des coordonnées des points d'articulation et exprimées en mètre (m). Le module de Young  $E$  est exprimé en Pascal (Pa) . Les forces extérieures nodales sont exprimées en Newton (N).

Pour notre exemple nous avons :  $L = 0.2\text{m}$ ,  $A = 100\text{m}^2$ ,  $E = 200000\text{MPa}$ , et  $P = -10000\text{N}$ .

$$L = 0.2$$

$$A = 100 * 1\text{E-}6$$

$$E = 200000 * 1\text{E}6$$

$$P = -10000$$



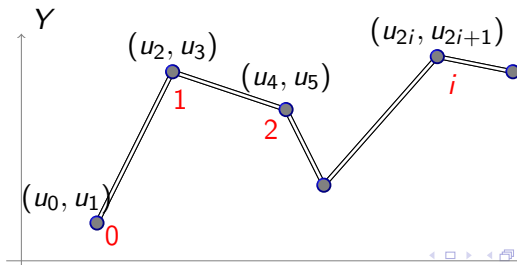
# Indexation

Soit  $B_i = (p_1, p_2)$  une barre du système d'extrémités  $p_1 = (X_1, Y_1)$  et  $p_2 = (X_2, Y_2)$ . On calcule  $\ell$  la longueur de la barre,  $c$  et  $s$ , le cosinus et le sinus de l'angle  $\theta$  que fait la barre avec l'axe  $(OX)$  par :

$$c = \cos \theta = \frac{X_2 - X_1}{\ell} \text{ et } s = \sin \theta = \frac{Y_2 - Y_1}{\ell}, \quad \ell = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Si on désigne par  $CS$  la matrice ligne  $(c \quad s \quad -c \quad -s)$ , la matrice de rigidité n'est autre que

$$K_i = \frac{EA}{\ell} CS \times CS^t$$



# Indexation

Les nœuds sont numérotés  $0, 1, 2, \dots, q, \dots, r, \dots, n - 1$ , on désigne par  $(u_{2q}, u_{2q+1})$  le vecteur déplacement du nœud  $q$ . L'équation matricielle d'équilibre d'une barre  $(q, r)$  s'écrit matriciellement en dimension  $2n$  :

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ f_{2q} \\ f_{2q+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{2r} \\ f_{2r+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \dots & C^2 & CS & \dots & -C^2 & -CS & \dots \\ \dots & CS & S^2 & \dots & -CS & -S^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ \dots & -C^2 & -CS & \dots & C^2 & CS & \dots \\ \dots & -CS & -S^2 & \dots & CS & S^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ u_{2q} \\ u_{2q+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{2r} \\ u_{2r+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Les autres coefficients manquant sont tous nuls.

# Matrice d'assemblage

```
import math
import numpy as np

L=0.7
A=100*1E-6
E=20000*1E6
P=-10000

Points = [[0,0],[0,L],[L,0]]
Barres = [[0,1],[1,2],[2,0]]
Conditions = [[0,0,0],[2,0,1]]

def n(q,r):
    return [2*q,2*q+1,2*r,2*r+1]
```

```

for q,r in Barres:
    x1,y1 = Points[q]
    x2, y2 = Points[r]
    ell = math.sqrt((x2-x1)**2+(y2-y1)**2)
    c=(x2-x1)/ell
    s=(y2-y1)/ell
    CS = np.mat([c,s,-c,-s],dtype=float)
    CSt= np.transpose(CS)
    m = np.dot(CSt,CS)*A*E/ell
    for i in range(4):
        I=n(q,r)[i]
        for j in range(4):
            J=n(q,r)[j]
            M[I,J]+=m[i,j]

print(M)

```

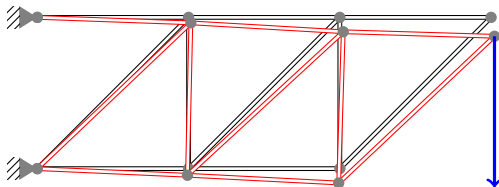
# Matrice d'assemblage

Les conditions aux appuis impose un ou deux déplacements nuls. On retire donc du système matriciel les lignes et colonnes correspondants, soit en python :

```
l = []  
for q, a, b in Conditions:  
    if a == 0:  
        l.append(2 * q)  
    if b == 0:  
        l.append(2 * q + 1)  
l.sort()  
l.reverse()  
for i in l:  
    M = np.delete(M, i, axis=0)  
    M = np.delete(M, i, axis=1)
```



# Exemple

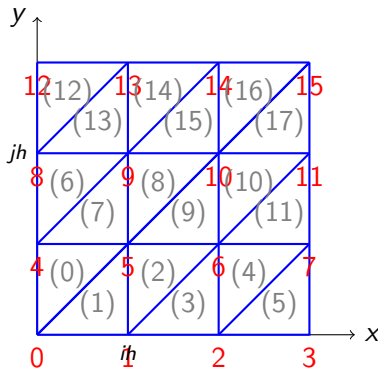


# Éléments finis 2D

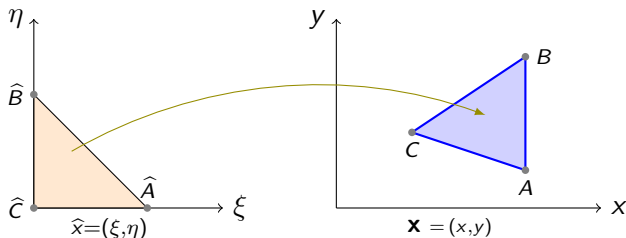
$$(\mathcal{P}_v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ vérifiant} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_{\Omega} f v$$



# Éléments finis triangles de type (1)



Nous avons

$$x = \xi A + \eta B + (1 - \xi - \eta)C$$

Donc

$$e_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} = A - C = \overrightarrow{CA}$$

$$e_2 = \frac{\partial x}{\partial \eta} = B - C = \overrightarrow{CB}$$



Donc la matrice jacobienne  $Jacobienne = mat(e_1, e_2)$  :

$$Jacobienne = \langle \vec{CA} \vec{CB} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}$$

Le jacobien est

$$\det J = \det(\vec{CA}, \vec{CB}) = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = \|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\| \sin \alpha$$

On a donc

$$|\det J| = \|\vec{CA} \wedge \vec{CB}\|$$

Le tenseur symétrique est

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{CA}\|^2 & \vec{CA} \cdot \vec{CB} \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} & \|\vec{CB}\|^2 \end{pmatrix} = J^t \cdot J$$

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\|\vec{CA} \wedge \vec{CB}\|^2} \begin{pmatrix} \|\vec{CB}\|^2 & -\vec{CA} \cdot \vec{CB} \\ -\vec{CA} \cdot \vec{CB} & \|\vec{CA}\|^2 \end{pmatrix}$$

# Matrice élémentaire

Soit la formule de changement de variables

$$\int_{K_e} (\dots) dx dy = \int_{\hat{K}} (\dots) \sqrt{|g|} d\xi d\eta$$

On a alors pour un élément fini triangle  $T_e = ABC$  de type (1) :

$$\int_{T_e} (\dots) dx dy = \int_{\hat{T}} (\dots) \|\vec{CA} \wedge \vec{CB}\| d\xi d\eta$$

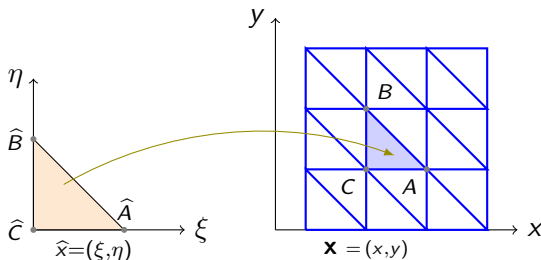
Nous avons aussi, en posant  $G = (g^{ij})$  :

$$\int_{K_e} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy = \int_{\hat{K}} \frac{1}{\sqrt{|g|}} g^{ij} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \xi_j} d\xi d\eta = \int_{\hat{K}} \frac{1}{|J|} \nabla \hat{\varphi}_i^t G \nabla \hat{\varphi}_j d\xi d\eta$$

Donc

$$\int_{K_e} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy = \int_{\hat{K}} \frac{1}{\|\vec{CA} \wedge \vec{CB}\|} \nabla \hat{\varphi}_i^t \begin{pmatrix} \frac{\|\vec{CB}\|^2}{-\vec{CA} \cdot \vec{CB}} & -\frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\|^2} \end{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_j d\xi d\eta$$

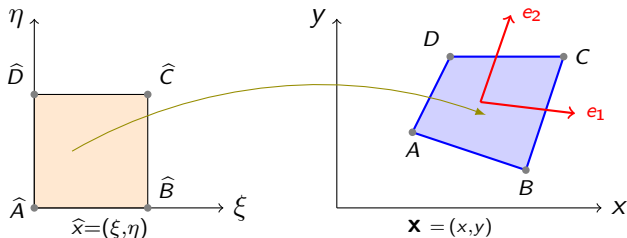
## Cas particulier élément fini triangle isocèle de type (1)



$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{K_e} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy = \int_{\hat{K}} \nabla \hat{\varphi}_i \cdot \nabla \hat{\varphi}_j \, d\xi d\eta$$

$$\ell(\varphi_i) = \int_{T_e} f(x, y) \varphi_i(x, y) \, dx dy = h^2 \int_{\hat{T}} \hat{f}(\xi, \eta) \hat{\varphi}_i(\xi, \eta) \, d\xi d\eta$$

# Éléments finis carré de type (1)



Nous avons

$$\mathbf{x} = \hat{x}_3 \hat{x}_4 A + \hat{x}_4 \hat{x}_1 B + \hat{x}_1 \hat{x}_2 C + \hat{x}_2 \hat{x}_3 D$$

$$\mathbf{x} = (1 - \xi)(1 - \eta)A + (1 - \eta)\xi B + \xi\eta C + (1 - \xi)\eta D$$

Donc

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = -(1 - \eta)A + (1 - \eta)B + \eta C - \eta D = (1 - \eta)\overrightarrow{AB} + \eta\overrightarrow{DC}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} = -(1 - \xi)A - \xi B + \xi C + (1 - \xi)D = (1 - \xi)\overrightarrow{AD} + \xi\overrightarrow{BC}$$

Donc la matrice jacobienne  $Jacobienne = mat(e_1, e_2)$  :

$$Jacobienne = mat((1 - \eta)\vec{AB} + \eta\vec{DC}, (1 - \xi)\vec{AD} + \xi\vec{BC})$$

Le jacobien est

$$\det J = \det((1 - \eta)\vec{AB} + \eta\vec{DC}, (1 - \xi)\vec{AD} + \xi\vec{BC})$$

$$\begin{aligned} \det J = & (1 - \eta)(1 - \xi) \det(\vec{AB}, \vec{AD}) + (1 - \eta)\xi \det(\vec{AB}, \vec{BC}) \\ & + \eta(1 - \xi) \det(\vec{DC}, \vec{AD}) + \eta\xi \det(\vec{DC}, \vec{BC}) \end{aligned}$$

On a donc

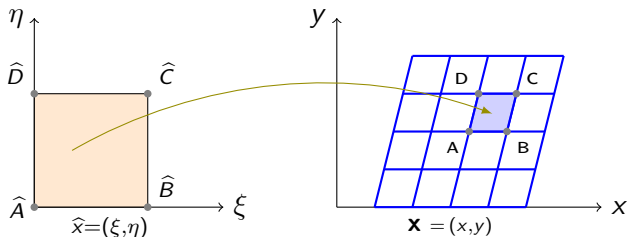
$$\det J = \det(\vec{AB}, \vec{AD}) + \xi \det(\vec{AB}, \vec{DC}) + \eta \det(\vec{BC}, \vec{AD})$$

Le tenseur symétrique  $(g_{ij})$  est

$$\begin{bmatrix} \|(1 - \eta)\vec{AB} + \eta\vec{DC}\|^2 & [(1 - \eta)\vec{AB} + \eta\vec{DC}] \cdot [(1 - \xi)\vec{AD} + \xi\vec{BC}] \\ [(1 - \eta)\vec{AB} + \eta\vec{DC}] \cdot [(1 - \xi)\vec{AD} + \xi\vec{BC}] & \|(1 - \xi)\vec{AD} + \xi\vec{BC}\|^2 \end{bmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \frac{1}{(\det J)^2} \begin{bmatrix} \|(1 - \xi)\vec{AD} + \xi\vec{BC}\|^2 & - [(1 - \eta)\vec{AB} + \eta\vec{DC}] \cdot [(1 - \xi)\vec{AD} + \xi\vec{BC}] \\ - [(1 - \eta)\vec{AB} + \eta\vec{DC}] \cdot [(1 - \xi)\vec{AD} + \xi\vec{BC}] & \|(1 - \eta)\vec{AB} + \eta\vec{DC}\|^2 \end{bmatrix}$$

# Cas particulier d'un élément fini parallélogramme



$$\det J = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{AB}\|^2 & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} & \|\overrightarrow{AD}\|^2 \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|^2} \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{AD}\|^2 & -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} & \|\overrightarrow{AB}\|^2 \end{pmatrix}$$

# Matrice élémentaire

- Matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  où

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int \int_{\widehat{K}} \nabla \widehat{\varphi}_i \cdot \nabla \widehat{\varphi}_j \, d\xi d\eta$$

où

$$\widehat{\varphi}_1 = \xi, \quad \widehat{\varphi}_2 = \eta, \quad \widehat{\varphi}_3 = 1 - \xi - \eta$$
$$\nabla \widehat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \widehat{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla \widehat{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Second membre  $B = (b_i)_{1 \leq i \leq 3}$  où

$$b_i = \ell(\varphi_i) = \int \int_{K_e} f \varphi_i \, dx dy = h^2 \int \int_{\widehat{K}} f \widehat{\varphi}_i \, d\xi d\eta$$

- Table de nœuds :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
i	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
j	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3

- Table de connectivité :

e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	17
0	0	5	1	6	2	7	4	9	5	10	6	11	8	...	15
1	5	0	6	1	7	2	9	4	10	5	11	6	13	...	10
2	4	1	5	2	6	3	8	5	9	6	10	7	12	...	11