La Méthode des Éléments Finis: TD3

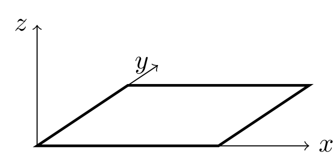
IBRAHIM ALAME

23/02/2024

Problème de Poisson en dim 2

Solution exacte

On considère une membrane carrée de coté $a = 1$ qui se déforme sous l'effet d'une charge surfacique $f(x, y)$. La membrane est sous tension et fixée sur les bords. On note $u(x, y)$ la déformée



La déformée u est solution du problème de Poisson avec conditions de Dirichlet homogènes posé sur le domaine $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \quad \text{bilan des forces} \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad \text{condition limite} \end{cases} \tag{1}$$

On admet que

1. La solution exacte analytique de l'équation de Poisson (1), est donnée, dans le cas d'un chargement uniforme $f = -1$, par la somme de la suite double :

$$u(x, y) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{\ell m} \sin((2\ell - 1)\pi x) \sin((2m - 1)\pi y)$$

avec $u_{\ell m} = \dfrac{-16}{((2\ell - 1)^2 + (2m - 1)^2)\pi^4(2\ell - 1)(2m - 1)}$

2. La flèche au point central de la membrane se calcule à l'aide de la somme :

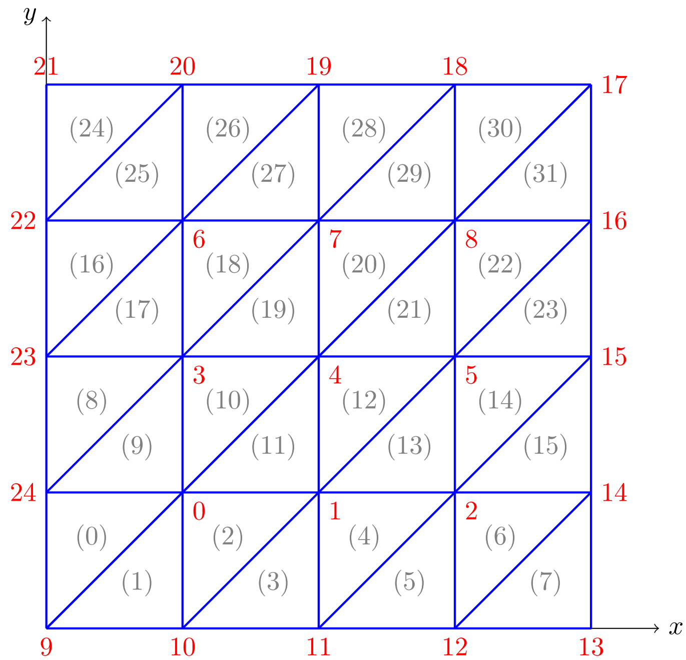
$$u_{max} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{\ell+1}(-1)^{m+1}}{((2\ell - 1)^2 + (2m - 1)^2)\pi^4(2\ell - 1)(2m - 1)}$$

On peut calculer une valeur approchée très précise de cette série avec Maple, et on trouve (pour $1 \le m, \ell \le 200$) :

$$U_{max} = -0.07367135123$$

Solution approchée par éléments finis P1-triangle

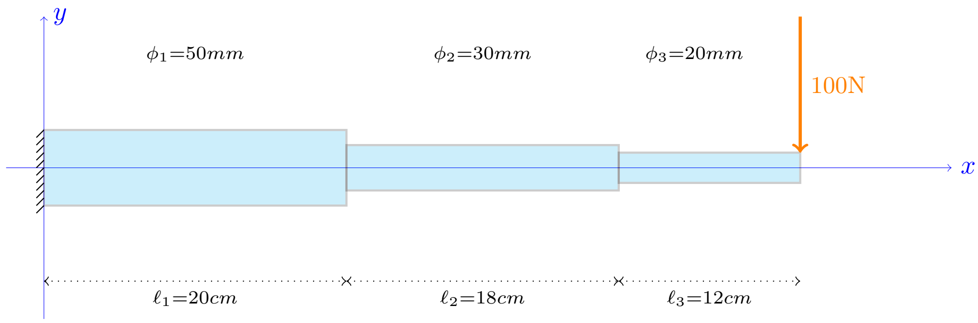
On considère le maillage suivant :



1. Rappeler la formulation variationnelle du problème. Quel est l'ordre de la matrice de rigidité A pour le maillage ci-dessus ?
2. Les 9 sommets intérieurs sont numérotés ligne par ligne de la gauche vers la droite en partant de la ligne du bas et en remontant jusqu'à la ligne du haut. Les 32 triangles du maillage sont numérotés de manière analogue. Toutes les mailles sont des triangles rectangles isocèles de côté $h = \frac{1}{4}$ et d'hypoténuse $\ell = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Calculer les coefficients de la matrice élémentaire de rigidité ?
3. Évaluer les coefficients de la matrice de rigidité.
4. On considère maintenant un maillage structuré plus fin de pas $h = \frac{1}{n+1}$ dans chaque direction spatiale ($n = 3$ dans l'exemple ci-dessus). Montrer que la matrice de rigidité a une structure bloc tridiagonale. Quel est le rapport entre le nombre de coefficients non-nuls et le nombre total de coefficients dans la matrice de rigidité (on retiendra le terme dominant en puissances de n).
5. Calculer le second membre et résoudre le système linéaire. Comparer la flèche du milieu avec la solution exacte.

Poutre à section variable en flexion

On considère la poutre à section variable suivante :



On fait un maillage à 3 éléments finis dont les sommets coïncident avec les points de discontinuité de la section transversale de façon que chaque élément fini possède une section constante.

1. Écrire les deux tables : Coordonnées de nœuds et table de connectivité. Préciser à la dernière ligne de la deuxième tables les sections des éléments.
2. On rappelle que la matrice élémentaire s'écrit :

$$\frac{EI}{L^3}\begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

   Écrire la matrice d'assemblage de la structure. *A faire en TP1 : L'algorithme d'assemblage est le suivant :*

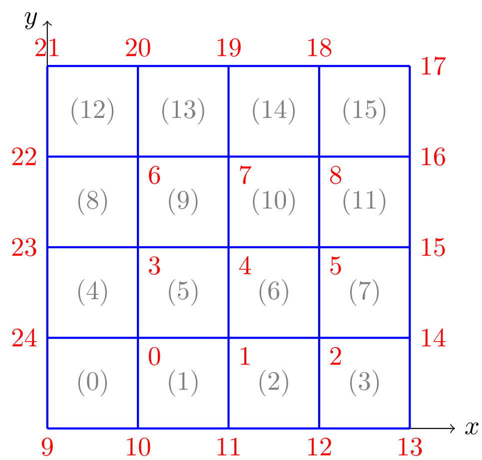
```
import numpy as np
N=3
E=2.E11
M=np.zeros((2*(N+1),2*(N+1)),dtype=float)
Sommets = [0,200,380,500]
Connectivite = [[0,1,50],[1,2,30],[2,3,20]]

for e in range(N):
    q,r,d = Connectivite[e]
    Iz=np.pi*d**4/16/4 * 1E-12
    x1 = Sommets[q]
    x2 = Sommets[r]
    L = (x2-x1)*1.E-2
    m = E*Iz/(L**3)*np.mat([[12,6*L,-12,6*L],[6*L,4*L**2,-6*L,2*L**2],
                            [-12,-6*L,12,-6*L],[6*L,2*L**2,-6*L,4*L**2]])
    ddl = [2*q,2*q+1,2*r,2*r+1]
    for i in range(4):
        I = ddl[i]
```

```
        for j in range(4):
            J = ddl[j]
            M[I,J] += m[i,j]
print(M)
```

3. Écrire le second membre.
4. *En TP1 uniquement :* Résoudre le système linéaire et déterminer le déplacement à l'extrémité de la poutre ($E = 210$ GPa).
5. Déterminer la réaction à l'encastrement en O.

Eléments finis parallélotopes

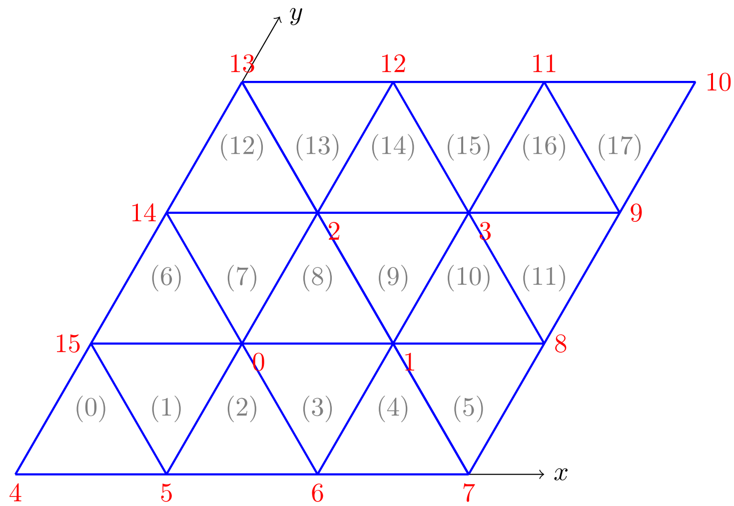
Soit le carré $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ et soit une partition en carrés égaux de coté $\frac{1}{n}$.



1. Calculer la matrice élémentaire d'assemblage associée au problème de Dirichlet et à l'élément fini *carré unité de type (1)*.
2. Calculer la matrice assemblée lorsque l'on numérote par lignes.

Éléments triangles équilatéraux

Soit Ω un losange d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$ et de coté 1 et soit une partition en triangles équilatéraux de coté $\frac{1}{n}$.



1. Calculer la matrice élémentaire d'assemblage associée au problème de Dirichlet et à l'élément fini *triangle de type (1)*.
2. Calculer la matrice assemblée lorsque l'on numérote par lignes.