TD 2 Analyse numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

19/02/2024

1 Méthodes d'Euler explicite, implicite et Runge-Kutta

Le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P})\left\{\begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0,1], \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

où $f(t, y) = 3t + y$.

1. (a) On a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - y_2|$, f est 1-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.
   (b) f est continue et 1-lipschitzienne par rapport à y, on peut appliquer le théorème de Cauchy Lipschitz : existence et unicité de la solution.
2. On calcule $y'(t) = 4e^t - 3$, on a bien $y'(t) = 3t + y(t)$. De plus $y(0) = 1$. y est bien solution de $(\mathcal{P})$, c'est l'unique solution d'après la question précédente.
3. On écrit $y_{n+1} = y_n + hf(t_n; y_n)$ avec y_n approchant $y(t_n)$ avec $t_n = nh$. On a :
   (a) $y_0 = 1$ (condition initiale)
   (b) $y_1 = y_0 + h(3t_0 + y_0) = 1.1$
   (c) $y_2 = y_1 + h(3t_1 + y_1) = 1.24$
4. On écrit $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}; y_{n+1})$ avec y_n approchant $y(t_n)$ avec $t_n = nh$. Ici on a donc $(1-h)y_{n+1} = y_n + 3(n+1)h^2$ et donc $y_{n+1} = \frac{y_n + 3(n+1)h^2}{1-h}$.
   On a :
   (a) $y_0 = 1$ (condition initiale)
   (b) $y_1 = 1.1444...$
   (c) $y_2 = 1.338...$
5. On pose $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$ avec $\hat{y}_n = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)$
   (a) On a $\hat{y}_0 = 1.05$ et donc $y_1 = 1.12$
   (b) On a $\hat{y}_1 = 1.191$ et $y_2 = 1.2841$
6. On a $y(0.2) = 1.2856...$ Les erreurs relatives sont de 0.03 avec Euler explicite, 0.04 avec Euler implicite, et 0.001 avec RK2.

2 Majoration de l'erreur

L'équation différentielle est $y' = -y$ considérée sur $[0; 10]$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

1. La solution est $y = e^{-t}$ et l'inégalité donc évidente.
2. $y_n = (1-h)^n$ après calcul...
3. Pour $h < 1$, l'inégalité est vérifié. Mais pour $h \geq 1$, on a $y_1 \leq 0$.
4. On doit majorer :

$$|y_n - y(t_n)| \leq |(1-h)^n - e^{-nh}| \leq n|1 - h - e^{-h}| \leq n\frac{h^2}{2} \leq 5h$$

   (On utilise les accroissements finis sur t_n, puis Taylor-Lagrange pour e^t et enfin $nh \leq Nh = 10$).
5. EI : $y_n = (1+h)^n$. Pas de condition sur h pour avoir les inégalités. Majoration similaire par un multiple de h...
   RK2 : $y_n = (1 - h + \frac{h^2}{2})^n$. Condition $h < 2$. Majoration par un multiple de h^2... (car $1 - h + \frac{h^2}{2}$ approche plus précisément e^{-h}).
   RK4 : $y_n = (1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})^n$. Inégalité valable au moins pour $h < 1$ (étude détaillée semble délicate). Erreur en h^4 - conforme à l'ordre attendu...

3 Erreur de la méthode d'Euler

1. Solution exacte : $y = e^{-t} + t - 1$.
2. Méthode d'Euler sur l'intervalle $[0, 1]$

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h(-y_k + t_k) \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

   où $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ et $t_k = a + kh = kh = \frac{k}{n}$ Donc

$$y_{k+1} = (1-h)y_k + kh^2$$

   On divise par $(1-h)^{k+1}$:

$$\frac{y_{k+1}}{(1-h)^{k+1}} = \frac{y_k}{(1-h)^k} + h^2\frac{k}{(1-h)^{k+1}}$$

   On somme entre 0 et $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{y_{k+1}}{(1-h)^{k+1}} - \frac{y_k}{(1-h)^k}\right] = h^2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{(1-h)^{k+1}}$$

$$\frac{y_n}{(1-h)^n} - \frac{y_0}{(1-h)^0} = h^2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{(1-h)^{k+1}}$$

$$\frac{y_n}{(1-h)^n} = \frac{h^2}{(1-h)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{(1-h)^{k-1}}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{x^{n-1}[(n-1)x-n]+1}{(1-x)^2}$

On applique cette dernière somme pour $x = \frac{1}{1-h} = \frac{n}{n-1}$ car $h = \frac{1}{n}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(1-h)^{k-1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}[(n-1)\frac{n}{n-1}-n]+1}{(1-\frac{n}{n-1})^2} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\times 0+1}{(1-\frac{n}{n-1})^2} = (n-1)^2$$

D'où

$$\frac{y_n}{(1-h)^n} = \frac{h^2}{(1-h)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{(1-h)^{k-1}} = \left(\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^2 (n-1)^2 = 1$$

$$y_n = (1-h)^n$$

D'où l'erreur en $t = 1$:

$$\varepsilon = y(1) - y_n = e^{-1} - (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1} - e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{-1} - e^{n(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{-1} - e^{-1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}$$

$$\varepsilon = e^{-1}\left(1 - e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}\right) = e^{-1}\left(1 - [1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})]\right)$$

$$\varepsilon = e^{-1}\left(\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right)$$

$$\varepsilon \sim \frac{1}{2en}$$

4 Équation différentielle du second ordre

L'équation différentielle du second ordre

$$y'' + ty' + (1-t)y = 2$$

considérée sur l'intervalle $I = [0;1]$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

1. On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

   On a $Y' = F(t, Y)$ avec

$$F(t,Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ 2 - ty_2 - (1-t)y_1 \end{pmatrix}$$

2. F est clairement continue. Étudions $\|F(t,Y) - F(t,Z)\|$ (on peut utiliser la norme 1) :

$$\begin{aligned} \|F(t,Y) - F(t,Z)\| &= \left\| \begin{pmatrix} y_2 - z_2 \\ -t(y_2 - z_2) - (1-t)(y_1 - z_1) \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq (1+t)|y_2 - z_2| + (1-t)|y_1 - z_1| \\ &\leq 2\|Y - Z\| \end{aligned}$$

   F est 2-lipschitzienne. Cauchy-Lipschitz, etc.

3. $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_n, Y_n)$

   (a) $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

(c) $Y_2 = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.398 \end{pmatrix}$

(d) $Y_3 = \begin{pmatrix} 0.0598 \\ 0.58844 \end{pmatrix}$

On trouve $y(0.3) \simeq 0.0598$ (remarque : calcul de la deuxième composante de Y_3 n'est pas nécessaire...).

4. La récurrence s'écrit $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_{n+1}, Y_{n+1})$. Notons $Y_n = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_{n+1} \\ z_{n+1} = z_n + h(2 - t_{n+1}z_{n+1} - (1 - t_{n+1})y_{n+1}) \end{cases}$$

Les composantes de Y_{n+1} s'obtiennent moyennant la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} y_{n+1} & -hz_{n+1} & = & y_n \\ h(1-t_{n+1})y_{n+1} & +(1+ht_{n+1})z_{n+1} & = & z_n + 2h \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -h \\ h(1-t_{n+1}) & (1+ht_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n + 2h \end{pmatrix}$$

(On pourrait poursuivre la résolution explicite ou utiliser un algorithme pour résoudre le système à chaque itération).

5 Équation différentielle non linéaire

Le problème de Cauchy est le suivant (avec $T > 0$) :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'(t) = \sin y(t) + \sin t, \quad \forall t \in [0, T] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. $f(t, y) = \sin y + \sin t$ est 1-lipschitzienne après calcul et f continue : on peut appliquer Cauchy-Lipschitz.
2. On a $|y'| \leq 2$ et comme $y''(t) = y'(t)\cos y(t) + \cos t$, on a $|y''| \leq 3$.
3. On applique le théorème de cours. On obtient une majoration par $\frac{3}{2}(e^T - 1)h$.
4. Avec $T = 1$, on a $h = 1/N$. On doit avoir $N > \frac{3}{2\times 10^{-3}}(e-1)$. Donc $N > 2577$.

   Avec $T = 10$, on a $h = 10/N$. On doit avoir $N > 10 \times \frac{3}{2\times 10^{-3}}(e^{10} - 1)$. Donc $N > 330381986$. (beaucoup !!!!, ceci dit, on peut espérer qu'en pratique on obtient un résultat acceptable pour un N inférieur...).

6 Méthode à un pas

On considère un problème de Cauchy $y' = f(t; y)$ avec $y(a) = \alpha$. La méthode de Heun est une méthode numérique à un pas où le calcul de y_{n+1} à partir de y_n est décrite par :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \overline{y}_n = y_n + hf(t_n; y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \overline{y}_n)\right) \end{cases}$$

1. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} y' = f(t;y) & \Longrightarrow & \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\mathrm{d}t = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t;y)\mathrm{d}t \\ & \Longrightarrow & y(t_{n+1}) - y(t_n) \simeq h\frac{f(t_n,y(t_n))+f(t_{n+1},y(t_{n+1}))}{2} \end{array}$$

$y(t_{n+1})$ au premier membre est approché par y_{n+1} tandis qu'au second membre il est approché par le schéma d'Euler explicite et noté $\overline{y}_n$. D'où la méthode.

2. Il s'agit d'une méthode à un pas avec

$$\Phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y))\right]$$

et on a $\Phi(t,y,0) = f(t,y)$. Donc méthode est consistante.

3. On montrer que (sachant que f es $L-$Lipschitzienne) :

$$|\Phi(t,y,h) - \Phi(t,z,h)| \leq (L + \frac{hL^2}{2})|y-z|$$

Donc cette méthode est stable.

7 Méthode de Heun

(Solution dans le cas où $\beta = 0$).

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n,y_n) + f(t_n+h, y_n + hf(t_n,y_n))\right] \\ y_0 \text{ donné} \end{array} \right.$$

1. On pose

$$\Phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y))\right]$$

On a $\Phi(t,y,0) = f(t,y)$ Donc la méthode est consistante. On rappelle

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial h} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}h}F'_x(x,y) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}h}F'_y(x,y)$$

$$\frac{\partial \Phi(t,y,h)}{\partial h} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}(t+h)}{\mathrm{d}h}\frac{\partial f(t+h,y+hf(t,y))}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}(y+hf(t,y))}{\mathrm{d}h}\frac{\partial f(t+h,y+hf(t,y))}{\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial \Phi(t,y,h)}{\partial h} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(t+h,y+hf(t,y))}{\partial t} + f(t,y) \times \frac{\partial f(t+h,y+hf(t,y))}{\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial \Phi(t,y,0)}{\partial h} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \times f(t,y)\right] = \frac{1}{2}f^{[2]}(t,y)$$

Donc la méthode est d'ordre 2.
où y_0 est une valeur donnée.

2. Nous avons $f(t,y) = -\alpha y + \beta$ et

$$\Phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y))\right]$$

$$\Phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\left[-\alpha y + \beta - \alpha(y + h(-\alpha y + \beta)) + \beta\right]$$

$\Phi(t,y,h) = (-\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 h)y + \beta - \frac{\alpha\beta h}{2}$. Φ est donc lipschitzienne par rapport à y car

$$|\Phi(t,y_1,h) - \Phi(t,y_2,h)| = |-\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 h| \times |y_1 - y_2|$$

donc la méthode est stable et convergente.

3. (ici on suppose $\beta = 0$)

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = \left(1 - \alpha h + \frac{1}{2}\alpha^2 h^2\right) y_n \text{ pour } n \geq 0 \\ y_0 \text{ donné} \end{cases}$$

La suite y_n est donc géométrique et on a

$$y_n = \left(1 - \alpha h + \frac{1}{2}\alpha^2 h^2\right)^n y_0$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ ssi } \left|1 - \alpha h + \frac{1}{2}\alpha^2 h^2\right| < 1$$

Une étude simple de la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ montre que

$$h < \frac{2}{\alpha}$$

8 Asymptotique, raideur

1. On trouve

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

2. (a) Schéma d'Euler :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h(b - ax_k) \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x_{k+1} = (1 - ah)x_k + bh \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Calculons le point fixe

$$x = (1 - ah)x + bh$$

$$x = b/a$$

On pose $X_k = x_k - x$:

$$X_{k+1} = (1 - ha)X_k \implies X_k = (1 - ha)^k (x_0 - b/a)$$

D'où

$$x_k = X_k + x = (1 - ha)^k (x_0 - b/a) + b/a$$

(b) On a

$$x_n = (1-ha)^n(x_0 - b/a) + b/a$$

Cette suite converge si $|1-ha| < 1$ soit $0 < h < \frac{2}{a}$.

(c) On a $h = \frac{1}{n}$, donc

$$x_n = (1 - \frac{ta}{n})^n(x_0 - b/a) + b/a$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e^{-ta}(x_0 - b/a) + b/a = x(t)$$

(d) On a

$$x(t) - x_n = (x_0 - \frac{b}{a})\left(e^{-at} - (1 - a\frac{t}{n})^n\right)$$

En faisant un développement limité :

$$x(t) - x_n = (x_0 - \frac{b}{a})\frac{a^2t^2e^{-at}}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

D'où l'estimation de l'erreur

$$|x(t) - x_n| \sim \frac{50a^2|x_0 - \frac{b}{a}|}{n}$$

9 Méthode d'Euler en dimension 2

1. Nous avons

$$x'(t) = -y(t) \Longrightarrow x''(t) = -y'(t) = -x(t) \Longrightarrow x''(t) + x(t) = 0$$

et

$$y'(t) = x(t) \Longrightarrow y''(t) = x'(t) = -y(t) \Longrightarrow y''(t) + y(t) = 0$$

Donc

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t + b\sin t \\ y(t) = c\cos t + d\sin t \end{cases}$$

$x' = -y \Longrightarrow d = a$ et $c = -b$ d'où

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t + b\sin t \\ y(t) = -b\cos t + a\sin t \end{cases}$$

La condition initiale $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$ nous donne les constantes $a = 1$ et $b = 0$ D'où

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

L'orbite de $X(t)$ est un cercle unité.

2. Le schéma d'Euler s'écrit

$$\begin{cases} X^{n+1} = X^n + hAX^n = (I_2 + hA)X^n \\ X^0 = (1,0)^t \end{cases}$$

3. Effectuons un DL de $X(t_n+h)$ à l'ordre 2 :

$$X(t_n+h) = X(t_n) + hX'(t_n) + \frac{h^2}{2}X''(t_n) + O(h^3)$$

Or $X' = AX$ et $X'' = AX' = A^2X = -X$ car $A^2 = -I_2$ d'où

$$X(t_n+h) = X(t_n) + hAX(t_n) - \frac{h^2}{2}X(t_n) + O(h^3)$$

Nous avons
$$\begin{cases} X^{k+1} = X^k + hAX^k \\ X(t_{k+1}) = X(t_k) + hAX(t_k) - \frac{h^2}{2}X(t_k) + O(h^3) \end{cases}$$

On fait la soustraction membre à membre :

$$X^{k+1} - X(t_{k+1}) = X^k - X(t_k) + hA\left(X^k - X(t_k)\right) + \frac{h^2}{2}X(t_k) + O(h^3)$$

D'où

$$E^{k+1} = E^k + hAE^k + \frac{h^2}{2}X(t_k) + O(h^3)$$

Passons aux normes :

$$\|E^{k+1}\| \leq \|E^k\| + h\|A\| \times \|E^k\| + \frac{h^2}{2}\|X(t_k)\| + K \times h^3$$

$\|A\|_2 = \rho(A) = 1$ et $\|X(t_k)\|_2 = \sqrt{\sin^2 t_k + \cos^2 t_k} = 1$ D'où

$$\|E^{k+1}\| \leq (1+hC_1)\|E^k\| + C_2h^2$$

avec $C_1 = 1$ et $C_2 = 1/2 + K$

Divisons les deux membres par $(1+hC_1)^{k+1}$:

$$\frac{\|E^{k+1}\|}{(1+hC_1)^{k+1}} - \frac{\|E^k\|}{(1+hC_1)^k} \leq \frac{C_2h^2}{(1+hC_1)^{k+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\|E^{k+1}\|}{(1+hC_1)^{k+1}} - \frac{\|E^k\|}{(1+hC_1)^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{N-1}\frac{C_2h^2}{(1+hC_1)^{k+1}}$$

La première somme est télescopique :

$$\frac{\|E^N\|}{(1+hC_1)^N} - \frac{\|E^0\|}{(1+hC_1)^0} \leq \sum_{k=0}^{N-1}\frac{C_2h^2}{(1+hC_1)^{k+1}} \leq NC_2h^2 = C_2T \times h$$

D'où

$$\|E^N\| \leq C_2T \times h(1+hC_1)^N \leq C_2Te^{C_1T}h$$

et $C = C_2Te^{C_1T}$ une fonction croissante de C.

4.
$$X^{n+1} = X^n + hAX^n = (I+hA)X^n$$

On pose $A_h = I + hA = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A_h sont les racines de $(1-\lambda)^2 + h^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \pm ih$. $|\lambda| = \sqrt{1+h^2}$

5.
$$\cos\theta A_h = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\cos\theta\tan\theta \\ \cos\theta\tan\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$\cos^n\theta A_h^n = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

soit
$$A_h^n = \frac{1}{\cos^n\theta}\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

Donc X^n se déduit de X^0 par une similitude d'angle $n\theta$ et de rapport $\frac{1}{\cos^n\theta}$.

10 Système différentiel d'ordre 2

Le système différentiel à deux inconnues $y(t)$ et $z(t)$ considéré sur un intervalle $[0;T]$ est le suivant
$$\begin{cases} y'' - ty' + 2z = t \\ y' + e^t y + 3z' + 2z = 4t^2 + 1 \end{cases}$$

(a) On est amené à poser
$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

On a $Y' = F(t, Y)$ avec
$$F(t,Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ t + ty_2 - 2y_3 \\ \frac{1}{3}(4t^2 + 1 - y_2 - e^t y_1 - 2y_3) \end{pmatrix}$$

(b) On vérifie l'hypothèse de Cauchy-Lipschitz... F est clairement continue. On étudie si F lipschitzienne (on utilise la norme 1) :
$$\begin{aligned} \|F(t,Y) - F(t,Z)\| &= \left\| \begin{pmatrix} y_2 - z_2 \\ -t(y_2 - z_2) - 2(y_3 - z_3) \\ \frac{1}{3}(-(y_2 - z_2) - e^t(y_1 - z_1) - 2(y_3 - z_3)) \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq |y_2 - z_2| + t|y_2 - z_2| + 2|y_3 - z_3| \\ &\quad + \frac{1}{3}(|y_2 - z_2| + e^t|y_1 - z_1| + 2|y_3 - z_3|) \\ &\leq \frac{e^T}{3}|y_1 - z_1| + (\frac{4}{3} + T)|y_2 - z_2| + \frac{8}{3}|y_3 - z_3| \end{aligned}$$

En posant, $\ell = \max(\frac{e^T}{3}, \frac{4}{3} + T, \frac{8}{3})$, on a bien
$$\|F(t,Y) - F(t,Z)\| \leq \ell\|Y - Z\|$$

(c) Pour le schéma implicite, noter que cela passera par la résolution d'un système linéaire que l'on pourrait expliciter...