MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES
Chap 2 - Equation d'advection

26 avril 2022

Autre modèle – Équation d'advection

On va étudier l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \\ u(x+1,t) = u(x,t) & \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,t=0) = u_0(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

où V est un réel non nul.

Remarque Cette équation, aussi appelée équation de transport, intervient par exemple dans l'étude du transport d'un polluant dans un courant d'un fluide.
V est alors à interpréter comme la vitesse du courant. Noter qu'on peut avoir $V > 0$ ou $V < 0$ en fonction du « sens » du courant.

Dans le cas de ce problème simple, l'expression de la solution est connue. La solution s'écrit

$$u(x,t) = u_0(x - Vt)$$

En effet, on aura $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u_0'(x - Vt)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -Vu_0'(x - Vt)$ et donc bien $\dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Remarque On a choisi ici des conditions aux limites de périodicité, mais on aurait pu envisager d'autres types de conditions aux limites. Il faudrait en tenir compte pour le traitement des équations aux bords de l'intervalle d'espace.

Discrétisation

Posons $h = \dfrac{1}{N}$ pour discrétiser l'intervalle d'espace.
On a donc $x_j = jh$ et en particulier : $x_0 = 0$, $x_N = 1$.
Et comme précédemment, on pose $t_n = n\tau$ avec τ le pas de temps.
Ainsi, on posera comme inconnue discrète à chaque pas de temps le vecteur

$$u^n = \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

La condition de périodicité se traduira par $u_N^n = u_0^n$. On considèra aussi $u_{N-1}^n = u_{-1}^n$.

Schéma explicite centré

Un schéma possible serait le schéma explicite centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (n \geq 0,\ 0 \leq j \leq N-1)$$

Ce schéma pourrait se formuler ainsi :

$$u_j^{n+1} = \frac{c}{2} u_{j-1}^n + u_j^n - \frac{c}{2} u_{j+1}^n \quad \text{avec} \quad c = \frac{V\tau}{h}$$

Et donc une formulation matricielle de la forme $u^{n+1} = Mu^n$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & 1 & -\frac{c}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{c}{2} & 1 & -\frac{c}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{c}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

en tenant de la condition de périodicité.

Propriétés du schéma explicite centré

Lemme – Schéma explicite centré

Le schéma explicite centré est consistant avec l'équation d'advection ci-dessus, précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace, mais inconditionnellement instable en norme L^2.

Preuve Par analyse de Fourier, on étudie la stabilité L^2.
L'étude de la condition de stabilité de Von Neumann donne :

$$\frac{A(\omega)-1}{\tau}+V\frac{e^{i\omega h}-e^{-i\omega h}}{2h}=0$$

D'où $A(\omega)=1-\frac{V\tau}{h}i\sin(\omega h)$ et donc
$|A(\omega)|>1$ sauf valeur spécifique de ω. Ce qui prouve l'instabilité.

Schéma implicite centré

La version implicite du précédent schéma est le schéma implicite centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0 \quad (n \geq 0,\ 1 \leq j \leq N-1).$$

Lemme – Schéma implicite centré

Le schéma implicite centré est consistant avec l'équation d'advection, précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace, inconditionnellement stable en norme L^2, donc convergent.

Schéma de Lax-Friedrichs

Si l'on tient absolument à rester explicite et centré, le schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\tau} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (n \geq 0,\ 1 \leq j \leq N-1)$$

est un schéma simple, robuste, mais pas très précis.

Lemme – Schéma de Lax-Friedrichs

Le schéma de Lax-Friedrichs est stable en norme L^2 sous la condition CFL $|V|\tau \leq h$.
Si le rapport τ/h est gardé constant lorsque τ et h tendent vers zéro, il est consistant d'ordre 1 en espace et temps. Par conséquent, il est conditionnellement convergent.

Regardons de plus près la consistance de ce schéma.
Plaçons-nous en $(x, t) = (x_j, t_n)$.
On a $u(x, t+\tau) = u(x, t) + \tau \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\tau^2}{2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau^2)$.

$$u(x-h, t) = u(x, t) - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h^2)$$

$$u(x+h, t) = u(x, t) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h^2)$$

Donc

$$\frac{2u(x, t+\tau) - u(x-h, t) - u(x+h, t)}{2\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(\tau + \frac{h^2}{\tau})$$

Par ailleurs

$$\frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x} + o(h)$$

L'erreur de troncature est donc :

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o\left(\tau + \frac{h^2}{\tau} + h\right)$$

En général, l'erreur de troncature ne tend pas vers 0 puisque le quotient $\dfrac{h^2}{\tau}$ n'a pas de limite lorsque $h \to 0$ et $\tau \to 0$.
Ce schéma n'est donc pas à proprement parler consistant.

En faisant l'hypothèse que τ/h est constant : $\tau = kh$ avec $k > 0$ fixé, on arrive à une erreur de troncature :

$$\frac{kh}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h}{2k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h)$$

Qui tend bien vers 0 pour $h \to 0$ et qui est d'ordre 1. (Noter qu'ici les deux pas sont liés).

Schéma de Lax-Wendroff

Un schéma centré explicite plus précis est le schéma de Lax-Wendroff :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{V^2\tau}{2}\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} = 0.$$

Sa construction à partir de l'EDP n'étant pas directe, nous la présentons en détail :

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \tau\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o\left(\tau^2\right).$$

On utilise l'EDP pour remplacer les dérivées en temps par des dérivées en espace.
En effet $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -V\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-V\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -V\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) - V\tau\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{(V\tau)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o\left(\tau^2\right).$$

Enfin, on remplace les dérivées en espace par des formules centrées d'ordre 2 :

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) - V\tau \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2h}$$

$$+\frac{(V\tau)^2}{2} \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{h^2} + o\left(\tau^2 + h^2\right).$$

Ce qui motive le schéma de Lax-Wendroff.
Une analyse plus fine de l'erreur de troncature permettrait de justifier que ce schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

Lemme – Schéma de Lax-Wendroff

Le schéma de Lax-Wendroff est stable et convergent en norme L^2 si $|V|\tau \leq h$.

Schémas décentrés

Les schémas présentés jusque là pour l'équation d'advection étaient tous centrés. Autrement dit les schémas s'appuyaient pour la dérivée en espace sur deux nœuds placés symétriquement autour de x_j : x_{j-1} et x_{j+1}.

D'autres schémas sont dits décentrés.

Par exemple on pourrait considérer le schéma suivant, dit explicite décentré à droite :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

Etudions sa stabilité à l'aide de la condition de stabilité de Von Neumann.

On a

$$\frac{A(\omega)-1}{\tau}+V\frac{e^{i\omega h}-1}{h}=0$$

D'où on tire $A(\omega)=1+\frac{V\tau}{h}-\frac{V\tau}{h}e^{i\omega h}$.

Si $V>0$, on aura lorsque $\omega h=\pi$, $A(\omega)=1+2\frac{V\tau}{h}>1$. Le schéma n'est pas stable, quelque soit le choix des pas.

Supposons $V < 0$. On a :
$|A(\omega)| \leq \left|1 + \frac{V\tau}{h}\right| + \left|\frac{V\tau}{h}\right|$.

- Si $-1 \leq \frac{V\tau}{h} \leq 0$, on pourra donc écrire $|A(\omega)| \leq 1 + \frac{V\tau}{h} - \frac{V\tau}{h} = 1$, et donc le schéma est stable.
- Si en revanche $\frac{V\tau}{h} < -1$, on remarque lorsque $\omega h = \pi$, qu'on a $A(\omega) = 1 + 2\frac{V\tau}{h} < -1$ et donc le schéma est instable.

Lorsque $V < 0$, le schéma est donc stable sous la condition CFL $|V|\tau \leq h$.

V est dans l'équation d'advection à interpréter comme une vitesse.

Si $V > 0$, ce schéma décentré à droite est dit décentré aval et est instable.

Si $V < 0$, ce schéma décentré à droite est dit décentré amont et est conditionnellement stable.

Dans le cas où $V > 0$, le schéma explicite décentré amont (décentrement à gauche si $V > 0$ - *upwinding* en anglais) est le suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \quad \text{si } V > 0.$$

Lemme – Schéma explicite décentré amont

Le schéma explicite décentré amont (dont l'expression dépend du signe de V) est consistant avec l'équation d'advection, précis à l'ordre 1 en temps et espace, stable et convergent en norme L^∞ et L^2 sous la condition CFL $|V|\tau \leq h$.