TECE Projet 4: Limites et les développements limités

Ibrahim ALAME

19/10/2023

Exercice 1

A l'aide des accroissements finis, majorer l'erreur faites en prenant 100 comme valeur approchée de $\sqrt{10001}$.

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\sqrt{x}$ entre 10000 et 10001 donne

$$|\sqrt{10001}-\sqrt{10000}| \leq \max_{10000\leq x\leq 10001} \frac{1}{2\sqrt{x}} \times |10001-10000| = \frac{1}{200}$$

Donc on fait une erreur inférieur à $\frac{1}{200}$ en assimilant $\sqrt{10001}$ à 100.

Exercice 2

1. Montrer que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$

   On utilise la formule

   $$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}. \quad \text{Si } x.y<1$$

   - $\arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{5} = \arctan\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \arctan\dfrac{5}{12} \quad$ car $\dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{5} < 1$
   - $4\arctan\dfrac{1}{5} = 2\arctan\dfrac{5}{12} = \arctan\dfrac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \arctan\dfrac{120}{119}$. D'où

   $$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\times 239}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

2. Calculer la somme géométrique : $1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}$ où x est un réel tel que $|x|<1$. En déduire que

   $$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

   Écrivons la somme de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-x^2$:

   $$1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n} = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

$$1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}-(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

D'où la formule.

3. Montrer alors que

$$\forall x\in]-1,1[,\qquad \arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

Il suffit d'intégrer terme à terme l'égalité de la question précédente.

4. On pose $R_n(x)=\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $R_n(x)\leq\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$ pour $x\geq 0$.

$$|R_n(x)|=\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\leq\int_0^x t^{2n+2}\mathrm{d}t\leq\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

5. Calculer $\arctan\frac{1}{5}$ et $\arctan\frac{1}{239}$ à 10^{-9} près. En déduire une valeur approchée de π à 10^{-8} près.

Pour calculer $\arctan\frac{1}{5}$ à 10^{-9} près, il faut que $\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+3}}{2n+3}<10^{-9}$ soit $n\geq 5$. Pour $\arctan\frac{1}{239}$ il faut que $n\geq 1$. Par conséquent, on a :

- $\arctan\frac{1}{5}=\frac{1}{5}-\frac{(0.2)^3}{3}+\frac{(0.2)^5}{5}-\frac{(0.2)^7}{7}+\frac{(0.2)^9}{9}-\frac{(0.2)^{11}}{11}=0.197395560$
- $\arctan\frac{1}{239}=\frac{1}{239}-\frac{\left(\frac{1}{239}\right)^3}{3}=0.004184076$

On en déduit alors que $\pi=3.14159264$ à 10^{-8} près.

Exercice 3

1. Déterminer la limite, quand $x\to 0$ de :

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left[\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}+1\right]$$

On divise par x^4 donc on fait un DL à l'ordre 4 :

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4),\qquad \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{x^2}\left(-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)+1\right]=\frac{1}{x^2}\left[-1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+1\right]=-\frac{1}{2}+o(1)$$

On a donc $f(x)\to-\frac{1}{2}$ quand $x\to 0$.

2. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de :

$$g(x)=\exp\left[\frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2}\right]$$

On divise par x^2 donc on effectue un DL à l'ordre 4. On pose $u = 2x^2 \to 0$ quand $x \to 0$:

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2), \qquad \sqrt{1+2x^2} = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

$$\frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$g(x) = \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = e \times \exp\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = e \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

Problème

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Le but de cette première question est de montrer la formule de Taylor avec reste intégral qui assure que toute fonction qui admet une dérivée d'ordre $n+1$ continue satisfait

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + h^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\mathrm{d}\theta$$

avec a et $a+h$ des éléments de I.

(a) Montrer que la formule est vraie pour $n = 0$.

$$f(a+h) = f(a) + h\int_0^1 f'(a+\theta h)\mathrm{d}\theta = f(a) + [f(a+\theta h)]_0^1 = f(a) + [f(a+h) - f(a)]$$

(b) Soit f une fonction qui admet une dérivée d'ordre $n+2$ continue. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!}(1-\theta)^n\mathrm{d}\theta = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + h\int_0^1 \frac{f^{(n+2)}(a+\theta h)}{(n+1)!}(1-\theta)^{n+1}\mathrm{d}\theta$$

Intégration par parties

(c) En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence la formule de Taylor avec reste intégral.

Par récurrence en se servant de l'égalité de 1.b

(d) On suppose qu'il existe M_{n+1} tel que $\forall x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$. Alors on a (la formule de Taylor Lagrange) :

$$\forall x \in I, \forall a \in I \qquad \left|f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$$

On a

$$\begin{aligned}\left|f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| &= |h|^{n+1}\left|\int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leq |h|^{n+1}\left|\int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!}\mathrm{d}\theta\right| M_{n+1} \\ &\leq |h|^{n+1}\left[-\frac{(1-\theta)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 M_{n+1} = |h|^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}M_{n+1}\end{aligned}$$

2. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral pour $a = 0$ et $h = x$; on l'appelle alors formule de Mac-Laurin :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)\mathrm{d}\theta$$

   (a) Appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction sin et montrer que pour $x \geq 0$ et pour tout entier n, il existe un polynôme $P_n(x)$ que l'on déterminera, tel que :

$$|\sin x - P_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

   Nous avons

$$\left|\sin x - \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)}_{P_n(x)}\right| \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

   (b) Comment faut-il choisir n pour que cette dernière inégalité donne $\sin\frac{1}{4}$ à 10^{-7} près ? Calculer alors une valeur approchée à 7 décimales de $\sin\frac{1}{4}$. Pour $n = 2$ et $x = \frac{1}{4}$:

$$\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{1}{4^7 7!} \leq 10^{-7}$$

   Donc

$$\sin\frac{1}{4} \simeq 0.25 - \frac{(0.25)^3}{3!} + \frac{(0.25)^5}{5!} = 0.2474039$$