TD 4 Analyse numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

22/3/2024

1 Méthode des différences finies

On considère, pour une équation différentielle du second ordre, le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + cu(x) = f(x) \quad \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où c est une constante positive, $f(x)$ une fonction continue. Cette équation modélise de nombreux problèmes de statique, par exemple la diffusion de la chaleur dans une barre.

En général les solutions d'une équation différentielle ne sont pas exprimables à l'aide des fonctions usuelles, on en calcule seulement des approximations en un nombre fini de points, d'où le nom de discrétisation donné à ces approximations. On divise l'intervalle $[0;1]$ selon un pas $h = \frac{1}{N+1}$. On appelle nœuds les points de coordonnées $x_i = ih$ où $0 \leq i \leq N+1$. L'objectif est de calculer une approximation u_i des valeurs de la solution du problème aux points x_i. Il y a donc N valeurs à calculer $u(x_i)$; $1 \leq i \leq N$.

1. La solution u étant de classe C^4, en faisant un développement de Taylor à l'ordre 4 de u, montrer que l'approximation

$$u''(x) \simeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

est d'ordre 2.

2. En déduire que la suite $(u(x_i))$ pour $1 \leq i \leq N$ peut être approchée par une suite (u_i) vérifiant la relation de récurrence :

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + c\,u_i = f_i \quad 1 \leq i \leq N \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

où $f_i = f(x_i)$.

3. On pose $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$. Montrer que le problème approché se ramène à une résolution d'un système linéaire $AU = b$ où A est une matrice tridiagonale que l'on déterminera.

4. Montrer que A est une matrice symétrique définie positive.

2 Problème aux limites d'ordre 4

On considère, pour une équation différentielle du second ordre, le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{d^4u(x)}{dx^4} = f(x) \quad \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

où $f(x)$ une fonction continue. Cette équation modélise de nombreux problèmes de statique, par exemple une poutre en flexion simple.

1. On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en $N+3$ points d'abscisses $x_i = ih$ où $0 \le i \le N+2$ et $h = \frac{1}{N+2}$. L'objectif est de calculer une approximation u_i des valeurs de la solution du problème aux points x_i. Montrer qu'il y a $N-1$ valeurs à calculer $u(x_i)$; $2 \le i \le N$.
2. On définit l'opérateur linéaire T_h par $T_h f(x) = f(x+h)$ et on approche alors la dérivée par l'opérateur Δ :
$$\Delta = \frac{T_{\frac{h}{2}} - T_{-\frac{h}{2}}}{h}$$
Justifier rapidement l'approximation $\Delta u \simeq u'$ et calculer Δ^4. En déduire une approximation de $\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}(x_i)$.Montrer que cette dernière approximation est d'ordre 2.
3. En déduire que la suite $(u(x_i))$ pour $1 \le i \le N$ peut être approchée par une suite (u_i) vérifiant la relation de récurrence :
$$\begin{cases} \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{h^4} = f_i \quad 2 \le i \le N \\ u_0 = u_{N+2} = 0 \\ u_1 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$
où $f_i = f(x_i)$.
4. On pose $U = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$. Montrer que le problème approché se ramène à une résolution d'un système linéaire $AU = b$ où A est une matrice pentadiagonale que l'on déterminera.

3 Équation de la chaleur

On considère l'équation aux dérivées partielles de la chaleur en dimension 1 suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \forall (x,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^* \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en $N+2$ points d'abscisses $x_i = ih$ où $0 \le i \le N+1$ avec $h = \frac{1}{N+1}$ et soit τ le pas de temps. On note u_i^n la valeur approchée de $u(x_i, t_n)$ avec $t_n = n\tau$ et on considère le schéma dit d'Euler implicite qui est le suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \nu \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

1. Montrer que ce schéma est précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.
2. On pose $u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$. Montrer que le schéma se traduit sous la forme matricielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Mu^{n+1} = u^n$$

3. Expliquer rapidement comment on programmerait l'algorithme.
4. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Montrer que si λ est valeur propre de A alors $0 < \lambda < 4$. En déduire que le rayon spectral de M^{-1} vérifie $\rho(M^{-1}) \leq 1$.
5. On dit que le schéma est stable ssi pour tout entier n, $\|u^n\| \leq \|u^0\|$. Montrer que

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\|$$

   En déduire que le schéma est stable.

4 Problème de Dirichlet

1. En dimension deux, soit le domaine $D = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$, on désigne par ∂D le bord de D. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } D \\ u = 0 \text{ sur } \partial D \end{cases}$$

   La discrétisation par différences finies sur un quadrillage uniforme de pas $\delta x = \frac{a}{N+1}$ et $\delta y = \frac{b}{M+1}$ est :

$$\begin{aligned} &\frac{-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}}{\delta x^2} + \frac{-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1}}{\delta y^2} = f_{i,j}; \qquad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M \\ &u_{i,0} = u_{i,M+1} = u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

2. On note $u_{i,j} = u_m$ avec $m = i + (j-1)N$. Soit le vecteur $U = (u_m)$ Pour $N = M = 3$, écrire le système sous la forme $AU = F$. Montrer A est inversible et définie positive.
3. Vérifier que les vecteurs propres de la matrice sont les vecteurs $u(p, q)$ définis par

$$(u(p,q))_{i,j} = \sin\left(p\pi\frac{i\delta x}{a}\right)\sin\left(q\pi\frac{j\delta y}{b}\right)$$

   Les valeurs propres associées sont

$$\lambda_{p,q} = \frac{4}{\delta x^2}\sin^2\left(p\pi\frac{\delta x}{2a}\right) + \frac{4}{\delta y^2}\sin^2\left(q\pi\frac{\delta y}{2b}\right)$$

4. Pour N et M assez grands, calculer une valeur approchée de $\mathrm{Cond}_2 A$.
5. On suppose $M = N$, et $a = b$ calculer un équivalent de $\mathrm{Cond}_2 A$ quant $N \to \infty$.

5 Problème de Dirichlet

1. En dimension deux, soit le domaine $D = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$, on désigne par ∂D le bord de D. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } D \\ u = 0 \text{ sur } \partial D \end{cases}$$

La discrétisation par différences finies sur un quadrillage uniforme de pas $\delta x = \frac{a}{N+1}$ et $\delta y = \frac{b}{M+1}$ est :

$$\begin{array}{l} \dfrac{-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}}{\delta x^2} + \dfrac{-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1}}{\delta y^2} + u_{i,j} = f_{i,j}; \qquad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M \\ u_{i,0} = u_{i,M+1} = u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0. \end{array} \tag{2}$$

2. On note $u_{i,j} = u_m$ avec $m = i + (j-1)N$. Soit le vecteur $U = (u_m)$ Pour $N = M = 4$, écrire le système sous la forme $AU = F$. Montrer A est inversible et définie positive.
3. Vérifier que les vecteurs propres de la matrice sont les vecteurs $u(p, q)$ définis par

$$(u(p,q))_{i,j} = \sin\left(p\pi \frac{i\delta x}{a}\right) \sin\left(q\pi \frac{j\delta y}{b}\right)$$

Déterminer les valeurs propres associées.
4. Pour N et M assez grands, calculer une valeur approchée de $\mathrm{Cond}_2 A$.
5. On suppose $M = N$, et $a = b$ calculer un équivalent de $\mathrm{Cond}_2 A$ quant $N \to \infty$.
6. Donner la matrice A associée au graphe suivant :