

Esiee-Paris - cours d'algorithmique - Feuille d'exercices numéro 3

R. Natowicz, I. Alame, A. Çela, X. Hilaire, T. Wu, W. Xu

Exercice 7. Juliette: répartition optimale de son temps de travail. Les n examens de contrôle de fin de semestre auront lieu dans quelques semaines. Juliette, étudiante à l'ESIEE, dispose de H heures pour réviser ces n unités. Elle veut une répartition optimale des H heures sur les n contrôles, c'est-à-dire une répartition qui maximise la somme des notes qu'elle espère obtenir, pondérées par les coefficients des unités. Combien d'heures de révision de chaque unité pour obtenir une somme pondérée maximum?

L'unité i , $0 \leq i < n$, a le coefficient c_i . Pour chaque unité i Juliette a estimé la note $e(i, h)$ qu'elle obtiendra si elle consacre h heures de révision, $0 \leq h < H + 1$, à cette unité.

1. Juliette a suivi le cours d'algorithmique de 2e année. Elle voit qu'il s'agit d'une variante d'un problème qu'elle connaît. Lequel?

Juliette suppose le problème résolu. Elle appelle $m(n, H)$ la somme pondérée des notes aux contrôles des n premières unités, pour une répartition optimale de H heures de révision sur ces n premières unités. Cette somme pondérée $m(n, H)$ est le maximum qu'elle puisse obtenir.

2. Donner l'expression de la somme pondérée $m(n, H)$.
3. Généralisation: donner l'équation de récurrence des valeurs $m(k, t)$, somme pondérée des notes aux contrôles des k premières unités, pour une répartition optimale de t heures de révision sur ces k premières unités.

Les coefficients des unités sont dans un tableau $C[0 : n]$ de terme général $C[i] = c_i$. Les notes estimées par Juliette sont dans un tableau $E[0 : n][0 : H + 1]$ de terme général $E[i][t] = e(i, t)$.

4. Écrire une fonction `int [][] calculerMA(int [] E, int [] C)` qui calcule un tableau $M[0 : n+1][0 : H+1]$ de terme général $M[k][t] = m(k, t)$ et un tableau $A[0 : n+1][0 : H+1]$ de terme général $A[k][t] = a(k, t) = \arg m(k, t)$. La valeur $a(k, t)$ est le nombre d'heures de révision allouées à la k -ème unité dans une répartition optimale de t heures sur le sous-ensemble $[0 : k]$ des k premières unités.
Les tableaux M et A sont retournés par les instructions `int [][] MA = {M, A}; return MA;` ou si l'on préfère par l'instruction `return new int [][] {M, A};`
5. Écrire une fonction `void aro(int [] A, int [][] E, int [] C, int k, int t)` qui affiche une répartition optimale de t heures de révision sur le sous-ensemble des k premières unités. L'affichage d'une répartition optimale des H heures sur les n unités est obtenue par l'appel principal `aro(A, E, C, n, H)`.

Exemple de compilation et exécution:

```
% javac Juliette.java
% java Juliette

3 unités, 10 heures de révision
Coefficients des unités : [4, 3, 4]
Tableau E des notes estimées :
unité 2 : [8, 12, 14, 14, 16, 18, 18, 18, 18, 20, 20]
unité 1 : [16, 16, 18, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20]
unité 0 : [8, 10, 10, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 16, 16]

Tableau M de terme général m(k,t) :
k=3 : [112, 128, 136, 144, 144, 152, 160, 160, 168, 172, 174]
k=2 : [80, 88, 88, 96, 100, 102, 108, 108, 108, 112, 112]
k=1 : [32, 40, 40, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 64, 64]
k=0 : [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

Tableau A de terme général a(k,t) = arg m(k,t) :
k=3 : [0, 1, 1, 2, 1, 2, 5, 4, 5, 5, 5]
k=2 : [0, 0, 0, 0, 3, 2, 3, 3, 3, 0, 0]
k=1 : [0, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 9, 9]
k=0 : [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

Valeur maximum m(3,10) = 174
Moyenne : 174/11 = 15,82

Une répartition optimale du temps de révision :
C[0] * e(0,3) = 4 * 12 = 48
C[1] * e(1,2) = 3 * 18 = 54
C[2] * e(2,5) = 4 * 18 = 72

%
```

Juliette voit que $M[3][0] = 112$, soit une moyenne de $112/11 = 10.18$. Cette moyenne est très proche de 10. Elle pense qu'il serait risqué de ne réviser aucune des unités. Mais elle voit aussi que $M[0][6] = 160$, soit une moyenne de 14.54. « Six heures de révision pour une moyenne de 14.54? Ça me va. Pourquoi y passer 10 heures? »

Une répartition optimale de 6 heures de révision:

```
C[0] * e(0,1) = 4 * 10 = 40
C[1] * e(1,0) = 3 * 16 = 48
C[2] * e(2,5) = 4 * 18 = 72
```