La Méthode des Éléments Finis: corrigé du TD2

Ibrahim ALAME

05/10/2021

Problème de Poisson en dim 2

Solution exacte

Nous avons le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \quad \text{bilan des forces} \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad \text{condition limite} \end{cases} \tag{1}$$

1. Pour déterminer la solution générale de l'équation de Poisson, on décompose $u(x,y)$ en série de Fourier vérifiant les conditions aux limites :

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} u_{kp} \sin(k\pi x)\sin(p\pi y)$$

En remplaçant dans (1), on obtiens :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}(k^2+p^2)\pi^2 U_{kp} \sin(k\pi x)\sin(p\pi y) = F(x,y)$$

d'où les valeurs de u_{kp} , en multipliant cette relation par $\sin(k\pi x)\sin(p\pi x)$. En intégrant sur le domaine Ω et en utilisant l'orthogonalité des fonctions $\sin(k\pi x)$, il vient :

$$u_{kp} = \frac{4}{(k^2+p^2)\pi^2} \iint_{[0,1]^2} f(x,y)\sin(k\pi x)\sin(p\pi y)\,dxdy$$

Dans le cas d'un chargement constant $f = -1$, la valeur du coefficient de Fourier u_{kp} se calcule simplement avec Maple et on trouve :

$$u_{kp} = \frac{-4}{(k^2+p^2)\pi^4 kp}\left(1-(-1)^k\right)\left(1-(-1)^p\right)$$

Ce coefficient est non nul si et seulement si k et p sont tous les deux impaires. La solution exacte s'écrit donc :

$$u(x,y) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{lm} \sin((2l-1)\pi x)\sin((2m-1)\pi y)$$

avec

$$u_{lm} = \frac{-16}{((2l-1)^2 + (2m-1)^2)\pi^4(2l-1)(2m-1)}$$

La valeur maximale u_{max} de la déformation se trouve au centre et a pour expression :

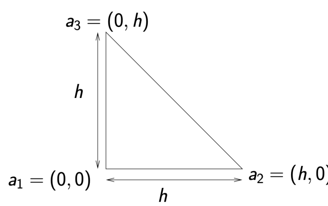
$$u_{max} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{l+1}(-1)^{m+1}}{((2l-1)^2 + (2m-1)^2)\pi^4(2l-1)(2m-1)}$$

On peut calculer une valeur approchée très précise de cette série avec Maple, et on trouve (pour $m = l = 200$) :

$$u_{max} = -0.07367135123$$

Solution approchée par éléments finis P1-triangle

On rappelle les coordonnées barycentriques dans un triangle rectangle isocèle de côté h.



On a

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = 1 - \frac{x+y}{h} \quad \lambda_2(\mathbf{x}) = \frac{x}{h} \quad \lambda_3(\mathbf{x}) = \frac{y}{h}$$

et

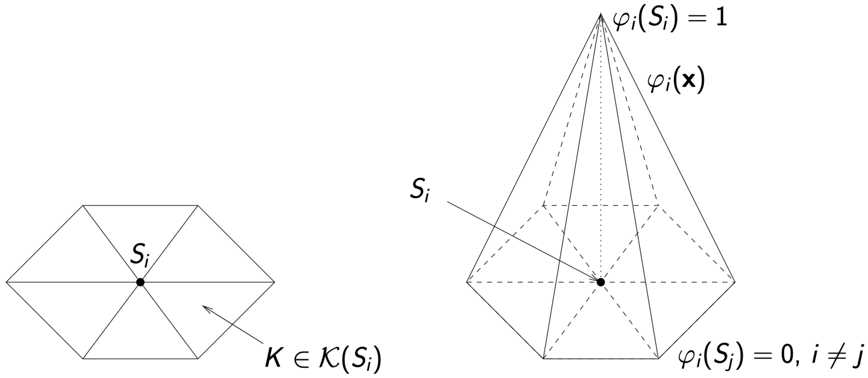
$$\nabla\lambda_1 = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla\lambda_2 = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla\lambda_3 = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On définit les fonctions chapeau φ_i pour un élément fini triangle de type (1) par :

Soit S_i un sommet intérieur du maillage, $\forall i \in \{1...N_{so}^{int}\}$

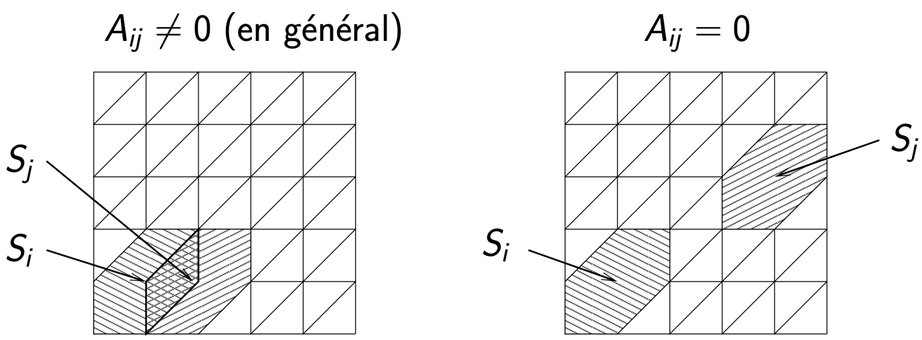
- $\mathscr{K}(S_i)$ est l'ensemble des mailles ayant S_i pour sommet
- λ_{K,S_i} est la coordonnée barycentrique de K associée au sommet S_i.

$$\varphi_i = \begin{cases} \lambda_{K,S_i} & \text{si } \mathbf{x} \in K \text{ pour } K \in \mathscr{K}(S_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



1. Le terme générique de la matrice de rigidité est $A_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$ où φ_i est la fonction chapeau associée au sommet intérieur de numéro i. La matrice de rigidité est d'ordre $N_{so}^{int} = 9$. Une observation essentielle est que

$$(A_{ij} \neq 0) \Longrightarrow (S_i \text{ et } S_j \text{ sont des sommets d'un même triangle})$$



2. En considérant l'intersection des supports des fonctions chapeau, on obtient la disposition suivante des coefficients a priori non-nuls (indiqués par le symbole $\bullet$) :

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 \\
0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 \\
\bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\
0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet \\
\hline
0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 \\
0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\
0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet
\end{array}\right]$$

3. Pour des raisons de symétrie et d'invariance par translation, il vient

$$A = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} a & b & 0 & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline c & 0 & 0 & a & b & 0 & c & d & 0 \\ d & c & 0 & b & a & b & 0 & c & d \\ 0 & d & c & 0 & b & a & 0 & 0 & c \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & c & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & c & 0 & b & a \end{array}\right]$$

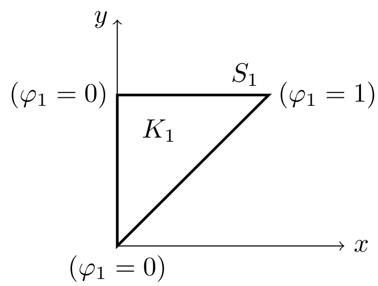
Il nous reste à déterminer les coefficients réels a, b, c et d donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a &= \int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2, \\ b &= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2, \\ c &= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_4, \\ d &= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_5. \end{aligned}$$

On découpe les intégrales sur Ω en une somme d'intégrales sur les mailles et on ne conserve que les mailles intersectant le support des fonctions chapeau à intégrer. Il vient

$$\begin{aligned} a &= \int_{K_1} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_2} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_3} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_{10}} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_{11}} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_{12}} |\nabla\varphi_1|^2 \\ b &= \int_{K_3} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 + \int_{K_{12}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \\ c &= \int_{K_{10}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_4 + \int_{K_{11}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_4 \\ d &= \int_{K_{11}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_5 + \int_{K_{12}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_5 \end{aligned}$$

Considérons le coefficient a. La fonction φ_1 est affine son gradient $\nabla\varphi_1$ est donc constant, on peut alors le calculer comme taux d'accroissement en choisissant deux points dans K_1.

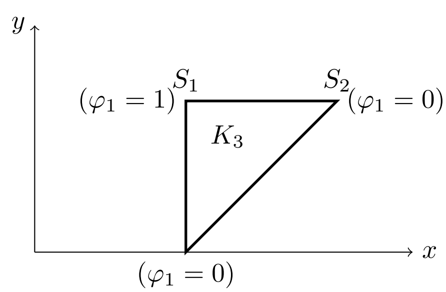


Sa composante horizontale est $\frac{1-0}{h} = \frac{1}{h}$. Sa composante verticale est $\frac{0-0}{h}$. Donc

$$\nabla\varphi_1|_{K_1} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et comme K_1 est de mesure égale à $\frac{h^2}{2}$, il vient

$$\int_{K_1} |\nabla\varphi_1|^2 = \frac{h^2}{2}\frac{1}{h^2} = \frac{1}{2}$$



De même,

$$\nabla\varphi_1|_{K_3} = \begin{pmatrix} \frac{0-1}{h} \\ \frac{1-0}{h} \end{pmatrix} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si bien que

$$\int_{K_3} |\nabla\varphi_1|^2 = \frac{h^2}{2}\frac{2}{h^2} = 1$$

Enfin, pour des raisons de symétrie,

$$\int_{K_1} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_2} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{11}} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{12}} |\nabla\varphi_1|^2$$

et

$$\int_{K_3} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{10}} |\nabla\varphi_1|^2$$

En rassemblant les contributions ci-dessus, on obtient

$$a = 4.$$

Calcul de b :

Par symétrie $\nabla\varphi_2|_{K_3} = \nabla\varphi_1|_{K_1} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc sur K_3 :

$$\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = \left\langle \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{h^2} \Longrightarrow \int_{K_3} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = -\frac{1}{2}$$

de même sur K_{12}

$$\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = \left\langle \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{h^2} \Longrightarrow \int_{K_{12}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = -\frac{1}{2}$$

Donc

$$b = \int_{K_3} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 + \int_{K_{12}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

En procédant comme ci-dessus pour les deux autres coefficients b, c et d, il vient

$$c = -1 \quad \text{et} \quad d = 0.$$

La nullité du coefficient d provient du fait que sur les deux triangles K_{11} et K_{12}, les gradients des fonctions chapeau φ_1 et φ_5 sont orthogonaux.

4. Il y a n sommets intérieurs dans chaque direction spatiale, donc au total n^2 sommets intérieurs dans le maillage. La matrice de rigidité est d'ordre n^2 et le nombre total de ses coefficients est n^4. En raisonnant sur les supports des fonctions chapeau, on obtient la structure bloc tridiagonale suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & C & O & \dots & O \\ C & B & C & \ddots & \vdots \\ O & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & C & B & C \\ O & \dots & O & C & B \end{pmatrix}$$

Les blocs B, C et O sont des matrices d'ordre n et il y a n blocs par ligne dans la structure de la matrice A. De plus, $B = \text{tridiag}(-1, 4, -1)$, $C = -I$ où I est la matrice identité d'ordre n et O est le bloc nul d'ordre n. La plupart des lignes de A ont 5 coefficients non-nuls. Le rapport demandé est donc de l'ordre de $5n^{-2} \ll 1$. On dit que la matrice de rigidité est creuse.

Pour n=3 nous obtenons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Le second membre $F = (f_i)_{i=1,9}$ où

$$f_i = \int_{supp(\varphi_i)} f(x,y)\varphi_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{supp(\varphi_i)} \varphi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{3} \times 6 \times \frac{h^2}{2} = -h^2 = -\frac{1}{16}$$

$$F := -\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right]$$

Le système linéaire $AU = F$ a pour solution

$$U = -\left[\frac{11}{256}, \frac{7}{128}, \frac{11}{256}, \frac{7}{128}, \frac{9}{128}, \frac{7}{128}, \frac{11}{256}, \frac{7}{128}, \frac{11}{256}\right]$$

La flèche maximale est $\frac{9}{128} = -0.0703125 \approx u_{max} = -0.07367135123$. En 9 points de discrétisation nous avons une précision de 3×10^{-3}.

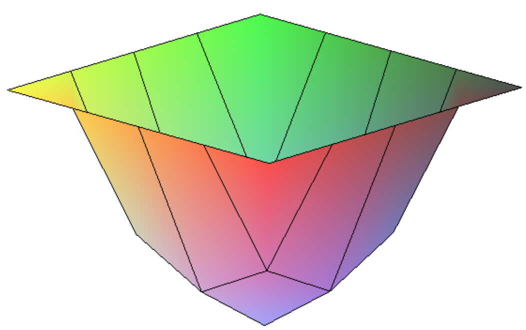


Figure 1 – La membrane déformée avec 9 points intérieurs (n=3)