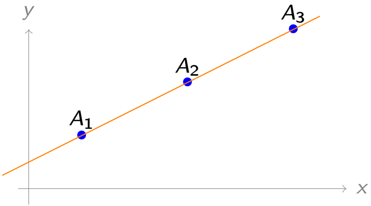
Méthode des éléments finis

Ibrahim ALAME

ESTP

05/02/2024

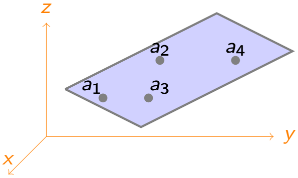
Rappel : 3 Points alignés



$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda x_1 + \mu y_1 + \nu = 0 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 + \nu = 0 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 + \nu = 0 \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Trois points alignés} \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0}$$



$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} ax_1 + by_1 + bz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + bz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + bz_3 + d = 0 \\ ax_4 + by_4 + bz_4 + d = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Quatre points coplanaires} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

Rappel : Coordonnées barycentriques

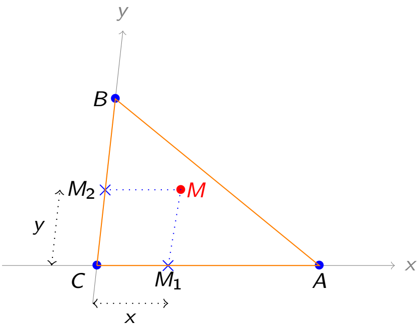
$$\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA}$$

$$M - B = x(A - B) \quad \Longrightarrow M = x\,A + (1 - x)B$$

(λ, μ) Coordonnées barycentriques de M dans le système $\{A, B\}$ ssi

$$M = \lambda A + \mu B \quad \text{où } \lambda + \mu = 1$$

Rappel : Coordonnées barycentriques



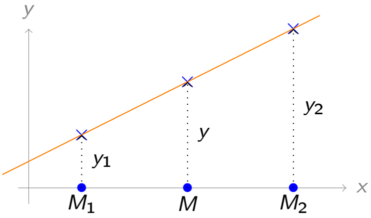
$$\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$$

$$M - C = x(A - C) + y(B - C) \quad \Longrightarrow M = x\,A + y\,B + (1 - x - y)C$$

(λ, μ, ν) Coordonnées barycentriques de M dans le système $\{A, B, C\}$ ssi

$$M = \lambda A + \mu B + \nu C \qquad \text{où } \lambda + \mu + \nu = 1$$

Rappel : Interpolation linéaire

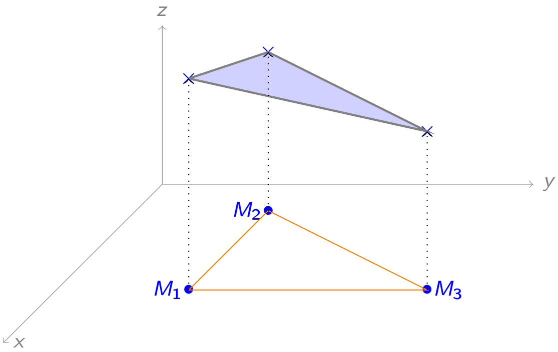


$$M = \lambda M_1 + \mu M_2$$

$$f(M) = \lambda f(M_1) + \mu f(M_2)$$

$$\boxed{y = \lambda y_1 + \mu y_2}$$

Rappel : Interpolation linéaire



$$M = \lambda M_1 + \mu M_2 + \nu M_3$$

$$f(M) = \lambda f(M_1) + \mu f(M_2) + \nu f(M_3)$$

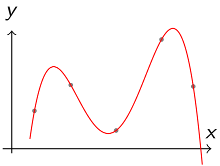
$$\boxed{z = \lambda z_1 + \mu z_2 + \nu z_3}$$

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $n+1$ points distincts de $[a, b]$. Il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$. De plus, P est donné par :

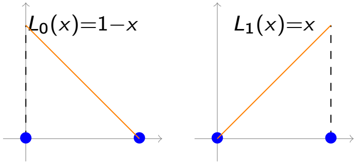
$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)}$$

où les polynômes L_i sont définis par : $L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$



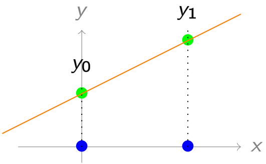
- $\boxed{n=1}$ deux points de discrétisation $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$. On a alors :

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{1} f(x_i) L_i(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x)}$$



- Exemple : Équation de la droite passant par les deux points $(0,1)$ et $(1,3)$:

$$y = 1 \cdot (1-x) + 3 \cdot x \quad \Longrightarrow \quad y = 2x+1$$



Éléments finis de Lagrange

On se donne :

1. une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$, connexe et d'intérieur non vide ;
2. un ensemble fini $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N$ de N points distincts de K ;
3. un espace vectoriel $\mathbb{P}$ de dimension finie et composé de fonctions définies sur K à valeurs réelles.

- On dit que l'ensemble Σ est $\mathbb{P}$-unisolvant si et seulement si, étant donné N scalaires réels quelconques α_j, $1 \leq j \leq N$, il existe une fonction p de l'espace $\mathbb{P}$ et une seule telle que

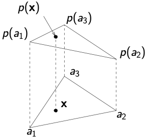
$$p(a_j) = \alpha_j, \qquad 1 \leq j \leq N \tag{1}$$

  Lorsque l'ensemble Σ est $\mathbb{P}$-unisolvant, le triplet $(K, \mathbb{P}, \Sigma)$ est appelé élément fini de Lagrange.

- Une condition nécessaire évidente pour que l'ensemble Σ soit $\mathbb{P}$-unisolvant est que $\dim(\mathbb{P}) = \mathrm{card}(\Sigma) = N$

Éléments finis de Lagrange

- il existe pour tout entier i, $1 \leq i \leq N$, une fonction $\varphi_i \in \mathbb{P}$ et une seule telle que
$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq j \leq N \tag{2}$$
Les N fonctions $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ forment une base de $\mathbb{P}$.
- pour toute fonction v définie sur K à valeurs réelles, il existe une fonction $p \in \mathbb{P}$ et une seule qui interpole v sur Σ :
$$p(a_j) = v(a_j), \qquad 1 \leq j \leq N \tag{3}$$
- L'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur Σ noté Π est définie par
$$\Pi v = \sum_{i=1}^{N} v(a_i)\, \varphi_i, \tag{4}$$

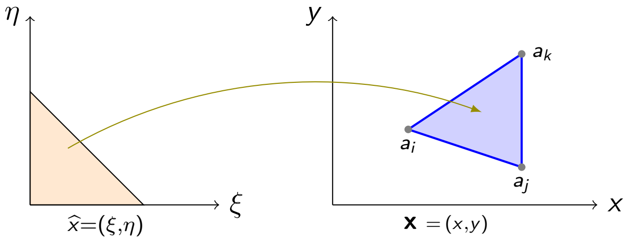


Éléments finis de Lagrange

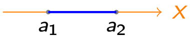
- On suppose l'application F injective. Alors si $(\widehat{K}, \widehat{\mathbb{P}}, \widehat{\Sigma})$ est un élément fini de Lagrange, le triplet $(K, \mathbb{P}, \Sigma)$, où $K = F(\widehat{K})$ et où on a posé

$$\mathbb{P} = \{p : K \to \mathbb{R};\ p \circ F \in \widehat{\mathbb{P}}\}, \quad \text{et} \quad \Sigma = F(\widehat{\Sigma})), \tag{5}$$

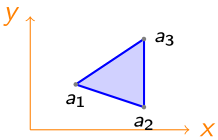
  est un élément fini de Lagrange.
- Deux éléments finis de Lagrange $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ et (K, P, Σ) sont dits affine-équivalents s'il existe une bijection F de $\widehat{K}$ sur K vérifiant (5) ;



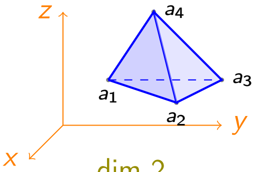
Éléments finis simpliciaux



dim 1



dim 2



dim 2

On considère $n+1$ points $a_j = (a_{ij})_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq n+1$, non situés dans un même hyperplan, c'est-à-dire tels que la matrice d'ordre $n+1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

soit inversible. On appelle n-simplexe K de sommets a_j, $1 \leq j \leq n+1$, l'enveloppe convexe des points a_j ;

Coordonnées barycentriques

Tout point x de $\mathbb{R}^n$, de coordonnées cartésiennes x_i, $1 \leq i \leq n$, est caractérisé par la donnée des $n+1$ scalaires ,$\lambda_j = \lambda_j(x)$, $1 \leq j \leq n+1$, définis comme solution du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) a_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\lambda_j = x_i, & 1 \leq i \leq n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 & \end{array} \right. \tag{7}$$

Ces scalaires $\lambda_j(x)$ sont appelés les coordonnées barycentriques du point x par rapport aux $n+1$ points a_j, $1 \leq j \leq n+1$. D'après (7), chacune de ces fonctions coordonnées barycentriques est une fonction affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Polynôme d'interpolation en dimension n

Le n-simplexe K de sommets a_j, $1 \leq j \leq n+1$, est caractérisé par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n;\ 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1,\ 1 \leq j \leq n+1\} \tag{8}$$

Pour tout entier $k \geq 0$, on désigne par $\mathbb{P}_k^{(n)}$ l'espace des (fonctions) polynômes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à k :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad p(x) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, \cdots, i_n \geq 0 \\ i_1 + \cdots + i_n \leq k}} \alpha_{i_1,\cdots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \tag{9}$$

où les $\alpha_{i_1,\cdots,i_n}$ sont des scalaires réels.
L'espace des polynômes à n variables homogènes de degré k est de dimension $\binom{n+k-1}{k}$, nombre de combinaisons avec répétitions de longueur k formées à partir des éléments d'un ensemble de cardinal n. Par conséquent, la dimension de l'espace $\mathbb{P}_k^{(n)}$ est

$$\dim(\mathbb{P}_k^{(n)}) = \sum_{l=0}^{k} \binom{n+l-1}{l} = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} \tag{10}$$

Polynôme d'interpolation en dimension 1

- $n = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i,$$

$$\mathbb{P}_k^{(1)} = vect\{1, x, x^2, \cdots, x^k\}, \quad \dim \mathbb{P}_k^{(1)} = k+1$$

En particuler

$$\mathbb{P}_0^{(1)} = vect\{1\} = \mathbb{R}, \quad \dim \mathbb{P}_0^{(1)} = 1$$

$$\mathbb{P}_1^{(1)} = \{ax + b; a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}, \quad \dim \mathbb{P}_1^{(1)} = 2$$

$$\mathbb{P}_2^{(1)} = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}, \quad \dim \mathbb{P}_1^{(1)} = 3$$

Polynôme d'interpolation en dimension 2

- $n = 2$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \quad p(x,y) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} \alpha_{ij} x^i y^j,$$

$$\mathbb{P}_k^{(2)} = vect\{x^i y^j;\ 0 \leq i+j \leq k\}, \quad \dim \mathbb{P}_k^{(2)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

En particulier

$$\mathbb{P}_0^{(2)} = vect\{1\} = \mathbb{R}, \quad \dim \mathbb{P}_0^{(2)} = 1$$

$$\mathbb{P}_1^{(2)} = vect\{1, x, y\}, \quad \dim \mathbb{P}_1^{(2)} = 3$$

$$\mathbb{P}_2^{(2)} = vect\{1, x, x^2, y, y^2, xy\}, \quad \dim \mathbb{P}_2^{(2)} = 6$$

Polynôme d'interpolation en dimension 3

- $n = 3$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}, \quad p(x, y, z) = \sum_{0 \leq p+q+r \leq k} \alpha_{pqr} x^p y^q z^r,$$

$$\mathbb{P}_k^{(3)} = vect\{x^p y^q z^r ; 0 \leq p+q+r \leq k\}, \dim \mathbb{P}_k^{(3)} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

En particuler

$$\mathbb{P}_0^{(3)} = vect\{1\} = \mathbb{R}, \quad \dim \mathbb{P}_0^{(3)} = 1$$

$$\mathbb{P}_1^{(3)} = vect\{1, x, y, z\}, \quad \dim \mathbb{P}_1^{(3)} = 4$$

$$\mathbb{P}_2^{(3)} = vect\{1, x, x^2, y, y^2, z, z^2, xy, xz, yz\}, \quad \dim \mathbb{P}_2^{(3)} = 10$$

Espace de polynômes d'interpolation

- $\mathbb{P}_k^{(1)} = vect\{1, x, x^2, \cdots, x^k\}$, $\dim \mathbb{P}_k^{(1)} = k + 1$.
- $\mathbb{P}_k^{(2)} = vect\{x^i y^j;\ 0 \leq i + j \leq k\}$, $\dim \mathbb{P}_k^{(2)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
- $\mathbb{P}_k^{(3)} = vect\{x^i y^j x^k;\ 0 \leq i + j + k \leq k\}$, $\dim \mathbb{P}_k^{(2)} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$.

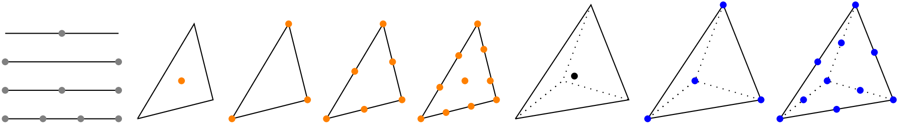
- $\mathbb{Q}_k^{(1)} = \mathbb{P}_k^{(1)}$.
- $\mathbb{Q}_k^{(2)} = vect\{x^i y^j;\ 0 \leq i, j \leq k\}$, $\dim \mathbb{Q}_k^{(2)} = (k + 1)^2$.
- $\mathbb{Q}_k^{(3)} = vect\{x^i y^j x^k;\ 0 \leq i, j, k \leq k\}$, $\dim \mathbb{Q}_k^{(2)} = (k + 1)^3$.

Treillis principal d'ordre k

On définit enfin, pour tout entier k le treillis d'ordre k du n-simplexe K comme étant l'ensemble de points de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\Sigma_k^{(n)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{k-1}{k}, 1\},\ 1 \leq j \leq n+1 \right\} \tag{11}$$

$$\Sigma_0^{(n)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ \lambda_j(x) = \frac{1}{n+1},\ 1 \leq j \leq n+1 \right\} \tag{12}$$



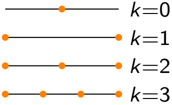
En tenant compte de $\lambda_{n+1} = 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$, on vérifie que le cardinal de l'ensemble $\Sigma_k^{(n)}$ est le nombre de combinaisons avec répétitions de longueur k formées à partir des éléments de $\{0, \cdots, n\}$ d'où

$$\mathrm{card}(\Sigma_k^{(n)}) = \binom{(n+1)+k-1}{k} = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} \tag{13}$$

Treillis principal d'ordre k en dimension 1

$$\Sigma_k^{(1)} = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{k-1}{k}, 1\},\ 1 \leq j \leq 2 \right\} \tag{14}$$

$$\Sigma_0^{(1)} = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \frac{1}{2} \right\} = \left\{ x = \frac{a_1 + a_2}{2} = a_0 \right\} \tag{15}$$



En particulier

$$\Sigma_1^{(1)} = \{x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2;\ \lambda_j \in \{0, 1\}\} = \{a_1, a_2\} \tag{16}$$

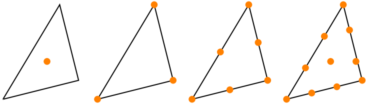
$$\Sigma_2^{(1)} = \left\{ x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2;\ \lambda_j \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \right\} = \{a_1, a_2, a_0\} \tag{17}$$

$$\Sigma_3^{(1)} = \left\{ x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2;\ \lambda_j \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \right\} = \{a_1, a_2, a_{112}, a_{122}\} \tag{18}$$

Treillis principal d'ordre k en dimension 2

$$\Sigma_k^{(2)} = \left\{x \in \mathbb{R}^2;\ \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{k-1}{k}, 1\},\ 1 \leq j \leq 3\right\} \qquad (19)$$

$$\Sigma_0^{(2)} = \left\{x \in \mathbb{R}^2;\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}\right\} = \left\{x = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = a_0\right\} \quad (20)$$



$$\Sigma_1^{(2)} = \{x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3;\ \lambda_j \in \{0, 1\}\} = \{a_1, a_2, a_3\} \qquad (21)$$

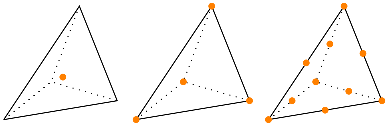
$$\Sigma_2^{(2)} = \left\{x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3;\ \lambda_j \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}\right\} = \{a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}\}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_3^{(2)} &= \left\{x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3;\ \lambda_j \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}\right\} \\ &= \{a_1, a_2, a_3, a_{112}, a_{122}, a_{113}, a_{133}, a_{223}, a_{233}, a_0\}\end{aligned}$$

Treillis principal d'ordre k en dimension 3

$$\Sigma_k^{(3)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3;\ \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{k-1}{k}, 1\},\ 1 \leq j \leq 4 \right\}$$

$$\Sigma_0^{(3)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3;\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{4} \right\} = \left\{ \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = a_0 \right\}$$

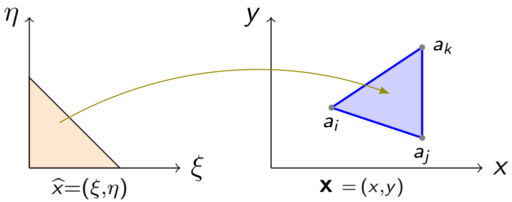


$$\Sigma_1^{(3)} = \{x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4;\ \lambda_j \in \{0, 1\}\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{(3)} &= \left\{ x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4;\ \lambda_j \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \right\} \\ &= \{a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}, a_0\} \end{aligned}$$

Élément fini n-simplexe

- Pour tout entier $k \geq 0$, l'ensemble $\Sigma_k^{(n)}$, est $P_k^{(n)}$-unisolvant.
- Pour tout n-simplexe $K^{(n)}$ de $\mathbb{R}^n$ et pour tout entier $k \geq 0$, l'élément fini $(K^{(n)}, P_k^{(n)}, \Sigma_k^{(n)})$, où $\Sigma_k^{(n)}$ est le treillis principal d'ordre k de $K^{(n)}$, est appelé n-simplexe de type (k).
- Pour tout entier $k \geq 0$, deux éléments finis n-simplexes de type (k) sont affine-équivalents.



Il suffira donc d'étudier les propriétés d'un n-simplexe de type (k) particulier $(\widehat{K_k}^{(n)}, \widehat{P_k}^{(n)}, \widehat{\Sigma}_k^{(n)})$ appelé n-simplexe de référence.

Élément fini n-simplexe de référence

On choisit pour $\widehat{K}$ le n-simplexe unité de sommets $\hat{a}_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\hat{a}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, ... $\hat{a}_n = (0, \cdots, 0, 1)$, $\hat{a}_{n+1} = (0, 0, \cdots, 0)$. Dans ce cas, les coordonnées barycentriques sont

$$\hat{\lambda}_i(\hat{x}) = \hat{x}_i,\ 1 \leq i \leq n; \quad \hat{\lambda}_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i, \tag{22}$$

Considérons un peu plus en détail les éléments finis (K, P, Σ) n-simplexes de type (k) les plus couramment utilisés en pratique.
On pose

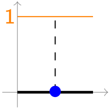
$$\begin{array}{lcll}
a_0 & = & \frac{1}{2}(a_1 + a_2), & \text{milieu du segment} \\
a_0 & = & \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i, & \text{centre de gravité} \\
a_{iij} & = & \frac{1}{3}(2a_i + a_j), & \text{au tiers du segment} \\
a_{ijj} & = & \frac{1}{3}(a_i + 2a_j), & \text{au deux-tiers du segment}
\end{array}$$

Élément fini segment

- $\boxed{n = 1,\ k = 0}$ Le segment de type (0) correspond à

$$(K, P, \Sigma) = ([0,1],\ \mathbb{P}_0^{(1)} = \mathbb{R},\ \Sigma_0^{(1)} = \{a_0\})$$

La fonction de base est $\varphi(\xi) = 1$

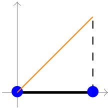


- $\boxed{n = 1,\ k = 1}$ Le segment de type (1) correspond à

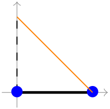
$$(K, P, \Sigma) = ([0,1],\ \mathbb{P}_1^{(1)} = \mathbb{R}_1[X],\ \Sigma_1^{(1)} = \{a_1 = 1, a_2 = 0\})$$

Les fonctions de base sont les fonctions coordonnées barycentriques :

$$\varphi_1 = \lambda_1 = \xi, \quad \varphi_2 = \lambda_2 = 1 - \xi$$



$\varphi_1(\xi){=}\xi$



$\varphi_2(\xi){=}1{-}\xi$

Élément fini segment

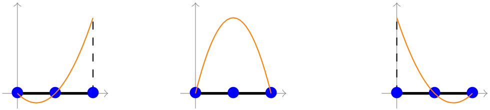
- $\boxed{n = 1,\ k = 1}$, le segment de type (2) correspond à

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_2, \quad \Sigma = \Sigma_2 = \{a_1, a_{12}, a_2\}$$

Les fonctions de base sont les fonctions

$$\begin{cases} \varphi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad i = 1, 2 \\ \varphi_{12} = 4\lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

$$\varphi_1(\xi) = \xi(2\xi - 1), \quad \varphi_2(\xi) = (1 - \xi)(2(1 - \xi) - 1) = (1 - \xi)(1 - 2\xi)$$

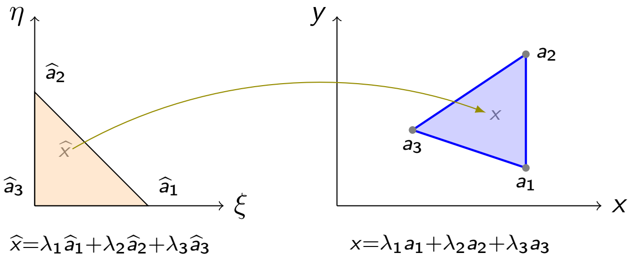


$\varphi_1 = \xi(2\xi - 1)$ $\varphi_{12} = 4\xi(1 - \xi)$ $\varphi_2 = (1 - \xi)(1 - 2\xi)$

Éléments finis triangles ($n = 2$)

- Lorsque $n = 2$, K est le triangle de sommets a_1, a_2 et a_3. On pose

$$\begin{array}{ll} a_0 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) & \text{centre de gravité de } K \\ a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j), & \text{milieu du côté } [a_i, a_j] \\ a_{iij} = \frac{1}{3}(2a_i + a_j), & a_{iij} \text{ et } a_{jji} \text{ aux tiers et deux-tiers du côté } [a_i a_j]. \end{array}$$



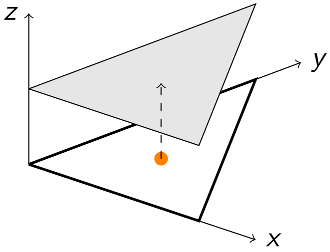
Éléments finis triangles de type (0)

- Pour $k = 0$, le triangle de type (0) correspond à

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_0^{(2)} = \mathbb{R}, \quad \Sigma = \Sigma_0^{(2)} = \{a_0\}$$

La fonction de base est la fonction constante définie par

$$\forall x \in K, \quad \varphi_0(x) = 1$$



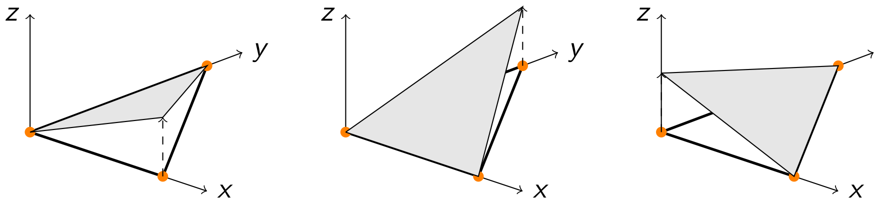
Éléments finis triangles de type (1)

- Pour $k = 1$, le triangle de type (1) est obtenu pour

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1^{(2)} = \{ax + by + c;\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}, \quad \Sigma = \Sigma_1^{(2)} = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 3}$$

Les fonctions de base sont les fonctions coordonnées barycentriques par rapport à (a_1, a_2, a_3), i.e.

$$\varphi_i = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$



- Pour $k = 2$, le triangle de type (2) correspond à

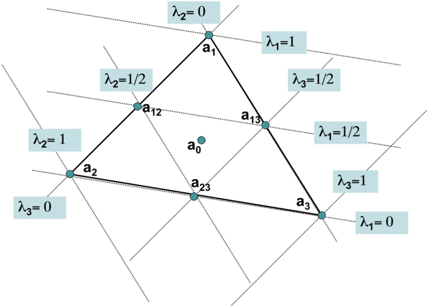
$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_2^2, \quad \Sigma = \Sigma_2^2 = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_{23}, a_{13}, a_{12}\}$$

Les fonctions de base sont les fonctions

$$\varphi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

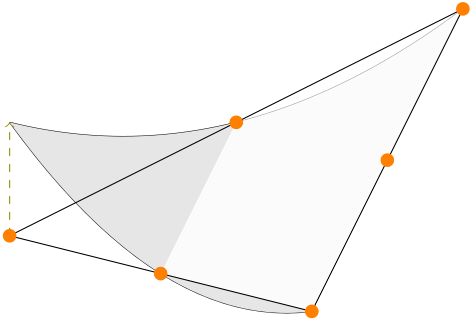
et

$$\varphi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j, \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$



Éléments finis triangles de type (2)

$$\varphi_1(\xi,\eta) = \xi(2\xi - 1)$$
$$\varphi_2(\xi,\eta) = \eta(2\eta - 1)$$
$$\varphi_3(\xi,\eta) = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$$
$$\varphi_{12}(\xi,\eta) = 4\xi\eta$$
$$\varphi_{13}(\xi,\eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$
$$\varphi_{23}(\xi,\eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$



Éléments finis triangles de type (3)

- Pour $k = 3$, le triangle de type (3) est obtenu pour

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_3^2, \quad \Sigma = \Sigma_3^2 = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_{112}, a_{113}, a_{221}, a_{223}, a_{331}, a_{332}\} \cup \{a_0\}$$

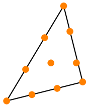
Les fonctions de base sont les fonctions

$$\varphi_i = \frac{1}{2}\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

$$\varphi_{iij} = \frac{9}{4}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i - 1) \quad 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$$

et

$$\varphi_0 = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$



Éléments finis tétraèdre ($n = 3$)

K est le tétraèdre de sommets a_1, a_2, a_3 et a_4. On pose

- Pour $k = 0$, le tétraèdre de type (0) correspond à

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_0^3 = \mathbb{R} = vect(\varphi = 1), \quad \Sigma = \Sigma_0^3 = \{a_0\}$$

- Pour $k = 1$, le tétraèdre de type (1) est obtenu pour

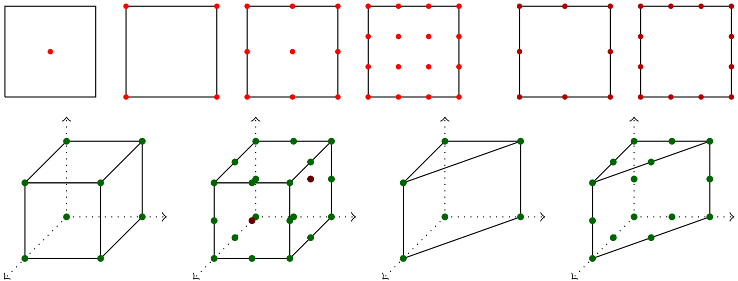
$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1^3 = \mathbb{R}_1[X, Y] = vect(\varphi_i = \lambda_i, 1 \leq i \leq 4), \quad \Sigma = \Sigma_1^3 = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 4}$$

- Pour $k = 2$, le tétraèdre de type (2) est obtenu pour

$$\begin{aligned} \mathbb{P} = \mathbb{P}_2^{(3)} &= vect(1, \xi, \eta, \nu, \xi^2, \eta^2, \nu^2, \xi\eta, \xi\nu, \eta\nu) \\ &= vect(\varphi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \ \varphi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j) \\ \Sigma = \Sigma_2 &= \{a_i\}_{1 \leq i \leq 4} \cup \{a_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 4} \end{aligned}$$

Les expressions des fonctions de base relatives à ces exemples de tétraèdre de type (k) sont formellement identiques à celles donnant les fonctions de base de triangle de type (k) .

Éléments finis parallélotopes



L'enveloppe convexe K de 2^n points a_i, est un n-parallèlotope si et seulement si il existe une application affine inversible F telle que

$$a_j = F(\hat{a}_j), \quad 1 \leq j \leq 2^n, \tag{23}$$

où les points $\hat{a}_j$, $1 \leq j \leq 2^n$, sont les sommets de $\widehat{K}$, hypercube unité $[0,1]^n$ de $\mathbb{R}^n$;

- pour $n = 2$, K est un parallélogramme.
- pour $n = 3$, K est un parallélépipède.

Éléments finis parallélotopes

Soit $\mathbb{Q}_k^{(n)}$ l'espace des (fonctions) polynômes de degré inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad p(x) = \sum_{0\leq i_1\leq k,\ldots,0\leq i_n\leq k} \alpha_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} \tag{24}$$

$$\dim(\mathbb{Q}_k) = (k+1)^n$$

- $\mathbb{Q}_0^{(n)} = \mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}_k^{(1)} = \mathbb{P}_k^{(1)}$.
- $\mathbb{Q}_k^{(2)} = vect\{x^i y^j;\ 0 \leq i,j \leq k\}$, $\dim \mathbb{Q}_k^{(2)} = (k+1)^2$. En particulier :
  - $\mathbb{Q}_1^{(2)} = \{a + bx + cy + dxy;\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$, $\dim \mathbb{Q}_1^{(2)} = 4$.
  - $\mathbb{Q}_2^{(2)} = vect\{1, x, x^2, y, y^2, xy, xy^2, x^2y, x^2y^2\}$, $\dim \mathbb{Q}_2^{(2)} = 9$.
- $\mathbb{Q}_k^{(3)} = vect\{x^p y^q z^r;\ 0 \leq p,q,r \leq k\}$, $\dim \mathbb{Q}_k^{(2)} = (k+1)^3$. Et donc :
  - $\mathbb{Q}_1^{(3)} = vect\{1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz\}$, $\dim \mathbb{Q}_1^{(2)} = 8$.
  - $\mathbb{Q}_1^{(3)} = vect\,\{1, x, x^2, y, y^2, z, z^2, xy, xz, yz, xyz, x^2y, x^2z, x^2yz, xy^2,$
    $, y^2z, xy^2z, xz^2, yz^2, xyz^2, x^2y^2, x^2z^2, y^2z^2, x^2y^2z, x^2yz^2, xy^2z^2, x^2y^2z^2\}$
    $\dim \mathbb{Q}_1^{(2)} = 27$.

Éléments finis parallélotopes

On prend alors pour domaine $\widehat{K}$ l'hypercube unité $[0,1]^n$ de $\mathbb{R}^n$ et on définit pour tout entier $k \geq 1$ l'ensemble de points de $\widehat{K}$

$$\widehat{\Xi}_k^{(n)} = \left\{ \hat{x} = (\hat{x}_i)_{1 \leq i \leq n};\ \hat{x}_i \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\},\ 1 \leq i \leq n \right\} \tag{26}$$

Pour $k = 0$, on posera

$$\widehat{\Xi}_0^{(n)} = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1} \right) \in \mathbb{R}^n \right\} \tag{27}$$

On a ainsi pour tout entier $k \geq 1$

$$\mathrm{card}(\widehat{\Xi}_k) = (k+1)^n$$

$\widehat{K}$ est le segment $[0,1]$

$$\widehat{\Xi}_0^{(1)} = \left\{\frac{1}{2}\right\}, \quad \text{pour } k \geq 1,\ \widehat{\Xi}_k^{(1)} = \left\{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\right\}$$

$$\text{card}(\widehat{\Xi}_k) = k+1$$

En particulier

- $\widehat{\Xi}_1^{(1)} = \{0,1\}$, $\text{Card}\widehat{\Xi}_1^{(1)} = 2$
- $\widehat{\Xi}_2^{(1)} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $\text{Card}\widehat{\Xi}_2^{(1)} = 3$
- $\widehat{\Xi}_3^{(1)} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, $\text{Card}\widehat{\Xi}_3^{(1)} = 4$

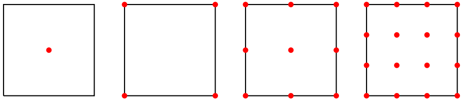
Éléments finis parallélotopes en dimension 2

$\widehat{K}$ est le carré $[0,1]^2$. On pose $\hat{a}_1 = (0,0)$, $\hat{a}_2 = (1,0)$, $\hat{a}_3 = (1,1)$, $\hat{a}_4 = (0,1)$,

$$\widehat{\Xi}_0^{(2)} = \left\{ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right\}, \text{ pour } k \geq 1,\ \widehat{\Xi}_k^{(2)} = \left\{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2);\ \hat{x}_i \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, ..., \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \right\}$$

$$\text{card}(\widehat{\Xi}_k) = (k+1)^2$$

- $\widehat{\Xi}_1^{(2)} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2);\ \hat{x}_i \in \{0,1\}\} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4\}$, $\text{Card}\widehat{\Xi}_2^{(1)} = 4$
- $\widehat{\Xi}_2^{(1)} = \left\{(\hat{x}_1, \hat{x}_2);\ \hat{x}_i \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}\right\} = \left\{\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_{12}, \hat{a}_{13}, \hat{a}_{14}, \hat{a}_{23}, \hat{a}_{24}, \hat{a}_{34}\right\}$, $\text{Card}\widehat{\Xi}_2^{(1)} = 9$
- $\widehat{\Xi}_3^{(2)} = \left\{(\hat{x}_1, \hat{x}_2);\ \hat{x}_i \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}\right\}$, $\text{Card}\widehat{\Xi}_3^{(2)} = 16$



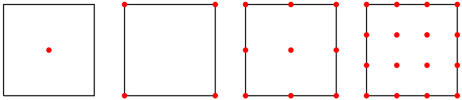
Éléments finis parallélotopes en dimension 3

$\widehat{K}$ est le cube $[0,1]^3$. On pose $\hat{a}_1 = (0,0,0)$, $\hat{a}_2 = (1,0,0)$, $\hat{a}_3 = (1,1,0)$, $\hat{a}_4 = (0,1,0)$, $\hat{a}_5 = (0,0,1)$, $\hat{a}_6 = (1,0,1)$, $\hat{a}_7 = (1,1,1)$, $\hat{a}_8 = (0,1,1)$,

$$\widehat{\Xi}_0^{(3)} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}, \quad \widehat{\Xi}_k^{(3)} = \left\{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3);\ \hat{x}_i \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, ..., \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \right\}$$

$$\mathrm{card}(\widehat{\Xi}_k) = (k+1)^3$$

- $\widehat{\Xi}_1^{(3)} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3);\ \hat{x}_i \in \{0,1\}\} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5, \hat{a}_6, \hat{a}_7, \hat{a}_8\}$, Card$= 8$
- $\widehat{\Xi}_2^{(3)} = \left\{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3));\ \hat{x}_i \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \right\}$, Card$\widehat{\Xi}_2^{(3)} = 27$



Éléments finis parallélotopes

- Théorème : Pour tout entier $k \geq 0$, l'ensemble $\widehat{\Xi}_k$ est $\mathbb{Q}_k$-unisolvant.
- Définition : On appelle $n-$hypercube unité de type (k), l'élément fini $(K, \mathbb{Q}_k, \widehat{\Xi}_k)$. On appelle $n-$parallèlotope de type (k) tout élément fini (K, P, Σ) affine-équivalent au $n-$hypercube unité de. type (k).
- le $n-$hypercube unité de type (k) est un carré unité de type (k) lorsque $n = 2$,
- et cube unité de type (k) lorsque $n = 3$

Éléments finis parallélotopes

Dire que (K, P, Σ) est un n-parallèlotope de type (k) signifie donc qu'il existe une application affine inversible F de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$K = F(\widehat{K}), \quad \mathbb{P} = \{p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n ;\ p \circ F \in \mathbb{Q}_k\}, \quad \Sigma = F(\widehat{\Xi}_k). \tag{28}$$

Supposons $n = 2$ pour simplifier un peu l'exposé :

1. K est un parallélogramme de $\mathbb{R}^n$;
2. pour $k = 0$, Σ est le centre du parallélogramme K ; pour $k = 1$, Σ est l'ensemble des sommets ; pour $k = 2$, Σ est l'ensemble constitué des sommets de K, des milieux des côtés de K et du centre de K, etc.
3. l'espace $\mathbb{P}$ est un espace de polynômes tel que

$$\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{P}_{2k}$$

cet espace $\mathbb{P}$ ne coïncide avec l'espace $\mathbb{Q}_k$ que dans le cas particulier où K est un rectangle de côtés parallèles aux axes.

Éléments finis parallélotopes

Dans le cas $n = 2$; $\widehat{K}$ est le carré unité de $\mathbb{R}^2$. Nous noterons $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ les coordonnées cartésiennes du point courant $\hat{x}$ de $\widehat{K}$, de sommets

$$\hat{a}_1 = (0,0), \quad \hat{a}_2 = (1,0), \quad \hat{a}_3 = (1,1), \quad \hat{a}_4 = (0,1) \tag{29}$$

Il sera commode de poser

$$\hat{x}_3 = 1 - \hat{x}_1, \quad \hat{x}_4 = 1 - \hat{x}_2 \tag{30}$$

et d'associer à tout entier i l'entier $\bar{i}$ congru à i modulo 4 et compris entre 1 et 4. En particulier, un sommet $\hat{a}_i$, $1 \leq i \leq 4$, est alors défini par les relations

$$\hat{x}_{\bar{i}} = \hat{x}_{\overline{i+1}} = 0$$

Éléments finis parallélotopes

Explicitons les fonctions de base de l'élément fini $(\widehat{K}, \widehat{\mathbb{P}}, \widehat{\Sigma})$ carré unité de type (k), pour les premières valeurs de k.

- Pour $k = 0$, le carré unité de type (0) est obtenu pour

$$\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{Q}_0, = P_0, \quad \widehat{\Sigma} = \widehat{\Xi}_0 = \{\hat{a}_0\}$$

  où $\hat{a}_0$ est le centre du carré, $\hat{a}_0 = \frac{1}{4}(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4)$. La fonction de base $\widehat{\varphi}_0$, est la fonction constante égale à 1.

- Pour $k = 1$, le carré de type (1) correspond à

$$\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{Q}_1, \quad \widehat{\Sigma} = \widehat{\Xi}_1^{(2)} = \{\hat{a}_i\}_{1 \leq i \leq 4}$$

Les fonctions de base s'écrivent

$$\widehat{\varphi}_i(\hat{x}) = \hat{x}_{\overline{i+2}} \hat{x}_{\overline{i+3}}, \quad 1 \leq i \leq 4$$

- Pour $k = 2$, le carré de type (2) est obtenu pour

$$\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{Q}_2, = P_0, \quad \widehat{\Sigma} = \widehat{\Xi}_2^{(2)} = \{\hat{a}_i\}_{1 \leq i \leq 9}$$

où les points $\hat{a}_i$, $5 \leq i \leq 8$, sont les milieux des côtés $[\hat{a}_i \hat{a}_{i+1}]$ et le point $\hat{a}_9$ est le centre du carré. Les fonctions de base sont

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_i(\hat{x}) &= \hat{x}_{\overline{i+2}}(2\hat{x}_{\overline{i+2}} - 1)\hat{x}_{\overline{i+3}}(2\hat{x}_{\overline{i+3}} - 1), \quad 1 \leq i \leq 4, \\ \widehat{\varphi}_i(\hat{x}) &= -4\hat{x}_{\overline{i+2}}(\hat{x}_{\overline{i+2}} - 1)\hat{x}_{\overline{i+3}}(2\hat{x}_{\overline{i+3}} - 1), \quad 5 \leq i \leq 8, \\ \widehat{\varphi}_9(\hat{x}) &= 16\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3\hat{x}_4. \end{aligned} \tag{31}$$

Éléments finis parallélotopes

A partir des deux derniers exemples de carré unité, on peut construire des éléments fini qui seront de mise en œuvre informatique plus simple sans que cela nuise à la précision. l'élément fini $(\widehat{K}, \widehat{\mathbb{P}}, \widehat{\Sigma})$ obtenu vérifiera

$$\widehat{\Sigma} = \widehat{\Xi}_2 \cap \partial\widehat{K} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_2 \subset \widehat{\mathbb{P}} \subset \widehat{\mathbb{Q}}_2$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\Sigma} = \widehat{\Xi}_2^\star = \{\hat{a}_i\}_{1 \leq i \leq 8} \\ \widehat{\mathbb{P}} = \widehat{\mathbb{Q}}_2^\star = \{q(x) + \alpha_1 x_1^2 x_2 + \alpha_2 x_1 x_2^2, \quad q \in \mathbb{P}_2, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2\} \end{array} \right. \tag{32}$$

On remarque que l'espace $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^\star \oplus vect\{x_1^2 x_2^2\}$

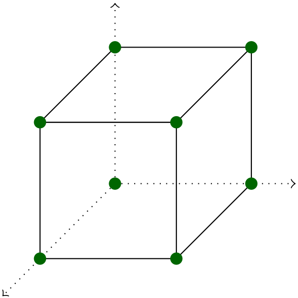
- L'ensemble $\widehat{\Xi}_2^\star$ est $\mathbb{Q}_2^\star$-unisolvant.
- on vérifie que les fonctions

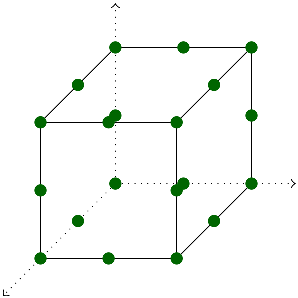
$$\begin{array}{ll} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) = \hat{x}_{\overline{i+2}} \hat{x}_{\overline{i+3}} (2\hat{x}_{\overline{i+2}} + 2\hat{x}_{\overline{i+3}} - 3), & 1 \leq i \leq 4, \\ \hat{\varphi}_i(\hat{x}) = -4\hat{x}_{\overline{i+2}} (\hat{x}_{\overline{i+2}} - 1) \hat{x}_{\overline{i+3}}, & 5 \leq i \leq 8. \end{array} \tag{33}$$

  sont les fonctions de base de $(\widehat{K}, \mathbb{Q}_2^\star, \widehat{\Sigma}_2^\star)$.

Éléments finis parallélotopes

En dimension $n = 3$, on vous laisse le soin de décrire en détail l'élément fini $(\widehat{K}, \widehat{\mathbb{P}}, \widehat{\Sigma})$ cube unité de type (k), pour les valeurs $k = 0, 1, 2$. Par exemple, pour $k = 1$, l'ensemble $\widehat{\Sigma}$ est constitué par les 8 sommets du cube.
Pour $k = 2$, on préfère utiliser le cube unité de type (2)* où l'ensemble Σ est constitué par les 8 sommets du cube et les milieux des 12 arêtes de ce cube.





Éléments finis d'Hermite

φ_i des éléments finis de Lagrange est construite pour être continue d'un élément à l'autre, mais pas sa dérivée...
Un élément fini d'Hermite est un triplet (K, Σ, P) tel que :

- K est un élément géométrique de $\mathbb{R}^n$, compact, connexe, et d'intérieur non vide ;
- $\Sigma = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_N\}$ un ensemble de N formes linéaires sur l'espace des fonctions définies sur K, ou sur un sous-espace plus régulier contenant P ;
- P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur K, et tel que Σ soit $P-$unisolvant.

Opérateur de $P-$interpolation

- Un opérateur de $P-$interpolation sur Σ est un opérateur Π qui à toute fonction v définie sur K associe la fonction Πv de P définie par :

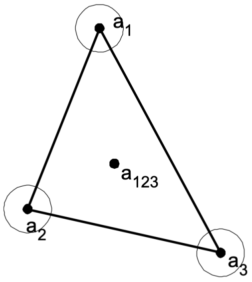
$$\Pi v = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(v)\varphi_i$$

- Πv est l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les points de Σ.
- $$\sigma_j(\varphi_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N$$
- Suivant les éléments utilisés, ces fonctions de base pourront être de classe C^1 ou même plus, et il en sera donc de même pour la solution approchée u_h.

Élément	cubique	quintique
K	segment $[a\,;b]$	segment $[a\,;b]$
Σ	$\{p(a), p'(a), p(b), p'(b)\}$	$\{p(a), p'(a), p''(a), p(b), p'(b), p''(b)\}$
P	P_3	P_3
Régularité	C^1 et H^2	C^2 et H^3

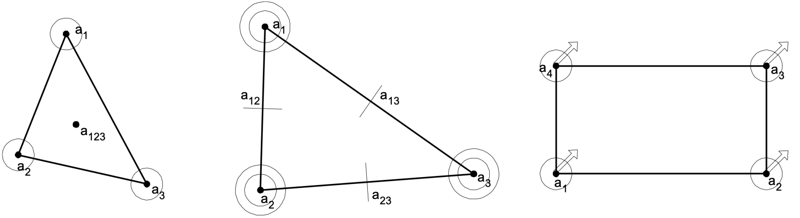
Élément	
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\left\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), i = 1, 2, 3\right\} \cup \{p(a_0)\}$
P	P_3
Régularité	C^0, mais pas C^1

Élément triangle



Élément	
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\left\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), i = 1,2,3\right\} \cup \{p(a_0)\}$
P	P_3
Régularité	C^0, mais pas C^1

Éléments bidimensionnels



Élément	
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\left\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, 2, 3\right\} \cup \left\{\frac{\partial p}{\partial n}(a_{ij}), 1 \leqslant i < j \leqslant 3\right\}$
P	P_5
Régularité	C^1

Élément	Q_3
K	rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes
Σ	$\left\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, \ldots, 4\right\}$
P	P_3
Régularité	C^1

Les fonctions de base

- $\Phi_i(x)$ les fonctions de base associées aux valeurs nodales de la fonction v_i.
- $\Psi_i(x)$ les fonctions de base associées aux valeurs nodales de la dérivée $(\frac{dv}{dx})_i$,

$$\Pi v(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i \Phi_i(x) + \sum_{i=1}^{n} (\frac{dv}{dx})_i \Psi_i(x)$$

Sur un élément $[x_1, x_2]$, cette approximation s'écrit :

$$v^h(x) = v_1 \Phi_1(x) + (\frac{dv}{dx})_1 \Psi_1(x) + v_2 \Phi_2(x) + (\frac{dv}{dx})_2 \Psi_2(x)$$

Φ_i et Ψ_i vérifient les conditions :

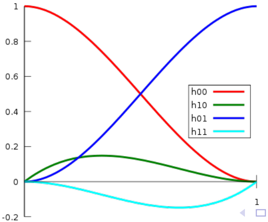
$$\begin{cases} \Phi_i(x_j) = \delta_{ij} & \Phi_i'(x_j) = 0 \\ \Psi_i(x_j) = 0 & \Psi_i'(x_j) = \delta_{ij} \end{cases}$$

Les fonctions de base

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_i(x) = [1 - 2(x - x_i)\lambda_i'(x_i)]\,\lambda_i^2(x) \\ \Psi_i(x) = (x - x_i)\lambda_i^2(x) \end{array} \right.$$

- élément de référence de longueur h : $x_1 = 0$ et $x_2 = h$,
- $\lambda_1(x) = 1 - \frac{x}{h}$ et $\lambda_2(x) = \frac{x}{h}$. On pose $\xi = \frac{x}{h}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(x) = (1 + 2\xi)(1 - \xi)^2 \\ \Phi_2(x) = (3 - 2\xi)\xi^2 \\ \Psi_1(x) = h\xi(1 - \xi)^2 \\ \Psi_2(x) = h(\xi - 1)\xi^2 \end{array} \right.$$



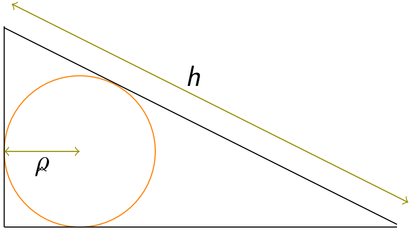
Erreur d'interpolation

Soit $(K, \mathbb{P}, \Sigma)$ un élément fini n-simplexe ou n-palallélotope de type (k). On suppose

$$n \leq 3 \quad \text{et} \quad k \geq 1$$

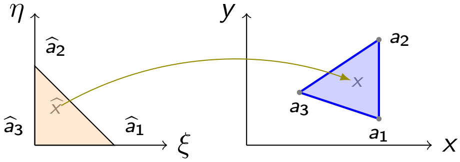
Alors il existe une constante C qui ne dépend que de n et de k telle que pour tout entier m, $0 \leq m \leq k$, on a

$$\forall v \in H^{k+1}(K), \quad |v - \Pi v|_{m,k} \leq \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K}$$



$$a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{l,m}^{2} \left(a_{lm} \sum_{K \in \mathscr{T}_h} \int_K \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} \mathrm{d}x \right)$$

- Les fonctions de base appartiennent à $\mathbb{P}_k$ donc le produit $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l}$ coïncide avec un polynôme de $\mathbb{P}_{2k-2}$.
- Soit $F_K : \hat{x} \mapsto F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b$ une bijection affine du triangle unité $\widehat{K}$ sur le triangle K ; $\det(B_K) > 0$.



Alors on a pour toute fonction $\varphi = \widehat{\varphi} \circ F_K$ continue sur K :

$$\int_K \psi(x)\mathrm{d}x = \text{dét}(B_K) \int_{\widehat{K}} \widehat{\psi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x}$$

Intégration de $a(\varphi_j, \varphi_i)$

On a

$$\text{dét}(B_K) = \frac{\text{mes}(K)}{\text{mes}(\widehat{K})} = 2\text{mes}(K)$$

On prend $\psi = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} \in \mathbb{P}_{2k-2}$. On se ramène à $\widehat{\psi} \in \mathbb{P}_{2k-2}$ sur le triangle unité. Or pour tout monôme $\hat{x}_1^{k_1} \hat{x}_2^{k_2}$:

$$\int_{\widehat{K}} \hat{x}_1^{k_1} \hat{x}_2^{k_2} \mathrm{d}\hat{x} = \frac{k_1! k_2!}{(k_1 + k_2 + 2)!}$$

plus généralement

$$\int_{\widehat{K}} \hat{x}_1^{k_1} \hat{x}_2^{k_2} (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)^{k_3} \mathrm{d}\hat{x} = \frac{k_1! k_2! k_3!}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!}$$

En coordonnées barycentriques

$$\int_{\widehat{K}} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} \mathrm{d}\hat{x} = 2\text{mes}(K) \frac{k_1! k_2! k_3!}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!}$$

Intégration de $\ell(\varphi_i)$

$$\ell(\varphi_i) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K f\varphi_i \,\mathrm{d}x$$

Formule de quadrature : $\int_K f\psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^N \omega_{l,K}\psi(b_{i,K})$

- $k = 0$:

$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \mathrm{mes}(K)\psi(a_{0,K})$$

- $k = 1$:

$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\mathrm{mes}(K)\sum_{i=1}^{3}\psi(a_{i,K})$$

- $k = 2$:

$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\mathrm{mes}(K)\sum_{i=4}^{6}\psi(a_{i,K})$$

Intégration de $\ell(\varphi_i)$

$$\ell(\varphi_i) = \sum_{K\in\mathscr{T}_h} \int_K f\varphi_i \,\mathrm{d}x$$

Formule de quadrature : $\int_K f\psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{N} \omega_{l,K}\psi(b_{i,K})$

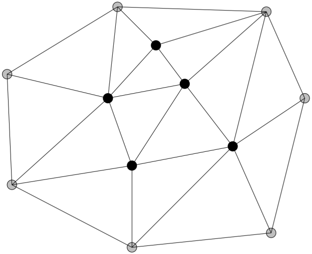
- $k = 0$:
$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \mathrm{mes}(K)\psi(a_{0,K})$$
- $k = 1$:
$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\mathrm{mes}(K)\sum_{i=1}^{3}\psi(a_{i,K})$$
- $k = 2$:
$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\mathrm{mes}(K)\sum_{i=4}^{6}\psi(a_{i,K})$$

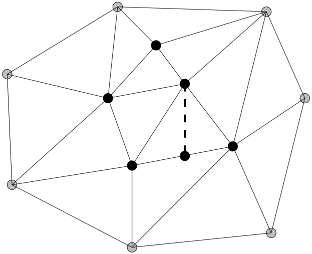
Maillage

- Un maillage (ou triangulation) de Ω est la donnée de N_{el} triangles $\{K_1, ..., K_{Nel}\}$ (fermés par convention) formant une partition de Ω.

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i, \quad \mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$$

- Le maillage est admissible si pour tout $K_i \neq K_j$, l'ensemble $K_i \cap K_j$ est
  1. soit vide
  2. soit un sommet commun K_i et K_j
  3. soit une arête commune K_i et K_j





Relations d'Euler

- On note
  - N_{el} le nombre d'éléments
  - N_{ar} le nombre d'arêtes
  - N_{so}^{int} le nombre de sommets intérieurs
  - N_{so}^{ext} le nombre de sommets extérieurs
  - $N_{so} = N_{so}^{int} + N_{so}^{ext}$ le nombre total de sommets
- Pour tout maillage admissible, on a (relations d'Euler)

$$N_{el} = N_{so} + N_{so}^{int} - 2(1 - J) \qquad N_{ar} = 2N_{so} + N_{so}^{int} - 3$$

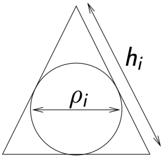
(J : nombre de trous dans Ω)

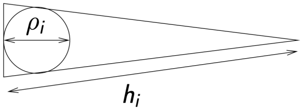
- Dans la limite pratique $N_{so}^{ext} << N_{so}$ et $N_{so}^{int} \sim N_{so}$, il vient

$$N_{el} \sim 2N_{so}^{int} \qquad N_{ar} \sim 3N_{so}^{int}$$

Échelles de longueur (1)

- On introduit pour chaque maille K_i deux échelles de longueur
  - son diamètre h_i
  - le diamètre de son cercle inscrit ρ_i
- On a $h_i/\rho_i \geq 1$ et $h_i/\rho_i >> 1$ lorsque le triangle K_i est très aplati

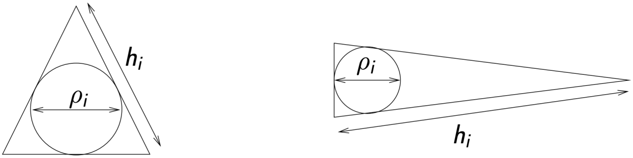




- On a $h_i/\rho_i \leq \frac{2}{\sin \theta_i}$ θ_i est le plus petit angle du triangle K_i

Échelles de longueur (2)

- On introduit pour chaque maille K_i deux échelles de longueur
  - son diamètre h_i
  - le diamètre de son cercle inscrit ρ_i
- On a $h_i/\rho_i \geq 1$ et $h_i/\rho_i >> 1$ lorsque le triangle K_i est très aplati



- On a $h_i/\rho_i \leq \frac{2}{\sin\theta_i}$ θ_i est le plus petit angle du triangle K_i

Échelles de longueur (2)

- Pour un maillage $\{K_1..., K_{N_{el}}\}$, on introduit les paramètres globaux

$$h = \max_{1 \leq i \leq N_{el}} h_i \qquad \sigma = \max_{1 \leq i \leq N_{el}} \frac{h_i}{\rho_i}$$

- Pour un maillage quasi-uniforme, $\sigma \gtrsim 1$ et $h_i \sim h$
- Pour un maillage quasi-uniforme, on a $h \sim (N_{el})^{-1/2}$
  1. en 1D, $h \sim (N_{el})^{-1}$
  2. en dimension d, $h \sim (N_{el})^{-1/d}$
  3. à h fixé, plus d est grand, plus il faut de mailles !
- Exemple de maillage avec raffinement local