TD 4 Analyse numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

22/3/2024

1 Méthode des différences finies

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + cu(x) = f(x) \quad \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où c est une constante positive, $f(x)$ une fonction continue. Cette équation modélise de nombreux problèmes de statique, par exemple la diffusion de la chaleur dans une barre.

On divise l'intervalle $[0;1]$ selon un pas $h = \frac{1}{N+1}$. On appelle nœuds les points de coordonnées $x_i = ih$ où $0 \leq i \leq N+1$. L'objectif est de calculer une approximation u_i des valeurs de la solution du problème aux points x_i. Il y a donc N valeurs à calculer $u(x_i)$; $1 \leq i \leq N$.

1. La solution u étant de classe C^4, en faisant un développement de Taylor à l'ordre 4 de u, montrer que l'approximation

$$u''(x) \simeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

   est d'ordre 2.

2. En déduire que la suite $(u(x_i))$ pour $1 \leq i \leq N$ peut être approchée par une suite (u_i) vérifiant la relation de récurrence :

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + c\,u_i = f_i \quad 1 \leq i \leq N \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

   où $f_i = f(x_i)$.

3. On pose $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$. Montrer que le problème approché se ramène à une résolution d'un système linéaire $AU = b$ où A est une matrice tridiagonale que l'on déterminera.

4. Montrer que A est une matrice symétrique définie positive.

2 Problème aux limites d'ordre 4

On considère le problème aux limites d'ordre 4 suivant

$$\begin{cases} \frac{d^4u(x)}{dx^4} = f(x) \quad \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

où $f(x)$ une fonction continue. Cette équation modélise de nombreux problèmes de statique, par exemple une poutre en flexion simple.

1. On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en $N+3$ points d'abscisses $x_i = ih$ où $0 \leq i \leq N+2$ et $h = \frac{1}{N+2}$. L'objectif est de calculer une approximation (u_i) des valeurs de la solution du problème aux points x_i. Montrer qu'il y a $N-1$ valeurs à calculer $u(x_i)\,;\, 2 \leq i \leq N$.
2. On définit l'opérateur linéaire T_h par $T_h f(x) = f(x+h)$ et on approche alors la dérivée par l'opérateur Δ :
$$\Delta = \frac{T_{\frac{h}{2}} - T_{-\frac{h}{2}}}{h}$$
Justifier rapidement l'approximation $\Delta u \simeq u'$ et calculer Δ^4. En déduire une approximation de $\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4}(x_i)$.Montrer que cette dernière approximation est d'ordre 2.
3. En déduire que la suite $(u(x_i))$ pour $2 \leq i \leq N$ peut être approchée par une suite (u_i) vérifiant la relation de récurrence d'ordre 4 :
$$\begin{cases} \dfrac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{h^4} = f_i \quad 2 \leq i \leq N \\ u_0 = u_{N+2} = 0 \\ u_1 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$
où $f_i = f(x_i)$.
4. On pose $U = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$. Montrer que le problème approché se ramène à une résolution d'un système linéaire $AU = b$ où A est une matrice pentadiagonale que l'on déterminera.

3 Équation de la chaleur

On considère l'équation aux dérivées partielles de la chaleur en dimension 1 suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^* \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en $N+2$ points d'abscisses $x_i = ih$ où $0 \leq i \leq N+1$ avec $h = \frac{1}{N+1}$ et soit τ le pas de temps. On note u_i^n la valeur approchée de $u(x_i, t_n)$ avec $t_n = n\tau$ et on considère le schéma dit d'Euler implicite qui est le suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \nu \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

1. Montrer que ce schéma est précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.
2. On pose $u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$. Montrer que le schéma se traduit sous la forme matricielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Mu^{n+1} = u^n$$

3. Expliquer rapidement comment on programmerait l'algorithme.
4. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Montrer que si λ est valeur propre de A alors $0 < \lambda < 4$. En déduire que le rayon spectral de M^{-1} vérifie $\rho(M^{-1}) \leq 1$.
5. On dit que le schéma est stable ssi pour tout entier n, $\|u^n\| \leq \|u^0\|$. Montrer que

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\|$$

   En déduire que le schéma est stable.

4 Problème de Dirichlet

1. En dimension deux, soit le domaine $D = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$, on désigne par ∂D le bord de D. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } D \\ u = 0 \text{ sur } \partial D \end{cases}$$

   La discrétisation par différences finies sur un quadrillage uniforme de pas $\delta x = \frac{a}{N+1}$ et $\delta y = \frac{b}{M+1}$ est :

$$\begin{aligned} &\frac{-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}}{\delta x^2} + \frac{-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1}}{\delta y^2} = f_{i,j}; \qquad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M \\ &u_{i,0} = u_{i,M+1} = u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

2. On note $u_{i,j} = u_m$ avec $m = i + (j-1)N$. Soit le vecteur $U = (u_m)$. Pour $N = M = 3$, écrire le système sous la forme $AU = F$. Montrer A est inversible et définie positive.
3. Vérifier que les vecteurs propres de la matrice sont les vecteurs $u(p, q)$ définis par

$$(u(p, q))_{i,j} = \sin\left(p\pi \frac{i\delta x}{a}\right) \sin\left(q\pi \frac{j\delta y}{b}\right)$$

   Les valeurs propres associées sont

$$\lambda_{p,q} = \frac{4}{\delta x^2} \sin^2\left(p\pi \frac{\delta x}{2a}\right) + \frac{4}{\delta y^2} \sin^2\left(q\pi \frac{\delta y}{2b}\right)$$

4. Pour N et M assez grands, calculer une valeur approchée de $\text{Cond}_2 A$.
5. On suppose $M = N$, et $a = b$ calculer un équivalent de $\text{Cond}_2 A$ quant $N \to \infty$.

5 Problème de Dirichlet

1. En dimension deux, soit le domaine $D = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$, on désigne par ∂D le bord de D. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } D \\ u = 0 \text{ sur } \partial D \end{cases}$$

La discrétisation par différences finies sur un quadrillage uniforme de pas $\delta x = \frac{a}{N+1}$ et $\delta y = \frac{b}{M+1}$ est :

$$\begin{aligned} &\frac{-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}}{\delta x^2} + \frac{-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1}}{\delta y^2} + u_{i,j} = f_{i,j}; \qquad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M \\ &u_{i,0} = u_{i,M+1} = u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

2. On note $u_{i,j} = u_m$ avec $m = i + (j-1)N$. Soit le vecteur $U = (u_m)$ Pour $N = M = 4$, écrire le système sous la forme $AU = F$. Montrer A est inversible et définie positive.
3. Vérifier que les vecteurs propres de la matrice sont les vecteurs $u(p, q)$ définis par

$$(u(p,q))_{i,j} = \sin\left(p\pi \frac{i\delta x}{a}\right) \sin\left(q\pi \frac{j\delta y}{b}\right)$$

Déterminer les valeurs propres associées.
4. Pour N et M assez grands, calculer une valeur approchée de $\text{Cond}_2 A$.
5. On suppose $M = N$, et $a = b$ calculer un équivalent de $\text{Cond}_2 A$ quant $N \to \infty$.
6. Donner la matrice A associée au graphe suivant :