TD 1 Analyse numérique (B1-TP1)

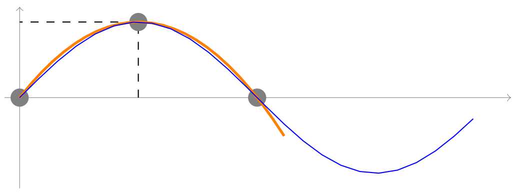
Ibrahim ALAME

25/01/2024

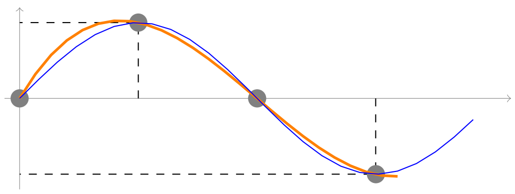
1

Interpolation : On veut calculer, par trois méthodes distinctes, le polynôme d'interpolation de de la fonction $f(x) = \sin(x)$ en les 3 points $x_i = i\frac{\pi}{2}$ pour $i = 0, 1, 2$. On cherche donc $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p(x_i) = \sin(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2$. Utiliser pour cela les trois méthodes suivantes :

1. Méthode directe : Poser $P(x) = ax^2 + bx + c$ puis résoudre le système linéaire $p(x_i) = \sin(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2$.
2. Méthode de Lagrange : Appliquer $P(x) = \sum_{i=0}^{2} \sin(x_i)L_i(x)$ après avoir calculer les polynôme $L_i(x)$ pour $i = 0, 1, 2$.
3. Méthode de Newton : Appliquer $P(x) = \sum_{i=0}^{2} \Delta_i \Pi_{k=0}^{i-1}(x - x_k)$ après avoir calculer les différences divisées Δ_i pour $i = 0, 1, 2$.



Maintenant on veut calculer le polynôme d'interpolation en ajoutant le nouveau point d'interpolation $x_3 = \frac{3\pi}{2}$. Appliquer les trois méthodes précédentes et conclure.



2

Convergence de l'interpolation de Lagrange : Soit P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha}, \qquad -1 \leq x \leq 1$$

aux $n + 1$ points distincts $x_0, ..., x_n$ de l'intervalle $[-1, 1]$.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction f.
2. Montrer que si $\alpha > 3$, et si les $n+1$ points $x_0, ..., x_n$ sont équidistants, nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$$

3. Écrire l'approximation spline linéaire, s_n de f.
4. Montrer que si $\alpha \notin [-1, 1]$, nous avons

$$\|f - s_n\|_\infty \leq \frac{c}{n^2}$$

et donc que s_n converge uniformément vers f lorsque n tend vers l'infini.

3

Moindre carrés discrets : Nous recherchons le polynôme P de degré 2 qui approche le mieux le nuage de points $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq 6}$ suivant :

$$(-2, 5), \quad (-1, 1), \quad (0, -3), \quad (1, -3), \quad (2, -2), \quad (3, 1)$$

1. Tracer le nuage de points.
2. On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$. les inconnues a , b et c sont solution du système :

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{x} & \overline{x^2} \\ \overline{x} & \overline{x^2} & \overline{x^3} \\ \overline{x^2} & \overline{x^3} & \overline{x^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \\ \overline{x^2y} \end{pmatrix}$$

3. Résoudre le système et tracer la solution du problème.

4

Intégration numérique : On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

1. Calculer la valeur exacte de I.
2. Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes avec n = 3 sous-intervalles.
3. Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question précédente est-elle supérieure à $\ln(2)$? Est-ce vrai quelque soit n ? Justifier la réponse. (On pourra s'aider par un dessin.)
4. Quel nombre de sous-intervalles n faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ? On rappelle que l'erreur de quadrature associée s'écrit, si $f \in C^2([a, b])$.

$$E = \left| \frac{(b-a)^4}{12n^2} f''(\xi) \right| \qquad \xi \in]a, b[$$

5

Voici le relevé de la vitesse d'écoulement de l'eau v dans un conduit cylindrique en fonction du temps t :

t(s)	0	10	20	30	40	50	60
v(m/s)	2	1.98	1.7	1.44	1.32	1.20	1.02

La vitesse moyenne de l'eau en écoulement dans le conduit cylindrique peut être calculée par la relation suivante :

$$\overline{v} = \frac{1}{60} \int_0^{60} v(t) \mathrm{d}t$$

1. Calculer la vitesse moyenne de l'eau $\overline{v}$ par la méthode des rectangles à droite.
2. Calculer la vitesse moyenne de l'eau $\overline{v}$ par la méthode des trapèzes.
3. Peut-on déterminer la vitesse moyenne de l'eau $\overline{v}$ par la méthode de Simpson ? Justifier rigoureusement votre réponse.

6

On souhaite déterminer une valeur approchée de

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

en subdivisant l'intervalle $[0, 1]$ en $N = 10$ sous-intervalles.

1. Majorer l'erreur commise en utilisant les différentes méthodes usuelles (rectangle à gauche, rectangle à droite, point milieu, trapèzes, Simpson).
2. Proposer une approche permettant de déterminer une valeur approchée de I à 10^{-10} près. (On pourra envisager une autre valeur de N).

7

On rappelle que l'erreur commise par la méthode des trapèzes pour une fonction f de classe $C^2([a, b])$ est majorée ainsi :

$$|I(f, a, b) - I_N(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)M_2}{12} h^2$$

où $M_2 = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(2)(x)|$. Combien faut-il de subdivisions de $[0, 1]$ pour évaluer l'intégrale

$$I = \int_0^1 x e^{-x} \mathrm{d}x$$

à 10^{-6} près ?

8

On considère f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $J = [a, b]$, que l'on subdivise en N sous-intervalles. On note respectivement I_{RG}, I_{RD}, I_T , I_{PM}, I_S les approximations données par les méthodes usuelles (rectangles à gauche, rectangle à droite, trapèzes, point milieu, Simpson) de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $I_T = \frac{I_{RG}+I_{RD}}{2}$
2. Exprimer I_S en fonction de I_{PM} et I_T .
3. Lorsque l'on connaît I_{RG} comment calculer rapidement I_{RD} ?
4. On suppose que f est une fonction croissante. Montrer que l'on a les inégalités $I_{RG} \leq I \leq I_{RD}$.
5. On suppose maintenant que f est une fonction convexe. Montrer que $I_{PM} \leq I \leq I_T$.

9

1. Déterminer par la méthode des rectangles à gauche et à droite puis celle des trapèzes la valeur de $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. sur la base des valeurs données dans le tableau suivant

x	0	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$
$f(x)$	0	$0,0993346$	$0,1947091$	$0,2823212$	$0,3586780$	$0,4207354$

2. Ces points sont ceux donnant $f(x) = \sin(t)\cos(t)$. Comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte. Conclure.

10

Le but de l'exercice est de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 x^3 e^{-x}\mathrm{d}x$. et la comparer avec sa valeur exacte. Pour cela, on découpe l'intervalle $[0, 1]$ en $N = 10$ sous intervalle de même longueur.

1. Calculer la valeur du pas h.
2. Donner la valeur exacte de l'intégrale I.
3. (a) Calculer I par la méthode des rectangles à gauche.
   (b) Calculer I par la méthode des rectangles du point milieu.
   (c) Calculer I par la méthode des trapèzes.
4. Déterminer numériquement l'erreur relative commise par chaque méthode. Conclure.

11

Formule de Quadrature : Considérons la formule de quadrature suivante

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_1 f(-\alpha) + \omega_2 f(\alpha)$$

Où $\alpha \in]0; 1]$.

1. Déterminer les poids pour que cette formule de quadrature soit exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$
2. On adopte désormais les poids déterminés à la question précédente. Quelle est la formule obtenue lorsque $\alpha = 1$? Est-elle exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. Montrer que cette formule de quadrature est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour une et une seule valeur de α, à déterminer.
4. On adopte la valeur de déterminée à la question précédente. La formule est-elle exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$? sur $\mathbb{R}_4[X]$?
5. Adapter la formule obtenue à une intégrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, puis à une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
6. Exprimer la formule composite obtenue lorsque l'on subdivise l'intervalle $[a;b]$ en N sous-intervalles.

12

On propose dans un premier temps de construire la formule de quadrature à deux points

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3} f\left(-\frac{\xi}{2}\right) + \frac{2}{3} f(\xi)$$

1. Déterminer ξ pour que la formule de quadrature soit exacte pour toute fonction f polynomiale de degré $m \geq 1$ et donner la plus grande valeur de m.
2. À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale :
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
3. En déduire une formule de quadrature composite à $2n+1$ points, pour le calcul approché de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

13

Soit $f \in C^1([0;1])$. On considère la formule de quadrature élémentaire

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \simeq \omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f'(\xi)$$

où $\xi \in]0;1]$ et ω_0, ω_1 et ω_2 sont des réels. On pose

$$E(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - [\omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f'(\xi)]$$

1. Déterminer les paramètres ξ, ω_0, ω_1 et ω_2 pour que la formule de quadrature soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
2. Les paramètres ξ, ω_0, ω_1 et ω_2 étant ainsi fixés, calculer $E(x \mapsto x^4)$ et en déduire l'ordre de la méthode.
3. A l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle $[a, b]$.

14

1. Soit la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\alpha)$$

   Où $\alpha \in]0;1]$.

   (a) Déterminer les poids pour que la formule soit exacte sur $\mathbb{R}_1[X]$.

   (b) Déterminer α pour que la méthode soit exacte pour les polynômes de degré ≤ 2.

   (c) Adapter la formule obtenue à un intervalle $[0;h]$.

2. On va dans le cas de cette formule pour une intégrale $\int_0^h f(x)\mathrm{d}x$ prouver une estimation de l'erreur commise par la formule de quadrature pour une fonction f supposée de classe C^3 sur $[0;h]$.

   On notera $I(f) = \int_0^h f(x)\mathrm{d}x$, $Q(f)$ l'approximation donnée par la formule de quadrature, et enfin $E(f) = I(f) - Q(f)$.

   (a) Soit $M_3 = \sup_{0 \leq x \leq h} \left| f^{(3)}(x) \right|$. Montrer que l'on peut écrire $f(x) = P(x) + R(x)$ avec P un polynôme de degré 2, que l'on précisera et R une fonction vérifiant

$$\forall x \in [0,h], \quad |R(x)| \leq \frac{M_3}{6} x^3$$

   (b) Majorer en fonction de M_3 et de h les valeurs de $|I(R)|$, de $|Q(R)|$, de $|E(R)|$.

   (c) En déduire une majoration de $|E(f)|$.

3. (a) Donner la formule composite pour le calcul d'une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ associée à la formule de quadrature élémentaire étudiée.

   (b) Donner une majoration de l'erreur lorsqu'on utilise cette formule composite.

15

Soit une formule de quadrature élémentaire à p points. Montrer que cette formule ne peut pas être exacte pour tous les polynômes de $\mathbb{R}_{2p}[X]$. (Indication : considérer le polynôme $Q(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - \alpha_i)^2$)

16

Soit p un entier avec $p > 1$. La formule à p points définie par

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{i-1}{p-1} \right)$$

est-elle exacte sur $\mathbb{R}_1[X]$? Sur $\mathbb{R}_2[X]$?

17 Polynômes orthogonaux

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire

$$(P|Q) = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$P_n(X) = \frac{1}{n!2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n} \left[\left(X^2 - 1\right)^n \right]$$
   (a) Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.
   (b) Déterminer $\|P_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer P_0, P_1, P_2 et P_3.
3. Déterminer les paramètres ξ_i et ω_i, $i = 1, 2, 3$ de la formule de quadrature
$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \simeq \omega_1 f(\xi_1) + \omega_2 f(\xi_2) + \omega_3 f(\xi_3)$$
4. En déduire la formule composite de la méthode de Gauss-Legendre pour approcher à l'ordre 3 la valeur de l'intégral
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$