TECE Projet 1 : Suites et séries numériques

Problème 1

On a $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a + \frac{1-e^{-n}}{2} u_n$$

1. Par récurrence.
2. On commence par montrer que

$$2a - u_{k+1} = \frac{1}{2}(2a - u_k) + \frac{e^{-k}}{2} u_k$$

puis on multiplie les deux membres par 2^{k+1} :

$$2^{k+1}(2a - u_{k+1}) = 2^k(2a - u_k) + \left(\frac{2}{e}\right)^k u_k$$

3. On fait une somme télescopique entre $k = 0$ et $k = n-1$:

$$2^n(2a - u_n) = a + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{e}\right)^k u_k$$

4.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^k u_k \leq 2a \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^k = \frac{2a}{1-\frac{2}{e}} < \infty$$

Donc

$$2^n(2a - u_n) \sim a + S$$

où S est la somme de la série du second membre $S = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^k u_k$. Donc

$$2a - u_n \sim \frac{a+S}{2^n} = \frac{K}{2^n}$$

Donc (u_n) converge géométriquement vers $\ell = 2a$.

Problème 2

Partie 1

On a pour $t \in [0, n]$ les expressions :

$$f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n, \quad g_n(t) = e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n, \quad h_n(t) = e^t g_n'(t)$$

1.

$$h_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} - 1$$

$$h_n'(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} \frac{1-t}{n}$$

t	0		1		x_n		n
h_n'		$+$	0	$-$		$-$	
h_n	0	$\nearrow$	$e(1-\frac{1}{n})^{n-1} - 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

h_n décroit sur $[1, n]$ en changeant de signe donc d'après le TVI, elle s'annule en un unique $x_n \in [1, n]$. Donc $g_n'(x_n) = 0$.

t	0		x_n		n
g_n'		$+$	0	$-$	
g_n	0	$\nearrow$	$g_n(x_n)$	$\searrow$	e^{-n}

On a donc g_n positif et admet un maximum en x_n :

$$0 \leq g_n(t) \leq g_n(x_n)$$

2. On a $h_n(x_n) = 0 \Longrightarrow (1-\frac{x_n}{n})^{n-1} = e^{-x_n}$ donc

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - (1-\frac{x_n}{n})^n = e^{-x_n} - e^{-x_n}(1-\frac{x_n}{n}) = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}$$

La fonction $x \mapsto xe^{-x}$ étant décroissante sur $[1,n]$, on a alors

$$g_n(x_n) \leq \frac{1}{ne}$$

3.
$$I_n(x) = \int_0^n f_n(t)t^{x-1}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

— En 0 : $f_n(t)t^{x-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x<1$

— à l'infini : $f_n(t)t^{x-1} \sim e^{-t}t^{1-x} = o(\frac{1}{t^2})$

Donc d'après le critère de Riemann l'intégrale $I_n(x)$ converge. Pour la deuxième intégrale nous avons les mêmes équivalences donc $\Gamma(x)$ converge également.

4. La suite $(f_n(t))_n$ est croissante et converge vers e^{-t} donc $f_n(t) \leq e^{-t}$ d'où la première inégalité : $0 \leq \Gamma(x) - I_n(x)$. D'autre part

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) - I_n(x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t - \int_0^n f_n(t)t^{x-1}\mathrm{d}t \\
&= \left[\int_0^c e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t + \int_c^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\right] - \left[\int_0^c f_n(t)t^{x-1}\mathrm{d}t + \int_c^n f_n(t)t^{x-1}\mathrm{d}t\right] \\
&= \int_0^c g_n(t)t^{x-1}\mathrm{d}t + \int_c^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t - \int_0^c f_n(t)t^{x-1}\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^c g_n(t)t^{x-1}\mathrm{d}t + \int_c^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

5. Par passage à la limite (à justifier)

$$0 \leq \Gamma(x) - \lim_{n\to\infty} I_n(x) \leq \int_c^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

c étant arbitraire, en faisant tendre c vers l'infini, on a

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} I_n(x)}$$

Partie 2

Formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

On a :

$$P_0(\alpha) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad P_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1} 1 + k\alpha$$

$$J_0(\alpha) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad J_n(\alpha) = \int_0^1 (1-t^\alpha)^n \mathrm{d}t$$

1. On a :

$$J_n(\alpha) = \int_0^1 (1-t^\alpha)^n\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^\alpha)(1-t^\alpha)^{n-1}\mathrm{d}t = J_{n-1}(\alpha) - \int_0^1 t \times t^{\alpha-1}(1-t^\alpha)^{n-1}\mathrm{d}t$$

Ensuite, on fait une intégration par parties et on obtient

$$(1+n\alpha)J_n(\alpha) = n\alpha J_{n-1}(\alpha)$$

.

2. On trouve

$$\boxed{J_n(\alpha) = \frac{n!\alpha^n}{(1+n\alpha)P_n(\alpha)}}$$

3. On a

$$I_n(\frac{1}{\alpha}) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}t$$

On fait le changement de variable $\frac{t}{n} = u^\alpha$ et on obtient :

$$I_n(\frac{1}{\alpha}) = \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} J_n(\alpha)$$

On a

$$P_n(\alpha) = \frac{n!\alpha^n}{(1+n\alpha)J_n(\alpha)} \sim \frac{n!\alpha^n \alpha n^{\frac{1}{\alpha}}}{n\alpha I_n(\frac{1}{\alpha})} \sim \frac{n!\alpha^n n^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}$$

Compte tenu de la formule de Stirling, on obtient

$$\boxed{P_n(\alpha) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^n n^{n+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}}}$$

4. On pose :

$$Q_n(p,x) = \prod_{k=0}^{n-1} x+kp$$

On a donc

$$\boxed{Q_n(p,x) = x^n P_n(\frac{p}{x})}$$

5. (a) On a

$$Q_n(2,x)\times Q_n(2,x+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+2k)\prod_{k=0}^{n-1}(x+2k+1) = \prod_{i=0}^{2n-1}(x+i) = Q_{2n}(1,x)$$

On a donc

$$\boxed{P_n(\frac{2}{x})P_n(\frac{2}{x+1}) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^n P_{2n}(\frac{1}{x})}$$

(b) Par passage à l'équivalent :

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{x}{2})}\left(\frac{2}{ex}\right)^n n^{n+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{x+1}{2})}\left(\frac{2}{e(x+1)}\right)^n n^{n+\frac{x}{2}} \sim \left(\frac{x}{x+1}\right)^n\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)}\left(\frac{1}{ex}\right)^{2n}(2n)^{2n+x-\frac{1}{2}}$$

soit

$$\frac{2\pi}{\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2})}\left(\frac{1}{ex}\right)^{2n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n 2^{2n}n^{2n+x-\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{x}{x+1}\right)^n\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)}\left(\frac{1}{ex}\right)^{2n}2^{2n+x-\frac{1}{2}}n^{2n+x-\frac{1}{2}}$$

Après simplification on obtient

$$\boxed{\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2}) = \sqrt{\pi}2^{1-x}\Gamma(x)}$$

(c) On fait $x=1$ et on obtient

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

puis à l'aide d'un changement de variable, on obtient

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$