# Enseignement de la Méthode des Éléments Finis en tronc commun à l'ESTP

27 mars 2024

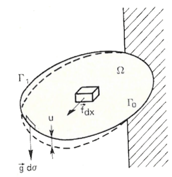
**Outils d'analyse fonctionnelle**

- Rappels sur les distributions
- Espaces de Sobolev
$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$
$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Plus généralement $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$.
- Théorème de trace ,
$$H^1_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v_{/\Gamma} = 0\}$$

**Formulation variationnelle**

- Formule de Green :
$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \cdot v \,\mathrm{d}\sigma$$
- Problème aux limites elliptiques
*Problème de Dirichlet :*
$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \iff \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\,\varphi \,\mathrm{d}x$$
*Problème de Neumann :*
$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \iff \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\,\varphi \,\mathrm{d}x$$
- Problèmes variationnels abstraits Trouver $u \in V$ tel que
$$\boxed{\forall v \in V \quad a(u,v) = \ell(v)}$$
$\iff$ Trouver $u \in V$ tel que $\boxed{J(u) = \min_{v \in V} J(v)}$ où $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$.

- Théorème de Lax-Milgram
- Système de l'élasticité



$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma(u) + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u)\vec{n} = g & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

où

$$\sigma_{ij}(v) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{kk}\right)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(v) \text{ et } \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

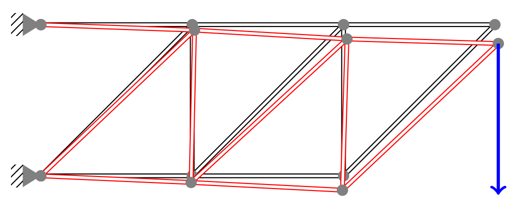
La formulation variationnelle : Trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V \quad a(u,v) = \ell(v)$ où

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\,\mathrm{d}x \text{ et } \ell(v) = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} f_i\, v_i\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} g_i\, v_i\,\mathrm{d}\sigma$$

Cas particuliers

**Barres** : Trouver $u \in V = H^1(0,L)$ tel que : $\forall v \in V \ a(u,v) = \ell(v)$, où

$$a(u,v) = \int_0^L ESu'v'\,\mathrm{d}x, \quad \text{et} \quad \ell(v) = f_L v(L) - f_0 v(0)$$



**Poutres :** Trouver $u \in V = H_0^2(0,L)$ tel que : $\forall v \in V \ a(u,v) = \ell(v)$, où

$$a(u,v) = \int_0^L EIu''v''\,\mathrm{d}x, \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_0^L f \cdot v\,\mathrm{d}x$$

**Plaques et coques minces (Contraintes planes) :**

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{11} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \sigma^T = [\sigma_{11} \;\; \sigma_{22} \;\; \sigma_{12}]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{2} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

- Système de Stokes :

$$\begin{cases} -\mu\,\Delta u + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Trouver $u \in V$ tel que :

$$a(u,v) - \int_\Omega p \operatorname{div} v \,\mathrm{d}x = \ell(v)$$

où

$$a(u,v) = \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \quad \text{ et } \quad \ell(v) = \int_\Omega f \cdot v \,\mathrm{d}x$$

- Approximation variationnelle. Trouver $u_h \in V_h$ solution de

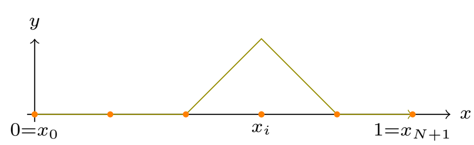
$$\boxed{\forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)}$$

- Application en dimension $n = 1$.
  1. Problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + \mu\, u = f \quad \text{sur } ]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$a(u,v) = \int_0^1 (\lambda\, u'v' + \mu\, uv)\mathrm{d}x \quad \text{ et } \quad \ell(v) = \int_0^1 f\, v \,\mathrm{d}x$$

$$V_h = \{v \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega});\; v(0) = v(1) = 0,\; v_{/K_i} \in P_1,\; 0 \le i \le I\} = \operatorname{Vect}(\varphi_i)$$




$u_h = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j$ où les $(u_j)$ sont solution de $\boxed{\displaystyle\sum_{j=1}^n a(\varphi_i, \varphi_j) u_j = \ell(\varphi_i) \text{ pour } i = 1, n}$

matriciellemnt

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_1,\varphi_2) & 0 & \cdots & 0 \\ a(\varphi_2,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_2) & a(\varphi_2,\varphi_3) & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a(\varphi_{n-1},\varphi_{n-2}) & a(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1}) & a(\varphi_{n-1},\varphi_n) \\ 0 & \cdots & 0 & a(\varphi_n,\varphi_{n-1}) & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \ell(\varphi_2) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_n) \end{pmatrix}$$

2. Problème de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + \mu\, u = f \quad \text{sur } ]0,1[, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{array} \right.$$

$$a(u,v) = \int_0^1 (\lambda\, u'v' + \mu\, uv)\mathrm{d}x \quad \text{ et } \quad \ell(v) = \int_0^1 f\, v\, \mathrm{d}x$$

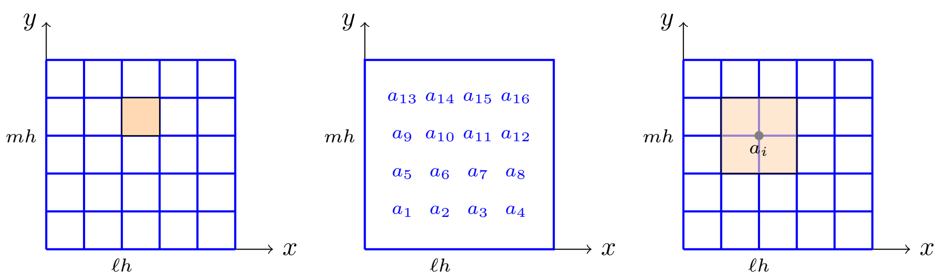
$$V_h = \{v \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega});\;\; v_{/K_i} \in P_1,\ 0 \le i \le I\}$$

- Application en dimension $n = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f & \text{dans } \Omega = ]0,1[\times]0,1[, \\ u &=& 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right.$$

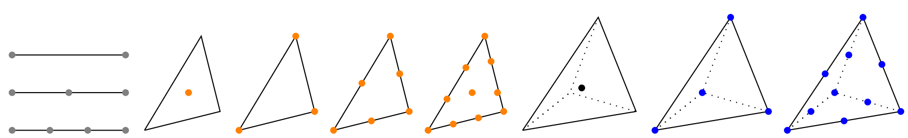
$$a(u,v) = \int_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{ et } \quad \ell(v) = \int_\Omega f\, v\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$V_h = \{v \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega});\;\; v_{/K_{\ell,m}} \in Q_1,\ 0 \le \ell, m \le M\}$$

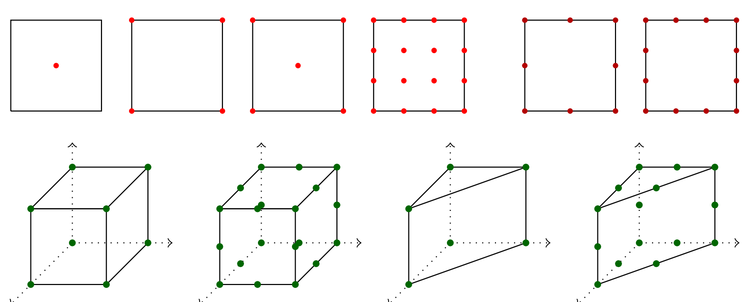



**Éléments finis**

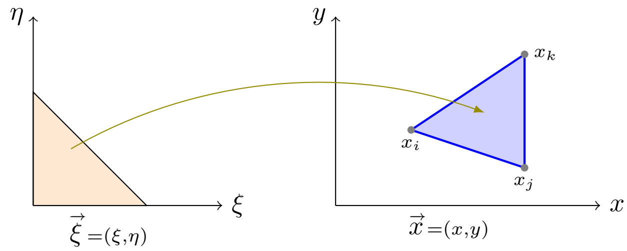
- Interpolation de Lagrange dans $\mathbb{R}^n$ : éléments finis simpliciaux, $(K, P_k, \Sigma_k)$.



- Éléments finis parallélotopes. Unisolvants.



- Éléments finis d'Hermite,
- Mise en œuvre pratique de la méthode des éléments finis : Maillage , Famille affine d'éléments finis, Formules de quadrature en 1D, 2D et 3D. Assemblage de la matrice du système.




- Analyse de la méthode des éléments finis : Cas d'un ouvert $\Omega$ polyédrique. Cas d'un ouvert $\Omega$ à frontière courbe. Convergence de la méthode des éléments finis.

### Théorie spectrale des problèmes aux limites

- Problèmes spectraux : équation de la chaleur, équation des ondes.
- Théorie spectrale abstraite. Trouver les valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une solution $u \in V$ non nulle, de l'équation

$$\forall v \in V \quad a(u,v) = \lambda(u,v)$$

- Application aux problèmes aux limites elliptiques.

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(\overrightarrow{w_m}) = \lambda_m \, w_{m,i} & \text{dans } \ \Omega \\ w_{m,i} = 0 & \text{sur } \ \Gamma_0 \\ \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(\overrightarrow{w_m})\nu_j = 0 & \text{dans } \ \Gamma_1 \end{cases}$$

$\omega_m = \sqrt{\lambda_m} = m^{\text{ième}}$ pulsation propre et $\overrightarrow{w_m}$ le mode propre de vibration du corps solide élastique

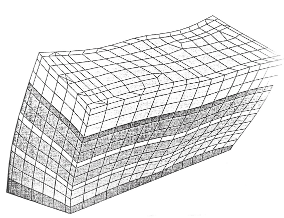


Figure 1.2: Mode $n^o$ 1 pour le maillage $n^o$ 1 : $f_1 = 16.31Hz$

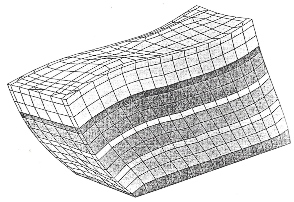


Figure 1.3: Mode $n^o$ 2 pour le maillage $n^o$ 1 : $f_2 = 23.96Hz$

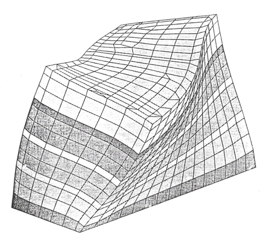


Figure 1.4: Mode $n^o$ 3 pour le maillage $n^o$ 1 : $f_3 = 26.27Hz$

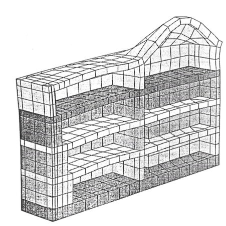


Figure 1.5: Mode $n^o$ 4 pour le maillage $n^o$ 1 : $f_4 = 42.38Hz$

### Problèmes d'évolution

- Problème parabolique :
  1. équation de la chaleur, système de Stokes.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \ \Omega_T \\ u = 0 & \text{sur } \ \Sigma_T \\ u(.,0) = u_0 & \text{dans } \ \Omega \end{cases} \iff \begin{cases} \ \text{Trouver une fonction } u : \\ u \in L^2(0,T;V) \cap \mathscr{C}^0(0,T;H), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \quad \text{où } a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

2. Méthode de semi-discrétisation.

$$\forall v_h \in V_h \quad a(w_{i,h}, v_h) = \lambda_{i,h}(w_{i,h}, v_h)$$

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ (u_{0,h}, w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h} t} + \int_0^t (f(s), w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h}(t-s)} \mathrm{d}s \right\} w_{i,h}$$

3. Discrétisation totale.

$$\frac{1}{\Delta t}(y_{n+1} - y_n) = \theta\, \varphi(t_{n+1}, y_{n+1}) + (1-\theta)\, \varphi(t_n, y_n), \quad 0 \le n \le N-1$$

- Problème hyperbolique : équation des ondes. Semi-discrétisation et discrétisation totale.

1. équation de la chaleur, système de Stokes.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \ \Omega_T \\ u = 0 & \text{sur } \ \Sigma_T \\ u(.,0) = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(.,0) = u_1 & \text{dans } \ \Omega \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \ \text{Trouver une fonction } u : \\ u \in \mathscr{C}^0(0,T;V) \cap \mathscr{C}^1(0,T;H), \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \quad \text{où } a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \\ u(0) = u_0\ \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \end{array} \right.$$

2. Méthode de semi-discrétisation.

$$\forall v_h \in V_h \quad a(w_{i,h}, v_h) = \lambda_{i,h}(w_{i,h}, v_h)$$

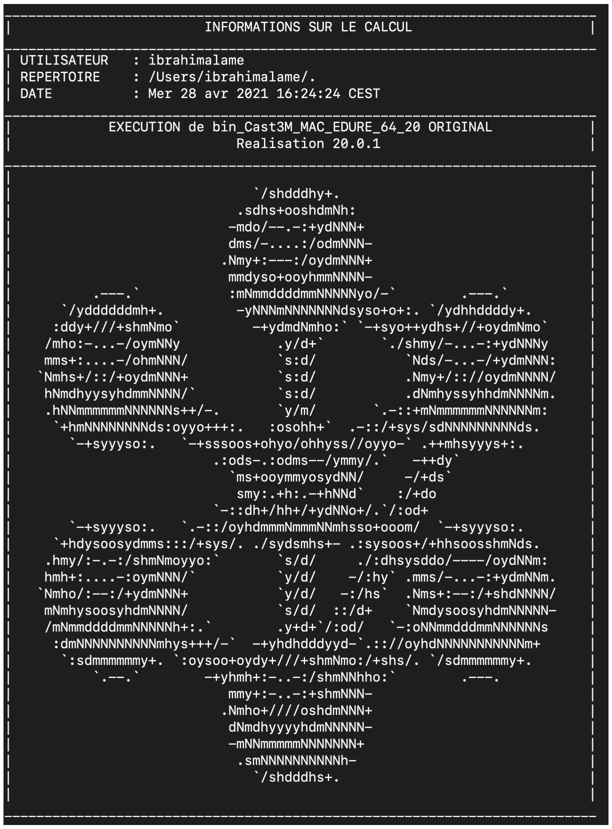
On pose $\omega_{i,h} = \sqrt{\lambda_{i,h}}$

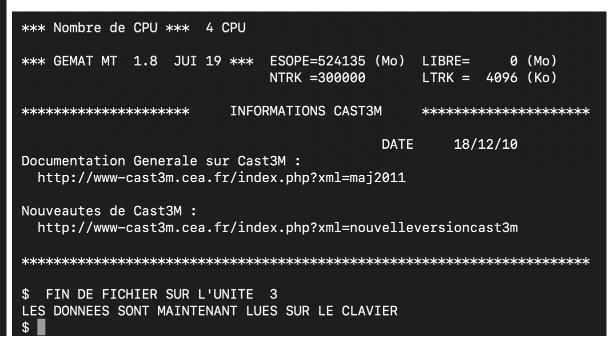
$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ (u_{0,h}, w_{i,h}) \cos \omega_{i,h} t + \frac{1}{\omega_{i,h}} (u_{1,h}, w_{i,h}) \sin \omega_{i,h} t + \frac{1}{\omega_{i,h}} \int_0^t (f(s), w_{i,h}) \sin(\omega_{i,h}(t-s)) \mathrm{d}s \right\} w_{i,h}$$

3. Discrétisation totale.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \Delta t z_n + \Delta t^2 \left(\beta \varphi_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \varphi_n\right) \\ z_{n+1} = z_n + \Delta t(\gamma\, \varphi_{n+1} + (1-\gamma)\, \varphi_n), \quad 0 \le n \le N-1 \end{array} \right.$$

## Exemples avec CAST3M20




```
opti dime 3 elem cub8;
l1 = (0 0 0)droi (0 0.03 0) 3;
S1 = L1 tran (0 0 0.1) 10;
V1 = S1 volu tran (1. 0 0) 50;
trac V1 cach titr 'poutre' ;
mo1 = mode V1 mecanique elastique isotrope;
ma1 = mate mo1 youn 30.e9 nu 0.2;
trac ma1 mo1;

CL1 = bloq depl S1;

ptx1 = (V1 coor 1) point maxi;
trac ((ptx1 coul roug) et (aret V1));
F1=forc ptx1 (0 0 -1000);
trac (F1 vect forc vert)(aret V1);
k1 = rigi mo1 ma1;
k1= k1 et cl1;
```

```
u1 = reso k1 F1;
# Taille de la matrice: 997728 Facteur: 8.0591     Conditionnement: 0.0000     Performance #(Gflop/s
trac u1 V1;
def0 = defo u1 (aret V1) 0. blan ;
def1 = defo u1 V1 roug;
trac (def0 et def1);
```