

Projet numérique: calcul des structures, Barres et poutres

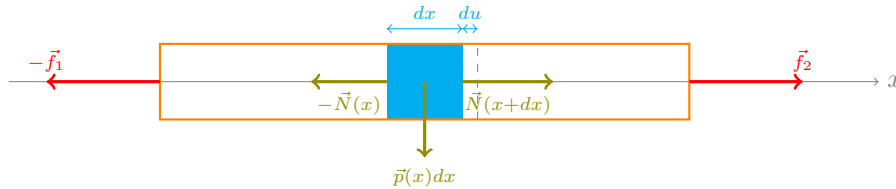
Ibrahim ALAME

21/03/2024

La première partie du projet est consacrée à la formulation d'une barre (ou de treillis) qui permet d'analyser des structures constituées de poutres articulées aux deux extrémités et qui ne transmettent que des efforts de traction compression aux nœuds d'assemblages. Sur le plan pratique, cela permet d'évaluer rapidement la distribution des efforts dans les structures de type pylônes, ossatures, toitures en treillis métalliques, etc. La deuxième partie traite des portiques ...

Considérons une barre homogène de module E , section constante A et de longueur L soumise à une sollicitation $f(x)$. Les équations du problème sont :

Équation d'équilibre



Nous avons

$$N(x+dx) - N(x) + p(x)dx = 0 \implies \frac{dN(x)}{dx}dx + p(x)dx = 0 \implies \boxed{\frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0}$$

Dans la suite du projet, nous allons négliger les forces linéiques $p(x) \simeq 0$.

Loi de comportement

On applique la loi de Hooke : $\sigma = E\varepsilon$ où E est le module de Young, σ est la contrainte $\frac{N}{A}$ et $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ est la déformation élastique : $\varepsilon_1 = \frac{du}{dx}$ (déformation totale) et $\varepsilon_2 = \alpha\Delta T$ (déformation thermique), où α est le coefficient de dilatation linéaire.

$$\sigma = E\varepsilon \implies \frac{N}{A} = E(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \implies \boxed{N = EA \left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T \right)}$$

Problème à résoudre

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = 0; & 0 \leq x \leq L & \text{équation d'équilibre} \\ N = EA \left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T \right) & 0 \leq x \leq L & \text{loi de comportement} \\ u(0) = u_1; u(L) = u_2 & & \text{conditions aux limites} \\ N(0) = -f_1; N(L) = f_2 & & \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

L'objectif est d'exprimer les efforts $N(x)$ aux extrémités $x = 0$ et $x = L$ en fonctions des déplacements aux extrémités u_1 et u_2 sous forme matricielle.

L'équation d'équilibre et la loi de comportement donnent :

$$\int_0^L N(x)dx = EA \int_0^L \left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T \right) dx$$
$$LN = EA[(u_2 - u_1) - \alpha\Delta T L]$$

On a donc

$$N_0 = N_L = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) - \alpha EA \Delta T$$

Les efforts appliqués par la barre sur le nœud 1 et 2 s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -N_0 \\ N_L \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \alpha EA \Delta T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \alpha EA \Delta T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



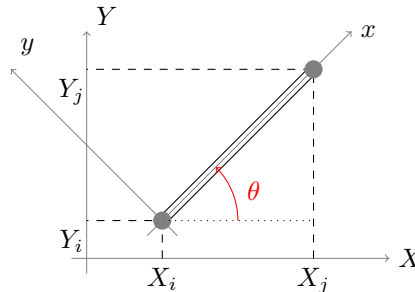
1 Treillis en dimension 2

Un treillis est un ensemble de barres ou poutres droites reliées entre elles par des nœuds en rotules. Les liaisons extérieures sont des rotules et des appuis simples. Les charges sont des forces portées par les rotules, des gradients thermiques et des déplacements d'appui. La force intérieure dans une section droite se réduit à l'effort normal. Le treillis est plan si :

- Le plan $\{O; x, y\}$ est un plan de symétrie pour toutes les sections droites.
- Les forces appliquées sont situées dans le plan $\{O; x, y\}$. On suppose que les déplacements sont petits.

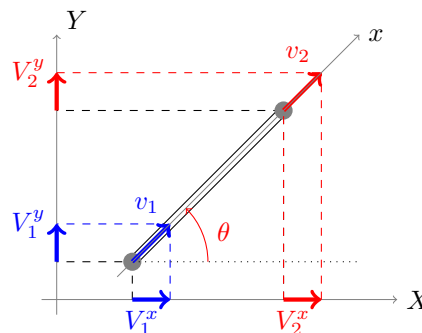
1.1 Matrice de rigidité élémentaire

Dans la section précédente, les matrices et vecteurs sont définis dans les repères locaux (x, y) . L'opérateur d'assemblage (passage de la matrice élémentaire d'une barre à la matrice globale du système) nécessite la transformation des caractéristiques élémentaires des repères locaux dans un repère global (X, Y) .



Une variable nodale d'une poutre s'exprime dans le repère local (Ox) , par un vecteur $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et dans le repère global (ΩXY) , par le vecteur

$$\begin{pmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^x \\ V_1^y \\ V_2^x \\ V_2^y \end{pmatrix}$$



1. Justifier rapidement les deux formules suivantes de passage entre les deux repères local (x, y) et global (X, Y) :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^x \\ V_2^x \\ V_1^y \\ V_2^y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} V_1^x \\ V_2^x \\ V_1^y \\ V_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

2. En déduire le système élémentaire d'une barre faisant un angle θ avec (OX) :

$$\begin{pmatrix} F_{2q} \\ F_{2q+1} \\ F_{2r} \\ F_{2r+1} \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2q} \\ U_{2q+1} \\ U_{2r} \\ U_{2r+1} \end{pmatrix}$$

où $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$. θ est défini par

$$\cos \theta = \frac{X_2 - X_1}{L} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{Y_2 - Y_1}{L}, \quad L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

1.2 Exemple 1 : Treillis soumis à une force nodale

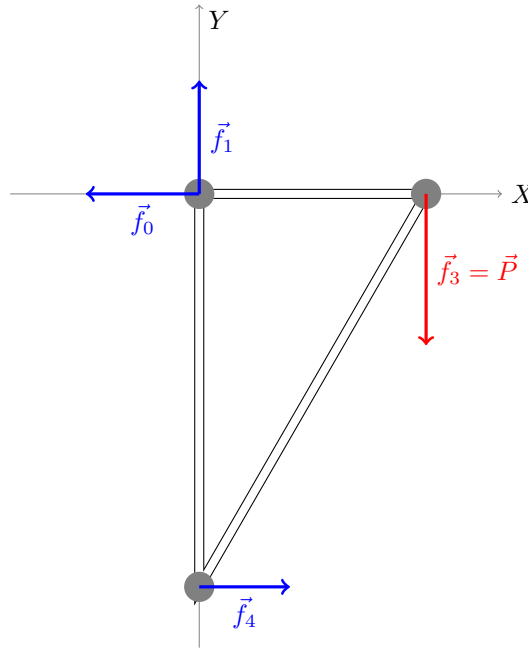
1.2.1 Énoncé

Le treillis plan à nœuds articulés représenté sur la figure 4 est composé de trois poutres de même nature et de même section droite. Soient E le module de Young du matériau et A l'aire des sections droites.

— Le nœud 1 est articulé et le nœud 3 repose sur un appui simple dont la normale est horizontale.

— Le nœud 2 porte une charge de composantes $(0, P)$.

Application numérique : on donne : $A = 100\text{mm}^2$, $L = 0.2\text{m}$, $E = 200000\text{MPa}$, $P = -10000\text{N}$.



Les caractéristiques géométriques du système se résument en :

nœud	x	y	poutre	ℓ	θ	$C = \cos \theta$	$S = \sin \theta$
0	0	0	(0,1)	L	0	1	0
1	L	0	(1,2)	$2L$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
2	0	$-\sqrt{3}L$	(2,0)	$\sqrt{3}L$	$\frac{\pi}{2}$	0	1

Écrivons l'équation d'équilibre pour chaque barre :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \frac{EA}{8L} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{3}L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_0 \\ \delta_1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, nous écrivons les trois systèmes en base 6 en fonction d'une même inconnue $(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5)^t$:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{pmatrix}$$

La matrice globale est la somme des trois matrices partielles (principe de superposition) :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & 0 & 1 + \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_0 = 0 \\ \delta_1 = 0 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 = 0 \\ \delta_5 \end{pmatrix}$$

Les trois déplacements nuls $\delta_0 = \delta_1 = \delta_4 = 0$ nous permettent de réduire le système et de supprimer de la matrice globale les trois lignes 0,1,4 et les trois colonnes 0,1,4. D'où le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_5 \end{pmatrix}$$

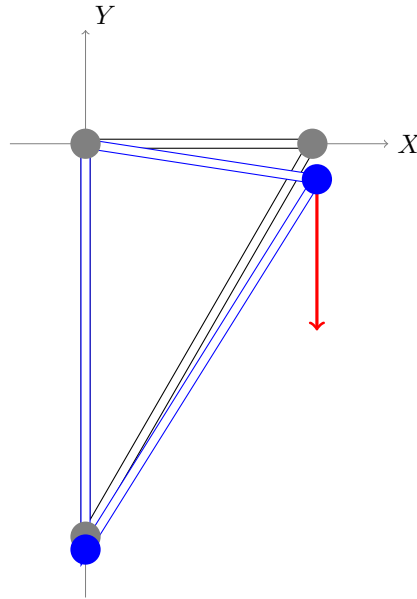
Après avoir résolu le système linéaire réduit, on reprend les équations éliminées du système globale pour déterminer les réactions aux appuis :

$$\begin{aligned} f_0 &= -\frac{EA}{L} \delta_2 \\ f_1 &= -\frac{EA}{L} \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_5 \\ f_4 &= \frac{EA}{L} \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} \delta_2 - \frac{3}{8} \delta_3 + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \delta_5 \right) \end{aligned}$$

On trouve $\delta_2 \simeq 0.06\text{mm}$, $\delta_3 \simeq -0.47\text{mm}$, $\delta_5 \simeq -0.17\text{mm}$.

et $f_0 \simeq -5.8 \times 10^3\text{N}$, $f_1 \simeq 1.0 \times 10^4\text{N}$, $f_4 \simeq 5.8 \times 10^3\text{N}$.

D'où la représentation graphique du système déformé :



1.3 Mise en œuvre numérique

1.3.1 Géométrie du problème

Le système est défini par une suite de n points qui représentent les nœuds d'articulation :

$$Points = ([x_i, y_i])_{i=0, n-1}$$

et de n' segments qui représentent les barres articulées.

$$Barres = ([p_i, p_j])_{(i,j) \in G}$$

où le graphe G est une partie de $[0, n-1] \times [0, n-1]$ contenant les couples des indices des points liés par une barre. En python N et B sont codés par les deux listes suivantes :

```
Points = [[0, 0], [0, L], [L, 0]]
Barres = [[0, 1], [1, 2], [2, 0]]
```

Un nœud peut être articulé en un point fixe qui empêche tout déplacement $u_x = u_y = 0$, ou un appui simple horizontal ($u_y = 0$) ou vertical ($u_x = 0$). On représente la fixation d'un nœud par un triplet (i, α_i, β_i) où i est le nœud considéré, α_i est un boolean qui vaut 1 si le déplacement horizontal est libre, 0 sinon, et β_i est un boolean qui vaut 1 si le déplacement vertical est libre, 0 sinon. Pour notre exemple :

```
# Conditions aux appuis
Conditions=[[0,0,0], [2,0,1]]
```

Les forces exercées en chaque nœud i sont représentées par des triplets (i, f_x^i, f_y^i) où f_x^i est la composante horizontale et f_y^i est la composante verticale de la force appliquée au nœud i :

```
# Forces extérieurs
Forces=[[2,0,-P]]
```

1.3.2 Les constantes et grandeurs physiques

La section des barres A exprimée en m^2 . Les longueurs des barres L_i sont calculées à partir des coordonnées des points d'articulation et exprimées en mètre (m). Le module de Young E est exprimé en Pascal (Pa) . Les forces extérieurs nodales sont exprimées en Newton (N).

Pour notre exemple nous avons : $L = 2m$, $A = 100mm^2$, $E = 200000MPa$, et $P = -10000N$.

```
L = 2
EA = 2.0 * 1E7
P = -10000
```

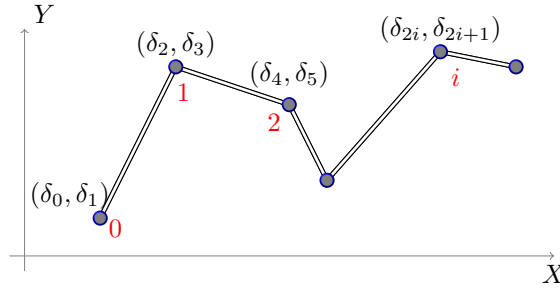
1.3.3 Matrice de rigidité

Soit $B_i = (p, q)$ une barre du système d'extrémités $p = (X_1, Y_1)$ et $q = (X_2, Y_2)$. On calcule ℓ la longueur de la barre, c et s , le cosinus et le sinus de l'angle θ que fait la barre avec l'axe (OX) par :

$$c = \cos \theta = \frac{X_2 - X_1}{\ell} \text{ et } s = \sin \theta = \frac{Y_2 - Y_1}{\ell}, \quad \ell = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Si on désigne par CS la matrice ligne $(c \ s \ -c \ -s)$, la matrice de rigidité n'est autre que

$$\mathbf{K}_i = \frac{EA}{\ell} CS \times CS^t$$



Les nœuds sont numérotés $0, 1, 2, \dots, p, \dots, q, \dots, n-1$, on désigne par (u_{2p}, u_{2p+1}) le vecteur déplacement du nœud p . L'équation matricielle d'équilibre d'une barre (p, q) s'écrit matriciellement en dimension $2n$:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ f_{2p} \\ f_{2p+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{2q} \\ f_{2q+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & C^2 & CS & \dots & -C^2 & -CS & \dots \\ \dots & CS & S^2 & \dots & -CS & -S^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -C^2 & -CS & \dots & C^2 & CS & \dots \\ \dots & -CS & -S^2 & \dots & CS & S^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \delta_{2p} \\ \delta_{2p+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_{2q} \\ \delta_{2q+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Les autres coefficients manquant sont tous nuls. La linéarité du problème et le principe de superposition permettent de sommer toutes les équations matricielles pour obtenir l'équation globale du système des barres articulés : d'où le code python suivant :

```

1  N = n * 2
2  M = np.zeros((N, N), dtype=float)
3  T = np.zeros(N, dtype=float)
4  F = np.zeros(N, dtype=float)
5  # Assemblage de la matrice globale
6  for p, q in Barres:
7      x1, y1 = Points[p]
8      x2, y2 = Points[q]
9      # ell = sqrt((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2)
10     ell = math.sqrt((x2 - x1) ** 2 + (y2 - y1) ** 2)
11     c = (x2 - x1) / ell # cos(theta) = (x2-x1)/ell
12     s = (y2 - y1) / ell # sin(theta) = (y2-y1)/ell
13     CS = np.mat([c, s, -c, -s], dtype=float) # Matrice ligne CS = (cos theta sin theta -cos theta -sin theta)
14     CSt = np.transpose(CS)
15     m = np.dot(CSt, CS)*A*E/ell # m = (EA/ell) * CSt * CS
16     # Connectivité de degrés de liberté: deux ddl par extrémité
17     connectivite=[2 * p, 2 * p + 1, 2 * q, 2 * q + 1]
```

```

18     # Boucles sur les 4 lignes et 4 colonnes de la matrice élémentaire
19     for i in range(4):
20         I=connectivite[i]
21         for j in range(4):
22             J=connectivite[j]
23             M[I, J] += m[i, j]
24     # Le second membre
25     for p, fx, fy in Forces:
26         F[2*p]=fx
27         F[2*p+1]=fy

```

Les conditions aux appuis impose un ou deux déplacements nuls. On retire donc du système matriciel les lignes et colonnes correspondants, soit en python :

```

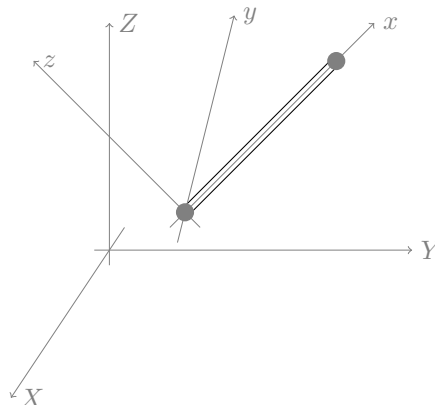
1  l = []
2  for p, a, b in Conditions:
3      if a == 0:
4          l.append(2 * p)
5      if b == 0:
6          l.append(2 * p + 1)
7
8  l.sort()
9  l.reverse()
10 for i in l:
11     M = np.delete(M, i, axis=0)
12     M = np.delete(M, i, axis=1)
13     F = np.delete(F, i)

```

2 Treillis en dimension 3

Une structure spatiale, de type treillis, est constituée d'un assemblage de barres dans l'espace. Les variables nodales sont les trois composantes du vecteur déplacement exprimées dans un repère global commun XYZ .

Dans les sections précédentes, les matrices et vecteurs sont définis dans les repères locaux xyz . L'opération d'assemblage nécessite la transformation des caractéristiques élémentaires des repères locaux dans un repère global.



Une variable nodale d'une poutre s'exprime toujours dans le repère local (Ox) , par un vecteur $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ alors

que dans le repère global (ΩXYZ), elle s'exprime par le vecteur

$$\begin{pmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^x \\ V_1^y \\ V_1^z \\ V_2^x \\ V_2^y \\ V_2^z \end{pmatrix}$$

La matrice de rigidité de la barre dans l'espace tridimensionnel est défini en dimension 6 par :

$$\boxed{\vec{F} = \mathbf{M}\vec{U}}$$

où \vec{F} représente les deux forces nodales tridimensionnelles : $\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{pmatrix}$ et \vec{U} représente les deux déplacements nodales tridimensionnels : $\vec{U} = \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que cette matrice vérifie la formule de passage $M = Q^T m Q$, où :

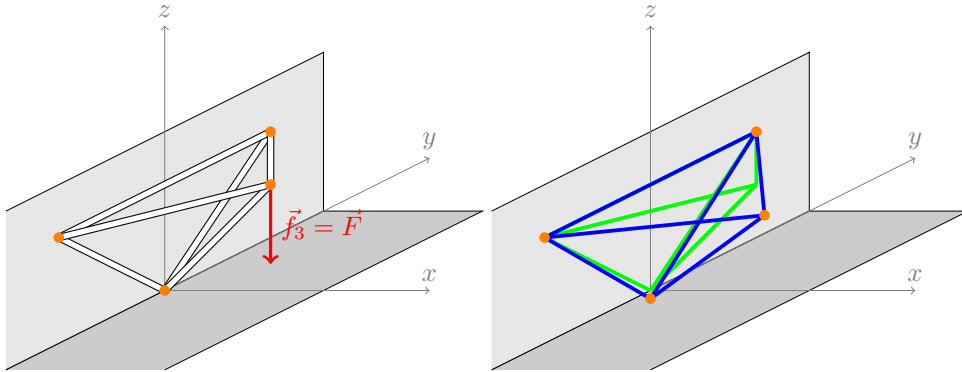
$$Q = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

où $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ sont les cosinus directeurs de l'axe Ox que l'on calcule par :

$$\cos(x, X) = \frac{X_2 - X_1}{L} = \cos \alpha \quad \cos(x, Y) = \frac{Y_2 - Y_1}{L} = \cos \beta \quad \cos(x, Z) = \frac{Z_2 - Z_1}{L} = \cos \gamma$$

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

2. Écrire explicitement la matrice de rigidité M en fonction de $C_1 = \cos \alpha$ et $C_2 = \cos \beta$ et $C_3 = \cos \gamma$.



3 Poutre

3.1 En traction-compression

En dimension 1 et 1 ddl

$$\boxed{\begin{pmatrix} f_1^x \\ f_2^x \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^x \\ u_2^x \end{pmatrix}}$$

3.2 En flexion

En dimension 1 et deux ddl :

$$\boxed{\begin{pmatrix} f_1^y \\ M_1 \\ f_2^y \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^y \\ \theta_1 \\ u_2^y \\ \theta_2 \end{pmatrix}}$$

3.3 En flexion-traction-compression

Compression traction en 6 ddl :

$$\begin{pmatrix} f_1^x \\ 0 \\ 0 \\ f_2^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^x \\ 0 \\ 0 \\ u_2^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Flexion en 6 ddl :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ f_1^y \\ M_1 \\ 0 \\ f_2^y \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^y \\ \theta_1 \\ 0 \\ u_2^y \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Flexion-traction-compression par superposition :

$$\begin{pmatrix} f_1^x \\ f_1^y \\ M_1 \\ f_2^x \\ f_2^y \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ \theta_1 \\ u_2^x \\ u_2^y \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Les variables nodales d'une poutre sont :

— dans le repère global,

$$\begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^x \\ F_1^y \\ M_1 \\ F_2^x \\ F_2^y \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ \theta_1 \\ U_2^x \\ U_2^y \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

— dans le repère local,

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^x \\ f_1^y \\ \theta_1 \\ f_2^x \\ f_2^y \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ \theta_1 \\ u_2^x \\ u_2^y \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

La relation matricielle par blocs entre les sollicitations appliquées à la poutre et les déplacements aux extrémités s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \\ k_3^T & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage est la matrice de rotation d'angle θ :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où θ est défini par

$$\cos \theta = \frac{X_2 - X_1}{L} \text{ et } \sin \theta = \frac{Y_2 - Y_1}{L}, \quad L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

D'où la relation matricielle dans le repère global (X, Y) :

$$\begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 & K_3 \\ K_3^T & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \end{pmatrix}$$

où

$$K_i = R_\theta k_i R_{-\theta}$$

Finalement

$$\vec{F} = \mathbf{K} \vec{U}$$

où

- $\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{pmatrix}$ vecteur des sollicitations extérieures aux extrémités de la poutre.
- $\vec{U} = \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \end{pmatrix}$ vecteur déplacements des extrémités de la poutre.
- K est la matrice de rigidité définie, en posant $C = \cos \theta$ et $S = \sin \theta$ par : (à compléter)

Exemple d'une poutre



$$\begin{pmatrix} f_1^x \\ f_1^y \\ M_1 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2^x \\ u_2^y \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^x \\ u_2^y \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2^x = 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^y \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

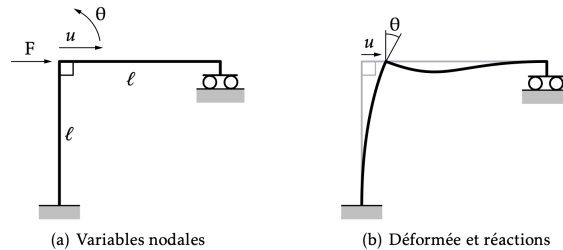
$$\Rightarrow \boxed{u_2^x = 0, \quad u_2^y = -\frac{PL^3}{3EI}, \quad \theta_2 = -\frac{PL^2}{2EI}}$$

et

$$f_1^x = 0, \quad f_1^y = P \quad M_1 = PL$$

Exemple de portique à deux poutres

Encastrement en A. Déplacement vertical et angle de rotation nuls en C.



On trouve

$$u_B^x = \frac{2FL^3}{15EI}, \quad u_B^y = 0, \quad \theta_B = -\frac{FL^2}{10EI}$$

Représentation graphique d'une poutre déformée

On représente graphiquement une poutre AB par une courbe paramétrée polynomiale d'ordre 3 par l'application $P : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$P(s) = \left(1 - \frac{s}{\ell}\right)^3 A + 3 \left(1 - \frac{s}{\ell}\right)^2 \left(\frac{s}{\ell}\right) A_1 + 3 \left(1 - \frac{s}{\ell}\right) \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 B_1 + \left(\frac{s}{\ell}\right)^3 B$$

On a bien $P(0) = A$ et $P(\ell) = B$. On détermine A_1 et B_1 en supposant que $P'(s)$ est tangente à la déformée de la poutre en $s = 0$ et $s = \ell$. On a $P'(0) = -\frac{3}{\ell}(A - A_1)$ et $P'(\ell) = \frac{3}{\ell}(B - B_1)$. D'où

$$A_1 = A + \frac{\ell}{3}P'(0), \quad B_1 = B - \frac{\ell}{3}P'(\ell)$$

où

$$P'(s) = \frac{dP}{ds} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + \theta) \\ \sin(\theta_0 + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos \theta - \sin \theta_0 \sin \theta \\ \sin \theta_0 \cos \theta + \cos \theta_0 \sin \theta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \cdot \theta \\ \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \cdot \theta \end{pmatrix}$$

où φ est l'angle de la tangente avec Ox qui n'est autre que l'angle que fait la poutre avec Ox plus l'angle de flexion : $\varphi = \theta_0 + \theta$. avec θ assez petit.