Chapitre 1

Traitement numérique du signal: Introduction

Ibrahim ALAME

ESTP

26/01/2023

Qu'est-ce qu'un signal ?

Un signal (temporel) est une quantité observable variant en fonction du temps

- Le son issu d'un piano
- La température au sommet de la Tour Eiffel
- Le cours en bourse d'une action
- Le signal électrique dans un câble USB
- Une onde hertzienne...

Remarque : La définition générale d'un signal inclut aussi les quantités variant en fonction de l'espace et/ou du temps, comme les images ou les vidéos. Dans ce cours, on se limitera aux signaux temporels.

Qu'est-ce que le traitement du signal ?

Le traitement du signal a pour objectif de générer, d'analyser, de compresser, de transmettre ou de transformer un signal

- Reconnaître quelle note est jouée à partir d'un signal sonore
- Compresser un fichier audio WAVE en un fichier MP3 de plus petite taille
- Former une onde électromagnétique pour envoyer un message (communications sans fil)
- Amplifier un signal électrique
- Comprendre un phénomène physique en analysant une série de mesures temporelles
- Compter le nombre de pas faits dans une journée à partir d'un accéléromètre intégré sur smart phone...

Qu'est-ce que le traitement du signal ?

Pourquoi étudier le traitement du signal ? Exemple du téléphone portable :

- Voix (signal) captée par un micro, filtrée $\rightarrow$ Cours 3/5, puis stockée sous forme numérique (0 et 1) $\rightarrow$ Cours 2
- A partir de ce message binaire, création d'un signal (onde) dans une certaine bande de fréquence $\rightarrow$ Cours 4 qui pourra être émis, transmis, puis reçu par le destinataire $\rightarrow$ Cours de Communications Numériques en AIR2

But du cours

- Savoir étudier différentes propriétés des signaux
- Connaître les différentes étapes pour passer d'un signal physique analogique à un signal numérique exploitable sur un ordinateur
- Comprendre les deux domaines principalement utilisés pour analyser les signaux : temporel et fréquentiel
- Avoir un aperçu des transformations des signaux dans le domaine temporel et fréquentiel (filtrage)

Contexte du cours

Cours orienté “ingénieur” et “informatique”

- Le but n’est pas de faire des mathématiques poussées, mais de proposer une introduction au traitement du signal
- Sauf mention contraire, on supposera que les signaux considérés possèdent toutes les propriétés de régularité, continuité... permettant leur étude.
- De la même façon, on partira du principe que, sauf mention contraire, les intégrales et sommes infinies sont correctement définies
- Aspect informatique renforcé par les TP en Python sur de vrais signaux numériques (son)

Plan du cours

1. Étude des signaux dans le domaine temporel
2. Conversion d'un signal analogique en signal numérique
3. Filtrage dans le domaine temporel
4. Étude des signaux dans le domaine fréquentiel
5. Filtrage dans le domaine fréquentiel
6. Signaux aléatoires

Signaux continus et discrets

Il existe deux types de signaux temporels :

1. Continu : signal connu à chaque instant t

$$\boxed{x(t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$$

   t : temps (souvent exprimé en secondes)
   Ex : onde électromagnétique, signal électrique, ...

2. Discret : signal connu uniquement à certains instants tn

$$\boxed{x_n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}}$$

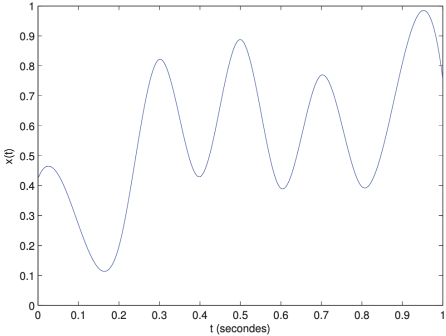
   n : échantillon (sans unité)
   Ex : taux de précipitations enregistré chaque jour, cours de la bourse enregistré chaque heure, ...

Signaux continus et discrets

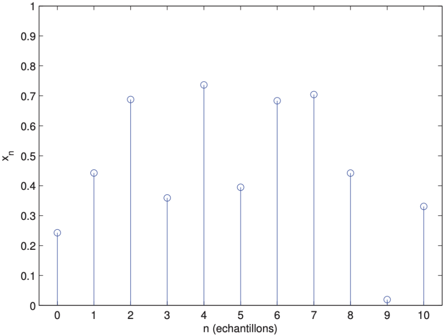
En pratique

- Les signaux continus $x(t)$ ne sont pas stockables et étudiables sur ordinateur (ils contiennent une infinité de valeurs !). Ils peuvent être vus comme des fonctions mathématiques. On les étudie principalement pour avoir des modèles théoriques des signaux que l'on veut étudier. Ils modélisent des phénomènes physiques tels que les ondes acoustiques, les signaux électriques, etc...
- Les signaux discrets x_n au contraire peuvent être stockés et étudiés sur ordinateur. Ils ont en général un nombre fini de valeurs non nulles. Un signal discret est ainsi représenté comme un vecteur contenant toutes les valeurs x_n. On y associe un vecteur temps contenant toutes les valeurs t_n des instants où l'on connaît le signal. Remarque : Tous les signaux que nous allons étudier avec Python sont donc des signaux discrets (et même numériques, cf prochain cours !). Les signaux continus seront seulement étudiés en TD avec des calculs théoriques.

Exemples



Signal continu $x(t)$
$t \in [0,1]$



Signal discret x_n
$n \in [\![0,10]\!]$

Dans le cours, les signaux discrets seront représentés par des segments terminés par des cercles (cf figure ci-dessus)

Support temporel : définition

On appelle support temporel, l'ensemble des temps t (ou des échantillons n si le signal est discret) pour lesquels le signal $x(t)$ (resp x_n) est défini et non nul.

- Cas continu. Si cet ensemble correspond à un intervalle ayant des limites hautes et basses, on dit que le support temporel est borné. Sinon, on dit qu'il est non borné.
- Cas discret. Si cet ensemble contient un nombre fini de valeurs, on dit que le support temporel est fini. Sinon, on dit qu'il est infini.

Support temporel : exemples

Quelques exemples :

- Température dans cette salle de classe enregistrée toutes les heures pendant 2 ans : signal discret à support fini
- Signal électrique dans un câble pendant 1 minute : signal continu à support borné
- Onde électromagnétique observé à partir de l'instant présent jusqu'à la fin du monde (sic...) : signal continu à support non borné

Remarque : Dans la pratique, tous les signaux physiques observés sont à support fini ou à support borné, car sinon cela voudrait dire qu'on a pu les observer sur une durée infinie.

Introduction

Périodicité

- Cas continu. On dit qu'un signal x(t) est périodique de période T s'il existe un réel T non nul tel que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t+T) = x(t)}$$

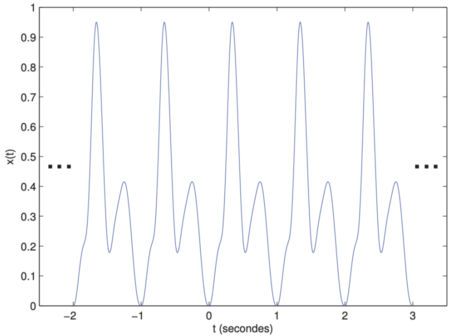
- Cas discret. On dit qu'un signal x_n est périodique de période M s'il existe un entier M non nul tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad x_{n+M} = x_n}$$

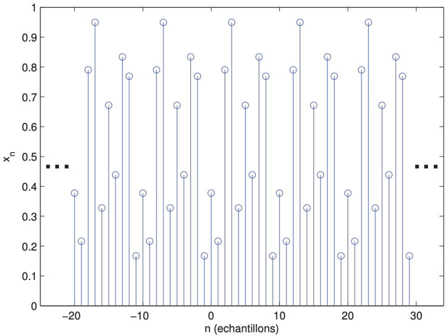
Propriétés d'un signal périodique

- Un signal périodique continu (resp. discret) a nécessairement un support temporel non borné (resp. infini).
  Démonstration : le signal se répète toutes les périodes T (resp. M) une infinité de fois
- Si un signal continu (resp. discret) est périodique de période T (resp. M), alors il est aussi périodique de période kT (resp kM) avec $k \in \mathbb{N}^*$.
  Démonstration : Il suffit de remarquer que $x(t + kT) = x(t + (k-1)T + T) = x(t + (k-1)T)$ et de raisonner par récurrence
- Étant donné un signal périodique, on appelle période fondamentale et on note T_0 (resp. M_0), la plus petite période du signal strictement positive.

Périodicité : exemples



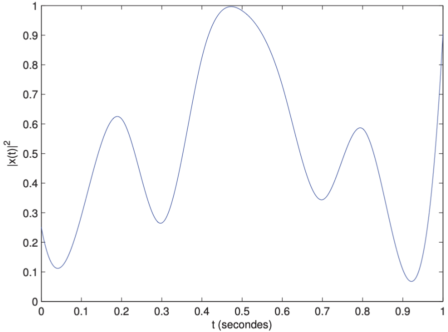
Signal continu $x(t)$
$T_0 = 1$ seconde



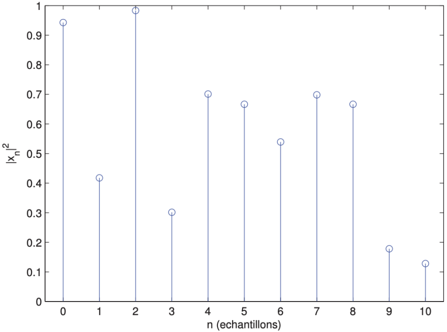
Signal discret x_n
$M_0 = 10$ échantillons

Puissance instantanée

- Étant donné un signal continu $x(t)$ (resp. discret x_n), on appelle puissance instantanée la quantité $|x(t)|^2$ (resp $|xn|^2$).



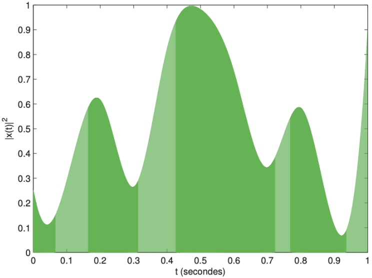
Signal continu
$|x(t)|^2$



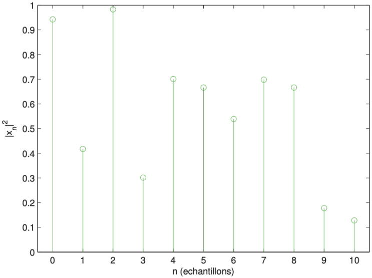
Signal discret
$|x_n|^2$

Énergie totale

- L'énergie totale E_x correspond à la somme de la puissance instantanée sur $\mathbb{R}$ (pour les signaux continus) ou sur $\mathbb{Z}$ (pour les signaux discrets).



Signal continu



Signal discret

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}$$

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2}$$

- On observe ici le parallèle entre le signe $\int$ pour les signaux continus et le signe $\sum$ pour les signaux discrets.

Puissance moyenne (totale)

- **La puissance moyenne (totale)** P_x correspond à la valeur moyenne de la puissance instantanée sur $\mathbb{R}$ (pour les signaux continus) ou sur $\mathbb{Z}$ (pour les signaux discrets)
- **Cas continu.**

$$\boxed{P_x = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

- **Cas discret.**

$$\boxed{P_x = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2m+1} \sum_{n=-m}^{m} |x_n|^2}$$

- Si le signal est à support temporel borné ou fini, sa puissance moyenne totale est donc nulle (sauf cas exceptionnels)

Classification des signaux

- Si $E_x < +\infty$, on dit que le signal est à énergie finie. En pratique, c'est le cas de tous les signaux physiquement réalisables. Un signal à énergie finie a une puissance moyenne totale nulle.
- Si $P_x < +\infty$, on dit que le signal est à puissance finie. Bien que ces signaux n'existent pas dans le monde réel, ils sont utiles pour construire des modèles étudiables. Un signal à puissance finie et de puissance moyenne totale non nulle ne peut pas être d'énergie finie.

Cas des signaux périodiques

- On a déjà vu qu'un signal périodique se répliquait une infinité de fois, il est donc nécessairement d'énergie infinie $E_x = +\infty$ (sauf bien sur s'il est nul !)
- **Cas continu**. Si un signal $x(t)$ est périodique de période T, on peut montrer que

$$\boxed{\forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

- **Cas discret**. Si un signal xn est périodique de période M, on peut montrer que

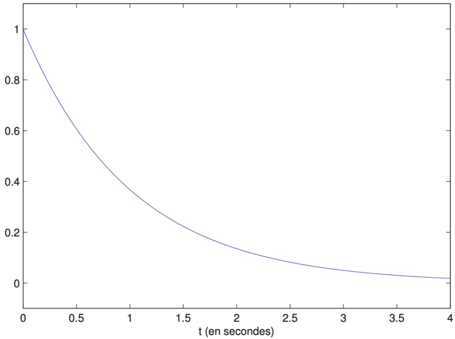
$$\boxed{\forall n_0 \in \mathbb{Z}, \quad P_x = \frac{1}{M} \sum_{n=n_0}^{n_0+M-1} |x_n|^2}$$

- Sauf cas exceptionnel, un signal périodique est donc à puissance finie.

Cas des signaux à support borné/fini

- Si un signal $x(t)$ est à support borné, l'intégrale E_x est nulle en dehors de son support, et l'intégrale infinie devient une intégrale finie, qui, sauf cas exceptionnel, est donc une quantité finie. Il est donc à énergie finie et à puissance nulle.
- Si un signal x_n est à support fini, la somme E_x est nulle en dehors de son support, et la somme infinie devient une somme finie, qui, sauf cas exceptionnel, est donc une quantité finie. Il est donc à énergie finie et à puissance nulle.

Exemple 1



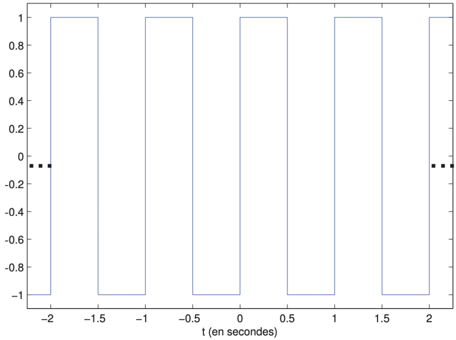
$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Support temporel non borné
- Énergie totale

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2t} \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{-2t}}{-2} \right]_0^{+\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Énergie finie donc $P_x = 0$

Exemple 2



- Support temporel non borné

- Signal périodique de période $T = 1$ seconde
- $E_x = +\infty$
- P_x peut être calculée sur n'importe quel intervalle de longueur T

$$
\begin{aligned}
P_x &= \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} |1|^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} | \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}
$$

Propriétés des signaux

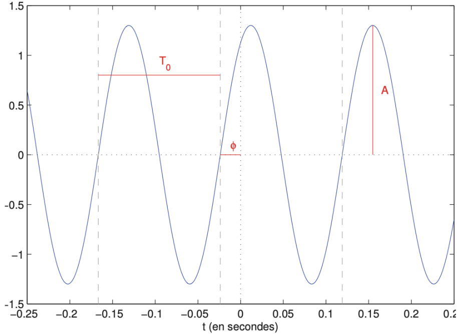
Étant donné un signal, on sait maintenant le caractériser de la façon suivante :

- Continu/Discret ?
- Support temporel borné/fini/non borné/infini ?
- Périodique ou pas ? Période fondamentale ?
- Énergie finie/Puissance finie ?
- Deux cas courants :
- Signaux périodiques : énergie totale infinie, puissance moyenne totale finie
- Signaux à support temporel borné : énergie totale finie, puissance moyenne totale nulle

Quelques signaux types

- La plupart des signaux de la vie courante sont aléatoires ou sont influencés par de nombreux paramètres.
- Afin de pouvoir les étudier de façon théorique, on construit des modèles de signaux, qui n'existent pas nécessairement dans le monde physique, mais permettent de réaliser des tâches impossibles autrement (ex : prédiction de température, reconnaissance d'une note de musique)
- Dans cette partie, on présente quelques signaux types modèles très utilisés en traitement du signal

Sinusoïde



$A = 1.3$, $f_0 = 7$ Hz, $\phi = \frac{\pi}{3}$

$$\boxed{x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)}$$

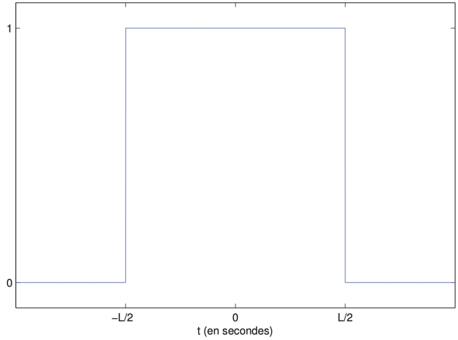
- A : amplitude
- f_0 : fréquence fondamentale (en Hz)
- ϕ : phase à l'origine
- $x(t)$ est périodique de période fondamentale

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{f_0}}$$

Sinusoïde

- Plus f_0 est élevée, plus le signal varie de façon rapide
- Une note de musique parfaitement pure peut être modélisée par une sinusoïde : dans ce cas, plus f_0 est élevée, plus le son est aigu
- C'est aussi un modèle courant pour les signaux électriques ou les ondes électromagnétiques

Signal porte

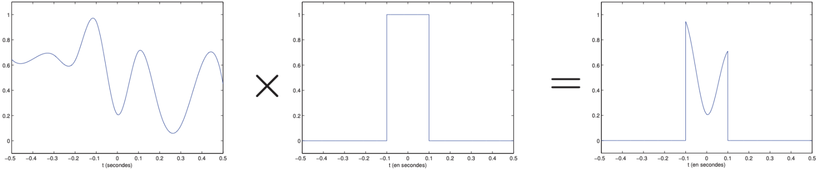


$$\boxed{\Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq t < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

- Attention, la borne supérieure est une inégalité stricte

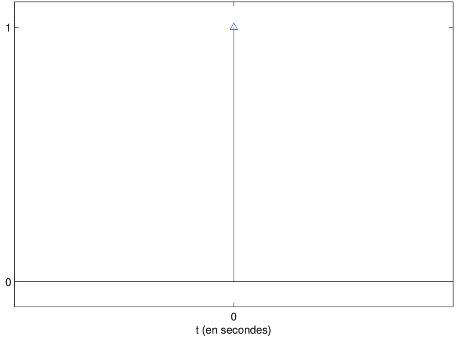
Signal porte

- Si on prend un signal quelconque $x(t)$ et qu'on le multiplie par un signal porte, cela revient à étudier le signal $x(t)$ uniquement sur le signal $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$



- De façon équivalente, un signal quelconque de support temporel borné égal à L peut être vu comme le produit d'un signal à support temporel non borné et d'une fonction porte
- On travaille aussi souvent sur une version périodisée de ce signal : signal carré ou en créneau

Dirac (continu)



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

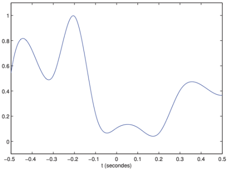
- En théorie, ce signal n'est pas un signal mais ce qu'on appelle une distribution
- Il vérifie la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

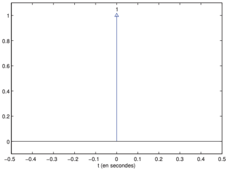
- On le représente par une flèche entre 0 et 1 (attention à ne pas confondre avec un signal discret). La valeur 1 représente la masse (ou amplitude) du Dirac.

Dirac (continu)

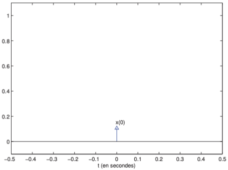
- Si on prend un signal quelconque $x(t)$ et qu'on le multiplie par un Dirac, on obtient un Dirac de masse $x(0)$



$\times$



$=$



- On a donc :

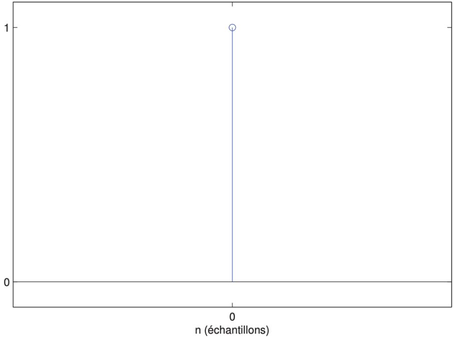
$$x(t) \times \delta(t) = x(0)\delta(t)$$

- Plus généralement on a la propriété :

$$x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Ce signal est très utile pour établir des propriétés d'échantillonnage, mais il ne peut pas exister dans la vie réelle.

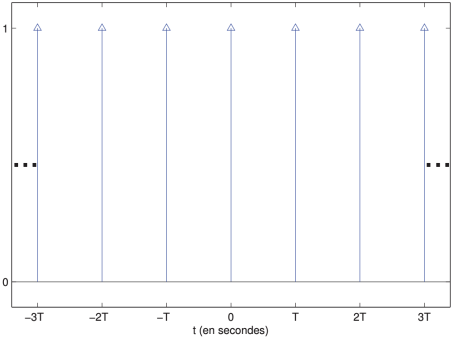
Dirac (discret)



$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si} t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Version discrète de la distribution de Dirac
- Parfois aussi appelé symbole de Kronecker

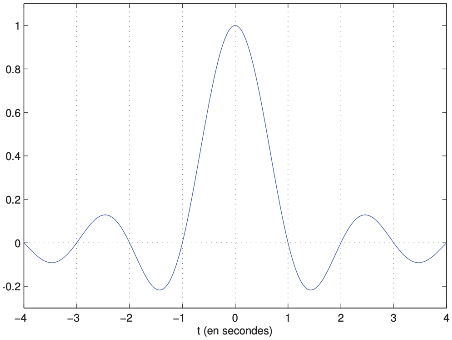
Peigne de Dirac



$$\text{Ш}_T(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

- Très utile pour modéliser de façon théorique le processus d'échantillonnage (cf prochain cours)
- Signal périodique de période fondamentale T
- Si on multiplie un signal $x(t)$ par un peigne de Dirac, on récupère toutes les valeurs du signal pour les temps multiples de T

Sinus cardinal



$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{sinon} \end{cases}$$

- Comme nous le verrons, ce signal apparaîtra naturellement quand nous allons calculer des transformées de Fourier
- Il est aussi très utilisé en physique ondulatoire
- Ce signal s'annule pour tous les temps t entiers