

# Introduction aux éléments finis

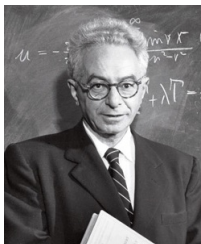
Ibrahim ALAME

ESTP

24/09/2021

# Bref historique de la méthode

- issue des travaux de Courant ( $\sim 1930$ )
  - développée par les ingénieurs en aéronautique ( $\sim 1950$ )
  - analysée dans les années  $\sim 1970$
  - utilisée dans de multiples applications (cf. cours de Mécanique)
- Richard Courant (1888-1972)



# Outils d'analyse fonctionnelle

- Rappels sur les distributions
- Espaces de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0\}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{H^1}^2 = \left( \int_{\Omega} v^2 + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right) = (\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2)$$

$H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

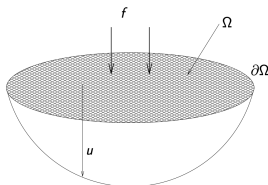
Plus généralement  $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ .

- Formule de Green :

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot v \, d\sigma$$

# Problème modèle

- Membrane élastique à l'équilibre sous un chargement



- membrane tendue occupant le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
- fixée sur son pourtour
- on applique un chargement vertical  $f$
- L'inconnue est le déplacement vertical de la membrane à l'équilibre

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- La fonction  $u$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega & \text{bilan des forces} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{condition limite} \end{cases} \quad (1)$$

# Formulation variationnelle

- $-\Delta u = f \implies -\Delta u \cdot v = f \cdot v \quad \text{où } v \in H_0^1(\Omega)$

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot v \, d\sigma = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx$$

- Formulation variationnelle (cf. cours d'analyse)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (2)$$

- principe des travaux virtuels
- $v$  est la fonction test

# Théorème de Lax-Milgram

- Le problème abstrait

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (3)$$

est bien posé sous les conditions (suffisantes) suivantes :

**LM1** l'espace  $V$  équipé de la norme  $\|\cdot\|_V$  est un espace de Hilbert

**LM2** la forme linéaire  $\ell$  est continue sur  $V$

$$\exists \beta, \quad \forall v \in V, \quad |\ell(v)| \leq \beta \|v\|_V$$

**LM3** la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $V \times V$

$$\exists \omega, \quad \forall v, w \in V, \quad |a(v, w)| \leq \omega \|v\|_V \cdot \|w\|_V$$

**LM4** la forme bilinéaire  $a$  est coercive sur  $V$

$$\exists \alpha, \quad \forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

# Application à l'équilibre d'une membrane

- On suppose  $f \in L^2(\Omega)$
- Le problème (7) est bien posé. En effet,
  - LM1  $H_0^1(\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$  est un espace de Hilbert
  - LM2 la forme linéaire  $\ell$  est continue

$$|\ell(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \quad \text{donc } \beta = \|f\|_{L^2}$$

- LM3 la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue

$$|a(v, w)| = \left| \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \right| \leq \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1} \|w\|_{H^1}$$

- LM4 grâce à l'inégalité de Poincaré

$$\exists C_{\Omega}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2} \leq C_{\Omega} \|\nabla v\|_{L^2}$$

la forme bilinéaire  $a$  est coercive

$$a(v, v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{1 + C_{\Omega}^2} \|v\|_{H^1}^2 \quad \alpha = \frac{1}{1 + C_{\Omega}^2}$$

- Rappel du problème modèle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (4)$$

- $V_h$  de dimension finie et  $V_h \subset V$ 
  - 1 on cherche une solution approchée  $u_h \in V_h$
  - 2 on restreint les fonctions tests à  $v_h \in V_h$
  - 3 on conserve les formes (bi)linéaires  $a$  et  $\ell$
- On obtient le problème discret

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (5)$$

- Il s'agit de la méthode de Galerkin



# Interprétation énergétique

- On suppose que  $a$  est symétrique
- Rappel partie optimisation : la solution exacte  $u$  est l'unique minimiseur (point critique) sur  $V$  de la fonctionnelle d'énergie

$$\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$$

- Exemple pour la membrane : la solution exacte  $u$  minimise sur  $H_0^1(\Omega)$  l'énergie mécanique

$$\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v$$

- La méthode de Galerkin préserve ce principe de moindre énergie : la solution approchée  $u_h$  minimise la même énergie  $\mathcal{E}$ , mais uniquement sur  $V_h$
- Comme  $V_h \subset V$ , on a

$$\mathcal{E}(v) = \min_{v_h \in V_h} \mathcal{E}(v_h) \geq \min_{v \in V} \mathcal{E}(v) = \mathcal{E}(u)$$

# Le système linéaire (1)

- Rappel du problème discret

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (6)$$

- Un point de vue équivalent est de résoudre un système linéaire
- Soit  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  une base de  $V_h$ .
- Au lieu de chercher  $u_h \in V_h$ , on cherche ses composantes dans cette base

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N U_j \varphi_j(x) \quad U = (U_j)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^N$$

## Le système linéaire (2)

- On introduit la matrice de rigidité  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  et le vecteur chargement  $B \in \mathbb{R}$

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) \quad B_i = \ell(\varphi_i)$$

- Résoudre (6)  $\iff$  Résoudre  $AU = B$

$$\begin{aligned} u_h \text{ solution de (6)} &\iff a(u_h, v_h) = \ell(v_h) && \forall v_h \in V_h \\ &\iff a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i) && \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ &\iff a(\sum_{j=1}^N U_j \varphi_j, \varphi_i) = \ell(\varphi_i) && \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ &\iff \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) U_j = \ell(\varphi_i) && \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ &\iff \sum_{j=1}^N A_{ij} U_j = B_i && \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ &\iff AU = B \end{aligned}$$

# La matrice $A$ est définie positive

- Pour tout  $X \in \mathbb{R}^N$ , il vient avec  $\xi(x) = \sum_{j=1}^N X_j \varphi_j(x)$ ,

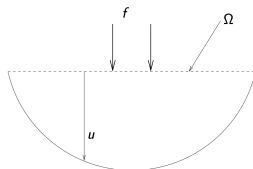
$$\begin{aligned}\langle AX, X \rangle &= \sum_{i,j=1}^N A_{ij} X_i X_j \\ &= \sum_{i,j=1}^N X_i X_j a(\varphi_j, \varphi_i) \\ &= a\left(\sum_{j=1}^N X_j \varphi_j, \sum_{i,j=1}^N X_i \varphi_i\right) \\ &= a(\xi, \xi) \geq \|\xi\|_V^2 \geq 0\end{aligned}$$

par coercivité. D'où

$$\langle AX, X \rangle = 0 \implies \xi = 0 \implies X = 0$$

- Corollaire : Le problème discret est bien posé

- Corde élastique à l'équilibre sous un chargement

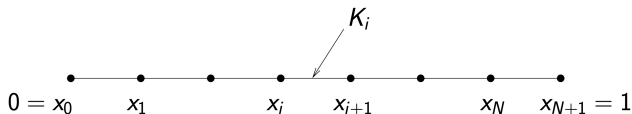


- corde tendue occupant le domaine  $\Omega = ]0, 1[$
  - fixée à ses 2 extrémités
  - on applique un chargement vertical  $f$
- L'inconnue est le déplacement vertical de la corde  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
  - Formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} u' \cdot v' = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (7)$$

# Construction de l'espace $V_h$

## Etape 1 : mailler le domaine $\Omega$



- un maillage de  $\Omega$  est défini par la donnée de  $N$  points distincts dans  $\Omega$
- $(N + 1)$  mailles  $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ ,  $\forall i \in \{0 \cdots N\}$
- maillage uniforme :  $h = 1/(N + 1)$ ,  $x_i = ih$ ,  
 $\forall i \in \{0 \cdots (N + 1)\}$

## Etape 2 : fixer un comportement (simple) dans chaque maille

- Fonctions affines par morceaux

$$\{v_h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \forall i \in \{0 \cdots N\}, v_h|_{K_i} \in \mathbb{P}_1\}$$

où  $\mathbb{P}_1 = \{p(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}\}$

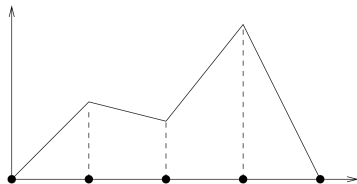
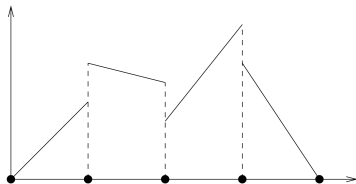
- A-t-on la conformité dans  $H_0^1(\Omega)$  ?

# Construction de l'espace $V_h$

- Il faut imposer la nullité au bord
- Il faut imposer la continuité sur  $\Omega$

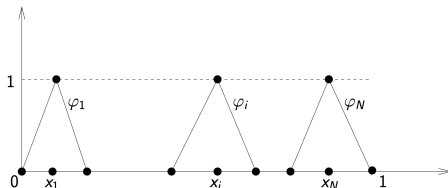
$$V_h^{(1)} = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall i \in \{0 \cdots N\}, v_h \in \mathbb{P}_1; v_h(0) = v_h(1) = 0\}$$

- On a  $V_h^{(1)} \subset H_0^1(\Omega)$
- Pour tout  $v_h \in V_h^{(1)}$ ,  $v_h'$  est constante par morceaux, obtenue en dérivant maille par maille



# Fonctions chapeau

- Fonctions chapeau  $\{\varphi_1 \cdots \varphi_N\}$



- On a  $\varphi_i \in V_h^{(1)}$  et  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ,  $\forall i, j \in \{1 \cdots N\}$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & x \in K_{i-1} \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & x \in K_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in K_{i-1} \\ -\frac{1}{h} & x \in K_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



## Base de $V_h$

- $\dim(V_h^{(1)}) = N$  et  $\{\varphi_1 \cdots \varphi_N\}$  est une base de  $V_h^{(1)}$
- La famille est libre :  $\forall (\alpha_1 \cdots \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x) = 0 &\implies \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x_j) = 0 \quad \forall j \in \{1 \cdots N\} \\ &\implies \alpha_j = 0 \quad \forall j \in \{1 \cdots N\} \end{aligned}$$

- La famille est génératrice :  $\forall v_h \in V_h^{(1)}$ ,

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_h(x_i) \varphi_i(x)$$

- ces deux fonctions sont affines par morceaux
- elles coïncident en deux points distincts sur chaque maille

# Assemblage de la matrice de rigidité (1)

- Rappel du terme générique

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx$$

- Observation essentielle :  $A_{ij} \neq 0$  seulement si l'intersection des supports de  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  est de mesure non-nulle
- La matrice de rigidité est tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

- Que valent les coefficients diagonaux et extra-diagonaux ?

## Assemblage de la matrice de rigidité (2)

- On calcule le coefficient diagonal

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \int_{\Omega} \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx = \int_{K_{i-1} \cup K_i} (\varphi'_i(x))^2 dx \\ &= \int_{K_{i-1}} \dots + \int_{K_i} \dots = h \times \left(\frac{1}{h}\right)^2 + h \times \left(-\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{2}{h} \end{aligned}$$

- De même,  $A_{i,i-1} = A_{i-1,i} = -\frac{1}{h}$
- Au final

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

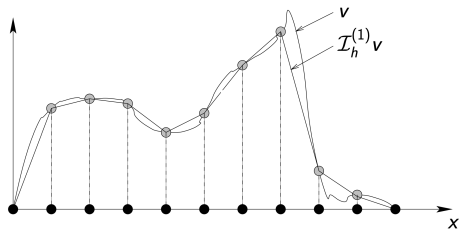
- En 1D,  $A$  a les dimensions de l'inverse d'une longueur

# Interpolation

- Opérateur d'interpolation ( $H_0^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$  en 1D)

$$\begin{aligned} I_h^{(1)} : H_0^1(\Omega) &\rightarrow V_h \\ v &\mapsto \sum_{i=1}^N v(x_i) \varphi \end{aligned}$$

$I_h^{(1)} v$  prend la même valeur que  $v$  en tous les sommets du maillage



- Théorème d'interpolation :  $\exists C_I$  t.q.  $\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,

$$\|v' - (I_h^{(1)} v)'\|_{L^2} \leq C_I h \|v''\|_{L^2}$$

$v$  s'écarte de son interpolé affine lorsque sa courbure est grande.

# Applications en dimension $n = 2$

- On considère le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (8)$$

où  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  et  $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ .

- la formulation variationnelle de ce problème consiste à chercher  $u \in V = H_0^1(\Omega)$  solution de

$$\forall v_h \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (9)$$

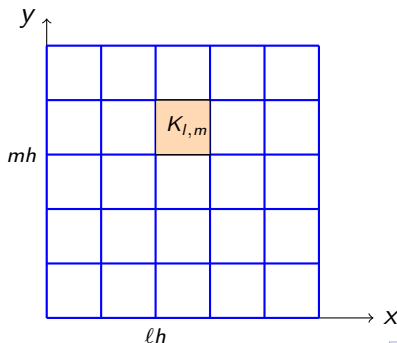
où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx \quad (10)$$

# Le maillage rectangulaire

- les nœuds sont les points  $x_{l,m} = (lh, mh)$ ,  $0 \leq l, m \leq M+1$ ;
- $K_i = \{x_{l,m}, x_{l+1,m}, x_{l+1,m+1}, x_{l,m+1}\}$  est le carré élémentaire de côté  $h$ .
- Le maillage est "presque" une partition du domaine  $\bar{\Omega}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega} = \bigcup_{0 \leq l, m \leq M} K_{l,m} \\ \text{avec } (l_1, m_1) \neq (l_2, m_2) \implies \mathring{K}_{l_1, m_1} \cap \mathring{K}_{l_2, m_2} = \emptyset \end{array} \right. \quad (11)$$



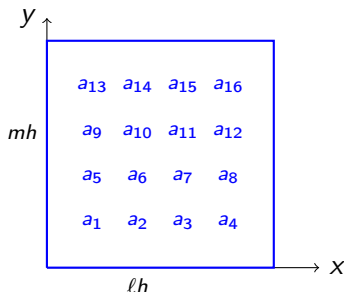
# L'espace des polynômes d'interpolation $Q_1$

- $Q_1 = \text{vect} (1, x_1, x_2, x_1 x_2) ;$
- une fonction  $v$  de  $Q_1$  est déterminée de manière unique par ses valeurs aux sommets d'un carré  $K_{l,m}$ .
- la restriction de  $v$  à un côté du carré  $K_{l,m}$  est une fonction affine et il suffit donc d'assurer la continuité de  $v$  aux extrémités du côté pour que la fonction  $v$  soit continue sur tout ce côté.
- Donc Ainsi la fonction  $v$  est continue sur  $\overline{\Omega}$  si et seulement si elle est continue aux  $(M+2)^2$  points  $a_{l,m}$ ,  $0 \leq l, m \leq M+1$ .
- Par ailleurs, la fonction  $v$  est nulle sur  $\Gamma$  si et seulement si elle s'annule aux  $4(M+1)$  points  $a_{l,m}$  situés sur  $\Gamma$ .

## Approximation : $V_h$

- $V \simeq V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); v|_{\Gamma} = 0; v|_{K_{l,m}} \in Q_1, 0 \leq l, m \leq M\}$
- Une fonction de l'espace  $V_h$  est déterminée de manière unique par les valeurs qu'elle prend en les points  $a_{l,m}$ ,  $1 \leq l, m \leq M$ .  $\dim V_h = M^2$
- On numérote de 1 à  $M^2$  les points  $a_{l,m}$  par la bijection

$$\mathcal{N} : (l, m) \mapsto i = l + M(m - 1) \quad (12)$$



- On pose  $a_i = a_{\mathcal{N}^{-1}(i)}$

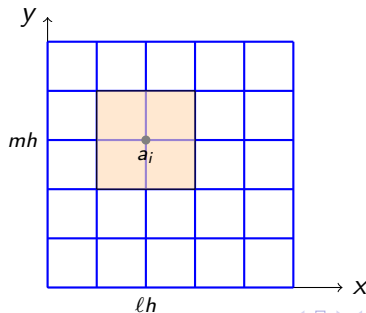


## Approximation : base de $V_h$

- Soit  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq M^2$ , la fonction de  $V_h$ , définie par

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq M^2. \quad (13)$$

- La suite des fonctions  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq M^2$ , forme une base de  $V_h$
- Les composantes dans cette base d'une fonction  $v \in V_h$  sont les nombres  $v(a_i)$ ,  $1 \leq i \leq M^2$ .
- le support de la fonction  $\varphi_i$  est le carré de côtés parallèles aux axes, de longueur  $2h$  et ayant pour centre le point  $a_i$ .

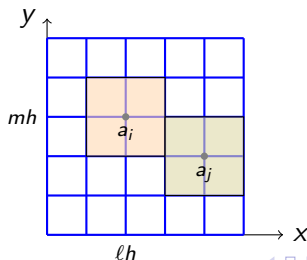


## Approximation : $u_h$

- On cherche  $u_h = \sum_{j=1}^{M^2} u_j \varphi_j \in V_h$ , où  $u_j = u_h(a_j)$ ,  $1 \leq j \leq M^2$
- $(u_j)_j$  est solution du système linéaire

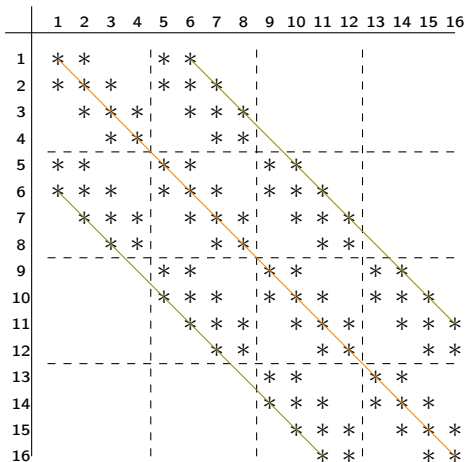
$$\sum_{j=1}^I a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = \ell(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq M^2 \quad (14)$$

- La matrice  $(a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I}$  est symétrique et définie positive ; elle est creuse car  $a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$  sauf si les points  $a_i$  et  $a_j$  sont sommets d'un même carré  $K_{l,m}$ .



# Matrice du système

- Matrice à bande  $a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$  pour  $|i - j| > d_{\max} = M + 1$



- matrice tridiagonale par blocs, les blocs étant eux-mêmes tridiagonaux.
- méthode de Cholesky ou la méthode de surrelaxation par blocs.

# Le système linéaire

- il est agréable désormais de noter les inconnues  $u_{l,m} = u_{\mathcal{N}(l,m)}$
- $u_{l,m}$  n'est autre que  $u_h(a_{l,m})$
- Nous posons,

$$f_{l,m} = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega} f \varphi_{l,m} dx, \quad 1 \leq l, m \leq M,$$

- les calculs élémentaires montrent que le système s'écrit

$$\begin{cases} 3u_{l,m} - \frac{1}{3} \sum_{\alpha,\beta=-1}^{+1} u_{l+\alpha,m+\beta} = h^2 f_{l,m}, & 1 \leq l, m \leq M, \\ u_{l,0} = u_{l,M+1} = 0, & 0 \leq l \leq M+1, \\ u_{0,m} = u_{M+1,m} = 0, & 0 \leq m \leq M+1. \end{cases}$$

- schéma à 9 points.

## Le second membre

- sauf cas particulier, on sera incapable de calculer les quantités  $f_{l,m}$ .
- formule du point central : si  $\psi$  est une fonction continue sur le carré  $K_{l,m}$  on a la formule de quadrature qui est exacte pour  $\psi \in Q_1$  :

$$\int_{K_{l,m}} \psi(x) dx = h^2 \varphi \left( lh + \frac{h}{2}, mh + \frac{h}{2} \right) \quad (15)$$

- on utilisera la même règle dans chacun des 4 carrés de côté  $h$  qui constituent le support de la fonction  $\varphi_{l,m}$ .

$$f_{l,m} = \frac{1}{4} \left\{ f \left( lh - \frac{h}{2}, mh - \frac{h}{2} \right) + f \left( lh - \frac{h}{2}, mh + \frac{h}{2} \right) \right. \\ \left. + f \left( lh + \frac{h}{2}, mh - \frac{h}{2} \right) + f \left( lh + \frac{h}{2}, mh + \frac{h}{2} \right) \right\}$$

- De même, la formule du trapèze se généralise aisément en la formule :

$$\int_{K_{l,m}} \psi(x) dx = \frac{h^2}{4} (\psi(a_{l,m}) + \psi(a_{l+1,m}) + \psi(a_{l+1,m+1}) + \psi(a_{l,m+1})) \quad (16)$$

# Décomposition de $\bar{\Omega}$ à l'aide de triangles

- En partageant chaque carré  $K_{l,m}$  en deux triangles  $K_{l,m,1}$  et  $K_{l,m,2}$  suivant la diagonale parallèle à la première bissectrice,

