Méthode des éléments finis: Corrigé du TD2

Ibrahim ALAME

14/02/2024

Problème à résoudre

Nous avons

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = p(x); & 0 \leq x \leq L & \text{équation d'équilibre} \\ \sigma = E\varepsilon \Longrightarrow N = EA\dfrac{\mathrm{d}u}{dx} & 0 \leq x \leq L & \text{loi de comportement} \\ N(0) = -f_1; N(L) = f_2 & & \text{conditions aux limites} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} -EA\dfrac{\mathrm{d}^2u}{dx^2} = p(x) & 0 \leq x \leq L & \text{équiliblre + loi de comportement} \\ EA\dfrac{\mathrm{d}u}{dx}(0) = -f_0;\ EA\dfrac{\mathrm{d}u}{dx}(L) = f_L & & \text{conditions aux limites de Neumann} \end{array} \right.$$

Formulation variationnelle

On cherche une solution $u \in V = H^1(\Omega)$. Multiplions l'équation $-EAu'' = p$ par une fonction test $v \in V$:

$$-EA\frac{\mathrm{d}^2u}{dx^2} \cdot v = p \cdot v$$

$$-\int_0^L EA\frac{\mathrm{d}^2u}{dx^2} \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x$$

$$EA\int_0^L \frac{\mathrm{d}u}{dx} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{dx}\,\mathrm{d}x - \left[EA\frac{\mathrm{d}u}{dx} \cdot v(x)\right]_0^L = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x$$

$$EA\int_0^L \frac{\mathrm{d}u}{dx} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{dx}\,\mathrm{d}x = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x + f_L \cdot v(L) + f_0 \cdot v(0)$$

D'où le problème variationnelle :

$$(\mathcal{P}_v) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ vérifiant} \\ a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

où

$$a(u,v) = EA\int_0^L \frac{\mathrm{d}u}{dx} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{dx}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\ell(v) = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x + f_L \cdot v(L) + f_0 \cdot v(0)$$

Matrice élémentaire

On approche l'espace V par $\mathbb{P}_1 = \{ax + b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et on considère un maillage de la barre $[0, L]$ réduit à un élément fini unique.

Les deux fonctions de base φ_i, $i = 1, 2$ définies par $\varphi_i(a_j) = u_{ij}$ sont données pour tout $x \in [0, L]$ par

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{h}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{h}$$

Nous avons

$$a(\varphi_1, \varphi_1) = EA\int_0^h \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{dx}\right)^2 \mathrm{d}x = EA\int_0^h \left(\frac{-1}{L}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{EA}{h}$$

$$a(\varphi_2, \varphi_2) = EA\int_0^h \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{dx}\right)^2 \mathrm{d}x = EA\int_0^L \left(\frac{1}{h}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{EA}{h}$$

$$a(\varphi_1,\varphi_2) = a(\varphi_2,\varphi_1) = EA \int_0^h \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{dx}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{dx}\right)\mathrm{d}x = EA \int_0^h \left(\frac{-1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right)\mathrm{d}x = -\frac{EA}{h}$$

Nous avons aussi $\ell(\varphi_1) = f_1$ et $\ell(\varphi_2) = f_2$. D'où le système élémentaire

$$\frac{EA}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

où f_1 et f_2 sont les efforts appliqués à la barre aux deux extrémités.

Barre à section variable

Soit $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$ les déplacements aux 5 nœuds. La matrice élémentaire de l'élément e_i, $i = 0, 3$ est donnée par

$$\frac{EA_i}{h_i}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix}$$

Soit explicitement pour chacune des 4 barres :

$$\begin{pmatrix} \frac{EA_0}{h_0} & -\frac{EA_0}{h_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_0}{h_0} & \frac{EA_0}{h_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_1}{h_1} & -\frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA_1}{h_1} & \frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_2}{h_2} & -\frac{EA_2}{h_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_2}{h_2} & \frac{EA_2}{h_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA_3}{h_3} & -\frac{EA_3}{h_3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_3}{h_3} & \frac{EA_3}{h_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

La matrice d'assemblage s'obtient en sommant les 4 matrices élémentaires :

$$\begin{pmatrix} \frac{EA_0}{h_0} & -\frac{EA_0}{h_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_0}{h_0} & \frac{EA_0}{h_0} + \frac{EA_1}{h_1} & -\frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA_1}{h_1} & \frac{EA_1}{h_1} + \frac{EA_2}{h_2} & -\frac{EA_2}{h_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_2}{h_2} & \frac{EA_2}{h_2} + \frac{EA_3}{h_3} & -\frac{EA_3}{h_3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_3}{h_3} & \frac{EA_3}{h_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 = 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

On $u_0 = 0$, La première ligne nous donne la réaction à l'origine $f_0 = -\frac{EA_0}{h_0}u_1$. Le système n'a que 4 inconnues, on obtient le système d'ordre 4 en supprimant la première ligne et la première colonne :

$$\begin{pmatrix} \frac{EA_0}{h_0} + \frac{EA_1}{h_1} & -\frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 \\ -\frac{EA_1}{h_1} & \frac{EA_1}{h_1} + \frac{EA_2}{h_2} & -\frac{EA_2}{h_2} & 0 \\ 0 & -\frac{EA_2}{h_2} & \frac{EA_2}{h_2} + \frac{EA_3}{h_3} & -\frac{EA_3}{h_3} \\ 0 & 0 & -\frac{EA_3}{h_3} & \frac{EA_3}{h_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

Soit numériquement ($E = 2 \times 10^{11}$Pa) :

$$10^6 \begin{pmatrix} \frac{1939}{9}\pi & -\frac{1210}{9}\pi & 0 & 0 \\ -\frac{1210}{9}\pi & \frac{8045}{18}\pi & -\frac{625}{2}\pi & 0 \\ 0 & -\frac{625}{2}\pi & \frac{2125}{6}\pi & -\frac{125}{3}\pi \\ 0 & 0 & -\frac{125}{3}\pi & \frac{125}{3}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 10^3 \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

La solution en (m) est :

$$\left[\frac{1}{1620}\frac{1}{\pi}, \frac{8237}{9801000}\frac{1}{\pi}, \frac{1147237}{1225125000}\frac{1}{\pi}, \frac{1441267}{1225125000}\frac{1}{\pi}\right]$$

soit en (mm) :

$$[0.1964875840, 0.2675154098, 0.2980731589, 0.3744675314]$$

Le déplacement à l'extrémité est alors $u_4 = 0.37$mm.

La réaction f_0 est donc $f_0 = -\frac{EA_0}{h_0}u_1 = 50$kN.

Poutre en flexion

On cherche une solution $u \in V = H^2(\Omega)$. Multiplions l'équation $EIu'''' = p$ par une fonction test $v \in V$:

$$EI_z \frac{\mathrm{d}^4 u}{dx^4} \cdot v = p \cdot v$$
$$\int_0^L EI_z \frac{\mathrm{d}^4 u}{dx^4} \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x$$
$$-EI_z \int_0^L \frac{\mathrm{d}u^3}{dx^3} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{dx}\,\mathrm{d}x + \left[EI_z \frac{\mathrm{d}^3 u}{dx^3} \cdot v(x)\right]_0^L = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x$$
$$EI_z \int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 u}{dx^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v}{dx^2}\,\mathrm{d}x - \left[EI_z \frac{\mathrm{d}^2 u}{dx^2} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{dx}\right]_0^L + \left[EI_z \frac{\mathrm{d}^3 u}{dx^3} \cdot v(x)\right]_0^L = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x$$
$$EI_z \int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 u}{dx^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v}{dx^2}\,\mathrm{d}x - EI_z \frac{\mathrm{d}^2 u}{dx^2} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{dx}\Big|_{x=L} + EI_z \frac{\mathrm{d}^2 u}{dx^2} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{dx}\Big|_{x=0} + EI_z \frac{\mathrm{d}^3 u}{dx^3}\Big|_{x=L} v(L) - EI_z \frac{\mathrm{d}^3 u}{dx^3}\Big|_{x=0} v(0) = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x$$
$$EI_z \int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 u}{dx^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v}{dx^2}\,\mathrm{d}x - M_L \frac{\mathrm{d}v}{dx}(L) - M_0 \frac{\mathrm{d}v}{dx}(0) - F_L v(L) - F_0 v(0) = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x$$
$$EI_z \int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 u}{dx^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v}{dx^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x + F_0 v(0) + F_L v(L) + M_0 \frac{\mathrm{d}v}{dx}(0) + M_L \frac{\mathrm{d}v}{dx}(L)$$

D'où le problème variationnelle :

$$(\mathcal{P}_v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ vérifiant} \\ a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

où

$$a(u,v) = EI_z \int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 u}{dx^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v}{dx^2}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\ell(v) = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x + F_0 v(0) + F_L v(L) + M_0 \frac{\mathrm{d}v}{dx}(0) + M_L \frac{\mathrm{d}v}{dx}(L)$$

En notant $\Phi_i(x)$ les fonctions de base associées aux valeurs nodales de la fonction v_i et $\Psi_i(x)$ les fonctions de base associées aux valeurs nodales de la dérivée $(\frac{dv}{dx})_i$, on écrit :

$$v^h(x) = \sum_{i=1}^n v_i \Phi_i(x) + \sum_{i=1}^n (\frac{dv}{dx})_i \Psi_i(x)$$

Sur un élément $e_k = [x_k, x_{k+1}]$, cette approximation s'écrit :

$$v^h(x) = v_k \Phi_k(x) + (\frac{dv}{dx})_k \Psi_k(x) + v_{k+1}\Phi_{k+1}(x) + (\frac{dv}{dx})_{k+1}\Psi_{k+1}(x)$$

Φ_i et Ψ_i vérifient les conditions :

$$\left\{\begin{array}{ll} \Phi_i(x_j) = u_{ij} & \Phi'_i(x_j) = 0 \\ \Psi_i(x_j) = 0 & \Psi'_i(x_j) = u_{ij} \end{array}\right.$$

D'après le cours :

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_i(x) = \left[1 - 2(x - x_i)\lambda'_i(x_i)\right] \lambda_i^2(x) \\ \Psi_i(x) = (x - x_i)\lambda_i^2(x) \end{array}\right.$$

Sur l'élément de référence $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, $\lambda_0 = 1 - \frac{x}{L}$ et $\lambda_1 = \frac{x}{L}$ D'où en posant $\frac{x}{L} = \xi$:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_0(x) = (1 + 2\xi)(1 - \xi)^2 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \Phi_1(x) = (3 - 2\xi)\xi^2 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \Psi_0(x) = L\xi(1 - \xi)^2 = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ \Psi_1(x) = L(\xi - 1)\xi^2 = L(-\xi^2 + \xi^3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi'_0(x) = -6\xi + 6\xi^2 \\ \Phi'_1(x) = 6\xi - 6\xi^2 \\ \Psi'_0(x) = L(1 - 4\xi + 3\xi^2) \\ \Psi'_1(x) = L(-2\xi + 3\xi^2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi''_0(x) = -6 + 12\xi \\ \Phi''_1(x) = 6 - 12\xi \\ \Psi''_0(x) = L(-4 + 6\xi) \\ \Psi''_1(x) = L(-2 + 6\xi) \end{array}\right.$$

Calcul de la matrice de rigidité :

$$a_{11} = a(\Phi_0, \Phi_0) = EI \int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{dx^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{d\xi^2}\right)^2 \mathrm{d}\xi = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 (-6 + 12\xi)^2 \,\mathrm{d}\xi = 12\frac{EI}{L^3}$$

$$a_{22} = a(\Psi_0, \Psi_0) = EI \int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}^2\Psi_0}{dx^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}^2\Psi_0}{d\xi^2}\right)^2 \mathrm{d}\xi = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 L^2 (-4 + 6\xi)^2 \,\mathrm{d}\xi = 4\frac{EI}{L}$$

$$a12 = a(\Phi_0, \Psi_0) = EI \int_0^L \frac{\mathrm{d}^2\Phi_0}{dx^2}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_0}{dx^2}\mathrm{d}x = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 (-6 + 12\xi)\, L(-4 + 6\xi)\mathrm{d}\xi = 6\frac{EI}{L^2}$$

Les autres coefficients se calculent de la même façon, d'où la matrice élémentaire :

$$\frac{EI}{L^3}\begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

1. Si la poutre est bi-encastrée alors $v(0) = v(L) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}v}{dx}(0) = \frac{\mathrm{d}v}{dx}(L) = 0$ donc

   $$\ell(v) = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x + F_0 v(0) + F_L v(L) + M_0\frac{\mathrm{d}v}{dx}(0) + M_L\frac{\mathrm{d}v}{dx}(L) \quad\Longrightarrow\quad \ell(v) = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x$$

   Le second membre élémentaire est alors

   $$\begin{pmatrix} \ell(\Phi_0) \\ \ell(\Psi_0) \\ \ell(\Phi_1) \\ \ell(\Psi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^L p(x)\Phi_0(x)\mathrm{d}x \\ \int_0^L p(x)\Psi_0(x)\mathrm{d}x \\ \int_0^L p(x)\Phi_1(x)\mathrm{d}x \\ \int_0^L p(x)\Psi_1(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pL\int_0^1 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3\mathrm{d}\xi \\ pL^2\int_0^1(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\mathrm{d}\xi \\ pL\int_0^1 3\xi^2 - 2\xi^3\mathrm{d}\xi \\ pL^2\int_0^1(-\xi^2 + \xi^3)\mathrm{d}\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{pL}{2} \\ \frac{pL^2}{12} \\ \frac{pL}{2} \\ \frac{-pL^2}{12} \end{pmatrix}$$

2. Si la poutre est encastrée à l'origine alors $v(0) = 0$ et si elle est soumise uniquement à une force ponctuelle $\vec{P}$ à l'autre extrémité alors $p = 0$, $M_L = 0$ donc

   $$\ell(v) = P \cdot v(L)$$

   Le second membre élémentaire est alors

   $$\begin{pmatrix} \ell(\Phi_0) \\ \ell(\Psi_0) \\ \ell(\Phi_1) \\ \ell(\Psi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\Phi_0(L) \\ P\Psi_0(L) \\ P\Phi_1(L) \\ P\Psi_1(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix}$$