TD 1 Analyse numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

23/03/2024

1 Interpolation

1. (a) Méthode directe : On cherche a, b et c solution de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi^2 & \pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$P(x) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x$$

(b) Méthode de Lagrange :

$$P(x) = \sin(0)L_0(x)+\sin(\frac{\pi}{2})L_1(x)+\sin(\pi)L_2(x) = L_1(x) = \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)} = \frac{-4}{\pi^2}x(x-\pi)$$

(c) Méthode de Newton :

x_i	y_i	$\Delta[x_{i-1}, x_i]$	$\Delta[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	$\boxed{0}$		
$\frac{\pi}{2}$	1	$\boxed{\frac{2}{\pi}}$	
π	0	$-\frac{2}{\pi}$	$\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$

D'où

$$\begin{aligned} P(x) &= \Delta[x_0] + \Delta[x_0, x_1](x - x_0) + \Delta[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0 + \frac{2}{\pi}(x-0) - \frac{4}{\pi^2}(x-0)(x-\frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x \end{aligned}$$

2. (a) Méthode directe : On cherche a, b , c et d solution de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\pi^3}{8} & \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi^3 & \pi^2 & \pi & 1 \\ \frac{27\pi^3}{8} & \frac{9\pi^2}{4} & \frac{3\pi}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$P(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x$$

(b) Méthode de Lagrange :

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sin(0)L_0(x) + \sin(\tfrac{\pi}{2})L_1(x) + \sin(\pi)L_2(x) + \sin(\tfrac{3\pi}{2})L_3(x) \\
&= L_1(x) - L_3(x) \\
&= \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} - \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\pi)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})} \\
&= \frac{4}{\pi^3}x(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2}) - \frac{4}{3\pi^3}x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)
\end{aligned}$$

(c) Méthode de Newton :

x_i	y_i	$\Delta[x_{i-1}, x_i]$	$\Delta[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$\Delta[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	$\boxed{0}$			
$\frac{\pi}{2}$	1	$\boxed{\frac{2}{\pi}}$		
π	0	$-\frac{2}{\pi}$	$\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$-\frac{2}{\pi}$	0	$\boxed{\frac{8}{3\pi^3}}$

D'où

$$\begin{aligned}
P(x) &= y_0 + \Delta[x_0, x_1](x-x_0) + \Delta[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&\quad + \Delta[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= 0 + \frac{2}{\pi}(x-0) - \frac{4}{\pi^2}(x-0)(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{8}{3\pi^3}(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi) \\
&= \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x
\end{aligned}$$

La méthode de Newton est la plus simple, car elle réutilise les coefficients déjà calculés.

2 Convergence de l'interpolation de Lagrange

1.
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-\alpha)^{n+1}}$$

2. Nous avons
$$f(x) - P_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$
où $-1 < \xi < 1$. Donc
$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\Lambda_n}{(n+1)!}.\frac{(n+1)!}{|\xi-\alpha|^{n+2}} \sim \frac{2^{n+1}}{\mathrm{e}\, n\ln(n)}.\frac{1}{|\xi-\alpha|^{n+2}} \leq \frac{1}{2\mathrm{e}\, n\ln(n)}$$
car d'après le cours la constante de Lebesgue $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{\mathrm{e}\, n\ln(n)}$ et $|\xi - \alpha| > 2$. D'où
$$\lim_{n\to\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$$

3.
$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{Pour} & x_i < x < x_{i+1} \\
s_n(x) & = f(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) \\
 & = \frac{1}{x_i-\alpha} - \frac{1}{(x_i-\alpha)(x_{i+1}-\alpha)}(x-x_i)
\end{array}\right.$$

4. On fait un développement de Taylor à l'ordre 1 de f en $x = x_i$:

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} f''(\xi)$$

soit

$$f(x) = \frac{1}{x_i - \alpha} + (x - x_i)\frac{-1}{(x_i - \alpha)^2} + \frac{(x - x_i)^2}{2}\frac{2}{(\xi - \alpha)^3}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) - s_n(x) &= (x - x_i)\left[\tfrac{-1}{(x_i-\alpha)^2} + \tfrac{1}{(x_i-\alpha)(x_{i+1}-\alpha)}\right] + \tfrac{(x-x_i)^2}{(\xi-\alpha)^3} \\ &= \tfrac{(x_{i+1}-x_i)(x-x_i)}{(x_i-\alpha)^2(x_{i+1}-\alpha)} + \tfrac{(x-x_i)^2}{(\xi-\alpha)^3} \end{aligned}$$

$$|f(x) - s_n(x)| \leq (c_1\, h^2 + c_2\, h^2) = \frac{4(c_1 + c_2)}{n^2} = \frac{c}{n^2}$$

car $h = \frac{2}{n}$, ainsi

$$\|f - s_n\|_\infty \leq \frac{c}{n^2}$$

et donc que s_n converge uniformément vers f lorsque n tend vers l'infini.

3 Moindre carrés discrets

On a

$$\overline{x^k} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n} \qquad \text{et} \qquad \overline{x^k y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k y_i}{n}$$

On trouve

$$\overline{x} = \frac{1}{2} \quad \overline{y} = -\frac{1}{6} \quad \overline{x^2} = \frac{19}{6} \quad \overline{x^3} = \frac{9}{2} \quad \overline{x^4} = \frac{115}{6} \quad \overline{xy} = -\frac{5}{2} \quad \overline{x^2 y} = \frac{19}{6}$$

D'où le système

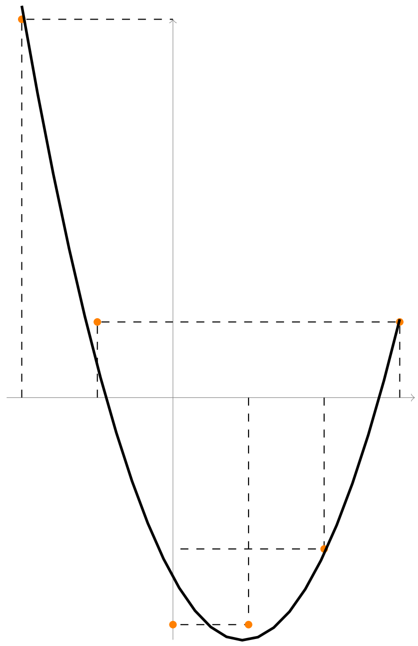
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{19}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{19}{6} & \frac{9}{2} \\ \frac{19}{6} & \frac{9}{2} & \frac{115}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

On trouve

$$a = \frac{55}{56} \qquad b = \frac{-507}{280} \qquad c = \frac{-83}{35}$$

D'où le polynôme :

$$P(x) = \frac{55}{56}x^2 - \frac{507}{280}x - \frac{83}{35}$$



Exercice n°4 : Intégration numérique (retranscrit par Léo Shi)

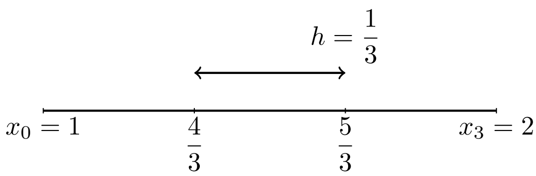
On considère l'intégrale :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

1. On calcule la valeur exacte de I :

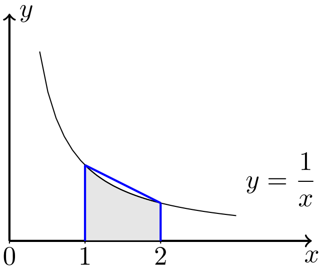
$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^2 = \ln 2$$

2. Par la méthode des trapèzes :



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{2} f(x_i)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right] = \frac{7}{10} = 0,7$$

3. On s'aide d'un dessin :



On a $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui est **convexe**, donc la courbe est en dessous de la droite.

4. $\boxed{E = \dfrac{(b-a)^4}{12n^2} f''(\xi)}$ avec $\xi \in]a, b[$, on cherche n tel que $E \leq 10^{-4}$. On a $b = 2$ et $a = 1$:

$$1 < \xi < 2 \implies \frac{1}{2} < \frac{1}{\xi} < 1 \implies \frac{1}{8} < \frac{1}{\xi^3} < 1$$

$$\frac{(2-1)^4}{12n^2} \times \frac{2}{\xi^3} \leq 10^{-4} \implies \frac{2}{8} \times \frac{1}{12n^2} \leq \frac{1}{12n^2} \times \frac{2}{\xi^3} \leq 10^{-4}$$

D'où $\dfrac{1}{96n^2} \leq 10^{-4}$, soit $\boxed{n \geq 10}$

5

6

7

8

9

10

Exercice n°11 : Formule de Quadrature(retranscrit par Léo Shi)

Soit la formule de quadrature, avec $\alpha \in]0, 1[$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = w_1 f(-\alpha) + w_2 f(\alpha) \qquad (R)$$

1. (R) vraie sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si elle est vraie sur la base $(1, X, X^2, ..., X^n)$, donc pour $n = 1$, la relation (R) est vraie si et seulement si elle est vraie sur la base $(1, X)$.

— Pour 1, on a alors :

$$\int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}x = w_1 + w_2 \implies w_1 + w_2 = 2$$

— Pour X, on a :

$$\int_{-1}^{1} x \mathrm{d}x = w_1(-\alpha) + w_2(\alpha) \implies w_1(-\alpha) + w_2(\alpha) = 0 \implies w_1 = w_2$$

Soit finalement, on obtient $w_1 = w_2 = 1$, d'où :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(-\alpha) + f(\alpha)$$

2. Lorsque $\alpha = 1$, on a :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(-1) + f(1)$$

Pour les polynômes de $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] + X^2$, d'où pour $f(x) = x^2$:

$$\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

Or $f(-1) + f(1) = 2$ et $2 \neq \frac{2}{3}$, donc <u>la formule n'est pas exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$</u>

3. On a $\frac{2}{3} = \alpha^2 \times 2 \implies \alpha = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ car $\alpha > 0$ ($\alpha \in]0, 1[$). La formule exacte est alors :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

4. Si $f(x) = x^3$, alors

$$\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 0$$

Donc <u>la formule est exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$</u>. La dernière question n'est pas toujours valable, vérifions donc la formule sur $\mathbb{R}_4[X]$:

$$\int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{9}$$

Etant donné que $\frac{2}{9} \neq \frac{2}{5}$, la formule **n'est pas exacte** pour $\mathbb{R}_4[X]$ (comme prédit ...)

5. **On cherche une relation entre ξ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et x sur l'intervalle $[a, b]$.** On suppose que la relation entre x et ξ est **affine** :

$$x = \lambda\xi + \mu$$

$$\left\{\begin{array}{l} a=-\lambda+\mu \\ b=\lambda+\mu \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu=\dfrac{a+b}{2} \\ \lambda=\dfrac{b-a}{2} \end{array}\right.$$

On pose $x=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}\xi$, on a donc avec $\xi=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 \left(\frac{b-a}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\xi\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right]\end{aligned}$$

12

Intégration numérique :

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{4}{3}f\left(-\frac{\xi}{2}\right)+\frac{2}{3}f(\xi)$$

1. La formule est exacte pour $f(x)=1$ et $f(x)=x$. Pour $f(x)=x^2$ nous avons
$$\frac{2}{3}=\xi^2$$
donc $\xi=\sqrt{\frac{2}{3}}$ et avec cette valeur la formule n'est plus exacte pour $f(x)=x^3$ donc la méthode est d'ordre 2.
2. On fait $x=\lambda t+\mu$. En $x=a$, $t=-1$ et en $x=b$, $t=1$:
$$a=-\lambda+\mu$$
$$b=\lambda+\mu$$
D'où le changement de variable $x=\frac{a+b}{2}+t\frac{b-a}{2}$:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{a+b}{2}+t\frac{b-a}{2})\mathrm{d}t$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{2}\left[\frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{\xi}{2}\frac{b-a}{2}\right)+\frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}+\xi\frac{b-a}{2}\right)\right]$$
3. Nous avons
$$\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq h\left[\frac{4}{3}f\left(x_{2i}-\frac{\xi}{2}h\right)+\frac{2}{3}f\left(x_{2i}+\xi h\right)\right]$$
$$\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{2h}{3}\left[2f\left(x_{2i}-\frac{h}{\sqrt{6}}\right)+f\left(x_{2i}+\sqrt{\frac{2}{3}}h\right)\right]$$
où $x_k=a+kh=-1+kh$, $h=\frac{b-a}{2n}$, $x_{2i+1}=-1+(2i+1)h$ et $x_{2i-1}=-1+(2i-1)h$
D'où
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{3n}\sum_{i=1}^n\left[2f\left(a+(i-\frac{1}{2\sqrt{6}})\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+(i+\frac{1}{\sqrt{6}})\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

13

Formule de Quadrature :

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \simeq \omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f'(\xi)$$

$$E(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - [\omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f'(\xi)]$$

1. On trouve $\xi = \frac{1}{2}$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \frac{1}{6}$ et $\omega_2 = \frac{1}{3}$.
2. $$E(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \left[f(0) + \frac{1}{6}f'(0) + \frac{1}{3}f'(\frac{1}{2})\right]$$
   $E(x \mapsto x^4) = \frac{1}{30}$ donc la méthode est d'ordre 3.
3. On fait le changement de variable $x = a + t(b-a)$:
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f(a+t(b-a))\mathrm{d}t$$
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)\left[f(a) + \frac{1}{6}f'(a) + \frac{1}{3}f'(\frac{a+b}{2})\right]$$

14

1. (a) Pour que la formule soit exacte pour $f(x) = 1$, il faut $\omega_1 + \omega_2 = 1$. Et pour qu'elle soit exacte pour $f(x) = x$, il faut $\omega_2\alpha = \frac{1}{2}$. Ce qui amène à $\omega_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha}$ et $\omega_2 = \frac{1}{2\alpha}$.
   (b) Pour qu'elle soit exacte pour $f(x) = x^2$, il faut $\omega_2\alpha^2 = \frac{1}{3}$, donc $\alpha = \frac{2}{3}$. Et donc $\omega_1 = \frac{1}{4}$ et $\omega_2 = \frac{3}{4}$. On a en posant $x = hu$,
   $$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x = h\int_0^1 f(hu)\mathrm{d}u \simeq \frac{h}{4}\left[f(0) + 3f(\frac{2}{3}h)\right]$$
2. (a) On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en 0 :
   $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(c)x^3$$
   avec c compris entre 0 et x. On pose
   $$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$
   qui est bien polynômial de degré au plus 2 et $R(x) = \frac{1}{6}f'''(c)x^3$. On vérifie aisément l'inégalité voulue.
   (b) De la majoration $|R(x)| \leq \frac{M_3}{6}x^3$, on tire :
   $$\left|\int_0^h R(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^h |R(x)|\mathrm{d}x \leq \int_0^h \frac{M_3}{6}x^3\mathrm{d}x = \frac{M_3 h^4}{24}$$

Et, en tenant de compte que $R(0)=0$ (inégalité pour $x=0$), on a aussi :

$$|Q(R) = \left|\frac{h}{4}R(0) + \frac{3h}{4}R(\frac{2}{3}h)\right| \leq \frac{3h}{4}\frac{M_3}{6}(\frac{2}{3}h)^3 = \frac{M_3h^4}{27}$$

On a enfin

$$|E(R)| = |I(R) - Q(R)| \leq |I(R)| + |Q(R)| \leq \frac{17}{216}M_3h^4$$

(c) Par linéarité, $I(f) = I(P) + I(R)$ et $Q(f) = Q(P) + Q(R)$. Comme la formule est exacte pour P (puisqu'elle l'est sur tout polynôme de degré 2), $I(P) = Q(P)$ et donc $E(f) = E(R)$. Et donc

$$|E(f)| \leq \frac{17}{216}M_3h^4$$

3. (a) On pose $x_i = a + ih$. On a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N-1}\int_0^h f(x_i+u)\mathrm{d}u \simeq \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{N-1}\left[f(x_i) + 3f(x_i + \frac{2}{3}h)\right]$$

(b) On note $M_3 = \sup\limits_{a\leq x\leq b} |f^{(3)}(x)|$.

L'erreur sur chaque intervalle sera majorée par $\frac{17}{216}M_3h^4$ et donc l'erreur totale par $\frac{17}{216}M_3Nh^4 = \frac{17}{216}M_3(b-a)h^3$.

15

16

17

Polynômes orthogonaux :

1. Par intégration par parties
2. On trouve $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$
3.

$$\begin{aligned}P_3(X) &= \tfrac{1}{3!2^3}\tfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}X^3}\left[(X^2-1)^3\right]\\ &= \tfrac{1}{6\times 8}\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}X^2}\left[3(X^2-1)^2\times 2X\right]\\ &= \tfrac{1}{8}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left[2(X^2-1)\times 2X^2 + (X^2-1)^2\right]\\ &= \tfrac{1}{8}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left[5X^4 - 6X^2 + 1\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\left(5X^3 - 3X\right)\end{aligned}$$

4. Les points ξ_i, $i = 1,2,3$ sont les racines de P_3 d'où

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad \xi_2 = 0, \qquad \xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Les 3 poids associés se calculent par la formule :

$$\forall i = 1,2,3 \quad \omega_i = \frac{2}{(1-\xi_i^2)P_n'(\xi_i)^2}$$

D'où

$$\omega_1 = \frac{5}{9}, \quad \omega_2 = \frac{8}{9}, \quad \omega_3 = \frac{5}{9}$$

Et donc

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\mathrm{d}\xi \simeq \frac{1}{9}\left[5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})\right]$$

Par changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$:

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{18}\left[5f(\frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2}) + 8f(\frac{a+b}{2}) + 5f(\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2})\right]$$

et si $x_i = a + ih$ où $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{18}\left[5f(x_{i+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{20}}h) + 8f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 5f(x_{i+\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{20}}h)\right]$$

Finalement

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{18n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[5f(a + (i - 0.1127)\frac{b-a}{n}) + 8f(a + (i + 0.5)\frac{b-a}{n}) + 5f(a + (i + 0.8873)\frac{b-a}{n})\right]$$