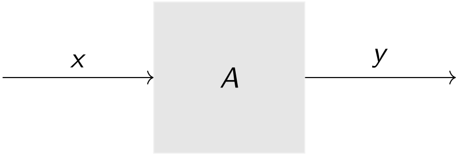
Filtrage

19 janvier 2023

Système

Un système est représenté par une application A qui à un signal d'entrée x associe la sortie $y = A(x)$.



Un système est

- analogique si x et y sont à temps continu.
- à temps discret si x et y sont discrets.
- linéaire si A est linéaire : $A(x_1 + \lambda x_2) = Ax_1 + \lambda Ax_2$.
- causal ou réalisable si la réponse ne peut prendre naissance avant l'application de l'excitation.
- invariant ou stationnaire si pour tout $a > 0$

$$y(t) = Ax(t) \text{ a l'instant } t \Longrightarrow y(t-a) = A[x(t-a)]$$

Filtre

Le filtre est un système permettant de *sélectionner* l'information utile dans un signal.
Dans le cas d'un système linéaire et continu, nous considèrerons l'opérateur A de la forme

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) e(t-\theta) \mathrm{d}\theta$$

soit

$$\boxed{s = h \star e}$$

où $h(t)$ est un noyau appelé réponse impulsionnelle (RI) du système linéaire. Dans le cas discret on a :

$$s_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e_{n-k}$$

que l'on note également

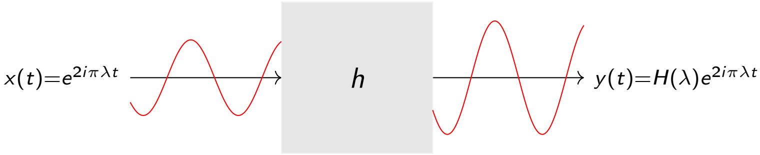
$$s = h \star e$$

Réponse harmonique

Le signal $e^{2i\pi\lambda t}$, est un vecteur propre de l'opérateur $A = h \star \cdot$:

$$A(e^{2i\pi\lambda t}) = (h \star e^{2i\pi\lambda \cdot})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) e^{2i\pi\lambda(t-\theta)} \mathrm{d}\theta = H(\lambda) e^{2i\pi\lambda t}$$

où la valeur propre $H(\lambda)$ est la transformée de Fourier de h.



Donc si $x(t) = a\sin(2\pi\lambda t) = \frac{a}{2i}\left(e^{2i\pi\lambda t} - e^{-2i\pi\lambda t}\right)$, par combinaison linéaire, la réponse est :

$$y(t) = a|H(\lambda)|\sin(2\pi\lambda t + arg(H(\lambda)))$$

$H(\lambda)$ peut être obtenue expérimentalement en appliquant un signal sinusoïdal et en mesurant l'amplitude et le déphasage de la sortie.

Cas général

On écrit le signal x comme "combinaison linéaire infinie" des vecteurs propres $\left(e^{2i\pi\lambda t}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) e^{2i\pi\lambda t} \mathrm{d}\lambda$$

Le coefficient suivant le vecteur propre $e^{2i\pi\lambda t}$ n'est autre que la transformée de Fourier de x. Calculons la réponse :

$$y = h \star \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) e^{2i\pi\lambda t} \mathrm{d}\lambda \right) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) \left(h \star e^{2i\pi\lambda t} \right) \mathrm{d}\lambda$$

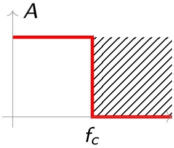
$$y = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) H(\lambda) e^{2i\pi\lambda t} \mathrm{d}\lambda$$

D'où

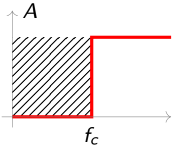
$$\boxed{Y(\lambda) = H(\lambda) X(\lambda)}$$

Les principaux types de filtres

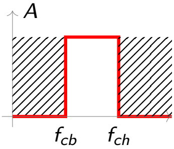
Filters idéaux



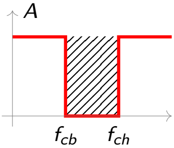
Passe-bas



Passe-haut



Passe-bande



Coupe-bande

Exemple

Le filtre passe-bas idéal

Le passe-bas idéal est le filtre qui ne modifie par les fréquences λ telles que $\lambda < \lambda_c$ (fréquence de coupure) et supprime les autres. D'où

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\lambda| \leq \lambda_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

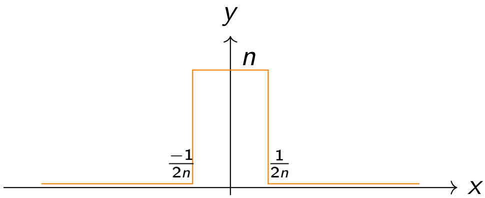
l'originale par transformation de Fourier de $H(\lambda)$ est

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda) \mathrm{e}^{2i\pi t\lambda} \mathrm{d}\lambda = \int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} \mathrm{e}^{2i\pi tx} \mathrm{d}x = \frac{\sin 2\pi\lambda_c t}{\pi t}$$

Un filtre de réponse impulsionnelle h non causale (car son support n'est pas inclus dans $[0, +\infty[$) ne peut pas être réalisable !

Impulsion de Dirac

- En physique, δ est une "fonction" nulle partout sauf en 0 elle vaut ∞.
- En math, δ est une distribution définie par : $< \delta, \varphi >= \varphi(0)$.
- En réalité la définition physique vient du faite que la limite de la suite de fonctions $(f_n)_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



au sens des distribution n'est autre que δ.
- En pratique, une impulsion de Dirac δ correspond à un événement bref et intense (choc, poussée violente etc.).

Impulsion de Dirac

On définit l'impulsion de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ par : $< \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$
Nous continuons à utiliser une notation fonctionnelle : $\delta = \delta(t)$ et $\delta_a = \delta(t-a)$. Ainsi

$$< \delta, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \left(= \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi(0) \right)$$

La transformation de Fourier du Dirac :

$$\hat{\delta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2i\pi x t}\mathrm{d}t =< \delta, e^{-2i\pi x t} >= e^{-2i\pi x 0} = 1$$

Le produit de convolution :

$$(f \star \delta)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(x-t)\mathrm{d}t =< \delta_x, f >= f(x)$$

D'où $\boxed{f \star \delta = f}$

$$\xrightarrow{\ \delta\ } \boxed{\ h\ } \xrightarrow{\ h\ }$$

Filtrage analogique

L'entrée e et la sortie $s = Ae$ s'expriment à l'aide d'une équation différentielle : $b_q s^{(q)} + \cdots + b_1 s' + b_0 s = a_q e^{(q)} + \cdots + a_1 e' + a_0 e$ On a donc par transformation de Fourier :

$$\sum_{k=0}^{q} b_k (2i\pi\lambda)^k \hat{s}(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} a_j (2i\pi\lambda)^j \hat{e}(\lambda)$$

D'où

$$\hat{s}(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \hat{e}(\lambda)$$

où $P(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j x^j$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{q} b_k x^k$. D'où la fonction de transfert

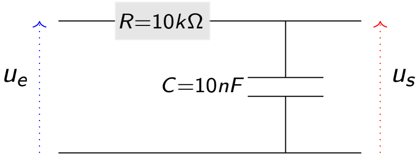
$$H(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)}$$

On définit aussi la réponse indicielle d'un filtre par sa réponse à l'échelon unité (fonction de Heaviside) :

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h(s)\mathrm{d}s.$$

Exemple : filtre passe-bas passif

Un filtre réel du premier ordre



Appliquons la règle du diviseur de tension :

$$U_s = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} U_e = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} U_e = \frac{1}{1 + jRC\omega} U_e$$

D'où

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

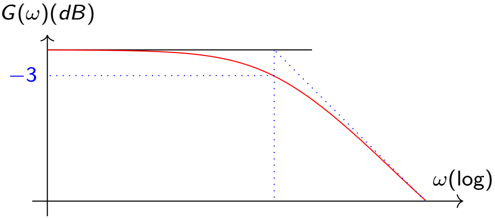
Exemple : filtre passe-bas passif

Nous en déduisons l'amplification en tension :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

Diagramme de Bode du gain :

$$G(\omega) = 20 \log_{10} |H(\omega)| = -10 \log_{10} \left(1 + (RC\omega)^2\right)$$



Exemple : filtre passe-bas passif

- Fréquence de coupure à –3 dB : La pulsation de coupure est solution de l'équation :

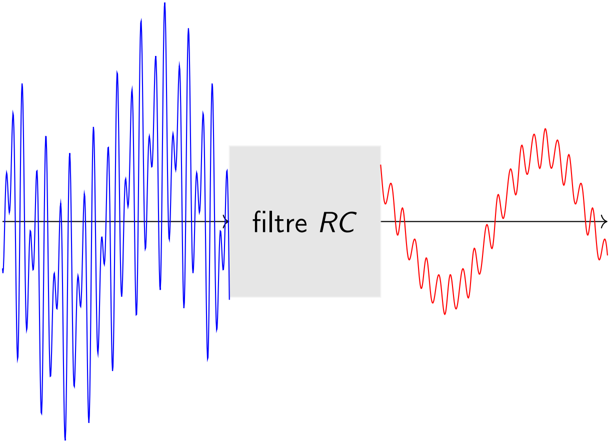
$$|H(\omega_c)| = \frac{|H|\text{max}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où $RC\omega_c = 1$ et $\boxed{\lambda_c = \frac{1}{2\pi RC}}$

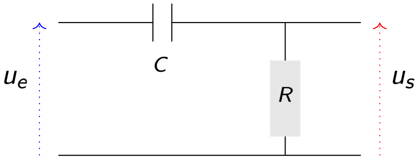
Application numérique : $R = 10k\Omega$, $C = 10nF \Longrightarrow \omega_c = 10000$ rad/s. et $\lambda_c = 1.6kHz$.

Exemple : filtre passe-bas passif



Exemple : filtre passe-haut passif

Un filtre réel du premier ordre



Appliquons la règle du diviseur de tension :

$$U_s = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} U_e = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} U_e = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} U_e$$

D'où

$$H(\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

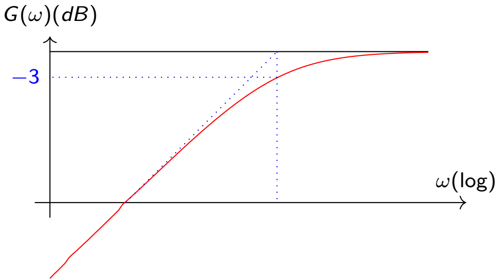
Exemple : filtre passe-haut passif

Nous en déduisons l'amplification en tension :

$$|H(\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

Diagramme de Bode du gain :

$$G(\omega) = 20\log_{10}|H(\omega)| = 20\log_{10}(RC\omega) - 10\log_{10}\left(1 + (RC\omega)^2\right)$$



Exemple : filtre passe-haut passif

- Fréquence de coupure à –3 dB : La pulsation de coupure est solution de l'équation :

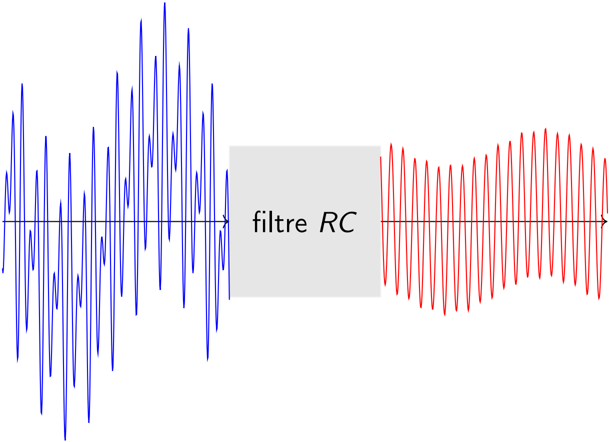
$$|H(\omega_c)| = \frac{|H|\text{max}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{RC\omega_c}{\sqrt{1+(RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où $RC\omega_c = 1$ et $\boxed{\lambda_c = \frac{1}{2\pi RC}}$

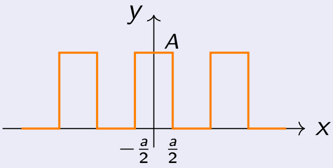
Application numérique : $R = 10k\Omega,\ C = 10nF \Longrightarrow \omega_c = 10000$ rad/s. et $\lambda_c = 1.6kHz$.

Exemple : filtre passe-haut passif



Exemple

Soit x une SIR (Suite à impulsion rectangulaire) centrée de période $T = 100\mu s$ et d'amplitude $A = 10V$.



1. Déterminer le spectre de x et calculer le pourcentage de puissance comprise dans le premier lobe du sinus cardinal.
2. On applique à cette SIR un filtre passe-bas d'ordre 1 dont la fonction de transfert est

$$H : i\lambda \mapsto \frac{1}{1 + i\frac{\lambda}{\lambda_c}}$$

où $\lambda_c = 10kHz$. Que valent l'amplitude et la phase des composantes $10kHz$, $40kHz$ et $150kHz$?

Exemple

- On a vu

$$c_n = \frac{A}{\pi n}\sin(\pi n \frac{a}{T}) = \frac{10}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{50})$$

L'énergie total sur une période est :

$$E = \frac{1}{T}\int_{-a/2}^{a/2} A^2 \mathrm{d}t = \frac{aA^2}{T} = 20$$

Le spectre d'amplitude s'annule pour la première fois pour $n = 5$.
L'énergie correspondant au premier lobe de sinus cardinal est donc :

$$E_{\pm 5} = \sum_{n=-5}^{n=5} |c_n|^2 \simeq 18.05 \simeq 90\% \text{ de l'énergie totale}$$

Exemple

- La fréquence fondamentale de x est $\lambda_0 = 1/T$ avec $T = 100\mu s = 10^{-4}s$ alors $\lambda_0 10kHz$. Les harmoniques $10kHz$, $40kHz$ et $150kHz$ sont obtenues pour $n = 1, 4, 15$. Les coefficients de Fourier γ_n du signal filtré à ces fréquences sont donc :

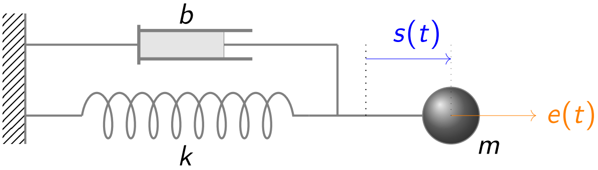
$$\gamma_1 = H(10i) \times c_1 = 1.323e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\gamma_4 = H(40i) \times c_4 = 0.113e^{-i.1.325}$$

$$\gamma_{150} = H(150i) \times c_{15} = 0$$

Exemple

Un filtre réel de second ordre



L'équation de la dynamique s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + ks(t) = e(t)$$

Il s'agit d'un filtre du second ordre avec $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{mx^2+bx+k}$. On pose $\Delta = b^2 - 4mk$:

Exemple

Un filtre réel : un amortisseur

- Si $\Delta < 0$, on pose $\omega = \sqrt{4mk - b^2}$, $\alpha = \frac{b}{2m}$ et $\beta = \frac{\omega}{2m}$

$$H(\lambda) = \frac{1}{2im\beta}\left(\frac{1}{2i\pi\lambda - x_1} - \frac{1}{2i\pi\lambda - x_2}\right)$$

où $x_1, x_2 = -\alpha \pm i\beta$. La transformée de Fourier réciproque $h(t)$ s'écrit :

$$h(t) = \frac{1}{2im\beta}\left(\mathrm{e}^{x_1 t} - \mathrm{e}^{x_2 t}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{m\beta}\sin(\beta t)u(t)$$

soit

$$h(t) = \frac{2}{\omega}\mathrm{e}^{-\frac{b}{2m}t}\sin\left(\frac{\omega}{2m}t\right)u(t)$$

où $u(t)$ est l'échelon unité de Heaviside. Remarquons que $h(t)$ est bien causale. La réponse à $e(t)$ est $s = h \star e$:

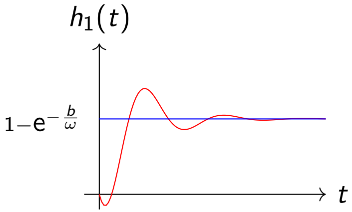
$$s(t) = \frac{2}{\omega}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{b}{2m}(t-x)}\sin\left(\frac{\omega}{2m}(t-x)\right)f(x)\mathrm{d}x$$

L'amortisseur

La réponse indicielle

La réponse indicielle est

$$h_1(t) = \frac{2}{\omega} \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{b}{2m}x} \sin\left(\frac{\omega x}{2m}\right) \mathrm{d}x = \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{b}{2m}t} \left(\cos\frac{\omega t}{2m} + \frac{b}{\omega} \sin\frac{\omega t}{2m}\right)\right] u(t)$$

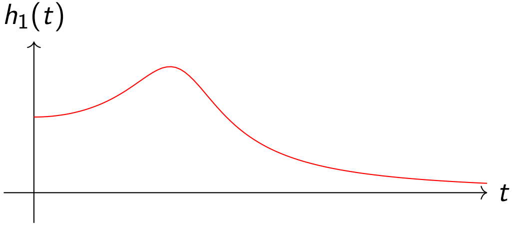


L'amortisseur

La fonction de transfert H

$$\begin{aligned} |H(\lambda)| &= \frac{1}{m}\left|\frac{1}{(2i\pi\lambda - x_1)(2i\pi\lambda - \bar{x_1})}\right| \\ &= \frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt{[(2\pi\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(2\pi\lambda+\beta)^2+\alpha^2]}} \end{aligned}$$

En O $H(0) = \frac{1}{k}$ et à l'infini $\lim_{\lambda\to\infty} H(\lambda) = 0$:



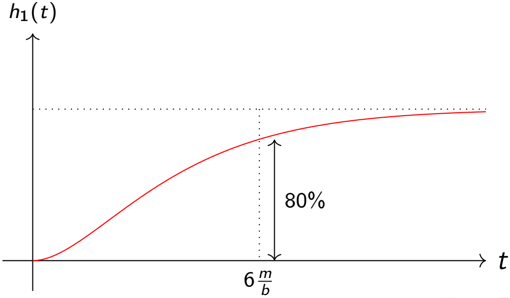
L'amortisseur

- Si $\Delta = 0$, il y a un pôle double réel négatif $-\alpha$ et $H(\lambda) = \frac{1}{m(\lambda+\alpha)^2}$.
  D'où, $h(t) = \frac{1}{m} t e^{-\alpha t} u(t) = \frac{1}{m} t e^{-\frac{b}{2m} t} u(t)$ D'où

$$s(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau) e^{-\frac{b}{2m}(t-\tau)} e(\tau) \mathrm{d}\tau$$

  et

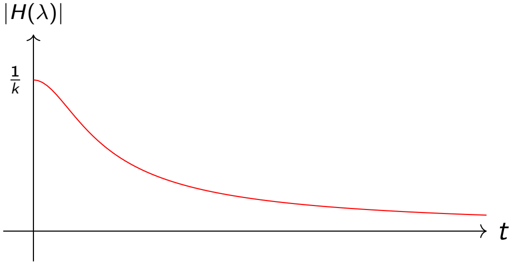
$$h_1(t) = \left[1 - \left(1 + \frac{b}{2m}\right) e^{-\frac{b}{2m} t}\right] u(t)$$



L'amortisseur

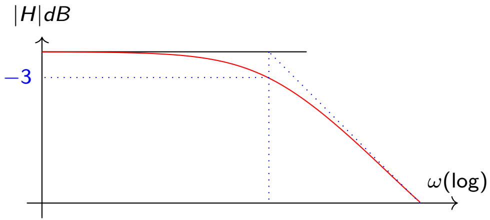
La fonction de transfert H dans le cas où $\Delta < 0$

Nous traçons le module de H ; $|H| = \frac{1}{m(\alpha^2+4\pi^2\lambda^2)}$:

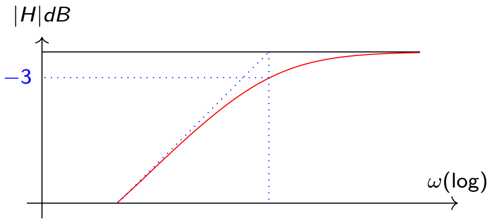


Exemples de filtre du première ordre

- Passe-bas : Fonction de transfert $H(z) = \frac{1}{z+1}$

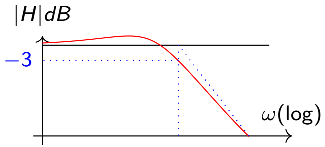


- Passe-haut : $H(z) = \frac{z}{z+1}$

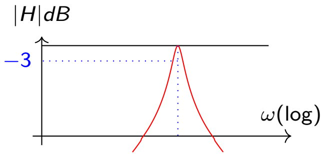


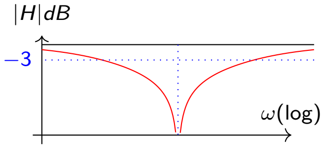
Exemples de filtre du seconde ordre

- Passe-bas 2^{e} ordre $H(z) = \frac{1}{z^2+2\xi z+1}$:

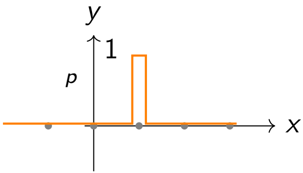


- Passe-bande $H(z) = \frac{2\xi z}{z^2+2\xi z+1}$ et coupe-bande $H = \frac{1+z^2}{z^2+2\xi z+1}$





Impulsion unité en $p \in \mathbb{Z}$: $n \mapsto d_p[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



Elle vérifie les même propriétés que l'impulsion de Dirac :

- $\forall n \in \mathbb{Z}, d_p[n] = d_0[n-p]$
- $x[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]d_k$
- $(x \star y)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k]$
- $x \star d_0 = x$

La sortie s en fonction de l'entrée e est donnée par $s = h \star e$, soit :

$$\boxed{s[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e[n-k]}$$

Fonction de transfert

On considère désormais un signal numérique $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, périodique de période N et un filtre S de réponse impulsionnelle h périodique de même période. Le signal filtré obtenu en sortie est

$$y = x * h$$

Appliquons la transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}$:

$$Y = \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(x \star h) = N\mathcal{F}(x) \cdot \mathcal{F}(h)$$

On pose alors $H = N\mathcal{F}(h)$, c'est la fonction de transfert du filtre et on a :

$$\boxed{H_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-2i\pi\frac{kn}{N}}}$$

Filtres linéaires discrets

La dérivée

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- est approchée dans $\mathbb{R}$ par $y'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,
- et dans $\mathbb{Z}$ tout simplement par la différence $\frac{y_{n+1}-y_n}{1}$.

Une equation différentielle ordinaire linéaire à coefficients constants est discrétisée dans $\mathbb{Z}$ en un filtre linéaire discret de la forme

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad y_k = \sum_{i=-\infty}^{N} a_i y_{k-i} + \sum_{j=-\infty}^{M} b_j x_{k-j}$$

où $x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est l'entrée et $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la sortie.
Un tel filtre est dit récursif d'ordre N.

Fonction de transfert

Appliquons la transformée en z à cette équation : on obtient

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i} Y(z) + \sum_{j=0}^{q} b_i z^{-j} X(z)$$

c'est-à-dire

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}\right) Y(z) = \left(\sum_{j=0}^{q} b_i z^{-j}\right) X(z)$$

D'où

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}$$

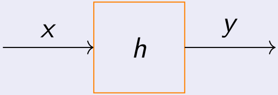
où

$$P(x) = 1 - \sum_{i=1}^{p} a_i x^i \text{ et } Q(x) = \sum_{i=0}^{q} b_i x^i$$

Pour avoir la réponse en fréquence du filtre on remplace z par $i\lambda$:

$$H_f(\lambda) = H(i\lambda)$$

Exemple



Un système linéaire discret et causal est décrit par :

$$y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

où $n \mapsto x[n]$, $n \mapsto y[n]$ sont l'entrée et la sortie respectivement.

1. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$.
2. Calculer la réponse impulsionnelle $n \mapsto h[n]$.

1. On a

$$y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

Donc

$$Y + \frac{3}{4}z^{-1}Y + \frac{1}{8}z^{-2}Y = X$$

D'où la fonction de transfert

$$\boxed{H(z) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}}$$

2. Une décomposition en éléments simples donne

$$H(z) = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

D'où

$$\boxed{h[n] = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n]}$$

Exemples

Pour chacun des filtres suivants, déterminer la réponse impultionnelle h et la fonction de transfert en z, et préciser si le filtre est causal et s'il est stable.

1. $s(n) = \sum_{-\infty}^{n} e(k)$.
2. $s(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} e(n+k)$.
3. $s(n) = e(n) - e(n-1)$.
4. $s(n) = e(n+1) - e(n)$.
5. $s(n) = e(n) - 2e(n-1) + e(n-2)$.
6. $s(n) = \sum_{k=0}^{k} (-1)^k C_p^k e(n-k)$ où $p \in \mathbb{N}^*$ est donné.

Exemples

1. Soit d_0 le signal numérique nul partout sauf en 0 il vaut 1. La réponse impultionnelle n'est autre que la réponse à ce signal :

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} d_0[k] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

La fonction de transfert en z de A s'écrit :

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

définie pour $|z| > 1$. La réponse impultionnelle est causale donc le filtre A est causal. Par contre il est pas stable car $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$.