Méthode des éléments finis

Ibrahim ALAME

ESTP

19/10/2022

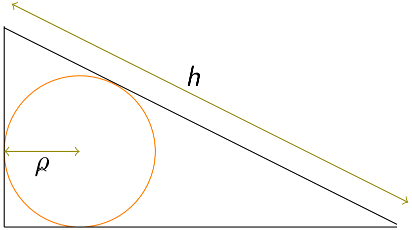
Erreur d'interpolation

Soit $(K, \mathbb{P}, \Sigma)$ un élément fini n-simplexe ou n-palallélotope de type (k). On suppose

$$n \leq 3 \quad \text{et} \quad k \geq 1$$

Alors il existe une constante C qui ne dépend que de n et de k telle que pour tout entier m, $0 \leq m \leq k$, on a

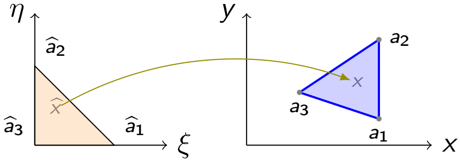
$$\forall v \in H^{k+1}(K), \quad |v - \Pi v|_{m,k} \leq \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K}$$



Intégration numérique

$$a(\varphi_j,\varphi_i)=\sum_{l,m}^{2}\left(a_{lm}\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\int_K \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_l}\mathrm{d}x\right)$$

- Les fonctions de base appartiennent à $\mathbb{P}_k$ donc le produit $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_l}$ coïncide avec un polynôme de $\mathbb{P}_{2k-2}$.
- Soit $F_K : \hat{x} \mapsto F_K(\hat{x}) = B_K\hat{x} + b$ une bijection affine du triangle unité $\widehat{K}$ sur le triangle K ; $\det(B_K) > 0$.



Alors on a pour toute fonction $\varphi = \widehat{\varphi}\circ F_K$ continue sur K :

$$\int_K \psi(x)\mathrm{d}x = \text{dét}(B_K)\int_{\widehat{K}}\widehat{\psi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x}$$

Intégration de $a(\varphi_j, \varphi_i)$

On a

$$\text{dét}(B_K) = \frac{\text{mes}(K)}{\text{mes}(\widehat{K})} = 2\text{mes}(K)$$

On prend $\psi = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} \in \mathbb{P}_{2k-2}$. On se ramène à $\widehat{\psi} \in \mathbb{P}_{2k-2}$ sur le triangle unité. Or pour tout monôme $\hat{x}_1^{k_1} \hat{x}_2^{k_2}$:

$$\int_{\widehat{K}} \hat{x}_1^{k_1} \hat{x}_2^{k_2} \mathrm{d}\hat{x} = \frac{k_1! k_2!}{(k_1 + k_2 + 2)!}$$

plus généralement

$$\int_{\widehat{K}} \hat{x}_1^{k_1} \hat{x}_2^{k_2} (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)^{k_3} \mathrm{d}\hat{x} = \frac{k_1! k_2! k_3!}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!}$$

En coordonnées barycentriques

$$\int_{\widehat{K}} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} \mathrm{d}\hat{x} = 2\text{mes}(K) \frac{k_1! k_2! k_3!}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!}$$

Intégration de $\ell(\varphi_i)$

$$\ell(\varphi_i) = \sum_{K \in \mathscr{T}_h} \int_K f \varphi_i \, \mathrm{d}x$$

Formule de quadrature : $\int_K f\psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{N} \omega_{l,K} \psi(b_{i,K})$

- $k = 0$:
$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \mathrm{mes}(K)\psi(a_{0,K})$$
- $k = 1$:
$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\mathrm{mes}(K)\sum_{i=1}^{3}\psi(a_{i,K})$$
- $k = 2$:
$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\mathrm{mes}(K)\sum_{i=4}^{6}\psi(a_{i,K})$$

Intégration de $\ell(\varphi_i)$

$$\ell(\varphi_i) = \sum_{K \in \mathscr{T}_h} \int_K f \varphi_i \, \mathrm{d}x$$

Formule de quadrature : $\int_K f\psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{N} \omega_{l,K}\psi(b_{i,K})$

- $k = 0$:

$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \mathrm{mes}(K)\psi(a_{0,K})$$

- $k = 1$:

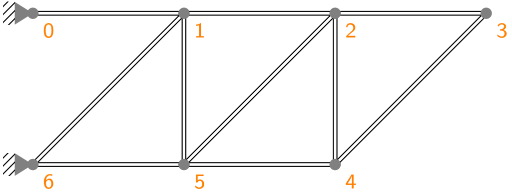
$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\mathrm{mes}(K)\sum_{i=1}^{3}\psi(a_{i,K})$$

- $k = 2$:

$$\int_K \psi(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\mathrm{mes}(K)\sum_{i=4}^{6}\psi(a_{i,K})$$

Maillage en dimension 1 : Liste des sommets

- Les sommets sont numérotés $0, \cdots, N_s - 1$,

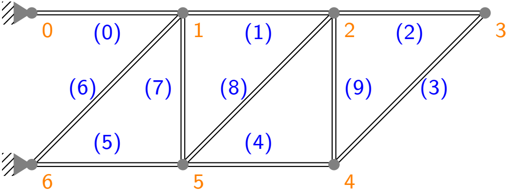


- On définit dans un tableau les coordonnées de chaque sommet i :

i	0	1	...	$N_s - 1$
x	x_0	x_1	...	x_{N_s-1}
y	y_0	y_1	...	y_{N_s-1}

- Si les sommets sont alignés : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ et si la grille est uniforme, elle est donnée de façon implicite par

$$x_i = a + ih, \quad \text{où } i = 0, \cdots, n+1 \text{ et } h = \frac{1}{n+1}$$



- On définit dans un tableau les extrémités de chaque élément e :

e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
origine	0	1	2	3	4	5	6	1	2	2
extrémité	1	2	3	4	5	6	1	5	5	4

- Pour le cas mono-dimensionnel, la table de connectivité est implicite à partir de la liste des sommets. Pour chaque élément $e = 0, \cdots, n$,

$$n_{e,1} = e, \quad n_{e,2} = e + 1$$

Liste des sommets en dimension 2

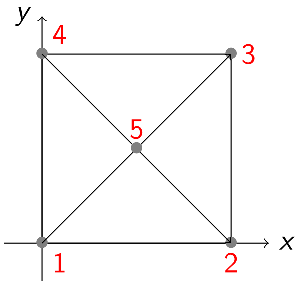
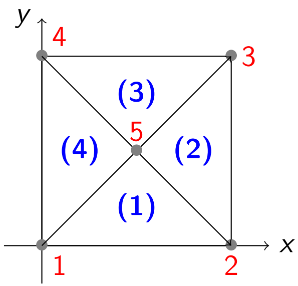


Tableau des coordonnées $\{(x_{1i}, x_{2i})\}_{i=1}^{N_s}$.

i	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_{1i}$	0	L	L	0	$L/2$
$\mathbf{x}_{2i}$	0	0	H	H	$H/2$
Γ	1	1	1	1	0

Table de connectivité en dimension 2



- N_e nombre de triangles,
- $n_{e,j}\ :\ e = 1, \cdots, N_e,\ j = 1, 2, 3$

e	**1**	**2**	**3**	**4**
1	5	5	3	1
2	1	2	4	5
3	2	3	5	4

Table de connectivité en dimension 2

L'ordre dans lequel sont donnés les numéros de sommet n'est pas important. Si on peut, il faut respecter un sens comme ici le sens trigonométrique. Cela peut faciliter pour certains problèmes quelques points de programmation.
Souvent on ajoute un numéro de référence pour pouvoir introduire une caractérisation des équations au niveau de chaque élément.

e	1	2	3	4
1	5	5	3	1
2	1	2	4	5
3	2	3	5	4
4	1	2	1	2

les éléments 1 et 3 ont les mêmes caractéristiques, de même que les éléments 2 et 4 .

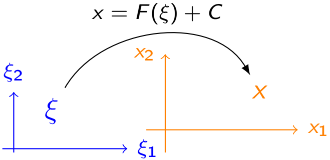
Algorithme d'assemblage

Il suffit de parcourir les éléments en ajoutant successivement la contribution de chaque matrice élémentaire m_{ij}^e à la matrice totale M_{IJ} avec $I = n(e, i)$ et $J = n(e, i)$.

$$M_{IJ} = \sum_{e \in \mathscr{E}^h, n(e,i)=I, n(e,j)=J} m_{ij}^e$$

```
for e in Elements:
    m= matelem() # Formation de la matrice élémentaire m^e
    for i in range(N): # Boucle sur les lignes de m^e
        I = n(e,i) # Indice globale du ième noeud de e eeeeeee
        for j in range(N) # Boucle sur les colonnes de m^e
            J = n(e,j) # Indice globale du jème noeud de e
            M[I,J] += m[i,j] # Assemblage
```

Rappel de calcul tensoriel



- **Changement de coordonnées** entre $(x_i)_{i=1,n}$ et $(\xi_i)_{i=1,n}$
- **Repère naturel :** $(e_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \quad e_2 = \frac{\partial x}{\partial \xi_2}, \quad \cdots)$
- **Tenseur symétrique :** $g_{i,j} =< e_i, e_j >$, $g^{i,j} = (g_{i,j})^{-1}$, $|g| = det(g)$
- On a alors

$$\int_{K_e} (\cdots) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\widehat{K}} (\cdots) \sqrt{|g|} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

$$\int_{K_e} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\widehat{K}} \frac{1}{\sqrt{|g|}} g^{ij} \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial \xi_j} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \int_{\widehat{K}} \frac{1}{|J|} \nabla \widehat{\varphi}_i{}^t G \nabla \widehat{\varphi}_j \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

Considérons le problème suivant :

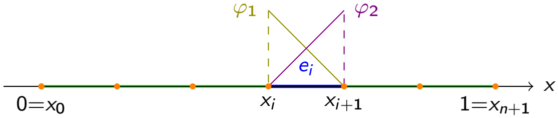
$$(\mathscr{P})\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{dx^2} = p & \text{dans } \Omega =]0, L[\\ \dfrac{\mathrm{d}u}{dx}(0) = -f_1 \ , \ \dfrac{\mathrm{d}u}{dx}(L) = f_2 & \text{sur } \Gamma = \{0, L\} \end{cases}$$

Formulation variationnelle : $(\mathscr{P}_v)\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ vérifiant} \\ a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$

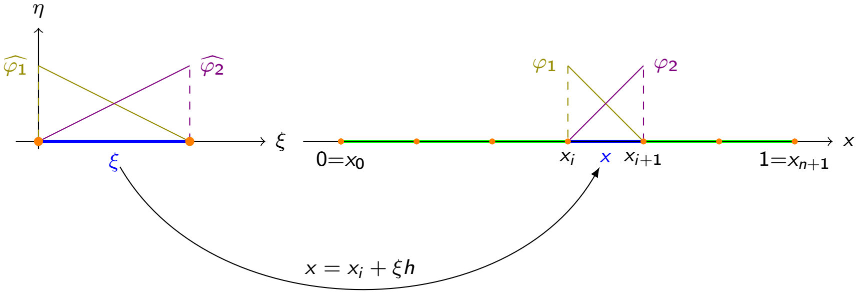
où

$$a(u,v) = \int_0^L \frac{\mathrm{d}u}{dx} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{dx}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x + f_1 \cdot v(0) + f_2 \cdot v(L)$$

Maillage en éléments finis : segment de type (1) :



Éléments finis 1D



Nous avons

$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{\varphi_1}(\xi) = 1 - \xi \\ \widehat{\varphi_2}(\xi) = \xi\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\varphi_1(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \\ \varphi_2(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\end{array}\right.$$

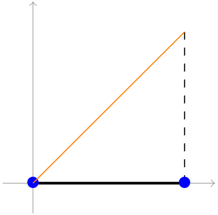
Rappel : Élément fini segment de type 1 (Chapitre 2)

- $\boxed{k = 1}$ le segment de type (1) est obtenu pour

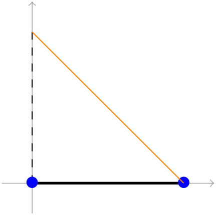
$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1^{(1)}, \quad \Sigma = \Sigma_1^{(1)} = \{a_1 = 1, a_2 = 0\}$$

Les fonctions de base sont les fonctions coordonnées barycentriques par rapport à (a_1, a_2), i.e.

$$\varphi_1 = \lambda_1 = \xi, \quad \varphi_2 = \lambda_2 = 1 - \xi$$



$\varphi_1(\xi)=\xi$



$\varphi_2(\xi)=1-\xi$

Matrice élémentaire

$$m_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_1,\varphi_2) \\ a(\varphi_2,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_2) \end{pmatrix}, \quad b_e = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \ell(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

On fait le changement de variable $x = x_i + \xi h$:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\widehat{\varphi}_i}{\mathrm{d}\xi} \times \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}\widehat{\varphi}_i}{\mathrm{d}\xi}$$

$$a(\varphi_i,\varphi_j) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = h\int_0^1 \left(\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}\widehat{\varphi}_i}{\mathrm{d}\xi}\right)\left(\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}\widehat{\varphi}_j}{\mathrm{d}\xi}\right)\mathrm{d}\xi$$

D'où

$$\boxed{a(\varphi_i,\varphi_j) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\widehat{\varphi}_i}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\widehat{\varphi}_j}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi}$$

De même

$$\boxed{\ell(\varphi_i) = \frac{1}{h}\int_0^1 \widehat{p}(\xi)\widehat{\varphi}_i(\xi)\mathrm{d}\xi + f_0\widehat{\varphi}_i(0) + f_1\widehat{\varphi}_i(1)}$$

Matrice élémentaire

On a

$$a(\varphi_1,\varphi_1)=\frac{1}{h}\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}\widehat{\varphi_1}}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\mathrm{d}\xi=\frac{1}{h}\int_0^1(-1)^2\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{h}$$

$$a(\varphi_1,\varphi_2)=a(\varphi_2,\varphi_1)=\frac{1}{h}\int_0^1(-1\times 1)\,\mathrm{d}\xi=-\frac{1}{h}$$

$$a(\varphi_2,\varphi_2)=\frac{1}{h}\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}\widehat{\varphi_2}}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\mathrm{d}\xi=\frac{1}{h}\int_0^1(+1)^2\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{h}$$

Par hypothèse , Nous avons $p(x)=0$ donc

$$\ell(\varphi_1)=0+f_0\widehat{\varphi_1}(0)+f_1\widehat{\varphi_1}(1)=f_1 \text{ et } \ell(\varphi_2)=f_2$$

Le système élémentaire s'écrit :

$$\boxed{\frac{1}{h}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}}$$

Cas particulier $n = 4$

La matrice élémentaire de l'élément e_i, $i = 0, 3$ est donnée par

$$m = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit explicitement pour chacune des 4 barres :

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cas particulier $n = 4$

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cas particulier $n = 4$

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & 2 & 3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ 2 \\ 3 \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cas particulier $n = 4$

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Assemblage en dim=1

La matrice d'assemblage s'obtient en sommant les 4 matrices élémentaires :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 = 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

On $u_0 = 0$, La première ligne nous donne la réaction à l'origine $f_0 = -\frac{1}{h} u_1$. Le système n'a que 4 inconnues, on obtient le système d'ordre 4 en supprimant la première ligne et la première colonne :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

```python
import numpy as np
N=4 # 4 éléments  ==> 5 sommets
M=np.zeros((N+1,N+1),dtype=float)

def n(e,i):
    return e+i

for e in range(N):
    m=np.mat([[1,-1],[-1,1]])
    for i in range(2):
        I = n(e,i)
        for j in range(2):
            J =n(e,j)
            M[I,J] += m[i,j]
print(M)
```

Code python

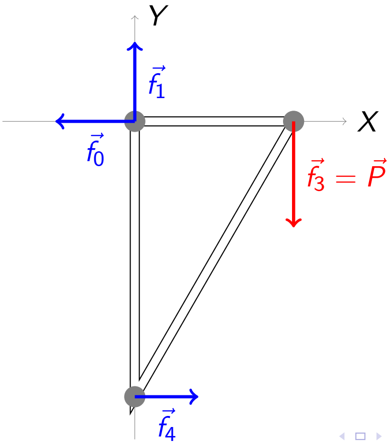
```
/Users/ibrahimalame/fx/python/pythonProjec
[[ 1. -1.  0.  0.  0.]
 [-1.  2. -1.  0.  0.]
 [ 0. -1.  2. -1.  0.]
 [ 0.  0. -1.  2. -1.]
 [ 0.  0.  0. -1.  1.]]

Process finished with exit code 0
```

Treillis soumis à une force nodale

trois poutres de même nature et de même section droite.

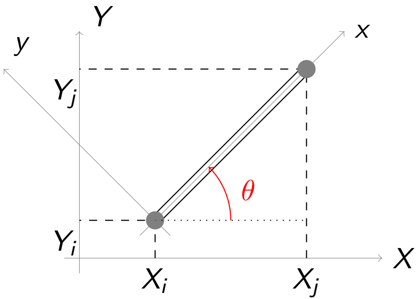
- Le noeud 1 est articulé et le nœud 3 repose sur un appui simple dont la normale est horizontale.
- Le noeud 2 porte une charge de composantes (0, P).



Treillis soumis à une force nodale

Le système élémentaire s'écrit :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$



Formules de passage

Les formules de passage entre les deux repères local (x, y) et global (X, Y) :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1^x \\ F_1^y \\ F_2^x \\ F_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Matrice de rigidité élémentaire dans le repère global

$$\begin{pmatrix} F_1^x \\ F_1^y \\ F_2^x \\ F_2^y \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \end{pmatrix}$$

Changement de notations !

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

Nœuds et connectivité

Les caractéristique géométriques du système se résume en :

nœud	x	y
0	0	0
1	L	0
2	0	$-\sqrt{3}L$

poutre	ℓ	θ	$C = \cos\theta$	$S = \sin\theta$
(0,1)	L	0	1	0
(1,2)	$2L$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
(2,0)	$\sqrt{3}L$	$\frac{\pi}{2}$	0	1

Matrice élémentaire de la barre (0,1) :

$$\frac{EA}{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La connectivité est définie par $n : (q, r) \mapsto [2q, 2q+1, 2r, 2r+1]$ donc $n(0, 1) = [0, 1, 2, 3]$

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & & \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrice élémentaire de la barre (1,2) :

$$\frac{EA}{8L}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

La connectivité de l'élément $(1,2)$ est définie par la liste $n(1,2) = [2,3,4,5]$

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \end{array} \times \frac{EA}{8L}$$

Matrice élémentaire de la barre (2,0) :

$$\frac{EA}{\sqrt{3}L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La connectivité de l'élément $(2,0)$ est définie par la liste $n(2,0) = [4,5,0,1]$

$$M = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ \\ \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & & & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \times \frac{EA}{\sqrt{3}L}$$

Matrice d'assemblage

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & 0 & 1+\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8}+\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

Les trois déplacements nuls $u_0 = u_1 = u_4 = 0$ nous permettent de réduire le système et de supprimer de la matrice globale les trois lignes 0,1,4 et les trois colonnes 0,1,4. D'où le système linéaire :

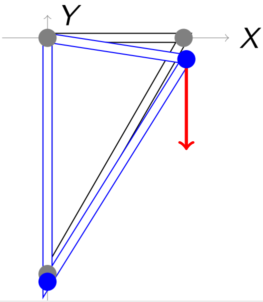
$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8}+\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \end{pmatrix}}$$

Résolution du système

Après avoir résolu le système linéaire réduit, on reprend les équations éliminées du système globale pour déterminer les réactions aux appuis :

$$f_0 = -\frac{EA}{L}u_2$$
$$f_1 = -\frac{EA}{L}\frac{1}{\sqrt{3}}u_5$$
$$f_4 = \frac{EA}{L}\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}u_2 - \frac{3}{8}u_3 + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)u_5\right)$$

On trouve $u_2 \simeq 0.06\text{mm}$, $u_3 \simeq -0.47\text{mm}$, $u_5 \simeq -0.17\text{mm}$.
et $f_0 \simeq -5.8 \times 10^3\text{N}$, $f_1 \simeq 1.0 \times 10^4\text{N}$, $f_4 \simeq 5.8 \times 10^3\text{N}$.



Géométrie du problème

$$Points = ([x_i, y_i])_{i=0,n-1}$$
$$Barres = ([p_i, p_j])_{(i,j)\in G}$$

En python N et B sont codés par les deux listes suivantes :

```
L = .7
Points = [[0, 0], [0, L], [L, 0]]
Barres = [[0, 1], [1, 2], [2, 0]]
```

Un nœud peut être articulé en un point fixe qui empêche tout déplacement $u_1 = u_2 = 0$, ou un appui simple horizontal ($u_2 = 0$) ou vertical ($u_1 = 0$). On représente la fixation d'un nœud par un triplet (p_i, α_i, β_i) où p_i est le point considéré, α_i est un boolean qui vaut 1 si le déplacement horizontal est libre, 0 sinon, et β_i est un boolean qui vaut 1 si le déplacement vertical est libre, 0 sinon. Pour notre exemple :

```
Conditions = [[0,0,0],[2,0,1]]
```

Les constantes et grandeurs physiques

La section des barres A exprimée en m^2. Les longueurs des barres L_i sont calculées à partir des coordonnées des points d'articulation et exprimées en mètre (m). Le module de Young E est exprimé en Pascal (Pa) . Les forces extérieurs nodales sont exprimées en Newton (N).
Pour notre exemple nous avons : $L = 0.2$m, $A = 100\text{m}^2$, $E = 200000$MPa, et $P = -10000$N.

```
L = 0.2
A = 100 * 1E-6
E = 200000 * 1E6
P = -10000
```

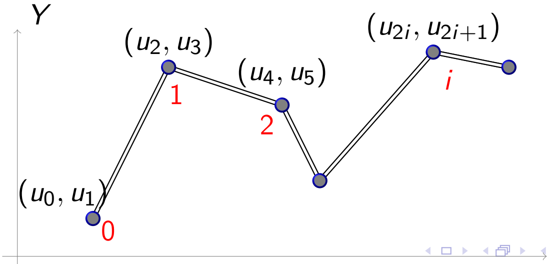
Indexation

Soit $B_i = (p1, p2)$ une barre du système d'extrémités $p_1 = (X_1, Y_1)$ et $p_2 = (X_2, Y_2)$. On calcule ℓ la longueur de la barre, c et s, le cosinus et le sinus de l'angle θ que fait la barre avec l'axe (OX) par :

$$c = \cos\theta = \frac{X_2 - X_1}{\ell} \text{ et } s = \sin\theta = \frac{Y_2 - Y_1}{\ell}, \quad \ell = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y}$$

Si on désigne par CS la matrice ligne $\begin{pmatrix} c & s & -c & -s \end{pmatrix}$, la matrice de rigidité n'est autre que

$$\mathsf{K}_i = \frac{EA}{\ell} CS \times CS^t$$



Indexation

Les nœuds sont numérotés $0, 1, 2, \ldots, q, \ldots, r, \ldots n-1$, on désigne par (u_{2q}, u_{2q+1}) le vecteur déplacement du nœud q. L'équation matricielle d'équilibre d'une barre (q, r) s'écrit matriciellement en dimension $2n$:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ f_{2q} \\ f_{2q+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{2r} \\ f_{2r+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \ldots & C^2 & CS & \ldots & -C^2 & -CS & \ldots \\ \ldots & CS & S^2 & \ldots & -CS & -S^2 & \ldots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \ldots & -C^2 & -CS & \ldots & C^2 & CS & \ldots \\ \ldots & -CS & -S^2 & \ldots & CS & S^2 & \ldots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ u_{2q} \\ u_{2q+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{2r} \\ u_{2r+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Les autres coefficients manquant sont tous nuls.

Matrice d'assemblage

```python
import math
import numpy as np


L=0.7
A=100*1E-6
E=20000*1E6
P=-10000
Points = [[0,0],[0,L],[L,0]]
Barres = [[0,1],[1,2],[2,0]]
Conditions = [[0,0,0],[2,0,1]]
def n(q,r):
    return [2*q,2*q+1,2*r,2*r+1]
```

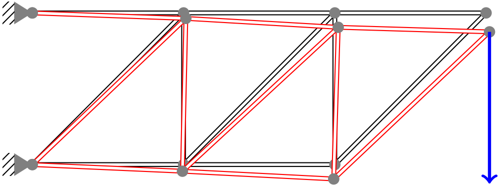
```
for q,r in Barres:
    x1,y1 = Points[q]
    x2, y2 = Points[r]
    ell = math.sqrt((x2-x1)**2+(y2-y1)**2)
    c=(x2-x1)/ell
    s=(y2-y1)/ell
    CS = np.mat([c,s,-c,-s],dtype=float)
    CSt= np.transpose(CS)
    m = np.dot(CSt,CS)*A*E/ell
    for i in range(4):
        I=n(q,r)[i]
        for j in range(4):
            J=n(q,r)[j]
            M[I,J]+=m[i,j]
print(M)
```

Matrice d'assemblage

Les conditions aux appuis impose un ou deux déplacements nuls. On retire donc du système matriciel les lignes et colonnes correspondants, soit en python :

```python
l = []
for q, a, b in Conditions:
    if a == 0:
        l.append(2 * q)
    if b == 0:
        l.append(2 * q + 1)
l.sort()
l.reverse()
for i in l:
    M = np.delete(M, i, axis=0)
    M = np.delete(M, i, axis=1)
```

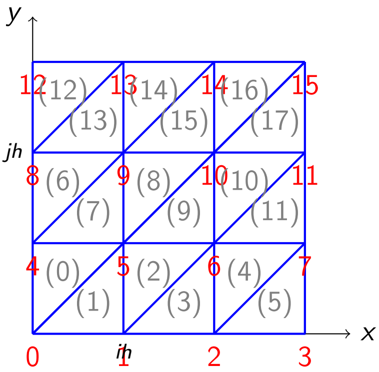
Exemple



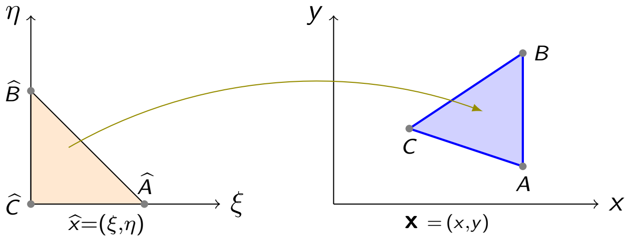
$$(\mathscr{P}_v)\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ vérifiant}\\ a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V\end{array}\right.$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_\Omega fv$$



Éléments finis triangles de type (1)



Nous avons

$$x = \xi A + \eta B + (1 - \xi - \eta)C$$

Donc

$$e_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} = A - C = \overrightarrow{CA}$$

$$e_2 = \frac{\partial x}{\partial \eta} = B - C = \overrightarrow{CB}$$

Donc la matrice jacobienne $Jacobienne = mat(e_1, e_2)$:

$$Jacobienne = < \overrightarrow{CA}\ \overrightarrow{CB} > = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}$$

Le jacobien est

$$\det J = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = \|\overrightarrow{CA}\| \cdot \|\overrightarrow{CB}\| \sin \alpha$$

On a donc

$$|\det J| = \|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\|$$

Le tenseur symétrique est

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{CA}\|^2 & \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} & \|\overrightarrow{CB}\|^2 \end{pmatrix} = J^t \cdot J$$

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\|^2} \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{CB}\|^2 & -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\ -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} & \|\overrightarrow{CA}\|^2 \end{pmatrix}$$

Matrice élémentaire

Soit la formule de changement de variables

$$\int_{K_e} (\cdots) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\widehat{K}} (\cdots) \sqrt{|g|} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

On a alors pour un élément fini triangle $T_e = ABC$ de type (1) :

$$\boxed{\int_{T_e} (\cdots) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\widehat{T}} (\cdots) \|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta}$$

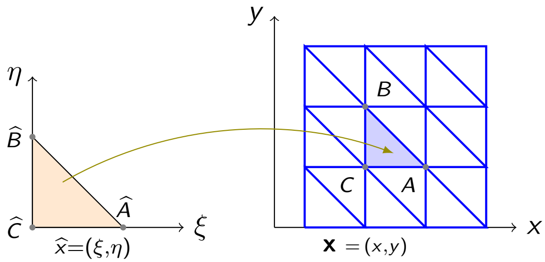
Nous avons aussi, en posant $G = (g^{ij})$:

$$\int_{K_e} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\widehat{K}} \frac{1}{\sqrt{|g|}} g^{ij} \frac{\partial\widehat{\varphi}_i}{\partial\xi_i} \frac{\partial\widehat{\varphi}_j}{\partial\xi_j} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \int_{\widehat{K}} \frac{1}{|J|} \nabla\widehat{\varphi}_i{}^t G \nabla\widehat{\varphi}_j \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

Donc

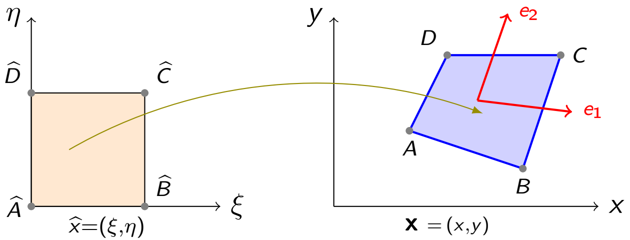
$$\boxed{\int_{K_e} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\widehat{K}} \frac{1}{\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\|} \nabla\widehat{\varphi}_i{}^t \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{CB}\|^2 & -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\ -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} & \|\overrightarrow{CA}\|^2 \end{pmatrix} \nabla\widehat{\varphi}_j \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}$$

Cas particulier élément fini triangle isocèle de type (1)



$$\boxed{a(\varphi_i,\varphi_j) = \int_{K_e} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\widehat{K}} \nabla\widehat{\varphi}_i \cdot \nabla\widehat{\varphi}_j \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}$$

$$\boxed{\ell(\varphi_i) = \int_{T_e} f(x,y)\varphi_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = h^2 \int_{\widehat{T}} \hat{f}(\xi,\eta)\widehat{\varphi}_i(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}$$



Nous avons

$$x = \widehat{x}_3\widehat{x}_4 A + \widehat{x}_4\widehat{x}_1 B + \widehat{x}_1\widehat{x}_2 C + \widehat{x}_2\widehat{x}_3 D$$

$$x = (1-\xi)(1-\eta)A + (1-\eta)\xi B + \xi\eta C + (1-\xi)\eta D$$

Donc

$$e_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} = -(1-\eta)A + (1-\eta)B + \eta C - \eta D = (1-\eta)\overrightarrow{AB} + \eta\overrightarrow{DC}$$

$$e_2 = \frac{\partial x}{\partial \eta} = -(1-\xi)A - \xi B + \xi C + (1-\xi)D = (1-\xi)\overrightarrow{AD} + \xi\overrightarrow{BC}$$

Donc la matrice jacobienne $Jacobienne = mat(e_1, e_2)$:

$$Jacobienne = mat((1-\eta)\overrightarrow{AB} + \eta\overrightarrow{DC}, (1-\xi)\overrightarrow{AD} + \xi\overrightarrow{BC})$$

Le jacobien est

$$\det J = \det((1-\eta)\overrightarrow{AB} + \eta\overrightarrow{DC}, (1-\xi)\overrightarrow{AD} + \xi\overrightarrow{BC})$$

$$\begin{aligned} \det J &= (1-\eta)(1-\xi)\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (1-\eta)\xi\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \\ &\quad + \eta(1-\xi)\det(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}) + \eta\xi\det(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}) \end{aligned}$$

On a donc

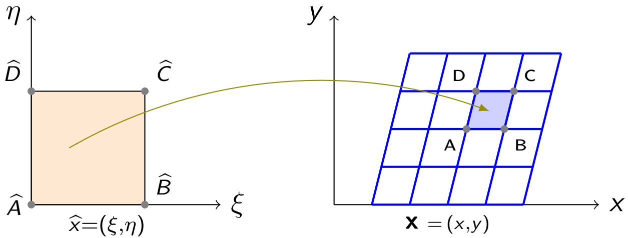
$$\boxed{\det J = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + \xi\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + \eta\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})}$$

Le tenseur symétrique (g_{ij}) est

$$\begin{bmatrix} \|(1-\eta)\overrightarrow{AB} + \eta\overrightarrow{DC}\|^2 & \left[(1-\eta)\overrightarrow{AB} + \eta\overrightarrow{DC}\right] \cdot \left[(1-\xi)\overrightarrow{AD} + \xi\overrightarrow{BC}\right] \\ \left[(1-\eta)\overrightarrow{AB} + \eta\overrightarrow{DC}\right] \cdot \left[(1-\xi)\overrightarrow{AD} + \xi\overrightarrow{BC}\right] & \|(1-\xi)\overrightarrow{AD} + \xi\overrightarrow{BC}\|^2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(g^{ij}) = \frac{1}{(\det J)^2} \begin{bmatrix} \|(1-\xi)\overrightarrow{AD} + \xi\overrightarrow{BC}\|^2 & -\left[(1-\eta)\overrightarrow{AB} + \eta\overrightarrow{DC}\right] \cdot \left[(1-\xi)\overrightarrow{AD} + \xi\overrightarrow{BC}\right] \\ -\left[(1-\eta)\overrightarrow{AB} + \eta\overrightarrow{DC}\right] \cdot \left[(1-\xi)\overrightarrow{AD} + \xi\overrightarrow{BC}\right] & \|(1-\eta)\overrightarrow{AB} + \eta\overrightarrow{DC}\|^2 \end{bmatrix}}$$

Cas particulier d'un élément fini parallélogramme



$$\boxed{\det J = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{AB}\|^2 & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} & \|\overrightarrow{AD}\|^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(g^{ij}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|^2} \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{AD}\|^2 & -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} \\ -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} & \|\overrightarrow{AB}\|^2 \end{pmatrix}}$$

Matrice élémentaire

- Matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ où

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \iint_{\widehat{K}} \nabla \widehat{\varphi}_i \cdot \nabla \widehat{\varphi}_j \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

où

$$\widehat{\varphi_1} = \xi, \quad \widehat{\varphi_2} = \eta, \quad \widehat{\varphi_3} = 1 - \xi - \eta$$

$$\nabla \widehat{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \widehat{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla \widehat{\varphi_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

- Second membre $B = (b_i)_{1 \leq i \leq 3}$ où

$$\boxed{b_i = \ell(\varphi_i) = \iint_{K_e} f \varphi_i \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = h^2 \iint_{\widehat{K}} f \widehat{\varphi}_i \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta}$$

Maillage

- Table de nœuds :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
i	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
j	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3

- Table de connectivité :

e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	17
0	0	5	1	6	2	7	4	9	5	10	6	11	8	...	15
1	5	0	6	1	7	2	9	4	10	5	11	6	13	...	10
2	4	1	5	2	6	3	8	5	9	6	10	7	12	...	11