TD 3 Analyse numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

27/02/2024

1 Factorisation

1. Appliquer l'algorithme de factorisation LU à la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -7 \\ 4 & 7 & 10 & -3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Appliquer l'algorithme de Choleski à la matrice symétrique définie positive suivante :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 30 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 2 \\ -6 & 10 & -15 & -3 \\ 8 & -15 & 26 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 62 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Écrire une décomposition LDL^t de A, où L est une matrice triangulaire inférieur dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et D une matrice diagonale.

   (b) Existe-t-il une décomposition LL^t de A.

   (c) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ admet-elle une décomposition LDL^t.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tridiagonale symétrique définie positive.

   (a) Montrer que A admet une décomposition de Choleski LL^t, où L est bidiagonale inférieur de la forme

$$L=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

   (b) Donner un algorithme de calcul des coefficients α_i et β_i en fonction des coefficients a_{ij}, et calculer le nombre d'opérations élémentaires nécessaire pour ce calcul.

(c) En déduire la matrice de Choleski de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Résoudre par la méthode de Choleski le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & & & & & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & = & -2 \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 2 \\ & & & & -x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & -2 \\ & & & & & & -x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

2 Norme matricielle et conditionnement

1. Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice réelle carrée d'ordre n.

   (a) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_\infty$. montrer que

   $$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$. et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_1$. montrer que

   $$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

2. Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

   (a) Montrer que $\mathrm{cond}(A^2) \leq \mathrm{cond}(A)^2$.

   (b) On suppose que A est symétrique, montrer que $\mathrm{cond}_2(A^2) = \mathrm{cond}_2(A)^2$. La réciproque est-elle vraie ?

3 Méthodes itératives

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ suivante :

   $$\left\{ \begin{array}{l} x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}) \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

   (a) Déterminer une condition sur α pour que la suite converge.

   (b) Calculer α_0 qui réalise le minimum :

   $$\rho(I - \alpha_0 A) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \rho(I - \alpha A)$$

2. Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$. On cherche à résoudre le système $Ax = b$ dans le cas particulier :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

par la méthode itérative suivante :

$$\begin{cases} Px^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Où P et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que P est inversible et $A = P - N$.

— *Méthode de Jacobi.* On choisit $P = 3I$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Écrire la méthode itérative sous la forme $x^{(k+1)} = B_J\, x^{(k)} + c_J$

(b) Calculer le rayon spectral de B_J et en déduire que la méthode converge.

(c) Calculer $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \cdots$ pour le choix de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire la solution du système $Ax = b$.

— *Méthode de Gauss-Seidel.* On choisit $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Écrire la méthode itérative sous la forme $x^{(k+1)} = B_{GS}\, x^{(k)} + c_{GS}$

(b) Calculer le rayon spectral de B_{GS} et en déduire que la méthode converge.

(c) Calculer $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \cdots$ pour le choix de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire la solution du système $Ax = b$.

— Comparer les deux méthodes.

4 Méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel

1. Soit A une matrice $n \times n$ inversible avec $a_{ii} \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On veut résoudre le système $Ax = b$. On note D la matrice diagonale constituée de la diagonale de A. Soit $\alpha \neq 0$, on étudie la méthode itérative

$$x_{k+1} = \left(I - \alpha D^{-1} A\right) x_k + \alpha D^{-1} b$$

(a) Montrer que si x_k converge vers x alors x est solution.

(b) Exprimer les coefficients de la matrice $D^{-1}A$ en fonction des coefficients de la matrice A.

(c) On suppose A est à diagonale strictement dominante et $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que la méthode est bien définie et

$$\left\| I - \alpha D^{-1} A \right\|_{\infty} < 1$$

En déduire la convergence de la méthode.

2. Soit A la matrice du système linéaire $Ax = b$, définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1+i & \text{si} \quad i = j \\ -1 & \text{si} \quad i = j+1 \\ -i & \text{si} \quad i+1 = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Calculer la matrice d'itération B_J de Jacobi. Calculer $\|B_J\|_{\infty}$, $\|B_J\|_1$. Conclure.

(b) Soit B_G la matrice d'itération de Gauss-Seidel. On pose $L = D^{-1}E$ et $U = D^{-1}F$. Montrer que $B_G = (I-L)^{-1}U$. Montrer que le polynôme caractéristique de B_G s'écrit :

$$P(\lambda) = \lambda^n \det\left(I - L - \frac{1}{\lambda}U\right)$$

et si $|\lambda| \geq 1$ $\det\left(I - L - \frac{1}{\lambda}U\right) \neq 0$. En déduire que la méthode est convergente.

(c) Le fait d'avoir trouvé une méthode itérative (au moins) convergente prouve que la matrice A est inversible. Pourquoi ?

(d) Décrire l'algorithme de calcul de la méthode de Gauss-Seidel appliquée à cet exemple.

3. Soit A une matrice réelle, symétrique et définie positive. on considère la décomposition $A = D - E - E^t$ avec D la diagonale, $-E$ la partie inférieure de A. On définit la méthode itérative suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitraire dans } \mathbb{R}^n \\ (D-E)y_{k+1} = E^t x_k + b \\ (D-E^t)x_{k+1} = Ey_{k+1} + b \end{cases}$$

(a) Montrer que les itérés sont bien définis.

(b) Montrer que la méthode est consistante (c-à-d si $x_k \to x$ alors $Ax = b$).

(c) Écrire les matrices G et H telles que

$$x_{k+1} = Gx_k + Hb$$

(d) En posant $L = D^{-\frac{1}{2}}ED^{-\frac{1}{2}}$, montrer que G est semblable à $B = (I-L^t)^{-1}L(I-L)^{-1}L^t$ et que la matrice B s'écrit également $B = (I-L^t)^{-1}(I-L)^{-1}LL^t$.

(e) On suppose $Sp(G) \subset \mathbb{R}^+$, montrer que la méthode est convergente

5 Méthode du gradient

4. Soit A une matrice symétrique définie positive de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, on considère la méthode de Richardson suivante

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(b - Ax_k), \quad \alpha \neq 0$$

(a) Montrer que la méthode est consistante.

(b) Écrire la matrice d'itération et montrer que pour $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$, la méthode est convergente.

(c) Soit $f_i(\alpha) = |1 - \alpha\lambda_i|$, $i = 1, \cdots, N$. Tracer $f_1(\alpha)$, $f_N(\alpha)$ et $f_i(\alpha)$ pour $i \neq 1$ et $i \neq N$.

(d) Trouver le meilleur choix de α, noté α_{opt}, c'est à dire celui qui minimise $\rho(I - \alpha A)$, et montrer que $\rho(I - \alpha_{opt} A) = \frac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1}$.