TECE Module 1 : Suites et séries numériques

Problème 1

On désigne par $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombre réels x tels que $x \geq 0$. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et soit (u_n) la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a + \frac{1 - e^{-n}}{2} u_n$$

et la condition initiale $u_0 = a$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 2a$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$2^{k+1}(2a - u_{k+1}) = 2^k(2a - u_k) + \left(\frac{2}{e}\right)^k u_k$$

3. En déduire que pour tout $n \geq 1$

$$2^n(2a - u_n) = a + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{e}\right)^k u_k$$

4. Montrer que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^k u_k$$

converge. En déduire que la suite (u_n) converge vers $2a$ et que

$$2a - u_n \sim \frac{K}{2^n}$$

où K est une constante réelle que l'on déterminera.

Problème 2

Partie 1

Soit n un nombre entier naturel non nul. On considère les fonction numérique f_n, g_n et h_n définies sur l'intervalle $[0, n]$ par les relations :

$$f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n, \quad g_n(t) = e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n, \quad h_n(t) = e^t g_n'(t)$$

1. Étudier les variations de h_n. En déduire les variations de g_n. Montrer qu'il existe un élément x_n de $[0, n]$ et un seul tel que, pour tout élément t de $[0, n]$, $g_n(t) \leq g_n(x_n)$.
2. Montrer que $g_n(x_n) \leq \frac{1}{ne}$.
3. Soit x un nombre strictement positif. Étudier la convergence des intégrales :

$$I_n(x) = \int_0^n f_n(t) t^{x-1} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = \int_0^n e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

4. Soit c un réel strictement positif. Montrer que si $n \geq c$, alors :

$$0 \leq \Gamma(x) - I_n(x) \leq \int_0^c g_n(t) t^{x-1} \mathrm{d}t + \int_c^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

5. En déduire que la suite de terme général $I_n(x)$ converge vers $\Gamma(x)$.

Partie 2

On admet la formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

Soit α un nombre réel strictement positif. On pose :

$$P_0(\alpha) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad P_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1} 1 + k\alpha$$

$$J_0(\alpha) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad J_n(\alpha) = \int_0^1 (1 - t^\alpha)^n \mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$(1 + n\alpha)J_n(\alpha) = n\alpha J_{n-1}(\alpha)$$

.

2. En déduire la valeur de $J_n(\alpha)$, que l'on exprimera à l'aide de $P_n(\alpha)$.
3. En effectuant un changement de variable, trouver une relation entre $J_n(\alpha)$ et $I_n(\frac{1}{\alpha})$. En déduire un équivalent de la suite de terme général $P_n(\alpha)$.
4. Soit désormais x un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul p, on pose :

$$Q_n(p, x) = \prod_{k=0}^{n-1} x + kp$$

Exprimer $Q_n(p, x)$ à l'aide de $P_n(\frac{p}{x})$. En déduire un équivalent de la suite de terme général $Q_n(p, x)$, les nombre p et x étant fixés.

5. (a) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$Q_n(2, x) \times Q_n(2, x + 1) = Q_{2n}(1, x)$$

(b) En déduire une relation entre $\Gamma(x)$, $\Gamma(\frac{x}{2})$ et $\Gamma(\frac{x+1}{2})$.

(c) En déduire la valeur de $Gamma(\frac{1}{2})$, puis à l'aide d'un changement de variable, la convergence et la valeur de

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t$$