TD n°1 - Analyse numérique - M. Alame

retranscrit par Léo Shi

23 mars 2024

Exercice n°4 : Intégration numérique

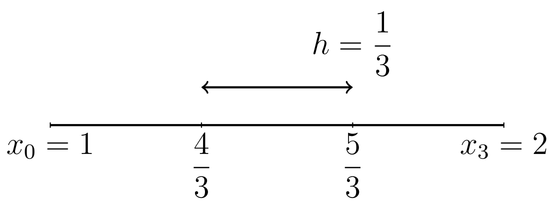
On considère l'intégrale :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

1. On calcule la valeur exacte de I :

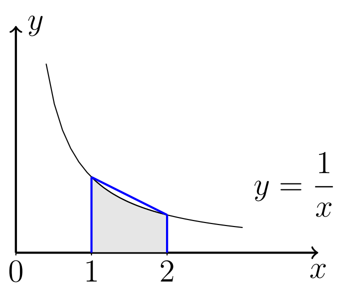
$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^2 = \ln 2$$

2. Par la méthode des trapèzes :



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{2} f(x_i)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right] = \frac{7}{10} = 0,7$$

3. On s'aide d'un dessin :



On a $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui est **convexe**, donc la courbe est en dessous de la droite.

4. $\boxed{E = \dfrac{(b-a)^4}{12n^2} f''(\xi)}$ avec $\xi \in]a,b[$, on cherche n tel que $E \leq 10^{-4}$. On a $b = 2$ et $a = 1$:

$$1 < \xi < 2 \implies \frac{1}{2} < \frac{1}{\xi} < 1 \implies \frac{1}{8} < \frac{1}{\xi^3} < 1$$

$$\frac{(2-1)^4}{12n^2} \times \frac{2}{\xi^3} \leq 10^{-4} \implies \frac{2}{8} \times \frac{1}{12n^2} \leq \frac{1}{12n^2} \times \frac{2}{\xi^3} \leq 10^{-4}$$

D'où $\dfrac{1}{96n^2} \leq 10^{-4}$, soit $\boxed{n \geq 10}$

Exercice n°11 : Formule de Quadrature

Soit la formule de quadrature, avec $\alpha \in]0,1[$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = w_1 f(-\alpha) + w_2 f(\alpha) \qquad (R)$$

1. (R) vraie sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si elle est vraie sur la base $(1, X, X^2, ..., X^n)$, donc pour $n = 1$, la relation (R) est vraie si et seulement si elle est vraie sur la base $(1, X)$.
   — Pour 1, on a alors :

   $$\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = w_1 + w_2 \implies w_1 + w_2 = 2$$

   — Pour X, on a :

   $$\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = w_1(-\alpha) + w_2(\alpha) \implies w_1(-\alpha) + w_2(\alpha) = 0 \implies w_1 = w_2$$

   Soit finalement, on obtient $w_1 = w_2 = 1$, d'où :

   $$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(-\alpha) + f(\alpha)$$

2. Lorsque $\alpha = 1$, on a :

   $$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(-1) + f(1)$$

   Pour les polynômes de $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] + X^2$, d'où pour $f(x) = x^2$:

   $$\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

   Or $f(-1) + f(1) = 2$ et $2 \neq \frac{2}{3}$, donc $\underline{\text{la formule n'est pas exacte sur } \mathbb{R}_2[X]}$

3. On a $\frac{2}{3} = \alpha^2 \times 2 \implies \alpha = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ car $\alpha > 0$ ($\alpha \in]0,1[$). La formule exacte est alors :

   $$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

4. Si $f(x) = x^3$, alors

   $$\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 0$$

   Donc $\underline{\text{la formule est exacte sur } \mathbb{R}_3[X]}$. La dernière question n'est pas toujours valable, vérifions donc la formule sur $\mathbb{R}_4[X]$:

   $$\int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{9}$$

   Etant donné que $\frac{2}{9} \neq \frac{2}{5}$, la formule **n'est pas exacte** pour $\mathbb{R}_4[X]$ (comme prédit ...)

5. **On cherche une relation entre ξ sur l'intervalle $[-1,1]$ et x sur l'intervalle $[a,b]$.** On suppose que la relation entre x et ξ est **affine** :

$$x = \lambda\xi + \mu$$

$$\begin{cases} a = -\lambda + \mu \\ b = \lambda + \mu \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \dfrac{a+b}{2} \\ \lambda = \dfrac{b-a}{2} \end{cases}$$

On pose $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\xi$, on a donc avec $\xi = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 \left(\frac{b-a}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right) \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right] \end{aligned}$$