Chapitre 2 : Outils et mise en équation

Ibrahim ALAME

ESTP

20/01/2023

Séries de Fourier

On considère l'espace des signaux :

$$L^2(0,T) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, T - \text{périodique} \ , \int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire :

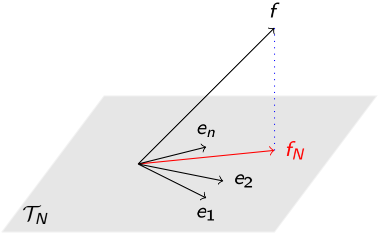
$$(f,g) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\overline{g(t)}(t)\mathrm{d}t$$

On désigne par $\mathcal{T}_N$ l'espace vectorielle engendré par la famille orthogonale $\left(e_n = \exp(2i\pi n\frac{t}{T})\right)_{-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}-1}$, où $(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$.

Théorème

Soit $f \in L^2(0,T)$, Il existe un unique polynôme f_N, projeté de f sur $\mathcal{T}_N$ qui réalise le minimum de

$$\boxed{\min_{P \in \mathcal{T}_N} \|f - P\|_2}$$



La projection s'écrit :

$$f_N = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \langle f\,, e_k \rangle \, e_k$$

$$f_N = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} c_k(f) e_k$$

où $c_k(f) = \langle f\,, e_k \rangle$, appelé coefficient de Fourier, soit

$$\boxed{c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-2i\pi k\frac{t}{T})\mathrm{d}t}$$

Propriétés des coefficients de Fourier

- $f \mapsto c_k(f)$ est linéaire.
- $c_{-k} = \overline{c_k}$ en particulier $|c_{-k}| = |c_k|$
- f est paire alors c_k est réel,
- f est impaire alors c_k est imaginaire pur,

Théorème

Soit $f \in L^2(0, T)$, et f_N, le polynôme meilleur approximation de f dans $\mathcal{T}_N$ c'est à dire

$$\boxed{f_N = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} c_k(f)\exp(2i\pi k\frac{t}{T})}$$

alors

$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_2 = 0$$

Théorème de Dirichlet

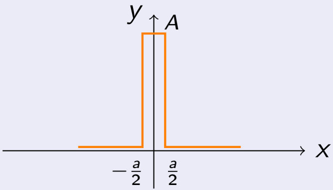
Soit $f \in L^2(0,T)$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} c_k(f)\exp(2i\pi k\frac{t_0}{T}) = \left(\frac{f(t_0^+)+f(t_0^-)}{2}\right)}$$

Théorème de Parseval

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

Exemple



$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\exp(-2i\pi n\frac{t}{T})\mathrm{d}t = \frac{A}{T}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-2i\pi n\frac{t}{T})\mathrm{d}t$$

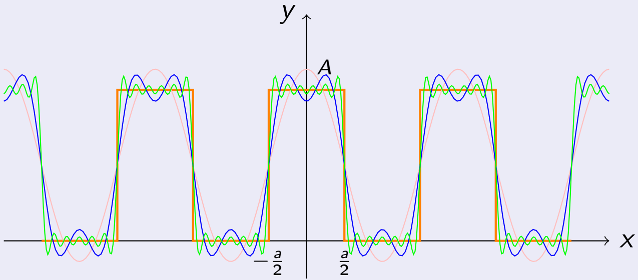
$$c_n = \frac{A}{\pi n}\sin(\pi n\frac{a}{T}) \quad \text{pour } n\in\mathbb{Z}^*, \quad \text{et } c_0 = \frac{Aa}{T}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{-2i\pi n\frac{t_0}{T}} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_k(f)\left(e^{-2i\pi n\frac{t_0}{T}} + e^{2i\pi n\frac{t_0}{T}}\right)$$

$$\boxed{f(x) = \frac{Aa}{T} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A}{\pi n}\sin(\pi n\frac{a}{T})\cos(2\pi n\frac{t}{T})}$$

Exemple

On choisit $A = 2,\ a = 1,\ T = 2.\ N = 1, 2, 5, \ldots$



$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(\frac{\pi n}{2}) \cos(\pi n t) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cos((2k+1)\pi t)$$

Séries de Fourier discrète (DFT) et la (FFT)

Théorème

Soit $(y_n)_n$ une suite périodique de période N. Il existe une suite $(Y_n)_n$ vérifiant :

$$\boxed{y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}} \qquad \text{pour } {\scriptstyle n=0,\cdots,N-1}$$

On a alors

$$\boxed{Y_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{2i\pi k \frac{n}{N}}} \qquad \text{pour } {\scriptstyle k=0,\cdots,N-1}$$

Calcul de N coefficients de Fourier :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\exp(-2i\pi n\frac{t}{T})\mathrm{d}t \qquad \text{pour } {\scriptstyle n=-\frac{N}{2}\cdots\frac{N}{2}-1}$$

On fait

$$f(t) \simeq \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} c_n e^{2i\pi k \frac{t}{T}}$$

En $t = t_k = k\frac{T}{N}$

$$y_k = f(t_k) \simeq \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} c_n e^{2i\pi k \frac{n}{N}}$$

D'où

$$\boxed{c_n \simeq \begin{cases} Y_n & \text{si } 0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1 \\ Y_{n+N} & \text{si } -\frac{N}{2} \leq n \leq 0 \end{cases}}$$

où

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_k) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} \qquad \text{pour } n=0,\cdots,N-1$$

TFD et retard

Soit X l'image de x par la TFD $\mathcal{F}_N$, et soit y la suite retardée définie par $y_k = x_{k-k_0}$. Alors

$$Y_p = e^{-2i\pi \frac{pk_0}{N}} X_p$$

Convolution discrète circulaire

Soient deux suites complexes $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. On appelle convolution circulaire discrète l'application définissant $z = x \star y$ par :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q}$$

Propriétés de la TFD

- $\mathcal{F}_N(x \star y) = \mathcal{F}_N(x)\mathcal{F}_N(y)$
- La suite produit $x.y = (x_k y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ a pour TFD la suite

$$P_n = N\sum_{q=0}^{N-1} X_q Y_{k-q}$$

c'est-à-dire

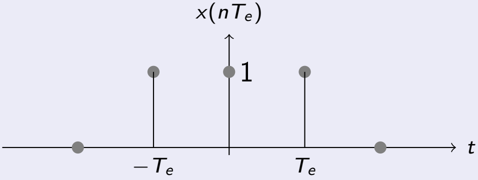
$$\mathcal{F}_N(xy) = N\mathcal{F}_N(x) \star \mathcal{F}_N(y)$$

Théorème de Parseval

$$\sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2$$

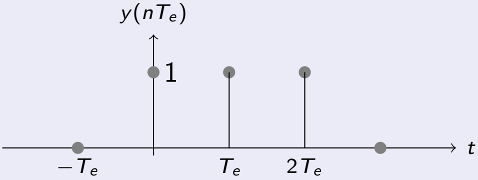
Exercice

1. Calculer la transformée de Fourier discrète du signal $4T_e$-périodique suivant :



Calculer et tracer le module et la phase du spectre de $x(nT_e)$.

2. Calculer la transformée de Fourier discrète du signal $y(nT_e)$.



3. Comparer $Y(f)$ et $X(f)$.

Le signal est de période $4T_e$ et $N = 4$. Donc $\omega_N = \exp(\frac{2i\pi}{N}) = i$. Alors

$$X_n = \sum_{k=0}^{3} x_k i^{-kn} \quad \text{pour } {\scriptstyle n=0,\cdots,3}$$

on a

$$x_{-2} = 0, \quad x_{-1} = 1, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1$$
$$\overrightarrow{x_0} = 1, \quad \overrightarrow{x_1} = 1, \quad \overrightarrow{x_2} = 0, \quad \overrightarrow{x_3} = 1$$

Donc

$$\overrightarrow{X_0} = 3, \quad \overrightarrow{X_1} = 1, \quad \overrightarrow{X_2} = -1, \quad \overrightarrow{X_3} = 1$$

Le signal y vérifie $\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{y_2} = 1$ $\overrightarrow{y_3} = 0$. Les transformées de Fourier discrètes X de x et Y de y sont :

p	X_p	$\lvert X_p\rvert$	$\arg X_p$
-2	-1	1	π
-1	1	1	0
0	3	3	0
1	1	1	0

p	Y_p	$\lvert Y_p\rvert$	$\arg Y_p$
-2	1	1	0
-1	i	1	$\frac{\pi}{2}$
0	3	3	0
1	-i	1	$-\frac{\pi}{2}$

Transformation de Fourier

Définition

si $f \in L^1(\mathbb{R})$ Alors

$$\boxed{\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-2i\pi\lambda t)\mathrm{d}t}$$

Théorème (de Riemann)

$\hat{f}$ est continue, bornée et tend vers 0 à l'∞.

Propriétés

- $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire.
- f paire $\Longrightarrow \hat{f}$ est réelle.
- f impaire $\Longrightarrow \hat{f}$ est imaginaire pure.

Décalage en temps

si $g(t) = f(t-\tau)$ Alors

$$\hat{g}(\lambda) = \exp(-2i\pi\lambda\tau)\hat{f}(\lambda)$$

Changement d'échelle

si $g(t) = f(\alpha t)$ Alors

$$\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$$

Convolution

si f et g dans $L^1(\mathbb{R})$ Alors

$$\boxed{\widehat{f \star g} = \widehat{f}\,.\,\widehat{g}}$$

Dérivation

$$\hat{f}^{(k)}(\lambda) = (-2i\pi)^k \widehat{t^k f(t)}(\lambda)$$

$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (2i\pi\lambda)^k \widehat{f(t)}(\lambda)$$

Transformation de Fourier inverse

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) \exp(2i\pi\lambda t)\mathrm{d}\lambda}$$

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = f(-t) \quad \text{pp}$$

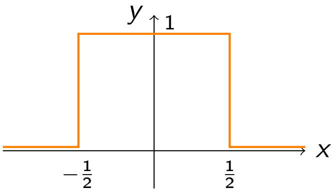
Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

$$\boxed{\hat{f}(\lambda) = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} f(t) \exp(-2i\pi\lambda t) \mathrm{d}t}$$

Parseval

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g})$$

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$



$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2i\pi\lambda t}\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi\lambda t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-2i\pi\lambda t}}{-2i\pi\lambda}\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}$$

$$f(t) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} e^{2i\pi\lambda t}\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} e^{2i\pi\lambda t}\mathrm{d}\lambda$$

en particulier pour $t = 0$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}\mathrm{d}\lambda = 1 \Longrightarrow \boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$$

Théorème de Parseval $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$
$\Longrightarrow$

$$\int_{-1/2}^{1/2} 1^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}\right)^2 \mathrm{d}\lambda$$

D'où

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$$

Transformation en z

Soit $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ un signal discret. La transformation en z de x notée $TZ(x) = X$ définie par :

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}}$$

où z est une variable complexe, lorsque la série converge.
si x est un signal périodique de fréquence fondamentale λ représenté par un nombre fini N d'échantillons, on a

$$\forall p \in \{0, \cdots, N-1\} \qquad X(e^{2ip\pi\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-2ikp\pi\omega} = \mathcal{F}(x)[p]$$

où on a posé $X = TZ(x)$, $\omega = \frac{\lambda}{N}$ et $\mathcal{F}(x)$ la transformée de Fourier Discrète de x.
On peut remarquer aussi que si $H := \mathcal{F}(h)$ est la fonction de transfert d'un filtre discret, alors

$$H_n = TZ(h)(e^{-2i\pi\frac{n}{N}})$$

- La transformation en z est linéaire.
- La transformation en z ne converge pas forcement dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$ on définit en général une couronne de convergence de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 ; $r_1 \leq |z| \leq r_2$.
- Si x est causal (nul pour les temps négatifs), le rayon extérieur est infini.
- Si x est nul pour les temps positifs ou nul, $r_1 = 0$.
- Si x est presque nul, c'est à dire non nul pour un échantillon fini alors $r_1 = 0$ et $r_2 = \infty$, et donc $X = TZ(x)$ est défini sur $\mathbb{C}$ entier.
- $$TZ(\tau_p x) = z^{-p} TZ(x)$$
- $$TZ(x \star h) = TZ(x) \cdot TZ(h)$$

Exemples

$$TZ(\delta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

$$TZ(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$TZ(n \mapsto nu[n]) = \sum_{0}^{\infty} n z^{-n} = z \left(\sum_{0}^{\infty} z^{-n} \right)' = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$TZ(n \mapsto -u[-n-1]) = \sum_{-\infty}^{\infty} -u[-n-1] z^{-n} = \sum_{-\infty}^{-1} -z^{-n} = \sum_{1}^{\infty} -z^{n}$$

$$TZ(n \mapsto -u[-n-1]) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Signal	Transformée en z	Convergence
$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0))+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0))+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$