La Méthode des Éléments Finis: TD1

Ibrahim ALAME

8/11/2021

1 Problème de Dirichlet

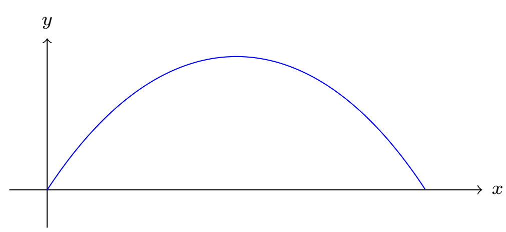
Considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + 4u = 4 \ \text{ sur } \Omega, \\ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega =]0, 1[$.

1. — Équation sans second membre : $-u'' + 4u = 0$ donc $u_0 = A\,\mathrm{ch}(2x) + B\,\mathrm{sh}(2x)$.
   — La solution particulière constante : $u_p = 4/4 = 1$
   — D'où $u = 1 + A\,\mathrm{ch}(2x) + B\,\mathrm{sh}(2x)$
   — Les conditions initiales donnent : $A = -1$ et $B = \mathrm{th}1$.
   — La solution est donc

$$u = \frac{2}{\mathrm{ch}1}\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}(1-x)$$



2. Multiplions les deux membres de l'équation différentielle par une fonction $v \in V$:

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} \cdot v + 4u \cdot v = 4\,v$$

intégrons les deux membres sur Ω :

$$-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} \cdot v\,\mathrm{d}x + 4\int_0^1 u \cdot v\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 v\,\mathrm{d}x$$

Faisons une intégration par partie de la première intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\cdot v\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot v\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

car $v(0) = v(1) = 0$. Donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + 4\int_0^1 u\cdot v\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 v\,\mathrm{d}x$$

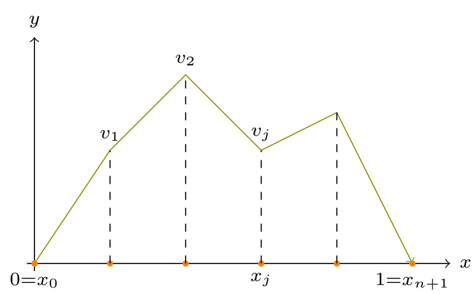
Si on pose

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + 4uv)\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \ell(v) = 4\int_0^1 v\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Alors

$$\boxed{\forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v)} \tag{3}$$

3. Une fonction $v \in V_h$ est affine par morceaux elle est donc complètement déterminée par ses n valeurs aux points x_j, $1 \le j \le n$. Donc $\dim V_h = n$.



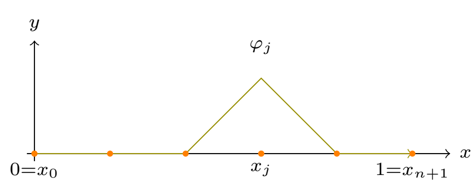
La famille $(\varphi_i)_{1\le i\le n}$ est libre. En effet ;

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i\varphi_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i\varphi_i(x_j) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i\delta_{ij} = \lambda_j = 0$$

Donc $(\varphi_i)_{1\le i\le n}$ est une base de V_h.

4. Pour $1 \le i \le n$, fonction φ_i est donnée analytiquement par

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-x_i|}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$



5. On a $u_h \in V_h$, donc u_h s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$$

On identifie les coefficients λ_j en évaluant cette dernière égalité en x_j pour $1 \leq j \leq n$:

$$u_h(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x_j) \quad \Longrightarrow \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$$

D'où

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i$$

Le problème approché s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ solution de} \\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \end{array} \right. \tag{5}$$

On fait $v_h = \varphi_i$:

$$a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i) \;, \quad 1 \leq i \leq n$$
$$a(\sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j, \varphi_i) = \ell(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

Par linéarité de a par rapport à la première variable :

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \; a(\varphi_j, \varphi_i) = \ell(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

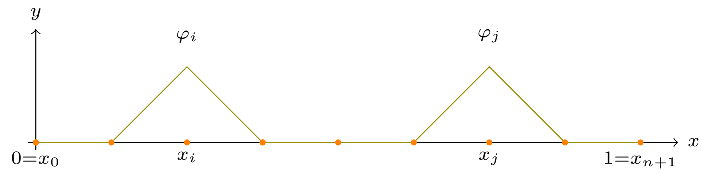
La méthode d'approximation variationnelle du problème de Dirichlet se ramène donc à un système linéaire :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{I} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = \ell(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq n}$$

En tenant compte du seul fait que le support d'une fonction φ_j, est l'intervalle $[x_{j-1}, x_{j+1}]$, ce système prend la forme

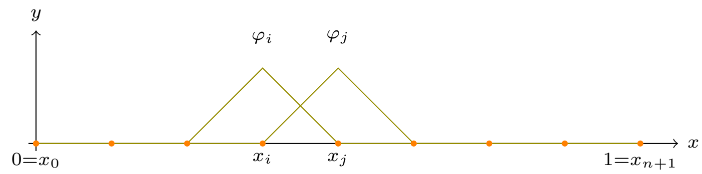
$$\left\{ \begin{array}{l} a(\varphi_1, \varphi_1)u_1 + a(\varphi_2, \varphi_1)u_2 = \ell(\varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2)u_1 + a(\varphi_2, \varphi_2)u_2 + a(\varphi_3, \varphi_2)u_3 = \ell(\varphi_2) \\ \cdots \\ a(\varphi_{i-1}, \varphi_i)u_{i-1} + a(\varphi_i, \varphi_i)u_i + a(\varphi_{i+1}, \varphi_i)u_{i+1} = \ell(\varphi_i) \\ \cdots \\ a(\varphi_{n-1}, \varphi_n)u_{n-1} + a(\varphi_n, \varphi_n)u_n = \ell(\varphi_n) \end{array} \right.$$

— si $|i - j| > 1$



alors $a(\varphi_i, \varphi_j) = 0$.

— si $j = i + 1$



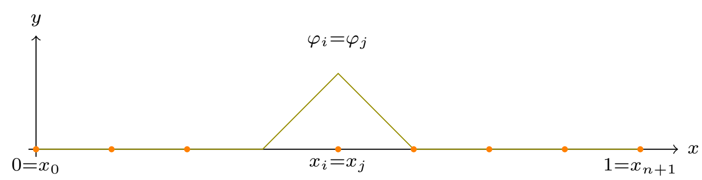
alors

$$a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_j} \left[\left(\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) + 4 \left(1 - \frac{x - x_i}{h}\right) \frac{x - x_i}{h} \right] \mathrm{d}x$$

On fait le changement de variable $t = \frac{x-x_i}{h}$:

$$a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = h \int_0^1 \left[-\frac{1}{h^2} + 4\,(1-t)\,t \right] \mathrm{d}t = -\frac{1}{h} + \frac{2}{3}h$$

— si $i = j$



alors

$$a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[\left(\pm\frac{1}{h}\right)^2 + 4 \left(1 - \frac{|x - x_i|}{h}\right)^2 \right] \mathrm{d}x$$

$$a(\varphi_i, \varphi_i) = h \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{h^2} + 4(1 - |t|)^2 \right] \mathrm{d}t = 2h \int_0^1 \left[\frac{1}{h^2} + 4(1-t)^2 \right] \mathrm{d}t = \frac{2}{h} + \frac{8}{3}h$$

pour le second membre, on peut utiliser l'aire du triangle

$$\ell(\varphi_i) = 4 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{2h \times 1}{2} = 4h$$

Le système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 2+\frac{8}{3}h^2 & -1+\frac{2}{3}h^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1+\frac{2}{3}h^2 & 2+\frac{8}{3}h^2 & -1+\frac{2}{3}h^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1+\frac{2}{3}h^2 & 2+\frac{8}{3}h^2 & -1+\frac{2}{3}h^2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1+\frac{2}{3}h^2 & 2+\frac{8}{3}h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \\ u_n \end{pmatrix} = 4h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

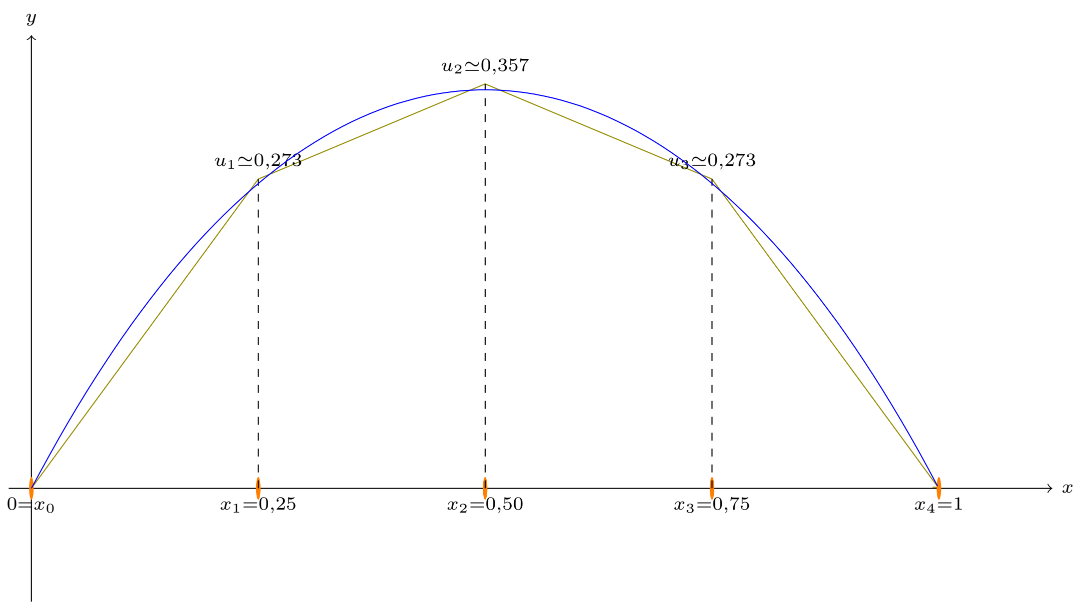
Pour $n = 3$, $h = \frac{1}{4}$, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 2+\frac{1}{6} & -1+\frac{1}{24} & 0 \\ -1+\frac{1}{24} & 2+\frac{1}{6} & -1+\frac{1}{24} \\ 0 & -1+\frac{1}{24} & 2+\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En multipliant par 24, on obtient le système simplifié

$$\begin{pmatrix} 52 & -23 & 0 \\ -23 & 52 & -23 \\ 0 & -23 & 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

D'où $u_1 = u_3 = \frac{225}{823} \simeq 0.273$ et $u_2 = \frac{294}{823} \simeq 0.357$.



2 Problème de Neumann

1. Multiplions les deux membres de l'équation différentielle par une fonction $v \in V$ puis intégrons les deux membres sur $[0, 1]$:

$$-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] v \,\mathrm{d}x + \int_0^1 uv \,\mathrm{d}x = \int_0^1 v \,\mathrm{d}x$$

Après une intégration par partie on obtient :

$$\int_0^1 (1+x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\,\mathrm{d}x = \int_0^1 v\,\mathrm{d}x$$

car $u'(0) = u'(1) = 0$. Si on pose

$$a(u,v) = \int_0^1 \left((1+x)u'v' + uv\right)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_0^1 v\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

Alors

$$\boxed{\forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v)} \tag{7}$$

2. Le problème approché s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ solution de} \\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \end{cases} \tag{8}$$

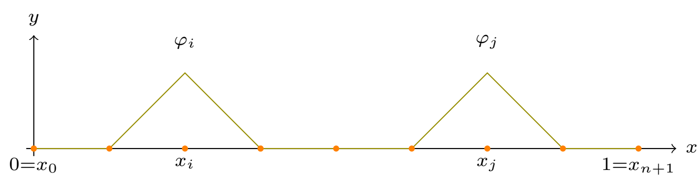
On fait $v = \varphi_i$ et $u_h = \sum_{j=0}^{n+1} u_j\varphi_j$, on obtient grâce à la bilinéarité de a :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n+1} a(\varphi_j, \varphi_i)u_j = \ell(\varphi_i), \quad 0 \le i \le n+1} \tag{9}$$

Compte tenu du support des fonctions de la base $(\varphi_i)_i$ le système linéaire prend la forme

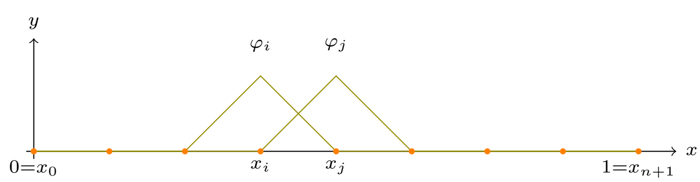
$$\begin{cases} a(\varphi_0,\varphi_0)u_0 + a(\varphi_1,\varphi_0)u_1 = \ell(\varphi_0) \\ a(\varphi_0,\varphi_1)u_0 + a(\varphi_1,\varphi_1)u_1 + a(\varphi_2,\varphi_1)u_2 = \ell(\varphi_1) \\ \dots \\ a(\varphi_{i-1},\varphi_{i-2})u_{i-1} + a(\varphi_i,\varphi_i)u_i + a(\varphi_{i+1},\varphi_i)u_{i+1} = \ell(\varphi_i) \\ \dots \\ a(\varphi_n,\varphi_{n+1})u_n + a(\varphi_{n+1},\varphi_{n+1})u_{n+1} = \ell(\varphi_{n+1}) \end{cases}$$

3. Calcul de $a(\varphi_i, \varphi_j)$:
   — si $|i-j| > 1$



   alors $a(\varphi_i, \varphi_j) = 0$.

   — si $j = i+1$



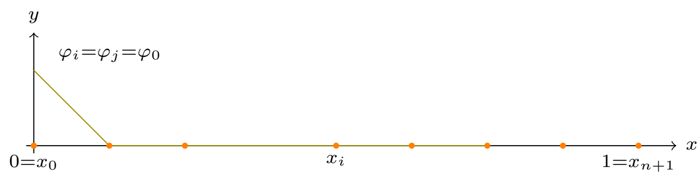
alors

$$a(\varphi_i,\varphi_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_j} \left[(1+x)\left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) + \left(1-\frac{x-x_i}{h}\right)\frac{x-x_i}{h}\right] \mathrm{d}x$$

On fait le changement de variable $t = \frac{x-x_i}{h}$:

$$a(\varphi_i,\varphi_{i+1}) = h\int_0^1 \left[-\frac{1+ih+th}{h^2} + (1-t)\,t\right] \mathrm{d}t = -\frac{1}{h} - i - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}h$$

— si $i = j = 0$

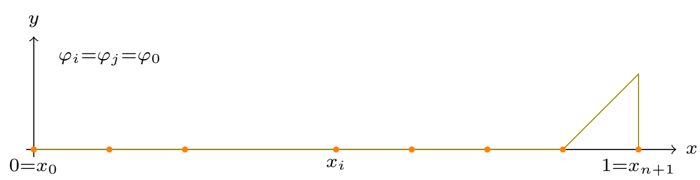


alors

$$a(\varphi_0,\varphi_0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[(1+x)\left(-\frac{1}{h}\right)^2 + \left(1-\frac{x}{h}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

$$a(\varphi_0,\varphi_0) = h\int_0^1 \left[\frac{1+th}{h^2} + (1-t)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}h$$

— si $i = j = n+1$

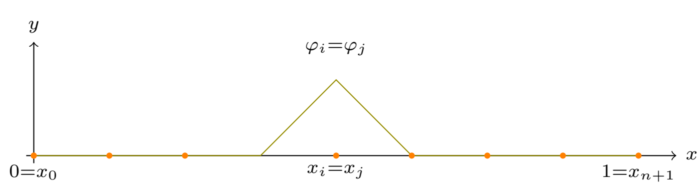


alors

$$a(\varphi_{n+1},\varphi_{n+1}) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[(1+x)\left(\frac{1}{h}\right)^2 + \left(\frac{x-x_n}{h}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

$$a(\varphi_{n+1},\varphi_{n+1}) = h\int_0^1 \left[\frac{1+nh+th}{h^2} + (1-t)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{h} + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}h$$

— si $i = j$



alors

$$a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[(1+x) \left(\pm \frac{1}{h} \right)^2 + \left(1 - \frac{|x - x_i|}{h} \right)^2 \right] \mathrm{d}x$$

$$a(\varphi_i, \varphi_i) = h \int_{-1}^{1} \left[\frac{1 + ih + th}{h^2} + (1 - |t|)^2 \right] \mathrm{d}t = 2h \int_{0}^{1} \left[\frac{1 + ih}{h^2} + (1 - t)^2 \right] \mathrm{d}t = \frac{2}{h} + 2i + \frac{2}{3} h$$