TD4 d'Analyse Numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

14/04/2023

1 Méthode des différences finies

1. Si u est de classe C^4 au voisinage de x, on fait un développement de Taylor à l'ordre 4 de u :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_1),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_2),$$

Donc

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + \frac{h^4}{24}\left(u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2)\right),$$

D'où

$$\left|\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x)\right| \leq \frac{h^2}{12}\sup_{y\in[0,1]}|u^{(4)}(y)|$$

pour tout $x \in [h, 1-h]$. L'approximation

$$\boxed{u''(x) \simeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}}$$

est donc consistante d'ordre 2.

2. Approximation de la dérivée seconde :

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)}{h^2} \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

D'où le problème approché

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + cu_i = f_i, \text{ pour } i \in \{1, \cdots, N\}, \\ u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

où $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$.

On obtient N équations à N inconnues $u_1, \cdots, u_N$.

$$\begin{array}{llccccc}
i=1: & -\dfrac{u_0-2u_1+u_2}{h^2} & + & cu_1 & = & f_1, \\
i=2: & -\dfrac{u_1-2u_2+u_3}{h^2} & + & cu_2 & = & f_2, \\
\cdots & & & & & \\
i=N: & -\dfrac{u_{N-1}-2u_N+u_{N+1}}{h^2} & + & cu_N & = & f_N,
\end{array}$$

D'où le système

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcccc}
-\dfrac{-2u_1+u_2}{h^2} & + & cu_1 & = & f_1, \\
-\dfrac{u_1-2u_2+u_3}{h^2} & + & cu_2 & = & f_2, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
-\dfrac{u_{N-1}-2u_N}{h^2} & + & cu_N & = & f_N,
\end{array}\right.}$$

3. Matriciellement, le problème s'écrit :

$$AU = b \tag{2}$$

avec

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + cI_n$$

4. Soit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On

$$< A_0x\,,\, x >= 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

On a alors $< A_0x\,,\, x > \geq 0$ et

$$< A_0x\,,\, x > = 0 \Longrightarrow x_1^2 = x_n^2 = 0 \text{ et } (x_i - x_{i+1})^2 = 0\ \forall i = 1, n-1$$

Donc $\Longrightarrow x = 0$ et A_0 définie positive donc A est définie positive.

2 Problème aux limites d'ordre 4

$$\begin{cases} \frac{d^4u(x)}{dx^4} = f(x) \quad \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

1. On a $0 = u'(0) \simeq \frac{u(h)-u(0)}{h} \implies u_1 = u(h) = 0$ de même $u_{N+1} = 0$. Nous avons donc 4 valeurs de u connues, il reste $N-1$ valeurs de u_i à déterminer pour i allant de 2 à N.
2. On a

$$\Delta u(x) = \frac{T_{\frac{h}{2}}u(x) - T_{-\frac{h}{2}}u(x)}{h} = \frac{u(x+\frac{h}{2}) - u(x-\frac{h}{2})}{h} \simeq u'(x)$$

On a

$$\Delta^4 = \left(\frac{1}{h}(T_{h/2} - T_{-h/2})\right)^4$$

$$= \frac{1}{h^4}(T^4_{h/2} - 4T^3_{h/2}T_{-h/2} + 6T^2_{h/2}T^2_{-h/2} - 4T_{h/2}T^3_{-h/2} + T^4_{-h/2})$$

$$= \frac{1}{h^4}(T_{2h} - 4T_{3h/2}T_{-h/2} + 6T_hT_{-h} - 4T_{h/2}T_{-3h/2} + T_{-2h})$$

$$= \frac{1}{h^4}(T_{2h} - 4T_h + 6I - 4T_{-h} + T_{-2h})$$

$$\Delta^4 u(x_i) = \frac{1}{h^4}(u(x_i+2h) - 4u(x_i+h) + 6u(x_i) - 4u(x_i-h) + u(x_i-2h))$$

$$\Delta^4 u(x_i) = \frac{1}{h^4}(u(x_{i+2}) - 4u(x_{i+1}) + 6u(x_i) - 4u(x_{i-1}) + u(x_{i-2}))$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^4u_i}{\mathrm{d}x^4} = \frac{1}{h^4}(u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2})}$$

Cette approximation est d'ordre 2 : On fait un développement de Taylor à l'ordre 6 de u :

$$u(x+h) = u(x)+hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)+\frac{h^3}{6}u'''(x)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x)+\frac{h^5}{120}u^{(5)}(x)+\frac{h^6}{720}u^{(6)}(\xi_1),$$

$$u(x-h) = u(x)-hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)-\frac{h^3}{6}u'''(x)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x)-\frac{h^5}{120}u^{(5)}(x)+\frac{h^6}{720}u^{(6)}(\xi_2),$$

$$u(x+2h) = u(x)+2hu'(x)+2h^2u''(x)+\frac{4h^3}{3}u'''(x)+\frac{2h^4}{3}u^{(4)}(x)+\frac{4h^5}{15}u^{(5)}(x)+\frac{4h^6}{45}u^{(6)}(\xi_3),$$

$$u(x-2h) = u(x)-2hu'(x)+2h^2u''(x)-\frac{4h^3}{3}u'''(x)+\frac{2h^4}{3}u^{(4)}(x)-\frac{4h^5}{15}u^{(5)}(x)+\frac{4h^6}{45}u^{(6)}(\xi_4),$$

En faisant une combinaison des 4 dernières lignes : $-4u(x+h)-4u(x-h)+u(x+h)+u(x-h)$, on trouve :

$$6u(x)+h^4u^{(4)}(x)+\frac{h^6}{180}\left(-u^{(6)}(\xi_1)-u^{(6)}(\xi_2)+16u^{(6)}(\xi_3)+16u^{(6)}(\xi_4)\right),$$

D'où

$$\left|\frac{u(x-2h)-4u(x-h)+6u(x)-4u(x+h)+u(x+2h)}{h^4}-u^{(4)}(x)\right|\leq\frac{17h^2}{90}\sup_{y\in[0,1]}|u^{(6)}(y)|$$

3.
$$\begin{cases}\frac{u_{i-2}-4u_{i-1}+6u_i-4u_{i+1}+u_{i+2}}{h^4}=f_i & 2\leq i\leq N\\ u_0=u_{N+2}=0\\ u_1=u_{N+1}=0\end{cases}$$

où $f_i=f(x_i)$.

4. On pose $U=\begin{pmatrix}u_2\\ \vdots\\ u_N\end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix}f_2\\ \vdots\\ f_N\end{pmatrix}$. Le problème approché se ramène à une résolution d'un système linéaire $AU=b$ où A est la matrice pentadiagonale : Soit

$$A=\begin{pmatrix}6&-4&1&0&0&\cdots&0\\ -4&6&-4&1&0&\cdots&0\\ 1&-4&6&-4&1&\ddots&\vdots\\ 0&1&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&1\\ 0&\cdots&0&1&-4&6&-4\\ 0&\cdots&0&0&1&-4&6\end{pmatrix}$$

3 Équation de la chaleur

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\nu\dfrac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=0 & \forall(x,t)\in]0,1[\times\mathbb{R}_+^*\\ u(0,t)=u(1,t)=0\\ u(x,0)=u_0(x) & \forall x\in[0,1]\end{cases}$$

On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en $N+2$ points d'abscisses $x_i=ih$ où $0\leq i\leq N+1$ avec $h=\frac{1}{N+1}$ et soit τ le pas de temps. On note u_i^n la valeur approchée de $u(x_i,t_n)$ avec $t_n=n\tau$ et on considère le schéma dit d'Euler implicite qui est le suivant :

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}-\nu\frac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{h^2}=0$$

1. Posons $t = t_{n+1}$ et $x = x_i$ pour alléger les notations. Pour déterminer l'erreur de troncature, on va dans le schéma remplacer u_i^n par $u(x, t-\tau)$, u_{i-1}^{n+1} par $u(x-h, t)$, u_i^{n+1} par $u(x, t)$ et u_{i+1}^{n+1} par $u(x+h, t)$. A l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2 de u suivant t, on a

$$u(x, t-\tau) = u(x, t) - \tau\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau^2)$$

D'où

$$\frac{u(x,t) - u(x, t-\tau)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau)$$

Par ailleurs, en considérant la variation de x, on a

$$u(x+h, t) = u(x, t) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^4)$$

et de la même façon

$$u(x-h, t) = u(x, t) - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^4)$$

Donc

$$\frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^2)$$

En remplaçant u_i^n dans le schéma par $u(x_i, t_n)$, on se retrouve avec l'erreur de troncature :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau) - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^2)\right) = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\tau + h^2)$$

qui converge bien vers 0 pour $h \to 0$, $\tau \to 0$. Le schéma est bien consistant, et précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

2. On pose $u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$. Dans le schéma, isolons u_i^n, en posant $c = \frac{\nu\tau}{h^2}$:

$$u_i^n = -cu_{i-1}^{n+1} + (1+2c)u_i^{n+1} - cu_{i+1}^{n+1}$$

Précisons les équations, en notant leur forme particulières pour $i = 1$ et $i = N$ lorsque l'on prend en compte les conditions aux limites :

$$\begin{array}{rcl}
u_1^n & = & (1+2c)u_1^{n+1} - cu_2^{n+1} \\
u_2^n & = & -cu_1^{n+1} + (1+2c)u_2^{n+1} - cu_3^{n+1} \\
u_3^n & = & -cu_2^{n+1} + (1+2c)u_3^{n+1} - cu_4^{n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
u_{N-1}^n & = & -cu_{N-2}^{n+1} + (1+2c)u_{N-1}^{n+1} - cu_N^{n+1} \\
u_N^n & = & -cu_{N-1}^{n+1} + (1+2c)u_N^{n+1}
\end{array}$$

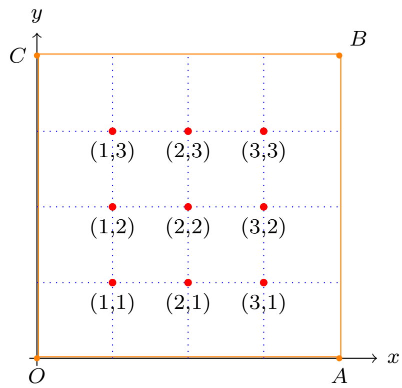
On a bien $Mu^{n+1} = u^n$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 1+2c & -c & 0 & \cdots & 0 \\ -c & 1+2c & -c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -c & 1+2c & -c \\ 0 & \cdots & 0 & -c & 1+2c \end{pmatrix}$$

3. Expliquer rapidement comment on programmerait l'algorithme :
   u^0 étant connu par la condition initiale, on calcule de proche en proche les u^n successifs. u^1 est la solution du système $Mu^1 = u^0$. Puis u^2 est la solution du système $Mu^2 = u^1$ et ainsi de suite...
   Il faut donc résoudre successivement des systèmes décrits par $Mu^{n+1} = u^n$
4. On a
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
   Soit λ une valeur propre de A et v un vecteur propre associé. On développe la composante i_0 de l'égalité matricielle : $Av = \lambda v$ où i_0 est un indice tel que $v_{i_0} = max_i |v_i|$:
$$-v_{i_0-1} + 2v_{i_0} - v_{i_0+1} = \lambda v_{i_0}$$
$$(2-\lambda)v_{i_0} = v_{i_0-1} + v_{i_0+1}$$
$$|2-\lambda| \times |v_{i_0}| \leq |v_{i_0-1}| + |v_{i_0+1}|$$
$$|2-\lambda| \leq 2$$
$$0 < \lambda < 4$$
   Comme M s'écrit $M = I + cA$ et que toutes les valeurs de A sont entre 0 et 4, il s'avère que M a ses valeurs propres comprises entre 1 et $1 + 4c > 1$ donc M^{-1} a ses valeurs propres comprises entre $\frac{1}{1+4c}$ et 1. Comme M^{-1} est symétrique définie positive, sa norme 2 est la plus grande valeur propre (cf cours) et donc $\|M^{-1}\| \leq 1$.
5. On a $u^{n+1} = M^{-1}u^n$ donc $\|u^{n+1}\| \leq \|M^{-1}\|\|u^n\| \leq \|u^n\|$ et par récurrence $\|u^n\| \leq \|u^0\|$. Donc le schéma est stable.

4 Problème de Dirichlet

1.
2. Le système avec u en deux indices :

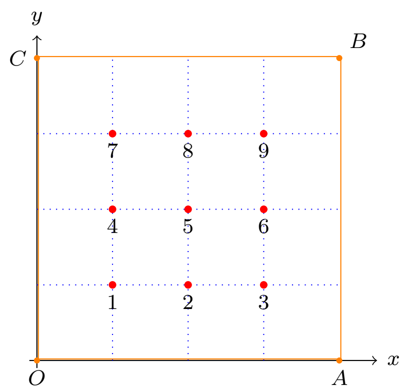


$$
\begin{aligned}
i=1, j=1: &\quad -\frac{u_{0,1}-2u_{1,1}+u_{2,1}}{\delta x^2}-\frac{u_{1,0}-2u_{1,1}+u_{1,2}}{\delta y^2}=f_{1,1}\\
i=2, j=1: &\quad -\frac{u_{1,1}-2u_{2,1}+u_{3,1}}{\delta x^2}-\frac{u_{2,0}-2u_{2,1}+u_{2,2}}{\delta y^2}=f_{2,1}\\
i=3, j=1: &\quad -\frac{u_{2,1}-2u_{3,1}+u_{4,1}}{\delta x^2}-\frac{u_{3,0}-2u_{3,1}+u_{3,2}}{\delta y^2}=f_{3,1}\\
i=1, j=2: &\quad -\frac{u_{0,2}-2u_{1,2}+u_{2,2}}{\delta x^2}-\frac{u_{1,1}-2u_{1,2}+u_{1,3}}{\delta y^2}=f_{1,2}\\
i=2, j=2: &\quad -\frac{u_{1,2}-2u_{2,2}+u_{3,2}}{\delta x^2}-\frac{u_{2,1}-2u_{2,2}+u_{2,3}}{\delta y^2}=f_{2,2}\\
i=3, j=2: &\quad -\frac{u_{2,2}-2u_{3,2}+u_{4,2}}{\delta x^2}-\frac{u_{3,1}-2u_{3,2}+u_{3,3}}{\delta y^2}=f_{3,2}\\
i=1, j=3: &\quad -\frac{u_{0,3}-2u_{1,3}+u_{2,3}}{\delta x^2}-\frac{u_{1,2}-2u_{1,3}+u_{1,4}}{\delta y^2}=f_{1,3}\\
i=2, j=3: &\quad -\frac{u_{1,3}-2u_{2,3}+u_{3,3}}{\delta x^2}-\frac{u_{2,2}-2u_{2,3}+u_{2,4}}{\delta y^2}=f_{2,3}\\
i=3, j=3: &\quad -\frac{u_{2,3}-2u_{3,3}+u_{4,3}}{\delta x^2}-\frac{u_{3,2}-2u_{3,3}+u_{3,4}}{\delta y^2}=f_{3,3}
\end{aligned}
$$

Avec les conditions aux bords :

$$\begin{aligned}
i=1, j=1: &\quad -\frac{0-2u_{1,1}+u_{2,1}}{\delta x^2}-\frac{0-2u_{1,1}+u_{1,2}}{\delta y^2}=f_{1,1}\\
i=2, j=1: &\quad -\frac{u_{1,1}-2u_{2,1}+u_{3,1}}{\delta x^2}-\frac{0-2u_{2,1}+u_{2,2}}{\delta y^2}=f_{2,1}\\
i=3, j=1: &\quad -\frac{u_{2,1}-2u_{3,1}+0}{\delta x^2}-\frac{0-2u_{3,1}+u_{3,2}}{\delta y^2}=f_{3,1}\\
i=1, j=2: &\quad -\frac{0-2u_{1,2}+u_{2,2}}{\delta x^2}-\frac{u_{1,1}-2u_{1,2}+u_{1,3}}{\delta y^2}=f_{1,2}\\
i=2, j=2: &\quad -\frac{u_{1,2}-2u_{2,2}+u_{3,2}}{\delta x^2}-\frac{u_{2,1}-2u_{2,2}+u_{2,3}}{\delta y^2}=f_{2,2}\\
i=3, j=2: &\quad -\frac{u_{2,2}-2u_{3,2}+0}{\delta x^2}-\frac{u_{3,1}-2u_{3,2}+u_{3,3}}{\delta y^2}=f_{3,2}\\
i=1, j=3: &\quad -\frac{0-2u_{1,3}+u_{2,3}}{\delta x^2}-\frac{u_{1,2}-2u_{1,3}+0}{\delta y^2}=f_{1,3}\\
i=2, j=3: &\quad -\frac{u_{1,3}-2u_{2,3}+u_{3,3}}{\delta x^2}-\frac{u_{2,2}-2u_{2,3}+0}{\delta y^2}=f_{2,3}\\
i=3, j=3: &\quad -\frac{u_{2,3}-2u_{3,3}+0}{\delta x^2}-\frac{u_{3,2}-2u_{3,3}+0}{\delta y^2}=f_{3,3}
\end{aligned}$$

Le système avec u en seul indice :



$$(i,j)\mapsto i+(j-1)N$$

$$
\begin{aligned}
m=1: &\quad -\frac{0-2u_1+u_2}{\delta x^2}-\frac{0-2u_1+u_4}{\delta y^2}=f_1\\
m=2: &\quad -\frac{u_1-2u_2+u_3}{\delta x^2}-\frac{0-2u_2+u_5}{\delta y^2}=f_2\\
m=3: &\quad -\frac{u_2-2u_3+0}{\delta x^2}-\frac{0-2u_3+u_6}{\delta y^2}=f_3\\
m=4: &\quad -\frac{0-2u_4+u_5}{\delta x^2}-\frac{u_1-2u_4+u_7}{\delta y^2}=f_4\\
m=5: &\quad -\frac{u_4-2u_5+u_6}{\delta x^2}-\frac{u_2-2u_5+u_8}{\delta y^2}=f_5\\
m=6: &\quad -\frac{u_5-2u_6+0}{\delta x^2}-\frac{u_3-2u_6+u_9}{\delta y^2}=f_6\\
m=7: &\quad -\frac{0-2u_7+u_8}{\delta x^2}-\frac{u_4-2u_7+0}{\delta y^2}=f_7\\
m=8: &\quad -\frac{u_7-2u_8+u_9}{\delta x^2}-\frac{u_5-2u_8+0}{\delta y^2}=f_8\\
m=9: &\quad -\frac{u_8-2u_9+0}{\delta x^2}-\frac{u_6-2u_9+0}{\delta y^2}=f_9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m=1: &\quad 2\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{\delta y^2}\right)u_1-\frac{1}{\delta x^2}u_2-\frac{1}{\delta y^2}u_4=f_1\\
m=2: &\quad -\frac{1}{\delta x^2}u_1+2\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{\delta y^2}\right)u_2-\frac{1}{\delta x^2}u_3-\frac{1}{\delta y^2}u_5=f_2\\
m=3: &\quad -\frac{1}{\delta x^2}u_2+2\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{\delta y^2}\right)u_3-\frac{1}{\delta y^2}u_6=f_3\\
m=4: &\quad -\frac{1}{\delta y^2}u_1+2\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{\delta y^2}\right)u_4-\frac{1}{\delta x^2}u_5-\frac{1}{\delta y^2}u_7=f_4\\
m=5: &\quad -\frac{1}{\delta y^2}u_2-\frac{1}{\delta x^2}u_4+2\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{\delta y^2}\right)u_5-\frac{1}{\delta x^2}u_6-\frac{1}{\delta y^2}u_8=f_5\\
m=6: &\quad -\frac{1}{\delta y^2}u_3-\frac{1}{\delta x^2}u_5+2\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{\delta y^2}\right)u_6-\frac{1}{\delta y^2}u_9=f_6\\
m=7: &\quad -\frac{1}{\delta y^2}u_4+2\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{\delta y^2}\right)u_7-\frac{1}{\delta x^2}u_8=f_7\\
m=8: &\quad -\frac{1}{\delta y^2}u_5-\frac{1}{\delta x^2}u_7+2\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{\delta y^2}\right)u_8-\frac{1}{\delta x^2}u_9=f_8\\
m=9: &\quad -\frac{1}{\delta y^2}u_6-\frac{1}{\delta x^2}u_8+2\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{\delta y^2}\right)u_9=f_9
\end{aligned}
$$

Pour simplifier, on pose $\beta = \frac{1}{\delta x^2}$, $\gamma = \frac{1}{\delta y^2}$ et $\alpha = 2(\beta + \gamma)$:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
m=1: & \alpha u_1 - \beta u_2 - \gamma u_4 = f_1 \\
m=2: & -\beta u_1 + \alpha u_2 - \beta u_3 - \gamma u_5 = f_2 \\
m=3: & -\beta u_2 + \alpha u_3 - \gamma u_6 = f_3 \\
m=4: & -\gamma u_1 + \alpha u_4 - \beta u_5 - \gamma u_7 = f_4 \\
m=5: & -\gamma u_2 - \beta u_4 + \alpha u_5 - \beta u_6 - \gamma u_8 = f_5 \\
m=6: & -\gamma u_3 - \beta u_5 + \alpha u_6 - \gamma u_9 = f_6 \\
m=7: & -\gamma u_4 + \alpha u_7 - \beta u_8 = f_7 \\
m=8: & -\gamma u_5 - \beta u_7 + \alpha u_8 - \beta u_9 = f_8 \\
m=9: & -\gamma u_6 - \beta u_8 + \alpha u_9 = f_9
\end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\alpha & -\beta & 0 & -\gamma & & & & & \\
-\beta & \alpha & -\beta & & -\gamma & & & & \\
0 & -\beta & \alpha & & & -\gamma & & & \\
\hline
-\gamma & & & \alpha & -\beta & 0 & -\gamma & & \\
& -\gamma & & -\beta & \alpha & -\beta & & -\gamma & \\
& & -\gamma & 0 & -\beta & \alpha & & & -\gamma \\
\hline
& & & -\gamma & & & \alpha & -\beta & 0 \\
& & & & -\gamma & & -\beta & \alpha & -\beta \\
& & & & & -\gamma & 0 & -\beta & \alpha
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \hline u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ \hline u_7 \\ u_8 \\ u_9
\end{array}\right]
= h^2
\left[\begin{array}{c}
f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \hline f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ \hline f_7 \\ f_8 \\ f_9
\end{array}\right]$$

La matrice A peut s'écrire en blocs de la façon suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c|c}
\beta K + 2\gamma I_3 & -\gamma I_3 & \\
\hline
-\gamma I_3 & \beta K + 2\gamma I_3 & -\gamma I_3 \\
\hline
& -\gamma I_3 & \beta K + 2\gamma I_3
\end{array}\right]$$

où K est la matrice symétrique définie positive suivante :

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soit le vecteur en blocs :

$$X = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \\ \hline X_3 \end{array}\right]$$

On a

$$
\begin{aligned}
< AX\,,\,X > \quad &= \quad < \left[\begin{array}{c|c|c} \beta K + 2\gamma I_3 & -\gamma I_3 & \\ \hline -\gamma I_3 & \beta K + 2\gamma I_3 & -\gamma I_3 \\ \hline & -\gamma I_3 & \beta K + 2\gamma I_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \\ \hline X_3 \end{array}\right] \,,\, \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \\ \hline X_3 \end{array}\right] > \\
&= \quad \beta \left({}^t X_1 K X_1 +^t X_2 K X_2 +^t X_3 K X_3\right) \\
&\quad\; +\gamma \left(2\|X_1\|^2 + 2\|X_2\|^2 + 2\|X_3\|^2 - 2^t X_1 X_2 - 2^t X_2 X_3\right) \\
&= \quad \beta \left({}^t X_1 K X_1 +^t X_2 K X_2 +^t X_3 K X_3\right) \\
&\quad\; +\gamma \left(\|X_1\|^2 + \|X_1 - X_2\|^2 + \|X_2 - X_3\|^2 + \|X_3\|^2\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

et $< AX\,,\,X >= 0 \Longrightarrow X = 0$ et donc A est bien une matrice symétrique définie positive.

3. Appliquons la matrice A au vecteur ligne par ligne :

$$
(Au(p,q))_{i,j} = \underbrace{\frac{-u(p,q)_{i-1,j} + 2u(p,q)_{i,j} - u(p,q)_{i+1,j}}{\delta x^2}}_{A_1} + \underbrace{\frac{-u(p,q)_{i,j-1} + 2u(p,q)_{i,j} - u(p,q)_{i,j+1}}{\delta y^2}}_{A_2}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1 \quad &= \quad \frac{-u(p,q)_{i-1,j} + 2u(p,q)_{i,j} - u(p,q)_{i+1,j}}{\delta x^2} \\
&= \quad \frac{-\sin\left(p\pi\frac{(i-1)\delta x}{a}\right) + 2\sin\left(p\pi\frac{i\delta x}{a}\right) - \sin\left(p\pi\frac{(i+1)\delta x}{a}\right)}{\delta x^2} \sin\left(q\pi\frac{j\delta y}{b}\right) \\
&= \quad \frac{-2\sin\left(p\pi\frac{i\delta x}{a}\right)\cos\left(p\pi\frac{\delta x}{a}\right) + 2\sin\left(p\pi\frac{i\delta x}{a}\right)}{\delta x^2} \sin\left(q\pi\frac{j\delta y}{b}\right) \\
&= \quad 2\frac{1-\cos\left(p\pi\frac{\delta x}{a}\right)}{\delta x^2} \sin\left(p\pi\frac{i\delta x}{a}\right) \sin\left(q\pi\frac{j\delta y}{b}\right) \\
&= \quad \frac{4}{\delta x^2}\sin^2\left(p\pi\frac{\delta x}{2a}\right) \sin\left(p\pi\frac{i\delta x}{a}\right) \sin\left(q\pi\frac{j\delta y}{b}\right) \\
&= \quad \frac{4}{\delta x^2}\sin^2\left(p\pi\frac{\delta x}{2a}\right) u(p,q)_{i,j}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{A_1 = \frac{4}{\delta x^2}\sin^2\left(p\pi\frac{\delta x}{2a}\right) u(p,q)_{i,j}}
$$

Il en est de même pour A_2 :

$$
\boxed{A_2 = \frac{4}{\delta y^2}\sin^2\left(q\pi\frac{\delta y}{2b}\right) u(p,q)_{i,j}}
$$

D'où

$$
(Au(p,q))_{i,j} = A_1 + A_2 = \left[\frac{4}{\delta x^2}\sin^2\left(p\pi\frac{\delta x}{2a}\right) + \frac{4}{\delta y^2}\sin^2\left(q\pi\frac{\delta y}{2b}\right)\right] u(p,q)_{i,j}
$$

et

$$\boxed{\lambda_{p,q} = \frac{4}{\delta x^2}\sin^2\left(p\pi\frac{\delta x}{2a}\right) + \frac{4}{\delta y^2}\sin^2\left(q\pi\frac{\delta y}{2b}\right)}$$

4.

$$\max \lambda_{p,q} = \lambda_{N,M} \simeq \frac{4}{\delta x^2}\times 1 + \frac{4}{\delta y^2}\times 1 = 4\left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2}\right)$$

$$\min \lambda_{p,q} = \lambda_{1,1} \simeq \frac{4}{\delta x^2}\times\left(\pi\frac{\delta x}{2a}\right)^2 + \frac{4}{\delta y^2}\times\left(\pi\frac{\delta y}{2b}\right)^2 = \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

D'où

$$\boxed{\mathrm{cond}_2 A = \frac{4}{\pi^2}\frac{\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

Si $M = N$ et $a = b$ alors

$$\boxed{\mathrm{cond}_2 A \sim \frac{4N^2}{\pi^2}}$$