TD 2 Analyse numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

19/02/2024

1 Méthodes d'Euler explicite, implicite et Runge-Kutta

Soit le problème de Cauchy suivant

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, 1], \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

où $f(t, y) = 3t + y$.

1. (a) Montrer que la fonction f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et donner une constante de Lipschitz.
   (b) Que peut-on dire sur l'existence et l'unicité du problème (P) ?
2. Montrer que $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ est l'unique solution de$(\mathcal{P})$.
3. Écrire le schéma d'Euler explicite à ce problème, avec $h = 0.1$, puis évaluer la solution en $t = 0.2$.
4. Écrire le schéma d'Euler implicite à ce problème, avec $h = 0.1$, puis évaluer la solution en $t = 0.2$.
5. Écrire la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et donner l'approximation de $y(0.2)$ à l'aide d'un pas de discrétisation numérique $h = 0.1$.
6. Comparer les solutions numériques obtenues par chaque méthode à la valeur exacte.

2 Majoration de l'erreur

On étudie l'équation différentielle $y' = -y$. Cette équation sera considérée sur $[0; 10]$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

1. Déterminer la solution exacte de ce problème de Cauchy. Vérifier qu'on a toujours

$$\forall t \in [0, 10], \quad 0 < y(t) \leq 1$$

2. Exprimer pour la méthode d'Euler explicite, l'expression de y_n en fonction de n.
3. Déterminer à quelle condition sur h, on peut assurer que pour tout n, $0 < y_n \leq 1$.
4. Majorer sommairement $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$. (On se limitera au cas où $h \leq \frac{1}{2}$).
5. Reprendre les questions 2 à 4 avec les autres méthodes vues (Euler implicite, Runge- Kutta d'ordres 2 et 4). Retrouve-t-on des résultats compatibles avec les ordres connus pour ces méthodes ?

3 Erreur de la méthode d'Euler

Résoudre explicitement l'équation $y' = -y + t$ avec condition initiale $y(0) = 0$. Utiliser la méthode d'Euler pour donner la valeur de l'erreur en t = 1.

4 Équation différentielle du second ordre

Soit l'équation différentielle du second ordre $y'' + ty' + (1-t)y = 2$, considérée sur l'intervalle $I = [0; 1]$ assortie des conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

1. Reformuler cette équation différentielle sous la forme d'un problème de Cauchy.
2. Montrer que ce problème a une et une seule solution.
3. Exposer la formulation de la méthode d'Euler explicite pour ce problème. Calculer, pour $h = 0.1$ la valeur approchée obtenue comme approximation de $y(0.3)$.
4. Exposer la formulation de la méthode d'Euler implicite pour ce problème.

5 Équation différentielle non linéaire

On considère le problème de Cauchy suivant (avec $T > 0$) :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'(t) = \sin y(t) + \sin t, & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème de Cauchy a une et une seule solution.
2. Majorer sommairement $|y''|$ sur $[0; T]$.
3. Déterminer une majoration de l'erreur $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$ pour la méthode d'Euler explicite.
4. Pour $T = 1$, quel valeur de N choisir pour garantir un résultat correct avec une précision de 10^{-3} ? Même question pour $T = 10$.

6 Méthode à un pas

On considère un problème de Cauchy $y' = f(t; y)$ avec $y(a) = \alpha$. La méthode de Heun est une méthode numérique à un pas où le calcul de y_{n+1} à partir de y_n est décrite par :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \overline{y}_n = y_n + hf(t_n; y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \overline{y}_n)\right) \end{cases}$$

1. Expliquer en quoi on peut affirmer que cette méthode est inspirée de la méthode des trapèzes.
2. Montrer que cette méthode est consistante.
3. Montrer que cette méthode est stable.

7 Méthode de Heun

La méthode de Heun consiste à approcher, la solution de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = y0$, par le schéma suivant :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))\right] \\ y_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Où $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ et y_n une approximation de $y(t_n)$.

1. Montrer que la méthode est consistante. Déterminer son ordre. On considère le problème de CAUCHY

$$(\star) \begin{cases} y'(t) = -\alpha y(t) + \beta \text{ pour } t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

   où y_0 est une valeur donnée.
2. Monter que la méthode d'Euler modifiée appliquée au problème de Cauchy $(\star)$ converge.
3. Écrire le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n. Sous quelle condition sur h la relation

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

   a-t-elle lieu ?

8 Asymptotique, raideur

Soit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$A. \begin{cases} x'(t) & = & -ax(t) + b, & t \in \mathbb{R}^+ \\ x(0) & = & x_0 & \end{cases}$$

1. Donner explicitement x.
2. Soit $h > 0$ un pas de temps.
   (a) Écrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas h.
   (b) On suppose que h est une constante. Donner explicitement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Quelle condition doit satisfaire h pour que, quel que soit x_0, x_n tende quand $n \to +\infty$ vers $\frac{b}{a}$?
   (d) On suppose que $h = \frac{t}{n}$. Montrer que quel que soit x_0, x_n tend quand $n \to +\infty$ vers $x(t)$. Exprimer en fonction de a, b, x_0 et n l'erreur d'approximation dans un calcul approché de $x_{/[0,10]}$.

9 Méthode d'Euler en dimension 2

On considère le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x'(t) & = & -y(t) \\ y'(t) & = & x(t) \end{cases} \qquad t \in [0, T]$$

que l'on note aussi $X'(t) = AX(t)$, avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice A, et déterminer la solution $X(t)$ du système (S) qui satisfait aux conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 0$, *(Indication : $x'' + x = 0$ et $y'' + y = 0$)*. Tracer l'orbite de $X(t)$, c'est-à-dire la courbe $t \geq 0 \to X(t) \in \mathbb{R}^2$.
2. Pour un entier $N \geq 2$ fixé, on pose $h = T/N$ et l'on applique au système (S) le schéma d'Euler explicite avec le pas h et la donnée initiale $X^0 = (x_0, y_0)^T = (1, 0)^T$. Écrire explicitement la relation de récurrence qui définit la suite $X^n = (x_n, y_n)^T$.
3. On note E^k l'erreur $X^k - X(kh)$. Établir la relation

$$E^{k+1} = E^k + hAE^k + \frac{h^2}{2}X(kh) + O(h^3), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

(Indication : faire un DL de $X((k+1)h)$ au voisinage de kh à l'ordre 2)
Montrer qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$\|E^{k+1}\| \leq (1 + hC_1)\|E^k\| + C_2h^2, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. *(Indication : inégalité triangulaire avec $\|O(h^3)\| \leq Mh^3 \leq Mh^2$ pour h assez petit)*. En déduire l'existence d'une constante C, dépendant de T mais non de N, h, telle que $\|E^n\| \leq Ch$ pour tout $0 \leq n \leq N$ *(Indication : diviser les deux membres de l'inégalité par $(1 + hC_1)^{k+1}$ puis appliquer la somme $\sum_{k=0}^{n-1}$. Remarquer que $(1 + hC_1)^n \leq (e^{hC_1})^N$, et $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^2}{(1+hC_1)^{k+1}} \leq \sum_{k=0}^{N-1} h^2 = Nh^2$)*. Étudier la variation de C en fonction de T.
4. On fixe maintenant $h > 0$. Montrer que le schéma d'Euler peut s'écrire $X^{n+1} = A_hX^n$, où A_h est une matrice que l'on précisera. Déterminer les valeurs propres de A_h ainsi que leurs modules.
5. On pose $h = \tan\theta$. Montrer que $\cos\theta A_h$ est une matrice de rotation. En déduire A_h^n. calculer X^n pour $0 \leq n \leq N$. Étudier la limite de $\|X^n\|$ quand $n \to \infty$. Esquisser la ligne brisée qui joint les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_N, y_N), et qui est une approximation de l'orbite $X(t)$. Obtient-on une courbe fermée ? Tracer la ligne brisée dans les deux cas particuliers : $\theta = \frac{\pi}{4}$, $N = 8$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$, $N = 12$.

10 Système différentiel d'ordre 2

Soit le système différentiel à deux inconnues $y(t)$ et $z(t)$ considéré sur un intervalle $[0; T]$ suivant

$$\begin{cases} y'' - ty' + 2z = t \\ y' + e^ty + 3z' + 2z = 4t^2 + 1 \end{cases}$$

1. Quelles conditions initiales poser pour constituer avec ce système un problème de Cauchy ? L'exprimer sous la forme $Y' = F(t, Y)$.
2. Justifier que ce problème admet une et une seule solution.
3. Exposer le principe des méthodes d'Euler explicite et implicite pour ce système.