

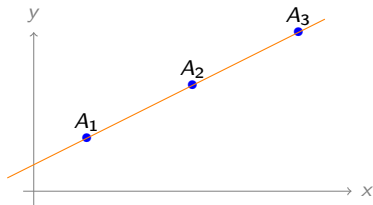
Méthode des éléments finis

Ibrahim ALAME

ESTP

05/02/2024

Rappel : 3 Points alignés

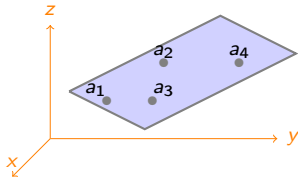


$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \mu y_1 + \nu = 0 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 + \nu = 0 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 + \nu = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Trois points alignés} \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rappel : 4 Points coplanaires



$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + bz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + bz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + bz_3 + d = 0 \\ ax_4 + by_4 + bz_4 + d = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quatre points coplanaires} \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rappel : Coordonnées barycentriques



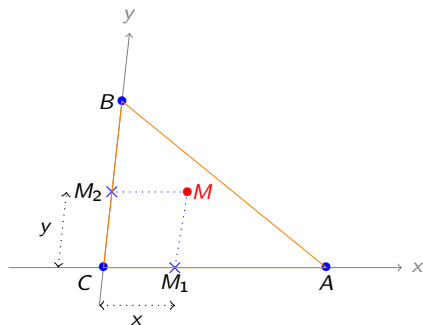
$$\overrightarrow{BM} = x \overrightarrow{BA}$$

$$M - B = x(A - B) \implies M = xA + (1 - x)B$$

(λ, μ) Coordonnées barycentriques de M dans le système $\{A, B\}$ ssi

$$M = \lambda A + \mu B \quad \text{où } \lambda + \mu = 1$$

Rappel : Coordonnées barycentriques



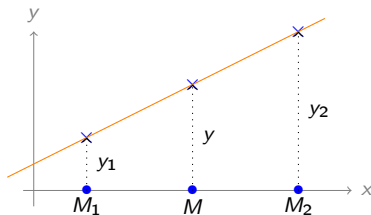
$$\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$$

$$M - C = x(A - C) + y(B - C) \implies M = xA + yB + (1 - x - y)C$$

(λ, μ, ν) Coordonnées barycentriques de M dans le système $\{A, B, C\}$ ssi

$$M = \lambda A + \mu B + \nu C \quad \text{où } \lambda + \mu + \nu = 1$$

Rappel : Interpolation linéaire

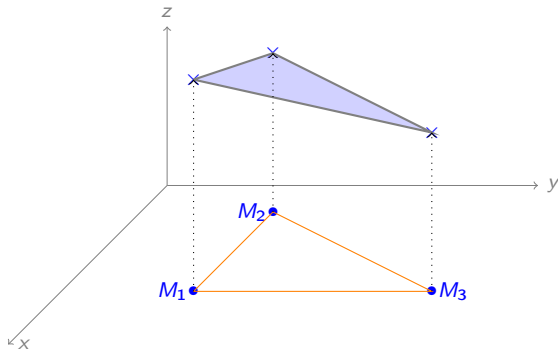


$$M = \lambda M_1 + \mu M_2$$

$$f(M) = \lambda f(M_1) + \mu f(M_2)$$

$$y = \lambda y_1 + \mu y_2$$

Rappel : Interpolation linéaire



$$M = \lambda M_1 + \mu M_2 + \nu M_3$$

$$f(M) = \lambda f(M_1) + \mu f(M_2) + \nu f(M_3)$$

$$z = \lambda z_1 + \mu z_2 + \nu z_3$$

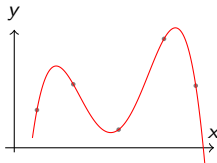
Rappel : Interpolation de Lagrange

Théorème

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n$. De plus, P est donné par :

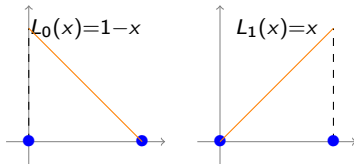
$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

où les polynômes L_i sont définis par : $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$



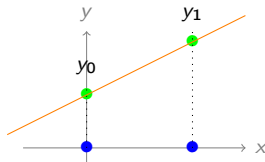
- $n = 1$ deux points de discrétisation $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$. On a alors :

$$P(x) = \sum_{i=0}^1 f(x_i)L_i(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x)$$



- Exemple : Équation de la droite passant par les deux points $(0, 1)$ et $(1, 3)$:

$$y = 1 \cdot (1 - x) + 3 \cdot x \implies y = 2x + 1$$



Éléments finis de Lagrange

On se donne :

- ① une partie compacte K de \mathbb{R}^n , connexe et d'intérieur non vide ;
 - ② un ensemble fini $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N$ de N points distincts de K ;
 - ③ un espace vectoriel \mathbb{P} de dimension finie et composé de fonctions définies sur K à valeurs réelles.
- On dit que l'ensemble Σ est \mathbb{P} -unisolvant si et seulement si, étant donné N scalaires réels quelconques α_j , $1 \leq j \leq N$, il existe une fonction p de l'espace \mathbb{P} et une seule telle que

$$p(a_j) = \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq N \quad (1)$$

Lorsque l'ensemble Σ est \mathbb{P} -unisolvant, le triplet (K, \mathbb{P}, Σ) est appelé **élément fini de Lagrange**.

- Une condition nécessaire évidente pour que l'ensemble Σ soit \mathbb{P} -unisolvant est que $\dim(\mathbb{P}) = \text{card}(\Sigma) = N$

Éléments finis de Lagrange

- il existe pour tout entier i , $1 \leq i \leq N$, une fonction $\varphi_i \in \mathbb{P}$ et une seule telle que

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N \quad (2)$$

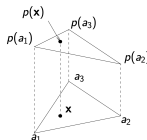
Les N fonctions $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ forment une base de \mathbb{P} .

- pour toute fonction v définie sur K à valeurs réelles, il existe une fonction $p \in \mathbb{P}$ et une seule qui interpole v sur Σ :

$$p(a_j) = v(a_j), \quad 1 \leq j \leq N \quad (3)$$

- L'opérateur de P -interpolation de Lagrange sur Σ noté Π est définie par

$$\Pi v = \sum_{i=1}^N v(a_i) \varphi_i, \quad (4)$$



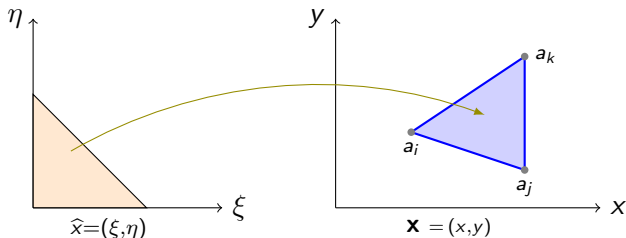
Éléments finis de Lagrange

- On suppose l'application F injective. Alors si $(\hat{K}, \hat{\mathbb{P}}, \hat{\Sigma})$ est un élément fini de Lagrange, le triplet (K, \mathbb{P}, Σ) , où $K = F(\hat{K})$ et où on a posé

$$\mathbb{P} = \{p : K \rightarrow \mathbb{R}; p \circ F \in \hat{\mathbb{P}}\}, \quad \text{et} \quad \Sigma = F(\hat{\Sigma}), \quad (5)$$

est un élément fini de Lagrange.

- Deux éléments finis de Lagrange $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ et (K, P, Σ) sont dits affine-équivalents s'il existe une bijection F de \hat{K} sur K vérifiant (5);



Éléments finis simpliciaux

On considère $n + 1$ points $a_j = (a_{ij})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq n + 1$, non situés dans un même hyperplan de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire tels que la matrice d'ordre $n + 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

soit inversible. On appelle n -simplexe K de sommets a_j , $1 \leq j \leq n + 1$, l'enveloppe convexe des points a_j ;

- pour $n = 2$, K est un triangle.
- pour $n = 3$, K est un tétraèdre.

Coordonnées barycentriques

Tout point x de \mathbb{R}^n , de coordonnées cartésiennes x_i , $1 \leq i \leq n$, est caractérisé par la donnée des $n + 1$ scalaires $\lambda_j = \lambda_j(x)$, $1 \leq j \leq n + 1$, définis comme solution du système linéaire

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \lambda_j = x_i, & 1 \leq i \leq n \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Ces scalaires $\lambda_j(x)$ sont appelés les coordonnées barycentriques du point x par rapport aux $n + 1$ points a_j , $1 \leq j \leq n + 1$. D'après (7), chacune de ces fonctions coordonnées barycentriques est une fonction affine de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) a_j \quad (8)$$

Coordonnées barycentriques

Le n -simplexe K de sommets a_j , $1 \leq j \leq n+1$, est caractérisé par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1, 1 \leq j \leq n+1\} \quad (9)$$

Pour tout entier $k \geq 0$, on désigne par $\mathbb{P}_k^{(n)}$ l'espace des (fonctions) polynômes de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad p(x) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_n \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad (10)$$

où les α_{i_1, \dots, i_n} sont des scalaires réels.

L'espace des polynômes à n variables homogènes de degré k est de dimension $\binom{n+k-1}{k}$, nombre de combinaisons avec répétitions de longueur k formées à partir des éléments d'un ensemble de cardinal n . Par conséquent, la dimension de l'espace $\mathbb{P}_k^{(n)}$ est

$$\dim(\mathbb{P}_k^{(n)}) = \sum_{l=0}^k \binom{n+l-1}{l} = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} \quad (11)$$

Espace de polynômes d'interpolation

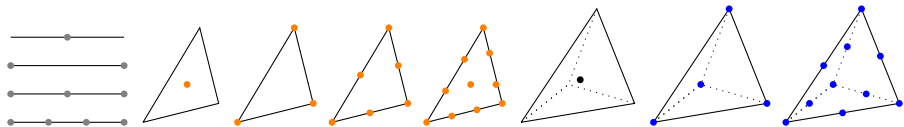
- $\mathbb{P}_k^{(1)} = \text{vect}\{1, x, x^2, \dots, x^k\}$, $\dim \mathbb{P}_k^{(1)} = k + 1$.
 - $\mathbb{P}_k^{(2)} = \text{vect}\{x^i y^j; 0 \leq i + j \leq k\}$, $\dim \mathbb{P}_k^{(2)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
 - $\mathbb{P}_k^{(3)} = \text{vect}\{x^i y^j x^k; 0 \leq i + j + k \leq k\}$, $\dim \mathbb{P}_k^{(2)} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$.
-
- $\mathbb{Q}_k^{(1)} = \mathbb{P}_k^{(1)}$.
 - $\mathbb{Q}_k^{(2)} = \text{vect}\{x^i y^j; 0 \leq i, j \leq k\}$, $\dim \mathbb{Q}_k^{(2)} = (k + 1)^2$.
 - $\mathbb{Q}_k^{(3)} = \text{vect}\{x^i y^j x^k; 0 \leq i, j, k \leq k\}$, $\dim \mathbb{Q}_k^{(2)} = (k + 1)^3$.

Treillis principal d'ordre k

On définit enfin, pour tout entier k le treillis d'ordre k du n -simplexe K comme étant l'ensemble de points de \mathbb{R}^n défini par

$$\Sigma_k^{(n)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}, 1 \leq j \leq n+1 \right\} \quad (12)$$

$$\Sigma_0^{(n)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \lambda_j(x) = \frac{1}{n+1}, 1 \leq j \leq n+1 \right\} \quad (13)$$

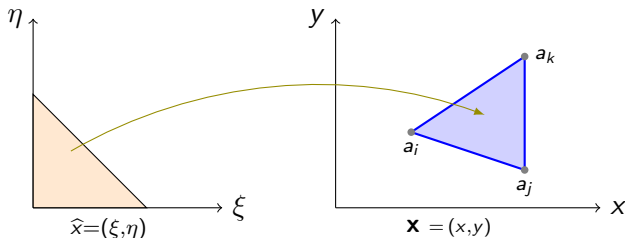


En tenant compte de $\lambda_{n+1} = 1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j$, on vérifie que le cardinal de l'ensemble $\Sigma_k^{(n)}$ est le nombre de combinaisons avec répétitions de longueur k formées à partir des éléments de $\{0, \dots, n\}$ d'où

$$\text{card}(\Sigma_k^{(n)}) = \binom{(n+1) + k - 1}{k} = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} \quad (14)$$

Élément fini n -simplexe

- Pour tout entier $k \geq 0$, l'ensemble Σ_k , est P_k -unisolvant.
- Pour tout n -simplexe K de \mathbb{R}^n et pour tout entier $k \geq 0$, l'élément fini (K, P_k, Σ_k) , où Σ_k est le treillis principal d'ordre k de K , est appelé n -simplexe de type (k) .
- Pour tout entier $k \geq 0$, deux éléments finis n -simplexes de type (k) sont affine-équivalents.



Il suffira donc d'étudier les propriétés d'un n -simplexe de type (k) particulier $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ appelé n -simplexe de référence.

Élément fini n -simplexe de référence

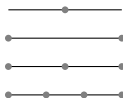
On choisit pour \hat{K} le n -simplexe unité de sommets $\hat{a}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\hat{a}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... $\hat{a}_n = (0, \dots, 0, 1)$, $\hat{a}_{n+1} = (0, 0, \dots, 0)$. Dans ce cas, les coordonnées barycentriques sont

$$\hat{\lambda}_i(\hat{x}) = \hat{x}_i, \quad 1 \leq i \leq n; \quad \hat{\lambda}_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i, \quad (15)$$

Considérons un peu plus en détail les éléments finis (K, P, Σ) n -simplexes de type (k) les plus couramment utilisés en pratique.

❶ Lorsque $n = 1$, K est le segment d'extrémités a_1, a_2 . On pose

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2), & \text{milieu du segment} \\ a_{112} &= \frac{1}{3}(2a_1 + a_2), & \text{au tiers du segment} \\ a_{122} &= \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2), & \text{au deux-tiers du segment} \end{aligned}$$



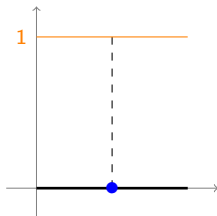
$$n = 1$$

- $k = 0$, le segment de type (0) correspond à

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_0^{(1)} = \mathbb{R}, \quad \Sigma = \Sigma_0^{(1)} = a_0$$

La fonction de base est la fonction constante définie par

$$\forall x \in K, \quad p_0(x) = 1$$



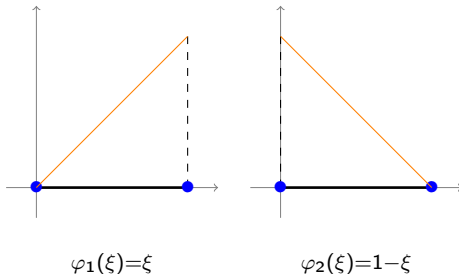
$$p_1(\xi) = 1$$

- $k = 1$ le segment de type (1) est obtenu pour

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1^{(1)}, \quad \Sigma = \Sigma_1^{(1)} = \{a_1 = 1, a_2 = 0\}$$

Les fonctions de base sont les fonctions coordonnées barycentriques par rapport à (a_1, a_2) , i.e.

$$\varphi_1 = \lambda_1 = \xi, \quad \varphi_2 = \lambda_2 = 1 - \xi$$



$$n = 1$$

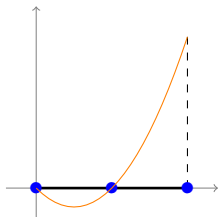
- Pour $k = 2$, le segment de type (2) correspond à

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_2, \quad \Sigma = \Sigma_2 = \{a_1, a_{12}, a_2\}$$

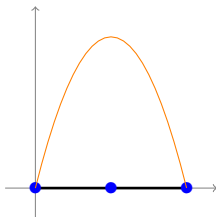
Les fonctions de base sont les fonctions

$$\varphi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad i = 1, 2$$

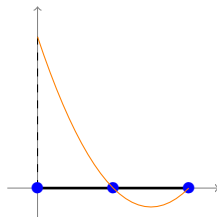
$$\varphi_{12} = 4\lambda_1\lambda_2$$



$$\varphi_1 = \xi(2\xi - 1)$$



$$\varphi_{12} = 4\xi(1-\xi)$$



$$\varphi_2 = (1-\xi)(1-2\xi)$$

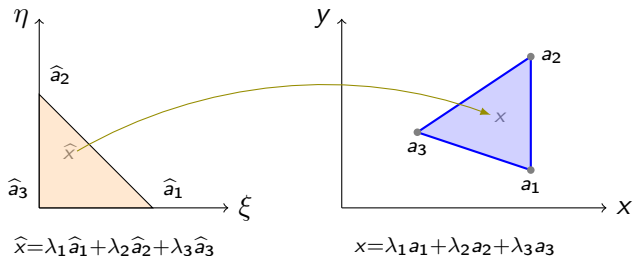
Éléments finis triangles ($n = 2$)

- Lorsque $n = 2$, K est le triangle de sommets a_1 , a_2 et a_3 . On pose

$$a_0 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \quad \text{centre de gravité de } K$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j), \quad \text{milieu du côté } [a_i, a_j]$$

$$a_{ijj} = \frac{1}{3}(2a_i + a_j), \quad a_{ijj} \text{ et } a_{jji} \text{ aux tiers et deux-tiers du côté } [a_i a_j].$$



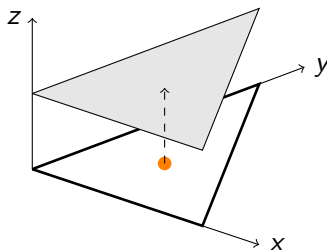
Éléments finis triangles de type (0)

- Pour $k = 0$, le triangle de type (0) correspond à

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_0^{(2)} = \mathbb{R}, \quad \Sigma = \Sigma_0^{(2)} = \{a_0\}$$

La fonction de base est la fonction constante définie par

$$\forall x \in K, \quad \varphi_0(x) = 1$$



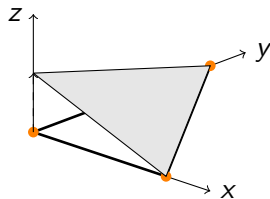
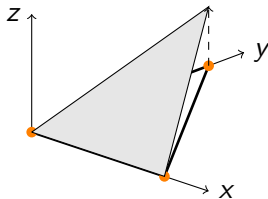
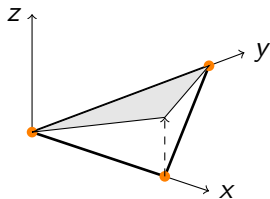
Éléments finis triangles de type (1)

- Pour $k = 1$, le triangle de type (1) est obtenu pour

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1^{(2)} = \{ax + by + c; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}, \quad \Sigma = \Sigma_1^{(2)} = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 3}$$

Les fonctions de base sont les fonctions coordonnées barycentriques par rapport à (a_1, a_2, a_3) , i.e.

$$\varphi_i = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$



Éléments finis triangles de type (2)

- Pour $k = 2$, le triangle de type (2) correspond à

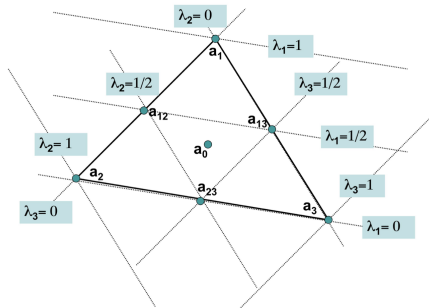
$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_2^2, \quad \Sigma = \Sigma_2^2 = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_{23}, a_{13}, a_{12}\}$$

Les fonctions de base sont les fonctions

$$\varphi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

et

$$\varphi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j, \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$



Éléments finis triangles de type (2)

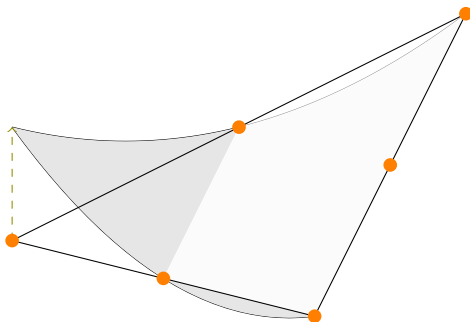
- Pour $k = 2$, le triangle de type (2) correspond à

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_2^2, \quad \Sigma = \Sigma_2^2 = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_{23}, a_{13}, a_{12}\}$$

Les fonctions de base sont les fonctions

$$\varphi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

$$\varphi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j, \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$



Éléments finis triangles de type (3)

- Pour $k = 3$, le triangle de type (3) est obtenu pour

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_3^2, \quad \Sigma = \Sigma_3^2 = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_{112}, a_{113}, a_{221}, a_{223}, a_{331}, a_{332}\} \cup \{a_0\}$$

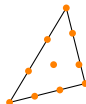
Les fonctions de base sont les fonctions

$$\varphi_i = \frac{1}{2} \lambda_i (3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

$$\varphi_{ij} = \frac{9}{4} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1) \quad 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$$

et

$$\varphi_0 = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$



Éléments finis tétraèdre ($n = 3$)

- K est le tétraèdre de sommets a_1, a_2, a_3 et a_4 . On pose

$$a_0 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j), \quad 1 \leq i < j \leq 3$$

- Pour $k = 0$, le tétraèdre de type (0) correspond à

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_0^3, \quad \Sigma = \Sigma_0^3 = \{a_0\}$$

- Pour $k = 1$, le tétraèdre de type (1) est obtenu pour

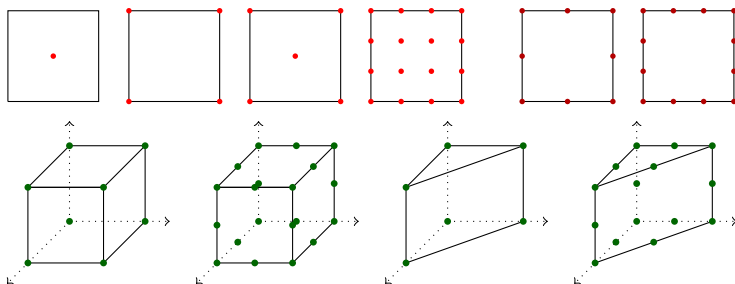
$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1^3, \quad \Sigma = \Sigma_1^3 = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 4}$$

- Pour $k = 2$, le tétraèdre de type (2) est obtenu pour

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_2, \quad \Sigma = \Sigma_2 = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 4} \cup \{a_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 4}$$

Les expressions des fonctions de base relatives à ces exemples de tétraèdre de type (k) sont formellement identiques à celles donnant les fonctions de base de triangle de type (k) .

Éléments finis parallélotopes



L'enveloppe convexe K de 2^n points a_j , est un n -parallélotope si et seulement si il existe une application affine inversible F telle que

$$a_j = F(\hat{a}_j), \quad 1 \leq j \leq 2^n, \quad (16)$$

où les points \hat{a}_j , $1 \leq j \leq 2^n$, sont les sommets de \hat{K} , hypercube unité $[0, 1]^n$ de \mathbb{R}^n ;

- pour $n = 2$, K est un parallélogramme.
- pour $n = 3$, K est un parallélépipède.

Éléments finis parallélotopes

Pour tout entier on désigne par \mathbb{Q}_k l'espace des (fonctions) polynômes de degré inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable : une fonction p de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} appartient donc à \mathbb{Q}_k si et seulement si il existe des scalaires réels α_{i_1, \dots, i_n} tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad p(x) = \sum_{0 \leq i_1 \leq k, \dots, 0 \leq i_n \leq k} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (17)$$

On remarque que

$$\dim(\mathbb{Q}_k) = (k+1)^n$$

On prend alors pour domaine \hat{K} l'hypercube unité $[0, 1]^n$ de \mathbb{R}^n et on définit pour tout entier $k \geq 1$ l'ensemble de points de \hat{K}

$$\hat{\Xi}_k^{(n)} = \left\{ \hat{x} = (\hat{x}_i)_{1 \leq i \leq n}; \hat{x}_i \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}, 1 \leq i \leq n \right\} \quad (18)$$

Éléments finis parallélotopes

Pour $k = 0$, on posera

$$\hat{\Xi}_0^{(n)} = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right) \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (19)$$

On a ainsi pour tout entier $k \geq 1$

$$\text{card}(\hat{\Xi}_k) = (k+1)^n$$

- Théorème : Pour tout entier $k \geq 0$, l'ensemble $\hat{\Xi}_k$ est \mathbb{Q}_k -unisolvant.
- Définition : On appelle n -hypercube unité de type (k) , l'élément fini $(K, \mathbb{Q}_k, \hat{\Xi}_k)$. On appelle n -parallélotope de type (k) tout élément fini (K, P, Σ) affine-équivalent au n -hypercube unité de type (k) .
- le n -hypercube unité de type (k) est un carré unité de type (k) lorsque $n = 2$,
- et cube unité de type (k) lorsque $n = 3$

Éléments finis parallélotopes

Dire que (K, P, Σ) est un n -parallélotope de type (k) signifie donc qu'il existe une application affine inversible F de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n telle que

$$K = F(\hat{K}), \quad \mathbb{P} = \{p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; p \circ F \in \mathbb{Q}_k\}, \quad \Sigma = F(\hat{\Xi}_k). \quad (20)$$

Supposons $n = 2$ pour simplifier un peu l'exposé :

- ① K est un parallélogramme de \mathbb{R}^n ;
- ② pour $k = 0$, Σ est le centre du parallélogramme K ; pour $k = 1$, Σ est l'ensemble des sommets ; pour $k = 2$, Σ est l'ensemble constitué des sommets de K , des milieux des côtés de K et du centre de K , etc.
- ③ l'espace \mathbb{P} est un espace de polynômes tel que

$$\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{P}_{2k}$$

cet espace \mathbb{P} ne coïncide avec l'espace \mathbb{Q}_k que dans le cas particulier où K est un rectangle de côtés parallèles aux axes.

Éléments finis parallélotopes

Dans le cas $n = 2$; \hat{K} est le carré unité de \mathbb{R}^2 . Nous noterons (\hat{x}_1, \hat{x}_2) les coordonnées cartésiennes du point courant \hat{x} de \hat{K} , de sommets

$$\hat{a}_1 = (0, 0), \quad \hat{a}_2 = (1, 0), \quad \hat{a}_3 = (1, 1), \quad \hat{a}_4 = (0, 1) \quad (21)$$

Il sera commode de poser

$$\hat{x}_3 = 1 - \hat{x}_1, \quad \hat{x}_4 = 1 - \hat{x}_2 \quad (22)$$

et d'associer à tout entier i l'entier \bar{i} congru à i modulo 4 et compris entre 1 et 4. En particulier, un sommet \hat{a}_i , $1 \leq i \leq 4$, est alors défini par les relations

$$\hat{x}_{\bar{i}} = \hat{x}_{\overline{i+1}} = 0$$

Explicitons les fonctions de base de l'élément fini $(\hat{K}, \hat{\mathbb{P}}, \hat{\Sigma})$ carré unité de type (k) , pour les premières valeurs de k .

- Pour $k = 0$, le carré unité de type (0) est obtenu pour

$$\hat{\mathbb{P}} = \mathbb{Q}_0, = P_0, \quad \hat{\Sigma} = \hat{\Xi}_0 = \{\hat{a}_0\}$$

où \hat{a}_0 est le centre du carré, $\hat{a}_0 = \frac{1}{4}(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4)$. La fonction de base $\hat{\varphi}_0$, est la fonction constante égale à 1.

Le carré de type (1) ou (2)

- Pour $k = 1$, le carré de type (1) correspond à

$$\hat{\mathbb{P}} = \mathbb{Q}_1, \quad \hat{\Sigma} = \hat{\Xi}_1^{(2)} = \{\hat{a}_i\}_{1 \leq i \leq 4}$$

Les fonctions de base s'écrivent

$$\hat{\varphi}_i(\hat{x}) = \hat{x}_{i+2} \hat{x}_{i+3}, \quad 1 \leq i \leq 4$$

- Pour $k = 2$, le carré de type (2) est obtenu pour

$$\hat{\mathbb{P}} = \mathbb{Q}_2, = P_0, \quad \hat{\Sigma} = \hat{\Xi}_2^{(2)} = \{\hat{a}_i\}_{1 \leq i \leq 9}$$

où les points \hat{a}_i , $5 \leq i \leq 8$, sont les milieux des côtés $[\hat{a}_i \hat{a}_{i+1}]$ et le point \hat{a}_9 est le centre du carré. Les fonctions de base sont

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) &= \hat{x}_{i+2}(2\hat{x}_{i+2} - 1)\hat{x}_{i+3}(2\hat{x}_{i+3} - 1), \quad 1 \leq i \leq 4, \\ \hat{\varphi}_i(\hat{x}) &= -4\hat{x}_{i+2}(\hat{x}_{i+2} - 1)\hat{x}_{i+3}(2\hat{x}_{i+3} - 1), \quad 5 \leq i \leq 8, \\ \hat{\varphi}_9(\hat{x}) &= 16\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3\hat{x}_4. \end{aligned} \tag{23}$$

Éléments finis parallélotopes

A partir des deux derniers exemples de carré unité, on peut construire des éléments fini qui seront de mise en œuvre informatique plus simple sans que cela nuise à la précision. l'élément fini $(\hat{K}, \hat{\mathbb{P}}, \hat{\Sigma})$ obtenu vérifiera

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Xi}_2 \cap \partial \hat{K} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_2 \subset \hat{\mathbb{P}} \subset \hat{\mathbb{Q}}_2$$

On pose

$$\begin{cases} \hat{\Sigma} = \hat{\Xi}_2^* = \{\hat{a}_i\}_{1 \leq i \leq 8} \\ \hat{\mathbb{P}} = \hat{\mathbb{Q}}_2^* = \{q(x) + \alpha_1 x_1^2 x_2 + \alpha_2 x_1 x_2^2, \quad q \in \mathbb{P}_2, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2\} \end{cases} \quad (24)$$

On remarque que l'espace $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^* \oplus \text{vect}\{x_1^2 x_2^2\}$

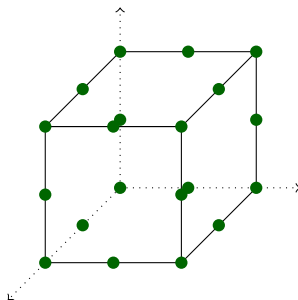
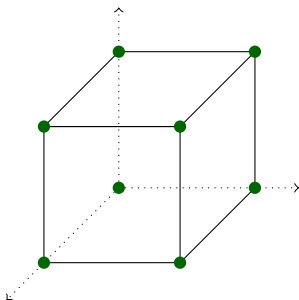
- L'ensemble $\hat{\Xi}_2^*$ est \mathbb{Q}_2^* -unisolvant.
- on vérifie que les fonctions

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) &= \hat{x}_{i+2} \hat{x}_{i+3} (2\hat{x}_{i+2} + 2\hat{x}_{i+3} - 3), \quad 1 \leq i \leq 4, \\ \hat{\varphi}_i(\hat{x}) &= -4\hat{x}_{i+2} (\hat{x}_{i+2} - 1) \hat{x}_{i+3}, \quad 5 \leq i \leq 8. \end{aligned} \quad (25)$$

sont les fonctions de base de $(\hat{K}, \mathbb{Q}_2^*, \hat{\Sigma}^*)$.

Éléments finis parallélotopes

En dimension $n = 3$, on vous laisse le soin de décrire en détail l'élément fini $(\hat{K}, \hat{\mathbb{P}}, \hat{\Sigma})$ cube unité de type (k) , pour les valeurs $k = 0, 1, 2$. Par exemple, pour $k = 1$, l'ensemble $\hat{\Sigma}$ est constitué par les 8 sommets du cube. Pour $k = 2$, on préfère utiliser le cube unité de type $(2)^*$ où l'ensemble Σ est constitué par les 8 sommets du cube et les milieux des 12 arêtes de ce cube.



Éléments finis d'Hermite

φ_i des éléments finis de Lagrange est construite pour être continue d'un élément à l'autre, mais pas sa dérivée...

Un élément fini d'Hermite est un triplet (K, Σ, P) tel que :

- K est un élément géométrique de \mathbb{R}^n , compact, connexe, et d'intérieur non vide ;
- $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ un ensemble de N formes linéaires sur l'espace des fonctions définies sur K , ou sur un sous-espace plus régulier contenant P ;
- P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur K , et tel que Σ soit P -unisolvant.

Opérateur de P –interpolation

- Un opérateur de P –interpolation sur Σ est un opérateur Π qui à toute fonction v définie sur K associe la fonction Πv de P définie par :

$$\Pi v = \sum_{i=1}^N \sigma_i(v) \varphi_i$$

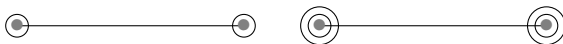
- Πv est l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les points de Σ .

-

$$\sigma_j(\varphi_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N$$

- Suivant les éléments utilisés, ces fonctions de base pourront être de classe C^1 ou même plus, et il en sera donc de même pour la solution approchée u_h .

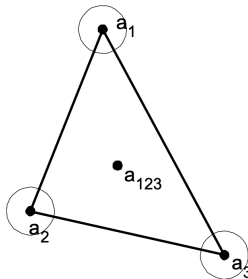
Éléments unidimensionnels



Élément	cubique	quintique
K	segment $[a ; b]$	segment $[a ; b]$
Σ	$\{p(a), p'(a), p(b), p'(b)\}$	$\{p(a), p'(a), p''(a), p(b), p'(b), p''(b)\}$
P	P_3	P_3
Régularité	C^1 et H^2	C^2 et H^3

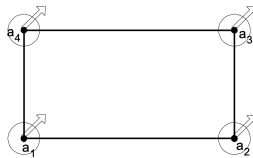
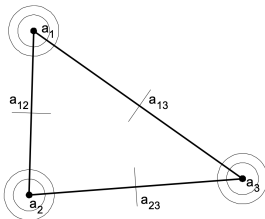
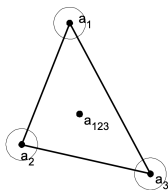
Élément	
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), i = 1, 2, 3\} \cup \{p(a_0)\}$
P	P_3
Régularité	C^0 , mais pas C^1

Élément triangle



Élément	
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\left\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), i = 1, 2, 3\right\} \cup \{p(a_0)\}$
P	P_3
Régularité	C^0 , mais pas C^1

Éléments bidimensionnels



Élément	
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, 2, 3 \right\} \cup \left\{ \frac{\partial p}{\partial n}(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3 \right\}$
P	P_5
Régularité	C^1

Élément	Q_3
K	rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes
Σ	$\left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, \dots, 4 \right\}$
P	P_3
Régularité	C^1

Les fonctions de base

- $\Phi_i(x)$ les fonctions de base associées aux valeurs nodales de la fonction v_i .
- $\Psi_i(x)$ les fonctions de base associées aux valeurs nodales de la dérivée $(\frac{dv}{dx})_i$,

$$\Pi v(x) = \sum_{i=1}^n v_i \Phi_i(x) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{dv}{dx}\right)_i \Psi_i(x)$$

Sur un élément $[x_1, x_2]$, cette approximation s'écrit :

$$v^h(x) = v_1 \Phi_1(x) + \left(\frac{dv}{dx}\right)_1 \Psi_1(x) + v_2 \Phi_2(x) + \left(\frac{dv}{dx}\right)_2 \Psi_2(x)$$

Φ_i et Ψ_i vérifient les conditions :

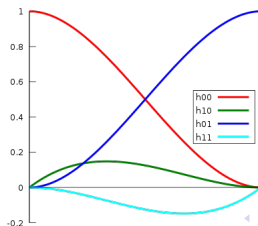
$$\begin{cases} \Phi_i(x_j) = \delta_{ij} & \Phi'_i(x_j) = 0 \\ \Psi_i(x_j) = 0 & \Psi'_i(x_j) = \delta_{ij} \end{cases}$$

Les fonctions de base

$$\begin{cases} \Phi_i(x) = [1 - 2(x - x_i)\lambda'_i(x_i)] \lambda_i^2(x) \\ \Psi_i(x) = (x - x_i)\lambda_i^2(x) \end{cases}$$

- élément de référence de longueur h : $x_1 = 0$ et $x_2 = h$,
- $\lambda_1(x) = 1 - \frac{x}{h}$ et $\lambda_2(x) = \frac{x}{h}$. On pose $\xi = \frac{x}{h}$:

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = (1 + 2\xi)(1 - \xi)^2 \\ \Phi_2(x) = (3 - 2\xi)\xi^2 \\ \Psi_1(x) = h\xi(1 - \xi)^2 \\ \Psi_2(x) = h(\xi - 1)\xi^2 \end{cases}$$



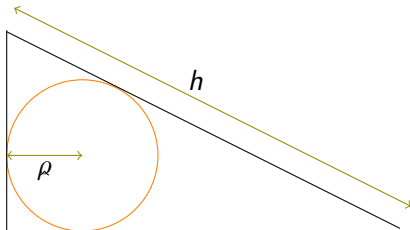
Erreur d'interpolation

Soit (K, \mathbb{P}, Σ) un élément fini n -simplexe ou n -palallélotope de type (k) .
On suppose

$$n \leq 3 \quad \text{et} \quad k \geq 1$$

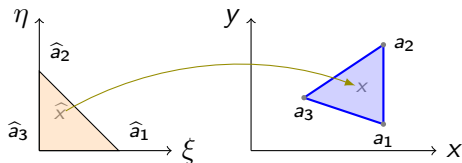
Alors il existe une constante C qui ne dépend que de n et de k telle que pour tout entier m , $0 \leq m \leq k$, on a

$$\forall v \in H^{k+1}(K), \quad |v - \Pi v|_{m,k} \leq \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K}$$



$$a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{l,m}^2 \left(a_{lm} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} dx \right)$$

- Les fonctions de base appartiennent à \mathbb{P}_k donc le produit $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l}$ coïncide avec un polynôme de \mathbb{P}_{2k-2} .
- Soit $F_K : \hat{x} \mapsto F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b$ une bijection affine du triangle unité \hat{K} sur le triangle K ; $\det(B_K) > 0$.



Alors on a pour toute fonction $\varphi = \hat{\varphi} \circ F_K$ continue sur K :

$$\int_K \psi(x) dx = \det(B_K) \int_{\hat{K}} \hat{\psi}(\hat{x}) d\hat{x}$$

Intégration de $a(\varphi_j, \varphi_i)$

On a

$$\det(B_K) = \frac{\text{mes}(K)}{\text{mes}(\widehat{K})} = 2\text{mes}(K)$$

On prend $\psi = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} \in \mathbb{P}_{2k-2}$. On se ramène à $\widehat{\psi} \in \mathbb{P}_{2k-2}$ sur le triangle unité. Or pour tout monôme $\widehat{x}_1^{k_1} \widehat{x}_2^{k_2}$:

$$\int_{\widehat{K}} \widehat{x}_1^{k_1} \widehat{x}_2^{k_2} d\widehat{x} = \frac{k_1! k_2!}{(k_1 + k_2 + 2)!}$$

plus généralement

$$\int_{\widehat{K}} \widehat{x}_1^{k_1} \widehat{x}_2^{k_2} (1 - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2)^{k_3} d\widehat{x} = \frac{k_1! k_2! k_3!}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!}$$

En coordonnées barycentriques

$$\int_{\widehat{K}} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} d\widehat{x} = 2\text{mes}(K) \frac{k_1! k_2! k_3!}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!}$$

Intégration de $\ell(\varphi_i)$

$$\ell(\varphi_i) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f \varphi_i \, dx$$

Formule de quadrature : $\int_K f \psi(x) \, dx \simeq \sum_{i=1}^N \omega_{i,K} \psi(b_{i,K})$

- $k = 0$:

$$\int_K \psi(x) \, dx \simeq \text{mes}(K) \psi(a_{0,K})$$

- $k = 1$:

$$\int_K \psi(x) \, dx \simeq \frac{1}{3} \text{mes}(K) \sum_{i=1}^3 \psi(a_{i,K})$$

- $k = 2$:

$$\int_K \psi(x) \, dx \simeq \frac{1}{3} \text{mes}(K) \sum_{i=4}^6 \psi(a_{i,K})$$

Intégration de $\ell(\varphi_i)$

$$\ell(\varphi_i) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f \varphi_i \, dx$$

Formule de quadrature : $\int_K f \psi(x) \, dx \simeq \sum_{i=1}^N \omega_{i,K} \psi(b_{i,K})$

- $k = 0$:

$$\int_K \psi(x) \, dx \simeq \text{mes}(K) \psi(a_{0,K})$$

- $k = 1$:

$$\int_K \psi(x) \, dx \simeq \frac{1}{3} \text{mes}(K) \sum_{i=1}^3 \psi(a_{i,K})$$

- $k = 2$:

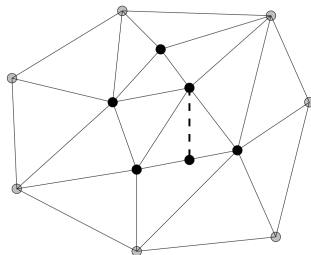
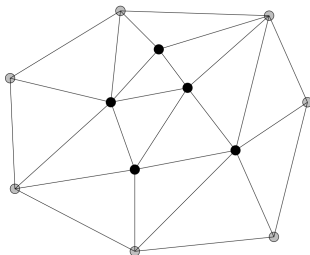
$$\int_K \psi(x) \, dx \simeq \frac{1}{3} \text{mes}(K) \sum_{i=4}^6 \psi(a_{i,K})$$

Maillage

- Un maillage (ou triangulation) de Ω est la donnée de N_{el} triangles $\{K_1, \dots, K_{N_{el}}\}$ (fermés par convention) formant une partition de Ω .

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i, \quad \overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

- Le maillage est admissible si pour tout $K_i \neq K_j$, l'ensemble $K_i \cap K_j$ est
 - 1 soit vide
 - 2 soit un sommet commun K_i et K_j
 - 3 soit une arête commune K_i et K_j



Relations d'Euler

- On note
 - N_{el} le nombre d'éléments
 - N_{ar} le nombre d'arêtes
 - N_{so}^{int} le nombre de sommets intérieurs
 - N_{so}^{ext} le nombre de sommets extérieurs
 - $N_{so} = N_{so}^{int} + N_{so}^{ext}$ le nombre total de sommets
- Pour tout maillage admissible, on a (relations d'Euler)

$$N_{el} = N_{so} + N_{so}^{int} - 2(1 - J) \quad N_{ar} = 2N_{so} + N_{so}^{int} - 3$$

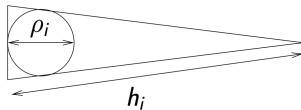
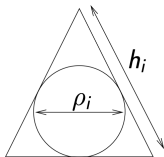
(J : nombre de trous dans Ω)

- Dans la limite pratique $N_{so}^{ext} \ll N_{so}$ et $N_{so}^{int} \sim N_{so}$, il vient

$$N_{el} \sim 2N_{so}^{int} \quad N_{ar} \sim 3N_{so}^{int}$$

Échelles de longueur (1)

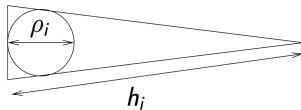
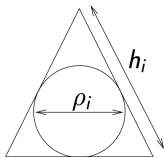
- On introduit pour chaque maille K_i deux échelles de longueur
 - son diamètre h_i
 - le diamètre de son cercle inscrit ρ_i
- On a $h_i/\rho_i \geq 1$ et $h_i/\rho_i \gg 1$ lorsque le triangle K_i est très aplati



- On a $h_i/\rho_i \leq \frac{2}{\sin \theta_i}$ θ_i est le plus petit angle du triangle K_i

Échelles de longueur (2)

- On introduit pour chaque maille K_i deux échelles de longueur
 - son diamètre h_i
 - le diamètre de son cercle inscrit ρ_i
- On a $h_i/\rho_i \geq 1$ et $h_i/\rho_i \gg 1$ lorsque le triangle K_i est très aplati



- On a $h_i/\rho_i \leq \frac{2}{\sin \theta_i}$ θ_i est le plus petit angle du triangle K_i

Échelles de longueur (2)

- Pour un maillage $\{K_1, \dots, K_{N_{el}}\}$, on introduit les paramètres globaux

$$h = \max_{1 \leq i \leq N_{el}} h_i \quad \sigma = \max_{1 \leq i \leq N_{el}} \frac{h_i}{\rho_i}$$

- Pour un maillage quasi-uniforme, $\sigma \gtrsim 1$ et $h_i \sim h$
- Pour un maillage quasi-uniforme, on a $h \sim (N_{el})^{-1/2}$
 - 1 en 1D, $h \sim (N_{el})^{-1}$
 - 2 en dimension d , $h \sim (N_{el})^{-1/d}$
 - 3 à h fixé, plus d est grand, plus il faut de mailles !
- Exemple de maillage avec raffinement local

