

TECE Projet 5: Calcul matriciel

IBRAHIM ALAME

09/11/2023

1. Soit \mathcal{N} l'algèbre des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$N \in \mathcal{N} \iff N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On associe à \mathcal{N} l'ensemble \mathcal{U} des matrices $U = I + N$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que le produit de trois matrices quelconques de \mathcal{N} est nul. En particulier $N^3 = 0$ si $N \in \mathcal{N}$.
- (b) Montrer que \mathcal{U} est un sous groupe non commutatif du groupe linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (c) Pour tout réel α , on définit la matrice U^α par

$$U^\alpha = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$

Il sera commode de poser $N_\alpha = \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$. Vérifier que pour α et β réels arbitraires, on a

$$U^\alpha U^\beta = U^{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad (U^\alpha)^\beta = U^{\alpha\beta}$$

- (d) Que peut-on dire de U^α pour $\alpha \in \mathbb{Z}$?
- (e) On définit une application dite exponentielle, noté \exp , de \mathcal{N} dans \mathcal{U} :

$$\forall N \in \mathcal{N}, \quad \exp(N) = I + N + \frac{N^2}{2}$$

Montrer que l'application \exp est une bijection de \mathcal{N} dans \mathcal{U} .

- (f) On définit également l'application dite logarithme notée \ln de \mathcal{U} dans \mathcal{N} par :

$$\text{Si } U = I + N, \quad \ln(U) = N - \frac{N^2}{2}$$

Prouver que l'application \ln est la bijection réciproque de \exp .

- (g) Établir les formules

$$\exp(\alpha N) = (\exp(N))^\alpha, \quad \ln(U^\alpha) = \alpha \ln U, \quad U^\alpha = \exp(\alpha \ln U)$$

(h) Application numérique : Soit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp(U - I)$, $\ln U$, U^{-1} et U^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} A^{2k} = (-1)^k I \\ A^{2k+1} = (-1)^k A \end{cases}$$

(b) On définit l'exponentielle matricielle par la somme de la série $e^M = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{M^p}{p!}$. Montrer que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

3. Montrer que la matrice suivante est diagonalisable : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ ($a \neq 0$) En

déduire A^{-1} et A^n où $n \in \mathbb{Z}$

4. Soit la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que A est diagonalisable.

(b) Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $0 \leq \lambda \leq 2$. On pourra utiliser le théorème d'Hadamard :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \implies \lambda \in \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

(c) On pose $\lambda = 2 \cos \theta$ où $\theta \in [0, \pi]$. Soit le déterminant $D_n = \det(\lambda I_n - A)$. Montrer que

$$\begin{cases} D_n = 2 \cos \theta D_{n-1} - D_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ D_0 = 1, & D_1 = 2 \cos \theta \end{cases}$$

(d) Calculer D_n en fonction de n . En déduire les valeurs propres de A .