TD3 d'Analyse Numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

27/02/2024

1 Factorisation

1. Algorithme de factorisation LU :
   — Étape 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -7 \\ 4 & 7 & 10 & -3 \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

   — Étape 2

$$\begin{matrix} L_2 \to L2 - 2L_1 \\ L_3 \to L3 - 3L_1 \\ L_4 \to L4 - 4L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 10 & -4 & 5 \\ 0 & 15 & -2 & 13 \end{pmatrix} = A^{(2)}$$

matriciellement $E_1A^{(1)} = A^{(2)}$ avec $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   — Étape 3

$$\begin{matrix} L_3 \to L3 - 2L_2 \\ L_4 \to L4 - 3L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 16 & -8 \end{pmatrix} = A^{(3)}$$

matriciellement $E_2A^{(2)} = A^{(3)}$ avec $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   — Étape 4

$$L_4 \to L4 - 2L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = A^{(4)}$$

matriciellement $E_3A^{(3)} = A^{(4)}$ avec $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $U = A^{(4)} = E_3E_2E_1A$ donc $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U$ d'où $L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -7 \\ 4 & 7 & 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Algorithme de Choleski :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 30 \end{pmatrix}$$

Algorithme :

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour} \quad j = 1, \cdots, n \\ \qquad \ell_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2} \\ \qquad \text{pour} \quad i = j+1, \cdots, n \\ \qquad\qquad \ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\ell_{jk}}{\ell_{jj}} \end{array} \right.$$

$j = 1$

$$\begin{aligned} \ell_{11} &= \sqrt{a_{11} - 0} = \sqrt{1} = 1 \\ \ell_{21} &= \frac{a_{21} - 0}{\ell_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \\ \ell_{31} &= \frac{a_{31} - 0}{\ell_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \\ \ell_{41} &= \frac{a_{41} - 0}{\ell_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$j = 2$

$$\begin{aligned} \ell_{22} &= \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = \sqrt{5 - 1} = 2 \\ \ell_{32} &= \frac{a_{32} - \ell_{31} \times \ell_{21}}{\ell_{22}} = \frac{5 - 1 \times 1}{2} = 2 \\ \ell_{42} &= \frac{a_{42} - \ell_{41} \times \ell_{21}}{\ell_{22}} = \frac{5 - 1 \times 1}{2} = 2 \end{aligned}$$

$j = 3$

$$\begin{aligned} \ell_{33} &= \sqrt{a_{33} - (\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2)} = \sqrt{14 - (1^2 + 2^2)} = \sqrt{9} = 3 \\ \ell_{43} &= \frac{a_{43} - (\ell_{41} \times \ell_{31} + \ell_{42} \times \ell_{32})}{\ell_{33}} = \frac{14 - (1 \times 1 + 2 \times 2)}{3} = 3 \end{aligned}$$

$j = 4$

$$\ell_{44} = \sqrt{a_{44} - (\ell_{41}^2 + \ell_{42}^2 + \ell_{43}^2)} = \sqrt{30 - (1^2 + 2^2 + 3^2)} = \sqrt{16} = 4$$

3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) On pose $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. On a $LDL^t = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\ell \\ \ell\alpha & \ell^2\alpha + \beta \end{pmatrix}$. Donc $\alpha = 2$, $\beta = -\frac{1}{2}$ et $\ell = \frac{1}{2}$. D'où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Il n'existe pas une matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = LL^t$ car

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ \ell & \ell^2 + 1 \end{pmatrix} \quad \text{absurde}$$

(c) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas une décomposition LDL^t car

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\ell \\ \ell\alpha & \ell^2\alpha + \beta \end{pmatrix} \quad \text{absurde}$$

4. (a) A symétrique définie positive donc admet une décomposition de Choleski LL^t. Nous allons démontrer par récurrence sur j (indice de colonne) la propriété suivante :

$$\forall k \leq j \quad \forall i > k+1 \quad L_{ik} = 0$$

c'est-à-dire que L est de la forme

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & \cdots & & & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & & & 0 \\ 0 & \ell_{32} & \ell_{33} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \ell_{n\,n-1} & \ell_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour $j = 1$

$$\forall i \geq 3 \quad \ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{\ell_{11}} = \frac{0}{\ell_{11}} = 0$$

Supposons que $\forall k \leq j-1 \quad \forall i > k+1 \quad \ell_{ik} = 0$ on a alors

$$\ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\ell_{jk}}{\ell_{jj}} = \frac{0 - \sum_{k=1}^{j-1} 0 \times \ell_{jk}}{\ell_{jj}} = 0$$

(b) Compte tenu du resultat précédant $\ell_{ij} = 0 pour i > j+1$ l'algorithme :

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour} \quad j = 1, \cdots, n \\ \qquad \ell_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2} \\ \qquad \text{pour} \quad i = j+1, \cdots, n \\ \qquad\qquad \ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\ell_{jk}}{\ell_{jj}} \end{array} \right.$$

se réduit à

$$\left|\begin{array}{ll} j=1 & \\ & \alpha_1 = \sqrt{a_{11}} \\ & \beta_1 = \frac{a_{2\,1}}{\alpha_1} \\ \text{pour} & j=2,\cdots,n-1 \\ & \alpha_j = \sqrt{a_{jj} - \beta_{j-1}^2} \\ & \beta_j = \frac{a_{j+1\,j}}{\alpha_j} \\ j=n & \\ & \alpha_n = \sqrt{a_{nn} - \beta_{n-1}^2} \end{array}\right.$$

(c) On a

$$\left|\begin{array}{ll} j=1 & \\ & \alpha_1 = \sqrt{2} \\ & \beta_1 = -\frac{1}{\alpha_1} \\ \text{pour} & j=2,\cdots,n-1 \\ & \alpha_j = \sqrt{2 - \beta_{j-1}^2} \\ & \beta_j = -\frac{1}{\alpha_j} \\ j=n & \\ & \alpha_n = \sqrt{2 - \beta_{n-1}^2} \end{array}\right.$$

En déduire la matrice de Choleski de la matrice

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{5} \end{pmatrix}$$

(d) Le système $Ax = b$ est équivalent à $Ly = b$ et $L^t x = y$. $Ly = b$ donne $y = (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{30}}{5})^t$. et $L^t x = y$ donne $x = (1,0,1,0,1)^t$

2 Norme matricielle et conditionnement

1. (a) On a

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \times \|x\|_\infty$$

donc

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Il reste à démontrer que la borne supérieur est atteinte pour un certain $x \neq 0$. En effet, soit i_0 tel que $\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$, il suffit de choisir x_j =signe$(a_{i_0 j})$. D'où

$$\sup_x \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_1 &= \sum_i |\sum_j a_{ij}x_j| \\
&\leq \sum_j \left(|x_j| \sum_i |a_{ij}| \right) \\
&\leq \left(\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \sum_j |x_j| = \left(\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_1
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Il reste à trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ qui réalise l'égalité. Il suffit de prendre le vecteur défini par $x_{j_0} = 1$ et $x_j = 0$ si $j \neq j_0$, où j_0 est tel que $\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$.

2. Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

(a) On applique la propriété du cours $\mathrm{cond}(AB) \leq \mathrm{cond}(A)\mathrm{cond}(B)$ en prenant $B = A$.

(b) Pour une matrice A symétrique, $\mathrm{cond}_2(A^2) = \mathrm{cond}_2(A)^2 = \rho(A)^2$. La réciproque n'est pas vraie car si A est orthogonale alors $\mathrm{cond}_2(A^2) = \mathrm{cond}_2(A)^2 = 1$.

3 Méthodes itératives

1. (a) La méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = (I - \alpha A)x^{(k)} + \alpha b \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

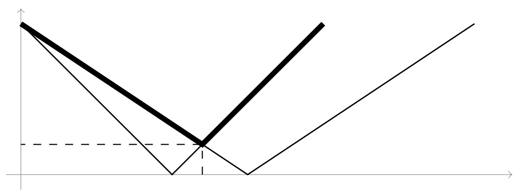
Elle converge si et seulement si $\rho(I - \alpha A) < 1$ les valeurs propres de la matrice $B = I - \alpha A$ sont les nombres $1 - \alpha\lambda_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de A. Donc

$$\rho(B) < 1 \Longleftrightarrow 0 < \alpha\lambda_i < 2$$

Or la matrice A est symétrique définie positive et toutes ses valeurs propres sont strictement positives donc pour tout λ_i, $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_i}$. On suppose que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, la condition de convergence sur α s'écrit alors

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$$

(b) $\rho(B) = \max_i |1 - \alpha\lambda_i| = \max\left(|1 - \alpha\lambda_1|, |1 - \alpha\lambda_n|\right)$



α_0 qui réalise le minimum :

$$\rho(I - \alpha_0 A) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \rho(I - \alpha A)$$

est solution de

$$1 - \alpha_0 \lambda_1 = \alpha_0 \lambda_n - 1$$

d'où

$$\alpha_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

2. (Solution dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

)

— *Méthode de Jacobi.*

On choisit $P = 2I$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) $x^{(k+1)} = B_J \, x^{(k)} + c_J$ où

$$B_J = P^{-1}N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } c_J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Les valeurs propre de B_J sont 0 et $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\rho(B_J) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ et la méthode converge.

(c) $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^{(3)} = \cdots$. La solution du système $Ax = b$ est alors $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— *Méthode de Gauss-Seidel.* On choisit $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Écrire la méthode itérative sous la forme $x^{(k+1)} = B_{GS} \, x^{(k)} + c_{GS}$ où

$$B_{GS} = P^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ et } c_{GS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

(b) Les valeurs propre de B_{GS} sont 0 et $\pm\frac{1}{2}$ donc $\rho(B_{GS}) = \frac{1}{2} < 1$ et la méthode de Gauss-Seidel converge.

(c) $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^{(3)} = \cdots$. La solution du système $Ax = b$ est alors $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— On a $\rho(B_{GS}) = \frac{1}{2} < \rho(B_J) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que celle de Jacobi.