TECE Projet 4: Limites et les développements limités

Ibrahim ALAME

19/10/2023

Exercice 1

A l'aide des accroissements finis, majorer l'erreur faites en prenant 100 comme valeur approchée de $\sqrt{10001}$.

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\sqrt{x}$ entre 10000 et 10001 donne

$$|\sqrt{10001}-\sqrt{10000}| \leq \max_{10000\leq x\leq 10001} \frac{1}{2\sqrt{x}} \times |10001-10000| = \frac{1}{200}$$

Donc on fait une erreur inférieur à $\frac{1}{200}$ en assimilant $\sqrt{10001}$ à 100.

Exercice 2

1. Montrer que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$

   On utilise la formule

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}. \quad \text{Si } x.y<1$$

- $\arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{5} = \arctan\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \arctan\dfrac{5}{12} \quad \text{car } \dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{5}<1$
- $4\arctan\dfrac{1}{5} = 2\arctan\dfrac{5}{12} = \arctan\dfrac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \arctan\dfrac{120}{119}$. D'où

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\times 239}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

2. Calculer la somme géométrique : $1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}$ où x est un réel tel que $|x|<1$. En déduire que

$$\forall x\in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

   Écrivons la somme de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-x^2$:

$$1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n} = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

$$1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

D'où la formule.

3. Montrer alors que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

Il suffit d'intégrer terme à terme l'égalité de la question précédente.

4. On pose $R_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $R_n(x) \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$ pour $x \geq 0$.

$$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \int_0^x t^{2n+2}\mathrm{d}t \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

5. Calculer $\arctan \frac{1}{5}$ et $\arctan \frac{1}{239}$ à 10^{-9} près. En déduire une valeur approchée de π à 10^{-8} près.

Pour calculer $\arctan \frac{1}{5}$ à 10^{-9} près, il faut que $\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+3}}{2n+3} < 10^{-9}$ soit $n \geq 5$. Pour $\arctan \frac{1}{239}$ il faut que $n \geq 1$. Par conséquent, on a :

- $\arctan \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{(0.2)^3}{3} + \dfrac{(0.2)^5}{5} - \dfrac{(0.2)^7}{7} + \dfrac{(0.2)^9}{9} - \dfrac{(0.2)^{11}}{11} = 0.197395560$
- $\arctan \dfrac{1}{239} = \dfrac{1}{239} - \dfrac{\left(\frac{1}{239}\right)^3}{3} = 0.004184076$

On en déduit alors que $\pi = 3.14159264$ à 10^{-8} près.

Exercice 3

1. Déterminer la limite, quand $x \to 0$ de :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2} + 1\right]$$

On divise par x^4 donc on fait un DL à l'ordre 4 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4), \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{x^2}\left(-x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) + 1\right] = \frac{1}{x^2}\left[-1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1\right] = -\frac{1}{2} + o(1)$$

On a donc $f(x) \to -\frac{1}{2}$ quand $x \to 0$.

2. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de :

$$g(x) = \exp\left[\frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2}\right]$$

On divise par x^2 donc on effectue un DL à l'ordre 4. On pose $u = 2x^2 \to 0$ quand $x \to 0$:

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2), \qquad \sqrt{1+2x^2} = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

$$\frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$g(x) = \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = e \times \exp\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = e \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

Problème

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Le but de cette première question est de montrer la formule de Taylor avec reste intégral qui assure que toute fonction qui admet une dérivée d'ordre $n+1$ continue satisfait

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + h^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\mathrm{d}\theta$$

avec a et $a+h$ des éléments de I.

   (a) Montrer que la formule est vraie pour $n = 0$.

   (b) Soit f une fonction qui admet une dérivée d'ordre $n+2$ continue. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!}(1-\theta)^n\mathrm{d}\theta = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + h\int_0^1 \frac{f^{(n+2)}(a+\theta h)}{(n+1)!}(1-\theta)^{n+1}\mathrm{d}\theta$$

   (c) En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence la formule de Taylor avec reste intégral.

   (d) On suppose qu'il existe M_{n+1} tel que $\forall x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$. Alors on a (la formule de Taylor Lagrange) :

$$\forall x \in I, \forall a \in I \qquad \left| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$$

2. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral pour $a = 0$ et $h = x$; on l'appelle alors formule de Mac-Laurin :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + h^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)\mathrm{d}\theta$$

   (a) Appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction sin et montrer que pour les valeurs de x entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ et pour tout entier n, il existe un polynôme $P_n(x)$ que l'on déterminera, tel que :

$$|\sin x - P_n(x)| \leq \frac{1}{(2n+3)!}$$

   (b) Comment faut-il choisir n pour que cette dernière approximation donne $\sin x$ à 10^{-3} près pour x entre 0 et $\frac{\pi}{4}$?

   (c) Donner une valeur approchée à 3 décimales pour $\sin \frac{1}{4}$.