

La Méthode des Éléments Finis: corrigé du TD2

IBRAHIM ALAME

05/10/2021

Problème de Poisson en dim 2

Solution exacte

Nous avons le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega & \text{bilan des forces} \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega & \text{condition limite} \end{cases} \quad (1)$$

On suppose que le chargement est uniforme $f(x, y) = -1$ et on admet que la solution analytique du problème est donnée par la somme de la série double :

$$u(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{lm} \sin((2l-1)\pi x) \sin((2m-1)\pi y)$$

avec

$$u_{lm} = \frac{-16}{((2l-1)^2 + (2m-1)^2)\pi^4(2l-1)(2m-1)}$$

La valeur maximale u_{max} de la déformation se trouve au centre et a pour expression :

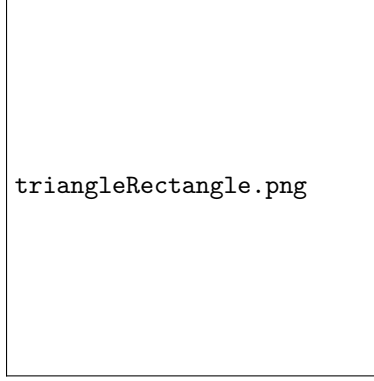
$$u_{max} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{l+1}(-1)^{m+1}}{((2l-1)^2 + (2m-1)^2)\pi^4(2l-1)(2m-1)}$$

On peut calculer une valeur approchée très précise de cette série avec Maple, et on trouve (pour $m = l = 200$) :

$$u_{max} = -0.07367135123$$

Solution approchée par éléments finis P1-triangle

On rappelle les coordonnées barycentriques dans un triangle rectangle isocèle de côté h .



On a

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = 1 - \frac{x+y}{h} \quad \lambda_2(\mathbf{x}) = \frac{x}{h} \quad \lambda_3(\mathbf{x}) = \frac{y}{h}$$

et

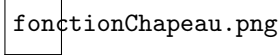
$$\nabla \lambda_1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla \lambda_2 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla \lambda_3 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On définit les fonctions chapeau φ_i pour un élément fini triangle de type (1) par :

Soit S_i un sommet intérieur du maillage, $\forall i \in \{1 \dots N_{so}^{int}\}$

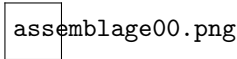
- $\mathcal{K}(S_i)$ est l'ensemble des mailles ayant S_i pour sommet
- λ_{K,S_i} est la coordonnée barycentrique de K associée au sommet S_i .

$$\varphi_i = \begin{cases} \lambda_{K,S_i} & \text{si } \mathbf{x} \in K \text{ pour } K \in \mathcal{K}(S_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

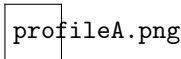


1. Le terme générique de la matrice de rigidité est $A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$ où φ_i est la fonction chapeau associée au sommet intérieur de numéro i . La matrice de rigidité est d'ordre $N_{so}^{int} = 9$. Une observation essentielle est que

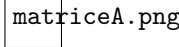
$$(A_{ij} \neq 0) \implies (S_i \text{ et } S_j \text{ sont des sommets d'un même triangle})$$



2. En considérant l'intersection des supports des fonctions chapeau, on obtient la disposition suivante des coefficients a priori non-nuls (indiqués par le symbole \bullet) :



3. Pour des raisons de symétrie et d'invariance par translation, il vient



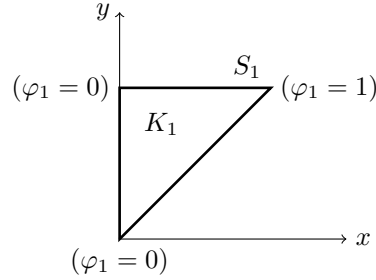
Il nous reste à déterminer les coefficients réels a , b , c et d donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a &= \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^2, \\ b &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2, \\ c &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_4, \\ d &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_5. \end{aligned}$$

On découpe les intégrales sur Ω en une somme d'intégrales sur les mailles et on ne conserve que les mailles intersectant le support des fonctions chapeau à intégrer. Il vient

$$\begin{aligned} a &= \int_{K_1} |\nabla \varphi_1|^2 + \int_{K_2} |\nabla \varphi_1|^2 + \int_{K_3} |\nabla \varphi_1|^2 + \int_{K_{10}} |\nabla \varphi_1|^2 + \int_{K_{11}} |\nabla \varphi_1|^2 + \int_{K_{12}} |\nabla \varphi_1|^2 \\ b &= \int_{K_3} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 + \int_{K_{12}} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 \\ c &= \int_{K_{10}} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_4 + \int_{K_{11}} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_4 \\ d &= \int_{K_{11}} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_5 + \int_{K_{12}} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_5 \end{aligned}$$

Considérons le coefficient a . La fonction φ_1 est affine son gradient $\nabla \varphi_1$ est donc constant, on peut alors le calculer comme taux d'accroissement en choisissant deux points dans K_1 .

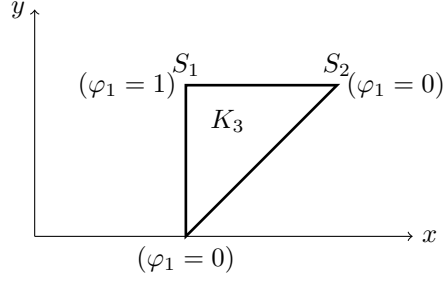


Sa composante horizontale est $\frac{1-0}{h} = \frac{1}{h}$. Sa composante verticale est $\frac{0-0}{h}$. Donc

$$\nabla \varphi_1|_{K_1} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et comme K_1 est de mesure égale à $\frac{h^2}{2}$, il vient

$$\int_{K_1} |\nabla \varphi_1|^2 = \frac{h^2}{2} \frac{1}{h^2} = \frac{1}{2}$$



De même,

$$\nabla\varphi_1|_{K_3} = \begin{pmatrix} \frac{0-1}{\frac{1}{h}} \\ \frac{1-h}{h} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si bien que

$$\int_{K_3} |\nabla\varphi_1|^2 = \frac{h^2}{2} \frac{2}{h^2} = 1$$

Enfin, pour des raisons de symétrie,

$$\int_{K_1} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_2} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{11}} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{12}} |\nabla\varphi_1|^2$$

et

$$\int_{K_3} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{10}} |\nabla\varphi_1|^2$$

En rassemblant les contributions ci-dessus, on obtient

$$a = 4.$$

Calcul de b :

Par symétrie $\nabla\varphi_2|_{K_3} = \nabla\varphi_1|_{K_1} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc sur K_3 :

$$\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = \left\langle \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{h^2} \Rightarrow \int_{K_3} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = -\frac{1}{2}$$

de même sur K_{12}

$$\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = \left\langle \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{h^2} \Rightarrow \int_{K_{12}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = -\frac{1}{2}$$

Donc

$$b = \int_{K_3} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 + \int_{K_{12}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

En procédant comme ci-dessus pour les deux autres coefficients b , c et d , il vient

$$c = -1 \quad \text{et} \quad d = 0.$$

La nullité du coefficient d provient du fait que sur les deux triangles K_{11} et K_{12} , les gradients des fonctions chapeau φ_1 et φ_5 sont orthogonaux.

4. Il y a n sommets intérieurs dans chaque direction spatiale, donc au total n^2 sommets intérieurs dans le maillage. La matrice de rigidité est d'ordre n^2 et le nombre total de ses coefficients est n^4 . En raisonnant sur les supports des fonctions chapeau, on obtient la structure bloc tridiagonale suivante :

$$\boxed{\text{matriceAparBlocs.png}}$$

Les blocs B , C et O sont des matrices d'ordre n et il y a n blocs par ligne dans la structure de la matrice A . De plus, $B = \text{tridiag}(-1, 4, -1)$, $C = -I$ où I est la matrice identité d'ordre n et O est le bloc nul d'ordre n . La plupart des lignes de A ont 5 coefficients non-nuls. Le rapport demandé est donc de l'ordre de $5n^{-2} \ll 1$. On dit que la matrice de rigidité est creuse.

Pour $n=3$ nous obtenons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Le second membre $F = (f_i)_{i=1,9}$ où

$$f_i = \int_{\text{supp}(\varphi_i)} f(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy = - \int_{\text{supp}(\varphi_i)} \varphi_i dx dy = -\frac{1}{3} \times 6 \times \frac{h^2}{2} = -h^2 = -\frac{1}{16}$$

$$F := - \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16} \right]$$

Le système linéaire $AU = F$ a pour solution

$$U = - \left[\frac{11}{256}, \frac{7}{128}, \frac{11}{256}, \frac{7}{128}, \frac{9}{128}, \frac{7}{128}, \frac{11}{256}, \frac{7}{128}, \frac{11}{256} \right]$$

La flèche maximale est $\frac{9}{128} = -0.0703125 \approx u_{max} = -0.07367135123$. En 9 points de discrétisation nous avons une précision de 3×10^{-3} .



FIGURE 1 – La membrane déformée avec 9 points intérieurs ($n=3$)