# TD 1 Analyse numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

03/02/2023

## 1 Interpolation

1. (a) Méthode directe : On cherche $a$, $b$ et $c$ solution de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi^2 & \pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$P(x) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x$$

(b) Méthode de Lagrange :

$$P(x) = \sin(0)L_0(x)+\sin(\frac{\pi}{2})L_1(x)+\sin(\pi)L_2(x) = L_1(x) = \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)} = \frac{-4}{\pi^2}x(x-\pi)$$

(c) Méthode de Newton :

| $x_i$ | $y_i$ | $\Delta[x_{i-1}, x_i]$ | $\Delta[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $\boxed{0}$ | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $\boxed{\frac{2}{\pi}}$ | |
| $\pi$ | $0$ | $-\frac{2}{\pi}$ | $\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$ |

D'où

$$\begin{aligned} P(x) &= \Delta[x_0] + \Delta[x_0, x_1](x-x_0) + \Delta[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &= 0 + \tfrac{2}{\pi}(x-0) - \tfrac{4}{\pi^2}(x-0)(x-\tfrac{\pi}{2}) \\ &= -\tfrac{4}{\pi^2}x^2 + \tfrac{4}{\pi}x \end{aligned}$$

2. (a) Méthode directe : On cherche $a$, $b$ , $c$ et $d$ solution de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\pi^3}{8} & \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi^3 & \pi^2 & \pi & 1 \\ \frac{27\pi^3}{8} & \frac{9\pi^2}{4} & \frac{3\pi}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$P(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x$$

(b) Méthode de Lagrange :

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & \sin(0)L_0(x) + \sin(\frac{\pi}{2})L_1(x) + \sin(\pi)L_2(x) + \sin(\frac{3\pi}{2})L_3(x) \\ & = & L_1(x) - L_3(x) \\ & = & \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} - \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\pi)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})} \\ & = & \frac{4}{\pi^3}x(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2}) - \frac{4}{3\pi^3}x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi) \end{array}$$

(c) Méthode de Newton :

| $x_i$ | $y_i$ | $\Delta[x_{i-1}, x_i]$ | $\Delta[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$ | $\Delta[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $\boxed{0}$ | | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $\boxed{\frac{2}{\pi}}$ | | |
| $\pi$ | $0$ | $-\frac{2}{\pi}$ | $\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$ | |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $-1$ | $-\frac{2}{\pi}$ | $0$ | $\boxed{\frac{8}{3\pi^3}}$ |

D'où

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & y_0 + \Delta[x_0, x_1](x - x_0) + \Delta[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & & +\Delta[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ & = & 0 + \frac{2}{\pi}(x - 0) - \frac{4}{\pi^2}(x - 0)(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{8}{3\pi^3}(x - 0)(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi) \\ & = & \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x \end{array}$$

La méthode de Newton est la plus simple, car elle réutilise les coefficients déjà calculés.

## 2 Convergence de l'interpolation de Lagrange

1.
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-\alpha)^{n+1}}$$

2. Nous avons
$$f(x) - L_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$
où $-1 < \xi < 1$. Donc
$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{\Lambda_n}{(n+1)!} . \frac{(n+1)!}{|\xi - \alpha|^{n+2}} \sim \frac{2^{n+1}}{\mathrm{e}\, n \ln(n)} . \frac{1}{|\xi - \alpha|^{n+2}} \leq \frac{1}{2\mathrm{e}\, n \ln(n)}$$
car d'après le cours la constante de Lebesgue $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{\mathrm{e}\, n \ln(n)}$ et $|\xi - \alpha| > 2$. D'où
$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0$$

3.
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Pour} & x_i < x < x_{i+1} \\ f_n(x) & = f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) \\ & = \frac{1}{x_i - \alpha} - \frac{1}{(x_i - \alpha)(x_{i+1} - \alpha)}(x - x_i) \end{array} \right.$$

4. On fait un développement de Taylor à l'ordre 1 de $f$ en $x = x_i$ :

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} f''(\xi)$$

soit

$$f(x) = \frac{1}{x_i - \alpha} + (x - x_i)\frac{-1}{(x_i - \alpha)^2} + \frac{(x - x_i)^2}{2}\frac{2}{(\xi - \alpha)^3}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) - f_n(x) &= (x - x_i)\left[\tfrac{-1}{(x_i-\alpha)^2} + \tfrac{1}{(x_i-\alpha)(x_{i+1}-\alpha)}\right] + \tfrac{(x-x_i)^2}{(\xi-\alpha)^3} \\ &= \tfrac{(x_{i+1}-x_i)(x-x_i)}{(x_i-\alpha)^2(x_{i+1}-\alpha)} + \tfrac{(x-x_i)^2}{(\xi-\alpha)^3} \end{aligned}$$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq (c_1\, h^2 + c_2\, h^2) = \frac{4(c_1 + c_2)}{n^2} = \frac{c}{n^2}$$

car $h = \frac{2}{n}$, ainsi

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{c}{n^2}$$

et donc que $f_n$ converge uniformément vers $f$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

# 3 Moindre carrés discrets

On a

$$\overline{x^k} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n} \qquad \text{et} \qquad \overline{x^k y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k y_i}{n}$$

On trouve

$$\overline{x} = \frac{1}{2} \quad \overline{y} = -\frac{1}{6} \quad \overline{x^2} = \frac{19}{6} \quad \overline{x^3} = \frac{9}{2} \quad \overline{x^4} = \frac{115}{6} \quad \overline{xy} = -\frac{5}{2} \quad \overline{x^2 y} = \frac{19}{6}$$

D'où le système

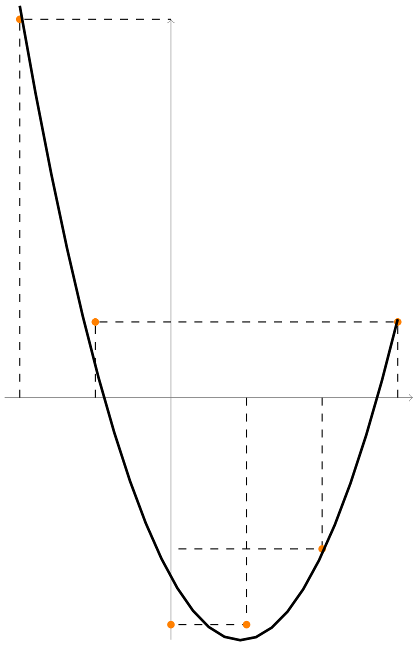
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{19}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{19}{6} & \frac{9}{2} \\ \frac{19}{6} & \frac{9}{2} & \frac{115}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

On trouve

$$a = \frac{55}{56} \qquad b = \frac{-507}{280} \qquad c = \frac{-83}{35}$$

D'où le polynôme :

$$P(x) = \frac{55}{56}x^2 - \frac{507}{280}x - \frac{83}{35}$$



# 4 Intégration numérique

1.
$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln 2 \simeq 0.693$$

2. On a $h = \frac{1}{3}$ et $x_i = 1 + i/3$ donc
$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{5}{3},\ x_3 = 2$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$
$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \simeq h\left(\frac{f(1)+f(2)}{2} + f(\frac{4}{3}) + f(\frac{5}{3})\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{3}(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}) = \frac{7}{10} = 0.7$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant convexe, la méthode donne alors une valeur approchée par excès.

4.
$$\left|\frac{(b-a)^4}{12n^2}f''(\xi)\right| \leq 10^{-4}$$
Donc
$$\left|\frac{1}{12n^2}2\right| \leq 10^{-4}$$
$$n^2 \geq 10000/6$$
$$n \geq 100/\sqrt{6}$$
$$n \geq 41$$

# 5

# 6

# 7

# 8

# 9

# 10

# 11

# 12

**Intégration numérique :**

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{4}{3} f\left(-\frac{\xi}{2}\right) + \frac{2}{3} f(\xi)$$

1. La formule est exacte pour $f(x) = 1$ et $f(x) = x$. Pour $f(x) = x^2$ nous avons

$$\frac{2}{3} = \xi^2$$

   donc $\xi = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et avec cette valeur la formule n'est plus exacte pour $f(x) = x^3$ donc la méthode est d'ordre 2.

2. On fait $x = \lambda t + \mu$. En $x = a$, $t = -1$ et en $x = b$, $t = 1$ :

$$a = -\lambda + \mu$$

$$b = \lambda + \mu$$

   D'où le changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ :

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2})\mathrm{d}t$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{2} \left[\frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{\xi}{2}\frac{b-a}{2}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2} + \xi\frac{b-a}{2}\right)\right]$$

3. Nous avons

$$\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq h\left[\frac{4}{3} f\left(x_{2i} - \frac{\xi}{2}h\right) + \frac{2}{3} f(x_{2i} + \xi h)\right]$$

$$\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{2h}{3}\left[2f\left(x_{2i} - \frac{h}{\sqrt{6}}\right) + f\left(x_{2i} + \sqrt{\frac{2}{3}}h\right)\right]$$

où $x_k = a + kh = -1 + kh$, $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_{2i+1} = -1 + (2i+1)h$ et $x_{2i-1} = -1 + (2i-1)h$
D'où

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{3n} \sum_{i=1}^{n} \left[2f\left(a + (i - \frac{1}{2\sqrt{6}})\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (i + \frac{1}{\sqrt{6}})\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

# 13

**Formule de Quadrature :**

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \simeq \omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f'(\xi)$$

$$E(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - [\omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f'(\xi)]$$

1. On trouve $\xi = \frac{1}{2}$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \frac{1}{6}$ et $\omega_2 = \frac{1}{3}$.
2. $$E(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \left[f(0) + \frac{1}{6}f'(0) + \frac{1}{3}f'(\frac{1}{2})\right]$$

   $E(x \mapsto x^4) = \frac{1}{30}$ donc la méthode est d'ordre 3.
3. On fait le changement de variable $x = a + t(b-a)$ :

   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f(a + t(b-a))\mathrm{d}t$$

   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)\left[f(a) + \frac{1}{6}f'(a) + \frac{1}{3}f'(\frac{a+b}{2})\right]$$

# 14

1. (a) Pour que la formule soit exacte pour $f(x) = 1$, il faut $\omega_1 + \omega_2 = 1$. Et pour qu'elle soit exacte pour $f(x) = x$, il faut $\omega_2 \alpha = \frac{1}{2}$. Ce qui amène à $\omega_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha}$ et $\omega_2 = \frac{1}{2\alpha}$.

   (b) Pour qu'elle soit exacte pour $f(x) = x^2$, il faut $\omega_2\alpha^2 = \frac{1}{3}$, donc $\alpha = \frac{2}{3}$. Et donc $\omega_1 = \frac{1}{4}$ et $\omega_2 = \frac{3}{4}$. On a en posant $x = hu$,

   $$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x = h\int_0^1 f(hu)\mathrm{d}u \simeq \frac{h}{4}\left[f(0) + 3f(\frac{2}{3}h)\right]$$

2. (a) On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en 0 :

   $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(c)x^3$$

   avec $c$ compris entre 0 et $x$. On pose

   $$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

   qui est bien polynômial de degré au plus 2 et $R(x) = \frac{1}{6}f'''(c)x^3$. On vérifie aisément l'inégalité voulue.

(b) De la majoration $|R(x)| \leq \frac{M_3}{6}x^3$, on tire :

$$\left|\int_0^h R(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^h |R(x)|\mathrm{d}x \leq \int_0^h \frac{M_3}{6}x^3\mathrm{d}x = \frac{M_3h^4}{24}$$

Et, en tenant de compte que $R(0) = 0$ (inégalité pour $x = 0$), on a aussi :

$$|Q(R) = \left|\frac{h}{4}R(0) + \frac{3h}{4}R(\frac{2}{3}h)\right| \leq \frac{3h}{4}\frac{M_3}{6}(\frac{2}{3}h)^3 = \frac{M_3h^4}{27}$$

On a enfin

$$|E(R)| = |I(R) - Q(R)| \leq |I(R)| + |Q(R)| \leq \frac{17}{216}M_3h^4$$

(c) Par linéarité, $I(f) = I(P) + I(R)$ et $Q(f) = Q(P) + Q(R)$. Comme la formule est exacte pour $P$ (puisqu'elle l'est sur tout polynôme de degré 2), $I(P) = Q(P)$ et donc $E(f) = E(R)$. Et donc

$$|E(f)| \leq \frac{17}{216}M_3h^4$$

3. (a) On pose $x_i = a + ih$. On a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N-1}\int_0^h f(x_i+u)\mathrm{d}u \simeq \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{N-1}\left[f(x_i) + 3f(x_i + \frac{2}{3}h)\right]$$

(b) On note $M_3 = \sup_{a\leq x\leq b} |f^{(3)}(x)|$.

L'erreur sur chaque intervalle sera majorée par $\frac{17}{216}M_3h^4$ et donc l'erreur totale par $\frac{17}{216}M_3Nh^4 = \frac{17}{216}M_3(b-a)h^3$ .

# 15

# 16

# 17

**Polynômes orthogonaux :**

1. Par intégration par parties
2. On trouve $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$
3.

$$\begin{aligned} P_3(X) &= \tfrac{1}{3!2^3}\tfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}X^3}\left[(X^2-1)^3\right] \\ &= \tfrac{1}{6\times 8}\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}X^2}\left[3(X^2-1)^2 \times 2X\right] \\ &= \tfrac{1}{8}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left[2(X^2-1)\times 2X^2 + (X^2-1)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{8}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left[5X^4 - 6X^2 + 1\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left(5X^3 - 3X\right) \end{aligned}$$

4. Les points $\xi_i$, $i = 1, 2, 3$ sont les racines de $P_3$ d'où

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad \xi_2 = 0, \qquad \xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Les 3 poids associés se calculent par la formule :

$$\forall i = 1,2,3 \quad \omega_i = \frac{2}{(1-\xi_i^2)P'_n(\xi_i)^2}$$

D'où

$$\omega_1 = \frac{5}{9}, \quad \omega_2 = \frac{8}{9}, \quad \omega_3 = \frac{5}{9}$$

Et donc

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\mathrm{d}\xi \simeq \frac{1}{9}\left[5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})\right]$$

Par changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$ :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{18}\left[5f(\frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2}) + 8f(\frac{a+b}{2}) + 5f(\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2})\right]$$

et si $x_i = a + ih$ où $h = \frac{b-a}{n}$ :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{18}\left[5f(x_{i+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{20}}h) + 8f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 5f(x_{i+\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{20}}h)\right]$$

Finalement

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{18n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[5f(a+(i-0.1127)\frac{b-a}{n}) + 8f(a+(i+0.5)\frac{b-a}{n}) + 5f(a+(i+0.8873)\frac{b-a}{n})\right]$$