La Méthode des Éléments Finis: corrigé du TD2

Ibrahim ALAME

05/10/2021

Problème de Poisson en dim 2

Solution approchée par éléments finis P1-triangle

Problème de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega & \text{bilan des forces} \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega & \text{condition limite} \end{cases} \tag{1}$$

Multiplions l'équation d'équilibre par une fonction teste $v \in H_0^1(\Omega) = V$:

$$-\Delta u \cdot v = f \cdot v$$

Intégrons sur Ω les deux membres

$$-\iint_\Omega \Delta u \cdot v \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f \cdot v \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Appliquons au premier membre la formule de Green :

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot v \, \mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega f \cdot v \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

v vérifie la même condition au limite $v = 0$ sur Γ donc $\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot v \, \mathrm{d}\sigma = 0$

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f \cdot v \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

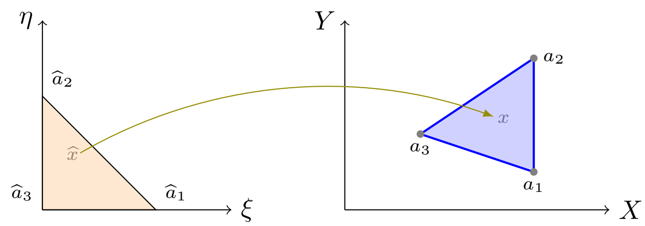
D'où la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V & \text{tel que} \\ a(u,v) = \ell(v) & \forall v \in V \end{cases} \tag{2}$$

où

$$\boxed{a(u,v) = \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \ell(v) = \iint_\Omega fv \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

On rappelle l'élément fini triangle de type (1).



$$\widehat{\varphi}_i = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

où

$$\lambda_i = \xi_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{ et } \lambda_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\lambda_1 = \xi, \quad \lambda_2 = \eta, \quad \lambda_3 = 1 - \xi - \eta$$

Donc

$$\boxed{\widehat{\varphi_1} = \xi, \quad \widehat{\varphi_2} = \eta, \quad \widehat{\varphi_3} = 1 - \xi - \eta}$$

Si en plus le triangle $a_1a_2a_3$ est rectangle isocèle alors

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \iint_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\widehat{T}} \nabla\widehat{\varphi}_i \cdot \nabla\widehat{\varphi_j}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

On a

$$\nabla\widehat{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla\widehat{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla\widehat{\varphi_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla\widehat{\varphi_1} \cdot \nabla\widehat{\varphi_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \Longrightarrow \iint_{\widehat{T}} \nabla\widehat{\varphi_1} \cdot \nabla\widehat{\varphi_1}\, \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \iint_{\widehat{T}} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \text{ Aire } (\widehat{T}) = \frac{1}{2}$$

$$\nabla\widehat{\varphi_1} \cdot \nabla\widehat{\varphi_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Longrightarrow \int_{\widehat{T}} \nabla\widehat{\varphi_1} \cdot \nabla\widehat{\varphi_2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = 0$$

$$\nabla\widehat{\varphi_1} \cdot \nabla\widehat{\varphi_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 \Longrightarrow \iint_{\widehat{T}} \nabla\widehat{\varphi_1} \cdot \nabla\widehat{\varphi_3}\, \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = -\iint_{\widehat{T}} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = -\text{ Aire } (\widehat{T}) = -\frac{1}{2}$$

On a donc

$$a(\varphi_1, \varphi_1) = \frac{1}{2}, \quad a(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad a(\varphi_1, \varphi_3) = -\frac{1}{2}$$

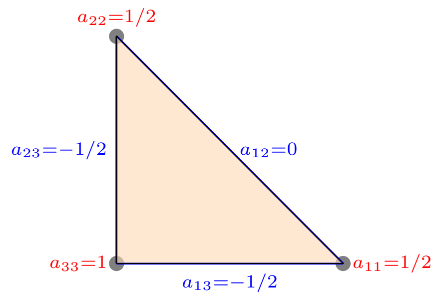
De même

$$a(\varphi_2, \varphi_2) = \frac{1}{2}, \quad a(\varphi_2, \varphi_3) = -\frac{1}{2}, \quad a(\varphi_3, \varphi_3) = 1$$

La matrice élémentaire étant symétrique, on a alors

$$m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On schématise les coefficients de la matrice m par la figure suivante :



Soit S_i un sommet intérieur du maillage, $\forall i \in \{1...N_{so}^{int}\}$

— $\mathscr{K}(S_i)$ est l'ensemble des mailles ayant S_i pour sommet

— λ_{K,S_i} est la coordonnée barycentrique de K associée au sommet S_i.

$$\varphi_i = \begin{cases} \lambda_{K,S_i} & \text{si } \mathbf{x} \in K \text{ pour } K \in \mathscr{K}(S_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Le terme générique de la matrice de rigidité est $A_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$ où φ_i est la fonction chapeau associée au sommet intérieur de numéro i. La matrice de rigidité est d'ordre $N_{so}^{int} = 9$. Une observation essentielle est que

$$(A_{ij} \neq 0) \Longrightarrow (S_i \text{ et } S_j \text{ sont des sommets d'un même triangle})$$

2. En considérant l'intersection des supports des fonctions chapeau, on obtient la disposition suivante des coefficients a priori non-nuls (indiqués par le symbole $\bullet$) :

3. Pour des raisons de symétrie et d'invariance par translation, il vient

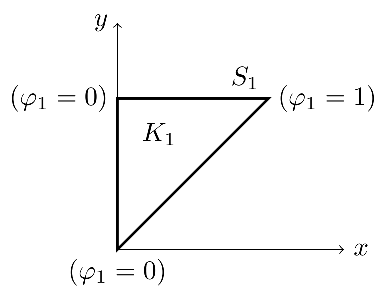
Il nous reste à déterminer les coefficients réels a, b, c et d donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a &= \int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2, \\ b &= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2, \\ c &= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_4, \\ d &= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_5. \end{aligned}$$

On découpe les intégrales sur Ω en une somme d'intégrales sur les mailles et on ne conserve que les mailles intersectant le support des fonctions chapeau à intégrer. Il vient

$$\begin{aligned}
a &= \int_{K_1} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_2} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_3} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_{10}} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_{11}} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_{12}} |\nabla\varphi_1|^2 \\
b &= \int_{K_3} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 + \int_{K_{12}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \\
c &= \int_{K_{10}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_4 + \int_{K_{11}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_4 \\
d &= \int_{K_{11}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_5 + \int_{K_{12}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_5
\end{aligned}$$

Considérons le coefficient a. La fonction φ_1 est affine son gradient $\nabla\varphi_1$ est donc constant, on peut alors le calculer comme taux d'accroissement en choisissant deux points dans K_1.

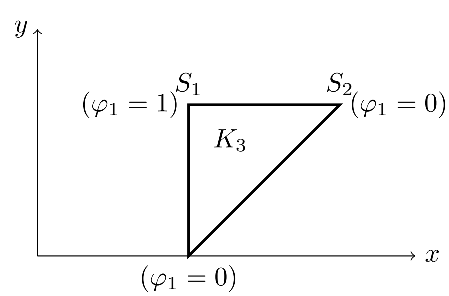


Sa composante horizontale est $\frac{1-0}{h} = \frac{1}{h}$. Sa composante verticale est $\frac{0-0}{h}$. Donc

$$\nabla\varphi_1|_{K_1} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et comme K_1 est de mesure égale à $\frac{h^2}{2}$, il vient

$$\int_{K_1} |\nabla\varphi_1|^2 = \frac{h^2}{2}\frac{1}{h^2} = \frac{1}{2}$$



De même,

$$\nabla\varphi_1|_{K_3} = \begin{pmatrix} \frac{0-1}{h} \\ \frac{1-0}{h} \end{pmatrix} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si bien que

$$\int_{K_3} |\nabla\varphi_1|^2 = \frac{h^2}{2}\frac{2}{h^2} = 1$$

Enfin, pour des raisons de symétrie,

$$\int_{K_1} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_2} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{11}} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{12}} |\nabla\varphi_1|^2$$

et

$$\int_{K_3} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{10}} |\nabla\varphi_1|^2$$

En rassemblant les contributions ci-dessus, on obtient

$$a = 4.$$

Calcul de b :

Par symétrie $\nabla\varphi_2|_{K_3} = \nabla\varphi_1|_{K_1} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc sur K_3 :

$$\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = \left\langle \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{h^2} \Longrightarrow \int_{K_3} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = -\frac{1}{2}$$

de même sur K_{12}

$$\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = \left\langle \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{h^2} \Longrightarrow \int_{K_{12}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = -\frac{1}{2}$$

Donc

$$b = \int_{K_3} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 + \int_{K_{12}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

En procédant comme ci-dessus pour les deux autres coefficients b, c et d, il vient

$$c = -1 \quad \text{et} \quad d = 0.$$

La nullité du coefficient d provient du fait que sur les deux triangles K_{11} et K_{12}, les gradients des fonctions chapeau φ_1 et φ_5 sont orthogonaux.

4. Il y a n sommets intérieurs dans chaque direction spatiale, donc au total n^2 sommets intérieurs dans le maillage. La matrice de rigidité est d'ordre n^2 et le nombre total de ses coefficients est n^4. En raisonnant sur les supports des fonctions chapeau, on obtient la structure bloc tridiagonale suivante :

Les blocs B, C et O sont des matrices d'ordre n et il y a n blocs par ligne dans la structure de la matrice A. De plus, $B = \text{tridiag}(-1, 4, -1)$, $C = -I$ où I est la matrice identité d'ordre n et O est le bloc nul d'ordre n. La plupart des lignes de A ont 5 coefficients non-nuls. Le rapport demandé est donc de l'ordre de $5n^{-2} \ll 1$. On dit que la matrice de rigidité est creuse.

Pour n=3 nous obtenons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Le second membre $F = (f_i)_{i=1,9}$ où

$$f_i = \int_{supp(\varphi_i)} f(x,y)\varphi_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{supp(\varphi_i)} \varphi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{3} \times 6 \times \frac{h^2}{2} = -h^2 = -\frac{1}{16}$$

$$F := -\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right]$$

Le système linéaire $AU = F$ a pour solution

$$U = -\left[\frac{11}{256}, \frac{7}{128}, \frac{11}{256}, \frac{7}{128}, \frac{9}{128}, \frac{7}{128}, \frac{11}{256}, \frac{7}{128}, \frac{11}{256}\right]$$

La flèche maximale est $\frac{9}{128} = -0.0703125 \approx u_{max} = -0.07367135123$. En 9 points de discrétisation nous avons une précision de 3×10^{-3}.

Figure 1 – La membrane déformée avec 9 points intérieurs (n=3)