La Méthode des Éléments Finis: TD1

Ibrahim ALAME

12/02/2024

1 Problème de Dirichlet

On pose $\Omega =]0,1[$, $V = H_0^1(\Omega)$ et on considère le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + 4u = 4 \ \text{ sur } \Omega, \\ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Calculer explicitement la solution du problème (1). (La solution du problème étant connue explicitement, la suite de l'exercice n'a évidement qu'un intérêt pédagogique)
2. Ramener l'étude du problème à un problème variationnel de type : Chercher $u \in V$ solution de
$$\forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v) \tag{2}$$
où $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire et ℓ est une forme linéaire sur V que l'on déterminera.
3. On admet que le problème (2) a une solution $u \in V$ et une seule. Pour construire une approximation u_h de u, nous allons choisir un sous-espace de V constitué de fonctions continues affines par intervalles. De façon plus précise, soit n un entier naturel et $h = \frac{1}{n+1}$, à ce pas h, nous associons les points $x_i = ih,\ 0 \le i \le n+1$ qui subdivisent l'intervalle $\overline{\Omega} = [0,1]$ en $n+1$ intervalles $K_i = [x_i, x_{i+1}]$, $0 \le i \le n$ de longueur h. On choisit alors pour sous-espace de dimension finie de V l'espace
$$V_h = \{v \in V;\ v|_{K_i} \in P_1,\ 0 \le i \le n\} = \{v \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega});\ v(0) = v(1) = 0;\ \ v|_{K_i} \in P_1,\ 0 \le i \le n\} \tag{3}$$
où P_1 désigne l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
Déterminer la dimension de V_h et montrer que la suite des fonctions $\varphi_i \in V_h,\ 1 \le i \le n$ définies par $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i \le n$ constitue une base de V_h.
4. Donner l'expression analytique de $\varphi_i(x)$ en fonction de i et x et tracer sa courbe représentative.
5. Pour tout $i = 1, \cdots, n$ on désigne par u_i la valeur de la solution approchée u_h au point x_i :
$$u_i = u_h(x_i), \quad 1 \le i \le n \tag{4}$$
Montrer que $u_h = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j$, et que $(u_j)_{1 \le i \le n}$ sont solution du système linéaire
$$\sum_{j=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = \ell(\varphi_i), \quad 1 \le i \le n$$

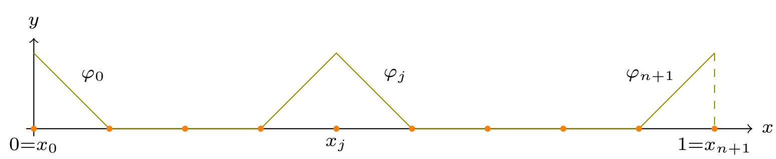
6. Calculer $a(\varphi_i, \varphi_j)$en distinguant les trois cas : $|i-j|>1$, $|i-j|=1$ et $i-j=0$.
7. Donner l'écriture matricielle du système linéaire.
8. Pour $n=4$, Calculer et tracer une solution approchée du problème (1).

2 Problème de Neumann

On pose $V = H^1(0,1)$ et on considère le problème de Neumann

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+x)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] + u = 1 \text{ sur }]0,1[, \\ \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

1. Montrer que le problème (5) se ramène à un problème variationnel de type : Chercher $u \in V$ solution de
$$\forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v) \tag{6}$$
où $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire et ℓ est une forme linéaire sur V que l'on déterminera.
2. On subdivisent l'intervalle $[0,1]$ en $n+1$ intervalles $K_i = [x_i, x_{i+1}]$, $0 \le i \le n$ de longueur $h = \frac{1}{n+1}$. On choisit alors d'approcher V par le sous-espace de dimension finie de V_h suivant :
$$V_h = \{v \in \mathscr{C}^0([0,1]);\ \ v|_{K_i} \in P_1,\ 0 \le i \le n\} \tag{7}$$
où P_1 désigne l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Les fonctions φ_i, $0 \le i \le n+1$, définies par
$$\begin{cases} \varphi_i(x) & = & \begin{cases} 1 - \frac{|x-x_i|}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & 1 \le i \le n \\ \varphi_0(x) & = & \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & \text{si } x \in [0,h] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varphi_{n+1}(x) & = & \begin{cases} 1 - \frac{1-x}{h} & \text{si } x \in [1-h,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$
constituent une base de V_h. Les coordonnées dans cette base d'une fonction $u_h \in V_h$ sont les nombres $u_i = u_h(x_i)$, $0 \le i \le n+1$. On a donc $u_h = \sum_{i=0}^{n+1} u_i \varphi_i$.



Montrer que $(u_j)_{0\le i \le n+1}$ sont solution du système linéaire
$$\sum_{j=0}^{n+1} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = \ell(\varphi_i), \quad 0 \le i \le n+1$$
3. Calculer $a(\varphi_i, \varphi_j)$ et $\ell(\varphi_i)$.