# TECE Projet 5: Calcul Intégral

Ibrahim ALAME

2/11/2023

## 1

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 - 2}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sin x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\mathrm{d}x$$

1.
$$\frac{1}{x^4 - x^2 - 2} = \frac{1}{(x^2-2)(x^2+1)} = \frac{1}{3(x^2-2)} - \frac{1}{3(x^2+1)}$$

et on en déduit

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 - 2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{3}\arctan x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

2.
$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

donc

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(x^2+1)} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$

On fait le changement de variable $x = \tan\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. On a $\mathrm{d}x = (1+\tan^2\theta)\mathrm{d}\theta$ et

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \int \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} + k = \frac{2x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + k$$

Finalement

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{x-1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

3. L'expression intégrée est invariante par le changement de variable $x \to x + \pi$. La règle de Bioche nous invite à faire le changement de variable $t = \tan\theta$. On a alors $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ et

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x}{1+\tan^3 x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t$$

Maintenant, la décomposition en éléments simples

$$\frac{t}{1+t^3} = \frac{t}{(1+t)(1-t+t^2)} = -\frac{1}{3(t+1)} + \frac{t+1}{3(t^2-t+1)}$$

entraîne

$$\int \frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t = \int \left(-\frac{1}{3(t+1)} + \frac{1}{6}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)\mathrm{d}t$$

donc

$$\int \frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)$$

donc

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\ln|\tan x + 1| + \frac{1}{6}\ln(\tan^2 x - \tan x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}}\right)$$

## 2

Donner une relation de récurrence permettant de calculer les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x, \qquad J_n = \int_1^e \ln^n x \,\mathrm{d}x$$

1. Il suffit de remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$$

   Cette relation permet de calculer $I_n$ sachant que

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{ et } I_1 = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln 2}{2}$$

2. En intégrant par parties, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = [x\ln^n x]_1^e - n\int_1^e \ln^{n-1} x\mathrm{d}x = e - nI_{n-1}$$

   Cette relation de récurrence permet de calculer chaque $I_n$, sachant que $I_0 = e-1$.

## 3

Soit l'intégrale $I_n(a) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt}{a-\cos t}\mathrm{d}t$ où $a$ est un nombre réel strictement supérieur à 1 et où $n$ est un entier naturel. On pose $a = \mathrm{ch}\alpha$ avec $\alpha > 0$.

1. Montrer que $I_0(a) = \frac{2\pi}{\mathrm{sh}\alpha}$.
2. Calculer $I_1(a) - aI_0(a)$. En déduire la valeur de $I_1(a)$.

3. Pour $n \geq 2$, montrer que $I_n(a) + I_{n-2}(a) = 2aI_{n-1}(a)$.
4. En déduire que pour tout $n$ : $I_n(a) = \frac{2\pi}{\text{sh}\alpha} e^{-n\alpha}$.

1. La fonction $f$ définie par : $f(t) = \frac{1}{a-\cos t}$ étant paire :

$$I_0(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a - \cos t} \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{a - \cos t} \mathrm{d}t$$

Posons : $\tan \frac{t}{2} = \varphi$ ; alors $\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}\varphi}{1+\varphi^2}$ et $\cos t = \frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}$

$$I_0(a) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{2\varphi}{a(1+\varphi^2) - (1-\varphi^2)} \mathrm{d}\varphi = \frac{4}{a+1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi^2 + \frac{a-1}{a+1}}$$

Posons $\mu = \frac{a-1}{a+1}$ (licite car $a > 1$) ; il vient :

$$I_0 = \frac{4}{\mu(a+1)} \left[\arctan\left(\tan \frac{\varphi}{\mu}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

D'où

$$I_0 = \frac{2\pi}{\text{sh}\alpha}$$

2.

$$I_1(a) - aI_0(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t - a}{a - \cos t} \mathrm{d}t = -2\pi$$

D'après la question 1

$$I_1(a) = aI_0(a) - 2\pi = 2\pi \left(\frac{a}{\text{sh}\alpha} - 1\right) = 2\pi \left(\frac{\text{ch}\alpha - \text{sh}\alpha}{\text{sh}\alpha}\right) = \frac{2\pi}{\text{sh}\alpha} e^{-\alpha}$$

3.

$$I_n + I_{n-2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt + \cos(n-2)t}{a - \cos t} \mathrm{d}t = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n-1)t \cos t}{a - \cos t} \mathrm{d} = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n-1)t(\cos t - a + a)}{a - \cos t} \mathrm{d}t$$

$$I_n + I_{n-2} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-1)t \mathrm{d}t + 2a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n-1)}{a - \cos t} \mathrm{d} = -2 \times 0 + 2a \times I_{n-1} = 2aI_{n-1}(a)$$

4. Raisonnons par récurrence. Pour $n = 0$ et $n = 1$ la relation est vérifiée. Supposons-la vérifiée à l'ordre $n$ fixé.

$$I_{n+1} = 2aI_n - I_{n-1} = 2a\left(\frac{2\pi}{\text{sh}\alpha} e^{-n\alpha}\right) - \frac{2\pi}{\text{sh}\alpha} e^{-(n-1)\alpha} = \frac{2\pi}{\text{sh}\alpha}(2a - e^{\alpha}) e^{-n\alpha} = \frac{2\pi}{\text{sh}\alpha}(2\text{sh}\alpha - e^{\alpha}) e^{-n\alpha}$$

D'où $I_{n+1} = \dfrac{2\pi}{\text{sh}\alpha} e^{-(n+1)\alpha}$ ce qui achève la démonstration.

## 4

On se propose de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$. Pour $x^2 \neq 1$ faire une décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$ puis calculer $g(x)$. En déduire, par simple passage à la limite la valeur de l'intégrale $J$. On pourra utiliser la règle de l'Hospital.

Si $x^2 \neq 1$, $\dfrac{1}{(X+1)(X+t^2)} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X+x^2}$ où $a = -b = \frac{1}{x^2-1}$. Donc

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}\right]$$

La fonction $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ donc $g$ est continue et donc $J = g(1) = \lim_{x\to 1} g(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

## 5

1. Calculer pour tout réel $x \neq \pm 1$, l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{x^2 - 2x\cos t + 1}$
2. En déduire $J(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{2(x-\cos t)\mathrm{d}t}{x^2-2x\cos t+1}$
3. Soit $K(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\mathrm{d}t$ pour tout réel $x \neq \pm 1$. Calculer $K'(x)$. En déduire la valeur de l'intégrale $K(x)$. On distinguera deux cas $|x| < 1$ et $|x| > 1$.

1. $1 - 2x\cos t + x^2 = (x-\cos t)^2 + \sin^2 t = 0 \iff \sin t = x - \cos t = 0$. ce qui est équivaut à ($x = 1$ et $t = 0$) ou ($x = -1$ et $t = \pi$) car $t \in [0,\pi]$. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{x^2-2x\cos t+1}$. $f$ est continue sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}$. Donc $I$ est bien définie. Calculons, pour $y \in ]0,\pi[$, $F(y) = \int_0^y f(t)\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$. Si $Y = \tan\frac{y}{2}$

$$F(y) = \int_0^Y \frac{\mathrm{d}u}{(1-x)^2 + u^2(1+x)^2} = \frac{2}{1-x^2}\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\tan\frac{y}{2}\right)$$

   Or $I(x) = \lim_{y\to\pi} F(y)$, donc $I(x) = \frac{\pi}{1-x^2}$ si $|x| < 1$ et $I(x) = \frac{\pi}{x^2-1}$ si $|x| > 1$.
2. Si $x \neq 0$,

$$\frac{2(x-X)}{1+x^2-2xX} = \frac{1}{x} + \frac{x^2-1}{x}\frac{1}{1+x^2-2xX}$$

   Donc $\forall x \neq 0$, $J(x) = \frac{\pi}{x} + \frac{x^2-1}{x}I(x)$ et $J(0) = -2\int_0^\pi \cos t\mathrm{d}t = 0$. De 1) on déduit alors :

$$J(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| < 1 \qquad \text{et} \qquad J(x) = \frac{2\pi}{x} \quad \text{si} \quad |x| > 1$$

Si $x \neq 0$ et $t \in [0, \pi]$ la fonction $\varphi(x, t) = \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$ est de classe $C^1$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{2(x - \cos t)}{x^2 - 2x\cos t + 1}$. Du théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que $K$ est de classe $C^1$ et $K' = J$.
Il existe $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ telles que

$$K(x) = \begin{cases} C_1 + 2\pi \ln x & \text{si} \quad x \in ]1, +\infty[ \\ C_2 + 2\pi \ln(-x) & \text{si} \quad x \in ]-\infty, -1[ \\ C_3 & \text{si} \quad x \in ]-1, +1[ \end{cases}$$

$C_3 = 0 = K(0)$. D'autre part, $K(\frac{1}{x}) = K(x) - \pi \ln(x^2)$. Donc

$$K(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| < 1 \qquad \text{et} \qquad K(x) = \pi \ln(x^2) \quad \text{si} \quad |x| > 1$$