IPSA 2020-2021, AERO3
Méthode des différences finies
Ma323

TD 2 — Schémas pour l'équation d'advection

1 Etude du schéma implicite centré

1. Montrer que le schéma implicite centré est consistant, précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace.

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+V\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}=0 \quad (n\geq 0,\ 1\leq j\leq N-1).$$

Plaçons nous en $(x,t)=(x_j,t_{n+1})$.

Soit u une solution de l'équation d'advection.

On remplacera donc dans le schéma u_j^{n+1} par $u(x,t)$, u_j^n par $u(x,t-\tau)$, u_{j+1}^{n+1} par $u(x+h,t)$ et enfin u_{j-1}^{n+1} par $u(x-h,t)$.

A l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2 de u suivant t, on a

$$u(x,t-\tau)=u(x,t)-\tau\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+o(\tau^2)$$

D'où

$$\frac{u(x,t)-u(x,t-\tau)}{\tau}=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+o(\tau)$$

Par ailleurs, en considérant la variation de x, on a

$$u(x+h,t)=u(x,t)+h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+o(h^3)$$

et de la même façon

$$u(x-h,t)=u(x,t)-h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+o(h^3)$$

$$\frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+o(h^2)$$

Le remplacement dans le schéma permet de déterminer l'erreur de troncature :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+V\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+o(h^2+\tau)$$

et comme u est solution de l'équation d'advection, on a :

$$-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{Vh^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + o(h^2 + \tau)$$

qui tend bien vers 0 lorsque $h \to 0$ et $\tau \to 0$. Le schéma est bien consistant. Il est précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

2. Montrer que le schéma centré implicite est inconditionnellement stable en norme L^2.

Pour étudier la stabilité en norme L^2, appliquons la condition de Von Neumann en remplaçant u_j^n par $A(\omega)^n e^{ij\omega h}$.
On a donc

$$\frac{A(\omega) - 1}{\tau} + V\frac{A(\omega)e^{i\omega h} - A(\omega)e^{-i\omega h}}{2h} = 0$$

Donc

$$A(\omega) - 1 + \frac{V\tau}{h}A(\omega)i\sin(\omega h) = 0$$

Donc

$$A(\omega) = \frac{1}{1 + i\dfrac{V\tau}{h}\sin(\omega h)}$$

Et donc $|A(\omega)| \leq 1$. Ce qui prouve la stabilité inconditionnelle en norme L^2.

3. Exprimer matriciellement le schéma implicite centré pour l'équation d'advection.

Réorganisons le schéma, et posons $c = \dfrac{V\tau}{h}$.

$$-\frac{c}{2}u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} + \frac{c}{2}u_{j+1}^{n+1} = u_j^n$$

On a une formulation matricielle de la forme $M_i u^{n+1} = u^n$.

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{c}{2} \\ -\frac{c}{2} & 1 & \frac{c}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\frac{c}{2} & 1 & \frac{c}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\frac{c}{2} & 1 & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{c}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

2 Etude du schéma de Lax-Friedrichs

1. Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs, pour l'équation de l'advection, est stable en norme L^2 sous la condition CFL $|V|\tau \leq h$.

Utilisons la condition de stabilité de Von Neumann.

$$\frac{2A(\omega) - e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}}{2\tau} + \frac{V}{2h}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) = 0$$

Donc $A(\omega) = \cos(\omega h) - \frac{V\tau}{h} i \sin(\omega h)$.

En notant $c = \frac{V\tau}{h}$, on a

$$\left| A(\omega) \right| = \sqrt{\cos^2(\omega h) + c^2 \sin^2(\omega h)}$$

Si $|c| \leq 1$, on aura donc $|A(\omega)| \leq 1$ d'où la stabilité du schéma.

Si $|c| > 1$ on peut avoir $|A(\omega)| = |c| > 1$ pour une valeur au moins de ω, le schéma n'est pas stable.

2. Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs vérifie le PMD sous CFL $|V|\tau \leq h$.

On note $c = \frac{V\tau}{h}$ et on écrit la réécriture du schéma de Lax-Friedrichs sous la forme

$$u_j^{n+1} = \frac{1+c}{2} u_{j-1}^n + \frac{1-c}{2} u_{j+1}^n$$

Lorsque $|c| \leq 1$, on aura $\frac{1+c}{2} \geq 0$ et $\frac{1-c}{2} \geq 0$.

u_j^{n+1} apparait comme une combinaison convexe de u_{j-1}^n et de u_{j+1}^n.

Lorsque $\forall j, m \leq u_j^n \leq M$, on aura aussi

$\forall j, m \leq u_j^{n+1} \leq M$.

Et donc, de proche en proche on aura bien

$$\forall j,\ \forall n, \quad \min(u_j^0) \leq u_j^n \leq \max(u_j^0)$$

3. Exprimer matriciellement ce schéma.

On a $u^{n+1} = M_{LF} u^n$ avec

$$M_{LF} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-c}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1+c}{2} \\ \frac{1+c}{2} & 0 & \frac{1-c}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1+c}{2} & 0 & \frac{1-c}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \frac{1+c}{2} & 0 & \frac{1-c}{2} \\ \frac{1-c}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1+c}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3 Etude du schéma de Lax-Wendroff

1. Montrer que le schéma de Lax-Wendroff est stable en norme L^2 sous une condition CFL à expliciter.

On applique la condition de Von Neumann.

$$\frac{A(\omega)-1}{\tau} + V\frac{e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}}{2h} - \frac{V^2\tau}{2}\frac{e^{-i\omega h} - 2 + e^{i\omega h}}{h^2} = 0.$$

Ce qui amène à

$$A(\omega) = 1 - ci\sin(\omega h) + c^2(\cos(\omega h) - 1)$$

Supposons $|c| > 1$. Pour $\omega h = \pi$, on a $A(\omega) = 1 - 2c^2 < -1$ et donc le schéma est instable.
Supposons maintenant $|c| \leq 1$.
On a

$$|A(\omega)|^2 = \Big(1 + c^2(\cos(\omega h) - 1)\Big)^2 + c^2\sin^2(\omega h)$$

On a

$$|A(\omega)|^2 = 1 + c^4\left(\cos(\omega h) - 1\right)^2 + 2c^2\left(\cos(\omega h) - 1\right) + c^2\sin^2(\omega h)$$

D'où

$$|A(\omega)|^2 = 1 + c^4\left(\cos(\omega h) - 1\right)^2 + 2c^2\cos(\omega h) - 2c^2 + c^2(1 - \cos^2(\omega h))$$

D'où

$$|A(\omega)|^2 = 1 + c^4\left(\cos(\omega h) - 1\right)^2 - c^2\left(\cos(\omega h) - 1\right)^2$$

Et donc :

$$|A(\omega)|^2 = 1 + (c^4 - c^2)(\cos(\omega h) - 1)^2$$

Avec $|c| \leq 1$, on a $c^4 - c^2 \leq 0$ et donc $|A(\omega)| \leq 1$.

2. Exprimer matriciellement ce schéma.

Le schéma se formule :

$$u_j^{n+1} = \frac{c + c^2}{2} u_{j-1}^n + (1 - c^2) u_j^n + \frac{-c + c^2}{2} u_{j+1}^n$$

D'où une formulation matricielle $u^{n+1} = M_{LW} u^n$ avec :

$$M_{LW} = \begin{pmatrix} 1-c^2 & \frac{c^2-c}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{c+c^2}{2} \\ \frac{c+c^2}{2} & 1-c^2 & \frac{c^2-c}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{c+c^2}{2} & 1-c^2 & \frac{c^2-c}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \frac{c+c^2}{2} & 1-c^2 & \frac{c^2-c}{2} \\ \frac{c^2-c}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{c+c^2}{2} & 1-c^2 \end{pmatrix}$$

4 Etude du schéma décentré amont

On se place dans le cas où $V > 0$.

1. Etudier la consistance du schéma et montrer qu'il est précis d'ordre 1 et temps et en espace.

Plaçons nous en $(x, t) = (x_j, t_n)$.

Soit u une solution de l'équation d'advection.

On remplacera donc dans le schéma u_j^{n+1} par $u(x, t + \tau)$, u_j^n par $u(x, t)$, et u_{j-1}^n par $u(x - h, t)$.

A l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2 de u suivant t, on a

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau^2)$$

D'où
$$\frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+o(\tau)$$
Par ailleurs, en considérant la variation de x,
$$u(x-h,t)=u(x,t)-h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+o(h^2)$$
On aura donc :
$$\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+o(h)$$
Le remplacement dans le schéma permet de déterminer l'erreur de troncature :
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+V\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+o(h+\tau)$$
et comme u est solution de l'équation d'advection, on a :
$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{Vh}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+o(h+\tau)$$
qui tend bien vers 0 lorsque $h\to 0$ et $\tau\to 0$. Le schéma est bien consistant. Il est précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace.

2. Montrer que ce schéma est stable en norme L^∞ sous la condition CFL.

Etudions si le principe du maximum discret est vérifié.
En posant toujours $c=\frac{V\tau}{h}$, le schéma s'écrit :
$$u_j^{n+1}=cu_{j-1}^n+(1-c)u_j^n$$
Si $0\le c\le 1$, on reconnait une combinaison convexe qui permet de vérifier le principe du maximum discret.

3. Présenter une formulation matricielle de ce schéma.

On a $u^{n+1}=M_d u^n$ avec

$$M_d = \begin{pmatrix} 1-c & 0 & 0 & \cdots & 0 & c \\ c & 1-c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & c & 1-c & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & c & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c & 1-c \end{pmatrix}$$