Introduction aux éléments finis

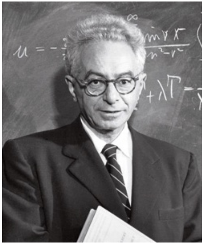
Ibrahim ALAME

ESTP

05/02/2024

Bref historique de la méthode

- issue des travaux de Courant ($\sim$1930)
- développée par les ingénieurs en aéronautique ($\sim$1950)
- analysée dans les années $\sim$1970
- utilisée dans de multiples applications (cf. cours de Mécanique)
  Richard Courant (1888-1972)



Outils d'analyse fonctionnelle

- Rappels sur les distributions
- Espaces de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v_{/\Gamma} = 0\}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{H^1}^2 = \left(\int_\Omega v^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2\right) = (\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2)$$

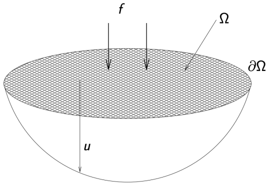
$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
Plus généralement $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$.

- Formule de Green :

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot v \, \mathrm{d}\sigma$$

Problème modèle

- Membrane élastique à l'équilibre sous un chargement



  - membrane tendue occupant le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
  - fixée sur son pourtour
  - on applique un chargement vertical f
- L'inconnue est le déplacement vertical de la membrane à l'équilibre

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$

- La fonction u est solution du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega & \text{bilan des forces} \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega & \text{condition limite} \end{array} \right. \tag{1}$$

Formulation variationnelle

- $-\Delta u = f \Longrightarrow -\Delta u \cdot v = f \cdot v \quad$ où $v \in H_0^1(\Omega)$

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot v \,\mathrm{d}x$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot v \,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega f \cdot v \,\mathrm{d}x$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot v \,\mathrm{d}x$$

- Formulation variationnelle (cf. cours d'analyse)

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.} \tag{2}$$

  - principe des travaux virtuels
  - v est la fonction test

Théorème de Lax-Milgram

- Le problème abstrait

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \ \text{ tel que} \\ a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{3}$$

est bien posé sous les conditions (suffisantes) suivantes :

LM1 l'espace V équipé de la norme $\|\cdot\|_V$ est un espace de Hilbert

LM2 la forme linéaire ℓ est continue sur V

$$\exists \beta, \quad \forall v \in V, \quad |\ell(v) \leq \beta \|v\|_V$$

LM3 la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur $V \times V$

$$\exists \omega, \quad \forall v, w \in V, \quad |a(v,w) \leq \omega \, \|v\|_V \cdot \|w\|_V$$

LM4 la forme bilinéaire a est coercive sur V

$$\exists \alpha, \quad \forall v \in V, \quad a(v,v) \geq \beta \|v\|_V^2$$

Application à l'équilibre d'une membrane

- On suppose $f \in L^2(\Omega)$
- Le problème (7) est bien posé. En effet,
  - LM1 $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert
  - LM2 la forme linéaire ℓ est continue

$$|\ell(v)| = \left|\int_\Omega fv\right| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \quad \text{donc } \beta = \|f\|_{L^2}$$

  - LM3 la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue

$$|a(v,w)| = \left|\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w\right| \leq \|\nabla v\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}\|w\|_{H^1}$$

  - LM4 grâce à l'inégalité de Poincaré

$$\exists C_\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2}$$

la forme bilinéaire a est coercive

$$a(v,v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{1+C_\Omega^2}\|v\|_{H^1}^2 \quad \alpha = \frac{1}{1+C_\Omega^2}$$

Méthode de Galerkine

- Rappel du problème modèle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{4}$$

- V_h de dimension finie et $V_h \subset V$
  1. on cherche une solution approchée $u_h \in V_h$
  2. on restreint les fonctions tests à $v_h \in V_h$
  3. on conserve les formes (bi)linéaires a et ℓ
- On obtient le problème discret

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h,v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{5}$$

- Il s'agit de la méthode de Galerkine

Interprétation énergétique

- On suppose que a est symétrique
- Rappel partie optimisation : la solution exacte u est l'unique minimiseur (point critique) sur V de la fonctionnelle d'énergie

$$\mathscr{E}(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$$

- Exemple pour la membrane : la solution exacte u minimise sur $H_0^1(\Omega)$ l'énergie mécanique

$$\mathscr{E}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv$$

- La méthode de Galerkine préserve ce principe de moindre énergie : la solution approchée u_h minimise la même énergie $\mathscr{E}$, mais uniquement sur V_h
- Comme $V_h \subset V$, on a

$$\mathscr{E}(v) = \min_{v_h \in V_h} \mathscr{E}(v_h) \geq \min_{v \in V} \mathscr{E}(v) = \mathscr{E}(u)$$

Le système linéaire (1)

- Rappel du problème discret

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \ \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{6}$$

- Un point de vue équivalent est de résoudre un système linéaire
- Soit $(\varphi_1, \cdots \varphi_N)$ une base de V_h.
- Au lieu de chercher $u_h \in V_h$, on cherche ses composantes dans cette base

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} U_j \varphi_j(x) \quad U = (U_j)_{1 \le j \le N} \in \mathbb{R}^N$$

Le système linéaire (2)

- On introduit la matrice de rigidité $A \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ et le vecteur chargement $B \in \mathbb{R}$

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) \qquad B_i = \ell(\varphi_i)$$

- Résoudre (6) $\Longleftrightarrow$ Résoudre $AU = B$

$$\begin{array}{rcll}
u_h \text{ solution de } (6) & \Longleftrightarrow & a(u_h, v_h) = \ell(v_h) & \forall v_h \in V_h \\
& \Longleftrightarrow & a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i) & \forall i \in \{1, \cdots, N\} \\
& \Longleftrightarrow & a(\sum_{j=1}^N U_j \varphi_j, \varphi_i) = \ell(\varphi_i) & \forall i \in \{1, \cdots, N\} \\
& \Longleftrightarrow & \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) U_j = \ell(\varphi_i) & \forall i \in \{1, \cdots, N\} \\
& \Longleftrightarrow & \sum_{j=1}^N A_{ij} U_j = B_i & \forall i \in \{1, \cdots, N\} \\
& \Longleftrightarrow & AU = B &
\end{array}$$

La matrice A est définie positive

- Pour tout $X \in \mathbb{R}^N$, il vient avec $\xi(x) = \sum_{j=1}^N X_j \varphi_j(x)$,

$$
\begin{array}{rcl}
\langle AX, X \rangle & = & \sum_{i,j=1}^N A_{ij} X_i X_j \\
& = & \sum_{i,j=1}^N X_i X_j a(\varphi_j, \varphi_i) \\
& = & a\left(\sum_{j=1}^N X_j \varphi_j, \sum_{i,j=1}^N X_i \varphi_i\right) \\
& = & a(\xi, \xi) \geq \|\xi\|_V^2 \geq 0
\end{array}
$$

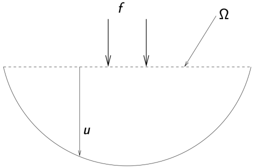
  par coercivité. D'où

$$\langle AX, X \rangle = 0 \Longrightarrow \xi = 0 \Longrightarrow X = 0$$

- Corollaire : Le problème discret est bien posé

Éléments finis 1D

- Corde élastique à l'équilibre sous un chargement

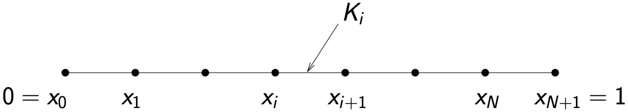


  - corde tendue occupant le domaine $\Omega =]0, 1[$
  - fixée à ses 2 extrémités
  - on applique un chargement vertical f
- L'inconnue est le déplacement vertical de la corde $u : \Omega \to \mathbb{R}$
- Formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega u' \cdot v' = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{7}$$

Construction de l'espace V_h

Etape 1 : mailler le domaine Ω



- un maillage de Ω est défini par la donnée de N points distincts dans Ω
- $(N+1)$ mailles $K_i = [x_i, x_{i+1}]$, $\forall i \in \{0 \cdots N\}$
- maillage uniforme : $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $\forall i \in \{0 \cdots (N+1)\}$

Etape 2 : fixer un comportement (simple) dans chaque maille

- Fonctions affines par morceaux

$$\{v_h : \Omega \to \mathbb{R};\ \forall i \in \{0 \cdots N\},\ v_h|K_i \in \mathbb{P}_1\}$$

où $\mathbb{P}_1 = \{p(x) = ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}\}$

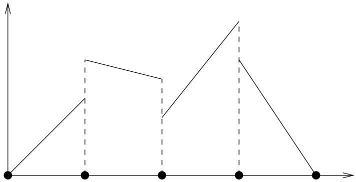
- A-t-on la conformité dans $H_0^1(\Omega)$?

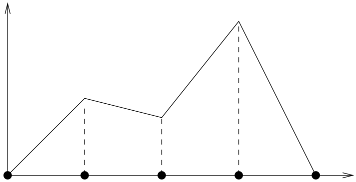
Construction de l'espace V_h

- Il faut imposer la nullité au bord
- Il faut imposer la continuité sur Ω

$$V_h^{(1)} = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega});\ \forall i \in \{0 \cdots N\},\ v_h \in \mathbb{P}_1;\ v_h(0) = v_h(1) = 0\}$$

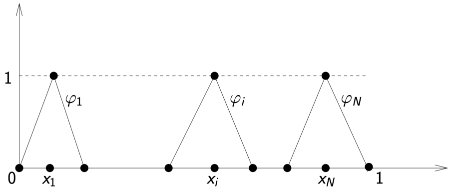
- On a $V_h^{(1)} \subset H_0^1(\Omega)$
- Pour tout $v_h \in V_h^{(1)}$, v_h' est constante par morceaux, obtenue en dérivant maille par maille





Fonctions chapeau

- Fonctions chapeau $\{\varphi_1 \cdots \varphi_N\}$



- On a $\varphi_i \in V_h^{(1)}$ et $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j \in \{1 \cdots N\}$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} & x \in K_{i-1} \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} & x \in K_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \varphi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in K_{i-1} \\ -\frac{1}{h} & x \in K_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Base de V_h

- $\dim(V_h^{(1)}) = N$ et $\{\varphi_1 \cdots \varphi_N\}$ est une base de $V_h^{(1)}$
- La famille est libre : $\forall(\alpha_1 \cdots \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \textstyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(x_j) = 0 \quad \forall j \in \{1 \cdots N\} \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \in \{1 \cdots N\} \end{aligned}$$

- La famille est génératrice : $\forall v_h \in V_h^{(1)}$,

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{N} v_h(x_i) \varphi_i(x)$$

  - ces deux fonctions sont affines par morceaux
  - elles coïncident en deux points distincts sur chaque maille

Assemblage de la matrice de rigidité (1)

- Rappel du terme générique

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_\Omega \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,\mathrm{d}x$$

- Observation essentielle : $A_{ij} \neq 0$ seulement si l'intersection des supports de φ_i et φ_j est de mesure non-nulle
- La matrice de rigidité est tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

- Que valent les coefficients diagonaux et extra-diagonaux ?

Assemblage de la matrice de rigidité (2)

- On calcule le coefficient diagonal

$$
\begin{aligned}
A_{ii} &= \int_\Omega \varphi_i'(x)\varphi_i'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{K_{i-1}\cup K_i} (\varphi_i'(x))^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{K_{i-1}} \cdots + \int_{K_i} \cdots = h\times\left(\frac{1}{h}\right)^2 + h\times\left(-\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{2}{h}
\end{aligned}
$$

- De même, $A_{i,i-1} = A_{i-1,i} = -\frac{1}{h}$
- Au final

$$
A = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\
0 & \cdots & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}
$$

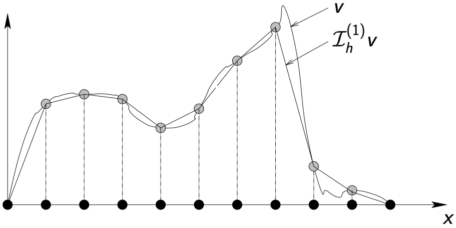
- En 1D, A a les dimensions de l'inverse d'une longueur

Interpolation

- Opérateur d'interpolation ($H_0^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ en 1D)

$$I_h^{(1)} : \begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) & \to & V_h \\ v & \mapsto & \sum_{i=1}^{N} v(x_i)\varphi \end{array}$$

$I_h^{(1)} v$ prend la même valeur que v en tous les sommets du maillage



- Théorème d'interpolation : $\exists C_I$ t.q. $\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\|v' - (I_h^{(1)} v)'\|_{L^2} \leq C_I h \|v''\|_{L^2}$$

v s'écarte de son interpolé affine lorsque sa courbure est grande.

- On considère le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

où $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ et $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$.

- la formulation variationnelle de ce problème consiste à chercher $u \in V = H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v_h \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,v) = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \tag{9}$$

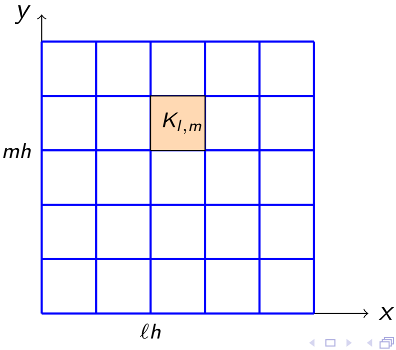
où

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x \tag{10}$$

Le maillage rectangulaire

- les nœuds sont les points $x_{l,m} = (lh, mh)$, $0 \leq l, m \leq M+1$;
- $K_i = \{x_{l,m}, x_{l+1,m}, x_{l+1,m+1}, x_{l,m+1}\}$ est le carré élémentaire de côté h.
- Le maillage est "presque" une partition du domaine $\overline{\Omega}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega} = \displaystyle\bigcup_{0 \leq l,m \leq M} K_{l,m} \\ \text{avec } (l_1, m_1) \neq (l_2, m_2) \Longrightarrow \mathring{K}_{l_1,m_1} \cap \mathring{K}_{l_2,m_2} = \varnothing \end{array} \right. \tag{11}$$



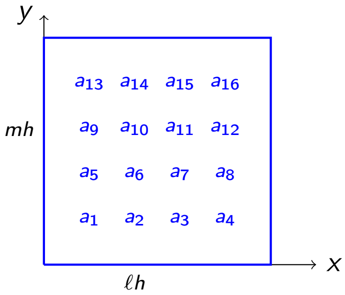
L'espace des polynômes d'interpolation Q_1

- $Q_1 = \text{ vect } (1, x_1, x_2, x_1x_2)$;
- une fonction v de Q_1 est déterminée de manière unique par ses valeurs aux sommets d'un carré $K_{l,m}$.
- la restriction de v à un côté du carré $K_{l,m}$ est une fonction affine et il suffit donc d'assurer la continuité de v aux extrémités du côté pour que la fonction v soit continue sur tout ce côté.
- Donc Ainsi la fonction v est continue sur $\overline{\Omega}$ si et seulement si elle est continue aux $(M+2)^2$ points $a_{l,m}$, $0 \leq l, m \leq M+1$.
- Par ailleurs, la fonction v est nulle sur Γ si et seulement si elle s'annule aux $4(M+1)$ points $a_{l,m}$ situés sur Γ.

Approximation : V_h

- $V \simeq V_h = \{v \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega});\ v|_\Gamma = 0;\ v|_{K_{l,m}} \in Q_1,\ 0 \leq l, m \leq M\}$
- Une fonction de l'espace V_h est déterminée de manière unique par les valeurs qu'elle prend en les points $a_{l,m}$, $1 \leq l, m \leq M$. $\dim V_h = M^2$
- On numérote de 1 à M^2 les points $a_{l,m}$ par la bijection

$$\mathscr{N} : (l, m) \mapsto i = l + M(m-1) \tag{12}$$



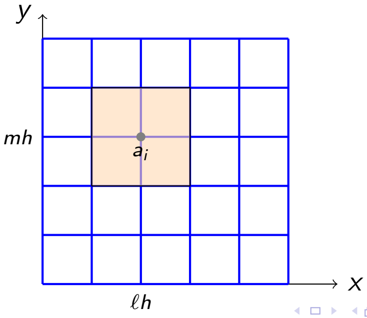
- On pose $a_i = a_{\mathscr{N}^{-1}(i)}$

Approximation : base de V_h

- Soit φ_i, $1 \leq i \leq M^2$, la fonction de V_h, définie par

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq M^2. \tag{13}$$

- La suite des fonctions φ_i, $1 \leq i \leq M^2$, forme une base de V_h
- Les composantes dans cette base d'une fonction $v \in V_h$ sont les nombres $v(a_i)$, $1 \leq i \leq M^2$.
- le support de la fonction φ_i est le carré de côtés parallèles aux axes, de longueur $2h$ et ayant pour centre le point a_i.

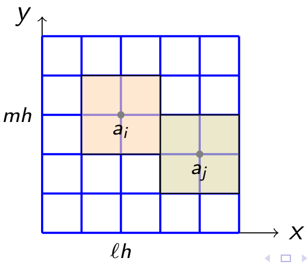


Approximation : u_h

- On cherche $u_h = \sum_{j=1}^{M^2} u_i\varphi_j \in V_h$, où $u_j = u_h(a_j), \quad 1 \leq j \leq M^2$
- $(u_j)_j$ est solution du système linéaire

$$\boxed{\sum_{j=1}^{I} a(\varphi_j, \varphi_i)u_j = \ell(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq M^2} \tag{14}$$

- La matrice $(a(\varphi_j, \varphi_i))_{1\leq i,j\leq I}$ est symétrique et définie positive ; elle est creuse car $a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$ sauf si les points a_i et a_j sont sommets d'un même carré $K_{l,m}$.



Matrice du système

- Matrice à bande $a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$ pour $|i - j| > d_{max} = M + 1$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	*	*			*	*										
2	*	*	*		*	*	*									
3		*	*	*		*	*	*								
4			*	*			*	*								
5	*	*			*	*			*	*						
6	*	*	*		*	*	*		*	*	*					
7		*	*	*		*	*	*		*	*	*				
8			*	*			*	*			*	*				
9					*	*			*	*			*	*		
10					*	*	*		*	*	*		*	*	*	
11						*	*	*		*	*	*		*	*	*
12							*	*			*	*			*	*
13									*	*			*	*		
14									*	*	*		*	*	*	
15										*	*	*		*	*	*
16											*	*			*	*

- matrice tridiagonale par blocs, les blocs étant eux-mêmes tridiagonaux.
- méthode de Cholesky ou la méthode de surrelaxation par blocs.

Le système linéaire

- il est agréable désormais de noter les inconnues $u_{l,m} = u_{\mathcal{N}(l,m)}$
- $u_{l,m}$ n'est autre que $u_h(a_{l,m})$
- Nous posons,

$$f_{l,m} = \frac{1}{h^2} \int_\Omega f \varphi_{l,m} \, \mathrm{d}x, \quad 1 \leq l, m \leq M,$$

- les calculs élémentaires montrent que le système s'écrit

$$\begin{cases} 3u_{l,m} - \frac{1}{3} \sum_{\alpha,\beta=-1}^{+1} u_{l+\alpha,m+\beta} = h^2 f_{l,m}, & 1 \leq l, m \leq M, \\ u_{l,0} = u_{l,M+1} = 0, \quad 0 \leq l \leq M+1, \\ u_{0,m} = u_{M+1,m} = 0, \quad 0 \leq m \leq M+1. \end{cases}$$

- schéma à 9 points.

Le second membre

- sauf cas particulier, on sera incapable de calculer les quantités $f_{l,m}$.
- formule du point central : si ψ est une fonction continue sur le carré $K_{l,m}$ on a la formule de quadrature qui est exacte pour $\psi \in Q_1$:

$$\int_{K_{l,m}} \psi(x)\,\mathrm{d}x = h^2\varphi\left(lh + \frac{h}{2}, mh + \frac{h}{2}\right) \tag{15}$$

- on utilisera la même règle dans chacun des 4 carrés de côté h qui constituent le support de la fonction $\varphi_{l,m}$.

$$\begin{aligned} f_{l,m} = \frac{1}{4} \quad & \left\{ f\left(lh - \frac{h}{2}, mh - \frac{h}{2}\right) + f\left(lh - \frac{h}{2}, mh + \frac{h}{2}\right) \right. \\ & \left. + f\left(lh + \frac{h}{2}, mh - \frac{h}{2}\right) + f\left(lh + \frac{h}{2}, mh + \frac{h}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

- De même, la formule du trapèze se généralise aisément en la formule :

$$\int_{K_{l,m}} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h^2}{4}\left(\psi(a_{l,m}) + \psi(a_{l+1,m}) + \psi(a_{l+1,m+1}) + \psi(a_{l,m+1})\right) \tag{16}$$

Décomposition de $\overline{\Omega}$ à l'aide de triangles

- En partageant chaque carré $K_{l,m}$ en deux triangles $K_{l,m,1}$ et $K_{l,m,2}$ suivant la diagonale parallèle à la première bissectrice,