TD 1

Dans ce TD, on va étudier d'autres schémas pour la résolution numérique de l'équation de la chaleur prise en exemple dans le cours :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} &=& 0 & \forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(0,t) = u(1,t) &=& 0, & \\ u(x,0) &=& u_0(x) & \forall x \in [0,1]. \end{array}\right.$$

On reprend la même discrétisation avec $h = \dfrac{1}{N+1}$ et τ le pas de temps. On note u_j^n la valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ avec $x_j = jh$ et $t_n = n\tau$. On reprend la même discrétisation des conditions initiale et aux limites.

1 Schéma d'Euler implicite

On considère d'abord le schéma dit d'Euler implicite qui est le suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

1. Montrer que ce schéma est consistant avec l'équation de la chaleur, qu'il est précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

Posons $t = t_{n+1}$ et $x = x_j$ pour alléger les notations.
Pour déterminer l'erreur de troncature, on va dans le schéma remplacer u_j^n par $u(x, t-\tau)$, u_{j-1}^{n+1} par $u(x-h,t)$, u_j^{n+1} par $u(x,t)$ et u_{j+1}^{n+1} par $u(x+h,t)$.
À l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2 de u suivant t, on a

$$u(x, t-\tau) = u(x,t) - \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau^2)$$

D'où

$$\frac{u(x,t) - u(x,t-\tau)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau)$$

Par ailleurs, en considérant la variation de x, on a

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^4)$$

et de la même façon

$$u(x-h,t) = u(x,t) - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^4)$$

$$\frac{u(x-h,t)-2u(x,t)+u(x+h,t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^2)$$

En remplacant u_j^n dans le schéma par $u(x_j, t_n)$, on se retrouve avec l'erreur de troncature :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau) - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^2)\right) =$$

$$-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\tau + h^2)$$

qui converge bien vers 0 pour $h \to 0, \tau \to 0$. Le schéma est bien consistant, et précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

2. On pose comme dans le cours $u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$.

Montrer que le schéma d'équation se traduit sous la forme matricielle :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M_i u^{n+1} = u^n$$

Dans le schéma, isolons u_j^n, en posant $c = \dfrac{\nu\tau}{h^2}$:

$$u_j^n = -cu_{j-1}^{n+1} + (1+2c)u_j^{n+1} - cu_{j+1}^{n+1}$$

Précisons les équations, en notant leur forme particulières pour $j = 1$ et $j = N$ lorsque l'on prend en compte les conditions aux limites :

$$\begin{array}{rcl}
u_1^n & = & (1+2c)u_1^{n+1} - cu_2^{n+1} \\
u_2^n & = & -cu_1^{n+1} + (1+2c)u_2^{n+1} - cu_3^{n+1} \\
u_3^n & = & -cu_2^{n+1} + (1+2c)u_3^{n+1} - cu_4^{n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
u_{N-1}^n & = & -cu_{N-2}^{n+1} + (1+2c)u_{N-1}^{n+1} - cu_N^{n+1} \\
u_N^n & = & -cu_{N-1}^{n+1} + (1+2c)u_N^{n+1}
\end{array}$$

On a bien $u^n = M_i u^{n+1}$ avec

$$M_i = \begin{pmatrix}
1+2c & -c & 0 & \cdots & 0 \\
-c & 1+2c & -c & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & 0 & -c & 1+2c & -c \\
0 & \cdots & 0 & -c & 1+2c
\end{pmatrix}$$

3. Expliquer rapidement comment on programmerait l'algorithme dans ce cas.

u^0 étant connu par la condition initiale, on calcule de proche en proche les u^n successifs.
u^1 est la solution du système $M_i u^1 = u^0$.
Puis u^2 est la solution du système $M_i u^2 = u^1$ et ainsi de suite...
Il faut donc résoudre successivement des systèmes décrits par $M_i u^{n+1} = u^n$.

4. En analysant les valeurs propres de M_i, montrer que l'on a avec la norme 2, l'inégalité

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\|$$

Comme M_i s'écrit $M_i = I_N + cA$ avec A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

dont on sait que les valeurs propres sont toutes entre 0 et 4, il s'avère que M_i a ses valeurs propres comprises entre 1 et $1 + 4c > 1$.
Donc M_i^{-1} a ses valeurs propres comprises entre $\dfrac{1}{1+4c}$ et 1.
Comme M_i^{-1} est symétrique définie positive, sa norme est la plus grande valeur propre et donc $\|M_i^{-1}\| \leq 1$.
Comme $u^{n+1} = M_i^{-1} u^n$, on a donc $\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\|$.

5. En déduire la stabilité du schéma implicite en norme 2.

On a donc $\|u^n\| \leq \|u^0\|$. Le schéma est inconditionnellement stable.

6. A l'aide du principe du maximum discret, montrer la stabilité du schéma d'Euler implicite en norme ∞.

Appliquons le principe du maximum discret.
Soit $m \leq 0$ et $M \geq 0$ tels que $\forall j, m \leq u_j^n \leq M$.
On a

$$(1+2c)u_j^{n+1} = u_j^n + c u_{j-1}^{n+1} + c u_{j+1}^{n+1}$$

Considérons j l'indice pour lequel u_j^{n+1} prend sa valeur maximale (on la note $\hat{M}$).
Pour ce j, on a $u_j^n \leq M$, $u_{j-1}^{n+1} \leq \hat{M}$ et $u_{j+1}^{n+1} \leq \hat{M}$ et $u_j^{n+1} = \hat{M}$.

On a donc
$$(1+2c)\hat{M} \leq M + c\hat{M} + c\hat{M}$$
et donc $\hat{M} \leq M$.
Considérons j maintenant l'indice pour lequel $u_j^{n+1} = \hat{m}$, la valeur minimale.
De façon analogue que pour le maximum, on a
$$(1+2c)\hat{m} \geq m + c\hat{m} + c\hat{m}$$
On a donc
$$m \leq \hat{m}$$
et les u_j^{n+1} sont bien tous aussi dans $[m, M]$. De proche en proche, le principe du maximum discret est vérifié. Le schéma est donc stable pour la norme L^∞.

2 Schéma de Crank-Nicolson

Le principe du schéma de Crank-Nicolson est de faire la moyenne des deux schémas d'Euler explicite et implicite. On arrive au schéma suivant :
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2h^2} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2h^2} = 0$$

1. Montrer que ce schéma est consistant, précis d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace. Posons $t = t_n$ et $x = x_j$.

$$u(x, t+\tau) = u(x,t) + \tau\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + o(\tau^3)$$
D'où
$$\frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + o(\tau^2)$$
On a déjà vu que
$$\frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) + o(h^2)$$
Et donc :
$$\frac{u(x-h,t+\tau) - 2u(x,t+\tau) + u(x+h,t+\tau)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t+\tau) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t+\tau) + o(h^2)$$
D'où :

$$\frac{u(x-h,t+\tau)-2u(x,t+\tau)+u(x+h,t+\tau)}{h^2} = \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+\tau\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(x,t)+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x,t)+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)+o(\tau^2+h^2)$$

(Notons qu'un terme de l'ordre de τh^2 est négligeable devant h^2)
En remplaçant dans le schéma, il demeure :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\frac{\nu}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\tau\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \\ +\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big)+o(\tau^2+h^2)$$

Or u étant une solution de l'équation de la chaleur, on peut écrire que

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

et en dérivant par rapport à t cette égalité :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nu\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}=0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}$$

L'erreur de troncature est donc :

$$-\frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\nu\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+o(\tau^2+h^2)$$

Le schéma est bien consistant, précis d'ordre 2 en temps et 2 en espace.

2. Présenter ce schéma sous forme matricielle et décrire sa mise en œuvre pratique.

Multiplions le schéma par τ, posons $c=\frac{\nu\tau}{h^2}$ et agençons les termes en fonction de leur indice de temps :

$$-\frac{c}{2}u_{j-1}^{n+1}+(1+c)u_j^{n+1}-\frac{c}{2}u_{j+1}^{n+1}=\frac{c}{2}u_{j-1}^{n}+(1-c)u_j^{n}+\frac{c}{2}u_{j+1}^{n}$$

On est amené à poser deux matrices

$$M_1=\begin{pmatrix} 1+c & -\frac{c}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{c}{2} & 1+c & -\frac{c}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -\frac{c}{2} & 1+c & -\frac{c}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{c}{2} & 1+c \end{pmatrix}$$

et

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1-c & \frac{c}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{c}{2} & 1-c & \frac{c}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \frac{c}{2} & 1-c & \frac{c}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{c}{2} & 1-c \end{pmatrix}$$

de sorte que la récurrence s'écrit $M_1 u^{n+1} = M_2 u^n$.
A partir de u^n, on calcule $M_2 u^n$ puis on résoud le système $M_1 u^{n+1} = M_2 u^n$ pour déterminer u^{n+1}.

3. Etudier la convergence du schéma en norme L^2 en appliquant la condition de stabilité de Von Neumann.

Remplaçons dans le schéma u_j^n par $A(\omega)^n e^{ij\omega h}$ comme l'indique la condition de Von Neumann. Opérons immédiatement aux simplifications par u_j^n.
Le schéma donne :

$$\frac{A(\omega)-1}{\tau} - \nu \frac{e^{-i\omega h} - 2 + e^{i\omega h}}{2h^2} - \nu A(\omega) \frac{e^{-i\omega h} - 2 + e^{i\omega h}}{2h^2} = 0$$

D'où

$$A(\omega)(1 + c(1-\cos(\omega h)) = 1 + c(-1+\cos(\omega h))$$

D'où

$$A(\omega) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \text{ avec } \lambda = c(1-\cos(\omega h))$$

On a bien $\lambda \in \mathbb{R}^+$, et donc $A(\omega)$ est un réel avec $|A(\omega)| \leq 1$ puisque $|1-\lambda| \leq 1+\lambda$ (inégalité triangulaire).
La condition de stabilité de Von Neumann est vérifiée, le schéma est inconditionnellement stable en norme L^2.

3 Autres conditions aux limites

1. On considère la même équation de la chaleur avec cette fois, comme condition aux limites :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(0,t) = 1 \quad \text{et} \quad u(1,t) = -1$$

Comment adapter la formulation des trois schémas considérés pour en tenir compte ?

(a) **Euler explicite**

On va poser $u_0^n = 1$ et $u_{N+1}^n = -1$ pour rendre compte des conditions aux limites.
Dans le schéma, u_0^n intervient dans le calcul de u_1^{n+1} puisque

$$u_1^{n+1} = cu_0^n + (1-2c)u_1^n + cu_2^n$$

On écrira donc $u_1^{n+1} = (1-2c)u_1^n + cu_2^n + c$
De même il faudra adapter le calcul de u_N^{n+1} avec $u_N^{n+1} = cu_{N-1}^n + (1-2c)u_N^n - c$.
On aura donc une récurrence $u^{n+1} = M_e u^n + v$ avec v le vecteur de composantes

$$v = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}.$$

(b) **Schéma d'Euler implicite** De la même façon, on aura des équations particulières pour les cas $j = 1$ et $j = N$:

$$u_1^n = (1+2c)u_1^{n+1} - cu_2^{n+1} - c$$

$$u_N^n = -cu_{N-1}^{n+1} + (1+2c)u_N^{n+1} + c$$

On aura une récurrence $M_i u^{n+1} = u^n + v$ où v est le vecteur considéré pour Euler explicite plus haut.

(c) **Schéma de Crank-Nicolson**

On aura là aussi des équations spécifiques pour les cas $j = 1$ et $j = N$:

$$(1+c)u_1^{n+1} - \frac{c}{2}u_2^{n+1} = (1-c)u_1^n + \frac{c}{2}u_2^n + c$$

Et

$$-\frac{c}{2}u_{N-1}^{n+1} + (1+c)u_N^{n+1} = \frac{c}{2}u_{N-1}^n + (1-c)u_N^n - c$$

La formulation matricielle sera donc $M_1 u^{n+1} = M_2 u^n + v$.
Dans les trois cas, il faudra inclure le terme v dans les itérations.

2. On considère la condition de Neumann $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$.
On fait le choix de la discrétiser par $u_0^n = u_1^n$ et $u_N^n = u_{N+1}^n$. Comment adapter les schémas ?

(a) **Euler explicite**
Dans le schéma, u_0^n intervient dans le calcul de u_1^{n+1} puisque

$$u_1^{n+1} = cu_0^n + (1-2c)u_1^n + cu_2^n$$

On écrira donc $u_1^{n+1} = (1-c)u_1^n + cu_2^n + c$
De même il faudra adapter le calcul de u_N^{n+1} avec $u_N^{n+1} = cu_{N-1}^n + (1-c)u_N^n$.
On aura donc une récurrence $u^{n+1} = M_e u^n$ avec M_e qui sera cette fois :

$$M_e = \begin{pmatrix} 1-c & c & 0 & \cdots & 0 \\ c & 1-2c & c & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & c & 1-2c & c \\ 0 & \cdots & 0 & c & 1-c \end{pmatrix}$$

(Avec les termes diagonaux exceptionnels en début et fin de diagonale, $1-c$ au lieu de $1-2c$).

(b) Schéma d'Euler implicite De la même façon, on aura des équations particulières pour les cas $j = 1$ et $j = N$:

$$u_1^n = (1+c)u_1^{n+1} - cu_2^{n+1}$$
$$u_N^n = -cu_{N-1}^{n+1} + (1+c)u_N^{n+1}$$

On aura une récurrence $M_i u^{n+1} = u^n$ avec le premier et terme diagonal de M_i qui seront $1+c$ au lieu de $1+2c$ pour les autres.

(c) Schéma de Crank-Nicolson
On aura là aussi des équations spécifiques pour les cas $j = 1$ et $j = N$:

$$(1+\frac{c}{2})u_1^{n+1} - \frac{c}{2}u_2^{n+1} = (1-\frac{c}{2})u_1^n + \frac{c}{2}u_2^n + c$$

La formulation matricielle sera donc $M_1 u^{n+1} = M_2 u^n$. Dans M_1 le premier et le dernier terme de la diagonale sera $1+\frac{c}{2}$. Dans M_2 ce sera $1-\frac{c}{2}$.

3. On considère la condition de périodicité $u(0,t) = u(1,t)$. Comment adapter les schémas ? On précisera notamment les formats des vecteurs et matrices considérés.

En conservant la notation $h = \dfrac{1}{N+1}$, on considérera $u_0^n = u_{N+1}^n$, et de même $u_{-1}^n = u_N^n$. Cette fois, il faudra considérer comme à calculer tous les u_j^n pour $0 \leq j \leq N$. On pourra poser

$$u^n = \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$$

qui sera donc un vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$ cette fois.
Dans le cas d'Euler explicite, il faudra donc considérer la matrice suivante pour écrire $u^{n+1} = M_e u^n$

$$M_e = \begin{pmatrix} 1-2c & c & 0 & 0 & \dots & 0 & c \\ c & 1-2c & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & 1-2c & c & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-2c & c \\ c & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 1-2c \end{pmatrix}$$

Remarquer que la matrice est de format $(N+1, N+1)$. On pourrait préférer, pour ce cas, noter le pas $h = \dfrac{1}{N}$ pour avoir des objets de taille N.
Pour les autres schémas, les matrices considérées sont à modifier de la même façon.