Esiee-Paris - cours d'algorithmique - feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6

Novembre 2023 – R. Natowicz, I. Alamé, A. Çela, X. Hilaire, T. Wu, W. Xu

Exercice 10. Plus longue sous-séquence croissante.

Un exemple suffit pour comprendre le propos.

Une séquence S représentée dans un tableau d'entiers : $S[0:n] = [6, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 7, 6, 8, 0, 1]$, $n = 13$.
Indiquons les indices des éléments de la séquence pour faciliter la lecture des sous-séquences croissantes :
$S[0:n] = [6_0, 5_1, 1_2, 2_3, 3_4, 4_5, 5_6, 2_7, 7_8, 6_9, 8_{10}, 0_{11}, 1_{12}]$.
Quelques sous-séquences croissantes :

- $(S[0] = 6)$ séquence de longueur 1
- $(S[1] = 5)$ de longueur 1
- $(S[1] = 5) \to (S[9] = 6)$ de longueur 2
- $(S[6] = 5) \to (S[8] = 7) \to (S[10] = 8)$ de longueur 3

Une plus longue sous-séquence croissante (plssc) :

- $(S[2] = 1) \to (S[3] = 2) \to (S[4] = 3) \to (S[5] = 4) \to (S[6] = 5) \to (S[9] = 6) \to (S[10] = 8)$ de longueur 7.

La séquence S est donnée. On veut calculer une plssc de S.

Soit $S = s_0,\ldots,s_{n-1}$ la séquence. Nous lui associons le graphe $G(S)$ dont les sommets sont les indices. Le sommet i envoie une flèche vers le sommet j si et seulement si $i < j$ et $s_i < s_j$. Voir figure ci-dessous. Avec cette représentation le calcul d'une plssc de la séquence S est le calcul d'un plus long chemin dans le graphe.

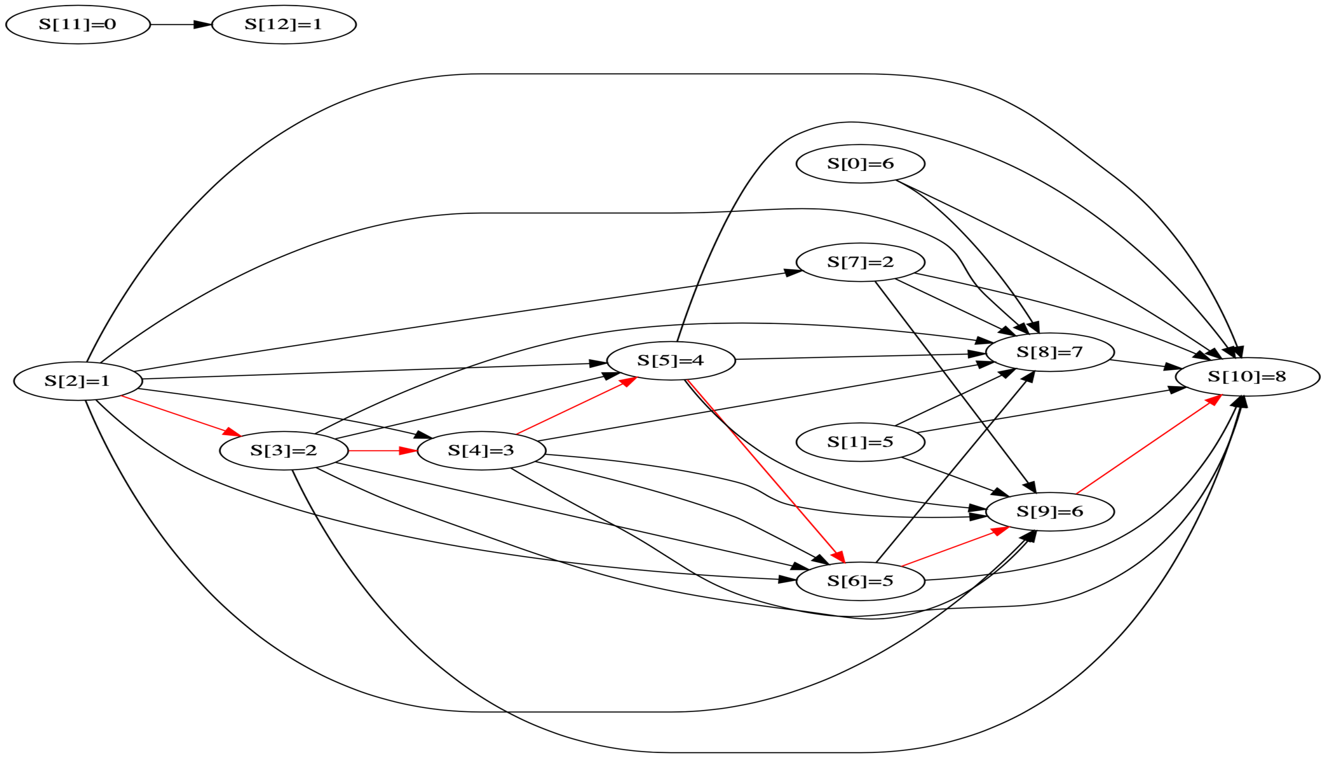

FIG. 1 – *Graphe $G(S)$. En rouge : un plus long chemin nous donne une plssc.*

On représente le graphe $G(S)$ par le tableau `liste[] G` des listes d'arcs du graphe.

1. Écrire une fonction `Liste[] graphe(int[] S)` qui retourne le graphe $G(S)$;
2. réécrire la fonction `Liste[] symetrique(Liste[] G)` (voir cours) qui retourne le graphe G' symétrique du graphe G ;
3. on note $l(j)$ la longueur maximum d'une plssc finissant à l'indice j et pred(j) l'ensemble des sommets du graphe qui envoient une flèche sur j. Donnez la valeur $l(j)$ pour tout j tel que pred$(j) = \emptyset$ et donner l'expression récurrente de $l(j)$ pour tout j tel que pred$(j) \neq \emptyset$.
4. écrire la fonction `int[][] calculerLA(Liste[] G)` qui retourne le tableau $L[0:n]$ de terme général $L[j] = l(j)$, longueur d'une plssc finissant en j, et le tableau $A = \arg L$, de terme général $A[j] = a(j) = \arg l(j)$;
5. écrire une fonction `String plssc(int[] A, int[] S, int j)` qui retourne une plssc de la séquence S finissant en j ;
6. écrire une fonction `String plssc(int[][] LA, int[] S)` qui retourne une plssc de la séquence S ;
7. question facultative (hors TD) : traiter ce même problème sans construire le graphe $G(S)$.