TECE: Sujet de rattrapage

Ibrahim ALAME

27/02/2024

1

1. Calculer les intégrales de Dirichlet suivant :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\mathrm{d}t$$

   On pourra écrire $I = \dfrac{I+J}{2}$ et faire des changements de variables simples.

2. Calculer

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\infty} \frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

   On montrera que $I = \dfrac{I+J}{2}$ et on fera le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$ dans l'intégrale obtenue.

2

Soit f une fonction réelle intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la transformée de Fourier de f notée $\hat{f}$ par :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}\mathrm{d}t$$

Si de plus f et $\hat{f}$ sont de carré intégrable on a alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t$$

Calculer les transformées de Fourier des fonctions Π et Λ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \Lambda(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire les valeurs des intégrales :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\mathrm{d}x$$

3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale

$$J_n = \int_0^\infty \frac{1}{(x^3+1)^n} \mathrm{d}x$$

1. Étudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est convergente.
2. Calculer J_1.
3. Montrer que pour $n \geq 2$ on a $J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} J_n$.
4. En déduire J_n pour $n \geq 1$.
5. Étudier la nature des suites et séries de termes généraux u_n, $(-1)^n u_n$, $\frac{u_n}{n}$. On pourra étudier la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$.
6. Déterminer la somme de la série de terme général $(-1)^{n-1} u_n$.

4

Soit $R > 0$. On note les domaines suivants de $\mathbb{R}^2$:

— $A_R = [0, R] \times [0, R]$

— $B_R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$

On pose

$$I(R) = \iint_{A_R} \exp(-(x^2+y^2)) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad J(R) = \iint_{B_R} \exp(-(x^2+y^2)) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(On rappelle que si $f(x, y)$ est une fonction positive et que si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux domaines de $\mathbb{R}^2$ tels que $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}_2$ alors $\int\int_{\mathscr{D}_1} \exp(-(x^2+y^2)) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \int\int_{\mathscr{D}_2} \exp(-(x^2+y^2)) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

1. A l'aide d'une majoration appropriée, montrer que l'intégrale
$$\int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t$$
est convergente.
2. Montrer que $J(R) \leq I(R) \leq J(R\sqrt{2})$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t$.
4. Calculer l'intégrale $K = \int_0^\infty t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

5

1. Déterminer l'ensemble de définition de $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.
2. Calculer les limites de F en 0,1 et $+\infty$. On pourra utiliser l'inégalité de la moyenne.
3. On suppose F désormais prolongée par continuité en 0 et 1. Déterminer les variation de F et une allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Préciser la convexité de F.
4. Déterminer un développement limité de F à l'ordre 3 en 1.