

TD 1 Analyse numérique (B1-TP1)

Ibrahim ALAME

03/02/2023

1 Interpolation

1. (a) Méthode directe : On cherche a , b et c solution de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi^2 & \pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$P(x) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x$$

(b) Méthode de Lagrange :

$$P(x) = \sin(0)L_0(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)L_1(x) + \sin(\pi)L_2(x) = L_1(x) = \frac{(x-0)(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)} = \frac{-4}{\pi^2}x(x-\pi)$$

(c) Méthode de Newton :

x_i	y_i	$\Delta[x_{i-1}, x_i]$	$\Delta[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0		
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{2}{\pi}$	
π	0	$-\frac{2}{\pi}$	$-\frac{4}{\pi^2}$

D'où

$$\begin{aligned} P(x) &= \Delta[x_0] + \Delta[x_0, x_1](x - x_0) + \Delta[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0 + \frac{2}{\pi}(x - 0) - \frac{4}{\pi^2}(x - 0)(x - \frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x \end{aligned}$$

2. (a) Méthode directe : On cherche a , b , c et d solution de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\pi^3}{8} & \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi^3 & \pi^2 & \pi & 1 \\ \frac{27\pi^3}{8} & \frac{9\pi^2}{4} & \frac{3\pi}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$P(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x$$

(b) Méthode de Lagrange :

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sin(0)L_0(x) + \sin(\frac{\pi}{2})L_1(x) + \sin(\pi)L_2(x) + \sin(\frac{3\pi}{2})L_3(x) \\
&= L_1(x) - L_3(x) \\
&= \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} - \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\pi)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})} \\
&= \frac{4}{\pi^3}x(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2}) - \frac{4}{3\pi^3}x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)
\end{aligned}$$

(c) Méthode de Newton :

x_i	y_i	$\Delta[x_{i-1}, x_i]$	$\Delta[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$\Delta[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0			
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{2}{\pi}$		
π	0	$-\frac{2}{\pi}$	$-\frac{4}{\pi^2}$	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$-\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{8}{3\pi^3}$

D'où

$$\begin{aligned}
P(x) &= y_0 + \Delta[x_0, x_1](x - x_0) + \Delta[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + \Delta[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 0 + \frac{2}{\pi}(x - 0) - \frac{4}{\pi^2}(x - 0)(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{8}{3\pi^3}(x - 0)(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi) \\
&= \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{16}{3\pi}x
\end{aligned}$$

La méthode de Newton est la plus simple, car elle réutilise les coefficients déjà calculés.

2 Convergence de l'interpolation de Lagrange

1.

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x - \alpha)^{n+1}}$$

2. Nous avons

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

où $-1 < \xi < 1$. Donc

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\Lambda_n}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{|\xi - \alpha|^{n+2}} \sim \frac{2^{n+1}}{e n \ln(n)} \cdot \frac{1}{|\xi - \alpha|^{n+2}} \leq \frac{1}{2e n \ln(n)}$$

car d'après le cours la constante de Lebesgue $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{e n \ln(n)}$ et $|\xi - \alpha| > 2$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n\|_{\infty} = 0$$

3.

$$\begin{cases} \text{Pour } x_i < x < x_{i+1} \\ s_n(x) &= f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{1}{x_i - \alpha} - \frac{1}{(x_i - \alpha)(x_{i+1} - \alpha)} (x - x_i) \end{cases}$$

4. On fait un développement de Taylor à l'ordre 1 de f en $x = x_i$:

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2}f''(\xi)$$

soit

$$f(x) = \frac{1}{x_i - \alpha} + (x - x_i)\frac{-1}{(x_i - \alpha)^2} + \frac{(x - x_i)^2}{2}\frac{2}{(\xi - \alpha)^3}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) - s_n(x) &= (x - x_i) \left[\frac{-1}{(x_i - \alpha)^2} + \frac{1}{(x_i - \alpha)(x_{i+1} - \alpha)} \right] + \frac{(x - x_i)^2}{(\xi - \alpha)^3} \\ &= \frac{(x_{i+1} - x_i)(x - x_i)}{(x_i - \alpha)^2(x_{i+1} - \alpha)} + \frac{(x - x_i)^2}{(\xi - \alpha)^3} \end{aligned}$$

$$|f(x) - s_n(x)| \leq (c_1 h^2 + c_2 h^2) = \frac{4(c_1 + c_2)}{n^2} = \frac{c}{n^2}$$

car $h = \frac{2}{n}$, ainsi

$$\|f - s_n\|_\infty \leq \frac{c}{n^2}$$

et donc que s_n converge uniformément vers f lorsque n tend vers l'infini.

3 Moindre carrés discrets

On a

$$\overline{x^k} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n} \quad \text{et} \quad \overline{x^k y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k y_i}{n}$$

On trouve

$$\overline{x} = \frac{1}{2} \quad \overline{y} = -\frac{1}{6} \quad \overline{x^2} = \frac{19}{6} \quad \overline{x^3} = \frac{9}{2} \quad \overline{x^4} = \frac{115}{6} \quad \overline{xy} = -\frac{5}{2} \quad \overline{x^2 y} = \frac{19}{6}$$

D'où le système

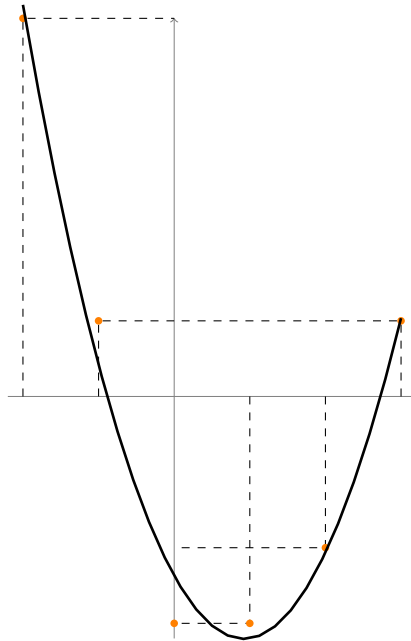
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{19}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{19}{6} & \frac{9}{2} \\ \frac{19}{6} & \frac{9}{2} & \frac{115}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

On trouve

$$a = \frac{55}{56} \quad b = \frac{-507}{280} \quad c = \frac{-83}{35}$$

D'où le polynôme :

$$P(x) = \frac{55}{56}x^2 - \frac{507}{280}x - \frac{83}{35}$$



4 Intégration numérique

1.

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 \simeq 0.693$$

2. On a $h = \frac{1}{3}$ et $x_i = 1 + i/3$ donc

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = 2$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \simeq h \left(\frac{f(1) + f(2)}{2} + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \right) = \frac{7}{10} = 0.7$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant convexe, la méthode donne alors une valeur approchée par excès.

4.

$$\left| \frac{(b-a)^4}{12n^2} f''(\xi) \right| \leq 10^{-4}$$

Donc

$$\left| \frac{1}{12n^2} 2 \right| \leq 10^{-4}$$

$$n^2 \geq 10000/6$$

$$n \geq 100/\sqrt{6}$$

$$n \geq 41$$

5

6

7

8

9

10

11

12

Intégration numérique :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq \frac{4}{3}f\left(-\frac{\xi}{2}\right) + \frac{2}{3}f(\xi)$$

1. La formule est exacte pour $f(x) = 1$ et $f(x) = x$. Pour $f(x) = x^2$ nous avons

$$\frac{2}{3} = \xi^2$$

donc $\xi = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et avec cette valeur la formule n'est plus exacte pour $f(x) = x^3$ donc la méthode est d'ordre 2.

2. On fait $x = \lambda t + \mu$. En $x = a$, $t = -1$ et en $x = b$, $t = 1$:

$$a = -\lambda + \mu$$

$$b = \lambda + \mu$$

D'où le changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}\right)dt$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2} \left[\frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{\xi}{2}\frac{b-a}{2}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2} + \xi\frac{b-a}{2}\right) \right]$$

3. Nous avons

$$\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)dx \simeq h \left[\frac{4}{3}f\left(x_{2i} - \frac{\xi}{2}h\right) + \frac{2}{3}f(x_{2i} + \xi h) \right]$$

$$\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)dx \simeq \frac{2h}{3} \left[2f\left(x_{2i} - \frac{h}{\sqrt{6}}\right) + f\left(x_{2i} + \sqrt{\frac{2}{3}}h\right) \right]$$

où $x_k = a + kh = -1 + kh$, $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_{2i+1} = -1 + (2i+1)h$ et $x_{2i-1} = -1 + (2i-1)h$
D'où

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)dx \simeq \frac{b-a}{3n} \sum_{i=1}^n \left[2f\left(a + \left(i - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + \left(i + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\frac{b-a}{n}\right) \right]$$

13

Formule de Quadrature :

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f'(\xi)$$

$$E(f) = \int_0^1 f(x)dx - [\omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f'(\xi)]$$

1. On trouve $\xi = \frac{1}{2}$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \frac{1}{6}$ et $\omega_2 = \frac{1}{3}$.

2.

$$E(f) = \int_0^1 f(x)dx - \left[f(0) + \frac{1}{6}f'(0) + \frac{1}{3}f'\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$E(x \mapsto x^4) = \frac{1}{30}$ donc la méthode est d'ordre 3.

3. On fait le changement de variable $x = a + t(b-a)$:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_0^1 f(a + t(b-a))dt$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) \left[f(a) + \frac{1}{6}f'(a) + \frac{1}{3}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]$$

14

1. (a) Pour que la formule soit exacte pour $f(x) = 1$, il faut $\omega_1 + \omega_2 = 1$. Et pour qu'elle soit exacte pour $f(x) = x$, il faut $\omega_2 \alpha = \frac{1}{2}$. Ce qui amène à $\omega_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha}$ et $\omega_2 = \frac{1}{2\alpha}$.

(b) Pour qu'elle soit exacte pour $f(x) = x^2$, il faut $\omega_2 \alpha^2 = \frac{1}{3}$, donc $\alpha = \frac{2}{3}$. Et donc $\omega_1 = \frac{1}{4}$ et $\omega_2 = \frac{3}{4}$. On a en posant $x = hu$,

$$\int_0^h f(x)dx = h \int_0^1 f(hu)du \simeq \frac{h}{4} \left[f(0) + 3f\left(\frac{2}{3}h\right) \right]$$

2. (a) On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(c)x^3$$

avec c compris entre 0 et x . On pose

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

qui est bien polynôme de degré au plus 2 et $R(x) = \frac{1}{6}f'''(c)x^3$. On vérifie aisément l'inégalité voulue.

(b) De la majoration $|R(x)| \leq \frac{M_3}{6}x^3$, on tire :

$$\left| \int_0^h R(x) dx \right| \leq \int_0^h |R(x)| dx \leq \int_0^h \frac{M_3}{6} x^3 dx = \frac{M_3 h^4}{24}$$

Et, en tenant de compte que $R(0) = 0$ (inégalité pour $x = 0$), on a aussi :

$$|Q(R)| = \left| \frac{h}{4} R(0) + \frac{3h}{4} R\left(\frac{2}{3}h\right) \right| \leq \frac{3h}{4} \frac{M_3}{6} \left(\frac{2}{3}h\right)^3 = \frac{M_3 h^4}{27}$$

On a enfin

$$|E(R)| = |I(R) - Q(R)| \leq |I(R)| + |Q(R)| \leq \frac{17}{216} M_3 h^4$$

(c) Par linéarité, $I(f) = I(P) + I(R)$ et $Q(f) = Q(P) + Q(R)$. Comme la formule est exacte pour P (puisque'elle l'est sur tout polynôme de degré 2), $I(P) = Q(P)$ et donc $E(f) = E(R)$. Et donc

$$|E(f)| \leq \frac{17}{216} M_3 h^4$$

3. (a) On pose $x_i = a + ih$. On a

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^h f(x_i+u) du \simeq \frac{h}{4} \sum_{i=0}^{N-1} \left[f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{2}{3}h\right) \right]$$

(b) On note $M_3 = \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(3)}(x)|$.

L'erreur sur chaque intervalle sera majorée par $\frac{17}{216} M_3 h^4$ et donc l'erreur totale par $\frac{17}{216} M_3 N h^4 = \frac{17}{216} M_3 (b-a) h^3$.

15

16

17

Polynômes orthogonaux :

1. Par intégration par parties

2. On trouve $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$

3.

$$\begin{aligned} P_3(X) &= \frac{1}{3!2^3} \frac{d^3}{dX^3} [(X^2 - 1)^3] \\ &= \frac{1}{6 \times 8} \frac{d^2}{dX^2} [3(X^2 - 1)^2 \times 2X] \\ &= \frac{1}{8} \frac{d}{dX} [2(X^2 - 1) \times 2X^2 + (X^2 - 1)^2] \\ &= \frac{1}{8} \frac{d}{dX} [5X^4 - 6X^2 + 1] \\ &= \frac{1}{2} (5X^3 - 3X) \end{aligned}$$

4. Les points ξ_i , $i = 1, 2, 3$ sont les racines de P_3 d'où

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Les 3 poids associés se calculent par la formule :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \omega_i = \frac{2}{(1 - \xi_i^2)P'_n(\xi_i)^2}$$

D'où

$$\omega_1 = \frac{5}{9}, \quad \omega_2 = \frac{8}{9}, \quad \omega_3 = \frac{5}{9}$$

Et donc

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \simeq \frac{1}{9} \left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right]$$

Par changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{18} \left[5f\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{b-a}{2}\right) + 8f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 5f\left(\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{b-a}{2}\right) \right]$$

et si $x_i = a + ih$ où $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \simeq \frac{h}{18} \left[5f\left(x_{i+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{20}}h\right) + 8f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + 5f\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{20}}h\right) \right]$$

Finalement

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{18n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[5f\left(a + (i - 0.1127)\frac{b-a}{n}\right) + 8f\left(a + (i + 0.5)\frac{b-a}{n}\right) + 5f\left(a + (i + 0.8873)\frac{b-a}{n}\right) \right]$$