TECE Projet 5 : Calcul Intégral

1

1. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 - 2}, \qquad \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sin x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\mathrm{d}x$$

1

Donner une relation de récurrence permettant de calculer les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x, \qquad J_n = \int_1^e \ln^n x \,\mathrm{d}x$$

2

Soit l'intégrale $I_n(a) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt}{a - \cos t}\mathrm{d}t$ où a est un nombre réel strictement supérieur à 1 et où n est un entier naturel. On pose $a = \mathrm{ch}\alpha$ avec $\alpha > 0$.

1. Montrer que $I_0(a) = \frac{2\pi}{\mathrm{sh}\alpha}$.
2. Calculer $I_1(a) - aI_0(a)$. En déduire la valeur de $I_1(a)$.
3. Pour $n \geq 2$, montrer que $I_n(a) + I_{n-2}(a) = 2aI_{n-1}(a)$.
4. En déduire que pour tout n : $I_n(a) = \frac{2\pi}{\mathrm{sh}\alpha} e^{-n\alpha}$.

3

On se propose de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$. Pour $x^2 \neq 1$ faire une décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$ puis calculer $g(x)$. En déduire, par simple passage à la limite la valeur de l'intégrale J. On pourra utiliser la règle de l'Hospital.

4

1. Calculer pour tout réel $x \neq \pm 1$, l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x^2 - 2x\cos t + 1}$
2. En déduire $J(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{2(x - \cos t)\mathrm{d}t}{x^2 - 2x\cos t + 1}$
3. Soit $K(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\mathrm{d}t$ pour tout réel $x \neq \pm 1$. Calculer $K'(x)$. En déduire la valeur de l'intégrale $K(x)$. On distinguera deux cas $|x| < 1$ et $|x| > 1$.