IPSA 2021-2022, AERO3
Méthode des différences finies
Ma323

Projet - Équation des ondes

Ce projet est à rendre par groupe de 3 ou 4 étudiants au plus tard le mercredi 25 mai 2022. Sont à fournir un compte-rendu au format PDF ainsi que tout le code Python utilisé. Une partie du compte-rendu peut être manuscrit.

L'étude de la propagation des ondes amène à des équations aux dérivées partielles. Nous allons travailler sur le cas le plus simple, d'ondes se déplaçant dans une unique dimension d'espace, comme dans la situation de la corde vibrante.

On va travailler dans le cas où de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(Dans le cas de la corde vibrante, $u(x,t)$ représente le déplacement par rapport à la position au repos du point repéré par x de la corde au temps t).

Le nombre $\gamma > 0$ est la célérité de propagation de l'onde.

On va préciser le problème-type que l'on va résoudre. On se limite à un domaine d'espace qui est l'intervalle $[0,1]$, avec des conditions aux limites de Dirichlet.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(1,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

Noter que l'équation des ondes est d'ordre 2 vis-à-vis du temps, il y a deux conditions initiales à poser.

On va envisager plusieurs schémas numériques pour résoudre cette équation.

L'intervalle $[0,1]$ sera découpé en $N+1$ sous-intervalles. On notera h le pas d'espace, avec $x_j = jh$.

On choisira un pas de temps τ et on posera $t_n = n\tau$.

On notera, comme habituellement, u_j^n la valeur approchée de $u(x_j, t_n)$.

On notera le vecteur

$$u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$$

Trois schémas numériques aux différences finies vont être étudiés dans ce projet.

1 Un schéma explicite centré

1. Le premier schéma envisagé est un schéma explicite centré.

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} - \gamma^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

   Montrer que ce schéma est consistant avec l'équation des ondes et qu'il est précis d'ordre 2 en temps et en espace.

2. On veut étudier la stabilité de ce schéma en norme L^2 à l'aide de la condition de stabilité de Von Neumann.

   Montrer que si $u_j^n = A(\omega)^n e^{ij\omega h}$ est une solution du schéma numérique, $A(\omega)$ est la solution d'une équation du second degré qu'on précisera.

   En déduire que le schéma est conditionnellement stable, sous une condition à préciser.

3. Montrer que le schéma peut se présenter sous la forme suivante, où la matrice M est à préciser :

$$\forall n \geq 1, u^{n+1} = Mu^n - u^{n-1}$$

4. Expliquer pourquoi il est nécessaire, pour mettre en œuvre ce schéma, non seulement de définir u^0 mais aussi u^1.

5. Pour définir u^1, une première approche pourrait être de définir :

$$u_j^1 = u_j^0 + \tau v_0(x_j)$$

   Expliquer ce choix.

6. Une approche plus précise pour définir u^1 est de poser :

$$u_j^1 = u_j^0 + \tau v_0(x_j) + \frac{1}{2}\tau^2\gamma^2 \frac{u_{j-1}^0 - 2u_j^0 + u_{j+1}^0}{h^2}$$

   Expliquer ce choix, et pourquoi il est meilleur que le précédent.

7. Expérimenter ce schéma explicite pour résoudre le problème de l'équation des ondes avec $\gamma = 1$ et les conditions initiales suivantes :

$$u_0(x) = \sin(\pi x),\ \ v_0(x) = 0$$

   On se limitera à $t \in [0, 1]$.

   Tester avec différents choix de pas comme par exemple :

   (a) $\tau = 0,05$ et $h = 0,04$.

   (b) $\tau = 0,005$ et $h = 0,01$.

   Comparer avec la solution exacte qui est dans ce cas (le vérifier)

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t)$$

2 Un schéma implicite centré

1. On envisage aussi le schéma implicite suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} - \gamma^2 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

   Montrer que ce schéma est consistant et indiquer sa précision.
2. Etudier la stabilité de ce schéma à l'aide de la condition de stabilité de Von Neumann.
3. Présenter ce schéma sous forme matricielle.
4. Expérimenter le schéma dans le cas étudié précédemment.

3 Un autre schéma implicite

1. On envisage maintenant le schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} - \gamma^2 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2h^2} - \gamma^2 \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{2h^2} = 0$$

   Étudier la consistance et la précision du schéma.
2. Étudier la stabilité de ce schéma en norme L^2.
3. Exprimer le schéma sous forme matricielle.
4. Expérimenter le schéma.

4 Une autre expérimentation

Expérimenter les schémas avec maintenant la condition initiale suivante :

$$u_0(x) = e^{-10(3x-1)^2}, \; v_0(x) = 0$$