TECE Projet 6: Calcul matriciel

Ibrahim ALAME

09/11/2023

1. Soit $\mathscr{N}$ l'algèbre des matrices triangulaires supérieurs strictes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$N \in \mathscr{N} \iff N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On associe à $\mathscr{N}$ l'ensemble $\mathscr{U}$ des matrices $U = I + N$, où I est la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que le produit de trois matrices quelconques de $\mathscr{N}$ est nul. En particulier $N^3 = 0$ si $N \in \mathscr{N}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a'' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a'' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Montrer que $\mathscr{U}$ est un sous groupe non commutatif du groupe linéaire de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

— $I \in \mathscr{U}$ donc $\mathscr{U}$ est non vide.

— $U = I + N = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car $\det(U) = 1 \neq 0$.

Soit $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $U_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & a_2c_2 - b_2 \\ 0 & 1 & -c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
.

On a $U_1U_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 - a_2 & b_1 - b_2 - (a_1 - a_2)b_2 \\ 0 & 1 & c_1 - c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{U}$

De plus

$$U_1U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_2U_1$$

Donc $\mathscr{U}$ est un sous groupe non commutatif de $GL_3(\mathbb{R})$.

(c) Pour tout réel α, on définit la matrice U^α par

$$U^\alpha = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$

Il sera commode de poser $N_\alpha = \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$. Vérifier que pour α et β réels arbitraires, on a

$$U^\alpha U^\beta = U^{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad (U^\alpha)^\beta = U^{\alpha\beta}$$

On forme $U^\alpha U^\beta$ en utilisant $N^3 = 0$,

$$\begin{aligned} U^\alpha U^\beta &= \left[I + \alpha N + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2\right]\left[I + \beta N + \tfrac{\beta(\beta-1)}{2} N^2\right] \\ &= I + (\alpha+\beta)N + \left(\tfrac{\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)}{2} + \alpha\beta\right) N^2 \\ &= I + (\alpha+\beta)N + \tfrac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2} N^2 \\ &= U^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} (U^\alpha)^\beta = (I + N_\alpha)^\beta &= I + \beta N_\alpha + \tfrac{\beta(\beta-1)}{2} N_\alpha^2 \\ &= I + \beta\left[\alpha N + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2\right] + \tfrac{\alpha^2\beta(\beta-1)}{2} N^2 \\ &= I + \alpha\beta N + \tfrac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2} N^2 \\ &= U^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

(d) Que peut-on dire de U^α pour $\alpha \in \mathbb{Z}$?

Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, on peut appliquer la formule de binôme de Newton à $(I+N)^n$. Puisque $N^3 = 0$, on vérifie que U^α coïncide avec la puissance $n^{\text{ième}}$ de U.

Pour $\alpha = -1$, $U^{-1} = I - N + N^2$ est l'inverse de $I + N$ sur $\mathscr{U}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, on obtient donc la puissance d'ordre α de U.

(e) On définit une application dite exponentielle, noté exp, de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{U}$:

$$\forall N \in \mathscr{N}, \qquad \exp(N) = I + N + \frac{N^2}{2}$$

Montrer que l'application exp est une bijection de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{U}$.

Si $\exp N = \exp N'$, on a $N + \frac{N^2}{2} = N' + \frac{N'^2}{2}$ en élevant au carré, on en déduit $N^2 = N'^2$, puis $N = N'$. L'application exp est donc injective.

Elle est aussi surjective. En se donnant $V = I + P \in \mathscr{U}$, on cherche N tel que $P = N + \frac{N^2}{2}$. On a encore

$$P^2 = N^2, \quad \text{d'où} \quad N = P - \frac{P^2}{2}$$

(f) On définit également l'application dite logarithme notée ln de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{N}$ par :

$$\text{Si } U = I + N, \quad \ln(U) = N - \frac{N^2}{2}$$

Prouver que l'application ln est la bijection réciproque de exp.

On vient de voir que l'antécédent de $V = I + P$ dans l'application exp est $N = P - \frac{P^2}{2}$; c'est $\ln V$, d'où la relation entre applications

$$\ln = \exp^{-1}$$

(g) Établir les formules

$$\exp(\alpha N) = (\exp(N))^\alpha, \quad \ln(U^\alpha) = \alpha \ln U, \quad U^\alpha = \exp(\alpha \ln U)$$

$$\exp(\alpha N) = I + \alpha N + \frac{\alpha^2}{2} N^2$$

$$(\exp(N))^\alpha = I + \alpha N + \frac{\alpha}{2} N^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 = \exp(\alpha N)$$

De même $V^\alpha = I + \alpha P + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} P^2$, d'où

$$\ln V^\alpha = \alpha P + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} P^2 - \frac{\alpha^2}{2} P^2 = \alpha \left(P - \frac{P^2}{2} \right) = \alpha \ln V$$

Enfin, $V^\alpha = \exp(\ln V^\alpha) = \exp(\alpha \ln V)$.

(h) Application numérique : Soit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp(U - I)$, $\ln U$, U^{-1} et U^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On trouve

$$\exp(U - I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ln U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} A^{2k} = (-1)^k I \\ A^{2k+1} = (-1)^k A \end{cases}$$

On a $A^2 = -I$ donc $A^{2k} = (A^2)^k = (-I)^k = (-1)^k I$ et $A^{2k+1} = A^{2k} A = (-1)^k A$

(b) On définit l'exponentielle matricielle par la somme de la série $e^M = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{M^p}{p!}$. Montrer que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^A = I \cos t + A \sin t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

3. Montrer que la matrice suivante est diagonalisable : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$ En déduire A^{-1} et A^n où $n \in \mathbb{Z}$

L'équation caractéristique s'écrit

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -\lambda & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)^2(2-\lambda)$$

La valeur propre double $\lambda = -1$, fournit deux vecteurs propres linéairement indépendants $(-a, 1, 0)$ et $(-a^2, 0, 1)$. La valeur propre simple $\lambda = 2$ fournit le vecteur propre $(a^2, a, 1)$. La matrice P ci dessous diagonalise A ; on a formé P^{-1} :

$$P = \begin{pmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -a & 2a^2 & -a^3 \\ -1 & -a & 2a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

On sait que

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

d'où

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = P^{-1}A^nP$$

D'où

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^n = -\frac{(-1)^n}{3} \begin{pmatrix} -2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -2 \end{pmatrix} + \frac{2^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

4. Soit la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que A est diagonalisable.
A réelle symétrique donc diagonalisable.

(b) Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $-2 \leq \lambda \leq 2$. On pourra utiliser le théorème d'Hadamart :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Longrightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

On a $\lambda \in \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1 \text{ ou } |z| \leq 2\} \bigcap \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{R}; |z| \leq 2\}$ donc $-2 \leq \lambda \leq 2$.

(c) On pose $\lambda = 2\cos\theta$ où $\theta \in [0, \pi]$. Soit le determinant $D_n = \det(\lambda I_n - A)$. Montrer que

$$\begin{cases} D_n = 2\cos\theta\, D_{n-1} - D_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ D_0 = 1, \quad D_1 = 2\cos\theta \end{cases}$$

On a

$$D_n = \det(2\cos\theta I - A) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

En développant D_n par rapport à la première colonne on a $D_n = 2\cos\theta\, D_{n-1} - D_{n-2}$. $D_0 = 1$ est une conversion pour tout determinant d'ordre 0. A l'ordre 1 le determinant D_1 se réduit à son unique coefficient $2\cos\theta$.

(d) Calculer D_n en fonction de n. En déduire les valeurs propres de A.
L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 - 2\cos\theta r + 1 = 0$ dont les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ et donc $D_n = a\cos n\theta + b\sin n\theta$ où a et b solution de

$$\begin{cases} 1 = a\cos 0 + b\sin 0 \\ 2\cos\theta = a\cos\theta + b\sin\theta \end{cases}$$

on a alors $a = 1$ et $b = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$. Donc $D_n = \cos n\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin n\theta = \frac{\sin\theta\cos n\theta + \cos\theta\sin n\theta}{\sin\theta}$
Donc

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

On a $D_n = 0 \Longrightarrow (n+1)\theta = k\pi$ où $k = 1, 2, ..., n$. D'où les valeurs propres

$$\lambda = 2\cos\frac{k\pi}{n+1} \qquad k = 1, 2, ..., n$$