TP1 Analyse numérique (B1-TP1)

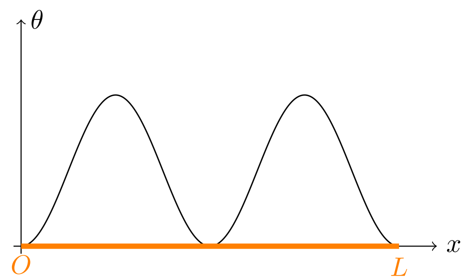
Ibrahim ALAME

28/02/2024

1 Problème de la chaleur

Soit OL une barre chauffée initialement à la température $\theta(x) = \sin^2(2\pi\frac{x}{L})$, $0 \leq x \leq L$. On cherche à refroidir la barre en appliquant une température 0 aux extrémités O et L. Déterminer l'évolution de la température $u(x,t)$ en tout point x de la barre et à chaque instant $t \geq 0$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L]\times\mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \theta(x) & \forall x \in [0,L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right.$$



On prendra $\kappa = 0.1$, $L = 1$ et on choisira un pas de temps $\tau = 0.0005$ et on discrétisera l'intervalle $[0,L]$ en N sous-intervalles avec un pas $h = 0.01$. L'animation de l'évolution de la température est à afficher dans une fenêtre 800×600 de la librairie python `tkinter` :

```python
#=============  PROGRAMME PRINCIPAL  ==============
fen1 = Tk()
fen1.title("Equation de la chaleur")
W=800; H=600
can1 = Canvas(fen1,bg = 'dark gray', width=W, height=H)
can1.pack()
DF()
fen1.mainloop()
```

où `DF()` est la fonction qui calcule et affiche la température de la barre à l'instant $t_n = n\tau$ à partir du schéma de la méthode explicite :

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} - \kappa\frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{h^2} = 0$$

```python
def DF():
    global X, U0, H, W
    can1.delete('all')
    U=np.zeros(N+1)
    for i in range(1,N):
        U[i]=....
    for i in range(1,N+1):
        can1.create_line(X[i-1]*W,(1-U[i-1])*H,X[i]*W,(1-U[i])*H,fill='blue', width=5)
    U0 = U.copy()

    fen1.after(10, DF)
```

2 Propagation des ondes

On considère une corde de masse linéïque ρ fixée en ses deux extrémités O et L et tendue avec une grande force F. On pose $c = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$. A l'instant $t = 0$, on déplace verticalement chaque point d'abscisse x d'une distance $f(x)$ à une vitesse initiale $g(x)$. En petites perturbations, le déplacement $u(x,t)$ en tout point x de la corde et à chaque instant $t \geq 0$ est solution du problème des ondes suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in [0,L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & \forall x \in [0,L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Résoudre numériquement ce problème par la méthode des différences finies, en prenant les données numériques suivantes :

$$L = 1 \text{ m}, \quad c = 3 \text{ m/s}, \quad f(x) = e^{-500(x-L/2)^2}, \quad g(x) = 0,$$

afficher le résultat en animation graphique dans une fenêtre `tkinter` de hauteur $H = 800$px et de largeur $W = 800$px.

3 Équation de diffusion