Méthode des éléments finis: TD2

Ibrahim ALAME

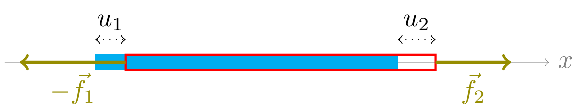
14/02/2024

Problème de poutre simple

Une barre est une poutre qui ne transmet que des efforts de traction compression à ses extrémités. On considère une barre OL homogène de module E, section constante A et de longueur L soumise à une sollicitation linéïque $p(x)$ et à deux forces aux extrémités $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$. Les équations du problème sont les suivantes:

$$(\mathcal{P}_0)\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}+p(x)=0; & 0\leq x\leq L & \text{équation d'équilibre}\\ N=EA\dfrac{\mathrm{d}u}{dx} & 0\leq x\leq L & \text{loi de comportement}\\ N(0)=-f_0; N(L)=f_L & & \text{conditions aux limites}\end{array}\right.$$

où $N(x)$ est l'effort normale à la section transversale d'abscisse x et $u(x)$ est l'allongement en x, u_1 et u_2 sont les déplacements aux extrémités 0 et L. f_1 et f_2 sont des des forces appliquées en 0 et L.



1. Montrer que le problème $(\mathcal{P}_0)$ se ramène au problème $(\mathcal{P})$ suivant:

$$(\mathcal{P})\left\{\begin{array}{l} -EA\dfrac{\mathrm{d}^2u}{dx^2}=p \quad \text{dans }]0,L[\\ EA\frac{\mathrm{d}u}{dx}(0)=-f_0\ ,\ EA\frac{\mathrm{d}u}{dx}(L)=f_L\end{array}\right.$$

2. Soit $V=H^1(\Omega)$. Montrer que la formulation variationnelle s'écrit comme un problème abstrait de la forme:

$$(\mathcal{P}_v)\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u\in V \text{ vérifiant}\\ a(u,v)=\ell(v)\quad \forall v\in V\end{array}\right.$$

où

$$a(u,v)=EA\int_0^L\frac{\mathrm{d}u}{dx}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{dx}\,\mathrm{d}x$$

et

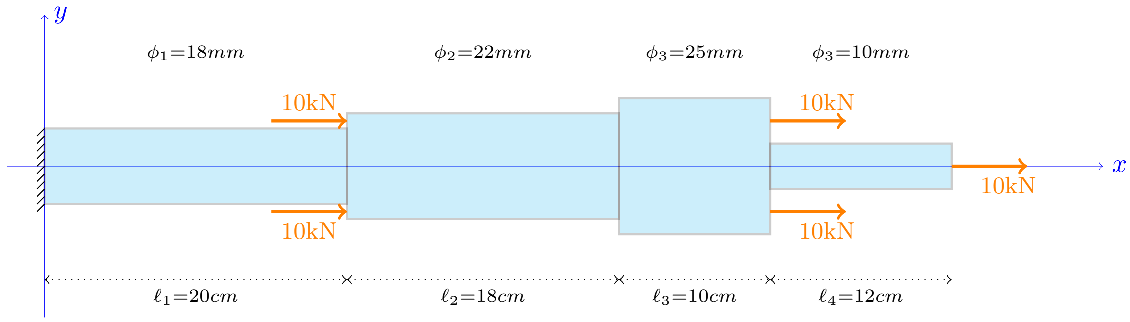
$$\ell(v)=\int_0^L p\cdot v(x)\mathrm{d}x+f_0\cdot v(0)+f_L\cdot v(L)$$

3. On fait un maillage en $n+1$ points équidistants. L'élément fini K est un segment de type (1) de longueur $h=\frac{1}{n}$, l'espace de polynômes d'interpolation est $\mathbb{P}_1=\{ax+b,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$. les deux fonctions de base $\varphi_1=\lambda_1=1-\frac{x}{h}$ et $\varphi_2=\lambda_2=\frac{x}{h}$. Calculer $(a(\varphi_i,\varphi_j))_{ij}$ et montrer que le système élémentaire s'écrit:

$$\boxed{\frac{EA}{h}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}}$$

Cas d'une poutre à section variable

On considère la poutre à section variable suivante:



On fait un maillage à 4 éléments finis dont les sommets coïncident avec les points de discontinuité de la section transversale de façon que chaque élément fini possède une section constante.

1. Écrire les deux tables: Coordonnées de nœuds et table de connectivité. Préciser à la dernière ligne de la deuxième tables les sections des éléments.

2. Écrire la matrice d'assemblage de la structure. à l'aide de l'algorithme suivant:

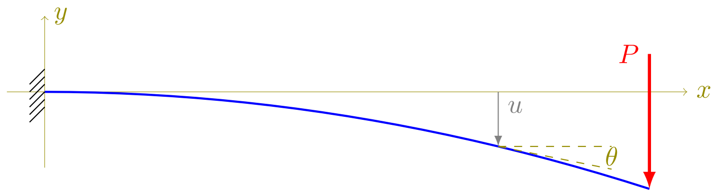
```python
import numpy as np
N=4
E=2.E11
M=np.zeros((N+1,N+1),dtype=float)
Sommets = [0,20,38,48,60]
Connectivite = [[0,1,18],[1,2,22],[2,3,25],[3,4,10]]
for e in range(N):
    p1,p2,d = Connectivite[e]
    A=np.pi*d**2/4*1.E-6
    x1 = Sommets[p1]
    x2 = Sommets[p2]
    ell = (x2-x1)*1.E-2
    m = E*A/ell*np.mat([[1,-1],[-1,1]])
    for i in range(2):
        I = Connectivite[e][i]
        for j in range(2):
            J = Connectivite[e][j]
            M[I,J] += m[i,j]
print(M)
```

3. Écrire le second membre.

4. Résoudre le système linéaire et déterminer le déplacement à l'extrémité de la poutre ($E = 210$ GPa).

5. Déterminer la réaction à l'encastrement en O.

Poutre en flexion



On considère le problème de poutre en flexion et on admet que la flèche est solution de

$$EI_z \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = p(x)$$

où I_z est le moment d'inertie de la section transversale par rapport à l'axe z orthogonale au plan de flexion en son centre de gravité. $p(x)$ est la densité linéique des forces répartis . On admet aussi les conditions aux limites suivantes:

$$F_0 = EI_z \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x=0} \qquad F_\ell = -\, EI_z \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x=\ell} \qquad M_0 = -\, EI_z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0} \qquad M_\ell = EI_z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=\ell}$$

1. Montrer que la formulation variationnelle du problème s'écrit de la forme

$$(\mathcal{P}_v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ vérifiant} \\ a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

   où

$$a(u,v) = EI_z \int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 u}{dx^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v}{dx^2}\,\mathrm{d}x$$

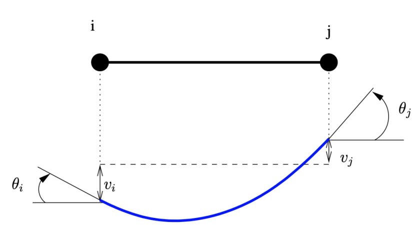
   et

$$\ell(v) = \int_0^L p \cdot v(x)\mathrm{d}x + F_0 \cdot v(0) + F_L \cdot v(L) + M_0 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(0) + M_L \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(L)$$

2. le déplacement de la section transversale de la poutre supposée rigide est caractérisé par le vecteur

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \theta = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

   On fait alors un maillage régulier et en choisissant un élément fini de Hermite de type (1) qui utilise les déplacements et leur dérivées comme degrés de liberté ;



   montrer que la matrice élémentaire s'écrit:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

   Déterminer le second membre élémentaire dans le cas où

(a) La poutre est bi-encastrée.

(b) La poutre est encastrée à son origine et soumise à une force $\vec{P}$ à l'autre extrémité.