Maxwell stress tensor

Đạt Vũ

October 2025

1 Chứng minh công thức mômen điện từ từ tensor ứng suất Maxwell

Xét một hệ vật thể quay trong từ trường tĩnh, mômen điện từ được xác định dựa trên tensor ứng suất Maxwell (Maxwell stress tensor), ký hiệu là $\mathbf{T}$, có dạng tổng quát:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2}B^2\mathbf{I}\right), \tag{1}$$

trong đó $\mathbf{B}$ là véc-tơ cảm ứng từ, $B = |\mathbf{B}|$, $\mathbf{I}$ là ma trận đơn vị, và μ_0 là độ từ thẩm của không khí.

1. Lực điện từ trên một bề mặt kín

Theo định lý Gauss, tổng lực điện từ $\mathbf{F}$ tác dụng lên vật thể được xác định bằng tích phân tensor ứng suất trên bề mặt kín Γ bao quanh vật thể:

$$\mathbf{F} = \oint_\Gamma \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\,dS, \tag{2}$$

trong đó $\mathbf{n}$ là véc-tơ pháp tuyến ngoài của bề mặt Γ.

2. Mômen điện từ tổng quát

Từ lực vi phân $d\mathbf{F} = (\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})\,dS$, mômen điện từ $\mathbf{M}$ được tính bằng:

$$\mathbf{M} = \oint_\Gamma \mathbf{r}\times(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})\,dS, \tag{3}$$

với $\mathbf{r}$ là véc-tơ vị trí của phần tử bề mặt dS so với tâm quay.

3. Biểu diễn trong tọa độ trụ

Trong phân tích máy điện, ta thường dùng tọa độ trụ (r, θ, z) với trục z trùng với trục quay. Xét mặt tích phân Γ là mặt trụ đồng trục với rotor, có bán kính r và chiều dài hữu hạn l (theo trục z).

Trên mặt này, véc-tơ pháp tuyến ngoài là $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$, và phần tử diện tích là $dS = r\,d\theta\,l$. Do đó, thành phần mômen quanh trục z được viết:

$$M_z = \oint_\Gamma \left[\mathbf{r} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})\right]_z \, dS. \tag{4}$$

Thay biểu thức tensor ứng suất (1) vào (4) ta có: $\mathrm{T}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\mu_0}\left[B_r\mathbf{B} - \frac{1}{2}B^2\mathbf{e}_r\right]$, $\Rightarrow \left[\mathbf{r} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})\right]_z = \frac{r}{\mu_0}\left(B_r B_\theta\right)$.

4. Biểu thức mômen điện từ trong khe hở không khí

Thay các biểu thức trên vào (4), ta thu được công thức mômen điện từ quanh trục z:

$$M_z = \frac{l}{\mu_0}\int_0^{2\pi} r^2 B_r B_\theta \, d\theta. \tag{5}$$

Công thức này giả thiết rằng mặt tích phân nằm **hoàn toàn trong khe hở không khí**, nơi $\mu \approx \mu_0$ và trường $\mathbf{B}$ biến đổi trơn liên tục.

5. Dạng rời rạc hóa cho mô phỏng số

Trong các bài toán mô phỏng bằng *phương pháp phần tử hữu hạn (FEM)* hoặc *mạng từ trở (Reluctance Network)*, phân bố từ cảm $\mathbf{B}$ được biết tại các điểm rời rạc dọc theo khe hở không khí. Tích phân (5) khi đó được xấp xỉ bởi tổng rời rạc theo từng phần tử $\Delta\theta_i$:

$$M_z \approx \frac{l\,r^2}{\mu_0}\sum_{i=1}^{N} B_{r,i}B_{\theta,i}\,\Delta\theta_i, \tag{6}$$

trong đó:

- $B_{r,i}$ và $B_{\theta,i}$ là các giá trị trung bình của hai thành phần cảm ứng từ trong phần tử thứ i,
- $\Delta\theta_i$ là góc mở tương ứng của phần tử đó,
- N là tổng số phần tử dọc theo chu vi khe hở.

Nếu lưới chia đều, tức $\Delta\theta_i = \Delta\theta = 2\pi/N$, công thức (6) trở thành:

$$M_z \approx \frac{l\,r^2\,\Delta\theta}{\mu_0}\sum_{i=1}^{N} B_{r,i}B_{\theta,i}. \tag{7}$$

Công thức (7) được sử dụng phổ biến trong các phần mềm phân tích từ trường (như MAXWELL, MOTOR-CAD) và trong mô hình *mạng từ trở lưới (mesh-based reluctance network)*, nơi mỗi phần tử trong khe hở cung cấp một cặp giá trị $(B_{r,i}, B_{\theta,i})$ để tính đóng góp mômen cục bộ.

6. Nhận xét vật lý

- Mômen điện từ là kết quả của tương tác giữa thành phần xuyên tâm B_r và tiếp tuyến B_θ của từ trường.
- Trong trường hợp từ trường đối xứng lý tưởng ($B_\theta = 0$), mômen bằng 0.
- Công thức Maxwell stress tensor chỉ cho kết quả chính xác nếu mặt tích phân nằm trong vùng không khí, tránh vùng có μ_r biến đổi mạnh.
- Khi mô phỏng phi tuyến hoặc có bão hòa từ, vẫn có thể áp dụng (6) miễn là dữ liệu $B_{r,i}$, $B_{\theta,i}$ được lấy từ vùng không khí (hoặc khe hở với $\mu \approx \mu_0$).

—

Do đó, mômen điện từ tổng quát trong dạng rời rạc có thể viết gọn: $\mathrm{M}_z = \frac{l\, r^2}{\mu_0} \sum_{i=1}^{N} B_{r,i} B_{\theta,i}\, \Delta\theta_i$.