بسم الله الرحمن الرحیم

نسرین کریمی

۴۰۱۴۴۸۱۴۷

جناب آقای دکتر پیرهادی – الکترومغناطیس پیشرفته

فروردین ۱۴۰۲

معادلات دیفرانسیل بسل (Bessel Differential Equations) معادلات دیفرانسیل با توابع ویژه بسل هستند که در فیزیک و ریاضیات به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند. توابع ویژه بسل توابعی از دو متغیر مستقل r و x هستند که در کنار هم در بسل اول نوع اول (Bessel's first kind) و بسل دوم نوع اول (Bessel's second kind) نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

معادلات دیفرانسیل بسل، به شکل زیر تعریف می‌شوند:

x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0

که در آن n یک عدد حقیقی است. توابع ویژه بسل اول نوع اول (Jn(x)) و بسل دوم نوع اول (Yn(x)) به ترتیب به عنوان راه‌حل‌های این معادلات بسل استفاده می‌شوند.

توابع بسل اول نوع اول به صورت زیر تعریف می‌شوند:

Jn(x) = (x/2)^n * Σ((-1)^k * (x/2)^(2k+n) / k! * (k+n)!)

و توابع بسل دوم نوع اول به صورت زیر تعریف می‌شوند:

Yn(x) = (Jn(x) * cos(nπ) - J(-n)(x)) / sin(nπ)

که در آن J(-n)(x) تابع بسل اول نوع اول با شاخه منفی است.

توابع بسل اول نوع اول و بسل دوم نوع اول، در فیزیک و ریاضیات در مواردی مانند توصیف ساختارهای دایره‌ای و حل مسائل گرمایی و لرزشی کاربرد دارند.

برای حل معادلات دیفرانسیل بسل با استفاده از روش سری، ابتدا توابع بسل را به صورت یک سری توانی معرفی می‌کنیم. به این صورت که تابع y(x) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

y(x) = Σ(Cn * xn)

که در آن Cn ضرایب سری و xn توان‌های متغیر x هستند. با جایگذاری این تابع در معادله دیفرانسیل بسل، به عبارت زیر می‌رسیم:

$$x^2 \Sigma(Cn * (n + n - 1) * xn-1) + x \Sigma(Cn * n * xn-1) + (x^2 - n^2) \Sigma(Cn * xn) = 0$$

با توجه به معادله بالا و جدا کردن ضرایب xn برای هر n، به روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$Cn-1 = - Cn / (2n - 1)$$

$$Cn+1 = - Cn / (2n + 3 - x^2/n)$$

که در آن C0 و C1 به صورت دستی تعیین می‌شوند.

در این روش، برای تعیین مقدار ضرایب سری، از شرط اولیه‌ای که در مسئله داده شده استفاده می‌شود. به این صورت که با استفاده از شرط اولیه، مقدار یکی از ضرایب Cn مشخص می‌شود و سپس از روابط بازگشتی، مقادیر دیگر ضرایب به دست می‌آیند. سپس با جمع سری به دست آمده، تابع y(x) به دست می‌آید که به عنوان راه حل معادله دیفرانسیل بسل عمل می‌کند.
در روش سری برای حل معادلات دیفرانسیل بسل، با جایگذاری تابع بسل یعنی y(x) در معادله دیفرانسیل، به یک سری معادلات بازگشتی برای ضرایب سری Cn می‌رسیم که می‌توان از آن‌ها برای تعیین مقدار ضرایب سری استفاده کرد.
در واقع همانطور که گفته شد برای به دست آوردن این روابط بازگشتی، ابتدا تابع بسل را به صورت یک سری توانی به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$y(x) = \Sigma(Cn * xn)$$

سپس با جایگذاری این تابع در معادله دیفرانسیل بسل، به یک معادله دیفرانسیل برای ضرایب سری Cn می‌رسیم. سپس با جداسازی ضرایب Cn برای هر n، به روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$Cn-1 = - Cn / (2n - 1)$$

$$Cn+1 = - Cn / (2n + 3 - x^2/n)$$

در این روابط، با استفاده از Cn مقدار Cn-1 و Cn+1 به دست می‌آید. با این کار، می‌توان به صورت بازگشتی مقادیر ضرایب Cn را به دست آورد و با جمع سری به دست آمده، تابع y(x) را به عنوان راه حل معادله دیفرانسیل بسل تعیین کرد.

در این روش، برای تعیین مقدار ضرایب سری، از شرط اولیه‌ای که در مسئله داده شده استفاده می‌شود. با استفاده از شرط اولیه، مقدار یکی از ضرایب Cn مشخص می‌شود و سپس از روابط بازگشتی، مقادیر دیگر ضرایب به دست می‌آیند.

روابط بازگشتی، روابطی هستند که با استفاده از آن‌ها می‌توان یک دنباله را به صورت بازگشتی تعریف کرد. در حل معادلات دیفرانسیل بسل به روش سری، با جایگذاری تابع بسل در معادله دیفرانسیل بسل، به یک سری معادلات بازگشتی برای ضرایب سری می‌رسیم.

روابط بازگشتی معمولا به صورت یک رابطه بازگشتی برای هر عضو از دنباله تعریف می‌شوند که به کمک آن‌ها می‌توان عضو بعدی دنباله را به دست آورد. به عنوان مثال، فرض کنید دنباله a0، a1، a2، ... تعریف شده باشد و دارای رابطه بازگشتی زیر باشد:

a(n+1) = 2 * a(n) + 1

این رابطه به این معنی است که هر عضو بعدی از دنباله، برابر با ضرب دو عضو قبلی و افزودن یک است. با استفاده از این رابطه، می‌توان به صورت بازگشتی مقادیر دیگر اعضای دنباله را محاسبه کرد.

در حل معادلات دیفرانسیل بسل به روش سری، با جایگذاری تابع بسل در معادله دیفرانسیل بسل، به یک سری معادلات بازگشتی برای ضرایب سری می‌رسیم که می‌توان از آن‌ها برای تعیین مقدار ضرایب سری استفاده کرد. در این روش، با استفاده از روابط بازگشتی، می‌توان به صورت بازگشتی مقادیر ضرایب سری را به دست آورد و با جمع سری به دست آمده، تابع حل معادله دیفرانسیل بسل را به عنوان یک تابع سری بسل تعیین کرد.

توابع هنکل یا توابع هانکل (Hankel functions) توابع ویژه‌ای هستند که در فیزیک و ریاضیات کاربردهای فراوانی دارند. این توابع به دو نوع هانکل اولیه (Hankel function of the first kind) و هانکل دومی (Hankel function of the second kind) تقسیم می‌شوند.
تابع هانکل اولیه برای n صحیح مثبت و z حقیقی، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$H_n^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi i} e^{in\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi z}}{\sqrt{\xi^2+n^2}} d\xi$$

و تابع هانکل دومی برای n صحیح مثبت و z حقیقی، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$H_n^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi i} e^{-in\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi z}}{\sqrt{\xi^2+n^2}} d\xi$$

در این تعریف، i عدد مختلط می‌باشد و به عنوان واحد مختلط مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین، n یک عدد صحیح مثبت است.
توابع هانکل اولیه و دومی، به صورت جداگانه در بسیاری از مسائل فیزیکی و ریاضیاتی به کار می‌روند، اما می‌توان این دو تابع را با هم ترکیب کرد و توابع هانکل کلی را به شکل زیر تعریف کرد:

$$H_n^{(1,2)}(z) = H_n^{(1)}(z) \pm i H_n^{(2)}(z)$$

در این تعریف، علامت پلاس برای تابع هانکل اولیه و منفی برای تابع هانکل دومی استفاده می‌شود. توابع هانکل کلی، نیز در بسیاری از مسائل فیزیکی و ریاضیاتی به کار می‌روند.

توابع هنکل در الکترومغناطیس، به عنوان یکی از توابع ویژه، در حل مسائل الکترومغناطیسی به کار می‌روند. برای مثال، توابع هانکل اولیه و دومی در حل مسائل پراکندگی الکترومغناطیسی به کار می‌روند. این مسائل شامل پراکندگی امواج الکترومغناطیسی از ساختارهای مختلف مانند کره‌های کوچک، نازک‌ها و ساختارهای ترکیبی می‌شوند.

علاوه بر این، توابع هانکل در تحلیل موج‌های صوتی نیز کاربرد دارند. به عنوان مثال، آن‌ها در حل مسائل مربوط به انتشار صوت در سیستم‌های لوله‌ای به کار می‌روند.

توابع هانکل در بسیاری از مسائل ریاضی نیز کاربرد دارند، از جمله حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مسائل حاشیه. به عنوان مثال، در حل معادلات همگن لاپلاس و معادلات همگن ویبره‌های استوایی، توابع هانکل به عنوان یکی از توابع ویژه استفاده می‌شوند.

توابع بسل و هنکل دو نوع توابع ویژه هستند که در ریاضیات و فیزیک کاربرد فراوانی دارند. این دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

توابع بسل:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

توابع هنکل:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

به طور جالب، این دو تابع با یکدیگر ارتباط دارند. در واقع، توابع بسل با استفاده از توابع هنکل به صورت زیر قابل تعریف هستند:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix\sin\theta} \cos^n\theta\, d\theta = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-ix\cos\theta} \cos^n\theta\, d\theta = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{ix\cos\theta} \cos^n\theta\, d\theta$$

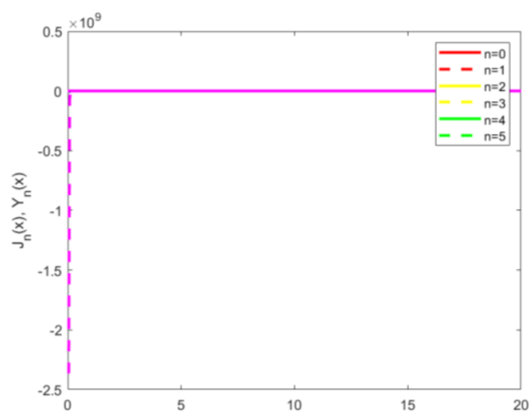
این فرمول نشان می‌دهد که توابع بسل در واقع با استفاده از توابع هنکل به صورت یک تکمیل‌کننده یا تبدیل فوریه از توابع هنکل قابل تعریف هستند. به عبارت دیگر، توابع بسل می‌توانند به صورت تبدیل فوریه توابع هنکل به دست آیند و برعکس.
استفاده از این رابطه بین دو تابع، در حل مسائل ریاضی و فیزیکی کاربرد فراوانی دارد. به عنوان مثال، در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مسائل پراکندگی الکترومغناطیسی، این دو تابع به صورت همزمان کاربرد دارند.

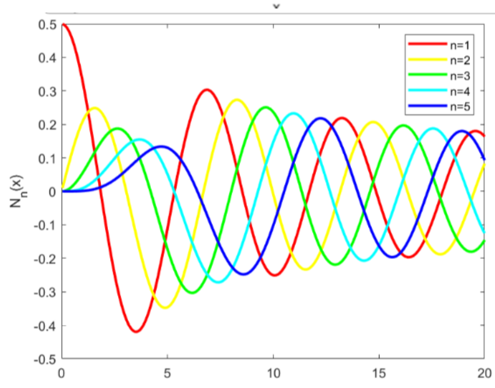
کد زیر نمونه‌ای از رسم توابع بسل با استفاده از کد متلب است:

```
x = linspace(0,20,500); % تعریف دامنه x
nmax = 5; % حداکثر مرتبه توابع بسل
colors = hsv(nmax+1); % تعریف رنگ ها
figure; % رسم توابع بسل
for n = 0:nmax
    J = besselj(n,x); % محاسبه تابع بسل با مرتبه n
    plot(x,J,'color',colors(n+1,:),'LineWidth',2); % رسم تابع بسل با رنگ متفاوت
    hold on;
end
xlabel('x'); % نامگذاری محور x
ylabel('J_n(x)'); % نامگذاری محور y
legend('n=0','n=1','n=2','n=3','n=4','n=5');
```

کد زیر نمونه‌ای از رسم توابع بسل نیومن و هنکل نوع ۱ و نوع ۲ با استفاده از کد متلب است:

```
x = linspace(0,20,500); % تعریف دامنه x
nmax = 5; % حداکثر مرتبه توابع بسل
colors = hsv(nmax+1); % تعریف رنگ ها
figure; % رسم توابع بسل نوع ۱
for n = 0:nmax
    J = besselj(n,x); % محاسبه تابع بسل با مرتبه n
    Y = bessely(n,x); % محاسبه تابع بسل نوع ۲ با مرتبه n
    plot(x,J,'color',colors(n+1,:),'LineWidth',2); % رسم تابع بسل با رنگ متفاوت
    hold on;
    plot(x,Y,'--','color',colors(n+1,:),'LineWidth',2); % رسم تابع بسل نوع ۲ با رنگ متفاوت
end
xlabel('x'); % نامگذاری محور x
ylabel('J_n(x), Y_n(x)'); % نامگذاری محور y
legend('n=0','n=1','n=2','n=3','n=4','n=5');
figure; % رسم توابع بسل نیومن
for n = 1:nmax
    N = besselj(n-1,x) - n./x.*besselj(n,x); % محاسبه تابع بسل نیومن با مرتبه n
    plot(x,N,'color',colors(n,:),'LineWidth',2); % رسم تابع بسل نیومن با رنگ متفاوت
    hold on;
end
xlabel('x'); % نامگذاری محور x
ylabel('N_n(x)'); % نامگذاری محور y
legend('n=1','n=2','n=3','n=4','n=5');
```

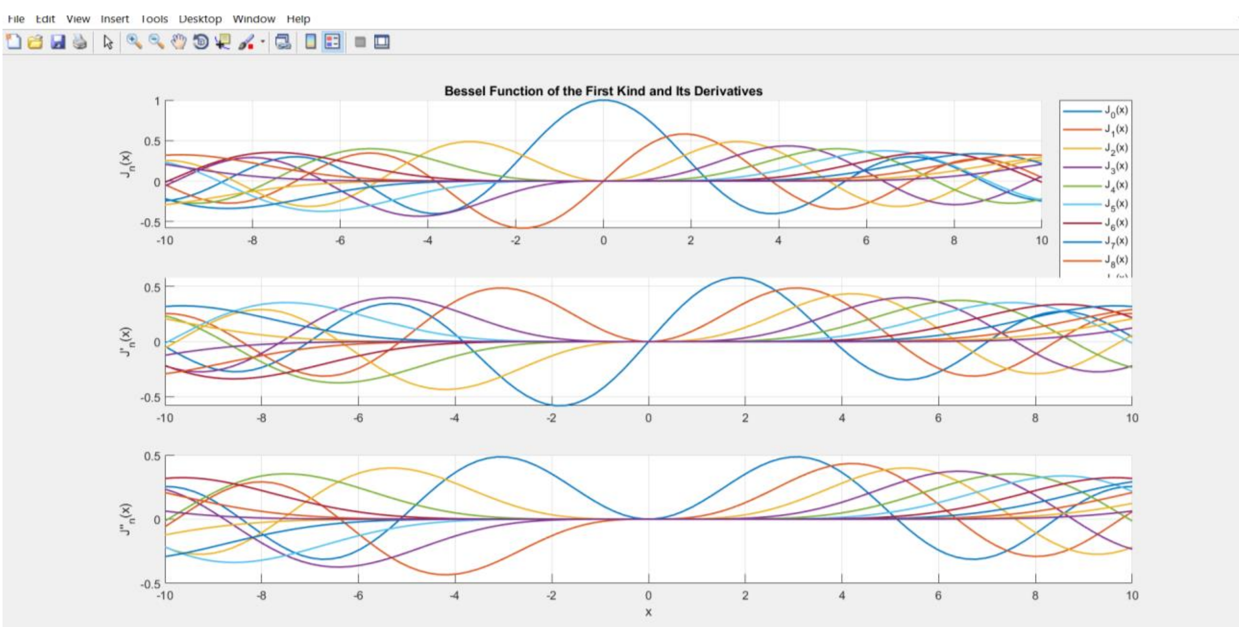




بصورت جامع تر:

```
clc
clear
close all
% Parameters
n = 10; % Maximum order
m = 100; % Number of data points
x = linspace(-10,10,m); % Range of x values
% Bessel function of the first kind and its derivatives
J = zeros(n+1,m);
Jp = zeros(n+1,m);
Jpp = zeros(n+1,m);
for k = 0:n
    J(k+1,:) = besselj(k,x);
    Jp(k+1,:) = besselj(k+1,x);
    Jpp(k+1,:) = besselj(k+2,x);
end
% Neumann function and its derivatives
Y = zeros(n+1,m);
Yp = zeros(n+1,m);
Ypp = zeros(n+1,m);
for k = 0:n
    Y(k+1,:) = bessely(k,x);
    Yp(k+1,:) = bessely(k+1,x);
    Ypp(k+1,:) = bessely(k+2,x);
end
% Hankel function of the first kind and its derivatives
H1 = zeros(n+1,m);
H1p = zeros(n+1,m);
H1pp = zeros(n+1,m);
for k = 0:n
    H1(k+1,:) = besselh(k,1,x);
    H1p(k+1,:) = besselh(k+1,1,x);
    H1pp(k+1,:) = besselh(k+2,1,x);
end
% Hankel function of the second kind and its derivatives
H2 = zeros(n+1,m);
H2p = zeros(n+1,m);
H2pp = zeros(n+1,m);
for k = 0:n
    H2(k+1,:) = besselh(k,2,x);
    H2p(k+1,:) = besselh(k+1,2,x);
    H2pp(k+1,:) = besselh(k+2,2,x);
end
% Plot Bessel functions of the first kind and its derivatives
```

```
figure
subplot(3,1,1)
hold on
for k = 0:n
    plot(x,J(k+1,:),'LineWidth',1.2)
end
title('Bessel Function of the First Kind and Its Derivatives')
legend('J_0(x)','J_1(x)','J_2(x)','J_3(x)','J_4(x)','J_5(x)','J_6(x)','J_7(x)','J_8(x)','J_9(x)','Location','NorthEastOutside')
ylabel('J_n(x)')
grid on
subplot(3,1,2)
hold on
for k = 0:n
    plot(x,Jp(k+1,:),'LineWidth',1.2)
end
ylabel('J''_n(x)')
grid on
subplot(3,1,3)
hold on
for k = 0:n
    plot(x,Jpp(k+1,:),'LineWidth',1.2)
end
ylabel('J''''_n(x)')
xlabel('x')
grid on
```



برای هنکل ها:

```
% تعریف متغیر ها
n = 5; % مرتبه تابع هنکل
a = 1; % ضریب توابع هنکل
x = linspace(-10,10,1000); % ایکس ها
% تعریف توابع هنکل
H1 = zeros(n,length(x)); % برای هنکل نوع ۱
H2 = zeros(n,length(x)); % برای هنکل نوع ۲
for i = 1:n
    H1(i,:) = hermiteH(i-1,x).*exp(-x.^2/2)/sqrt(2^(i-1)*factorial(i-1));
    H2(i,:) = (-1)^i*hermiteH(i-1,x).*exp(-x.^2/2)/sqrt(2^(i-1)*factorial(i-1));
end
% نمایش توابع هنکل
figure;
subplot(2,1,1);
plot(x,H1(1,:),x,H1(2,:),x,H1(3,:),x,H1(4,:),x,H1(5,:));
legend('n=1','n=2','n=3','n=4','n=5');
xlabel('x');
ylabel('H_1^{(n)}(x)');
title('Hermite Function H1');
subplot(2,1,2);
plot(x,H2(1,:),x,H2(2,:),x,H2(3,:),x,H2(4,:),x,H2(5,:));
legend('n=1','n=2','n=3','n=4','n=5');
xlabel('x');
ylabel('H_2^{(n)}(x)');
title('Hermite Function H2');
```