نسرین کریمی

۴۰۱۴۴۸۱۴۷

جناب آقای دکتر پیرهادی – الکترومغناطیس پیشرفته

فروردین ۱۴۰۲

معادلات دیفرانسیل لژاندر، معادلات دیفرانسیل خطی راه‌حل‌پذیر با ضرایب متغیر و پارامتر، هستند که در فیزیک، ریاضیات و مهندسی به عنوان راه‌حل‌های معادلات حرکت و انتقال انرژی استفاده می‌شوند. به طور کلی، معادله لژاندر به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right]+n(n+1)P_n(x)=0$$

در این معادله، P_n(x) تابعی از x است که به عنوان تابع لژاندر n ام شناخته می‌شود. به دلیل اهمیت بسیاری این معادلات در فیزیک و ریاضیات، بسیاری از روش‌های مختلف حل این معادلات در دسترس هستند. یکی از این روش‌ها، حل معادله لژاندر به صورت سری توانی است.

برای حل معادله لژاندر به صورت سری توانی، تابع لژاندر را به صورت یک سری توانی در نظر می‌گیریم، یعنی:

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m}x^m$$

سپس این تابع را در معادله لژاندر جایگذاری کرده و عبارت را به صورت سری توانی بیان می‌کنیم. با جایگذاری سری توانی در معادله لژاندر، روابط بازگشتی برای ضرایب a_{n,m} بدست می‌آیند. برای مثال، با جایگذاری تابع لژاندر به صورت سری توانی در معادله لژاندر و جمع زدن ترم‌های مشابه، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+2n+1)(m-2)(m+1)a_{n,m+2}-(2m+2n+1)(m+n)a_{n,m}]=0$$

این رابطه، یک رابطه بازگشتی است که می‌توان برای حل معادله این رابطه بازگشتی می‌تواند به عنوان یک قاعده‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی ضرایب a_{n,m} استفاده شود. به عنوان مثال، با استفاده از این قاعده‌ی بازگشتی، می‌توان ضرایب a_{n,m} را برای n=0 و n=1 به دست آورد:

برای n=0:

$$a_{0,0}=1,\qquad a_{0,m+2}=\frac{(2m+1)}{(m+2)(m+1)}a_{0,m}$$

برای n=1:

$$a_{1,1}=1,\qquad a_{1,m+2}=\frac{(2m+3)}{(m+2)(m+3)}a_{1,m}$$

با استفاده از این قوانین بازگشتی، می‌توان برای هر n ضرایب a_{n,m} را به دست آورد. در نهایت، با جایگذاری مقدار به دست آمده برای a_{n,m} در سری توانی برای تابع لژاندر، می‌توان تابع را به صورت سری توانی بیان کرد. به عنوان مثال، تابع لژاندر ۳ام به صورت زیر است:

$$P_3(x) = \frac{1}{8}(35x^3 - 30x)$$

با توجه به اینکه توابع لژاندر به صورت سری توانی بیان می‌شوند، این توابع به عنوان یک مجموعه از توابع چندجمله‌ای در نظر گرفته می‌شوند. این توابع چندجمله‌ای در محاسبات عددی و روش‌های تقریبی بسیار مفید هستند. به عنوان مثال، از توابع لژاندر برای تقریب توابع پیوسته و پویا، حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرالی، و محاسبه‌ی انتگرال‌های عددی استفاده می‌شود.

معادلات دیفرانسیل لژاندر وابسته به فرم زیر است:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

که n یک عدد صحیح مثبت است. برای حل این معادله، فرض کنید که y به صورت زیر به صورت یک سری توانی از توابع لژاندر با ضرایب مجهول c_n می‌باشد:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

حال با جایگذاری این فرمول در معادله‌ی دیفرانسیل لژاندر، رابطه‌ی زیر برای ضرایب c_n به دست می‌آید:

$$c_{n+2} = \frac{(2n+1-x^2)}{(n+2)(n+1)} c_n - \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)} c_{n+1}$$

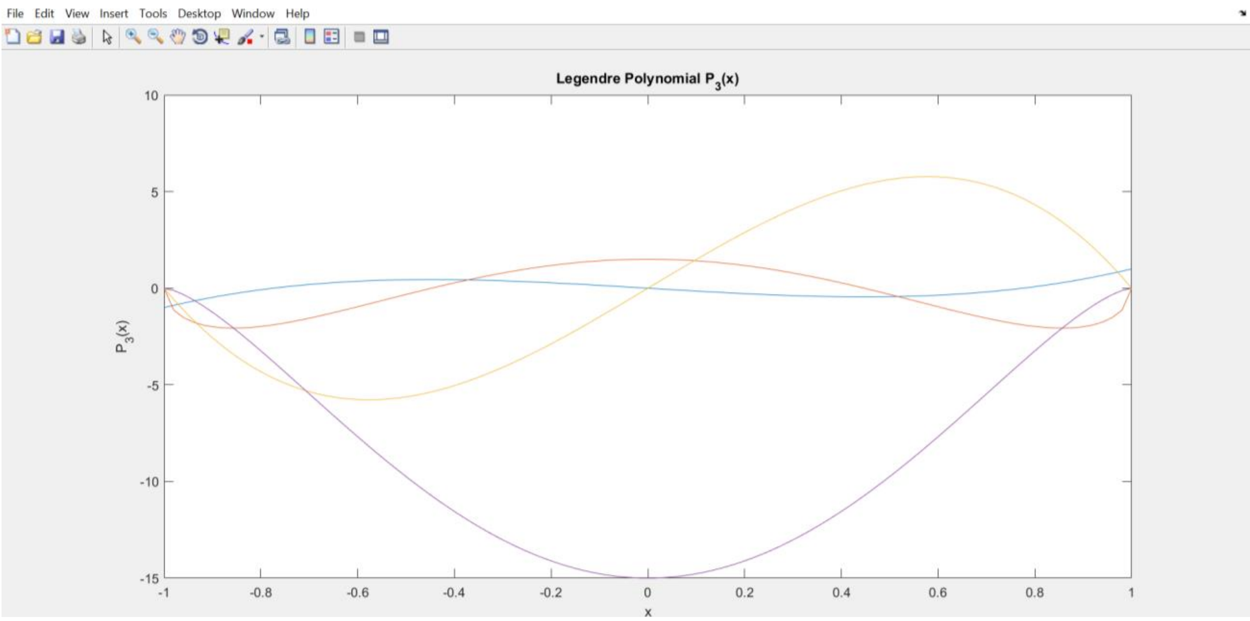
که با استفاده از این رابطه بازگشتی می‌توان ضرایب c_n را به صورت بازگشتی محاسبه کرد. معمولاً، به دلیل نوسان شدید توابع لژاندر برای مقادیر بزرگ n، به صورت محدود شده، به جای سری بی‌نهایت توانی، از چند جمله‌ای توانی استفاده می‌شود. به عنوان مثال، سری چند جمله‌ای توانی لژاندر به شکل زیر است:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n P_n(x)$$

که N حداکثر درجه‌ی تابع لژاندر در سری توانی است. در این صورت، می‌توان با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی، ضرایب c_n را به صورت بازگشتی محاسبه کرد و در نهایت، تابع را با تعداد محدودی از توابع لژاندر تقریب زد.

از توابع لژاندر به خاطر خواص زیادی که دارند، به عنوان مثال در محاسبات عددی و روش‌های تقریبی بسیار استفاده می‌شود. این توابع به راحتی قابل محاسبه و تقریب است.

```
x = linspace(-1, 1, 100);
P3 = legendre(3, x);
plot(x, P3)
xlabel('x')
ylabel('P_3(x)')
title('Legendre Polynomial P_3(x)')
```



```
% تعریف مرتبه‌های توابع لژاندر و لژاندر وابسته
n = 0:3;
% تعریف ضرایب و ایکس‌ها
m = 50; % تعداد ایکس‌ها
x = linspace(-1, 1, m);
P = zeros(length(n), m); % آرایه‌ای برای ذخیره توابع لژاندر
Q = zeros(length(n), m); % آرایه‌ای برای ذخیره توابع لژاندر وابسته
for i = 1:length(n)
    for j = 1:m
        % محاسبه توابع لژاندر و لژاندر وابسته برای هر i و هر x
        Pn = legendre(n(i),x(j)); % محاسبه توابع لژاندر
        Qn = legendre(n(i),x(j),'sch'); % محاسبه توابع لژاندر وابسته
        P(i,j) = Pn(1); % انتخاب تنها یک تابع لژاندر با استفاده از Pn
        Q(i,j) = Qn(1); % انتخاب تنها یک تابع لژاندر وابسته با استفاده از Qn
    end
end
% رسم نمودار توابع لژاندر و لژاندر وابسته
figure
hold on
for i = 1:length(n)
    plot(x, P(i,:), '-', 'LineWidth', 1.5)
    plot(x, Q(i,:), '--', 'LineWidth', 1.5)
end
hold off
xlabel('x')
ylabel('P_n(x) and Q_n(x)')
legend('Legendre Polynomials', 'Associated Legendre Functions')
title('Legendre Polynomials and Associated Legendre Functions')
```