

به نام خدا



جبر خطی

نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

تمرین سری سوم

۱- دترمینان ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

۲- نشان دهید که دترمینان ماتریس جایگشت ۱ یا -۱ است.

۳- ماتریس A, B را ۲ ماتریس $n \times n$ در نظر بگیرید. نشان دهید:

a. $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \det(B)$.

b. $\det(A^T) = \det(A)$.

c. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

d. اگر ماتریس A دارای یک سطر یا یک ستون صفر باشد، $\det(A) = 0$.

e. اگر ماتریس A دارای یک سطر یا یک ستون همسان باشد، $\det(A) = 0$.

۴- معکوس ماتریس‌های زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \text{ and } D = \begin{bmatrix} 1-j & j & 1+j & 2 \\ -j & 4 & 2-j & 3 \\ 1-j & 2+j & j & 3-j \\ 2 & 3 & 3+j & 1 \end{bmatrix}$$

۵- نشان دهید که:

$$A^{-1} = B^{-1} - A^{-1}(A - B)B^{-1}$$

۶- نشان دهید که اگر A, B ماتریس های مربعی $n \times n$ غیر تکیه باشند، سپس:

a. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

۷- دستگاه معادلات خطی زیر را با استفاده از معکوس ماتریس حل نمایید.

$$a. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases} ; b. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 24 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \\ 4x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_1 - x_3 = 7 \end{cases}$$

۸- با استفاده از روش دلخواه، دستگاه معادلات زیر را حل نمایید.

a. $\begin{bmatrix} 3 & 1.01 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.02 \\ 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ 12 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & -5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -2 & -5 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 & 6 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \\ 13 \\ 21 \end{bmatrix}$

$$d. \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & -1 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 1 \\ 17 \\ -3 \\ 13 \\ -11 \\ 10 \\ -2 \\ -16 \end{bmatrix}$$

۹) برای ماتریس دوران زیر:

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

نشان دهید:

- $B(\theta)B(-\theta) = I.$
- $B(\theta_1 + \theta_2) = B(\theta_1) B(\theta_2) = B(\theta_2) B(\theta_1).$
- $B(n\theta) = [B(\theta)]^n.$

۱۰) الف) نشان دهید اگر $A(t)$ یک ماتریس غیرتکین $n \times n$ با عناصر غیروابسته به زمان باشد، آنگاه:

$$\frac{d}{dt} A^{-1}(t) = -A^{-1}(t) \frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t)$$

ب) اگر $A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ e^{-t} & 1+t \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{-1}(t)$ را به دست آورید.