تمرین سری سوم

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(45-48) - 2(36-42) + 3(32-35)$

$= -3 + 12 - 9 = 0$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B) = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-5) - 1(-1) = -5 + 1 = -4$

---

② می دانیم که دترمینان ماتریس همانی (واحد) برابر با 1 است و ماتریس جایگشت ماتریسی است که در هر سطر و ستون و فقط یک درایه 1 داشته باشد. و از قبل می دانیم که با جابجایی دو سطر یک منفی در دترمینان ضرب خواهد شد. پس با جابجایی سطرها به تعداد زوج دترمینان برابر 1 و تعداد فرد دترمینان برابر -1 است.

---

③ a) $A = E_1E_2 \cdots E_k \rightarrow \det(A) = \det(E_1E_2 \cdots E_k) \longrightarrow \det(E_1E_2 \cdots E_k) = \det(E_1)\det(E_2E_3 \cdots E_k) =$

$\det(E_1)\det(E_2)\det(E_3E_4 \cdots E_k) = \cdots = \det(E_1)\det(E_2)\det(E_3) \cdots \det(E_k)$

دترمینان ماتریس E_i ها همواره برابر یک عدد ثابت است.

$|AB| = \det(AB) = \det(E_1E_2 \cdots E_kB) = \det(E_1)\det(E_2)\det(E_3) \cdots \det(E_k)\det(B)$ ★

$\det(E_1 \cdots E_k)\det(B) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A)$.

b) $\det(A^T) = \det(E_k^TE_{k-1}^T \cdots E_2E_1) = \det(E_k^T)\det(E_{k-1}^T) \cdots \det(E_2^T)\det(E_1^T) \xrightarrow{\text{Transpose}}$

$= \det(E_1)\det(E_2) \cdots \det(E_{k-1})\det(E_k) = \det(E_1E_2 \cdots E_{k-1}E_k) = \det(A)$

c) $\det(\alpha A) = \det\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix} = \cdots = \alpha^n \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$

d) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^*)$ ماتریس کهاد یا الحاقی $\xrightarrow[a_{ij}=0]{} \det(A) = 0$

e) اگر دو سطر یا دو ستون یک ماتریس با مضرب همسان باشند یعنی با جمع یا تفریق یک یا چند سطر با یک مضرب همانند یک سطر از ماتریس شود، به علت اینکه با جمع و تفریق از همان سطرها این سطر تمام درایه‌های آن صفر می‌شود، طبق رابطه اثبات شده در قسمت (d) دترمینان این ماتریس برابر صفر است.

④ A) $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ +1 & 2 \end{bmatrix}$ det (A) ← 11

B) $\det(B) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

C) $\det(C) = 0 \longrightarrow$ ماتریس معکوس ندارد

طبق سوال 1

D) $\det(D) = 46 - 7i$

$$D^{-1} = \frac{1}{46-7i}\begin{bmatrix} -15-5j & -20+3j & 21+12i & 15-14j \\ -22+9j & 5+7j & 12-8j & 1-3j \\ 21-12j & 4-6j & -22+5j & 7+5j \\ 21-2j & 7-13j & -7+7j & -3+8j \end{bmatrix}$$

⑤ $B^{-1} - A^{-1}(A-B)B^{-1} = B^{-1} - \underbrace{A^{-1}A}_{I}B^{-1} + A^{-1}\underbrace{BB^{-1}}_{I} = B^{-1} - B^{-1} + A^{-1} = A^{-1}$

⑥ a) ~~if $AA^{-1} = I$, $A^{-1}A = x$ ...~~

$A = E_1E_2 \cdots E_k \quad (AA^{-1})^{-1} = (I)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I = A^{-1}A = I$

b) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I \longrightarrow$

چون ضرب دو ماتریس برابر با I شد عبارت بالا صحیح است.

c) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \longrightarrow AA^{-1} = I \longrightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1 \longrightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$

$\longrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

⑦ a) $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}}_{B}$

(روش اول) $AX = B \longrightarrow X = A^{-1}B \rightarrow \det(A) = 52$, $A^{-1} = \frac{1}{52}\begin{bmatrix} 7 & -15 & 2 \\ 12 & 4 & -4 \\ 2 & 18 & 8 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(روش دوم) کرامر $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 10 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{52} = 1$

(روش سوم) حذف گوسی

$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{52} = 2 \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix}}{52} = 3$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 18 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 5 & -15 & -10 & -35 \\ -17 & 26 & 19 & 34 \\ 5 & -15 & -10 & -10 \\ -4 & 12 & 3 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow X = \begin{bmatrix} 11.8 \\ -19.52 \\ 12.8 \\ -8.24 \end{bmatrix}$

⑧ a) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -7.9489 & 7.8394 & -0.2409 & 5.3723 & -5.4854 \end{bmatrix}^T$

c) $\begin{bmatrix} 1.6565 & -1.5531 & 1.9785 & 3.1247 & -0.1700 & -2.0897 & 2.9430 \end{bmatrix}^T$

با استفاده از متلب

d) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

⑨ a) $\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(روش دوم)

طبق سوال $\xrightarrow{\quad}$ 4.b $\quad AA^{-1} = I$

9.b $\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$

c) $\theta_1 = \theta_2 = \theta \rightarrow B(2\theta) = B(\theta_1+\theta_2) = B(\theta)B(\theta) = B(\theta)^2$

$B(3\theta) = B(\theta)B(2\theta) = B(\theta)B(\theta)^2 = B(\theta)^3$

با استفاده از بخش قبل داریم:

$\vdots$

$B(n\theta) = B(\theta)^n$

10 a) $(xy)' = x'y + xy' \Longrightarrow AA^{-1} = I \xrightarrow{d/dt} \frac{dA}{dt}A^{-1} + A\frac{dA^{-1}}{dt} = 0 \longrightarrow A\frac{dA^{-1}}{dt} = -\frac{dA}{dt}A^{-1} \longrightarrow$

$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$

b) $\begin{bmatrix} t & 1 \\ e^{-t} & 1+t \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{t^2+t-e^{-t}} \begin{bmatrix} 1+t & -1 \\ -e^{-t} & t \end{bmatrix}$ $\quad \frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-t} & 1 \end{bmatrix}$

$\frac{dA^{-1}}{dt} = A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1} = \frac{1}{(t^2+t-e^{-t})^2} \begin{bmatrix} -2t-2e^{-t}-te^{-t}-t^2-1 & 2t+e^{-t}+1 \\ e^{-t}(t^2+3t+1) & -e^{-t}-te^{-t}-t^2 \end{bmatrix}$