به نام خدا

جبرخطی　　　　　　　　　　نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۱　　　　　　　　　　تمرین سری چهارم

۱. فرض کنید V مجموعه از بردارهایی در فضای R^2 است. اگر $x = [x_1 , x_2]^T$ و $y = [y_1 , y_2]^T$ مقادیری از مجموعه V و $\alpha \in R$ باشد، و داشته باشیم:

$$x + y = [x_1 + y_1 \quad x_2 y_2]^T \quad \text{و} \quad \alpha[x_1 \ \ x_2]^T = [\alpha x_1 \ \ x_2]^T$$

با این عملیات‌ها، آیا V یک فضای برداری است؟

۲. فرض کنید $s = [2 \ -3 \ \ 1]^T$. بردار x ی را پیدا کنید که ماکزیمم مقدار تابع y را که در زیر مشخص شده است را بدهد.

$$y = \frac{|< x, s >|^2}{\|x\|^2}$$

آیا پاسخ این مسئله یکتاست؟ اگر نه، بردار دیگری پیدا کنید.

۳. نشان دهید که دو بردار داده شده، متعامد هستند:

$$x(n) = 3\exp\left(j\frac{2\pi}{N}n\right) \quad , \quad y(n) = 4\exp\left(j\frac{6\pi}{N}n\right) \quad , \quad n = 0,1,\dots,N-1$$

۴. اگر V یک فضای حقیقی ضرب داخلی باشد آنگاه نشان دهید:

$$< x , y > = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$$

۵. برای ضرب داخلی $< x(t), y(t) > \; = \; \int_0^{\infty} x(t)\bar{y}(t)dt$، نامساوی شوارتز را ثابت کنید، اگر:

$a.\ \ x(t) = 2e^{-t}u(t) \quad , \quad y(t) = 3e^{-2t}u(t)$

$b.\ \ x(t) = te^{-t}u(t) \quad , \quad y(t) = 2e^{-t}u(t)$

$c.\ \ x(t) = e^{-(1-j)t}u(t) \quad , \quad y(t) = 2e^{-(1+j2)t}u(t)$

۶. بردار های زیر را بدین صورت در نظر بگیرید:

S = $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

از روش متعامد سازی گرام-اشمیت استفاده کنید تا یک دسته بردار های متعامد یکه بدست بیاورید.