به نام خدا

جبرخطی	نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۱	تمرین سری اول

-۱

If $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ and $A_2 = \begin{bmatrix} 1+j2 & 2+j3 \\ 3+j4 & 4+j5 \end{bmatrix}$ compute

$A_1{}^T$, $(A_1 + A_2^H)^H$ and $A_2{}^H$

-۲

Given that $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ compute the following:

a. $A+B$ b. $A-B$ c. AB d. $B-A$
e. BA f. $\mathrm{Trace}(A)$ g. $\mathrm{Trace}(B)$ h. $\mathrm{Trace}(A^2B)$

-۳

If $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 8 & -7 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 15 & 12 \\ 0 & -4 & -8 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ compute

a. $2A$; b. $A+B$; c. $2A-3B$; d. $(2A)^T-(3B)^T$; e. AB;
f. BA; g. A^TB^T; h. $(BA)^T$

-۴

For the following matrices, show that $\mathrm{Trace}(AB) = \mathrm{Trace}(BA)$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

-۵

Let $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Compute A^2 and A^3. What can be said about A^n?

مختصری از جلسات گذشته:

- معرفی و اهمیت جبرخطی و تنوع کاربرد آن در کلیه علوم. اقتصاد، فیزیک، کنترل، پردازش سیگنال و ....
- اعداد حقیقی (طبیعی، صحیح، گویا، گنگ) و اعداد مختلط
- بردار $\boldsymbol{X}_N = \boldsymbol{X}_{N1} = \bar{X} = \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$ ، عناصر بردار حقیقی یا مختلط هستند
  - ترانهاده بردار: $\boldsymbol{X}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N]$
  - هرمیتی بردار: $\boldsymbol{X}^H = \boldsymbol{X}^{*T} = [x_1^* \quad x_2^* \quad \dots \quad x_N^*]$
- تعریف فرم عمومی ماتریس $\boldsymbol{A}_{MN} = \boldsymbol{A} = \bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ a_{31} & & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{M1} & & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}$ ، عناصر ماتریس حقیقی یا مختلط هستند
  - ماتریس مربعی: $M = N$
  - ماتریس بالا مثلث: مربعی و تمام عناصر زیر قطر اصلی صفر است
  - ماتریس پایین مثلث: مربعی و تمام عناصر بالای قطر اصلی صفر است
  - ماتریس همانی: مربعی، تمام عناصر قطر یک و بقیه صفر هستند
  - ترانهاده ماتریس: $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^T$ ، $a_{ij} \Rightarrow a_{ji}$
  - هرمیتی بردار: $(\boldsymbol{A}^H)^H = \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{A}^H)^T = (\boldsymbol{A}^T)^H = \boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}^{*T}$ ، $a_{ij} \Rightarrow a_{ji}^*$
  - ماتریس متقارن: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$
  - ماتریس پادمتقارن: $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$
  - ماتریس هرمیتی: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$
- جبرمقدماتی ماتریس

- جمع و تفاضل: $\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$
  - خاصیت جابجایی: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
  - خاصیت شرکت پذیری: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$
- ضرب ماتریس
  - ضرب عدد در ماتریس: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $\boldsymbol{B} = \alpha \boldsymbol{A}$
  - ضرب ماتریس دربردار: $\boldsymbol{Y}_M = \boldsymbol{A}_{MN}\boldsymbol{X}_N$, $y_k = \sum_{j=1}^{N} a_{kj}x_j$, $k = 1,..,M$
  - ضرب ماتریس: $\boldsymbol{C_{NK}} = \boldsymbol{A_{NM}}\boldsymbol{B_{MK}}, c_{ij} = \sum_{l=1}^{M} a_{il}b_{lj}, i = 1,..,N, j = 1,..,K$
  - خواص:
    - $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$
    - خاصیت توزیع پذیری: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$
    - خاصیت شرکت پذیری: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$
    - حاصل ضرب هر ماتریس مربعی در ماتریس همانی خوش میشود.
    - $\boldsymbol{A}^{m+n} = \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{A}^m$
    - $(\boldsymbol{AB})^T = (\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T)$
    - $(\boldsymbol{AB})^H = (\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{A}^H)$
- Traceماتریس: مجموع عناصر قطر یک ماتریس مربعی است $Trace(\boldsymbol{A}_{NN}) = \sum_{i=1}^{N} a_{ii}$

a. Trace($A \pm B$) =Trace(A) ±Trace(B)

b. Trace(A^T)=Trace(A)

c. Trace(AB)=Trace(B^TA^T)

d. Trace(αA) = αTrace(A)

e. Trace(AB) =Trace(BA)