تمرین سری چهارم

①

برای اثبات اینکه V یک فضای برداری نیست کافی است یک مثال نقض بزنیم (یکی از شرط‌ها را نداشته باشیم)

$$\left.\begin{array}{l} x+y=[x_1+y_1,\ x_2y_2]^T \\ x+0=x \quad \text{شرط لازم} \end{array}\right\} \rightarrow x+0=[x_1+0\quad x_2(0)]^T=[x_1\ \ 0]^T\neq[x_1\quad x_2]^T \ \times$$

---

②

با استفاده از قضیه‌ی کوشی-شوارتز داریم:

$$y=\frac{|\langle x,s\rangle|^2}{\|x\|^2}\leq\frac{\|x\|^2\,\|s\|^2}{\|x\|^2}$$

اگر فرض کنیم که بردار x دارای اندازه‌ی غیرصفر است، عبارت بالا به صورت روبه‌رو ساده می‌شود.

$$y=\frac{\|x\|^2\,\|s\|^2}{\|x\|^2}=\|s\|^2$$

* مقدار عبارت بالا زمانی بیشینه مقدار خود است که بردار x ضریبی از بردار S باشد.

پاسخ این مسئله یکتا نیست و هر ضریبی از S می‌تواند باشد ... , $x_1=[2\ \ -3\ \ 1]^T,\ [1\ \ -1.5\ \ 0.5]^T,\ [4\ -6\ 2], \ldots$

---

③

زمانی ۲ بردار با یکدیگر متعامد هستند که ضرب داخلی ۲ بردار با یکدیگر برابر صفر شود.

$$\langle x(n),y(n)\rangle = \underline{x}\,\underline{y}^*$$

$$x(n)=\left[3\quad 3e^{j\frac{2\pi}{N}}\quad 3e^{j\frac{4\pi}{N}}\ \ldots\right]\qquad y(n)=\left[4\quad 4e^{j\frac{6\pi}{N}}\quad 4e^{j\frac{12\pi}{N}}\ \ldots\right]$$

$$\langle x(n),y(n)\rangle=\sum_{n=0}^{N-1}\left(3e^{j\frac{2\pi}{N}n}\right)\left(4e^{-j\frac{6\pi}{N}n}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}12e^{-j\frac{4\pi}{N}n}=12\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{4\pi}{N}n}$$

عبارت بالا مجموع یک دنباله‌ی هندسی را نمایش می‌دهد و می‌دانیم که مجموع یک دنباله‌ی هندسی به صورت زیر است.

$$\sum_{n=0}^{n=N}q^n=\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\Rightarrow 12\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{4\pi}{N}n}=12\left[\frac{1-e^{-j\frac{4\pi}{N}(N-1+1)}}{1-e^{-j\frac{4\pi}{N}}}\right]=$$

$$=12\left[\frac{1-e^{-j4\pi}}{1-e^{-j\frac{4\pi}{N}}}\right]=12\left[\frac{1-\cos(-4\pi)-j\sin(-4\pi)}{1-e^{-j\frac{4\pi}{N}}}\right]=12\left[\frac{1-1-0}{1-e^{-j\frac{4\pi}{N}}}\right]=0\rightarrow$$

۲ بردار بر یکدیگر عمود هستند

---

④

$$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle$$

می‌دانیم که $\langle x+y,a\rangle$ برابر است با $\langle x,a\rangle+\langle y,a\rangle$ پس طرفین

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow \|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2 \\ \|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2\end{array}\right\}\rightarrow \|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4\langle x,y\rangle$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right]=\langle x,y\rangle$$

5 a.

$$|\langle x,y\rangle|^2 = \int_0^\infty 6e^{-3t}\,dt = -2e^{-3t}\Big|_0^\infty = -2(0-1) = +2 \longrightarrow |\langle x,y\rangle| = \sqrt{2}$$

$$|\langle x,x\rangle| = \int_0^\infty 4e^{-2t}\,dt = -2e^{-2t}\Big|_0^\infty = -2(0-1) = 2 \rightarrow |\langle x,x\rangle|^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$|\langle y,y\rangle| = \int_0^\infty 9e^{-4t}\,dt = -\frac{9}{4}e^{-4t}\Big|_0^\infty = -\frac{9}{4}(0-1) = \frac{9}{4} \rightarrow |\langle y,y\rangle|^{1/2} = 3/2$$

$$\boxed{\frac{3}{2}+\sqrt{2} \geq 2} \checkmark$$

b. $$|\langle x,y\rangle| = \int_0^\infty 2te^{-2t}\,dt = 2\left(-\frac{t}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right)\Big|_0^\infty = 2\left(0-\frac{1}{4}(0-1)\right) = 0.5$$

$$|\langle x,x\rangle| = \int_0^\infty t^2e^{-2t}\,dt = \left(-0.5t^2e^{-2t} - 0.5te^{-2t} - 0.25e^{-2t}\right)\Big|_0^\infty = -0.25(0-1) = 0.25 \rightarrow |\langle x,x\rangle|^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$|\langle y,y\rangle| = \int_0^\infty 4e^{-2t}\,dt = -\frac{4}{2}e^{-2t}\Big|_0^\infty = -2(0-1) = 2 \rightarrow |\langle y,y\rangle|^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\sqrt{2}+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}} \checkmark$$

c. $$|\langle x,y\rangle| = \int_0^\infty 2e^{(-2+3j)t}\,dt = \frac{-2}{-2+3j}e^{(-2+3j)t}\Big|_0^\infty = \frac{-2}{-2+3j} = \frac{4+6j}{13}$$

$$|\langle x,x\rangle| = \int_0^\infty e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^\infty = 0.5 \longrightarrow |\langle x,x\rangle|^{1/2} = \sqrt{1/2}$$

$$|\langle y,y\rangle| = \int_0^\infty 4e^{-2t}\,dt = -2e^{-2t}\Big|_0^\infty = 2 \longrightarrow |\langle y,y\rangle|^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}} \geq 0.55} \checkmark$$

$$\sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2+\left(\frac{6}{13}\right)^2} \approx 0.55$$