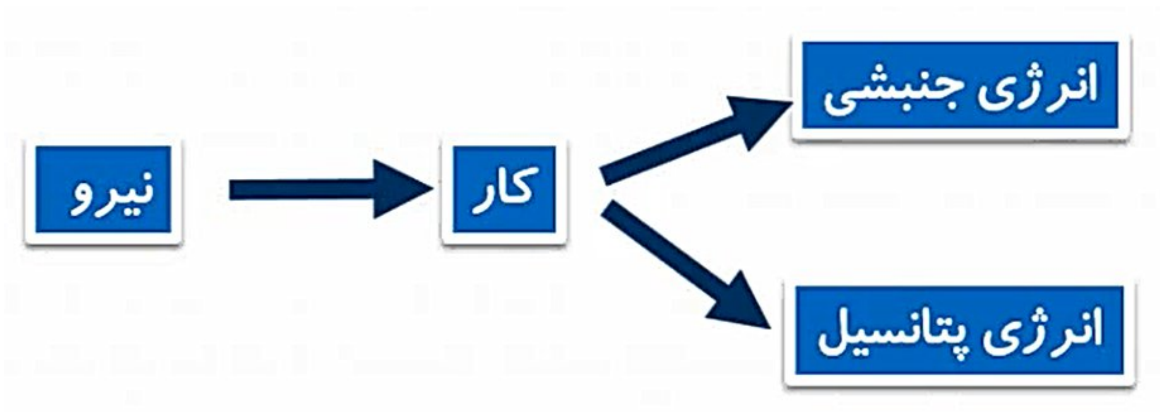
فیزیک ۱

حل تمرین دکتر غلام محمد پارسانسب

نسرین کریمی

دانشگاه شهید بهشتی -آذر۱۴۰۰

انرژی پتانسیل

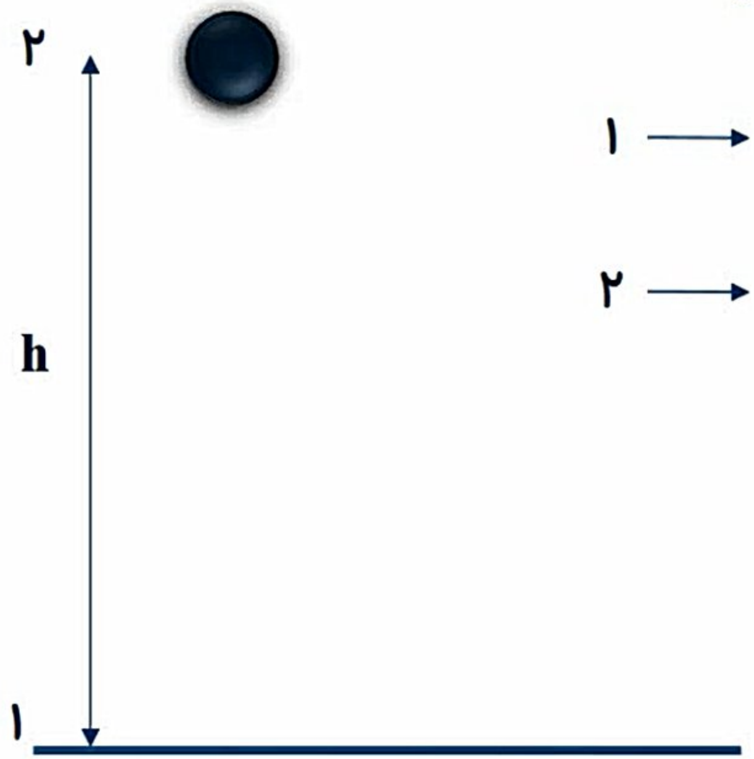


نیروهای پایستار و ناپایستار

(۱) اگر نیرویی که جسم را حرکت می دهد در یک مسیر بسته (رفت و برگشت) هیچ کار خالصی روی جسم انجام ندهد، آن نیرو پایستار است؛ در غیر این صورت ناپایستار است.

(۲) اگر کار نیرویی بر جسم، از نقطه شروع حرکت تا نقطه پایان، مستقل از مسیر طی شده بین دو نقطه باشد، آن نیرو پایستار است؛ در غیر این صورت ناپایستار است.

مثال برای نیروی پایستار



بعنوان مثال نیروی گرانشی وارد بر جسم افتان در نزدیکی زمین را در نظر بگیرید؛

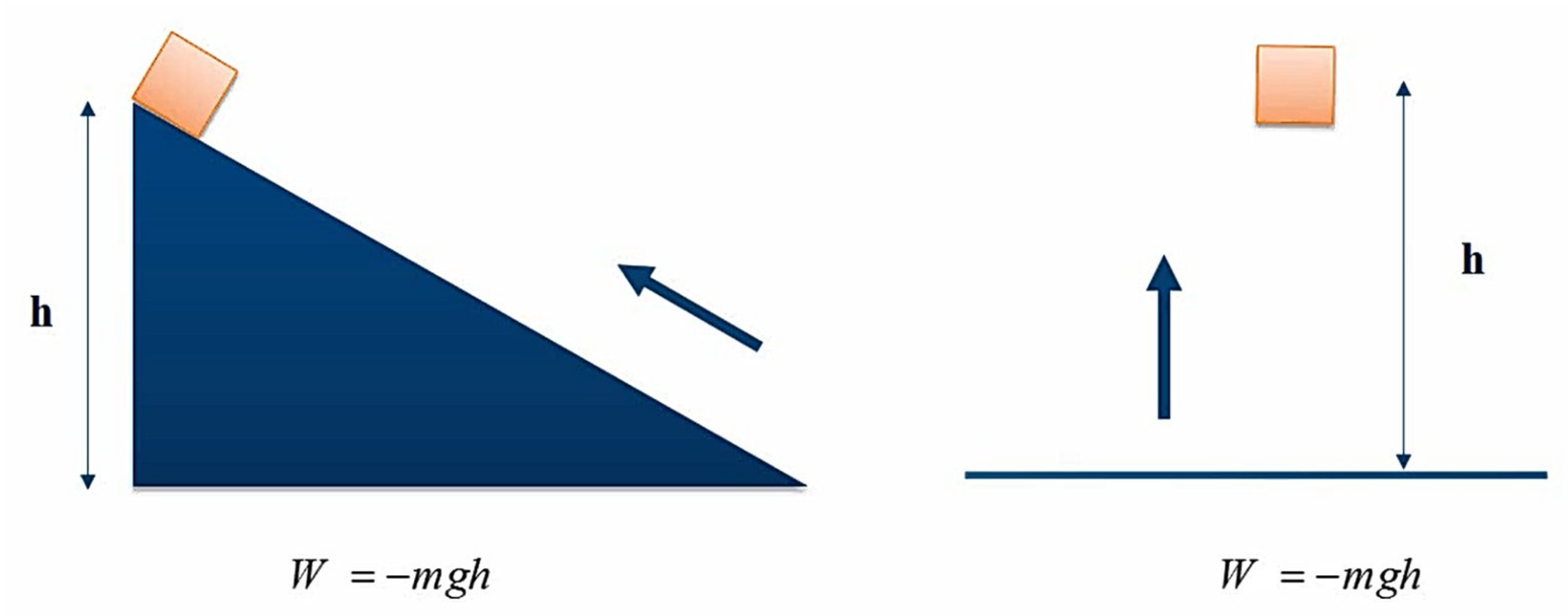
۱ $\longrightarrow$ ۲ $\quad W_{1\to 2} = -mgh$

۲ $\longrightarrow$ ۱ $\quad W_{2\to 1} = +mgh$

بنابراین کل کار در رفت و برگشت به نقطه اول برابر است با ؛

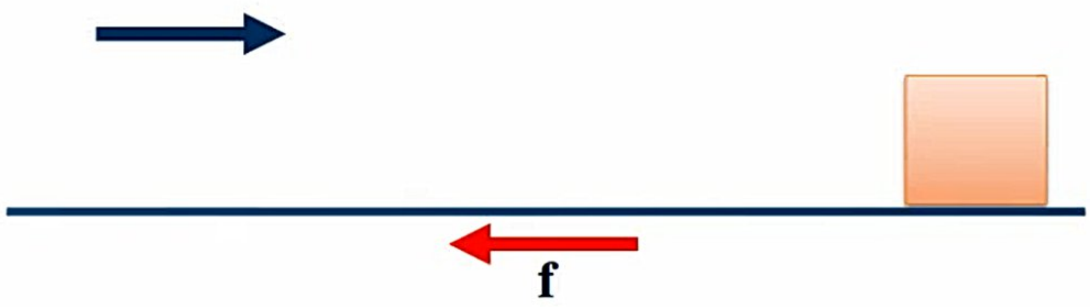
$$W_{total} = -mgh + mgh = 0$$

کار نیروی پایستار مستقل از مسیر است

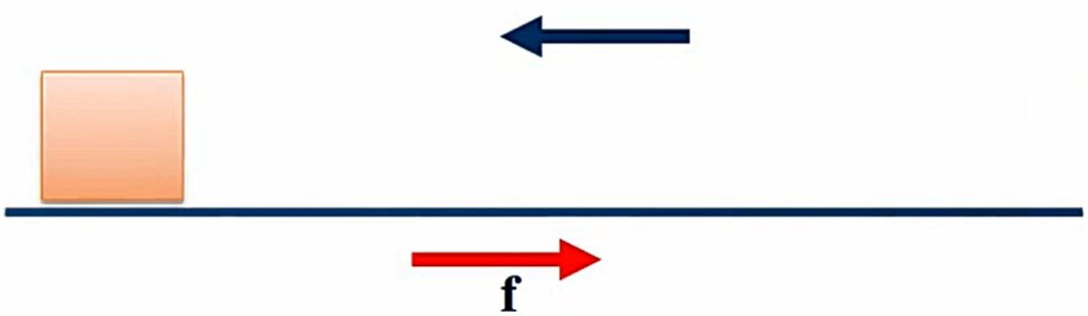


مثال برای نیروی ناپایستار

نیروی اصطکاک از نوع نیروی ناپایستار است.



$$W_f = -\mu mgd$$



$$W_f = -\mu mgd$$

انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل (U) را برای نیروهای پایستار تعریف می کنیم.

انرژی پتانسیل برای نیروهای ناپایستار مثل اصطکاک وجود ندارد.

در یک مجموعه اگر نیروی پایستار، کار انجام دهد؛

$$\Delta U = -W$$

از طرفی طبق قضیه کار – انرژی داریم ؛

$$\Delta K = W$$

بنابراین با توجه به ۲ رابطه اخیر، خواهیم داشت،

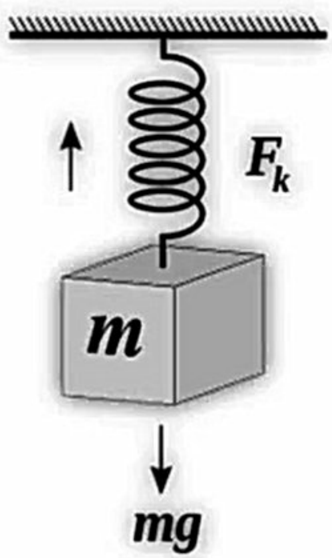
$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(K + U) = 0$$

$$\Rightarrow K + U = E$$

اگر چند نیروی پایستار بر جسم اعمال شود:

$$\Rightarrow K + (U_1 + U_2 + U_3 + \ldots) = E$$



بعنوان مثال در شکل مقابل دو نیروی پایستار فنر و گرانش بر جسم اثر می‌کنند.

محاسبه انرژی پتانسیل نیروهای پایستار

می‌خواهیم انرژی پتانسیل مربوط به هر نیروی پایستار را بدست آوریم.

$$\Delta U = -W$$

$$W = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

$$\Delta U = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

$$\boxed{U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx}$$

رابطه بین نیرو و انرژی پتانسیل

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$

بنابراین اگر تابعیت انرژی پتانسیل بر حسب x را داشته باشیم می‌توانیم نیروی وارد بر ذره را حساب کنیم.

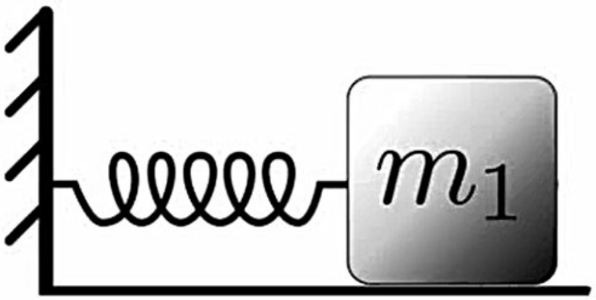
مثال + پاسخ

یک ذره الکتریکی باردار در نقطه $x = 0$ در حال سکون قرار دارد، ذره دوم با بار مساوی در امتداد محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل سیستم $U(x) = C/x$ می‌باشد. که C یک ثابت مثبت می‌باشد و به بزرگی بارها بستگی دارد.

رابطه ای برای مولفه x نیروی وارد بر ذره باردار بر حسب مکان آن بیابید.

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}} \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{x}\right) = \frac{C}{x^2}$$

سیستم جسم - فنر



مرجع را نقطه ای می گیریم که فنر آزاد است.

$$x_0 = 0$$

$$U(x_0) = 0$$

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx \qquad \Rightarrow \; U(x) - 0 = -\int_{0}^{x} (-kx)\,dx$$

$$\Rightarrow \; U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

این مقدار انرژی پتانسیلی است که در فنر، چه کشیده شود چه فشرده، بعد از جابجایی به اندازه x ذخیره می‌شود.

سیستم جسم – فنر

بنابراین انرژی مکانیکی یک سیستم جسم – فنر در هر مکانی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

در نقطه جابجایی بیشینه فنر (x_m) داریم؛

$$E = \frac{1}{2} k x_m^2$$

طبق اصل پایستگی انرژی؛

$$\frac{1}{2} k x_m^2 = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

سیستم جسم – فنر

بنابراین سرعت به ازای هر مقدار جابجایی؛

$$V = \sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)}$$

آن چیزی که قبلا آموخته بودیم از قوانین سینماتیک بدست بیاوریم را حال با آموزه های مبتنی بر انرژی توانستیم بدست بیاوریم.

مثال

بچه ای مطابق شکل از ارتفاع **8/5** متری به پایین می لغزد. با فرض اینکه اصطکاک نیست سرعت در انتهای مسیر چقدر است؟

پاسخ

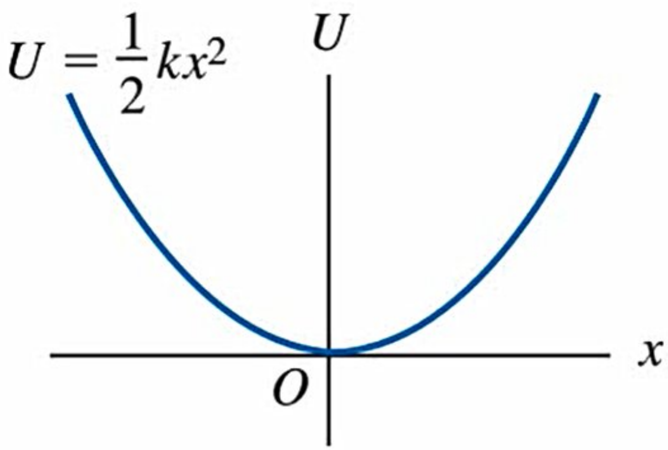
$$K_b + U_b = K_t + U_t,$$

$$\tfrac{1}{2}mv_b^2 + mgy_b = \tfrac{1}{2}mv_t^2 + mgy_t.$$

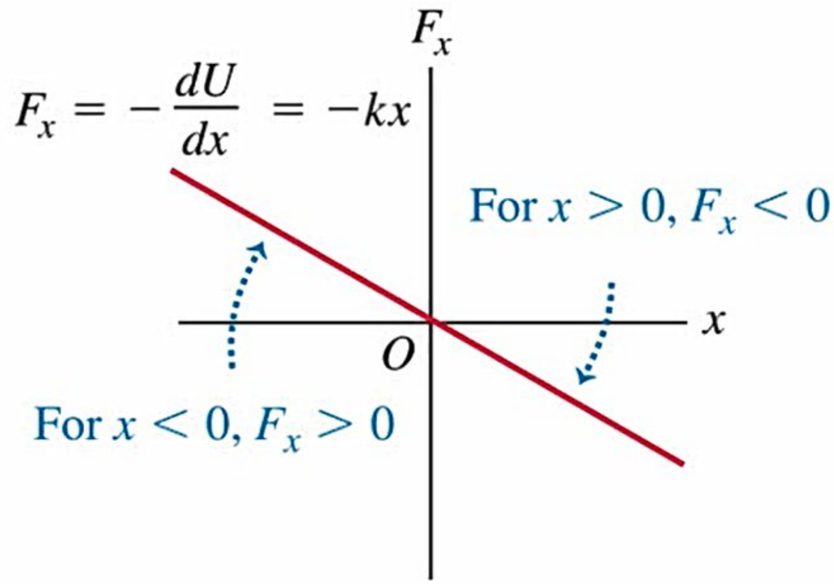
$$v_b^2 = v_t^2 + 2g(y_t - y_b)$$

$$v_b = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9.8\ \mathrm{m}/s^2)(8.5\ \mathrm{m})}$$

$$= 13\ \mathrm{m/s}.$$



$U = \frac{1}{2}kx^2$
U
x
O

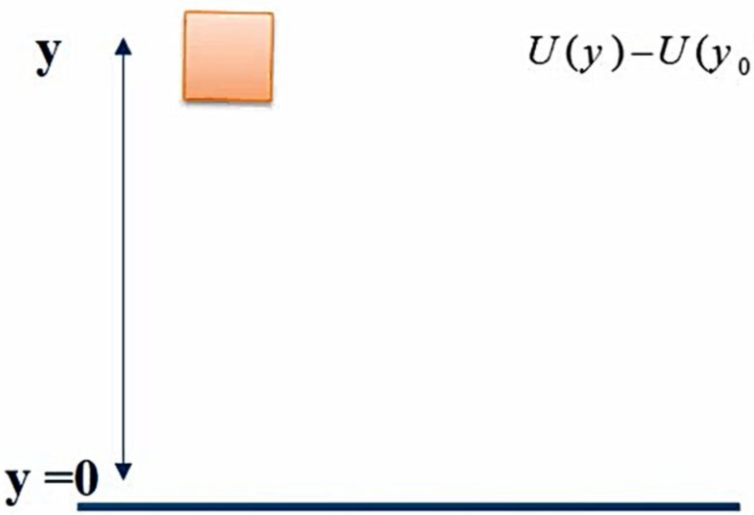


F_x
$F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx$
For $x > 0$, $F_x < 0$
x
O
For $x < 0$, $F_x > 0$

نیروی گرانش

نقطه مرجع را $y_0 = 0$ در نظر می گیریم.

$$U(y_0) = 0$$

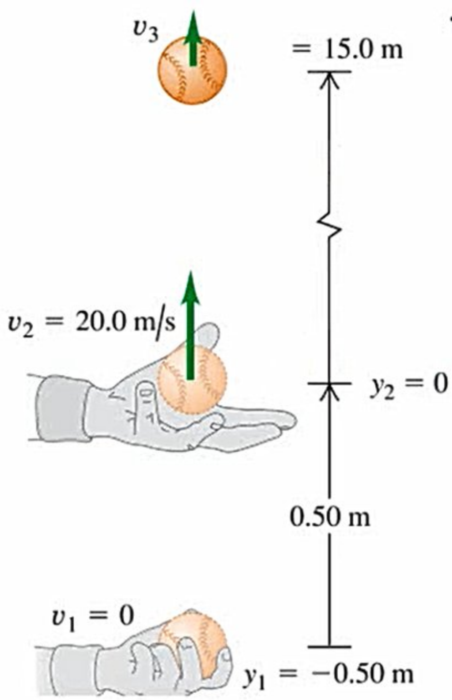


$$U(y) - U(y_0) = -\int_{y_0}^{y} F(y)\,dy \qquad \Rightarrow \; U(y) - 0 = -\int_{0}^{y} (-mg)\,dy$$

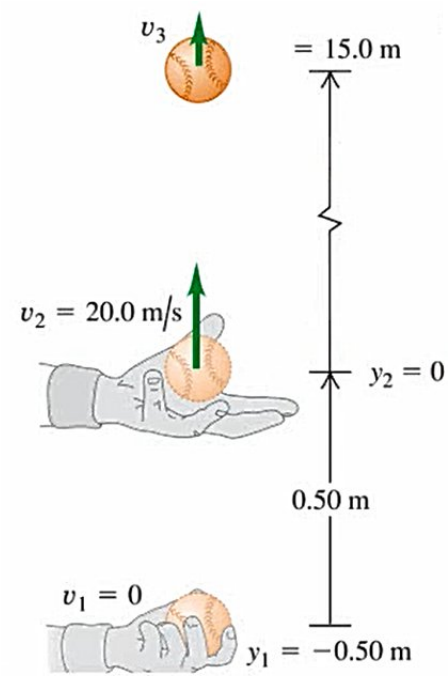
$$\Rightarrow \; U(y) = mgy$$

مثال

می خواهیم توپی به جرم **0.145 kg** را مستقیم به بالا پرتاب کنیم. برای اینکار ابتدا دست را به اندازه **0.5 m** بالا برده و سپس توپ را پرتاب می کنیم. توپ با سرعت اولیه **20 m/s** دست را ترک می‌کند. بزرگی نیرویی که دست بر توپ وارد می کند (که ثابت نیز فرض می شود) را بیابید. سرعت توپ در نقطه **15 m** بالای محلی که دست را ترک می‌کند بیابید.



پاسخ



برای بدست آوردن نیروی دست $\mathrm{F_h}$ کافی است کاری که این نیرو انجام می‌دهد را بیابیم.

از قانون پایستگی انرژی (بین نقاط ۱ و ۲) استفاده می‌کنیم.

$$K_1 + U_1 + W_h = K_2 + U_2$$

$$W_h = (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1)$$

$$W_h = (\frac{1}{2} m V_2^2 - \cancel{\frac{1}{2} m V_1^2}) + (\cancel{mgy_2} - mgy_1)$$

$$W_h = (29 - 0) + (0 - (-0.71) = 29.7J$$

ادامه پاسخ:

چون نیرو ثابت است پس رابطه ساده بین کار و نیرو در جابجایی از y_1 تا y_2 را داریم؛

$$W_h = F_h \times (y_2 - y_1) \quad \Rightarrow \quad F_h = \frac{W_h}{y_2 - y_1} \quad \Rightarrow \quad F_h = 59\ N$$

برای یافتن سرعت در نقطه ۳، باز هم از قانون پایستگی، این بار بین دو نقطه ۲ و ۳ استفاده می کنیم.

توجه : می توانید بررسی کنید که نقطه ۳ پایین تر از نقطه اوج توپ است.

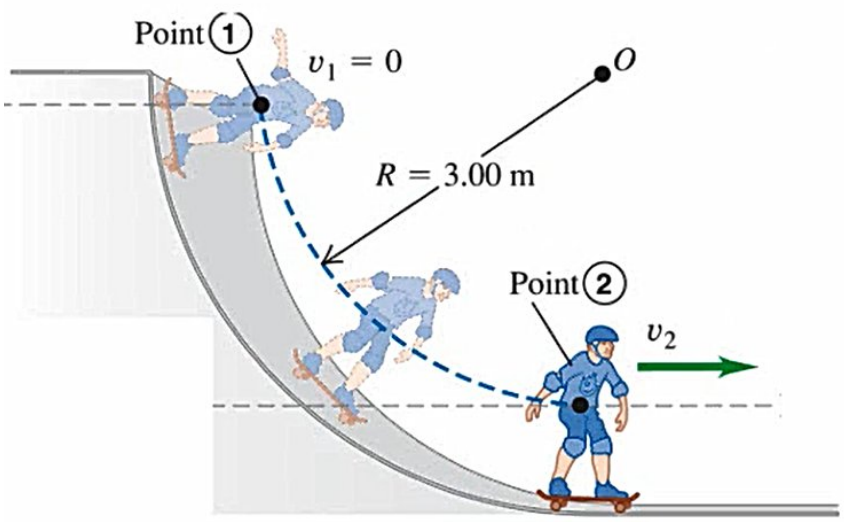
$$K_2 + U_2 = K_3 + U_3$$

$$\frac{1}{2} m V_2^2 + mgy_2 = mgy_3 + \frac{1}{2} m V_3^2$$

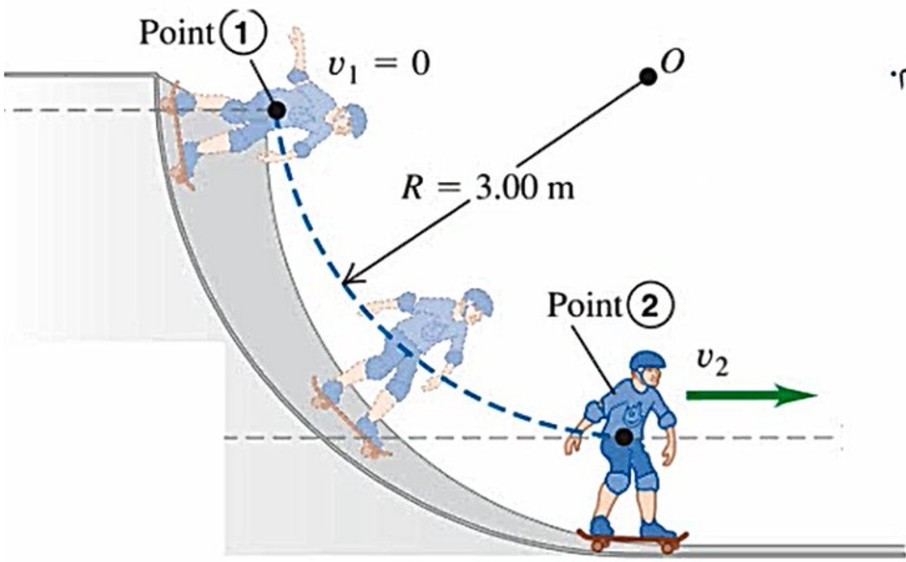
$$V_3 = \pm 10\, m/s$$

مثال

در شکل زیر، نوجوانی از حال سکون مسیری بدون اصطکاک را طی می‌کند. شعاع مسیر $R = 3\ m$ است. جرم کل شخص $25\ kg$ است. با استفاده از کاربرد قانون پایستگی، نیروی عمودی که در انتهای مسیر بر شخص وارد می شود را بیابید.



پاسخ



شخص مسیر دایروی طی می‌کند. پس ابتدا باید شتاب مرکزگرا را بدانیم.

برای دانستن شتاب باید سرعت را بیابیم.

$$\cancel{\frac{1}{2}mV_1^2} + mgy_1 = \cancel{mgy_2} + \frac{1}{2}mV_2^2$$

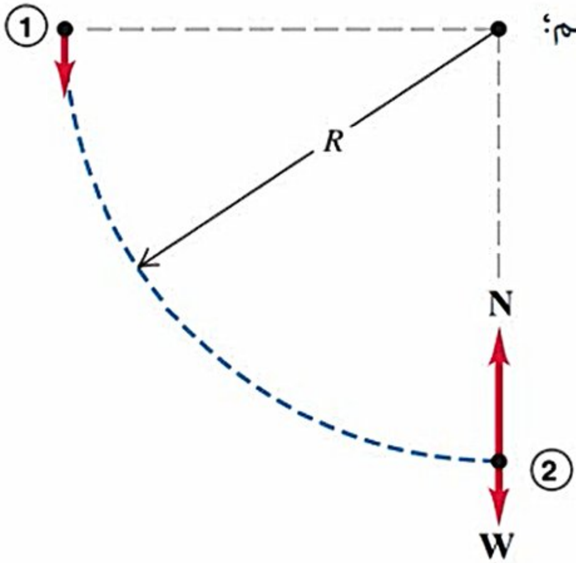
$$0 + mgR = \frac{1}{2}mV_2^2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{2gR}$$

ادامه پاسخ

حال می توان شتاب را بدست آورد؛

$$a = \frac{V^2}{R} \Rightarrow a = \frac{(2gR)}{R} = 2g$$

حالا برای بدست آوردن نیروی عمودی سطح بر شخص از قانون دوم نیوتن استفاده می‌کنیم؛

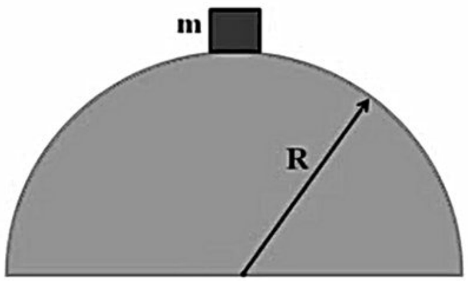


$$N - W = ma$$

$$N = W + ma \Rightarrow N = mg + m(2g) = 3mg$$

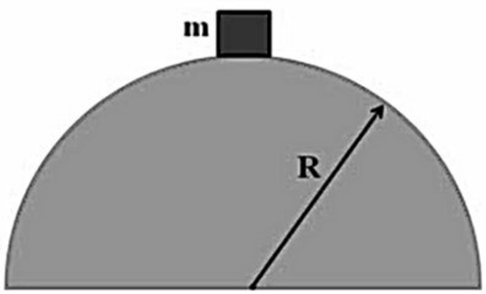
مثال

جسمی به جرم m در بالاترین نقطه نیمکره بدون اصطکاکی به شعاع R قرار دارد. این جسم از حال سکون شروع به لغزیدن به طرف پایین می‌کند. در چه نقطه ای جسم از سطح نیمکره جدا می‌شود؟ سرعت این جسم را در لحظه ای که از سطح نیمکره جدا می‌شود حساب کنید. (نیمکره محکم به زمین ثابت شده است.)



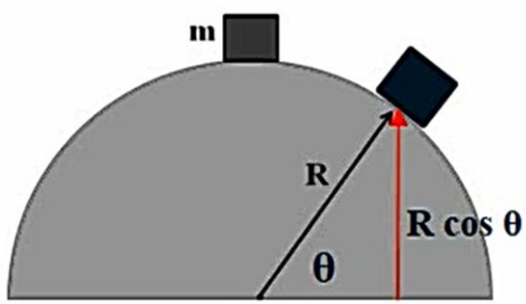
پاسخ

از قانون پایستگی انرژی استفاده خواهیم کرد. نقطه شروع حرکت را (۱) و نقطه ای که جسم از سطح جدا می شود را (۲) می‌نامیم. مبدا پتانسیل را سطح زمین می‌گیریم.



$$E_1 = E_2 \qquad \Rightarrow \frac{1}{2}mV_1^2 + mgR = \frac{1}{2}mV_2^2 + mgy$$

حال باید مقدار y را بنویسیم.



به شکل روبرو دقت کنید؛

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}mV_1^2} + mgR = \frac{1}{2}mV_2^2 + mgR\cos\theta \qquad (1)$$

ادامه پاسخ

از طرفی قانون دوم نیوتن را برای جسم درست لحظه ای که از سطح کنده می‌شود را می‌نویسیم ($N = 0$)؛

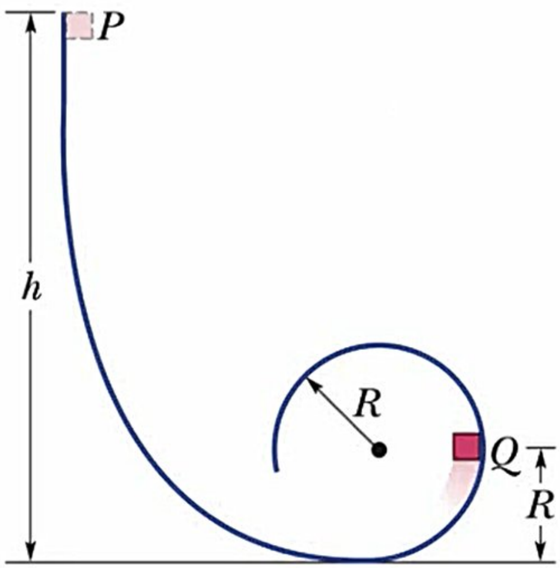
$$mg\cos\theta - \cancel{N} = m\frac{V_2^{\,2}}{R} \qquad (2)$$

$$(1)\,,(2) \Rightarrow mgR = \frac{1}{2}mV_2^{\,2} + mV_2^{\,2}$$

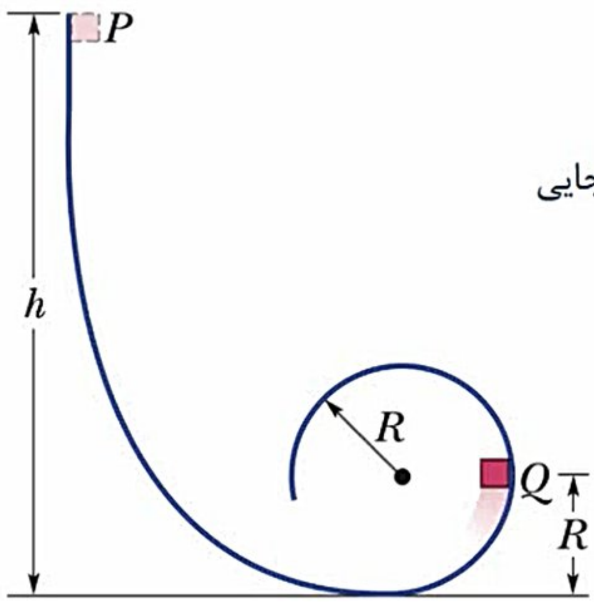
$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$$

مثال

در شکل مقابل، جسمی به جرم $m = 0.032\ kg$ می‌تواند بر روی سطح بدون اصطکاکی سربخورد. شعاع بخش منحنی $R = 12\ cm$ است. جسم از حال سکون در نقطه P در ارتفاع $h = 5R$ از سطح رها می شود. کار نیروی وزن در حین نقل مکان جسم از P به نقطه Q و بالاترین بخش حلقه را بیابید.



پاسخ



حل :

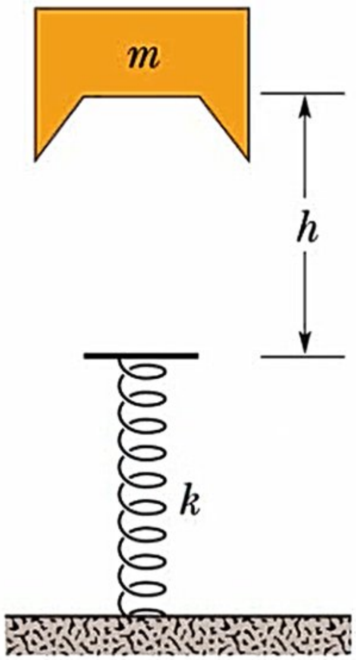
نیروی گرانش، یک نیروی پایستار است و کار آن مستقل از مسیر است. بنابراین کافی است جابجایی جسم بین دو نقطه آغازین و انتهایی حرکت را محاسبه کنیم.

$$W_{PQ} = \vec{F}_{mg} \cdot \vec{d}_{PQ} = mg(h-R) = 0.15J$$

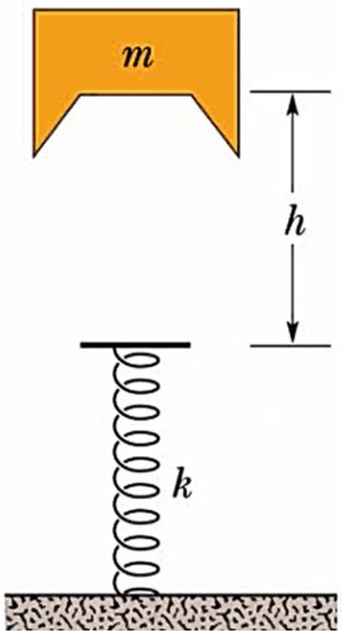
$$W_{P,top} = \vec{F}_{mg} \cdot \vec{d}_{P,top} = mg(h-2R) = 0.11J$$

مثال

جسمی به جرم $m = 2\ kg$ از ارتفاع $h = 40\ cm$ بر روی یک فنر با ثابت $k = 1960\ N/m$ سقوط می‌کند. بیشینه فشردگی فنر را محاسبه کنید.



پاسخ



مبدا پتانسیل (گرانشی) را نقطه ای در نظر می‌گیریم که جسم فنر را تا بیشترین حد فشرده کرده است.

قانون پایستگی انرژی را بین دو نقطه (۱) لحظه سقوط ، و (۲) بیشینه فشردگی فنر(X) می‌نویسیم.

$$E_1 = E_2$$

$$\cancel{K_1} + U_1 = \cancel{K_2} + U_2$$

$$mg(h + x) = \frac{1}{2}kx^2$$

ادامه پاسخ

این، یک معادله درجه دوم بر حسب X است؛ این معادله را حل می‌کنیم؛

$$mg(h+x)=\frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2-mgx-mgh=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{mg\pm\sqrt{(mg)^2+2mghk}}{k}$$

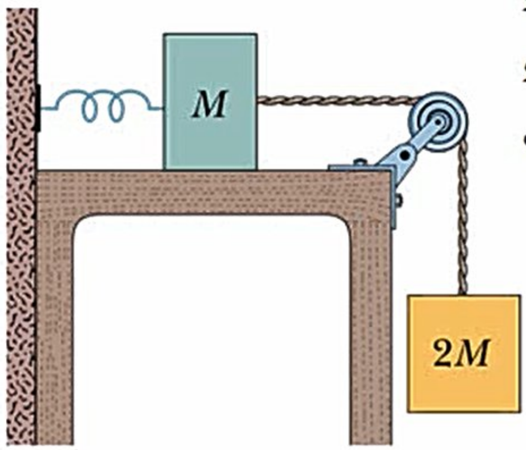
با جایگذاری مقادیر و انتخاب عدد مثبت خواهیم داشت؛

$$x=0.1m$$

مثال

دو مکعب به جرمهای **M** و **2M** به فنری با ثابت **k** متصل هستند که از یک انتها ثابت است. سطوح و قرقره ها بدون اصطکاک می‌باشند. مکعبها از حالت سکون رها می‌شوند. انرژی جنبشی مجموع دو مکعب، وقتی که مکعب آویزان به اندازه **0.09 m** سقوط می‌کند را بیابید. بیشترین مسافتی که مکعب آویزان تا یک سکون لحظه ای طی می‌کند چقدر است؟

(M=2 kg, k =200 N/m)

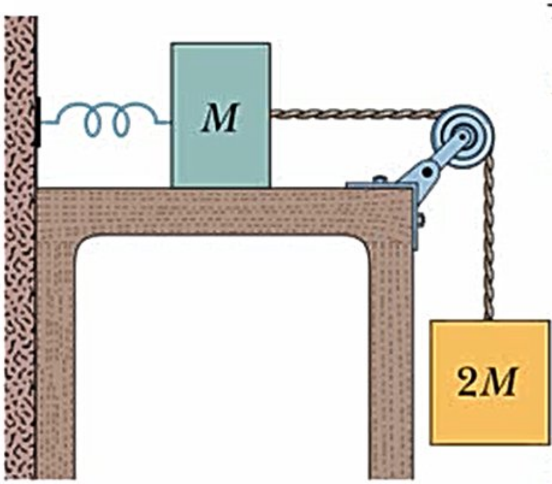


پاسخ

مبدا پتانسیل را سطح میز می‌گیریم. انرژی مجموعه دو مکعب را با K_t نشان می‌دهیم. فشردگی فنر برابر با جابجایی مکعب است.

$$U_1 + K_1 = K_t + U_{(spring)} + U_{(Gravity)} \qquad 0 = K_t + U_{(spring)} + U_{(Gravity)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = K_t + mg(-0.09) + \frac{1}{2}k(0.09)^2 \qquad \Rightarrow \quad K_t = 2.7\,J$$



بیشترین مسافتی که مکعب آویزان سقوط می‌کند؟

$$U_1 + K_1 = K_t + U_{(spring)} + U_{(Gravity)}$$

$$0 = 0 + mg(-d) + \frac{1}{2}kd^2$$

$$d = 0.39\,m$$

منحنی انرژی پتانسیل

هدف از تحلیل سیستمهای مکانیکی، معمولا این است که حرکت ذره را بر حسب زمان توصیف کنیم.

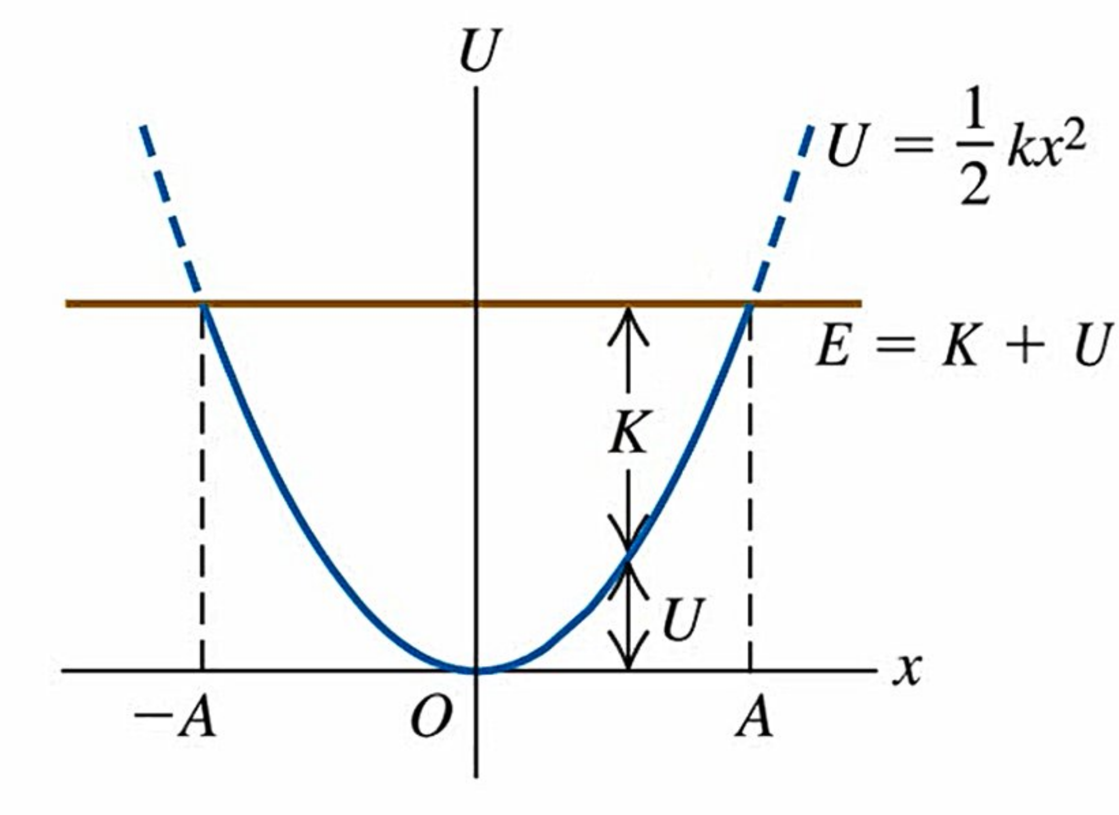
$$E = \frac{1}{2}mV^2 + U(x)$$

$$V = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

از رابطه معمولا معلوم می‌شود که برای اینکه سرعت موهومی نشود، باید داشته باشیم :

$$E \geq U(x)$$

انرژی فنر



پایان جلسه دهم.