

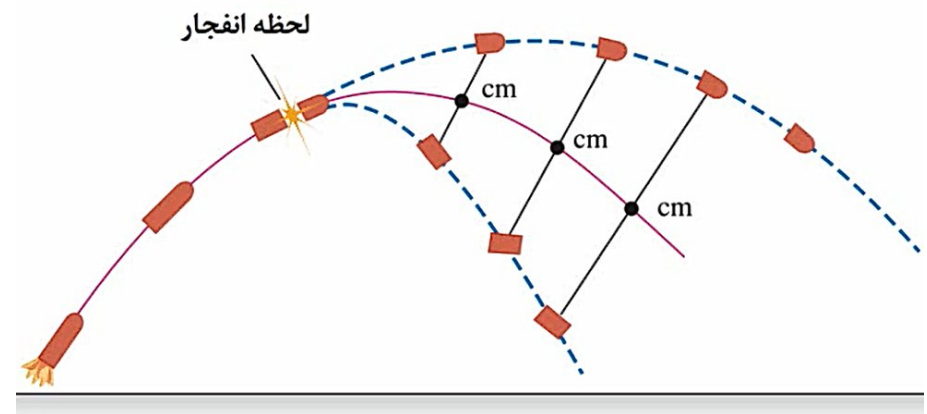
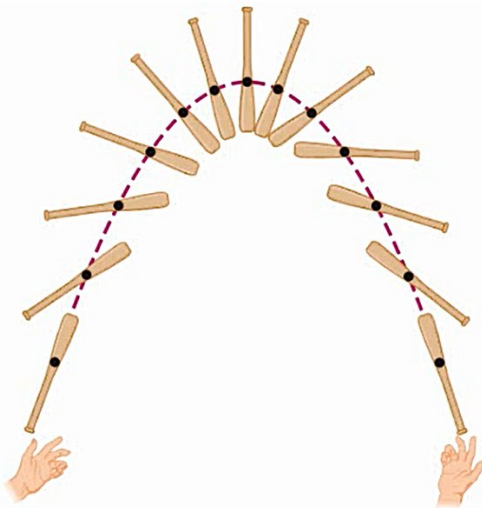
فیزیک ۱

حل تمرین دکتر غلام محمد پارسا نسب
نسرين كريمي
دانشگاه شهيد بهشتي - دي ۱۴۰۰

مرکز جرم

نقطه ای که می توان فرض کرد کل جرم سیستم در آن مکان متمرکز شده است، (C.M). و بر آیند نیروهای وارد بر کل جسم به این نقطه وارد می شود، یعنی ؛

$$\vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{cm}$$



مرکز جرم

اگر دو جسم با جرم‌های برابر مطابق شکل داشته باشیم، مرکز جرم نقطه وسط دو جسم می‌باشد.



حال اگر n ذره هم جرم داشته باشیم، مولفه x مرکز جرم این مجموعه به سادگی میانگین مولفه‌های x تمام ذرات است، یعنی

$$x_{cm} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

برای مولفه‌های y و z نیز روابط مشابهی برقرار است. بنابراین داریم؛

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_n}{n}$$

مرکز جرم

اما در حالت کلی ذرات جرم‌های متفاوتی دارند.

پس، n ذره با جرم‌های مختلف m_1, m_2, \dots, m_n داریم. مولفه x مرکز جرم از رابطه زیر بدست می‌آید.

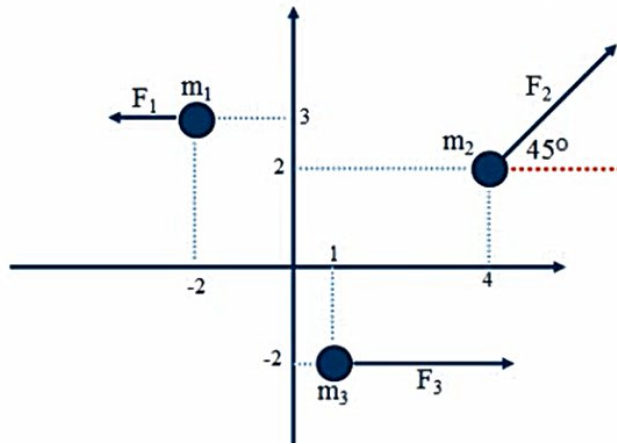
$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

مولفه‌های y و z نیز روابط مشابهی دارند. بنابراین (منظور از M همان جمع جرم تمام ذرات است):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{M}$$

مثال

سیستمی شامل ۳ ذره است که در ابتدا ساکن هستند. جرم ذرات به ترتیب $m_1 = 4.1 \text{ kg}$ ، $m_2 = 8.2 \text{ kg}$ ، $m_3 = 4.1 \text{ kg}$ است. این ذرات تحت تاثیر نیروهای خارجی متفاوتی قرار می‌گیرند که عبارتند از $F_1 = 6 \text{ N}$ ، $F_2 = 12 \text{ N}$ ، $F_3 = 14 \text{ N}$. مرکز جرم این سیستم در کجا واقع شده و شتاب آن چقدر است؟



ابتدا مولفه‌های مرکز جرم را بدست می‌آوریم:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(4.1 \times (-2)) + (8.2 \times 4) + (4.1 \times 1)}{16.4} = 1.8$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(4.1 \times 3) + (8.2 \times 2) + (4.1 \times (-2))}{16.4} = 1.3$$

پاسخ

برای محاسبه شتاب، رابطه قانون دوم نیوتن برای مرکز جرم را به کار برده و به ۲ مولفه تجزیه می‌کنیم.

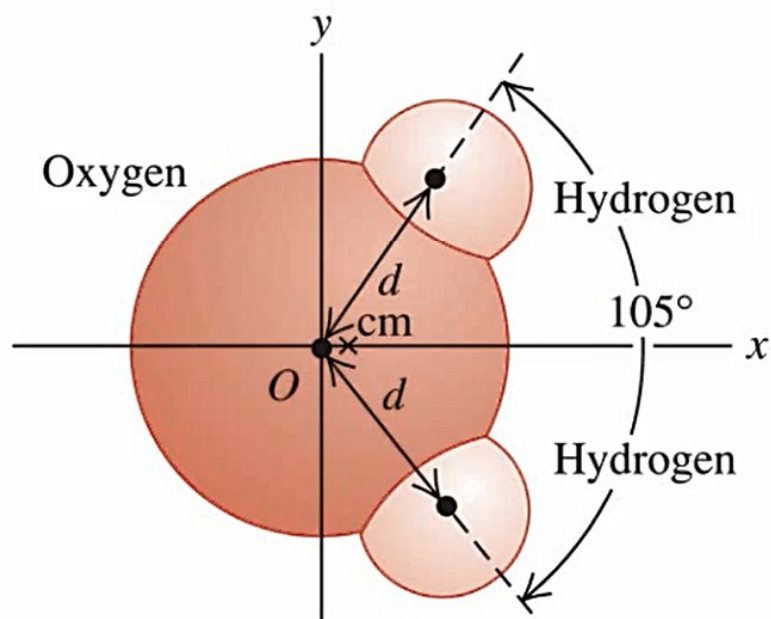
$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{cm} & \Rightarrow \begin{aligned} \sum F_x &= (m_1 + m_2 + m_3) a_{cm,x} \\ \sum F_y &= (m_1 + m_2 + m_3) a_{cm,y} \end{aligned} & \Rightarrow \begin{aligned} (F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x}) &= (m_1 + m_2 + m_3) a_{cm,x} \\ (F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y}) &= (m_1 + m_2 + m_3) a_{cm,y} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$a_{cm,x} = \frac{(-6 + 12 \cos 45 + 14)}{(16.4)} = 1.01 \, m/s^2$$

$$a_{cm,y} = \frac{(0 + 12 \sin 45 + 0)}{(16.4)} = 0.52 \, m/s^2$$

مثال

شکل زیر مدل ساده ای از یک مولکول آب را نشان می‌دهد. فاصله بین اکسیژن و هیدروژن $d = 9.57 \times 10^{-11} \text{ m}$ می‌باشد. هر اتم هیدروژن جرمی برابر با 1 u و جرم اتم اکسیژن برابر با 16 u می‌باشد. موقعیت مرکز جرم را بیابید.



پاسخ

Hydrogen 1: $(d \cos 52.5^\circ, d \sin 52.5^\circ)$

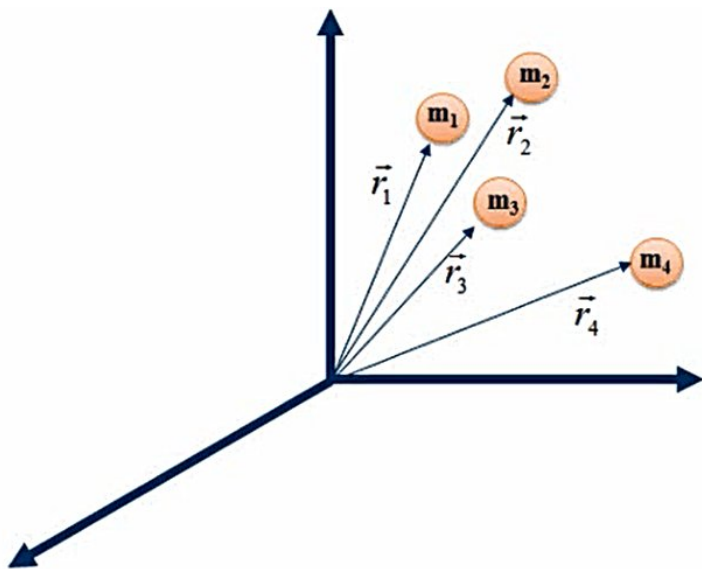
Hydrogen 2: $(d \cos 52.5^\circ, -d \sin 52.5^\circ)$

Oxygen: $(0, 0)$

$$x_{xm} = \frac{(1 \times d \cos 52.5^\circ) + (1 \times d \cos 52.5^\circ) + (16 \times 0)}{16 + 1 + 1} = 0.086 \times 9.57 \times 10^{-11} m$$

$$y_{xm} = \frac{(1 \times (-d \sin 52.5^\circ)) + (1 \times d \sin 52.5^\circ) + (16 \times 0)}{16 + 1 + 1} = 0 m$$

تکانه سیستم ذرات



$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{M}$$

$$M \vec{r}_{cm} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n$$

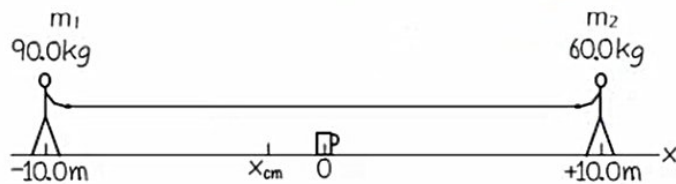
$$M \vec{V}_{cm} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + \dots + m_n \vec{V}_n$$

$$\vec{P}_{cm} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

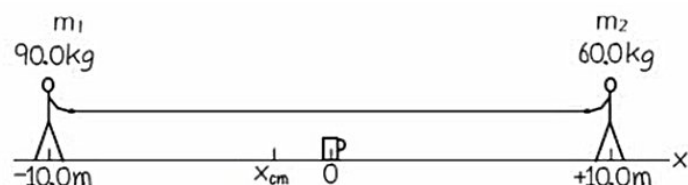
تکانه کل سیستم برابر است با جرم کل ضرب در سرعت مرکز جرم.

مثال

دو شخص به جرم‌های $m_1 = 90 \text{ kg}$ و $m_2 = 60 \text{ kg}$ به فاصله ۲۰ متری از هم بر روی یک سطح بدون اصطکاک قرار دارند. هر کدام از این اشخاص، یک سر طنابی که در دست دارند را به طرف خود می‌کشند. وقتی شخص اول به اندازه ۶ متر به طرف نقطه O جابجا می‌شود، شخص دوم چقدر و در چه جهتی جابجا شده است؟



پاسخ



حل : چون نیروی خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود؛ پس تکانه پایسته است.

در ابتدا مرکز جرم در حال سکون بود، با توجه به اینکه تکانه مرکز جرم نیز پایسته است، بنابراین تکانه نهایی مرکز جرم هم صفر است. این یعنی مرکز جرم در حال سکون است و مکان آن تغییری نکرده است.

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(90 \times (-10)) + (60 \times 10) + (4.1 \times 1)}{150} = -2 \text{ m}$$

مکان مرکز جرم :

بنابراین بعد از جابجا شدن، نیز مرکز باید در همان $x = -2 \text{ m}$ باشد.

$$x_{cm} = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2} = \frac{(90 \times (-4)) + (60 \times x'_2)}{150} = -2 \text{ m}$$

$$x'_2 = 1 \text{ m}$$

بنابراین، شخص دوم به اندازه ۹ متر به شخص اول نزدیک شده است.

مثال

در سیستم دو ذره ای زیر، شتاب مشترک دو قالب را با در نظر گرفتن حرکت مرکز جرم سیستم بیابید. (از اصطکاک چشم پوشی کنید)

حل :

مختصات هر جسم بصورت زیر است:

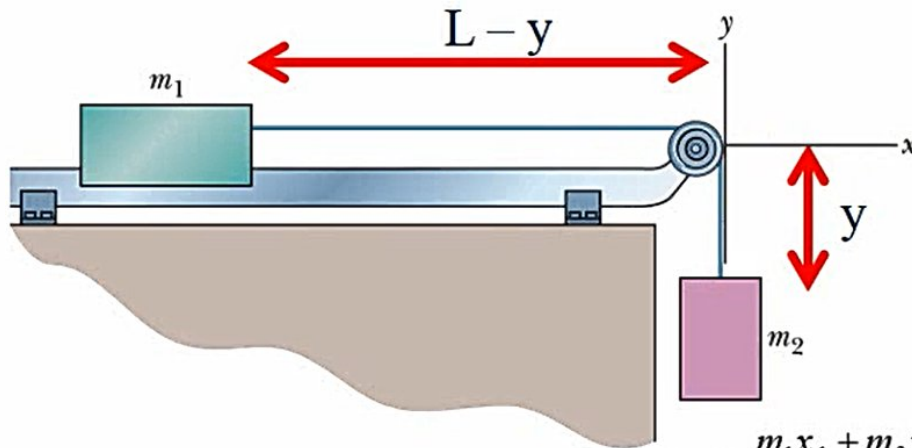
$$m_1 \Rightarrow (-(L - y), 0)$$

$$m_2 \Rightarrow (0, -y)$$

حال مختصات مرکز را بدست می آوریم:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1}{M} (L - y)$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{M} y$$



پاسخ

با مشتق گیری نسبت به زمان سرعت مرکز جرم را می یابیم؛

$$V_{cm,x} = \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{m_1}{M} \frac{dy}{dt} = \frac{m_1}{M} V$$

$$V_{cm,y} = \frac{dy_{cm}}{dt} = \frac{m_2}{M} \frac{dy}{dt}$$

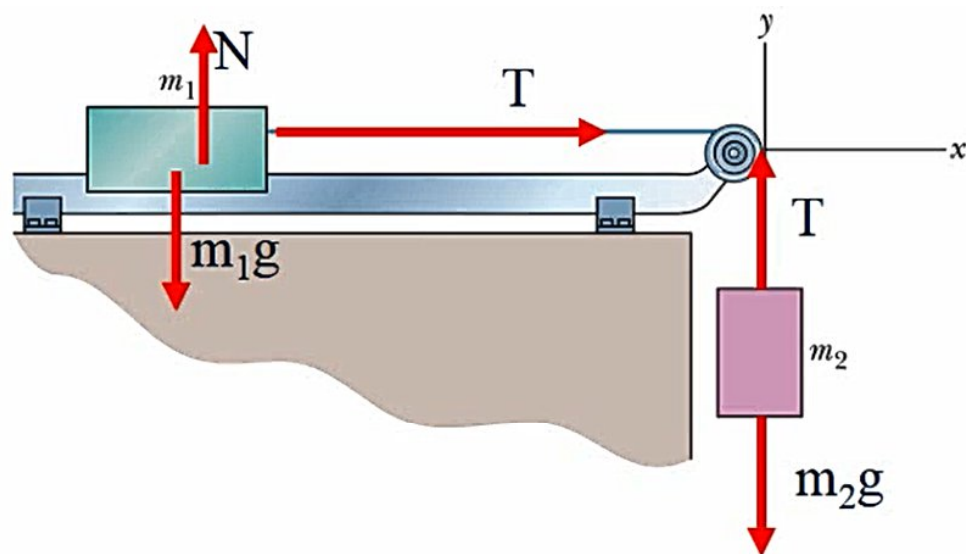
با مشتق گیری نسبت به زمان، می توان شتاب مرکز جرم را بیابیم؛

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{xm,x} &= \frac{dV_{cm,x}}{dt} = \frac{m_1}{M} a \\ a_{cm,y} &= \frac{dV_{cm,y}}{dt} = \frac{m_2}{M} a \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{cm}$$

حال از رابطه زیر استفاده می کنیم تا شتاب مرکز جرم را محاسبه کنیم.

پاسخ

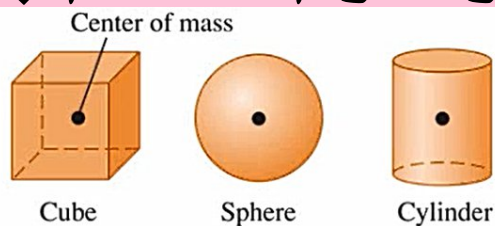


$$T = M \vec{a}_{cm,x}$$
$$\cancel{m_1g} - \cancel{N} + m_2g - T = M a_{cm,y}$$

با جاگذاری مقادیر رابطه (۱) در رابطه فوق، می‌توان شتاب سیستم را بصورت زیر محاسبه کرد:

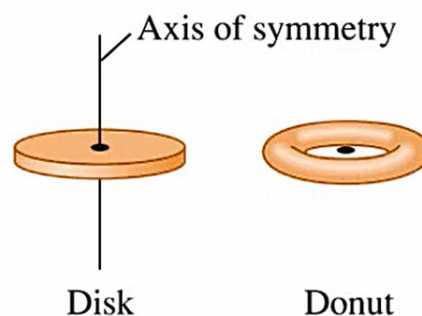
$$a = g \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

مرکز جرم اجسام پیوسته



وقتی جسم، همگن بوده و یک مرکز هندسی داشته باشد، مانند اشکال بالا، مرکز جرم بر روی مرکز هندسی اجسام قرار می‌گیرد.

اگر جسم مورد نظر، همگن بوده و یک محور تقارن داشته باشد مرکز جرم بر روی محور تقارن قرار می‌گیرد.



لزومی ندارد که مرکز جرم همیشه بر روی جسم قرار بگیرد.

مرکز جرم اجسام صلب

تعیین مرکز جرم اجسام صلب جامد با استفاده از رابطه ای که قبلاً برای مرکز جرم معرفی کردیم و جمع کردن سهم تک تک اتم‌ها بسیار دشوار است. به جای اینکار از جمع موجود در آن رابطه (سری) به صورت انتگرالی نوشته می‌شود:

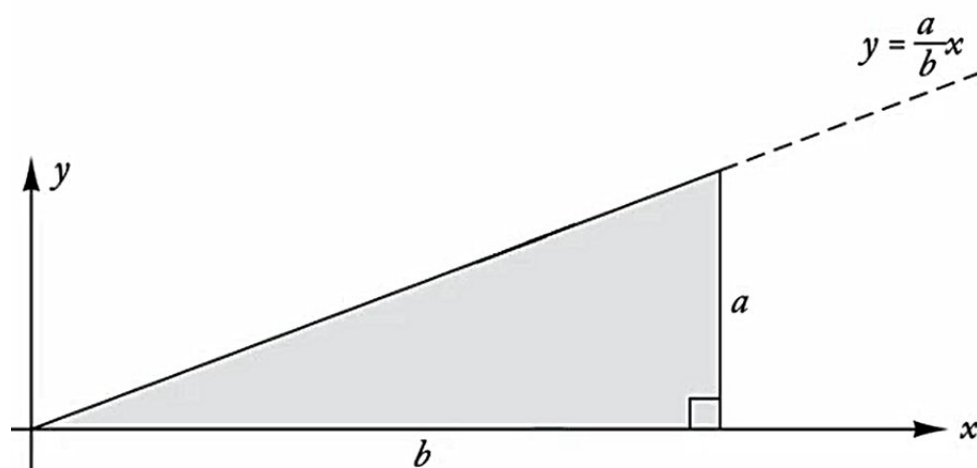
$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

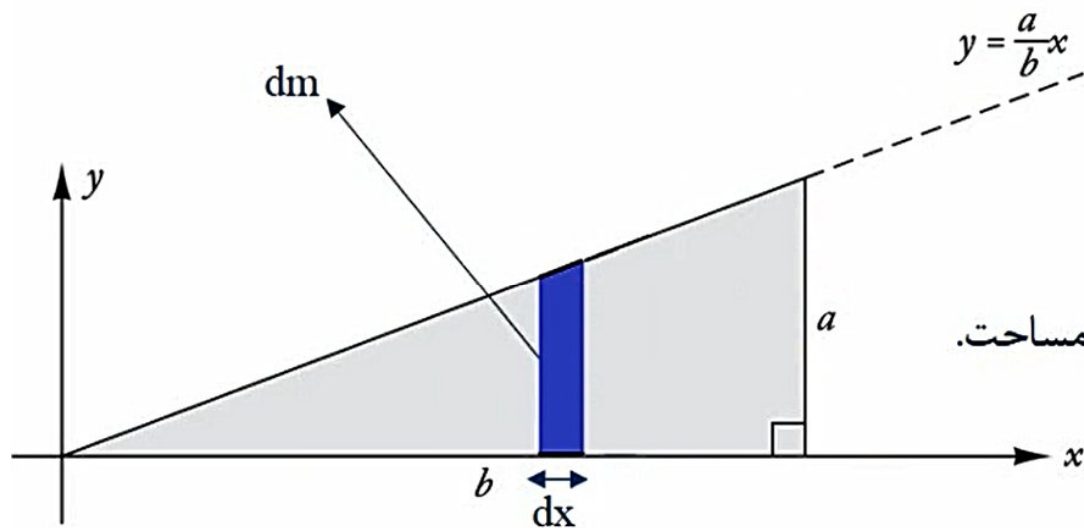
$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y \, dm$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

مثال

مرکز جرم مثلث قائم الزاویه زیر را بیابید.





$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

چگالی سطحی (σ) این مثلث برابر است با جرم تقسیم بر مساحت.

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{\frac{1}{2}ab} \quad (1)$$

نواری باریکی به ضخامت dx و با جرم بسیار کم (dm) از روی شکل انتخاب می‌کنیم (المان).

ادامه پاسخ

$$dS = (dx) \times y = \left(\frac{a}{b}\right)x dx$$

مساحت این المان برابر است با ؛

بنابراین چون چگالی جسم یکنواخت است، داریم:

$$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{dm}{\left(\frac{a}{b}\right)x dx}$$

این عبارت باید برابر با رابطه (۱) باشد ، از این تساوی خواهیم داشت؛

$$dm = M \frac{2x}{b^2} dx$$

ادامه پاسخ

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \, dm = \frac{1}{M} \int_0^b x \left(M \frac{2x}{b^2} \right) dx$$

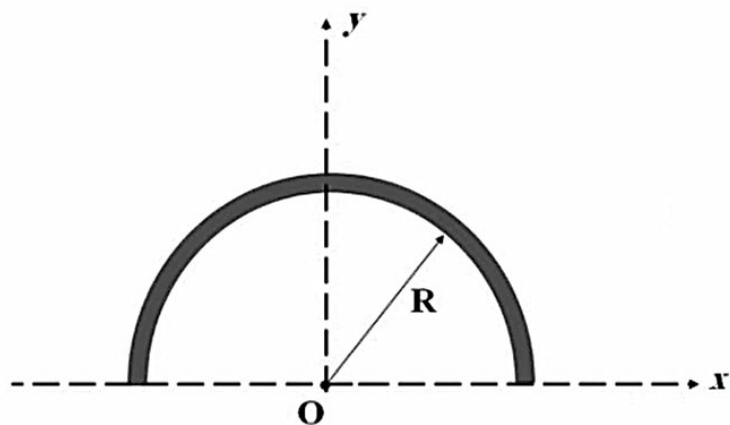
$$= \frac{2}{b^2} \int_0^b x^2 \, dx = \frac{2}{b^2} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^b = \frac{2}{3} b$$

به شیوه ای مشابه محاسبات برای y_{cm} نیز باید انجام بگیرد، که نهایتاً خواهیم داشت:

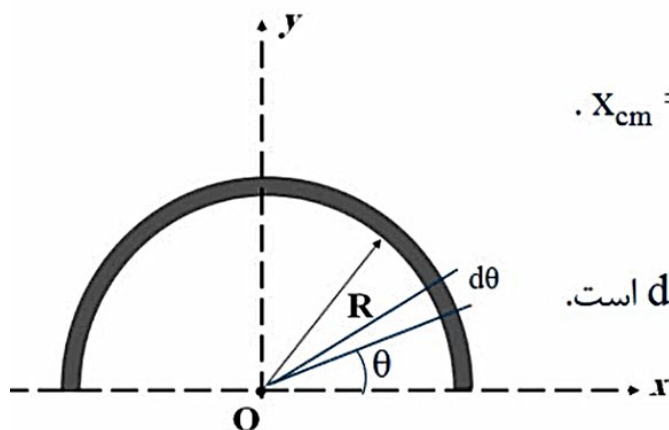
$$y_{cm} = \frac{1}{3} a$$

مثال

نوار نازکی را بصورت نیم دایره ای بصورت زیر در آورده ایم. مرکز جرم آن را بیابید.



پاسخ



چون جسم متقارن است پس مرکز جرم روی محور y قرار دارد. بنابراین $x_{cm} = 0$.

عنصری (المان) به جرم dm مطابق شکل انتخاب می‌کنیم.

جرم کل نوار M و زاویه کل آن π است، جرم عنصر مورد نظر dm و زاویه $d\theta$ است.

بنابراین داریم :

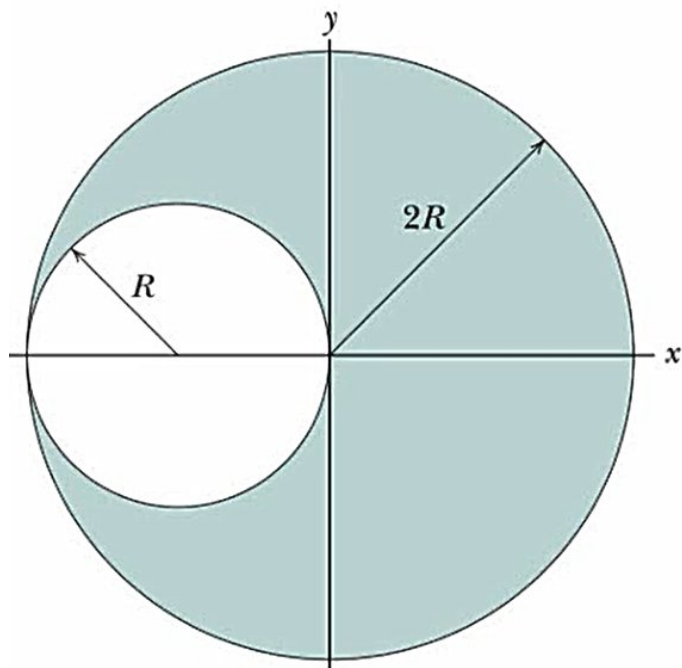
$$\frac{dm}{M} = \frac{d\theta}{\pi} \quad \Rightarrow \quad dm = \frac{M}{\pi} d\theta$$

حال می‌توان با استفاده از رابطه زیر y_{cm} را محاسبه کرد ($y = R \sin \theta$):

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y \, dm = \frac{1}{M} \int_0^{\pi} (R \sin \theta) \left(\frac{M}{\pi} \right) d\theta = \frac{2R}{\pi}$$

مثال

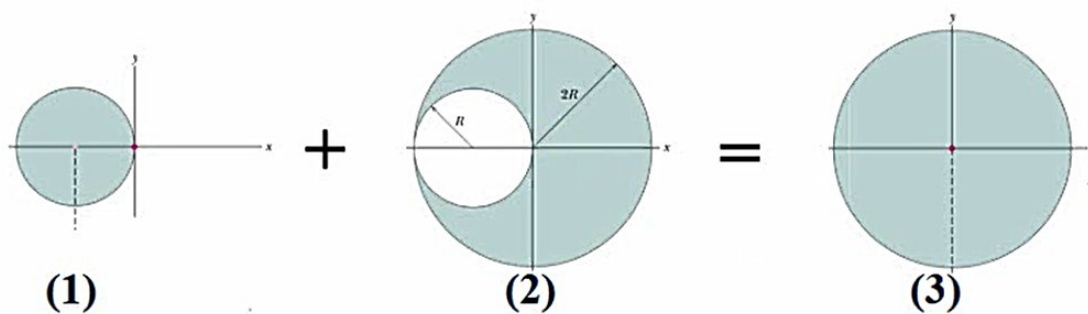
شکل زیر یک صفحه فلزی دایره ای به شعاع $2R$ را نشان می‌دهد که از آن دایره ای به شعاع R جدا شده است. مرکز جرم این جسم را بیابید.



برای حل، فرض می‌کنیم که سوراخ با دایره ای به شعاع R پر شده است. حال یک دایره کامل داریم.

مرکز جرم این دایره کامل در نقطه $(0, 0)$ قرار دارد.

پاسخ



$$\begin{aligned} x_{cm,1} &= -R \\ y_{cm,1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{cm,2} &= ? \\ y_{cm,2} &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{cm,3} &= 0 \\ y_{cm,3} &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{cm,3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow 0 = \frac{m_1(-R) + m_2(x_{cm,2})}{m_1 + m_2} \Rightarrow x_{cm,2} = -\frac{m_1}{m_2} R$$

$$\Rightarrow x_{cm,2} = -\frac{A_1}{A_2} R = -\frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} R = \frac{1}{3} R$$

پایستگی تکانه خطی ذرات

اگر در یک سیستم جمع تمام نیروهای خارجی صفر باشد، در این صورت داریم؛

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \vec{P} = \text{constant}$$

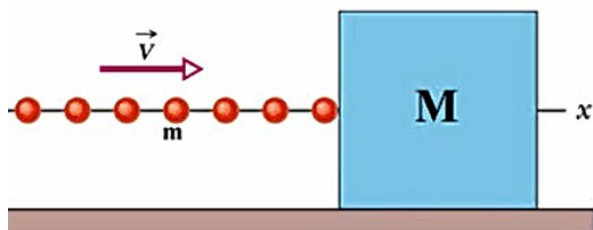
اگر نیروهای خارجی وارد بر سیستم صفر باشد، تکانه کل پایسته است.

تکانه کل یک سیستم را فقط نیروهای خارجی می‌توانند تغییردهند.

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = \text{constant}$$

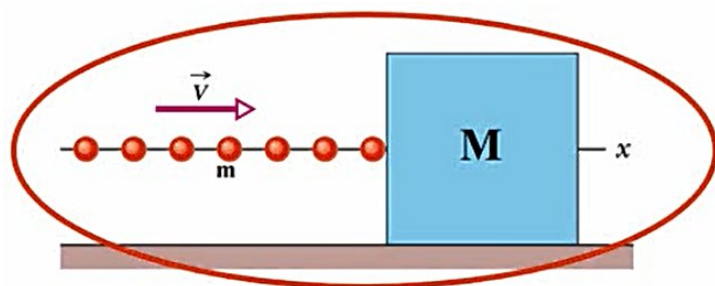
مثال

رگباری از گلوله‌ها به جرم $m = 3.8 \text{ g}$ بطور افقی با سرعت 1100 m/s به قطعه چوب بزرگی به جرم $M = 12 \text{ kg}$ که در ابتدا بر روی سطح میزی افقی ساکن است، شلیک می‌شود. اگر قطعه چوب بتواند بدون اصطکاک روی میز بلغزد، سرعت آن پس از دریافت ۸ گلوله چقدر می‌شود؟



پاسخ

حل :



مجموعه گلوله‌ها و جسم M را بعنوان یک سیستمی از ذرات در نظر می‌گیریم.
قانون پایستگی تکانه برای این مجموعه برقرار است.

تکانه کل قبل از برخورد:

$$P_i = 8mv$$

تکانه بعد از برخورد :

$$P_f = (8m + M)V'$$

با توجه به پایستگی تکانه، داریم:

$$P_i = P_f \Rightarrow (8m + M)V' = 8mv$$

$$\Rightarrow V' = \frac{8m}{8m + M}v$$

$$V' = 2.8 \text{ m/s}$$

پایان جلسه سیزدهم.