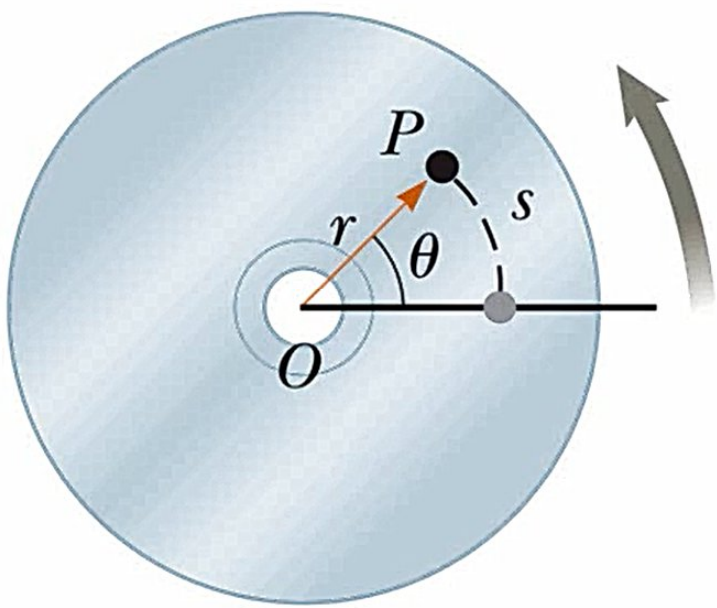
فیزیک ۱

حل تمرین دکتر غلام محمد پارسانسب

نسرین کریمی
دانشگاه شهید بهشتی - دی ۱۴۰۰



معمولا زاویه بر حسب رادیان (rad) بیان می‌شود.

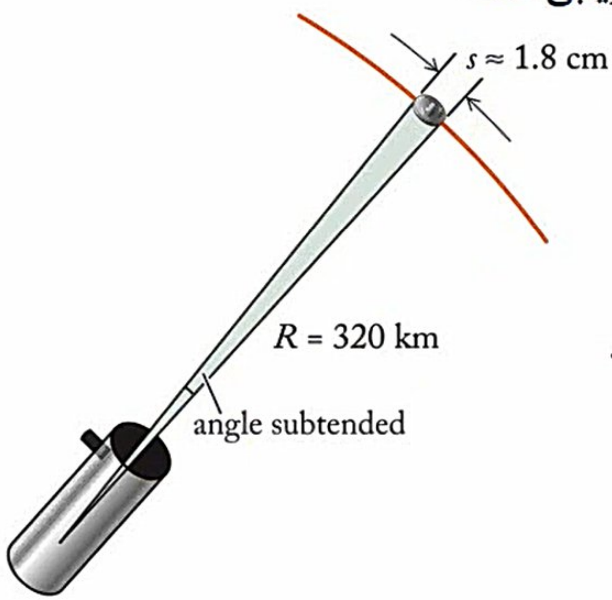
$$\theta = \frac{s}{r}$$

یک دور = 2π rad = 360°

1 rad = $360^{\circ}/2\pi = 57.3^{\circ}$

مثال + پاسخ

دقت سیستم هدایت تلسکوپ فضایی هابل به حدی است که اگر تلسکوپ در یک شهر باشد، سیستم هدایت قادر خواهد بود هدفی به اندازه یک سکه در فاصله 320 km را ارزیابی کند. عرض سکه را 1.8 cm در نظر بگیرید. از این موضع ذکر شده، این سکه چه زاویه ای را پوشش می دهد؟



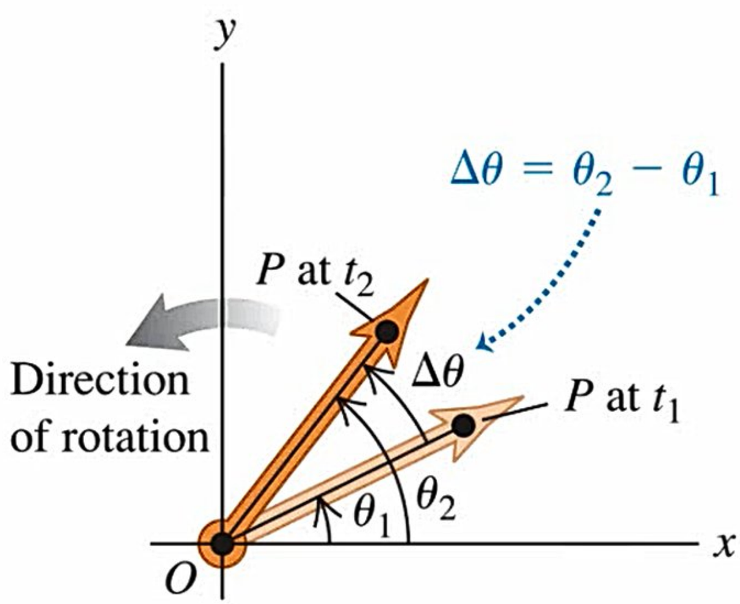
- حل :

$$\theta = \frac{s}{r}$$

- وقتی زاویه گشودگی کوچک باشد، طول s قوس برابر با تقریبا برابر با عرض سکه است.

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{1.8\times10^{-2}\ m}{3.2\times10^{-5}\ m} = 5.6\times10^{-8}\, rad$$

سرعت زاویه ای



سرعت زاویه ای متوسط(**rad/s**):

$$\omega_{av} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

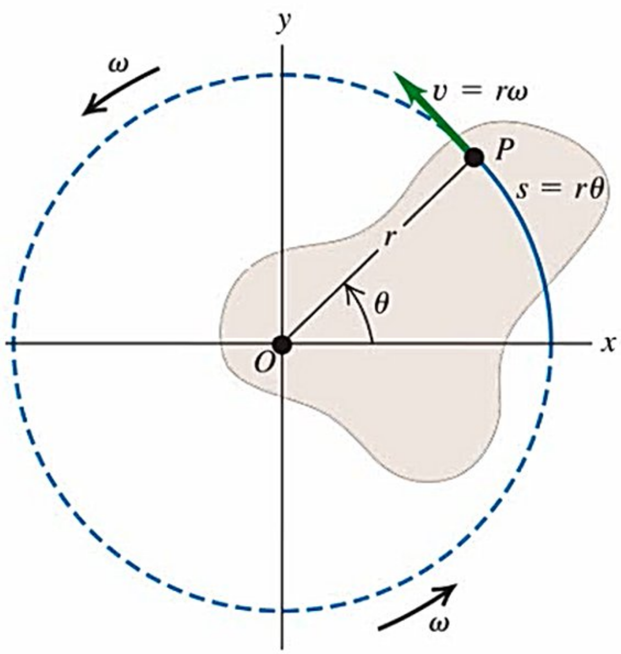
سرعت زاویه ای لحظه ای(**rad/s**):

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

تفاوت سرعت زاویه ای و سرعت خطی

اگر جسمی سرعت خطی V_z داشته باشد، بدین معنی است که جسم در امتداد محور z حرکت می‌کند. اگر جسمی سرعت زاویه ای ω_z داشته باشد بدین معنی است که جسم حول محور z دوران می‌کند.

رابطه بین سرعت زاویه ای و سرعت خطی



رابطه زیر را قبلا معرفی کرده بودیم:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

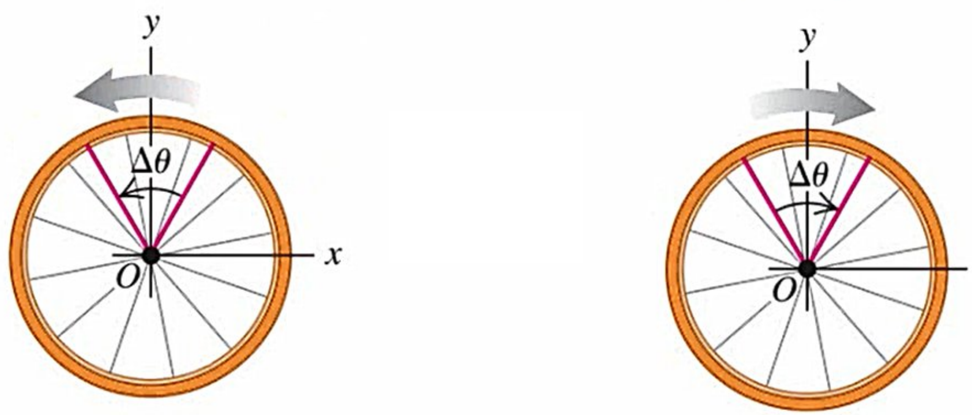
برای جسمی که بر روی شعاع ثابت r دوران می‌کند، با مشتق گیری زمانی از رابطه بالا داریم؛

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt}$$

$$\omega = \frac{1}{r}\ V$$

$$\Delta\theta > 0 \qquad\qquad \Delta\theta < 0$$

$$\omega_{\text{av-}z} = \Delta\theta/\Delta t > 0 \qquad\qquad \omega_{\text{av-}z} = \Delta\theta/\Delta t < 0$$



بسامد و دوره تناوب

اگر جسم با سرعت زاویه ای ثابت دوران کند، می‌توان آهنگ دوران را بر حسب بسامد f بیان کرد؛

بسامد؛ تعداد دوران بر ثانیه

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

دوره تناوب؛

$$T = \frac{1}{f}$$

مثال + پاسخ

جابجایی زاویه ای یک چرخ از رابطه زیر پیروی می‌کند؛ $\theta = (2 rad / s^3)t^3$

θ را در لحظات $t_1 = 2$ s و $t_2 = 5$ s را بیابید. مسافتی که ذره ای بر روی لبه چرخ در این بازه زمانی طی می‌کند را حساب کنید. سرعت زاویه ای متوسط را بیابید. سرعت لحظه ای را در این دو لحظه بیابید.(r = 36 cm)

حل :

برای بدست آوردن θ در این دو لحظه؛ $\theta(t_2 = 5s) = 2 \times (5)^3 = 250 rad$ $\theta(t_1 = 2s) = 2 \times (2)^3 = 16 rad$

برای بدست آوردن مسافت طی شده ؛

$$s = r\theta_2 - r\theta_1 = r(\theta_2 - \theta_1) = r\Delta\theta$$

ادامه پاسخ

با جاگذاری داریم؛

$$s = r\Delta\theta = (0.36\,m)\times(234\,rad) = 42\,m$$

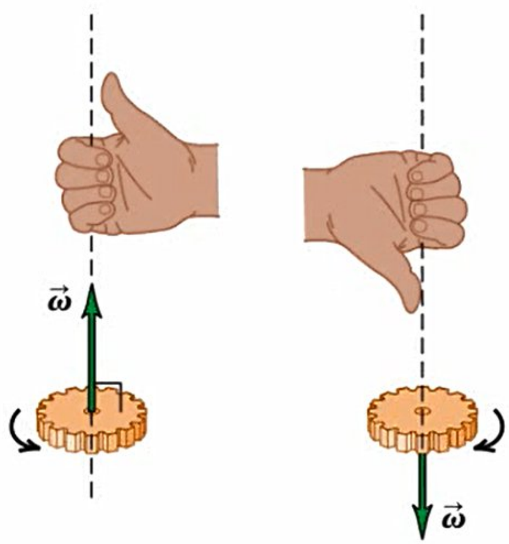
سرعت متوسط؛

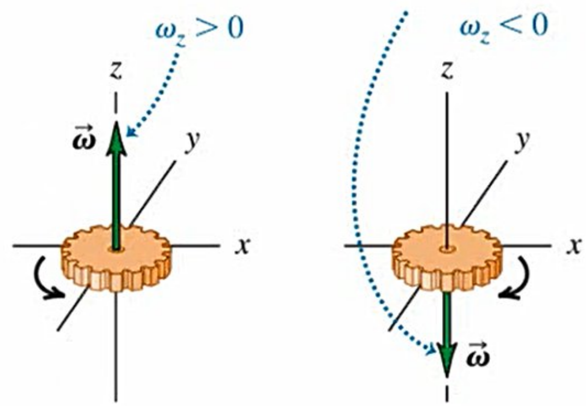
$$\omega_{av} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \quad \omega_{av} = \frac{250\,rad - 16\,rad}{5 - 2\ s} = 78\,rad/s$$

برای بدست آوردن سرعت لحظه ای کافی است از θ نسبت به زمان مشتق بگیریم:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{d}{dt}(2t^3) = 6t^2 \qquad \omega(t_1 = 2s) = 24\,rad/s \qquad \omega(t_2 = 5s) = 150\,rad/s$$

جهت سرعت زاویه ای

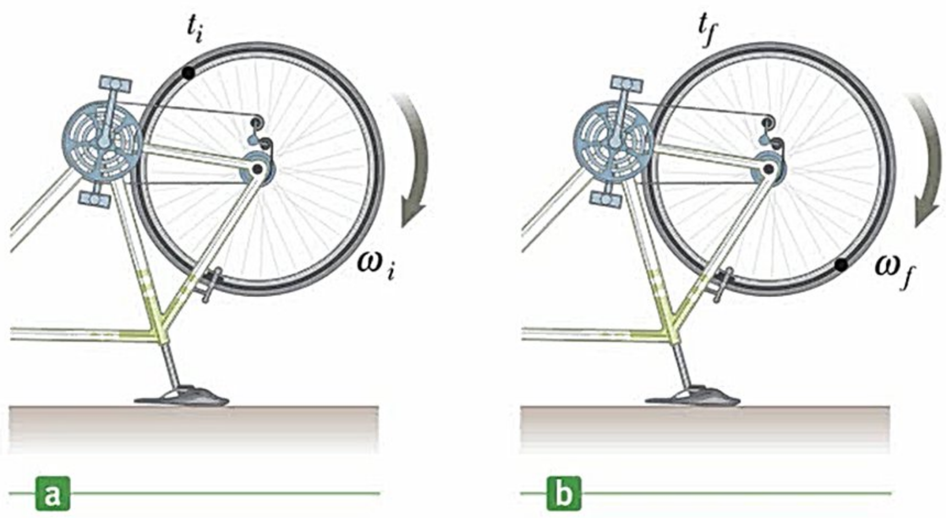




حرکت دورانی با شتاب زاویه ای ثابت

	Variable		
تغییر مکان	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	تغییر زاویه
سرعت خطی	v	ω	سرعت زاویه ای
	t	t	
شتاب خطی	a	α	شتاب زاویه ای
	v_0	ω_0	

شتاب زاویه ای



شتاب زاویه ای متوسط:

$$\alpha_{av} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

شتاب زاویه ای لحظه ای:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

معادلات حرکت دورانی با شتاب زاویه ای ثابت

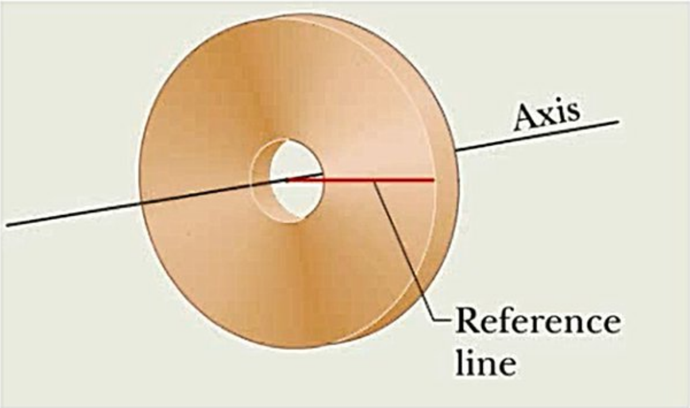
Linear Equation	Angular Equation
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

مثال + پاسخ

یک سنگ آسیاب با شتاب زاویه ای ثابت $\alpha = 0.35\ rad/s^2$ می‌چرخد. در لحظه $t = 0$ ، سرعت زاویه ای آن $\omega_0 = -4.6\ rad/s$ می‌باشد. خط مبدا در زاویه $\theta_0 = 0$ قرار دارد. الف) بعد از چه مدتی خط مبدا در مکان $\theta = 5\ rev$ قرار دارد؟ ب) بعد از چه مدتی این سنگ آسیاب برای یک لحظه متوقف می‌شود؟

حل : داده‌های مسئله:

$$\theta_0 = 0$$
$$\omega_0 = -4.6\ rad/s$$
$$\alpha_0 = 0.35\ rad/s^2$$
$$\theta_f = 5\ rev$$



الف - با توجه به تبدیل بین رادیان و دور، داریم

$$\theta_f = 5\ rev = 5 \times 2\pi\ rad = 10\pi\ rad$$

ادامه پاسخ

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \qquad \Rightarrow 10\pi = \frac{1}{2}(0.35)t^2 + (-4.6)t + 0$$

با حل معادله درجه دوم فوق خواهیم داشت:

$$t = 32s$$

ب) از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

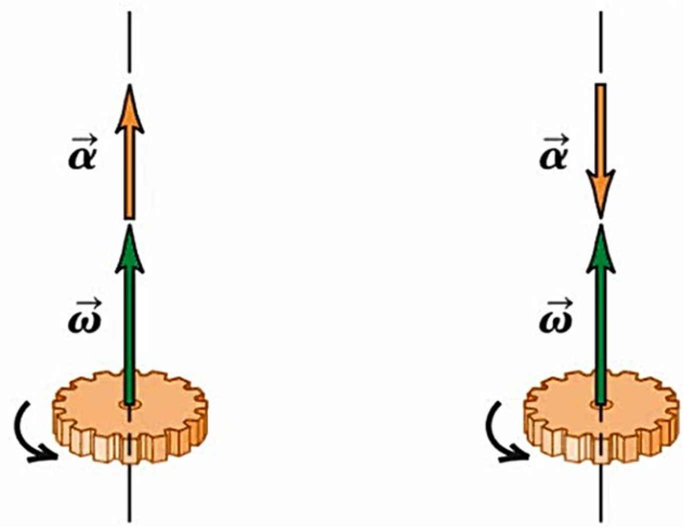
$$\omega = \alpha t + \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 0 \quad t = \frac{-\omega_0}{\alpha}$$

بعد از جاگذاری داریم:

$$t = 13s$$

جهت شتاب زاویه ای

وقتی که محور دوران ثابت باشد:

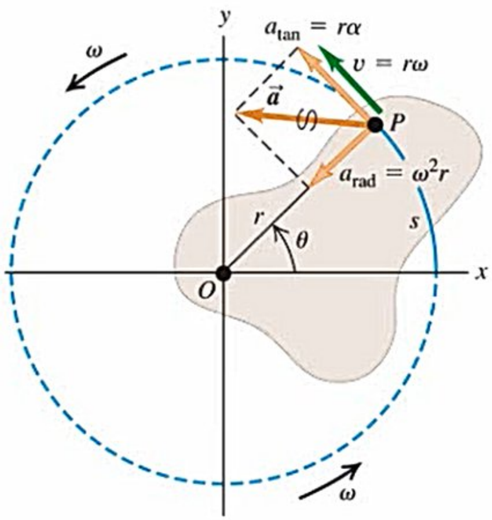


رابطه بین شتاب زاویه ای و شتاب خطی

در حالت کلی، شتاب یک نقطه از جسم در حرکت دایره ای دو مولفه دارد:

مولفه مماسی ($\mathbf{a}_{\mathbf{tan}}$)

مولفه عمودی ($\mathbf{a}_{\mathbf{rad}}$)

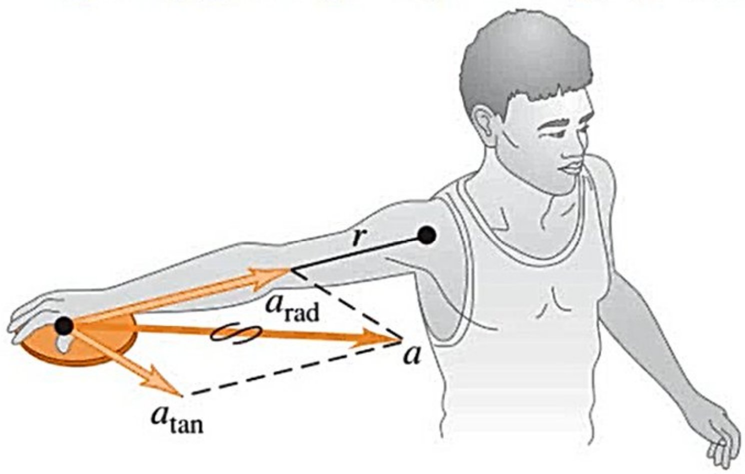


$$
\begin{cases}
a_{\tan} = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\omega) = r\dfrac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad \Rightarrow \quad a_{\tan} = r\alpha \\[2em]
a_{rad} = \dfrac{V^2}{r} = \dfrac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 \quad \Rightarrow \quad a_{rad} = r\omega^2
\end{cases}
$$

$$
a = \sqrt{(a_{rad})^2 + (a_{\tan})^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}
$$

مثال + پاسخ

یک ورزشکار دیسکی را در شعاع 80 cm می‌چرخاند. در یک لحظه معین، ورزشکار با سرعت 10 rad/s می‌چرخد و سرعت زاویه ای وی با آهنگ $50\ rad/s^2$ افزایش می‌یابد. در این لحظه مولفه‌های مماسی وشعاعی شتاب دیسک را بیابید.



حل :

داده‌های مسئله؛

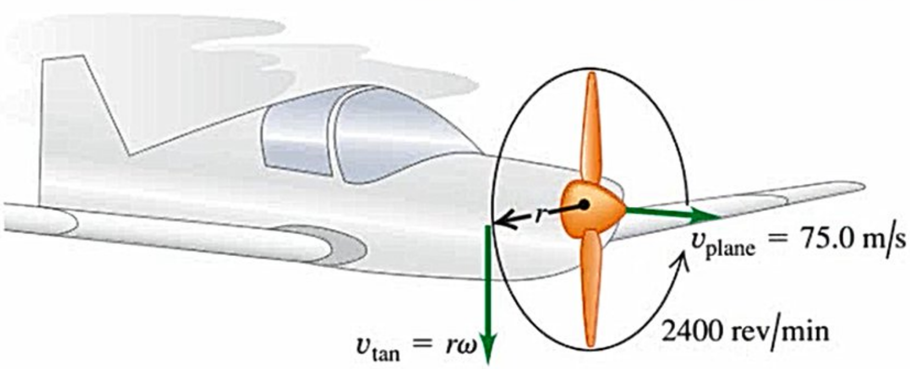
$$r = 0.8\,m$$
$$\omega = 10\,rad/s$$
$$\alpha = 50\,rad/s^2$$

$$a_{tan} = r\alpha \Rightarrow a_{tan} = 0.8 \times 50 = 40\,m/s^2$$

$$a_{rad} = r\omega^2 \Rightarrow a_{rad} = (0.8) \times (10)^2 = 80\ m/s^2$$

مثال + پاسخ

فرض کنید می‌خواهید ملخ هواپیمایی را طراحی کنید که قادر باشد در سرعت 2400 rpm بچرخد. سرعت رو به جلوی هواپیما 75 m/s بوده وسرعت نوک تیغه های ملخ در هوا نباید بیش از 270 m/s باشد. (این سرعت حدود ٪۸۰ سرعت صوت در هوا است. اگر سرعت نوک ملخ بیشتر از این مقدار باشد، صدای زیادی تولید می‌کند). (الف) بیشترین شعاع ممکن ملخ چه مقدار است؟ (ب) با این شعاع، شتاب نوک ملخ چقدر است؟



حل : الف)

نوک صفحات دو مولفه سرعت دارد :

سرعت روبه جلوی هواپیما ($V_{plane} = 75$ m/s)

سرعت مماسی ($\omega_{tan} = 2400$ rpm)

ادامه پاسخ

برای تبدیل 2400 rpm به rad/s به طریق زیر عمل می‌کنیم.

$$\omega = 2400\,rpm = 2400\,\frac{rev}{\min}\times 2\pi\,\frac{rad}{1\,rev}\times\frac{1\min}{60\,s} = 251\,rad\,/\,s$$

حال ؛

$$V_{tip}^{2} = V_{plane}^{2} + V_{\tan}^{2} = (75)^2 + r^2(251)^2$$

$$V_{tip} = 270\,m\,/\,s \quad \Rightarrow \quad (270)^2 = (75)^2 + r^2(251)^2$$

$$\Rightarrow \quad r = 1.03\ m$$

این مقدار، بیشترین شعاعی است که می‌توان این ملخ را طراحی کرد.

ادامه پاسخ

ب)

۲ مولفه شتاب را محاسبه می‌کنیم:

مولفه مماسی : سرعت زاویه ای ثابت است، پس:

$$a_{\tan} = r\alpha \Rightarrow a_{\tan} = 0$$

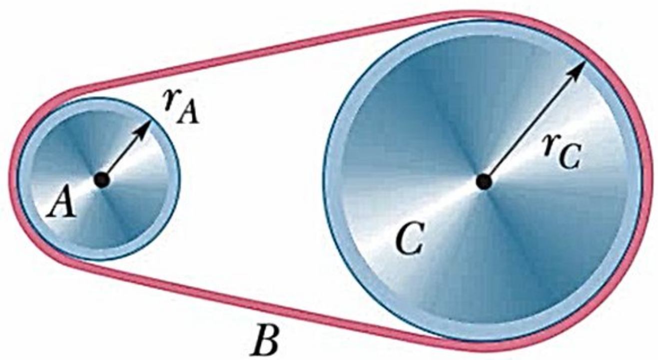
مولفه شعاعی :

$$a_{rad} = r\omega^2 \Rightarrow a_{rad} = 6.5\times10^4 \ m/s^2$$

مثال

در شکل زیر، چرخ A با شعاع $r_A = 10$ cm توسط یک تسمه B به چرخ C با شعاع $r_C = 25$ cm جفت شده است. سرعت زاویه ای چرخ A از حال سکون با آهنگ ثابت $1.6\ rad/s^2$ افزایش می‌یابد. مدت زمانی که لازم است تا چرخ C به سرعت زاویه ای 100 rev/min برسد را بدست آورید. فرض کنید که تسمه سر نمی‌خورد.

(راهنمایی: اگر تسمه سر نخورد، سرعت‌های خطی دو لبه باید برابر باشد.)



ادامه پاسخ

چون در مسئله ذکر شد که چرخ C سر نمی‌خورد، بنابراین یک نقطه بر روی لبه چرخ C همان شتاب مماسی را دارد که نقطه ای بر روی لبه چرخ A خواهد داشت. $a_{\tan} = r\alpha$

$$(a_{\tan})_C = (a_{\tan})_A \qquad \Rightarrow \qquad (r_C \alpha_C) = (r_A \alpha_A)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_C = 0.64\, rad/s$$

حال با دانستن α_C از معادله زیر می توان مدت زمانی که یک نقطه در لبه چرخ C از سرعت $\omega_0 = 0$ به $\omega = 100$ rev/min = 10.5 rad/s می‌رسد را حساب کرد. $\omega = \alpha t + \omega_0 \quad \Rightarrow \quad t = 16 s$

پایان جلسه چهاردهم.