فیزیک ۱

حل تمرین دکتر غلام محمد پارسانسب

نسرین کریمی

دانشگاه شهید بهشتی - دی ۱۴۰۰

انرژی جنبشی حاصل از حرکت دورانی

سیستمی شامل چندین ذره با جرم‌های مختلف $(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n)$ را در نظر می‌گیریم که حول محوری در حال دوران است.

انرژی جنبشی کل مجموعه :

$$K = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n V_n^2$$

با توجه به اینکه :

$$V_i = r_i \omega_i$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n r_n^2 \omega_n^2$$

رابطه اخیر بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\omega_i^2$$

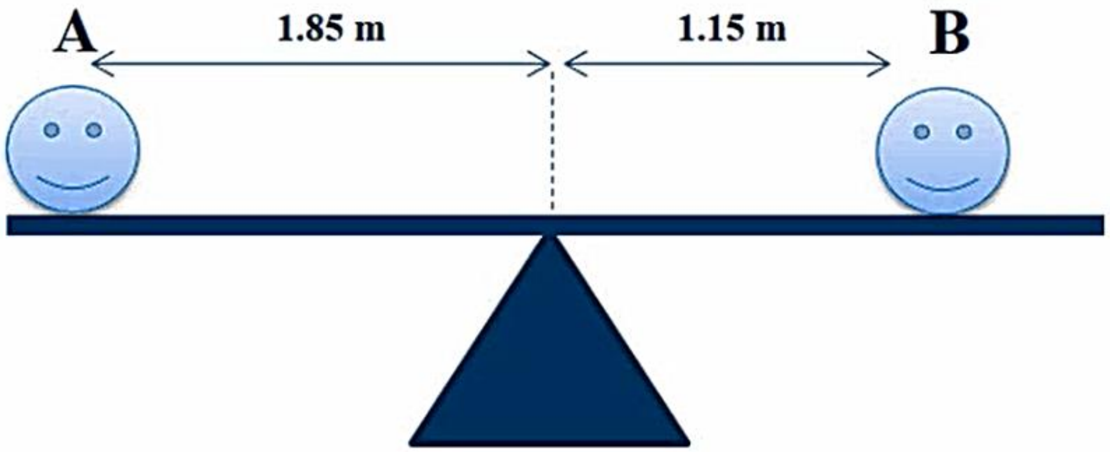
لختی دورانی I

انرژی جنبشی حرکت دورانی

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

مثال + پاسخ

دوشخص، A و B به ترتیب با جرم‌های 50 kg و 80 kg بر روی یک الاکلنگ نشسته اند. (در محاسبات از جرم الاکلنگ صرف نظر کنید). الاکلنگ حول محوری در مرکز جرم خود با سرعت زاویه ای 0.4 rad/s دوران می‌کند. مرکز جرم به فاصله 1.85 m از شخص A و بفاصله 1.15 m از شخص B قرار دارد. انرژی جنبشی را محاسبه کنید.



حل : با یک سیستم دو جسمی مواجه هستیم.

ابتدا باید I را محاسبه کرد.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$I = (50)\times(1.85)^2 + (80)\times(1.15)^2 = 280\,kg.m^2$$

ادامه پاسخ

انرژی جنبشی از رابطه زیر بدست می‌آید:

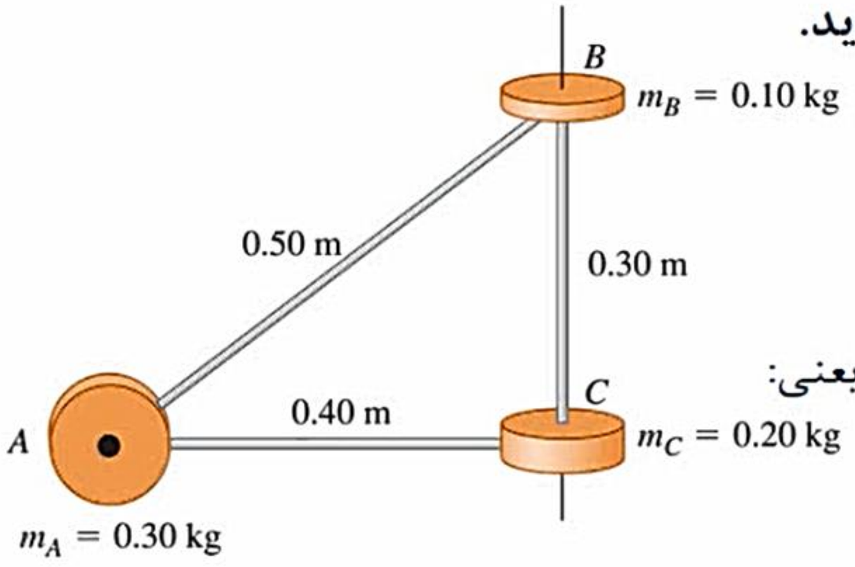
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

با جاگذاری I و ω در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$K = \frac{1}{2} \times (280) \times (0.4)^2 = 22J$$

مثال + پاسخ

یک قطعه ماشینی شامل ۳ دیسک است که از طریق ریل‌های سبک بهم متصل شده اند. لختی دورانی سیستم حول محوری که از مرکز دیسک A می گذرد را حساب کنید. حال اگر مجموعه با سرعت زاویه ای 4 rad/s حول محوری که از A می‌گذرد دوران کند انرژی جنبشی مجموعه را بدست آورید.



حل : برای محاسبه لختی دورانی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

چون محور دوران از نقطه A می‌گذرد بنابراین فاصله جسم A تا محور صفر است یعنی:

داریم:

$$r_A = 0$$

$$I = m_B r_B^2 + m_c r_c^2 = (0.1)\times(0.5)^2 + (0.2)\times(0.4)^2 = 0.057\, kg.m^2$$

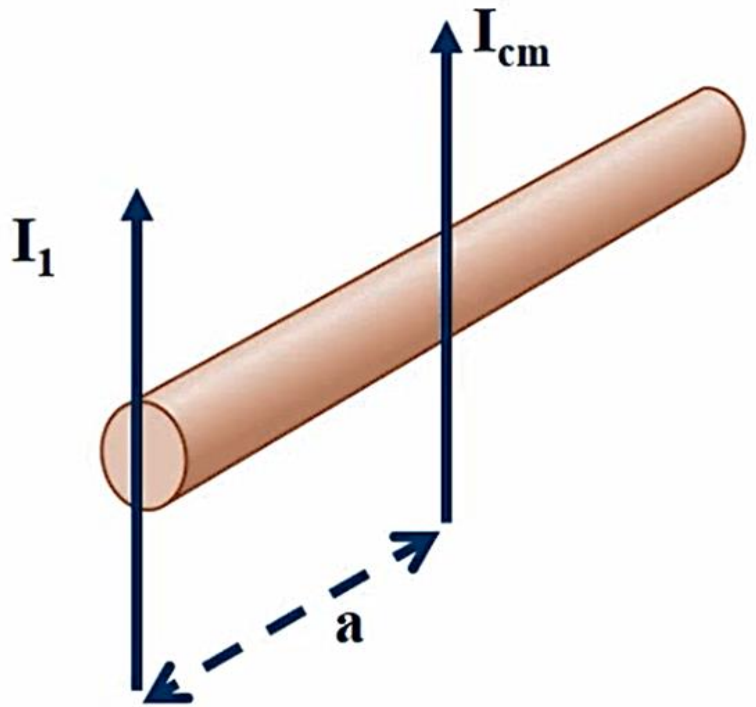
ادامه پاسخ

اگر $\omega = 4 \ rad/s$ باشد خواهیم داشت:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{1}{2} \times (0.057) \times (0.4)^2 = 0.46 J$$

محور های موازی

لختی دورانی یک جسم حول هر محور دلبخواه برابر است با لختی دورانی آن حول یک محور موازی که از مرکز جرم جسم می‌گذرد به اضافه حاصل ضرب جرم کل جسم در مربع فاصله میان این دو محور.



$$I_1 = I_{cm} + Ma^2$$

لختی دورانی اجسام صلب

اگر یک جسم صلب را مجموعه ای پیوسته از ذرات بسیار کوچک δm_i در نظر بگیریم که به فاصله r_i از محور دوران قرار دارند، خواهیم داشت:

$$I = \sum_i (\delta m_i) r_i^2$$

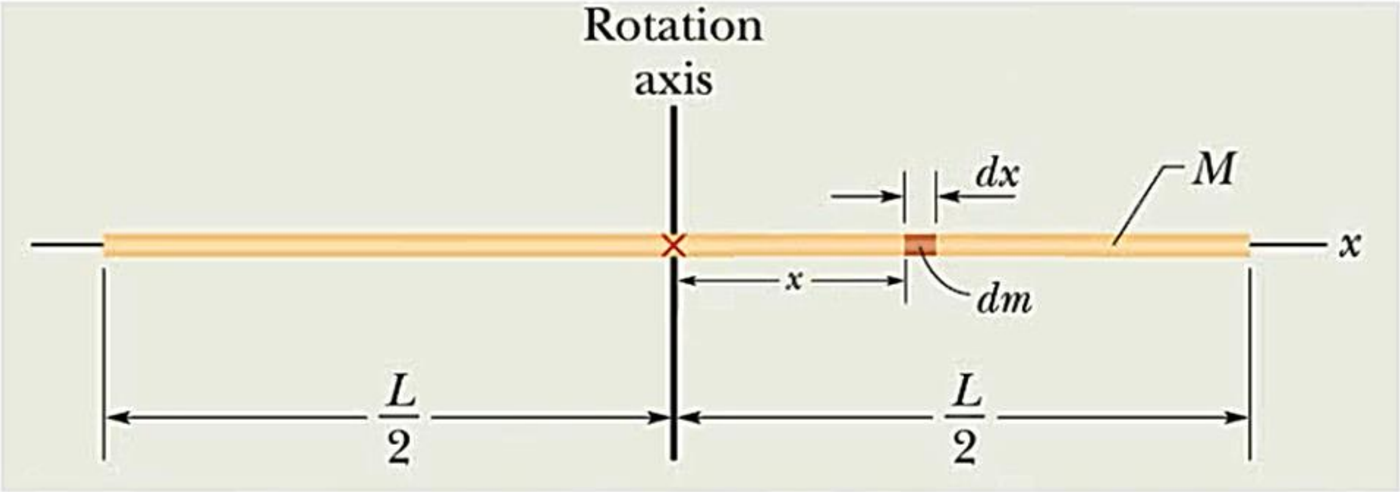
رابطه بالا در حد $\delta m_i \rightarrow 0$ بصورت زیر در می‌آید:

$$I = \int r^2 dm$$

مثال + پاسخ

لختی دورانی میله ای به طول L را حول محوری که عمود برمیله است و از مرکز جرم می‌گذرد حساب کنید.

حل :



$$I = \int r^2 dm \quad \Rightarrow \quad I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm$$

ادامه پاسخ

چگالی میله در کل جسم یکنواخت است بنابراین:

$$\frac{dm}{dx}=\frac{M}{L} \qquad \Rightarrow \quad dm=\frac{M}{L}dx$$

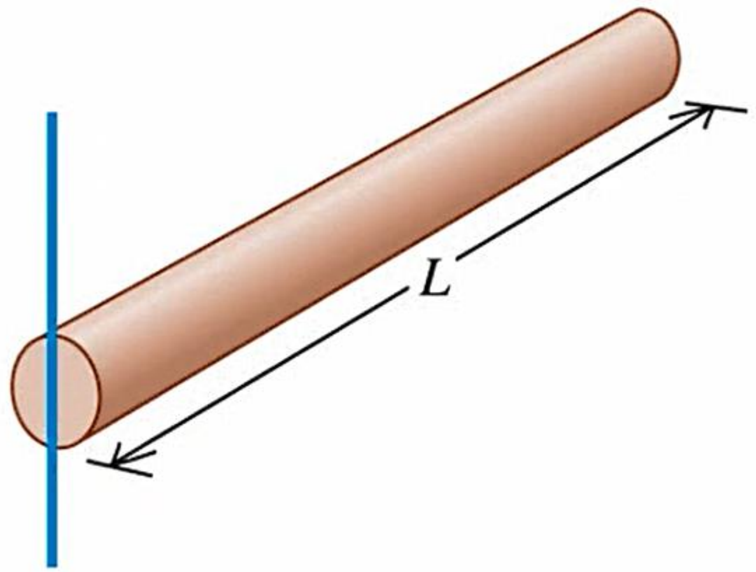
با قرار دادن این عبارت در رابطه انتگرالی:

$$\Rightarrow \quad I=\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm=\int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{M}{L}\right)x^2\,dx=\left(\frac{M}{L}\right)\frac{1}{3}x^3\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}=\frac{1}{12}ML^2$$

لختی دورانی میله همگن حول محوری عمود برآن که از مرکز جرم بگذرد برابر است با

$$\frac{1}{12}ML^2$$

استفاده از قضیه محورهای موازی



لختی دورانی حول محورجدید :

$$I_1 = I_{cm} + Ma^2$$

لختی دورانی حول مرکز جرم: $1/12\ ML^2$

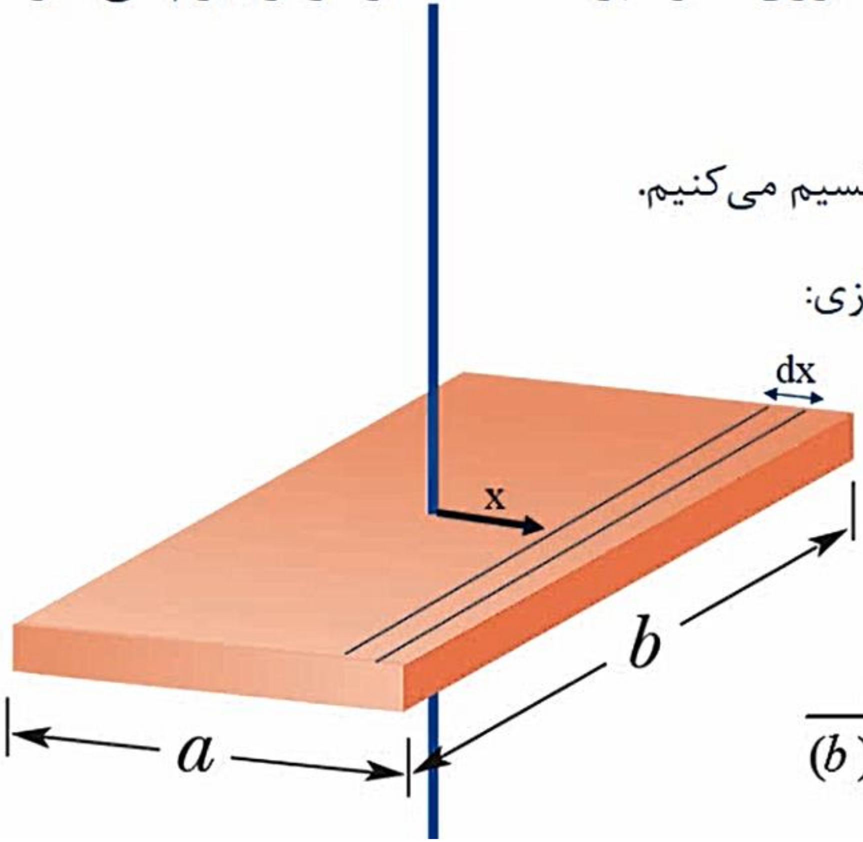
فاصله محور جدید تا مرکز جرم : $L/2$

بنابراین

$$I_1 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

مثال + پاسخ

لختی دورانی ورقه نازک فلزی به جرم M و ابعاد a و b را حول محوری عمود بر صفحه که از مرکز جرم می‌گذرد محاسبه کنید.



حل : ورق را به نوارهای بسیار باریک به پهنای dx، جرم dm و طول b تقسیم می‌کنیم.

لختی هر نوار باریک حول محور موجود در شکل طبق قضیه محورهای موازی:

$$dI = \frac{1}{12}(dm)b^2 + (dm)x^2 \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به یکنواخت بودن چگالی، داریم:

$$\frac{dm}{(b)\times(dx)} = \frac{M}{ab} \qquad dm = \frac{M}{a}dx$$

ادامه پاسخ

با جاگذاری dm در رابطه (۱) خواهیم داشت:

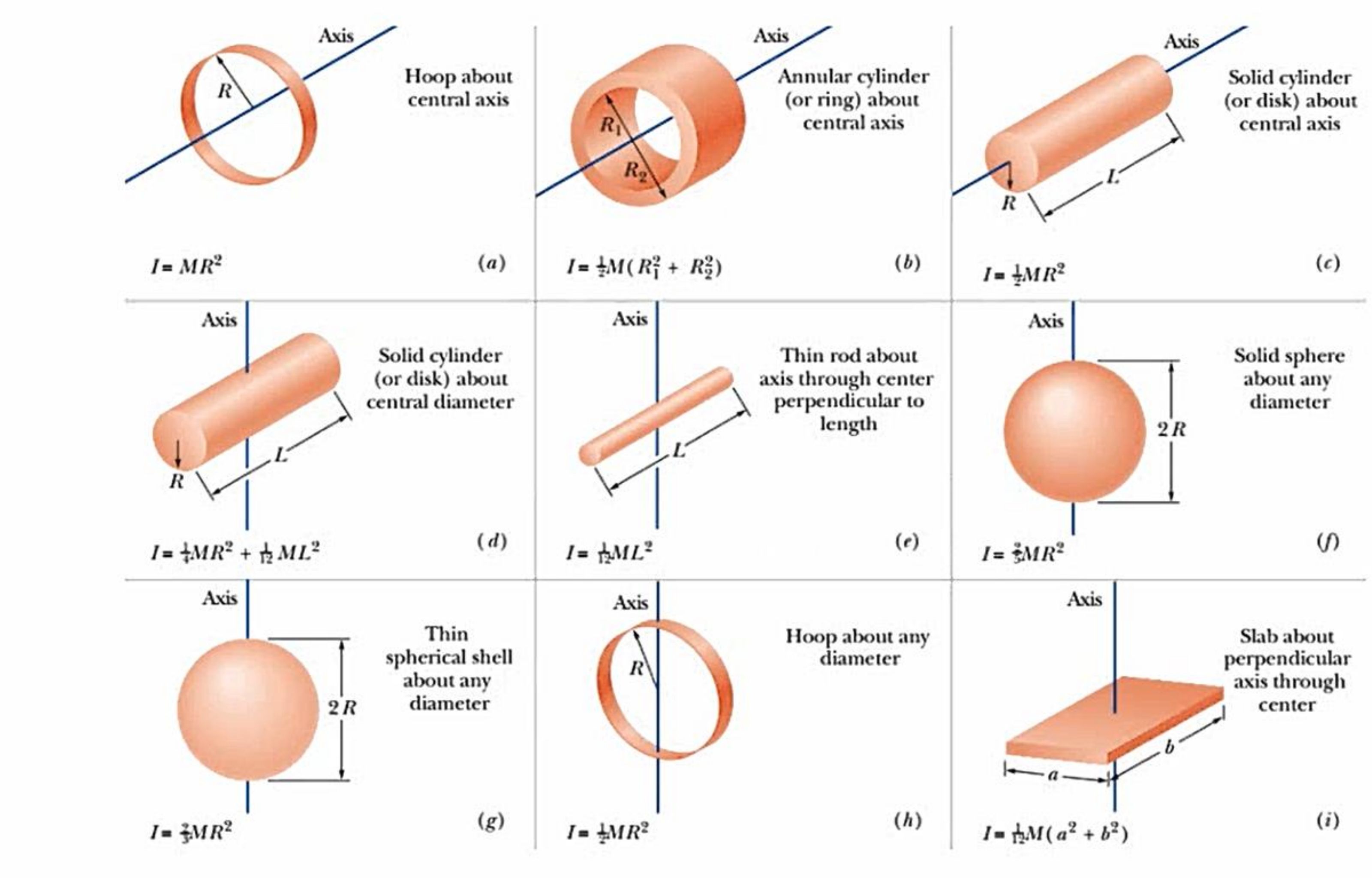
$$dI = \frac{Mb^2}{12a}dx + \frac{M}{a}x^2\,dx$$

حال کافی است از عبارت بالا انتگرال بگیریم:

$$I = \int dI = \int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{Mb^2}{12a} + \frac{M}{a}x^2\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{12}M\,(a^2 + b^2)$$

لختی دورانی چند جسم هندسی

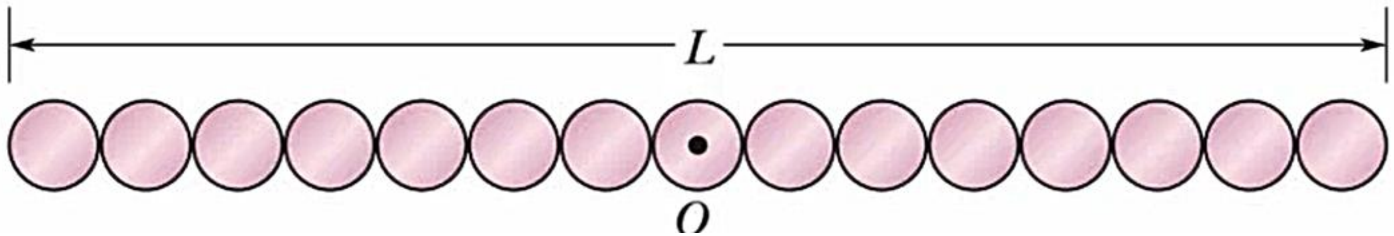


مثال + پاسخ

شکل زیر آرایه ای از ۱۵ دیسک یکسان را نشان می‌دهد که به همدیگر چسبیده اند. جرم کل آنها $M = 100\ mg$ است. این آرایه می‌تواند حول محوری عمود بر مرکز در نقطه O دوران کند. لختی دورانی این آرایه را حول نقطه O بیابید. ($L = 1m$)

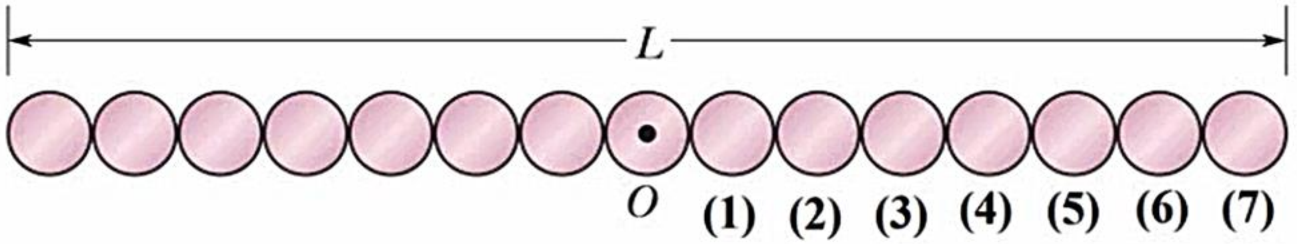
حل : فرض کنیم جرم هر دیسک m و شعاع آن R باشد. لختی دورانی دیسک برابر است با $1/2\ mR^2$. طبق قضیه محورهای موازی لختی دورانی هر دیسک که به فاصله h_n از نقطه O قرار دارد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$I_n = \frac{1}{2} mR^2 + m\,h_n^2$$



ادامه پاسخ

هر یک از دیسک‌ها در سمت راست را بصورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم.



$$I_1 = \frac{1}{2} mR^2 + m(2R)^2$$

$$I_n = \frac{1}{2} mR^2 + m(2nR)^2$$

لختی دورانی کل برابر است با جمع لختی دورانی تمام دیسک‌ها (۷ دیسک سمت راست، ۷ دیسک سمت چپ، یک دیسک وسط)

ادامه پاسخ

$$I_{total} = \frac{1}{2} mR^2 + 2\sum_{n=1}^{7} I_n \qquad \Rightarrow \quad I_{total} = \frac{1}{2} mR^2 + 2\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{2} mR^2 + m\,(2nR)^2\right)$$

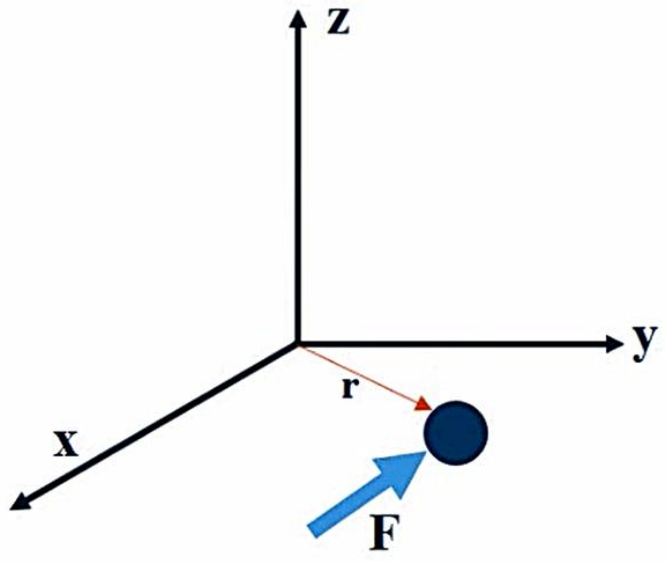
$$\Rightarrow \quad I_{total} = 15\times(\frac{1}{2} mR^2) + 8mR^2 \sum_{n=1}^{7} n^2$$

$$I_{total} = \frac{2255}{2} mR^2$$

حال با توجه به اینکه 15 m =M = 100 mg و 1 = 15 × 2R = L خواهیم داشت:

$$I_{total} = 8.352\times 10^{-3} \ kg.m^2$$

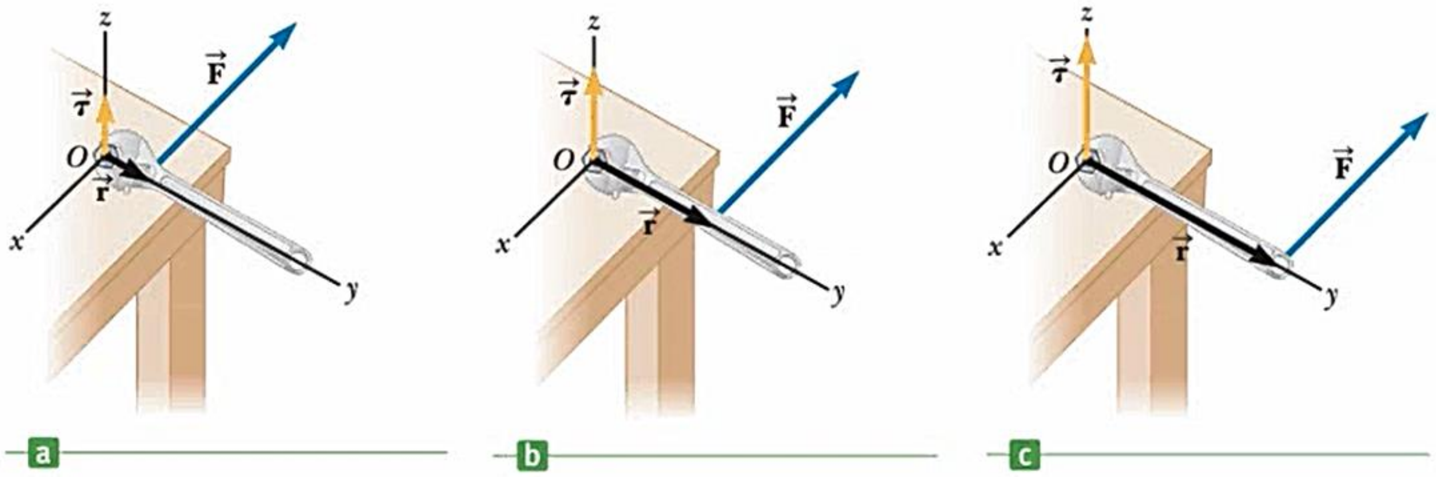
گشتاور



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r\ F\ \sin\theta$$

θ زاویه بین بردارهای **F** و **r** است.



نکته

فقط مولفه عمود بر r بردار نیرو در گشتاور سهیم است.

گشتاور ایجاد شده توسط یک نیرو نه تنها به مقدار و جهت نیرو وابسته است بلکه به محل اعمال نیرو نسبت به مبدا، یعنی به بردار r نیز بستگی دارد.

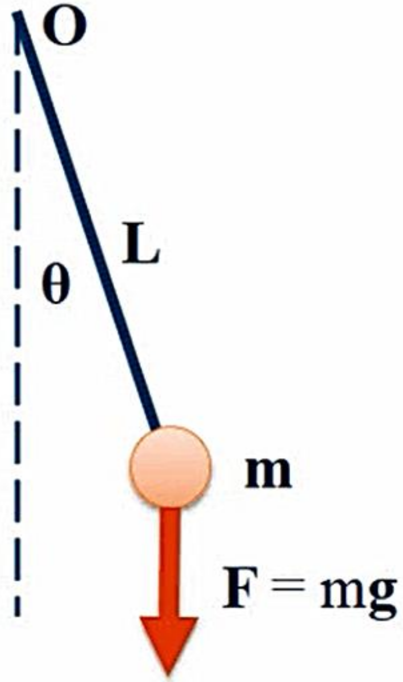
اگر بردار نیرو در راستای بردار r باشد هیچ گشتاوری وارد نمی‌شود.

از نظر ابعادی گشتاور نیرو بعد ML^2T^{-2} است، همانند ابعاد کار. ولی گشتاور و کار کمیت‌های فیزیکی متفاوتی هستند.

گشتاور نیرو در صفحه ای عمود بر بردارهای r و F قرار می‌گیرد.

مثال + پاسخ

آونگی متشکل از جسمی است به جرم $m = 0.17\ kg$ که به انتهای میله صلبی به طول $L = 1.25\ m$ و جرم ناچیز متصل شده است. گشتاور نیروی ناشی از گرانش حول نقطه O در لحظه ای که آونگ به اندازه $\theta = 10^{\circ}$ از امتداد قائم منحرف شده است چقدر می باشد.



حل :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \tau = r\ F\ \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \tau = L\ mg\ \sin(10)$$

$$\Rightarrow \quad \tau = 0.36\ N.m$$

جهت بردار گشتاور درون سو و عمود بر صفحه است.

دینامیک حرکت دورانی

قانون دوم نیوتن برای حرکت دورانی:

$$\sum \tau = I \alpha$$

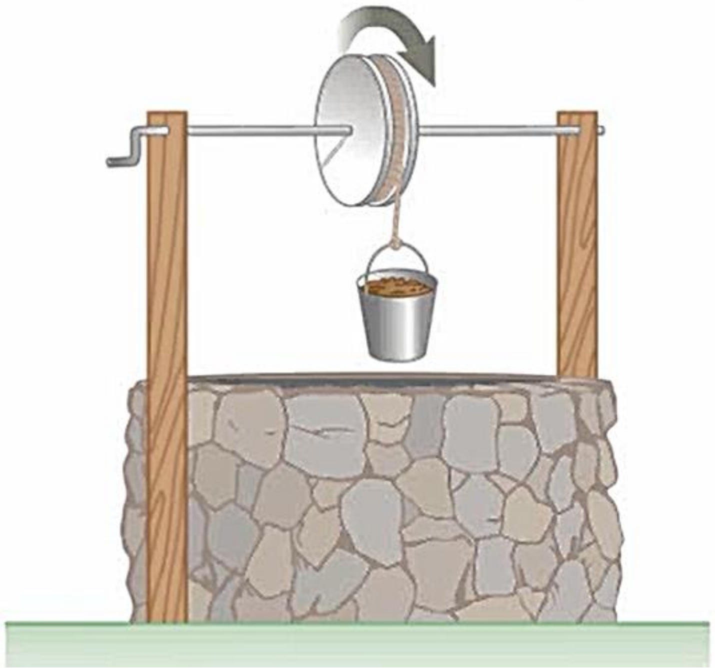
" گشتاور نیروی خالص وارد بر جسمی با لختی I برابر است با لختی ضربدار در شتاب زاویه ای"

این رابطه مشابه با قانون دوم نیوتن در حرکت خطی است:

$$F = m a$$

مثال + پاسخ

شکل زیر یک قرقره به شکل دیسک به جرم M = 3 kg و شعاع R = 40 cm را نشان می‌دهد. سطلی به جرم m = 2 kg از طریق یک طناب بدون جرم که به دور لبه دیسک پیچیده شده آویزان می‌کنیم. شتاب سطل در حال سقوط، شتاب زاویه ای دیسک، و کشش طناب را حساب کنید. طناب سر نمی‌خورد، و هیچ اصطکاکی در محور ثابت وجود ندارد.



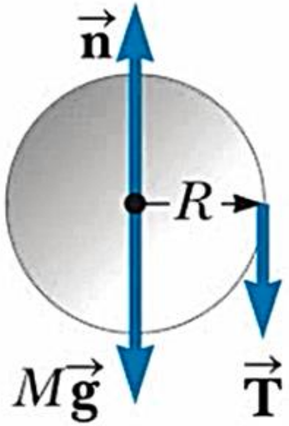
حل :

در شکل زیر نیروهای وارد بر سطل را مشخص کرده ایم.

قانون دوم نیوتن برای حرکت سطل :

$$\sum F = T - mg = ma \qquad (1)$$

ادامه پاسخ



قانون دوم نیوتن برای دیسک :

$$\sum \tau = -T\,R = I\alpha \qquad (2)$$

در عبارت بالا داریم؛

$$\alpha = \frac{a}{R} \quad , \quad I = \frac{1}{2}MR^2$$

با جایگزینی این عبارات در رابطه (۲) خواهیم داشت

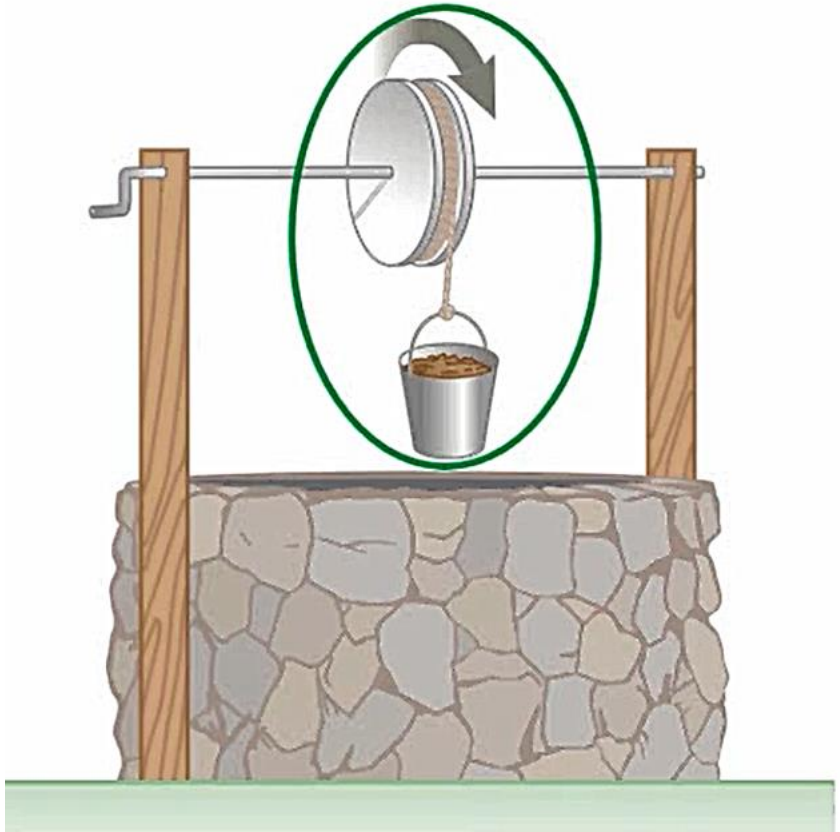
$$\sum \tau = -T\,R = (\frac{1}{2}MR^2)(\frac{a}{R}) \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{1}{2}Ma$$

این رابطه را در (۱) قرار می دهیم، نهایتا داریم:

$$a = -\frac{2m}{M+2m}g = -4.8m/s^2 \qquad T = -\frac{1}{2}Ma = 6N$$

مثال + پاسخ

در مثال قبلی، قرقره و سطل را بعنوان یک سیستم در نظر گرفته و با استفاده از قانون کار – انرژی سرعت نهایی سطل وقتی به اندازه L سقوط کرد را بدست آورید.



حل :

کار خالص روی سیستم برابر است با: $W_{net} = mgL$

انرژی اولیه کل : $K_i = 0$

انرژی جنبشی نهایی $K_f = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

ادامه پاسخ

قضیه کار انرژی:

$$\Delta K = W \qquad \Rightarrow \quad \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = mgL$$

با جاگذاری رابطه زیر :

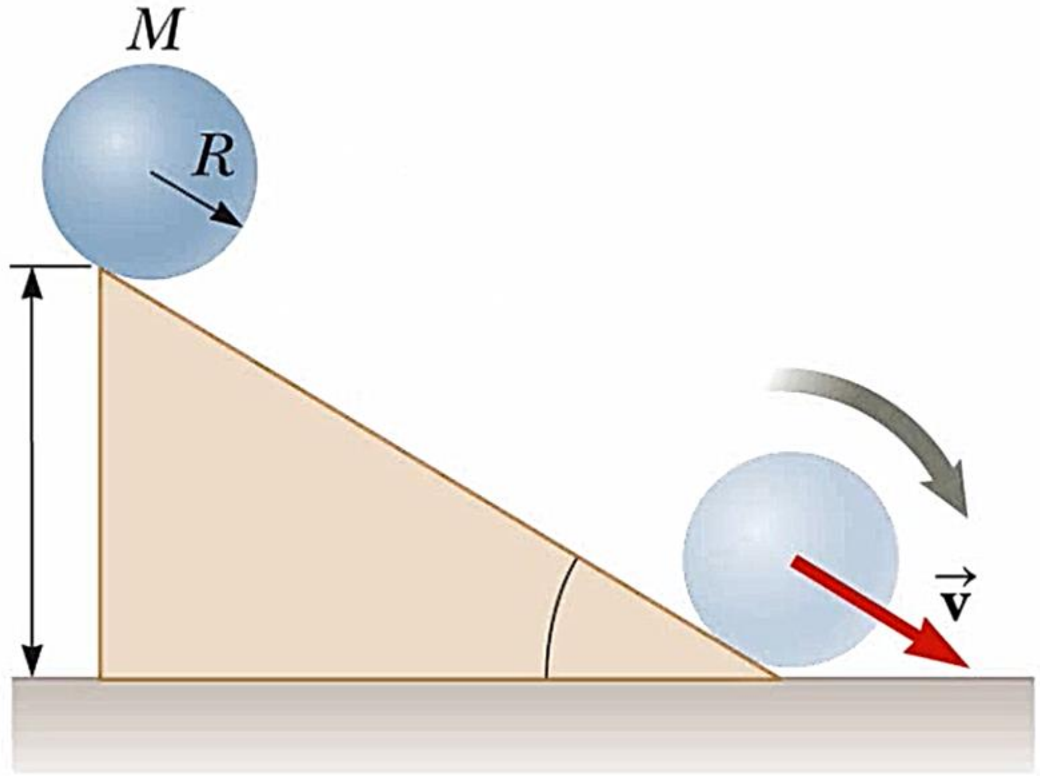
$$\omega = \frac{V}{R} \quad , \quad I = \frac{1}{2} M R^2$$

داریم:

$$V = \sqrt{2L\left(\frac{2mg}{M + 2m}\right)}$$

ترکیب حرکت دورانی و انتقالی

اگر یک جسم هم حرکت دورانی و هم حرکت انتقالی تواما داشته باشد، آنگاه انرژی جنبشی آن بصورت زیر خواهد بود:



$$K = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

غلتش بدون لغزش

اگر جسمی که در حال حرکت دورانی است چنان روی سطح بغلتد که بین جسم و سطح حرکت نسبی نباشد (سُر نخورد)، در این مورد غلتش بدون لغزش است.

بعنوان مثالی دیگر؛ در حالتی که نخ به دور قرقره درحال دوران آویخته شده است، و نخ سر نخورد.

در موارد فوق و تمام موارد مشابه شرط زیر بین ω و V_{cm} برقرار است:

$$V_{cm} = \omega R$$

در این صورت رابطه انرژی جنبشی بصورت زیر خواهد شد

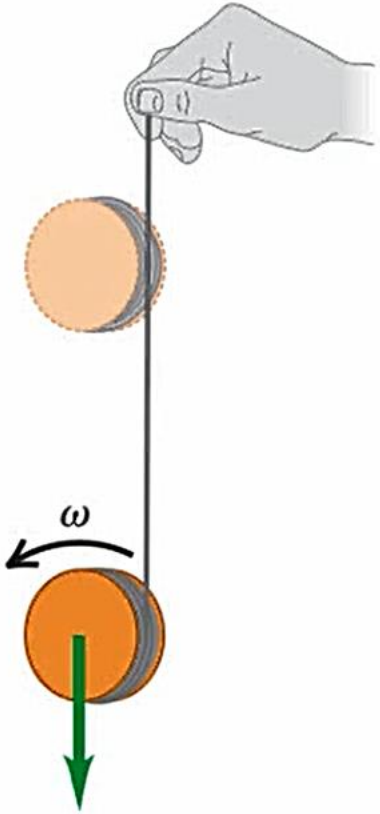
$$K = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

یا

$$K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\left(\frac{V_{cm}}{R}\right)^2$$

مثال + پاسخ

یویویی به جرم M و شعاع R از حال سکون رها می‌شود. در حین سقوط نخ باز شده ولی سر نمی‌خورد و کشیده نیز نمی‌شود. سرعت مرکز جرم M را بعد از اینکه به اندازه h سقوط کرد را بدست آورید.



حل :

با نادیده گرفتن مقاومت هوا و استفاده از قانون پایستگی انرژی مسئله را حل می‌کنیم.

انرژی اولیه :

$$E_1 = U_1 + K_1 = Mgh + 0$$

انرژی جنبشی نهایی (بعد از سقوط به اندازه h):

$$E_2 = U_2 + K_2 = 0 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$

ادامه پاسخ

با توجه به پایستگی انرژی و برقراری شرط $V_{cm} = \omega R$ خواهیم داشت ($I_{cm} = ½ MR^2$):

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad Mgh = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad V_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

مثال + پاسخ

یک کره، یک استوانه، و یک حلقه از حالت سکون همزمان از بالای یک سطح شیبدار شروع به حرکت می‌کنند. کدام جسم زودتر به پایین سطح شیبدار می‌رسد؟

حل :

از قانون پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم، به طور کلی داریم:

$$E_1 = E_2$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + 0$$

$$V_{cm} = R\omega$$

ادامه پاسخ

تفاوت بین جسم‌های مختلف در لختی دورانی آنها است:

کره $I_{cm} = 2/5\ MR^2$:

$$V_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

استوانه $I_{cm} = ½\ MR^2$:

$$V_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

حلقه $I_{cm} = MR^2$:

$$V_{cm} = \sqrt{gh}$$

ادامه پاسخ

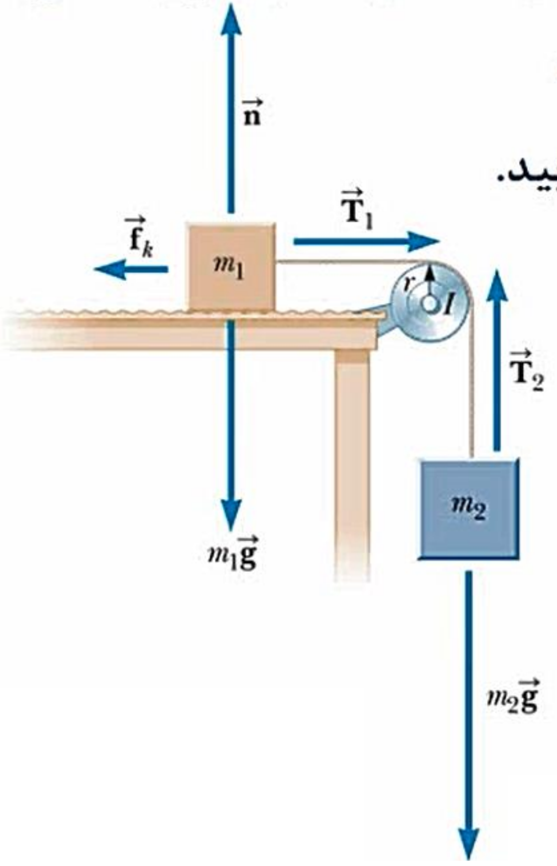
ابتدا کره ، سپس استوانه و سپس حلقه به پایین سطح شیبدار می‌رسند.

کره، کمترین لختی دورانی را داراست.

انرژی جنبشی هر یک از این جسم در پایین سطح شیبدار برابر با **Mgh** است، برای کره قسمت بیشتر این انرژی جنبشی از نوع انتقالی است و نوع دورانی سهم کمتری دارد.

مثال + پاسخ

دو جسم به جرم‌های $m_1 = 5$ kg و $m_2 = 7$ kg از طریق یک طنابی که دور یک قرقره به جرم $M = 2$ kg پیچیده شده، به هم متصل اند. قرقره که حول یک محور بدون اصطکاک می‌چرخد، یک استوانه توخالی با شعاع 0.05 m می‌باشد، طناب بدون سرخوردن حرکت می‌کند. سطح افقی ضریب اصطکاک جنبشی 0.35 دارد. سرعت سیستم وقتی که جرم m_2 به اندازه 2 m سقوط کرد را بیابید.



حل :

مسئله را با استفاده از قانون دوم نیوتن حل می‌کنیم:

برای جسم ۱:

$$T_1 - f_k = m_1 a$$

برای جسم ۲:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

ادامه پاسخ

برای قرقره ($I = MR^2$):

$$T_2R - T_1R = I\alpha$$

با توجه به برقراری غلتش بدون لغزش، خواهیم داشت:

$$a = R\alpha$$

سه رابطه نیوتن برای این سه جسم عبارتند از :

$$\begin{cases} T_1 - \mu_k m_1 g = m_1 a \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1(\mu_k g + a) \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \quad \Rightarrow \quad T_2 = m_2(g - a) \\ T_2R - T_1R = (MR^2)(\frac{a}{R}) \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = Ma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{g(m_2 - \mu m_1)}{m_2 + m_1 + M}$$

ادامه پاسخ

با استفاده از رابطه مستقل از زمان برای جسم m_2 ، و جاگذاری $h = 2$ و a که در صفحه قبل بدست آمد، خواهیم داشت ($V_0 = 0$):

$$V^2 - V_0^2 = 2ah$$

$$V = \sqrt{\frac{2gh(m_2 - \mu m_1)}{m_2 + m_1 + M}}$$

$$V = 3.83\,m$$

پایان جلسه پانزدهم.