فیزیک ۱

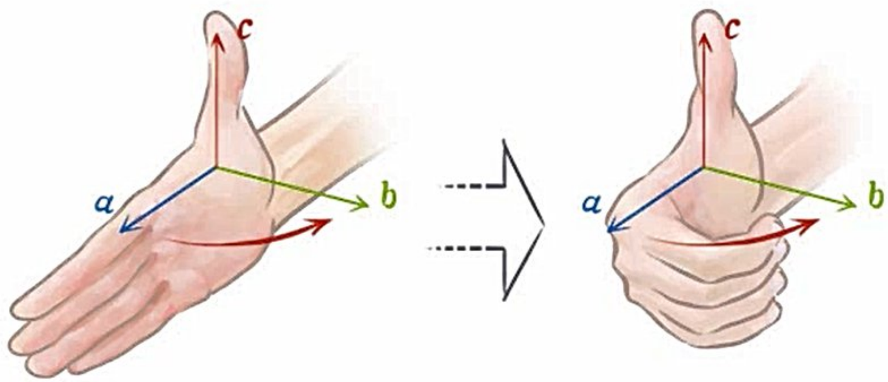
حل تمرین دکتر غلام محمد پارسانسب

نسرین کریمی
دانشگاه شهید بهشتی -آبان۱۴۰۰

ضرب بردار در بردار

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$$

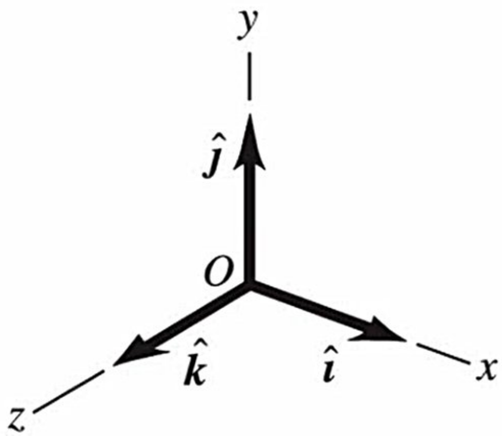


نکات ضرب برداری

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{O}$$

$$\vec{A} \parallel \vec{D} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{D} = \vec{O}$$

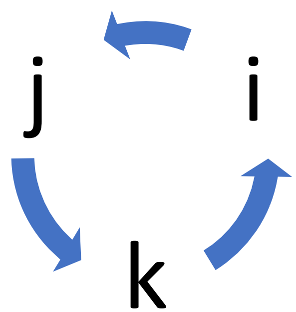


$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



ضرب مولفه ای

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})\times(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$$

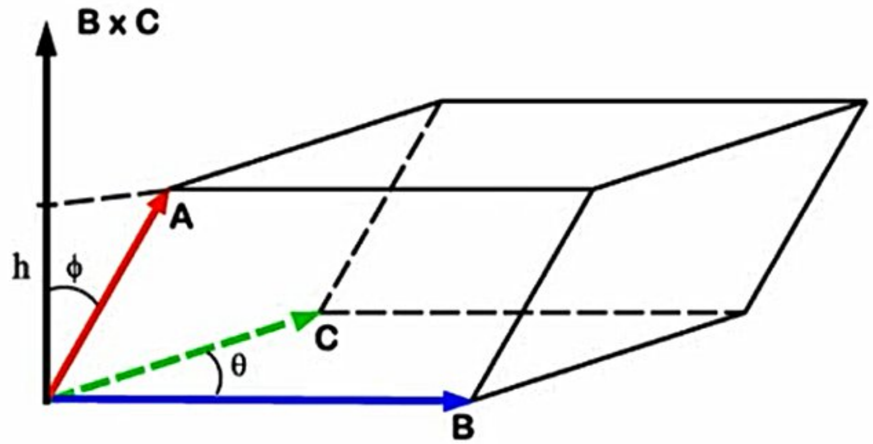
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} =$$

$$(A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



بردار یکه

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$\vec{B} \,.\, \hat{u}_A = \frac{\vec{B} \,.\, \vec{A}}{|\vec{A}|} = |B| \cos\theta$$

مثال

بردار های زیر را در نظر بگیرید و مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

$$\vec{d}_1 = -3.0\hat{i} + 3.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$$

$$\vec{d}_2 = -2.0\hat{i} - 4.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$$

$$\vec{d}_3 = 2.0\hat{i} + 3.0\hat{j} + 1.0\hat{k}.$$

الف) $\vec{d}_1 . (\vec{d}_2 \times \vec{d}_3)$

ب) $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$

پاسخ

$$\begin{cases} \vec{d}_1 = -3\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k} \\ \vec{d}_2 = -2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} \\ \vec{d}_3 = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} \end{cases}$$

الف)

$$\vec{d}_2 \times \vec{d}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{d}_2 \times \vec{d}_3 = (-4-6)\hat{i} + (-(-2-4))\hat{j} + (-6+8)\hat{k} = -10\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 \times \vec{d}_3) = (-3\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (-10\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}) = +30 + 18 + 4 = 52$$

ب)

$$\vec{d}_2 + \vec{d}_3 = (-2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) + (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = -\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2 + \vec{d}_3) = (-3\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) \times (-\hat{j} + 3\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (9+2)\hat{i} + (-(-9-0))\hat{j} + (3-0)\hat{k} = 11\hat{i} + 9\hat{j} + 3\hat{k}$$

مثال

در حاصلضرب زیر با در نظرگرفتن $q = 2$ (بار ذره) و اینکه سرعت ذره و نیروی وارد بر ذره برابر است با ؛

$$\vec{V} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$
$$\vec{F} = 4\vec{i} - 20\vec{j} + 12\vec{k}$$

بردار B را در رابطه زیر با فرض $B_x = B_y$ بدست آورید.

$$\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$$

پاسخ

$$\left.\begin{aligned}\vec{V}&=2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\\ \vec{F}&=4\hat{i}-20\hat{j}+12\hat{k}\end{aligned}\right\}\longrightarrow \vec{F}=q\vec{V}\times\vec{B}\longrightarrow \vec{B}=?$$

$$\begin{cases}B_x=B_y & : \text{فرض شود}\\ q=2\end{cases}$$

$$q\vec{V}=2(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k})=4\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k}$$

$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$\vec{F}=q\vec{V}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ 4&8&12\\ B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \vec{F}=(8B_z-12B_y)\hat{i}+(-(4B_z-12B_x))\hat{j}+\underbrace{(4B_y-8B_x)}_{1}\hat{k}$$

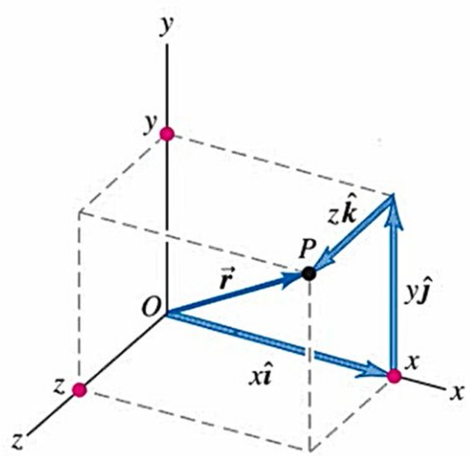
$$=(4\hat{i}-20\hat{j}+12\hat{k})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}8B_z-12B_y=4 \xrightarrow{*} 8B_z-12\times(-3)=4 \longrightarrow B_z=-4\\ -4B_z+12B_x=-20\\ 4B_y-8B_x=12 \xrightarrow{B_x=B_y} 4B_x-8B_x=12\longrightarrow B_x=B_y=-3 \quad (*)\end{cases}$$

$$\longrightarrow \vec{B}=-3\hat{i}-3\hat{j}-4\hat{k}$$

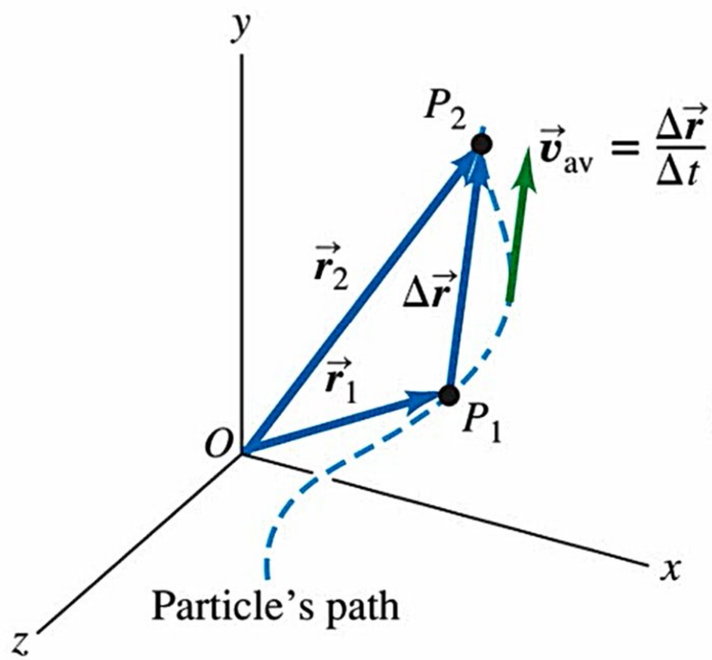
حرکت در ۲ بعد و ۳ بعد

بردار مکان



$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

سرعت متوسط



$$\overline{V} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\overline{V} = \frac{\Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

سرعت لحظه ای

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V} = \underbrace{\frac{dx}{dt}\hat{i}}_{\vec{V}_x} + \underbrace{\frac{dy}{dt}\hat{j}}_{\vec{V}_y} + \underbrace{\frac{dz}{dt}\hat{k}}_{\vec{V}_z}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2} + V_z^{\ 2}}$$

بردار سرعت لحظه ای مماس بر مسیر حرکت است.

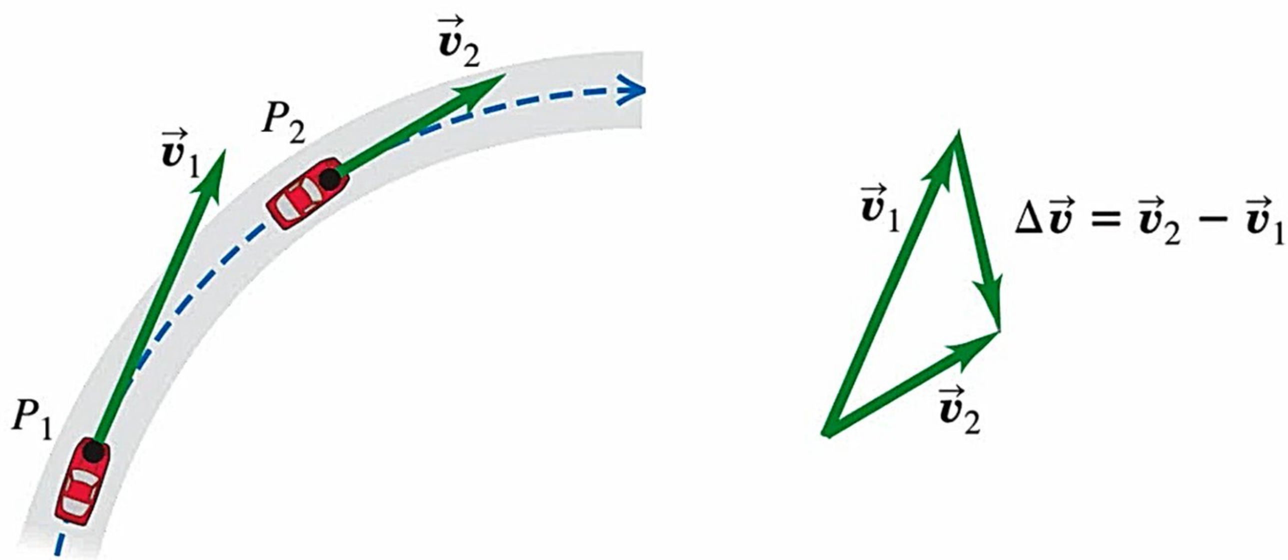
شتاب متوسط و شتاب لحظه ای

$$\bar{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

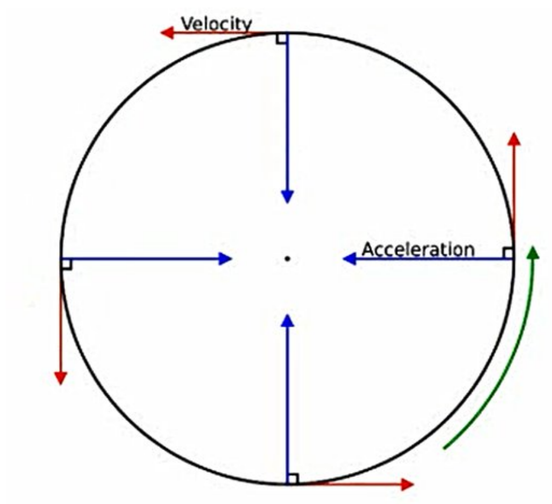
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dV_x}{dt}}_{\vec{a}_x} \hat{i} + \underbrace{\frac{dV_y}{dt}}_{\vec{a}_y} \hat{j} + \underbrace{\frac{dV_z}{dt}}_{\vec{a}_z} \hat{k}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$$

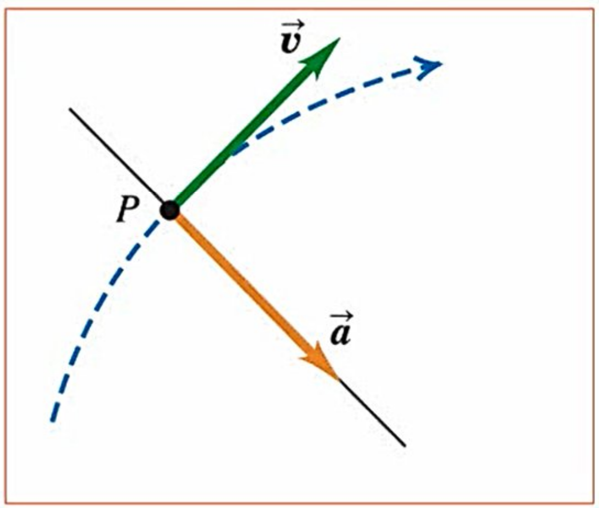

$\vec{v}_2$
P_2
$\vec{v}_1$
P_1
$\vec{v}_1$
$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$
$\vec{v}_2$

حرکت دایره ای که با اندازه سرعت ثابت ولی جهت متغیر دارای شتاب هستیم.

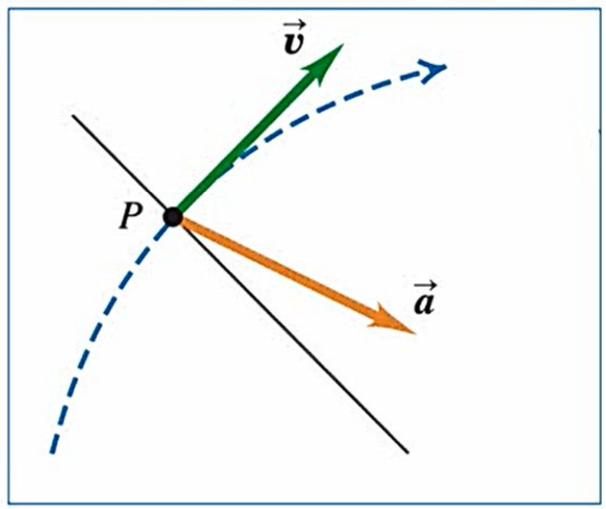


حرکت در مسیر منحنی

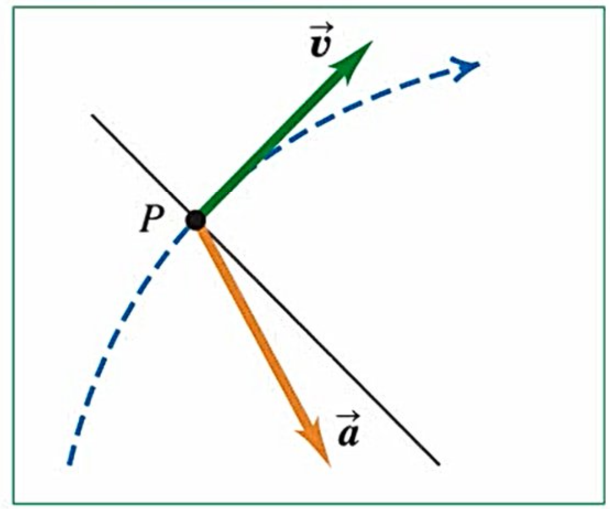
شکل ۱
اندازه سرعت ثابت است



شکل ۲
اندازه سرعت روبه افزایش است.

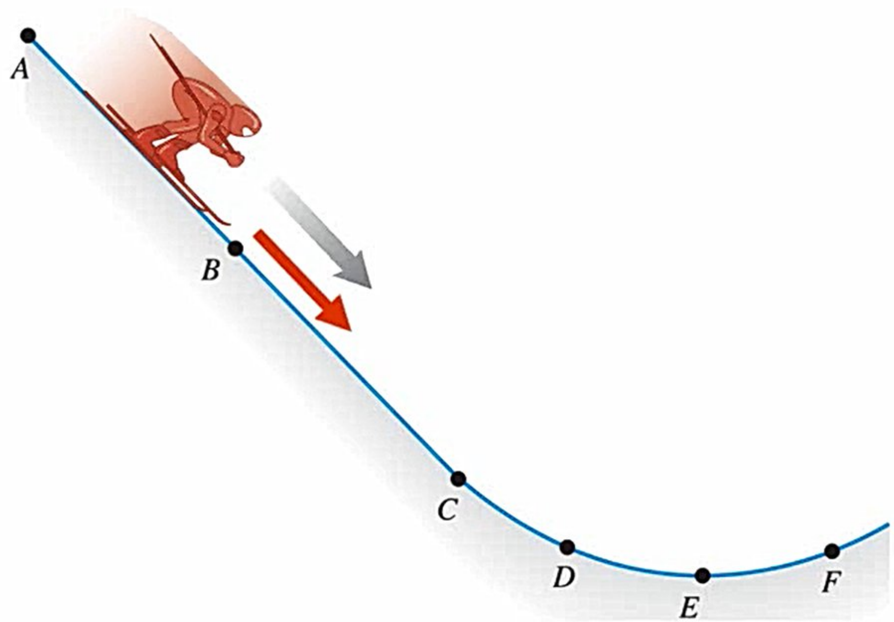


شکل ۳
اندازه سرعت روبه کاهش است.

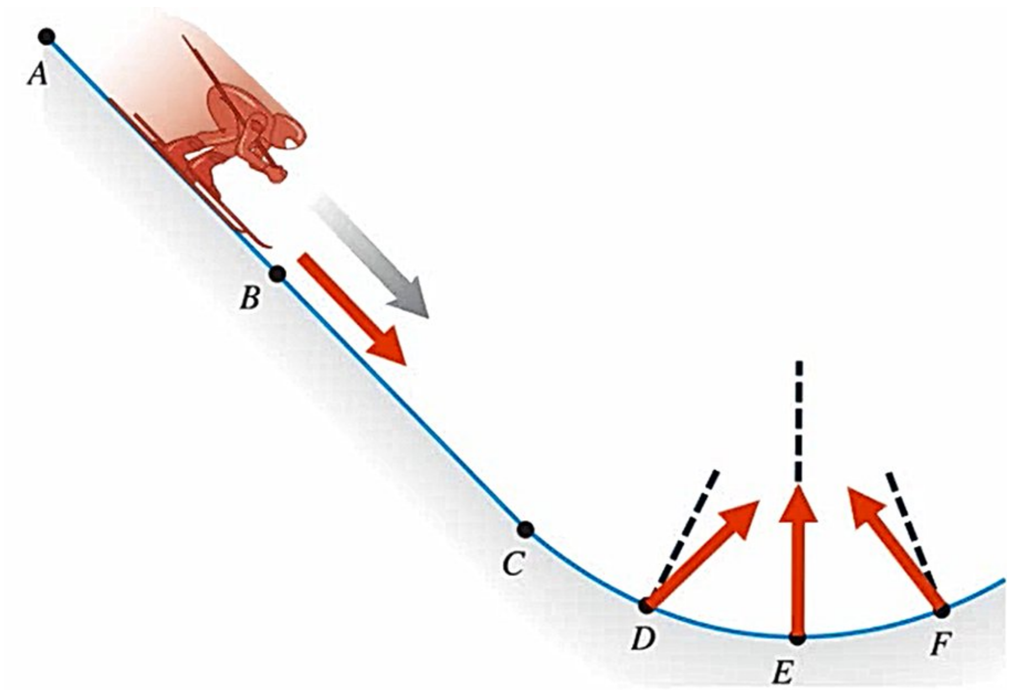


مثال

یک اسکی باز، مسیری مانند شکل زیر را طی می کند. مسیر از نقطه A تا C مستقیم و از نقطه C به بعد منحنی می باشد. اسکی باز از نقطه A تا E سرعت خود را افزایش داده بطوریکه در نقطه E به بیشینه سرعت خود می رسد. سپس از این لحظه به بعد از سرعت خود می کاهد. جهت بردار شتاب را در هر یک از نقاط B، D، E، و F مشخص کنید.



پاسخ



مثال

مختصات مکان ذره ای که در صفحه حرکت می کند از رابطه زیر بدست می آید :

$$x = 2 - 2.5t^2$$

$$y = 1t + 0.025t^3$$

الف – مختصات مکان ذره در لحظه $t = 2\ s$ را بدست آورید

ب – جابجایی و سرعت متوسط در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 2\ s$ را بیابید.

ج – رابطه ای برای سرعت لحظه ای و شتاب لحظه ای بیابید.

پاسخ

$$\begin{cases} x = 2 - 2.5t^2 \\ y = t + 0.025t^3 \end{cases}$$

الف) $\xrightarrow{t=2} \begin{cases} x = 2 - 2.5(2)^2 = -8 \\ y = 2 + 0.025(2)^3 = 2.2 \end{cases}$

$$\rightarrow \vec{r}_{(t=2s)} = -8\hat{i} + 2.2\hat{j}$$

ب) $\xrightarrow{t_1 = 0s} \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ $\quad \xrightarrow{t_2 = 2s} \begin{cases} x_2 = -8 \\ y_2 = 2.2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = 2\hat{i} \\ \vec{r}_2 = -8\hat{i} + 2.2\hat{j} \end{cases} \rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -10\hat{i} + 2.2\hat{j}$$

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-10\hat{i} + 2.2\hat{j})}{2} = -5\hat{i} + 1.1\hat{j}$$

ج)

$$\vec{r} = (2 - 2.5t^2)\hat{i} + (t + 0.025t^3)\hat{j}$$

سرعت لحظه‌ای $\quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-5t)\hat{i} + (1 + 0.075t^2)\hat{j}$

شتاب لحظه‌ای $\quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -5\hat{i} + (0.15t)\hat{j}$

پایان جلسه چهارم.