

Predictive-Corrective 不可压缩 SPH

索伦泽·*苏黎世
大学

R. Pajarola 苏黎
世大学†教授



图 1:不可压缩模拟产生的三个例子:(左)2M 颗粒飞溅到模拟边界。(中)波浪槽的近景。(右)以 700k 个粒子为代表的流体与圆柱体障碍物碰撞。

摘要

提出了一种基于拉格朗日光滑粒子流体动力学(SPH)模型的新型不可压缩流体模拟方法。在我们的方法中，不可压缩性是通过使用预测-修正方案来确定粒子压力。为此，有关密度波动的信息通过流体主动传播，并更新压力值，直到满足目标密度。使用这种方法，我们避免了求解压力泊松方程的计算费用，同时仍然能够在模拟中使用大的时间步长。结果表明，预测校正不可压缩 SPH (PCISPH)方法明显优于常用的弱可压缩 SPH (WCSPH)模型一个数量级以上，计算结果与 WCSPH 模型结果吻合较好。

CR 类别:I.3.5[计算机图形学]:计算几何和对象建模-基于物理建模;I.3.7[计算机图形]:三维图形和现实主义-动画。

关键词:流体模拟，SPH，不可压缩性

1 介绍及前期工作

在完全基于粒子的流体模拟中加强不可压缩性是整个模拟中最贵的部分

*电子邮件:† solenthaler@ifi.uzh。
电子邮件: ch pajarola@acm.org

过程，从而使粒子方法不那么吸引高质量和逼真的水动画。在光滑粒子流体动力学(SPH)的背景下，两种不同的策略被追求来模拟不可压缩性。首先，采用弱可压缩 SPH (WCSPH)方法，其中压力采用刚性状态方程(EOS)建模，其次，通过求解压力泊松方程得到不可压缩性。虽然这两种方法都满足不可压缩性，但模拟高分辨率流体动画的计算开销过大，难以实际应用。

在标准 SPH 和 WCSPH 模型中，粒子压力由状态方程决定。这个方程的特性和刚度参数决定了声波在介质中的速度。在一系列论文中使用[Desbrun and Cani 1996]基于 eos 的低刚度 SPH 模拟水[Müller et al. 2003;Adams 等人 2007 年，多种流体[Müller 等人 2005 年;Solenthaler 和 Pajarola 2008 年，流体-固体耦合[Müller et al. 2004b;Lenaerts et al. 2008]，熔化固体[Müller et al. 2004a;Keiser 等 2005 年;Solenthaler 等，2007 年]和流体控制[Thürey 等，2006 年]。与标准 SPH 配方相比，WCSPH 使用了一种刚性 EOS [Monaghan 2005;Becker and Teschner, 2007;Becker et al. 2009]使得声波在介质中传播的速度更接近于它们的真实速度。通常，刚度值的选择要大到密度波动不超过 1%。然而，实现这一目标所需的刚度值在运行仿真之前很难甚至不可能确定。因此，动画师无法绕过大量的测试和参数调整。WCSPH 的另一个缺点是，由于流体的刚度通常支配着 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)条件，因此 WCSPH 施加了严格的时间步长限制。因此，计算成本随着压缩性的降低而增加——因为更高的刚度需要更小的时间步长，这使得在合理的时间内模拟高分辨率流体是不可行的。

拉格朗日方法中的不可压缩性可以通过求解类似于欧拉方法的压力投影来实现，而不是模拟声波(例如[Enright et al. 2002])。这些不可压缩 SPH (ISPH)方法首先在不强制不可压缩的情况下对速度场进行时间积分。然后，要么是中间速度场[Cummins and Rudman 1999]，由此产生的粒子密度变化[Shao 2006]，要么两者都有[J.刘和奥卡河

2005;Hu 和 Adams 2007;通过压力泊松方程将 Losasso 等人(2008)投影到无散度空间以满足不可压缩性。利用这些 ISPH 方法,已报道了 1%至 3%的密度波动。然而,这些方法的一个问题是,在非结构粒子构型上的方程系统的表述和求解的复杂性。虽然 ISPH 比 WCSPH 允许更大的时间步长,但每个物理步长的计算成本要高得多。[Pre- moze 等人 2003]在粒子法运动粒子半隐式(MPS)中也使用了泊松求解器,极大地增加了每物理时间步长的成本。与完全拉格朗日模型相比,[Zhu and Brid- son 2005]提出使用辅助背景网格将方程系统简化为可有效求解的稀疏线性方程组。在[Selle et al. 2005]中提出了一个类似的涡量约束混合求解器。在[Losasso 等人 2008]中,引入了带有 SPH 求解器的双向耦合水平集方法来模拟密集和扩散的水体积。他们演示了如何强制不可压缩和目标粒子数密度与一个单一的泊松解。

本文提出了一种新的全拉格朗日不可压缩 SPH 方法,该方法具有 WCSPH 和 ISPH 在同一模型中的优点,即每次物理更新的计算成本低,时间步长。我们的方法利用了一种预测校正方案,该方案通过流体传播估计的密度值,并以一种实现不可压缩性的方式更新压力。一旦达到每个粒子先前定义的密度变化极限,传播就会停止。我们将在本文中表明,我们的新预测校正不可压缩 SPH (PCISPH)方法优于 WCSPH 方法超过一个数量级,而计算结果与 WCSPH 结果很好地吻合。我们的方法的效率使动画师能够在合理的时间产生高分辨率的流体动画,而没有压缩伪影。

2 PCISPH 模型

2.1 基本 SPH / WCSPH 算法

在 SPH 中,液体近似为人工的、稍微可压缩的流体。算法 1 总结了基本的 SPH 方法。在每次物理更新中,本地邻域 N_i 计算每个粒子 i 的密度、压力和作用在每个粒子上的合力[Monaghan 1992]。密度 ρ_i 粒子 i 在 x 位置的能量 e_i 可以通过对邻近粒子的加权贡献求和得到 j

$$\rho_i = m \sum_j W(\mathbf{x}_{ij}, h),$$

(

其中 m 为质点质量(假设所有质点质量相等), W 为光滑长度 h 的加权核, $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$. 压力 p_i 根据[Batchelor 1967], 粒子的状态方程

$$p_i = \frac{k\rho_0}{\gamma} ((\frac{\rho_i}{\rho_0})^\gamma - 1),$$

k 是一个刚度参数, ρ_0 参考密度。[Des- brun 和 Cani 1996]使用 γ 为 1 和 k 的一个小值,而在 WCSPH(例如[Monaghan 2005])中, γ 被设置为 7, k 被选择,因此声速足够大,以保持密度波动小(约 1%)。需要注意的是, CFL 条件[Courant 等人 1967]对于较硬的流体要求更小的时间步长,这在模拟水时极大地增加了总体计算成本。压力力场直接由 Navier-Stokes 方程导出

算法 1 SPH / WCSPH

- 1 动画时做
- 为我所做的一切
- 3 找到邻域 $N_i(t)$
- 为我所做的一切
- 5 计算密度 $\rho_i(t)$
- 6 计算压力 $p_i(t)$
- 为我所做的一切
- 8 计算力 $F_p, v, g, ext(t)$
- 为我所做的一切
- 10 计算新速度 $v_i(t + 1)$
- 11 计算新位置 $x_i(t + 1)$

算法 2 PCISPH

- 1 动画时做
- 为我所做的一切
- 3 找到邻域 $N_i(t)$
- 为我所做的一切
- 5 计算力 $F^{v, g, ext}(t)$
- 6 初始压力 $p(t) = 0.0$
- 7 初始压力 $F^p(t) = 0.0$
- 8 时 $(\rho^{*err}(t + 1) > \eta) \parallel (iter < minIterations)$ do
- 为我所做的一切
- 10 预测速度 $v_i^{*}(t + 1)$
- 11 预测位置 $x_i^{*}(t + 1)$
- 12 **for all** i **do**
- 13 预测密度 $\rho^{*}_i(t + 1)$
- 14 预测密度变化 $\rho^{*err}(t + 1)$
- 15 更新压力 $p_i(t) += f(\rho^{*err}(t + 1))$
- 为我所做的一切
- 计算压力 $F^p(t)$
- 为我所做的一切
- 19 计算新速度 $v_i(t + 1)$
- 20 计算新位置 $x_i(t + 1)$

公式, 由

$$\mathbf{F}_i^p = -m^2 \sum_j (\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2}) \nabla W(\mathbf{x}_{ij}, h).$$

在我们的实现中, 我们使用[Monaghan 1992]中提出的粘性力和称重内核。

2.2 PCISPH 算法

为了避免 WCSPH 算法的时间步长限制, 我们提出了一种基于 SPH 算法的预测校正方案(PCISPH)。在我们的方法中, 速度和位置在时间上暂时向前和新的粒子密度估计。然后, 对于每个粒子, 计算来自参考密度的预测变化, 并用于更新压力值, 反过来进入压力力的重新计算。与线性系统的 Jacobi 迭代类似, 该过程被迭代直到收敛, 即直到所有粒子密度波动小于用户定义的 η 阈值(例如 1%)。注意, 这是一个非线性问题, 因为我们在迭代过程中包含了碰撞处理和更新的内核值。作为最后一步, 计算下一个物理更新步骤的速度和位置。PCISPH 方法在算法 2 中进行了说明。

2.3 压力推导

其中一个主要困难是从预测的密度变化(算法 2 的第 15 行)得出压力变化

每次迭代都执行更新，减少了粒子的密度波动。目的是找到一个压强 p ，它能改变粒子的位置，使预测的密度与参考密度相对应。在这一节的过程中，一组近似将推导出一个简单的压力更新规则(公式 8 到 10)。虽然这种近似增加了收敛迭代的次数，直到达到期望的密度波动极限为止，但它们保持了最终压力更新规则的简单和高效计算。

对于给定的核平滑长度 h ，在时间 $t + 1$ 点的密度计算使用类似于方程 1 的 SPH 密度求和方程

$$\begin{aligned}\rho_i(t+1) &= m \sum_j W(\mathbf{x}_i(t+1) - \mathbf{x}_j(t+1)) \\ &= m \sum_j W(\mathbf{x}_i(t) + \Delta\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) - \Delta\mathbf{x}_j(t)) \\ &= m \sum_j W(\mathbf{d}_{ij}(t) + \Delta\mathbf{d}_{ij}(t))\end{aligned}$$

在维 $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)$ 和 $\Delta\mathbf{d}_{ij}(t) = \Delta\mathbf{x}_i(t) - \Delta\mathbf{x}_j(t)$ 假设 $\Delta\mathbf{d}_{ij}$ ，一阶泰勒近似可以应用于 $W(\mathbf{d}_{ij}(t) + \Delta\mathbf{d}_{ij}(t))$ 导致

$$\begin{aligned}\rho_i(t+1) &= m \sum_j W(\mathbf{d}_{ij}(t)) + \nabla W(\mathbf{d}_{ij}(t)) \cdot \Delta\mathbf{d}_{ij}(t) \\ &= m \sum_j W(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) + \\ &\quad m \sum_j \nabla W(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \cdot (\Delta\mathbf{x}_i(t) - \Delta\mathbf{x}_j(t)) \\ &= \rho_i(t) + \Delta\rho_i(t).\end{aligned}$$

在这个方程中， $\Delta\rho_i(t)$ 项是未知的，我们稍后会说明，我们正在寻找 p 的函数。重新配方后使用 $W_{ij} = W(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))$

$$\begin{aligned}\Delta\rho_i(t) &= m \sum_j \nabla W_{ij} \cdot (\Delta\mathbf{x}_i(t) - \Delta\mathbf{x}_j(t)) \\ &= m \left(\sum_j \nabla W_{ij} \Delta\mathbf{x}_i(t) - \sum_j \nabla W_{ij} \Delta\mathbf{x}_j(t) \right) \\ &= m \left(\Delta\mathbf{x}_i(t) \sum_j \nabla W_{ij} - \sum_j \nabla W_{ij} \Delta\mathbf{x}_j(t) \right) \quad (2)\end{aligned}$$

$\Delta\mathbf{x}_i$ 可由时间积分方案(Leap-Frog)导出。忽略所有的力，除了压强

$$\Delta\mathbf{x}_i = \Delta t^2 \frac{\mathbf{F}_i^p}{m}.$$

如果我们简单假设邻居的压力相等 p_i 这个密度对应于剩余的密度 ρ_0 (根据不可压缩条件)，结果是

$$\mathbf{F}_i^p = -m^2 \sum_j \left(\frac{\tilde{p}_i}{\rho_0^2} + \frac{\tilde{p}_j}{\rho_0^2} \right) \nabla W_{ij} = -m^2 \frac{2\tilde{p}_i}{\rho_0^2} \sum_j \nabla W_{ij}$$

把方程 4 代入方程 3，我们得到

$$\Delta\mathbf{x}_i = -\Delta t^2 m \frac{2\tilde{p}_i}{\rho_0^2} \sum_j \nabla W_{ij}.$$

由于压强 p_i 对于粒子 i ，邻近粒子的位置变化 $\Delta\mathbf{x}_{ji}$ 。由于压力是对称的，粒子 j 对 i 的贡献如下

$$\mathbf{F}_{j|i}^p = m^2 \left(\frac{\tilde{p}_i}{\rho_0^2} + \frac{\tilde{p}_j}{\rho_0^2} \right) \nabla W_{ij} = m^2 \frac{2\tilde{p}_i}{\rho_0^2} \nabla W_{ij},$$

j 的位置变化了

$$\Delta\mathbf{x}_{j|i} = \Delta t^2 m \frac{2\tilde{p}_i}{\rho_0^2} \nabla W_{ij}. \quad (6)$$

注意，我们这里只考虑中心粒子 i 的影响，即 $\Delta\mathbf{x}_j = \Delta\mathbf{x}_{ji}$ 。方程 5 和方程 6 现在可以插入到方程 2 得到

$$\begin{aligned}\Delta\rho_i(t) &= m \left(-\Delta t^2 m \frac{2\tilde{p}_i}{\rho_0^2} \sum_j \nabla W_{ij} \cdot \sum_j \nabla W_{ij} - \right. \\ &\quad \left. \sum_j (\nabla W_{ij} \cdot \Delta t^2 m \frac{2\tilde{p}_i}{\rho_0^2} \nabla W_{ij}) \right) \\ &= \Delta t^2 m^2 \frac{2\tilde{p}_i}{\rho_0^2} \left(- \sum_j \nabla W_{ij} \cdot \sum_j \nabla W_{ij} - \right. \\ &\quad \left. \sum_j (\nabla W_{ij} \cdot \nabla W_{ij}) \right)\end{aligned}$$

在求解了 p_i 我们得到了

$$\tilde{p}_i = \frac{\Delta\rho_i(t)}{\beta(-\sum_j \nabla W_{ij} \cdot \sum_j \nabla W_{ij} - \sum_j (\nabla W_{ij} \cdot \nabla W_{ij}))} \quad (7)$$

β 在哪里

$$\beta = \Delta t^2 m^2 \frac{2}{\rho_0^2}.$$

方程 7 的含义是 a pressure p_i 是否需要达到 $\Delta\rho_i(t)$ 的密度变化 $\rho_i(t)$ 我们知道一个粒子的预测密度误差 $\rho_{err_i} = p_i - p_0$ ，因此我们可以逆转这个误差

by applying a pressure of

$$\tilde{p}_i = \frac{-\rho_{err_i}^*}{\beta(-\sum_j \nabla W_{ij} \cdot \sum_j \nabla W_{ij} - \sum_j (\nabla W_{ij} \cdot \nabla W_{ij}))}.$$

这个公式显示了 i 在邻近区域由于粒子缺乏而导致伪值的情况下问题。为了规避这个问题，我们根据下面的公式预先计算一个单一的缩放因子 δ ，这个公式是对一个填充邻域的原型粒子进行评估的。结果值然后用于所有粒子。最后，我们得到以下用于 PCISPH 方法的方程

$$\delta = \frac{-1}{\beta(-\sum_j \nabla W_{ij} \cdot \sum_j \nabla W_{ij} - \sum_j (\nabla W_{ij} \cdot \nabla W_{ij}))} \quad (8)$$

和

$$\tilde{p}_i = \delta \rho_{err_i}^*.$$

由于我们在不满足不可压缩条件的情况下重复预测-校正步骤，因此累积了每一次迭代的校正压力，如算法 2 第 15 行所示

$$p_i += \tilde{p}_i. \quad (9)$$

2.4 实现

2.4.1 附近近似

在预测密度 $\rho_i^*(t+1)$ 的粒子(算法 2 的第 13 行)，邻域应该使用预测的位置 $\mathbf{x}_i^*(t+1)$ 重新计算 $N_i(t+1)$ 。然而，出于效率的原因，我们重用当前的邻居 $N_i(t)$ ，只重新计算距离和核值。这种近似会导致密度和压力估计的微小误差。在密度高估的情况下，最终实际密度的波动低于

请求的阈值 η 。在相反的情况下——密度低估——校正环路可能会过早地中止。这种情况在当前的实现中还没有处理，但是可以通过使用足够小的时间步长来避免，或者通过重新计算这些特定情况下的邻域来避免。

2.4.2 信息传播

为了限制产生的压力场的时间波动，我们发现在压力更新回路中采用最小的迭代次数是有利的。这给了粒子足够的时间来传播预测粒子位置的信息。我们发现至少 3 次迭代通常足以实现低水平的压力波动。

3 的结果

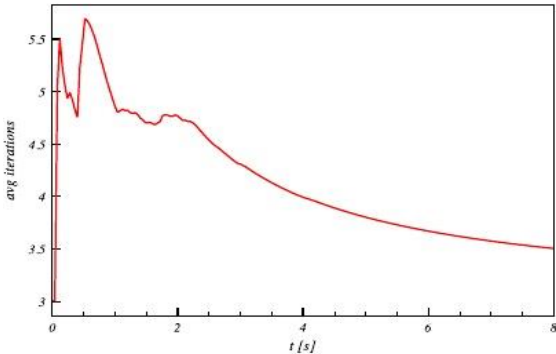
3.1 性能比较

我们建立了一个测试场景(图 2)来比较常用的 WCSPH 和我们的新 PCISPH 方法的仿真时间和可视化结果。性能测量和模拟数据汇总在表 1 中。所有的计时都给出了一个 Intel Core2 2.66 GHz CPU。

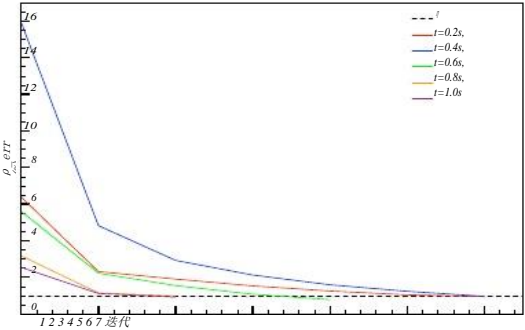
我们使用不同的粒子分辨率(10k 和 100k)和不同的误差阈值 η (1% 和 0.1%)执行了不同的模拟运行，这定义了参考密度的最大允许密度波动。10k 和 100k 示例具有相应的场景设置，但流体离散化不同，这意味着 10k 示例中的粒子比 100k 示例中的粒子表示更大的流体体积。由于在 SPH 中粒子总是需要有大 约 30-40 个邻居，支撑半径必须随着粒子体积的增加而增加，这反过来又影响了时间步长。时间步长是根据 CFL 条件设置的，其中涉及了力项、刚度参数 k 和粘性项[Monaghan 1992]。而在 WCSPH 中，时间步长以 k 为主，对 PCISPH 没有影响，可以省略。因此，对于低粘度流体，PCISPH 的时间步长主要由力项决定，允许比 WCSPH 使用的时间步长明显更大。通过试验确定了 WCSPH 的刚度参数 k ， η 满足要求，为 $k = 7 \cdot 10^4$ $\eta = 1\%$ ， $k = 6 \cdot 10^6$ $\eta = 0.1\%$ 。相比之下，PCISPH 不需要找到合适的刚度值，因为期望的 η 可以直接指定。在 $\eta=1\%$ 的情况下，PCISPH 的时间步长实际上是 WCSPH 的 35 倍。当 $\eta = 0.1\%$ 时，PCISPH 的时间步长增加了 151 倍。在 WCSPH 中，每个模拟步骤的计算时间或多或少保持不变，而在 PCISPH 中，每个模拟步骤的计算时间取决于执行收敛迭代的次数。因此，我们比较了 WCSPH 和 PCISPH 在整个模拟时间段内的总计算时间。虽然 PCISPH 比 WCSPH 的每物理时间步长成本更高，但总体加速比 WCSPH 分别达到了 15 和 16 ($\eta = 1\%$)和 55 ($\eta = 0.1\%$)的因子。

3.2 收敛性分析

在前面描述的测试场景中，每个物理步骤执行的平均收敛迭代数在 3.24 到 4.46 之间。注意，粒子分辨率对平均迭代次数没有影响。对于使用 100k 粒子的模拟运行，图 3(a)中绘制了随着时间推移的平均迭代次数。结束时间 8s 对应模拟的实时。



(a)一段时间内收敛迭代的平均次数。经过 8s 的模拟实时，平均达到 3.49。



(b) t 时刻不同点的几个收敛例子。

图 3:100k 粒子模拟收敛统计，如表 1 和图 2 所示。

峰值表明粒子与地面和侧壁的碰撞，在这种情况下，更大的密度误差被预测。图 3(b)显示了单个物理更新步骤中的几个收敛示例。可以看出，密度误差在第一次迭代后大约减半，在接下来的迭代中不断减小，直到误差降到 η 以下。根据我们的经验，该算法证明是非常鲁棒的，我们没有遇到任何发散问题。然而，有可能存在的某些粒子构型可能会显示出这样的问题。

3.3 视觉效果

图 2 比较了 WCSPH 和 PCISPH 的物理行为和视觉结果。可以看出，PCISPH 计算与 WCSPH 结果完全一致，只有很小的细节差异。在 298min 的仿真时间约束下，WCSPH 和 PCISPH 的对比如图 4 所示。而使用 PCISPH 可以在给定的时间内模拟 100k 粒子的分辨率(见表 1 中相应的条目)，而使用 WCSPH 则必须将分辨率降低到 17k 粒子。较低的分辨率导致更少的表面细节和明显的阻尼流体运动。图 1(中间和右边)和图 5 显示了用 PCISPH 计算的一个更高分辨率的例子，其中波浪发生器搅动由 700k 颗粒组成的水体，使其与水池中的圆柱形障碍物相互作用。在图 1(左)和图 6 中，用 PCISPH 模拟崩塌柱的例子使用 2M 颗粒。在这两个模拟中， η 的 1% 是强制消除压缩伪影，并使现实的波破碎和飞溅行为。在所有示例中，流体表面都使用[Solenthaler 等人 2007]中提出的光线追踪方法进行重建和渲染。

模型	η (%)	# P	k	Δt [s]	Δt 比[s]	avgIterations	尖(分钟)	加速
WCSPH	1.0	10 k	$7 \cdot 10^4$	$3.78 \text{ e-}5$	-	- 3.24	142.05	- 15.2
PCISPH	- 1.0	10 k		0.0013	35		- 9.37	
WCSPH	1.0	100 k	$7 \cdot 10^4$	$1.78 \text{ e-}5$	-	- 3.49	4941.5	- 16.6
PCISPH	- 1.0	100 k		0.00062	35		- 297.7	
WCSPH	0.1	10 k	$6 \cdot 10^6$	$4.08 \text{ e-}6$	- 151.96	- 4.46	1327.66	- 55.39
PCISPH	- 0.1	10 k		0.00062			- 23.97	

表 1:WCSPH 与 PCISPH 比较。选择了 WCSPH 的刚度值 k，密度波动百分比 η 以下，并根据 CFL 工况确定了时间步长。用我们的 PCISPH 方法， $\eta=1\%$ ，得到了比 WCSPH 高出 15 和 16 倍的速度。通过将误差限制在 $\eta=0.1\%$ ，PCISPH 减少了 55 倍的计算时间。

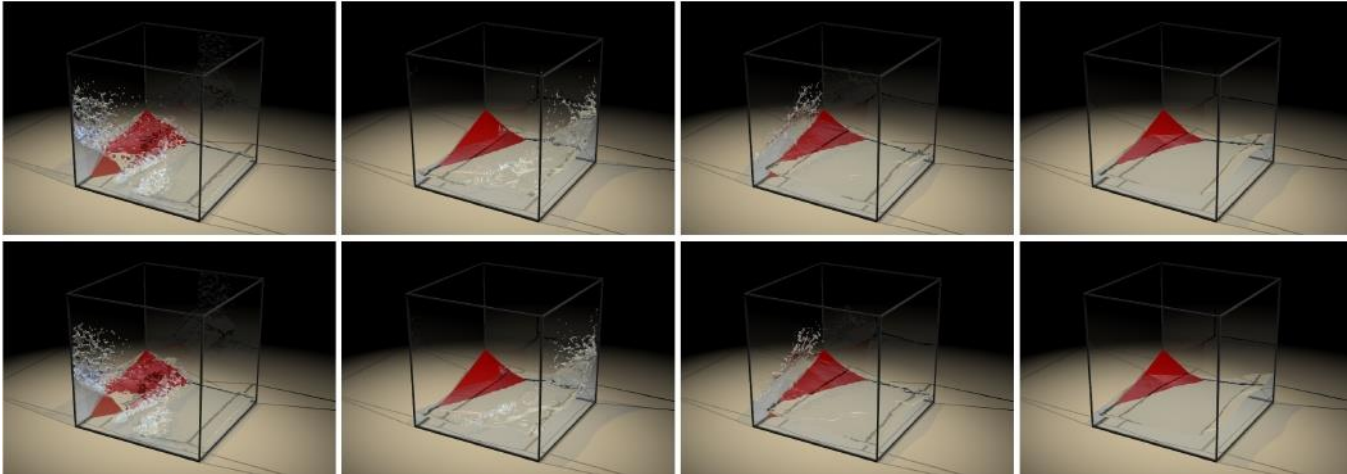


图 2:分别用 WCSPH(上行)和 PCISPH(下行)模拟 100k 颗粒离散的流体的并排比较。计算结果与 100k 粒子模拟的统计量如表 1 所示。

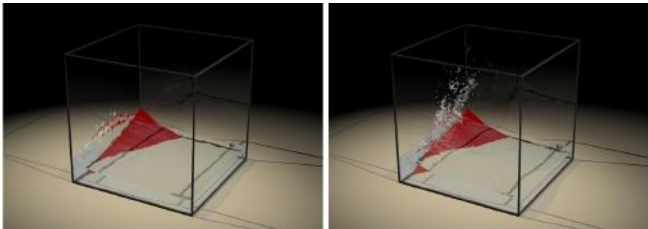


图 4:WCSPH(左, 17k 粒子)和 PCISPH(右, 100k 粒子)在相同计算时间下的比较。

4 结论

我们提出了一种新的不可压缩 SPH 求解器，它结合了 WCSPH 和 ISPH 在一个模型中的优点，即每次物理更新的计算成本低，时间步长。我们的方法包括一个收敛循环，它在每个物理更新步骤中执行，包括一个预测和修正迭代。在每次收敛迭代中，预测新的粒子位置和它们的密度，并计算来自参考密度的变化。为了减小密度误差和接近不可压缩性，我们推导了密度涨落与压力的关系式。与常用的 WCSPH 方法相比，该方法获得了一个数量级以上的加速，仿真结果与 WCSPH 方法一致。

当前实施的一个问题是邻里关系

这可能导致低估的密度误差过早地终止收敛环路，正如我们在第 2.4.1 节所讨论的。这个问题可以通过检测这种情况和适应时间步长或重新计算邻居在这个特定的模拟步骤来解决。除此之外，我们目前的实现还没有考虑到边界附近的粒子缺陷。在这些情况下，密度值是伪造的，压缩伪影可能发生。如 Becker et al. 2009 所述，在密度计算中加入鬼粒子或使用校正 SPH 公式可以解决这一问题。

参考文献

亚当斯, 鲍利, 凯瑟, r .和吉巴斯, l. j . 2007。自适应采样颗粒流体。ACM 反式。图 26,3,48-54。

巴舍乐,g . 1967。流体力学导论。剑桥大学出版社。

Becker, m .和 teschner, m . 2007。自由表面流动的弱可压缩 SPH。计算机动画研讨会，209-217。

Becker, m ., tessendorf, h .和 teschner, m . 2009。拉格朗日刚体-流体耦合的直接强迫。可视化与计算机图形学学报 15,3493 - 503。

柯朗、弗里德里希和刘易斯, 1967 年。数学物理中的偏差分方程。IBM j. 11, 215-234。



图 5:用所提出的不可压缩 PCISPH 方法模拟波浪槽中的波浪破碎和飞溅。

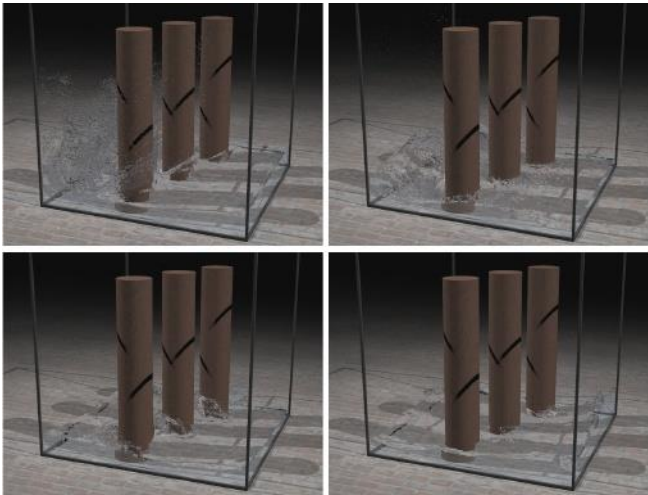


图 6:2M 粒子与圆柱障碍物相互作用的 PCISPH 模拟。

康明斯和鲁德曼, 1999。一种 SPH 投影方法。j. 第一版。物理 152,2,584-607。

Desbrun, m, cani, m - p. 1996.平滑粒子:一个新的范例动画高度变形的身体。计算机动画与模拟研讨会, 61-76 页。

Enright, marschner, s.和 fedkiw, r . 2002。复杂水面的动画和渲染。ACM 反式。图 21,3,736 - 744。

胡晓云, 亚当斯, 2007。不可压缩多相 SPH 方法。j. 第一版。物理 227,1,264-278。

刘世凯, 2005。粘性不可压缩多相流的混合颗粒-网格方法。j. 第一版。物理 202 1 65-93。

Keiser, r ., adams, b ., gasasser, d ., bazzi, p ., dutre, p ., and gross, m . 2005。固体-流体动画的统一拉格朗日方法。基于点的图形学报, 125-133。

Lenaerts, t ., adams, b ., and dutre', p . 2008。基于颗粒的流体模拟中的多孔流动。ACM 反式。图 27,3,1-8。

Losasso, f ., talton, j ., kwatra, j ., 和 fedkiw, r . 2008。双向耦合 SPH 和粒子水平设置流体模拟。Ieee TVCG 14, 4, 797-804。

莫纳亨 j . 1992。平滑粒子流体动力学。为基础。启阿斯特朗。543 年物理学 30 日。

莫纳亨 j . 2005。平滑粒子流体动力学。众议员掠夺。phy. 68 年,1703 - 1759。

穆勒 M., charypar, d ., gross, m . 2003。基于粒子的流体模拟交互式应用。计算机动画研讨会, 154-159。

穆勒 M., keiser, r ., nealen, a ., pauly, m ., gross, m ., 和 alexa, m . 2004。基于弹性, 塑料和熔化物体的点动画。计算机动画研讨会, 141-151。

马立民, 张立国, 张立国, 张立国, 张立国, 张立国, 张立国。流体与可变形固体的相互作用。计算机动画与虚拟世界学报 15,3-4,159-171。

马勒(m ., solenthaler, b ., keiser, r .)和格罗斯(gross), 2005 年。Particle-based 油相互作用。计算机动画研讨会, 237-244。

Premoze, s ., tasdizen, t ., bigler, j ., lefohn, a ., and whitaker, r . t . 2003。基于粒子的流体模拟。欧洲制图学报, 401-410。

Selle, a ., rasmussen, n .和 fedkiw, r . 2005。一种用于烟雾、水和爆炸的涡流粒子方法。ACM 反式。图 24,3,910-914。

邵,s . 2006。用湍流模型模拟破波和复顶的不可压缩 SPH 模拟。Int. j. 号码。冰毒。液体 50,597 - 621。

Solenthaler, b .和 pajarola, r . 2008。密度对比 SPH 界面。计算机动画研讨会, 211 - 218 页。

Solenthaler, b ., schlafl', j ., and pajarola, r . 2007。流固相互作用的统一粒子模型。计算机动画与虚拟世界杂志 18,1,69 - 82。

THUREY M., N., keiser, r ., pauly, m . and rude, u . 2006。Detail-preserving 流体控制。计算机动画研讨会, 7-15。

朱毅, 和布里逊, r . 2005。动态的沙子作为流体。ACM 反式。图 24,3,965 - 972。