Cap. 7: Girando in tondo

Dal cerchio alla Papert alla legge di gravitazione di Newton

Low floor...

Percorrendo il caotico dibattito intorno al *coding* non è raro imbattersi in coloro i quali pensano che si tratti di pratiche buone giusto per i primi anni di scuola come in quelli che ritengono che il coding sia adatto agli ultimi anni delle scuole superiore. Sono ambedue in errore. Proviamo a rendercene conto partendo dal cerchio alla Papert. Vale la pena di riprendere le sue parole.

L'obiettivo delle prime esperienze dei bambini nell'ambiente di apprendimento della Tartaruga non è quello di imparare regole formali ma di sviluppare nuovi modi di concepire i propri movimenti. Tali modi sono esprimibili nella Lingua della Tartaruga e in questa diventano “programmi”, “procedure” o “equazioni differenziali”. Proviamo a guardare più da vicino come un bambino, che abbia già imparato a muovere la Tartaruga in linea retta per disegnare quadrati, triangoli e rettangoli, possa imparare a farle disegnare un cerchio.
Immaginiamo – cosa che ho osservato un centinaio di volte – un bambino che domandi: “Come faccio a fare un cerchio con la Tartaruga?” L'insegnante, nell'ambiente Logo, non dà la risposta a domande del genere bensì introduce il bambino a un metodo per risolvere non solo questo problema ma anche un'intera categoria di altri problemi. Il metodo si può riassumere in una frase: “Gioca con la Tartaruga.” Il bambino viene incoraggiato a muoversi come farebbe la Tartaruga sullo schermo per ottenere il disegno desiderato. Per il bambino che vuole disegnare un cerchio, l'atto di provare a muoversi circolarmente potrebbe tradursi nella descrizione seguente: “Quando ti muoviin cerchio tu fai un piccolo passo e poi giri subito un poco. E continui a fare sempre così.” Una volta giunti ad un a simile descrizione, la formulazione nella Lingua della Tartaruga viene spontanea:

```
REPEAT [ FORWARD 1 RIGHT 1 ]
```

Qualche bambino meno esperto potrebbe necessitare di ulteriore aiuto. Ma questo aiuto non dovrebbe consistere nella spiegazione di come fare a disegnare il cerchio bensì nell'insistere sul metodo, che concerne (oltre il consiglio di “giocare con la Tartaruga”) nello sviluppare una forte connessione fra l'attività personale e la creazione di conoscenza formale.
...
L'episodio del cerchio disegnato con la Tartaruga illustra l'apprendimento sintonico. Questo termine, preso in prestito dalla psicologia clinica, sta in contrapposizione con l'apprendimento dissociato di cui abbiamo già discusso. Talvolta il termine viene usato con degli specificatori che denotano certi tipi di sintonicità. Ad esempio, il cerchio della Tartaruga è sintonico per il corpo perché tale cerchio è saldamente collegato alla percezione fisica dei propri corpi da parte del bambino. Oppure è anche sintonico per l'ego perché è coerente con la percezione di sé propria dei bambini, come persone con intenzioni, obiettivi, desideri, preferenze e avversioni. Un bambino che disegna un cerchio con la Tartaruga vuole disegnare un cerchio; quando ci riesce è orgoglioso e

eccitato.

La geometria della Tartaruga si impara bene perché è sintonica. E questo aiuta anche nell'apprendimento di altre cose perché incoraggia l'uso consapevole e deliberato di strategie matematiche di problem solving.

…

Il bambino che ha disegnato il cerchio con la Tartaruga non ha imparato qualcosa sul formalismo dell'analisi, per esempio che la derivata di x^n *è* nx^{n-1}*, ma qualcosa sul suo impiego e sul suo significato. Infatti il codice per disegnare il cerchio con la Tartaruga conduce a un formalismo alternativo di quelle che sono tradizionalmente chiamate "equazioni differenziali" ed è un veicolo efficace delle idee che soggiacciono al differenziale. Questo è il motivo per cui si possono capire così tante cose con la Tartaruga; il codice del cerchio rappresenta un'analogia intuitiva dell'equazione differenziale, un concetto che appare in quasi tutti gli esempi di matematica applicata tradizionale.*

La potenza del calcolo differenziale risiede molto nella capacità di descrivere le variazioni in base a ciò che accade nelle loro immediate vicinanze. È questa caratteristica che ha consentito a Newton di descrivere il moto dei pianeti. Via via che questi tracciano l'orbita, sono le condizioni locali nel luogo dove si trova il pianeta che determinano il suo prossimo passo. Nelle nostre istruzioni della Tartaruga, FORWARD 1 RIGHT 1, ci si riferisce solo al luogo dove si trova la Tartaruga e a quello dove si troverà il momento dopo. Questo è quello che rende un'equazione differenziale. In ciò non vi è alcun riferimento a luoghi remoti rispetto al percorso. La Tartaruga vede il cerchio cammin facendo, nell'immediata vicinanza, ed è cieca rispetto a tutto il resto che si trova più lontano. Questa proprietà è così importante che i matematici hanno un nome per essa: la geometria della Tartaruga è "intrinseca". Lo spirito della geometria differenziale intrinseca si palesa quando si considerano i diversi modi di concepire una curva, ad esempio il cerchio. Per Euclide la caratteristica che definisce il cerchio è la distanza costante dei suoi punti da un altro punto, il centro, che però non fa parte di esso. Nella geometria di Cartesio, in questo caso più similmente a Euclide che che alla Tartaruga, i punti del cerchio sono caratterizzati dalla loro distanza rispetto a qualcos'altro, vale a dire dai due assi perpendicolari delle coordinate. Così, per esempio, un cerchio è definito da:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad \textit{(Eq. 1)}$$

Nella geometria della Tartaruga un cerchio è definito dal fatto che questa continua a ripetere uno stesso atto: FORWARD un poco, GIRA un poco. Questa ripetizione garantisce che la curva abbia "curvatura costante", dove di quanto si deve girare ad ogni passo.

La geometria della Tartaruga appartiene ad una famiglia di geometrie che godono di proprietà assenti in quelle euclidea e cartesiana. Queste sono le geometrie differenziali che si sono sviluppate a partire da Newton e che hanno reso possibile gran parte della fisica moderna. Abbiamo osservato come quello delle equazioni differenziali sia il formalismo che ha consentito alla fisica di descrivere il moto di una particella o di un pianeta. Nel capitolo 5, dove descrivere questo fatto con maggiori dettagli, vedremo come questo sia anche il formalismo appropriato per descrivere il moto di un animale oppure l'evoluzione di un'economia. E arriveremo anche a capire che non è un coincidenza il fatto che la geometria della Tartaruga sia collegata sia all'esperienza di un bambino *che alle principali conquiste della fisica, in quanto, la visione del moto di un bambino, sebbene meno precisa nella forma, condivide la struttura matematica dell'equazione differenziale con le leggi del moto di un pianeta che gira intorno al sole o quelle delle falene che girano introno alla fiamma di una candela. E la Tartaruga non è ne più ne meno che la ricostruzione in forma computazionale intuitiva del nucleo qualitativo di questa struttura matematica. Quando torneremo su queste idee nel capitolo 5, vedremo come la geometria della Tartaruga apra le porte alla comprensione intuitiva dell'analisi, della fisica e della modellazione matematica così come viene impiegata nelle scienze biologiche e sociali.*

Con bambini piccoli si può partire con un gioco dove si cammina in maniera da lasciare tracce, ad esempio sulla sabbia o su una superficie di carta con le suole sporche di colore. Il gioco può consistere nel cercare di fare un tondo girando un poco dopo ogni passo, provando a vedere chi lo fa più tondo. Poi si può provare con gli occhi bendati. E se non viene abbastanza tondo? Di cosa può essere la colpa? E se invece lo volessimo fare "sbagliato" apposta? Se lo volessimo fare a forma di uovo? Che si deve fare? Con un gioco del genere quello che si fa in realtà coincide con l'istruzione precedente, che possiamo dare all Tartaruga per fare un cerchio. Ma anche nella versione al computer eseguita dalla Tartaruga, ci possiamo arrivare per gradi, partendo dal solito quadrato e lasciando i ragazzi esplorare. Può capitare che, appena più grandicelli, intorno a 9-10 anni, ci arrivino da soli, giocando con i poligoni.

È affascinante come queste prime esperienze possano indurre a riflettere sul concetto di cerchio senza che se ne abbia ancora una conoscenza formale, eppure così facendo, lambendo un concetto assai più avanzato di tutto ciò che i ragazzi vedranno prima della maturità, ovvero di calcolo differenziale. Tuttavia appena essi verranno in possesso della nozione formale di circonferenza, sarà possibile tornare in Logo e riprendere il discorso attraverso il modo sintetico di produrre un cerchio, con l'istruzione CIRCLE D, dove D rappresenta il diametro del cerchio, riflettendo sulla definizione di luogo dei punti equidistanti da un dato punto. E qui si potrebbe andare oltre, riprendendo quell'idea di "cerchio sbagliato", o "schiacciato", ricorrendo alle riflessioni di Emma Castelnuovo[1].

> *Sempre un argomento di matematica, quale lo studio dei triangoli isoperimetrici con ugual base, porta a osservare quello che abbiamo sotto gli occhi.*
>
> *Il materiale è, anche questa volta, un pezzo di spago.*
>
> *Per costruire dei triangoli di uguale base e uguale perimetro facciamo così: fissiamo due chiodi – siano A e B – su un tavolo su cui è disteso un foglio di carta; AB sarà la base dei nostri triangoli. Leghiamo poi gli estremi di un pezzo di spago ai due chiodi, tenendo presente che lo spago deve essere più lungo del tratto AB. Facciamo in modo, valendoci di una matita, che lo spago resti sempre ben teso e... lasciamoci guidare dalla matita.*
>
> *Questa, guidata dallo spago, disegnerà sul foglio una curva a forma di ovale: è un'ellisse. I punti A e B si chiamano fuochi dell'ellisse. Dunque: i vertici dei triangoli isoperimetrici e di uguale base si trovano su un'ellisse.*
>
> *Un problema di geometria ci ha condotti al disegno dell'ellisse. Con lo stesso pezzo di spago possiamo costruire un'ellisse più o meno "schiacciata", a seconda della distanza*

1 E. Castelnuovo, *L'officina matematica – ragionare con i materiali*, p. 20-21, Edizioni la Meridiana, 2008.

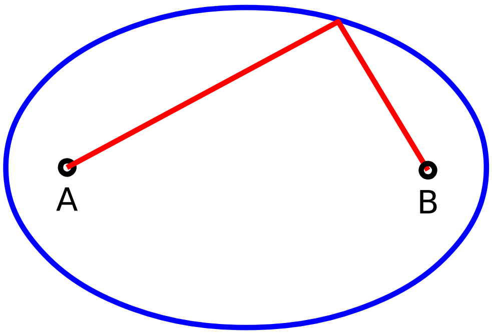
fra i punti A e B. Si può ottenere anche un cerchio, se i due punti coincidono: il cerchio, infatti, è un'ellisse particolare.

L'ellisse, dopo averla incontrata in problemi di geometria, la ritroviamo per la strada, quando la "calpestiamo" (perché un disco segnaletico dà, come ombra, un'ellisse. Nella nostra vita convulsa raramente ci soffermiamo a osservare l'ombra di un oggetto data dai raggi del soleo da una lampadina. Ma ecco che ora un'attività di geometria ci sollecita a guardare di più ed è proprio il confronto fra l'effetto-ombra dato dai raggi del sole e quello dato da una lampada puntiforme che stimola la nostra facoltà di osservazione.

Guardiamo, ad esempio, due matite disposte in verticale su un tavolo. Se vengono illuminate dal sole accade che anche le ombre sono parallele; se invece è una lampada che le illumina le ombre si divaricano.

Da qui lo studio matematico delle trasformazioni affini e delle trasformazioni proiettive, fino ad arrivare alla prospettiva, all'arte, a come si guarda un quadro, alla storia.

È un piccolo problema di geometria che ha stimolato a osservare e a... guardarsi intorno.



Sono esperienze fisiche quella che propone Emma Castelnuovo ma non vanno considerate in contrapposizione a quelle che si possono fare con un computer, nel modo che abbiamo mostrato; che poi è il modo che suggerisce Papert attraverso il concetto di apprendimento sintonico.

Purtroppo l'avvento del nuovo viene solitamente vissuto in contrapposizione al vecchio, generando l'usuale dicotomia integrati-apocalittici. È il tempo a risolvere solitamente ciò che la saggezza potrebbe evitare subito, con molto maggiore profitto. Quello che promuovere è quindi una visione integrata, dove si fa ricorso a tutti i mezzi possibili, tradizionali e moderni, manuali e virtuali, per raggiungere gli obiettivi didattici in una prospettiva più ampia e completa possibile.

… high ceiling

Fin qui abbiamo esplorato "il tondo" dal basso, dal *low floor* di Papert, almeno in parte. Molto altro potrebbe essere aggiunto, ma ora, per rifarsi al quesito iniziale, proviamo a muoverci verso l'alto per vedere dove si possa trovare l'*high ceiling*. Si tratta di un quesito che è emerso per esempio recentemente durante un recente incontro con un nutrito gruppo di animatori digitali, dove ci si poneva la domanda: ma si può fare il coding anche negli anni successivi, alle scuole superiori? Facciamo allora un salto sufficientemente ampio da arrivare dove si affrontano, ad esempio, i principi della dinamica e la legge di gravitazione universale.

La teoria (fisica e analisi matematica)

Poniamo il problema in maniera generale. Non potrà essere questa l'impostazione proposta a scuola, perché occorrono conoscenze matematiche superiori, ma ci serve per inquadrare e comprendere correttamente la questione.

Affrontiamo il problema di due corpi isolati da perturbazioni esterne. Ad esempio quello di un satellite che gira intorno alla terra o di una cometa che gira attorno a un pianeta. Il moto di questi corpi è governato dalla legge di gravitazione universale di Newton:

$$\mathbf{F}_{Mm} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \text{(Eq. 2)}$$

Dove $\mathbf{F}_{Mm}$ è la forza, G la costante di gravitazione universale, pari a 6.67×10^{-11} $(Newton \times metri^2/Kg^2)$, M è la massa del pianeta, m la massa del satellite, $\mathbf{r}$ la distanza fra i baricentri dei due corpi e dove, ricordiamo, il grassetto si denota per indicare la naturale vettoriale di una quantità. Quindi in questro specifico caso, poiché il nostro ragionamento si svolge tutto in due dimensioni, la forza $\mathbf{F}_{Mm}$ e la distanza $\mathbf{r}$ sono vettori con due componenti: una lungo x e l'altra lungo y.

Ma cosa vuol dire in pratica che "il moto dei corpi è governato dalla legge di gravitazione"? Significa che dobbiamo applicare il II principi della dinamica, secondo il quale:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad \text{(Eq. 3)}$$

Dove $\mathbf{F}$ è la forza applicata al corpo di massa m e $\mathbf{a}$ è l'accelerazione impressa al corpo in virtù di tale forza. Lo scopo di queste relazioni è quello di consentire la determinazione del moto dei corpi a partire da predeterminate condizioni iniziali. Per fare questo occorrere scrivere l'equazione 3 tenendo conto della forza data nell'equazione 2:

$$-\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = m\mathbf{a}. \qquad \text{(Eq. 4)}$$

Risolvere questa equazione significa in primo luogo ricavare l'accelerazione a:

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \text{(Eq. 5)}$$

e da questa ricavare l'andamento nel tempo della velocità e quindi dell'accelerazione, tenendo conto che:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad \text{(Eq. 6)}$$

ovvero

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad \text{(Eq. 7)}$$

È qui che ci dobbiamo fermare, perché siamo di fronte a equazioni dove non appaiono le grandezze incognite, ma le derivate di tali grandezze rispetto a un'altra variabile, il tempo in questo caso. In particolare, l'equazione 5 è un'equazione differenziale del II ordine perché fornisce un'espressione per l'accelerazione, ovvero la derivata seconda della posizione rispetto al tempo. Ci dobbiamo fermare perché la soluzione delle equazioni differenziali non rientra nell'orizzonte contemplato dai programmi della scuola secondaria. Di fatto l'approfondimento che ci possiamo permettere è assai limitato. L'apprendimento della fisica si limita per di più alla memorizzazione di qualche formula e all'esecuzione di qualche esercizio, con procedimenti che la maggioranza degli studenti assimiliano in maniera meccanica e effimera, senza realmente comprendere l'essenza dei concetti e tanto meno senza recepire il benché minimo sentore del "pensiero fisico", come del resto del "pensiero matematico". I risultati si vedono dal fatto che nella cittadinanza sopravvivono brandelli di pensiero scientifico, pensiero che non ha quasi nulla a che vedere con l'avere imparato a memoria $F = ma$ nella vita per superare un'interrogazione.

Ci colpisce tuttavia il fatto che di calcolo differenziale abbiamo già parlato, e che lo abbiamo fatto addirittura trovandoci al *low floor*, dove stavamo parlando di attività da fare con allievi assai più piccoli! Lì avevamo descritto, anzi Papert aveva descritto, il concetto come un processo locale: il bambino (o la Tartaruga) che produce un cerchio preoccupandosi solo di fare un passo e girare, senza alcuna nozione esplicita e sintetica del concetto di cerchio. Ebbene questa è proprio la descrizione verbale di un'equazione differenziale, dove anziché esprimere delle quantità in funzione di altre si esprimono le loro variazioni, le quali sono sempre inerentemente locali.

Fisica computazionale

Affrontiamo quindi il problema espresso dall'equazione 5 in maniera computazionale. Riscriviamo l'equazione così:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{(Eq. 8)}$$

O volendo così (ognuno faccia riferimento alla versione che preferisce:

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \quad \text{(Eq. 9)}$$

E affrontiamolo come avevamo fatto con il cerchio alla maniera di Papert, dove si faceva un piccolo passo per volta e poi si girava di un po', e via di seguito. Anche qui facciamo un piccolo passo per volta.

Le condizioni iniziali

Ma intanto: a partire da dove e in quale direzione dobbiamo fare il passo? Ecco questo è un primo concetto fondamentale del procedimento di conoscenza fisica: la determinazione delle condizioni iniziali, o delle "condizioni al contorno". Il punto di partenza rappresenta la condizione iniziale della posizione, che richiederà che venga fissato un sistema di riferimento, sotto forma di coordinate (x_0, y_0) dell'origine di un riferimento cartesiano, e una posizione iniziale (x, y) del corpo. Qui verrà presa una decisione anch'essa di natura fisica: essendosi posti nella condizione di studiare le orbite di singoli corpi intorno a un pianeta molto più grande, potremo assumere che questo stia fermo e sarà quandi naturale far coincidere il centro (x_0, y_0) del sistema con il baricentro di questo. Così facendo avremo determinato la condizioni iniziale del vettore posizione $\mathbf{r}$ attraverso le due coppie di coordinate (x_0, y_0) e (x, y). Poi dobbiamo decidere la dimensione del passo e in che direzione compierlo. Questo lo possiamo fare se sappiamo la velocità nel punto in cui ci troviamo. Potrebbe essere zero se immaginiamo semplicemente di lasciar cadere il corpo verso la terra, ma sarà invece un valore preciso se si tratterà di imprimere la giusta velocità iniziale a un satellite o a una cometa, affinché questi percorrano le orbite che ci aspettiamo. La velocità nel punto del primo passo è la velocità iniziale e la direzione sarà determinata attraverso la reciproca dimensione delle due componenti, lungo x e y, rispettivamente. Dopodiché, la dimensione del passo verrà determinata a partire dalla relazione $spazio = velocità \times tempo$, che caratterizza il concetto di velocità. In pratica, dal punto di vista computazionale, dovremo scrivere qualcosa del genere

$$\begin{aligned} \mathrm{XPOS} &= \mathrm{XPOS} + \mathrm{XVEL} * \mathrm{Dt} \\ \mathrm{YPOS} &= \mathrm{YPOS} + \mathrm{YVEL} * \mathrm{Dt} \end{aligned} \qquad \text{(Eq. 10)}$$

Dove XVEL e YVEL rappresentano le componenti della velocità e Dt l'intervallo di tempo su cui abbiamo deciso di aggiustare il passo. Prima di commentare quest'ultimo elemento, per coloro che non acessero mai visto una scrittura del genere, diciamo che questo è uno dei modi per alterare – incrementare in questo caso – una variabile. In generale, scrivere $a = a + b$ significa prendere la somma dei valori di a e b e attribuire questo risultato alla variabile a. È un modo quindi per aggiornare il valore di una variabile: a destra del segno di $=$ si usa il vecchio valore di a, a sinistra c'è quello nuovo attribuito in base all'operazione fatta. Detto questo, finiamo di commentare il fattore Dt. Questo rappresenta l'intervallo di tempo nel quale viene percorso il tratto a quella velocità. Deve essere piccolo perché sennò non si può ragionevolmente accettare che la velocità sia constante in quel tratto. Piccolo quanto?

The art of scientific computing

La risposta onesta è: bisogna vedere… Non esattamente soddisfacente come risposta per una scienza (un tempo) ritenuta "esatta". Esiste un testo fondamentale per chiunque si sia occupato o si occupi di calcolo scientifico, pubblicato la prima volta nel 1986: Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing[2]. Quello del calcolo scientifico non è un mondo esatto. Sembra un paradosso: laddove le scienze esatte sposano la tecnologia si parla di "arte del calcolo scientifico". E invece è proprio così. In parte perché ci sono metodi matematici estremamente sensibili ad ogni piccola variazione dei dati, che in certi contesti conducono all'irrisolvibilità del problema, e in parte perché la rappresentazione in bit dei numeri è solo un'approssimazione della nozione matematica, questa sì esatta. Non solo, lo stesso identico calcolo eseguito su computer diversi può dare risultati differenti perché non è identico l'insieme dei processi con i quali i processori di calcolo manipolano

2 W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1988-2007. Ne esistono in varie edizioni, alcune delle quali obsolete, in Fortran 77, Fortran 90, C, C++.

l’imperfetta rappresentazione dei numeri.

Tornando alla nostra questione intorno all’intervallino di tempo Dt, anch'essa dipende molto dal contesto. Il compromesso è un po’ questo: se si fanno lunghi passi allora il calcolo procede veloce ma si rischia di sbagliare molto, se in realtà la velocità cambia apprezzabilmente fra un passo e l’altro; per sbagliare meno occorre scegliere passi più brevi e quanto più questi sono brevi e tanto più il calcolo sarà accurato. Però anche qui fino a un certo punto, perché se gli intervalli diventano brevissimi si possono avere problemi di precisione nella rappresentazione dei numeri e quindi i conti possono nuovamente sballare.

Perché tutte queste considerazioni che possono parere anche esageratamente tecniche, per il nostro contesto? Da un lato per tentare di rimettere al centro la complessità e la ricchezza del pensiero computazionale, che finisce con l’essere polverizzato in un discorso pubblico banale e partigiano, fra fazioni di apocalittici e integrati, o di “umanisti” e “scientifici”. A proposito di quest’ultima dicotomia vorrei dire che chi vi crede tradisce allo stesso tempo sia la visione umanistica che quella scientifica, perché una vera visione umanistica certamente comprende e valorizza il pensiero scientifico. Il pensiero scientifico è umanistico. Invece v’è ne poco in giro. Dall’altro perché questa complessità fornisce un terreno adatto per un approccio alla conoscenza di natura laboratoriale, che è quello che di fatto vivono il ricercatore, l’artista o l’artigiano, quando si misurano nei rispettivi modi e con i rispettivi strumenti con la realtà. Le incertezze del calcolo scientifico non devono certamente essere rovesciate sugli allievi come si fa nell’approccio disciplinare classico, bensì devono essere tenute presenti per essere eventualmente approfondite, in misura adeguata, qualora i loro effetti si presentino nel corso delle esplorazione dei ragazzi.

Il codice nella formula 10, se rieseguito ripetutamente, disegna la traiettoria del corpo per incrementi successivi, che è proprio quello che desideriamo. Il problema tuttavia è che ci occorre conoscere la velocità in ogni punto della traiettoria ma noi questa informazione non ce l’abbiamo; soprattutto non abbiamo niente che leghi la grandezza velocità alla legge di gravitazione (Eq. 5), che è tutto ciò che sappiamo. In realtà nell’equazione 5 abbiamo l’accelerazione, che rappresenta la variazione della velocità. Quindi quello che ci occorre è un passaggio simile a quello che nel codice 10 ci è servito per ricostruire il percorso. Dobbiamo cioè ricostruire l’andamento della velocità per incrementi successivi:

$$\begin{aligned} \mathrm{XVEL} &= \mathrm{XVEL} + \mathrm{qualcosa} * \mathrm{Dt} \\ \mathrm{YVEL} &= \mathrm{YVEL} + \mathrm{qualcosa} * \mathrm{Dt} \end{aligned} \qquad \text{(Eq. 11)}$$

È facile rendersi conto della natura di ciò che abbiamo chiamato “qualcosa”. Per rendercene conto, se riarrangiamo le relazioni in 11 chiamando XVEL_1 la velocità a sinistra, ovvero prima dell’incremento, XVEL_2 la velocità a sinistra, ovvero dopo l’incremento, e analogamente facciamo per la componente YVEL, allora abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{qualcosa} &= \frac{(\mathrm{XVEL}_2 - \mathrm{XVEL}_1)}{\mathrm{Dt}} \\ \mathrm{qualcosa} &= \frac{(\mathrm{YVEL}_2 - \mathrm{YVEL}_1)}{\mathrm{Dt}} \end{aligned} \qquad \text{(Eq. 12)}$$

Il “qualcosa” ha quindi la natura dell’accelerazione, ovvero consiste nella variazione della velocità per unità di tempo. E noi l’accelerazione ce l’abbiamo perché è proprio la legge di gravitazione 5 a darcela. Se la riscriviamo nelle due componenti separate

$$a_x = -\frac{GM}{r^2}\frac{r_x}{r}$$
$$a_y = -\frac{GM}{r^2}\frac{r_y}{r} \qquad \text{(Eq. 13)}$$

otteniamo quello che ci serve per scrivere le relazioni per costruire l'evoluzione nel tempo della velocità:

$$\begin{aligned} \mathrm{XVEL} &= \mathrm{XVEL} + \mathrm{XACC} * \mathrm{Dt} \\ \mathrm{YVEL} &= \mathrm{YVEL} + \mathrm{YACC} * \mathrm{Dt} \end{aligned} \qquad \text{(Eq. 14)}$$

```
 XACC = - GG / R2 * DX /R
 YACC = - GG / R2 * DY /R

;fV.write(repr(REPCOUNT) + '   XVEL  =  ' + repr(XVEL)  + '     YVEL = ' + repr(YVEL) + ' \n')

 XVEL = XVEL + XACC  * Dt
 YVEL = YVEL + YACC * Dt
```