Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный университет леса

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ С EXCEL

Учебное пособие
Для студентов всех специальностей МГУЛа

Издательство Московского государственного университета леса

Москва — 2005

УДК 519.8
Д17

Данилин, Г. А. и др., Математическое программирование с EXCEL: Учебное пособие для студентов всех специальностей МГУЛа / Г. А. Данилин, В. М. Курзина, П. А. Курзин и др. — М.: МГУЛ, 2005. — 113 с.: ил.

Учебное пособие содержит основные элементы исследований операций, используемые в различных экономических приложениях; задания по лабораторным работам и сведения, необходимые для их выполнения.

Разработано в соответствии с Государственным образовательным стандартом ВПО 2000 г. для направления подготовки студентов на основе примерной программы дисциплины "Высшая математика" для всех специальностей 2005 года.

Одобрено и рекомендовано к изданию в качестве учебного пособия редакционно-издательским советом университета

Рецензенты: профессор А. В. Корольков,
профессор Л. Е. Цветкова

Кафедра высшей математики

Авторы: Геннадий Александрович Данилин, доцент;
Вера Михайловна Курзина, доцент;
Павел Алексеевич Курзин, ас.;
Ольга Митрофановна Полещук, доцент

Введение

На современном этапе развития общества, с переходом к рыночным отношениям, резко повысилась управленческая роль руководителя производства (предприятия). В связи с этим умение находить оптимальные управленческие решения – один из признаков, по которому оцениваются профессионализм и опытность менеджера.

Оптимальное решение – это выбранное по какому-либо критерию оптимизации наиболее эффективное из всех альтернативных вариантов решение. К методам оптимизации относятся анализ, прогнозирование и моделирование. Моделирование может быть физическое и математическое. Физическое моделирует предметы, а математическое – процессы. Математические модели – основное средство решения задач оптимизации любой деятельности. Ценность математических моделей для экономического анализа и оптимизации решений состоит в том, что они позволяют получить чёткое представление об исследуемом объекте, охарактеризовать и количественно описать его внутреннюю структуру и внешние связи.

В соответствии с Государственным общеобразовательным стандартом математическое моделирование процессов экономики изучается в курсе "Высшей математики" в разделе "Экономико-математические методы и модели". Методы оптимизации задач прикладной математики разработаны в математическом программировании (исследовании операций). Математическое программирование позволяет широко использовать в процессе принятия решений вычислительную технику, что является жизненной необходимостью в процессе технико-экономического обоснования и определения экономической эффективности инвестиционных проектов.

Теоретической основой и практическим инструментом анализа и прогнозирования решений в экономике и бизнесе являются экономико-математические модели и проводимые по ним расчёты.

Необходимость применения персональных компьютеров в процессе принятия управленческих решений в наше время стала особенно актуальна. Однако, к сожалению, не все специалисты владеют простым и доступным даже непрофессиональным программистам средством решения различных задач, в том числе и задач математического программирования, а именно, табличным процессором Excel. Для успешного решения задач с помощью Excel необходимо знать основные идеи и методы исследования операций, условия их применения.

Цель курса – помочь студентам освоить элементы математического программирования и методы решений задач с использованием Excel, дающие возможность оперативно принимать решения в будущей деятельности студентов как специалистов.

Курс обеспечивает тесную связь обучения математическим методам с общеинженерной подготовкой специалиста.

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Математические модели оптимизации позволяют существенно поднять качество планирования и управления при реализации различных экономических проектов. Так, если установлено (например, методами математической статистики), что рассматриваемые характеристики зависят друг от друга линейно, причём область допустимых решений задаётся линейными функциями-ограничениями, то для решения таких задач могут быть использованы линейные математические модели. Это могут быть задачи о распределении ресурсов, о рационе питания (диете), о планировании перевозок, распределении работ, расстановке кадров и многие другие. При оптимизации переменной величины в случае линейности модели применяются методы линейного программирования. Основное положение в линейном программировании заключается в том, что связь между факторами, влияющими на исследуемую характеристику, линейна. Кроме того, только линейными зависимостями должны быть заданы используемые в задаче функции-ограничения, определяющие область изменения допустимых значений рассматриваемой величины.

Линейное программирование решает задачи нахождения оптимальных значений переменных для линейной целевой функции и системы её ограничений, заданных линейными алгебраическими уравнениями или неравенствами.

1.1. Постановка задачи

Общей задачей линейного программирования называется задача о нахождении максимума (минимума) линейной функции

$$F(X) = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k; \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}; \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + ... + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,...,l;\ l \le n.$$

Решение $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системы ограничений (1.2), при котором функция $F(X)$ принимает максимальное (минимальное) значение, называется ***оптимальным планом*** задачи линейного программирования. Все остальные решения системы ограничений называются ***допустимыми планами***. Функция $F(X)$ называется ***целевой функцией***. Ограничения (1.2) называются ***основными***.

Стандартной (***симметричной***) задачей называется задача линейного программирования, в которой все основные ограничения заданы неравенствами и все переменные задачи неотрицательны.

Основной (***канонической***) задачей называется задача линейного программирования, в которой все ограничения заданы равенствами и все переменные неотрицательны.

1.2. Симплексный метод

Для нахождения оптимального плана задачи линейного программирования применяется ***симплексный метод***.

Симплексный метод решения задач линейного программирования основан на идее последовательного улучшения решения задачи, исходя из опорного плана (первоначального решения), найденного каким угодно способом.

В задачах линейного программирования, как правило, решаются системы ограничений, в которых число линейно независимых переменных меньше общего числа переменных задачи.

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными $(m < n)$ называются ***базисными*** (***основными***), если определитель матрицы размерности $m \times m$ коэффициентов при них отличен от нуля. Остальные $n - m$ переменных называются ***свободными*** (***неосновными***).

Симплексный метод позволяет улучшать план задачи наиболее рациональным способом, опираясь на критерии оптимальности решения.

Критерий оптимальности решения при отыскании максимума линейной функции симплексным методом можно сформулировать следующим образом:

если в выражении линейной функции через свободные переменные отсутствуют положительные коэффициенты при свободных переменных, то решение оптимально.

Критерий оптимальности решения при отыскании минимума линейной функции:

если в выражении линейной функции через свободные переменные отсутствуют отрицательные коэффициенты при свободных переменных, то решение оптимально.

На практике удобнее для выяснения вопроса: является ли найденный план оптимальным, пользоваться ***оценками переменных*** Δ_j, $j = \overline{1, n}$, которые вычисляются по формулам

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{n} C_i a_{ij} - C_j. \qquad (1.3)$$

Тогда критерии оптимальности решения формулируются иначе, а именно:

при отыскании максимума функции:

если оценки всех переменных неотрицательны, то значение целевой функции максимально и решение оптимально;

***при отыскании минимума функции*:**

если оценки всех переменных неположительны, то значение целевой функции минимально и решение оптимально.

Первоначальное допустимое решение определяется методом выравнивания (введением дополнительных переменных, с помощью которых неравенства превращаются в равенства) или *М*-методом – методом искусственного базиса.

Практические расчеты при решении реальных задач, если не используется ЭВМ, проводят в так называемых симплексных таблицах.

Рассмотрим одну из часто решаемых симплексным методом оптимизационных задач – ***задачу о распределении ресурсов***.

Предприятие производит три вида электронной техники: телевизоры, магнитофоны и моноблоки. Технологические коэффициенты, определяющие затраты того или иного ресурса на производство одной единицы продукции каждого вида, а также количества запасов соответствующих ресурсов, используемых при выпуске этих изделий, и прибыль, получаемая предприятием-производителем от реализации одной единицы каждого вида продукции, приведены в табл. 1.1.

Требуется таким образом спланировать выпуск изделий на заводе, чтобы получать наибольшую, максимальную, прибыль.

Решение задачи начнём с допущения, что неизвестная x_1 обозначает количество телевизоров, x_2 – количество магнитофонов, а x_3 – количество моноблоков, выпускаемых предприятием. Тогда получаем, что затраты по ресурсу "Пластиковые формы" на данном предприятии, согласно заданным табл. 1.1 технологическим коэффициентам определяются зависимостью $2{,}5x_1 + 1{,}7x_2 + 2{,}1x_3$. При этом затраты по ресурсу "Пластиковые формы" не должны превышать 150 единиц, заданных в качестве имеющегося на предприятии запаса.

Т а б л и ц а 1.1

Технологические коэффициенты, прибыль и запасы ресурсов

Ресурс	Телевизор	Магнитофон	Моноблок	Запас ресурса
Пластиковые формы	2, 5	1, 7	2, 1	150
Электронные кабели	3, 7	2, 2	2,8	175
Электронные платы	4, 5	2, 1	3,5	250
Трудозатраты	5, 0	3, 0	4,5	130
Прибыль от реализации одного изделия	3, 0	1,0	2,0	–

Таким образом, получаем первое ограничение на количество выпускаемой продукции:

$$2{,}5x_1 + 1{,}7x_2 + 2{,}1x_3 \le 150. \qquad (1.4)$$

Аналогично составляются ограничения по другим ресурсам, и в результате получаются еще три ограничения по ресурсам:

$$3{,}7x_1 + 2{,}2x_2 + 2{,}8x_3 \le 175; \qquad (1.5)$$
$$4{,}5x_1 + 2{,}1x_2 + 3{,}5x_3 \le 250; \qquad (1.6)$$
$$5{,}0x_1 + 3{,}0x_2 + 4{,}5x_3 \le 130. \qquad (1.7)$$

Кроме того, поскольку количество выпущенной продукции не может быть отрицательной величиной, естественно потребовать, чтобы выполнялись неравенства

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0. \qquad (1.8)$$

При выпуске выбранного количества продукции согласно данным табл.1.1 предприятие получит прибыль, определяемую функцией

$$F(X) = 3{,}0x_1 + 1{,}0x_2 + 2{,}0x_3. \qquad (1.9)$$

Решение задачи оптимизации заключается в нахождении таких количеств выпускаемой продукции, которые обеспечивают функции прибыли максимальное значение при заданных ограничениях по количеству имеющихся на предприятии ресурсов. Каждое из решений системы неравенств (1.5) – (1.7), будет допустимым решением (планом) для данной задачи. ***Оптимальным решением*** называется то из допустимых решений, при котором целевая функция имеет максимальное значение. В разных задачах оптимальных решений может быть как множество, так и не быть вообще, или может существовать единственное оптимальное решение (план).

Таким образом, объединяя составленные по данным табл.1.1 зависимости (1.5) – (1.8), получаем математическую модель задачи о распределении ресурсов:

$$F(X) = 3{,}0x_1 + 1{,}0x_2 + 2{,}0x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2{,}5x_1 + 1{,}7x_2 + 2{,}1x_3 \le 150; \\ 3{,}7x_1 + 2{,}2x_2 + 2{,}8x_3 \le 175; \\ 4{,}5x_1 + 2{,}1x_2 + 3{,}5x_3 \le 250; \\ 5{,}0x_1 + 3{,}0x_2 + 4{,}5x_3 \le 130, \end{cases} \qquad (1.10)$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$$

Естественное ограничение о неотрицательности количеств выпускаемой продукции вытекает из смысла производственной задачи.

Решение сформулированной задачи может быть найдено, например, симплексным методом.

Поскольку ограничения задачи являются неравенствами "с недостатком", введём дополнительные вспомогательные переменные x_4, x_5, x_6, x_7, которые называют "выравнивающими", и с помощью них превратим неравенства в равенства:

$$F(X) = 3{,}0x_1 + 1{,}0x_2 + 2{,}0x_3 \to max,$$
$$\begin{cases} 2{,}5x_1 + 1{,}7x_2 + 2{,}1x_3 + x_4 = 150; \\ 3{,}7x_1 + 2{,}2x_2 + 2{,}8x_3 + x_5 = 175; \\ 4{,}5x_1 + 2{,}1x_2 + 3{,}5x_3 + x_6 = 250; \\ 5{,}0x_1 + 3{,}0x_2 + 4{,}5x_3 + x_7 = 130, \end{cases} \qquad (1.11)$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0;\ x_6 \ge 0;\ x_7 \ge 0.$$

Теперь система (1.11) является системой четырёх линейных алгебраических уравнений относительно семи неизвестных. Решения системы (1.11) находим симплексным методом в табл. 1.2, с использованием метода Жордана – Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Метод Жордана – Гаусса – это метод нахождения базисных решений систем m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных, если $n \geq m$, в специальных таблицах, позволяющих в ходе решения замещать базисный элемент одним из свободных переменных. Количество N различных базисных решений определяется формулой

$$N = C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}. \tag{1.12}$$

Среди найденных базисных решений могут быть и вырожденные, то есть такие, в которых значение базисной переменной равно нулю.

В качестве первого базиса берём систему векторов (x_4, x_5, x_6, x_7), и соответствующий базисный вектор имеет нулевые координаты, поскольку коэффициенты целевой функции при соответствующих переменных равны (см. (1.1)):

$$C_1 = 3{,}0;\ C_2 = 1{,}0;\ C_3 = 2{,}0;\ C_4 = 0;\ C_5 = 0;\ C_6 = 0;\ C_7 = 0.$$

При решении системы (1.11) и нахождении того её базисного решения, которое обеспечивает максимум рассматриваемой функции прибыли (целевой функции) F, использованы критерии симплексного метода для задач линейного программирования. Стрелки в табл. 1.2 указывают ***разрешающий столбец*** и ***разрешающую строку***, на их пересечении находится ***разрешающий элемент***.

Разрешающим столбцом является столбец, содержащий максимальную по абсолютному значению отрицательную оценку – наименьший элемент строки оценок. Разрешающей строкой называется строка, соответствующая минимальному значению из оценок элемента строки δ_i, найденного для всех элементов разрешающего столбца по элементам столбца свободных членов уравнений по формуле

$$\delta_i = \frac{a_{i0}}{a_{ik}}. \tag{1.13}$$

Согласно критерию оптимальности решения при нахождении его симплексным методом следует отыскать такое базисное решение полученной системы уравнений, при котором оценки его будут неотрицательны в случае максимума целевой функции или неположительны в случае минимума целевой функции.

Т а б л и ц а 1.2

Решение задачи о распределении ресурсов симплексным методом

Базис $x_{баз}$	Свободные члены уравнений	Неизвестные в задаче программирования							Оценка элемента строки δ_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	150	2,5	1,7	2,1	1	0	0	0	60
x_5	175	3,7	2,2	2,8	0	1	0	0	$46\frac{18}{37}$
x_6	250	4,5	2,1	3,5	0	0	1	0	$55\frac{4}{9}$
$\to x_7$	130	$\boxed{5{,}0}$	3,0	4,5	0	0	0	1	26 ←
Δ_j	$F=0$	– 3,0 ↑	– 1,0	– 2,0	0	0	0	0	–
x_4	85	0	0,2	– 0,15	1	0	0	– 0,5	
x_5	78,8	0	– 0,02	– 0,53	0	1	0	– 0,74	
x_6	113	0	– 0,6	– 0,55	0	0	1	– 0,9	
x_1	26	1	0,6	0,9	0	0	0	0,2	
Δ_j	$F=78$	0	0,8	0,7	0	0	0	0,6	–

Если промежуточные базисные решения не удовлетворяют критерию оптимальности, производится замещение одного из базисных неизвестных свободной неизвестной и проверяется выполнение критерия оптимальности для следующего базисного решения.

Поскольку все оценки в табл. 1.2 неотрицательны, полученный план $X_1(x_1 = 26; x_2 = 0; x_3 = 0)$ оптимальный при заданных ограничениях; значение целевой функции $F(X_1) = 78$ – её максимальное значение. Найденное решение, состоящее из оптимального плана и максимального значения целевой функции, называется ***оптимальным решением задачи о распределении ресурсов***.

Для заданных ограничений по ресурсам максимально возможная прибыль предприятия составляет 78 условных денежных единиц. При этом следует заниматься только выпуском телевизоров. При выборе такого плана выпуска продукции будет израсходован весь ресурс "трудозатраты", остатки ресурса "пластиковые формы" составят 85 условных единиц, ресурса "электронные кабели" – 78,8 условных единиц и ресурса "электронные платы" – 113 условных единиц.

В ходе развития производства ограничения по одному или нескольким видам ресурсов могут изменяться, так как изменяются условия производственного процесса, для которых решалась задача. В этом случае будет изменяться и оптимальное решение задачи. В рассматриваемой задаче достаточно увеличить ресурс "трудозатраты", чтобы предприятию стало выгодным выпускать и другие виды продукции.

Таким образом, решая задачу о распределении ресурсов, на основе полученного оптимального решения можно выявить определяющие ограничения и дать рекомендации по направлениям дальнейшего развития производства.

1.3. Решение задачи линейного программирования средствами Excel

Рассмотрим решение задач линейного программирования средствами Excel на примере следующей задачи.

Найти оптимальное решение задачи линейного программирования:

$$F = 17x_1 + 43x_2 + 62x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \le 480; \\ 7x_1 + 7x_2 + 7x_3 \le 960; \\ 8x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 1000. \end{cases}$$

Для решения этой задачи в Excel следует воспользоваться подпунктом ***Поиск решения...*** пункта меню ***Сервис***.

Предварительно введём в ячейку А4 формулу целевой функцию в следующем виде: =17*A1+43*A2+62*A3.

Значения в ячейках A1, A2 и A3 отведём под значения переменных x_1, x_2 и x_3 соответственно. Числовые значения переменных x_1, x_2 и x_3 в эти ячейки будут введены автоматически в процессе решения задачи.

В ячейки B1, B2 и B3 введём математические формулы ограничений в виде, указанном в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Ячейка	Значение
B1	=2*A1+3*A2+7*A3
B2	=7*A1+7*A2+7*A3
B3	=8*A1+2*A2+7*A3

Затем введём в ячейки C1, C2 и C3 значения 480, 960 и 1000 соответственно, ограничивающие численные значения переменных задачи.

Таким образом, все исходные данные задачи записаны в том виде, в котором они используются в окне "Поиск решения".

Теперь воспользуемся подпунктом меню Excel ***Поиск решения...***

На экране появится следующее окно (рис. 1):

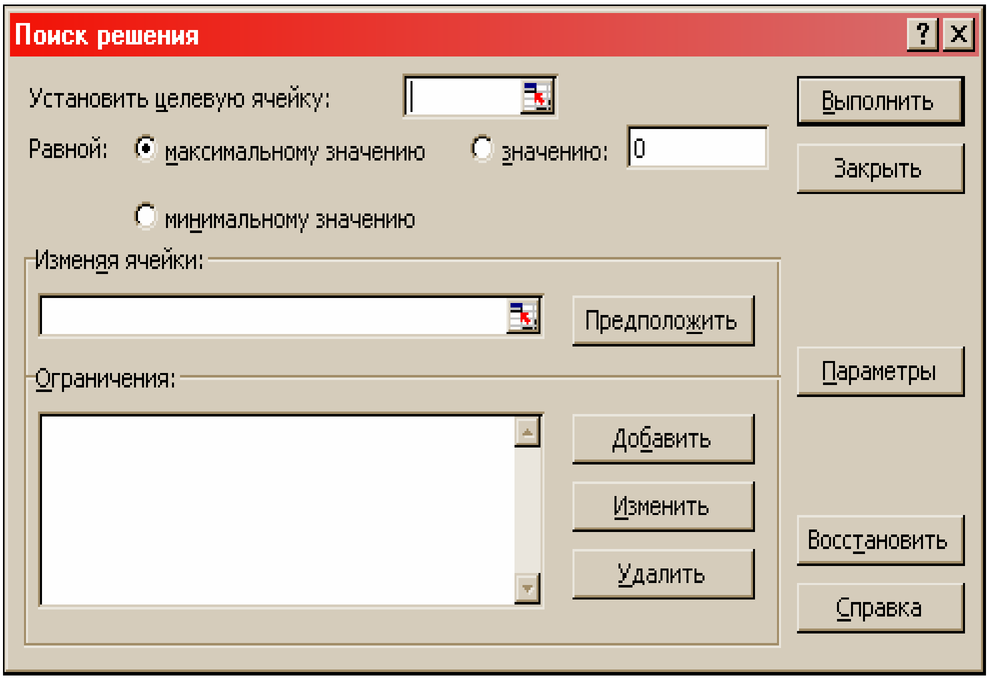


Рис. 1

В поле "Установить целевую ячейку" указываем ячейку A4. Решение ищем для максимального значения, что указывается переключателем поля "Равной", установленным на записи со словами "максимальному значению".

В поле "Изменяя ячейки" указываем диапазон изменения ячеек от A1 до A3, а именно $A$1:$A$3.

Для приведения в рабочее состояние математической программы поиска оптимального решения заданной задачи необходимо установить ограничения, учитываемые при её решении. Для этого нажимаем на кнопку "Добавить", расположенную справа от поля "Ограничения". На экране появляется следующее окно (рис. 2):

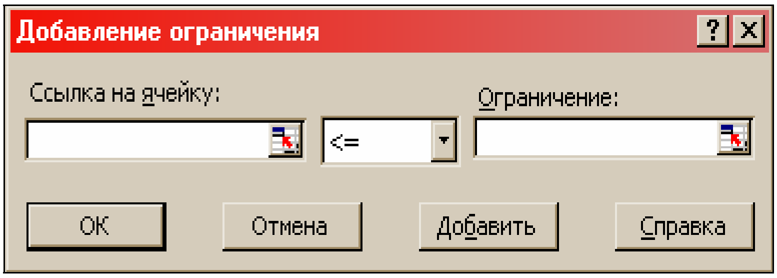


Рис. 2

Для добавления первого ограничения, а именно $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \le 480$, в поле "Ссылка на ячейку" указываем ячейку B1, затем в списке, расположенном посередине, выбираем знак "<=" и в поле "Ограничение" указываем ячейку C1. После этого нажимаем на кнопку "Добавить". Аналогично добавляем два оставшиеся ограничения задачи. Закрываем окно, нажав на кнопку "Отмена".

Окно "Поиск решения" примет вид, показанный на рис. 3.

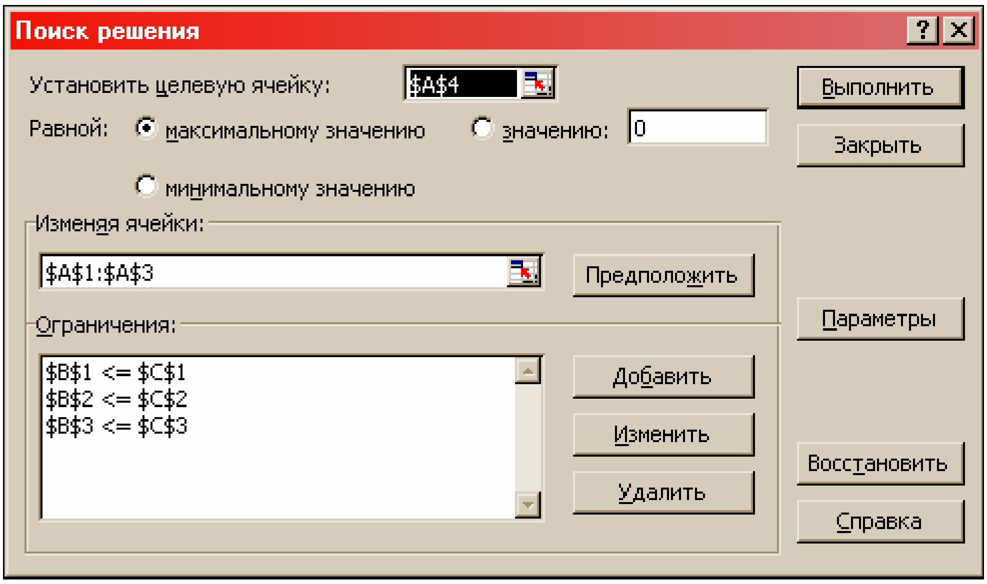


Рис. 3

Нажимаем на кнопку "Параметры". Вместо нашего окна появится окно "Параметры поиска решения", позволяющее выбрать параметры математического метода поиска решения; если есть необходимость в знании промежуточных результатов вычислений при поиске оптимального решения, нужно отметить пункт "Показывать результаты итераций" в открывшемся окне (рис. 4). В Excel в качестве методов поиска решения задачи предлагаются метод Ньютона и метод сопряженных градиентов. Для решения задач линейного программирования обычно используется метод Ньютона. Предельное число итераций, относительная погрешность и допустимое отклонение выбираются соответствующими той задаче, оптимальное решение которой находится. Максимальное время назначается по опыту решения аналогичных задач на используемом компьютере. Показанные установки в окне "Параметры поиска решения" на рис. 4, как правило оказываются достаточными для получения оптимального решения задач линейного программирования.

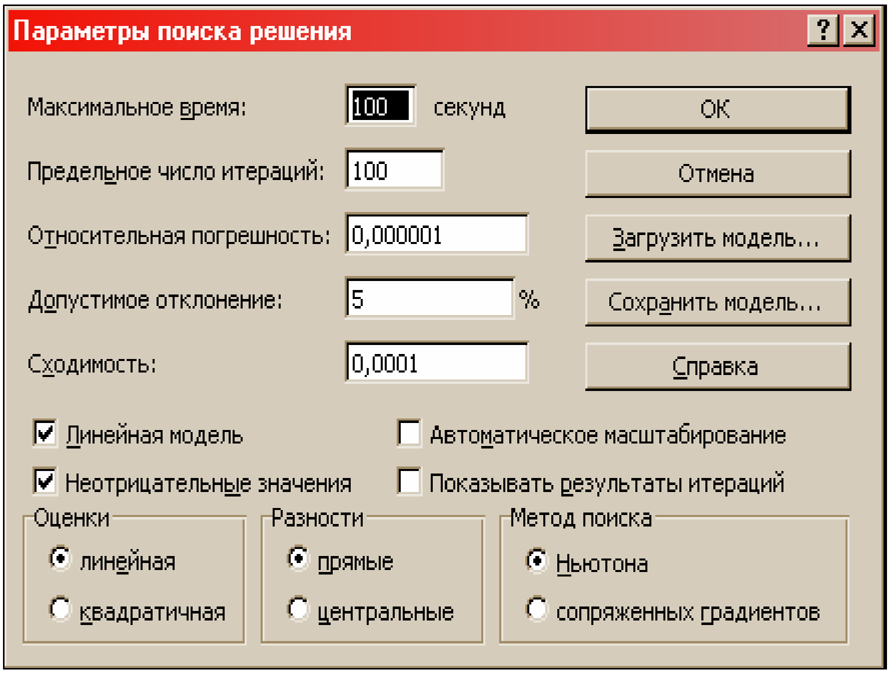


Рис. 4

В этом окне отмечаем "галочкой" пункты "Линейная модель" и "Неотрицательные значения". Нажимаем на кнопку "OK", после чего вновь появляется окно " Поиск решения", и уже в окне "Поиск решения" нажимаем на кнопку "Выполнить". Параметры в окне должны выбираться реальные, соответствующие заданным числовым характеристикам конкретной задачи. Увлечение большим числом итераций и малыми значениями относительной погрешности в производственных задачах может привести к необоснованному увеличению времени поиска решения.

На экран выводится окно "Результаты поиска решения" (рис. 5).

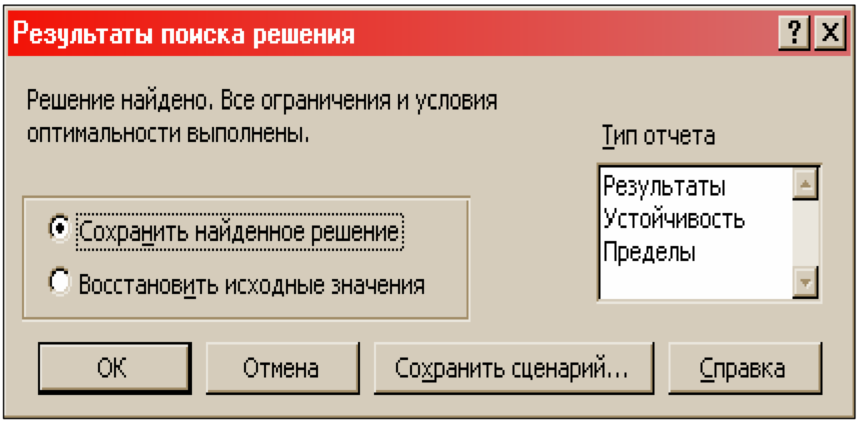


Рис. 5

Нажатием на кнопку "ОК" закрываем окно.

После этого в ячейках, отведённых для записи решения задачи, появляются числа (рис. 6).

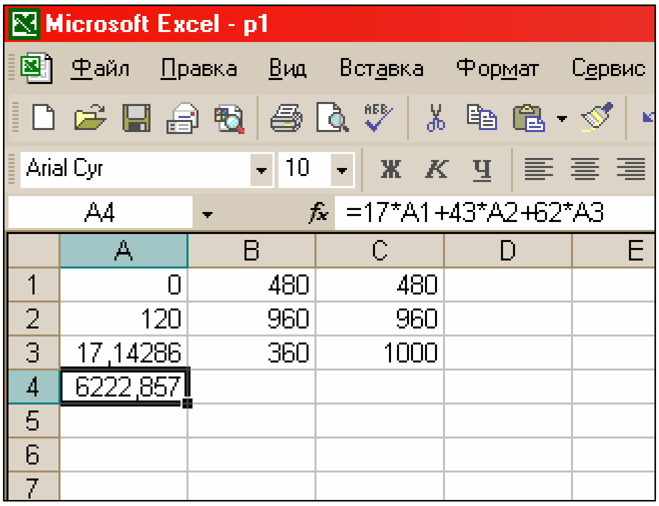


Рис. 6

В ячейке A4 находим значение целевой функции $F(X)$, соответствующее найденному решению. В ячейках A1, A2 и A3 указаны соответствующие значения переменных x_1, x_2, x_3.

Для решаемой нами задачи оптимальное решение имеет следующий вид:

$$F = 6222{,}857, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 120 \text{ и } x_3 = 17{,}14286.$$

Задачи

Решить задачу линейного программирования средствами Excel, составив её математическую модель по описанию производственных процессов и исходным данным из табл. 1.4.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 на предприятии используются три вида различного сырья: A_1, A_2, A_3. Запасы сырья каждого вида A_i известны и равны b_i, кг, соответственно. Количество единиц сырья A_i, используемое на изготовление единицы продукции вида P_j , равно a_{ij}, кг. Величина прибыли, получаемой от реализации единицы продукции P_j, равна c_j, i =1, 2, 3; j =1, 2.

Составить план выпуска продукции, чтобы при её реализации предприятие получало максимальную прибыль, и определить величину этой максимальной прибыли.

При решении задачи учитывать, что переменные удовлетворяют условиям неотрицательности: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Таблица 1.4

Номер задачи	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	9	2	4	6	11	2	414	612	414	6	3
2	9	2	4	6	11	2	345	510	345	6	3
3	6	8	13	12	5	11	918	918	783	2	4
4	2	5	8	6	6	14	290	406	493	9	5
5	11	12	9	2	14	22	429	312	299	5	9
6	3	9	8	2	4	7	224	240	256	2	8
7	2	15	25	7	8	7	448	480	512	4	3

Продолжение табл. 1.4

Номер задачи	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
8	5	2	6	1	3	5	372	620	310	2	8
9	8	7	5	7	8	12	1850	1998	2109	3	5
10	5	12	18	6	24	4	828	690	828	5	3
11	9	2	4	6	11	2	238	346	386	6	3
12	5	8	2	3	5	7	284	148	156	8	5
13	10	5	4	12	7	9	148	198	160	4	7
14	12	10	24	16	18	34	205	168	185	7	2
15	11	12	9	2	14	22	338	240	230	5	9
16	13	7	8	9	6	11	144	196	132	3	6
17	8	12	15	22	14	7	248	256	362	7	5
18	1	5	4	6	7	9	117	191	183	5	2
19	4	3	1	2	5	8	136	185	324	1	1

Продолжение табл. 1.4

Номер задачи	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
20	2	6	1	5	8	4	124	44 4	564	2	4
21	5	3	8	5	4	2	146	154	124	3	7
22	5	12	18	6	24	4	412	104	124	5	3
23	7	9	8	2	5	6	144	164	174	3	7
24	3	11	10	14	4	15	415	182	619	9	8
25	5	12	18	6	24	4	512	610	612	5	3
26	10	4	2	6	5	2	626	186	326	6	7
27	4	3	5	8	10	12	322	349	378	5	6
28	6	6	8	3	9	8	468	452	419	2	7
29	5	12	18	6	24	4	912	708	822	5	3
30	2	9	4	2	10	15	248	309	362	4	2
31	9	19	11	4	44	8	513	793	524	6	5

Окончание табл. 1.4

Номер задачи	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
32	7	20	24	7	54	6	821	647	571	15	13
33	8	22	28	3	74	5	617	911	379	5	11
34	1	5	2	7	5	2	825	867	826	11	12
35	8	3	5	5	4	1	422	448	573	15	16

36. Для изготовления трёх видов продукции *A*, *B* и *C* используют токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в табл. 1.5. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида.

Таблица 1.5

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия вида, станко-ч			Общий фонд рабочего времени оборудования, ч
	A	*B*	*C*	
Фрезерное	5	6	8	210
Токарное	3	4	2	320
Сварочное	7	9	4	250
Шлифовальное	2	5	6	160
Прибыль, руб.	8	11	15	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи и решить её.

37. При производстве карамели на кондитерской фабрике используются сахарный песок, патока, фруктовое пюре и вкусовые добавки. Нормы расхода сырья каждого вида для производства 1 т карамели "Абрикос"(А), "Вишня"(В) и "Клубника"(К) приведены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 т карамели, т			Общее количество сырья, т
	А	В	К	
Сахарный песок	0,7	0,6	0,8	900
Патока	0,45	0,5	0,3	700
Фруктовое пюре	0,1	0,2	0,15	250
Вкусовые добавки	0,002	0,005	0,003	16
Прибыль, руб.	1000	1200	1350	

Требуется определить, план выпуска карамели, чтобы прибыль от её реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи и решить её.

38. При откорме лосей каждое животное ежедневно должно получить не менее 18 ед. белков, не менее 72 ед. углеводов и не менее 24 ед. жиров. При откорме могут использоваться три вида корма. Содержание единиц питательных веществ в 1 кг каждого из видов корма приведено в табл. 1.7.

Таблица 1.7

Питательные вещества	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма		
	I	II	III
Белки	3	4	3
Углеводы	13	20	9
Жиры	5	4	3
Цена 1 кг корма, руб.	21	25	35

Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах: цена 1 кг корма каждого вида указана в табл. 1.7.

39. Для производства столов, стульев и шкафов мебельная фабрика использует два вида древесины.

Таблица 1.8

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие			Общее количество ресурсов
	Стол	Стул	Шкаф	
Древесина I вида, $м^3$	0,3	0,1	0,4	80
Древесина II вида, $м^3$	0,1	0,05	0,5	120
Трудоёмкость, чел.-ч	1,3	0,3	2,5	483,5
Прибыль от реализации одного изделия, руб.	21	25	35	

Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в табл. 1.8.

Определить сколько изделий мебели каждого вида фабрике следует изготовить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

40. На звероферме могут выращиваться норки, выдры и нутрии. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны получать зверьки в среднем, приведено в табл. 1.9.

Таблица 1.9

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать			Общее количество корма
	норка	выдра	нутрия	
I	4	2	5	190
II	5	3	4	320
III	7	9	5	454
Прибыль от реализации одной шкурки, руб.	150	320	350	

В табл. 1.9 указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки зверька.

Определить, сколько зверьков каждого вида следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

41. На швейном предприятии для изготовления пяти видов костюмов может быть использована ткань трёх артикулов.

Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного костюма даны в табл. 1.10.

В табл. 1.10 также указаны общее количество тканей каждого артикула, имеющееся в данный момент в распоряжении предприятия, и отпускная цена одного костюма каждого вида.

Определить, сколько костюмов каждого вида должно произвести предприятие, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной. При каком плане выпуска костюмов их общая стоимость будет минимальной? Как изменится оптимальный план выпуска костюмов, если общее количество ткани первого артикула увеличится на 10 %, второго артикула − на 25 %, а третьего артикула − на 30 %?

Таблица 1.10

Артикул ткани	Норма расхода ткани на один костюм каждого вида, м					Общее количество ткани, м
	1	2	3	4	5	
I	2	1	1	3	2	190
II	3	2	–	2	1	320
III	–	4	4	1	–	454
Цена одного костюма, руб.	2300	4500	6200	6400	8200	

42. Торговое предприятие планирует организовать продажу пяти видов товара − A, B, C, D и E − учитывая при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 970 часов и площадь торгового зала в 290 квадратных метров.

Плановые нормативы затрат ресурсов в расчёте на единицу товара каждого наименования и прибыль от их продажи заданы в табл. 1.11.

Таблица 1.11

Показатели	Товар					Общее количество ресурсов
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
Расход рабочего времени на единицу товара, ч	0,62	0,81	0,71	0,43	0,52	970
Использование площади торгового зала на единицу товара, м^2	0,13	0,22	0,45	0,22	0,17	290
Прибыль от продажи единицы товара, руб.	30	50	62	40	82	

Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимум прибыли.

43. Машиностроительное предприятие для изготовления пяти видов продукции использует токарное, фрезерное, сверлильное, расточное и шлифовальное оборудование, а также готовые комплектующие изделия.

Производимая на машиностроительном предприятии сборка готовых изделий требует выполнения определённых сборочно-наладочных работ. Нормы затрат всех видов имеющихся на предприятии ресурсов, затрачиваемых на изготовление одного изделия каждого из пяти видов, приведены в табл. 1.12.

В этой же таблице указаны наличный фонд каждого из ресурсов на машиностроительном предприятии, а кроме того, прибыль от реализации единицы продукции каждого из пяти видов и ограничения на возможный выпуск продукции второго и третьего видов.

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации является максимальной.

При определении плана выпуска следует учесть также то, что минимальное количество продукции второго вида 50 штук, а максимальное количество продукции третьего вида – 140 штук.

Т а б л и ц а 1.12

Ресурсы	Нормы затрат на изготовление одного изделия вида					Общий объём ресурсов
	1	2	3	4	5	
Производительность оборудования, чел.-ч:						
токарного	345	450	–	437	–	86 370
фрезерного	35	40	25	30	20	5300
сверлильного	77	98	142	68	85	21260
расточного	143	112	131	122	81	27430
шлифовального	–	146	46	54	82	9453
Комплектующие изделия, шт.	8	4	6	7	5	478
Сборочно-наладочные работы, чел.-ч	4,7	6,4	3,8	5,1	4,5	894
Прибыль от реализации одного изделия, руб.	800	366	510	347	789	

44. Найти решение задачи оптимизации, состоящей в определении плана изготовления пяти видов хлебобулочных изделий, обеспечивающего максимум стоимости всей изготовленной продукции. Учесть заданные ограничения на использование имеющихся в наличии количеств сырья четырёх видов.

Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия соответствующего наименования, а также общее количество сырья данного вида приведены в табл. 1.13.

Таблица 1.13

Вид сырья	Изделие					Общее количество сырья
	1	2	3	4	5	
I	16	18	13	14	12	470
II	3	5	4	7	9	186
III	8	4	8	6	4	178
IV	7	6	3	5	5	194
Цена одного изделия, руб.	8	6	10	7	9	

45. На ткацкой фабрике для изготовления пяти артикулов ткани используются ткацкие станки двух типов, пряжа и красители.

В табл. 1.14 указаны затраты станков каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей на 1 м ткани, цена 1 м ткани данного артикула, также заданы общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющиеся в распоряжении фабрики фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

Таблица 1.14

Ресурсы	Нормы затрат на 1 м ткани артикула					Общее количество ресурсов
	1	2	3	4	5	
Затраты на 1 м ткани станков, станко-ч.:						
I типа	0,16	0,08	0,03	0,04	–	370
II типа	0,18	0,05	0,04	0,01	0,08	530
Пряжа, кг	2,0	1,0	1,3	1,7	1,5	186
Красители, кг	0,08	0,04	0,03	0,035	0,024	264
Выпуск ткани, м:						
минимальный	800	1000	3500	2500	1500	
максимальный	2200	8500	6500	5500	4500	
Цена 1 м ткани, руб.	8	6	10	7	9	

Составить такой план изготовления тканей данного артикула, согласно которому будет произведено нужное количество тканей данного артикула, а общая стоимость всех тканей будет максимальна.

Найдите решение задач:

46. $F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 28; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 20; \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 5x_6 = 30; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$

47. $F = 5x_1 - 2x_2 + x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_4 + x_5 = 48; \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 42; \\ -2x_1 + 6x_3 + 8x_5 + x_6 = 54; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$

48. $F = 7x_1 + 8x_3 + 11x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_4 - 6x_6 = 60; \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_6 = 30; \\ 8x_2 + 7x_4 + x_5 - 9x_6 = 63; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$

49. $F = 9x_1 + 15x_2 - 3x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 - 3x_3 \le 54; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 14; \\ 6x_1 - x_2 + 5x_3 = 10; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

50. $F = 13x_1 - 17x_2 + 11x_3 + 5x_4 - 6x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 36; \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 30; \\ -2x_1 + +4x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 5x_5 = 75; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

51. $F = 8x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 + 11x_5 + 4x_6 \to \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5 + 8x_6 = 520; \\ -x_1 + 3x_3 + 6x_5 + 7x_6 \le 372; \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 \ge 76; \\ 7x_1 + x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 3x_5 + x_6 \ge 55; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$

Контрольные вопросы

1. Какие функции применяются в задачах линейного программирования?

2. Какая задача называется стандартной задачей линейного программирования?

3. Как записывается общая задача линейного программирования?

4. Чем характеризуется каноническая задача линейного программирования?

5. Что называется областью допустимых планов задачи линейного программирования?

6. Какой план называется оптимальным?

7. Какое решение задачи линейного программирования называется оптимальным?

8. Какими методами можно решить задачу линейного программирования?

9. Какие переменные называются базисными?

10. Какие переменные называются свободными?

11. Как определить максимально возможное число допустимых планов задачи линейного программирования?

12. Приведите примеры задач, решаемых методами линейного программирования.

13. Чем отличается решение задачи о минимуме функции от стандартной задачи линейного программирования?

14. В чём суть симплексного метода?

15. Каковы критерии симплексного метода?

16. Какими методами определяется опорный план при решении симплексным методом?

17. В чём заключается графический метод решения задачи линейного программирования?

18. Как строится область допустимых планов в случае двух переменных?

19. Как построить нормаль к линии уровня целевой функции?

20. Как построить линии уровня целевой функции?

21. Что характеризует градиент целевой функции?

22. Какие типы решений могут получаться при решении задачи линейного программирования?

23. Когда не существует решения задачи линейного программирования?

24. В каком случае задача линейного программирования может быть сведена к задаче относительно двух переменных?

25. Что называется базисным решением системы линейных алгебраических уравнений?

26. Какие ограничения существуют для значений разрешающего элемента?

1. 4. Двойственная задача и ее решение

Каждой задаче линейного программирования можно определённым образом поставить в соответствие некоторую другую задачу линейного программирования, называемую ***сопряжённой*** или ***двойственной*** по отношению к исходной или прямой. Дадим определение двойственной задачи по отношению к общей задаче линейного программирования, состоящей в нахождении максимального значения функции при ограничениях "с недостатком".

Две следующие задачи называются ***симметричными взаимно двойственными*** задачами линейного программирования:

Задача 1 Задача 2

$$F(X)=C_1x_1+C_2x_2+...+C_nx_n\to\max,\quad G(Y)=b_1y_1+b_2y_2+...+b_my_m\to\min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+....+a_{1n}x_n\le b_1;\\ ....\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+....+a_{mn}x_n\le b_m;\end{cases}\qquad \begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+....+a_{m1}y_m\ge C_1;\\ ....\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+....+a_{mn}y_m\ge C_n;\end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,...,n.\qquad y_i\ge 0,\ i=1,2,...,m.$$

Обе двойственные задачи линейного программирования обладают следующими свойствами:

1) в одной задаче ищут максимум целевой функции, в другой – минимум;

2) обе задачи являются стандартными задачами линейного программирования, причем в задаче о максимуме все неравенства вида "$\le$", а в задаче о минимуме – вида "$\ge$" ;

3) матрица системы ограничений одной задачи является транспонированной к матрице системы ограничений другой;

4) коэффициенты при переменных целевой функции одной задачи являются свободными членами ограничений другой;

5) число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче;

6) условия неотрицательности имеются в обеих задачах.

Свойствами двойственных задач следует руководствоваться при их составлении.

Лемма. Если $X-$ план исходной задачи, а $Y-$ план двойственной задачи, то значение целевой функции исходной задачи на плане X всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи на плане Y, то есть

$$F(X) \leq G(Y).$$

Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается теоремами о двойственности.

***Теорема* 1.** Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальное решение. При этом для любых оптимальных планов

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*), \quad Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$$

имеет место равенство

$$F(X^*) = G(Y^*).$$

***Следствие* 1.** Для разрешимости одной из задач двойственной пары необходимо и достаточно, чтобы множество допустимых планов каждой из двойственных задач было не пусто.

***Следствие* 2.** Если целевая функция одной из задач двойственной пары не ограничена, то другая задача двойственной пары не имеет планов.

Следствие 3. Для оптимальности планов $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ пары двойственных задач необходимо и достаточно выполнение равенства

$$F(X^*) = G(Y^*).$$

***Следствие* 4.** Если в одной из взаимно двойственных задач нарушается единственность оптимального решения, то оптимальное решение двойственной задачи вырожденное.

***Теорема* 2.** Планы $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ двойственных задач являются оптимальными тогда и только тогда, когда для любого значения j $(j = \overline{1, n})$ выполняется равенство

$$\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* - C_j \right] \cdot x_j^* = 0.$$

Если число неизвестных переменных как в прямой, так и в двойственной задачах, образующих данную пару, равно двум, то решение этих задач можно находить геометрическим способом.

Задачи

Для следующих задач линейного программирования составить двойственные им задачи и найти оптимальные решения для обеих задач.

1. $F(X)=5x_1+4x_2-x_3+x_4\to\max;$
$$\begin{cases}-2x_1+15x_2-19x_3+21x_4\le 182;\\ 12x_1+31x_2-28x_3+5x_4\le 235;\\ 7x_1+37x_2-49x_3+71x_4\le 473,\end{cases}$$
$x_1\ge 0; x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

2. $F(X)=5x_1+x_2+3x_3-x_4\to\max;$
$$\begin{cases}9x_1+11x_2+2x_3+13x_4\le 351;\\ 21x_1+5x_2+14x_3-37x_4\le 312;\\ 81x_1-46x_2+54x_3-92x_4\le 763,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

3. $F(X)=x_1-x_2+2x_3-2x_4\to\min;$
$$\begin{cases}16x_1-5x_2-9x_3+22x_4\ge 182;\\ 19x_1-2x_2+83x_3-15x_4\ge 345;\\ 27x_1+37x_2+49x_3+71x_4\ge 473,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

4. $F(X)=x_1+7x_2+x_3+x_4\to\min;$
$$\begin{cases}3x_1+13x_2+21x_3+15x_4\ge 51;\\ 31x_1-11x_2-24x_3+16x_4\ge 112;\\ 17x_1+12x_2-22x_3+32x_4\ge 163,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

5. $F(X)=3x_1+x_2+x_3-2x_4\to\max;$
$$\begin{cases}9x_1+16x_2+27x_3+33x_4\le 455;\\ 14x_1+23x_2-18x_3-41x_4\le 512;\\ 5x_1-9x_2+72x_3-12x_4\le 739,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

6. $F(X)=x_1-x_2+x_3-x_4\to\min;$
$$\begin{cases}43x_1+63x_2-21x_3+35x_4\ge 151;\\ 51x_1-17x_2+16x_3+16x_4\ge 167;\\ 37x_1+12x_2-12x_3+32x_4\ge 133,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

7. $F(X)=-x_1+6x_2-2x_3+x_4\to\min;$
$$\begin{cases}8x_1+3x_2+2x_3+5x_4\ge 45;\\ 15x_1+11x_2-14x_3+6x_4\ge 32;\\ 7x_1+23x_2-18x_3-12x_4\ge 13,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

8. $F(X)=x_1+x_2-x_3-x_4\to\max;$
$$\begin{cases}18x_1+7x_2+14x_3+32x_4\le 627;\\ 32x_1-15x_2+19x_3+37x_4\le 841;\\ 64x_1-16x_2+54x_3+92x_4\le 932,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

9. $F(X)=x_1+x_2-x_3+5x_4\to\min;$
$$\begin{cases}8x_1+11x_2+2x_3+5x_4\ge 51;\\ 9x_1+5x_2-14x_3+6x_4\ge 38,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

10. $F(X)=4x_1+x_2-x_3-3x_4\to\max;$
$$\begin{cases}8x_1+7x_2+4x_3+2x_4\le 67;\\ 2x_1-15x_2+9x_3+7x_4\le 81,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

11. $F(X)=-x_1+x_2-x_3+x_4\to\min;$
$$\begin{cases}4x_1+8x_2+2x_3+7x_4-x_5\ge 1;\\ 9x_1+5x_2-14x_3+6x_4+x_6\ge 8,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

12. $F(X)=4x_1+x_2-2x_3\to\max;$
$$\begin{cases}8x_1+7x_2+x_3+2x_4+5x_5\le 73;\\ 2x_1-5x_2+9x_3+7x_4-x_5\le 87,\end{cases}$$
$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

13. $F(X)=9x_1+x_2+x_3+x_4\to\min;$
$$\begin{cases}9x_1+12x_2+28x_3+25x_4\ge 77;\\21x_1-11x_2-24x_3+46x_4\ge 93;\\17x_1+17x_2-12x_3-12x_4\ge 39,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$$

14. $F(X)=5x_1+x_2+x_3+x_4\to\min;$
$$\begin{cases}78x_1+83x_2+91x_3+55x_4\ge 151;\\91x_1-13x_2-27x_3+19x_4\ge 167;\\41x_1+17x_2-23x_3+37x_4\ge 184\end{cases}$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$$

15. $F(X)=x_1+9x_2-x_3-x_4\to\max;$
$$\begin{cases}52x_1-21x_2-17x_3-41x_4\le 461;\\45x_1+52x_2+44x_3-77x_4\le 489;\\81x_1-46x_2-55x_3-83x_4\le 591,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$$

16. $F(X)=-x_1-x_2+x_3+x_4\to\max;$
$$\begin{cases}12x_1-23x_2+25x_3+41x_4\le 579;\\21x_1-7x_2+14x_3+37x_4\le 945;\\82x_1-44x_2+54x_3+92x_4\le 831,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$$

17. $F(X)=x_1+x_2+x_3+x_4\to\max;$
$$\begin{cases}22x_1+15x_2+21x_3+33x_4\le 124;\\21x_1+25x_2+15x_3+37x_4\le 128;\\11x_1+26x_2+14x_3+12x_4\le 163,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$$

18. $F(X)=x_1+x_2+x_3+x_4\to\min;$
$$\begin{cases}3x_1+3x_2+13x_3+11x_4\ge 51;\\21x_1+x_2+14x_3+16x_4\ge 73;\\7x_1+12x_2+22x_3+12x_4\ge 63;\end{cases}$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$$

19. $F(X)=3x_1+x_2+2x_3+x_4\to\min;$
$$\begin{cases}41x_1-13x_2-21x_3+15x_4\ge 51;\\72x_1-15x_2-24x_3-16x_4\ge 112;\\53x_1-12x_2-22x_3+32x_4\ge 161,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$$

20. $F(X)=x_1+x_2+3x_3-x_4\to\min;$
$$\begin{cases}23x_1+12x_2+15x_3+31x_4\ge 119;\\31x_1-11x_2+31x_3+39x_4\ge 202;\\17x_1+41x_2-61x_3+7x_4\ge 89,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$$

21. $F(X)=x_1-x_2+x_3-x_4\to\max;$
$$\begin{cases}9x_1+11x_2+2x_3+13x_4\le 785;\\21x_1+5x_2+14x_3-37x_4\le 712;\\5x_1+6x_2+7x_3+3x_4\ge 405;\\-4x_1+x_2+11x_3+15x_4\le 697;\\7x_1+11x_2+8x_3+10x_4\ge 564,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$$

22. $F(X)=x_1+x_2+x_3-3x_4\to\max;$
$$\begin{cases}3x_1+3x_2+23x_3+13x_4\le 333;\\23x_1+50x_2-57x_3-58x_4\le 350;\\10x_1+31x_2+25x_3+x_4\ge 135;\\8x_1+10x_2+13x_3+17x_4\ge 141;\\91x_1-46x_2+77x_3-82x_4\le 390,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$$

23. $F(X)=x_1+2x_2+x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}39x_1+18x_2+27x_3+53x_4\le 747;\\35x_1+51x_2+24x_3-46x_4\le 723;\\27x_1-61x_2+68x_3-29x_4\le 779;\\33x_1+75x_2-84x_3+25x_4\le 801,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

24. $F(X)=x_1+x_2+2x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}8x_1+10x_2+29x_3+49x_4\le 351;\\21x_1+3x_2+74x_3-69x_4\le 312;\\85x_1-17x_2+73x_3-87x_4\le 763;\\12x_1+17x_2+30x_3-90x_4\le 456,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

25. $F(X)=8x_1+x_2-x_3-x_4\to\min;$

$$\begin{cases}3x_1+13x_2+21x_3-15x_4\ge 51;\\31x_1+12x_2-34x_3+62x_4\ge 17;\\67x_1+18x_2-27x_3+53x_4\ge 73,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

26. $F(X)=4x_1+x_2+x_3+x_4\to\min;$

$$\begin{cases}3x_1+13x_2+21x_3+15x_4\ge 151;\\31x_1-11x_2-24x_3+16x_4\ge 182;\\17x_1+12x_2-22x_3+32x_4\ge 193,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

27. $F(X)=x_1-x_2-x_3+x_4\to\max;$

$$\begin{cases}4x_1-5x_2+11x_3+17x_4\le 256;\\16x_1+9x_2+22x_3-32x_4\le 287;\\31x_1-16x_2+14x_3+12x_4\le 324;\\7x_1+17x_2+50x_3+55x_4\le 918,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

28. $F(X)=x_1+2x_2-x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}10x_1+11x_2+12x_3+13x_4\le 237;\\21x_1+25x_2-34x_3-17x_4\le 284;\\31x_1+36x_2+27x_3+29x_4\le 365;\\24x_1-23x_2+21x_3-50x_4\le 367,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

29. $F(X)=6x_1-x_2-x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}25x_1+31x_2+28x_3+29x_4\le 637;\\21x_1-25x_2+44x_3-33x_4\le 679;\\54x_1-32x_2+34x_3-41x_4\le 783,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

30. $F(X)=x_1+x_2+x_3+5x_4\to\min;$

$$\begin{cases}68x_1+73x_2+51x_3+35x_4\ge 51;\\83x_1-71x_2-64x_3+96x_4\ge 112;\\87x_1+82x_2-52x_3+32x_4\ge 163,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

31. $F(X)=3x_1+x_2+x_3+x_4\to\min;$

$$\begin{cases}83x_1+13x_2-91x_3-15x_4\ge 69;\\31x_1-11x_2+24x_3+16x_4\ge 97;\\97x_1-12x_2+22x_3+52x_4\ge 123,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

32. $F(X)=7x_1-x_2-x_3+x_4\to\max;$

$$\begin{cases}29x_1+27x_2+31x_3+44x_4\le 554;\\38x_1-15x_2+14x_3-27x_4\le 517;\\82x_1-67x_2+63x_3-83x_4\le 664,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0.$

33. $F(X) = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 15x_1 + 17x_2 + 23x_3 + 67x_4 \le 851; \\ 21x_1 + 55x_2 + 14x_3 + 7x_4 \le 812; \\ 45x_1 + 46x_2 + 54x_3 - 13x_4 \le 863, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.$

34. $F(X) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 11x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 13x_4 \le 359; \\ 21x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 37x_4 \le 318; \\ 81x_1 - 46x_2 + 54x_3 - 92x_4 \le 765, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.$

35. $F(X) = x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 27x_1 + 78x_2 + 29x_3 + 14x_4 \le 351; \\ 51x_1 + 45x_2 + 14x_3 - 17x_4 \le 312; \\ 88x_1 + 56x_2 + 54x_3 - 42x_4 \le 763, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.$

36. $F(X) = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 63x_1 + 19x_2 + 12x_3 + 37x_4 \le 768; \\ 21x_1 + 59x_2 + 14x_3 - 75x_4 \le 635; \\ 71x_1 - 36x_2 + 44x_3 - 82x_4 \le 961, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.$

37. $F(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 13x_1 + 11x_2 + 2x_3 - x_4 \le 457; \\ 21x_1 + 65x_2 - 84x_3 - 37x_4 \le 493; \\ 14x_1 - 16x_2 - 7x_3 - 5x_4 \le 472; \\ 23x_1 - 17x_2 - 3x_3 - 11x_4 \le 489; \\ 21x_1 - 22x_2 - x_3 - 51x_4 \le 513, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.$

38. $F(X) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 7x_1 + 19x_2 + 31x_3 + 55x_4 \ge 93; \\ 13x_1 + 11x_2 - 19x_3 - 17x_4 \ge 76; \\ 33x_1 + 91x_2 - 99x_3 - 87x_4 \ge 83; \\ 81x_1 - 82x_2 - 14x_3 + 21x_4 \ge 97; \\ x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 5x_4 \ge 33, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.$

39. $F(X) = x_1 - 7x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \ge 51; \\ 3x_1 - 13x_2 - 4x_3 + 6x_4 \ge 62; \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \ge 13, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.$

40. $F(X) = x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 17x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 21x_4 \le 751; \\ 42x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 37x_4 \le 612; \\ 57x_1 - 46x_2 + 54x_3 - 92x_4 \le 763, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.$

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются двойственными задачами линейного программирования?
2. Когда пара двойственных задач не имеет решения?
3. Какая связь существует между оптимальными решениями двойственных задач?
4. В каком случае применяется метод решения двойственной задачи линейного программирования?

5. Дайте экономическую интерпретацию задачи, двойственной задаче об использовании ресурсов.

6. Какими свойствами обладают двойственные задачи?

7. Какие правила следует соблюдать при составлении задачи, двойственной заданной?

8. Сформулируйте теорему о решении двойственных задач.

9. Какая матрица называется транспонированной?

10. Сформулируйте необходимое и достаточное условие оптимальности планов двойственных задач.

11. Какова связь между переменными двойственных задач?

12. Как по симплексной таблице, составленной для решения одной из задач, найти решение обеих двойственных задач?

13. Что можно сказать о решениях двойственной пары задач, если множество планов одной из них пусто?

14. Покажите, что для любых допустимых решений $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ исходной и двойственной задачи справедливо неравенство

$$F(X)\le G(Y).$$

15. В каком случае оптимальное решение двойственной задачи будет вырожденным?

16. Какие компоненты оптимального решения двойственной задачи соответствуют нулевым компонентам основной задачи?

17. Что можно сказать о решениях двойственной пары задач, если решение одной из них неограниченно?

18. Как принцип двойственности используется в двойственном симплексном методе?

19. Для каких задач целесообразно использовать двойственный симплекс-метод?

20. Что называется псевдопланом задачи линейного программирования?

2. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Значительная часть задач по смыслу может иметь решения только в целых числах; например, число турбин, судов, животных может быть только целым числом. Такие задачи решаются методами целочисленного программирования. Общая постановка задачи линейного программирования дополняется требованием о том, чтобы найденные переменные в оптимальном плане были целыми.

Методы целочисленной оптимизации можно разделить на три основные группы: а) методы отсечения; б) комбинаторные методы; в) приближённые методы.

Методы отсечения используют оптимальные решения, найденные для задач линейного программирования. Сужая область допустимых планов до целочисленных границ, т. е. отсекая нецелочисленные допустимые планы, методами отсечения получают решения задач целочисленного программирования.

Комбинаторные методы достигают решений задач целочисленного программирования, рассматривая возможные варианты целочисленных ограничений для задачи оптимизации.

Приближённые методы опираются на приближённые методы нахождения экстремумов функций нескольких переменных и используют различные способы округления полученных нецелочисленных решений до целых значений. Особенно удобно применять приближённые методы в случае решения задачи целочисленного программирования относительно двух переменных.

2.1. Метод Гомори

Метод Гомори решения задач целочисленного программирования является ***методом отсечения***. Сущность его состоит в том, что сначала задача решается как задача линейного программирования без учета условия целочисленности переменных. Если полученное решение задачи линейного программирования является целочисленным, задача целочисленного программирования также решена и найденное решение является оптимальным и для неё. Если же в найденном решении задачи линейного программирования одна или большее число переменных не целые, то для отыскания целочисленного решения задачи добавляется новое ограничение. Это ограничение линейное, и при продолжении решения дополненной задачи симплексным методом с учетом этого ограничения получается целочисленный план.

Для нахождения целочисленного решения задачи методом Гомори используется следующий ***алгоритм***:

1) если в результате решения задачи линейного программирования в полученном оптимальном плане $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ переменная x_i^* – нецелая, то следует найти её дробную часть $\{x_i^*\}$ и дробные части всех коэффициентов при переменных i-й строки системы ограничений $\{a_{ij}\}$, $j = 1, 2, ..., n$. Под дробной частью некоторого числа a понимается наименьшее неотрицательное число $\{a\}$ такое, что разность между ним и a есть целое число;

2)составить неравенство Гомори

$$\left\{x_i^*\right\} - \sum_{j=1}^{n} \left\{a_{ij}\right\} \cdot x_j \leq 0$$

и включить его в систему ограничений исходной задачи.

3) решить, используя двойственный симплексный и симплексный методы, расширенную задачу.

Если нецелых переменных несколько, то для составления неравенства Гомори выбирается та, у которой целая часть наибольшая. Если решение расширенной задачи нецелое, то нужно повторять алгоритм метода Гомори вплоть до получения целочисленного решения.

Оценки найденного целочисленного решения могут не удовлетворять критерию оптимальности симплексного метода.

Пример 2.1. Методом Гомори найти решение задачи целочисленного программирования, состоящей в определении максимального значения функции $F(X) = 5x_1 + 11x_2$ при условии

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq \dfrac{21}{4}; \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0;$$
$$x_1, x_2 - \text{целые.}$$

Решение. Выравнивая неравенства с помощью вспомогательных переменных x_3, x_4, получаем задачу линейного программирования в каноническом виде:

$$F(X) = 5x_1 + 11x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = \dfrac{21}{4}; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0;$$
$$x_1, x_2 - \text{целые.}$$

Решаем задачу линейного программирования симплексным методом, используя поэтапный переход от одного базиса к другому. Ход решения задачи и полученное оптимальное решение в смысле задачи линейного программирования представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Базис $x_{баз}$	Свободные члены уравнений	Неизвестные в задаче программирования				Оценка элемента строки δ_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	$\frac{21}{4}$	3	$\boxed{4}$	1	0	$\frac{21}{16}$
x_4	10	2	5	0	1	2
Δ_j	$F=0$	–5	–11	0	0	–
x_2	$\frac{21}{16}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	
x_4	$\frac{55}{16}$	$-\frac{7}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	1	
Δ_j	$\frac{231}{16}$	$\frac{13}{4}$	0	$\frac{11}{4}$	0	

В найденном оптимальном плане значение переменной x_2 равно дробному числу. Находим его дробную часть и дробные части всех элементов строки, содержащей переменную x_2, а именно:

$$\left\{\frac{21}{16}\right\}=\left\{1+\frac{5}{16}\right\}=\frac{5}{16};\quad \left\{\frac{3}{4}\right\}=\frac{3}{4};\quad \{1\}=0;\quad \left\{\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{4};\quad \{0\}=0.$$

Теперь составляем для найденных значений дробных частей неравенство Гомори:

$$\frac{5}{16}-\frac{3}{4}x_1-\frac{1}{4}x_3\le 0.$$

Выравниваем неравенство Гомори с помощью новой вспомогательной переменной x_5, переносим свободный член уравнения в правую часть и получаем новое ограничение:

$$-\frac{3}{4}x_1-\frac{1}{4}x_3+x_5=-\frac{5}{16}.$$

Добавляем в симплексную таблицу строку, содержащую новое ограничение, и столбец, содержащий новую переменную, и продолжаем решать задачу двойственным симплексным методом, так как теперь в таблице записан псевдоплан (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Базис $x_{баз}$	Свободные члены уравнений	Неизвестные в задаче программирования					Оценка элемента строки δ_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	$\frac{21}{16}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	
x_4	$\frac{55}{16}$	$-\frac{7}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	1	0	
x_5	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\leftarrow$
Δ_j	$\frac{231}{16}$	$\frac{13}{4}\uparrow$	0	$\frac{11}{4}$	0	1	
x_2	1	0	1	0	0	1	
x_4	$\frac{25}{6}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{7}{3}$	
x_1	$\frac{5}{12}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	
Δ_j	$\frac{157}{12}$	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{13}{3}$	

Полученное оптимальное решение расширенной задачи содержит не целое значение переменной x_1, поэтому находим для этой строки дробные части всех нецелых чисел, а именно:

$$\left\{\frac{5}{12}\right\}=\frac{5}{12};\ \left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3};\ \left\{-\frac{4}{3}\right\}=\left\{-1\frac{1}{3}\right\}=\left\{-2+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3},$$

и новое неравенство Гомори имеет вид

$$\frac{5}{12}-\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_5\le 0.$$

Добавляем его к решаемой задаче, выравниваем с помощью вспомогательной переменной x_6 и решаем расширенную задачу (табл. 2.3).

Т а б л и ц а 2.3

Базис $x_{баз}$	Свободные члены уравнений	Неизвестные в задаче программирования					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1	0	1	0	0	1	0
x_4	$\frac{25}{6}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{7}{3}$	0
x_1	$\frac{5}{12}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0
x_6	$-\frac{5}{12}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\leftarrow$ 1
Δ_j	$\frac{157}{12}$	0	0	$\frac{5}{3}\uparrow$	0	$\frac{13}{3}$	0
x_2	1	0	1	0	0	1	0
x_4	5	0	0	0	1	–1	–2
x_1	0	1	0	0	0	–2	1
x_3	$\frac{5}{4}$	0	0	1	0	2	–3
Δ_j	11	0	0	0	0	1	5

Таким образом, найдено оптимальное решение задачи целочисленного программирования: $F_{\max} = 11$ при $X^* = (0; 1)$.

2.2. Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ − один из комбинаторных методов. Его суть заключается в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определённым признакам полезными для нахождения оптимального решения.

Метод ветвей и границ состоит в следующем: множество допустимых нецелочисленных решений (планов) некоторым способом разбивается на подмножества, для каждого из которых решается новая задача линейного программирования с целью получения целочисленного решения. При каждом ветвлении получается две новые задачи.

Очевидно, что возможен один из следующих четырёх случаев.

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции на нём и дают решение исходной задачи.

2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет оптимальный план, среди компонент которого есть дробные числа. Тогда рассматриваем вторую задачу и в её оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу, и строим две задачи на новых ограничениях по этой переменной, полученных разделением её ближайших к решению целочисленных значений.

3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции на этих планах и сравниваем их между собой. Для определённости здесь и далее полагаем, что решается задача о максимуме целевой функции. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и вместе со значением целевой функции на нём дает искомое решение.

Если же значение целевой функции больше на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то следует взять одно из таких чисел и для задачи, план которой рассматривается, произвести ветвление по дробной переменной и построить две новые задачи.

4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда вычисляем значение целевой функции на данных оптимальных планах и рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. В оптимальном плане этой задачи выбираем одну из компонент, значение которой является дробным числом, и производим ветвление на две новые задачи, разбивая область изменения этой переменной на две, ограниченные целыми числами справа и слева соответственно.

Таким образом, процесс построения всё новых и новых задач может быть представлен на рисунке в виде ветвистого дерева (рис. 6), с вершиной, обозначенной "задача 1", и отходящими от этой вершины ветвями. Такая последовательность действий при нахождении оптимального решения задачи целочисленного программирования нашла своё отражение в названии этого метода.

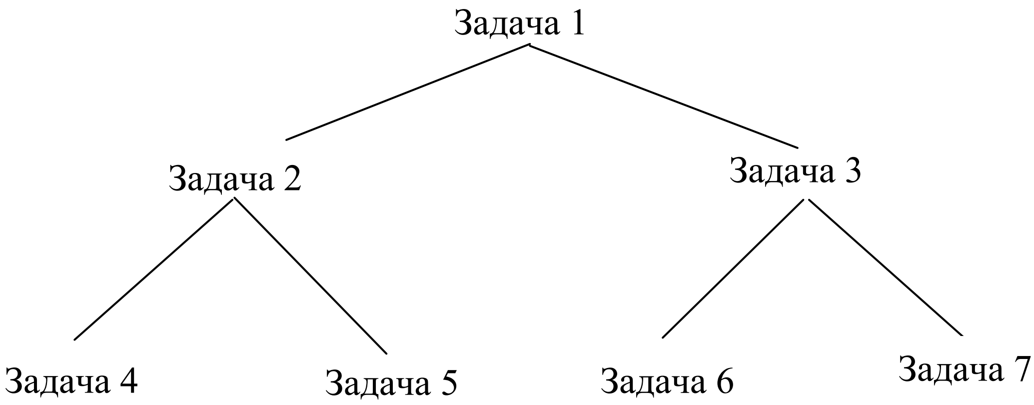


Рис. 6

Исходная вершина отвечает оптимальному плану исходной задачи 1, а каждая соединённая с ней ветвью вершина отвечает оптимальным планам новых задач, построенных для новых ограничений по одной из переменных, имеющих в оптимальном плане задачи 1 значение в виде дробного числа.

Каждая из вершин имеет свои ответвления. При этом на каждом шаге выбирается та вершина, для которой значение целевой функции будет наибольшим.

Если на некотором шаге будет получен план, имеющий целочисленные значения, и значение функции на нём окажется больше или равно, чем значение функции в других возможных для ветвления вершинах, то данный план является оптимальным планом исходной задачи целочисленного программирования и значение целевой функции на нём является максимальным.

Пример 2.2. Найти методом ветвей и границ решение задачи целочисленного программирования

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6; \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3, x_4, x_5 \ge 0;$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 - \text{целые}.$$

Решение. Находим оптимальный план сформулированной задачи симплексным методом без учёта требуемой в ограничениях целочисленности переменных, а именно решаем задачу 1.

Задача 1

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6; \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Оптимальный план задачи 1 линейного программирования

$$X^* = \left(9\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{2};\ 0;\ 0;\ 34\right), \quad F_{\max} = 7\frac{4}{5}.$$

Для исходной задачи, с учётом целочисленности переменных, полученное решение не является оптимальным.

Для поиска целочисленного оптимального решения разделим интервал изменения переменной x_1 на две области, а именно $x_1 \in (0;9]$ и $x_1 = 10$, и разобьём заданную задачу на две новые задачи.

Задача 2

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6; \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9; \\ 0 \le x_1 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Задача 3

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6; \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9; \\ 10 \le x_1 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Список задач: 2 и 3. Нижняя граница линейной функции не изменилась: $F_0 = 0$. Решаем одну из задач списка, например задачу 3, симплексным методом. Получаем, что условия задачи противоречивы.

Решаем задачу 2 симплексным методом. Получаем оптимальный целочисленный план поставленной задачи 2, который является также оптимальным планом задачи 1:

$$X^* = (9;\ 4;\ 0;\ 1;\ 32), \quad F_{\max} = 35.$$

Таким образом, в результате одного ветвления задачи было найдено её оптимальное решение.

Задачи

1. На мебельной фабрике изготавливают столы, стулья и табуреты. На производство одного изделия требуется 1500, 1000 и 620 дм^3 древесины. При этом затраты рабочего времени при изготовлении стола составляют 5 машино-часов, стула – 1,5 машино-часа и табурета – 0,7 машино-часа. Всего для производства мебели фабрика может использовать 1220 м^3 древесины. Оборудование может быть занято в течение 26 машино-часов. Прибыль от реализации стола, стула и табуретки равна 200, 30 и 15 руб. соответственно. Фабрика должна ежедневно производить не менее двух столов. На производство другой продукции ограничений нет.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготавливать фабрике, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ или методом Гомори. Целевая функция и три неравенства-ограничения заданы в табл. 2.4. В качестве значения параметра a взять сумму цифр номера варианта задания расчетно-графической работы, значения параметра b – число букв в своей фамилии; параметра c – число букв в своём отчестве; параметра d – число, равное последней цифре в номере зачётной книжки.

Во всех задачах предполагается, что выполнены неравенства $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Найти оптимальный план для максимального значения целевой функции.

Таблица 2.4

Номер варианта задачи	$F(X)$	Первое ограничение	Второе ограничение	Третье ограничение
1	$x_1 + x_2$	$3x_1 + 3x_2 \leq 15$	$3x_1 + x_2 \leq 12$	$x_1 - x_2 \geq 1$
2	$2x_1 + x_2$	$4x_1 + 5x_2 \leq 20$	$3x_1 - 3x_2 \leq 13$	$x_1 + 2x_2 \geq 2$
3	$4x_1 - x_2$	$4x_1 - x_2 \geq 9$	$4x_1 + 3x_2 \leq 26$	$x_1 + 7x_2 \leq 7$
4	$x_1 + x_2$	$4x_1 + 3x_2 \leq 25$	$4x_1 + x_2 \leq 16$	$x_1 + x_2 \geq 2$

Продолжение табл. 2.4

Номер варианта задачи	$F(X)$	Первое ограничение	Второе ограничение	Третье ограничение
5	$6x_1 - x_2$	$3x_1 + x_2 \le 9$	$6x_1 - x_2 \le 13$	$2x_1 + 3x_2 \le 18$
6	$8x_1 - x_2$	$x_1 + 7x_2 \le 7$	$4x_1 - x_2 \le 10$	$10x_1 + 5x_2 \ge 10$
7	$6x_1 - x_2$	$3x_1 - 7x_2 \le 14$	$3x_1 + 7x_2 \le 21$	$x_1 + 2x_2 \ge 3$
8	$10x_1 - x_2$	$5x_1 - 5x_2 \ge 25$	$4x_1 + 8x_2 \le 36$	$4x_1 + 3x_2 \le 26$
9	$6x_1 + 2x_2$	$9x_1 - 9x_2 \ge 18$	$2x_1 + 4x_2 \le 18$	$4x_1 - x_2 \ge 9$
10	$9x_1 - x_2$	$4x_1 - x_2 \ge 4$	$2x_1 - 3x_2 \le 12$	$x_1 + x_2 \le 8$
11	$ax_1 + 6x_2$	$x_1 + 2x_2 \ge 2b$	$4x_1 - x_2 \le 4c$	$2x_1 + dx_2 \le 4d$
12	$3ax_1 - 12x_2$	$2x_1 + 2x_2 \le 8b$	$3x_1 + 5x_2 \le 5c$	$5x_1 + 6x_2 \le 3d$
13	$2ax_1 - 8x_2$	$3x_1 + x_2 \le 9b$	$4x_1 - x_2 \le 12c$	$2x_1 + 3x_2 \le 8d$
14	$6ax_1 + 8x_2$	$5x_1 + 5x_2 \le 4b$	$2x_1 + 2x_2 \le 4c$	$8x_1 + 5x_2 \le 8d$
15	$3ax_1 - 3x_2$	$8x_1 + 10x_2 \le 4b$	$7x_1 + 3x_2 \le 4c$	$4x_1 - 9x_2 \le 4d$
16	$3ax_1 - x_2$	$4x_1 + 2x_2 \ge 2b$	$24x_1 + 9x_2 \le 7c$	$4x_1 - x_2 \le 2d$

Продолжение табл. 2.4

Номер варианта задачи	$F(X)$	Первое ограничение	Второе ограничение	Третье ограничение
17	$3ax_1 + 3x_2$	$3x_1 + 6x_2 \le 3b$	$2x_1 - 4x_2 \le 4d$	$4x_1 - x_2 \ge c$
18	$\frac{a}{2}x_1 - 5x_2$	$4x_1 - 2x_2 \ge b$	$4x_1 + 3x_2 \le 3d$	$7x_1 + x_2 \le 7c$
19	$2ax_1 - 2x_2$	$4x_1 + 3x_2 \le 4b$	$3x_1 - 2x_2 \le 2b$	$3x_1 + x_2 \le 8d$
20	$\frac{a}{2}x_1 - 2x_2$	$4x_1 - x_2 \le 4b$	$x_1 - 4x_2 \le 6d$	$2x_1 + 8x_2 \le 4c$
21	$\frac{a}{2}x_1 + x_2$	$4x_1 + 3x_2 \le 3b$	$14x_1 + 2x_2 \le 7c$	$x_1 + x_2 \ge d$
22	$3ax_1 - 3x_2$	$15x_1 - 5x_2 \ge 3b$	$4x_1 + 8x_2 \le 3c$	$x_1 + 3x_2 \le 5d$
23	$2ax_1 + 6x_2$	$9x_1 - 9x_2 \ge 9b$	$3x_1 + 2x_2 \le 8c$	$x_1 + 3x_2 \le 4d$
24	$2ax_1 - 4x_2$	$4x_1 + 3x_2 \le 3b$	$8x_1 + 14x_2 \le 8c$	$x_1 + 2x_2 \le 2d$
25	$\frac{5a}{2}x_1 - 4x_2$	$4x_1 - 7x_2 \le 2b$	$3x_1 + 7x_2 \le 2c$	$x_1 + 2x_2 \le 4d$
26	$ax_1 - 3x_2$	$42x_1 + 28x_2 \le 7b$	$5x_1 + 3x_2 \le 6c$	$4x_1 - x_2 \ge 2d$
27	$2ax_1 + x_2$	$8x_1 + 3x_2 \le 4b$	$4x_1 + x_2 \le 9c$	$x_1 + 6x_2 \le 3d$
28	$3ax_1 - 2x_2$	$7x_1 + 3x_2 \le 6b$	$3x_1 + 6x_2 \le 6c$	$x_1 + x_2 \le 2d$

Окончание табл. 2.4

Номер варианта задачи	$F(X)$	Первое ограничение	Второе ограничение	Третье ограничение
29	$4ax_1 + 2x_2$	$9x_1 - 9x_2 \geq 2b$	$6x_1 + 12x_2 \leq 4c$	$4x_1 - x_2 \leq 4d$
30	$2ax_1 + 3x_2$	$4x_1 - 5x_2 \geq 3b$	$8x_1 + 5x_2 \leq 4c$	$3x_1 - x_2 \geq 3d$
31	$\frac{a}{2}x_1 - 8x_2$	$7x_1 - 3x_2 \geq b$	$x_1 + 6x_2 \leq 3d$	$x_1 + x_2 \leq 5c$
32	$ax_1 - 9x_2$	$9x_1 + 9x_2 \leq 4b$	$3x_1 - 9x_2 \leq 2b$	$8x_1 + x_2 \leq 8d$
33	$6ax_1 + x_2$	$9x_1 - x_2 \geq 4b$	$8x_1 + 2x_2 \leq 5c$	$x_1 - x_2 \geq d$

3. Из листов фанеры нужно выкроить заготовки четырёх видов.

Один лист длиной 200 см можно разрезать на заготовки длиной 50, 65, 70 и 75 см несколькими способами.

Всего нужно сделать 125, 134, 89 и 95 заготовок каждого вида соответственно. Способы разреза одного листа на заготовки и длина отходов при каждом способе приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Длина заготовки, см	Количество заготовок, выкраиваемых из одного листа при разрезе, способом													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
50	4	2	2	2	1	1	1	1	1	1	–	–	–	–
60	–	1	–	–	2	–	–	–	1	1	3	2	2	1
70	–	–	1	–	–	2	–	1	1	–	–	1	–	2
75	–	–	–	1	–	–	2	1	–	1	–	–	1	–
Длина отходов, см	–	40	30	25	30	10	–	5	20	15	20	10	5	–

Определить, какое количество листов по каждому из способов следует разрезать, чтобы получить нужное количество заготовок данного вида при минимальных общих отходах.

4. Сухогруз может быть использован для перевозки двенадцати наименований груза, масса, объём и цена единицы каждого из которых приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Параметры единицы груза	Номер груза											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Масса, т	74	72	58	92	61	70	81	56	82	85	56	76
Объём, м^3	80	110	112	58	102	68	74	93	104	98	86	140
Цена, тыс. руб.	3,7	2,9	5,6	4,6	5,3	2,5	3,8	6,9	3,2	4,8	3,5	2,4

На сухогруз может быть погружено не более 1000 т груза общим объёмом не более 820 м^3. Определить, сколько единиц каждого груза следует поместить на сухогруз так, чтобы общая стоимость размещенного груза была максимальной.

Найдите решение задач:

5. $F = -2x_1 + 11x_2 - 14x_3 + 16x_4 + 15x_5 + 10x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} -4x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 7x_4 + 2x_5 + 2x_6 \le 64; \\ 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 \le 81; \\ -8x_1 - 4x_2 - 11x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 5x_6 \le 92, \end{cases}$$

$$0 \le x_j \le 16, \quad x_j - \text{целые}, \quad j = \overline{1,6}.$$

6. $F = 9x_1 + 15x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 21x_5 + x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 + 3x_6 = 38; \\ 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_5 + 12x_6 = 58; \\ 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_5 = 45, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad x_j - \text{целые}, \quad j = \overline{1,6}.$$

7. $F = 34x_1 + x_2 - 25x_3 + 50x_4 + 33x_5 + 23x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 7x_4 + x_5 + 2x_6 = 64; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 8x_5 + x_6 \le 26; \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \ge 15; \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 \le 120; \\ -x_1 + 4x_2 - 6x_3 - x_4 + 6x_5 - 2x_6 \le 78; \\ 6x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 - x_5 + x_6 \le 92, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad x_j$ – целые, $\quad j = \overline{1,6}.$

8. $F = -x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 3x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 9x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \le 89{,}5; \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 \le 71{,}3; \\ -5x_1 - x_2 - 8x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 9x_6 \le 92{,}6, \end{cases}$$

$0 \le x_j \le 16, \quad x_j$ – целые, $\quad j = \overline{1,6}.$

2.3. Алгоритм решения задачи целочисленного программирования средствами Excel

Задачи целочисленного программирования решаются в Excel теми же средствами, что и общие задачи линейного программирования. В отличие от задач линейного программирования, при решении задач целочисленного программирования необходимо добавить указание на то, что разыскиваемые оптимальные значения переменных могут принимать только целые значения. Для этого в окне "Добавление ограничения" нужно выбрать в списке, расположенном посередине, значение "цел", как показано на рис. 7.

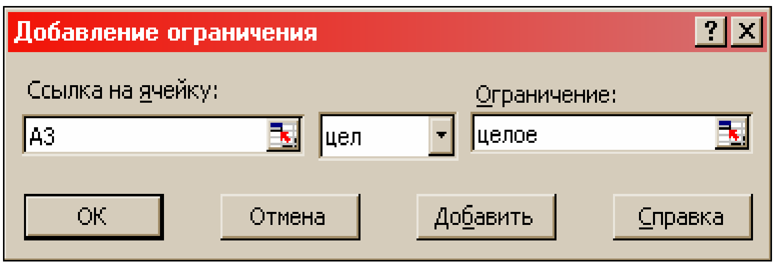


Рис. 7

Задачи

Решить следующие задачи целочисленного программирования средствами Excel.

1. $F(X) = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 30x_1 - 15x_2 + 20x_3 + 21x_4 \le 324; \\ 21x_1 + 51x_2 + 28x_3 + 25x_4 \le 483; \\ 12x_1 - 44x_2 + 32x_3 + 62x_4 \le 367, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

2. $F(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 14x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 19x_4 \le 551; \\ 11x_1 + 35x_2 + 14x_3 - 17x_4 \le 512; \\ 82x_1 + 63x_2 + 54x_3 - 92x_4 \le 767, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

3. $F(X) = x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 21x_1 + 12x_2 - 13x_3 + 12x_4 \ge 282; \\ 22x_1 - 26x_2 + 23x_3 - 25x_4 \ge 245; \\ 27x_1 + 72x_2 - 49x_3 + 94x_4 \ge 579, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

4. $F(X) = x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 73x_1 + 13x_2 + 61x_3 + 15x_4 \ge 651; \\ 61x_1 - 61x_2 - 24x_3 + 76x_4 \ge 612; \\ 97x_1 + 12x_2 + 92x_3 + 32x_4 \ge 863, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

5. $F(X) = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 9x_1 + 16x_2 + 27x_3 + 33x_4 \le 455; \\ 14x_1 + 23x_2 - 18x_3 - 41x_4 \le 512; \\ 5x_1 - 9x_2 + 72x_3 - 12x_4 \le 739, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

6. $F(X) = 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 43x_1 + 63x_2 - 21x_3 + 35x_4 \ge 151; \\ 51x_1 - 17x_2 + 16x_3 + 16x_4 \ge 167; \\ 37x_1 + 12x_2 - 12x_3 + 32x_4 \ge 133, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

7. $F(X) = -x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \ge 45; \\ 15x_1 + 11x_2 - 14x_3 + 6x_4 \ge 32; \\ 7x_1 + 23x_2 - 18x_3 - 12x_4 \ge 13, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

8. $F(X) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 18x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 32x_4 \le 627; \\ 32x_1 - 15x_2 + 19x_3 + 37x_4 \le 841; \\ 64x_1 - 16x_2 + 54x_3 + 92x_4 \le 932, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

9. $F(X)=x_1+x_2-x_3+8x_4\to\max;$

$$\begin{cases}22x_1-21x_2-17x_3-41x_4\le 461;\\ 25x_1+52x_2+44x_3-77x_4\le 489;\\ 21x_1-46x_2-55x_3-83x_4\le 591,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}$.

10. $F(X)=-x_1-3x_2+x_3+x_4\to\max;$

$$\begin{cases}12x_1-23x_2+25x_3+41x_4\le 579;\\ 21x_1-7x_2+14x_3+37x_4\le 945;\\ 82x_1-44x_2+54x_3+92x_4\le 831,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}$.

11. $F(X)=x_1+x_2+5x_3+x_4\to\min;$

$$\begin{cases}9x_1+12x_2+28x_3+25x_4\ge 77;\\ 21x_1-11x_2-24x_3+46x_4\ge 93;\\ 17x_1+17x_2-12x_3-12x_4\ge 39,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}$.

12. $F(X)=5x_1+x_2+x_3+x_4\to\min;$

$$\begin{cases}88x_1+83x_2+91x_3+55x_4\ge 151;\\ 81x_1+13x_2-27x_3+59x_4\ge 167;\\ 84x_1+17x_2+23x_3+37x_4\ge 184,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}$.

13. $F(X)=x_1-x_2+3x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}61x_1-76x_2-37x_3-51x_4\le 472;\\ 21x_1+65x_2-84x_3-37x_4\le 493,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0; x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}$.

14. $F(X)=x_1+x_2+x_3-x_4\to\min;$

$$\begin{cases}81x_1-82x_2-14x_3+21x_4\ge 597;\\ 33x_1+91x_2-99x_3-87x_4\ge 583,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}$.

15. $F(X)=5x_1-x_2-x_3-4x_4\to\min;$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3+5x_4\ge 151;\\ 3x_1-13x_2-4x_3+6x_4\ge 162;\\ 7x_1+2x_2-2x_3+2x_4\ge 213,\end{cases}$$

$x_1\ge 0; x_2\ge 0; x_3\ge 0; x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}$.

16. $F(X)=x_1-x_2+3x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}17x_1+11x_2+2x_3+21x_4\le 851;\\ 42x_1+5x_2+14x_3-37x_4\le 912;\\ 57x_1-46x_2+54x_3-92x_4\le 763,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}$.

17. $F(X)=x_1+x_2+x_3+x_4\to\max;$

$$\begin{cases}5x_1+15x_2-35x_3+33x_4\le 924;\\ x_1+25x_2+15x_3-21x_4\le 928;\\ 3x_1+26x_2+14x_3+12x_4\le 863,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}$.

18. $F(X)=x_1+x_2+x_3+x_4\to\min;$

$$\begin{cases}3x_1+3x_2+13x_3+11x_4\ge 77;\\ 21x_1+x_2+14x_3+16x_4\ge 84;\\ 7x_1+12x_2+22x_3+12x_4\ge 79,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}$.

19. $F(X)=3x_1+7x_2+x_3+x_4\to\min;$

$$\begin{cases}41x_1-13x_2-21x_3+15x_4\ge 51;\\72x_1-15x_2-24x_3-16x_4\ge 112;\\53x_1-12x_2-22x_3+32x_4\ge 263,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

20. $F(X)=x_1+x_2+3x_3-x_4\to\min;$

$$\begin{cases}23x_1+12x_2+15x_3+31x_4\ge 119;\\31x_1-11x_2+31x_3+39x_4\ge 202;\\17x_1+41x_2-61x_3+7x_4\ge 189,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

21. $F(X)=x_1+2x_2+x_3-2x_4\to\max;$

$$\begin{cases}39x_1+18x_2+27x_3+53x_4\le 747;\\35x_1+55x_2+24x_3-46x_4\le 723;\\27x_1-61x_2+68x_3-29x_4\le 779,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

22. $F(X)=x_1+x_2+x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}8x_1+10x_2+29x_3+49x_4\le 351;\\21x_1+3x_2+74x_3-69x_4\le 312;\\85x_1-17x_2+73x_3-87x_4\le 463,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

23. $F(X)=x_1-x_2+3x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}9x_1+11x_2+2x_3+13x_4\le 785;\\21x_1+5x_2+14x_3-37x_4\le 712;\\81x_1-46x_2+54x_3-92x_4\le 839,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

24. $F(X)=x_1+x_2+3x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}3x_1+3x_2+23x_3+13x_4\le 333;\\23x_1+50x_2-57x_3-58x_4\le 350;\\91x_1-46x_2+77x_3-82x_4\le 390,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

25. $F(X)=8x_1+x_2+x_3-x_4\to\min;$

$$\begin{cases}3x_1+13x_2+21x_3-15x_4\ge 151;\\31x_1+12x_2-34x_3+62x_4\ge 117;\\67x_1+18x_2-27x_3+53x_4\ge 173,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

26. $F(X)=x_1+6x_2+5x_3+x_4\to\min;$

$$\begin{cases}33x_1+13x_2+21x_3+15x_4\ge 151;\\31x_1-11x_2-24x_3+16x_4\ge 182;\\17x_1+12x_2-22x_3+32x_4\ge 193,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0;$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

27. $F(X)=x_1-9x_2-x_3+x_4\to\max;$

$$\begin{cases}4x_1-5x_2+11x_3+17x_4\le 256;\\16x_1+9x_2+22x_3-32x_4\le 287;\\31x_1-16x_2+14x_3+12x_4\le 299,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

28. $F(X)=3x_1+x_2-x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}10x_1+11x_2+12x_3+13x_4\le 337;\\21x_1+25x_2-34x_3-17x_4\le 484;\\31x_1+36x_2+27x_3+29x_4\le 365,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

29. $F(X)=5x_1+x_2-x_3-4x_4\to\max;$

$$\begin{cases}25x_1+31x_2+28x_3+29x_4\le 737;\\21x_1-25x_2+44x_3-33x_4\le 879;\\54x_1-32x_2+34x_3-41x_4\le 783,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

30. $F(X)=4x_1+x_2+3x_3+x_4\to\min;$

$$\begin{cases}68x_1+73x_2+51x_3+35x_4\ge 167;\\83x_1-71x_2-64x_3+96x_4\ge 172;\\87x_1+82x_2-52x_3+32x_4\ge 165,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

Для одной из следующих задач провести численное исследование зависимости получаемого решения от величины: а) коэффициента целевой функции при неизвестном; б) свободного члена в ограничении; в) коэффициента в ограничении задачи.

31. $F(X)=x_1-8x_2+x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases}13x_1+11x_2+2x_3-x_4\le 457;\\21x_1+65x_2-84x_3-37x_4\le 493;\\61x_1-76x_2-37x_3-51x_4\le 472,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

32. $F(X)=x_1+x_2+x_3-9x_4\to\min;$

$$\begin{cases}7x_1+19x_2+31x_3+55x_4\ge 593;\\81x_1-82x_2-14x_3+21x_4\ge 597;\\33x_1+91x_2-99x_3-87x_4\ge 583,\end{cases}$$

$x_1\ge 0; x_2\ge 0; x_3\ge 0; x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

33. $F(X)=3x_1+x_2+x_3+4x_4\to\min;$

$$\begin{cases}61x_1-13x_2-21x_3+17x_4\ge 521;\\42x_1-15x_2-14x_3-14x_4\ge 215;\\83x_1-12x_2-32x_3+13x_4\ge 363,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

34. $F(X)=x_1+x_2+x_3+2x_4\to\min;$

$$\begin{cases}23x_1+42x_2+15x_3+51x_4\ge 213;\\71x_1-41x_2+31x_3+29x_4\ge 235;\\97x_1+61x_2-81x_3+9x_4\ge 349,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

35. $F(X)=-x_1-x_2-x_4\to\min;$

$$\begin{cases}50x_1+13x_2-21x_3-17x_4\ge 563;\\22x_1+15x_2-14x_3-14x_4\ge 422;\\17x_1-+12x_2-32x_3-13x_4\ge 462,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

36. $F(X)=10x_1+11x_2-x_3\to\min;$

$$\begin{cases}77x_1+82x_2+5x_3-x_4\ge 135;\\40x_1-41x_2-31x_3-9x_4\ge 246;\\45x_1+61x_2+81x_3+9x_4\ge 290,\end{cases}$$

$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0,$

x_i – целые, $i=\overline{1,4}.$

37. $F(X) = 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 6x_1 - 13x_2 - 21x_3 + 17x_4 \geq 521; \\ 45x_2 - 14x_3 - 14x_4 \geq 215; \\ 83x_1 + 32x_3 + 13x_4 \geq 363, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

38. $F(X) = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 23x_1 - 42x_2 - 15x_3 + 51x_4 \geq 213; \\ -71x_1 + 41x_2 + 31x_3 - 29x_4 \geq 235; \\ 97x_1 + 61x_2 - 81x_3 + 9x_4 \geq 349, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

39. $F(X) = 7x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 53x_2 - 21x_3 + 17x_4 \geq 214; \\ 4x_1 - 15x_2 - 54x_3 - 14x_4 \geq 315; \\ 3x_1 - 12x_2 - 52x_3 + 13x_4 \geq 367, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

40. $F(X) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 42x_2 + 15x_3 + 51x_4 \geq 139; \\ -x_1 - x_2 + 31x_3 + 12x_4 \geq 147; \\ 17x_1 + 6x_2 - 81x_3 + 11x_4 \geq 234, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0,$

x_i – целые, $i = \overline{1,4}.$

Контрольные вопросы

1. Какая задача называется задачей целочисленного программирования?
2. Какие методы существуют для решения задач целочисленного программирования?
3. Сформулируйте алгоритм решения задачи целочисленного программирования методом ветвей.
4. Как составить неравенство Гомори по строке симплексной таблицы?
5. Запишите алгоритм метода Гомори.
6. Какие решения могут быть потеряны при применении метода Гомори?
7. Какие решения считаются оптимальными для задач целочисленного программирования?
8. Выполняются ли критерии оптимальности линейного программирования для оптимальных решений задач целочисленного программирования?
9. Как найти решение задачи целочисленного программирования средствами Excel?
10. Сколько раз можно применять метод Гомори при поиске оптимального решения задачи целочисленного программирования?
11. Приведите пример решения задачи методом Гомори.

2.4. Транспортная задача

Транспортная задача является особым типом задач целочисленного программирования, для которых разработаны простые и эффективные способы нахождения оптимального решения, не требующие громоздких вычислений. Экономико-математическую модель транспортной задачи рассмотрим на следующем примере. Имеются три поставщика некоторого товара и четыре потребителя этого товара. Причём известна стоимость перевозки товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Требуется найти объёмы перевозок для каждой пары "поставщик − потребитель" так, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальны, запасы всех поставщиков реализованы и потребности всех потребителей удовлетворены (табл.2.7).

Т а б л и ц а 2.7

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 x_{11}	2 x_{12}	4 x_{13}	8 x_{14}	340
A_2	8 x_{21}	9 x_{22}	6 x_{23}	5 x_{24}	200
A_3	3 x_{31}	5 x_{32}	7 x_{33}	2 x_{34}	160
Спрос потребителей b_j	120	170	150	260	$\sum a_i = 700$ $\sum b_i = 700$

В левом верхнем углу произвольной клетки стоит коэффициент, равный стоимости перевозки от поставщика, номер которого указан в этой строке, к потребителю, номер которого указан в столбце.

В теории транспортной задачи таблица вида табл. 2.7 называется **таблицей поставок**.

Построим экономико-математическую модель данной задачи, обозначив через x_{ij} объем поставляемого товара от i -го поставщика к j- му потребителю. Чтобы запасы каждого поставщика были полностью реализованы, должны быть справедливы уравнения баланса для каждой строки таблицы поставок, т. е. выполняться равенства

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 340; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 160. \end{cases} \tag{2.1}$$

Чтобы спрос каждого из потребителей был удовлетворён, должны быть справедливы уравнения баланса для каждого столбца таблицы поставок, то есть

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 170; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 150; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 260. \end{cases} \tag{2.2}$$

Поскольку объём перевозимого груза величина неотрицательная, то должны выполняться ограничения на переменные x_{ij}:

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1, 2, 3; \ j = 1, 2, 3, 4.$$

Суммарные затраты F на перевозку определяются указанными в таблице поставок тарифами перевозок и размерами поставок:

$$\begin{gathered} F = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_{ij} = 7x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 8x_{14} + 8x_{21} + 9x_{22} + 6x_{23} + \\ + 5x_{24} + 3x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} + 2x_{34}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Решить транспортную задачу − значит *на множестве неотрицательных решений системы ограничений найти такое решение, при котором линейная функция принимает минимальное значение*.

Транспортная задача называется ***закрытой***, если сумма запасов всех n поставщиков равна сумме потребностей всех m потребителей:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

В противном случае транспортная задача называется ***открытой***. Решение открытой транспортной задачи сводят к решению закрытой транспортной задачи введением фиктивных потребителей, когда сумма запасов превышает сумму потребностей, или фиктивных поставщиков, когда сумма потребностей превышает сумму запасов. При этом тарифы перевозок для фиктивных поставщиков и потребителей принимаются равными нулю.

Число основных (базисных) переменных закрытой транспортной задачи равно $m+n-1$, где n − число поставщиков; m − число потребителей; так как в закрытой транспортной задаче сумма запасов всех поставщиков равна сумме потребностей всех потребителей.

При заполнении таблицы поставок клетки, соответствующие неосновным (свободным) переменным, оставляют пустыми, а в клетки, соответствующие базисным переменным, проставляют числа, определяющие количество поставки x_{ij}. В частности, если транспортная задача вырожденная, некоторые поставки могут иметь нулевую величину и в этом случае в базисную клетку записываем число 0.

Нахождение первоначального базисного распределения − опорного плана задачи − возможно любым из известных методов: наименьшей стоимости, "северо-западного угла", Фогеля, наибольшего предпочтения.

Рассмотрим ***метод "северо-западного угла".*** "Северо-западным углом" называется ячейка таблицы поставок, соответствующая значению переменной x_{11}. В эту ячейку записываем максимально возможную поставку, определяя её по формуле

$$x_{11} = \min(a_1; b_1) = D. \tag{2.4}$$

Если $D = a_1$, то запас первого поставщика распределен полностью, и переходим к заполнению клетки с x_{21}, записывая в неё наименьшее из чисел a_2 и $b_1 - D$. Если $D = b_1$, то полностью удовлетворена потребность первого потребителя, тогда переходим к заполнению клетки с x_{12}, записывая в неё наименьшее из чисел $a_1 - D$ и b_2. Так, постепенно двигаясь по таблице поставок, распределяем все запасы и удовлетворяем все потребности. Движение по таблице поставок может быть или по горизонтали, или строго по вертикали, а повороты при движении по трассе делаются только под прямым углом.

При заполнении таблицы следим за выполнением баланса по строкам и столбцам. Число заполненных клеток в полученном распределении должно быть равным числу базисных (основных) переменных. Если поворот происходит в клетке, где размер поставки равен нулю, то говорят о вырожденном плане поставок. В этом случае нулевая поставка записывается в клетку, где трасса распределения поставок делает поворот, и клетка считается занятой.

Если распределение выполняется без вычислительных ошибок, в последнюю заполняемую клетку запишется число, получаемое автоматически и равное остатку нераспределённых количеств у последнего из участвующих в распределении поставщиков или количеству неудовлетворённого спроса последнего потребителя.

Получаемое распределение по методу "северо-западного угла" для транспортной задачи, исходные данные которой содержатся в табл. 2.7, показано в табл. 2.8.

Найденный опорный план записывается матрицей

$$X_0 = \begin{pmatrix} 120 & 170 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 160 \end{pmatrix},$$

а значение целевой функции на этом плане, равное стоимости поставок, равно

$$F = 7 \cdot 120 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 160 = 2800.$$

Таблица 2.8

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 120	2 170	4 50	8	340
A_2	8	9	6 100	5 100	200
A_3	3	5	7	2 160	160
Спрос потребителей b_j	120	170	150	260	$\sum a_i = 700$ $\sum b_i = 700$

Другим методом определения опорного плана поставок является ***метод наименьшей стоимости***.

В первую очередь при определении объёмов поставок занимают клетки, имеющие наименьшие тарифы перевозок. Так, в рассматриваемом примере начнём с клетки (A_1, B_2), имеющей тариф 2. От первого поставщика ко второму потребителю поставим максимально возможное количество груза, а именно $x_{12} = \min\{340, 170\} = 170$. Потребности второго потребителя полностью удовлетворены, и все клетки второго столбца далее не рассматриваем.

На втором шаге распределения выбираем клетку (A_3, B_4) с тарифом 2 и делаем в неё поставку $x_{34} = \min\{160, 260\} = 160$. Теперь запас третьего поставщика полностью израсходован и все клетки третьей строки далее не рассматриваем.

Соответственно, по наименьшим значениям остающихся неиспользованными в табл. 2.9 тарифов делаем следующие поставки:

$$x_{13} = \min\{340 - 170, 150\} = \min\{170, 150\} = 150;$$
$$x_{24} = \min\{200, 260 - 160\} = \min\{200, 100\} = 100;$$
$$x_{11} = \min\{340 - 150 - 170, 120\} = \min\{20, 120\} = 20;$$
$$x_{21} = \min\{200 - 100, 120 - 20\} = \min\{100, 100\} = 100.$$

Последняя поставка получается автоматически, так как остаётся только одна клетка для заполнения и туда помещается остаток запасов и потребностей. Они равны, поскольку сумма всех запасов и сумма всех потребностей равны.

Таблица 2.9

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 20	2 170	4 150	8	340
A_2	8 100	9	6	5 100	200
A_3	3	5	7	2 160	160
Спрос потребителей b_j	120	170	150	260	$\sum a_i = 700$ $\sum b_i = 700$

Найденный опорный план записан в табл. 2.9 и может быть представлен матрицей

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 170 & 150 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 160 \end{pmatrix},$$

а значение целевой функции на этом плане равно

$$F = 7 \cdot 20 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 150 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 160 = 2700.$$

Методом наименьшей стоимости получился лучший опорный план, так как значение целевой функции на нем меньше на 100 единиц. Тем не менее, и этот план может быть не оптимальным.

Критерий оптимальности для транспортной задачи: базисное распределение поставок оптимально тогда и только тогда, когда оценки всех свободных клеток неотрицательны.

Для определения оценок свободных клеток используют два взаимозаменяемых метода: распределительный и потенциалов.

Рассмотрим один из них, а именно ***метод потенциалов***.

Потенциалы — числа для нахождения оценок допустимого плана, полученного в ходе распределения запасов поставщиков.

Потенциалы для поставщиков и потребителей вычисляются по тарифам c_{ij} ***занятых*** клеток таблицы поставок. Для потенциалов поставщиков u_i и потребителей v_j, соответствующих занятым клеткам, справедливы равенства

$$u_i + v_j = c_{ij},\ i = 1,...,m;\ j = 1,...,n\ . \tag{2.5}$$

Так как занятых клеток на одну меньше, чем число потенциалов, значение одного из потенциалов (все равно какого) назначается произвольно и может быть любым действительным числом (обычно полагают равным нулю, чтобы не усложнять вычисления остальных потенциалов). Разрешая равенства (2.5) относительно потенциалов, получаем их числовые значения.

Оценки ***свободных*** клеток таблицы поставок рассчитываются по формулам

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j),\ i = 1,...,m;\ j = 1,...,n\ . \tag{2.6}$$

Если построенное первоначальное решение не удовлетворяет критерию оптимальности, то среди свободных клеток, имеющих отрицательную оценку, выбираем ту, для которой абсолютная величина оценки наибольшая. Отмечаем эту клетку знаком " + " и строим из неё ***цикл***.

Циклом в таблице поставок называют ломаную линию, проходящую через занятые клетки, начинающуюся и заканчивающуюся в одной и той же свободной клетке. Эта ломаная линия имеет вершины в клетках и звенья, лежащие вдоль строк и столбцов таблицы поставок. Причём ломаная должна быть связной, и в каждой вершине ломаной встречаются два звена, одно из которых располагается по строке, а другое − по столбцу. Клетки, через которые проходит ломаная линия, не делая в них поворота, называются ***транзитными***, и имеющиеся в них поставки не участвуют в процессе перераспределения. Таким образом, цикл проходит через занятые клетки и только через одну свободную клетку, начинаясь и заканчиваясь в ней.

Последовательно отмечаем вершины цикла знаками " + " и " − " так, чтобы соседние вершины были отмечены противоположными знаками.

Среди поставок, находящихся в клетках помеченных знаком "−", выбираем наименьшую и помещаем ее в пустую клетку, помеченную знаком " + ". Затем рассчитываем новые значения поставок, прибавляя выбранное число ко всем поставкам, стоящим в клетках, помеченных знаком " + ", и вычитая его из всех поставок, стоящих в клетках, помеченных знаком " − ". Для вновь полученного плана поставок рассчитываем по занятым клеткам потенциалы, а затем оценки новых свободных клеток.

Если критерий оптимальности выполняется для полученного плана, то задача решена. В противном случае продолжаем процесс перераспределения поставок до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение транспортной задачи.

Для вычисления оценки свободной клетки (A_s, B_k) таблицы поставок ***распределительным методом*** необходимо построить цикл для неё и найти оценку по формуле

$$\delta_{sk} = c_{sk} - c_{s,k+1} + c_{s-1,k+1} - \ldots + c_{s+1,k-1} - c_{s+1,k},$$

где записаны в порядке прохождения цикла с чередованием знаков "+" и "−" тарифы перевозок для всех клеток, образующих цикл оцениваемой свободной клетки.

Пример 2.3. Решить транспортную задачу с опорным планом, заданным в табл. 2.6, методом потенциалов.

*Решение***.** Вычислим потенциалы для занятых клеток и результаты расчётов поместим в табл. 2.10:

$$u_1 = 0;\ u_1 + v_1 = c_{11} \to 0 + v_1 = 7 \to v_1 = 7;$$
$$u_1 + v_2 = c_{12} \to 0 + v_2 = 2 \to v_2 = 2;$$
$$u_1 + v_3 = c_{13} \to 0 + v_3 = 4 \to v_3 = 4;$$
$$u_2 + v_1 = c_{21} \to u_2 + 7 = 8 \to u_2 = 8 - 7 = 1;$$
$$u_2 + v_4 = c_{24} \to 1 + v_4 = 5 \to v_4 = 5 - 1 = 4;$$
$$u_3 + v_4 = c_{34} \to u_3 + 4 = 2 \to u_3 = 2 - 4 = -2.$$

Рассчитаем оценки свободных клеток таблицы поставок:

$$\delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 8 - 0 - 4 = 4 > 0;$$
$$\delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 9 - 1 - 2 = 6 > 0;$$

$$\delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 6 - 1 - 4 = 1 > 0;$$
$$\delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 3 + 2 - 7 = -2 < 0;$$
$$\delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 5 + 2 - 2 = 5 > 0;$$
$$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 7 + 2 - 4 = 5 > 0.$$

Т а б л и ц а 2.10

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков, a_i	Потенциалы u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 20	2 170	4 150	8	340	$u_1 = 0$
A_2	8 – 100	9	6	5 100 +	200	$u_2 = 1$
A_3	3 +	5	7	2 – 160	160	$u_3 = -2$
Спрос потребителей b_j	120	170	150	260	Σ = 700	
Потенциалы v_j	$v_1 = 7$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 4$		

Среди найденных оценок одна меньше нуля, следовательно, найденный план не является оптимальным. Делаем перераспределение поставки в клетку (A_3, B_1).

Цикл, найденный для перемены плана поставок, показан на рис. 8.

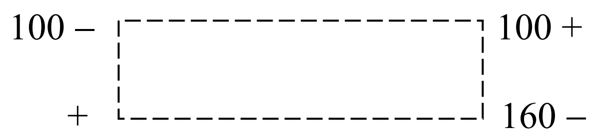


Рис. 8

Находим размер перемещаемой в клетку (A_3, B_1) поставки по размерам отмеченных знаком "–" поставок, а именно:

$$x_{31} = \min(x_{21}, x_{34}) = \min(100, 160) = 100.$$

Прибавляем число 100 к поставкам, отмеченным знаком "+", вычитаем число 100 из поставок, отмеченных знаком "–", получаем распределение поставок, показанных на рис. 9.

Рис. 9

Заносим результаты в новую таблицу поставок (табл. 2.11). Для вновь полученного плана поставок и по тарифам занятых клеток считаем значения потенциалов.

Т а б л и ц а 2.11

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков, a_i	Потенциалы u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 20	2 170	4 150	8	340	$u_1 = 0$
A_2	8	9	6	5 200	200	$u_2 = -1$
A_3	3 100	5	7	2 60	160	$u_3 = -4$
Спрос потребителей b_j	120	170	150	260	$\Sigma = 700$	
Потенциалы v_j	$v_1 = 7$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 6$		

Находим оценки свободных клеток:

$$\delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 8 - 0 - 6 = 2 > 0;$$
$$\delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 8 + 1 - 7 = 2 > 0;$$
$$\delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 9 + 1 - 2 = 8 > 0;$$
$$\delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 6 + 1 - 4 = 3 > 0;$$
$$\delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 5 + 4 - 2 = 7 > 0;$$
$$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 7 + 4 - 4 = 7 > 0.$$

Для найденного плана

$$X_2 = \begin{pmatrix} 20 & 170 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \\ 100 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

подсчитаем значение целевой функции:

$$F(x) = 7 \cdot 20 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 150 + 5 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 60 = 2500.$$

Поскольку все оценки свободных клеток положительные, найденный план (2.7) является оптимальным планом транспортной задачи. Минимальная стоимость перевозок определяется значением целевой функции на этом плане, и она равна 2500 денежных единиц.

2.5. Решение транспортной задачи средствами Excel

Решим средствами Excel задачу, представленную табл. 2.7.

Исходные условия этой задачи представлены в таблице листа Excel на рис. 10.

В ячейках с A2 по D4 представлена таблица стоимостей (тарифов) перевозок. При этом столбцы, обозначенные буквами A, B, C, D, соответствуют первому, второму, третьему и четвёртому потребителям, а строки с номерами "2", "3", "4" соответствуют первому, второму и третьему поставщикам.

Ячейки с A6 по D8 зарезервированы под таблицу объёмов поставок (перевозок).

В строке с номером "10" указаны величины спроса каждого из потребителей. А в столбце, обозначенном буквой "F", – запасы каждого из поставщиков.

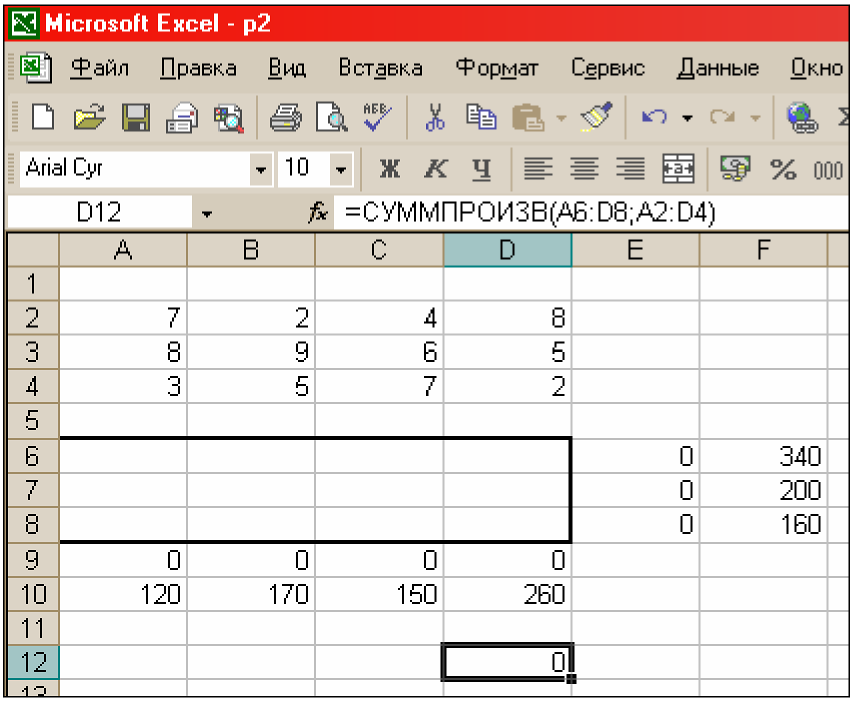


Рис. 10

Для того чтобы воспользоваться возможностями, предоставляемыми пунктом меню "***Поиск решения...***", в ячейку D12 вводим формулу для вычисления целевой функции:

=СУММПРОИЗВ(A6:D8;A2:D4)

Затем открываем окно "Поиск решения". Значения, которые нужно ввести непосредственно в окне "Поиск решения", указаны на рис. 11. А именно, необходимо указать целевую ячейку.

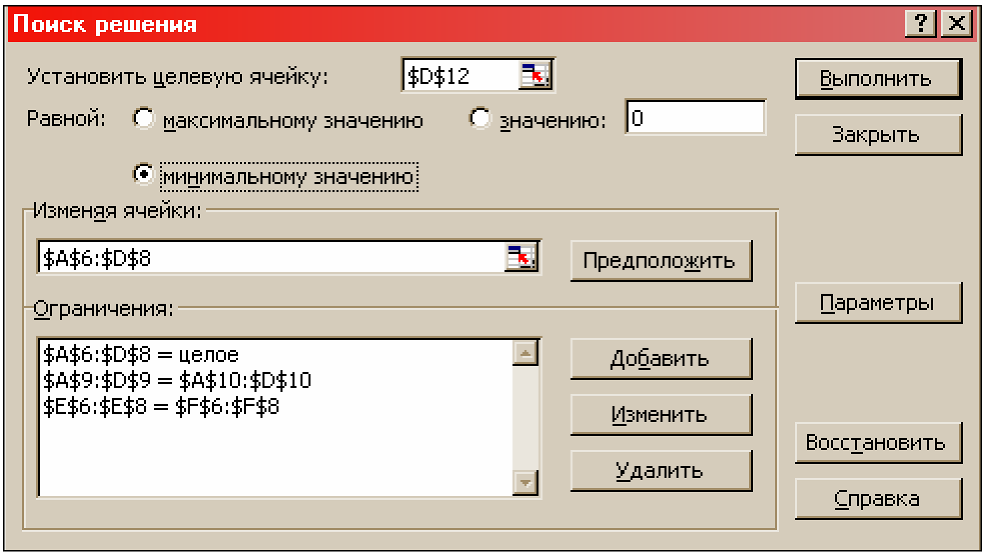


Рис. 11

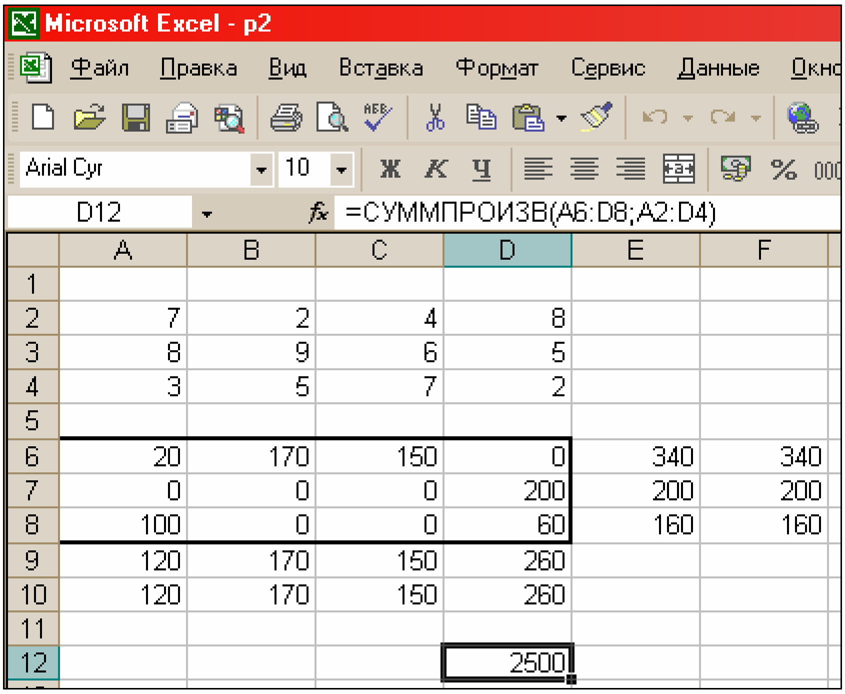
Затем нужно указать, какое из экстремальных значений целевой функции ищется в решаемой задаче: максимум или минимум.

Далее указываются ячейки, зарезервированные под таблицу объёмов поставок (перевозок). В окне "Ограничения" указывается, в каких ячейках находятся ограничения по запасам и потребностям.

Кроме того, в этом окне указываются ограничения для переменных.

Прежде чем выполнять расчёты оптимального решения конкретной транспортной задачи, необходимо установить нужные параметры.

Заполнив все необходимые данные и нажав на кнопку "Выполнить", получаем решение задачи (рис. 12).



	A	B	C	D	E	F
1						
2	7	2	4	8		
3	8	9	6	5		
4	3	5	7	2		
5						
6	20	170	150	0	340	340
7	0	0	0	200	200	200
8	100	0	0	60	160	160
9	120	170	150	260		
10	120	170	150	260		
11						
12				2500		

Рис. 12

В ячейках, обведённых жирной рамкой, получено оптимальное решение транспортной задачи, а именно, план поставок X_2 (см.(2.4.7)). В ячейке D12 находится минимальное значение целевой функции:

$$F_{\min} = 2500.$$

Задачи

1. Найти решение транспортной задачи для заданных параметров.

В клетках каждой из следующих таблиц указаны значения величины c_{ij} — тарифы перевозки единицы груза из i-го пункта отправления (от поставщика с номером i) в j-й пункт назначения (потребителю с номером j). В столбце справа за пределами таблицы записаны запасы a_i груза (продукции, товара) в i-м пункте отправления; внизу под таблицей, за её пределами, указаны потребности b_j в грузе в j-м пункте назначения.

Решить соответствующую транспортную задачу методом потенциалов и средствами Excel.

Значение параметра n в следующих таблицах равно последней цифре текущего года.

Вариант 1

1	6	7	4	6	19
6	1	9	5	9	19
7	5	2	6	3	19
9	10	1	3	8	19
15	15	14	16	16	

Вариант 2

3	2	4	1	9	16
2	1	7	9	8	15
8	1	1	2	5	23
3	5	11	2	9	16
14	18	14	24	10	

Вариант 3

2	7	1	2	5	18
8	2	9	5	9	18
1	17	4	6	3	18
7	9	21	5	7	18
14	14	14	16	14	

Вариант 4

4	9	2	1	2	15
1	2	11	1	6	14
7	1	4	5	3	15
10	9	7	12	11	16
12	13	12	11	12	

Вариант 5

10	11	12	14	6	13
4	1	7	5	3	23
7	5	4	6	3	13
9	2	1	5	7	23
11	19	18	12	12	

Вариант 6

7	12	1	2	11	16
6	10	9	19	1	16
8	1	15	2	3	16
5	11	10	2	9	16
14	14	15	10	11	

Вариант 7

2	7	1	4	3	17
8	11	8	5	9	21
7	5	4	1	3	16
2	10	2	6	7	21
15	15	15	14	16	

Вариант 8

5	10	2	19	6	21
19	2	7	28	16	21
6	11	4	5	13	20
3	7	17	15	14	22
23	15	15	15	15	

Вариант 9

1	7	4	4	10	22
15	12	16	15	9	28
3	5	4	6	13	38
16	2	21	17	8	25
25	23	21	20	24	

Вариант 10

43	22	44	36	49	17
26	36	39	21	16	17
28	38	41	33	32	21
35	45	31	22	39	45
14	14	40	18	14	

Вариант 11

23	27	26	31	30	$22\cdot n$
28	22	39	35	29	$19\cdot n$
41	33	24	36	43	$19\cdot n$
22	29	$21+n$	25	47	$19\cdot n$
$15n$	$15n$	$16n$	$18n$	$15n$	

Вариант 12

14	19	12	13	13	$27n$
11	12	$11+n$	18	16	$17n$
17	18	14	15	10	$20n$
15	23	16	12	19	$16n$
$14n$	$14n$	$24n$	$18n$	$10n$	

Вариант 13

n	4	12	14	10	$18n$
11	12	9	5	19	$12n$
17	15	4	6	13	$19n$
3	5	7	8	2	$19n$
$15n$	$15n$	$5n$	$16n$	$15n$	

Вариант 14

$3n$	10	13	18	19	$26n$
2	6	17	9	16	$24n$
8	1	14	3	15	$21n$
3	12	11	22	9	$16n$
$14n$	$14n$	$14n$	$17n$	$20n$	

Вариант 15

23	$7n$	13	21	14	$29n$
18	12	19	3	12	$22n$
11	17	24	6	13	$21n$
22	19	21	15	7	$28n$
$15n$	$25n$	$24n$	$16n$	$20n$	

Вариант 16

42	19	26	13	12	$22n$
11	22	$10n$	18	16	$21n$
17	18	14	15	13	$28n$
25	29	17	18	22	$39n$
$38n$	$25n$	$12n$	$20n$	$12n$	

Вариант 17

18	15	19	24	13	$23n$
16	$10n$	19	15	19	$19n$
17	15	24	16	10	$37n$
19	12	12	14	17	$41n$
$25n$	$45n$	$15n$	$25n$	$15n$	

Вариант 18

3	$2n$	4	34	19	$16n$
26	6	7	9	16	$18n$
8	8	7	3	30	$25n$
35	25	11	2	9	$36n$
$34n$	$14n$	$14n$	$18n$	$10n$	

Вариант 19

23	17	15	21	30	$18n$
18	12	19	$5n$	9	$28n$
10	1	24	6	13	$48n$
12	19	21	15	27	$18n$
$14n$	$24n$	$34n$	$26n$	$14n$	

Вариант 20

14	9	$6n$	3	12	$15n$
21	2	11	18	16	$30n$
17	18	4	15	13	$25n$
5	19	17	8	6	$15n$
$12n$	$12n$	$22n$	$27n$	$12n$	

Вариант 21

21	17	12	24	30	$19n$
16	$10n$	19	15	13	$29n$
19	15	24	16	14	$19n$
29	22	21	15	11	$39n$
$15n$	$15n$	$35n$	$16n$	$25n$	

Вариант 22

33	22	14	34	19	$26n$
36	16	37	29	26	$47n$
28	18	17	23	30	$21n$
35	25	$11n$	22	39	$16n$
$34n$	$24n$	$24n$	$18n$	$10n$	

Вариант 23

13	27	13	22	23	$38n$
18	12	7	$5n$	11	$18n$
12	17	24	6	13	$28n$
4	19	21	19	17	$18n$
$14n$	$14n$	$24n$	$16n$	$34n$	

Вариант 24

14	9	$2n$	13	12	$15n$
12	12	11	18	6	$25n$
7	8	4	15	13	$25n$
15	10	3	9	16	$15n$
$12n$	$12n$	$32n$	$12n$	$12n$	

Вариант 25

3	7	18	21	11	$39n$
8	12	9	$3n$	2	$22n$
10	17	14	6	13	$21n$
23	14	10	5	7	$28n$
$15n$	$25n$	$14n$	$36n$	$20n$	

Вариант 26

14	$9n$	18	1	12	$32n$
11	22	10	18	16	$21n$
17	18	14	15	13	$38n$
15	19	13	21	6	$20n$
$38n$	$25n$	$12n$	$20n$	$12n$	

Вариант 27

11	5	2	2	4	$23n$
1	10	19	15	19	$49n$
7	$6n$	24	16	10	$37n$
9	12	12	4	17	$21n$
$25n$	$25n$	$25n$	$35n$	$25n$	

Вариант 28

33	22	34	34	19	$46n$
26	16	37	29	16	$18n$
28	18	$17n$	23	30	$25n$
35	25	31	22	19	$36n$
$24n$	$14n$	$34n$	$28n$	$20n$	

Вариант 29

23	17	5	21	$3n$	$12n$
6	12	19	5	9	$28n$
10	11	24	6	13	$28n$
12	19	21	15	27	$20n$
$14n$	$22n$	$14n$	$28n$	$14n$	

Вариант 30

15	$2n$	14	13	12	$15n$
13	19	11	18	16	$20n$
8	18	4	15	13	$35n$
11	9	17	8	6	$15n$
$10n$	$12n$	$14n$	$27n$	$12n$	

2. Для строительства трёх дорог используется гравий из четырёх карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров, соответственно, равны 330, 260 и 410 тыс. т. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог, соответственно, равны 220, 300, 230 и 250 тыс. т.

Известны также тарифы перевозок 1 тыс. т. гравия из каждого карьера к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 12 & 8 \\ 7 & 5 & 9 & 11 \\ 6 & 11 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нём каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.

3. На четырёх стройках ежедневно используются для настила полов объёмы пиломатериалов, равные 175, 180, 160 и 185 тыс. м^3. Пиломатериалы поставляют на стройки четыре лесопилки, вырабатывающие за день их объёмы, равные 100, 150, 250 и 200 тыс. м^3 соответственно. Тарифы перевозок с каждой лесопилки на каждую стройку для 1 тыс. м^3 пиломатериалов известны и заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 11 & 7 \\ 6 & 4 & 8 & 10 \\ 5 & 10 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок пиломатериалов, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

4. На трёх элеваторах ежедневно производится 120, 180 и 100 т муки. Эта мука используется на четырёх хлебозаводах, ежедневные потребности которых равны, соответственно, 80, 160, 90 и 70 т. Тарифы перевозок 1 т муки с элеватора к каждому хлебозаводу заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 12 & 9 \\ 6 & 5 & 9 & 11 \\ 7 & 16 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозки муки, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

5. В трёх хранилищах горючего еженедельно хранятся 165, 135 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных, соответственно, 170, 120, 60 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 9 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

6. На трёх железнодорожных станциях скопилось 110, 130 и 140 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на 5 других железнодорожных станций, с потребностями в вагонах 90, 80, 60, 90 и 60 вагонов соответственно.

Учитывая, что с первой станции не представляется возможным перегнать вагоны на вторую и четвёртую станции, составить план перегонки вагонов, чтобы общая стоимость была минимальной.

Тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 7 & 8 \\ 4 & - & 6 & - & 3 \\ 9 & 10 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. На молокозаводе имеется три типа производственных линий. На всех линиях могут вырабатываться четыре вида продукции: молоко (М), кефир (К), сметана (С) и творог (Т). Производительность каждой линии и затраты, связанные с изготовлением продукции, приведены в табл. 2.12.

Таблица 2.12

Типы линий	Производительность линии при выработке, т/ч				Затраты на 1 т продукции при выработке, руб.			
	М	К	С	Т	М	К	С	Т
1	22	28	16	40	30	15	34	25
2	10	13	7	19	40	24	40	15
3	6	8	4	12	70	30	55	20

Учитывая, что фонд рабочего времени каждой линии, соответственно, равен 100, 230 и 190 часов, составить такой план их загрузки, при котором общие затраты, обусловленные производством 1100 т молока, 800 т кефира, 700 т сметаны и 760 т творога, являются минимальными.

8. На каждом из четырёх филиалов кондитерского объединения могут производиться конфеты четырёх видов. Учитывая необходимость углубления специализации, на филиалах решено сосредоточить выпуск только по одному виду изделий. Себестоимость каждого из изделий на каждом из филиалов различна и определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 8 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 9 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти такое распределение выпуска продукции между филиалами, при котором общая себестоимость продукции будет минимальной.

9. На четырёх участках леса могут быть посажены сосна, ясень, клён и берёза. Площадь каждого из участков соответственно равна 500, 240, 135 и 360 га. С учётом наличия семян следует засеять сосной, ясенем, клёном и берёзой, соответственно, 280, 225, 310 и 420 га. Всхожесть каждой из культур для каждого участка земли различна и задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 78 & 92 & 87 & 95 \\ 67 & 69 & 77 & 76 \\ 75 & 85 & 93 & 67 \\ 86 & 83 & 79 & 91 \end{pmatrix}.$$

Определить, сколько га на каждом из участков следует засеять каждой породой деревьев, чтобы общее число выросших деревьев было максимальным.

10. Консервный комбинат имеет в своём составе 5 заводов, на каждом из которых может изготовляться четыре вида консервов. Мощности заводов равны 300, 250, 350, 420 и 180 тыс. банок в день. Ежедневные потребности в консервах каждого вида также известны и составляют 430, 500, 430 и 440 т. Себестоимость 1 т каждого вида консервов на каждом заводе задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти такое распределение выпуска консервов между заводами, при котором себестоимость изготовляемой продукции минимальна.

11. В пять газетных киосков поставляется печатная продукция с трёх оптовых баз. Ежедневно с баз вывозится 150, 230 и 340 единиц продукции соответственно. Киоски могут разместить 170, 160, 100, 120 и 180 единиц

продукции. Тарифы перевозок единицы продукции с каждой базы в киоски задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 & 13 & 14 \\ 12 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 15 & 11 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 12 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

12. Мёд закупается на четырёх пасеках в количествах 230, 320, 520 и 210 т и хранится на пяти складах. Складские помещения могут вместить по 300 т мёда каждое. Затраты, связанные с закупкой и доставкой 1 т мёда, задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 17 & 21 & 24 & 15 & 16 \\ 24 & 10 & 16 & 14 & 23 \\ 15 & 11 & 20 & 21 & 18 \\ 18 & 19 & 22 & 23 & 17 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план доставки мёда на склады, чтобы затраты были минимальными.

13. Мебельная фабрика имеет в своём составе три филиала, которые производят наборы мягкой мебели в количествах, равных 400, 600 и 500 единиц. Эту продукцию получают четыре торговые точки, расположенные в разных местах. Их торговые площади позволяют размещать 500, 350, 450 и 400 комплектов соответственно. Стоимость перевозок единицы продукции от каждого филиала соответствующим потребителям задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} 110 & 125 & 145 & 120 \\ 115 & 135 & 164 & 125 \\ 130 & 120 & 140 & 136 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план поставок, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

14. Фирма имеет пять торговых точек по продаже мороженого с объемом холодильников 120, 130, 100, 90 и 150 кг. Мороженое завозится с четырёх комбинатов в количестве 140, 110, 175 и 165 кг соответственно.

Затраты, связанные с закупкой и доставкой 1кг мороженого, задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 70 & 71 & 74 & 75 & 60 \\ 54 & 50 & 65 & 54 & 55 \\ 55 & 51 & 50 & 61 & 55 \\ 65 & 70 & 57 & 65 & 57 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план поставки мороженого, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

15. Фирма обратилась в три кадровые агентства за строительными рабочими для своих четырёх строек. На стройки требуется 53, 47, 98 и 33 рабочих соответственно. Кадровые агентства нашли для фирмы 80, 90 и 70 рабочих. Причём транспортные расходы на одного рабочего в зависимости от нахождения места его работы и расположения кадрового агентства будут определяться матрицей тарифов

$$\begin{pmatrix} 11 & 9 & 14 & 10 \\ 17 & 15 & 16 & 15 \\ 10 & 12 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план распределения рабочих по рабочим местам, при котором общие транспортные расходы будут минимальными.

Контрольные вопросы

1. Для решения каких экономических задач применяются математические модели, приводящие к транспортным задачам?
2. В каких отношениях друг к другу находятся участники экономических процессов, моделируемых с помощью транспортной задачи?
3. Какая цель ставится при решении транспортной задачи?
4. Как принято называть участников экономических или производственных процессов, описываемых с помощью математической модели в виде транспортной задачи?
5. Как называются объёмы материальных благ для различных участников экономических или производственных процессов, описываемых с помощью математической модели в виде транспортной задачи?
6. Сформулируйте математическую постановку транспортной задачи линейного программирования.
7. К чему стремится целевая функция транспортной задачи?
8. Что означают коэффициенты у неизвестных в целевой функции транспортной задачи?
9. Какие экономические величины характеризуют неизвестные транспортной задачи?

10. Какие значения принимают коэффициенты при неизвестных в ограничениях транспортной задачи?

11. Какая транспортная задача называется закрытой?

12. Какая транспортная задача называется открытой?

13. Как называется таблица, с помощью которой находится решение транспортной задачи?

14. Какие правила следует выполнять при записи численных данных транспортной задачи в таблицу поставок?

15. Каким критерием следует руководствоваться при определении оптимального плана распределения транспортной задачи?

16. Как найти план транспортной задачи методом "северо-западного угла"?

17. Как найти план транспортной задачи методом наименьшей стоимости перевозок?

18. Как найти план транспортной задачи методом наибольшего предпочтения тарифов?

19. Что называется циклом?

20. Сколько циклов можно построить для каждой свободной клетки таблицы поставок?

21. Сколько занятых клеток должно быть в таблице поставок?

22. Какой план поставок называется вырожденным?

23. Что называется потенциалом клетки?

24. Как оценить незанятые клетки с помощью распределительного метода?

25. Как посчитать потенциалы для занятых клеток?

26. Как методом потенциалов найти оценки незанятых клеток ?

27. Как перераспределить поставку из занятой клетки в свободную?

28. Сколько клеток можно перераспределить за один шаг алгоритма транспортной задачи?

29. Когда можно говорить о существовании нескольких планов распределения поставок?

30. Когда транспортная задача не имеет решения?

31. Как находится решение открытой транспортной задачи для случая, когда сумма запасов превышает сумму потребностей?

32. Как находится решение открытой транспортной задачи для случая, когда сумма потребностей превышает сумму запасов?

33. В каком случае тарифы перевозок транспортной задачи назначаются равными нулю?

34. В каком случае тарифы перевозок транспортной задачи назначаются равными очень большому числу?

35. Для чего применяется запрещение или блокирование перевозок?

36. Что следует сделать при записи величины запаса поставщика A_i, если известно, что из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j нужно завезти не менее заданного количества груза a_{ij}?

37. Какой приём применяется для обеспечения обязательной перевозки по соответствующим маршрутам определённого заранее количества груза?

38. Какой приём используется для того, чтобы избежать случая зацикливания?

39. Как решить транспортную задачу методами Excel?

40. В каком виде должна быть записана числовая информация при решении задачи методами Excel?

41. В каком виде выводится решение транспортной задачи при использовании методов Excel?

42. Какой численный метод используется при решении транспортной задачи в Excel?

43. Возможно ли зацикливание при решении транспортной задачи в Excel?

44. Как решить в Excel транспортную задачу открытого типа?

45. Можно ли указать полученный вырожденный план при решении транспортной задачи в Excel?

3. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

3.1. Основные понятия теории игр

Книга Неймана и Моргенштерна "Теория игр и экономического поведения" вышла в 1944 году – это год рождения теории игр.

Теория игр занимается разработкой различного рода рекомендаций по принятию решений в условиях конфликтной ситуации. Такие игры называются ***антагонистическими***. В математике конфликтные ситуации представляют упрощённой моделью как игру двух, трёх и более числа игроков. ***Игра*** – это действительный или формальный конфликт, в котором имеется несколько участников, каждый из которых стремится к достижению собственных целей. Математическая модель конфликтной ситуации называется также ***игрой***; стороны, участвующие в конфликте, – ***игроками***, а исход конфликта – ***выигрышем***. Для каждой формализованной игры вводят ***правила***, которые устанавливают допустимые действия каждого игрока в процессе игры.

Игра называется **парной**, если в ней участвуют два игрока, и ***множественной***, если число игроков больше двух. Игра называется ***игрой с***

нулевой суммой, если сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся на данный момент времени ситуации. Если число стратегий у каждого из игроков конечно, игра называется конечной, если число стратегий − бесконечно, то бесконечной.

Далее будем рассматривать парные конечные игры. Для того чтобы ***решить*** игру, или найти решение игры, следует выбрать для каждого игрока стратегию, которая удовлетворяет условию ***оптимальности***. Оптимальным называется такой результат игры, когда при многократном повторении игры один из игроков получает ***максимально возможный средний выигрыш***, а второй придерживается любой своей стратегии.

Вместе с тем, при выполнении условия оптимальности игры второй игрок должен иметь при многократном повторении игры ***минимально возможный средний проигрыш***, если первый игрок придерживается своей стратегии. Одновременно выиграть в антагонистической игре оба игрока не могут, поэтому в начале игры распределяют роли выигрывающего и проигрывающего игроков между участниками игры. Стратегии, обеспечивающие максимум выигрыша одного игрока или минимум проигрыша второго игрока, называются ***оптимальными***.

Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию ***устойчивости***, т. е. любому из игроков должен быть не выгоден отказ от своей оптимальной стратегии в игре.

Целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока.

Рассмотрим парную конечную игру с ***нулевой суммой***. При нулевой сумме игры разница между абсолютными значениями выигрыша одного игрока и проигрыша другого полагается равной нулю. Пусть игрок A располагает m личными стратегиями, которые обозначим $A_1, A_2,..., A_m$, а игрок B имеет n личных стратегий $-B_1, B_2,..., B_n$. Причём выигрыш игрока A полагается равным проигрышу игрока B и наоборот. Такая игра имеет размерность $m \times n$.

В результате выбора игроками пары стратегий из всех возможных для них стратегий, а именно

$$A_i \text{ и } B_j,\ i = 1, 2,..., m;\ j = 1, 2,..., n$$

однозначно определяется исход игры, т. е. выигрыш a_{ij} игрока A и проигрыш $(-a_{ij})$ игрока B.

Если значения выигрышей a_{ij} известны для любой пары стратегий (A_i, B_j), то матрица P, составленная из этих выигрышей, называется ***платёжной матрицей***, или ***матрицей игры***:

$$P = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы P соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы – стратегиям второго.

Игру, определяемую матрицей P, имеющей m строк и n столбцов, называют ***конечной игрой размерности*** $m \times n$.

Игра, для которой можно составить матрицу игры, называется ***матричной***.

Платёжную матрицу игры в дальнейшем, когда этого потребует необходимость, будем записывать и в виде расширенной таблицы (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Стратегии первого игрока	Стратегии второго игрока			
	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Пример 3.1. Составить платёжную матрицу для следующей игры.

Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга записывают числа 1, 2 или 3. Размер выигрыша определяется суммой названных чисел. При этом, если число чётное, выигрывает игрок A, нечётное − игрок B.

Решение. Если игроки записывают по единице, то сумма чётная и выигрыш игрока A равен 2, если один из игроков записывает единицу, а другой – двойку, то сумма нечётная и выигрыш игрока B составляет 3, а выигрыш игрока A является проигрышем в ту же сумму, т. е. его выигрыш равен (-3).

Рассуждая так же и далее, получаем следующую матрицу платежей для этой игры.

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	–3	4
A_2	–3	4	–5
A_3	4	–5	6

,

или

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.2. Составить платёжную матрицу для следующей парной игры.

Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга произносят слова "сосна" и "орех". Если слова, сказанные игроками совпадают, то банк игры забирает игрок A, если игроки произносят отличающиеся друг от друга слова, то банк забирает игрок B.

Решение. У каждого игрока в этой игре по две стратегии. Если выигрыш банка обозначим платежом 1, а проигрыш – платежом (– 1), то получим матрицу платежей

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.3. (*Игра полковника Блотто*).

Город A имеет двое ворот. В городе находится гарнизон, состоящий из 5 полков. На город нападает противник, имеющий 4 таких же полка. Защитники выигрывают борьбу за ворота, если количество их полков больше, чем количество нападающих на них полков. Выигрыш по одним воротам равен числу, на единицу большему количества нападающих полков (сохранены ворота, и противник "лишился" своих полков, поскольку они заняты нападением на эти ворота). Если количество полков защитников меньше, чем количество нападающих полков, то проигрыш защитников по одним воротам равен (–1) − ворота потеряны. Если количество полков защитников равно количеству нападающих, то выигрыш защитников по этим воротам равен нулю: ничья, ворота никому не достались. Общий выигрыш защитников города, записываемый в матрицу платежей, равен сумме выигрышей по двум воротам.

Так, при защите первых ворот одним полком, вторых – четырьмя, при нападении на первые ворота 1 полка, а на вторые – трёх полков получаем, что "выигрыш" на первых воротах равен 0, на вторых выигрыш равен 3 + 1 = 4 и сумма выигрыша защитников равна 4.

Составить матрицу платежей игры полковника Блотто.

Решение. Рассмотрим возможные стратегии защитников и нападающих при заданном количестве полков. Стратегии защитников, распределяющих свои полки между двумя воротами города, составят следующие пары чисел: (0; 5), (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1), (5; 0). Всего получилось шесть стратегий. Стратегии противника распределения их полков по тем же воротам могут быть следующие: (0; 4), (1; 3), (2; 2), (3; 1), (4; 0). Всего пять стратегий. Следовательно, матрица этой игры будет иметь шесть строк и пять столбцов. Её элемент a_{11} найдем как платеж при применении первой стратегии A_1 = (0; 5) защитниками и первой стратегии B_1 = (0; 4) нападающими. Так как 0 = 0, "выигрыш" на первых воротах равен 0, на вторых выигрыш равен 4 + 1 = 5, и сумма выигрыша защитников на двух воротах равна 5.

Элемент a_{12} равен платежу при применении стратегий A_1 = (0; 5) и B_2 = (1; 3). Так как 0 < 1, "выигрыш" на первых воротах равен (–1), на вторых выигрыш равен 3 + 1 = 4, следовательно, $a_{12} = -1 + 4 = 3$. Элемент a_{13} равен платежу при применении стратегий A_1 = (0; 5) и B_3 = (2; 2), то есть $a_{13} = -1 + 2 + 1 = 2$. Аналогично для пары стратегий A_1 = (0; 5) и B_4 = (3; 1) получаем $a_{14} = -1 + 1 + 1 = 1$, и для пары стратегий A_1 = (0; 5) и B_5 = (4; 0) платеж $a_{15} = -1 + 0 + 1 = 0$.

Так же вычисляем значения элементов второй строки таблицы:

для стратегий A_2 = (1; 4) и B_1 = (0; 4) элемент $a_{21} = 0 + 1 + 0 = 1$;

для стратегий A_2 = (1; 4) и B_2 = (1; 3) элемент $a_{22} = 0 + 3 + 1 = 4$;

для стратегий A_2 = (1; 4) и B_3 = (2; 2) элемент $a_{23} = -1 + 2 + 1 = 2$;

для стратегий A_2 = (1; 4) и B_4 = (3; 1) элемент $a_{24} = -1 + 1 + 1 = 1$;

для стратегий A_2 = (1; 4) и B_5 = (4; 0) элемент $a_{25} = -1 + 0 + 1 = 0$.

Аналогично получаем элементы третьей и всех последующих строк:

$a_{31} = 0 + 1 \ -1 = 0$; $a_{32} = 1 + 1 + 0 = 2$; $a_{33} = 0 + 2 + 1 = 3$; $a_{34} = -1 + 1 + 1 = 1$;

$a_{35} = -1 + 0 + 1 = 0$; $a_{41} = 0 + 1 - 1 = 0$; $a_{42} = 1 + 1 - 1 = 1$; $a_{43} = 2 + 1 + 0 = 3$ и т. д. Результаты вычислений записываем в матрицу платежей (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Стратегии защитников	Стратегии нападающих				
	$B_1 = (0; 4)$	$B_2 = (1; 3)$	$B_3 = (2; 2)$	$B_4 = (3; 1)$	$B_5 = (4; 0)$
$A_1 = (0; 5)$	5	3	2	1	0
$A_2 = (1; 4)$	1	4	2	1	0
$A_3 = (2; 3)$	0	2	3	1	0
$A_4 = (3; 2)$	0	1	3	2	0
$A_5 = (4; 1)$	0	1	2	4	1
$A_6 = (5; 0)$	0	1	2	3	5

3.2. Решение игр в чистых стратегиях (с седловой точкой)

Рассмотрим игру $m \times n$ с матрицей $P = (a_{ij}), i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2, ..., n$. Выбирая стратегию A_i, игрок A должен рассчитывать, что игрок B ответит на неё той стратегией B_j, при которой выигрыш игрока A будет наименьшим.

Пусть α_i – наименьший выигрыш игрока A при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий игрока B, тогда

$$\alpha_i = \min_{j=1,\ldots,n} a_{ij}, \qquad (3.1)$$

то есть наименьшее число в i-ой строке платёжной матрицы.

Среди всех чисел α_i, $i = 1, 2, ..., m$ выберем наибольшее:

$$\alpha = \max_{i=1,..,m} \alpha_i . \qquad (3.2)$$

Следовательно,

$$\alpha = \max_{i=1,..,m} \min_{j=1,...,n} a_{ij} . \qquad (3.3)$$

Число α называется ***нижней ценой игры***, или ***максиминным выигрышем*** (***максимином***). Это гарантированный выигрыш игрока A при любой стратегии игрока B. Стратегия, соответствующая максимину, называется ***максиминной стратегией***.

Игрок B заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока A, поэтому он выбирает стратегию B_j, учитывая при этом максимально возможный выигрыш для A. Пусть β_j − наибольший выигрыш игрока A при выборе им всех возможных стратегий, когда игрок B выбирает стратегию B_j, тогда

$$\beta_j = \max_{i=1,..,m} a_{ij} . \qquad (3.4)$$

Одновременно β_j является наибольшим проигрышем игрока B при выборе им стратегии B_j, поэтому среди всех чисел β_j выбираем наименьшее, чтобы найти ту стратегию игрока B, при которой его проигрыш будет наименьшим. Это число обозначим β, и оно равно

$$\beta = \min_{j=1,...,n} \max_{i=1,..,m} a_{ij} . \qquad (3.5)$$

Число β называется **верхней ценой игры,** или ***минимаксным выигрышем*** (***минимаксом***). Это гарантированный проигрыш игрока B. Гарантированный в том смысле, что средний проигрыш игрока B при многократном повторении игры он не будет больше этого значения. Так же и выигрыш игрока A не превысит верхней цены игры. Стратегия, соответствующая минимаксу, называется ***минимаксной стратегией***.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее "осторожных" минимаксной и максиминной стратегий, называется ***принципом минимакса***. Этот принцип следует из того, что в антагонистической игре каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели его противника.

Пример 3.4. Определим верхнюю и нижнюю цены игры и соответствующие стратегии для игры с платежной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для первой строки платежной матрицы, т. е. при выборе игроком стратегии A_1, получаем число

$$\alpha_1 = \min_{j=1,2,3} a_{1j} = \min(-1; 0; 1) = -1.$$

Это число достигается при выборе игроком *B* стратегии B_1. Для второй строки (стратегия A_2) − число

$$\alpha_2 = \min_{j=1,2,3} a_{2j} = \min(1; -1; 0) = -1 \text{ (стратегия } B_2).$$

Для третьей строки (стратегия A_3) − число

$$\alpha_3 = \min_{j=1,2,3} a_{3j} = \min(0;\ 1; -1) = -1,$$

что соответствует стратегии B_3 игрока *B*.

Гарантируя себе минимальный выигрыш при любой стратегии игрока *B*, то есть

$$\alpha = \max_{i=1,..,m} \alpha_i = \max(-1; -1; -1) = -1,$$

игрок *A* может выбирать любую из своих стратегий, поскольку каждая из них для данной игры является максиминной.

Аналогично максимальный проигрыш игрока *B* при выборе стратегии B_1 определяется числом $\beta_1 = \max(-1;\ 1;\ 0) = 1$. При выборе стратегии B_2 − числом $\beta_2 = \max(0; -1; 1) = 1$. При выборе стратегии B_3 − числом $\beta_3 = \max(1;\ 0; -1) = 1$. Максимальный проигрыш игрока *B* при любой стратегии игрока *A* равен верхней цене игры $\beta = \min(1;1;1) = 1$.

Этот же результат получаем, используя для решения задачи непосредственно формулу (3.5):

$$\beta = \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,..,m} a_{ij} = \min_{j=1,2,3} \max_{i=1,2,3} a_{ij} = \min_{j=1,2,3} (1;\ 1;\ 1) = 1.$$

Таким образом, любая стратегия игрока *B* является минимаксной. Результаты решения задачи можно представить в табл. 3.3.

В рассмотренном примере нижняя и верхняя цены игры различны. При многократном повторении этой игры средняя ***цена игры*** будет равна числу *v*, которое принимает значение из промежутка, определяемого числами α и β, а именно, справедливо неравенство

$$\alpha \le v \le \beta. \tag{3.6}$$

Таблица 3.3

A_i	B_j			α_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	-1	0	1	-1
A_2	1	-1	0	-1
A_3	0	1	-1	-1
β_j	1	1	1	$\alpha=-1$ $\beta=1$

Если верхняя и нижняя цены игры совпадают, то их общее значение называют ***чистой ценой игры***, или ***ценой игры***, при этом справедливо равенство

$$\alpha=\beta=v. \tag{3.7}$$

В этом случае игра имеет решение в чистых стратегиях, а именно, оптимальной для игрока A является максиминная стратегия, а оптимальной стратегией для игрока B – минимаксная. Эта пара чистых стратегий A_i и B_j определяется ценой игры v, т. е. числом, стоящим на пересечении i-й строки и j-го столбца платёжной матрицы, равным v.

Пара чистых стратегий A_i и B_j даёт оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке.

Игра, для которой $\alpha=\beta$, называется ***игрой с седловой точкой***.

Таким образом, решение игры в чистых стратегиях существует тогда и только тогда, когда платёжная матрица имеет седловую точку.

Пример 3.5. Решить игру в чистых стратегиях, если матрица игры

$$P=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 10 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Все расчёты удобно проводить в табл. 3.4, аналогичной табл. 3.3.

Таблица 3.4

A_i	B_j			α_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	7	9	5
A_2	10	8	9	8
A_3	8	7	7	7
β_j	10	8	9	$\alpha = \beta = 8$

Из таблицы получаем, что платёжная матрица имеет седловую точку, а именно $a_{22} = 8$. Следовательно, цена игры $v = 8$, причем она достигается при паре чистых стратегий A_2 и B_2, являющихся оптимальными стратегиями. Оптимальным решением игры являются найденная пара чистых стратегий и соответствующая им цена игры, равная 8.

Задачи

1. Мебельное предприятие планирует к массовому выпуску новую модель офисной мебели. Спрос на эту модель не может быть точно определён. Однако можно предположить, что его величина характеризуется тремя возможными состояниями спроса − I, II, III.

С учётом этих состояний спроса анализируются три возможных варианта выпуска данной модели − А, Б, В. Каждый из этих вариантов требует своих затрат и обеспечивает, в конечном счёте, различный эффект.

Прибыль, тыс. руб., которую получит предприятие при данном объёме выпуска модели и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей

$$\begin{array}{cccc} & I & II & III \\ A & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+4 \\ Б & \lambda-1 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ B & \lambda & \lambda-1 & \lambda+3 \end{array}$$

Требуется найти объём выпуска модели офисной мебели, обеспечивающей среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, если параметр λ равен значению двух последних цифр в номере зачётной книжки.

В следующих задачах найти верхнюю и нижнюю цены игры. Если возможно, найти решение игры в чистых стратегиях.

2. $P=\begin{pmatrix}15&17&19\\10&18&19\\18&17&17\end{pmatrix}$. 3. $P=\begin{pmatrix}11&38&15\\24&11&13\\13&21&16\end{pmatrix}$. 4. $P=\begin{pmatrix}55&57&79\\70&88&89\\88&76&77\end{pmatrix}$.

5. $P=\begin{pmatrix}10&10&18\\19&15&18\\18&14&16\end{pmatrix}$. 6. $P=\begin{pmatrix}21&28&25\\24&19&19\\23&21&26\end{pmatrix}$. 7. $P=\begin{pmatrix}35&53&39\\50&38&59\\48&56&37\end{pmatrix}$.

8. $P=\begin{pmatrix}65&67&79\\61&78&99\\98&77&97\end{pmatrix}$. 9. $P=\begin{pmatrix}15&18&35\\14&15&16\\18&14&16\end{pmatrix}$. 10. $P=\begin{pmatrix}45&54&46\\37&88&81\\88&49&82\end{pmatrix}$.

11. $P=\begin{pmatrix}17&17&19\\18&18&19\\15&17&17\end{pmatrix}$. 12. $P=\begin{pmatrix}21&23&25\\24&21&23\\23&21&21\end{pmatrix}$. 13. $P=\begin{pmatrix}25&25&27\\27&28&25\\28&25&27\end{pmatrix}$.

14. $P=\begin{pmatrix}35&37&39\\30&35&36\\31&31&31\end{pmatrix}$. 15. $P=\begin{pmatrix}11&38&15\\24&11&13\\13&21&16\end{pmatrix}$. 16. $P=\begin{pmatrix}51&51&58\\50&58&59\\58&56&57\end{pmatrix}$.

17. $P=\begin{pmatrix}11&10&13\\11&18&10\\11&17&13\end{pmatrix}$. 18. $P=\begin{pmatrix}18&18&15\\14&11&13\\13&21&16\end{pmatrix}$. 19. $P=\begin{pmatrix}15&27&23\\23&28&29\\29&26&25\end{pmatrix}$.

20. $P=\begin{pmatrix}98&97&99\\97&98&98\\98&97&97\end{pmatrix}$. 21. $P=\begin{pmatrix}31&35&35\\31&35&34\\31&31&38\end{pmatrix}$. 22. $P=\begin{pmatrix}49&48&49\\49&48&48\\48&49&49\end{pmatrix}$.

23. $P=\begin{pmatrix}91 & 97 & 92\\ 91 & 98 & 93\\ 91 & 97 & 94\end{pmatrix}$. 24. $P=\begin{pmatrix}53 & 55 & 55\\ 51 & 55 & 54\\ 51 & 51 & 53\end{pmatrix}$. 25. $P=\begin{pmatrix}19 & 18 & 17\\ 19 & 17 & 18\\ 18 & 19 & 19\end{pmatrix}$.

26. $P=\begin{pmatrix}11 & 16 & 13\\ 16 & 13 & 11\\ 13 & 11 & 11\end{pmatrix}$. 27. $P=\begin{pmatrix}68 & 67 & 68\\ 65 & 68 & 65\\ 68 & 77 & 68\end{pmatrix}$. 28. $P=\begin{pmatrix}14 & 18 & 29\\ 19 & 28 & 28\\ 28 & 19 & 19\end{pmatrix}$.

29. $P=\begin{pmatrix}39 & 37 & 49\\ 47 & 38 & 58\\ 58 & 37 & 47\end{pmatrix}$. 30. $P=\begin{pmatrix}21 & 35 & 45\\ 41 & 65 & 24\\ 31 & 41 & 58\end{pmatrix}$. 31. $P=\begin{pmatrix}45 & 47 & 43\\ 59 & 58 & 54\\ 77 & 59 & 57\end{pmatrix}$.

32. $P=\begin{pmatrix}79 & 77 & 74\\ 77 & 73 & 75\\ 78 & 73 & 74\end{pmatrix}$. 33. $P=\begin{pmatrix}21 & 32 & 31\\ 21 & 25 & 24\\ 31 & 21 & 25\end{pmatrix}$. 34. $P=\begin{pmatrix}65 & 65 & 65\\ 59 & 65 & 65\\ 57 & 58 & 65\end{pmatrix}$.

3.3. Приведение решения матричной игры к решению задачи линейного программирования

Пусть игра $m \times n$ задана платёжной матрицей $C=\left(a_{ij}\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$ Игрок A применяет стратегии $A_1, A_2, ..., A_m$, а игрок B – стратегии $B_1, B_2, ..., B_n$.

Смешанными стратегиями игроков A и B называют векторы $P=(p_1; p_2; ...; p_m)$ и $Q=(q_1; q_2; ...; q_n)$, координаты которых равны вероятностям применения игроками своих чистых стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$ и $B_1, B_2, ..., B_n$ соответственно.

События, состоящие в том, что игроки применяют какую-либо из своих чистых стратегий, образуют для каждого игрока полную группу событий. Следовательно, сумма координат векторов P и Q равна единице:

$$p_1 + p_2 + ... + p_m = 1;$$
$$q_1 + q_2 + ... + q_n = 1.$$

Кроме того, по свойству вероятности, для координат смешанных стратегий выполняются неравенства:

$$0 \le p_i \le 1,\ i = \overline{1,m};$$
$$0 \le q_j \le 1,\ j = \overline{1,n}.$$

Оптимальная стратегия P^* обеспечивает игроку A средний выигрыш, не меньший цены игры ν, при любой стратегии игрока B и выигрыш, равный цене игры ν, при оптимальной стратегии Q^* игрока B.

Без ограничения общности полагаем далее, что $\nu > 0$. Применяя оптимальную стратегию P^* против любой чистой стратегии Q_j игрока B, игрок A получает средний выигрыш или математическое ожидание выигрыша

$$a_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{mj}p_m \ge \nu.$$

Таким образом, вычисляя средние выигрыши игрока A для каждой из чистых стратегий игрока B, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \ge \nu; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \ge \nu; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \ge \nu. \end{cases}$$

Разделив каждое из неравенств на цену игры ν и вводя новые переменные

$$x_1 = \frac{p_1}{\nu},\ x_2 = \frac{p_2}{\nu}, \ldots,\ x_m = \frac{p_m}{\nu},$$

получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Целевую функцию для игрока A найдём, учитывая, что он стремится получить максимальный выигрыш в игре. Разделив равенство

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$$

на цену игры ν, получим равенство

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{\nu},$$

которое будет иметь наименьшее значение при достижении игроком A максимального выигрыша. Поэтому в качестве целевой функции можно взять функцию

$$F(X) = x_1 + x_2 + ... + x_m \tag{3.9}$$

и задачу линейного программирования сформулировать следующим образом: определить значения переменных $x_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},$ так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (3.8) и при этом целевая функция (3.9) имела минимальное значение.

Решая задачу (3.8) – (3.9), получаем оптимальную стратегию задачи линейного программирования $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, для которой значение целевой функции равно

$$F(X^*) = \min F(X).$$

Находим цену игры ν:

$$\nu = \frac{1}{F(X^*)}.$$

Вычисляем координаты смешанной оптимальной стратегии P^* игрока A:

$$p_i = \nu x_i,\ i = \overline{1,m}.$$

Чтобы найти оптимальную стратегию игрока B, составляем двойственную к (3.8) – (3.9) задачу и решаем ее. Получаем оптимальную стратегию $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ и вычисляем координаты оптимальной смешанной стратегии Q^* игрока B:

$$q_i = \nu y_j,\ j = \overline{1,n}.$$

В ходе решения двойственной задачи определяется максимальное значение целевой функции $G(Y^*) = \max G(Y)$, и цена игры может быть определена из равенства

$$\nu = \frac{1}{G(Y^*)}.$$

Таким образом, найдено оптимальное решение для игры.

Задачи

Найдите решение игр, определяемых следующими матрицами:

1. $P=\begin{pmatrix}17 & 10 & 13\\ 11 & 18 & 10\\ 11 & 17 & 19\end{pmatrix}$. 2. $P=\begin{pmatrix}28 & 18 & 15\\ 14 & 11 & 13\\ 23 & 21 & 26\end{pmatrix}$. 3. $P=\begin{pmatrix}15 & 27 & 23\\ 23 & 28 & 29\\ 29 & 26 & 25\end{pmatrix}$.

4. $P=\begin{pmatrix}95 & 97 & 99\\ 97 & 98 & 96\\ 98 & 97 & 97\end{pmatrix}$. 5. $P=\begin{pmatrix}41 & 35 & 55\\ 31 & 65 & 34\\ 61 & 39 & 38\end{pmatrix}$. 6. $P=\begin{pmatrix}49 & 88 & 79\\ 89 & 48 & 78\\ 48 & 49 & 69\end{pmatrix}$.

7. $P=\begin{pmatrix}91 & 97 & 92\\ 95 & 99 & 93\\ 98 & 93 & 94\end{pmatrix}$. 8. $P=\begin{pmatrix}53 & 58 & 55\\ 51 & 57 & 54\\ 52 & 51 & 56\end{pmatrix}$. 9. $P=\begin{pmatrix}49 & 28 & 17\\ 59 & 17 & 18\\ 38 & 19 & 39\end{pmatrix}$.

10. $P=\begin{pmatrix}11 & 16 & 13\\ 15 & 13 & 12\\ 12 & 11 & 10\end{pmatrix}$. 11. $P=\begin{pmatrix}61 & 67 & 68\\ 65 & 62 & 66\\ 68 & 77 & 69\end{pmatrix}$. 12. $P=\begin{pmatrix}14 & 18 & 29\\ 19 & 28 & 25\\ 27 & 29 & 19\end{pmatrix}$.

13. $P=\begin{pmatrix}39 & 54 & 49\\ 44 & 38 & 82\\ 54 & 46 & 81\end{pmatrix}$. 14. $P=\begin{pmatrix}21 & 35 & 45\\ 41 & 65 & 44\\ 31 & 48 & 58\end{pmatrix}$. 15. $P=\begin{pmatrix}75 & 47 & 43\\ 59 & 58 & 74\\ 76 & 59 & 57\end{pmatrix}$.

16. $P=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 5 & 3\\ 6 & 6 & 8 & 2\\ 7 & 7 & 8 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$. 17. $P=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 4 & 2\\ 5 & 5 & 8 & 5\\ 4 & 3 & 6 & 3\end{pmatrix}$. 18. $P=\begin{pmatrix}8 & 5 & 6 & 9\\ 1 & 3 & 7 & 8\\ 5 & 9 & 5 & 7\\ 9 & 2 & 3 & 6\\ 8 & 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

19. $P=\begin{pmatrix}23 & 25 & 22 & 27 & 29\\ 24 & 24 & 26 & 38 & 37\\ 29 & 10 & 27 & 24 & 51\end{pmatrix}$. 20. $P=\begin{pmatrix}27 & 29 & 33 & 10 & 11\\ 25 & 28 & 12 & 51 & 81\\ 35 & 11 & 16 & 18 & 31\end{pmatrix}$.

21. $P=\begin{pmatrix} 45 & 46 & 32 & 52 & 51 \\ 48 & 45 & 33 & 37 & 51 \\ 67 & 61 & 28 & 32 & 50 \end{pmatrix}$. 22. $P=\begin{pmatrix} 105 & 116 & 21 & 29 & 113 \\ 108 & 115 & 33 & 37 & 112 \\ 107 & 111 & 85 & 25 & 110 \end{pmatrix}$.

23. $P=\begin{pmatrix} 24 & 56 & 74 & 6 & 81 & 82 \\ 35 & 59 & 79 & 5 & 82 & 94 \\ 21 & 24 & 88 & 8 & 92 & 33 \\ 57 & 78 & 64 & 2 & 27 & 33 \end{pmatrix}$. 24. $P=\begin{pmatrix} 41 & 66 & 44 & 75 & 52 & 5 \\ 55 & 59 & 79 & 50 & 82 & 4 \\ 60 & 64 & 68 & 86 & 92 & 8 \\ 37 & 78 & 64 & 25 & 27 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $P=\begin{pmatrix} 24 & 56 & 74 & 46 & 81 & 82 \\ 35 & 59 & 79 & 50 & 82 & 94 \\ 21 & 24 & 88 & 86 & 92 & 33 \\ 57 & 78 & 64 & 25 & 27 & 33 \end{pmatrix}$. 26. $P=\begin{pmatrix} 41 & 66 & 44 & 75 & 52 & 55 \\ 55 & 59 & 79 & 50 & 82 & 94 \\ 60 & 64 & 68 & 86 & 92 & 98 \\ 37 & 78 & 64 & 25 & 27 & 33 \end{pmatrix}$

27. $P=\begin{pmatrix} 11 & 23 & 16 & 19 \\ 15 & 45 & 57 & 21 \\ 18 & 43 & 85 & 11 \\ 21 & 47 & 76 & 34 \\ 24 & 48 & 77 & 98 \\ 31 & 60 & 47 & 87 \\ 33 & 54 & 82 & 12 \end{pmatrix}$. 28. $P=\begin{pmatrix} 101 & 253 & 126 & 219 \\ 159 & 245 & 517 & 216 \\ 108 & 243 & 825 & 117 \\ 201 & 247 & 736 & 347 \\ 245 & 248 & 727 & 798 \\ 315 & 260 & 427 & 587 \\ 335 & 254 & 822 & 512 \end{pmatrix}$.

29. $P=\begin{pmatrix} 91 & 32 & 78 & 37 \\ 18 & 64 & 59 & 55 \\ 15 & 61 & 42 & 57 \\ 36 & 75 & 23 & 52 \\ 79 & 34 & 31 & 58 \\ 93 & 50 & 20 & 75 \\ 67 & 90 & 23 & 81 \end{pmatrix}$. 30. $P=\begin{pmatrix} -71 & -63 & -46 & -49 \\ -85 & -25 & -47 & -51 \\ -18 & -43 & -85 & -35 \\ -71 & -47 & -76 & -32 \\ -54 & -45 & -77 & -48 \\ -31 & -63 & -47 & -87 \\ -85 & -54 & -81 & -66 \end{pmatrix}$.

31. $P=\begin{pmatrix} -15 & -27 & -19 \\ -17 & -18 & -26 \\ -18 & -29 & -19 \end{pmatrix}$. 32. $P=\begin{pmatrix} -41 & -35 & -15 \\ -31 & -65 & -34 \\ -61 & -39 & -38 \end{pmatrix}$.

33. $P=\begin{pmatrix} -9 & 8 & -9 \\ -9 & -8 & -8 \\ -8 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

34. $P=\begin{pmatrix} -91 & -97 & -92 \\ -95 & -99 & -93 \\ -98 & -93 & -94 \end{pmatrix}$.

35. $P=\begin{pmatrix} -53 & -68 & -55 \\ -51 & -67 & -54 \\ 52 & -61 & -56 \end{pmatrix}$.

36. $P=\begin{pmatrix} -49 & 2 & -17 \\ 9 & -17 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

37. $P=\begin{pmatrix} -11 & 6 & -13 \\ 5 & -13 & -12 \\ -12 & -11 & -10 \end{pmatrix}$.

38. $P=\begin{pmatrix} -61 & -67 & -68 \\ -65 & -62 & -66 \\ -68 & -77 & -69 \end{pmatrix}$.

39. $P=\begin{pmatrix} -14 & 18 & -29 \\ 19 & -28 & 25 \\ -27 & 29 & -19 \end{pmatrix}$.

40. $P=\begin{pmatrix} -9 & -4 & -9 \\ -4 & -8 & -2 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

41. $P=\begin{pmatrix} -21 & -55 & -45 \\ -41 & -35 & -54 \\ -51 & -28 & -58 \end{pmatrix}$.

42. $P=\begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 \\ -5 & -5 & -7 \\ -6 & -9 & -7 \end{pmatrix}$.

43. $P=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & -5 & -3 \\ -6 & -6 & -8 & -2 \\ -7 & -7 & -8 & -5 \\ -4 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

44. $P=\begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -3 \\ -4 & -6 & -4 & -2 \\ -5 & -5 & -8 & -5 \\ -4 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

45. Составить матрицу игры двух игроков. Игроки называют по одной цифре из трёх: 1, 2 или 3. Если разность получается чётная, одно очко выигрывает первый игрок, если нечётная, то одно очко выигрывает второй игрок. Проигрыш игрока равен выигрышу его противника, но в матрицу игры записывается со знаком "–".

46. Два игрока бросают по очереди игральную кость (кубик). Бросив в свою очередь кубик, игрок продвигается по трассе игры на то число клеток, какое выпало на кубике. Это передвижение называется одним ходом игрока. Выигрывает тот, кто уйдёт дальше от начала дорожки. Другими словами, тот, у кого сумма чисел, выпавших за все сделанные в процессе игры ходы, на кубике будет наибольшей.

Составьте матрицу игры для возможных стратегий игроков в случае, если игра заканчивается через: а) один ход; б) два хода; в) три хода.

47. У двух игроков имеются по две карточки: на одной изображён заяц, а на другой − белка. Игроки показывают одновременно и независимо друг от друга одну из двух своих карточек. Затем убирают их и ещё раз показывают одну из своих карточек. Если за два хода игроки покажут больше двух зайцев, то выигрывает первый игрок, и его выигрыш равен числу показанных зайцев. И наоборот, если показано больше двух белок, то выигрывает второй игрок, и его выигрыш равен числу показанных белок. Найдите цену этой игры.

48. Два шахматиста сыграли друг с другом 12 партий. При этом их результаты получились такими, как задано в матрице платежей

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 8 & 8 \\ 6 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Каких стратегий им придерживаться в следующем турнире, чтобы игра для них была оптимальной?

49. Играют два игрока, составляя слова из букв слова "машина". Выигрывает тот, кто составит слова, сумма букв в которых будет больше. При этом совпадающие у противников слова не засчитываются. Сумма букв всех несовпадающих слов выигрывающего игрока засчитывается ему как выигрыш. Составьте матрицу игры.

50. Две фирмы продают на рынке четыре вида одинаковых товаров в течение трёх месяцев по отличающимся ценам. Зарегистрированная разница между ценами фирм на товары одинакового наименования для каждого из трёх месяцев указана в матрице

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку цены на все товары у первой фирмы все три прошедших месяца были меньше, то потребитель охотнее покупал её товары.

Найдите оптимальное решение этой игры.

3.4. Игры с природой

В условиях отсутствия достаточно полной информации о действиях противоположной стороны возникает неопределённость в принятии решения. Так, в задачах, приводящих к игровым, эта неопределённость может быть вызвана разными причинами: отсутствием информации об условиях, в которых происходит действие; неоднозначным характером развития событий в будущем; невозможностью получения полной информации о рассматриваемых процессах.

Условия, в которых может происходить действие игры, зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективных факторов, которые принято называть "природой". Такие игры называются ***играми с природой***.

С целью уменьшения неблагоприятных последствий при принятии решения следует учитывать степень риска и имеющуюся информацию. Таким образом, ***лицо***, ***принимающее решение*** (***статистик***), вступает в игровые отношения с природой. Любую хозяйственную деятельность человека можно рассматривать как игру с природой. В широком смысле под "природой" будем понимать совокупность неопределённых факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений.

Задачей экономиста или статистика является принятие наилучшего управленческого решения в каждой конкретной ситуации. Качество принимаемого решения зависит от информированности лица, принимающего решение (ЛПР), о ситуации, в которой принимается решение. В случае неопределённости ошибки в принятии решения наиболее вероятны. Умение использовать даже неполную информацию для обоснования принимаемых решений – это задача экономиста, а в решении её помогает математическая теория игры с природой.

От обычной матричной игры игру с природой отличает безразличие природы к результату игры и возможность получения статистиком дополнительной информации о состоянии природы.

Игры с природой дают математическую модель теории принятия решений в условиях частичной неопределённости. Для её описания используем обозначения матричных игр. Множество стратегий (состояний) природы обозначим B, отдельное состояние её $- B_j$, $j=\overline{1,n}$. Множество стратегий (решений) статистика обозначим A, а его отдельную стратегию в игре с природой $- A_i$, $i=\overline{1,m}$.

Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, используя, например, минимаксную стратегию, позволяющую получить наименьший проигрыш.

Природа действует совершенно случайно, возможные стратегии определяются как её состояния; например, условия погоды в данном районе, спрос на определённую продукцию, объём перевозок, сочетание производственных факторов и т. д. В некоторых задачах для состояний природы может быть задано распределение вероятностей, в других – оно неизвестно.

Условия игры с природой задаются платёжной матрицей

$$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент a_{ij} называется выигрышем статистика A, если он использует стратегию A_i, когда природа находится в состоянии B_j. Фактически это может быть значение некоторой функции, характеризующей эффективность принятого статистиком решения.

При решении игры с природой допускается исключение доминируемых стратегий только для стратегий статистика. Стратегии природы исключать нельзя, поскольку она может реализовать состояния, заведомо не выгодные для неё.

В ряде случаев при решении игры с природой используется ***матрица рисков R***. Элементы r_{ij} матрицы рисков равны разности между максимально возможным выигрышем статистика A и тем выигрышем, который он получит в тех же условиях B_j, если применит стратегию A_i, то есть

$$r_{ij}=\beta_j-a_{ij},$$

где $\beta_j=\max\limits_i a_{ij}$.

Критерии принятия решения

1. **Критерий Байеса**

При известном распределении вероятностей различных состояний природы критерием принятия решения является максимум математического ожидания выигрыша (или минимум математического ожидания риска).

Если вероятность состояния природы B_j равна q_j, $j=\overline{1,n}$,

$$\sum_{j=1}^{n} q_j=1,$$

то выбор i-й стратегии обеспечивает математическое ожидание выигрыша $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}q_j$. Принимается решение об использовании той стратегии, для которой математическое ожидание имеет максимальное значение, то есть

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j\ ,\ i = \overline{1,m}.$$

Для матрицы рисков за оптимальную стратегию принимается чистая стратегия A_i, при которой минимизируется средний риск, т.е. обеспечивается значение

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j\ ,\ i = \overline{1,m}.$$

2. **Принцип недостаточного основания Лапласа**

Этот принцип используют в случае, когда вероятности состояний природы неизвестны. Все состояния природы полагаются равновероятными, то есть

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}.$$

Оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимум среднего выигрыша.

3. **Максиминный критерий Вальда**

Этот критерий совпадает с критерием выбора максиминной стратегии, позволяющей получать нижнюю цену в парной игре с нулевой суммой. Критерий используется, если вероятности состояний природы неизвестны. За оптимальную стратегию принимается та, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, то есть

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

4. **Критерий минимального риска Сэвиджа**

В качестве оптимальной выбирается та стратегия, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, то есть

$$\gamma = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Критерии Вальда и Сэвиджа ориентируют статистика на самые неблагоприятные состояния природы, т. е. эти критерии выражают пессимистическую оценку ситуации.

5. **Критерий максимума**

Это оптимистический критерий. За оптимальную принимается стратегия, обеспечивающая получение самого большого из возможных выигрышей, то есть

$$\delta = \max_i \max_j a_{ij}\,.$$

6. **Критерий Гурвица**

Этот критерий учитывает как пессимистический, так и оптимистический подход к ситуации. За оптимальную стратегию принимается та, для которой выполняется соотношение

$$\rho = \max_i (\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}),$$

где $0 \le \lambda \le 1$.

Значение λ выбирается на основании субъективных соображений. Чем больше желание подстраховаться в данной ситуации, тем ближе к единице значение λ.

Пример 3.6. Возможно строительство четырёх типов цехов для производства мебели: A_1, A_2, A_3 и A_4. Эффективность использования каждого из них зависит от различных факторов: режима производства, стоимости материалов, спроса на продукцию, загрузку оборудования, удалённость от потребителей и поставщиков и т. п. Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из которых означает определённое сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Состояния природы обозначим B_1, B_2, B_3 и B_4.

Экономическая эффективность цехов изменяется в зависимости от состояний природы и задана матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Принять решение о выборе варианта строительства цеха.

Решение. Согласно критерию Вальда

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i (2;\, 2;\, 3;\, 1) = 3$$

следует предусмотреть строительство цеха A_3.

Критерий Сэвиджа применим к матрице рисков. Поскольку имеем $\max\limits_i a_{i1} = a_{31} = 8,$ элементы первого столбца матрицы рисков равны:

$$r_{11} = a_{31} - a_{11} = 3,\ r_{21} = a_{31} - a_{21} = 6,\ r_{31} = a_{31} - a_{31} = 0,\ r_{41} = a_{31} - a_{41} = 7.$$

Аналогично вычисляются все остальные элементы матрицы рисков, которая имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сэвиджа

$$\gamma = \min_i \max_j r_{ij} = \min_i (8; 6; 5; 7) = 5$$

следует предусмотреть строительство цеха A_3.

Воспользуемся критерием Гурвица. Положим значение $\lambda = 0{,}5$.Тогда

$$\rho = \max_i (\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}) = \max_i (5; 7; 6{,}5; 4{,}5) = 7,$$

то есть следует строить цех A_2.

Задачи

1. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение августа – сентября на единицу продукции составили: платья – 27 руб., костюма – 40 руб. Цена реализации составляет 100 и 150 руб. соответственно.

По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 1750 платьев и 740 костюмов, а при прохладной погоде – 670 платьев и 1260 костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающей ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить с использованием различных критериев, приняв степень оптимизма $\lambda = 0{,}5$.

2. Предприятие производит кондиционеры и обогреватели. Затраты на 1 усл. ед. продукции составляют: по кондиционерам – 2000 руб.; а по обогревателям – 1500 руб.

По данным маркетинговой службы установлено, что в сентябре – октябре можно реализовать в течение двух месяцев в условиях тёплой погоды 4100 кондиционеров и 1600 обогревателей; в условиях холодной погоды – 1500 кондиционеров и 3800 обогревателей.

Определить стратегию фирмы по выпуску продукции, обеспечивающей максимальный доход предприятию, если кондиционеры продаются в среднем по цене 5000 руб., а обогреватели – по цене 3000 руб.

3. Предприятие планирует выпуск трёх партий новых видов товаров в условиях неясной рыночной конъюнктуры. Известны отдельные возможные состояния B_1, B_2, B_3 и B_4, а также возможные объёмы выпуска изделий по каждому варианту и их условные вероятности, которые заданы в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Изделия	Объёмы выпуска изделий (C) и их вероятности (P) при различных состояниях спроса							
	B_1		B_2		B_3		B_4	
	C	P	C	P	C	P	C	P
A_1	4	0, 1	5	0, 3	3	0, 4	4	0, 2
A_2	6	0, 2	7	0, 4	8	0, 1	7	0, 3
A_2	8	0, 4	5	0, 2	7	0, 3	6	0, 1

Решить игры с природой, заданные следующими матрицами.

4. $P = \begin{pmatrix} 95 & 97 & 99 \\ 97 & 98 & 96 \\ 98 & 97 & 97 \end{pmatrix}.$ 5. $P = \begin{pmatrix} 41 & 35 & 55 \\ 31 & 65 & 34 \\ 61 & 39 & 38 \end{pmatrix}.$ 6. $P = \begin{pmatrix} 49 & 88 & 79 \\ 89 & 48 & 78 \\ 48 & 49 & 69 \end{pmatrix}.$

7. $P = \begin{pmatrix} 91 & 97 & 92 \\ 95 & 99 & 93 \\ 98 & 93 & 94 \end{pmatrix}.$ 8. $P = \begin{pmatrix} 53 & 58 & 55 \\ 51 & 57 & 54 \\ 52 & 51 & 56 \end{pmatrix}.$ 9. $P = \begin{pmatrix} 49 & 28 & 17 \\ 59 & 17 & 18 \\ 38 & 19 & 39 \end{pmatrix}.$

10. $P=\begin{pmatrix}11 & 16 & 13\\ 15 & 13 & 12\\ 12 & 11 & 10\end{pmatrix}$. 11. $P=\begin{pmatrix}61 & 67 & 68\\ 65 & 62 & 66\\ 68 & 77 & 69\end{pmatrix}$. 12. $P=\begin{pmatrix}14 & 18 & 29\\ 19 & 28 & 25\\ 27 & 29 & 19\end{pmatrix}$.

13. $P=\begin{pmatrix}39 & 54 & 49\\ 44 & 38 & 82\\ 54 & 46 & 81\end{pmatrix}$. 14. $P=\begin{pmatrix}21 & 35 & 45\\ 41 & 65 & 44\\ 31 & 48 & 58\end{pmatrix}$. 15. $P=\begin{pmatrix}75 & 47 & 43\\ 59 & 58 & 74\\ 76 & 59 & 57\end{pmatrix}$.

16. $P=\begin{pmatrix}98 & 97 & 99\\ 97 & 98 & 98\\ 98 & 97 & 97\end{pmatrix}$. 17. $P=\begin{pmatrix}31 & 35 & 35\\ 31 & 35 & 34\\ 31 & 31 & 38\end{pmatrix}$. 18. $P=\begin{pmatrix}49 & 48 & 49\\ 49 & 48 & 48\\ 48 & 49 & 49\end{pmatrix}$.

19. $P=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 5 & 3\\ 6 & 6 & 8 & 2\\ 7 & 7 & 8 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$. 20. $P=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 4 & 2\\ 5 & 5 & 8 & 5\\ 4 & 3 & 6 & 3\end{pmatrix}$. 21. $P=\begin{pmatrix}8 & 5 & 6 & 9\\ 1 & 3 & 7 & 8\\ 5 & 9 & 5 & 7\\ 9 & 2 & 3 & 6\\ 8 & 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

22. $P=\begin{pmatrix}91 & 97 & 92\\ 91 & 98 & 93\\ 91 & 97 & 94\end{pmatrix}$. 23. $P=\begin{pmatrix}53 & 55 & 55\\ 51 & 55 & 54\\ 51 & 51 & 53\end{pmatrix}$. 24. $P=\begin{pmatrix}19 & 18 & 17\\ 19 & 17 & 18\\ 18 & 19 & 19\end{pmatrix}$.

25. $P=\begin{pmatrix}11 & 16 & 13\\ 16 & 13 & 11\\ 13 & 11 & 11\end{pmatrix}$. 26. $P=\begin{pmatrix}68 & 67 & 68\\ 65 & 68 & 65\\ 68 & 77 & 68\end{pmatrix}$. 27. $P=\begin{pmatrix}14 & 18 & 29\\ 19 & 28 & 28\\ 28 & 19 & 19\end{pmatrix}$.

28. $P=\begin{pmatrix}39 & 37 & 49\\ 47 & 38 & 58\\ 58 & 37 & 47\end{pmatrix}$. 29. $P=\begin{pmatrix}21 & 35 & 45\\ 41 & 65 & 24\\ 31 & 41 & 58\end{pmatrix}$. 30. $P=\begin{pmatrix}15 & 27 & 23\\ 23 & 28 & 29\\ 29 & 26 & 25\end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется матричной игрой?
2. Какие матричные игры существуют?

3. Как называются участники матричной игры?
4. Как называется набор действий игрока?
5. Как задаётся парная игра с нулевой суммой?
6. Какая стратегия называется оптимальной?
7. Какая величина называется ценой игры?
8. Как определить минимаксную стратегию?
9. Как найти максиминную стратегию?
10. Чему равна нижняя цена игры?
11. Как найти верхнюю цену игры?
12. Какая игра называется игрой с седловой точкой?
13. Как найти решение игры с седловой точкой?
14. Какая стратегия называется "чистой"?
15. Как задаётся смешанная стратегия?
16. Какие игры имеют решение в смешанных стратегиях?
17. Какие игры можно решать аналитическим способом?
18. Какие игры можно решать графическим методом?
19. Какие игры можно свести к решению задачи линейного программирования?
20. Какому неравенству удовлетворяет цена игры?
21. Чему равен выигрыш игрока, когда только он играет по оптимальной стратегии?
22. Как связаны задачи линейного программирования и матрицы игр?
23. Какой матрицей задаётся парная игра?
24. Какая стратегия называется доминирующей?
25. Какая стратегия называется доминируемой?
26. Какими стратегиями можно пренебречь при определении оптимального решения игры?
27. Каков вероятностный смысл цены игры?
28. Как связаны платежи игроков в парной игре с нулевой суммой?
29. Какие экономические задачи решаются с помощью матричных игр?
30. Какой приём используется при решении игр с платёжными матрицами из отрицательных чисел?
31. Как изменится цена игры, если к каждому платежу прибавить одно и то же число?
32. Сколько ходов может содержать стратегия одного игрока?
35. Какие игры называются играми с природой?
36. Как находится оптимальное решение в играх с природой?
37. Какие оптимистические критерии применяются в играх с природой?
38. Как записывается критерий Гурвица?

4. ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Лабораторная работа 1

Линейное программирование

1. ***Цель работы*** – научиться составлять математическую модель экономической задачи в виде задачи линейного программирования и находить её решение средствами Excel.

2. ***Задачи работы***:

– уметь составить математическую модель экономической задачи в виде задачи линейного программирования;

– уметь преобразовывать ограничения одного вида в ограничения другого вида;

– уметь задавать целевые функции для различных экономических задач;

– уметь привести задачу линейного программирования к стандартному виду;

– уметь привести задачу линейного программирования к каноническому виду;

– уметь решить задачу линейного программирования средствами Excel;

– приобрести навыки решения различных задач линейного программирования;

– уметь объяснить полученные решения задачи линейного программирования и дать на основе их рекомендации;

– уметь решать экономические задачи, сводящиеся к задачам линейного программирования.

3. ***Общее описание задания***

При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта. Расчёты должны быть проведены средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из раздела 1 данного учебного пособия.

Таблица

Вариант	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	9	8	12	17	23	27	29	30
2	2	6	7	11	15	19	21	24	26	28
3	3	10	12	13	14	18	20	22	25	29
4	4	5	16	20	21	23	24	27	28	30
5	5	6	9	10	11	13	16	19	23	25
6	6	8	12	14	15	17	18	22	24	28
7	1	3	7	14	15	16	18	20	23	25
8	2	4	8	10	12	14	22	24	28	30
9	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
10	6	8	10	14	16	18	25	26	27	28
11	2	5	13	13	17	20	23	25	26	31
12	3	10	12	17	18	19	22	24	27	35
13	4	9	13	16	19	20	21	23	25	32
14	6	11	14	15	17	18	22	24	28	33
15	7	12	15	16	18	20	21	29	30	34

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ.

Лабораторная работа 2

Решение двойственных задач

1. ***Цель работы*** – научиться составлять двойственную задачу для любой задачи линейного программирования, находить решение пары двойственных задач средствами Excel и давать на основе полученных результатов рекомендации по решению производственных задач.

2. ***Задачи работы***:

– уметь составить для задачи линейного программирования двойственную ей;

– уметь найти решение двойственной пары задач симплексным методом;

– уметь записать решение пары двойственных задач линейного программирования по одной симплексной таблице;

– уметь решить двойственную задачу линейного программирования средствами Excel;

– приобрести навыки решения различных двойственных пар задач линейного программирования;

– уметь объяснить полученные решения двойственной пары задач линейного программирования и дать на основе их рекомендации по планированию экономического процесса.

3. ***Общее описание задания***

При выполнении лабораторной работы студент должен изучить раздел "Двойственность в линейном программировании" и записать пример решения двойственной пары задач симплексным методом. Затем решить задачи своего варианта. Расчёты должны быть проведены средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из раздела 1.4 данного учебного пособия.

Т а б л и ц а

Вариант	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	9	8	12	17	23	27	29	30
2	2	6	7	11	15	19	21	24	26	28
3	3	10	12	13	14	18	20	22	25	31
4	4	5	16	20	21	23	24	27	32	40
5	5	6	9	10	11	13	16	33	35	39

Окончание табл.

Вариант	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	6	8	12	14	15	17	18	34	36	38
7	1	3	7	14	15	16	28	31	37	39
8	2	4	8	10	12	14	22	24	28	30
9	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
10	6	8	10	14	16	18	25	26	27	28
11	2	5	13	13	17	20	23	25	36	37
12	3	10	12	17	18	19	22	34	35	40
13	4	9	13	16	19	20	21	29	36	39
14	6	11	14	15	17	18	22	24	28	33
15	7	12	15	16	18	20	21	29	30	34

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ.

Лабораторная работа 3

Целочисленное программирование

1. ***Цель работы*** – научиться составлять математическую модель экономической задачи в виде задачи целочисленного программирования и находить решение её средствами Excel.

2. ***Задачи работы***:

– уметь составить математическую модель экономической задачи в виде задачи целочисленного программирования;

– уметь решить задачу целочисленного программирования методом Гомори;

– уметь решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ;

– уметь решить задачу целочисленного программирования средствами Excel;

– приобрести навыки решения различных задач целочисленного программирования.

3. ***Общее описание задания***

При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта. Расчёты должны быть проведены средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из подраздела 2.3 данного учебного пособия.

Таблица

Вариант	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	9	8	12	17	23	27	29	30
2	2	6	7	11	15	19	21	24	26	28
3	3	10	12	13	14	18	20	22	25	32
4	4	5	16	20	21	23	24	27	28	31
5	5	6	9	10	11	13	16	19	23	28
6	6	8	12	14	15	17	18	22	24	33
7	1	3	7	14	15	16	18	20	23	34
8	2	4	8	10	12	14	22	24	28	29
9	5	7	9	11	13	15	17	19	21	30
10	6	8	10	14	16	18	25	26	27	32
11	2	5	13	13	17	20	23	25	26	33
12	3	10	12	17	18	19	22	24	27	34
13	4	9	13	16	19	20	21	23	25	27
14	6	11	14	15	17	18	22	24	28	31
15	7	12	15	16	18	20	21	29	30	34

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ.

Решение одной из задач варианта, заданной в подразделе 2.3, проводится методом Гомори или методом ветвей и границ. Остальные задачи решаются средствами Excel.

Лабораторная работа 4

Транспортная задача

1. ***Цель работы*** – научиться составлять математическую модель экономической задачи в виде транспортной задачи целочисленного линейного программирования и находить её решение средствами Excel.

2. ***Задачи работы***:

– уметь составить математическую модель экономической задачи в виде транспортной задачи;

– уметь привести исходные данные транспортной задачи к стандартному заданию транспортной задачи закрытого типа;

– уметь находить оценки свободных клеток таблицы поставок;

– уметь находить опорный план транспортной задачи;

– уметь находить оптимальный план транспортной задачи;

– уметь решить транспортную задачу средствами Excel;

– приобрести навыки решения различных задач, сводящихся к транспортным задачам линейного программирования;

– уметь объяснить полученные решения транспортной задачи и дать на основе их рекомендации;

– уметь выделять экономические задачи, математические модели которых сводятся к транспортной задаче.

3. ***Общее описание задания***

При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта. Выполнение одного варианта может делать бригада из двух человек. Расчёты должны быть проведены средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий.

На примере одной из задач варианта показывается таблица поставок и найденный оптимальный план. Для этого плана производится расчёт оценок свободных клеток и вычисляется значение целевой функции.

В случае вырожденности транспортной задачи показать метод решения её с помощью введения дополнительных данных.

4. *Варианты задания*

Один вариант содержит 10 задач. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из подраздела 2.4 раздела 2 данного учебного пособия.

Т а б л и ц а

Вариант	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.1	1.4	1.9	1.8	1.12	1.17	1.23	1.27	1.29	2
2	1.2	1.6	1.7	1.11	1.15	1.19	1.21	1.24	1.26	3
3	1.3	1.10	1.12	1.13	1.14	1.18	1.20	1.22	1.25	4
4	1.4	1.5	1.16	1.20	1.21	1.23	1.24	1.27	1.28	5
5	1.5	1.6	1.9	1.10	1.11	1.13	1.16	1.19	1.23	6
6	1.6	1.8	1.12	1.14	1.15	1.17	1.18	1.22	1.24	7
7	1.1	1.3	1.7	1.14	1.15	1.16	1.18	1.20	1.23	8
8	1.2	1.4	1.8	1.10	1.12	1.14	1.22	1.24	1.28	9
9	1.5	1.7	1.9	1.11	1.13	1.15	1.17	1.19	1.21	10
10	1.6	1.8	1.10	1.14	1.16	1.18	1.25	1.26	1.27	11
11	1.2	1.5	1.13	1.13	1.17	1.20	1.23	1.25	1.26	12
12	1.3	1.10	1.12	1.17	1.18	1.19	1.22	1.24	1.27	13

Окончание табл.

Вариант	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	1.4	1.9	1.13	1.16	1.19	1.20	1.21	1.23	1.25	14
14	1.6	1.11	1.14	1.15	1.17	1.18	1.22	1.24	1.28	15
15	1.7	1.12	1.15	1.16	1.18	1.20	1.21	1.29	1.30	6

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ.

Лабораторная работа 5

Игры с седловой точкой

1. ***Цель работы*** – научиться составлять матрицы платежей для различных игр с нулевой суммой, определять границы изменения цены игры и находить её решение средствами Excel.

2. ***Задачи работы***:

– уметь составить матрицу игры с нулевой суммой по её описанию;
– уметь определять нижнюю цену игры;
– уметь определять верхнюю цену игры;
– уметь определять границы изменения цены игры;
– уметь определять седловую точку матрицы игры;
– уметь решить задачу теории игр средствами Excel;
– приобрести навыки решения задач теории игр в "чистых" стратегиях;

– уметь объяснить полученные решения игры с седловой точкой и на основе их дать рекомендации;

– уметь решать экономические задачи, сводящиеся к задачам матричных игр с нулевой суммой.

3. ***Общее описание задания***

При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта. Выполнение одного варианта может делать бригада из двух человек. Расчёты должны быть проведены средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из подраздела 3.2 данного учебного пособия.

Таблица

Вариант	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	9	8	12	17	23	27	29	30
2	2	6	7	11	15	19	21	24	26	28
3	3	10	12	13	14	18	20	22	25	29
4	4	5	16	20	21	23	24	27	28	30
5	5	6	9	10	11	13	16	19	23	25
6	6	8	12	14	15	17	18	22	24	28
7	1	3	7	14	15	16	18	20	23	25
8	2	4	8	10	12	14	22	24	28	30
9	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
10	6	8	10	14	16	18	25	26	27	28
11	2	5	13	13	17	20	23	25	26	31
12	3	10	12	17	18	19	22	24	27	35
13	4	9	13	16	19	20	21	23	25	32
14	6	11	14	15	17	18	22	24	28	33
15	7	12	15	16	18	20	21	29	30	34

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ.

Лабораторная работа 6

Игры без седловой точки

1. ***Цель работы*** – научиться составлять математическую модель задачи теории игр в виде задачи линейного программирования и находить её решение средствами Excel.

2. ***Задачи работы***:

– уметь составить математическую модель задачи теории игр в виде задачи линейного программирования;

– уметь решить двойственную пару задач линейного программирования средствами Excel;

– уметь записать найденные оптимальные решения пары двойственных задач линейного программирования;

– уметь найти решение игры без седловой точки по найденным оптимальным решениям пары двойственных задач линейного программирования;

– уметь объяснить полученные решения игры и на основе их дать рекомендации;

– уметь составить матрицу игры по заданным правилам игры;

– уметь составить двойственную задачу по заданной задаче линейного программирования;

– уметь пользоваться критериями поиска оптимального решения для игр с природой.

3. ***Общее описание задания***

При подготовке к лабораторной работе студент должен изучить теоретический материал учебника по разделу "Теория игр". Самостоятельно изучить раздел "Игры с природой" и научиться пользоваться различными критериями для поиска оптимального решения игры с природой.

При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта. Выполнение одного варианта может делать бригада из двух человек. Если решение задач может быть выполнено без сведения к задачам линейного программирования, решать их аналитическими способами. В остальных случаях следует составить двойственные задачи линейного программирования и найти их оптимальное решение.

Расчёты должны быть проведены средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий.

4. *Варианты задания*

Один вариант содержит 10 задач. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из раздела 3.3 данного учебного пособия.

Таблица

Вариант	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	9	8	12	17	23	27	29	30
2	2	6	7	11	15	19	21	24	26	28
3	3	10	12	13	14	18	20	22	25	29
4	4	5	16	20	21	23	24	27	28	30
5	5	6	9	10	11	13	16	19	35	40
6	6	8	12	14	15	17	18	22	38	41
7	1	3	7	14	15	16	18	20	32	42
8	2	4	8	10	12	14	22	24	33	43
9	5	7	9	11	13	15	17	19	34	37
10	6	8	10	14	16	18	25	26	35	33
11	2	5	13	13	17	20	23	25	36	36
12	3	10	12	17	18	19	22	24	37	38
13	4	9	13	16	19	20	21	23	38	40
14	6	11	14	15	17	18	22	24	39	42
15	7	12	15	16	18	20	21	29	30	44

5. *Требования к оформлению результатов*

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты.

Рекомендуемая литература

1. **Акулич, И. Л.** Математическое программирование в примерах и задачах.– М.: Высшая школа, 1996.– 336 с.
2. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2. – М.: Высшая школа. 1999. – 386 с.
3. **Исследование операций в экономике**: учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И. М. Тришин и др.; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ. 2002. – 407 с.
4. **Калихман, И. Л.** Линейная алгебра и программирование. – М.: Высшая школа, 1967. – 386 с.
5. **Калихман, И. Л.** Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975. – 288 с.
6. **Карасев, А. И.** Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. Ч. 2 / А. И. Карасев , З. М. Аксютина , Т. И. Савельева. – М.: Экономика, 1987.– 304 с.
7. **Кузнецов, А. В.** Высшая математика: Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 2001.– 351 с.
8. **Красс, М. С.** Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – М.: Дело, 2001. – 688 с.
9. **Кузнецов, Ю. Н.** Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М.: Высшая школа, 1998.– 300 с.
10. **Общий курс высшей математики для экономистов**: учебник под ред. В. И. Ермакова. − М.: Инфра-М, 2001. – 656 с.
11. **Проценко, П. А.** Математическое программирование / П. А. Проценко, И. Д. Думанов – М.: МГУЛ, 1997. – 80 с.
12. **Шелобаев, С. И.** Математические методы и модели. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 368 с.
13. **Хазанова, Л. Э.** Математические методы в экономике: учебное пособие. – М.: Издательство БЕК, 2002. – 144 с.
14. **Чернышов, Ю. Н.** Решение экономических задач с помощью Excel. – М.: МГУЛ, 2001. – 23 с.
15. **Шапкин, А. С.** Математические методы и модели исследования операций: учебник / А. С. Шапкин, Н. П. Мазаева. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К°", 2003. – 400 с.

Оглавление

Учебное издание

Геннадий Александрович Данилин
Вера Михайловна Курзина
Павел Алексеевич Курзин
Ольга Митрофановна Полещук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ С EXCEL

Редактор Е. Г. Петрова

Компьютерный набор и вёрстка П. А. Курзин

По тематическому плану внутривузовских изданий учебной литературы на 2005 г., поз. 50

Лицензия ЛР № 020718 от 02.02.1998 г.
Лицензия ПД № 00326 от 14.02.2000 г.

Подписано к печати Формат 60x88/16
Бумага 80 г/м^2 " Снегурочка" Ризография
Объем 7,0 п. л. Заказ №
Тираж 100 экз.

Издательство Московского государственного университета леса.
141005. Мытищи-5, Московская обл., 1-я Институтская , 1, МГУЛ.
Телефон: (095) 588-57-62
e-mail:izdat@mgul.ac.ru