Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования

«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

Институт информационных технологий

Специальность ПОИТ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

По курсу **ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ**

Вариант № 18

Студент-заочник 3 курса
Группы № 281021 .
ФИО Курнакиной Виктории Андреевны .
Адрес г.Солигорск .
ул.Пр.Мира д.28 кв. 33 .
Тел. 80291618408 ..

Минск, 2014

Тема 1.

1. Изобразить произвольную дискретную последовательность $x(n)$, записанную в виде суммы взвешенных и задержанных цифровых единичных отсчетов,

$$x(n) = \sum_{k=-3}^{7} x(k)\, u_0(n-k) = x(-3)u_0(n+3) + x(1)u_0(n-1) + x(2)u_0(n-2) + x(7)u_0(n-7).$$

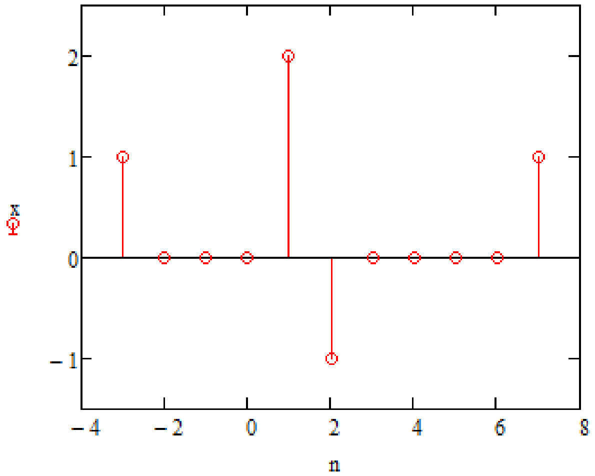
Решение:

Произвольный дискретный сигнал можно описать в виде суммы

$$\mathrm{x(n)} = \sum_{\mathrm{k}=-3}^{7} \mathrm{x(k)}\, \mathrm{u_0(n-k)}$$

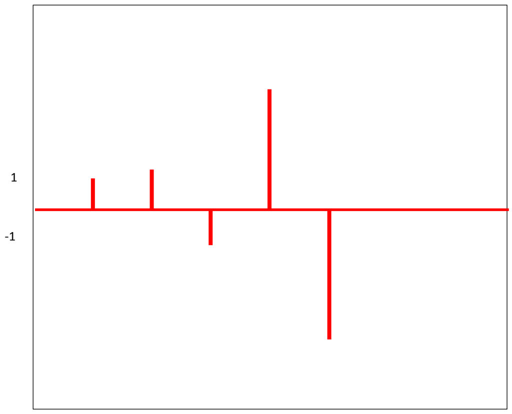
$$u_0(7-k) = \begin{cases} 1, & \mathrm{k}=7 \\ 0, & \mathrm{k}\neq 7 \end{cases}$$

$$x(n) = \sum_{k=-3}^{7} x(k)u_0(7-k) = x(-3)u_0(10) + x(-2)u_0(9) + x(-1)u_0(8) + x(0)u_0(7) + x(1)u_0(6) +$$
$$+ x(2)u_0(5) + x(3)u_0(4) + x(4)u_0(3) + x(5)u_0(2) + x(6)u_0(1) + x(7)u_0(0) = x(7)$$



2. Дана дискретная последовательность $x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4)\} = \{1; 1{,}5; -1{,}2; 4; -4{,}8\}$. Записать выражение в виде суммы взвешенных и задержанных цифровых единичных отсчетов, определяющее значение отсчета с номером $n = 3$.

Произвольная последовательность может быть представлена как сумма взвешенных и задержанных единичных импульсов.



$$x(3) = \sum_{k=0}^{4} x(k)u_0(3-k) = x(0)u_0(3-0) + x(1)u_0(3-1) + x(2)u_0(3-2) + x(3)u_0(3-3) +$$
$$+ x(4)u_0(3-4) = x(3)u_0(0) = x(3) = 4$$

Тема 2.

1. Покажите, что дискретная система, описываемая уравнением $y(n) = \sum_{k=-3}^{n=4} x(k)$ является линейной.

Дискретная система называется линейной тогда и только тогда, если ее оператор R обладает следующими свойствами *аддитивности* и *однородности.* Суммирующая функция такими свойствами обладает, таким образом $y(n) = \sum_{k=-3}^{n=4} x(k)$ является линейной системой.

2. Покажите, что дискретная система с входным воздействием $x(n)$ и откликом $w(n)$, описываемая уравнением $w(n) = \log_{10}|x(n)|$, является нелинейной.

Дискретная система называется линейной тогда и только тогда, если ее оператор R обладает следующими свойствами *аддитивности* и *однородности.* Логарифмическая функция такими свойствами не обладает, таким образом $w(n) = \log_{10}|x(n)|$ является нелинейной системой.

Тема 3

1. Заданы входная последовательность $x(n) = \{1; 1; 1\}$ и импульсная характеристика дискретной системы $h(n) = \{5; 4; 3; 2\}$. Вычислить дискретную линейную свертку. Построить график свертки.

Для n=0 по формуле свертки вычисляем

$$y(0) = \sum_{k=-3}^{5} x(k)h(0-k)$$

$$= x(-3)h(3) + x(-2)h(2) + x(-1)h(1) + x(-0)h(0) + x(1)h(-1) + x(2)h(-2) +$$
$$+x(3)h(-3) + x(4)h(-4) + x(5)h(-5) = 5$$

Временное соотношение сворачиваемых отсчетов показано ниже

1 1 1

<u>2 3 4 5</u>

5

Для n=1 по формуле свертки вычисляем

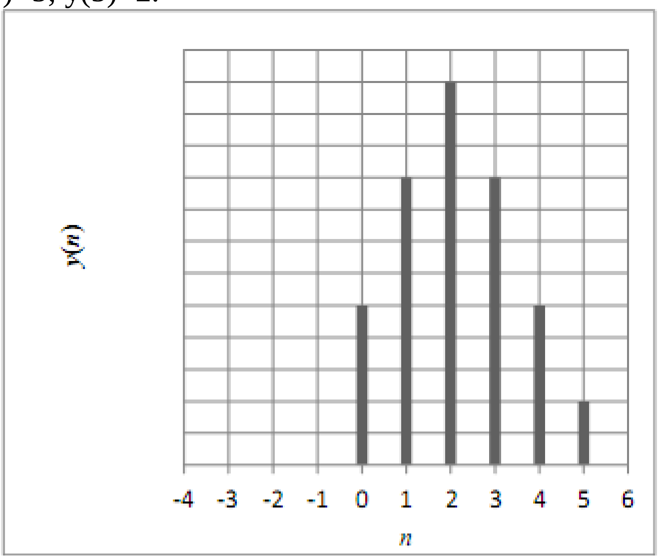
$$y(1) = \sum_{k=-3}^{5} x(k)h(1-k) = x(0)h(1) + x(1)h(0) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 9.$$

1 1 1

<u>2 3 4 5</u>

4+5=9

Действуя аналогичным образом, вычисляем остальные коэффициенты свертки. y(2)=12; y(3)=9; y(4)=5; y(5)=2.



2. Заданы входная последовательность $x(n) = \{-1; -1; -1\}$ и импульсная характеристика дискретной системы $h(n) = \{5; 4; 3; 2; 1\}$. Вычислить дискретную линейную свертку. Построить график свертки.

Принцип вычисления тот же что и в предыдущем задание.

Для n=0 по формуле свертки вычисляем

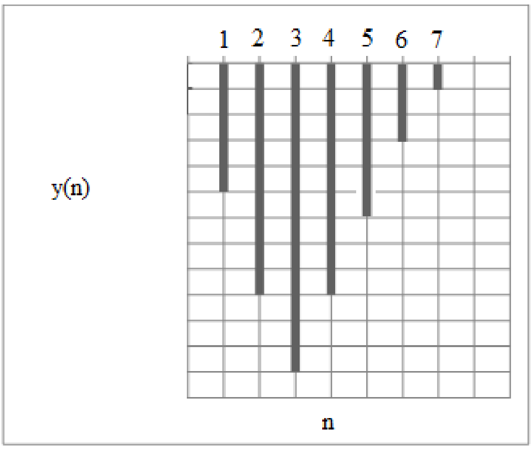
$$y(0) = \sum_{k=-3}^{5} x(k)h(0-k)$$

-1 -1 -1

5 4 3 2 1

5

y(0)=-5; y(1)=-9; y(2)=-12; y(3)=-9; y(4)=-6; y(5)=-3; y(6)=-1.



Тема 4

1. Решить разностное уравнение $y(n) = x(n) - 3y(n-1), n = \{0, \dots, 7\}$ с начальным условием $y(-1) = 0$ и $x(n) = n^2 + n$, где $x(n)$ входная последовательность, $y(n)$ отклик линейной стационарной дискретной системы.

$y(0) = x(0) - 3y(0-1) = 0$

$y(1) = x(1) - 3y(0) = 2$

$y(2) = x(2) - 3y(1) = 2^2 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$

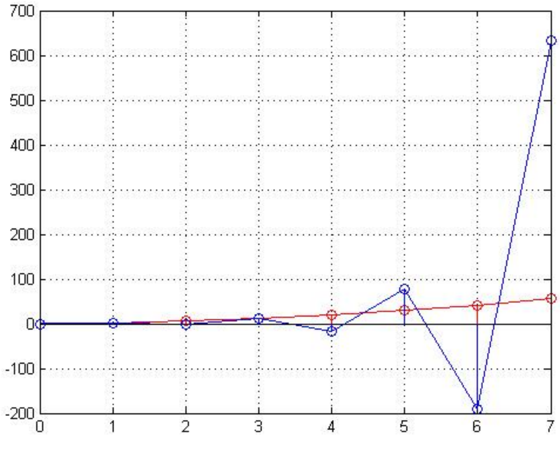
$y(3) = x(3) - 3y(2) = 3^2 + 3 - 3 \cdot 0 = 12$

$y(4) = x(4) - 3y(3) = 4^2 + 4 - 3 \cdot 12 = -16$

$y(5) = x(5) - 3y(4) = 5^2 + 5 - 3 \cdot (-16) = 78$

$y(6) = x(6) - 3y(5) = 6^2 + 6 - 3 \cdot 78 = -192$

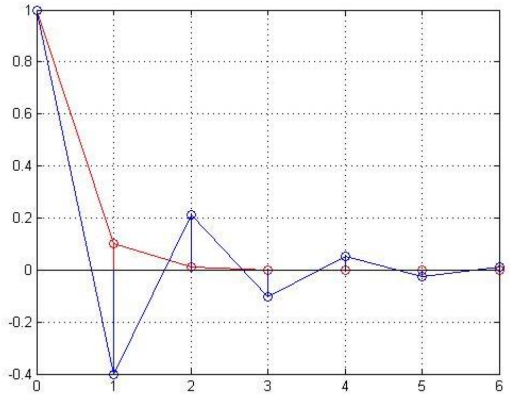
$y(7) = x(7) - 3y(6) = 7^2 + 7 - 3 \cdot (-192) = 634$



2. Решить разностное уравнение $y(n) = x(n) - 0{,}5y(n-1), n = \{0, \ldots, 6\}$ с начальным условием $y(-1) = 0$ и $x(n) = 0{,}1^n$, где $x(n)$ входная последовательность, $y(n)$ отклик линейной стационарной дискретной системы.

Принцип вычисления приведён выше.

Получаем, что y =[1.0000 ; -0.4000 ; 0.2100 ; -0.1040 ; 0.0521 ; -0.0260 ; 0.0130]



3. Показать, что разностное уравнение $y(n) = x(n) + y(n-1)$, с начальным условием $y(-1) = 0$ и $x(n) = \{1; 2\}$, где $x(n)$ входная последовательность, описывает отклик сумматора $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$.

По определению отклик сумматора запишем в виде:

$y(n-1) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)$.

С учетом этого получаем выражение

$y(n) = x(n) + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)$.

Подставив эти соотношения, получаем

$y(n) = x(n) + y(n-1)$.

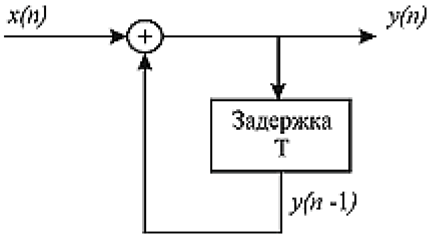
Таким образом, вход и выход сумматора связаны линейным разностным уравнением первого порядка

$$y(n) = \sum_{i=0}^{1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{1} a_k y(n-k) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1).$$

Так как сумматор описывается $y(n) = x(n) + y(n-1)$. , то

$b_0 = 1, b_1 = 0, a_1 = -1$ и

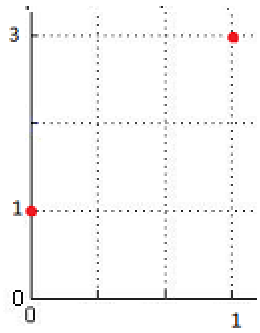
$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-k) = x(n) + y(n-1)$.



$y(0) = x(0) + y(0-1) = 1$

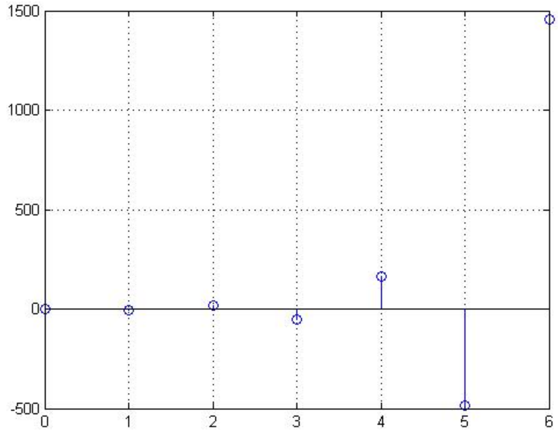
$y(1) = x(1) + y(0) = 1 + 2 = 3$

h=1; 3.



4. Решить разностное уравнение $y(n) = 2x(n) - 3y(n-1), n = \{0, \dots, 6\}$ с начальным условием $y(-1) = 0$; $x(n) = u_0(n)$ цифровой единичный импульс, $y(n)$ отклик рекурсивной линейной дискретной системы.

$y(0) = 2x(0) - 3y(-1) = 2x(0) = 2$
$y(1) = 2x(1) - 3y(0) = -6x(0) = -6$
$y(2) = 2x(2) - 3y(1) = 18x(0) = 18$
$y(3) = 2x(3) - 3y(2) = -54x(0) = -54$
$y(4) = 2x(4) - 3y(3) = 162x(0) = 162$
$y(5) = 2x(5) - 3y(4) = -486x(0) = -486$
$y(6) = 2x(6) - 3y(5) = 1458x(0) = 1458$
h= [2; -6; 18; -54; 162; -486; 1458]



Тема 5

1. Вычислить импульсную характеристику $h(n)$ дискретной рекурсивной системы для входа $x(n)$. Соотношение вход-выход системы описывается разностным уравнением $y(n)$ с постоянными коэффициентами b_0, b_1, a_1.

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1), \qquad 0 \le n \le 4.$$

Решение

$h(n) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) - a_1 h(n-1)$; $\quad u = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$
$h(0) = b_0 u(0) + b_1 u(a-1) - a_1 h(0-1) = b_0$
$h(1) = b_0 u(1) + b_1 u(0) - a_1 h(0) = b_1 - a_1 b_0$
$h(2) = b_0 u(2) + b_1 u(1) - a_1 h(1) = a_1 (b_1 - a_1 b_0)$
$h(3) = b_0 u(3) + b_1 u(2) - a_1 h(2) = a_1^2 (b_1 - a_1 b_0)$
$h(4) = b_0 u(4) + b_1 u(3) - a_1 h(3) = a_1^3 (b_1 - a_1 b_0)$

$h(n) = (a_1)^{n-1}(b_1 - a_1 b_0)$ при $n \ge 0$

2 Вычислить импульсную характеристику дискретной рекурсивной системы для входа $x(n)$. Соотношение вход-выход системы описывается разностным уравнением $y(n)$ с коэффициентом a.

$$y(n) = x(n) - ay(n-1), n \ge 0.$$

$h(n) - u(n) - ah(n-1)$
$h(0) = u(0) - a(-1) = 1$
$h(1) = u(1) - a(0) = -a$
$h(2) = u(2) - a(1) = a2$
$h(3) = u(3) - a(2) = -a3$
Таким образом, вычисление можно продолжать бесконечно h(n)=$(-1)^n a^n$, при $n \ge 0$

Тема 6

1. Вычислить комплексную частотную характеристику (дискретизированное по времени преобразование Фурье) рекурсивной линейной дискретной системы, удовлетворяющей разностному уравнению $y(n) = x(n) + 0{,}75y(n-1)$ с начальным условием $y(-1) = 0; n \geq 0$. Вычислить модуль комплексной частотной характеристики. Вычислить фазовую характеристику системы. Построить графики модуля и фазы как функции нормированной частоты $\widehat{w}$ в диапазоне $0 \leq \widehat{w} \leq 2\pi$, где $\widehat{w} = \frac{w}{f_d} = \frac{2\pi f}{f_d}$, а w и f – циклическая и линейная частоты, f_d- частота дискретизации.

Воспользуемся результатом вычисления импульсной характеристики

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n.$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-a\cos\omega)+ja\sin\omega} = \frac{Z_1}{Z_2} = \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| e^{(\varphi_1-\varphi_2)},$$

где $Z_1 = |Z_1|e^{\varphi_1}, Z_2 = |Z_2|e^{\varphi_2}$.

Модуль комплексной частотной характеристики определяется как

$$\left|(He^{j\omega})\right| = \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2+(a\sin\omega)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2\cos^2\omega+a^2\sin^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}.$$

Фазовая характеристика системы записывается как

$$\arg(He^{j\omega}) = \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

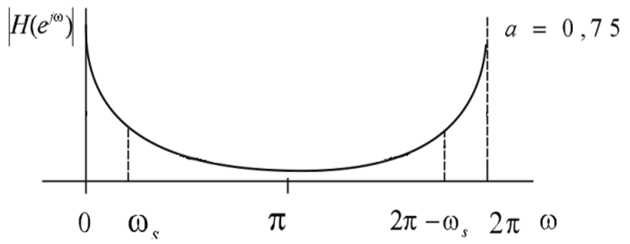
$$\varphi_1 = \arg Z_1.$$

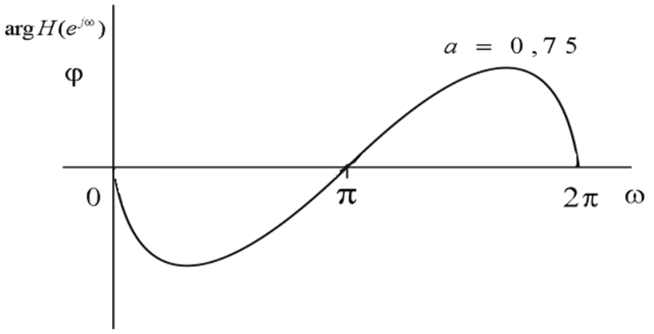
$$1 = 1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) = \cos 2\pi k + j\sin 2\pi k.$$

$$\varphi_1 = 0.$$

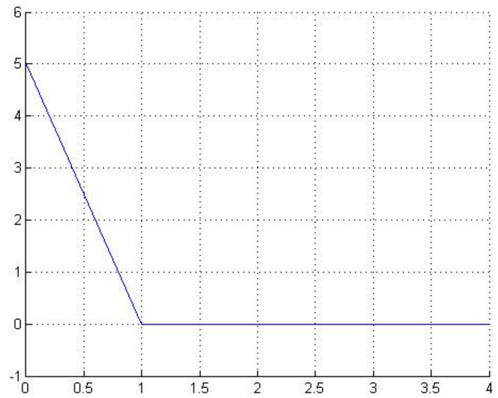
$$\varphi_2 = \arg Z_2 = \tan^{-1}\frac{\operatorname{Im} Z_2}{\operatorname{Re} Z_2} = \tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}.$$

$$\varphi = \varphi_1 - \boldsymbol{\varphi_2} = -\mathbf{tan}^{-1}\frac{\boldsymbol{a\sin\omega}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{a\cos\omega}}.$$





2. Вычислить Фурье-образ (дискретизированное по времени преобразование Фурье) прямоугольного окна $l(n) = \begin{Bmatrix} 1 \text{ для } 0 \le n \le 5, \\ 0, \text{для других } n. \end{Bmatrix}$. Вычислить ширину главного лепестка и всех боковых лепестков Фурье-образа прямоугольного окна $l(n)$. Изобразить график модуля комплексной частотной характеристики окна.



Как видно из рисунка, ширина главного лепестка равна 2, так как он симметричен относительно оси OY. Ширина боковых лепестков равна 0.

3. Вычислить Фурье-образ (дискретизированное по времени преобразование Фурье) последовательности $\{x(n)\} = a^n U(n)$,

где $U(n) = \begin{Bmatrix} 1, \ n \ge 0, \\ 0, n < 0. \end{Bmatrix}$, $|a| < 1$. Построить графики модуля и фазы как функции нормированной частоты $\widehat{w}$ в диапазоне $0 \le \widehat{w} \le 2\pi$, где $\widehat{w} = \frac{w}{f_d} = \frac{2\pi f}{f_d}$, а w и f – циклическая и линейная частоты, f_d- частота дискретизации.

Решение:

Исходная последовательность

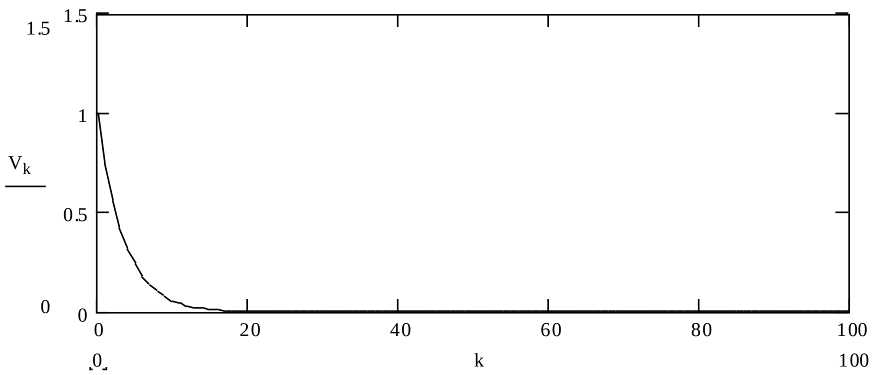


График модуля

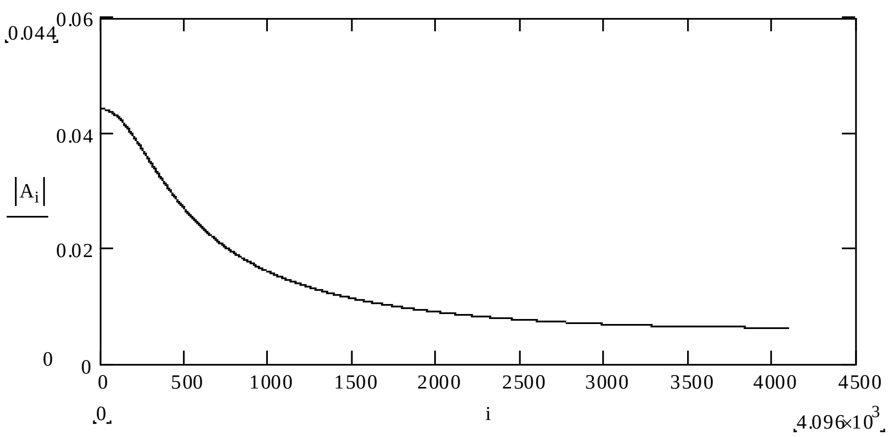
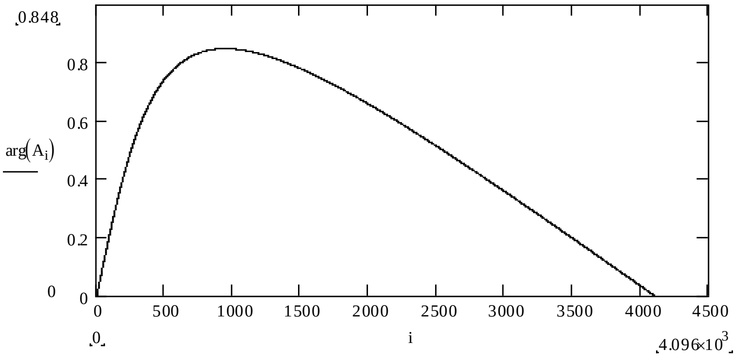


График фазы



Тема 7

1. Вычислить импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) с частотой среза $\widehat{w}_c = \frac{\pi}{2}$, если его частотная характеристика, равная на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$H\left(e^{j\widehat{w}}\right) = \left\{\begin{matrix} 1, \quad |\widehat{w}| \leq \widehat{w}_c, (-\widehat{w}_c \leq \widehat{w} \leq \widehat{w}_c); \\ 0, \quad \widehat{w}_c < |\widehat{w}| \leq \pi, (0 - \text{в остальных случаях}) \end{matrix}\right\},$$

вне этого интервала вычисляется по периодичности. Здесь $\widehat{w} = \frac{w}{f_d} = \frac{2\pi f}{f_d}$ - это нормированная частота, а w и f - это циклическая и линейная частоты, f_d- частота дискретизации, нормированная частота среза ФНЧ $\widehat{w}_c = \frac{w_c}{f_d}$.

Импульсная характеристика и частотная характеристика $H\left(e^{j\widehat{w}}\right)$ связанны между собой через преобразование Фурье: $h(n) = \int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{j\widehat{w}}\right) \exp(j \cdot w \cdot n)\, dw$

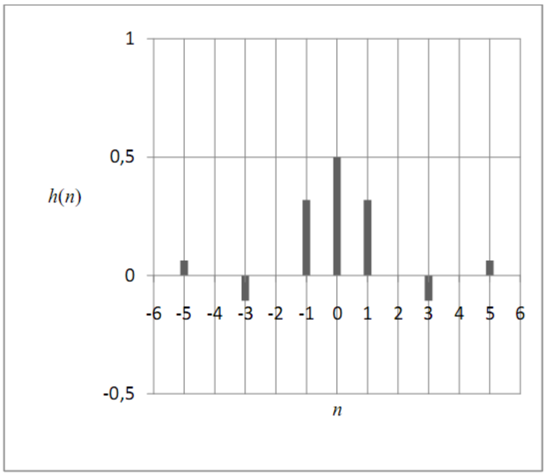
Пусть значение нормированной частоты среза равно $\widehat{w}_c = \frac{\pi}{2}$. Этой частоте соответствует значение линейной частоты

$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{\widehat{\omega}_s f_d}{2\pi} = \frac{\pi f_d}{2 \cdot 2\pi} = \frac{f_d}{4}.$$

Вычислим несколько значений коэффициентов

$$\boldsymbol{h(n) = \frac{\cos\frac{\pi}{2} n_{|n=0}}{2} = \frac{1}{2}}.$$

$\boldsymbol{h(1) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{\pi};\ h(2) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}2}{2\pi} = 0;\ h(3) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}3}{3\pi} = -\frac{1}{3\pi};\ h(4) = 0;\ h(5) = \frac{1}{5\pi}}$ и т.д.



2. Вычислить импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) с частотой среза $\widehat{w}_c = \frac{\pi}{4}$, если его частотная характеристика, равная на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$H(e^{j\widehat{w}}) = \left\{\begin{matrix} 1, |\widehat{w}| \leq \widehat{w}_c, (-\widehat{w}_c \leq \widehat{w} \leq \widehat{w}_c); \\ 0, \widehat{w}_c < |\widehat{w}| \leq \pi, (0 - \text{в остальных случаях}) \end{matrix}\right\},$$

вне этого интервала вычисляется по периодичности. Здесь $\widehat{w} = \frac{w}{f_d} = \frac{2\pi f}{f_d}$ - это нормированная частота, а w и f - это циклическая и линейная частоты, f_d- частота дискретизации, нормированная частота среза ФНЧ $\widehat{w}_c = \frac{w_c}{f_d}$. Построить график импульсной характеристики такого фильтра.

Импульсная характеристика и частотная характеристика $H(e^{j\widehat{w}})$ связанны между собой через преобразование Фурье

$$h(n) = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\widehat{w}}) \exp(j \cdot w \cdot n)\, dw$$

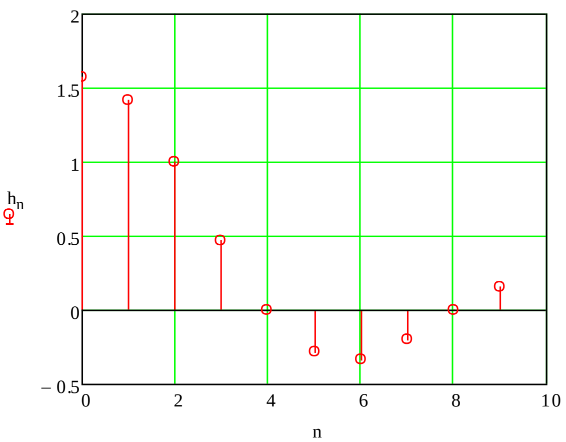
Пусть значение нормированной частоты среза равно $\widehat{w}_c = \frac{\pi}{4}$. Этой частоте соответствует значение линейной частоты

$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{\widehat{\omega}_s f_d}{2\pi} = \frac{\pi f_d}{2 \cdot 2\pi} = \frac{f_d}{4}.$$

Вычислим несколько значений коэффициентов

$$h(n) = \frac{\cos\frac{\pi}{4} n_{|n=0}}{2}$$

$$h(1) = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\pi} \qquad h(2) = \frac{\sin\frac{\pi}{4}2}{2\pi} \qquad h(3) = \frac{\sin\frac{\pi}{4}3}{3\pi} \quad \text{и т.д}$$



Тема 8

1. Вычислить элементы системы дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) и записать ее в виде матрицы V размером $N \times N, N = 4.$ Матрицу представить в алгебраической и экспоненциальной форме.

Решение:

В дискретном преобразовании Фурье используется система дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), определяемых следующим выражением

$$def(k,n) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) = \cos\frac{2\pi}{N}kn - j\sin\frac{2\pi}{N}kn$$

Обе переменные k,n принимают дискретные значении $0,1,\ldots,N-1$

Обозначим $W = \exp\left(-j\dfrac{2\pi}{N}\right)$

Тогда $def(k,n) = W^{kn}$

Всю систему ДЭФ можно записать в виде матрицы V , строки которой нумеруются переменной k , столбцы переменной n, а в пересечении k-n строки и n-го столбца записана величина W^{kn}

$$V = \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ N-1 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & n & \cdots & N-1 \\ & & \uparrow & & \\ \leftarrow & \leftarrow & W^{kn} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}.$$

Для N=4 матрица имеет вид:

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix}.$$

N=8, k=1, n=1

$$\boldsymbol{W^{kn} = W^1 = \exp\left(-j\frac{2\pi}{8}\right) = \exp(-j45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

N=8, k=1, n=0

$$\boldsymbol{W^0 = 1}.$$

N=8, k=1, n=8

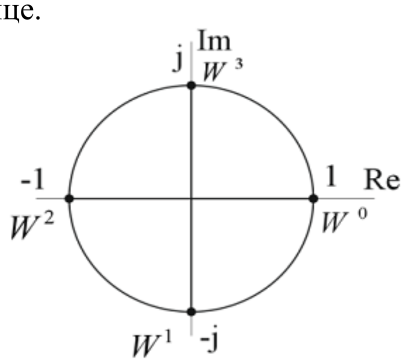
$$\boldsymbol{W^8 = W^N = \exp\left(-j\frac{2\pi 8}{8}\right) = \exp(-j2\pi) = 1}.$$

N=8, k=1, n=N/8

$$\boldsymbol{W^{\frac{3N}{8}} = \exp\left(-j\frac{2\pi 3\cdot 8}{8\cdot 8}\right) = \exp\left(-j\frac{6\pi}{8}\right) = \exp(-j135^\circ) = \cos 135^\circ - j\sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-j} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-j} \end{bmatrix}.$$

На рисунке показаны положения вектора ДЭФ и ее значения на комплексной плоскости, соответствующие матрице.



2. Вычислить элементы системы дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) и записать систему в виде матрицы V размером $N \times N, N = 5$. Матрицу представить в алгебраической и экспоненциальной форме.

Решение при помощи MatLab

Дискретная экспоненциальная функция имеет вид

$$\mathrm{def}(k,n) := \exp\left(-j\cdot 2\pi\cdot k\cdot \frac{n}{N}\right)$$

Матрица в экспоненциальной и числовой форме представлены ниже

$$\mathrm{def} := \begin{pmatrix} \mathrm{def}(0,0) & \mathrm{def}(0,1) & \mathrm{def}(0,2) & \mathrm{def}(0,3) & \mathrm{def}(0,4) \\ \mathrm{def}(1,0) & \mathrm{def}(1,1) & \mathrm{def}(1,2) & \mathrm{def}(1,3) & \mathrm{def}(1,4) \\ \mathrm{def}(2,0) & \mathrm{def}(2,1) & \mathrm{def}(2,2) & \mathrm{def}(2,3) & \mathrm{def}(2,4) \\ \mathrm{def}(3,0) & \mathrm{def}(3,1) & \mathrm{def}(3,2) & \mathrm{def}(3,3) & \mathrm{def}(3,4) \\ \mathrm{def}(4,0) & \mathrm{def}(4,1) & \mathrm{def}(4,2) & \mathrm{def}(4,3) & \mathrm{def}(4,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.309-0.951i & -0.809-0.588i & -0.809+0.588i & 0.309+0.951i \\ 1 & -0.809-0.588i & 0.309+0.951i & 0.309-0.951i & -0.809+0.588i \\ 1 & -0.809+0.588i & 0.309-0.951i & 0.309+0.951i & -0.809-0.588i \\ 1 & 0.309+0.951i & -0.809+0.588i & -0.809-0.588i & 0.309-0.951i \end{pmatrix}$$

Тема 9

1. Выполнить прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $x(n) = \{5; 4; 3; 2\}$. Восстановить исходную последовательность через вычисление обратного ДПФ последовательности коэффициентов дискретного преобразования Фурье $X(k)$.

Решение:

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}, \qquad k=0,1,\dots,N-1;$$

$$x(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-kn}, \quad n=0,1,\dots,N-1.$$

Выражение для вычисления $\dot{f}(k)$ называется прямым преобразованием (ДПФ), а для вычисления $\dot{x}(n)$ - обратным (ОДПФ).

Коэффициент f_0 (постоянная составляющая) равен сумме всех отсчетных значений сигнала:

$$f(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = 5+4+3+2 = 14$$

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$f(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W^{n} = 5 + 4w + 3w^2 + 2w^3 = 5 - 4j - 3 + 2j = 2 - 2j$$

$$f(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W^{2n} = 2$$

$$f(3) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W^{3n} = 2 + 2j$$

$$f(k) = \{14, 2-2j, 2, 2+2j\}$$

$$x(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-kn}$$

$$x(0) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) = \frac{1}{4}(14 + 2 - 2j + 2 + 2 + 2j) = 5$$

$$x(1) = \frac{1}{4}(14 + (2-2j)W^{-1} + 2w^{-2} + (2+2j)W^{-3}) = 4$$

$$x(2) = 3$$

$$x(3) = 2$$

$$x(n) = \{5, 4, 3, 2\}.$$

2. Выполнить прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $x(n) = \{1; 1{,}5; -1{,}2; 4; -4; 8\}$. Восстановить исходную последовательность через вычисление обратного ДПФ последовательности коэффициентов дискретного преобразования Фурье $X(k)$.

$$f(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = 1 + 1{,}5 - 1{,}2 + 4 - 4 + 8 = 9{,}3$$

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$\text{f(1)} = \sum_{n=0}^{5} x(n) W^{n} = 4{,}35 + 3{,}204j$$

$$\text{f(2)} = \sum_{n=0}^{5} x(n) W^{n2} = 2{,}85 + 8{,}054j$$

$$\text{f(3)} = \sum_{n=0}^{5} x(n) W^{n3} = -17{,}7$$

$$\text{f(4)} = \sum_{n=0}^{5} x(n) W^{n4} = 2{,}85 - 8{,}054\text{j}$$

$$\text{f(5)} = \sum_{n=0}^{5} x(n) W^{n5} = 4{,}35 - 3{,}204\text{j}$$

$$x(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-kn}$$

x(n)=[1; 1,5; -1,2; 4; -4; 8]

Тема 10

1. Дана последовательность $x(n) = \{5; 4; 3; 2\}$. Применить быстрое преобразование Фурье (БПФ) для вычисления коэффициентов ДПФ. Показать, что алгоритм БПФ можно применять для восстановления $x(n)$ по коэффициентам ДПФ используемым в качестве исходного массива данных. Оценить вычислительную сложность алгоритма БПФ.

Используем входной дискретный сигнал x(n) где N=4, разобьём на 2, N/2 – отсчётных сигнала, $x_1(n)$ и $x_2(n)$, $x_1(n)$ состоит из первых N/2 – отсчётов, $x_2(n)$ из остальных.

$x_1(n) = x(n), \text{где } n = 0..N/2 - 1$

$x_2(n) = x(n + N/2), \text{где } n = 0..N/2 - 1$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) w_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) w_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) w_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x_2(n) w_N^{(n+\frac{N}{2})k}$$

$$w_N^{(n+\frac{N}{2})k} = e^{-j\pi k}$$

Получаем

$$x(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) w_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) w_N^{nk}$$

Запишем формулу для расчёта

$$x(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Получаем

$$x(k)=\begin{bmatrix}14\\2-2j\\2\\2+2j\end{bmatrix}$$

Применим алгоритм обратного БПФ противоположный по частоте

$$x[n]=\frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}x(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}+\sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1}x(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right)$$

Проводя расчёт получаем

$$x[n]=\begin{bmatrix}5\\4\\3\\2\end{bmatrix}$$

Это решение рекурсивно до тех пор, пока не дойдёт до двух точечного преобразования Фурье, которое выполняется по следующим формулам:

$$\begin{cases}x_0=x_0+x_1\\x_1=x_0-x_1\end{cases}$$

2. Дана последовательность $x(n)=\{1;1{,}5;-1{,}2;4;2;2;1;1\}$. Применить быстрое преобразование Фурье (БПФ) для вычисления коэффициентов ДПФ. Показать, что алгоритм БПФ можно применять для восстановления $x(n)$ по коэффициентам ДПФ используемым в качестве исходного массива данных. Оценить вычислительную сложность алгоритма БПФ.

Используем входной дискретный сигнал x(n) где N=8, разобьём на 2, N/2 – отсчётных сигнала, $x_1(n)$ и $x_2(n)$, составленных из чётных и нечётных отсчётов входного сигнала x(n).

$$x_1(n)=x(2n),\text{где } n\ =0..N/2-1$$

$$x_2(n)=x(2n+1),\text{где } n\ =0..N/2-1$$

$$x(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)w_N^{nk}+\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)w_N^{nk}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2n)w_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2n+1)w_N^{(2n+1)k}$$

$$w_N^2=\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^2=e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}}=w_{\frac{N}{2}}$$

Получаем

$$x(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x_1(n)w_{\frac{N}{2}}^{nk}+w_N^k\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x_2(n)w_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

Запишем формулу для расчёта

$$x(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[2n]e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk}+e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[2n+1]e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk}$$

Получаем

$$x(k)=\begin{bmatrix}11{,}3\\-3{,}475+0{,}432j\\3{,}2+1{,}5j\\1{,}475-3{,}968j\\-5{,}7\\1{,}475+3{,}968j\\3{,}2+1{,}5j\\-3{,}475+0{,}432j\end{bmatrix}$$

Применим алгоритм обратного БПФ

$$x[n]=\frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2k)e^{j\frac{2\pi}{N}2nk}+e^{j\frac{2\pi}{N}n}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2k+1)e^{j\frac{2\pi}{N}2nk}\right)$$

Проводя расчёт получаем

$x[n] = [1 \quad 1{,}5 \quad -1{,}2 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1]$

Тема 11

1. Заданы последовательности $x(n) = \{1; 1; 1\}$ и $h(n) = \{5; 4; 3; 2\}$. Вычислить линейную дискретную свертку последовательностей с помощью ДПФ. Построить график свертки.

Вычисление свертки с помощью ДПФ выполняется в следующей последовательности

- вычисляется длина свертки $N=N1+N2-1$;
- заданные последовательности дополняются нулями до длины N;
- вычисляются спектры последовательностей;
- спектры поэлементно перемножаются;
- вычисляется обратное ДПФ, которое будет равно свертке двух сигналов.

$N_1=3$, $N_2=4 \Rightarrow N=3+4-1=6$

Дополняем нулями последовательности x(n) и h(n), так чтобы количество отсчётов было равно 6

x(n)={1;1;1;0;0;0}, h(n)={5;4;3;2;0;0}

k=0..N-1, n=0..N-1

$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Проведя расчёты получаем

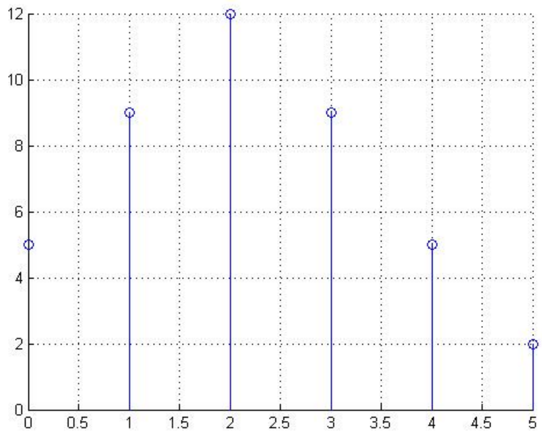
$$X(k) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1-1{,}732j \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1+1{,}732j \end{bmatrix} \qquad H(k) = \begin{bmatrix} 14 \\ 3{,}5-6{,}062j \\ 3{,}5-0{,}866j \\ 2 \\ 3{,}5+0{,}866j \\ 3{,}5+6{,}062j \end{bmatrix}$$

$S(k) = x(k) \cdot H(k)$

$$S(k) = \begin{bmatrix} 42 \\ -7-12{,}124j \\ -1{,}066 \cdot 10^{-15} \\ 2 \\ 1{,}839 \cdot 10^{-15} - 2{,}432 \cdot 10^{-15} \\ -7+12{,}124j \end{bmatrix}$$

$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

$y = [5; \quad 9; \quad 12; \quad 9; \quad 5; \quad 2]$



2. Заданы последовательности $x(n) = \{-1; -1; -1; -1\}$ и $h(n) = \{-1; 4; 3; 2; -1\}$. Вычислить линейную дискретную свертку последовательностей с помощью ДПФ. Построить график свертки.

N1=4, N2=5 N=N1+N2-1=8

x(n){-1;-1;-1;-1;0;0;0;0;} ,h(n)={-1;4;3;2;-1;0;0;0}

k=0..N-1 n=0..N-1

$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $\quad H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

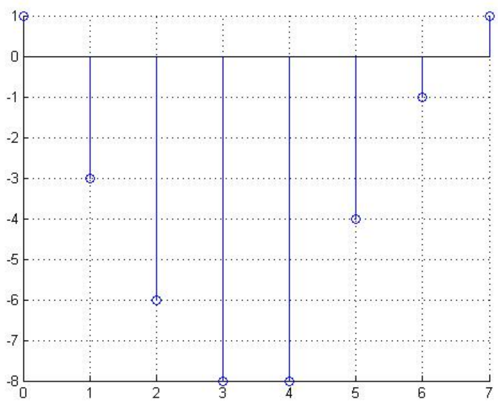
$$X(k) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1+2{,}414j \\ 0 \\ -1+0{,}414j \\ 0 \\ -1-0{,}414j \\ 0 \\ -1-2{,}414j \end{bmatrix} \qquad H(k) = \begin{bmatrix} 7 \\ 1{,}414-7{,}243j \\ -5-2j \\ -1{,}414-1{,}243 \\ -5 \\ -1{,}414+1{,}243j \\ -5+2j \\ 1{,}414+7{,}243j \end{bmatrix}$$

$S(k) = X(k) \cdot H(k)$

$$S(k) = \begin{bmatrix} -28 \\ 16{,}071+10{,}657j \\ -1{,}478j \cdot 10^{-15} \\ 1{,}929+0{,}657j \\ -1{,}225j \cdot 10^{-15} \\ 1{,}929-0{,}657j \\ -2{,}323j \cdot 10^{-15} \\ 16{,}071-10{,}657j \end{bmatrix}$$

$y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

$y = [1; -3; -6; -8; -8; -4; -1; 1]$



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов.– М.: Техносфера, 2006.
2. Теория прикладного кодирования: Учеб. пособие. В 2 т. В.К. Конопелько, А.И. Митюхин и др.; Под ред. проф. В.К. Конопелько. – Мн.: БГУИР, 2004.
3. Овсянников В.А. Методы формирования и цифровой обработки сигналов. Учебное пособие для студентов специальности «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» в 2-ух частях. –Мн.: БГУИР 2010.
4. Лосев В.В. Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки: Учебное пособие для вузов. – Мн: Вышэйшая школа, 1990.
5. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников: Пер. с англ. – М.: Додека-XXI, 2008.
6. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2008.
7. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005.
8. Андерсон Д.А. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.
9. Кормен Т.Х. и др. Алгоритмы: построение и анализ.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2009.
10. Макклеллан Дж.К., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. - М.: Радио и связь, 1983.
11. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. Солонина А.И., Улахович Д.А. и др. – СПб: БХВ – Петербург, 2003.
12. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978.
13. Митюхин А.И. Применение действительных ортогональных преобразований в цифровой обработке сигналов: Учебно-методическое пособие. – Мн.: БГУИР, 2000.
14. Саломатин С.Б. Цифровая обработка сигналов в радиоэлектронных системах. Уч. пособие по дисциплине «Цифровая обработка сигналов». – Мн.: БГУИР, 2002.
15. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2003.
16. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.
17. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980.
18. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – СПб: Политехника, 2002.
19. Цифровая обработка телевизионных и компьютерных изображений. Под ред. Ю.Б. Зубарева и В.П. Дворковича. – М.: 1997.
20. Птачек М. Цифровое телевидение. Теория и техника. – М.: Радио и связь, 1990.
21. Салонина А.И., Улахович Д.А., Яковлев Л.А. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов. СПб: БХВ – Петербург, 2001.