Моделирование

Исследование СМО с помощью диаграмм интенсивностей переходов

Задачи теории массового обслуживания:

– нахождение вероятностей различных состояний СМО,

– установление зависимости между

заданными параметрами

(числом каналов n, интенсивностью потока заявок λ, распределением времени обслуживания и т.д.)

и

характеристиками эффективности работы СМО.

В качестве таких характеристик могут рассматриваться следующие

Характеристики эффективности работы СМО

A – ***абсолютная пропускная способность*** СМО или среднее число заявок, обслуживаемое СМО в единицу времени;

Q – ***относительная пропускная способность*** СМО или вероятность обслуживания поступившей заявки:

$$Q = A/\lambda;$$

$\mathbf{P_{отк}}$ – ***вероятность отказа***, т.е вероятность того, что поступившая заявка не будет обслужена, получит отказ:

$$P_{отк} = 1 - Q;$$

$\mathbf{L_c}$ – ***среднее число заявок в СМО*** (обслуживаемых или ожидающих в очереди);

$\mathbf{L_{оч}}$ – ***среднее число заявок в очереди***;

$\mathbf{W_c}$ – ***среднее время пребывания заявки в СМО*** (в очереди или под обслуживанием);

$\mathbf{W_{оч}}$ – ***среднее время пребывания заявки в очереди***;

k – ***среднее число занятых каналов*** .

В общем случае все эти характеристики зависят от времени. Но многие СМО работают в неизменных условиях достаточно долгое время, и поэтому для них успевает установиться режим, близкий к стационарному. ***В дальнейшем****, не оговаривая этого каждый раз специально,* ***будем вычислять финальные вероятности состояний и финальные характеристики эффективности СМО, относящиеся к предельному, стационарному режиму ее работы****.*

Часто встречающиеся конфигурации СМО и показатели эффективности их функционирования.

1) Одноканальная СМО с фиксированным числом мест ожидания (с ограниченной очередью) – M/M/1/m

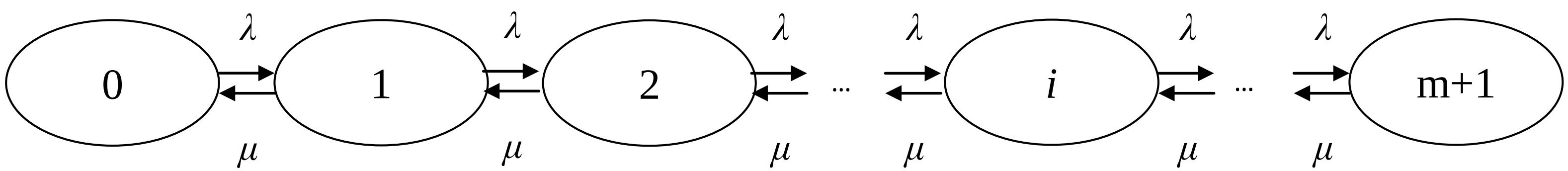
входной поток заявок – простейший с интенсивностью λ,

поток обслуживаний – простейший с интенсивностью μ,

количество мест ожидания m.

Заявка, заставшая очередь полностью заполненной, теряется.

Максимальное количество заявок, присутствующих в системе – m+1 (m заявок в очереди и одна заявка в канале).



ДИП для системы M/M/1/m

Воспользуемся правилом равенства встречных потоков через сечения диаграммы. Получаем $\mathbf{P_i = \omega^i p}$.

Для определения значения $\mathbf{P_0 = p}$ используют нормировочное уравнение:

$$\sum_{i=0}^{m+1} P_i = 1, \text{ или } \sum_{i=0}^{m+1} \omega^i p = p \sum_{i=0}^{m+1} \omega^i = 1.$$

$$\boldsymbol{\omega = \lambda/\mu}$$

Окончательно: $p = \dfrac{1-\omega}{1-\omega^{m+2}}$.

Характеристики эффективности:

— абсолютная пропускная способность $A = \lambda(1 - P_{m+1});$

— относительная пропускная способность (Q=A/λ) $Q = 1 - P_{m+1};$

— вероятность отказа ($P_{отк}$=1–Q $P_i = \omega^i p$) $P_{отк} = P_{m+1} = \omega^{m+1} p;$

— среднее число занятых каналов $\bar{k} = 1 - P_0 = 1 - \dfrac{1-\omega}{1-\omega^{m+2}}$
(***вероятность того, что канал занят***)

— среднее число заявок в очереди $L_{оч} = \sum_{i=1}^{m} i P_{i+1} = \sum_{i=1}^{m} i\omega^{i+1} p$ $L_{оч} = \dfrac{\omega^2[1-\omega^m(m+1-m\omega)]}{(1-\omega)(1-\omega^{m+2})}$

Эта формула справедлива только при ω≠0!! При ω=0 она превращается в неопределенность вида 0/0.

Но, учитывая, что $\sum_{i=0}^{m+1} \omega^i$ *при ω=0 равна m+2, получим* $p = \dfrac{1}{m+2}$ *и* $L_{оч} = \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)};$ $L_c = L_{оч} + (1-p) = \dfrac{m+1}{2}.$

— среднее число заявок в СМО $L_c = L_{оч} + \bar{k}$.

— среднее время пребывания заявки в очереди $W_{оч} = L_{оч} / \lambda$

— среднее время обслуживания заявки каналом $\bar{t}_{обсл} = 0 \cdot P_{отк} + \dfrac{1}{\mu}(1 - P_{отк}) = \dfrac{Q}{\mu}.$

$\bar{t}_{обсл}$ может принимать значения $\dfrac{1}{\mu}$, если заявка попала в систему (вероятность этого равна 1-$P_{отк}$), или 0, если заявка получила отказ (с вероятностью $P_{отк}$).

— среднего времени пребывания заявки в системе $W_{сис} = W_{оч} + \dfrac{Q}{\mu}.$

Пример. Автозаправочная станция (АЗС) с одной колонкой и площадкой при станции на три машины. Поток машин, прибывающих для заправки, имеет - машина в минуту. Процесс заправки продолжается в среднем 1,25 мин.

Определить: вероятность отказа; относительную и абсолютную пропускную способности СМО; среднее число машин, ожидающих заправки; среднее число машин, находящихся на АЗС (включая и обслуживаемую); среднее время ожидания машины в очереди; среднее время пребывания машины на АЗС (включая обслуживание).

Решение.

1) АЗС – СМО с одним каналом обслуживания (одна колонка); площадка при
станции – очередь на 3 места; входной поток имеет интенсивность $\lambda = 1$(машина в минуту).

Возможные состояния:

S_0 - канал свободен, чередь свбодна;
S_1 - канал занят, чередь свбодна;
S_2 - канал занят, 1 место занято, 2 свободны;
S_3 - канал занят, 2 места заняты, 1 свободно;
S_4 - канал занят, очередь занята $\Rightarrow P_4 = P_{отк}$

2) Находим приведенную интенсивность потока заявок:

$\mu = 1/ t_{об} = 1/1,25 = 0,8$ $\omega = \lambda / \mu = 1/0,8 = 1,25$.

3) По формулам для системы M/M/1/m получаем:

p = 0,122

Вероятность отказа $P_{отк} = P_4 = 0,297$

Относительная пропускная способность СМО $Q = 1 – P_{отк} = 0,703$.

Абсолютная пропускная способность СМО $A = \lambda Q = 0,703$ (машины в мин.)

Среднее число машин в очереди $L_{оч} \approx 1,56$

Среднее число машин, находящихся под обслуживанием $k \approx 0,88$

Среднее число машин, связанных с АЗС: $L_с = L_{оч} + k = 2,44$

Среднее время ожидания машины в очереди, по формуле Литтла $W_{оч} = L_{оч} / \lambda = 1,56$ (мин).

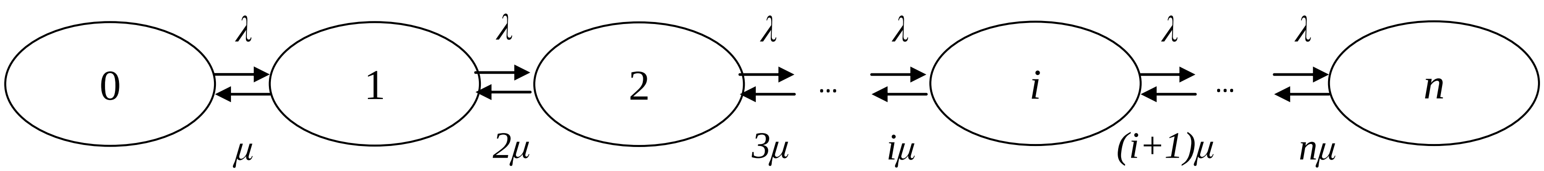
Среднее время пребывания машины на АЗС $W_{сис} = 2,44$

Примерно 30% заявок уходят из системы не обслуженными. Это получается за счет сравнительно высокой интенсивности обсуживания заявок μ.

2) **Многоканальная СМО с отказами M/M/n (задача Эрланга).**

входной поток заявок – простейший с интенсивностью λ,
поток обслуживаний – простейший с интенсивностью μ,
количество каналов обслуживания – n,
количество мест ожидания 0,
время обслуживания - показательное с параметром $\mu = 1/\sqrt{t_{обсл}}$.

Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО (в силу отсутствия очереди, оно совпадает с числом занятых каналов.



ДИП для системы M/M/n

Воспользуемся правилом равенства встречных потоков через сечения диаграммы.

Получаем $\boldsymbol{P_i = \frac{\omega^i}{i!} p}$

Финальные вероятности состояний выражаются формулами Эрланга: :

$$P_o = p = \{1 + \frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots + \frac{\omega^n}{n!}\}^{-1}; \quad P_k = \frac{\omega^k}{k!} P_0 \quad (k = 1,2\ldots n).$$

Характеристики эффективности:

— вероятность отказа $P_{отк} = P_n = \frac{\omega^n}{n!} p;$

— относительная пропускная способность ($P_{отк}$=1–Q => Q =1–$P_{отк}$) $Q = 1 - P_n = 1 - \frac{\omega^n}{n!} p;$

— абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda(1 - \frac{\omega^n}{n!} p);$

— среднее число занятых каналов
(можно вычислить непосредственно через вероятности P_0 , P_1, ..., P_n) $\bar{k} = 0P_0 + 1P_1 + \ldots + nP_n$,

но, учитывая, что абсолютная пропускная способность A есть не что иное, как среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, а один занятый канал обслуживает за единицу времени в среднем μ заявок, получаем:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \omega(1 - \frac{\omega^n}{n!} p) .$$

Пример. Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки/ч. Среднее время обслуживания одной заявки 0,8 ч. Каждая обслуженная заявка приносит доход c = 4 руб. Содержание каждого канала обходится 2 руб./ч.

***Решить*:** выгодно или невыгодно в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех?

Решение.

1) АЗС – СМО с двумя каналами обслуживания, $n = 2$; входной поток имеет интенсивность $\lambda = 4$ заявки/ч ; среднее время обслуживания одной заявки $t_{об} = 0,8$ ч;

2) Возможные состояния:

S_0 - все каналы свободны;

S_1 - один канал занят, второй свободен;

S_2 - все каналы заняты. $\Rightarrow P_2 = P_{отк}$

2) Находим приведенную интенсивность потока заявок:

$\mu = 1/0,8 = 1,25$ $\omega = 4/1,25 = \lambda/\mu = 3,2$.

3) По формулам Эрланга получаем:

$P_0 = 0,107;\ \Rightarrow\ P_2 = 0,55.$

4) Относительная пропускная способность $Q = 1\text{-}P_2 = 0,450$

абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = 1,8$ заявки/ч

среднее число занятых каналов $k = 1,8 / 1,25 = 1,44$

5) Доход от заявок, приносимый СМО в данном варианте, равен $D = Ac \approx 7,2$ руб/ч.

Анализ результатов показывает, что примерно 50 % заявок будет обслуживаться и, сответственно, примерно 50 % получат отказ. Это получается за счет сравнительно высокой интенсивности обсуживания заявок μ. Вследствие этого в среднем обслуживанием заявок будут заняты 2 канала.

6) Подсчитаем те же характеристики для трехканальной СМО (отмечая их штрихом вверху):

$P_0' = 0,07;\ \Rightarrow\ P_3' = 0,37$

$Q' = 1\text{-}P_3 = 0,63$

$A' = \lambda Q = 2,52$

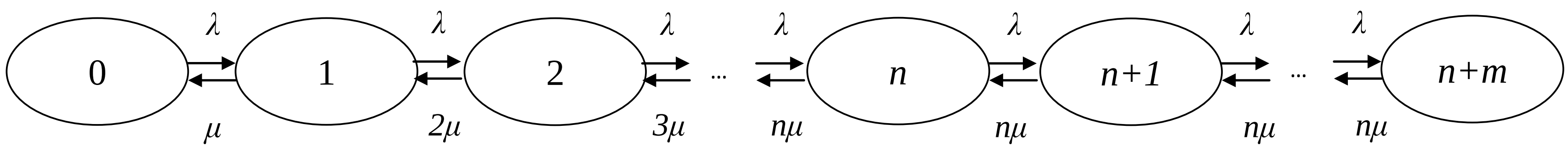
$D' = A'c \approx 10,08$ руб/ч

Увеличение дохода равно 2,88 руб./ч; увеличение расхода равно 2 руб./ч; из этого видно, что переход от $n = 2$ к $n = 3$ экономически выгоден.

3) **Многоканальная СМО с фиксированным числом мест ожидания (с ограниченной очередью) – M/M/n/m.**

входной поток заявок – простейший с интенсивностью λ,
поток обслуживаний – простейший с интенсивностью μ,
количество каналов обслуживания – n,
количество мест ожидания – m,
время обслуживания - показательное с параметром $\mu = 1/\sqrt{t_{обсл}}$.

Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО (в силу отсутствия очереди, оно совпадает с числом занятых каналов.



ДИП для системы M/M/n/m

Диаграмма для состояний 0 – n полностью совпадает с диаграммой для системы M/M/n с отказами.

Значит, и вероятности для этих состояний тоже совпадут: $P_k = \frac{\omega^k}{k!} p$

Вероятности для состояний с номерами больше n: $P_{n+i} = \frac{\omega^i}{n^i} P_n,$

(воспользуемся правилом равенства встречных потоков через сечения)

Из уравнения нормировки P_0=p: $p=[1+\frac{\omega}{1!}+\frac{\omega^2}{2!}+\ldots+\frac{\omega^n}{n!}+\frac{\omega^{n+1}(1-\frac{\omega^m}{n^m})}{n!(n-\omega)}]^{-1}.$

При ω=n: $p=[1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}+\frac{mn^n}{n!}]^{-1}.$

Характеристики эффективности:

— вероятность отказа $P_{отк}=P_{n+m}=\frac{\omega^{n+m}}{n^m n!}p;$

— относительная пропускная способность ($P_{отк}$=1–Q => Q =1–$P_{отк}$) $Q=1-P_{отк}=1-\frac{\omega^{n+m}}{n^m n!}p;$

— абсолютная пропускная способность $A=\lambda Q=\lambda(1-\frac{\omega^{n+m}}{n^m n!}p);$

— среднее число занятых каналов $\bar{k}=\frac{A}{\mu}=\omega(1-\frac{\omega^{n+m}}{n^m n!}p).$

— среднее число заявок в очереди $L_{оч}=\frac{\omega^{n+1}[1-(m+1)\rho^m+m\rho^{m+1}]}{nn!(1-\rho)^2}p.$ где $\frac{\omega}{n}=\rho.$

При $\frac{\omega}{n}=\rho=1$ раскрытие неопределенности в формуле для $L_{оч}$ приводит к следующему результату: $L_{оч}=\frac{\omega^{n+1}m(m+1)}{2nn!}p.$

— среднее число заявок в СМО $L_c=L_{оч}+\bar{k}.$

— среднее время пребывания заявки в очереди $W_{оч}=L_{оч}/\lambda$

— среднего времени пребывания заявки в системе $W_c=W_{оч}+\frac{Q}{\mu}.$

Пример. Автозаправочная станция (АЗС) с двумя колонками предназначена для обслуживания машин. Поток машин, прибывающих на АЗС – 2 машины в минуту; среднее время обслуживания одной машины $\overline{t_{об}} = \dfrac{1}{\mu} = 2$ (мин).

Площадка у АЗС может вместить очередь не более 3 машин. Машина, прибывшая в момент, когда все три места в очереди заняты, покидает АЗС (получает отказ).
Найти характеристики СМО: вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускную способности, среднее число занятых колонок, среднее число машин в очереди, среднее время ожидания и пребывания машины на АЗС.
Решение.
1) АЗС – СМО с двумя каналами обслуживания (две колонки); площадка при станции – очередь на m=3 места; входной поток имеет интенсивность $\lambda = 2$ (машины в минуту);
Возможные состояния:

S_0 - все каналы свободны, чередь свбодна;
S_1 - один канал занят, второй свободен, чередь свбодна;
S_2 - один канал занят, второй занят, чередь свбодна;
S_3 - один канал занят, второй занят, 1 место занято, 2 свободны;
S_4 - один канал занят, второй занят, 2 места заняты, 1 свободно;
S_5 - оба канала заняты, очередь занята $\Rightarrow P_5 = P_{отк}$

2) Имеем: $n = 2$, $m = 3$, $\lambda = 2$, $\mu=0,5$, $\omega= 4$, $\rho = \omega/n = 2$.

3) По формулам для СМО M/M/n/m находим:
p = 0,008
Вероятность отказа: $P_{отк} = P_5 = 0,512$
Относительная пропускная способность $Q = 1-P_{отк} = 0,488$
Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = 0,976$ машины/мин
Среднее число занятых каналов $k = 0,976 / 0,5 = 1,952$
Среднее число машин в очереди: $L_{оч} = 2,18$
Среднее время пребывания в очереди: $W_{оч} = 2,18$ (мин)
Среднее время пребывания машины на АЗС (включая время обслуживания): $W_c = 2,07$ (мин)

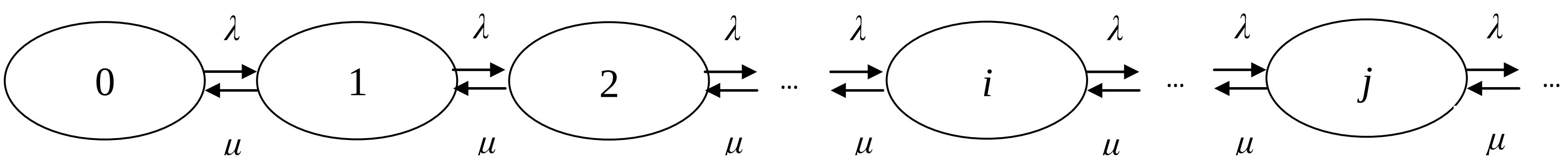
Полученные характеристики СМО M/M/2/3 свидетельствуют о том, что доля простоя каналов очень мала и составляет примерно 1% рабочего времени, а вероятность отказа в обслуживании очень большая: около 51 % заявок получат отказ. Обе колонки почти все время заняты ($k \approx 2$), а относительная пропускная способность маленькая – только 49% заявок будет обслужено. Из всего этого можно сделать вывод: СМО не справляется с потоком заявок, и необходимо увеличить число каналов или интенсивность обслуживания и, возможно, увеличить число мест в очереди.

4) **Одноканальная СМО с неограниченной очередью – M/M/1/∞**

входной поток заявок – простейший с интенсивностью λ,
поток обслуживаний – простейший с интенсивностью μ,
количество каналов обслуживания – 1,
количество мест ожидания – не ограничено

Финальные вероятности существуют и могут быть определены, если интенсивность поступления заявок ниже интенсивности их обслуживания, т.е. $\omega = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

При ω=1 очередь будет бесконечно расти



ДИП для системы M/M/1/∞

Воспользовавшись правилом равенства встречных потоков вероятностей через сечение диаграммы и, используя, как и ранее, обозначения P_0 = p и λ/μ = ω, получим: :

$$P_i = \omega^i p.$$

Для определения значения P_0 = p воспользуемся нормировочным уравнением.

Окончательно: ***p =1 - ω***.

Характеристики эффективности:

При отсутствии ограничений по длине очереди каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена, поэтому

— относительная пропускная способность $Q = 1;$

— абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda;$

— среднее число занятых каналов $\bar{k} = 1 - P_0 = \omega$

— среднее число заявок в очереди $L_{оч} = \dfrac{\omega^2}{1-\omega}.$

— среднее число заявок в СМО $L_c = L_{оч} + \bar{k} = \dfrac{\omega^2}{1-\omega} + \omega = \dfrac{\omega}{1-\omega}$

— среднее время пребывания заявки в очереди $W_{оч} = L_{оч} / \lambda$

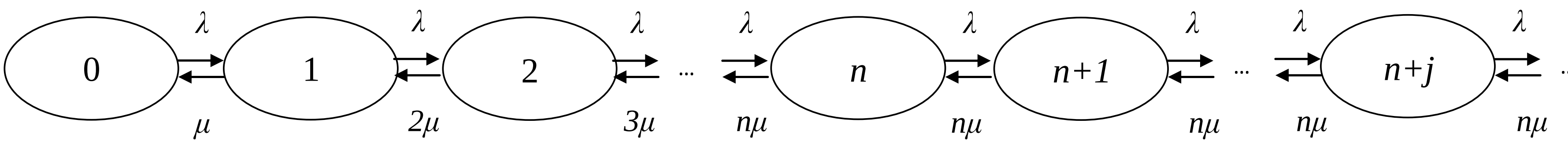
— среднего времени пребывания заявки в системе $W_c = L_c / \lambda$.

Примера НЕТ

5) **Многоканальная СМО с неограниченной очередью) – M/M/n/∞**

входной поток заявок – простейший с интенсивностью λ,
поток обслуживаний – простейший с интенсивностью μ,
количество каналов обслуживания – n,
количество мест ожидания – не ограничено,
время обслуживания - показательное с параметром $\mu = 1/\sqrt{t_{обсл}}$.

Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО (в силу отсутствия очереди, оно совпадает с числом занятых каналов.



ДИП для системы M/M/n/∞

Диаграмма для этой системы отличается диаграммы для многоканальной системы с ограниченной очередью M/M/n/m только бесконечным числом состояний. Значит, и вероятности для этих состояний тоже совпадут:

$$P_k = \frac{\omega^k}{k!} P_0 \quad (k = 1,2 \ldots n),$$

$$P_{n+i} = \frac{\omega^i}{n^i} P_n, \quad i = 1,2,\ldots,m \, . \quad \text{где} \quad P_n = \frac{\omega^n}{n!} p,$$

Из уравнения нормировки можно найти значение P_0=p.

Окончательно: $p = [1 + \frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots + \frac{\omega^n}{n!} + \frac{\omega^{n+1}}{n!(n-\omega)}]^{-1}.$

Характеристики эффективности:

как и для одноканальной СМО при отсутствии ограничений по длине очереди каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена, поэтому

— относительная пропускная способность $Q = 1$

— абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda;$

— среднее число занятых каналов $\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \omega$

— среднее число заявок в очереди $L_{оч} = \frac{\omega^{n+1}}{nn!} p \frac{d}{d\rho}(\frac{\rho}{1-\rho}) = \frac{\omega^{n+1}}{nn!(1-\rho)^2} p.$

— среднее число заявок в СМО $L_c = L_{оч} + \bar{k}$

— среднее время пребывания заявки в очереди $W_{оч} = L_{оч} / \lambda$

— среднего времени пребывания заявки в системе $W_c = L_c / \lambda.$

Пример. Автозаправочная станция с двумя колонками обслуживает поток машин с интенсивностью 0,8 машин в минуту. Среднее время обслуживания одной машины

$$\overline{t}_{об} = \frac{1}{\mu} = 2\,(\text{мин}).$$

В данном районе нет другой АЗС, так что очередь машин перед АЗС может расти практически неограниченно.

Найти характеристики СМО.

Решение

Решение.

1) АЗС – СМО с двумя каналами обслуживания (две колонки, n =2); входной поток имеет интенсивность λ = 0,8 машин в минуту;

Возможные состояния:

S_0 - канал свободtн, чередь свбодна;

S_1 - канал занят, чередь свбодна;

S_2 - канал занят, 1 место занято;

……

2) Имеем: $n = 2$, $m = \infty$, $\lambda = 0{,}8$, $\mu=0{,}5$, $\omega= 1{,}6$, $\rho = \omega/n = 0{,}8$.

3) Поскольку $\rho < 1$, очередь не растет безгранично и имеет смысл говорить о предельном стационарном режиме работы СМО. По формулам для системы $M/M/n/\infty$ находим :

$p = 0{,}111$

Среднее число занятых каналов: $k = \omega = 1{,}6$

Среднее число машин в очереди: $L_{оч} = 2{,}84$

Среднее число машин на АЗС: $L_c = 4{,}44$

Среднее время ожидания в очереди: $W_{оч} = 3{,}55$ (мин)

Среднее время пребывания машины на АЗС: $W_c = 5{,}55$ (мин)

Таким образом, доля простоя канала равна 11,1 % от длительности интервала функционирования СМО, по остальным характеристикам работу данной системы следует признать удовлетворительной.

6) **Простейшая многофазовая СМО с очередью**

Анализ многофазовых СМО в общем случае затруднен, тем что входящий поток каждой последующей фазы является выходным потоком предыдущей и в общем случае имеет последействие.

Однако если на вход СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок, а время обслуживания показательное, то выходной поток этой СМО — простейший, с той же интенсивностью λ, что и входящий. Из этого следует, что многофазовую СМО с неограниченной очередью перед каждой фазой, простейшим входящим потоком заявок и показательным временем обслуживания на каждой фазе можно анализировать как простую последовательность простейших СМО.

Если очередь к фазе ограничена, то выходной поток этой фазы перестает быть простейшим и вышеуказанный прием может применяться только в качестве приближенного.

Замкнутые системы массового обслуживания (СМО с ожиданием ответа)

До сих пор мы рассматривали СМО, где заявки приходили откуда-то извне и интенсивность потока заявок не зависела от состояния самой системы.

Сейчас мы рассмотрим **СМО, в которых интенсивность потока поступающих заявок зависит от состояния самой системы, - замкнутые СМО**.

Пример. Система с центральным процессором и удаленными терминалами. *Пользователь, отправивший запрос с терминала не может выдать новый запрос, пока не получит сообщения от процессора об окончании обработки предыдущего*.

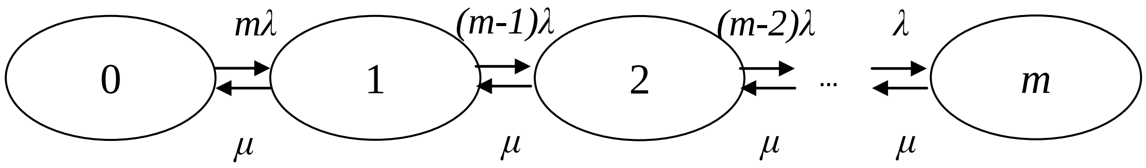
Характерным для замкнутой системы массового обслуживания является наличие ограниченного числа источников заявок.

В сущности, любая СМО имеет дело только с ограниченным числом источников заявок, но в ряде случаев число этих источников так велико, что можно пренебречь влиянием состояния самой СМО на поток заявок. В замкнутой же СМО источники заявок, наряду с каналами обслуживания, рассматриваются как элементы СМО.

Построим аналитическую модель такой системы.

Одноканальная СМО (с одним обслуживающим прибором) и количеством источников m.

Состояния будем кодировать числом выданных заявок.



ДИП для одноканальной замкнутой СМО

Воспользовавшись правилом равенства встречных потоков вероятностей через сечение диаграммы и исходя из уравнения нормировки, получим выражение для p

$$p = \frac{1}{1 + m\omega + m(m-1)\omega^2 + m(m-1)(m-2)\omega^3 + \ldots + m(m-1)\ldots 1\omega^m}.$$

Характеристики эффективности замкнутой СМО:

– абсолютная пропускная способность $A = (1\text{-}p)\ \mu$

канал занят обслуживанием заявок с вероятностью (1-р), если он занят, то обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени

– относительная пропускная способность $Q = 1$

так как каждая заявка, в конце концов, будет обслужена

— среднее число заявок в СМО $L_{\text{с}} = m - \frac{\mu}{\lambda}(1-p) = m - \frac{1-p}{\omega}.$

по сути среднее число источников, выдавших заявку и ожидающих ответа

— среднее число занятых каналов $\bar{k} = 0 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1 - p.$

— среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}} = m - \frac{1-p}{\omega} - (1-p) = m - (1-p)(1 + \frac{1}{\omega})$ где $L_{\text{с}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$.

Пример. Рабочий обслуживает группу из трех станков. Каждый станок останавливается в среднем 2 раза в час. Процесс наладки занимает у рабочего, в среднем, 10 минут. Все потоки полагаем простейшими.

Определить характеристики замкнутой СМО: вероятность занятости рабочего; его абсолютную пропускную способность А; среднее количество неисправных станков L_c.

Решение.
1) Группа станков – замкнутая СМО одним каналом обслуживания (один рабочий); количество источников заявок m=3 (три станка); входной поток имеет интенсивность $\lambda = 2$ (остановок станоков в среднем в час).

Имеем $n = 3$, $\lambda = 2$, $\mu= 1/ (1/6)= 6$, $\omega= \lambda/\mu = 1/3$.

2) Определяем по формулам для одноканальной замкнутой СМО
$p \approx 0{,}346$

Вероятность занятости рабочего:

$$P_{\text{зан}} = 1 - P_0 = 1 - p = 0{,}654.$$

Абсолютная пропускная способность (среднее число неисправностей, которое рабочий ликвидирует в час):

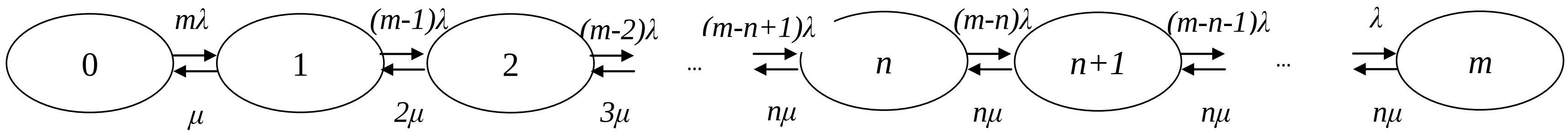
$$A = (1 - p)\mu = 0{,}654 \cdot 6 = 3{,}94.$$

Среднее число неисправных станков:

$$L_c = m - \frac{1-p}{\omega} = 3 - \frac{0{,}654}{1/3}. = 1{,}04.$$

Многоканальная СМО (с несколькими обслуживающими приборами n) и количеством источников m (n<m)

Будем кодировать состояния общим числом выданных источниками и еще не обслуженных заявок. Так как источник не может выдать новую заявку до окончания обслуживания предыдущей, то интенсивность общего потока заявок зависит от того, сколько заявок связано с процессом обслуживания (непосредственно обслуживается или стоит в очереди).



ДИП для многоканальной замкнутой СМО

$$P_i = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-i+1)}{i!}\omega^i p\,,\quad i=1,\,2,.$$

$$\dots$$

$$P_{n.} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}\omega^n p\,.$$

$$P_m = \frac{m!}{n!\,n^{m-n}}\omega^m p.$$

Воспользовавшись правилом равенства встречных потоков вероятностей через сечение диаграммы и исходя из уравнения нормировки, получим выражение для р

$$p=[1+\frac{m}{1!}\omega+\frac{m(m-1)}{2!}\omega^{2}+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}\omega^{n}+\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!n}\omega^{n+1}+\ldots+\frac{m!}{n!n^{m-n}}\omega^{m}]^{-1}$$

Характеристики эффективности замкнутой СМО:

— среднее число занятых каналов

$$\bar{k}=P_1+2P_2+\ldots+(n-1)P_{n-1}+n(1-P_0-P_1-\ldots P_{n-1}).$$

– абсолютная пропускная способность $A=\bar{k}\mu.$