

В данном файле представлен примерный конспект лекций по дисциплине «Цифровая обработка сигналов» для студентов специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий». К его изучению следует подходить творчески, так как не все вопросы отражены достаточно подробно, возможны неточности и опiski.

Классификация сигналов

Каждый сигнал можно описать некоторой математической моделью. В зависимости от свойств этой модели можно выделить следующие группы сигналов (Рисунок 1).



Рисунок 1

Детерминированные сигналы

Детерминированным называется сигнал, характеристики которого могут быть определены в любой момент времени с вероятностью равной единице.

Обычно выделяют два класса **детерминированных** сигналов: **периодические** и **непериодические**.

Периодическим сигналом называют такой вид воздействия, когда форма сигнала повторяется через некоторый интервал времени T , который называется периодом.

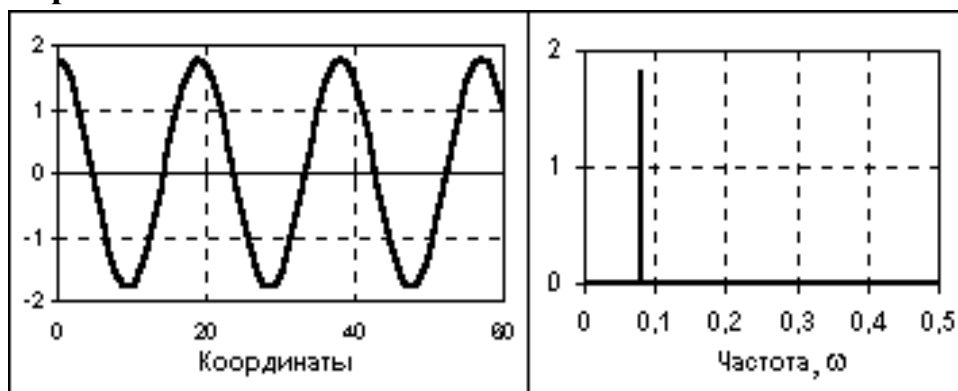
К **периодическим** относят **гармонические** и **полигармонические** сигналы. Для периодических сигналов выполняется общее условие

$$s(t) = s(t + kT),$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ - любое целое число;

T - период, являющийся конечным отрезком независимой переменной.

Гармонические сигналы



Гармонические сигналы описываются следующими формулами:

$$x(t) = a \cos(2\pi f t) + b \sin(2\pi f t) = A \cos(2\pi f t - \varphi) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ - амплитуда гармонической составляющей;

f - частота колебаний;

$\omega = 2\pi f$ - угловая (циклическая) частота колебаний;

$\varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ - начальная фаза колебаний;

$T = \frac{1}{f}$ - период колебаний.

Полигармонические сигналы

Полигармонический сигнал – это сигнал, представляющий собой сумму гармонических колебаний. Он описывается формулой:

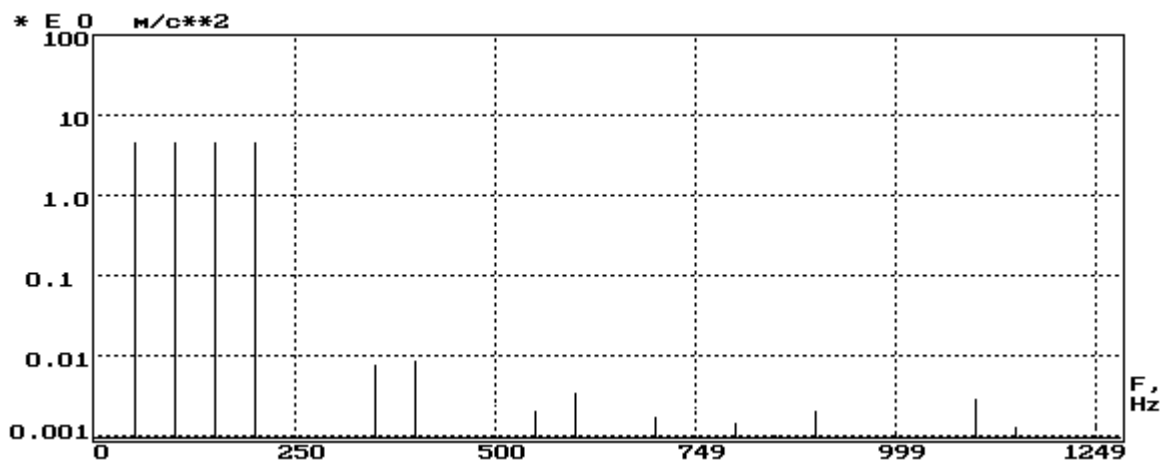
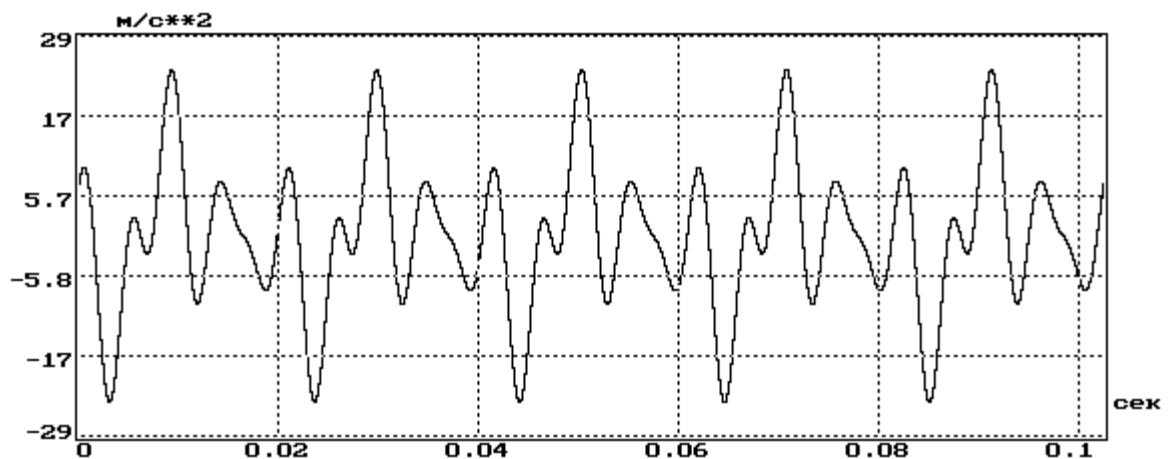
$$x(t) = \sum_{i=1}^N [a_i \cos(2\pi f_i t) + b_i \sin(2\pi f_i t)] = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi f_i t - \varphi_i)$$

Также полигармонический сигнал можно описать функцией $x(t) = y(t + kT_p)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, где T_p - период одного полного колебания сигнала $y(t)$, заданного на

одном периоде.

Значение $f_p = \frac{1}{T_p}$, называют **фундаментальной частотой** колебаний.

Полигармонические сигналы представляют собой сумму определенной постоянной составляющей ($f_0 = 0$) и некоторого числа гармонических составляющих с произвольными значениями амплитуд A_i и фаз φ_i . **При этом периоды составляющих сигналов кратны периоду фундаментальной частоты f_p .** Другими словами, на периоде фундаментальной частоты f_p укладывается кратное число периодов всех гармоник, что и создает периодичность повторения сигнала.



Форма и спектр вибрационного полигармонического сигнала

У полигармонического сигнала выделяют следующие параметры:

- текущее среднее значение за определенное время, например, за время периода:

$$X_{\text{ср,т}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(t) dt;$$

- постоянная составляющая одного периода:

$$X_{\text{п}} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt;$$

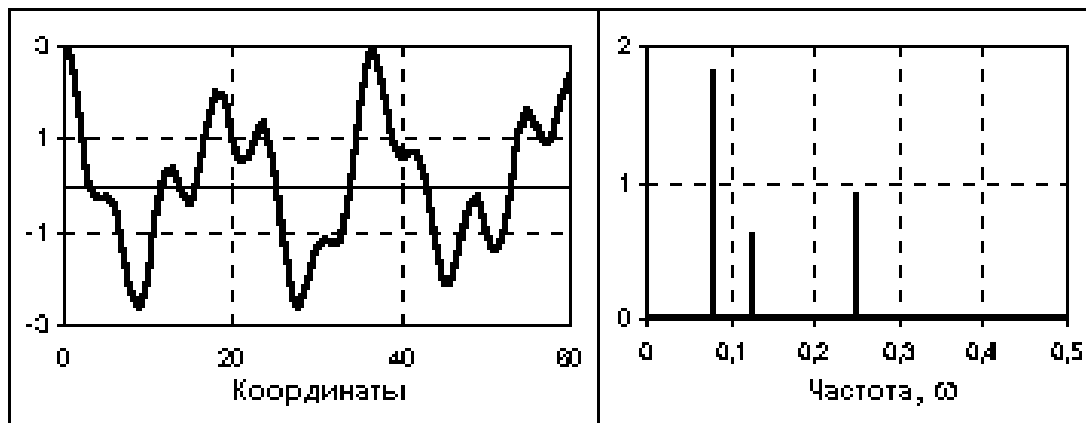
- среднее выпрямленное значение:

$$X_{\text{ср.в}} = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)| dt;$$

- среднее квадратическое значение:

$$CKЗ = \frac{1}{T} \int_0^T [s(t)]^2 dt.$$

К **непериодическим** сигналам относят **почти периодические** и **апериодические** сигналы. Основным инструментом их анализа также является частотное представление.



Почти периодический сигнал и его амплитудный спектр

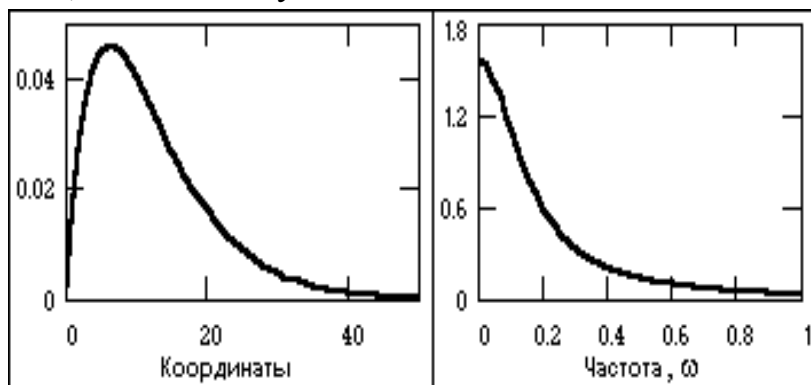
Почти периодические сигналы близки по своей форме к полигармоническим. Они также представляют собой сумму двух и более гармонических сигналов, но не с кратными, а с произвольными частотами, отношения которых не относятся к рациональным числам, вследствие чего фундаментальный период суммарных колебаний бесконечно велик.

Так, например, сумма двух гармоник с частотами $2f_0$ и $3.5f_0$ дает периодический сигнал ($2/3.5$ – рациональное число) с фундаментальной частотой $0.5f_0$, на одном периоде которой будут укладываться 4 периода первой гармоники и 7 периодов второй. Но если значение частоты второй гармоники заменить близким значением $\sqrt{12}f_0$, то сигнал перейдет в разряд непериодических, поскольку отношение $2/\sqrt{12}$ не относится к числу рациональных чисел. Как правило, почти периодические сигналы порождаются физическими процессами, не связанными между собой. Математическое отображение сигналов тождественно полигармоническим сигналам (сумма гармоник), а частотный спектр также дискретен.

Апериодические сигналы составляют основную группу непериодических сигналов и задаются произвольными функциями времени. На рисунке показан пример апериодического сигнала, заданного формулой на интервале $(0, \infty)$:

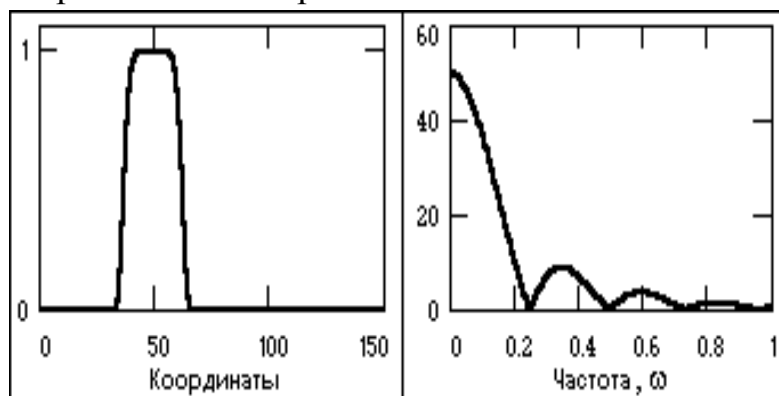
$$s(t) = \exp(-at) - \exp(-bt),$$

где a и b – константы, в данном случае $a = 0.15$, $b = 0.17$.



Апериодический сигнал и модуль его спектра

К **апериодическим сигналам** относятся также **импульсные сигналы**, которые в радиотехнике и в отраслях, широко ее использующих, часто рассматривают в виде отдельного класса сигналов. Импульсы представляют собой сигналы, как правило, определенной и достаточно простой формы, существующие в пределах конечных временных интервалов.



Импульсный сигнал и модуль его спектра

Случайные сигналы

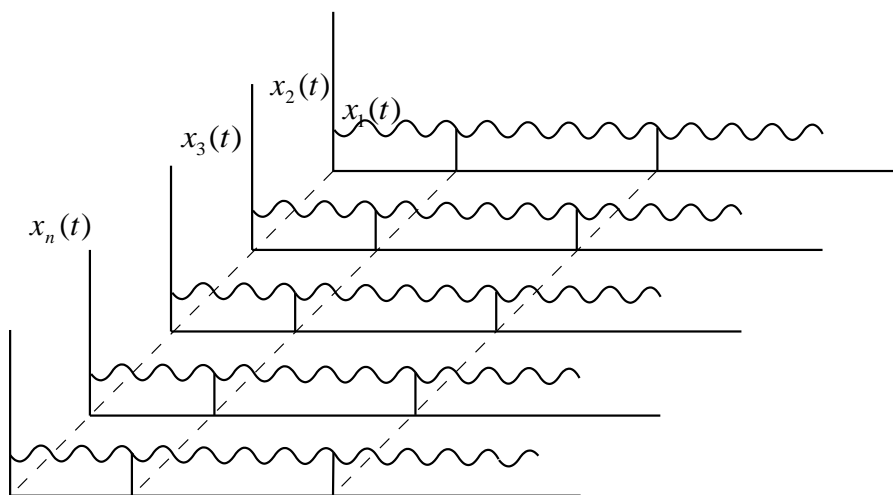
Случайным сигналом называют функцию времени, значения которой заранее неизвестны, и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. Случайный сигнал отображает случайное физическое явление или физический процесс, причем зарегистрированный в единичном наблюдении сигнал не

воспроизводится при повторных наблюдениях и не может быть описан явной математической зависимостью. В качестве основных статистических характеристик случайных сигналов принимают:

- а) закон распределения вероятности нахождения величины сигнала в определенном интервале значений;
- б) спектральное распределение мощности сигнала.

Конкретная реализация процесса, описывающего случайное явление, называется выборочной функцией или реализацией если речь идет о наблюдениях в конечной длительности, а совокупность всех возможных выборочных функций, которые могут дать случайное явление называется случайным процессом. Таким образом, под реализацией случайного физического явления понимается один из возможных исходов случайного процесса.

Случайные процессы подразделяются на **стационарные** и **нестационарные**.



Реализации случайного процесса

Если физическое явление описывается случайным процессом, то свойства этого явления можно оценить в любой момент времени путем усреднения по совокупности выборочных функций с помощью среднего значения или первого начального момента:

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1)$$

и ковариационной функции:

$$R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau).$$

Если значения моментных характеристик не зависят от момента времени t_1 , то такой процесс называется **стационарным**. Различают стационарность в широком и узком смысле.

Процесс стационарный в широком смысле, когда только первые начальный и центральные моменты не зависят от времени t_1 .

Стационарный в узком смысле процесс это тот, у которого все моменты не зависят от времени t_1 .

Стационарные процессы подразделяются на *эргодические и неэргодические*.

В большинстве случаев, характеристики случайного стационарного процесса можно вычислить проводя усреднение по времени, а не по реализации в пределах отдельных выборочных функций, входящих в ансамбль реализаций.

$$\mu_x(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt;$$

$$R_{xx}(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) d\tau.$$

Если оказывается, что среднее значение и ковариационная функции, полученные усреднением по времени равны характеристикам найденным усреднением по ансамблю, то такой процесс называется эргодическим.

Все остальные случайные процессы, не удовлетворяющие указанным условиям называются нестационарными.

Что касается случайных нестационарных сигналов, то их общепринятой классификации не существует. Как правило, из них выделяют различные группы сигналов по особенностям их нестационарности.

Типы сигналов

Аналоговый сигнал (analog signal) является непрерывной функцией непрерывного аргумента, т.е. определен для любого значения аргументов. Источниками аналоговых сигналов, как правило, являются физические процессы и явления, непрерывные в динамике своего развития во времени, в пространстве или по любой другой независимой переменной, при этом регистрируемый сигнал подобен (“аналогичен”) порождающему его процессу. Пример математической записи сигнала:

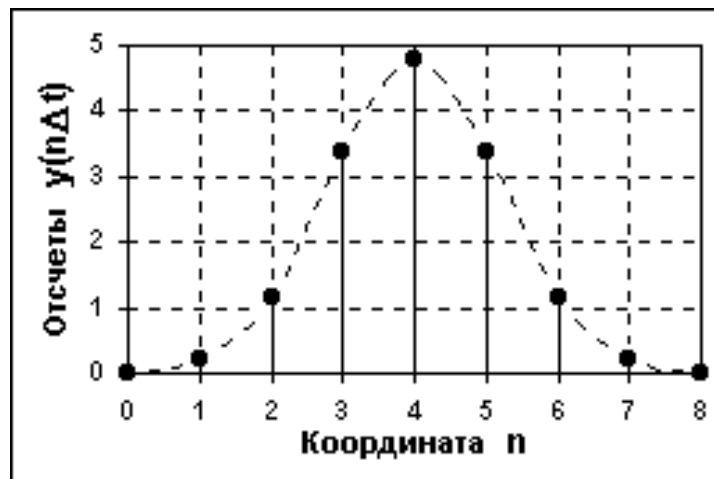
$$y(t) = 4.8 \exp\left(-\frac{(t-4)^2}{2.8}\right).$$

Примеры сигналов, аналоговых по своей природе - изменение напряженности электрического, магнитного, электромагнитного поля во времени и в пространстве.



Аналоговый сигнал

Дискретный сигнал по своим значениям также является непрерывной функцией, но определенной только по **дискретным значениям аргумента**. По множеству своих значений он является конечным (счетным) и описывается дискретной последовательностью отсчетов $y(n\Delta t)$, где $y_1 \leq y \leq y_2$, Δt - интервал между отсчетами. Величина, обратная шагу дискретизации: $f = \frac{1}{\Delta t} \Delta t$, называется частотой дискретизации. Если дискретный сигнал получен дискретизацией аналогового сигнала, то он представляет собой последовательность отсчетов, значения которых в точности равны значениям исходного сигнала по координатам $n\Delta t$.



Дискретный сигнал

Пример дискретного сигнала – показания прибора фиксируемые оператором через минуту.

Цифровой сигнал квантован по своим значениям и дискретен по аргументу. Он описывается квантованной решетчатой функцией $y_n = Q_k[(n\Delta t)](n\Delta t)$, где Q_k - функция квантования с числом уровней квантования k , при этом интервалы квантования могут быть как с равномерным распределением, так и с

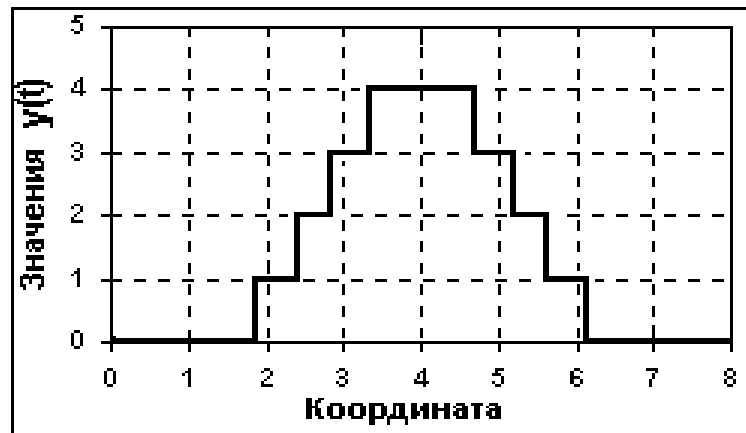
неравномерным, например - логарифмическим. Задается цифровой сигнал, как правило, в виде дискретного ряда числовых данных - числового массива по последовательным значениям аргумента при $\Delta t = \text{const}$, но в общем случае сигнал может задаваться и в виде таблицы для произвольных значений аргумента.

По существу, цифровой сигнал по своим значениям (отсчетам) является формализованной разновидностью дискретного сигнала при округлении отсчетов последнего до определенного количества цифр. Цифровой сигнал конечен по множеству своих значений. Процесс преобразования бесконечных по значениям аналоговых отсчетов в конечное число цифровых значений называется квантованием по уровню, а возникающие при квантовании ошибки округления отсчетов (отбрасываемые значения) – шумами или ошибками квантования.



Цифровой сигнал

В системах цифровой обработки данных и в ЭВМ сигнал всегда представлен с точностью до определенного количества разрядов, а, следовательно, всегда является цифровым. С учетом этих факторов при описании цифровых сигналов функция квантования обычно опускается (подразумевается равномерной по умолчанию), а для описания сигналов используются правила описания дискретных сигналов. Что касается формы обращения цифровых сигналов в системах хранения, передачи и обработки, то, как правило, они представляет собой комбинации коротких одно- или двуполярных импульсов одинаковой амплитуды, которыми в двоичном коде с определенным количеством числовых разрядов кодируются числовые последовательности сигналов (массивов данных).



Дискретно-аналоговый сигнал

Квантованными по своим значениям могут быть и аналоговые сигналы, зарегистрированные соответствующей аппаратурой (рисунок 2.15), которые принято называть дискретно-аналоговыми. Но выделять эти сигналы в отдельный тип не имеет смысла - они остаются аналоговыми кусочно-непрерывными сигналами с шагом квантования, который определяется допустимой погрешностью измерений.

Операция дискретизации осуществляет преобразование аналоговых сигналов (функций), непрерывных по аргументу, в функции мгновенных значений сигналов по дискретному аргументу. Дискретизация обычно производится с постоянным шагом по аргументу (*равномерная дискретизация*), при этом $s(t) \Rightarrow s(n\Delta t)$, где значения $s(n\Delta t)$ представляют собой отсчеты функции $s(t)$ в моменты времени $t = n\Delta t, n = 0, 1, 2, \dots, N$. Частота, с которой выполняются замеры аналогового сигнала, называется *частотой дискретизации*. В общем случае, сетка отсчетов по аргументу может быть произвольной, как, например, $s(t) \Rightarrow s(t_k), k = 1, 2, \dots, K$, или задаваться по определенному закону. В результате дискретизации непрерывный (*аналоговый*) сигнал переводится в последовательность чисел.

Операция восстановления аналогового сигнала из его дискретного представления обратная операции дискретизации и представляет, по существу, интерполяцию данных.

Дискретизация сигналов может приводить к определенной потере информации о поведении сигналов в промежутках между отсчетами. Однако существуют условия, определенные теоремой Котельникова, согласно которой аналоговый сигнал с ограниченным частотным спектром может быть без потерь информации преобразован в дискретный сигнал, и затем абсолютно точно восстановлен по значениям своих дискретных отсчетов.

Как известно, любая непрерывная функция может быть разложена на конечном отрезке в ряд Фурье, т.е. представлена в спектральной форме - в виде суммы ряда синусоид с кратными (нумерованными) частотами с определенными

амплитудами и фазами. У относительно гладких функций спектр быстро убывает (коэффициенты модуля спектра быстро стремятся к нулю). Для представления "изрезанных" функций, с разрывами и "изломами", нужны синусоиды с большими частотами. Говорят, что сигнал имеет *ограниченный спектр*, если после определенной частоты F все коэффициенты спектра равны нулю, т.е. сигнал представляется в виде конечной суммы ряда Фурье.

Теоремой Котельникова устанавливается, что если спектр сигнала ограничен частотой F , то после дискретизации сигнала с частотой не менее $2F$ можно восстановить исходный непрерывный сигнал по полученному цифровому сигналу абсолютно точно. Для этого нужно выполнить интерполяцию цифрового сигнала "между отсчетами" специальной функцией.

На практике эта теорема имеет огромное значение. Например, известно, что диапазон звуковых сигналов, воспринимаемых человеком, не превышает 20 кГц. Следовательно, при дискретизации записанных звуковых сигналов с частотой не менее 40 кГц мы можем точно восстановить исходный аналоговый сигнал по его цифровым отсчетам, что и выполняется в проигрывателях компакт-дисков для восстановления звука. Частота дискретизации звукового сигнала при записи на компакт-диск составляет 44000 Гц.

Операция квантования или аналого-цифрового преобразования (АЦП; английский термин Analog-to-Digital Converter, ADC) заключается в преобразовании дискретного сигнала $s(t_n)$ в цифровой сигнал $s(n) = s_n \approx s(t_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$, как правило, кодированный в двоичной системе счисления. Процесс преобразования отсчетов сигнала в числа называется квантованием по уровню (quantization), а возникающие при этом потери информации за счет округления – ошибками или шумами квантования (quantization error, quantization noise).

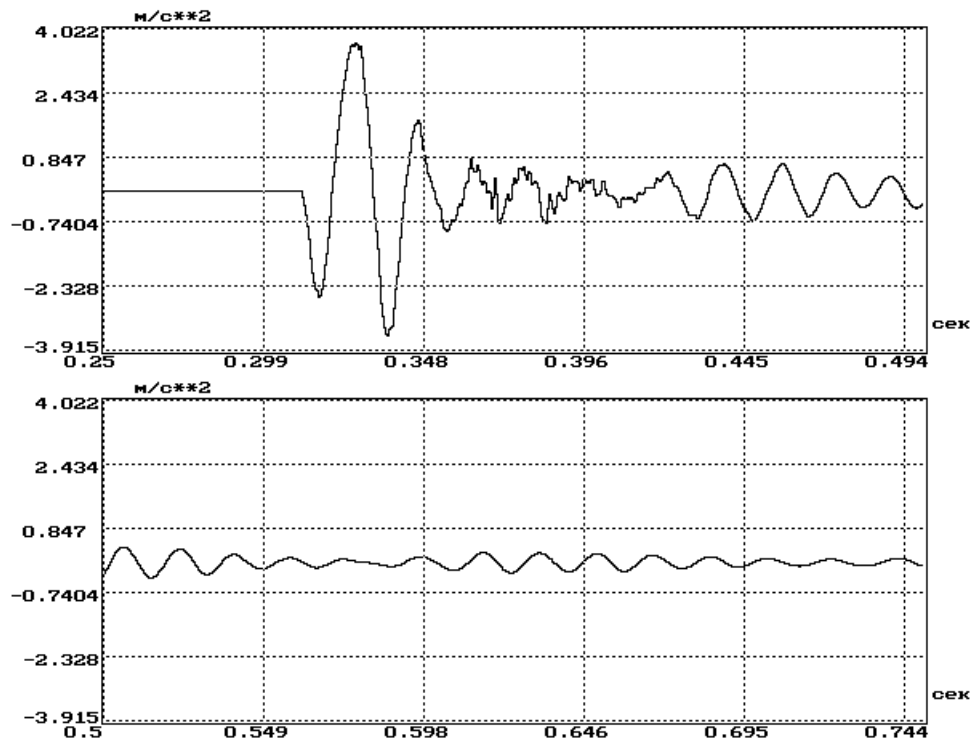
При преобразовании аналогового сигнала непосредственно в цифровой сигнал операции дискретизации и квантования совмещаются.

Операция цифро-аналогового преобразования (ЦАП; Digital-to-Analog Converter, DAC) обратна операции квантования, при этом на выходе регистрируется либо дискретно-аналоговый сигнал $s(t_n)$, который имеет ступенчатую форму (рисунок 2.15), либо непосредственно аналоговый сигнал $s(t)$, который восстанавливается из $s(t_n)$, например, путем сглаживания.

Так как квантование сигналов всегда выполняется с определенной и неустранимой погрешностью (максимум - до половины интервала квантования), то операции АЦП и ЦАП не являются взаимно обратными с абсолютной точностью.

Параметры сигналов

Параметры количественной оценки



Форма вибрационного сигнала при динамическом воздействии на конструкцию

Исходно анализируемый сигнал представляется в цифровом виде (дискретный и квантованный) как массив данных $x(i), i = 0, 1, 2, \dots$

Для количественной оценки сигналов наиболее часто применяются следующие параметры.

Абсолютные значения максимума и минимума сигнала на рассматриваемом отрезке времени $T = [0, T]$, называемые **пиковыми значениями**:

$$X_+ = \left| \max_{t \in T} x(t) \right|; \quad X_- = \left| \min_{t \in T} x(t) \right|.$$

Размах колебаний:

$$X_p = \max_{t \in T} x(t) - \min_{t \in T} x(t).$$

Среднее значение (постоянная составляющая):

$$X_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

$$X_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i).$$

Мощность сигнала, определяемая с учетом постоянной составляющей:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt ,$$

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) .$$

и без учета постоянной составляющей:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt - \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right)^2 ,$$

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) - \left(\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x(i) \right)^2 .$$

Среднее квадратическое значение или эффективное значение, определяемое с учетом постоянной составляющей:

$$X_{CKЗ} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} ,$$

$$X_{CKЗ} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i)} .$$

и без учета постоянной составляющей:

$$X_{CKЗ} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt - \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right)^2} ,$$

$$X_{CKЗ} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) - \left(\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x(i) \right)^2}$$

Для гармонического сигнала между СКЗ и амплитудой существует однозначная связь:

$$X_{CKЗ} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,707A .$$

Если сигнал имеет сложную форму, то однозначной связи между СКЗ и его амплитудой нет.

Параметры, характеризующие форму выбросов сигнала

Пик-фактор - параметр, характеризующий наличие амплитудных выбросов в сигнале:

$$PF = \frac{\max(|X_+|, |X_-|)}{X_{CKЗ}} .$$

Чем больше пик-фактор, тем более выраженные импульсные эффекты присутствуют в сигнале. Для гармонического сигнала пик-фактор равен 1.414.

Распределение сигнала по амплитудным зонам характеризуется **коэффициентами асимметрии**:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} (x(i) - X_{cp})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) - (X_{cp})^2} \right)^3}$$

и **эксцессом**:

$$\varepsilon_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} (x(i) - X_{cp})^4}{\left(\sqrt{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) - (X_{cp})^2} \right)^4} - 3.$$

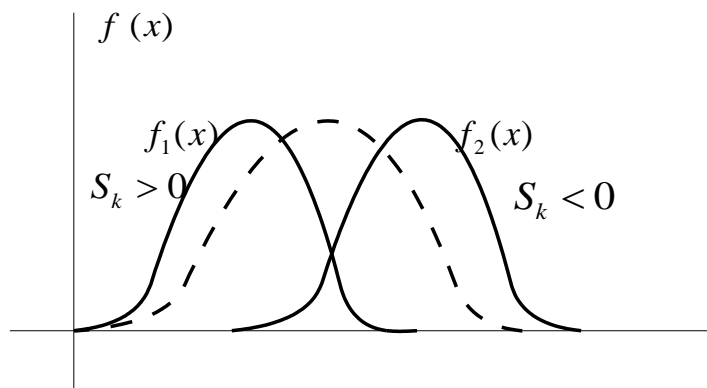


Иллюстрация изменения коэффициента асимметрии в зависимости от вида функции плотности вероятностей исследуемого сигнала по отношению к нормальному закону распределения

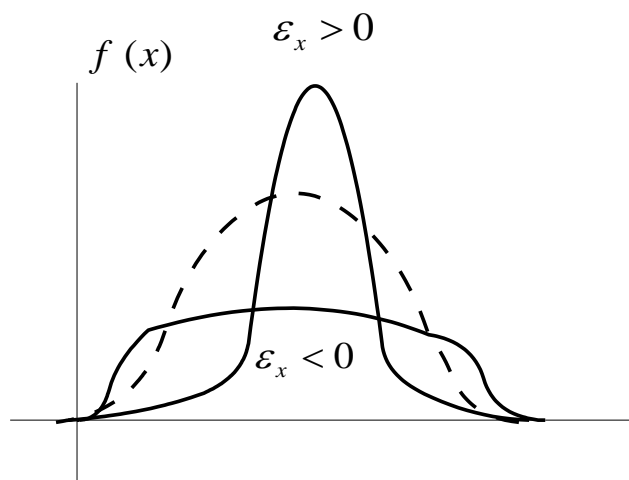


Иллюстрация изменения эксцесса в зависимости от вида функции плотности вероятностей исследуемого сигнала по отношению к нормальному закону распределения

Уровень звукового давления ([англ.](#) *SPL, Sound Pressure Level*) — измеренное по [относительной шкале](#) значение звукового давления, отнесённое к

опорному давлению $p_{\text{SPL}} = 20$ мкПа, соответствующему порогу [слышимости](#) синусоидальной [звуковой волны частотой](#) 1 кГц:

$$\text{SPL} = 20 \lg \frac{p}{20 \mu\text{Па}} \text{дБ}.$$

Уровни звукового давления от различных источников

- 0 дБ SPL — **слышно собственное дыхание и сердце;**
- 5 дБ SPL — почти ничего не слышно;
- 10 дБ SPL — почти не слышно — шёпот, тиканье часов, тихий шелест листьев;
- 15 дБ SPL — **едва слышно — шелест листьев;**
- 20 дБ SPL — едва слышно — норма шума в жилых помещениях;
- 25 дБ SPL — тихо — сельская местность вдали от дорог;
- 30 дБ SPL — тихо — настенные часы;
- 35 дБ SPL — хорошо слышно — приглушённый разговор;
- 40 дБ SPL — хорошо слышно — тихий разговор, учреждение (офис) без источников шума;
- 50 дБ SPL — отчётливо слышно — разговор средней громкости, тихая улица, стиральная машина;
- 60 дБ SPL — шумно — **обычный разговор, норма для контор;**
- 65 дБ SPL — шумно — громкий разговор на расстоянии 1 м;
- 70 дБ SPL — шумно — громкие разговоры на расстоянии 1 м, шум пишущей машинки, шумная улица, пылесос на расстоянии 3 м;
- 75 дБ SPL — шумно — **крик, смех с расстояния 1 м; шум в железнодорожном вагоне;**
- 80 дБ SPL — очень шумно — громкий будильник на расстоянии 1 м; крик; мотоцикл с глушителем; шум работающего двигателя грузового автомобиля;
- 85 дБ SPL — очень шумно — громкий крик, мотоцикл с глушителем;
- 90 дБ SPL — очень шумно — громкие крики, пневматический отбойный молоток, тяжёлый дизельный грузовик на расстоянии 7 м, грузовой вагон на расстоянии 7 м;
- 95 дБ SPL — **очень шумно — вагон метро на расстоянии 7 м;**
- 100 дБ SPL — крайне шумно — громкий автомобильный сигнал на расстоянии 5—7 м, кузнечный цех, очень шумный завод;
- 110 дБ SPL — крайне шумно — шум работающего трактора на расстоянии 1 м, громкая музыка, вертолёт;
- 115 дБ SPL — крайне шумно — пескоструйный аппарат на расстоянии 1 м;
- 120 дБ SPL — почти невыносимо — [гром](#) (иногда до 120 дБ), отбойный молоток и [вувузела](#) на расстоянии 1 м; порог болевого ощущения;
- 130 дБ SPL — боль — [сирена](#), шум [клёпки](#) котлов;
- 140 дБ SPL — **контузия — максимальная громкость на [рок-концерте](#); взлёт реактивного самолёта на расстоянии 25 м;**

- 145 дБ SPL — контузия — взлёт ракеты;
- 150 дБ SPL — контузия, травмы — взлёт ракеты на Луну с экипажем, на расстоянии 100 м;
- 160 дБ SPL — **шок, травмы, возможен разрыв барабанной перепонки — выстрел из ружья близко от уха; ударная волна от сверхзвукового самолёта или взрыва давлением 0,002 МПа;**
- 170 дБ SPL — [ударная волна](#) давлением 0,0063 МПа;
- 180 дБ SPL — ударная волна давлением 0,02 МПа, длительный звук с таким давлением вызывает смерть;
- 190 дБ SPL — ударная волна давлением 0,063 МПа;
- 194 дБ SPL — ударная волна давлением 0,1 МПа, равным [атмосферному давлению](#), возможен разрыв лёгких;
- 200 дБ SPL — **ударная волна давлением 0,2 МПа, возможна смерть;**
- 210 дБ SPL — ударная волна давлением 0,63 МПа;
- 220 дБ SPL — ударная волна давлением 2 МПа;
- 230 дБ SPL — ударная волна давлением 6,3 МПа;
- 240 дБ SPL — ударная волна давлением 20 МПа;
- 250 дБ SPL — ударная волна давлением 63 МПа;
- 260 дБ SPL — ударная волна давлением 200 МПа;
- 270 дБ SPL — ударная волна давлением 632 МПа;
- 280 дБ SPL — ударная волна давлением 2000 МПа;
- 282 дБ SPL — 2500 МПа — **максимальное давление воздушной ударной волны при ядерном взрыве.**

Спектральный анализ

Спектральный анализ - это один из методов обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать частотный состав измеряемого сигнала. Преобразование Фурье является математической основой, которая связывает временной сигнал с его представлением в частотной области.

Ортогональные функции

Для лучшего понимания вопроса о рядах Фурье дадим определение ортогональным функциям. Множество непрерывных функций действительного переменного $\{U_n(t)\} = \{U_0(t), U_1(t), \dots\}$ называется ортогональным на интервале $[t_0, t_0 + T]$, если

$$\int_{t_0}^{t_0+T} U_m(t) U_n(t) dt = \begin{cases} c, & \forall m = n, \\ 0, & \forall m \neq n \end{cases}$$

При $c = 1$ множество $\{U_n(t)\}$ называется ортонормированным.

Ряд Фурье

Для теории формирования и обработки сигнала особое значение имеет возможность разложения заданного в виде функции сигнала по различным ортогональным системам функций.

Впервые в 1807 году французский математик и физик Жан Батист Жозеф Фурье показал, что **любую произвольную функцию $x(t)$ можно представить в виде бесконечной суммы синусных и косинусных членов:**

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t,$$

где ω_0 (рад/с) – основная угловая частота, которая связана с периодом T функции соотношением $T = 2\pi/\omega_0$. Частоты $n\omega_0$ называют гармониками, так как они кратны основной частоте ω_0 . В данном случае речь идет о системе ортогональных функций вида $\{1, \cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t\}$.

Коэффициенты $\{a_0, a_n, b_n\}$ можно вычислить с учетом ортогональности множества функций $\{\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t\}$ на периоде T :

$$\int_T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} T/2, m = n, \\ 0, m \neq n \end{cases}$$

$$\int_T \cos n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = 0, \forall m, n$$

$$\int_T \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = \begin{cases} T/2, m = n, \\ 0, m \neq n \end{cases}$$

С учетом этих соотношений:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt;$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos n\omega_0 t dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin n\omega_0 t dt.$$

Любая четная функция может быть разложена в ряд Фурье, состоящий из косинусов, а любая нечетная функция раскладывается в ряд из синусов. Для некоторых функций ряд Фурье может состоять лишь из нечетных гармоник.

Семейство преобразований Фурье

Преобразование Фурье (Fourier transform) – это разложение функций на синусоиды (далее косинусные функции также будем называть синусоидами, т.к. они отличаются от «настоящих» синусоид только фазой). Анализ Фурье закладывает основы многих методов, применяющихся в цифровой обработке сигналов и изображений (ЦОСиИ). По сути, преобразование Фурье (ПФ) позволяет

сопоставить сигналу, заданному во временной области, его эквивалентное представление в частотной области. Обратно, если известна частотная характеристика сигнала, то обратное преобразование Фурье позволяет определить соответствующий сигнал во временной области.

Семейство преобразований Фурье (преобразование Фурье, ряды Фурье, дискретные ряды Фурье и дискретное преобразование Фурье) представлено на рис. 1.1 – 1.4.

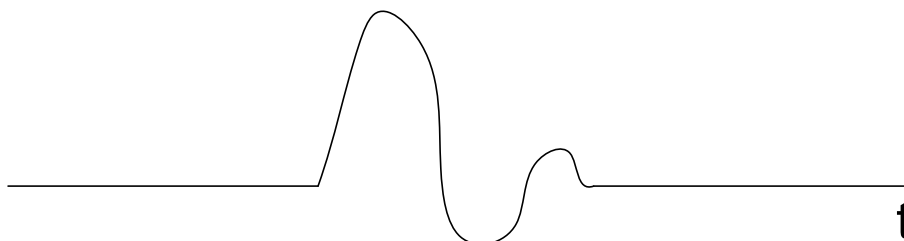


Рис. 1.1. Преобразование Фурье: сигнал непрерывный и аperiodический

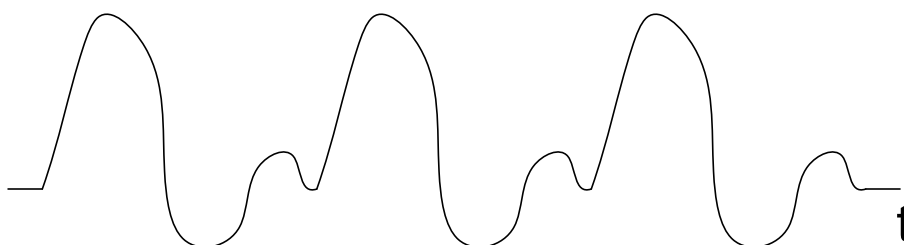


Рис. 1.2. Ряды Фурье: сигнал непрерывный и периодический

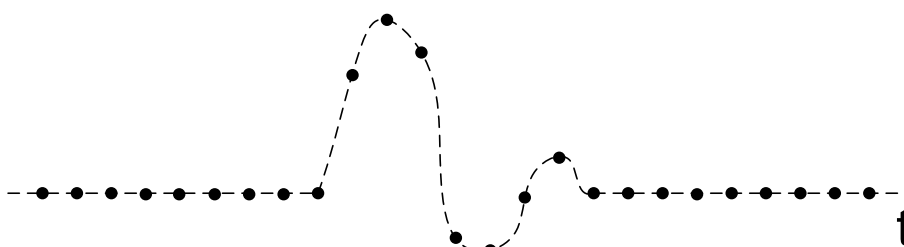


Рис. 1.3. Дискретные ряды Фурье: сигнал дискретный и аperiodический

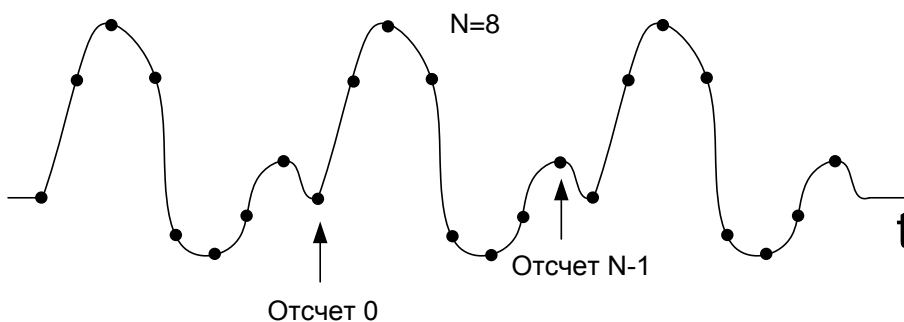
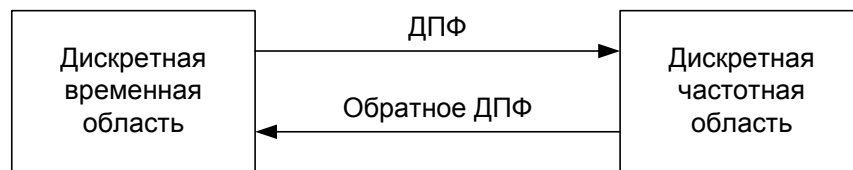


Рис. 1.4. Дискретное преобразование Фурье:
(дискретные ряды Фурье) сигнал дискретный и периодический

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Из описанного семейства преобразований к цифровой обработке сигналов и изображений имеет отношение дискретное преобразование Фурье, которое оперирует дискретной по времени выборкой периодического сигнала во временной области. Для того, чтобы быть представленным в виде суммы синусоид, сигнал должен быть периодическим. Но в качестве набора входных данных для ДПФ доступно только конечное число отсчетов (N). Эту дилемму можно разрешить, если мысленно поместить бесконечное число одинаковых групп отсчетов до и после обрабатываемой группы, образуя, таким образом, математическую (но не реальную) периодичность.



Основная идея ДПФ

Фундаментальное уравнение для получения N-точечного ДПФ выглядит следующим образом:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi nk/N) - j \sin(2\pi nk/N)]$$

По отношению к этому уравнению следует сделать некоторые терминологические разъяснения. **X(k)** (прописная буква X) представляет собой частотный выход ДПФ в k-ой точке спектра, где k находится в диапазоне от 0 до N-1. N представляет собой число отсчетов при вычислении ДПФ.

Значение x(n) (строчная буква x) представляет собой n-ый отсчет во временной области, где n также находится в диапазоне от 0 до N-1. В общем уравнении x(n) может быть вещественным или комплексным.

Обратите внимание, что косинусоидальные и синусоидальные компоненты в уравнении могут быть выражены в полярных или прямоугольных координатах, связь между которыми определяется формулой Эйлера:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t});$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2i} (e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}); \quad i = \sqrt{-1}.$$

Первая точка X(0) является простой суммой входных отсчетов во временной области, потому что $\cos(0) = 1$. Коэффициент масштабирования $1/N$ не учитывается, но должен присутствовать в конечном результате. Обратите внимание, что **X(0)** – это среднее значение отсчетов во временной области, или просто смещение по постоянному току.

Вторая точка ReX(1) получена умножением каждого отсчета из временной области на соответствующее значение косинусоиды, имеющей один полный период на интервале N, с последующим суммированием результатов.

Третья точка ReX(2) получена умножением каждого отсчета из временной области на соответствующую точку косинусоиды, которая имеет два полных периода на интервале N, с последующим суммированием результатов.

Точно так же, четвертая **точка ReX(3)** получена умножением каждого отсчета из временной области на соответствующую точку косинусоиды с тремя полными периодами на интервале N и суммированием результатов. Этот процесс продолжается, пока не будут вычислены все N выходных отсчетов. **Подобная процедура, но с использованием синусоид, применяется для вычисления мнимой части частотного спектра.**

Существует два основных типа ДПФ: **вещественное ДПФ и комплексное ДПФ**. Вещественное ДПФ выглядит несколько проще и, в основном, является упрощением комплексного ДПФ. Большинство алгоритмов вычисления быстрого преобразования Фурье (БПФ) составлено с использованием формата комплексного ДПФ, поэтому важно понимать, как работает комплексное ДПФ и как оно соотносится с вещественным ДПФ. В частности, если известны выходные частоты вещественного ДПФ и требуется использовать обратное комплексное ДПФ для вычисления отсчетов во временной области, надо знать, как разместить выходные точки вещественного ДПФ в формате комплексного ДПФ перед выполнением обратного комплексного ДПФ.

УРАВНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО И ВЕЩЕСТВЕННОГО ДПФ

Комплексное преобразование

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N}$$

Временная область: $x(n)$ является комплексной, дискретной и периодической величиной. n изменяется в диапазоне от 0 до N-1
Частотная область: $X(k)$ является комплексной, дискретной и периодической величиной. k изменяется в диапазоне от 0 до N-1
Для k от 0 до N/2 – положительные частоты
Для k от N/2 до N-1 – отрицательные частоты

Вещественное преобразование

$$\text{Re}X(k) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos(2\pi nk/N)$$

$$\text{Im}X(k) = \frac{-2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin(2\pi nk/N)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N/2} \left[\text{Re}X(k) \cos(2\pi nk/N) - \text{Im}X(k) \sin(2\pi nk/N) \right]$$

Временная область: $x(n)$ является вещественной, дискретной и периодической величиной. n изменяется в диапазоне от 0 до N-1
Частотная область: $\text{Re}X(k), \text{Im}X(k)$ являются вещественными, дискретными и периодическими величинами. k изменяется в диапазоне от 0 до N/2

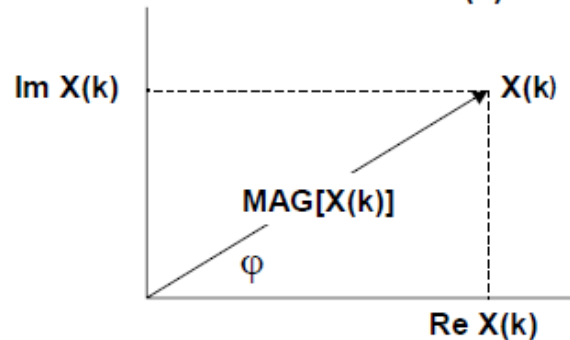
Перед использованием уравнения x для вычисления (n) значения $\text{Re}X(0)$ и $\text{Re}X(N/2)$ должны быть поделены на два.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И МНИМЫХ КОМПОНЕНТ ДПФ В АМПЛИТУДУ (MAG) И ФАЗУ (φ)

$$\blacksquare \quad X(k) = \operatorname{Re}X(k) + j \operatorname{Im}X(k)$$

$$\blacksquare \quad \operatorname{MAG}[X(k)] = \sqrt{\operatorname{Re}X(k)^2 + \operatorname{Im}X(k)^2}$$

$$\blacksquare \quad \varphi[X(k)] = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}X(k)}{\operatorname{Re}X(k)}$$



Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Быстрое преобразование Фурье (FFT) является не более, чем алгоритмом для ускоренного вычисления ДПФ путем сокращения требуемого числа операций умножения и сложения. Данное преобразование было предложено в 1960-ых годах. Алгоритм быстрого преобразования Фурье значительно сокращает количество арифметических операций и объем памяти, необходимой для вычисления ДПФ. ДПФ может быть сильно упрощено, если использовать свойства симметрии и периодичности коэффициентов поворота.

При вычислении N -точечного ДПФ требуется N^2 вычислений с комплексными числами, а при реализации N -точечного БПФ $(N/2)\log_2(N)$ вычислений с комплексными числами. Вычислительная эффективность БПФ по сравнению с ДПФ становится весьма существенной, когда количество точек БПФ увеличивается до нескольких тысяч.

Эффективность БПФ

N	Умножений при ДПФ	Умножений при БПФ	Эффективность БПФ
256	65 536	1 024	64 : 1
512	262 144	2 304	114 : 1
1 024	1 048 576	5 120	205 : 1
2 048	4 194 304	11 264	372 : 1
4 096	16 777 216	24 576	683 : 1

Если необходимо рассчитать только несколько точек спектра, ДПФ может быть более эффективным. Вычисление одного выходного отсчета спектра с использованием ДПФ требует только N умножений с комплексными числами.

Мы будем предполагать далее, что $N=2^n$. При этом общность не теряется, так как N выбирается достаточно большим для того, чтобы удовлетворять теореме дискретизации Котельникова, т.е.

$$N \geq 2BT,$$

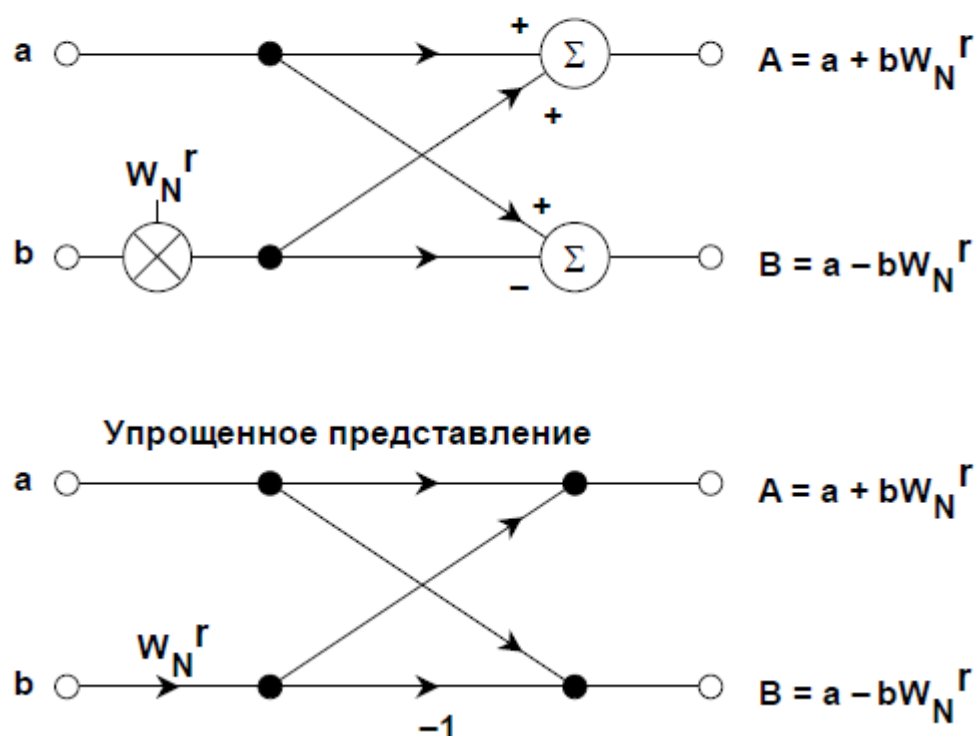
где B – полоса частот сигнала $x(t)$; T – его длительность.

Теорема Котельникова-Найквиста-Шеннона: если сигнал таков, что его спектр ограничен частотой F , то после дискретизации сигнала с частотой не менее $2F$ можно восстановить непрерывный сигнал по полученному цифровому сигналу абсолютно точно. Для этого нужно проинтерполировать цифровой сигнал «между отсчетами» специального вида функциями.

Описание Алгоритма

Алгоритм БПФ по основанию 2 разделяет полное вычисление ДПФ на комбинацию 2-точечных ДПФ. Каждое 2-точечное ДПФ содержит базовую операцию умножения с накоплением, называемую «бабочкой». На диаграмме показаны два представления «бабочки»: верхняя диаграмма фактически является функциональным представлением «бабочки», построенным на цифровых умножителях и сумматорах. В упрощенной нижней диаграмме операции умножения помечаются множителем возле стрелки, а под суммированием подразумеваются две стрелки, сходящиеся в точке.

БАЗОВАЯ ОПЕРАЦИЯ «БАБОЧКА» В АЛГОРИТМЕ БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ



8-точечное БПФ с прореживанием во времени (decimation-in-time, DIT) вычисляет окончательный результат с использованием трех каскадов, как это следует из рис.5.14. Восемь входных отсчетов из временной области сначала разделяются (или прореживаются) на четыре группы 2-точечных ДПФ. Затем четыре 2-точечных ДПФ объединяются в два 4-точечных ДПФ. Затем два 4-точечных ДПФ объединяются для того, чтобы получить окончательный результат $X(k)$. Подробно процесс рассмотрен на рис.5.15, где показаны все операции умножения и суммирования. Нетрудно заметить, что базовая операция «бабочки» 2-точечного ДПФ формирует основу для всего вычисления. Вычисление осуществляется в трех каскадах. После того, как заканчивается вычисление первого каскада, нет необходимости сохранять какие-либо предыдущие результаты. Результаты вычисления первого каскада могут быть сохранены в тех же самых регистрах или ячейках памяти, которые первоначально хранили исходные отсчеты из временной области $x(n)$. Точно так же, когда заканчивается вычисление второго каскада, результаты вычисления первого каскада могут быть удалены. Таким же образом осуществляется вычисление последнего каскада, заменяя в памяти промежуточный результат вычисления предыдущего каскада. Обратите внимание, что для того, чтобы алгоритм работал должным образом, входные отсчеты по времени $x(n)$

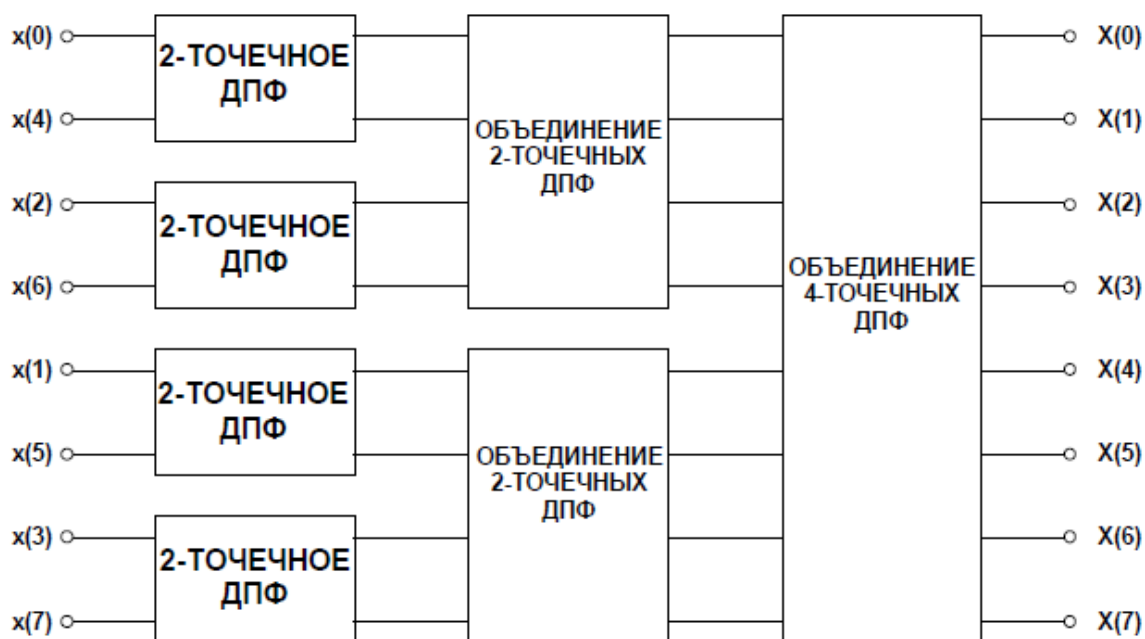
должны быть упорядочены определенным образом с использованием алгоритма реверсирования битов.

Алгоритм реверсирования битов, используемый для реализации прореживания по времени, представлен на рисунке ниже. Десятичный индекс n преобразуется в его двоичный эквивалент. Затем двоичные разряды располагаются в обратном порядке и преобразуются обратно в десятичное число. Реверсирование битов часто выполняют аппаратурой ЦОС в генераторе адреса данных (DAG), упрощая таким образом программное обеспечение, сокращая количество дополнительных операций и ускоряя вычисления.

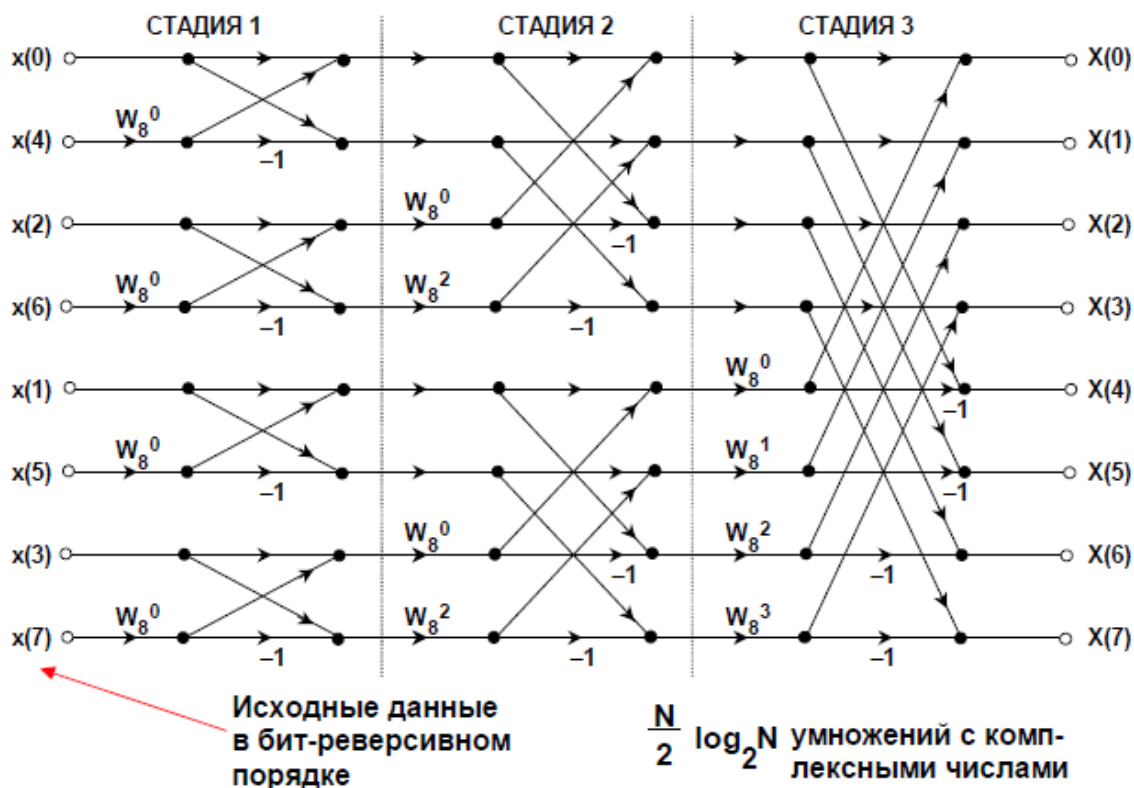
ПРИМЕР БИТ-РЕВЕРСИВНОГО ПРОРЕЖИВАНИЯ ДЛЯ $N = 8$

■ Десятичное число:	0	1	2	3	4	5	6	7
■ Двоичный эквивалент:	000	001	010	011	100	101	110	111
■ Дв. с реверсированием:	000	100	010	110	001	101	011	111
■ Десятичный эквивалент:	0	4	2	6	1	5	3	7

ВЫЧИСЛЕНИЕ 8-ТОЧЕЧНОГО ДПФ В ТРЕХ КАСКАДАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОРЕЖИВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ



АЛГОРИТМ 8-ТОЧЕЧНОГО БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

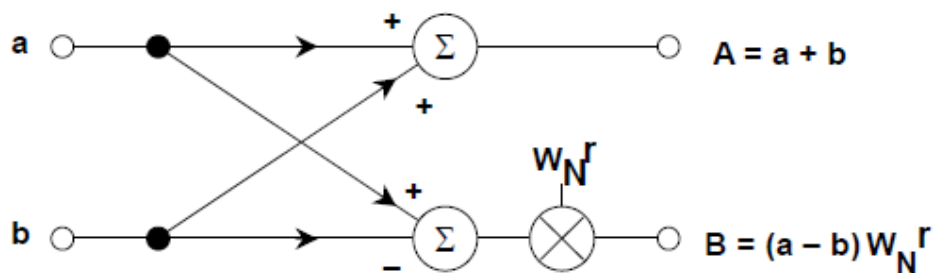


Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте

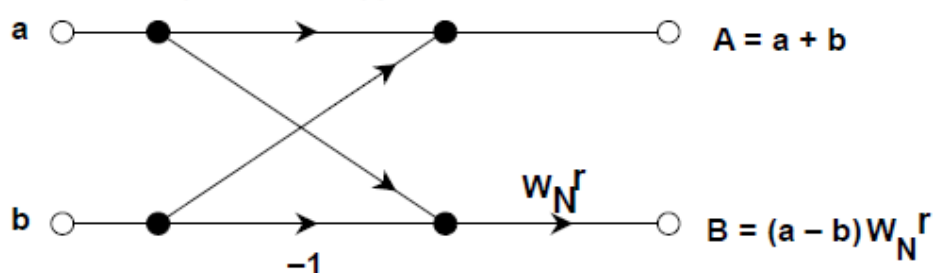
Использование алгоритмов с прореживанием по времени, по сравнению с алгоритмами с прореживанием по частоте, в значительной степени является вопросом предпочтения, так как оба алгоритма дают одинаковый результат. Определенные ограничения той или иной системы могут сделать одно из двух решений оптимальным.

Необходимо отметить, что алгоритмы, требуемые для вычисления обратного БПФ, почти идентичны тем, которые необходимы для вычисления прямого БПФ, если принять во внимание, что речь идет об использовании комплексного БПФ. В действительности, полезный метод проверки алгоритма комплексного БПФ состоит в осуществлении БПФ с отсчетами из временной области $x(n)$, а затем – в вычислении обратного БПФ с отсчетами из частотной области $X(k)$. В конце этого процесса должны быть получены первоначальные отсчеты из временной области $\text{Re } x(n)$, а мнимая часть $\text{Im } x(n)$ должна быть нулевой (в пределах ошибки математического округления).

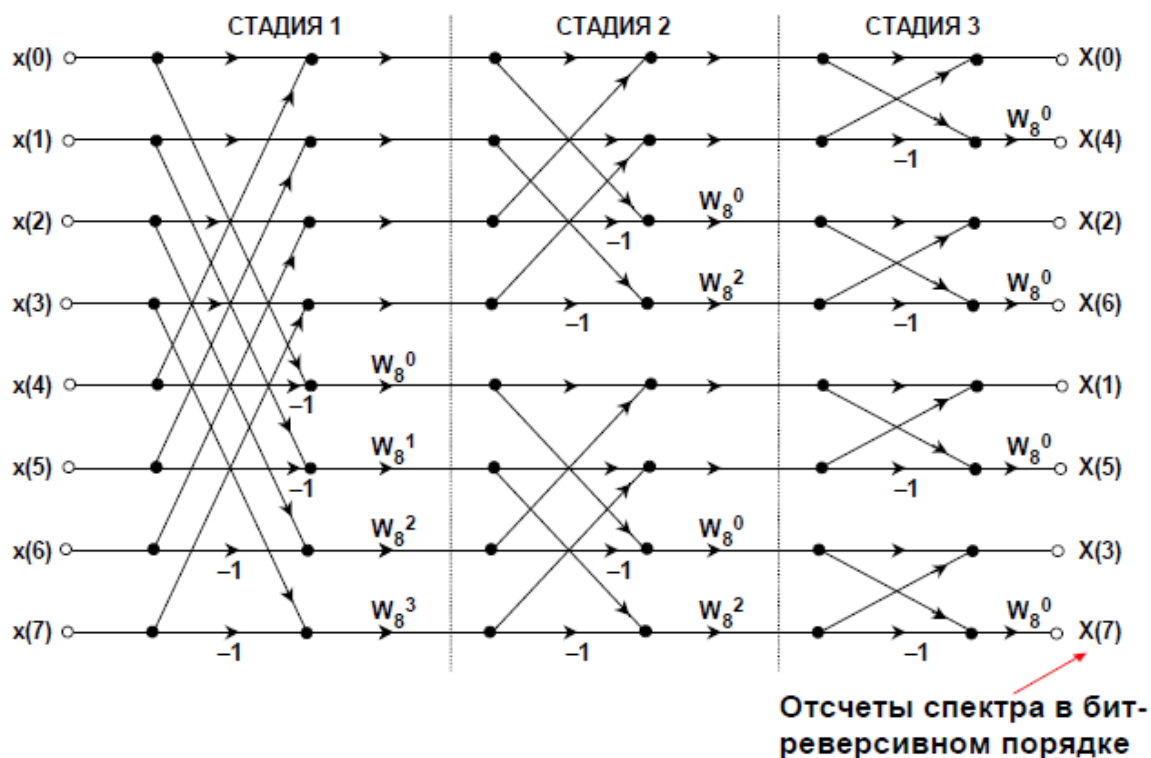
БАЗОВАЯ ОПЕРАЦИЯ «БАБОЧКА» В АЛГОРИТМЕ БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ



УПРОЩЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ



АЛГОРИТМ 8-ТОЧЕЧНОГО БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ

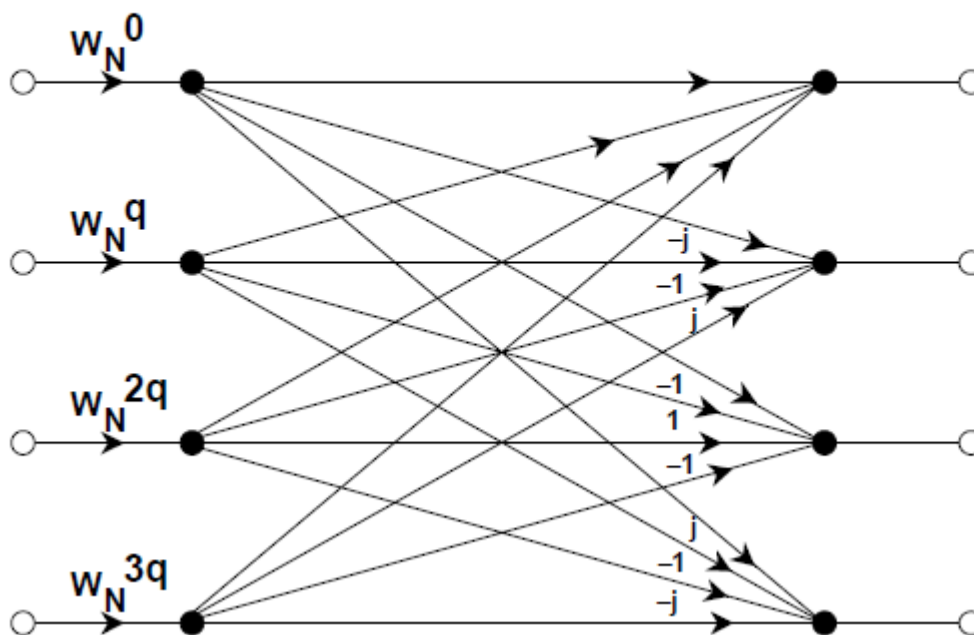


Осаждавшиеся до сих пор БПФ представляют алгоритм БПФ по основанию 2, то есть их вычисление основано на 2-точечных базовых операциях типа «бабочка».

Подразумевается, что число точек в БПФ должно быть степенью числа 2. Если число точек в БПФ является степенью числа 4, то БПФ может быть разделено на множество 4-точечных ДПФ. Такое преобразование называется алгоритмом БПФ по основанию 4. Базовая операция «бабочка» БПФ по основанию 4 с прореживанием по частоте представлена на рисунке.

Алгоритм БПФ по основанию 4 требует меньшего количества умножений с комплексными числами, но большего количества операций суммирования, чем БПФ по основанию 2 для такого же количества точек. По сравнению с алгоритмом БПФ по основанию 2, алгоритм по основанию 4 использует более сложную адресацию и дополнительные коэффициенты поворота, но меньшее количество вычислений.

"БАБОЧКА" АЛГОРИТМА БПФ ПО ОСНОВАНИЮ 4 С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ



АЛГОРИТМ БПФ(a, N)

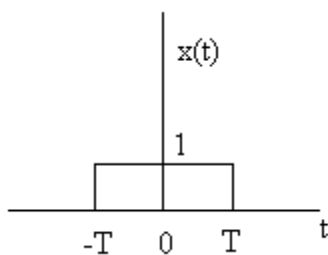
```
{
1. Если длина вектора равна 1, вернуть  $a$ .
2. Разбить вектор  $a$  на четную часть  $a^{чет} = (a_0, a_2, \dots, a_{N-2})$ 
   и нечетную  $a^{нечет} = (a_1, a_3, \dots, a_{N-1})$ .
3. Рекурсивно вызвать БПФ на каждой из частей
    $b^{чет} = \text{БПФ}(a^{чет})$ 
    $b^{нечет} = \text{БПФ}(a^{нечет})$ 
4. Объединение результатов.
   а. (инициализация) Присвоить  $\omega_N$  значение главного корня из единицы
      
$$\omega_N = e^{\frac{2\pi i}{N}} = \cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N}$$

   б. (инициализация) Присвоить  $\omega = 1$ 
   в. В цикле вычислить левую и правую часть одновременно:
      for(  $j=0$ ;  $j < N/2$ ;  $j++$ )
      {
          $y_j = b_j^{чет} + \omega b_j^{нечет}$ 
          $y_{j+N/2} = b_j^{чет} - \omega b_j^{нечет}$ 
          $\omega = \omega \omega_N$ 
      }
5. Вернуть вектор  $y$ .
}
```

Спектр прямоугольного импульса.

Прямоугольный импульс – кусочно-постоянная функция вида

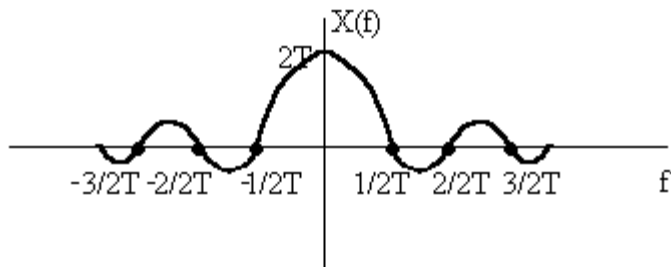
$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T < t < T \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$



Прямое преобразование Фурье позволяет получить спектр прямоугольного импульса:

$$X(f) = \int_{-T}^T 1 \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} \Big|_{-T}^T = \frac{1}{-j2\pi f} [e^{-j2\pi \cdot f \cdot T} - e^{j2\pi \cdot f \cdot T}] =$$

$$= 2T \frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f T} = \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi f}.$$



Обратное преобразование Фурье приводит к восстановлению прямоугольного импульса:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi \cdot f} e^{j2\pi \cdot f \cdot t} df = \begin{cases} 1, & -T < t < T; \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases}$$

Математическое описание сигналов и линейных систем.

Сигналы могут быть объектами теоретических исследований и практического анализа только в том случае, если указан способ их математического описания. Математическое описание позволяет абстрагироваться от физической природы сигнала и материальной формы его носителя, проводить классификацию сигналов, выполнять их сравнение, устанавливать степень тождества, моделировать системы обработки сигналов.

Большинство сигналов, встречающихся на практике, представлены во временной области **функциями времени**. При отображении сигналов на графике одной из координат (независимой) является ось времени, а другой координатой (зависимой) – ось амплитуд. Тем самым мы получаем амплитудно-временное представление сигнала. В общем случае описание сигнала задается функциональной зависимостью определенного информационного параметра сигнала от независимой переменной (аргумента) – $s(x)$, $y(t)$ и т.п. Такая форма описания и графического представления сигналов называется **динамической** (сигнал в реальной динамике его поведения по аргументам). Функции математического описания сигналов могут быть как вещественными, так и комплексными. Выбор математического аппарата описания определяется простотой и удобством его использования при анализе и обработке сигналов.

Отметим двойственность применения описания сигналов функциями типа $s(t)$ и т.п. С одной стороны $s(t)$ – это величина, равная значению функции в момент времени t . С другой стороны мы обозначаем через $s(t)$ и саму функцию, т.е. то правило, по которому каждому значению t ставится в соответствие определенная величина s . В большинстве аналитических выражений это не вызывает недоразумений и при однозначном соответствии значений сигналов их аналитическим выражениям принимается по умолчанию.

Сделаем также одно замечание по терминологии описания сигналов. В теоретических работах по анализу сигналов конкретные значения величины сигнала (отсчеты значений по аргументу) часто именуют координатами сигнала. В отраслях знаний, связанных с геологией и горным делом, и в геофизической практике в том числе, этот термин используется по своему прямому смысловому назначению – пространственных координат результатов измерений, и является неизменным атрибутом всех геолого-геофизических данных. С учетом последнего фактора условимся применять термин “координата” по своему традиционному смысловому назначению в качестве обобщающего термина для независимых переменных сигнальных функций. При этом под понятием координат значений сигнала будем понимать не только какие-либо пространственные координаты, как это непосредственно имеет место для результатов измерений при геолого-геофизических съемках, но и любые другие аргументы, на числовой оси которых отложены значения или отсчеты сигнала и рассматривается динамика его изменения.

В этой лекции обсуждается математическое описание *аналоговых* и *дискретных* сигналов и линейных систем в различных областях.

Во *временной* области:

- *сигналы* (аналоговые и дискретные) описываются *функциями времени*;
- *линейные системы* (аналоговые и дискретные) описываются:
 - *характеристиками*. Характеристика линейной системы определяется как ее реакция на некоторый тестовый сигнал, т. е. характеристика — это *сигнал*, описываемый *функцией времени*;
 - *соотношением вход/выход*. Соотношение вход/выход линейной системы описывается *линейным уравнением*, устанавливающим связь между входным и выходным сигналами — *функциями времени*. По умолчанию будем считать, что системы имеют *один* вход и *один* выход.

Тип функции времени определяется типом сигнала, а именно:

- *непрерывная* функция $x(t)$ описывает *аналоговый* сигнал;
- *последовательность* (решетчатая функция) $x(nT)$ описывает дискретный сигнал.

Помимо временной, сигналы и линейные системы могут описываться и в *других областях* (в областях иных независимых переменных), при этом соответствующие функции времени *преобразуются* в функции другой переменной.

Такое преобразование не следует путать с преобразованием функций одной переменной, например с преобразованием входного сигнала в выходной. Смысл термина "преобразование" всегда ясен из контекста.

Данная лекция содержит краткие сведения о математическом аппарате, традиционно используемом для преобразования функций времени при описании сигналов и линейных систем в следующих областях:

- в области комплексной переменной (р-области - для непрерывных функций $x(t)$, z-области - для последовательностей $x(nT)$);
- в частотной области.

Рекомендуется обратить особое внимание на взаимосвязи:

- односторонних преобразований непрерывной функции $x(t)$ и последовательности $x(nT)$;
- между различными преобразованиями каждой из этих функций.
-

Математическое описание аналоговых сигналов и линейных систем в р-области и в частотной области.

Математическое описание аналоговых сигналов и линейных систем в р-области (на комплексной р-плоскости) и в частотной области основано соответственно на преобразованиях Лапласа и Фурье функции времени $x(t)$, для которой выполняется условие

$$x(t)|_{t<0} = 0.$$

Преобразование Лапласа.

Преобразованием Лапласа функции $x(t)$ называется следующая пара взаимно однозначных преобразований:

- прямое преобразование

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt; \quad (1)$$

- обратное преобразование

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(p)e^{pi} dp, \quad (2)$$

где:

$L\{x(t)\}$, $L^{-1}\{X(p)\}$ - символические обозначения прямого и обратного преобразований Лапласа;

$x(t)$ — оригинал - вещественная или комплексная функция, непрерывная или кусочно-непрерывная, однозначная на любом конечном интервале в области определения, имеющая экспоненциальный порядок $O(e^{\lambda t})$ и ограниченную возможность возрастания

$|x(t)| \leq Ae^{\lambda t}$ (A и λ не равны бесконечности);

p – оператор Лапласа
 $p = \sigma + j\omega$; (3)

$X(p)$ - L -изображение (L -образ) функции $x(t)$, результат преобразования Лапласа;
 σ_0 - абсцисса абсолютной сходимости интеграла.

Преобразование Лапласа справедливо только в области абсолютной сходимости интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |x(t)e^{-pt}| dt &= \int_0^{\infty} |x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}| dt = \\ &= \int_0^{\infty} |x(t)| |e^{-j\omega t}| e^{-\sigma t} dt = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty, \end{aligned} \quad (4)$$

определяемой абсциссой абсолютной сходимости σ_0 . На комплексной p -плоскости это область, где $Re(p) = \sigma \geq \sigma_0$.

Как известно, в области сходимости интеграла (4) обеспечивается и сходимость интеграла (1), однако обратное не всегда справедливо. Может случиться, что интеграл (1) сходится за счет сбалансированности площадей с положительными и отрицательными знаками, а интеграл (4) расходится.

Преобразование Фурье.

Преобразованием Фурье функции $x(t)$ называется следующая пара взаимно однозначных преобразований:

- прямое преобразование

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (5)$$

- обратное преобразование

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (6)$$

где:

$x(t)$ – *оригинал* - вещественная или комплексная функция, удовлетворяющая условиям Дирихле: на любом конечном интервале в области задания определена, однозначна, непрерывна или кусочно-непрерывна, имеет конечное число экстремумов и разрывов первого рода;

$X(j\omega)$ – *фурье-изображение* (фурье-образ) функции $x(t)$, результат преобразования Фурье.

Преобразование Фурье справедливо только в области абсолютной сходимости интеграла (6)

$$\int_0^{\infty} |x(t)e^{-j\omega t}| dt = \int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (7)$$

Условия сходимости преобразований Лапласа (4) и Фурье (7) позволяют утверждать, что преобразование Фурье справедливо для более узкого класса сигналов, чем преобразование Лапласа.

Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа.

Сравнивая преобразования Лапласа (1) и Фурье (5), легко видеть их взаимосвязь: при условии абсолютной сходимости соответствующих интегралов фурье-изображение $X(j\omega)$ функции $x(t)$ совпадает с ее L-изображением $X(p)$, если область значений переменной p на комплексной p -плоскости ограничена точками на оси частот $j\omega$:

$$X(j\omega) = X(p)|_{p=j\omega}. \quad (8)$$

Математическое описание дискретных сигналов и линейных систем в z -области и в частотной области.

Математическое описание *дискретных* сигналов и линейных систем в z -области (на комплексной z -плоскости) и в частотной области основано соответственно на Z -преобразовании и преобразовании Фурье последовательности $x(nT)$, для которой выполняется условие

$$x(nT)|_{n<0} = 0. \quad (9)$$

Дискретное преобразование Лапласа.

Дискретное преобразование Лапласа (D -преобразование) последовательности $x(nT)$ имеет прямую аналогию с преобразованием Лапласа непрерывной функции.

В результате перехода от непрерывного времени к дискретному $t \rightarrow nT$ и замены непрерывной функции последовательностью $x(t) \rightarrow x(nT)$ интеграл (1) заменяется суммой.

Соответственно, дискретным преобразованием Лапласа называется следующий ряд

$$X(e^{pT}) = D\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT}, \quad (10)$$

где:

$D\{x(nT)\}$ - символическое обозначение дискретного преобразования Лапласа;

$x(nT)$ – *оригинал* - вещественная или комплексная последовательность;

$X(e^{pT})$ – D -изображение (D -образ) последовательности $x(nT)$, результат дискретного преобразования Лапласа.

Дискретное преобразование Лапласа однозначно связывает последовательность $x(nT)$ с ее D -изображением $X(e^{pT})$ и справедливо только в области абсолютной сходимости ряда (10)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)e^{-pnT}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| |e^{-j\omega nT}| e^{-\sigma nT} = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| e^{-\sigma nT} < \infty,$$

определяемой абсциссой сходимости σ_0 . На комплексной p -плоскости это область, где $Re(p) = \sigma \geq \sigma_0$.

Z-преобразование.

При исследовании дискретных сигналов и линейных систем, как правило, вместо дискретного преобразования Лапласа используют Z-преобразование, которое получается из дискретного преобразования Лапласа (10) в результате замены переменных $z = e^{pT}$.

Z-преобразованием последовательности $x(nT)$ называется следующий ряд:

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}, \quad (11)$$

где:

$Z\{x(nT)\}$ - символическое обозначение Z-преобразования;

$x(nT)$ – оригинал - вещественная или комплексная последовательность;

$X(z)$ – z -изображение последовательности $x(nT)$, результат Z-преобразования.

Z-преобразование однозначно связывает последовательность $x(nT)$ с ее z -изображением $X(z)$ и справедливо только в области абсолютной сходимости ряда (11)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)z^{-n}| < \infty. \quad (12)$$

Как известно, в области сходимости ряда (12) обеспечивается и сходимость ряда (11), однако обратное не всегда справедливо. Может случиться, что ряд (11) сходится за счет сбалансированности слагаемых с положительными и отрицательными знаками, а ряд (12) расходится.

Связь Z-преобразования с дискретным преобразованием Лапласа.

Сравнивая дискретное преобразование Лапласа (10) и Z-преобразование (11), легко видеть их взаимосвязь

$$X(z)|_{z=e^{pT}} = X(e^{pT}).$$

Может возникнуть вопрос, почему при исследовании дискретных сигналов и линейных систем используют Z-, а не D-преобразование. Дело в том, что подобно преобразованию Лапласа непрерывных функций, Z-преобразование последовательности позволяет получить алгебраические соотношения (пока не будем вникать, какие именно), в то время как D-преобразование приводит к весьма неудобным для анализа трансцендентным соотношениям.

Преобразование Фурье и ряд Фурье были рассмотрены ранее.

Связь преобразования Фурье с Z-преобразованием.

Сравнивая преобразование Фурье с Z-преобразованием (11), легко видеть их взаимосвязь: при условии абсолютной сходимости соответствующих рядов Фурье-изображение $X(e^{j\omega T})$ последовательности $x(nT)$ совпадает с ее z-изображением $X(z)$, если область значений переменной z на комплексной z -плоскости ограничена точками на единичной окружности $e^{j\omega T}$:

$$X(e^{j\omega T}) = X(z)|_{z=e^{j\omega T}}.$$

Z-преобразование. Свойства. Z-преобразование типовых сигналов.

Распространенным способом анализа дискретных цифровых последовательностей является Z-преобразование (z-transform). Оно играет для дискретных сигналов и систем такую же роль, как для аналоговых – преобразование Лапласа.

Z-преобразование является обобщением дискретного преобразования Фурье. Особенно эффективно оно используется при анализе дискретных систем и, в частности, при проектировании рекурсивных цифровых фильтров.

Z-преобразование представляет собой разложение функций в ряды степенных полиномов по z .

Z-преобразованием последовательности $x(nT)$ называется следующий ряд:

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

где:

$Z\{x(nT)\}$ – символическое обозначение Z-преобразования;

$x(nT)$ – оригинал – последовательность (вещественная или комплексная), для которой выполняется условие $x(nT)|_{n<0} = 0$;

$X(z)$ – z-изображение (z-образ) последовательности $x(nT)$, результат Z-преобразования.

Напомним, что Z-преобразование получено на основе дискретного преобразования Лапласа в результате замены переменных

$$z = e^{pT},$$

где p – оператор Лапласа

$$p = \sigma + j\omega.$$

Комплексная переменная z может быть представлена в двух формах:

- в алгебраической форме $z = \xi + j\eta$;
- в показательной форме $z = re^{j\varphi}$,

где радиус r является модулем, а угол φ – аргументом переменной z :

$$r = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2};$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctg\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Соответственно, положение произвольной точки на комплексной z -плоскости может задаваться:

- координатами $(\xi; \eta)$ – в декартовой системе координат;
- полярными координатами $(r; \varphi)$ – в полярной системе координат.

Z -преобразование *однозначно* связывает последовательность $x(nT)$ с ее z -изображением $X(z)$ и справедливо только в области абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)z^{-n}| < \infty$$

которую называют *областью сходимости z -изображения*.

Основные свойства Z -преобразования.

Одним из важнейших свойств Z -преобразования является свойство его единственности, в соответствии с которым последовательность $x(nT)$ однозначно определяется z -изображением $X(z)$ в области его сходимости и наоборот, z -изображение $X(z)$ однозначно определяет последовательность $x(nT)$.

1. Линейность. Если последовательность $x(nT)$ равна линейной комбинации последовательностей

$$x(nT) = a_1 x_1(nT) + a_2 x_2(nT) + a_3 x_3(nT) + \dots,$$

то её z -изображение равно линейной комбинации z -изображений данных последовательностей:

$$Z\{x(nT)\} = X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) + a_3 X_3(z) + \dots$$

2. Z -преобразование задержанной последовательности (теорема о задержке).

Z -изображение последовательности $x[(n-m)T]$, задержанной на m ($m > 0$) отсчетов, равно z -изображению незадержанной последовательности $x(nT)$, умноженному на z^{-m} :

$$Z\{x(nT)\} = X(z);$$

$$Z\{x[(n-m)T]\} = X(z)z^{-m}.$$

3. Z -преобразование свертки последовательностей (теорема о свертке).

Сверткой последовательностей $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ называется последовательность $x(nT)$, определяемая соотношением

$$x(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(mT)x_2[(n-m)T].$$

Z -изображение свертки равно произведению z -изображений свертываемых последовательностей

$$Z\{x(nT)\} = X(z) = X_1(z)X_2(z).$$

Z-преобразование типовых дискретных сигналов.

Типовые дискретные сигналы и описывающие их последовательности рассматривались ранее. При определении z-преобразования данных последовательностей будем пользоваться *нормированным временем* и формулой Z-преобразования в виде

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (1)$$

Ниже приводятся z-преобразования последовательностей, описывающих типовые дискретные сигналы.

1. Z-преобразование цифрового единичного импульса $u_0(n)$

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Выполнив Z-преобразование (1) последовательности $u_0(n)$, получим

$$Z\{u_0(n)\} = U_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_0(n) z^{-n} = u_0(0) z^{-0} = 1.$$

2. Z-преобразование задержанного цифрового единичного импульса $u_0(n-m)$

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

На основании теоремы о задержке имеем

$$Z\{u_0(n-m)\} = U_0(z) z^{-m} = z^{-m}.$$

3. Z-преобразование цифрового единичного скачка $u_1(n)$

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

Подставив $u_1(n)$ в (1), получаем ряд

$$Z\{u_1(n)\} = U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_1(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n},$$

представляющий собой сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad (2)$$

при $q = z^{-1}$.

В области абсолютной сходимости этого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n < \infty,$$

соответствующей
 $|q| < 1$,

сумма ряда (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии) имеет конечный предел, равный

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad (3).$$

Подставляя $q = z^{-1}$ в (3), находим z-преобразование

$$U_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

и область его сходимости

$$|z^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > 1,$$

определяемую радиусом сходимости $R = 1$.

4. Z-преобразование задержанного цифрового единичного скачка $u_1(n-m)$

$$u_1(n-m) = \begin{cases} 1, n \geq m \\ 0, n < m \end{cases}$$

На основании теоремы о задержке имеем

$$Z\{u_1(n-m)\} = U_1(z)z^{-m} = \frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}.$$

5. Z-преобразование убывающей дискретной экспоненты

$$x(n) = \begin{cases} (\pm a)^n, n \geq 0, |a| < 1 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

Подставив $x(n) = (\pm a)^n$ в (1), получаем ряд:

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm a)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm az^{-1})^n.$$

Подставляя $q = \pm az^{-1}$ в (2), находим искомое z-преобразование

$$X(z) = \frac{1}{1 \pm az^{-1}}$$

и область его сходимости

$$|az^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > |a|,$$

определяемую радиусом сходимости $R = |a|$.

6. Z-преобразование последовательности

$$x(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}.$$

Подставим $x(n)$ в (1)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} z^{-n} = \frac{1}{\sin \varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \sin[(n+1)\varphi_*] z^{-n}$$

и раскроем $\sin[(n+1)\varphi_*]z^{-n}$ по формуле Эйлера

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{\sin \varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \frac{e^{j(n+1)\varphi_*} - e^{-j(n+1)\varphi_*}}{2j} z^{-n} = \\ &= \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_*^n e^{j(n+1)\varphi_*} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n e^{-j(n+1)\varphi_*} z^{-n} \right] = \\ &= \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[e^{j\varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} (r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})^n - e^{-j\varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} (r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})^n \right]. \end{aligned}$$

Каждая из сумм представляет собой ряд типа (2). Подставляя $q = r_* e^{j\varphi_*} z^{-1}$ и $q = r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1}$ в (3), находим z-преобразование

$$X(z) = \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*}}{1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1}} - \frac{e^{-j\varphi_*}}{1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1}} \right]$$

и область его сходимости

$$\left| r_* e^{\pm j\varphi_*} z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow \frac{r_*}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > r_*,$$

определяемую радиусом сходимости $R = r_*$.

Приведем к общему знаменателю дроби в квадратных скобках

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*} - r_* z^{-1} - e^{-j\varphi_*} + r_* z^{-1}}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right] = \\ &= \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*} - e^{-j\varphi_*}}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right] \end{aligned}$$

и, сворачивая экспоненты, получим z-преобразование

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{\sin \varphi_*} \left[\frac{\sin \varphi_*}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right] = \\ &= \frac{1}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \end{aligned} \quad (4)$$

в виде дробно-рациональной функции 2-го порядка с разложением знаменателя на простейшие множители.

Полюсами такой функции называют значения γ , при которых ее знаменатель обращается в нуль. Умножив числитель и знаменатель (4) на z^2 :

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - r_* e^{j\varphi_*})(z - r_* e^{-j\varphi_*})},$$

найдем два комплексно-сопряженных полюса — два корня знаменателя (для обозначения полюса принято использовать символ звездочка)

$$z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}.$$

После умножения простейших множителей знаменателя:

$$X(z) = \frac{1}{1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1} - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1} + r_*^2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - (r_* e^{-j\varphi_*} + r_* e^{j\varphi_*}) z^{-1} + r_*^2 z^{-2}},$$

свернув экспоненты:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + r_*^2 z^{-2}}$$

и обозначив коэффициенты многочлена знаменателя:

$$a_1 = -2r_* \cos \varphi_*;$$

$$a_2 = r_*^2,$$

получаем z -преобразование в виде дробно-рациональной функции с вещественными коэффициентами

$$X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Таблица, называемая таблицей соответствий, содержит рассмотренные ранее последовательности и их z -преобразования. Z -преобразование двух последних последовательностей предлагается выполнить самостоятельно с помощью аналогичного приема.

№	Последовательность	z -преобразование
1	$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$	$U_0(z) = 1$
2	$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$	$z^{-m} U_0(z) = z^{-m}$
3	$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	$U_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$
4	$u_1(n-m) = \begin{cases} 1, n \geq m \\ 0, n < m \end{cases}$	$U_1(z) z^{-m} = \frac{z^{-m}}{1 - z^{-1}}$

$$5 \quad x(n) = \begin{cases} (\pm a)^n, n \geq 0, |a| < 1 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 \pm az^{-1}}$$

$$6 \quad x(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

$$\text{где } a_1 = -2r_* \cos \varphi_*, \quad a_2 = r_*^2$$

7

$$x(n) = r_*^n \sin(\varphi_* n)$$

$$X(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

где

$$a_1 = -2r_* \cos \varphi_*, \quad a_2 = r_*^2, \quad b_1 = r_* \sin \varphi_*$$

8

$$(n) = r_*^n \cos(\varphi_* n)$$

$$X(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

где

$$a_1 = -2r_* \cos \varphi_*, \quad a_2 = r_*^2, \quad b_1 = r_* \cos \varphi_*$$

Пример.

Найти z-преобразование последовательности

$$x(n) = b_0 (-a_1)^n + b_1 (-a_1)^{n-1}$$

Решение. Согласно свойству линейности

$$X(z) = b_0 Z\{(-a_1)^n\} + b_1 Z\{(-a_1)^{n-1}\}.$$

На основании теоремы о задержке

$$X(z) = b_0 Z\{(-a_1)^n\} + b_1 z^{-1} Z\{(-a_1)^n\}.$$

Используя результаты таблицы соответствий (строка 5):

$$x(n) = (-a_1)^n \rightarrow X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}},$$

имеем

$$X(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$$

откуда после приведения к общему знаменателю получаем z-преобразование

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Обратное Z-преобразование.

Последовательность (оригинал) $x(n)$ по известному z -изображению $X(z)$ находится с помощью с обратного Z-преобразования

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

где $Z^{-1}\{X(z)\}$ – символическое обозначение обратного Z-преобразования;

C – любой замкнутый контур в области сходимости подынтегральной функции, охватывающий все ее особые точки (полюсы) и начало координат комплексной z -плоскости.

Вычислить оригинал по этой формуле достаточно сложно и в большинстве случаев невозможно. Поэтому существуют более простые способы определения обратного Z-преобразования на основе:

- таблицы соответствий;
- теоремы Коши о вычетах;
- разложения z -преобразования на простые дроби.

Таблица соответствий.

Это наиболее простой и удобный способ в случаи, когда z -преобразование имеет вид дробно-рациональной функции.

Пример 1.

$$x(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = b_0 \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} + b_1 \frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

В соответствии с таблицей находится z -преобразование с таким же знаменателем:

$$\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} = a^n, \frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = a^{n-1}$$

Получаем

$$x(n) = b_0 a^n + b_1 a^{n-1}, n=0,1,2,3,\dots$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} x(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \\ &= \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \end{aligned}$$

В соответствии с таблицей находится z-преобразование с таким же знаменателем:

$$x(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = r^n \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin\varphi}$$

Получаем

$$x(n) = b_0 r^n \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin\varphi} + b_1 r^{n-1} \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin\varphi} + b_2 r^{n-2} \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin\varphi}$$

Теоремы Коши о вычетах.

Этот способ основан на использовании теоремы Коши о вычетах, в соответствии с которой вычисление интеграла

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

сводится к вычислению суммы

$$x(n) = \sum_{k=1}^K \text{Res}_{a_k} [x(z) z^{n-1}]$$

где $\text{Res}_{a_k} [x(z) z^{n-1}]$ называется вычетом подынтегральной функции в особой точке – k-м полюсе $a_k = z_{*k}$.

Если дробно-рациональная функция $X(z)$ имеет простые (не кратные, т.е. не равные между собой) полюсы, то вычет в простом k-м полюсе равен

$$\text{Res}_{a_k} [x(z) z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow a_k} [(z - a_k) X(z) z^{n-1}]$$

Пример.

$$x(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1} + 0.06z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.5z + 0.06} = \frac{z^2}{(z - 0.2)(z - 0.3)}$$

$$\text{Res}_{a_1} [x(z) z^{n-1}]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0.2} \left[(z - 0.2) \left(\frac{z^2}{(z - 0.2)(z - 0.3)} z^{n-1} \right) \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0.2} \left[\frac{z^2}{z - 0.3} z^{n-1} \right] = \left(\frac{0.2^2}{-0.1} \right) 0.2^{n-1} = -2 \cdot 0.2^n$$

$$\text{Res}_{a_2} [x(z) z^{n-1}]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0.3} \left[(z - 0.3) \left(\frac{z^2}{(z - 0.2)(z - 0.3)} z^{n-1} \right) \right] = \left(\frac{0.3^2}{0.1} \right) 0.3^{n-1} = 3 \cdot 0.3^n$$

Для кратных корней теорема Коши имеет более сложный вид:

$$\text{Res}_{a_k} [X(z) z^{n-1}] = \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{d^{l_k-1}}{dz^{l_k-1}} [(z - a_k)^{l_k} X(z) z^{n-1}]$$

Пример.

Z-преобразование $X(z)$ представляет собой дробно-рациональную функцию второго порядка, имеющую вещественный полюс $\alpha_1 = -0,5$ кратности $l_1 = 2$ (т.е. два одинаковых полюса). Поэтому сумма содержит один вычет и последовательность имеет вид:

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res}_{\alpha_1} [X(z)z^{n-1}] = \frac{1}{(l_1-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha_1} \frac{d^{l_1-1}}{dz^{l_1-1}} [(z-\alpha_1)^{l_1} X(z)z^{n-1}] = \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow -0,5} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} [(z+0,5)^2 X(z)z^{n-1}] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -0,5} \frac{d}{dz} \left[(z+0,5)^2 \frac{z^{-1}}{(1+0,5z^{-1})^2} z^{n-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -0,5} \frac{d}{dz} \left[(z+0,5)^2 \frac{z}{(z+0,5)^2} z^{n-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -0,5} \frac{d}{dz} [z^n] = \lim_{z \rightarrow -0,5} [nz^{n-1}] = n(-0,5)^{n-1}. \end{aligned}$$

Разложение z-преобразования на простые дроби.

Этот способ основан на представлении z-преобразования в виде суммы простых дробей.

Если $X(z)$ – дробно-рациональная функция, числитель и знаменатель которой являются многочленами относительно z^{-1} , порядок многочлена числителя меньше порядка многочлена знаменателя, а полюсы – простые (не кратные), то ее можно представить в виде суммы простых дробей

$$X(z) = \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right),$$

где:

$\alpha_k = z_{*k}$ – простой k-й полюс (вещественное или комплексное число);

A_k – коэффициент разложения при k-м полюсе (константа A_k – всегда число того же типа, что и полюс α_k);

$(M-1)$ – количество полюсов α_k (и констант A_k).

Найдем оригинал $x(n)$ z-преобразования. Согласно свойству линейности

$$x(n) = Z^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right) \right\} = \sum_{k=1}^{M-1} A_k Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right\}$$

Откуда получаем оригинал

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n \quad (1)$$

Пример.

Найти последовательность (оригинал) $x(n)$ по известному z -преобразованию

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.06z^{-2}}$$

Решение. При известных простых полюсах $\alpha_1 = 0.2$ и $\alpha_2 = 0.3$ представление $X(z)$ в виде суммы простых дробей имеет вид:

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - 0.2z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 0.3z^{-1}}$$

где A_1, A_2 – коэффициенты разложения при полюсах (вещественные числа).

Из условия равенства левых частей следует равенство правых частей

$$\frac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.06z^{-2}} = \frac{A_1}{1 - 0.2z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 0.3z^{-1}}$$

Разложив на простейшие множители знаменатель дроби в левой части равенства и сложив дроби в правой части равенства, получим:

$$\frac{1}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})} = \frac{(A_1 + A_2) - (0.3A_1 + 0.2A_2)z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})}$$

Дробно-рациональные функции с одинаковыми знаменателями равны, если они имеют одинаковые числители, что обеспечивается равенством коэффициентов при одинаковых степенях z :

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ 0.3A_1 + 0.2A_2 = 0 \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, находим коэффициенты разложения:

$$\begin{cases} A_1 = -2 \\ A_2 = 3 \end{cases}$$

и z -преобразования в виде суммы простых дробей:

$$X(z) = \frac{-2}{1 - 0.2z^{-1}} + \frac{3}{1 - 0.3z^{-1}}$$

Согласно (1), последовательность равна сумме

$$x(n) = -2 \cdot 0.2^n + 3 \cdot 0.3^n$$

Это совпадает с результатом, полученным другим способом.

Если порядки многочленов числителя и знаменателя равны

$$(N - 1) = (M - 1),$$

То дробно-рациональную функцию $X(z)$ с простыми полюсами можно представить в виде

$$X(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}},$$

где A_0 – вещественная константа.

Тогда, с учетом результатов таблицы соответствий и соотношения (1), получаем оригинал

$$x(n) = A_0 u_0(n) + \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n$$

При кратных полюсах также применимо разложения дробно-рациональной функции $X(z)$ на простые дроби, однако определение оригинала в данном случае существенно усложняется.

Линейные дискретные системы. Импульсная характеристика.

Системой обработки сигналов (системой) называется объект, выполняющий требуемое преобразование входного сигнала в выходной.

Входной сигнал называется *воздействием*, а выходной – *реакцией*.

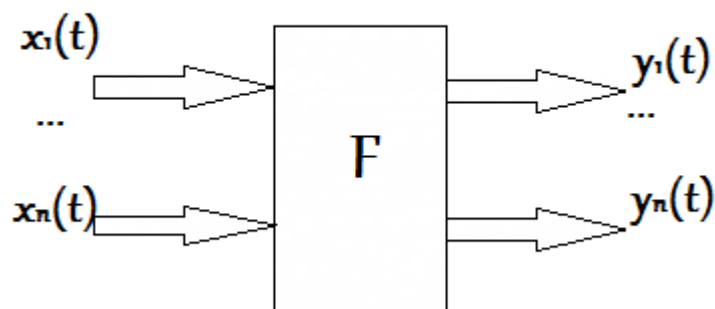
В общем случае взаимосвязь между входными и выходными сигналами системы с несколькими входами и выходами – *соотношение вход/выход* – описывается уравнением в операторной форме:

$$Y = F(X), \quad (1)$$

где:

X, Y – векторы, элементами которых являются воздействия и реакции (функции времени) соответственно;

F – оператор, определяющий математическое преобразование (линейное или нелинейное, алгебраическое, дифференциальное и т.д.).



Для систем с одним входом и одним выходом, уравнение (1) принимает вид:

$$y=F(x) \quad (2)$$

где x, y –воздействие и реакция (функции времени) соответственно.

Далее будем рассматривать системы с *одним входом* и *одним выходом*.

Приведём необходимые определения:

- Под *линейной* понимаем систему, которая соответствует следующим требованиям:

1) Принцип *суперпозиции* (св-во аддитивности):

$$F(x_1+x_2+...+x_n) = F(x_1) + F(x_2)+ ... + F(x_n) \quad (3)$$

2) Св-во *однородности*:

$$F(ax) = aF(x), a=const \quad (4)$$

- Система называется *дискретной*, если она работает с дискретными сигналами (сигналами, определёнными только в фиксированные моменты времени):

$$y(nT)=F[x(nT)] \quad (5)$$

- Систему называют *стационарной*, если она обладает *свойством инвариантности во времени*, в соответствии с которым задержка воздействия на некоторое время приводит к задержке реакции на то же время.

$$\begin{aligned} &\text{Если } x(nT) \Rightarrow y(nT), \\ &\text{то } x[(n-m)T] \Rightarrow y[(n-m)T] \end{aligned}$$

- Начальные условия в дискретной системе могут быть нулевыми или ненулевыми.

Признаком *нулевых* начальных условий является отсутствие реакции $y(nT) = 0$ при отсутствии воздействия $x(nT) = 0$.

Признаком ненулевых начальных условий является наличие ненулевых значений реакции (свободных колебаний) при отсутствии воздействия.

- Дискретная система называется *физически реализуемой*, если при нулевых начальных условиях реакция не может возникнуть раньше, чем будет подан сигнал на вход устройства.

Сигнал на выходе зависит от сигнала, поступающего в данный момент времени или раньше, но не зависит от сигнала, который будет.

Импульсная характеристика

Во временной области основной характеристикой дискретной системы, так же как и линейной аналоговой системы, является импульсная характеристика (ИХ).

Импульсной характеристикой $h(nT)$ линейной дискретной системы называется её реакция на цифровой единичный импульс $u_0(nT)$ при нулевых начальных условиях (Рис.2).



Рис. 2. К определению импульсной характеристики

Импульсную характеристику $h(nT)$ считают основной характеристикой линейной системы, потому что, зная её, можно определить реакцию на любое (произвольное) воздействие.

Во временной области линейной дискретной системы (ЛДС) может также описываться переходной характеристикой.

Переходной характеристикой $g(nT)$ линейной дискретной системы называется её реакция на цифровой единичный скачок $u_1(nT)$ при нулевых начальных условиях (Рис.4).

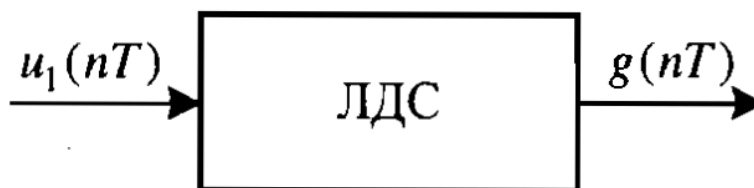


Рис.4. К определению переходной характеристики

Соотношение вход/выход отображает взаимосвязь между входным $x(nT)$ и выходным $y(nT)$ сигналами, т.е. реакцию ЛДС на произвольное воздействие.

Во временной области соотношение вход/выход ЛДС описывается линейными уравнениями:

- *формулой свёртки (свёрткой)*, если используется импульсная характеристика;
- *разностным уравнением*, если используются параметры ЛДС.

Формула свёртки.

Получим уравнение взаимосвязи между входным $x(nT)$ и выходным $y(nT)$ сигналами для ЛДС, заданной своей импульсной характеристикой $h(nT)$.

Воспользуемся определением ИХ и свойствами ЛДС. Будем последовательно записывать соответствия, указываемые стрелкой, между воздействием и реализацией:

- по определению, воздействию в виде цифрового единичного импульса соответствует реакция, называемая импульсной характеристикой,

$$u_0(nT) \Rightarrow h(nT)$$

- на основании свойства *инвариантности во времени* для стационарных линейных систем воздействию, задержанному на время mT , соответствует реакция, задержанная на то же время,

$$u_0[(n-m)T] \Rightarrow h[(n-m)T]$$

- на основании свойства однородности линейных систем, умножению воздействия на константу $x(mT)$ соответствует реакция, умноженная на ту же константу,

$$u_0[(n-m)T]x(mT) \Rightarrow h[(n-m)T]x(mT)$$

- на основании свойства аддитивности линейных систем реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_0[(n-m)T]x(mT) \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[(n-m)T]x(mT);$$

- для физически реализуемых систем

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_0[(n-m)T]x(mT) \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} h[(n-m)T]x(mT);$$

- слева имеем воздействие в виде

$$x(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} u_0[(n-m)T]x(mT);$$

- справа - реакцию

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h[(n-m)T]x(mT); \quad (6)$$

где $h[(n-m)T]$ – импульсная характеристика, задержанная на m периодов дискретизации.

Линейное уравнение (6) называют формулой свёртки (свёрткой): реакция $y(nT)$ вычисляется как дискретная свёртка воздействия $x(nT)$ и импульсной характеристики $h(nT)$.

Выполнив в (6) замену переменных, можно получить другой вариант записи формулы свёртки

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT)x[(n-m)T]; \quad (7)$$

Для нормализованного времени формулы (6) и (7) принимают вид соответственно

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m); \quad (8)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m); \quad (9)$$

При стандартном обозначении операции свёртки, формулы (8) и (9) записываются в компактном виде

$$y(n) = x(n) * h(n);$$

Линейная дискретная система, соотношение вход/выход которой описывается в виде формулы свёртки, отвечает условиям *физической реализуемости*: при нулевых начальных условиях

$$\begin{cases} x(n-m)|_{n-m < 0} = 0 \\ h(n-m)|_{n-m < 0} = 0 \end{cases}$$

Реакция не может возникнуть раньше воздействия. Значения реакции $y(nT)$ в каждый момент времени n зависят от текущего и предшествующих значений воздействия, но не зависят от его последующих значений.

Линейные уравнения (8) и (9) решаются *методом прямой подстановки* при нулевых начальных условиях, поэтому формула свёртки непосредственно описывает алгоритм вычисления реакции по известному воздействию и импульсной характеристике ЛДС.

Отметим, что для вычисления реакции линейной аналоговой системы по формуле свёртки в виде интеграла необходимо выбрать метод (алгоритм) численного интегрирования, однако все подобные методы являются приближёнными и принципиально вносят методическую погрешность.

Покажем тождественность результатов при вычислении по формуле свёртки в двух вариантах ее записи (8) и (9) при нулевых начальных условиях. Определим реакцию в точке $n=3$:

- по формуле свёртки (8) имеем:

$$y(3) = h(3)x(0) + h(2)x(1) + h(1)x(2) + h(0)x(3);$$

- по формуле (9) получаем тот же результат:

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0);$$

Выбор варианта формулы определяется удобством применения в конкретном случае.

Разностное уравнение. Передаточная функция

Наряду с формулой свёртки взаимосвязь между воздействием $x(nT)$ и реакцией $y(nT)$ – соотношение вход/выход – может описываться линейным разностным уравнением (РУ)

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[(n-i)T] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[(n-k)T]; \quad (1)$$

где: b_i, a_k – коэффициенты (вещественные константы);

$x(nT), y(nT)$ – воздействие и реакция (вещественные или комплексные);

i, k – значения задержек для воздействия и реакции соответственно;

N, M – константы;

$x[(n-i)T], y[(n-k)T]$ – воздействие и реакция, задержанные на i и k периодов дискретизации соответственно;

Коэффициенты b_i, a_k называют внутренними параметрами (параметрами) ЛДС.

Для нормированного времени разностное уравнение (1) принимает вид:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k); \quad (2)$$

Линейная дискретная система, соотношение вход/выход которой описывается в виде разностного уравнения (2), отвечает условиям физической реализуемости: при нулевых начальных условиях реакция не может возникнуть раньше воздействия.

Значения реакции $y(nT)$ в каждый момент времени n зависят от текущего и предшествующих значений воздействия, но не зависят от его последующих значений.

Разностное уравнение имеет прямую аналогию с линейным дифференциальным уравнением, описывающим соотношение вход/выход аналоговой линейной системы

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} - \sum_{k=1}^{M-1} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}; \quad (3)$$

где: b_i, a_k коэффициенты (вещественные константы), определяемые значениями резисторов, емкостей и индуктивностей;

$x(t)$, $y(t)$ – аналоговые воздействие и реакция (токи или напряжения).

Переход от дифференциальных уравнений к разностным обусловлен различием функций, описывающих входной и выходной сигналы аналоговых и дискретных линейных систем. Аналоговые сигналы описываются непрерывными, а дискретные – решётчатыми функциями времени, поэтому вычисление производных в (3) заменяется вычислением разделённых разностей в (2).

Дифференциальное уравнение (3) решается с помощью одного из методов (алгоритмов) численного интегрирования. Выбор метода – достаточно сложная проблема, однако любой из этих методов является приближенным, т.е. принципиально вносит методическую погрешность. При неудачно выбранном методе погрешность вычисления функции времени $y(t)$ может оказаться нарастающей, что приведёт к непредсказуемому результату.

Разностное уравнение (2) решается методом прямой подстановки при нулевых начальных условиях, не вносящим методической погрешности, поэтому оно непосредственно описывает алгоритм вычисления реакции по известному воздействию и параметрам ЛДС.

Рекурсивные и не рекурсивные линейные дискретные системы

Линейная дискретная система называется *рекурсивной*, если хотя бы один из коэффициентов a_k разностного уравнения (2) не равен нулю:

$a_k \neq 0$ хотя бы для одного из значений k .

Порядком рекурсивной ЛДС называют порядок РУ (2), т. е.

$$\max\{(M-1), (N-1)\}.$$

Согласно (2) реакция $y(n)$ рекурсивной ЛДС в каждый момент времени n определяется:

- текущим отсчетом воздействия $x(n)$;
- предысторией воздействия $x(n-i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$;
- предысторией реакции $y(n-k)$, $k = 1, 2, \dots, M-1$.

Примеры разностных уравнений рекурсивной ЛДС:

- *первого* порядка

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1); \quad (4)$$

- *второго* порядка

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) \quad (5)$$

Линейная дискретная система называется *нерекурсивной*, если все коэффициенты a_k разностного уравнения (2) равны нулю:

$$a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M-1.$$

Для нерекурсивной ЛДС разностные уравнения (1) – (2) принимают вид соответственно

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[(n-i)T]; \quad (6)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i); \quad (7)$$

Порядок нерекурсивной ЛДС равен $(N-1)$.

Согласно РУ (7) реакция $y(n)$ нерекурсивной ЛДС в каждый момент времени n определяется:

- текущим отсчетом воздействия $x(n)$;
- предысторией воздействия $x(n-i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Пример РУ нерекурсивной ЛДС второго порядка:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \quad (8)$$

Устойчивость линейных дискретных систем

ЛДС называется *устойчивой*, если при ограниченном воздействии

$$\max |x(n)| \leq R_x;$$

где R_x – любое, сколь угодно большое положительное число, не равное бесконечности, и произвольных, но ограниченных начальных условиях реакция также ограничена

$$\max |y(n)| \leq R_y;$$

где R_y – любое сколь угодно большое положительное число, не равное бесконечности.

Оценка устойчивости по импульсной характеристике

Существуют два критерия устойчивости ЛДС. Один из них позволяет оценить устойчивость ЛДС по ее импульсной характеристике во временной области, другой – по z -изображению этой характеристики в z -области. Выбор критерия зависит от удобства его практического использования.

Критерий, позволяющий оценить устойчивость ЛДС по ее импульсной характеристике, формулируется следующим образом: для того чтобы ЛДС была устойчива, необходимо и достаточно выполнения условия абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty; \quad (9)$$

Данный критерий устойчивости свидетельствует о том, что не-

рекурсивные ЛДС (КИХ-системы) всегда устойчивы, поскольку их импульсная характеристика конечна.

В общем случае относительно устойчивости БИХ-систем можно сделать следующие выводы:

- рекурсивные ЛДС (БИХ-системы) требуют проверки на устойчивость,
- импульсная характеристика устойчивой ЛДС имеет характер затухающей функции времени.

Описание линейных дискретных систем в Z - области

До этого рассматривалось описание ЛДС во *временной* области: импульсная характеристика и соотношение вход/выход в виде формулы свертки либо разностного уравнения. Здесь рассматривается их отображение в z -области.

Описание ЛДС в z -области позволяет:

- ввести фундаментальное для теории линейных систем понятие передаточной функции;
- перейти от разностных уравнений к алгебраическим;
- упростить анализ устойчивости;
- обеспечить автоматический переход к частотным характеристикам и многое другое.

Рассмотрим математический аппарат Z -преобразования.

Z -преобразование

В данном разделе приводятся необходимые для дальнейшего рассмотрения сведения о математическом аппарате Z -преобразования.

Z -преобразованием (прямым) последовательности $x(nT)$ называют следующий ряд

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} \quad (10)$$

где $x(nT)$ – *оригинал* – вещественная или комплексная последовательность, для которой выполняются уравнения для *нулевых начальных условий*.

$X(z)$ – z -*изображение* последовательности $x(nT)$, результат Z -преобразования.

Передаточная функция. Соотношение вход/выход

Основной характеристикой ЛДС в z -области является z -изображение импульсной характеристики $h(n)$

$$H(z) = Z\{h(n)\}, \quad (11)$$

которое определяется по формуле *прямого* Z -преобразования (10)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}; \quad (12)$$

При известном z -изображении $H(z)$ импульсная характеристика $h(n)$ находится с помощью *обратного* Z -преобразования

$$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\}, \quad (13)$$

где $H(z)$ называют *передаточной функцией* (ПФ) ЛДС; это математическое определение ПФ.

Соотношение вход/выход ЛДС во временной области описывалось с помощью формулы свертки, либо в виде разностного уравнения. Рассмотрим поочередно их отображение в z -области.

Формуле свертки

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m); \\ \sum_{m=0}^{\infty} x(n-m)h(m) \end{cases} \quad (14)$$

в z -области соответствует уравнение

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad (15)$$

где $X(z)$ и $Y(z)$ – z -изображения воздействия и реакции.

На основании (15) передаточную функцию можно представить как отношение

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (16)$$

которое позволяет ее определить подобно передаточной функции линейных аналоговых систем.

Передаточной функцией $H(z)$ ЛДС называется *отношение z -изображения реакции к z -изображению воздействия при нулевых начальных условиях.*

Данное определение ПФ не противоречит приведенному математическому (12). Действительно, согласно определению, импульсная характеристика $h(n)$ есть реакция на воздействие в виде цифрового единичного импульса $u_0(n)$.

Подставив z -изображения данных воздействия и реакции в (16) и учитывая, что $Z\{u_0(n)\} = 1$, получим определение ПФ (12):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Z\{h(n)\}}{Z\{u_0(n)\}} = Z\{h(n)\} \quad (17)$$

Разностному уравнению (2)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k); \quad (18)$$

в z -области соответствует уравнение, которое можно получить, выполнив Z -преобразование правой и левой частей РУ:

$$Z\{y(n)\} = Z\left\{\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k)\right\}; \quad (19)$$

Используя свойства Z -преобразования (линейность и теорему о задержке), запишем

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} - Y(z) \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}; \quad (20)$$

откуда после приведения подобных имеем *алгебраическое* уравнение

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z) \quad (21)$$

Разделив обе части этого уравнения на $X(z)$, получим передаточную функцию *общего вида*

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \quad (22)$$

ПФ (22) представляет собой дробно-рациональную функцию, числитель и знаменатель которой являются многочленами относительно z^{-1} порядков $(N-1)$ и $(M-1)$ соответственно с вещественными коэффициентами b_i и a_k . Следовательно, ПФ зависит исключительно от внутренних параметров ЛДС и не зависит ни от воздействия, ни от реакции.

Нули, полюса, звенья первого и второго порядка

Порядком ПФ называют наибольшее из чисел $(N-1)$ и $(M-1)$. Здесь и далее полагаем, что *порядок многочлена числителя не превосходит порядка многочлена знаменателя*:

$$(N-1) \leq (M-1).$$

Передаточные функции 1-го и 2-го порядков описывают простейшие ЛДС, называемые *звеньями 1-го и 2-го порядков* соответственно. Как любая дробно-рациональная функция, ПФ (22 пред. раздел) характеризуется своими *особыми точками (полюсами)* и *нулями*.

Нулями ПФ называют значения z , при которых $H(z)$ оказывается равной нулю.

Особыми точками (полюсами) ПФ называют значения z , при которых знаменатель $H(z)$ оказывается равным нулю.

Картой нулей и полюсов называют изображение координат нулей (кружочками $^{\circ}$) и полюсов (звездочками $*$) на комплексной z -плоскости. Как будет показано, такая карта является весьма важной графической характеристикой ЛДС.

Взаимосвязь передаточной функции и разностного уравнения

Из сравнения передаточной функции и соответствующего ей разностного уравнения легко видеть, что:

- многочлен *числителя* ПФ связан с отсчетами воздействия $b_i x(n-i)$; при этом величина задержки i отсчета $x(n-i)$ отображается степенью z^{-i} , а коэффициенты b_i остаются неизменным; символически это соответствие можно записать следующим образом:

$$b_i x(n-i) \leftrightarrow b_i z^{-i} \quad i = 0, 1, \dots, N-1;$$

- многочлен *знаменателя* ПФ связан с отсчетами реакции $y(n)$ и $a_k y(n-k)$, при этом свободный член всегда равен 1:

$$a_0 = 1,$$

так как в РУ он соответствует реакции $y(n)$; величина задержки k отсчета $y(n-k)$ отображается степенью z^{-k} , а коэффициенты a_k меняют знак; символически это соответствие можно записать следующим образом:

$$a_k y(n-k) \leftrightarrow -a_k z^{-k}$$

Пример. Дана передаточная функция общего вида. Записать соответствующее ей разностное уравнение:

- для звена 1-го порядка (числитель и знаменатель ПФ – многочлены 1-го порядка):
передаточной функции

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (1)$$

соответствует разностное уравнение

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1); \quad (2)$$

- для звена 2-го порядка (числитель и знаменатель ПФ – многочлены 2-го порядка):
передаточной функции

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (3)$$

соответствует разностное уравнение

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) \quad (4)$$

Звено называют *базовым*, если числитель его передаточной функции равен 1. ПФ базовых звеньев 1-го и 2-го порядков имеют вид соответственно:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}} \quad H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Передаточная функция и импульсная характеристика звена 2-го порядка

Упрощенная методика определения импульсной характеристики $h(n)$ по заданной передаточной функции $H(z)$ предполагает, что взаимосвязь между ИХ и ПФ базовых звеньев известна из таблицы соответствий, в предположении, что:

$X(z)$ – передаточная функция $H(z)$ базового звена;

$x(n)$ – импульсная характеристика $h(n)$ базового звена.

Следовательно, передаточной функции базового звена 1-го порядка

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}$$

соответствует импульсная характеристика

$$h(n) = (-a_1)^n$$

а передаточной функции базового 2-го порядка

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

соответствует импульсная характеристика

$$h(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin(\varphi_*)}$$

где r_* и φ_* – радиус и угол комплексно-сопряженных полюсов

$$z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*} \quad (5)$$

Значения r_* и φ_* и a_1 и a_2 связаны между собой соотношениями

$$a_2 = r_*^2 \quad (6)$$

$$a_1 = -2r_* \cos(\varphi_*) \quad (7)$$

Напомним, что угол полюса φ_* есть нормированная частота ω_* .
Здесь и в дальнейшем будем использовать индексы звездочка и кружок для обозначения *полюса* и *нуля* соответственно.

Для записи ИХ небазового звена 2-го порядка достаточно воспользоваться свойствами линейности Z-преобразования и теоремой о задержке.

Тогда передаточной функции небазового звена 2-го порядка

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

будет соответствовать импульсная характеристика небазового звена 2-го порядка

$$h(n) = b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin(\varphi_*)} + b_1 r_*^{(n-1)} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin(\varphi_*)} + b_2 r_*^{(n-2)} \frac{\sin[(n-1)\varphi_*]}{\sin(\varphi_*)}$$

или с учетом нулевых начальных условий

$$h(n) = \begin{cases} b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin(\varphi_*)}, & n = 0; \\ b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin(\varphi_*)} + b_1 r_*^{(n-1)} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin(\varphi_*)}, & n = 1; \\ b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin(\varphi_*)} + b_1 r_*^{(n-1)} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin(\varphi_*)} + b_2 r_*^{(n-2)} \frac{\sin[(n-1)\varphi_*]}{\sin(\varphi_*)}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Оценка устойчивости по передаточной функции

При описании ЛДС во *временной* области рассмотрен критерий, позволяющей оценить устойчивость ЛДС по ее импульсной характеристике. В *z-области*, где основной характеристикой ЛДС является передаточная функция (*z-изображение* ИХ), существует критерий, позволяющий оценить устойчивость ЛДС по передаточной функции, а именно: *для того чтобы ЛДС была устойчива,*

необходимо и достаточно, чтобы все полюсы ее передаточной функции располагались внутри единичного круга комплексной z -плоскости

$$|z_{*k}| < 1, k = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (8)$$

где z_{*k} – k -й полюс ПФ (22 пред. раздел).

На практике устойчивость рекурсивных ЛДС обычно оценивают по более удобному критерию (8) – положению полюсов на карте нулей и полюсов.

Нули и полюсы передаточной функции звеньев 2-го порядка

Звено 2-го порядка описывается передаточной функцией (1).

Найдем комплексно-сопряженные полюсы в виде

$$z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}$$

где значения радиуса r_* и угла φ_* на комплексной z -плоскости выражаются через коэффициенты a_1 и a_2 на основании соотношений (5) и (6) следующим образом:

$$r_* = \sqrt{a_2} \quad (9)$$

$$\varphi_* = \arccos\left(-\frac{a_1}{2r_*}\right) \quad (10)$$

Для вычисления нулей в общем случае следует умножить числитель и знаменатель ПФ (1) на z^2

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

и найти корни уравнения числителя

$$b_0 z^2 + b_1 z + b_2 = 0$$

которые могут быть вещественными или комплексно-сопряженными (в зависимости от знака дискриминанта):

$$z_{o1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_0} = -\frac{b_1}{2b_0} \pm \frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_0}$$

Если нули – комплексно-сопряженные

$$z_{o1,2} = \xi_0 + j\eta_0$$

их следует представить в показательной форме

$$z_{o1,2} = r_0 e^{\pm j\varphi_0} \quad (11)$$

где радиус r_0 и угол φ_0 определяются из соответственно:

$$r_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2} \quad \varphi_0 = \arctg\left(\frac{\eta_0}{\xi_0}\right)$$

Если коэффициент $b_0 = 1$, то вычисление комплексно-сопряженных нулей можно упростить: не умножая числитель и знаменатель ПФ (1) на z^2 , определять нули в виде (11), где r_0 и φ_0 рассчитываются по формулам подобным (6)–(7), а именно:

$$b_2 = r_0^2 \quad b_1 = -2r_0 \cos(\varphi_0)$$

Частотная характеристика. Соотношение вход/выход

Основной характеристикой ЛДС в частотной области является фурье-изображение импульсной характеристики $h(nT)$, которое оп-

ределяется по формуле прямого преобразования Фурье

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega T n},$$

или для нормированных частоты и времени:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\hat{\omega} n}$$

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\hat{\omega} n}$$

При известном фурье-изображении $H(e^{j\omega T})$ импульсная характеристика $h(nT)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье

$$h(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} H(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega,$$

где $H(e^{j\omega T}) = H(e^{j\hat{\omega}})$ называют комплексной частотной характе-

ристикой (КЧХ) или коротко частотной характеристикой (ЧХ); это математическое определение ЧХ.

Определим ЧХ подобно тому, как это делается для линейных аналоговых систем, относительно которых известно, что гармоническое воздействие вызывает гармоническую реакцию той же частоты, но (в общем случае) другой амплитуды и начальной фазы.

Рассмотрим реакцию ЛДС на дискретное комплексное гармоническое

воздействие

$$x(n) = C_x e^{j\hat{\omega}n} = C_x e^{j\varphi_x(\hat{\omega})}$$

с амплитудой и фазой соответственно

$$C_x = \text{const} ; \varphi_x(\hat{\omega}) = \hat{\omega}n$$

Для вычисления реакции воспользуемся формулой свертки

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)C_x e^{j\hat{\omega}(n-m)} = C_x e^{j\hat{\omega}n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e^{j\hat{\omega}m} = \\ &= x(n) \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e^{j\hat{\omega}m}, \end{aligned}$$

Откуда с учётом определения ЧХ

$$y(n) = x(n)H(e^{j\hat{\omega}})$$

На основании этого частотную характеристику можно представить как отношение

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{y(n)}{x(n)} \Big|_{x(n)=C_x e^{j\hat{\omega}n}}$$

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{y(n)}{x(n)} \Big|_{x(n)=C_x e^{j\hat{\omega}n}}$$

и определить следующим образом.

Частотной характеристикой (ЧХ) $H(e^{j\hat{\omega}})$ ЛДС называется

частотная зависимость отношения реакции к дискретному гармоническому воздействию в установившемся режиме.

Подчеркнем, что отношение справедливо исключительно для *гармонического воздействия и установившегося режима* работы ЛДС.

Поясним, смысл «установившегося режима». Теоретически, область изменения гармонического воздействия $-\infty < n < \infty$. Однако

на практике имеют дело с условно гармоническим воздействием в области $0 \leq n < \infty$, где время $n=0$ соответствуют началу воздействия. В течение времени $0 \leq n < n_0$ ЛДС работает в режиме переход-

ных колебаний. Спустя время n_0 процесс устанавливается и реакция становится периодическим сигналом, поэтому в данном случае имеет смысл говорить о реакции как о гармоническом сигнале в установившемся режиме.

Комплексную функцию $H(e^{j\hat{\omega}})$ можно выразить через ее мо-

дуль и аргумент:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = |H(e^{j\hat{\omega}})| e^{j \arg\{H(e^{j\hat{\omega}})\}} = A(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})}$$

Модуль частотной характеристики $H(e^{j\hat{\omega}})$ называют *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ)

$$A(\hat{\omega}) = |H(e^{j\hat{\omega}})|,$$

а аргумент – *фазочастотной характеристикой* (ФЧХ) ЛДС

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arg\{H(e^{j\hat{\omega}})\}$$

Поясним смысл АЧХ и ФЧХ, для чего перепишем выражение для реакции, подставив в него воздействие и ЧХ:

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n)H(e^{j\hat{\omega}}) = C_x e^{j\varphi_x(\hat{\omega})} A(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})} = \\ &= C_x A(\hat{\omega}) e^{j[\varphi_x(\hat{\omega}) + \varphi(\hat{\omega})]} = C_y e^{j\varphi_y(\hat{\omega})}, \end{aligned}$$

откуда следует, что реакция на комплексный гармонический сигнал есть тоже комплексный гармонический сигнал той же частоты, что и воздействие, но с частотно-зависимыми амплитудой

$$C_y = C_x A(\hat{\omega})$$

и фазой

$$\varphi_y(\hat{\omega}) = \varphi_x(\hat{\omega}) + \varphi(\hat{\omega})$$

Сопоставив выражения для реакции и воздействия, дадим определения АЧХ и ФЧХ.

Амплитудно-частотной характеристикой ЛДС называется частотная зависимость отношения амплитуды реакции к амплитуде дискретного гармонического воздействия в установившемся режиме:

$$\frac{C_y}{C_x} = \frac{C_x A(\hat{\omega})}{C_x} = A(\hat{\omega})$$

Фазочастотной характеристикой ЛДС называется

частотная зависимость разности фаз реакции и дискретного гармонического воздействия в установившемся режиме:

$$\varphi_y(\hat{\omega}) - \varphi_x(\hat{\omega}) = [\varphi_x(\hat{\omega}) + \varphi(\hat{\omega})] - \varphi_x(\hat{\omega}) = \varphi(\hat{\omega})$$

Связь частотной характеристики с передаточной функцией

Сравним передаточную функцию с частотной характеристикой, взаимосвязь которых очевидна:

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} = H(e^{j\hat{\omega}})$$

т. е. ЧХ $H(e^{j\hat{\omega}})$ совпадает с ПФ $H(z)$, если область значений переменной z на

комплексной z -плоскости ограничена точками на единичной окружности $e^{j\omega}$.

Это позволяет при известной передаточной функции путем подстановки $z = e^{j\omega}$ автоматически получать частотную характеристику, а от известных соотношений вход/выход в z -области:

$$Y(z) = H(z)X(z);$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z)$$

автоматически перейти к соответствующим соотношениям в частотной области:

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = H(e^{j\hat{\omega}})X(e^{j\hat{\omega}});$$

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-ji\hat{\omega}}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\hat{\omega}}} X(e^{j\hat{\omega}}),$$

где

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = X(e^{j\omega T}); Y(e^{j\hat{\omega}}) = Y(e^{j\omega T})$$

– фурье-изображения воздействия и реакции соответственно.

На основании этого *частотную характеристику* можно определить как отношение фурье-изображений реакции и воздействия при нулевых начальных условиях, подобно передаточной функции при подстановке $z = e^{j\hat{\omega}}$:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} = \frac{Y(e^{j\hat{\omega}})}{X(e^{j\hat{\omega}})}$$

Анализ АЧХ по карте нулей и полюсов

Как уже говорилось, карта нулей и полюсов является одной из важнейших графических характеристик ЛДС. Помимо оценки устойчивости ЛДС, она позволяет по расположению нулей и полюсов сделать вывод о качественном характере АЧХ.

Ниже сформулированы наиболее общие закономерности качественного анализа АЧХ по карте нулей и полюсов в основной полосе частот для звена 2-го порядка:

- передаточная функция звена 2-го порядка имеет два комплексно-сопряженных или два вещественных *полюса*, в первом случае максимум АЧХ находится *внутри* основного диапазона, во втором – на его границах (два максимума);

- передаточная функция звена 2-го порядка имеет два комплексно-сопряженных или два вещественных нуля, в первом случае минимум или нуль АЧХ находится внутри основной полосы частот, во втором – на его границах;

- расположение *нулей, не лежащих* на единичной окружности, указывает (приблизительно) частоты, на которой АЧХ имеет *минимумы*;

- расположение *нулей, лежащих* на единичной окружности, определяют частоты, на которых *АЧХ равна нулю*, а *ФЧХ имеет скачок на π* ; нуль АЧХ является наименьшим значением, но не минимумом АЧХ;

- абсолютная величина полюса влияет на крутизну АЧХ: с ее увеличением крутизна АЧХ возрастает.

Экспресс-анализ АЧХ и ФЧХ звена 2-го порядка

На практике часто требуется оценить АЧХ и ФЧХ при миниму-ме расчетов. С этой целью строят приближенные графики рассматриваемых характеристик по их значениям в нескольких точках, количество которых должно быть минимально достаточным. Такой быстрый способ оценки частотных характеристик называется *экс-пресс-анализом*.

Экспресс-анализ АЧХ предполагает заранее известными особенностями анализируемой функции: гладкость, количество экстремумов, нулей и др.

Проведем экспресс-анализ АЧХ и ФЧХ звена 2-го порядка. Методами математического анализа можно показать, что в основной полосе частот АЧХ звена 2-го порядка:

- имеет экстремум либо ноль *на границах* основной полосы, при этом ноль будет наименьшим значением, но не минимумом АЧХ;
- может иметь один максимум и один минимум либо ноль *внут-ри* основной полосы, при этом ноль будет наименьшим значением, но не минимумом АЧХ.

При отсутствии нулей АЧХ представляет собой *гладкую* функцию.

Следовательно, для оценки АЧХ звена 2-го порядка достаточно построить ее график по *пяти* точкам:

- двум – на *границах* основной полосы,
- одной (уточняющей) – *посередине* основной полосы,
- двум – *внутри* основной полосы, соответствующим максимуму и минимуму (либо нулю) АЧХ.

Полагая, что передаточная функция $H(z)$ звена 2-го порядка известна, получим формулы экспресс-анализа АЧХ и ФЧХ по следующим *пяти* точкам

$$\hat{\omega} = 0; \pi; \frac{\pi}{2}; \hat{\omega}_*; \hat{\omega}_o,$$

где

$$\hat{\omega}_*$$

– частота, на которой АЧХ имеет *максимум внутри* основной полосы (частота максимума АЧХ);

$\hat{\omega}_0$ – частота, на которой АЧХ имеет *минимум* или равна нулю *внутри* основной полосы (частота минимума или нуля АЧХ).

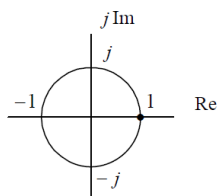
Определим значения АЧХ и ФЧХ в указанных пяти точках: 1) в точке $\omega = 0$

$$z = e^{j0} = 1; z^{-1} = 1,$$

Откуда

$$A(0) = |H(1)| = \left| \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \right|;$$

$$\varphi(0) = \arg\{H(1)\} = 0;$$



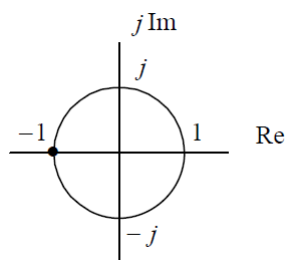
2) в точке $\omega = \pi$

$$z = e^{j\pi} = -1; z^{-1} = -1$$

откуда

$$A(\pi) = |H(-1)| = \left| \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \right|;$$

$$\varphi(\pi) = \arg\{H(-1)\} = 0;$$



3) в точке $\hat{\omega} = \frac{\pi}{2}$

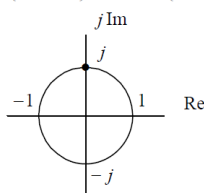
$$z = e^{j\frac{\pi}{2}} = j; z^{-1} = -j$$

откуда

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = |H(j)| = \left| \frac{(b_0 - b_2) - jb_1}{(1 - a_2) - ja_1} \right| = \sqrt{\frac{(b_0 - b_2)^2 + b_1^2}{(1 - a_2)^2 + a_1^2}};$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arg\{H(j)\} = \arg\left\{ \frac{(b_0 - b_2) - jb_1}{(1 - a_2) - ja_1} \right\} =$$

$$= \arctg\left(\frac{a_1}{1 - a_2}\right) - \arctg\left(\frac{b_1}{b_0 - b_2}\right).$$



4) точка $\hat{\omega} = \hat{\omega}_*$ определяет местоположение *максимума* АЧХ, который находится приблизительно на частоте φ_* *полюса* [1]

$$z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}$$

$$\hat{\omega}_* \approx \varphi_*$$

значение АЧХ в этой точке вычисляется по общей формуле;

5) точка $\hat{\omega} = \hat{\omega}_0$ определяет местоположение *минимума* АЧХ, который находится приблизительно на частоте ϕ_0 *нуля* передаточной функции при значении $r_0 \neq 1$ [1]

$$z_{01,2} = r_0 e^{\pm j\phi_0};$$

$$\hat{\omega}_0 \approx \phi_0, r_0 \neq 1;$$

значение *минимума* АЧХ в точке ω_0 вычисляется по общей формуле;

если в точке ϕ_0 значение $r_0 = 1$, имеем не минимум, а *нуль* АЧХ и соответственно скачок ФЧХ на π .

Строго говоря, на местоположение максимума АЧХ влияют не только полюсы, но и нули, так же, как на местоположение минимума АЧХ влияют не только нули, но и полюсы. Тем не менее доминирующее влияние на местоположение максимума оказывают полюсы, а на местоположение минимума – нули, что и отражается символом приблизительного равенства.

Понятие цифрового фильтра

Под фильтрацией понимается любое преобразование информации (сигналов, результатов наблюдений), при котором во входной последовательности обрабатываемых данных целенаправленно изменяются определенные соотношения (динамические или частотные) между различными компонентами этих данных.

Преобразование динамики сигналов (и данных, которые несут эти сигналы) осуществляется в системах. Системы, избирательно меняющие форму сигналов (амплитудно-частотную или фазово-частотную характеристику), устранение или уменьшение помех, извлечение из сигналов определенной информации, разделение сигналов на определенные составляющие называют фильтрами. Соответственно, фильтры с любым целевым назначением являются частным случаем систем преобразования сигналов.

К основным операциям фильтрации информации относят операции сглаживания,

прогнозирования, дифференцирования, интегрирования и разделения сигналов, а также выделение информационных (полезных) сигналов и подавление шумов (помех). Основными методами цифровой фильтрации данных являются частотная селекция сигналов и оптимальная (адаптивная) фильтрация.

В настоящем курсе рассматриваются методы линейной обработки данных линейными дискретными системами. Линейными называют системы, которые осуществляют преобразование линейных комбинаций входных сигналов в суперпозицию выходных сигналов. Принцип реализации линейных систем, физический - в виде специальных микропроцессорных устройств, или алгоритмический - в виде программ на ЭВМ, существенного значения не имеет и определяет только их потенциальные возможности.

В общем случае термином **цифровой фильтр** (ЦФ) называют аппаратную или программную реализацию математического алгоритма, входом которого является цифровой сигнал, а выходом – другой цифровой сигнал с определенным образом модифицированной формой и(или) амплитудной и фазовой характеристикой. Классификация цифровых фильтров обычно базируется на функциональных признаках алгоритмов цифровой фильтрации, согласно которому ЦФ подразделяются на 4 группы: фильтры частотной селекции, оптимальные (квазиоптимальные), адаптивные и эвристические. Наиболее изученными и опробованными на практике являются ЦФ частотной селекции.

Разностное уравнение цифрового фильтра

Принцип разработки программы, закладываемой в цифровой вычислитель, во многих случаях базируется на аналоговых фильтрах (прототипах).

Одним из способов теоретического расчета выходного напряжения $y(t)$ аналогового фильтра является операция свертки его импульсной характеристики $h(t)$ с входным воздействием $x(t)$:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (1)$$

Реальный фильтр – это некоторое аналоговое устройство, производящее операции в соответствии с математическим выражением (1).

Но эти математические операции может выполнить и цифровой вычислитель. Для этого интеграл заменяется суммой:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^N h(kT) x(nT - kT) T,$$

где N - разумно выбранное число суммируемых элементов;

$x(kT)$ - последовательность цифровых отсчетов дискретизированного входного воздействия $x(t)$;

$h(kT)$ - цифровые отсчеты импульсной характеристики заданного аналога-прототипа, являющиеся постоянными коэффициентами;

T - интервал дискретизации (величина постоянная).

Опуская постоянный множитель T , можно записать

$$y(nT) = \sum_{k=0}^N h(kT)x(nT - kT). \quad (2)$$

Выходной результат $y(nT)$ отличается от $y(t)$ только своей дискретной формой, которая восстанавливается в аналоговое колебание с помощью цифроаналогового преобразователя и формирующего фильтра. Следовательно, вычислитель, реализующий вычисление формулы (2), можно назвать цифровым фильтром, сохраняющим характеристики своего аналога-прототипа.

Получение эквивалентного цифрового фильтра, обладающего свойствами аналогового прототипа, базируется на операции дискретизации временных процессов, протекающих в цепях этого прототипа.

При дискретизации временных процессов производная по времени заменяется выражением:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (3)$$

где Δt - приращение по времени.

В цифровых фильтрах Δt равно интервалу дискретизации T . Тогда производную (3) можно представить в следующем виде:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(nT) - y[(n-1)T]}{T} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T},$$

где n - номер интервала дискретизации.

Дифференциальное уравнение простейшего фильтра, реализованного в виде однозвенной RC -цепи имеет следующий вид:

$$y(t) + \tau_{\phi} \frac{dy(t)}{dt} = x(t), \text{ где } \tau_{\phi} = RC;$$

R, C - номиналы сопротивления и емкости.

Заменив $y(t)$ на $y(n)$, $x(t)$ на $x(n)$, получим

$$y(n) = ax(n) + by(n-1), \quad (4)$$

где $a = \frac{T}{T + \tau_{\phi}}$, $b = \frac{\tau_{\phi}}{T + \tau_{\phi}}$.

Уравнение (4) называется разностным. Оно позволяет без каких-либо дополнительных действий представить вычислительную структуру цифрового фильтра. Выходная последовательность $y(n)$ для RC -цепи является суммой двух последовательностей, определяемых первым и вторым слагаемым правой части уравнения.

Величины a, b называют коэффициентами цифрового фильтра.

Разностное уравнение цифровой RC -цепи, предполагает, что для образования выходного отсчета используется не только входной, но и задержанный на один временной дискрет выходной отсчет (отсчет полученный на один дискрет раньше), т.е. в вычислениях имеется цепь обратной связи. Такой фильтр называют рекурсивным.

Дискретная свертка

Дискретизация интеграла свертки (1) открывает новые возможности в синтезе цифровых фильтров. Так как интервал T - постоянная величина, то $y(t)$, $x(t)$, $h(t)$ являются функциями номера отсчета и выражение для дискретной свертки имеет вид:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m). \quad (5)$$

При проведении вычислений следует учитывать, что при фиксированном n значение m не может быть больше, чем n , следовательно $(n-m) \geq 0$.

Дискретная импульсная характеристика RC -цепи

$$h(n) = \exp\left(-\frac{T}{\tau_{\phi}} n\right) = \exp\left(-\frac{T}{RC} n\right). \quad (6)$$

Формула (5) может рассматриваться как разностное уравнение, которое устанавливает, что выходной отсчет может быть представлен в виде текущего (при $m=0$) и задержанных значений входных отсчетов, умноженных на весовые коэффициенты, роль которых выполняет дискретная импульсная характеристика (ДИХ). Так как ДИХ этого фильтра имеет бесконечную протяженность во времени, то физически реализовать такое вычисление на практике невозможно. Физически реализуемый фильтр можно получить, если ограничить протяженность ДИХ. Тогда выражение (5) будет иметь вид:

$$y(n) = \sum_{m=0}^k h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(k)x(n-k) \quad (7)$$

В вычислениях по этой формуле отсутствует петля обратной связи, поэтому такой фильтр называется нерекурсивным. Так как его ДИХ является ограниченной такой цифровой фильтр относится к классу фильтров с конечной импульсной характеристикой – **КИХ-фильтров**. Импульсная характеристика фильтра с обратной связью, описываемого уравнением (4), бесконечная и такие фильтры называются фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой – **БИХ-фильтрами**.

Таким образом, для одного и того же аналогового фильтра получены две различные схемы вычислений цифровых фильтров.

Нерекурсивные фильтры требуют большего числа вычислений, однако при определенных условиях они позволяют получить линейную фазовую характеристику цифрового фильтра и обеспечивают устойчивость работы.

Комплексный коэффициент передачи цифрового фильтра

Анализ свойств цифровых фильтров проводят путем исследования их частотных характеристик. Чтобы получить выражение для комплексного коэффициента передачи цифрового фильтра, на его вход необходимо подать испытательное воздействие в виде дискретизированной комплексной экспоненты:

$$x(n) = \exp(j\Phi n), \quad (8)$$

функционально эквивалентной дискретизированной синусоиде с цифровой частотой

$$\Phi = \omega T = 2\pi f T = \frac{2\pi f}{f_d} = 2\pi \frac{f}{f_d}.$$

Реакция фильтра на такое воздействие будет представлять собой также синусоидальное колебание с той же частотой, но другой амплитудой $H(\Phi)$ и фазовым сдвигом $\varphi(\Phi)$:

$$y(n) = H(\Phi) \exp[j\varphi(\Phi)] \exp(j\Phi n) = H(j\Phi) x(n).$$

Множитель

$$H(j\Phi) = H(\Phi) \exp[j\varphi(\Phi)] \quad (9)$$

представляет собой комплексный коэффициент передачи фильтра.

Модуль комплексного коэффициента передачи $|H(j\Phi)| = H(\Phi)$ - это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра; $\varphi(\Phi)$ - фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра.

Способы описания цифровых фильтров

Реакция $y(n)$ цифрового фильтра на входное воздействие $x(n)$ определяется сверткой этого воздействия с импульсной характеристикой фильтра:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x(n-m) = h(n) * x(n).$$

Из свойств z -преобразования следует, что свертке последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ соответствует произведение их z -преобразований

$$Y(z) = X(z) H(z). \quad (10)$$

Из равенства (10) следуют выводы:

а) $H(z)$ является z -преобразованием импульсной характеристики фильтра $h(n)$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}; \quad (11)$$

б) так как $X(z)$ и $Y(z)$ - это z -преобразования входного воздействия и выходной реакции цифрового фильтра, то $H(z)$ является передаточной функцией фильтра:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (12)$$

Передаточную функцию цифрового фильтра, полученную как z -преобразование его ДИХ в общем виде можно представить отношением двух полиномов, или дробно-рациональной функцией от переменной z^{-1} :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^L b_k z^{-k}}. \quad (13)$$

Это наиболее общее выражение для $H(z)$. Коэффициенты a_k и b_k называются коэффициентами цифрового фильтра. Цифровой фильтр считается рассчитанным (синтезированным), если определены порядки M и L полиномов числителя и знаменателя и коэффициенты a_k и b_k .

Передаточной функции $H(z)$ соответствует разностное уравнение цифрового фильтра:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^L b_k y(n-k). \quad (14)$$

Коэффициенты a_k и b_k разностного уравнения являются соответствующими коэффициентами передаточной функции цифрового фильтра.

Разностное уравнение представляет собой алгоритм, по которому можно составить программу для реализации цифровой фильтрации.

Нерекурсивный фильтр 1-го порядка

Передаточная функция нерекурсивного фильтра 1-го порядка получается из общего уравнения (13) при $a_k = 0$ при $k \geq 2$ и при $b_k = 0$, при $k \geq 1$:

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1}. \quad (15)$$

Разностное уравнение этого фильтра имеет вид:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1). \quad (16)$$

Для анализа характеристик фильтра уравнения (15), (16) представляют в следующем виде:

$$H(z) = a_0(1 + \alpha_1 z^{-1}); \quad (17)$$

$$y(n) = a_0[x(n) + \alpha_1 x(n-1)], \quad (18)$$

где $\alpha_1 = \frac{a_1}{a_0}$.

Коэффициент a_0 выполняет в этих уравнениях только масштабирующие функции и не оказывает влияния на характеристики фильтра. Поэтому для анализа уравнение передаточной функции записывается в виде:

$$H(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1}. \quad (19)$$

Рабочим диапазоном частот цифрового фильтра является интервал Найквиста, в цифровых частотах Φ это диапазон от 0 до π .

Для комплексного коэффициента передачи фильтра выражение (19) при переменной $z = \exp(j\Phi)$

$$H(j\Phi) = 1 + \alpha_1 \exp(-j\Phi). \quad (20)$$

При подстановке в (20) представления экспоненты в тригонометрической форме

$$H(j\Phi) = 1 + \alpha_1 \cos(\Phi) - j\alpha_1 \sin(\Phi). \quad (21)$$

АЧХ фильтра определяется как модуль $|H(j\Phi)| = H(\Phi)$:

$$H(\Phi) = \sqrt{1 + 2\alpha_1 \cos(\Phi) + \alpha_1^2}. \quad (22)$$

Выражение для определения ФЧХ

$$\varphi(\Phi) = \arctg \left\{ \frac{\text{Im}[H(j\Phi)]}{\text{Re}[H(j\Phi)]} \right\} = -\arctg \left(\frac{\alpha_1 \sin(\Phi)}{1 + \alpha_1 \cos(\Phi)} \right). \quad (23)$$

Задавая разные значения α_1 и изменяя значения Φ от 0 до 2π , можно построить АЧХ и ФЧХ проектируемого цифрового фильтра.

При $\alpha_1 > 0$ получим ФНЧ, при $\alpha_1 < 0$ получим ФВЧ, при $\alpha_1 = \pm 1$ ФЧХ фильтра линейная. Линейность ФЧХ фильтра необходима при обработке сигналов, у которых информационным параметром является фаза, или не должно происходить фазовых искажений сигналов при обработке.

Дискретная импульсная характеристика фильтра определяется последовательностью коэффициентов передаточной функции $H(z)$, представленной в виде полинома по степеням z^{-k} :

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + \dots$$

Сравнивая эту запись с уравнением (5.19), получим

$$h(0)=1; h(1)=\alpha_1; h(n>1)=0. \quad (24)$$

Для обеспечения линейности ФЧХ требуется симметрия или антисимметрия ДИХ.

Нерекурсивный фильтр 2-го порядка

Передаточная функция нерекурсивного фильтра 2-го порядка получается из общего уравнения (13) при $a_k=0$ при $k \geq 3$ и при $b_k=0$, при $k \geq 1$:

$$H(z)=a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}. \quad (25)$$

Разностное уравнение этого фильтра имеет вид:

$$y(n)=a_0x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2). \quad (26)$$

Для анализа характеристик фильтра уравнения (25), (26) представляют в следующем виде:

$$H(z)=1+\alpha_1z^{-1}+\alpha_2z^{-2}; \quad (27)$$

$$y(n)=x(n)+\alpha_1x(n-1)+\alpha_2x(n-2), \quad (28)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \frac{a_1}{a_0}, \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}.$$

Выражение для комплексного коэффициента передачи этого фильтра получим при подстановке $z = \exp(j\Phi)$ в (27)

$$H(j\Phi)=1+\alpha_1 \exp(-j\Phi)+\alpha_2 \exp(-j2\Phi). \quad (29)$$

При подстановке в (29) представления экспоненты в тригонометрической форме

$$H(j\Phi)=(1+\alpha_1 \cos(\Phi)+\alpha_2 \cos(2\Phi))-j(\alpha_1 \sin(\Phi)+\alpha_2 \sin(2\Phi))=H(\Phi)\exp[j\varphi(\Phi)]. \quad (30)$$

АЧХ фильтра определяется как модуль $|H(j\Phi)|=H(\Phi)$:

$$H(\Phi)=\sqrt{(1+\alpha_1 \cos(\Phi)+\alpha_2 \cos(2\Phi))^2+(\alpha_1 \sin(\Phi)+\alpha_2 \sin(2\Phi))^2}. \quad (31)$$

Выражение для определения ФЧХ нерекурсивного фильтра 2-го порядка:

$$\varphi(\Phi)=-\arctg\left(\frac{\alpha_1 \sin(\Phi)+\alpha_2 \sin(2\Phi)}{1+\alpha_1 \cos(\Phi)+\alpha_2 \cos(2\Phi)}\right). \quad (32)$$

Задавая разные значения α_1 и α_2 и изменяя значения Φ от 0 до 2π , можно построить АЧХ и ФЧХ проектируемого цифрового фильтра.

Дискретная импульсная характеристика фильтра 2-го порядка определяется последовательностью коэффициентов передаточной функции $H(z)$ и содержит только три отсчета:

$$h(0)=1; h(1)=\alpha_1; h(2)=\alpha_2; h(n>2)=0. \quad (33)$$

Рекурсивный фильтр 1-го порядка

Разностное уравнение рекурсивного фильтра первого порядка имеет вид:

$$y(n) = ax(n) + by(n-1). \quad (34)$$

Это разностное уравнение интегрирующей RC -цепи. Дискретная импульсная характеристика такого фильтра:

$$h(n) = a \exp\left(-\frac{T}{\tau_{\phi}} n\right) = a \exp\left(-\frac{T}{RC} n\right).$$

Передаточная функция этого фильтра - это z -преобразование ДИХ:

$$H(z) = a \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{T}{\tau_{\phi}} k\right] z^{-k} = a \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \text{ где } q = \exp\left(-\frac{T}{\tau_{\phi}}\right) z^{-1}.$$

Используя формулу суммирования прогрессии, получим

$$H(z) = \frac{a}{1-q} = \frac{a}{1-bz^{-1}} = \frac{az}{z-b}, \quad (35)$$

где $b = \exp\left(-\frac{T}{\tau_{\phi}}\right).$

Комплексный коэффициент передачи фильтра:

$$H(j\Phi) = \frac{a}{(1-b\cos(\Phi)) + jb\sin(\Phi)}.$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра:

$$\begin{aligned} H(j\Phi) &= \frac{a}{(1-b\cos(\Phi)) + jb\sin(\Phi)} = \frac{a[(1-b\cos(\Phi)) - jb\sin(\Phi)]}{(1-b\cos(\Phi))^2 + b^2 \sin^2(\Phi)} = \\ &= \frac{a}{1+b^2-2b\cos(\Phi)} [1-b\cos(\Phi) - jb\sin(\Phi)] \\ H(\Phi) &= \sqrt{\left(\frac{a}{1+b^2-2b\cos(\Phi)}\right)^2 [(1-b\cos(\Phi))^2 + (b\sin(\Phi))^2]} = \frac{a}{\sqrt{1+b^2-2b\cos(\Phi)}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Фазочастотная характеристика фильтра

$$\varphi(\Phi) = \arctg\left\{\frac{\operatorname{Im}[H(j\Phi)]}{\operatorname{Re}[H(j\Phi)]}\right\} = -\arctg\left(\frac{b\sin(\Phi)}{1-b\cos(\Phi)}\right). \quad (37)$$

В зависимости от знака коэффициента b цифровой рекурсивный фильтр 1-го порядка может быть либо фильтром нижних частот (при $b > 0$), либо фильтром верхних частот (при $b < 0$).

Дискретная импульсная характеристика рассматриваемого фильтра описывается выражением $h(n) = ab^n$ и имеет бесконечную протяженность. Таким образом рекурсивный фильтр 1-го порядка является БИХ-фильтром.

Дискретная импульсная характеристика цифрового фильтра при $a=1$ и $b=1$ представляет собой бесконечную последовательность единичных отсчетов $h(n) = ab^n = 1$. Поэтому каждый входной отсчет $x(n)$ образует на выходе фильтра такую

же последовательность, но своего уровня. Все последовательности от каждого отсчета суммируются, так что текущий выходной отсчет с номером n равен сумме всех входных в интервале от нуля до n :

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k).$$

Это выражение соответствует цифровому интегратору.

Рекурсивный фильтр 2-го порядка

На основе общих формул (13), (14) можно представить передаточную функцию и разностное уравнение для рекурсивного фильтра 2-го порядка:

$$H(z) = \frac{a}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}; \quad (38)$$

$$y(n) = ax(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2). \quad (39)$$

Комплексный коэффициент передачи фильтра:

$$H(j\Phi) = \frac{a}{1 - b_1 \exp(-j\Phi) - b_2 \exp(-j2\Phi)}; \quad (40)$$

$$H(j\Phi) = \frac{a}{(1 - b_1 \cos(\Phi) - b_2 \cos(2\Phi)) + j(b_1 \sin(\Phi) + b_2 \sin(2\Phi))}. \quad (41)$$

Используя формулу (41) получим выражения для АЧХ фильтра:

$$H(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{(1 - b_1 \cos(\Phi) - b_2 \cos(2\Phi))^2 + (b_1 \sin(\Phi) + b_2 \sin(2\Phi))^2}} \quad (42)$$

и его ФЧХ

$$\varphi(\Phi) = -\arctg \left(\frac{b_1 \sin(\Phi) + b_2 \sin(2\Phi)}{1 - b_1 \cos(\Phi) - b_2 \cos(2\Phi)} \right). \quad (43)$$

Проведем преобразования выражения (38)

$$H(z) = \frac{a}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{az^2}{z^2 - b_1 z - b_2}. \quad (44)$$

Решение квадратного уравнения числителя, позволяет получить значения z , при которых передаточная функция обращается в ноль. Эти значения называются нулями. Для данного выражения имеем двухкратный нуль

$$z_{0,2} = 0. \quad (45)$$

Решение квадратного уравнения знаменателя, позволяет получить значения полюсов передаточной функции

$$z_{п1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2}. \quad (46)$$

Найдем соотношение коэффициентов b и полюсов.

$$H(z) = \frac{az^2}{z^2 - b_1z - b_2} = \frac{az^2}{(z - z_{n1})(z - z_{n2})} = \frac{az^2}{z^2 - (z_{n1} + z_{n2})z + z_{n1}z_{n2}}. \quad (47)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} b_1 &= z_{n1} + z_{n2}; \\ b_2 &= -z_{n1}z_{n2}. \end{aligned} \quad (48)$$

Дискретную импульсную характеристику фильтра можно определить осуществив обратное z -преобразование передаточной функции $H(z)$. Одним из способов нахождения обратного z -преобразования является разложение на простые дроби:

$$H(z) = \frac{a}{(1 - z_{n1}z^{-1})(1 - z_{n2}z^{-1})} = \frac{A}{1 - z_{n1}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z_{n2}z^{-1}}. \quad (49)$$

Известно, что z -функция

$$X(z) = \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} \quad (50)$$

является z -преобразованием последовательности

$$x(n) = \beta^n. \quad (51)$$

Следовательно, ДИХ рекурсивного фильтра 2-го порядка может быть записана в виде:

$$h(n) = Az_{n1}^n + Bz_{n2}^n. \quad (52)$$

Для нахождения значений A и B воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Для этого приведем (49) к общему знаменателю

$$H(z) = \frac{(A+B) - (Az_{n2} + Bz_{n1})z^{-1}}{(1 - z_{n1}z^{-1})(1 - z_{n2}z^{-1})}.$$

Отсюда $a = (A+B) - (Az_{n2} + Bz_{n1})z^{-1}$, что позволяет составить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0; \\ Az_{n2} + Bz_{n1}=0. \end{cases}$$

Решение данной системы позволяет получить

$$A = a \frac{z_{n1}}{z_{n1} - z_{n2}}; \quad B = a \frac{z_{n2}}{z_{n2} - z_{n1}}. \quad (53)$$

Подставляя выражения (53) в (52) получим

$$h(n) = a \frac{z_{n1}^{n+1} - z_{n2}^{n+1}}{z_{n1} - z_{n2}}. \quad (54)$$

В зависимости от знака подкоренного выражения в формуле (46) полюсы могут быть как действительными, так и комплексными.

Типы фильтров

В зависимости от вида частотной характеристики выделяют три основных группы частотных фильтров: ФНЧ - фильтры низких частот (*low-pass filters*) - пропускание низких и подавление высоких частот во входном сигнале, ФВЧ - фильтры высоких частот (*high-pass filters*) - пропускание высоких и подавление низких частот, и ПФ - полосовые фильтры, которые пропускают (*band-pass filters*) или подавляют (*band-reject filters*) сигнал в определенной частотной полосе. Среди последних в отдельную группу иногда выделяют РФ - режекторные фильтры, понимая под ними фильтры с подавлением определенной гармоникой во входном сигнале, и СФ – селекторные фильтры, обратные РФ. Если речь идет о подавлении определенной полосы частот во входном сигнале, то такие фильтры называют заградительными. Схематические частотные характеристики фильтров приведены на рисунке 1. Между частотными интервалами пропускания и подавления сигнала существует зона, которая называется переходной. Ширина переходной зоны определяет резкость характеристики фильтра. В этой зоне амплитудная характеристика монотонно уменьшается (или увеличивается) от полосы пропускания до полосы подавления (или наоборот).



Рисунок - Типы основных частотных фильтров

Практика проектирования цифровых фильтров базируется, в основном, на синтезе фильтров низких частот. Все другие виды фильтров могут быть получены из фильтров низких частот соответствующим преобразованием.

Цифровые фильтры с бесконечной импульсной характеристикой

Одним из наиболее распространенных способов получения цифровой передаточной функции фильтра с бесконечной импульсной характеристикой является билинейное преобразование аналоговой передаточной функции.

Если аналоговая передаточная функция имеет вид

$$H(P) = \frac{d_0 + d_1P + d_2P^2}{c_0 + c_1P + c_2P^2}, \quad (55)$$

то путем замены

$$P = l \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (56)$$

$$l = ctg \left(\frac{\pi}{f_{\phi} / f_{cp}} \right), \quad (57)$$

где f_{ϕ} - частота дискретизации при аналого-цифровом преобразовании;

f_{cp} - частота среза фильтра;

можно получить цифровую передаточную функцию фильтра.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{d_0 + d_1l \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + d_2l^2 \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{(1 + z^{-1})^2}}{c_0 + c_1l \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + c_2l^2 \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{(1 + z^{-1})^2}} = \\ &= \frac{d_0(1 + z^{-1})^2 + d_1l(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) + d_2l^2(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{c_0(1 + z^{-1})^2 + c_1l(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) + c_2l^2(1 - 2z^{-1} + z^{-2})} = \\ &= \frac{(d_0 + d_1l + d_2l^2) + (2d_0 - 2d_2l^2)z^{-1} + (d_0 - d_1l + d_2l^2)z^{-2}}{(c_0 + c_1l + c_2l^2) + (2c_0 - 2c_2l^2)z^{-1} + (c_0 - c_1l + c_2l^2)z^{-2}} = \\ &= \frac{D_0 + D_1z^{-1} + D_2z^{-2}}{1 + C_1z^{-1} + C_2z^{-2}}, \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$D_0 = \frac{d_0 + d_1 l + d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad D_1 = \frac{2d_0 - 2d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad D_2 = \frac{d_0 - d_1 l + d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad (59)$$

$$C_0 = 1; \quad C_1 = \frac{2c_0 - 2c_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad C_2 = \frac{c_0 - c_1 l + c_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad (60)$$

Передаточная функция фильтра нижних частот в общем виде может быть записана как

$$H(P) = \frac{A_0}{1 + c_1 P + c_2 P^2 + \dots + c_n P^n}, \quad (61)$$

где c_1, c_2, \dots, c_n - положительные действительные коэффициенты.

Порядок фильтра определяется максимальной степенью переменной P . Для большего удобства при реализации фильтра полином знаменателя раскладывается на множители:

$$H(P) = \frac{A_0}{(1 + a_1 P + b_1 P^2)(1 + a_2 P + b_2 P^2)(1 + a_3 P + b_3 P^2) \dots}, \quad (62)$$

где a_i, b_i - положительные действительные коэффициенты. Для нечетных порядков полинома коэффициент b_i равен нулю.

Параметры фильтра могут быть оптимизированы по различным критериям. Для удовлетворения каждому из выбранных критериев коэффициенты a_i и b_i должны иметь определенные значения. В справочных изданиях приводятся значения коэффициентов a_i и b_i для различных модификаций фильтров нижних частот.

От передаточной функции фильтра нижних частот можно перейти к фильтрам других типов (верхних частот, полосовому и т.д.).

Передаточная функция одного звена фильтра низких частот

$$H(P)_{\Phi H} = \frac{1}{(1 + a_1 P + b_1 P^2)}, \quad (63)$$

т.е. применительно к выражению (5.55)) $d_0 = 1; d_1 = 0; d_2 = 0; c_0 = 1; c_1 = a_1; c_2 = b_1$.

Для перехода к передаточной функции фильтра высоких частот в выражении (63) P следует заменить на $1/P$. При этом частота среза остается без изменений.

$$H(P)_{\Phi B} = \frac{1}{\left(1 + \frac{a_1}{P} + \frac{b_1}{P^2}\right)} = \frac{P^2}{b_1 + a_1 P + P^2}, \quad (64)$$

где сопоставляя с выражением (55) $d_0 = 0; d_1 = 0; d_2 = 1; c_0 = b_1; c_1 = a_1; c_2 = 1$.

Получить передаточную функцию полосового фильтра второго порядка можно из передаточной функции фильтра низких частот первого порядка

$$H(P)_{\Phi H} = \frac{1}{1+P}, \quad (65)$$

путем подстановки вместо P выражения

$$\frac{1}{\Delta\Omega} \cdot \left(P + \frac{1}{P} \right) = \frac{1}{\Delta\Omega} \cdot \frac{P^2 + 1}{P}, \quad (66)$$

где Ω - нормированная частота,

$$\Omega = \frac{f}{f_r}, \quad (67)$$

f_r - резонансная частота полосового фильтра;

$\Delta\Omega = \Omega_{\max} - \Omega_{\min}$; причем $\Omega_{\max} \cdot \Omega_{\min} = 1$;

$\Omega_{\max}, \Omega_{\min}$ - значение максимальной и минимальной нормированных частот полосового фильтра, соответствующих уровню пропускания - 3 дБ;

$$H(P)_{\Phi\Pi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Delta\Omega} \cdot \frac{P^2 + 1}{P}} = \frac{\Delta\Omega \cdot P}{1 + \Delta\Omega \cdot P + P^2}, \quad (68)$$

где сопоставляя с выражением (55) $d_0 = 0$; $d_1 = \Delta\Omega$; $d_2 = 0$; $c_0 = 1$; $c_1 = \Delta\Omega$; $c_2 = 1$.

По аналогии с колебательным контуром определяется добротность полосового фильтра:

$$Q = \frac{f_r}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{1}{\Omega_{\max} - \Omega_{\min}} = \frac{1}{\Delta\Omega}. \quad (69)$$

Тогда выражение (68) можно записать в виде

$$H(P)_{\Phi\Pi} = \frac{\frac{1}{Q} \cdot P}{1 + \frac{1}{Q} \cdot P + P^2}. \quad (70)$$

Подстановка выражения (66) в (64) приводит к описанию полосовых фильтров четвертого порядка:

$$\begin{aligned} H(P)_{\Phi\Pi} &= \frac{1}{1 + \frac{a_1}{\Delta\Omega} \cdot \frac{P^2 + 1}{P} + \frac{b_1}{(\Delta\Omega)^2} \cdot \frac{P^4 + 2P^2 + 1}{P^2}} = \\ &= \frac{\frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1} \cdot P^2}{1 + \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1} \cdot P + \left[2 + \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1} \right] \cdot P^2 + \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1} \cdot P^3 + P^4} = \\ &= \frac{m_2 \cdot P^2}{n_0 \cdot 1 + n_1 \cdot P + n_2 \cdot P^2 + n_3 \cdot P^3 + n_4 \cdot P^4}, \end{aligned} \quad (72)$$

где

$$m_2 = \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1}; \quad n_0 = 1; \quad n_1 = \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1}; \quad n_2 = 2 + \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1}; \quad n_3 = \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1}; \quad n_4 = 1.$$

После подстановки выражений (57), (58) в выражение (72) получим передаточную функцию цифрового полосового фильтра четвертого порядка:

$$H(z) = \frac{D_0 + D_2 z^{-2} + D_4 z^{-4}}{1 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + C_3 z^{-3} + C_4 z^{-4}}, \quad (73)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{4n_0 + 2n_1 \cdot l - 2n_3 \cdot l^3 - 4n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4}; \\ C_2 &= \frac{6n_0 - 2n_2 \cdot l^2 + 6n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4}; \\ C_3 &= \frac{4n_0 - 2n_1 \cdot l + 2n_3 \cdot l^3 - 4n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4}; \\ C_4 &= \frac{n_0 - n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 - n_3 \cdot l^3 - n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4}; \\ D_0 &= \frac{m_2 \cdot l^2}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4}; \\ D_2 &= -2D_0; \quad D_4 = D_0. \end{aligned}$$

По передаточной функции фильтра можно определить его амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики. Для этого в выражение (58) делается подстановка

$$z^{-1} = e^{-j \frac{2\pi f}{f_\delta}}. \quad (74)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} H(jf) &= \frac{D_0 + D_1 e^{-j \frac{2\pi f}{f_\delta}} + D_2 e^{-j \frac{4\pi f}{f_\delta}}}{C_0 + C_1 e^{-j \frac{2\pi f}{f_\delta}} + C_2 e^{-j \frac{4\pi f}{f_\delta}}} = \\ &= \frac{D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\delta}\right) - jD_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\delta}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\delta}\right) - jD_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\delta}\right)}{C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\delta}\right) - jC_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\delta}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\delta}\right) - jC_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\delta}\right)} = \\ &= \frac{D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\delta}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\delta}\right)}{\left[C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\delta}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\delta}\right) \right] - j \left[C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\delta}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\delta}\right) \right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -j \frac{D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)}{\left[C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right] - j \left[C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]} = \\
& = \frac{1}{\left[C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]^2 + \left[C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]^2} \cdot \\
& \cdot \left\{ \left[D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right] - j \left[D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right] \right\} \cdot \\
& \left\{ \left[C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right] + j \left[C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right] \right\}. \quad (75)
\end{aligned}$$

Выражение (75) представляется в следующем виде:

$$H(jf) = a(f) \cdot [\operatorname{Re}_1(f) + j \operatorname{Im}_1(f)] \cdot [\operatorname{Re}_2(f) + j \operatorname{Im}_2(f)], \quad (76)$$

где

$$\begin{aligned}
a(f) &= \frac{1}{\left[C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]^2 + \left[C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]^2}; \\
\operatorname{Re}_1(f) &= D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right); \\
\operatorname{Im}_1(f) &= - \left[D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]; \\
\operatorname{Re}_2(f) &= C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right); \\
\operatorname{Im}_2(f) &= C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right).
\end{aligned}$$

Амплитудно-частотная и фазочастотные характеристики фильтра, которые являются, соответственно, модулем и аргументом выражения (76), определяется как

$$A(f) = \sqrt{[a(f)]^2 \left\{ [\operatorname{Re}_1(f)]^2 + [\operatorname{Im}_1(f)]^2 \right\} \cdot \left\{ [\operatorname{Re}_2(f)]^2 + [\operatorname{Im}_2(f)]^2 \right\}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left[D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) \right]^2 + \left[D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) \right]^2}{\left[C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) \right]^2 + \left[C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) \right]^2}} \quad (77)$$

и

$$\varphi(f) = \arctg\left(\frac{\text{Im}_1(f)}{\text{Re}_1(f)}\right) + \arctg\left(\frac{\text{Im}_2(f)}{\text{Re}_2(f)}\right) = \quad (78)$$

$$= -\arctg\left(\frac{D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}{D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}\right) + \arctg\left(\frac{C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}{C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}\right)$$

Если $x(n)$ - последовательность дискретных отсчетов, которая должна быть подвергнута цифровой рекурсивной фильтрации, а передаточная функция цифрового фильтра описывается выражением (58), то последовательность на выходе цифрового фильтра $y(n)$ связана со входной следующим преобразованием:

$$y(i) = D_0 \cdot x(i) + D_1 \cdot x(i-1) + D_2 \cdot x(i-2) - C_1 \cdot y(i-1) - C_2 \cdot y(i-2), \quad (79)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N \dots; \quad x(-1) = 0; \quad x(-2) = 0; \quad y(-1) = 0; \quad y(-2) = 0.$$

Для фильтра, состоящего из нескольких звеньев, дискретная последовательность на выходе первого звена является входной последовательностью для второго звена и т. д. .

Если после выполнения фильтрации определяются значения фазовые параметры сигнала, то необходимо вводить соответствующую фазовую поправку, вычисляемую по формуле (78).

Однако во многих случаях для обработки принимается ограниченная дискретная последовательность исходных данных $i = 0 \div N - 1$. А при подаче последовательности на вход фильтра на его выходе наблюдается переходной процесс. Для того, чтобы не принимать для обработки удлиненную последовательность, представляется возможным реализовать рекурсивную цифровую фильтрацию путем двойного прохождения исходной последовательности через фильтр. Первый проход приводит к завершению переходного процесса, а второй обеспечивает выполнение цифровой фильтрации. Для устранения точки разрыва между первым и последним отсчетами дискретной последовательности применяется линейная аппроксимация для двух первых и двух последних точек.

Цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой

Нерекурсивные фильтры реализуют алгоритм свертки двух функций:

$$y(n) = h(n) * x(n),$$

где $x(n)$ – массив входных данных фильтра;

$h(n)$ – импульсная характеристика фильтра;

Если диапазон отсчетов импульсной характеристики фильтра $0, 1, 2, \dots, N$, то значения выходных отсчетов свертки $y(k)$ для любого аргумента k определяются текущим и "прошлыми" (до $k - N$) значениями входных отсчетов $x(k)$. Такой фильтр называется **нерекурсивным цифровым фильтром (НЦФ)**. Интервал $[0 \div N]$ получил название "окна" фильтра. Окно фильтра составляет $N + 1$ отсчет. Фильтр является односторонним каузальным, т.е. причинно обусловленным текущим и "прошлыми" значениями входного сигнала, и выходной сигнал не опережает входного. В общем случае, каузальный фильтр меняет в спектре сигнала состав гармоник, их амплитуды и фазы.

Каузальный фильтр может быть реализован физически в реальном масштабе времени. Начало фильтрации возможно только при задании определенных начальных значений отсчетов $x(n)$ до общего количества отсчетов $N + 1$ для точек $x(k)$ при $k < N$. Как правило, в качестве начальных условий принимаются нулевые значения, тренд сигнала или значения отсчета $x(0)$, т.е. продление отсчета $x(0)$ назад по аргументу.

Основное свойство любого фильтра – его *частотная (frequency response) и фазовая характеристики*. Они показывают, какое влияние фильтр оказывает на амплитуду и фазу различных гармоник обрабатываемого сигнала.

К наиболее известным типам нерекурсивных цифровых фильтров (НЦФ) относятся частотные фильтры, у которых симметричная импульсная характеристика. Такие фильтры не изменяют фазу входных сигналов. Формула свертки для них имеет вид:

$$y(k) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h(n)x(k-n). \quad (80)$$

Практика проектирования цифровых фильтров базируется, в основном, на синтезе фильтров низких частот. Все другие виды фильтров могут быть получены из фильтров низких частот соответствующим преобразованием. Так, например, фильтр высоких частот может быть получен инверсией фильтра низких частот - вычислением разности между исходным сигналом и результатом его фильтрации низкочастотным НЦФ:

$$y(k) = x(k) - \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h(n)x(k-n). \quad (81)$$

Отсюда, условие инверсии симметричного низкочастотного фильтра в высокочастотный:

$$h_B(0) = 1 - h_H(0), \quad h_B(n) = -h_H(n), \quad \text{при } n \neq 0.$$

Применяется также способ получения фильтров высоких частот из низкочастотных фильтров путем реверса частоты в передаточной функции низкочастотного фильтра, т.е. заменой переменной ω на переменную $\omega' = \pi - \omega$ (при $\Delta t = 1$). Для симметричных фильтров, содержащих в передаточной функции только косинусные члены аргумента ω , в результате такой операции будем иметь:

$$\cos[n(\pi - \omega)] = \cos(n\pi)\cos(n\omega) = (-1)^n \cos(n\omega).$$

Последнее означает смену знака всех нечетных гармоник передаточной характеристики фильтра и, соответственно, всех нечетных членов фильтра. Физическую сущность такой операции инверсии спектра легко понять на постоянной составляющей сигнала. При изменении на противоположный знака каждого второго отсчета постоянной величины это постоянное значение превращается в "пилу", частота которой равна частоте Найквиста главного частотного диапазона (отсчеты по амплитудным значениям этой частоты), равно как и наоборот, отсчеты гармоники сигнала на частоте Найквиста (знакопередающиеся в силу сдвига по интервалам дискретизации на π) превращаются в постоянную составляющую.

Полосовой фильтр может реализоваться последовательным применением ФНЧ и ФВЧ с соответствующим перекрытием частот пропускания. В математическом представлении это означает последовательную свертку массива данных с массивами коэффициентов h_H - низкочастотного, и h_B - высокочастотного фильтров:

$$v(n) = h_H(n) * x(n); \quad y(n) = h_B(n) * v(n) = h_H(n) * h_B(n) * x(n).$$

Так как операция свертки коммутативна, то вместо отдельных массивов коэффициентов ФНЧ и ФВЧ их сверткой может быть определен непосредственно массив коэффициентов полосового фильтра: $h_{\Pi}(n) = h_H(n) * h_B(n)$.

Полосовой режекторный фильтр также может быть получен методом инверсии полосового фильтра. Одночастотные режекторные фильтры обычно выполняются на основе простых рекурсивных цифровых фильтров, более эффективных для данных целей.

Часто к фильтрам предъявляются более сложные требования. Например, фильтр может иметь несколько частотных полос пропускания с разными коэффициентами усиления, а для полос непропускания могут быть заданы разные коэффициенты подавления. Иногда требуемая частотная характеристика фильтра задается вообще произвольной кривой.

Методика расчетов НЦФ

Обычно при фильтрации сигналов задается требуемая частотная характеристика фильтра. Задачей является построить фильтр, отвечающий заданным требованиям и

провести фильтрацию. Зачастую бывает невозможно построить в точности заданный фильтр, и выполняется фильтр, близкий по характеристикам к заданному.

Существует много способов построения фильтров с заданной частотной характеристикой. Наиболее простой из них – проектирование фильтров с линейной фазой с помощью весовых окон. Этот способ является универсальным и позволяет получить фильтр с любой заданной частотной характеристикой. Однако, с помощью других, математически более строгих и совершенных методов, иногда удается построить фильтр меньшей длины, удовлетворяющий тем же требованиям к частотной характеристике.

Наиболее простой является методика расчетов программных двусторонних симметричных фильтров без изменения фазы выходного сигнала относительно входного. В самом общем виде она включает:

1. Задание идеальной амплитудно-частотной характеристики передаточной функции фильтра. Термин идеальности понимается здесь в том смысле, что на характеристике указываются полосы пропускания и подавления частот с коэффициентами передачи 1 и 0 соответственно без переходных зон.

2. Расчет функции импульсного отклика идеального фильтра (обратное преобразование Фурье частотной характеристики фильтра). При наличии скачков функций на границах пропускания/подавления импульсный отклик содержит бесконечно большое количество членов.

3. Ограничение функции отклика до определенного количества членов, при этом на передаточной характеристике фильтра возникает явление Гиббса – осцилляции частотной характеристики с центрами на скачках.

4. Для нейтрализации явления Гиббса производится выбор весовой функции и расчет ее коэффициентов, на которые умножаются коэффициенты функции отклика фильтра. Результатом данной операции являются значения коэффициентов оператора фильтра (рабочий импульсный отклик фильтра). По существу, операции 3 и 4 представляют собой усечение ряда Фурье динамического (временного) представления передаточной функции фильтра определенной весовой функцией (умножение на весовую функцию).

5. С использованием полученных значений коэффициентов оператора фильтра производится построение его частотной характеристики и проверяется ее соответствие поставленной задаче.

При проектировании симметричных нерекурсивных фильтров нет необходимости базироваться на расчете фильтров низких частот с последующим их преобразованием, при необходимости, в фильтры верхних частот или полосовые фильтры. Расчет непосредственно полосового фильтра достаточно прост, а НЧ- и ВЧ-фильтры являются частным случаем полосового фильтра с одной верхней или одной нижней граничной частотой.

Фильтры с линейной фазовой характеристикой

Несколько сложнее расчет каузальных (односторонних) частотных фильтров, для которых требуется обеспечить линейность фазово-частотной характеристики для исключения изменения гармонии сочетания частотных составляющих сигнала на его выходе по отношению к входу. Чтобы фильтр имел линейную фазовую характеристику необходимо обеспечить выполнение условия:

$$\varphi(\omega) = \alpha\omega. \quad (82)$$

Оно выполняется, если импульсная характеристика фильтра имеет положительную симметрию:

$$h(n) = h(N - n - 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}, \quad N - \text{нечетное (тип 1)};$$

$$h(n) = h(N - n - 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad N - \text{четное (тип 2)}.$$

При этом фазовая характеристика будет определяться длиной фильтра:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}.$$

Частотная характеристика фильтра:

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp(j\varphi(\omega)), \quad (83)$$

где модуль $|H(\omega)|$ задается аналогично АЧХ симметричных фильтров. Следует также учитывать, что частотную характеристику типа 2 нельзя использовать для проектирования фильтров верхних частот, т.к. она всегда равна нулю на частоте Найквиста.

Собственно методика расчета каузальных фильтров, за исключением использования (83) для задания частотной характеристики, не отличается от методики расчета симметричных фильтров, включая необходимость использования весовых функций для нейтрализации явления Гиббса. Это позволяет применять чисто практический метод расчетов – вычислить и отработать сначала симметричный фильтр на N -точек (тип 1), а затем превратить его в каузальный сдвигом вправо на $\frac{N-1}{2}$ точек в область только положительных значений $n \geq 0$.

Идеальные частотные фильтры

Идеальным полосовым фильтром называется фильтр, имеющий единичную амплитудно-частотную характеристику в полосе от определенной нижней частоты $\omega_{\text{н}}$ до определенной верхней частоты $\omega_{\text{в}}$, и нулевой коэффициент передачи за пределами

этой полосы (для цифровых фильтров - в главном частотном диапазоне).

Импульсная реакция фильтра (коэффициенты оператора) находится обратным преобразованием Фурье заданной передаточной функции $H(\omega)$. В общем случае:

$$h(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega n\Delta t) d\omega.$$

Для получения вещественной функции импульсного отклика фильтра действительная часть передаточной функции должна быть четной, а мнимая - нечетной. Цифровые фильтры задаются в главном частотном диапазоне, границы которого (частота Найквиста $\pm \omega_N$) определяются интервалом дискретизации данных ($\pm \omega_N = \frac{\pi}{\Delta t}$), подлежащих фильтрации, и соответственно определяют интервал

дискретизации оператора фильтра ($\Delta t = \frac{\pi}{\omega_N}$). Для фильтров с нулевым фазовым сдвигом мнимая часть передаточной функции должна быть равна нулю, при этом оператор фильтра определяется косинусным преобразованием Фурье:

$$h(n\Delta t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_N} H(\omega) \cos\left(\frac{n\pi\omega}{\omega_N}\right) d\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (84)$$

Для идеального полосового фильтра $H(\omega)=1$ в полосе частот от ω_H до ω_B и интеграл (5.84) вычисляется в этих пределах. Идеальные фильтры низких и высоких частот, как частные случаи идеальных ПФ, интегрируются в диапазоне от 0 до ω_B для низкочастотного и от ω_H до ω_N для высокочастотного фильтра.

При интервале дискретизации данных Δt , условно принимаемым за 1, главный частотный диапазон передаточных функций ограничивается значением частоты Найквиста от $-\pi$ до π . Если на практике интервал дискретизации данных в физических единицах отличается от 1, то это сказывается только на изменении масштаба частотной шкалы передаточных функций.

Во всех дальнейших выражениях значение Δt , если это специально не оговорено, будем принимать равным 1.

При $H(\omega)=A=1$ в полосе пропускания (ω_H, ω_N), и $H(\omega)=0$ за ее пределами, для идеальных симметричных полосовых НЦФ из (84) с границами интегрирования, соответственно, от ω_H до ω_B в общем виде получаем:

$$h(n) = \frac{A}{\pi} \left[\omega_B \frac{\sin(n\omega_B)}{n\omega_B} - \omega_H \frac{\sin(n\omega_H)}{n\omega_H} \right]. \quad (85)$$

$$h(0) = \frac{\omega_B - \omega_H}{\pi}, \quad h(n) = \frac{\sin(n\omega_B) - \sin(n\omega_H)}{n\pi}.$$

где $\sin c(n\omega) = \frac{\sin(n\omega)}{n\omega}$ - функция интегрального синуса (функция отсчетов),

бесконечная по координате .

При инверсии частотной характеристики в заградительный фильтр:

$$h(0) = 1 - \frac{\omega_B - \omega_H}{\pi}, \quad h(n) = \frac{\sin(n\omega_H) - \sin(n\omega_B)}{n\pi}.$$

Размер оператора фильтра определяется приблизительно из следующих соображений. Чем больше размер оператора, тем круче будет переходная зона и меньше ее размер, т.е. тем ближе будет фактически реализованная передаточная функция фильтра к идеальной. Обычно сначала стоит попробовать построить фильтр достаточно большого размера, оценить его соответствие заданной частотной характеристике и в дальнейшем попытаться уменьшить. Значение N для симметричных НЦФ должно быть нечетным числом.

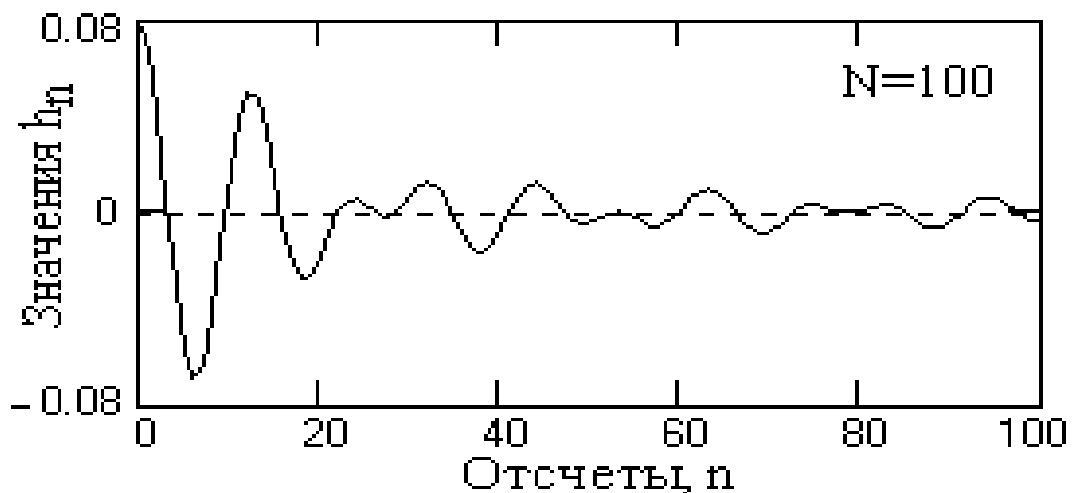


Рисунок 2 - Оператор фильтра

На рисунке 2 приведен оператор полосового фильтра, вычисленный по (85) для приведенных выше условий, с ограничением по числу коэффициентов оператора до $N=100$. Как видно из рисунка, оператор затухает достаточно медленно и явно усечен, что должно сказаться на форме частотной характеристики фильтра. Все дальнейшие вычисления будут проводиться на продолжении данного примера.

Конечные приближения идеальных фильтров

Оператор идеального частотного НЦФ, как это следует из выражения (84), представляет собой бесконечную затухающую числовую последовательность, реализующую заданную передаточную функцию:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cos(n\omega). \quad (86)$$

На практике бесконечный ряд (86) всегда приходится ограничивать определенным числом членов его конечного приближения

$$H'(\omega) = \sum_{n=-N}^N h(n) \cos(n\omega),$$

при этом передаточная функция осложняется явлением Гиббса, и появляется переходная зона между полосами пропускания и подавления сигнала (рис. 3, пунктирная кривая при $N=100$). Явление Гиббса формирует первые выбросы передаточной функции на расстоянии $\frac{\pi}{2(N+1)}$ от скачков (разрывов первого рода).

Если ширину переходной зоны Δ_p в первом приближении принять по расстоянию между первыми выбросами по обе стороны от скачка функции $H(\omega)$, то ее значение будет ориентировочно равно $\Delta_p = \frac{\pi}{N+1}$.

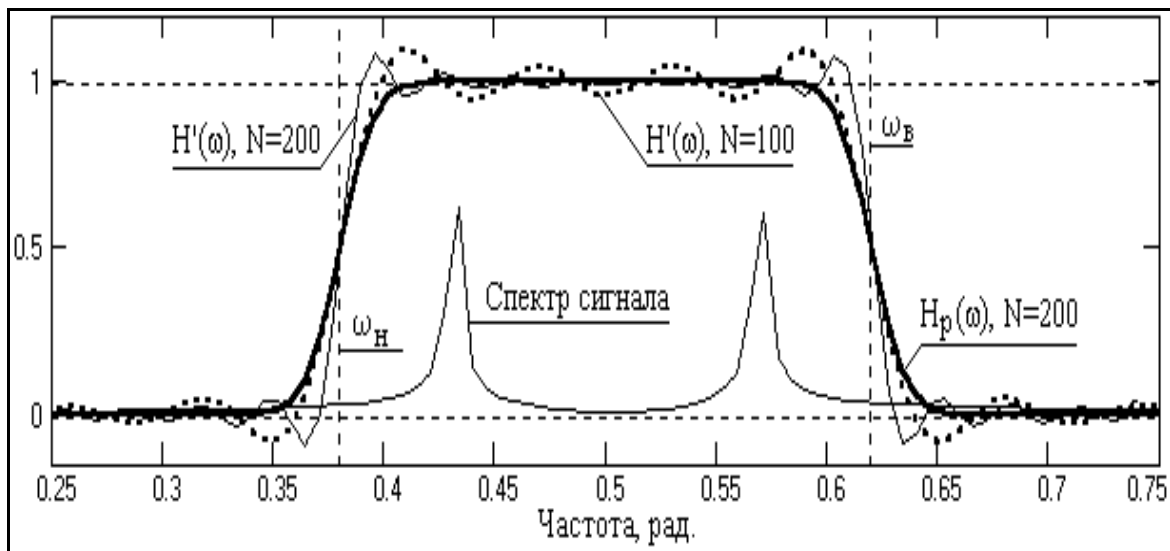


Рисунок 3 - Передаточные функции полосового фильтра

Применение весовых функций

Если уровень пульсаций передаточной функции, определяемый явлением Гиббса, не удовлетворяет поставленным задачам фильтрации данных, рекомендуется использование сглаживающих весовых функций. С учетом того, что при применении весовых функций происходит расширение переходных зон примерно в два раза, значение ширины переходной зоны будет равным $\Delta_p = \frac{2\pi}{N}$. Отсюда можно определить минимальное число членов усеченного ряда по заданному размеру переходной зоны:

$$N = \frac{2\pi}{\Delta_p}. \quad (87)$$

Для примера на рисунке 3 значение N принято равным 200, при этом крутизна переходной зоны увеличилась (тонкая кривая $H'(\omega), N=200$), создавая запас на последующее сглаживание весовой функцией.

Выбор весовых функций целесообразно осуществлять по допустимой величине осцилляций усиления сигнала в полосе подавления, т.е. по относительному значению амплитуды первого выброса на передаточных характеристиках весовых функций. Для выбранной весовой функции (с учетом числа ее членов по (87)) производится расчет весовых коэффициентов $p(n)$, после чего устанавливаются окончательные значения оператора фильтра:

$$h_n(n) = p(n)h(n). \quad (88)$$

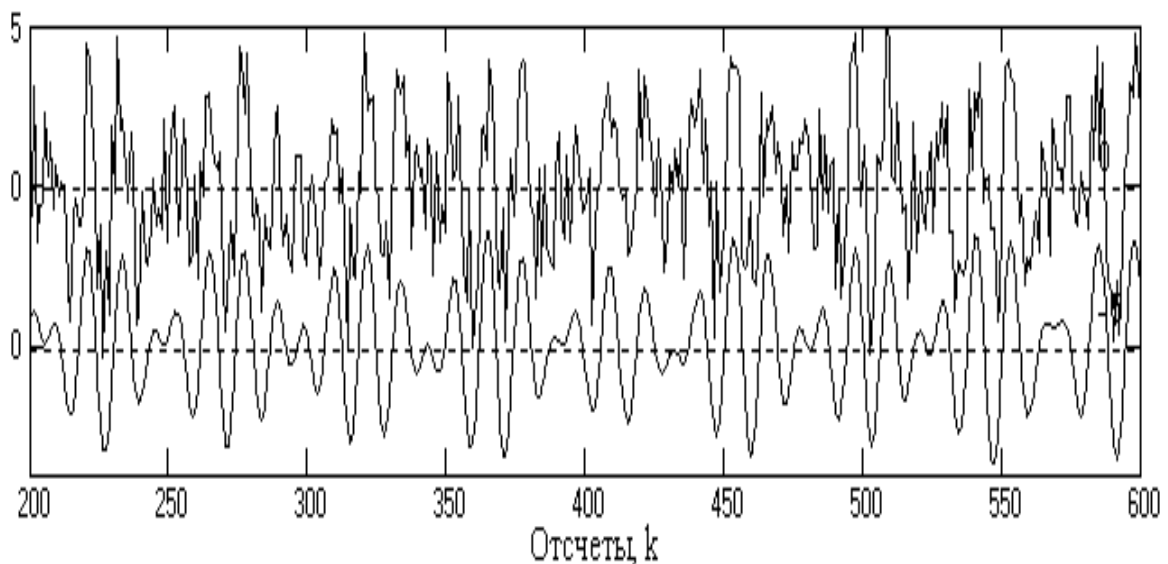


Рисунок 4 - Полосовая фильтрация
(вверху – входной сигнал, внизу – выходной)

Подстановкой коэффициентов (88) в (86) рекомендуется произвести построение полученной передаточной характеристики фильтра и непосредственно по ней оценить пригодность фильтра для поставленных задач. Это наглядно видно на рисунке 3, где была применена весовая функция Гаусса. Передаточная функция $H_p(\omega)$ имеет практически такую же крутизну, как и функция $H'(\omega)$ при $N=100$ и практически плоскую вершину в интервале спектра сигнала. Качество работы фильтра можно видеть на рисунке 4.

При необходимости более точной оценки полученной передаточной функции можно рекомендовать увеличение ее частотного разрешения в 2-4 раза перед выполнением преобразования Фурье, что можно выполнить путем увеличения размеров оператора $h_n(n)$ дополнением нулями.

Основные весовые функции

Ниже в таблицах приведены формулы и основные спектральные характеристики наиболее распространенных весовых окон.

Основные весовые функции.

Временное окно	Весовая функция	Фурье-образ
Естественное (П)	$\Pi(t) = 1, t \leq \tau; \Pi(t) = 0, t > \tau$	$\Pi(\omega) = 2\tau \operatorname{sinc}[\omega\tau]$
Бартлетта (Δ)	$b(t) = 1 - t /\tau$	$B(\omega) = \tau \operatorname{sinc}^2(\omega\tau/2).$
Хеннинга, Ганна	$p(t) = 0.5[1 + \cos(\pi t/\tau)]$	$0.5\Pi(\omega) + 0.25\Pi(\omega + \pi/\tau) + 0.25\Pi(\omega - \pi/\tau)$
Хемминга	$p(t) = 0.54 + 0.46 \cos(\pi t/\tau)$	$0.54\Pi(\omega) + 0.23\Pi(\omega + \pi/\tau) + 0.23\Pi(\omega - \pi/\tau)$
Карре (2-е окно)	$p(t) = b(t) \operatorname{sinc}(\pi t/\tau)$	$\tau \cdot B(\omega) \cdot \Pi(\omega), \Pi(\omega) = 1 \text{ при } \omega < \pi/\tau$
Лапласа-Гаусса	$p(t) = \exp[-\beta^2(t/\tau)^2/2]$	$[(\tau/\beta) \sqrt{2\pi} \exp(-\tau^2\omega^2/(2\beta^2))] \otimes \Pi(\omega)$
Кайзера-Бесселя	$p(t) = \frac{J_0[\beta\sqrt{1 - (t/\tau)^2}]}{J_0[\beta]},$ $J_0[x] = \sum_{k=1}^{\infty} [(x/2)^k/k!]^2$	<p>Вычисляется преобразованием Фурье.</p> <p>$J_0[x]$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка</p>

Характеристики спектров весовых функций.

Параметры	Ед. изм.	П-Окно	Барт-летт	Лан-цош	Хен-нинг	Хемм-инг	Кар-ре	Лапл-ас	Кайзе-р
Амплитуда:									
Главный пик	τ	2	1	1.18	1	1.08	0.77	0.83	0.82
1-й выброс(-)	%Гл.п	0.217	-	0.048	0.027	0.006	-	0.001	.0004
2-й выброс(+)	.	0.128	0.047	0.020	0.008	2	-	6	5

Ширина Гл. пика	- " - $\omega\tau/2$	0.60	0.89	0.87	4 1.00	0.001 6	1.12	0.001 4	.0002 8
Положения:	π	0.50	1.00	0.82		0.91	-	1.12	1.15
1-й нуль		0.72	-	1.00	1.00		-		
1-й выброс	$\omega\tau/2$	1.00	-	1.29	1.19	1.00	-	1.74	1.52
2-й нуль	π	1.22	1.44	1.50	1.50	1.09	-	1.91	1.59
2-й выброс	$\omega\tau/2$				1.72	1.30		2.10	1.74
	π					1.41		2.34	1.88
	$\omega\tau/2$								
	π								
	$\omega\tau/2$								
	π								

Носители весовых функций, в принципе, являются неограниченными и при использовании в качестве весовых окон действуют только в пределах окна и обнуляются за его пределами. Для упрощения записи формулы приводятся в аналитической форме с временным окном 2τ , симметричным относительно нуля ($0 \pm \tau$). При переходе к дискретной форме окно 2τ заменяется окном $2N+1$, а значения t – дискретами $t = n\Delta t$. Большинство весовых функций на границах окна ($n = \pm N$) принимают нулевые или близкие к нулевым значения. Последнее исключается, если принять $2\tau = (2N+3)\Delta t$, при этом близкие к нулю значения перемещаются за границы окна.

Весовая функция Кайзера

Наибольшее распространение при расчетах частотных НЦФ получила весовая функция Кайзера:

$$p(n) = \frac{J_0 \left[\beta \sqrt{1 - \left(\frac{n}{N} \right)^2} \right]}{J_0[\beta]}.$$

Это объясняется тем, что параметры функции Кайзера могут устанавливаться непосредственно по техническим требованиям к передаточным функциям проектируемых фильтров – допустимой ширине переходной зоны Δ_p и значению коэффициента шума фильтра δ (максимальным значениям осцилляций передаточной функции в единицах коэффициента передачи в полосе пропускания).

Кайзером установлено, что для заданного значения δ произведение количества членов оператора НЦФ на ширину переходной зоны является величиной постоянной.

Оно получило название D -фактора:

$$D = \frac{N\Delta_p}{\pi}. \quad (90)$$

С другой стороны, установлены следующие эмпирические соотношения между D -фактором и параметром β функции Кайзера:

$$D = (A - 7.95)/14.36, \text{ при } A > 21.$$

$$D = 0.9222, \quad \text{при } A < 21.$$

$$\beta = 0.1102(A - 8.7), \text{ при } A > 50.$$

$$\beta = 0, \quad \text{при } A < 21.$$

$$\beta = 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), \quad 21 < A < 50.$$

где: $A = -20 \log \delta$ - затухание в децибелах.

Приведенные выражения позволяют по заданному значению коэффициента шума δ определить параметр β функции Кайзера, а через D -фактор число членов фильтра:

$$N = \frac{D\pi}{\Delta_p}. \quad (91)$$

При проектировании полосовых фильтров проверка передаточной функции полученного оператора НЦФ исходному заданию по значению коэффициента шума является обязательной. Это объясняется тем, что поскольку полоса пропускания полосового фильтра ограничена двумя скачками, на передаточной характеристике возникают два центра осцилляций, при этом наложение осцилляций может как уменьшить, так и увеличить амплитуду суммарных осцилляций. Если за счет наложения произойдет увеличение амплитуды осцилляций, то расчет НЦФ следует повторить с уменьшением исходного значения δ .

Пример расчета полосового фильтра.

Произвести расчет ПФ при следующих исходных параметрах: $\omega_n = 0.3\pi$, $\omega_b = 0.6\pi$, $\Delta_p = 0.1\pi$, $\delta = 0.02$.

1. $A = -20 \log \delta$. $A = 34$.

2. $N = \pi(A - 7.95)/(14.36 \Delta_p)$. $N = 18$.

3. $\beta = 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21)$. $\beta = 2.62$.

4. $h_o = (\omega_b - \omega_n)/\pi$. $h_o = 0.3$

5. $h(n) = (\sin n\omega_b - \sin n\omega_n)/(n\pi)$. $h(n) = 0.04521, -0.24490, -0.09515, \dots, 0.02721$.

6. $p_n = J_0\{\beta\sqrt{1 - (n/N)^2}\} / J_0\{\beta\}$. $p_n = 1.00, 0.997, 0.9882, \dots$

7. Оператор фильтра: $h_n = p_n h(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. $h_{-n} = h_n$. $h_n = 0.3000, 0.04508, -$

0.2420,

8. Проверка по формуле: $H(\omega) = \sum_{n=-N}^N h_n \cos n\omega$, $0 \leq \omega \leq \pi$.

Для оценки формы передаточной функции количество точек спектра в интервале $0-\pi$ достаточно задать равным $2N$, т.е. с шагом $\Delta\omega \leq \pi/36$.

Влияние конечной разрядности на цифровые фильтры должно быть минимальным и не создавать на их частотных характеристиках дополнительных неравномерностей и отклонения от заданной формы. С чисто практической точки зрения ограничение разрядности коэффициентов фильтра в целях повышения производительности вычислений лучше всего (и проще всего) выполнять непосредственно сравнением частотных характеристик с изменением разрядности от большей к меньшей. Следует учитывать, что ограничение разрядности может по-разному сказываться на неравномерности фильтра в полосе пропускания и степени затухания сигналов в полосе подавления.

Ошибки отклонения $\varepsilon(\omega)$ частотной характеристики относительно заданной при проектировании кроме разрядности коэффициентов B в битах зависит также от размеров N оператора фильтра и в первом приближении может оцениваться по формулам:

$$|\varepsilon(\omega)| = N2^{-B}, \quad (92)$$

$$|\varepsilon(\omega)| = 2^{-B} \sqrt{\frac{N}{3}}, \quad (93)$$

$$|\varepsilon(\omega)| = N2^{-B} \sqrt{\frac{N \ln(N)}{3}}. \quad (94)$$

Выражение (92) наиболее пессимистично и предполагает наихудшие ситуации вычислений. Два других выражения носят более реальный характер по статистическим данным.

КИХ – фильтры. Линейность ФЧХ.

Фильтры с конечной импульсной характеристикой являются цифровыми фильтрами, которые имеют ограниченную во времени импульсную характеристику. КИХ-фильтры работают только по текущему и прошлым входным отсчетам и являются самыми простыми фильтрами при разработке. КИХ-фильтры также известны как нерекурсивные (трансверсальные) фильтры, как фильтры свертки или как фильтры скользящего среднего значения.

КИХ-фильтры выполняют свертку своих коэффициентов с последовательно-стью входных отсчетов и производят последовательность выходных отсчетов, одинаково пронумерованную с входными отсчетами.

Фильтр с бесконечной импульсной характеристикой (Рекурсивный фильтр, БИХ-фильтр) — линейный электронный фильтр, использующий один или более своих выходов в качестве входа, то есть образует обратную связь. Основным свойством таких фильтров является то, что их импульсная переходная характеристика имеет бесконечную длину во временной области, а передаточная функция имеет дробно-рациональный вид. Такие фильтры могут быть как аналоговыми так и цифровыми.

Для каждого типа фильтр существует несколько типов синтеза.

Для БИХ — способ билинейного преобразования, который основан на переходе от аналоговых к цифровым фильтрам.

Для КИХ (конечная импульсная характеристика) — метод взвешивания или временного окна; метод частотных выборок.

Фильтры с КИХ

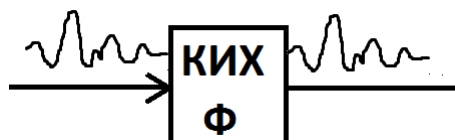
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

- реализация фильтра, где $h(k)$ — импульсная характеристика.

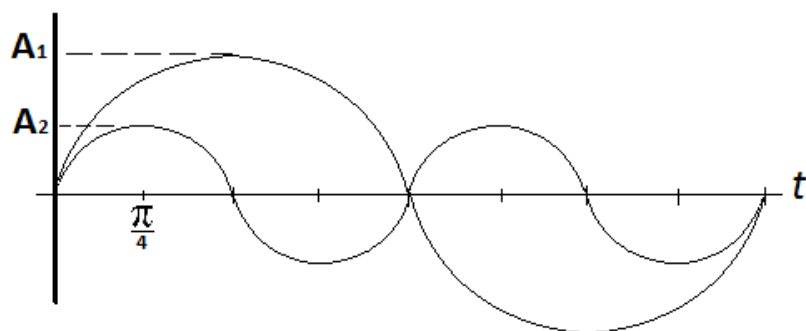
$$H(Z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) Z^{-k}$$

- передаточная функция.

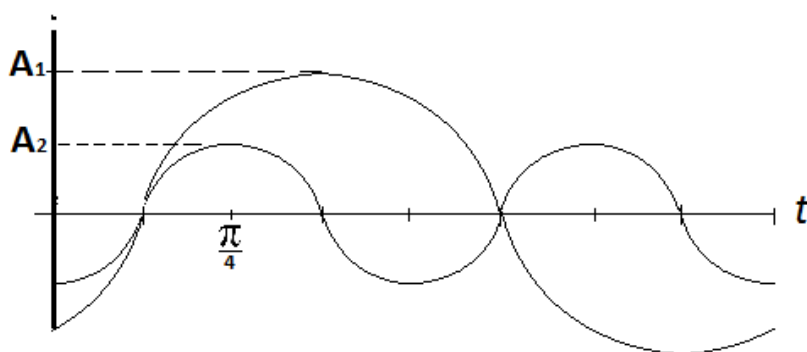
Одной из особенностей КИХ-фильтров является то, что эти фильтры позволяют получить линейную ФХЧ, т.е. позволяют обрабатывать сигнал без искажений.



Происходит временная задержка. Так как входной сигнал состоит из частотных составляющих, то каждая частотная составляющая задерживается на одинаковое время, но фазовый сдвиг будет свой.



$$X(b) = A_1 \sin(2\pi ft) + A_2 \sin(2\pi ft)$$



$$X(t + \tau) = A_1 \sin\left(2\pi ft - \frac{\pi}{4}\right) + A_2 \sin\left(2\pi ft - 2\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega$$

Фазовая задержка:

$$T_p = \frac{-\varphi(\omega)}{\omega}$$

Групповая задержка:

$$T_p = \frac{-d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

$$\varphi(\omega) = \beta - \alpha\omega$$

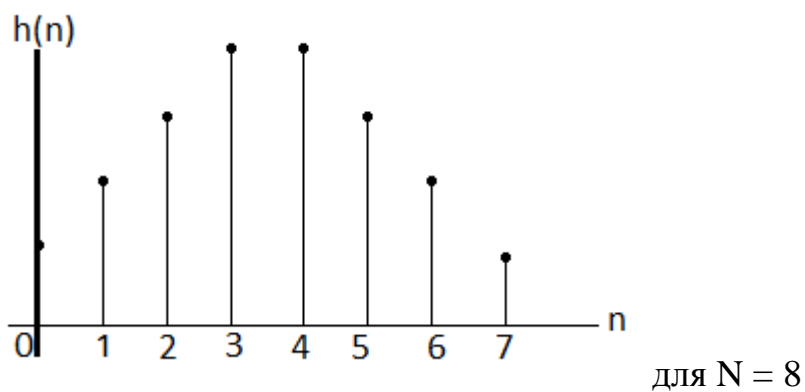
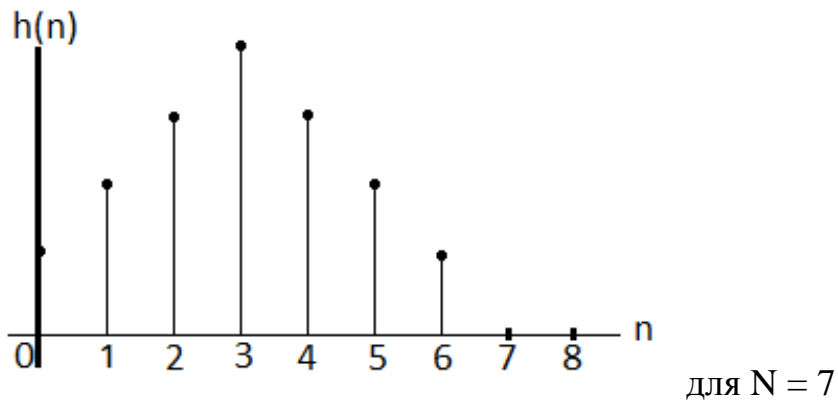
Чтобы фазовых искажений не было (линейность фазовой характеристики), достигается симметрия коэффициентов импульсной характеристики.

$$h(n) = h(N - n - 1) \begin{cases} n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \text{ (} N - \text{нечетн.)} \\ n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \text{ (} N - \text{четн.)} \end{cases}$$

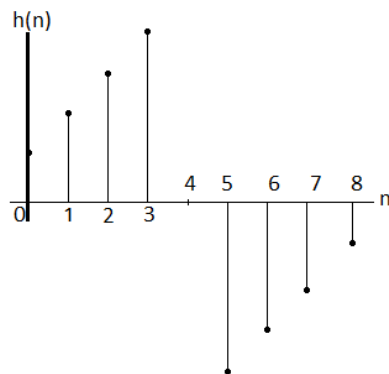
$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

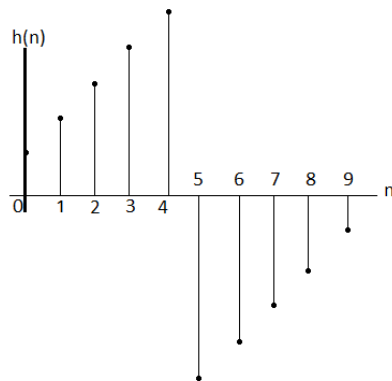
В таком случае для фильтра выполняется

$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega$$



Может быть и отрицательная асимметрия:





Наиболее часто используются характеристики с нечетным количеством коэффициентов с положительной симметрией.

Пусть есть импульсная характеристика, где $N=7$ и $h(0) = h(6)$, $h(1) = h(5)$, $h(2) = h(4)$, $h(3)$,

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \sum_{k=0}^6 h(k) e^{-ik\omega T} \\
 &= h(0) + h(1)e^{-i\omega T} + h(2)e^{-2i\omega T} + h(3)e^{-3i\omega T} + h(4)e^{-4i\omega T} + h(5)e^{-5i\omega T} + h(6)e^{-6i\omega T} \\
 &= e^{-3i\omega T} [h(0)(e^{3i\omega T} + e^{-3i\omega T}) + h(1)(e^{2i\omega T} + e^{-2i\omega T}) + h(2)(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T}) + h(3)] \\
 &= e^{-3i\omega T} [2h(0) \cos(3\omega T) + 2h(1) \cos(2\omega T) + 2h(2) \cos(\omega T) + h(3)]
 \end{aligned}$$

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^3 a(k) \cos(k\omega T) e^{-3i\omega T} = \pm |H(\omega)| e^{-i\varphi(\omega)}, \text{ где } e^{-i\varphi(\omega)} - \Phi\text{ЧХ}$$

$$\pm |H(\omega)| = \sum_{k=0}^3 a(k) \cos(k\omega T)$$

$$a(k) = 2h(3-k)$$

В общем виде:

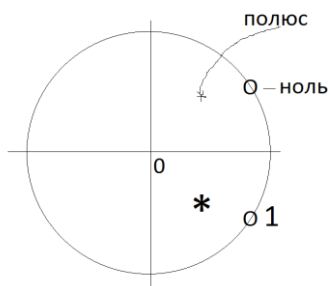
$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(\omega h) e^{-i\omega \frac{N-1}{2}}$$

$$a(0) = h\left[\frac{N-1}{2}\right], \quad a(n) = 2h\left[\frac{N-1}{2} - n\right], \quad a = \frac{N-1}{2}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2} \omega T$$

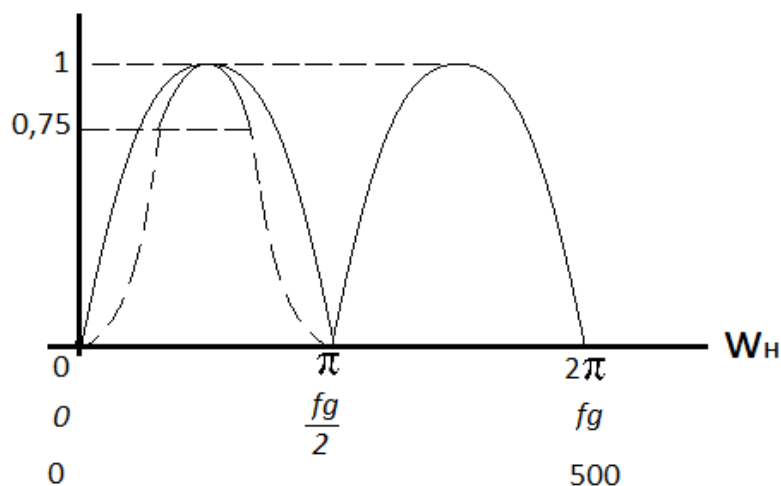
Цифровые фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ)

Пример: Синтезировать цифровой полосовой фильтр со спецификацией:

1. Полное подавление входного сигнала по частотам 0 и 250 Гц
2. Узкая полоса пропускания с центральной частотой 125 Гц
3. Ширина полосы пропускания по уровню 3 Дб 10Гц
4. Частота дискретизации 500 Гц.



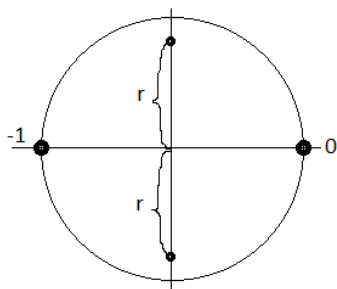
Модуль АЧХ:
|A(w)|



Размещение нулей исходя из АЧХ:

$r \approx 1 - \frac{\text{ШП}}{fg} \cdot f$ - модуль полюса, ШП – ширина полосы пропускания

$$r = 1 - \frac{30}{500} \cdot 3,14 = 0,9372$$



Передаточная функция:

$$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-0,9372 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}})(z-0,9372 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}})} = \frac{z^2-1}{z^2+0,877969} = \frac{1-z}{1+0,8779}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k)$$

$$b_0 = 1; b_1 = 0; b_2 = -1; \quad a_1 = 0; a_2 = 0,877969;$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = 1 \cdot x(n-z) - 1 \cdot x(n \cdot -z) - 0,877969 \cdot y(n-z), \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots - \text{дискретное время}$$

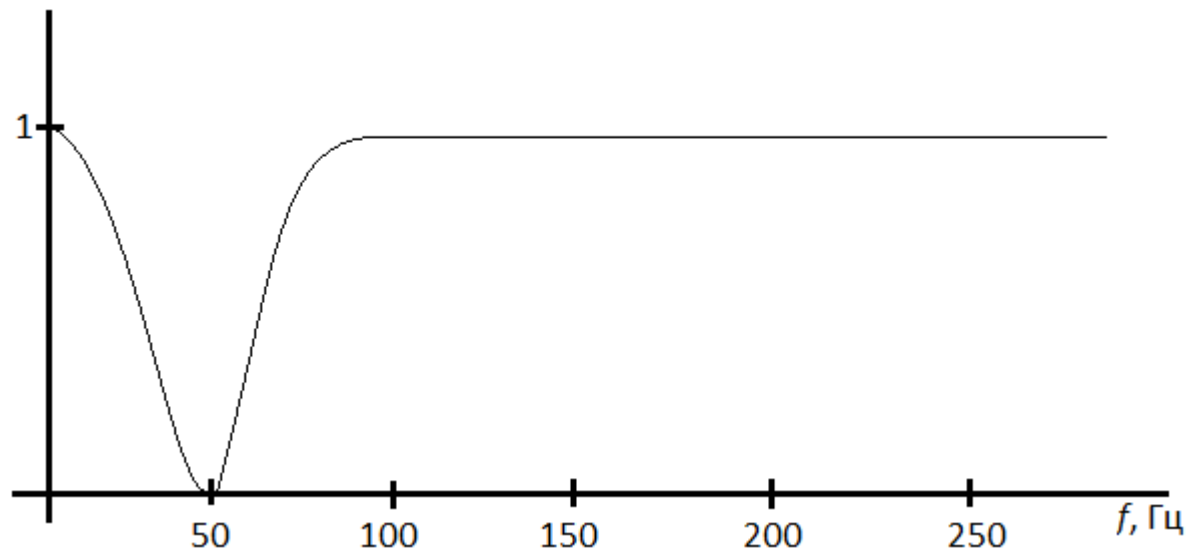
Пример:

Синтезировать цифровой фильтр. Спецификация:

1. Частота режекции 50 Гц
 2. Ширина полосы в зоне режекции ± 5 Гц
- Частота дискретизации 500 Гц.

АЧХ:

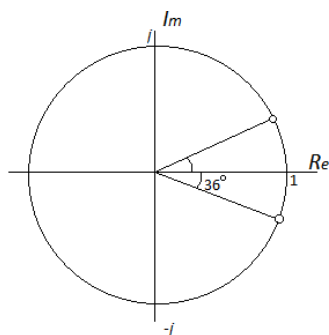
$|A(f)|$



$$500 \text{ Гц} \rightarrow \frac{50}{500} \cdot 360^\circ = 36^\circ$$

Нули и полюсы – 2 комплексно сопряжённых числа. Эффект суживания частотной полосы – расположить полюсы под тем же углом, что и нули.

$$r = 1 - \frac{\text{ШП}}{Fg} \cdot \pi = 1 - \frac{10}{500} \cdot 3,14 = 0,9372$$



$$H(z) = \frac{(z - e^{-i36^\circ})(z - e^{i36^\circ})}{(z - 0,9372 \cdot e^{-i36^\circ})(z - 0,9372 \cdot e^{i36^\circ})}$$

$$H(z) = \frac{(z - e^{-i36^\circ})(z - e^{i36^\circ})}{(z - 0,9372 \cdot e^{-i36^\circ})(z - 0,9372 \cdot e^{i36^\circ})} = \frac{z^2 - 1,6180z + 1}{z^2 - 1,5164z + 0,8783}$$

$$= \frac{1 - 1,618 \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,516 \cdot z^{-1} + 0,8783 \cdot z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{(z - e^{-i\pi/6})(z - e^{i\pi/6})}{(z - 0,9372 \cdot e^{-i\pi/6})(z - 0,9372 \cdot e^{i\pi/6})} = \frac{z^2 - 1,6180z + 1}{z^2 - 1,5164z + 0,8783} = \frac{1 - 1,618 \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,516 \cdot z^{-1} + 0,8783 \cdot z^{-2}}$$

Вейвлет-анализ

Одним из активно применяемых в настоящее время способов исследования сигналов является вейвлет-анализ. Он предоставляет возможность оценить частотно-временные параметры сигналов. Применительно к анализу вибрационных сигналов откликов конструкций при динамическом воздействии этот способ может быть использован для локализации во времени на длинной временной реализации момента динамического воздействия.

Рассмотрим сущность вейвлет-анализа и возможный подход для его численной реализации.

Коэффициенты вейвлет-преобразования функции $s(t)$ вычисляются в соответствии с выражением:

$$C(a,b) = \int_R s(t) \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

где $\psi(t)$ - вейвлет функция или просто вейвлет;

a - масштабный коэффициент, определяющий ширину вейвлета, и являющийся аналогом частоты в Фурье-анализе;

b - временной сдвиг.

Если предположить, что b изменяется от 0 до T , то получим функцию вейвлет-коэффициента $C(a,b)$, определенную на отрезке $[0; T]$.

Широко распространенными являются гауссовы вейвлеты:

- первого порядка (антисимметричная волна):

$$wave(t) = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}};$$

- второго порядка (мексиканская шляпа):

$$mhat(t) = (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}};$$

- третьего порядка:

$$gaus3p(t) = (t^3 - 3t) e^{-\frac{t^2}{2}};$$

- четвертого порядка:

$$gaus4p(t) = (t^4 - 6t^2 + 3) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

- вейвлет Морле:

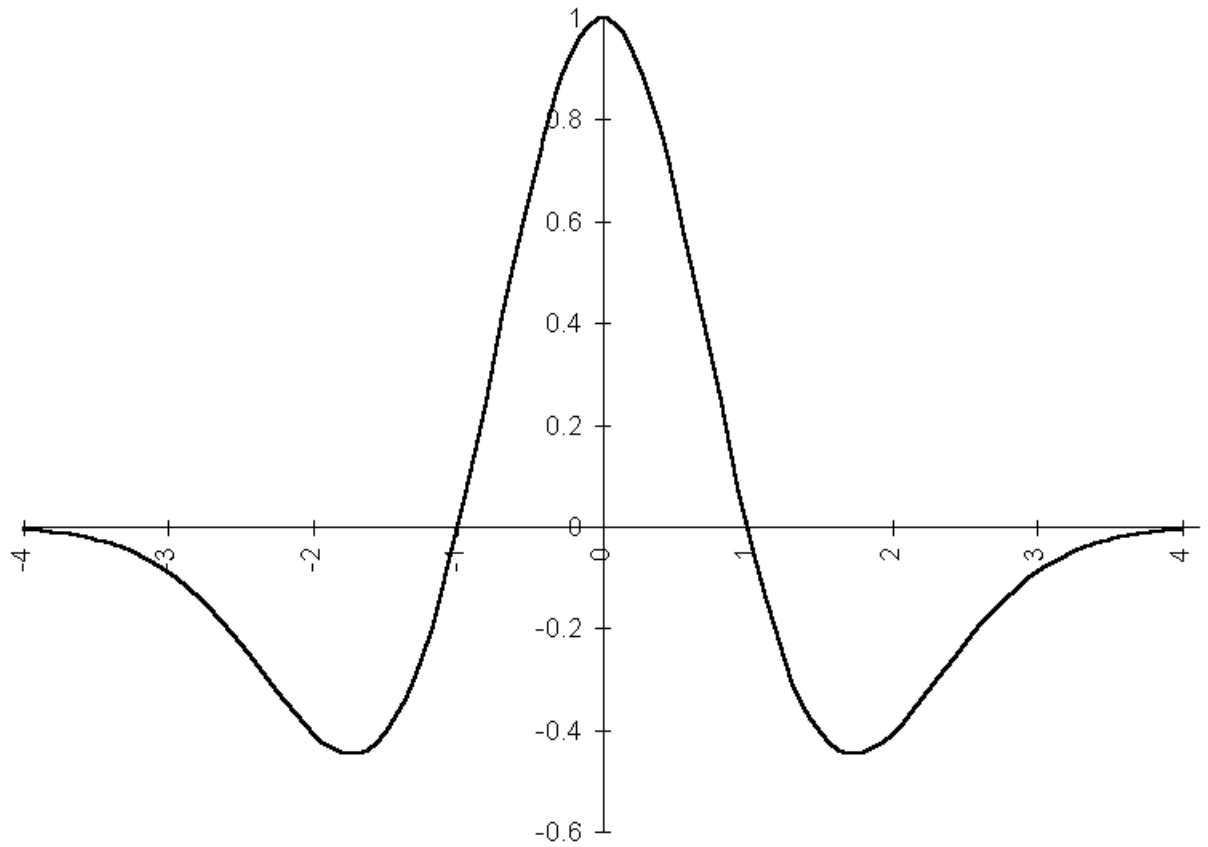
$$mor(t) = \cos(2\pi t) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Для примера форма вейвлета «мексиканская шляпа» показана на рисунке 7.1.

Вейвлеты определены на интервале от $-\infty$ до $+\infty$, однако его основная часть располагается на отрезке от -4 до +4.

Если провести дискретизацию времени (аргумент t) в предположении, что изменение аргумента вейвлета на отрезке -4 до +4 будет соответствовать изменению дискретного аргумента n от 0 до N , то тогда в выражения вейвлетов вместо t следует подставить

$$t = \frac{8(n-b) - 4aN}{aN}.$$



Вейвлет «мексиканская шляпа»

Когда $a=1$, $b=0$ и вейвлеты будут определены выражениями:

$$mhat(n) = \left(1 - \left(\frac{8n-4N}{N} \right)^2 \right) \cdot e^{-\frac{\left(\frac{8n-4N}{N} \right)^2}{2}}$$

$$wav(n) = \left(\frac{8n-4N}{N} \right) \cdot e^{-\frac{\left(\frac{8n-4N}{N} \right)^2}{2}}$$

$$gaus3p(n) = \left(\left(\frac{8n-4N}{N} \right)^3 - 3 \left(\frac{8n-4N}{N} \right) \right) \cdot e^{-\frac{\left(\frac{8n-4N}{N} \right)^2}{2}}$$

$$gaus4p(n) = \left(\left(\frac{8n-4N}{N} \right)^4 - 6 \left(\frac{8n-4N}{N} \right)^2 + 3 \right) \cdot e^{-\frac{\left(\frac{8n-4N}{N} \right)^2}{2}}$$

$$mor(n) = \cos \left(2\pi \cdot \left(\frac{8n-4N}{N} \right) \right) \cdot e^{-\frac{\left(\frac{8n-4N}{N} \right)^2}{2}}$$

$$n=0 \div N.$$

Тогда в дискретном виде вейвлет-преобразование можно представить выражением:

$$C(N, m) = \sum_{n=0}^N s(n+m) \cdot \psi \left(\frac{8(n-m)-4N}{N} \right), \quad m=0 \div L-1$$

где L , число дискретных отсчетов в анализируемой временной реализации исследуемого сигнала.

Вейвлет-преобразование представляет собой вариант цифровой полосовой фильтрации. В связи с этим возникает необходимость определения ширины вейвлета N , которая будет соответствовать полосовому фильтру с центральной частотой f_w (частота, на которой цифровой полосовой фильтр имеет максимальный коэффициент передачи).

Экспериментально получены выражения для определения ширины N для некоторых типов вейвлетов:

- «мексиканская шляпа»:

$$N_{mhat} = round \left(1.816 \cdot \frac{f_D}{f_w} \right);$$

- гауссовый 3-го порядка:

$$N_{gaus3p} = round \left(2.22 \cdot \frac{f_D}{f_w} \right);$$

- гауссовый 4-го порядка:

$$N_{gaus4p} = round \left(2.55 \cdot \frac{f_D}{f_w} \right);$$

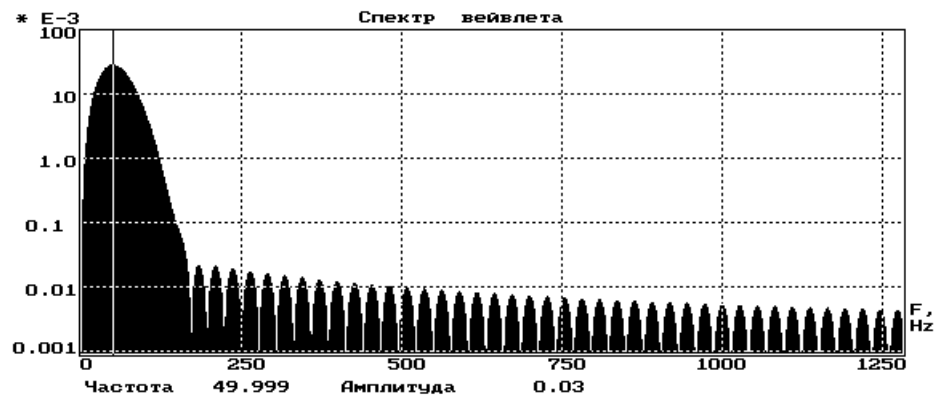
- Морле (действительная часть):

$$N_{mor} = round \left(8 \cdot \frac{f_D}{f_w} \right),$$

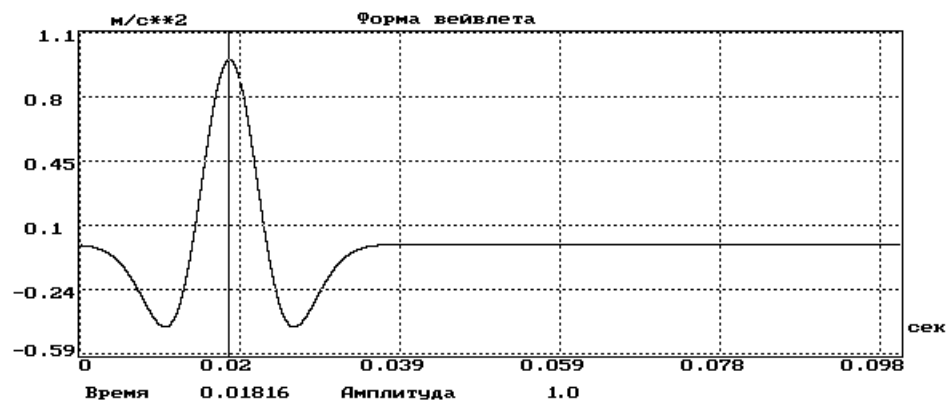
где f_d - частота дискретизации аналогового сигнала;

f_w - частота, на которой цифровой полосовой фильтр, реализуемый вейвлетом, имеет максимальный коэффициент передачи;

round - операция округления.

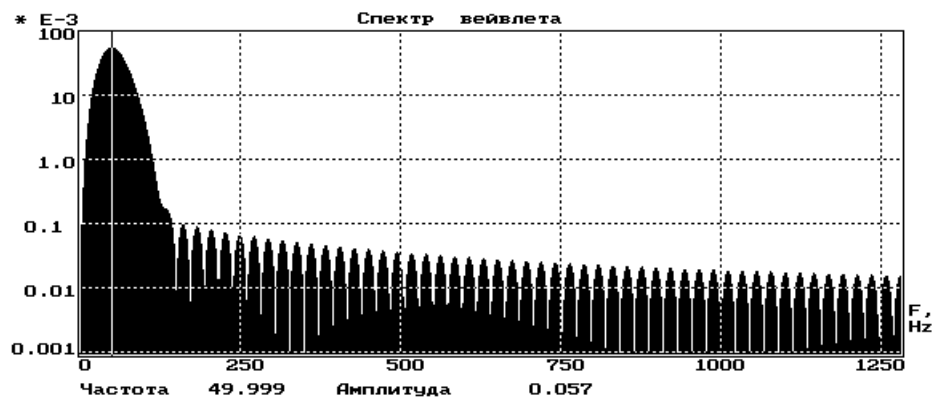


а) частотная характеристика вейвлета

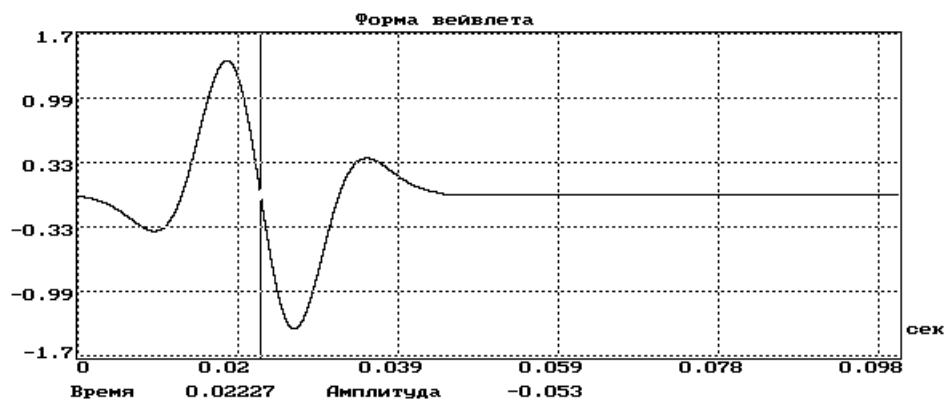


б) форма вейвлета

Частотная характеристика и форма вейвлета Морле
с центральной частотой 50 Гц



а) частотная характеристика вейвлета



б) форма вейвлета

Частотная характеристика и форма
гауссова вейвлета 3-го порядка с центральной частотой 50 Гц

Для обеспечения единичного коэффициента передачи на центральной частоте следует нормализовать вейвлет по амплитуде. Это можно реализовать следующим образом:

$$mhat_{норм.}(n) = \frac{mhat(n)}{1.32 \sum_{i=0}^N |mhat(i)|};$$

$$wave_{норм.}(n) = \frac{wave(n)}{1.32 \sum_{i=0}^N |wave(i)|};$$

$$gaus3p_{\text{норм.}}(n) = \frac{gaus3p(n)}{1.3 \sum_{i=0}^N |gaus3p(i)|};$$

$$gaus4p_{\text{норм.}}(n) = \frac{gaus4p(n)}{1.287 \sum_{i=0}^N |gaus4p(i)|};$$

$$mor_{\text{норм.}}(n) = \frac{mor(n)}{1.287 \sum_{i=0}^N |mor(i)|},$$

$$n=0 \div N.$$

Нормализованные вейвлеты подставляются в выражение

$$C(N, m) = \sum_{n=0}^N s(n+m) \cdot \psi\left(\frac{8(n-m)-4N}{N}\right)$$

для вычисления вейвлет-коэффициентов исследуемого сигнала.

Полученные вейвлет функции не содержат постоянной составляющей, являются более гладкими и удобными для дальнейшей обработки.

Сглаживание данных

При разработке способов определения параметров физических процессов, медленно изменяющихся во времени, важной задачей является устранения влияния шумовых эффектов или случайных помех, которые накладываются на обрабатываемый сигнал, получаемый на выходе первичного преобразователя.

Для устранения такого эффекта можно применить сглаживание данных. Одним из наиболее простых способов такого сглаживания является **арифметическое усреднение**. При его применении каждое i -ое значение дискретной функции (обрабатываемого массива данных) вычисляется в соответствии с выражением:

$$x_i = \frac{1}{K} \sum_{j=i-m}^{j=i+m} x_j, \quad (6.1)$$

где K - количество точек для арифметического усреднения (нечетное целое число);

x_j - j -ое значение функции до обработки;

$$m = \frac{K-1}{2}.$$

Известны и другие, достаточно эффективные способы сглаживания, например, **параболами второй степени по пяти, семи, девяти и одиннадцати точкам в соответствии с выражениями:**

$$x_i = \frac{1}{35}(-3x_{i-2} + 12x_{i-1} + 17x_i + 12x_{i+1} - 3x_{i+2});$$

$$x_i = \frac{1}{21}(-2x_{i-3} + 3x_{i-2} + 6x_{i-1} + 7x_i + 6x_{i+1} + 3x_{i+2} - 2x_{i+3});$$

$$x_i = \frac{1}{231}(-21x_{i-4} + 14x_{i-3} + 39x_{i-2} + 54x_{i-1} + 59x_i + 54x_{i+1} + 39x_{i+2} + 14x_{i+3} - 21x_{i+4});$$

$$x_i = \frac{1}{429}(-36x_{i-5} + 9x_{i-4} + 44x_{i-3} + 69x_{i-2} + 84x_{i-1} + 89x_i + 84x_{i+1} + 69x_{i+2} + 44x_{i+3} + 9x_{i+4} - 36x_{i+5})$$

или параболами четвертой степени по семи, девяти, одиннадцати и тринадцати точкам:

$$x_i = \frac{1}{231}(5x_{i-3} - 30x_{i-2} + 75x_{i-1} + 131x_i + 75x_{i+1} - 30x_{i+2} + 5x_{i+3});$$

$$x_i = \frac{1}{429}(15x_{i-4} - 55x_{i-3} + 30x_{i-2} + 135x_{i-1} + 179x_i + 135x_{i+1} + 30x_{i+2} - 55x_{i+3} + 15x_{i+4});$$

$$x_i = \frac{1}{429}(18x_{i-5} - 45x_{i-4} - 10x_{i-3} + 60x_{i-2} + 120x_{i-1} + 143x_i + 120x_{i+1} + 60x_{i+2} - 10x_{i+3} - 45x_{i+4} + 18x_{i+5})$$

,

$$x_i = \frac{1}{2431} \left(110x_{i-6} - 198x_{i-5} - 135x_{i-4} + 110x_{i-3} + 390x_{i-2} + 600x_{i-1} + 677x_i + \right. \\ \left. + 600x_{i+1} + 390x_{i+2} + 110x_{i+3} - 135x_{i+4} - 198x_{i+5} + 110x_{i+6} \right).$$

В практических применениях дают хорошие результаты другие эффективные способы, например, **15-точечное сглаживание Спенсера:**

$$x_i = \frac{1}{320}(-3x_{i-7} - 6x_{i-6} - 5x_{i-5} + 3x_{i-4} + 21x_{i-3} + 46x_{i-2} + 67x_{i-1} + 74x_i + \\ - 3x_{i+7} - 6x_{i+6} - 5x_{i+5} + 3x_{i+4} + 21x_{i+3} + 46x_{i+2} + 67x_{i+1}).$$

Подставив в эти выражения комплексную экспоненту $e^{i\omega t}$, где $\omega = 2\pi f$, можно определить передаточную функцию $H(\omega)$ соответствующего преобразования.

Для арифметического усреднения

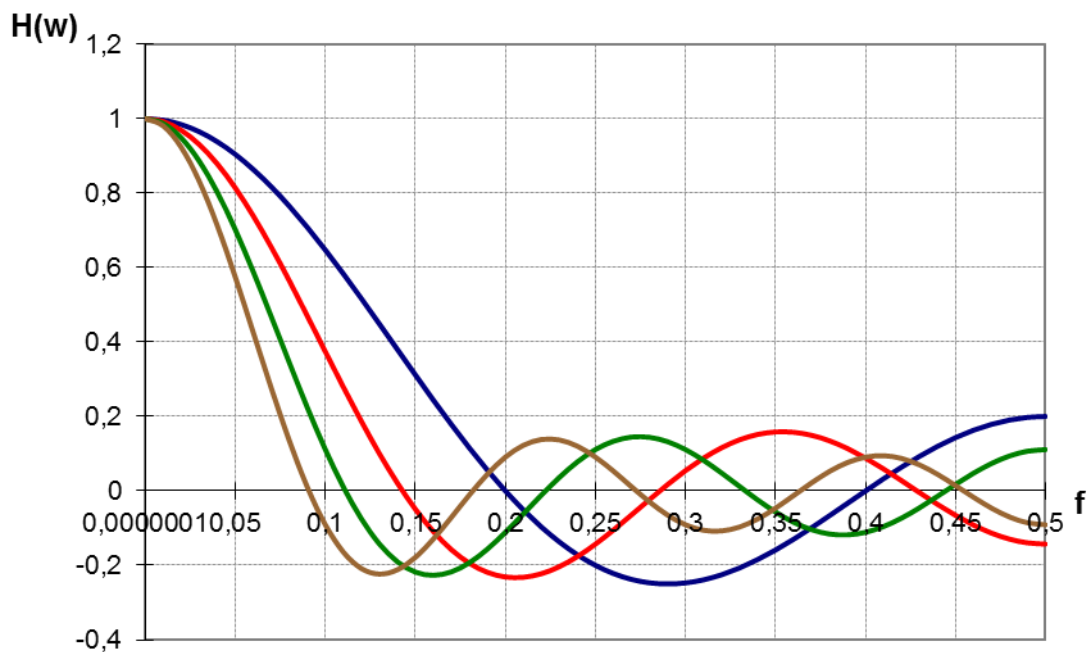
$$H(\omega) = \frac{1}{2m+1} (e^{-im\omega} + e^{-i(m-1)\omega} + e^{-i(m-2)\omega} + \dots + e^{-i\omega} + 1 + e^{i\omega} + \dots + e^{i(m+1)\omega} + e^{im\omega}).$$

Выражение в скобках представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{i\omega}$, следовательно это выражение можно представить в виде:

$$H(\omega) = \frac{e^{-im\omega}}{2m+1} \cdot \frac{(e^{i(2m+1)m\omega} - 1)}{e^{i\omega} - 1} = \frac{e^{\frac{i(2m+1)}{2}\omega} - e^{-\frac{i(2m+1)}{2}\omega}}{(2m+1) \left(e^{\frac{i\omega}{2}} - e^{-\frac{i\omega}{2}} \right)} = \frac{\sin \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right]}{(2m+1) \sin \left(\frac{\omega}{2} \right)}.$$

Эта формула представляет собой **передаточную характеристику фильтра низких частот** и из нее видно, что, чем больше слагаемых задействованы при усреднении, тем больше подавление шумовых высокочастотных составляющих в сигнале.

Еще одним алгоритмом является **медианная фильтрация**. В ходе ее реализации в скользящем временном окне размерностью N , где N целое нечетное число, центральный элемент заменяется средним элементом последовательности, представляющих собой упорядоченные, в порядке возрастания значений, элементы массива данных сглаживаемого сигнала, попавших во временное окно. Достоинством медианной фильтрации является **способность удалять импульсные помехи, длительность которых не превышает $N/2$** , практически без искажения плавно изменяющихся сигналов. Данный способ подавления шумов не имеет строгого математического обоснования, однако простота вычислений и эффективность получаемых результатов обусловили широкое его распространение.



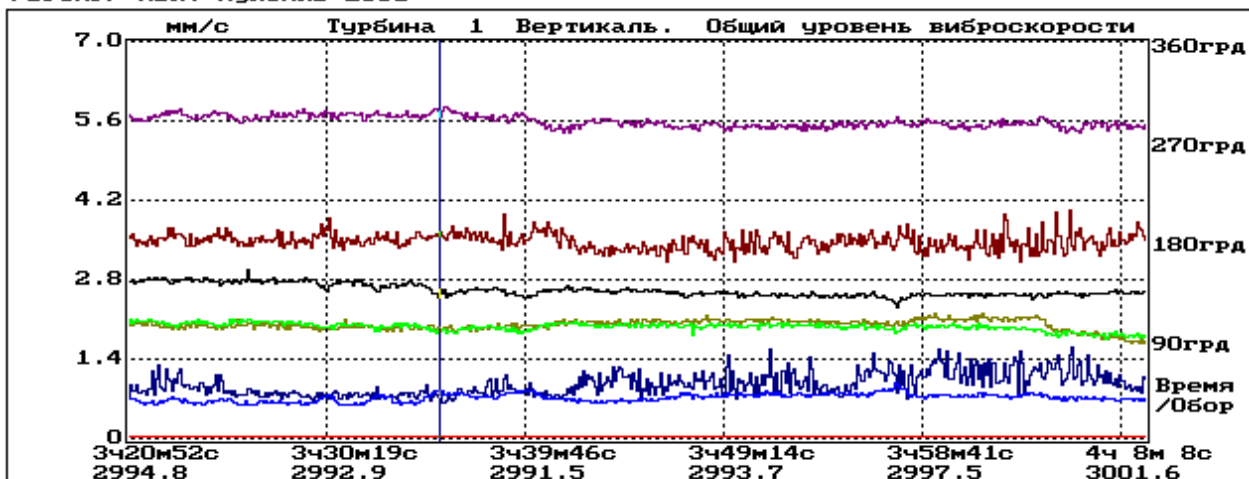
Графики передаточной характеристики
операции арифметического усреднения для $m=5, 7, 9, 11$

Другим интересным алгоритмом сглаживания является **медианное усреднение**. Его сущность состоит в следующем. В скользящем временном окне, размерности N (N - целое нечетное число), элементы массива данных упорядочиваются в порядке возрастания, а затем из упорядоченной последовательности удаляется по K первых и последних элементов ($K < N$). Центральный элемент временного окна из последовательности сглаживаемых данных заменяется значением, вычисляемым как

$$x_i = \frac{1}{N - 2K} \sum_{m=i - \frac{N-1}{2} + K}^{i + \frac{N-1}{2} - K} x_m.$$

Этот способ позволяет подавить импульсные и радиочастотные помехи, а также достигнуть хорошего сглаживания сигналов.

/БГУИР/ ИВК: Лукомль-2001

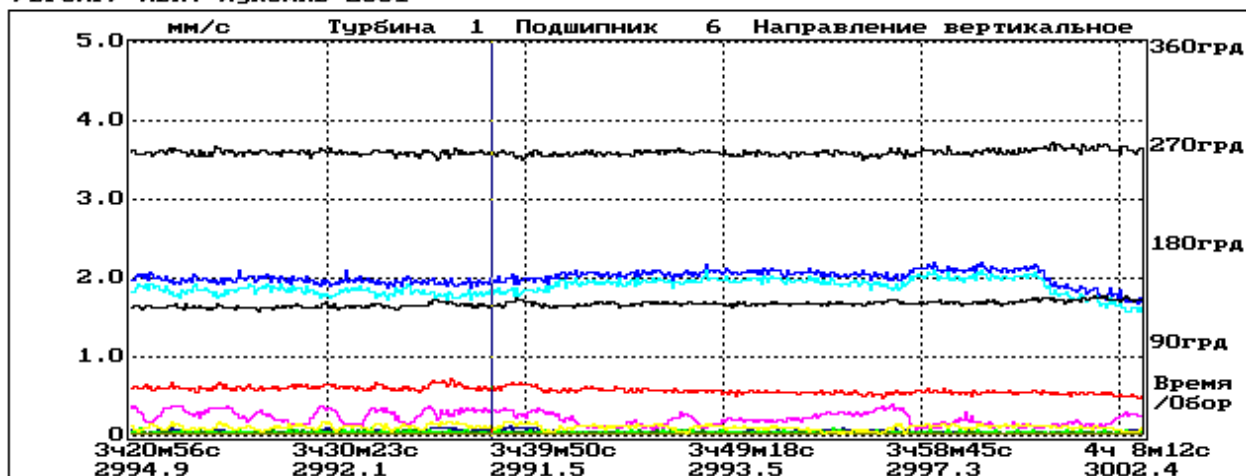


Обследование турбины проведено 09. 2. 2000 г.

Время	3435м42с	Обороты	2991
Подшипник 1	0.723	Подшипник 6	1.94
Подшипник 2	2.62	Подшипник 7	1.9
Подшипник 3	0.778		
Подшипник 4	3.65		
Подшипник 5	5.68		

а) одновременное отображение изменения во времени одного параметра для всех контролируемых подшипниковых опор

/БГУИР/ ИВК: Лукомль-2001



Обследование турбины проведено 09. 2. 2000 г.

Время	3438м14с	Обороты	2991
Суммарная виброскорость	1.95	5 об	0.072
Амплитуда 0.5 об	0.015	6 об	0.068
Амплитуда 1 об	1.8	7 об	0.033
Амплитуда 2 об	0.618	8 об	0.02
Амплитуда 3 об	0.324	9 об	0.016
Амплитуда 4 об	0.107	10 об	0.011

б) отображение изменения во времени нескольких параметров для одной точки контроля

Графическое представление результатов измерения параметров вибрации турбоагрегата при применении арифметического усреднения

/БГУИР/ ИВК: Лукомль-2001

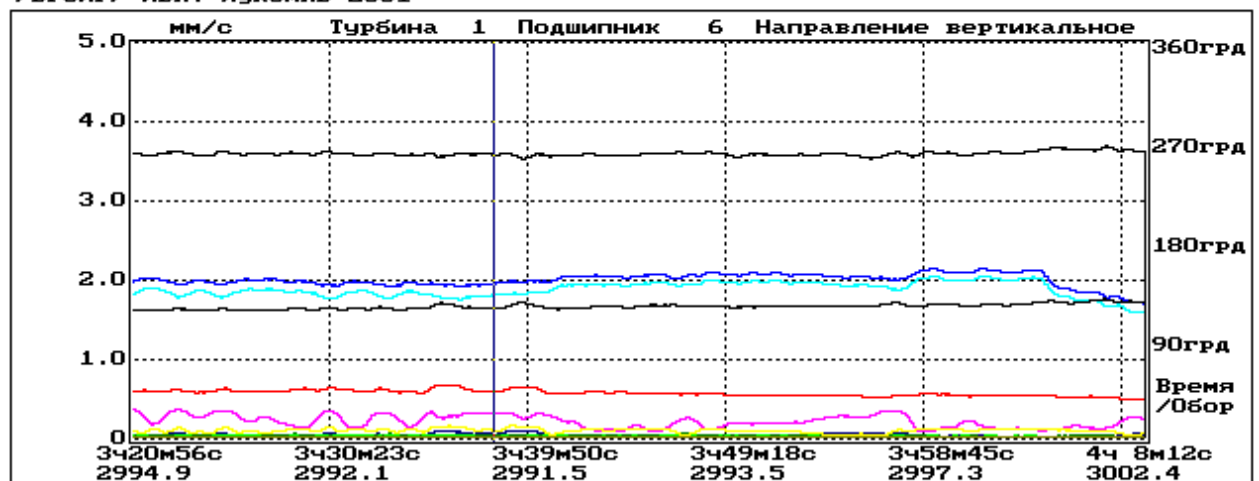


Время 3ч435м42с
Обследование турбины проведено 09. 2. 2000 г.

Подшипник	1	0.72	Обороты	2991
Подшипник 2	2.56	Подшипник 6	1.94	
Подшипник 3	0.806	Подшипник 7	1.9	
Подшипник 4	3.58			
Подшипник 5	5.78			

а) одновременное отображение изменения во времени одного параметра для всех контролируемых подшипниковых опор

/БГУИР/ ИВК: Лукомль-2001



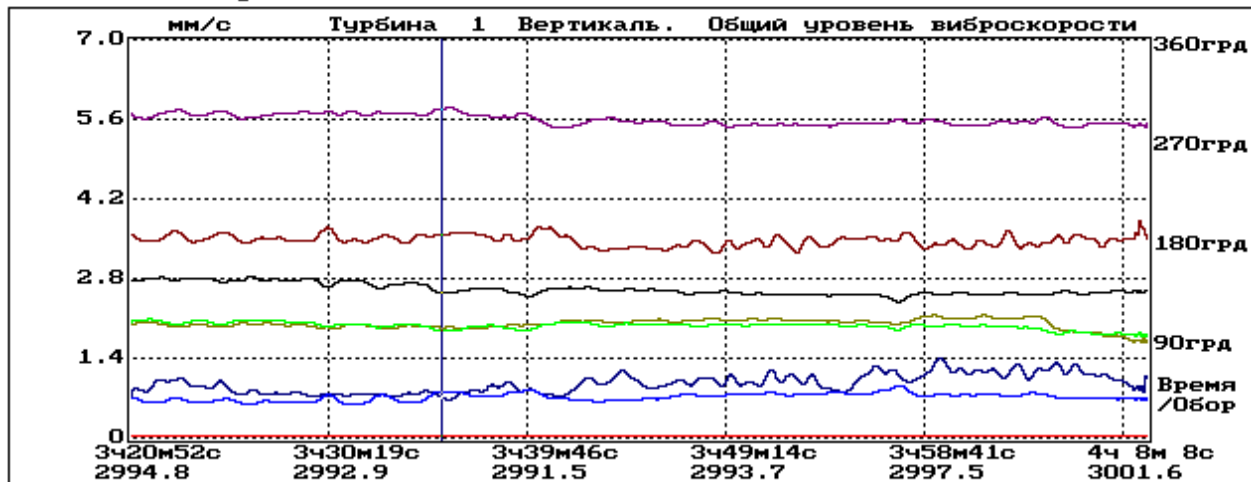
Время 3ч438м14с
Обследование турбины проведено 09. 2. 2000 г.

Суммарная виброскорость	1.96	5 об	0.062	Обороты	2991
Амплитуда 0.5 об	0.03	6 об	0.059	Фаза 1 об	118
Амплитуда 1 об	1.82	7 об	0.031	Фаза 2 об	258
Амплитуда 2 об	0.594	8 об	0.011		
Амплитуда 3 об	0.32	9 об	0.01		
Амплитуда 4 об	0.103	10 об	0.006		

б) отображение изменения во времени нескольких параметров для одной точки контроля

Графическое представление результатов измерения параметров
вибрации турбоагрегата при применении сглаживания
(одновременное отображение изменения во времени одного параметра
для всех контролируемых подшипниковых опор)

/БГУИР/ ИВК: Лукомль-2001



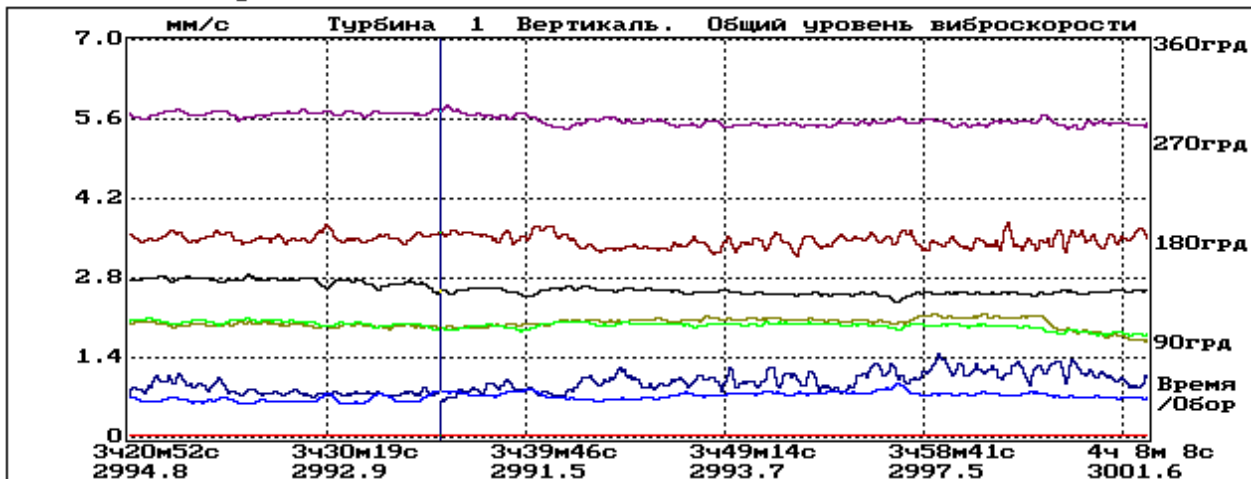
Время 3435m42с Обследование турбины проведено 09. 2. 2000 г.

Подшипник 1 0.703
Подшипник 2 2.56
Подшипник 3 0.809
Подшипник 4 3.58
Подшипник 5 5.78

Обороты 2991
Подшипник 6 1.94
Подшипник 7 1.91

а) применение 15-точечного сглаживания Спенсера

/БГУИР/ ИВК: Лукомль-2001



Время 3435m42с Обследование турбины проведено 09. 2. 2000 г.

Подшипник 1 0.681
Подшипник 2 2.57
Подшипник 3 0.806
Подшипник 4 3.59
Подшипник 5 5.74

Обороты 2991
Подшипник 6 1.94
Подшипник 7 1.92

б) сглаживание пораболой 4-ой степени по 11 точкам

Определение параметров низкочастотного дрейфа

Во многих случаях для выявления характера изменения зашумленного, но, вместе с тем, достаточно медленно изменяющегося сигнала на каком то временном отрезке, можно найти описание этого изменения в виде алгебраического многочлена, причем для практического применения можно ограничиться первой или второй степенью этого многочлена.

Так как многочлен должен описывать дрейф на всем интервале анализа, то он может быть найден как среднеквадратическое приближение в виде полинома:

$$P_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n.$$

Значения коэффициентов многочлена наилучшего приближения могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$c_0 \cdot s_{00} + c_1 \cdot s_{10} + c_2 \cdot s_{20} + \dots + c_n \cdot s_{n0} = r_0;$$

$$c_0 \cdot s_{01} + c_1 \cdot s_{11} + c_2 \cdot s_{21} + \dots + c_n \cdot s_{n1} = r_1;$$

$$c_0 \cdot s_{02} + c_1 \cdot s_{12} + c_2 \cdot s_{22} + \dots + c_n \cdot s_{n2} = r_2;$$

.....

$$c_0 \cdot s_{0n} + c_1 \cdot s_{1n} + c_2 \cdot s_{2n} + \dots + c_n \cdot s_{nn} = r_n;$$

Для функции $f(x)$, представленной в дискретном виде со значениями аргумента от 0 до $N-1$

$$s_{ij} = \sum_{x=0}^{N-1} x^{i+j}; \quad r_i = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot x^i.$$

На практике для описания низкочастотного дрейфа целесообразно применять полиномы первой или второй степени.

Для полинома первой степени система уравнений приобретает вид:

$$c_0 \cdot s_{00} + c_1 \cdot s_{10} = r_0;$$

$$c_0 \cdot s_{01} + c_1 \cdot s_{11} = r_1.$$

Решая эту систему получим:

$$c_0 = \frac{r_1 \cdot s_{10} - r_0 \cdot s_{11}}{s_{01} \cdot s_{10} - s_{00} \cdot s_{11}} ; \quad c_1 = \frac{r_0 \cdot s_{01} - r_1 \cdot s_{00}}{s_{01} \cdot s_{10} - s_{00} \cdot s_{11}} ;$$

Для полинома второй степени система выглядит следующим образом:

$$c_0 \cdot s_{00} + c_1 \cdot s_{10} + c_2 \cdot s_{20} = r_0 ;$$

$$c_0 \cdot s_{01} + c_1 \cdot s_{11} + c_2 \cdot s_{21} = r_1 ;$$

$$c_0 \cdot s_{02} + c_1 \cdot s_{12} + c_2 \cdot s_{22} = r_2 ;$$

После ввода обозначений :

$$k_0 = s_{00} ; \quad k_1 = s_{01} = s_{10} ; \quad k_2 = s_{02} = s_{11} = s_{20} ;$$

$$k_3 = s_{12} = s_{21} ; \quad k_4 = s_{22} ;$$

Эта система приобретает вид

$$c_0 \cdot k_0 + c_1 \cdot k_1 + c_2 \cdot k_2 = r_0 ;$$

$$c_0 \cdot k_1 + c_1 \cdot k_2 + c_2 \cdot k_3 = r_1 ;$$

$$c_0 \cdot k_2 + c_1 \cdot k_3 + c_2 \cdot k_4 = r_2 ;$$

Для дискретной последовательности аргумента x значения коэффициентов s определяются следующими выражениями :

$$s_{00} = \sum_{x=0}^{N-1} 1 = N ; \quad s_{10} = s_{01} = \sum_{x=0}^{N-1} x = \frac{(N-1) \cdot N}{2} ;$$

$$s_{11} = s_{20} = s_{02} = \sum_{x=0}^{N-1} x^2 = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (2N-1)}{6} ;$$

$$s_{12} = s_{21} = \sum_{x=0}^{N-1} x^3 = \frac{N^2 \cdot (N-1)^2}{6} ;$$

$$s_{22} = \sum_{x=0}^{N-1} x^4 = \frac{N(N-1)(2N-1)(3(N-1)^2 + 3(N-1) - 1)}{30} ,$$

а коэффициенты r рассчитываются по формулам:

$$r_0 = \sum_{x=0}^{N-1} f(x); \quad r_1 = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot x; \quad r_2 = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot x^2.$$

Применив метод определителей для решения системы, можно получить коэффициенты для полинома второй степени:

$$c_0 = D_0/D; \quad c_1 = D_1/D; \quad c_2 = D_2/D,$$

где

$$D = k_0 k_2 k_4 + 2k_1 k_2 k_3 - k_1^2 k_4 - k_0 k_3^2 - k_2^3;$$

$$D_0 = r_0 k_2 k_4 + k_3 (r_2 k_1 + r_1 k_2) - r_1 k_1 k_4 - r_0 k_3^2 - r_2 k_2^2;$$

$$D_1 = r_1 k_0 k_4 + k_2 (r_0 k_2 + r_2 k_1) - r_2 k_0 k_3 - r_1 k_2^2 - r_0 k_1 k_4;$$

$$D_2 = k_2 (r_1 k_1 + r_2 k_0) + r_0 k_1 k_3 - r_0 k_2^2 - r_2 k_1^2 - r_1 k_0 k_3.$$

Низкочастотный дрейф исследуемого сигнала после этого описывается полиномом второй степени

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

или полиномом первой степени

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x, \quad \text{где } x = 0 \div N-1.$$

Рассмотренный подход выделения информативного сигнала легко реализуется программно и может использоваться при обработке данных.

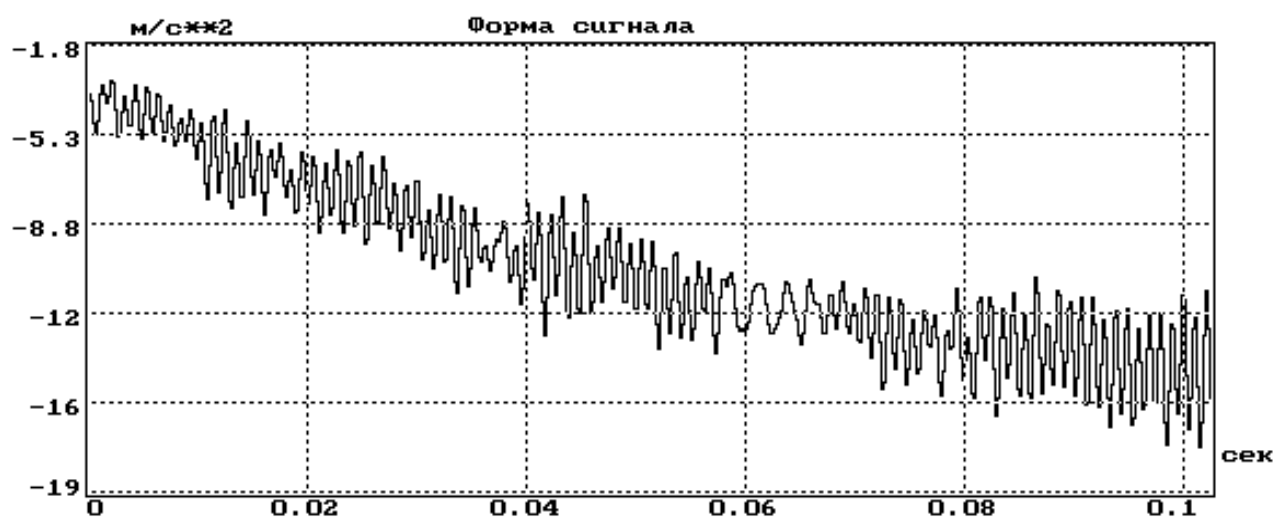
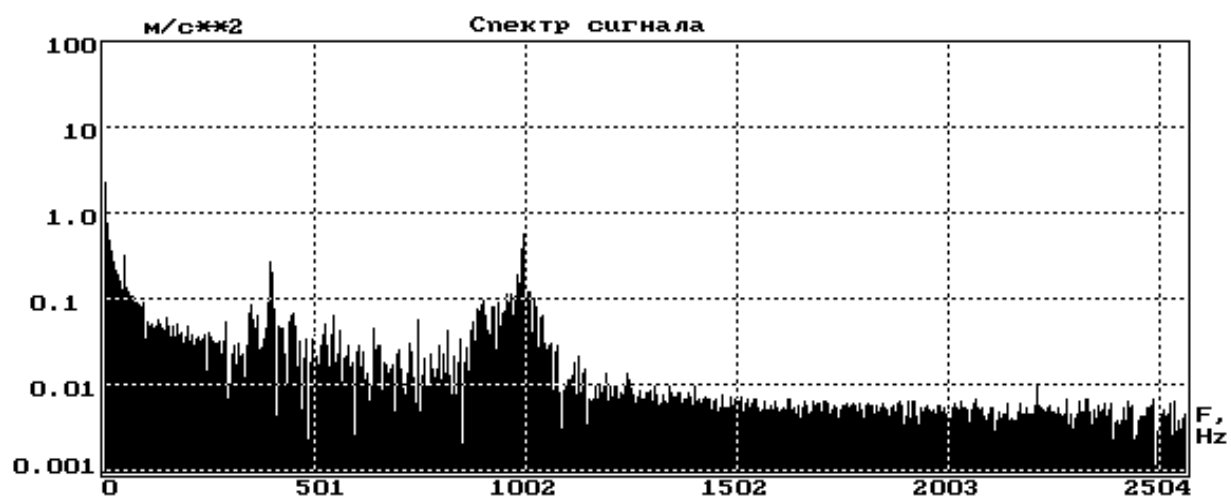
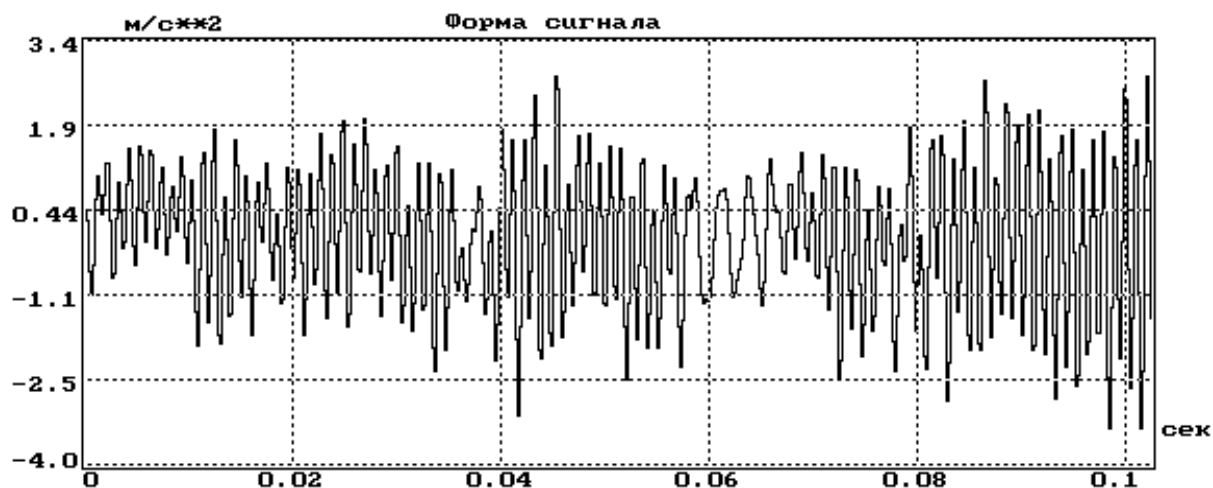


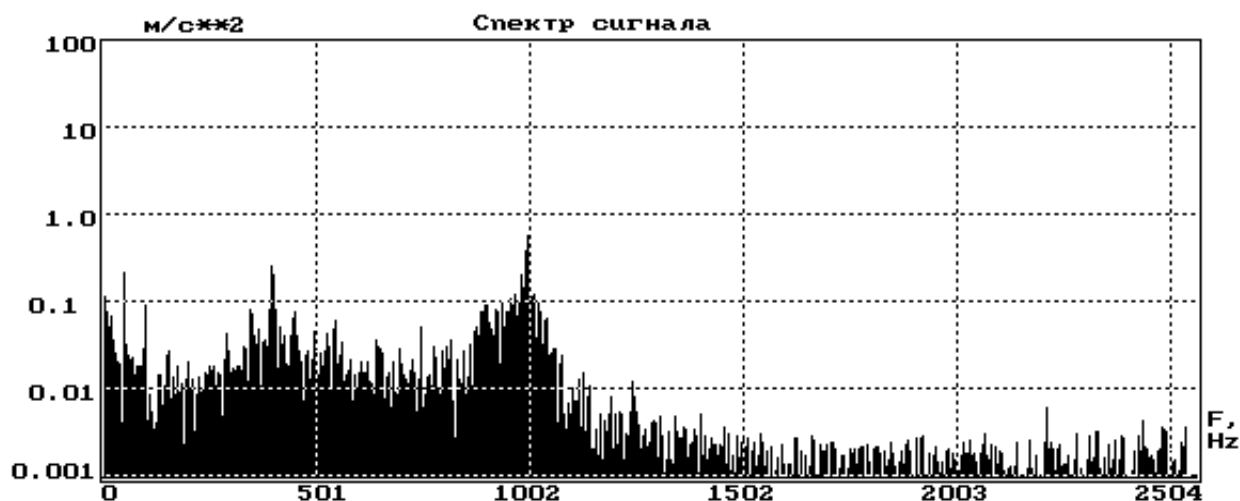
Рисунок - Форма исходного вибросигнала



Спектр исходного вибросигнала



Форма вибросигнала после удаления
низкочастотного дрейфа



Спектр вибросигнала после удаления
низкочастотного дрейфа

Для разрешения вопроса применимости рассчитывается значение некоторого параметра (или вектора параметров) по отношению к сигналу до удаления дрейфа и после удаления дрейфа в виде:

$$A_1 = F[f(x)]; \quad A_2 = F[f_{\text{скоп}}(x)],$$

где F - функция обработки для расчета параметра;

A - значение вычисленного параметра.

Затем осуществляется сравнение A_1 и A_2 и в том случае, если значение A_1 больше (меньше) A_2 , то алгоритм удаления низкочастотного сигнала применяется к исходному сигналу, а в противном случае - нет.