Контрольные задачи

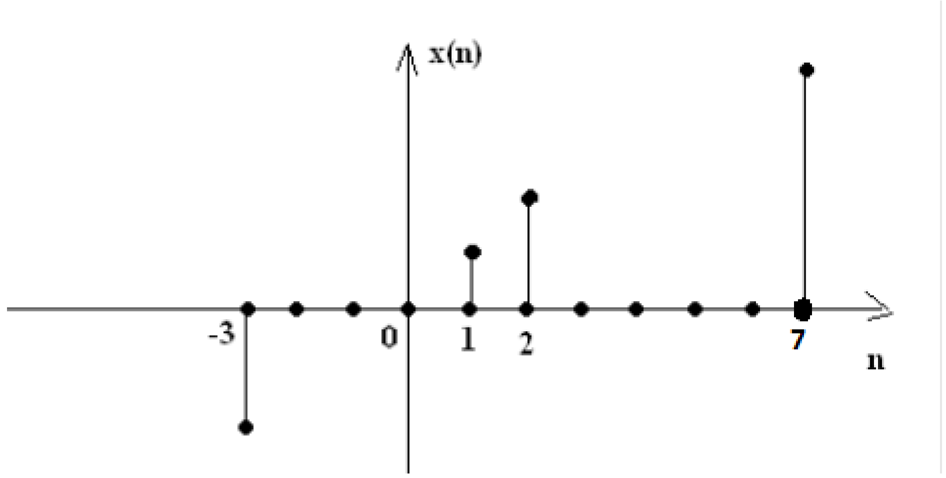
Тема 1.
Изобразить произвольную дискретную последовательность $x(n)$, записанную в виде суммы взвешенных и задержанных цифровых единичных отсчетов,

$$x(n) = \sum_{k=-3}^{7} x(k)\, u_0(n-k) =$$
$$= x(-3)u_0(n+3) + x(1)u_0(n-1) + x(2)u_0(n-2) + x(7)u_0(n-7).$$

Решение:
Произвольный дискретный сигнал можно описать в виде суммы $\mathrm{x(n)} = \sum_{\mathrm{k=-3}}^{7} \mathrm{x(k)}\, \mathrm{u_0(n\text{-}k)}$

$$u_0(7-k) = \begin{cases} 1, & \mathrm{k}=7 \\ 0, & \mathrm{k}\neq 7 \end{cases}$$

$$x(n) = \sum_{k=-3}^{7} x(k)u_0(7-k) = x(-3)u_0(10) + x(-2)u_0(9) + x(-1)u_0(8) + x(0)u_0(7) + x(1)u_0(6) +$$
$$+ x(2)u_0(5) + x(3)u_0(4) + x(4)u_0(3) + x(5)u_0(2) + x(6)u_0(1) + x(7)u_0(0) = x(7)$$



Тема 2.
Покажите, что дискретная система, описываемая уравнением

$$y(n) = \sum_{k=-3}^{n=4} x(k)$$

является линейной.

Решение:

Проверим свойства линейности

$$\alpha\left(y_1(n) + y_2(n)\right) = \alpha\left(\sum_{k=-3}^{n=4} x_1(k) + \sum_{k=-3}^{n=4} x_2(k)\right) = \alpha\sum_{k=-3}^{n=4} x_1(k) + \alpha\sum_{k=-3}^{n=4} x_2(k) =$$
$$= \alpha y_1(n) + \alpha y_2(n)$$

Тема 3

Заданы входная последовательность $\{x(n)\} = \{1; 1; 1\}$ и импульсная характеристика дискретной системы $h(n) = \{5; 4; 3;\ 2\}$.

Вычислить дискретную свертку. Построить график свертки.

Решение:

$$y(k)=\sum_{m=1}^{3}h(m)x(k-m)$$

Ограничение пределов суммирования означает, что система при вычислении использует только предыдущие значения отсчетов воздействия и не имеет информации о последующих.

h			5	4	3	2
x	1	1	1			

y(0) = $5\cdot 1$ = 5

h		5	4	3	2	
x	1	1	1			

y(1) = $5\cdot 1+4\cdot 1=9$

h	5	4	3	2		
x	1	1	1			

y(2) = $5\cdot 1+4\cdot 1+3\cdot 1=12$

h	5	4	3	2		
x		1	1	1		

y(3) = $4\cdot 1+3\cdot 1+2\cdot 1=9$

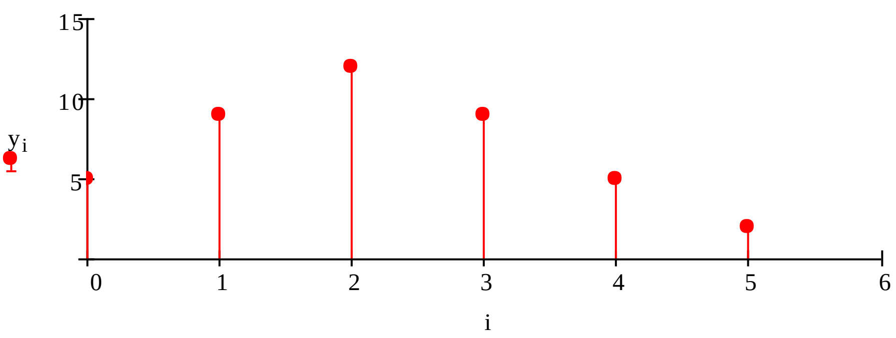
h	5	4	3	2		
x			1	1	1	

y(4) = $3\cdot 1+2\cdot 1=5$

h	5	4	3	2		
x				1	1	1

y(5) = $2\cdot 1=2$

y(n) = {5, 9, 12, 9, 5, 2}



Тема 4

1. Решить разностное уравнение $y(n) = x(n) - 3y(n-1), n = \{0, \dots, 7\}$ с начальным условием $y(-1) = 0$ и $x(n) = n^2 + n$, где $x(n)$ входная последовательность, $y(n)$ отклик линейной стационарной дискретной системы.

Решение:

$$y(n) = x(n) - 3y(n-1),\ n = 0..7,\quad y(-1) = 0$$

$$y(0) = x(0) - 3y(-1) = \left(0^2 + 0\right) - 3 \cdot 0 = 0$$

$$y(1) = x(1) - 3y(0) = \left(1^2 + 1\right) - 3 \cdot 0 = 2$$

$$y(2) = x(2) - 3y(1) = \left(2^2 + 2\right) - 3 \cdot 2 = 0$$

$$y(3) = x(3) - 3y(2) = \left(3^2 + 3\right) - 3 \cdot 0 = 12$$

$$y(4) = x(4) - 3y(3) = \left(4^2 + 4\right) - 3 \cdot 12 = -16$$

$$y(5) = x(5) - 3y(4) = \left(5^2 + 5\right) - 3 \cdot \left(-16\right) = 78$$

$$y(6) = x(6) - 3y(5) = \left(6^2 + 6\right) - 3 \cdot 78 = -192$$

$$y(7) = x(7) - 3y(6 = \left(7^2 + 7\right) - 3 \cdot \left(-192\right) = 632$$

2. Показать, что разностное уравнение $y(n) = x(n) + y(n-1)$, с начальным условием $y(-1) = 0$ и $x(n) = \{1; 2\}$, где $x(n)$ входная последовательность, описывает отклик сумматора $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$.

Решение:

$$y(n) = x(n) + y(n-1),\ y(-1) = 0$$

$$y(0) = x(0) + y(-1) = 1 + 0 = 1$$

$$y(1) = x(1) + y(0) = 2 + 1 = 3$$

Отклик сумматора

$$y\left(0\right) = \sum_{k=-\infty}^{0} x\left(k\right) = x\left(0\right) = 1$$

$$y\left(1\right) = \sum_{k=-\infty}^{1} x\left(k\right) = x\left(0\right) + x\left(1\right) = 1 + 2 = 3$$

Тема 5

1 Вычислить импульсную характеристику $h(n)$ дискретной рекурсивной системы для входа $x(n)$. Соотношение вход-выход системы описывается разностным уравнением $y(n)$ с постоянными коэффициентами b_0, b_1, a_1.

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1), \qquad 0 \le n \le 4.$$

Решение

Согласно определению импульсная характеристика h(n) – это реакция на цифровой единичный импульс

$$\begin{cases} x(n) \to \delta(n), \\ y(n) \to h(n) \end{cases}$$

Пусть $y(-1) = 0$

$$h(0) = b_0\delta(0) + b_1\delta(-1) - a_1 h(-1) = b_0$$

$$h(1) = b_0\delta(1) + b_1\delta(0) - a_1 h(0) = b_1 - a_1$$

$$h(2) = b_0\delta(2) + b_1\delta(1) - a_1 h(1) = -a_1(b_1 - a_1)$$

$$h(3) = b_0\delta(3) + b_1\delta(2) - a_1 h(2) = a_1^2(b_1 - a_1)$$

$$h(4) = b_0\delta(4) + b_1\delta(3) - a_1 h(3) = -a_1^3(b_1 - a_1)$$

$$h(n) = (-1)^{-1} a_1^{n-1}(b_1 - a_1), \; h(0) = b_0$$

Тема 6

1. Вычислить комплексную частотную характеристику (дискретизированное по времени преобразование Фурье) рекурсивной линейной дискретной системы, удовлетворяющей разностному уравнению $y(n) = x(n) + 0{,}75y(n-1)$ с начальным условием $y(-1) = 0; n \ge 0$. Вычислить модуль комплексной частотной характеристики. Вычислить фазовую характеристику системы. Построить графики модуля и фазы как функции нормированной частоты $\widehat{w}$ в диапазоне $0 \le \widehat{w} \le 2\pi$, где $\widehat{w} = \frac{w}{f_d} = \frac{2\pi f}{f_d}$, а w и f – циклическая и линейная частоты, f_d- частота дискретизации.

Решение.

$$y(-1) = 0,$$

$$y(0) = x(0) + 0{,}75y(-1) = 1,$$

$$y(1) = x(1) + 0{,}75y(0) = 0{,}75$$

$$y(2) = x(2) + 0{,}75y(1) = 0{,}5625$$

и т.д. входной и выходной сигнал являются вещественными.

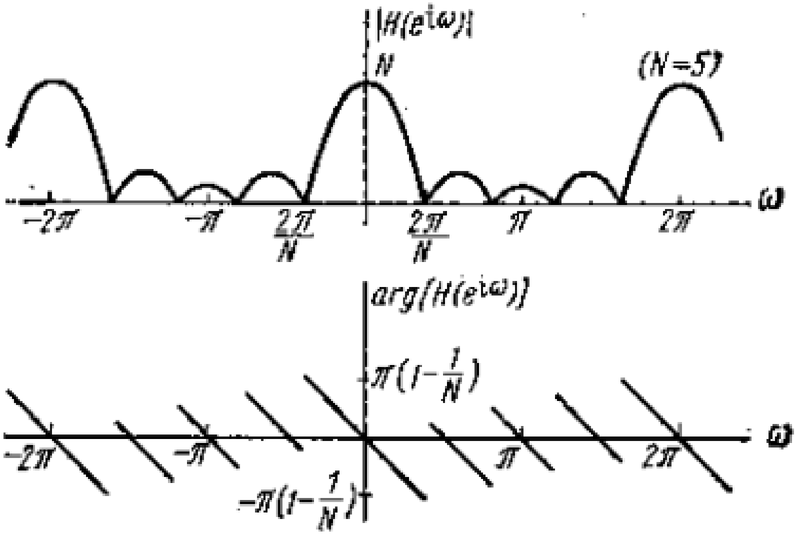
Частотная характеристика равна

$$H\left(e^{j\omega\Delta t}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n e^{-jn\omega\Delta t} = e^{-j\omega\Delta t} + 0{,}75e^{-j2\omega\Delta t} + 0{,}5625e^{-j3\omega\Delta t}$$

Модуль и фаза частотной характеристики системы

$$A(\omega) = \left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right| = \sqrt{1 + 0{,}75^2 + 0{,}5625^2 + \ldots}$$

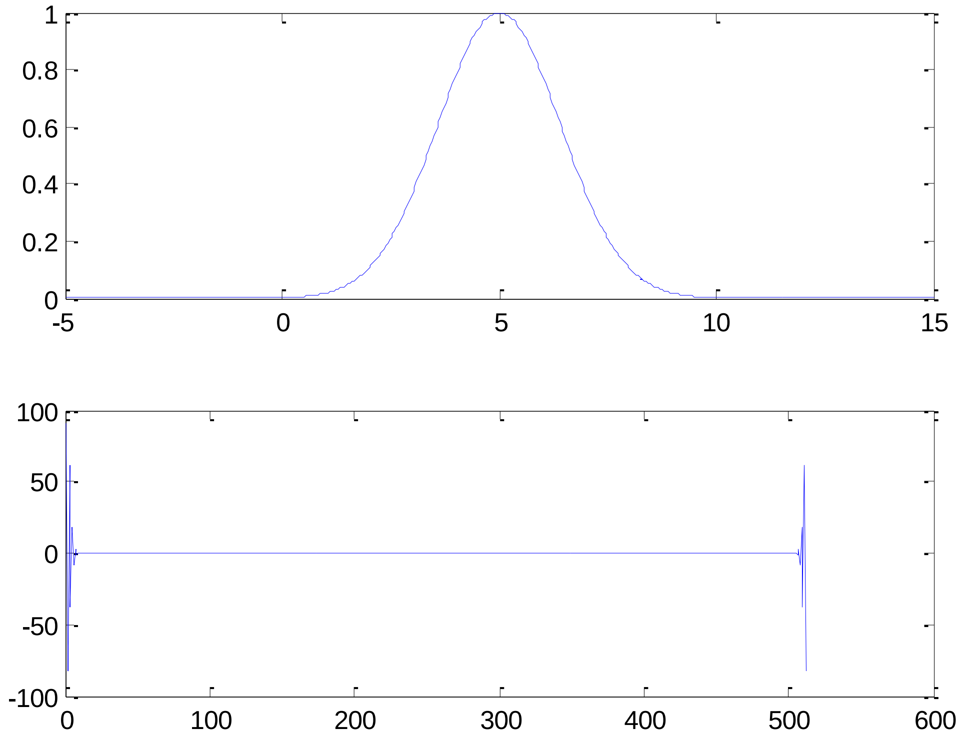
$$\varphi(\omega) = \arg\left[H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right]$$



4 Вычислить Фурье-образ (дискретизированное по времени преобразование Фурье) прямоугольного окна $l(n) = \begin{cases} 1 \text{ для } 0 \leq n \leq 9, \\ 0, \text{для других } n. \end{cases}$. Вычислить ширину главного лепестка и всех боковых лепестков Фурье-образа прямоугольного окна $l(n)$. Изобразить график модуля комплексной частотной характеристики окна.

Решение

```
t=linspace(-5,15,512);%Задание вектора времени
if (t>=0)&(t<=9)
 f=1;
end;
F=fft(f);
subplot(211);
plot(t,f);%Отрисовка исходной функции
subplot(212);
plot(1:512, F);%Фурье образ как функция номера
```



Тема 7

Вычислить импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) с частотой среза $\widehat{w}_c = \frac{\pi}{2}$, если его частотная характеристика, равная на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$H\left(e^{j\widehat{w}}\right) = \begin{Bmatrix} 1, & |\widehat{w}| \le \widehat{w}_c, (-\widehat{w}_c \le \widehat{w} \le \widehat{w}_c); \\ 0, & \widehat{w}_c < |\widehat{w}| \le \pi, (0\text{– в остальных случаях}) \end{Bmatrix},$$

вне этого интервала вычисляется по периодичности.

Здесь $\widehat{w} = \frac{w}{f_d} = \frac{2\pi f}{f_d}$ - это нормированная частота, а w и f - это циклическая и линейная частоты, f_d- частота дискретизации, нормированная частота среза ФНЧ $\widehat{w}_c = \frac{w_c}{f_d}$.

Решение:

Идеальная импульсная характеристика её можно посчитать как Фурье-образ от идеальной частотной:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(w) e^{iwn} dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} e^{iwn} dw$$

H(w) – идеальная характеристика.

$$h(n) = \begin{cases} 2f_c \cdot \dfrac{\sin(nw_c)}{nw_c}, & n \ne 0, \\ 2f_c, & n = 0 \end{cases}$$

где fc и w_c – частота среза.

Тема 8

Вычислить элементысистемы дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) и записать систему в виде матрицы V размером $N \times N, N = 4$. Матрицу представить в алгебраической и экспоненциальной форме.

Решение:

В дискретном преобразовании Фурье используется система дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), определяемых следующим выражением

$$def(k,n) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) = \cos\frac{2\pi}{N}kn - j\sin\frac{2\pi}{N}kn$$

Обе переменные k, n принимают дискретные значении $0,1,\ldots,N-1$

Обозначим

$$W = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$$

Тогда $def(k,n) = W^{kn}$

Всю систему ДЭФ можно записать в виде матрицы V , строки которой нумеруются переменной k , столбцы переменной *n,* а в пересечении *k-n* строки и n-го столбца записана величина W^{kn}

$$
\begin{array}{rc}
 & \\
V = & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ N-1 \end{array}
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & n & \cdots & N-1 \\ & & \uparrow & & \\ \leftarrow & \leftarrow & W^{kn} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Для N=4 матрица V имеет вид:

$$
V == \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}
$$

$$
W = \exp\left(-j\frac{2\pi}{4}\right) = \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)
$$

Тема 9

6 Выполнить прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $x(n) = \{5; 4; 3; 2\}$. Восстановить исходную последовательность через вычисление обратного ДПФ последовательности коэффициентов дискретного преобразования Фурье $X(k)$.

Решение:

$$
X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left(\cos\frac{2\pi nk}{N} - j\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)
$$

$$X(0) = 3.5$$

$$X(1) = 0,5 - 0,5i$$

$$X(2) = 0.5$$

$$X(3) = 0,5 + 0,5i$$

Обратное ДПФ

$$
x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\left(\cos\frac{2\pi nk}{N} + j\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)
$$

$$x(0) = 5,\ x(1) = 4,\ x(2) = 3,\ x(3) = 2$$

$x_0 := 5$ $x_1 := 4$ $x_2 := 3$ $x_3 := 2$

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad N := 4$$

$$X_n := \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left[x_k \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{N} \right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{N} \right) \right) \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.5 - 0.5i \\ 0.5 \\ 0.5 + 0.5i \end{pmatrix}$$

$$z_n := \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_k \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{N} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{N} \right) \right) \right]$$

$$z = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Тема 10

Дана последовательность $\{x(n)\} = \{5; 4; 3; 2\}$. Применить быстрое преобразование Фурье (БПФ) для вычисления коэффициентов ДПФ. Показать, что алгоритм БПФ можно применять для восстановления $x(n)$ по коэффициентам ДПФ используемым в качестве исходного массива данных. Оценить вычислительную сложность алгоритма БПФ.

Решение:

Сигнал состоит из 4-х отсчетов во временной области.

$$X_n := \frac{1}{N} \cdot \left[\sum_{k=0}^{N-3} \left[x_{2k} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot 2k}{N} \right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot 2k}{N} \right) \right) \right] \right] + \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N-2} \left[x_{2k-1} \cdot \left[\cos\left[\frac{2\pi \cdot n \cdot (2k-1)}{N} \right] - i \cdot \sin\left[\frac{2\pi \cdot n \cdot (2k-1)}{N} \right] \right] \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.5 - 0.5i \\ 0.5 \\ 0.5 + 0.5i \end{pmatrix}$$

$$z_n := \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_k \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{N}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{N}\right) \right) \right]$$

$$z = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Тема 11

Заданы последовательности $x(n) = \{1; 1; 1\}$ и $h(n) = \{5; 4; 3; 2\}$. Вычислить циклическую дискретную свертку последовательностей с помощью ДПФ. Построить график свертки.

Решение:

Использование БПФ для вычисления свертки основано на том, что ДПФ свертки последовательностей есть покомпонентное произведение ДПФ соответствующих последовательностей.

Вычислим ДПФ последовательностей:

$$X_n := \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left[x_k \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{N}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{N}\right) \right) \right]$$

$$H_g := \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} \left[h_k \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi \cdot g \cdot k}{K}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot g \cdot k}{K}\right) \right) \right]$$

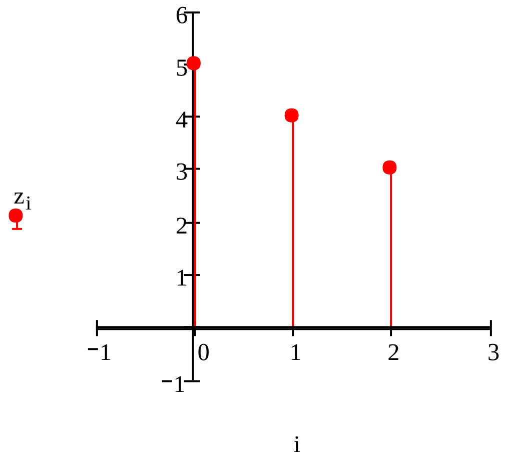
$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.5 - 0.5i \\ 0.5 \\ 0.5 + 0.5i \end{pmatrix}$$

Далее производится поочередное умножение элементов первой последовательности с элементами второй последовательности и просуммировать полученные значения. После производится обратное преобразование по формуле обратного преобразования, в результате которого получаем свертку, рассчитанную с помощью ДПФ.

$$F = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.5 - 0.5i \\ 0.5 \\ 0.5 + 0.5i \end{pmatrix}$$

$$z_n := \sum_{k=0}^{K-1} \left[F_k \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{K}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{K}\right) \right) \right]$$

$$z = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$



6
5
4
3
2
1
−1
−1
0
1
2
3
z_i
i

Список литературы

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов.– М.: Техносфера, 2006.
2. Теория прикладного кодирования: Учеб. пособие. В 2 т. В.К. Конопелько, А.И. Митюхин и др.; Под ред. проф. В.К. Конопелько. – Мн.: БГУИР, 2004.
3. Овсянников В.А. Методы формирования и цифровой обработки сигналов. Учебное пособие для студентов специальности «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» в 2-ух частях. –Мн.: БГУИР 2010.
4. Лосев В.В. Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки: Учебное пособие для вузов. – Мн: Вышэйшая школа, 1990.
5. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников: Пер. с англ. – М.: Додека-XXI, 2008.
6. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2008.
7. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005.
8. Андерсон Д.А. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.
9. Кормен Т.Х. и др. Алгоритмы: построение и анализ.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2009.
10. Макклеллан Дж.К., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. - М.: Радио и связь, 1983.
11. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. Солонина А.И., Улахович Д.А. и др. – СПб: БХВ – Петербург, 2003.
12. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978.
13. Митюхин А.И. Применение действительных ортогональных преобразований в цифровой обработке сигналов: Учебно-методическое пособие. – Мн.: БГУИР, 2000.
14. Саломатин С.Б. Цифровая обработка сигналов в радиоэлектронных системах. Уч. пособие по дисциплине «Цифровая обработка сигналов». – Мн.: БГУИР, 2002.
15. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2003.
16. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.
17. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980.
18. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – СПб: Политехника, 2002.
19. Цифровая обработка телевизионных и компьютерных изображений. Под ред. Ю.Б. Зубарева и В.П. Дворковича. – М.: 1997.
20. Птачек М. Цифровое телевидение. Теория и техника. – М.: Радио и связь, 1990.
21. Салонина А.И., Улахович Д.А., Яковлев Л.А. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов. СПб: БХВ – Петербург, 2001.