

Лабораторная работа 2

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h .

1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 > 0,$$

$$u(0, t) = -\sin(at),$$

$$u(\pi, t) = \sin(at),$$

$$u(x, 0) = \sin x,$$

$$u_t(x, 0) = -a \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \sin(x - at)$

2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 > 0,$$

$$u_x(0, t) - u(0, t) = 0,$$

$$u_x(\pi, t) - u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin x + \cos x,$$

$$u_t(x, 0) = -a(\sin x + \cos x).$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \sin(x - at) + \cos(x + at)$

3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3u,$$

$$u(0, t) = \sin(2t),$$

$$u(\pi, t) = -\sin(2t),$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = 2 \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \cos x \sin(2t)$

4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5u,$$

$$u_x(0, t) - 2u(0, t) = 0,$$

$$u_x(1, t) - 2u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \exp(2x),$$

$$u_t(x,0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(2x) \cos t$

5.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$u(0,t) = 0,$$

$$u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0,$$

$$u_t(x,0) = \exp(-x) \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = 0.5 \exp(-x) \sin x \sin(2t)$

6.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2u,$$

$$u(0,t) = \cos(2t),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0,$$

$$u(x,0) = \exp(-x) \cos x,$$

$$u_t(x,0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-x) \cos x \cos(2t)$

7.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3u,$$

$$u(0,t) = \exp(-t) \cos(2t),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0,$$

$$u(x,0) = \exp(-x) \cos x,$$

$$u_t(x,0) = -\exp(-x) \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-t-x) \cos x \cos(2t)$

8.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3u,$$

$$u(0,t) = 0,$$

$$u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0,$$

$$u_t(x,0) = 2 \exp(-x) \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-t-x) \sin x \sin(2t)$

9.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u + \sin x \exp(-t),$$

$$u(0,t) = \exp(-t),$$

$$u(\pi,t) = -\exp(-t),$$

$$u(x,0) = \cos x ,$$

$$u_t(x,0) = -\cos x .$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-t) \cos x$.

10.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u - \cos x \exp(-t),$$

$$u_x(0,t) = \exp(-t),$$

$$u_x(\pi,t) = -\exp(-t),$$

$$u(x,0) = \sin x ,$$

$$u_t(x,0) = -\sin x .$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-t) \sin x$.