Лабораторная работа №7

Краевые задачи для дифференциального уравнения эллиптического типа

Сорокин Никита, М8О-403Б-20

Задание

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$.

Вариант 2:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u_x(0, y) = 0 \\ u(1, y) = 1 - y^2 \\ u_y(x, 0) = 0 \\ u(x, 1) = x^2 - 1 \end{cases}$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y) = x^2 - y^2$$

In [1]:
```
import sys
sys.path

sys.path.insert(0, r"c:\Users\никита\Desktop\учеба\чм\modules")
```

In [2]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import time
sns.set()

%matplotlib widget

plt.rcParams["figure.figsize"] = (10, 6)

import LinearAlgebra
```

In [3]:
```
x_begin = 0
x_end = 1
```

```
y_begin = 0
y_end = 1

h_x = 0.05
h_y = 0.05
```

Начальные условия:

In [4]:
```
def phi_1(y):
    return 0

def phi_2(y):
    return 1 - y**2

def phi_3(x):
    return 0

def phi_4(x):
    return x**2 - 1

def solution(x, y):
    return x**2 - y**2
```

Точное решение

In [5]:
```
def get_analytical_solution(x_begin, x_end, y_begin, y_end, h_x, h_y):

    x = np.arange(x_begin, x_end + h_x, h_x)
    y = np.arange(y_begin, y_end + h_y, h_y)

    u = np.zeros((x.size, y.size))
    for i in range(x.size):
        for j in range(y.size):
            u[i, j] = solution(x[i], y[j])

    return u
```

In [6]:
```
u_exact = get_analytical_solution(x_begin, x_end, y_begin, y_end, h_x, h_y)
```

Конечно-разностная схема

В исходном уравнении перейдем от производных к их численным приближениям. Получим соотношение:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_2^2} = f(x_i, y_j) + O(h_1^2 + h_2^2)$$

$h_1 = h_2 :$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\Big(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2\, f_{i,j}\Big)$$

$h_1 \neq h_2$:

$$u_{i,j} = \frac{h_1^2}{2(h_1^2+h_2^2)}(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + \frac{h_2^2}{2(h_1^2+h_2^2)}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - h_1 h_2\, f_{i,j}$$

Записав такое соотношение для всех $i,\ j$, получим систему уравнений. Решить ее можно итерационными способами.

Начальная интерполяция

Так как граничные условия без производных относятся не к противоположным стенкам граничной области, начальная интерполяция задается следующим образом:

$$u = \phi_2(y)\cdot\frac{1-y}{(1-x)+(1-y)} + \phi_4(x)\cdot\frac{1-x}{(1-x)+(1-y)}$$

In [9]:
```
def linear_interpolation(x_begin, x_end, y_begin, y_end, h_x, h_y):

    x = np.arange(x_begin, x_end + h_x, h_x)
    y = np.arange(y_begin, y_end + h_y, h_y)

    u = np.zeros((x.size, y.size))

    eps = 0.1

    for i in range(x.size):
        for j in range(y.size):
            u[i, j] = (phi_2(y[j]) * (1 - y[j]) / ((1 - x[i]) + (1 - y[j]) + eps)
                      + phi_4(x[i]) * (1 - x[i]) / ((1 - x[i]) + (1 - y[j]) + eps)

    return u
```

In [11]:
```
def finite_difference_scheme(x_begin, x_end, y_begin, y_end, h_x, h_y, method, eps=

    x = np.arange(x_begin, x_end + h_x, h_x)
    y = np.arange(y_begin, y_end + h_y, h_y)

    u = np.zeros((x.size, y.size))

    equations_n = (x.size - 2) * (y.size - 2)
    A = np.zeros((equations_n, equations_n))
    b = np.zeros((equations_n))

    for k in range(equations_n):

        # corner points
```

```
        if k == 0:
            A[k, k] = h_x**2 + h_y**2 - 2 * (h_x**2 + h_y**2)
            A[k, k + 1] = h_x**2
            A[k, k + (y.size - 2)] = h_y**2
            continue

        if k == (y.size - 3):
            A[k, k] = h_y**2 - 2 * (h_x**2 + h_y**2)
            A[k, k - 1] = h_x**2
            A[k, k + (y.size - 2)] = h_y**2
            b[k] = -h_x**2 * phi_4(x[k // (y.size - 2)])
            continue

        if k == equations_n - 1 - (y.size - 3):
            A[k, k] = h_x**2 - 2 * (h_x**2 + h_y**2)
            A[k, k + 1] = h_x**2
            A[k, k - (y.size - 2)] = h_y**2
            b[k] = -h_x**2 * phi_2(y[k % (y.size - 2)])
            continue

        if k == equations_n - 1:
            A[k, k] = - 2 * (h_x**2 + h_y**2)
            A[k, k - 1] = h_x**2
            A[k, k - (y.size - 2)] = h_y**2
            b[k] = -h_y**2 * phi_2(y[k % (y.size - 2)]) - h_x**2 * phi_4(x[k // (y.
            continue

        # boundary points

        if k <= (y.size - 3):
            A[k, k] = h_y**2 - 2 * (h_x**2 + h_y**2)
            A[k, k + 1] = h_x**2
            A[k, k - 1] = h_x**2
            A[k, k + (y.size - 2)] = h_y**2
            continue

        if k >= equations_n - (y.size - 2):
            A[k, k] = -2 * (h_x**2 + h_y**2)
            A[k, k + 1] = h_x**2
            A[k, k - 1] = h_x**2
            A[k, k - (y.size - 2)] = h_y**2
            b[k] = -h_y**2 * phi_2(y[k % (y.size - 2)])
            continue

        if k % (y.size - 2) == 0:
            A[k, k] = h_x**2 - 2 * (h_x**2 + h_y**2)
            A[k, k + 1] = h_x**2
            A[k, k - (y.size - 2)] = h_y**2
            A[k, k + (y.size - 2)] = h_y**2
            continue

        if k % (y.size - 2) == (y.size - 3):
            A[k, k] = -2 * (h_x**2 + h_y**2)
            A[k, k - 1] = h_x**2
            A[k, k - (y.size - 2)] = h_y**2
            A[k, k + (y.size - 2)] = h_y**2
```

```python
            b[k] = -h_x**2 * phi_4(x[k // (y.size - 2)])
            continue

        # inner points

        A[k, k] = -2 * (h_x**2 + h_y**2)
        A[k, k + 1] = h_x**2
        A[k, k - 1] = h_x**2
        A[k, k - (y.size - 2)] = h_y**2
        A[k, k + (y.size - 2)] = h_y**2


    u_0 = linear_interpolation(x_begin, x_end, y_begin, y_end, h_x, h_y)
    u = np.copy(u_0)

    #return u_0

    u_0_vector = u_0[1:-1, 1:-1].reshape(equations_n)

    if method == np.linalg.solve:
        u_vector = method(A, b)
        k = 0
    else:
        u_vector, k = method(A, b, eps, u_0_vector, c)

    u[1:-1, 1:-1] = u_vector.reshape((x.size - 2, y.size - 2))

    u[:, 0] = u[:, 1]
    u[0, :] = u[1, :]
    u[:, -1] = phi_4(x[:])
    u[-1, :] = phi_2(y[:])

    return u, k
```

Полученные результаты

In [12]:
```python
def plot_surface(u_exact, u):
    x = np.arange(x_begin, x_end + h_x, h_x)
    y = np.arange(y_begin, y_end + h_y, h_y)
    x, y = np.meshgrid(x, y)

    fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
    ax.set_ylabel('x')
    ax.set_xlabel('y')
    surf1 = ax.plot_surface(x, y, u_exact, color='red')
    surf2 = ax.plot_surface(x, y, u)

    ax.legend()
    plt.show()
```

In [13]:
```python
u_exact = get_analytical_solution(x_begin, x_end, y_begin, y_end, h_x, h_y)
```

In [14]:
```python
method = np.linalg.solve
```

```
u_np, k_np = finite_difference_scheme(x_begin, x_end, y_begin, y_end, h_x, h_y, met
```

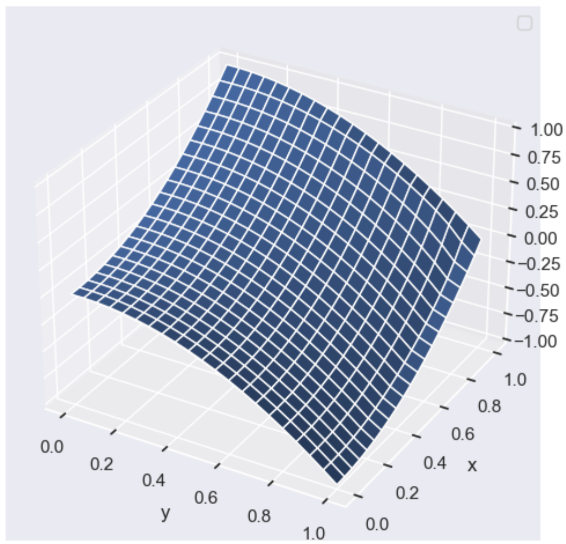
In [15]:
```
method = LinearAlgebra.simple_iterations_method
c = 0
eps = 1e-5

u_iterations, k_iterations = finite_difference_scheme(x_begin, x_end, y_begin, y_en
```

In [16]:
```
plot_surface(u_exact, u_iterations)
```

```
No artists with labels found to put in legend.  Note that artists whose label star
t with an underscore are ignored when legend() is called with no argument.
```

Figure



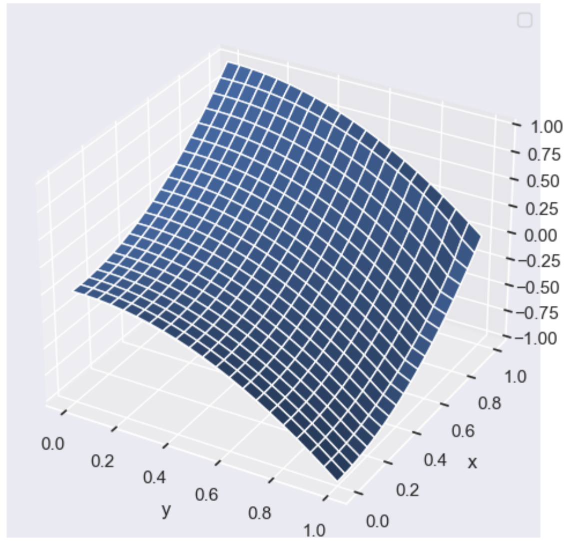
In [17]:
```
method = LinearAlgebra.Seidel_method
c = 0
eps = 1e-5

u_seidel, k_seidel = finite_difference_scheme(x_begin, x_end, y_begin, y_end, h_x,
```

In [18]:
```
plot_surface(u_exact, u_seidel)
```

```
No artists with labels found to put in legend.  Note that artists whose label star
t with an underscore are ignored when legend() is called with no argument.
```

Figure



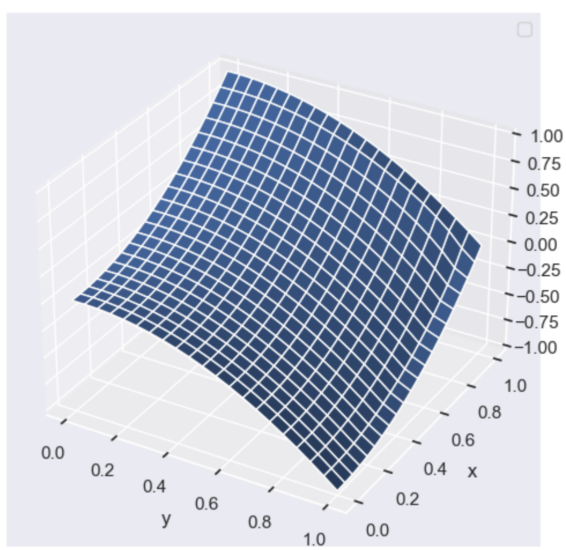
In [19]:
```
method = LinearAlgebra.Seidel_method
c = 0.3
eps = 1e-5

u_relaxation, k_relaxation = finite_difference_scheme(x_begin, x_end, y_begin, y_en
```

In [20]:
```
plot_surface(u_exact, u_relaxation)
```

```
No artists with labels found to put in legend.  Note that artists whose label star
t with an underscore are ignored when legend() is called with no argument.
```

Figure



In [21]:
```
u_numerical = [u_iterations, u_seidel, u_relaxation]
iterations = [k_iterations, k_seidel, k_relaxation]
names = ['Simple iterations method', 'Seidel method', 'Relaxation Method']

print(f'Gauss method :')
print(f'max abs error = {np.max(abs(u_exact - u_np))}')
print(f'mean abs error = {np.mean(abs(u_exact - u_np))} \n')

for u, iteration, name in zip(u_numerical, iterations, names):
    print(f'{name}:')
    print(f'max abs error = {np.max(abs(u_exact - u))}')
    print(f'mean abs error = {np.mean(abs(u_exact - u))}')
    print(f'iterations = {iteration} \n')
```

```
Gauss method :
max abs error = 0.05271889135652741
mean abs error = 0.009450547481441456

Simple iterations method:
max abs error = 0.05272619328879191
mean abs error = 0.009470020862204312
iterations = 282

Seidel method:
max abs error = 0.05272149499314349
mean abs error = 0.009452081112906623
iterations = 155

Relaxation Method:
max abs error = 0.05272266349212196
mean abs error = 0.009453445087143294
iterations = 207
```

Вывод

В данной работе я научился решать краевые задачи для ДУ эллиптического типа с помощью конечно-разностной схемы.

После применения конечно-разностной схемы мы получаем систему уравнений, которую можно решать несколькими методами. Я использовал:

- метод простых итераций
- метод Зейделя
- метод верхних релаксаций