Лабораторная работа №1 по дисциплине "Математическое моделирование"

Вариант XXII: Сорокин Никита

Задание А: Построение фазового портрета колебаний.

Дано нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} - \frac{1}{\sqrt{(x+l)^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-l)^2 + a^2}} = 0$$

Здесь l, a - параметры задачи.

1. Получите потенциальную энергию $\Pi(x)$ системы.
2. Запишите интеграл энергии.
3. Для случая $l = 1, a = 3$ постройте график потенциальной энергии.
4. С помощью графика потенциальной энергии постройте фазовый портрет колебаний, укажите характерные элементы фазового портрета: положения равновесия $x = x_*, \dot{x} = 0$, замкнутые траектории, сепаратрису.
5. Получите зависимость $T(a)$ периода колебаний от начальной амплитуды в виде квадратуры, численно постройте график этой зависимости объясните поведение графика функции $T(a)$.

Решение:

1. Имеем уравнение вида:

$$\ddot{x} - \frac{1}{\sqrt{(x+l)^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-l)^2 + a^2}} = 0$$

Здесь

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x+l)^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-l)^2 + a^2}}$$

Получим потенциальную энергию $\Pi(x)$ проинтегрировав $f(x)$ в пределах от 0 до x:

$$\Pi(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x -\frac{1}{\sqrt{(x+l)^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-l)^2 + a^2}}dx = asinh\left(\frac{-l+x}{a}\right) - asinh\left(\frac{l+x}{a}\right)$$

2. Далее, для получения интеграла энергии перепишем исходное уравнение в следующем виде и проинтегрируем:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\ddot{x} = -f(x), \quad \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = -f(x), \quad \int \dot{x} d\dot{x} = -\int f(x) dx,$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \Pi(x) = C$$

3. Построим график потенциальной энергии для $l = 1, a = 3$:

In [105…
```
from sympy import *
import numpy as np
import matplotlib as mpl
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
sns.set()
```

In [3]:
```
x = Symbol('x')
l = Symbol('l')
a = Symbol('a')
```

In [4]:
```
P = - asinh((l+x)/a) + asinh((-l+x)/a)
P_chosen = P.subs([(l, 1), (a, 3)])
P_chosen
```

Out[4]:

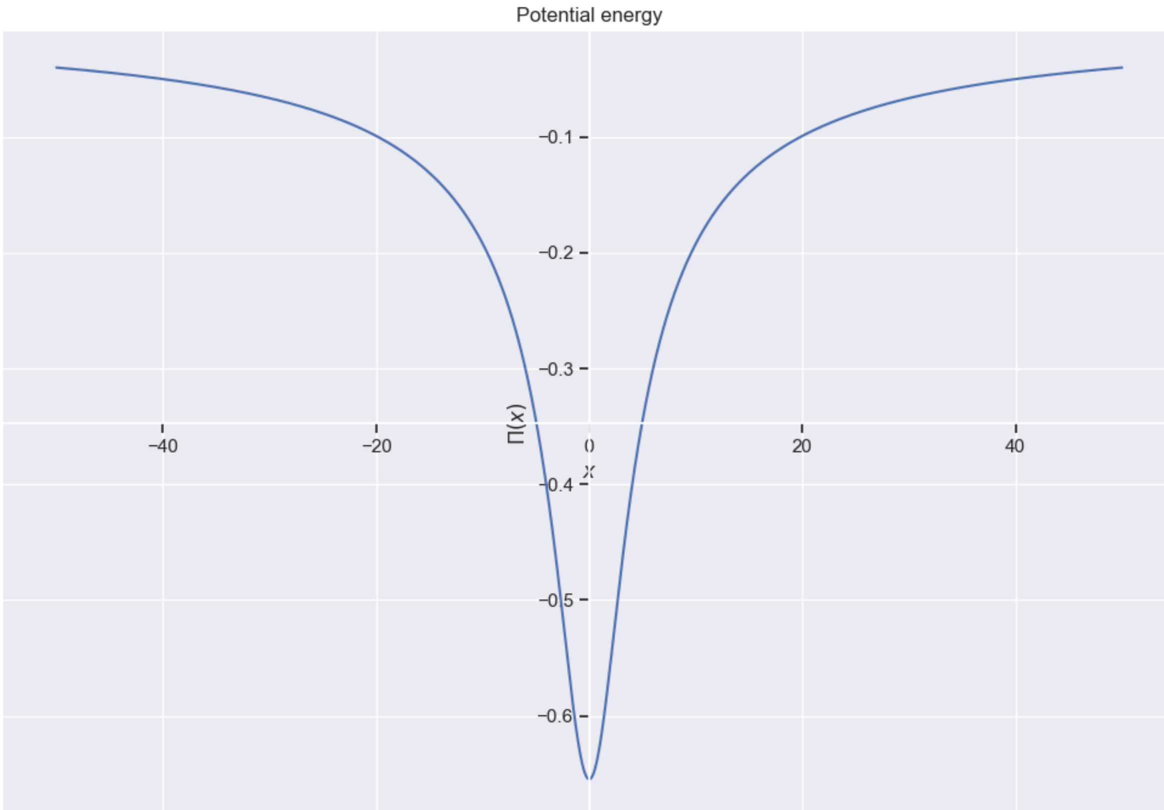
$$\operatorname{asinh}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) - \operatorname{asinh}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

In [5]:
```
P_chosen.subs([(x, 0)])
```

Out[5]:

$$-2 \operatorname{asinh}\left(\frac{1}{3}\right)$$

In [44]:
```
plot(P_chosen, (x, -50, 50), size=(10, 7), adaptive=False, nb_of_points=10000,
     xlabel="$ x $", ylabel="$ \Pi(x) $",title="Potential energy")
```



Out[44]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x1ad30165690>

4. Для построения фазового портрета колебаний выразим $\dot{x}$ из интеграла энергии:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2C - 2\Pi(x)} = \pm\sqrt{2C - 2\left[-asinh\left(\frac{1+x}{3}\right) + asinh\left(\frac{-1+x}{3}\right)\right]}$$

Для дальнейшего определения частот колебаний определим значения амплитуд a и соответстующих им констант C:

Амплитуда колебания a определяется как значение x в момент того, как фазовая кривая проходит $\dot{x} = 0$:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2C - 2\Pi(x)} = 0 \Rightarrow C = \Pi(x)$$

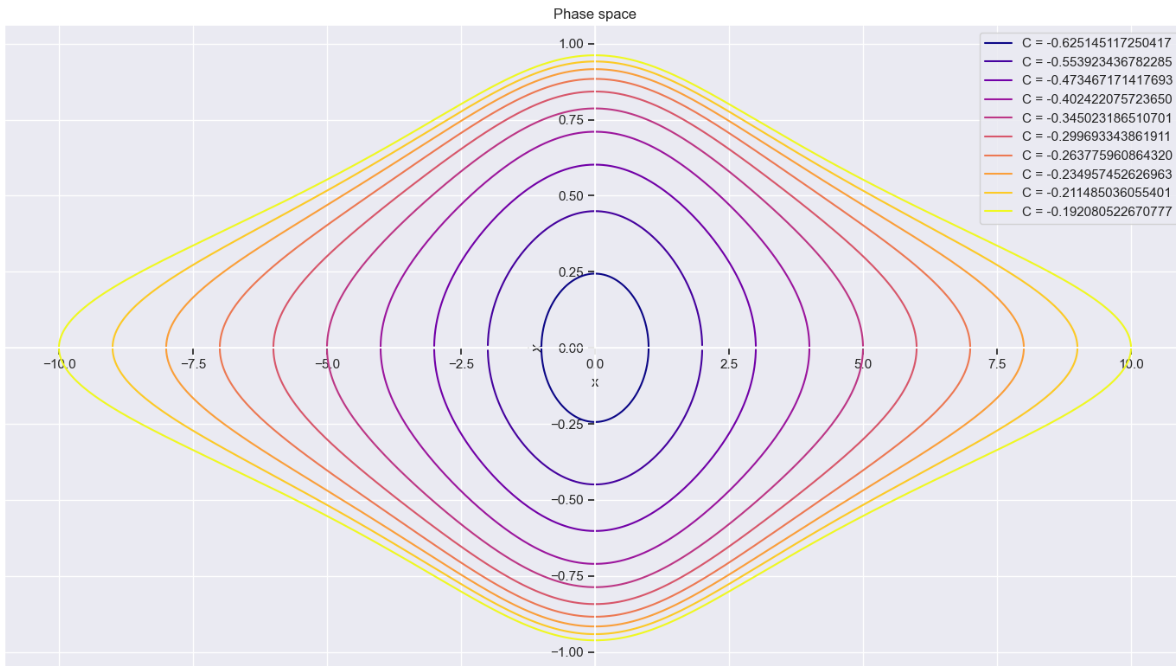
$$\begin{aligned}
&a = 1 : C = \Pi(1) = -asinh(2/3) \\
&a = 2 : C = \Pi(2) = -log(1 + sqrt(2)) + asinh(1/3) \\
&a = 3 : C = \Pi(3) = -asinh(4/3) + asinh(2/3) \\
&a = 4 : C = \Pi(4) = -asinh(5/3) + log(1 + sqrt(2)) \\
&a = 5 : C = \Pi(5) = -asinh(2) + asinh(4/3) \\
&a = 6 : C = \Pi(6) = -asinh(7/3) + asinh(5/3) \\
&a = 7 : C = \Pi(7) = -asinh(8/3) + asinh(2) \\
&a = 8 : C = \Pi(8) = -asinh(3) + asinh(7/3) \\
&a = 9 : C = \Pi(9) = -asinh(10/3) + asinh(8/3) \\
&a = 10 : C = \Pi(10) = -asinh(11/3) + asinh(3)
\end{aligned}$$

In [66]:
```
C = Symbol('C')
xdot_pos = sqrt(2*C - 2 * (-asinh((1+x)/3) + asinh((-1+x)/3)))
xdot_neg = - sqrt(2*C - 2 * (-asinh((1+x)/3) + asinh((-1+x)/3)))
```

Фазовый портрет для параметров с удобно подобранными амплитудами:

In [76]:
```
C_params = [- asinh((i + 1) / 3) + asinh((i - 1) / 3) for i in range(1, 11)]

def phase_space(C_params):

    print(f"Выбранные параметры C: {C_params}")

    p = plot(size=(14, 8), show=False,
             xlabel='x', ylabel='$\dot{x}$',
             title='Phase space')

    colors = mpl.cm.plasma(np.linspace(0, 1, len(C_params)))[:, :-1]

    for i in range(len(C_params)):
        xdot_pos_new = xdot_pos.subs([(C, C_params[i])])
        p1 = plot(xdot_pos_new, (x, -30, 30), line_color = colors[i], show=False, a
        p.append(p1[0])

        xdot_neg_new = xdot_neg.subs([(C, C_params[i])])
        p1 = plot(xdot_neg_new, (x, -30, 30), line_color = colors[i], show=False, a
        p.append(p1[0])

        p[2 * i].label = f"C = {C_params[i]}"
        p[2 * i + 1].label = "_nolabel_"

    p.legend = True
    p.show()

phase_space(C_params)
```

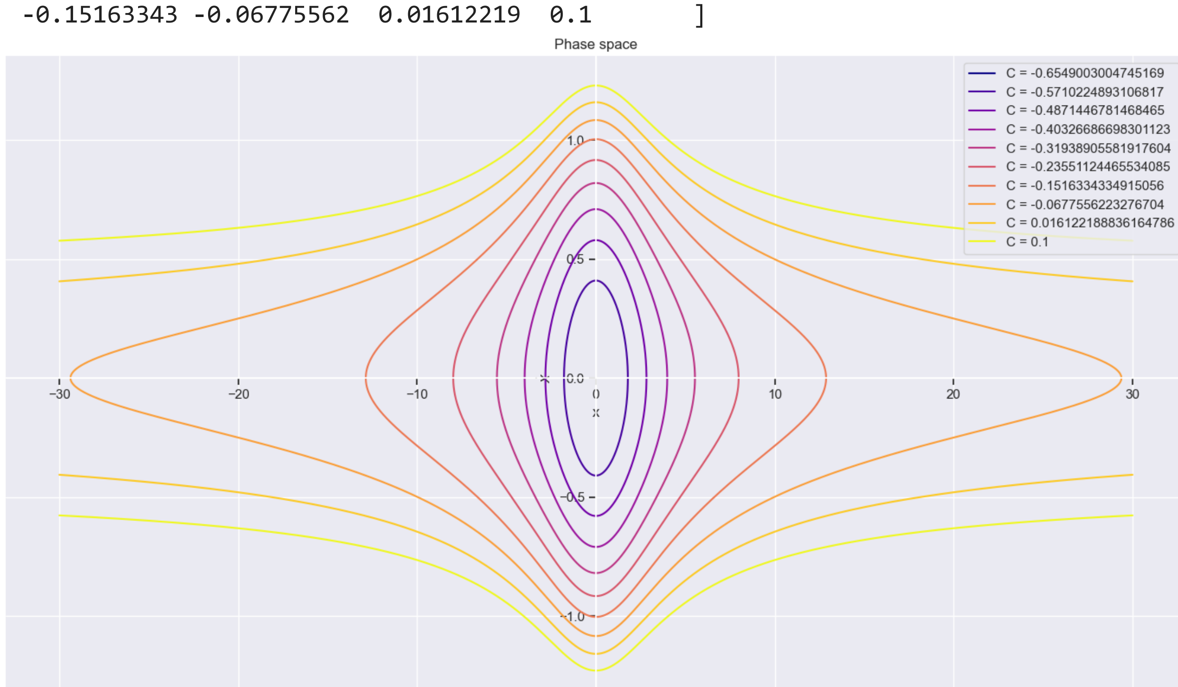
```
Выбранные параметры C: [-0.625145117250417, -0.553923436782285, -0.47346717141769
3, -0.402422075723650, -0.345023186510701, -0.299693343861911, -0.263775960864320,
-0.234957452626963, -0.211485036055401, -0.192080522670777]
```



Фазовый портрет с произвольно подобранными параметрами для которых существуют фазовые кривые:

In [75]:
```
C2_params = np.linspace(-2 * np.arcsinh(1 / 3), 0.1, 10)

phase_space(C_params)
```

```
Выбранные параметры C: [-0.6549003  -0.57102249 -0.48714468 -0.40326687 -0.3193890
6 -0.23551124
 -0.15163343 -0.06775562  0.01612219  0.1       ]
```



- Положения равновесия

Из механики известно, что консервативаная система находится в положении равновесия $\Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0$. Система является консвервативной в виду существования интеграла энергии. Как видно по графику потенциальной энергии в точке 0 имеется локальный минимум. Следовательно, имеем $\frac{\partial \Pi}{\partial x}|_0 = 0$.

Проверим это формально:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{1}{3\sqrt{(x/3+1/3)^2+1}} - \frac{1}{3\sqrt{(x/3-1/3)^2+1}} = 0, \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Далее воспользуемся теоремой Лагранжа: если в положении равновесия потенциальная энергия имеет локальный минимум, то положение равновесия устойчиво.

Следовательно, имеем точку $x = 0, \dot{x} = 0$ устойчивого равновесия.

- Замкнутые траектории

Замкнутые траектории соответствуют фазовым траекториям со значениями параматра $C \in [-2\, asinh\left(\frac{1}{3}\right), 0)$. При $C \geq 0$ получается свободное движение. При $C < -2\, asinh\left(\frac{1}{3}\right)$ движение невозможно (выражение < 0 под корнем).

- Сепаратриса

Сепаратрисой является фазовая кривая соответствующая коэффициенту $C = 0$, поскольку она является кривой разделяющий области с различными характерами движения.

5. Получим зависимость периода колебаний $T(a)$ от начальной амплитуды a:

$$T(a) = 2\int_{-a}^{a} dt = 2\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\dot{x}} = 2\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{2C - 2\Pi(x)}}$$

Воспользуемся полученными в прошлом пункте a и C :

Получаем следующие значения периода колебаний

$$C = -2asinh(1/3), \quad T(a) = 26.1569723985796$$
$$C = -asinh(2/3), \quad T(a) = 29.661$$
$$C = -log(1 + sqrt(2)) + asinh(1/3), \quad T(a) = 35.3355863091147$$
$$C = -asinh(4/3) + asinh(2/3), \quad T(a) = 42.8612282481483$$
$$C = -asinh(5/3) + log(1 + sqrt(2)), \quad T(a) = 51.9188$$
$$C = -asinh(2) + asinh(4/3), \quad T(a) = 62.267$$
$$C = -asinh(7/3) + asinh(5/3), \quad T(a) = 73.7356296339318$$
$$C = -asinh(8/3) + asinh(2), \quad T(a) = 86.2046100310807$$
$$C = -asinh(3) + asinh(7/3), \quad T(a) = 99.58$$
$$C = -asinh(10/3) + asinh(8/3), \quad T(a) = 113.81$$

In [103…

```
T = [
    26.1569723985796,
    29.661,
    35.3355863091147,
    42.8612282481483,
    51.9188,
    62.267,
    73.7356296339318,
    86.2046100310807,
    99.58,
    113.81
]
```

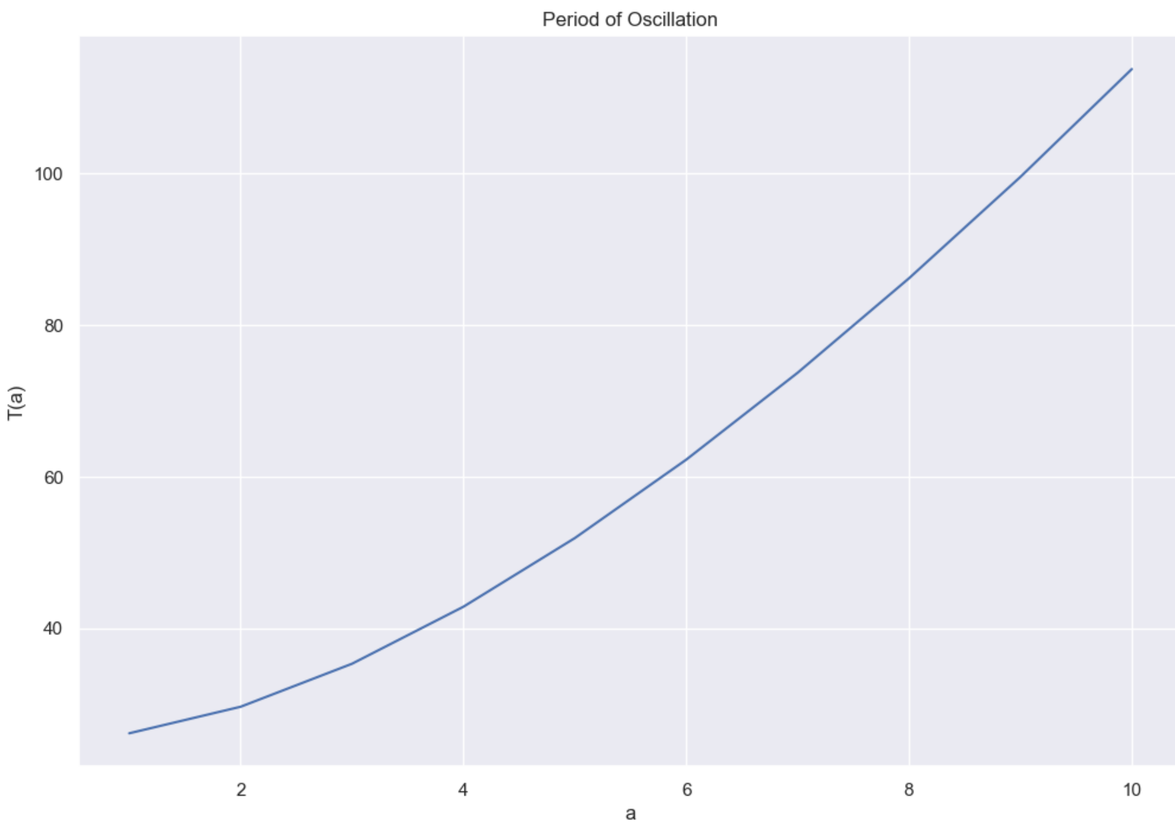
Построим график зависимости $T(a)$ от a:

In [113…

```
fig, axs = plt.subplots(figsize=(12, 8))

axs.set_title("Period of Oscillation")
axs.set_xlabel("a")
axs.set_ylabel("T(a)")

axs.plot(a, T)
```

Out[113]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x1ad3ae7b250>]
```



При увелечении амплитуды период колебаний тоже увеличивается.