Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)
Факультет информационных технологий и прикладной математики
Кафедра вычислительной математики и программирования

Курсовая работа

По дисциплине «Случайные процессы»

По теме: Изучение линейных стационарных преобразований случайных процессов

Студент: Сорокин Н.Э.
Группа: М8О-303Б-20
Руководитель: к.ф-м.н. Лебедев М.В.

Москва, 2023

In [1]:
```python
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
```

In [2]:
```python
def plot_setup():
    plt.figure(figsize=(10, 6))
    plt.grid()
```

Условие

Группа 3, вариант 22

Сигнал, моделируемый стационарным центрированным гауссовским случайным процессом $X(t)$ с ковариационной функцией $R(\tau)$ подается на вход некоторой системы. Случайные функции $X(t)$ и $K(t)$ — независимы. Функция $n(t)$ — случайная функция, описывающая шум, возникающий в системе. Выходной сигнал — $Y(t)$ связан с входным — $X(t)$ уравнением

$$L[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) \cdot Y(s)ds = K(t) \cdot X(t) + n(t),$$

где

$$h(t) = \frac{1}{8}e^{-t/8} \cdot \theta(t \geq 0)$$

и $\theta(t)$ - функция Хэвисайда.

Входной сигнал X(t) имеет ковариационную функцию

$$R(\tau) = 4e^{-4|\tau|}cos(8\tau).$$

Процесс $K(t)$ — пуассоновский случайный процесс с математическим ожиданием $m = 0$ и дисперсией с $D = 22$. Интенсивность пуассоновского потока равна $\lambda_0 = 3$.

Шум в системе $n(t)$ - полосовой белый шум со спектаральной плотностью

$$s(\lambda) = 4 \quad \text{при} \quad |\lambda| < 40$$

и равная нулю в остальных случаях.

№1

Найдите ковариационную функцию случайного процесса $K(t)$.

Решение:

$$cov(K(t), K(s)) = M\{K(t)K(s)\} =$$
$$= \sum_{k,l=0}^{\infty} M\{K(t)K(s)\ |H_k(s)H_l(t)\}P\{H_k(s)H_l(t)\}$$

При $k = l$:

$$M\{K(t)K(s)\ |H_k(s)H_k(t)\} = M\{V_k^2\ |H_k(s)H_k(t)\} =$$
$$= M\{V_k^2\} = D$$

При $k \neq l$:

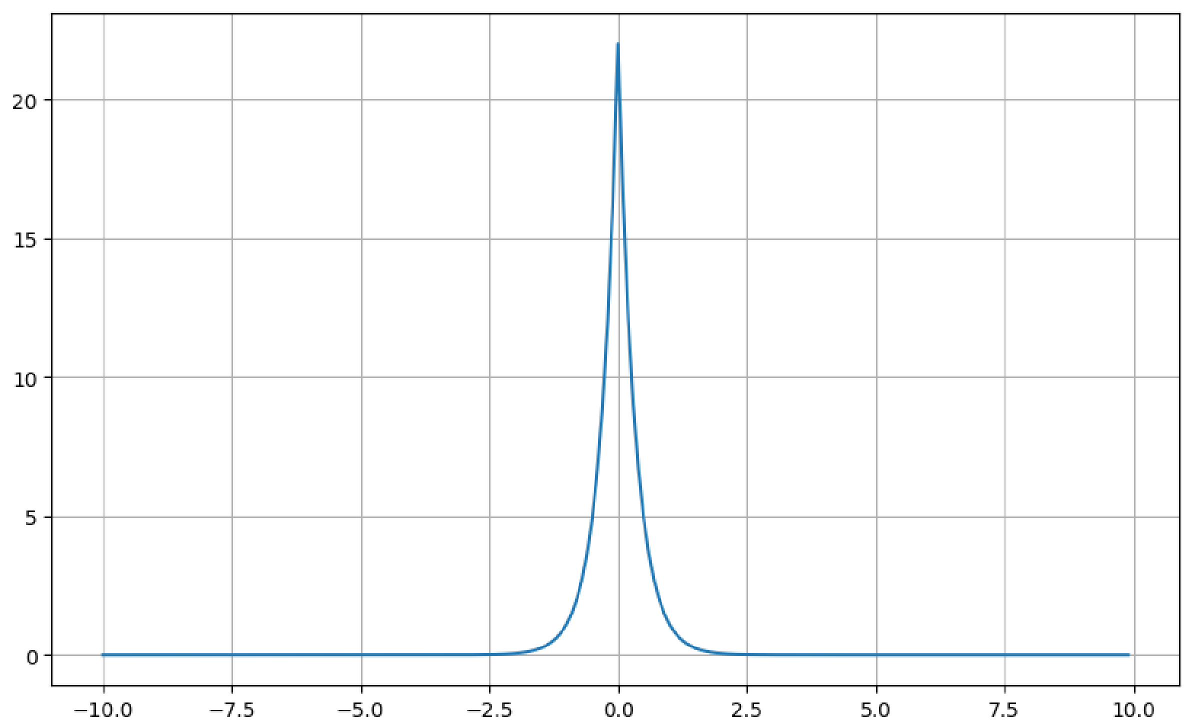
$$M\{K(t)K(s)\ |H_k(s)H_k(t)\} = M\{V_k V_l\ |H_k(s)H_k(t)\} =$$
$$= M\{V_k V_l\} = 0$$

Следовательно,

$$R_k(t) = cov(K(t), K(s)) = De^{-\lambda_0|t|} = 22e^{-3|t|}$$

In [3]:
```
t = np.arange(-10, 10, 0.1)
Rk_func = lambda t: 22 * np.exp(-3 * abs(t))
Rk = Rk_func(t)
plot_setup()
plt.plot(t, Rk)
```

Out[3]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x1a96ecf2190>]



№2

Для случайного процесса

$$F[X(t), K(t), n(t)] = K(t) \cdot X(t) + n(t).$$

а) Найти ковариационную функцию;

б) Вычислить спектральную плоскость;

Решение:

а)

$$cov(F(t), F(t+\tau)) = M\{(F(t) - M\{F(t)\})(F(t+\tau) - M\{F(t+\tau)\})\} =$$
$$= M\{F(t)F(t+\tau)\} - M\{F(t)\}M\{F(t+\tau)\} =$$

Рассмотрим по отдельности:

$$M\{F(t)F(t+\tau)\} =$$
$$= M\{(K(t) \cdot X(t) + n(t))(K(t+\tau) \cdot X(t+\tau) + n(t+\tau))\} =$$
$$= M\{(K(t) \cdot X(t))(K(t+\tau) \cdot X(t+\tau))\} + M\{K(t) \cdot X(t) \cdot n(t+\tau)\} +$$
$$+ M\{n(t) \cdot K(t+\tau) \cdot X(t+\tau)\} + M\{n(t) \cdot n(t+\tau)\} =$$
$$= M\{K(t) \cdot X(t) \cdot K(t+\tau) \cdot X(t+\tau)\} + R_n(t) =$$
$$= R_x(t) \cdot R_k(t) + R_n(t)$$

$$M\{F(t)\}M\{F(t+\tau)\} = M\{K(t) \cdot X(t) + n(t)\}M\{K(t+\tau) \cdot X(t+\tau) + n(t+\tau)\} =$$
$$= (M\{K(t) \cdot X(t)\} + M\{n(t)\}) \cdot (M\{K(t+\tau) \cdot X(t+\tau)\} + M\{n(t+\tau)\}) =$$
$$= M\{K(t) \cdot X(t)\} \cdot M\{K(t+\tau) \cdot X(t+\tau)\} = 0$$

Таким образом,

$$= R_x(t) \cdot R_k(t) + R_n(t)$$

Из этого неизвестно только $R_n(t)$, найдем ее:

$$R_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} s(\lambda) d\lambda = 4 \cdot \int_{-40}^{40} e^{it\lambda} d\lambda =$$

при $t \neq 0$:

$$= \frac{8}{it} e^{it\lambda}\Big|_{-40}^{40} = \ldots = \frac{8}{t} sin(40t)$$

при $t = 0$:

$$= 4 \cdot \lambda\Big|_{-40}^{40} = \ldots = 320$$

Таким образом,

$$R_n(t) = \begin{cases} \frac{8}{t} sin(40t) & \text{,если } t \neq 0 \\ 320 & \text{,если } t = 0 \end{cases}$$

In [4]:

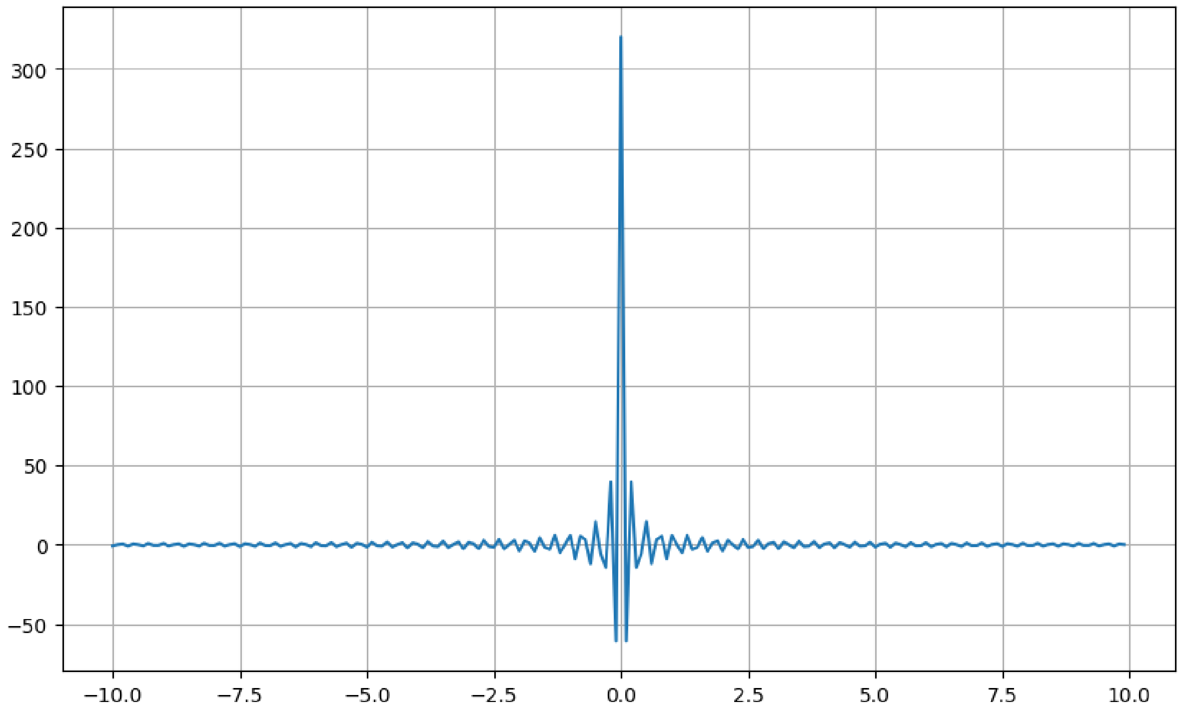
```
def Rn_func(t):
    if(t == 0):
```

```
        return 320
    return 8 / t * np.sin(40 * t)

t = np.arange(-10, 10, 0.1)
Rn = np.zeros(t.size)
for i in range(t.size):
    Rn[i] = Rn_func(t[i])

plot_setup()
plt.plot(t, Rn)
```

Out[4]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x1a97109d590>]



б)

Рассмотрим вспомогательное утверждение:

Лемма: Спектральная плотность ковариационной функции

$$R_\xi(t) = \sigma^2 exp\{-\alpha|t|\}cos\beta t$$

имеет вид:

$$s_\xi(\alpha) = \frac{\sigma^2\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha^2+(\beta+\alpha)^2} + \frac{1}{\alpha^2+(\beta-\alpha)^2}\right]$$

Доказательство:

$$
s_\xi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} R_\xi(t)dt = \frac{\sigma^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|-it\lambda}(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t})dt =
$$

$$
= \frac{\sigma^2}{4\pi}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|-i(\lambda-\beta)t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|-i(\lambda+\beta)t}dt\Big) =
$$

$$
= \frac{\sigma^2}{4\pi}\Big(\frac{1}{-\alpha-i(\lambda-\beta)}e^{(-\alpha-i(\lambda-\beta))t}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha-i(\lambda-\beta)}e^{(\alpha-i(\lambda-\beta))t}\Big|_{-\infty}^{0} +
$$

$$
+\frac{1}{-\alpha-i(\lambda+\beta)}e^{(-\alpha-i(\lambda+\beta))t}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha-i(\lambda+\beta)}e^{(\alpha-i(\lambda+\beta))t}\Big|_{-\infty}^{0}\Big) =
$$

$$
= \frac{\sigma^2}{4\pi}\Big(\frac{1}{\alpha+i(\lambda-\beta)} + \frac{1}{\alpha-i(\lambda-\beta)} + \frac{1}{\alpha+i(\lambda+\beta)} + \frac{1}{\alpha-i(\lambda+\beta)}\Big) =
$$

$$
= \frac{\sigma^2\alpha}{2\pi}\Big[\frac{1}{\alpha^2+(\beta+\lambda)^2} + \frac{1}{\alpha^2+(\beta-\lambda)^2}\Big]
$$

В нашем случае:

$$
R_F(t) = R_x(t)\cdot R_k(t) + R_n(t) =
$$

$$
= 88e^{-7|t|}cos(8t) + \frac{8}{t}sin(40t)
$$

Следовательно,

$$
s_F(\lambda) = \frac{44\cdot 7}{\pi}\Big(\frac{1}{49+(8+\lambda)^2} + \frac{1}{49+(8-\lambda)^2}\Big) + 4\cdot\theta(|\lambda|\le 40),
$$

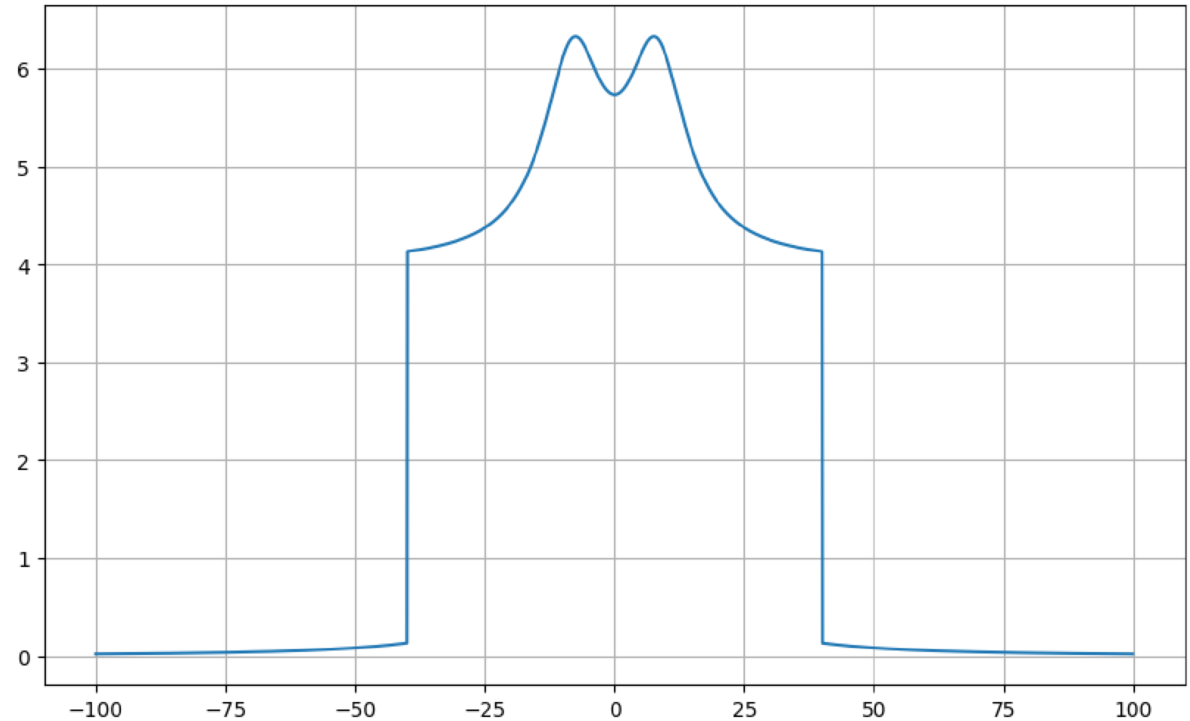
где $\theta(|\lambda|\le 40)$ - функция Хэвисайда, дающая 1 на отрезке $[-40, 40]$

In [5]:
```
def sF_func(lam):
    s_KX = (44 * 7 / np.pi
    * (1 / (49 + (8 + lam)**2) + 1 / (49 + (8 - lam)**2)))

    if(abs(lam) < 40):
        return s_KX + 4
    return s_KX


lam = np.arange(-100, 100, 0.1)
sF = np.zeros(lam.size)
for i in range(lam.size):
    sF[i] = sF_func(lam[i])
plot_setup()
plt.plot(lam, sF)
```

Out[5]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x1a96edc9450>]
```



№3

Для выходного сигнала $Y(t)$ найти:

а) спектральную плотность;
б) ковариационную функцию;
в) дисперсию.

Решение:

а) Воспользуемся связью весовой функцией и частотной характеристикой:

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} h(t)dt =$$

$$= \frac{1}{8} \int_{0}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{8}+i\lambda)t} dt = \frac{1}{8i\lambda + 1}$$

$$|H(\lambda)|^2 = \left|\frac{1}{1+64\lambda^2} - i\frac{8\lambda}{1+64\lambda^2}\right|^2 = \frac{1}{1+64\lambda^2}$$

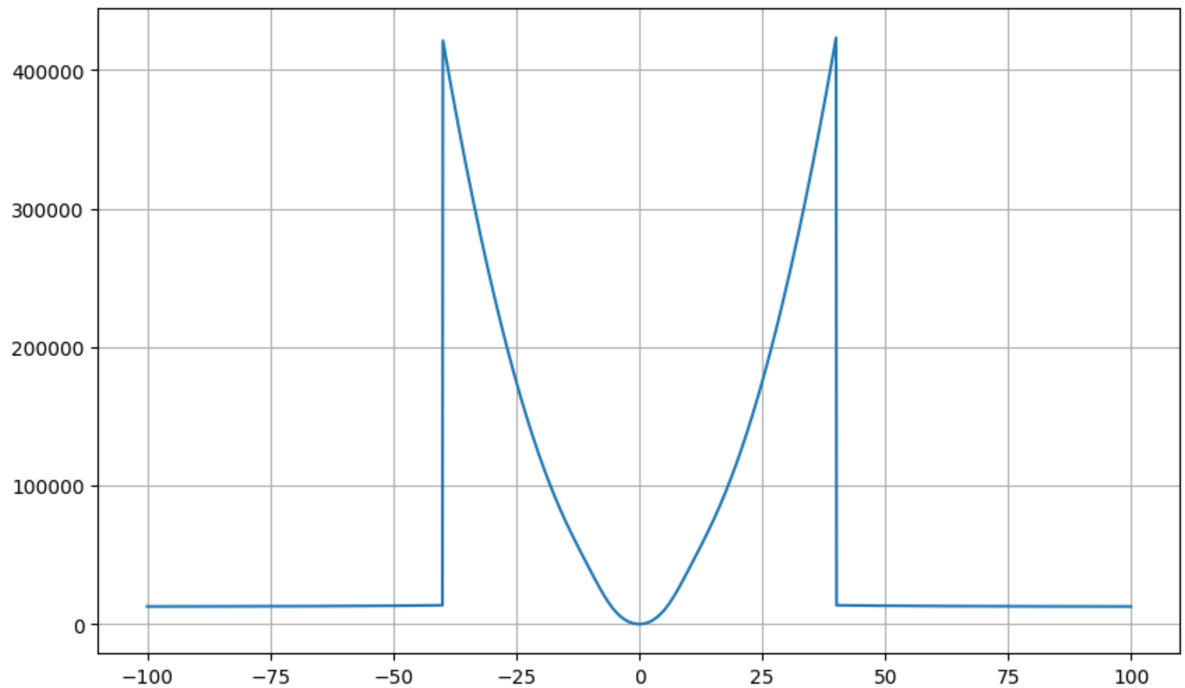
$$s_F(\lambda) = |H(\lambda)|^2 s_Y(\lambda)$$

$$s_Y(\lambda) = \frac{1}{|H(\lambda)|^2} s_F(\lambda) = (1+64\lambda^2) \cdot \Big[\frac{44 \cdot 7}{\pi}\Big(\frac{1}{49+(8+\lambda)^2} + \frac{1}{49+(8-\lambda)^2}\Big) + 4$$

$$\cdot \theta(|\lambda| \leq 40)\Big]$$

In [6]:
```
lam = np.arange(-100, 100, 0.1)
sY = sF * (1 + 64 *lam**2)
plot_setup()
plt.plot(lam, sY)
```

Out[6]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x1a96ee4a610>]



б) Для нахождения ковариационной функции используем известную формулу:

$$R_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} s_Y(\lambda) d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}(1+64\lambda^2) \cdot \left[\frac{44\cdot 7}{\pi}\left(\frac{1}{49+(8+\lambda)^2} + \frac{1}{49+(8-\lambda)^2}\right) + 4\cdot\theta(|\lambda| \leq 40)\right] d\lambda =$$

$$= \frac{8sin(40t)}{t} + 256\frac{\left(3200t^2-4\right)\sin(40t) + 160t\cos(40t)}{t^3} -$$

$$-\frac{44\mathrm{e}^{-|7|t}\cdot(14336\pi\sin(8|t|) - 1922\pi\cos(8t))}{\pi} + \frac{128\cdot 44\cdot 7}{\pi}\cdot\delta_0(t)$$

Рассмотрим по отдельности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}(1+64\lambda^2)\cdot\left[\frac{1}{49+(8+\lambda)^2} + \frac{1}{49+(8-\lambda)^2}\right] d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\cdot\frac{\left(128\lambda^4 + 14466\lambda^2 + 226\right)\mathrm{e}^{it\lambda}}{\lambda^4 - 30\lambda^2 + 12769} d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 128 e^{i\lambda t} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\cdot\frac{18306\lambda^2 - 1634206}{\lambda^4 - 30\lambda^2 + 12769} d\lambda =$$

$$= 128\cdot\delta_0(t) - \frac{\mathrm{e}^{-7|t|}\cdot(14336\pi\sin(8|t|) - 1922\pi\cos(8t))}{7}$$

Другая часть интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}(1+64\lambda^2)\cdot\theta(|\lambda|\le 40)d\lambda =$$

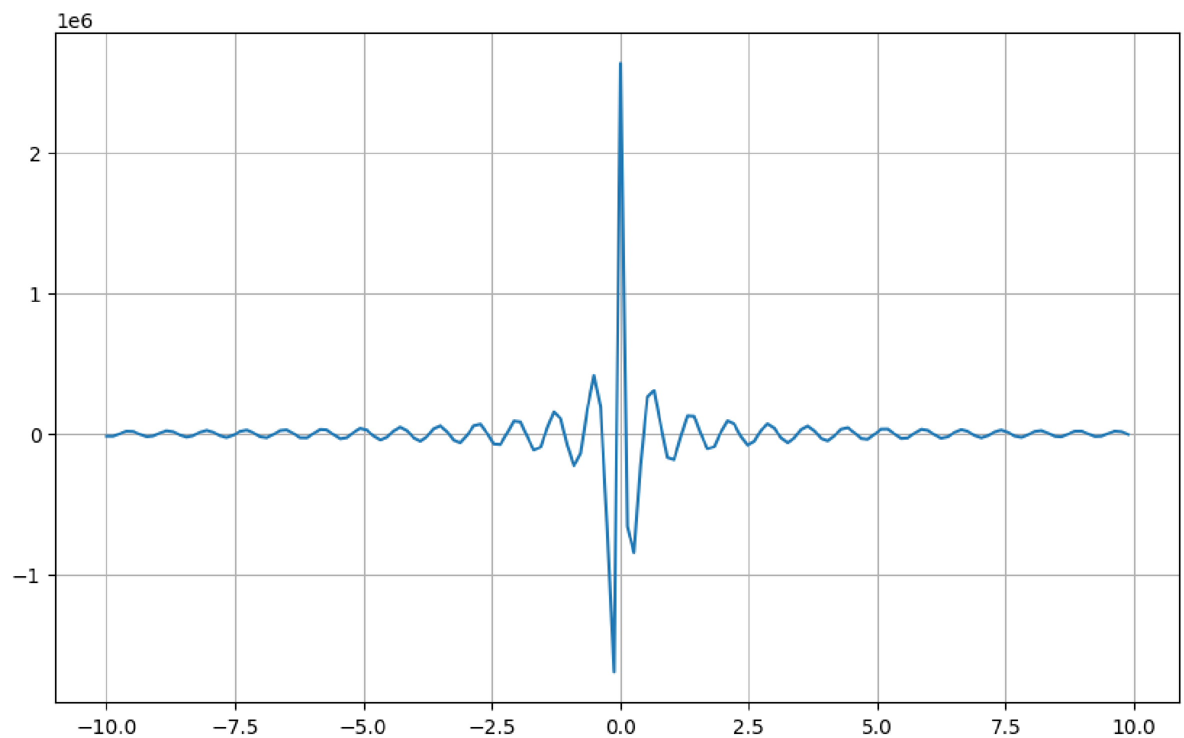
$$= \int_{-40}^{40} e^{i\lambda t}d\lambda + 64\int_{-40}^{40} e^{i\lambda t}\lambda^2 d\lambda =$$

$$= \frac{2sin(40t)}{t} + 64\frac{\left(3200t^2-4\right)\sin(40t)+160t\cos(40t)}{t^3}$$

In [11]:
```
t = np.arange(-10, 10, 0.13)
Rk_func = lambda t: (8 * np.sin(40 * t) / t +
                     64 * ((3200 * t**2 - 4) * np.sin(40 * t) + 160 * t * np.cos(40
                     44 * np.exp(-7 * abs(t)) * (14336 * np.pi * np.sin(8 * abs(t))

Rk = Rk_func(t)
plot_setup()
plt.plot(t, Rk)
```

Out[11]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x1a971532310>]



в) Для нахождения дисперсии используем коваирационную функцию:

Дисперсия не определена, поскольку в ковариационной функции присутствует $\delta_0(t)$:

$$D_Y = R_Y(0) = \infty$$