Лабораторная работа N4

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y.

1.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $a > 0$,

$u(0,y,t) = \cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(\pi,y,t) = (-1)^{\mu_1}\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(x,0,t) = \cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(x,\pi,t) = (-1)^{\mu_2}\cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(x,y,0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$.
2). $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$.
3). $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$.

2.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $a > 0$,

$u(0,y,t) = \cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(\frac{\pi}{2}\mu_1, y, t) = 0$,

$u(x,0,t) = \cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(x, \frac{\pi}{2}\mu_2, t) = 0$,

$u(x,y,0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$.
2). $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$.
3). $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$.

3.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $a > 0$,

$u(0,y,t) = \cosh(y)\exp(-3at)$,

$u(\frac{\pi}{4}, y, t) = 0$,

$u(x,0,t) = \cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,\ln 2,t) = \frac{5}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,y,0) = \cos(2x)\cosh(y).$

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(2x)\cosh(y)\exp(-3at).$

4.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$

$u(0,y,t) = \cosh(y)\exp(-3at),$

$u(\frac{\pi}{4},y,t) = 0,$

$u(x,0,t) = \cos(2x)\exp(-3at),$

$u_y(x,\ln 2,t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,y,0) = \cos(2x)\cosh(y).$

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(2x)\cosh(y)\exp(-3at).$

5.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$

$u(0,y,t) = \sinh(y)\exp(-3at),$

$u(\frac{\pi}{2},y,t) = -\sinh(y)\exp(-3at),$

$u_y(x,0,t) = \cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,\ln 2,t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,y,0) = \cos(2x)\sinh(y).$

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(2x)\sinh(y)\exp(-3at).$

6.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$

$u(0,y,t) = \sinh(y)\exp(-3at),$

$u_x(\frac{\pi}{4},y,t) = -2\sinh(y)\exp(-3at),$

$u_y(x,0,t) = \cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,\ln 2,t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,y,0) = \cos(2x)\sinh(y).$

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(2x)\sinh(y)\exp(-3at).$

7.

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy\sin t,$

$u(0,y,t) = 0,$

$u(1,y,t) = y\cos t,$

$u(x,0,t)=0,$
$u(x,1,t)=x\cos t,$
$u(x,y,0)=xy.$
Аналитическое решение: $U(x,y,t)=xy\cos t$.

8.
$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-xy\sin t,$
$u(0,y,t)=0,$
$u(1,y,t)-u_x(1,y,t)=0,$
$u(x,0,t)=0,$
$u(x,1,t)-u_y(x,1,t)=0,$
$u(x,y,0)=xy.$
Аналитическое решение: $U(x,y,t)=xy\cos t$.

9.
$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sin x\sin y(\mu\cos\mu t+(a+b)\sin\mu t),$
$u(0,y,t)=0,$
$u(\frac{\pi}{2},y,t)=\sin y\sin(\mu t),$
$u(x,0,t)=0,$
$u_y(x,\pi,t)=-\sin x\sin(\mu t),$
$u(x,y,0)=0.$
Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\sin x\sin y\sin(\mu t)$.

1). $a=1, b=1, \mu=1$.
2). $a=2, b=1, \mu=1$.
3). $a=1, b=2, \mu=1$.
4). $a=1, b=1, \mu=2$.

10.
$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sin x\sin y(\mu\cos\mu t+(a+b)\sin\mu t),$
$u(0,y,t)=0,$
$u_x(\pi,y,t)=-\sin y\sin(\mu t),$
$u(x,0,t)=0,$
$u_y(x,\pi,t)=-\sin x\sin(\mu t),$
$u(x,y,0)=0.$
Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\sin x\sin y\sin(\mu t)$.

1). $a=1, b=1, \mu=1$.
2). $a=2, b=1, \mu=1$.
3). $a=1, b=2, \mu=1$.
4). $a=1, b=1, \mu=2$.