

Лабораторная работа 1

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h .

1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x).$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-4\pi^2 at) \sin(2\pi x)$.

2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = x + \sin(\pi x).$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = x + \exp(-\pi^2 at) \sin(\pi x)$

3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, t) = \exp(-at),$$

$$u(\pi, t) = -\exp(-at),$$

$$u(x, 0) = \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-at) \cos x$.

4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0,$$

$$u_x(0, t) = \exp(-at),$$

$$u_x(\pi, t) = -\exp(-at),$$

$$u(x, 0) = \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-at) \sin x$.

5.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(\pi x),$$

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \frac{1}{\pi^2} (1 - \exp(-\pi^2 t)) \sin(\pi x).$

6.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x (\cos t + \sin t),$$

$$u(0, t) = \sin t,$$

$$u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = -\sin t,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \sin t \cos x.$

7.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,5 \exp(-0,5t) \cos x,$$

$$u_x(0, t) = \exp(-0,5t),$$

$$u_x(\pi, t) = -\exp(-0,5t),$$

$$u(x, 0) = \sin x,$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-0,5t) \sin x.$

8.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu, \quad a > 0, \quad c < 0.$$

$$u_x(0, t) = \exp((c - a)t),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \exp((c - a)t),$$

$$u(x, 0) = \sin x,$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp((c - a)t) \sin x.$

9.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$u_x(0, t) - u(0, t) = -\exp(-at)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u_x(\pi, t) - u(\pi, t) = \exp(-at)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u(x, 0) = \cos x,$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-at) \cos(x + bt).$

10.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c < 0.$$

$$u_x(0, t) + u(0, t) = \exp((c - a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u_x(\pi, t) + u(\pi, t) = -\exp((c - a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u(x, 0) = \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp((c - a)t) \sin(x + bt)$.