Лабораторная работа №2 по дисциплине "Математическое моделирование"

Вариант XXII: Сорокин Никита

Задание Б:

Дано нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} - \frac{1}{\sqrt{(x+l)^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-l)^2 + a^2}} = 0$$

Здесь l, a - параметры задачи.

Найти периодическое решение дифференциального уравнения методом Линдштедта в окрестности устойчивого частного решения $x = 0, \dot{x} = 0$ при $l = 1, a = 3$. Для этого следует:

1. Разложить нелинейные функции исследуемого уравнения в ряд по возмущениям $x, \dot{x}$ в окрестности точки покоя $x = 0, \dot{x} = 0$ и удержать члены до третьего порядка включительно. Ввести в уравнения движений малый параметр ε, используя замену переменных $x = \varepsilon y,\ \dot{x} = \varepsilon \dot{y}$, и новое время τ по формуле $\tau = \omega t$, где

   $$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$$

   Получить в явном виде периодическое решение $y = y(\tau),\ \dot{y} = \dot{y}(\tau)$ задачи Коши $y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = 0$ для преобразованного дифференциального уравнения с точностью до членов порядка ε^3. После этого вернуться к старым переменным $x, \dot{x}$ и получить приближенное выражение периодических колебаний в виде $x = x(t),\ \dot{x} = \dot{x}(t)$.

2. С помощью графического калькулятора построить две сравнительные фазовые кривые на плоскости переменных $x,\ \dot{x}$, соответствующие аналитическому (приближенному) решению и строгому решению задачи Коши (полученному на основе численного счета). Рассмотреть два интервала изменения времени t : $t \in [0,\ 10],\ t \in [0, 1/\varepsilon]$. Численные значения параметров и начальных условий таковы: $l = 1,\ a = 3$.

   $$y(0) = 1, \qquad \dot{y}(0) = 0, \qquad \varepsilon = 0.01$$

Решение

Из прошлого задания имеем:

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+9}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+9}}$$

Разложим нелинейную функцию исследуемого уравнения в ряд Тейлора, удерживая члены до третьего порядка:

$$f(x) = f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{1}(x-x^*) + \frac{f''(x^*)}{2}(x-x^*)^2 + \frac{f'''(x^*)}{6}(x-x^*)^3 + O((x-x^*)^4)$$

Найдем производные в точке покоя:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\left((x+1)^2+9\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2x-2}{2\left((x-1)^2+9\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad f'(x*) = \frac{\sqrt{10}}{50}$$

$$f''(x) = -\frac{3(2x+2)^2}{4\left((x+1)^2+9\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{\left((x+1)^2+9\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(2x-2)^2}{4\left((x-1)^2+9\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((x-1)^2+9\right.}$$

$$f''(x*) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{15(2x+2)^3}{8\left((x+1)^2+9\right)^{\frac{7}{2}}} - \frac{9\,(2x+2)}{2\left((x+1)^2+9\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{15(2x-2)^3}{8\left((x-1)^2+9\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{9x-9}{\left((x-1)^2+9\right.}$$

$$f'''(x*) = -\frac{3\sqrt{10}}{200}$$

Подставим $x^* = 0$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{10}}{50}x - \frac{\sqrt{10}}{400}x^3$$

Запишем уравнение движения:

$$\ddot{x} + \frac{\sqrt{10}}{50}x - \frac{\sqrt{10}}{400}x^3 = 0$$

Используем замену $x = \varepsilon y,\ \dot{x} = \varepsilon\dot{y}$ и новое время $\tau = \omega t$. Тогда:

$$\frac{d}{dt} = \omega\frac{d}{d\tau}, \qquad \frac{d^2}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2}{d\tau^2}$$

После замен получаем уравнения вида:

$$\omega^2\varepsilon\frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2} + \frac{\sqrt{10}}{50}\varepsilon y - \frac{\sqrt{10}}{400}\varepsilon^3y^3 = 0$$

Можно сократить на ε:

$$\omega^2 \frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2} + \frac{\sqrt{10}}{50} y - \frac{\sqrt{10}}{400} \varepsilon^2 y^3 = 0$$

Преобразуем уравнению к виду:

$$\omega^2 y'' + \omega_0^2 y = \varepsilon f(y), \quad \omega_0^2 = \frac{\sqrt{10}}{50}$$

Будем искать частоту колебаний и решение задачи Коши в виде ряда по малому параметру:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3,$$
$$y = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau)$$

Подставляем в полученное уравнение:

$$(\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3)^2 (y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau))'' +$$
$$+\omega_0^2 (y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau)) -$$
$$-\frac{\sqrt{10}}{400} \varepsilon^2 (y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau))^3 = 0$$

Сгруппируем члены по степеням ε. Для части без ε:

$$\begin{cases} \omega_0^2 y_0(\tau)'' + \omega_0^2 y_0(\tau) = 0 \\ y_0(0) = a \\ y_0(0)' = 0 \end{cases}$$

Решением задачи является:

$$y_0(\tau) = a \cdot cos(\tau)$$

Для части с ε:

$$\begin{cases} 2\omega_0\omega_1 y_0(\tau)'' + \omega_0^2 y_1(\tau)'' + \omega_0^2 y_1(\tau) = 0 \\ y_1(0) = 0 \\ y_1(0)' = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет вид:

$$\omega_0\omega_1 (a \cdot cos(\tau))'' + \omega_0^2 y_1(\tau)'' + \omega_0^2 y_1(\tau) = 0,$$
$$y_1(\tau)'' + y_1(\tau) = \frac{\omega_1}{\omega_0} a \cdot cos(\tau)$$

При решении этого уравнения возникает резонанс, избавимся от него занулив секулярный член:

$$\omega_1 = 0$$

Решением задачи является:

$$y_1(\tau) = 0$$

Для части с ε^2:

$$\begin{cases} \omega_0^2 y_2(\tau)'' + 2\omega_0\omega_1 y_1(\tau)'' + \left(2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2\right) y_0(\tau)'' + \omega_0^2 y_2(\tau) - \frac{\sqrt{10}}{400} y_0(\tau)^3 = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_2(0)' = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение системы:

$$y_2(\tau)''\omega_0^2 - 2a\cos(\tau)\,\omega_0\omega_2 + y_2(\tau)\,\omega_0^2 - \frac{\sqrt{10}\,a^3\left(\cos^3(\tau)\right)}{400} = 0$$

$$y_2(\tau)'' + y_2(\tau) = \frac{2a\omega_2}{\omega_0}\cos(\tau) + \frac{\sqrt{10}\,a^3\left(\cos^3(\tau)\right)}{400\omega_0^2}$$

$$y_2(\tau)'' + y_2(\tau) = \frac{\left(3200a\omega_0\omega_2 + 3\sqrt{10}\,a^3\right)\cos(\tau)}{1600\omega_0^2} + \frac{\sqrt{10}\,a^3\cos(3\tau)}{1600\omega_0^2}$$

При решении этого уравнения возникает резонанс, избавимся от него занулив секулярный член:

$$\omega_2 = -\frac{3\sqrt{10}\,a^2}{3200\omega_0}$$

Первое уравнение принимает вид:

$$y_2(\tau)'' + y_2(\tau) = \frac{\sqrt{10}\,a^3\cos(3\tau)}{1600\omega_0^2}$$

Решением задачи является:

$$y_2(\tau) = -\frac{\cos(\tau)\left(\sin^2(\tau)\right)\sqrt{10}\,a^3}{3200\omega_0^2}$$

Имеем решение вида $y(\tau) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau)$. Подставим полученный выражения:

$$y(\tau) = a \cdot cos(\tau) - \varepsilon^2 \frac{\cos(\tau)\sin^2(\tau)\sqrt{10}\,a^3}{3200\omega_0^2}$$

Сделаем обратную замену: $\tau = \omega \cdot t$, где $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2$.

$$\omega = \sqrt{\frac{10^{1/2}}{50}} - \varepsilon^2 \frac{3 \cdot 10^{\frac{1}{4}} a^2 \sqrt{2}}{640}, \quad \tau = \left(\sqrt{\frac{10^{1/2}}{50}} - \varepsilon^2 \frac{3 \cdot 10^{\frac{1}{4}} a^2 \sqrt{2}}{640} \right) \cdot t$$

$$y(t) = a \cdot cos(\left(\sqrt{\frac{10^{1/2}}{50}} - \varepsilon^2 \frac{3 \cdot 10^{\frac{1}{4}} a^2 \sqrt{2}}{640} \right) \cdot t)$$

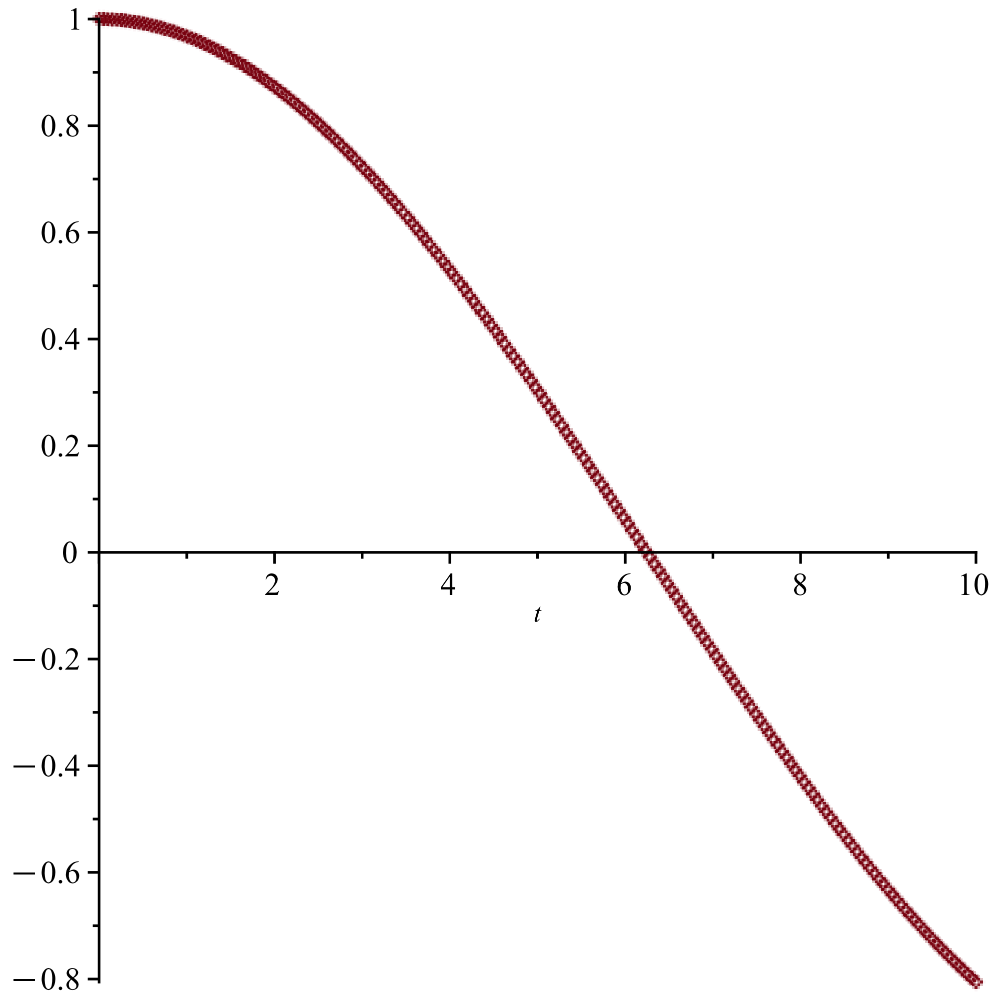
$$- \varepsilon^2 \frac{\cos\left(\left(\sqrt{\frac{10^{1/2}}{50}} - \varepsilon^2 \frac{3 \cdot 10^{\frac{1}{4}} a^2 \sqrt{2}}{640} \right) \cdot t \right) \sin^2\left(\left(\sqrt{\frac{10^{1/2}}{50}} - \varepsilon^2 \frac{3 \cdot 10^{\frac{1}{4}} a^2 \sqrt{2}}{640} \right) \cdot t \right) \sqrt{10}\, a^3}{3200 \omega_0^2}$$

Построим графики в Maple:

$$y(t) := a\cdot\cos\left(\left(\sqrt{\frac{\sqrt{10}}{50}} - \varepsilon^2\cdot\left(-\frac{3\,10^{1/4}\,a^2\sqrt{2}}{640}\right)\right)\cdot t\right) + -\frac{1}{3200\cdot\frac{\sqrt{10}}{50}}\left(\cos\left(\left(\sqrt{\frac{\sqrt{10}}{50}} - \varepsilon^2\cdot\left(-\frac{3\,10^{1/4}\,a^2\sqrt{2}}{640}\right)\right)\cdot t\right)\sin\left(\left(\sqrt{\frac{\sqrt{10}}{50}} - \varepsilon^2\cdot\left(-\frac{3\,10^{1/4}\,a^2\sqrt{2}}{640}\right)\right)\cdot t\right)^2\sqrt{10}\,a^3\right):$$

$$eq := diff(x(t), t, t) - \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+9}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+9}} = 0:$$

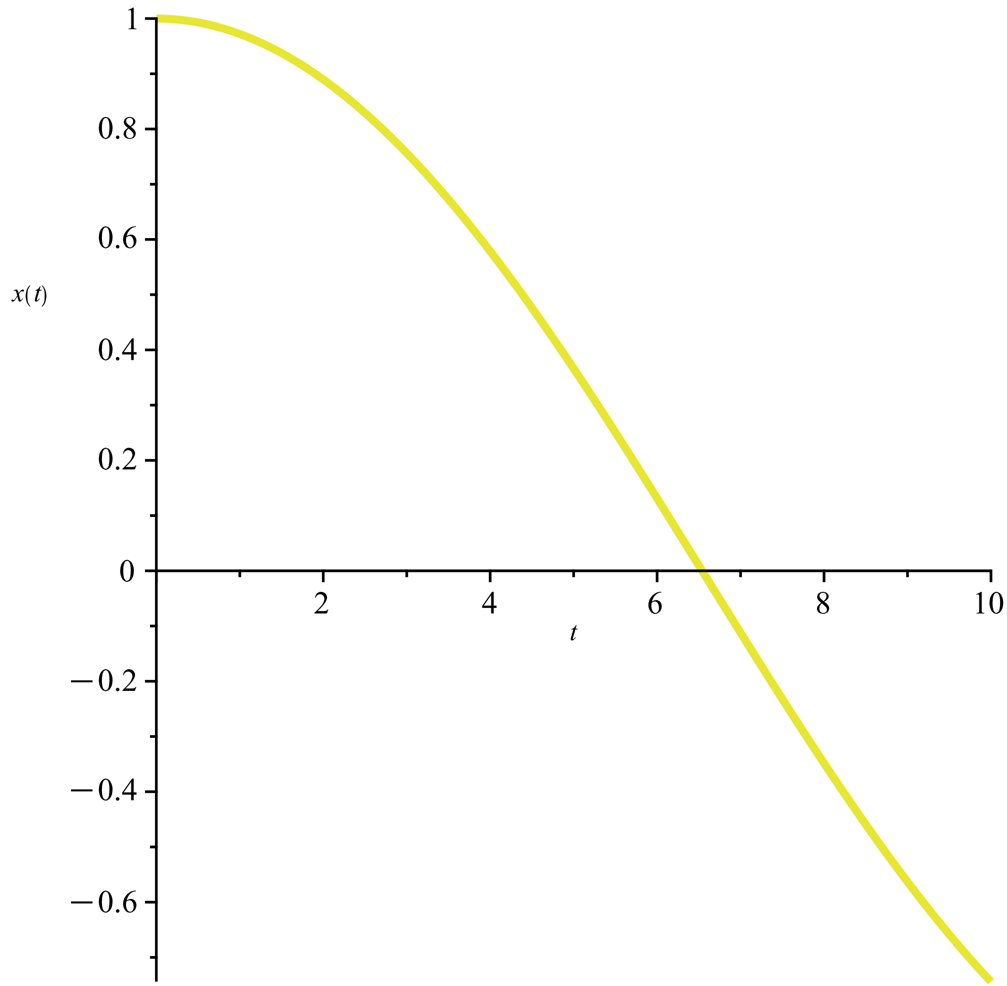
$$a1 := plot(subs(\varepsilon = 0.01,\ a = 1,\ y(t)),\ t = 0..10,\ style = point)$$



$with(DEtools):$

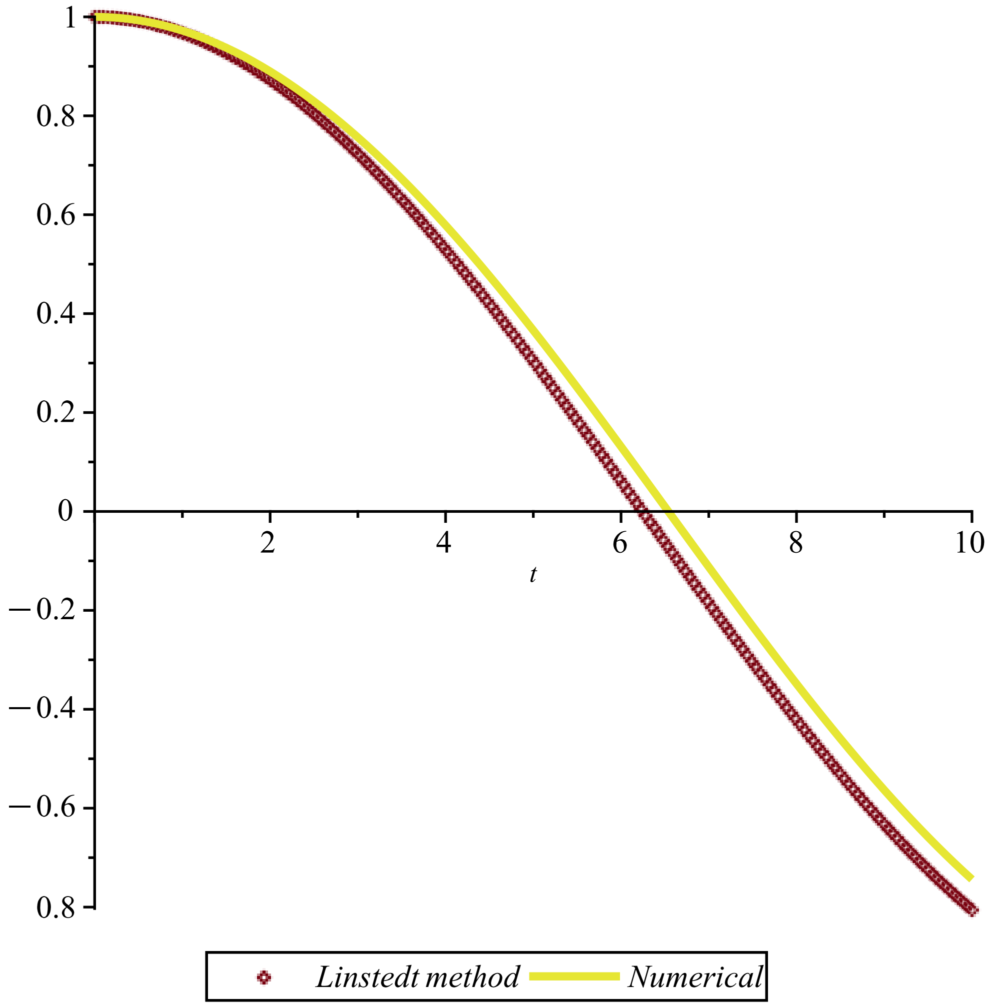
$n1 := DEplot(eq, x(t), t = 0..10, [[x(0) = 1, x'(0) = 0]], stepsize = 0.1)$

```
Warning, x is present as both a dependent variable and a name.
Inconsistent specification of the dependent variable is deprecated,
and it is assumed that the name is being used in place of the
dependent variable.
```

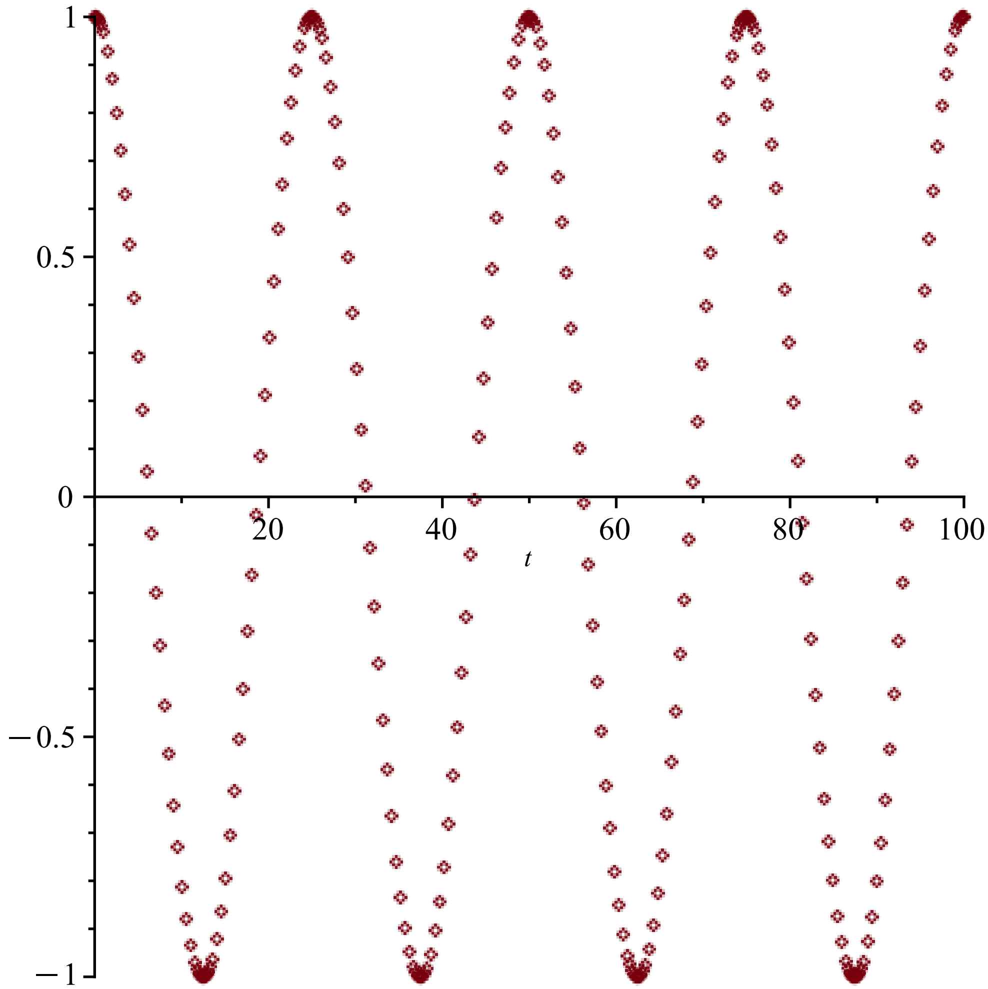


$with(plots):$

$display([a1, n1], legend = ['Linstedt\ method', 'Numerical'])$



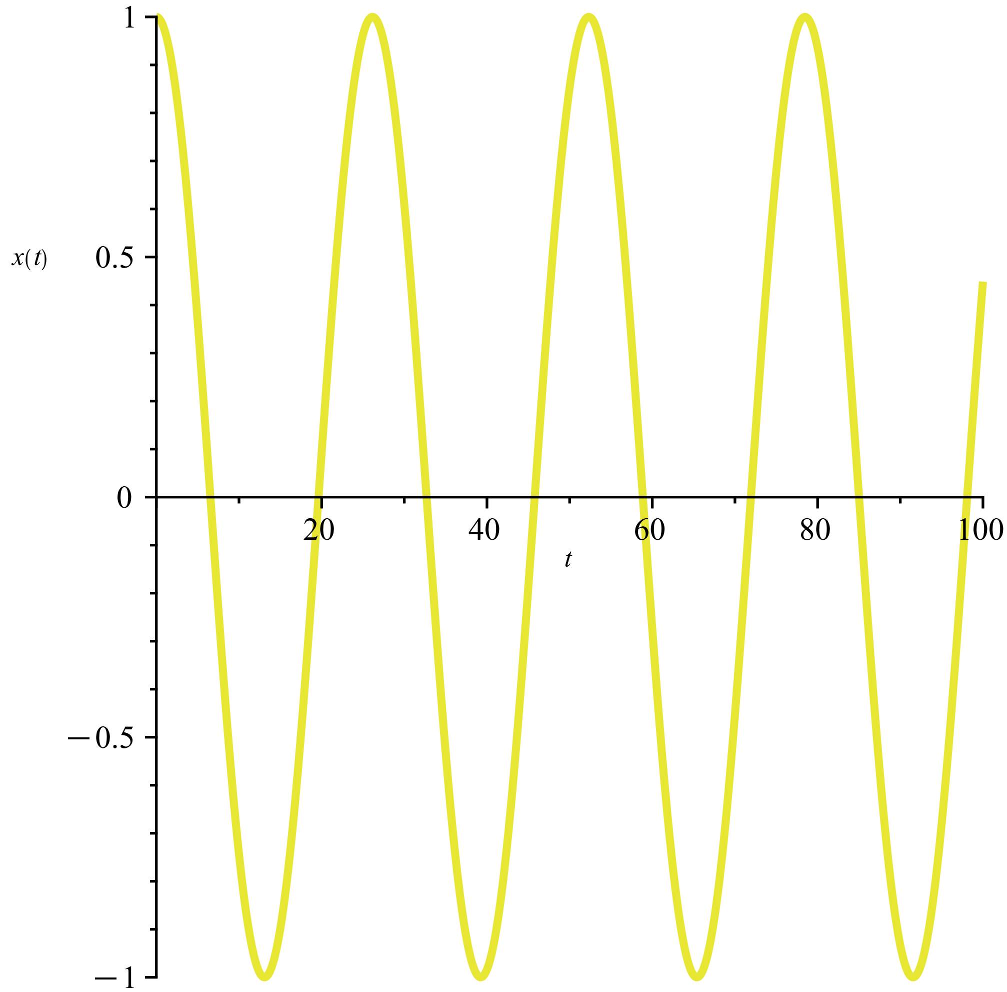
$$a2 := plot\left(subs\left(\varepsilon = 0.01,\ a = 1, y(t)\right), t = 0\,..\,\frac{1}{0.01}, style = point\right)$$



$with(DEtools):$

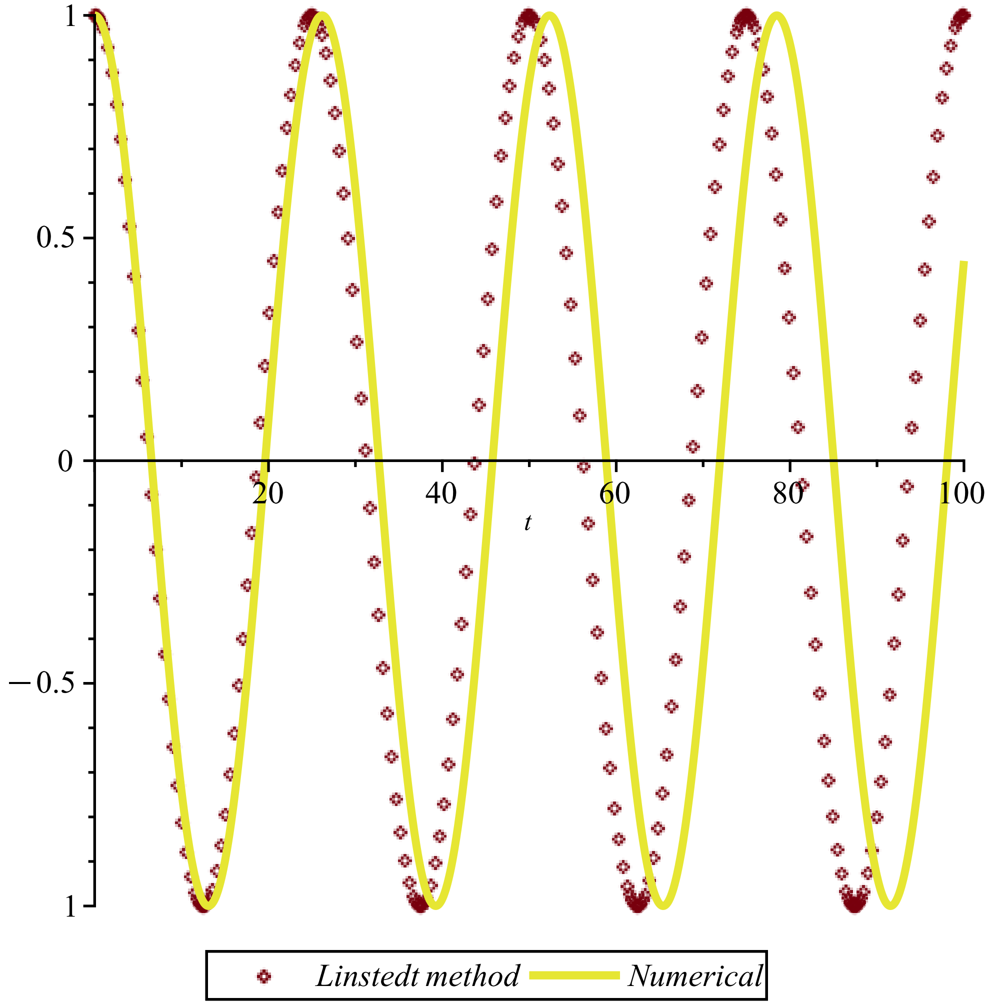
$$n2 := DEplot\left(eq, x(t), t = 0 .. \frac{1}{0.01}, [[x(0) = 1, x'(0) = 0]], stepsize = 0.1\right)$$

Warning, x is present as both a dependent variable and a name. Inconsistent specification of the dependent variable is deprecated, and it is assumed that the name is being used in place of the dependent variable.



with(*plots*) :

display([*a2*, *n2*], *legend* = ['*Linstedt method*','*Numerical*'])



1
0.5
0
−0.5
1
20
40
60
80
100
t
Linstedt method
Numerical