Лабораторная работа №5

Начально-краевые задачи для дифференциального уравнения параболического типа

Сорокин Никита, М8О-403Б-20

Задание

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$.

Вариант 2:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a > 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 1, \\ u(x,0) = x + sin(\pi x) \end{cases}$$

Аналитическое решение:

$$U(x,t) = x + e^{-\pi^2 a t} sin(\pi x)$$

In [47]:
```
import sys
sys.path

sys.path.insert(0, r"c:\Users\никита\Desktop\учеба\чм\modules")
```

In [48]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import time
sns.set()

%matplotlib inline

from LinearAlgebra import *
```

In [49]:
```
a = 1
```

```python
x_begin = 0
x_end = 1

t_begin = 0
t_end = 1

h = 0.1
tau = h**2 / (2 * a**2)
sigma = a**2 * tau / h**2
```

In [50]:
```python
def check_sigma(sigma):
    res = True if sigma <= 1 / 2 else False
    return res

check_sigma(sigma)
```

Out[50]:
```
True
```

Начальные условия:

In [51]:
```python
def solution(x, t, a=1):
    u = x + np.exp(-np.pi**2 * a * t) * np.sin(np.pi * x)
    return u

def phi_0(t, a=1):
    return 0

def phi_1(t, a=1):
    return 1

def psi(x):
    return x + np.sin(np.pi * x)
```

Точное решение

Дано по условию:

In [52]:
```python
def get_analytical_solution(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau, a):

    x = np.arange(x_begin, x_end + h, h)
    t = np.arange(t_begin, t_end + tau, tau)

    res = np.zeros((len(t), len(x)))
    for idx in range(len(x)):
        for idt in range(len(t)):
            res[idt][idx] = solution(x[idx], t[idt], a)

    return res
```

In [53]:
```python
u_exact = get_analytical_solution(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau, a)
```

Явная схема

В исходном уравнении перейдем от производных к их численным приближениям. Вторую производную будем аппроксимировать по значениям нижнего временного слоя.

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(h^2 + \tau)$$

Выразим u_j^{k+1} и получим:

$$u_j^{k+1} = \sigma u_{j-1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + \sigma u_{j+1}^k$$

где $\sigma = \frac{a\tau}{h^2}$

In [54]:
```
def explicit_scheme(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau, a, phi_0, phi_1, psi):

    sigma = a**2 * tau / h**2
    x = np.arange(x_begin, x_end + h, h)
    t = np.arange(t_begin, t_end + tau, tau)
    res = np.zeros((len(t), len(x)))

    res = np.zeros((len(t), len(x)))
    for col_id in range(len(x)):
        res[0][col_id] = psi(x[col_id])

    for row_id in range(1, len(t)):
        res[row_id][0] = phi_0(t[row_id], a)
        for col_id in range(1, len(x)-1):
            res[row_id][col_id] = (
                sigma * res[row_id-1][col_id-1]
                + (1 - 2*sigma) * res[row_id-1][col_id]
                + sigma * res[row_id-1][col_id+1]
            )

        res[row_id][-1] = phi_1(t[row_id], a)

    return res
```

In [55]:
```
u_explicit = explicit_scheme(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau, a, phi_0, phi_
```

Неявная схема

В исходном уравнении перейдем от производных к их численным приближениям. Вторую производную будем аппроксимировать по значениям верхнего временного слоя:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2 + \tau)$$

Выражаем u_j^{k+1} и получаем СЛАУ для трехдиагональной матрицы, которую можно решать методом прогонки написанным ранее:

$$\begin{cases} b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = d_1, \quad j = 1, \\ a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = 2 \dots N-2, \\ a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} + b_{N-1} u_{N-1}^{k+1} = d_{N-1}, \quad j = N-1. \end{cases}$$

$$a_j = c_j = \sigma \tag{1}$$
$$b_j = -(1 + 2\sigma) \tag{2}$$
$$d_j = -u_j^k, \quad j = 2 \dots N-2 \tag{3}$$
$$d_1 = -(u_1^k + \sigma\phi_0(t^{k+1})) \tag{4}$$
$$d_{N-1} = -(u_{N-1}^k + \sigma\phi_1(t^{k+1})) \tag{5}$$

In [56]:
```
def implicit_scheme(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau, a, phi_0, phi_1, psi):

    sigma = a**2 * tau / h**2
    x = np.arange(x_begin, x_end + h, h)
    t = np.arange(t_begin, t_end + tau, tau)
    res = np.zeros((len(t), len(x)))

    for col_id in range(len(x)):
        res[0, col_id] = psi(x[col_id])

    for row_id in range(1, len(t)):
        A = np.zeros((len(x) - 2, len(x) - 2))

        A[0, 0] = -(1 + 2 * sigma)
        A[0, 1] = sigma
        for i in range(1, len(A) - 1):
            A[i, i-1] = sigma
            A[i, i] = -(1 + 2 * sigma)
            A[i, i+1] = sigma
        A[-1, -2] = sigma
        A[-1, -1] = -(1 + 2 * sigma)

        b = -res[row_id - 1, 1:-1]
        b[0] -= sigma * phi_0(t[row_id])
        b[-1] -= sigma * phi_1(t[row_id])

        res[row_id, 0] = phi_0(t[row_id])
        res[row_id, -1] = phi_1(t[row_id])
        res[row_id, 1:-1] = sweep_method(A, b)

    return res
```

In [57]:
```
u_implicit = implicit_scheme(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau, a, phi_0, phi_
```

Схема Кранка-Николсона

Рассмотрим неявно-явную схему с весами для простейшего уравнения теплопроводности:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + (1-\theta)a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}$$

При $\theta = \frac{1}{2}$ имеем схему Кранка-Николсона.

Аналогично неявной схеме:

$$\begin{cases} b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = d_1, \quad j = 1, \\ a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = 2 \dots N-2, \\ a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} + b_{N-1} u_{N-1}^{k+1} = d_{N-1}, \quad j = N-1. \end{cases}$$

$$a_j = c_j = \sigma\theta \tag{6}$$

$$b_j = -(1 + 2\sigma\theta) \tag{7}$$

$$d_j = -(u_j^k + (1-\theta)\sigma(u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k)), \quad j = 2 \dots N-2 \tag{8}$$

$$d_1 = -(u_1^k + \sigma\phi_0(t^{k+1}) - (1-\theta)\sigma(u_2^k - 2u_1^k + u_0^k)) \tag{9}$$

$$d_{N-1} = -(u_{N-1}^k + \sigma\phi_1(t^{k+1}) - (1-\theta)\sigma(u_N^k - 2u_{N-1}^k + u_{N-2}^k)) \tag{10}$$

Это трехдиагональная СЛАУ, которую можно решить методом прогонки.

In [58]:
```
def crank_nickolson_scheme(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau, a, phi_0, phi_1,

    sigma = a**2 * tau / h**2
    x = np.arange(x_begin, x_end + h, h)
    t = np.arange(t_begin, t_end + tau, tau)
    res = np.zeros((len(t), len(x)))

    for col_id in range(len(x)):
        res[0, col_id] = psi(x[col_id])

    for row_id in range(1, len(t)):
        A = np.zeros((len(x) - 2, len(x) - 2))

        A[0, 0] = -(1 + 2 * sigma * theta)
        A[0, 1] = sigma * theta
        for i in range(1, len(A) - 1):
            A[i, i - 1] = sigma * theta
            A[i, i] = -(1 + 2 * sigma * theta)
            A[i, i + 1] = sigma * theta
        A[-1, -2] = sigma * theta
        A[-1, -1] = -(1 + 2 * sigma * theta)

        b = np.array([-(res[row_id-1, i] + (1-theta) * sigma * (res[row_id-1][i-1]
        b[0] -= sigma * theta * phi_0(t[row_id])
        b[-1] -= sigma * theta * phi_1(t[row_id])

        res[row_id, 0] = phi_0(t[row_id])
        res[row_id, -1] = phi_1(t[row_id])
        res[row_id, 1:-1] = sweep_method(A, b)
```

```python
    return res
```

In [59]:
```python
u_crank_nickolson = crank_nickolson_scheme(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau,
```

Полученные результаты

Графики:

In [60]:
```python
u_explicit[:, 0].shape
```

Out[60]: (201,)

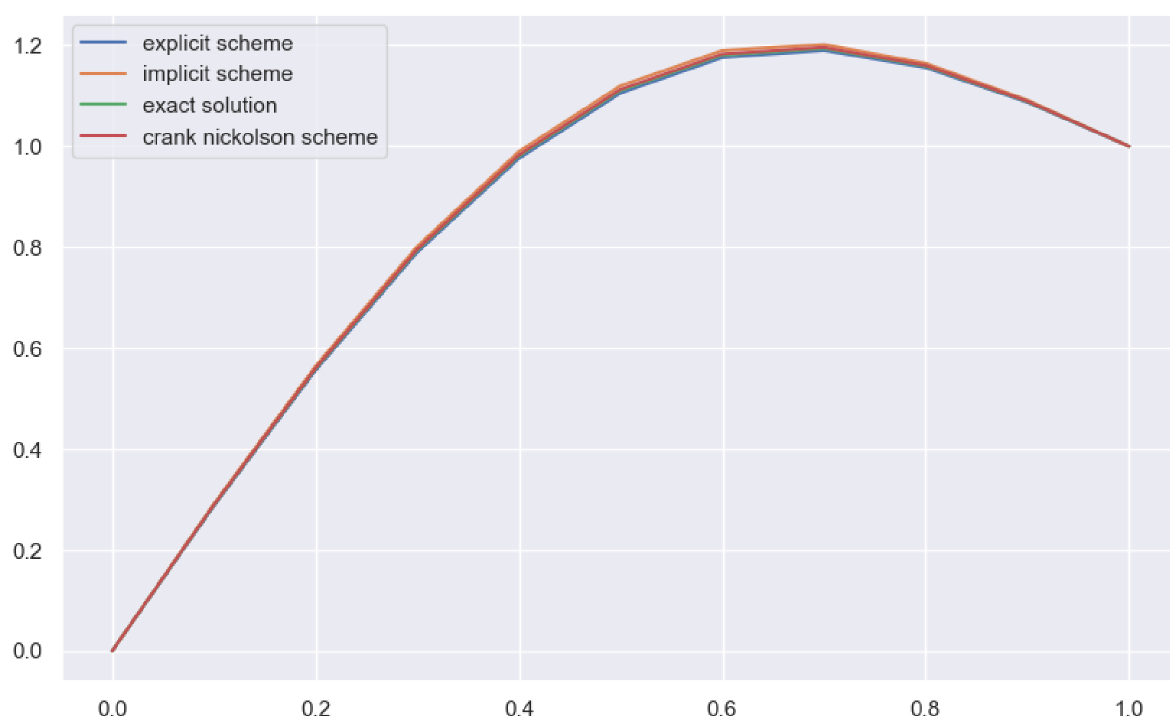
In [61]:
```python
fig, axs = plt.subplots(figsize=(10, 6))

x = np.arange(x_begin, x_end + h, h)

i = 10
line1, = axs.plot(x, u_explicit[i, :], label="explicit scheme")
line2, = axs.plot(x, u_implicit[i, :], label="implicit scheme")
line3, = axs.plot(x, u_exact[i, :], label="exact solution")
line4, = axs.plot(x, u_crank_nickolson[i, :], label="crank nickolson scheme")

plt.legend()
```

Out[61]: <matplotlib.legend.Legend at 0x2c19f993510>



Функция для вычисления погрешности - максимального модуля ошибки

In [62]:
```python
def max_abs_error(A, B):
    assert A.shape == B.shape
```

```
    return abs(A - B).max()
```

И среднего модуля ошибки:

In [63]:
```
def mean_abs_error(A, B):
    assert A.shape == B.shape
    return abs(A - B).mean()
```

In [64]:
```
def print_errors(h=0.01):

    tau = h**2 / (2 * a**2)
    sigma = a**2 * tau / h**2

    u_exact = get_analytical_solution(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau, a)
    u_explicit = explicit_scheme(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau, a, phi_0,
    u_implicit = implicit_scheme(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, tau, a, phi_0,
    u_crank_nickolson = crank_nickolson_scheme(x_begin, x_end, t_begin, t_end, h, t

    print(f'h = {h} \n')

    print(f'u_explicit mean abs error: {mean_abs_error(u_exact, u_explicit)}')
    print(f'u_explicit max abs error: {max_abs_error(u_exact, u_explicit)} \n')

    print(f'u_implicit mean abs error: {mean_abs_error(u_exact, u_implicit)}')
    print(f'u_implicit max abs error: {max_abs_error(u_exact, u_implicit)} \n')

    print(f'u_crank_nickolson mean abs error: {mean_abs_error(u_exact, u_crank_nick
    print(f'u_crank_nickolson max abs error: {max_abs_error(u_exact, u_crank_nickol
```

In [65]:
```
h1 = 0.1
print_errors(h1)
```

```
h = 0.1

u_explicit mean abs error: 0.0009607639976331366
u_explicit max abs error: 0.0061635046169227214

u_implicit mean abs error: 0.0018931477373606352
u_implicit max abs error: 0.011849648722166206

u_crank_nickolson mean abs error: 0.0004662839783366718
u_crank_nickolson max abs error: 0.0029542842651493206
```

In [66]:
```
h2 = 0.05
print_errors(h2)
```

```
h = 0.05

u_explicit mean abs error: 0.00025227508109572084
u_explicit max abs error: 0.0015197269734945618

u_implicit mean abs error: 0.0005026721251518475
u_implicit max abs error: 0.0030096056866816268

u_crank_nickolson mean abs error: 0.00012520444550339287
u_crank_nickolson max abs error: 0.0007519292135637068
```

Вывод

В данной работе я научился решать начально-краевые задачи для ДУ параболического типа тремя способами:

- с помощью явной конечно-разностной схемы
- с помощью неявной конечно-разностной схемы
- с помощью схемы Кранка-Николсона

С помощью каждого метода получилось решить заданное ДУ с приемлемой точностью.

В ходе работы я выявил плюсы и минусы изученных алгоритмов.

Явная конечно-разностная схема легко считается, но она не всегда устойчива и, соответственно, не всегда гарантирует адекватный результат.

Неявная схема абсолютно устойчива, но она требует больших вычислительных затрат - приходится решать много СЛАУ.

Схема Кранка-Николсона "комбинирует" предыдущие схемы, поэтому имеет наименьшую погрешность. Но при этом она по-прежнему использует сложные вычисления.