Seoul National University

# - 일반통계학 -
# 제 9장
# 분산분석

# 9-1 분산분석

1.1 분산분석( Analysis of variance: ANOVA)이란

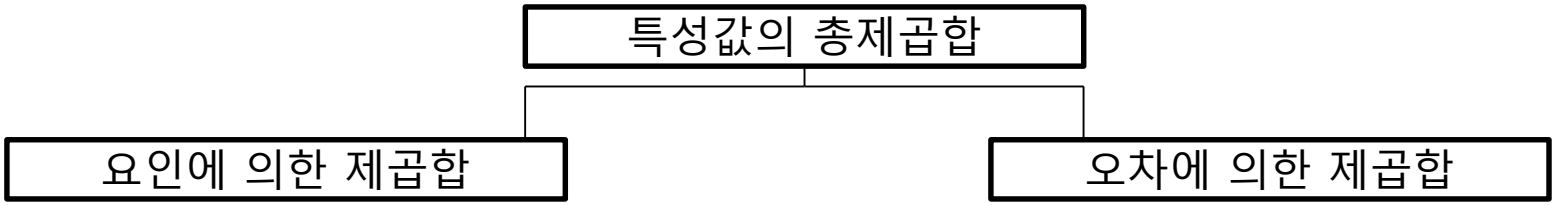
(1) 두 모평균의 차에 대한 검정(6장)의 확장으로 3개 이상의 모평균의 차에 대한 비교를 위한 대표적인 방법

(2) 특성값의 분산 또는 변동을 분석하는 방법

(3) 특성값의 변동을 제곱합으로 나타내고, 이 제곱합을 실험에 관련된 요인별로 분해하여, 오차에 비해 큰 영향을 주는 요인이 무엇인가를 찾아내는 분석 방법

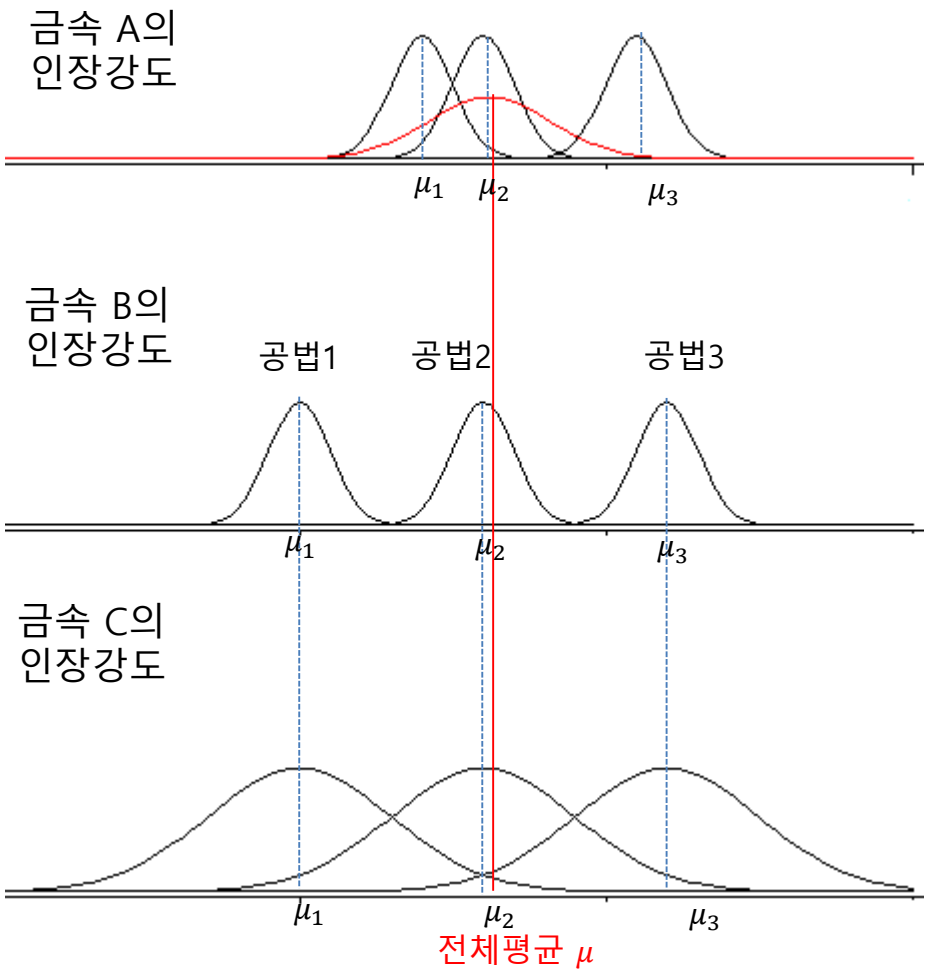
(예제) 금속 가공품의 인장강도가 여러 공법에 따라 차이를 보이는가?

- 인장강도 : 특성값
- 공법 : 요인
- 작업자들의 능률차이와 같이 인장강도에 영향을 주지만 아직 원인이 규명되지 않은 부분 : 오차



# 9-1 분산분석

Q. 모평균의 차이에 대한 귀무가설 가설 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$를 검정하는데 왜 분산(변동)을 비교할까?




금속 B는 공법별로 인장강도의 평균에 차이가 있다.
금속 C는 공법별로 인장강도의 평균에 차이가 있다고 단정하기 어려움.

-공법별 분포에서 겹치는 부분이 많음.

-공법 3에는 공법 2보다 인강장도가 낮은 값들이 적지않고 공법2에도 공법1보다 인장강도가 낮은 값들이 많이 있음.

평균들간의 차이 뿐만 아니라 집단에 속한 값들의 집단내 분산이 집단 간 평균의 차이에 대한 판단에 영향을 미치고 있음.

공법 평균들 간의 분산이 크면 클수록 반면에 공법내 분산은 작으면 작을수록, 공법 간 평균의 차이가 분명함을 알 수 있음.

금속 A는 공법내 분산은 금속B처럼 작으나 공법 평균들간의 분산 또한 작아서 공법별 분포에서 많은 부분이 서로 중복되어 공법별 평균인장강도에 대한 차이가 명확하다고 단정하기 어렵다.

출처 : 이영훈의 연구방법론

# 9-2 일원배치법 (One-way ANOVA)

2.1 통계적 실험

(1) 실험단위와 처리

실험이 행해지는 개체를 **실험단위**라 하고, 각각의 실험단위에 특정한 실험환경 또는 실험조건을 가하는 것을 **처리**라고 한다.

(2) 반응변수와 인자 및 인자수준

통계적 실험에서, 실험환경이나 실험조건을 나타내는 변수를 인자라 하고, 이에 대한 반응을 나타내는 변수를 **반응변수**하고 한다. 인자가 취하는 값을 그 **인자의 수준**이라고 한다.

2.2 일원배치법

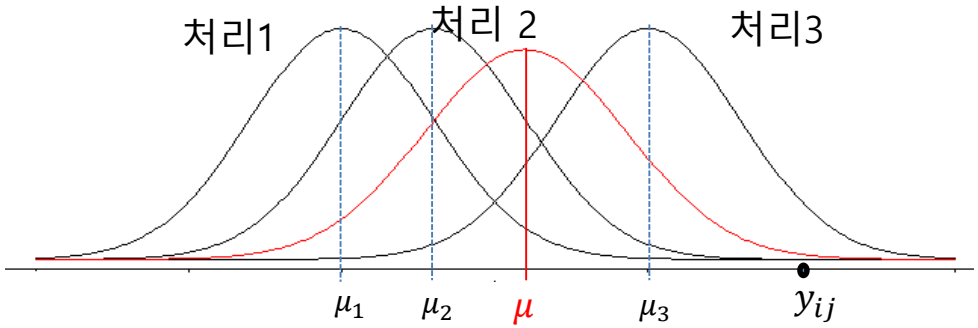
- 특성값에 대한 한 종류의 인자만의 영향을 조사하고자 할 때 사용
- 3개이상의 처리효과를 비교
- 각 수준에서의 반복수는 같지 않아도 좋으며 보통 3~5수준, 반복수 3~10을 사용
- 실험이 랜덤하게 선택된 순서에 의해 시행되어야 하므로 완전랜덤화계획이라고도 함.

(예) 금속가공품의 인장강도에 차이가 있는지의 여부를 검토하고 공법이 좋은가를 알고 싶을 때 사용함.

# 9-2 일원배치법

## 2.3 일원배치법의 자료구조

| | 처리1 | 처리2 | ... | 처리 $k$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $y_{11}$ | $y_{21}$ | | $y_{k1}$ | |
| | $y_{12}$ | $y_{22}$ | | $y_{k2}$ | |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| | $y_{1n_1}$ | $y_{2n_2}$ | | $y_{kn_k}$ | |
| 평균 | $\bar{y}_{1.}$ | $\bar{y}_{2.}$ | | $\bar{y}_{k.}$ | 총평균$\bar{y}_{..}$ |




모형: $Y_{ij} = \mu_i + e_{ij} = \mu + (\mu_i - \mu) + e_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}, i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, n_i, N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ ,
$\mu = \sum_{i=1}^{k} n_i \mu_i / N$: 처리효과 전체의 모평균, $\alpha_i$ : i번째 처리효과

# 9-2 일원배치법

- 일원배치법의 모형

$$\begin{cases} Y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n_i \\ e_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{이고 서로 독립} \\ \sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i = 0 \end{cases}$$

- 총편차의 분해식

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.})$$

- 총제곱합의 분해식

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$$

$$\text{SST}\ (N-1) \qquad = SStr\ (k-1) \qquad + SSE(N-k)$$

총제곱합 = 처리제곱합(급간제곱합)+잔차제곱합(급내제곱합)

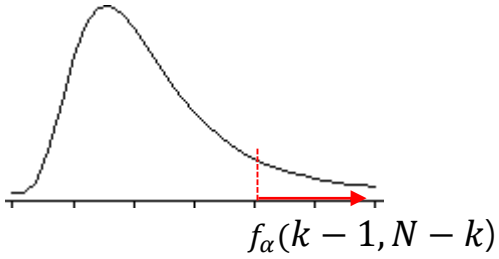
# 9-2 일원배치법

- 처리효과의 유의성에 대한 가설

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \ (\Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = 0)$ vs $H_1$: 적어도 한 $\alpha_i$는 0이 아니다.

- 처리효과가 유의하다면, 총제곱합 중에서 처리제곱합이 차지하는 비중이 커지고 잔차제곱합이 차지하는 비중이 작아질 것이다. 즉, F=MStr/MSE의 값이 커질 수록 처리효과가 유의하다는 증거가 강해지는 것이다. (MStr=SStr/ $(k-1)$, MSE=SSE/(N $-k$) )

- 귀무가설 $H_0$가 사실일 때, F=MStr/MSE~$F(k-1, N-k)$



# 9-2 일원배치법

- 분산분석표

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 평균제곱 | F값 | 유의확률 |
|---|---|---|---|---|---|
| 처리 | SStr | $k-1$ | MStr=SStr/$(k-1)$ | f=MStr/MSE | $P(F \geq f)$ |
| 잔차 | SSE | $N-k$ | MSE=SSE/$(N-k)$ | | |
| 계 | SST | $N-1$ | | | |

(예제) 3곳의 자동차회사에서 생산한 경승용차의 리터 당 평균주행거리를 비교하고자 한다. 같은 조건하에서 실시한 주행거리실험 결과 다음과 같다. 3곳의 자동차회사에서 생산한 경승용차의 리터 당 평균주행거리간에 차이가 있는지 유의수준 5%에서 검정하여라.

| | A자동차 | B자동차 | C자동차 | |
|---|---|---|---|---|
| | 16.5 | 15.3 | 19 | |
| | 18 | 14.8 | 18.4 | |
| | 14.1 | 16.1 | 15.3 | |
| | 17.8 | | 17.3 | |
| 평균 | 16.6 | 15.4 | 17.5 | 16.6 |

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 평균제곱합 | F값 |
|---|---|---|---|---|
| 처리 | | | | |
| 오차 | | | | |
| 전체 | 26.02 | | | |

$f_{0.05}(2,8) = 4.46$

# 9-2 일원배치법

(예제) 어떤 직물의 가공시 처리액의 농도가 직물의 인장강도에 영향을 미치는지의 여부를 조사하기 위해, 네 가지 농도에서 반복 각 5회, 총 20회를 랜덤하게 처리한 후 인장강도를 측정한 결과가 아래와 같다. 이 자료에 대하여 일원배치법의 모형을 적용할 때, 농도에 따른 인장강도에 차이가 있는지를 알아보기 위한 분산분석표를 작성하고 적절한 가설을 유의수준 5%에서 검정하여라.

| | A | B | C | D | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 47 | 51 | 50 | 22 | |
| | 58 | 62 | 38 | 23 | |
| | 51 | 31 | 47 | 28 | |
| | 61 | 46 | 27 | 42 | |
| | 46 | 49 | 23 | 25 | |
| 평균 | 52.6 | 47.8 | 37.0 | 28.0 | 총평균 41.35 |

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 평균제곱 | F값 | 유의확률 |
|---|---|---|---|---|---|
| 처리 | 1826.55 | 3 | | | 0.0045 |
| 잔차 | | | | | |
| 계 | 3334.55 | | | | |

$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}, i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 5$

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ VS $H_1$: 적어도 한 $\alpha_i$는 0이 아니다.

# 9-2 일원배치법

- **분산분석의 기본 가정**

1. 모집단은 정규분포를 따른다.
2. 모집단은 동일한 분산을 갖는다.
3. 모든 표본은 서로 독립적으로 추출한다.

- **분산 분석을 하지 않고 두 평균에 대한 t-test를 반복 시행한다면**…

1. 두 개씩 쌍을 이루어 계산하므로 복잡해진다.
2. 제 1종 오류가  증가하게 된다.

# 9-3 반복이 없는 이원배치법 (요인이 2개)

3.1 반복이 없는 이원배치법의 자료구조

| 인자 B / 인자 A | $B_1$ | … | $B_j$ | … | $B_q$ | 평균 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $y_{11}$ | … | $y_{1j}$ | … | $y_{1q}$ | $\bar{y}_{1.}$ |
| ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| $A_i$ | $y_{i2}$ | … | $y_{ij}$ | … | $y_{iq}$ | $\bar{y}_{i.}$ |
| ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| $A_p$ | $y_{p1}$ | … | $y_{pj}$ | … | $y_{pq}$ | $\bar{y}_{p.}$ |
| 평균 | $\bar{y}_{.1}$ | … | $\bar{y}_{.j}$ | | $\bar{y}_{.q}$ | 총평균$\bar{y}_{..}$ |

- 이원배치법에서 완전랜덤화계획 : $pq$회의 실험을 랜덤하게 선택된 순서에 의하여 시행하는 것

# 9-3 반복이 없는 이원배치법

- 이원배치법의 모형

$$\begin{cases} Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q \\ e_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{이고 서로 독립} \\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0 \ , \sum_{j=1}^{q} \beta_j = 0 \end{cases}$$

$\alpha_i$ : 인자 A의 i번째 처리효과, $\beta_j$ : 인자 B의 j번째 처리효과

- 총편차의 분해식

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})$$

- 총제곱합의 분해식

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = q\sum_{i=1}^{p}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + p\sum_{j=1}^{q}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$

$$\text{SST } (pq-1) \quad = SStr_A\,(p-1) \quad + SStr_B\,(q-1) + SSE(p-1)\,(q-1)$$

총제곱합 = 요인 A의 제곱합 + 요인 B의 제곱합 +잔차제곱합

# 9-3 반복이 없는 이원배치법

- 분산분석표

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 평균제곱 | F값 | 유의확률 |
|---|---|---|---|---|---|
| 인자A | $SStr_A$ | $p-1$ | $MStr_A$=$SStr_A$/(p − 1) | $f_1$=$MStr_A$/MSE | $P(F \geq f_1)$ |
| 인자B | $SStr_B$ | $q-1$ | $MStr_B$ =$SStr_B$/(p − 1) | $f_2$=$MStr_B$/MSE | $P(F \geq f_2)$ |
| 잔차 | SSE | $(p-1)\ (q-1)$ | MSE=SSE/(p − 1)$(q-1)$ | | |
| 계 | SST | $pq-1$ | | | |

- 인자 $A$의 유의성 검정 − $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$ vs $H_1$: 적어도 한 $\alpha_i$는 0이 아니다.
- 인자 $B$의 유의성 검정 − $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0$ vs $H_1$: 적어도 한 $\beta_j$는 0이 아니다.
- 귀무가설 $H_0$ 하에서

$F = MStr_A/\text{MSE} \sim F\big(p-1, (p-1)(q-1)\big),\ F = MStr_B/\text{MSE} \sim F\big(q-1, (p-1)(q-1)\big)$

# 9-3 반복이 없는 이원배치법

(예제) 지역과 비료의 종류에 따라 토마토 생산량에 차이가 있는지를 확인하기 위하여 4개 지역에서 각각 A,B,C 세 종류의 비료를 적용시킨 후에 생산량을 조사한 결과 다음의 자료를 얻었다. 지역과 비료의 종류에 따라 토마토 생산량에 차이가 있는지를 유의수준 5%에서 검정하여라

| 지역 \ 비료 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 지역1 | 42.8 | 52.3 | 48.2 |
| 지역2 | 38.6 | 43.5 | 40.3 |
| 지역3 | 50.2 | 58.7 | 53.5 |
| 지역4 | 48.2 | 50.8 | 51.2 |

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 평균제곱 | F 값 |
|---|---|---|---|---|
| 인자A | 280.909 | | 93.636 | 30.42 |
| 인자B | 81.352 | | 40.676 | 13.21 |
| 잔차 | 18.468 | | 3.078 | |
| 계 | 380.729 | 11 | | |

$F(0.05,\ 2,6)=5.14,\ F(0.05,\ 3,6)=4.76$

# 9-4 반복이 있는 이원배치법

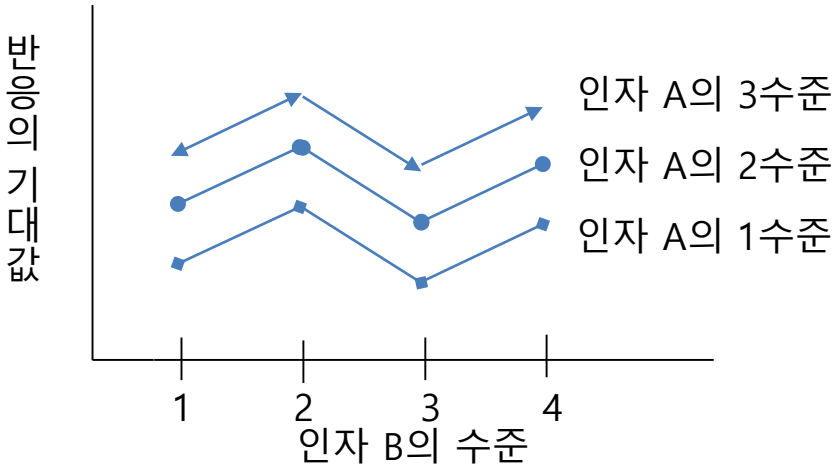
## 4.1 반복이 있는 이원배치법의 자료구조

| 인자 A \ 인자 B | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_q$ | 평균 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $y_{111}$ | $y_{121}$ | … | $y_{1q1}$ | $\bar{y}_{1..}$ |
| | $y_{112}$ | $y_{122}$ | … | $y_{1q2}$ | |
| | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | |
| | $y_{11r}$ | $y_{12r}$ | … | $y_{1qr}$ | |
| | $\bar{y}_{11.}$ | $\bar{y}_{12.}$ | | $\bar{y}_{1q.}$ | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_p$ | $y_{p11}$ | $y_{p21}$ | … | $y_{pq1}$ | $\bar{y}_{p..}$ |
| | $y_{p12}$ | $y_{p22}$ | … | $y_{pq2}$ | |
| | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | |
| | $y_{p1r}$ | $y_{p2r}$ | … | $y_{pqr}$ | |
| | $\bar{y}_{p1.}$ | $\bar{y}_{p2.}$ | | $\bar{y}_{pq.}$ | |
| 평균 | $\bar{y}_{.1.}$ | $\bar{y}_{.2.}$ | | $\bar{y}_{.q.}$ | 총평균$\bar{y}_{...}$ |

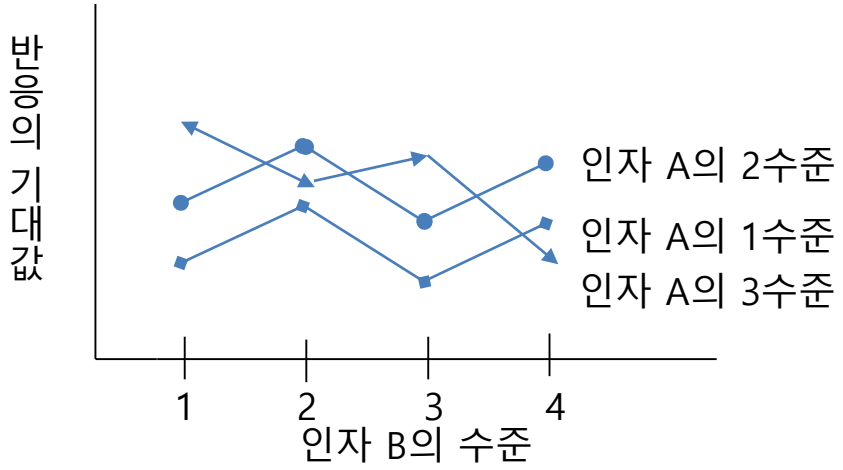
- 반복이있는이원배치법에서완전랜덤화계획:$pqr$회의실험을랜덤하게선택된순서에의하여시행하는것
- 인자수준의조합에서생기는효과인교호작용을분리하여구할수있다. 교호작용은인자A의효과가인자B의수준의변화에따라변하는모형에서존재한다.

# 9-4 반복이 있는 이원배치법

- 반복이 없는 이원배치법의 모집단 모형에서 $E(e_{ij}) = 0$이므로 $E(Y_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$ 가 된다. $(\mu + \alpha_1 + \beta_j) - (\mu + \alpha_2 + \beta_j) = \alpha_1 - \alpha_2$ 가 되어 인자 A의 각 수준에서의 기댓값의 차이는 인자 B의 수준에 무관하게 된다. 이를 그림으로 나타내면 A의 각 수준을 연결하는 선분들이 평행하면 두 인자 A,B 사이에 교호작용이 존재하지 않음을 뜻하게 된다. A의 각 수준에서의 기대값의 차이가 B의 수준에 따라 변하게 될 때 A와 B는 교호작용이 있다고 하며 이 경우에는 반복이 없는 이원배치법을 사용해서는 안된다.




교호작용이 없는 경우




교호작용이 있는 경우

# 9-4 반복이 있는 이원배치법

- 이원배치법의 모형 (반복이 있는 경우)

$$\begin{cases} Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q, k = 1, \dots, r \\ e_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \text{이고 서로 독립} \\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0 \ , \sum_{j=1}^{q} \beta_j = 0 \ , \sum_{i=1}^{p} \gamma_{ij} = 0 \ , \sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij} = 0 \end{cases}$$

$\alpha_i$ : 인자 A의 i번째 처리효과, $\beta_j$ : 인자 B의 j번째 처리효과, $\gamma_{ij}$: 인자 A의 i번째 수준과 인자 B의 j번째 수준의 교호작용 효과

- 총편차의 분해식

$$y_{ijk} - \bar{y}_{\dots} = (\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\dots}) + (\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\dots}) + (\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\dots}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})$$

- 총제곱합의 분해식

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk} - \bar{y}_{\dots})^2 = qr\sum_{i=1}^{p}(\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\dots})^2 + pr\sum_{i=1}^{q}(\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\dots})^2 +$$

$$r\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\dots})^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2$$

$$\text{SST } (pqr - 1) = SStr_A\ (p - 1) \quad + SStr_B\ (q - 1) + SStr_{A\times B}(p - 1)\ (q - 1) + SSE\ pq(r - 1)$$

총제곱합= 요인 A의 제곱합 + 요인 B의 제곱합 + **교호작용 제곱합**+오차제곱합

# 9-4 반복이 있는 이원배치법

- 분산분석표

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 평균제곱 | F값 | 유의확률 |
|---|---|---|---|---|---|
| 인자A | $SStr_A$ | $p-1$ | $MStr_A$=$SStr_A$/(p − 1) | $f_1$=$MStr_A$/MSE | $P(F \geq f_1)$ |
| 인자B | $SStr_B$ | $q-1$ | $MStr_B$ =$SStr_B$/(p − 1) | $f_2$=$MStr_B$/MSE | $P(F \geq f_2)$ |
| 교호작용 | $SStr_{A\times B}$ | $(p-1)\ (q-1)$ | $MStr_{A\times B}$=$SStr_{A\times B}$/$(p-1)\ (q-1)$ | $f_3$=$MStr_{A\times B}$/MSE | $P(F \geq f_3)$ |
| 잔차 | SSE | $pq(r-1)$ | MSE=SSE/$pq(r-1)$ | | |
| 계 | SST | $pqr-1$ | | | |

- 교호작용의 유의성 검정 $-H_0: r_{ij}=0,\ i=1,\dots,p, j=1,\dots,q$ vs $H_1$: 적어도 한 $r_{ij}$는 0이 아니다.
- 귀무가설 $H_0$ 하에서

$$F = MStr_{A\times B}/\text{MSE} \sim F\big((p-1)(q-1), pq(r-1)\big)$$

- 교호작용이 존재하지 않는다면 요인 A와 요인 B의 효과를 검정
- 교호작용이 존재한다면 각 요인별 추가적인 검정은 실시하지 않음

# 9-4 반복이 있는 이원배치법

(예) 리탈린(retalin)이 정상아동과 과잉운동아동에 미치는 영향을 조사

| 아동 \ 투여약 | 위약 | 리탈린 |
|---|---|---|
| 정상아 | 50 45 | 67 60 |
| | 55 52 | 58 65 |
| 과잉운동아 | 70 68 | 51 57 |
| | 72 75 | 48 55 |

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 평균제곱 | F 값 |
|---|---|---|---|---|
| 인자A | 121 | 1 | 121 | 8 |
| 인자B | 42.25 | 1 | 42.25 | 2.79 |
| 교호작용 | 930.25 | 1 | 930.25 | 61.50 |
| 잔차 | 181.5 | 12 | 15.125 | |
| 계 | 1275 | 15 | | |

F(0.05,1,12)=4.747

- $H_0$: $r_{ij}$ =0, $i = 1,2, j = 1,2$ vs $H_1$: 적어도 한 $r_{ij}$는 0이 아니다.
- $H_0$ : $\alpha_1 = \alpha_2$ =0 vs $H_1$: 적어도 한 $\alpha_i$는 0이 아니다.
- $H_0$ : $\beta_1 = \beta_2$ =0 vs $H_1$: 적어도 한 $\beta_j$는 0이 아니다

# 9-4 반복이 있는 이원배치법

(예제) 세 종류의 기계와 세 사람의 기능공이 제품품질에 미치는 영향을 조사하고자 하여 2회 반복이 있는 이원배치법에 의해 생산성을 측정한 결과 다음의 자료를 얻게 되었다. 이 자료에 대하여 이원배치법의 모형을 적용할 때, 각 인자와 교호작용의 효과에 대하여 유의수준 5%에서 검정하여라

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | 평균 |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 9, 14 | 14,16 | 19,22 | 15.67 |
| $A_2$ | 13,16 | 18,26 | 14,18 | 17.5 |
| $A_3$ | 11,12 | 11,17 | 15,16 | 13.67 |
| 평균 | 12.5 | 17 | 17.33 | 총평균15.61 |

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 평균제곱 | F값 | 유의확률 |
|---|---|---|---|---|---|
| 인자A | 44.11 | | | | 0.1455 |
| 인자B | 87.44 | | | | 0.0387 |
| 교호작용 | 74.22 | | | | 0.1744 |
| 잔차 | 82.51 | | | | |
| 계 | 288.28 | | | | |

- $H_0$: $r_{ij}$ =0, $i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3$ vs $H_1$: 적어도 한 $r_{ij}$는 0이 아니다.
- $H_0$ : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ =0 vs $H_1$: 적어도 한 $\alpha_i$는 0이 아니다.
- $H_0$ : $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ =0 vs $H_1$: 적어도 한 $\beta_j$는 0이 아니다