Seoul National University

# - 일반통계학 -
# 제 8장
# 상관분석과 회귀분석

# 8-1 상관분석

1. 상관분석 VS 회귀분석

1.1 상관분석

(1) 상관계수는 두 변수의 직선관계가 얼마나 강하고 어떤 방향인지를 나타냄

(2) 상관분석은 두 변수의 상관계수를 분석함으로써, 두 변수 사이의 연관성을 분석

(3) 표본상관계수를 이용하여 모상관계수에 대해 추론

1.2 회귀분석

(1) 두 변수 사이의 함수관계($y = f(x)$)를 분석하여 한 변수값으로부터 다른 변수값에 대한 예측

(2) 단순회귀분석

- 두 변수 사이의 직선관계($y = ax + b$)를 모형으로 하여 분석

(3) 중회귀분석

- 두 개 이상의 변수가 한 변수에 영향을 줄 때,

한 변수를 여러 변수의 함수($y = a_0 + a_1x_1 + \cdots . + a_kx_k$)로 나타내어 분석

# 8-1 상관분석

2. 모상관계수 및 표본상관계수

2.1 모상관계수

(1) (X,Y)가 확률변수일 때, 모상관계수 $\rho$는 다음과 같이 정의된다.

$$\rho = \mathrm{Corr}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

(2) 성질

- 두 확률변수의 직선관계가 얼마나 강하고 어떤 방향인지를 나타내는 측도
- 모집단의 분포가 좌표평면에서 양의 방향이면 양의 값을, 음의 방향이면 음의 값을 가진다.
- $Corr(aX+b, cY+d) = sign(ac)Corr(X,Y)$

2.2 표본상관계수

(1) $(x_1, y_1)$,…, $(x_n, y_n)$이 랜덤표본 $(X_1, Y_1)$, …, $(X_n, Y_n)$의 관측값일때, 표본상관계수

$r$은 다음과 같이 정의된다. $r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}$

단, $S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$

$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}$ , $S_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}y_i)^2}{n}$

(2) 성질

-1≤r≤1

- r의 값은 관측값이 직선 관계에 가까울수록, -1(기울기가 음의 방향) 또는 1(기울기가 양의 방향)에 가깝게 주어진다.
- 표본상관계수의 값이 0에 가깝다고 해서 두 변수 간에 아무런 관계가 없음을 의미하지 않는다.

3. $\rho$에 관한 추론 (이변량 정규모집단 가정)

(1) 모집단의 분포가 이변량 정규분포인 경우에 귀무가설 $H_0$: $\rho=0$ 에서 다음이 성립한다.

$s.e(r)=\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$이므로 $T=\frac{r}{s.e(r)}=\sqrt{n-2}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sim t(n-2)$

(2) $\rho$에 대한 가설검정

1. 가설

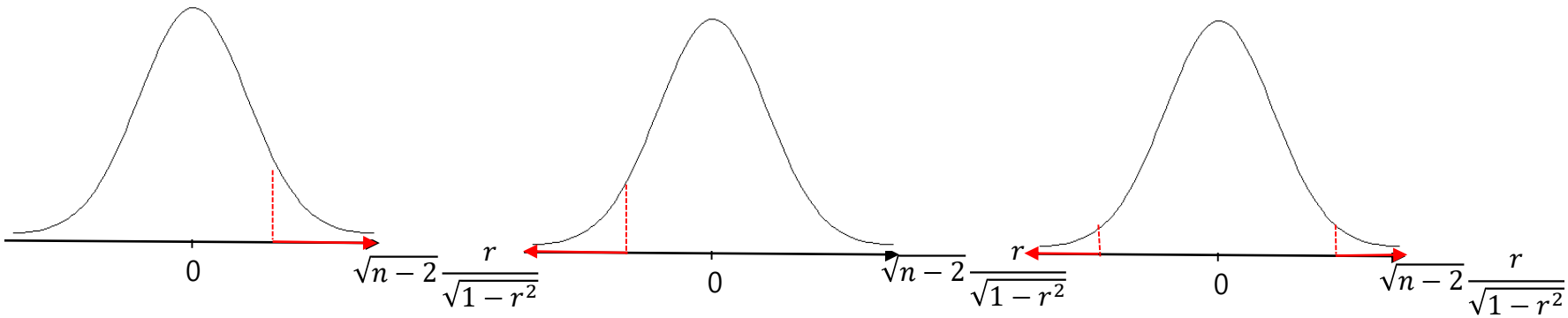
$H_0: \rho = 0 \ \ vs \ \ H_1: \rho > 0$ $H_0: \rho = 0 \ \ vs \ \ H_1: \rho < 0$ $H_0: \rho = 0 \ \ vs \ \ H_1: \rho \neq 0$

2. 검정통계량

$$\sqrt{n-2}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sim \mathrm{t}(n-2)$$

3. 기각역

$H_0: \rho = 0 \ \ vs \ \ H_1: \rho > 0$ $H_0: \rho = 0 \ \ vs \ \ H_1: \rho < 0$ $H_0: \rho = 0 \ \ vs \ \ H_1: \rho \neq 0$

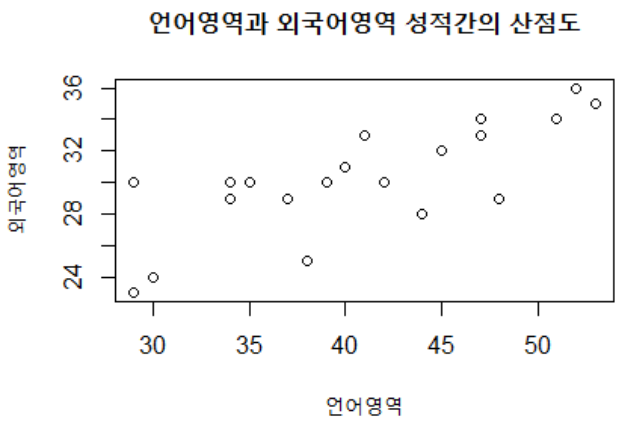


# 8-1 상관분석

(예제) 어느 고등학교 학생 중에서 랜덤하게 추출된 20명의 수학능력 모의시험에서 언어 영역과 외국어 영역의 점수이다.

| 학생번호 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 언어영역 | 42 | 38 | 51 | 53 | 40 | 37 | 41 | 29 | 52 | 39 |
| 외국어영역 | 30 | 25 | 34 | 35 | 31 | 29 | 33 | 23 | 36 | 30 |

| 학생번호 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 언어영역 | 45 | 34 | 47 | 35 | 44 | 48 | 47 | 30 | 29 | 34 |
| 외국어영역 | 32 | 29 | 34 | 30 | 28 | 29 | 33 | 24 | 30 | 30 |




표본상관계수 $r$ =0.7567이고 산점도 상에서도 선형관계가 보이므로 이 표본의 결과를 가지고 실제 그 고등학교 학생 전체의 언어영역과 외국어 영역 성적사이의 상관관계가 있는지 유의수준 5%에서 검정하여라.

1.가설 $H_0: \rho = 0 \ vs \ H_1: \rho \neq 0$

2. 검정통계량 계산 $\mathrm{t} = \sqrt{n-2}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$ =4.915

3. 기각역 $t_{0.025}(18)$=2.101<4.915

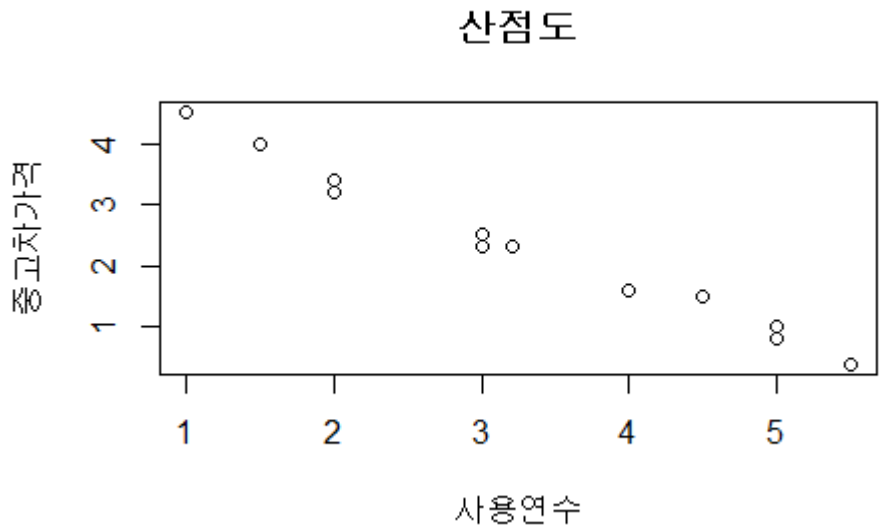
유의확률 $2\mathrm{P}(\mathrm{t} > 4.915) = 0.0022 < 0.05$이므로 귀무가설을 기각할 만한 증거가 된다. 따라서 두 성적간에는 유의수준 5%에서 상관관계가 있다는 뚜렷한 증거가 있다.

# 8-2 단순회귀분석의 모형과 적합

1. 단순선형회귀모형

1.1 예 – 사용연수에 따른 중고차 가격

| 사용연수 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.0 | 3.0 | 3.0 | 3.2 | 4.0 | 4.5 | 5.0 | 5.0 | 5.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 중고차가격 | 4.5 | 4.0 | 3.2 | 3.4 | 2.5 | 2.3 | 2.3 | 1.6 | 1.5 | 1.0 | 0.8 | 0.4 |

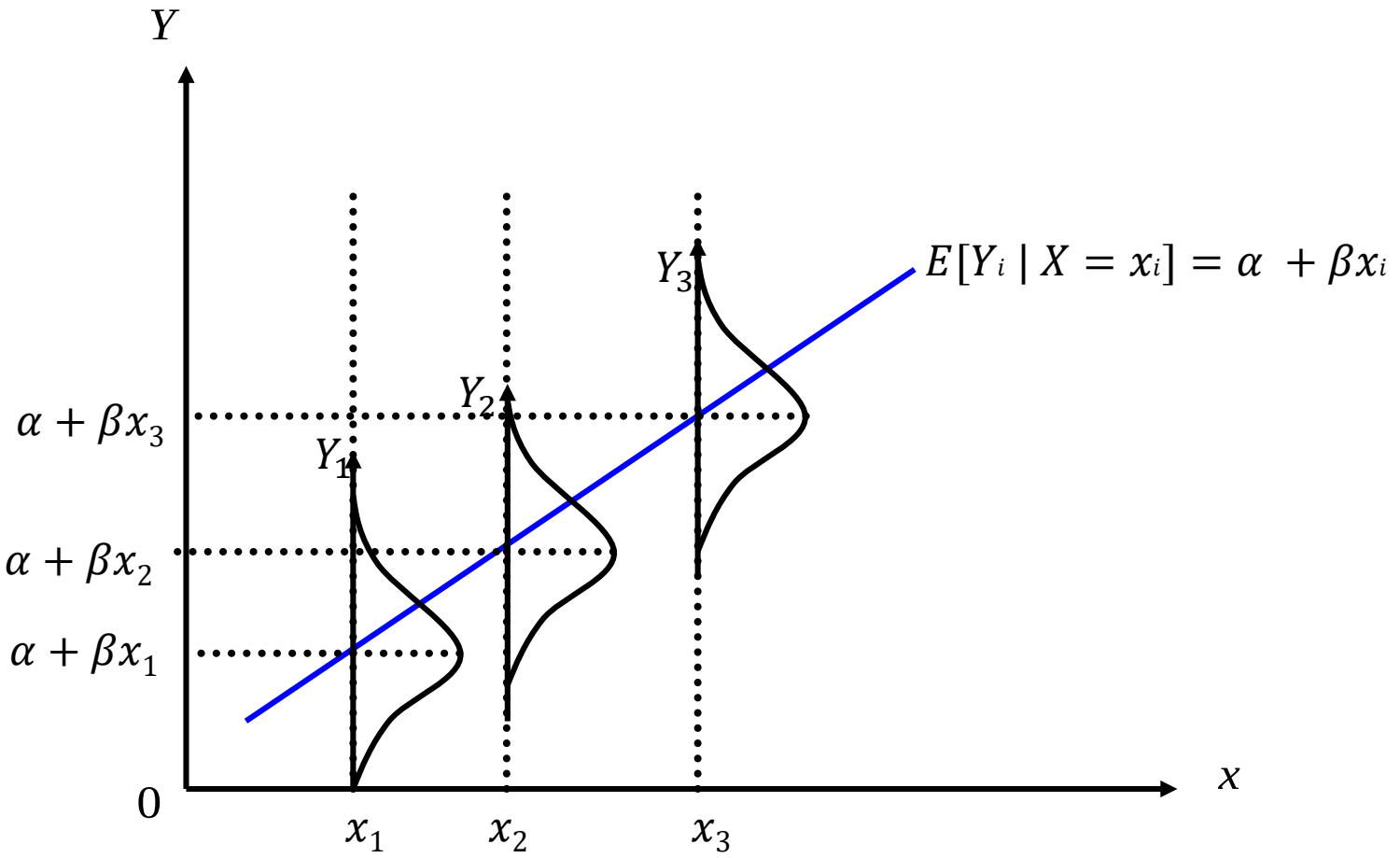



$\Rightarrow$ (중고차 가격) $=\alpha+\beta\times$(사용연수)

# 8-2 단순회귀분석의 모형과 적합

1.2 단순 선형 회귀 모형 : $Y_i = \alpha + \beta x_i + e_i$

- 오차를 나타내는 $e_i$ 가 등분산을 가지는 확률변수이므로 반응변수 $Y_i$ 도 확률변수가 된다. 설명변수$x_i$에 대응하는 반응변수의 값이 $\alpha + \beta x_i$ 주위에 나타날 때, 반응변수의 값 $y_i$는 확률변수 $Y_i$의 관측값으로 생각할 수 있다.



# 8-2 단순회귀분석의 모형과 적합

- 단순선형회귀모형의 기본 가정

*(1)* $E(e_i)$=0, 즉, $E[Y_i \mid X = x_i] = \alpha + \beta x_i$ (선형성)

*(2)* $Var(e_i)=Var(e_i)=\ldots=Var(e_n)= \sigma^2 > 0$ (등분산성)

*(3)* $e_1, e_2, \ldots, e_n$은 서로 독립 ( 독립성)

((3)에 의해 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$도 서로 독립적으로 관측된다고 가정)

- 설명변수에 따른 반응변수의 평균값을 나타내는 직선 $y = \alpha + \beta x$를 모회귀직선, $\alpha$와 $\beta$를 모회귀계수, $\sigma^2$을 오차분산이라고 한다. 이제 모회귀직선을 추정하기 위해 최소제곱법을 사용하자.

- 최소제곱법 (method of least squares)

Q(α, β )= 을 최소로 하는 α, β 를 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$이라 표시하고 α, β의 최소제곱추정량(least squares estimator)이라고 부른다.

# 8-2 단순회귀분석의 모형과 적합

- 정규방정식 (normal equation)

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)=0 \\ -2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n\hat{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}x_i\hat{\beta}=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i\hat{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\hat{\beta}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \end{cases}$$

위 정규방정식에 의해 α, β의 최소제곱추정량 $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ 를 다음과 같이 얻게 된다.

- 최소제곱 추정값과 최소제곱회귀직선

$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}, \qquad \hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=S_{xy}/S_{xx}$$

최소제곱회귀직선 $\hat{y}=\widehat{E(Y_i|x_i)}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x=\bar{y}+\hat{\beta}(x-\bar{x})$

- 간단 계산 공식

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$$

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}$$

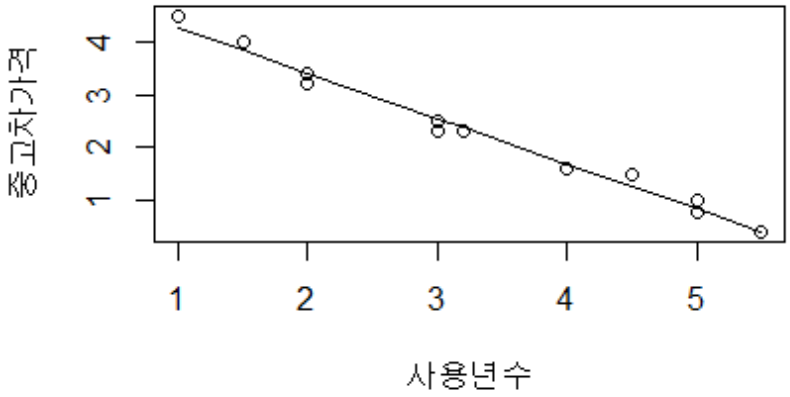
# 8-2 단순회귀분석의 모형과 적합

(예제)

사용년수($x$), 중고차 가격($Y$)로 하여 단순선형회귀모형을 가정하자. 아래의 표를 이용하여 $E(Y\,|x) = \alpha + \beta x$ 에 대한 최소제곱추정값 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$을 구하고 최소제곱회귀직선을 구하여라.

| 사용연수 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.0 | 3.0 | 3.0 | 3.2 | 4.0 | 4.5 | 5.0 | 5.0 | 5.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 중고차가격 | 4.5 | 4.0 | 3.2 | 3.4 | 2.5 | 2.3 | 2.3 | 1.6 | 1.5 | 1.0 | 0.8 | 0.4 |

$\hat{y} = E(\widehat{Yi}\,|x_i) = 5.133 - 0.859x_i$, $S_{xx} = 24.64917$, $S_{xy} = -21.16917$, $S_{yy} = 18.46917$



# 8-2 단순회귀분석의 모형과 적합

- 잔차 (residual)

$\hat{e_i}$=실제 관측값($y_i$)-추측값($\hat{y_i}$) $(\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n})$

잔차는 오차의 관측값인 것처럼 생각할 수 있고 이들은 오차분산의 크기에 따라 크거나 작게 나타난다.

- 잔차제곱합(residual sum of squares or error sum of squares)

SSE=$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y_i})^2$=$\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\bar{y}-\hat{\beta}(x_i-\bar{x})\}^2$=$S_{yy}-(S_{xy})^2/S_{xx}$

- 평균제곱오차 (mean squared error) – 오차분산의 추정

$$\widehat{\sigma^2}=\mathrm{MSE}=\frac{SSE}{n-2}$$

(예제) 중고차 가격 예제에서 오차분산 $\sigma^2$의 추정값을 구하여라.

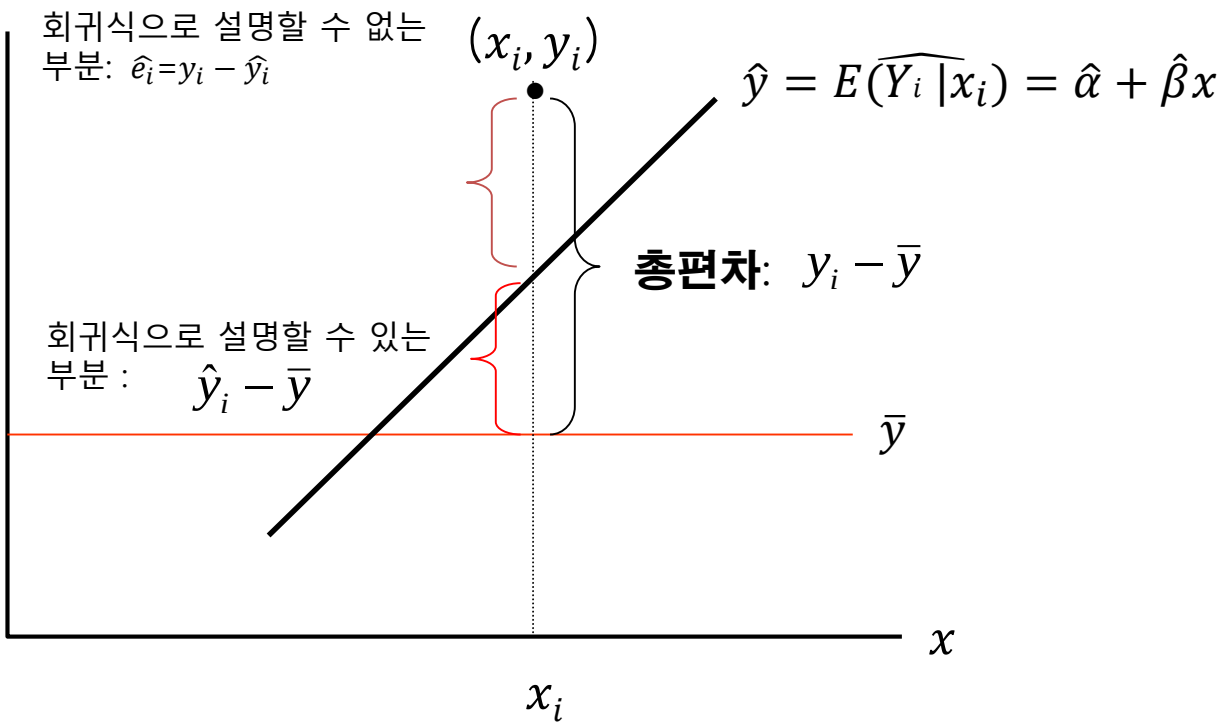
# 8-2 단순회귀분석의 모형과 적합

- 총편차 $y_i - \bar{y}$ 의 분해

$y_i - \bar{y} = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y})$

$y_i - \hat{y}_i$:오차항에 기인하는 편차(잔차)

$\hat{y}_i - \bar{y}$: 회귀직선에 기인하는 편차



# 8-2 단순회귀분석의 모형과 적합

- 총제곱합의 분해

$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y_i})^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{y_i}-\bar{y})^2$

총제곱합 = 잔차제곱합 + 회귀제곱합
SST(n-1) SSE(n-2) SSR(1) ※ 괄호안은 자유도임.

- 결정계수(coefficient of determination)

자료 전체의 흩어진 정도를 나타내는 SST 중에서 회귀선에 설명되는 부분인 SSR이 차지하는 비중이 크면 회귀모형이 관측결과를 잘 설명해주는 것이다. 따라서

$$r^2=\frac{SSR}{SST}=1-\frac{SSE}{SST}$$

SSR=$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y_i}-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}+\hat{\beta}x-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}\{\hat{\beta}(x-\bar{x})\}^2=(S_{xy})^2/S_{xx}$

SST=$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=S_{yy}$

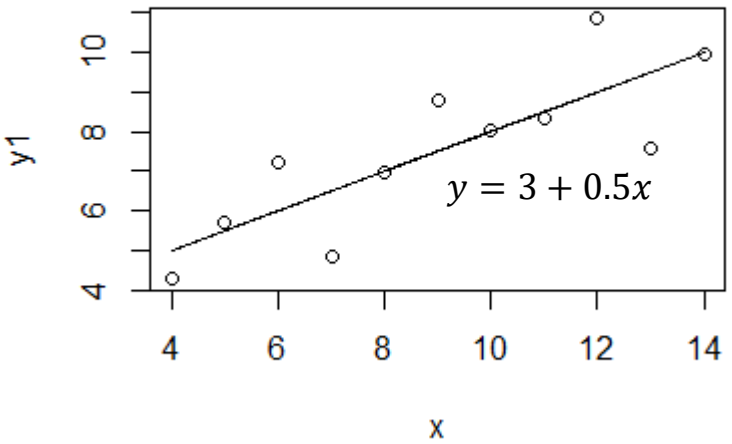
$r^2=\frac{SSR}{SST}=\frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}S_{yy}}=(\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}})^2$ : 표본상관계수의 제곱

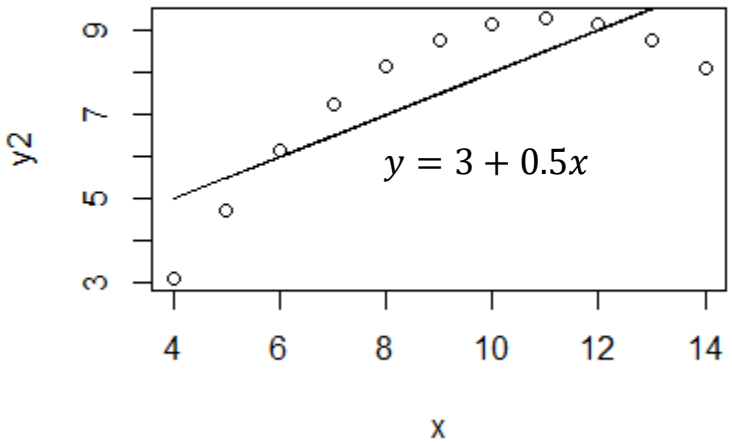
따라서, 결정계수가 1에 가까울수록 산점도에서 점들이 직선 주위에 밀집되어 나타나게 되어 회귀선에 의한 설명이 잘 됨을 뜻한다.

# 8-2 단순회귀분석의 모형과 적합

(예제) 중고차 가격에 단순회귀모형을 적용할 때, 결정계수를 구하고 이를 해석하여라.

- 회귀분석에서 통계량의 계산값에 의한 결론의 문제점




SST=41.27
SSR=27.51
SSE=13.76

$\widehat{\sigma^2}$ =1.53
$r^2$=0.67

산점도가 다른 자료임에도 통계량의 값이 모두 일치! 산점도 혹은 잔차의 검토가 회귀분석의 과정에서 매우 중요함!!

# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

1. 단순 선형 회귀 모형 : $Y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \quad i = 1,2,\dots,n$

❖ 오차항의 가정이 아래와 같을 때, 모 회귀계수에 대한 추론이 가능

(1) 선형성

(2) 등분산성

(3) 독립성

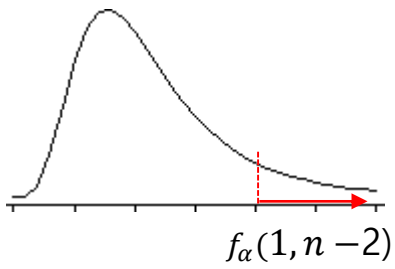
(4) 정규성 ( $e_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ )

2. 회귀직선의 유의성 검정

(1)가설 - $H_0 : \beta = 0 \ vs \ H_1 : \beta \neq 0$

(2)귀무가설 $H_0$가 사실일 때, $F = \frac{SSR}{1} \Big/ \frac{SSE}{(n-2)} \sim F(1, n-2)$

(3) 기각역




❖ 회귀직선이 유의하면 총제곱합 중에서 회귀제곱합이 차지하는 비중은 커지고 잔차제곱합이 차지하는 비중은 작아질 것이다.

# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

3. 분산분석표

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 평균제곱 | F값 | 유의확률 |
|---|---|---|---|---|---|
| 회귀 | SSR | 1 | MSR=SSR/1 | f=MSR/MSE | $P(F \geq f)$ |
| 잔차 | SSE | $n-2$ | MSE=SSE/(n-2) | | |
| 계 | SST | $n-1$ | | | |

(예제) 자동차의 중고차가격 예제에서 단순회귀모형을 적용할 때, 분산분석표를 만들고 회귀직선의 유의성 검정을 하여라. (단, $S_{xy}$=-21.169, $S_{xx}$=24.649, $S_{yy}$=18.469. $f_{0.05}(1,10) = 4.9646$, 유의확률=2.311e-10)

# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

4. 모회귀계수 $\beta$에 관한 추론

$$E(\hat{\beta}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})E(y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\alpha+\beta x_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \beta$$

( $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = 0$, $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}) = 0$ 이므로

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})x_i$ )

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2)^2} Var(y_i) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

$\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{S_{xx}})$ ($\because$ $y_i$의 정규성)

$$T = \frac{\hat{\beta}-\beta}{\hat{\sigma}/\sqrt{S_{xx}}} \sim t(n-2), \quad \hat{\sigma} = \sqrt{MSE}$$

# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

- $\beta$ 에 대한 100(1-$\alpha$)% 신뢰구간

(  )

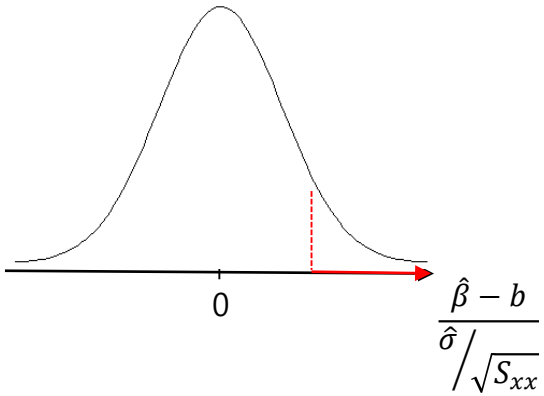
- 가설검정

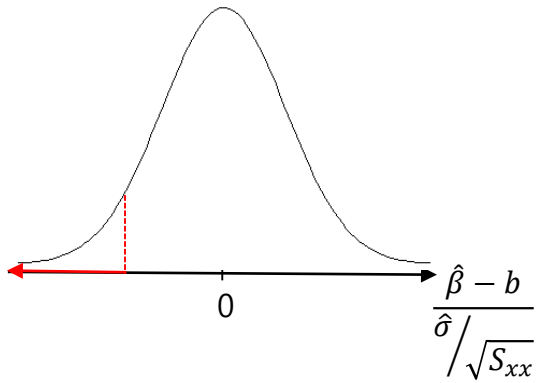
1. $H_0: \beta = b \ \ vs \ \ H_1: \beta > b$  $H_0: \beta = b \ \ vs \ \ H_1: \beta < b$  $H_0: \beta = b \ \ vs \ \ H_1: \beta \neq b$

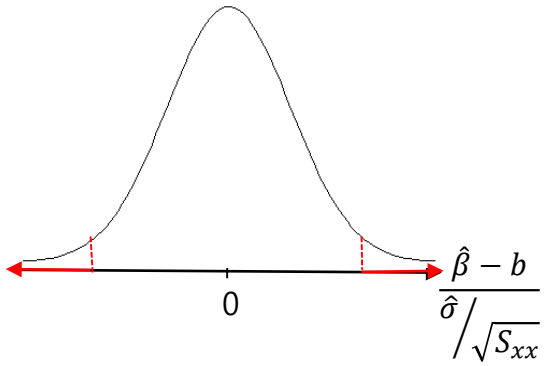
2. 검정통계량 $\frac{\hat{\beta}-b}{\hat{\sigma}/\sqrt{S_{xx}}} \sim t(n-2)$

3. 기각역

1. $H_0: \beta = b \ \ vs \ \ H_1: \beta > b$  $H_0: \beta = b \ \ vs \ \ H_1: \beta < b$  $H_0: \beta = b \ \ vs \ \ H_1: \beta \neq b$



# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

(예제) 자동차의 중고차가격 예제에서 단순회귀모형을 적용할 때, 다음 추론을 하여라.

(1) 회귀직선의 유의성을 t검정으로 유의수준 1%에서 검정하고 분산분석표에 의한 F검정과의 관계를 설명하여라. $(t_{0.005}(10) = 3.169)$

❖ F검정과 $t$ 검정의 관계 : $F = \frac{SSR}{1} \Big/ \frac{SSE}{(n-2)} = \frac{\hat{\beta}^2 S_{xx}}{MSE} = \left\{ \frac{\hat{\beta} - 0}{\hat{\sigma}/\sqrt{S_{xx}}} \right\}^2 = T^2$

# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

(2) 자동차의 가격이 사용년수에 따라 연평균 감소액이 80만원을 초과하는지 유의수준 5%에서 검정하여라. $(t_{0.05}(10) = 1.812)$

(3) 모회귀계수 $\beta$의 95% 신뢰구간을 구하고 그 의미를 해석하여라.

# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

- 평균반응 $E[Y \mid X = x] = \alpha + \beta x$ 에 관한 추론

$E[\hat{\alpha} + \hat{\beta}x] = \alpha + \beta x$ , $\mathrm{Var}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x) = \{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}\}\sigma^2$

$\hat{\alpha} + \hat{\beta}x$은 정규분포를 따른다. 오차분산을 추정하게 되면 다음과 같은 $t$ 포를 따르게 된다.

$$\frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}x - (\alpha + \beta x)}{\sqrt{(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}})\hat{\sigma}^2}} \sim t(n-2)$$

*(1)* $\alpha + \beta x$ 에 관한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

(2) $H_0: \alpha + \beta x = \mu_0$에 관한 검정통계량

$$\frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}x - \mu_0}{\sqrt{(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}})\hat{\sigma}^2}} \sim t(n-2)$$

# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

- 모회귀직선 $\alpha$ 에 관한 추론은 $\alpha + \beta x$ 에 관한 추론에서 $x = 0$인 경우에 해당하므로

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sqrt{(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{S_{xx}})\hat{\sigma}^2}} \sim t(n-2)$$

*(1)* $\alpha$ 에 관한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

(2) $H_0: \alpha = a$에 관한 검정통계량

$$\frac{\hat{\alpha} - a}{\sqrt{(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{S_{xx}})\hat{\sigma}^2}} \sim t(n-2)$$

# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

(예제) 비료의 양과 수확량에 대한 통계치들이 아래와 같이 주어져 있다.
단, $\bar{y} = 120, \bar{x} = 10, n = 40$, 단, $S_{xy}$=81, $S_{xx}$=81, $S_{yy}$=100

(1)최소제곱회귀 직선식을 써라.

(2)오차분산 추정값을 써라. 결정계수를 구하고 해석하라.

(3) 분산분석표를 만들어라.

# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

(4)비료의 양 x=12일 때 평균 수확량에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.($t_{0.025}(38) = 2.204$)

(5) 회귀직선의 유의성에 대한 가설을 세우고 유의수준 5%에서 t-검정 하여라.

(6) 비료의 양 x=15일 때 평균 수확량이 130인지 아닌지에 대해 유의수준 5%에서 검정하여라.

# 8-3 단순회귀분석에서의 추론

(예제)

| | |
|---|---|
| X | 2 3 4 5 6 |
| Y | 4 4 6 6 10 |

단, $\sum X_i Y_i$=134,$\sum X_i$=20, ,$\sum Y_i$=30, $\sum {X_i}^2$=90, $\sum {Y_i}^2$=204

(1) SSR, SSE, SST, 오차항의 분산 추정치(MSE)를 구하여라.

(2) 결정계수와 상관계수를 구하여라.

(3) 분산분석표를 작성하여라.

# 8-4 단순회귀분석에서의 잔차분석

1. 단순회귀분석 적용의 순서

(1) 산점도를 이용하여 직선관계 확인
(2) 단순회귀모형 적합 및 잔차분석
(3) 잔차분석을 통과하면, 신뢰구간 및 검정과 같은 추론 및 예측 시행

2. 단순선형회귀모형 $Y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$ 의 기본 가정

(1) $E(e_i)$=0, 즉, $E[Y_i \mid X = x_i] = \alpha + \beta x_i$ (선형성)

(2) $Var(e_i)$=$Var(e_i)$=…=$Var(e_n)$= $\sigma^2$ >0 (등분산성)

(3) $e_1$, $e_2$, …, $e_n$은 서로 독립 ( 독립성)

(4) $e_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ (정규성)

❖ 잔차 $\hat{e_i} = y_i - \hat{y_i}$을 이용하여 위의 가정을 검토해야만 회귀분석에 대한 추론이 의미가 있게 된다.

# 8-4 단순회귀분석에서의 잔차분석

- 잔차도 (residual plot) : 설명변수와 스튜던트화 잔차 ($\frac{\widehat{e_i}}{sd(\widehat{e_i})}$, $\widehat{e_i} = y_i - \widehat{y_i}$)를 산점도로 나타낸 것으로 잔차도가 다음과 같은 성질을 갖고 있다면 단순선형회귀모형 적용이 타당하다고 간주한다.

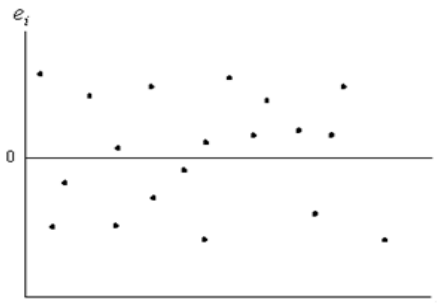
① 대략 0에 관하여 대칭적으로 나타나고,

② 설명변수의 값에 따른 잔차의 산포가 크게 다르지 않고,

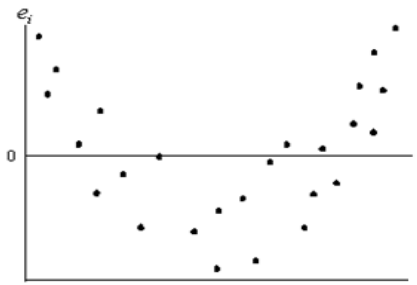
③ 점들이 특정한 형식을 가지고 나타남이 없으며,

④ 거의 모든 점이 (-2, 2)의 범위 내에 나타나야 한다.

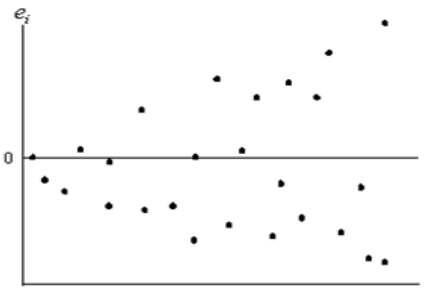
* 결정계수가 높게 나타난다 할지라도 잔차의 가정에 어긋난다면 잘못된 분석이므로 가정을 만족시킨 후 다시 분석해야 한다.



정상



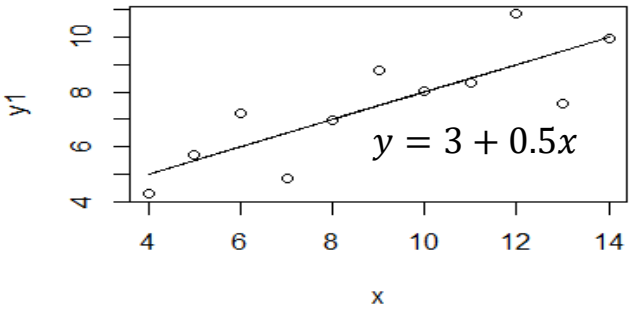
비선형관계

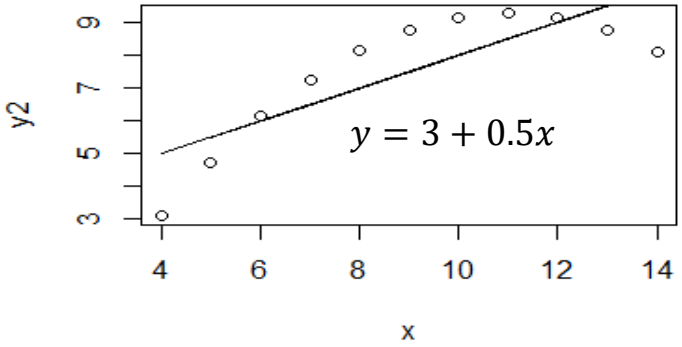


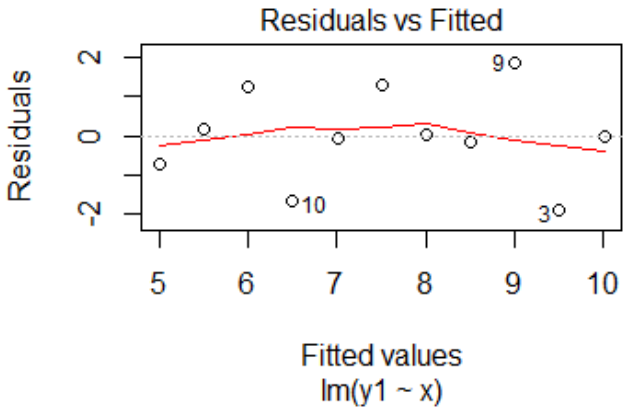
분산증가

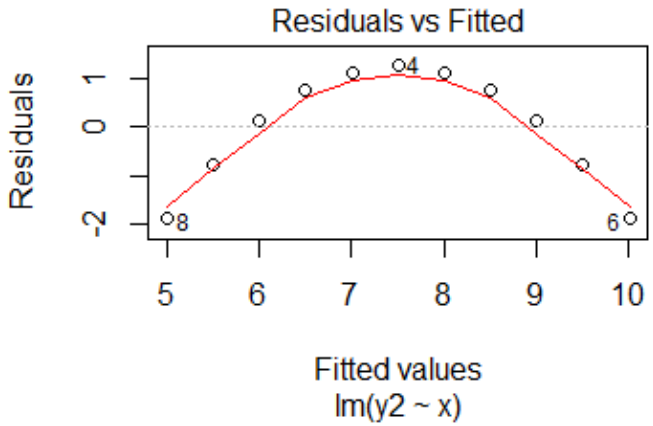
# 8-4 단순회귀분석에서의 잔차분석

(예제) 동일한 선형회귀모형 결과에 대한 잔차분석




잔차에 특정한 패턴이 없음. 따라서 선형회귀모형에 대한 해석은 타당함.

잔차에 특정한 패턴이 보이므로 선형회귀모형에 대한 해석은 적절치 못함.

# 8-5 중회귀분석

- 중회귀모형 : 반응변수의 변화를 설명하기 위해 두개 이상의 설명변수를 고려하는 모형

  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + e_i,\ e_i \sim N(0,\ \sigma^2)$ 이고 서로 독립 ( $i = 1,2,\ldots,n$ )
- 회귀계수의 추정을 위해 최소제곱방법 사용
- 총제곱합의 분해

$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y_i})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y_i} - \bar{y})^2$, 단, $\hat{y_i} = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} x_{1i} + \widehat{\beta_2} x_{2i} + \cdots + \widehat{\beta_k} x_{ki}$

총제곱합 = 잔차제곱합 + 회귀제곱합

$SST(n-1)$ $SSE(n-k-1)$ $SSR(k)$

- 평균제곱오차 (mean squared error) – 오차분산의 추정

$$\widehat{\sigma^2} = \mathrm{MSE} = \frac{SSE}{n-k-1}$$

- 결정계수 $r^2 = \frac{SSR}{SST}$
- 수정된 결정계수(adjusted R-square) : 결정계수는 설명변수가 많아지면 커지는 경향이 있다. 따라서 결정계수를 독립변수의 수에 따라서 수정할 필요가 있다

$$R_{adj}{}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}\frac{SSE}{SST}$$

# 8-5 중회귀분석

- 분산분석표

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 평균제곱 | F값 | 유의확률 |
|---|---|---|---|---|---|
| 회귀 | SSR | $k$ | MSR=SSR/$k$ | f=MSR/MSE | $P(F \geq f)$ |
| 잔차 | SSE | $n-k-1$ | MSE=SSE/$(n-k-1)$ | | |
| 계 | SST | $n-1$ | | | |

- 회귀모형의 유의성 검정 (F검정)

(1)가설 - $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0 \ \ vs \ \ H_1: not\ H_0$

(2)귀무가설 $H_0$가 사실일 때, $F = \frac{\frac{SSR}{k}}{\frac{SSE}{(n-k-1)}} \sim F(k, n-k-1)$

- 회귀모형의 유의성 검정 (t검정)

각 계수 $\beta_i$에 대한 유의성을 개별적으로 검정

# 8-5 중회귀분석

- 중회귀분석 결과

Coefficients:

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(>\|t\|) | |
|---|---|---|---|---|---|
| (Intercept) | 1.114e+02 | 6.297e+01 | 1.768 | 0.085979 | . |
| Brain | 2.060e+00 | 5.634e-01 | 3.657 | 0.000856 | *** |
| Height | -2.732e+00 | 1.229e+00 | -2.222 | 0.033034 | * |
| Weight | 5.599e-04 | 1.971e-01 | 0.003 | 0.997750 | |

---

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 19.79 on 34 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2949, Adjusted R-squared: 0.2327
F-statistic: 4.741 on 3 and 34 DF, p-value: 0.007215

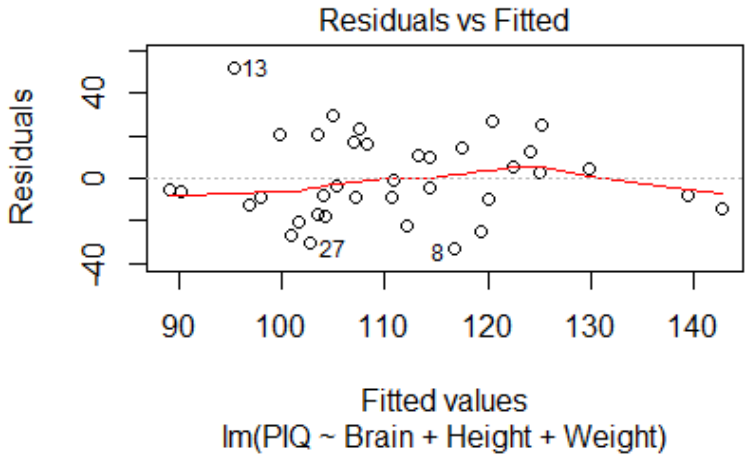
-모형의 유의성 : F검정 결과 유의수준 0.05보다 0.007215는 더 희박하므로 귀무가설 $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ 을 기각할 만한 증거가 된다. 따라서 추정된 모형은 적합하다.

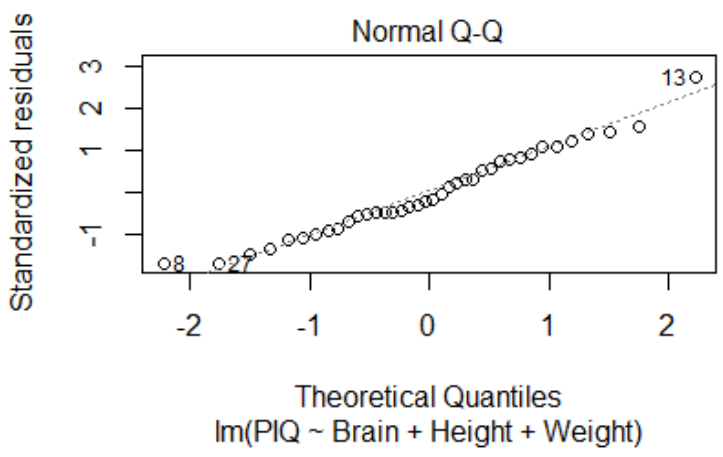
-추정된 회귀모형 : $\widehat{PIQ}$=111.4 +2.06 Brain-2.732 Height+0.0005599Weight

-각 추정된 계수에 대한 해석 : 다른 변수가 고정된 상태에서 키가 1단위 증가함에 따라 평균IQ는 2.732만큼 감소한다.

# 8-5 중회귀분석

- 잔차분석 결과




적합된 모형의 잔차도를 확인해본 결과 잔차의 값이 매우 큰 관측치가 몇 개 존재하기는 하지만 특별한 패턴이 관측되지는 않았다. 그리고 정규 분위수 그래프에서도 정규분포를 벗어난다는 뚜렷한 증거는 발견되지 않았다. 따라서 주어진 자료에 대한 중회귀모형의 적용은 타당함을 알 수 있고, 적용된 모형을 통한 추론은 의미가 있다고 할 수 있다.

# 8-5 중회귀분석

(예제) A회사 대리점 중 $n = 10$개를 뽑아 월매출액과 관할구역의 인구수 , 가구당 월평균 수입을 조사한 표가 아래와 같다. 회귀모형의 적합성을 유의수준 5%에서 검정하여라.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 월매출액($y_i$) | 2.0 | 1.3 | 2.4 | 1.5 | 0.6 | 2.0 | 1.0 | 2.0 | 1.3 | 0.9 |
| 인구수($x_{i1}$) | 3.0 | 1.1 | 3.5 | 2.5 | 0.6 | 2.8 | 1.3 | 3.3 | 2.0 | 1.0 |
| 월평균수입($x_{i2}$) | 3.2 | 3.0 | 3.6 | 2.6 | 1.9 | 3.5 | 2.1 | 3.3 | 2.8 | 2.3 |

추정된 회귀식 : $\hat{y} = -0.4517 + 0.3067x_1 + 0.4584x_1$

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 제곱평균 | F비 |
|---|---|---|---|---|
| 회귀 | ① | ③ | ⑤ | ⑦ |
| 잔차 | 0.1075 | ④ | ⑥ | |
| 계 | ② | 9 | | |

$Syy = 3.060, F(2,7,0.05) = 4.737$