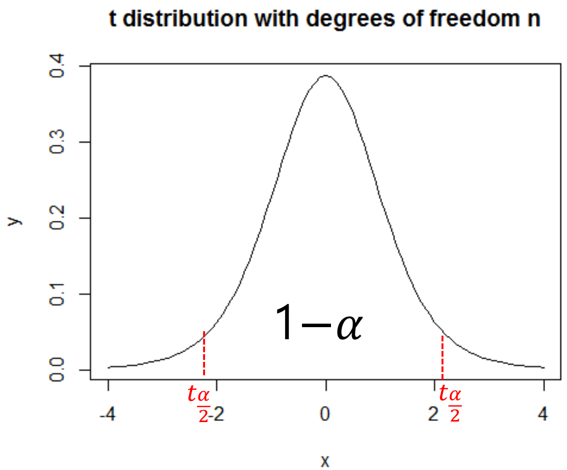
Seoul National University

- 일반통계학 -
제 6장
분포에 관한 추론

6-1 모평균에 관한 추론(모분산을 모를 때)

1. 모평균에 대한 신뢰구간(모분산이 알려지지 않은 정규 모집단)



$$1-\alpha = P\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1) \le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)\}$$

$$= P\{\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)\, s/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)\, s/\sqrt{n}\}$$

따라서, 모평균 μ에 관한 100(1−α)% 신뢰구간은

$$(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)\, s/\sqrt{n},\ \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)\, s/\sqrt{n}\ )$$

❖ 표본크기 n이 충분히 큰 경우에는 모평균 μ에 관한 100(1−α)% 신뢰구간으로

$(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\, s/\sqrt{n},\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\, s/\sqrt{n}\ )$를 사용할 수 있다.

2. 모평균에 가설검정(모분산이 알려지지 않은 정규 모집단)

- 검정통계량으로 T=$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ~ $\mathrm{t}(\mathrm{n}-1)$ 사용
- 표본크기 표본크기 n이 충분히 큰 경우에는 기각역으로 t분포 분위수 대신 표준정규분포 분위수를 사용할 수 있다.

6-1 모평균에 관한 추론(모분산을 모를 때)

(예제) 전구를 생산하는 한 회사에서 현재 생산하는 전구의 평균수명은 1950시간으로 알려져 있다. 새로이 개발중인 전구의 평균수명 μ가 기존의 전구보다 수명이 더 길다고 할 수 있는가를 확인하기 위하여, 9개의 시제품을 생산하여 그 수명시간을 조사한 결과가 다음과 같다. 2000, 1975, 1900, 2000, 1950, 1850, 1950, 2100, 1975

적절한 가설을 세우고 수명의 분포가 정규분포라는 전제하에서 가설에 대한 유의수준 5%의 검정을 하여라. 또한 유의확률은 얼마인가?

(풀이)

1. 가설설정 : $H_0 : \mu = 1950 \;\; vs \;\; H_1 : \mu > 1950$
2. 유의수준 α 설정 : 0.05
3. 검정통계량 선택 ($\hat{\mu} = \bar{X}$) T=$\frac{\bar{X}-1950}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(8)$
4. 주어진 표본에 의해 검정통계량 계산 t^*=$\frac{1966.667-1950}{\frac{69.60}{\sqrt{9}}}$=0.7184
5. 검정 -기각역 사용 : 0.7184< $t_{0.05}$=1.8596
   -P값 사용 : $P(T \geq t^*)$≒0.2465
   귀무가설을 기각할 만한 증거가 되지 못한다.
6. 결론 유의수준 5%에서 전구의 평균수명이 1950시간보다 길다는 유의미한 증거가 되지 못한다.

6-1 모평균에 관한 추론(모분산을 모를 때)

(예제) 반도체의 전기적 특성은 그 제조과정에서 첨가되는 불순물의 양에 따라 정해진다고 한다. 특정한 용도에 사용되는 실리콘 다이오드는 0.60볼트의 가동전압이 요구되며, 이러한 목표에서 벗어나면 불순물의 양을 조절하는 장치에 대한 조정이 필요하다고 한다. 이러한 실리콘 다이오드를 제조하는 공장에서 120개를 랜덤추출하여 조사한 결과 가동전압(볼트)의 평균과 표준편차가 각각 다음과 같았다. $\bar{x}$=0.62, $s = 0.11$

적절한 가설을 세우고 유의수준 5%에서 가설을 검정하여라. 또한 유의확률은 얼마인가?

(풀이)

1. 가설설정 : H_0: $\mu = 0.6$ vs H_1: $\mu \neq 0.6$
2. 유의수준 α 설정 : 0.05
3. 검정통계량 선택 ($\hat{\mu} = \bar{X}$) T=$\frac{\bar{X}-0.6}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(119) \approx \mathrm{N}(0,1)$
4. 주어진 표본에 의해 검정통계량 계산 t^*=$\frac{0.62-0.6}{\frac{0.11}{\sqrt{120}}}$=1.9917
5. 검정 -기각역 사용 : 1.9917> $z_{0.025}$=1.96 (표준정규분포사용)
   -P값 사용 : $2 * P(T \geq t^*)$≒2*0.023=0.046 (표준정규분포사용)
   귀무가설을 기각할 만한 유의미한 증거가 된다.
6. 결론 유의수준 5%에서 불순물의 양을 조절하는 장치에 대한 조절이 필요하다.

6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

- 두 모집단의 평균을 비교할 때 각각의 모집단에서 랜덤추출하여 얻게 되는 서로 독립인 두 표본을 이용하여 두 모집단을 비교한다.
- 두 처리의 효과를 비교하고자 할 때, 실험단위를 독립인 두 그룹으로 나누어 그룹별로 서로 다른 처리를 적용하여 두 처리의 결과를 비교한다.
- $X_{11}, X_{12}\ldots, X_{1n_1} \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$, $X_{21}, X_{22}\ldots, X_{2n_2} \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$인 독립인 랜덤표본
- 표본평균 $\overline{X_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}$, $\overline{X_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$
- 표본 분산 $S_1{}^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X_1})^2/(n_1 - 1)$, $S_2{}^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - \overline{X_2})^2/(n_2 - 1)$
- 합동 표본분산 $S_p{}^2 = \frac{(n_1-1)S_1{}^2+(n_2-1)S_2{}^2}{n_1+n_2-2}$
- $\mu_1 - \mu_2$에 대한 점추정 $=\overline{X_1} - \overline{X_2}$

6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

- 추정량의 분포

(1) 모집단이 정규분포 (혹은 대표본)이고 모분산을 알 때,

$$Z = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

(2) 모집단이 정규분포, 모분산을 모르지만 모분산이 같다고 알려져 있을 때,

$$T = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

(3) 모집단이 정규분포, 모분산을 모르지만 모분산이 다르다고 알려져 있을 때,

$$T = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}} \approx\ t(v),\ \text{단},\ v = \frac{\left(\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}\right)^2}{({s_1}^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + ({s_2}^2/n_2)^2/(n_2 - 1)}$$

(t분포는 대표본에서는 표준정규분포를 대체할 수 있다.)

6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

1. 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$ 대한 신뢰구간(모분산이 알려진 정규 모집단)

$$1-\alpha = P\{-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\}$$

$$= \mathrm{P}\{\overline{\mathrm{X}_1}-\overline{\mathrm{X}_2}-\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{\mathrm{n}_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{\mathrm{n}_2}} \leq \mu_1-\mu_2 \leq \overline{\mathrm{X}_1}-\overline{\mathrm{X}_2}+\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{\mathrm{n}_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{\mathrm{n}_2}}\}$$

따라서, 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$에 관한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은

$$(\overline{x_1}-\overline{x_2}-\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{\mathrm{n}_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{\mathrm{n}_2}},\ \overline{x_1}-\overline{x_2}+\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{\mathrm{n}_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{\mathrm{n}_2}})$$

2. 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$ 대한 신뢰구간(두 모분산은 같으나 알려지지 않고 정규 모집단)

모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$에 관한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은

6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

3. 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$ 대한 신뢰구간(두 모분산이 다르고 알려지지 않음. 정규 모집단)

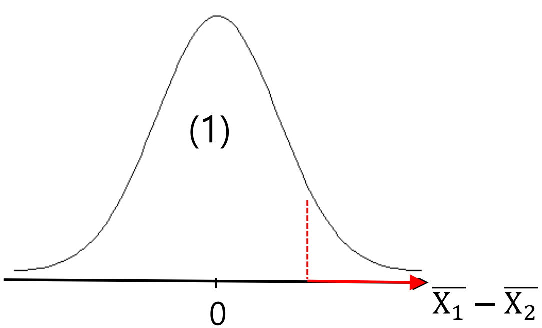
모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$에 관한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은

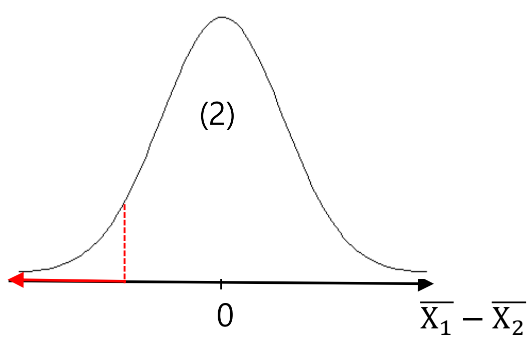
4. 모평균차에 대한 가설

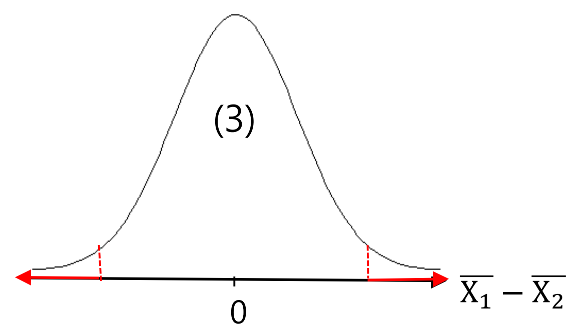
(1)$H_0: \mu_1 = \mu_2 \;\; vs \;\; H_1: \mu_1 > \mu_2 \;\; (H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \; vs \;\; H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0)$

(2)$H_0: \mu_1 = \mu_2 \;\; vs \;\; H_1: \mu_1 < \mu_2 \;\; (H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \; vs \;\; H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0)$

(3)$H_0: \mu_1 = \mu_2 \; vs \;\; H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \;\; (H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \;\; vs \;\; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0)$







6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

5. 검정통계량

(1) 모집단이 정규분포 (혹은 대표본)이고 모분산을 알 때,

$$Z = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - d}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

(2) 모집단이 정규분포, 모분산을 모르지만 모분산이 같다고 알려져 있을 때,

$$T = \frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-d}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2),\ {S_p}^2 = \frac{(n_1-1){S_1}^2+(n_2-1){S_2}^2}{n_1+n_2-2}$$

(3) 모집단이 정규분포, 모분산을 모르지만 모분산이 다르다고 알려져 있을 때,

$$T = \frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-d}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2}}} \approx\ t(v),\ \text{단},\ v = \frac{(\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2})^2}{({s_1}^2/n_1)^2/(n_1-1)+({s_2}^2/n_2)^2/(n_2-1)}$$

6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

(예제) 지역 환경에 따라 학력에 차이가 있는가를 알아보기 위하여, 두 도시의 중학교 1학년 학생 중에서 각각 90명과 100명을 랜덤추출하여 동일한 시험을 시행한 결과가 다음과 같았다.

	도시1	도시2
표본크기	90	100
표본평균	76.4	81.2
표본 표준편차	8.2	7.6

두 도시의 중학교 1학년 학생 전체의 평균성적에 차이가 있는지 유의수준 1%에서 검정하고 유의확률도 구하여라. 또한 평균성적의 차이에 대한 신뢰수준 99%의 신뢰구간도 구하여라.

1. 가설 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \ vs \ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \ (H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \ vs \ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0)$
2. 유의수준 0.01
3. 검정통계량 $T = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - 0}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}} \approx t(v)$
4. 계산 t= $\frac{76.4 - 81.2 - 0}{\sqrt{\frac{8.2^2}{90} + \frac{7.6^2}{100}}}$=-4.17

6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

5. 검정

n_1=90, n_2=100으로 충분히 크므로 표준정규분포를 이용할 수 있다.

$-z_{0.005}$=-2.576 > -4.17 이고 유의확률 : $2P(T \geq 4.17)$=0.00003 이므로 귀무가설을 기각 할 만한 증거가 된다.

6. 결론

유의수준 1%에서 두 도시의 중학교 1학년 학생의 학력에는 차이가 있다는 뚜렷한 증거가 된다.

- $\mu_1 - \mu_2$ 에 대한 99%신뢰구간

$(\overline{x_1} - \overline{x_2}) \pm z_{0.005}\sqrt{\frac{S_1{}^2}{n_1} + \frac{S_2{}^2}{n_2}}$ =(76.4-81.2) $\pm 2.576\sqrt{\frac{8.2^2}{90} + \frac{7.6^2}{100}}$=(-7.9, -1.7)

6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

(예제) 음식물을 통한 질산칼륨의 과다섭취가 성장을 저해한다는 증거가 있는지를 알아보기 위하여 16마리의 쥐를 대상으로 실험을 하였다. 이들 중 9마리를 랜덤추출하여 2000ppm의 질산칼륨을 섭취하게 하고 나머지 7마리는 일상적인 식사를 하게 하였다. 일정기간 후에 이들의 체중 증가율(%)을 조사한 결과가 다음의 표와 같다.

질산칼륨섭취군	12.7	19.3	20.5	10.5	14.0	10.8	16.6	14.0	17.2
규정식 섭취군	18.2	32.9	10.0	14.3	16.2	27.6	15.7		

질산칼륨과다섭취가 성장을 저해하는 증거가 있는지 유의수준 5%에서 검정하고 유의확률도 구하여라.

질산칼륨 과다 섭취하는 쥐의 평균 체중 증가율을 μ_1, 일상적인 식사를 하는 쥐의 평균체중 증가율을 μ_2 라고 하면,

1. 가설 $H_0: \mu_1 = \mu_2 \;\; vs \;\; H_1: \mu_1 < \mu_2 \;\; (H_0: \mu_1 - \mu_2 \; = 0 \; vs \;\; H_1: \mu_1 - \mu_2 \; < 0)$

2. 유의수준 0.05

3. 검정통계량 $T = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - 0}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}} \approx \;\; t(7.8) \approx t(8)$

4. 계산 t= $\frac{15.7 - 19.27 - 0}{\sqrt{\frac{3.56^2}{9} + \frac{8.05^2}{7}}}$=-1.29

6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

5. 검정

$-t_{0.05}(8)$=-1.86 < -1.29이고 유의확률 : $\mathrm{P}(T \leq -1.29)$=0.117 이므로 귀무가설을 기각할 만한 증거가 되지 못한다.

6. 결론

유의수준 5%에서 질산칼륨과다섭취가 성장을 저해한다는 증거가 뚜렷하지 않다.

6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

(예제) 마리화나의 주성분인 Δ^9THC와 11-OH-Δ^9THC가 환각 효과에 미치는 영향의 차이를 알아보기 위한 실험 결과가 보고 되었다. (모분산은 같다고 가정)

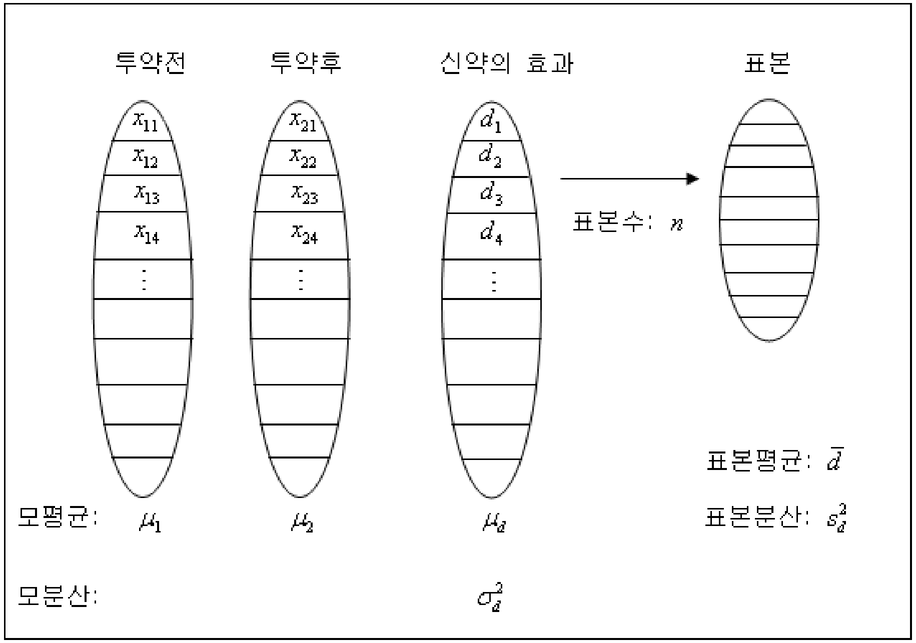
	Δ^9THC	11-OH-Δ^9THC
표본크기	6	6
표본평균	18.787	18.012
표본 표준편차	5.908	4.418

건강상태가 비슷한 12명 중 6명을 랜덤추출하여 Δ^9THC를 나머지 6명에게는 11-OH-Δ^9THC를 정맥주사하여 환각효과가 느껴지기 시작하는 순간까지의 주사량을 체중 1kg당 10^{-6}gr 단위로 측정한 결과가 위의 표와 같다. 환각효과에 필요한 두 물질의 평균 주사량에 차이가 있는가 유의수준 5%에서 검정하고 유의확률도 구하여라. 또한 평균 주사량의 차이에 대한 95%신뢰구간을 구하여라.

6-2 이표본에 의한 모평균의 비교

6-3 대응비교에 의한 모평균의 비교

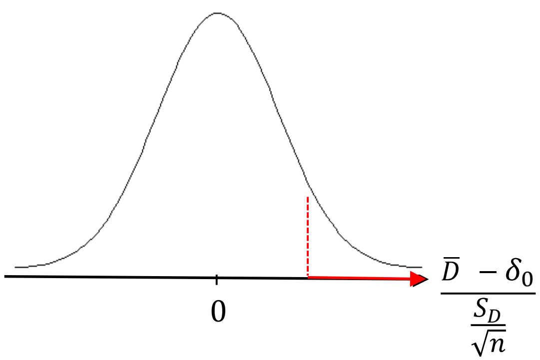
- 두 모집단의 평균을 비교할 때 비교대상의 쌍들을 조사하고, 각 쌍에서 모은 관측값의 차로 두 모집단 평균의 차에 관한 추론을 하는 방법을 대응비교 또는 쌍체비교 (paired comparison)라고 한다.
- 두 처리의 효과를 비교하고자 할 때, 비교의 효과를 높이고자 동질적인 실험단위로 쌍을 이루어 (독립 표본이 되지 않음.) 두 처리를 적용하여 비교하는 것이 대응비교의 목적이다.



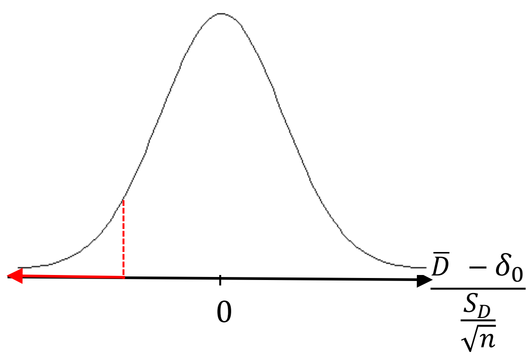
6-3 대응비교에 의한 모평균의 비교

- 자료 $(X_1, Y_1), \cdots (X_n, Y_n)$
- $\mu_1 = E(X_1)$과 $\mu_2 = E(X_2)$의 차를 비교하려면 $D_i = X_i - Y_i$ 를 이용 $(i=1,2, \cdots, n)$
- $T = \dfrac{\bar{D} - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$
- $\mu_1 - \mu_2$에 대한 100(1-α)% 신뢰구간 : $(\bar{d} - t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)\, s_D/\sqrt{n},\ \bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)\, s_D/\sqrt{n})$
- 가설 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs

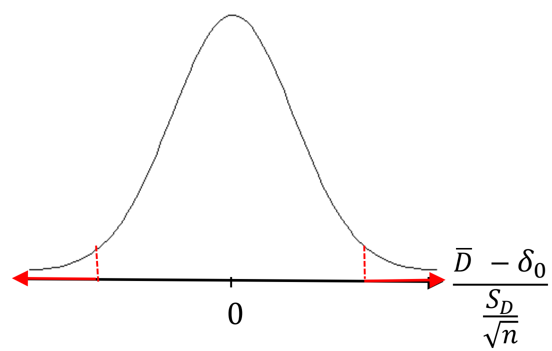
$H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$



$H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$



$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$



- 검정통계량 $T = \dfrac{\bar{D} - \delta_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$

6-3 대응비교에 의한 모평균의 비교

(예제) 두 종류의 진통제에 대한 상대적 효과의 척도로서 복용 후 숙면할 수 있는 정도를 비교하려고 한다. 이러한 실험에 참여하기로 한 환자 중에서 소수의 환자를 랜덤추출하여 조사하기로 하였으나 이들 환자들의 제반 건강상태에 상당한 차이가 있음을 알고 있다. 따라서 이들 중 6명의 환자를 랜덤추출하고 각 환자에게 두 종류의 진통제를 각각 1회씩 복용하게 하여 숙면시간의 차이를 이용하여 두 진통제의 효과를 비교하기로 하였다. 이 때 복용순서에 따라 효과가 달라질 수 있음을 감안하여 어느 진통제를 먼저 복용시킬 것인가를 매번 동전을 던져 정하기로 하였다.

--동일환자에게 두 진통제를 랜덤한 순서로 적용시켜 실험의 효과를 높이는 것이 대응비교의 목적이다.---

6-3 대응비교에 의한 모평균의 비교

(예제) 가축들의 소변에서 불소의 농도를 방목 초기와 일정기간 후에 측정하기로 하고 11마리의 소를 랜덤추출하여 조사한 결과가 아래와 같다. 과연 공장지대에서 일정기간 방목된 가축의 소변에 나타나는 불소의 농도가 떨어진다는 증거가 있는지 유의수준 1% 에서 검정하여라.

가축	1	2	3	4	5	6
방목초기	24.7	46.1	18.5	29.5	26.3	33.9
일정기간후	12.4	14.1	7.6	9.5	19.7	10.6

가축	7	8	9	10	11
방목초기	23.1	20.7	18.0	19.3	23
일정기간후	9.1	11.5	13.3	8.3	15

방목초기-일정기간 후: 12.3, 32, 10.9,20.0, 6.6, 23.3, 14.0, 9.2, 4.7, 11.0, 8.0

1. 가설 $H_0: \mu_1 = \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 > \mu_2 \ (H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0)$
2. 유의수준 0.01
3. 검정통계량 T=$\frac{\bar{D} - 0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$
4. 계산 t= $\frac{13.82-0}{\frac{8.173}{\sqrt{11}}}$=5.61

6-3 대응비교에 의한 모평균의 비교

5. 검정

$t_{0.01}(10)$=2.764< 5.61이고 유의확률 : $P(T \geq 5.61)$=0.0001 이므로 귀무가설을 기각할 만한 증거가 된다.

6. 결론

유의수준 1%에서 환경오염에 의해 소변 중 불소의 농도가 떨어진다는 뚜렷한 증거가 있다고 할 수 있다.

6-4 모분산에 대한 추론

1. 모분산 σ^2대한 신뢰구간

$$1-\alpha = P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\text{n-1})\}$$

$$= \text{P}\{ \qquad \le \sigma^2 \le \qquad \}$$

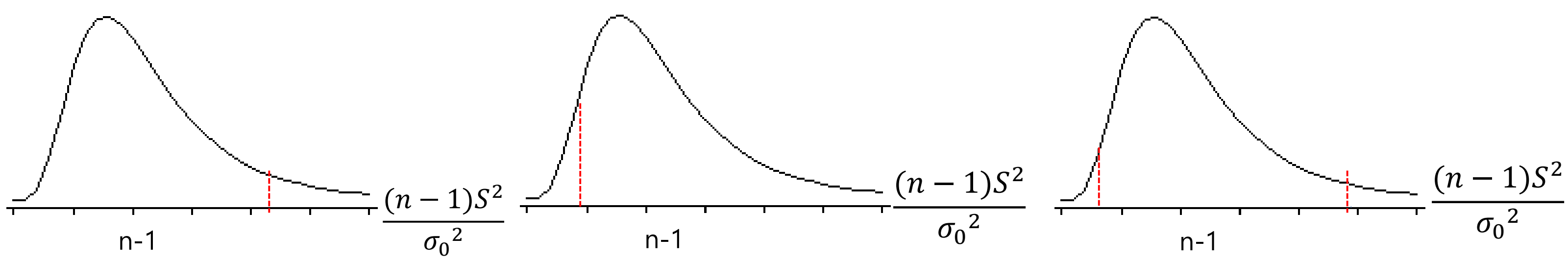
따라서, 모분산 σ^2에 관한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은

( )

2. 모분산 σ^2대한 점추정 : 표본분산 S^2

3. 모분산 σ^2대한 가설검정

$H_0: \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \;\; vs \;\; H_1: \sigma^2 > {\sigma_0}^2 \quad H_0: \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \;\; vs \;\; H_1: \sigma^2 < {\sigma_0}^2 \quad H_0: \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \;\; vs \;\; H_1: \sigma^2 \ne {\sigma_0}^2$



- 검정통계량 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} \sim \chi^2(n-1)$

6-4 모분산에 대한 추론

(예제) 플라스틱판을 생산하는 한 공장에서는 생산되는 판 두께의 표준편차가 1.5mm를 상회하면 공정에 이상이 있는 것으로 간주한다. 어느날 점검에서 10개의 판을 랜덤추출하여 그 두께를 측정한 결과가 mm단위로 다음과 같이 주어졌다.

226, 228,226, 225, 232, 228, 227, 229, 225, 230

과거의 공정관리 기록에 의하면 이러한 판 두께의 분포는 정규분포라고 해도 무방하다고 할 때, 공정에 이상이 있는가를 유의수준 5%에서 검정하고 유의확률도 구하여라. 또한 판 두께의 표준편차에 대한 90%신뢰구간도 구하여라.

1. 가설 $H_0: \sigma^2 = 1.5^2 \;\; vs \;\; H_1: \sigma^2 > 1.5^2$
2. 유의수준 0.05
3. 검정통계량 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{1.5^2} \sim \chi^2(9)$
4. 계산 $\chi^2 = \frac{(10-1)2.27^2}{1.5^2} = 20.61$
5. 검정 $\chi^2{}_{0.05}(9) = 16.92 < 20.61$, $P(\chi^2 \geq 20.61) = 0.0145$ 이므로 귀무가설을 기각할 수 있다.
6. 결론 유의수준 5%에서 플라스틱판의 공정에 이상이 있다는 뚜렷한 증거가 된다.

6-4 모분산에 대한 추론

${\chi^2}_{0.05}(9)=16.92$, ${\chi^2}_{0.95}(9)=3.33$ 이므로

σ^2에 대한 90%신뢰구간은( )=(2.742,13.955)

따라서 σ에 대한 90%신뢰구간은 ($\sqrt{2.742}$, $\sqrt{13.955}$)=(1.66, 3.74)

6-5 모분산비에 대한 추론

1. 모분산$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$대한 신뢰구간

$$1-\alpha = P\{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1) \le \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le f_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)\}$$

$$= \mathrm{P}\{ \qquad\qquad \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \qquad\qquad \}$$

따라서, 모분산$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$에 관한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은

( )

2. 두 모분산이 같은지에 대한 가설검정

- 가설 $\mathrm{H_0}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $\mathrm{H_1}: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 (\mathrm{H_0}: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ vs $\mathrm{H_1}: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1)$

  $\mathrm{H_0}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $\mathrm{H_1}: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 (\mathrm{H_0}: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ vs $\mathrm{H_1}: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1)$

  $\mathrm{H_0}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $\mathrm{H_1}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 (\mathrm{H_0}: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ vs $\mathrm{H_1}: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1)$

3. 모분산비$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2})$대한 점추정 : 표본분산의 비 $\frac{S_1^2}{S_2^2}(\frac{S_2^2}{S_1^2})$

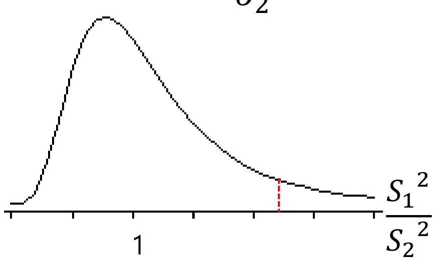
6-5 모분산비에 대한 추론

4. 검정통계량

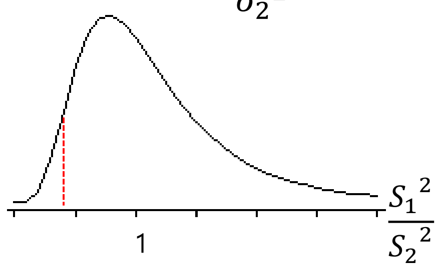
$$F = \frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}} \cdot \overbrace{\frac{\sigma_2^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}}}^{=1} \sim F(n_1-1, n_2-1) \qquad \therefore\ F = \frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

5. 기각역

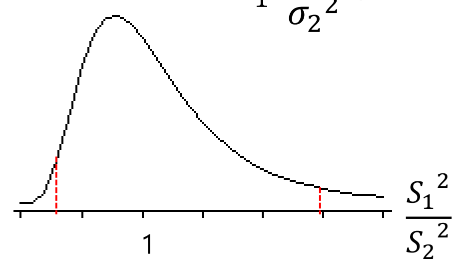
$H_1: \frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}} > 1$



$H_1: \frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}} < 1$



$H_1: \frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}} \neq 1$



6-4 모분산에 대한 추론

(예제) 콘크리트에 균열이 있는 경우에 이의 보수를 위하여 흔히 중합물질인 폴리머를 주입하게 된다. 다음은 한 연구보고서에 보도된 두 종류의 폴리머를 사용할 때의 주입 압축률에 대한 자료이다. 두 폴리머의 주입 압축률의 산포가 다르다는 증거가 있는가를 유의수준 5%에서 검정하고 표준편차의 비에 대한 95%신뢰구간을 구하여라.

Epoxy: 1.75, 2.12, 2.05, 1.97

MMA Prepolymer : 1.77, 1.59, 1.70, 1.69

1. 가설 $H_0: {\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$ vs $H_1: {\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2$ $(H_0: \frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2} = 1$ vs $H_1: \frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2} \neq 1)$
2. 유의수준 0.05
3. 검정통계량 $F = \frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} \sim F(3,3)$ 4. 계산 $f = \frac{0.160^2}{0.074^2} = 4.675$
5. 검정 $f_{0.025}(3,3) = 15.44$, $f_{0.975}(3,3) = 1/f_{0.025}(3,3) = 1/15.44$

$1/15.44 < 4.675 < 15.44$ 이므로 귀무가설을 기각할 만한 증거가 되지 못한다.

6. 결론 유의수준 5%에서 압축률의 산포가 다르다는 뚜렷한 증거가 되지 못한다.

6-4 모분산에 대한 추론

모분산비 $\frac{\sigma_1{}^2}{\sigma_2{}^2}$에 대한 95% 신뢰구간은

$(\qquad) = (0.301,\ 72.182)$

따라서 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$에 대한 95%신뢰구간은 $(\sqrt{0.301},\ \sqrt{72.182}) = (0.549,\ 8.496)$