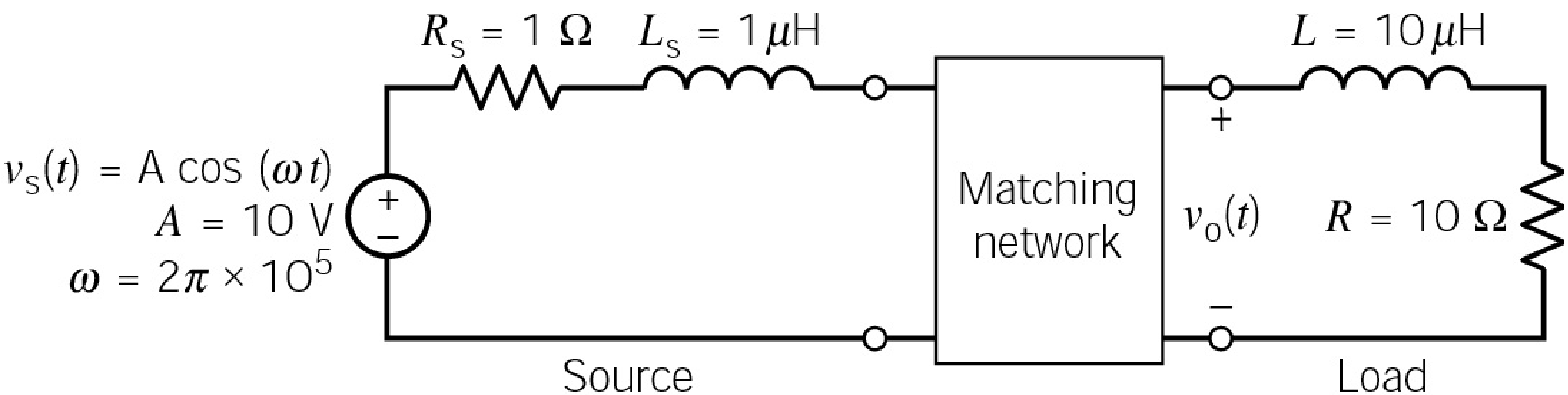
Maximum Power Transfer

- 전원과 부하 사이에 **matching network**을 삽입해서 부하에 가능한 한 많은 **power**를 전달하게 한다.
- **Maximum power transfer**의 중요한 응용 예는 **cellular phone**의 연결이나 **wireless radio transmitter**에서 **cell's antenna**로의 **power transfer**이다.
- 예를 들면, 실제 **cellular telephone antenna**의 **input impedance**는 $10 + j\,6.28\,\Omega$ 이 다.
- 부하에 **maximum power**가 전달되도록 **network**을 설계하라.

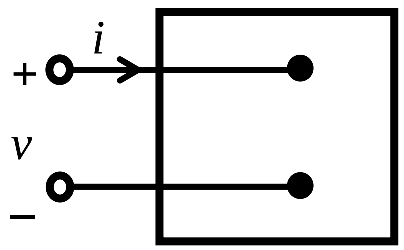


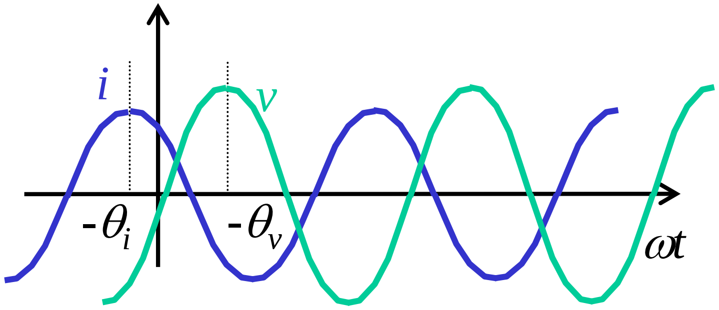
Design the matching network to transfer maximum power to the load where the load is the model of an antenna of a wireless communication system.

Richard C. Dorf & James A. Svoboda, Introduction to Electric Circuits, 8th edition, John Wiley & Sons, 2010, p. 538

Sinusoidal Steady-State Power Calculations

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$
$$i = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$





Instantaneous power

전류가 최대가 되는 순간을 기준으로 함.

$\omega t + \theta_i = 0$ 인 순간이 기준.

$$\omega t = -\theta_i$$

$$i = I_m \cos \omega t$$
$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i)$$
$$p = vi$$
$$= \frac{V_m I_m}{2}\left[\cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i) + \cos(\theta_v - \theta_i)\right]$$
$$= P + P\cos 2\omega t - Q \sin 2\omega t$$

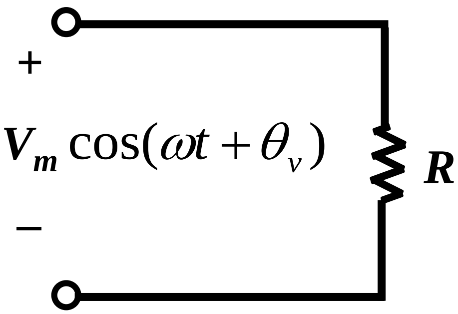
Average power

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\,dt = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)$$
$$Q = \frac{V_m I_m}{2}\sin(\theta_v - \theta_i)$$

RMS Value

*Rms value*는 *dc* 와의 비교값.

저항회로에 정현파 전압의 가해질 때 전달되는 파워.



$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta_v)}{R} dt$$

$$= \frac{1}{R}\left[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta_v) dt\right] = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

즉, 전압을 V_{rms}로 나타내면 V_{dc}일 때 전달되는 에너지와 비교할 수 있다.

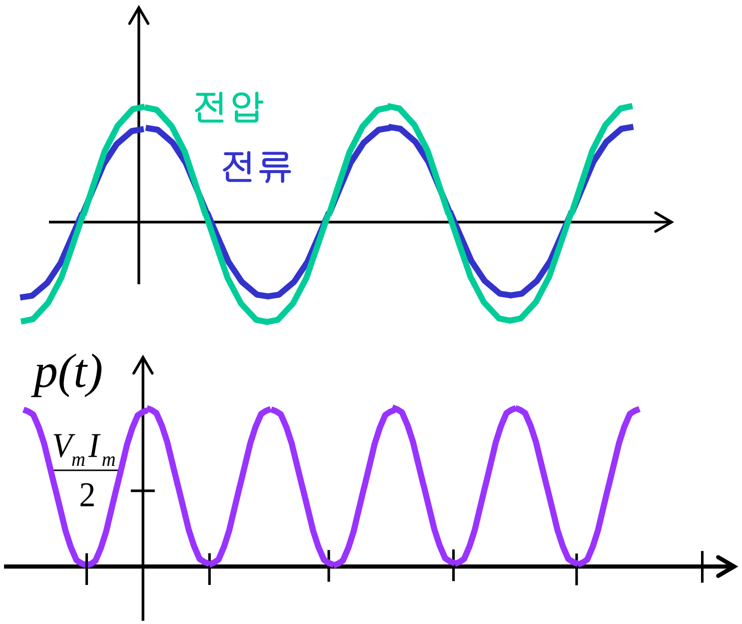
V_{rms} = 100 V 이면 V_{dc} = 100 V 일 때 전달되는 에너지와 같다.

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i),\ Q = \frac{V_m I_m}{2}\sin(\theta_v - \theta_i) = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

정현파 220 V - 100 W 백열전구에서 저항은 $P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P} = 484\,\Omega$

전류는 $I = \frac{V}{R} = 0.455\ \text{A}$ 이다. 전류의 진폭은 $\sqrt{2} \times 0.455 = 0.636\ \text{A}$ 이다.

Power for Purely Resistive Circuits



Current is in the same phase of voltage

$$p(t) = P + P\cos 2\omega t - Q\sin 2\omega t$$

따라서,

$$\theta_i = \theta_v$$

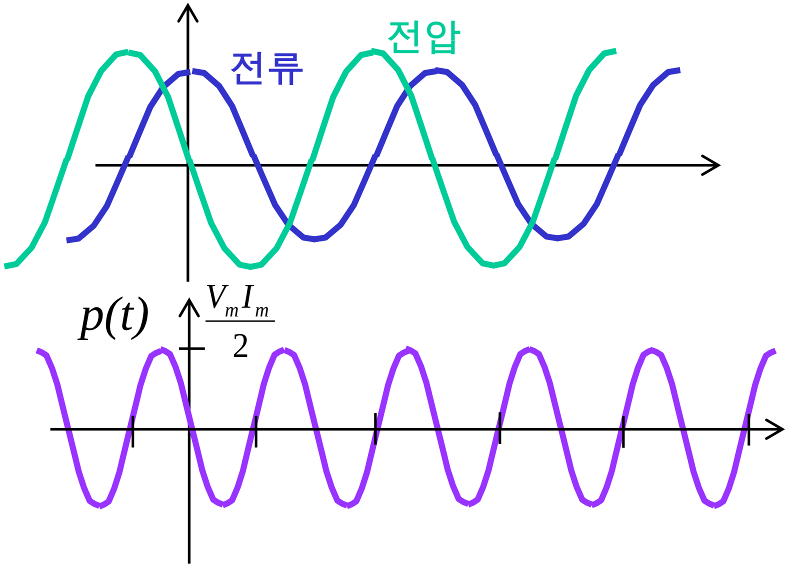
$$\cos(\theta_v - \theta_i) = 1,\ \sin(\theta_v - \theta_i) = 0$$

$$p(t) = P + P\cos 2\omega t$$

***p(t)*는 instantaneous real power** 이고**, real power**란 전기적인 파워로부터 다른 형태의 파워로 바꿀 수 있는 파워이다**.**

순수 저항 회로라면 전기적 에너지가 열 에너지로 변환되고**,** 회로 내부에 에너지를 저장할 수 없으므로 **instantaneous real power**는 음이 되는 경우는 없다**.**

Power for Purely Inductive Circuits



$$p(t) = P + P\cos 2\omega t - Q\sin 2\omega t$$

Current lags voltage by 90º

$$\theta_v = \theta_i + 90°$$

따라서 $\cos(\theta_v - \theta_i) = 0, \ \sin(\theta_v - \theta_i) = 1$

$$p(t) = -Q\sin 2\omega t$$

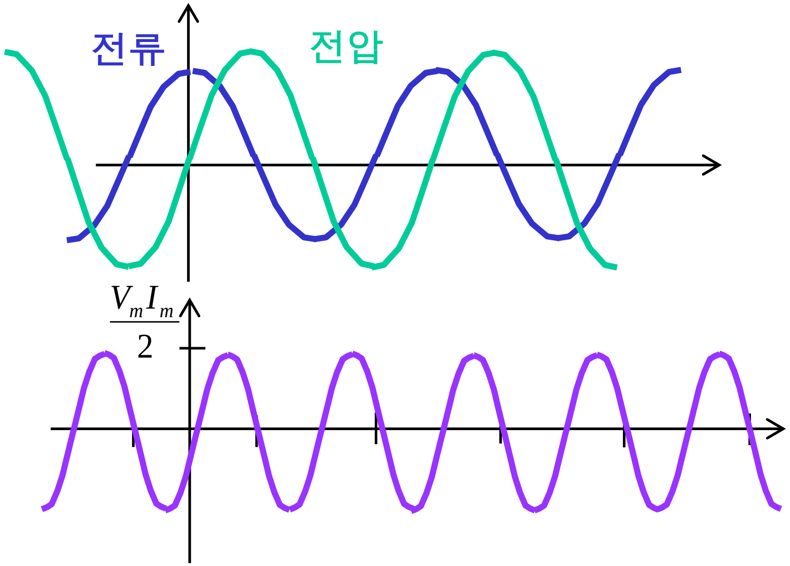
Average power는 영이므로 에너지의 변환은 없다.

Instantaneous power는 **reactive power**이고 회로에서 부하와 전원사이를 오간다.

$p > 0$ 이면 전원 $\rightarrow$ 부하.

$p < 0$ 이면 전원 $\leftarrow$ 부하.

Power for Purely Capacitive Circuits



$$p(t) = P + P\cos 2\omega t - Q\sin 2\omega t$$

Current leads voltage by 90º

$$\theta_i = \theta_v + 90^\circ$$

따라서 $\cos(\theta_v - \theta_i) = 0,\ \sin(\theta_v - \theta_i) = -1$

$$p(t) = -Q\sin 2\omega t$$

Average power는 영이므로 에너지의 변환은 없다.

Instantaneous power는 **reactive power**이고 회로에서 부하와 전원사이를 오간다.

$p > 0$ 이면 전원 $\rightarrow$ 부하.

$p < 0$ 이면 전원 $\leftarrow$ 부하.

Real(Average) Power and Reactive Power

Instantaneous power $$p(t) = P + P\cos 2\omega t - Q\sin 2\omega t$$

Real (Average) power

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$$
$$= V_{rms} I_{rms}\, pf$$
$$\because\ pf = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Reactive power

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$$
$$= V_{rms} I_{rms}\, rf$$
$$\because\ rf = \sin(\theta_v - \theta_i)$$

(1) 단위 **P : Watt, Q : VAR (Volt-Amp Reactive)**

(2) 전류를 기준으로 하면

인덕터는 $\theta_v - \theta_i$ **= 90º** 이므로 $Q > 0$ **:** 인덕터는 ***magnetizing vars***를 흡수.

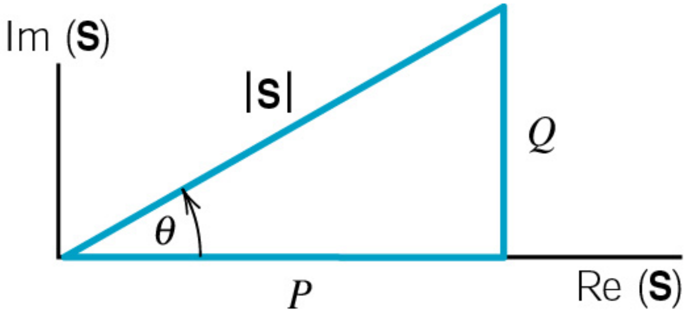
커패시터는 $\theta_v - \theta_i$ **= - 90º** 이므로 $Q < 0$ **:** 커패시터는 ***magnetizing vars***를 전달.

(3) ***power factor*** 값을 알 경우 ***reactive factor*** 의 값을 알 수 있어도 부호를 결정할 수 없다.

lagging pf 라 하면 유도성이므로 Q 는 양이고,

leading pf 라 하면 용량성이므로 Q 는 음이 된다.

Complex Power Calculations



파워를 복소수로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{S} = P + jQ \qquad P[\mathrm{W}],\ Q[\mathrm{VAR}],\ \mathbf{S}[\mathrm{VA}]$$

$$|\mathbf{S}| : apparent\ \ power, \quad \mathrm{VA}(volt - amps)$$

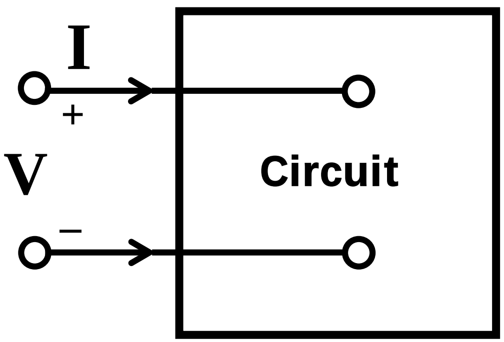
S 를 정리하면

$$\mathbf{S} = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) + j\frac{V_m I_m}{2}\sin(\theta_v - \theta_i)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} e^{j(\theta_v - \theta_i)} = \frac{V_m I_m}{2} \angle(\theta_v - \theta_i) = V_{eff} I_{eff} \angle(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{eff} I_{eff} e^{j(\theta_v - \theta_i)} = V_{eff} e^{j\theta_v} I_{eff} e^{-j\theta i} = \mathbf{V}_{eff} \mathbf{I}_{eff}{}^{*}$$

여기서, $\mathbf{V}_{eff} = V_{eff} e^{j\theta_v}$, $\mathbf{I}_{eff} = I_{eff} e^{j\theta_i}$, $\mathbf{I}^{*}$: $\mathbf{I}$의 공액 복소수

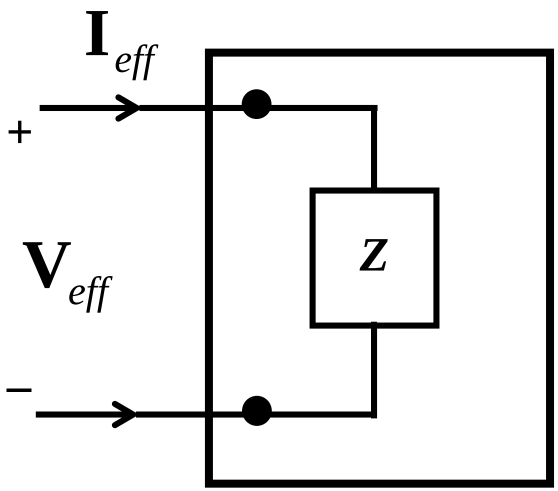


Phasor voltage and circuit

따라서, $$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff} \mathbf{I}_{eff}{}^{*} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^{*}$$

Richard C. Dorf & James A. Svoboda, Introduction to Electric Circuits, 8th edition, John Wiley & Sons, 2010, p. 505

Alternate Forms for Complex Power



Z를 사용해서 S를 표현하자.

$\mathbf{V}_{eff} = Z\mathbf{I}_{eff}$ 이므로

$$S = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^{*} = \left|\mathbf{I}_{eff}\right|^{2}(R + jX)$$

따라서, $P = R\left|\mathbf{I}_{eff}\right|^{2} = \frac{1}{2}RI_{m}^{2}$, $Q = X\left|\mathbf{I}_{eff}\right|^{2} = \frac{1}{2}XI_{m}^{2}$

또한 $\mathbf{I}_{eff} = \frac{\mathbf{V}_{eff}}{Z}$ 이므로

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\left(\frac{\mathbf{V}_{eff}}{Z}\right)^{*} = \left|\mathbf{V}_{eff}\right|^{2} \cdot \frac{1}{Z^{*}} = P + jQ$$

Superposition of Average Power

- 전원이 복수일 때 각각의 전원이 독립적으로 운용될 때의 전류의 합을 구하여 전력을 구해야 한다. 특히 전원주파수가 같을 때에는 반드시 이 방법으로 구해야 한다.

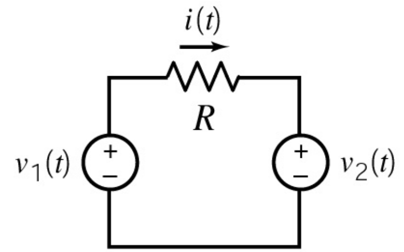
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$p(t) = i^2 R = (i_1 + i_2)^2 R = i_1{}^2 R + i_1{}^2 R + 2 i_1 i_2 R$$

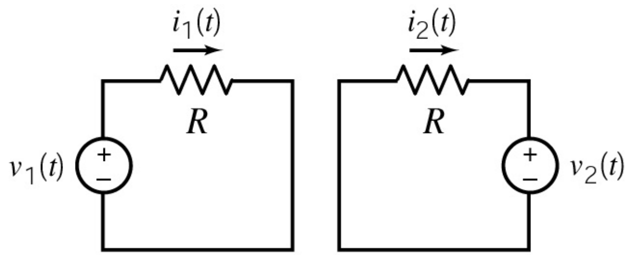
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (i_1 + i_2)^2 R dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T i_1^2 R dt + \frac{1}{T}\int_0^T i_2^2 R dt + \frac{1}{T}\int_0^T 2 i_1 i_2 R dt$$

$$= P_1 + P_2 + \frac{1}{T}\int_0^T 2 i_1 i_2 R dt$$



(a)
두 전원이 있는 회로



(b)
각각의 전원으로 구성된 회로

- 단, 전원의 주파수가 각각 다를 때 평균전력 중첩의 원리가 적용된다.

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2 i_1 i_2 R dt = \frac{1}{T}\int_0^T 2 I_1 I_2 R \cos(\omega_1 t + \theta_1)\cos(\omega_2 t + \theta_2) dt = 0 \quad when \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

$$P = \sum P_j = P_1 + P_2 + \ldots..$$

Richard C. Dorf & James A. Svoboda, Introduction to Electric Circuits, 8th edition, John Wiley & Sons, 2010, p. 519

Example of Average Power

$$(1)\ v_A(t) = 12\cos 3t\ \text{ V and } v_B(t) = 4\cos 4t\ \text{ V}$$

- 전원의 주파수가 각각 다를 때 평균전력의 중첩의 원리가 적용된다.

$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = \frac{(12/\sqrt{2})^2}{|6 + j6|^2} 6 = 6\ \text{W} \quad , \quad P_2 = \frac{(4/\sqrt{2})^2}{|6 + j8|^2} 6 = 0.48\ \text{W}$$

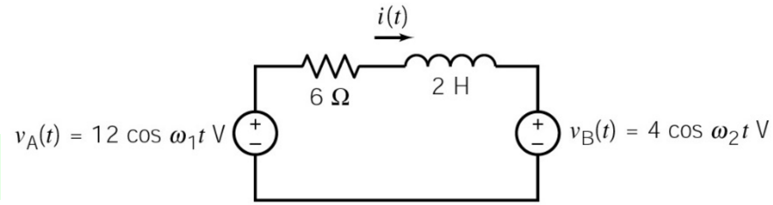
$$P = P_1 + P_2 = 6.48\ \text{ W}$$

$$(2)\ v_A(t) = 12\cos 4t\ \text{ V and } v_B(t) = 4\cos 4t\ \text{ V}$$

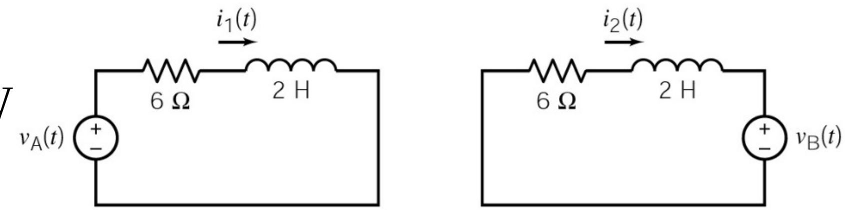
- 전원이 복수일 때 각각의 전원이 독립적으로 운용될 때의 전류의 합을 구하여 전력을 구해야 한다.

$$v(t) = v_A(t) + v_B(t) = 8\cos 4t$$

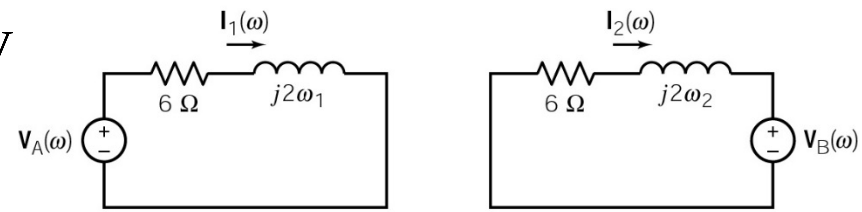
$$P = \frac{(8/\sqrt{2})^2}{|6 + j8|^2} 6 = 1.92\ \text{W}$$



두 전원이 있는 회로



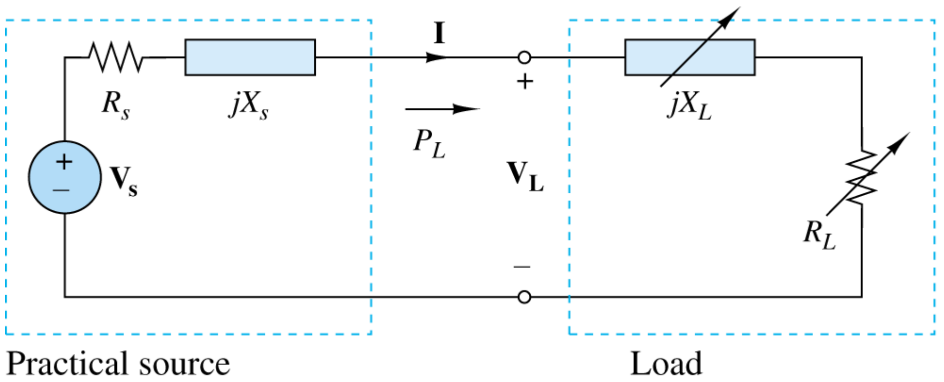
각각의 전원으로 구성된 회로



주파수 영역에서 각각의 전원으로 구성된 회로

Richard C. Dorf & James A. Svoboda, Introduction to Electric Circuits, 8th edition, John Wiley & Sons, 2010, p. 520

Maximum Power Transfer



$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{(R_s + R_L) + j(X_s + X_L)},$$

$$P = P_{av} = |\mathrm{I}|^2 R_L = \frac{V_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2}$$

Sinusoidal steady state 회로에서 최대 average power를 전달하려면

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial R_L} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{V_s^2\left[(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2 - 2R_L(R_s + R_L)\right]}{\left[(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2\right]^2} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = \frac{V_s^2\left[-2R_L(X_s + X_L)\right]}{\left[(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2\right]^2} = 0$$

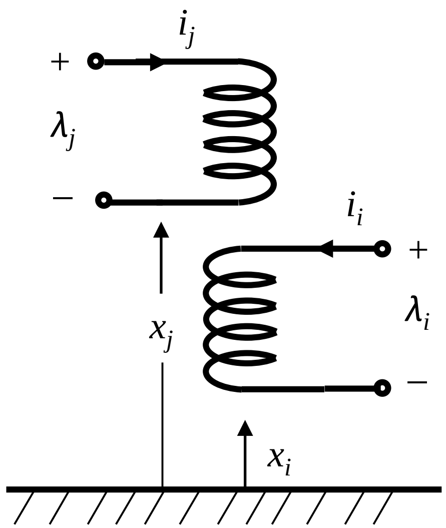
$$X_L = -X_s$$

$$\frac{V_s^2(R_s - R_L)}{(R_s + R_L)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_L = R_s$$

즉 부하 임피던스는 전원의 (테브난) 임피던스의 complex conjugate가 되어야 최대 전력이 전달된다.

$$\boxed{Z_L = Z_s^*, \qquad P_{\max} = \frac{V_{s,eff}^2}{4R_s}}$$

Self and Mutual Inductance



$$L_{ij} \equiv \frac{\lambda_i}{i_j \text{ (이때 } i_j \text{외의 전류는 영)}}$$

L_{ij}에서 $i = j$ 이면 **self inductance,**

$i \neq j$ 이면 **mutual inductance** 이다.

즉, **self inductance**는 자기 코일의 전류에 의해 발생하는 쇄교 자속에 의한 것이고, **mutual inductance**는 남의 코일의 전류에 의해 발생하는 쇄교 자속에 의한 것이다.

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} i_j \qquad v_i = \frac{d\lambda_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \frac{di_j}{dt}$$

코일이 두개라면

$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

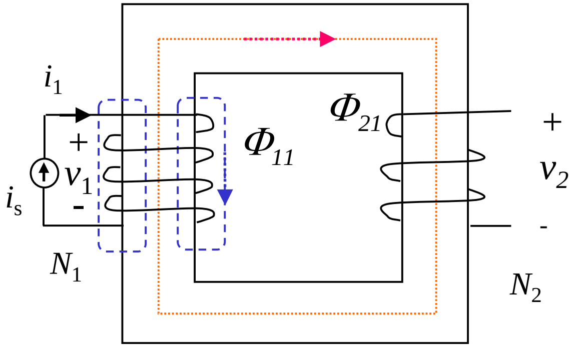
L_{11}, L_{22} **: self inductance,** L_{12}, L_{21} **: mutual inductance**

Permeance

$\lambda = N\Phi$ 이고, $\Phi = PNi$로 쓸 수 있다.

P **(permeance)** : 자속을 잘 통과시키는 정도를 나타내는 계수.

$$\lambda = N^2 Pi\,, \qquad v = \frac{d\lambda}{dt} = N^2 P\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}$$



Coil 1을 통과하는 자속

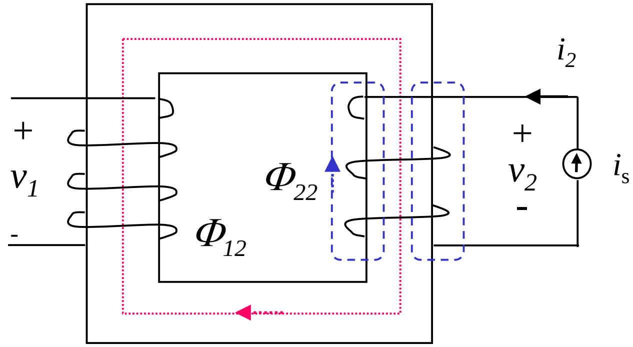
$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21}$$

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1\frac{d\Phi_1}{dt} = L_{11}\frac{di_1}{dt}$$

Coil 2를 통과하는 자속

$$\Phi_2 = \Phi_{21}$$

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2\frac{d\Phi_2}{dt} = L_{21}\frac{di_1}{dt}$$



Coil 1을 통과하는 자속

$$\Phi_1 = \Phi_{12}$$

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1\frac{d\Phi_1}{dt} = L_{12}\frac{di_2}{dt}$$

Coil 2를 통과하는 자속

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12}$$

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2\frac{d\Phi_2}{dt} = L_{22}\frac{di_2}{dt}$$

Mutual Inductance in terms of Self-Inductance

Since $L_1 = N_1^2 P_1$ and $L_2 = N_2^2 P_2$

$$P_1 = P_{11} + P_{21} \quad \text{and} \quad P_2 = P_{22} + P_{12}$$

$$L_1 L_2 = N_1^2 N_2^2 (P_{11} + P_{21})(P_{22} + P_{12}) \quad \text{and} \quad P_{12} = P_{21} = P_m$$

Therefore, $L_1 L_2 = N_1^2 N_2^2 P_m^2 (P_{11}/P_m + 1)(P_{22}/P_m + 1)$

Set that $1/k^2 = (P_{11}/P_m + 1)(P_{22}/P_m + 1)$ and $L_{12} = L_{21} = M = N_1 N_2 P_m$

$$L_1 L_2 = N_1^2 N_2^2 P_m^2 (P_{11}/P_m + 1)(P_{22}/P_m + 1) = M^2/k^2$$

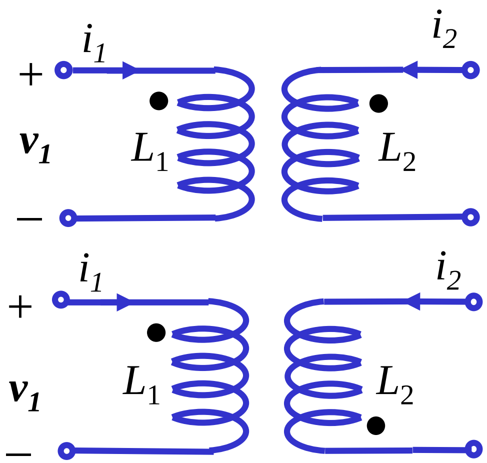
Mutual Inductance $M = k\sqrt{L_1 L_2}$

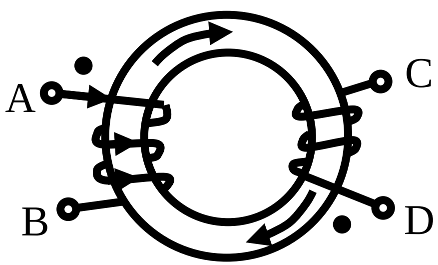
여기서 $\boldsymbol{k}$: 결합계수이다. $(\mathbf{0} \le \boldsymbol{k} \le \mathbf{1})$

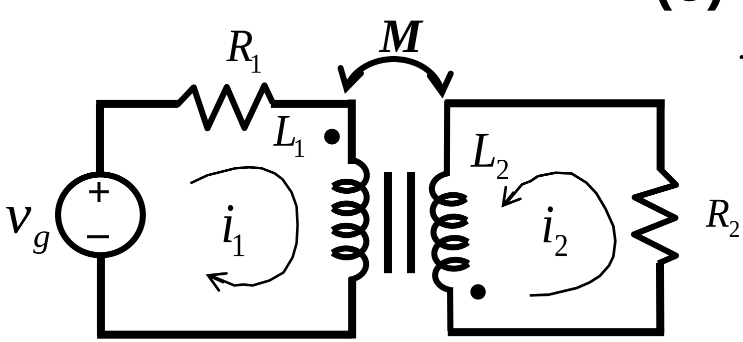
$$P_m = 0 \quad \rightarrow \quad k = 0$$

$$P_m = \infty \quad \rightarrow \quad k = 1$$

Dot Convention







Mutual inductance에 의해 발생하는 자속은 코일 전류의 방향 또는 권선을 감아 놓은 방향에 따라 더해질 수도 감해질 수도 있다. 이 때 **dot**가 있는 쪽으로 전류가 흘러 들어가면 자속은 더해진다고 약속해 두었다.

Dot marking 순서

(1) 한 단자에 **marking**하고 전류를 흘려 **flux**를 발생시킨다.

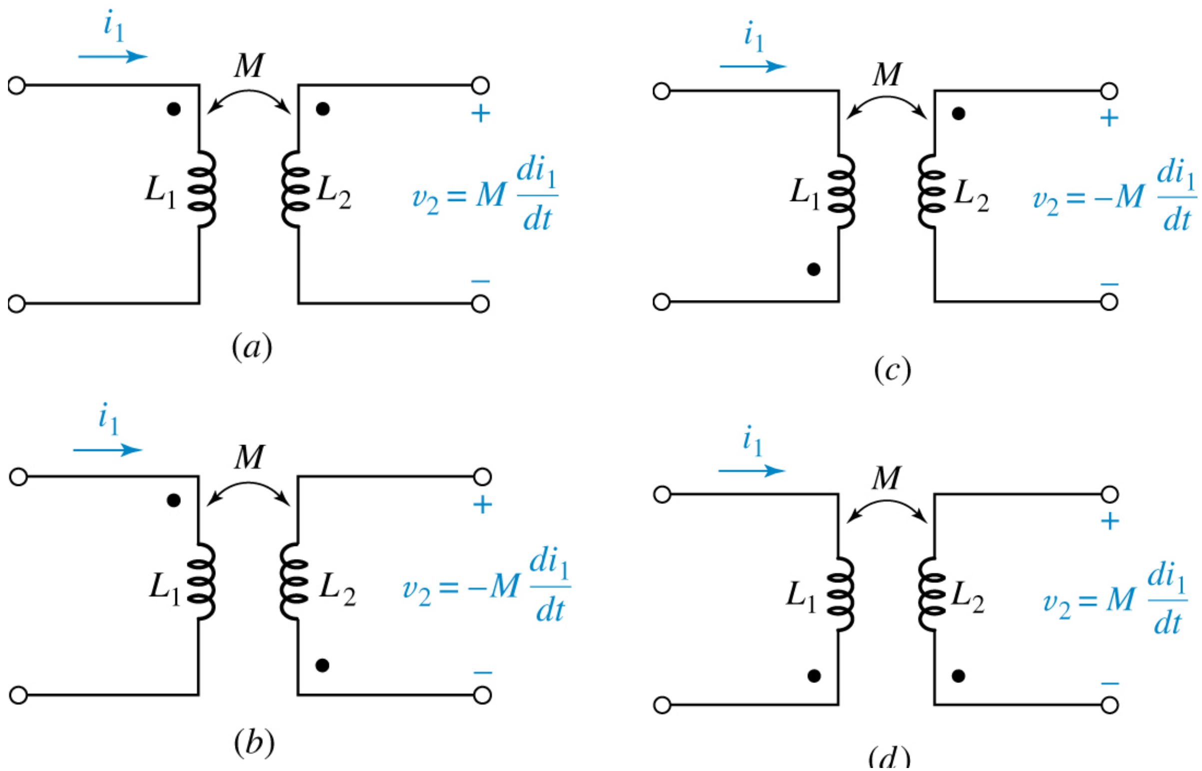
(2) 다른 코일의 한 단자를 선택하고 전류를 흘려서 **flux**를 발생시킨다.

(3) 두 **flux**가 더해지면 그 단자에 **marking**하고 두 **flux**가 빼지면 다른 단자에 **marking** 한다.

$$v_g = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

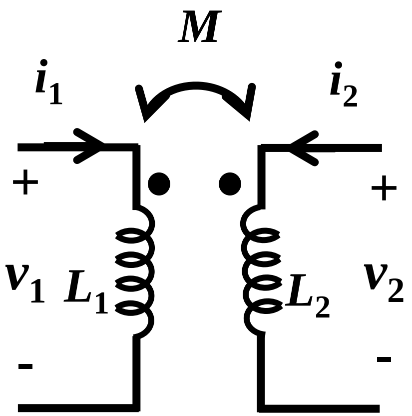
$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

Dot Convention - Example



Current entering the dotted terminal of one coil produces a voltage that is sensed positively at the dotted terminal of the second coil. Current entering the undotted terminal of one coil produces a voltage that is sensed positively at the undotted terminal of the second coil.

Energy Calculations



$$p = vi = v_1 i_1 + v_2 i_2 = \frac{d\lambda_1}{dt} i_1 + \frac{d\lambda_2}{dt} i_2$$

$$dw = pdt = i_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2 = i_1 d\left(L_1 i_1 + M_{12} i_2\right) + i_2 d\left(L_2 i_2 + M_{21} i_1\right)$$

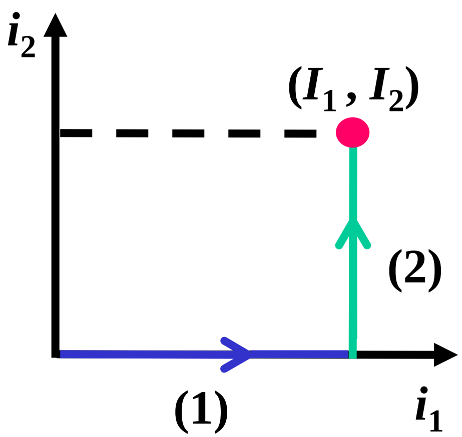
경로 구간**(1)** $\quad i_1 = 0 \rightarrow I_1, \quad i_2 = 0, \quad di_2 = 0$

$$W_1 = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

경로 구간**(2)** $\quad i_1 = I_1, \quad di_1 = 0, \quad i_2 = 0 \rightarrow I_2$

$$W_2 = \int_0^{I_2} M_{12} I_1 di_2 + \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 = M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$



다른 경로를 취하면

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \qquad \therefore M_{12} = M_{21} = M$$

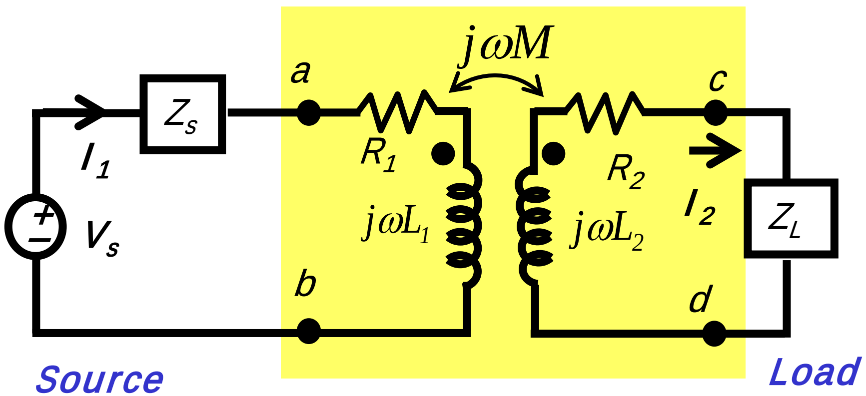
전류가 *flux*를 빼는 방향이라면 $\quad W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 - M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$

이 경우, 소자가 모두 수동 소자이므로

$W \geq 0$ 이고 $\quad W = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_1} I_1 - \sqrt{L_2} I_2\right)^2 + \left(\sqrt{L_1 L_2} - M\right) I_1 I_2 \geq 0$

$\therefore \sqrt{L_1 L_2} \geq M$ 이고 $\quad M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad \left(0 \leq k \leq 1\right)$

Linear Transformer



- **Transformer : Magnetic coupling**을 이용하는 대표적인 기기
- **Transformer**는 직류 전류나 전압은 전달하지 않으므로 교류만을 분리할 때도 이용
- 선형은 **magnetic flux**가 전류에 비례한다는 의미
- **Sinusoidal steady-state**를 해석

1차측 $-\mathbf{V}_s + Z_s\mathbf{I}_1 + (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 = 0$

2차측 $Z_L\mathbf{I}_2 + (R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 - j\omega M\mathbf{I}_1 = 0$

정리하면 $$\begin{pmatrix} Z_{11} & -j\omega M \\ -j\omega M & Z_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z_{11}, Z_{22} **: Total self-impedance**

$$\mathbf{I}_1 = \frac{Z_{22}\mathbf{V}_s}{Z_{11}Z_{22} + (\omega M)^2},\ \mathbf{I}_2 = \frac{j\omega M\mathbf{V}_s}{Z_{11}Z_{22} + (\omega M)^2}$$

전원 단자에서 본 **impedance**

$$\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1} = \frac{Z_{11}Z_{22} + (\omega M)^2}{Z_{22}} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = Z_{internal}$$

ab 단자에서 본 impedance

$$Z_{ab} = Z_{\text{int}} - Z_s = Z_{11} - Z_s + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

$$= R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)}$$

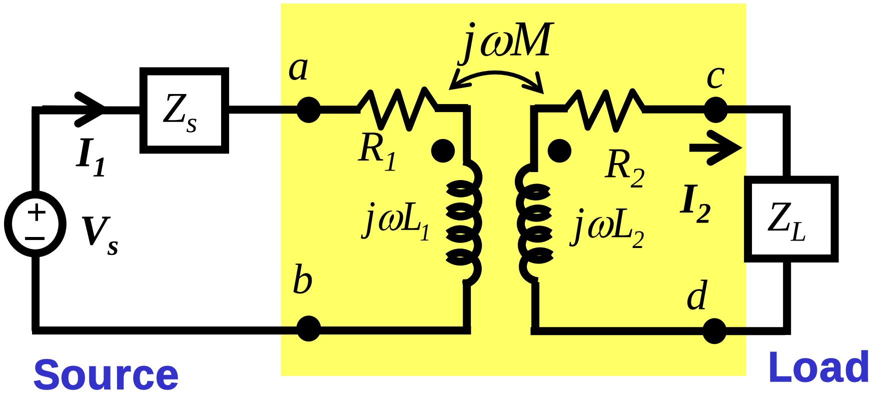
Z_r ***: Reflected impedance***

$$Z_r = \frac{(\omega M)^2[(R_2 + R_L) - j(\omega_2 + X_L)]}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 + X_L)^2}$$

$$= \frac{(\omega M)^2}{|Z_{22}|^2} Z_{22}^*$$

Scale $\frac{(\omega M)^2}{|Z_{22}|^2}$ **, *reactive* : 부호 바뀜**

Exploring Limiting Values(Ⅰ)



실제 변압기에서 L_1, L_2는 매우 크고 k는 거의 1 에 가깝다.

이럴 때의 Z_{ab}를 구해보자.

$$Z_{ab} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2 (R_{22} - jX_{22})}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

$$= \left(R_1 + \frac{(\omega M)^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \right) + j\left(\omega L_1 - \frac{(\omega M)^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \right) = R_{ab} + jX_{ab}$$

여기서 $k = 1, L_1 L_2 = M^2$ 이면 $(\omega M)^2 = \omega L_1 \omega L_2$

$$X_{ab} = \omega L_1 \left[\frac{R_{22}^2 + X_{22}^2 - \omega L_2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \right]$$

$$= \omega L_1 \cdot \frac{R_{22}^2 + X_L (\omega L_2 + X_L)}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

여기서 $L_1, L_2 \to \infty$

$$X_{ab} = \frac{X_L \omega^2 L_1 L_2}{\omega^2 L_2^2} = \frac{L_1}{L_2} X_L$$

Exploring Limiting Values (II)

$$\frac{1}{k^2}=\left(\frac{P_{11}}{P_{12}}+1\right)\left(\frac{P_{22}}{P_{12}}+1\right)$$ 에서 $k=1$은 $P_{11}=0=P_{22}, P_{12}=\infty$ 를 의미

$$L_1=N_1^2P_1=N_1^2\left(P_{11}+P_{12}\right)=N_1^2P_{12}$$

$$L_2=N_2^2P_2=N_2^2\left(P_{22}+P_{12}\right)=N_2^2P_{12}$$ 이므로

$$X_{ab}=\frac{L_1}{L_2}X_L=\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2X_L$$ 이다.

$$R_{ab}=R_1+\frac{\omega^2L_1L_2R_{22}}{R_{22}{}^2+X_{22}{}^2}=R_1+\frac{L_1}{L_2}R_{22}=R_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2R_{22}$$

따라서, $$Z_{ab}=R_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2R_{22}+j\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2X_L=R_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(R_2+R_L+jX_L\right)$$

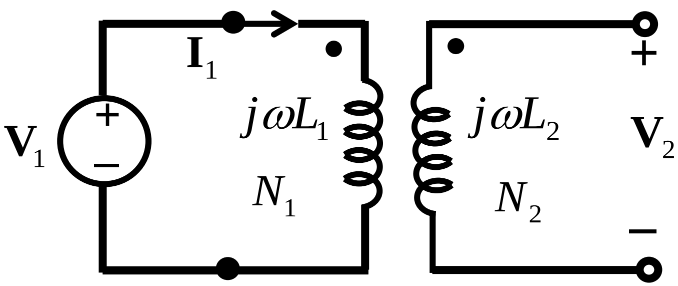
$k=1$ 이고 L_1, L_2가 매우 크면 ab 단자에서 2차 코일을 보았을 때 2차 코일 저항 R_2와 부하 임피던스 Z_L 은

$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$ 배가 된다.

Ideal Transformer

이상적인 변압기의 성질

(1) $k = 1$, (2) $L_1 = L_2 = \infty$, (3) coil losses = 0 , $R_1 = R_2 = 0$

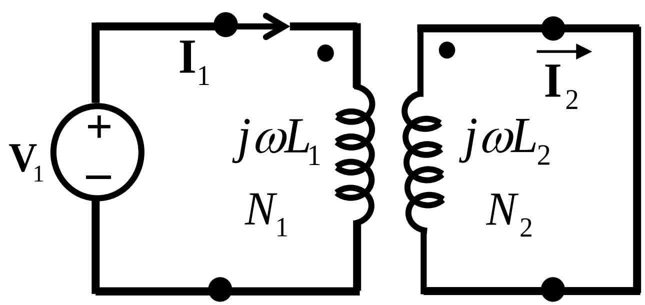


open

$$-\mathbf{V}_1 + j\omega L_1 \mathbf{I}_1 = 0$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M \mathbf{I}_1 = j\omega M \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L_1} = \frac{M}{L_1}\mathbf{V}_1$$

$$= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\mathbf{V}_1 = \frac{N_2}{N_1}\mathbf{V}_1 \qquad \therefore \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

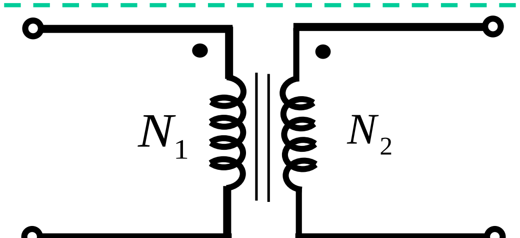


short

$$-\mathbf{V}_1 + j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2 = 0$$

$$j\omega L_2 \mathbf{I}_2 - j\omega M \mathbf{I}_1 = 0$$

$$L_2 \mathbf{I}_2 = M \mathbf{I}_1 = \sqrt{L_2 L_1}\,\mathbf{I}_1 \qquad \therefore \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

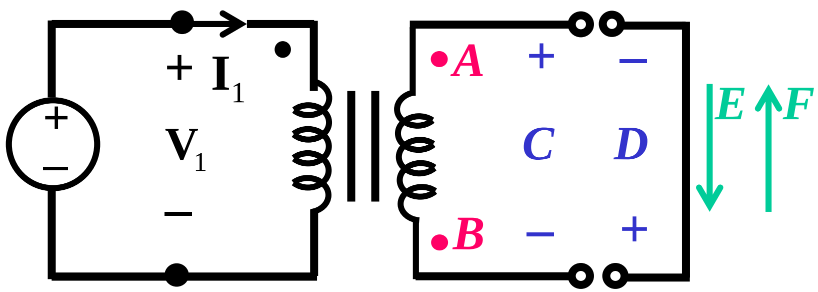


ideal

이상적인 변압기의 기호.
자기회로는 규소강을 사용하며,
변압기의 효율은 **95%**가 넘는다.

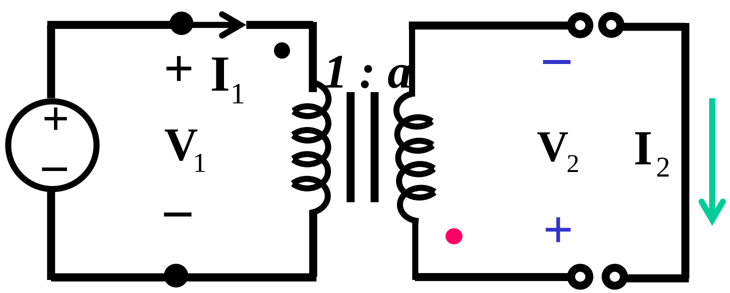
Polarity of Voltage and Current Ratio (I)

전압 부호 결정 : 2차 측 open, 전류 부호 결정 : 2차 측 short.



다음의 조합으로 회로를 결정할 수 있다.

dot :A, B 전압: C, D 전류: E, F



Case study (1) dot : B, 전압: D, 전류: E

open : $\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1 = j\omega M \dfrac{\mathbf{V}_1}{j\omega L_1}$

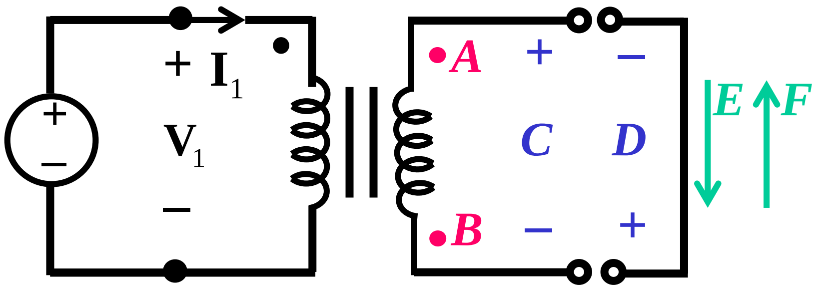
$$\mathbf{V}_2 = \frac{M}{L_1}\mathbf{V}_1 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\mathbf{V}_1 = \frac{N_2}{N_1}\mathbf{V}_1 = a\mathbf{V}_1$$

short : $j\omega L_2\mathbf{I}_2 + j\omega M\mathbf{I}_1 = 0$

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{M}{L_2}\mathbf{I}_1 = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\mathbf{I}_1 = -\frac{N_1}{N_2}\mathbf{V}_1 = \frac{-\mathbf{I}_1}{a}$$

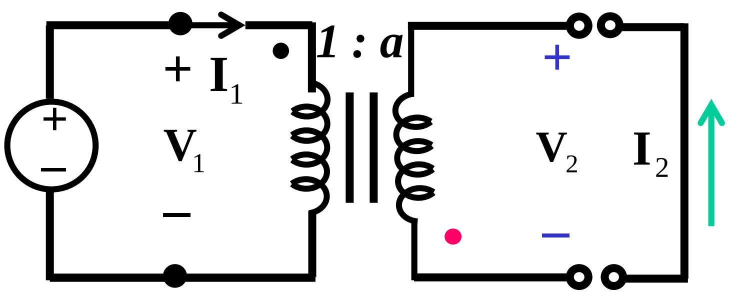
Polarity of Voltage and Current Ratio (II)

전압 부호 결정 : 2차 측 open, 전류 부호 결정 : 2차 측 short.



다음의 조합으로 회로를 결정할 수 있다.

dot :A, B 전압: C, D 전류: E, F



Case study (2) dot : B, 전압 : C, 전류 : F

open :

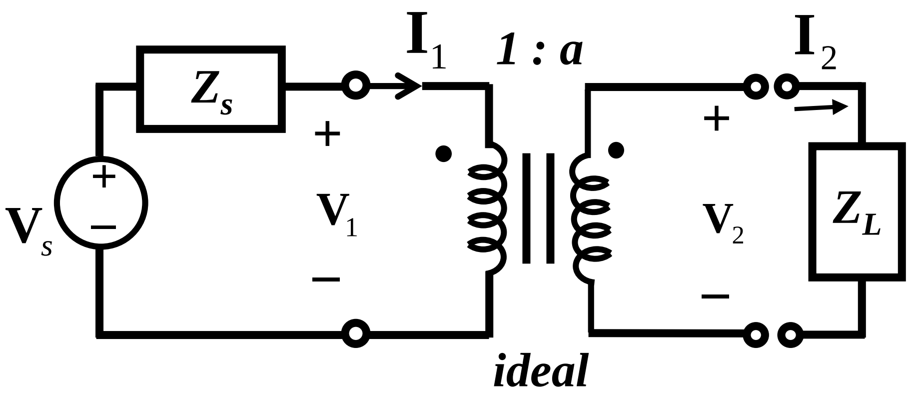
$$\mathbf{V}_2 = -j\omega M \mathbf{I}_1 = -j\omega M \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L_1}$$

$$\mathbf{V}_2 = -\frac{M}{L_1}\mathbf{V}_1 = -a\mathbf{V}_1$$

short : $j\omega L_2 \mathbf{I}_2 - j\omega M_1 \mathbf{I}_1 = 0$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{M}{L_2}\mathbf{I}_1 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\mathbf{I}_1 = \frac{1}{a}\mathbf{I}_1$$

Impedance Matching



전원 쪽에서 본 임피던스

$$Z_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}$$

전압, 전류의 관계

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M \mathbf{I}_1 = j\omega M \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L_1}$$

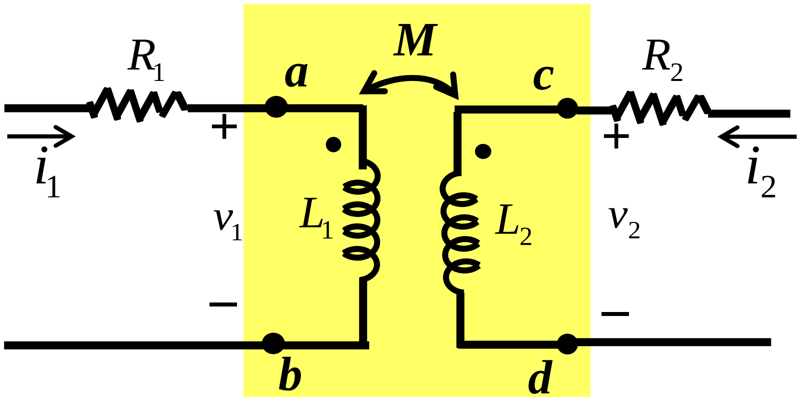
$$= a\mathbf{V}_1$$

따라서, $$Z_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\frac{1}{a}\mathbf{V}_2}{a\mathbf{I}_2} = \frac{1}{a^2}\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{Z_L}{a^2}$$

Z_L을 위상 변화 없이 크기를 줄일 수 있다.

최대 전력을 수송하기 위하여 변압기를 삽입하는 경우도 있음.

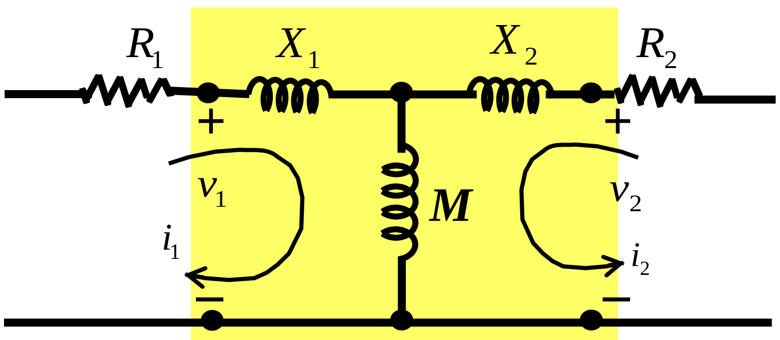
T-Equivalent Circuit



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

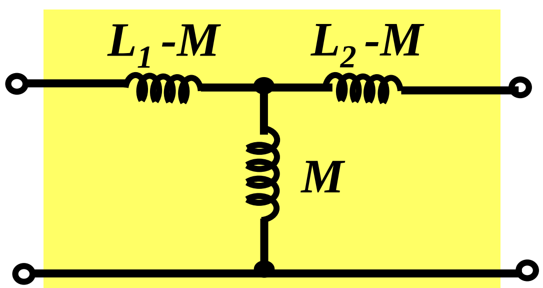
b, d를 연결해서 원래의 전압과 전류에 영향을 주지 않는다고 가정.



X_1, X_2를 구하자.

$$v_1 = X_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{d}{dt}(i_1 + i_2)$$

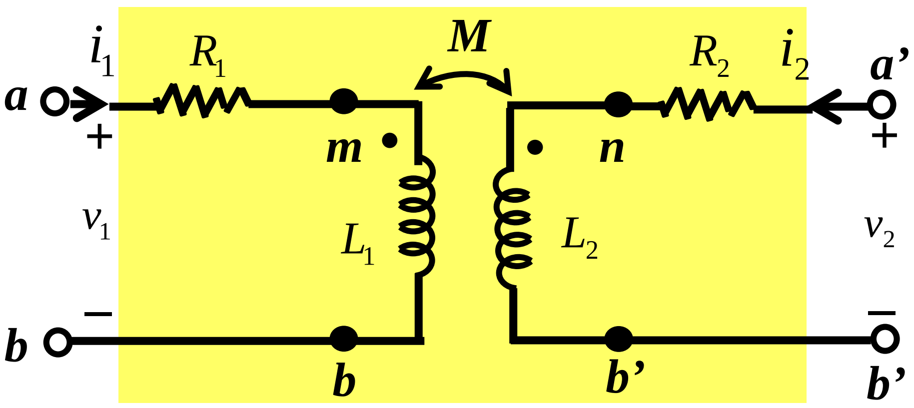
$$v_2 = X_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{d}{dt}(i_1 + i_2)$$

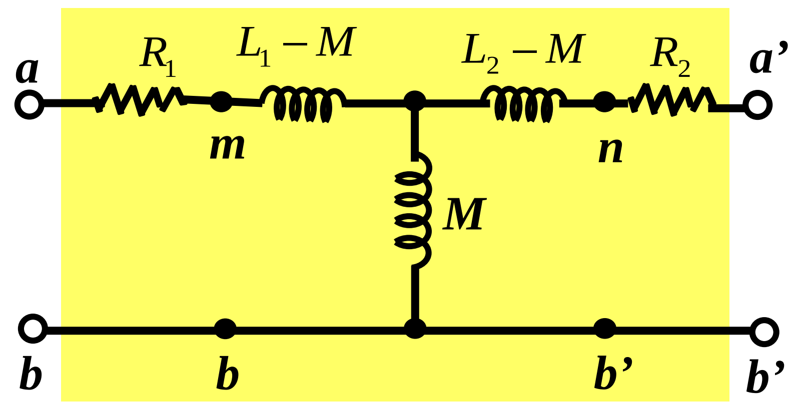


식들을 비교.

$$X_1 = L_1 - M, \quad X_2 = L_2 - M$$

Equivalent Circuit for the Nonideal Transf. (I)





- Analysis of Electric Circuits, E. Brenner, McGraw-Hill, 1967 (pp.565-568).

T형 등가회로의 두 가지 문제점.

(1) L_1-M 또는 L_2-M 이 음수가 될 수 있음.

계산 시에는 문제가 없으나 물리적으로 *negative inductance*는 없음.

(2) 변압기의 성질인 분리가 안됨.

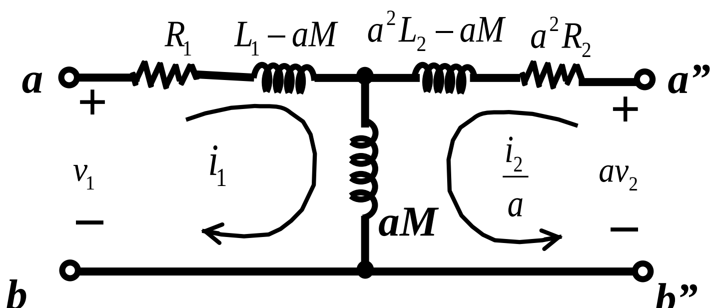
Equiv. Circuit for the Nonideal Trans. (II)

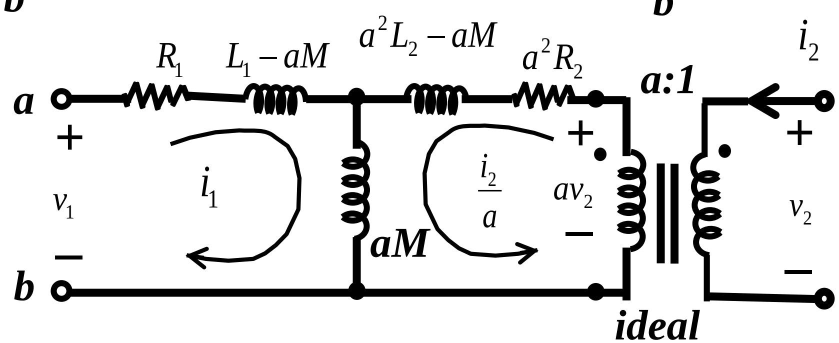
두 가지 문제점을 이상적인 변압기를 도입해서 해결.

L_1-M < 0 이라고 가정. 그리고, L_1-aM > 0 이 되는 1 보다 작은 a가 있다고 가정하자.

L_1-M < 0 이면 L_2-M > 0 (왜냐하면 $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ 이므로)

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$
$$\Rightarrow$$
$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + aM\frac{d}{dt}\left(\frac{i_2}{a}\right)$$
$$av_2 = \left(a^2 R_2 + a^2 L_2 \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{i_2}{a}\right) + aM\frac{di_1}{dt}$$





a”, b” 단자에 이상적인 변압기를 연결.

이 회로에서 a는

(1) 등가회로 안의 모든 계수가 물리적으로 의미가 있도록,

(2) 변압기의 **isolating property**가 유지되도록 결정한다.

Applications – Soldering Gun

- **Soldering** 이나 **welding** 은 가해지는 열이 용접할 물질이나 재질에 따라 바뀌면 안된다.
- 대전류를 일정하게 흘려야 하고 납땜의 경우, 땜납을 **427**도 이상으로 올려야 한다.
- 솔더링 건은 변압기의 원리를 이용하여 **2**차 측 솔더링 팁**(1 turn)**에 전류를 흘린다. **1**차 측 권선은 **100 W** 일 때, **387 turns, 140 W** 일 때, **316 turns**이다.
- 출력이 **140 W** 일 때 **1**차측 권선의 전류

$$I_p = 140\ \mathrm{W}/120\ \mathrm{V} = 1.17\ \mathrm{A}$$

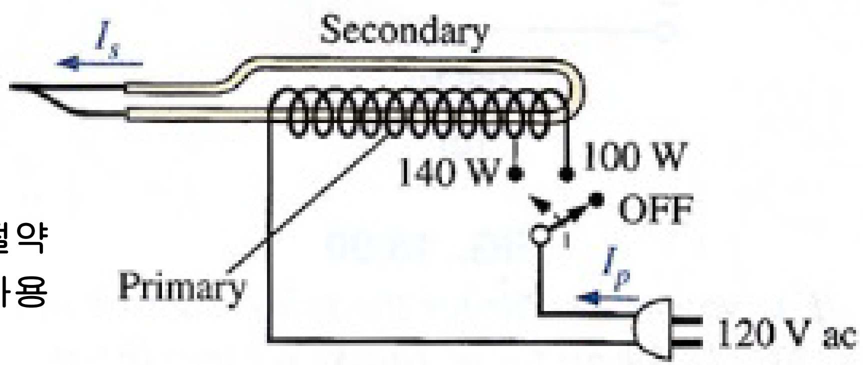
- **2**차측 권선의 전류는 **1.17 A x 316 = 370 A**이다.
- **2**차 측 솔더링 팁에 **300 A** 이상의 전류가 흐르고, 팁의 수명은 약 **20**시간 정도이다.
- 그러나, 솔더링 팁이 가열된 후에는 저항이 커져서 전류는 **215 A**로 감소한다. 이때의 **2**차측 저항을 계산하면 **3 mΩ** 인 것을 알 수 있다.

$$R_s = 140\ \mathrm{W}/(215\ \mathrm{A})^2 = 3\ \mathrm{m\Omega}$$

- **Gun** 타입이어서 사용하지 않을 때 **off** 가 되어 에너지 절약에 도움이 되고, 팁의 수명도 늘일 수 있다. 또한 교류를 사용하여 직류로는 쉽게 만들 수 없는 대전류를 만들었다.

FIG. 18.90
Equivalent circuits for the soldering iron of Fig. 18.89(a): (b) at 100-W setting.

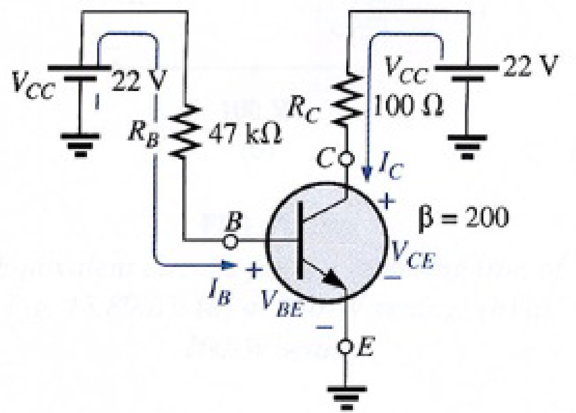
Soldering Gun Robert L. Boylestad, Introductory Circuit Analysis, 10th edition, Prentice Hall, 2002, p. 823, Figure 18.89

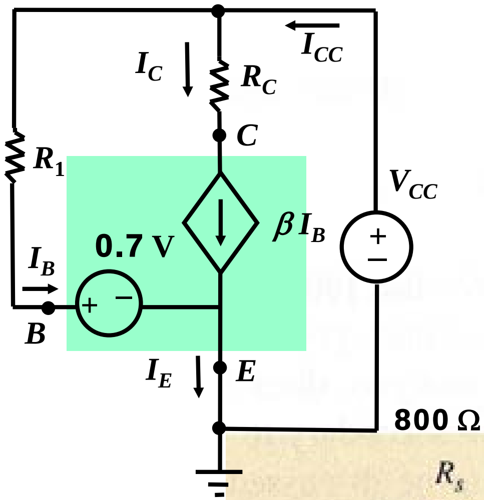


Applications – Transistor Power Amplifier (I)

- 전자회로를 직류해석과 교류해석을 각각 하고, 이를 중첩하여 전체 해석을 할 수 있다.
- 입력 전원에는 피크-피크 전압이 **1 V, 즉 실효값이 0.357 V** 이고 전원의 내부저항은 **800 Ω**이며, 스피커 저항은 **8 Ω**이고, 트랜지스터 입력저항은 **200 Ω**이다.

- 직류 해석: 커패시터는 개방이므로 아래의 회로가 된다.





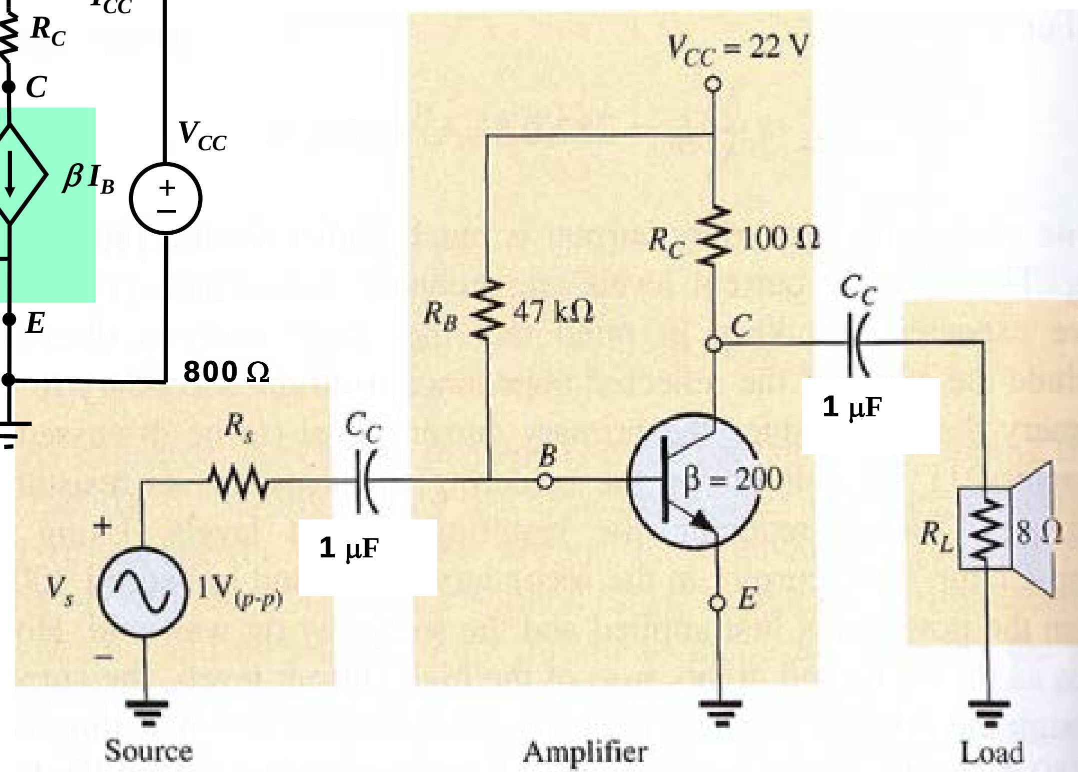
dc 등가회로

$$I_B = (22\text{ V} - 0.7\text{ V})/47\text{ k}\Omega = 0.4532\text{ mA}$$

$$I_C = 200 I_B = 90.64\text{ mA}$$

$$V_C = 22\text{ V} - 100\,\Omega \times 90.64\text{ mA} = 12.94\text{ V}$$

- 직류 동작점은 교류 이득에 영향을 준다.

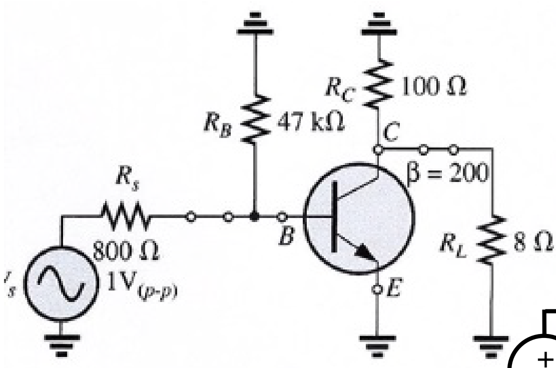


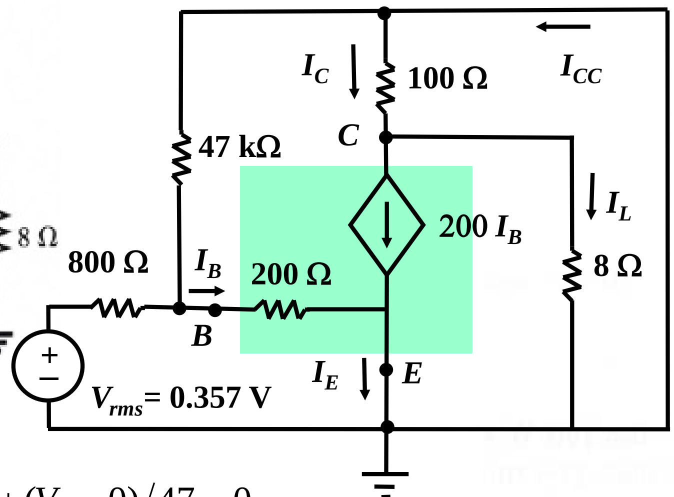
Transistor Amplifier

Robert L. Boylestad, Introductory Circuit Analysis, 10th edition, Prentice Hall, 2002, p. 826, Figure 18.91

Applications – Transistor Power Amplifier (II)

- 교류 해석: 직류 전압원은 모두 **0 V** 로 세팅한다. 커패시터는 단락으로 처리하면 아래의 회로가 된다.
- 가청 주파수의 중간 주파수인 **10 kHz** 에서의 임피던스는 **$1/j\omega C = -j/(6.28\text{x}10^4\text{x}10^{-6}) = -j\ 15.92\ \Omega$**가 되어 다른 저항에 비해 작다고 여겨 단락으로 처리한다. 트랜지스터 입력저항은 **200 Ω**이다.





ac 등가회로

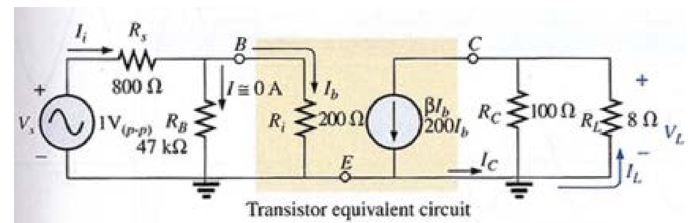
$$(V_B - 0.357)/0.8 + (V_B - 0)/0.2 + (V_B - 0)/47 = 0$$

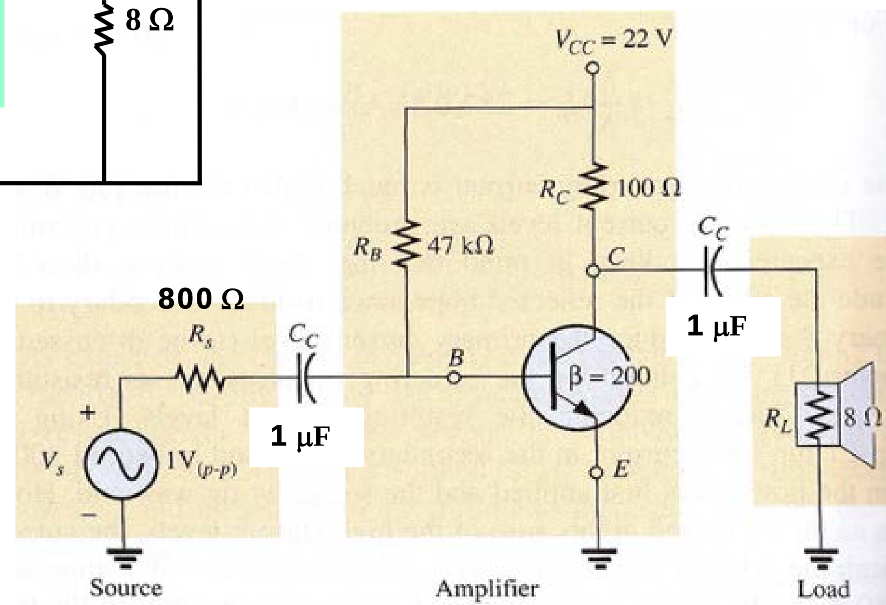
$$V_B = 71.16\,\text{mV}_\text{rms},\ I_B = 71.16\,\text{mV}_\text{rms}/200\,\Omega = 0.3558\,\text{mA}_\text{rms}$$

$$(V_C - 0)/100 + (V_C - 0)/8 + 200 \times 3.558 \times 10^{-4}\,\text{A}_\text{rms} = 0$$

$$V_C = -0.5271\,\text{V}_\text{rms}$$

$$P_{8\Omega} = (0.5271)^2/8 = 34.73\,\text{mW}$$





- 스피커에 전달되는 파워가 너무 작다.
- 스피커의 저항을 **100 Ω**이라 하면, 최대전력전달 조건이 만족되고 컬렉터의 전류의 반이 스피커로 흐른다.

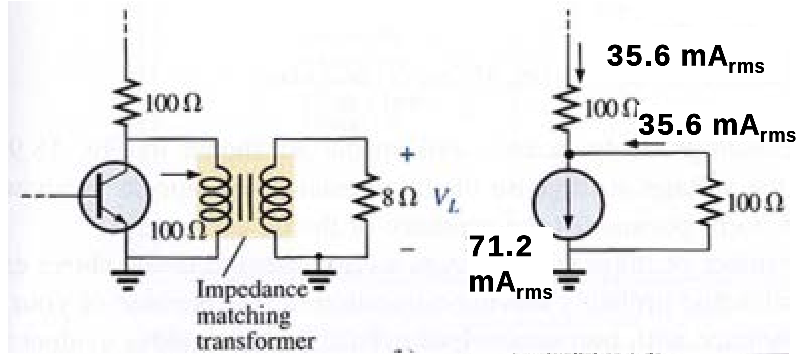
Transistor Amplifier

Robert L. Boylestad, Introductory Circuit Analysis, 10th edition, Prentice Hall, 2002, p. 826, Figure 18.91

Applications – Transistor Power Amplifier (III)

- 임피던스 매칭: 변압기에 의해 임피던스 매칭을 하면 **8 Ω** 을 **100 Ω** 처럼 보이게 할 수 있고 최대전력이 전달된다.
- 그러면 전압이 **-3.558 V_{rms}** 가 되고 스피커에서의 파워가 **126.6 mW** 가 되어 **3.6**배 커진다.

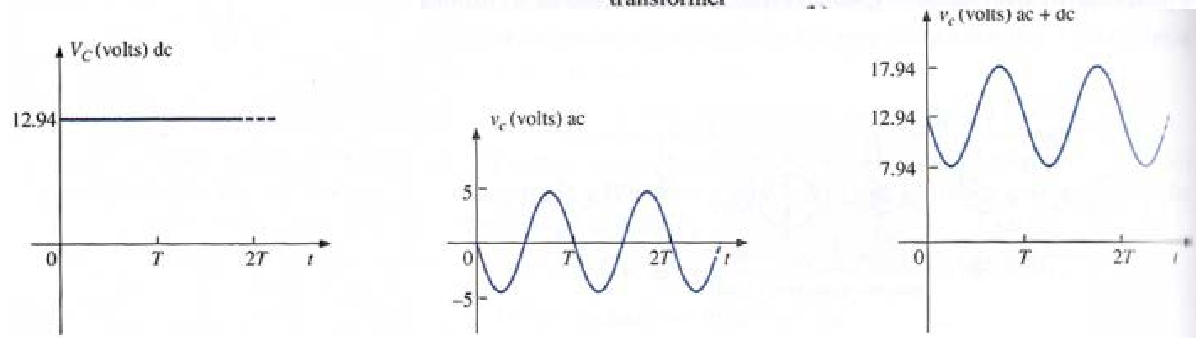
$$P_{100\Omega} = (3.558\,\mathrm{V_{rms}})^2 / 100\,\Omega = 126.6\,\mathrm{mW}$$



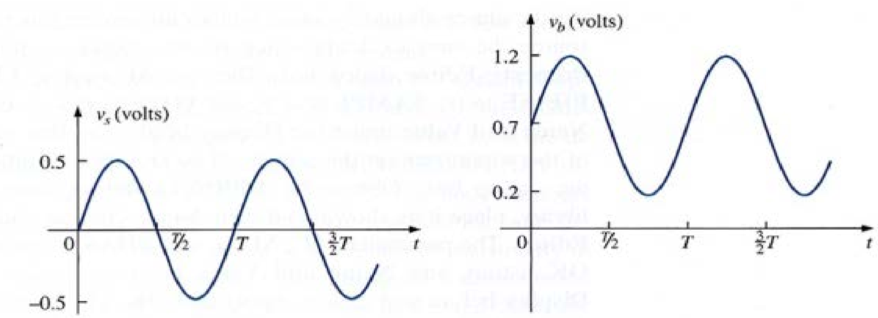
- 커패시터가 직류 회로를 분리하기 때문에 **100 Ω** 부하를 연결하는 것으로 해석해도 직류 해석 값은 바뀌지 않는다.

- 커패시터에 의해 직류와 교류가 분리가 되므로 중첩의 원리를 적용하여 해를 구할 수 있다.

- 컬렉터 전압과 전원의 전압, 트랜지스터 베이스의 전압은 각각 오른쪽과 같다.



컬렉터 전압 **(a)** 직류 해석, **(b)** 교류해석, **(c)** 직류 + 교류 해석

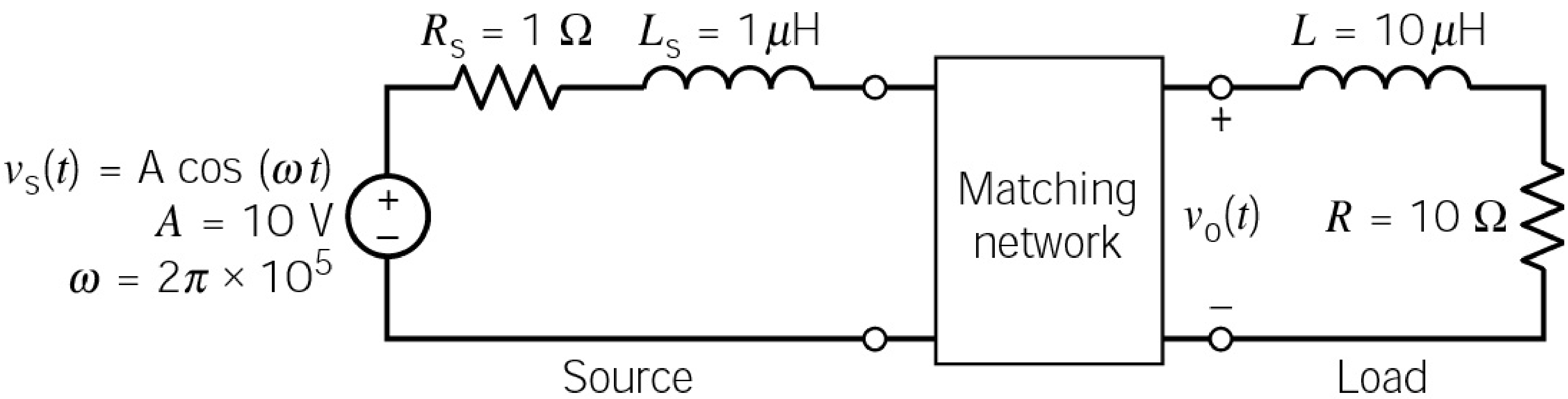


(a) 전원의 전압, **(b)** 트랜지스터 베이스 전압

Robert L. Boylestad, Introductory Circuit Analysis, 10th edition, Prentice Hall, 2002, p. 827-829

Maximum Power Transfer (I)

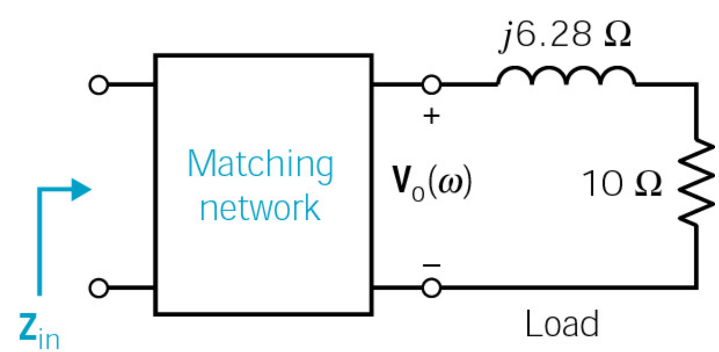
- 실제 **cellular telephone antenna**의 입력 임피던스는 **10+j6.28** Ω 이다.
- 부하에 최대 전력이 전달되도록 회로망을 설계하라.



$$\mathbf{Z}_s = R_s + j\omega L_s = 1 + j2\pi 10^5 \times 10^{-6} = 1 + j0.628$$

- 최대 전력이 전달되는 임피던스는 입력 단에서 보았을 때

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_s^* = 1 - j0.628$$



Richard C. Dorf & James A. Svoboda, Introduction to Electric Circuits, 8th edition, John Wiley & Sons, 2010, p. 538-539

Maximum Power Transfer (II)

- 변압기를 사용하여 전체적인 계수를 조정

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{1}{n^2}(R + j\omega L) = \frac{1}{n^2}(10 + j6.28)$$

$$n = 3.16$$

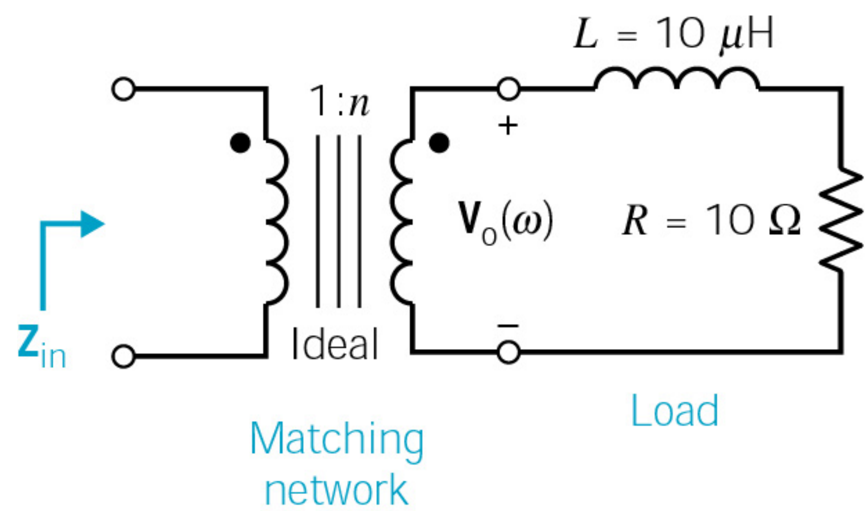
- n^2이 **10** 이면 실수부는 최대 전력 전달 조건에 만족이 되나 허수부는 만족이 안된다.
- 캐패시터를 삽입.

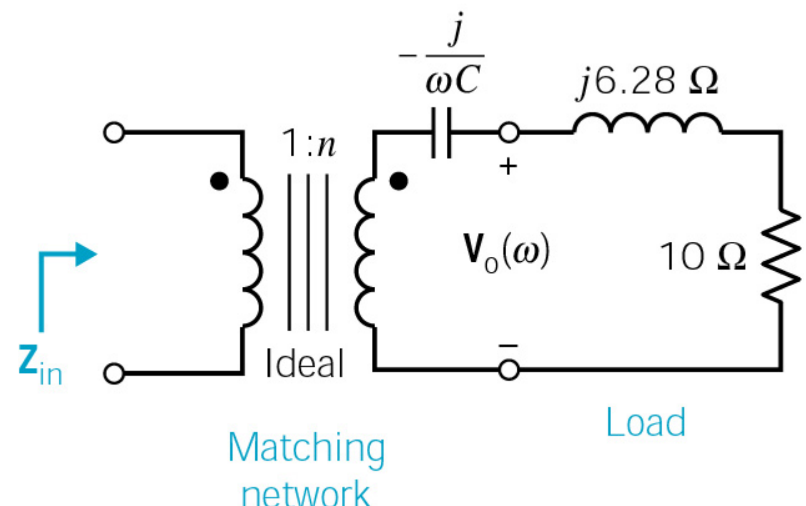
$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_s^* = 1 - j0.628$$

$$= \frac{1}{10}(10 + j6.28 - j\frac{1}{\omega C})$$

$$C = \frac{1}{10 \times 2\pi \times 10^5 \times 2 \times 0.628}$$

$$= 0.1267\ \mu\text{F}$$





Richard C. Dorf & James A. Svoboda, Introduction to Electric Circuits, 8th edition, John Wiley & Sons, 2010, p. 539-540