§2 Однородные дифференциальные уравнения

• $f(x,y)$ наз-ся однородной ф-цией ст. n, где n-целое при $\forall\alpha$ | $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x,y)$

• Диф. ур. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (*) однородное, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные ф-ии одной степени.

Ур-ие (*) может быть приведено к виду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Однородное ур. преобр-ся в ур-ие с раздел. перем. при помощи замены:

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{или} \quad y = ux$$

$u = u(x)$ – новая неизв. ф-ия.

Замечание. Уравнение вида

$$y' = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}$$

приводится к одн. при помощи замен $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где α, β – числа, к-ые подбирают по примеру №2.2.5. Этот пое прием используется при решении ур-ий вида $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

<u>№2.2.1</u>

a) $(y^2+xy)dx - x^2dy = 0$

$P(x,y) = y^2+xy$

$Q(x,y) = -x^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P(\alpha x, \alpha y) = (\alpha y)^2 + \alpha^2 xy =$

$= \alpha^2(y^2+xy) = \alpha^2 P(x,y)$ $\Rightarrow$

$Q(\alpha x, \alpha y) = -(\alpha x)^2 = -\alpha^2 x^2 =$

$= \alpha^2(-x^2) = \alpha^2 Q(x,y)$

$\Rightarrow n = 2$, P и Q - однородные

$\exists\ y = ux \Rightarrow dy = xdu + udx$

$(u^2x^2 + x\cdot ux)dx - x^2(xdu + udx) = 0$

$(u^2x^2 + x^2u)dx - x^3du - ux^2dx = 0$

$u^2x^2dx + ux^2dx - x^3du - ux^2dx = 0$

$x^2(u^2dx - xdu) = 0$

$u^2dx - xdu = 0 \quad | : xu^2$

$\frac{dx}{x} - \frac{du}{u^2} = 0 \quad | \int()$

$\ln|x| + \frac{1}{u} = C$

$\ln|x| + \frac{x}{y} = C$

Т.к. $y = ux$, то $y' = u'x + u$,

а далее см. б)

б) $y' = \frac{xy^2 - yx^2}{x^3}$, $y(-1) = 1$;

$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$

$\exists$ $y = ux$, $y' = u'x + u$

$u'x + u = \left(\frac{ux}{x}\right)^2 - \frac{ux}{x}$

$u'x + u = u^2 - u$

$u'x = u^2 - 2u$

Т.к. $u' = \frac{du}{dx}$, то:

$\frac{du}{dx}x = u^2 - 2u$

$\frac{du}{u^2 - 2u} = \frac{dx}{x} \quad \Big| \int(\,)$

$\int \frac{du}{u^2 - 2u} = \int \frac{dx}{x}$

$$\left[\int \frac{du}{u^2-2u} = \int \frac{du}{u^2-2u+1-1} = \int \frac{du}{(u-1)^2-1} = \right.$$

$$= \int \frac{d(u-1)}{(u-1)^2-1^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1-1}{u-1+1}\right| =$$

$$\left. = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right| \right]$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C_1|$$

$$\left|\frac{u-2}{u}\right| = |C_1|x^2$$

подставляя $u = \frac{y}{x}$, получаем:

$$\left|\frac{y-2x}{y}\right| = |C_1|x^2$$

$$] \; C = \pm C_1 \Rightarrow \frac{y-2x}{y} = Cx^2$$

$$\frac{1+2}{1} = C \cdot 1, \text{ т.е. } C = 3.$$

$\frac{y-2x}{y} = 3x^2$, или $y(3x^2-1) = -2x$,

$y = \frac{2x}{1-3x^2}$ — частн. р-ие ур-ия

в) $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0 \quad \Big| : x$

$$y' - \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0$$

$$] \; \frac{y}{x} = u \Rightarrow u'x + u - u - u + e^u = 0$$

$$\frac{du}{dx}x+e^u=0$$

$$\frac{du}{dx}x=-e^u$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{-e^u}{x}$$

$$\frac{du}{-e^u}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{du}{e^u}+\frac{dx}{x}=0 \quad \Big| \int()$$

$$\int e^{-u}du=-\int\frac{dx}{x}$$

$$-e^{u}=-\ln|x|-\ln|C|,\ C\neq0$$

$$\ln|Cx|=e^{-u} \Rightarrow -u=\ln\ln|Cx|,\ C\neq0$$

$y=-x\ln\ln|Cx|$, $C\neq0$ – общее реш-ие

№2.2.5

$$(y+2)dx-(2x+y+6)dy=0$$

$\exists\ x=u+\alpha,\ y=v+\beta$

$$(v+\beta+2)du-(2(u+\alpha)+v+\beta+6)dv=0$$

$$(v+(\beta+2))du-(2u+2\alpha+v+\beta+6)dv=0$$

$$(v+(\beta+2))du-(2u+v+(2\alpha+\beta+6))dv=0$$

$$\begin{cases}\beta+2=0\\2\alpha+\beta+6=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=-2\\2\alpha-2+6=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha=-4 \Rightarrow \alpha=-2$$

$v\,du-(2u+v)\,dv=0$ — однородное

ч.т.д.