§4 Уравнения в полных дифференциалах

=> **Полный дифференциал:**

$$dU(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy =$$

$$= P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

т.е. $dU(x,y) = 0$

$U(x,y) = C$ – общий интеграл.

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy,$$

где (x_0, y_0) – н.фикс. точка из обл. непр-ти ф-ий $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частных произв.

Замечание. Если необх. и дост. условие не выполняется, то можно ввести „интегрирующий множитель"

$t(x,y) = t$

- $\exists\ t(x) = t$, тогда

$$t(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}$$

причём $\int$ зависит только от x

- $\exists\ t(y) = t$, тогда

$$t(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy}$$

причём $\int$ зависит только от y

<u>№ 2.4.1</u>

$e^x + y + \sin y + y'(e^y + x + x\cos y) = 0$

$y(\ln 2) = 0$

$e^x + y + \sin y + \frac{dy}{dx}(e^y + x + x\cos y) = 0$

$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$

$P(x,y) = e^x + y + \sin y$

$Q(x,y) = e^y + x + x\cos y$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ усл. вып-ся

$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x + y + \sin y$; $\frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x + x\cos y$

$U(x,y) = \int (e^x + y + \sin y)dx =$
$= e^x + xy + x\sin y + \varphi(y)$,
где $\varphi(y)$ – произвол. дифф. ф. по y.

$\frac{\partial U}{\partial y} = x + x\cos y + \varphi'(y) = e^y + x + x\cos y$

$\Rightarrow \varphi'(y) = e^y$, т.е. $\varphi(y) = e^y + C_1$

$U(x,y) = e^x + xy + x\sin y + e^y + C_1$

$e^x + xy + x\sin y + e^y + C_1 = C_2$ – общ. р-ие

Или $\exists C = C_2 - C_1$, тогда общ. р-ие:

$e^x + xy + x\sin y + e^y = C$

Частный интеграл при $y=0$, $x = \ln 2$

$e^{\ln 2} + \ln 2 \cdot 0 + \ln 2 \cdot \sin 0 + e^0 = C$

$2 + 0 + 0 + 1 = C \Rightarrow C = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x + xy + x\sin y + e^y = 3$ – частн. инт.

№2.4.2

$\frac{y}{x}dx + (3y^2 + \ln x)dy = 0$

$P(x,y) = \frac{y}{x}$ $\quad Q(x,y) = 3y^2 + \ln x$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ ур. п. д.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + \ln x$$

$$u(x,y) = \int \frac{y}{x}\,dx = y\ln x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (y\ln x + \varphi(y))'_y = \ln x + \varphi'(y)$$

$$3y^2 + \ln x = \ln x + \varphi'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 3y^2$$

$$\varphi(y) = y^3 + C_1$$

$$u(x,y) = y\ln x + y^3 + C_1$$

$y\ln x + y^3 = C$ – общ. инт.

__Замечание.__

П $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

$$u(x,y) = \int_1^x \frac{y}{x}\,dx + \int_0^y (3y^2 + \ln 1)\,dy$$

$\cancel{1)\ \int_1^x \frac{y}{x}\,dx = \frac{y}{x} - \frac{y}{1} = \frac{y}{x} - y = y\left(\frac{1}{x} - 1\right)}$

$\cancel{2)\ \int_0^y (3y^2 + \ln 1}$

1) $\int_1^x \frac{y}{x}\,dx = y\ln x \Big|_1^x = y\ln x - y\ln 1 =$
$= y\ln x$

2) $\int_0^y (3y^2 + \ln 1)\,dy = \int_0^y 3y^2\,dy = y^3 \Big|_0^y =$
$= y^3 - 0^3 = y^3$

$\Rightarrow U(x,y) = y\ln x + y^3$

<u>№2.4.5</u>

$(e^y + \sin x)\,dx + \cos x\,dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = e^y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$

Т.к. $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \dfrac{-\sin x - e^y}{e^y + \sin x} = -1$

не зависит от x $\Rightarrow$

$t(y) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy}$

$t(y) = e^{\int(-1)dy} = e^{-y}$

$(1 + e^{-y}\sin x)\,dx + e^{-y}\cos x\,dy = 0$

$P'_y = -e^{-y}\sin x = e^{-y}(-\sin x) = Q'_x$

$\frac{\partial U}{\partial x} = 1+e^{-y}\sin x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^{-y}\cos x$

$U(x,y) = \int(1+e^{-y}\sin x)\,dx =$

$= \int dx + e^{-y}\int \sin x\,dx =$

$= x + e^{-y}\cos x + \varphi(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{-y}\cos x + \varphi'(y) = e^{-y}\cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C_1$

$U(x,y) = x - e^{-y}\cos x + C_1$

$x - e^{-y}\cos x = C$ — общ. инт. ур-ия