

Математические объекты и их представления

Презентацию подготовила Елкина Галина, студентка 2 курса ИВТ

Целые числа

В математике

- ▶ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... - множество целых чисел
- ▶ Все числа между собой различаются на единицу
- ▶ Множество целых чисел может быть конечным или бесконечным

От математики представление целых чисел в компьютерных системах ничем не отличается. Отличается только то, как целые числа задаются в них.

Целые числа в компьютерных системах

► В СКА

Целые числа представляются как и в математике, задаются в разных системах по разному. Например, в Maxima целое число можно задать, как $x:1$, в Scilab - $x = 1$.

► В программировании

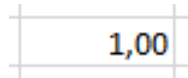
Также задаются по разному в зависимости от языка программирования. В типизированных языках, таких как Си, задание переменной для целого числа может выглядеть, как `int x = 1;`. А на Python запись будет без типа, такой же, как в Scilab - $x = 1$.

► В Excel

Есть несколько представлений ячеек, от чего и зависит представление целого числа. В ячейке общего формата число 1 будет выглядеть так:



А в числовой ячейке нужно задавать количество знаков после запятой, поэтому представление может варьироваться. Например, то же число 1 может выглядеть так:



В итоге, представление целых чисел в разных системах почти ничем не отличается

Рациональные и иррациональные числа

В математике

Рациональные числа:

- ▶ Обыкновенные дроби - $\frac{1}{2}$
- ▶ Десятичные дроби - 1,2

Иррациональные числа:

- ▶ Корни - $\sqrt{2}$
- ▶ Тригонометрические числа - $\arcsin 2$
- ▶ Константы - π , e

В СКА

Рациональные числа представляются по разному, в зависимости от возможностей СКА. Но обычно представляются также, как и в математике. Например, представление в Maxima является идентичным математике:

`1/2; 1.2;`

$\frac{1}{2}$
1.2

Иррациональные числа также представляются по-разному, но, в основном, также как и в математике (пример для Maxima):

`sqrt(2); arcsin(2);`

$\sqrt{2}$
`arcsin(2)`

Отличие может быть только в представлении констант:

`%pi; %e;`

π
`%e`

В программировании

Обыкновенные дроби в программировании вычисляются с машинной точностью и записываются в виде десятичной дроби. То же самое происходит с иррациональными числами. Они вычисляются с машинной точностью.

Для типизированных языков программирования есть несколько типов переменных, поддерживающих данные числа:

- ▶ float
- ▶ double

Например, ввод на языке Си:

```
float x = 1/2;
```

будет записан, как $x = 0.5$.

Также отличается запись констант. Математические константы, такие как число Пи или экспонента, обычно записываются в виде функций. Например, экспонента на языке Си записывается, как $\exp(x)$, где x - это степень экспоненты.

В электронных таблицах

Электронные таблицы работают примерно также, как языки программирования, так как это ПО. Поэтому все рациональные и иррациональные дроби также вычисляются с машинной точностью и выводятся с нужной нам точностью.

С такими числами лучше всего работать в числовых ячейках, а не в ячейках общего формата. Например, ввод квадратного корня от 2 в Excel будет выглядеть следующим образом:



=КОРЕНЬ(2)

А вывод результата будет таким:



1,41

Также в электронных таблицах есть специальные записи и для констант. Например, число Пи записывается в Excel как ПИ().

Представление рациональных и иррациональных чисел в компьютерных системах значительно отличается от математического представления.

Если в СКА представление максимально приближено к математическому, то в языках программирования и электронных таблицах этому уделяют гораздо меньше внимания, что сказывается на точности вычислений.

Полиномы от одной и нескольких переменных

В математике

Полиномы могут быть представлены разными формами, но смысл полиномов в сумме произведений функций от одной или нескольких переменных.

Примеры полиномов:

- ▶ $1 + x + x^2 + x^3$
- ▶ $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
- ▶ $ax^2 + bx + c$

В СКА

Полиномы в СКА представляются таким же образом, как и в математике. Но существует «алфавитная» сортировка введенных данных для каждой СКА своя (это видно в примерах).

Примеры (Maxima):

(%i41) $x^3+x^2\cdot y+x\cdot y^2+y^3;$

(%o41) $y^3+x y^2+x^2 y+x^3$

(%i42) $a+x+x^2+x^3;$

(%o42) x^3+x^2+x+a

В программировании

Полиномы в программировании обычно используются в создании и вычислении функций с одним или несколькими параметрами. Поэтому задание полиномов может выглядеть следующим образом:

- ▶ на языке Python:

```
def f(x):  
    return  $x^3 + x^2 + x + 1$ 
```

- ▶ на языке Си:

```
float f(float x) {  
    return  $x^3 + x^2 + x + 1$   
}
```

В электронных таблицах

Представляются, в основном, в виде множества ячеек для подставления в формулу.

Примеры (Excel):

x	$y = x^3 + x^2 + x + 1$
1	4
2	15
3	40
4	85
5	156
6	259

x	$y = x^3 + x^2 + x + 1$
1	$=B5^3 + B5^2 + B5 + 1$

x	y	$z = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
1	2	15
2	3	65
3	4	175
4	5	369
5	6	671
6	7	1105

x	y	$z = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
1	2	$=E5^3 + E5^2 * F5 + E5 * F5^2 + F5^3$

Как мы увидели, полиномы используются в разных системах для разных целей, поэтому их представления сильно отличаются.

Рациональные функции

К рациональным функциям в компьютерной математике относятся любые функции в виде дроби, поэтому далее будем рассматривать их.

В математике

Подобные функции в математике бывают нескольких видов, которые определяются по знаменателю дроби:

- ▶ знаменатель выражен одной переменной:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3}$$

- ▶ знаменатель - функция от одной или нескольких переменных:

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 5}{x^5 - 1}$$

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{2xy}$$

- ▶ знаменатель - функция с корнями:

$$\frac{x + \sqrt{y} + 3}{\sqrt{x - y}}$$

В СКА

Рассматривая те же примеры, можно понять, что представление рациональной функции остается тем же, изменяется только форма записи:

(%i43) $(x^2+x+1)/x^3;$

(%o43) $\frac{x^2+x+1}{x^3}$

(%i44) $(x^3+3\cdot x^2-4\cdot x-5)/(x^5-1);$

(%o44) $\frac{x^3+3x^2-4x-5}{x^5-1}$

(%i45) $(x^2+x\cdot y+y^2)/(2\cdot x\cdot y);$

(%o45) $\frac{y^2+xy+x^2}{2xy}$

(%i46) $(x+\sqrt{y}+3)/\sqrt{x-y};$

(%o46) $\frac{\sqrt{y}+x+3}{\sqrt{x-y}}$

В программировании

Представление рациональных функций сводится к частному двух выражений с одной или несколькими переменными и может быть записано в следующем виде (предыдущие примеры):

- ▶ $y = (x^2 + x + 1) / x^3$
- ▶ $f = (x^3 + 3x^2 - 4x - 5) / (x^5 - 1)$
- ▶ $z = (x^2 + x*y + y^2) / (2*x*y)$
- ▶ $\text{expr} = (x + \sqrt{y} + 3) / \sqrt{x - y}$

В электронных таблицах

Представление будет похоже на представление в программировании, так как, по сути, выражение является местом для подстановки каких либо значений.

Предыдущие примеры, записанные в Excel:

x	$y = (x^2 + x + 1) / x^3$
1	3
2	0,875
3	0,481481481
4	0,328125
5	0,248
6	0,199074074

x	$y = (x^2 + x + 1) / x^3$
1	$= (B5^2 + B5 + 1) / B5^3$

x	y	$z = (x^2 + x*y + y^2) / (2*x*y)$
1	2	1,75
2	3	1,583333333
3	4	1,541666667
4	5	1,525
5	6	1,516666667
6	7	1,511904762

x	y	$z = (x^2 + x*y + y^2) / (2*x*y)$
1	2	$= (E5^2 + E5 * F5 + F5^2) / (2 * E5 * F5)$

x	$y = (x^3 + 3*x^2 - 4*x - 5) / (x^5 - 1)$
2	0,225806452
3	0,152892562
4	0,088954057
5	0,056017926
6	0,037942122
7	0,027192669

x	$y = (x^3 + 3*x^2 - 4*x - 5) / (x^5 - 1)$
2	$= (B5^3 + 3 * B5^2 - 4 * B5 - 5) / (B5^5 - 1)$

x	y	$z = (x + \sqrt{y} + 3) / \sqrt{x - y}$
3	2	7,414213562
4	3	8,732050808
5	4	10
6	5	11,23606798
7	6	12,44948974
8	7	13,64575131

x	y	$z = (x + \sqrt{y} + 3) / \sqrt{x - y}$
3	2	$= (E5 + \text{КОРЕНЬ}(F5) + 3) / \text{КОРЕНЬ}(E5 - F5)$

Таким образом, представление рациональных функций в разных системах почти не отличается - это частное двух выражений, записанное в разных формах, понятных данной системе.

Матрицы

В математике

Существует множество видов матриц, представление которых отличается друг от друга. Но мы выделим 3 основных:

► «числовая»:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

► «буквенная»:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ 6c & d \end{pmatrix}$$

► единичная:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В СКА

Матрица задается с помощью специальной функции, как, например, в Maxima - `matrix()`. Этой функцией определяются дальнейшие возможные операции над данным объектом.

«Числовую» или «буквенную» матрицы можно задать просто (Maxima):

(%i48) `A: matrix([2,-1],[0,5]);`

(A)
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i49) `B: matrix([a,-b],[6*c,d]);`

(B)
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ 6c & d \end{bmatrix}$$

А для единичной матрицы обычно существует специальная функция (вот почему мы выделили ее в отдельный тип), например, как в Maxima - `ident(n)`:

(%i50) `E: ident(2);`

(E)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В программировании

Матрица представляется как список списков, или массив массивов. Обращение к элементам матрицы происходит через двойные индексы. Но все виды матриц записываются вручную.

Пример (на языке Python):

```
A = [[2, -1], [0, 5]]
```

```
B = [[a, -b], [6*c, d]] # оговорка: a, b, c, d - переменные, содержащие  
какие-либо числовые значения
```

```
E = [[1, 0], [0, 1]]
```

В электронных таблицах

Матрицы представляются как диапазон ячеек, с которыми можно совершать те же действия, что и в математике.

Только «буквенные» матрицы будут представляться в виде ссылок на какую либо числовую ячейку.

Примеры (Excel):

A	2	-1
	0	5

a	b	c	d
	2	-1	4
B		2	1
	24	=M8	

E	1	0
	0	1

Представление матриц в разных системах немногим отличается друг от друга. Но есть существенные различия в способах задания матриц, что зависит от конкретной системы.

Спасибо за внимание!