

Математические объекты и их представления

Задание 2.1.

Понятие «Компьютерная алгебра»

Компьютерная алгебра

- это область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов.
- это наука об эффективных алгоритмах вычислений математических объектов.
- это область математики, занимающаяся разработкой и реализацией аналитических методов решения математических задач на компьютере и предполагающая, что исходные данные, как и результаты решения, сформулированы в аналитическом (символьном) виде.

Математические объекты компьютерной алгебры

- Целые числа (различий с математикой не имеют)
- Рациональные числа (все остальные числа, иррациональные числа вычисляются с нужной точностью)
- Полиномы от одной переменной (различий с математикой не имеют)
- Полиномы от нескольких переменных (различий с математикой не имеют)
- Рациональные функции (функции, представляющие дробь)
- Матрицы (представляют собой массив массивов или список списков)

Особенности работы с математическими объектами «на бумаге» и «на компьютере»

Представление рациональных чисел бывает разное как на бумаге, так и на компьютере. Если отталкиваться от представления на бумаге, то

- обыкновенные дроби чаще всего вычисляются и представляются в виде десятичной дроби, что представляет из себя число с плавающей точкой. Но некоторые системы имеют представление обыкновенной дроби и выводят ее как обыкновенную дробь;
- десятичные дроби, как уже было сказано выше, компьютер представляет как число с плавающей точкой;
- константы, такие как число Пи, экспонента и др., представляются чаще всего как функции или встроенные точные значения, обозначающиеся определенным образом (например, в Mathematica число Пи обозначается как %pi);

- квадратные корни, которые мы привыкли просто писать, представляются либо как функция корня, либо как функция степени, либо числом с плавающей точкой – вычисленным с заданной точностью значением корня.

Полиномы с одной и более переменными представляются, в основном, в виде рациональной функции. Также их можно представить в виде массива или нескольких массивов коэффициентов при переменных.

Представление функций также бывает дробное или «линейное», то есть сама функция представляется либо как две рациональные функции, одна из которых числитель, а другая знаменатель, либо как единая функция – по сути, обычное выражение с переменными.

Также в каждой системе есть встроенные функции, которые также являются отдельным классом функций.

Матрицы тоже могут представляться по-разному. У некоторых систем есть специальный формат для матриц, и он создается специальными функциями. Если такого формата и функций нет, то матрица представляется как двумерный список или массив (то есть список списков или массив массивов).

Понятие «Алгебраическая функция»

Алгебраической называется *функция*, являющаяся решением уравнения $G(x) = 0$, где $G(x)$ – порождающий полином от одной переменной с коэффициентами – полиномами от нескольких переменных с целыми коэффициентами.

(ИЛИ)

Алгебраическая функция — элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения.

Классификация алгебраических функций

1. Целая рациональная функция или многочлен

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

где a_i – коэффициенты, n – степень многочлена.

Очевидно, что такая функция определена на всей области значений.

Примеры: линейная и квадратичная функции.

2. Дробная рациональная функция

Эта функция определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

Такая функция определена везде, кроме случаев, когда знаменатель обращается в ноль.

Пример: $y = a/x$ - функция, выражающая обратную пропорциональную зависимость.

3. Иррациональная функция

Если в функции $y = f(x)$ в правой части производятся операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональными нецелыми показателями, то функция y от x называется иррациональной.

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^2}}, \quad y = \sqrt{x}$$

Примеры:

Замечание. Перечисленные три вида алгебраических функций не исчерпывают всех алгебраических функций. Алгебраической функцией называется любая функция $y = f(x)$, которая удовлетворяет уравнению вида

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0,$$

где $P_i(x)$ – некоторые многочлены от x .

Источники

http://kspt.icc.spbstu.ru/media/files/2012/course/comp-algebra/CAS_L07.pdf

http://scask.ru/f_book_p_math1.php?id=11

https://ru.wikipedia.org/wiki/Символьные_вычисления

<https://infourok.ru/referat-na-temu-sistemi-kompyuternoy-algebri-matlab-1333949.html>

<http://mayoroven.ru/docum/intuit/course-301-html/>