Дифференциальные уравнения первого порядка

§1 Основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными.

Опр-ие:

Ур-ие $F(x, y, y') = 0$, связывающее между собой незав. пер-ую, искомую (неизв.) ф-цию $y(x)$ и её произв. $y'(x)$ наз-ся дифф. ур. I порядка

$\exists\ y' = f(x, y) \Rightarrow$ ур-ие разрешимо относительно произв.

- $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ или
- $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (дифф. форма)

Решением (или $\int$) дифф. ур. I п. наз-ся $\forall\ y = \varphi(x) \mid F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$.

График $y = \varphi(x)$ - инт. кривая.

Процесс нахождения р-ий — интегр-ие

Задача Коши — р-ие $F(x, y, y') = 0$ удовл. $y(x_0) = y_0$.

Геометрически – это инт. кривая, проходящая через $M_0(x_0, y_0)$

<u>Общее решение</u> – это $y = \varphi(x, C) \mid C = const$, 1) $\forall C$ $y = \varphi(x, C)$ – р-ие

2) $\forall y(x_0) = y_0$ $\exists C = C_0 \mid \varphi(x_0, C_0) = y_0$

$\Phi(x, y, C) = 0$ – <u>общий инт-л ур-ия</u>

$y = \varphi(x, C_0)$ – частное р-ие

$\Phi(x, y, C_0) = 0$ – частный интеграл

<u>Теорема 2.1</u>

$\exists$ $y' = f(x, y)$, $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ – непр. в $D \in Oxy$ $\Rightarrow$ $\forall M(x_0, y_0) \in D$ $\exists!$ р-ие $y = y(x) \mid y(x_0) = y_0$.

$\forall (x_0, y_0) \in D$ число $f(x_0, y_0)$ – $\angle$ коэф. касат-ой к $y = y(x)$. Поэтому $\forall$ т. $\in D$ $y' = f(x, y)$ ставит в соотв-ие нек-ое направл.: напр. – черта/стрелка, проходящая через т. $\Rightarrow$ $y' = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ опр-ет <u>поле направлений</u>.

Мн-во $\{(x, y)\} \in D \mid y' = k = const$ или $f(x, y) = k$ наз-ся <u>изоклиной</u>

В точках изоклины направления касательных, т. е. поля, одинаковы, т. е. параллельны.

Придавая k близкие числ. знач. можно построить достаточную густую сеть изоклин, а с их помощью приближенно вырис. вид инт. кривых т. е. р-ий. Этот метод изоклин ценен, когда р-ие ур-ия не выражается в элементарных ф-циях - инт-л не берется.

<u>Особые р-ия</u> - р-ия дифф. ур., к-ые не <u>получаются</u> из общего р-ия!

$\rightarrow P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$ - диффур-ие с разделяющимися перем.

$$\rightarrow \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0 \quad (*)$$

$$\rightarrow \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C$$

$$\rightarrow Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$$

Ур-ие $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ сводятся к $(*)$, для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделить переменные

№ 2.1.1

а) $y = (x+C)e^x, \quad y' - y = e^x$

$y' = ((x+C)e^x)' = e^x + (x+C)e^x$

$y' - y = e^x$

$e^x + (x+C)e^x - (x+C)e^x = e^x$

$e^x = e^x$

$\Rightarrow y = (x+C)e^x$ — р-ие $y' - y = e^x$

б) $y = -\frac{2}{x^2}, \quad xy^2\,dx - dy = 0$

$dy = \left(-\frac{2}{x^2}\right)'_x dx = \frac{4}{x^3}dx$

$x \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^2 dx - \frac{4}{x^3}dx = 0$

$x \cdot \frac{4}{x^4}dx - \frac{4}{x^3}dx = 0$

$\frac{4}{x^3}dx - \frac{4}{x^3}dx = 0$

$0 = 0$

$\Rightarrow y$ — р-ие $xy^2\,dx - dy = 0$

в) $x^2 - xy + y^2 = C,$

$(x-2y)y' - 2x + y = 0$

$x^2 - xy + y^2 = C \quad \Big| \, (\;)'_x$

$2x - y - xy' + 2yy' = 0$

$2yy' - xy' = y - 2x$

$y'(2y - x) = y - 2x$

$y' = \dfrac{y-2x}{2y-x}, \; x \neq 2y$

$(x - 2y)\dfrac{y-2x}{2y-x} - 2x + y = 0$

$-(2y - x)\dfrac{y-2x}{2y-x} - 2x + y = 0$

$-y + 2x - 2x + y = 0$

$0 = 0$

$\Rightarrow x^2 - xy + y^2 = C$ – инт. исх. ур-ия.

№2.1.4

Решить задачу Коши:

а) $y' = \sin 5x, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$y = \int \sin 5x \, dx = +\frac{1}{5}\int \sin 5x \, d(5x) =$

$= -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

$-\frac{1}{5}\cos 5 \cdot \frac{\pi}{2} + C = 1$

$0 + C = 1$

$C = 1$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{5}\cos 5x + 1$

б) $\frac{dx}{dt} = 3$, $x = 1$ при $t = -1$

$\int dx = \int 3dt$

$x = 3t + C$

$1 = 3\cdot(-1) + C$

$C = 4$

$\Rightarrow x = 3t + 4$

№2.1.6

а) $y = Cx^3$

$y' = 3Cx^2$

$C = \frac{y}{x^3}$

$y' = 3\frac{yx^2}{x^3}$

$y' = \frac{3y}{x}$ или $xy' = 3y$, ч.т.д.

б) семейство пар-л, с вершиной в начале координат, с осью, совпадающей с осью абсцисс.

$y^2 = Cx \Rightarrow 2yy' = C$

$C = \frac{y^2}{x}$

$2yy' = \frac{y^2}{x}$

$2yxy' = y^2$

$2xyy' - y^2 = 0$

$y(2xy' - y) = 0$

$2xy' - y = 0$ – искомое дифф. ур.

№2.1.15

$(x - xy^2)dx + (y - yx^2)dy = 0$

$x(1-y^2)dx + y(1-x^2)dy = 0 \,\Big|\, : (1-y^2)(1-x^2)$

$\frac{x}{1-x^2}dx + \frac{y}{1-y^2}dy = 0 \,\Big|\, \int$

$\int \frac{x\,dx}{1-x^2} + \int \frac{y\,dy}{1-y^2} = 0$

$-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| - \frac{1}{2}\ln|1-y^2| = -\frac{1}{2}\ln|C|,$ $C \neq 0$

– ~~исх.~~ общий инт. исх. ур-ия

$(1-y^2)(1-x^2) = 0 \Rightarrow y = \pm 1,\ x = \pm 1$

№2.1.22

$y\,dx + ctg\,x\,dy = 0$, $\quad y\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -1$

Поделим исх. ур-ие на $y\,ctg\,x$:

$$\frac{dx}{ctg\,x} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$tg\,x\,dx + \frac{dy}{y} = 0 \quad \Big| \int$$

$$\int tg\,x\,dx + \int \frac{dy}{y} = 0$$

$$-\ln|\cos x| + \ln|y| = \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0$$

$$|y| = |C_1 \cos x|.$$

$\exists\ C = \pm C_1$, тогда:

$$y = C\cos x$$

Т.к. $y = -1$, $x = \frac{\pi}{3}$, то

$$-1 = C\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow C = -2$$

Частное р-ие:

$$y = -2\cos x$$