Применение производных при решении различных задач математики

Рассматриваемая тема является одним из разделов курса алгебры и начала анализа. Она имеет широкое применение в таких науках как физика, геометрия и др.

Математический аппарат этой темы помогает при вычислении определенных и неопределенных интегралов и пределов функций, при доказательстве неравенств, помогает в исследовании функций в высшей математике. Кроме того, данная тема имеет свою историю, ей занимались и занимаются такие ученые как Г. Лейбниц, Ж. Лагранж, И. Ньютон, Г. Галилея, Р. Декарта. Подробнее остановимся на изложении исторического аспекта темы.

Термин «производная» является буквальным переводом на русский французского слова derive, которое ввел в 1797 г. Ж. Лагранж (1736-1813); он же ввел современные обозначения y', f'. Такое название отражает смысл понятия: функция $f'(x)$ происходит из $f(x)$, является производным от $f(x)$. И. Ньютон называл производную функцией *флюксией*, а саму функцию- *флюентой*. Г. Лейбнич говорил о *дифференциальном отношении* и обозначал производную как $\frac{df}{dx}$. Символ df Лейбниц выбрал для обозначения *дифференциала* функции f.

Дифференциальное исчисление создано Ньютоном и Лейбницем сравнительно недавно, в конце XVII столетия. Тем более поразительно, что за долго до этого Архимед не только решил задачу на построение касательной к такой сложной кривой, как спираль, но и сумел найти максимум функции $f(x)=x^2(a-x)$. В XVII в. на основе учения Г. Галилея о движении активно развивалась кинематическая концепция производной.

Понятия необходимые для решения задач с помощью производной

Определение производной

Пусть мы имеем функцию:

y=f(x), (1)

определенную в некотором промежутке. При каждом значении аргумента *x* из этого промежутка функция *y=f(x)* имеет определенное значение.

Пусть аргумент *x* получил некоторое (положительное или отрицательное- безразлично) приращение Δx. Тогда функция *y* получит некоторое приращение Δy. Таким образом: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

при значении аргумента *x* будем иметь *y=f(x),*

при значении аргумента $x+\Delta x$ будем иметь $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

Найдем приращение функции Δy:

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ (2)

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. (3)

Найдем предел этого отношения при $\Delta \to 0$. Если этот предел существует, то его называют *производной* данной функции *f(x)* и обозначают $f'(x)$. Таким образом, по определению,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Определение 1. *Производной* данной функции *y=f(x)* по аргументу *x* называется предел отношения приращения функции *Δy* к приращению аргумента *Δx*, когда последнее произвольным образом стремится к нулю. [5, с. 65]

Заметим, что в общем случае для каждого значения *x* производная $f'(x)$ имеет определенное значение, т.е. производная является также *функцией* от *x*.

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например

y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$.

Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$ или $y'|_{x=a}$. Операция нахождения производной от функции *f(x)* называется *дифференцированием* этой функции.

Геометрический смысл производной.

Теперь дадим не менее важное геометрическое истолкование производной. Для этого нам прежде всего потребуется определение касательной к кривой в данной точке.

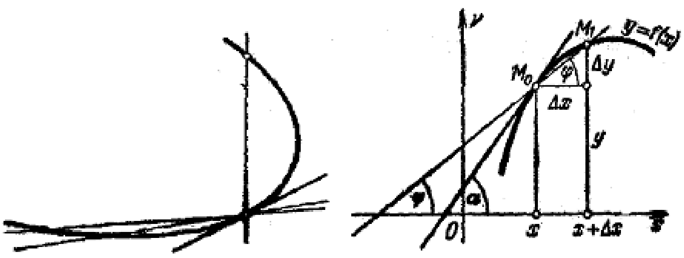

Рис. 1. Рис. 2.

Пусть имеем кривую и на ней фиксированную точку M_0. Возьмем на кривой точку M_1 и проведем секущую M_0M_1 (рис. 1). Если точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_0, то секущая M_0M_1 занимает различные положения M_0M_1', M_0M_1'' и т. д.

Если при неограниченном приближении точки M_1, по кривой к точке M_0 с любой стороны секущая стремится занять положение определенной прямой M_0T, то эта прямая называется *касательной* к кривой в точке M_0.

Определение 2. Прямая заданная уравнением

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

называется *касательной* к графику функции f в точке x_0. [6, с. 134]

Рассмотрим функцию $f(x)$ и соответствующую этой функции кривую

$$y = f(x)$$

В прямоугольной системе координат (рис. 2). При некотором значении x функция имеет значение $y = f(x)$. Этим значениям x и y на кривой соответствует точка $M_0(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Новому значению аргумента $x + \Delta x$ соответствует «наращенное» значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Соответствующей ему точкой кривой будет точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Проведем секущую M_0M_1 и обозначим через φ угол, образованный секущей с положительным направлением оси Ox. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Из рисунка 1 непосредственно усматриваем, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\varphi. \quad (5)$$

Если теперь Δx будет стремиться к нулю, то точка M_1 перемещаться вдоль кривой, приближаясь к M_0. Секущая M_0M_1 будет поворачиваться вокруг точки M_0 и угол φ будет меняться с изменением Δx. Если при $\Delta x \to 0$ угол φ стремиться к некоторому пределу α, то прямая, проходящая через M_0 и составляющая с положительным направлением оси абсцисс угол α, будет искомой касательной. Нетрудно найти ее угловой коэффициент:

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Следовательно,

$$f'(x) = tg\,\alpha, \quad (6)$$

т.е. *значение производной* $f'(x)$ *при данном значении аргумента* x *равняется тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси* Ox *касательной к графику функции* $f(x)$ *в соответствующей точке* $M_0(x, y)$.

Предел функции

Определение 3. Пусть функция *y=f(x)* определена в некоторой окрестности точки *a* или в некоторых точках этой окрестности.

Функция y=f(x) стремится к пределу b(y$\to$*b) при x, стремящемся к a*$(x\to a)$, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать такое положительное число δ, что для всех *x*, отличных от *a* и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

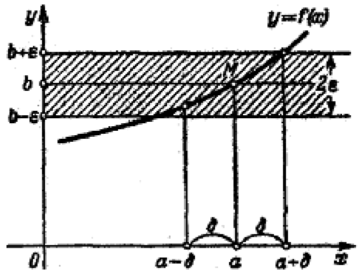

Рис. 3.

Если *b* есть *предел функции y=f(x)* при $x\to a$, то пишут:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

или $f(x)\to b$ при $x\to a$.

Если $f(x)\to b$ при $x\to a$, то на графике функции *y=f(x)* это иллюстрируется следующим образом (рис. 3); так как из неравенства $|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$, то значит, что для всех точек *x*, отстоящих от точки *a* не далее чем на δ, точки *M* графика функции *y=f(x)* лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$. [5, с. 31]

Замечание. Предел функции *f(x)* при $x\to a$ можно определить следующим образом.

Пусть переменная величина *x* принимает значение так (упорядочена так), что если

$$|x^{*}-a|>|x^{**}-a|,$$

то x^{**} есть последующее, а x^{*}- предыдущее значение; если же

$$|\bar{x}^{*}-a|=|\bar{x}^{**}-a| \text{ и } \bar{x}^{*}<\bar{x}^{**},$$

то $\bar{x}^{**}$ есть последующее, а $\bar{x}^{*}$- предыдущее.

Другими словами, из двух точек числовой прямой последующей является та точка, которая ближе к точке *a;* при равных расстояниях последующая- та, которая правее от точки *a*.

Пусть упорядоченная таким образом переменная величина *x* стремится к пределу $a[x \to a$ или $\lim x = a]$.

Рассмотрим, далее, переменную величину *y=f(x).* При этом будем считать, что из двух значений функции последующем является то значение, которое соответствует последующему значению аргумента.

Если определенная так переменная величина *y* при $x \to a$ стремится к некоторому пределу *b,* то будем писать

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

и говорить, что функция *y=f(x)* стремится к пределу *b* при $x \to a$.

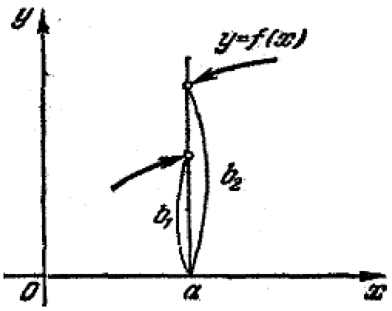

Рис. 4.

Замечание. Если *f(x)* стремится к пределу b_1 при *x,* стремящемся к некоторому числу *a* так, что *x* принимает только значения, меньшие *a,* то пишут $\lim_{x \to a-0} f(x) = b_1$ и называют b_1 *пределом функции в точке a справа* (рис.4).

Если *x* принимает только значения большие, чем *a,* то пишут $\lim_{x \to a+0} f(x) = b_2$ и называют b_2 *пределом функции в точке a справа* (рис.4).

Можно доказать, что если предел справа и предел слева существуют и равны, т.е. $b_1 = b_2 = b$, то b и будет пределом в смысле данного выше определения предела в точке *a.* И обратно, если существует предел функции *b* в точке *a,* то существуют пределы функции в точке *a* справа и слева и они равны.

Определение 4. *Функция* $f(x)$ *стремится к пределу b при* $x \to \infty$, если для каждого произвольно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число *N*, что для всех значений *x*, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. [5, с. 34]

Зная смысл символов $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, очевидным является и смысл выражений:

« $f(x)$ стремится к *b* при $x \to +\infty$ » и

« $f(x)$ стремится к *b* при $x \to -\infty$ »,

Которые символически записываются так:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. (9)

Обозначим длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1 \ldots k)$ через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Тогда величина

$\delta = \underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots k} \Delta x_i$ (10)

называется *мелкостью разбиения.*

Зафиксируем произвольным образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\ldots,k$

и составим сумму

$\sigma(f, \xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ (11)

Суммы вида (11) называются *интегральными суммами Римана.*

Определение 5. Функция f называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a,b]$, если существует такое число A, что любой последовательности разбиений отрезка $[a,b]$, у которой $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$ и для любого выбора точки xiÎ$[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1 \ldots n)$ выполняется равенство

$\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{(n)}\right) \cdot \Delta x_i^{(n)} = A$, (12)

где

$\Delta x_i^{(n)} = \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right)$ $(i = 1 \ldots n, n = 1,2,\ldots)$. [8, с. 54]

Если выполнены все условия определения 3, то число A назовем (Римановым) *определенным интегралом* функции f на отрезке $[a,b]$ и будем обозначать

$\int\limits_a^b f(x)dx$. (13)

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, \xi_1^{(n)}, ..., \xi_{k_n}^{(n)}),$$

где $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$,

или подробно

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \quad (14)$$

Определение 6. Число A называется определенным интегралом функции f на отрезке $[a,b]$, если для $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: для любого разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ $[a,b]$, мелкость которого меньше $\delta_i \delta_\tau < \delta$, каковы бы ни были точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то будет выполнено неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i - A\right| < \varepsilon$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $(i = 1...k)$. [8, с. 56]

Если $\Phi(x)$ - первообразная, то под определенным интегралом понимается соответствующее приращение первообразной на $[a,b]$, то есть $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (15)$$

(формула Ньютона-Лейбница).

Запишем формулу Ньютона-Лейбница в следующем виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где a и b назовем соответственно нижним и верхним пределом интегрирования.

Теорема 1. *(Основная теорема интегрального исчисления)*. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $\Phi(x)$ является какой-нибудь ее первообразной на этом отрезке . Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (16)$$

Понятие дифференциала функции

Пусть функция *f* дифференцируема в точке *x*, т.е. пусть ее приращение может быть записано в виде

$$\Delta f = (f'(x)+\alpha)\Delta x = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

где $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$. Это приращение состоит из двух слагаемых: $f'(x)\Delta x$, пропорционального Δx, и $\alpha\Delta x$, зависимость которого от Δx сложнее, так как α тоже зависит от Δx. Слагаемое $f'(x)\Delta x$ называют *дифференциалом* функции *f* и обозначают *df*,

$$df = f'(x)\Delta x. \quad (19)$$

Таким образом, *дифференциал функции равен произведению ее производной на приращение аргумента.*

Дифференциал- от латинского слова differentio- разность.

Теорема 2. *Если функция f дифференцируема в точке x, причем производная от f не обращается в нуль в этой точке, то дифференциал функции f и ее приращение являются при* $\Delta x \to 0$ *эквивалентными бесконечно малыми,* т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{df} = 1.$$

Применение производной к решению задач

Исследование функции

Дифференциальное исчисление широко используется при исследовании функций. С помощью производной можно найти промежутки монотонности функции, ее экстремальные точки, наибольшие и наименьшие значения.

Возрастание и убывание функций.

$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Если

$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$,

то функция f называется *неубывающей* на множестве X.

Аналогично определяются понятия *убывающей* и *невозрастающей функций.*

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, а ее производная положительна на интервале $]a; b[$, то f возрастает на $[a; b]$.*

Теорема 4. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, а ее производная отрицательна на интервале $]a; b[$, то f убывает на $[a; b]$.*

Теорема 5. *пусть функция f определена в точке x_0 и пусть существует $\delta > 0$, такое, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, дифференцируема на интервалах $]x_0 - \delta; x_0[u]x_0; x_0 + \delta[$, причем производная данной функции сохраняет знак на каждом из этих интервалов.*

Если на $]x_0 - \delta; x_0[u]x_0; x_0 + \delta[$ знаки производной различны, то x_0 - точка экстремума, а если совпадают, то x_0 не является точкой экстремума. При этом *если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «-», то точка x_0 - точка максимума, если же производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 - точка минимума.*

Задачи по аналитической геометрии

Пример 8. Найти угол между касательной к графику функции $y=\sin x$ в точке $(0;0)$ и осью Ox.

Решение. Найдем угловой коэффициент касательной к кривой $y=\sin x$ в точке $(0;0)$, т.е. значение производной этой функции при $x=0$.

Производная функции $f(x)=\sin x$ равна $f'(x)=\cos x$. По формуле $f'(x)=tg\alpha$ находим $tg\alpha = f'(0)=\cos 0 = 1$, откуда $\alpha = arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$.

Пример 9. Найти уравнение касательной к графику функции $y=\cos x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Значение функции $y=\cos x$ и ее производной в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$ равны: $f(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x_0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$. Используя формулу $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, найдем искомое уравнение касательной:

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ или $y=-\frac{1}{2}x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$.

Задачи по дифференциальной геометрии

Пример 12. Найти геодезическую кривизну винтовой линии $u=u_0$, лежащей на прямом геликоиде

$x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=bv$.

Решение. Запишем формулу для вычисления k_g:

$$k_g=\left(\vec{r}_s''\vec{r}_s'\vec{n}\right)=\frac{\left(\vec{r}_t''\vec{r}_t'\vec{n}\right)}{\left|\vec{r}_t'\right|}.$$

$\vec{r}_u(\cos v;\sin v;0)$, $\vec{r}_v(-u\sin v;u\cos v;b)$,

$$\vec{n}\left(\frac{b\sin v}{\sqrt{b^2+u_0^2}};\frac{-b\cos v}{\sqrt{b^2+u_0^2}};\frac{u_0}{\sqrt{b^2+u_0^2}}\right).$$

Положим $t=v$, тогда $\vec{r}_t'=\vec{r}_v$, $\vec{r}_t''=\vec{r}_{vv}\left(-u_0\cos v;u_0\sin v;0\right)$. Применяя формулу для вычисления k_g, получим

$$k_g=\begin{vmatrix}-u_0\cos v & u_0\sin v & 0\\ -u_0\sin v & u_0\cos v & b\\ b\sin v & -b\cos v & u_0\end{vmatrix}\cdot\frac{1}{\left(b^2+u_0^2\right)^2}=\frac{-u_0}{b^2+u_0^2}.$$

Пример 14. Найти длину дуги одного витка кривой:

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\cos\frac{t}{2}$ (где $a > 0$, $-\infty < t < \infty$) между двумя ее соседними точками пересечения с плоскостью XOZ.

Решение. Данная кривая пересекает плоскость XOZ, если $y = 0$. Отсюда следует, что $1 = \cos t$; $t = 0$ и $t = 2\pi$ - значения параметра t между двумя соседними точками пересечения с плоскостью XOZ.

Тогда

$$s = \int_0^{2\pi} |\bar{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt,$$

$x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a\sin t$, $z'(t) = -2a\sin\frac{t}{2}$,

$$|\bar{r}'(t)| = 2\sqrt{2}a\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

В промежутке $[0, 2\pi]$ $\sin\frac{t}{2} \ge 0$, поэтому $|\bar{r}'(t)| = 2\sqrt{2}a\sin\frac{t}{2}$. Следовательно, длина дуги

$$s = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}a\sin\frac{t}{2}\, dt = -4\sqrt{2}a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8\sqrt{2}a.$$

Вычисление интегралов

Интегрирование по частям.

Пусть u и v - дифференцируемые функции от x. Тогда $(uv)' = u'v + uv'$.

Интегрируя обе части тождества в пределах от a до b, получим:

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx. \quad (20)$$

Так как $\int (uv)'\,dx = uv + C$, то $\int (uv)'\,dx = uv\Big|_a^b$; поэтому равенство (20) может быть записано в виде

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv'$$

или окончательно

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример 17. Вычислить интеграл $\int_0^3 x\,arctg\,x\,dx$.

Решение.

$$\int_0^3 x\,arctg\,x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = arctg\,x; & du = \dfrac{dx}{1+x^2}; \\ dv = x\,dx; & v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2}. \end{array} \right| = \left(\frac{x^2}{2}\,arctg\,x\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} \right) = \frac{9}{2}\,arctg\,3 - 0 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{9}{2}\,arctg\,3 - \frac{1}{2}(x - arctg\,x)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}\,arctg\,3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,arctg\,3 = 5\,arctg\,3 - \frac{3}{2}.$$