$\boxed{§3}$ Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.

=> $\boxed{y' + p(x)y = g(x)}$ — лин. ур. I пор., где $p(x)$, $g(x)$ — непр. ф., в т.ч. const.

=> $x' + p(y)x = g(y)$ — явл-ся лин. относит. x и x'

$g(x) \equiv 0$ => $y' + p(x)y = 0$ — лин. однород

$g(x) \not\equiv 0$ => $y' + p(x)y = g(x)$ — лин. неодн.

Р-ие ур-ия ищется в виде $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизв. ф. от x (метод Бернулли).

u и v находят из ур-ий с разделяющимися переменными (см. 2.3.1а))

Метод Лагранжа — метод вариации произв. постоянной, р-ие ищется в виде $C(x)e^{-\int p(x)dx}$ (см. § 2.3.1.а))

Ур-ие Бернулли:

$y' + p(x)y = g(x)y^n$, $n \in R$, $n \neq 0$, $n \neq 1$

Оно приводится к лин. с помощью $z = y^{-n+1}$ или проинтегрировать методом Бернулли (т.е. $y = uv$), или методом Лагранжа.

№2.3.1

a) $y' + \operatorname{tg}x\, y = \frac{1}{\cos x}$

$p(x) = \operatorname{tg}x$

$g(x) = \frac{1}{\cos x}$

$\Rightarrow$ МЕТОД БЕРНУЛЛИ

$\exists\ y = uv,\quad u = u(x),\quad v = v(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = u'v + uv'$, тогда:

$u'v + uv' + \operatorname{tg}x\, uv = \frac{1}{\cos x}$

$u'v + u(v' + \operatorname{tg}x\, v) = \frac{1}{\cos x}$

Подберем $v = v(x)$, чтобы

$v' + v\operatorname{tg}x = 0$

$\frac{dv}{dx} + v\operatorname{tg}x = 0$

$\frac{dv}{v} + \operatorname{tg}x\, dx = 0 \quad \Big| \int()$

$\ln|v| + \ln|\cos x| = \ln|C|, \ C \neq 0$

$v = C\cos x, \quad C \neq 0$

Пусть $C = 1$, тогда $v = \cos x$

$u' \cos x = \frac{1}{\cos x}$

$du = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad | \int(\ )$

$u = \operatorname{tg} x + C$

$y = uv = (\operatorname{tg} x + C)\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}\cos x +$

$+ C\cos x = \sin x + C\cos x$ — общее р-ие.

=> <u>МЕТОД ЛАГРАНЖА</u>

$y' + \operatorname{tg} x\, y = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} x\, y$

$\frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\, dx$

$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|, \ C \neq 0$

$y = C\cos x$

Пусть $C = C(x)$, тогда $y = C(x)\cos x$

$y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + \operatorname{tg} x\, C(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$C'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$dC(x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$C(x) = \operatorname{tg} x + C$$

$$y = (\operatorname{tg} x + C)\cos x$$

$$y = C\cos x + \sin x$$

б) $y' = \frac{y}{x+y^2}$

] $y' = \frac{1}{x'}$, тогда:

$$\frac{1}{x'} = \frac{y}{x+y^2}$$

$$x' = \frac{x+y^2}{y}$$

$$x' - \frac{1}{y}x = y$$

] $x = uv$, тогда $x' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \frac{1}{y} vu = y$

$u'v + u(v' - \frac{1}{y} v) = y$

$v' - \frac{1}{y} v = 0$

$\frac{dv}{dy} - \frac{1}{y} v = 0$

$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$

$\ln|v| = \ln|y| + \ln|C|$

$\ln|v| = \ln|Cy|, \ C \neq 0$

Частное р-ие при $C = 1$:

$v = y$, тогда:

$u'y = y$

$u' = 1 \Rightarrow u = y + C$

$x = uv = (y + C)y = y^2 + Cy$ – общ. р-ие

$y = 0$ – особое р-ие

в) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

$y' - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}$

$\exists\ y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv}$

$u'v + u(v' - \frac{4}{x}v) = x\sqrt{uv}$

$v' - \frac{4}{x}v = 0$

$\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = 0$

$\frac{dv}{v} = \frac{4dx}{x}$

$\ln|v| = 4\ln|x| + C$

$v = x^4 + C$

Пусть $C = 0$, тогда $v = x^4$

$u'x^4 = x\sqrt{u}\cdot x^2$

$\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$

$2\sqrt{u} = \ln|x| + \ln|C|$, $C \neq 0$

$u = \frac{1}{4}\ln^2|xC|$, $C \neq 0$

$y = uv = \frac{1}{4}x^4\ln^2|xC|$, $C \neq 0$ — общ. р-ие

$y = 0$ — особое р-ие