

Введение

В процессе изучения производной в школьном курсе математики рассматриваются некоторые её приложения в физике, а также ряд текстовых задач на нахождение наибольшего или наименьшего значений. Однако сфера производной применения этим не ограничивается. Например, существует масса реальных экономических задач, для решения которых необходимо использовать методы дифференциального исчисления.

Метод нахождения экстремальных значений функции имеет важнейшее, ключевое значение для решения большого класса задач из разных разделов курса физики, математики, экономики и других наук. Специфика этих задач включает получение на основе некоторых физических и математических закономерностей функциональной зависимости и нахождение экстремального значения. В наше время, в связи с научно-техническим прогрессом, в частности с быстрой эволюцией вычислительных систем, дифференциальное исчисление становится все более актуальным в решении как простых, так и сверхсложных задач.

Каждый человек время от времени оказывается в ситуации, когда надо отыскать наилучший способ решения какой-либо задачи, и математика становится средством решения проблем организации производства, поисков оптимальных решений. Важным условием повышения эффективности производства и улучшения качества продукции является широкое внедрение математических методов в технику. Среди задач математики большую роль отводят задачам на экстремумы, т.е. задачам на отыскание наибольшего и наименьшего значения, наилучшего, наиболее выгодного, наиболее экономного. С такими задачами приходится иметь дело представителям самых разных специальностей: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы получилось как можно больше продукции, конструкторы хотят так спланировать прибор на космическом корабле, чтобы масса прибора была наименьшей, экономисты стараются спланировать прикрепление заводов к источникам сырья так, чтобы транспортные расходы оказывались минимальными.

Применение производной в прикладных задачах

Строительство

Задача:

Из бревна, имеющего радиус R , сделать балку наибольшей прочности.

Решение:

Составляем функцию, выражающую необходимое условие.

В данной задаче высота балки (представляющей собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R и ширины x), равна $\sqrt{4R^2 - x^2}$. Поэтому прочность такой балки равна $y = kx(4R^2 - x^2)$. При этом x изменяется от 0 до $2R$.

Функция $y = kx(4R^2 - x^2)$ обращается в нуль при $x=0$ и $x=2R$ и положительна между этими значениями. Значит она имеет максимум, лежащий между 0 и $2R$. Но производная этой функции

$y' = k(4R^2 - 3x^2)$ обращается в нуль на отрезке $[0; 2R]$ лишь при $x = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$. Это и есть оптимальное значение ширины b балки. Высота h балки такой ширины равна $\frac{2}{3}R\sqrt{6}$ и отношение $\frac{h}{b}$ равно $\sqrt{2} \approx 1,4 = \frac{7}{5}$. Именно такое отношение высоты вытесываемой балки к ее ширине предписывается правилами производства строительных работ.

Автомобилестроение

Решение физических задач, связанных с нахождением скорости, ускорения и т.д.

Задача:

Дано уравнение прямолинейного движения тела: $S = 3t^2 + 2$, где S - путь, пройденный телом, м; t - время, с. Найдите скорость тела в момент времени $t=1$ с.

Решение.

Скорость это производная пути по времени. Значит:

$$V = S' = 6t$$

Подставив значение времени, получим:

$$V(1) = 6 \text{ м/с}$$

Экономика

Задача:

Выбрать оптимальный объем производства фирмой, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостью:

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = q^2 - 8q + 10$$

Решение:

$$\pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 2q - 8 = 0 \rightarrow q_{\text{extr}} = 4$$

При $q < q_{\text{extr}} = 4 \rightarrow \pi'(q) < 0$ и прибыль убывает

При $q > q_{\text{extr}} = 4 \rightarrow \pi'(q) > 0$ и прибыль возрастает

При $q = 4$ прибыль принимает минимальное значение.

Каким же будет оптимальный объем выпуска для фирмы? Если фирма не может производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции ($p(q = 8) = p(q = 0) = 10$), то оптимальным решением будет вообще ничего не производить, а получать доход от сдачи в аренду помещений и / или оборудования. Если же фирма способна производить больше 8 единиц, то оптимальным для фирмы будет выпуск на пределе своих производственных мощностей.