Probabilités Serie 1 : Vecteurs gaussiens

Exercice 2 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

1) Montrer que $X = {}^t(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien

+ Fonction caractéristique de X.

Soit $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n) = \mathbb{E}\left[e^{i<t,X>}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{i\prod_{i=1}^{n} t_i X_i}\right]$$

indépendance des X_i

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{it_iX_i}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t_i) \qquad \text{or } \varphi_{X_i}(t_i) = e^{-\frac{1}{2}t_i^2} \text{ car } X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{t_i^2}{2}} \qquad (t_1,\dots,t_n)\cdot\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2} = e^{-\frac{1}{2}\cdot {}^t t \cdot t}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}<t,t>} = e^{-\frac{1}{2}<Id\cdot t, t>}$$

$X \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$

X est de moyenne $M = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n]) = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Et de matrice de covariance Γ tq $\forall i,j \ \Gamma_{i,j} = cov(X_i, X_j) = 0$

car les $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendants et $\Gamma_{i,i} = cov(X_i, X_i) = Var(X_i) = 1$

donc $\Gamma = I_n$

On a utilise la définition suivante :

Soit $X = {}^t(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien. On note $\begin{cases} m = \mathbb{E}[X] \\ \Gamma = Var(X) \end{cases}$

X admet pour fonction caractéristique la fonction

$$\forall u \in \mathbb{R}^m, \quad \varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{i\langle u, X\rangle}]$$
$$= \mathbb{E}[e^{i u^t X}]$$
$$= \mathbb{E}[e^{i\langle u, m\rangle - \langle \Gamma u, u\rangle}]$$
$$= e^{i u^t m - u^t \Gamma u}$$

La loi de X est donc entièrement déterminée par m et Γ

On note $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$

2) Écrire la densité et la fonction caractéristique du vecteur X. Soit $x = (x_1, \dots, x_m)$ et $X = (X_1, \dots, X_m)$

On a $f_X(x) = f_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = f_{X_1}(x_1) \times \dots \times f_{X_m}(x_m)$ car les X_i sont indépendantes

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} \quad \text{car } X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

d'après 1) $\varphi_X(x) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$

3) On pose $\begin{cases} Y = a_1 X_1 + \cdots + a_m X_m \\ Z = b_1 X_1 + \cdots + b_m X_m \end{cases}$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$

Trouver la loi du vecteur aléatoire (Y, Z)

(Y, Z) est gaussien car $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha Y + \beta Z = \alpha \sum_{i=1}^{m} a_i X_i + \beta \sum_{i=1}^{m} b_i X_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\alpha a_i + \beta b_i) X_i$$

Il est donc combinaison linéaire des $(X_1, \ldots, X_m)$ donc gaussien.

4) Montrer que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes

$\Leftrightarrow a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m = 0$

Comme (Y, Z) est un vecteur gaussien, l'indépendance correspond à la décorrelation des variables.

Y et Z indépendants $\Leftrightarrow cov(Y, Z) = 0$

On calcule : $cov(Y, Z) = cov\left(\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j X_j\right)$

$$= \sum_i a_i \cdot cov\left(X_i, \sum_j b_j X_j\right)$$

$$= \sum_i a_i \left(\sum_j b_j \cdot cov(X_i, X_j)\right)$$

Comme, $X_i \sim N(0, 1) \Rightarrow cov(X_i, X_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

donc $cov(Y, Z) = \sum_i a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m$

Finalement, Y, Z indépendantes $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 0$

Ex : $(X+Y)$ et $(X-Y)$ sont indépendantes