Exercice 11 : On note $M(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels et $GL(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M(2,\mathbb{R})$.

1) Démontrer que $GL(2,\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication

Soit $A, B \in GL(2,\mathbb{R})$, on a $A\cdot B \in GL(2,\mathbb{R})$

car $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} \in GL(2,\mathbb{R})$

$$\begin{cases} \cdot\ A \in GL(2,\mathbb{R}) \Rightarrow \exists A^{-1} \in GL(2,\mathbb{R}) \text{ tq } AA^{-1} = A^{-1}A = I_2 \\ \cdot\ B \in GL(2,\mathbb{R}) \Rightarrow \exists B^{-1} \in GL(2,\mathbb{R}) \text{ tq } B\cdot B^{-1} = B^{-1}B = I_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = A I_2 A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I_2 \\ (B^{-1}A^{-1})\cdot(AB) = B^{-1} I_2 B = B^{-1}B = I_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})\cdot(AB) = I_2$$

$\Rightarrow$ AB est inversible d'inverse $B^{-1}\cdot A^{-1}$

Donc (i) $\forall A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ $A\cdot B \in GL_2(\mathbb{R})$ c-à-d. Le produit matriciel est une loi de composition interne.

Soit A, B et $C \in GL_2(\mathbb{R})$, on a :

$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ c-à-d. Le produit matriciel est une loi associative.

(ii)

$$(A\times B)\times C = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{c_{11}a_{11}b_{11}}_{a} + \underbrace{c_{11}a_{12}b_{21}}_{b} + \underbrace{c_{21}a_{11}b_{12}}_{c} + \underbrace{c_{21}a_{12}b_{22}}_{d} & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

$$A\times(B\times C) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{a_{11}b_{11}c_{11}}_{a} + \underbrace{a_{11}b_{12}c_{21}}_{c} + \underbrace{a_{12}b_{21}c_{11}}_{b} + \underbrace{a_{12}b_{22}c_{21}}_{d} & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

On fait la même pour tout les coefficient

On constate que $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$

2) Démontrer que $GL(2,\mathbb{R})$ est en bijection avec l'ensemble des bases (u,v) de $\mathbb{R}^2$

Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$. A est inversible donc $\det(A) \neq 0$

$$A = (u,v) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \quad \left(u=(u_1,u_2)\ ,\ v=(v_1,v_2)\right)$$

forment une base de $\mathbb{R}^2$ car $\det(A) = \det(u,v) \neq 0$

On définit l'application $g : GL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{vect}\{u,v\} = \mathbb{R}^2$

$$A \longmapsto g(A) = \det(A) = \det(u,v)$$

$$GL_2(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

$$x \in \det^{-1}(\mathbb{R}^*) \iff \det(x) \in \mathbb{R}^*$$

Puisque le determinant d'une matrice correspond au determinant des vecteurs colonnes et que si le déterminant est diferent de 0 cela implique que la famille u,v n'est pas lié

c-à-d : $\det(u,v) \neq 0 \implies (u,v)$ Base de $\mathbb{R}^2$

de même : (u,v) Base de $\mathbb{R}^2 \implies \det(u,v) \neq 0$

$$\implies A = \begin{array}{cc|c} u & v & \\ \hline u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \end{array} \in GL_2(\mathbb{R})$$

car $\det(A) \neq 0$

Donc, $GL(2,\mathbb{R})$ et en bijection avec l'ensemble des bases (u,v) de $\mathbb{R}^2$

(iii) - $\exists! e \in GL_2(\mathbb{R})$ tq $\forall A \in GL_2(\mathbb{R})$ $A \cdot e = e \cdot A = A$

$e = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet, soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$

$$e \cdot A = I_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$$A \cdot e = A \cdot I_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$e = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre

(iv) - $\forall A \in GL_2(\mathbb{R})$, $\exists A^{-1} \in GL_2(\mathbb{R})$ tq $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2 = e$

Par définition $GL_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversible de taille 2×2.

. A^{-1} est l'inverse de A

Si de plus le produit matriciel vérifiait

$\forall A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ $A \cdot B = B \cdot A$

On aurait dit que $GL_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication matricielle est un groupe commutatif ou Abélien

ce qui n'est pas le cas car le produit matriciel n'est pas commutatif en général. on a pas forcément $AB = BA$

2) Démontrer que $GL(2,\mathbb{R})$ est en bijection avec l'ensemble des bases (u,v) de $\mathbb{R}^2$

Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$. A est inversible donc $\det(A) \neq 0$

$$A = (u,v) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \quad (u=(u_1,u_2)\ ,\ v=(v_1,v_2))$$

forment une base de $\mathbb{R}^2$ car $\det(A) = \det(u,v) \neq 0$

On définit l'application $g : GL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \text{vect}\{u,v\} = \mathbb{R}^2$

$$A \longmapsto g(A) = \det(A) = \det(u,v)$$

$$GL_2(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

$$x \in \det^{-1}(\mathbb{R}^*) \iff \det(x) \in \mathbb{R}^*$$

Puisque le determinant d'une matrice correspond au determinant des vecteurs colonnes et que si le déterminant est différent de 0 cela implique que la famille u, v n'est pas lié

c-à-d : $\det(u,v) \neq 0 \implies (u,v)$ Base de $\mathbb{R}^2$

de même : (u,v) Base de $\mathbb{R}^2 \implies \det(u,v) \neq 0$

$$\implies A = \begin{array}{cc} u & v \\ \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array} \in GL_2(\mathbb{R})$$

car $\det(A) \neq 0$

Donc, $GL(2,\mathbb{R})$ est en bijection avec l'ensemble des bases (u,v) de $\mathbb{R}^2$

3) $GL(2,\mathbb{R})$ est-il fermé ? Ouvert ?

$\begin{cases} \cdot\ \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \\ \cdot\ \det \text{ est une application continue (car polynômiale en les coefs de la matrice)} \end{cases}$

$\Rightarrow GL(2,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*) = \det^{-1}(]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$

est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

$GL(2,\mathbb{R})$ est dense dans $M(2,\mathbb{R})$

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique $\chi_A(x) = \det(A - xI_2)$ n'a qu'un nombre fini de racines eventuellement nul (car c'est un polynôme de degré 2 donc d'après le théorème fondamental de l'algèbre il a au plus 2 racins)

donc pour $A_n = (A - \frac{1}{n} I_2)$. C'est une suite de matrices inversibles car $n(A - A_n) = I_2$ car $\det(A - \frac{1}{n} I_2) \neq 0$

car $\det(A - \lambda I_2) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda$ v.p de A
et $\frac{1}{n}$ n'est pas v.p. de A

Et $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A$ car $\frac{1}{n} I_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc pour n assez grand $\det(A - \frac{1}{n} I_2) \neq 0$

La suite $(A_n)_{n \geq n_0} = (A - \frac{1}{n} I_2)_{n \geq n_0}$ est une suite d'éléments de $GL_2(\mathbb{R})$ convergente de limite $A \in M_2(\mathbb{R})$

Ainsi, $\overline{GL(2,\mathbb{R})} = M(2,\mathbb{R}) \Leftrightarrow GL(2,\mathbb{R})$ est dense dans $M(2,\mathbb{R})$

Dans le cas où les racines sont non-nulles
On indexe les racines non nulles λ_i par ordre croissant en module / valeur absolue.
Alors $|\lambda_1| > 0$ Et il n'existe aucune racine non-nulle dans le disque ouvert $D(0, |\lambda_1|)$ de centre 0 et rayon $|\lambda_1|$
On définit ainsi $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = A - \frac{\lambda_1}{n+1} I_2$$

On a bien $\det(A_n) = \det\left(A - \frac{\lambda_1}{n+1} I_2\right) \neq 0$

car $\left(\frac{\lambda_1}{n+1}\right)$ n'est pas valeur propre pour $n \geq 1$.

donc $\left(A - \frac{\lambda_1}{n+1} I_2\right)$ est inversible $\forall n \geq 1$

Car sinon cela voudrait dire qu'il existe une racine non-nulle de $\chi_A(x) = \det(A - xI_2)$ dans le disque D (c-à-d une racine plus petite que λ_1 IMPOSSIBLE)
$\left(A - \frac{\lambda_1}{n+1} I_2\right)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'éléments de $GL(2, \mathbb{R})$ qui converge bien vers $A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$

On a donc $\overline{GL(2, \mathbb{R})} = \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$

c-à-d $GL(2, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$

La preuve se généralise en dimension n.

4) Déterminer les composantes connexes de $GL(2,\mathbb{R})$

Soit $A \in GL(2,\mathbb{R}) \iff \det(A) \neq 0$

Donc ~~soit~~ $\det(A) > 0$ ou $\det(A) < 0$

$$GL(2,\mathbb{R}) = \det^{-1}(]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$$

Comme $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est la réunion de deux ouverts disjoints

$\Rightarrow \mathbb{R}^*$ n'est pas connexe

. Sur $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$ qui est connexe, on a :

$\det^{-1}$ est une application continue

$\Rightarrow \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = \det^{-1}(]\infty; 0[)$ est connexe

. Sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ ~~ce~~ qui est connexe, on a :

$\det^{-1}$ est une application continue

$\Rightarrow \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \det^{-1}(]0; +\infty[)$ est connexe

De plus, on a $\det^{-1}(\mathbb{R}_-^*) \cap \det(\mathbb{R}_+^*) = \phi$

car on ne peut trouver de matrice avec un déterminant qui est à la fois positif et négatif (il serait forcément nul).

$$\Rightarrow \quad GL(2,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*) = \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*) \cup \det(\mathbb{R}_+^*)$$

L'ensemble des matrices inversibles possède donc 2 composantes connexes les matrices dont le determinant est strictement négatif et celles dont le déterminant est strictement positif.

Marjolaine Puel :

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ C \text{ connexe par arcs} \\ \bullet\ f \text{ continue} \\ \bullet\ f^{-1} \text{ continue} \end{array}\right. \Rightarrow f^{-1}(C) \text{ connexe par arcs}$$

Soit $x, y \in C$. Puisque C est connexe par arcs, il existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow C$ continue telle que $\left\{\begin{array}{l} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{array}\right.$

Par définition de $f^{-1}(C)$

$$\forall\, a, b \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\, x \in C \text{ tq } f(a) = x \\ \exists\, y \in C \text{ tq } f(b) = y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = f^{-1}(x) \\ b = f^{-1}(y) \end{array}\right.$$

Ainsi, $\exists\, g : [0,1] \longrightarrow f^{-1}(C)$
$$t \longmapsto g(t) = f^{-1}(\gamma(t))$$

$$\left\{\begin{array}{l} g(0) = f^{-1}(\gamma(0)) = f^{-1}(x) = a \\ g(1) = f^{-1}(\gamma(1)) = f^{-1}(y) = b \end{array}\right.$$

Comme $g = f^{-1} \circ \gamma$ et que $\left\{\begin{array}{l} \gamma \text{ est continue} \\ f^{-1} \text{ est continue} \end{array}\right.$

$\Rightarrow g$ est continue

Ainsi $f^{-1}(C)$ est connexe par arcs.