Thérème des fonctions implicits (2 variables) :

Hypothèses : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

- $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
- Soit $(a,b) \in \Omega$ tq $f(a,b) = 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

Resultat : Alors il existe un voisinage ouvert U de (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant a et une fontion $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k tq $\forall (x,y) \in U$ on ait

$$f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

De plus, $\forall x \in I$, $\quad g'(x) = - \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$

Exercice d'application : $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2$

Montrer que si $f(x,y) = 1$, il existe une fonction φ au voisinage de 1, vérifiant $y = \varphi(x)$ et $\varphi(1) = 1$

- 1ère condition : $f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 1 \times 1^2 = 1$
- 2ème condition : $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 2xy \Rightarrow \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 3 - 2 = 1 \neq 0$
- 3ème condition : f est C^1 (même C^∞ car fonction polynômiale)

Les trois conditions du théorème des fonctions implicites étant satisfaits on a :

$$\Rightarrow \quad \varphi : I_1 \longrightarrow J_1 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(1) = 1 \\ f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in I_1 \end{array} \right.$$
$$x \longmapsto y = \varphi(x)$$

Exemple dans $\mathbb{R}^3$: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1$ au voisinage de $(0,0,1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad z = \varphi(x,y) \quad \text{au voisinage de } (0,0,1)$$

On a $x^2+y^2+(\varphi(x,y))^2 - 1 = 0$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2 \cdot \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} \cdot \varphi(x,y) = 0 \\ 2y + 2 \cdot \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \cdot \varphi(x,y) = 0 \end{array} \right.$$

En $(0,0)$ On a : $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = 0$

Notre surface est paramétré au voisinage de $(0,0,1)$ comme

$\{(x,y,\varphi(x,y)) \mid (x,y) \in \mathcal{U}\}$

Espace tangent : image de $(u,v) \longmapsto \left(u, v, \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \cdot v\right)$

En $(0,0,1)$: image de $(u,v) \longmapsto (u,v,0)$

Exercice 8 : Montrer que la relation $x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 = 1$ définit y comme fonction de x au voisinage du point $(-1,1)$. Calculer alors $\frac{dy}{\partial x}$ en ce point.

. On va appliquer le théorème des fonctions implicites

1ère condition : Soit $f(x,y) = x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 - 1$.

f est C^1 (même C^∞ car polynômiale)

2ème condition : $f(-1,1) = (-1)^4 + (-1)^3 1^2 - 1 + 1^2 + 1 - 1$

$= \cancel{1} - 1 - \cancel{1} + \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{1}$

donc $f(-1,1) = 0$

3ème condition : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - 1 + 2y + 3y^2$

On calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2(1)^3(-1) - 1 + 2 + 3 = -3 + 2 + 3 = 2 \neq 0$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(-1,1)$.

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{U}$ voisinage de $(-1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$

I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 1.

J intervalle de $\mathbb{R}$ contenant -1.

Et une fonction $g : I \longrightarrow J$ telle que

$\forall (x,y) \in I \times J$, $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$

De plus, $\forall x \in I$, $g'(x) = - \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$

On calcule alors

$$g'(-1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 3y^2x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = -4+3 = -1$$

On peut aussi partir de la relation

$$x^4 + x^3 g(x)^2 - g(x) + g(x)^2 + g(x)^3 = 1$$

On derive cette relation pour $x \in I$.

$$4x^3 + 3x^2 g(x)^2 + x^3 \cdot 2g'(x) \cdot g(x) - g'(x) + 2g'(x) \cdot g(x) + 3g'(x) g(x)^2 = 0$$

On évalue en $x = -1$:

$$-4 + 3g(-1)^2 + \cancel{-2g'(-1) \cdot g(-1)} - g'(-1) + \cancel{2g'(-1)g(-1)} + 3g'(-1)g(-1)^2 = 0$$

$$-4 + 3g(-1)^2 - g'(-1) + 3g'(-1)g(-1)^2 = 0$$

$$g'(-1)(1 - 3g(-1)^2) = 3g(-1)^2 - 4$$

$$g'(-1) = \frac{3g(-1)^2 - 4}{1 - 3g(-1)^2}$$

((comme $f(-1,1) = 0$

$\Leftrightarrow 1 = g(-1)$

Ainsi, $g'(-1) = \frac{3-4}{1-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

Exercice 9 : Démontrer que la relation $x+y+z+\sin(xyz)=0$ définit z comme fonction de x et y au voisinage de $(0,0,0)$. Calculer alors $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ au voisinage de ce point

. On va appliquer le théorème des fonctions implicites à

$$f(x,y,z) = x+y+z+\sin(xyz)$$

1ère condition : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 (même C^∞ comme somme de fonctions polynômiales et trigonométriques)

2ème condition : $f(0,0,0) = 0+0+0+\sin(0) = 0$

3ème condition : $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1 + xy\cdot\cos(xyz)$

donc, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1 \neq 0$

D'après le théorème des fonctions implicites :

- Il existe U voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$

  I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0

Et une fonction $g : U \longrightarrow I$ telle que :

$$\forall (x,y,z) \in U \times I \, , \quad f(x,y,z)=0 \iff z = g(x,y)$$

$$(\text{i.e. } 0 = g(0,0))$$

De plus, $\forall (x,y) \in U$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = - \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y)}$

On calcule :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1 + yz \cdot \cos(xyz) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 1 + xz \cos(xyz) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = - \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,g(0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,g(0))} = -\dfrac{1}{1} = -1$

On peut aussi partir de la relation

$x + y + g(x,y) + \sin(xy \cdot g(x,y)) = 0$, on dérive par rapport à x

$1 + \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y \cdot g(x,y) \cdot \cos(xyg(x,y)) + xy \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \cos(xyg(x,y)) = 0$

Comme, $\forall (x,y,z) \in U \times I$, $f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x,y)$

pour $(x,y,z) = (0,0,0)$ on a $f(0,0,0) = 0 \Leftrightarrow 0 = g(0,0)$

Ainsi $1 + \dfrac{\partial g(0,0)}{\partial x} + 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial g(0,0)}{\partial x} = -1$

Le calcul de la dérivée partielle par rapport à y est identique