Feuille 3 Exercice 8 :

- $\ddot{x}(t) + x(t) = \mu_0 \left((1+\cos t)\sin(x(t)) + \cos(2t) \right)$
- $\mu \ll 1$

1) Forme matricielle

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ -x(t) + \mu_0 \left((1+\cos t)\sin(x(t)) + \cos(2t) \right) \end{pmatrix}$$

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \left((1+\cos t)\sin(x(t)) + \cos(2t) \right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{X}(t) = A \cdot X(t) + \mu_0 F(X(t), t)$$

où $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \right) \longmapsto \left(0, \left((1+\cos t)\sin(x) + \cos(2t) \right) \right)$$

On a $\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\| \dot{X}(t) \| = \| AX + \mu . F(X,t) \| \leq \|A\| \|X\| + 3|\mu|$$

Croissance affine quand $\|X\| \to +\infty$. La sol est définie pour tout temps $t \in \mathbb{R}$

f est continue comme produit et somme de fonctions continues donc loc^t lip en $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ unicité de la solution

Si on avait global lip.

c-à-d : $\|f(t,x) - f(t,\bar{x})\| \leq K \|x - \bar{x}\|$

$\Rightarrow \|f(t,x) - f(t,0)\| \leq K \|x - 0\|$

$\Rightarrow \|f(t,x)\| \leq K \|x\| + \|f(t,0)\|$

donc : global lip $\Rightarrow$ croissance affine à l'infini

Rappel Cauchy Lipschitz $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = v \end{cases}$ (P.C)

$\Leftrightarrow x(t) = v + \int_0^t f(s, x(s))\,ds$

$\Leftrightarrow x(t) = \phi(x(\cdot))(t) \Leftrightarrow x(\cdot) = \Phi(x(\cdot))$

$x(\cdot) \in \mathcal{E} = \{ x :]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}^4 \}$
$\mathcal{C}^0$

3) $X_{\mu,v}(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

solution de $\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,X(t) + \underline{\underline{\mu}}\, F(X(t), t) \\ X(0) = \underline{\underline{v}} \end{cases}$

Montrons que $X_{\mu,v}(\cdot)$ 2π-périodique

$$\phi \iff$$

$$X_{\mu,v}(t+2\pi) - X_{\mu,v}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad R(t+2\pi, 0)\,X(0) + \int_0^{t+2\pi} R(t,s)\,\mu\cdot F(X(t), t)\,ds$$

$$= R(t,0)\,X(0) + \int_0^{t} R(t,s)\,\mu\cdot F(x(t), t)\,ds$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_t^{t+2\pi} R(t,s)\,\mu\cdot F(X(t), t)\,ds = 0$$

~~Or~~ On a $\displaystyle\int_t^{t+2\pi} e^{(t-s)A}\,\mu\, F(X(t), t)\,ds = 0$

$$\Leftrightarrow \quad e^{tA} \int_t^{t+2\pi} e^{-sA}\,\mu\, F(x(t), t)\,ds = 0 \qquad \forall t$$

en particulier pour $t=0$ $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-sA}\,\mu\, F(X_{\mu,v}(s), s)\,ds = 0$

Posons $g(s) = e^{-sA} F(X_{\mu,v}(s), s)$; 2π - périodique

$$\forall t \int_t^{t+2\pi} g(s)\,ds = 0 \iff \int_0^{2\pi} g(s)\,ds = 0$$

$$G(t+2\pi) - G(t) = 0 \iff \int_0^{2\pi} g(s)\,ds = 0$$

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds$$

$$\frac{d}{dt}\left(G(t+2\pi) - G(t) \right) = g(t+2\pi) - g(t) = 0$$

$$\Rightarrow G(t+2\pi) - G(t) = \text{costante} = G(2\pi) - G(0) = \int_0^{2\pi} g(s)\,ds$$

$X_{\mu,v}()$ 2π périodique $\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{-SA} F(X_{\mu,v}(s), s)\,ds = 0$

on a alors $X_{\mu,v}(2\pi) = X_{\mu,v}(0)$

$$\Rightarrow \phi^{t,0}\left(X_{\mu,v}(2\pi)\right) = \phi^{t,0}\left(X_{\mu,v}(0)\right)$$ car $t \mapsto X(t, \cdot)$ est 2π-périodique

$$\Rightarrow \phi^{t+2\pi, 2\pi}\left(X_{\mu,v}(2\pi)\right) = \phi^{t,0}\left(X_{\mu,v}(0)\right)$$

$$\Rightarrow X_{\mu,v}(t+2\pi) = X_{\mu,v}(t)$$

3ème façon :

$$\begin{cases} \cdot\ X_{\mu,v}(t) \\ \cdot\ Y(t) = X_{\mu,v}(t+2\pi) \end{cases}$$

$Y(\cdot)$ et $X_{\mu,v}(\cdot)$ vérifient la même EDO et ont même condition initiale en $t=0$ $\quad Y(0) = X_{\mu,v}(2\pi) = X_{\mu,v}(0)$

donc unicité $\Rightarrow Y(t) = X_{\mu,v}(t) \quad , \forall t$

i.e. $X_{\mu,v}(\cdot)$ est 2π-périodique

But : Démontrer que pour $\mu \ll 1$ fixé

il existe $v = v(\mu)$ tq $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \mu F(x(t), t) \\ x(0) = v(\mu) \end{cases}$

$X_{\mu,v(\mu)}(\cdot)$ sol 2π-périodique

On a $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-sA} F(X_{\mu,v}(s), s)\, ds = 0 \qquad (4)$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{-sA} F\left(e^{tA} v + \text{petit}, s\right) ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{-sA} F(e^{tA} v, s) + \frac{\partial}{\partial v} F(e^{tA} v, s) \cdot \text{petit}\ ds + t.o.s = 0$$

un tel v pour convenir doit vérifier

$$\int_0^{2\pi} e^{-sA} F(\underbrace{e^{sA} v}_{\begin{pmatrix} \cos(s)v_1 + \sin(s)v_2 \\ -\sin(s)v_1 + \cos(s)v_2 \end{pmatrix}}, s)\,ds \simeq 0$$

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s & +\sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (1+\cos\ )\sin(\cos(s)v_1 + \sin(s)v_2) + \cos(2s) \end{pmatrix} ds$$

Notons $H(\mu, v) = \int_0^{2\pi} e^{-sA} F(X_{\mu,v}(s), s)\,ds$ C^k par rapport aux paramètres μ et v

$$H(0,0) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2s) \end{pmatrix} ds = 0$$

$\Rightarrow \exists\ v : \mu \longrightarrow v(\mu)$ C^1

$H(\mu, v(\mu)) = 0$ théorème des fonctions implicites

différentiable

$\hookrightarrow$ théorème de dépendance par rapport à la condition initiale (pour v)

et par rapport à un paramètre (μ)