Exercice 5 : Soient X et Y deux v.a. telles que $X \sim P(\lambda)$

et $Y | X=n \sim \mathcal{B}(n,p)$

a) Déterminer la loi du couple (X,Y) puis la loi de Y.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$

$$\mathbb{P}(Y=k | X=n) = \frac{\mathbb{P}(Y=k \cap X=n)}{\mathbb{P}(X=n)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y=k \text{ et } X=n) = \mathbb{P}(Y=k | X=n) \cdot \mathbb{P}(X=n)$$

$$= \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Déterminer la loi de Y

$$(Y=k)$$
$$= \{Y=k \text{ et } X \in X(\Omega)\}$$
$$= \bigcup_{n \in X(\Omega)} \{Y=k, X=n\}$$
$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Y=k, X=n\}$$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(Y=k \text{ et } X \in \mathbb{N})$$

$$= \mathbb{P}\left(Y=k \text{ et } \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X=n\}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k \text{ et } X=n)$$

or puisque la loi jointe est définie pour

$n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!] \Rightarrow n \geq k$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\{Y=k,\ X=m\}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k,\ X=m) \qquad \text{car } m \geq k$$

$$= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \frac{1}{m!} \left(\lambda(1-p)\right)^{m-k} \cdot (\lambda p)^k e^{-\lambda}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} \qquad i = m-k$$

$$= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)}$$

$$= e^{-\lambda+\lambda-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \qquad \underline{\text{donc}}\ Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$$

b) Les v.a. $X-Y$ et Y sont-elles indépendantes ?

Méthode 1 : On vérifie si $\mathbb{P}(X-Y=l \text{ et } Y=k) = \mathbb{P}(X-Y=l)\cdot\mathbb{P}(Y=k)$

Méthode 2 :
$$G_X : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto G_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \, \mathbb{P}(X=k)$$

Pour un couple (Z_1, Z_2) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$:

$$G_{(Z_1,Z_2)} : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(s,t) \longmapsto G_{(Z_1,Z_2)}(s,t) = \mathbb{E}\left[s^{Z_1} \cdot t^{Z_2}\right]$$

donc Z_1 et Z_2 indépendantes $\iff G_{(Z_1,Z_2)}(s,t) = G_{Z_1}(s) \cdot G_{Z_2}(t)$

$\forall (s,t) \in [-1,1]^2$

Soit $(s,t) \in [-1,1]^2$

$$G_{(X-Y,Y)}(s,t) = \mathbb{E}\left(s^{X-Y}\, t^{Y}\right) = \mathbb{E}\left(s^{X} \cdot \left(\frac{t}{s}\right)^{Y}\right)$$

$$= \sum_{\substack{(k,m)\in\mathbb{N}^2 \\ 0\le k\le m}} s^m \cdot \left(\frac{t}{s}\right)^k \mathbb{P}(X=m \text{ et } Y=k)$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} s^m \left(\frac{t}{s}\right)^k \frac{\lambda^m \cdot p^k (1-p)^{m-k} e^{-\lambda}}{k!\,(m-k)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{tp}{s}\right)^k (1-p)^{m-k} \overbrace{\frac{m!}{k!\,(m-k)!}}^{=\binom{m}{k}}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^m}{m!} \left(\frac{tp}{s} + 1 - p\right)^m$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda s\left(\frac{tp}{s} + 1 - p\right)\right)^m}{m!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda tp + \lambda s - \lambda sp)^n}{m!}$$

$$= \exp(-\lambda + \lambda tp + \lambda s - \lambda sp)$$

$$= \exp(-\lambda(1 - tp - s + sp))$$

Soit $s \in [-1;1]$

$$G_{X-Y}(s) = \mathbb{E}\left(s^{X-Y}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{(k,n)\in\mathbb{N}^2 \\ 0\le k\le n}} s^{n-k}\, \mathbb{P}(X=n \text{ et } Y=k)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} s^{n-k} \frac{\lambda^n p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}}{k!\,(n-k)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k \left(s(1-p)\right)^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n (p+s-sp)^n}{n!}$$

$$= \exp\left(-\lambda(1-p-s+sp)\right)$$

$$G_Y(t) = \mathbb{E}\left(t^Y\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\, \mathbb{P}(Y=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} = e^{-\lambda p} \overbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda p)^k}{k!}}^{e^{t\lambda p}}$$

$$= \exp\left(-\lambda(p - tp)\right)$$

$$\Rightarrow G_{(X-Y)}(s) \cdot G_{(Y)}(t) = \exp\left(-\lambda(1-\cancel{p}-s+sp+\cancel{p}-tp)\right)$$

$$= \exp\left(-\lambda(1-tp-s+sp)\right)$$

e) Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$

On a $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$ où $g(k) = \mathbb{E}(X|Y=k)$

On a $\mathbb{P}(X=m \mid Y=k) = \dfrac{\mathbb{P}(X=m \text{ et } Y=k)}{\mathbb{P}(Y=k)}$

$$= \frac{\lambda^m p^k (1-p)^{m-k} e^{-\lambda}}{\cancel{k!}\, m-k!} \cdot \frac{\cancel{k!}}{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} \quad \text{pour} \quad m \geq k$$

Ainsi $g(k) = \mathbb{E}(X|Y=k)$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} m \cdot \mathbb{P}(X=m \mid Y=k)$$

$$= \sum_{m=k}^{+\infty} m \cdot \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!}$$

$i = m-k$

$m = i+k$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} (i+k) \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda(1-p))^i}{i!}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} i \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda(1-p))^i}{i!} + k \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda(1-p))^i}{i!}$$

$$g(h) = \sum_{i=0}^{+\infty} i\, e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} + h \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!}$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \left[\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda(1-p)^i}{(i-1)!} + h \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} \right]$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \left[\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(1-p) \cdot \frac{(\lambda(1-p))^{i-1}}{(i-1)!} + h \cdot e^{\lambda(1-p)} \right]$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \left[\lambda(1-p) \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} + h \cdot e^{\lambda(1-p)} \right)$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \left[\lambda(1-p) \cdot e^{\lambda(1-p)} + h \cdot e^{\lambda(1-p)} \right]$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \cdot e^{\lambda(1-p)} \left[\lambda(1-p) + h \right)$$

$$= \lambda(1-p) + h$$

Ans, $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y) = \lambda(1-p) + Y$