Loi Binomiale négative :

$$N \sim BN(r, p) \Rightarrow \mathbb{P}(N=n) = \frac{\Gamma(r+n)}{n!\,\Gamma(r)} \cdot p^{r}(1-p)^{n}$$

Cas particulier, $r=1$ $\mathbb{P}(N=n) = p(1-p)^{n}$

$\Rightarrow$ N suit une loi du type géométrique de paramètre p.

$N \in \mathbb{N}$.

" Le nb de jets de pièce de monnaie jusqu'à obtenir le premier pile avec p la proba d'obtenir p. et $(1-p)$ la proba d'obtenir face "

Exo Soit $N \sim BN(r, p)$

1) Calculer f.g.mf de N (fonction génératrice de moments factoriel)

$$g_N(t) = \mathbb{E}[t^N] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot \mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{\Gamma(r+n)}{n!\,\Gamma(r)} p^r (1-p)^n$$

$$= p^r \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t(1-p))^n}{n!\,\Gamma(r)} \cdot \Gamma(r+n)$$

$$= p^r \times \frac{1}{(1-t(1-p))^r} \Rightarrow g_N(t) = \left(\frac{p}{1-t(1-p)}\right)^r$$

Rappel :

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} x^n$$

2) $g_N(t) = \left(\frac{p}{1-t(1-p)}\right)^r = p^r \cdot (1-t(1-p))^{-r}$

$\Rightarrow g_N(t)' = (-(1-p))(-r)\, p^r \times (1-t(1-p))^{-r-1}$

$= \frac{r(1-p)p^r}{(1-t(1-p))^{r+1}}$

moment factoriel d'ordre 1

$\mathbb{E}[N] = \mu_{[1]}(N) = g_N'(1) = \frac{(1-p)\, r \cdot p^r}{p^{r+1}} = \frac{(1-p)r}{p}$

$g_N''(t) = (1-p)^2 \times r \times (r+1) \cdot p^r \cdot (1-t(1-p))^{-r-2}$

$\mu_{[2]}(N) = g_N''(1) = \frac{(1-p)^2 r(r+1)}{p^2}$

$\mathbb{E}[N(N-1)] = \frac{(1-p)^2 r(r+1)}{p^2}$

$\rightarrow \mathbb{E}[N^2] = \frac{(1-p)^2 r(r+1)}{p^2} + \mathbb{E}[N]$ $\overset{\shortparallel}{\frac{(1-p)r}{p}}$

$\rightarrow Var(N) = \mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}[N]^2 = \frac{(1-p)^2 r(r+1)}{p^2} - \frac{r^2(1-p)^2}{p^2} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2$

3) $g_{N_1+N_2}(t) = g_{N_1}(t) \times g_{N_2}(t) = \left(\dfrac{p}{1-t(1-p)}\right)^{r_1} \times \left(\dfrac{p}{1-(t(1-p))}\right)^{r_2}$

car $N_1 \perp\!\!\!\perp N_2$

$g_{N_1+N_2}(t) = \left(\dfrac{p}{1-t(1-p)}\right)^{r_1+r_2}$ On reconnait la f.g.m.f. de

la loi $BN(r_1+r_2, p)$.

On peut en déduire de $N_1+N_2 \sim BN(r_1+r_2, p)$.

Remarque : $\mathbb{E}[N] = \dfrac{(1-p)r}{p}$ $V(N) = \dfrac{(1-p)r}{p^2}$ $0<p<1$

$\mathbb{E}[N] < \mathbb{V}(N)$

$\Rightarrow$ La BN présente la bonne caractéristique des distributions de sinistre qu'on observe en pratique.

Loi de Poisson mélangée

Exemple : On considère un portefeuille d'assurance auto sur une période d'un an. Étant donné un assuré pris au hasard dans le portefeuille, on note N son nombre d'accidents.

On suppose par ailleurs qu'au sein de la population des automobilistes, il y a 2 catégories :

- une proportion p de bons conducteurs suit une loi $\mathcal{P}(\lambda_1)$
- une proport $(1-p)$ de mauvais conducteurs dont le nbre de sinistres dans l'année suit une loi $\mathcal{P}(\lambda_2)$

Un conducteur dont on connaît rien se présente pour s'assurer. Déterminer sa prime pure.

$$\mathbb{P}(N=n)\ ? = \mathbb{P}(\{N=n\}\cap\{\text{bon conduct}\}) + \mathbb{P}(\{N=n\}\cap\{\text{mauvais}\})$$

Déf : $N \sim PM(\Lambda)$ s'il existe une variable aléatoire $\Lambda > 0$ telle que $\forall \lambda > 0$, $N \mid \{\Lambda = \lambda\} \sim \mathcal{P}(\lambda)$

La loi de Λ est appelé la loi mélange.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(N=n \mid \Lambda)\right]$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{e^{-\Lambda} \Lambda^n}{n!}\right)$$

Car
$$\begin{cases} \mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \\ \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid Y]\right] \end{cases}$$

$$\to \mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N=n\}} \mid \Lambda\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(N=n \mid \Lambda)\right]$$

Ainsi
$$\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}\left[\frac{e^{-\Lambda}\Lambda^n}{n!}\right] = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} h(\lambda)\, d\lambda \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\Lambda = \lambda_i) \cdot \frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^n}{n!} \end{cases}$$

Loi

λ	λ_1	λ_2	...	λ_k
Proba $\mathbb{P}(\Lambda = \lambda_i)$	p_1	p_2		p_k

Discret et Continu

$$\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}\left[\frac{e^{-\Lambda}\Lambda^n}{n!}\right] = \begin{cases} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^n}{n!}\,\mathbb{P}(\Lambda=\lambda_i) \\ \cdot \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\, f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda \end{cases}$$

mélangée

Ex TD : Loi Poisson Gamma $\equiv$ Loi binomiale négative

(Cas particulier où Λ suit une loi Gamma γ)

Λ variable de mélange qui représente l'hétérogénéité du risque λ associé à la loi de Poisson au sein du portefeuille.

Proposition : Soit N une v.a. $\sim PM(\Lambda)$

alors le moment factoriel d'ordre k de N est donné par

$$\mu_{[k]}(N) = \mathbb{E}[\Lambda^k]$$

Preuve : $\mu_{[k]}(N) = g_N^{(k)}(1)$

$N \sim PM(\Lambda) \Rightarrow g_N(t) = \mathbb{E}[t^N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[t^N | \Lambda]]$

On fixe $\Lambda = \lambda$ on a $N | \{\Lambda = \lambda\} \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\mathbb{E}[t^N | \Lambda = \lambda] = g_{\mathcal{P}(\lambda)}(t) = e^{-\lambda(1-t)}$$

$$\Rightarrow g_N(t) = \mathbb{E}[e^{-\Lambda(1-t)}]$$

$$g_N'(t) = \mathbb{E}[\Lambda e^{-\Lambda(1-t)}]$$

$$g_N''(t) = \mathbb{E}[\Lambda^2 e^{-\Lambda(1-t)}]$$

$$\vdots$$

$$g_N^{(k)}(t) = \mathbb{E}[\Lambda^k . e^{-\Lambda(1-t)}]$$

$$\Rightarrow g_N^{(k)}(1) = \mathbb{E}[\Lambda^k] \Rightarrow \mu_{[k]}(N) = \mathbb{E}[\Lambda^k]$$

<u>Conséquence</u> . Si $N \sim PN(\Lambda)$

$$\mathbb{E}[N] = \mu_{[1]}(N) = \mathbb{E}[\Lambda] \Rightarrow \mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\Lambda]$$

$$Var(N) = \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)^2$$

<u>On a</u> $\mu_2(N) = \mathbb{E}[\Lambda^2] \Leftrightarrow \mathbb{E}(N(N-1)) = \mathbb{E}[\Lambda^2]$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N^2] = \mathbb{E}[\Lambda^2] + \mathbb{E}[\Lambda]$$

<u>D'où</u> $Var(N) = \mathbb{E}(\Lambda^2) + \mathbb{E}[\Lambda] - \mathbb{E}[\Lambda]^2$

$$Var(N) = Var(\Lambda) + \mathbb{E}(\Lambda)$$

<u>On a</u> $\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\Lambda] < Var(N) = Var(\Lambda) + \mathbb{E}(\Lambda)$

car $Var(\Lambda) \geq 0$

<u>Elle</u> vérifie la bonne propriété pour la modélisation des sinistres en assurance.

Propriété : additivité

Soit $N_1 \rightsquigarrow PM(\Lambda_1)$ et $N_2 \sim PM(\Lambda_2)$

De plus on suppose que :

1) Sachant Λ_1 et Λ_2 : N_1 et N_2 sont indépendants

2) Sachant Λ_1 : N_1 et Λ_2 sont indépendants

3) Sachant Λ_2 : N_2 et Λ_1 sont indépendants.

Déterminer la loi de N_1+N_2

Cherchons la f.g.m.f de N_1+N_2.

$$g_{N_1+N_2}(t) = \mathbb{E}\left(t^{N_1+N_2}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(t^{N_1+N_2} \mid \Lambda_1, \Lambda_2\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(t^{N_1} \mid \Lambda_1, \Lambda_2\right) \times \mathbb{E}\left(t^{N_2} \mid \Lambda_1, \Lambda_2\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(t^{N_1} \mid \Lambda_1\right) \times \mathbb{E}\left(t^{N_2} \mid \Lambda_2\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-\Lambda_1(1-t)} \cdot e^{-\Lambda_2(1-t)}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-(\Lambda_1+\Lambda_2)(1-t)}\right]$$

On reconnait la f.g.m.f de $\mathcal{P}\mathcal{M}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$

Car f.g.m d'une v.a. X $M_X(s) = \mathbb{E}\left[e^{sX}\right]$

Par identification on en déduit que $N_1 + N_2 \sim \mathcal{P}\mathcal{M}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$

grâce à cette propriété :

Soit $N \sim \mathcal{P}\mathcal{M}(\Lambda)$

on $g_N(t) = M_\Lambda(-(1-t))$

Démo $g_N(t) = \mathbb{E}\left(t^N\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[t^N \mid \Lambda\right]\right)$

or $\mathbb{E}\left[t^N \mid \Lambda = \lambda\right] = g_{\mathcal{P}(\lambda)}(t) = e^{-\lambda(1-t)}$ car $N \mid \Lambda = \lambda \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\Rightarrow g_N(t) = \mathbb{E}\left[e^{-\Lambda(1-t)}\right] = \mathbb{E}\left(e^{(-(1-t))\cdot\Lambda}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{(t-1)\Lambda}\right] = M_\Lambda(t-1)$$

Car la fonction génératrice des moments de X est

$$M_X(s) = \mathbb{E}\left[e^{sX}\right]$$

Exemple de tarification d'expérience :

Example of experience rating (BONUS/MALUS)

we consider successives one-year periods.

Assumptions:

1) for a given policy, the number of claims in a year can only be 0 or 1.

2) Cost of claims is certain, equals v.

3) Population can be split in two categories 1 and 2, with the respective proportions a_1 et a_2 and $a_1 + a_2 = 1$.

a) Class 1 "good risk" probability of claim p_1

2) Class 2 "bad risk" probability of claim p_2.

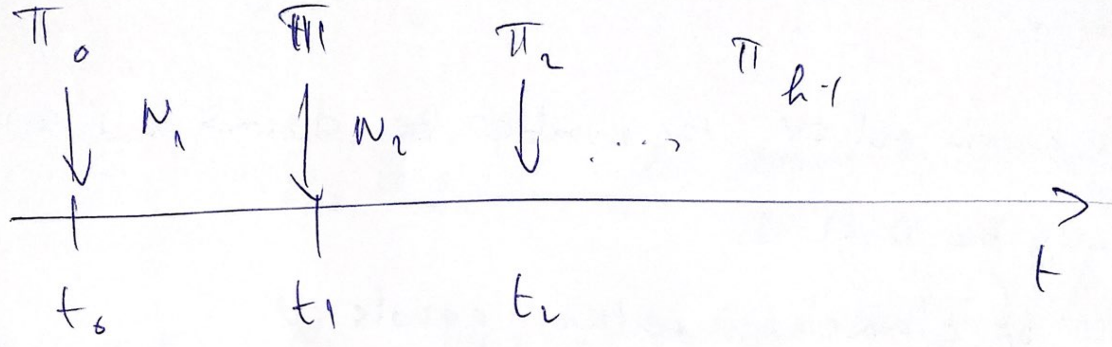
4) For a given policy, knowing the class to which it belongs, the number of claims which occur in the successive years are independant random variables.

Notation : Y_h : claim amount related to the considered policy during the period $[h-1, h]$ N_h = nb sinistre l'année h

B_t = { the insured belongs to bad categorie } $\tilde{N}_h = \sum_{i=1}^{h} N_i$

Question : A person from the population comes to get insured (at $t=0$) the insurer doesn't know anything about him.

1) What should be the pure prime at ($t=0$)



Prime pure :

$$\Pi_0 = \mathbb{E}[c . N_1] = \mathbb{E}[N_1] = \mathbb{E}[N_1 | E_1]\, \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{E}[N_1 | E_2]\, \mathbb{P}(E_2)$$

$$N_1 | E_1 = \begin{cases} 1 & \text{avec proba } p_1 \\ 0 & \text{avec proba } 1-p_1 \end{cases}$$

$$\Pi_0 = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2$$

$N_1 | E_1 \rightsquigarrow B(1, p_1)$ Bernoulli de parame $(, p_1)$

$N_1 | E_2 \rightsquigarrow B(1, p_2)$

2) $t=k$, $\tilde{N}_k = N_1 + N_2 + \cdots N_k = m$ fixé

the number of claims of the insured until $t=k$

$$\Pi_k = \mathbb{E}\left[N_{k+1} \mid \tilde{N}_k = m \right]$$ prime pure à posteriori

. $\tilde{N}_k \mid E_1 \sim \mathcal{B}(k, p_1)$ car somme de Bernoulli

Sachant E_1, $\underbrace{N_1, \dots, N_k}_{\sim \mathcal{B}(1, p_1)}$ sont indépendante ($\perp\!\!\!\perp$) (hyp 4)

$\Rightarrow$ La somme sera donc $\mathcal{B}(k, p_1)$

. $N_k \mid E_2 \sim \mathcal{B}(k, p_2)$

$$\Pi_k = \mathbb{E}\left(N_{k+1} \mid \tilde{N}_k = m \right] = \mathbb{E}\left[N_{k+1} \mid \tilde{N}_k = m, E_1 \right] \mathbb{P}\left(E_1 \tilde{N}_k = m\right)$$
$$+ \mathbb{E}\left[N_{k+1} \mid \tilde{N}_k = m, E_2 \right) \mathbb{P}\left(E_2 \cdot \tilde{N}_k = m\right)$$

$\mathbb{E}\left(N_{k+1} \mid \tilde{N}_k = m, E_1 \right]$ or sachant E_1 on a $N_{k+1} \perp\!\!\!\perp (N_i)_{i \leq k}$

donc en particulier $\tilde{N}_k = \sum_{i=1}^{k} N_i$

$\mathbb{E}\left[N_{k+1} \mid E_1\right] = p_1$ car $N_{k+1} \mid E_1 \sim \mathcal{B}(1, p_1)$

$$\mathbb{P}\left(E_1 \mid \tilde{N}_k = n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\tilde{N}_k = n \mid E_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(F_1\right)}{\mathbb{P}\left(\tilde{N}_k = n\right)}$$ formule de Bayes

$$= \frac{\binom{k}{n} p_1^{n} (1-p_1)^{k-n} \times a_1}{\binom{k}{n} p_1^{n} (1-p_1)^{n} a_1 + \binom{k}{n} p_2^{n} (1-p_2)^{k-n} a_2}$$ formule des probas totales.

même chose pour $\mathbb{P}\left(E_2 \mid \tilde{N}_k = n\right)$.

Tableau des prime pure à posteriori :

Exemple numérique :

$a_1 = 60\%$

$a_2 = 40\%$

$p_1 = 0,2$

$p_2 = 0,3$

$c = 1$

k : date

j : nb d'accidents commis avant k.

k \ j	0	1	2	3	4	5	6
1	0,93	1,30					
2	0,87	1,23	1,51				
3	0,82	1,16	1,47	1,61			
4	0,77	1,09	1,43	1,59	1,65		
5	0,73	1,03	1,38	1,57	1,64	1,66	
6	0,70	0,96	1,32	1,55	1,63	1,65	1,66

Sur une base de prime à priori

Si l'assuré a eu 0 accident au bout de 5 ans.

il va payer 30% moins que sa prime initiale