Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. positives, indépendantes de même loi et d'espérance $m = \mathbb{E}(X_1)$ finie.
Soit N une v.a entière positive indépendante des X_n d'espérance $M = \mathbb{E}(N)$ finie.

1) Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et S_N une v.a. défie par.

$$S_N(\omega) = \begin{cases} S_n(\omega) & \text{si } N(\omega) = n > 0 \\ S_n(\omega) = 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{E}(S_N)$ en fonction de m et M

On a $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S_N|N)) = \mathbb{E}(g(N))$

Or $\mathbb{E}(S_N|N) = g(N)$ où $g(n) = \mathbb{E}(S_N \mid N=n)$

Sachant $N=n$, S_N n'est autre que S_n

$$\Rightarrow g(n) = \mathbb{E}(S_N \mid N=n) = \mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n \cdot \mathbb{E}(X_1) = n \cdot m$$

$$\Rightarrow g(N) = N\,\mathbb{E}(X_1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(g(N)) = \mathbb{E}(N \cdot \mathbb{E}(X_1)) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(N) = m \cdot M$$

$2^{\text{ème}}$ façon : $\mathbb{E}(S_N \mid N) = \mathbb{E}(S_N \mid \sigma(\{N=m\}, m\in\mathbb{N}))$

$\sigma(\{N=m\}, m\in\mathbb{N})$ tribu engendrée par une partition.

$$\rightarrow \mathbb{E}(S_N \mid N) = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m \mathbb{1}_{(N=m)}$$

où
$$\alpha_m = \frac{1}{\mathbb{P}(N=m)} \cdot \int_\Omega S_N \cdot \mathbb{1}_{N=m} \, dP$$

$$= \frac{\mathbb{E}\left[S_N \cdot \mathbb{1}_{(N=m)}\right]}{\mathbb{P}(N=m)}$$

par indépendance de N et S_m

$$= \frac{\mathbb{E}(S_m) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(N=m)})}{\mathbb{P}(N=m)}$$

$$= \mathbb{E}(S_m) \frac{\mathbb{P}(N=m)}{\mathbb{P}(N=m)}$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{m} m = m \cdot m$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_N \mid N) = \sum_{m=0}^{+\infty} m \cdot m \, \mathbb{1}_{(N=m)} = m \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} m \cdot \mathbb{1}_{(N=m)}$$

$$\parallel$$
$$N$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_N \mid N) = m N \rightarrow \mathbb{E}(S_N) = m \cdot \mathbb{E}(N)$$
$$= m \cdot M$$

$3^{ème}$ façon :

On écrit $S_N = \sum_{n=0}^{\infty} S_N \mathbb{1}_{(N=n)}$

C'est la décomposition de S_N suivant la partition $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{N=n\}$

$$S_N = S_N \cdot \mathbb{1}_\Omega = S_N \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{n=0}^{\infty} \{N=n\}}$$

$$= S_N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N=n\}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_N \cdot \mathbb{1}_{(N=n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_n \mathbb{1}_{(N=n)}$$

On a $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n \mathbb{1}_{(N=n)}\right)$

$$= \mathbb{E}\left(\lim_{l \to +\infty} \sum_{n=0}^{l} S_n \cdot \mathbb{1}_{(N=n)}\right)$$

$$\overset{??}{=} \lim_{l \to +\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{l} S_n \mathbb{1}_{(N=n)}\right)$$

On vérifie que ~~le~~ théorème de convergence dominée s'applique

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} S_n \cdot \mathbb{1}_{N=n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |S_n| \cdot \mathbb{1}_{N=n}$$

Et $$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} |S_n| \, \mathbb{1}_{N=n}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(|S_n| \, \mathbb{1}_{N=n}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(|S_n|\right) \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{N=n}\right)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot m \cdot \mathbb{P}(N=n)$$

$$\leq m \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \mathbb{P}(N=n)$$

$$\leq m \cdot \mathbb{E}(N)$$

$$\leq m \cdot M$$

donc $$\mathbb{E}(S_N) = \lim_{l \to +\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{n}^{l} S_n \cdot \mathbb{1}_{N=n}\right)$$

$$= \lim_{l \to +\infty} \sum_{n=0}^{l} \mathbb{E}\left(S_n \cdot \mathbb{1}_{N=n}\right)$$

$$= \lim_{l \to +\infty} \sum_{n=0}^{l} \mathbb{E}(S_n) \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{N=n}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) \cdot \mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot m \cdot \mathbb{P}(N=n) = m \cdot \mathbb{E}(N) = m \cdot M$$

2) On suppose $0 \leq m \leq 1$. On pose

$$Z_N = \begin{cases} Z_0 = 1 & \text{si } N = 0 \\ Z_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n & \text{si } N = n \geq 1 \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{E}(Z_N)$ en fonction de m et G_N la fct. génératrice de N.

$$\mathbb{E}(Z_N) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Z_N \mid N = n)\right) = \mathbb{E}(g(N))$$

où $g(n) = \mathbb{E}(Z_N \mid Z = n)$

or sachant $N = n$, Z_N n'est autre que Z_n

c-à-d $Z_N = Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$ N est traité comme une constante $N = n$

$$\rightarrow g(n) = \mathbb{E}(Z_N \mid N = n)$$

$$= \mathbb{E}(Z_n)$$

$$= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$ par indépendance des X_i

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

$$= \left(\mathbb{E}(X_i)\right)^n = m^n$$

$$\rightarrow g(N) = m^N \Rightarrow \mathbb{E}(Z_N) = \mathbb{E}(g(N)) = \mathbb{E}(m^N) = G_N(m)$$