Si $\varepsilon=0$, et $v=1$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) \\ x(0)=1 \end{cases} \Rightarrow x_{0,1}(t) = e^{-t}$$

Donc l'équation linéarisée

$$\begin{cases} (\Delta x)'(t) = x_{0,1}(t)^2 \Delta\varepsilon - \Delta x(t) = e^{-2t}\Delta\varepsilon - \Delta x(t) \\ \Delta x(0) = \Delta v \end{cases}$$

théorème de variation de la constante

$$\Delta x(t) = e^{-t}\Delta v + \int_0^t e^{-(t-s)} e^{-2s} \Delta\varepsilon \, ds$$

$$= e^{-t}\Delta v + e^{-t}(1-e^{-t})\Delta\varepsilon$$

d'où avec $\Delta\varepsilon = \varepsilon$ et $\Delta v = w$

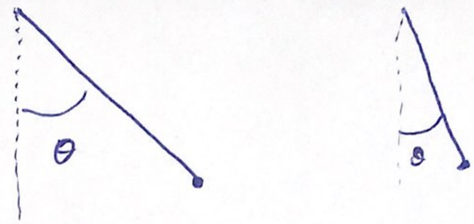
$$x_{\varepsilon,1+w} = x_{0,1} + \Delta x(t) + o(\max(|\varepsilon|,|w|))$$

$$= e^{-t} + e^{-t}w + e^{-t}(1-e^{-t})\varepsilon + o(\max(|\varepsilon|,|w|))$$

$$= e^{-t}(1+w+(1-e^{-t})\varepsilon) + o\max(|\varepsilon|,|w|)$$

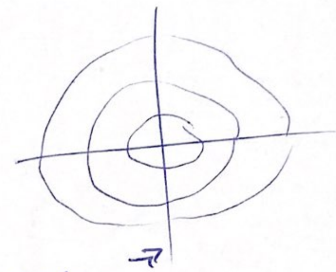
$$x_{0+\Delta\varepsilon,\,1+\Delta v}(t) = \underbrace{e^{-t}}_{x_{0,1}(t)} + \underbrace{e^{-t}\Delta v + e^{-t}(1-e^{-t})\Delta\varepsilon}_{D\Phi()\cdot(\Delta\varepsilon,\Delta v)} + o(|\Delta v|+|\Delta\varepsilon|)$$

Exemple d'application :



$$\ddot{\theta}(t) + \omega^2 \sin(\theta(t)) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



$\sqrt{5}$ On approche $\sin(x)$ par x au voisinage de $\vec{0}$.

Nous étudions à présent des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) + \varepsilon\, g(t, y(t))$$

théorème de dépendance différentiable $\Longrightarrow$ Existence d'un DL

$\exists \varepsilon_0, \ \forall \varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$

+ on injecte le DL qui est unique dans l'équation