Feuille d'exercice 2

Exercice 1

On se place dans le cadre du modèle composé avec les hypothèses standard associées.

$$X = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

1. Calculer $\mu_3(X)$ en fonction des moments centrés de N et de C.
2. En déduire que, dans le cas particulier où X suit une loi de Poisson composée $\mathcal{PC}(\lambda, F_C)$, on a :

$$\mu_3(X) = \lambda \mathbb{E}[C^3]$$

Exercice 2

Étant donnée deux variables aléatoires de type Poisson composée $X_1 \sim \mathcal{PC}(\lambda_1, F_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{PC}(\lambda_2, F_2)$. On suppose de plus que ces deux variables aléatoires sont indépendantes.

Montrer que la somme de ces deux variables aléatoires suit elle-même une loi de Poisson composée :

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{PC}\left(\lambda_1 + \lambda_2, \frac{\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

Exercice 3

On se place dans le cadre de la loi de Poisson composée et l'on suppose que la loi du coût de sinistre C est la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$, où α est un paramètre strictement positif. Sa fonction de répartition F est donc donnée, pour tout réel x, par

$$F(x) = (1 - \mathrm{e}^{-\alpha x})\mathbf{1}_{]0;+\infty[}(x)$$

1. Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer la loi de la variable $S_n := C_1 + \ldots + C_n$ (Indication : utiliser la fonction génératrice des moments).
2. En déduire l'expression de la fonction de répartition G et de la fonction génératrice des moments M_X du montant cumulé des sinistres X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mu_3(X)$.

Exercice 4

Dans le cadre du modèle composé, on suppose que la loi du coût individuel de sinistre est discrète et donnée par :

$$P(C = k) = -\frac{b^k}{k \ln(1-b)}, \qquad k \geqslant 1$$

où $0 < b < 1$. Il s'agit de la loi logarithmique de paramètre b.

1. Montrer que la f.g.m. de C est donnée par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad M_C(s) = \frac{\ln(1 - be^s)}{\ln(1-b)}$$

2. On suppose que N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. En déduire que la f.g.m. de X, montant cumulé des sinistres, peut s'exprimer par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad M_X(s) = \left(\frac{1-b}{1-be^s}\right)^{-\lambda/\ln(1-b)}$$

et montrer que cette loi n'est autre que la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(r,p)$ de paramètres $r = -\ln(1-b)$ et $p = 1-b$.

Exercice 5

Les n assurés d'un groupe homogène ont souscrit un contrat d'assurance décès qui prévoit le versement d'un capital c en cas de décès par maladie. De plus ce capital est doublé en cas de décès résultant d'un accident, hors accident de circulation (h. c.), et est triplé en cas de décès par accident de circulation. On suppose que la probabilité de décès de l'assuré sur une période donnée est p (avec $0 < p < 1$) et que, sachant que l'assuré est décédé dans l'année, la loi de la cause du décès est fournie par le tableau suivant :

cause du décès	maladie	accident (h. c.)	accident (circulation)
probabilités	p_1	p_2	p_3

On désigne par N le nombre de sinistres sur la période considérée, par C le coût d'un sinistre et par X le montant cumulé des sinistres de la période.

1. Indiquer la loi de C, puis calculer son espérance et sa variance en fonction de p_2 et p_3.
2. En supposant que les décès des assurés sont indépendants, déterminer la loi de N.
3. Si l'on suppose aussi que le nombre de décès et leurs causes sont indépendants, montrer que X vérifie les hypothèses d'un processus composé habituel. Calculer alors $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. Donner enfin l'expression de la prime technique lorsque le chargement est proportionnel à l'écart-type.

Exercice 6

Dans une certaine classe de risques, on considère les variables aléatoires suivantes :
N = nombre annuel des sinistres
C = coût d'un sinistre
X = montant annuel cumulé des sinistres.

1. Rappeler les hypothèses usuelles de ce modèle composé.
2. On suppose que N suit la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$.
   Autrement dit, on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P(N = n) = p(1-p)^n$. Déterminer la fonction génératrice des moments de X en fonction de celle de C, puis en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de p et des moments de la variable aléatoire C.
3. Indiquer ce que deviennent les formules du 2) dans le cas où C admet une densité f donnée par

$$f(x) = \alpha \exp(-\alpha x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}$$

   Déterminer ensuite la fonction de répartition G de X.
4. On suppose que la prime technique $\Pi_T(X)$ est obtenue par un chargement de la prime pure, proportionnel à l'écart-type ; autrement dit on a $\Pi_T(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sigma(X)$ où β désigne le coefficient de chargement. Le montant des réserves étant noté $\mathcal{R}$, déduire de ce qui précède la probabilité de ruine de l'assureur pour l'année en cours, en fonction des paramètres p, α, β et $\mathcal{R}$.

Exercice 7

Pour un groupe de risques d'une certaine société d'assurances, on admet que sur une période donnée le nombre N des sinistres suit la loi de Poisson de paramètre λ, tandis que le coût C d'un sinistre suit la loi continue uniforme sur l'intervalle $[0, a]$, où λ et a sont des paramètres strictement positifs. Soit X le montant cumulé des sinistres sur la période considérée.

1. Indiquer l'expression de X en fonction de N et de la suite $(C_n)_{n\geqslant 1}$ des sinistres successifs, en précisant également les hypothèses faites habituellement sur ces variables aléatoires (v.a.).
2. Déterminer la fonction génératrice des moments de X, calculer l'espérance, la variance et le moment d'ordre 3 de X (ceci en fonction des paramètres λ et a).
3. On désigne par $\mathcal{R}$ le montant des réserves affectées au risque et l'on suppose que la prime technique $\Pi_T(X)$ est de la forme $\Pi_T(X) = (1+\beta)\mathbb{E}[X]$ où β est le coefficient de chargement.

   a) Montrer que pour tout $x > a$ l'inégalité suivante est vérifiée :

   $$P(X \geqslant x) \leqslant P\left(N \geqslant \text{int}(x/a)\right)$$

   où "int" représente la fonction partie entière.

   b) En déduire une majoration de la probabilité de ruine en fonction de λ, α, β et $\mathcal{R}$.

Exercice 8 (Algorithme de Panjer)

On se place dans le cadre du modèle composé avec les hypothèses standard associées.
On suppose de plus que les coûts de sinistres ne peuvent prendre que des valeurs entières : C est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On note :

- $\forall j \in \mathbb{N}, f_j = \mathbb{P}(C = j)$.
- $\forall j \in \mathbb{N}, f_j^{(n)*} = \mathbb{P}(S_n = j) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i = j\right)$ (Remarque : pour $j \leqslant n-1$, $f_j^{(n)*} = 0$).
- $\forall l \in \mathbb{N}, g_l = \mathbb{P}(X = l) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} C_i = l\right)$.

1. Famille de Panjer

   On dit qu'une loi de support $\mathbb{N}$ appartient à la famille de Panjer si elle vérifie la relation de récurrence (pour $n \geqslant 1$) :

   $$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}$$

   avec a et b deux nombres réels.
   Montrer que les lois suivantes appartiennent à la famille de Panjer :
   - la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$,
   - la loi Binomiale $\mathcal{B}(l, p)$,
   - la loi Binomiale Négative $\mathcal{BN}(r, p)$.

   Remarque : On peut montrer que ces lois sont les seules qui appartiennent à la famille de Panjer.

2. Montrer que $\forall j \geqslant n$, $f_j^{(n)*} = \dfrac{n}{j} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} i f_i f_{j-i}^{(n-1)*}$.

   Indication : calculer de deux manières différentes $\mathbb{E}[C_1 | S_n = j]$.

3. Montrer que, si la variable aléatoire "nombre de sinistres" N appartient à la famille de Panjer, alors la loi de X

$$g_j = \mathbb{P}(X = j)$$

peut être obtenue de proche en proche grâce à la relation :

$$g_j = \sum_{i=1}^{j} \left(a + i\frac{b}{j} \right) f_i g_{j-i}$$

en partant de $g_0 = p_0$.