Exo 8 :

Soit (X,Y) un vect gaussien non dégénéré, centré et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

Cherchons $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)] = g(Y)$

Il s'agit de la proj $\perp$ de X sur $L^2(\Omega, \sigma(Y), \mathbb{P})$

$\sigma(Y) = \sigma(\mathcal{H}_1) = \sigma(\text{vect}\{1, Y\}) = \sigma(\{\alpha+\beta Y, \alpha,\beta \in \mathbb{R}\})$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \alpha + \beta Y \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Cherchons α et β tq $X - (\alpha+\beta Y) \perp \mathcal{H}_1 = \text{vect}(\{1, Y\})$

c-à-d $\begin{cases} X-(\alpha+\beta Y) \perp 1 \\ X-(\alpha+\beta Y) \perp Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle X-(\alpha+\beta Y), 1\rangle = 0 \\ \langle X-(\alpha+\beta Y), Y\rangle = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}(X-\alpha-\beta Y) = 0 \\ \mathbb{E}((X-\alpha-\beta Y)Y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}(X) - \alpha - \beta\mathbb{E}(Y) = 0 \\ \mathbb{E}(XY) - \alpha\mathbb{E}(Y) - \beta\mathbb{E}(Y^2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \mathbb{E}(X) - \beta\mathbb{E}(Y) \\ \alpha\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \beta\mathbb{E}(Y^2) \end{cases}$

donc $(\mathbb{E}(X) - \beta\mathbb{E}(Y))\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \beta\mathbb{E}(Y^2)$

$\Rightarrow \beta(\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

$\Rightarrow \beta = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(Y)}$ si $\text{var}(Y) \neq 0$

Ainsi $\begin{cases} \alpha = \mathbb{E}[X] - \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)} \cdot \mathbb{E}(Y) \\ \beta = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)} \end{cases}$

On a $\mathbb{E}[X|Y] = \alpha + \beta Y$

$$= \mathbb{E}(X) - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)} \mathbb{E}(Y) + \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)} Y$$

$$= \mathbb{E}(X) + \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)} \left[Y - \mathbb{E}(Y) \right]$$

puisque (X,Y) est centré $\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$

et $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{cov}(X,Y) = \rho \\ \mathrm{Var}(Y) = 1 \end{cases}$

donc $\mathbb{E}[X|Y] = \rho \cdot Y$

$$\mathbb{E}(Y|X+Y) = \mathbb{E}[Y|\sigma(X+Y)] = g(X+Y)$$

Cherchons $\mathbb{E}(\cancel{X}|X+Y)$

Il s'agit de la proj orthogonale de $\perp$ sur $L_2(\Omega, \sigma(X+Y), \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}(Y|X+Y) = \mathbb{E}[X+Y] + \frac{\mathrm{cov}(Y, X+Y)}{\mathrm{Var}(X+Y)}\left[X+Y - \mathbb{E}[X+Y]\right]$$

Comme (X,Y) est centré $\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X+Y] = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(Y, X+Y) &= \mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{cov}(Y,Y) \\ &= \mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{var}(Y) \\ &= \rho + 1 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 1+1 = 2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y|X+Y] = \frac{\rho+1}{2} \cdot (X+Y)$$