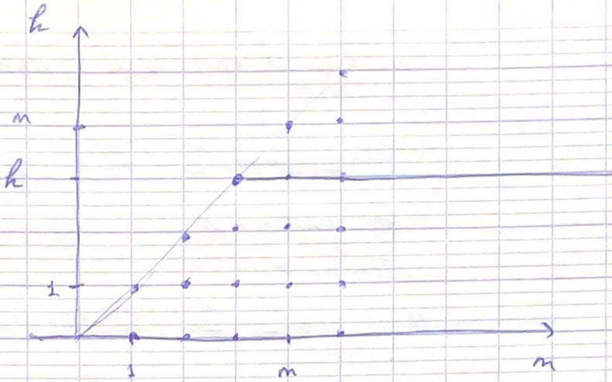
Exercice 5 : $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow X(\Omega) = \mathbb{N}$

$Y \mid X = n \sim \mathcal{B}(n, p)$ donc pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$

$$\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \frac{\mathbb{P}(X = n \cap Y = k)}{\mathbb{P}(X = n)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = n \cap Y = k) = \mathbb{P}(Y = k \mid X = n)\, \mathbb{P}(X = n)$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y)



On a $\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k \,;\, X=n)$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{p^k (1-p)^{n-k} \lambda^n e^{-\lambda}}{(n-k)!\,(k)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^n}{(n-k)!}$$

On pose $j = n-k$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \lambda^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^{-k}}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^j}{j!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^{-k}}{k!} e^{\lambda(1-p)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda p} \cdot (\lambda p)^k}{k!}$$

Indépendance

idée 1 : $\mathbb{P}(X-Y=\ell \text{ et } Y=k) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}(X-Y=\ell)\,\mathbb{P}(Y=k)$

idée 2 : produit de deux fcts génératrices

$$s \mapsto \varphi_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k\, \mathbb{P}(X=k)$$ définie au moins sur $[-1, 1]$