On a $R(t,0) = R(t, mT) \cdot R(mT, 0)$

$$= \underbrace{R(t-mT, 0)}_{\text{bornée}} \cdot \underbrace{R(T,0)}_{\text{car } |\lambda_i| < 1}^{m} \to 0$$ est contrôlée

On choisit m tq $mT \leq t \leq (m+1)T$

$\Rightarrow 0 \leq t - mT \leq T$

$\Rightarrow t - mT \in [0, T]$

car $R(T,0)$ est continue sur un intervalle bornée

. le determinant code l'aire en dimension 2

si le determinant décroit alors l'aire décroit

Chasles : $R(t_2+T, t_1+T) = R(t_2, t_1)$

$\Rightarrow R(T+T, 0+T) = R(T,0)$

$\Rightarrow R(2T, T) = R(T,0)$

$\Rightarrow R(2T,0) = R(2T,T)\,R(T,0)$

$\Rightarrow R(2T,0) = R(T,0)^2$

Feuille n°3 : Exercice 3 : Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-periodique.

On note $R(t,s)$ la résolvante de l'équa diff linéaire d'ordre 1 naturellement associée à

$$\ddot{x}(t) + a(t)\, x(t) = 0$$

1) Démontrer que $R(t,s)$ est à valeurs dans $SL(2,\mathbb{R})$

Liouville : $\det\left(R(t,s)\right) = \exp\left(\int_s^t tr(A(t))\,dt\right)$

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ on a donc

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = A(t) \cdot X(t)$$

On a $tr(A(t)) = 0 \implies A(t) \in sl(2,\mathbb{R})$

$\longrightarrow e^{A(t)} \in SL(2,\mathbb{R})$

car $\det\left(e^{A(t)}\right) = \exp\left(\int_s^t tr(A(t))\,dt\right)$ Liouville.

$\det(R(t,s))$
$= \det\left(e^{(t-s)A(t)}\right)$ $= \exp\left(\int_s^t 0\,dt\right)$

$= \exp(0)$

$= 1 \implies R(t,s) \in SL(2,\mathbb{R})$

2) On suppose que $a(t) = \omega^2 + \varepsilon \cos(2\pi t)$ où $\omega > 0$

Demontrer que si $|\varepsilon|$ est suffisamment petit, toutes les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}$.

$$X(t)' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega^2 + \varepsilon\cos(2\pi t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = A_\varepsilon(t) \cdot X(t)$$

On a $\quad \left| tr\left(R_{A_\varepsilon}(1,0)\right)\right| < 2 \Longrightarrow x(t)$ sol bornée sur $\mathbb{R}$.

$\varepsilon = 0$ $\quad R_{A_0}(T,0) = \exp\left(T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\omega T) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega T) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega T) \end{pmatrix}$$

$$\left| tr\left(R_{A_0}(T,0)\right)\right| = |2\cos(\omega T)|$$

$$Tr\left(R_{A_\varepsilon}(T,0)\right) = tr\left(R_{A_0}(T,0)\right) + O_\varepsilon(1)$$

$$\Rightarrow \quad |2\cos(\omega T)| = 2 \Longleftrightarrow \omega T \in \pi\mathbb{Z}$$