- Systèmes dynamiques : Espace de Banach, Théorème du point fixe, Inversion locale, Fonctions implicites

Exercice 23 : Démontrer qu'il existe une unique fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 1 + \int_0^1 \frac{f(t)}{100 + |t-x|} dt$

Posons $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

On a (E, d_∞) complet.

* Problème du point fixe : $f = \Phi(f)$

où 1) $\Phi : E \longrightarrow E$

$$f \longmapsto \Phi(f) = 1 + \int_0^1 \frac{f(t)}{100 + |t-x|} dt$$

La fonction $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur le compact $[0,1] \times [0,1]$

$$(x,t) \longmapsto F(x,t) = \frac{f(t)}{100 + |t-x|}$$

$\Rightarrow$ $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto G(x) = \int_0^1 F(x,t) dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{100 + |t-x|} dt$$

est continue

2) Φ est contractante : Soit $f, g \in E$

$$d_\infty(\Phi(f), \Phi(g)) = \sup_{x \in [0,1]} |\Phi(f) - \Phi(g)|$$

On a $$\Phi(f) - \Phi(g) = 1 + \int_0^1 \frac{f(t)}{100+|t-x|} dt - \left(1 + \int_0^1 \frac{g(t)}{100+|t-x|} dt\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{f(t) - g(t)}{100 + |t-x|} dt$$

$$\Rightarrow |\Phi(f) - \Phi(g)| \leq \int_0^1 \frac{|f(t)-g(t)|}{100+|t-x|} dt \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(t) - g(t)| \int_0^1 \frac{dt}{100 - |t-x|}$$

$$\forall (t,x) \in [0,1]^2, \quad 100 \geqslant 100 - |t-x| \geqslant 99$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{100} \leq \frac{1}{100 - |t-x|} \leq \frac{1}{99}$$

Ainsi $$d_\infty(\Phi(f), \Phi(g)) \leq \frac{1}{100} \cdot d_\infty(f,g)$$

$\Rightarrow$ $\Phi : E \to E$ continue et contractante

D'après le théorème de Picard, Φ admet un unique point fixe.