CYU Cergy-Paris Université

Master 1, 2021-22
Systèmes dynamiques

Feuille d'exercices numéro 2

Théorème de Cauchy-Lipschtz
Equations différentielles linéaires

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 1
1) Les problèmes de Cauchy suivants admettent-ils une solution unique ?

$$(A) \quad \begin{cases} y'(t) = (y(t))^2 \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} y'(t) = |y(t)| + |t|^{1/2} \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

$$(C) \quad \begin{cases} y'(t) = |y(t)|^{1/2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2) Quels sont ceux qui admettent une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 2 Les solutions de l'EDO

$$x''(t) + e^t \sin(x'(t)) + 2\exp(-(x(t)^2) = e^{t^2},$$

$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, $x'(0) = x_1 \in \mathbb{R}$, sont-elles définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On considère le problème

$$y : [0, T] \to \mathbb{R} \quad \text{de classe} \quad C^1, \quad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(t) = f(y(t)) \quad \text{pour tout} \quad t > 0.$$

1) Exhiber une solution évidente. Montrer que la condition $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} = \infty$ implique l'unicité. Montrer réciproquement que la convergence de cette intégrale implique l'existence d'une infinité de solutions locales.
2) Application à $y' = 3|y|^{2/3}$; en donner toutes les solutions $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Quels sont les points (t_0, y_0) par lesquels passent plus d'un graphe de solution ?

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de l'EDO

$$y'(t) = f(y(t)).$$

Démontrer que si $y(1) = y(0)$ alors y est 1-périodique c'est-à-dire vérifie

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t+1) = y(t).$$

Exercice 5 *

1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, il existe une solution locale de l'ODE non-linéaire

$$\begin{cases} Q'' - Q + Q^5 = 0 \\ Q(0) = a, \quad Q'(0) = 0 \end{cases}$$

2) Montrer qu'il existe au plus une solution globale non triviale Q avec $Q(x), Q'(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. Montrer que cette solution vérifie

$$\forall x > 0, \quad Q(x) > 0 \quad \text{et} \quad Q'(x) < 0.$$

(On constatera que "l'énergie mécanique" $\frac{1}{2}\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}Q^2 + \frac{1}{6}Q^6$ est conservée, ce qui en principe permet de tracer le portrait de phase de l'E.D.O.)

3) En déduire une formule explicite pour Q (on fera le changement de variable $y = 1/Q^2$).

4) On considère une solution $u(t,x)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u + u|u|^4 = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad u(t,x) \in \mathbb{C} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{NLS}$$

dite de Schrödinger non linéaire. Pour simplifier, on suppose que u est de classe C^3 en temps, à valeurs dans l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide en x ainsi que toutes leurs dérivées. Montrer que l'énergie du système

$$E(u(t,x)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t,x)|^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^6 dx$$

est indépendante du temps.

5) Exhiber une solution périodique en temps, donc globale, de (NLS).

6) Montrer que la variance vérifie

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |u(t,x)|^2 dx = 16E(u(t,x)).$$

En déduire que si $E(u_0) < 0$, la solution $u(t,x)$ ne peut pas demeurer dans l'espace de Schwartz pour tout temps $t > 0$ (phénomène d'explosion). Que vaut $E(Q)$?

Exercice 6 $*$

Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue, bornée et le problème de Cauchy global :

$$y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d), \quad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(t) = f(y(t)).$$

1) Montrer qu'il existe une suite de fonctions C^1, $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tendant uniformément sur tout compact vers f et pour lesquelles le problème de Cauchy ci-dessus avec f_n au lieu de f, admet une unique solution $y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$.

2) En déduire l'existence d'une solution au problème de Cauchy initial (on pourra passer à une équation intégrale et utiliser le théorème d'Ascoli).

3) Discuter l'unicité de cette solution.

4) Que peut-on dire si f est continue mais non bornée ?

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Exercice 7 Calculer les solutions des EDO $X'(t) = AX(t)$ dans les cas suivants

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

1) Quelle est la forme des solutions de l'EDO

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 4\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 2 = 0?$$

2) Quelle est la solution de l'EDO précédente qui vérifie $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$?

Exercice 9 Discuter la stabilité de l'origine pour les systèmes linéaires $X'(t) = AX(t)$ associés aux matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esquisser les portraits de phase correspondants.

Exercice 10 Si A, B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ on définit leur commutateur $[A, B] = AB - BA$.

1) On pose
$$\phi(t) = e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}.$$

Montrer que
$$\phi'(t)\phi(t)^{-1} = e^{tA}\Big(A - e^{tB}Ae^{-tB}\Big)e^{-tA}.$$

2) On suppose à présent que A et B commutent avec $[A, B]$.

2.a) Démontrer que
$$A - e^{tB}Ae^{-tB} = t[A, B].$$

2.b) En déduire que
$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}.$$

Exercice 11 On considère le système formé par trois particules de même masse dont les positions sont repérées par un nombre complexe. Le mouvement $U(t) \in \mathbb{C}^3$ est solution de l'équation différentielle
$$\ddot{U} = AU$$
où A est la matrice
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Décrire les mouvements qui correspondent aux valeurs propres de la matrice A et discuter leur stabilité.

Exercice 12 Soit f une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère l'EDO affine
$$x''(t) + x(t) = f(t). \tag{1}$$

1) Ecrire (1) sous forme d'une EDO affine du premier ordre et calculer la résolvante du système linéaire associé.

2) En utilisant la formule de variation de la constante exprimer $x(\cdot)$ et $x'(\cdot)$ en fonction de $f(\cdot)$.

3) On suppose que $f(\cdot)$ est 2π-périodique. Montrer que la solution $x(\cdot)$ de (1) est 2π-périodique si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} \int_0^{2\pi} f(s)\sin s ds = 0 \\ \text{et} \\ \int_0^{2\pi} f(s)\cos s ds = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 13 $*$

Soient $p_0, \dots, p_d \in \mathbb{R}$. Montrer que si $u(\cdot)$ est une solution de l'EDO linéaire

$$u^{(d)} + p_{d-1}u^{(d-1)}(t) + \cdots + p_0 u(t) = 0.$$

qui vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |u(t)| < 1 + \sqrt{|t|}$$

alors $u(\cdot)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Equations différentielles linéaires dépendant du temps

Exercice 14 On considère sur l'intervalle $[1, \infty[$ l'équation différentielle

$$\ddot{x}(t) - 2t^{-2}x(t) = 0.$$

1) Montrer que t^α est solution pour des valeurs appropriées de α.

2) Calculer pour $t, s \in \mathbb{R}^*$ la résolvante $R(t,s)$ de

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{pmatrix} X(t).$$

3) Montrer que sur l'intervalle $[1, \infty[$, l'équation

$$\ddot{x}(t) - 2t^{-2}x(t) = t^p$$

a aussi une solution du type $C_p t^\beta$ pourvu que $p \notin \{0, -3\}$ et du type $Ct^\alpha \log t$ si $p \in \{0, -3\}$.

4) Donner un développement limité à l'ordre 1 (*i.e.* avec un reste en $o(\varepsilon)$), que l'on justifiera, de la solution de

$$\ddot{x}(t) - (2t^{-2} + \varepsilon)x(t) = 0$$

avec condition initiale $x(1) = 0$, $\dot{x}(1) = 3$ en fonction de ε.

5) Montrer que la solution générale de

$$\ddot{y}(t) - 2t^{-2}y(t) = t^p(\log t)^q$$

est une combinaison linéaire de termes du type $t^m(\log t)^n$ et que le développement asymptotique de $x(t)$ (solution de la question 4)) en puissances de ε ne contient que des termes de ce type.

Exercice 15 On considère la famille d'équations linéaires dépendant du paramètre ε
$$\ddot{x}(t) + (1 + \varepsilon t)x(t) = 0.$$

1) Calculer pour les conditions initales $x_\varepsilon(0) = 0$, $\dot{x}_\varepsilon(0) = 1$ le développement asymptotique à l'ordre 2 en ε d'une solution (on pourra s'aider de Maple).

2) Calculer le développement asymptotique de la fonction $T(\varepsilon)$ définie comme le plus petit zéro non nul de la solution $x_\varepsilon(t)$.

Exercice 16 Soient $p_0, p_1, \ldots, p_{d-1}$, d fonctions continues dans l'intervalle $[a, b]$. On considère l'équation différentielle linéaire
$$u^{(d)} + p_{d-1}(t)u^{(d-1)}(t) + \cdots + p_0(t)u(t) = 0.$$

1) Soient $u_1, \ldots, u_d$ des solutions de cette équation.

1.a) Montrer que le wronskien
$$W(t) := \det(u_i^{(j-1}(t); 1 \leqslant i, j \leqslant d)$$
vérifie pour $t_0, t \in [a, b]$
$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p_{d-1}(s)ds\right).$$

1.b) Montrer que les solutions $u_1, \ldots, u_d$ sont linéairement indépendantes si et seulement si il existe $t \in [a, b]$ tel que $W(t) \neq 0$.

2) Si $u_1, \ldots, u_d$ sont des solutions de classe C^d sur $[a, b]$, on définit leur wronskien comme ci-dessus. Montrer que si $W(t)$ ne s'annule pas sur $[a, b]$, alors les fonctions sont solutions d'une équation différentielle linéaire de degré d.

Exercice 17 Soient $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 2$ fonctions de classe C^{n-1}. On note
$$W_n(f_1, \ldots, f_n) = \det \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_n \\ f_1' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

1) Démontrer que s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ pour lequel $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(\cdot) = 0$ sur un intervalle I, alors $W_n(f_1, \ldots, f_n)$ est identiquement nul sur I.

2) On suppose que $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle sur lequel $W_n(f_1, \dots, f_n)$ s'annule identiquement et $W_{n-1}(f_1, \dots, f_{n-1})$ ne s'annule en aucun point. Démontrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pour lequel $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i(\cdot)$ sur I. [On pourra utiliser l'exercice précédent.]

3) Peut-on s'affranchir de la condition $\forall\, x \in I, \quad W_{n-1}(f_1, \dots, f_{n-1})(x) \neq 0$ dans la question précédente ?

Exercice 18 Soit $t \mapsto A(t)$ une application C^1 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices $n \times n$.

1) Exprimer la dérivée en t de $A(t)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ en fonction de celle de $A(t)$.

2) On suppose que la famille $A(t)$ est commutative, c'est-à-dire que pour tous $s, t \in I$, $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Montrer que la résolvante de l'équation $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ est donnée par $R_{t_0}^t = \exp(\int_{t_0}^t A(s)ds)$.

3) Application : $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(iv) Exemple pour $t > 0$, $A(t) = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $R_{t_0}^t$ et $\exp \int_{t_0}^t A(s)ds)$.

Exercice 19 On considère l'équation différrentielle linéaire

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) La résolvante de l'équation est telle que chaque R_s^t soit une isométrie ;

(b) La matrice $A(t)$ est antisymétrique pour tout t.

Exercice 20 On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x''(t) + p_1(t)x'(t) + p_2(t)x(t) = 0. \qquad (*)$$

On suppose connue une solution $y_1(t)$ de cette équation, qui ne s'annule pas. A l'aide de la méthode de variation de la constante, déterminer la forme générale de la solution de $(*)$.

Exercice 21 (Méthode de tir). Soit $p \in C^0([0,1])$ donné. Pour $f \in C^0([0,1])$, on considère le problème suivant : trouver $u \in C^2([0,1])$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad -u''(t) + p(t)u(t) = f(t), u(0) = u(1) = 0. \qquad (a)$$

1) Les théorèmes du cours s'appliquent-ils directement à (a) ?

2) Pour résoudre (a) on considère les deux problèmes suivants :

$$\forall t \in [0,1], \quad -v''(t) + p(t)v(t) = 0, v(0) = v'(0) = 1 \qquad (b)$$

$$\forall t \in [0,1], \quad -w''(t) + p(t)w(t) = f(t), w(0) = w'(0) = 0. \tag{c}$$

Montrer que chacun de ces problèmes possède une unique solution de classe C^2.

3) Montrer que u est solution de (a) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = w + \lambda v$ et $w(1) = -\lambda v(1)$.

4) En déduire que si le problème homogène $-y''(t) + p(t)y(t) = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ possède pour unique solution $y = 0$, alors pour tout $f \in C^0([0,1])$, (a) possède une solution unique .

5) Montrer que si $p(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$, alors (a) possède une solution unique pour tout $f \in C^0([0,1])$.