Exo 1 : Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$\mathbb{E}[\|X\|_2^2] < +\infty$ $\quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$

1) Rappeler les propriétés de la covariance de deux v.a.

$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))\cdot(Y-\mathbb{E}(Y))]$

$\forall\ 1 \leq i,j \leq d$ La covariance entre X_i et X_j est donnée par :

$$\operatorname{cov}(X_i,X_j) = \mathbb{E}[(X_i-\mathbb{E}[X_i])(X_j-\mathbb{E}[X_j])] = \mathbb{E}[X_iX_j] - \mathbb{E}[X_i]\cdot\mathbb{E}[X_j]$$

qui est défini car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\mathbb{E}[X\cdot Y] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]}$

$\Rightarrow |\operatorname{cov}(X_i,X_j)|^2 \leq \operatorname{Var}(X_i)\cdot\operatorname{Var}(X_j)$ $\quad$ et $\operatorname{cov}(X_i,X_i) = \operatorname{Var}(X_i)$

Si $X \perp Y \Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0$ $\quad$ la réciproque est fausse en général sauf pour les vecteurs gaussiens

. La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive.

. $\operatorname{cov}(\lambda X+Y, Z) = \lambda \operatorname{cov}(X,Z) + \operatorname{cov}(Y,Z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

. $\operatorname{cov}(X+\lambda, Y) = \operatorname{cov}(X,Y)$

. $\operatorname{cov}(X,Y) > 0$ $\quad$ X et Y varient dans le même sens.

2) Montrer que sa matrice Γ_X est semi-définie positive.
de covariance

Pour $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d] \end{pmatrix}$ est le vecteur moyenne de X

La matrice de covariance :

$$\Gamma_X = Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (X - \mathbb{E}(X))^t\right] = \left(cov(X_i, X_j)\right)_{1 \leq i,j \leq d}$$

$$= \begin{pmatrix} Var(X_1) & cov(X_1, X_2) & \cdots & cov(X_1, X_d) \\ cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & cov(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_d, X_1) & cov(X_d, X_2) & \cdots & Var(X_d) \end{pmatrix}$$

Γ_X est semi-définie positive $\Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}^d$ on a $A^t \Gamma_X A \geq 0$

$\Leftrightarrow$ Toutes les valeurs propres de la matrice sont positives ou nulles

$\Leftrightarrow$ Spectre $(\Gamma_X) \subset [0, +\infty[$

Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$, $\quad V^t \Gamma_X V = (v_1 \ldots, v_d) \cdot \begin{pmatrix} Var(X_1) & & \\ & Var(X_2) & \\ & & \ddots \\ & & & Var(X_d) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$

$$= (v_1, \ldots, v_d) \cdot \begin{pmatrix} Var(X_1) \cdot v_1 + \ldots + cov(X_1, X_d) \cdot v_d \\ cov(X_2, X_1) v_1 + Var(X_2) v_2 + \ldots + cov(X_2, X_d) \cdot v_d \\ \vdots \\ cov(X_d, X_1) v_1 + \ldots + Var(X_d) \cdot v_d \end{pmatrix}$$

$$= Var(X_1)^2 \cdot v_1^2 + Var(X_2) \cdot v_2^2 + \ldots + Var(X_d) v_d^2 \geq Var(v_1 X_1 + \ldots + v_d X_d) \geq 0$$

car la variance est positive.

Le théorème spectral entraîne que si Γ_X est symétrique semi-définie positive, alors $\exists P \in O_d(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et D une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_d)$ positive telle que :

$$\Gamma_X = P D P^t$$

On en déduit qu'il existe une matrice A (pas unique en général) telle que $\Gamma_X = A \cdot A^t$ par ex : $A = P \cdot \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, .., \sqrt{\lambda_d})$

3) Soit X un vecteur gaussien et M_X son espérance

a) Montrer que ses composantes suivent des lois normales

X est un vecteur gaussien donc toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne.
(Il suffit de prendre $a_i = 1$ et $\forall j \neq i \quad a_j = 0$)

b) Montrer que la réciproque est fausse.

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = \varepsilon X$ où ε discrète indépendante de X tq $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$

X et Y sont gaussiennes mais $(X, Y)^t$ n'est pas gaussien.

car $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(X, \varepsilon X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])]$

$= \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[\varepsilon \cdot X^2] =$

$= \mathbb{E}[\varepsilon] \cdot \mathbb{E}[X^2] = 1 \cdot \mathbb{P}(\varepsilon = 1)\, \mathbb{E}[X^2] + (-1) \cdot \mathbb{P}(\varepsilon = -1) \cdot \mathbb{E}[X^2]$

$= \frac{1}{2} [\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}(X^2)] = 0$ mais X et Y ne sont pas indépendantes.

c) Ecrire sa fonction caractéristique

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)^t = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ un vecteur gaussien.

On note $m = \mathbb{E}[X]$ et $\Sigma = \Gamma_X = var(X) = \left(cov(X_i, X_j)\right)_{1 \leq i,j \leq d}$

X admet pour fonction caractéristique :

$\forall\, u = (u_1, \dots, u_d)^t = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$

$$\varphi(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu^tX}\right] = \exp\left(iu^tm - \frac{1}{2}u^t\Sigma u\right)$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{i(u_1X_1 + \cdots + u_dX_d)}\right]$$

La loi de X est donc entièrement déterminée par m et Σ.

$X \sim (m, \Sigma)$

Et $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $u^tX \sim \mathcal{N}(u^tm, u^t\Sigma u)$