Exo 4 : Soit $\xi_1, \dots, \xi_n$ une suite de v.a. i.i.d tq $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $T_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$

1) Si $\mathbb{E}[\xi_i^2] < \infty$. Montrons que $\eta_n = S_n^2 - n \cdot \mathbb{E}[\xi_1^2]$ est une martingale adaptée à T_n

. mesurabilité - intégrabilité de η_n : pas de problème.

$\forall n.$ $\mathbb{E}[\eta_{n+1} | T_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1)\mathbb{E}[\xi_1^2] \mid T_n]$

$= \mathbb{E}[(S_n + \xi_{n+1})^2 - (n+1)\mathbb{E}[\xi_1^2]]$

$= \mathbb{E}[S_n^2 + 2 S_n \xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 - (n+1)\mathbb{E}[\xi_1^2]]$

$= \eta_n + 2 \cdot S_n \cdot \underbrace{\mathbb{E}[\xi_{n+1} | T_n]}_{\mathbb{E}[\xi_{n+1}] = 0} + \underbrace{\mathbb{E}[\xi_{n+1}^2 | T_n]}_{\mathbb{E}[\xi_1^2]} - \mathbb{E}(\xi_i^2)$

$= \eta_n$

Probabilité : Martingales à temps discrets Exo 4 :

(ξ_i) iid, centrés , $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $n \geq 1$

1) $\mathbb{E}(\xi_1^2) < \infty$ et $\eta_n = S_n^2 - n\,\mathbb{E}(\xi_i^2)$ est une MG

déjà fait

2) $\mathbb{E}\left[e^{\lambda \xi_i}\right] < \infty$ pour λ fixé.

$$\eta_n = \frac{e^{\lambda S_n}}{\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda \xi_1}\right)\right)^n} \quad \text{est une MG}$$

i) η_n est (T_n)-mesurable ? $T_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$

$$\eta_n = h(S_n) \quad \text{où} \quad h(x) = \left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda \xi_1}\right)\right)^{-n} \cdot e^{\lambda x}$$

h est borélienne car continue car fonction exponentielle.

Donc η_n est fonction de $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ donc T_n-mesurable

ii) η_n est intégrable car

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda S_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda \xi_i}\right]$$

car indépendance des (ξ_i)

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\lambda \xi_i}\right]$$

$$= \left(\mathbb{E}\left[e^{\lambda \xi_1}\right]\right)^n < \infty$$ car $\mathbb{E}\left[e^{\lambda \xi_1}\right] < \infty$ par hypothèse

iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on calcule

$$\mathbb{E}\left[\eta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_{n+1}}}{\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda \xi_1}\right)\right)^{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_n + \lambda \xi_{n+1}}}{\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda \xi_1}\right)\right)^n \cdot \mathbb{E}\left(e^{\lambda \xi_1}\right)} \middle| \mathcal{F}_n\right]$$

Or S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et ξ_{n+1} est indépendant de $\mathcal{F}_n$

$$\text{dou} \quad \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_n + \lambda \mathcal{E}_{n+1}}}{\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda \mathcal{E}_1}\right)\right)^{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{T}_n \right]$$

linéauté

$$= \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_n}}{\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda \mathcal{E}_1}\right)\right)^{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{T}_n \right] + \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda \mathcal{E}_{n+1}}}{\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda \mathcal{E}_1}\right)\right)^{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{T}_n \right]$$

constante

$$= \frac{1}{\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda \mathcal{E}_1}\right)\right)^{n+1}} \left[\mathbb{E}\left[e^{\lambda S_n} \,\middle|\, \mathcal{T}_n \right] + \mathbb{E}\left[e^{\lambda \mathcal{E}_{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{T}_n \right] \right]$$

S_n est $\mathcal{T}_n$ mesurable et $\mathcal{E}_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{T}_n$

$$= \frac{1}{\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda \mathcal{E}_1}\right)\right)^{n+1}} \left[e^{\lambda S_n} + \mathbb{E}\left[e^{\lambda \mathcal{E}_{n+1}} \right] \right]$$

$$= \frac{\cancel{1}\, e^{\lambda S_n}}{\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda \mathcal{E}_1}\right)\right)^{n\cancel{+1}}} \times \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda \mathcal{E}_{n+1}} \right]}{\mathbb{E}\left(e^{\lambda \mathcal{E}_1}\right)}$$

$$= \eta_n \times 1$$

$$= \eta_n$$

$h = \mathbb{1}_B$

Rappel : Si X et Y ont même loi, on a : $\Downarrow \Uparrow$

$$\mathbb{E}(h(X)) = \mathbb{E}(h(Y)) \quad , \forall h \text{ bornée}$$

pourvu qu'elle existe

$$\int_\Omega h(X)\,d\mathbb{P} = \int_\Omega h(Y)\,d\mathbb{P}$$

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,d\mathbb{P}_X(x) \qquad \int_{\mathbb{R}} h(y) \cdot \frac{d\mathbb{P}_Y(y)}{d\mathbb{P}_X(y)}$$