• Exercice 7 : Soit $(U_n)$ une suite de v.a. indépendants et de même loi de carré intégrable, telles que $\mathbb{E}(U_1)=0$ , $\mathbb{E}(U_1^2)=\sigma^2$

1) Montrer que $(S_n^2)_n$ est une sMG

→ relativement à $(\mathcal{F}_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ , la filtration canonique de $(S_n)$

$$\mathcal{F}_n^0 = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n)$$

i) $\forall n \geq 0$ , $S_n^2$ est $\mathcal{F}_n^0$ - mesurable

car $S_n^2 = \varphi(S_n)$ donc $\sigma(S_n)$ - mesurable

et $\sigma(S_n) \subset \sigma(S_0, \dots, S_n) = \mathcal{F}_n^0$

ii) Intégrabilité , $\forall n \geq 0$ $S_n^2 \in L^1 \iff \mathbb{E}\left[|S_n^2|\right] < \infty$

on a
$$\mathbb{E}\left[|S_n^2|\right] = \mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^n U_i\right)^2\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^n U_i\right)\left(\sum_{j=1}^n U_j\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n U_i U_j\right]$$
$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[U_i \cdot U_j]$$

Soit on calcule

Soit on majore

On a $\mathbb{E}\left[|S_n^2|\right] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}[U_i \cdot U_j]$

$$\rightarrow \mathbb{E}\left[|S_n^2|\right] \leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}[U_i^2]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[U_j^2]^{\frac{1}{2}} \leq n^2\sigma^2 < \infty$$

d'après Cauchy-Schwarz

Si on calcule, $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}[U_i \cdot U_j]$

$$= \sum_{i=j} \mathbb{E}[U_i \cdot U_j] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[U_i \cdot U_j]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}(U_i^2) + \sum_{i\neq j} \underbrace{\mathbb{E}[U_i]}_{=0} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[U_j]}_{=0}$$

$$= n\sigma^2 < \infty$$

Car une variable est indépendante d'elle même que si elle est constante donc on ne peut pas dire que

$$\mathbb{E}[U_i U_j] = \mathbb{E}(U_i) \cdot \mathbb{E}[U_j] \quad \text{si } i=j$$

On aurait pu utiliser le fait que $L^2$ est un espace vectoriel donc :

$$\underbrace{S_n}_{} = \underbrace{U_0}_{\in L^2} + \underbrace{U_1}_{\in L^2} + \dots + \underbrace{U_n}_{\in L^2} \Rightarrow S_n \in L^2$$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left(S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right) \geq S_n^2$ sMG

On a $\mathbb{E}\left(S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left((S_n + U_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n\right)$

$$= \mathbb{E}\left(\left(S_n^2 + 2 S_n U_{n+1} + U_{n+1}^2\right) \mid \mathcal{F}_n\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(S_n^2 \mid \mathcal{F}_n\right) + 2 \cdot \mathbb{E}\left(S_n U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) + \mathbb{E}\left(U_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right)$$

$$= S_n^2 + 2 \cdot S_n \underbrace{\mathbb{E}(U_{n+1})}_{= \mathbb{E}(U_1) = 0} + \underbrace{\mathbb{E}(U_{n+1}^2)}_{\mathbb{E}(U_1^2) = \sigma^2}$$

- car $U_{n+1}$ est indépendante de $(\mathcal{F}_n^0)$
- Et $S_n$ est $(\mathcal{F}_n^0)$ mesurable

$= S_n^2 + \sigma^2$ car les $U_i$ sont identiquement distribuées

$\geq S_n^2$ (car $\sigma^2 \geq 0$)

2) Montrer que $M_n = (S_n^2 - n\sigma^2)$ est une martingale

où $\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} U_n \end{cases}$

$\ln|X| = \varphi(X)$

$X^2 = \varphi(X)$ où $\varphi$ est une fonction

borelienne $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déterministe

fixe

Si X et Y sont 2 v.a. <u>alors</u> $\boxed{X^2 Y = \varphi(X)}$ Faux

i) $\forall n \geq 0$, $M_n = (S_n^2 - n\sigma^2)$ est $(\mathcal{F}_n^0)$-mesurable

$M_n = S_n^2 - n\sigma^2 = \varphi(S_n)$ où $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \varphi(x) = x^2 - n\sigma^2$

donc $M_n$ est $\sigma(\mathcal{F}_n)$ mesurable

Et $\sigma(\mathcal{F}_n) \subset (\mathcal{F}_n^0)$ donc $(\mathcal{F}_n^0)$-mesurable

ii) $\forall n \geq 0$, $M_n = (S_n^2 - n\sigma^2) \in L^1 \Rightarrow \mathbb{E}(|M_n|) < \infty$

Les constants étant integrable donc $M_n$ est integrable.

$$\mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}(|S_n^2 - n\sigma^2|) \leq \underbrace{\mathbb{E}(S_n^2)}_{< \infty} + \underbrace{\mathbb{E}(|n\sigma^2|)}_{= n\sigma^2 < \infty} < \infty$$

iii) $\forall n \geq 0$, $\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$ — MG

On a $\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(S_{n+1}^2 - (1+n)\sigma^2 / \mathcal{F}_n\right)$

$= \mathbb{E}\left(S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right) - \mathbb{E}\left((n+1)\sigma^2 \mid \mathcal{F}_n\right)$

$= \left(S_n^2 + \sigma^2\right) - (n+1)\sigma^2$

$= S_n^2 - n\sigma^2$

$= M_n$

3) Donner la décomposition de Doob de la sMG $(S_n^2)_n$

On a $S_n^2 = \underbrace{\left(S_n^2 - n\sigma^2\right)}_{M_n \text{ - MG}} + \underbrace{n\sigma^2}_{\text{processus croissant } (A_n)}$

$\begin{cases} A_0 = 0 \\ (A_n) \text{ est croissante} \end{cases}$

Pour que la décomposition soit unique, il faut que le processus $(A_n)$ est $(\mathcal{F}_n)$-prévisible c-à-d $(\mathcal{F}_{n-1})$-mesurable.

ce qui est le cas car $A_n$ est $\mathcal{F}_0$ prévisible car constant pour un $n$ fixé

Théorème : Si $(M_n)$ est une Mg bornée dans $L^2$. alors $(M_n)$ converge p.s et converge dans $L^2$ vers une v.a. notée $M_\infty$

↳ De plus $(M_n)$ est une Martingale " terminée "

c-à-d $\exists M$ v.a. dans $L^1$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n = \mathbb{E}(M | \mathcal{F}_n^0)$

$\left(\mathbb{E}(|M|)\right)^2 \leq \mathbb{E}\left(|M|^2\right)$ cad $\varphi(\mathbb{E}(Z)) \leq \mathbb{E}(\varphi(Z))$

pour $\varphi$ convexe

Jensen

Cauchy - Schwarz

$$\mathbb{E}(|M| \cdot 1) \leq \mathbb{E}\left(|M|^2\right)^{1/2} \mathbb{E}\left(1^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{\mathbb{E}(M^2)} < \infty$$

car $\mathbb{E}(M^2) < \infty$

car $M \in L^2$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(M / \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right)$$

$$= \mathbb{E}(M \mid \mathcal{F}_n) \quad \text{car } \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$$

$$= M_n$$

Montrer que $(M_n)$ est bornée dans $L^2$

c-à-d $\|M_n\|_{L^2} = \mathbb{E}\left(M_n^2\right)^{1/2}$ est bornée dans $\mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f$ est convexe

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(M/\mathcal{F}_n)^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(M^2 \mid \mathcal{F}_n)\right) \leq \mathbb{E}(M^2) < \infty$$

Jensen $\quad \mathbb{E}\left(f(\mathbb{E}(M/\mathcal{F}_n))\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(f(M) \mid \mathcal{F}_n)\right)$ $\quad$ cste d'après le théorème du cours

- $(M_n)$ est un MG bornée dans $L^2$

$\Rightarrow$ $M_n \xrightarrow[L^2]{p.s} M_\infty$ tq $M_\infty$ est une v.a.

Puisque $M_n = \mathbb{E}(M/\mathcal{F}_n)$

$\Rightarrow$ $M_\infty = \mathbb{E}(M/\mathcal{F}_\infty)$

On notera $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_n\right)$ car la reunion de tribus n'est pas une tribu.
dans le cas infini

On motre que ~~q~~ $M_\infty = \mathbb{E}(M/\mathcal{F}_\infty)$

il faut utiliser la caractérisation de espérance conditionnelle

càd. $M_\infty$ est l'unique ~~var. aléat~~ v.a. $\mathcal{F}_\infty$ mesurable qui vérifie la propriété de Kolmogorov.

* $M_\infty$ est $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable car $\forall n$, $M_n$ est $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable

$\Longrightarrow$ $\lim (p.s) M_n$ est $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable

* $\int_B M_\infty \, d\mathbb{P} = \int_B M \, d\mathbb{P} \quad \forall B \in \mathcal{F}_\infty$