Exercice 8 : $g(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\underbrace{[x_1^2 - 2\gamma x_1 x_2 + x_2^2]}_{\substack{(x-M)^t \Gamma^{-1} (x-M) \\ \| \\ \langle \Gamma^{-1}(x-M), (x-M) \rangle}}}$

$x = (x_1, x_2)$, $M = (E[X_1], E[X_2])$

On a : $x_1^2 - 2\gamma x_2 x_1 + x_2^2 = x_1(x_1 - 2\gamma x_2) + x_2^2$

$$= \langle \begin{pmatrix} x_1 - \gamma x_2 \\ -\gamma x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle$$

$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$

$$= \langle \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{\det \Gamma} {}^t\mathrm{com}(\Gamma^{-1}) = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & -(-\gamma) \\ -(-\gamma) & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $g_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 \sqrt{\det \Gamma_X}} e^{-\frac{1}{2} \langle \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle}$

CNS pour être matrice de covariance :

- symétrique
- positive (valeurs propres)

$$\frac{1}{\sqrt{\det \Gamma_X}} = \sqrt{1-\gamma^2} \Rightarrow \sqrt{\det \Gamma_X} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \Leftrightarrow \det \Gamma_X = \frac{1}{1-\gamma^2}$$

Rappel : $f_{X_1,X_2} = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \dfrac{1}{\sqrt{\det \Gamma_{X_1,X_2}}} e^{-\frac{1}{2} < \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{pmatrix} >}$

densité d'1 vecteur Gaussien d'espérance $M = (m_1, m_2)$ et de matrice de covariance inversible Γ

$$\phi_{X_1,X_2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto \mathbb{E}\left[e^{i < (x_1,x_2), (X_1,X_2) >} \right]$$

2) Soit $Y = (X_1, X_2)$

$$\phi_Y(s,t) = e^{-i < \binom{s}{t}, \binom{m_{X_1}}{m_{X_2}} >} e^{-\frac{1}{2} < (s,t), \Gamma \binom{s}{t} >}$$

où $m_{X_i} = \mathbb{E}[X_i] = 0$ pour $i = 1,2$ car centrée

$$\phi_Y(s,t) = e^{-\frac{1}{2} < (s,t), \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \binom{s}{t} >}$$
$$= e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\gamma^2} < (s,t), \binom{s + \gamma t}{\gamma s + t} >}$$
$$= e^{-\frac{1}{2(1-\gamma^2)} \left[s(s + \gamma t) + t(\gamma s + t) \right]}$$
$$= e^{-\frac{1}{2(1-\gamma^2)} \left[s^2 + 2\gamma s t + t^2 \right]}$$

3) Loi de X_1 : X_1 est de loi gaussienne avec $\begin{cases} \mathbb{E}[X_1] = 0 \\ V(X_1) = \Gamma_{1,1} \end{cases}$

$$V(X_1) = \mathrm{cov}(X_1, X_1) = \Gamma_{1,1} = \frac{1}{1-\gamma^2}$$

Donc $X_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-\gamma^2}\right)$

4) vecteur aléatoire $(Y_1, Y_2) = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2}}\,(X_1 + X_2\,,\ X_1 - X_2)$

On a $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ est donc une transformation linéaire (ou affine) du vecteur gaussien (X_1, X_2) donc $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien

de vecteur espérance $\mathbb{E}[Y] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[Y_1] \\ \mathbb{E}[Y_2] \end{pmatrix} = A \cdot \mathbb{E}[X] = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et de matrice de covariance $\Gamma_Y = A \cdot \Gamma_X A^t$

$$\Gamma_{Y_1, Y_2} = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\gamma & \gamma+1 \\ 1-\gamma & \gamma-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(\gamma+1) & 0 \\ 0 & 2(1-\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma+1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

D'où, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma+1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma \end{pmatrix} \right) = \mathcal{N}(\mathbb{E}[Y], \Gamma_Y)$

<u>Remarque</u> : Y_1 et Y_2 sont indépendantes car non corrélées

5) Considérons la convergence en loi lorsque $\gamma \to 1-$.

Si γ est remplacé par γ_n avec $\gamma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-$

On a une suite de vecteurs aléatoires

$$Y(n) = \left(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+\gamma_n & 0\\ 0 & 1-\gamma_n\end{pmatrix}\right)$$

la loi limite de $Y(n)$ s'entend dans le sens :

$Y(n)$ converge en loi vers un vecteur aléatoire $Z=(Z_1, Z_2)$

on cherche la loi de Z

Rappel : (Cas unidimensionnel)

Une suite $(X_n)_n$ de v.a. réelles converge en loi vers une v.a. X,

et on note $X_n \xrightarrow{(\mathcal{L})} X$ si

$$\mathbb{P}(X_n \in B) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X\in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ tq } \mathbb{P}(X\in\partial B)=0$$

$$\iff F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x), \quad \forall x\in\mathbb{R} \text{ point de continuité de } X.$$

$$\left(\text{car } F_X(x) = \mathbb{P}(X\leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx\right)$$

$$\iff \mathbb{E}[g(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[g(X)] \quad \forall g \text{ continue bornée}$$

$$\iff \varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t), \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

dans le cas multidimensionnel on utilise la fonction caractéristique

Lorsque $\gamma \to 1_-$ $\quad \Gamma_Y = \begin{pmatrix} \gamma+1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \varphi_Y(s,t) \xrightarrow[\gamma \to 1_-]{} e^{-\frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \rangle}$$

qui est la fonction caractéristique d'1 vecteur gaussien $Z=(Z_1,Z_2)$ centrée de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Z_2 =$ constante com $Var(X_2) = 0$

$\Rightarrow E[Z_2] = 0 = Z_2 \Rightarrow Z = (Z_1, 0)$