12/11/2021 Monte Carlo

**Résumé :**

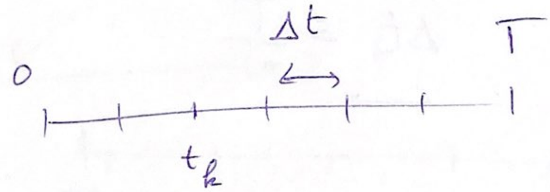
1) Vous savez étudier le MB

a) De la théorie

b) Pour SM $\rightarrow$ $\mathbb{E}(W_t)$, $Var(W_t)$, $W_t$ est une Martingale

2) Variation quadratique $\langle W \rangle_t = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N} (W_{i+1} - W_i)^2$

Etude de deux points de vue :




$\langle W \rangle_t = t$

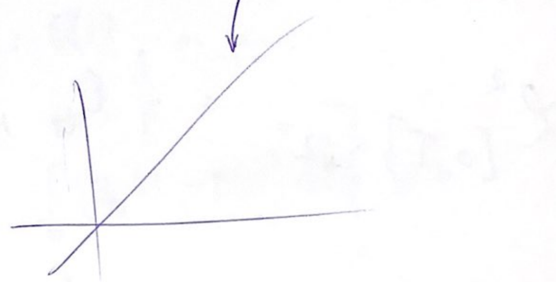
↗

théorie

$k \in [1;N]$

$t_k \rightarrow t_k$ (Id)

$$t_k \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \langle W_{t_k} \rangle \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} t_k$$



La variation quadratique approche la droite $t \longmapsto \langle W \rangle_t$

$$\int_0^t (dW_s)^2 = t = \int_0^t ds \Rightarrow (dW_s)^2 = ds$$

Propriété d'Isométrie des intégrales stochastiques.

$$\theta_s = \theta(s, W_s) \qquad W_s \text{ v.a.}$$

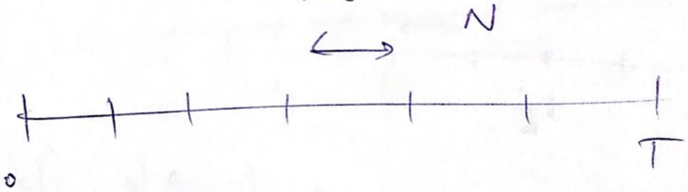
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \theta_s \, dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right)$$

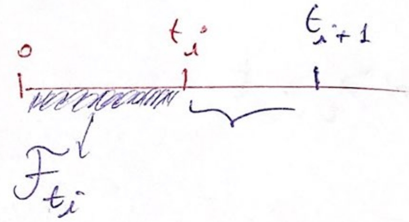
l'intégrale stochastique $\quad I(\theta) = \int_0^T \theta_s \, dW_s$

$$I(\theta) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N} \theta_{t_i} \left( W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right)$$

$W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ est indépendante de $\mathcal{F}_{t_i}$

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$




Comment construire la théorie ?

$$\mathcal{L}^2_{[0,T]\times\Omega} = \left\{ \theta_t \,,\ \mathbb{E}\left[\int_0^T \theta_t^2 \, dt\right] < \infty \right\}$$

On introduit le processus élémentaire $\left(\theta_N(t)\right)_{0 \le t \le T}$

c-à-d il existe une subdivision $\Pi_N = (0 = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_N = T)$

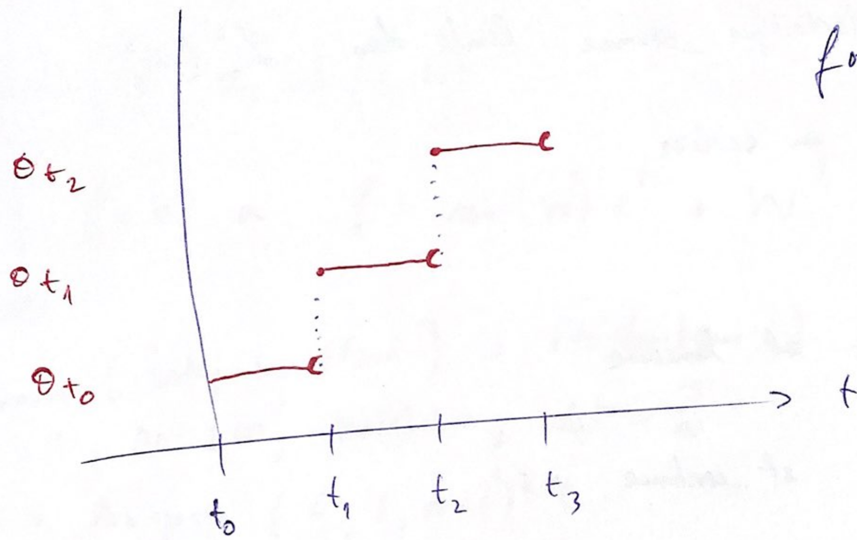
et un processus discret $(\theta_i)_{0 \le i \le N}$ tel que $\theta_i$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_i}$ et dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$

$$\theta_N(t) = \sum_{i=0}^{N} \theta_{t_i} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

$$\theta_N(t) = \sum_{i=0}^{N} \theta_{t_i} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

$$= \theta_{t_0} \mathbb{1}_{t \in ]t_0, t_1]} + \theta_{t_1} \mathbb{1}_{t \in ]t_1, t_2]} + \dots + \theta_{t_N} \mathbb{1}_{t \in ]t_{N-1}, t_{N+1}]}$$

processus élémentaire : fonction en escalier




2) théorème fondamental :

$\exists \{\theta_{t_i}\}$ de $\theta_N(t_i)$ tq $\lim_{N \to +\infty} \theta_N(t) = \theta(t)$. on a :

$$\forall \theta(t) \in \mathcal{L}^2_{[0,T] \times \Omega} \quad \lim_{N \to +\infty} \mathbb{E}\left[ \int_0^T \left(\theta_N(t) - \theta(t)\right)^2 dt \right] = 0$$

3) $I(\theta) = \lim_{N \to +\infty} I(\theta_N)$ (( on définit l'intégrale stochastique à l'aide des fonctions en escalier

sens $\| I(\theta_N) - I(\theta) \|_2^2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}\left[ \left(I(\theta_N) - I(\theta)\right)^2 \right] \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

$$I(\theta_N) = \int_0^T \theta_N(t)\, dW_t$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \theta_{t_i} \left( W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right)$$

On va simuler cette intégrale

On définit l'intégrale stochastique comme limite dans $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega)$ des intégrales stochastiques en escalier.

Propriétés :

1) $\theta \longmapsto \int_0^t \theta_s\, dW_s$ est linéaire

2) $t \longmapsto \int_0^t \theta_s\, dW_s$ est continue p.s.

3) $\left( \int_0^t \theta_s\, dW_s \right)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus $\mathcal{F}$-adapté.

4) $\mathbb{E}\left( \int_0^t \theta_s\, dW_s \right) = 0$

5) Isométrie $\mathbb{E}\left( \left( \int_0^t \theta_s\, dW_s \right)^2 \right) = \mathbb{E}\left( \int_0^t \theta_s^2\, ds \right)$

6) Fubini $\mathbb{E}\left( \int_0^t \theta_s^2\, ds \right) = \int_0^t \mathbb{E}(\theta_s^2)\, ds$

On simule l'integrale stochastique

Pour chaque trajectoire du MB on fait correspondre l'integrale stochastique

. $\theta_t$ est une fonction en escalier

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i (W_{i+1} - W_i)$$

function [f] = Teta(t, W)

| f = W ou f = sin(W)$\cdot e^t$ + $W^3$

END

function [Integrale_Stoch] = Stochastique()

T = 3, N = 100, W(1) = 0, $\Delta t = \frac{T}{N}$

t = linspace(0, T, N+1)

Integrale = 0

for i = 1:N

w(i+1) = w(i) + $\sqrt{\Delta t}$ $\cdot$ N(0,1)

Integrale = Integrale + teta($t_i$, $W_i$) $\cdot$ (W(i+1) - W(i))

END

Integrale_Stoch = Integrale

$\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s \, dW_s\right) = 0$ de la théorie pour un processus élémentaire.

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} \theta_i \left(W_{i+1} - W_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left(\theta_i \left(W_{i+1} - W_i\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\theta_i \cdot \left(W_{i+1} - W_i\right) \mid \mathcal{F}_i\right]\right]$$

car $\theta_i$ est $(\mathcal{F}_i)$-mesurable donc constante par rapport à $\mathcal{F}_i$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\theta_i \cdot \mathbb{E}\left[W_{i+1} - W_i \mid \mathcal{F}_i\right]\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\theta_i \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[W_{i+1} - W_i\right]}_{=0}\right]$$

car $W_{i+1} - W_i$ est indépendante de $\mathcal{F}_i$ propriété des MB.

$$= 0$$

<u>de plus</u> $W_{i+1} - W_i$ est stationnaire $\Rightarrow \mathbb{E}\left[W_{i+1} - W_i\right] = 0$

Programme de simulation pour vérifier que ça vaut 0.

```
for n = 1 : Nmc
    Integrale = 0
    for i = 1 : N
        W_{i+1} = W_i + sqrt(Δt) . N(0,1)
        Integrale = Integrale + Teta(t_i, W_i)(W_{i+1} - W_i)
    END
    Integrale_stoch(n) = Integrale
END
Esperance_Integrale = mean(Integrale_stoch)
```

$$\mathrm{Var}\left(I(\theta)\right) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \theta_t \, dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_t^{\,2} \, dt\right)$$

$$I(\theta) \sim N\left(0, \ \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_t^{\,2} \, dt\right)\right)$$

$0$ $T$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \theta_s \, dW_s\right)^2\right] \overset{\theta \text{ en escalier}}{=} \mathbb{E}\left[\sum_i \theta_i (W_{i+1} - W_i) \sum_j \theta_j (W_{j+1} - W_j)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=j} \theta_i^2 (W_{i+1} - W_i)^2\right] + \overset{\text{par symetrie}}{2} \, \mathbb{E}\left[\sum_{i<j} \theta_i \theta_j (W_{i+1} - W_i)(W_{j+1} - W_j)\right]$$

$$= \sum_{i=j} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\theta_i^2 (W_{i+1} - W_i)^2\right) \middle| \mathcal{F}_i\right]\right]$$

$$+ 2 \sum_{i<j} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\theta_i \theta_j (W_{i+1} - W_i)(W_{j+1} - W_j) \middle| \mathcal{F}_j\right)\right]$$

$$= \sum_{i=j} \mathbb{E}\left[\theta_i^2 \, \mathbb{E}\left[\underbrace{(W_{i+1} - W_i)^2}_{(W_{\Delta t})^2}\right]\right] + 2 \sum_{i<j} \mathbb{E}\left[\theta_i \theta_j (W_{i+1} - W_i) \underbrace{\mathbb{E}\left[W_{j+1} - W_j\right]}_{=0}\right]$$

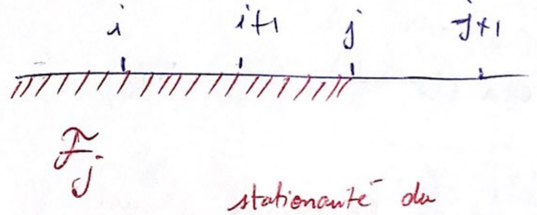
$$= \sum_{i=j} \mathbb{E}\left(\theta_i^2 \Delta t\right) + \sum_{i<j}$$

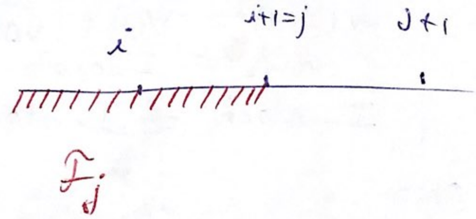
car $W_{j+1} - W_j$ est stationnaire

On a $\int_0^{t_k} \theta_s dW_s = \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i (W_{i+1} - W_i)$ prenon $t = t_k$ et $\theta$ une fonction en escalier

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_k} \theta_s dW_s\right)^2\right] = \sum_{i,j=0}^{k-1} \mathbb{E}\left[\theta_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \cdot \theta_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right]$$

On a $\sum_{i,j} = \sum_{i=j} + \sum_{i<j} + \sum_{j<i} = \sum_{i=j} + 2\sum_{i<j}$ par symetrie



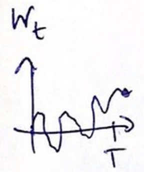




$$\mathbb{E}\left[\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2\right] \overset{\text{stationarité du mouvement Brownien}}{=} \mathbb{E}\left[W^2_{t_{i+1}-t_i}\right] \overset{\text{Variance du M.B.}}{=} \Delta t$$

On vérifie la propriété d'Isométrie par simulation de MC.

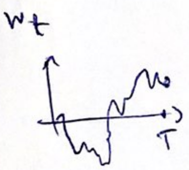
On a différents scénarios ( Nmc scénarios )

Scénario 1



$$\rightarrow \int_0^T \theta_s dW_s = \sum_{i=0}^{N} \theta_i \left(W^{(1)}_{i+1} - W^{(1)}_i\right)$$

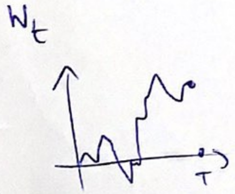
Scenario 2



$$\rightarrow \int_0^T \theta_s dW_s = \sum_{i=0}^{N} \theta_i \left(W^{(2)}_{i+1} - W^{(2)}_i\right)$$

$\vdots$

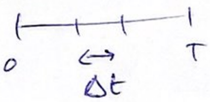
scénario $N_{mc}$



$$\rightarrow \int_0^T \theta_s dW_s = \sum_{i=0}^{N} \theta_i \left(W^{(N_{mc})}_{i+1} - W^{(N_{mc})}_i\right)$$

Vérifions par simulation que $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} \theta_i (W_{i+1} - W_i)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 \Delta t\right]$

où $\Delta t = \frac{T}{N}$




$\theta(t_i, W_i)$

Il faut vérifier pour les mêmes trajectoires

For $m = 1 : N_{mc}$ ← Boucle pour les différents scénarios

I_droite
I_Stoch = 0

For $i = 1 : N$ ← Calcul d'1 intégrale stochastique ~~autour~~ selon une ~~direction~~ trajectoire du MB

$W(i+1) = W(i) + \sqrt{\Delta t} \cdot \mathcal{N}(0,1)$
$I\_droite = I\_droite + teta(t_i, W_i)^2 \cdot \Delta t$
$I\_stoch = I\_stoch + Teta(t_i, W_i) \cdot (W_{i+1} - W_i)$

END

$I\_stoch\_carre(m) = (I\_stoch)^2$ ← On stocke chaque intégrale au carré pour faire la moyenne

Droite (m) = I_droite

END

Esperance_I_stoch_carre = mean( I_stoch_carre )

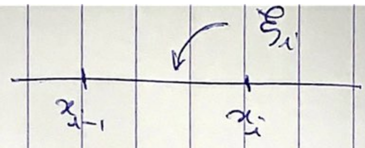
Esperance_droite = mean( Droite )

---

On ne peut pas simuler de façon indépendante pour des trajectoires différentes sinon cela n'a aucun sens.

$\Delta x = \frac{a-b}{N}$

## Calculs classiques avec Taylor



$$f(x_i) = f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})\cdot\Delta x + \frac{1}{2} f''(\xi_i)\cdot(\Delta x)^2$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(f'(x_{i-1})\Delta x + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(\Delta(x))^2\right)$$

La somme de gauche est une somme télescopique

$$\cancel{f(x_1)} - f(x_0) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \dots + f(x_N) - \cancel{f(x_{N-1})}$$

$$= f(x_N) - f(x_0)$$

$|f''(\xi_i)| < M$

$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty}\left( f(x_N) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{N} f'(x_{i-1})\Delta x + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(\Delta x)^2 \right)$$

$$\Rightarrow f(x_N) - f(x_0) = \int_a^b f'(x)\,dx + \lim_{\Delta x\to 0} M\cdot N\cdot(\Delta x)^2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

$\frac{1}{N}$

## Calcule Stochastique : Au lieu de $x_i$ on prend $W_i$ MB.

$$f(W_i) = f(W_{i-1}) + f'(W_{i-1})(W_i - W_{i-1}) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(W_i - W_{i-1})^2$$

$dt = d\langle W\rangle_t$

$$\Rightarrow f(W_N) - f(W_0) = \sum_{i=1}^{N} f'(W_i)(W_i - W_{i-1}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} f''(\xi_i)(W_i - W_{i-1})^2$$

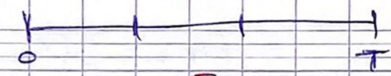
$\lim_{n\to+\infty}$

$$f(W_T) - f(W_0) = \int_0^T f'(W_s)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T f''(W_t)\,dt$$

Car $\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}(W_i - W_{i-1})^2 = \langle W_T\rangle = T$

On ne peut pas le négliger car il est grand, d'ordre $\Delta t$.

Exemple : $f(x) = x^2$ , $f(W_t) = W_t^2$



d'après le lemme d'Itô $\Rightarrow$ $f(W_T) - f(W_0) = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=W_t} dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x=W_t} dt$

$\Leftrightarrow$ $W_T^2 - \underset{0}{W_0^2} = \int_0^T 2 W_T dW_T + \frac{1}{2}\int_0^T 2 \cdot dt$

$\Leftrightarrow$ $W_T^2 = 2 \cdot \int_0^T W_t dW_t + T$ $\leftarrow$ le terme d'Itô

$\Rightarrow$ $$\boxed{\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{T}{2}}$$ Calcule d'Itô

Classiquement on aurait $\int_0^T x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^T = \frac{T^2}{2}$

On verifie par simulation de MC la relation stochastique

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2}$$

$\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{N} W_i (W_{i+1} - W_i) = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{T}{2}$

$\Delta t = \frac{T}{N}$

```
function [f] = Teta (t, W)
  | f = W
End
Integrale_Stoch = 0
for i = 1 : N
  | Integrale_Stoch = Integrale_Stoch + Teta(t_i, W_i)(W_{i+1} - W_i)
  | W(i+1) = W(i) + √Δt · N(0,1)
END
```