- Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. telle que

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Y_0 = 1) = p > 0 \\ \mathbb{P}(Y_0 = -1) = 1-p = q > 0. \end{cases}$$

- On note $\mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par $Y_1, \dots, Y_n$

- On pose $\begin{cases} S_0 = a > 0 \\ S_n = a + \sum_{j=1}^{n} Y_j \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$

1) Calculer l'espérance et la variance de Y_1.

$$\mathbb{E}(Y_1) = 1 \times \mathbb{P}(Y_1 = 1) + (-1)\,\mathbb{P}(Y_1 = -1) = p + p - 1 = 2p - 1$$

$$\mathrm{Var}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_1^2) - \mathbb{E}(Y_1)^2 = (1^2)\cdot\mathbb{P}(Y_1 = 1) + (-1)^2 \cdot \mathbb{P}(Y_1 = 1) - (2p-1)^2$$

$$= p + 1 - p - (2p-1)^2$$

$$= 1 - (2p-1)^2$$

$$= 1 - 4p^2 + 4p - 1$$

$$= 4p(1-p)$$

2) Calculer $\mathbb{E}(S_n - S_{n-1} | \mathcal{A}_{n-1})$.

A quelle condition sur p la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est-elle une martingale, une sous-martingale, une surmartingale ?

$$\mathbb{E}(S_n - S_{n-1} | \mathcal{A}_{n-1}) = \mathbb{E}\left(a+\sum_{i=1}^{n} Y_i - \left(a+\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right) \Big| \mathcal{A}_{n-1}\right)$$

$$= \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{A}_{n-1})$$ car Y_n est independante de $Y_{n-1}, \dots, Y_1$

$$= \mathbb{E}(Y_n)$$ donc de $\mathcal{A}_{n-1} = \sigma(Y_1, \dots, Y_{n-1})$

$$= (2p-1)$$

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ S_n est $\mathcal{A}_n$-mesurable

car $S_n = \varphi(Y_1, \dots, Y_n)$ où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \varphi(y_1, \dots, y_n) = a + \sum_{i=1}^{n} Y_i$

continue donc borelienne

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ S_n est integrable

$$\mathbb{E}(|S_n|) = \mathbb{E}\left(\left|a + \sum_{i=1}^{n} Y_i\right|\right) \leq \mathbb{E}\left(a + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|Y_i|}_{=1}\right) \leq \mathbb{E}(a+n) = a+n$$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{A}_n) = S_n$

$$\mathbb{E}\left(S_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right) = \mathbb{E}\left(a + \sum_{i=1}^{n+1} Y_i \mid \mathcal{A}_n\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(a + \sum_{i=1}^{n} Y_i + Y_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(S_n / \mathcal{A}_n\right) + \mathbb{E}\left(Y_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right)$$

$$= S_n + \mathbb{E}\left(Y_{n+1}\right)$$ car . S_n est $\mathcal{A}_n$-mesurable

. Y_{n+1} indépendante de $\mathcal{A}_n$

$$= S_n + (2p-1)$$

<u>Ainsi</u>,

. $\mathbb{E}\left(S_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right) \overset{MG}{=} S_n$ si $2p-1 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

. $\mathbb{E}\left(S_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right) \overset{sMG}{\geq} S_n$ si $2p-1 \geq 0 \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}$

. $\mathbb{E}\left(S_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right) \overset{SMG}{\leq} S_n$ si $2p-1 \leq 0 \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{2}$

3) On pose $W_0 = S_0 = a$ et $W_n = S_n - (p-q)n$.

Montrer que $(W_n)_{n \geq 0}$ est une martingale $\qquad p \neq q$

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ W_n est $\mathcal{A}_n$ - mesurable $\qquad \mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$

$$W_n = \varphi(Y_1, \dots, Y_n) \text{ où } \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(y_1, \dots y_n) \mapsto \varphi(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i - (p-q)n$$

continue donc borélienne

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ W_n est intégrable

$$\mathbb{E}(|W_n|) = \mathbb{E}(|S_n - (p-q)n|) \leq \mathbb{E}(|S_n| + |p-q|n)$$

$$\leq \mathbb{E}(|S_n|) + |p-(1-p)|n$$

$$\leq \underbrace{\mathbb{E}(|S_n|)}_{< \infty} + |2p-1|\, n$$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}(W_{n+1} | \mathcal{A}_n) = W_n$

$$\mathbb{E}(W_{n+1} | \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}(S_{n+1} - (p-q)(n+1) | \mathcal{A}_n)$$

$$= \mathbb{E}(S_n + Y_{n+1} - (p-q)n - (p-q) | \mathcal{A}_n)$$

$$= \mathbb{E}(S_n - (p-q)n + Y_{n+1} - (p-q)\mathbb{1} | \mathcal{A}_n)$$

2

$$\mathbb{E}(W_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}(W_n + Y_{n+1} - (p-q) \mid \mathcal{A}_n)$$

car W_n est $\mathcal{A}_n$-mesurable $= \mathbb{E}(W_n \mid \mathcal{A}_n) + \mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) - (p-q)$

car Y_{n+1} est indépendante de $\mathcal{A}_n$ $= \mathbb{E}(W_n) + \mathbb{E}(Y_{n+1}) - (p-(1-p))$

$$= \mathbb{E}(W_n) + (2p-1) - (2p-1)$$

$$= \mathbb{E}(W_n)$$

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}$ W_n est une $(\mathcal{A}_n)$-Martingale

4) On considère $N > a$, $N \in \mathbb{N}$ et pour $\omega \in \Omega$ on pose

$$T(\omega) = \begin{cases} \inf\{n \geq 0,\ S_n(\omega) \in \{0, N\}\} & \text{si } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } S_n(\omega) \in \{0, N\} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{A}_n)$ et en déduire la nature de la suite $W_{n \wedge T}$.

$T : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{A}_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\{T > n\} \in \mathcal{A}_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\{T > n\} = \{\forall k = 0, .., n \text{ tq } 0 < S_k < N\}$

Car $T = \inf\{n \in \mathbb{N} \text{ tq } S_n \in \{0, N\}\}$

donc si $T > n$

$\Rightarrow S_0 \notin \{0, N\}, \ldots, S_{n-1} \notin \{0, N\}$

$\Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!], 0 < S_k < N$

donc $\{T > n\} = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} \{0 < S_k < N\}$ où $\{0 < S_k < N\} \in \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_n$ $\forall k \in [\![0, n]\!]$

$\Rightarrow \{T > n\} \in \mathcal{A}_n$ car $\mathcal{A}_n$ est stable par intersection dénombrable

Methode 1 : $\{T \leq m\} = \{\exists\, k \in \{0,..,m\} \text{ tq } T = k\}$

$$= \bigcup_{k=0}^{m} \{T = k\}$$

$$= \bigcup_{k=0}^{m} \{k = \inf\{n, S_n \in \{0, N\}\}\}$$

$$= \bigcup_{k=0}^{m} \{S_k \in \{0, N\} \text{ et } \forall i < k,\ S_i \notin \{0, N\}\}$$

$$= \bigcup_{k=0}^{m} \underbrace{\Big(\underbrace{\{S_k \in \{0, N\}\}}_{\in \mathcal{A}_k} \cap \Big\{\bigcap_{i=0}^{k-1} \underbrace{\{S_i \notin \{0, N\}\}}_{\in \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_k \text{ pour } i \leq k}\Big\}\Big)}_{\in \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_m \text{ pour } k \leq m}$$

Nature de la suite $\left(W_{T\wedge n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} \cdot\ W_n \text{ est une } (\mathcal{A}_n)\text{-MG} \\ \cdot\ T \text{ est un temps d'arrêt adapté à } (\mathcal{A}_n) \end{cases}$$

Théorème d'Arrêt:

$\Longrightarrow \left(W_{T\wedge n}\right)$ est une $(\mathcal{A}_n)$-MG et aussi $\left(\mathcal{A}_{T\wedge n}\right)$-MG.

5) Vérifier que $\mathbb{E}(T) < \infty$ et que $T < \infty$ p.s.

- $\forall m \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}\left(W_{T \wedge m}\right) = a$
- $0 \leq (p-q) \cdot \mathbb{E}(T \wedge m) + a \leq N$

Puisque $\left(W_{T \wedge m}\right)$ est une $(\mathcal{A}_m)$-MG

$\Rightarrow$ la suite $\left(\mathbb{E}\left(W_{T \wedge m}\right)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ est constante

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}\left(W_{T \wedge m}\right) = \mathbb{E}\left(W_{T \wedge 0}\right) = \mathbb{E}\left(W_0\right) = a$

On a $\quad W_{T \wedge m} = S_{T \wedge m} - (p-q)(T \wedge m)$

$\Rightarrow \quad S_{T \wedge m} = W_{T \wedge m} + (p-q)(T \wedge m)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(S_{T \wedge m}\right) = \mathbb{E}\left(W_{T \wedge m} + (p-q)(T \wedge m)\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(W_{T \wedge m}\right) + (p-q) \cdot \mathbb{E}(T \wedge m)$$
$$= a + (p-q) \cdot \mathbb{E}(T \wedge m)$$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \leq S_{T \wedge n} \leq N$

car $T = \inf \{ n \in \mathbb{N} \text{ tq } S_n \in \{0, N\} \}$

donc si $\begin{cases} n \leq T \Rightarrow S_n \leq N \\ n > T \Rightarrow S_T \leq N \end{cases}$

de même $\begin{cases} n \leq T \Rightarrow S_n \geq 0 \\ n > T \Rightarrow S_T \geq 0 \end{cases}$

donc $\quad 0 \leq \mathbb{E}\left(S_{T \wedge n}\right) \leq N$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq (p-q) \cdot \mathbb{E}(T \wedge n) + a \leq N$

Mq $\mathbb{E}(T) < \infty$

On remarque que la suite $(n \wedge T)$ est croissante

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \wedge T \leq (n+1) \wedge T$$

Et $\lim_{n \to +\infty} (T \wedge n) = T$

$\Rightarrow$ d'après le théorème de convergence monotone

$$\mathbb{E}(T \wedge n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}(T)$$

$\Rightarrow$ En passant à la limite dans l'inégalité

$$0 \leq (p-q)\, \mathbb{E}(T \wedge n) + a \leq N.$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq (p-q)\, \mathbb{E}(T) + a \leq N$$

$$\Rightarrow \quad -a \leq (p-q)\, \mathbb{E}(T) \leq N-a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-a}{p-q} \leq \mathbb{E}(T) \leq \frac{N-a}{p-q}$$ pour $p \neq q$ par hypothèse.

Lorsque $p-q>0 \Rightarrow \mathbb{E}(T) < \frac{N-a}{p-q} < \infty$

Lorsque $p-q<0 \Rightarrow \mathbb{E}(T) < \frac{a}{q-p} < \infty$

Montrons que $T<\infty$ p.s.

On vient de montrer que $\mathbb{E}(T) < \infty$

$\Rightarrow$ T est intégrable

$\Rightarrow T < \infty$ p.s.

Car si $\mathbb{P}(T=+\infty) > 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(T=n) + (+\infty)\mathbb{P}(T=+\infty)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(T) \geq (+\infty)\mathbb{P}(T=+\infty) = +\infty$$

b) On pose $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$. Vérifier que (Z_n) est une martingale et en déduire la nature de la suite $(Z_{T\wedge n})$.

Calculer $\mathbb{E}(Z_{T\wedge n})$

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ Z_n est $(\mathcal{A}_n)$-mesurable.

continue donc borelienne

$Z_n = \varphi(Y_1, \ldots, Y_n)$ où $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto \varphi(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\sum_{i=1}^{n} y_i} = e^{S_n \cdot \ln\left(\frac{q}{p}\right)}$$

$\mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$

$$= e^{(Y_1 + \ldots + Y_n)\ln\left(\frac{q}{p}\right)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(Y_i \cdot \ln \frac{q}{p}\right)$$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ Z_n est intégrable

$$\mathbb{E}(|Z_n|) = \mathbb{E}\left(\left|\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right|\right) = \mathbb{E}\left(\left|\left(\frac{q}{p}\right)^{\sum_{i=1}^{n} Y_i}\right|\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\left|\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_1 + \ldots + Y_n}\right|\right) = \mathbb{E}\left(\left|\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_1} \cdots \left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\right|\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n}\left|\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_i}\right|\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\left|\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_i}\right|\right)$$ par indépendance des Y_i

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\left|\left(\frac{q}{p}\right)^{1}\right| \mathbb{P}(Y=1) + \left|\left(\frac{q}{p}\right)^{-1}\right| \mathbb{P}(Y=-1)\right]$$

$$\mathbb{E}(|Z_n|) = \prod_{i=1}^{n} \left(p\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\times q \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (p+q)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (p+1-p)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} 1$$

Ainsi $\mathbb{E}(|Z_n|) < \infty$

iii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{A}_n) = Z_n$

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n+1}} \Big| \mathcal{A}_n\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n + Y_{n+1}} \Big| \mathcal{A}_n\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \left(\frac{q}{p}\right)^{Y_{n+1}} \Big| \mathcal{A}_n\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(Z_n \left(\frac{q}{p}\right)^{Y_{n+1}} \Big| \mathcal{A}_n\right)$$ car Z_n est $\mathcal{A}_n$-mesurable

$$= Z_n \, \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_{n+1}} \Big| \mathcal{A}_n\right)$$ car Y_{n+1} est indépendante de $\mathcal{A}_n$

$$= Z_n \, \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_{n+1}}\right)$$

$$\mathbb{E}(Z_{m+1} \mid A_m) = Z_m \cdot \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_{m+1}}\right)$$

$$= Z_m \cdot \left(\left(\frac{q}{p}\right) \mathbb{P}(Y=1) + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} \mathbb{P}(Y=-1)\right)$$

$$= Z_m \left(\left(\frac{q}{p}\right) p + \left(\frac{p}{q}\right) \cdot q\right)$$

$$= Z_m \, (q+p)$$

$$= Z_m (1-p+p)$$

$$= Z_m$$

7) Montrer que la suite $Z_{T\wedge n}$ converge p.s. et aussi pour la norme L^2.

. Montrons que $(Z_{T\wedge n})$ et bornée dans L^2

On sait que $Z_{T\wedge n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{T\wedge n}}$ où $0 \leq S_{T\wedge n} \leq N \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc
$$Z_{T\wedge n} \leq \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^N & \text{si } \frac{q}{p} > 1 \Leftrightarrow q > p \Leftrightarrow 1-p > p \Leftrightarrow 1 > 2p \Leftrightarrow \frac{1}{2} > p \\ 1 & \text{si } \frac{q}{p} < 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(Z_{T\wedge n}^2\right) \leq \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^{2N} & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Puisque dans tous les cas $\mathbb{E}\left(Z_{T\wedge n}^2\right) \leq \underbrace{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{2N}}$

ne depend pas de n

$\Rightarrow$ La suite $(Z_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ et bornée dans L^2

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ théorème de Doob}} \Rightarrow (Z_{T\wedge n})$ converge p.s et pour la norme L^2

8) Vérifier que p.s. $\lim_{n\to+\infty} Z_{T\wedge n} = Z_T$

En déduire la valeur de Z_T

d'après le 1er théorème de Doob on sait que

. $(Z_{T\wedge n})$ converge p.s.

$\Rightarrow \exists\ \Omega_1 \subseteq \Omega$ tq $\mathbb{P}(\Omega_1)=1$ et

$\forall \omega \in \Omega_1$, $\left(Z_{T\wedge n}(\omega)\right)$ converge vers une limite $U(\omega) \in \mathbb{R}$

. $T < \infty$ p.s

$\Rightarrow \exists\ \Omega_2 \subseteq \Omega$ tq $\mathbb{P}(\Omega_2)=1$ et

$\forall \omega \in \Omega_2$ ~~de~~ $T(\omega) < \infty$

Donc $\forall\ \omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, on a :

$$T(\omega) \wedge n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(\omega) < \infty$$

Et $U(\omega) = \lim_{n\to+\infty} Z_{T(\omega)\wedge n}(\omega)$ où $Z_{T(\omega)\wedge n}(\omega) = Z_{T(\omega)}$, $\forall n \geq T(\omega)$

$\Longrightarrow U(\omega) = Z_{T(\omega)}(\omega)$

CCL : $T\wedge n \longrightarrow T$ p.s

car $T < \infty \Rightarrow Z_T = \lim_{n\to+\infty} Z_{T\wedge n}$

Cherchons $\mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}\left(\lim_{n \to +\infty} Z_{T \wedge n}\right)$

Méthode 1 : On a vu que $|Z_{T \wedge n}| = Z_{T \wedge n} \leq C$

Et $Z_{T \wedge n} \longrightarrow Z_T$ p.s.

donc par le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}(Z_T) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Z_{T \wedge n}) = \left(\frac{q}{p}\right)^a$$

Méthode 2 : On a vu que $Z_{T \wedge n} \xrightarrow{L^2} Z_T$

$\Rightarrow Z_{T \wedge n} \xrightarrow{L^1} Z_T$

$$\Rightarrow \left|\mathbb{E}(Z_{T \wedge n}) - \mathbb{E}(Z_T)\right| = \left|\mathbb{E}(Z_{T \wedge n} - Z_T)\right|$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\left|Z_{T \wedge n} - Z_T\right|\right)$$

$$\leq \| Z_{T \wedge n} - Z_T \|_{L^1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Z_T) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Z_{T \wedge n}) = \left(\frac{q}{p}\right)^a$$

9) Identifier la loi de la variable aléatoire Z_T.

$Z_T = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_T}$ où S_T v.a. à valeurs dans $\{0, N\}$

Identifier $\alpha = \mathbb{P}\left(Z_T = \left(\frac{q}{p}\right)^N\right)$ et déduire $\mathbb{P}(Z_T = 1)$

$$T = \inf\left(n \in \mathbb{N},\ S_n \in \{0, N\}\right)$$

$$\Rightarrow S_T \in \{0, N\}$$

$$\to \mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_T}\right)$$

$$= \cancel{\left(\frac{q}{p}\right)^0 + N \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^0 \mathbb{P}(S_T = 0) + \left(\frac{q}{p}\right)^N \mathbb{P}(S_T = N)$$

$$= \mathbb{P}(S_T = 0) + \left(\frac{q}{p}\right)^N \left(1 - \mathbb{P}(S_T = 0)\right)$$

$$= \mathbb{P}(S_T = 0)\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^N$$

<u>Or</u> $\mathbb{E}(Z_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^a$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(S_T = 0)\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(S_T = 0) = \left(\frac{q}{p}\right)^a \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{N-a}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(S_T = N) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{N-a}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}\right]$$

$$\mathbb{P}(Z_T = 1) = \mathbb{P}(S_T = 0)$$

car $\quad Z_T = 1 \iff \left(\frac{q}{p}\right)^{S_T} = 1 \iff S_T = 0$

et $\quad S_T = N \iff \left(\frac{q}{p}\right)^{S_T} = \left(\frac{q}{p}\right)^N \iff Z_T = \left(\frac{q}{p}\right)^N$

Ainsi $\quad \mathbb{P}\left(Z_T = \left(\frac{q}{p}\right)^N\right) = \mathbb{P}(S_T = N) = 1 - \mathbb{P}(S_T = 0)$

. . . .

On a $\quad n \wedge T(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq T(\omega) \\ T(\omega) & \text{si } n \geq T(\omega) \end{cases}$