Exercice 3 : Soit f une fonction continue réelle de la variable réelle t.

Considérons l'équation scalaire $x'' + x = f(t)$: (E)

1) Ecrire l'équation (E) sous forme d'une équa diff affine du premier ordre.

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ on a :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -x(t) + f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi $X'(t) = A \cdot X(t) + b(t)$ où $\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \end{cases}$

2) Calculer la résolvante du système linéaire associé

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\,\lambda + \det(A) = \det(A - \lambda I)$

$= \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$

$P_A(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda^2 = -1 \iff \lambda = \pm\sqrt{-1}$

$\iff \lambda = \pm i$

v.p associé à i : $\quad AX = \lambda X$

$\Rightarrow \begin{cases} y = ix \\ -x = iy \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

v.p. associé à $-i$: $\quad A\cancel{X} = \lambda X$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -ix \\ -x = -iy \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)}{(2k+1)!}$$

On a d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$P_A(A) = 0 \iff A^2 + Id = 0$$

$$\iff A^2 = -Id$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^{2k} = (-Id)^k = (-1)^k . Id \\ A^{2k+1} = \cancel{(-1)} A^{2k}.A = (-1)^k Id\, A = (-1)^k A \end{cases}$$

Ainsi $$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k Id . \frac{t^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k A\, t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= Id . \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2k!} + A . \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos(t) . Id + \sin(t) . A$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$R_A(b,a) = \exp\left(\int_a^b A(s)\,ds\right)$$ puisque A est indépendante de t

$$R_A(t,s) = \exp\left(\int_s^t A\,du\right) = \exp\big((t-s)\cdot A\big) = \cos(t-s)I + \sin(t-s)A$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}$$

3) Exprimer $x(t)$ et $x'(t)$ en fonction de leurs valeurs en 0 et de $f(t)$

D'après la formule de variation de la constante, on a :

$$X(t) = e^{tA}\cdot X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\, b(s)\,ds$$

$$= e^{tA}\cdot X(0) + \int_0^t R_A(t,s)\, b(s)\,ds$$

$$= R(t,0)\, X(0) + \int_0^t R_A(t,s)\, b(s)\,ds$$

On calcule : $\displaystyle\int_0^t R_A(t,s) b(s)\,ds = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(t-s)\, f(s) \\ \cos(t-s)\, f(s) \end{pmatrix} ds = \begin{cases} \cancel{\left[\dfrac{-\cos(t-s)}{(-1)}\, f(s)\right]_0^t} \\ \cancel{\left[\dfrac{\sin(t-s)}{-1}\, f(s)\right]_0^t} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cancel{f(t) - \cos(t)\, f(t)} \\ \cancel{\sin(t)\, f(t)} \end{cases}$$

$$X(t) = R(t,0)\,X(0) + \int_0^t R(t,s)\, b(s)\, ds$$

$$X(t) = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t)\, x(0) + \sin(t)\, x'(0) \\ -\sin(t)\, x(0) + \cos(t)\, x'(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(t-s)\, f(s) \\ \cos(t-s)\, f(s) \end{pmatrix} ds$$

Ans
$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)\, x(0) + \sin(t)\, x'(0) + \int_0^t \sin(t-s)\, f(s)\, ds \\ x'(t) = -\sin(t)\, x(0) + \cos(t)\, x'(0) + \int_0^t \cos(t-s)\, f(s)\, ds \end{cases}$$

On suppose que $f(t)$ est 2π-périodique. Montrer que $x(t)$ solution de (E) est 2π-périodique ssi $\begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin(s) f(s) ds = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos(s) f(s) ds = 0 \end{cases}$

Supposons $x(t)$ 2π-périodique $\Leftrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ est 2π-périodique

$$\Leftrightarrow X(0) = X(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'(0) \end{pmatrix} + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(2\pi - s) f(s) \\ \cos(2\pi - s) f(s) \end{pmatrix} ds$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin(2\pi - s) f(s) ds = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos(2\pi - s) f(s) ds = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin(-s) f(s) ds = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos(-s) f(s) ds = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\int_0^{2\pi} \sin(s) f(s) ds = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos(s) f(s) ds = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin(s) f(s) ds = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos(s) f(s) ds = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, $X(t)$ et $X(t+2\pi)$ sont solutions de la même équa diff avec les mêmes conditions initiales, elles sont donc égales.

Exercice 4 : Soit $A :]0, +\infty[\longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application continue.

On considère l'équation différentielle linéaire

$x'(t) = A(t) \cdot x(t)$, $\forall t \in]0, +\infty[$ et on note $R(t, t_0)$ sa résolvante

1) Montrer que $S(t, t_0) = R(t_0, t)^T$ est la résolvante de l'équa diff

$z'(t) = - A(t)^T z(t)$

. $R(t_0, t) = R(t, t_0)^{-1}$ satisfait une équa diff.

Calculons $\frac{\partial}{\partial t} R(t_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} R(t, t_0)^{-1}$

Écrivons donc $R(t_0, t)$ comme $f(R(t, t_0))$

où $f : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$
$M \longmapsto f(M) = M^{-1}$

$$f(M+H) = (M+H)^{-1} = \left(M(I + M^{-1}H)\right)^{-1} = (I + M^{-1}H)^{-1} \cdot M^{-1}$$

Or $\frac{1}{1+X} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \Rightarrow \frac{1}{I + M^{-1}H} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k = I + M^{-1}H + (M^{-1}H)^2 + \cdots$

$|X| < 1$ (si $\|M^{-1}H\| < 1$ la série est convergente)

$$\frac{1}{I + M^{-1}H} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (M^{-1}H)^k$$

Ainsi, $f(M+H) = \left(I - M^{-1}H + o(H^2)\right) \cdot M^{-1}$

$= M^{-1} - M^{-1}H \cdot M^{-1} + o(H^2)$

$= f(M) + L_f(H) + o(\|H\|^2)$

$Df(M) : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$
$H \mapsto Df(M) \cdot H = -M^{-1} H \cdot M^{-1}$

Ainsi $\frac{\partial}{\partial t} R_A(t_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, t_0)^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} f(R_A(t, t_0))$

$$= Df(R_A(t, t_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, t_0)$$

$$= -R_A(t, t_0)^{-1} * \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, t_0) \times R_A(t, t_0)^{-1}$$

$$= -R_A(t, t_0)^{-1} A(t) \cdot R_A(t, t_0) \cdot R_A(t, t_0)^{-1}$$

$$= -R(t_0, t) \cdot A(t)$$

• Point clef : La transposition de matrices étant une opération linéaire, elle commute avec la dérivation et on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(R_A(t_0, t)^T \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} R_A(t_0, t) \right)^T$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(R_A(t_0, t)^T \right) = \left(- R_A(t_0, t) \cdot A(t) \right)^T$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R_A(t_0, t)^T = - A(t)^T \cdot R_A(t_0, t)^T$$

Ainsi. $R_A(t_0, t)^T$ est la résolvante de $z' = - A(t)^T z$

car $R_A(t_0, t_0)^T = I_d^T = I_d$

Ainsi $\frac{\partial}{\partial t} R_A(t_0,t) = \frac{\partial}{\partial t} R_A(t,t_0)^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} f(R_A(t,t_0))$

$$= Df(R_A(t,t_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} R_A(t,t_0)$$

$$= -R_A(t,t_0)^{-1} * \frac{\partial}{\partial t} R_A(t,t_0) \times R_A(t,t_0)^{-1}$$

$$= -R_A(t,t_0)^{-1} A(t) \cdot R_A(t,t_0) \cdot R_A(t,t_0)^{-1}$$

$$= -R(t_0,t) \cdot A(t)$$

• Point clef : La transposition de matrices étant une opération linéaire, elle commute avec la dérivation et on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(R_A(t_0,t)^T\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} R_A(t_0,t)\right)^T$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(R_A(t_0,t)^T\right) = \left(-R_A(t_0,t) \cdot A(t)\right)^T$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R_A(t_0,t)^T = -A(t)^T \cdot R_A(t_0,t)^T$$

Ainsi, $R_A(t_0,t)^T$ est la résolvante de $z' = -A(t)^T z$

car $R_A(t_0,t_0)^T = I_d^T = I_d$

2) Dans cette équation on choisit $A(t) = \begin{pmatrix} 2t+\frac{1}{t} & 0 & \frac{1}{t}-t \\ t-\frac{1}{t} & 3t & t-\frac{1}{t} \\ \frac{2}{t}-2t & 0 & \frac{2}{t}+t \end{pmatrix}$

Montrer que $A(t)$ possède une base de vecteurs propres indépendante de t.

En déduire la résolvante $R(t, t_0)$

$$P_{A(t)}(\lambda) = \det(A(t)-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2t+\frac{1}{t}-\lambda & 0 & \frac{1}{t}-t \\ t-\frac{1}{t} & 3t-\lambda & t-\frac{1}{t} \\ \frac{2}{t}-2t & 0 & \frac{2}{t}+t-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3t-\lambda)\begin{vmatrix} 2t+\frac{1}{t}-\lambda & \frac{1}{t}-t \\ \frac{2}{t}-2t & \frac{2}{t}+t-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3t-\lambda)\left[\left(2t+\frac{1}{t}-\lambda\right)\left(\frac{2}{t}+t-\lambda\right) - \left(\frac{2}{t}-2t\right)\left(\frac{1}{t}-t\right) \right]$$

$$= (3t-\lambda)\left[4+2t^2-2\lambda t+\frac{2}{t^2}+1-\frac{\lambda}{t}-\frac{2\lambda}{t}-\lambda t+\lambda^2 - \left(\frac{2}{t^2}-2-2+2t^2\right)\right]$$

$$= (3t-\lambda)\left[4+\cancel{2t^2}-2\lambda t+\cancel{\frac{2}{t^2}}+1-\frac{\lambda}{t}-\frac{2\lambda}{t}-\lambda t+\lambda^2-\cancel{\frac{2}{t^2}}+4-\cancel{2t^2}\right]$$

$$= (3t-\lambda)\left[\lambda^2 - \left(2t+\frac{3}{t}+t\right)\lambda + 9\right]$$

$$= (3t-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\left(t+\frac{1}{t}\right)\lambda + 9\right]$$

$\lambda^2 - 3(t+\frac{1}{t}) + 9$ $\qquad$ $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-3(t+\frac{1}{t})\right)^2 - 4 \cdot 9$

$$= 9\left(t^2 + 2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 - 4\right)$$

$$= 9\left(t^2 - 2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2\right)$$

$$= 9\left(t - \frac{1}{t}\right)^2$$

donc

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3(t+\frac{1}{t}) - \sqrt{9(t-\frac{1}{t})^2}}{2} = \frac{3t + \frac{3}{t} - 3t + \frac{3}{t}}{2} = \frac{6}{2t} = \frac{3}{t}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3t + \frac{3}{t} + \sqrt{9(t-\frac{1}{t})^2}}{2} = \frac{3t + \frac{3}{t} + 3t - \frac{3}{t}}{2} = \frac{6t}{2} = 3t$$

Ainsi $\quad \lambda^2 - 3(t+\frac{1}{t}) + 9 = (\lambda - \frac{3}{t})(\lambda - 3t)$

Donc $\quad P_{A(t)}(\lambda) = (3t - \lambda)(\lambda - 3t)(\lambda - \frac{3}{t})$

$$= -(\lambda - 3t)^2(\lambda - \frac{3}{t})$$

$Sp(A(t)) = \{3t, \frac{3}{t}\}$

$\begin{cases} 3t \text{ est une valeur propre de multiplicité } 2 \\ \frac{3}{t} \text{ est une valeur propre de multiplicité } 1 \end{cases}$

$A(t)$ diagonalisable $\iff \dim\left(E_{3t}(A(t))\right) = 2$

$\iff \dim\left(\mathrm{Ker}(A - 3tI)\right) = 2$

$\iff rg(A - 3tI) = 1$

théorème du rang

$(A - 3tI)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - t & 0 & \frac{1}{t} - t \\ t - \frac{1}{t} & 0 & t - \frac{1}{t} \\ 2(\frac{1}{t} - t) & 0 & 2(\frac{1}{t} - t) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - t & 0 & \frac{1}{t} - t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $rg(A + 3tI) = 1$

et A est diagonalisable

Soit $E_{3t} = \mathrm{Ker}\,(A - 3tI)$ le sous espace propre associé à $3t$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_3(t) \iff (A - 3tI)X = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 2t + \frac{1}{t} - 3t & 0 & \frac{1}{t} - t \\ t - \frac{1}{t} & 0 & t - \frac{1}{t} \\ \frac{2}{t} - 2t & 0 & \frac{2}{t} + t - 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \left(-t + \frac{1}{t}\right) x_1 + \left(\frac{1}{t} - t\right) x_3 = 0 \\ \left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 + \left(t - \frac{1}{t}\right) x_3 = 0 \\ \left(\frac{2}{t} - 2t\right) x_1 + \left(-2t + \frac{2}{t}\right) x_3 = 0 \end{cases} \iff \left\{ x_3 = -x_1 \right.$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_1$

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ -X_1 \end{pmatrix} = X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_3(t) = \mathrm{vect}\{(1,0,-1), (0,1,0)\}$

On complète le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec un autre vecteur non colinéaire de telle sorte à former une base (théorème de la base incomplète)

On choisit $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = 0 \iff \alpha = \beta = 0$

donc les vecteurs sont non colinéaires

Finalement, $E_{3t} = \mathrm{Ker}\,(A - 3tI) = \mathrm{vect}\,\{(1,0,-1), (0,1,0)\}$

et $\dim(E_{3t}) = 2 =$ multiplicité de $3t$.

Soit $E_{3/t} = \mathrm{Ker}\left(A - \frac{3}{t}I\right)$ le sous-espace propre associé à $\frac{3}{t}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_{3/t} \iff \left(A - \frac{3}{t}I\right)X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2t + \frac{1}{t} - \frac{3}{t} & 0 & \frac{1}{t} - t \\ t - \frac{1}{t} & 3t - \frac{3}{t} & t - \frac{1}{t} \\ \frac{2}{t} - 2t & 0 & \frac{2}{t} + t - \frac{3}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2\left(t - \frac{1}{t}\right)x_1 + \left(\frac{1}{t} - t\right)x_3 = 0 \\ \left(t - \frac{1}{t}\right)x_1 + 3\left(t - \frac{1}{t}\right)x_2 + \left(t - \frac{1}{t}\right)x_3 = 0 \\ 2\left(\frac{1}{t} - t\right)x_1 + \left(t - \frac{1}{t}\right)x_3 = 0 \end{cases} \iff -2\left(t - \frac{1}{t}\right)x_1 + \left(t - \frac{1}{t}\right)x_3 = 0$$

$$\iff \begin{cases} x_3 = +2x_1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

donc $v_3 = (1, -1, 2)$

Alors $E_{3/t} = \mathrm{Ker}\left(A - \frac{3}{t}I\right) = \mathrm{vect}\{(1, -1, 2)\}$

et $\dim(E_{3/t}) = 1 =$ multiplicité de $3/t$

La matrice $A(t)$ est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

On a $A(t) = P \cdot D(t) \cdot P^{-1}$ où

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \qquad D(t) = \begin{pmatrix} 3t & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{t} \end{pmatrix}$$

Calcul de P^{-1} : $\begin{cases} v_1 = e_1 - e_3 \\ v_2 = e_2 \\ v_3 = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = e_1 - e_3 \\ v_2 = e_2 \\ v_3 + v_2 = e_1 - 2e_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 - v_3 = e_3 \\ v_2 = e_2 \\ v_3 + v_2 + 2(v_1 - v_2 - v_3) = e_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 2v_1 - v_2 - v_3 \\ e_2 = v_2 \\ e_3 = v_1 - v_2 - v_3 \end{cases}$

$$P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

Ce qui est important ici et exceptionnel est que la matrice de passage P ne dépend pas de t. Ainsi si $x(t)$ est solution de $x' = A(t)x$ alors la fonction $y(t) = P^{-1}x(t)$ satisfait $y'(t) = D(t)\,y(t)$

car $x'(t) = A(t)\,x(t) \Leftrightarrow x'(t) = P \cdot D(t)\, P^{-1}x(t)$

$\Leftrightarrow P^{-1}x'(t) = D(t) \cdot y(t)$

$\Leftrightarrow y'(t) = D(t)\, y(t)$

Soit $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ on a : $Y'(t) = D(t) \cdot Y(t) \iff \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} y_1'(t) = 3t\, y_1(t) \\ y_2'(t) = 3t\, y_2(t) \\ y_3'(t) = \frac{3}{t}\, y_3(t) \end{cases}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = 3t\, y_1$$

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{y_1} = 3t\,dt$$

$$\Rightarrow d\ln(y_1) = 3t\,dt$$

$$\Rightarrow \ln(y_1) = \frac{3}{2}t^2 + c_1$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{\frac{3}{2}t^2 + c} = e^{\frac{3}{2}t^2} \cdot e^{c_1} = C \cdot e^{\frac{3}{2}t^2}$$

Conditions initiales :

$y(t_0) = y_0$

$\Rightarrow C \cdot e^{\frac{3}{2}t_0^2} = y_0$

$\Rightarrow C = y_0 \cdot e^{-\frac{3}{2}t_0^2}$

Finalement, $\begin{cases} y_1(t) = y_1(t_0)\, e^{\frac{3}{2}(t^2 - t_0^2)} \\ y_2(t) = y_2(t_0) \cdot e^{\frac{3}{2}(t^2 - t_0^2)} \end{cases}$ et de même

$$\frac{dy_3}{dt} = \frac{3}{t} y_3 \Rightarrow \frac{dy_3}{y_3} = \frac{3}{t}dt \Rightarrow d\ln(y_3) = 3\frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \ln(y_3) = 3\ln(t) + c_1 \Rightarrow y_3 = e^{3\ln(t) + c_1}$$

$$\Rightarrow y_3 = e^{\ln(t^3)} \cdot e^{c_1} = C \cdot t^3$$

Conditions initiales : $y_3(t_0) = C\, t_0^3 \Rightarrow C = \frac{y_3(t_0)}{t_0^3}$

Finalement, $y_3(t) = y_3(t_0) \cdot \left(\frac{t}{t_0}\right)^3$

Puisque $\quad X'(t) = A(t)\, X(t) \quad$ et que $\quad Y(t) = P^{-1} X(t)$

$$X'(t) = P \cdot D(t)\, P^{-1} X(t)$$

$$X'(t) = P\, D(t)\, Y(t)$$

$$P^{-1} X'(t) = D(t)\, Y(t)$$

$$Y'(t) = D(t)\, Y(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

On a $\quad Y(t) = R_{D(t)}(t, t_0)\, Y(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \cdot e^{3/2 (t^2 - t_0^2)} \\ y_2(t_0)\, e^{3/2 (t^2 - t_0^2)} \\ y_3(t_0) \left(\frac{t}{t_0}\right)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3/2 (t^2 - t_0^2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3/2 (t^2 - t_0^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{t}{t_0}\right)^3 \end{pmatrix} \cdot Y(t_0)$

$$\Leftrightarrow P^{-1} X(t) = R_{D(t)}(t, t_0) \cdot P^{-1} X(t_0)$$

$$\Leftrightarrow X(t) = \underbrace{P\, R_{D(t)}(t, t_0)\, P^{-1}}_{R_{A(t)}(t, t_0)} X(t_0)$$

En resumé, on sait ~~que~~ d'une part que $\begin{cases} x(t) = R(t, t_0)\, x(t_0) \\ x(t) = P y(t) \Rightarrow y(t_0) = P^{-1} x(t_0) \end{cases}$

donc que $\quad y(t) = R_{D(t)}(t, t_0)\, y(t_0)$

$\Rightarrow \quad y(t) = R_{D(t)}(t, t_0)\, P^{-1} x(t_0) \quad \Rightarrow \quad P^{-1} x(t) = R_{D(t)}(t, t_0)\, P^{-1} x(t_0)$

$\quad \Rightarrow \quad x(t) = P\, R_{D(t)}(t, t_0)\, P^{-1} x(t_0)$

Ce qui donne finalement

$$R_{A(t)}(t, t_0) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{3/2 (t^2 - t_0^2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3/2 (t^2 - t_0^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{t}{t_0}\right)^3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

3) Résoudre à l'aide des questions précédentes le système

$$\begin{cases} x_1' = -\left(2t+\frac{1}{t}\right)x_1 + \left(\frac{1}{t}-t\right)x_2 + 2\left(t-\frac{1}{t}\right)x_3 \\ x_2' = -3t\, x_2 \\ x_3' = \left(t-\frac{1}{t}\right)x_1 + \left(\frac{1}{t}-t\right)x_2 - \left(\frac{2}{t}+t\right)x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(2t+\frac{1}{t}\right) & \left(\frac{1}{t}-t\right) & 2\left(t-\frac{1}{t}\right) \\ 0 & -3t & 0 \\ \left(t-\frac{1}{t}\right) & \left(\frac{1}{t}-t\right) & -\left(\frac{2}{t}+t\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X' = B(t)\, X$$

où $B(t) = -\begin{pmatrix} \left(2t+\frac{1}{t}\right) & \left(t-\frac{1}{t}\right) & \frac{2}{t}-2t \\ 0 & 3t & 0 \\ \left(\frac{1}{t}-t\right) & \left(t-\frac{1}{t}\right) & \frac{2}{t}+t \end{pmatrix}$

$$= -\begin{pmatrix} 2t+\frac{1}{t} & 0 & \frac{1}{t}-t \\ t-\frac{1}{t} & 3t & t-\frac{1}{t} \\ \frac{2}{t}-2t & 0 & \frac{2}{t}+t \end{pmatrix}^T$$

$$= -\, A(t)^T$$

donc l'équation s'écrit $X'(t) = -A(t)^T \cdot X(t)$

La solution générale s'obtient à partir de la résolvante $R(t,t_0)$ de la question 2. par $X(t) = R(t_0,t)^T \cdot X(t_0)$

$$X(t) = (P^{-1})^T \cdot \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2}(t_0^2-t^2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2}(t_0^2-t^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{t_0}{t}\right)^3 \end{pmatrix} P^T \cdot X(t_0)$$

Exercice 5 : Equation stationnaire de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_E}{dx^2}(x) + V(x)\cdot\psi_E(x) = E\cdot\psi_E(x) \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

où $\begin{cases} \text{le potentiel } V(x) \text{ est } T\text{-periodique} \\ \text{la fonction d'onde } \psi_E \text{ d'un électron d'énergie } E \text{ est à valeurs dans } \mathbb{C}. \end{cases}$

• Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe des bandes de valeurs de l'énergie E pour lesquelles l'équation Schrödinger n'admet pas de solutions bornées, c-à-d qu'il ne peut y avoir d'électrons dans ces états d'énergie.

Soient $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique. E un paramètre réel.

On considère l'équa diff scalaire :

$$-\varphi''(t) + V(t)\cdot\varphi(t) = E\cdot\varphi(t) \quad : (S)$$

1) Ecrire l'équation (S) comme une équa diff linéaire du 1er ordre, dont la resolvante sera notée $R_E(t,s)$.

Posons $X=\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix}$, l'équation s'écrit donc

$$X'(t) = \begin{pmatrix}\varphi'(t)\\ \varphi''(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ V(t)-E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{pmatrix} = A_E(t)\cdot X(t)$$

où $A_E(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ V(t)-E & 0\end{pmatrix}$

2) Montrer que $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$, $\det(R_E(t,s)) = 1$

On a $A_E(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V(t)-E & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{trace}(A_E(t)) = 0$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, Notons $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$M \longmapsto f(M) = \det(M)$

$f(R_E(t,t_0)) = \det(R_E(t,t_0))$

théorème : $Df(M) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$H \longmapsto Df(M).H = \mathrm{trace}({}^t\mathrm{com}(M).H)$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

Soit $t \in \mathbb{R}$ alors

$$\det(I_n + tM) = f(I_n + tM) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i)$$

$$= (1+t\lambda_1).(1+t\lambda_2) \cdot \dots (1+t\lambda_n)$$

$$= (1 + t\lambda_2 + t\lambda_1 + t^2\lambda_1\lambda_2).(1+t\lambda_3) \dots (1+t\lambda_n)$$

$$= (1 + t\lambda_1 + t\lambda_2 + t\lambda_3 + t^2\lambda_2\lambda_3 + t^2\lambda_3\lambda_1 + t^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3) \dots (1+t\lambda_n)$$

$$= 1 + t(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) + O(t^2)$$

$$= 1 + t.\mathrm{Trace}(M) + o(t^2)$$

$$= f(I_n) + t.L_f(M) + o(|t|)$$

Ainsi $Df(I_n).M = \mathrm{Trace}(M)$

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\det(M+H) = f(M+H) = \det\left(M\left(I_n + M^{-1}H\right)\right)$$

$$= \det(M)\cdot\det\left(I_n + M^{-1}H\right)$$

$$= \det(M)\left(1 + \mathrm{Trace}(M^{-1}H) + o(\|H\|)\right)$$

$$= \det(M) + \det(M)\cdot\mathrm{Trace}(M^{-1}H) + o(\|H\|)$$

$$= \det(M) + \mathrm{Trace}\left(\det(M)\cdot M^{-1}\cdot H\right) + o(\|H\|)$$

$$= \det(M) + \mathrm{Trace}\left({}^t\mathrm{com}(M)\cdot H\right) + o(\|H\|)$$

car $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}\,{}^t\mathrm{com}(M) \iff {}^t\mathrm{com}(M) = \det(M)\cdot M^{-1}$

donc $f(M+H) = f(M) + L_f(H) + o(\|H\|)$

Ainsi, $Df(M) : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$H \longmapsto Df(M)\cdot H = \mathrm{Trace}\left({}^t\mathrm{com}(M)\cdot H\right)$$

De plus, $M \mapsto {}^t\mathrm{com}(M)$ est une application continue

Donc, $M \mapsto \mathrm{Trace}\left({}^t\mathrm{com}(M)\right)$ est continue comme composée d'applications continues.

Donc $D_M \det : H \mapsto \mathrm{Trace}\left({}^t\mathrm{com}(M)\cdot H\right)$ est continue.

Les deux fonctions coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$ qui est dense dans $M_n(\mathbb{R})$

On a donc : $D_M \det(X) = \mathrm{trace}\left({}^t\mathrm{com}(M)\cdot X\right)$, $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$

Ainsi on note $g(t) = \det\left(R_A(t,t_0)\right)$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = D R_A(t,t_0) \cdot \det\left(R_A'(t,t_0)\right)$$

$$= \mathrm{Trace}\left({}^t\mathrm{com}\left(R_A(t,t_0)\right) \cdot R_A'(t,t_0)\right)$$

$$= \mathrm{Trace}\left({}^t\mathrm{com}\left(R_A(t,t_0)\right) \cdot A(t) \cdot R_A(t,t_0)\right)$$

$$= \mathrm{Trace}\left(A(t) \cdot \underbrace{R_A(t,t_0) \cdot {}^t\mathrm{com}\left(R_A(t,t_0)\right)}\right)$$

$$= \mathrm{Trace}\left(A(t) \cdot \det\left(R_A(t,t_0)\right)\right)$$

$$= \mathrm{Trace}\left(A(t)\right) \cdot \det\left(R_A(t,t_0)\right)$$

Si les matrices $R_A(t,t_0)$ et ${}^t\mathrm{com}\left(R_A(t,t_0)\right)$ commuttent

car le déterminant est constant

Car $\quad M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\, {}^t\mathrm{com}(M) \iff \det(M) = M \cdot {}^t\mathrm{com}(M)$

Ainsi, $\quad g'(t) = \mathrm{Trace}(A(t)) \cdot g(t)$

$$\iff \left(\det R_A(t,t_0)\right)' = \mathrm{trace}\, A(t) \cdot \det R_A(t,t_0)$$

$$\Rightarrow \quad g(t) = g(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Trace}(A(s))\, ds\right)$$

car $\quad \dfrac{dg}{dt} = tr(A(t)) \cdot g \iff \dfrac{dg}{g} = tr(A(t))\, dt$

$$\iff d\ln(g) = tr(A(t))\, dt \iff \ln(g) = \int tr(A(t))\,dt + c_1$$

$$\iff g = \exp\left(\int tr(A(t))\,dt + c_1\right) = \exp(c_1) \cdot \exp\left(\int tr(A(t))\,dt\right)$$

$$\iff g(t) = g(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{trace}(A(t))\, ds\right)$$

donc $g(t) = g(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \text{trace}(A(s)) . ds \right)$

pour $g(t_0) = 1$, on a

$$\det\left(R_A(t, t_0)\right) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \text{trace}(A(s))\, ds \right)$$

//

Comme $A_E(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V(t) - E & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{trace}\left(A_E(t)\right) = 0 \quad , \forall t \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \det\left(R_{A_E(t)}(t, s)\right) = \exp\left(\int_{s}^{t} \text{trace}\left(A_E(t)\right) ds \right)$

$= \exp(0) = 1$

$\rightarrow \det\left(R_E(t,s)\right) = 1 \qquad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2$

Analogue avec $\det\left(e^A\right) = e^{\text{trace}(A)}$

car $\det\left(e^A\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{\text{trace}(A)}$

3) Montrer que $R_E(t+T, s+T) = R_E(t,s)$

Comme V est T-periodique, i.e. $V(t) = V(t+T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

alors $A_E(t+T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V(t+T)\,E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V(t)-E & 0 \end{pmatrix} = A_E(t)$

donc $A_E(t)$ est T-périodique

On calcule: $\frac{d}{dt} \underbrace{R_E(t+T, s+T)}_{x(t)} = A_E(t+T) \cdot R_E(t+T, s+T)$

$= A_E(t) \cdot \underbrace{R_E(t+T, s+T)}_{x(t)}$

$=$

donc $\overset{x(t)}{\overset{\shortparallel}{R_E(t+T, s+T)}} = R_E(t,s) \cdot \underbrace{R_E(s,s)}_{x(0)}$ or $R_E(s,s) = Id$

Ainsi $R_E(t,s) = R_E(t+T, s+T)$

Ok, on applique la propriété de la resolvante lorsqu'on a une matrice $A()$ T-periodique.

4) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$R_E(t,0) = R_E(t-mT,0)\, R_E(T,0)^m$$

On a : $R_E(t,0) = R_E(t,T) \cdot R_E(T,0)$ relation de Chasles

$= R_E(t-T,0)\, R_E(T,0)$ car $R_E(t,s)$ est T-periodique (ie $R_E(t+T,s+T) = R_E(t,s)$)

$= R_E(t-2T,-T)\, R_E(T,0)$

$\swarrow$ Chasles

$= R_E(t-2T,0)\, R_E(0,-T) \cdot R_E(T,0)$

$\swarrow$ T-périodique

$= R_E(t-2T,0)\, R_E(T,0) \cdot R_E(T,0)$

$= R_E(t-2T,0)\, R_E(T,0)^2$

En itérant on obtient : $R_E(t,0) = R_E(t-mT,0) \cdot R_E(T,0)^m$ $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$R_E(t,0) = R_E(t-mT,0)\, R_E(T,0)^m$$
$$= R_E(t-(m+1)T,-T)\, R_E(T,0)^m$$
$$= R_E(t-(m+1)T,0)\, R_E(0,-T)\, R_E(T,0)^m$$
$$= R_E(t-(m+1)T,0)\, R_E(T,0)\, R_E(T,0)^m$$
$$= R_E(t-(m+1)T,0)\, R_E(T,0)^{m+1}$$

5) Montrer qu'il existe une solution bornée et non nulle $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ssi il existe $v \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la suite $R_E(T,0)^n v$ est bornée quand $n \longrightarrow \pm\infty$.

. Supposons d'abord qu'il existe une solution bornée non nulle $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$

Posons $X(0) = v \neq 0$.

alors, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $X(t) = R_E(t,0)\, X(0)$

$$= R_E(t - nT, 0)\, R_E(T,0)^n \cdot v$$

Puisque $X(t)$ est bornée

$\Rightarrow \exists c > 0, \forall n \; \| X(t) \| < c$

$\Rightarrow \exists c > 0, \forall n \; \| R_E(T,0)^n v = R_E(nT,0)\, v = X(nt) \| < c$

donc $\exists v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ tq la suite $R_E(T,0)^n$ est bornée en $\pm$

Reciproquement, supposons qu'il existe $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ tel que la suite $R_E(T,0)^n \cdot v$ est bornée, c-à-d qu'il existe $c > 0$ tellque $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a $\| R_E(T,0)^n \cdot v \| \leq c$.

Considérons la fonction $t \mapsto X(t) = R_E(t,0) \cdot v$ qui est une solution non nulle de l'équation.

On utilise la formule $X(t) = R_E(t - nT, 0)\, R_E(T,0)^n \cdot v$

pour $v = \left[\frac{t}{T}\right] \in \mathbb{Z}$ partie entière.