Feuille 3 Exercice 8 :

- $\ddot{x}(t) + x(t) = \mu_0 \left((1+\cos t)\sin(x(t)) + \cos(2t) \right)$

- $\mu \ll 1$

1) Forme matricielle

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ -x(t) + \mu_0 \left((1+\cos t)\sin(x(t)) + \cos(2t) \right) \end{pmatrix}$$

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 (1+\cos t)\sin(x(t)) + \cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{X}(t) = A \cdot X(t) + \mu_0 F(X(t), t)$$

où $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \right) \longmapsto \left(0, \left((1+\cos t)\sin(x) + \cos(2t) \right) \right)$$

On a $\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\| \dot{X}(t) \| = \| AX + \mu . F(X,t) \| \leq \|A\| \|X\| + 3|\mu|$$

Croissance affine quand $\|X\| \to +\infty$. La sol est définie pour tout temps $t \in \mathbb{R}$

f est continue comme produit et somme de fonctions continues donc loc^t lip en $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ unicité de la solution

Si on avait global lip.

c-à-d : $\|f(t,x) - f(t,\bar{x})\| \leq K \|x - \bar{x}\|$

$\Rightarrow \|f(t,x) - f(t,0)\| \leq K \|x - 0\|$

$\Rightarrow \|f(t,x)\| \leq K \|x\| + \|f(t,0)\|$

donc : global lip $\Rightarrow$ croissance affine à l'infini

Rappel Cauchy Lipschitz $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = v \end{cases}$ (P.C)

$\Leftrightarrow x(t) = v + \int_0^t f(s, x(s)) ds$

$\Leftrightarrow x(t) = \phi(x(\cdot))(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(\cdot) = \Phi(x(\cdot))$

$x(\cdot) \in \mathcal{E} = \{ x :]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}^4 \}$
$\mathcal{C}^0$

3) $X_{\mu,v}(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

solution de $\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + \underline{\underline{\mu}} F(X(t), t) \\ X(0) = \underline{\underline{v}} \end{cases}$

Montrons que $X_{\mu,v}(\cdot)$ 2π-périodique

$$\phi \quad \Updownarrow$$

$$X_{\mu,v}(t+2\pi) - X_{\mu,v}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad R(t+2\pi, 0) X(0) + \int_0^{t+2\pi} R(t,s) \mu \cdot F(X(t), t)\, ds$$

$$= -R(t,0) X(0) + \int_0^t R(t,s) \mu \cdot F(X(t), t)\, ds$$

$$\Leftrightarrow \int_t^{t+2\pi} R(t,s) \mu \cdot F(X(t), t)\, ds = 0$$

On a $\displaystyle\int_t^{t+2\pi} e^{(t-s)A} \mu F(X(t), t)\, ds = 0$

$$\Leftrightarrow e^{tA} \int_t^{t+2\pi} e^{-sA} \mu F(X(t), t)\, ds = 0 \quad \forall t$$

en particulier pour $t=0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-sA} \mu F(X_{\mu,v}(s), s)\, ds = 0$

Posons $g(s) = e^{-sA} F(X_{\mu,v}(s), s)$: 2π - périodique

$$\forall t \int_t^{t+2\pi} g(s)\,ds = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} g(s)\,ds = 0$$

$$G(t+2\pi) - G(t) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} g(s)\,ds = 0$$

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds$$

$$\frac{d}{dt}\left(G(t+2\pi) - G(t) \right) = g(t+2\pi) - g(t) = 0$$

$$\Rightarrow G(t+2\pi) - G(t) = \text{costante} = G(2\pi) - G(0) = \int_0^{2\pi} g(s)\,ds$$

$X_{\mu,v}()$ 2π périodique $\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{-sA} F(X_{\mu,v}(s), s)\,ds = 0$

on a alors $X_{\mu,v}(2\pi) = X_{\mu,v}(0)$

$$\Rightarrow \phi^{t,0}\left(X_{\mu,v}(2\pi) \right) = \phi^{t,0}\left(X_{\mu,v}(0) \right)$$ car $t \mapsto X(t,\cdot)$ est 2π-périodique

$$\Rightarrow \phi^{t+2\pi, 2\pi}\left(X_{\mu,v}(2\pi) \right) = \phi^{t,0}\left(X_{\mu,v}(0) \right)$$

$$\Rightarrow X_{\mu,v}(t+2\pi) = X_{\mu,v}(t)$$

$3^{\text{ème}}$ façon : $\begin{cases} \cdot\ X_{\mu,v}(t) \\ \cdot\ Y(t) = X_{\mu,v}(t+2\pi) \end{cases}$

$Y(\cdot)$ et $X_{\mu,v}(\cdot)$ vérifient la même EDO et ont même condition initiale en $t=0$ $\quad Y(0) = X_{\mu,v}(2\pi) = \mu_{\mu,v}(0)$

donc unicité $\Rightarrow Y(t) = X_{\mu,v}(t)$, $\forall t$

i.e. $X_{\mu,v}(\cdot)$ est 2π-periodique

But : Demontrer que pour $\mu \ll 1$ fixé

il existe $v = v(\mu)$ tq $\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + \mu F(X(t), t) \\ X(0) = v(\mu) \end{cases}$

$X_{\mu, v(\mu)}(\cdot)$ sol 2π-periodique

On a $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-sA} F(X_{\mu,v}(s), s)\, ds = 0 \qquad (1)$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{-sA} F\left(e^{tA} v + \text{petit}, s\right) ds = 0$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{-sA} F\left(e^{tA} v, s\right) + \frac{\partial}{\partial v} F\left(e^{tA} v, s\right) \cdot \text{petit}\, ds + t.o.s = 0$

un tel v pour convenir doit vérifier

$$\int_0^{2\pi} e^{-sA} F(\underbrace{e^{sA}}v, s)\,ds \simeq 0$$

$$\begin{pmatrix} \cos(s) v_1 + \sin(s) v_2 \\ -\sin(s) v_1 + \cos(s) v_2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s & +\sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (1+\cos)\sin(\cos(s) v_1 + \sin(s) v_2) + \cos(2s) \end{pmatrix} ds$$

Notons $H(\mu, v) = \int_0^{2\pi} e^{-sA} F(X_{\mu,v}(s), s)\,ds$ C^k par rapport aux paramètres μ et v

$$H(0,0) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2s) \end{pmatrix} ds = 0$$

$\Rightarrow \exists\, v : \mu \longrightarrow v(\mu)$ C^1

$H(\mu, v(\mu)) = 0$ théorème des fonctions implicites

différentiable

$\hookrightarrow$ théorème de dépendance par rapport à la condition initiale (pour v)

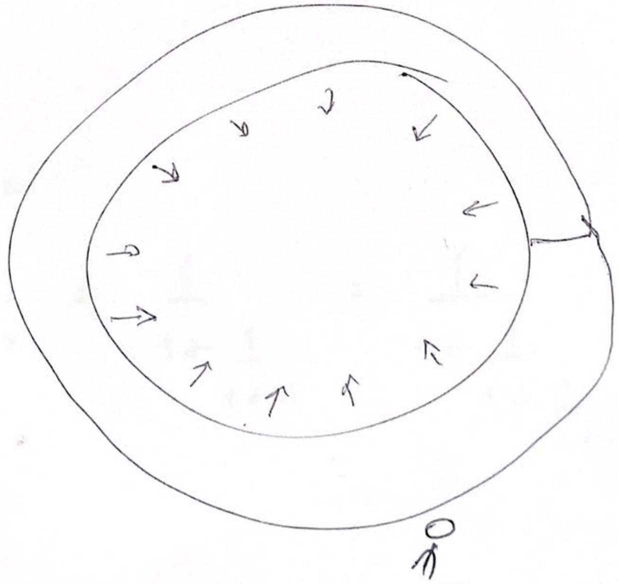
et par rapport à un paramètre (μ)

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} = Rot(-\omega t)$$

$$\phi(y) = y_0 + \int_0^t f(t, y(t))\,dt$$

$\frac{1+|\varepsilon|}{\mu} \le R$

$\phi^{t_1+T,\, t_2+T} = \phi^{t_1, t_2}$ $\forall t \geq 0$



$\exists\, t_* < \bar{t}$ tq $\forall t \in]t_*, \bar{t}[$ $y(t) \notin D((0,0), R)$

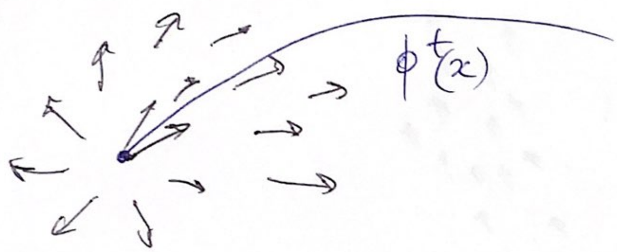
$$R(t,0) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensemble ω-limite :

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^1

Champ de vecteurs (complet) (i.e. $\forall t$ ϕ_X^t existe)

$$\mathcal{O}^+(x) = \{ \phi_X^t(x), \ t \geq 0 \}$$



$\omega(x)$ = ensemble des points d'accumulation de $\mathcal{O}^+(x)$

$\omega(x)$ = ensemble des limites de suite $\phi^{t_k}(x)$ lorsque $t_k \longrightarrow +\infty$

$$\omega(X) = \bigcup_{x \in \Omega} \omega(x)$$

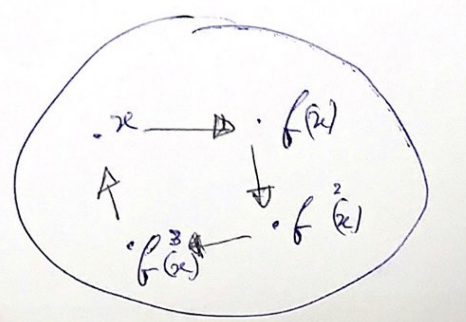
<u>Remarque</u> : Notion de systèmes dynamiques

X ensemble $\quad f : X \longrightarrow X$

"un ensemble X sur lequel agit une fonction f ?"

Dynamique $\quad \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} = f^n$

$$f = \phi^T \Rightarrow f^2 = \phi^T \circ \phi^T = \phi^{2T}$$



Comment se comportent les points de X par itération de la fct f.

Feuille 4 : $X(x,y) = (x^2+y^2-1, x)$ champ de vecteur

1) Déterminer les points d'équilibre (points singuliers) de X

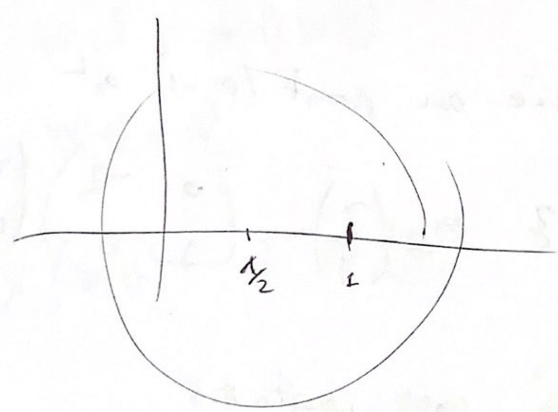
FAUX

$$x^2+y^2-1 = x$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)+y^2 = 1$$

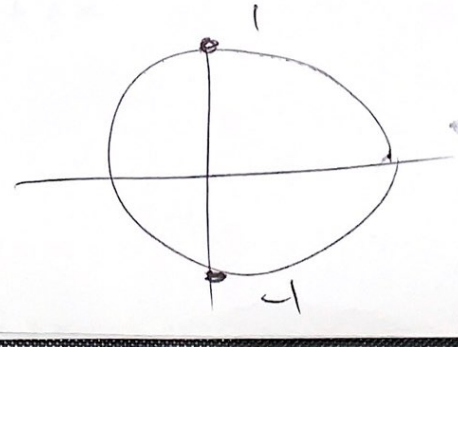
$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$



Trouver des points tq $X(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,-1)$ ou $(0,1)$



Portrait de phase de X (comment se comportent les orbites)

$$\mathrm{Jac}\, X(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = DX(x,y)$$

grad $(X(x,y))$??

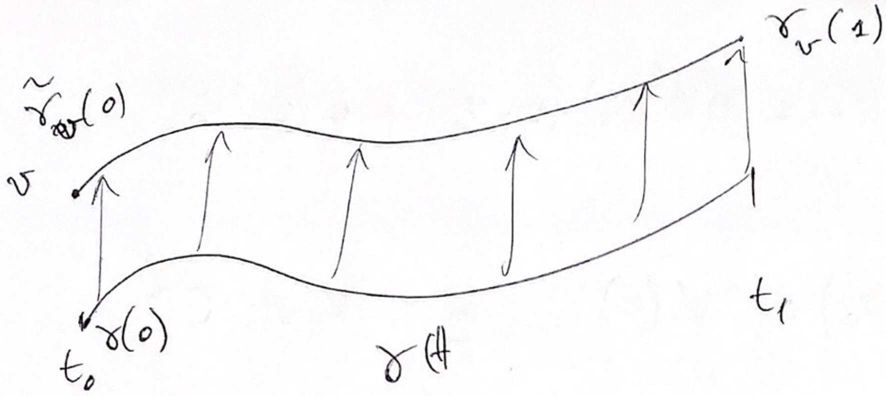
Notons $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

l'équation linéarisée au point $(0,-1)$ est

$$\dot{z} = DX(0,-1)\, z \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

EDO linéaire à coef constants

$$\rightarrow \quad z(t) = e^{tA} z(0) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$



$$V(t) = \tilde{\gamma}_v(t) - \gamma(t) \qquad \leadsto \quad V'(t) = A(t)\, V(t)$$

$$\tilde{\gamma}_v(t) = \tilde{\gamma}_0(t) + W(t)v + o(v)$$

où $\begin{cases} W'(t) = A(t)\, W(t) \\ W(0) = v \end{cases}$

$$A(t) = DX(\gamma(t)) \quad \in M_2(\mathbb{R})$$

d'où $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+\delta x)' = (x+\delta x)^2 + (y+\delta y)^2 - 1 \\ (y+\delta y)' = x + \delta x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' + (\delta x)' = x^2 + 2x\delta x + (\delta x)^2 + y^2 + 2y(\delta y) + (\delta y)^2 - 1 \\ y' + (\delta y)' = x + \delta x \end{cases}$$

$$\phi^t(v) = \phi^t(v_0) + D\phi^t(v_0)\cdot(v - v_0) + o(v - v_0)$$

<u>où</u> $o(v-v_0) = K(v)$ où K est C^k

<u>Eq linéarisé :</u> $\dot{z} = Mz$, $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$R(t,0) = e^{tM} = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{2}) & -\sqrt{2}\sin(t\sqrt{2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) & \cos(t\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$A = (0,-1)$

$$\Rightarrow \phi^t(A+v) = \phi^t(A) + D\phi^t(A)v + o(v)$$
$$= A + R(t,0)\cdot v + o(v)$$

<u>Car</u> le flot ϕ^t est un C^k-difféomorphisme

donc en particulier il est C^1

On peut donc faire un DL.

$$\phi^t \circ \phi^{-t} = I_d$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 2$

$\mathrm{trace}(A) = 0$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 0 + 2 = \lambda^2 + 2$$

$(-2)^k$

$(-1)^k (2)^k$

Cayley-Hamilton $P_A(A) = 0 \iff A^2 + 2I = 0$

$\iff A^2 = -2I$ $\quad (\sqrt{2})^{2k}$

$\iff A^{2k} = (-1)^k 2^k I$ $\quad (\sqrt{2})^{2k+1}$

$\iff A^{2k+1} = (-1)^k \frac{2^{k+1}}{\sqrt{2}} A$

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{2}t)^{2k}}{(2k)!} I + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{2}t)^{2k+1}}{(2k+1)!} A$$

$$= \cos(\sqrt{2}t)\, I + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)\, A$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & -\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

3) X est antisymétrique par rapport à (Oy)

$$\iff X\big(\sigma(x,y)\big) = -X(x,y)$$

où $\sigma : (x,y) \longmapsto (-x, y)$ symétrie $/ Oy$

$$\iff X(-x,y) = -X(x,y)$$

On a $X(-x,y) = \begin{pmatrix} (-x)^2+y^2-1 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ -x \end{pmatrix}$

Et $X(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ x \end{pmatrix}$

$$\sigma X = -X$$

$\phi^t(z) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. $\sigma\big(\phi^t(z)\big) = \big(-x(t), y(t)\big) = \big(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)\big)$

$\tilde{x}'(t) = -\ (\tilde{x}(t)^2 + \tilde{y}(t)^2 - 1)$

$\tilde{y}'(t) = -$

$$X(\sigma(x,y)) = X(-x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ -x \end{pmatrix}$$

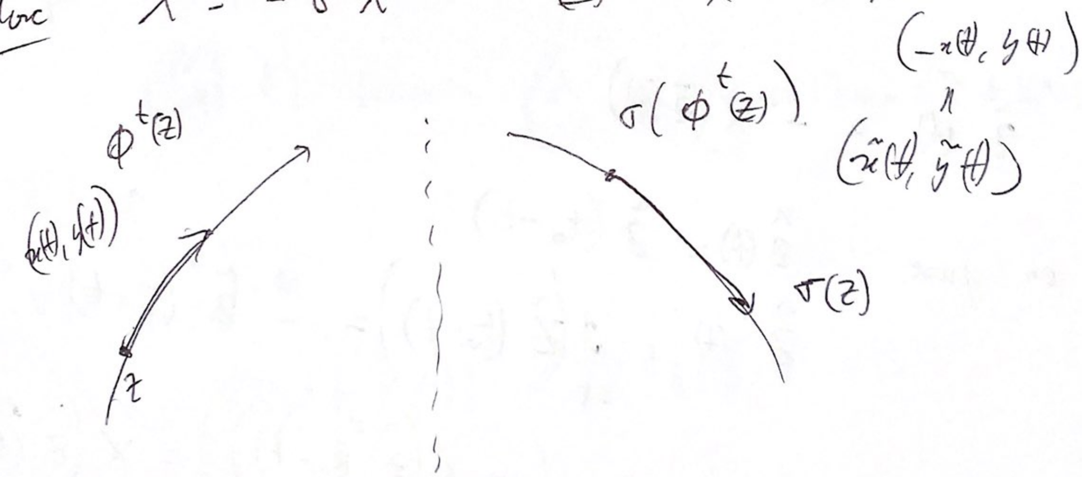
$$-\sigma(X(x,y)) = -\sigma\begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ -x \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} -(x^2+y^2-1) \\ -(-x) \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} -(x^2+y^2-1) \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{-}\, X(x,y) = \cancel{\begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ -x \end{pmatrix}}$$

donc $X = -\sigma X \iff -X = \sigma X$



$\sigma(x,y) = (-x,y)$

$\sigma^2(x,y) = \sigma(-x,y) = (x,y)$

$\Rightarrow \sigma^2 = I_d$

$\sigma = \phi^t \circ \sigma \circ \phi^t$

$\phi^{-t} = \sigma \circ \phi^t \circ \sigma$

$Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sol de $\begin{cases} \dot{x} = x^2+y^2-1 \\ \dot{y} = x \end{cases}$

$\tilde{Z}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \tilde{Z}'(t) = \begin{pmatrix} -\dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\tilde{x}(t)^2+\tilde{y}^2(t)-1) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\tilde{x}(t)^2+\tilde{y}(t)^2-1) \\ -\tilde{x}(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \tilde{Z}'(t) = -X(\tilde{Z}(t))$

Si on pose $\hat{Z}(t) = \tilde{Z}(t_0-t)$

$\hat{Z}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\tilde{Z}(t_0-t)\right) = -\tilde{Z}'(t_0-t)$

$= -\left(-X\left(\tilde{Z}(t_0-t)\right)\right) = X\left(\tilde{Z}(t_0-t)\right)$

$= X(\hat{Z}(t_0-t))$

$$\phi_X^{\,t}(\hat{z}(s)) = \hat{z}(t+s)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\phi^t(\tilde{z}(t_0-s)) = \tilde{z}(t_0-t-s)$$

$$\phi^t(\sigma(z(t_0-s))) = \sigma(z(t_0-t-s))$$

$$\phi^t \circ \sigma(z(t_0-s)) = \sigma \circ z(t_0-t-s)$$

$$= \sigma \circ \phi^{-t}(z(t_0-s))$$

$$\sigma^{-1} \circ \phi^t \circ \sigma$$

<u>on a</u> $z(t_0-s) = z(t_0-t-s)$

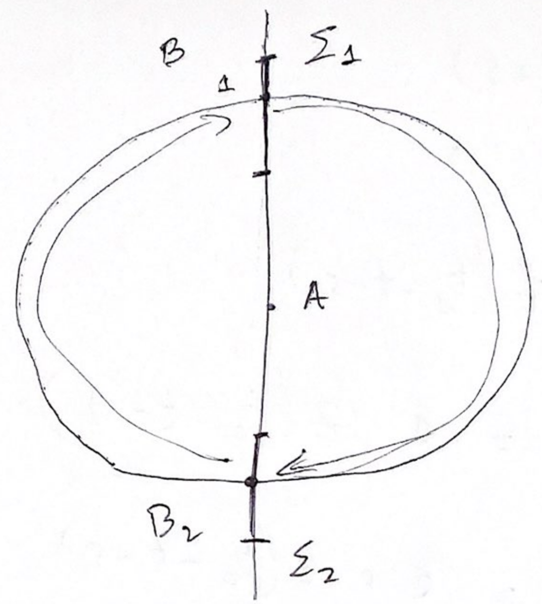
$$= \phi^t(z(t_0-s))$$

|

Lyapunov.

- Sur le bord du disque $= 0$
- A l'intérieure on a compacité

lemme des bouts



$P_{\Sigma_1 \to \Sigma_2}$ define au voisinage de B_1

$P_{\Sigma_1 \to \Sigma_2}(B_1) = B_2$

$P_{\Sigma_2 \to \Sigma_1}$ define au voisinage de B_2

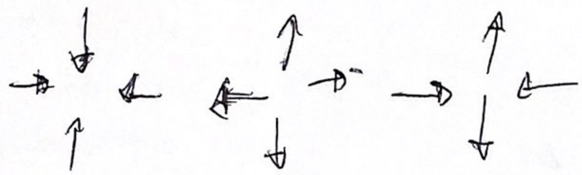
$P_{\Sigma_2 \to \Sigma_1}(B_2) = B_1$

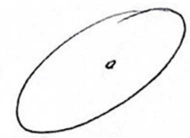
$P_{\Sigma_1}(B_1) = B_1$

$(\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$

les applications de Poincaré ainsi defines sont inverse l'une de l'autre du à l'antisymétrie

Puits sources selles elliptique :



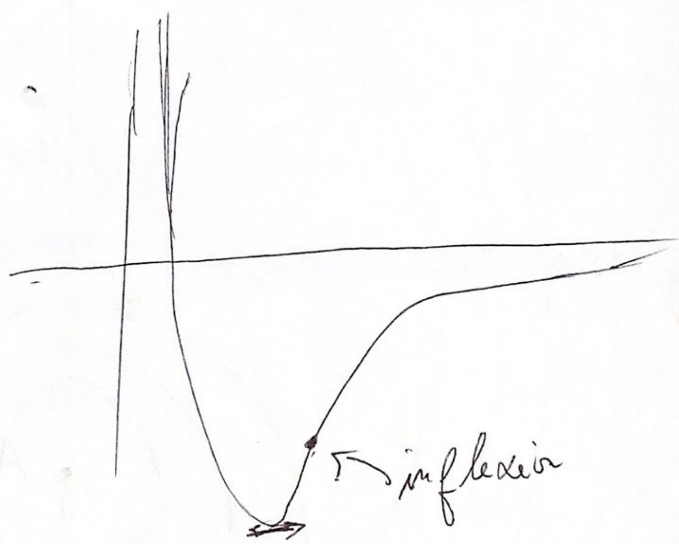


Pour les champs de vecteurs c'est facile

Pour les difféomorphismes sont plus compliqués

Analyse en 4 points

. asymptotes
. minim
. inflexion

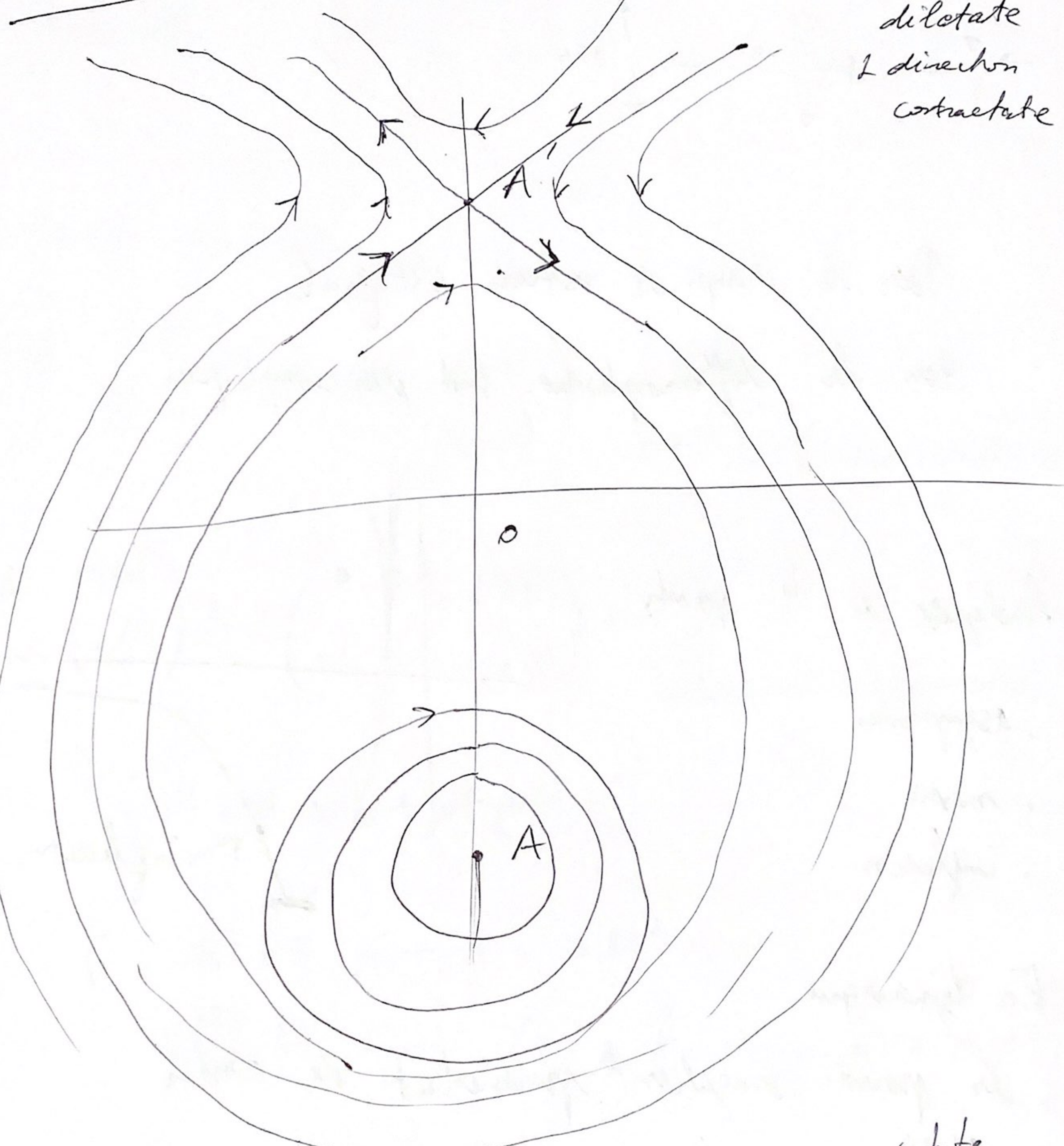


En dynamique

les points singuliers permettent de donner l'allure generale des solutions d'une équa diff.

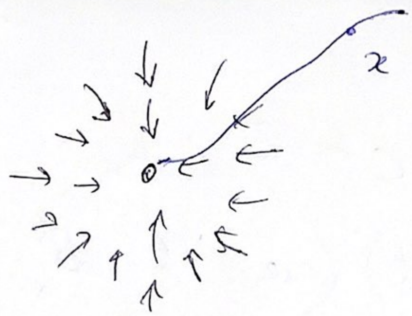
Finalement la dynamique des solutions est la suivante

A' hyperbolique
1 direction dilatate
1 direction contractate

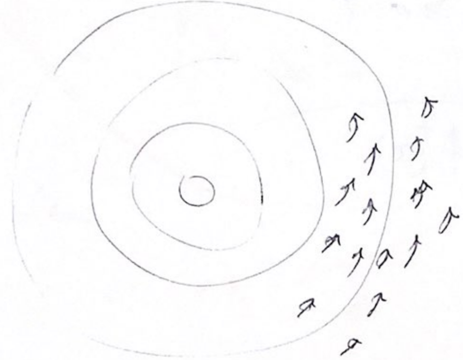


A orbites periodique

Ex



ici $\omega(x) = \{0\}$



Ici $X(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ càd $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \phi_X^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Rot(t) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\theta^t(x) = \{ \phi_X^t(x), \forall t \geq 0 \}$$

dans ce cas il vaut $\omega(x)$ = le cercle de centre 0
qui passe par x.