Vecteurs gaussiens

Exercice 1. (Voir cours) Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que $E(\|X\|_2^2) < +\infty$.
1) Rappeler les propriétés de la covariance de deux v.a.
2) Montrer que sa matrice de covariance Γ_X est semi-définie positive.
3) Soit X est un vecteur gaussien et notons M_X son espérance..

a) Montrer que ses composantes suivent des lois Normales.

b) Montrer que la réciproque est fausse. Pour celà considérer deux v.a. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = \varepsilon X$ où ε est une v.a. discrète indépendante de X et prend les valeurs -1 et $+1$ avec équiprobabilité.

c) Ecrire sa fonction caractéristique.

Exercice 2. (Voir cours) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que $X = {}^t(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien.
2. Écrire la densité et la fonction caractéristique du vecteur X.
3. On pose $Y = a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ et $Z = b_1X_1 + \dots + b_nX_n$ avec $a_i, b_i, m_i \in \mathbb{R}$. Trouver la loi du vecteur aléatoire (Y, Z)
4. Montrer que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes si et seulement si $a_1b_1 + \dots + a_nb_n = 0$.

Exercice 3. (Voir cours) Soit X un vecteur aléatoire gaussien centré et réduit : $X \sim \mathcal{N}_d(0, I)$ et A une matrice inversible, $b \in \mathbb{R}^d$.
1) Montrer que $Y = AX + b$ est un vecteur gaussien ayant une densité dans $\mathbb{R}^d$.Calculer cette densité. Exprimer celle-ci en fonction de la matrice $\Gamma = A.{}^tA$. Que représente cette matrice ?
2) Y a t-il une réciproque ?
3) Que peut-on dire lorsque A est une matrice $n \times d$?

Exercice 4. Soit Y un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma_Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
1) Ecrire la f.c. de Y.
2) Que dire de la loi jointe : a t-elle une densité ? si oui, l'ecrire.
3) Trouver une matrice réelle A telle que $Y = AX$ où $X \sim \mathcal{N}(0, D)$ où D est une matrice diagonale.
4) Traiter les questions 1) et 2) lorsque $\Gamma_Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ un vecteur guassien de matrice de covariance $\Gamma_Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On suppose que $\mathbb{E}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Trouver un vecteur $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ tels que les coordonnées de vecteur $Y = AX + b$ soient indépendantes et de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 6. Soient X, Y, Z trois v.a. indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
a) Quelle est la loi de $U = X + Y + Z$?
b) Montrer que U et $V = (X - Y, Y - Z, Z - X)$ sont indépendantes (Rappel ou exercice : si (X, Y, Z)est un vecteur gaussien, montrer que X est indép. de (Y, Z)ssi $Cov(X, Y) = Cov(x, Z) = 0$ ssi X et Y indép. et X et Z indép.).
c) Trouver la fonction caractéristique de $\Big(U, W = (X - Y)^2 + (Y - Z)^2 + (Z - X)^2\Big)$. Pour cela, procéder comme suit :
1. Ecrire $W =< \Gamma V_0, V_0 >$ où $V_0 \sim Gauss$
2. Diagonaliser Γ et montrer qu'il existe une constante c telle que e $W/c \sim \mathcal{X}^2(2)$.

Ex.5 Soit X un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance Γ. On suppose que Γ est inversible. Montrer que $\langle X, \Gamma^{-1}X\rangle \sim \chi^2$.

Exercice 7. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a. indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. // Posons $Y_i = X_i - X_1$ $i = 2, 3, ..., n$.
1) Montrer que $\bar{X}$ est indépendante de $(Y_2, ..., Y_n)$.
2) Montrer que $\tilde{S}^2$ s'exprime en fonction des Y_i.
3) Montrer que $\tilde{S}^2$ et $\bar{X}$ sont indépendantes.

Exercice 8. Soit $-1 < \gamma < 1$ et soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ayant pour densité

$$g(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 - 2\gamma x_1 x_2 + x_2^2)\right).$$

1) Calculer la matrice de convariance de (X_1, X_2).
Déterminer la fonction caractéristique de (X_1, X_2).
3) Quelle est la loi de la v.a. X_1 ?
4) Déterminer la loi du vecteur aléatoire $(Y_1, Y_2) = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2}}(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ 5) Considérons la convergence en loi lorsque $\gamma \to 1_-$.
Quelle est la loi limite du vecteur aléatoire (Y_1, Y_2) ?
Quelle est la loi limite de la variable aléatoire $(1 - \gamma^2)X_1^2 + X_2^2$?

Exercice 9. Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien centré avec $\Gamma_X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sa matrice de convariance et posons $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.
1) Déterminer la loi de Y et caculer sa matrice de convariance.
2) Déterminer les valeurs de a telles que Y soit un vecteur gaussien dégénéré.
3) Y_1 et Y_2 soienet indépendantes.
4) Déterminer la fonction caractéristiquye de Y_1.
5) Montrer que la variance de Y_1 est supérieure ou égale à $\frac{3}{2}$.
6) Quelle est la densité de la loi de Y_1 si celle-ci existe.

Exercice 10. Soit (X, Y) un vecteur gaussien avec $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1$ et de la matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

1. Quand est ce que cette matrice est une matrice de covariance d'un vecteur aléatoire ?
2. Écrire la fonction caractéristique de (X, Y).
3. Quand est ce que le vecteur (X, Y) admet une densité ? L'écrire lorsqu'elle existe.