M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

20 octobre 2021

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire Plan du cours 3

1. E.D.O. linéaires dépendant du temps
   - La résolvante
   - Variation de la constante
2. Théorie des perturbations (cas linéaire)
3. E.D.O. linéaires périodiques
4. La résonance paramétrique

Equations linéaires dépendant du temps

E.D.O. affines :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$

Equations linéaires dépendant du temps

E.D.O. affines :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array}\right.$$

où $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$

EDO linéaires

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{X}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array}\right.$$

Equations linéaires dépendant du temps

La résolvante

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ sol. de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)\}$: $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ sol. de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)\}$: $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\dim \mathcal{E}_{A(\cdot)} = n$

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \text{ sol. de } \dot{X}(t) = A(t)X(t)\}$: $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\dim \mathcal{E}_{A(\cdot)} = n$
- car $\mathbb{K}^n \to \mathcal{E}_{A(\cdot)}$, $v \mapsto X_v(\cdot)$ t.q $X_v(t_0) = v$ est un isomorphisme (linéarité $+$ $\exists!$)

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ sol. de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)\}$: $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\dim \mathcal{E}_{A(\cdot)} = n$
- car $\mathbb{K}^n \to \mathcal{E}_{A(\cdot)}$, $v \mapsto X_v(\cdot)$ t.q $X_v(t_0) = v$ est un isomorphisme (linéarité $+ \exists!$)

Définition

Résolvante $R_A(t,s) \in GL(n, \mathbb{K})$ $(t, s \in I)$ de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$

$$X(\cdot) \in \mathcal{E}_A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ t, s \in I, \quad X(t) = R_A(t,s)X(s).$$

(1) (Chasles) : $t_1, t_2, t_3 \in I$,

$$R_A(t_3, t_1) = R_A(t_3, t_2)R_A(t_2, t_1)$$

$(R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)^{-1}.)$

(1) (Chasles) : $t_1, t_2, t_3 \in I$,

$$R_A(t_3, t_1) = R_A(t_3, t_2) R_A(t_2, t_1)$$

$(R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)^{-1}.)$

(2) $t_0 \in I$ fixé, $t \mapsto R_A(t, t_0)$ vérifie l'EDO matricielle (attention l'espace des phases est $M(n, \mathbb{K})$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} R_A(t, t_0) = A(t) R_A(t, t_0) \\ R_A(t_0, t_0) = I \end{array} \right.$$

(3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$.

(3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$.

(4) (Cas constant) Si $A(\cdot) \equiv$ *constante* on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)

(3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$.

(4) (Cas constant) Si $A(\cdot) \equiv$ *constante* on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)

(5) (Liouville) On a

$$\det R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))ds}$$

(3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$.

(4) (Cas constant) Si $A(\cdot) \equiv$ *constante* on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)

(5) (Liouville) On a

$$\det R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))ds}$$

(6) (Groupes et algèbres de Lie) Soit $U \in GL(n, \mathbb{K})$. Si $A(\cdot)$ est à valeurs dans (l'algèbre de Lie) $\mathfrak{g}_U = \{M \in M(n, \mathbb{K}) : {}^tMU + UM = 0\}$ alors $R_A(\cdot, t_0)$ est à valeurs dans le groupe (de Lie) $G_U = \{P \in GL(n, \mathbb{K}) : {}^tPUP = U\}$.

On ne sait pas en général calculer R_A mais

(7) Si $\forall t, s \in I$ $A(t)$ et $A(s)$ commutent $R_A(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t}(A(s))ds}$

On ne sait pas en général calculer R_A mais

(7) Si $\forall t, s \in I$ $A(t)$ et $A(s)$ commutent $R_A(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t (A(s))ds}$

(8)

$$\begin{aligned} R_A(t, t_0) &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0 \leqslant s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant t} A(s_n) \cdots A(s_1) ds_1 \cdots ds_n \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{s_1, \ldots, s_n \in [t_0, t]} T(A(s_1) \cdots A(s_n)) ds_1 \cdots ds_n \end{aligned}$$

où $T(A(s_1) \cdots A(s_n)) = A(s_{\sigma(1)}) \cdots A(s_{\sigma(n)})$, (produit chronologique) $s_{\sigma(1)} > \cdots > s_{\sigma(n)}$

La résolvante : résoudre toutes les équations affines

La résolvante : résoudre toutes les équations affines

Théorème (Variation de la constante)

$X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$ *ssi*

$$\forall t,\ X(t) = R_A(t,t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} R_A(t,s)b(s)ds.$$

Sommaire Plan du cours 3

1. E.D.O. linéaires dépendant du temps
2. Théorie des perturbations (cas linéaire)
   - Principe
3. E.D.O. linéaires périodiques
4. La résonance paramétrique

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$
- ϵ petit paramètre réel.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$
- ϵ petit paramètre réel.

Problème :

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$
- ϵ petit paramètre réel.

Problème : estimer la résolvante R_{A_ϵ} ;

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \ C^\infty \text{ (analytique).}$$

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \;\; C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \ C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \ C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

où $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^1(I)} \leqslant \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \ C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

où $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^1(I)} \leqslant \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Déterminer

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \;\; C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

où $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^1(I)} \leqslant \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Déterminer $Y_1(\cdot), \ldots, Y_k(\cdot)$.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

- On injecte

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

dans

$$\begin{cases} \dot{R}_{A_\epsilon}(t,0) = (A_0 + \epsilon F(t)) R_{A_\epsilon}(t,0) \\ R_{A_\epsilon}(0,0) = I \end{cases}$$

Théorie des perturbations (cas linéaire)

- On injecte

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

  dans

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}_{A_\epsilon}(t,0) = (A_0 + \epsilon F(t)) R_{A_\epsilon}(t,0) \\ R_{A_\epsilon}(0,0) = I \end{array} \right.$$

- et on utilise le fait qu'un développement limité est unique.

Sommaire Plan du cours 3

1. E.D.O. linéaires dépendant du temps
2. Théorie des perturbations (cas linéaire)
3. E.D.O. linéaires périodiques
   - Conséquences de la périodicité
   - Le théorème de Floquet
4. La résonance paramétrique

On suppose $A(\cdot) \in C^0(I, M(n,\mathbb{K}))$ T-périodique, c.-à-d.

$$A(\cdot + T) = A(\cdot)$$

On suppose $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$ T-périodique, c.-à-d.

$$A(\cdot + T) = A(\cdot)$$

Théorème

Si $A(\cdot)$ est T-périodique alors,

On suppose $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$ T-périodique, c.-à-d.

$$A(\cdot + T) = A(\cdot)$$

Théorème

Si $A(\cdot)$ est T-périodique alors,

i) *pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a ,*

$$R_A(t_2 + T, t_1 + T) = R_A(t_2, t_1);$$

On suppose $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$ T-périodique, c.-à-d.

$$A(\cdot + T) = A(\cdot)$$

Théorème

Si $A(\cdot)$ est T-périodique alors,

i) *pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a ,*

$$R_A(t_2 + T, t_1 + T) = R_A(t_2, t_1);$$

ii) *pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$R_A(t + T, t) = R_A(t, 0)R(T, 0)R_A(t, 0)^{-1}.$$

Théorème (de Floquet)

Hyp. : $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ *T-périodique.*

Théorème (de Floquet)

Hyp. : $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ *T-périodique.*
Conc.

Théorème (de Floquet)

Hyp. : $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ *T-périodique.*
Conc.

- $\exists A_0 \in M_n(\mathbb{K})$: $e^{TA_0} = R_A(T,0)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (resp. $e^{2TA_0} = R_A(2T,0)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ;

Théorème (de Floquet)

Hyp. : $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ *T-périodique.*
Conc.

- $\exists A_0 \in M_n(\mathbb{K})$: $e^{TA_0} = R_A(T, 0)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (resp. $e^{2TA_0} = R_A(2T, 0)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ;
- $\exists P \in C^k(\mathbb{R}, Gl(n, \mathbb{K}))$ *T-périodique si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (*resp. $2T$-périodique si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Théorème (de Floquet)

Hyp. : $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ *T-périodique.*
Conc.

- $\exists A_0 \in M_n(\mathbb{K})$: $e^{TA_0} = R_A(T,0)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (resp. $e^{2TA_0} = R_A(2T,0)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ;
- $\exists P \in C^k(\mathbb{R}, Gl(n,\mathbb{K}))$ *T-périodique si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *(resp. $2T$-périodique si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*)*

t.q.

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}, \;\; R_A(t,0) = P(t)e^{tA_0}.$$

Remarques :

- $R_A(t,0) = P(t)e^{tA_0}$:

$$X'(t) = A(t)X(t) \Longleftrightarrow Y'(t) = A_0Y(t) \text{ avec } Y(\cdot) = P(\cdot)^{-1}X(\cdot)$$

Remarques :

- $R_A(t,0) = P(t)e^{tA_0}$:

$$X'(t) = A(t)X(t) \Longleftrightarrow Y'(t) = A_0 Y(t) \text{ avec } Y(\cdot) = P(\cdot)^{-1}X(\cdot)$$

- Si $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$: même chose en remplaçant $M_n(\mathbb{R})$ par $sl(2,\mathbb{R})$ et $Gl(n,\mathbb{R})$ par $SL(2,\mathbb{R})$.

Remarques :

- $R_A(t,0) = P(t)e^{tA_0}$:
$$X'(t) = A(t)X(t) \Longleftrightarrow Y'(t) = A_0Y(t) \text{ avec } Y(\cdot) = P(\cdot)^{-1}X(\cdot)$$
- Si $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$: même chose en remplaçant $M_n(\mathbb{R})$ par $sl(2,\mathbb{R})$ et $Gl(n,\mathbb{R})$ par $SL(2,\mathbb{R})$.

Proposition

Si $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ où $A(\cdot)$ T-périodique :
coeff de $X(\cdot)$ = sommes finies de $a_{p,q}(t)t^pe^{t\lambda_q}$ où $a(\cdot)$ T-périodique (à valeurs complexes), $0 \leqslant p \leqslant n$ et λ_q valeurs propres de A_0 (les exposants de Floquet).

Sommaire Plan du cours 3

1. E.D.O. linéaires dépendant du temps
2. Théorie des perturbations (cas linéaire)
3. E.D.O. linéaires périodiques
4. La résonance paramétrique
   - Stabilité/instabilité
   - Cas de la dimension 2
   - Résonance paramétrique

Problème : On considère $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, T-périodique $(A(\cdot + T) = A(\cdot))$ et on se propose d'étudier la stabilité du système

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

L'origine est-elle

Problème : On considère $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, T-périodique $(A(\cdot + T) = A(\cdot))$ et on se propose d'étudier la stabilité du système

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

L'origine est-elle

- asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) ? : $\forall X(0)$ dans un vois. de 0 $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$?

Problème : On considère $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, T-périodique $(A(\cdot + T) = A(\cdot))$ et on se propose d'étudier la stabilité du système

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

L'origine est-elle

- asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) ? : $\forall X(0)$ dans un vois. de 0 $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$?
- stable ? : $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$, $|X(0)| < \delta \implies \forall t \geqslant 0, \ |X(t)| < \epsilon$?

Problème : On considère $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, T-périodique ($A(\cdot + T) = A(\cdot)$) et on se propose d'étudier la stabilité du système

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

L'origine est-elle

- asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) ? : $\forall X(0)$ dans un vois. de 0 $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$?
- stable ? : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta,\ |X(0)| < \delta \implies \forall t \geqslant 0,\ |X(t)| < \epsilon$?
- instable ? Pour certaines conditions initiales arbitrairement proches de 0, les solutions sortent de tout voisinage de 0 prescrit à l'avance.

$$X(t) = R_A(t,0)X(0) = P(t)e^{tA_0}X(0), \qquad P(\cdot + T) = P(\cdot)$$

$$X(t) = R_A(t, 0)X(0) = P(t)e^{tA_0}X(0), \qquad P(\cdot + T) = P(\cdot)$$

- 0 est asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ $\Gamma_u(A_0) = \Gamma_c(A_0) = \emptyset \iff$ toutes les valeurs propres de A_0 sont de parties réelles strictement négatives.

$$X(t) = R_A(t,0)X(0) = P(t)e^{tA_0}X(0), \qquad P(\cdot + T) = P(\cdot)$$

- 0 est asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ $\Gamma_u(A_0) = \Gamma_c(A_0) = \emptyset \iff$ toutes les valeurs propres de A_0 sont de parties réelles strictement négatives.
- 0 est stable (en $t \to +\infty$) $\iff \Gamma_u(A_0) = \emptyset$ et $M = 0 \iff$ toutes les valeurs propres de A_0 sont de partie réelle négative et A_0 est diagonalisable en celles de partie réelle nulle.

$$X(t) = R_A(t,0)X(0) = P(t)e^{tA_0}X(0), \qquad P(\cdot + T) = P(\cdot)$$

- 0 est asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ $\Gamma_u(A_0) = \Gamma_c(A_0) = \emptyset \iff$ toutes les valeurs propres de A_0 sont de parties réelles strictement négatives.
- 0 est stable (en $t \to +\infty$) $\iff \Gamma_u(A_0) = \emptyset$ et $M = 0 \iff$ toutes les valeurs propres de A_0 sont de partie réelle négative et A_0 est diagonalisable en celles de partie réelle nulle.
- 0 est instable $\iff$ A_0 a au moins valeur propre de partie réelle strictement positive ou une valeur propre de partie réelle nulle où elle n'est pas diagonalisable.

Comme $e^{TA_0} = R_A(T,0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T,0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T,0)$ son reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Comme $e^{TA_0} = R_A(T,0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T,0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T,0)$ son reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Proposition

Comme $e^{TA_0} = R_A(T,0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T,0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T,0)$ son reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Proposition

- *0 est asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) $\Longleftrightarrow$ toutes les valeurs propres de $R_A(T,0)$ sont de module < 1.*

Comme $e^{TA_0} = R_A(T,0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T,0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T,0)$ son reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Proposition

- *0 est asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) $\Longleftrightarrow$ toutes les valeurs propres de $R_A(T,0)$ sont de module < 1.*
- *0 est stable (en $t \to +\infty$) $\Longleftrightarrow$ toutes les valeurs propres de $R_A(T,0)$ sont de module $\leqslant 1$ et $R_A(T,0)$ est diagonalisable en celles de module 1.*

Comme $e^{TA_0} = R_A(T,0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T,0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T,0)$ son reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Proposition

- *0 est asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ toutes les valeurs propres de $R_A(T,0)$ sont de module < 1.*
- *0 est stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ toutes les valeurs propres de $R_A(T,0)$ sont de module $\leqslant 1$ et $R_A(T,0)$ est diagonalisable en celles de module 1.*
- *0 est instable $\iff$ au moins une des valeurs propres de $R_A(T,0)$ est de module > 1 ou est de module 1 mais $R_A(T,0)$ n'y est pas diagonalisable.*

Conséquence :

Conséquence : si A_ϵ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, par exemple

$$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot).$$

Conséquence : si A_ϵ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, par exemple

$$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot).$$

Proposition

Les propriétés "être asymptotiquement stable" ou "être instable" sont robustes c'est-à-dire ouvertes dans l'espace des paramètres.

Qu'en est-il de la stabilité ? :

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.
Mais, dans les problèmes qui proviennent de la Physique, les E.D.O. que l'on obtient ont souvent une structure supplémentaire ("hamiltonienne") liée à la conservation de l'énergie et les matrices qui apparaissent sont "symplectiques".

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.
Mais, dans les problèmes qui proviennent de la Physique, les E.D.O. que l'on obtient ont souvent une structure supplémentaire ("hamiltonienne") liée à la conservation de l'énergie et les matrices qui apparaissent sont "symplectiques".
L'exemple le plus simple de matrices symplectiques se trouve en dimension 2 : ces matrices s'identifient à l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels et de trace nulle $sl(2, \mathbb{R})$ (resp. de déterminant 1 : $SL(2, \mathbb{R})$).

Les v.p. de $R \in SL(2,\mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \mathrm{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

Les v.p. de $R \in SL(2, \mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \mathrm{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

- $|tr(R)| > 2 \implies$ v.p. de R sont $\{\lambda, 1/\lambda\}$, $\lambda > 0$: hyperbolique

Les v.p. de $R \in SL(2,\mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \mathrm{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

- $|tr(R)| > 2 \implies$ v.p. de R sont $\{\lambda, 1/\lambda\}$, $\lambda > 0$: hyperbolique
- $|tr(R)| < 2 \implies$ v.p. de R sont $\{e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$: elliptique

Les v.p. de $R \in SL(2,\mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \mathrm{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

- $|tr(R)| > 2 \implies$ v.p. de R sont $\{\lambda, 1/\lambda\}$, $\lambda > 0$: hyperbolique
- $|tr(R)| < 2 \implies$ v.p. de R sont $\{e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$: elliptique
- $|tr(R)| = 2 \implies$ v.p. de R sont (1,1) ou $(-1,-1)$: parabolique.

Comme $R_A(T,0) = e^{TA}$ ou $R_A(T,0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$, est

Comme $R_A(T,0) = e^{TA}$ ou $R_A(T,0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$, est

- *stable si et seulement si il est elliptique $|tr(R_A(T,0)| < 2$ ou si $R_A(T,0) = \pm I$.*

Comme $R_A(T,0) = e^{TA}$ ou $R_A(T,0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$, est

- *stable si et seulement si il est elliptique $|tr(R_A(T,0)| < 2$ ou si $R_A(T,0) = \pm I$.*
- *instable si et seulement si il est hyperbolique $|tr(R_A(T,0)| > 2$ ou $|tr(R_A(T,0))| = 2$ parabolique $\neq \pm I$.*

La nouveauté dans le cas où $A(\cdot)$ est à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$: est

Théorème

L'ensemble des matrices elliptiques de $SL(2, \mathbb{R})$ est ouvert dans $SL(2, \mathbb{R})$.

La nouveauté dans le cas où $A(\cdot)$ est à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$: est

Théorème

L'ensemble des matrices elliptiques de $SL(2,\mathbb{R})$ est ouvert dans $SL(2,\mathbb{R})$.

On a donc par le théorème de dépendance continue par rapport aux paramètres :

Corollaire

L'ensemble des $A \in C^0_{T-per}(\mathbb{R}, sl(2,\mathbb{R}))$ pour lesquels $X'(t) = A(t)X(t)$ est elliptique est ouvert (dans $C^0_{T-per}(\mathbb{R}, sl(2,\mathbb{R}))$).

Conséquences pour
$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \qquad (PP)_\epsilon$:

Conséquences pour
$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \qquad (PP)_\epsilon$:

- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est hyperbolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine reste un point d'équilibre instable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.

Conséquences pour
$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \qquad (PP)_\epsilon$:

- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est hyperbolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine reste un point d'équilibre instable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est elliptique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| < 2$), l'origine reste un point d'équilibre stable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.

Conséquences pour

$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \qquad (PP)_\epsilon$:

- Si $e^{TA} \in SL(2,\mathbb{R})$ est hyperbolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine reste un point d'équilibre instable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2,\mathbb{R})$ est elliptique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| < 2$), l'origine reste un point d'équilibre stable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2,\mathbb{R})$ est parabolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| = 2$) : tout peut arriver !

Considérons

$$\ddot{x}(t) + (a + \epsilon \cos(\frac{2\pi t}{T}))x(t) = 0,$$

qui se récrit

$$\dot{X}(t) = (A + \epsilon F(t))X(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \epsilon \cos(\frac{2\pi t}{T}) \begin{pmatrix} 0 & \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a > 0$ on écrit $a = \omega^2$ et on a

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \frac{\sin(t\omega)}{\omega} \\ -\omega \sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}$$

Donc

Proposition (Résonance paramétrique)

$$e^{TA} \textit{ elliptique} \iff |tr(e^{TA})| < 2 \iff \omega \notin \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$$

et dans ce cas il existe $\epsilon_\omega > 0$ *tel que pour tout* $\epsilon \in (-\epsilon_\omega, \epsilon_\omega)$ *le système associé à* $A + \epsilon F(\cdot)$ *est stable.*

Donc

Proposition (Résonance paramétrique)

$$e^{TA} \text{ elliptique} \iff |tr(e^{TA})| < 2 \iff \omega \notin \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$$

et dans ce cas il existe $\epsilon_\omega > 0$ *tel que pour tout* $\epsilon \in (-\epsilon_\omega, \epsilon_\omega)$ *le système associé à* $A + \epsilon F(\cdot)$ *est stable.*

En revanche, si $\omega = \omega_k := k\frac{\pi}{T}$ (on dit que le système est résonnant), la méthode des perturbations, permet de calculer le développement limité de $R_{A_\epsilon}(T, 0)$ et donc de sa trace et de montrer qu'il existe dans le plan (ω, ϵ) une zone d'instabilité d'intérieur non vide dont l'adhérence contient $(\omega_k, 0)$.

Pour $\ddot{x} + (a + \epsilon \cos(2t))x = 0$ ($T = \pi$, $a = \omega^2$ si $a > 0$).
Rouge : instable (hyperbolique) Bleu : parabolique Orange : stable (elliptique)

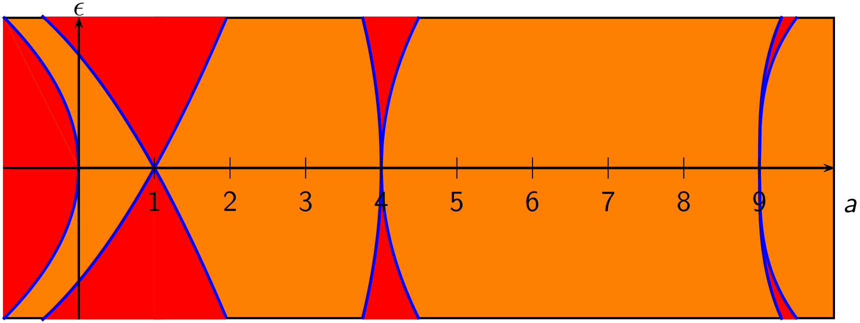

FIGURE: Zones de stabilité-instabilité

- Pendule de Kapitsa : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.

- Pendule de Kapitsa : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.
- Piégeage des ions (Nobel 1989, Dehmelt, Paul) : Dans un champ électrique (quadrupôle) oscillant : même principe que le pendule de Kapitsa.

- Pendule de Kapitsa : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.
- Piégeage des ions (Nobel 1989, Dehmelt, Paul) : Dans un champ électrique (quadrupôle) oscillant : même principe que le pendule de Kapitsa.
- Propriétés métal-isolant (physique du solide) : Equation stationnaire de Schrödinger 1D, potentiel périodique. $-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$. Les solutions physiquement acceptables sont celles pour lesquelles ψ est bornée. Le spectre de l'opérateur associé a une structure de bandes.