Exercice 7 : Soient $0 < \rho < 1$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité est :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right)$$

On a $\frac{1}{1-\rho^2}(x^2 - 2\rho xy + y^2) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[x(x-\rho y) + y(-\rho x + y)\right]$

$$= \frac{1}{1-\rho^2} < \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - \rho y \\ -\rho x \quad y \end{pmatrix} >$$

$$= 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} >$$

$$= \langle X, \Gamma^{-1} X \rangle = \langle (X - m_X), \Gamma^{-1}(X - m_X) \rangle$$

On déduit que $\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Et $\Gamma^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{array}{cc} u & v \\ \end{array} \begin{array}{c} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \Rightarrow \Gamma = \begin{array}{c} e_1 \quad e_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \end{array}$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{1-\rho^2} e_1 - \frac{\rho}{1-\rho^2} e_2 \\ v = \frac{-\rho}{1-\rho^2} e_1 + \frac{1}{1-\rho^2} e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + \frac{1}{\rho} v = \left(\frac{1}{\rho(1-\rho^2)} - \frac{\rho}{1-\rho^2}\right) e_2 \\ e_1 = u(1-\rho^2) + \rho e_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u + \frac{1}{\rho} v = \frac{1}{\rho} e_2 \\ e_1 = u(1-\rho^2) + \rho(\rho u + v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = u + \rho v \\ e_2 = \rho u + v \end{cases}$$

$\underline{\text{donc}}$ $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} cov(X,Y) = \rho \\ Var(X) = Var(Y) = 1 \end{cases}$

1) Trouver $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tq $\mathbb{E}\left(\left(X - \alpha^* Y\right)^2\right) = \inf\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left((X - \alpha Y)^2\right)$

Soit $f(\alpha) = \mathbb{E}\left(\left(X - \alpha Y\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\alpha YX + \alpha^2 Y^2\right)$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\alpha \cdot \mathbb{E}(XY) + \alpha^2 \mathbb{E}(Y^2)$$

$f'(\alpha) = 2\alpha \mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(XY)$

$f'(\alpha) = 0 \iff 2\alpha \mathbb{E}(Y^2) = 2\mathbb{E}(XY)$

$$\iff \alpha = \frac{\mathbb{E}(X \cdot Y)}{\mathbb{E}(Y^2)}$$

α	$-\infty$		$\frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f\left(\frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)}\right)$	$\nearrow$	

$$f\left(\frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)}\right) = \left(\frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)}\right)^2 \cdot \mathbb{E}(Y^2) - 2 \cdot \frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)} \cdot \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(X^2)$$

$$= \frac{\mathbb{E}(XY)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} - 2 \cdot \frac{\mathbb{E}(XY)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} + \mathbb{E}(X^2)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \frac{\mathbb{E}(XY)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$$

$$= 1 - \rho^2$$

Car puisque $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \underbrace{\mathbb{E}(X)^2}_{=0} = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 1 \\ cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{=0} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{=0} = \mathbb{E}(XY) = \rho \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^* = \frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)} = \frac{cov(X,Y)}{Var(Y)} = \frac{\rho}{1} = \rho$$

Ainsi $\mathbb{E}\left((X - \rho Y)^2\right) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left((X - \alpha Y)^2\right)$

2) Montrer que $X - \alpha^* Y$ et Y sont indépendantes

Puisque (X,Y) est un vect. gaussien

$$(X,Y) \rightsquigarrow \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X-\alpha^* Y\\ Y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -\alpha^*\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

est un vect. gaussien comme transformation linéaire d'un vect. gaussien.

donc l'indépendance de ses variables équivaut à leur décorrelation

$$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(A\cdot\mathbb{E}(X,Y),\ A\cdot\Gamma\cdot A^t\right)$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -\alpha^*\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\alpha^* & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-\alpha^*\rho & \rho-\alpha^*\\ \rho & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\alpha^* & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-\alpha^*\rho+\alpha^{*2}-\alpha^*\rho & \rho-\alpha^*\\ \rho-\alpha^* & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha^{*2}-2\alpha^*\rho+1 & \rho-\alpha^*\\ \rho-\alpha^* & 1\end{pmatrix}\right)$$ or $\alpha^* = \rho$

Donc $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - \alpha^* Y \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

donc $\operatorname{cov}(X - \alpha^* Y, Y)$

$$= \operatorname{cov}(X, Y) - \alpha^* \operatorname{cov}(Y, Y)$$

$$= \operatorname{cov}(X, Y) - \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\cancel{\operatorname{var}(Y)}} \cdot \cancel{\operatorname{var}(Y)}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ $X - \alpha^* Y$ et Y sont indépendantes.

3) d'après le cours $\alpha^* Y$ est la proj de X sur $L^2(\sigma(Y))$

$\rightarrow \forall Z = h(Y) \in L^2(\Omega, \sigma(Y), \mathbb{P})$

$= \{ h(Y) \, , \, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boreliene et q $\mathbb{E}[h^2(Y)] < \infty \}$

On a $\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[\alpha^* Y \cdot Z]$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X h(Y)] = \mathbb{E}[\alpha^* Y \cdot h(Y)]$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}[(X - \alpha^* Y) h(Y)] = 0$

càd $\begin{cases} \alpha^* Y \in L^2(\sigma(Y)) \\ X - \alpha^* Y \perp L^2 \sigma(Y) \end{cases}$

4) On note $H = \{ h(Y) \, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boreliene tq $\mathbb{E}(h^2(Y)) < \infty \}$

$$\inf_{h \in H} \mathbb{E}((X - h(Y))^2) = \inf_{h \in H} \langle X - h(Y), X - h(Y) \rangle$$

$$= \inf_{h \in H} \| X - h(Y) \|^2$$

l'inf st atteint en la proj orthogonale de X sur H

c-à-d en $h(Y) = \alpha^* Y$

5) Déterminer la loi de $X | Y = y$??

Déterminer $\mathbb{E}(X|Y)$ et comparer à $\alpha^* Y$

$\mathbb{E}[X|Y]$ proj $\perp$ de X sur $L^2(\sigma(Y))$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \alpha + \beta Y$$

tq $\begin{cases} X - (\alpha + \beta Y) \perp 1 \\ X - (\alpha + \beta Y) \perp Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \mathbb{E}(X) - \beta\, \mathbb{E}(Y) \\ \beta = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(Y)} \end{cases}$

$$= \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X] + \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(Y)} (Y - \mathbb{E}(Y))$$

$$= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(Y)} Y$$ car (X, Y) est centré

$$= \alpha^* Y$$

donc $\mathbb{E}[X|Y] = g(Y)$ où $g \in H$

tq $\inf_{h \in H} \mathbb{E}(X - h(Y))^2 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|Y])^2\right]$

Loi de X sachant $Y=y$?

On a $\mathbb{E}[X|Y] = \alpha Y$

$\Rightarrow X = \mathbb{E}[X|Y] + W$

$= \alpha Y + W = (X - \alpha Y)$

$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[X-\alpha Y] = 0$ car (X,Y) centré

$\operatorname{Var}(W) = \mathbb{E}[(X-\alpha Y)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\alpha\mathbb{E}(XY) + \alpha^2\mathbb{E}[Y^2]$

$= 1 + 2\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(Y)} \cdot \operatorname{cov}(X,Y) + \dfrac{\operatorname{cov}^2(X,Y)}{\operatorname{Va}^2(Y)} \cdot \operatorname{Var}(Y)$

$= 1 + \dfrac{2\rho}{1} \times \rho + \dfrac{\rho^2}{1}$

$= 1 + 3\rho^2$

Par contstruction de la décompositon orthogonale :

On a $\begin{cases} W \perp 1 \\ W \perp Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W \text{ est indépendant de } Y \\ W \text{ est centré} \end{cases}$

On a donc $\mathcal{L}_{X|Y=y} \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X|Y=y], \operatorname{Var}(W)\right)$

$\sim \mathcal{N}\left(\rho y, 1+3\rho^2\right)$

4