Introduction aux mathématiques de l'assurance - Examen

Les calculatrices sont autorisées - Les documents sont interdits

Durée : 2h~~30~~

Barème indicatif : Ex 1 : 2 pts, Ex 2 : 4 pts, Ex 3 : 5 pts, Ex 4 : 5 pts, Ex 5 : 4 pts.

Exercice 1

1. Qu'est-ce qu'un réassureur ?
2. Enoncer très précisément le théorème de la loi des grands nombres.
3. Enoncer très précisément le théorème central limite.
4. Qu'est-ce que la prime pure ? la prime technique ? la prime commerciale ?
5. Présenter mathématiquement le modèle individuel ? le modèle collectif ?
6. Quelle est la différence fondamentale entre les deux grandes familles d'assurance : l'assurance vie et l'assurance non-vie ?
7. Quelles sont les principales caractéristiques des distributions de coûts de sinistres observées en assurance dommage ou de responsabilité ?

Exercice 2

On considère une variable aléatoire N de loi Poisson mélangée $PM(\Lambda)$. La loi de Λ admet une densité h donnée par

$$h(\lambda) = \begin{cases} 1/c & \text{si } 0 \leqslant \lambda \leqslant c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est une constante positive donnée.

1. Déterminer $\mathbb{E}[N]$ et $\mathbb{V}(N)$ en fonction de c.
2. Déterminer la fonction génératrice des moments factoriels de N.

Exercice 3

On considère un assureur dont les réserves (fonds propres) s'élève à 10 millions d'euros et on se place sur un horizon d'un an. On suppose que le montant cumulé des sinistres sur l'année à la charge de l'assureur est une variable aléatoire d'espérance 100 millions d'euros et d'écart type 10 millions d'euros. Enfin on suppose que l'assureur applique systématiquement un chargement technique proportionnel à la prime pure, le coefficient de chargement technique étant supposé égal à 10%.

1. Calculer le chiffre d'affaires et l'espérance de bénéfice de l'assureur.
2. En supposant que l'approximation normale est valide, calculer sa probabilité de ruine.
3. Pour réduire sa probabilité de ruine, l'assureur se réassure avec un traité en quote-part souscrit auprès d'un réassureur qui applique un chargement technique proportionnel à la prime pure, le coefficient de chargement technique du réassureur étant également supposé égal à 10%.

   a) Quel plein de conservation θ l'assureur doit-il choisir pour ramener sa probabilité de ruine à hauteur de $0,5\%$?

   b) Quelle est dans ce cas la nouvelle espérance de bénéfice de l'assureur ?

Exercice 4

Dans une certaine classe de risques, on considère les variables aléatoires suivantes :
N = nombre annuel des sinistres
C = coût d'un sinistre
X = montant annuel cumulé des sinistres.

1. Rappeler les hypothèses usuelles du modèle composé. On suppose dans la suite que ces hypothèses s'appliquent.
2. On suppose que N suit la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$.
   Autrement dit, on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P(N = n) = p(1-p)^n$. Déterminer la fonction génératrice des moments de X en fonction de celle de C, puis en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de p et des moments de la variable aléatoire C.
3. Indiquer ce que deviennent les formules du 2) dans le cas où C admet une densité f donnée par
$$f(x) = \alpha \exp(-\alpha x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$$
4. On suppose que la prime technique $\Pi_T(X)$ est obtenue par un chargement de la prime pure, proportionnel à l'écart-type ; autrement dit on a $\Pi_T(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sigma(X)$ où β désigne le coefficient de chargement. Le montant des réserves étant noté $\mathcal{R}$, déduire de ce qui précède la probabilité de ruine de l'assureur pour l'année en cours, en fonction des paramètres p, α, β et $\mathcal{R}$.

Exercice 5

Dans le cadre du modèle composé, on suppose que le nombre de sinistres N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 50\ 000$, et que la variable aléatoire générique du coût individuel de sinistre C suit une loi de Pareto de paramètres $x_0 = 500$ et $\beta = 2.01$, c'est à dire que sa fonction de répartition est donnée par :

$$\forall x > x_0,\ F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\beta}$$

1. Calculer $\mathbb{E}[C]$ et $\mathbb{E}[C^2]$.
2. En déduire l'espérance et l'écart-type du montant cumulé des sinistres $X = \sum_{i=1}^{N} C_i$.