
Prévention et gestion des risques naturels et environnementaux

Risque et assurance : quelques éléments théoriques

Ecole des Ponts - Le 26 Avril 2012
Jacques Pelletan

Théorie du risque et pérennité de l'assureur

- **Protéger l'assuré suppose de garantir la solvabilité de l'assureur (c'est la philosophie du code des assurances)**
- **On va donc estimer les « chances » de faillite de l'assureur**
- **La probabilité que la charge des sinistres à laquelle il doit faire face excède les disponibilités de l'assureur (fonds propres + primes)**

Théorie du risque et pérennité de l'assureur

- Prenons un risque X admettant une espérance m et une variance σ^2
- Supposons qu'un assureur fasse payer une prime égale à la prime pure
 $\Pi = E(X) = m$
- Le résultat annuel de l'assureur est $R = \Pi - X$ avec un espérance nulle et une variance égale à σ^2
- L'assureur a une chance sur deux de faire faillite

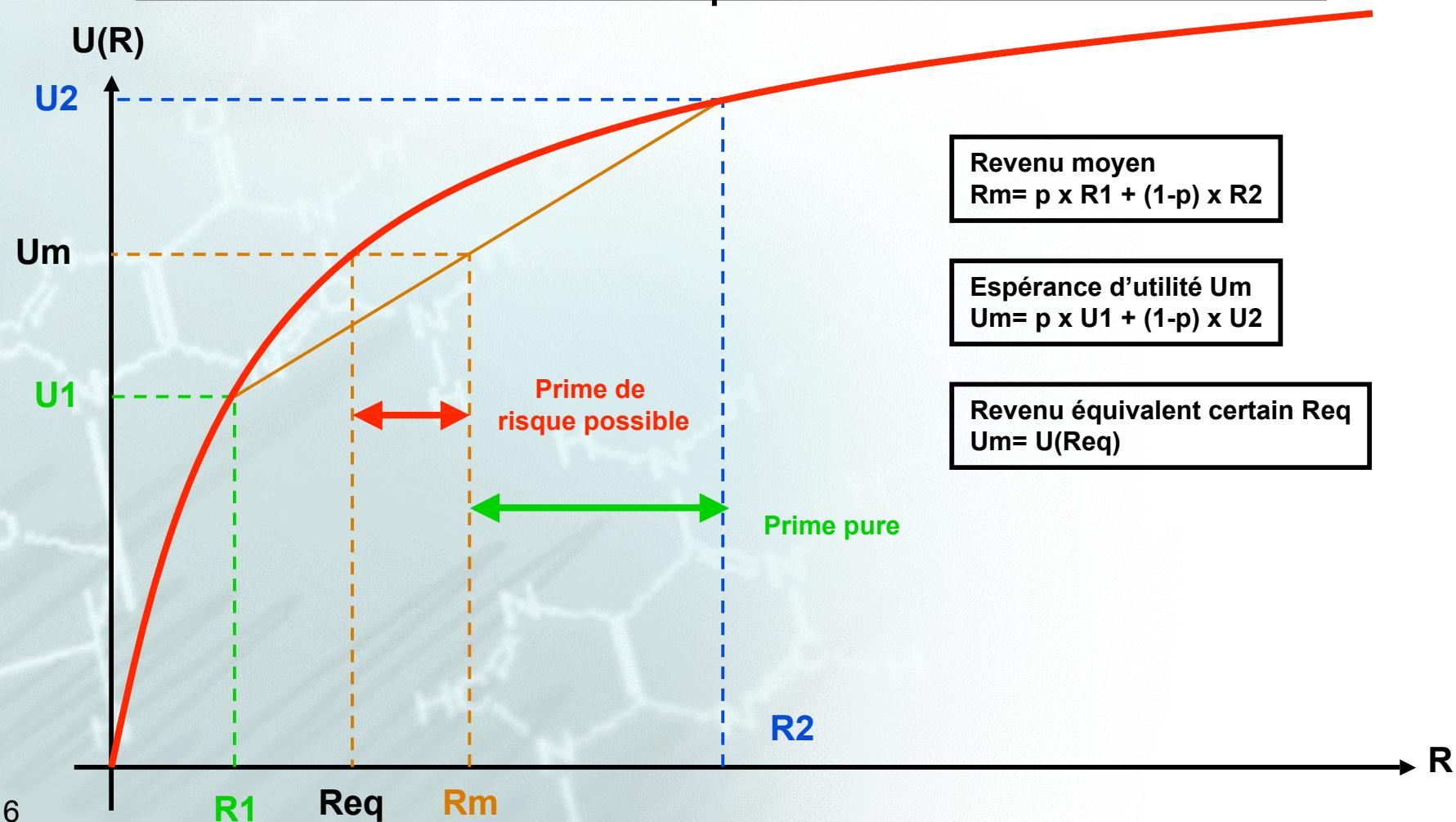
Théorie du risque et pérennité de l'assureur

- Supposons qu'un assureur prenne une prime supérieure à la prime pure $\Pi = E(X) + \varepsilon = m + \varepsilon$
- Le résultat annuel de l'assureur est $R = \Pi - X$ avec un espérance ε et une variance égale à σ^2
- Plus les exercices se cumulent moins le résultat est volatile
- D'où la nécessité de « charger » la prime pure

Pourquoi un assuré est-il prêt à payer une prime de risque ?

- **Une véritable difficulté théorique et empirique à cerner le comportement des agents économiques en univers risqué**
- **Le recours à la fiction de la fonction d'utilité**
- **Si la fonction d'utilité de l'agent est monotone croissante et concave, on dit que l'agent est averse au risque**
- **Illustration avec un agent face à un aléa**
 - **R = R1 avec une proba p**
 - **R= R2 avec une proba q=(1-p)**

Pourquoi un assuré est-il prêt à payer une prime de risque ?



Un premier critère : probabilité de ruine et coefficient de sécurité

- **On suppose que l'on assure un risque X tel que $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$**
- **La prime d'assurance est notée Π**
- **On appelle ρ le coefficient chargement de sorte que
 $\Pi = (1+\rho) E(X) = (1+\rho) m$**
- **On notera R le résultat de l'assureur à la fin de l'exercice et K les fonds propres affectés à la couverture du risque.**
- **$R = \Pi - X$ avec $E(R) = \Pi - E(X) = \rho E(X)$ et $V(R) = \sigma^2$**

Un premier critère : probabilité de ruine et coefficient de sécurité

- On définit β le coefficient de sécurité comme :

$$\beta = \frac{K + \rho m}{\sigma}$$

- β peut se lire comme la volatilité du solde de l'assureur après un exercice : Solde = $K + \Pi - X$
- Alors $E(\text{Solde}) = K + \rho m$ et $V(\text{Solde}) = \sigma^2$

Un premier critère : probabilité de ruine et coefficient de sécurité

- La ruine de l'assureur correspond à un résultat négatif et en valeur absolue supérieur aux fonds propres soit : $R < -K$
- La probabilité de ruine est notée $P = \text{Proba}(R < -K)$
- Rappel de l'inégalité de Bienaymé – Tchebychev

$$\forall t > 1 \quad \text{Proba}(|Z - E(Z)| \geq t \times \sigma(Z)) < \frac{1}{t^2}$$

- On applique cette inégalité à R pour la valeur de $t = \beta$

Un premier critère : probabilité de ruine et coefficient de sécurité

$$\text{Proba}(|R - E(R)| \geq \beta \times \sigma(R)) < \frac{1}{\beta^2}$$

$$\text{avec } \beta = \frac{K + \rho m}{\sigma} \quad \text{et} \quad E(R) = \rho m \quad , \quad V(R) = \sigma^2$$

$$\text{Proba}(|R - \rho m| \geq K + \rho m) < \frac{1}{\beta^2}$$

$$\text{Proba}((R - \rho m) \geq K + \rho m) + \text{Proba}((R - \rho m) \leq -K - \rho m) < \frac{1}{\beta^2}$$

Donc

$$\text{Proba}(R \leq -K) < \frac{1}{\beta^2}$$

1/ β^2 apparaît comme un majorant de la probabilité de ruine sur un exercice

Améliorer le coefficient de sécurité : l'intérêt de la mutualisation des risques

- On suppose dorénavant que X est la somme n risques Indépendants et Identiquement Distribués
- On calcule $\beta(n)$ le coefficient de sécurité de ces n risques

$$\beta(n) = \frac{K}{\sqrt{n} \sigma} + \sqrt{n} \frac{\rho m}{\sigma}$$

Améliorer le coefficient de sécurité : l'intérêt de la mutualisation des risques

- Trois remarques sur le résultats obtenus
 - Le signe de ρ détermine le comportement asymptotique de $\beta(n)$
 - L'importance du facteur fonds propres diminue en racine de n
 - L'impact des fonds propres dépend de σ

Appréhender l'espérance et la variance d'un risque : processus de décomposition

On peut observer la sinistralité comme une succession (aléatoire en nombre) d'évènements à coûts eux-mêmes aléatoires

$$X = \sum_{i=1}^N C_i$$

N est une variable aléatoire à valeurs entières positives et représente le nombre de sinistres

C_i est une variable aléatoire continue à valeurs positives et représente le coût du i ème sinistre

Appréhender l'espérance et la variance d'un risque : processus de décomposition

- **Sous les hypothèses suivantes, il est possible de simplifier le calcul de $E(X)$ et de $V(X)$**
 - **N et les C_i sont indépendants deux à deux**
 - **Les C_i sont indépendants entre eux**
 - **Les C_i sont identiquement distribués**
- **Alors**
$$E(X) = E(N) \times E(C)$$
- **Et**
$$V(X) = E(N) \times V(C) + V(N) \times E(C)^2$$
- **L'étude séparée de N et C permet l'étude de X**

Détermination d'une loi de fréquence : le modèle de Poisson

- Soit $N(t)$ le nombre de sinistres survenus au cours de la période $[0,t]$

$$\text{Prob}(N(t)=k) = \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

- $\text{Var}(N) = E(N) = \lambda$
- Additivité : si $N_1 \sim P(\lambda_1)$ et si $N_2 \sim P(\lambda_2)$ indépendants, alors $N_1 + N_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$
- En particulier, la somme de n risques iid et décrits par une loi de Poisson est un risque décrit par une loi de Poisson de paramètre $n \lambda$

Détermination d'une loi de fréquence : le modèle de Poisson

Application pratique : nombre d'ouragans aux USA

Nbre annuel d'ouragans	Nbre d'années
0	8
1	18
2	4
3	2
4	0
5	1
6 et +	0
Total	33

- **Calculez la fréquence des ouragans**
- **Calculez les effectifs théoriques**
- **Tester le résultat avec un test du χ^2**

Détermination d'une loi de fréquence : le modèle de Poisson

Application pratique : nombre d'ouragans aux USA

Nbre annuel d'ouragans	Nbre d'années	Nbre d'ouragans	Effectif théorique
0	8	0	10,75
1	18	18	12,06
2	4	8	6,76
3	2	6	2,53
4	0	0	0,71
5	1	5	0,16
6 et +	0	0	0,03
Total	33	37	32,99

$$\lambda = 1,1212$$

Détermination d'une loi de fréquence : le modèle de Poisson

Application pratique : nombre d'ouragans aux USA

Nbre annuel d'ouragans	Nbre d'années	Effectif théorique	$(\text{freq(obs)} - \text{freq(th)})^2 / \text{freq(th)}$
0	8	10,75	0,71
1	18	12,06	2,93
2	4	6,76	1,13
3	2	2,53	0,11
4 et +	1	0,90	0,01
Total	33	32,99	4,88

- **Nombre de degrés de liberté : $5 - 1 - 1 = 3$**
- **La valeur critique du χ^2_3 est de 7,81 (à 5 %)**
- **On accepte donc la loi de Poisson**

Détermination d'une loi de fréquence : les modèles de Poisson mélangés

N suit une loi de Poisson mélangée si

$$N \sim P(\Lambda) \text{ avec } \Lambda \sim H(\theta)$$

C'est-à-dire que N suit une loi de Poisson dont le paramètre est aléatoire tiré selon la loi H. Ainsi :

$$\Pr(N = n) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^n}{n!} h(\lambda) d\lambda$$

Détermination d'une loi de coût : difficultés de l'exercice

- **La nécessité du recul.**
- **RC corporelle : évolution du préjudice. Parfois plus de 10 ans avant de connaître le préjudice réel (dérive des coûts fréquente)**
- **RC industrielle : exemple des phénomènes de pollution, donnant lieu à des recours (faute ou accident ?)**
- **Une survenance parfois tardive → perturbation des modèles fondés sur des exercices de durée précise**
- **Des observations sur des populations plus réduites que pour l'étude des fréquences → Une précision de la modélisation réduite. En particulier, les écarts types sont souvent difficiles à appréhender**

Détermination d'une loi de coût : principales lois usuelles

La loi Normale

$$C \sim N(\mu, \sigma)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

- Espérance μ ; Variance σ^2

Détermination d'une loi de coût : principales lois usuelles

- **Particularités problématiques :**
 - Possibilité de sinistre à valeurs tendant vers $-\infty$
 - Probabilité importante de sinistres à valeurs négatives
 - Symétrie de la loi autour de la valeur moyenne

Détermination d'une loi de coût : principales lois usuelles

La Loi log Normale :

$$\ln C \sim N(\mu, \sigma)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right); & x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right); & x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- **Particularités :**
 - Pas de sinistre à valeur négative
 - Dissymétrie de la loi → plus adaptée à la modélisation des coûts de sinistres

Détermination d'une loi de coût : principales lois usuelles

La loi exponentielle

$$C \sim \mathcal{E}(\theta); x \geq 0$$

$$f(x) = \theta \cdot \exp(-\theta \cdot x)$$

$$F(x) = 1 - \exp(-\theta \cdot x)$$

- Particularités : cette loi est beaucoup utilisée par les actuaires, mais ne peut s'appliquer qu'à des sinistres peu dangereux pour l'assureur (décroissance exponentielle de la fonction de répartition avec les coûts)

Détermination d'une loi de coût : principales lois usuelles

La loi Gamma

$$C \sim \gamma(p, q)$$

$$f(x) = \frac{q^p \exp(-q \cdot x) \cdot x^{p-1}}{\int_0^{+\infty} \exp(-u) \cdot u^{p-1} du}$$

$$E(C) = p / q$$

$$Var(C) = p / q^2$$

Détermination d'une loi de coût : principales lois usuelles

- Propriétés :
- La forme de la courbe de densité de répartition de la loi Gamma dépend des valeurs de p et de q. Elle permet donc d'appréhender des comportements de coûts très variés.
- Utilisation : dommages matériels, RC matériel

Détermination d'une loi de coût : principales lois usuelles

La loi de Pareto

$$C \sim Par(x_o, \alpha)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0; x \leq x_o \\ 1 - \left(\frac{x_o}{x}\right)^\alpha; x > x_o \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_o} \cdot \left(\frac{x_o}{x}\right)^{\alpha+1}; x > x_o$$

$$x_o, \alpha > 0$$

$$E(C) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot x_o$$

$$V(C) = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \cdot x_o^2$$

Détermination d'une loi de coût : principales lois usuelles

- **Propriétés :** Cette loi ne prend des valeurs qu'au-delà d'un certain seuil pour les coûts de sinistres
- **Queue épaisse de distribution :** la décroissance de la probabilité que le montant de sinistre dépasse x est polynomiale et non plus exponentielle comme dans les modèles précédents
- **Loi utilisée pour des risques à même de mettre en danger la compagnie → utilisation fréquente en réassurance**

Détermination d'une loi de coût : une remarque

- Pour certains groupes de risques, il est nécessaire de distinguer deux ou plusieurs catégories de sinistres pour obtenir de bons ajustements de la loi des coûts
 - Exemple de la RC Auto : il est nécessaire de distinguer entre sinistres corporels (de coût moyen élevé) et non corporels (de coût moins élevé)

Fonction de répartition du coût cumulé des sinistres

- Des approximations nécessaires
- Utilisation des premiers moments de la variable aléatoire X, en fonction des moments des fréquences et des coûts. Il est possible de montrer :

➤ Espérance $E(X) = E(N).E(C)$

➤ Variance $V(X) = E(N).V(C) + V(N).E(C)^2$

➤ Moment d'ordre 3

$$\mu_3(X) = E(N).\mu_3(C) + 3V(N).E(C).V(C) + \mu_3(N).E(C)^3$$

Fonction de répartition du coût cumulé des sinistres: Approximation d'Edgeworth

- Supposons X , variable aléatoire réelle correspondant au montant cumulé des sinistres, F sa fonction de répartition. Notons :

$$\mu = E(X)$$

$$\sigma^2 = V(X)$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4} - 3$$

- On définit la variable aléatoire Y :
$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
- Et l'on pose :
$$y = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Fonction de répartition du coût cumulé des sinistres: Approximation d'Edgeworth

- On peut écrire :

$$F(x) \approx \Phi(y) - \frac{\gamma_1}{6} \cdot \phi''(y) + \frac{\gamma_2}{24} \phi'''(y)$$

- Avec :

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), y \in \mathbb{R}$$

Désignant respectivement la fonction de répartition et de densité de la loi normale centrée réduite

Fonction de répartition du coût cumulé des sinistres: Approximation d'Edgeworth

- L'idée de l'approximation d'Edgeworth est d'approcher la fonction de répartition F par un développement limité. Les coefficients de ce développement limité sont obtenus à partir des moments (d'ordres 1,2,3 et 4) de X .
- Il s'agira donc essentiellement de calculer les moments de X à partir de ceux de N et de C , puis les coefficients de Fischer.
- Remarque : Il a été observé que l'approximation d'Edgeworth donne de bons résultats lorsque x est dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$. D'autres formules existent lorsque x prend ses valeurs à l'extérieur de cet intervalle, notamment les approximations de type « Normal Power »

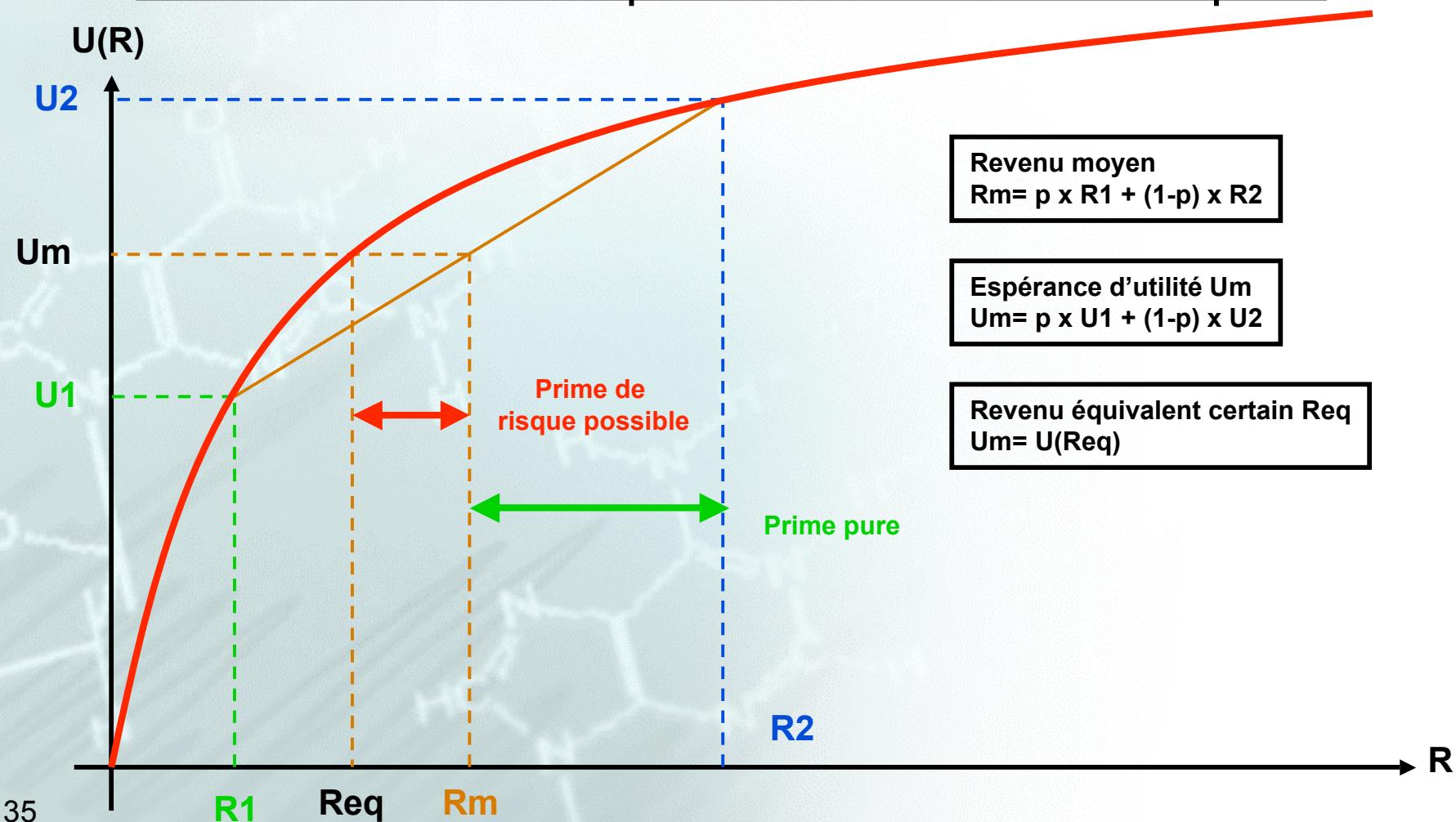
Fonction de répartition du coût cumulé des sinistres: Approximation « Normal Power »

- **Objectif : améliorer l'approximation d'Edgeworth pour des valeurs extrêmes**
- **On applique cette fois l'approximation normale à une fonction de la variable aléatoire Y plutôt qu'à la variable Y elle-même**
- **On peut écrire :**

$$F(x) \simeq \Phi\left(-\frac{3}{\gamma_1} + \sqrt{1 + \frac{6y}{\gamma_1} + \frac{9}{\gamma_1^2}}\right)$$

Théorie du risque et de l'assurance : quelques gageures

1 - cerner le comportement face au risque



Théorie du risque et de l'assurance : quelques gageures

1 - cerner le comportement face au risque

- Insuffisance du critère de l'espérance de gain (**paradoxe de Saint Pétersbourg**)
- Critère de l'espérance d'utilité, formalisé par von Neumann et Morgenstern.
- Possibilité de comparer l'aversion au risque des agents en mesurant la concavité de la fonction d'utilité
- Un paradigme remis en question

Théorie du risque et de l'assurance : quelques gageures

2 - Information et asymétrie d'information

- **L'information, au cœur des politiques tarifaires de l'assureur**
- **Asymétrie d'information : quelques exemples en assurance**
- **Antisélection et mécanismes de révélation**
- **Aléa moral et mécanismes d'incitation**
- **Jusqu'où peut-on rechercher de l'information ?**