Systèmes Dynamiques : Topologie

Exercice 8 : Si f est une fonction continue sur $[0,1]$ on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

1) Soit $E = C^0([0,1],[0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On définit sur E la distance

$$d_\infty : E\times E \longrightarrow [0,+\infty[$$
$$(f,g) \longmapsto d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |(f-g)(x)|$$

1-a) L'espace (E, d_∞) est-il connexe ?

Soit $f, g \in E$. On définit $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$
$$t \longmapsto \gamma(t) = tf + (1-t)g$$

On a : $\begin{cases} \gamma(0) = g \\ \gamma(1) = f \end{cases}$

Rq : $\gamma(t)$ est une fonction

Montrons que γ est continue c-à-d :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |t_1 - t_2| < \eta \Rightarrow \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|_\infty < \varepsilon$

Pour t fixé, on a $\forall x \in [0,1]$: $\gamma(t)[x] = tf(x) + (1-t)g(x)$ est continue comme somme de fonctions continues

Comme f et g sont à valeurs dans $[0,1]$ et que $[0,1]$ est convexe on a :

$\forall t \in [0,1]$, $tf(x) + (1-t)g(x) \in [0,1]$

Donc $\forall x \in [0,1]$, $\gamma(t)[x]$ est à valeurs dans $[0,1]$

Donc $\gamma(t)$ est une fonction à valeurs dans $[0,1]$, $\forall x \in [0,1]$

Montrons que γ est continue par rapport à t

$$\|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\gamma(t_1)[x] - \gamma(t_2)[x]|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} |t_1 f(x) + (1-t_1) g(x) - (t_2 f(x) + (1-t_2) g(x)|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} |(t_1-t_2) f(x) + (t_2-t_1) g(x)|$$

$$= |t_1-t_2| \cdot \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + g(x)|$$

$$= |t_1-t_2| \cdot \|f+g\|_\infty$$

Ainsi, $\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|_2 \leq (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\cdot |t_1-t_2|$

$\Rightarrow$ γ est continue

$\Rightarrow$ (E, d_∞) est connexe par arcs.

//

Soit $f, g\in E$, soit $t\in[0,1]$, $tf+(1-t)g$ est continue comme somme de fonctions continues

. $\forall x\in[0,1]$, $f(x)$ et $g(x) \in [0,1]$

. $[0,1]$ est convexe donc $tf(x) + (1-t) g(x) \in [0,1]$

donc $tf+(1-t)g$ est à valeurs dans $[0,1]$

$\Rightarrow (E, d_\infty)$ est convexe $\Leftrightarrow \forall f,g\in E, \forall t\in[0,1]$, $tf+(1-t)g \in E$

$\Rightarrow (E, d_\infty)$ est connexe car convexe.

1-b) L'espace (E, d_∞) est-il complet ?

(E, d_∞) est complet comme fermé de l'espace métrique $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), d_\infty)$ qui est complet. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d_\infty} f \iff d_\infty(f_n, f) \underset{n\to+\infty}{=} 0 \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

À-t-on $f \in E$?

$*$ $f \in \mathcal{C}^0$ car c'est la limite uniforme de fonctions continues

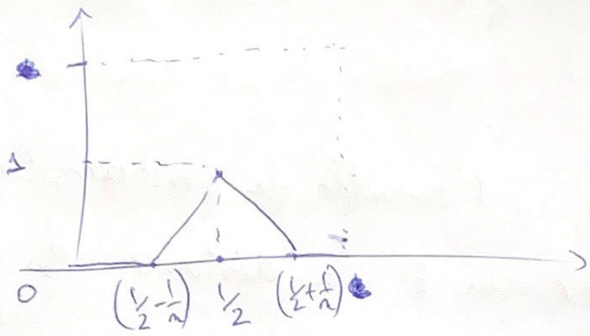
$*$ f est à valeurs dans $[0,1]$ car $[0,1]$ est fermé.

donc $\overline{[0,1)} = [0,1)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in [0,1]$

1-c) L'espace (E, d_∞) est-il compact ?

Schéma :



. Considerons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f(x)=0$ avec $x\in[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}$

. $f(\frac{1}{2})=1$

Par l'absurde, s'il existait (f_{n_k}) sous-suite de (f_n) convergente dans E.

i.e $f_{n_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{d_\infty} g \iff d_\infty(f_{n_k}, g) \underset{n\to+\infty}{=} 0 \iff \|f_{n_k}-g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

g serait continue et

$\forall x\in[0,1]$, $f_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} g(x)$ or f n'est pas continue

Impossible donc toute suite n'admet pas une sous-suite convergente dans E. Le critère séquentiel de la compacité n'est donc pas vérifié donc (E, d_∞) n'est pas compact.

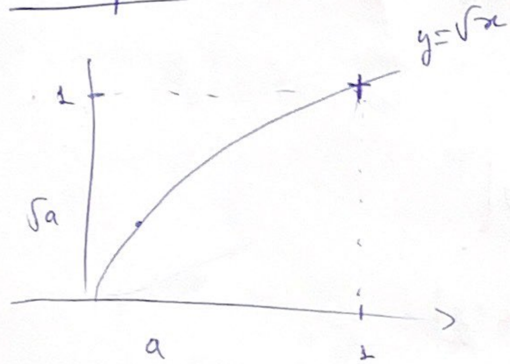
2) Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on définit à présent F_k l'ensemble de fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$ constitué des fonctions k-lipschitziennes c-à-d vérifiant $\forall x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x-y|$

2-a) F_k est-il un sous-ensemble de E ?

- Une fonction lipschitzienne est continue donc $F_k \subset E$

Remarque : $E \not\subset F_k$

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x} = f(x)$$



- n'est pas k-lipschitzienne pour aucun k :

- $$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

donc pas bornée

⚠ Remarque Importante :

Si f est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq k$

Alors f est k-lipschitzienne

On utilise le Théorème des Accroissements finis :

$\forall y, z \in [0,1]$, $\exists c \in]0,1[$ tq $f(y) - f(z) = f'(c)(y-z)$

$\rightarrow |f(y) - f(z)| = |f'(c)| \cdot |y-z|$

$\rightarrow |f(y) - f(z)| \leq k \cdot |y-z|$

2-b) L'espace (F_k, d_∞) est-il connexe ?

Soit $f, g \in F_k$ et $t \in [0,1]$. A-t-on $tf + (1-t)g \in F_k$?

On a :

$$\begin{cases} f \in F_k \\ g \in F_k \end{cases} \iff \begin{cases} |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x-y| \\ |g(x) - g(y)| \leq k \cdot |x-y| \end{cases}$$

$h(x) = t f(x) + (1-t) g(x)$

$|h(x) - h(y)|$

$$\Rightarrow \Big| [t f(x) + (1-t) g(x)] - [t f(y) + (1-t) g(y)] \Big|$$

$$\leq | t(f(x) - f(y)) + (1-t)(g(x) - g(y)) |$$

$$\leq |t| \cdot |f(x) - f(y)| + |1-t| \cdot |g(x) - g(y)|$$

$$\leq \frac{k}{2} |x-y| + \frac{k}{2} |x-y| = k \cdot |x-y|$$

donc $tf + (1-t)g$ est k-lipschitzienne

c-à-d F_k est convexe

$\Rightarrow$ F_k est connexe

2-c) L'espace (F_k, d_∞) est-il complet ?

. Vérifions si F_k est fermé dans E.

Caractérisation séquentielle des fermés : Il faut vérifier si

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de F_k tq $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f \iff d_\infty(f_n, f) = 0$

$\iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

alors $\boxed{f \overset{?}{\in} F_k}$

On a : $d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\iff \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$f \in F_k$ car f est limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F_k$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in [0,1]^2, |f_n(x) - f_n(y)| \leq k\cdot|x-y|$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k\cdot|x-y|$ lorsque $n \to +\infty$

Ainsi f est k-lipschitzienne $\Rightarrow f \in E$ (car continue)

Ainsi $\begin{cases} . F_k \text{ est un fermé de } E \\ . (E, d_\infty) \text{ est complet} \end{cases}$

$\Rightarrow (F_k, d_\infty)$ est complet comme un fermé d'un espace complet

2-c) L'espace (F_k, d_∞) est-il complet ?

• Vérifions si F_k est fermé dans E.

Caractérisation séquentielle des fermés : Il faut vérifier si

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de F_k tq $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f \iff d_\infty(f_n, f) = 0$

$\iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

alors $\boxed{f \overset{?}{\in} F_k}$

On a : $d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\iff \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$f \in F_k$ car f est limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F_k$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (x,y) \in [0,1]^2, \ |f_n(x) - f_n(y)| \leq k \cdot |x-y|$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x-y|$ lorsque $n \to +\infty$

Ainsi f est k-lipschitzienne $\Rightarrow f \in E$ (car continue)

Ainsi $\begin{cases} \cdot \ F_k \text{ est un fermé de } E \\ \cdot \ (E, d_\infty) \text{ est complet} \end{cases}$

$\Rightarrow (F_k, d_\infty)$ est complet comme un fermé d'un espace complet

2-d) L'espace (F_k, d_∞) est-il compact ?

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un compact $K=[0,1]$

$$\begin{cases} \cdot\ \exists x_0 \in K \text{ tq } f_n(x_0) \text{ bornée} \\ \cdot\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ équicontinue} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente pour la norme uniforme.

Définition (Équicontinuité)

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall n\in\mathbb{N}, \forall x,y\in K$, $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Comme $f_n \in F_k \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)| \leq k\cdot|x-y|$

Ainsi pour $\delta = \frac{\varepsilon}{2k} \Rightarrow |x-y| < \frac{\varepsilon}{2k}$

$$\Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)| \leq k\cdot|x-y| < k\cdot\frac{\varepsilon}{2k} = \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $\begin{cases} \cdot\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est équicontinue} \\ \cdot\ \exists x_0\in\mathbb{R} \text{ tq } f_n(x_0) \text{ soit bornée car } f_n \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \end{cases}$

$\Rightarrow$ On peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergente pour la norme uniforme

donc (F_k, d_∞) est compact.