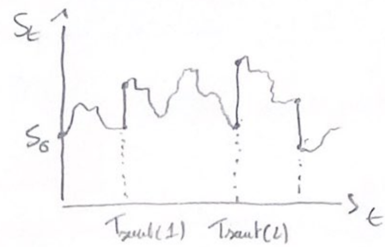
Monte carlo

Evolution des actifs avec des sauts. Simulation par MC



Rappel: Vous savez simuler S^T dans le modèle B.S $\frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma\,dW_t$

$\Rightarrow S_{t+1} = S_t \cdot e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\cdot \mathcal{N}(0,1)}$

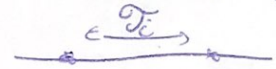
On suppose que le nombre de saut sur $[0;t]$ suit la loi de Poisson

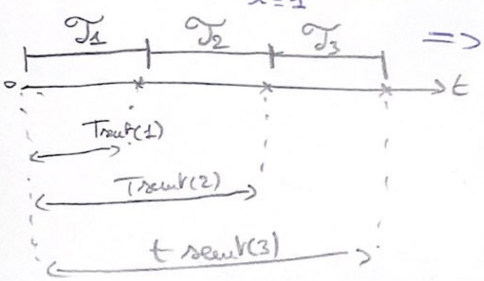
$$P(N_t = K) = e^{-\lambda(t)} \frac{(\lambda(t))^k}{K!}$$

De la théorie $E[N_t] = \lambda t \Rightarrow$ λ est le nombre des sauts par unité de temps.

Pour simuler N_t on introduit le processus de comptage

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{n} \tau_i \le t}$$





$\Rightarrow$ c'est un processus stochastique à temps continue

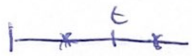
Quel est le nombre des sauts sur $[0, t]$?

$$N_t = \underbrace{\overbrace{\mathbb{1}}^{=1}_{\tau_1 \le t}}_{n=1} + \underbrace{\overbrace{\mathbb{1}}^{=1}_{\tau_1+\tau_2 \le t}}_{n=2} + \underbrace{\overbrace{\mathbb{1}}^{=1}_{\tau_1+\tau_2+\tau_3 \le t}}_{n=3} + \underbrace{\overbrace{\mathbb{1}}^{=0}_{\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4 \le t}}_{n=4} + \mathbb{1}_{\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5 \le t} + \dots\dots$$

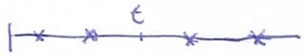
Dans notre exemple $= 1+1+1+0+0+\dots = 3. = N_t$

On va montrer que $\mathcal{T}$ suit la loi exponentielle.

$$\mathbb{P}[N_t = 0] = e^{-\lambda t} \Rightarrow \mathbb{P}[N_t \neq 0] = 1 - e^{-\lambda t}$$



ou



On definit deux evenements : $\underbrace{\underset{\text{il y a au moins un saut sur } [0,t]}{\{N_t \neq 0\}} \text{ et } \{\overset{\text{v.a}}{\mathcal{T}} \leq \overset{\text{fixe.}}{t}\}}$

Ces evenement sont identiques !!

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}[\mathcal{T} \leq t]}_{} = \mathbb{P}[N_t \neq 0] = 1 - e^{-\lambda t}$$

fonction de repartition de v.a $\mathcal{T}$: $\mathbb{F}_{\mathcal{T}}(t)$

, $\mathcal{T}$ suit la loi exponentiel avec le parametre λ.

Pour coder/simuler : $\mathcal{T} = -\dfrac{\ln(U)}{\lambda}$.

Simulation du nombre de sauts N_t sur $[0,t]$.

```
function = [ ] = Nombre_saut(t, λ)
Tsaut = 0, n = 0
  While Tsaut ≤ t
    T = - ln(rand n) / λ
    Tsaut = Tsaut + T
    n = n + 1
end.
```

après vous calculez $\mathbb{E}[N_t]$ par Mc.

$$\mathbb{E}[N_t] = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} N_t^{(n)} \sim \lambda t$$

$$Var(N_t) \; \ldots\ldots \sim \lambda t.$$

Extension du modèle de Black and Scholes

$$\frac{dS_t}{S_t} = \underbrace{\mu}_{\text{drift} \neq r \text{ pour que } e^{-rt} S_t \text{ soit une martingale.}} dt + \sigma dW_t + J dN_t$$

, W_t et N_t sont indépendants, Modèle de Merton - J suit la loi Normale

drift $\neq r$ pour que $e^{-rt} S_t$ soit une martingale.

$J = cst$ $\quad S_T = S_0 \cdot e^{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma W_t + J N_t}$ N_t est le nb de sauts sur $[0,t]$.

modélise le volume des sauts

Si J est une v.a $\Rightarrow J_{ti} \Rightarrow S_T = S_0 \cdot e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N_t} J_i}$ Si $J_j = J$ $\Rightarrow \sum_{j=1}^{N_t} J = N_t \cdot J$

Si Nous allons travailler avec une autre v.a Y, tq $1 + Y = e^J$

(Demonstration sur Teams
$\mu = r - \lambda \Delta t \, E[Y]$)

$$e^{\sum_{j=1}^{N_t} J_j} = e^{J_1 + \dots + J_{N_t}}$$

$$= (1 + Y_1)(1 + Y_2) \dots (1 + Y_{J_{N_t}}) = \prod_{j=1}^{N_T} (1 + Y_j)$$

$$S_T = S_0 \cdot \prod_{j=1}^{N_T} (1 + Y_j) \cdot e^{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma W_T}$$

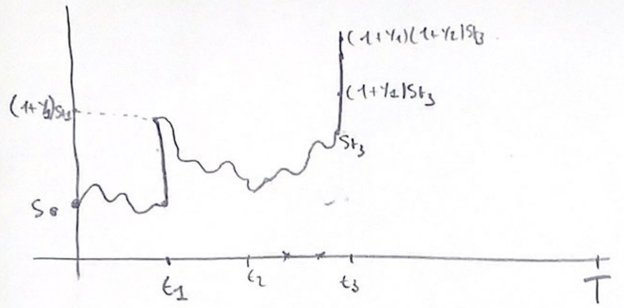
$$\prod_{j=1}^{N_{t_1}} (1 + Y_j) \prod_{k=1}^{N_{t_2} - N_{t_1}} (1 + Y_k) \prod_{i=1}^{N_{t_3} - N_{t_2}} (1 + Y_i) \dots$$

$N_{t_2} - N_{t_1}$
le nb de sauts
sur $[t_1, t_2]$.

N_t - (vous allez montrer) est stationnaire avec les accroissements indépendants.
$\Rightarrow N_t - N_s$ la même que N_{t-s}
N_{t_1} suit la loi de $N_{\Delta t}$
$N_{t_2 t_1}$ suit la loi de $N_{\Delta t}$.

$$S_T = S_0 \cdot \left[e^{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma W_t} \right] \cdot \prod_{j=1}^{N_t} (1 + Y_j)$$

$$\boxed{S_{t+1} = S_{ti} \, e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \, \text{randn}} \cdot \prod_{j=1}^{N_{\Delta t}} (1 + Y_j)}$$



$\Delta t = \frac{T}{N}$

function [ ] = Amplitude(t, λ)

Nsaut = Nombre_saut(t, λ)

```
for j = 1 : Nsaut.
    if rand < 1/2
        Y = a
    else Y = -b.
    end
    Amp = Amp(1+Y)
end
```

Toy Model.

$\mathbb{P}[Y = a] = 1/2$

$\mathbb{P}[Y = -b] = 1/2$

$a = 0,5$

$b = 0,5.$

Trajectoire :

function [ ] = Trajectoire ( ).

```
S(1) = S0
λ = 4 , r = 0,1 , S0 = 10, T = 1 , N = 100, σ = 0,5
for i=1: N
Δt = T/N
S(i+1) = S(i) . e^((μ - σ²/2)Δt + √Δt randn)
t(i+1) = t(i) + Δt
end
plot(t,S)
```