Exercice 2 : Soient $X_1, .. X_n$ des variables aléatoire indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$

1) Montrer que $X = (X_1, .. X_n)^t = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien.

$\forall (a_1, .., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Les v.a.r. $a_1 X_1, \dots, a_n X_n$ sont encore gaussiennes indépendantes alors $a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ est encore gaussienne.

Car si $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes

$\Rightarrow \quad X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Car $\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) \times \varphi_{X_2}(t)$ par indépendance

$$= \exp\left(i m_1 t - \frac{(\sigma_1 t)^2}{2}\right) \cdot \exp\left(i m_2 t - \frac{(\sigma_2 t)^2}{2}\right)$$

$$= \exp\left(i(m_1 + m_2) t - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \cdot t^2}{2}\right)$$

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \mathbb{E}\left[e^{it(X_1+X_2)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX_1} \cdot e^{itX_2}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX_1}\right] \cdot \mathbb{E}\left[e^{itX_2}\right]$$

Par récurrence, $a_1 X_1 + .. + a_n X_n$ est gaussien

Ainsi, toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne.

c-à-d $\forall a \in \mathbb{R}^n \quad a^t X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$

2) Ecrire la densité et la fonction caractéristique du vecteur X.

$$\Phi_X(u) = \exp\left(i u^t \mathbb{E}[X] - \frac{1}{2} u^t \Gamma_X u\right) \quad , \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Lorsque $n=1$, $u \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} u^t \Gamma_X u = Var(X) \cdot u^2 = \sigma^2 u^2 \\ u^t \mathbb{E}[X] = m u \end{cases}$

$$\Rightarrow \Phi_X(u) = e^{ium - (\frac{1}{2}\sigma^2 u^2)}$$

On a l'application $x \mapsto u^t . x = \langle u, x \rangle$ est une forme linéaire.

La v.a. $u^t X$ est donc gaussienne. Son esperance et sa variance

$$\begin{cases} um = \mathbb{E}[u^t \cancel{X}] = u^t . \mathbb{E}[X] \\ \sigma^2 = Var(u^t X) = \mathbb{E}\left[\left(u^t X - \mathbb{E}[u^t X]\right) . \left(u^t X - \mathbb{E}[u^t X]\right)^t\right] \end{cases}$$

$$= u^t \Gamma_X u = \mathbb{E}\left[u^t(X - \mathbb{E}(X)) . \left(u^t (X - \mathbb{E}(X))\right)^t\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\langle u, (X - \mathbb{E}(X)) \rangle\right)^2\right]$$

car

$$\mathbb{E}\left[\left(\langle u, X - \mathbb{E}[X] \rangle\right)^2\right] = u^t \Gamma_X u = \langle u, \Gamma_X u \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle u, X - \mathbb{E}[X] \rangle &= \langle u, X \rangle - \langle u, \mathbb{E}[X] \rangle \\ &= u^t X - u^t \mathbb{E}[X] \\ &= u^t X - \mathbb{E}[u^t X] \end{aligned}$$

densité : X admet une densité car $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$

car $\begin{cases} m = \mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma = \left(\mathrm{cov}(X_i, X_j)\right)_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n \end{cases}$

donc $\Gamma = I_n$ est inversible d'inverse $I_n = \Gamma$

alors la loi de X est non dégénérée et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Gamma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^t \cdot \Gamma^{-1}(x-m)\right)$$

On a
- . $\det(\Gamma) = \det(I_n) = 1$
- . $x - m = x$
- . $\Gamma^{-1} = I_n$
- . $x^t x = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \langle x, x \rangle$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$

Exo 2 :

$X_1, \dots, X_n$ iid $\mathcal{N}(0,1)$

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ admet pour densité $f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$

$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$

$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x, x \rangle\right)$

Et $\Phi_X(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}(t_i) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{1}{2} t_i^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)$

$= \exp\left(-\frac{1}{2} \langle t, t \rangle\right)$

Exo 2

$Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$
$Z = b_1 X_1 + \dots + b_n X_n$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = A \cdot X$

où $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times n}(\mathbb{R})$ $\Gamma_{Y,Z} \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(Y) & \mathrm{cov}(Y,Z) \\ \mathrm{cov}(Z,Y) & \mathrm{Var}(Z) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ est une transformation affine d'un vecteur gaussien.
il est donc gaussien.

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[a_1 X_1 + \dots + a_n X_n] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n] = 0$

de même $\mathbb{E}[Z] = 0$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \underset{\text{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(a_i x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, \mathrm{Var}(X_i)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \langle a, a \rangle \quad \text{où} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

de même $\mathrm{Var}(Z) = \langle b, b \rangle$ $\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\mathrm{cov}(Y, Z) = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot x_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \underbrace{\mathrm{cov}(x_i, x_j)}_{= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$= \langle a, b \rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma_{(Y,Z)} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 & \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i & \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle \\ \langle a, b \rangle & \langle b, b \rangle \end{pmatrix}$$