$$N \to \mathcal{P}(\Lambda) \iff \mathbb{P}(N=m \mid \Lambda=\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$$

$$\iff \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N=m\}} \mid \sigma(\Lambda)\right] = \frac{e^{-\Lambda}\Lambda^m}{m!}$$

$$\iff \mathbb{P}(N=m \mid \Lambda) = \frac{e^{-\Lambda}\Lambda^m}{m!}$$

$$\mathbb{P}(N=m) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}\, d\mathbb{P}_\Lambda(\lambda) = \int_\Omega g(\lambda)\, d\mathbb{P}_\Lambda(\lambda)$$

Si $\Lambda$ est une v.a.r discrète positive à valeurs dans $\{z_i, i \in I\}$ dénombrable

mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_\Lambda = \sum_{i \in I} p_i\, \delta_{\{z_i\}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N=m) = \sum_{i \in I} g(z_i)\, \mathbb{P}(\Lambda = z_i)$$

$$= \sum_{i \in I} \frac{e^{-z_i} z_i^m}{m!}\, \mathbb{P}(\Lambda = z_i)$$

Exo 8 : 1-a) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, \sigma(N)\right)\right)$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y \mid \sigma(N))\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{E}(Y \mid \{N=i\}) \cdot \mathbb{1}_{\{N=i\}}}_{\geq 0 \text{ car } Y \geq 0}\right)$$

mesure et probabilité

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\underbrace{\mathbb{E}(Y \mid \{N=m\})}_{\in\mathbb{R}} \cdot \mathbb{1}_{\{N=m\}}\right)$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y \mid \{N=m\})\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{N=m\}}\right)$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y \mid \{N=m\})\, \mathbb{P}(N=m)$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, \{N=m\}\right) \times \mathbb{P}(N=m)$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) \times \mathbb{1}_{\{N=m\}}\right)}{\mathbb{P}(N=m)} \times \mathbb{P}(N=m)$$

$N \perp\!\!\!\perp X_i$

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\right) \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{N=m\}}\right)}{\mathbb{P}(N=m)} \times \mathbb{P}(N=m)$$

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \left( \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}(X_i) \right) \cdot \mathbb{P}(N=m) \qquad \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(N)$$

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} m \cdot \mu \; \mathbb{P}(N=m) = \mu \cdot \sum_{m\in\mathbb{N}} m \cdot \mathbb{P}(N=m)$$

$$= \mu \cdot \mathbb{E}(N)$$

$$= \mu \lambda$$

1-b) Calcul de $\mathrm{Var}(Y)$.

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left( \sum_{i=1}^{N} X_i \right) = \mathbb{E}\left( \left( \sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2 \right) - \underbrace{\mathbb{E}(Y)^2}_{(\mu\lambda)^2}$$

On $\mathbb{E}\left[ \left( \sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2 \right] = \mathbb{E}\left( \mathbb{E}\left( \left( \sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2 \,\middle|\, N \right) \right)$

$$= \mathbb{E}\left( \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left( \left( \sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2 \,\middle|\, \{N=m\} \right) \cdot \mathbb{1}_{\{N=m\}} \right)$$

$$= \mathbb{E}\left( \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[ \left( \sum_{i=1}^{m} X_i \right)^2 \right] \times \mathbb{1}_{\{N=m\}} \right)$$

=

Or $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} X_i X_j\right)$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\cdot\sum_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j\right)$$

$\mathbb{E}$ est linéaire sur l'espace des v.a.r positives (ici $X_1^2 \geq 0$), et intégrables

les $X_i$, $i\in\{1,\dots,n\}$ indépendants donc.

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}(X_i X_j)$$

On a $\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$

$$= n\sigma^2 + (n\mu)^2$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\sigma^2 n + \mu^2 n^2)\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right)$$

$$= \sigma^2\,\mathbb{E}(N) + \mu^2\,\mathbb{E}(N^2)$$

$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(\Lambda)$ et $\Lambda = \lambda \Theta$

<u>On a</u> $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right] = \sigma^2 \times \mathbb{E}[\lambda \Theta] + \mu^2 \cdot \mathbb{E}\left((\lambda \Theta)^2 + \lambda \Theta\right) - \lambda^2\mu^2$

$= \sigma^2 \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}(\Theta) + \mu^2 \times \left(\lambda^2 \left(Var(\Theta) + \mathbb{E}(\Theta)^2\right) + \lambda \mathbb{E}(\Theta)\right)$

$= \sigma^2 \lambda + \mu^2 \left(\lambda^2 (Var(\Theta) + 1) + \lambda\right) - \lambda^2 \mu^2$

$= \cancel{\sigma^2 \lambda \mu^2}$

$= \cancel{\lambda^2 \mu^2 Var(\Theta) + \lambda \mu^2}$

<u>Donc</u> $Var(Y) = \lambda^2 \mu^2 \, Var(\Theta) + \lambda \mu^2$

2) $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $\quad \Theta = 1$ $\quad X_i \sim \mathcal{E}xp(\alpha)$

$\mathbb{E}(Y) = \lambda\, \mathbb{E}(X_1)$ or $X_1 \sim \mathcal{E}xp(\alpha)$ donc

$= \frac{\lambda}{\alpha}$ $\quad \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\alpha}$

$Var(Y) = \lambda^2 \mu^2\, Var(\Theta) + \lambda\mu^2 + \lambda\sigma^2$

avec $\Theta \equiv 1$ donc $Var(\Theta) = 0$

$X_1 \sim \mathcal{E}xp(\alpha)$ $\quad \mu = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\alpha}$ $\quad \sigma^2 = Var(X_1) = \frac{1}{\alpha^2}$

d'où $Var(Y) = \frac{2\lambda}{\alpha^2}$

3) Prime $= \mathbb{E}(Y) + \beta\, \mathbb{E}(Y)$ $\qquad$ capital $K$

On a $R =$ Prime $- Y = \mathbb{E}(Y) \times (1+\beta) - Y$

donc $R = \beta\, \mathbb{E}(Y) - (Y - \mathbb{E}(Y))$

l'avoir la ruine $y = \{R' < 0\}$ ou $R' = R + K$

$\mathbb{P}(R' < 0) = \mathbb{P}(R + K < 0) = \mathbb{P}(\beta\, \mathbb{E}(Y) + K - (Y - \mathbb{E}(Y)) < 0)$

$= \mathbb{P}(\beta\, \mathbb{E}(Y) + K < Y - \mathbb{E}(Y))$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\beta\cdot\mathbb{E}(Y)+K}{\sigma(Y)} < \frac{Y-\mathbb{E}(Y)}{\sigma(Y)}\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Y-\mathbb{E}(Y)}{\sigma(Y)} \leq \frac{\beta\cdot\mathbb{E}(Y)+K}{\sigma(Y)}\right)$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{\beta\cdot\mathbb{E}(Y)+K}{\sigma(Y)}\right) \quad \text{où } \phi(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$= \mathbb{P}(Z \leq x)$$

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

<u>donc</u> $\mathbb{P}(\pi_{ruine}^{\tau} \leq \varepsilon) = 1 - \phi\left(\frac{\beta\cdot\mathbb{E}(Y)+K}{\sigma(Y)}\right) < \varepsilon$

$$= \phi\left(\frac{\beta\,\mathbb{E}(Y)+K}{\sigma(Y)}\right) \geq 1-\varepsilon$$

théorème des fcts réciproque toute fct croissante ~~continue~~ admet une réciproque continue croissante

$\Rightarrow$ $\phi^{-1}$ existe et est $C^0$ $\nearrow$ car $\phi$ est croissante continue

$$\Rightarrow \quad \beta \geq \frac{\sigma(Y)\cdot\phi^{-1}(1-\varepsilon) - K}{\mathbb{E}(Y)} \quad \text{car } \sigma(Y) > 0 \text{ et } \mathbb{E}(Y) > 0$$

$$\beta^{*} = \frac{\sqrt{\frac{2\lambda}{\alpha^{2}}} + \phi^{-1}(1-\varepsilon) - K}{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\ \phi^{-1}(1-\varepsilon) - \frac{\alpha}{\lambda} \cdot K$$