Système dynamique : Feuille 2

Exo 1 : Les problèmes de Cauchy suivant admettent une solution unique

(A) $\begin{cases} y'(t) = (y(t))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} y'(t) = |y(t)| + |t|^{\frac{1}{2}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} y'(t) = |y(t)|^{\frac{1}{2}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(A) $\frac{dy(t)}{dt} = (y(t))^2 \iff \frac{dy}{dt} = y^2 \iff \frac{dy}{y^2} = dt \iff \cancel{-d\left(\frac{1}{y}\right) = dt}$

$\cancel{\iff -\frac{1}{y} = t + c \iff y(t) = -\frac{1}{t+c}}$ $\cancel{y(0) = 1 \iff -\frac{1}{0+c} = 1 \iff c = -1}$ $\cancel{y(t) = \frac{1}{1-t}}$

Rep De la forme $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ (en t il faut que ça soit simplement continue

(en y il faut que ça soit lipschitzienne localement

(A) $f(t, y(t)) = f(y(t)) = y(t)^2$

Soit I un intervalle fermé (compact). D'après le T.A.F.

$$\forall y_1, y_2 \in I, \quad |f(y_1) - f(y_2)| \leq \sup_{y \in I} |f'(y)| \cdot |y_1 - y_2|$$

$\Rightarrow$ f est localement lipschitzienne sur tout intervalle compact.

On a donc l'unicité globale, s'il existe $\begin{cases} y : J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ sol de (A)} \\ \tilde{y} : J \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

alors, $\forall t \in J$, $y(t) = \tilde{y}(t)$.

(B) $f(t, y(t)) = |y(t)| + |t|^{1/2}$

Soit I un intervalle compact. Pour t fixé

$\forall y_1, y_2 \in I, \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \left| |y_1| + |t|^{1/2} - (|y_2| + |t|^{1/2}) \right|$

$$= \left| |y_1| - |y_2| \right| \leq |y_1 - y_2|$$

car $\quad y_1 = y_1 - y_2 + y_2$

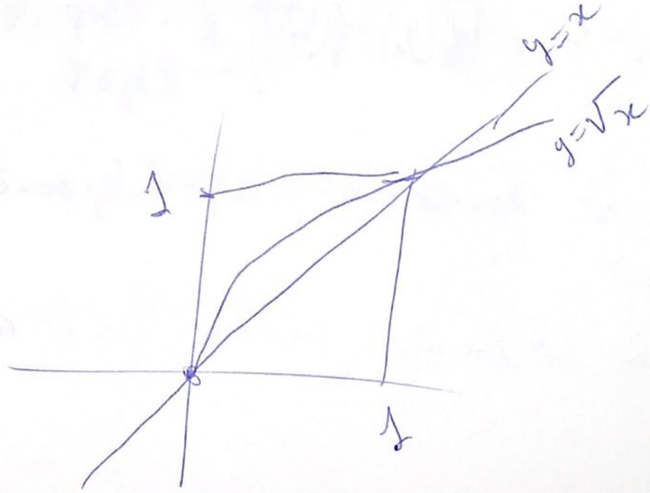
$\rightarrow \quad |y_1| \leq |y_1 - y_2| + |y_2| \implies |y_1| - |y_2| \leq |y_1 - y_2|$

De même $\quad |y_2| - |y_1| \leq |y_1 - y_2|$

$\Rightarrow$ f est loc^t lip en y

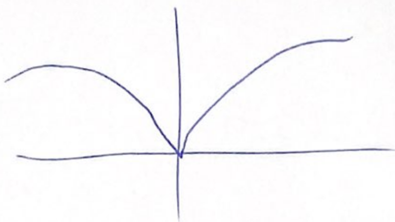
$\Rightarrow$ Unicité - Globale

Remarque : f n'est pas loc^t lip en t (pas grave)



(c) f loc^t lip sur tout intervalle I ne contenant pas 0.

$f(y(t)) = |y(t)|^{1/2}$



$f'(y(t)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|y(t)|^{1/2}}$ si $y > 0$

$-\frac{1}{2} \frac{1}{|y(t)|^{1/2}}$ si $y < 0$

T.A.F

Soit $y_1, y_2 \in I$, $|f(y_1) - f(y_2)| \leq \sup_I |f'| \cdot |y_1 - y_2|$

$\sup_I |f'| = C(I) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ $\qquad \varepsilon = dist(0, I)$

On ne peut pas appliquer le théorème d'unicité globale quand $0 \in I$ car $f|_I$ n'est pas loc^t lip.

ex: $|f(y) - f(0)| = |y|^{1/2}$ et $\frac{|f(y) - f(0)|}{|y - 0|} = \frac{1}{|y|^{1/2}}$

et $y \longmapsto \frac{1}{|y|^{1/2}}$ n'est pas borné quand $y \longrightarrow 0$

De fait, (c) admet plusieurs solutions

- $y \equiv 0$ est solution

$2ct = |c|^{1/2} |t|^{1/2}$

- $y(t) = c \cdot t^2$ $\Rightarrow y'(t) = 2ct$

$\Rightarrow (|y(t)|)^{1/2} = |c|^{1/2} |t|^{1/2}$

$y(t) = \frac{1}{4}t^2$ est sol de C sur $t \in [0, +\infty[$

car $y'(t) = \frac{t}{2}$

$|y(t)|^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}t^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}|t|$

Ainsi, $\begin{cases} y(t) = \frac{1}{4}t^2 & t > 0 \\ y(t) = -\frac{1}{4}t^2 & t \leq 0 \end{cases}$ est une solution sur $\mathbb{R}$.

4) Quels sont les problèmes qui admettent une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Dans A, B et C $\quad f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(t, y) \longmapsto f(t, y)$

$(A) : \begin{cases} y'(t) = (y(t))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = dt$

$\Leftrightarrow d\left(-\frac{1}{y}\right) = dt$

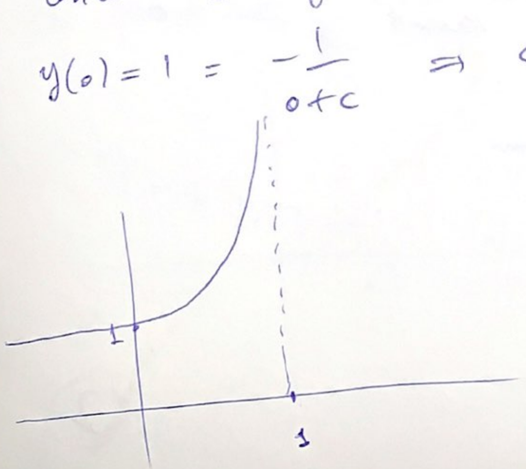
$\Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{t+c}$

On a une singularité en $t = -c$

$y(0) = 1 = -\frac{1}{0+c} \Rightarrow c = -1$

$\Big\} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t}$

singularité en 1



$]-\infty; 1[$: intervalle de temps maximal.

$\Rightarrow$ Pas d'existence globale

c-à-d $\forall t \in \mathbb{R}$.

(B) $\begin{cases} y'(t) = |y(t)| + |t|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

f est au plus à croissance affine alors existence globale

$f(t, y) = |y| + |t|^{1/2}$

$|f(t,y)| \leq 1 \cdot |y| + |t|^{1/2}$

$\left(a(t) \cdot y + b(t)\right)$

croissance au plus affine en $|y|$ à l'∞

d'après le cours on a l'existence globale.

(c) $\begin{cases} y'(t) = |y(t)|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$|f(t,y)| = |y|^{1/2} \leq C(I) \cdot |y|$

où $C(I) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

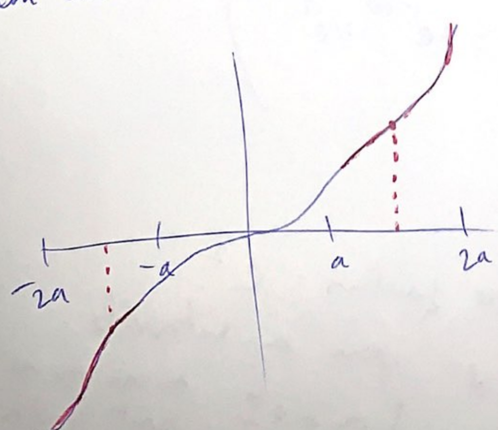
On a existence globale sur

(en fait sur tout intervalle $I =]a, +\infty[$ ou $]-\infty, -a[$

avec $a \geqslant 0$.

<u>En fait sur $\mathbb{R}$</u> : Existence sur $]-2a, 2a[$

On utilise soit Peano soit à la main.



Exo 2 :

$$(A) : \begin{cases} x''(t) + e^{t}\sin(x'(t)) + 2e^{-(x(t))^2} = e^{t^2} \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$

$$X' = \frac{d}{dt}X = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -e^{+t}\sin(x'(t)) - 2e^{-(x(t))^2} + e^{t^2} \end{pmatrix}$$

On a $F : \Big(\underbrace{t}_{\mathbb{R}}, \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^2}\Big) \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ -e^{+t}\sin(y_1) - 2e^{-y_0^2} + e^{t^2} \end{pmatrix}$

Si on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$

On a $(A) \iff \begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) \longmapsto F\left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -e^{t}\sin(y_1) - 2e^{-y_0^2} + e^{t^2} \end{pmatrix}$$

$Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad 0 \in I$?

F est C^1 comme produit et somme de fonctions C^1.

Cauchy-Lipschitz $\Rightarrow \exists!$ sol LOCALE c-à-d pour un intervalle I où $0 \in I$ mais on ne sait pas si $I = \mathbb{R}$?

$\|y\|_\infty = \max(|y_0|, |y_1|)$

. F est à croissance affine en $+\infty$

$$\|F(t,y)\|_\infty \leq \max\left(|y_1|, \left|e^t \sin(y_1) + 2e^{-y_0^2} + e^{t^2}\right|\right)$$

$$\leq \max\left(|y_1|, e^t|\sin(y_1)| + 2e^{-y_0^2} + e^{t^2}\right)$$

$$\leq |y_1| + e^t + 2 + e^{t^2}$$

$$\leq a(t)\|y\|_\infty + b(t)$$

où $\begin{cases} a(t) = 1 \\ b(t) = e^t + 2 + e^{t^2} \end{cases}$

d'après le critère d'existence globale du cours :

F est à croissance affine à ∞ donc $\exists!$ solution globale sur $\mathbb{R}$

au problème (A) : $\begin{cases} x''(t) + e^t \sin(x'(t)) + 2e^{-(x(t))^2} = e^{t^2} \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$

Exercice 8 : $\frac{d^3x}{dt^3} - 4\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 2 = 0$

Equa Diff. Ordinaire à coeff constants sans 2^{nd} membre

Polynôme caractéristique :

$$t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-1)^2(t-2)$$
$$= (t^2 2t + 1)(t-2)$$
$$= t^3 - 2t^2 + T - 2t^2 + 4t - 2$$

Cours $\longrightarrow$ $x(t) = ae^{2t} + (b_0 + b_1 t)e^t$

2 de multiplicité 1 $\Rightarrow$ polynôme constant

1 de multiplicité 2 $\Rightarrow$ polynôme de degré 1.

Feuille 3 – Exo 4 : $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ application continue T-périodique non-nulle

$\varepsilon\in\mathbb{R}$ petit

$x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ solution de $x''(t)+a\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x(t)=0$

1) On pose $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ \dot x(t)\end{pmatrix}$ et $Y(t)=X(\varepsilon t)$ Vérifier que Y est solution d'une E.D.O de la forme $Y'(t)=\varepsilon A(t)Y(t)$

$$\cancel{\dot Y(t) = \dot X(\varepsilon t) = \begin{pmatrix}\dot x(\varepsilon t)\\ \ddot x(\varepsilon t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon\, \dot x(\varepsilon t)\\ \varepsilon^2\, \ddot x(\varepsilon t)\end{pmatrix}}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x(\varepsilon t)\\ \dot x(\varepsilon t)\end{pmatrix}}$$

On écrit d'abord $x''(t) = -a\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x(t)$ sous forme matricielle

$$\dot X(t) = \begin{pmatrix}\dot x(t)\\ \ddot x(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -a\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ \dot x(t)\end{pmatrix} = \tilde A(t)\,X(t)$$

$$Y(t) = X(\varepsilon t) \Rightarrow \dot Y(t) = \varepsilon\, \dot X(\varepsilon t)$$
$$= \varepsilon\cdot \tilde A(t\varepsilon)\,X(t\varepsilon)$$
$$= \varepsilon\, A(t)\,Y(t)$$

où $A(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -a(t) & 0\end{pmatrix}$ et comme $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est T-périodique

$\Rightarrow A$ est T-périodique.

2) On note $R_\varepsilon(t,0)$ la résolvante de $\dot{Y}(t) = \varepsilon A(t) \cdot Y(t)$ (ε)

2-a) démontrer que pour ε suffisamment petit il existe des fonctions continues $Y_1, Y_2 : [0,T] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$G : [0, \varepsilon_0] \longrightarrow \mathcal{C}^1([0,T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$$

vérifiant $\| G(\varepsilon, \cdot) \|_{\mathcal{C}^1([0,T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))} = o(\varepsilon^2)$

telles que $\forall t \in [0,T]$

$$R_\varepsilon(t,0) = I + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t) + G(\varepsilon, t)$$

Théorème de dépendance différentiable par rapport à un paramètre

On sait d'après le cours que $R_\varepsilon(t,0)$ vérifie l'équa diff.

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} R_\varepsilon(t,0) = (\varepsilon A(t)) \cdot R_\varepsilon(t,0) \\ R_\varepsilon(0,0) = Id \end{cases}$$

2) Par ailleurs on sait que les solutions d'une équa diff dépendant $\mathcal{C}^k$ d'un paramètre. (ici ε.) Dépendant elles mêmes $\mathcal{C}^k$ de ce paramètre.

⚠ théorème de dépendance différentiable par rapport à un paramètre

c-à-d
$$\begin{aligned}]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[&\longrightarrow \mathcal{C}^1([0,T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \\ \varepsilon &\longmapsto R_\varepsilon(\cdot, 0) \end{aligned}$$
cette application est $\mathcal{C}^k$

l'application $\quad]\varepsilon_0, \varepsilon_0[\longrightarrow C^0([0,T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ est C^k

$$\varepsilon \longmapsto \varepsilon A(\cdot)$$

et $\quad]\varepsilon_0, \varepsilon_0[\longmapsto C^1([0,T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et C^k

$$\varepsilon \longmapsto R_\varepsilon(\cdot, 0)$$

Où on a muni $\quad C^1([0,T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

de $$\|\varphi\|_{C^1([0,T])} = \max\left(\sup_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\| \, , \, \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi'(t)\| \right)$$

$$\|\varphi\| = \max_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}} |\varphi_{ij}| \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

On aurait peu choisir

$$\sum_{i,j} |\varphi_{i,j}| \quad , \quad \left(\sum_{i,j} |\varphi_{i,j}|^2\right)^{1/2} \quad , \quad \max_{v\neq 0} \frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|}$$

norme d'opérateur

Car en dimension finie toute les normes sont équivalentes. i.e $\begin{cases} \|v\|_1 \leq C \|v\|_2 \\ \|v\|_2 \leq C \cdot \|v\|_1 \end{cases}$

Puisque l'application $\varepsilon \mapsto R_\varepsilon(\cdot, 0)$ est C^k elle est donc C^2

elle admet donc un développement limitée à l'ordre 2. 2

On peut donc écrire un DL_2 en $\varepsilon = 0$,

$$R_\varepsilon(\cdot, 0) = I + \varepsilon Y_1(\cdot) + \varepsilon^2 Y_2(\cdot) + G(\varepsilon, \cdot)$$

où $Y_1, Y_2 : [0, T] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de classe C^1

(i.e. $Y_1, Y_2 \in C^1([0,T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$)

et $G(\varepsilon, \cdot) = o(\varepsilon^2)$

c-à-d $\exists\, \eta :]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\longrightarrow C^1([0,T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

$$\varepsilon \longmapsto \eta(\varepsilon)$$

où l'on a muni $C^1([0,T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ de la norme :

$$\|\eta\|_{C^1([0,T])} = \operatorname{Max}\left(\sup_{t\in[0,T]} \|\eta(t)\| , \sup_{t\in[0,T]} \|\eta'(t)\| \right)$$

et $\|\eta(t)\| = \max\limits_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}} |\eta_{i,j}|$ ou $\sum |\eta_{i,j}|$ ou $\left(\sum |\eta_{i,j}|^2\right)^{1/2}$

ou $\max\limits_{v\neq 0} \dfrac{\|\eta(v)\|}{\|v\|}$

par équivalence des normes en dimension finie.

telle que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \eta(\varepsilon) = 0$

$$G(\varepsilon, \cdot) = o(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 . \eta(\varepsilon)$$

2-b) Calculer $Y_1(0)$ et $Y_2(0)$ puis $Y_1(\cdot)$ et $Y_2(\cdot)$

On utilise la $\boxed{\text{méthode des perturbations}}$

$R_\varepsilon(t,0)$ vérifie l'équa diff. (3) $\begin{cases} \dfrac{d}{dt} R_\varepsilon(t,0) = \varepsilon A(t) \cdot R_\varepsilon(t,0) \\ R_\varepsilon(0,0) = Id \end{cases}$

Remplaçons dans l'équation diff (3) $R_\varepsilon(t,0)$ par son DL_2

On obtient

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(I + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t) + G(\varepsilon,t)\right) = \varepsilon A(t)\left(I + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t) + G(\varepsilon,t)\right) \\ Id + \varepsilon Y_1(0) + \varepsilon^2 Y_2(0) + G(\varepsilon,0) = Id \quad (*) \end{cases}$$

Regroupons les termes en puissance de ε pour utiliser le fait qu'un DL est unique

$$\varepsilon \dot{Y}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{Y}_2(t) + \underbrace{\dot{G}_\varepsilon(t)}_{o(\varepsilon^2)} = \varepsilon A(t) + \varepsilon^2 A(t) Y_1(t) + \underbrace{\varepsilon^3 A(t) Y_2(t)}_{o(\varepsilon^3)} + \underbrace{\varepsilon A(t)\, G_\varepsilon(t)}_{o(\varepsilon^2)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon\left(\dot{Y}_1(t) - A(t)\right) + \varepsilon^2\left(Y_2'(t) - A(t) Y_1(t)\right) + o(\varepsilon^2) = 0 \quad (*)$$

Par unicité des coefficients d'un DL. On déduit 2 choses :

$$\begin{cases} \dot{Y}_1(t) = A(t) \\ \dot{Y}_2(t) = A(t) Y_1(t) \end{cases} (*) \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_1(0) = 0 \\ Y_2(0) = 0 \end{cases} (*)$$

Donc $Y_1(t) = \displaystyle\int_0^t A(s)\,ds$

$Y_2(t) = \displaystyle\int_0^t A(s) Y_1(s)\,ds = \int_0^t A(s)\left(\int_0^s A(u)\,du\right) ds$

2-c) Donner en DL_2 de $tr(R(T,0))$

On a $R_\varepsilon(T,0) = I_2 + \varepsilon Y_1(T) + \varepsilon^2 Y_2(T) + o(\varepsilon^2)$

$$= I_2 + \varepsilon \int_0^T A(t)dt + \varepsilon^2 \int_0^T A(t)\left(\int_0^t A(s)ds\right)dt + o(\varepsilon^2)$$

On $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_0^T A(t)dt = \begin{pmatrix} 0 & T \\ -\int_0^T a(t)dt & 0 \end{pmatrix}$

Et $A(t) \cdot \int_0^t A(s)ds = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t \\ -\int_0^t a(s)ds & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\int_0^t a(s)ds & 0 \\ 0 & -ta(t) \end{pmatrix}$$

donc $\int_0^T A(t) \int_0^t A(s)ds = \begin{pmatrix} -\int_0^T\int_0^t a(s)ds & 0 \\ 0 & -\int_0^T ta(t)dt \end{pmatrix}$

donc $tr(R_\varepsilon(T,0)) = 2 + \varepsilon \times 0 + \varepsilon^2\left(-\int_0^T\int_0^t a(s)ds - \int_0^T ta(t)dt\right) + o(\varepsilon^2)$

$tr(o(\varepsilon^2)) = tr\begin{pmatrix} o(\varepsilon^2) & o(\varepsilon^2) \\ o(\varepsilon^2) & o(\varepsilon^2) \end{pmatrix} = 2\,o(\varepsilon^2) = o(\varepsilon^2)$

(pas besoin de justifier)

3) On suppose que $\int_0^T a(t)\,dt > 0$.

Démontrer que toutes les solutions de l'EDO $x''(t) + a(\frac{t}{\varepsilon})x(t) = 0$ sont bornées pourvu que (ε soit suffisamment petit)

$0 < \varepsilon << 1$

On veut utiliser $\left|tr\left(R_\varepsilon(T,0)\right)\right| < 2$

. Il suffit de montrer que les solutions de $\mathring{Y}(t) = \varepsilon A(t) \cdot Y(t)$ sont bornées

. Puisque $a(t)$ et T-periodique $\Rightarrow A(t)$ et T-periodique

$\Rightarrow \mathring{Y}(t) = \varepsilon A(t) \cdot Y(t)$ est une E.D.O T-periodique a coefficients T-periodique

On sait que $\left|tr\left(R_\varepsilon(T,0)\right)\right| < 2 \Rightarrow$ Toutes les solutions sont bornées

la resolvante est elliptique dans ce cas

Il faut noter que l'on regarde la resolvante sur 1 periode. donc sur $[0,T)$, de 0 à T

NB Au DM on avait une periodicité de 1 donc on regardait $R_\varepsilon(1,0)$

Puisque

$$\mathrm{tr}\left(R_\varepsilon(T,0)\right) = 2 + \varepsilon^2\left(-\int_0^T\int_0^t a(s)\,ds - \int_0^T t\,a(t)\,dt\right)$$

notons $$v(T) = -\int_0^T \underbrace{\int_0^t a(s)\,ds}_{u} - \int_0^T \underbrace{t}_{v}\,\underbrace{a(t)}_{u'}\,dt$$

Il suffit de montrer que $v(T) < 0$ pour assurer que

$$\left|\mathrm{tr}\left(R_\varepsilon(T,0)\right)\right| < 2 \quad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

notons $$u(t) = \int_0^t a(s)\,ds \qquad u'(t) = a(t)$$

$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$

$$\int_0^T u'(t)\,v(t)\,dt = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T v'(t)\,u(t)\,dt$$

$$\int_0^T t\,a(t)\,dt = \left[\int_0^t a(s)\,ds\;t\right]_0^T - \int_0^T\int_0^t a(s)\,ds$$

$$= T\cdot\int_0^T a(s)\,ds - \int_0^T\int_0^t a(s)\,ds$$

$$\Rightarrow v(T) = -T\underbrace{\int_0^T a(s)\,ds}_{>0} < 0$$

« Oscillateur harmonique qui dépend du temps avec des oscillations fréquents »

Exo 6, 7, 9, 11, 12

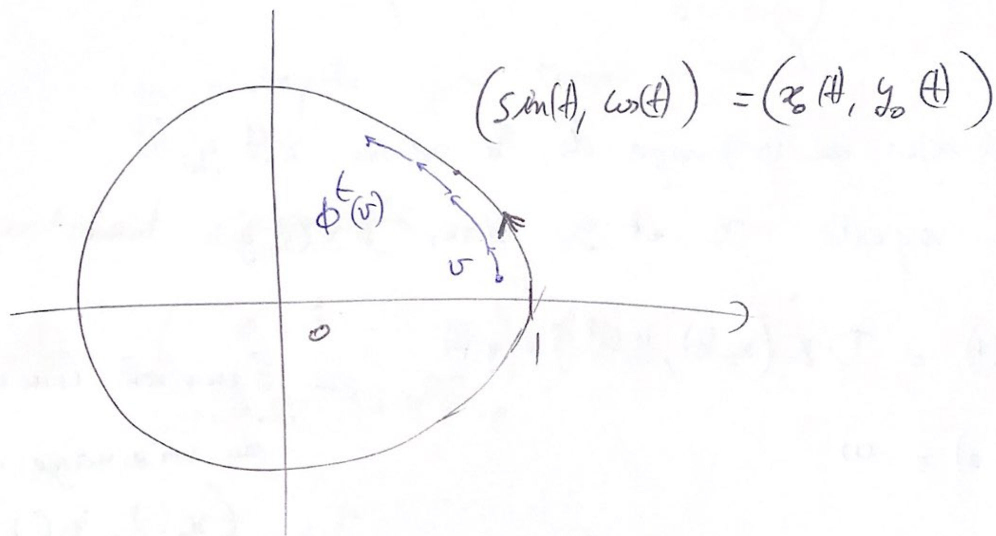
Ex d'Equa diff qui ne depend pas du temps

NON LINEAIRE

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (1-x^2-y^2)y - x \end{cases}$$

Solution

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$



$$\phi^t(1,0) = (\sin t, \cos t) \quad : \quad 2\pi - \text{periodique}$$

Pertubation de la condition initiale

On linéarise l'E.D.O au voisinage de la solution $t \mapsto (x_0(t), y_0(t))$

On constate que $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (1-x^2-y^2)y - x \end{cases}$ est de la forme

$$v' = X(v)$$

$$X(x,y) = (y, (1-x^2-y^2)y - x) = (X_1, X_2)$$

$$DX(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \quad \begin{array}{l} i : \text{ligne} \\ j : \text{colonne} \end{array}$$

$$DX(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2xy & (1-x^2-y^2)-2y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+2xy) & 1-x^2-3y^2 \end{pmatrix}$$

Linéariser au voisinage de la solution $x_0(t)$ $y_0(t)$

On injecte x_0 et y_0 dans $DX(x,y)$

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = DX(x_0(t), y_0(t)) \cdot v(t) \\ v(0) = w \end{cases}$$

$\Leftarrow$ Equation linéarisée au voisinage de $(x_0(\cdot), y_0(\cdot))$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+2\sin(t)\cos(t)) & 1-\sin^2(t) - 3\cos^2(t) \end{pmatrix} v(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-\sin(t) & -2\cos^2(t) \end{pmatrix} v(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v}(t) \cdot A(t) \cdot v(t) \\ v(0) = w \end{cases}$$

avec $A(\cdot)$: 2π - periodique

$\hookrightarrow$ Resolvante $R_A(t, t_0)$

Signification : l'EDO linéarisée

$\cancel{\boxed{\phi^t(v) = R_A(t,0)\cdot v + o(v)}}$ $\left(\forall t \in [0,T] \text{ ou n'importe quel temps } t \text{ borné}\right)$

On a $\begin{cases} \phi^t(v_0) = (x_0(t), y_0(t)) \\ v_0 = (0,1) = (\sin(0), \cos(0)) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \phi^t(v) = \phi^t(v_0) + R_A(t,0)\cdot(v-v_0) + o(v-v_0)$$

($\forall\, 0 \leq t \leq T$ ou n'importe quel temps borné)

On veut maintenant comprendre

$$\dot{Y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-\sin(t) & -2\cos^2(t) \end{pmatrix} \cdot Y(t)$$

$$\det R(t,0) = \exp\left(\int_0^t \underbrace{-2\cos^2(s)}_{tr(A(s))} ds \right)$$

$$\det R(2\pi,0) = \exp\left(\int_0^{2\pi} -2\cos^2(s)\, ds \right) = \exp(-2\pi) < 1$$

$$-\int_0^{2\pi} \cos^2(s)\,ds = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(2s))\,ds = -\left[\frac{s}{2} + \frac{\sin(2s)}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{s}{2} + \frac{\sin(2s)}{4}\right)_{2\pi}^{0} = -\frac{2\pi}{2} = -\pi$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (1-x^2-y^2)y - x \end{cases}$$

$$(x_0(t), y_0(t)) = (\sin(t), \cos(t)) = \phi_X^t(0, 1)$$

$$(x_0(0), y_0(0)) = (0, 1)$$

$$(\dot{x}, \dot{y}) = X(x, y)$$

Linéarisation au voisinage de la solution $(x_0(\cdot), y_0(\cdot))$

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = DX(x_0(t), y_0(t))\, Y(t) \\ Y(0) = w \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Resolvante $R(\cdot, 0)$

$$\phi^t(v) = \phi^t(v_0) + R(t, 0)\cdot(v - v_0) + o(v - v_0)$$

On veut comprendre $R(2\pi, 0)$

$$DX(\sin t, \cos t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-\sin(2t) & -2\cos^2(t) \end{pmatrix} = A(t) \text{ - } 2\pi\text{-périodique}$$

<u>obs</u> : $\phi^{2\pi}(v_0) = v_0$

$$\begin{cases} \phi^t \circ \phi^{2\pi}(v_0) = \phi^{t+2\pi}(v_0) = \phi^t(v_0) \\ \phi^{2\pi} \circ \phi^t(v_0) = \phi^{2\pi+t}(v_0) = \phi^t(v_0) \end{cases}$$

$$\phi^{2\pi}\left(v_0 + t\,X(v_0) + o(t)\right) = v_0 + t\,X(v_0) + o(t)$$

pour $0 < t \ll 1$ petit

<u>On a donc</u>

$$\underbrace{\phi^{2\pi}(v_0)}_{\phi^{2\pi}(v_0)} + R(2\pi,0)\cdot t\,X(v_0) + o(t) = v_0 + t\,X(v_0) + o(t)$$

$$\Rightarrow \quad R(2\pi,0)\,t\left(X(v_0)\right) = t\,X(v_0)$$

$$\Rightarrow \quad R(2\pi,0)\,X(v_0) = X(v_0)$$

donc $R(2\pi,0)$ admet une vp $= 1$

et $\det\left(R(2\pi,0)\right) = e^{-2\pi} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \times e^{-2\pi}$

<u>donc</u> les vp de $R(2\pi,0)$ sont 1 et $e^{-2\pi}$.

1 est associée au $\overrightarrow{vp}$ $X(v_0) = X(x_0(0), y_0(0))$

$$= X(0, 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

car $X(x,y) = \left(y,\ (1-x^2-y^2)y - x\right)$

Introduisons u_2 le $\overrightarrow{vp}$ associé à la vp $e^{-2\pi}$ de

$R(2\pi, 0)$

$$\Rightarrow \quad R(2\pi, 0)\, u_2 = e^{-2\pi} u_2$$

Dans la base (u_1, u_2) de $\overrightarrow{vp}$. $R(2\pi, 0)$ prend la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix}$$

(. Application de 1er retour de point carré.)

Soit P l'application linéaire affine qui envoit (u_1, u_2) sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ et v_0 sur 0

c.I.
$Y(0) = w$

__Alors__ $$P \circ \phi^{2\pi} \circ P^{-1}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix} w + o(w)$$

Exemple : $\forall t \in [0,1]$ $\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + \varepsilon\, x(t)^2 \\ x(0) = v \end{cases}$

- Equation non linéaire car $x(t)^2$

l'équation s'écrit $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(\varepsilon, t, x(t)) \\ x(0) = v \end{cases}$

où $f(\varepsilon, t, x) = -x + \varepsilon x^2$

quand $\varepsilon = 0$ et $v = 0$, la solution $x_{0,0}(t) \equiv 0$

Le calcul de l'équation linéarisée donne.

$$D\, f(\varepsilon, t, x) \cdot (\Delta \varepsilon, \Delta x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(f(\varepsilon, t, x)) \\ \frac{\partial}{\partial x}(f(\varepsilon, t, x)) \end{pmatrix} (\Delta \varepsilon, \Delta x)$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 \\ 2\varepsilon x - 1 \end{pmatrix} (\Delta \varepsilon, \Delta x) = x^2 \Delta \varepsilon + (2\varepsilon x - 1) \Delta x$$

2

donc $Df(\varepsilon=0, t, x=0)(\Delta\varepsilon, \Delta x)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(f(\varepsilon=0, t, x=0)) \\ \frac{\partial}{\partial x}(f(\varepsilon=0, t, x=0)) \end{pmatrix} (\Delta\varepsilon, \Delta x) = -\Delta x$$

$=$

Donc l'équation linéarisée est en $\varepsilon=0$, $x=0$.

$$\begin{cases} (\Delta x)'(t) = -\Delta x(t) \\ \Delta x(0) = \Delta v \end{cases} \longrightarrow \Delta x(t) = e^{-t} \cdot \Delta v$$

c-à-d
$$\begin{cases} (\Delta x)'(t) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(t, x_{0,0}(t), 0)}_{=-1} \Delta x_{0,0}(t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f(t, x_{0,0}(t), \varepsilon=0)}_{=0} \Delta\varepsilon \\ \Delta x(0) = \Delta v \end{cases}$$

Ainsi $X_{0+\Delta\varepsilon\Delta v}(t) = e^{-t}\Delta v + o(|\Delta v| + |\Delta\varepsilon|)$