Feuille 3 : Exercice 6 :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(t, y) \longmapsto \left(-y_1^3 + y_2^2 + 2t y_1 ,\ -y_2^5 + 3t y_1^2\right)$$

Montrons que $\forall v \in \mathbb{R}^2$
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = v \end{cases}$$

admet une solution unique

$$y : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto y(t)$$

Critère d'existence en temps longs

* Croissance affine à l'infini c-à-d

A-t-on : $|f(t,y)| \leq a(t)\,|y| + b(t) \quad \forall t \geq 0$?

Non car $|y_2|^5 \leq a(t)\,|y_2| + b(t)$

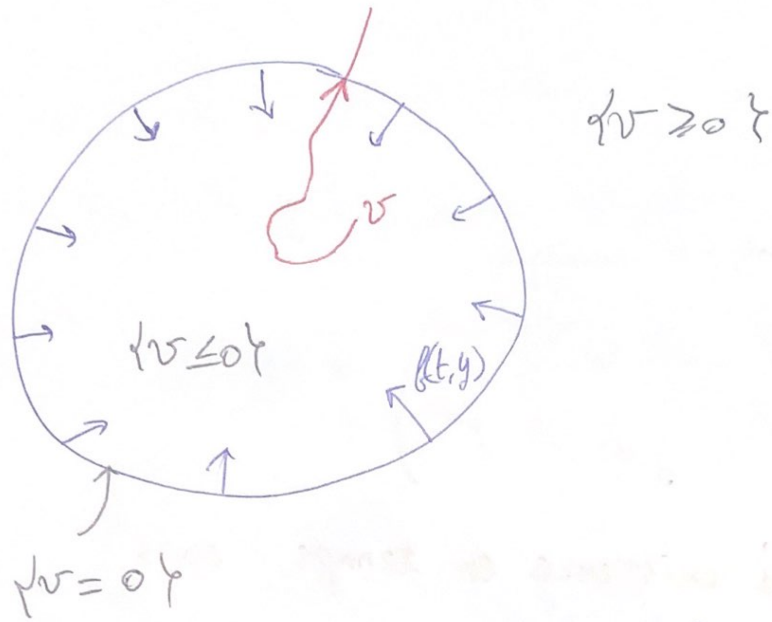
$$+\infty \xleftarrow[y_2 \to +\infty]{} y_2^4 \leq a(t) + \frac{b(t)}{|y_2|} \xrightarrow[y_2 \to +\infty]{} a(t)$$

* Gronwall

* Lyapunov

<u>Lyapunov</u> : $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad C^1$

$$< f(t,y),\ \nabla V(y) > \ < 0 \quad \forall y,\ V(y) = 0$$



<u>CGL</u> : $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ V(v) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) \cdot v \end{cases}$

admet une solution $\forall t \geq 0$

choix de la fonction de Lyapunov

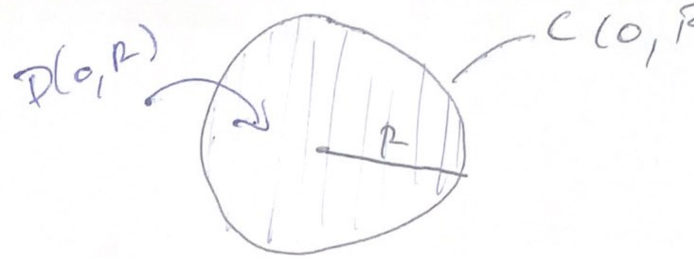
$V(x_1, x_2) = y_1^2 + y_2^2$

$\{v = c\} : \{y_1^2 + y^2 = c\}$ = cercle $(0, \sqrt{c})$

$\{y_1^2 + y^2 = c + R^2$ = cercle $(0, \sqrt{c+R^2})$

$\{V = 0\} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ y_1^2 + y_2^2 = R^2\} = C(0, R)$

$\{V \leq 0\} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ y_1^2 + y_2^2 \leq R^2\} = D(0, R)$



$D(0,R) = \{ (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2, \ y_1^2 + y_2^2 \leq R^2 \}$

est fermé, borné de $\mathbb{R}^2$ donc compact

gradient de V $= \nabla V(y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} V(y) \\ \partial_{y_2} V(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \end{pmatrix} = 2y$

On calcule :

$$\langle \nabla V(y), f(t,y) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_1^3 + y_2^2 + 2ty_1 \\ -y_2^5 + 3t\,y_1^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 2\left(-y_1^4 + y_1 y_2^2 + 2t\,y_1^2 - y_2^6 + 3t\,y_2 y_1^2\right)$$

. Quel est le signe de cette expression quand

$y_1^2 + y_2^2 = R^2$ c-à-d $y \in C(0,R)$?

l'expression est grosso modo de l'ordre de $-y_2^6 \longrightarrow -\infty < 0$

puissance paire (impaire n'amenant pas marché)

Passons en coordonnées polaires

$$\begin{cases} y_1 = r\cos(\theta) \\ y_2 = r\sin(\theta) \end{cases}$$

On obtient

$$A = \underbrace{-(r\cos(\theta))^4 - (r\sin(\theta))^6}_{B} + \underbrace{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + 2tr^2\cos^2(\theta) + 3t\,r^3\sin(\theta)\cos^2(\theta)}_{C}$$

$$|C| = \left| r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + 2t\,r^2\cos^2(\theta) + 3t\,r^3\sin(\theta)\cos^2(\theta) \right|$$

$$\leq |r|^3 + 2t\,r^2 + 3t\,|r|^3$$

$$B = -r^4\left(\cos^4(\theta) + r^2\sin^6(\theta)\right)$$

Pour $r \geq 1 \Rightarrow r^2 \geq 0 \Rightarrow -r^2 \leq 0$

donc $B \leq -r^4\left(\cos^4\theta + \sin^6\theta\right)$

Mais pour tout θ : $\min\limits_{0 \leq \theta \leq 2\pi}\left(\sin^6\theta + \cos^4(\theta)\right) > 0$

car $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ ne s'annulent pas en même temps donc $B \leq -\mu r^4$ où $\mu = \min\limits_{1 \leq \theta \leq 2\pi} \left(\cos^4(\theta) + \sin^6(\theta)\right)$

$\Rightarrow B + C \leq -\mu r^4 + |r|^3 + 3t\, r^2 + 3t\, |r|^3$

pour $r \geq 1$

$B + C \leq \underbrace{-\mu r^4 + (5|t| + 1)\, r^3}_{\leq 0 \text{ à condition que}}$

$r \geq R > \frac{5t+1}{\mu} >$

donc $A = B + C < 0$

$\frac{(5t+1)}{\mu}$

$-\mu r^4 + (5|t|+1)\, r^3 < 0$

$\Leftrightarrow (5|t|+1)\, r^3 < \mu r^4$

$\Leftrightarrow \frac{(5|t|+1)}{\mu} < r$

où $\mu = \min\limits_{\theta \in [0, 2\pi]} \left(\cos^4\theta + \sin^6\theta\right)$

Soit $y(\cdot)$ solution de $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = v \end{cases}$

Notons $I_{max} \ni 0$ l'intervalle maximal de solution

$$y : I_{max} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto y(t)$$

Soit $\overline{t} = \sup I_{max} \in \overline{\mathbb{R}}$

$\underline{t} = \inf I_{max} \in \overline{\mathbb{R}}$

$I_{max} =]\underline{t}, \overline{t}[$ on veut montrer que $\overline{t} = +\infty$

Si ce n'était pas le cas :

Choisissons $R = \dfrac{5\overline{t}+1}{\mu} + 1$

On a vu que $\forall t \in]\underline{t}, \overline{t}[, \ \langle f(t,y), \nabla V(y) \rangle < 0$

quand $V_R(y) = 0$

où $V_R(y) = y_1^2 + y_2^2 - R^2$

D'après le critère de Lyapunov

$\rightarrow \forall t \in]\underline{t}, \overline{t}[\quad V_R(y(t)) \leq 0$

Mais $\{ y \in \mathbb{R}^2,\ V_R(y) \leq 0 \} = D(0,R)$

est un ensemble compact car fermé bornée de $\mathbb{R}^2$

On d'après le critère de sortie de tout compact

ou d'après le lemme des bouts

$$\exists\, t_* < \bar{t} \quad \text{tq} \quad \forall t \in]t_*, \bar{t}[, \quad y(t) \notin D(0,R)$$

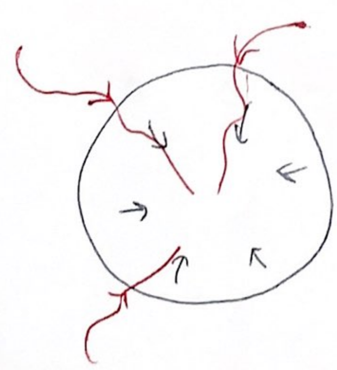
t_* dépend du compact

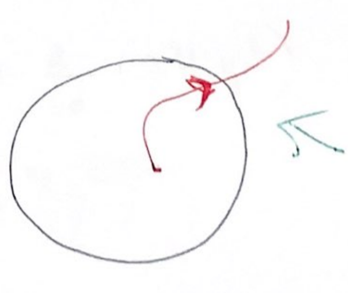
On obtient une contradiction avec le fait que d'après le critère de Lyapunov

$$\forall t \in]\underline{t}, \bar{t}[\quad V_R(y(t)) \leq 0$$

i.e. $y \in D(0,R)$

On rentre dans le compact, on ne sort pas

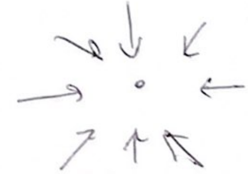




Impossible d'après le critère de lyapunov

Feuille 3 : Exercice 9

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$



$$V(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 \qquad \nabla V(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\langle f(x,y), \nabla V(x,y) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -x + y^2 \\ -y + x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= -2x^2 + 2xy^2 - 2y^2 + 2yx^2$$

$$= -2(x^2+y^2) + 2xy(x+y)$$

$$= A$$

Exo 7 : fait dans le cours

Montrons que $A < 0$:

Si $\max(|x|, |y|) < \frac{1}{10}$

$$\rightarrow |x^2 y + x y^2| \leq \frac{1}{10}(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow A \leq -2(x^2+y^2) + \frac{2}{10}(x^2+y^2)$$

$$\leq -\left(2 - \frac{2}{10}\right)(x^2+y^2)$$

$$\leq -\frac{18}{10} \times (x^2+y^2) < 0$$

$$\leq -9/5 \times (x^2+y^2) < 0$$