Exercice 3 : X vect. alea. gaussien centré réduit i.e $X \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$

$A \in GL_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$

1) Montrer que $Y = AX + b$ est un vect. gaussien ayant une densité dans $\mathbb{R}^d$. Calculer cette densité. Exprimer celle-ci en fonction de la matrice $\Gamma = A \cdot A^t$. Que représente cette matrice ?

. Y est gaussien comme transformation affine d'un vect. gaussien.

d'après le cours $Y \sim \mathcal{N}_d(\mathbb{E}(Y), \Gamma_Y)$

où $\begin{cases} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(AX+b) = A \cdot \mathbb{E}(X) + b = b \text{ car } X \text{ centré} \\ \Gamma_Y = A \cdot \Gamma_X \cdot A^t = A \cdot A^t \text{ car } X \text{ réduit} \end{cases}$

$\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}_d(b, A \cdot A^t)$

Y admet une densité $\Leftrightarrow \det(\Gamma_Y) \neq 0$

Or puisque A est inversible $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

Et $\det(\Gamma_Y) = \det(A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = \det(A)^2 \neq 0$

donc la loi de Y est non dégénérée et

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Gamma_Y)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(y - \mathbb{E}(Y))^t \cdot \Gamma_Y^{-1} \cdot (y - \mathbb{E}(Y))\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \det(A)} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} < \begin{pmatrix} y_1 - \mathbb{E}(Y_1) \\ \vdots \\ y_d - \mathbb{E}(Y_d) \end{pmatrix}, (AA^t)^{-1} \begin{pmatrix} y_1 - \mathbb{E}(Y_1) \\ \vdots \\ y_d - \mathbb{E}(Y_d) \end{pmatrix} > \right)$$

$$\exp\left(\frac{-1}{2} (y-b)^t \cdot (A \cdot A^t)^{-1} \cdot (y-b)\right)$$

où $\begin{cases} y \in \mathbb{R}^d \\ b \in \mathbb{R}^d \end{cases}$

2) Y a t-il une réciproque?

On a montré que

$$\begin{cases} X \sim \mathcal{N}_d(0, I_d) \\ A \in GL_d(\mathbb{R}) \\ b \in \mathbb{R}^d \end{cases} \Rightarrow Y = AX + b \sim \mathcal{N}_d(b, AA^t)$$

Soit $Y = AX + b \sim \mathcal{N}_d(b, AA^t)$ avec $\begin{cases} A \in GL_d(\mathbb{R}) \\ b \in \mathbb{R}^d \end{cases}$

<u>On a</u>: $Y - b = AX \Leftrightarrow A^{-1}(Y-b) = X$

$$\Leftrightarrow A^{-1}(Y - \mathbb{E}(Y)) = X$$

X est gaussien comme transformation affine de Y.

d'après le cours $X \sim \mathcal{N}_d(\mathbb{E}(X), \Gamma_X)$

où $\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(A^{-1}(Y - \mathbb{E}(Y))\right) = A^{-1}\mathbb{E}(Y) - A^{-1}\mathbb{E}(Y) = 0_{\mathbb{R}^d} \\ \Gamma_X = A^{-1}\Gamma_Y (A^{-1})^t = \underbrace{A^{-1}A}_{I_d} \cdot \underbrace{A^t (A^{-1})^t}_{I_d} = I_d \end{cases}$

<u>Ainsi</u>, $X \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$