Exercice 6: Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in [0,1]\}$, Γ compact ou connexe?

Compacité : Il faut que de toute suite d'éléments de Γ on puisse en extraire une sous-suite convergente dans Γ.

((On va utiliser le fait que $[0,1]$ est compact dans $\mathbb{R}$
et le fait que f soit continue

Soit $(x_n, f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Γ.

$\begin{cases} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc une suite d'éléments de } [0,1] \\ [0,1] \text{ est un compact de } \mathbb{R} \text{ car fermé borné} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\exists$ une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ et $\exists x \in [0,1]$ tq $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$, $|x_{\varphi(n)} - x| < \varepsilon$

De plus, f est continue donc $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N_2$, $|f(x_{\varphi(n)}) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists N = \max(N_1, N_2)$ tq $\forall n > N$, $\begin{cases} |x_{\varphi(n)} - x| < \varepsilon \\ |f(x_{\varphi(n)}) - f(x)| < \varepsilon \end{cases}$

$\Rightarrow \left(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)})\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x, f(x)) \in \Gamma$

Ainsi, nous pouvons extraire de toute ~~suite~~ d'éléments de Γ une sous-suite convergente vers un élément de Γ.

Donc ~~...~~ $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in [0,1]\}$ est compact

Connexité : A est dit connexe s'il ne s'écrit pas comme réunion disjointe de deux ouverts non vides (de façon équivalente, si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de A sont l'ensemble vide et A lui-même)

Théorème : l'image d'un connexe par une fonction continue est connexe

Connexité par arcs : A connexe par arcs $\Longleftrightarrow$

$$\forall x\in A, \forall y\in A, \ \exists \gamma\in C^0([0,1],A) \ \text{tq} \ \begin{cases} \gamma(0)=x \\ \gamma(1)=y \end{cases}$$

Convexité : A convexe $\Longleftrightarrow$

$$\forall x\in A, \ \forall y\in A, \ \forall t\in[0,1], \quad tx+(1-t)y\in A$$

Soit $X=(x,f(x))\in\Gamma$ et $Y=(y,f(y))\in\Gamma$

On choisit $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Gamma$

$$t \longmapsto \gamma(t) = \big(tx+(1-t)y \ , \ f(tx+(1-t)y)\big)$$

On a $\begin{cases} \gamma(0) = (y, f(y)) = Y \\ \gamma(1) = (x, f(x)) = X \end{cases}$

Montrons que γ est continue.

A-t-on $\forall\varepsilon>0, \ \exists\eta>0 \ \text{tq} \ |t_1-t_2|<\eta \Rightarrow \|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)\|<\varepsilon$?

On choisit la norme euclidienne $\|x-y\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)\| = \sqrt{\left[t_1x+(1-t_1)y-(t_2x+(1-t_2)y)\right]^2+\left[f(t_1x+(1-t_1)y)-f(t_2x+(1-t_2)y)\right]^2}$$

$$=\left(\left[(t_1-t_2)x+(t_2-t_1)y\right]^2+\left[f(t_1x+(1-t_1)y)-f(t_1x+(1-t_1)y+(t_2-t_1)x+(t_1-t_2)y)\right]^2\right)^{1/2}$$

On a $\left[(t_1-t_2)x+(t_2-t_1)y\right]^2 = \left[(t_1-t_2)(x+y)\right]^2 \leq (t_1-t_2)^2\left[|x|^2+|y|^2\right]$

f est continue $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, |x-y|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

pour $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ $\exists \eta_1>0$ tq $|t_1-t_2|<\eta_1 \Rightarrow \left|t_1x+(1-t_1)y-(t_2x+(1-t_2)y)\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

pour $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ $\exists \eta_2>0$ tq $|t_1-t_2|<\eta_2 \Rightarrow \left|f(t_1x+(1-t_1)y)-f(t_1x+(1-t_1)y+(t_1-t_2)y-x)\right|<$

$\rightarrow \exists \eta=\max(\eta_1,\eta_2)$ tq $|t_1-t_2|<\eta \Rightarrow \begin{cases} |(t_1-t_2)x-y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ \left|f(t_1x+(1-t_1)y)-f(t_2x+(1-t_2)y)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow \|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)\| < |t_1-t_2|\cdot\left[|x|^2+|y|^2+\frac{\varepsilon^2}{2}\right]$

$\Rightarrow \|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)\| \leq |t_1-t_2|\cdot c$

$\Rightarrow \gamma$ est continue $\qquad$ donc Γ est connexe.

car $\forall X=(x,f(x))\in\Gamma, \forall Y=(y,f(y))\in\Gamma, \exists \gamma\in C^0([0,1],\mathbb{R})$

tq $\begin{cases} \gamma(0)=(y,f(y))=Y \\ \gamma(1)=(x,f(x))=X \end{cases}$