Exemple : Soit (X,Y) un vecteur aléatoire tel que :

X a pour densité $f_X(x) = x e^{-x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ (densité de la loi gamma $\gamma(2,1)$)

et pour $x > 0$, $\mathcal{L}_{Y|X=x} = \mathcal{U}([0,x])$

La loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ est la loi uniforme $[0,x]$

1) Calculer $\mathbb{E}(Y|X) = g(X)$ où $g(x) = \mathbb{E}[Y|X=x]$

$$g(x) = \mathbb{E}[Y|X=x] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X=x}(y)\,dy = \int_0^x y \frac{dy}{x} = \frac{1}{x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = \frac{x}{2}$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \mathbb{1}(f_X(x) > 0)$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{xe^{-x}} \mathbb{1}(0 < x < \infty \text{ et } 0 < y < x)$$

$$= \frac{1}{x-0} \mathbb{1}_{]0,x[}(y) \cdot \frac{1}{xe^{-x}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

$$\mathbb{E}(Y|X) = \frac{X}{2}$$

$$\cancel{f(x,y) = \frac{e^{-x}}{x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}}$$

$$\frac{1}{x} \mathbb{1}_{]0,x[}(y) = \frac{f(x,y)}{xe^{-x}} \Rightarrow f(x,y) = \frac{xe^{-x}}{x} \mathbb{1}_{]0,x[}(y)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

$$f_X(x) \cdot f_{Y|X=x}(y) = xe^{-x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \cdot \frac{1}{x} \mathbb{1}_{]0,x[}(y) = e^{-x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \cdot \mathbb{1}_{]0,x[}(y)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \cdot \mathbb{1}_{]0,x[}(y) =$$