Exercice 9 : Soit $X^t = (X_1, X_2)$ un vect. gaussien centré avec

$\Gamma_X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $m_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}$

Posons $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$

1) Déterminer la loi de Y et calculer sa matrice de covariance

Y est transformation affine d'un vect. gaussien.

$\Rightarrow$ Y est un vect gaussien (i.e $Y \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(Y), \Gamma_Y)$)

où
$$\begin{cases} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(AX) = A \cdot \mathbb{E}(X) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \Gamma_Y = A \cdot \Gamma_X A^t = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+a & 1+2a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+a+a(1+2a) & -2-a+1+2a \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a^2+2a+2 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $Y \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(a+1)^2+a^2+1 & a-1\\ a-1 & 2\end{pmatrix}\right)$

2) Déterminer les valeurs de a telles que Y soit un vect. gaussien dégénéré

On calcule $\det(\Gamma_Y) = \begin{vmatrix} 2a^2+2a+2 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4a^2+4a+4 - (a-1)^2$

$= 4a^2+4a+4-(a^2-2a+1)$

$= 3a^2+6a+3$

$\Delta = b^2-4ac = 6^2-4.3.3 = 36-36 = 0$

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2.3} = -1$

Y est dégénéré $\Leftrightarrow \det(\Gamma_Y) = 0$

$\Leftrightarrow a = -1$

3) Déterminer les valeurs de a telles que Y_1 et Y_2 soient indépendantes

Puisque $Y^t = (Y_1, Y_2)$ est un vecteur gaussien.

l'indépendance des variables équivaut à leur décorrelation

Et on a $\Gamma_Y = \begin{pmatrix} var(Y_1) & cov(Y_1, Y_2) \\ cov(Y_2, Y_1) & var(Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2+2a+2 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$

donc $cov(Y_1, Y_2) = 0 \iff a-1=0 \iff a=1$

4) Déterminer la fonction caractéristique de Y_1.

Si $Z \sim N(m, \sigma^2) \rightarrow \varphi_Z(t) = \exp\left(itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$

Ici, $Y_1 \sim N(0, 2a^2+2a+2)$

$\Rightarrow \varphi_{Y_1}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}(2a^2+2a+2)t^2\right)$

$= \exp\left(-(a+1)^2 t^2\right)$

$= \exp\left(-\left(t(a+1)\right)^2\right)$

5) Montrer que la variance de Y_1 est supérieure ou égale à $\frac{3}{2}$.

On a $Var(Y_1) = 2a^2 + 2a + 2 = f(a)$

$f'(a) = 4a + 2$ $\qquad$ $f'(a) = 0 \iff 4a + 2 = 0$

$\iff 4a = -2$

$\iff a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

a	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(-\frac{1}{2})$	$\nearrow$	

Et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{2}{4} - 1 + 2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow f(a) \geq f\left(-\frac{1}{2}\right)$

Ainsi $\iff 2a^2 + 2a + 2 \geq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow Var(Y_1) \geq \frac{3}{2}$

b) Quelle est la loi de Y_1 si celle-ci existe

Si $Z \rightsquigarrow N(m, \sigma^2) \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)^2}$

Comme $Y_1 \rightsquigarrow N(0, 2a^2+2a+2)$

$\Rightarrow f_{Y_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{1}{(2a^2+2a+2)^2} \cdot t^2\right)$

~~si $2a^2+2a+2 \neq 0$ ... calcul~~

Si $2a^2+2a+2 \neq 0$

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 4 - 16 = -12 < 0$

$\sqrt{\Delta} = i2\sqrt{3}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-i2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+i2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Donc $2a^2+2a+2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$