Exercice 24 :

1) Démontrer que l'équation fonctionnelle

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100\, f(t) = \sin(2\pi t)$

admet une solution $f(\cdot)$ continue et 1-périodique

. Posons $E = \mathcal{C}^0_{1\text{-périodique}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$

(E,d) est complet car E est un fermé d'un espace complet $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Rappel $f \in \mathcal{C}^0_{1\text{-périodique}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Rightarrow f(x+1) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

* Problème du point fixe : $f = \Phi(f)$

On a $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100 \cdot f(t) = \sin(2\pi t)$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{100}\left[\sin(2\pi t) - f(t+\sqrt{2})^2 - f(t-\sqrt{2})^2\right]$$

$$\Rightarrow f(t) = \Phi(f(t))$$

$$\Phi : E \longmapsto E$$
$$f \longmapsto \Phi(f) = \frac{1}{100}\left[\sin(2\pi t) - f(t+\sqrt{2})^2 - f(t-\sqrt{2})^2\right]$$

Φ contractante ?

$$\Phi(f) - \Phi(g) = \frac{1}{100}\left[g(t+\sqrt{2})^2 + g(t-\sqrt{2})^2 - f(t+\sqrt{2})^2 - f(t-\sqrt{2})^2\right]$$

$$\Phi(f)-\Phi(g) = \frac{1}{100}\left[g(t+\sqrt{2})^2 - f(t+\sqrt{2})^2 + g(t-\sqrt{2})^2 - f(t-\sqrt{2})^2 \right]$$

$$= \frac{1}{100}\left[\left(g(t+\sqrt{2}) - f(t+\sqrt{2})\right)\left(g(t+\sqrt{2}) + f(t+\sqrt{2})\right) + \left(g(t-\sqrt{2}) - f(t-\sqrt{2})\right)\cdot\left(g(t-\sqrt{2}) + f(t-\sqrt{2})\right)\right]$$

Donc :

$$|\Phi(f) - \Phi(g)| \leq 2\cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t) - f(t)| \cdot \frac{1}{100}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \right)$$

A t-on $\quad 2\cdot\frac{1}{100}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|\right) \overset{??}{<} 1$

Posons $A = \{ f \in E,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)| \leq M \}$

où $\quad 2\cdot\frac{1}{100}\cdot 2\cdot M < 1 \iff M < \frac{100}{4} = 25$

dans ce cas la restriction $\Phi|_A$ est contractante

$\Rightarrow \Phi|_A : E \longrightarrow E$ continue et contractante

D'après le théorème de Picard, $\Phi|_A$ admet un unique point fixe f

dans $E = \mathcal{C}^0_{1\text{-périodique}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

f est continue est 1-périodique (i.e) $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$