Exercice 24 :

1) Démontrer que l'équation fonctionnelle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100\, f(t) = \sin(2\pi t)$$

admet une solution $f(\cdot)$ continue et 1-périodique

. Posons $E = \mathcal{C}^0_{1\text{-périodique}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\quad d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$

(E,d) est complet car E est un fermé d'un espace complet $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Rappel $f \in \mathcal{C}^0_{1\text{-périodique}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Rightarrow f(x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

* Problème du point fixe : $f = \Phi(f)$

On a $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100 \cdot f(t) = \sin(2\pi t)$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{100}\left[\sin(2\pi t) - f(t+\sqrt{2})^2 - f(t-\sqrt{2})^2\right]$$

$$\Rightarrow f(t) = \Phi(f(t))$$

$$\Phi : E \longmapsto E$$
$$f \longmapsto \Phi(f) = \frac{1}{100}\left[\sin(2\pi t) - f(t+\sqrt{2})^2 - f(t-\sqrt{2})^2\right]$$

Φ contractante ?

$$\Phi(f) - \Phi(g) = \frac{1}{100}\left[g(t+\sqrt{2})^2 + g(t-\sqrt{2})^2 - f(t+\sqrt{2})^2 - f(t-\sqrt{2})^2\right]$$

$$\Phi(f) - \Phi(g) = \frac{1}{100}\left[g(t+\sqrt{2})^2 - f(t+\sqrt{2})^2 + g(t-\sqrt{2})^2 - f(t-\sqrt{2})^2 \right]$$

$$= \frac{1}{100}\left[\left(g(t+\sqrt{2}) - f(t+\sqrt{2})\right)\left(g(t+\sqrt{2}) + f(t+\sqrt{2})\right) + \left(g(t-\sqrt{2}) - f(t-\sqrt{2})\right)\cdot\left(g(t-\sqrt{2}) + f(t-\sqrt{2})\right) \right]$$

Donc :

$$|\Phi(f) - \Phi(g)| \leq 2 \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t) - f(t)| \cdot \frac{1}{100}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \right)$$

A t-on $\quad 2 \cdot \frac{1}{100} \cdot \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \right) \overset{??}{<} 1$

Posons $A = \{ f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M \}$

où $2 \cdot \frac{1}{100} \cdot 2 \cdot M < 1 \iff M < \frac{100}{4} = 25$

dans ce cas la restriction $\Phi|_A$ est contractante

$\Rightarrow \Phi|_A : E \longrightarrow E$ continue et contractante

D'après le théorème de Picard, Φ_A admet un unique point fixe f

dans $E = \mathcal{C}^0_{1\text{-periodique}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

f est continue est 1-periodique (i.e) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$

$$\frac{1}{100} \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t) - f(t)| \left[\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)+g(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)+g(t)| \right]$$

$$= \frac{2}{100} \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t) - f(t)| \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)+g(t)|$$

$$\leq \frac{2}{100} \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t) - f(t)| \cdot \left[\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)| \right]$$

$$\leq \frac{2}{100} \cdot \| g - f \|_\infty \cdot \left[M + M \right]$$

$$\leq \frac{4M}{100} \cdot d_\infty(f,g) = \frac{M}{25} \cdot d_\infty(f,g)$$

2) On note $E = C^0_{1\text{-périodique}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ munie de la norme sup.

Montrer que les application $T_\pm : E \longrightarrow E$ sont C^∞ :

$$f \longmapsto T_\pm(f) = f(\cdot \pm \sqrt{2})^2$$

Montrons que T_+ est dérivable :

c-à-d $\forall f \in E$, $\exists L_f : E \to E$ linéaire et continue tel que

$$\forall h \in E, \quad T_+(f+h) = T_+(f) + L_f(h) + \underbrace{o(\|h\|)}_{\|h\|\,\varepsilon(h)} \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

$DT_+(f) = L_f$

On calcule : $T_+(f+h) = \left(f(\cdot+\sqrt{2}) + h(\cdot+\sqrt{2})\right)^2$

$$= \underbrace{f(\cdot+\sqrt{2})^2}_{T_+(f)} + \underbrace{2\cdot f(\cdot+\sqrt{2})\cdot h(\cdot+\sqrt{2})}_{L_f(h)} + \underbrace{h(\cdot+\sqrt{2})^2}_{o(\|h\|)}$$

Montrons que $L_f : E \longrightarrow E$ est continue & linéaire

$$h \longmapsto L_f(h) = 2 f(\cdot+\sqrt{2})\cdot h(\cdot+\sqrt{2})$$

Il suffit de montrer que L_f est bornée

c-à-d $\exists c>0$ tq $\forall h \in E \quad \|L_f(h)\| \leq c \cdot \|h\|$

On a $\|L_f(h)\|_\infty = \| 2\cdot f(\cdot+\sqrt{2})\, h(\cdot+\sqrt{2})\|_\infty$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} | 2 f(t+\sqrt{2}) \cdot h(t+\sqrt{2})|$$

$$\leq 2 \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|$$

$$\leq 2\,\|f\|_\infty \cdot \|h\|_\infty$$

Donc vraie pour $c = 2\|f\|_\infty$

Montrons que $h(\cdot+\sqrt{2})^2 = o(\|h\|)$

$$\|h(\cdot+\sqrt{2})^2\|_\infty^2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t+\sqrt{2})^2|$$
$$= \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|\right)^2$$
$$= \|h\|_\infty^2$$

$$\rightarrow \frac{\|h(\cdot+\sqrt{2})\|_\infty^2}{\|h\|_\infty} = \|h\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Alors, $h(\cdot+\sqrt{2})^2 = o(\|h\|)$

Conclusion : $\begin{cases} T_+(f+h) = T_f(f) + L_f(h) + o(h) \\ DT_+(f) = 2f(\cdot+\sqrt{2})\cdot h(\cdot+\sqrt{2}) \end{cases}$

Remarque : T_+ est C^2.

$$DT_+ : E \longrightarrow \mathcal{L}_c(E,E)$$
$$f \longmapsto DT_+(f) = 2\cdot f(\cdot+\sqrt{2})\, h(\cdot+\sqrt{2})$$

$$DT_+(f+g) = 2\cdot\left(f(\cdot+\sqrt{2}) + g(\cdot+\sqrt{2})\right)\cdot h(\cdot+\sqrt{2})$$
$$= 2f(\cdot+\sqrt{2})\cdot h(\cdot+\sqrt{2}) + 2\cdot g(\cdot+\sqrt{2})\cdot h(\cdot+\sqrt{2})$$
$$= DT_+(f) + L_{DT_+}(g) + o(g)$$

$$\Rightarrow DT_+^2 = L_{DT_+} : E \longrightarrow E$$
$$g \longmapsto DT_+^2(g) = 2\cdot g(\cdot+\sqrt{2})\cdot h(\cdot+\sqrt{2})$$

Notons $\Sigma : E \longrightarrow E$ qui est une application C^∞

$h \longmapsto h(\cdot+\sqrt{2})$

$D^2T_+(f)\cdot(g,h) = 2\cdot g(\cdot+\sqrt{2})\,h(\cdot+\sqrt{2})$

$= \left(D^2T_+(f)\cdot g\right)\cdot h$

- $D^3T_+(f) = 0$ car $D^2T_f(f+g) = 2\cdot\left(f(\cdot+\sqrt{2})+g(\cdot+\sqrt{2})\right)\cdot h(\cdot+\sqrt{2})$

$= DT_f(f+g)$

$$\begin{cases} T_+ : E \longrightarrow E \\ \quad f \longmapsto f(\cdot+\sqrt{2})^2 \\ Q : E \longrightarrow E \\ \quad f \longmapsto f^2 \end{cases} \Longrightarrow \quad T_+ : E \xrightarrow{\Sigma} E \xrightarrow{Q} E$$

$$f \longmapsto f(\cdot+\sqrt{2}) \longmapsto f(\cdot+\sqrt{2})^2$$

donc T_+ est C^∞ comme composé de fonction C^∞.

Q est C^∞

3) Démontrer qu'il existe une application $f_\lambda : [-1,1] \longrightarrow C^0_{1\text{-périodique}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$\lambda \mapsto f_\lambda$

de classe C^∞ telle que :

(Picard à paramètre)

$\forall \lambda \in [-1,1]$, f_λ soit solution de :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100\cdot f(t) = \lambda\cdot\sin(2\pi t)$

Soit $\Phi_\lambda : E \longrightarrow E$

$$f \mapsto \frac{1}{100}\left[\lambda\sin(2\pi t) - f(t+\sqrt{2})^2 - f(t-\sqrt{2})^2\right]$$

Version C^0 :

i) contractant uniformément en $\lambda \in [-1,1]$

ii) $(f,\lambda) \longmapsto \Phi_\lambda(f)$ est continue

$\hookrightarrow \left| \Phi_\lambda(f) - \Phi_{\tilde{\lambda}}(\tilde{f}) \right| \xrightarrow[\substack{\tilde{\lambda} \to \lambda \\ \tilde{f} \to f}]{} 0$

Version C^1 :

i) $\partial_\lambda \Phi_\lambda(f) = \frac{1}{100} \cdot \sin(2\pi t)$ continue et contractante

Donc $\| \partial_\lambda \Phi_\lambda(f) \| \leq \frac{1}{100} < 1$