Exercice 2 : Soit $\xi_1, \dots, \xi_n$ une suite de v.a. indépendantes de même loi (i.i.d)

telles que $\mathbb{P}(\xi_i = 0) = \mathbb{P}(\xi_i = 2) = \frac{1}{2}$

On pose $\eta_n = \prod_{i=1}^{n} \xi_i$ et on note T_n la tribu engendrée par les v.a. $\eta_1, \dots, \eta_n$. Montrer que la suite $(\eta_n)_n$ est une martingale adaptée à T_n.

. $\forall n$ η_n est $T_n = \sigma(\eta_1, \dots, \eta_n)$ - mesurable (évident)

. η_n est intégrable, en effet

$$\mathbb{E}[|\eta_n|] = \mathbb{E}\left[\left|\prod_{i=1}^{n} \xi_i\right|\right] \leq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|\xi_1|] \leq 1 < +\infty$$

Et $\mathbb{E}(|\xi_1|) = \sum_k |k| \cdot \mathbb{P}(\xi = k) = 0 \cdot \mathbb{P}(\xi = 0) + 2 \cdot \mathbb{P}(\xi = 2)$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

. $\forall n$, $\mathbb{E}[\eta_{n+1} \mid T_n] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n+1} \xi_i \,\middle|\, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)\right]$

car η_n est T_n-mesurable et ξ_{n+1} est indépendante de T_n

$$= \mathbb{E}[\xi_{n+1} \cdot \eta_n \mid T_n]$$

$$= \cancel{\mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid T_n] \cdot \mathbb{E}[\eta_n \mid T_n]}$$

$$= \eta_n \cdot \mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid T_n]$$

$$= \eta_n \cdot \mathbb{E}[\xi_{n+1}] = \eta_n \left[0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2}\right]$$

comme $\mathbb{E}[\eta_{n+1} \mid T_n] = \eta_n \cdot \mathbb{E}[\xi_{n+1}]$

Il suffit de modifier la loi de ξ_i pour que sont espérance soit supérieure ou inférieure à 1.

Ex : $\mathbb{P}(\xi_i = 0) = \mathbb{P}(\xi_i = 2) = \frac{1}{3}$

dans ce cas $\mathbb{E}[\xi_i] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1$

~~avec~~ $\cancel{\mathbb{P}(\xi_i = 0) = \mathbb{P}(\xi_i = 2)}$

donc $\mathbb{E}[\eta_{n+1} \mid T_n] = \frac{2}{3}\eta_n \leq \eta_n$

$\Rightarrow$ ~~Sous~~-martingale SMG

ou $\begin{cases} \mathbb{P}(\xi_i = 0) = 1-p \\ \mathbb{P}(\xi_i = \frac{2}{p}) = p \end{cases}$ avec $p \in]0,1[$

$\mathbb{E}[\xi_i] = 0 \cdot (1-p) + \frac{2}{p} \cdot p = 2 \geq 1$

donc $\mathbb{E}[\eta_{n+1} \mid T_n] = \eta_n \cdot p \geq \eta_n$

$\Rightarrow$ ~~Sous~~ martingal sMG

MG $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ sMG $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq X_n$

SMG $\rightarrow$ $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n$