Exercice 6 : Soit X une v.a. symétrique telle que $\mathbb{P}(X=0)=0$ (donner un ex. d'une telle v.a.).

1) Montrer que les v.a. $|X|$ et $Y=$ signe(X) sont indépendantes

X est symétrique $\Rightarrow$ X et $-X$ ont même loi

$$Y = \text{signe}(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq 0 \\ -1 & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

On a $\mathbb{P}(|X| = x) = \mathbb{P}(|-X| = x)$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(\text{signe}(X)=1)$$
$$= \mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(-X \geq 0)$$

$$\mathbb{P}(Y=-1) = \mathbb{P}(\text{signe}(X)=-1)$$
$$= \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(-X \leq 0)$$

Par symétrie $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=-1) = \mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X \leq 0)$

5) Soit ξ une v.a. de la loi $N(0,1)$

$$\mathbb{E}(\xi \mid \xi^2) = f(\xi^2) \quad \text{où } f(x^2) = \mathbb{E}(\xi \mid \xi^2 = x)$$

$$f(x) = \mathbb{E}(\xi \mid |\xi| = \pm\sqrt{x})$$

$$= \mathbb{E}\left[\xi \mid \xi = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } \xi \geq 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } \xi < 0 \end{cases}\right]$$

On fait la moyenne des ξ en sachant qu'il vaut soit $\sqrt{x}$ si $\xi \geq 0$ soit $-\sqrt{x}$ si $\xi < 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\xi \mid |\xi| = \pm\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x} + -\sqrt{x}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\xi \mid \xi^2) = 0$$

0 est donc la seule v.a. qui vérifie les propriétés de l'espérance conditionnelle.

$$\begin{cases} \cdot\ 0 \text{ est } \sigma(\xi^2)\text{-mesurable} \\ \cdot\ \int_\Omega 0 \cdot h(\xi^2)\, d\mathbb{P} = 0 \\ \cdot\ \int_\Omega \xi\, h(\xi^2)\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(\xi\, h(\xi^2)) = \int_{\mathbb{R}} \xi\, h(\xi^2)\, f_\xi(\xi)\, d\xi \end{cases}$$

$$= \mathbb{E}(X\, h(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot h(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$= 0$ car densité de la loi normale est paire

$X \sim \mathcal{U}([0,1])$. a) On cherche $\mathbb{E}[X^2|X]$ qui est la projection orthogonale de X^2 sur $L^2(\sigma(X))$

~~$\mathbb{E}[X^2|X]$ est $\sigma(X)$ - mesurable~~

. ~~β^* tq~~ $\mathbb{E}[X^2|X] = X^2$ car X^2 est $\sigma(X)$ - mesurable

~~$\Rightarrow$ sous forme $h(X)$ tq~~

$\mathbb{E}[X^2|X]$ est $\sigma(X)$ - mesurable tq

$$\mathbb{E}\left[\left(X^2 - \mathbb{E}[X^2|X]\right)^2\right] = \inf_{h \text{ borelienne}} \mathbb{E}\left[\left[X^2 - h(X)\right]^2\right] = \|X^2 - h(X)\|^2_{L^2(\mathcal{F})}$$

. β^* tq $\mathbb{E}\left[\left(X^2 - \beta^* X\right)^2\right] = \inf_{\beta \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(X^2 - \beta X\right)^2\right] = \|X^2 - \beta X\|^2_{L^2(\mathcal{F})}$

$$= \mathbb{E}[X^4] - 2\beta\,\mathbb{E}[X^3] + \beta^2\,\mathbb{E}[X^2]$$

$\beta^* X$ est la projection orthogonale de X^2 sur $F = \text{vect}(X)$

$\mathbb{E}[X^4] = \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$ $\mathbb{E}(X^3) = \int_0^1 x^3 dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)_0^1 = \frac{1}{4}$ $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{3}$

$f(\beta) = \frac{1}{3}\beta^2 - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{5}$ atteint son min en

$\beta^* = \dfrac{\frac{1}{2}}{2\,\frac{1}{3}} = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{4}$ donc $\beta^* X = \frac{3}{4} X$

$X \perp X^2 - \beta^* X$

Les 2 projections différentes.

b) $\mathbb{E}[X|X^2] = ?$ donc $\mathbb{E}[X|X^2] = X$ car X est $\sigma(X^2)$ - mesurable.

On a $|X| = \sqrt{X^2}$ or $X \geq 0$ $\mathbb{P}$ - p.s. car $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx = 1$

donc, $X = \sqrt{X^2} = h(X^2)$ est $\sigma(X^2)$ - mesurable. où $h = \sqrt{\cdot}$ borélienne car continue

1

α^* tq $\mathbb{E}\left[\left(X-\alpha^* X^2\right)^2\right] = \inf\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(X-\alpha X^2\right)^2\right] = \| X-\alpha X^2\|^2_{L^2(\mathbb{P})}$

$= \mathbb{E}[X^2] - 2\alpha\,\mathbb{E}[X^3] + \alpha^2\mathbb{E}[X^4]$

<u>c-à-d</u> $\alpha^* X^2$ est la projection orthogonale de X sur $G = \text{vect}(X^2)$

$f(\alpha) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{5}\alpha^2$

$f'(\alpha) = \frac{2}{5}\alpha - \frac{1}{2}$

$f'(\alpha) = 0 \iff \frac{2}{5}\alpha = \frac{1}{2}$

$\iff \alpha = \frac{5}{4}$

donc $\alpha^* X^2 = \frac{5}{4} X^2$

	0		1	$\frac{5}{4}$	
f'		$-$		0	$+$
f		↘			↗

$\Delta = b^2 - 4a = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$

$= \frac{1}{4} - \frac{4}{15}$

$= \frac{15-16}{4\cdot 15} = \frac{-1}{60} < 0$

$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right)^2$

$= \frac{1}{3} - \frac{5}{8} + \frac{5}{16}$

$= \frac{1}{3} - \frac{5}{16}$

$= \frac{16-15}{3\cdot 16} = \frac{1}{48}$

4) α^* tq $\|X-\alpha^* X^2\|^2_{L^2} = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \|X-\alpha X^2\|^2_{L^2}$

$$= \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{5}\alpha^2 + \frac{1}{3}\right)$$

Or $\inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{5}\alpha^2 + \frac{1}{3}\right)$ est atteint pour $\alpha^* = 0$

Donc, $P_G(X) = 0$ ou $G = \mathrm{vect}(X^2)$

2ème façon, $X - \alpha^* X^2 \perp X^2$

$\langle X - \alpha^* X^2, X^2 \rangle = 0 \iff \langle X, X^2 \rangle - \alpha^* \langle X^2, X^2 \rangle = 0$

$$\iff \alpha^* = \frac{\langle X, X^2 \rangle}{\langle X^2, X^2 \rangle}$$

$$\langle X, X^2 \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\langle X^2, X^2 \rangle = \int_0^1 x^2 \cdot x^2 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\alpha^* = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

Donc $P_G(X) = \frac{5}{4} X^2$

Si $X \sim \mathcal{U}([-1,1])$

$$\beta^* \text{ tq } E\left[(X^2 - \beta^* X)^2\right] = \inf_{\beta \in \mathbb{R}} E\left[(X^2 - \beta X)^2\right] = \| X^2 - \beta X \|^2_{L^2(\mathcal{F})}$$

$$= E[X^4] - 2\beta E[X^3] + \beta^2 E[X^2]$$

$$E[X^4] = \int_{\mathbb{R}} x^4 \cdot \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{5}$$

$$E[X^3] = \int_{\mathbb{R}} x^3 \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \quad \text{car impaire}$$

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$f(\beta) = \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{5}$ $\qquad$ $f'(\beta) = 0 \iff \frac{1}{3}\beta^2 = -\frac{1}{5}$

$\iff \beta^2 = -\frac{3}{5}$

atteint son minimum en $\beta = 0$ $\qquad$ $\iff \beta = i\sqrt{\frac{3}{5}}$

car somme de deux nbs positif

donc $P_F(X^2) = 0$ où $F = \text{vect}(X)$

b) $\mathbb{E}[X \mid X^2]$

idée : $X = |X| \cdot \mathbb{1}_{(X>0)} - |X| \mathbb{1}_{(X<0)}$

$= \sqrt{X^2}\, \mathbb{1}_{(X>0)} - \sqrt{X^2}\, \mathbb{1}_{(X<0)}$

$\mathbb{E}[X|X^2] = \mathbb{E}[\sqrt{X^2}\, \mathbb{1}_{(X>0)} | X^2] - \mathbb{E}(\sqrt{X^2}\, \mathbb{1}_{(X>0)} | X^2)$

$= \sqrt{X^2}\left(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(X>0)}|X^2] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(X<0)}|X^2]\right)$

$= \sqrt{X^2}\left(\mathbb{E}[\text{signe}(X)=1 \,|\, |X|^2] - \mathbb{E}[\text{signe}(X)=-1 \,|\, |X|^2]\right)$

Or signe $(X) = 1 \perp\!\!\!\perp |X|^2$ et signe $(X) = -1 \perp\!\!\!\perp |X|^2$

$= \sqrt{X^2}\left(\mathbb{E}[\text{signe}(X)=1] - \mathbb{E}[\text{signe}(X)=-1]\right)$

$= \sqrt{X^2}\left(\mathbb{P}(X>0) - \mathbb{P}(X<0)\right)$

$= \sqrt{X^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$

<u>idée 2</u> : Montrer que $\mathbb{E}[X|X^2]=0$

Il suffit de vérifier la caractérisation de l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}[X|Y]=Z \iff \begin{cases} \cdot\ Z \text{ est } \sigma(Y)\text{-mesurable} \\ \cdot\ \int_\Omega Z\, h(Y)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega X\, h(Y)\, d\mathbb{P} \end{cases}$$

$\forall h$ borélienne.

(i.e. $\langle Z, h(Y)\rangle = \langle X, h(Y)\rangle$)

<u>On a</u> $\cdot$ 0 est $\sigma(X^2)$-mesurable (les constants sont mesurables p.s. à toutes les tribus

$\cdot$ $\int_\Omega 0 \cdot h(X^2)\, d\mathbb{P} = 0$

$\cdot$ $\int_\Omega X\, h(X^2)\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X \cdot h(X^2)] = \int_{\mathbb{R}} x\, h(x^2) \cdot \frac{1}{2} \mathbb{1}_{(-1;1)}(x)\, dx$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x\, h(x^2)\, dx = 0$

car $x \mapsto x\, h(x^2)$ est impaire et.

<u>Conclusion</u> : $\mathbb{E}[X|X^2]=0$ car c'est l'unique v.a. vérifiant les propriétés de l'Espérance Conditionnelle.

Rappel : les ∼ des manip sur l'espérance conditionnelle sont pareilles.

• $\mathbb{E}[T\cdot Z|X] = T\cdot\mathbb{E}[Z|X]$ lorsque T est $\sigma(X)$-mesurable

• $\mathbb{E}(T|X] = \mathbb{E}[T]$ quand T et X sont indépendants

$T \perp\!\!\!\perp X$

idée donnée par 1) de l'exo 6

On a : signe(X) $\perp\!\!\!\perp$ $|X|$ sont indépendants

On peut alors trouver

$$\mathbb{E}[X|X^2] = \sqrt{X^2}\left(\mathbb{E}[\text{signe}(X)=1 \mid |X|^2] - \mathbb{E}[\text{signe}(X)=-1 \mid |X|^2]\right)$$

$$= \sqrt{X^2}\left(\mathbb{E}(\text{signe}(X)=1) - \mathbb{E}[\text{signe}(X)=-1]\right)$$

$$= \sqrt{X^2}\left(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(X>0)}] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(X<0)}]\right)$$

$$= \sqrt{X^2}\left(\mathbb{P}(X>0) - \mathbb{P}(X<0)\right)$$

$$= \sqrt{X^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0$$