Exercice 8 : Soit $-1 < \gamma < 1$ et soit $X = (X_1, X_2)$ un vect. alea. gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ayant pour densité

$$g(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1^2 - 2\gamma x_1 x_2 + x_2^2\right)\right)$$

Densité d'un vect. gaussien $X \in \mathbb{R}^n$, $X \sim \mathcal{N}_n(m_X, \Gamma_X)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Gamma_X)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x - m_X, \Gamma_X^{-1} (x - m_X)\rangle\right)$$

On a

$$x_1^2 - 2\gamma x_1 x_2 + x_2^2 = x_1(x_1 - \gamma x_2) + x_2(-\gamma x_1 + x_2)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - \gamma x_2 \\ -\gamma x_1 + x_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \langle x, \Gamma_X^{-1} x \rangle$$

donc
$$\Gamma^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u & v \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array} \quad \text{et} \quad \Gamma = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} u = e_1 - \gamma e_2 \\ v = -\gamma e_1 + e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u + \frac{1}{\gamma} v = \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right) e_2 \\ e_1 = u + \gamma e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_2 \cdot \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\right) = u + \frac{1}{\gamma} v \\ e_1 = u + \gamma\left(\frac{\gamma}{1-\gamma^2} u + \frac{1}{1-\gamma^2} v\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_2 = \frac{\gamma}{1-\gamma^2} u + \frac{1}{1-\gamma^2} v \\ e_1 = \left(1 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\right) u + \frac{\gamma}{1-\gamma^2} v \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{1-\gamma^2} u + \frac{\gamma}{1-\gamma^2} v \\ e_2 = \frac{\gamma}{1-\gamma^2} u + \frac{1}{1-\gamma^2} v \end{cases}$$

Déterminer la fonction caractéristique de (X_1, X_2)

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \varphi_X(x) = \exp\left(i \langle x, m_X \rangle - \frac{1}{2} \langle x, \Gamma_X x \rangle\right)$

On $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$ où $\Gamma = \frac{1}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$

On calcule $\langle x, \Gamma x \rangle = x^t \Gamma x = (x_1, x_2) \frac{1}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{1-\gamma^2}\left((x_1, x_2)\begin{pmatrix} x_1 + \gamma x_2 \\ \gamma x_1 + x_2 \end{pmatrix}\right)$

$= \frac{1}{1-\gamma^2}\left(x_1(x_1 + \gamma x_2) + x_2(\gamma x_1 + x_2)\right)$

$= \frac{1}{1-\gamma^2}\left(x_1^2 + 2\gamma x_1 x_2 + x_2^2\right)$

$= \frac{1}{1-\gamma^2}\left(x_1^2 + 2\gamma x_1 x_2 + x_2^2\right)$

Ainsi $\varphi_X(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\gamma^2}\left(x_1^2 + 2\gamma x_1 x_2 + x_2^2\right)\right)$

3) Quelle est la loi de la v.a. X_1 ?

$X = (X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(X), \Gamma_X) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{var}(X_1) & \mathrm{cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{cov}(X_2, X_1) & \mathrm{var}(X_2) \end{pmatrix}\right)$

$= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\right)$

donc $X_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-\gamma^2}\right)$ si $\gamma \neq 1$

4) vecteur aléatoire $(Y_1, Y_2) = \sqrt{\frac{1-r^2}{2}} \, (X_1 + X_2, \; X_1 - X_2)$

On a
$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{\frac{1-r^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ est donc une transformation linéaire (ou affine) du vecteur gaussien (X_1, X_2) donc $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien

de vecteur espérance $\mathbb{E}[Y] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[Y_1] \\ \mathbb{E}[Y_2] \end{pmatrix} = A \cdot \mathbb{E}[X] = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et de matrice de covariance $\Gamma_Y = A \cdot \Gamma_X A^t$

$$\Gamma_{Y_1, Y_2} = \sqrt{\frac{1-r^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-r^2} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{1-r^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+r & r+1 \\ 1-r & r-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(r+1) & 0 \\ 0 & 2(1-r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+1 & 0 \\ 0 & 1-r \end{pmatrix}$$

D'où, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r+1 & 0 \\ 0 & 1-r \end{pmatrix} \right) = \mathcal{N}(\mathbb{E}[Y], \Gamma_Y)$

Remarque : Y_1 et Y_2 sont indépendantes car non corrélées

5) Considérons la convergence en loi lorsque $\gamma \to 1-$.

Si γ est remplacé par γ_m avec $\gamma_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} 1-$

On a une suite de vecteurs aléatoires

$$Y(m) = \left(Y_1^{(m)}, Y_2^{(m)}\right) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+\gamma_m & 0\\ 0 & 1-\gamma_m\end{pmatrix}\right)$$

la loi limite de $Y(m)$ s'entend dans le sens :

$Y(m)$ converge en loi vers un vecteur aléatoire $Z = (Z_1, Z_2)$

On cherche la loi de Z

Rappel : (Cas unidimensionnel)

Une suite $(X_m)_m$ de v.a. réelles converge en loi vers une v.a. X,

et on note $X_m \xrightarrow{(\mathcal{L})} X$ si

$$\mathbb{P}(X_m \in B) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \mathbb{P}(X \in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ tq } \mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad F_{X_m}(x) \longrightarrow F_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ point de continuité de X.

$\left(\text{car } F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx\right)$

$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[g(X_m)] \longrightarrow \mathbb{E}[g(X)] \quad \forall g$ continue bornée

$\Leftrightarrow \quad \varphi_{X_m}(t) \longrightarrow \varphi_X(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$

dans le cas multidimensionnel on utilise la fonction caractéristique

Lorsque $\gamma \to 1_-$ $\quad \Gamma_Y = \begin{pmatrix} \gamma+1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \varphi_Y(s,t) \xrightarrow[\gamma \to 1_-]{} e^{-\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \right\rangle}$$

qui est la fonction caractéristique d'1 vecteur gaussien $Z=(Z_1,Z_2)$ centrée de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Z_2 =$ constante com $Var(X_2) = 0$

$\Rightarrow E[Z_2] = 0 = Z_2 \Rightarrow Z = (Z_1, 0)$