Feuille 2 : Systèmes dynamiques :

Exo 7 : $X' = AX$

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t\omega^2 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_d - A) = \lambda^2 - \operatorname{tr}A\,\lambda + \det A$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$\cancel{\Delta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} =$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1 = 9 - 4 = 5$

$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ $\quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$

A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$, $P \in GL_2(\mathbb{R})$

Calcul des $\vec{v.p.}$:

$A \cdot \begin{pmatrix} m_\pm \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_{1,2} \begin{pmatrix} m_\pm \\ 1 \end{pmatrix}$. $\quad$ parfois $\begin{pmatrix} 1 \\ m_\pm \end{pmatrix}$

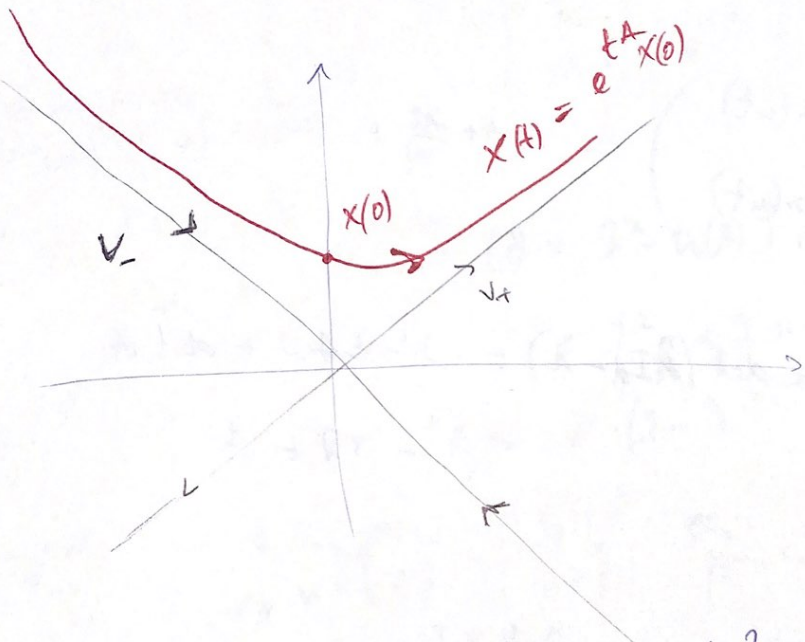
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_\pm \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} m_\pm \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m_\pm + 1 = \lambda_\pm \Rightarrow m_\pm = \lambda_\pm - 1$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{5} - 2}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_\pm = \begin{pmatrix} m_\pm \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_+ > 0 \\ \lambda_- < 0 \end{matrix}$$

Portrait de Phase



$$\begin{cases} x(t) = e^{tA}x(0) = a_+ e^{t\lambda_+} v_+ + a_- e^{t\lambda_-} v_- \\ x(0) = a_+ v_+ + a_- v_- \end{cases}$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{P} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \qquad P\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}P^{-1}$$

$\vec{vp}$: v_+, v_-

$\vec{vp}$: e_+, e_-

$$\begin{matrix} v_+ = P.e_+ \\ v_- = P.e_- \end{matrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} m_+ & m_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{m_+ - m_-}\begin{pmatrix} 1 & -m_- \\ -1 & m_+ \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = P\, e^{t\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}}\, P^{-1}$$

$$= \frac{1}{m_+ - m_-} \begin{pmatrix} m_+ & m_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{t\lambda_+} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -m_- \\ -1 & m_+ \end{pmatrix}$$

Ex : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$= (\lambda - 1)^2 \quad 1 \text{ v.p double}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -m+2 \end{pmatrix} \quad \text{pour } m = 1$$

On a $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\vec{vp}$

Espace stable $E_1 = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id})$

Trigonaliser : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ théorème de la base incomplète

$$A v_1 = v_1$$

$$A v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_1 + v_2$$

$$\Rightarrow \exists P = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ et } A = P \begin{array}{c} \begin{matrix} Av_1 & Av_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + a \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{}$$

↳ Nilpotente d'ordre 2

$$e^{t\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} = e^{t\lambda} e^{aN} = e^{t\lambda}(I + aN + a)$$

$$= e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & ta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Example</u> : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} \Leftrightarrow X' = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda_1 x + ay + bz \\ y' = \lambda_2 y + cz \\ z' = \lambda_3 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = \lambda_1 x(t) + a y(t) + b z(t) \\ y'(t) = \lambda_2 y(t) + c \cdot e^{t\lambda_3} z(0) \\ z(t) = e^{t\lambda_3} z(0) \end{cases}$$

$$y(t) = e^{t\lambda_2} y(0) + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} c \cdot e^{s\lambda_3} z(0) \cdot ds$$

Trigonaliser une matrice 3x3 :

. Pol. <u>carac</u> → valeurs propres → distinctes / → multiplicité

Calcul des espaces propres { en somme directe si distinctes / pas en somme directe ou égal.

<u>En dimension 3</u> : Moyen commode :

Déterminer un plan invariant

- Trouver H, $\dim H = 2$ tq $AH \subset H$
- Alors, si $w \notin H$
- $A|_H$: 2×2 Trouver un $\vec{vp}$ $\overset{u}{V}$ de A dans H

  $v \neq u$ dans H

Dans la base (u, v, w), A est Triangulaire

Hyperplan : noyau d'une $\underbrace{\text{forme linéaire}}$ non nulle.

(équation de plan ~~...~~ $ax + by + cz = 0$)

Trouver un 2-plan A-invariant

$\Leftrightarrow$ Trouver un vecteur propre pour ${}^tA$

φ. Forme linéaire

${}^tA . \varphi = \lambda \varphi$

$\langle \varphi, x \rangle = 0$

$\overset{\shortparallel}{\varphi(x)}$

$$\lambda \varphi(x) = ({}^tA \varphi)(x) = \langle {}^tA \varphi, x \rangle = \langle \varphi, Ax \rangle = \varphi(Ax) = \lambda \varphi(x)$$

Si $\varphi(x) = 0 \rightarrow \varphi(Ax) = 0$ c-à-d si $X \in H$ alors $AX \in H$

$\Longrightarrow H$ est A-invariant.

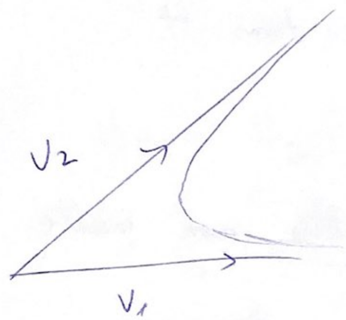
$$A = \begin{array}{cc} H & \mathbb{R}\cdot w \\ \left(\begin{array}{c|c} A|_H & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 & \lambda_3 \end{array}\right) \end{array}$$

Exo 9 : $X' = AX$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Matrice triangulaire. 2 valeurs propres distincts 1 et 2

$\Longrightarrow$ A est diagonalisable

$\lambda_1 = 1 > 0$ et $\lambda_2 = 2 > 0$ donc 0 est instable



$AV_1 = V_1$

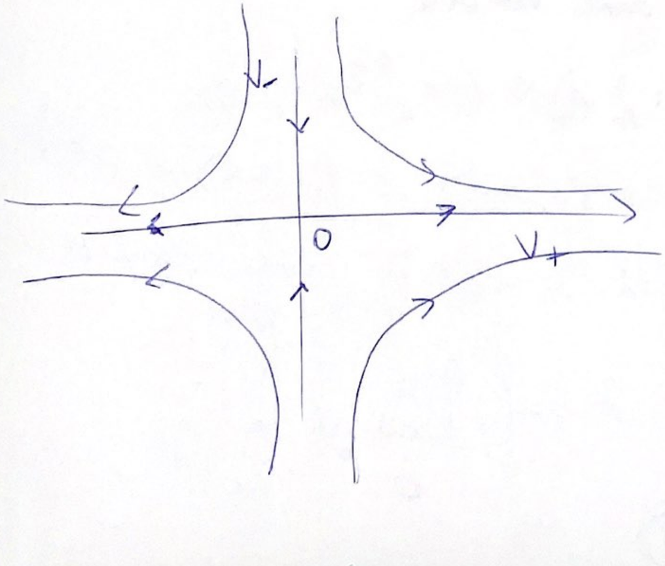
$AV_2 = 2V_2$

Pour $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$

$= \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

2 valeurs propres réelles distincts donc A est diagonalisable

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 < 0 \\ \lambda_2 = 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Le } 0 \text{ est} \\ \text{Instable lorsque } t \longrightarrow +\infty \\ \text{car une val. propre est } > 0. \end{array}\right.$



Exo 12 : $x'' + x = f(t)$ $\qquad X'(t) = A\cdot X(t) + B(t)$

Equation differentielle d'ordre 2 avec second membre linéaire à coefficient constante

Son écriture vectorielle est en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ $\quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} = A\cdot X(t) + B(t)$$

Solution : $X(t) = R_A(t,0)\,X(0) + \int_0^t R_A(t,s)\,B(s)\,ds$

$$= e^{tA}X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)\,ds$$

La matrice est constante donc la résolvant est e^{tA}.

Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

$$e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^k}{k!} = I + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \cdots$$

donc $X(t) = e^{tA}X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)\,ds$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

Ainsi $x(t) = x_0\cos(t) + x'_0\sin(t) + \int_0^t \sin(t-s)\,f(s)\,ds$

3) $x(\cdot)$ 2π-periodique $\iff \begin{cases} \int_0^{2\pi} f(s)\sin(s)\,ds = 0 \\ \int_0^{2\pi} f(s)\cos(s)\,ds = 0 \end{cases}$

1ère méthode : $\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t+2\pi) = x(t)$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{t+2\pi} \underbrace{\sin(t-s)\,f(s)}_{2\pi \text{ periodique}}\,ds = \int_0^{t} \sin(s)\,f(s)\,ds$$

$$\int_0^{t} + \int_t^{t+2\pi} = \int_0^{t} + \int_0^{2\pi}$$

donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad \int_0^{2\pi} \sin(t-s)\,f(s)\,ds = 0$

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(\sin(t)\cos(s) - \cos(t)\sin(s)\right) f(s)\,ds$$

$$0 = \sin(t)\cdot\int_0^{2\pi} \cos(s)\,f(s)\,ds - \cos(t)\int_0^{2\pi} \sin(s)\,f(s)\,ds$$

sin et cos sont linéairement indépendant sur $\mathbb{R}$

donc une combinaison linéaire nulle implique qu'ils

sont forcément nulles.

les coefs

$$\int_0^{2\pi} \cos(s)\,f(s)\,ds = \int_0^{2\pi} \sin(s)\,f(s)\,ds$$

$2^{\text{ème}}$ méthode : $X'(t) = A X(t) + B(t)$

$X(\cdot)$ solution $\Leftrightarrow$ $X(\cdot + 2\pi)$ solution (théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz

car les coeffs de l'E.D.O sont 2π-périodiques

$x(\cdot)$ - 2π-périodique $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x(\cdot) \\ x'(\cdot) \end{pmatrix}$ 2π-périodique

$\Leftrightarrow$ $X(\cdot)$ 2π-périodique

$\Leftrightarrow$ $X(2\pi) = X(0)$ (par unicité de la solution de l'E.D.O. Cauchy-Lipschitz

$$X(2\pi) = R_A(2\pi, 0) X(0) + \int_0^{2\pi} R_A(2\pi, s)\, B(s)\, ds$$

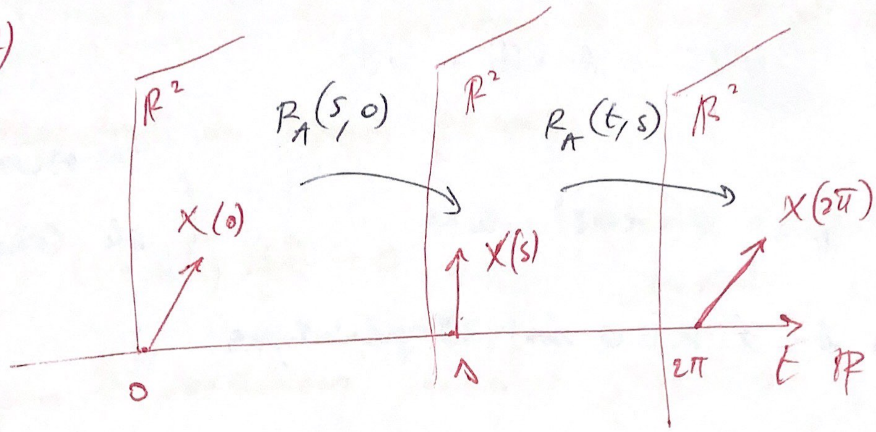
$$= e^{2\pi A} X(0) + \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\pi) & \sin(2\pi) \\ -\sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{pmatrix} X(0) + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(2\pi - s) & \sin(2\pi - s) \\ -\sin(2\pi - s) & \cos(2\pi - s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

$$= I \cdot X(0) + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

Ainsi $X(2\pi) = X(0) \Leftrightarrow X(2\pi) - X(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\int_0^{2\pi} \sin(s) f(s)\, ds = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos(s) f(s)\, ds = 0 \end{cases}$

$X'(t) = A(t)\, X(t)$



$\mathbb{R}^2$
$R_A(s,0)$
$\mathbb{R}^2$
$R_A(t,s)$
$\mathbb{R}^2$
$X(0)$
$X(s)$
$X(2\pi)$
0
s
2π
t
$\mathbb{R}$

Feuille de TD n° 2 : On considère la famille d'équations linéaires dépendant du ~~temps~~ paramètre ε.

$$\ddot{x}_\varepsilon(t) + (1+\varepsilon t)\, x_\varepsilon(t) = 0$$

linéaire à coefficients non constants (scalaire d'ordre 2)

1) Calculer pour les conditions initiales $\begin{cases} x_\varepsilon(0) = 0 \\ \dot{x}_\varepsilon(0) = 1 \end{cases}$ le développement asymptotique à l'ordre 2 en ε d'une solution (On pourra s'aider de Maple)

On a $x_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + o(\varepsilon^2)$

Pour $\varepsilon = 0$, l'équation devient $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$

qui est de la forme $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$

avec $\omega^2 = 1 \iff \omega = \pm 1$ ici $\omega = 1$

$\Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \\ x'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t) \end{cases}$ on évalue en 0

$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$ Ainsi $x(t) = \sin(t)$

$O(\varepsilon^2)$ est uniforme en $t \in [-T, T]$

$O(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 g(t, \varepsilon)$ où

$$\max \left\{ \begin{array}{l} |g(t,\varepsilon)| \\ \frac{\partial}{\partial t} |g(t,\varepsilon)| \end{array} \right\} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \quad \forall t \in [-T, T]$$

Théorème de dépendance differentiable $\Rightarrow$ Existence du developpement limitée.

On peut écrire l'équation par rapport au paramètre ε.

On injecte $x_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + o(\varepsilon^2)$

dans $\boxed{x''_\varepsilon(t) + (1+\varepsilon t)\, x_\varepsilon(t) = 0}$

On a $x''_\varepsilon(t) = y''_0(t) + \varepsilon y''_1(t) + \varepsilon^2 y''_2(t) + o(\varepsilon^2)$

On injectant on a :

$$y''_0(t) + \varepsilon y''_1(t) + \varepsilon^2 y''_2(t) + o(\varepsilon^2) + (1+\varepsilon t)\, y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^0 \left(y_0(t) + y''_0(t) \right) + \varepsilon \left(y''_1(t) + t y_0(t) + y_1(t) \right) + \varepsilon^2 \left(y''_2(t) + t y_1(t) + y_2(t) \right)$$

$$+ \varepsilon^3 t y_2(t) + o(\varepsilon^2) = 0$$

Ce terme rentre dans le $o(\varepsilon^2)$

En utilisant l'unicité d'un développement limitée les coeffs devant $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ sont donc nulls

On a $\begin{cases} y_0(t) + y_0''(t) = 0 \\ y_1''(t) + t y_0(t) + y_1(t) = 0 \\ y_2''(t) + t y_1(t) + y_2(t) = 0 \end{cases}$ avec les conditions initiales $\begin{cases} x_\varepsilon(0) = 0 \\ \dot{x}_\varepsilon(0) = 1 \end{cases}$

On a $\begin{cases} x_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + o(\varepsilon^2) \\ \dot{x}_\varepsilon(t) = y_0'(t) + \varepsilon y_1'(t) + \varepsilon^2 y_2'(t) + o(\varepsilon^2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_\varepsilon(0) = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 . y_2(0) + o(\varepsilon^2) \\ \dot{x}_\varepsilon(0) = y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) + \varepsilon^2 y_2'(0) + o(\varepsilon^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + o(\varepsilon^2) \\ 1 = y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) + \varepsilon^2 y_2'(0) + o(\varepsilon^2) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_0(0) = y_1(0) = y_2(0) = 0 \\ y_0'(0) = 1 \quad \text{et} \quad y_1'(0) = y_2'(0) = 0 \end{cases}$$

On obtient donc 3 équa diff différentes.

(1) $\begin{cases} y_0''(t) + y_0(t) = 0 \\ y_0(0) = 0 \\ y_0'(0) = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y_1''(t) + y_1(t) = -t y_0(t) \\ y_1(0) = 0 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y_2''(t) + y_2(t) = -t y_1(t) \\ y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 0 \end{cases}$

Pour résoudre la deuxième, écrivons sous forme matricielle et appliquons la méthode de variation de la constante car nous avons une équa diff du second ordre a coeff constant qui depend du temps avec second membre.

$$\begin{cases} y_1''(t) + y_1(t) = -t\, y_0(t) \\ y_1(0) = 0 = y_1'(0) \end{cases} \qquad \text{Soit } Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \end{pmatrix} \Rightarrow Y'(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_1(t) \end{pmatrix}$$

On a $$Y'(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \end{pmatrix} = A\, Y(t)$$

$$\rightarrow Y(t) = e^{tA} Y(0) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}$$

On a $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = B \Rightarrow e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \frac{\sin(t\omega)}{\omega} \\ -\omega \sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}$$

donc l'équation homogène admet 0 comme solution

On resout l'équation avec second membre

$$Y'(t) = A\,Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -t\,y_0(t) \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad y_1''(t) = -y_1(t) - t\cdot y_0(t)$$

d'après le théorème de variation de la constante

$$Y(t) = R(t,0)\,Y(0) + \int_0^t R(t,s)\,b(s)\,ds$$

$$= e^{tA}\,Y(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\,b(s)\,ds$$

$$= \int_0^t e^{(t-s)A}\,b(s)\,ds \quad \text{car} \quad Y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -s\,y_0(s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} -s\,y_0(s)\cdot\sin(t-s) \\ -s\,y_0(s)\,\cos(t-s) \end{pmatrix} ds$$

l'intégrale d'un vecteur colonne est un vecteur constitué des intégrales

$$= \begin{pmatrix} -\int_0^t s\,y_0(s)\sin(t-s)\,ds \\ -\int_0^t s\,y_0(s)\cos(t-s)\,ds \end{pmatrix}$$

où $y_0(s) = \sin(s)$

On doit intégrer
$$\begin{cases} -\displaystyle\int_0^t s \cdot \sin(s) \cdot \sin(t-s)\, ds \\ -\displaystyle\int_0^t s \cdot \sin(s) \cdot \cos(t-s)\, ds \end{cases}$$

	D	I
+	s	$\sin(s)\sin(t-s)$
−	1	$\cos(s)\sin(t-s) + \sin(s)(-1)\cos(t-s)$
+	0	$-\sin(s)\sin(t-s) + \cos(s)(-1)\cdot\cos(t-s) + \cos(s)\cos(t-s) + \sin(s) \times \sin(t-s)$

$$= -2\cos(s)\cos(t-s)$$

$$-\int_0^t s \cdot \sin(s)\sin(t-s)\, ds = -\Big[\cos(s)\sin(t-s) - \sin(s)\cos(t-s) + 2\cos(s)\cos(t-s)\Big]_0^t$$

$$= \Big[\cos(s)\sin(t-s) - \sin(s)\cos(t-s) + 2\cos(s)\cos(t-s)\Big]_t^0$$

$$= \sin(t) + 2\cos(t) - \big(-\sin(t) + 2\cos(t)\big)$$

$$= 2\sin(t)$$

Feuille n°3 : Les 4 premiers sont des applications du théorème de Floquet

Exercice 1 :

Soit $A \in C^0(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}))$ une application T-périodique.

Montrons que

$X(t)$ est une solution T-périodique de $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$ $\Leftrightarrow$ $X(0)$ est vecteur propre de $R_A(T, 0)$ de valeur propre associée 1.

On a $\begin{cases} A \in C^0(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R})) \\ A(t+T) = A(t) \end{cases}$

On a $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$

Montrons que : $X(\cdot)$ T-périodique $\Leftrightarrow$ $R_A(T,0) \cdot X(0) = X(0)$

C-à-d : $\forall t_0 \; X(t+T) = X(t) \Leftrightarrow R_A(T,0) \cdot X(0) = X(0)$

$\Rightarrow$) On a $\dot{X}(t) = A(t) X(t)$

$\Rightarrow X(t) = R_A(t,0) X(0)$

$\Rightarrow X(t+T) = R_A(t+T, 0) X(0)$ chasles

$= R_A(t+T, T) R(T,0) X(0)$ $R(t_2+T, t_1+T) = R(t_2, t_1)$

$= R_A(t,0) R_A(T,0) \cdot X(0)$

donc $\begin{cases} X(t+T) = R_A(t,0)\, R_A(T,0)\, X(0) \\ X(t) = R_A(t,0)\, X(0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad R_A(t,0) X(0) = R_A(t,0) R_A(T,0) \cdot X(0)$$

$$\Rightarrow \quad X(0) = R_A(T,0) \cdot X(0)$$

$\Rightarrow$ $X(0)$ est $\vec{vp}$ de $R_A(T,0)$ associé à $vp = 1$

(ie. $A \cdot v_1 = v_1$)

$(\Leftarrow)$ $R_A(T,0)\, X(0) = X(0)$

$$\Rightarrow \quad X(t+T) = R_A(t,0)\, X(0)$$

On a: $R(0,t)\, R(t+T,0) = R(0,t)\, R(t+T,T)\, R(T,0)$

$$= R(0,t)\, R(t,0)\, R(T,0)$$

$$= R(T,0)$$

et $R(t,0)^{-1} R(t+T,0) X(0)$.

$$= R(0,t)\, R(t+T,0)\, X(0)$$

$$= R(T,0)\, X(0)$$

Feuille n°3 : Exercice 2 : Soit $a() \in C^1_{T\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On note $R(t,s)$ la résolvante de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 naturellement associée à $\ddot{x}(t) + a(t) \cdot x(t) = 0$ (1)

On suppose que $R(T,0)$ est elliptique.

On ajoute un terme de frottement à l'équation précédente.

stabilité de $\ddot{x}(t) + \gamma \cdot \dot{x}(t) + a(t) \cdot x(t) = 0$ (2)

pour $0 < \gamma \ll 1$

On démontre dans un premier temps que $R_\gamma(T,0)$ du système (2) est de déterminant < 1.

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ le système (2) devient alors :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = A_\gamma(t)\, X(t)$$

$$\det(R_\gamma(T,0)) = e^{\int_0^T tr(A_\gamma(t))dt}$$ d'après Liouville.

$$= e^{\int_0^T -\gamma dt}$$

$$= e^{-\gamma T} < 1$$

La stabilité du système est donnée par les vp de $R_\gamma(T,0)$

λ_1 et λ_2 vp de $R_\gamma(T,0)$ $\rightarrow$ $\det(R_\gamma(T,0)) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

car $R_\gamma(T,0) \in M_2(\mathbb{R})$

Si $\begin{cases} |\lambda_1| < 1 \\ |\lambda_2| < 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Stabilité asymptotique

${}^tA = -A$

$\Rightarrow e^A$ est une rotation

pour le déterminant

$SO(\mathbb{R})$ et $O(\mathbb{R})$

algèbre de lie.

spécial

. Si $\gamma = 0$, $R_0(T,0) \in SL_2(\mathbb{R})$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix} \in sl_2(\mathbb{R})$

$$\det(R_0(T,0)) = e^{\int_0^T tr(A_0(t))\,dt} = e^{\int_0^T 0\,dt} = e^0 = 1$$

~~donc~~ par hypothèse $R_0(T,0)$ est <u>elliptique</u>

$\Rightarrow$ $|tr(R_0(T,0))| < 2$

$\Rightarrow$ vp de $R_0(T,0)$ sont $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ $\theta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $R_0(T,0) = P.\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} P^{-1}$ $\theta \in \mathbb{R}$, $P \in GL_2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ $tr(R_0(T,0)) = 2\cos(\theta)$

$R_0(T,0)$ <u>Hyperbolique</u> : $|tr(R_0(T,0))| > 2$

$\Rightarrow$ vp de $R_0(T,0)$ sont $\frac{1}{\lambda}$ et λ, $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1,1\}$

sinon parabolique

$\sqrt{1}$ ~~toute~~ de l'exp des éléments d'une algèbre de lie appartenant à un groupe

$\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$ tq $R_0(T,0) = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} P^{-1}$

2: $R_0(T,0)$ est <u>parabolique</u>

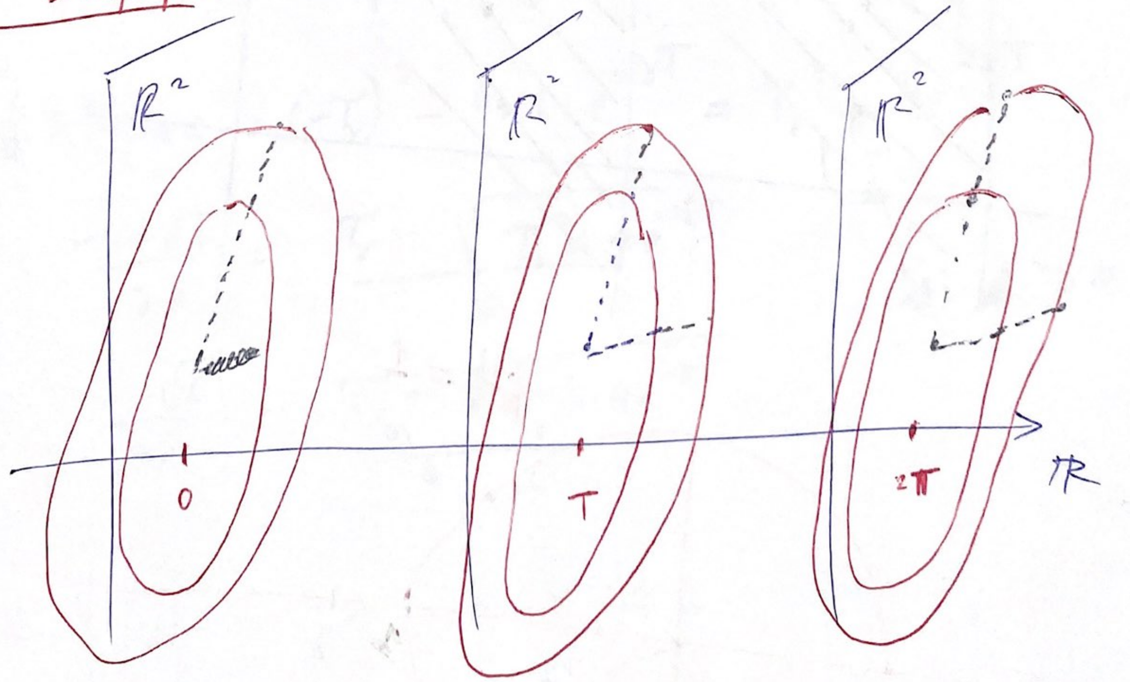
$\Rightarrow \left| tr\left(R_0(T,0)\right)\right| = 2$

$\Rightarrow$ vp de $R_0(T,0)$ sont $\{1,1\}$ ou $\{-1,-1\}$

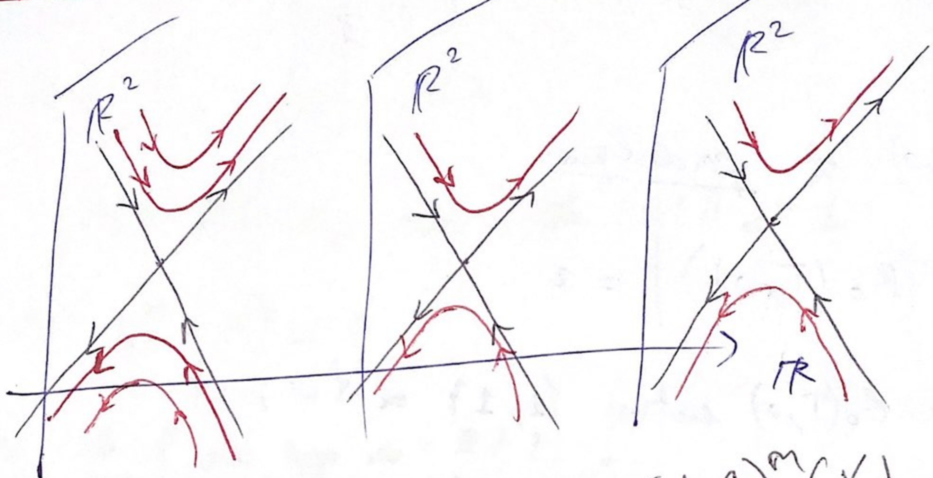
$\Rightarrow R_0(T,0) = P\begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left|Tr\left(R_0(T,0)\right)\right| = \left|\lambda + \frac{1}{\lambda}\right| > 2$ si $\lambda \neq \pm 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

<u>Cas Elliptique:</u>

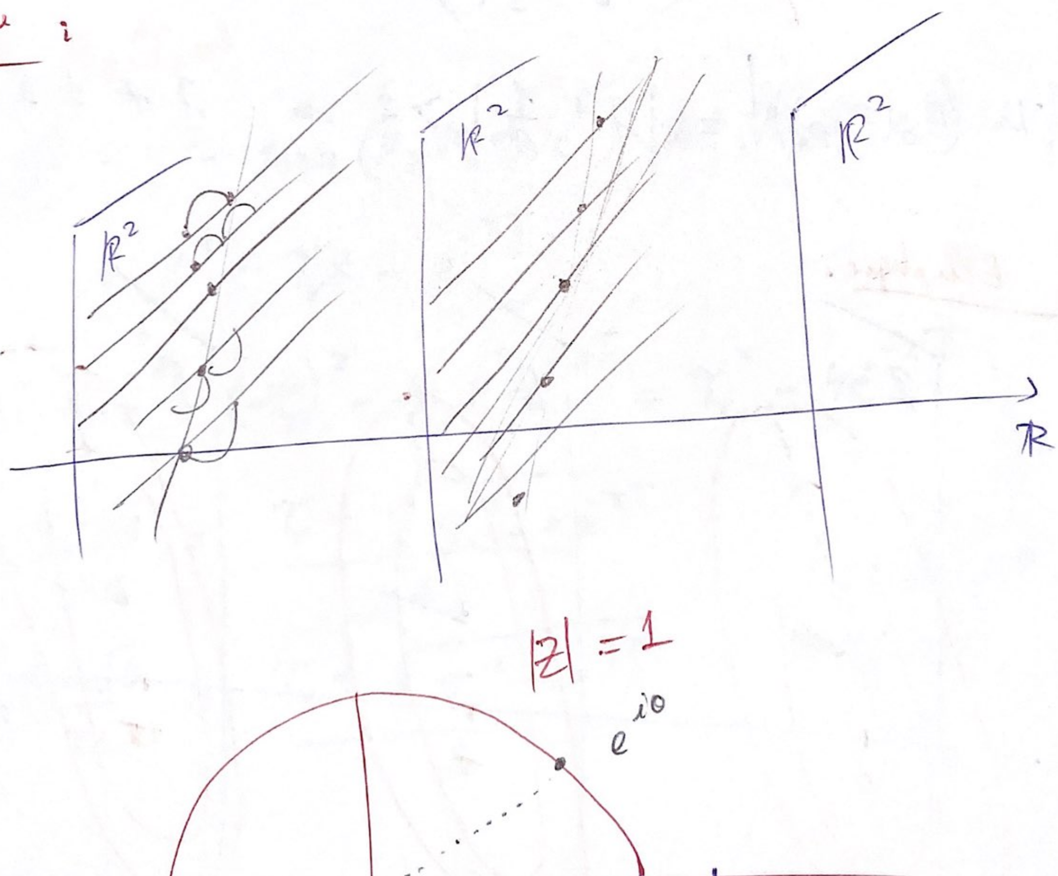


Hyperbolique :



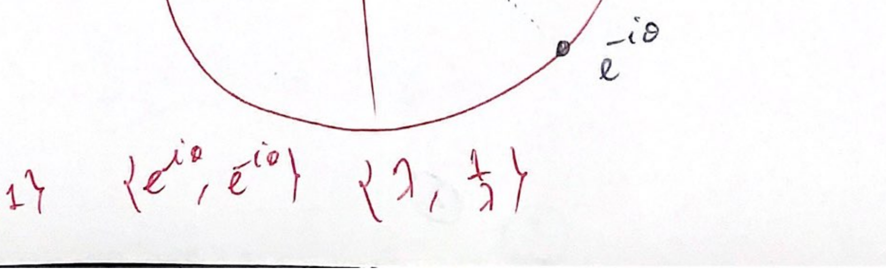
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + maY \\ Y \end{pmatrix}$$

Parabolique :



$\mathbb{C}$

$|z| = 1$



$\{-1,-1\}$ $\{1,1\}$ $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\}$

Question : " Les v.p. d'une matrice dépendent continuement des coeffs de la matrice "

$R \in SL(2,\mathbb{R})$, $|Tr(R)| < 2$

Soit $M \in M(2,\mathbb{R})$ avec $\|M\| \ll 1$

si $\det(R+M) < 1$

Qu'en est-il des v.p de $R+M$??

• v.p. de $R_\gamma(T,0)$

$$\chi_{R_\gamma(T,0)}(X) = X^2 - \text{trace}(R_\gamma(T,0))X + \det(R_\gamma(T,0))$$

$$= X^2 - T_\gamma X + e^{-\gamma T}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-T_\gamma)^2 - 4 \cdot 1 \cdot e^{-\gamma T} = T_\gamma^2 - 4e^{-\gamma T}$$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{T_\gamma - \sqrt{T_\gamma^2 - 4e^{-\gamma T}}}{2} \quad \text{si } \Delta > 0$$

$$X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{T_\gamma + \sqrt{T_\gamma^2 - 4e^{-\gamma T}}}{2}$$

On a $|T_\gamma| < 2$ si $0 < \gamma \ll 1$ $\Rightarrow T_\gamma^2 < 4$

$\Rightarrow T_\gamma^2 - 4 < 0$

donc $\Delta < 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{|\Delta|}$

- $|T_\gamma| < 2$ car $0 < \gamma \ll 1$

$\Rightarrow \quad \Delta = T_\gamma^2 - 4e^{-\gamma T}$

$$\lambda_\pm = \frac{T_\gamma \pm i\sqrt{-T_\gamma^2 + 4e^{-\gamma T}}}{2}$$

On a $\quad \lim\limits_{\gamma \to 0} 4e^{-\gamma T} - T_\gamma^2 = 4 - T_0^2 > 0 \quad$ car $T_\gamma^2 < 4$

donc $\quad \forall\, 0 < \gamma \ll 1, \quad 4 - T_\gamma^2 > 0$

car $\gamma \mapsto T_\gamma$ est continue. car $\gamma \mapsto R_\gamma(T, 0)$ est continue

$$|\lambda_\pm| = \left| \frac{T_\gamma \pm i\sqrt{-T_\gamma^2 + 4e^{-\gamma T}}}{2} \right| = \left| \frac{1}{4}\left[\cancel{T_\gamma^2} + \left(\cancel{-T_\gamma^2} + 4e^{-\gamma T}\right)\right] \right|$$

$$= e^{-\gamma T} < 1$$

théorème de dépendance en fct. du paramètre

Conclusion : 0 est asymptotiquement stable.