Exo 1 :

1) Déterminer les solutions de l'équa diff scalaire

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 4x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

1ère méthode : Equation différentielle linéaire de 2nd ordre à coefficients constants homogène

Équation Caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$

d'après le cours, $x(t) = (at+b)e^{2t}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\dot{x}(t) = ae^{2t} + 2(at+b)e^{2t} = e^{2t}(2at + a + 2b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = be^0 = b = 0 \\ \dot{x}(0) = e^0(a+2b) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

Ainsi, $x(t) = te^{2t}$ $\quad \dot{x}(t) = e^{2t}(1+2t)$

$\ddot{x}(t) = e^{2t}(4+4t)$

$\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 4x(t) = e^{2t}(4+4t) - 4e^{2t}(1+2t) + 4te^{2t}$

$= e^{2t}(4+4t-4-8t+4t) = e^{2t} \times 0 = 0$

2^{eme} méthode : On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$

On a $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = A \cdot X(t)$

$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{trace}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

Spectre $(A) = \{2\}$. 2 est vp de multiplicité 2.

A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\dim(\text{Ker}(A - 2I)) = 2$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - 2I) \Leftrightarrow (A - 2I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\text{Ker}(A - 2I) = \text{vect}\{(1, 2)\}$

Ainsi $\dim(\text{Ker}(A - 2I)) = 1 \neq 2 \Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable

on note $v_1 = (1, 2)$ le $\vec{vp}$ associé à 2.

$A v_1 = 2 v_1$. on complète v_1 avec $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non colinéaire

Pour former une base de $\mathbb{R}^2$. (théorème de la base incomplète)

$A v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 v_1 + 2 v_2$

Ainsi, $A = PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} u = e_1 + 2e_2 \\ v = e_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = v \\ e_2 = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \end{cases}$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$$

$$\left.\begin{array}{l} DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ ND = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ D et N commutent}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N est nilpotente d'indice $p = 2$.

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tN)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(tN)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{1} \frac{(tN)^k}{k!} = I + tN$$

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{tPTP^{-1}} = Pe^{tT}P^{-1} = Pe^{t(D+N)}P^{-1}$$

$$= Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ 2e^{2t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}(1-2t) \\ 2e^{2t} & -4te^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t}(1-2t) & te^{2t} \\ -4e^{2t} & e^{2t}(1+2t) \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{tA} X(0) = \begin{pmatrix} e^{2t}(1-2t) & te^{2t} \\ -4e^{2t} & e^{2t}(1+2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t}(1+2t) \end{pmatrix}$$ Ainsi, $x(t) = te^{2t}$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer les solutions de l'équation différentielle scalaire.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 4x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} = A\,X(t) + B(t)$$

Variation de la constante :

$$X(t) = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)\,ds$$

On calcule : $$e^{(t-s)A} B(s) = \begin{pmatrix} e^{2(t-s)}(1 - 2(t-s)) & (t-s)e^{2(t-s)} \\ -4e^{2(t-s)} & e^{2(t-s)}(1 + 2(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(s)(t-s)e^{2(t-s)} \\ f(s)(1 + 2(t-s))e^{2(t-s)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)\,ds = \int_0^t \begin{pmatrix} f(s)(t-s)e^{2(t-s)} \\ f(s)(1 + 2(t-s))e^{2(t-s)} \end{pmatrix} ds$$

donc $$\begin{cases} x(t) = te^{2t} + \displaystyle\int_0^t f(s)(t-s)e^{2(t-s)}\,ds \\ x'(t) = e^{2t}(1+2t) + \displaystyle\int_0^t f(s)(1 + 2(t-s))e^{2(t-s)}\,ds \end{cases}$$

Exo 2 : $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + \dfrac{x(t)\, y(t)^2}{1+x(t)^2+y(t)^2} \\ y'(t) = -y(t) - \dfrac{x(t)^2\, y(t)}{1+x(t)^2+y(t)^2} \end{cases}$

1) démontrer que toute solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ est définie pour tout temps $t \in \mathbb{R}$.

- continue $\Rightarrow$ loc^t lip $\Rightarrow$ Cauchy-Lipschitz ?
- À croissance au plus affine. ?

2) démontrer que 0 est asymptotiquement stable quand $t \to +\infty$

c-à-d $\lim_{t \to +\infty} \max(|x(t)|, |y(t)|) = 0$

On calcule $\frac{d}{dt}\left[x(t)^2 + y(t)^2\right] = 2x'(t)\, x(t) + 2y'(t) \cdot y(t)$

$$= 2\left[-x(t) + \frac{x(t)\, y(t)^2}{1+x(t)^2+y(t)^2}\right] x(t) + 2\left[-y(t) - \frac{x(t)^2 y(t)}{1+x(t)^2+y(t)^2}\right] y(t)$$

$$= -2\left[x(t)^2 + y(t)^2\right] + (2-2) \cdot \frac{(x(t)\, y(t))^2}{1+x(t)^2+y(t)^2}$$

$$= -2\left[x(t)^2 + y(t)^2\right]$$

car $\frac{dx}{dt} = -2x \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -2dt$

$\Leftrightarrow d\ln(x) = -2dt$

$\Rightarrow x(t)^2 + y(t)^2 = C \cdot e^{-2t}$

$\Leftrightarrow \ln(x) = -2t + C_0$

$\Leftrightarrow x = e^{-2t} e^{C_0}$

$\Rightarrow x(t) = C \cdot e^{-2t}$

$$x(t)^2 = Ce^{-2t} - y(t)^2$$
$$y(t)^2 = Ce^{-2t} - x(t)^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x(t)^2 \leq Ce^{-2t} \\ y(t)^2 \leq Ce^{-2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x(t)| \leq \sqrt{C}\, e^{-t} \\ |y(t)| \leq \sqrt{C}\, e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \max\left(|x(t)|, |y(t)|\right) \leq \sqrt{C}\, e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Exo 3 :

1-a) On suppose que $a>0$ et $b\geq 0$ sont des réels et que $M:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et vérifie

$$\begin{cases} \forall t\geq 0, \quad M'(t) \leq a.M(t) + b \\ M(0) = 0. \end{cases}$$

Montrons que, $\forall t\geq 0$, $M(t) \leq b\,\dfrac{e^{at}-1}{a}$ et $M'(t) \leq b.e^{at}$

On dérive : $\frac{d}{dt}\left[e^{-at}M(t)\right] = -ae^{-at}M(t) + e^{-at}M'(t)$

$$= e^{-at}\left(M'(t) - aM(t)\right)$$

$$\leq e^{-at}\left(aM(t) + b - aM(t)\right)$$

$$\leq be^{-at}$$

$$\Rightarrow e^{-at}M(t) \leq \int_0^t be^{-at} = \left[-\frac{b}{a}e^{-at}\right]_0^t = \frac{b(1-e^{-at})}{a}$$

$$\Rightarrow M(t) \leq \frac{b\cdot e^{at}(1-e^{-at})}{a} = \frac{b}{a}(e^{at}-1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[M(t)\right] \leq \frac{d}{dt}\left[\frac{b}{a}(e^{at}-1)\right]$$

$$\Rightarrow M'(t) \leq be^{at}$$

1-b) En déduire que si $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifie

$\forall t \geq 0, \quad m(t) \leq a \int_0^t m(s)\,ds + b$ on a $\forall t \geq 0, \; m(t) \leq b e^{at}$

Lemme de Gronwall. $\forall t \in [0, \cancel{T}]$

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(s) \cdot v(s)\,ds \Rightarrow u(t) \leq C \cdot \exp\left(\int_0^t v(s)\,ds\right)$$

<u>pour</u> $u(t) = m(t)$, $v(s) = a$, $C = b$

<u>On a</u> $m(t) \leq b + \int_0^t m(s) \cdot a\,ds \Rightarrow m(t) \leq b \cdot \exp\left(\int_0^t a\,ds\right)$

$$\Rightarrow m(t) \leq b \cdot e^{at}$$

//

Notons $M(t) = a \int_0^t m(s)\,ds \Rightarrow M'(t) = a \cdot m(t)$

$$\Rightarrow M'(t) \leq a\left(a \int_0^t m(s)\,ds + b\right)$$

$$\Rightarrow M'(t) \leq a M(t) + ab$$

$$\Rightarrow M'(t) - a M(t) \leq a \cdot b$$

$$\Rightarrow \left(M'(t) - a M(t)\right) e^{-at} \leq ab e^{-at}$$

$$\Rightarrow M'(t) e^{-at} - a e^{-at} M(t) \leq a \cdot b e^{-at}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[M(t) \cdot e^{-at}\right] \leq \frac{d}{dt}\left[-b e^{-at}\right]$$

En intégrant de 0 à t $\Rightarrow M(t) e^{-at} \leq -b e^{-at} + b$

$$M(t)\, e^{-at} \leq b - b e^{-at}$$

$$\Rightarrow \quad M(t) \leq b e^{at} - b$$

Ona $\forall t \geq 0, \quad m(t) \leq a \cdot \int_0^t m(s)\, ds + b$

$\forall t \geq 0, \quad m(t) \leq M(t) + b \leq b e^{at} - b + b$

$\forall t \geq 0, \quad m(t) \leq b e^{at}$

1)-c) On suppose que $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est solution de

$$Y'(t) = A(t)\, Y(t) + g(t)$$

où $A \in C^0(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}))$, $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

Montrons que $\sup\limits_{t\in[0,1]} \|Y(t)\| \leq e^{\sup\limits_{t\in[0,1]}\|A(t)\|} \left(\|Y(0)\| + \sup\limits_{t\in[0,1]}\|g(t)\|\right)$

Si $M \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \|M\| = \sup\limits_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \dfrac{\|Mv\|}{\|v\|} = \sup\limits_{v\leq 1} \dfrac{\|Mv\|}{\|v\|}$

$$\|M\| = \sup_{\|v\|=1} \frac{\|M.v\|}{\|v\|}$$

On a d'après le cours :

$$Y(t) = R_A(t,0)\, Y(0) + \int_0^t R_A(t,s)\, g(s)\, ds$$

$$= e^{tA(t)}\, Y(0) + \int_0^t e^{(t-s)A(t)}\, g(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \|Y(t)\| \leq \|e^{tA(t)}\| . \|Y(0)\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A(t)}\|\, \|g(s)\|\, ds$$

$$\Rightarrow \|Y(t)\| \leq \|e^{tA(t)}\|\, \|Y(0)\| + t . \|e^{(t-s)A(t)}\| . \|g(s)\|$$

$$\Rightarrow \sup_{t\in[0,1]} \|Y(t)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|e^{tA(t)}\| \, \|Y(0)\| + \sup_{t\in[0,1]} \|e^{(t-s)A(t)}\| . \|g(t)\|$$

On a
$$\begin{cases} \bullet \ \sup\limits_{t\in[0,1]} \|tA(t)\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} \|A(t)\| \\ \bullet \ \sup\limits_{t\in[0,1]} \|(t-s)A(t)\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} \|(1-s)A(t)\| \leq \sup\limits_{t\in[0,1]} \|A(t)\| \end{cases}$$

On a donc :

$$\sup_{t\in[0,1]}\|Y(t)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|e^{A(t)}\| \left[\|Y(0)\| + \sup_{t\in[0,1]} \|g(t)\| \right]$$

$$\sup_{t\in[0,1]}\|Y(t)\| \leq e^{\sup\limits_{t\in[0,1]} \|A(t)\|} \left[\|Y(0)\| + \sup_{t\in[0,1]} \|g(t)\| \right]$$

Exo 4 : Soit $a : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\begin{cases} (i) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad a(t+1,x) = a(t,x) \\ (ii) \quad h := \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial a}{\partial x}(t,x) \right| < 1/2 \end{cases}$$

On définit E l'espace des fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^0 qui sont 1-périodiques i.e $\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t+1) = x(t)$

Et on muni E de la norme du sup. $\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$

1) Montrons que $(E, \|\cdot\|) = \left(C^0_{1\text{-périodique}}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ est un espace de Banach.

$$d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t) - y(t)|$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite Cauchy de E.

On a : $\lim_{p,q\to+\infty} d_\infty(x_p, x_q) = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \; p \geq N$ et $q \geq N \Rightarrow d_\infty(x_p, x_q) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} |x_p(t) - x_q(t)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \; |x_p(t) - x_q(t)| < \varepsilon$

Ainsi, $(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de Cauchy.

Puisque $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace complet,

$(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x(t) \in \mathbb{R}$

On définit ainsi une fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

telle que : $\lim_{n\to+\infty} x_n(t) = x(t) \iff \forall \varepsilon>0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \ |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$

• Soit $\varepsilon > 0$, puisque (x_n) est de Cauchy.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall p,q \geq n_0 \rightarrow \|x_p - x_q\|_\infty < \varepsilon$

On déduit que $\forall t \in \mathbb{R} \ |x_p(t) - x_q(t)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |x_p(t) - x_q(t)| < \varepsilon$

En faisant $q \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$\forall t \in \mathbb{R} \ |x_p(t) - x(t)| \leq \|x_p - x\|_\infty < \varepsilon$

Ce qui signifie que $\forall n \geq n_0$, $\|x_n - x\|_\infty < \varepsilon$

Donc (x_n) converge uniformément vers x sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, f est continue comme limite uniforme de fonctions continues.

• Montrons que x est 1-périodique.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad x_n(t+1) = x_n(t)$

On donc $\begin{cases} x_n(t+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x(t+1) \in \mathbb{R} \\ x_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x(t) \in \mathbb{R} \end{cases}$

Car $(x_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numerique réelle de Cauchy sur $\mathbb{R}$ qui est un espace complet donc convergente dans $\mathbb{R}$.

Or $\mathbb{R}$ est séparée car pour deux réels x et y tq $x \neq y$ Il existe des intervalles disjoints qui contiennent respectivement x et y.

Donc $x_n(t+1)$ et $x_n(t)$ admettent des limites uniques

Or $\forall t \in \mathbb{R} \quad x_n(t+1) = x_n(t)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} x_n(t+1) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n(t) \iff x(t+1) = x(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$

Ainsi, x est 1-periodique

Finalement, $x \in E$. Donc toute suite de Cauchy est convergente dans E c-à-d $(E, \|\cdot\|)$ est un espace complet (Banach)

2-a) On suppose que $f \in E$. Montrons que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\int_t^{t+1} f(s)\,ds = \int_0^1 f(s)\,ds.$$

Relation de Chasles :

$$\int_t^{t+1} f(s)\,ds = \int_t^0 f(s)\,ds + \int_0^1 f(s)\,ds + \int_1^{t+1} f(s)\,ds$$

On effectue un changement de variable pour la dernière intégrale

$$\begin{cases} s = u+1 \\ ds = du \end{cases} \qquad \begin{matrix} s = 1 \Rightarrow u = 0 \\ s = t+1 \Rightarrow u = t \end{matrix}$$

donc $$\int_1^{t+1} f(s)\,ds = \int_0^t f(u+1)\,du = \int_0^t f(u)\,du = -\int_t^0 f(s)\,ds$$

car $f \in E$
donc 1-périodique

donc $$\int_t^{t+1} f(s)\,ds = \int_t^0 f(s)\,ds + \int_0^1 f(s)\,ds - \int_t^0 f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \int_t^{t+1} f(s)\,ds = \int_0^1 f(s)\,ds.$$

2-b) On note Φ l'application qui à une fonction $x(\cdot)$ de E associe la fonction $y = \Phi(x)$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi(x)(t) = y(t) = \int_0^t a(s, x(s))\, ds - \left(\int_0^1 a(s, x(s))\, ds\right) t$$

Montrons que $\Phi : E \longrightarrow E$

Soit $x \in E = \mathcal{C}^0_{1\text{-périodique}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On a $\begin{cases} a(t+1, x) = a(t, x) & \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \\ x(t+1) = x(t) & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$

donc $a(t+1, x(t+1)) = a(t, x(t))$

$\Rightarrow a(t, x(t))$ est 1-périodique.

Montrons que $\Phi(x)(t) = y(t)$ est 1-périodique.

$$\Phi(x)(t+1) = y(t+1) = \int_0^{t+1} a(s, x(s))\, ds - \left(\int_0^1 a(s, x(s))\, ds\right)(t+1)$$

$$= \int_0^t a(s, x(s))\, ds + \int_t^{t+1} a(s, x(s))\, ds - \int_0^1 a(s, x(s))\, ds - t \cdot \int_0^1 a(s, x(s))\, ds$$

d'après 2-a) $\displaystyle\int_t^{t+1} a(s, x(s))\, ds = \int_0^1 a(s, x(s))\, ds$

Ainsi, $\displaystyle\Phi(x)(t+1) = y(t+1) = \int_0^t a(s, x(s))\, ds - \left(\int_0^1 a(s, x(s))\, ds\right) t$

$= \Phi(x)(t) = y(t)$

Donc $\Phi(x)$ est 1-périodique

De plus, $\Phi(x)$ est l'intégrale d'une fonction de classe C^1 donc $\Phi(x)$ est continue

Ainsi, $\Phi : E \longrightarrow E$

$x \longmapsto \Phi(x)$

3) Démontrer que Φ admet un unique point fixe dans E.

Montrons que Φ est contractante. Soit $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in E$

$$\Phi(y_1(\cdot)) - \Phi(y_2(\cdot)) = \int_0^t a(s, y_1(s))ds - a(s, y_2(s))ds$$
$$- \left(\int_0^1 a(s, y_1(s))\,ds - a(s, y_2(s))ds\right).t$$

$$\Rightarrow d_\infty\left(\Phi(y_1(\cdot)), \Phi(y_2(\cdot))\right) = \| \Phi(y_1(\cdot)) - \Phi(y_2(\cdot)) \|_\infty$$

$$\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^t \left| a(s, y_1(s)) - a(s, y_2(s)) \right| ds + \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left| a(s, y_1(s)) - a(s, y_2(s)) \right| ds \right) t$$

Or a est C^1 donc lipschitzienne, d'après le T.A.F

$$\left| a(s, y_1(s)) - a(s, y_2(s)) \right| \leq K . \left| y_1(s) - y_2(s) \right|$$

où $K = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial a}{\partial x}(t, x) \right| < 1/2$

Ainsi

$$d_\infty\left(\Phi(y_1(\cdot)),\ \Phi(y_2(\cdot))\right) \leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t K|y_1(s)-y_2(s)| + \sup_{t\in[0,1]} t \cdot \int_0^1 K|y_1(s)-y_2(s)|ds$$

$\sup_{t\in[0,1]}$ car a est 1-périodique.

$$\Rightarrow d_\infty\left(\Phi(y_1(\cdot)),\ \Phi(y_2(\cdot))\right) \leq 2K\,|y_1(s)-y_2(s)|$$

Or $K < 1/2 \Rightarrow 2K < 1$

Ainsi $d_\infty\left(\Phi(y_1(\cdot)),\ \Phi(y_2(\cdot))\right) \leq 2K\ d(y_1(\cdot),\ y_2(\cdot))$

donc Φ est contractante et $\Phi : E \to E$ d'après 2-b)

$(E, \|\ \|)$ est un Banach

d'après le théorème du point fixe de Picard

Φ admet un unique point fixe

$\Phi(x) = x \iff \Phi(x)(t) = x(t)$

$$\iff x(t) = \int_0^t a(s, x(s))ds - \left(\int_0^1 a(s, x(s))ds\right).t$$

4) Démontrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que l'EDO.
$x'(t) = a(t, x(t)) - m$ admet une solution 1-periodique

On derive l'expression:

$$x(t) = \int_0^t a(s, x(s))ds - \left(\int_0^1 a(s, x(s))ds\right) t$$

$$\frac{d\,x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^t a(s, x(s))ds - \frac{d}{dt}.t\left(\int_0^1 a(s, x(s))ds\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[A(t, x(t)) - A(0, x(0))\right] - \int_0^1 a(s, x(s))ds$$

où A est une primitive de a.
Et. $A(0, x(0))$ est constante par rapport à t.

donc $\frac{d\,x(t)}{dt} = a(t, x(t)) + \int_0^1 a(s, x(s))ds$

En notant $m = \int_0^1 a(s, x(s))ds$, $m \in \mathbb{R}$

On a $x'(t) = a(t, x(t)) - m$

Et $x'(t+1) = a(t+1, x(t+1)) - m$

$$= a(t, x(t)) - m$$

$$= x'(t)$$

Donc, l'EDO $x'(t) = a(t, x(t)) - m$ admet une solution 1-périodique

5) Démontrer qu'il existe une application $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto m(\lambda)$ continue telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'E.D.O.

$$x'(t) = \cos(2\pi t) + \ln\left(1+\lambda^2+\frac{x(t)^2}{9}\right) - m(\lambda)$$

admet une solution 1-périodique.

$$x'(t) = a_\lambda(t, x(t)) - m(\lambda)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $a_\lambda(t, x(t)) = \cos(2\pi t) + \ln\left(1+\lambda^2 \frac{x(t)^2}{9}\right)$

i) $$a_\lambda(t+1, x(t)) = \cos(2\pi(t+1)) + \ln\left(1+\lambda^2+\frac{x(t+1)^2}{9}\right)$$

$$= \cos(2\pi t + 2\pi) + \ln\left(1+\lambda^2+\frac{x(t)^2}{9}\right)$$ car $x \in E$ donc 1-périodique

$$= \cos(2\pi t) + \ln\left(1+\lambda^2+\frac{x(t)^2}{9}\right)$$ car cosinus est 2π-périodique

$$= a_\lambda(t, x(t))$$

ii) $$\frac{d}{dx}\left[a_\lambda(t,x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\cos(2\pi t) + \ln\left(1+\lambda^2+\frac{x(t)^2}{9}\right)\right]$$

$$= \frac{\frac{2}{9}x'(t)\,x(t)}{1+\lambda^2+\frac{x(t)^2}{9}}$$

$$= \frac{2\,x'(t)\,x(t)}{9+9\lambda^2+x(t)^2}$$

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial}{\partial x}a_\lambda(t,x)\right| = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{2\,x'(t)\,x(t)}{9+9\lambda^2+x(t)^2}\right|$$

On a $x(t) = \int_0^t a_\lambda(s, x(s))\,ds - \left(\int_0^1 a_\lambda(s, x(s))\,ds\right) t$

$$x'(t) = a_\lambda(t, x(t)) - \int_0^1 a_\lambda(s, x(s))\,ds$$

On définit ainsi une fonction continue comme intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction de classe C^1.

$$m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\lambda \longmapsto m(\lambda) = \int_0^1 a_\lambda(s, x(s))\,ds$$

$$\int_0^1 a_\lambda(s, x(s))\,ds = \int_0^1 \left(\cos(2\pi t) + \ln\left(1 + \lambda^2 + \frac{x(t)^2}{9}\right)\right) dt$$

$$= \int_0^1 \cos(2\pi t)\,dt + \int_0^1 \ln\left(1 + \lambda^2 + \frac{x(t)^2}{9}\right) dt$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1}_{\frac{1}{2\pi}\left[\sin(2\pi) - \sin(0)\right] = 0} + \int_0^1 \ln\left(1 + \lambda^2 + \frac{x(t)^2}{9}\right) dt$$

Ainsi $m(\lambda) = \int_0^1 \ln\left(1 + \lambda^2 + \frac{x(t)^2}{9}\right) dt$