Exercice 7 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Posons $Y_i = X_i - X_1$ pour $i = 2, 3, \dots, n$.

1) Montrer que $\overline{X}$ est indépendante de $(Y_2, \dots, Y_n)$

$\overline{X}$ est une var. alea gaussienne car combinaison linéaire de v.a. iid de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} X_1 + \dots + \frac{1}{n} X_n$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \right\rangle = \langle a, X \rangle \quad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \\ a = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] \quad \text{par linéarité}$$

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \frac{n \cdot \mathbb{E}[X_1]}{n} \quad \text{car les } X_i \text{ suivent la même loi } (\text{i.e. } X_i \text{ iid} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2))$$

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mathbb{E}[X_1] = m$$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

(car la variance est quadratique et les X_i sont indépendants)

$$= \frac{n \cdot \mathrm{Var}(X_1)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ainsi, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$

De même $Y = \begin{pmatrix} Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ X_3 - X_1 \\ \vdots \\ X_n - X_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_{(n-1)\times n}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{X \in \mathbb{R}^n}$$

Y est un vecteur gaussien

comme transformation affine $\qquad A \cdot X \in \mathbb{R}^{n-1}$

d'un vecteur gaussien

$Y = AX$, $Y \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(Y), Var(Y)) = \mathcal{N}(A \cdot \mathbb{E}(X), A \cdot \Gamma_X A^t)$

Donc Montrer que $\begin{cases} \bar{X} = \frac{1}{n} X_1 + \dots + \frac{1}{n} X_n \\ Y = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ \vdots \\ X_n - X_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ sont indépendants

On doit montrer que $\begin{cases} \bar{X} \text{ est indépendant de } X_2 - X_1 \\ \vdots \\ \bar{X} \text{ est indépendant de } X_n - X_1 \end{cases}$

c-à-d $\begin{cases} cov(\overline{X}, X_2 - X_1) = 0 \\ \vdots \\ cov(\overline{X}, X_n - X_1) = 0 \end{cases}$

c-à-d $\forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$, $cov(\overline{X}, X_i - X_1) = 0$

c-à-d $cov(\overline{X}, Y) = 0$ car vect. gaussiens

Pour $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ on a :

$$cov(\overline{X}, Y_i) = cov(\overline{X}, X_i - X_1)$$
$$= cov(\overline{X}, X_i) - cov(\overline{X}, X_1)$$
$$= cov\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, X_i\right) - cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, X_1\right)$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} cov(X_j, X_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cov(X_i, X_1)$$

or puisque les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont independants et de loi $\mathcal{N}(m, \sigma$

On a $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $cov(X_j, X_i) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ \sigma^2 & si\ i = j \end{cases}$

Ainsi $cov(\overline{X}, Y_i) = \frac{1}{n} \cdot cov(X_i, X_i) - \frac{1}{n} cov(X_1, X_1)$
$$= \frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = 0$$

donc $\quad \mathrm{cov}(\bar{X}, Y) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathrm{cov}(X_j, X_i)}_{= \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq i \\ \sigma^2 = Var(X_i) \text{ si } i=j \end{cases}} - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{cov}(X_i, X_1)}_{= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq 1 \\ \sigma^2 \text{ si } i=1 \end{cases}} \right]$

$\Rightarrow \mathrm{cov}(\bar{X}, Y) = \frac{1}{n}\left(Var(X_i) - Var(X_1)\right)$

puisque les X_i sont identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

on a $\quad Var(X_i) = Var(X_1) = \sigma^2$

Ainsi $\quad \mathrm{cov}(\bar{X}, Y) = 0$

finalement, $\quad \bar{X}$ et $Y = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ \vdots \\ X_n - X_1 \end{pmatrix}$ sont indépendants.

$\Rightarrow Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendants de $\bar{X}$

2) Montrer que $\tilde{S}^2$ s'exprime en fonction des Y_i.

$$\tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2$$ où S^2 est la variance empirique

$$\tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \Big(\overbrace{X_i - X_1}^{Y_i} + (X_1 - \overline{X})\Big)^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

$$= \frac{1}{n-1} Y_1^2 + \frac{1}{n-1} Y_2^2 + \dots + \frac{1}{n-1} Y_n^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(Y_1^2 + \dots + Y_n^2 \right) = \frac{1}{n-1} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(\langle Y, Y \rangle \right)$$

donc $\tilde{S}^2 = f(Y)$ où $f(x) = \frac{1}{n-1} \langle x, x \rangle$

qui est une forme linéaire continue donc borélienne

donc $\tilde{S}^2$ est $\sigma(Y)$-mesurable

3) Montrer que $\tilde{S}^2$ et $\overline{X}$ sont indépendantes

$\Longrightarrow$ $\tilde{S}^2$ est indépendante de $\overline{X}$.

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - X_1 + (X_1 - \overline{X})\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - (X_1 - \overline{X})\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\left(Y_1 - (X_1 - \overline{X})\right)^2 + \dots + \left(Y_n - (X_1 - \overline{X})\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\langle \begin{pmatrix} Y_1 - (X_1 - \overline{X}) \\ \vdots \\ Y_n - (X_1 - \overline{X}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 - (X_1 - \overline{X}) \\ \vdots \\ Y_n - (X_1 - \overline{X}) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{n-1} \langle Y - (X_1 - \overline{X}), Y - (X_1 - \overline{X}) \rangle$$

$$= \frac{1}{n-1} \langle Y, Y - (X_1 - \overline{X}) \rangle - \langle X_1 - \overline{X}, Y - (X_1 - \overline{X}) \rangle$$

$$= \frac{1}{n-1} \langle Y, Y \rangle - \langle Y, X_1 - \overline{X} \rangle - \langle X_1 - \overline{X}, Y \rangle + \langle X_1 - \overline{X}, X_1 - \overline{X} \rangle$$

$$= \frac{1}{n-1} \langle Y, Y \rangle - 2\langle Y, X_1 - \overline{X} \rangle + \langle X_1 - \overline{X}, X_1 - \overline{X} \rangle$$

Puisque le produit scalaire est une forme bilinéaire continue (on utilise l'inegalité de Cauchy-Schwarz pour le demontrer $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$)

Ainsi, $\tilde{S}^2 = f(Y)$ où $f(x) = \frac{1}{n-1} \left[\langle x, x \rangle - 2\langle x, X_1 - \overline{X} \rangle + \|X_1 - \overline{X}\|^2 \right]$

$\Rightarrow$ $\tilde{S}^2$ est $\sigma(Y)$-mesurable. $\Rightarrow$ $\tilde{S}^2$ et $\overline{X}$ sont indépendantes