<u>Exercice 6</u> : Soient $X, Y, Z$ trois v.a indépendants $\rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

a) Quelle est la loi de $U = X + Y + Z$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_U(t) = \mathbb{E}\left[e^{itU}\right] = \mathbb{E}\left[e^{it(X+Y+Z)}\right]$

$\varphi_U(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX} \cdot e^{itY} e^{itZ}\right) = \mathbb{E}(e^{itX})\, \mathbb{E}(e^{itY})\, \mathbb{E}(e^{itZ})$ par indépendance

$= \left(\varphi_Z(t)\right)^3$ ou $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$= \left(e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)^3$

$= e^{-\frac{3}{2}t^2}$

<u>Or</u> si $W \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \varphi_W(t) = e^{\mu i t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

<u>donc</u> par identification $\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma^2 = 3 \end{cases}$

<u>Ainsi</u> $U \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 3)$

<u>Si</u> $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ indépendantes

$\Rightarrow X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

b) Montrer que $\begin{cases} U = X+Y+Z \\ V = \begin{pmatrix} X-Y \\ Y-Z \\ Z-X \end{pmatrix} \end{cases}$ sont indépendantes

<u>Rappel</u> : Si $(X, Y, Z)$ est un vect. gaussien, montrer que

$X$ est indépendant de $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \iff cov(X, Y) = cov(X, Z) = 0$

$\iff \begin{cases} X \text{ indépendant de } Y. \\ \quad \text{et} \\ X \text{ indépendant de } Z. \end{cases}$

Pour montrer que $U$ et $V$ sont indépendants

On doit montrer que :

$\begin{cases} U \text{ est indépendante de } X-Y \\ U \text{ est indépendante de } Y-Z \\ U \text{ est indépendante de } Z-X \end{cases}$

$\iff \begin{cases} cov(U, X-Y) = 0 \\ cov(U, Y-Z) = 0 \\ cov(U, Z-X) = 0 \end{cases}$

On peut le faire de 3 manières différentes.

1ère méthode :

On calcule directement les covariances :

$$\mathrm{cov}(U, X-Y) = \mathrm{cov}(X+Y+Z, X-Y)$$

$$= \mathrm{cov}(X, X-Y) + \mathrm{cov}(Y, X-Y) + \mathrm{cov}(Z, X-Y)$$

$$= \mathrm{cov}(X,X) - \cancel{\mathrm{cov}(X,Y)} + \cancel{\mathrm{cov}(Y,X)} - \mathrm{cov}(Y,Y) + \mathrm{cov}(Z,X) - \mathrm{cov}(Z,Y)$$

$$= \mathrm{var}(X) - \mathrm{var}(Y) + \mathrm{cov}(Z,X) - \mathrm{cov}(Z,Y)$$ (car cov est symétrique)

$$= 1 - 1 + 0 - 0$$ car $X, Y, Z$ indépendantes et $\sim N(0,1)$

$$= 0$$

De même $\mathrm{cov}(U, X-Z) = \mathrm{cov}(U, Y-Z) = 0$

On obtient ainsi l'indépendance entre $U$ et $V$.

## $2^{\text{ème}}$ méthode :

Considérons le vecteur $T = \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-Y \\ X-Z \\ Y-Z \\ X+Y+Z \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = AX$$

$T$ est un vecteur gaussien comme transformation linéaire de $X$

$$T \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(T), \Gamma_T) = \mathcal{N}(0, A \cdot A^t)$$

où $\begin{cases} \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(AX) = A \cdot \mathbb{E}(X) = 0 \\ \Gamma_T = A \cdot \Gamma_X A^t = A I_3 A^t = AA^t \end{cases}$

On calcul $\quad A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Les covariances nulles $\Rightarrow$ indépendance du sous-vecteur $V = \begin{pmatrix} X-Y \\ X-Z \\ Y-Z \end{pmatrix}$ et de la variable $U = (X+Y+Z)$

## $3^{ème}$ méthode :

Considérons le vecteur $T' = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+Y+Z \\ X-Y \\ Y-Z \\ Z-X \end{pmatrix}$

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \cdot X \quad \text{où } X \sim \mathcal{N}(0, I_3)$$

Ainsi $T'$ est un vect. gaussien comme transformation linéaire du vect. gaussien $X$.

$$T' \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(A \cdot \mathbb{E}(X) . \, A \cdot \Gamma_X A^t\right) = \mathcal{N}(0, AA^t)$$

On calcule : $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $\text{cov}(U, X-Y) = \text{cov}(U, Y-Z) = \text{cov}(U, Z-X) = 0$

c-à-d $U$ et $V$ sont indépendants

c) Notons $W = (X-Y)^2 + (Y-Z)^2 + (Z-X)^2$

Trouver la fonction caractéristique de $(U, W)$

C-1) Ecrire $W = \langle \Gamma V_0, V_0 \rangle$ où $V_0 \sim$ Gauss

On a $W = (X-Y)^2 + (Y-Z)^2 + (Z-X)^2$

$$= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

$$= \sum_{i=1}^{3} A_i^2 \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-Y \\ Y-Z \\ Z-X \end{pmatrix} = V$$

$$= \langle A, A \rangle$$

$$= \langle V, V \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} X-Y \\ Y-Z \\ Z-X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X-Y \\ Y-Z \\ Z-X \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right\rangle$$

On note $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $W = \left\langle B \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= \left\langle B^t \cdot B \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right\rangle$$

En notant $\Gamma = B^t \cdot B$ et $V_0 = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim N(0, I_3)$

On a bien $W = \langle \Gamma V_0, V_0 \rangle$

2) Diagonaliser $\Gamma$ et montrer qu'il existe une constante $c$ telle que $\frac{W}{c} \sim \chi^2(2)$

<u>On a</u> : $\Gamma = B^t . B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad\Gamma$ est symétrique donc diagonalisable.

Polynôme caractéristique

$$\chi(\lambda) = \det(\Gamma - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) + (\lambda - 2 - 1) - \left(1 - (\lambda - 2)\right)$$

$$= 2(2-\lambda)^2 - 2 - \lambda(2-\lambda)^2 + \lambda + \lambda - 3 + \lambda - 3$$

$$= 2(4 - 4\lambda + \lambda^2) - 2 - \lambda(4 - 4\lambda + \lambda^2) + 3\lambda - 6$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + (-9\lambda) + 8 - 8$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = -\lambda(\lambda - 3)^2$$

$\Rightarrow$ Spectre $(\Gamma) = \{0, 3\}$

- $0$ val. propre de multiplicité $1$.
- $3$ val. propre de multiplicité $2$.

$\Gamma$ est diagonalisable $\iff \dim(\ker(A-3I)) = 2$

$\iff rg(A-3I) = 1$

théorème du rang

On a $A-3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow rg(A-3I) = 1 \Rightarrow A$ est diagonalisable.

$\vec{v}p$ associé à la v.p. $\lambda_1 = 0$ : $AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \\ 2z = x + y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y = y - x \\ 2y - 2z = z - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_0(A) = \ker(\Gamma) = \text{vect}\{v_1 = (1,1,1)\}$

$\overrightarrow{vp}$ associé à la val. propre $\lambda_2 = 3$ : $AX = 3X \Leftrightarrow (A - 3I)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y - z$$

$\Leftrightarrow$ Ainsi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $E_3(\Gamma) = \ker(A - 3I) = \text{vect}\{ v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-1, 0, 1) \}$

de dim 2 ✓

Ainsi $\cancel{A =}$ $\Gamma = PDP^{-1}$ où $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On orthonormalise $(v_1, v_2, v_3)$

$\langle v_2 ; v_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$

$\langle v_3 , v_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$

$\langle v_3 , v_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle 1$

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_{p+1} = v_{p+1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\langle v_{p+1}, u_i \rangle}{\| u_i \|^2} u_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = (1, 1, 1) \\ u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\| u_1 \|^2} . u_1 = (-1, 1, 0) \\ u_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\| u_1 \|^2} . u_1 - \dfrac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\| u_2 \|^2} . u_2 = (-1, 0, 1) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0) \\ \qquad = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

$u_1 = (1,1,1) \quad u_2 = (-1,1,0) \quad u_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right)$

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ \tilde{u}_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \\ \tilde{u}_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

$$\|u_3\|^2 = \langle u_3, u_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ainsi $\quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = Q^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$

Et $\Gamma = Q \cdot D \cdot Q^{-1} = Q D Q^t$

Ainsi $W = \langle \Gamma V_0, V_0 \rangle = \langle Q D Q^t V_0, V_0 \rangle$

$$= \langle Q \sqrt{D} \cdot \sqrt{D} \cdot Q^t V_0, V_0 \rangle$$

$$= \langle \sqrt{D} \cdot Q^t V_0, (Q\sqrt{D})^t \cdot V_0 \rangle$$

$$= \langle \sqrt{D} Q^t V_0, \sqrt{D} Q^t V_0 \rangle \qquad \text{pour } C = \sqrt{D} \cdot Q^t \cdot V_0$$

$$= \langle C, C \rangle$$

On a $W = \langle C, C \rangle = \|C\|^2$

$\longrightarrow W \sim \chi^2(2)$

Par définition de la loi du Khi-deux :

Si $Y_1, \dots, Y_n$ iid $\rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ c-à-d $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{N}_d(0, I_d)$

alors $\|Y\|^2 = \langle Y, Y \rangle = Y_1^2 + \dots + Y_n^2 \rightsquigarrow \chi^2_{(n)}$

Donc pour montrer qu'une v.a. $Z$ suit la loi du Khi-deux

Il faut montrer que $Z = \langle u, u \rangle$

c-à-d $Z = \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle$

$= u_1^2 + \dots + u_n^2$

où $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $u_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

c-à-d $u_1, \dots, u_n$ iid $\rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

On dit alors que $Z$ suit la loi du Khi-deux à $n$ degrés de liberté.