$t - mT = t - \left[\frac{t}{T}\right] \cdot T \in [0, T]$.

$\begin{cases} \cdot\ [0, T] \text{ est un compact de } \mathbb{R} \text{ car fermé et borné} \\ \cdot\ \text{l'application } s \mapsto R_E(s, 0) \text{ est continue} \end{cases}$

donc elle est bornée et elle atteint ses bornes dans $[0, T]$

Notons $M = \max\limits_{s \in [0,T]} (\|R_E(s, 0)\|)$ qui est fini.

On a $\|X(t)\| \leq \|R_E(t - mT, 0)\| \cdot \|R_E(T, 0)^m \cdot v\| \leq M \cdot C < +\infty$

Ainsi, $X(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ est bornée et non nulle

6) En déduire que l'équation admet une solution bornée non triviale

ssi $|Tr(R_E(T,0))| \leq 2$.

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $R_E(T,0)$.

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = det(R_E(T,0)) = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = tr(R_E(T,0)). \end{cases}$$

Montrons qu'il y a une solution bornée non triviale

$\Leftrightarrow$ $|trace(R_E(T,0))| = |Re(\lambda_1) + Re(\lambda_2)| \leq 2$.

On considère tous les cas possibles pour λ_1 et λ_2:

(i) - λ_1 et λ_2 sont des réels distincts :

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda_1 \neq \pm 1$$

$|2 + \frac{1}{2}| > 2$

donc $|tr(R_E(T,0))| > 2$

. La matrice $R_E(T,0)$ est alors diagonalisable

$$R_E(T,0) = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad R_E(T,0)^m = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-m} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Dans ce cas, pour tout $v \neq 0$

$$R_E(T,0)^m \cdot v \xrightarrow[m \to \pm\infty]{} \pm\infty$$

Il n'y a donc pas de solutions bornées sur $\mathbb{R}$.

(ii) - $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ donc $|tr(R_E(T,0))| = 2$

Dans ce cas $\forall v \neq 0$ $R_E(T,0)^n v = (\lambda_1)^n \cdot v = \pm v \leq \|v\|$.

Ce qui est bornée.

(iii) - λ_1 et λ_2 sont complexes conjugués et différents,

$$\begin{cases} \lambda_1 = e^{i\theta} \\ \lambda_2 = e^{-i\theta} \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^0 = 1 = \det(R_E(T,0))$$

avec $\theta \neq 0 \, [\pi]$ $\quad \theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

donc $|tr(R_E(t,0))| \leqslant 2$

La matrice $R_E(T,0)$ est semblable à une matrice de rotation d'angle θ.

$$R_E(t,0) = Q \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad Q \in GL_2(\mathbb{R})$$

Et ses puissances itérées s'écrivent alors

$$R_E(t,0)^n = Q \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

7) Montrer que $\mathrm{tr}(R_E(T,0)) \xrightarrow[E \to -\infty]{} +\infty$

On utilise l'expression de la resolvante sous forme de série normalement convergente.

$$R_E(T,0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{0 \le s_k \le \cdots \le s_1 \le T} A(s_1) \cdots A(s_k)\, ds_k \cdots ds_1$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}(R_E(T,0)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{0 \le s_k \le \cdots \le s_1 \le T} \mathrm{tr}\left(A(s_1) \cdots A(s_k)\right) ds_k \cdots ds_1$$

par linéarité de la trace.

Posons $\alpha_E(t) = V(t) - E \Rightarrow A_E(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_E(t) & 0 \end{pmatrix}$

$$A_E(s_1) \cdot A_E(s_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_E(s_1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_E(s_2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_E(s_2) & 0 \\ 0 & \alpha_E(s_1) \end{pmatrix}$$

$$A_E(s_1) \cdot A_E(s_2) \cdot A_E(s_3) = \begin{pmatrix} \alpha_E(s_2) & 0 \\ 0 & \alpha_E(s_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_E(s_3) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_E(s_2) \\ \alpha_E(s_1)\alpha_E(s_3) & 0 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$$A_E(s_1) \cdots A_E(s_{2p}) = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{p} \alpha_E(s_{2i}) & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^{p} \alpha_E(2_{2i-1}) \end{pmatrix}$$

$$A_E(s_1) \cdots A_E(s_{2p+1}) = \begin{pmatrix} 0 & \prod_{i=1}^{p} \alpha_E(s_{2i}) \\ \prod_{i=1}^{p+1} \alpha_E(2_{i-1}) & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, seuls les termes pairs interviennent dans la $tr(A(s_1)\cdots A(s_k))$ on a donc :

$$tr(R_E(t,0)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{0\le s_{2p}\le\cdots\le s_1\le T} \left(\prod_{i=1}^{p}\alpha_E(s_{2i}) + \prod_{i=1}^{p}\alpha_E(s_{2i-1})\right) ds_{2p}\cdots ds_1$$

Soit $V_{min} = \min_{t\in[0,T]} V(t)$.

On a $\forall t\in[0,T]$ $\alpha_E(t) = V(t) - E \geq V_{min} - E > 0$

Le terme général de la série ci-dessus peut donc être minoré par

$$\int_{0\le s_{2p}\le\cdots\le s_1\le T} 2\,(V_{min}-E)^p\, ds_{2p}\cdots ds_1 = 2\,(V_{min}-E)^p\cdot\frac{T^{2p}}{(2p)!}$$

$$= 2\,(V_{min}-E)^p\left(\int_{0\le s_{2p}\le\cdots\le s_1\le T} ds_{2p}\cdots ds_1\right) = 2(V_{min}-E)^p\cdot\frac{T^{2p}}{(2p)!}$$

Ainsi $tr(R_E(t,0)) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} 2\,\dfrac{\left(\sqrt{V_{min}-E}\cdot T\right)^{2p}}{(2p)!}$

$\Longrightarrow tr(R_E(t,0)) \geq 2\cdot\cosh\left(T\cdot\sqrt{V_{min}-E}\right)$

Or $\lim_{E\to\infty} \cosh\left(T\cdot\sqrt{V_{min}-E}\right) = \cosh(+\infty) = +\infty$

8) Que peut-on dire de l'ensemble des valeurs de E pour lesquelles l'équa diff scalaire de Schrödinger admet des solutions bornées non triviales ?
On utilisera le fait que la fonction $E \mapsto tr(R_E(T,0))$ est $\mathbb{R}$-analytique et donc ne prend qu'un nombre fini de fois une valeur sur un intervalle borné.

D'après la question précédente, on a

$$tr(R_E(T,0)) \geq 2\cosh\left(T\cdot\sqrt{V_{min}-E}\right)$$

$$\exists\, E_{min} \text{ tq } \forall E < E_{min},\quad tr(R_E(T,0)) \geq 2$$

$$\cosh\left(T\cdot\sqrt{V_{min}-E}\right) = 1 \iff T\cdot\sqrt{V_{min}-E} = 0$$
$$\iff E = V_{min}$$

D'autre part, l'analyticité de la fonction $E \mapsto Tr(R_E(T,0))$ implique que cette fonction prend les valeurs ± 2 en des points isolés.

Ainsi, l'ensemble des E pour lesquelles l'équa diff scalaire de Schrödinger n'admet pas de solution bornées (c-à-d les énergies interdites) est constitué de l'intervalle $]-\infty, E_{min}[$, ainsi que d'une famille d'intervalles ouverts disjoints.
C'est ce qui permet d'expliquer la structure en bandes des solides.