CYTECH (E.I.S.T.I.)

PARCOUR MATHEMATIQIUES FINANCIERES

METHODES DE MONTE CARLO POUR LA FINANCE.

EXAMEN - 2020 - 2021, le 18 Décembre : 9.00 - 11.30.

- Tous les documents sont autorisés.
- Pendant l'examen vous allumez les cameras.
- Le dépôt est sur TEAMS.
- L'heure limite du depot d'un dossier est 12.15.
  - 45 min sont donnés pour preparer le dossier et effectuer le depot.
  - Le dossier vous convertissez en zip.
- Déposez le dossier contenant le rapport PDF (obligatoirement PDF) et les codes - source.
  - Commentez les codes
  - **Le rapport PDF est obligatoire. Sans rapport l'examen ne sera pas corrigé.**
  - Le rapport PDF contient **une copie des codes et des graphes** expliqués et des valeurs demandés.
- Vous déposez votre dossier sur TEAMS si et seulement si vous certifiez sur l'honneur que vous avez fait les problèmes de l'examen de facon autonome, sans aucune communication avec le monde extérieur.
- Touts suspicion de triche (du type réponse brusque non justifiée, raisonnement (code) faux repéré sur plusieurs fichiers pdf, des codes identiques, etc) conduira automatiquement à un zéro.
- Uniquement en cas de problème de dépôt vous pouvez envoyer le dossier par e-mail.

QUESTION 1. Soit W_t et un Mouvement Brownien sur l'intérvalle $t \in [0, T = 3]$. Calculer par les simulations Monte-Carlo(MC) ($N_{mc} = 10000$) :

- $\mathbb{V}ar[W_T]$
- $\mathbb{E}[(W_T)^4]$

$\star$ Copier les réponses et les codes sur votre fichier pdf.

QUESTION 2. Soit W_t est un Mouvement Brownien (MB) sur l'intérvalle $t \in [0, T = 3]$. Vérifier par les simulations Monte-Carlo le résultat suivant :

$$\int_0^T W_t^2 dW_t = \frac{1}{3} W_T^3 - \int_0^T W_t dt$$

Indications : Pour une trajectoire du MB simuler
$\int_0^T W_t^2 dW_t$ puis $\frac{1}{3} W_T^3 - \int_0^T W_t dt$
et comparer les résultats.
Répéter les simulations pour les deux autres trajectoires.

$\star$ Copier les réponses et les codes sur votre fichier pdf.

QUESTION 3. Soit l'actif vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(r(t)dt + \sigma(t)dW_t), \quad t \in [0, T], \quad S(t = 0) = S_0$$

Le taux d'interêt et la volatilité ne sont plus des constantes. C'est le cas du modèle de Black et Scholes généralisé.

$$\sigma(t) = \sigma_0 \frac{t}{T}, \quad r(t) = r_0 \frac{t^2}{T^2}, \qquad \sigma_0 = 0.5, \quad r_0 = 0.3, \quad T = 0.5.$$

- Simuler $N_{mc} = 10000$ trajectoires de l'actif. $S_0 = 10$.

$\star$ Copier les graphes et les codes sur votre fichier pdf.

QUESTION 4. Dans le modèle Cox-Ingerson-Ross le taux d'interêt vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \omega \sqrt{|r_t|} dW_t, \quad t \in [0, T], \quad r(t = 0) = r_0$$

- Utiliser les paramèters : $T = 0.5; r_0 = 0.1; \alpha = 0.2; \beta = 0.1; \omega = 0.3; \sigma = 0.5$.
- Simuler $N_{mc} = 1000$ trajectoires de r_t.
- Tracer la fonction de densité empirique de r_T.

Dans le cadre du modèle Cox-Ingerson-Ross l'actif vérefie l'équation différentielle stochastique conduite par le même MB W_t que le le processus stochastique r_t.

$$dS_t = S_t(r_t dt + \sigma dW_t), \quad t \in [0,T], \quad S(t=0) = S_0$$

- Simuler $N_{mc} = 1000$ trajectoires de S_t.
- Calculer la probalilité $\mathbb{P}[S_T < S_0]$.

⋆ Copier les réponses, les graphes et les codes sur votre fichier pdf.

QUESTION 5. On observe parfois sur le marché une situation qui s'appelle Oscillateur Brownien. Les deux portefeulles correlés P_t et M_t vérifient le système des équations différentielles stochastiques suivantes :

$$\begin{cases} dM_t = P_t dt \\ dP_t = -\alpha P_t dt - \beta M_t dt + \sigma dW_t \\ t \in [0,T], \quad M(t=0) = M_0, \quad P(t=0) = P_0, \end{cases}$$

- $T = 15$, $r = 0.1$, $\sigma = 1.5$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.5$, $M_0 = P_0 = 10$, $N = 1000$ est le nombre de discrétisation de l'intervalle temporel.
- Résoudre ces équations par MC.
- Tracer les graphes $t \to P_t$ et $t \to M_t$.
- Tracer le diagramme de phase $M_t \to P_t$.
- Définir sur $[0,T]$ par l'analogie avec la variation quadratique du Mouvement Brownien les variations quadratiques $\langle M \rangle_t$ du l'actif M_t et $\langle P \rangle_t$ du l'actif P_t.
- Tracer les graphes $t \to \langle P \rangle_t$ et $t \to \langle M \rangle_t$.

⋆ Remarque : les valeurs negatifs de P_t et M_t correspondent à une empreinte bancaire.

⋆ Copier les réponses, les graphes et les codes sur votre fichier pdf.