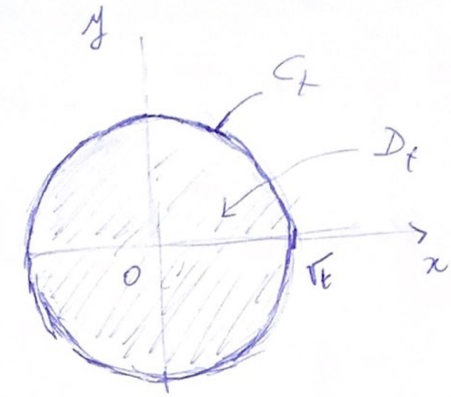
TD- Systèmes dynamiques

Exercice 9 : Cercles et Hyperboles



1) On considère pour $t \in \mathbb{R}$

$$C_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = t\}$$

$$D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq t\}$$

1)-a) Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, l'ensemble C_t est-il ouvert, fermé, compact connexe ? Même question pour l'ensemble D_t. Que représentent géométriquement C_t et D_t ?

- Si $t=0$, $C_t = \{(0,0)\}$ et $D_t = \{(0,0)\}$

- Si $t<0$, $C_t = \emptyset$ et $D_t = \emptyset$

- Si $t>0$, $C_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 = (\sqrt{t})^2\}$

C_t est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{t}$

$$D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq (\sqrt{t})^2\}$$

D_t est le disque fermé de centre O et de rayon $\sqrt{t}$

C_t est fermé comme image réciproque de $\{t\}$ qui est un fermé de $\mathbb{R}$ par l'application continue

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2+y^2$$

$(x_1, x_2) \in f^{-1}(\{t\}) \Leftrightarrow f(x_1,x_2) = t \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = t$

Ainsi, $f^{-1}(\{t\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = t\}$

De même,

$$D_t = f^{-1}([0,t]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2 \leq t\}$$

Soit $(x_1,x_2) \in f^{-1}([0,t]) \Leftrightarrow f(x_1,x_2) \in [0,t]$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x_1^2 + y_2^2 \leq t$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq t$$

$$\Leftrightarrow (x_1,x_2) \in D_t$$

. C_t est borné Soit $u=(u_1,u_2) \in \mathbb{C}_t$ et $v=(v_1,v_2) \in \mathbb{C}_t$

. $d_2(u,v) = \|u-v\|_2 = \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2}$ pour la norme euclidienne

$\Rightarrow d(u,(0,0)) = \sqrt{u_1^2+u_2^2} \leq \sqrt{t}$ (car $u_1^2+u_2^2=t$)

. $d_1(u,v) = \|u-v\|_1 = |u_1-v_1| + |u_2-v_2|$

$\Rightarrow d(u,(0,0)) = |u_1|+|u_2|$

. $d_\infty(u,v) = \|u-v\|_\infty = \max(u_1-v_1, u_2-v_2)$

Et comme en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \forall u \in \mathbb{R}^2, \quad c_1\|u\|_a \leq \|u\|_b \leq c_2 \cdot \|u\|_a$

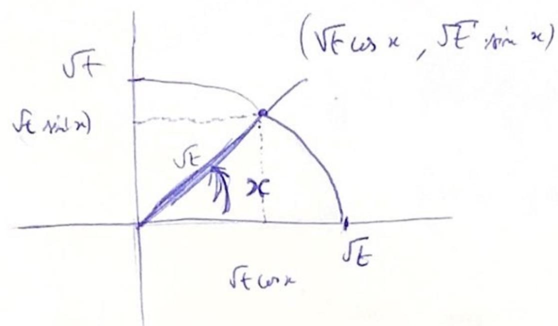
. D_t est borné par définition $D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq t\}$

Remarque : En dimension infinie, la boule unité fermée n'est pas compact (Riesz)

$C_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = t\}$ est connexe car c'est l'image de $\mathbb{R}$ qui est connexe par l'application continue

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow C_t$$
$$x \longmapsto \left(\sqrt{t}\cdot\cos(x),\ \sqrt{t}\cdot\sin(x)\right) = \varphi(x)$$

SOH, CAH, TOA



$\sin x = \dfrac{y}{\sqrt{t}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{t}\cdot\sin(x)$

$\cos(x) = \dfrac{z}{\sqrt{t}}$

$\Rightarrow z = \sqrt{t}\cdot\cos(x)$

$D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq t\}$ est connexe car il est convexe.

En effet soit $u, v \in D_t$ et $p \in [0,1]$,

on a $\quad pu + (1-p).v = (pu_1 + (1-p)v_1,\ pu_2 + (1-p)v_2)$

$$\Rightarrow (pu_1 + (1-p)v_1)^2 + (pu_2+(1-p)v_2)^2 = pu_1^2 + 2pu_1(1-p)v_1 + ((1-p)v_1)^2$$
$$+ pu_2^2 + 2pu_2(1-p)v_2 + ((1-p)v_2)^2$$

$$= p(u_1^2+u_2^2) + 2p(1-p)(u_1v_1+u_2v_2) + (1-p)^2(v_1^2+v_2)^2$$

Si $p=0$, $pu+(1-p)v = v_1^2+v_2^2 \leq t$ car $v \in D_t$

Si $p=1$, $pu+(1-p)v = u_1^2+u_2^2 \leq t$ car $u \in D_t$

Si $p \in]0,1[$, $\Rightarrow 0<p<1 \Leftrightarrow 0 > -p > -1$

$\Leftrightarrow 1 > 1-p > 0$

$\Leftrightarrow p > p(1-p) > 0$

$\Leftrightarrow 1 > p > p(1-p) > 0$

Donc $\forall p \in [0,1]$, $pu + (1-p)v \in D_t$

1-b) Quel est l'intérieur de l'ensemble $D_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2 \le t\}$

$\mathring{D}_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < t\}$ C'est le disque ouvert de centre O et de rayon $\sqrt{t}$.

1-c) L'ensemble $\mathbb{R}^2\setminus C_t$ est-il ouvert, fermé, compact ? Combien de composantes connexes a-t-il ?

$$\mathbb{R}^2\setminus C_t = \mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ x^2+y^2=t\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\neq t\}$$

Soit $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y)\longmapsto x^2+y^2=f(x,y)$ une application continue, $f\in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^2\setminus C_t = f^{-1}(]-\infty,t[\,\cup\,]t,+\infty[)$ ~~donc $\mathbb{R}^2\setminus C_t$ est~~

En effet, soit $(x,y)\in f^{-1}(]-\infty,t[\,\cup\,]t,+\infty[)$

$\Rightarrow f(x,y)\in\,]-\infty,t[\,\cup\,]t,+\infty[$

$\Rightarrow x^2+y^2\neq t$

$\Rightarrow (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus C_t$

Ainsi $\mathbb{R}^2\setminus C_t$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ $(]-\infty,t[\,\cup\,]t,+\infty[)$ par une application continue f.

Soit $(x,y)\in f^{-1}(]-\infty,t[)\cap f^{-1}(]t,+\infty[)$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2\setminus C_t$ possède donc 2 composantes connexes

$\Leftrightarrow f(x,y)\in\,]-\infty,t[\,\cap\,]t,+\infty[$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\in\,]-\infty,t[\,\cap\,]t,+\infty[$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\in\emptyset$

$$\begin{cases} f^{-1}(]-\infty,t[) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < t\} \\ f^{-1}(]t,+\infty[) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 > t\}\end{cases}$$

$\mathbb{R}^2\setminus C_t = f^{-1}(]-\infty,t[)\cup f^{-1}(]t,+\infty[)$

. L'image réciproque d'un $\begin{cases}\text{ouvert}\\ \text{fermé}\end{cases}$ par une application continue est $\begin{cases}\text{ouvert}\\ \text{fermé}\end{cases}$

Cependant, l'image réciproque d'un connexe par une fonction continue n'est pas forcément connexe :

Ex $\mathbb{R}^+$ est un connexe de $\mathbb{R}$

$$\sin^{-1}(\mathbb{R}_+) = \sin^{-1}(\,[0, +\infty[\,)$$

Soit $x \in \sin^{-1}(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow \sin(x) \in \mathbb{R}_+$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sin(x)$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		... $\frac{k\pi}{2}$
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$ ...	0
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

$$\sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \dots [k\pi, (k+1)\pi] \dots$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

Ainsi, $\begin{cases} \mathbb{R}^+ \text{ connexe de } \mathbb{R} \text{ mais} \\ \sin^{-1}(\mathbb{R}_+) = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k\pi, (2k+1)\pi] \end{cases}$ pas connexe car reunion disjointe d'intervalles fermés

. L'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe

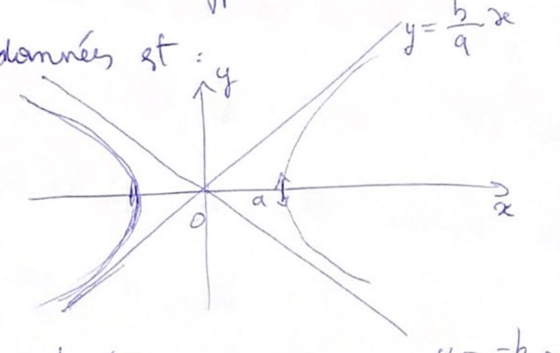
cependant, l'image d'un $\begin{cases}\text{ouvert}\\ \text{fermé}\end{cases}$ par une fonction continue n'est pas forcément ouvert / fermé.

2) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $H_t = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = t \}$

a. 1) pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble H_t est-il compact ?

Forme générale de l'équation cartésienne d'une hyperbole (centrée en (x_0, y_0)) dont les axes sont parallèles aux axes des ordonnées est :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

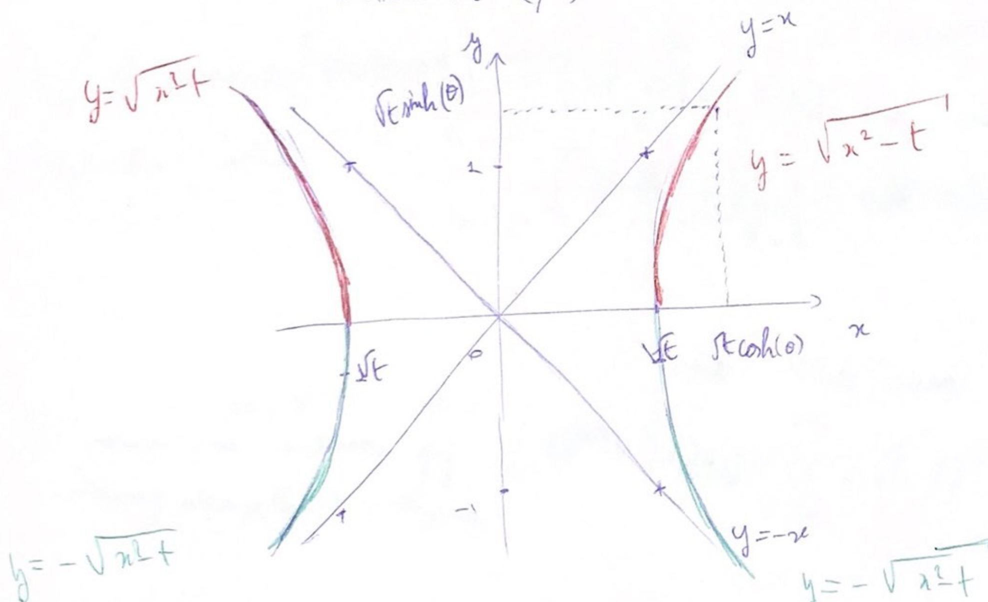


Soit $(x,y) \in H_t \iff x^2 - y^2 = t$

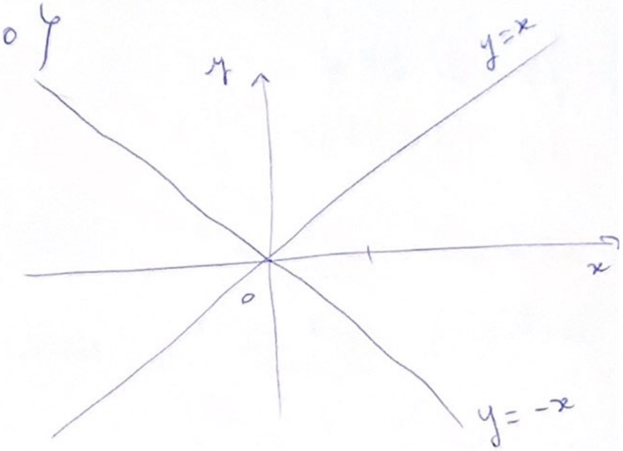
$\iff \dfrac{x^2 - y^2}{t} = 1 \quad , t \neq 0$

$\iff \dfrac{x^2}{(\sqrt{t})^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{t})^2} = 1$

Alors H_t est l'$\underbrace{\text{hyperbole}}_{\text{centrée en } (0,0)}$ dont les axes sont $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} x = x \\ y = -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} x = -x \end{cases}$



$\underline{t=0}$, $H_{t=0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = 0\}$



Soit $(x,y) \in H_{t=0} \iff x^2 - y^2 = 0$

$\iff x^2 = y^2$

$\iff y = \pm x$

Notons $\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f(x) = x \\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto g(x) = -x \end{cases}$

$H_0 = f^{-1}(\mathbb{R}) \cup g^{-1}(\mathbb{R})$ reunion de deux fermés

$\underline{t>0}$, $H_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ \ x^2 - y^2 = t\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ \ \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^2 = 1\}$

H_t est connexe comme image de $\mathbb{R}$ qui est connexe par l'application continue $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow H_t$

$x \longmapsto (\sqrt{t}\cosh(x), \sqrt{t}\sinh(x)) = \varphi(x)$

$\underline{\text{On a}}$: $\begin{cases} \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cosh^2(x) = \frac{1}{4}\left[e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right] \\ \sinh^2(x) = \frac{1}{4}\left[e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right] \end{cases}$

$\Rightarrow \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4}\left[e^{2x} + 2 + e^{-2x} + (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right] = \frac{4}{4} = 1$

$\Rightarrow (\sqrt{t}\cosh x)^2 - (\sqrt{t}\sinh x)^2 = t(\cosh^2 x - \sinh^2 x) = t$

$$\begin{cases} x = \sqrt{t}\cosh(\theta) \\ y = \sqrt{t}\sinh(\theta) \end{cases}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{\cos(x)+i\sin(x)+(\cos(x)-i\sin(x))}{2} = \frac{2\cos(x)}{2}$$

$$\sinh(ix) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} = \frac{\cos(x)+i\sin(x)-(\cos(x)-i\sin(x))}{2} = \frac{2i\sin(x)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x) = \cosh(ix) \\ \sin(x) = i\sinh(ix) \end{cases}$$

Géométriquement, H_t représente l'hyperbole centré en O

et d'axe $\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$

2-2) déterminer en fonction de $t \in \mathbb{R}$, le nombre de composantes connexes de $H_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = t\}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue
$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - t}$
et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue
$x \mapsto g(x) = -\sqrt{x^2 - t}$

$z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \cup g^{-1}(g\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$ et $g(z) \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - t} = y \\ -\sqrt{x^2 - t} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 - t \\ |y| = \sqrt{x^2 - t} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = t$$

H_t possède 2 composants connexes