Exo 5 : Z_i iid vaut ± 1 avec proba p et $q = 1-p$

$\mathcal{B}_n = \sigma(Z_1, .., Z_n)$, $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

(b_n) est $(\mathcal{B}_n)$ - prévisible c-à-d $\left(b_n \text{ est } (\mathcal{B}_{n-1})\text{-mesurable } \forall n \geq 1 \right.$

On définit le jeu si $\begin{cases} Z_n = 1 & \text{on gagne } b_n \\ Z_n = -1 & \text{on perd } b_n \end{cases}$.

Soit S_0 la fortune initial et S_n la fortune après le $n^{ième}$ coup.

Préciser suivant les valeurs de p si (S_n) est $\left(\begin{array}{l} MG \\ SMG \\ SMS \end{array} \right.$

$$S_n \overset{??}{=} \varphi(Z_1, .., Z_n, b_1, .., b_n)$$

$$S_1 = b_0 + \begin{cases} b_1 & \text{si } Z_1 = 1 \\ -b_1 & \text{si } Z_1 = -1 \end{cases}$$

$$= b_0 + Z_1 b_1$$

même principe (souvent utilisé en statistiques)

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \qquad X(\Omega) = \{0, 1\}$

donc $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1-p & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$= \left(p\, \mathbb{1}_{\{1\}} + (1-p) \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}\right)^x$$

$$= p^x (1-p)^{1-x}$$

<u>d'où</u> par récurrence immédiate

$S_1 = S_0 + Z_1 b_1$

$S_2 = S_0 + Z_1 b_1 + Z_2 b_2$

$\vdots$

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i b_i = S_{n-1} + Z_n b_n$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left[S_{n+1} \mid \mathcal{B}_n\right] = \mathbb{E}\left(S_n + Z_{n+1} b_{n+1} \mid \mathcal{B}_n\right)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = \mathbb{E}(S_n + Z_{n+1} b_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)$

$= \mathbb{E}(S_n \mid \mathcal{B}_n) + \mathbb{E}(Z_{n+1} b_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)$ par linéarité

$= S_n + b_{n+1} \, \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)$ car S_n et b_{n+1} sont $\mathcal{B}_n$-mesurables

car b_n est $(\mathcal{B}_n)$-prévisible

$= S_n + b_{n+1} \, \mathbb{E}(Z_{n+1})$ car Z_{n+1} et $(\mathcal{B}_n)$ sont indépendants

Or $Z_i = \begin{cases} 1 & \text{avec proba } p \\ -1 & \text{avec proba } q \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(Z_i) = \sum_{k \in Z(\Omega)} k \, \mathbb{P}(Z_i = k) = (1) \cdot \mathbb{P}(Z_i = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(Z_i = -1)$

$= p + (-q) = p - (1-p) = 2p - 1$

Ainsi $b_{n+1} \, \mathbb{E}(Z_{n+1}) = \begin{cases} > 0 & \text{si } p > \frac{1}{2} \\ = 0 & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ < 0 & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases}$

On peut inclure les inégalités larges

Si $p \geq 1/2 \Rightarrow (S_n)$ est une sMG

Si $p = 1/2 \Rightarrow (S_n)$ est une MG

Si $p < 1/2 \Rightarrow (S_n)$ est une SMG

Il reste toutefois à vérifier la mesurabilité et l'intégrabilité.

2)-a) Soient (X_n) une surmartingale pour la suite $(\mathcal{B}_n)$

Soit (ε_n) une suite de v.a positives bornées telles que

ε_n est $(\mathcal{B}_{n-1})$ mesurable pour $n \geq 1$.

avec ε_0 constante

On pose $\begin{cases} Z_0 = X_0 \\ Z_n = X_n - X_{n-1} & \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$

Montrons que $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Z_i$ est une SMG

On a (X_n) est une SMG adaptée à $(\mathcal{B}_n)$

(ε_n) $\begin{cases} \text{prévisibles pour } (\mathcal{B}_n) \\ \text{positives} \\ \text{et bornées} \end{cases}$

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i Z_i \quad \text{où} \quad Z_i = \begin{cases} X_i - X_{i-1} & \text{si } i \geq 1 \\ X_0 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, Y_n est $(\mathcal{B}_n)$-mesurable car

c'est une fonction de $X_0, \ldots, X_n$ et $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$

Et comme (ε_n) est $(\mathcal{B}_{n-1})$-mesurable donc $(\mathcal{B}_n)$-mesurable

car $\mathcal{B}_{n-1} \subset \mathcal{B}_n$

ii) Y_n est intégrable en effet on a :

$$|Y_n| \leq \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i |Z_i|$$ car (ε_n) positive

$$\Rightarrow \mathbb{E}(|Y_n|) \leq \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}(\varepsilon_i \cdot |Z_i|)$$

or $\forall i$, (ε_i) est borné. c-à-d

$\exists M_i > 0$ tq $|\varepsilon_i| < M_i$

donc $$\varepsilon_i |Z_i| \leq M_i |Z_i|$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\varepsilon_i |Z_i|) \leq M_i \, \mathbb{E}(|Z_i|)$$

or $$\mathbb{E}(|Z_i|) = \begin{cases} \mathbb{E}(|Z_0|) = \mathbb{E}(|X_0|) < \infty & \text{si } i=0 \\ \mathbb{E}(|X_i - X_{i-1}|) \end{cases}$$

et $$\mathbb{E}(|X_i - X_{i-1}|) \leq \mathbb{E}(|X_i| + |X_{i-1}|) = \mathbb{E}(|X_i|) + \mathbb{E}(|X_{i-1}|)$$

or (X_n) est une SMG donc intégrable. $\forall n$

<u>Conclusion</u> : $\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}\left(Y_{n+1} \mid \mathcal{B}_n\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon_i Z_i \,\Big|\, \mathcal{B}_n \right)$$

mesurable

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i Z_i + \varepsilon_{n+1}\left(X_{n+1} - X_n\right) \,\Big|\, \mathcal{B}_n \right)$$

$$= Y_n + \varepsilon_{n+1}\left(\underbrace{\mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n\right)}_{\le X_n} + \underbrace{\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{B}_n\right)}_{= X_n} \right)$$

mesurable

SMG

$$\le X_n - X_n = 0$$

$$\le Y_n + 0$$

$$\le Y_n$$

(Union + complementaire $\Rightarrow$ intersection) tribus stabilité

b) Soit T un temps d'arrêt adapté à $(\mathcal{B}_n)$

Montrons que $(X_{T\wedge n})$ est encore SMG

$(\mathcal{F}_n)$ - filtration

Déf
T est 1 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temps d'arrêt si

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\{T\leq n\}\in\mathcal{F}_n$

4 est un temps d'arrêt ?

$\{4\leq n\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\{4\leq n\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 4>n \text{ et } \emptyset\in\mathcal{F}_n, \forall n \\ \Omega & \text{si } 4\leq n \text{ et } \Omega\in\mathcal{F}_n, \forall n \end{cases}$$