Exercice 1 *Natures des séries de terme général u_n ...*

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \geqslant 0)$

2. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \quad (n \geqslant 1)$

3. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad (n \geqslant 0)$

4. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^{-1} \quad (n \geqslant 1)$

5. $u_n = \sin \dfrac{\pi \times n^2}{n+1} \quad (n \geqslant 0)$

6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad (n \geqslant 2)$

7. $u_n = \left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad (n \geqslant 1, \alpha \in \mathbb{R})$

8. $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (n \geqslant 0,\ a \in \mathbb{R})$

Solution (**Ex.1** – *Natures des séries de terme général u_n ...*)

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$ car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Par le critère de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. $n\ln(1+\dfrac{1}{n}) = 1-\dfrac{1}{n}+O\left(1/n^2\right)$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}-\dfrac{1}{n}+O\left(1/n^2\right)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$: la série diverge.

3. $\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. $\sum u_n$ converge par équivalence.

4. $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$: la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

5. $u_n = \sin\left(\pi\dfrac{(n+1)^2-2(n+1)+1}{n+1}\right) = \sin\left(\pi(n-1)+\dfrac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$: on conclut à la convergence grâce au critère spécial des séries alternées.

6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

$\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le théorème spécial de séries alternées,

$\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente,

$\sum O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ est une série absolument convergente donc convergente, par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$,
donc $\sum u_n$ diverge.

7. $\ln(u_n) = n^\alpha \ln\left(1-\dfrac{1}{6n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = n^\alpha\left(1-\dfrac{1}{6n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$

$\ln(u_n) = -\dfrac{1}{6}n^{\alpha-2}+o\left(n^{\alpha-3}\right)$

- Si $\alpha < 2$: $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha = 2$: $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1/6$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-1/6)$, la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 2$: $n^2 u_n = \exp\left(2\ln(n)-\dfrac{1}{6}n^{\alpha-2}+o\left(n^{\alpha-3}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\ln(n) = o\left(n^{\alpha-2}\right)$, donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

8.
- Si $|a| < 1$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a|^n$, or $\sum |a|^n$ est une série géométrique convergente. Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Si $a = 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ et si $a=-1$, $u_{2n} = 1/2$ et $u_{2n+1} = -1/2$: dans le deux cas, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $|a| > 1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$, or $\sum \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$ est une série géométrique convergente.

Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 2 *Pairs et impairs*

1. a) Justifier la convergence des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n)^2}.$$

b) En admettant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer les sommes des séries précédentes.

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} > \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Solution (**Ex.2** – *Pairs et impairs*)

1. a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge par application du théorème spécial des séries alternées.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)^2}$ converge par linéarité car la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$ converge.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge par le critère des équivalents de t.g. positifs : $\displaystyle\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ et convergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{24}$,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$,

d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Remarque : la somme de cette dernière série alternée est bien du signe de son premier terme.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\displaystyle\forall k \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{(x^2)^k}{k!}$ assure la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ par comparaison à la série exponentielle de paramètre x^2.

Une comparaison analogue justifie la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$, donc de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ par linéarité.

Attention si on utilise un autre critère : x^{2k+1} est de signe alternant pour $x < 0$.

Enfin $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \exp(-x) > 0.$

Exercice 3 *Constante γ d'Euler*

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$?

2. En déduire l'existence $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Solution (**Ex.3** – *Constante γ d'Euler*)

1. $\displaystyle v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\displaystyle v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par domination $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

2. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge, la suite (u_n) converge. En notant γ sa limite,

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma\right) = 0 = o(1)$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Exercice 4 *Autour du logarithme*

1. Existence et valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

2. a) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

b) Proposer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme partielle de la série précédente.

Solution (**Ex.4** – *Autour du logarithme*)

1. L'existence peut être obtenue via l'équivalence $\ln(1-1/n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^2$ et la convergence de la série de Riemann de paramètre 2. Mais on peut faire d'une pierre deux coups en cherchant la somme.

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) =$$

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \left[\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln(n)\right] = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1}\ln(n) + \sum_{n=3}^{\mathrm{N}+1}\ln(n) - 2\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\ln(n) =$$

$$\ln(1)+\ln(2)+\ln(\mathrm{N})+\ln(\mathrm{N}+1)-2\ln(2)-2\ln(\mathrm{N}) = \ln\frac{\mathrm{N}+1}{2\mathrm{N}}$$

Donc la série converge et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$.

Remarque : termes strictement négatifs... somme strictement négative...

2. $$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left[\ln(n)-\ln(n+1)\right] =$$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln(n) - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1}\ln(n) = \ln(1)-\ln(\mathrm{N}+1) = -\ln(\mathrm{N}+1)$$

Donc la série diverge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} -\ln(\mathrm{N})$.

Exercice 5 *Produit infini*

Montrer la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right).$$

Solution (**Ex.5** – *Produit infini*)

Manifestement : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n>0$. Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n \overset{\text{déf.}}{=} \ln(u_n)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, or $\ln\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ converge.

Le critère des équivalents pour ces séries à termes positifs permet d'affirmer que la suite $(v_n)_n$ converge. Par composition par la fonction exponentielle (continue !), la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 6 *Somme d'une série de type exponentielle*

1. Justifier la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}.$$

2. a) Déterminer trois réels α, et γ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n^3 = \alpha n(n-1)(n-2)+\beta n(n-1)+\gamma n.$$

b) En déduire la somme de la série précédente.

Solution (**Ex.6** – *Somme d'une série de type exponentielle*)

1. $\dfrac{n^3}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n-3)!}$ permet de justifier la convergence, ou encore D'Alembert : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$...

2. Pour pouvoir simplifier les factorielles, on écrit :
$n^3 = n(n-1)(n-2)-3n^2+2n = n(n-1)(n-2)-3n(n-1)+5n$.

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{n^3}{n!} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!} - 3\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{n(n-1)}{n!} + 5\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{n}{n!}$$

$$= \sum_{n=3}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(n-3)!} - 3\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(n-2)!} + 5\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(n-1)!} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \mathrm{e}-3\mathrm{e}+5\mathrm{e} = 3\mathrm{e}.$$

Exercice 7 *Fonction ζ de Riemann en 1*

Pour tout $\alpha>1$ on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}.$$

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\to1^+}\zeta(\alpha)$.

2. Donner un équivalent de ζ en 1.

Solution (**Ex.7** – *Fonction ζ de Riemann en 1*)

1. Par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$.

Donc : $\dfrac{1}{\alpha-1} \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$.

Par comparaison, $\displaystyle\lim_{\alpha\to1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$.

La majoration n'était pas nécessaire mais sera utile pour la suite.

2. Et : $\forall \alpha > 1, 1 \leqslant \dfrac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)} \leqslant (\alpha-1)+1$, donc par encadrement : $\dfrac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)} \xrightarrow[\alpha\to1]{} 1$, et

$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha\to1}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.$$

Exercice 8 *Avec ou sans la formule de Stirling*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.

a) Déterminer un équivalent de $\ln u_{n+1} - \ln u_n$.

b) En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c) En s'intéressant à la série de terme général $\ln\big((n+1)u_{n+1}\big) - \ln\big((n)u_n\big)$, montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0} u_n$.

d) Soit $v_n = \sqrt{n}u_n$.

En s'intéressant à la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$, montrer que la suite $(\sqrt{n}u_n)$ converge vers une limite strictement positive.

2. Retrouver les résultats précédents à l'aide de la formule de Stirling.

Solution (**Ex.8** – *Avec ou sans la formule de Stirling*)

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.

a) $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2} = \ln \dfrac{2n+1}{2n+2} = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n+2}\right)$

$\ln u_{n+1} - \ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

b) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0} (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ tend vers $-\infty$, donc $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, donc $u_n = \mathrm{e}^{\ln u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c) $\ln\big((n+1)u_{n+1}\big) - \ln\big((n)u_n\big) = \ln \dfrac{2n+1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0} \ln\big((n+1)u_{n+1}\big) - \ln\big((n)u_n\big)$ diverge vers $+\infty$, donc $\ln(nu_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $nu_n = \mathrm{e}^{\ln(nu_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Comme $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, nu_n \geqslant 1$ *i.e.* $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$: $\displaystyle\sum_{n\geqslant0} u_n$ diverge par comparaison de termes généraux positifs.

d) $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \ln u_{n+1} - \ln u_n$,

or $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

donc $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$ converge.

On en déduit que $(\ln v_n)$ converge, vers une limite $c \in \mathbb{R}$. Donc $v_n = \mathrm{e}^{\ln v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \mathrm{e}^c > 0$. Cela signifie au passage que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{\sqrt{n}}$.

2. $u_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}2^{2n}(2\pi n)n^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ ce qui permet de retrouver tous les résultats précédents... et même plus : $\ell = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 9 *Exemples de Séries de Bertrand*

Soit $\alpha \in \,]\,0\,;+\infty\,[$.

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\ln^\alpha n}$.

2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln n}$.

Solution (**Ex.9** – *Exemples de Séries de Bertrand*)

1. $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^\alpha t}$ est continue positive et décroissante sur $[\,2\,;+\infty\,[$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

- Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t = [\ln|\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.
- Si $\alpha \neq 1$,
$$\int_2^x f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(t)}\right]_2^x$$
$$= \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(x)} - \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1}(2)} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}.$$
Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
- Bilan : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2. $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \ln t}$ est continue positive et décroissante sur $[\,2\,;+\infty\,[$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

- si $\alpha > 1$, $f_\alpha(t) = o(1/t^\alpha)$ et $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.
- si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t = [\ln|\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.
- si $\alpha < 1$, $f_\alpha(t) \geqslant f_1(t) \geqslant 0$ car $t^\alpha \leqslant t$, or $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t$ diverge d'après le point précédent donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ diverge ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Exercice 10 *Une série semi-convergente très classique*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1. a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$, et déterminer le signe de sa somme.

b) Cette série est-elle absolument convergente ?

2. En écrivant u_n à l'aide d'une intégrale, montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Solution (**Ex.10** – *Une série semi-convergente très classique*)

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1. a) Le théorème spécial pour les séries alternées permet de justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$. De plus, le signe de sa somme est celui de son premier terme, donc positif.

b) La série harmonique étant divergente, cette série n'est pas absolument convergente.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{0}{n} = \left[\dfrac{(-t)^n}{n}\right]_0^1 = \displaystyle\int_0^1 -(-t)^{n-1}\mathrm{d}t$.

Alors :
$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = -\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \int_0^1 (-t)^{n-1}\mathrm{d}t \overset{\text{lin.}}{=} -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$
$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{\mathrm{N}}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \mathrm{I_N} \text{ où } \mathrm{I_N} = \int_0^1 \frac{(-t)^{\mathrm{N}}}{1+t}\mathrm{d}t.$$
Par l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale :
$$|\mathrm{I_N}| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{\mathrm{N}}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{N}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}+1}.$$
Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \ln(2) - \mathrm{I_N}$ avec $\mathrm{I_N} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$, d'où :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

Exercice 11 *Somme et reste de la série exponentielle*

On ne suppose pas connues les propriétés de la série exponentielle. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

On pose $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{x^n}{n!}, \quad$ et $\quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S_N} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n$.

1. Dans cette question, $x = 1$, et on pose : $\quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{T_N} = \mathrm{S_N} + \dfrac{1}{\mathrm{N} \times (\mathrm{N}!)}$.

a) Montrer que les suites S et T sont convergentes, de même limite.

b) On pose de plus : $\quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R_N} = \displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n$.

Justifier que : $\quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad |\mathrm{R_N}| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{N.N!}}$

2. a) On revient au cas général. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge en précisant sa somme.
Proposer une majoration du reste R_N de cette série.
b) Dans le cas $x=1$, comparer cette majoration à celle obtenue précédemment.

Solution (**Ex.11** – *Somme et reste de la série exponentielle*)

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{x^n}{n!},\text{ et }\forall N\in\mathbb{N},\quad S_N=\sum_{n=0}^{N}u_n.$$

1. a) $S_{N+1}-S_N=\dfrac{1}{(N+1)!}>0$,

$T_{N+1}-T_N=\dfrac{1}{(N+1)!}+\dfrac{1}{(N+1)(N+1)!}-\dfrac{1}{N.N!}=\dfrac{N(N+1)+N-(N+1)^2}{N(N+1)(N+1)!}$

$T_{N+1}-T_N=\dfrac{-1}{N(N+1)(N+1)!}<0$,

$T_N-S_N=\dfrac{1}{N.N!}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$,

donc S et T sont adjacentes, donc convergentes, vers une même limite.

b) Notons ℓ la limite commune de S et T (en fait, la suite de l'exercice montrera que $\ell=e$). Comme S et T sont deux suites respectivement croissante et décroissante de limite ℓ,

$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad S_N\leqslant \ell\leqslant T_N$, donc $\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leqslant \ell-S_N\leqslant\dfrac{1}{N.N!}$,

et comme $R_N=S_N-\ell$, on a bien : $\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad |R_N|\leqslant\dfrac{1}{N.N!}$

2. a) On revient au cas général. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge en précisant sa somme.

- Supposons $x\in\mathbb{R}^+$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à exp qui est $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^{N+1}$ sur $[0\,;x]$,

$$\exp(x)=S_N+\int_0^x\frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt$$

$$\left|\int_0^x\frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt\right|\leqslant\frac{e^x}{N!}\int_0^x(x-t)^N dt\leqslant\frac{e^x}{N!}\times\frac{x^{N+1}}{N+1}\leqslant\frac{e^x x^{N+1}}{(N+1)!}$$

Or $x^N=o(N!)$, donc par domination $\displaystyle\int_0^x\frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$.

Par conséquent, $S_N\xrightarrow[N\to+\infty]{}\exp(x)$: la série converge, sa somme est e^x.

- Supposons $x\in\,]-\infty\,;0[$. L'application de la formule de Taylor sur $[x\,;0]$ donne encore :

$$\exp(x)=S_N+\int_0^x\frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt,$$

mais la majoration du reste intégral change :

$$\left|\int_0^x\frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt\right|\leqslant\frac{1}{N!}\int_x^0\left|e^t(x-t)^N\right|dt\leqslant\frac{1}{N!}\int_x^0(t-x)^N dt$$

$$\left|\int_0^x\frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt\right|\leqslant\frac{(-x)^{N+1}}{(N+1)!}$$

On conclut comme pour $x\geqslant 0$.

- Pour majorer le reste, on peur écrire en toute généralité :

$$R_N\leqslant\frac{e^{\max(0,x)}|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

b) Dans le cas $x=1$, cette dernière majoration donne $|R_N|\leqslant\dfrac{e}{(N+1)!}$.

Ce majorant n'est pas meilleur que celui de la première question :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad\frac{e}{N+1}-\frac{1}{N}=\frac{eN-N-1}{N(N+1)}=\frac{(e-1)N-1}{N(N+1)}>0,$$

donc : $\dfrac{1}{N.N!}\leqslant\dfrac{e}{(N+1)!}$.

Exercice 12 *Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite *décroissante* telle que la serie $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge.

On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.

a) Que vaut $\lim_{n\to+\infty}S_{2n}-S_n$? En déduire $\lim_{n\to+\infty}2nu_{2n}$.

b) Montrer que : $u_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{si } \exists k\in\mathbb{N}^*, n=k^2,\\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré.}\end{cases}$

Montrer que $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge.

A-t-on $u_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$?

Solution (**Ex.12** – *Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants*)

1. a) Comme la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge, la suite (S_n) converge, vers une limite S. Alors :

$S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0.$

Or : $\forall n \geqslant 1, \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_n \geqslant nu_{2n}$ car u décroît.

Et comme la serie $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, u tend vers 0. Étant de plus décroissante, u est une suite positive. Ainsi : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant nu_{2n} \leqslant S_{2n} - S_n$.
Par encadrement, $nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $2nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) $\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n}$ donc $0 \leqslant 2nu_{2n+1} \leqslant 2nu_{2n}$, et par encadrement, $2nu_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Comme de plus $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad (2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Ainsi, $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, autrement dit : $u_n\, o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. $\forall N \geqslant 1, \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \frac{1}{k^2}$. Comme la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (k^2)u_{k^2} = 1$, ce qui exclut que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On n'a pas : $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 13 *Cyclicité d'ordre 3*

Soit : $n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n = 3p+1 \text{ ou } n = 3p+2, \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \\ -\frac{2}{n} & \text{si } n = 3p, \text{ avec } p \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$

1. Montrer que : $\quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{3p} u_n = \sum_{i=1}^{2p} \frac{1}{p+i}$.
2. À l'aide d'une somme Riemann (et non une série), montrer que $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{3p} u_n$ existe et déterminer cette limite.
3. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Solution (**Ex.13** – *Cyclicité d'ordre 3*)

1. En calculant la somme de tous les $1/n$ et en retranchant ceux tels que n soit multiple de 3 :

$$\sum_{n=1}^{3p} u_n = \sum_{k=1}^{3p} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = \sum_{k=p+1}^{3p} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{2p} \frac{1}{p+i}.$$

2. $\sum_{i=1}^{2p} \frac{1}{p+i} = \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{2p} \frac{2p}{p+i} = \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{2p} \frac{2}{1+2(i/2p)} = \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{2p} f(i/p),$
où $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2}{1+2x}$ est continue. Le théorème sur les sommes de Riemann assure que : $\frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{2p} f(i/p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \ln(3)$

Ainsi : $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{3p} u_n$ existe et vaut $\ln(3)$.

3. Du coup, on a aussi :

$$\sum_{n=1}^{3p+1} u_n = \sum_{n=1}^{3p} u_n + \frac{1}{3p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ln(3),$$
$$\sum_{n=1}^{3p+2} u_n = \sum_{n=1}^{3p} u_n + \frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ln(3).$$

Donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, et sa somme est $\ln(3)$.

Exercice 14 *Terme général défini par récurrence*

On considère la suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \,]\,0\,;+\infty\,[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

1. Dans cette question, on suppose $u_0 > 1$.
   a) Vérifier que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1$, et en déduire : $\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
   b) À l'aide de la suite $\left(\frac{1}{u_n - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ converge et déterminer sa somme.
2. Étudier le comportement de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ lorsque $u_0 \in \,]\,0\,;1\,]$.

Solution (**Ex.14** – *Terme général défini par récurrence*)

1. Dans cette question, on suppose $u_0 > 1$.
a) Se démontre par récurrence, l'hérédité étant assurait par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1).$$

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0.$

Donc u est croissante : soit elle converge vers une limite ℓ, soit elle diverge vers $+\infty$.
Supposons que u converge vers ℓ. Alors $\ell = \ell^2 - \ell + 1$, donc $(\ell-1)^2 = 0$, donc $\ell = 1$, ce qui est absurde car :
$$(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_0 > 1) \Rightarrow (\ell \geqslant u_0 > 1).$$
Donc u diverge et : $\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

c) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ (au fait, $u_n \neq 1$!).
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{1}{u_n(u_n-1)} = -\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_n - 1} = -\dfrac{1}{u_n} + v_n$, doù :
$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{u_n} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (v_n - v_{n+1}) = v_0 - v_{\mathrm{N}+1} = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{\mathrm{N}+1} - 1}$
Comme $u_{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$, la série converge, et sa somme est :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0 - 1}.$$

2. On a, comme en 1.b), u croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0 > 0$.
On montre, par réccurence comme en 1.a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1$.
Par conséquent : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 > u_n \leqslant 1$, et $\dfrac{1}{u_n} \geqslant 1$. Ainsi $\dfrac{1}{u_n}$ ne tend pas vers 0, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ diverge grossièrement lorsque $u_0 \in \,]\,0\,;\,1\,]$.

Exercice 15 *Exponentielle et sinus*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

1. Justifier l'existence de R_n, et rappeler les limites des suites (S_n) et (R_n).

2. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $(n+1)!\mathrm{R}_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Quelle est la nature de la série de terme général $\sin\big(2\pi \mathrm{e}(n!)\big)$.

Solution (**Ex.15** – *Exponentielle et sinus*)

1. R_n étant le reste d'ordre n de la série exponentielle (donc convergente !) de paramètre 1, R_n existe et
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \mathrm{e} \text{ tandis que } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = 0.$$

2. a) $(n+1)!\mathrm{R}_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+k)!}$, or $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{(n+1)!}{(n+k)!} \leqslant \dfrac{1}{(n+2)^{k-1}}$
donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+k)!} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-1}} \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^k \leqslant \frac{1}{n+1}$
d'où $1 \leqslant (n+1)!\mathrm{R}_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

b) Par encadrement, $(n+1)!\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)!}$

3. Partons de : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}_n + \mathrm{R}_n = \mathrm{e}$.
$\sin\big(2\pi \mathrm{e}(n!)\big) = \sin(2\pi n!\mathrm{S}_n + 2\pi n!\mathrm{R}_n) = \sin(2\pi n!\mathrm{R}_n)$ car $n!\mathrm{S}_n$ est un entier naturel.
Or $n!\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sin(2\pi\mathrm{e}(n!)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\pi}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi \times \dfrac{1}{n}$.
Par équivalence de termes positifs à partir d'un certain rang, puisque la série harmonique diverge, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} + \sin\big(2\pi\mathrm{e}(n!)\big)$ diverge.

Exercice 16 *Développement asymptotique du reste des séries de Riemann.*

Soit α un réel de $]\,1\,;\,+\infty\,[$. On définit g sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ par
$$\forall x \geqslant 1, \qquad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$$\mathrm{S}_n(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \mathrm{S}(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$
Contrairement à l'usage courant, la somme $\mathrm{R}_n(\alpha)$ *commence à* n *et non* $n+1$.

1. a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$,
$$\int_k^{k+1} g(x)\mathrm{d}x \leqslant g(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} g(x)\mathrm{d}x.$$

b) En déduire, pour $n \geqslant 1$, l'encadrement
$$\frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \mathrm{S}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) + 1.$$

c) En déduire un encadrement de $\mathrm{S}(\alpha)$.

2. a) Montrer pour $n \geqslant 1$, l'encadrement
$$\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$

b) En déduire : $\qquad \mathrm{R}_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$

3. Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par : $\quad \forall x \geqslant 1, \quad f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

a) Par la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que, pour tout $k \geqslant 1$,
$f(k+1) = f(k) + \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2} \times \dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + \mathrm{I}_k, \quad$ avec $0 \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}$.

b) En isolant $\dfrac{1}{k^\alpha}$ dans l'expression précédente, montrer finalement que

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Solution (**Ex.16** – *Développement asymptotique du reste des séries de Riemann.*)

1. a) Soit $k \geqslant 2$. Par décroissance de g sur $[k-1\,;\,k]$ et sur $[k\,;\,k+1]$,

- $\forall x \in [k-1\,;\,k], \quad g(x) \geqslant g(k)$ entraîne $g(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} g(x)\mathrm{d}t$.
- $\forall x \in [k\,;\,k+1], \quad g(x) \leqslant g(k)$ entraîne $\displaystyle\int_{k}^{k+1} g(x)\mathrm{d}x \leqslant g(k)$.

b) Par la relation de Chasles appliquée aux encadrements précédents pour k allant de 1 à n sur la première inégalité, et pour k allant de 2 à n sur la seconde, on a :

$$\int_1^{n+1} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(\alpha) \leqslant \int_1^{n} g(t)\mathrm{d}t + g(1).$$

En calculant les deux intégrales de cet encadrement, on obtient, pour $n \geqslant 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \mathrm{S}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) + 1.$$

c) En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\alpha-1} \leqslant \mathrm{S}(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} + 1.$$

2. a) En sommant à l'aide de la relation de Chasles, pour $n \geqslant 1$,

$$\int_n^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t.$$

Et en calculant ces deux intégrales, on obtient l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$

b) $0 \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) - \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

Or $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)}{\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}} = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{\alpha-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

3. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. f étant de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[k\,;\,k+1]$, la formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire :

$$f(k+1) = f(k) + f'(k)(k+1-k) + \frac{f''(k)}{2}(k+1-k)^2 + \int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{2} f^{(3)}(t)\mathrm{d}t.$$

Or $f'(k) = \dfrac{1}{k^\alpha}$, $f''(k) = \dfrac{-\alpha}{k^{\alpha+1}}$,

$$\int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{2} f^{(3)}(t)\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{2} \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\mathrm{d}t,$$

et $\forall t \in [k\,;\,k+1], \quad 0 \leqslant \dfrac{(t-k)^2}{2}\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}} \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$, ce qui donne par croissance de l'intégrale,

$$f(k+1) = f(k) + \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \mathrm{I}_k, \text{ avec } 0 \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{N} \geqslant n$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha} &= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \left(f(k+1) - f(k) + \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} - \mathrm{I}_k\right) \\ &= f(\mathrm{N}+1) - f(n) + \frac{\alpha}{2}\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^{\alpha+1}} - \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathrm{I}_k \qquad (1).\end{aligned}$$

Que peut-on dire de chaque terme lorsque N tend vers $+\infty$?

- $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} f(\mathrm{N}+1) = 0$, sans souci.
- $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} -f(n) = -f(n) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$, no problem.
- $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+1) = \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ par 4.b).
- De $0 \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}$, on tire, par comparaison avec la série de Riemann convergente $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^{\alpha+2}}$ la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \mathrm{I}_k$, et on a, en sommant pour $k \geqslant n$ l'encadrement,

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+2) \leqslant \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha+1}},$$

la dernière majoration résultant de 4.a).

Alors $0 \leqslant n^\alpha \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha}{2} \times \frac{n^\alpha}{(n-1)^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ montre que par encadrement,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{I}_k = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Conclusion : en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, il vient

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$