Martingales à temps discret

Exo1 : Soit (X_n) une suite de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Soient $(\mathcal{F}_n)$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$.

$\mathcal{B}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

(X_n) est un $(\mathcal{F}_n)$-MG $\Rightarrow$ (X_n) est une $(\mathcal{B}_n)$-MG

Caractère Martingale : $\cdot\ \mathbb{E}[X_{n+1} / \mathcal{B}_{\cancel{k}}] \overset{?}{=} X_{\cancel{k}}$, $t \leq n$

On a $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{B}_{\cancel{k}}] = \mathbb{E}[X_{n+1} | \sigma(X_1, \dots X_{\cancel{n}})]$

la plus petite tribu qui rend X_n mesurable

$\cdot\ \forall n$, X_n est $\mathcal{B}_n$- mesurable. $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ (toutes les événements ~~liés~~ fabriqués à l'aide des $X_1 \dots, X_n$

donc évident

$\cdot\ \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ car (X_n) est $(\mathcal{F}_n)$-MG donc intégrable

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$$

(on prend la plus petite

Propriété du cours

$$\mathbb{E}\big[\, \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \,\big|\, \mathcal{B}_n \big] = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{B}_n] \quad \text{car } \mathcal{B}_n \subset \mathcal{F}_n$$

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{B}_n] \big| \mathcal{F}_n\big] = \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{B}_n] = X_n \quad \text{car } X_n \text{ est } \mathcal{B}_n\text{-mesurable}$$