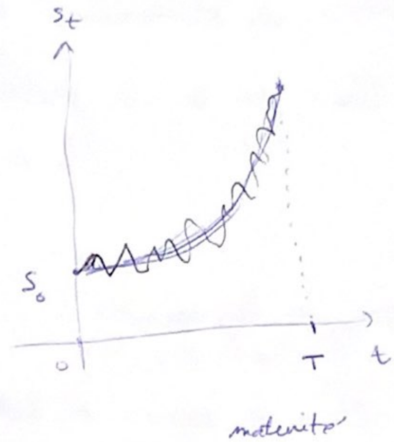
Méthodes de Monte-Carlo pour la Finance :

Equa diff stochastique : $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$ σ est la volatilité



Si $\sigma = 0$, $dS_t = S_t \cdot \mu dt \Rightarrow S_t = S_0 \cdot e^{\mu t}$

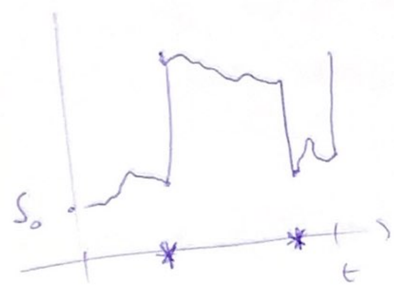
(E.D.O)

Tout les prix actualisés sont des martingales.

W_t : mouvement Brownien, dW_t ?

Integrale Stochastique : $\int_0^T \theta_t \, dW_t$.

Simulation d'évolution d'un actif risqué sans et avec des sauts :



quelle est la loi des sauts ?

$P(\lambda)$

. Optimisation d'un portefeuille : Quelle partie investir dans un actif risqué ou actif sans risque ?

Actifs : Bond, Obligation, Stock, Action := contrats qui génèrent uniquement un flux d'argent ou d'autres actifs.

Produits dérivés : Option, Forward, Future, Swap : contrats dont les valeurs fluctuent en fonction de l'évolution du taux ou du prix d'un autre produit ou actif.

Rôle des dérivés : Couverture (Hedging) des risques, gestion de portefeuille

Pour modeliser le marché il faut des processus stochastique (une famille de V.A). S_t, V_t ... (objets mathématiques permettant de décrire des phénomènes aléatoires risqués et non aléatoire.

. Choix des lois de probabilité : Intro du Mouvement Brownien W_t.

Actif → lognormale $S_t = S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$

. Choix des espaces où habitent les v.a. : Espaces de dim infinie.

$\mathcal{L}^2(\omega)$

. Modélisation du marché : principe fondamentale : Principe d'Absence d'opportunité d'arbitrage

⇒ Marché est honnête "No free lunch"

. Intro des Martingales et Simulation.

. Calcul des prix : $\mathbb{E}[V_t \mid \mathcal{F}_t]$ grâce au Th. des Grands Nombres.

M_t - Martingale ⇒ $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$

$M_t = e^{-\mu t} \cdot S_t$ - est une Martingale.

. Espérance conditionnelles. Quelle mesure de probabilité ? Par rapport à quelle condition. Intro à la filtration $\mathcal{F}_t$ équivalente à l'info. complète sur les processus $\mathbb{E}[V_t \mid \mathcal{F}_t]$

Filtration : famille de tribus

Calcul des prix nécessite de calcul différentiels $d\,V(t, S_t)$

Application des series de Taylor aux fonctions de var. alea. ⇒ Lemme d'Ito

Introduction des modèles : Temps discret : dates de trading sont discrets

$t \in [0, 1, \ldots T-1, T]$

Temps continu : $t \in [0, T]$

- Gestion du risque : Optimisation d'un portefeuille par MC.
- Simulation d'évolution d'un actif risqué (Modèle de Black & Schols)

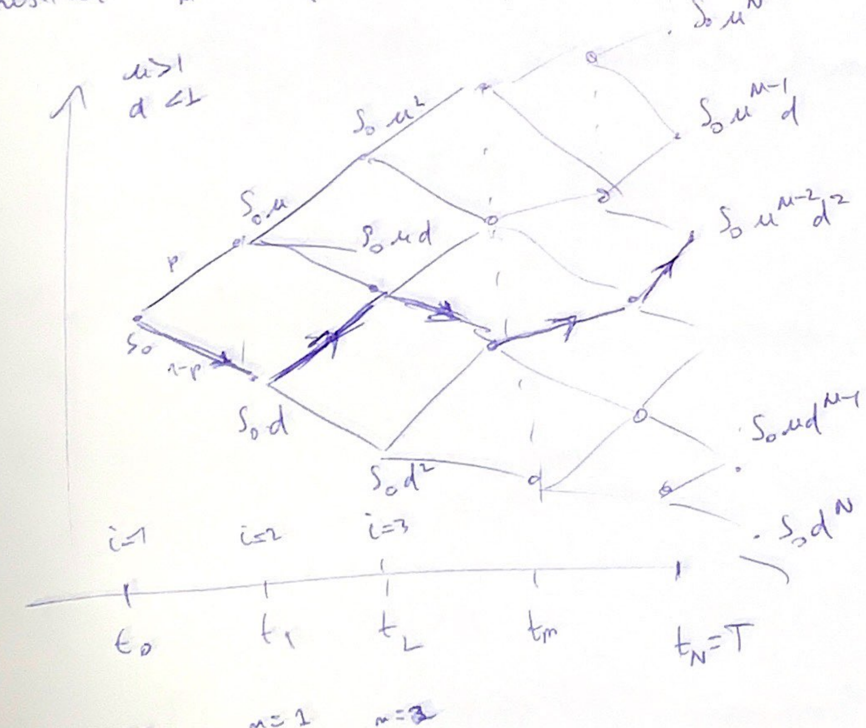
$$dS_t = S_t\,(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)$$

(Modèle Merton)

- Simulation .

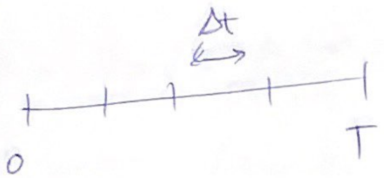
//

Arbre Binomial : L'évolution de l'actif sous-jacent est un processus stochastique discret. L'intervalle $[0, T]$ est discrétisé $t_m = \Delta t \cdot m$. À chaque instant t_m on fait correspondre le prix S_m discret.



$0 \le i \le m$

$$S(m, i) = S_0\,(u)^i\,(d)^{m-i}$$



$\Delta t = \frac{T}{N}$, $t(N+1) = T$

U - suit la loi uniforme = rand()

actf(n) ↙ trajectoire

actf(1) = S_0

```
for (n = 1 : N)
    if (rand() < p)
        actf(n+1) = u · actf(n)
    else
        actf(n+1) = d · actf(n)
    Endif
Endfor
```

Pour visualiser sur MatLab

```
plot (S, '*')
hold on    ← superposer
plot (actf)
```

Comment calibrer le modèle pour qu'il approche le modèle Black & Scholes ?

Il faut definir les paramètres du modèle :

$$\begin{cases} d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ p = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \end{cases}$$

```
for (n = 1 : N+1)
    for (i = 1 : n)
        S(n, i) = S0 · u^(i-1) d^(n-i)
    End for
End for
```

A.N. :

$r = 0,1$

$\sigma = 0,5$

$T = 0,5$

$N = 20$

Tribu : Espace de proba $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\qquad$ $\mathcal{F}$: tout les évènements élémentaires.

En finance : l'ensemble d'évènements Ω est infini.

Tribu nécessaire pour définir la filtration et à chaque t une proba sur la filtration

Filtration : famille des évènements associés à chaque instant temporel.

Les prix sont des espérances conditionnelles par rapport à une filtration :

$$\mathbb{E}[V_T \mid \mathcal{F}_t] \quad , \quad \mathbb{E}\left[\,\mathbb{E}[V_T \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[V_T \mid \mathcal{F}_s]$$

(si $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$)

<u>Tribu engendré</u> : $\sigma(C)$: plus petite tribu contenant C.

intersection de toutes tribus contenant C.

$$\sigma\left(]-\infty, a]\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ : tribu engendré par les fermés de } \mathbb{R}$$

- Tribu dans le Modèle Binomial à 1 période

- $\Omega = \{\phi, U, D\}$
- En $t=0$, on ne dispose d'aucune information sur l'évolution de l'actif :

$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$

- $A_U = \{w_1, w_1 = U\}$ $\quad A_D = \{w_1 \in \Omega, \; w_1 = D\}$

$\mathcal{F}_1 = \{A_U, A_D, \phi, \Omega\}$

- $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$ couple de tribus representant

Modèle Binomial à 2 périodes : Événements élémentaires Ω

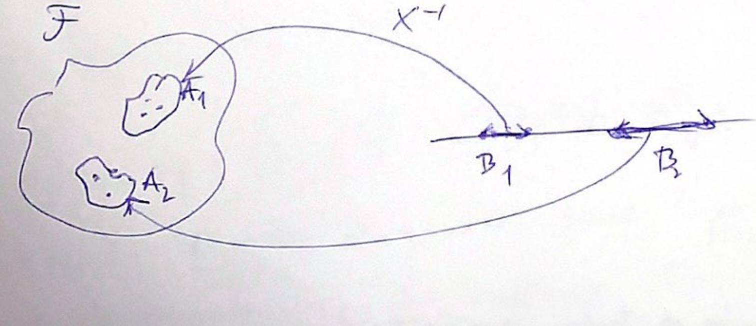
$\Omega = \{ \emptyset, (w_1, w_2) \in \Omega \text{ tq } w_{1,2} = U \text{ ou } D \}$

$= \{ \emptyset, (UU), (UD), (DU), (DD) \}$

$A_U = \{ (UU, UD) \}$ $\quad A_D \{ (DD, DU) \}$

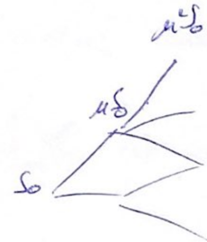
Mesure de Probabilité, Variable aléatoire X

$X : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \; X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$



S_1 est $\mathcal{F}_1$-mesurable ssi elle est connue avec l'information donnée par $\mathcal{F}_1$ ie disponible à l'instant $t=1$.

S_1 est $\mathcal{F}_1$-mesurable



Tribu $\mathcal{F}_2 = \{ \emptyset, \Omega, (UU, UD) \ldots (DD, DU) \}$

. l'événement (UU) impose le prix $u^2 S_0$ au S_2

À chaque valeur S_2 (ou à un ensemble de valeurs)
correspond un événement de la tribu $\mathcal{F}_2$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ , \ S_2^{-1}(B) \in \mathcal{F}_2$

. l'événement (UD, DU, UU) impose le prix le plus élevé S_0u^2
le prix moyen : $S_0 ud$

$\mathcal{F}_2$ est engendrée par $S_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2 = \sigma(S_2)$

Loi d'une v.A. $\mu_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

. $S_T = S_0 . \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\, \mathcal{N}(0,1)\right)$

Le prix de l'actif selon le modèle Black & Scholes suit une loi lognormale
(on peut la simuler avec la méthode Box-Muller ou Rejet).

• Loi forte des grands Nombres : $X_1, \dots, X_n$ i.i.d.

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to +\infty} \overline{X}_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}[X] \quad \text{presque sûrement.}$$

• Théorème Central Limite $X_1, \dots, X_n$ i.i.d d'espérance μ et var σ^2

alors la loi $Y_n = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$ tend vers $\mathcal{N}(0,1)$

c-à-d $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \leq b\right) = \mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Intervalle de confiance : on choisit $a = -1,96$ $b = 1,96$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right| \leq 1,96\right) = 0,95$$

$$\mu \in \left[\overline{X}_n - \frac{1,96\,\sigma}{\sqrt{n}} \,;\, \overline{X}_n + \frac{1,96\,\sigma}{\sqrt{n}}\right] = I_{95} \quad \mu = \mathbb{E}[X]$$

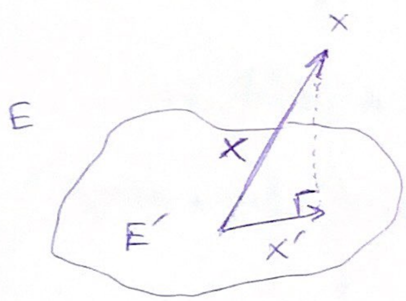
$$\mathbb{P}(\mu \in I_{95}) = 0,95$$

Espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{F}$

- $X : G \to \mathbb{R}$ v.a.
- Tribu $\mathcal{F} \subset G$, un événement $A \in \mathcal{F}$
- $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ est la v.a. $\mathcal{F}$-mesurable
- $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ vérifie la relation : $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \cdot \mathbb{1}_A]$, $\forall A \in \mathcal{F}$

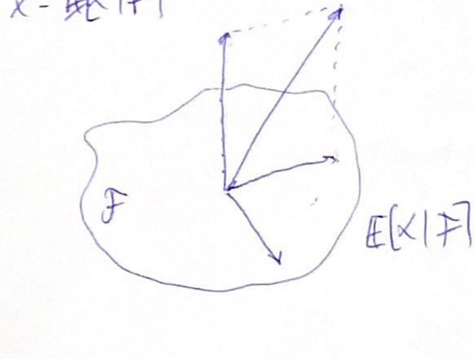
Cette définition illustre que :

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ est la projection orthogonale de la v.a X sur la tribu $\mathcal{F}$.
- $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ est la meilleure estimation de X sachant l'info contenue dans $\mathcal{F}$.



← meilleure approximation du vecteur X

$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ est une v.a. habitant dans $\mathcal{F}$.

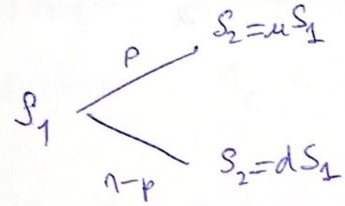


Si on calcule $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$, on effectue la moyenne des valeurs de X sur les événements hors $\mathcal{F}$.

Démo : $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \cdot \mathbb{1}_A]$, $\forall A \subset \mathcal{F}$

$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])\mathbb{1}_A] = \langle X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}], \mathbb{1}_A \rangle = 0$, $\forall A \subset \mathcal{F}$

Ainsi $X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \perp \mathcal{F}$.



$\mathbb{E}[S_2 | \mathcal{F}_1]$ est la meilleure estimation de S_2 sachant l'info contenue dans $\mathcal{F}_1$

$$\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1] = u S_1 \cdot p + d \cdot S_1 (1-p)$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1]] = u \cdot \mathbb{E}[S_1] p + d \cdot \mathbb{E}[S_1] \cdot (1-p)$$

$$= (u S_0 \cdot p + d \cdot S_0 (1-p)) \cdot (up + d \cdot (1-p))$$

Martingale : Un processus discret $(M_n)_{1 \leq n \leq N}$ est une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{P}$ si :

- $\mathbb{E}[|M_n|] < +\infty \quad \forall n \leq N$
- M_n est $\mathcal{F}$-adapté
- M_n vérifie la propriété de martingale :

$$\forall k \leq n \quad \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_k] = M_k$$

On en déduit : $\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[M_n] = M_0$

Dans chaque modèle, un processus actualisé décrivant un prix est une Martingale.

Exemple de Martingale :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ X_n une famille de v.a. de Bernoulli indépendants $\forall n$ (i.i.d)

- $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$
- Soit $\mathcal{F}$ la filtration naturelle générée par le processus X_n.
- On définit le processus stochastique qui s'appelle une promenade aléatoire : $M_0 = 0$ $\quad M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

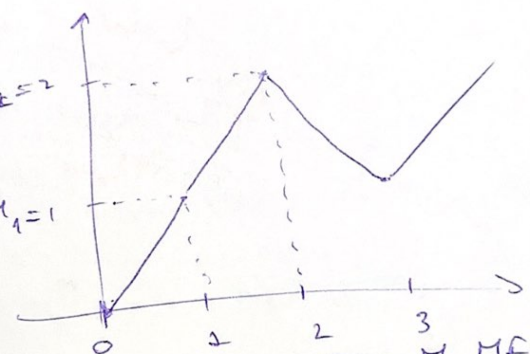
Montrons que : $\begin{cases} \text{le processus } M_n \text{ est } \mathcal{F}\text{-martingale} \\ \text{le processus } M_n^2 - n \text{ est } \mathcal{F}\text{-martingale} \end{cases}$

$M_0 = 0$

$M_1 = X_1 = 1$

$M_2 = X_1 + X_2 = 2$

$M_3 = \underbrace{X_1 + X_2}_{2} + \underbrace{X_3}_{-1} = 1$



M, MFK

```
function [f] = pas()
    if (rand <1/2)
        f = 1
    Else
        f = -1
    Endif
End function
```

```
function [M] = Processus_M(K)
    M(1) = 0
    for (i = 1:K-1)
        M(i+1) = M(i) + pas()
    ENDfor
    MFK = M(K)
End function
```

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n+1} X_i \mid \mathcal{F}_n\right]$$

filtration : suite croissante de tribu

$$= \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$$

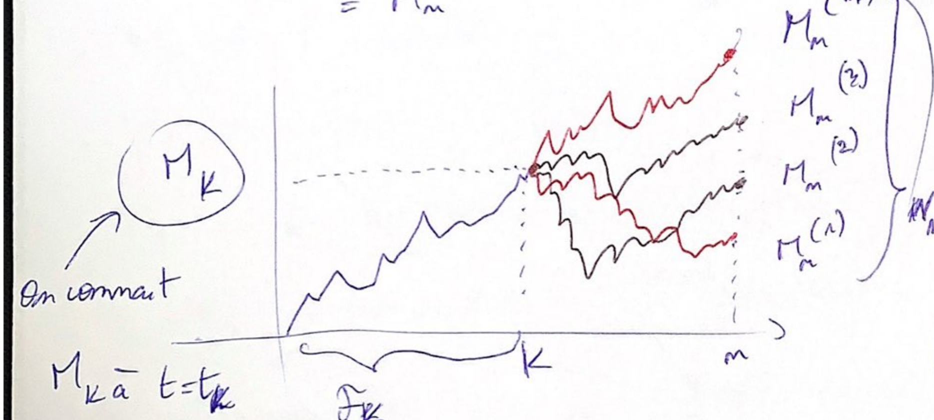
$$= \mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{F}] + \dots + \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= X_1 + \dots + X_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i + \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= M_n + \underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]}_{=0}$$

$$= M_n$$



différents possibilités

$N_{mc} = 4$ trajectoires

$$\frac{1}{N_{mc}} \sum_{p=1}^{N_{mc}} M_n^p \approx M_K$$

M_K à $t = t_K$

$$M_k = \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_k] = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{p=1}^{N_{mc}} (M_n)^p$$

```
for (j = 1 : Nmc)
    for (i = K+1 : N-1)
        M(i+1) = M(i) + pas()
    End for
    last_value [j] = M(n)
END for
Esperance = mean (last_value)
display (Esperance)
disp (MFK)
```

(dernière valeur de chaque trajectoire)

```
function [        ] = Martingale()
Nmc = 20
K = 100
N = 300
[M, MFK] = Processus_M(K)
```

Plus N_{mc} est élevé plus on se rapproche de la bonne valeur avec une erreur de $\frac{1}{\sqrt{N_{mc}}}$

M_k est une v.a. dont une valeur dépend d'un scénario de $\mathcal{F}_k$ réalisé.

M_k est une constante par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

Propriété Markovien (accroissements indépendants)

Tout processus vérifiant cette propriété est une martingale

(Suite de v.a.)

(Sans tenir compte de l'intérêt r
ou en tenant compte,
En moyenne on ne gagnera rien.

processus discret vérifiant

$\forall k \leq n \quad \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_k] = M_k$

Mouvement Brownien :

~~théorème~~ Définition théorique : Processus W_t vérifiant : $\mathcal{F}$ filtration

- W_t est $\mathcal{F}$-adapté
- $W_0 = 0$ p.s.
- W_t est à accroissements indépendants :
- $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous $t, s \in [0, T]$ tq $s \leq t$
- $W_t - W_s \sim W_{t-s} \sim N(0, t-s)$ $t, s \in (0, T)$ tq $s \leq t$
- W_t est continu, ie. $B = t \longmapsto W_t(\omega)$ est continue pour presque tout ω.
- W_t est à accroissements stationnaires et gaussiens.

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad \mathbb{P}[X_i = 1] = \mathbb{P}[X_i = -1] = \frac{1}{2}$$

1) M_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. M_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

En effet, M_n est mesurable par rapport à la filtration générée par $X_1, \dots, X_n$ car M_n est une fonction continue de $X_1, \dots, X_n$.

2) $\mathbb{E}\left[|M_n|\right] = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \underbrace{|X_i|}_{=1}\right] = n < +\infty \quad \forall n$

3) $\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$ linéarité

$= \mathbb{E}\left[M_n \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$ M_n est constante par rapport à $\mathcal{F}_n$

$= M_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right]$ car $\mathcal{F}_n$-mesurable

$= M_n + \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1)$ car X_{n+1} est indépendante de l'information connue jusqu'à n.

$= M_n$ donc de $\mathcal{F}_n$

M_n est à accroissements finis, $\mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = 0$

$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n$

$\mathbb{E}\left[M_1 \mid \mathcal{F}_0\right] = M_0$

$\mathbb{E}\left[M_2 \mid \mathcal{F}_1\right] = M_1 \Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[M_2] \mid \mathcal{F}_1\right] / \mathcal{F}_0\right] = \mathbb{E}\left[M_1 \mid \mathcal{F}_0\right] = M_0$

$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_2$ donc $\mathbb{E}\left[M_2 \mid \mathcal{F}_0\right] = M_0 \Rightarrow \mathbb{E}\left[M_n \mid \mathcal{F}_0\right] = M_0$