Espérance conditionnelle

Exercice 1. Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Calculer $E(X|\mathcal{G})$ dans les cas suivants a) $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{G} = \sigma(\{A\}$ où $A \in \mathcal{F}$, $0 < P(A) < 1$, puis $\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, \ldots, A_n\})$ une partition de Ω formée par des éléments de $\mathcal{F}$ t.q. $0 < P(A_i) < 1$.
b) Calculer $E(X|Z)$, si Z est une v.a. p.s. constante ; (resp. discrète).

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. positives , indépendantes, de même loi et d'éspérance $m = \mathbb{E}(X_1)$ finie. Soit N une v.a. entière positive indépendante des X_n d'éspérance $M = \mathbb{E}(N)$ finie.

1. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et S_N une variable aléatoire définie par :
$$S_N(\omega) = S_n(\omega) \text{ si } N(\omega) = n > 0 \qquad \text{et } S_N(\omega) = 0 \text{ si } N(\omega) = 0.$$
Calculer $\mathbb{E}(S_N)$ en fonction de m et de M
2. On suppose $0 \leq m \leq 1$. On pose $\begin{cases} Z &= 1 & \text{si} & N = 0 \\ Z &= X_1X_2...X_n & \text{si} & N = n \geq 1 \end{cases}$ Calculer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de m et de G_N la fonction génératrice de N.

Exercice 3. Soient X_1 et X_2 deux v.a. suivant resp. la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$.
a) Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$.
b) Calculer $E(X_1|X_1 + X_2)$.

Exercice 4. Soient X_1 et X_2 deux v.a. suivant ue loi exponentielle de paramètre λ.
a) déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = t > 0$.
b) Calculer $E(X_1|X_1 + X_2)$.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a. telles que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(p, n)$.

a) Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y.
b) Les v.a. $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes ?
c) Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$.

Exercice 6. Soit X une v.a. symétrique telle que $P(X = 0) = 0$ (donner un exemple d'une telle v.a.).
1) Montrer que les v.a. $|X|$ et $Y = signe(X)$ sont indépendantes.
2) Calculer $E(X|X^2)$.
3) Calculer $E(f(X)|X^2)$ si f est une fonction continue et impaire (resp. paire).
4) calculer $E(f(X)|X^2)$ si f est une foction continue.
5) Soit ξ une variable aléatoire de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Trouver $\mathbb{E}(\xi|\xi^2)$.

Exercice 7. Soient $0 < \rho < 1$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité est :
$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\}$$

1) Trouver $\alpha^* \in \mathbb{R}$ t.q. $E\{(X - \alpha^* Y)^2\} = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} E\{(X - \alpha Y)^2\}$.

2) Montrer que $X - \alpha^* Y$ et Y sont indépendantes.

3) En déduire que $E\{(X - \alpha^* Y) h(Y)\} = 0$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $E\{h^2(Y)\} < \infty$.

4) On note H l'ensemble de toutes les fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $E\{h^2(Y)\} < \infty$. Montrer que

$$\inf_{h \in H} \mathbb{E}((X - h(Y))^2) = E\{(X - \alpha^* Y)^2\}$$

5) Déterminer la loi de X sachant $Y = y$ et calculer $\mathbb{E}(X|Y)$. Comparer $\mathbb{E}(X|Y)$ et $\alpha^* Y$.

Exercice 8. Soit (X, Y) un vecteur gaussien non dégénéré, centré et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $E(Y|X) = a + bX$, où a et b sont deux réels à préciser.
2) Calculer $E(Y|X + Y)$.

Exercice 9. Soient X et N des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On sait que $\mathbb{E}(N) = m$ et $\mathrm{Var}(N) = \sigma^2$ ou m et σ sont des constantes réelles positives (mais on ne connaît pas la loi de N). on suppose que la probabilité conditionnelle de X sachant $N = n \geq 0$ est donnée par :

$$P(X = k|N = n) = \begin{cases} \frac{1}{1+n} & \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X|N)$, $\mathbb{E}(X^2|N)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. On suppose que $Y = N - X$ et X sont indépendantes, calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathbb{E}(N|X)$, et $\mathbb{E}(N|Y)$.

Exercice 10. Soit (ξ, η) un vecteur aléatoire ayant la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(\xi = -1, \eta = -1) = 1/8, \quad \mathbb{P}(\xi = 0, \eta = -1) = 1/12, \quad \mathbb{P}(\xi = 1, \eta = -1) = 1/8,$$

$$\mathbb{P}(\xi = -1, \eta = 1) = 5/24, \quad \mathbb{P}(\xi = 0, \eta = 1) = 1/6, \quad \mathbb{P}(\xi = 1, \eta = 1) = 1/8.$$

Trouver

$a)$ $\mathbb{E}(\xi|\eta)$, $\quad b)$ $\mathbb{E}(\eta|\xi)$, $\quad c)$ $\mathbb{E}(\xi|\eta^2)$, $\quad d)$ $\mathbb{E}(\xi|\eta^3)$, $\quad e)$ $\mathbb{E}(\eta|\xi^2)$, $\quad f)$ $\mathbb{E}(\eta|\xi^3)$.