1

Système dynamique
TD 2.

Exercice 1

? Sol unique ?

(A) : $\begin{cases} y'(t) = (y(t))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (B) : $\begin{cases} y'(t) = |y(t)| \cdot |t|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} y'(t) = |y(t)|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

de la forme $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 . \end{cases}$

Pour (A) ? f loc^t Lip ?
(en y)

$f(y) = y^2$

I intervalle borné (compact) $y_1, y_2 \in I$.

Accroissement finis : $f(y_1) - f(y_2) \leq \sup_I |f'| \, |y_1 - y_2|$

$|f(y_1) - f(y_2)| \leq \underbrace{\sup_{y \in I} |2y|}_{cste(I)} . |y_1 - y_2|$

$\Rightarrow$ f est localem^t Lip.

Unicité globale : s'il existe $y : I \to \mathbb{R}$
sol de (A) $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}$
alors $\forall t \in I$, $y(t) = \tilde{y}(t)$

Pour (B) I intervalle $y_1, y_2 \in I$.
t fixé

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)|$$
$$|(|y_1| + |t|^{1/2}) - (y_2 + |t|^{1/2})| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$$

$$y_1 = y_1 - y_2 + y_2$$
$$|y_1| \leq |y_1 - y_2| + |y_2|$$
$$|y_1| - |y_2| \leq |y_1 - y_2|$$

Donc $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq |y_1 - y_2|$

$\Rightarrow$ f est loc^t lip en y. (Rem : f n'est pas loc^t lip en $\underline{t}$)

$\Rightarrow$ Unicité globale ↳ pas grave

Pour (C) : f loc^t lip sur tout intervalle I ne contenant pas 0

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq \sup_I |f'| \, |y_1 - y_2|$$

$$\leq C(I) \, |y_1 - y_2|$$

$$C(I) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \varepsilon = \text{dist}(0, I)$$

$f(y) = |y|^{1/2}$

$f'(y) = \frac{1}{2} \frac{1}{|y|^{1/2}}$ si $y > 0$

$f'(y) = -\frac{1}{2} \frac{1}{|y|}$ si $y < 0$.

On ne peut pas appliquer le th d'unicité globale quand $0 \in I$ car $f|_I$ n'est pas localem^t lip.

pour ex : $|f(y) - f(0)| = |y|^{1/2}$

et $\frac{|f(y) - f(0)|}{|y|} = 1/|y|^{1/2}$ pas borné qd $y \to 0$

De fait, (C) admet plusieurs solution

- $y = 0$ est sol
- $y(t) = Ct^2$

$$2Ct = |C|^{1/2} |t|$$

$y(t) = \frac{1}{4}t^2$ est sol de (C)

sur $t \in [0, +\infty[$, car $y'(t) = t/2$

$$|y(t)|^{1/2} = \frac{1}{2}|t|$$

et $\begin{cases} y(t) = \frac{1}{4}t^2, & t > 0 \\ y(t) = -\frac{1}{4}t^2, & t \leq 0 \end{cases}$ sol sur $\mathbb{R}$

d) Dans (A), (B) et (C)

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(t, y) \to f(t, y)$$

(A) : $\begin{cases} y'(t) = (y(t))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = dt = d\left(-\frac{1}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = t + c \Leftrightarrow y = -\frac{1}{t+c}$$

$$y(t) = -\frac{1}{t+c}$$

singularité en $t = -c$.

$$y(0) = 1 = -\frac{1}{0+c} \Rightarrow c = -1$$

Donc $y(t) = -\dfrac{1}{t-1}$

$]-\infty; 1[$: intervalle de temps maximal

→ pas d'existence globale (càd $\forall t \in \mathbb{R}$)

(B) $\begin{cases} y'(t) = |y(t)| + |t|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$f(t, y) = |y| + |t|^{1/2}$$
$$|f(t,y)| \leq \underbrace{1 \cdot |y| + |t|^{1/2}}_{\text{croissance au plus affine en } |y| \text{ à l'}\infty}$$

→ ∃ globale

(c) $\begin{cases} y'(t) = (y(t))^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Existence globale sur [illegible] tout intervalle $I =]0, +\infty[$
ou $I =]-\infty; -a[$ $a \geq 0)$
car $|f(y)| \leq |y|^{1/2} \leq C(I)|y|$ $\qquad C(I) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

En fait sur $\mathbb{R}$
Existence sur $]-2a ; 2a[$.

Exercice 2.

$$\begin{cases} x''(t) + e^{t}\sin(x'(t)) + 2\exp[-(x(t))^2] = e^{t^2} \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases} \quad *$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -e^{t}\sin(x'(t)) - 2e^{-x^2(t)} + e^{t^2} \end{pmatrix}$$

$$F\left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -e^{t}\sin(y_1) - 2e^{-y_0^2} + e^{t^2} \end{pmatrix}$$

Si on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$

$$* \iff \begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
? $Y : I \to \mathbb{R}^2$?
? I $\quad 0 \in I$
F est C^1
Cauchy-Lip $\Rightarrow$ $\exists!$ LOCALE c.à.d pour un intervalle $I \ni 0$
dont on ne sait pas si $= \mathbb{R}$

③

Exercice 12

$$x'' + x = f(t)$$

$\rightsquigarrow X'(t) = \underbrace{A}_{cste} X(t) + b(t)$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x' = x' + 0 \\ x'' = -x + f(t) \end{cases}$$

$$X(t) = R_A(t,0)\,X(0) + \int_0^t R_A(t,s)\,b(s)\,ds = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\, b(s)\,ds$$

$$e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

Donc en regardant la $1^{\text{ère}}$ composante

$$X(t) = x_0 \cos t + x_1 \sin t + \int_0^t \sin(t-s)\, f(s)\, ds$$

3) $x(\cdot)$ 2π per $\iff \begin{cases} \int_0^{2\pi} f(s) \sin s\, ds = 0 \\ \int_0^{2\pi} f(s)\cos(s)\, ds = 0 \end{cases}$ $(*)$

f 2π per

$\underline{1^{\text{ère}} \text{ méthode :}}$

$\forall t \quad x(t+2\pi) = x(t)$

$$\int_0^t + \int_t^{t+2\pi} = \int_0^t + \int_0^{2\pi}$$

$$\forall t \int_0^{t+2\pi} \underbrace{\sin(t-s)\, f(s)\,ds}_{2\pi\text{ - per}} = \int_0^t \sin s\, f(s)\, ds$$

$$(\dots) \ \forall t \int_0^{2\pi} \sin(t-s)\, f(s)\,ds = 0$$

$$= \int_0^{2\pi} [\sin t \cos s - \cos t \sin s]\, f(s)\, ds$$

$$0 = \sin t \int_0^{2\pi} \cos s \, f(s)\, ds = \cos t \int_0^{2\pi} \sin s \, f(s)\, ds$$

$$\downarrow$$

$\forall t \to (*)$ ■

<u>2e méthode</u> :

$$X'(t) = AX(t) + b(t)$$

$(**)$ $X(\cdot)$ sol $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{car les coeff de l'EDO sont } 2\pi\text{-pér}}}{\iff}$ $X(\cdot + 2\pi)$ sol

$x(\cdot)$ 2π-pér $\iff \begin{pmatrix} x(\cdot) \\ x'(\cdot) \end{pmatrix}$ 2π-pér

$\iff X(\cdot)$ 2π-pér

$\iff X(2\pi) = X(0)$ } $(**)$ + unicité de

$$X(2\pi) = R(2\pi, 0)\, X(0) + \int_0^{2\pi} R(2\pi, s)\, b(s)\, ds$$

$$= \underbrace{e^{2\pi A}}_{I} X(0) + \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

$$= X(0) + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

$$X(2\pi) = X(0) \iff \begin{cases} -\int_0^{2\pi} \sin s \, f(s)\, ds = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos s \, f(s)\, ds = 0 \end{cases}$$

■

Exercice 14

$t \geq 1, \quad \ddot{x}(t) - 2t^{-2}x(t) = 0 \quad (1)$

1) Mq t^α pour solution.

$\frac{d^2}{dt^2} t^\alpha = \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2}$

$\Rightarrow -\frac{2}{t^2} t^\alpha = -2t^{\alpha-2}$

$\Rightarrow \alpha(\alpha-1) - 2 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$

D'où $\alpha \in \{2; -1\}$

2) On écrit (1) sous la forme matricielle

$X'(t) = A(t)X(t) \quad (2)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{t^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

Résolvante :

On connaît 2 solut de (1)

$\rightarrow$ solutions pour (2) : $X_\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^\alpha \\ \frac{d}{dt} t^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^\alpha \\ \alpha t^{\alpha-1} \end{pmatrix}$ avec $\alpha = 2$ ou -1

Rem : a) $X_2(\cdot)$ et $X_{-1}(\cdot)$ sont linéaires indépendantes :

$\lambda X_2(\cdot) + \mu X_{-1}(\cdot) = 0 \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t^{-1} \\ -2t^{-2} \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda t^2 + \mu t^{-2} = 0 \\ 2\lambda t - 2\mu t^{-2} = 0 \end{cases} \forall t \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

b) En fait pour vérifier l'indep, il suffit de le faire en un t_0.

$$\det(X_{-1}(t_0), X_2(t_0)) \neq 0$$

par ex : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$

Calcul de la résolvante :

$X(t) = R(t,s)X(s)$

$\forall X(\cdot)$ sol de $(\star)$

$X_{-1}(t) = R(t,s)X_{-1}(s)$

$X_2(t) = R(t,s)X_2(s)$

$$\begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R(t,1))_{11} & (R(t,1))_{12} \\ (R(t,1))_{21} & (R(t,1))_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} \\ -s^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 \\ 2s \end{pmatrix}$$

Il suffit de calculer $R(t,1)$

$\left(R(t,s) = R(t,1)R(1,s) = R(t,1)R(s,1)^{-1} \right)$

$$\begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} = R(t,1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = R(t,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R(t,1)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \right)$$

$$R(t,1) = \begin{pmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -t^{-2} & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -t^{-2} & 2t \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2t^{-1} + t^2 & -t^{-1} + t^2 \\ -2t^{-2} + 2t & t^{-2} + 2t \end{pmatrix}$$

$I = R(s,s) = R(s,1)R(1,s)$

...

4)

De façon plus générale

Si $X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot)$ sont des sol linéairement indépendantes de $x'(t) = A(t)x(t)$

(↳ il suffit de vérifier l'indep des vect $(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0))$)

$$R(t,s) = V(t)V(s)^{-1}$$

où $V(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$

$$\begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} = R(t,s)\begin{pmatrix} s^{-1} \\ -s^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^{2} \\ 2t \end{pmatrix} = R(t,s)\begin{pmatrix} s^{2} \\ 2s \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{2} \\ 2t \end{pmatrix}\right) = R(t,s)\left(\begin{pmatrix} s^{-1} \\ -s^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^{2} \\ 2s \end{pmatrix}\right)$$

càd

$$\begin{pmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -t^{-2} & 2t \end{pmatrix} = R(t,s)\begin{pmatrix} s^{-1} & s^2 \\ -s^{-2} & 2s \end{pmatrix}$$

$$R(t,s) = \begin{pmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -t^{-2} & 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^{-1} & s^2 \\ -s^{-2} & 2s \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -t^{-2} & 2t \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2s & -s^2 \\ s^{-2} & s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2t^{-1}s + t^2 s^{-2} & -s^2 t^{-1} + s^{-1}t^2 \\ -2t^{-2}s + 2ts^{-1} & s^2 t^{-2} + 2ts^{-1} \end{pmatrix}$$

3) $x''(t) - \frac{2}{t^2} x(t) = t^p$

$x''(t) - \frac{2}{t^2} x(t) = f(t) \quad \to \quad X'(t) = A(t) X(t) + b(t)$

$$X(t) = R(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s) b(s)\, ds$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2t^{-1}+t^2 & -t^{-1}+t^2 \\ -2t^{-1}+2t & t^{-2}+2t \end{pmatrix} v + \underbrace{\int_1^t \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2t^{-1}s+t^2s^{-2} & -s^2t^{-1}+s^{-1}t^2 \\ -2t^{-2}s+2ts^{-2} & s^2t^{-2}+2ts^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds}$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^t \begin{pmatrix} (-s^2t^{-1}+s^{-1}t^2) f(s) \\ (s^2t^{-2}+2ts^{-1}) f(s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \int_1^t (-s^2t^{-1}+s^{-1}t^2) f(s)\, ds \\ \int_1^t (s^2t^{-2}+2ts^{-1}) f(s)\, ds \end{pmatrix}$$

$f(s) = s^p$

Rem : si on cherche les sol

$x''(t) - \frac{2}{t^2} x(t) = t^p$ sous la forme $C_p t^\beta$ $(p \notin \{0, -3\})$

$C_p \beta(\beta-1) t^{\beta-2} - 2C_p t^{\beta-2} = t^p$

$C_p [\beta(\beta-1) - 2] = 1$

$\beta - 2 = p$

$\Rightarrow \beta = p + 2$

$C_p = \dfrac{1}{p(p+1)-2}$ si $p(p-1) - 2 \neq 0$

càd si $p \neq -1, 2$

càd si $p \neq -3, 0$.

4) $x''(t) - \left(\frac{2}{t} + \varepsilon\right) x_\varepsilon(t) = 0$

$x_\varepsilon(1) = 0$
$x_\varepsilon'(1) = 3$
DL de $x_\varepsilon(t)$ en fo de ε.

Rem : $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{t^2}+\varepsilon & 0 \end{pmatrix}}_{A_\varepsilon(t)} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

$X_\varepsilon = \begin{pmatrix} x_\varepsilon \\ x_\varepsilon' \end{pmatrix}$.

? $R_{A_\varepsilon}(t, 1)$?

?ª $R_{A_\varepsilon}(t, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$?

On va chercher $x_\varepsilon(\cdot)$ sous la forme
$$x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon y_1(t) + Q(\varepsilon, t)$$
$x_0(\cdot)$ sol de (3) avec $\varepsilon = 0$. $|Q(\varepsilon,t)| = \sigma(\varepsilon)$ (ou $\Theta(\varepsilon^2)$)

$$\left(x_0''(t) + \varepsilon y_1''(t) + Q''(\varepsilon,t)\right) - \left(\frac{2}{t^2} + \varepsilon\right)\left(x_0(t) + \varepsilon y_1(t) + Q(\varepsilon,t)\right) = 0$$

$$\left(x_0''(t) - \frac{2}{t^2} x_0(t)\right) + \varepsilon\left[y_1''(t) - \frac{2}{t^2} y_1(t) - x_0(t)\right] = 0 + \sigma(\varepsilon)(t)$$

Trouver $y_1(\cdot)$ c'est résoudre
$$\begin{cases} y_1''(t) - \frac{2}{t} y_1(t) = x_0(t) \\ y_1(1) = 0 \\ y_1'(1) = 0 \end{cases}$$
CONNU

Rappels sur les DL :
$a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \sigma(\varepsilon^2) = 0 \quad \forall \varepsilon$
$\Rightarrow a_0 = 0 \quad$ (faire $\varepsilon = 0$)
$\Rightarrow \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \sigma(\varepsilon^2) = 0$
$\Rightarrow a_1 + \varepsilon a_2 + \sigma(\varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon \neq 0$.
$a_1 = 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

$\Rightarrow \varepsilon a_2 + o(\varepsilon) = 0$

$a_2 + o(1) = 0$

$a_2 = 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

Exercice 11

$$\ddot{U} = AU \quad . \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\chi_A(T) = (T+3)^2 T$

$\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -3$.

Soit u_1 tq $Au_1 = \lambda_1 u_1$ & $u_0 \in \mathbb{R}$

Exercice 15 ⚠ Exam

$$\ddot{x}_\varepsilon(t) + (1 + \varepsilon t) x_\varepsilon(t) = 0 \quad , \quad x_\varepsilon(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_\varepsilon(0) = 1$$

$$\to x_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \underbrace{o(\varepsilon^2)}_{\varphi^2} \qquad (1)$$

Pour $\varepsilon = 0$, : $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$

$$x_\varepsilon(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) \qquad \omega = 1$$

$$x_\varepsilon'(t) = -\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)$$

or $\begin{cases} x_\varepsilon(0) = \alpha = 0 \\ x_\varepsilon'(0) = \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow x_\varepsilon(t) = \sin(t)$

Pour $\varepsilon \neq 0$:

On peut écrire (1) en vertu du théorème de dépendance différentiable par rapport au paramètre

On q dérive 2 fois (1) et on injecte dans l'équat°

$$\ddot{y}_0(t) + \varepsilon \ddot{y}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{y}_2(t) + o(\varepsilon^2) + (1+\varepsilon t)\left(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + o(\varepsilon^2)\right) = 0$$

$$\varepsilon^0\left(\ddot{y}_0(t) + y_0(t)\right) + \varepsilon\left(\ddot{y}_1(t) + y_1(t) + t y_0(t)\right) + \varepsilon^2\left(\ddot{y}_2(t) + y_2(t) + t y_1(t)\right) + o(\varepsilon^2) = 0$$

Donc en utilisant l'unicité d'un DL :

$$\begin{cases} \ddot{y}_0(t) + y_0(t) = 0 \\ \ddot{y}_1(t) + y_1(t) + t y_0(t) = 0 \\ \ddot{y}_2(t) + y_2(t) + t y_1(t) = 0 \end{cases}$$

avec les C.I :

$$x_\varepsilon(0) = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + o(\varepsilon^2) = 0$$
$$x_\varepsilon'(0) = y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) + \varepsilon^2 y_2'(0) + o(\varepsilon^2) = 1$$

en utilisant unicité DL :
$$\begin{cases} y_0(0) = y_1(0) = y_2(0) = 0 \\ \dot{y}_0(0) = 1 \\ \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_0(t) + y_0(t) = 0 \\ y_0(0) = 0 \\ \dot{y}_0(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y_0(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$$

$$\text{or } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow y_0(t) = \sin(t)$$

$$A \Rightarrow A^2 = (-1) I_2.$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + y_1(t) = -t y_0(t) \\ y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_1'(t) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{A} Y_1(t) + b(t) \\ Y_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \underbrace{R(t,0)\underbrace{Y(0)}_{=0}}_{=0} + \int_0^t e^{(t-s)A}\, b(s)\, ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(s) \end{pmatrix} ds$$

Par rapport à la 1ère comp $Y(t) = \displaystyle\int_0^t -s \cdot \sin(t-s)\sin(s)\, ds$

Faire la même chose pour $y_2(t)$...
Cette méthode peut être utilisée pour une équa diff non linéaire

Exercice 6

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(t, y) \to (-y_1^3 + y_2^2 + 2ty_1,\ -y_2^5 + 3ty_1^2)$$

Mq $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = v \end{cases}$ admet une unique solution

$$[0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$$
$$t \to y(t).$$

(2)

. F est à croissance affine en $+\infty$

$$\|F(t,y)\|_\infty \leq \max\left(|y_1|, \left|e^{t}\sin(y_1) + 2e^{-y_0^2} + e^{t^2}\right|\right)$$

$$\leq \max\left(|y_1|, \underbrace{e^{t}|\sin(y_1)| + 2e^{-y_0^2} + e^{t^2}}_{e^{t}+2+e^{t^2}}\right)$$

$$\leq |y_1| + \left(e^{t} + 2e^{t^2}\right)$$

$$\leq a(t)\|y\|_\infty + b(t)$$

$$a(t) = 1 \qquad b(t) = e^{-t} + 2 + e^{t^2}$$

Cours $\Rightarrow \exists!$ GLOBALE sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 4\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 2 = 0$$

Eq linéaire sans second membre et à coeff constant

Polynome caract :

$$T^3 - 4T^2 + 5T - 2 = (T-1)^2(T-2)$$

$$\xrightarrow{\text{Cours}} x(t) = ae^{2t} + (b_0 + b_1 t)e^{t}$$

Exercice 7

$$X' = AX$$

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$. (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$X(t) = e^{tA}X_0.$$

(1) Deja fait. $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin t\omega \\ -\omega\sin t\omega & \cos\omega t \end{pmatrix}$ $\left(e^{tA} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots\right)$

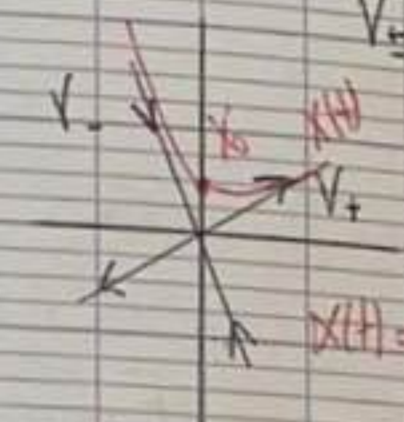
2) $\chi_A(T) = \det(T - A) = T^2 - (\operatorname{Tr} A)T + \det A = \begin{vmatrix} T-2 & 1 \\ 1 & T-2 \end{vmatrix}$

$= T^2 - 3T + 1$

$\lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\left.\begin{array}{l} \cdot \in \mathbb{R} \\ \cdot \text{ distinctes} \end{array}\right\} \Rightarrow$ A diagonalisable sur $\mathbb{R}$

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}P^{-1} \qquad P \in GL(2, \mathbb{R})$$

$V_\pm = \begin{pmatrix} m_\pm \\ 1 \end{pmatrix}$



$\lambda_+ > 0$

$\lambda_- < 0$

Calcul des $\vec{v}p$.

Méthode dim 2.

$$A\begin{pmatrix} m_\pm \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} m_\pm \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_\pm \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} m_\pm \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} m_\pm + 1 = \lambda_\pm \\ m_\pm = \lambda_\pm - 1 = \dfrac{3 \pm \sqrt{5} - 2}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}$$

On a $P = \begin{pmatrix} m_+ & m_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\begin{pmatrix} 1 & -m_- \\ -1 & m_+ \end{pmatrix} = \dfrac{1}{m_+ - m_-}\begin{pmatrix} 1 & -m_- \\ -1 & m_+ \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = P e^{t\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}} P^{-1}$$

$$e^{tA} = \frac{1}{m_+ - m_-}\begin{pmatrix} m_+ & m_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t\lambda_+} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_-} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -m_- \\ -1 & m_+ \end{pmatrix}$$

Exemple : Non diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(T) = \begin{vmatrix} T & -1 \\ -1 & T-2 \end{vmatrix} = T^2 - 2T + 1 = (T-1)^2$$

$\exists$ vp double 1

$\vec{v}p$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1 = m$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\vec{v}p$.

Esp stable $E_1 = \mathrm{Ker}(A - id)$

Trigonalisation :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AV_1 = V_1 \\ AV_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = V_2 - V_1 \end{cases}$$

$$\exists P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = P \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

En général : $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + a \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

↳ N : Nilpotente d'ordre 2

$$= e^{t\lambda} e^{aN} = e^{t\lambda}(I + aN + a) = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & ta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ & \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ Matrice triangulaire supérieure

? e^{tA} ?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ & \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 + a_{23} x_3 \\ x_3' = \lambda_3 x_3 \end{cases}$$

$\to x_3(t) = e^{t\lambda_3} x_3(0)$

$x_2'(t) = \lambda_2 x_2 + a_{23} e^{t\lambda_3} x_3(0)$

$\leadsto$ variat de la constante

$$x_2(t) = e^{t\lambda_2} x_2(0) + \int_0^t e^{\lambda_2(t-0)} a_{23} e^{s\lambda_3} x_3(s) \dots$$

Comment trigonaliser une matrice 3×3

- Pol caractéristique $\leadsto$ v.p $\leadsto$
  - distinctes (calcul esp propres en somme directe
  - multipliat (pas en somme directe en général)

En dim 3 :

Moyen commode : déterminer un 2 plan invariant

- Trouver H tq $AH \subset H$ $\dim H = 2$
- Alors si $w \notin H$
- $A|_H$: 2×2. $x(t) = e^{tA} x(0)$

Trouver un $\vec{v_p}$ u de A dans H.

Choisir v $\cancel{\parallel}$ u dans H

Dans la base (u, v, w) A est triangulaire.

Trouver un 2-plan invariant $\Leftrightarrow$ Trouver un vect propre pour ${}^tA$

${}^tA\varphi = \lambda\varphi$.

φ FL $\langle \varphi, X \rangle = 0$
$\|$
$\varphi(X)$

$\lambda\varphi(X) = ({}^tA\varphi)(X) = \varphi(AX) = \lambda\varphi(X)$

Si $\varphi(X) = 0 \Leftrightarrow \varphi(AX)$ cad si $X \in H$ alors $AX \in H$

ω $\Rightarrow H$ A-inv.

$$A = \begin{array}{c} H \\ \left(\begin{array}{c|c} A|_H & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 & \lambda_3 \end{array} \right) \end{array}$$

Exercice 9

$X' = AX$

en dim 2 :
$\chi(A) = T^2 - Tr(A)T + \det(A)$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to$ vp 1 et 2 > 0

Donc 0 est instable

$Av_1 = v_1$

$Av_2 = 2v_2$

- $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $T^2 - 1 \Rightarrow T = \pm 1$

2 vp réelles $\neq$ $\Rightarrow$ diagonalisable

- 1 vp > 0
  1 vp < 0 $\Rightarrow$ instable

- $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 1 seule vap : $\lambda = 1$. alg 1. avec esp propre de dim 1 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\forall X_0 \in \mathbb{R}^2$, $X_0 =$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}' = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) & 0 \end{pmatrix}}^{\tilde{A}(t)} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \varepsilon \times X'(\varepsilon t) \\ &= \varepsilon \times \tilde{A}(\varepsilon t) \times X(t\varepsilon) \\ &= \varepsilon A(t) Y(t) \end{aligned} \qquad \text{avec} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}$$

2) a- On sait d'après le cours que $R_\varepsilon(t,0)$ vérifie une équat° différentielle qui

(•)
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} R_\varepsilon(t,0) = \varepsilon A(t) R_\varepsilon(t,0) \\ R_\varepsilon(0,0) = \mathrm{Id} \end{cases}$$

$\longrightarrow \varepsilon \to \varepsilon A(\cdot)$ est C^k $\in C^0([0,T], M_2(\mathbb{R}))$

(••) Par ailleurs, on sait que les solutions d'une EDO qui dépend C^k d'un paramètre, ici ε, dépendant elle même C^k de ce paramètre (Thm de dépendance différentiable par rapport à un paramètre).

C'est à dire $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\longrightarrow C^1([0,T], M_2(\mathbb{R}))$

(•••) $\qquad \varepsilon \longmapsto R_\varepsilon(\cdot, 0)$

cette application est C^k avec $k=2$. Muni de

$$\|\varphi\|_{C^1([0,T])} = \operatorname{Max}\left(\sup_{[0,T]} \|\varphi(t)\|, \sup_{[0,T]} \|\varphi'(t)\|\right)$$

$(\varphi \in C^1([0,1], M_2(\mathbb{R})))$

$\|\varphi\| = \max_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}} |\varphi_{ij}|$

On peut donc écrire un DL_2 en $\varepsilon = 0$:

$$R_\varepsilon(\cdot, 0) = I + \varepsilon Y_1(\cdot) + \varepsilon^2 Y_2(\cdot) + G(\varepsilon, \cdot)$$

où $Y_1, Y_2 : [0,T] \to M_2(\mathbb{R}) \in C^1([0,T], M_2(\mathbb{R}))$

et $G(\varepsilon, \cdot) = o(\varepsilon^2)$ c'est à dire

$\exists\, \eta :]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\to C^1([0,T], M_2(\mathbb{R}))$ tq $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta = 0$

et $G(\varepsilon, \cdot) = \varepsilon^2 \eta(\varepsilon, \cdot)$

b- Calculer $\varphi_1(0)$ et $\varphi_2(0)$ puis $\varphi_1(\cdot)$ et $\varphi_2(\cdot)$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} R_\varepsilon(t,0) = \varepsilon A(t) R_\varepsilon(t,0) \\ R_\varepsilon(0,0) = Id \end{cases}$$

On va ~~calculer~~ utiliser la méthode des perturbations :
Remplaçons dans (3) $R_\varepsilon(t,0)$ par son DL_2 (2).

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(Id + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \varphi_2(t) + G(\varepsilon,t)\right) = \varepsilon A(t)\left(Id + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \varphi_2(t) + G(\varepsilon,t)\right) \\ Id + \varepsilon \varphi_1(0) + \varepsilon^2 \varphi_2(0) + G(\varepsilon,0) = Id \quad (5) \end{cases}$$

On regroupe les termes en ε :

$$\Rightarrow \varepsilon \varphi_1'(t) + \varepsilon^2 \varphi_2'(t) + \underbrace{G'(\varepsilon,t)}_{\sigma(\varepsilon^2)} = \varepsilon A(t) + \varepsilon^2 A(t)\varphi_1(t) + \overbrace{\varepsilon^3 A(t)\varphi_2(t)}^{\sigma(\varepsilon^3)} + \overbrace{\varepsilon A(t) G(\varepsilon,t)}^{\sigma(\varepsilon^3)}$$

$$(4)\quad \Rightarrow \varepsilon\left(\varphi_1'(t) - A(t)\right) + \varepsilon^2\left(\varphi_2'(t) - A(t)\varphi_1(t)\right) + \sigma(\varepsilon^3) = 0$$

Par unicité des coeff d'un DL, on déduit respectivement de (4) et de (5)

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = A(t) \\ \varphi_2'(t) = A(t)\varphi_1(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_2(0) = 0 \end{cases}$$

Donc $\varphi_1(t) = \displaystyle\int_0^t A(s)\,ds$ et $\varphi_2(t) = \displaystyle\int_0^t A(s)\varphi_1(s)\,ds = \int_0^t A(s)\left(\int_0^s A(u)\,du\right)ds$

c- DL_2 $Tr\, R_\varepsilon(T,0)$

On a
$$\begin{aligned} R_\varepsilon(T,0) &= I + \varepsilon \varphi_1(T) + \varepsilon^2 \varphi_2(T) + \sigma(\varepsilon^2) \\ &= I + \varepsilon \int_0^T A(t)\,dt + \varepsilon^2 \int_0^T A(t)\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)dt + \sigma(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^T A(t)\,dt = \begin{pmatrix} 0 & T \\ -\int_0^T a(t)dt & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(t)\int_0^t A(s)ds = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t \\ -\int_0^t A(s)ds & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int_0^t a(s)ds & 0 \\ 0 & -ta(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_0^T A(t)\int_0^t A(s)ds = \begin{pmatrix} -\int_0^T\left(\int_0^t a(s)ds\right)dt & 0 \\ 0 & -\int_0^T t\,a(t)dt \end{pmatrix}$$

Donc

$$Tr\,R_\varepsilon(T,0) = 2 + \varepsilon\times 0 + \varepsilon^2\underbrace{\left(-\int_0^T\left(\int_0^t a(s)ds\right)dt - \int_0^T t\,a(t)dt\right)}_{\nu} + o(\varepsilon^2)$$

3) On suppose que $\int_0^T a(t)dt > 0$

Montrons que les sol de $x''(t) + a\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x(t) = 0$ sont bornées si $0 < \varepsilon \ll 1$

Sol : Il suffit de mq les sols de $Y'(t) = \varepsilon A(t)Y(t)$ sont bornées

- Il s'agit d'une EDO à coeff T-périodique donc :
  ↳ on sait que

$$|Tr(R_\varepsilon(T,0))| < 2 \Rightarrow \text{ttes les sol sont bornées}$$

cas elliptiques

Il suffit de mq $\nu < 0$ pour assurer $|Tr(R_\varepsilon(T,0))| < 2$ pour $0 < \varepsilon \ll 1$

②

$$\int_0^T v(t)u'(t)\,dt = [vu]_0^T - \int_0^T v'(t)u(t)\,dt$$

$$-\nu = \left[t\int_0^t a(s)ds\right]_0^T = T\underbrace{\int_0^T a(s)ds}_{\geq 0} > 0$$

$\Rightarrow$ $\nu < 0$.

Exo 6, 7, 9

Exercice 2

$a(\cdot) \in \mathcal{C}^1_{T\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\qquad R_A \leftrightarrow x''(t) + a(t)x(t) = 0$

Hyp : $R_A(T,0)$ elliptique

Question : Stabilité de $x''(t) + \gamma x'(t) + a(t)x(t) = 0$ $\quad (1)$
$0 < \gamma << 1$

$$(1) \quad X'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -\gamma \end{pmatrix}}_{A_\gamma(t)} X(t)$$

d'après la relation de Liouville, on a :

$$\det(R_\gamma(T,0)) = e^{\int_0^T tr(A(t))dt} = e^{-\gamma T} < 1. \text{ car } \gamma > 0$$

$$\det(R_\gamma(T,0)) = \lambda_1 \lambda_2$$

D'après l'énoncé, si $\gamma = 0$, $R_0(T,0)$ est elliptique
en effet, $|Tr(R_0(T,0))| < 2$, vp de $R_0(T,0)$ sont $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$

$$R_0(T,0) = P\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} P^{-1}$$

- Hyperbolique : $|Tr(R_0(T,0))| > 2$.
  vp sont $\lambda, \frac{1}{\lambda}$ $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}$

- Parabolique : $|Tr(R_0(T,0))| = 2$
  vp sont $\{1, 1\}$ ou $\{-1; 1\}$

- Vp de $R_\gamma(T,0)$

$$\chi_A(X) = X^2 - \underbrace{tr(R_\gamma(T,0))}_{\tau_\gamma} X + \underbrace{det(R_\gamma(T,0))}_{e^{-\gamma T}}$$

$$\tau_\gamma < 2 \text{ si } \gamma << 1$$

$$\Delta = \tau_\gamma^2 - 4e^{-\gamma T} \qquad \lambda_\pm = \frac{\tau_\gamma \pm i\sqrt{-\tau_\gamma^2 + 4e^{-\gamma T}}}{2}$$

$$\lim_{\gamma \to 0} 4e^{-\gamma T} - \tau_\gamma^2 = 4 - \tau_0^2 > 0$$

donc $4 - \tau_\gamma^2 > 0$.

(Argument : $\gamma \to \tau_\gamma$ continu car $\gamma \to R_\gamma(T,0)$

$$|\lambda_\pm| = \frac{1}{4}(\tau_\gamma^2 + (-\tau_\gamma^2 + 4e^{-\gamma T})) = e^{-\gamma T} < 1$$

0 est asymptotiquement stable

($nT \leq t \leq (n-1)T$

$$R(t,0) = R(t, nT) R(nT, 0)$$
$$= R(t - nT, 0) R(T,0)^n$$

$$R(t_2 + T, t_1 + T) = R(t_2, t_1)$$
$$R(T + T, 0 + T) = R(T,0)$$
$$R(2T, T) = R(T,0)$$
$$R(2T, 0) = R(2T, T) R(T,0) = R(T,0)^2$$

Exemple :

$$(1)\begin{cases} x' = y \\ y' = (1-x^2-y^2)y - x \end{cases}$$

$(x_0(t), y_0(t)) = (\sin t, \cos t)$ est solution

$$\phi^t(1,0) = (\sin(t), \cos(t)) : 2\pi\text{-périodique}$$

On linéarise l'EDO (1) au voisinage de la solution $t \to (x_0(t), y_0(t))$

Pour cela : (1) de la forme $v' = X(v)$ où

$$X(x,y) = (\overbrace{y}^{X_1}, \overbrace{(1-x^2-y^2)y-x}^{X_2})$$

$$DX(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2xy & (1-x^2-y^2)-2y^2 \end{pmatrix}$$

$$DX(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2xy & 1-x^2-3y^2 \end{pmatrix}$$

$$(2)\begin{cases} v'(t) = DX(x_0(t), y_0(t)) \cdot v(t) \\ v(0) = w \end{cases}$$

(2) est l'éq linéarisée au voisinage de $(x_0(\cdot), y_0(\cdot))$

$$(2) \iff \begin{cases} v'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-\sin t & -2\cos^2 t \end{pmatrix} v(t) \\ v(0) = w \end{cases}$$

(2) de la forme : $\begin{cases} v'(t) = A(t)\, v(t) \\ v(0) = w \end{cases}$ (3) $\rightsquigarrow$ Résolvante $R_A(t, t_0)$

avec $A(\cdot)$: 2π-périodique

Signification de l'EDO linéarisée $\phi^t(v_0) = (x_0(t), y_0(t))$ $v_0 = (1,0)$

(2') $\phi^t(v) = \phi^t(v_0) + R_A(t,0).(v - v_0) + o(v - v_0)$

$\forall 0 \leq t \leq T$ (ou n'importe quelle temps borné)

On veut maintenant comprendre (3) càd

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-\sin t & -2\cos^2 t \end{pmatrix} Y(t)$$

$$\det R(t,0) = \exp\Big(\int_0^t \underbrace{-2\cos^2 s}_{Tr\, A(s)}\, ds\Big)$$

$$\det R(2\pi, 0) = \exp\Big(\int_0^{2\pi} -2\cos^2 s\, ds\Big) < 1$$

Observation : $\phi^{2\pi}(v_0) = v_0$

$$\begin{cases} \phi^t \circ \phi^{2\pi}(v_0) = \phi^t(v_0) \\ \phi^{2\pi} \circ \phi^t(v_0) = \phi^t(v_0) \end{cases}$$

(1') $\phi^{2\pi}(v_0 + tX(v_0) + o(t)) = v_0 + tX(v_0) + o(t)$ (t petit)

$(1') + (2') \Rightarrow \phi^{2\pi}(v_0) + R(2\pi,0)\,tX(v_0) + o(t) = v_0 + tX(v_0) + o(t)$

$t \to 0 \Rightarrow R(2\pi,0)X(v_0) = X(v_0)$ (5)

$\cos^2 = \frac{1+\cos 2t}{2}$

Par ailleurs d'après Liouville

(4) $\det(R(2\pi,0)) = \exp\Big(\int_0^{2\pi} Tr\,A(s)\,ds\Big) = \exp\Big(-\int_0^{2\pi} 2\cos^2 t\,dt\Big) = \exp(-2\pi) < 1$

Conséquence : • $R(2\pi,0)X(v_0) = X(v_0)$ $\Rightarrow$ $R(2\pi,0)$ admet une vap $= 1$

• $\det(R(2\pi,0)) = e^{-2\pi}$

Donc les vap de $R(2\pi,0)$ sont 1 et $e^{-2\pi}$ — vecteur propre u_2

$\downarrow$

associé au vecteur propre

$X(\ \ ) = X(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_0$

$$\phi^{2\pi}(v) = \phi^{2\pi}(v_0) + R(2\pi,0)\cdot(v-v_0) + o(v-v_0)$$
$$= v_0 + R(2\pi,0)\cdot(v-v_0) + o(v-v_0)$$

Introduisons u_2 le $\vec{vp}$ associé à la vp $e^{-2\pi}$ de $R(2\pi,0)$

$R(2\pi,0)u_2 = e^{-2\pi}u_2$.

Dans la base (u_1,u_2) $R(2\pi,0)$ prend la forme $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2\pi}\end{pmatrix}$

Soit P l'application linéaire qui envoie (u_1,u_2) sur $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (et v_0 sur 0) alors

$$P\circ\phi^{2\pi}\circ P^{-1}(w) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2\pi}\end{pmatrix}w + o(w)$$

Exercice 6.

$$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(t,y) \to (-y_1^3 + y_2^2 + 2ty_1,\ -y_2^5 + 3ty_1^4)$$

Mq $\forall v\in\mathbb{R}^2$, (*) $\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(0) = v\end{cases}$ admet une unique solution $[0,+\infty[\to \mathbb{R}^2$

$t \to y(t)$.

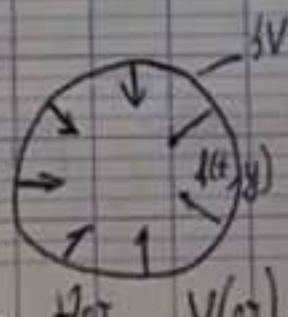
Critère d'existence en temps longs

* Croissance affine à l'infini càd

? $|f(t,y)| \le a(t)|y| + b(t)$?

NON. en raison de la puissance 5.

* Gronwall
* Lyapunov
* $\mathbb{R}^2$ $V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ C^1 $\{V=0\}$ compact



$\begin{cases}\langle f(t,y), \nabla V(y)\rangle < 0 \\ \forall y \,/\, V(y) = 0.\end{cases}$

Concl. $\forall v$, $V(v)\le 0$. (*) admet. $\forall t\ge 0$.

Choix de la fonction de Lyapounov

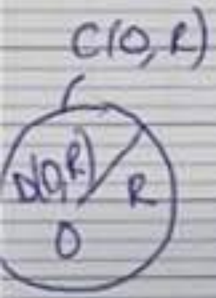
$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 - R^2$$

$c>0$: $\{V = c\} = \{y_1^2 + y_2^2\} = c + R^2\} = \text{Cercle}(0, \sqrt{c+R^2})$

V est C^1

$\{V = 0\} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ y_1^2 + y_2^2 = R^2\} = \text{Cercle}(0, R)$

$\{V \leq 0\} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ y_1^2 + y_2^2 \leq R^2\} = D(0,R)$ Compact (car fermé et borné)



$$\nabla V(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V(y)}{\partial y_1} = 2y_1 \\ \frac{\partial V(y)}{\partial y_2} = 2y_2 \end{pmatrix} = 2y$$

$$\langle \nabla V(y), f(t,y) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_1^3 + y_2^2 + 2ty_1 \\ -y_1^5 + 3ty_1^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = 2\left[-y_1^4 + y_1 y_2^2 + 2ty_1^2 - y_2^6 + 3t y_2 y_1^2\right]$$

? signe quand $y_1^2 + y_2^2 = R^2$ $(y \in C(0,R))$?

Passons en polaire : $\begin{cases} y_1 = r\cos\theta \\ y_2 = r\sin\theta \end{cases}$

$$A = 2(\underbrace{-r^4(\cos\theta)^4 - r^6(\sin\theta)^6}_{B} + \underbrace{r^3\cos\theta\sin^3\theta + 2tr^2\cos^2\theta + 3tr^3\sin\theta\cos^2\theta}_{C})$$

$$|C| \leq r^3 + 2tr^2 + 3tr^3$$

- Pour $r \geq 1$, $B \leq -r^4(\cos^4\theta + \sin^6\theta)$
- Pour tout θ $\underbrace{\min(\cos^4\theta + \sin^6\theta)}_{=\mu} > 0$ car $\cos\theta$, $\sin\theta$ ne s'annulent pas en même temps.

Donc $B \leq -\mu r^4$

$$B + C \leq -\mu r^4 + r^3 + 2tr^2 + 3tr^3$$
$$\leq -\mu r^4 + (5t+1)r^3$$

Donc $A = 2(B+C) < 0$ à condition que $r \geq \dfrac{5t+1}{\mu}$

Soit $y(t)$ sol de $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = v \end{cases}$

Notons I_{max} l'intervalle maximal de solution $y : I_{max} \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto y(t)$

Soit $\overline{t} = \sup I_{max}$ (pê ∞) pê : peut-être

$\underline{t} = \inf I_{max}$ (pê $-\infty$)

$I_{max} =]\underline{t} ; \overline{t}[$

On veut mq $\overline{t} = +\infty$

Si ce n'était pas le cas :

Choisissons $R = \frac{5\overline{t}+1}{r} + 1$

On a vu que $\forall t \in]\underline{t}, \overline{t}[$

$\langle f(t,y), \overline{W}(y) \rangle < 0$ quand $V_R(y) = 0$

où $V_R(y) = y_1^2 + y_2^2 - R^2$

D'après le critère de Lyapunov (cours)

$\Rightarrow \forall t \in]\underline{t}, \overline{t}[, \quad V_R(y(t)) \leq 0 \quad (\bullet)$

Mais $\{y : V_R(y) \leq 0\} = D(0, R)$

Or d'après le critère de sortie de tout compact $\exists t_* < \overline{t}$ tq

$\forall t \in]t_*, \overline{t}[\quad y(t) \notin D(0, R)$ compact.

Contradiction avec $(\bullet)$

Exercice 9

$\begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = -y + x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

$V(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$.

$\nabla V(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$A = \langle f(x,y), \nabla V(x,y) \rangle = 2\left(x(-x+y^2) + y(-y+x^2)\right) = 2(-x^2 + xy^2 + yx^2 - y^2)$

$$A = -2(x^2+y^2) + 2xy(x+y)$$

Si $\max(|x|, |y|) < 1/10$

$$|x^2y + xy^2| \leq \frac{1}{10}(x^2+y^2)$$

$$A \leq -2(x^2+y^2) + \frac{1}{10}(x^2+y^2)$$

$$\leq -\left(2 - \frac{1}{10}\right)(x^2+y^2) < 0 .$$

Exercice 7.

Fait dans le cours.

Exercice 11

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$$

$$(x,t) \to f(x,t)$$

C^0/t localement lip $/x$.

(p. ex C^1)

Hyp: $\exists \alpha, \beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tq

$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \langle f(t,x), x \rangle \leq \alpha(t) + \beta(t)\|x\|^2$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

Mq : Tte solut est définie sur $[0, +\infty[$

Sol : $I_{max} =]\underline{t}, \bar{t}[$ pour $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(0) = v \end{cases}$

Pour $t \in]\underline{t}, \bar{t}[$,

$$\cancel{\frac{d}{dt}\psi(f(t,x))} = \cancel{D\psi(f(t,x(t)))} \cdot \frac{d}{dt} \cancel{f}(t, x(t))$$

$$= \cancel{\langle D\psi}$$

Pour $t \in]\underline{t}, \bar{t}[$, $\nabla V(x) = x$ *

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = DV(x(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t)$$

$$= \langle \nabla V(x(t)), x'(t) \rangle$$

$$= \langle \nabla V(x(t)), f(t, x(t)) \rangle$$

$$= \langle x(t), f(t, x(t)) \rangle \leq \alpha(t) \|x(t)\|^2 + \beta(t)$$

$$\cancel{= \alpha(t)\|x(t)\|^2 + \beta(t)}$$

Concl :

$\forall t \in]\underline{t}, \bar{t}[$, $\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq \beta(t) \|x(t)\|^2 + \alpha(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|x(t)\|^2\right) \leq \beta(t) \|x(t)\|^2 + \alpha(t)$$

Si on pose $u(t) = \frac{1}{2}\|x(t)\|^2$.

$$\frac{d}{dt} u(t) \leq 2\beta(t) u(t) + \alpha(t)$$

Exercice 8

- $x''(t) + x(t) = \mu\big((1+\cos t)\sin(x(t)) + \cos(2t)\big)$
- $\mu \ll 1$

1) Ecrire (*) $X'(t) = AX(t) + \mu F(X(t), t)$

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$

D'où $\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}}_{=X(t)} + \mu \times F(X(t), t)$

avec $F(X(t), t) = \begin{pmatrix} 0 \\ (1+\cos t)\sin(x(t)) + \cos 2t \end{pmatrix}$

$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

2) Mq $\forall v \in \mathbb{R}^2$ $(*)|(*)$ $\begin{cases} (*) \\ X(0) = v \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$ admet des solutions définies $\forall t$.

On a $\forall X \in \mathbb{R}^2$, $\|AX + \mu F(X,t)\| \leq \|A\|\|X\| + |\mu| \underbrace{\|F(X,t)\|}_{\leq 3}$

$$\leq \|A\|\|X\| + 3|\mu|$$

c'est donc à croissance affine quand $\|X\| \to +\infty$.

La solution de $(**)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1') Sol de $(**)_v$ quand $\mu = 0$.

$X'(t) = AX(t)$

$X(t) = e^{tA} v = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

3) $X_{\mu,v}(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

la solution de $\begin{cases} X'(t) = AX(t) + \mu F(X(t),t) \\ X(0) = v \end{cases}$

Mq $X_{\mu,v}(\cdot)$ est 2π-per $\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} F(X_{\mu,v}(s), s)\, ds = O(3)$

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$X_{\mu,v}(t) = e^{tA} v + \int_0^t e^{(t-s)A} F(X_{\mu,v}(s), s)\, ds$$

On veut $X_{\mu,v}(t+2\pi) = X_{\mu,v}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

On sait que e^{tA} est une rotation d'angle $-t$.

" $e^{(t-s)A}$ " " $-t+s$

Par 2π-périodicité de cos et sin, on a $\forall t \in \mathbb{R}$

$$X_{\mu,v}(t+2\pi) = e^{tA} v + \int_0^{t+2\pi} e^{(t-s)A} F(X_{\mu,v}(s), s)\, ds$$

$$X_{\gamma,0}(t) = X_{\gamma,0}(t+2\pi) \iff \int_0^t e^{(t-s)A} F(X_{\gamma,0}(s),s)\,ds = \int_0^{t+2\pi} e^{(t-s)A} F(X_{\gamma,0}(s),s)\,ds$$

$$= \int_0^t + \int_t^{t+2\pi} \quad \left(\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{t+2\pi}\right)$$

$$\iff \int_t^{t+2\pi} e^{(t-s)A} F(X_{\gamma,0}(s),s)\,ds = 0$$

$$\iff \forall t \int_t^{t+2\pi} e^{(t-s)A} F(X_{\gamma,0}(s),s)\,ds = 0$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \int_t^{t+2\pi} e^{-sA} F(X_{\gamma,0}(s),s)\,ds = 0$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\underset{t=0}{\Longrightarrow}$ $\int_0^{2\pi} (\ ) = 0$ qui est (3).

$\Longleftarrow$ Posons $g(s) = e^{-sA} F(X_{\gamma,0}(s),s)$: 2π-periodique

$$\underbrace{\forall t, \int_t^{t+2\pi} g(s)\,ds}_{G(t+2\pi)-G(t)} = 0 \iff \int_0^{2\pi} g(s)\,ds = 0$$

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds \qquad \frac{d}{dt}\Big(G(t+2\pi) - G(t)\Big) = g(t+2\pi) - g(t) = 0$$

$$G(t+2\pi) - G(t) = \text{cste} = G(2\pi) - G(0) = \int_0^{2\pi} g(s)\,ds = 0$$

Autre méthode :

$$X_{\gamma,0}(\cdot + 2\pi) = X_{\gamma,0}(\cdot)$$

$$\Downarrow (t=0)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-sA} F(X_{\gamma,0}(s),s)\,ds = 0 \qquad (4)$$

(1) δ (4) dans $X_{\mu,v}(2\pi) = X_{\mu,v}(0)$

$$\phi^{t,0}(X_{\mu,v}(2\pi)) = \phi^{t,0}(X_{\mu,v}(0))$$

Car $t \to X(t,\cdot)$ et 2π-per

$$\phi^{t+2\pi,2\pi}(X_{\mu,v}(2\pi)) \qquad X_{\mu,v}(t)$$

$$X_{\mu,v}(t+2\pi)$$

3ème méthode :

$X_{\mu,v}(t)$

$Y(t) = X_{\mu,v}(t+2\pi)$

$Y(\cdot)$ et $X_{\mu,v}$ vérifient la même EDO et ont même condition initiale en $t=0$

$(Y(0) = X_{\mu,v}(2\pi) = X_{\mu,v}(0))$

Donc (unicité) $Y(t) = X_{\mu,v}(t) \quad \forall t$

$$Y(t) = X_{\mu,v}(t+2\pi)$$

But : démontrer que pour $\mu \ll 1$ fixé, il existe $v = v(\mu)$ tq $X_{\mu,v(\mu)}(t)$ sol de $\begin{cases} X'(t) = AX(t) + \mu F(X(t),t) \\ X_0 = v(\mu) \end{cases}$ soit 2π-per

Codé par : $\int_0^{2\pi} e^{-sA} F(X_{\mu,v}(s),s)\,ds = 0$

$$\int_0^{2\pi} e^{-sA} F(e^{tA} v + \text{petit}, s)\,ds = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-sA} F(e^{tA} v, s) + \frac{\partial}{\partial v} F(e^{tA} v, s) . \text{petit}\,ds + \text{t.o.s} = 0$$

termes d'ordre supérieur

Le v pour convenir doit vérifier : $\int_0^{2\pi} e^{-sA} F(e^{sA} v, s)\,ds = 0$

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (1+\cos s)\sin(\cos s\, v_1 + \sin s\, v_2) + \cos(2s) \end{pmatrix} ds =$$

Notons $H(p,\sigma) = \int_0^{2\pi} e^{-sA} F(X_{p,\sigma}(s), s)\, ds$

$$H(0,0) = \int_0^{2\pi} e^{-sA} F(e^{sA} 0, s)\, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\end{pmatrix} ds$$

$$= 0$$

On va appliquer le théorème des fct° implicites :

- $(p,\sigma) \to H_{p,\sigma}$ C^1 car $(p,\sigma) \to X_{p,\sigma}(\cdot)$ C^1 (Thm dep diff / param CI)
- $H(0,0)$
- $D_\sigma H(0,0)$ est inversible

$\Rightarrow \exists\, \sigma : p \to \sigma(p)$ C^1

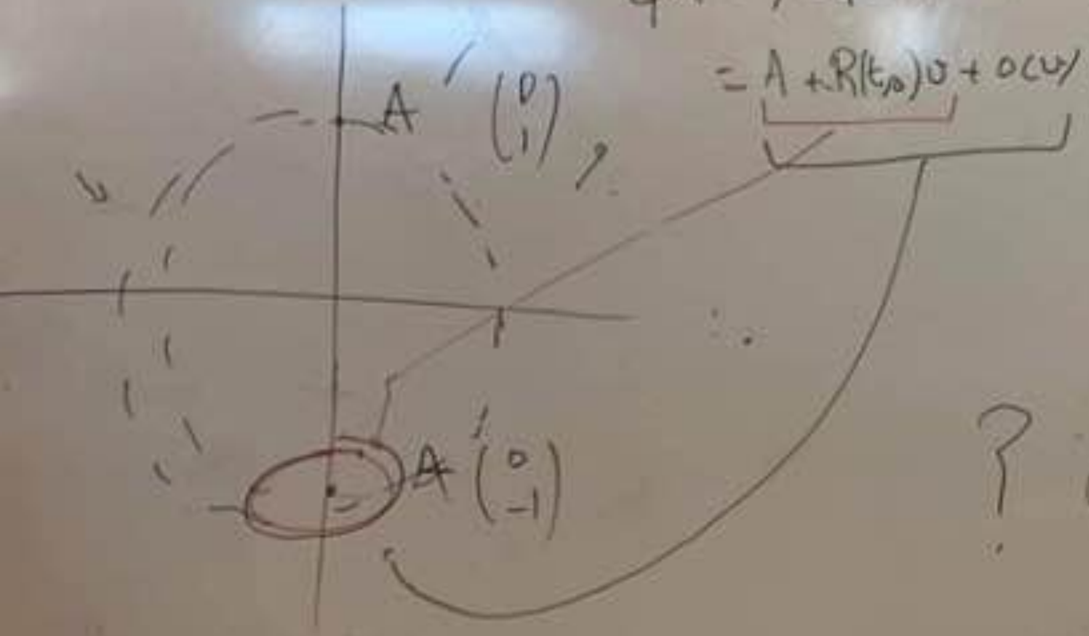
$H(p, \sigma(p)) = 0$

$$Z' = AZ, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(t,0) = e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t\sqrt{2} & -\sqrt{2}\sin t\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\sqrt{2} & \cos t\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\phi^t(A+v) = \phi^t(A) + D\phi^t(A)v + o(v)$$

$$= A + R(t,0)v + o(v)$$



$$X(-x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ -x \end{pmatrix} \qquad \sigma_* X = -X.$$

$$\sigma : (x,y) \longmapsto (-x,y)$$

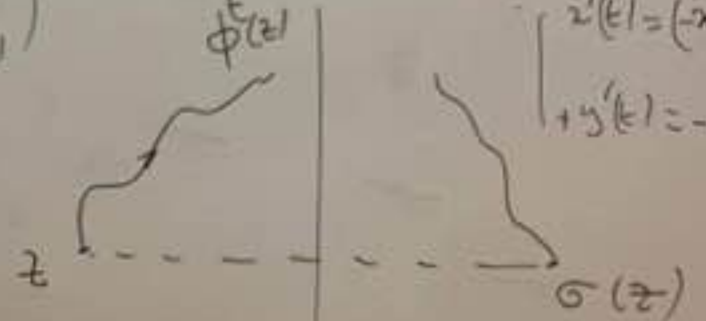
$$\phi^t(z) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\phi^t(\sigma(z))$$

$$? \ \phi^t(\sigma(z)) = \sigma(\phi^t(z)) \ ?$$

$$\sigma(\phi^t(z)) = (-x(t), +y(t))$$

$$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$$



$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 + y(t)^2 - 1 \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = (-x(t))^2 + (y(t))^2 - 1 \\ +y'(t) = -(-x(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = -\left((\tilde{x}(t))^2 + (\tilde{y}(t))^2 - 1\right) \\ \tilde{y}'(t) = -\tilde{x}(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\tilde{x},\tilde{y}) = -X(\tilde{x},\tilde{y})}$$