Exo 4 : Soient X_1 et X_2 deux v.a. suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

a) Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1+X_2 = t > 0$

On a pas : $f_{(X_1, X_1+X_2)}(x_1, t) = f_{(X_1, X_2)}(x_1, t-x_1)$

on doit effectuer un changement de variable.

Tout d'abord la loi jointe de (X_1, X_2) et

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$ car X_1 et X_2 sont indépendantes

$$= \lambda e^{-\lambda x_1} \mathbb{1}_{(x_1>0)} \lambda e^{-\lambda x_2} \mathbb{1}_{(x_2>0)}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} \cdot \mathbb{1}_{(x_1>0)} \cdot \mathbb{1}_{(x_2>0)}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} \mathbb{1}_{]0;+\infty[^2}(x_1,x_2)$$

Soit $\varphi : D =]0,+\infty[^2 \longrightarrow \Delta$

$$(x_1,x_2) \longmapsto \varphi(x_1,x_2) = (x_1, x_1+x_2) = (x_1, t)$$

φ est C^1-difféomorphisme de D dans Δ

où $\Delta = \{(x_1,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x_1>0 \text{ et } t>0\}$

$\Delta = \{(x_1,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 0 < x_1 < t\}$

car x_1 et $x_2 > 0$

$\to x_1 + x_2 > x_1$

$\to t > x_1 > 0$

On a $\quad \varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2) = (x_1, t)$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) = \varphi^{-1}(x_1, x_1 + x_2) = \varphi^{-1}(x_1, t)$$

$$\cancel{J\varphi^{-1}(x_1, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$(x_1, t) = \varphi(x_1, x_2) \qquad$ On cherche φ^{-1}

car $\quad (x_1, t) = (x_1, x_1 + x_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_1 + x_2 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = t - x_1 \end{cases}$$

$$\varphi^{-1} : \Delta = \{ (x_1, t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x_1 < t \} \longrightarrow D =]0, +\infty[^2$$

$$(x_1, t) \longmapsto \varphi^{-1}(x_1, t) = (\underset{x_1}{\underset{\parallel}{x_1}}, \underset{x_2}{\underset{\parallel}{t - x_1}})$$

$$J\varphi^{-1}(x_1, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\quad \varphi(x_1, x_2) = (x_1, t) \Leftrightarrow (x_1, x_2) = \varphi^{-1}(x_1, t)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_1 + x_2 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = t - x_1 \end{cases}$$

Soit h borélienne et bornée

$$\mathbb{E}\left[h(X_1, X_1+X_2)\right] = \int_{\mathbb{R}^2} h(x_1, x_1+x_2)\, f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x_1, x_1+x_2) \cdot \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} \mathbb{1}_{]0,+\infty[^2}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$= \iint_{]0;+\infty[^2} h(x_1, x_1+x_2)\, \lambda^2 e^{-\lambda(x+x_2)}\, dx_1\, dx_2$$

$$= \iint_{\{0<x_1<t\}} h(x_1, t)\, \lambda^2 e^{-\lambda t} \overbrace{\left|\det J\, \phi^{-1}(x_1,t)\right|}^{=1} dx_1\, dt$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x_1, t) \cdot \lambda^2 e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{0<x_1<t\}}(x_1,t)\, dx_1\, dt$$

Ainsi $f_{X_1, X_1+X_2=t}(x_1,t) = \lambda^2 e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{0<x_1<t\}}(x_1,t)$

$$\Rightarrow f_{X_1+X_2=t}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1, X_1+X_2=t}(x_1,t)\, dx_1$$

$$= \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t) \cdot \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda t}\, dx_1$$

$$= t\lambda^2 e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t)$$

On reconnaît la densité d'une loi gamma

$$X \rightsquigarrow \text{Gamma}(a,b) \Rightarrow f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{(x>0)}$$

<u>Ici</u> $f_{X_1+X_2=t}(t) = \lambda^2\, t \cdot e^{-\lambda t}\, \mathbb{1}_{(t>0)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \lambda \end{cases} \qquad \Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$$

<u>Alors</u> $X_1+X_2 \sim \text{Gamma}(2,\lambda)$

de meme si $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$\Rightarrow X \sim \text{Gamma}(1,\lambda)$$

Et puisque Gamma et stable par convolution

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} X_1 \sim \text{Gamma}(a,c) \\ X_2 \sim \text{Gamma}(b,c) \end{array}\right\} \Rightarrow X_1+X_2 \sim \text{Gamma}(a+b,c)$$

<u>finalement</u>,

$$f_{X_1 | X_1+X_2=t}(x_1,t) = \frac{f_{(X_1,X_1+X_2)}(x_1,t)}{f_{X_1+X_2}(t)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda t}}{t\lambda^2 e^{-\lambda t}} \mathbb{1}_{(0<x_1<t)}(x_1,t)$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \mathbb{1}_{]0,t[}(x_1) \Rightarrow \mathcal{L}_{X_1|X_1+X_2=t} \sim \mathcal{U}([0,t])$$

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 \mid X_1+X_2)$

On a $\mathbb{E}(X_1 \mid X_1+X_2) = g(X_1+X_2)$

où $g(x) = \mathbb{E}(X_1 \mid X_1+X_2 = x)$

$$= \int_{\mathbb{R}} x_1 \cdot f_{X_1 \mid X_1+X_2=x}(x_1, x) \, dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x_1 \cdot \frac{1}{x} \mathbb{1}_{]0,x[}(x_1) \, dx_1$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \int_0^x x_1 \, dx_1$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{x_1^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1 \mid X_1+X_2) = g(X_1+X_2) = \frac{X_1+X_2}{2}$$

En exploitant la symétrie des rôles joués par X_1 et X_2 dans la somme X_1+X_2

$$\rightarrow \mathbb{E}(X_1 \mid X_1+X_2) = \mathbb{E}(X_2 \mid X_1+X_2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1 \mid X_1+X_2) + \mathbb{E}(X_2 \mid X_1+X_2) = 2 \cdot \mathbb{E}(X_1 \mid X_1+X_2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1+X_2 \mid X_1+X_2) = 2\,\mathbb{E}(X_1 \mid X_1+X_2) \Rightarrow \mathbb{E}(X_1 \mid X_1+X_2) = \frac{X_1+X_2}{2}$$