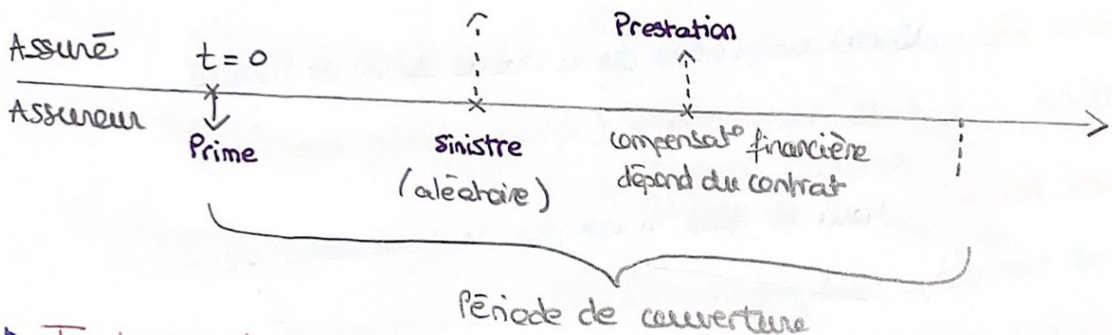
Principes Généraux de l'Assurance

→ Contrat d'Assurance :

not° fondamentale = risque (évènement aléatoire redouté = accident, incendie ...)
Plusieurs période :

- période de couverture : née du paiement de la prime (t = 0) de l'assuré envers l'assureur j> fin de la couverture
- sinistre

Diagramme des flux financiers :



→ Typologies d'assurance

- Assurance de biens et de responsabilités
  = Assurance IARD (Incendie et Autres Risques Divers)
  - Dommages aux biens : incendies, accidents, vols, ... (auto, habitat°)
  - Assurance de tiers :
    RC : responsabilité civile
    RC auto = obligatoire, RC habitat°, RC professionnelle
  - Pertes d'exploitat°

- Assurance de personnes
  - Santé :
    * complémentaire santé : médicaments, frais hospitalisat°
    * dommage corporel
  - Prévoyance
    - contrat assurance emprunteur
    - chomage
    - arrêt travail

    | décès = **ASSURANCE VIE**

- Epargne-retraite :

  - assurance vie : argent investi ds ≠ support d'investissement
  - rente viagère : paiement d'1 rente à vie js décès de l'assuré

- Contrats multi-risques : pls garanties

  - auto : RC, dommage à l'auto, dommage corporels ....
  - habitat° = MRH (multi risques habitat°)
  - assurance emprunteur

- Assurance vie : dépend uniquement de la durée de vie de l'assuré

Actuariat : → table de mortalité (risques décès / longévité)
→ risques financiers

- Assurance non-vie : tout ce qui n'est pas de l'assurance-vie

Actuariat non-vie : statistiques, deviat° de la sinistralité

→ Fondamentaux mathématiques de l'assurance

Exemple : On considère un portefeuille de n risques (contrats d'assurance).
$\forall i \in [\![1;n]\!]$, Y_i est le montant des sinistres relatifs au risque i
On note : $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ montant cumulé des sinistres

Pb : Quelle prime demander à chaque assuré ?

Loi des grands nombres :

Hypothèse : $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ iid de moyenne μ

$$\boxed{\frac{X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu = E[Y_i] \text{ prime}}$$

Permet de calculer la prime pure pour compenser en moyenne le total des sinistres
Mais insuffisant car ne prend pas en compte les fluctuat° de X autour de sa moyenne

Théorème central limite :

Hypothèse : $(Y_i)_{1\le i\le n}$ iid de moyenne μ et de variance σ^2

$$\boxed{\frac{X_n - E[X_n]^{①}}{\sigma(X_n)^{②}} = \frac{X_n - n\mu}{n\sigma^2} = \frac{\frac{X_n}{n} - \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} N(0,1)}$$

① $E[X_n] = E[\sum_{i=1}^n Y_i] = \sum_{i=1}^n E[Y_i] \underset{\text{iid}}{=} nE[Y_1] = n\mu$

② $V(X_n) = \sigma^2(X_n) = V(\sum_{i=1}^n Y_i) = \sum_{i=1}^n V(Y_i) \underset{\text{iid}}{=} n^2 V(Y_1) = n^2\sigma^2$

Permet de contrôler les fluctuat° de X autour de sa moyenne

a) Hypothèse du modèle idéal de l'assurance

* Homogénéité du portefeuille de risques :
risques "identiques", solut° à l'hétérogénéité, segmentat°

* Indépendance :
risques "indépendants"
- assurance auto : ok
- tempête : touche zone géo : solut° : réassurance

* Mutualisation :
rassembler le max d'assurés (n grand)

b) Exemple du principe de mutualisation

- Assurance décès 1 an : capital fixé à l'avance versé à un bénéficiaire en cas de décès de l'assuré pendant l'année
- On considère un portefeuille de n risques (contrats) avec des assurés qui ont ts la m̂ proba de décès $q = 1\%$
- Capital assuré (prestat° en cas de décès) : $C = 100\,000$
- Prime payée par chaque assuré $\pi = 1050$
- On néglige les frais de l'assureur et les ② produit financiers procurés par le placement des primes en début d'année

- Notations :
  - $\forall i \in [\![1;n]\!]$, Y_i montant des sinistres relatifs au risque i
  - $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ montant cumulé des sinistres

En supposant que l'approximat° normale est valide : $X_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathcal{N}$.
Calculer un intervalle de confiance centré au niveau $1-\alpha = 95\%$ pour le résultat (ou bénéfice B) de l'assureur exprimé en % CA

* Distribut° du montant cumulé des sinistres X_n

- $Y_i = \begin{cases} \underline{C} & \text{si l'assuré décède pendant l'année de proba } q \\ 0 & \text{si vit de proba } 1-q \end{cases}$

$Y_i \sim \underline{C} \times \underbrace{\mathcal{B}(1,q)}_{\text{loi de Bernoulli de paramètre } q}$ $|(Y_i)$ iid.

- $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim C \times \underbrace{\mathcal{B}(n,q)}_{\text{loi Binomiale }(n,q)}$

- $E(X_n) = Cnq$ $\quad V(X_n) = C^2 nq(1-q)$ $\quad \sigma(X_n) = C\sqrt{nq(1-q)}$

- Bénéfice de l'assureur $\quad B = \underset{\text{prime}}{CA} - \underset{\text{prestat°}}{X_n} = n\pi - X_n$

$E[B] = E[\underset{\text{cst}}{n\pi} - X_n] = n\pi - E[X_n] = n(\pi - Cq)$

$V[B] = V[n\pi - X_n] = V(X_n) = C^2 nq(1-q)$

$\sigma(B) = \sqrt{C\ nq(1-q)}$

$\sqrt{Var(B)}$

$$P\left(\left|\underbrace{\frac{B-E[B]}{\sigma(B)}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} N(0,1)}\right| \leq \underbrace{1{,}96}_{\text{table loi normale}}\right) = 1-\alpha = 95\%$$

= approximat° loi normale

$$P\left(-1{,}96 \leq \frac{B-E[B]}{\sigma(B)} \leq 1{,}96\right) = 95\%$$

$\Leftrightarrow$

$$P\left(\frac{E[B]-1{,}96\,\sigma(B)}{CA} \leq \frac{B}{CA} \leq \frac{E[B]+1{,}96\,\sigma(B)}{CA}\right) = 95\%$$

Bornes de l'intervalle de confiance à 95% : $\left(1-\frac{cq}{\pi}\right) \pm 1{,}96 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{c}{\pi}\sqrt{q(1-q}$

A.N → $= 4{,}76\% \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \times 9{,}5$ ← incertitude

Espérance de bénéfice relative au CA

$$\frac{B}{CA} \in \left[4{,}76\% - \frac{1}{\sqrt{n}}9{,}5 \, ; \, 4{,}76\% + \frac{1}{\sqrt{n}} \times 9{,}5\right]$$ avec proba 95%

n	100	10 000	100 000
± incertitude bénéfice	30 %	9,5 %	3 %
$\frac{1}{\sqrt{n}} \times 9{,}5$	[-25% ; 35%]	[-5% ; 14%]	[1,5% ; 7,5%]