Exo3 - Serie 2 TD $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2 = m$, pour tout $m \geq 0$ fixé

$X_1 + X_2$ prends ses valeurs dans $\mathbb{N}$ car somme de v.a. discrètes

$\forall m$ fixé, Calculons $\mathbb{P}(X_1 = k \mid Y = m)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ où $Y = X_1 + X_2$

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid Y = m) = \mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = m) = \mathbb{P}(X_1 = k \mid X_2 = m-k)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_1 = k \text{ et } X_1 + X_2 = m)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = m)}$$

On a l'égalité $\{X_1 = k \text{ et } X_1 + X_2 = m\} = \{X_1 = k \text{ et } X_2 = m-k\}$

d'où, $\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = m) = \dfrac{\mathbb{P}(X_1 = k \text{ et } X_2 = m-k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = m)}$

indépendance $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_1 = k) \cdot \mathbb{P}(X_2 = m-k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = m)}$$

Pour $k > m$: Cette proba est nulle car $\mathbb{P}(X_2 < 0) = 0$

Pour $k \leq m$: $\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = m) = \dfrac{\left[\dfrac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}\right] \cdot \left[\dfrac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_2}\right]}{\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$

$$= \frac{m!}{(m-k)!\,k!} \cdot \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{m-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^m} = \binom{m}{k} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m$$

$= \dbinom{m}{k} \left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{m-k}$ en posant $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, on a

$\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = m) = \dbinom{m}{k} p^k (1-p)^k$. C'est la loi Binomiale $\mathcal{B}(m, p)$

$$\mathcal{B}\left(m, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

Probabilités suite :

Remarque : La loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1+X_2=n$ est

$\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

b) Calculer $\mathbb{E}\left[X_1 \mid X_1+X_2\right] = \overbrace{\mathbb{E}\left[X_1 \mid X_1+X_2=\cdot\,\right]}^{\text{juste une notation}} \circ (X_1+X_2)$

Notation qui represente l'esperance de X_1 calculée à l'aide de la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1+X_2=\cdot$

$g(\cdot) = \mathbb{E}\left[X_1 \mid X_1+X_2=\cdot\,\right] = (\cdot)\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

esperance cas discret

$\forall m \in \mathbb{N} \quad g(m) = m\cdot p = m\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) = \sum_{k\geq 0} k \cdot \mathbb{P}(X_1=k \mid X_1+X_2=m)$

l'esperance de X_1 calculée avec la loi conditionnelle

$\mathbb{E}[X \mid Y] = g(Y)$ où $g(m)$ est l'esperance de X calculée avec $\mathcal{L}_{X \mid Y=m}$