

M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

Cauchy-Lipschitz, EDO affines, EDO linéaires à coefficients constants

Plan du cours 2

Feuille d'exercice 2.

- 1 Théorèmes d'existence et d'unicité
 - Théorème de Cauchy-Lipschitz
 - Unicité globale
 - Critère d'existence globale
- 2 E.D.O. affines
- 3 E.D.O. linéaires à coefficients constants
 - L'exponentielle
 - Espaces stable, instable et neutre
 - Stabilité
 - Exemples en dimension 2

Sommaire Plan du cours 2

- 1 Plan cours 2
- 2 Théorèmes d'existence et d'unicité
- 3 E.D.O. affines
- 4 E.D.O. linéaires à coefficients constants

Sommaire Plan du cours 2

- 1 Plan cours 2
- 2 Théorèmes d'existence et d'unicité
 - Théorème de Cauchy-Lipschitz
 - Unicité globale
 - Critère d'existence globale
- 3 E.D.O. affines
- 4 E.D.O. linéaires à coefficients constants

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Cadre

- E un espace de Banach (i.e. un espace vectoriel normé complet) muni d'une norme $\|\cdot\|$: l'espace des phases (p. ex. \mathbb{R}^n ou esp. dim. infinie).
- I un intervalle de \mathbb{R} , $t_0 \in I$ tel que $(t_0, y_0) \in \Omega$.
- Ω ouvert de $\mathbb{R} \times E$ contenant (t_0, y_0) .
- $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ une application continue

Problème de Cauchy (i.e. satisfaisant une condition initiale) : Trouver $y : I \rightarrow E$ (C^1) vérifiant l'équation différentielle ordinaire (E.D.O.) :

$$\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1)$$

et satisfaisant la condition initiale : $y(t_0) = y_0$ (1')

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Cadre

Les E.D.O. de degré $k \geq 2$ se ramènent à des E.D.O. d'ordre 1 **quitte à agrandir l'espace des phases** : si $x : I \rightarrow E$,

$$\frac{d^k x}{dt^k}(t) = g(t, x(t), \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(t)) \quad (2)$$

se ramène à

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (3)$$

où $y = (y_1, \dots, y_k) \in E^k$:

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Cadre

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \vdots &= \vdots \\ \dot{y}_{k-1} &= y_k \\ \dot{y}_k &= g(t, y_1(t), \dots, y_{k-1}(t)) \end{cases} \quad (4)$$

$x(\cdot)$ est solution de (2) si et seulement si $(x(\cdot), \frac{dx}{dt}(\cdot), \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(\cdot))$ est solution de (4)

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Fonctions lipschitzienne

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ continue, nous dirons que f est **localement (uniformément) lipschitzienne** sur Ω (par abus de langage nous sous-entendons "en y ") si pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times E$ il existe un voisinage $W \subset \Omega$ de (t_0, y_0) et une constante K_W tels que pour tous $(t, y_1), (t, y_2)$ dans W

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq K_W \|y_1 - y_2\|.$$

Nous notons $f \in \text{Lip}_{loc}(\Omega, E)$.

Si f est C^1 en y cette condition est automatiquement satisfaite.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Existence et unicité locales

Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Supposons f localement lipschitzienne sur Ω et soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (5)$$

admet une solution unique définie sur $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Preuve

\mathcal{T} envoie bien $C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(y_0, a)})$ dans lui-même si δ est suffisamment petit (p.ex. $\delta M < a$) : en effet

$$\|\mathcal{T}(y(\cdot))(t) - y_0\| \leq \delta M.$$

\mathcal{T} est contractante si δ est suffisamment petit (p.ex. $\delta K_{W_{\delta,a}} < 1/2$) :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(u(\cdot)) - \mathcal{T}(v(\cdot))\| &\leq \delta \sup_{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| \\ &\leq \delta K_{W_{\delta,a}} \sup_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|u(\cdot) - v(\cdot)\| \end{aligned}$$

□

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Preuve

Démonstration : Théorème du point fixe de Picard.

On choisit δ et a de façon que $W_{\delta,a} := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(y_0, a)} \subset \Omega$, on note $M = \sup_{W_{\delta,a}} |f| < \infty$ (cette quantité est bien finie si δ, a sont suffisamment petits car f est continue en (t_0, y_0)) et $K_{W_{\delta,a}}$ une constante de Lipschitz de f (au sens de la définition précédente) valide sur $W_{\delta,a}$. On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(y_0, a)}) &\rightarrow C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(y_0, a)}) \\ y(\cdot) &\mapsto y_0 + \int_{t_0}^{\cdot} f(s, y(s)) ds \end{aligned}$$

$$\mathcal{T}(y(\cdot)) = y(\cdot) \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} \dot{y} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Remarques

- Si $L \subset \Omega$ est un compact, la taille de l'intervalle de définition de la solution de condition initiale $(t_0, y_0) \in L$ est minorée par une constante qui ne dépend que de L (et continûment de $f \in \text{Lip}_{loc}(\Omega, E)$ muni de la topologie "compact-ouvert" : f_n converge vers f pour cette topologie si et seulement si sur tout compact f_n converge vers f uniformément et $\text{Lip}(f_n - f) \rightarrow 0$).
- Le théorème de Picard à paramètre montre que si f dépend de façon C^k d'un paramètre, les solutions locales (ou pas : cf. plus bas) obtenues dépendent C^k de ce paramètre ;

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Unicité globale

- Si f est seulement **continue**, le **théorème de Peano** affirme que la partie **existence** du théorème de Cauchy-Lipschitz est **vraie**. En revanche, il n'y a **plus nécessairement unicité**.

Exemple : l'équation différentielle, $y' = \sqrt{|y|}$, admet sur $(0, \infty)$ les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ comme solutions vérifiant $y(0) = 0$.

Théorème

Si f est localement lipschitzienne sur Ω , et si $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ sont deux solutions de $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, définies sur le même intervalle I alors elles sont égales.

Démonstration. Notons J l'ensemble des points $t \in I$ pour lesquels $y_1(t) = y_2(t)$. Cet ensemble J est non vide (il contient t_0). L'unicité locale donnée par Cauchy-Lipschitz démontre que cet ensemble est ouvert. Il est également fermé (dans I) : si $t_n \in J$ converge vers $t_* \in I$ alors $y_1(t_*) = y_2(t_*)$. Comme $I = J \cup (I \setminus J)$, $J \neq \emptyset$ et que I est connexe on doit avoir $I \setminus J = \emptyset$. \square

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Existence globale

- Les solutions d'un problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ ne sont pas toujours définies sur I tout entier.

Exemples : $y'(t) = 1 + y^2(t)$ admet pour solution $y(t) = \tan(t)$ qui "explose" en $t \in (\pi/2) + \pi\mathbb{Z}$.

- Notion de **temps de vie** des solutions, **intervalle maximal** (voir cours 4)

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Existence globale

En anticipant sur le cours 4 :

Théorème (Critère d'existence globale)

*Si f est définie sur $I \times E$ et est à "croissance **affine** à l'infini" (en particulier si f est affine) dans le sens suivant : il existe $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que*

$$\|f(t, y)\| \leq a(t)\|y\| + b(t)$$

alors $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$) admet une unique solution définie sur I tout entier.

Sommaire Plan du cours 2

- 1 Plan cours 2
- 2 Théorèmes d'existence et d'unicité
- 3 E.D.O. affines
- 4 E.D.O. linéaires à coefficients constants

Equations affines

Résultats généraux

Démonstration On applique la version modifiée du théorème de Picard à

$$\mathcal{T} : C^0(I, E) \rightarrow C^0(I, E)$$

$$X(\cdot) \mapsto X_0 + \int_{t_0}^{\cdot} A(s) \cdot X(s) + b(s) ds$$

\mathcal{T} n'est pas nécessairement contractante mais un de ses itérés l'est :

$$\|(\mathcal{T}(X_1)(t) - \mathcal{T}(X_2)(t))\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|X_1 - X_2\|(s) ds \quad (*)$$

et donc

$$\|(\mathcal{T}(X_1)(t) - \mathcal{T}(X_2)(t))\| \leq |t - t_0| \|A(\cdot)\|_{C^0(I)} \|X_1 - X_2\|_{C^0(I)}$$

En itérant k -fois (récurrence sur k en utilisant $(*)$) :

$$\|(\mathcal{T}^k(X_1)(t) - \mathcal{T}^k(X_2)(t))\| \leq |t - t_0|^k \frac{\|A(\cdot)\|_{C^0(I)}^k}{k!} \|X_1 - X_2\|_{C^0(I)}$$

Equations affines

Résultats généraux

Supposons à présent $\Omega = I \times E$ et $f(t, y) = A(t)y + b(t)$ où $A(\cdot) : I \rightarrow \mathcal{L}_c(E, E)$ et $b : I \rightarrow E$ continues, I : intervalle.

Théorème (Existence et Unicité globales dans le cas affine)

Avec les notations précédentes, pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in E$, il existe une unique solution $X(\cdot) \in C^1(I, E)$ (définie sur I tout entier) de

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

En outre, si I est borné, l'application

$C^0(I, \mathcal{L}_c(E, E)) \times C^0(I, E) \times E \rightarrow C^0(I, E)$ qui à $(A(\cdot), b(\cdot), X_0)$ associe $X(\cdot)$ est continue (en fait C^∞).

Equations affines

Résultats généraux

Donc si I est borné de longueur L et pour $k \gg 1$

$$\rho := \frac{(L\|A\|_{C^0(I)})^k}{k!} < 1$$

\mathcal{T}^k est contractant, donc admet un unique point fixe $X(\cdot)$.

$X(\cdot)$ est aussi l'unique point fixe de \mathcal{T} :

$$\mathcal{T}^k(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T}^{k+1}(X) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^k(X)) = \mathcal{T}(X).$$

Par l'unicité : $\mathcal{T}(X) = X$ (réciproque triviale).

Le théorème de Picard à paramètre (version C^0) appliqué à \mathcal{T}^k donne la deuxième partie du théorème : la dépendance est continue en les paramètres..

Equations affines

Résultats généraux

Pour obtenir la dépendance C^p (pour tout $p \geq 1$) on applique la version C^p du théorème de Picard à paramètres.

On a vu que $\mathcal{T}^k(\cdot, A, b, X_0)$ était ρ -contractante sur l'espace de Banach $C^0(I, E)$; comme elle est clairement affine et continue en $X(\cdot)$ elle est C^p pour tout p et comme \mathcal{T}^k est ρ -contractante (et affine) on a $\|D_X \mathcal{T}^k\| \leq \rho$. Par ailleurs la dépendance en $A(\cdot) \in C^0(I, \mathcal{L}_c(E, E))$ (resp. $b(\cdot) \in C^0(I, E)$, resp. $X_0 \in E$) est linéaire (resp. affine) continue, si bien que \mathcal{T} est C^p par rapport à chacune des variables $A(\cdot)$, $b(\cdot)$, X_0 et $X(\cdot)$: elle est donc C^p pour tout p en $(X(\cdot), A(\cdot), b(\cdot))$

Les hypothèses du théorème de Picard à paramètre sont vérifiées.



Sommaire Plan du cours 2

- 1 Plan cours 2
- 2 Théorèmes d'existence et d'unicité
- 3 E.D.O. affines
- 4 E.D.O. linéaires à coefficients constants
 - L'exponentielle
 - Espaces stable, instable et neutre
 - Stabilité
 - Exemples en dimension 2

Equations linéaires à coefficients constants

On suppose à présent $E = \mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}^n$ ou \mathbb{R}^n) et que $A(\cdot) = \text{constante} = A \in M(n, \mathbb{K})$ et $b(\cdot) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

La solution est facile à écrire :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$$

où on définit pour $B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$e^B = \exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \in GL(n, \mathbb{K})$$

Equations linéaires à coefficients constants

En effet, en utilisant le point (6) du transparent suivant :

$$\frac{d}{dt}(e^{tA} X_0) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{t^{k-1}}{k!} A^k \right) X_0 = A \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} A^l \right) X_0 = A(e^{tA} X_0).$$

Equations linéaires à coefficients constants

L'exponentielle

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

- ① $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
- ② $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$
- ③ L'application exponentielle est \mathbb{K} -analytique (et donc de classe C^∞)
- ④ L'application linéaire tangente de l'exponentielle en 0 est l'identité : $D \exp(0) \cdot H = H, \quad \forall H \in M_n(\mathbb{K})$.
- ⑤ Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ **commutent**, i.e. $AB = BA$, on a, $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$. (**faux en général**)
- ⑥ $f(t) = \exp(tA)$ est C^∞ et $f'(t) = A e^{tA} = e^{tA} A$.
- ⑦ Si $P \in GL(n, \mathbb{K})$, $P e^A P^{-1} = e^{P A P^{-1}}$.
- ⑧ Si Δ est une matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors e^Δ est diagonale d'éléments diagonaux $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$

Equations linéaires à coefficients constants

Etude de la dynamique

Mise sous **forme normale** : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec : S **diagonalisable** : $S = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$, N **nilpotente** : $\exists k \in \mathbb{N}^*, N^k = 0$ et S et N **commutent** ($SN = NS$) ; en fait S et N sont polynomiales en A .

Donc

$$e^{tA} = e^{tS} e^{tN} \quad (S \text{ et } N \text{ commutent}) = P e^{\text{diag}(t\lambda_1, \dots, t\lambda_n)} P^{-1} e^{tN}$$

avec $e^{tN} = I + tN + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^{k-1}$: donc polynôme en t et $e^{\text{diag}(t\lambda_1, \dots, t\lambda_n)} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$.

Conclusion :

Théorème

Les **coefficients** de $e^{tA} X_0$ sont des **combinaisons linéaires** de termes de la forme $t^p e^{t\lambda_q}$, ($0 \leq p \leq k-1$, $1 \leq q \leq n$)

Equations linéaires à coefficients constants

Espaces caractéristiques

Origine **géométrique/algébrique** de la décomposition $A = S + N$. Soit $\mu_A(X)$ le **polynôme minimal** de A : le polynôme de plus petit degré (normalisé) qui annule A ($\mu_A(A) = 0$).

$\mu_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où λ_i , $1 \leq i \leq r$ sont les **valeurs propres** de A (on a toujours $1 \leq \alpha_i \leq m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le polynôme caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).

Alors (Théorème de décomposition des noyaux)

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$;
- $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ est invariant par A (**espaces caractéristiques**) ;
- A restreinte à $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ est de la forme $\lambda_i \text{id}_{\Gamma_i} + n_i$ où $n_i \in \text{End}(\Gamma_{\lambda_i})$ est nilpotent d'ordre α_i ($n_i^{\alpha_i-1} \neq 0$, $n_i^{\alpha_i} = 0$).

Equations linéaires à coefficients constants

Décomposition dynamique

La décomposition **géométrique** précédente a un sens **dynamique** :

Théorème

On a $\mathbb{K}^n = \Gamma_s \oplus \Gamma_u \oplus \Gamma_c$ (*espaces stable, instable, central*) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) où

- $\Gamma_s(A) := \bigoplus_{\Re \lambda_i < 0} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA} \cdot v\| = 0\}$
- $\Gamma_u(A) := \bigoplus_{\Re \lambda_i > 0} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \lim_{t \rightarrow -\infty} \|e^{tA} \cdot v\| = 0\}$
- $\Gamma_c(A) := \bigoplus_{\Re \lambda_i = 0} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \exists C, M, \forall t \in \mathbb{R}, \|e^{tA} \cdot v\| \leq C(1 + |t|)^M \|v\|\}$

Equations linéaires à coefficients constants

Décomposition dynamique

On a alors le résultat plus précis suivant :

Théorème

Pour tous $0 < \lambda_s < \min_{\Re \lambda_i < 0} |\Re \lambda_i|$, $0 < \lambda_u < \min_{\Re \lambda_i > 0} \Re \lambda_i$, il existe $C > 0$ tel que

- $\forall v \in \Gamma_s(A)$, $\forall t > 0$, $\|e^{tA}.v\| \leq Ce^{-\lambda_s t} \|v\|$, $\|e^{-tA}.v\| \geq Ce^{\lambda_s t} \|v\|$
- $\forall v \in \Gamma_u(A)$, $\forall t > 0$, $\|e^{-tA}.v\| \leq Ce^{-\lambda_u t} \|v\|$, $\|e^{tA}.v\| \geq Ce^{\lambda_u t} \|v\|$
- $\forall v \in \Gamma_c(A)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $C^{-1} \|v\| \leq \|e^{tA}.v\| \leq C(1 + |t|)^n \|v\|$.

Equations linéaires à coefficients constants

Stabilité et stabilité asymptotique

On dit que 0 est **stable (au sens de Lyapunov)** (quand $t \rightarrow +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.

On dit que 0 est **asymptotiquement stable** (quand $t \rightarrow +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Théorème (Critère de Routh)

- l'origine est **asymptotiquement stable** (quand $t \rightarrow \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de **parties réelles strictement négatives**.
- l'origine est **stable** (quand $t \rightarrow \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de **parties réelles négatives** et celles λ_i qui sont de **parties réelles nulles** sont telles que pour tout $q \geq 1$ $\ker(A - \lambda_i I)^q = \ker(A - \lambda_i I)$ (on dit que A est diagonalisable en λ_i)

Equations linéaires à coefficients constants

Exemples en dimension 2

Regarder les **portraits de phase** du polycopié (p. 70-71).

Cas particulier important : $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) := \{M \in M(2, \mathbb{R}) : \text{tr}(M) = 0\}$.

On a alors pour tout t , $e^{tA} \in \mathfrak{SL}(2, \mathbb{R}) := \{M \in M(2, \mathbb{R}) : \det M = 1\}$.

Le cas général se ramène facilement à ce cas : si $A \in M(2, \mathbb{R})$,

$\tilde{A} := A - (\text{tr}(A)/2)I \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et $e^{tA} = e^{t(\text{tr}(A)/2)} e^{t\tilde{A}}$.

Dans la suite on se concentre sur le cas où $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

On posera dans la suite $\omega = \sqrt{|\det A|}$.

Equations linéaires à coefficients constants

Exemples en dimension 2

Si $\det A > 0$:

- deux v.p. imaginaires pures $\pm i\omega$
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$;
- toutes les orbites sont des ellipses parcourues avec la même période : A est **elliptique**.
- L'origine est stable.
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1}$

Equations linéaires à coefficients constants

Exemples en dimension 2

Si $\det A < 0$:

- deux v.p. réelles opposées $\pm\omega$;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_s(A) \oplus \Gamma_u(A)$ où $\Gamma_s = \mathbb{R}v_s$, $\Gamma_u = \mathbb{R}v_u$.
- Les orbites sont des hyperboles : A est **hyperbolique**
- L'origine est instable.
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\omega t} \end{pmatrix} P^{-1}$

Equations linéaires à coefficients constants

Exemples en dimension 2

Si $\det A = 0$:

- deux v.p. nulles ;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$ mais A est nilpotente d'ordre 2 ou égale à $\pm Id$
- A est dite **parabolique**
- L'origine est instable si $a \neq 0$ (stable sinon).
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $A = P \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} 1 & ta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Equations linéaires à coefficients constants

Variations de la constante

On veut résoudre à présent

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + b(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème (Variation de la constante)

On a pour tout t

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Démonstration. En effet si on pose $Y(t) := e^{-tA}X(t)$ on a

$$Y'(t) = -Ae^{-tA}X(t) + e^{-tA}(AX(t) + b(t)) = e^{-tA}b(t).$$

□