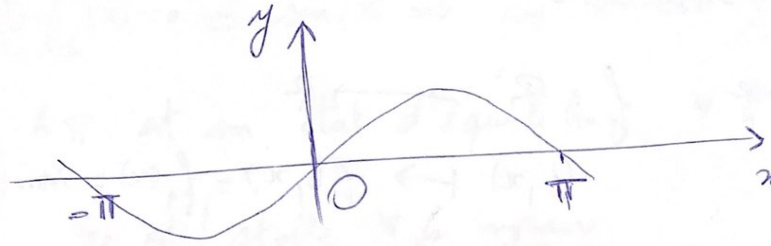
Contrôle systèmes dynamiques :

Exercice 1 : On considère $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ $\quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - x^3$

1) Pour chacune des f_i étudier la fonction, son graphe, donner les zéros, localement ou globalement Lipschitzienne ?

$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



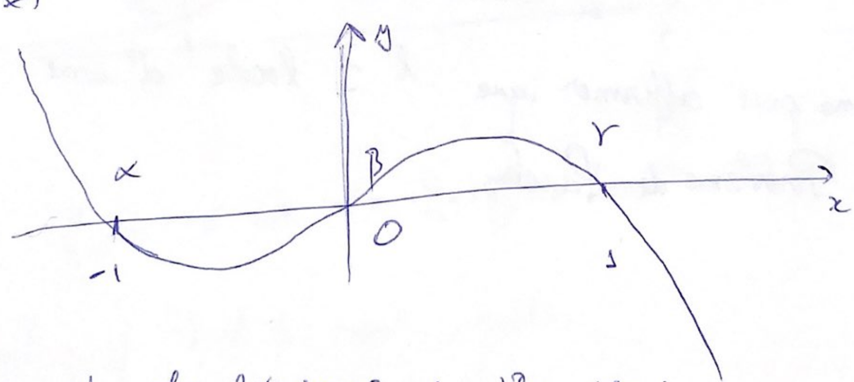
f_1 est globalement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ car :

$|f_1'(x)| = |\sin'(x)| = |\cos(x)| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

//

$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$



f_2 est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ car :

$f_2 \in C^1(\mathbb{R})$ car fonction polynômiale (C^∞)

mais $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_2'(x)| = +\infty$

2) On considère le Problème de Cauchy associé à l'EDO

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x) \\ x_2' = f_2(x) \end{cases}$$ et à la condition initiale $x(0) = x_0$

a) Que peut on dire à priori, sur l'existence, locale ou globale, et l'unicité de la solution?

Pour $i=1$, $f_1(x) = \sin(x)$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz global s'applique $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t,x) \longmapsto f(t,x) = f_1(x) = \sin(x)$$

est continue et uniformément Lipschitzienne

$\exists K>0$, $\forall t, x, y$, $|f(t,x) - f(t,y)| \leq K \cdot |x-y|$ $(K=1)$

Donc pour $i=1$, $\exists!$ solution de $x_1' = f_1(x)$ tq

$x_1(0) = x_0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

Pour $i=2$, on ne peut affirmer que l'$\exists$ locale d'une unique solution du Problème de Cauchy.

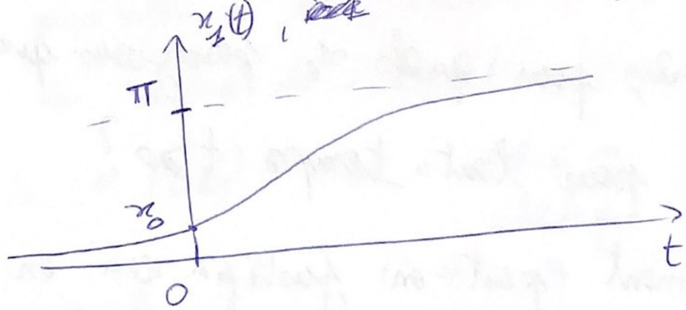
3) Dans chaque cas, discuter graphiquement la stabilité des états d'équilibre du problème $x_i' = f_i(x)$.
Dans le cas $i=1$, si $x_0 \in]0,\pi[$, que pensez-vous du comportement de la solution quand $t \to \pm\infty$?
Tracer l'allure qualitative de la solution $t \mapsto x_i(t)$

Pour $i=1$, $f_1(x)=0 \Leftrightarrow \sin(x)=0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Ainsi $x_k = k\pi$ est un état d'équilibre, $\forall k \in \mathbb{Z}$

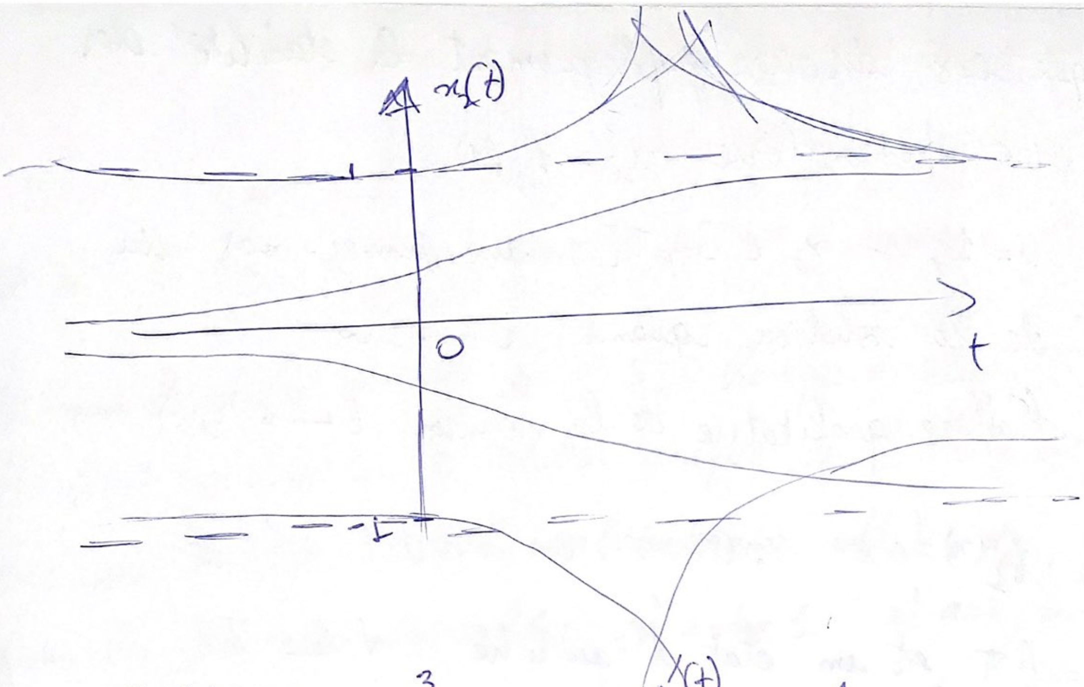
Graphiquement, x_k est $\begin{cases} \text{stable } \forall k \text{ impair} \\ \text{instable } \forall k \text{ pair} \end{cases}$

Si $x_0 \in]0,\pi[$, l'allure qualitative du graphe de $\{t \mapsto x_1(t)\}$ est



Pour $i=2$, $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$

Graphiquement, $\begin{cases} -1 \text{ et } 1 \text{ sont stables} \\ 0 \text{ est instable} \end{cases}$



$$\dot{x}_2(t) = x_2 - x_2^3 \iff \frac{x_2'(t)}{x_2 - x_3^2} = 1$$

$$\iff \frac{x_2'(t)}{x_2(x_2-1)(x_2+1)} = \frac{a}{x_2-1} + \frac{b}{x_2} + \frac{c}{x_2+1} = 1$$

A) Dans le cas $i=2$, pour quels x_0 pensez-vous que la solution est définie pour tout temps $t \geq 0$?

Rappeler ensuite comment peut-on justifier ceci en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{x-x^3}$ pour en déduire la solution sous la forme

$$x_2(t) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x(0)+1}\right|^a \left|\frac{x}{x(0)}\right|^b \left|\frac{x-1}{x(0)-1}\right|^c\right)$$

Exercice 2 : Equation differentielle linéaire du second ordre

$x'' + ax' + bx = f(t)$ où a et b sont strictement positives

Et où la fonction f est supposée connue, continue et bornée $\forall t$

1) Donner la solution générale de l'EDO homogène associé.

Si $f \equiv 0$, en déduire la solution unique de Problème de Cauchy

avec une donnée initiale arbitraire : $x(t_0) = x_0$, $x'(0) = x_1$

dans les trois cas suivants : 1) $a = b = 1$ 2) $a = 2$, $b = 1$, c) $a = 4$, $b =$

L'EDO : $x'' + ax' + bx = f(t)$ est d'ordre 2, linéaire à

coefficients constants, inhomogène.

Notons l'EDO homogène $x'' + ax' = bx = 0$ (i.e $f \equiv 0$)

La solution générale est combinaison linéaire de $t^{\ell} e^{rt}$

où $r = r_i$ est la racine de l'équation caractéristique :

$r^2 + ar + b = 0$ (E.C) on a $\ell \leq m_i$: ordre de multiplicité algébrique de r_i

$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4b = 1^2 - 4 = -3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$

$r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-a - i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

$r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-a + i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

Remarque : $r_1 + r_2 < 0$ et $r_1 \cdot r_2 > 0$.

d'où $Re(r_i) < 0 \Rightarrow$ Solution bornée.

$t \mapsto \; \Rightarrow x(t) \to +\infty$

dans les 3 cas

1) $a = b = 1$ d'ou $r^2 + r + 1 = 0$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = j = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha - i\beta \\ r_2 = \bar{j} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha + i\beta \end{cases}$$

$$r_1 \neq r_2 \Rightarrow x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

$$= A_1 e^{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$$

$$= e^{-t/2}\left(A_1 e^{-i\beta t} + A_2 e^{+i\beta t}\right)$$

$$= e^{-t/2}\left[A_1(\cos(-\beta t) + i\sin(-\beta t)) + A_2(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))\right]$$

cos est paire $\Rightarrow \cos(-x) = \cos(x)$

sin st impaire $\Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$

$$= e^{-t/2}\left[A_1(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)) + A_2(\cos(\beta t) + i\sin(\beta(t)))\right]$$

$$= e^{-t/2}\left[(A_1 + A_2)\cdot\cos(\beta t) + i(A_2 - A_1)\sin(\beta t)\right]$$

$$= e^{-t/2}\left[A\cos(\beta t) + i\beta\sin(\beta t)\right]$$

$$= e^{-t/2}\cdot C\cdot\cos(\beta(t - \theta_0))$$ où $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\cos(\theta_0) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\sin(\theta_0) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

On exprime A et B à l'aide des conditions initiales

$x(0) = x_0$ et $x'(0) = x_1$

$$x'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2}\left[A\cos(\beta t) + i\beta \sin(\beta t)\right] + e^{-t/2}\left[A\beta \sin(\beta t) - iB\beta\cos(\beta t)\right]$$

$\Rightarrow A = x_0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}A + -iB\beta = x_1$$

$$\rightarrow B = \frac{x_1 + \frac{1}{2}x_0}{-i\beta} = i\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x_1 + \frac{1}{2}x_0\right)$$

2) $a=2,\ b=1$, d'où $r^2+2r+1=0 \iff (r+1)^2$

$\Rightarrow r_1=r_2=(-1)$

$\Rightarrow x(t) = e^{rt}(At+B) = e^{-t}(At+B)$

$x(0)=x_0 \iff B=x_0$

$x'(0)=x_1 \iff -e^{-t}(At+B)+e^{-t}A\Big|_{t=0}=x_1$

$\iff -B+A=x_1$

$\iff A=x_1+x_0$

Ainsi, $x(t) = e^{-t}\cdot\left[(x_0+x_1)t+x_0\right]$

$\Delta = b^2-4ac$
$= 4^2-4\cdot 3 = 16-12=4$

3) $a=4,\ b=3$, d'où $r^2+4r+3=0$

$r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{2} = \dfrac{-4-2}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$

$r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+2}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1$

$r_1=-3 < r_2=-1$

$\Rightarrow x(t) = A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t} = A_1e^{-3t}+A_2e^{-t}$

$x(0)=x_0 \Rightarrow A_1+A_2=x_0$

$x'(0)=x_1 \Rightarrow -3A_1e^{-3t}+-A_2e^{-t}\Big|_{t=0}=x_1$

$\Rightarrow \begin{cases} A_1+A_2=x_0 \\ -3A_1-A_2=x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1+x_0=-2A_1 \\ A_2=x_0+\frac{1}{2}(x_1+x_0) \end{array}$

$\Rightarrow A_1 = -\frac{1}{2}(x_1+x_0)$
$A_2=\frac{1}{2}(x_1+3x_0)$

Ainsi $x(t) = -\frac{1}{2}(x_1+x_0)e^{-3t}+\frac{1}{2}(x_1+3x_0)e^{-t}$

2) On veut retrouver ces résultats en écrivant $x_i'(t) = f_i(x)$

_Comme un système du premier ordre $X' = AX$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

Montrer d'abord en appliquant ~~Cauchy~~ Cauchy-Lipschitz l'existence (globale?) et l'unicité de la solution du Problème de Cauchy associé pour tout couple $X_0 = (x_0, x_1)$.

Dans le cas 2) résoudre explicitement $X' = AX$ en diagonalisant la matrice A si c'est possible.

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$$x'' + ax' + bx = f(t) \iff X' = AX$$

$$\iff \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -b\,x(t) - a\,x'(t) \end{pmatrix}$$

$$x' = -ax' - bx$$

$$x' = -\frac{1}{a}x'' - \frac{b}{a}x$$

$$\iff X' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = AX$$

d'où $X' = F(X) = F(t,X)$ avec $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue

Ici, le système est autonome et F est Lipschitzienne en X et uniformément en $t \in \mathbb{R}$.

et uniformément Lipschitzienne en X.

c-à-d : F est globalement Lipschitzienne

En effet, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\| F(t,X) - F(t,Y) \|_\infty = \| \int_0^1 \frac{d}{dh} F(t, hX + (1-h)Y)\, dh \|_\infty$$

$$= \| \int_0^1 F'(hX + (1-h)Y)(X-Y)\, dh \|_\infty = \| \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - Y_1 \\ X_2 - Y_2 \end{pmatrix} dh \|_\infty$$

$\Rightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\| F(t,X) - F(t,Y) \| \leq \int_0^1 \| A\cdot(X-Y) \|_\infty \, dh \leq \underbrace{\|A\|_\infty}_{=L} \|X-Y\|_\infty$$

D'où en déduit la constante de Lipschitz de F pour $\|\cdot\|_\infty$: $L = \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max(1, |a|+|b|)$

Donc, $\forall X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, le Problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$

a une solution unique, définie globalement,

et $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{tA} \cdot X_0$

Dans le cas 2) $a=2$ $b=1$, $x'' + 2x' + x = 0$

$x'' = -2x' - x$

$x' = -\frac{1}{2}(x + x'')$

$X' = AX$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

Donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$

$= \lambda^2 + 2\lambda + 1$

$= (\lambda+1)^2$

$\mathrm{Spec}(A) = \{-1\}$

-1 valeur propre de multiplicité 2, $m(\lambda) = 2$

Vecteur propre associé à (-1) :

$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = y \\ -y = -x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$

On choisit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\| F(t,X) - F(t,Y) \| \leq \int_0^1 \| A.(X-Y) \|_\infty \, dh \leq \underbrace{\|A\|_\infty}_{=L} \|X-Y\|_\infty$$

D'où on déduit la constante de Lipschitz de F pour $\|.\|_\infty$: $L = \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}| \underset{ici}{=} \max(1, |a|+|b|)$

Donc, $\forall X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, le Problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$,

a une solution unique, définie globalement,

et $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{tA} \cdot X_0$

Dans le cas 2) $a = 2$ $b = 1$, $x'' + 2x' + x = 0$

$x'' = -2x' - x$

$x' = -\frac{1}{2}(x + x'')$

$X' = AX$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$

Donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$

$= \lambda^2 + 2\lambda + 1$

$= (\lambda + 1)^2$

$Spec(A) = \{-1\}$

-1 valeur propre de multiplicité 2, $m(\lambda) = 2$

Vecteur propre associé à (-1) :

$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = y \\ -y = -x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$

On choisit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit $X \in E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I) \iff (A+I).X = 0$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x+y=0 \iff x=-y$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-1} = \mathrm{Ker}(A+I) = \mathrm{vect}\{(1,-1)\}$

donc $\dim(E_{-1}) = 1 \neq 2 = m(\lambda)$

$\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable.

Jordanisation ou trigonalisation

$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

où P est la matrice de passage de la base de B à B'

$B = (e_1, e_2)$ $\quad B' = (v_1, v_2)$

On complète $v_1 = (1,-1)$ avec un deuxième vecteur v_2 non colinéaire à v_1 (théorème de la base incomplète)

On choisit $v_2 = (1,0)$ $\quad \det(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

donc $B' = ((1,-1),(1,0))$ forme une base et on a

$$\begin{cases} v_1 = e_1 - e_2 \\ v_2 = e_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_2 \\ e_2 = -v_1 + v_2 \end{cases}$$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

$$P^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \end{array}$$

P^{-1} la matrice de passage de B' à B

Qu 9 $A = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad A = PJP^{-1} \iff P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

. On pose $X = PZ \iff Z = P^{-1}X$

$$\iff \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} z_1 = -x_2 \\ z_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

d'où $Z' = JZ \iff \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z_2(t) = e^{-t} z_2(0) \\ \dot{z}_1 + z_1 = e^{-t} z_2(0) \end{cases}$$

On resout $z_1' + z_1 = e^{-t} z_2(0)$

$(E.c) = r + 1 = 0 \Rightarrow r = -1$ est solution simple

donc une sol particulière est $z_1(t) = c \cdot t \cdot e^{-t} = z_2(0)\, t\, e^{-t}$

donc la Sol Generale est : $z_1(t) = e^{-t}(z_2(0)t + c)$

Finalement, on obtient $\begin{cases} z_1(t) = e^{-t}\left(t \cdot z_2(0) + z_1(0)\right) \\ z_2(t) = e^{-t} z_2(0) \end{cases}$

On revient à X_0 en écrivant $Z_0 = P^{-1} X_0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = -x_1 \\ z_2(0) = x_0 + x_1 \end{cases}$$

3) On suppose maintenant que $f(t) = e^{-ct}$, avec $c > 0$

Montrer que dans chacun des trois cas, toute solution reste bornée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Par exemple dans le cas 3) si $x_0 = 1$ et $x_1 = -c$ avec $c = 10^4$.

Donner une borne explicite de la solution. Conclusion !

Si $f(t) = e^{-ct} \neq 0$, on ajoute à la Sol Générale une Sol. Particulière de la forme

$$y = \begin{cases} C e^{-ct} & \text{si } c^2 + ac + b \neq 0 \\ C t e^{-ct} & \text{si } c^2 + ac + b = 0 \text{ et } 2c + a \neq 0 \\ C t^2 e^{-ct} & \text{si } c^2 + ac + b = 2c + a = 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas, la Sol. générale de (2) est :

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + C t^k e^{-ct} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

est bornée et tend vers 0 à l'infini

. Si $x(0) = x_0 = 1$ et $\dot{x}(0) = x_1 = -C \Rightarrow A_1 = A_2 = 0$

Dans le cas 3) $|x(t)| = e^{-10^4 t}$ est maximal pour $t = 0$ et vaut 1

pas de résonance.

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x-x^3} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

On multiplie par x et on évalue en 0 :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = a + \frac{x\,b}{x-1} + \frac{x\cdot c}{x+1}$$

$$\frac{1}{(-1)\cdot 1} = a \Rightarrow a = -1$$

On multiplie par $x-1$ et on évalue en 1 :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{-(x-1)}{x} + b + \frac{(x-1)\,c}{x+1}$$

$$\frac{1}{(1+1)} = b \Rightarrow b = 1/2$$

On multiplie par $x+1$ et on évalue en (-1) :

$$\frac{1}{x(x-1)} = c \Rightarrow \frac{1}{(-1)(-1-1)} = c \Rightarrow c = 1/2$$

Finalement, $$\frac{1}{x-x^3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$ $(1-x^2)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{x - x^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)}$$

$$\int \frac{1}{x-x^3}\, dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx$$

$$= -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

$$= \ln\frac{1}{|x|} + \ln\sqrt{|x-1|} + \ln|x+1|^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \ln\left(|x|^{-1} \cdot |x-1|^{\frac{1}{2}} \cdot |x+1|^{\frac{1}{2}} \right) + C$$

Exercice 3 : Pendule

1) On considère un pendule constitué d'une petite bille de masse m fixée au bout d'une tige rigide de longueur ℓ, elle-même attachée en son autre extrémité à un point O et libre de se mouvoir dans un plan vertical.

La bille peut donc se déplacer sur un cercle de centre O et de rayon ℓ.

La position M de la bille est repérée par l'angle balayé depuis sa position d'équilibre, notée θ. Les forces qui s'exercent sur la bille sont la force de gravité $m \cdot \vec{g}$ et la force de réaction de la tige (dirigée selon la direction de la tige elle-même). Appliquer la loi de Newton $\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{F}$ et projeter sur la droite OM, pour obtenir l'équation différentielle régissant le mouvement de la bille :

$$\ell \theta'' = -g \sin(\theta) \quad \text{où } g \text{ est le module de } \vec{g}.$$

Newton : $\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{F} = -m \cdot \vec{g} + \vec{T}$

où $\vec{T}$ est la force de réaction de la tige, colinéaire à $\overrightarrow{OM}$

En projetant ~~orthogonalement~~ / perpendiculairement à $\overrightarrow{OM}$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(m \cdot \ell \cdot \dot{\theta}(t) \overrightarrow{\tau(t)}\right) \cdot \overrightarrow{\tau(t)} = \left(-m\vec{g} + \vec{T}\right) \overrightarrow{\tau(t)}$$

$$= m \cdot \ell \cdot \ddot{\theta}(t) \, |\overrightarrow{T(t)}|^2 + m \ell \dot{\theta}(t) \frac{d}{dt} \overrightarrow{T(t)} \cdot \overrightarrow{T(t)} = -mg \sin(\theta(t))$$

car $|\overrightarrow{T(t)}|^2 = 1 \rightarrow \vec{T} \, dt \, \frac{\vec{T}}{dt} = 0$

Finalement, $m \cdot l \cdot \ddot{\theta}(t) = -m \cdot g \cdot \sin(\theta(t))$

$\Leftrightarrow \quad l \ddot{\theta}(t) = -g \sin \theta(t)$

2) On considère maintenant le système équivalent

$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -K \sin(\theta) \end{cases} \quad (S)$$

où l'on a posé $K = g/l$. On note $X = (X_1, X_2) = (\theta, \omega)$ et $F(X)$ ~~correspond~~ le second membre.

Peut-on affirmer l'existence et l'unicité d'une solution globale du problème de Cauchy associé à (S) pour toute donnée initiale $(\theta(0), \omega(0)) = (\theta_0, \omega_0)$?

Pour cela, chercher la meilleure constante de Lipschitz de F, en munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme sup : $\|X\|_\infty = \max(|X_1|, |X_2|)$

On a : $\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = -K \sin(\theta(t)) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{X}(t) = F(X)$

On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz global,

car $\{ (t, X) = (t, X_1, X_2) = (t, \theta, \omega) \mapsto (\omega, -K \sin(\theta)) \}$

est continue de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

et Lipschitzienne en X et uniformément en t

$\Rightarrow \exists L > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathbb{R}^2, \|F(X) - F(Y)\|_\infty \leq L \cdot \|X - Y\|_\infty$

En effet, $|F_1(t, X) - F_1(t, Y)| = |X_2 - Y_2| \leq \|X - Y\|_\infty$

$|F_2(t, X) - F_2(t, Y)| = |-(K \sin X_1 - K \sin X_2)| = -K \cdot |\cos \xi| \cdot |X_1 - X_2|$

$\leq K \cdot |X_1 - X_2|$

d'où $\|F(X)-F(Y)\|_\infty = \max\left(|X_2-Y_2|, -K|\sin X_1 - \sin X_2|\right)$

$$\leq \underbrace{\max(K, 1)}_{=L} \cdot \|X-Y\|_\infty$$

Donc pour toute dérivée initiale (C.I.)

$\exists!$ solution du Problème de Cauchy associé à (S)

et à cette dérivée initiale, et cette solution est définie

globalement i.e. $\forall t \in \mathbb{R}$.

3) On pose $H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} - K\cos(\theta)$. Montrer en calculant

la dérivée par rapport au temps que la fonction

$t \mapsto E(t) = H(\theta(t), \omega(t))$ est invariante au cours du temps

On dit que le système (S) est conservatif et que H

est une intégrale première de ce système.

Physiquement, $m\,l\,E(t) = m\,l\,H(\theta(t), \omega(t))$

$$= m\,l\frac{(\omega(t))^2}{2} - m\,g\cos(\theta(t))$$

Est l'énergie mécanique totale (cinétique ⊕ potentielle)

du système

Montrer plus précisément que (S) est équivalent au système

$$\begin{cases} \theta' = \frac{\partial}{\partial \omega}(\theta, \omega) \\ \omega' = -\frac{\partial}{\partial \theta}(\theta, \omega) \end{cases}$$

On dit que ce système est Hamiltonien, dont H est l'Hamiltonien. Tout système

Hamiltonien est conservatif. La réciproque est fausse.

Calculons la dérivée :

$$\frac{d}{dt}(E(t)) = \frac{d}{dt}\left(H(x(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(H(\underbrace{\theta(t)}_{x_1}, \underbrace{\omega(t)}_{x_2})\right)$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \nabla H(x(t)) \cdot \frac{d\, x(t)}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}\right) \cdot \begin{pmatrix} + \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ - \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 0$$

Car $H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} - K\cos(\theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = \dot{\theta}(t) = \omega(t) = \frac{\partial H}{\partial \omega}(\theta(t), \omega(t)) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = \dot{\omega}(t) = -K\sin(\theta(t)) = -\frac{\partial H}{\partial \theta}(\theta(t), \omega(t)) \end{cases}$$

Donc, pour toute solution de (S), $E(t) = E(0)$

i.e $H(\theta(t), \omega(t)) = H(\theta(0), \omega(0))$: on dit que E (ou H) est une intégrale première du système.

Géométriquement, on voit que

1) $E(t) = H(x(t))$ est une intégrale première d'un système : $\dot{x}(t) = F(x(t))$

$\forall x$, $\nabla_x H(x) \cdot F(x) = 0$, et que

2) $\dot{X}(t) = F(X(t))$ est un système Hamiltonien, dont l'Hamiltonien est H si :

$$\forall X, \; F(X) = (\nabla H)^{\perp}(X)$$

où $(\nabla H)^{\perp} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} , -\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)$

donc 2) $\Rightarrow$ 1) et la réciproque est fausse.

$$\dot{Y} = \alpha(Y) \, (\nabla H)^{\perp}(Y) \quad \text{où} \quad \alpha : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ Y \longmapsto \alpha(Y) \end{array}$$

est une fonction C^1 arbitraire

Problème de Cauchy dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) & (1) \\ y(0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

où f est lipschitzienne de $J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de constante k.

On est donc dans les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz version globale, donc a fortiori version locale.

<u>Rappel</u> :

. Une solution $\{t \mapsto x(t)\}$ de $(\mathcal{P})$: $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) & (3) \\ x(0) = x_0 \in J & (4) \end{cases}$

où $f : \Theta = I \times J \longmapsto \mathbb{R}^n$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, J ouvert de $\mathbb{R}^n$

$x(t)$ est une fonction C^1 de I dans $\mathbb{R}^n$ tq

$\forall t \in I$, $x(t) \in J$ et $x(\cdot)$ vérifie (3) et (4).

Une solution maximale est une solution qui ne peut pas être prolongée.

1) Ici $(t, y) \longmapsto f(t, y) = f(y)$ est continue de $\Theta = \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ et f est lipschitzienne

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall y_1, y_2 \in I$ $\quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k \cdot |y_1 - y_2|$

On peut donc au maximum applique Cauchy-Lipschitz <u>version locale</u>.

$\exists$ donc une unique solution de (1), (2) définie au moins localement. Soit $y(\cdot)$ sont prolongement maximal.

2) On vérifie (Gronwall) que $\forall t \in]t_*, t^*[$ (intervalle maximal)

On a $|y(t) - y_0| \leq |t| \cdot |f(y_0)| \cdot e^{L|t|}$

2) Montrons que y est une solution globale

- soit $t^* = +\infty$ et y est définie globalement

- Soit $t^* < +\infty$ Alors théorème des bouts

$\exists$ une suite extraite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $t_n \longrightarrow t^*$ et :

- Soit $\|y(t_n)\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (Impossible ici d'après Gronwall)

- Soit $\exists\, y^* \in \mathbb{R}$ et une nouvelle suite extraite

$(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $y(t_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} y^*$ et $(t^*, y^*) \notin \mathbb{R} \times I$

(i.e ici $y^* \notin I$)

⚠ Dans ce cas, $y(\cdot)$ est bien une solution globale

Ex : $f : I =]\frac{1}{e}, e[\longrightarrow \mathbb{R}$, $y(0) = y_0 = 1 \in I$
$y \longmapsto f(y)$

La sol maximale de (1)(2) est $y(t) = 1 \cdot e^t$ sur $]t_*, t^*[=]-1, 1[$

Elle est globale.