Exercice 11 (Ou exercice 5-bis de la feuille de TD)

Soit X un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance Γ. On suppose que Γ est inversible.

Montrer que $\langle X, \Gamma^{-1} X \rangle \sim \chi^2$

Par définition de la loi du Khi-deux :

$$Y_1, \dots, Y_n \text{ iid} \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \|Y\|^2 = \langle Y, Y \rangle = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2 \sim \chi^2(n)$$

Montrons que $A = \langle X, \Gamma^{-1} X \rangle \sim \chi^2$

c-à-d, $A = \langle u, u \rangle$ où u_i iid $\sim \mathcal{N}(0,1)$

⚠ Puisque Γ est une matrice de covariance

$\Rightarrow \begin{cases} \cdot\ \Gamma \text{ est symétrique} \\ \cdot\ \Gamma \text{ est semi-définie positive} \end{cases}$

$Q^{-1} = Q^t$

$\Uparrow$

Théorème Spectral $\rightarrow$ $\exists Q \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale

$\exists D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice diagonale

tq $\Gamma = Q D Q^t$

$$\Rightarrow (\Gamma^{-1}) = (Q D Q^t)^{-1} = (Q^t)^{-1} D^{-1} Q^{-1} = Q D^{-1} Q^t$$

où $D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

On a donc : $A = \langle X, \Gamma^{-1} X \rangle$ car Q est orthogonale

$\Rightarrow Q^{-1} = Q^t$

$\Rightarrow (Q^t)^{-1} = (Q^{-1})^{-1} = Q$

$$= \langle X, (QDQ^t)^{-1} X \rangle$$

$$= \langle X, (Q^t)^{-1} \cdot (D)^{-1} \cdot Q^{-1} X \rangle$$

$$= \langle X, Q \cdot D^{-1} Q^t X \rangle$$

$$= \langle Q^t X, D^{-1} Q^t X \rangle$$

$$= \langle Q^t X, \sqrt{D^{-1}} \cdot \sqrt{D^{-1}} Q^t X \rangle$$

$$= \langle (\sqrt{D^{-1}})^t \cdot Q^t \cdot X, \sqrt{D^{-1}} \cdot Q^t \cdot X \rangle$$

$$= \langle \sqrt{D^{-1}} Q^t X, \sqrt{D^{-1}} \cdot Q^t \cdot X \rangle$$

$$= \langle U, U \rangle$$

où $U = (\sqrt{D})^{-1} \cdot Q^t \cdot X \sim \mathcal{N}(0, I)$

donc $A = \langle U, U \rangle = \langle X, \Gamma^{-1} X \rangle \sim \chi^2$

Si $Y \rightsquigarrow N_3(0, \Gamma_Y)$

<u>où</u> Γ_Y est symétrique semi-définie positive

$\Rightarrow \Gamma_Y = Q D Q^t$ <u>où</u> $\begin{cases} Q^{-1} = Q^t \\ D = diag(\lambda_1, .., \lambda_n) \end{cases}$

$\Rightarrow Z = Q^{-1} Y = Q^t Y \rightsquigarrow N(0, D)$

<u>car</u> $\Gamma_Z = (Q^t) \cdot \Gamma_Y \cdot (Q^t)^t$

$= Q^t \cdot Q \cdot D \cdot Q^t \cdot Q$

$= Q^{-1} Q \cdot D \cdot Q^{-1} Q$

$= D$

$\Rightarrow X = \overbrace{(\sqrt{D})^{-1} \cdot Q^{-1}}^{A} (Y - E(Y)) \rightsquigarrow N(0, I_3)$

<u>car</u> $\Gamma_X = A \cdot \Gamma_Y \cdot A^t = (\sqrt{D})^{-1} \overbrace{Q^{-1} \cdot Q}^{I} \cdot D \cdot Q^t ((\sqrt{D})^{-1} Q^{-1})^t$

$= (\sqrt{D})^{-1} D \cdot Q^t \cdot (Q^t)^t \cdot ((\sqrt{D})^{-1})^t$

$= \sqrt{D} \cdot Q^{-1} Q \cdot (\sqrt{D})^{-1}$

$= \sqrt{D} \cdot (\sqrt{D})^{-1}$

$= I_3$

On a $\quad \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$

$$\Rightarrow D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{D^{-1}} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

car $\sqrt{D^{-1}} \cdot \sqrt{D^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = D^{-1}$$

Et

$$D \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_n}{\lambda_n} \end{pmatrix} = I_n$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

Donc $\left(\sqrt{D^{-1}}\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}^t = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$

Ainsi $\left(\sqrt{D^{-1}}\right)^t = \sqrt{D^{-1}}$

car $\sqrt{D^{-1}}$ est une matrice diagonale donc symétrique

$$\left(\sqrt{D}\right)^{-1} = \left(\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)\right)^{-1}$$

$$= \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

Et $\sqrt{D^{-1}} = \sqrt{\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)}$

$$= \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

donc $\sqrt{D^{-1}} = \left(\sqrt{D}\right)^{-1}$

$$\left(\sqrt{D^{-1}}\,Q^{t}\right)^{t} = \left(Q^{t}\right)^{t} \cdot \left(\sqrt{D^{-1}}\right)^{t}$$

$$= Q \cdot \sqrt{D^{-1}}$$