Exercice 8 : Soit M une v.a. de carré intégrable et $(\mathcal{F}_n)$ une suite croissante de sous-tribu. Montrer que la suite de v.a. $M_n = \mathbb{E}(M / \mathcal{F}_n)$ est une martingale convergente p.s. et dans $L^2(\Omega)$ vers une limite qu'on déterminera.

une v.a. X bornée $\Rightarrow \forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| < M$

une suite de v.a. (X_n) bornée $\Rightarrow \forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, |X_n(\omega)| < M$

- $\mathbb{E}(M^2) < \infty$ $\qquad \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$

$M_n = \mathbb{E}(M / \mathcal{F}_n)$

- mesurable car $M_0 = \mathbb{E}(M / \mathcal{F}_0)$ et $\forall n \; M_n = \varphi(M)$

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \varphi(x) = \mathbb{E}(x | \mathcal{F}_n)$$

$M_n = \varphi(M)$

$f(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(f(X))$

- Intégrabilité puisque M est de carré intégrable

$\rightarrow \mathbb{E}[M^2] < \infty \Rightarrow \mathbb{E}(M / \mathcal{F}_n)$ existe c-à-d $\mathbb{E}(M / \mathcal{F}_n) < \infty$

$\mathbb{E}(|M|) = \mathbb{E}[|\mathbb{E}(M / \mathcal{F}_n)|] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}(|M| / \mathcal{F}_n)] < \infty$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \; \mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M / \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n]$

$= \mathbb{E}[M / \mathcal{F}_n]$ car $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$

$= M_n$

$M_n = \mathbb{E}(M | \mathcal{F}_n)$ est $\mathcal{F}_n$ - mesurable.

car • c'est la proj. $\perp$ de M sur $L^2(\mathcal{F}_n)$.

• c'est la seule v.a. de $L^2(\mathcal{F}_n)$ qui vérifie la propriété de Kolmogorov : $\displaystyle\int_B Z\,dP = \int_B M\,dP \quad \forall B \in \mathcal{F}_n$

• Caractérisation de l'espérance conditionnelle

c-à-d l'unique v.a. $(\mathcal{F}_n)$- mesurable vérifiant la propriété de Kolmogorov.

Intégrabilité : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = |x|$ la valeur absolue est convexe

On a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|M_n|) &= \mathbb{E}(\ |\mathbb{E}(M / \mathcal{F}_n)|) \\
&= \mathbb{E}\left(f(\mathbb{E}(M | \mathcal{F}_n))\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(f(M) | \mathcal{F}_n)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(|M| \,|\, \mathcal{F}_n)\right] \leq \mathbb{E}(|M|) < \infty
\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(M^2) < \infty$

Stabilité par intersection finie des classes

Il suffit donc de faire pour $B \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tq $B \in \mathcal{F}_{n_0}$