Exercice 4 : Soit Y un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma_Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

1) Ecrire la fonction caractéristique de Y.

Soit $u \in \mathbb{R}^3$, d'après le cours $\varphi_Y(u) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle u, Y\rangle}\right]$

$$\varphi_Y(u) = e^{i\langle u, \mathbb{E}(Y)\rangle} \cdot e^{-\frac{1}{2}\langle u, \Gamma_Y \cdot u\rangle}$$

On a $\langle u, \Gamma_Y u\rangle = u^t \Gamma_Y u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} (u_1, u_2, u_3)$

$$= \begin{pmatrix} 3u_1 - u_2 \\ -u_1 + 3u_2 \\ 2u_3 \end{pmatrix} (u_1, u_2, u_3)$$

$$= (3u_1 - u_2)u_1 + (-u_1 + 3u_2)u_2 + 2u_3^2$$

$$= 3u_1^2 - 2u_1u_2 + 3u_2^2 + 2u_3^2$$

$$= (u_1 - u_2)^2 + 2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

Ainsi, $\varphi_Y(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}(u_1 - u_2)^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)$

2) Que dire de la loi jointe : a-t-elle une densité ?
si oui, l'écrire.

On a $\det(\Gamma_Y) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2(9-1) = 16 \neq 0$

$\Rightarrow$ La loi jointe est non dégénérée.

Calcul de Γ_Y^{-1} :

$$\Gamma_Y = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \qquad \Gamma_Y^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}$$

$$\begin{cases} u = 3e_1 - e_2 \\ v = -e_1 + 3e_2 \\ w = 2e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + 3v = 8e_2 \\ e_1 = -v + 3\left(\frac{1}{8}u + \frac{3}{8}v\right) \\ e_3 = \frac{1}{2}w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{3}{8}u + \frac{1}{8}v \\ e_2 = \frac{1}{8}u + \frac{3}{8}v \\ e_3 = \frac{1}{2}w \end{cases}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det(\Gamma_Y)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\,(y - \mathbb{E}(Y))^t\, \Gamma_Y^{-1} (y - \mathbb{E}(Y))\right)$$

Puisque Y est centré $\Rightarrow \mathbb{E}(Y) = 0$

Calcul de $\langle y, \Gamma_Y^{-1} y \rangle = y^t \Gamma_Y^{-1} y$

$$(y_1, y_2, y_3)\, \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (y_1, y_2, y_3) \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 3y_1 + y_2 \\ y_1 + 3y_2 \\ 4y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\left[y_1(3y_1 + y_2) + y_2(y_1 + 3y_2) + 4y_3^2\right] = \frac{1}{8}\left[3y_1^2 + 2y_1y_2 + 3y_2^2 + 4y_3^2\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(y_1 + y_2)^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2\right]$$

Ainsi, $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3 16}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{8}\left((y_1+y_2)^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2\right)\right)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi^{3/2}\cdot 8\cdot\sqrt{2}} \exp\left(\frac{-1}{16}(y_1+y_2)^2 - \frac{1}{8}(y_1^2+y_2^2) - \frac{1}{4}y_3^2\right)$$

3) Trouver une matrice A telle que $Y = AX$.
Et $X \sim \mathcal{N}(0, D)$ où D est une matrice diagonale

On a $Y \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_Y)$ et $X \sim \mathcal{N}(0, D)$

On cherche A tq $Y = AX$

ie $\begin{cases} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(AX) \\ \Gamma_Y = A\Gamma_X A^t \end{cases} \iff \begin{cases} \underbrace{A\cdot\mathbb{E}(X)}_{=0_{\mathbb{R}^2}} = \underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{=0_{\mathbb{R}^3}} \\ \Gamma_Y = A\cdot D\cdot A^t \end{cases}$

On cherche donc A tq $\Gamma_Y = A\cdot D\cdot A^t$

c-à-d on cherche à diagonaliser Γ_Y dans une base de vecteurs propres de Γ_Y qui soit orthonormale.

$$\Gamma_Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique

$$\chi(\lambda) = \det(\Gamma_Y - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2-1\right]$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda-1)(3-\lambda+1)$$

$$= (2-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) = (-(\lambda-2))(-(\lambda-2))(-(\lambda-4))$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

$\Rightarrow$ Spectre $(\Gamma_Y) = \{2, 4\}$

- 2 est val. propre de multiplicité 2
- 4 est val. propre de multiplicité 1.

Γ_Y est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\dim\left(\operatorname{Ker}(\Gamma_Y - 2I_3)\right) = 2$

théorème du rang $\Leftrightarrow$ $rg(\Gamma_Y - 2I_3) = 1$

On a $\Gamma_Y - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\Gamma_Y - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow rg(\Gamma_Y - 2I_3) = 1 \Rightarrow \Gamma_Y$ est diagonalisable

Notons $A = \Gamma_Y$ pour l'instant

$\overrightarrow{v.p.}$ associé à la v.p $\lambda_1 = 2$: $AX = 2X \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \operatorname{vect}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ de dim 2 ✓

$\overrightarrow{v.p.}$ associé à la v.p. $\lambda_2 = 4$: $AX = 4X \iff (A - 4I_3)X = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow E_4 = \text{Ker}(A - 4I_3) = \text{vect}\{(1,-1,0)\}$

Ainsi, $\begin{cases} v_1 = (1,1,0) \\ v_2 = (0,0,1) \\ v_3 = (1,-1,0) \end{cases}$ forme une base de vecteurs propres de Γ_Y

Et on a $\Gamma_Y = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

On souhaite avoir $\Gamma_Y = ADA^t$

c-à-d on cherche à orthonormaliser P.

Car une matrice réelle A est orthogonale $\iff A^{-1} = A^t$

Et une matrice carrée est orthogonale $\iff$

$\begin{cases} \text{. ses vecteurs colonnes sont orthogonaux 2-à-2.} \\ \text{. ses vecteurs colonnes sont de norme 1.} \end{cases}$

On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On a (v_1, v_2, v_3) base de $\mathbb{R}^3$ donc famille libre

$\Rightarrow \exists$ (u_1, u_2, u_3) base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ donc famille libre orthonormale

tq. $\text{vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$

On construit les u_i comme suit

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_{p+1} = v_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\langle v_{p+1}, v_i \rangle}{\| u_i \|^2} \cdot u_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 = (1, 1, 0) \\ u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\| u_1 \|^2} \cdot u_1 \\ u_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\| u_1 \|^2} \cdot u_1 - \dfrac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\| u_2 \|^2} \cdot u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = (1, 1, 0) \\ u_2 = (0, 0, 1) - 0 \\ u_3 = (1, -1, 0) - 0 \end{cases}$$

$\langle V_2, V_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$\langle V_3, V_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_1 = \dfrac{u_1}{\| u_1 \|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \\ \tilde{u}_2 = \dfrac{u_2}{\| u_2 \|} = (0, 0, 1) \\ \tilde{u}_3 = \dfrac{u_3}{\| u_3 \|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cancel{1}, -1, 0) \end{cases}$$

$\| u_1 \|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= 2$

$\| u_3 \|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2$

Ainsi $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$

La matrice de passage à cette base est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on a $\Gamma_Y = A \cdot D \cdot A^t$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d'après le cours : $X = A^{-1}(Y - \mathbb{E}(Y)) = A^t Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, D)$

puisque $Y = AX \Rightarrow X = A^{-1} Y = A^t Y$ car A orthogonale

Finalement, la matrice recherchée est A^t

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, En prenant $B = (A \cdot \sqrt{D})^{-1}$

On a $BX \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, I_3)$

$$B = \left(A \cdot \sqrt{D}\right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4} \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \left(\sqrt{D}\right)^{-1} A^{-1} = \left(\sqrt{D}\right)^{-1} A^{t}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{4}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

donc $BX = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} X_3 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(X_1 - X_2) \end{pmatrix} \sim N(0, I_3)$

$$Y = AX$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} Y = X$$

$$X \sim N(0, D)$$

$$\Leftrightarrow A^{t} Y = X$$

$$Y = AX \sim N(0, \Gamma_Y)$$

$$\Rightarrow B A^t Y = (\sqrt{D})^{-1} (A^t)^2 \cdot Y$$

$$(\sqrt{D})^{-1} \cdot A^t \cdot A^t \cdot Y \sim N(0, I_3)$$

4) Soit Y un vect. gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma_Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}(Y) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

1) Ecrire la f.c. de Y

On a $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $\varphi_Y(u) = \exp\left(i \langle u, \underset{0}{\mathbb{E}(Y)} \rangle - \frac{1}{2} \langle u, \Gamma_Y u \rangle\right)$

On calcule $\langle u, \Gamma_Y u \rangle = u^t \, \Gamma_Y \, u = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} 3u_1 + 2u_2 + u_3 \\ 2u_1 + 2u_2 \\ u_1 + u_3 \end{pmatrix}$$

$$= u_1 (3u_1 + 2u_2 + u_3) + u_2 (2u_1 + 2u_2) + u_3 (u_1 + u_3)$$

$$= 3u_1^2 + 2u_1u_2 + u_1u_3 + 2u_1u_2 + 2u_2^2 + u_1u_3 + u_3^2$$

$$= 2(u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2) + u_1^2 + 2u_1u_3 + u_3^2$$

$$= 2(u_1 + u_2)^2 + (u_1 + u_3)^2$$

Ainsi, $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $\varphi_Y(u) = \exp\left(-(u_1+u_2)^2 - \frac{1}{2}(u_1+u_3)^2\right)$

4-2) Que dire de la loi jointe : a t-elle une densité ? si oui, l'écrire

On a $\det(\Gamma_Y) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= -2 + 6 - 4 = 0$

$\Rightarrow$ La loi jointe est dégénérée.

c.à.d Y n'admet pas de densité.