Introduction aux mathématiques de l'assurance - Examen

Les calculatrices et les documents sont interdits

Durée : 2h 30

Remarques :

- La qualité de la rédaction rentrera pour une part importante dans l'évaluation.
- la calculatrice étant interdite, les applications numériques ont été adaptées de façon à être effectuables "à la main".

Rappel de quelques formules

- Soit X une variable aléatoire (telle que $E[X^2] < +\infty$) de moyenne m, d'écart-type σ.
  Approximation normale :
  $$P(X \leqslant x) \simeq \Phi(y)$$
  avec $y = \dfrac{x-m}{\sigma}$ et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- Une variable aléatoire N à valeurs entières suit la loi binomiale négative de paramètres (r, p), avec $r > 0$ et $0 \leqslant p \leqslant 1$ si :
  $$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad P(N = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{n!\Gamma(r)} p^r (1-p)^n$$
  où Γ désigne la fonction gamma d'Euler.

Exercice 1

1. Que signifie l'acronyme IARD ?
2. Définir de manière très simple le capital de solvabilité requis (SCR) sous Solvabilité 2.
3. Qu'est-ce que la prime pure ? la prime technique ? la prime commerciale ?
4. Enoncer très précisément (notamment en précisant bien les hypothèses) les 2 théorèmes mathématiques suivants :
   a) le théorème central limite,
   b) la loi des grands nombres.

Exercice 2

On considère un assureur dont les réserves (fonds propres) s'élève à 10 millions d'euros et on se place sur un horizon d'un an. On suppose que le montant cumulé des sinistres sur l'année à la charge de l'assureur est une variable aléatoire d'espérance 100 millions d'euros et d'écart type 10 millions d'euros. Enfin on suppose que l'assureur applique systématiquement un chargement technique proportionnel à la prime pure, le coefficient de chargement technique étant supposé égal à $\alpha = 10\%$.

1. Calculer le chiffre d'affaires et l'espérance de bénéfice de l'assureur.
2. En supposant que l'approximation normale est valide (on fera également cette hypothèse dans toute la suite de l'exercice), calculer sa probabilité de ruine.
3. Pour réduire sa probabilité de ruine à 0.5% afin de se conformer à l'exigence réglementaire de Solvabilité 2, l'assureur envisage deux façon de procéder :
   a) l'assureur souhaite revoir son coefficient de chargement technique :
      i. Quel valeur du coefficient de chargement technique α' l'assureur doit-il choisir pour ramener sa probabilité de ruine à hauteur de $0,5\%$?
      ii. Quelle est dans ce cas la nouvelle espérance de bénéfice de l'assureur ?

   b) on suppose ici que l'assureur conserve un coefficient de chargement technique égal à $\alpha = 10\%$ mais qu'il se réassure avec un traité en quote-part souscrit auprès d'un réassureur qui applique un chargement technique proportionnel à la prime pure, le coefficient de chargement technique du réassureur étant supposé aussi égal à 10%.
      i. Quel plein de conservation θ l'assureur doit-il choisir pour ramener sa probabilité de ruine à hauteur de $0,5\%$?
      ii. Quelle est dans ce cas la nouvelle espérance de bénéfice de l'assureur ?

Exercice 3

Soit N une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson mélangée $\mathcal{PM}(\Lambda)$. La loi du mélange est la loi gamma $\gamma(r, \alpha)$ de densité

$$h(\lambda) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \lambda^{r-1} \mathrm{e}^{-\alpha\lambda} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(\lambda).$$

Démontrer (avec la méthode que vous souhaitez) que N suit une loi binomiale négative dont on précisera les paramètres.

Exercice 4

Pour un groupe de risques d'une certaine société d'assurance, on admet que, sur une période donnée, le nombre N des sinistres suit la loi de Poisson de paramètre λ, tandis que le coût C d'un sinistre suit la loi continue uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, où $\lambda > 0$ et $0 < a < b$. Soit X le montant cumulé des sinistres sur la période considérée.

1. Indiquer l'expression de X en fonction de N et de la suite $(C_n)_{n\geqslant 1}$ des coûts de sinistres successifs, en précisant également les hypothèses faites habituellement sur ces variables aléatoires (hypothèses standards du modèle composé).
2. Déterminer la fonction génératrice des moments de X, calculer l'espérance, la variance et le moment d'ordre 3 de X (ceci en fonction des paramètres λ, a et b).
3. On désigne par $\mathcal{K}$ le montant des réserves (fonds propres) affectées au risque et l'on suppose que la prime technique $\Pi_T(X)$ est de la forme $\Pi_T(X) = (1+\beta)\mathbb{E}[X]$ où β est le coefficient de chargement technique.

   a) Montrer que pour tout $x > b$ l'inégalité suivante est vérifiée :

   $$P(X \geqslant x) \leqslant P\left(N \geqslant \mathrm{int}(x/b)\right)$$

   où "int" représente la fonction partie entière.

   b) En déduire une majoration de la probabilité de ruine en fonction de λ, a, b, β et $\mathcal{K}$.