

M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

20, 21, 27 octobre 2021

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonance paramétrique.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire Plan du cours 3

- 1 E.D.O. linéaires dépendant du temps
 - La résolvante
 - Variation de la constante
- 2 Théorie des perturbations (cas linéaire)
- 3 E.D.O. linéaires périodiques
- 4 La résonance paramétrique

Equations linéaires dépendant du temps

E.D.O. **affines** :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$

Equations linéaires dépendant du temps

E.D.O. affines :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$

EDO linéaires

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Equations linéaires dépendant du temps

La résolvante

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \text{ sol. de } \dot{X}(t) = A(t)X(t)\} : \mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}$

Equations linéaires dépendant du temps

La résolvante

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \text{ sol. de } \dot{X}(t) = A(t)X(t)\} : \mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}$
- $\dim \mathcal{E}_{A(\cdot)} = n$

Equations linéaires dépendant du temps

La résolvante

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \text{ sol. de } \dot{X}(t) = A(t)X(t)\} : \mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}$
- $\dim \mathcal{E}_{A(\cdot)} = n$
- car $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{E}_{A(\cdot)}, v \mapsto X_v(\cdot)$ t.q $X_v(t_0) = v$ est un isomorphisme (linéarité + $\exists!$)

Equations linéaires dépendant du temps

La résolvante

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \text{ sol. de } \dot{X}(t) = A(t)X(t)\} : \mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}$
- $\dim \mathcal{E}_{A(\cdot)} = n$
- car $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{E}_{A(\cdot)}, v \mapsto X_v(\cdot)$ t.q $X_v(t_0) = v$ est un isomorphisme (linéarité + $\exists!$)

Définition

Résolvante $R_A(t, s) \in GL(n, \mathbb{K})$ ($t, s \in I$) de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$

$$X(\cdot) \in \mathcal{E}_A \iff \forall t, s \in I, \quad X(t) = R_A(t, s)X(s).$$

Equations linéaires dépendant du temps

Propriétés de la résolvante

(1) (Chasles) : $t_1, t_2, t_3 \in I$,

$$R_A(t_3, t_1) = R_A(t_3, t_2)R_A(t_2, t_1)$$

$$(R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)^{-1}.)$$

Equations linéaires dépendant du temps

Propriétés de la résolvante

(1) (Chasles) : $t_1, t_2, t_3 \in I$,

$$R_A(t_3, t_1) = R_A(t_3, t_2)R_A(t_2, t_1)$$

$$(R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)^{-1}.)$$

(2) $t_0 \in I$ fixé, $t \mapsto R_A(t, t_0)$ vérifie l'EDO matricielle (attention l'espace des phases est $M(n, \mathbb{K})$)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}R_A(t, t_0) = A(t)R_A(t, t_0) \\ R_A(t_0, t_0) = I \end{cases}$$

Equations linéaires dépendant du temps

Propriétés de la résolvante

- (3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$.

Equations linéaires dépendant du temps

Propriétés de la résolvante

- (3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$.
- (4) (Cas constant) Si $A(\cdot) \equiv \text{constante}$ on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)

Equations linéaires dépendant du temps

Propriétés de la résolvante

- (3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$.
- (4) (Cas constant) Si $A(\cdot) \equiv \text{constante}$ on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)
- (5) (Liouville) On a

$$\det R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds}$$

Equations linéaires dépendant du temps

Propriétés de la résolvante

- (3) **(Cas scalaire)** si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$.
- (4) **(Cas constant)** Si $A(\cdot) \equiv \text{constante}$ on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)

- (5) **(Liouville)** On a

$$\det R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds}$$

- (6) **(Groupes et algèbres de Lie)** Soit $U \in GL(n, \mathbb{K})$. Si $A(\cdot)$ est à valeurs dans (l'algèbre de Lie) $\mathfrak{g}_U = \{M \in M(n, \mathbb{K}) : {}^tMU + UM = 0\}$ alors $R_A(\cdot, t_0)$ est à valeurs dans le groupe (de Lie) $G_U = \{P \in GL(n, \mathbb{K}) : {}^tPUP = U\}$.

Equations linéaires dépendant du temps

Propriétés de la résolvante

On ne sait pas en général calculer R_A mais

(7) Si $\forall t, s \in I$ $A(t)$ et $A(s)$ **commutent** $R_A(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds}$

Equations linéaires dépendant du temps

Propriétés de la résolvante

On ne sait pas en général calculer R_A mais

(7) Si $\forall t, s \in I$ $A(t)$ et $A(s)$ **commutent** $R_A(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds}$

(8)

$$\begin{aligned} R_A(t, t_0) &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq t} A(s_n) \cdots A(s_1) ds_1 \cdots ds_n \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{s_1, \dots, s_n \in [t_0, t]} T(A(s_1) \cdots A(s_n)) ds_1 \cdots ds_n \end{aligned}$$

où $T(A(s_1) \cdots A(s_n)) = A(s_{\sigma(1)}) \cdots A(s_{\sigma(n)})$, (produit chronologique)
 $s_{\sigma(1)} > \cdots > s_{\sigma(n)}$

Equations linéaires dépendant du temps

Variation de la constante

La résolvante : résoudre toutes les équations affines

Equations linéaires dépendant du temps

Variation de la constante

La résolvante : résoudre toutes les équations affines

Théorème (Variation de la constante)

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t) \text{ ssi}$$

$$\forall t, X(t) = R_A(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^t R_A(t, s)b(s)ds.$$

Sommaire Plan du cours 3

- 1 E.D.O. linéaires dépendant du temps
- 2 Théorie des perturbations (cas linéaire)
 - Principe
- 3 E.D.O. linéaires périodiques
- 4 La résonance paramétrique

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$
- ϵ **petit paramètre** réel.

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$
- ϵ petit paramètre réel.

Problème :

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$
- ϵ petit paramètre réel.

Problème : estimer la résolvante R_{A_ϵ} ;

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \text{ } C^\infty \text{ (analytique).}$$

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \text{ } C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \text{ } C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t, 0) = R_{A_0}(t, 0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \text{ } C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t, 0) = R_{A_0}(t, 0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

où $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^1(I)} \leq \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \text{ } C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t, 0) = R_{A_0}(t, 0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

où $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^1(I)} \leq \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Déterminer

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \text{ } C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t, 0) = R_{A_0}(t, 0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

où $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^1(I)} \leq \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Déterminer $Y_1(\cdot), \dots, Y_k(\cdot)$.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

- On injecte

$$R_{A_\epsilon}(t, 0) = R_{A_0}(t, 0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

dans

$$\begin{cases} \dot{R}_{A_\epsilon}(t, 0) = (A_0 + \epsilon F(t)) R_{A_\epsilon}(t, 0) \\ R_{A_\epsilon}(0, 0) = I \end{cases}$$

- On injecte

$$R_{A_\epsilon}(t, 0) = R_{A_0}(t, 0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

dans

$$\begin{cases} \dot{R}_{A_\epsilon}(t, 0) = (A_0 + \epsilon F(t)) R_{A_\epsilon}(t, 0) \\ R_{A_\epsilon}(0, 0) = I \end{cases}$$

- et on utilise le fait qu'un développement limité est unique.

Sommaire Plan du cours 3

- 1 E.D.O. linéaires dépendant du temps
- 2 Théorie des perturbations (cas linéaire)
- 3 E.D.O. linéaires périodiques**
 - Conséquences de la périodicité
 - Le théorème de Floquet
- 4 La résonance paramétrique

E.D.O. linéaires périodiques

Conséquences de la périodicité : la résolvante

On suppose $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$ **T -périodique**, c.-à-d.

$$A(\cdot + T) = A(\cdot)$$

E.D.O. linéaires périodiques

Conséquences de la périodicité : la résolvante

On suppose $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$ **T -périodique**, c.-à-d.

$$A(\cdot + T) = A(\cdot)$$

Théorème

Si $A(\cdot)$ est **T -périodique** alors,

E.D.O. linéaires périodiques

Conséquences de la périodicité : la résolvante

On suppose $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$ **T -périodique**, c.-à-d.

$$A(\cdot + T) = A(\cdot)$$

Théorème

Si $A(\cdot)$ est **T -périodique** alors,

i) pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a ,

$$R_A(t_2 + T, t_1 + T) = R_A(t_2, t_1);$$

E.D.O. linéaires périodiques

Conséquences de la périodicité : la résolvante

On suppose $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$ **T -périodique**, c.-à-d.

$$A(\cdot + T) = A(\cdot)$$

Théorème

Si $A(\cdot)$ est **T -périodique** alors,

i) pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a ,

$$R_A(t_2 + T, t_1 + T) = R_A(t_2, t_1);$$

ii) pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$R_A(t + T, t) = R_A(t, 0)R(T, 0)R_A(t, 0)^{-1}.$$

E.D.O. linéaires périodiques

Le théorème de Floquet

Théorème (de Floquet)

Hyp. : $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ T -périodique.

Théorème (de Floquet)

Hyp. : $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ *T -périodique.*

Conc.

Théorème (de Floquet)

Hyp. : $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ *T -périodique.*

Conc.

- $\exists A_0 \in M_n(\mathbb{K}) : e^{TA_0} = R_A(T, 0)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (resp. $e^{2TA_0} = R_A(2T, 0)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$);

E.D.O. linéaires périodiques

Le théorème de Floquet

Théorème (de Floquet)

Hyp. : $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ *T-périodique*.

Conc.

- $\exists A_0 \in M_n(\mathbb{K}) : e^{TA_0} = R_A(T, 0)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (resp. $e^{2TA_0} = R_A(2T, 0)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$);
- $\exists P \in C^k(\mathbb{R}, Gl(n, \mathbb{K}))$ *T-périodique* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (resp. *2T-périodique* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

E.D.O. linéaires périodiques

Le théorème de Floquet

Théorème (de Floquet)

Hyp. : $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ *T-périodique*.

Conc.

- $\exists A_0 \in M_n(\mathbb{K}) : e^{TA_0} = R_A(T, 0)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (resp. $e^{2TA_0} = R_A(2T, 0)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$);
- $\exists P \in C^k(\mathbb{R}, Gl(n, \mathbb{K}))$ *T-périodique* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (resp. *2T-périodique* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

t.q.

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}, R_A(t, 0) = P(t)e^{tA_0}.$$

Remarques :

- $R_A(t, 0) = P(t)e^{tA_0}$:

$$X'(t) = A(t)X(t) \iff Y'(t) = A_0 Y(t) \text{ avec } Y(\cdot) = P(\cdot)^{-1}X(\cdot)$$

Remarques :

- $R_A(t, 0) = P(t)e^{tA_0}$:

$$X'(t) = A(t)X(t) \iff Y'(t) = A_0 Y(t) \text{ avec } Y(\cdot) = P(\cdot)^{-1}X(\cdot)$$

- Si $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$: même chose en remplaçant $M_n(\mathbb{R})$ par $sl(2, \mathbb{R})$ et $Gl(n, \mathbb{R})$ par $SL(2, \mathbb{R})$.

E.D.O. linéaires périodiques

Le théorème de Floquet

Remarques :

- $R_A(t, 0) = P(t)e^{tA_0}$:

$$X'(t) = A(t)X(t) \iff Y'(t) = A_0 Y(t) \text{ avec } Y(\cdot) = P(\cdot)^{-1}X(\cdot)$$

- Si $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$: même chose en remplaçant $M_n(\mathbb{R})$ par $sl(2, \mathbb{R})$ et $Gl(n, \mathbb{R})$ par $SL(2, \mathbb{R})$.

Proposition

Si $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ où $A(\cdot)$ T -périodique :
coeff de $X(\cdot)$ = sommes finies de $a_{p,q}(t)t^p e^{t\lambda_q}$ où $a(\cdot)$ T -périodique (à valeurs complexes), $0 \leq p \leq n$ et λ_q valeurs propres de A_0 (les exposants de Floquet).

Sommaire Plan du cours 3

- 1 E.D.O. linéaires dépendant du temps
- 2 Théorie des perturbations (cas linéaire)
- 3 E.D.O. linéaires périodiques
- 4 **La résonance paramétrique**
 - Stabilité/instabilité
 - Cas de la dimension 2
 - Résonance paramétrique

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Problème : On considère $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, T -périodique ($A(\cdot + T) = A(\cdot)$) et on se propose d'étudier la **stabilité** du système

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

L'origine est-elle

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Problème : On considère $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, T -périodique ($A(\cdot + T) = A(\cdot)$) et on se propose d'étudier la **stabilité** du système

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

L'origine est-elle

- **asymptotiquement stable** (en $t \rightarrow +\infty$) ? : $\forall X(0)$ dans un vois. de 0 $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$?

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Problème : On considère $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, T -périodique ($A(\cdot + T) = A(\cdot)$) et on se propose d'étudier la **stabilité** du système

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

L'origine est-elle

- **asymptotiquement stable** (en $t \rightarrow +\infty$) ? : $\forall X(0)$ dans un vois. de 0 $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$?
- **stable** ? : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta, |X(0)| < \delta \implies \forall t \geq 0, |X(t)| < \epsilon$?

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Problème : On considère $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, T -périodique ($A(\cdot + T) = A(\cdot)$) et on se propose d'étudier la **stabilité** du système

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

L'origine est-elle

- **asymptotiquement stable** (en $t \rightarrow +\infty$) ? : $\forall X(0)$ dans un vois. de 0 $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$?
- **stable** ? : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta, |X(0)| < \delta \implies \forall t \geq 0, |X(t)| < \epsilon$?
- **instable** ? Pour certaines conditions initiales arbitrairement proches de 0, les solutions sortent de tout voisinage de 0 prescrit à l'avance.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

$$X(t) = R_A(t, 0)X(0) = P(t)e^{tA_0}X(0), \quad P(\cdot + T) = P(\cdot)$$

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

$$X(t) = R_A(t, 0)X(0) = P(t)e^{tA_0}X(0), \quad P(\cdot + T) = P(\cdot)$$

- 0 est **asymptotiquement stable** (en $t \rightarrow +\infty$) \iff
 $\Gamma_u(A_0) = \Gamma_c(A_0) = \emptyset \iff$ **toutes** les valeurs propres de A_0 sont de **parties réelles strictement négatives**.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

$$X(t) = R_A(t, 0)X(0) = P(t)e^{tA_0}X(0), \quad P(\cdot + T) = P(\cdot)$$

- 0 est **asymptotiquement stable** (en $t \rightarrow +\infty$) $\iff \Gamma_u(A_0) = \Gamma_c(A_0) = \emptyset \iff$ **toutes** les valeurs propres de A_0 sont de **parties réelles strictement négatives**.
- 0 est **stable** (en $t \rightarrow +\infty$) $\iff \Gamma_u(A_0) = \emptyset$ et $M = 0 \iff$ **toutes** les valeurs propres de A_0 sont de **partie réelle négative** et A_0 est **diagonalisable en celles de partie réelle nulle**.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

$$X(t) = R_A(t, 0)X(0) = P(t)e^{tA_0}X(0), \quad P(\cdot + T) = P(\cdot)$$

- 0 est **asymptotiquement stable** (en $t \rightarrow +\infty$) $\iff \Gamma_u(A_0) = \Gamma_c(A_0) = \emptyset \iff$ **toutes** les valeurs propres de A_0 sont de **parties réelles strictement négatives**.
- 0 est **stable** (en $t \rightarrow +\infty$) $\iff \Gamma_u(A_0) = \emptyset$ et $M = 0 \iff$ **toutes** les valeurs propres de A_0 sont de **partie réelle négative** et A_0 est **diagonalisable en celles de partie réelle nulle**.
- 0 est **instable** $\iff A_0$ a **au moins** valeur propre de **partie réelle strictement positive** ou une valeur propre de **partie réelle nulle** où elle n'est pas diagonalisable.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $e^{TA_0} = R_A(T, 0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T, 0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T, 0)$ sont reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $e^{TA_0} = R_A(T, 0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T, 0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T, 0)$ sont reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Proposition

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $e^{TA_0} = R_A(T, 0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T, 0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T, 0)$ sont reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Proposition

- 0 est *asymptotiquement stable* (en $t \rightarrow +\infty$) \iff *toutes* les valeurs propres de $R_A(T, 0)$ sont de *module* < 1 .

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $e^{TA_0} = R_A(T, 0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T, 0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T, 0)$ sont reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Proposition

- 0 est *asymptotiquement stable* (en $t \rightarrow +\infty$) \iff *toutes* les valeurs propres de $R_A(T, 0)$ sont de *module* < 1 .
- 0 est *stable* (en $t \rightarrow +\infty$) \iff *toutes* les valeurs propres de $R_A(T, 0)$ sont de *module* ≤ 1 et $R_A(T, 0)$ est *diagonalisable en celles de module 1*.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $e^{TA_0} = R_A(T, 0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T, 0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T, 0)$ sont reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Proposition

- 0 est *asymptotiquement stable* (en $t \rightarrow +\infty$) \iff *toutes* les valeurs propres de $R_A(T, 0)$ sont de *module* < 1 .
- 0 est *stable* (en $t \rightarrow +\infty$) \iff *toutes* les valeurs propres de $R_A(T, 0)$ sont de *module* ≤ 1 et $R_A(T, 0)$ est *diagonalisable en celles de module 1*.
- 0 est *instable* \iff *au moins* une des valeurs propres de $R_A(T, 0)$ est de *module* > 1 ou est de *module 1* mais $R_A(T, 0)$ n'y est pas diagonalisable.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Conséquence :

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Conséquence : si A_ϵ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, par exemple

$$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = \text{cste}, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot).$$

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Conséquence : si A_ϵ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, par exemple

$$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = \text{cste}, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot).$$

Proposition

*Les propriétés “être asymptotiquement stable” ou “être instable” sont **robustes** c'est-à-dire ouvertes dans l'espace des paramètres.*

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Qu'en est-il de la stabilité ? :

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.
Mais, dans les problèmes qui proviennent de la Physique, les E.D.O. que l'on obtient ont souvent une **structure supplémentaire** ("hamiltonienne") liée à la conservation de l'énergie et les matrices qui apparaissent sont "symplectiques".

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.

Mais, dans les problèmes qui proviennent de la Physique, les E.D.O. que l'on obtient ont souvent une **structure supplémentaire** (“**hamiltonienne**”) liée à la conservation de l'énergie et les matrices qui apparaissent sont “**symplectiques**”.

L'exemple le plus simple de matrices symplectiques se trouve en dimension 2 : ces matrices s'identifient à l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels et de trace nulle $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (resp. de déterminant 1 : $SL(2, \mathbb{R})$).

La résonance paramétrique

“Rappels” sur $SL(2, \mathbb{R})$

Les v.p. de $R \in SL(2, \mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \text{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

La résonance paramétrique

“Rappels” sur $SL(2, \mathbb{R})$

Les v.p. de $R \in SL(2, \mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \text{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

- $|\text{tr}(R)| > 2 \implies$ v.p. de R sont $\{\lambda, 1/\lambda\}$, $\lambda > 0$: hyperbolique

La résonance paramétrique

“Rappels” sur $SL(2, \mathbb{R})$

Les v.p. de $R \in SL(2, \mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \text{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

- $|\text{tr}(R)| > 2 \implies$ v.p. de R sont $\{\lambda, 1/\lambda\}$, $\lambda > 0$: hyperbolique
- $|\text{tr}(R)| < 2 \implies$ v.p. de R sont $\{e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$: elliptique

La résonance paramétrique

“Rappels” sur $SL(2, \mathbb{R})$

Les v.p. de $R \in SL(2, \mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \text{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

- $|\text{tr}(R)| > 2 \implies$ v.p. de R sont $\{\lambda, 1/\lambda\}$, $\lambda > 0$: hyperbolique
- $|\text{tr}(R)| < 2 \implies$ v.p. de R sont $\{e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$: elliptique
- $|\text{tr}(R)| = 2 \implies$ v.p. de R sont $(1,1)$ ou $(-1,-1)$: parabolique.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $R_A(T, 0) = e^{TA}$ ou $R_A(T, 0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$, est

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $R_A(T, 0) = e^{TA}$ ou $R_A(T, 0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$, est

- *stable* si et seulement si il est *elliptique* $|tr(R_A(T, 0))| < 2$ ou si $R_A(T, 0) = \pm I$.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $R_A(T, 0) = e^{TA}$ ou $R_A(T, 0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$, est

- *stable* si et seulement si il est *elliptique* $|tr(R_A(T, 0))| < 2$ ou si $R_A(T, 0) = \pm I$.
- *instable* si et seulement si il est *hyperbolique* $|tr(R_A(T, 0))| > 2$ ou $|tr(R_A(T, 0))| = 2$ *parabolique* $\neq \pm I$.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

La nouveauté dans le cas où $A(\cdot)$ est à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$: est

Théorème

*L'ensemble des matrices **elliptiques** de $SL(2, \mathbb{R})$ est **ouvert** dans $SL(2, \mathbb{R})$.*

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

La nouveauté dans le cas où $A(\cdot)$ est à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$: est

Théorème

L'ensemble des matrices *elliptiques* de $SL(2, \mathbb{R})$ est *ouvert* dans $SL(2, \mathbb{R})$.

On a donc par le théorème de dépendance continue par rapport aux paramètres :

Corollaire

L'ensemble des $A \in C_{T-per}^0(\mathbb{R}, sl(2, \mathbb{R}))$ pour lesquels $X'(t) = A(t)X(t)$ est *elliptique* est *ouvert* (dans $C_{T-per}^0(\mathbb{R}, sl(2, \mathbb{R}))$).

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Conséquences pour

$$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = \text{cste}, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \quad (PP)_\epsilon :$$

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Conséquences pour

$$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = \text{cste}, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \quad (PP)_\epsilon :$$

- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est **hyperbolique** ($|\text{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine **reste** un point d'équilibre **instable** du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Conséquences pour

$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot)$, $A = \text{cste}$, $F(\cdot + T) = F(\cdot)$ $(PP)_\epsilon$:

- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est **hyperbolique** ($|\text{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine **reste** un point d'équilibre **instable** du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est **elliptique** ($|\text{tr}(e^{TA})| < 2$), l'origine **reste** un point d'équilibre **stable** du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Conséquences pour

$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot)$, $A = \text{cste}$, $F(\cdot + T) = F(\cdot)$ $(PP)_\epsilon$:

- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est **hyperbolique** ($|\text{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine **reste** un point d'équilibre **instable** du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est **elliptique** ($|\text{tr}(e^{TA})| < 2$), l'origine **reste** un point d'équilibre **stable** du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est **parabolique** ($|\text{tr}(e^{TA})| = 2$) : **tout peut arriver !**

La résonance paramétrique

Exemples

Considérons

$$\ddot{x}(t) + (a + \epsilon \cos(\frac{2\pi t}{T}))x(t) = 0,$$

qui se réécrit

$$\dot{X}(t) = (A + \epsilon F(t))X(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \epsilon \cos(\frac{2\pi t}{T}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a > 0$ on écrit $a = \omega^2$ et on a

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \frac{\sin(t\omega)}{\omega} \\ -\omega \sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}$$

La résonance paramétrique

Exemples

Donc

Proposition (Résonance paramétrique)

$$e^{TA} \text{ elliptique} \iff |tr(e^{TA})| < 2 \iff \omega \notin \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$$

et dans ce cas il existe $\epsilon_\omega > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (-\epsilon_\omega, \epsilon_\omega)$ le système associé à $A + \epsilon F(\cdot)$ est *stable*.

La résonance paramétrique

Exemples

Donc

Proposition (Résonance paramétrique)

$$e^{TA} \text{ elliptique} \iff |tr(e^{TA})| < 2 \iff \omega \notin \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$$

et dans ce cas il existe $\epsilon_\omega > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (-\epsilon_\omega, \epsilon_\omega)$ le système associé à $A + \epsilon F(\cdot)$ est *stable*.

En revanche, si $\omega = \omega_k := k\frac{\pi}{T}$ (on dit que le système est *résonnant*), la *méthode des perturbations*, permet de calculer le développement limité de $R_{A_\epsilon}(T, 0)$ et donc de sa trace et de montrer qu'il existe dans le plan (ω, ϵ) une *zone d'instabilité* d'intérieur non vide dont l'adhérence contient $(\omega_k, 0)$.

La résonance paramétrique

Exemples

Pour $\ddot{x} + (a + \epsilon \cos(2t))x = 0$ ($T = \pi$, $a = \omega^2$ si $a > 0$).

Rouge : instable (hyperbolique) Bleu : parabolique Orange : stable (elliptique)

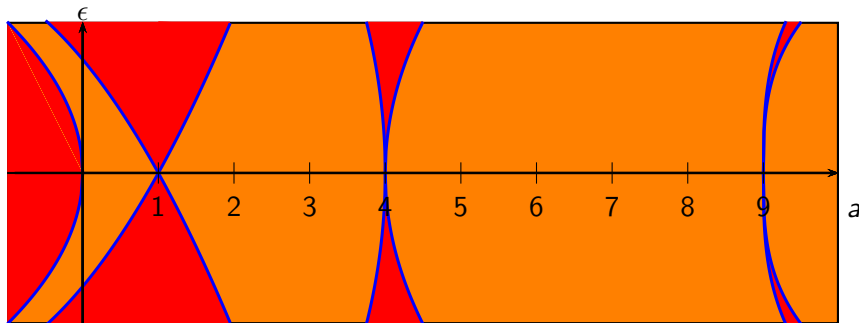


FIGURE: Zones de stabilité-instabilité

La résonance paramétrique

Exemples de la Physique

- **Pendule de Kapitsa** : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.

La résonance paramétrique

Exemples de la Physique

- **Pendule de Kapitza** : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.
- **Piégeage des ions (Nobel 1989, Dehmelt, Paul)** : Dans un champ électrique (quadrupôle) oscillant : même principe que le pendule de Kapitza.

La résonance paramétrique

Exemples de la Physique

- **Pendule de Kapitza** : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.
- **Piégeage des ions (Nobel 1989, Dehmelt, Paul)** : Dans un champ électrique (quadrupôle) oscillant : même principe que le pendule de Kapitza.
- **Propriétés métal-isolant** (physique du solide) : Equation stationnaire de Schrödinger 1D, potentiel périodique.
 $-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$. Les solutions physiquement acceptables sont celles pour lesquelles ψ est bornée. Le spectre de l'opérateur associé a une structure de bandes.