Exercice 3 : Soit $\xi_1, \dots, \xi_m$ une suite de v.a. i.i.d

telles que $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi_i = -1) = p \neq \frac{1}{2}$

On pose $S_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i$ et $T_m = \sigma(S_1, \dots, S_m)$

Montrer que la suite (η_m) définie par

a) $\eta_m = S_m - m(2p-1)$ est une martingale adaptée à (T_m)

. $\forall m$ η_m est T_m mesurable car $\forall m$ S_m est T_m - mesurable par déf de T_m

. $\forall m$ η_m est intégrable, en effet

$$\mathbb{E}[|\eta_m|] = \mathbb{E}[|S_m - m(2p-1)|] \leq \mathbb{E}[|S_m| + |m(2p-1)|]$$

$$\leq \mathbb{E}(|S_m|) + m|2p-1|$$

$$\leq m\left(\mathbb{E}[\xi_i] + |2p-1|\right)$$

$$\leq m(1+|2p-1|) < +\infty$$

$= \sum |k| \cdot \mathbb{P}(\xi_i = k)$

or $\mathbb{E}(|\xi_i|) = 1 \cdot p + |-1|(1-p)$

$= \cancel{2p} \; 1$

avec $p \neq \frac{1}{2}$

. $\forall m$
$$\mathbb{E}[\eta_{m+1} \mid T_m] = \mathbb{E}[S_{m+1} - (m+1)(2p-1) \mid T_m]$$

$$= \mathbb{E}(S_{n}|T_m) - \underbrace{(m+1)(2p-1)}_{\text{constante}}$$

S_m est T_m - mesurable
$$= \mathbb{E}[\xi_{m+1} + S_m \mid T_m] - (m+1)(2p-1)$$

ξ_{m+1} est indépendante de T_m
$$= \mathbb{E}(\xi_{m+1} \mid T_m) + \mathbb{E}[S_m \mid T_m] - (m+1)(2p-1)$$

$$= (2p-1) + S_m - (m+1)(2p-1) = S_m - m(2p-1) = \eta_m$$

b) $\eta_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$

- η_n est $\mathcal{F}_n$ - mesurable car S_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

- η_n est intégrable $\mathbb{E}[|\eta_n|] = \mathbb{E}\left[\left|\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right|\right]$

$= \mathbb{E}\left[\left|\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}\right|\right] = \mathbb{E}\left[\left|\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\xi_1+\xi_2+\dots\xi_n}\right|\right]$

$= \mathbb{E}\left(\left|\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\xi_1} \times \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\xi_2} \times \dots \times \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\xi_n}\right|\right)$

$= \mathbb{E}\left(\left|\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\xi_i}\right|\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\xi_1}\right|\right]$

$= \cancel{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\dots]} = \prod_{i=1}^{n}\left[\sum_{k}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k}\mathbb{P}(\xi_i = k)\right]$

$= \prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)p + \left(\frac{1-p}{p}\right)(1-p)\right]$

$= \prod_{i=1}^{n}\left[1-p+\frac{(1-p)^2}{p}\right] = \prod_{i=1}^{n}\left((1-p)\left(1-\frac{1-p}{p}\right)\right)$

$1-\left(\frac{1}{p}-1\right)$

$= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p-1}{p}\right) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n} < +\infty \quad , \forall n$

$$-n \leq S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq n \quad \Rightarrow \quad |S_n| \leq n$$

$$\eta_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} = h(S_n)$$

. $\forall n$, η_n est $\sigma(S_n)$-mesurable car $\eta_n = h(S_n)$

$\Rightarrow$ η_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable

$\mathcal{F}$ fabriqué à partir de S_n

. $\forall n$, S_n est bornée $|S_n| \leq n$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \eta_n = h(S_n) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \text{ est bornée}$$

$\Rightarrow$ η_n est intégrable

. $\forall n$, $\mathbb{E}(\eta_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n + \xi_{n+1}} / \mathcal{F}_n\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}} \Big| \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\eta_n \left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}} \Big| \mathcal{F}_n\right]$$

$$= \eta_n \cdot \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}} \Big| \mathcal{F}_n\right)$$ car η_n est $\mathcal{F}$-mesurable.

$$= \eta_n \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{1} p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} q\right] = \cancel{\eta_n \cdot \left(q + \left(\frac{1}{p}\right)\right)}$$

$\cancel{1-p + \frac{1}{p}}$

$$= \eta_n \cdot \left[\frac{q}{p} p + \frac{p}{q} \cdot q\right] = \eta_n \cdot [q+p] = \eta_n (1-p+p) = \eta_n$$

donc $\eta_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ est une martingale.