Université de Cergy-Pontoise - M1, Probabilité
Examen - 18 décembre 2020, durée 3 heurs

Exercice 1. On considère une chaîne de Markov (X_n) sur l'espace d'états $\{1,2,3,4\}$ avec la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Décrire le graphe associé à la chaîne (X_n).
2) Cette chaîne de Markov est elle irréductible ? Quelle est sa période ? Pourquoi ?
3) Calculer sa loi invariante.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mu_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \varepsilon_n)$ la loi de X_n :
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \alpha_n, \quad \mathbb{P}(X_n = 2) = \beta_n, \quad \mathbb{P}(X_n = 3) = \gamma_n, \quad \mathbb{P}(X_n = 4) = \varepsilon_n$$
et on suppose que $\mu_0 = (1,0,0,0)$. Calculer μ_1, μ_2, μ_3 et μ_4.
6) Soit $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$. Montrer que $\mathbb{P}_1(T_1 < +\infty) = 1$ et trouver $\mathbb{E}_1(T_1)$.
7) Identifier les limites $\alpha = \lim_n \alpha_n$, $\beta = \lim_n \beta_n$, $\gamma = \lim_n \gamma_n$ et $\varepsilon = \lim_n \varepsilon_n$.

Problème Soit $1/2 < \gamma < 1$. On considère une chaîne de Markov (X_n) sur l'éspace d'états $\mathbb{N}$ ayant les probabilités de transitions suivantes :
$$p(0,0) = p(0,1) = 1/2$$
et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$p(k,k-1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{k}\right), \quad p(k,k+1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{k}\right).$$
On pose
$$T = \inf\{n \geq 1 : \; X_n = 0\}.$$
et on note $(\mathcal{F}_n)$ la filtration engendrée par la suite (X_n) : $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) La chaîne de Markov (X_n) est elle irréductible ? Quelle est sa période ?
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 \,|\, X_n = 0)$ et montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 \,|\, X_n = k) = k^2 - (2\gamma - 1)$.
3) On note $A_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} (X_k^2 - \mathbb{E}(X_{k+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_k))$.
   a) Montrer que la suite (Z_n) définie par $Z_n = X_n^2 + A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une $(\mathcal{F}_n)$- martingale.
   b) Montrer que la suite $(Z_{n\wedge T})$ est aussi une $(\mathcal{F}_n)$- martingale.
   c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n\wedge T} = (2\gamma - 1) n \wedge T$.
4) Supposons que $X_0 = x > 0$.
   a) Identifier $\mathbb{E}_x(Z_{n\wedge T})$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_x(n \wedge T) \leq \frac{x^2}{2\gamma-1}$.
   b) Montrer que $\mathbb{E}_x(T) \leq \frac{x^2}{2\gamma-1}$.
5) On suppose maintenant que $X_0 = 0$. Identifier $\mathbb{P}_0(T = 1)$ et montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}_0(T = k+1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_1(T = k).$$
En déduire que $\mathbb{E}_0(T) \leq 1 + \frac{1}{2(2\gamma-1)}$.
6) Quelle est la nature de l'état 0 ? Quelle est la nature de la chaine de Markov (X_n) ?
7) Montrer que la chaine de Markov (X_n) admet une unique loi invariante $\mu = (\mu(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et que $\mu(0) \geq 1 - \frac{1}{4\gamma-1}$.

Validation du projet N°1.

1) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telle que $\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$.

a) Vérifier que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq k) < +\infty$.

b) Montrer que p.s.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k 1_{\{|X_k| \geq k\}} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

c) Montrer que $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(X_k 1_{\{|X_k| \geq k\}}) = \mathbb{E}(X_1)$.

d) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k 1_{\{|X_k| \leq k\}}) = \mathbb{E}(X_1)$$

3) Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires telles que $\mathbb{E}(Z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var(Z_n) < +\infty$$

Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Z_n| > \epsilon) < +\infty$$

et en déduire que la suite (Z_n) converge vers 0 p.s.

(FIN)

Projet n°1 Loi forte de grands nombre. On se propose de demontrer le théorème suivant

Théorème Soit (X_n) une suite de v.a independantes, de même loi et integrables. Alors p.s. $\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} E(X_1)$ (*)

Pour cela, on decompose la moyenne empirique $\overline{X}_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$ en deux parties :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|<k\}} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|\geq k\}}.$$

On montrera que p.s.

(i) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|\geq k\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(ii) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|<k\}}) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} E(X_1)$

et (iii) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left[X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|<k\}} - E(X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|<k\}})\right] \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$

On commence par la demonstration de (i) :

1) Vérifiez que $\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_k|\geq k) \leq E(|X_1|) < \infty$ et en déduire que $P(|X_k|<k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ sauf un nombre fini$) = 1$

2) Montrer que p.s. tout les termes de la somme $\sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|\geq k\}}$, sauf un nombre fini, sont nuls.

3) Conclure

Maintenant, on va démontrer (ii) :

1) Montrer que si (a_n) est une suite réelle convergente vers a alors $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

2) Montrer que $\lim_{k\to\infty} E(X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|<k\}}) = \lim_{k\to\infty} E(X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1|<k\}}) = E(X_1)$

et en déduire que $\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|<k\}}\right) = E(X_1)$.

Maintenant, on se propose de démontrer (iii) :

On pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| < n\}} - E(X_n \mathbb{1}_{\{|X_n|<n\}})$,

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k ,$$

et on considère $\gamma > 1$ et une suite des entiers naturels (k_n) tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n \leq k_n < \gamma^n + 1$.

1) Vérifiez que qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{C}{l+1}$$ et montrez que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E(X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1| < k\}}) \leq C \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l+1} E(X_1^2 \mathbb{1}_{\{l \leq |X_1| < l+1\}})$$

$$\leq C \sum_{l=0}^{\infty} E(|X_1| \mathbb{1}_{\{l \leq |X_1| < l+1\}}) \leq C E(|X_1|)$$

Indication : Vous pouvez utiliser l'égalité

$$\mathbb{1}_{\{|X_1| < k\}} = \sum_{l=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{l \leq |X_1| < l+1\}}$$

et ensuite appliquer le théorème de Fubini pour échanger l'ordre des sommes :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \cdots = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} \cdots$$

2) Montrez que $Var(Z_n) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1| < k\}})$

et en déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} Var(Z_{k_n}) < \infty$

Indication : On pourra utiliser le théorème de Fubini :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{k=1}^{k_n} E(X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1| < k\}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n:\, k_n \geq k} \frac{1}{k_n^2} \right) E(X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1| < k\}})$$

et le fait que $\frac{1}{k_n^2} \leq \frac{1}{\gamma^{2n}}$

3) Montrez que $\forall\ \varepsilon \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|Z_{k_n}| > \varepsilon) < \infty$$

et en déduire que p.s. $Z_{k_n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$.

Indication : Pensez à utiliser l'inégalité de Bienaimé-Chebychev.

4) Vérifiez que maintenant, pour démontrer (iii) il suffit de montrer que p.s.

$$\sup_{k_n \leq N < k_{n+1}} |Z_N - Z_{k_n}| \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0 \qquad (iv)$$

5) Vérifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{k_n \leq N < k_{n+1}} |Z_N - Z_{k_n}| \leq \gamma |Z_{k_n}| + \frac{1}{k_n} \sup_{k_n \leq N < k_{n+1}} \left| \sum_{k=k_n+1}^{N} Y_k \right|$$

Vérifiez que pour démontrer (iv) il suffit de montrer que

p.s. $$\frac{1}{k_n} \sup_{k_n \leq N < k_{n+1}} \left| \sum_{k=k_n+1}^{N} Y_k \right| \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0 \qquad (v)$$

6) Vérifier que $\forall\ \varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k_n \leq N < k_{n+1}} \left| \sum_{k=k_n+1}^{N} Y_k \right| \geq k_n \varepsilon \right) \leq \frac{1}{k_n^2 \varepsilon^2} \mathrm{Var}\left(\sum_{k=k_n+1}^{k_{n+1}} Y_k \right)$$

$$\leq \frac{(\gamma^{n+1}+1)^2}{\gamma^{2n} \varepsilon^2} \mathrm{Var}\left(Z_{k_{n+1}}\right)$$

et en déduire (v).

<u>Indication</u> : Utilisez l'inégalité de Kolmogorov pour majorer la probabilité $\mathbb{P}\left(\sup_{k_n \leq N < k_{n+1}} \left| \sum_{\ell = k_n + 1}^{N} Y_\ell \right| > \varepsilon \right)$

et ensuite le lemme de la convergence presque sûre pour en déduire (v).

7) Conclure (vérifiez que (i), (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (*))