Systèmes linéaires à coefficients constants $\quad X'(t) = A\,X(t) + B(t)$

Systèmes Homogènes $\quad X'(t) = A \cdot X(t)$

Ex : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$ En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

On a $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \cdot X(t)$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(3+\lambda) + 2$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2 = \lambda^2 - tr(A)\,\lambda + \det(A)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$P_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

Spectre $(A) = \{-2, -1\}$

Vecteur propre associé à λ_1 :

$$AX = \lambda_1 X \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x = y \\ -2x - 3y = -2y \end{cases} \iff y = -2x \iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc $u_1 = (1, -2)$ est le vecteur propre associé à $\lambda_1 = -2$

vecteur propre associé à $\lambda_2 = -1$

$AX = \lambda_2 X \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x = y \\ -2x-3y = -y \end{cases} \iff y = -x$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc $u_2 = (1, -1)$ est un vecteur propre associé à λ_2.

On a donc $A = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

Calcul de P^{-1} :

$\begin{cases} u = e_1 - 2e_2 \\ v = e_1 - e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - 2v = -e_1 \\ v - u = e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = -u + 2v \\ e_2 = -u + v \end{cases}$

$$P^{-1} = \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} u \\ v \end{array}$$

Ainsi $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \frac{I}{0!} + \frac{tA}{1!} + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots + \frac{(tA)^k}{k!} + \dots$$

$$e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} = P\, e^{tD}\, P^{-1}$$

$$= P \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tD)^k}{k!} P^{-1} = P\left(I + \frac{tD}{1!} + \frac{t^2D^2}{2!} + \dots\right) P^{-1}$$

$$\frac{1}{0!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} (-2t)^2 & 0 \\ 0 & (-t)^2 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} + 2e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-2t} + e^{-t}) & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

On a $\quad X'(t) = A \cdot X(t)$

$\iff X(t) = \exp(tA) \cdot X(0)$

En notant $X(0) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

On trouve

$$\begin{cases} x(t) = a(e^{-2t} + 2e^{-t}) + b(e^{-t} - e^{-2t}) \\ y(t) = a(-2e^{-2t} - 2e^{-t}) + b(2e^{-2t} - e^{-t}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = (2a+b)e^{-t} + (a-b)e^{-2t} \\ y(t) = (-2a-2b)e^{-t} + (2b-2a)e^{-2t} \end{cases}$$

On distingue 6 cas :

1) $X' = AX$ avec A diagonale

2) $X' = AX$ avec A diagonalisable, à valeurs propres toutes réelles

3) $X' = AX$ avec A qui n'est pas diagonalisable à valeurs propres toutes réelles.

4) $X' = AX$ avec $A \in M_2(\mathbb{R})$ à valeurs propres complexes

5) $X' = AX$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n > 2$, quand certaines valeurs propres ne sont pas réelles (cas diagonalisable)

6) $X' = AX$ avec A qui n'est pas diagonalisable à valeurs propres complexes

1) $X' = AX$ avec A diagonale

Soit le système $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -3y \end{cases}$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, sont écriture vectorielle est donc:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \cdot X(t)$$

$$X(t) = e^{tA} X(0) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} (a, b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = a e^{2t} \\ y(t) = b e^{-3t} \end{cases} \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ (condition initiale)}$$

Une base de l'espace des solutions est donc :

$$\begin{cases} U_1(t) = e^{2t} \cdot e_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \\ U_2(t) = e^{-3t} e_2 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3t} \end{pmatrix} \end{cases}$$

2) $X' = AX$, où A est diagonalisable

Soit le système $\begin{cases} x' = 5x - y + 9z \\ y' = 3x + 4y \\ z' = x + y + z \end{cases}$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, sont écriture vectorielle est donc :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A \cdot X(t)$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 9 \\ 3 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 3 & 4-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 9(3 - 4 + \lambda) + (1-\lambda)\left[(5-\lambda)(4-\lambda) + 3 \right]$$

$$= -9(1-\lambda) + (1-\lambda)\left[20 - 5\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 3 \right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 9\lambda + 23 - 9 \right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14)$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 14 = 81 - 56 = 25$

$\lambda_+ = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+5}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$ Polynôme scindé à racines réelles

$\lambda_- = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda - 7)(\lambda - 2) \Rightarrow$ Spectre$(A) = \{1, 2, 7\} \subset \mathbb{R}_+$

vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$: $AX = \lambda_1 \cdot X \iff$

$$\begin{cases} 5x - y + 9z = x \\ 3x + 4y = y \\ x + y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 9z = -5x \\ 3y = -3x \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -\frac{5}{9}x \end{cases}$$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -\frac{5}{9}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$

$-9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ on choisit $u_1 = (9, -9, -5)$

vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$: $AX = \lambda_2 X \iff$

$$\begin{cases} 5x - y + 9z = 2x \\ 3x + 4y = 2y \\ x + y + z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ -\frac{1}{2}x = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ z = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{3}{2}x \\ -\frac{1}{2}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ on choisit $u_2 = (-2, 3, 1)$

vecteur propre associé à $\lambda_3 = 7$: $AX = \lambda_3 X \iff$

$$\begin{cases} 5x - y + 9z = 7x \\ 3x + 4y = 7y \\ x + y + z = 7z \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 3y \\ 2x = 6z \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = \frac{1}{3}x \end{cases}$$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \frac{1}{3}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$ on choisit $u_3 = (3, 3, 1)$

<u>Ainsi</u> $A = P D P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -9 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \end{array} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Donc $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -9 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & \frac{1}{5} \\ -1/6 & -2/5 & 7/30 \\ -1/2 & -\frac{9}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

Comme $X'(t) = A \cdot X(t) = PDP^{-1}X(t)$

$$\Leftrightarrow X(t) = e^{tA} \cdot X(0)$$
$$= e^{tPDP^{-1}} X(0)$$
$$= P \cdot e^{tD} \cdot P^{-1} X(0)$$
$$= P \cdot \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$$

En posant $Y(t) = P^{-1} X(t)$

$\Rightarrow Y'(t) = P^{-1} X'(t)$ car P est une matrice constante

$$\Rightarrow Y'(t) = P^{-1} A X(t)$$
$$= P^{-1} P D P^{-1} X(t)$$
$$= D P^{-1} X(t)$$
$$= D \cdot Y(t)$$

Puisque D est diagonale, on sait resoudre et

$Y(t) = e^{tD} \cdot Y(0)$

On revient au système initial en utilisant :

$Y(t) = P^{-1} X(t) \Leftrightarrow X(t) = P \cdot Y(t) = P \cdot e^{tD} \cdot Y(0)$

$= P \cdot e^{tD} \cdot P^{-1} X(0)$

On a donc pour $Y(t) = P^{-1} X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$

$Y(t) = e^{tD} Y(0)$, pour $Y(0) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix} (a, b, c)$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = a e^t \\ y_2(t) = b e^{2t} \\ y_3(t) = c e^{7t} \end{cases}$

On revient vers $X(t) = P \cdot Y(t)$

$X(t) = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -9 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a e^t \\ b e^{2t} \\ c e^{7t} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x(t) = 9a e^t - 2b e^{2t} + 3c e^{7t} \\ y(t) = -9a e^t + 3b e^{2t} + 3c e^{7t} \\ z(t) = -5a e^t + b e^{2t} + c e^{7t} \end{cases}$

On cherche la solution vérifiant $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 0$

$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c-à-d $\begin{cases} 9a - 2b + 3c = 1 \\ -9a + 3b + 3c = 2 \\ -5a + b + c = 0 \end{cases}$

$c = 5a - b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9a - 2b + 3(5a - b) = 1 \\ -9a + 3b + 3(5a - b) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24a - 5b = 1 \\ 6a = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{5}\left(\frac{24}{3} - 1\right) = \frac{1}{5}(8-1) = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$c = \frac{5}{3} - \frac{7}{5} = \frac{25 - 21}{15} = \frac{4}{15}$$

Ainsi
$$\begin{cases} x(t) = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right) e^{t} - 2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right) \cdot e^{2t} + \frac{3 \cdot 4}{15} e^{7t} \\ y(t) = -9 \times \left(\frac{1}{3}\right) e^{t} + 3\left(\frac{7}{5}\right) \cdot e^{2t} + 3 \cdot \left(\frac{4}{15}\right) \cdot e^{7t} \\ z(t) = -5\left(\frac{1}{3}\right) e^{t} + \frac{7}{5} e^{2t} + \frac{4}{15} e^{7t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 3e^{t} - \frac{14}{5} e^{2t} + \frac{4}{5} e^{7t} \\ y(t) = -3e^{t} + \frac{21}{5} e^{2t} + \frac{4}{5} e^{7t} \\ z(t) = -\frac{5}{3} e^{t} + \frac{7}{5} e^{2t} + \frac{4}{15} e^{7t} \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{14}{5} & +\frac{4}{5} \\ -3 & \frac{21}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{5}{3} & \frac{7}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{2t} \\ e^{7t} \end{pmatrix}$$

3) $X' = AX$ avec A qui n'est pas diagonalisable à valeurs propres toutes réelles.

Soit $\begin{cases} x' = x + 2y + z \\ y' = y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases}$ En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ sont écriture vectorielle est donc :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A \cdot X(t)$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda) + 1\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 1\right)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

On

A diagonalisable $\Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A - 2I)) = 2$

théorème du rang $\Longleftrightarrow rg(A - 2I) = 1$

mineur de taille 2 non nulle donc $rg(A-2I) \geq 2$

or $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{l_3 \leftarrow l_3 - l_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $rg(A - 2I) = 2 \neq 1 \Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.

vecteur propre u_1 associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$:

$$AX = \lambda_1 X \iff \begin{cases} x + 2y + z = x \\ y + z = y \\ -y + 3z = z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

vecteur propre u_2 associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$

$$AX = \lambda_2 X \iff \begin{cases} x + 2y + z = 2x \\ y + z = 2y \\ -y + 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Complétons la Base (u_1, u_2) avec le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
(théorème de la base incomplète)

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \iff \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$

donc (u_1, u_2, u_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

On a $A \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $A u_3 = -2u_1 + u_2 + 2u_3$

On a donc, $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Au_1 & Au_2 & Au_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$ $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$

Calcul de P^{-1} :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + 3e_2 \\ u_2 = e_2 \\ u_3 = e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = u_1 - 3u_2 \\ e_2 = u_2 \\ e_3 = u_3 - u_2 \end{cases}$$

donc
$$P^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$

Ainsi
$$A = PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

_Comme $X'(t) = AX(t) = PTP^{-1}X(t)$

Posons $Y(t) = P^{-1}X(t) \Rightarrow Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ car P^{-1} est une matrice constante

$$\Rightarrow Y'(t) = P^{-1}AX(t)$$
$$= P^{-1}PTP^{-1}X(t)$$
$$= TP^{-1}X(t)$$
$$= TY(t)$$

$Y(t)$ vérifie donc
$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 2y_3(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}$$

Le système se résout de proche en proche en commençant par la fin.

$y_3'(t) = 2y_3(t) \Rightarrow y_3(t) = a \cdot e^{2t}$

$y_2'(t) = 2y_2(t) + ae^{2t} \iff y_2'(t) - 2y_2(t) = ae^{2t}$ (E)

(E.H) : $y_2'(t) - 2y_2(t) = 0 \iff y_2'(t) = 2y_2(t)$

$\iff y_H(t) = b \cdot e^{2t}$

Sol particulière $y_p(t) = b(t) \cdot e^{2t}$

$y_p'(t) = b'(t)e^{2t} + 2 \cdot b(t)e^{2t}$

$y_p(t)$ solution de (E) $\iff y_p'(t) - 2y_p(t) = a \cdot e^{2t}$

$\iff b'(t)e^{2t} + 2b(t)e^{2t} - 2b(t)e^{2t} = ae^{2t}$

$\iff b'(t)e^{2t} = a \cdot e^{2t}$

$\iff b'(t) = a \implies b(t) = at + c$ on choisit $c = 0$

Ainsi $y_2(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$= b \cdot e^{2t} + (at + c)e^{2t}$

$= e^{2t}(at + b + c)$

$y_2'(t) = ae^{2t} + 2(at + b + c)e^{2t}$ $b + c = d$

$= ae^{2t} + 2y_2(t)$

$y_2(t) = e^{2t}(at + d)$

$$y_1'(t) = y_1(t) - 2ae^{2t} \iff y_1'(t) - y_1(t) = -2ae^{2t} \quad (E)$$

$$(E.H) : y_1'(t) - y_1(t) = 0 \iff y_1'(t) = y_1(t)$$

$$\iff y_h(t) = \lambda e^{t}$$

Sol particulière : $y_p(t) = \lambda(t) \cdot e^{t}$

$$y_p'(t) = \lambda'(t)e^{t} + \lambda(t)e^{t}$$

$y_p(t)$ sol de $(E) \iff y_p'(t) - y_p(t) = -2ae^{2t}$

$$\iff \lambda'(t)e^{t} + \lambda(t)e^{t} - \lambda(t)e^{t} = -2ae^{2t}$$

$$\iff \lambda'(t)e^{t} = -2ae^{2t}$$

$$\iff \lambda'(t) = -2ae^{t}$$

$$\iff \lambda(t) = -2ae^{t} + c$$

Ainsi $y_1(t) = y_h(t) + y_p(t) = \lambda e^{t} + (-2ae^{t} + c)e^{t}$

$$y_1(t) = (\lambda + c)e^{t} - 2ae^{2t} \qquad \lambda + c = \mu$$

$$y_1(t) = \mu e^{t} - 2ae^{2t}$$

donc $Y'(t) = T \cdot Y(t) \iff Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu e^{t} - 2ae^{2t} \\ e^{2t}(at+d) \\ a \cdot e^{2t} \end{pmatrix}$

Comme $Y(t) = P^{-1}X(t)$

$$\rightarrow X(t) = P \cdot Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu e^{t} - 2ae^{2t} \\ e^{2t}(at+d) \\ a \cdot e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu e^{t} - 2ae^{2t} + 3e^{2t}(at+d) \\ e^{2t}(at+d) \\ e^{2t}(at+d+a) \end{pmatrix}$$

4) $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs propres complexes

Soit $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -4x + y \end{cases}$. En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Sont écriture matricielle est donc :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \cdot X(t)$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 5 \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 5 = 4 - 20$$

$$= -16 = (i4)^2$$

$$\lambda_- = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = \frac{2 - i4}{2} = 1 - 2i$$

$$\lambda_+ = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i$$

$$\frac{1}{\lambda_+} = \frac{1}{(1+2i)} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{1 - 2i + 2i - 4i^2} = \frac{1-2i}{5}$$

$$\lambda_+ + \lambda_- = 1 - 2i + 1 + 2i = 2$$

$$P_A(\lambda) = (\lambda - (1-2i))(\lambda - (1+2i))$$

$\text{Spectre}(A) = \{1-2i, 1+2i\} \in \mathbb{C}$

Polynôme scindé sur $\mathbb{C}$. (2 racines distinctes conjuguées)

$\rightarrow$ A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$