Exercice 1 : Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Calculer $\mathbb{E}[X \mid G]$ dans les cas suivants

a) $G = \{\phi, \Omega\}$

. $\mathbb{E}(X \mid G)$ est la projection $\perp$ de X sur $L^2(\Omega, G, \mathbb{P})$ l'espace vectoriel des v.a. G-mesurables, si X est L^2 c-à-d de carré intégrable.

. $\mathbb{E}(X \mid G)$ est la meilleure approximation de X par une v.a. G-mesurable.

. Il faut voir $\mathbb{E}(X \mid G)$ comme un filtre. c'est comme si on voyait X non plus à travers chaque $\omega \in \Omega$ indivi. mais à travers chaque ensemble mesurable de G. Plus G est petit et plus on filtre fort, car on ne voit ~~plus ce qu~~ X qu'à travers moins d'éléments, en un certain sens.

. Dans le cas de la tribu triviale $G = \{\phi, \Omega\}$ On regarde X uniquement en moyennant sur les valeurs qu'elle prend dans tout Ω.

Donc, $\mathbb{E}[X \mid G] = \mathbb{E}[X \mid \{\phi, \Omega\}] = \mathbb{E}(X)$

Lorsque A est un évènement de probabilité non nulle

on a : $\mathbb{E}[X|A] = \dfrac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A)}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)} = \dfrac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\int_\Omega X \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P}}{\int_\Omega \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P}}$

Puisque $G = \{\phi, \Omega\}$ est une partition de Ω.

car $\begin{cases} \phi \cap \Omega = \phi \\ \phi \cup \Omega = \Omega \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{P}(\phi) = 0 \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1 \end{cases}$

$\rightarrow \mathbb{E}[X | G = \{\phi, \Omega\}] = \dfrac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_\phi)}{\mathbb{P}(\phi)} \mathbb{1}_\phi + \dfrac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_\Omega)}{\mathbb{P}(\Omega)} \mathbb{1}_\Omega$

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X|G] = \mathbb{E}(X)$

De plus, $\mathbb{E}[X|G]$ est constante

car les v.a. $(G = \{\phi, \Omega\})$ - mesurables sont constantes

$\mathbb{E}[X \mid G]$ est la proj. orthogonale de X sur $L^2(\Omega, G, \mathbb{P})$

$X - \mathbb{E}[X|G] \perp L^2(\Omega, G, \mathbb{P})$

$\Rightarrow \forall Z \in L^2(\Omega, G, \mathbb{P}) \quad \langle X - \mathbb{E}[X|G], Z \rangle = 0$

$\Rightarrow \quad \langle X, Z \rangle = \langle \mathbb{E}[X|G], Z \rangle$

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|G] \cdot Z]$

$\forall B \in G \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B \cdot \mathbb{E}[X|G]\right] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B X]$

$G = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow B = \emptyset$ ou $B = \Omega$

. $B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\emptyset \, \mathbb{E}[X|G]\right] = 0 \\ \mathbb{E}[\mathbb{1}_\emptyset X] = 0 \end{cases}$

. $B = \Omega \Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Omega \, \mathbb{E}[X|G]\right] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_\Omega X]$

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|G]\right] = \mathbb{E}[X]$

ϕ et Ω est une partition de G

car $\begin{cases} \phi \cap \Omega = \phi \\ \phi \cup \Omega = \Omega \end{cases}$

Par définition $\quad \mathbb{E}[X \mid G] = \dfrac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_\phi]}}}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_\phi]} + \dfrac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_\Omega]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_\Omega]}$

$$\mathbb{E}[X \mid G] = \frac{\int_\Omega X \, d\mathbb{P}}{\int_\Omega d\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{P}(\Omega)}$$

$$= \frac{\int_\Omega X \, d\mathbb{P}}{\int_\Omega d\mathbb{P}} = \frac{\int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}_X(dx)}{\int_{\mathbb{R}} d\mathbb{P}_X(dx)}$$

$$= \frac{\sum_k k \, \mathbb{P}(X=k)}{\sum_k \mathbb{P}(X=k)} = \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_X(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \, dx}$$

$$= \frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \mid \{\emptyset, \Omega\}]$$

$$= \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_\emptyset]}{\mathbb{P}(\emptyset)} \mathbb{1}_\emptyset + \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_\Omega]}{\mathbb{P}(\Omega)} \mathbb{1}_\Omega$$

$$= \mathbb{E}[X]$$

X est $\{\emptyset, \Omega\}$ mesurable $\Leftrightarrow X = \alpha \mathbb{1}_\emptyset + \beta \mathbb{1}_\Omega$

$\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = c \in]-\infty, a]$

$\Rightarrow Z^{-1}(Z(\omega)) = Z^{-1}(c) \in Z^{-1}(]-\infty; a])$

$\Rightarrow \quad \omega \in Z^{-1}(c) \in Z^{-1}(]-\infty; a])$

$$Z^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega & \text{si } c \in B \\ \phi & \text{si } c \notin B \end{cases}$$

Soit $\omega \in Z^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow \omega \in Z^{-1}(]-\infty, a])$

$\Leftrightarrow Z(\omega) \in]-\infty, a]$

$\Leftrightarrow c \in]-\infty, a]$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega$,

$\omega \in Z^{-1}(B)$

sinon $\omega \in \phi$

$\Rightarrow Z^{-1}(B) = \{\phi, \Omega\}$

donc si $c \notin]-\infty, a]$

$\Rightarrow Z(\omega) \notin]-\infty, a]$

$\Rightarrow \omega \notin Z^{-1}(]-\infty, a])$

$\Rightarrow \omega \in \phi$

Puisque $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = c$

b) $G = \sigma(\{A\}) = \{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}$

Puisque $\begin{cases} A \cap \bar{A} = \phi \\ A \cup \bar{A} = \Omega \end{cases}$, A et $\bar{A}$ forment une partition de Ω

$\Rightarrow \mathbb{E}[X|G] = \mathbb{E}[X \mid G = \{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}]$

Il s'agit de la proj $\perp$ de X sur $L^2(\Omega, G, \mathbb{P})$

$\Rightarrow \forall Z' \in L^2(\Omega, G, \mathbb{P}) \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|G] \cdot Z'\right] = \mathbb{E}[X \cdot Z']$

$\Leftrightarrow \int_\Omega \mathbb{E}[X|G] . Z' d\mathbb{P} = \int_\Omega X Z' d\mathbb{P}$

$\Rightarrow \forall B \in G, \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|G] \cdot \mathbb{1}_B\right] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]$

$\Leftrightarrow \int_\Omega \mathbb{E}[X|G] \cdot \mathbb{1}_B \, d\mathbb{P} = \int_\Omega X \mathbb{1}_B \, d\mathbb{P}$

$\Leftrightarrow \int_B \mathbb{E}[X|G] \cdot d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}$

$\Leftrightarrow \int_B (\alpha \cdot \mathbb{1}_A + \beta \mathbb{1}_{\bar{A}}) d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}$

Car si Z est $G = \{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}$ - mesurable $\Leftrightarrow Z = \alpha \mathbb{1}_A + \beta \mathbb{1}_{\bar{A}}$

Et pour $B = A \Rightarrow \int_A \alpha \, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$

$\Rightarrow \alpha \cdot \mathbb{P}(A) = \int_A X d\mathbb{P} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\int_A X d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(A)}$

Pour $B = \bar{A} \Rightarrow \beta = \dfrac{\int_{\bar{A}} X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(\bar{A})}$

Ainsi $\mathbb{E}\left[X \mid G = \{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}\right] = \dfrac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \mathbb{1}_A + \dfrac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\bar{A}})}{\mathbb{P}(\bar{A})} \cdot \mathbb{1}_{\bar{A}}$

c) Si $G = \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$ partition de Ω tq $0 \leq \mathbb{P}(A_i) \leq 1$
$\forall i = 1, \dots, m$

On trouve de façon analogue

Z est $(G - \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable $\Leftrightarrow Z = \alpha_1 \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \alpha_m \mathbb{1}_{A_m}$

$\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m$

$\mathbb{E}[X \mid G]$ est la proj $\perp$ de X sur $L^2(\Omega, G, \mathbb{P})$

$\Rightarrow \forall B \in G, \int_B \mathbb{E}[X \mid G] \, d\mathbb{P} = \int_B X \, d\mathbb{P}$

Pour $B = A_i$, $\int_{A_i} \mathbb{E}[X \mid G] \, d\mathbb{P} = \int_{A_i} X \, d\mathbb{P}$

$\Rightarrow \int_{A_i} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \, d\mathbb{P} = \int_{A_i} X \, d\mathbb{P}$

$\Rightarrow \alpha_i \int_{A_i} d\mathbb{P} = \int_{A_i} X \, d\mathbb{P}$

$\Rightarrow \alpha_i \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_i}] \Rightarrow \alpha_i = \dfrac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)}$

$$\mathbb{E}\left[X \mid \sigma(A_1, \dots, A_n)\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_i}]}{\mathbb{P}(A_i)} \cdot \mathbb{1}_{A_i}$$

Pour une partition dénombrable on trouve

$$\mathbb{E}\left[X \mid \sigma(A_1, \dots, A_n, \dots)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

<u>où</u> $\alpha_i = \dfrac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_i}]}{\mathbb{P}(A_i)}$

b) Calculer $\mathbb{E}(X|Z)$, si Z est une v.a. p.s. constante

et si Z est une v.a. discrète

$$\mathbb{E}(X|Z) = \mathbb{E}(X|\sigma(Z)) = f(Z)$$

On a $\sigma(Z) = \{ Z^{-1}(B) , B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

Puisque

$$Z : (\Omega, \sigma(Z)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$$\omega \longmapsto Z(\omega) = C$$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = C$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega, \quad Z^{-1}(Z(\omega)) = Z^{-1}(C)$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega, \quad \omega = Z^{-1}(C)$

Ainsi, tout évènement élémentaire donne une constante par l'application Z.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $B =]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$Z^{-1}(B) = Z^{-1}(]-\infty; a])$

On a $\sigma(Z) = \{ Z^{-1}(B) , B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

Soit $B =]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$

On a $\omega \in Z^{-1}(B) \iff \omega \in Z^{-1}(]-\infty; a])$

$\iff Z(\omega) \in]-\infty; a]$

on $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = c$, $\left[\text{si} \quad c \in]-\infty, a] \right)$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = C \in]-\infty, a]$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega$, $\omega \in Z^{-1}(B)$ sinon $\omega \in \phi$

$\Rightarrow Z^{-1}(B) = \Omega$ si $C \in B$

$\left[\text{si} \quad C \notin]-\infty; a) \right)$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = C \notin]-\infty, a]$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega$, $\omega \notin Z^{-1}(B)$. (Il ne contient aucun évènement)

$\Rightarrow Z^{-1}(B) = \phi$ si $C \notin B$

Ainsi $\sigma(Z) = \{ Z^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

$= \{ \phi, \Omega \}$

$\to \quad \mathbb{E}(X \mid Z) = \mathbb{E}(X \mid \sigma(Z))$

$$= \mathbb{E}(X \mid \{ Z^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \})$$

$$= \mathbb{E}(X \mid \{ \Omega, \phi \})$$

$$= \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_\phi)}{\mathbb{P}(\phi)} \cdot \mathbb{1}_\phi + \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_\Omega)}{\mathbb{P}(\Omega)} \mathbb{1}_\Omega$$

$$= \mathbb{E}(X)$$

Pas de sens puisque

$\mathbb{P}(\phi) = 0$