Portfolio by the Monte-Carlo Method

- First Investment

partie de votre richesse

$$a_i \longrightarrow S_i$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^{N_1} a_i S_i$$

$$\mathbb{E}(M_1) = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \, \mathbb{E}(S_i)$$

- Second Investment

$$b_i \longrightarrow S_i$$

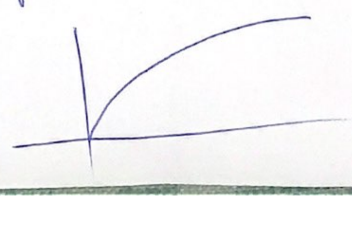
$$M_2 = \sum_{i=1}^{N_2} b_i S_i$$

$$\mathbb{E}(M_2) = \sum_{i=1}^{N_2} b_i \, \mathbb{E}(S_i)$$

Supposons $\begin{cases} \mathbb{E}(M_1) < \mathbb{E}(M_2) \\ Var(M_1) \ll Var(M_2) \end{cases}$

On ne calcule pas $\mathbb{E}(M)$. On calcule $\mathbb{E}\left(U(M)\right)$

où U est la fonction d'utilité (concave)



permet de modéliser l'impact du risque et choisir un gain plus raisonnable.

$P(t+1) - P(t)$ $\qquad\qquad$ $(W(i+1) - W(i))$

$$dP_t = P_t\left((\mu + \lambda X_t)\,dt + \sigma_1\, dW_t\right)$$

[Comparer B & S: $dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\, dW_t)$]

$$dX_t = -\rho X_t\, dt + \sigma_2\, dW_t$$

différente indépendante ou correlé) dans ce cas c'est les mêmes

for $i=1:N$

$W(i+1) = W(i) + \sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,1)$

$X(i+1) = X(i) - \rho X(i)\Delta t + \sigma_2 (W(i+1) - W(i))$

$P(i+1) = P(i) + P(i)\left[(\mu + \lambda X(i))\,\Delta t + \sigma_1 (W(i+1) - W(i))\right]$

$M(i+1) = M(i) + M(i)\left((1-\theta_i) r\Delta t + \theta_i \dfrac{(P(i+1) - P(i))}{P(i)}\right)$

END

$\mu = 0{,}12$

$X(1) = 100$, $P(1) = 100$, $M(1) = 500$ $\quad \lambda = 0{,}005$ $\quad \rho = 2$

$T = 1$, $N = 100$, $\Delta t = \dfrac{T}{N}$, $\sigma_1 = 0{,}3$, $\sigma_2 = 0{,}4$

t = linspace (0, T, N+1) $\qquad$ $U = \ln(\cdot)$

plot (t, P)

plot (t, X) $\qquad$ $N_{mc} = 10.000$

plot (t, M)

Discussion θ_t et l'évolution de M_t.

Votre portefeuille $\equiv$ Votre richesse : $M_t = A_t P_t + B_t$

le nombre de part du P_t

A_t est le Delta du portefeuille

$0 \leq A_t \leq 1$

l'investissements dans le fond risqué

$$B_t = B_0 e^{rt} \quad r : \text{taux d'intérêt}$$

$$dB_t = B_0 r dt e^{rt} = B_t r dt$$

$$dM_t = A_t \cdot dP_t + \underbrace{d A_t P_t}_{=0} + dB_t$$

$$= A_t dP_t + r B_t dt$$

$$= A_t dP_t + r(M_t - A_t P_t) dt$$

On introduit le processus d'investissement

$$\theta_t = \frac{A_t P_t}{M_t}$$ partie de M_t investie dans le fond risqué

$$\theta_t = \frac{B_t}{M_t}$$ partie de M_t investie dans le cash

$$\rightarrow A_t = \frac{\theta_t M_t}{P_t}$$

$$dM_t = \frac{\theta_t M_t}{P_t} dP_t + r(M_t - \theta_t M_t) dt$$

$$dM_t = M_t \left(r(1-\theta_t) dt + \theta_t \frac{dP_t}{P_t} \right)$$

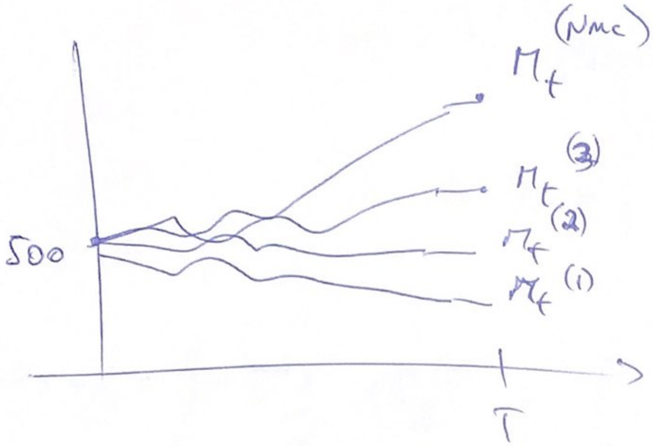
Program 1

```
function [Esp] = Esperance_Wealth (θ0)

  counter = 0
  for K = 1 : Nmc

      for i = 1 : N

          X(i+1) = X(i) + ..
          P(i+1) = P(i) + ..
          M(i+1) = M(i) + ..

      END
    Wealth_final (K) = M(N+1)
    if (wealth_final (k) < 800 )

          counter = counter + 1

    END

    Esp = mean ( log ( Wealth_final) )

  END

function [] = Optimisation ()

  for j = 1 : 21

      θ0(j) = (j-1)/20

      Esp (j) = Esperance_Wealth ( θ0(j) )

  END
  plot (θ0 , Esp)
END
```

fonction de densité et de répartition

Programme 1 mois

On trace $N_{mc} = 1000$ trajectoires de P_t, X_t, M_t



On construit la fct de densité de M_t, X_t, P_t