Exercice 10 : Soit (X, Y) un vect. gaussien avec $E(X) = E(Y) = 1$
et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

1) Quand est-ce que cette matrice est une matrice de covariance d'un vecteur aléatoire

- Γ est symétrique semi-definie positive.

Vérifions que Γ est semi-définie positive :

c-à-d $\forall t^t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle t, \Gamma t \rangle \geq 0$

Soit $t^t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, on calcule

$$\langle t, \Gamma t \rangle = \langle \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \rangle = t^t \Gamma t = t \cdot (\Gamma t)^t$$

$$= \langle \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1 + a t_2 \\ a t_1 + t_2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$= t_1 (t_1 + a t_2) + t_2 (a t_1 + t_2)$$

$$= t_1^2 + 2a t_1 t_2 + t_2^2$$

$$= t_1^2 + 2a t_1 t_2 + (a t_2)^2 - (a t_2)^2 + t_2^2$$

$$= (t_1 + \cancel{2} a t_2)^2 + t_2^2 - a^2 t_2^2$$

$$= (t_1 + a t_2)^2 + t_2^2 (1 - a^2)$$

donc $\langle t, \Gamma t \rangle \geq 0 \iff \underbrace{(t_1 + a t_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{t_2^2}_{\geq 0} (1 - a^2) \geq 0$

$\iff (1 - a^2) \geq 0 \iff 1 \geq a^2 \iff |a| \leq 1$

$\iff -1 \leq a \leq 1$

2) Écrire la fonction caractéristique de (X,Y)

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left[\exp(i<t,X>)\right]$$

$$= \exp\left(i<t,m_X> -\frac{1}{2}<t,\Gamma t>\right)$$

$$= \exp\left(i<\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}> -\frac{1}{2}<\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & a\\a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}>\right)$$

$$= \exp\left(i(t_1+t_2) -\frac{1}{2}\left(t_1^2+2at_1t_2+t_2^2\right)\right)$$

3) Quand est-ce que le vecteur (X,Y) admet une densité ?

L'écrire lorsqu'elle existe.

<u>On calcule</u> $\det(\Gamma) = \det\begin{pmatrix}1 & a\\a & 1\end{pmatrix} = 1-a^2$

X admet une densité $\Leftrightarrow \det(\Gamma) \neq 0 \Leftrightarrow 1-a^2 \neq 0$

est non dégénérée $\Leftrightarrow a \neq \pm 1$

Donc pour $a \neq \pm 1$ on peut calculer l'inverse de Γ

Calcule de Γ^{-1} :

$$\Gamma = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} u = e_1 + a e_2 \\ v = a e_1 + e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - \frac{1}{a} v = \left(a - \frac{1}{a}\right) e_2 \\ e_1 = u - a e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - \frac{1}{a} v = \left(\frac{a^2-1}{a}\right) e_2 \\ e_1 = u - a\left(\frac{a}{a^2-1} u - \frac{1}{a^2-1} v\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_2 = \frac{a}{a^2-1} \cdot u - \frac{1}{a^2-1} v \\ e_1 = \left(1 - \frac{a^2}{a^2-1}\right) u + \frac{a}{a^2-1} v \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{-1}{a^2-1} u + \frac{a}{a^2-1} v \\ e_2 = \frac{a}{a^2-1} u - \frac{1}{a^2-1} v \end{cases}$$

$$1 - \frac{a^2}{a^2-1} = \frac{a^2-1-a^2}{a^2-1} = \frac{-1}{a^2-1}$$

Ainsi $\Gamma^{-1} = \frac{1}{a^2-1} \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$ si $a \neq \pm 1$

Et si $Z \sim \mathcal{N}_d(m, \Gamma_Z)$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Gamma_Z)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\langle (z-m), \Gamma_Z^{-1}(z-m)\rangle\right)$$

$$\Rightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Gamma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x - \mathbb{E}(X) \\ y - \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}, \Gamma^{-1}\begin{pmatrix} x - \mathbb{E}(X) \\ y - \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}\right\rangle\right)$$

$$<\begin{pmatrix} x_1 - \mathbb{E}(X) \\ \cancel{x} y - \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}, \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} x - \mathbb{E}(X) \\ y - \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}> = < \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \frac{1}{a^2-1} \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} >$$

$$= < \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \frac{1}{a^2-1} \begin{pmatrix} 1-x+ay-a \\ ax-a-y+1 \end{pmatrix} >$$

$$= \frac{1}{a^2-1} \left((x-1)\left[1-x+ay-a\right] + (y-1)\left[ax-a-y+1\right] \right)$$

$$= \frac{1}{a^2-1} \left(\begin{matrix} x-x^2+axy-ax-1+x-ay+a \\ + ayx-ay-y^2+y-ax+a+y-1 \end{matrix} \right)$$

$$= \frac{1}{a^2-1} \left(-(x^2+y^2) + a(2xy-2x-2y+2) + 2x+2y-2 \right)$$

<u>finalement</u>,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-a^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2-1} \cdot \left(-x^2-y^2 + 2a(xy+x-y+1) + 2(x+y-1)\right)\right]$$