Exercice 3

1) 1.a) Dérivons la quantité $e^{-at}M(t)$:

$$de^{-at}M(t)/dt = -ae^{-at}M(t) + e^{-at}M'(t)$$

On M vérifie que $M'(t) \leq aM(t) + b \quad , \forall t \geq 0$

Cela implique que $de^{-at}M(t)/dt \leq -ae^{-at}M(t) + ae^{-at}M(t) + be^{-at}$

$$de^{-at}M(t)/dt \leq be^{-at}$$

On intègre entre 0 et t

$$\int_0^t de^{-at}M(t) \leq \int_0^t be^{-at}$$

Cela donne $\left[e^{-at}M(t)\right]_0^t \leq \left[-\frac{b}{a}e^{-at}\right]_0^t$

$$e^{-at}M(t) \leq \frac{-b}{a}e^{-at} + \frac{b}{a}$$

et finalement $M(t) \leq b\left(-1 + e^{at} / a\right)$

Pour l'autre inégalité, on sait que : $M'(t) \leq aM(t) + b$

Donc $M'(t) \leq a\, b\left(-1 + e^{at}/a\right) + b$

et $M'(t) \leq -b + be^{at} + b = be^{at}$

finaleement $M'(t) \leq be^{at}$.

1) 1.b) $\forall t \geq 0$ $\quad m(t) \leq a\int_0^t m(s)\,ds + b$

Soit M primitive de $m(t) \Rightarrow$ $M(t) - M(0) = \int_0^t m(s)\,ds$

Alors $m(t) \leq a(M(t) - M(0)) + b$

Soit $Y(t) = M(t) - M(0)$ alors $Y(0) = 0$ et $Y'(t) = m(t)$

Donc $Y'(t) \leq aY(t) + B$

tous d'après la première question $y'(t) \leq b e^{at} \Rightarrow m(t) \leq b e^{at}$
et ceci $\forall t \geqslant 0$.

1.c) Ta démo me semble juste, peut-être préciser :

$$\sup_{t \in [0,1]} \| e^{A(t)} \| = \sup_{t \in [0,t]} \| \sum_0^{\infty} (A(t))^k / k! \| \leq \sup \sum_0^{\infty} \frac{\|A(t)\|^k}{k!}$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{\sup \|A(t)\|^k}{k!} = e^{\sup_{t \in [0,1]} \|A(t)\|^k}$$

Pour le dernier passage.

2) 2.a) On a le système suivant :

(Problème de Cauchy) $\Rightarrow \begin{cases} X' = (A + \varepsilon F(t)) X(t) \\ X(0) = V \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ $\varepsilon \in \mathbb{R}$

Méthode 1 : Il s'agit de montrer que toute solution maximale est globale.

Le problème étant linéaire, A matrice carrée et F continue

On a bien une solution, pour montrer sa globalité Montrons qu'elle est lipschitzienne en X.

X_2 et X_1 deux sol de $X' = (A + \varepsilon F) X$

$F(t, X_2) - F(t, X_1) = (A + \varepsilon F(t)) (X_2 - X_1)$

$\| F(t, X_2) - F(t, X_1) \| \leq (\|A\| + \varepsilon \|F(t)\|) \|(X_2 - X_1)\|$

$\leq (\|A\| + \varepsilon \sup_{t \in [0,1]} \|F(t)\|) \|X_2 - X_1\|$

Or $F(t)$ continue sur $\mathbb{R}$ Donc $[0,1]$ et $\sup \|F(t)\| = K$

$\| F(t, X_2) - F(t, X_1) \| \leq \underbrace{(\|A\| + \varepsilon K)}_{\text{Constante de Lipschitz}} \|X_2 - X_1\|$

Donc elle est bien Lipschitzienne => Globale.

Methode 2 : $X'(t) = (A + \varepsilon F(t)) X(t)$

$$\|X'(t)\| \leqslant (\|A\| + \varepsilon \|F(t)\|) \|X(t)\|$$

$$\|X'\| \leqslant (\|A\| + \varepsilon \sup_{t \in [0,1]} \|F(t)\|) \|X(t)\|$$

$$\sup_{t \in [0,1]} \|F(t)\| = K \in \mathbb{R}$$

$$\|X'\| \leqslant (\underbrace{\|A\| + \varepsilon K}_{\text{Constante}}) \|X(t)\|$$

Donc à croissance affine (linéaire)

Donc Globale.

2.b) X_0 Sol de $\begin{cases} A X_0(t) = X'_0(t) \\ X(0)(0) = V \end{cases}$

X_1 $\begin{cases} X'_1(t) = A X_1(t) + F(t) X_0(t) \\ X_1(0) = 0 \end{cases}$

On a $Y_\varepsilon(t) = X^\varepsilon(t) - X_0(t) - \varepsilon X_1(t)$

Donc $Y'_\varepsilon(t) = X'^{(\varepsilon)}(t) - X'_0(t) - \varepsilon X'_1(t)$

Alors $Y'_\varepsilon(t) = (A + \varepsilon F(t)) X^\varepsilon(t) - A X_0(t) - \varepsilon A X_1(t) - \varepsilon F(t) X_0(t)$

Puis $Y'_\varepsilon(t) = (A + \varepsilon F(t)) (X^\varepsilon(t) - X_0(t) - \varepsilon X_1(t)) + \varepsilon^2 F(t) X_1(t)$

Qui est le résultat demandé.

2.c) On va utiliser l'inégalité démontrée en 1.c)

$\sup \|Y_\varepsilon(t)\| \leqslant e^{\sup \|A+\varepsilon F(t)\|} \left(\|Y_\varepsilon(0)\| + \sup \varepsilon^2 \|F(t) X_1(t)\| \right)$

On a $\quad Y_\varepsilon(0) = \underset{V}{X^\varepsilon(0)} - \underset{V}{X_0(0)} - \varepsilon \underset{0}{X_1(0)} = 0$

$\sup \|Y_\varepsilon(t)\| \leqslant e^{\sup \|A\| + \sup |\varepsilon| \|F(t)\|} \left(\sup \varepsilon^2 \|F(t) X_1(t)\| \right)$

$\sup_{[0,1]} \|Y_\varepsilon(t)\| \leqslant e^{\|A\|} \cdot e^{\sup \|F(t)\|} \left(\sup \varepsilon^2 \|F(t) X_1(t)\| \right)$

Car $\|\varepsilon F(t)\| \leqslant \|F(t)\|$ vu que $|\varepsilon| < 1$

$\|F(t)\|$ continue sur $\mathbb{R}$ son sup est atteint en $[0,1]$

$\sup_{t\in[0,1]} \|F(t)\| = \|F\| = K$

$\Rightarrow \quad \sup_{[0,1]} \|Y_\varepsilon(t)\| \leqslant \underbrace{e^{\|A\|} \cdot e^{K}}_{M} \left(\sup_{[0,1]} \varepsilon^2 \|F(t) X_1(t)\| \right)$

$\leqslant M \varepsilon^2 \sup \|F(t)\| . \|X_1(t)\|$

$\leqslant M \varepsilon^2 \; K \; . \sup_{t\in[0,1]} \|X_1(t)\|$

X_1 Solution d'une équation linéaire (Système avec matrice

Constante) $\quad \sup_{t\in[0,1]} \|X_1(t)\| = C' < \infty$

et finalement $\quad \sup_{[0,1]} \|Y_\varepsilon(t)\| \leqslant M . K . C' . \varepsilon^2 = C\varepsilon^2$

On Pose $\quad C = M . K . C'$

Donc $\quad Y_\varepsilon(t) = O(\varepsilon^2) \Rightarrow X^\varepsilon - X_0 - \varepsilon X_1 = O(\varepsilon^2)$

$\Rightarrow X^\varepsilon = X_0 + \varepsilon X_1 + O(\varepsilon^2)$.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ et $F(t) = \cos(2\pi t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X^{(\varepsilon)}(0) = V$

selon les résultats précédents : $X^{(\varepsilon)}(1) = X_0(1) + \varepsilon X_1(1) + O(\varepsilon^2)$

$$\sup \|Y_\varepsilon(t)\| \leqslant e^{\sup \|A+\varepsilon F(t)\|} \left(\|Y_\varepsilon(0)\| + \sup \varepsilon^2 \|F(t) X_1(t)\| \right)$$

On a $\quad Y_\varepsilon(0) = \underbrace{X^{\varepsilon}(0)}_{V} - \underbrace{X_0(0)}_{V} - \varepsilon \underbrace{X_1(0)}_{0} = 0$

$$\sup \|Y_\varepsilon(t)\| \leqslant e^{\sup\|A\| + \sup|\varepsilon| \|F(t)\|} \left(\sup \varepsilon^2 \|F(t) X_1(t)\| \right)$$

$$\sup_{[0,1]} \|Y_\varepsilon(t)\| \leqslant e^{\|A\|} \cdot e^{\sup \|F(t)\|} \left(\sup \varepsilon^2 \|F(t) X_1(t)\| \right)$$

Car $\|\varepsilon F(t)\| \leqslant \|F(t)\|$ vu que $|\varepsilon| < 1$

$\|F(t)\|$ continue sur $\mathbb{R}$ son sup est atteint en $[0,1]$

$$\sup_{t\in[0,1]} \|F(t)\| = \|F\| = K$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{[0,1]} \|Y_\varepsilon(t)\| \leqslant \underbrace{e^{\|A\|} \cdot e^{K}}_{M} \left(\sup_{[0,1]} \varepsilon^2 \|F(t) X_1(t)\| \right)$$

$$\leqslant M \varepsilon^2 \sup \|F(t)\| \cdot \|X_1(t)\|$$

$$\leqslant M \varepsilon^2 K \cdot \sup_{t\in[0,1]} \|X_1(t)\|$$

X_1 solution d'une équation linéaire (Système avec matrices constantes) $\quad \sup_{t\in[0,1]} \|X_1(t)\| = C' < \infty$

et finalement $\quad \sup_{[0,1]} \|Y_\varepsilon(t)\| \leqslant M \cdot K \cdot C' \cdot \varepsilon^2 = C\varepsilon^2$

On pose $\quad C = M \cdot K \cdot C'$

Donc $\quad Y_\varepsilon(t) = O(\varepsilon^2) \Rightarrow X^\varepsilon - X_0 - \varepsilon X_1 = O(\varepsilon^2)$

$$\Rightarrow X^\varepsilon = X_0 + \varepsilon X_1 + O(\varepsilon^2).$$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ et $F(t) = \cos(2\pi t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X^{(\varepsilon)}(0) = V$

selon les résultats précédents : $X^{(\varepsilon)}(1) = X_0(1) + \varepsilon X_1(1) + O(\varepsilon^2)$

Calculons alors $X_0(1)$ et $X_1(1)$

$X_0(t)$ sol de $\begin{cases} X_0'(t) = A X(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} X(t) \\ X_0(0) = V \end{cases}$

$X_1(t)$ sol de $\begin{cases} X_1'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} X_1(t) + \cos(2\pi t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0(t) \\ X_1(0) = 0 \end{cases}$

$$X_0 = e^{At} V \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

On a $A^2 + 4\pi^2 Id = 0 \Rightarrow A^2 = -4\pi^2 Id$

et $A^3 = -4\pi^2 A$

Donc $A^{2k} = (-1)^k (2\pi)^{2k} Id$

$A^{2k+1} = (-1)^k (2\pi)^{2k+1} A$

Calculons $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & \sin(2\pi t) \\ -\sin(2\pi(t)) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$

Donc $X_0(1) = e^{A \times 1} V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V = V$

D'une manière analogue On cherche solution de $X_1(t)$ à l'aide de la solution homogène pour trouver $X_1(1) = \frac{\varepsilon}{2} V$.

3.b) $X_\varepsilon(1) = R_\varepsilon(1,0) X_\varepsilon(0)$

$\forall V = X_\varepsilon(0)$

Donc $R_\varepsilon(1,0) V = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) V + O(\varepsilon^2)$

Donc $R_\varepsilon(1,0) = \begin{pmatrix} (1+\frac{\varepsilon}{2}) + O(\varepsilon^2) & 0 \\ 0 & (1+\frac{\varepsilon}{2}) + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} V$

3.c) Stabilité et stabilité asymptotique.

On calcule les Vp de $\begin{pmatrix} 0 & -2\varepsilon \\ 2\varepsilon & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon\cos^2(2\varepsilon t) & 0 \\ 0 & \varepsilon\cos^2(2\varepsilon t) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon\cos^2(2\varepsilon t) & -2\varepsilon \\ 2\varepsilon & \varepsilon\cos^2(2\varepsilon t) \end{pmatrix}$$

Donc Det $\begin{pmatrix} \varepsilon\cos^2(2\varepsilon t)-\lambda & -2\varepsilon \\ 2\varepsilon & \varepsilon\cos^2(2\varepsilon t)-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (\varepsilon\cos^2(2\varepsilon t)-\lambda)^2 + 4\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon\cos^2(2\varepsilon t) = \pm 2i + \lambda$$

$$\lambda = \varepsilon\cos^2(2\varepsilon t) \pm 2i$$

Donc $\lambda < 0 \Rightarrow \varepsilon < 0$ Stable asymptotique

si $\varepsilon > 0$ instable

Stabilité en ∞ maintenant.