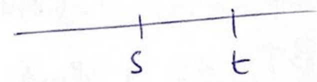
Méthode de Monte-Carlo :

Processus statistique M_t est une $\mathcal{F}$-martingale si :

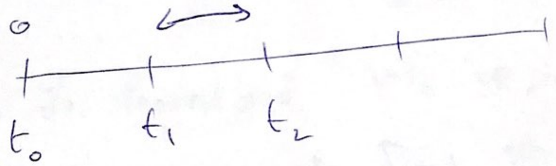
- M_t est intégrable : $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$
- M_t est $\mathcal{F}$-mesurable
- $\mathbb{E}[M_t / \mathcal{F}_s] = M_s$, $s \leq t$



Nous avons vérifié ~~cette~~ propriété pour M_t - marche aléatoire.

Rappel : Taux d'intérêt r : le taux d'intérêt annuel

$$\Delta t = \frac{t}{m} \qquad m = \frac{t}{\Delta t}$$



t_0 — B_0 ← une obligation

t_1 — $B_1 = B_0 + \overbrace{r\Delta t \cdot B_0}^{\text{intérêts}} = B_0(1 + r\Delta t)$

t_2 — $B_2 = B_1 + r\Delta t B_1 = B_1(1 + r\Delta t) = B_0(1 + r\Delta t)^2$

$\vdots$

t_m — $B_n = B_0 (1 + r\Delta t)^m$

$$\ln(1 + r\Delta t) \underset{0}{\sim} r\Delta t + o(\Delta t)$$

$$= B_0 \cdot \lim_{\Delta t \to 0} e^{\ln\left((1 + r\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}}\right)} = B_0 \cdot \lim_{\Delta t \to 0} e^{rt + \frac{t}{\Delta t} o(\Delta t)} = B_0 \cdot e^{rt}$$

$$= e^{\frac{t}{\Delta t} \ln(1 + r\Delta t)}$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = r S_t \, dt + \sigma \, dW_t \qquad dS_t = S_t \, r \, dt \quad \text{partie déterministe}$$

$$S_t = S_0 \cdot e^{rt}$$

Principe d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage : AOA

$$\begin{array}{ccc} 0 & & T \\ \vert & \text{———————} & \vert \\ B_0 & & B_T \end{array} \qquad \text{Votre richesse : } B_T = B_0 \cdot e^{rt}$$

<u>Une action</u> $\quad S_0 = B_0 \longrightarrow S_T \qquad \mathbb{E}\left[S_T \mid \mathcal{F}_0\right] = B_0 \cdot e^{rt}$

<u>Une option</u> $\quad V_0 = B_0 = S_0 \qquad \mathbb{E}\left[V_T \mid \mathcal{F}_0\right] = B_0 \cdot e^{rt}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[S_t \mid \mathcal{F}_0\right] = S_0 \cdot e^{rt}$$

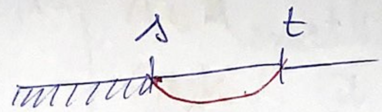
$$\Rightarrow \mathbb{E}\Big[\underbrace{e^{-rt} S_T}_{\hat{S}_t = e^{-rt} S_T} \mid \mathcal{F}_0\Big] = S_0 . \qquad \mathbb{E}\left[\hat{S}_T \mid \mathcal{F}_0\right] = \hat{S}_0$$

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s , \quad s \leq t$$

est une martingale.

$$\hat{V}_t = e^{-rt} \cdot \underset{\text{une option}}{V_t}$$ est une martingale.

1) Mouvement Brownien :



Processus Stochastique W_t

1). $W_0 = 0$.

2). Les accroissements sont indépendants,

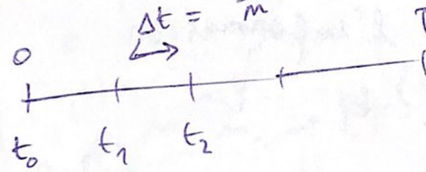
$\Rightarrow$ $W_t - W_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$. (plus fort que sans mémoire).

3). W_t est stationnaire : $W_t - W_s$ suit la même loi de W_{t-s}.

4). W_t suit la loi Normale $\mathcal{N}(0, t)$.

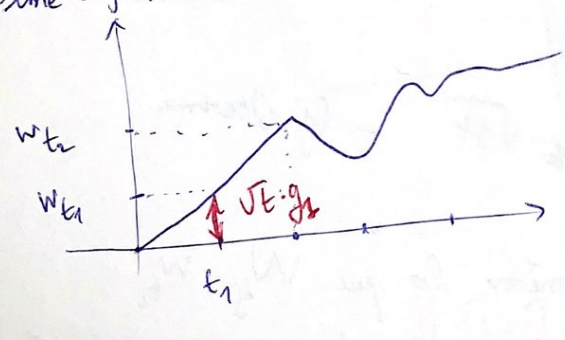
$$\Rightarrow \quad f_{W_t}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi \cdot t}} \quad \text{fonction de densité}$$

5). La trajectoire W_t et continue.



$t_k \longrightarrow W_{t_k}$

Simuler le MB signifie une trajectoire du



On étudie l'objet suivant : suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_1 = W_0 + \sqrt{\Delta t} \cdot g_1 \\ W_2 = W_1 + \sqrt{\Delta t} \cdot g_2 \\ \vdots \\ W_n = W_{n-1} + \sqrt{\Delta t} \cdot g_n \end{cases}$$

les g_n sont iid

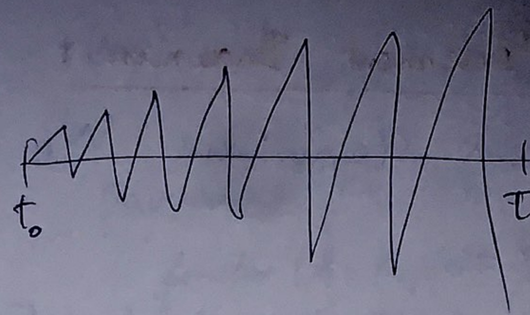
(Les accroissements)

$$W_n = W_0 + \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Une seule coordonnée : $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

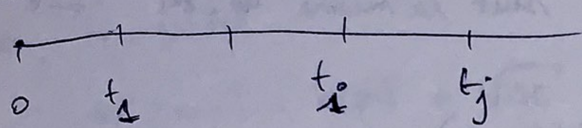
$\sqrt{t} \cdot$ rand()

$$\left.\begin{aligned} W_{t_1} &= \sqrt{t_1}\cdot \mathcal{N}(0,1) \\ W_{t_2} &= \sqrt{t_2}\cdot \mathcal{N}(0,1) \\ &\vdots \\ W_{t_m} &= \sqrt{t_m}\cdot \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{faux}$$



On vérifie que l'objet construit vérifie toutes les propriétés du Mouvement Brownien.

$W_0 = 0$



$$W_{t_j} - W_{t_i} = \sqrt{\Delta t}\left(\sum_{k=1}^{j} g_k - \sum_{k=1}^{i} g_k\right)$$

$$= \sqrt{\Delta t}\left(\sum_{k=i+1}^{j} g_k\right)$$

$$j - k + 1 = j - (i+1) + 1 = j - i - 1 + 1 = j - i \text{ termes}$$

est indépendant de l'information accumulée jusqu'en t_i

$$\mathcal{F}_{t_i} = \{g_1, g_2, \dots, g_i\}$$

- **Stationarité** : $W_{t_j} - W_{t_i} = \sum_{k=i+1}^{j} g_k \cdot \sqrt{\Delta t}$ – $(j-i)$ termes

$$W_{t_j - t_i} = \sum_{k=1}^{j-i} g_k \cdot \sqrt{\Delta t}$$

– suit la même loi que $W_{t_j} - W_{t_i}$ car g_k indépendante et même nombre de termes.

- $W_m = \sqrt{\Delta t}\,(\underbrace{g_1}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} + \dots + g_m) = \sqrt{\Delta t}\cdot \mathcal{N}(0, m)$

$$\left.\begin{aligned} X &\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y &\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$\Rightarrow W_m = \mathcal{N}(0, m\,\Delta t) = \mathcal{N}\left(0, m\cdot\frac{t}{m}\right) = \mathcal{N}(0, t)$$

$t(1) = 0$ $\qquad$ $T = t(N+1)$

function $[W] = MB()$

$T = 2$

$N = 100$

$\Delta t = \dfrac{T}{N}$

$W(1) = 0$

for $m = 1:N$

$\quad W(m+1) = W(m) + \sqrt{\Delta t} \cdot N(0,1)$

$\quad t(m+1) = t(m) + \Delta t$

End

PLOT (t, W)

END

espérance, variance

PROGRAMME MATLAB

function $[V] =$ Propriets_MB(N_{mc})

esperance $= 0$, $Var = 0$,

for $i = 1 : N_{mc}$

$W = MB()$

last_value$(i) = W($

esperance = esperance + last_value(i)

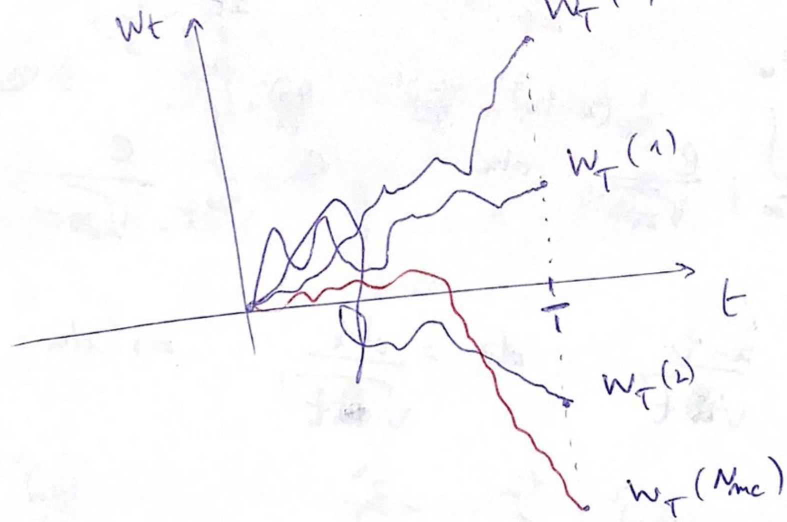
$Var = Var +$ last_value$(i)^2$

End

esperance = esperance / N_{mc}

Variance $= \dfrac{Var}{N_{mc}} - (\text{esperance})^2$

END



On vérifie que : $\mathbb{E}[W_T] = 0$ et $Var[W_T] = T$

$$\mathbb{E}[W_T] = \lim_{N_{mc} \to +\infty} \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} W_T^{(i)}$$

Théorème des grands Nombres

En mathématiques : $\mathbb{E}[W_t] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \cdot dx = 0$

$$\mathbb{E}[W_t^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx$$

On introduit la fonction génératrice $M_{W_t}(u) = \mathbb{E}[W_t^{\,u}]$

$$M_{W_t}(u) = \mathbb{E}\left[e^{u \cdot W_t}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ux} e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx$$

On étudie : $ux - \frac{x^2}{2t} = \frac{-1}{2t}\left(x^2 - 2tux + t^2u^2 - t^2u^2\right)$

$$= \frac{-1}{2t}(x-tu)^2 + \frac{(tu)^2}{2t}$$

$$\Rightarrow M_{W_t}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2t}(x-tu)^2 + \frac{(tu)^2}{t2}}}{\sqrt{2\pi t}} dx = e^{\frac{(tu)^2}{t2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-tu)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx \qquad -\frac{(x-tu)^2}{2t} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x-tu}{\sqrt{t}}\right)^2$$

Posons $Z = \frac{x-tu}{\sqrt{t}}$ $\quad dZ = \frac{dx}{\sqrt{t}}$ $\quad \Rightarrow dx = \sqrt{t}\, dZ$

$$\Rightarrow M_{W_t}(u) = e^{\frac{(tu)^2}{t2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{Z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \sqrt{t}\, dZ = e^{\frac{(tu)^2}{t2}} \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{Z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dZ}^{=1}$$

$$\Rightarrow M_{W_t}(u) = e^{\frac{(tu)^2}{t2}} = e^{\frac{t}{2} \cdot u^2}$$

$$\mathbb{E}\left[W_t^2\right] = \frac{\partial^2}{\partial u^2} M_{W_t}(u)\Big|_{u=0}$$

<u>En effet</u> : $\frac{\partial^2}{\partial u^2} M_{W_t}(u) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbb{E}\left[e^{uW_t}\right]\Big|_{u=0}$

$$= \mathbb{E}\left[W_t^2 \cdot 1\right] = \mathbb{E}\left[W_t^2\right]$$

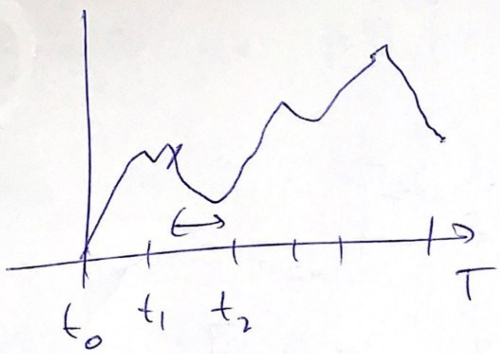
<u>Donc on peut calculer</u> : $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \cdot M_{W_t}(u)\Big|_{u=0} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} e^{\frac{(tu)^2}{t2}}\Big|_{u=0}$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{2tu}{2} e^{\frac{(tu)^2}{t2}}\right]\Big|_{u=0}$$

$\frac{t}{2} 2u$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left[t \cdot u \cdot e^{\frac{tu^2}{2}}\right]\Big|_{u=0}$$

$$= \left(t \cdot e^{tu^2/2} + ut \cdot tu\, e^{tu^2/2}\right)\Big|_{u=0} = te^0 = t$$



$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

Dans l'espace $\mathcal{L}^2 = \{ X_t , \ \|X_t\|_2^2 = \mathbb{E}[X_t^2] < \infty \}$

$$Q_N = \sum_{n=1}^{N} (W_n - W_{n-1})^2$$

$$\lim_{N \to +\infty} (Q_N - T) = 0 \iff \lim_{N \to +\infty} \mathbb{E}\left[(Q_N - T)^2\right] = 0$$

$$\langle W \rangle_T = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} (W_n - W_{n-1})^2 = T$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left((W_1 - W_0)^2 + (W_2 - W_1)^2 + \dots + (W_n - W_{n-1})^2 \right)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left[\Delta t \left(g_1^2 + g_2^2 + \dots g_N^2 \right] \right.$$

On va montrer que $\lim_{N \to +\infty} \mathbb{E}\left[(Q_N - T)^2\right] = 0$

• On va montrer que $\mathbb{E}[Q_N] = T$

Dmq $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{E}\left[\left(Q_N - \mathbb{E}[Q_N]\right)^2\right]$

$$= \lim_{N \to +\infty} \mathrm{Var}(Q_N)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \mathrm{Var}\left[\sum_{m=1}^{N} (W_m - W_{m-1})^2\right]$$

car les accroissements sont indépendants

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{m=1}^{N} \mathrm{Var}\left[(W_m - W_{m-1})^2\right]$$

car $W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$ suit la même loi que $W_{t_m - t_{m-1}} = W_{\Delta t}$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{m=1}^{N} \mathrm{Var}\left[(W_{\Delta t})^2\right]$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{m=1}^{N} \left(\mathbb{E}\left[W_{\Delta t}^4\right] - \mathbb{E}\left[W_{\Delta t}\right]^2\right)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{m=1}^{N} \left(3(\Delta t)^2 - (\Delta t)^2\right)$$

car $\mathbb{E}\left[W_t^4\right] = \frac{\partial^4}{\partial t^4} e^{t\frac{u^2}{2}}\Big|_{u=0} = 3t^2$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{m=1}^{N} 2(\Delta t)^2$$

indépendant de m

$$= \lim_{N \to +\infty} \cancel{\sum_{m=1}} N \cdot 2 \cdot \left(\frac{T}{N}\right)^2$$

car $\Delta t = \frac{T}{N}$

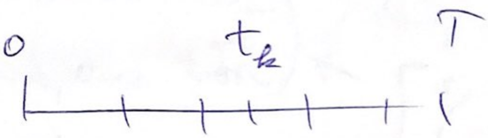
$$= \lim_{N \to +\infty} \frac{2T^2}{N} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Comment montrer par Simulation de MC. $\left(\langle W \rangle_t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} t\right)$

le théorème de Variation quadratique ?

Il y a deux façons de faire.

1) On fixe T et on simule $\displaystyle\sum_{m=1}^{N} (W_m - W_{m-1})^2 = \Delta t \left(g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_N^2\right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} T$, $g_i \sim \mathcal{N}(0,1)$

2) 

On simule $\langle W \rangle_{t_k}$ pour chaque $[0, t_k]$

On trace le graphe $t_k \longmapsto \langle W \rangle_{t_k}$

On remarque que le graphe $t_k \longmapsto \langle W \rangle_{t_k}$ approche une droite $t_k \longmapsto t_k$ (identité)

for $m = 1 : N$

$W(m+1) = W(m) + \sqrt{\Delta t} \cdot \mathcal{N}(0,1)$ ← MB

$\text{Var-quadra}(m+1) = \text{Var-quadra}(m) + \left(W(m+1) - W(m)\right)^2$

End

plot (t, Var-quadra)

plot (t, t)

Initialisation

$W(1) = 0$

$\text{Var-Quadra}(1) = 0$

$t = \text{linspace}(0, T, N+1)$