CYU Cergy-Paris Université

Master 1, 2021-22
Systèmes dynamiques

Devoir Maison

A rendre le **8 décembre 2021**
Binômes autorisés

Exercice 1 On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue T-périodique et on considère l'EDO

$$x''(t) + f(t)x(t) = 0. \tag{1}$$

1) 1.a) Ecrire l'équation précédente sous la forme

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{2}$$

où on précisera la forme de la matrice $A(\cdot)$.

1.b) On note $R(t,0)$ la résolvante du système (2). Expliquer pourquoi $R(T,0) \in SL(2,\mathbb{R})$.

2) On suppose que l'EDO (1) admet une solution $x_*(\cdot)$ *non* bornée et à croissance au plus polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|x_*(t)| \leqslant a|t| + b$.

2.a) La matrice $R(T,0)$ peut-elle être elliptique ?

2.b) La matrice $R(T,0)$ peut-elle être hyperbolique ?

2.c) Démontrer que l'EDO (1) admet une solution non nulle qui est $2T$-périodique.

Exercice 2 On considère l'EDO

$$\begin{cases} x'(t) & = ay(t) - x(t)^3 + \epsilon \\ y'(t) & = -ax(t) - y^2(t)\cos t - y^3(t) \end{cases} \tag{3}$$

où a et ϵ sont des paramètres réels.

1) Ecrire l'équation sous la forme

$$z'(t) = aJz(t) + F(z(t), t, \epsilon) \tag{4}$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et où $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

2) Démontrer que les solutions de l'équation (3) sont définies pour tout temps $t \geqslant 0$.

3) Pour $z_0 = (x_0, y_0)$ on note $\phi_\epsilon^{t,t_0}(z_0)$ la valeur au temps t de la solution de l'équation (3) ayant pour condition initiale $z_0 = (x_0, y_0)$ au temps t_0.

3.a) Rappeler pourquoi le fait que $\phi_\epsilon^{2\pi,0}(z_*) = z_*$ est équivalent au fait que $t \mapsto \phi_\epsilon^{t,0}(z_*)$ est une solution 2π-périodique de (3).

3.b) Si on suppose $\epsilon = 0$, que vaut $\phi_0^{t,0}(0)$?

4) Démontrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^2$, un $\epsilon_0 > 0$ et une constante C tels que pour $(z, \epsilon) \in V \times] - \epsilon_0, \epsilon_0[$, $t \in [0, 2\pi]$ on a

$$\phi_\epsilon^{t,0}(z) = Q(t)z + G(t)\epsilon + K(z, \epsilon, t),$$

où

$$\begin{cases} K \text{ est de classe } C^1 \\ \max_{t \in [0,2\pi]} \|K(z, \epsilon, t)\| \leqslant C(\|z\|^2 + \epsilon^2) \\ \forall\ t \in [0, 2\pi], \quad \partial_z K(0, 0, t) = 0, \quad \partial_\epsilon K(0, 0, t) = 0 \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos at & \sin at \\ -\sin at & \cos at \end{pmatrix}$$

et si $a \neq 0$,

$$G(t) = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \sin at \\ -1 + \cos at \end{pmatrix}.$$

Que vaut G si $a = 0$?

5) On suppose a non entier. Démontrer qu'il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon \in W$ l'équation (3) admet une solution 2π-périodique.

FIN