Lista de Exercício 1 - Cap 1 - Álgebra Linear II

Júlio Melo Campos - 222503

01-

b) Não é, pois há presença de função trigonométrica, raiz de incógnita e exponencial

d) É, pois segue as condições de um sistema linear

02-

a) $7x - 5y = 3$ $\quad 7x = 3 + 5t$

$y = t$

$\hookrightarrow 7x - 5t = 3$

$$\boxed{x = \frac{3}{7} + \frac{5}{7} \cdot t}$$

Solução: $\left\{\left(\frac{3}{7} + \frac{5}{7} \cdot t, t\right)\right\}$ para $t \in \mathbb{R}$

b) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

$x_2 = r$

$x_3 = s$

$x_4 = t$

$+8x_1 = 2r - 5s + 6t - 1$

$x_1 = \frac{2}{8}r - \frac{5}{8}s + \frac{6}{8}t - \frac{1}{8}$

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{4} \cdot r - \frac{5}{8} \cdot s + \frac{3}{4} \cdot t - \frac{1}{8}}$$

Solução $\{(x_1, r, s, t)\}$ para $r, s, t \in \mathbb{R}$

03-

a) $\begin{cases} 2x_1 = -1 \\ -4x_1 = -6 \\ x_1 = -1 \\ 3x_1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 + 2x_2 \cancel{x} - 3x_4 = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ -4x_1 + 4x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -9 \\ -x_4 = -2 \end{cases}$

04-

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \boxed{a}x_1^2 + \boxed{b}x_1 + 1.\boxed{c} = y_1 \\ \to \boxed{a}x_2^2 + \boxed{b}x_2 + 1.\boxed{c} = y_2 \\ \to \boxed{a}x_3^2 + \boxed{b}x_3 + 1.\boxed{c} = y_3 \end{matrix}$$

(a, b, c)

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

6 variáveis

logo é solução

05-

a) $x = -3 \to x = -3$

$y = 0 \to y = 0$

$z = 7 \to z = 7$

c) ~~X Z 6X~~

$$\begin{cases} a - 6b + 3e = -2 \\ c + 4e = 7 \\ d + 5e = 8 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

06- O seguinte sistema linear não homogêneo com mesmos coeficientes admitirão apenas uma possibilidade de solução

07-

se $ad - bc \neq 0$

a) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} a=1 & b=0 \\ c=0 & d=1 \end{matrix}$

então

$ad \neq bc$

$1.1 \neq 0.0$

$1 \neq 0$, logo é verdadeiro

b) $\begin{cases} ax + by = K \\ cx + dy = 1 \end{cases}$

$1.x + 0.y = K$

$0.x + 1.y = 1$

$\begin{cases} x = K \\ y = 1 \end{cases}$ Solução $(K, 1)$

Digitalizado com CamScanner

8-

a) $A.x=b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$$

b) $A.x=b$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

09-

a) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -9 \end{cases}$

10-

15- $\cancel{\begin{cases} K + 1 + 0 = 0 \\ K + 0 + 2 = 0 \\ 0 + 2 - 3 = 0 \end{cases}}$ ~~Sem solução~~

$$(K \ 1 \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = (K+1 \ \ K+2 \ \ -1)$$

16- $\cancel{\begin{cases} 2 + 4 + 0 = 0 \\ 4 + 0 + 3K = 0 \\ 0 + 0 + K = 0 \end{cases}}$

$$(K+1 \ \ K+2 \ \ -1) \cdot \begin{pmatrix} K \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (K^2 + 2K + 1)$$

$$K^2 + 2K + 1 = 0$$

Solução $\boxed{K=-1}$

16- $(2 \quad 2 \quad K) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (6 \quad 3K+4 \quad K+6)$

$(6 \quad 3K+4 \quad K+6) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ K \end{pmatrix} = (K^2 + 12K + 20)$

$K^2 + 12K + 20 = 0$

$\underline{-2} + \underline{-10} = -12$

$\underline{-2} \cdot \underline{-10} = 20$ $\boxed{K_1 = -2}$ ou $\boxed{K_2 = -10}$

11- $\begin{cases} a - b = 8 \\ b + a = 1 \end{cases}$ +

$2a = 9$

$\boxed{a = 9/2}$

$\boxed{b = -7/2}$

$\begin{cases} 3d + c = 7 \\ 2d - c = 6 \end{cases}$ +

$5d = 13$

$\boxed{d = 13/5}$

$\frac{2 \cdot 13}{5} - c = 6$

$\frac{26}{5} - c = 6$

$c = \frac{26}{5} - 6$

$c = \frac{26 - 30}{5}$

$\boxed{c = \frac{-4}{5}}$

12- $Ax = X$

a)

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{pela solução trivial} \quad \boxed{x_1 = x_2 = x_3 = 0}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \\ 4x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \\ 4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{solução} \quad \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{matrix} \quad x_3 = t \rightarrow (t, 0, t)$$

13- $A.x = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{n}^{\text{os}} \text{ reais positivos } **} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{solução trivial, logo}$$

variáveis

$$A^K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^K = \text{n}^{\text{os}} \text{ reais positivos } *$$

$* = **$ → mesma propriedade, logo solução trivial

$- A_{n \times n} \to A = A^T$

a) A^2 simétrico?

$(A_{n\times n})^1 (A_{n\times n})^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$

$\to$ Sim! É simétrico

b) $2A^2 - 3A + I$ simétrico?

simétrico

$2A^2 \to$ multiplicação por escalar $\to$ Ex. $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ simétrico ✓

$3A \to$ ———— $\to$ simétrico ✓

$A + I \to$ soma de identidade $\to$ Ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ simétrico ✓

15 - Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

a) $a_{ij} = i^2 + j^2$

$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ✓ simétrica

b) $a_{ij} = 2i + 2j$

$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ ✓ simétrico

c) $a_{ij} = i^2 - j^2$

$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ X ñ simétrico

d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 10 & 24 \end{pmatrix}$ X ñ simétrico