

6^a edição

Sistemas de Controle para Engenharia



Gene F. Franklin
J. David Powell
Abbas Emami-Naeini



Gene F. Franklin (falecido após a publicação da edição original deste livro) foi professor por mais de 50 anos e um dos pioneiros no campo de sistemas de controle. Foi autor de três livros-texto altamente conceituados (incluindo este) e ajudou a fundar e dirigir o Stanford's Information Systems Laboratory. Graduou-se em Engenharia Elétrica pelo Georgia Institute of Technology. Era mestre pelo Massachusetts Institute of Technology e doutor pela Columbia University.

J. David Powell é autor de mais de 100 artigos e de dois livros na área de sistemas de controle. Graduou-se em Engenharia Mecânica pelo Massachusetts Institute of Technology. É mestre e doutor em Aeronáutica e Astronáutica pela Stanford University.

Abbas Emami-Naeini é autor de mais de 77 artigos e diretor da SC Solutions, Inc. Graduou-se com honras pelo Georgia Institute of Technology. É mestre e doutor em Engenharia Elétrica pela Stanford University.



F831s Franklin, Gene F.

Sistemas de controle para engenharia [recurso eletrônico] /
Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini ;
tradução: Fernando de Oliveira Souza ; revisão técnica:
Antonio Pertence Júnior. – 6. ed. – Dados eletrônicos. – Porto
Alegre : Bookman, 2013.

Editedo também como livro impresso em 2013.
ISBN 978-85-8260-068-9

I. Engenharia – Sistemas de controle. I. Powell, J. David.
II. Emami-Naeini, Abbas. III. Título.

CDU 621.337.1

Gene F. Franklin
Stanford University

J. David Powell
Stanford University

Abbas Emami-Naeini
SC Solutions, Inc.

Sistemas de Controle para Engenharia

6^a edição

Tradução

Fernando de Oliveira Souza
Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Minas Gerais
Professor Adjunto do Departamento de Engenharia Eletrônica – UFMG

Revisão técnica

Antonio Pertence Júnior
Professor da Universidade FUMEC – MG
Mestre em Engenharia pela Universidade Federal de Minas Gerais
Especialista em Processamento de Sinais

Versão impressa
desta obra: 2013



2013

Obra originalmente publicada sob o título
Feedback Control of Dynamic Systems, 6th Edition.
ISBN 9780136019695

Authorized translation from the English language edition, entitled *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Edition, by Gene Franklin; J.Powell; Abbas Emami-Naeini, published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 2010. All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

Portuguese language edition published by Bookman Companhia Editora Ltda, a Grupo A Educação S.A. company, Copyright © 2013

Tradução autorizada a partir do original em língua inglesa da obra intitulada *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6ª edição, autoria de Gene Franklin; J.Powell; Abbas Emami-Naeini, publicado por Pearson Education, Inc., sob o selo Prentice Hall, Copyright © 2010. Todos os direitos reservados. Este livro não poderá ser reproduzido nem em parte nem na íntegra, nem ter partes ou sua íntegra armazenado em qualquer meio, seja mecânico ou eletrônico, inclusive fotoreprografia, sem permissão da Pearson Education, Inc.

A edição em língua portuguesa desta obra é publicada por Bookman Companhia Editora Ltda, uma empresa do Grupo A Educação S.A., Copyright © 2013

Gerente editorial: *Arysinha Jacques Affonso*

Colaboraram nesta edição:

Editora: *Maria Eduarda Fett Tabajara*

Capa: *Maurício Pamplona (arte sobre capa original)*

Imagem da capa: *Desert panorama, Rub'Al Khali Dubai*. ©Sean Randall/iStockphoto®

Leitura final: *Amanda Jansson Breitsameier*

Editoração: *Techbooks*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
BOOKMAN EDITORA LTDA., uma empresa do GRUPO A EDUCAÇÃO S.A.
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre – RS
Fone: (51) 3027-7000 Fax: (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

Unidade São Paulo
Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 – Pavilhão 5 – Cond. Espace Center
Vila Anastácio – 05095-035 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100 Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444 – www.grupoa.com.br

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

*Para Gertrude, David, Carole,
Valerie, Daisy, Annika, Davenport,
Malahat, Sheila e Nima*

Prefácio

Na sexta edição, voltamos a apresentar um texto de apoio para disciplinas de controle mantendo as melhores características das edições anteriores. O Capítulo 4 foi substancialmente reescrito, destacando as propriedades básicas da realimentação: o material foi organizado em uma ordem mais lógica e é apresentado de forma muito mais eficaz, seguindo uma abordagem ascendente de leitura. Também atualizamos todo o texto sobre como o projeto assistido por computador é utilizado para refletir a maneira como o projeto é realizado hoje. Ao mesmo tempo, trabalhamos para fornecer aos engenheiros de controle de sistemas conhecimentos básicos para que os resultados do computador possam ser guiados e verificados. As referências ao programa MATLAB® também foram atualizadas, incluindo alguns de seus recursos mais recentes. Os estudos de caso no Capítulo 10 foram mantidos, e um novo estudo de caso do campo emergente da Bioengenharia foi adicionado. A seção *Perspectiva histórica* foi acrescentada ao final de cada capítulo para trazer informações adicionais sobre como surgiram os conceitos apresentados. Finalmente, para orientar o leitor na busca de temas específicos, o Sumário foi ampliado de forma a incluir subseções.

A estrutura básica do livro manteve-se inalterada, e continuamos a combinar análise e projeto usando as três abordagens: lugar das raízes, resposta em frequência e equações de variáveis de estado. O texto continua apresentando muitos exemplos cuidadosamente elaborados para ilustrar o conteúdo. Como antes, fornecemos um conjunto de questões de revisão ao final de cada capítulo, com respostas no final do livro, para que os alunos possam verificar se realmente aprenderam o conteúdo.

Nos três capítulos sobre os métodos de projeto, continuamos requerendo que os alunos aprendam a executar cálculos básicos, a fazer o esboço do lugar das raízes e a esboçar diagramas de Bode para testar os resultados do computador e como auxílio ao projeto. Assim, a utilização do MATLAB é introduzida no início do reconhecimento do uso universal de ferramentas computacionais no âmbito do projeto de controle. Além disso, reconhecendo o fato de que cada vez mais controladores são implementados em computadores, voltamos a introduzir o controle digital no Capítulo 4 e em exemplos de casos, comparando as respostas dos sistemas realimentados usando controladores analógicos com os que têm um controlador digital “equivalente”. Como antes, preparamos uma coleção de todos os arquivos MATLAB (em formatos “m” e SIMULINK®) utilizados para produzir as figuras do livro. Esse e outros materiais estão disponíveis no site do Grupo A (em inglês) e podem ser acessados livremente.

Acreditamos que esta edição apresenta um bom material de apoio pedagógico, fornece uma forte motivação para o estudo de controle e representa uma base sólida para enfrentar os desafios educacionais. Apresentamos o estudo de controle por realimentação tanto como uma especialidade quanto como um suporte para muitos outros campos.

Desafios educacionais

Alguns dos desafios educacionais na área de controle por realimentação são antigos, outros surgiram nos últimos anos. Alguns permanecem para os estudantes em toda a sua formação em engenharia, outros são únicos para este curso relativamente sofisticado. Sejam eles antigos ou novos, gerais ou específicos, percebemos que os desafios educacionais foram essenciais para a evolução deste livro. Aqui, vamos lidar com vários desafios educacionais e descrever nossas abordagens para cada um deles.

- DESAFIO *Os alunos devem dominar o projeto, bem como as técnicas de análise.*

O projeto é fundamental para todas as engenharias, especialmente para engenharia de controle. Os estudantes acham que as questões de projeto, com suas correspondentes oportunidades para abordar as aplicações práticas, são motivadoras. Contudo, eles também consideram os problemas de projeto difíceis, porque estes geralmente são mal colocados e não apresentam soluções únicas. Devido à sua importância e ao efeito motivacional nos alunos, o projeto é enfatizado ao longo desta obra, para que a confiança na solução de problemas de projeto seja desenvolvida desde o início.

A ênfase no projeto começa no Capítulo 4, após o desenvolvimento de modelagem e resposta dinâmica. A ideia básica de realimentação é introduzida, mostrando sua influência sobre a rejeição de distúrbio, rastreamento, precisão e robustez a mudanças de parâmetros. A orientação de projeto continua com tratamentos baseados em lugar das raízes, resposta em frequência e técnicas de realimentação de estados. Todas as abordagens são destinadas a propiciar o conhecimento necessário para obter um bom projeto de controle por realimentação sem desenvolvimento matemático complexo além do que é essencial para uma compreensão clara.

Ao longo do texto, os exemplos são usados para comparar e contrastar as técnicas de projeto oferecidas pelos diferentes métodos e, nos estudos de caso apresentados no Capítulo 10, problemas de projeto complexos do mundo real são resolvidos usando todos os métodos de uma maneira unificada.

- DESAFIO *Novas ideias continuam a ser introduzidas no controle.*

O controle é um campo ativo de pesquisa e, portanto, há um constante fluxo de novos conceitos, ideias e técnicas. Com o tempo, alguns desses novos conceitos se juntam à lista de coisas que todo engenheiro de controle deve saber. Este livro foi feito para apoiar os alunos em sua necessidade de entender tanto os temas tradicionais quanto os mais modernos.

Em cada uma de nossas edições, temos tentado dar a mesma importância aos métodos de lugar das raízes, resposta em frequência e métodos de variáveis de estado para o projeto. Nesta edição, continuamos a insistir na importância de um conhecimento sólido dessas técnicas, juntamente a métodos computacionais baseados em cálculos detalhados. Também fornecemos uma introdução à amostragem de dados e controladores discretos, reconhecendo o importante papel desempenhado pelos controladores digitais em nosso campo. Embora esse material possa ser ignorado para economizar tempo, sem prejudicar o fluxo do texto, sentimos que é muito importante que os alunos comprehendam que o controle implementado em computador é amplamente utilizado e que as técnicas mais básicas de controle digital são facilmente compreendidas.

- DESAFIO *Os alunos precisam gerenciar uma grande quantidade de informações.*

A vasta gama de sistemas na qual o controle por realimentação é aplicado e a crescente variedade de técnicas disponíveis para a solução de problemas de controle demandam que o estudante de controle aprenda muitas ideias novas. Como os alunos mantêm sua perspectiva apesar das longas e complexas passagens textuais? Como eles identificam pontos importantes e tiram conclusões adequadas? Como fazem revisões apropriadas para as provas? Ajudar os alunos nessas tarefas é um ponto fundamental. Eis as características deste livro que podem auxiliar os alunos.

1. As *aberturas de capítulos* oferecem uma introdução e uma visão geral. O tema específico do capítulo é situado no contexto da disciplina como um todo e as seções do capítulo são apresentadas brevemente.
2. As *notas na margem* destacam pontos importantes. Elas indicam importantes definições, equações e conceitos.
3. Os *quadros* identificam conceitos-chave no texto. Funcionam também para resumir os procedimentos de projeto.
4. Os *resumos dos capítulos* ajudam o estudante a revisar e priorizar pontos importantes do texto. Esses resumos reiteram brevemente os principais conceitos e conclusões do capítulo.
5. *Questões de revisão* no final de cada capítulo, com soluções no final do livro, orientam o estudante em seu aprendizado.

- DESAFIO *Os alunos de controle por realimentação vêm de uma vasta gama de áreas.*

Controle por realimentação é um campo interdisciplinar com aplicação em sistemas de todas as áreas da engenharia. Consequentemente, algumas universidades têm separado os cursos introdutórios de controle e os usado como suporte para alguns cursos; outras, como Stanford, têm um único conjunto de cursos realizado por estudantes de diversas áreas. No entanto, restringir os exemplos a um campo é perder grande parte do poder de alcance do controle por realimentação, ainda que cobrir toda a gama de aplicações seja muito difícil. Neste livro, desenvolvemos o caráter interdisciplinar e fornecemos material de revisão para algumas das técnicas mais comuns a fim de facilitar o estudo de todos os alunos, independentemente de seus cursos. Para estudantes de Engenharia Elétrica, que normalmente têm uma boa experiência em análise por meio de transformadas, incluímos, no Capítulo 2, uma introdução à prática de escrever equações de movimento para os sistemas mecânicos. Para os engenheiros mecânicos, incluímos, no Capítulo 3, uma revisão da transformada de Laplace e da resposta dinâmica, pontos necessários no controle. Além disso, introduzimos brevemente outras técnicas e, de vez em quando, apresentamos equações de movimento de um sistema físico sem derivação, mas com uma descrição física suficiente para ser entendida do ponto de vista da resposta. Exemplos de alguns dos sistemas físicos representados no texto incluem o cabeçote de leitura/gravação para um disco rígido de computador, um sistema de localização por satélite, a relação ar-combustível no motor de um automóvel e um sistema de piloto automático de avião.

Resumo do livro

O conteúdo do livro está organizado em dez capítulos e três apêndices. As seções opcionais de materiais avançados ou extras, marcadas com um triângulo (Δ), estão incluídas ao final de alguns capítulos. Há material extra (em inglês) no site do Grupo A. Os exemplos e os problemas com base nesse material também são marcados com um triângulo (Δ). Os apêndices incluem material de fundamentos teóricos e referencial. No livro, os apêndices incluem tabelas com transformadas de Laplace, respostas para as questões de revisão dos capítulos e uma lista de comandos do MATLAB.

No Capítulo 1, são apresentadas as noções essenciais da realimentação e algumas das questões fundamentais sobre projeto. Este capítulo também contém um breve histórico sobre o controle, desde os primórdios do controle de processos até o controle de voo. Espera-se que esse breve histórico dê um contexto para o campo, apresente algumas das figuras-chave que contribuíram para seu desenvolvimento e motive o aluno em sua apredizagem.

O Capítulo 2 faz uma breve apresentação da modelagem dinâmica e inclui mecânica, elétrica, eletromecânica, fluidos e dispositivos termodinâmicos. Esse material pode ser utilizado como base para trabalhos de revisão, para nivelar o conhecimento de todos os alunos, ou trabalhado mais a fundo, dependendo das necessidades dos alunos.

O Capítulo 3 aborda a resposta dinâmica como usada no controle. Muito desse material pode já ter sido estudado pelos alunos, principalmente por estudantes de engenharia elétrica. Para muitos estudantes, a correlação entre a localização dos polos e a resposta transiente e os efeitos de zeros e polos sobre a resposta dinâmica representa um material novo. A estabilidade de sistemas dinâmicos também é introduzida neste capítulo. Esse material deve ser abordado cuidadosamente.

O Capítulo 4 apresenta equações básicas e funções de transferência de realimentação, juntamente com as definições da função de sensibilidade. Com essas ferramentas, controles em malha aberta e malha fechada são comparados com relação à rejeição de distúrbio, rastreamento, exatidão e sensibilidade aos erros do modelo. A classificação dos sistemas de acordo com sua capacidade de rastrear sinais de referência polinomial ou de rejeitar perturbações polinomiais é descrita utilizando o conceito de tipo de sistema. Finalmente, a estrutura de controle clássico proporcional, integral e derivativa (PID) é introduzida, e a influência dos parâmetros do controlador na equação característica do sistema é explorada juntamente com os métodos de sintonia do PID. A seção final do capítulo é opcional e trata do controle digital.

Após a descrição de realimentação no Capítulo 4, o livro apresenta os métodos de projeto com base no lugar das raízes, resposta em frequência e realimentação de variável de estado nos Capítulos 5, 6 e 7, respectivamente.

O Capítulo 8 aborda com mais detalhes as ferramentas necessárias para o projeto e a implementação de controladores por realimentação em computadores digitais. No entanto, para um estudo completo sobre controle por realimentação usando computadores digitais, indicamos o livro *Digital Control of Dynamic Systems*, de Franklin, Powell e Workman; Ellis-Kagle Press, 1998.

No Capítulo 9, é apresentado um material sobre sistemas não lineares, incluindo técnicas de linearização das equações de movimento, resposta em frequência como uma função descritiva, plano de fase, teoria de estabilidade de Lyapunov e critério do círculo para estabilidade.

No Capítulo 10, as três principais abordagens são integradas em vários estudos de caso e a base para projeto do ponto de vista prático é discutida.

Como utilizar

O conteúdo deste livro pode ser coberto de diferentes formas. A maioria dos alunos de disciplinas de controle terá algum conhecimento de dinâmica e de transformadas de Laplace. Portanto, o Capítulo 2 e a maior parte do Capítulo 3 seriam uma revisão para esses alunos. Em um trimestre de dez semanas, é possível estudar o Capítulo 3 e os Capítulos 1, 4, 5 e 6. No segundo trimestre, os Capítulos 7 e 9 podem ser cobertos confortavelmente e partes selecionadas do Capítulo 8 podem ser incluídas. Um curso semestral deve acomodar confortavelmente os Capítulos 1-7, incluindo o material de revisão dos Capítulos 2 e 3, se necessário. Se restar tempo após essa cobertura essencial, podem ser adicionados uma introdução sobre controle digital apresentado no Capítulo 8, determinadas questões sobre não linearidade a partir do material no Capítulo 9 e alguns dos estudos de caso do Capítulo 10.

Todo o livro também pode ser coberto em uma sequência de três trimestres consistindo em modelagem e resposta dinâmica (Capítulos 2 e 3), controle clássico (Capítulos 4-6) e controle moderno (Capítulos 7-10).

Pré-requisitos em controle realimentado

Este livro destina-se, principalmente, a disciplinas de nível superior de todas as engenharias. Para os temas centrais nos Capítulos 4-7, o pré-requisito necessário é o conhecimento em modelagem e resposta dinâmica. Muitos estudantes entram no curso com conhecimento suficiente desses conceitos. Para os que necessitam de revisão, os Capítulos 2 e 3 devem ser suficientes.

Para compreender o material sobre espaço de estado é necessário um conhecimento básico de álgebra matricial. Uma revisão das relações básicas é dada no Apêndice WE (disponível em inglês no site do Grupo A), e uma breve apresentação de um material necessário no controle é dada no início do Capítulo 7. A ênfase é nas relações entre sistemas dinâmicos lineares e álgebra linear.

Recursos online (em inglês)

Para o aluno:

Acesse o site do Grupo A (www.grupoa.com.br), busque pela página do livro e faça seu cadastro para ter acesso aos seguintes materiais:

- Arquivos .m e .mdl usados para gerar todas as figuras de MATLAB do livro
- Material com conteúdo extra e apêndices

Para o professor:

Procure pela exclusiva Área do Professor no site do Grupo A, cadastre-se e tenha acesso a:

- Manual do professor com problemas resolvidos
- Arquivos em Powerpoint® com todas as figuras e tabelas do livro

Agradecimentos

Finalmente, queremos reconhecer nossa grande dívida para com todos aqueles que contribuíram para que o controle por realimentação se desenvolvesse neste campo empolgante que é hoje e, especificamente, a ajuda considerável e a instrução que recebemos de nossos alunos e colegas. Em particular, temos nos beneficiado de muitas discussões com quem ensinou introdução ao controle em Stanford: A. E. Bryson, Jr., R. H. Cannon, Jr., D. B. DeBra, S. Rock, S. Boyd, C. Tomlin, P. Enge e C. Gerdes. Outros colegas que nos ajudaram incluem D. Fraser, N. C. Emami, B. Silver, M. Dorfman, D. Brennan, K. Rudie, L. Pao, F. Khorrami, K. Lorell e P. D. Mathur.

Agradecimentos especiais vão para os muitos estudantes que forneceram quase todas as soluções para os problemas no livro.

G. F. F.
J. D. P.
A. E. -N.
Stanford, Califórnia

Sumário

1 Visão Geral e um Breve Histórico da Teoria de Controle Realimentado	1
Visão geral do capítulo 2	
1.1 Um sistema de controle retroativo simples 2	
1.2 A primeira análise da realimentação 5	
1.3 Uma breve história 8	
1.4 Uma visão geral do livro 12	
Resumo 14	
Questões de revisão 14	
Problemas 14	
2 Modelos Dinâmicos	17
Visão geral do capítulo 17	
2.1 Dinâmica de sistemas mecânicos 18	
2.1.1 Movimento de translação 18	
2.1.2 Movimento rotacional 23	
2.1.3 Combinando rotação e translação 30	
2.1.4 Sistemas com parâmetros distribuídos 33	
2.1.5 Resumo: desenvolvimento de equações de movimento para corpos rígidos 34	
2.2 Modelos de circuitos elétricos 35	
2.3 Modelos de sistemas eletromecânicos 38	
△ 2.4 Modelos de sistemas fluidos e térmicos 43	
2.4.1 Fluxo de calor 43	
2.4.2 Fluxo de fluido incompressível 46	
2.5 Perspectiva histórica 51	
Resumo 53	
Questões de revisão 53	
Problemas 54	
3 Resposta Dinâmica	63
Visão geral do capítulo 64	
3.1 Revisão das transformadas de Laplace 64	
3.1.1 Resposta por convolução 64	
3.1.2 Funções de transferência e resposta em frequência 69	

3.1.3	A transformada de Laplace unilateral (\mathcal{L})	74
3.1.4	Propriedades da transformada de Laplace	76
3.1.5	A transformada inversa de Laplace por expansão em frações parciais	78
3.1.6	Teorema do Valor Final	79
3.1.7	Resolução de problemas com a transformada de Laplace	81
3.1.8	Polos e zeros	83
3.1.9	Análise de sistemas lineares usando o MATLAB	84
3.2	Representação de sistemas por diagramas	88
3.2.1	Diagrama de blocos	88
3.2.2	Redução de diagrama de blocos usando o MATLAB	92
3.3	Efeitos da localização dos polos	93
3.4	Especificações no domínio do tempo	100
3.4.1	Tempo de subida	100
3.4.2	Sobressinal e tempo de pico	100
3.4.3	Tempo de acomodação	102
3.5	Efeitos de zeros e polos adicionais	104
3.6	Estabilidade	112
3.6.1	Estabilidade entrada limitada-saída limitada	112
3.6.2	Estabilidade de sistemas LIT	113
3.6.3	Critério de estabilidade de Routh	114
△ 3.7	Obtenção de modelos a partir de dados experimentais	121
3.7.1	Modelos a partir de dados da resposta transitória	122
3.7.2	Modelos de outros dados	126
△ 3.8	Escalonamento em amplitude e no tempo	126
3.8.1	Escalonamento de amplitude	126
3.8.2	Escalonamento no tempo	127
3.9	Perspectiva histórica	128
	Resumo	129
	Questões de revisão	130
	Problemas	131

4 Uma Primeira Análise da Realimentação

146

	Visão geral do capítulo	147
4.1	Equações básicas de controle	147
4.1.1	Estabilidade	148
4.1.2	Rastreamento	149
4.1.3	Regulação	149
4.1.4	Sensibilidade	150
4.2	Controle de erro em estado estacionário para entradas polinomiais: tipo de sistemas	153
4.2.1	Tipo de sistema para rastreamento	153
4.2.2	Tipo do sistema para regulação e rejeição de distúrbios	157
4.3	Controlador de três termos: controlador PID	160
4.3.1	Controlador proporcional (P)	160
4.3.2	Controle proporcional mais controle integral (PI)	161
4.3.3	Controle PID	162
4.3.4	Método de Ziegler-Nichols para sintonia de controladores PID	165
4.4	Introdução ao controle digital	170
4.5	Perspectiva histórica	175
	Resumo	176
	Questões de revisão	177
	Problemas	178

5 O Método do Lugar das Raízes **189**

- Visão geral do capítulo 190
- 5.1 Lugar das raízes de um sistema realimentado básico 190
- 5.2 Diretrizes gerais para determinar o lugar das raízes 194
 - 5.2.1 Regras para traçar o lugar das raízes positivo (180°) 196
 - 5.2.2 Resumo das regras para determinar o lugar das raízes 200
 - 5.2.3 Seleção do valor do parâmetro 201
- 5.3 Lugar das raízes ilustrativo 203
- 5.4 Projeto usando compensadores dinâmicos 214
 - 5.4.1 Projeto usando o compensador de avanço 215
 - 5.4.2 Projeto usando o compensador de atraso 219
 - 5.4.3 Projeto usando o compensador de rejeição de faixa 220
 - 5.4.3 Implementação analógica e digital 221
- 5.5 Um exemplo de projeto usando o lugar das raízes 224
- 5.6 Extensões do método do lugar das raízes 229
 - 5.6.1 Regras para esboçar um lugar das raízes negativo (0°) 229
 - Δ 5.6.2 Considerando dois parâmetros 232
 - Δ 5.6.3 Retardo no tempo 234
- 5.7 Perspectiva histórica 236
 - Resumo 238
 - Questões de revisão 240
 - Problemas 240

6 O Método de Projeto Baseado na Resposta em Frequência **254**

- Visão geral do capítulo 254
- 6.1 Resposta em frequência 255
 - 6.1.1 Técnicas para traçar o diagrama de Bode 261
 - 6.1.2 Erro em regime permanente 271
- 6.2 Estabilidade neutra 272
- 6.3 O critério de estabilidade de Nyquist 274
 - 6.3.1 Princípio do argumento 275
 - 6.3.2 Aplicação em controle 276
- 6.4 Margens de estabilidade 286
- 6.5 Relação entre ganho e fase no diagrama de Bode 293
- 6.6 Resposta em frequência de malha fechada 297
- 6.7 Compensação 298
 - 6.7.1 Compensador PD 299
 - 6.7.2 Compensador de avanço 299
 - 6.7.3 Compensador PI 310
 - 6.7.4 Compensador de atraso 311
 - 6.7.5 Compensador PID 315
 - 6.7.6 Considerações de projeto 319
 - Δ 6.7.7 Especificações em termos da função de sensibilidade 321
 - Δ 6.7.8 Limitações no projeto em termos da função de sensibilidade 325
 - Δ 6.8 Retardo no tempo 328
 - Δ 6.9 Representação alternativa dos dados 329
 - 6.9.1 Carta de Nichols 329
- 6.10 Perspectiva histórica 332
 - Resumo 333
 - Questões de revisão 335
 - Problemas 336

7 Projeto no Espaço de Estados 356

Visão geral do capítulo	356
7.1 Vantagens do espaço de estados	357
7.2 Descrição de sistemas no espaço de estados	358
7.3 Diagrama de blocos e espaço de estados	363
7.3.1 Escalonamento de tempo e amplitude em espaço de estados	366
7.4 Análise das equações de estado	366
7.4.1 Diagrama de blocos e formas canônicas	367
7.4.2 Resposta dinâmica a partir das equação de estado	377
7.5 Projeto de lei de controle para realimentação completa de estados	383
7.5.1 A lei de controle	383
7.5.2 Introdução de uma entrada de referência com realimentação completa de estados	391
7.6 Seleção da localização dos polos para um bom projeto	394
7.6.1 Polos dominantes de segunda ordem	395
7.6.2 Lugar das raízes simétrico (LRS)	396
7.6.3 Comentários sobre os métodos	404
7.7 Projeto de estimador	404
7.7.1 Estimadores de ordem completa	404
7.7.2 Estimadores de ordem reduzida	409
7.7.3 Seleção dos polos do estimador	412
7.8 Projeto do compensador: lei de controle e estimador combinados	415
7.9 Introdução da entrada de referência com o estimador	426
7.9.1 Estrutura geral para uma entrada de referência	427
7.9.2 Selecioneando o ganho	435
7.10 Controle integral e rastreamento robusto	436
7.10.1 Controle integral	436
△ 7.10.2 Controle robusto de rastreamento: abordagem no espaço do erro	438
△ 7.10.3 O estimador estendido	447
△ 7.11 Recuperação de função de transferência de malha (RFTM)	450
△ 7.12 Projeto direto via funções de transferência racionais	455
△ 7.13 Projeto para sistemas com atraso puro de tempo	458
7.14 Perspectiva histórica	460
Resumo	463
Questões de revisão	464
Problemas	464

8 Controle Digital 484

Visão geral do capítulo	484
8.1 Digitalização	485
8.2 Análise dinâmica de sistemas discretos	487
8.2.1 Transformada z	487
8.2.2 Inversão da transformada z	488
8.2.3 Relação entre s e z	490
8.2.4 Teorema do Valor Final	491
8.3 Projeto usando equivalentes discretos	493
8.3.1 Método de correspondência polo-zero (MPZ)	496
8.3.2 Método modificado de correspondência polo-zero (MMPZ)	499
8.3.3 Comparação dos métodos de aproximação digital	499
8.3.4 Limites da aplicabilidade do método de projeto equivalente discreto	500

8.4	Características físicas	501
8.4.1	Conversores analógico-digital (A/D)	501
8.4.2	Conversores digital-analógico (D/A)	501
8.4.3	Pré-filtros antialias	502
8.4.4	O computador	503
8.5	Seleção de taxa de amostragem	503
8.5.1	Eficiência de rastreamento	504
8.5.2	Rejeição ao distúrbio	504
8.5.3	Efeito do pré-filtro antialias	505
8.5.4	Amostragem assíncrona	506
△ 8.6	Projeto discreto	506
8.6.1	Ferramentas de análise	506
8.6.2	Propriedades de realimentação	508
8.6.3	Exemplo de projeto discreto	508
8.6.4	Análise discreta de projetos	510
8.7	Perspectiva histórica	512
	Resumo	513
	Questões de revisão	514
	Problemas	514

9 Sistemas não Lineares 519

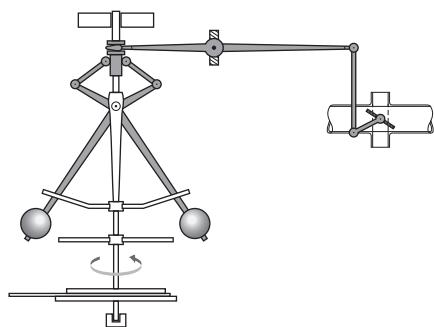
	Visão geral do capítulo	519
9.1	Introdução e motivação: por que estudar sistemas não lineares?	520
9.2	Análise por linearização	522
9.2.1	Linearização por análise de sinais pequenos	522
9.2.2	Linearização por realimentação não linear	527
9.2.3	Linearização pela não linearidade inversa	527
9.3	Análise por ganho equivalente usando o lugar das raízes	528
9.3.1	Integrador antiwindup	533
9.4	Análise do ganho equivalente usando resposta em frequência: funções descritivas	536
9.4.1	Análise de estabilidade usando funções descritivas	542
△ 9.5	Análise e projeto baseados na estabilidade	546
9.5.1	O plano de fase	546
9.5.2	Análise de estabilidade de Lyapunov	550
9.5.3	O critério do círculo	557
9.6	Perspectiva histórica	562
	Resumo	563
	Questões de revisão	563
	Problemas	564

10 Projeto de Sistemas de Controle 572

	Visão geral do capítulo	572
10.1	Um esquema de projeto de sistemas de controle	573
10.2	Projeto do controle de atitude de um satélite	578
10.3	Controle lateral e longitudinal de um Boeing 747	593
10.3.1	Amortecedor de guinada	597
10.3.2	Piloto automático de manutenção de altitude	603
10.4	Controle da razão ar-combustível em um motor automotável	609
10.5	Controle do cabeçote de leitura/escrita de um disco rígido	615
10.6	Controle de sistemas de PTR na fabricação de pastilhas de semicondutores	623

10.7 Quimiotaxia ou como a <i>E. coli</i> se movimenta	635
10.8 Perspectiva histórica	641
Resumo	643
Questões de revisão	644
Problemas	644
Apêndice A Transformada de Laplace	655
A.1 A transformada de Laplace \mathcal{L}_-	655
A.1.1 Propriedades da transformada de Laplace	656
A.1.2 Transformada inversa de Laplace por expansão em frações parciais	663
A.1.3 Teorema do Valor Inicial	666
A.1.4 Teorema do Valor Final	667
Apêndice B Soluções das Questões de Revisão	668
Apêndice C Comandos do MATLAB®	681
Bibliografia	685
Índice	691

Visão Geral e um Breve Histórico da Teoria de Controle Realimentado



Controle realimentado (ou retroativo) de sistemas dinâmicos é um conceito antigo com muitas características que têm evoluído ao longo do tempo. A ideia central é que a saída de um sistema pode ser medida e retransmitida a um controlador usado para fazer o controle. Comprovou-se que um sinal de realimentação pode ser usado para controlar uma vasta variedade de sistemas dinâmicos, incluindo, por exemplo, aeronaves e discos rígidos para armazenamento de dados. Para alcançar um bom controle, existem quatro requisitos básicos:

- O sistema deve ser sempre estável.
- A saída do sistema deve rastrear o sinal de comando na entrada.
- A saída do sistema não deve responder a entradas de distúrbio.
- Esses requisitos devem ser cumpridos, mesmo se o modelo utilizado no projeto não for totalmente preciso, ou se a dinâmica do sistema físico mudar ao longo do tempo ou devido a mudanças ambientais.

O requisito de estabilidade é básico e pode ter dois motivos. Em primeiro lugar, o sistema pode ser instável. Esse caso é ilustrado por um Segway (veículo automotor com duas rodas em paralelo), que pode simplesmente cair se o controle for desligado. Por outro lado, a realimentação pode conduzir o sistema à instabilidade. A referida experiência de instabilidade é chamada de “círculo vicioso”, no qual o sinal de retroação piora a situação ao invés de melhorar.

Há muitos exemplos de sistemas que têm como requerimento que sua saída siga um comando. Por exemplo, dirigir um carro para que o veículo permaneça na sua faixa. Da mesma forma, pilotar um avião durante a aproximação da pista de pouso exige que o trajeto de descida seja precisamente seguido.

Rejeição de distúrbios é uma das aplicações mais antigas do controle realimentado. Neste caso, o “comando” é uma constante de referência para qual a saída deve obedecer quando as condições ambientais mudam. Um exemplo muito comum é o quarto com temperatura controlada automaticamente, cuja função é manter a temperatura próxima da temperatura de referência enquanto a temperatura externa e o vento mudam, e quando as portas e janelas são abertas e fechadas.

Finalmente, para projetar um controlador para um sistema dinâmico, é necessário ter um modelo matemático da resposta dinâmica do sistema, sendo que o modelo preferido é o mais simples. Infelizmente, quase todos os sistemas físicos são muito complexos e frequentemente não lineares. Como resultado, o projeto será normalmente baseado em um modelo simplificado e deve ser robusto o suficiente para que o controle atenda a seus requisitos de desempenho quando aplicado ao dispositivo real. Além disso, mais uma vez em quase todos os casos, quando o tempo e o ambiente mudam até os melhores modelos estarão sujeitos a erros, porque a dinâmica do sistema foi alterada. Novamente, o projeto não deve ser muito sensível a estas inevitáveis mudanças e, assim, deve funcionar suficientemente bem independentemente delas.

As ferramentas disponíveis para engenheiros de controle resolverem estes problemas têm evoluído ao longo do tempo. Foi especialmente importante o desenvolvimento dos computadores digitais, tanto como auxiliares de cálculo quanto como dispositivos de controle embarcados. Como dispositivos de computação, os computadores têm permitido a identificação de modelos cada vez mais complexos e a aplicação de métodos de projeto de controle muito sofisticados. Além disso, como dispositivos embarcados, dispositivos digitais têm permitido a implementação de leis de controle bastante complexas. Engenheiros de controle não só devem ser hábeis em manipular essas ferramentas de projeto, mas também precisam entender os conceitos por trás delas para poder utilizá-las da melhor forma. Também é importante que o engenheiro de controle compreenda as capacidades e as limitações dos dispositivos de controle disponíveis.

Visão geral do capítulo

Neste capítulo, começamos nossa exploração do controle retroativo usando um exemplo simples e familiar: um forno doméstico controlado por um termostato. Os componentes genéricos de um sistema de controle são identificados no contexto desse exemplo. Em outro exemplo – controle de velocidade de cruzeiro de um automóvel –, desenvolvemos as equações elementares estáticas e atribuímos valores numéricos aos elementos do modelo do sistema, a fim de comparar o desempenho do controle em malha aberta com o controle em malha fechada quando dinâmicas são ignoradas.

A fim de contextualizar nossos estudos e fornecer uma visão de como o campo tem evoluído, a Seção 1.3 fornece um breve histórico da teoria de controle. Além disso, outros capítulos apresentarão breves seções com notas históricas a respeito dos temas apresentados. Finalmente, a Seção 1.4 fornece uma visão geral do conteúdo e organização de todo o livro.

1.1 Um sistema de controle retroativo simples

Em sistemas de controle retroativo, a variável controlada – como temperatura e velocidade – é medida por um sensor, e a informação medida é retransmitida (realimentada) ao controlador para influenciar a variável controlada. O princípio é facilmente ilustrado por um sistema muito comum, um forno doméstico controlado por um termostato. Os componentes deste sistema e suas interconexões são mostradas na Fig. 1.1. Esse diagrama identifica os componentes principais do sistema e mostra as direções de fluxo de informação de um componente para outro.

Podemos facilmente analisar o funcionamento deste sistema qualitativamente a partir do diagrama. Suponha que tanto a temperatura da sala onde está localizado o termostato e a temperatura exterior são significativamente inferiores à temperatura de referência (também chamada de set point) quando a energia é aplicada. O termostato está na lógica de controle e abrirá a válvula de gás do forno. Isso fará com que o calor a ser fornecido para a sala Q_{in} tenha uma taxa significativamente maior do que a perda de calor Q_{out} . Como resultado, a temperatura da sala subirá até que ela exceda por uma pequena quantidade a referência do termostato. Neste momento, o forno será desligado e a temperatura começará a cair. Quando a temperatura cair um pouco abaixo do valor de referência, o termostato agirá novamente e o ciclo se repetirá.

Respostas típicas da temperatura da sala, juntamente com os ciclos do forno ligado e desligado, são mostradas na Fig. 1.1. A temperatura do lado externo é mantida em 50°F e o termostato é inicialmente fixado em 55°F. Às 6h da manhã, o termostato é fixado em 65°F e o número de ciclos do forno aumenta para manter a temperatura nesse nível.¹ Observe que a casa está bem isolada, de modo que a queda da temperatura com o forno desligado é significativamente mais lenta do que o aumento da temperatura quando o forno está ligado. A partir desse exemplo, podemos identificar os componentes genéricos do sistema de controle retroativo, como mostrado na Fig. 1.2.

O componente central em um sistema realimentado é o **processo** que tem sua saída controlada. No nosso exemplo, o processo seria a sala cuja saída é a sua temperatura e a **perturbação** do processo é o fluxo de calor externo na casa devido à condução através das paredes e do telhado. (O fluxo externo de calor também depende de outros fatores, como o vento, as portas abertas, etc.) O projeto do processo obviamente pode ter um impacto importante sobre a eficácia do controle. A temperatura de uma sala bem isolada com janelas de isolamento térmico pode ser controlada com mais facilidade do que outra com isolamento térmico ruim. Da mesma forma, o projeto de aeronaves realizado com o controle em mente faz uma enorme diferença para o desempenho final. Em todos os casos, quanto mais cedo as questões de controle forem introduzidas no projeto do processo, melhor. O **atuador** é o dispositivo que pode influenciar a variável controlada do processo e, no nosso caso, o atuador é o forno a gás. Na verdade, o forno normalmente tem uma chama-piloto, uma válvula de gás e um ventilador, que liga e desliga em

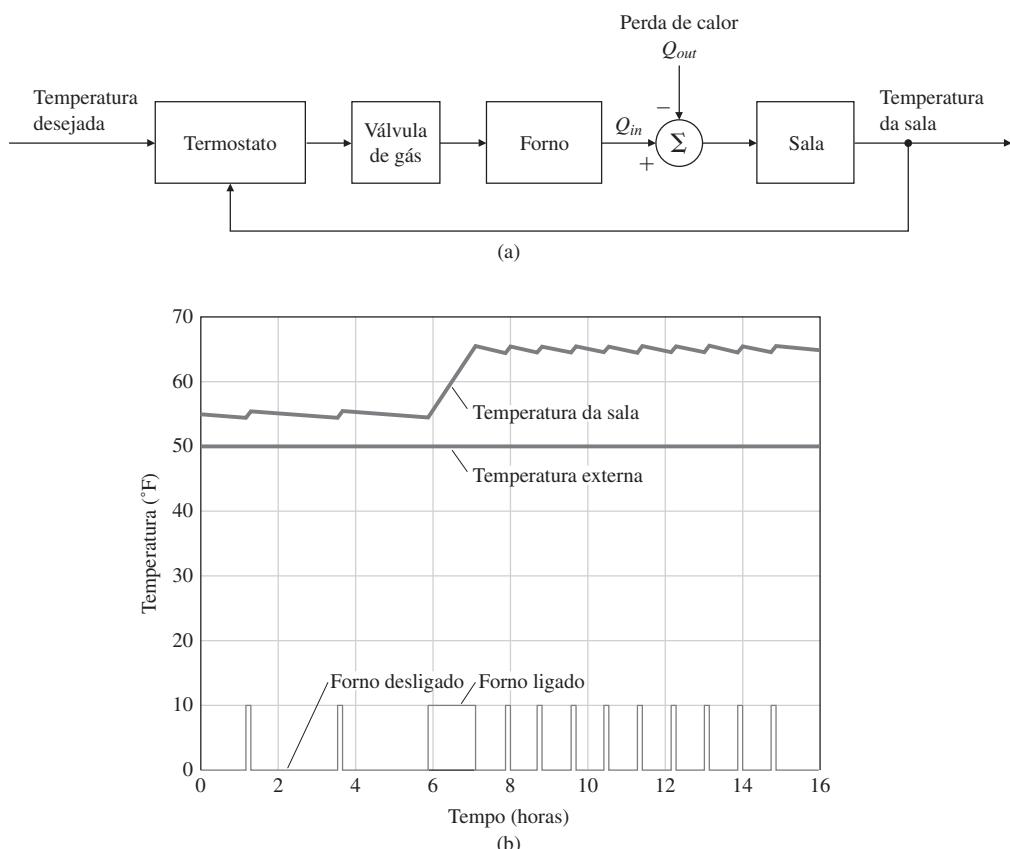


Figura 1.1 (a) Diagrama de blocos de componentes de um sistema de controle de temperatura em uma sala; (b) gráfico da temperatura na sala e ação do forno.

¹ Note que o forno é ligado alguns minutos antes das 6 horas em sua programação noturna regular.

função da temperatura do ar no forno. Esses detalhes ilustram o fato de que muitos sistemas re-alimentados contêm componentes que constituem outros sistemas realimentados.² A principal característica do atuador é sua habilidade de mover a saída do processo com velocidade e nível adequados. O forno deve produzir mais calor do que a casa perde no pior dia e deve distribuí-lo rapidamente se a temperatura da casa tiver de ser mantida em uma faixa estreita. Potência, velocidade e confiabilidade são geralmente mais importantes que a precisão. Em geral, o processo e os atuadores estão intimamente ligados e os centros de projeto de controle buscam uma entrada adequada ou sinal de controle para enviar ao atuador. A combinação do processo e do atuador é chamada de **planta** e a componente que realmente calcula o sinal de controle desejado é o **controlador**. Devido à flexibilidade do processamento de sinais elétricos, o controlador funciona normalmente baseado em sinais elétricos, embora o uso de controladores pneumáticos baseados em ar comprimido tenha um longo e importante lugar em processos de controle. Com o desenvolvimento da tecnologia digital, custo, eficiência e flexibilidade conduziram ao uso de processadores de sinais digitais como o controlador em um número crescente de casos. O **termostato** na Fig. 1.1 mede a temperatura ambiente e é chamado de **sensor** na Fig. 1.2; um dispositivo cuja saída contém ruído inevitavelmente é o sensor. A seleção e posicionamento dos sensores é muito importante no projeto de controle, por isso às vezes não é possível que a variável controlada e a variável sensorizada sejam a mesma. Por exemplo, embora possamos realmente desejar controlar a temperatura da casa como um todo, o termostato está em um quarto particular, que pode ou não estar na mesma temperatura do resto da casa. Por exemplo, se o termostato está ajustado para 68°F mas é colocado na sala de estar perto de uma lareira, uma pessoa que trabalha na sala de estudo ainda pode sentir frio.^{3,4} Como veremos, além do posicionamento, propriedades importantes do sensor são: precisão das medições, baixo ruído, confiabilidade e linearidade. O sensor normalmente converte a variável física em um sinal elétrico para ser utilizado pelo controlador. Nossa sistema geral também inclui um **filtro de entrada**, cuja função é converter o sinal de referência na forma elétrica para o controlador manipulá-lo

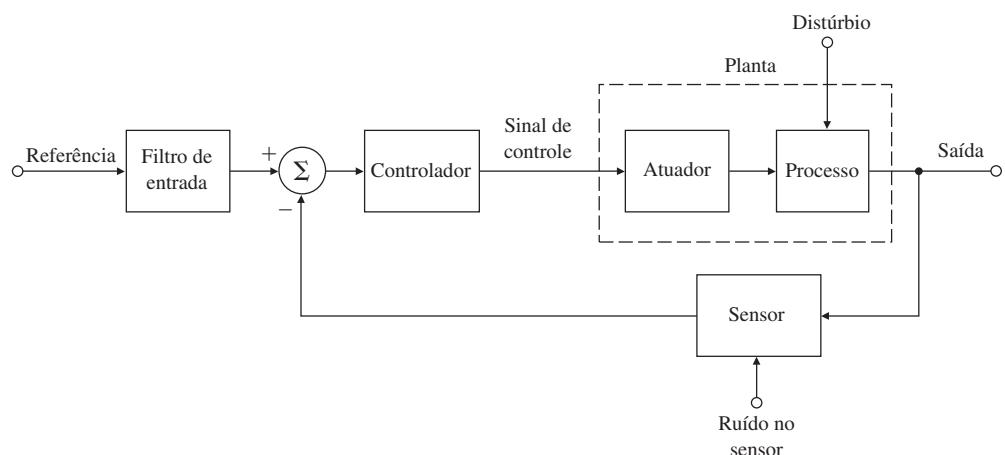


Figura 1.2 Diagrama de blocos dos componentes de um controle realimentado elementar.

² Jonathan Swift (1733) disse isso desta forma: “Assim, naturalistas observam, uma pulga tem pulgas menores sobre ela. E estas têm ainda menores para mordê-las. E assim por diante, *ad infinitum*”.

³ Na reforma da cozinha na casa de um dos autores, os novos fornos foram colocados contra a parede em que o termostato estava instalado do outro lado. Agora, quando o jantar é preparado na cozinha em um dia frio, o autor congela durante seu estudo, a menos que o termostato seja reajustado.

⁴ Esta história é de um empregado novo em uma fábrica de nitroglicerina, que era responsável por controlar a temperatura crítica de uma parte do processo manualmente. Foi-lhe dito para “manter a leitura abaixo de 300°”. Em uma inspeção de rotina, o fiscal percebeu que o lote estava perigosamente quente e encontraram o trabalhador com o termômetro sob a água fria da torneira: ele pretendia diminuir o valor da leitura da temperatura no termômetro. Eles saíram um pouco antes da explosão. Moral da história: às vezes, o controle automático é melhor do que o manual.

posteriormente. Em alguns casos, o filtro de entrada pode modificar o comando de entrada de referência de forma a melhorar a resposta do sistema. Finalmente, há uma **comparação** para calcular a diferença entre o sinal de referência e a saída do sensor para dar ao controlador uma medida do erro do sistema.

Neste texto, serão apresentados os métodos de análise e seus componentes de sistemas de controle realimentados e serão descritas as técnicas mais importantes que os engenheiros de projeto podem usar com confiança na aplicação da realimentação para resolver problemas de controle. Também vamos estudar as vantagens específicas da realimentação que compensam a complexidade que ela exige. No entanto, embora o sistema de controle de temperatura seja de fácil compreensão, ele é não linear, como pode ser visto pelo fato de que o forno está ligado ou desligado. Para introduzir controles lineares, precisamos de um outro exemplo.

1.2 A primeira análise da realimentação

O valor da realimentação pode ser facilmente demonstrado por meio de uma análise quantitativa de um modelo simplificado de um sistema familiar, o controle da velocidade de cruzeiro em um automóvel (Fig. 1.3). Para estudar esta situação analítica, precisamos de um **modelo** matemático do nosso sistema na forma de um conjunto de relações quantitativas entre as variáveis. Para este exemplo, nós ignoramos a resposta dinâmica do veículo e consideramos apenas o comportamento estável. (A resposta dinâmica, é claro, desempenha um papel importante em capítulos posteriores.) Além disso, vamos supor que, para a gama de velocidades a ser utilizada pelo sistema, podemos aproximar as relações como lineares. Depois de medir a velocidade do veículo em uma estrada plana a 65 km/h, descobrimos que uma mudança de 1° no ângulo do acelerador (nossa variável de controle) provoca uma mudança de 10 km/h na velocidade. A partir de observações durante a condução subindo e descendo colinas, verificou-se que, quando a inclinação da pista muda em 1%, medimos uma mudança de velocidade de 5 quilômetros por hora. O velocímetro tem precisão de uma fração de 1 km/h e será considerado exato. Com essas relações, podemos desenhar o **diagrama de blocos** da planta (Fig. 1.4), que mostra essas relações matemáticas em forma gráfica. Neste diagrama, as linhas ligam e transportam os sinais e um bloco é como um amplificador ideal que multiplica o sinal na sua entrada pelo valor marcado no bloco para produzir o sinal de saída. Para somar dois ou mais sinais, vamos mostrar as linhas dos sinais indo para um somador, um círculo com o sinal de somatório Σ dentro. Um sinal algébrico (mais ou menos) ao lado de cada seta indica se a entrada adiciona ou subtrai a saída total do somatório. Para essa análise, queremos comparar os efeitos da variação de 1% na velocidade da saída quando a velocidade de referência é definida em 65 km/h com e sem realimentação para o controlador.

Controle em malha aberta

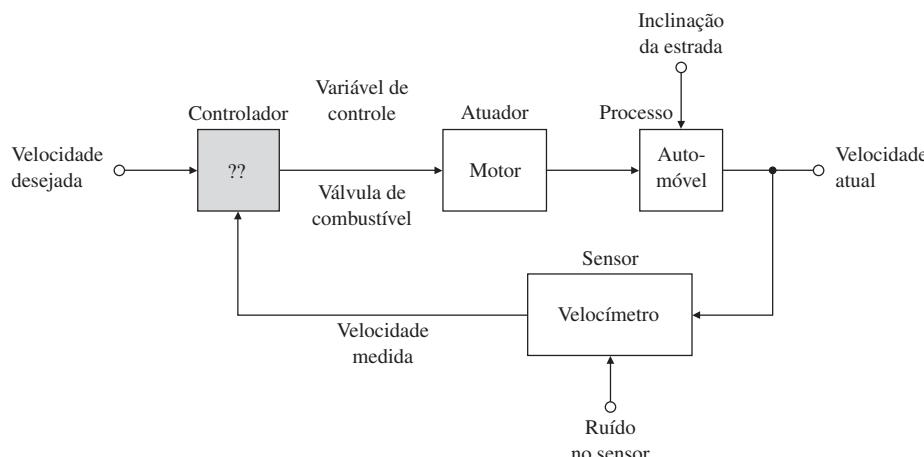
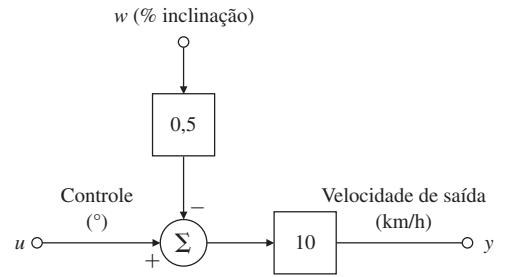


Figura 1.3 Diagrama de blocos dos componentes de controle de velocidade em cruzeiro de um automóvel.

Figura 1.4 Diagrama de blocos da planta do sistema de controle de velocidade em cruzeiro.



No primeiro caso, mostrado na Fig. 1.5, o controlador não usa a leitura do velocímetro, mas estabelece $u = r/10$. Esse é um exemplo de um **sistema de controle em malha aberta**. O termo *malha aberta* se refere ao fato de que não existe um caminho fechado em torno do qual os sinais percorrem o diagrama de blocos. Em nosso exemplo simples, a velocidade é a saída em malha aberta, y_{ol} , que é dada pelas equações

$$\begin{aligned}y_{ol} &= 10(u - 0,5w) \\&= 10\left(\frac{r}{10} - 0,5w\right) \\&= r - 5w.\end{aligned}$$

O erro na velocidade de saída é

$$e_{ol} = r - y_{ol} \quad (1.1)$$

$$= 5w \quad (1.2)$$

e o erro em porcentagem é

$$\% \text{ erro} = 500 \frac{w}{r}. \quad (1.3)$$

Se $r = 65$ e $w = 0$, a velocidade será 65 sem erro algum. No entanto, se $w = 1$, correspondendo a uma inclinação de 1%, então a velocidade será 60 e temos um erro de 5 km/h, o que é um erro 7,69% na velocidade. Para uma inclinação de 2%, o erro de velocidade deve ser de 10 km/h, o que é um erro de 15,38% e assim por diante. O exemplo mostra que não haveria erro quando $w = 0$, mas esse resultado depende que o ganho do controlador seja exatamente o inverso do ganho de planta 10. Na prática, o ganho da planta está sujeito a alterações e, se isto acontecer, erros também serão introduzidos. Se houver erro no ganho de planta em malha aberta, o erro da velocidade em porcentagem seria o mesmo que o erro do ganho da planta em porcentagem.

O diagrama de blocos de um sistema realimentado é mostrado na Fig. 1.6, na qual o ganho do controlador foi ajustado para 10. Lembre-se de que, nesse exemplo simples, assume-se um sensor ideal cujo bloco não é mostrado. Nesse caso, as equações são

$$\begin{aligned}y_{cl} &= 10u - 5w, \\u &= 10(r - y_{cl}).\end{aligned}$$

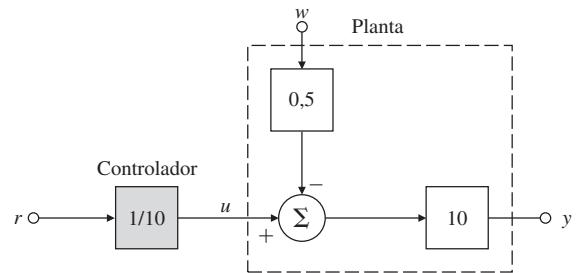


Figura 1.5 Controle de velocidade em cruzeiro em malha aberta.

as quais são combinadas da seguinte forma

$$y_{cl} = 100r - 100y_{cl} - 5w,$$

$$101y_{cl} = 100r - 5w,$$

$$y_{cl} = \frac{100}{101}r - \frac{5}{101}w,$$

$$e_{cl} = \frac{r}{101} + \frac{5w}{101}.$$

Assim, a realimentação tem reduzido a sensibilidade do erro de velocidade em relação à inclinação da estrada por um fator de 101, quando comparado com o sistema em malha aberta. Observe, no entanto, que agora há um pequeno erro de velocidade em terreno plano, porque mesmo quando $w = 0$,

$$y_{cl} = \frac{100}{101}r = 0,99r \text{ km/h.}$$

Este erro será pequeno, enquanto o ganho da malha (produto de ganhos do controlador e da planta) for grande.⁵ Se considerarmos novamente a velocidade de referência de 65 km/h e comparar as velocidades com uma inclinação de 1%, a porcentagem do erro de velocidade de saída é

$$\% \text{ erro} = 100 - \frac{\frac{65 \times 100}{101} - \left(\frac{65 \times 100}{101} - \frac{5}{101} \right)}{\frac{65 \times 100}{101}} \quad (1.4)$$

$$= 100 - \frac{5 \times 101}{101 \times 65 \times 100} \quad (1.5)$$

$$= 0,0769\%. \quad (1.6)$$

A redução da sensibilidade da velocidade em relação ao distúrbio de inclinação e ao ganho da planta em nosso exemplo se dá em virtude de o ganho da malha ser de 100 no caso realimentado. Infelizmente, há limite para o quanto alto esse ganho pode ser; quando as dinâmicas são introduzidas, a realimentação pode fazer a resposta piorar ou até mesmo fazer com que o sistema fique instável. O dilema é ilustrado por outra situação familiar, na qual é fácil alterar o ganho de realimentação. Se alguém tentar aumentar muito o ganho de um amplificador de alto-falantes, o sistema de som produzirá um som agudo muito desagradável. Esta é uma situação na qual o ganho na malha de realimentação é muito grande. A questão de como obter o maior ganho possível para reduzir os erros sem fazer com que o sistema fique instável é parte importante do projeto do controle retroativo.

O compromisso de projeto

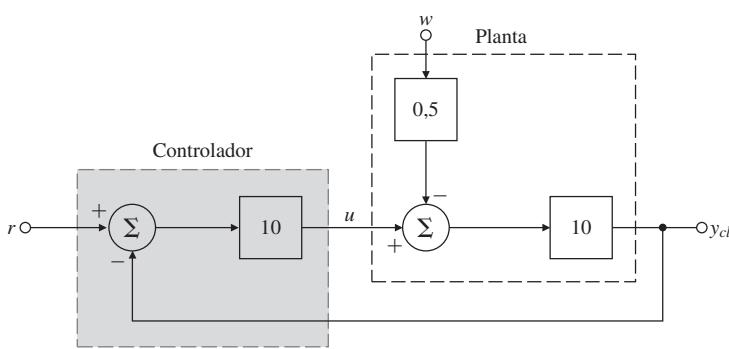


Figura 1.6 Controle de velocidade de cruzeiro em malha fechada.

⁵ Se o erro for muito grande, é uma prática comum *redefinir* a referência, neste caso para $\frac{101}{100}r$, de modo que a saída atinja o verdadeiro valor desejado.

1.3 Uma breve história

Uma história interessante dos primeiros trabalhos sobre o controle realimentado foi escrita por O. Mayr (1970), que apresenta antigos mecanismos de controle. Dois dos exemplos mais antigos são: o controle de vazão para regular um relógio d'água e o controle de nível em um recipiente de vinho, o qual deve ser mantido cheio independentemente de quantos copos são enchedos nele. O controle de vazão de líquidos é reduzido para o controle de nível do fluido, uma vez que um pequeno orifício irá produzir fluxo constante se a pressão for constante, o que é o caso se o nível do líquido acima do orifício for constante. O mecanismo de controle de nível de líquido inventado na antiguidade e ainda hoje utilizado (por exemplo, no reservatório de água do vaso sanitário comum) é a **válvula de boia**. Quando o nível do líquido diminui, o mesmo acontece com a boia, permitindo a entrada do fluxo no tanque; com o aumento do nível, o fluxo diminui e, se necessário, ele é cortado. A Fig. 1.7 mostra como uma válvula de boia opera. Observe que neste caso o sensor e o atuador não são dispositivos distintos, mas estão contidos no dispositivo formado pela combinação do tubo de fornecimento e da boia.

A invenção mais recente descrita por Mayr (1970) é um sistema, projetado por Cornelis Drebbel aproximadamente em 1620, para controlar a temperatura de um forno usado para aquecer uma incubadora⁶ (Fig. 1.8). O forno consiste de uma caixa para conter o fogo, com uma haste na parte superior equipada com uma tampa. Dentro da caixa há uma incubadora de parede dupla, paredes oca que são preenchidas com água para transferir uniformemente o calor para a incubadora. O sensor de temperatura é um recipiente de vidro cheio de álcool e mercúrio que está colocado no interior da parede oca da incubadora preenchida com água. Quando o fogo aquece a caixa e a água, o álcool se expande e a haste lateral flutua para cima, diminuindo a abertura que permite a combustão. Se a caixa estiver muito fria, o álcool contrai, a abertura aumenta e o fogo se torna mais forte. A temperatura desejada é definida pelo comprimento da haste lateral, que define a abertura para uma dada expansão do álcool.

Um famoso problema na história dos sistemas de controle foi a busca de um meio para controlar a velocidade de rotação de um eixo, problema aparentemente motivado pelo desejo de se controlar automaticamente a velocidade da pedra de moagem em um moinho movido pelo vento (Fuller, 1976). Entre os vários métodos propostos, o mais promissor usava um pêndulo cônico, ou **governador de bolas flutuantes**, para medir a velocidade do moinho. As velas do moinho de vento eram recolhidas ou baixadas por meio de cordas e polias, como uma persiana, para manter a velocidade fixa. No entanto, foi a adaptação desses princípios que possibilitou o surgimento da máquina a vapor nos laboratórios de James Watt em torno de 1788. Uma versão antiga é mostrada na Fig. 1.9, enquanto as Figuras. 1.10 e 1.11 focalizam no governador de bolas flutuantes e no esboço dos seus componentes, respectivamente.

A ação do governador de bolas flutuantes (também chamado de governador centrífugo) é simples de ser descrita. Suponha que o motor está operando em equilíbrio. Duas bolas pesadas giram em torno de um eixo central, e descrevendo a figura de um cone em determinado ângulo com o eixo. Quando uma carga é aplicada repentinamente no motor, sua velocidade irá diminuir, e as bolas do governador vão cair para um cone menor. Assim, o ângulo da bola é usado

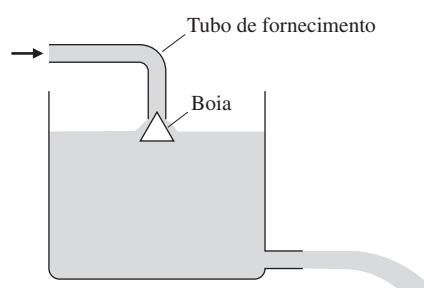


Figura 1.7 Histórico do sistema de controle de nível e fluxo de líquido.

⁶ Médicos franceses introduziram incubadoras no cuidado de bebês prematuros há mais de 100 anos.

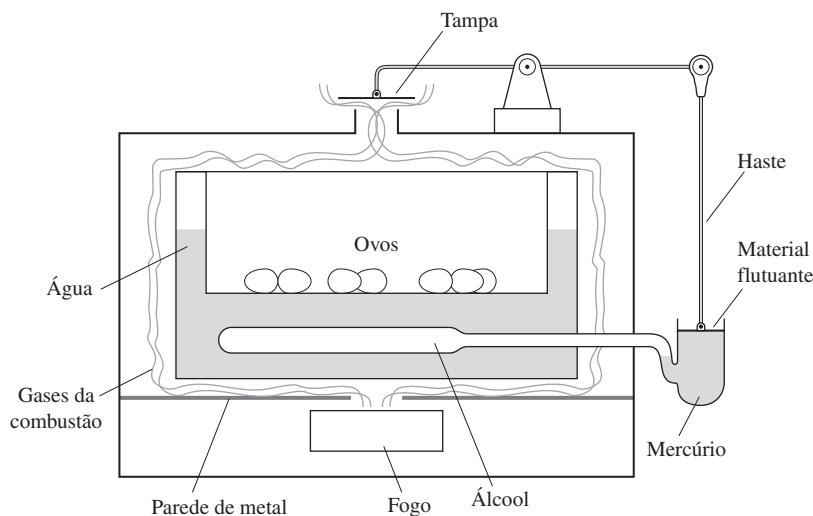


Figura 1.8 Incubadora de ovos de galinha desenvolvida por Drebbel.
Fonte: adaptação de Mayr, 1970.

para detectar a velocidade de saída. Esta ação abrirá, por meio de alavancas, a válvula principal do cilindro de vapor (que é o atuador), fornecendo mais vapor ao motor, restaurando grande parte da velocidade perdida. Para manter a válvula de vapor em uma nova posição, é necessário que as bolas flutuantes girem em um ângulo diferente, o que implica que a velocidade sob carga não é exatamente a mesma de antes. Nós vimos este efeito antes, com controle de velocidade em cruzeiro, em que o controle realimentado permitiu um pequeno erro. Para recuperar a mesma velocidade anterior do sistema, seria necessário redefinir a velocidade desejada, alterando o comprimento da haste da alavanca da válvula. Inventores posteriores introduziram mecanismos que integravam o erro da velocidade para fornecer uma reconfiguração automática. No capítulo 4, vamos analisar estes sistemas para mostrar que essa integração pode resultar em sistemas retroativos com erro nulo em estado estacionário quando sujeitos a perturbações constantes.

Por ser um homem prático, Watt não se envolveu na análise teórica do governador. Fuller (1976) delineou o desenvolvimento inicial da teoria de controle por um período de estudos de Christian Huygens, em 1673, a James Clerk Maxwell, em 1868. Fuller dá crédito especial das contribuições da G. B. Airy, professor de matemática e astronomia na Universidade de Cambridge de 1826 a 1835 e Astrônomo Real no Observatório Greenwich de 1835 a 1881. Airy mostrou-se interessado no controle de velocidade; se seus telescópios pudesse girar em sentido contrário à rotação da Terra, uma estrela fixa poderia ser observada por períodos prolongados. Usando o governador pêndulo-centrífugo, ele descobriu que era capaz de um movimento instável – “e a máquina (se posso por assim dizer) tornou-se perfeitamente violenta” (Airy, 1840; citado por Fuller, 1976).

Início da teoria de controle

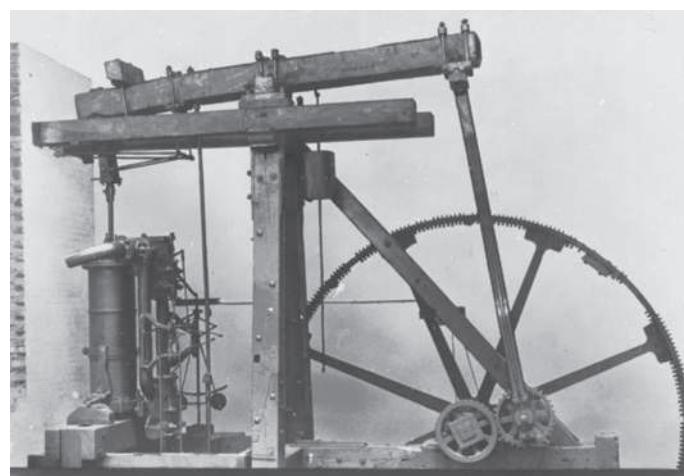
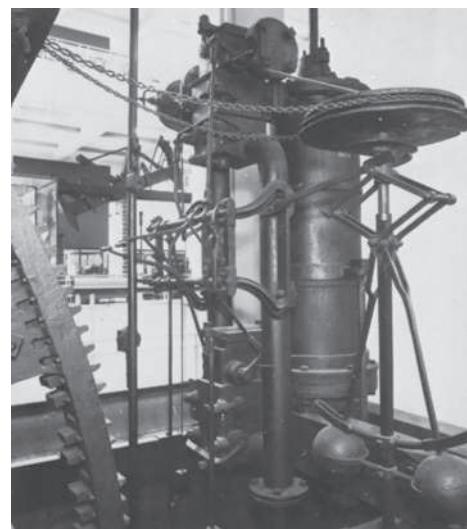


Figura 1.9 Fotografia de um antigo motor a vapor de Watt.
Fonte: British Crown Copyright, Science Museum, London.

Figura 1.10 Fotografia focalizando o governador de bolas flutuantes.

Fonte: British Crown Copyright, Science Museum, London.



De acordo com Fuller, Airy foi o primeiro a discutir instabilidade em sistemas de controle realimentado e o primeiro a analisar tais sistemas usando equações diferenciais. Estes foram os primeiros estudos sobre o controle realimentado.

Análise da estabilidade

Aparentemente, o primeiro estudo sistemático da estabilidade do controle realimentado foi apresentado no artigo intitulado “On Governors”, de J. C. Maxwell (1868)⁷. Nesse artigo, Maxwell desenvolveu as equações diferenciais do governador, linearizando-as com base no equilíbrio, e afirmou que a estabilidade depende das raízes de certa equação (equação característica) que devem ter parte real negativa. Maxwell tentou obter condições relacionando os coeficientes de um polinômio com raízes de parte real negativa. Ele foi bem-sucedido apenas para os casos de segunda e terceira ordem. A determinação de critérios de análise de estabilidade foi o problema considerado para o Prêmio Adams de 1877, dado a E. J. Routh⁸. Seu critério permanece como uma ferramenta de muito interesse, tal que engenheiros de controle ainda estão aprendendo a aplicar sua simples técnica. A análise da equação característica manteve-se como a base da teoria de controle até a invenção do amplificador eletrônico por H. S. Black, em 1927, no laboratório Bell Telephone Laboratories.

Logo após a publicação do artigo de Routh, o matemático russo A. M. Lyapunov (1893) começou a estudar a questão da estabilidade do movimento. Seus estudos, baseados em equações diferenciais não lineares de movimento, incluem os resultados de equações lineares equivalentes ao critério de Routh. Seu trabalho foi fundamental para o que hoje é chamado de abordagem em variáveis de estado na teoria de controle, mas essa abordagem não foi introduzida na literatura de controle até 1958.

O desenvolvimento do amplificador realimentado é brevemente descrito em um interessante artigo baseado em uma palestra de H. W. Bode (1960), reproduzida em Bellman e Kalaba (1964). Com a introdução de amplificadores eletrônicos, ligações telefônicas de longa distância se tornaram possíveis nas décadas seguintes à Primeira Guerra Mundial. No entanto, como as distâncias aumentaram, também cresceu a perda de energia elétrica; apesar da utilização de fios de maior diâmetro, o aumento do número de amplificadores foi necessário para repor a energia perdida. Infelizmente, um grande número de amplificadores causa uma grande distorção, pois eles são constituídos por válvulas que apresentam uma pequena não linearidade, que é multiplicada muitas vezes. Para resolver o problema da distorção, Black propôs um amplificador realimentado. Como mencionado antes no problema de controle de velocidade

⁷ Uma exposição da contribuição de Maxwell é dada em Fuller (1976).

⁸ E. J. Routh foi o melhor aluno de sua classe na Universidade de Cambridge em 1854, enquanto J. C. Maxwell foi o segundo lugar. Em 1877, Maxwell estava no comitê do Prêmio Adams e escolheu o problema de estabilidade como o tema do ano.

Resposta em frequência

em cruzeiro de um automóvel, quanto mais desejamos reduzir erros (ou distorções), mais a aplicação da realimentação se torna necessária. O ganho na malha que conecta planta, sensores e atuadores deve ser muito grande. Entretanto, com um ganho muito alto de realimentação o sistema começa a ficar instável. Os critérios de análise de estabilidade de Maxwell e Routh foram brevemente discutidos, mas vale ressaltar que quando a dinâmica é muito complexa (equações diferenciais de ordem aproximadamente ou superior a 50) o critério Routh não é muito útil. Assim, os engenheiros de telecomunicações no Bell Telephone Laboratories, familiarizados com o conceito de resposta em frequência e com a matemática de variáveis complexas, voltaram-se para o estudo da análise complexa. Em 1932, H. Nyquist publicou um artigo descrevendo um método para determinar a estabilidade por meio de uma representação gráfica da resposta em frequência. A partir desta teoria, desenvolveu-se uma extensiva metodologia descrita por Bode (1945) para o projeto de amplificadores realimentados que ainda é amplamente utilizada no projeto de controle realimentado. Os diagramas de Nyquist e Bode são discutidos em mais detalhes no Capítulo 6.

Simultaneamente ao desenvolvimento do amplificador realimentado, o controle realimentado foi se tornando padrão em processos industriais. Este campo – caracterizado por processos que não são apenas altamente complexos, mas também não lineares e sujeitos a retardos no tempo entre o atuador e sensor que podem ser relativamente longos – desenvolveu o **controle proporcional-integral-derivativo (PID)**. O controlador PID foi primeiramente descrito por Callender e outros (1936). Essa tecnologia foi baseada em um extenso trabalho experimental e em simples aproximações linearizadas para a dinâmica do sistema. Isso levou a experimentos padrões adequados para a aplicação em campo e, depois, à “sintonia” satisfatória dos parâmetros do controlador PID (controladores PID são abordados no Capítulo 4). Também estavam em desenvolvimento naquela época dispositivos de orientação e controle de aeronaves; foi especialmente importante o desenvolvimento de sensores para medição de altitude e velocidade de aeronaves. Um relato interessante sobre esse ramo da teoria de controle está em McRuer (1973).

Um enorme impulso foi dado ao campo do controle realimentado durante a Segunda Guerra Mundial. Nos Estados Unidos, engenheiros e matemáticos no Laboratório de Radiação do MIT combinaram seu conhecimento para reunir não só a teoria de Bode do amplificador realimentado e do controle PID, mas também a teoria de processos estocásticos desenvolvida por N. Wiener (1930). O resultado foi o desenvolvimento de um conjunto abrangente de técnicas para

Controle PID

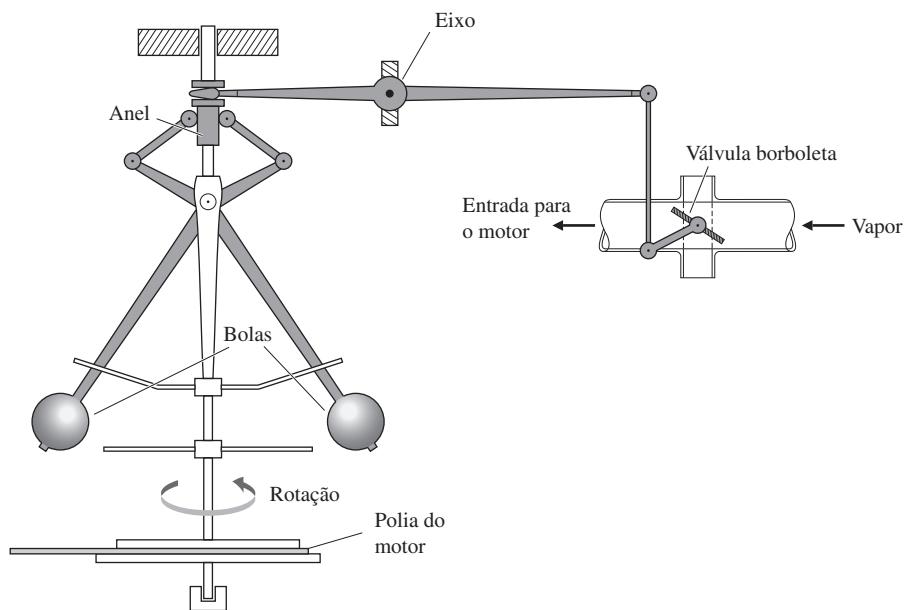


Figura 1.11 Componentes para o funcionamento de um governador de bolas flutuantes.

a concepção de **servomecanismos**, como os mecanismos de controle passaram a ser chamados. Muito deste trabalho foi coletado e publicado nos registros do Laboratório de Radiação por James e outros (1947).

Outra abordagem para projetar sistemas de controle foi introduzida em 1948 por W. R. Evans, que estava trabalhando no campo da orientação e controle de aeronaves. Muitos dos seus problemas envolviam dinâmicas instáveis ou com estabilidade neutra, o que dificultou a aplicação de métodos baseados em frequência. Então, ele sugeriu voltar ao estudo da equação característica que tinha sido a base do trabalho de Maxwell e Routh quase 70 anos antes. No entanto, Evans desenvolveu técnicas e regras que permitem fazer um acompanhamento gráfico dos caminhos das raízes da equação característica à medida que um parâmetro é alterado. Seu método, o **lugar das raízes**, é apropriado para o projeto, bem como para análise de estabilidade, e continua sendo uma técnica importante atualmente. O método do lugar das raízes desenvolvido por Evans é abordado no Capítulo 5.

Durante a década de 1950, vários autores, incluindo R. Bellman e R. E. Kalman, nos Estados Unidos, e L. S. Pontryagin, na U.R.S.S., começaram novamente a considerar a equação diferencial ordinária (ODE) como um modelo para sistemas de controle. Muito deste trabalho foi estimulado pelo novo campo de controle de satélites artificiais, no qual a ODE é uma forma natural para a representação dos modelos. Os computadores digitais também apoiaram esta iniciativa, pois poderiam ser utilizados para realizar cálculos impensáveis 10 anos antes. (Atualmente, é claro, esses cálculos podem ser feitos por qualquer estudante de engenharia com um computador portátil.) O trabalho de Lyapunov foi traduzido para a linguagem de controle nessa época, e o estudo do controle ótimo, iniciado por Wiener e Phillips durante a Segunda Guerra Mundial, foi estendido para otimizar trajetórias de sistemas não lineares com base no cálculo variacional. Muito deste trabalho foi apresentado na primeira conferência da recém-formada Federação Internacional de Controle Automático, realizada em Moscou em 1960⁹. Este trabalho não utilizou a resposta em frequência ou a equação característica, mas trabalhou diretamente com a ODE em sua forma “normal”, ou na forma de “espaço de estados”, geralmente relacionada com a ampla utilização de computadores. Embora as bases do estudo de equações diferenciais tenham sido estabelecidas no final do século 19, essa abordagem é chamada frequentemente de **controle moderno** para diferenciá-la do **controle clássico**, que é baseado em variáveis complexas e nos métodos de Bode e outros. A partir da década de 1970 até atualmente, vemos um crescente campo de trabalho que pretende usar as melhores características de cada técnica.

Assim, chegamos ao estado atual em que os princípios de controle são aplicados em uma ampla gama de disciplinas, incluindo todos os ramos da engenharia. O engenheiro de controle bem preparado precisa entender a teoria matemática básica que fundamenta o campo e deve ser capaz de selecionar a melhor técnica de projeto adequada para o problema em mãos. Com o uso onipresente de computadores, é especialmente importante que o engenheiro seja capaz de usar seu conhecimento para orientar e verificar os cálculos feitos no computador.¹⁰

1.4 Uma visão geral do livro

O objetivo central deste livro é apresentar as técnicas mais importantes para o projeto de sistemas de controle com uma entrada e uma saída. O **Capítulo 2** irá rever as técnicas necessárias para obtenção dos modelos de sistemas dinâmicos que queremos controlar. Estes incluem modelismo para engenharia mecânica, elétrica, eletromecânica e alguns outros sistemas físicos. O Capítulo 2 também descreve sucintamente a linearização de modelos não lineares, mas isso será discutido mais profundamente no Capítulo 9.

⁹ O controle ótimo ganhou um grande impulso quando Bryson e Denham (1962) mostraram que um avião supersônico deve mergulhar em um certo ponto para atingir uma determinada altitude em tempo mínimo. Esse resultado não intuitivo foi posteriormente demonstrado aos pilotos de caça em testes de voo.

¹⁰ Para mais informações sobre a história do controle, consulte os artigos da *IEEE Control Systems Magazine* de novembro de 1984 a junho de 1996.

Lugar das raízes

Projeto no espaço de estados

Controle moderno

Controle clássico

No **Capítulo 3** e no **Apêndice A**, será discutida a análise da resposta dinâmica utilizando a transformada de Laplace junto à relação entre o tempo de resposta e aos polos e zeros da função de transferência. Esse capítulo também inclui uma discussão sobre o problema crítico de análise de estabilidade do sistema, incluindo o teste de Routh.

O **Capítulo 4** cobre as equações e as características básicas da realimentação. É feita uma análise dos efeitos da realimentação em relação à rejeição de distúrbios, precisão de rastreamento, sensibilidade a parâmetros variantes e resposta dinâmica. A ideia básica do controle PID elementar é discutida. Também neste capítulo uma breve introdução é dada para a implementação digital das funções de transferência e, portanto, de controladores lineares invariantes no tempo, de modo que os efeitos do controlador digital possam ser comparados com controladores analógicos.

Nos **Capítulos 5, 6 e 7**, são introduzidas técnicas para a realização dos objetivos de controle, identificados pela primeira vez no Capítulo 4 em sistemas dinâmicos mais complexos. Esses métodos incluem o lugar das raízes, resposta em frequência e técnicas baseadas em variáveis de estado. Estes são os meios alternativos para o mesmo fim e têm diferentes vantagens e desvantagens para o projeto de controladores. Os métodos são fundamentalmente complementares, e cada um precisa ser compreendido para obter projetos de sistemas de controle mais eficazes.

No **Capítulo 8**, são discutidas ideias sobre a implementação de controladores em computadores digitais que foram introduzidas no Capítulo 4. O capítulo aborda como “digitalizar” as equações de controle desenvolvidas nos Capítulos 5, 6 e 7, como a amostragem introduz um atraso que tende a desestabilizar o sistema e como, para um bom desempenho, se dá a necessidade da taxa de amostragem ser um múltiplo das frequências do sistema. A análise dos sistemas de amostragem exige outra ferramenta de análise – a transformada z – e essa ferramenta é descrita e seu uso é ilustrado.

A maioria dos sistemas reais é não linear. No entanto, os métodos de análise e projeto na maior parte do livro são para sistemas lineares. No **Capítulo 9**, é explicado por que o estudo de sistemas lineares é pertinente, porque é útil para o projeto, embora a maioria dos sistemas seja não linear, e como os projetos de sistemas lineares podem ser modificados para lidarem com a maioria das não linearidades comuns nos sistemas. O capítulo aborda a saturação, descrevendo as funções do controlador antiwindup, e contém uma breve introdução à teoria de estabilidade de Lyapunov. A aplicação de todas as técnicas em problemas de substancial complexidade é discutida no **Capítulo 10**, em que os métodos de projeto são implementados simultaneamente em estudos de casos específicos.

Hoje, projetistas de controle fazem uso extensivo de programas computacionais que estão disponíveis comercialmente. Também existem ferramentas de projeto de controle disponíveis para estudantes. Para esse propósito, os programas mais utilizados são o MATLAB® e o SIMULINK®, da Mathworks. Linhas de instruções para o MATLAB foram incluídas em todo o texto para ajudar a ilustração deste método na solução de muitos problemas que necessitam do auxílio computacional. Muitas das figuras do livro foram criadas usando o MATLAB e os arquivos para a sua criação estão disponíveis no site do Grupo A.

É desnecessário dizer que muitos temas não são tratados no livro. Não aprofundamos os métodos de controle multivariável, que são apropriados para sistemas com mais de uma entrada e/ou saída, exceto quando parte, no Capítulo 10, do estudo da processadora térmica rápida. O controle ótimo também é tratado apenas de uma maneira introdutória no Capítulo 7.

Além disso, o detalhamento dos métodos experimentais de teste e modelagem também está fora do escopo deste texto. O livro concentra-se na análise e no projeto de controladores lineares para modelos lineares de plantas – não porque pensamos que esse é o passo final de um projeto, mas porque essa é a melhor forma de entender as ideias básicas e geralmente é o primeiro passo para se chegar a um projeto satisfatório. Acreditamos que o domínio do conteúdo apresentado aqui fornece uma base para o entendimento dos temas mais avançados e práticos – uma base sólida o suficiente para permitir que o leitor desenvolva um novo método de projeto, seguindo passos similares de todos aqueles que trabalharam para nos dar o conhecimento que aqui apresentamos.

RESUMO

- **Controle** é o processo de fazer com que uma variável do sistema assuma um determinado valor, chamado de **valor de referência**. Um sistema concebido para acompanhar uma referência é chamado de **controle de rastreamento** ou **servo**. Um sistema projetado para manter uma saída fixa, independentemente dos distúrbios presentes, é chamado de **regulação** ou **controle de regulação**.
- Os dois tipos de controle foram definidos e ilustrados com base nas informações utilizadas para o controle e nomeados de acordo com a estrutura resultante. No **controle de malha aberta**, o sistema resultante *não* contém um sensor para medição da saída e, assim, não há uma ação de correção para fazer com que a saída seja igual ao sinal de referência. No **controle de malha fechada**, o sistema inclui um sensor para medir o sinal de saída e utiliza a **realimentação** para influenciar na variável de controle.
- Um simples sistema realimentado consiste do **processo**, o qual possui a saída que deve ser controlada, o **atuador**, cuja saída causa uma mudança na saída do sistema, **sensores** para a medição dos sinais de **referência** e saída, e o controlador que implementa a lógica pela qual o sinal de controle que comanda o atuador é calculado.
- **Diagramas de blocos** são úteis para a visualização da estrutura do sistema e o fluxo de informações no sistema de controle. Os diagramas de blocos mais comuns representam as relações matemáticas entre os sinais em um sistema de controle.
- As teorias e técnicas de projeto de controle passaram a ser divididas em duas categorias: métodos de **controle clássico**, baseados no uso das transformadas de Laplace e Fourier, que foram os métodos dominantes no campo de controle até cerca de 1960, enquanto métodos de **controle moderno** são baseados em equações diferenciais na forma de espaço de estados e foram introduzidos no campo a partir de década de 1960. Muitas ligações foram descobertas entre as duas categorias, e engenheiros bem preparados devem estar familiarizados com ambas as técnicas.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. Quais são os principais componentes de um sistema de controle realimentado?
2. Qual é o propósito do sensor?
3. Cite três propriedades importantes de um bom sensor.
4. Qual é o propósito de um atuador?
5. Cite três propriedades importantes de um bom atuador.
6. Qual é o propósito do controlador? Qual(is) é(são) a(s) saída(s) e a(s) entrada(s) do controlador?
7. Que(ais) variável(eis) física(s) de um processo pode(m) ser medida(s) diretamente por um sensor de efeito Hall?
8. Que variável física é medida por um tacômetro?
9. Descreva três técnicas diferentes para a medição de temperatura.
10. Por que a maioria dos sensores tem uma saída elétrica, independentemente da natureza física da variável que está sendo medida?

PROBLEMAS

- 1.1 Desenhe um diagrama de blocos para o controle realimentado para cada um dos sistemas.
 - (a) Sistema de direção manual de um automóvel
 - (b) Incubadora de Drebbel
 - (c) Controle de nível de água por uma boia e válvula
 - (d) Motor a vapor de Watt com um governador de bolas flutuantes

Em cada caso, indique a localização dos elementos listados abaixo e dê as unidades associadas a cada sinal.

- Processo
- A saída desejada do processo
- Sensor
- Atuador
- A saída desejada do atuador
- Controlador
- A saída do controlador
- O sinal de referência
- O sinal de erro

Observe que, em alguns casos, o mesmo dispositivo físico pode executar mais de uma função.

- 1.2** Identifique os princípios físicos e descreva o funcionamento do termostato em uma casa ou escritório.
- 1.3** Uma máquina para fabricação de papel é diagramada na Fig. 1.12. Existem dois principais parâmetros sob controle: a densidade das fibras, controlada pela consistência do material bruto que flui a partir do reservatório principal, e o teor de umidade do produto final que sai do secador. O conteúdo do reservatório de mistura é diluído pelo líquido de diluição controlado por uma válvula de controle (VC). Um medidor fornece uma leitura da consistência. Na “seção seca” da máquina, há um sensor de umidade. Desenhe um gráfico de sinais e identifique os nove componentes listados no Problema 1.1 parte (d) para
- Controle de consistência
 - Controle de umidade
- 1.4** Muitas variáveis no corpo humano estão sob controle realimentado. Para cada uma das seguintes variáveis controladas, desenhe um gráfico que mostre o processo sendo controlado, o sensor que mede a variável, o atuador que regula a variável controlada, o caminho que a informação percorre até fechar a realimentação e os distúrbios que perturbam a variável. Talvez seja necessário consultar uma enciclopédia ou um livro de fisiologia humana para obter informações sobre este problema.
- Pressão sanguínea
 - Concentração de açúcar no sangue
 - Frequência cardíaca
 - Ângulo dos olhos
 - Diâmetro das pupilas
- 1.5** Desenhe um gráfico com os componentes para o controle de temperatura em um frigorífico ou para um ar condicionado automotivo.
- 1.6** Desenhe um gráfico com os componentes para o controle de posição de um elevador. Indique como é feita a leitura da posição da cabine do elevador. Qual é a precisão adequada para o sensor?

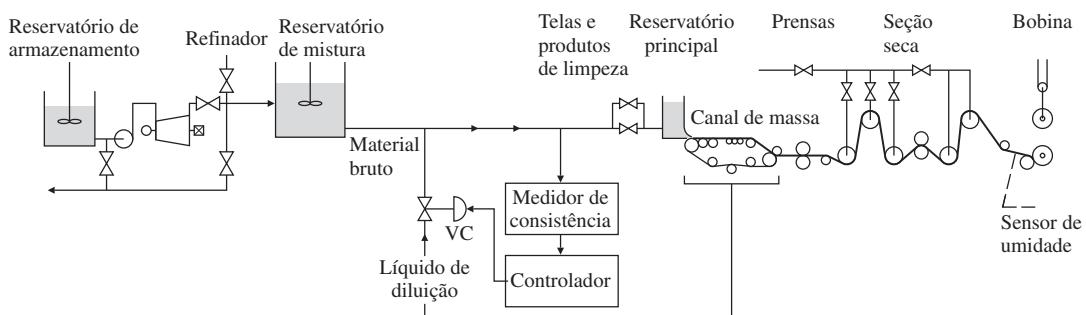


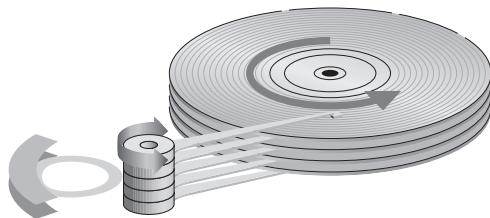
Figura 1.12 Máquina de fazer papel.

Fonte: Åström (1970, p. 192); reproduzido com permissão.

O sistema de controle deve considerar o fato de que em elevadores de edifícios altos, há uma grande extensão de cabos.

- 1.7** O controle realimentado necessita medir a variável que está sendo controlada. Como os sinais elétricos podem ser transmitidos, amplificados e transformados facilmente, muitas vezes queremos ter um sensor cuja saída é uma tensão ou corrente proporcional à variável que está sendo medida. Descreva um sensor que daria uma saída elétrica com intensidade proporcional a:
- (a) Temperatura
 - (b) Pressão
 - (c) Nível de líquido
 - (d) Fluxo de líquido ao longo de uma tubulação (ou sangue ao longo de uma artéria)
 - (e) Posição linear
 - (f) Posição de rotação
 - (g) Velocidade linear
 - (h) Velocidade de rotação
 - (i) Aceleração translacional
 - (j) Torque
- 1.8** Cada uma das variáveis enumeradas no Problema 1.7 pode ser utilizada no controle realimentado. Descreva um atuador que poderia aceitar uma entrada elétrica e ser usado para controlar as variáveis indicadas. Dê as unidades do sinal de saída do atuador.

Modelos Dinâmicos



O objetivo geral do controle realimentado é a utilização do princípio de realimentação para que a variável de saída de um processo dinâmico siga uma variável de referência desejada com precisão, independentemente da trajetória da variável de referência, de perturbações externas ou de qualquer alteração na dinâmica do processo. Esse complexo objetivo é alcançado como resultado de uma série de simples e distintos passos. O primeiro deles é desenvolver uma descrição matemática (chamada de **modelo dinâmico**) do processo a ser controlado. O termo **modelo**, como é utilizado e compreendido por engenheiros de controle, é um conjunto de equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico do processo. Um modelo pode ser obtido usando os princípios físicos ou por meio de testes de um protótipo do dispositivo, medindo sua resposta a determinadas entradas e usando os dados para construir um modelo analítico. Este capítulo trata apenas do uso da física. Existem livros dedicados inteiramente à determinação experimental de modelos, às vezes chamada de Identificação de Sistemas, e essas técnicas são descritas de forma muito breve no Capítulo 3. Um cuidadoso projetista de sistemas de controle deverá contar com pelo menos alguns experimentos para verificar a precisão do modelo quando este for obtido por meio de princípios físicos.

Em muitos casos, a modelagem de processos complexos é difícil e cara, especialmente quando importantes etapas para a construção de protótipos e testes são incluídas. No entanto, neste texto introdutório, vamos concentrar-nos nos princípios mais básicos para a modelagem de sistemas físicos comuns. Fontes mais abrangentes e textos especializados serão referenciados ao longo do texto para aqueles que desejam obter mais detalhes.

Nos últimos capítulos, será explorada uma variedade de métodos de análise para lidar com equações dinâmicas e suas soluções para fins de criação de sistemas de controle realimentado.

Visão geral do capítulo

O passo fundamental na construção de um modelo dinâmico é escrever as equações que representam as dinâmicas do sistema. Como é discutido em uma variedade de exemplos, a Seção 2.1 demonstra como escrever as equações dinâmicas para uma variedade de sistemas mecânicos. Além disso, a seção demonstra o uso do MATLAB® para encontrar a resposta temporal de um simples sistema para uma entrada em degrau. Ademais, as ideias de funções de transferência e diagramas de blocos são introduzidas, junto à ideia de que problemas podem ser resolvidos via SIMULINK®.

Circuitos elétricos e sistemas eletromecânicos são modelados nas Seções 2.2 e 2.3, respectivamente.

Para aqueles que querem exemplos de modelagem de sistemas dinâmicos mais diversificados, a Seção 2.4, que é opcional, amplia a discussão para o sistema cardíaco e para um sistema de fluxo de fluidos.

O capítulo termina com a Seção 2.5, uma discussão sobre a história por trás das descobertas que levaram ao conhecimento já consagrado hoje.

As equações diferenciais desenvolvidas na modelagem são geralmente não lineares. Como os sistemas não lineares são significativamente mais difíceis de serem resolvidos do que os sistemas lineares, e porque modelos lineares são geralmente adequados, a ênfase nos capítulos iniciais é principalmente em sistemas lineares. No entanto, neste capítulo é mostrado como linearizar simples não linearidades e como usar o SIMULINK para resolver numericamente as equações dinâmicas que representam um sistema não linear. O Capítulo 9 apresenta uma discussão muito mais ampla a respeito de linearização e análise de sistemas não lineares.

A fim de concentrar-se na primeira importante etapa para o desenvolvimento de modelos matemáticos, vamos adiar a explicação dos métodos computacionais utilizados para resolver as equações dinâmicas desenvolvidas neste capítulo até o Capítulo 3.

2.1 Dinâmica de sistemas mecânicos

2.1.1 Movimento de translação

Lei de Newton para movimento de translação

A pedra fundamental para a obtenção de um modelo matemático, ou as **equações de movimento**, para qualquer sistema mecânico é a lei de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.1)$$

sendo

\mathbf{F} = a soma vetorial de todas as forças aplicadas em cada corpo de um sistema, newtons (N),

\mathbf{a} = a aceleração vetorial de cada corpo com relação a um referencial inercial, muitas vezes chamada de **aceleração inercial**, m/s^2 ,

m = massa do corpo, kg.

Note que, na Eq. (2.1), como em todo o texto, usamos a convenção de letras em negrito para indicar que a quantidade é uma matriz ou vetor, possivelmente uma função vetorial.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), uma força de 1 N resulta na aceleração de 1 m/s^2 em uma massa de 1 kg. No sistema Inglês de unidades, uma força de 1 lb resulta na aceleração de 1 pé/ s^2 em uma massa de 1 slug. O “peso” de um objeto é mg , sendo que g é a aceleração da gravidade ($= 9,81 \text{m/s}^2 = 32,2 \text{pé/s}^2$). O sistema inglês de unidades é comumente usado para fazer referência à massa de um objeto em termos do seu peso em libras, que é a

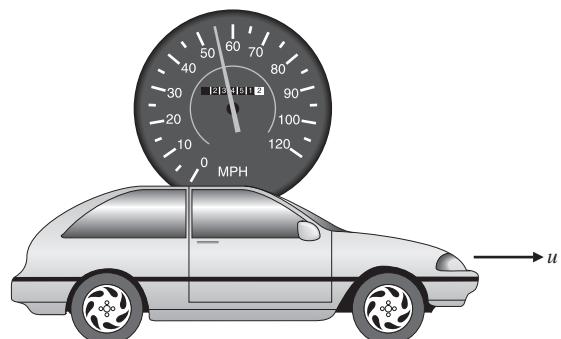


Figura 2.1 Modelo do sistema de controle de velocidade em cruzeiro.

quantidade medida nas balanças. Para obter a massa em *slugs* para ser usada na lei de Newton, o peso deve ser dividido por g . Portanto, um objeto com peso 1 lb tem uma massa de 1/32,2 *slugs*. A massa em *slugs* tem a unidade $\text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{pé}$. Em unidades métricas, balanças são tipicamente calibradas em quilogramas, que é uma medida direta da massa.

A aplicação desta lei geralmente envolve a definição de coordenadas convenientes em relação ao movimento do corpo (posição, velocidade e aceleração), sendo que as forças no corpo são determinadas por meio de um diagrama de corpo livre e, então, as equações de movimento são escritas a partir da Eq. (2.1). O procedimento é mais simples quando as coordenadas escolhidas expressam a posição com relação a um referencial inercial, pois, nesse caso, as acelerações necessárias para a lei de Newton são simplesmente as segundas derivadas das coordenadas de posição.

Uso do diagrama de corpo livre na aplicação da lei de Newton

EXEMPLO 2.1 Modelo do sistema de controle de velocidade em cruzeiro

1. Escreva as equações de movimento para a velocidade do carro conforme mostrado na Fig. 2.1 assumindo que o motor fornece uma força u . Obtenha a transformada de Laplace da equação diferencial resultante e encontre a função de transferência entre a entrada u e a saída v .
2. Use o MATLAB para encontrar a resposta da velocidade do carro para o caso em que a entrada vai de $u = 0$ no tempo $t = 0$ para uma constante de $u = 500 \text{ N}$. Suponha que a massa m do carro é 1.000 kg e que o coeficiente de viscosidade é $b = 50 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$.

Solução

1. **Equações de movimento:** Por simplicidade, suponha que o momento de inércia das rodas é desprezível e que o atrito retardando o movimento do carro é proporcional à velocidade do carro com uma constante de proporcionalidade, b .¹ O modelo do carro pode ser obtido utilizando o diagrama de corpo livre mostrado na Fig. 2.2, que define as coordenadas, mostra todas as forças que atuam sobre o corpo (linhas grossas) e indica a aceleração (linha tracejada). A coordenada da posição do carro x é a distância da linha de referência indicada e é escolhida de forma que seja positiva para a direita. Note que neste caso a aceleração inercial é simplesmente a segunda derivada de x (ou seja, $\mathbf{a} = \ddot{x}$), porque a posição do carro é medida em relação a um referencial inercial. A equação do movimento é encontrada usando a Eq. (2.1). A força de atrito age em oposição à direção do movimento, portanto, é desenhada em oposição à direção do movimento do corpo e entra como uma força negativa na Eq. (2.1).

O resultado é

$$u - b\dot{x} = m\ddot{x}, \quad (2.2)$$

ou

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} = \frac{u}{m}. \quad (2.3)$$

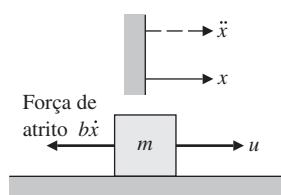


Figura 2.2 Diagrama de corpo livre para o sistema de controle de velocidade em cruzeiro.

¹ Se a velocidade é v , a força de atrito aerodinâmico é proporcional a v^2 . Neste modelo simples, temos uma aproximação linear.

Para o caso de controle de velocidade de cruzeiro de um automóvel no qual a variável de interesse é a velocidade, v ($= \dot{x}$), a equação de movimento torna-se

$$\dot{v} + \frac{b}{m}v = \frac{u}{m}. \quad (2.4)$$

A solução dessa equação será abordada em detalhes no Capítulo 3; no entanto, a essência é uma solução da forma $v = V_o e^{st}$ para uma dada entrada da forma $u = U_o e^{st}$. Então, já que $\dot{v} = sV_o e^{st}$, a equação diferencial pode ser escrita como

$$\left(s + \frac{b}{m}\right) V_o e^{st} = \frac{1}{m} U_o e^{st}. \quad (2.5)$$

O termo e^{st} é anulado, obtendo

$$\frac{V_o}{U_o} = \frac{\frac{1}{m}}{s + \frac{b}{m}}. \quad (2.6)$$

Por razões que ficarão claras no Capítulo 3, esta é geralmente escrita como

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s + \frac{b}{m}}. \quad (2.7)$$

Função de transferência

Esta expressão da equação diferencial em (2.4) é chamada de **função de transferência** e será usada extensivamente nos últimos capítulos. Note que, em essência, s foi substituído por d/dt na Eq. (2.4).²

2. Resposta temporal: As dinâmicas de um sistema podem ser prescritas para o MATLAB em termos de vetores linha contendo os coeficientes dos polinômios que descrevem o numerador e o denominador da função de transferência. A função de transferência para este problema é dada na parte (a). Neste caso, o numerador (chamado de num) é simplesmente um número, dado que não existem potências de s , de modo que num = 1/m = 1/1000. O denominador (chamado den) contém os coeficientes do polinômio $s + b/m$, que são

$$\text{den} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{50}{1000} \end{bmatrix}.$$

A função step no MATLAB calcula a resposta temporal de um sistema linear para a entrada sendo o degrau unitário. Como o sistema é linear, a saída para este caso pode ser multiplicada pela magnitude da entrada em degrau para obter a resposta a um degrau de qualquer amplitude. Equivalentemente, num pode ser multiplicado pelo valor da entrada em degrau.

As declarações

```
num = 1/1000; % 1/m
den = [1 50/1000]; % s + b/m
sys = tf(num*500, den); % a função step fornece a resposta ao degrau
                        % unitário, então num*500 fornece a resposta a um
                        % degrau de amplitude 500.
step(sys); % traça o gráfico da resposta ao degrau
```

calcula e traça o gráfico da resposta temporal para uma entrada em degrau de amplitude de 500 N. A resposta ao degrau é mostrada na Fig. 2.3.

² O uso de um operador de diferenciação foi desenvolvido por Cauchy em cerca de 1820 com base na transformada de Laplace, que foi desenvolvida em 1780, aproximadamente. No Capítulo 3, vamos mostrar como obter funções de transferência usando a transformada de Laplace. Referência: Gardner e Barnes, 1942.

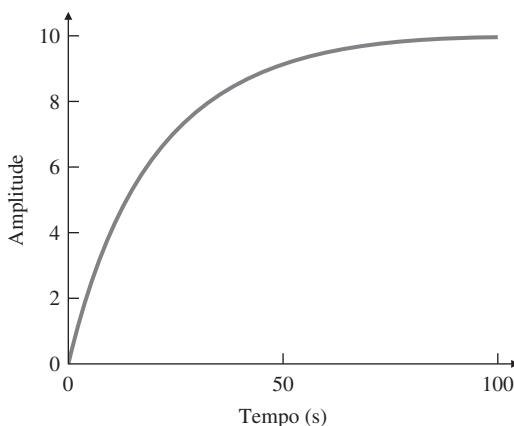


Figura 2.3 Resposta da velocidade do carro para uma entrada em degrau u .

A lei de Newton também pode ser aplicada a sistemas com mais de uma massa. Neste caso, é particularmente importante traçar o diagrama de corpo livre de cada massa, mostrando as forças externas aplicadas, bem como as forças internas iguais e opostas de cada massa que atuam nas outras.

EXEMPLO 2.2 Um sistema de duas massas: modelo de suspensão

A Figura 2.4 mostra o sistema de suspensão de um veículo. Escreva as equações dinâmicas para o movimento do automóvel assumindo que cada roda tenha um movimento unidimensional vertical e suporte um quarto da massa do carro. Um sistema que consiste em uma das quatro suspensões nas rodas é normalmente referido como modelo de um quarto do carro. Suponha que o modelo corresponda a um carro com massa de 1.580 kg, incluindo as quatro rodas, que têm uma massa de 20 kg cada. Ao colocar um peso conhecido (um autor) diretamente sobre uma roda e medir a deflexão do carro, descobrimos que $k_s = 130.000 \text{ N/m}$. Medindo a deflexão da roda para o mesmo peso aplicado, encontra-se $k_w \approx 1.000.000 \text{ N/m}$. Utilizando os resultados na Seção 3.3, Fig. 3.18 (b), e qualitativamente observando que a resposta do carro quando o autor salta corresponde à curva $\zeta = 0,7$, conclui-se que $b = 9.800 \text{ N}\cdot\text{s/m}$.

Solução. O sistema pode ser aproximado pelo sistema simplificado mostrado na Fig. 2.5. As coordenadas das duas massas, x e y , com as direções de referência conforme indicado, são os deslocamentos das massas de suas condições de equilíbrio. As posições de equilíbrio diferem das posições em que as molas não estão comprimidas devido à força da gravidade. O amortecedor representado no esquema tem atrito constante b . A magnitude da força do amortecedor é assumida como sendo proporcional à taxa de variação do deslocamento relativo das duas massas – ou seja, a força = $b(\dot{y} - \dot{x})$. A força da gravidade poderia ser incluída no diagrama de corpo livre; no entanto, seu efeito é produzir um deslocamento constante em x e y . Ao definir x e y como a distância a partir da posição de equilíbrio, a necessidade de incluir a força da gravidade é eliminada.

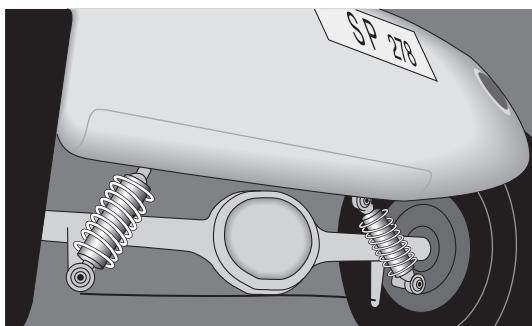
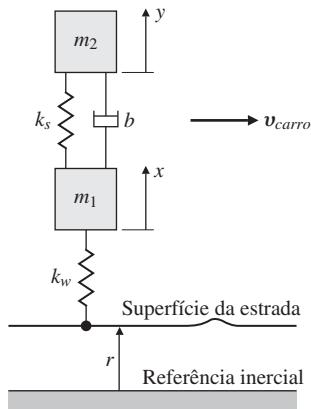


Figura 2.4 Suspensão do automóvel.

Figura 2.5 Modelo de um quarto do carro.

A força da suspensão do carro atua sobre as massas em proporção ao seu deslocamento na constante elástica k_s . A Figura 2.6 mostra o diagrama de corpo livre de cada massa. Note que as forças da mola nas duas massas são iguais em magnitude, mas atuam em direções opostas, o que também é o caso do amortecedor. Um deslocamento positivo y da massa m_2 irá resultar em uma força da mola em m_2 na direção indicada e uma força da mola em m_1 na direção indicada. No entanto, um deslocamento de massa x positivo m_1 irá resultar em uma força da mola k_s em m_1 na direção oposta àquela estabelecida na Fig. 2.6, como indicado pelo termo *menos* x para força desta mola.

A mola inferior k_w representa a compressibilidade dos pneus, para a qual o amortecimento não é suficiente, o que justifica a inclusão de um amortecedor no modelo. A força desta mola é proporcional à distância com que o pneu é comprimido e a força nominal de equilíbrio necessária para dar suporte às massas m_1 e m_2 contra a gravidade. Ao definir x como a distância do ponto de equilíbrio, surgirá uma força resultante se a superfície da estrada contiver uma irregularidade (r muda a partir de seu valor de equilíbrio igual a zero) ou se a roda saltar (mudanças em x). O movimento do carro simplificado sobre uma estrada esburacada irá resultar em um valor de $r(t)$ que não é constante.

Como observado anteriormente, há uma força constante, em razão da gravidade, agindo sobre cada massa; no entanto, essa força tem sido omitida, assim como as forças iguais e opostas das molas. As forças gravitacionais podem ser sempre omitidas em sistemas verticais de massa e mola, (1) se as coordenadas das posições são definidas a partir da posição de equilíbrio que resulta quando a gravidade age, e (2) se as forças da mola utilizadas na análise são, na realidade, perturbações nas forças da mola daquelas forças que agem no equilíbrio.

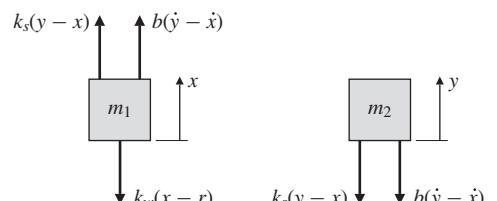
Aplicando a Eq. (2.1) a cada massa e notando que algumas forças em cada massa estão na direção negativa (para baixo), o sistema de equações é obtido

$$b(\dot{y} - \dot{x}) + k_s(y - x) - k_w(x - r) = m_1\ddot{x}, \quad (2.8)$$

$$-k_s(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x}) = m_2\ddot{y} \quad (2.9)$$

que pode ser reescrito na seguinte forma

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_1}(\dot{x} - \dot{y}) + \frac{k_s}{m_1}(x - y) + \frac{k_w}{m_1}x = \frac{k_w}{m_1}r, \quad (2.10)$$

**Figura 2.6** Diagramas de corpo livre para o sistema de suspensão.

$$\ddot{y} + \frac{b}{m_2}(\dot{y} - \dot{x}) + \frac{k_s}{m_2}(y - x) = 0. \quad (2.11)$$

A fonte mais comum de erro na escrita de equações para sistemas como esses são erros de sinal. O método lógico para definir os sinais no desenvolvimento precedente implicou em mentalmente imaginar o deslocamento das massas e desenhar a força resultante na direção em que o deslocamento a produziria. Depois de ter obtido as equações de um sistema, a verificação dos sinais de sistemas, que são obviamente estáveis devido a características físicas, pode ser realizada rapidamente. Como veremos quando estudarmos estabilidade na Seção 3.6, um sistema estável sempre tem os mesmos sinais em variáveis semelhantes. Para este sistema, a Eq. (2.10) mostra que os sinais nos termos \ddot{x} , \dot{x} e x são todos positivos, para que o sistema seja estável. Da mesma forma, os sinais nos termos \ddot{y} , \dot{y} e y são todos positivos na Eq. (2.11).

A procura por erros de sinal

A função de transferência é obtida substituindo d/dt por nas s equações diferenciais, obtendo

$$\begin{aligned} s^2X(s) + s\frac{b}{m_1}(X(s) - Y(s)) + \frac{k_s}{m_1}(X(s) - Y(s)) + \frac{k_w}{m_1}X(s) &= \frac{k_w}{m_1}R(s), \\ s^2Y(s) + s\frac{b}{m_2}(Y(s) - X(s)) + \frac{k_s}{m_2}(Y(s) - X(s)) &= 0, \end{aligned}$$

a qual, após alguma álgebra, resulta em

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_w b}{m_1 m_2} \left(s + \frac{k_s}{b} \right)}{s^4 + \left(\frac{b}{m_1} + \frac{b}{m_2} \right) s^3 + \left(\frac{k_s}{m_1} + \frac{k_s}{m_2} + \frac{k_w}{m_1} \right) s^2 + \left(\frac{k_w b}{m_1 m_2} \right) s + \frac{k_w k_s}{m_1 m_2}}. \quad (2.12)$$

Para determinar os valores numéricos, subtrai-se da massa total do carro, 1.580 kg, a massa das quatro rodas e divide-se o resultado por 4 para encontrar $m_2 = 375$ kg. A massa da roda medida diretamente é $m_1 = 20$ kg. Portanto, a função de transferência com os valores numéricos é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1,31e06(s + 13,3)}{s^4 + (516,1)s^3 + (5,685e04)s^2 + (1,307e06)s + 1,733e07}. \quad (2.13)$$

2.1.2 Movimento rotacional

A aplicação da lei de Newton em sistemas unidimensionais rotacionais exige que a Eq. (2.1) seja modificada para

Lei de Newton para movimento rotacional

$$M = I\alpha, \quad (2.14)$$

sendo

M = a soma de todos os momentos externos sobre o centro de massa do corpo, N·m ou lb·pé,

I = momento de inércia da massa do corpo em seu centro de massa, kg·m² ou slug·pé²,

α = a aceleração angular do corpo, rad/s².

EXEMPLO 2.3 Movimento rotacional: controle de atitude de um satélite

Satélites, como mostrado na Fig 2.7, normalmente requerem controle de atitude de modo que antenas, sensores e painéis solares fiquem devidamente orientados. As antenas geralmente são direcionadas para um determinado local na Terra, enquanto os painéis solares precisam estar orientados na direção do sol para a máxima geração de potência. Para obter informações sobre um sistema completo de controle de atitude com três eixos, é útil considerar um eixo por vez. Escreva as equações de movimento para um eixo do sistema e mostre como elas seriam

representadas em um diagrama de blocos. Além disso, determine a função de transferência do sistema e construa o sistema de forma apropriada para que este seja avaliado por meio do SIMULINK no MATLAB.

Solução. A Figura 2.8 representa este caso, no qual o movimento é permitido apenas em torno do eixo perpendicular à página. O ângulo θ que descreve a orientação do satélite deve ser medido com relação a um referencial inercial – ou seja, uma referência que não tem aceleração angular. A força de controle é proveniente de jatos de reação que produzem um momento de $F_c d$ sobre o centro de massa. Também pode haver pequenos momentos de perturbação M_D no satélite, que surgem principalmente devido à pressão solar agindo sobre as assimetrias nos painéis solares. Aplicando a Eq. (2.14), a equação de movimento é obtida

$$F_c d + M_D = I \ddot{\theta}. \quad (2.15)$$

A saída deste sistema, θ , é resultado da integração da soma dos torques de entrada duas vezes; consequentemente, este tipo de sistema é muitas vezes referido como uma **planta de integrador duplo**. A função de transferência pode ser obtida como descrito para Eq. (2.7) e é

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{I} \frac{1}{s^2}, \quad (2.16)$$

sendo $U = F_c d + M_D$. Nesta forma, o sistema é geralmente referido como a **planta $1/s^2$** .

A Figura 2.9 mostra o diagrama de blocos representando a Eq. (2.15) na metade superior e o diagrama de blocos representando a Eq. (2.16) na metade inferior. Este sistema simples pode ser analisado usando técnicas de análise lineares que são descritas nos capítulos seguintes, ou via MATLAB como mostrado no Exemplo 2.1.

Este sistema também pode ser numericamente avaliado para uma entrada arbitrária com história temporal conhecida usando o SIMULINK. O SIMULINK é um pacote computacional

Planta de integrador duplo

Planta $1/s^2$

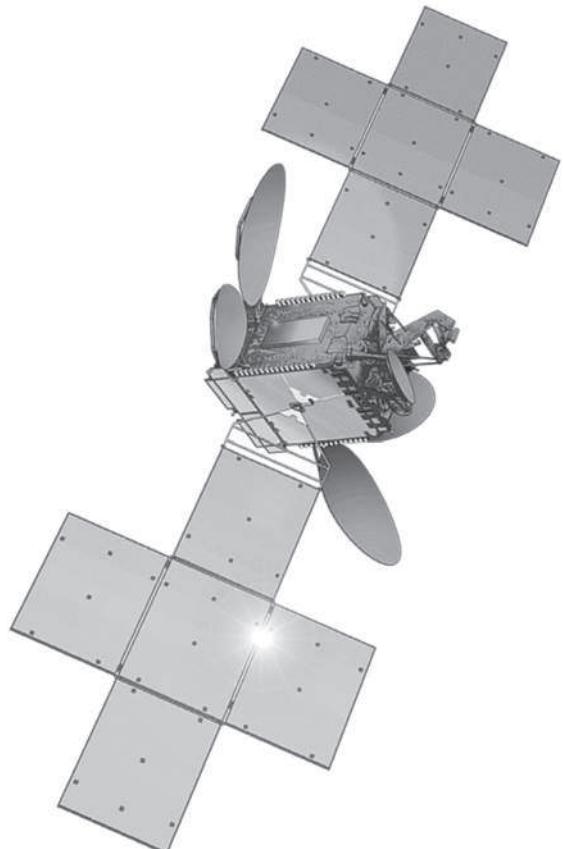


Figura 2.7 Satélite de comunicação.

Fonte: cortesia Space Systems/Loral.

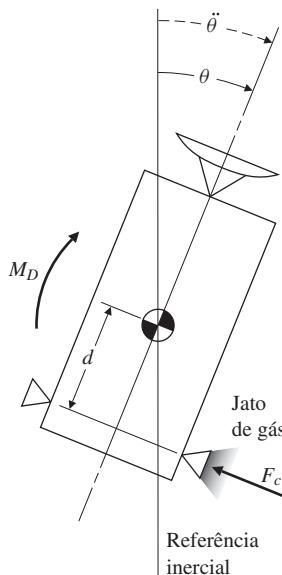


Figura 2.8 Esquema de controle de satélite.

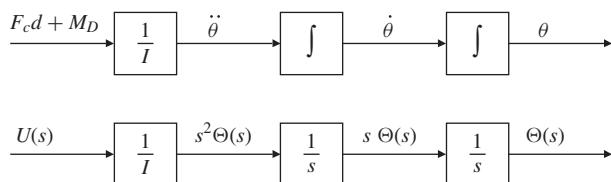


Figura 2.9 Diagrama de blocos representando a Eq. (2.15) na metade superior e o diagrama de blocos representando a Eq. (2.16) na metade inferior.

do MATLAB para a simulação interativa com uma interface gráfica para o usuário com propriedades de arrastar e soltar. A Figura 2.10 mostra um diagrama de blocos do sistema conforme descrito pelo SIMULINK.

Na realidade, em muitos casos um sistema, como a cabeça da unidade de leitura/escrita em disco mostrado na Fig. 2.11, tem alguma flexibilidade, o que pode causar problemas no projeto de um sistema de controle. Uma dificuldade especial surge quando há flexibilidade, como no presente caso, entre as localizações do sensor e do atuador. Portanto, muitas vezes é importante incluir esta flexibilidade do modelo, mesmo quando o sistema parece ser bastante rígido.

EXEMPLO 2.4 Flexibilidade: unidade de leitura/escrita em disco com flexibilidade

Assuma que haja uma certa flexibilidade entre a cabeçote de leitura e o motor de acionamento na Fig. 2.11. Encontre as equações dinâmicas relativas ao movimento da cabeçote de leitura devido a um torque aplicado na base.

Solução. O modelo dinâmico para esta situação é representado esquematicamente na Fig. 2.12. Este modelo é dinamicamente semelhante ao sistema ressonante mostrado na Fig. 2.5, e as equações de movimento resultantes são semelhantes às Eqs. (2.10) e (2.11). Os momentos em cada corpo são mostrados nos diagramas de corpo livre na Fig. 2.13. A discussão sobre os

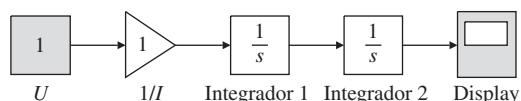
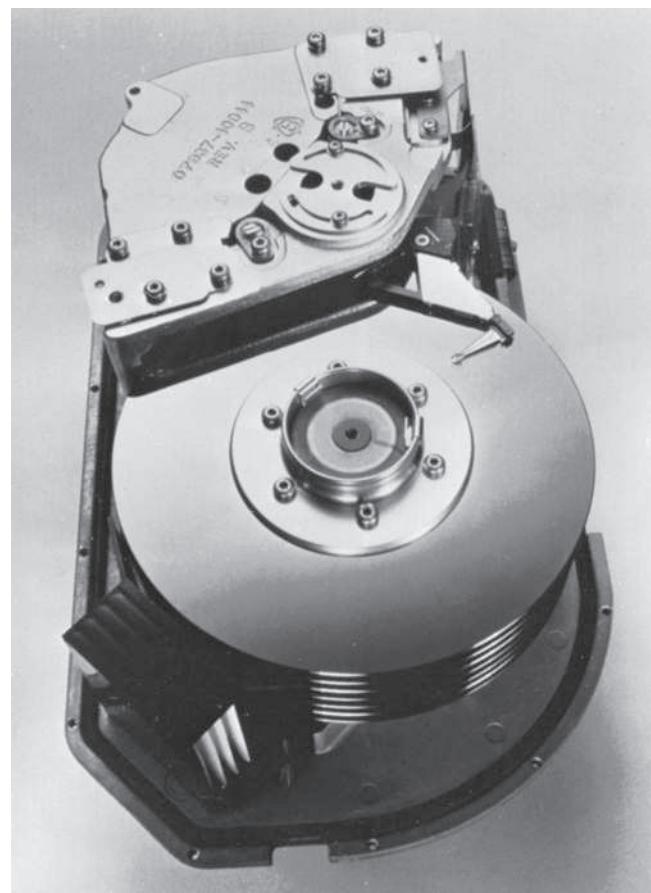


Figura 2.10 Diagrama de blocos no SIMULINK da planta com integrador duplo.

Figura 2.11 Mecanismo de leitura e escrita em disco.

Fonte: cortesia da Hewlett-Packard Company.

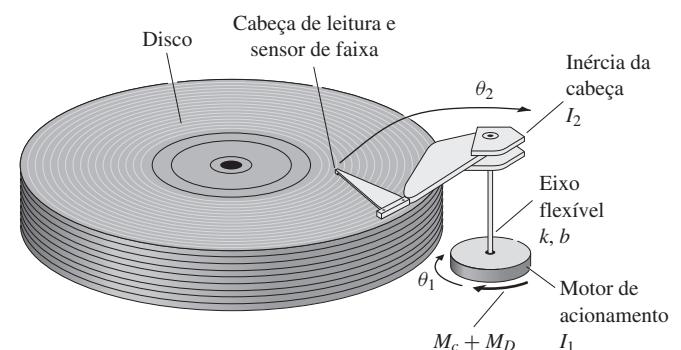


momentos em cada corpo é essencialmente a mesma discussão para o Exemplo 2.2, exceto que as molas e amortecedores naquele caso produzem forças, em vez de momentos de inércia, como neste caso. Quando os momentos são somados, equacionados de acordo com a Eq. (2.14) e reorganizados, o resultado é

$$I_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = M_c + M_D, \quad (2.17)$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0. \quad (2.18)$$

Ignorando o torque de perturbação M_D e o amortecimento b por simplicidade, encontramos a função de transferência do torque aplicado M para o movimento da cabeça de leitura

**Figura 2.12** Esquema para modelagem da cabeça do disco de leitura/escrita.

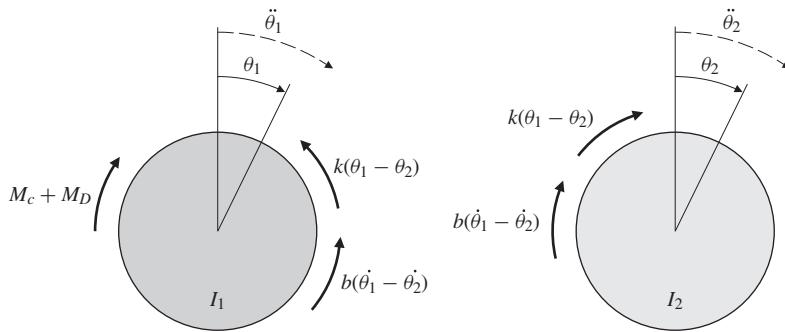


Figura 2.13 Diagramas de corpo livre da cabeça do disco de leitura/escrita.

$$\frac{\Theta_2(s)}{M_c(s)} = \frac{k}{I_1 I_2 s^2 \left(s^2 + \frac{k}{I_1} + \frac{k}{I_2} \right)}. \quad (2.19)$$

Também pode ser possível sentir o movimento de inércia onde o torque é aplicado, θ_1 , no caso em que a função de transferência com as mesmas simplificações seria

$$\frac{\Theta_1(s)}{M_c(s)} = \frac{I_2 s^2 + k}{I_1 I_2 s^2 \left(s^2 + \frac{k}{I_1} + \frac{k}{I_2} \right)}. \quad (2.20)$$

Esses dois casos são típicos de muitas situações em que os sensores e atuadores podem ou não ser colocados no mesmo local em um corpo flexível. Referimo-nos à situação entre sensores e atuadores na Eq. (2.19) como o caso “descolado”, enquanto que a Eq. (2.20) descreve o caso “colado”. No Capítulo 5, será visto que é muito mais difícil controlar um sistema quando houver flexibilidade entre os sensores e atuadores (caso descolado) do que quando os sensores e atuadores são rigidamente unidos uns aos outros (caso colado).

Sensor colado e atuador

No caso especial em que um ponto de um corpo em rotação é fixo com relação a um referencial inercial, como é o caso de um pêndulo, a Eq. (2.14) pode ser aplicada de modo que M é a soma de todos os momentos sobre o ponto *fixo* e I é o momento de inércia em torno do ponto fixo.

EXEMPLO 2.5 Movimento rotacional: pêndulo

1. Escreva as equações de movimento para o pêndulo simples mostrado na Fig. 2.14, no qual toda a massa está concentrada no ponto final e não há um torque, T_c , aplicado no pivô.
2. Use o MATLAB para determinar a história temporal de θ para uma entrada em degrau em T_c de 1 N·m. Assuma $l = 1$ m, $m = 1$ kg e $g = 9,81$ m/s².

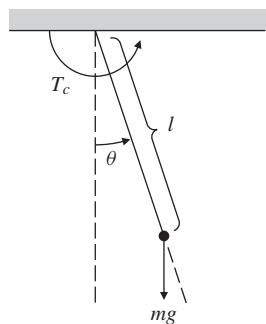


Figura 2.14 Pêndulo.

Solução

- 1. Equações de movimento:** O momento de inércia em torno do ponto pivô é $I = ml^2$. A soma dos momentos em torno do ponto pivô contém um termo de gravidade, assim como o torque aplicado T_c . A equação de movimento, obtida da Eq. (2.14), é

$$T_c - mgl \operatorname{sen} \theta = I\ddot{\theta}, \quad (2.21)$$

que é normalmente escrita na forma

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = \frac{T_c}{ml^2}. \quad (2.22)$$

Essa equação é não linear devido ao termo $\operatorname{sen} \theta$. Uma discussão geral sobre equações não lineares é apresentada no Capítulo 9; no entanto, procedemos com a linearização neste caso assumindo que o movimento é pequeno o bastante para que $\operatorname{sen} \theta \cong \theta$. Então, a Eq. (2.22) torna-se uma equação linear

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{T_c}{ml^2}. \quad (2.23)$$

Sem torque aplicado, o movimento natural é o movimento de um oscilador harmônico com uma frequência natural de³

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2.24)$$

A função de transferência pode ser obtida como descrito para a Eq. (2.7), obtendo-se

$$\frac{\Theta(s)}{T_c(s)} = \frac{\frac{1}{ml^2}}{s^2 + \frac{g}{l}}. \quad (2.25)$$

- 2. Histórico temporal:** A dinâmica de um sistema pode ser escrita para o MATLAB em termos de vetores linha contendo os coeficientes dos polinômios que descrevem o numerador e o denominador da função de transferência. Neste caso, o numerador (chamado de num) é simplesmente um número, uma vez que não existem potências de s , de modo que

$$\text{num} = \frac{1}{ml^2} = \frac{1}{(1)(1)^2} = [1],$$

e o denominador (chamado de den) contém os coeficientes das potências de s em $(s^2 + g/l)$ e é um vetor linha com três elementos:

$$\text{den} = \left[1 \ 0 \ \frac{g}{l} \right] = [1 \ 0 \ 9,81].$$

A resposta desejada do sistema pode ser obtida usando a função step do MATLAB. As declarações do MATLAB são

```
t = 0:0.02:10; % vetor tempo, incrementa de 0 a 10 com passo de 0,02
num = 1;
den = [1 0 9.81];
sys = tf(num, den); % define o sistema usando seu numerador e denominador
y = step(sys,t); % computa a resposta temporal nos instantes de tempo
% dados em t para um degrau aplicado em t = 0
plot(t, 57.3*y) % converte radianos para graus e traça a resposta temporal
```

As declarações acima irão produzir a resposta temporal mostrada na Fig. 2.15.

³ Em um relógio de pêndulo, é desejável que se tenha um período do pêndulo de exatamente 2 s. Mostre que o pêndulo deve ser de aproximadamente 1 m de comprimento.

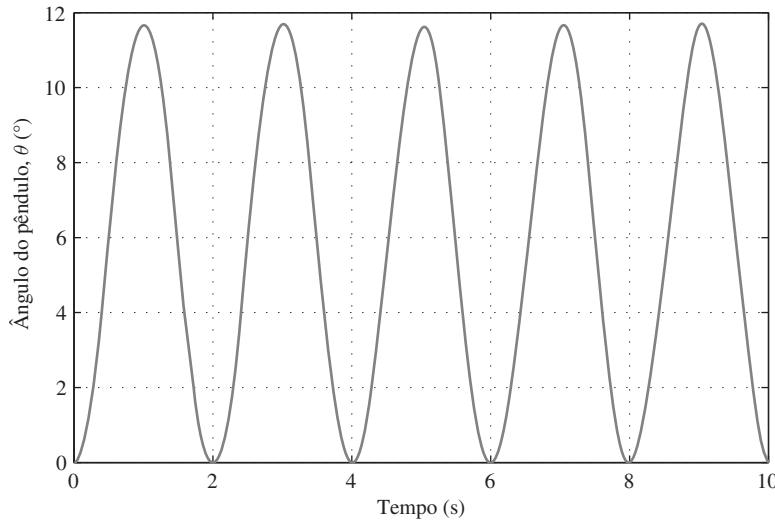


Figura 2.15 Resposta do pêndulo para uma entrada em degrau de 1 N·m de torque.

Como vimos neste exemplo, as equações de movimento resultantes são muitas vezes não lineares. Tais equações são muito mais difíceis de serem resolvidas do que as lineares, e os tipos de movimentos possíveis resultantes de um modelo não linear são muito mais difíceis de categorizar do que os resultantes de um modelo linear. É, portanto, útil linearizar os modelos, a fim de obter acesso a métodos de análise linear. Pode ser que os modelos e métodos de análise lineares sejam utilizados apenas para a concepção do sistema de controle (cuja função seria manter o sistema na região linear). Uma vez que um sistema de controle é sintetizado e se demonstra ter um desempenho desejável com base na análise linear, então é prudente proceder a uma análise mais aprofundada ou a uma simulação numérica precisa do sistema considerando as não linearidades a fim de validar o desempenho. O SIMULINK é um modo adequado para a realização dessas simulações e pode lidar com a maioria das não linearidades. O uso desta ferramenta de simulação é realizado pela construção de um diagrama de blocos⁴ que representa as equações de movimento. A equação linear de movimento para o pêndulo com os parâmetros especificados no Exemplo 2.5 pode ser vista a partir da Eq. (2.23), como

$$\ddot{\theta} = -9,81 * \theta + 1, \quad (2.26)$$

e isso é representado no SIMULINK pelo diagrama de blocos da Fig. 2.16. Note que o círculo do lado esquerdo da figura contém os sinais + e -, indicando a adição e subtração na equação acima.

O resultado da execução desta simulação numérica será essencialmente idêntico à solução linear mostrada na Fig. 2.15, porque a solução é feita para ângulos relativamente pequenos $\theta \approx \theta$. No entanto, usar o SIMULINK nos permite simular equações não lineares, assim podemos analisar o presente sistema para movimentos maiores. Neste caso, a Eq. (2.26) torna-se

$$\ddot{\theta} = -9,81 * \operatorname{sen} \theta + 1, \quad (2.27)$$

e o diagrama de blocos do SIMULINK mostrado na Fig. 2.17 implementa essa equação não linear.

SIMULINK

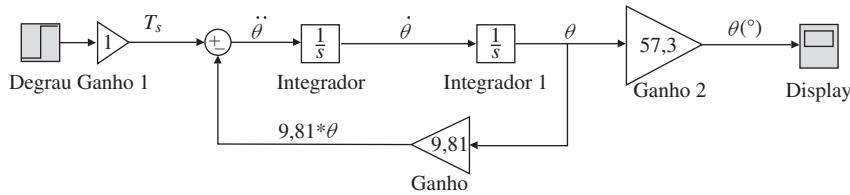
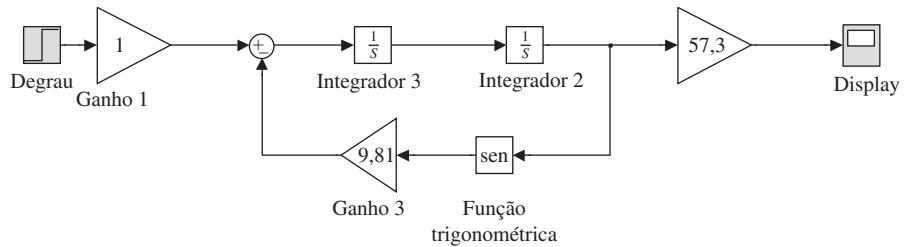


Figura 2.16 Diagrama de blocos no SIMULINK que representa a equação linear (2.26).

⁴ Uma discussão mais ampla sobre diagramas de blocos é apresentada na Seção 3.2.1.

Figura 2.17 Diagrama de blocos no SIMULINK que representa a equação não linear (2.27).



O SIMULINK é capaz de simular todas as não linearidades comumente encontradas, incluindo as zonas mortas, as funções on-off, stiction, histerese, o arrasto aerodinâmico (função do v^2) e funções trigonométricas. Todos os sistemas reais têm uma ou mais dessas características em graus variados.

EXEMPLO 2.6 Uso do SIMULINK para movimentos não lineares: pêndulo

Use o SIMULINK para determinar a evolução temporal de θ para o pêndulo no Exemplo 2.5. Compare este resultado com a solução linear para T_c , com valores 1 N·m e 4 N·m.

Solução. Histórico temporal: Os diagramas de blocos do SIMULINK para os dois casos discutidos acima são combinados e as duas saídas nas Figuras 2.16 e 2.17 são enviadas através de um “bloco multiplexador (Mux)” para o “display” para que elas possam ser traçadas no mesmo gráfico. A Fig. 2.18 mostra o diagrama de blocos combinado, onde o ganho, K , representa os valores de T_c . As saídas deste sistema para os valores de T_c 1 N·m e 4 N·m são mostradas na Fig. 2.19. Note que para $T_c = 1$ N·m, as saídas na parte superior da figura permanecem em 12° ou menos e a aproximação linear é extremamente próxima à saída não linear. Para $T_c = 4$ N·m, o ângulo de saída cresce para perto de 50° e uma diferença substancial da magnitude e frequência na resposta é evidente, em virtude de θ ser uma pobre aproximação de $\sin\theta$ nessas magnitudes.

O Capítulo 9 é dedicado à análise de sistemas não lineares e amplia essas ideias.

2.1.3 Combinando rotação e translação

Em alguns casos, sistemas mecânicos contêm movimentos de translação e rotação. O procedimento nestes casos é o mesmo que o descrito nas Seções 2.1.1 e 2.1.2: esboçar os diagramas de corpo livre, definir coordenadas e direções positivas, determinar todas as forças e momentos e aplicar as Equações (2.1) e/ou (2.14). Uma derivação exata das equações para estes sistemas pode se tornar bastante complexa e, portanto, a análise completa para os exemplos a seguir constam no material complementar W2 (disponível em inglês no site do Grupo A), e apenas as equações linearizadas do movimento e suas funções de transferência são apresentadas aqui.

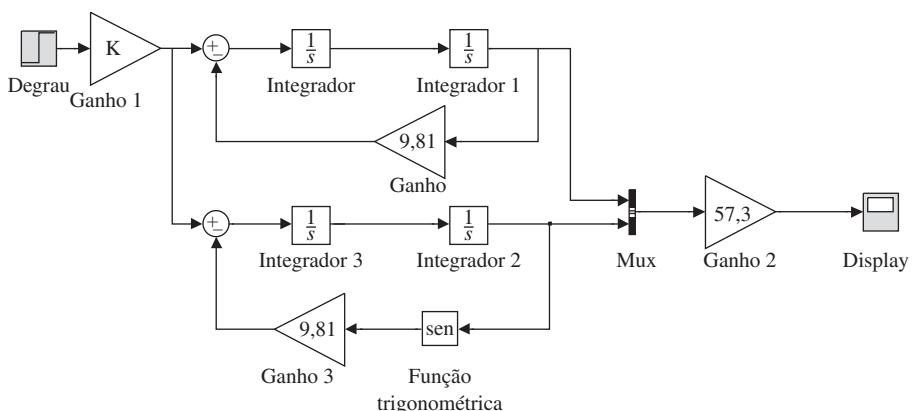


Figura 2.18 Diagrama de blocos de um pêndulo para ambos os modelos linear e não linear.

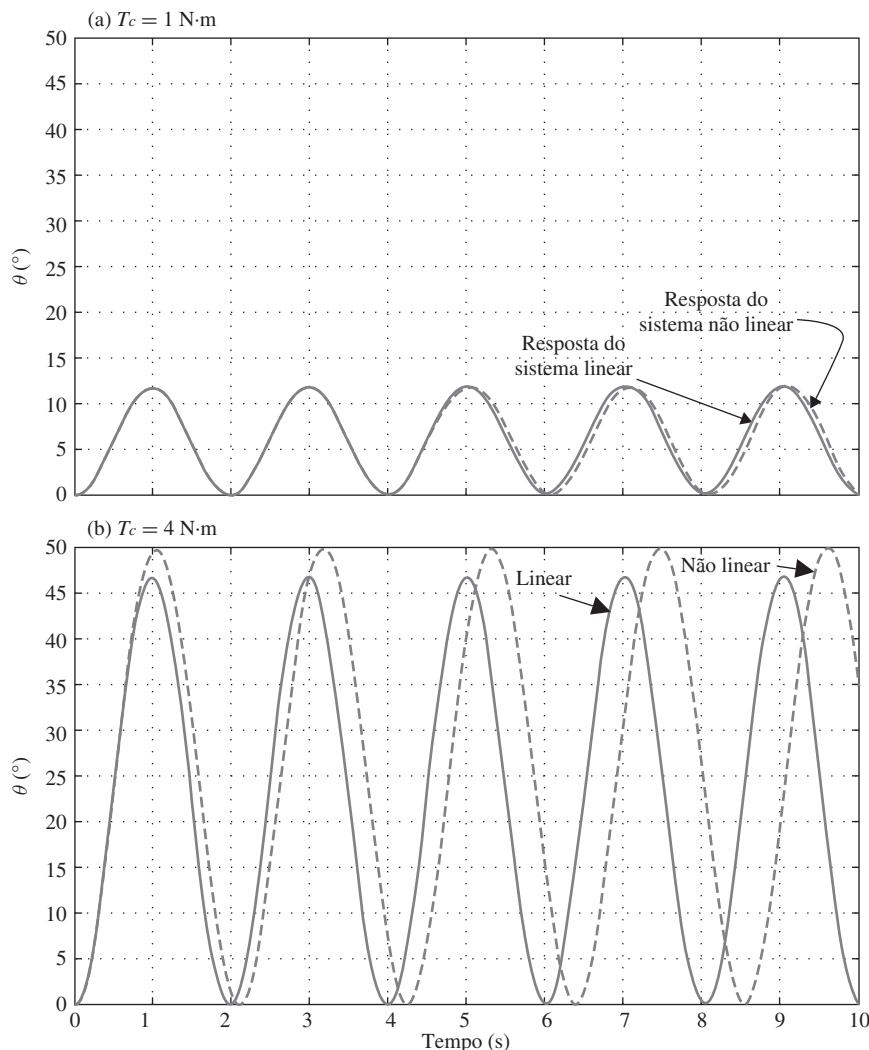


Figura 2.19 Resposta do SIMULINK para o pêndulo considerando os modelos linear e não linear. (a) para $T_c = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$ e (b) $T_c = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$.

EXEMPLO 2.7 Movimentos rotacional e de translação: guindaste

Escreva as equações de movimento do guindaste representado esquematicamente na Fig. 2.20. Linearize as equações para $\theta = 0$, o que normalmente é válido para o guindaste de suspensão. Também linearize as equações para $\theta = \pi$, que representa a situação para o pêndulo invertido, mostrado na Fig. 2.21. O carrinho possui massa, m_t , e o guindaste (ou pêndulo) tem massa, m_p , e inércia em torno de seu centro de massa I . A distância do pivô ao centro de massa do pêndulo é l , portanto, o momento de inércia do pêndulo sobre o ponto de pivô é $(I + m_p l^2)$.

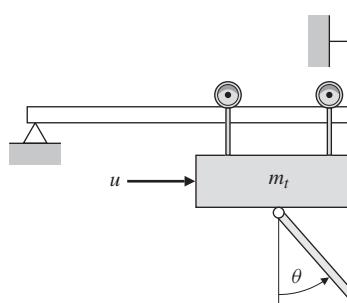
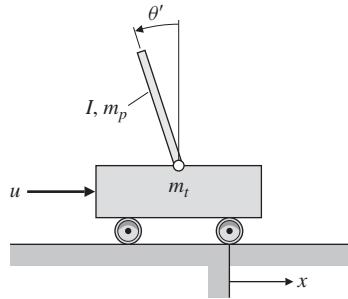


Figura 2.20 Esquema do guindaste.

Figura 2.21 Pêndulo invertido.

Solução. Os diagramas de corpo livre precisam ser desenhados para o carrinho e para o pêndulo, e as forças de reação devem ser consideradas no ponto em que os dois se conectam. Realizamos esse procedimento no material complementar W2. Após a aplicação das Leis de Newton para o movimento de translação do carro e para o movimento de rotação do pêndulo, se verá que as forças de reação entre os dois corpos poderão ser eliminadas, e as variáveis desconhecidas serão θ e x . Os resultados são duas equações diferenciais acopladas em θ e x com a entrada sendo a força aplicada ao carrinho, u . Elas podem ser linearizadas de maneira semelhante como feito para o pêndulo simples, assumindo pequenos ângulos. Para pequenos movimentos $\theta = 0$, fazemos $\cos \theta \cong 1$, $\sin \theta \cong 0$, e $\dot{\theta}^2 \cong 0$; assim, as equações são aproximadas por

$$\begin{aligned} (I + m_p l^2) \ddot{\theta} + m_p g l \theta &= -m_p l \ddot{x}, \\ (m_t + m_p) \ddot{x} + b \dot{x} + m_p l \ddot{\theta} &= u. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Note que a primeira equação é muito semelhante à do pêndulo simples, Eq. (2.21), na qual o torque aplicado decorre da aceleração do carrinho. Da mesma forma, a segunda equação que representa o movimento do carrinho, x , é muito parecida com a equação de translação do carro, Eq. (2.3), na qual o termo forçante decorre da aceleração angular do pêndulo. Desprezando o termo de atrito, b resulta na função de transferência da entrada de controle u ao ângulo do guindaste θ :

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-m_p l}{((I + m_p l^2)(m_t + m_p) - m_p^2 l^2)s^2 + m_p g l(m_t + m_p)}. \quad (2.29)$$

Para o pêndulo invertido na Fig. 2.21, na qual $\theta \cong \pi$, assume-se $\theta = \pi + \theta'$, sendo que θ' representa o movimento da direção vertical *para cima*. Neste caso, $\sin \theta \cong -\theta'$, $\cos \theta \cong -1$ e as equações não lineares tornam-se⁵

$$\begin{aligned} (I + m_p l^2) \ddot{\theta}' - m_p g l \theta' &= m_p l \ddot{x}, \\ (m_t + m_p) \ddot{x} + b \dot{x} - m_p l \ddot{\theta}' &= u. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como observado no Exemplo 2.2, um sistema estável terá sempre os mesmos sinais em cada variável, o que é o caso do guindaste estável modelado pelas equações em (2.28). No entanto, os sinais de θ e $\ddot{\theta}$ na parte superior da Eq. (2.30) são opostos, indicando instabilidade, que é a característica do pêndulo invertido.

A função de transferência, novamente sem atrito, é

$$\frac{\theta'(s)}{U(s)} = \frac{m_p l}{((I + m_p l^2) - m_p^2 l^2)s^2 - m_p g l(m_t + m_p)}. \quad (2.31)$$

No Capítulo 5, será estudada a estabilização de sistemas usando a realimentação, e será visto que até mesmo sistemas instáveis como o pêndulo invertido podem ser estabilizados desde

⁵ O pêndulo invertido é frequentemente descrito considerando o ângulo do pêndulo no sentido horário como positivo. Se definido dessa maneira, então inverta os sinais em todos os termos na Equações (2.30) em θ' ou $\ddot{\theta}'$.

que exista um sensor para medir a saída e a entrada de controle. Para o caso do pêndulo invertido em cima de um carro, seria necessário medir o ângulo do pêndulo, θ' , e fornecer uma entrada de controle, u , que acelere o carro de tal forma que o pêndulo permaneça direcionado para cima. Nos últimos anos, esse sistema existiu principalmente em laboratórios de sistemas de controle como uma ferramenta educacional. No entanto, mais recentemente, existe um dispositivo prático em produção e sendo vendido, que emprega basicamente esse mesmo sistema dinâmico: o Segway. Ele usa um giroscópio para que o ângulo do dispositivo em relação à vertical seja conhecido, motores elétricos fornecem torques às rodas para equilibrar o dispositivo e fornecer o movimento desejado para a frente ou para trás. Ele é mostrado na Fig. 2.22.

2.1.4 Sistemas com parâmetros distribuídos

Todos os exemplos anteriores continham um ou mais corpos rígidos, embora alguns fossem conectados a outros por molas. Estruturas reais – por exemplo, painéis solares de satélites, asas de avião ou braços do robô – geralmente sofrem flexões, como mostra a viga flexível na Fig. 2.23 (a). A equação que descreve o seu movimento é uma equação diferencial *parcial* de quarta ordem que surge em razão de os elementos de massa serem continuamente distribuídos ao longo da viga com uma pequena quantidade de flexibilidade entre eles. Esse tipo de sistema é chamado de **sistema com parâmetros distribuídos**. Os métodos de análise dinâmica presentes nesta seção não são suficientes para analisar este caso, no entanto, textos mais avançados (Thomson e Dahleh, 1998) mostram que o resultado é

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2.32)$$

sendo

E = módulo de elasticidade ou módulo de Young,

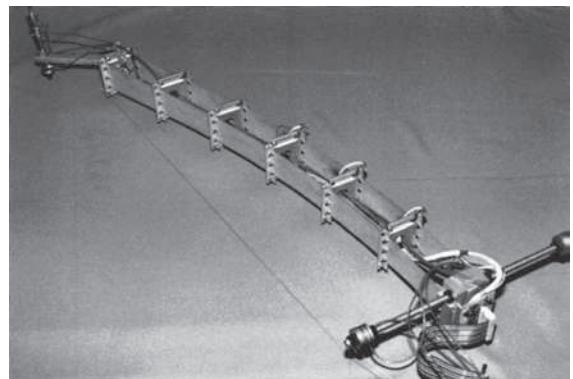
I = momento de inércia da área da viga,



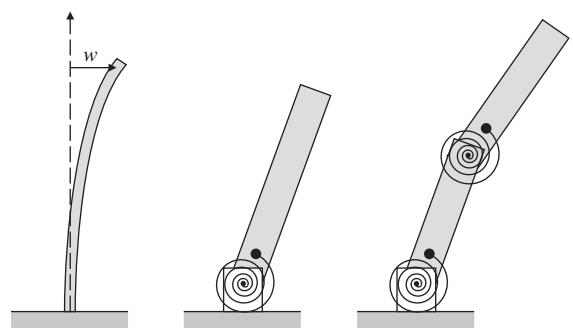
Figura 2.22 Segway, que é semelhante ao pêndulo invertido e é mantido na posição vertical por um sistema de controle realimentado.
Fonte: foto cedida por David Powell.

Figura 2.23 (a) Braço de robô flexível usado para a pesquisa na Universidade de Stanford; (b) modelo para uma viga contínua flexível; (c) modelo simplificado para o primeiro modo de flexão; (d) modelo para os modos de primeira e segunda flexão.

Fonte: foto cedida por E. Schmitz.



(a)



(b)

(c)

(d)

ρ = densidade da viga,

w = deflexão da viga de comprimento x .

A solução exata da Eq. (2.32) é muito complexa para ser usada em projeto de sistemas de controle, mas muitas vezes é importante explicar os efeitos brutos da flexão no projeto de sistemas de controle.

A viga contínua na Fig. 2.23 (b) tem um número infinito de modos de vibração, todos com diferentes frequências. Normalmente, os modos de menor frequência possuem a maior amplitude e são os mais importantes para uma boa aproximação. O modelo simplificado na Fig. 2.23 (c) pode ser feito para duplicar o comportamento essencial do primeiro modo de flexão e frequência e normalmente seria adequado para o projeto do controlador. Se frequências mais elevadas do que as do primeiro modo de flexão estiverem previstas para o funcionamento do sistema de controle, pode ser necessário modelar a viga, como mostrado na Fig. 2.23 (d), o que pode ser feito para aproximar os dois primeiros modos de flexão e frequência. Da mesma forma, modelos de ordem superior podem ser usados nos casos em que precisão e complexidade são consideradas necessárias (Thomson e Dahleh, 1998; Schmitz, 1985). Quando um objeto de flexão contínua é aproximado por dois ou mais corpos rígidos conectados por molas, o modelo resultante algumas vezes é referido como um **modelo de parâmetros concentrados**.

Uma estrutura flexível pode ser aproximada por um modelo de parâmetros concentrados

2.1.5 Resumo: desenvolvimento de equações de movimento para corpos rígidos

A física necessária para escrever as equações de movimento de um corpo rígido é inteiramente determinada pelas leis do movimento de Newton. O método é o seguinte:

1. Nomeie variáveis, como x e θ , que sejam necessárias e suficientes para descrever uma posição arbitrária do objeto.

2. Trace um diagrama de corpo livre de cada componente. Indique *todas* as forças atuando em cada corpo e suas direções de referência. Também indique as acelerações do centro de massa em relação a um referencial inercial para cada corpo.
3. Aplique a lei de Newton para o movimento de translação [Eq. (2.1)] e/ou para o movimento de rotação [Eq. (2.14)].
4. Combine as equações para eliminar as forças internas.
5. O número de equações independentes deve ser igual ao número de incógnitas.

2.2 Modelos de circuitos elétricos

Circuitos elétricos são frequentemente usados em grande parte dos sistemas de controle devido à facilidade de manipulação e processamento de sinais elétricos. Embora os controladores estejam sendo cada vez mais implementados com lógica digital, muitas funções ainda são realizadas em circuitos analógicos. Circuitos analógicos são mais rápidos que os digitais e, para controladores simples, a implementação do circuito analógico pode ser mais barata que a implementação digital. Além disso, os amplificadores de potência para controladores eletromecânicos e para filtros antialiasing para o controle digital devem ser circuitos analógicos.

Circuitos elétricos consistem de interconexões de fontes de tensão e corrente e de outros elementos eletrônicos, como resistores, capacitores e transistores. Um importante elemento em circuitos elétricos é o amplificador operacional (ou amp-op)⁶, que também é exemplo de um sistema realimentado complexo. Alguns dos métodos mais importantes de projeto de controladores foram desenvolvidos em alto ganho, amplificadores realimentados de banda larga, principalmente no Bell Telephone Laboratories entre 1925 e 1940. Componentes elétricos e eletrônicos também desempenham um papel central em dispositivos de conversão eletromecânica de energia, como motores, geradores e sensores elétricos. Neste breve estudo, não podemos discutir a física da eletricidade ou fazer uma revisão exaustiva de todas as importantes técnicas de análise. Vamos definir as variáveis, descrever as relações que são impostas por elementos típicos e circuitos, e descrever alguns dos métodos mais eficazes para resolver as equações resultantes.

Os símbolos de alguns elementos de circuito linear e suas relações de corrente-tensão são dadas na Fig. 2.24. Circuitos passivos consistem de interconexões de resistores, capacitores e indutores. Com a eletrônica, aumentamos o conjunto de elementos elétricos, acrescentando dispositivos ativos, transistores, diodos e amplificadores.

As equações básicas de circuitos elétricos, chamadas de leis de Kirchhoff, são as seguintes:

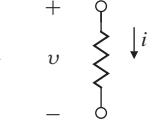
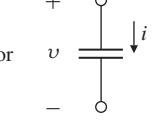
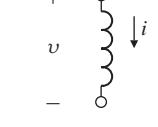
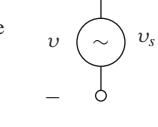
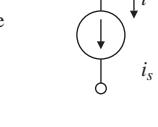
- 1. Lei de Kirchhoff das correntes (LKC):** A soma algébrica das correntes deixando um nó, ou junção, é igual à soma algébrica das correntes que entram nesse nó.
- 2. Lei de Kirchhoff das tensões (LKT):** A soma algébrica das tensões tomadas em torno de um caminho fechado em um circuito é zero.

Leis de Kirchhoff

Tratando-se de circuitos complexos com muitos elementos, é essencial escrever as equações de forma cuidadosa e bem organizada. Entre os vários métodos para fazer isso, escolhemos para descrição e ilustração o popular e poderoso esquema conhecido como **análise nodal**. Um nó é selecionado como referência e assumimos as tensões de todos os outros nós como incógnitas. A escolha da referência é arbitrária na teoria, mas na prática a escolha do terminal comum, ou terra, é a escolha óbvia e padrão. Em seguida, as equações são escritas usando a lei das correntes (LKC) em cada nó. Expressamos essas correntes em termos de incógnitas de acordo com as equações elementares na Fig. 2.24. O Exemplo 2.8 ilustra a aplicação da análise nodal.

⁶ Oliver Heaviside introduziu o operador matemático p para indicar a diferenciação, então $pv = dv/dt$. A transformada de Laplace incorpora essa ideia, usando a variável complexa s . Ragazzini e outros (1947) demonstraram, usando a transformada de Laplace, que um amplificador eletrônico de alto ganho é capaz de realizar diferentes “operações”, de modo que o nomearam como amplificador operacional, comumente abreviado para amp-op.

Figura 2.24 Componentes elementares de circuitos.

	Símbolo	Equação
Resistor		$v = Ri$
Capacitor		$i = C \frac{dv}{dt}$
Indutor		$v = L \frac{di}{dt}$
Fonte de tensão		$v = v_s$
Fonte de corrente		$i = i_s$

EXEMPLO 2.8 Equações de um circuito

Determine as equações diferenciais para o circuito mostrado na Fig. 2.25.

Solução. Selecionando o nó 4 como a referência e as tensões nos nós 1, 2 e 3, como v_1 , v_2 e v_3 , respectivamente. Aplicando a LKT no nó 1, temos

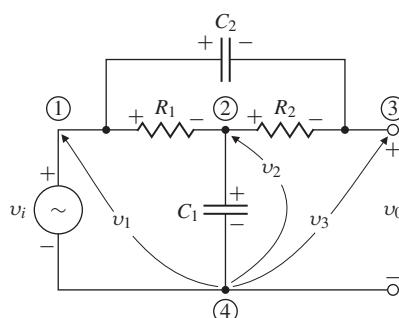
$$v_1 = v_i. \quad (2.33)$$

aplicando a LKC no nó 2, temos

$$-\frac{v_1 - v_2}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_1 \frac{dv_2}{dt} = 0, \quad (2.34)$$

e aplicando a LKC no nó 3, temos

$$\frac{v_3 - v_2}{R_2} + C_2 \frac{d(v_3 - v_1)}{dt} = 0. \quad (2.35)$$

**Figura 2.25** Circuito em ponte-T.

Essas são as três equações que descrevem o circuito.

As leis de Kirchhoff também podem ser aplicadas aos circuitos que contêm **amplificador operacional**. O circuito simplificado do amp-op é mostrado na Fig. 2.26 (a), e o símbolo esquemático é desenhado na Fig. 2.26 (b). Se o terminal positivo não é mostrado, presume-se que ele está conectado à terra, $v_+ = 0$, e o símbolo reduzido na Fig. 2.26 (c) é usado. Para o uso em circuitos de controle, geralmente se assume que o amp-op é *ideal* com os valores de $R_1 = \infty$, $R_0 = 0$ e $A = \infty$. As equações do amp-op ideal são extremamente simples, sendo

$$i_+ = i_- = 0, \quad (2.36)$$

$$v_+ - v_- = 0. \quad (2.37)$$

Amplificador operacional

O ganho do amplificador é considerado tão elevado que a tensão de saída $v_{out} = 0$ que for preciso para satisfazer essas equações. Claro que um amplificador real somente se aproxima dessas equações, mas a menos que seja especificamente mencionado, assumiremos que todos os amp-ops são ideais. Modelos mais realistas são objeto de vários problemas no final do capítulo.

EXEMPLO 2.9 Amp-op somador

Encontre as equações e funções de transferência do circuito mostrado na Fig. 2.27.

Solução. A Equação (2.37) requer que $v_- = 0$ e, assim, as correntes são $i_1 = v_1/R_1$, $i_2 = v_2/R_2$ e $i_{out} = v_{out}/R_f$. Para satisfazer a Eq. (2.36), $i_1 + i_2 + i_{out} = 0$, da qual segue que $v_1/R_1 + v_2/R_2 + v_{out}/R_f = 0$, então

$$v_{out} = - \left[\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 \right]. \quad (2.38)$$

A partir dessa equação, vemos que a saída do circuito é uma soma ponderada das tensões de entrada com o sinal trocado. Esse circuito é chamado de **somador**.

0 amp-op somador

Um segundo importante exemplo de controle é dado pelo amp-op integrador.

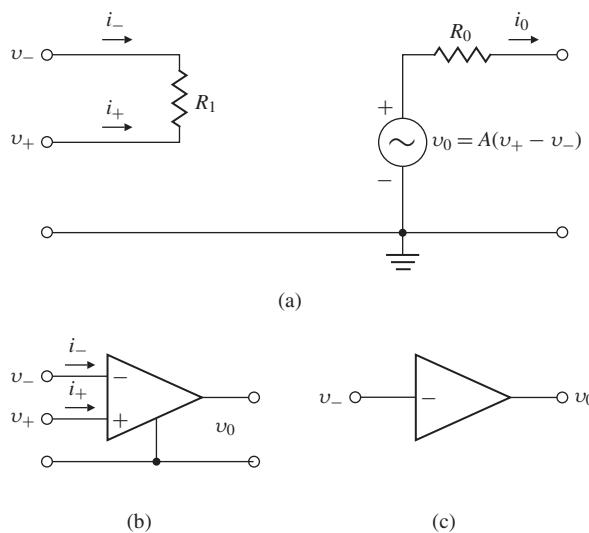
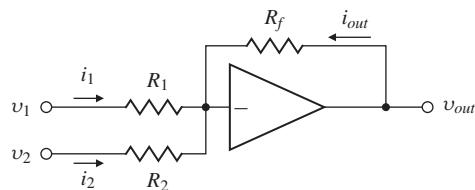


Figura 2.26 (a) Circuito simplificado do amp-op; (b) símbolo esquemático do amp-op; (c) símbolo reduzido quando $v_+ = 0$.

Figura 2.27 Amp-op somador.**EXEMPLO 2.10 Integrador**

Amp-op como integrador

Encontre a função de transferência do circuito mostrado na Fig. 2.28.

Solução. Neste caso, as equações são diferenciais e as Equações (2.36) e (2.37) requerem que

$$i_{in} + i_{out} = 0, \quad (2.39)$$

e que

$$\frac{v_{in}}{R_{in}} + C \frac{dv_{out}}{dt} = 0. \quad (2.40)$$

A Eq. (2.40) pode ser escrita na forma integral como

$$v_{out} = -\frac{1}{R_{in}C} \int_0^t v_{in}(\tau) d\tau + v_{out}(0). \quad (2.41)$$

Usando o operador matemático $d/dt = s$ na Eq. (2.40), a função de transferência (assumindo condições iniciais nulas) pode ser escrita como

$$V_{out}(s) = -\frac{1}{s} \frac{V_{in}(s)}{R_{in}C}. \quad (2.42)$$

Portanto, o amp-op ideal nesse circuito realiza a operação de integração; assim, este circuito é simplesmente referido como um **integrador**.

2.3 Modelos de sistemas eletromecânicos

Corrente elétrica e campo magnético interagem de duas formas que são particularmente importantes para a compreensão do funcionamento de atuadores eletromecânicos e sensores. Se uma corrente de i ampères em um condutor de comprimento l metros é organizado em ângulos reto em um campo magnético de B teslas, então existe uma força sobre o condutor perpendicular ao plano de i e B , com magnitude

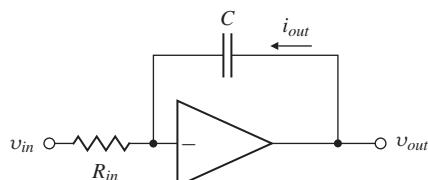
$$F = Bli \text{ newtons.} \quad (2.43)$$

Lei de motores

Esta equação é a base da conversão de energia elétrica em trabalho mecânico e é chamada de **lei de motores**.

EXEMPLO 2.11 Modelando um alto-falante

A geometria típica de um alto-falante para produzir som é esboçada na Fig. 2.29. O ímã permanente estabelece um campo magnético radial nas lacunas entre os polos do ímã, entreferro. A

**Figura 2.28** Amp-op integrador.

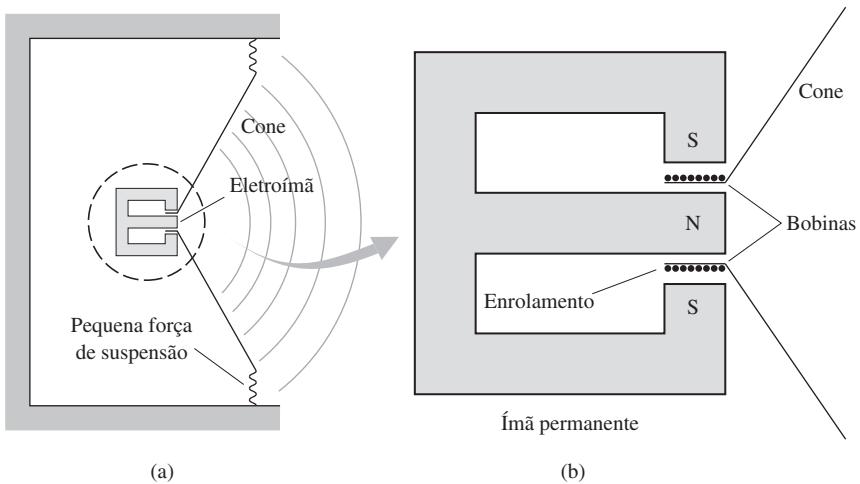


Figura 2.29 Geometria de um alto-falante: (a) configuração geral; (b) bobina eletromagnética.

corrente elétrica que percorre as bobinas do entreferro causará um campo magnético na bobina, que irá interagir com o campo magnético do imã permanente, criando uma reação de atração ou repulsão, produzindo o som.⁷ Os efeitos do ar podem ser modelados como se o cone tivesse massa M e coeficiente de atrito viscoso b . Assuma que o imã crie um campo uniforme B de 0,5 tesla e a bobina tenha 20 enrolamentos com diâmetro de 2 cm. Escreva as equações de movimento deste dispositivo.

Solução. A corrente é perpendicular ao campo, e a força de interesse é perpendicular ao plano de i e B , de modo que a Eq. (2.43) se aplica. Neste caso, a intensidade do campo é $B = 0,5$ tesla e o comprimento do condutor é

$$l = 20 \times \frac{2\pi}{100} m = 1,26 m.$$

Assim, a força é

$$F = 0,5 \times 1,26 \times i = 0,63i \text{ N.}$$

As equações matemáticas são obtidas a partir das leis de Newton, e considerando a massa M e o coeficiente de viscosidade b , tem-se

$$M\ddot{x} + b\dot{x} = 0,63i. \quad (2.44)$$

Essa equação diferencial de segunda ordem descreve o movimento do cone do alto-falante em função da corrente de entrada i no sistema. Substituindo s por d/dt na Eq. (2.44) como antes, a função de transferência é facilmente encontrada

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{0,63/M}{s(s + b/M)}. \quad (2.45)$$

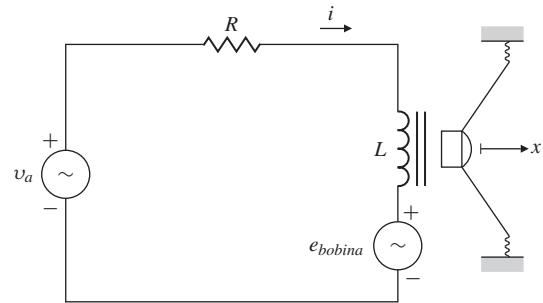
A segunda importante relação eletromecânica é o efeito do movimento mecânico na tensão elétrica. Se um condutor de comprimento l metros está se movendo em um campo magnético de B teslas a uma velocidade de v metros por segundo em ângulos retos entre si, uma tensão elétrica é estabelecida através do condutor com magnitude

$$e(t) = Blv \text{ V.} \quad (2.46)$$

Lei dos geradores

Essa expressão é chamada de **lei dos geradores**.

⁷ Bobinas também são usadas como o atuador na cabeça da unidade de leitura/escrita de um disco rígido.

Figura 2.30 Circuito de um alto-falante.**EXEMPLO 2.12** Alto-falante com circuito

Considere o alto-falante na Fig. 2.29 e o circuito na Fig. 2.30, encontre as equações diferenciais relacionando a tensão de entrada v_a com o deslocamento x do cone. Assuma que a resistência R e a indutância L sejam eficientes.

Solução. A dinâmica do alto-falante satisfaz a Eq. (2.44), e a tensão resultante nas bobinas é dada pela Eq. (2.46), com a velocidade \dot{x} . A tensão resultante é

$$e_{bobina} = Bl\dot{x} = 0,63\dot{x}. \quad (2.47)$$

Este efeito da tensão induzida deve ser adicionado à análise do circuito. A equação de movimento para o circuito elétrico é

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v_a - 0,63\dot{x}. \quad (2.48)$$

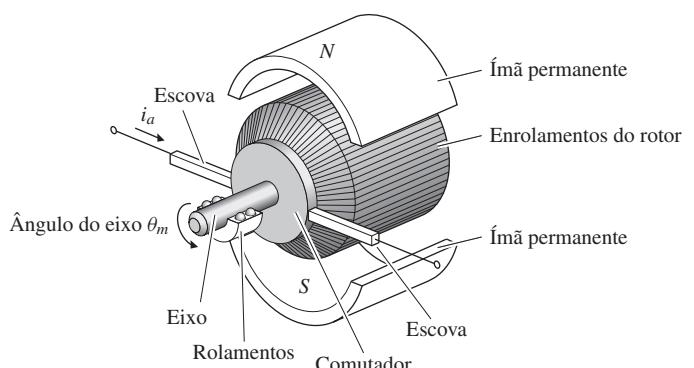
Essas duas equações acopladas, (2.44) e (2.48), constituem o modelo dinâmico para o alto-falante.

Novamente substituindo s por d/dt nessas equações, a função de transferência entre a tensão aplicada e o deslocamento do alto-falante é dada por

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{0,63}{s[(Ms + b)(Ls + R) + (0,63)^2]}. \quad (2.49)$$

Atuador de motor CC

Um atuador comum baseado nesses princípios e utilizado no controle de sistemas é o motor de corrente contínua (CC) que provê movimento rotativo. Um esboço dos componentes básicos de um motor de corrente contínua é dado na Fig. 2.31. Além da carcaça do motor e dos rolamentos, a parte estática (estator) tem ímãs, que estabelecem um campo em todo o rotor. Os ímãs podem ser eletroímãs ou, para os motores pequenos, ímãs permanentes. As escovas de contato com o comutador rotativo fazem com que a corrente sempre esteja percorrendo os enrolamentos, produzindo o torque. Se a direção da corrente for invertida, a direção do torque é invertida.

**Figura 2.31** Aspecto geral de um motor CC.

As equações do motor fornecem o torque T no rotor em termos da corrente de armadura i_a e expressam a tensão da força eletromotriz em termos da velocidade de rotação do eixo $\dot{\theta}_m$.⁸

Assim,

$$T = K_t i_a, \quad (2.50)$$

$$e = K_e \dot{\theta}_m. \quad (2.51)$$

Em unidades coerentes, a constante do torque K_t é igual à constante elétrica K_e , mas em alguns casos a constante do torque será dada em outras unidades, como a onça-polegadas por ampères, e a constante elétrica pode ser expressa em unidades de volts por 1000 rpm. Nesses casos, o engenheiro deve fazer as conversões necessárias para ter certeza de que as equações estão corretas.

Força eletromotriz

Torque

EXEMPLO 2.13 Modelando um motor de corrente contínua

Encontre as equações de um motor de corrente contínua com o circuito elétrico equivalente mostrado na Fig. 2.32 (a). Suponha que o rotor tenha momento de inércia J_m e coeficiente de atrito viscoso b .

Solução. O diagrama de corpo livre para o rotor, mostrado na Fig. 2.32(b), define o sentido positivo e mostra os dois torques aplicados, T e $b\dot{\theta}_m$. Aplicando a lei de Newton

$$J_m \ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m = K_t i_a. \quad (2.52)$$

Analisando o circuito elétrico, incluindo a força eletromotriz, temos a equação

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - K_e \dot{\theta}_m. \quad (2.53)$$

Substituindo s por d/dt nas Eqs. (2.52) e (2.53), a função de transferência para o motor é dada por

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_t}{s[(J_m s + b)(L_a s + R_a) + K_t K_e]}. \quad (2.54)$$

Em muitos casos, o efeito relativo da indutância é desprezível comparado com o movimento mecânico e pode ser desprezado na Eq. (2.53). Então, combinando as Eqs. (2.52) e (2.53) temos

$$J_m \ddot{\theta}_m + \left(b + \frac{K_t K_e}{R_a} \right) \dot{\theta}_m = \frac{K_t}{R_a} v_a. \quad (2.55)$$

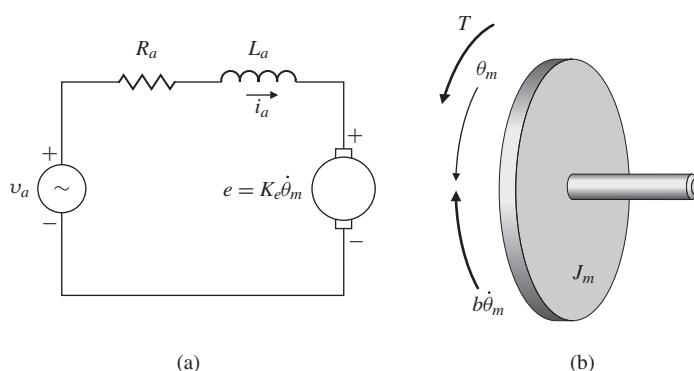


Figura 2.32 Motor de corrente contínua: (a) circuito elétrico da armadura, (b) diagrama de corpo livre do rotor.

⁸ A força eletromotriz age contra a tensão aplicada na armadura.

A partir da Eq. (2.55) fica claro que neste caso o efeito da força eletromotriz é indistinguível do atrito, e temos que a função de transferência é

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_t}{R_a}}{J_m s^2 + \left(b + \frac{K_t K_e}{R_a}\right)s} \quad (2.56)$$

$$= \frac{K}{s(\tau s + 1)}, \quad (2.57)$$

sendo

$$K = \frac{K_t}{bR_a + K_t K_e}, \quad (2.58)$$

$$\tau = \frac{R_a J_m}{bR_a + K_t K_e}. \quad (2.59)$$

Em muitos casos, a função de transferência entre a entrada do motor e a saída ($\omega = \dot{\theta}_m$) é desejada. Em tais casos, a função de transferência é

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = s \frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}. \quad (2.60)$$

Ativador de motor CA

Outro dispositivo utilizado para conversão eletromecânica de energia é o motor de indução de corrente alternada (CA) inventado por N. Tesla. A análise elementar do motor CA é mais complexa do que a do motor CC. Um conjunto típico de curvas experimentais de torque em função da velocidade para valores fixos de frequência e diferentes valores para a amplitude da tensão (senoidal) aplicada é dado na Fig. 2.33. Embora os dados na figura sejam para uma velocidade constante, eles podem ser usados para extrair as constantes do motor que irão proporcionar um modelo dinâmico para o motor. Para a análise de um problema de controle envolvendo um motor CA, como o descrito na Fig. 2.33, podemos fazer uma aproximação linear para as curvas de velocidade perto de zero em uma tensão média para obter a expressão

$$T = K_1 v_a - K_2 \dot{\theta}_m. \quad (2.61)$$

A constante K_1 representa a razão de uma mudança no torque devido a uma mudança de voltagem em velocidade zero e é proporcional à distância entre as curvas de velocidade zero.

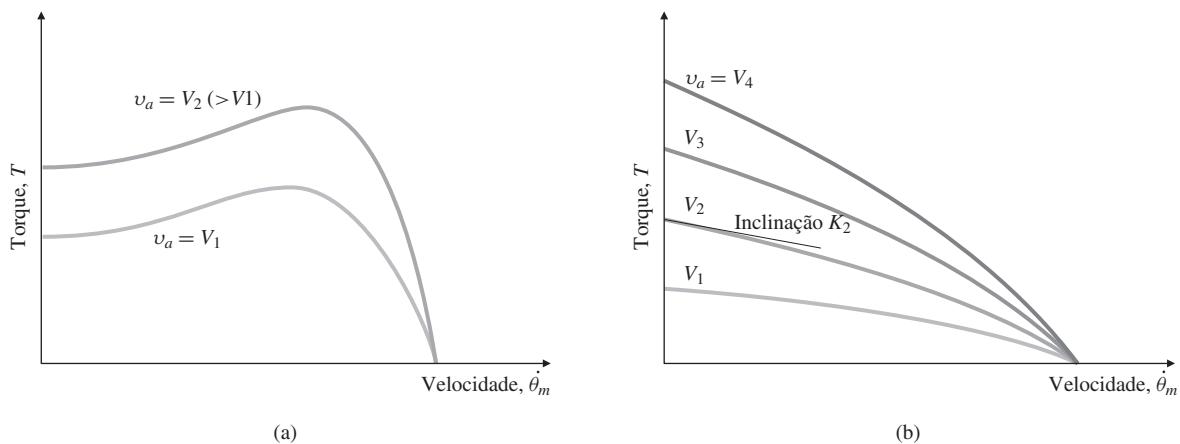


Figura 2.33 Curvas torque-velocidade para servomotor mostrando quadro amplitudes da tensão da armadura: (a) máquina com baixa resistência do rotor; (b) máquina com alta resistência do rotor mostrando quatro valores da tensão da armadura, v_a .

A constante K_2 representa a razão de uma mudança no torque devido a uma mudança de velocidade, a partir da velocidade zero, em uma tensão de média; portanto, é a inclinação de uma curva em velocidade zero, conforme mostrado pela linha de V_2 . Para a parte elétrica, os valores da resistência da armadura R_a e indutância L_a também são determinados de forma experimental. Uma vez que temos valores de K_1 , K_2 , R_a e L_a , a análise prossegue como a análise do Exemplo 2.13 para o motor CC. Para o caso em que o indutor pode ser desprezado, podemos substituir K_1 e K_2 na Eq. (2.55) no lugar de K_t/R_a e $K_t K_e/R_a$, respectivamente.

Além dos motores de corrente contínua e corrente alternada aqui mencionados, sistemas de controle usam motores de corrente contínua sem escovas (Reliance Motion Control Corp., 1980) e motores de passo (Kuo, 1980). Modelos para estas máquinas, desenvolvidos nos trabalhos acima citados, não diferem, em princípio, dos motores considerados nesta seção. Em geral, a análise, apoiada por experimentos, desenvolve o torque em função da tensão e velocidade de forma similar ao motor CA curvas torque-velocidade indicadas na Fig. 2.33. A partir de tais curvas, pode-se obter uma fórmula linear como na Eq. (2.61) para ser usada na parte mecânica do sistema e um circuito equivalente constituído por uma resistência e uma indutância para usar na parte elétrica.

△ 2.4 Modelos de sistemas fluidos e térmicos

Termodinâmica, transferência de calor e dinâmica dos fluidos são objetos de estudo de vários livros. Para fins de geração de modelos dinâmicos para utilização em sistemas de controle, o aspecto mais importante da física é representar a interação dinâmica entre as variáveis. Experimentos são geralmente necessários para determinar os valores reais dos parâmetros e, portanto, para completar o modelo dinâmico para que se possa projetar sistemas de controle.

2.4.1 Fluxo de calor

Alguns sistemas de controle envolvem a regulação da temperatura para partes do sistema. Os modelos dinâmicos de sistemas de controle de temperatura envolvem o fluxo e o armazenamento de energia térmica. O fluxo de calor através de substâncias é proporcional à diferença de temperatura na substância, isto é,

$$q = \frac{1}{R}(T_1 - T_2), \quad (2.62)$$

sendo

q = fluxo de calor, joules por segundo (J/s) ou British Termical Unit/s (BTU/s),

R = resistência térmica, $^{\circ}\text{C}/\text{J.s}$ ou $^{\circ}\text{F}/\text{BTU.s}$,

T = temperatura, $^{\circ}\text{C}$ ou $^{\circ}\text{F}$.

O fluxo de calor em uma substância afeta a temperatura da substância de acordo com a relação

$$\dot{T} = \frac{1}{C}q, \quad (2.63)$$

sendo C a capacidade térmica. Normalmente existem vários caminhos para o fluxo de calor entrar ou sair de uma substância, e q na Eq. (2.63) é a soma dos fluxos de calor obedecendo à Eq. (2.62).

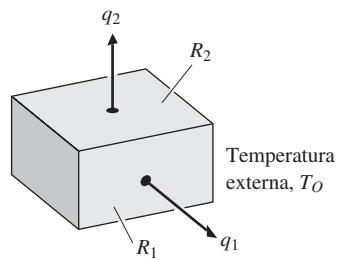
EXEMPLO 2.14 Equações para o fluxo de calor

Uma sala com todos os lados isolados, exceto dois, ($1/R=0$) é mostrada na Fig. 2.34. Encontre as equações diferenciais que determinam a temperatura da sala.

Solução. Aplicando as Eqs. (2.62) e (2.63), temos

$$\dot{T}_I = \frac{1}{C_I} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (T_O - T_I),$$

Figura 2.34 Modelo dinâmico para a temperatura na sala.



sendo

C_1 = capacidade térmica do ar dentro da sala,

T_O = temperatura externa,

T_1 = temperatura interna,

R_2 = resistência térmica do teto da sala,

R_1 = resistência térmica da parede da sala.

Normalmente, as propriedades dos materiais são apresentados em tabelas como a seguir:

Calor específico

- O calor específico a um volume constante c_v é convertido em capacidade térmica por

$$C = mc_v, \quad (2.64)$$

sendo m é a massa da substância.

Condutividade térmica

- A condutividade⁹ térmica k está relacionada com a resistência térmica R por

$$\frac{1}{R} = \frac{kA}{l},$$

sendo A a área da seção transversal e l o comprimento do caminho do fluxo de calor.

Além do fluxo devido à transferência de calor, como expresso pela Eq. (2.62), o calor também pode fluir de uma massa mais quente para uma massa mais fria ou vice-versa. Neste caso,

$$q = wc_v(T_1 - T_2), \quad (2.65)$$

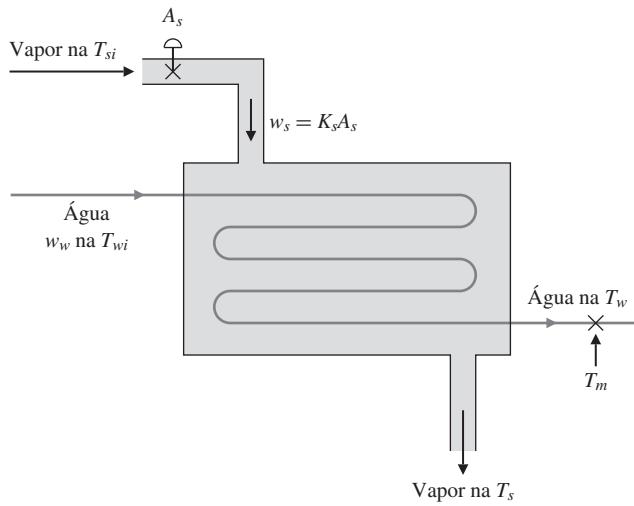
sendo w a taxa de fluxo de massa do fluido em T_1 fluindo para o reservatório em T_2 . Para uma discussão mais completa de modelos dinâmicos para sistemas de controle de temperatura, veja Cannon (1967) ou manuais de transferência de calor.

EXEMPLO 2.15 Equações para modelagem de um trocador de calor

Um trocador de calor é mostrado na Fig. 2.35. O vapor entra na câmara através da válvula de controle no topo, e o vapor mais frio deixa a câmara pela parte inferior. Há um fluxo constante de água através da tubulação que passa no meio da câmara, para que ele capte o calor do vapor. Encontre as equações diferenciais que descrevem a dinâmica da temperatura de saída do fluxo de água em função da área A_s de admissão de vapor controlada pela válvula de controle. O sensor que mede a temperatura de saída da água está abaixo da saída do cano, assim, a temperatura é medida com um atraso de t_d segundos.

Solução. A temperatura da água na tubulação irá variar continuamente ao longo da tubulação quando o calor fluir a partir do vapor para a água. A temperatura do vapor também irá reduzir na câmara quando passar pelo labirinto de tubos. Um modelo preciso para este processo térmico é, portanto, bastante complexo, pois a transferência de calor real do vapor para a água

⁹ No caso de isolamento de casas, a resistência é dada em valores de R ; por exemplo, $R-11$ se refere a uma substância que tem uma resistência ao fluxo de calor equivalente à que é dada por uma madeira sólida de 11 polegadas.

**Figura 2.35** Trocador de calor.

será proporcional à temperatura local de cada fluido. Para muitas aplicações de controle, não é necessário ter um modelo com grande precisão, porque a realimentação irá corrigir uma quantidade considerável de erro no modelo. Portanto, faz sentido combinar as temperaturas variando espacialmente nas temperaturas T_s e T_w para a saída de vapor e água, respectivamente. Em seguida, assumimos que a transferência de calor do vapor para a água é proporcional à diferença destas temperaturas, como dado pela Eq. (2.62). Há também um fluxo de calor para a câmara a partir da admissão de vapor, que depende do fluxo de vapor e de sua temperatura, de acordo com a Eq. (2.65),

$$q_{in} = w_s c_{vs} (T_{si} - T_s),$$

sendo

- $w_s = K_s A_s$, fluxo de massa de vapor,
- A_s = área de admissão de vapor na válvula,
- K_s = coeficiente do fluxo de admissão da válvula,
- c_{vs} = calor específico do vapor,
- T_{si} = temperatura de entrada do vapor,
- T_s = temperatura de saída do vapor.

O fluxo de calor líquido na câmara é a diferença entre o calor do vapor quente de entrada e o calor que flui para fora da água. Este fluxo líquido determina a taxa de mudança de temperatura do vapor de acordo com a Eq. (2.63),

$$C_s \dot{T}_s = A_s K_s c_{vs} (T_{si} - T_s) - \frac{1}{R} (T_s - T_w), \quad (2.66)$$

sendo

- $C_s = m_s c_{vs}$ a capacidade térmica do vapor na câmara com massa m_s ,
- R = a resistência térmica média do fluxo de calor em toda a câmara.

Da mesma forma, a equação diferencial que descreve a temperatura da água é

$$C_w \dot{T}_w = w_w c_{cw} (T_{wi} - T_w) + \frac{1}{R} (T_s - T_w), \quad (2.67)$$

sendo

- w_w = fluxo de massa da água,
- c_{cw} = calor específico da água,

T_{wi} = temperatura da água entrando,
 T_w = temperatura da água saindo.

Para completar a dinâmica, o retardo no tempo entre a medição e o fluxo de saída é descrito pela relação

$$T_m(t) = T_w(t - t_d), \quad (2.67) \text{ a}$$

sendo T_m a temperatura medida na água de saída e t_d o tempo de atraso. Também pode haver um retardo na medição da temperatura T_s de vapor, o que seria modelado da mesma maneira.

A equação (2.66) é não linear porque T_s é multiplicado pela entrada de controle A_s . A equação pode ser linearizada em torno de T_{so} (um valor específico de T_s) para que $T_{si} - T_s$ seja assumido como constante para a aproximação do termo não linear, que será definido como ΔT_s . A fim de eliminar o termo T_{wi} na Eq. (2.67), é conveniente medir todas as temperaturas em termos do desfasamento em graus de T_{wi} . As equações resultantes são, então,

$$\begin{aligned} C_s \dot{T}_s &= -\frac{1}{R} T_s + \frac{1}{R} T_w + K_s c_{vs} \Delta T_s A_s, \\ C_w \dot{T}_w &= -\left(\frac{1}{R} + w_w c_{vw}\right) T_w + \frac{1}{R} T_s, \\ T_m &= T_w(t - t_d). \end{aligned}$$

Embora o retardo no tempo não seja uma não linearidade, veremos no Capítulo 3 que, operacionalmente, $T_m = e^{-t_d s} T_w$. Portanto, a função de transferência do trocador de calor tem a forma

$$\frac{T_m(s)}{A_s(s)} = \frac{K e^{-t_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}. \quad (2.68)$$

2.4.2 Fluxo de fluido incompressível

Escoamento de fluido é comum em muitos componentes de sistemas de controle. Um exemplo é o atuador hidráulico, que é usado extensivamente em sistemas de controle, pois pode fornecer uma grande força, com baixa inércia e baixo peso. Ele é frequentemente usado para o controle aerodinâmico de superfícies de aviões, para mover a articulação em equipamentos de terraplenagem, em tratores e implementos agrícolas, em máquinas de limpeza de neve e para mover braços de robôs.

As relações físicas que regem o fluxo de fluidos são a continuidade, equilíbrio de força e resistência. A relação de continuidade é simplesmente uma relação de conservação da matéria, isto é,

$$\dot{m} = w_{in} - w_{out}, \quad (2.69)$$

sendo

m = massa do fluido dentro de uma específica parte do sistema,

w_{in} = taxa de fluxo de massa de entrada em uma específica parte do sistema,

w_{out} = taxa de fluxo de massa de saída em uma específica parte do sistema

EXEMPLO 2.16 Equações para descrever a altura da água em um tanque

Determine as equações diferenciais que descrevam a altura da água no tanque apresentado na Fig. 2.36.

Solução. Aplicando a Eq. (2.69), temos

$$\dot{h} = \frac{1}{A\rho} (w_{in} - w_{out}), \quad (2.70)$$

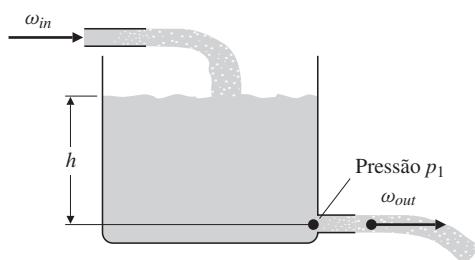


Figura 2.36 Exemplo de tanque de água.

sendo

$$\begin{aligned}A &= \text{área do tanque}, \\ \rho &= \text{densidade da água}, \\ h &= m/A\rho = \text{altura da água}, \\ m &= \text{massa da água no tanque}.\end{aligned}$$

O equilíbrio de forças deve aplicar-se exatamente como descrito pela Eq. (2.1) para sistemas mecânicos. Às vezes, em sistemas de fluxo de fluido, alguma força resulta da pressão do fluido agindo em um pistão. Neste caso, a força do fluido é

$$f = pA, \quad (2.71)$$

sendo

$$\begin{aligned}f &= \text{força}, \\ p &= \text{pressão do fluido}, \\ A &= \text{área na qual o fluido age}.\end{aligned}$$

EXEMPLO 2.17 Modelando um pistão hidráulico

Determine a equação diferencial que descreve o movimento do pistão mostrado na Fig. 2.37, dado que há uma força F_D atuando sobre ele e uma pressão na câmara p .

Solução. As Eqs. (2.1) e (2.71) se aplicam diretamente, sendo que as forças incluem a pressão do líquido e as forças aplicadas. O resultado é

$$M\ddot{x} = Ap - F_D,$$

sendo

$$\begin{aligned}A &= \text{área do pistão}, \\ p &= \text{pressão na câmara}, \\ M &= \text{massa do pistão}, \\ x &= \text{posição do pistão}.\end{aligned}$$

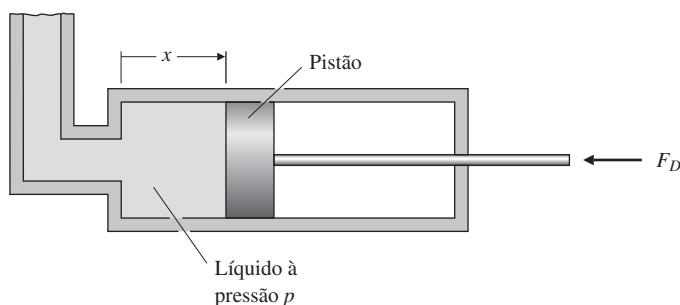


Figura 2.37 Pistão hidráulico.

Em muitos problemas de fluxo de fluidos, o fluxo é resistido tanto por uma compressão no caminho quanto pelo atrito. A forma geral do efeito da resistência é dada por

$$w = \frac{1}{R}(p_1 - p_2)^{1/\alpha}, \quad (2.72)$$

sendo

w = taxa do fluxo de massa,

p_1, p_2 = pressões nas extremidades do caminho pelo qual o fluxo está correndo,

R, α = constantes cujos valores dependem do tipo de restrição.

Ou, como é mais comumente usado em hidráulica,

$$Q = \frac{1}{\rho R}(p_1 - p_2)^{1/\alpha}, \quad (2.73)$$

sendo

Q = taxa do fluxo de volume, sendo $Q = w/p$,

p = densidade do fluido.

A constante α assume valores entre 1 e 2. O valor mais comum é de aproximadamente 2 para elevadas taxas de fluxo (aqueles que têm um número de Reynolds $Re > 10^5$) através de tubos, restrições ou bicos. Para fluxos muito lentos através de longos canos ou tampões porosos onde o fluxo permanece laminar ($Re \lesssim 1000$), $\alpha = 1$. As taxas de fluxo entre esses dois extremos estão relacionadas a valores intermediários de α . O número de Reynolds indica a importância relativa das forças iniciais e forças viscosas no fluxo. É proporcional à velocidade de um material e à densidade e ao tamanho de uma restrição, e é inversamente proporcional à viscosidade. Quando Re é pequeno, as forças viscosas predominam e o fluxo é laminar. Quando Re é grande, as forças de inércia predominam e o fluxo é turbulento.

Note que o valor de $\alpha = 2$ indica que o fluxo é proporcional à raiz quadrada da diferença de pressão e, portanto, irá produzir uma equação diferencial não linear. Para os estágios iniciais de análise e projeto de sistemas de controle, é normalmente muito útil linearizar as equações de modo que as técnicas de projeto descritas neste livro possam ser aplicadas. Linearização envolve a seleção de um ponto de operação, e a não linearidade é visualizada como uma pequena perturbação neste ponto.

EXEMPLO 2.18 Linearização da altura e vazão de um tanque

Encontre a equação diferencial não linear que descreve a altura de água no tanque na Fig. 2.36, assuma $\alpha = 2$. Também obtenha uma equação linearizada no ponto de operação h_o .

Solução. Aplicando a Eq. (2.72), resulta que o fluxo de saída de água no tanque em função da altura da água é

$$w_{out} = \frac{1}{R}(p_1 - p_a)^{1/2}. \quad (2.74)$$

sendo

$p_1 = \rho gh + p_a$, pressão hidrostática,

p_a = pressão ambiente do lado de fora da restrição.

Substituindo a Eq. (2.74) na Eq. (2.70), chegamos à equação diferencial não linear para a altura:

$$\dot{h} = \frac{1}{A\rho} \left(w_{in} - \frac{1}{R} \sqrt{p_1 - p_a} \right). \quad (2.75)$$

A linearização envolve a seleção do ponto de operação $p_o = \rho g h_o + p_a$ e substituindo $p_1 = p_o + \Delta p$ na Eq. (2.74). Então, expandindo o termo não linear de acordo com a relação

$$(1 + \varepsilon)^\beta \cong 1 + \beta\varepsilon, \quad (2.76)$$

sendo $\varepsilon \ll 1$. A Eq. (2.74) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} w_{out} &= \frac{\sqrt{p_o - p_a}}{R} \left(1 + \frac{\Delta p}{p_o - p_a} \right)^{1/2} \\ &\cong \frac{\sqrt{p_o - p_a}}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p_o - p_a} \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

A aproximação de linearização feita na Eq. (2.77) é válida enquanto $\Delta p \ll p_o - p_a$, ou seja, enquanto as variações de pressão do sistema a partir do ponto de operação escolhido forem relativamente pequenas.

Combinando as Eqs. (2.70) e (2.77) é obtida a seguinte equação de movimento linearizada para o nível de água no tanque:

$$\Delta \dot{h} = \frac{1}{A\rho} \left[w_{in} - \frac{\sqrt{p_o - p_a}}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p_o - p_a} \right) \right].$$

Devido a $\Delta p = \rho g \Delta h$, essa equação se reduz a

$$\Delta \dot{h} = -\frac{g}{2AR\sqrt{p_o - p_a}} \Delta h + \frac{w_{in}}{A\rho} - \frac{\sqrt{p_o - p_a}}{\rho AR}, \quad (2.78)$$

sendo uma equação diferencial linear para $\Delta \dot{h}$. O ponto de operação não é um ponto de equilíbrio porque é necessário uma entrada de controle para mantê-lo. Em outras palavras, quando o sistema estiver no ponto de operação ($\Delta h = 0$) sem entrada ($w_{in} = 0$), o sistema sairá desse ponto, porque $\Delta \dot{h} \neq 0$. Então, se não há água fluindo para o tanque, o tanque drenará, movendo-a, assim, a partir do ponto de referência. Para definir um ponto de operação, que é também um ponto de equilíbrio, temos de exigir que haja uma vazão nominal,

$$\frac{w_{in_0}}{A\rho} = \frac{\sqrt{p_o - p_a}}{\rho AR},$$

e definir o fluxo de entrada linear como sendo uma perturbação desse valor.

Atuadores hidráulicos obedecem às mesmas relações fundamentais que vimos no tanque de água: a continuidade [Eq. (2.69)], a força de equilíbrio [Eq. (2.71)] e a resistência do fluxo [Eq. (2.72)]. Embora o desenvolvimento feito assuma que o fluido é perfeitamente incompreensível, de fato, o fluido hidráulico tem alguma compressibilidade. Esta característica faz com que atuadores hidráulicos tenham alguma ressonância, porque a compressibilidade do fluido age como uma mola. Esta ressonância limita a velocidade de resposta.

Atuadores hidráulicos

EXEMPLO 2.19 Modelando um atuador hidráulico

- Encontre as equações diferenciais não lineares relacionando o movimento θ da superfície de controle com o deslocamento de entrada x da válvula para o atuador hidráulico mostrado na Fig. 2.38.
- Encontre a aproximação linear para as equações de movimento quando $y = \text{constante}$, com e sem uma carga aplicada – isto é, quando $F \neq 0$ e quando $F = 0$. Suponha que o movimento θ é pequeno.

Solução

- Equações de movimento:** Quando a válvula está em $x = 0$, ambas as passagens estão fechadas e não há movimento resultante. Quando $x > 0$, como mostrado na Fig. 2.38, o óleo

flui no sentido horário e o pistão é forçado para a esquerda. Quando $x < 0$, o líquido flui no sentido anti-horário. O óleo fornecido em alta pressão, p_s , entra pelo lado *esquerdo* da câmara do pistão, forçando o pistão para a direita. Isso faz com que o óleo fluia para fora da câmara pelo canal mais à direita.

Assumindo que o fluxo através do orifício formado pela válvula é proporcional a x , isto é

$$Q_1 = \frac{1}{\rho R_1} (p_s - p_1)^{1/2} x. \quad (2.79)$$

Similarmente,

$$Q_2 = \frac{1}{\rho R_2} (p_2 - p_e)^{1/2} x. \quad (2.80)$$

Pela relação de continuidade,

$$A \dot{y} = Q_1 = Q_2, \quad (2.81)$$

sendo

$$A = \text{área do pistão}$$

O equilíbrio de forças no pistão fornece

$$A(p_1 - p_2) - F = m \ddot{y}, \quad (2.82)$$

sendo

m = massa do pistão e da haste em anexo,

F = força aplicada pela haste do pistão para controlar a superfície anexada.

Ademais, com o equilíbrio de momentos da superfície de controle anexada, usando a Eq. (2.14), temos,

$$I \ddot{\theta} = Fl \cos \theta - F_a d, \quad (2.83)$$

sendo

I = momento de inércia da superfície de controle do anexo na dobradiça,

F_a = carga aerodinâmica aplicada.

Para resolver este conjunto de cinco equações, é necessário considerar a seguinte relação cinemática entre θ e y :

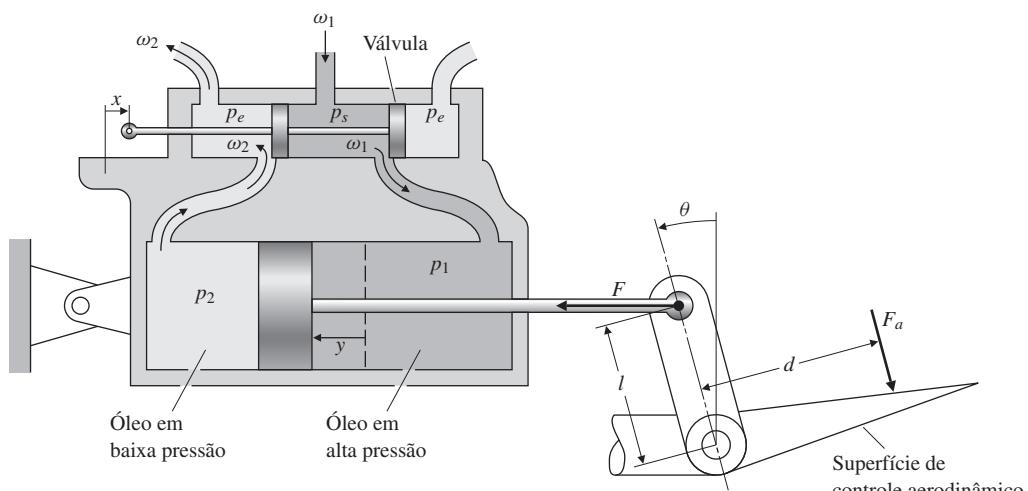


Figura 2.38 Atuador hidráulico com válvula.

$$y = l \operatorname{sen} \theta. \quad (2.84)$$

O atuador é geralmente construído de modo que a válvula exponha igualmente as duas passagens e, portanto, $R_1 = R_2$, e podemos deduzir das Eqs. (2.79) para (2.81) que

$$p_s - p_1 = p_2 - p_e. \quad (2.85)$$

Estas relações completam as equações não lineares de movimento; elas são difíceis de serem resolvidas.

- 2. Linearização e simplificação:** Para o caso em que $\ddot{y} = \text{uma constante}$ ($\ddot{y} = 0$) e que não há nenhuma carga aplicada ($F = 0$), as Eqs. (2.82) e (2.85) indicam que

$$p_1 = p_2 = \frac{p_s + p_e}{2}. \quad (2.86)$$

Portanto, usando a Eq. (2.81) e fazendo $\operatorname{sen} \theta = \theta$ (desde que θ seja assumido pequeno), temos

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{p_s - p_e}}{\sqrt{2A\rho Rl}} x. \quad (2.87)$$

Isso representa uma integração entre a entrada x e a saída θ , sendo que a constante de proporcionalidade é função somente da pressão de alimentação e dos parâmetros fixos do atuador. Para o caso $\ddot{y} = \text{constante}$, mas $F \neq 0$, as Eqs. (2.82) e (2.85) indicam que

$$p_1 = \frac{p_s + p_e + F/A}{2}$$

e

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{p_s - p_e - F/A}}{\sqrt{2A\rho Rl}} x. \quad (2.88)$$

Este resultado também é uma integração entre a entrada x e a saída θ , mas a constante de proporcionalidade agora depende da carga aplicada F .

Enquanto os valores de comando x produzirem movimento θ que tem um valor suficientemente pequeno de $\ddot{\theta}$, a aproximação dada pelas Eqs. (2.87) ou (2.88) é válida e nenhuma outra relação dinâmica linearizada é necessária. No entanto, assim que os valores de comando x produzirem acelerações em que as forças de inércia ($m\ddot{y}$ e a reação em $I\ddot{\theta}$) são frações significantes de $p_s - p_e$, as aproximações não são mais válidas. Devemos, então, incorporar essas forças nas equações, obtendo uma relação dinâmica entre x e θ que é muito mais complexa do que a integração pura implícita nas Eqs. (2.87) ou (2.88). Normalmente, para projetos de sistema de controle iniciais, assume-se que atuadores hidráulicos obedecem à simples relação das Eqs. (2.87) ou (2.88). Quando atuadores hidráulicos são usados em sistemas de controle realimentado, encontram-se ressonâncias que não são explicadas usando a aproximação, que considera o dispositivo como um simples integrador como nas Eqs. (2.87) ou (2.88). A fonte da ressonância deve-se às acelerações negligenciadas recém-discutidas e o fato de que o óleo é levemente compressível às pequenas quantidades de ar retido.

2.5 Perspectiva histórica

A segunda lei de Newton do movimento (Eq. 2.1) foi publicada pela primeira vez em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, em 1686, juntamente com suas duas outras famosas leis: a primeira – um corpo permanece em seu estado de movimento uniforme, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele – e a terceira – para cada ação, existe uma reação igual e oposta. Isaac Newton publicou sua lei da gravitação universal na mesma publicação. De acordo com essa lei, cada partícula de massa atrai todas as outras partí-

culas com uma força proporcional ao produto de suas duas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Sua base para o desenvolvimento dessas leis foi o trabalho de vários outros cientistas, combinado com o desenvolvimento do próprio cálculo, a fim de conciliar todas as observações. É surpreendente que essas leis sejam ainda hoje a base para quase todas as análises dinâmicas, com exceção do trabalho sobre efeitos relativísticos de Einstein, no início de 1900. Também é surpreendente que o desenvolvimento do cálculo de Newton tenha formado a base da nossa matemática, o que permite a modelagem dinâmica. Além de ser brilhante, ele também era muito excêntrico. Segundo Brennan, em *Heisenberg Probably Slept Here*, “Ele era visto no campus usando roupas desalinhadas com a gola suja, cabelo despenteados e sapatos desgastados. Parecia não se preocupar com nada além de seu trabalho. Estava tão focado em seus estudos que se esquecia até de comer”. Outro aspecto interessante é que Newton desenvolveu o cálculo e as leis da física, agora famosos, aproximadamente 20 anos antes de publicá-los! O incentivo para publicá-los surgiu de uma aposta entre três homens almoçando em um restaurante em 1684: Edmond Halley, Christopher Wren e Robert Hooke. Todos achavam que a caracterização elíptica do movimento planetário de Kepler poderia ser explicada pela lei do inverso do quadrado, mas ninguém havia provado isso; assim, “apostaram quem seria o primeiro a provar a conjectura”.¹⁰ Halley foi até Newton para pedir ajuda, visto que este era um matemático famoso. Newton respondeu que já tinha feito isso há muitos anos e que lhe enviaria as demonstrações. Dois anos depois, apresentou o *Principia*, descrevendo todos os detalhes.

A base para o trabalho de Newton começou com o astrônomo Nicolau Copérnico, mais de 100 anos antes do *Principia* ser publicado. Ele foi o primeiro a especular que os planetas giravam em torno do sol, em vez de todas as coisas no céu girarem em torno da Terra. Mas a noção herética de Copérnico foi largamente ignorada naquele momento, excluída pela Igreja, que proibiu sua publicação. No entanto, dois cientistas tomaram notas de sua obra: Galileu Galilei, na Itália, e Johannes Kepler, na Áustria. Kepler baseou-se em uma grande coleção de dados astronômicos tomados pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brahe e concluiu que as órbitas planetárias eram elipses, não círculos, como Copérnico havia postulado. Galileu foi um excelente construtor de telescópios e foi capaz de estabelecer claramente que a Terra não era o centro de todo o movimento, em parte porque era capaz de ver luas girarem em torno de outros planetas. Ele também fez experiências rolando bolas sobre planos inclinados, o que fortemente sugeriu que $F = ma$ (aliás, é um mito que ele tenha feito suas experiências soltando objetos do alto da Torre de Pisa). Galileu publicou sua obra em 1632, o que despertou a ira da Igreja, que decretou sua prisão domiciliar até a morte.¹¹ Apenas em 1985 a Igreja reconheceu as importantes contribuições de Galileu! Esses homens construíram as bases que Newton agregou com suas leis de movimento e da gravitação universal. Com esses princípios físicos, todas as observações se encaixaram com um referencial teórico que constituiu o que hoje é a base para a modelagem de sistemas dinâmicos.

A sequência de descobertas que levaram às leis da dinâmica que conhecemos hoje é especialmente notável quando paramos para pensar que elas eram realizadas sem um computador, uma calculadora ou mesmo uma regra de cálculos. À frente de tudo isso, Newton teve de inventar o cálculo a fim de conciliar os dados.

Após a publicação do *Principia*, Newton foi eleito ao Parlamento e recebeu honras, inclusive sendo o primeiro homem de ciência a ser nomeado cavaleiro pela rainha. Ele também se envolvia em brigas com outros cientistas com bastante regularidade e usava sua posição de poder para conseguir o que queria. Por exemplo, ele queria dados do Observatório Real, mas estes não lhe eram entregues rápido o bastante. Então, ele criou uma nova diretoria, com autoridade sobre o Observatório, e expulsou o Astrônomo Real da Royal Society. Newton também tinha outros interesses menos científicos. Muitos anos após sua morte, John Maynard Keynes descobriu que Newton gastou muito tempo com ocultismo, alquimia e trabalhos bíblicos, assim como gastou com a física.

¹⁰ Muito do conhecimento sobre Newton foi tirado de *Heisenberg Probably Slept Here*, por Richard P. Brennan, 1997. O livro discute seu trabalho e os outros cientistas que forneceram as bases para Newton.

¹¹ A vida de Galileu, suas realizações e a prisão domiciliar são muito bem descritas no livro de Dava Sobel, *Filha de Galileu*.

Mais de uma centena de anos após o *Principia* de Newton, Michael Faraday realizou uma série de experimentos e postulou a noção de linhas eletromagnéticas de forças no espaço livre. Ele também descobriu a indução (lei de Faraday), o que levou ao desenvolvimento do motor elétrico e às leis da eletrólise. Faraday nasceu em uma família pobre, praticamente não tinha escolaridade e se tornou aprendiz de encadernador aos 14 anos. Ele lia muitos dos livros que encadernava e ficou encantado por artigos científicos. Fascinado, procurou um emprego como lavador de garrafas para um famoso cientista, aprendendo muito. Mais tarde, finalmente tornou-se professor na Royal Institution em Londres. Com a falta de uma educação formal, contudo, não tinha habilidades matemáticas nem a capacidade para criar fundamentos teóricos para suas descobertas. Faraday tornou-se um famoso cientista, apesar de suas origens humildes. Depois que alcançou a fama por suas descobertas e se tornou um membro da Royal Society, o primeiro ministro perguntou-lhe por que suas invenções poderiam ser benéficas.¹² A resposta de Faraday foi “porque, primeiro ministro, algum dia você poderá taxá-las”. Contudo, naquela época, a maioria dos cientistas era abastada, assim Faraday era tratado como um cidadão de segunda classe por alguns desses cientistas. Como resultado, rejeitou a cavalaria, bem como seu sepultamento na Westminster Abbey. As observações de Faraday, juntamente com os conhecimentos em magnetismo e eletricidade de Coulomb e Ampère, levaram James Clerk Maxwell a integrar todo o conhecimento destes sobre magnetismo e eletricidade nas equações de Maxwell. Mesmo contradizendo a opinião da maioria dos cientistas de destaque da época (Faraday era uma exceção), Maxwell inventou os conceitos de campos e ondas que explicam as forças magnética e eletrostática; ele foi a chave para a criação da teoria unificadora. Embora Newton tenha descoberto o espectro da luz, Maxwell foi também o primeiro a perceber que a luz era um tipo de onda eletromagnética, e seu comportamento foi explicado pelas equações de Maxwell. Na verdade, as únicas constantes em suas equações são μ e ϵ . A constante de velocidade da luz é $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$.

Maxwell foi um matemático e físico teórico escocês. Seu trabalho tem sido chamado de segunda grande unificação da física, sendo a primeira atribuída a Newton. Maxwell nasceu em uma classe privilegiada e a ele foram dados os benefícios de uma excelente educação, em que se destacou. Na verdade, ele era um cientista teórico e experimental extremamente talentoso, bem como um homem muito generoso, com muitos amigos e pouco vaidoso. Além de unificar as observações do eletromagnetismo em uma teoria que ainda rege nossas análises de engenharia, foi o primeiro a apresentar uma explicação sobre como a luz viaja, as cores primárias, a teoria cinética dos gases, a estabilidade dos anéis de Saturno e a estabilidade dos sistemas de controle realimentado! Ele descobriu as três cores primárias (vermelho, verde e azul) que constituem a base para nossa televisão em cores. Sua teoria mostra que a velocidade da luz é uma constante, o que foi difícil de conciliar com as leis de Newton e levou Albert Einstein a criar a teoria especial da relatividade no início de 1900. Isso levou Einstein a dizer: “Uma época científica se encerrou e outra surgiu com James Clerk Maxwell”.¹³

RESUMO

A modelagem matemática de um sistema a ser controlado é o primeiro passo necessário para analisar e projetar sistemas de controle. Neste capítulo, foram desenvolvidos modelos para representar sistemas. Importantes equações para cada categoria de sistemas estão resumidas na Tabela 2.1.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. O que é “diagrama de corpo livre”?
2. Quais são as duas formas para a lei de Newton?

¹² $E = MC^2$, *A Biography of the World's Most Famous Equation*, por David Bodanis, Walker and Co., New York, 2000.

¹³ *The Man Who Changed Everything: The Life of James Clerk Maxwell*, Basil Mahon, Wiley, 2003.

TABELA 2.1 Equações-chave para modelos dinâmicos

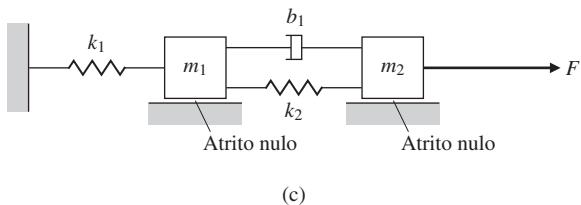
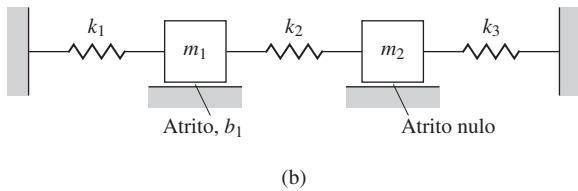
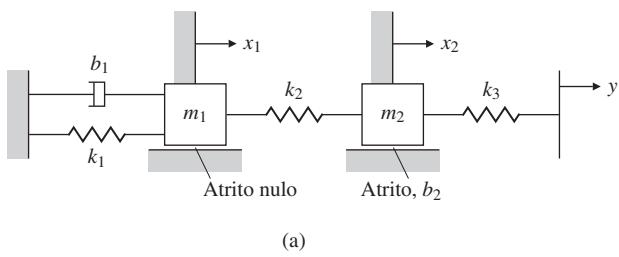
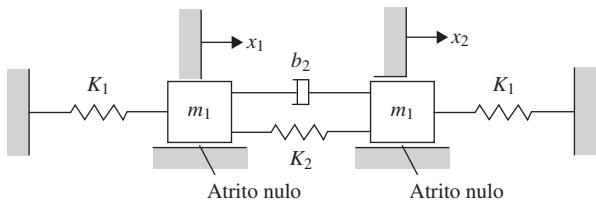
Sistema	Importantes leis e relações	Equações associadas	Equação
Mecânico	Movimento de translação (lei de Newton)	$F = ma$	(2.1)
	Movimento rotacional	$M = I\alpha$	(2.14)
Elétrico	Amplificador operacional		(2.36), (2.37)
Eletromecânico	Lei de motores	$F = Bl_i$	(2.43)
	Lei do gerador	$e(t) = Blv$	(2.46)
	Torque desenvolvido em um motor	$T = Kt\dot{a}$	(2.50)
emf	Tensão gerada como resultado da rotação do motor	$e = K_e\dot{\theta}_m$	(2.51)
Fluxo de calor	Fluxo de calor	$q = 1/R(T_1 - T_2)$	(2.62)
	Temperatura como função do fluxo de calor	$\dot{T} = 1/C_q$	(2.63)
	Calor específico	$C = mc_v$	(2.64)
Fluxo de fluido	Relação de continuidade (conservação de matéria)	$\dot{m} = w_{in} - w_{out}$	(2.69)
	Força do fluxo atuando em um pistão	$f = pA$	(2.71)
	Efeito da resistência no fluxo de fluido	$w = 1/R(p_1 - p_2)^{1/\alpha}$	(2.72)

3. Para um processo estrutural ser controlado, tal como um braço de robô, qual é o significado de “controle colado”? E “controle descolado”?
4. Qual é lei de Kirchhoff das correntes?
5. Qual é lei de Kirchhoff das tensões?
6. Quando, por que e por quem foi nomeado o dispositivo “amplificador operacional”?
7. Qual é a grande vantagem de não ter entrada de corrente em um amplificador operacional?
8. Por que é importante que o valor da resistência de armadura R_a em um motor elétrico seja pequeno?
9. Quais são as definições e unidades da constante elétrica de um motor?
10. Quais são as definições e as unidades da constante de torque de um motor elétrico?
11. Por que aproximamos o modelo físico de uma planta (que é sempre não linear) por um modelo linear?
- △ 12. Quais são as relações de
 - (a) fluxo de calor através de uma substância, e
 - (b) armazenamento de calor em uma substância?
- △ 13. Nomeie e apresente as equações para as três relações que regulam o fluxo de um fluido.

PROBLEMAS

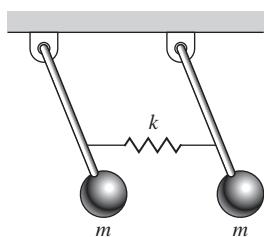
Problemas da Seção 2.1: sistemas dinâmicos mecânicos

- 2.1 Escreva as equações diferenciais para os sistemas mecânicos apresentados na Fig. 2.39. Para (a) e (b), indique se o sistema eventualmente irá enfraquecer de modo que não tenha mais movimento, uma vez que as condições iniciais não sejam nulas para ambas as massas. Justifique sua resposta.
- 2.2 Escreva a equação diferencial para o sistema mecânico apresentado na Fig. 2.40. Indique se o sistema eventualmente irá enfraquecer de modo que ele não tenha mais movimento, uma vez que as condições iniciais não sejam nulas para ambas as massas. Justifique sua resposta.
- 2.3 Escreva as equações de movimento para o sistema de pêndulo duplo mostrado na Fig. 2.41. Suponha que os ângulos de deslocamento dos pêndulos são pequenos o suficiente para garantir que a mola esteja sempre na horizontal. Assuma que as hastes do pêndulo não tenham massa, com comprimento l , e as molas são unidas a três quartos do comprimento da haste de cima para baixo.
- 2.4 Escreva as equações de movimento de um pêndulo constituído por uma fina haste suspensa por um pivô, tendo 4 kg e comprimento l . Qual o comprimento que a haste deve ter para que o período seja exatamente 2 segundos? (A inércia I de uma fina haste em torno de uma extremidade é $1/3ml^2$.)

**Figura 2.39** Sistemas mecânicos.**Figura 2.40** Sistema mecânico para o Problema 2.2.

Assuma que θ é pequeno o suficiente tal que $\theta \cong \theta$. Por que geralmente relógios antigos têm cerca de 1,8 m de altura?

- 2.5 Para a suspensão de um carro discutida no Exemplo 2.2, trace a posição do carro e da roda, após o carro bater em um “degrau na pista” (isto é, r é um degrau unitário) usando o MATLAB. Suponha que $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 350$ kg, $K_w = 500.000$ N/m, $K_s = 10.000$ N/m. Escolha o valor de b adequado, supondo que você está no carro.
- 2.6 Escreva as equações de movimento de um corpo suspenso de massa M a partir de um ponto fixo por uma mola com constante elástica k . Defina cuidadosamente onde o deslocamento do corpo é zero.
- 2.7 Fabricantes de automóveis estão contemplando a construção de sistemas de suspensão ativa. A simples mudança é fazer com que os amortecedores tenham amortecimento variável, $b(u_1)$. Também é possível fazer um dispositivo para ser colocado em paralelo com as molas que tenha a capacidade de fornecer uma força igual, u_2 , em direções opostas a do eixo da roda e do corpo do carro.

**Figura 2.41** Pêndulo duplo.

- (a) Modifique as equações de movimento no Exemplo 2.2 incluindo tais entradas de controle.
 (b) O sistema resultante é linear?
 (c) É possível usar a força u_2 para substituir o amortecedor e molas? Será uma boa ideia?

- 2.8** Modifique a equação de movimento para o sistema de controle de velocidade de cruzeiro no Exemplo 2.1, Eq. (2.4), para que ele tenha uma lei de controle; isto é,

$$u = K(v_r - v), \quad (2.89)$$

sendo

$$v_r = \text{velocidade de referência} \quad (2.90)$$

$$K = \text{constante} \quad (2.91)$$

Essa é uma lei de controle “proporcional”, em que a diferença entre v_r e a velocidade real é usada como um sinal para a velocidade do motor aumentar ou diminuir. Revise as equações de movimento, sendo v_r a entrada e v a saída e encontre a função de transferência. Assuma que $m = 1000$ kg e $b = 50$ N·s/m, e encontre a resposta para um degrau unitário na entrada, v_r , usando o MATLAB. Pelo método de tentativa e erro, encontre um valor para K que você acredita que resultaria em um sistema de controle, no qual a velocidade real converge o mais rápido possível à velocidade de referência; nenhum comportamento é condenável.

- 2.9** Em muitos sistemas de posicionamento mecânico, há flexibilidade entre uma e outra parte do sistema. Um exemplo é mostrado na Fig. 2.7, na qual existe flexibilidade nos painéis solares. A Fig. 2.42 ilustra tal situação, na qual u é uma força aplicada à massa M que está ligada a outra massa m . O acoplamento entre os objetos é frequentemente modelado por uma mola com constante k com um coeficiente de amortecimento b , embora a situação real seja geralmente muito mais complicada do que isso.
- (a) Escreva as equações de movimento que governam este sistema.
 (b) Encontre a função de transferência entre a entrada de controle u e a saída y .

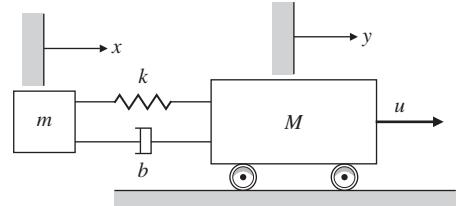


Figura 2.42 Esquema de um sistema com flexibilidade.

Problemas da Seção 2.2: modelos de circuitos elétricos

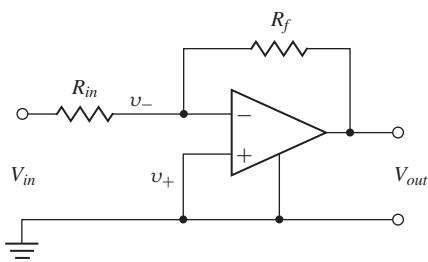
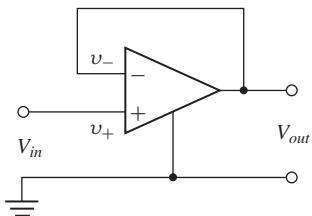
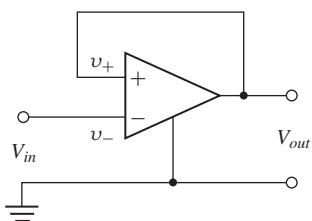
- 2.10** Um passo inicial para obter um modelo realista de um amp-op é dado pelas equações a seguir e é mostrado na Fig. 2.43:

$$V_{out} = \frac{10^7}{s+1} [V_+ - V_-],$$

$$i_+ = i_- = 0.$$

Encontre a função de transferência do circuito amplificador simples mostrado usando este modelo.

- 2.11** Mostre que a conexão do amp-op mostrado na Fig. 2.44 resulta em $V_{out} = V_{in}$ se o amp-op é ideal. Encontre a função de transferência se o amp-op tem a função de transferência não ideal do Problema 2.10.
- 2.12** Mostre que, com a função de transferência não ideal do Problema 2.10, a conexão do amp-op mostrada na Fig. 2.45 é instável.
- 2.13** Uma conexão comum para um amplificador de potência de motor é mostrada na Fig. 2.46. A ideia é que um motor de corrente contínua siga a tensão de entrada, e a conexão é chamada de amplificador de corrente. Suponha que o resistor r_s é muito pequeno comparado com o resistor R de realimentação, e encontre a função de transferência de V_{in} para I_a . Mostre também a função de transferência quando $R_f = \infty$.

**Figura 2.43** Problema 2.10, circuito elétrico.**Figura 2.44** Problema 2.11, circuito elétrico.**Figura 2.45** Problema 2.12, circuito elétrico.

2.14 Uma conexão de amp-op com realimentação tanto no terminal negativo quanto no terminal positivo é mostrada na Fig. 2.47. Se o amp-op tem a função de transferência não ideal dada no Problema 2.10, encontre o máximo valor possível para a relação de realimentação positiva, $P = \frac{r}{r+R}$, em termos da relação de realimentação negativa, $N = \frac{R_{in}}{R_{in}+R_f}$, para que o circuito permaneça estável.

2.15 Escreva as equações dinâmicas e encontre a função de transferência para os circuitos mostrados na Fig. 2.48.

- (a) Circuito passivo de avanço
- (b) Circuito ativo de avanço
- (c) Circuito ativo de atraso
- (d) Circuito passivo notch

2.16 O circuito muito flexível mostrado na Fig. 2.49 é chamado de biquad porque sua função de transferência pode ser feita como a razão de dois polinômios de segunda ordem ou quadráticos. Ao selecionar valores diferentes para R_a , R_b , R_c e R_d , o circuito realizar um filtro passa-baixa, passa-faixa, passa-altas ou rejeita faixa (notch).

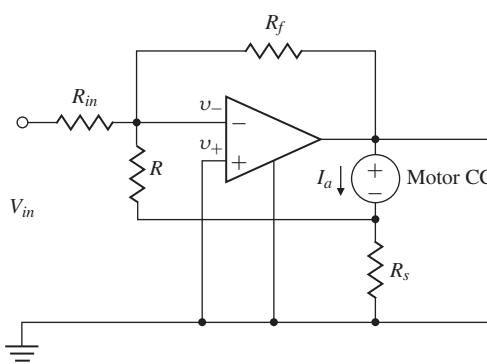
**Figura 2.46** Circuito com amp-op para o Problema 2.13.

Figura 2.47 Problema 2.14, circuito com amp-op.

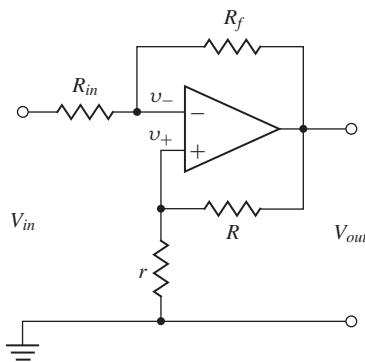
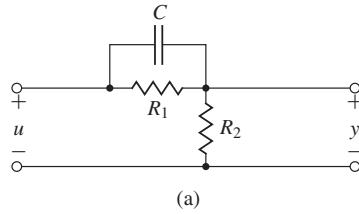
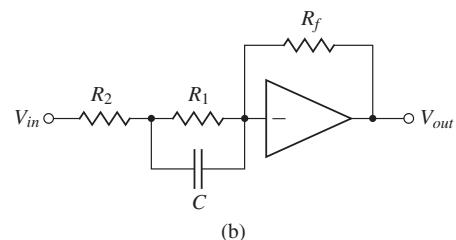


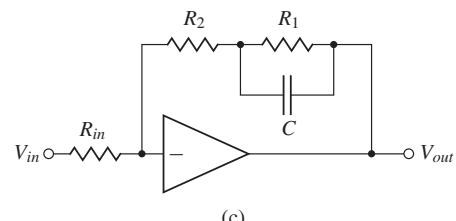
Figura 2.48 (a) Circuito passivo de avanço; (b) circuito ativo de avanço; (c) circuito ativo de atraso; e (d) circuito passivo notch.



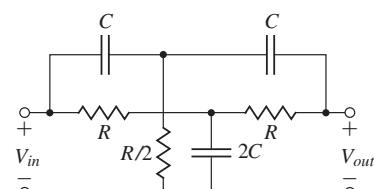
(a)



(b)



(c)



(d)

- (a) Mostre que, se $R_a = R$ e $R_b = R_c = R_d = \infty$, a função de transferência de V_{in} para V_{out} pode ser escrita como um filtro passa-baixa

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}, \quad (2.92)$$

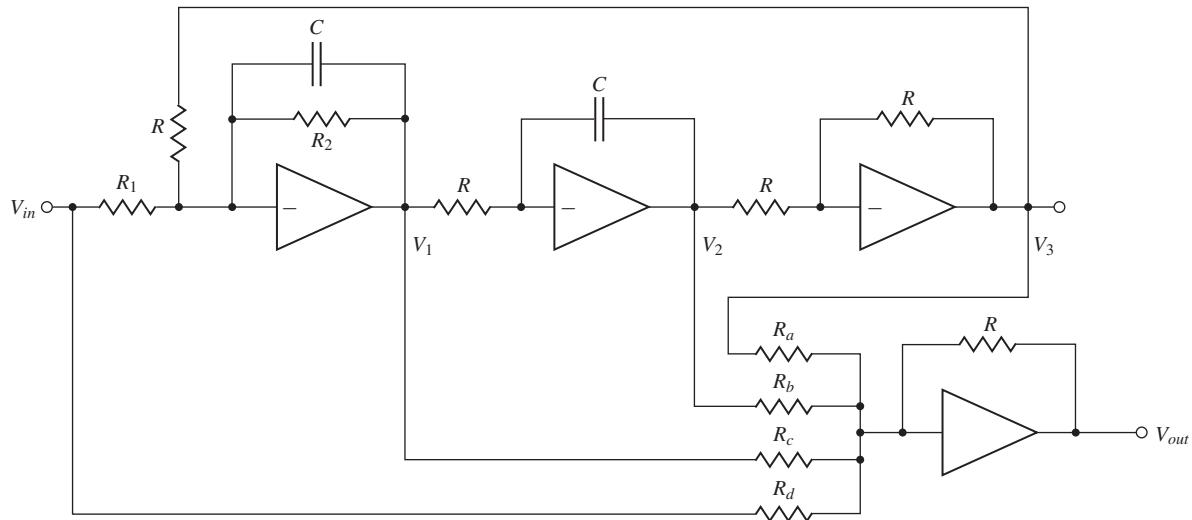


Figura 2.49 Amp-op biquad.

sendo

$$A = \frac{R}{R_1},$$

$$\omega_n = \frac{1}{RC},$$

$$\zeta = \frac{R}{2R_2}.$$

- (b) Usando o comando `step` no MATLAB, compute e trace em um mesmo gráfico as respostas temporais para o circuito biquad na Fig. 2.49 para $A = 1$, $\omega_n = 1$ e $\zeta = 0,1, 0,5$ e $1,0$.
- 2.17** Encontre as equações e a função de transferência para o circuito biquad da Fig. 2.49 se $R_a = R$, $R_d = R_1$ e $R_b = R_c = \infty$.

Problemas da Seção 2.3: modelos de sistemas eletromecânicos

- 2.18** A constante de torque de um motor é a relação do torque pela corrente e, muitas vezes, é dada em onça-polegadas por ampères. A constante elétrica de um motor é a razão da força eletromotriz pela velocidade e, muitas vezes, é dada em volts por 1000 rpm. Com unidades consistentes, as duas constantes são as mesmas para um determinado motor.
- (a) Mostre que a unidade onça-polegadas por ampère é proporcional a volts por 1000 rpm reduzindo ambas para unidades MKS (SI).
- (b) Um certo motor tem uma força eletromotriz de 25 V e 1000 rpm. Qual é a constante de torque em onça-polegadas por ampère?
- (c) Qual é a constante de torque do motor da parte (b) em newton-metros por ampère?
- 2.19** O sistema eletromecânico mostrado na Fig. 2.50 representa um modelo simplificado de um microfone. O sistema consiste em parte de um capacitor de placas paralelas conectadas a um circuito elétrico. A placa a do capacitor está rigidamente fixada à estrutura do microfone. As ondas sonoras passam através do bocal e exercem uma força $f_s(t)$ na placa de b , a qual tem massa M e está conectada à estrutura por um conjunto de molas e amortecedores. A capacitância C é função da distância x entre as placas, como segue:

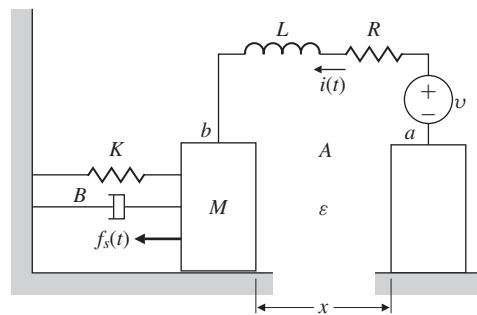
$$C(x) = \frac{\epsilon A}{x},$$

sendo

$$\epsilon = \text{constante dielétrica do material entre as placas},$$

$$A = \text{área da superfície das placas}.$$

Figura 2.50 Modelo simplificado para o microfone capacitor.



A carga q e a tensão entre as placas estão relacionadas por

$$q = C(x)e.$$

O campo elétrico, por sua vez, produz a força f_e na placa móvel que opõe seu movimento:

$$f_e = \frac{q^2}{2\epsilon A}.$$

- (a) Escreva as equações diferenciais que descrevem o funcionamento deste sistema. (A forma não linear é aceitável.)
 (b) É possível obter um modelo linear?
 (c) Qual é a saída do sistema?
- 2.20** Um motor elétrico movimentando cargas que apresentam um modo de vibração dominante é um típico problema de controle de posição eletromecânica. Este problema surge no controle da cabeça de leitura/escrita do disco rígido e em muitas outras aplicações. Um diagrama esquemático é esboçado na Fig. 2.51. O motor tem uma constante elétrica K_e , uma constante de torque K_t , uma indutância de armadura L_a , e uma resistência R_a . O rotor tem a inércia J_1 e um atrito viscoso B . A carga tem uma inércia J_2 . As duas cargas estão conectadas por um eixo que tem constante elástica k e um amortecimento viscoso equivalente b . Escreva as equações de movimento.

△ *Problemas da Seção 2.4: modelos de fluxo de calor e fluido*

- 2.21** Um sistema de nivelamento de mesas de precisão, mostrado na Fig. 2.52, depende da expansão térmica dos atuadores sob dois cantos da mesa que produzem o nivelamento, aumentando ou diminuindo seus respectivos cantos. Os parâmetros são os seguintes:

T_{at} = temperatura do atuador

T_{amb} = temperatura do ar ambiente

R_f = coeficiente do fluxo de calor entre o atuador e o ar

C = capacidade térmica do atuador

R = resistência do aquecedor

Assuma que (1) o atuador age como uma resistência elétrica pura, (2) o fluxo de calor no atuador é proporcional à entrada de potência elétrica e (3) o movimento d é proporcional à diferença entre T_{at} e T_{amb} devido à expansão térmica. Encontre as equações diferenciais relacionando a altura do atuador d versus a tensão aplicada v_i .

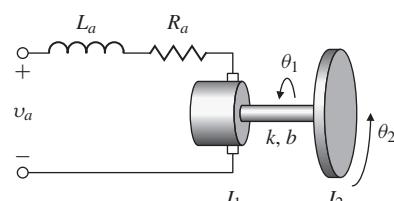


Figura 2.51 Motor com carga flexível.

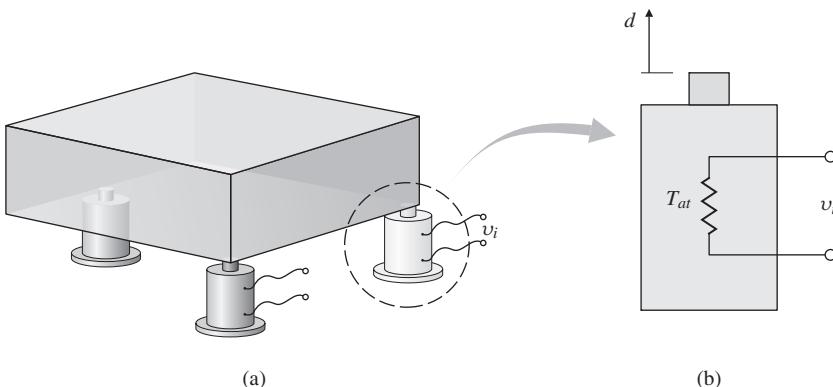


Figura 2.52 (a) Mesa de precisão mantida nivelada por atuadores; (b) vista lateral de um atuador.

- 2.22** Um condicionador de ar fornece ar frio na mesma temperatura para cada sala no quarto andar do edifício mostrado na Fig. 2.53(a). O piso plano é mostrado na Fig. 2.53(b). O fluxo de ar frio produz uma quantidade igual de fluxo de calor q para fora de cada sala. Escreva um conjunto de equações diferenciais que regem a temperatura em cada sala, sendo

T_o = temperatura externa do edifício,

R_o = resistência ao fluxo de calor através das paredes externas,

R_i = resistência ao fluxo de calor através das paredes internas.

Assuma que (1) todas as salas são quadradas, (2) não existe fluxo de calor através do teto e do piso, e (3) a temperatura é uniforme no interior de todas as salas. Utilize a simetria para reduzir o número de equações diferenciais para três.

- 2.23** Para o sistema de fluxo de fluido constituído de dois tanques mostrado na Fig. 2.54, encontre as equações diferenciais relacionando o fluxo entrando no primeiro tanque com o fluxo saindo do segundo tanque.
- 2.24** Um experimento de laboratório que estuda o fluxo de água através de dois tanques é esboçado na Fig. 2.55. Suponha que a Eq. (2.74) descreve o fluxo através dos orifícios de mesmo tamanho dos pontos A, B ou C.
- Com os orifícios em A e C, mas não em B, escreva as equações de movimento para este sistema em termos de h_1 e h_2 . Assuma que $h_3 = 20$ cm, $h_1 > 20$ cm e $h_2 < 20$ cm. Quando $h_2 = 10$ cm, o fluxo é 200 g/min.
 - Com $h_1 = 30$ cm e $h_2 = 10$ cm, encontre o modelo linearizado e a função de transferência da bomba (em centímetros cúbicos por minuto) para h_2 .
 - Repita as itens (a) e (b) assumindo que o orifício A é fechado e o orifício B é aberto.

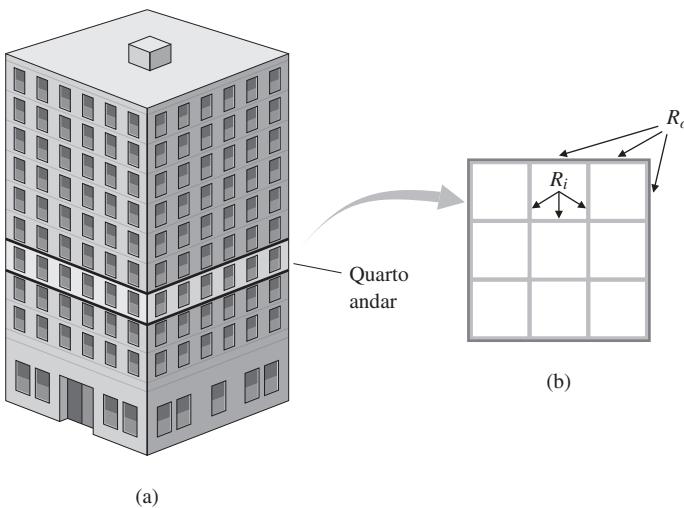


Figura 2.53 Ar condicionado do edifício: (a) edifício; (b) planta do piso do quarto andar.

Figura 2.54 Sistema de fluxo de fluido constituído de dois tanques para o Problema 2.23.

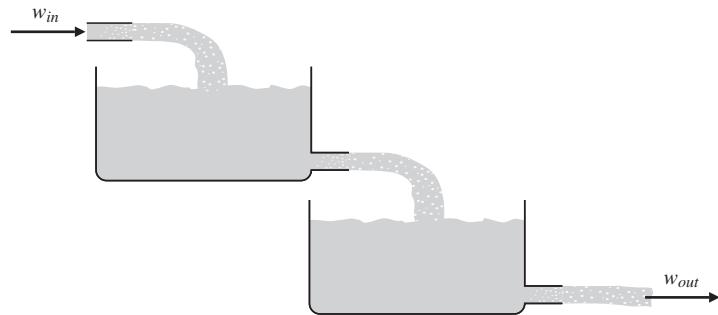
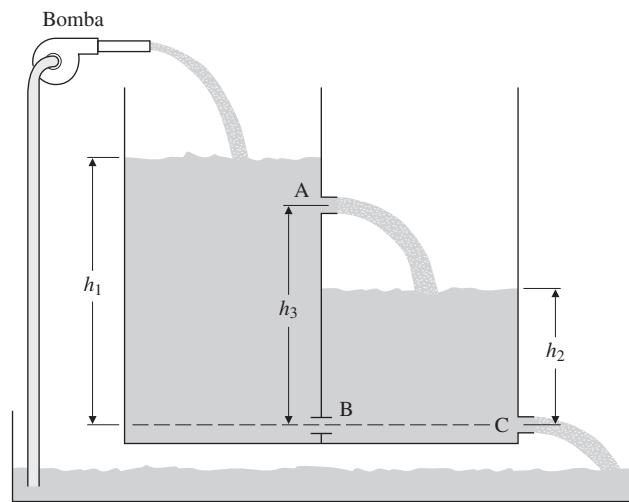


Figura 2.55 Sistema de fluxo de fluido constituído de dois tanques para o Problema 2.24.



2.25 As equações para o aquecimento de uma casa são dadas pelas Eqs. (2.62) e (2.63), e, em um caso particular, pode ser escrito com o tempo em horas, como

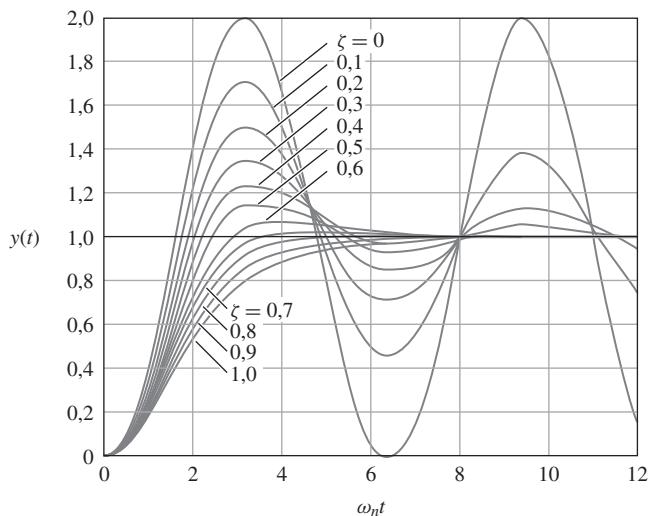
$$C \frac{dT_h}{dt} = Ku - \frac{T_h - T_o}{R},$$

onde,

- (a) C é a capacidade térmica da casa, BTU/ $^{\circ}$ F,
- (b) T_h é a temperatura na casa, $^{\circ}$ F,
- (c) T_o é a temperatura exterior a casa, $^{\circ}$ F,
- (d) K é a taxa de calor do aquecedor, 90.000 BTU/h,
- (e) R é a resistência térmica, $^{\circ}$ F por BTU/h,
- (f) u é o interruptor do aquecedor, $= 1$ se o aquecedor estiver ligado e $= 0$ se o aquecedor estiver desligado.

É medido que, com a temperatura exterior de 32° F e da casa em 60° F, o aquecedor eleva a temperatura de 2° F em seis minutos (0,1 hora). Com o aquecedor desligado, a temperatura cai 2° F na casa em 40 minutos. Quais são os valores de C e R para a casa?

Resposta Dinâmica



No Capítulo 2, vimos como obter um modelo dinâmico de um sistema. No projeto de sistemas de controle, é importante observar o quanto uma tentativa de projeto de controlador atende às especificações desejadas. Isso é feito por meio das equações do modelo do sistema.

Existem duas abordagens para resolver as equações dinâmicas. Um método rápido é uma análise *aproximada* usando técnicas de análise de sistemas lineares. Os resultados aproximados nos permitem compreender as características de certas soluções e como o sistema poderá ser alterado para modificar a resposta buscando atender a uma desejada especificação. Por outro lado, uma análise *precisa* das respostas de um sistema normalmente envolve soluções numéricas de equações dinâmicas não lineares utilizando auxílio computacional. Este capítulo foca a análise linear e ferramentas computacionais que podem ser usadas para obter a resposta temporal de sistemas lineares.

Existem três domínios nos quais estudamos as respostas de sistemas dinâmicos: **plano-s**, a **resposta em frequência** e o **espaço de estados** (análise utilizando uma descrição em espaço de estados). Um engenheiro de controle bem preparado precisa conhecer bem todos eles, sendo que eles serão tratados nos Capítulos 5, 6 e 7, respectivamente. O objetivo deste capítulo é discutir algumas ferramentas matemáticas fundamentais antes de estudarmos a análise no plano-s, no domínio da frequência e no espaço de estados.

Visão geral do capítulo

A transformada de Laplace, revisada na Seção 3.1 (e no Apêndice A), é uma ferramenta matemática para transformar equações diferenciais em uma forma algébrica mais simples de ser manipulada. Além das ferramentas matemáticas que temos ao nosso dispor, temos também ferramentas gráficas que nos ajudam a visualizar o modelo de um sistema e avaliar a pertinência entre as relações matemáticas e os elementos do sistema. Uma abordagem é o diagrama de blocos, que foi introduzido no Capítulo 1. A manipulação de diagramas de blocos é discutida na Seção 3.2 e permite determinar funções de transferência.

Uma vez que a função de transferência é determinada, podemos identificar seus polos e zeros, os quais fornecem muitas características do sistema, incluindo sua resposta em frequência introduzida na Seção 3.1. As Seções 3.3 a 3.5 focam nos polos, zeros e em algumas maneiras para manipulá-los afim de obter as características do sistema de forma desejada. Quando a reabilitação é introduzida, a possibilidade do sistema se tornar *instável* é discutida. Para estudar esse efeito, na Seção 3.6 são apresentados a definição de estabilidade e o teste de Routh, que pode determinar se um sistema é estável examinando os coeficientes da equação característica de um sistema. O desenvolvimento de um modelo baseado em dados experimentais da resposta temporal é discutido na Seção 3.7. A Seção 3.8 discute o escalonamento de amplitude e tempo. Finalmente, a Seção 3.9 fornece uma perspectiva histórica do material neste capítulo. Uma alternativa para a representação gráfica de sistemas é o gráfico de fluxo de sinais e o gráfico de fluxo, que permitem determinar complicadas funções de transferências, as quais são discutidas no material complementar W3, disponível em inglês no site do Grupo A.

3.1 Revisão das transformadas de Laplace

As duas propriedades de sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT) que formam a base para quase todas as técnicas de análise aplicadas a esses sistemas são:

1. A resposta de um sistema linear pode ser determinada aplicando o princípio de superposição.
2. A resposta de um sistema LIT pode ser expressa como a convolução da entrada com a resposta ao impulso do sistema.

Os conceitos de superposição, convolução e resposta ao impulso serão definidos em breve.

A segunda propriedade surge como resultado do fato de que a resposta de um sistema LIT à uma entrada senoidal também é senoidal (como será mostrado). Este resultado é a razão principal para o extenso uso das transformadas de Fourier e de Laplace no estudo de sistemas LIT.

3.1.1 Resposta por convolução

Superposição

O **princípio de superposição** nos diz que, se um sistema tem uma entrada que pode ser expressa como a soma de diferentes sinais, então a resposta do sistema pode ser expressa como a soma das respostas individuais a cada um dos diferentes sinais que compõem o sinal de entrada. Considere um sistema com entrada u e saída y . Suponha também que, com o sistema em repouso, é aplicada uma entrada $u_1(t)$ e observada uma saída $y_1(t)$. Depois de o sistema entrar novamente em repouso, aplica-se uma segunda entrada $u_2(t)$ e novamente observa-se a saída $y_2(t)$. Então, compomos a entrada $u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$. Finalmente, se a propriedade de superposição se aplica, então a saída do sistema resultante devido à entrada será $y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$. A propriedade da superposição pode ser aplicada se, e somente se, o sistema for linear.

EXEMPLO 3.1 Superposição

Mostre que a superposição se aplica a um sistema modelado por uma equação diferencial linear de primeira ordem

$$\dot{y} + ky = u.$$

Solução. Assumimos que a entrada $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ causa a saída $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. Então, $\dot{y} = \alpha_1 \dot{y}_1 + \alpha_2 \dot{y}_2$. Se substituirmos essas equações na equação do sistema, temos:

$$\alpha_1 \dot{y}_1 + \alpha_2 \dot{y}_2 + k(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2.$$

Assim, temos que

$$\alpha_1(\dot{y}_1 + ky_1 - u_1) + \alpha_2(\dot{y}_2 + ky_2 - u_2) = 0. \quad (3.1)$$

Se y_1 é a solução com a entrada u_1 e y_2 é a solução com a entrada u_2 , então a Eq. (3.1) é satisfeita, a resposta é a soma de respostas individuais e a propriedade da superposição é satisfeita.

Note que a superposição resultado da Eq. (3.1) também deve ser mantida caso k seja uma função do tempo. Se k for constante, dizemos que o sistema é *invariante no tempo*. Neste caso, se a entrada for atrasada ou deslocada no tempo, então a saída sofrerá o mesmo deslocamento aplicado na entrada. Matematicamente, isto é expresso dizendo que, se $y_1(t)$ é a saída causada pela entrada $u_1(t)$, então $y_1(t - \tau)$ será a resposta devido à entrada $u_1(t - \tau)$.

EXEMPLO 3.2 *Invariância no tempo*

Considere

$$\dot{y}_1(t) + k(t)y_1(t) = u_1(t) \quad (3.2)$$

e

$$\dot{y}_2(t) + k(t)y_2(t) = u_1(t - \tau),$$

sendo τ uma constante de deslocamento. Assuma que $y_2(t) = y_1(t - \tau)$; então,

$$\frac{dy_1(t - \tau)}{dt} + k(t)y_1(t - \tau) = u_1(t - \tau).$$

Fazendo a mudança de variável $t - \tau = \eta$, então

$$\frac{dy_1(\eta)}{d\eta} + k(\eta + \tau)y_1(\eta) = u_1(\eta).$$

Se $k(\eta + \tau) = k$ sendo k uma constante, então

$$\frac{dy_1(\eta)}{d\eta} + ky_1(\eta) = u(\eta),$$

a qual é igual à Eq. (3.1). Portanto, concluímos que, se o sistema é invariante no tempo, $y(t - \tau)$ será a resposta a $u(t - \tau)$; isto é, se a entrada é atrasada por τ segundos, então a saída também será atrasada por τ segundos.

Devido à propriedade de superposição, podemos obter a saída de um sistema linear resultante de um sinal de entrada geral, simplesmente decompondo o sinal de entrada em uma soma de sinais básicos e concluindo que a saída do sistema devido à entrada geral é igual à soma das saídas devidas a cada sinal básico que compõe a entrada. Para que este processo funcione, os sinais básicos precisam ser suficientemente “ricos”, de forma que qualquer sinal razoável possa ser expresso como a soma deles, e que a saída devida a estes sinais seja fácil de ser obtida. Os candidatos mais comuns para sinais básicos são o impulso unitário e uma função exponencial.

Suponha que o sinal de entrada de um sistema LIT é $u_1(t) = p(t)$, e que o sinal de saída correspondente é $y_1(t) = h(t)$, como mostrado na Fig 3.1(a). Se a entrada for escalonada para $u_1(t) = u(0)p(t)$, então, devido à propriedade de escalonamento que compõe a propriedade de superposição, a resposta será $y_1(t) = u(0)h(t)$. Também foi mostrando que um sistema LIT é

Pulso estreito

invariante no tempo. Se atrasarmos o sinal de pulso no tempo por $u_2(t) = p(t - \tau)$, então a saída será da forma $y_2(t) = h(t - \tau)$ como mostrado na Fig. 3.1(b). Pelo princípio de superposição, a resposta devido a dois pulsos será a soma da saída resultante de cada pulso, como mostrado na Fig. 3.1(c). Se considerarmos quatro pulsos como entrada, então a saída será a soma de quatro saídas individuais, como mostrado na Fig. 3.1(d). Qualquer sinal pode ser aproximado por uma série de pulsos, como mostrado na Fig. 3.2. Definindo um pulso estreito $p_\Delta(t)$ como um pulso retangular com *área unitária* tal que

$$p_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.3)$$

como mostrado na Fig. 3.1(a). Suponha que a resposta do sistema para $p_\Delta(t)$ seja definida como $h_\Delta(t)$. A resposta no tempo $n\Delta$ para $\Delta u(k\Delta)p_\Delta(k\Delta)$ é

$$\Delta u(k\Delta)h_\Delta(\Delta n - \Delta k).$$

Pela propriedade de superposição, a resposta total a uma série de pulsos estreitos no instante de tempo t é dada por

$$y(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \Delta u(k\Delta)h_\Delta(t - \Delta k). \quad (3.4)$$

Fazendo Δ tender a 0 na Eq. (3.3), o pulso estreito se torna cada vez mais estreito e alto, mantendo a *mesma área*. Então, temos o conceito de um **impulso unitário**, $\delta(t)$, o qual irá nos permitir tratar sinais de tempo contínuo. Neste caso, temos,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} p_\Delta(t) = \delta(t), \quad (3.5)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h_\Delta(t) = h(t) = \text{resposta ao impulso.} \quad (3.6)$$

Além disso, no limite quando $\Delta \rightarrow 0$, o somatório na Eq. (3.4) é substituído por uma integral

$$y(t) = \int_0^\infty u(\tau)h(t - \tau) d\tau, \quad (3.7)$$

a qual é chamada de integral de convolução.

A ideia do impulso veio da dinâmica. Suponha que desejemos estudar o movimento de uma bola de beisebol atingida por um taco. Os detalhes da colisão entre o taco e a bola podem ser muito complexos devido à deformação da bola e à curvatura do taco; entretanto, para propósito de calcular a trajetória da bola, podemos resumir o efeito da colisão como a mudança de velocidade em um intervalo de tempo muito curto. Assumimos que a bola é sujeita a um **impulso**, uma força muito intensa em um período de tempo muito curto. O físico Paul Dirac sugeriu que tal força poderia ser representada por um conceito matemático de um impulso unitário $\delta(t)$, o qual tem a propriedade

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0, \quad (3.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.9)$$

Se a função $f(t)$ é contínua no instante $t = \tau$, então ela tem a “propriedade de peneiração”.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = f(t). \quad (3.10)$$

Em outras palavras, o impulso é tão estreito e tão intenso que o valor de f só interessa no período em que δ ocorre. Como a integração é o limite de um processo somatório, a Eq. (3.10) pode ser vista como a representação de f como uma soma de impulsos. Se substituirmos f por u , então a Eq. (3.10) representa uma entrada $u(t)$ como uma soma de impulsos com intensidade $u(t - \tau)$. Para encontrar a resposta devida a uma entrada arbitrária, o princípio da superposição nos diz que precisamos somente encontrar respostas ao impulso unitário.

Resposta ao impulso**Definição de impulso****Propriedade de peneiração do impulso**

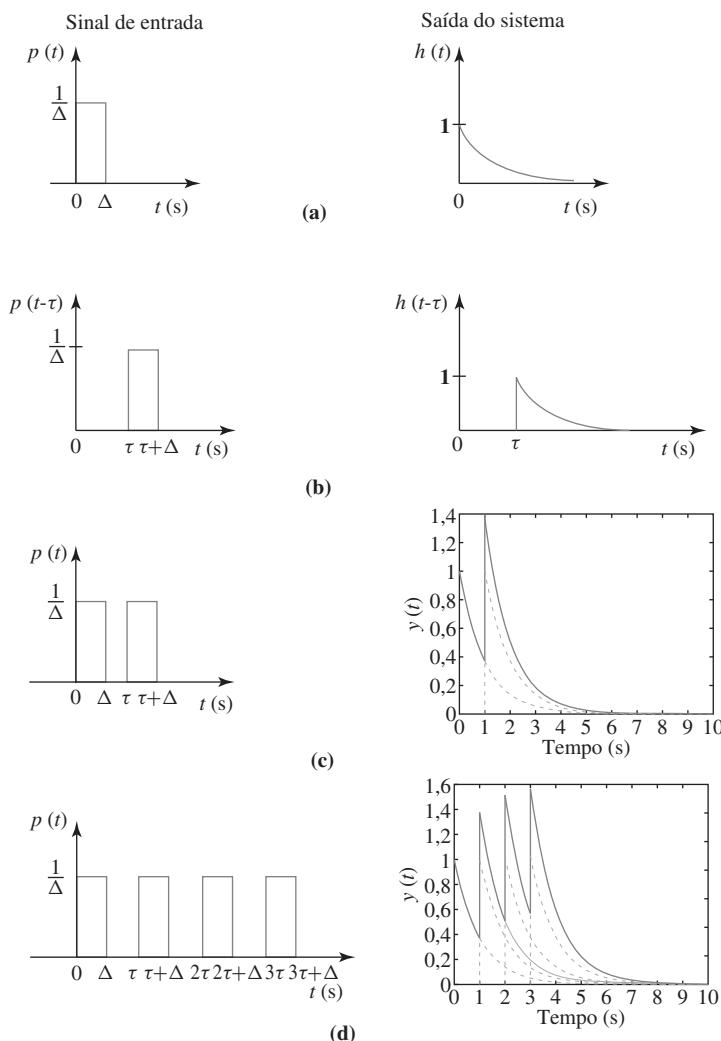


Figura 3.1 Ilustração da convolução como a resposta de um sistema a um sinal de entrada composto por uma série de pulsos estreitos (impulsos).

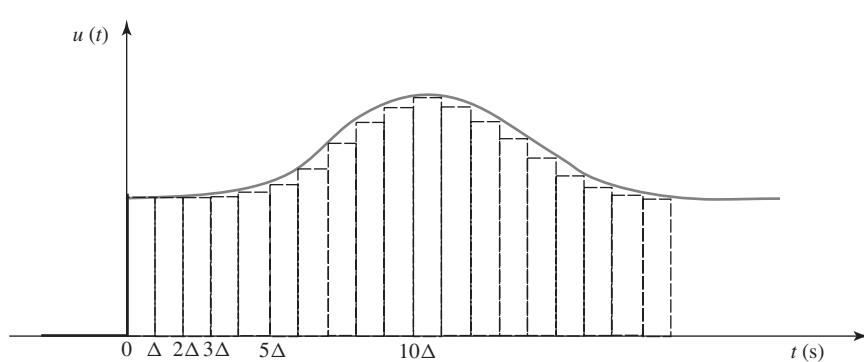


Figura 3.2 Ilustração da representação de um sinal por meio de uma soma de pulsos estreitos.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau) d\tau, \quad (3.11)$$

ou, por uma mudança de variável $\tau_1 = t - \tau$

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} u(t - \tau_1)h(\tau_1) (-d\tau_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Essa é a **integral de convolução**.

A integral de convolução

EXEMPLO 3.3 Convolução

Podemos ilustrar o processo de convolução com um simples sistema. Determine a resposta ao impulso para o sistema descrito pela equação diferencial

$$\dot{y} + ky = u = \delta(t),$$

com a condição inicial $y(0) = 0$ antes do impulso ser aplicado.

Solução. Devido a $\delta(t)$ ter efeito somente em um intervalo de tempo muito curto próximo de $t = 0$, podemos integrar esta equação de um instante logo antes de zero a até um instante logo após zero

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{y} dt + k \int_{0^-}^{0^+} y dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt.$$

A integral de \dot{y} é simplesmente y , a integral de y em um intervalo muito estreito é zero e a integral do impulso unitário neste mesmo intervalo é um. Portanto,

$$y(0^+) - y(0^-) = 1.$$

Devido ao fato de o sistema estar em repouso antes da aplicação do impulso, $y(0^-) = 0$. Assim, o efeito do impulso é $y(0^+) = 1$. Para tempo positivo, temos a equação diferencial

$$\dot{y} + ky = 0, \quad y(0^+) = 1.$$

Se assumirmos uma solução $y = Ae^{st}$, então $\dot{y} = Ase^{st}$. Logo, a equação anterior torna-se

$$\begin{aligned} Ase^{st} + kAe^{st} &= 0 \\ s + k &= 0, \\ s &= -k. \end{aligned}$$

Degrado unitário

Devido a $y(0^+) = 1$, é necessário que $A = 1$. Assim a resposta ao impulso é $y(t) = h(t) = e^{-kt}$ para $t > 0$. Devido ao fato de que $h(t) = 0$ para tempo negativo, a **função degrau unitário** é definida

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Com essa definição, a resposta ao impulso do sistema de primeira ordem torna-se

$$h(t) = e^{-kt}1(t).$$

A resposta do sistema para uma entrada geral é dada pela convolução entre este sinal e a resposta ao impulso:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau}1(\tau)u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-k\tau}u(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

3.1.2 Funções de transferência e resposta em frequência

Uma consequência imediata da convolução é que uma entrada da forma e^{st} resulta em uma saída $H(s)e^{st}$. Note que tanto a entrada quanto a saída são funções exponenciais no tempo, e que a saída difere da entrada apenas na amplitude de $H(s)$. $H(s)$ é a função de transferência do sistema. A constante s pode ser complexa, expressa como $s = \sigma + j\omega$. Assim, tanto a entrada quanto a saída podem ser complexas. Fazendo $u(t) = e^{st}$ na Eq. (3.12), então

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau} d\tau e^{st} \\ &= H(s)e^{st}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sendo¹

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau} d\tau. \quad (3.14)$$

A integral na Eq. (3.14) não precisa ser resolvida para encontrar a função de transferência de um sistema. No lugar disso, pode-se assumir uma solução na forma da Eq. (3.13) e substituindo-a na equação diferencial do sistema, assim a função de transferência é obtida.

A função de transferência pode ser formalmente definida como: a função $H(s)$, que é um ganho de transferência de $U(s)$ para $Y(s)$ – entrada para saída –, é chamada de **função de transferência** do sistema. Isto é a razão entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s), \quad (3.15)$$

com a *suposição-chave* de que a condição inicial do sistema é zero. Se a entrada $u(t)$ é um impulso unitário $\delta(t)$, então $y(t)$ é a resposta ao impulso. A transformada de Laplace de $u(t)$ é 1 e a transformada de $y(t)$ é $H(s)$ porque

$$Y(s) = H(s). \quad (3.16)$$

Em outras palavras:

A função de transferência $H(s)$ é a transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$.

Função de transferência

Função de transferência

Assim, se desejarmos caracterizar um sistema LIT, aplicamos um impulso unitário na entrada, e a saída resultante será uma representação (a transformada inversa de Laplace) da função de transferência.

EXEMPLO 3.4 Função de transferência

Encontre a função de transferência para o sistema do Exemplo 3.1 e encontre a saída y para a entrada $u = e^{st}$.

¹ Note que a entrada é exponencial para todo o tempo e que a Eq. (3.14) representa a resposta para todo o tempo. Se o sistema for causal, então $h(t) = 0$ para $t > 0$, e a integral se reduz a $H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau} d\tau$.

Solução. A equação do sistema do Exemplo 3.3 é

$$\dot{y}(t) + ky(t) = u(t) = e^{st}. \quad (3.17)$$

Assumindo que $y(t)$ seja expresso como $H(s)e^{st}$. Dessa forma, temos $\dot{y} = sH(s)e^{st}$, e a equação Eq. (3.17) torna-se

$$sH(s)e^{st} + kH(s)e^{st} = e^{st}. \quad (3.18)$$

Resolvendo a equação para $H(s)$, temos

$$H(s) = \frac{1}{s+k}.$$

Substituindo essa equação novamente na Eq. (3.13), obtemos a saída

$$y = \frac{e^{st}}{s+k}.$$

Resposta em frequência

Uma maneira muito comum de usar a resposta exponencial de sistemas LIT é encontrar a **resposta em frequência**, ou a resposta à senoide. Inicialmente, expressamos a senoide como uma soma de duas exponenciais (relação de Euler):

$$A \cos(\omega t) = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}).$$

Se fizermos $s = j\omega$ na Eq. (3.13), então a resposta para $u(t) = e^{j\omega t}$ é $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$; similarmente, a resposta para $u(t) = e^{-j\omega t}$ é $H(-j\omega)e^{-j\omega t}$. Pela propriedade de superposição, a resposta à soma destas duas funções exponenciais, que compõem o sinal cosseno, é a soma das respostas:

$$y(t) = \frac{A}{2}[H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}]. \quad (3.19)$$

A função de transferência $H(j\omega)$ é um número complexo que pode ser representado na forma polar ou na forma de magnitude e fase como $H(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, ou simplesmente $H = Me^{j\varphi}$. Então, a Eq. (3.19) torna-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{2}M \left(e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)} \right) \\ &= AM \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (3.20)$$

sendo

$$M = |H(j\omega)|, \varphi = \angle H(j\omega).$$

Isso significa que, se um sistema representado por uma função de transferência $H(s)$ tem uma entrada senoidal com magnitude A , a saída também será senoidal com a mesma frequência e com magnitude AM e terá um deslocamento de fase pelo ângulo φ .

EXEMPLO 3.5 Resposta em frequência

Considere o sistema no Exemplo 3.1, encontre a resposta ao sinal senoidal de entrada $u = A \cos(\omega t)$. Além disso,

- encontre a resposta em frequência e trace a resposta para $k = 1$,
- determine a resposta completa devido à entrada senoidal $u(t) = \sin(10t)$.

Solução. No Exemplo 3.4, a função de transferência foi obtida. Para encontrar a resposta em frequência, basta fazer $s = j\omega$, então

$$H(s) = \frac{1}{s + k} \implies H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + k}.$$

Da qual temos que

$$M = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{k}\right).$$

Portanto, a resposta do sistema a uma entrada senoidal também será senoidal

$$y(t) = AM \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.21)$$

M geralmente é chamado de **coeficiente de amplitude** e φ , de **fase**; ambos são funções da frequência, ω . O programa computacional MATLAB® é utilizado para calcular os coeficientes de amplitude e fase para $k = 1$, como mostrado na Fig. 3.3. O comando `logspace` é usado para definir a faixa de frequência (na escala logarítmica), e o comando `bode` é usado para calcular a resposta em frequência. Apresentando a resposta em frequência na escala log-log, como originalmente proposto por H. W. Bode, estes gráficos são chamados de “gráficos de Bode”² (veja o Capítulo 6, Seção 6.1).

```
k = 1;
numH = 1; % forma do numerador
denH = [1 k]; % forma do denominador
sysH = tf(numH,denH); % define o sistema usando o numerador e o denominador
w = logspace(-2,2); % define a faixa de frequência para
                      % 50 valores de w entre 10^-2 a 10^+2
[mag,phase] = bode(sysH,w); % calcula a resposta em frequência
loglog(w,squeeze(mag)); % traça o gráfico da magnitude em escala log-log
semilogx(w,squeeze(phase)); % traça o gráfico da fase em escala semi-log
```

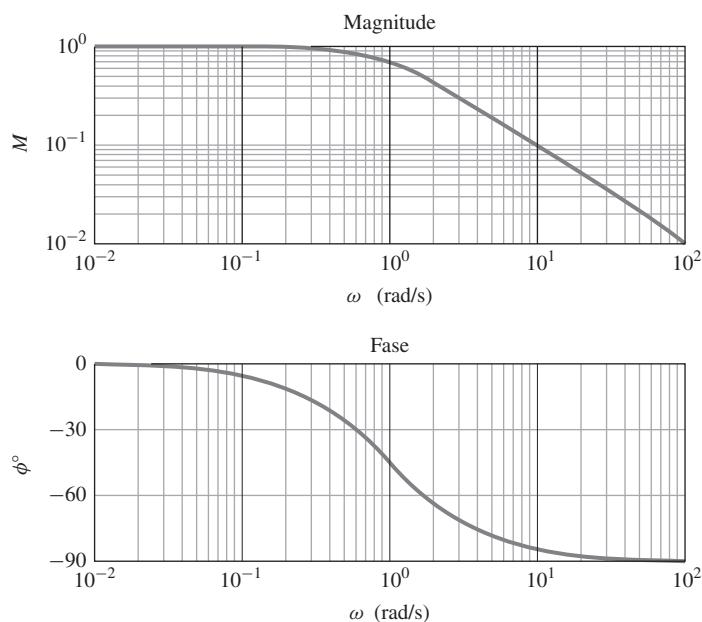


Figura 3.3 Resposta em frequência para $k = 1$.

² Note que o símbolo % no MATLAB é utilizado para fazer comentários.

Para determinar a resposta a uma entrada que inicia em $t = 0$ como $u(t) = \sin(10t)\mathbf{1}(t)$, a tabela de transformadas de Laplace (Apêndice A, Tabela A.2) pode ser utilizada, obtendo

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(10t)\} = \frac{10}{s^2 + 100},$$

na qual \mathcal{L} representa a transformada de Laplace, e a saída do sistema usando expansão em frações parciais é dada por

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)U(s) \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{10}{s^2 + 100} \\ &= \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_0}{s+j10} + \frac{\alpha_0^*}{s-j10} \\ &= \frac{\frac{10}{101}}{s+1} + \frac{\frac{j}{2(1-j10)}}{s+j10} + \frac{\frac{-j}{2(1+j10)}}{s-j10}. \end{aligned}$$

A transformada inversa de Laplace da saída é dada por (veja o Apêndice A)

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{10}{101}e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{101}} \sin(10t + \varphi) \\ &= y_1(t) + y_2(t), \end{aligned}$$

sendo

$$\varphi = \tan^{-1}(-10) = -84,2^\circ.$$

A componente $y_1(t)$ é chamada de resposta *transitória* e tende a zero ao decorrer do tempo, e a componente $y_2(t)$ é chamada de resposta em *estado estacionário* e é igual à resposta dada pela Eq. (3.21). A Figura 3.4(a) é o gráfico da resposta temporal destacando ambas as componentes (y_1, y_2) e a resposta completa (y). A frequência da saída é 10 rad/s e a diferença de fase³ da resposta em estado estacionário medida na Fig. 3.4(b) é aproximadamente $10^* \delta t = 1,47$ rad = 84,2°. A Figura 3.4(b) apresenta a defasagem de 84,2° entre a entrada e a saída. A Figura 3.4(b) apresenta também que a amplitude da saída em estado estacionário é $\frac{1}{\sqrt{101}} = 0,0995$ (i.e., a amplitude do sinal de entrada vezes a magnitude da função de transferência avaliada na frequência $\omega = 10$ rad/s).

Este exemplo ilustra que a resposta de um sistema LIT a uma senoide de frequência ω é uma senoide com a *mesma* frequência e com um coeficiente de amplitude igual à magnitude da função de transferência avaliada na frequência de entrada. Além disso, a diferença de fase entre os sinais de entrada e saída é dada pela fase da função de transferência avaliada na frequência da entrada. O coeficiente de magnitude e a diferença de fase podem ser calculados usando a função de transferência como discutido; eles podem também ser medidos experimentalmente, e facilmente, em laboratório, aplicando ao sistema uma entrada senoidal conhecida e medindo a amplitude e a fase de saída do sistema em estado estacionário. A frequência de entrada deve ser escolhida apropriadamente para se obter algumas curvas como as mostradas na Fig. 3.3.

A resposta em frequência pode ser generalizada definindo a **transformada de Laplace** do sinal $f(t)$ como

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (3.22)$$

Se aplicarmos essa definição aos sinais $u(t)$ e $y(t)$ e usarmos a integral de convolução Eq. (3.12), temos

³ A diferença de fase também pode ser determinada usando o método de Lissajous.

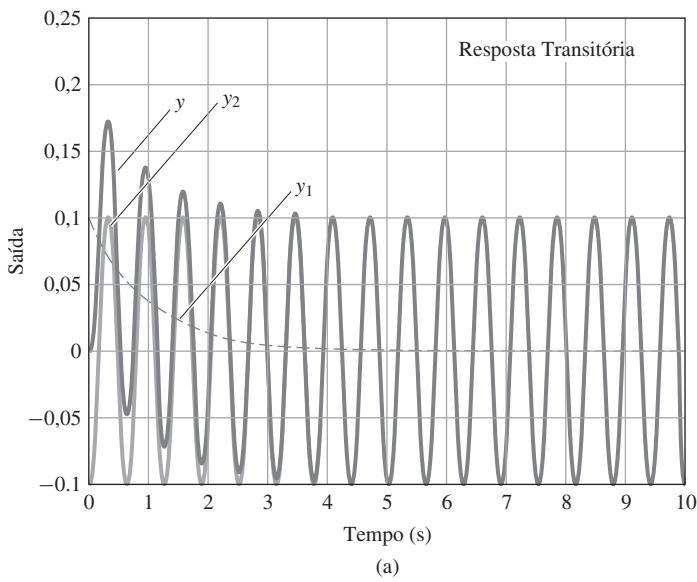
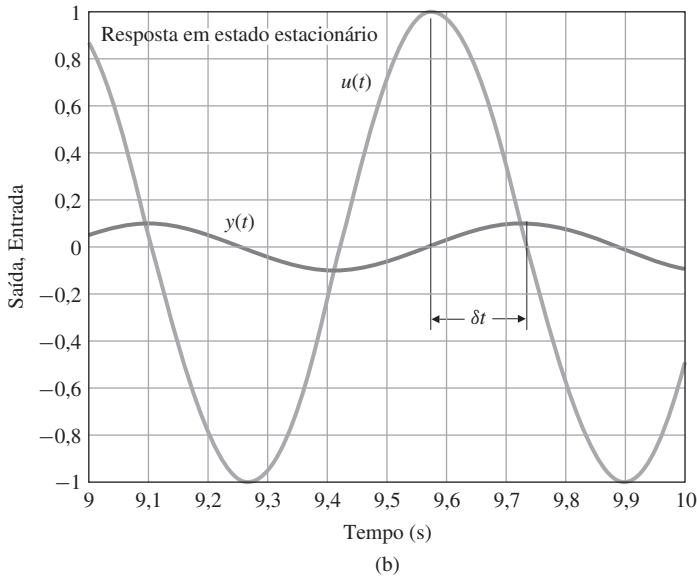


Figura 3.4 (a) Resposta transitória completa; (b) diferença de fase entre a saída e a entrada.



$$Y(s) = H(s)U(s), \quad (3.23)$$

sendo $Y(s)$ e $U(s)$ as transformadas de Laplace de $y(t)$ e $u(t)$, respectivamente. Este resultado é demonstrado no Apêndice A.

A transformada de Laplace Eq. (3.22) pode ser usada para estudar as características da resposta completa de um sistema realimentado, incluindo a **resposta transitória**, isto é, o tempo de resposta para uma condição inicial ou para um sinal aplicado subitamente. A transformada de Fourier, por outro lado, tem como foco a resposta em regime permanente. Um problema padrão em controle é encontrar a resposta $y(t)$ de um dado sistema para uma dada entrada $u(t)$. A Eq. (3.22) nos fornece um meio de obter a resposta de um sistema LIT para uma ampla variedade de sinais. Dada uma entrada e um sistema, calcula-se a transformada da entrada e a função de transferência do sistema. A transformada da saída é calculada pelo produto das transformadas da entrada e da função de transferência, conforme Eq. (3.23). Se for desejada a resposta temporal do sistema, é necessário “inverter” $Y(s)$, sendo que este processo é chamado de obter a **transformada inversa** de Laplace; este passo geralmente não é realizado. Contudo, entender o processo necessário para obter $y(t)$ de $Y(s)$ é importante, pois isto fornece compreensão sobre

Resposta transitória

características do comportamento do sistema. Portanto, dado um sistema LIT com função de transferência $H(s)$ e um sinal de entrada $u(t)$, o processo para determinar $y(t)$ usando a transformada de Laplace é dado pelos seguintes passos:

PASSO 1: Determinar a função de transferência: $H(s) = \mathcal{L}\{\text{resposta do impulso do sistema}\}$. Calcular $H(s)$ seguindo os passos:

- Obter a transformada de Laplace das equações dinâmicas do sistema. Geralmente, uma tabela de transformadas de Laplace é utilizada.
- Resolver a equação algébrica resultante. Frequentemente neste passo é desenhado o diagrama de blocos do sistema e, assim, as equações são resolvidas por meio de manipulações gráficas dos blocos ou usando o MATLAB.

PASSO 2: Determinar a transformada de Laplace do sinal de entrada: $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$.

PASSO 3: Determinar a transformada de Laplace do sinal de saída: $Y(s) = H(s)U(s)$.

PASSO 4: Reescrever $Y(s)$ usando expansão em frações parciais.

PASSO 5: Encontrar a saída do sistema usando a transformada inversa de Laplace de $Y(s)$ obtida no Passo 4, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ [i.e., invertendo $Y(s)$ é obtido $y(t)$]:

- Encontrar os componentes de $y(t)$ na tabela de pares de transformadas.
- Combinar os componentes para obter a solução total na forma desejada.

Como mencionado anteriormente, os Passos 4 e 5 geralmente não são realizados na prática, e a solução *qualitativa* modificada, em vez da solução quantitativa, é *quase sempre usada para fins de projeto de controle*. O processo se inicia com os três primeiros passos apresentados. Entretanto, no lugar de inverter $Y(s)$, pode-se usar um conhecimento a priori e a intuição sobre os efeitos da localização dos polos e zeros de $Y(s)$ na resposta $y(t)$ para estimar as características de $y(t)$. Em outras palavras, obtém-se informações de $y(t)$ avaliando os polos e zeros de $Y(s)$ sem ser necessário obter a transformada inversa de $Y(s)$.

Embora seja possível determinar as propriedades da resposta transitória de um sistema usando a Eq. (3.22), geralmente é utilizada uma versão mais simples da transformada de Laplace que é baseada em entradas que se iniciam no instante de tempo zero.

3.1.3 A transformada de Laplace unilateral \mathcal{L}_-

Em muitas aplicações, é usada a definição de **transformada de Laplace unilateral**, a qual usa 0^- (que indica um valor imediatamente antes de $t = 0$) como o limite inferior da integração na Eq. (3.22). A transformada de Laplace \mathcal{L} de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}_-\{f(t)\} = F(s)$, é uma função da variável complexa $s = \sigma + j\omega$, sendo

$$F(s) \stackrel{\Delta}{=} \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (3.24)$$

O efeito da função exponencial no integrando é fornecer um fator de convergência se $\sigma > 0$. Isto significa que mesmo se $f(t)$ não convergir a zero quando $t \rightarrow \infty$, o termo integrando convergirá para um valor de σ suficientemente grande se f não crescer com uma taxa maior que a taxa de decaimento da exponencial. O limite inferior da integração é 0^- para permitir o uso de uma função impulso unitário em $t = 0$, como ilustrado no Exemplo 3.3; entretanto, geralmente a distinção entre $t = 0^-$ e $t = 0$ na prática não é considerada. Portanto, neste livro o $t = 0^-$ será considerado apenas se a função impulso em $t = 0$ estiver envolvida ou caso esta distinção tenha valor prático.

Se a Eq. (3.24) é a transformada de Laplace unilateral, então a Eq. (3.22) é a **transformada de Laplace bilateral**⁴. A partir de agora, será usado o símbolo \mathcal{L} para indicar \mathcal{L}_- .

Tendo como base a definição formal na Eq. (3.24), podem-se verificar as propriedades da transformada de Laplace e calcular as transformadas de algumas funções no tempo contínuo

Definição da transformada de Laplace

⁴ Outra possibilidade de transformada de Laplace unilateral é \mathcal{L}_+ , que tem como o limite inferior da integral o 0^+ . Em algumas aplicações, essa transformada é utilizada.

simples. A análise de sistemas lineares por meio da transformada de Laplace geralmente envolve o uso de tabelas de propriedades e de pares de transformadas, como as fornecidas no Apêndice A. As tabelas com transformadas de Laplace de funções no domínio do tempo, juntamente com tabelas de propriedades, permitem-nos encontrar as transformadas de Laplace de sinais complexos a partir de sinais simples. Para um estudo mais detalhado das transformadas de Laplace ou para tabelas mais extensas, veja Churchill (1972) e Campbell e Foster (1948). Para o estudo da transformada bilateral, veja Van der Pol e Bremmer (1955). Estes autores mostram que funções no domínio do tempo podem ser obtidas por meio da transformada inversa de Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c - j\infty}^{\sigma_c + j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (3.25)$$

sendo que σ_c é um valor selecionado à direita de todas as singularidades de $F(s)$ no plano- s . Na prática, esta relação é raramente utilizada. Normalmente, divide-se a transformada de Laplace em partes mais simples e, assim, utilizam-se os pares de transformadas fornecidas em tabelas.

A seguir, calculamos as transformadas de Laplace de alguns sinais típicos.

EXEMPLO 3.6 Transformadas do degrau e da rampa

Encontre a transformada de Laplace das funções degrau $a1(t)$ e rampa $bt1(t)$.

Solução. Para um degrau de amplitude a , $f(t) = a1(t)$, e da Eq. (3.24) tem-se

$$F(s) = \int_0^\infty ae^{-st} dt = \left. \frac{-ae^{-st}}{s} \right|_0^\infty = 0 - \frac{-a}{s} = \frac{a}{s}, \quad \text{Re}(s) > 0.$$

Para a rampa $f(t) = bt1(t)$, novamente da Eq. (3.24), tem-se

$$F(s) = \int_0^\infty bte^{-st} dt = \left[-\frac{bte^{-st}}{s} - \frac{be^{-st}}{s^2} \right]_0^\infty = \frac{b}{s^2}, \quad \text{Re}(s) > 0,$$

para obter a equação anterior, a técnica de integração por partes foi utilizada,

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

sendo $u = bt$ e $dv = e^{-st} dt$. Pode-se estender o domínio da validade de $F(s)$ para o plano- s exceto na posição no polo, neste caso, na origem (veja o Apêndice A).

Um exemplo mais sutil é o impulso unitário.

EXEMPLO 3.7 Transformada do impulso unitário

Encontre a transformada de Laplace da função impulso unitário.

Solução. Usando a Eq. (3.24), tem-se

$$F(s) = \int_{0^-}^\infty \delta(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1. \quad (3.26)$$

Para o cálculo da transformada do impulso unitário, é necessário usar a \mathcal{L}_- no lugar de \mathcal{L}_+ .

EXEMPLO 3.8 Transformada da senoide

Encontre a transformada de uma função senoidal.

Solução. Novamente usando a Eq. (3.24), tem-se

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} \omega t\} = \int_0^\infty (\operatorname{sen} \omega t) e^{-st} dt. \quad (3.27)$$

Substituindo a relação da Eq. (D.34) do Apêndice WD (disponível em inglês no site do Grupo A),

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

na Eq. (3.27), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} \omega t\} &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^\infty \left(e^{(j\omega-s)t} - e^{-(j\omega+s)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{j\omega-s} e^{(j\omega-s)t} - \frac{1}{j\omega+s} e^{-(j\omega+s)t} \right] \Big|_0^\infty \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0. \end{aligned}$$

Pode-se estender o domínio de validade do cálculo da transformada de Laplace para todo o plano- s , exceto no polo localizado em $s = \pm j\omega$ (veja o Apêndice A).

A Tabela A.2 no Apêndice A lista as transformadas de Laplace para funções no domínio do tempo elementares. Todas as transformadas apresentadas nessa tabela foram obtidas aplicando-se a definição da transformada na Eq. (3.24), como feito nos Exemplos 3.6-3.8.

3.1.4 Propriedades da transformada de Laplace

Nesta seção, todas as propriedades significantes listadas na Tabela A.1 serão abordadas. As demonstrações dessas propriedades, os exemplos e o Teorema do Valor Inicial são apresentados no Apêndice A.

1. Superposição

Uma das propriedades mais importantes da transformada de Laplace é a linearidade:

$$\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s). \quad (3.28)$$

O escalonamento da amplitude é um caso particular da linearidade,

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\} = \alpha F(s). \quad (3.29)$$

2. Retardo no tempo

Suponha que a função $f(t)$ é atrasada por $\lambda > 0$ unidades de tempo. Então, a transformada de Laplace será

$$F_1(s) = \int_0^\infty f(t - \lambda) e^{-st} dt = e^{-s\lambda} F(s). \quad (3.30)$$

Esta relação nos mostra que um retardo no tempo λ corresponde a multiplicar a transformada por $e^{-s\lambda}$.

3. Escalonamento no tempo

Esta propriedade é algumas vezes útil para escalar no tempo equações de movimento. Por exemplo, no sistema de controle de um disco rígido, é viável medir o tempo em milisegundos

(veja o Capítulo 10). Se o tempo t é escalonado por um fator a , então a transformada de Laplace do sinal escalonado no tempo é

$$F_1(s) = \int_0^\infty f(at)e^{-st} dt = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (3.31)$$

4. Deslocamento na frequência

Multiplicação (modulação) de $f(t)$ por uma função exponencial no domínio do tempo corresponde a fazer um deslocamento na frequência:

$$F_1(s) = \int_0^\infty e^{-at} f(t) e^{-st} dt = F(s+a). \quad (3.32)$$

5. Diferenciação

A transformada de Laplace da derivada temporal do sinal é relacionada com a transformada de Laplace do sinal e com sua condição inicial:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_{0^-}^\infty \left(\frac{df}{dt}\right) e^{-st} dt = -f(0^-) + sF(s). \quad (3.33)$$

Diferenciando novamente a Eq. (3.33), obtém-se

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}\} = s^2 F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-). \quad (3.34)$$

Aplicando a diferenciação repetidamente na Eq. (3.33), tem-se

$$\mathcal{L}\{f^m(t)\} = s^m F(s) - s^{m-1} f(0^-) - s^{m-2} \dot{f}(0^-) - \dots - f^{(m-1)}(0^-), \quad (3.35)$$

sendo que $f^m(t)$ denota a m -ésima derivada temporal de $f(t)$.

6. Integração

Assumindo que se deseja determinar a transformada de Laplace da integral de uma função $f(t)$, isto é

$$F_1(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\xi) d\xi\right\} = \frac{1}{s} F(s), \quad (3.36)$$

basta dividir a transformada de Laplace de $f(t)$ por s .

7. Convolução

Foi visto anteriormente que a resposta de um sistema é determinada pela convolução da entrada com a resposta ao impulso do sistema, ou pelo produto da função de transferência do sistema pela transformada de Laplace da entrada. A discussão a seguir estende este conceito para várias funções no domínio do tempo.

Convolução no domínio do tempo corresponde à multiplicação no domínio da frequência. Assuma que $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ e $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$. Então,

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^\infty f_1(t) * f_2(t) e^{-st} dt = F_1(s)F_2(s). \quad (3.37)$$

Isso implica que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t). \quad (3.38)$$

O resultado dual a este é apresentado a seguir.

8. Produto no tempo

Multiplicação no domínio do tempo corresponde à convolução no domínio da frequência:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s). \quad (3.39)$$

9. Multiplicação pelo tempo

Multiplicação pelo tempo corresponde à diferenciação no domínio da frequência

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s). \quad (3.40)$$

3.1.5 A transformada inversa de Laplace por expansão em frações parciais

A maneira mais fácil de encontrar $f(t)$ a partir de sua transformada de Laplace $F(s)$, se $F(s)$ é racional, é expandir $F(s)$ como a soma de termos simples que podem ser encontradas em tabelas. A ferramenta básica para realizar esta tarefa é chamada de **expansão em frações parciais**. Considere a forma geral de uma função racional $F(s)$ consistindo da razão de dois polinômios:

$$F(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \cdots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}. \quad (3.41)$$

A qual pode ser expressada em termos de produto de fatores

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}. \quad (3.42)$$

A seguir, é discutido o caso de polos distintos. Para a transformada $F(s)$ representando a resposta de qualquer sistema físico, $m \leq n$. Quando $s = z_i$, s é chamado de **zero** da função, e quando $s = p_i$, s é chamado de **polo** da função. Assumindo agora que os polos $\{p_i\}$ são reais ou complexos, mas distintos, $F(s)$ pode ser reescrita por frações parciais como

$$F(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s - p_n}. \quad (3.43)$$

Agora, é determinado o conjunto de constantes $\{C_i\}$. Multiplica-se ambos os lados da Eq. (3.43) pelo fator $s - p_1$, obtendo-se

$$(s - p_1)F(s) = C_1 + \frac{s - p_1}{s - p_2} C_2 + \cdots + \frac{(s - p_1)C_n}{s - p_n}. \quad (3.44)$$

Fazendo $s = p_1$ em ambos os lados da Eq. (3.44), então todos os termos C_i serão iguais a zero, exceto o primeiro. Para este termo,

$$C_1 = (s - p_1)F(s)|_{s=p_1}. \quad (3.45)$$

Portanto, todos os coeficientes podem ser expressos de maneira similar:

$$C_i = (s - p_i)F(s)|_{s=p_i}.$$

O método de encobrimento para determinar coeficiente

Esse processo é chamado de **método de encobrimento**, porque, na forma fatorada de $F(s)$ [Eq. (3.42)], os termos no denominador desaparecem quando a expressão é avaliada em $s = p_i$, e assim determinam-se os coeficientes C_i . Depois deste processo concluído, a função no domínio do tempo torna-se

$$f(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} 1(t)$$

como pode ser verificado usando a Tabela A.2, que apresenta na linha 7 que

$$F(s) = \frac{1}{s - p_i},$$

então,

$$f(t) = e^{pt} 1(t).$$

Para o caso de fatores quadráticos ou raízes repetidas no denominador, veja o Apêndice A.

EXEMPLO 3.9 *Expansão em frações parciais: raízes reais distintas*

Suponha que $Y(s)$ tenha sido calculado como

$$Y(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+3)}.$$

Encontre $y(t)$.

Solução. Escrevendo $Y(s)$ em termos de frações parciais:

$$Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+3}.$$

Usando o método de encobrimento, tem-se

$$C_1 = \left. \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=0} = \frac{8}{3}.$$

De forma similar,

$$C_2 = \left. \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)} \right|_{s=-1} = -\frac{3}{2}$$

e

$$C_3 = \left. \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)} \right|_{s=-3} = -\frac{1}{6}.$$

Esse resultado pode ser verificado adicionando as frações parciais e constatando que a função original é recuperada. Então, usando as frações parciais obtidas e uma tabela, obtém-se

$$y(t) = \frac{8}{3} 1(t) - \frac{3}{2} e^{-t} 1(t) - \frac{1}{6} e^{-3t} 1(t).$$

A expansão em frações parciais pode ser computada usando a função residue no MATLAB:

```
num = conv([1 2],[1 4]);      % forma do polinômio no numerador
den = conv([1 1 0],[1 3]);    % forma do polinômio no denominador
[r,p,k] = residue(num,den);  % cálculo dos resíduos
```

obtendo-se o resultado

$$r = [-0.1667 \quad -1.5000 \quad 2.6667]'; \quad p = [-3 \quad -1 \quad 0]'; \quad k = [];$$

o qual também pode ser obtido por cálculos manuais. Note que a função conv no MATLAB é usada para multiplicar dois polinômios. (Os argumentos da função são os coeficientes do polinômio.)

3.1.6 Teorema do Valor Final

Uma propriedade especialmente útil da transformada de Laplace em controle é conhecida como **Teorema do Valor Final**, que nos permite calcular o valor constante de estado estacionário de uma função no domínio no tempo por meio de sua transformada de Laplace. O teorema é demonstrado utilizando-se expansão em frações parciais. Suponha que seja conhecida a trans-

formada de Laplace $Y(s)$ da função $y(t)$ e que deseja-se saber o valor final de $y(t)$ usando-se $Y(s)$. Existem três possibilidades para o limite: ele pode ser constante, indefinido ou ilimitado. Se $Y(s)$ tem polos (i.e., raízes do denominador, como descrito na Seção 3.1.5) no semiplano direito do plano- s – isto é, se a parte real de qualquer polo $p_i > 0$ –, então $y(t)$ irá crescer e o limite será indeterminado. Se $Y(s)$ tem um par de polos no eixo imaginário do plano- s (i.e., $p_i = \pm j\omega$), então $y(t)$ apresentará um comportamento oscilatório que persistirá eternamente e o valor final não poderá ser calculado. Apenas um caso pode fornecer um valor final constante e diferente de zero: se todos os polos de $Y(s)$ estiverem no semiplano esquerdo do plano- s , exceto em $s = 0$, então todos os termos de $y(t)$ irão convergir para zero, exceto o termo correspondente a um polo em $s = 0$, e este termo consiste em uma constante no tempo. Assim, o valor final é dado pelo coeficiente associado ao polo em $s = 0$. Portanto, o Teorema do Valor Final é:

0 Teorema do Valor Final

Se todos os polos de $sY(s)$ estão no semiplano esquerdo do plano- s , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s). \quad (3.46)$$

Essa relação é fornecida no Apêndice A.

EXEMPLO 3.10 Teorema do Valor Final

Encontre o valor final do sistema correspondente a

$$Y(s) = \frac{3(s+2)}{s(s^2 + 2s + 10)}.$$

Solução. Aplicando o Teorema do Valor Final, obtém-se

$$y(\infty) = sY(s)|_{s=0} = \frac{3 \cdot 2}{10} = 0,6.$$

Assim, depois dos transientes terminarem, $y(t)$ irá convergir para o valor 0,6.

Use o Teorema de Valor Final apenas em sistemas estáveis

Deve-se tomar muito cuidado ao utilizar o Teorema do Valor Final, pois ele é aplicado apenas a sistemas estáveis (veja a Seção 3.6). O uso da Eq. (3.46) em qualquer $Y(s)$, pode gerar resultados errados, como ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 3.11 Uso incorreto do Teorema do Valor Final

Encontre o valor final do sinal correspondente a

$$Y(s) = \frac{3}{s(s-2)}.$$

Solução. Aplicando-se a Eq. (3.46) de forma descuidada, obtém-se

$$y(\infty) = sY(s)|_{s=0} = -\frac{3}{2}.$$

Entretanto,

$$y(t) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{2t} \right) 1(t),$$

e a Eq. (3.46) resulta apenas em um termo constante. O valor final verdadeiro, contudo, é ilimitado.

O Teorema do Valor Final também pode ser usado para encontrar o ganho DC de um sistema. O **ganho DC** é a razão da saída de um sistema, depois que o regime transitório tenha terminado, pela sua entrada (presumido constante). Para encontrar o ganho DC, assume-se que a entrada seja um degrau unitário [$U(s) = 1/s$] e aplique-se o Teorema do Valor Final para calcular a saída em estado estacionário. Portanto, para um sistema com função de transferência $G(s)$,

$$\text{ganho DC} = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s). \quad (3.47)$$

Cálculo do ganho DC usando o Teorema do Valor Final

EXEMPLO 3.12 *Ganho DC*

Encontre o ganho DC de um sistema que tem a seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{3(s+2)}{(s^2 + 2s + 10)}.$$

Solução. Aplicando a Eq. (3.47), obtém-se

$$\text{ganho DC} = G(s)|_{s=0} = \frac{3 \cdot 2}{10} = 0,6.$$

3.1.7 Resolução de problemas com a transformada de Laplace

A transformada de Laplace pode ser usada para resolver equações diferenciais usando as propriedades descritas no Apêndice A. Primeiro, encontra-se a transformada de Laplace da equação diferencial usando a propriedade de diferenciação nas Eq. (A.12) e (A.13) no Apêndice A. Então, encontra-se a transformada de Laplace da saída; usando expansão em frações parciais e a Tabela A.2, esse resultado pode ser convertido para o domínio do tempo. A seguir, são apresentados três exemplos.

EXEMPLO 3.13 *Solução de equações diferenciais homogêneas*

Encontre a solução da equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0, \quad \text{onde } y(0) = \alpha, \dot{y}(0) = \beta.$$

Solução. Usando a Eq. (3.34), a transformada de Laplace da equação diferencial é

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - \alpha s - \beta + Y(s) &= 0, \\ (s^2 + 1)Y(s) &= \alpha s + \beta, \\ Y(s) &= \frac{\alpha s}{s^2 + 1} + \frac{\beta}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Utilizando a Tabela A.2, Apêndice A, para encontrar a transformada inversa dos dois termos do lado direito da equação anterior, temos

$$y(t) = [\alpha \cos t + \beta \sin t]1(t),$$

na qual $1(t)$ denota a função degrau unitário. Pode-se verificar que esta solução está correta substituindo-a na equação diferencial.

O exemplo a seguir ilustra a solução de uma equação diferencial não homogênea, isto é, quando o sistema é forçado.

EXEMPLO 3.14 *Solução da equação diferencial forçada*

Encontre a solução da equação diferencial $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 3$, sendo que $y(0) = \alpha$ e $\dot{y}(0) = \beta$.

Solução. Calculando a transformada de Laplace dos dois lados das Eqs. (3.33) e (3.34), temos

$$s^2Y(s) - s\alpha - \beta + 5[sY(s) - \alpha] + 4Y(s) = \frac{3}{s}.$$

Isolando $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{s(s\alpha + \beta + 5\alpha) + 3}{s(s+1)(s+4)}.$$

Aplicando a expansão em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{\frac{3}{4}}{s} - \frac{\frac{3-\beta-4\alpha}{3}}{s+1} + \frac{\frac{3-4\alpha-4\beta}{12}}{s+4}.$$

Portanto, a função no domínio do tempo é dada por

$$y(t) = \left(\frac{3}{4} + \frac{-3 + \beta + 4\alpha}{3}e^{-t} + \frac{3 - 4\alpha - 4\beta}{12}e^{-4t} \right) 1(t).$$

Diferenciando essa solução duas vezes e substituindo o resultado na equação diferencial original, verifica-se que a solução satisfaz a equação diferencial.

A solução é especialmente simples se as condições iniciais forem nulas.

EXEMPLO 3.15 Solução de equações forçadas com condições iniciais nulas

Encontre a solução de $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$, sendo $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $u(t) = 2e^{-2t}1(t)$,

1. usando expansão em frações parciais e
2. usando o MATLAB.

Solução.

1. Calculando a transformada de Laplace dos dois lados, temos

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = \frac{2}{s+2}.$$

Isolando $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)(s+4)}.$$

Utilizando o método do encobrimento para obter a expansão em frações parciais

$$Y(s) = -\frac{1}{s+2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{s+4}.$$

Portanto, a função no domínio do tempo é dada por

$$y(t) = \left(-1e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \right) 1(t).$$

2. A expansão em frações parciais também pode ser computada utilizando-se a função residue no MATLAB

```
num = 2; % forma do numerador
den = poly([-2;-1;-4]); % forma do denominador
[r,p,k] = residue(num, den); % cálculo dos resíduos
```

Obtendo o resultado

$r = [0.3333 -1 0.6667]'$; $p = [-4 -2 -1]'$; $k = []$;
o qual está de acordo com os resultados obtidos manualmente.

Uma boa vantagem preliminar do uso da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais é que ela nos fornece informações qualitativas das características do comportamento da resposta. Uma vez que conhecemos os valores dos polos de $Y(s)$, nós sabemos quais tipos de termos irão aparecer na resposta. No último exemplo, o polo em $s = -1$ resultou em um termo de decaimento na resposta $y = Ce^{-t}$. O polo $s = -4$ produziu o termo $y = Ce^{-4t}$, que tem uma taxa de decaimento maior. Se tivesse um polo em $s = +1$, existiria um termo de crescimento na resposta $y = Ce^{+t}$. Usar a localização dos polos para entender a essência de como o sistema irá responder é uma ferramenta importante que será estudada na Seção 3.3. Projetistas de sistemas de controle geralmente manipulam parâmetros do controlador para ajustar os valores dos polos de forma que estes forneçam respostas aceitáveis; além disso, eles convertem estes polos em termos da resposta temporal do sistema apenas no estágio final do projeto. Projetistas também utilizam métodos de tentativa e erro (apresentados no Capítulo 5) que representam graficamente como as mudanças nos parâmetros do controlador afetam a localização dos polos. Uma vez que o sistema de controle foi projetado, com a prevista localização dos polos para fornecer respostas aceitáveis, o projetista determina a resposta temporal para determinar se o projeto é satisfatório. Isso normalmente é feito por meio de computadores, os quais resolvem equações diferenciais utilizando métodos numéricos.

Polos indicam
características da
resposta

3.1.8 Polos e zeros

Uma função racional pode ser descrita tanto na forma de uma razão de polinômios em s ,

$$H(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \cdots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (3.48)$$

quanto em função de seus polos e zeros

$$H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}. \quad (3.49)$$

K é chamado de ganho da função de transferência. As raízes do numerador z_1, z_2, \dots, z_m são chamados de **zeros** finitos do sistema. Os zeros estão localizados no plano- s onde a função de transferência é zero. Se $s = z_i$, então

$$H(s)|_{s=z_i} = 0.$$

Zeros

Os zeros também correspondem à propriedade de bloquear a transmissão de sinais de um sistema e são chamados de zeros de transmissão do sistema. Sistemas têm a capacidade inerente de bloquear frequências que coincidem com seus zeros. Se excitarmos um sistema com uma entrada não nula, $u = u_0 e^{s_0 t}$, sendo que s_0 não é um polo do sistema, então a saída é identicamente nula⁵, $y \equiv 0$, para frequências em $s_0 = z_i$. Os zeros também têm efeito significativo nas propriedades transitórias de um sistema (veja Seção 3.5).

As raízes do denominador, p_1, p_2, \dots, p_n , são chamadas de **polos**⁶ do sistema. Os polos estão localizados no plano- s onde a magnitude da função de transferência é infinita. Se $s = p_i$, então

$$|H(s)|_{s=p_i} = \infty.$$

Polos

Os polos do sistema determinam as propriedades de estabilidade, como veremos na Seção 3.6. Além disso, eles também determinam o comportamento natural ou não forçado de um siste-

⁵ Identicamente nulo significa que a saída e todas suas derivadas são zero para $t > 0$.

⁶ O significado do polo também pode ser apreciado por uma visualização em 3D da função de transferência, na qual as partes real e imaginária de s são marcadas nos eixos x e y , e a magnitude da função de transferência é dada no eixo vertical, eixo z . Para um único polo, o gráfico resultante em 3D será parecido com uma tenda.

ma, os polos também são referenciados como os **modos** do sistema. Os polos e zeros podem ser números complexos e, assim, são representados graficamente em um plano complexo, o qual chamamos de plano- s . A localização dos polos e zeros é o “coração” do controle realimentado e tem significativa implicação prática no projeto de sistemas de controle. O sistema é dito ter $n - m$ zeros no infinito se $m < n$, porque a função de transferência aproxima de zero quando s aproxima de infinito. Se os zeros no infinito forem contados, o sistema tem o mesmo número de polos e zeros. Nenhum sistema físico pode ter $n < m$; caso contrário, ele poderá ter uma resposta infinita em $\omega = \infty$. Se $z_i = p_j$, então existem *cancelamentos* na função de transferência, o quais podem gerar propriedades indesejáveis em sistemas, como discutido no Capítulo 7.

3.1.9 Análise de sistemas lineares usando o MATLAB

O primeiro passo para analisar um sistema é escrever um conjunto de equações diferenciais no domínio do tempo que representam o comportamento dinâmico de um sistema físico. Estas equações são geradas usando as leis físicas que governam o comportamento do sistema – por exemplo, dinâmicas de um corpo rígido, mecanismos, termo-fílico e eletromecânicos, como descrito no Capítulo 2. O próximo passo na análise de sistemas é determinar e designar as entradas e saídas do sistema e, então, calcular a função de transferência caracterizando o comportamento entrada-saída do sistema dinâmico. Como foi dito neste capítulo, um sistema dinâmico linear pode também ser representado pela transformada de Laplace de suas equações diferenciais – isto é, sua função de transferência. A função de transferência pode ser expressa como a razão de dois polinômios, como na Eq. (3.48), e em função de seus polos e zeros, como na Eq. (3.49). Analisando a função de transferência, podemos determinar as propriedades dinâmicas do sistema, em ambos os sentidos, qualitativo e quantitativo. Uma maneira de extrair informações úteis de sistemas é simplesmente determinar a localização dos polos e zeros e deduzir as características essenciais das propriedades dinâmicas do sistema. Outra forma é determinar as propriedades do sistema no domínio do tempo obtendo a resposta do sistema a excitações típicas como impulsos, degraus, rampas e senoides. Outra maneira ainda é determinar a resposta temporal do sistema analiticamente, calculando sua transformada inversa de Laplace usando expansão em frações parciais e as Tabelas A.1 e A.2. É claro que também é possível determinar a resposta do sistema para uma entrada arbitrária.

Iremos ilustrar este tipo de análise utilizando cálculos já realizados no Capítulo 2 em alguns sistemas físicos para aumentar o grau de dificuldade. Iremos utilizar diferentes representações de sistemas, função de transferência, função de polos e zeros, etc., e, como ferramenta computacional, usaremos o MATLAB. O MATLAB tipicamente aceita representações de sistemas em diferentes maneiras, incluindo funções de transferência e funções de polos e zeros, e se refere a estas representações como `tf` e `zp`, respectivamente. Ademais, o MATLAB também pode converter a representação do sistema de uma forma para outra.

EXEMPLO 3.16 Função de transferência do controle de velocidade em cruzeiro usando o MATLAB

Encontre a função de transferência entre uma entrada u e a posição de um carro x no sistema de controle de velocidade em cruzeiro no Exemplo 2.1.

Solução. A partir do Exemplo 2.1, temos que a função de transferência do sistema é

$$H(s) = \frac{0s^2 + 0s + 0,001}{s^2 + 0,05s + 0} = \frac{0,001}{s(s + 0,05)}.$$

No MATLAB, fornecemos os coeficientes do numerador do polinômio como um vetor linha `num` e os coeficientes do denominador como um vetor linha `den`. Para esse exemplo, devemos fornecermos ao MATLAB

$$\text{num} = [0 \ 0 \ 0,001] \quad \text{e} \quad \text{den} = [1 \ 0,05 \ 0].$$

Estes coeficientes podem ser obtidos utilizando o MATLAB pelo comando `printsys(num, den)`. A representação em função dos polos e zeros é computada utilizando o comando

$$[z, p, k] = \text{tf2zp}(num, den)$$

e o resultado será a função de transferência na forma fatorada, sendo $z = []$, $p = [0 -0,05]'$ e $k = 0,0001$.

EXEMPLO 3.17 Função de transferência de um motor CC usando o MATLAB

No Exemplo 2.13, assumimos que $J_m = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $b = 0,001 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$, $K_t = K_e = 1$, $R_a = 10 \Omega$ e $L_a = 1 \text{ H}$. Encontre a função de transferência entre a entrada v_a e

1. a saída θ_m ,
2. a saída $\omega = \dot{\theta}_m$.

Solução

1. Substituindo os parâmetros acima no Exemplo 2.13, encontramos a função de transferência do sistema

$$H(s) = \frac{100}{s^3 + 10,1s^2 + 101s}.$$

No MATLAB, fornecemos os coeficientes do numerador do polinômio como um vetor linha `numa` e do denominador como `dena`. Então,

$$\text{numa} = [0 \ 0 \ 0 \ 100] \text{ e } \text{dena} = [1 \ 10.1 \ 101 \ 0].$$

A representação em função dos polos e zeros é computada no MATLAB usando o comando

$$[z, p, k] = \text{tf2zp}(\text{numa}, \text{dena})$$

o qual resulta em

$$z = [], \quad p = [0 \ -5,0500 \ +8,6889j \ -5,0500 \ -8,6889j]', \quad k = 100,$$

e, assim, a função de transferência na forma fatorada é

$$H(s) = \frac{100}{s(s + 5,05 + j8,6889)(s + 5,05 - j8,6889)}.$$

2. Se considerarmos a velocidade $\dot{\theta}_m$ como a saída, então temos `numb=[0 0 100]`, `denb=[1 10.1 101]`, ou seja, temos a função de transferência

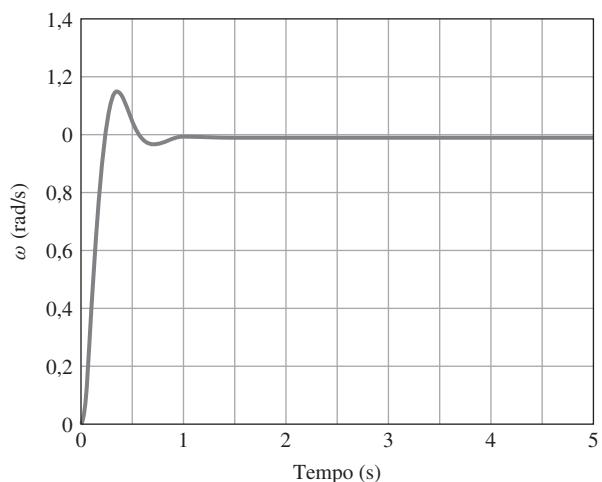
$$G(s) = \frac{100s}{s^3 + 10,1s^2 + 101s} = \frac{100}{s^2 + 10,1s + 101}.$$

Isto era esperado, porque $\dot{\theta}_m$ é simplesmente a derivada de θ_m ; assim, $\mathcal{L}\{\dot{\theta}_m\} = s\mathcal{L}\{\theta_m\}$. Para um comando na forma de um degrau em v_a , computamos a resposta ao degrau no MATLAB (Exemplo 2.1) como:

```
mumb=[0 0 100]; % forma do numerador
denb=[1 10.1 101]; % forma do denominador
sysb=tf(mumb,denb); % define o sistema usando seu numerador e denominador
t=0:0.01:5; % vetor da variável tempo
y=step(sysb,t) % calcula a resposta ao degrau
plot(t,y) % traça o gráfico da resposta ao degrau
```

O sistema em regime permanente resulta em uma velocidade angular constante, como mostrado na Fig. 3.5. Note que existe um pequeno erro entre o sinal de referência e a saída do sistema; isso acontece porque o sistema não tem ganho DC unitário.

Figura 3.5 Resposta transitória do motor CC.



Quando um sistema dinâmico é representado por uma única equação diferencial de qualquer ordem, encontrar a forma polinomial da função de transferência por meio da equação diferencial geralmente é fácil. Dessa forma, é melhor, nesses casos, especificar um sistema diretamente em termos de sua função de transferência.

EXEMPLO 3.18 Transformações usando o MATLAB

Encontre a função de transferência de um sistema que é representado pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 25y = 9u + 3\dot{u}.$$

Solução. Usando as regras de diferenciação das Eqs. (3.33) e (3.34), obtemos, por inspeção,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s + 9}{s^2 + 6s + 25}.$$

Os comandos no MATLAB são

```
numG = [3 9]      % forma do numerador
denG = [1 6 25]    % forma do denominador
```

Se é desejado a função de transferência na forma fatorada, ela pode ser obtida transformando a descrição tf. Portanto, o comando no MATLAB é

```
% converte a forma numerador-denominador na forma de polos e zeros
[z,p,k]=tf2zp(numG,denG)
```

o qual resulta em $z = -3$, $p = [-3 + 4j \quad -3 - 4j]'$, $k = 3$. Isso significa que a função de transferência também pode ser escrita como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3(s + 3)}{(s + 3 - 4j)(s + 3 + 4j)}.$$

Também podemos converter a representação em polos e zeros para a representação em função de transferência usando o comando zp2tf

```
%converte a forma de polos e zeros na forma numerador-denominador
[numG,denG]=zp2tf(z,p,k)
```

Nesse exemplo, $z=[-3]$, $p=[-3+i*4; -3-i*4]$, $k=[3]$ resulta nos polinômios do numerador e do denominador.

EXEMPLO 3.19 Função de transferência de um satélite usando o MATLAB

1. Encontre a função de transferência entre a entrada F_c e o ângulo de atitude do satélite θ no Exemplo 2.3 e
2. Determine a resposta do sistema para um pulso de 25 N com 0,1 s de duração, começando em $t = 5$ s. Faça $d = 1\text{m}$ e $I = 5.000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Solução.

1. Do Exemplo 2.3, $\frac{d}{I} = \frac{1}{5.000} = 0,0002 \left[\frac{\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{m}^2} \right]$, e isto significa que a função de transferência do sistema é

$$H(s) = \frac{0,0002}{s^2},$$

que, nesse caso, pode ser determinada por inspeção. Os coeficientes do numerador dessa função de transferência são passados para o MATLAB na forma do vetor linha num e os coeficientes do denominador na forma do vetor linha den. Para esse exemplo, temos

$$\text{numG} = [0 \ 0 \ 0,0002] \quad \text{e} \quad \text{denG} = [1 \ 0 \ 0].$$

2. Os seguintes comandos no MATLAB computam a resposta do sistema para um pulso de 25 N de 0,1 s de duração:

```

numG=[0 0 0.0002]; % forma da função de transferência
denG=[1 0 0];
sysG=tf(numG,denG); % define a função de transferência do sistema
t=0:0.01:10; % define o vetor tempo com dt = 0.01 s
u1=zeros(1,500) 25*ones(1,10)
zeros(1,491); % entrada
% pulso de 25N, aplicado em t = 5 s
% com 0,1 s de duração
[y1]=lsim(sysG,u1,t); % simulação linear
ff=180/pi; % fator de conversão de radianos para graus
y1=ff*y1; % saída em graus
plot(t,u1); % gráfico do sinal de entrada
plot(t,y1); % gráfico do sinal de saída

```

O sistema é excitado com um pulso de curta duração (uma entrada impulsiva) que tem o efeito de transmitir um ângulo θ_0 no instante de tempo $t = 5$ s para o sistema. Em virtude de o sistema ser não amortecido, na ausência de qualquer controle a saída é uma velocidade angular constante com um valor fornecido pelo impulso em $t = 5$ s. O pulso aplicado na entrada do sistema é mostrado na Fig. 3.6(a) e a saída, o ângulo θ , na Fig. 3.6(b).

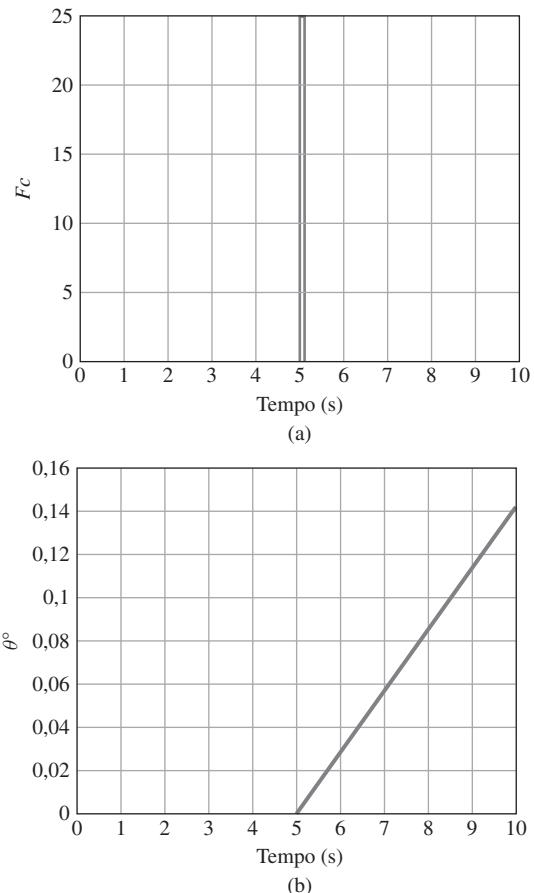
Agora considere o sistema excitado pelo mesmo pulso de magnitude positiva aplicado em $t = 5$ s, seguido por um outro pulso de mesma duração, mas com a magnitude negativa, aplicado em $t = 6,1$ s. Veja a entrada impulsiva na Figura 3.7(a). A resposta do sistema é apresentada na Figura 3.7(b). Isto é realmente como o ângulo de atitude de um satélite é controlado na prática. Outros comandos relevantes no MATLAB são

```

% pulso duplo
u2=[zeros(1,500) 25*ones(1,10) zeros(1,100) -25*ones(1,10) zeros(1,381)];
[y2]=lsim(sysG,u2,t); % simulação linear
plot(t,u2); % gráfico do sinal de entrada
ff=180/pi; % fator de conversão de radianos para graus
y2=ff*y2; % saída em graus
plot(t,y2); % gráfico da saída

```

Figura 3.6 Resposta transitória do satélite: (a) entrada; (b) ângulo de atitude do satélite.

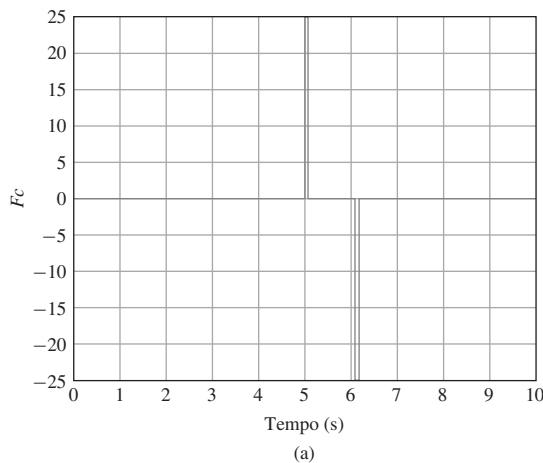


3.2 Representação de sistemas por diagramas

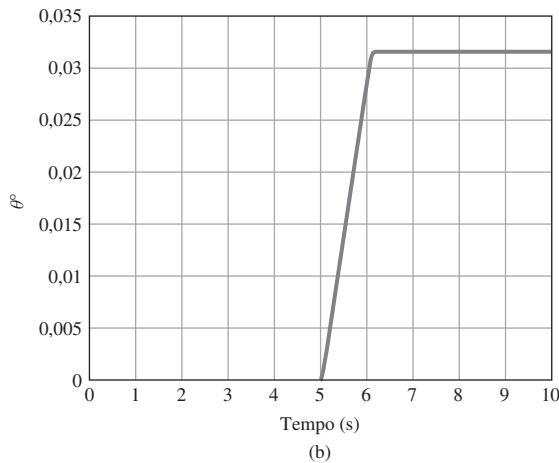
3.2.1 Diagrama de blocos

Para obter a função de transferência, precisamos encontrar as transformadas de Laplace das equações dinâmicas do sistema e obter a expressão algébrica relacionando a saída com a entrada. Muitos sistemas de controle podem ser representados por sistemas de equações em que seus componentes não interagem, exceto se a entrada de um componente for a saída de outro. Nestes casos, é fácil desenhar o diagrama de blocos que representa a relação matemática de forma similar ao diagrama de blocos apresentado na Fig. 1.2, Capítulo 1. A função de transferência de cada componente é colocada em uma caixa, e as relações de entrada-saída entre os componentes são indicadas por linhas e setas. Em seguida, as equações podem ser resolvidas por simplificação gráfica; muitas vezes isto é mais fácil e mais informativo do que a manipulação algébrica, embora os métodos sejam equivalentes em todos os sentidos. Desenhos de três diagramas de blocos elementares são apresentados na Fig. 3.8. É conveniente pensar em cada bloco como a representação de um amplificador eletrônico com a função de transferência impressa em seu interior. As interconexões dos blocos incluem pontos somadores, nos quais qualquer número de sinais pode ser somado. Estes são representados por um círculo com o símbolo Σ no interior. Na Fig. 3.8(a), o bloco com a função de transferência $G_1(s)$ está em série com o bloco com a função de transferência $G_2(s)$, e a função de transferência geral é o produto G_1G_2 . Na Fig. 3.8(b), dois sistemas estão em paralelo com suas saídas somadas, e a função de transferência geral é dada pela soma $G_1 + G_2$. Esses diagramas são facilmente obtidos a partir das equações que os descrevem.

A Figura 3.8 (c) apresenta um caso mais complicado. Nele, os dois blocos estão conectados em um arranjo com realimentação, um bloco alimenta o outro. Quando a realimentação $Y_2(s)$ é subtraída, como mostrado na figura, chamamos de **realimentação negativa**. Como será visto,



(a)



(b)

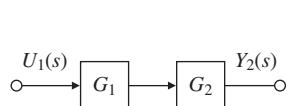
a realimentação negativa é geralmente necessária para a estabilidade do sistema. Agora, vamos simplesmente resolver as equações e, em seguida, relacioná-las novamente ao diagrama. As equações são

$$\begin{aligned} U_1(s) &= R(s) - Y_2(s), \\ Y_2(s) &= G_2(s)G_1(s)U_1(s), \\ Y_1(s) &= G_1(s)U_1(s), \end{aligned}$$

e a solução delas é

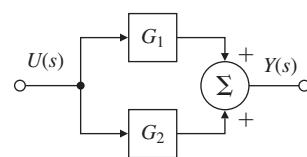
$$Y_1(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}R(s). \quad (3.50)$$

A solução pode ser expressa pela seguinte regra:



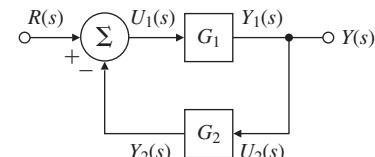
$$\frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = G_1G_2$$

(a)



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1 + G_2$$

(b)



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1G_2}$$

(c)

Figura 3.8 Três exemplos de diagramas de blocos elementares.

O ganho de um sistema com realimentação negativa em malha simples é dada pelo ganho do ramo direto dividido pela soma de 1 mais o ganho da malha.

Realimentação positiva

Quando a realimentação é adicionada em vez de ser subtraída, chamamos de **realimentação positiva**. Nesse caso, o ganho do sistema é dado pelo ganho do ramo direto dividido pela soma de 1 menos o ganho da malha.

Os três casos elementares dados na Fig. 3.8 podem ser usados em conjunto para resolver, por meio da redução repetida, qualquer função de transferência definida por um diagrama de blocos. No entanto, as manipulações podem ser tediosas e estão sujeitas a erros quando a topologia do diagrama é complicada. A Figura 3.9 mostra exemplos de álgebra de diagrama de blocos que complementam os casos na Fig. 3.8. As Figuras 3.9(a) e (b) mostram como as interconexões de um diagrama de blocos podem ser manipuladas sem afetar as relações matemáticas. A Figura 3.9(c) mostra como a manipulação pode ser usada para converter um sistema geral (à esquerda) para um sistema sem um componente no caminho da realimentação, normalmente referido como um **sistema com realimentação unitária**.

Sistema com realimentação unitária

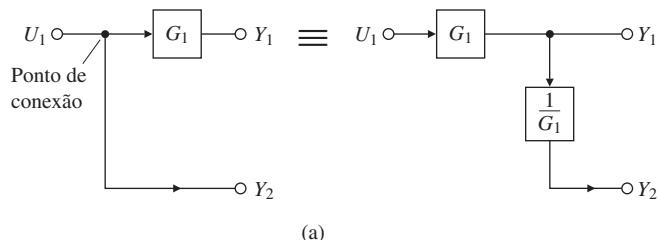
Em todos os casos, o princípio básico é o de simplificar a topologia, mantendo exatamente as mesmas relações entre as demais variáveis do diagrama de blocos. Em relação à álgebra das equações lineares, a redução de diagrama de blocos é uma forma pictórica para resolver equações, eliminando variáveis.

EXEMPLO 3.20 Função de transferência de um diagrama de blocos simples

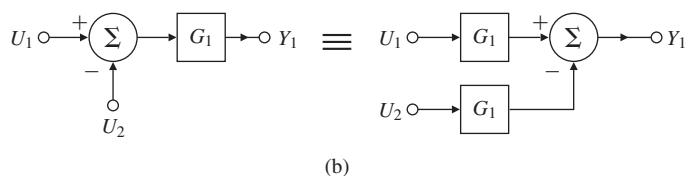
Encontre a função de transferência do sistema mostrado na Fig. 3.10(a).

Solução. Inicialmente, o diagrama é simplificado substituindo a conexão em paralelo. O resultado é apresentado no diagrama da Fig. 3.10(b), e usando a regra de realimentação, a função de transferência em malha fechada é:

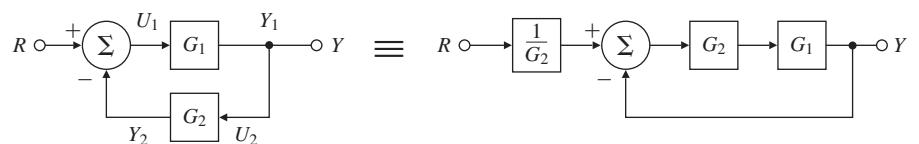
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2s+4}{s^2}}{1 + \frac{2s+4}{s^2}} = \frac{2s+4}{s^2 + 2s + 4}.$$



(a)



(b)



(c)

Figura 3.9 Exemplos de álgebra em diagramas de blocos.

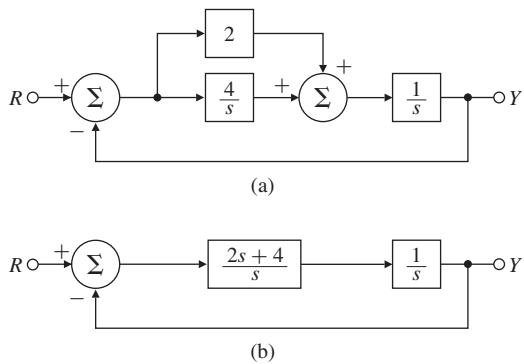


Figura 3.10 Diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem.

EXEMPLO 3.21 Função de transferência do diagrama de blocos

Encontre a função de transferência do sistema mostrado na Fig. 3.11(a).

Solução. Primeiro, simplificamos o diagrama de blocos. Usando os princípios da Eq. (3.50), a realimentação envolvendo G_1 e G_3 pode ser substituída pela função de transferência equivalente; note que esta é uma realimentação positiva. O resultado é a Fig. 3.11(b). O próximo passo é mover o ponto de conexão precedente para o ponto que sucede G_2 , como mostrado na Fig. 3.11(c). A malha com realimentação negativa à esquerda está em série com o subsistema à direita, composto por dois blocos em paralelo G_5 e G_6/G_2 . A função de transferência geral pode ser escrita usando as três regras de redução dadas pela Fig. 3.8:

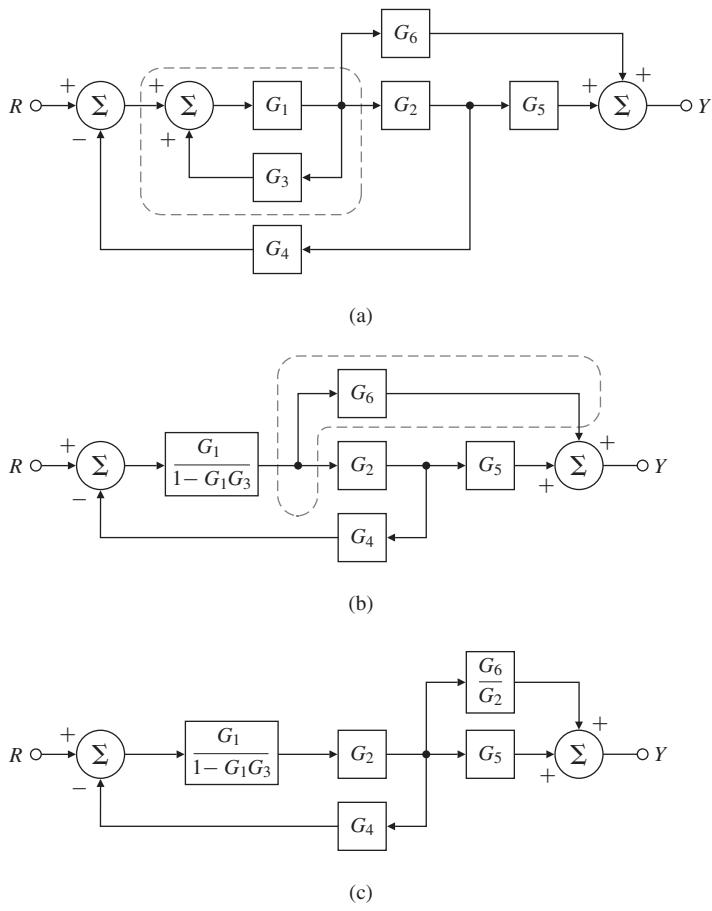


Figura 3.11 Exemplo de simplificação de diagrama de blocos.

$$\begin{aligned}
 T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_3}}{1 + \frac{G_1 G_2 G_4}{1 - G_1 G_3}} \left(G_5 + \frac{G_6}{G_2} \right) \\
 &= \frac{G_1 G_2 G_5 + G_1 G_6}{1 - G_1 G_3 + G_1 G_2 G_4}.
 \end{aligned}$$

Como vimos, um sistema de equações algébricas pode ser representado por um diagrama de blocos que representa as funções de transferência individuais por blocos e tem interconexões que correspondem às equações do sistema. Um diagrama de blocos é uma ferramenta conveniente para se visualizar o sistema como um conjunto de subsistemas inter-relacionados que enfatizam as relações entre as variáveis do sistema.

3.2.2 Redução de diagrama de blocos usando o MATLAB

Se as funções de transferência individuais para os componentes de um sistema de controle estão disponíveis, é possível usar comandos no MATLAB para calcular as funções de transferência dos sistemas interligados. Os três comandos são: series, parallel e feedback. Eles calculam as funções de transferência resultantes de dois blocos de funções de transferência em série, paralelo e em realimentação, respectivamente. O próximo exemplo ilustra sua utilização.

EXEMPLO 3.22 Função de transferência de um sistema simples usando o MATLAB

Repita o cálculo da função de transferência do diagrama de blocos na Fig. 3.10(a) usando o MATLAB.

Solução. Nomeamos separadamente os blocos de funções de transferência mostrados na Fig. 3.10(a) como ilustrado na Fig. 3.12. Então, combinamos os dois blocos que estão em paralelo, G_1 e G_2

```

num1=[2]; % forma de G1
den1=[1];
sysG1=tf(num1,den1); % define o subsistema G1
num2=[4];
den2=[1 0];
sysG2=tf(num2,den2); % define o subsistema G2
% combinação paralela de G1 e G2 para formar o subsistema G3
sysG3=parallel(sysG1,sysG2);

```

e, então, combine em série o resultado G_3 com G_4

```

num4=[1]; % forma de G4
den4=[1 0];
sysG4=tf(num4,den4); % define o subsistema G4
sysG5=series(sysG3,sysG4); % combinação em série de G3 e G4

```

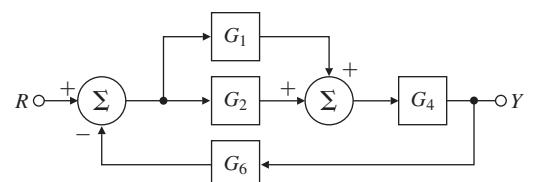


Figura 3.12 Exemplo de simplificação de diagrama de blocos.

e complete a redução do sistema com realimentação

```
num6=[1]; % forma de G6
den6=[1];
sysG6=tf(num6,den6) % define o subsistema G6
[sysCL]=feedback(sysG5,sysG6,-1) % combinação em realimentação
                                  de G5 e G6
```

O resultado do MATLAB é sysCL na forma

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s + 4}{s^2 + 2s + 4}$$

e esse é o mesmo resultado que foi obtido fazendo a redução do diagrama de blocos.

3.3 Efeitos da localização dos polos

Uma vez determinada a função de transferência por qualquer método disponível, a resposta do sistema que ela representa pode ser analisada. Quando o sistema de equações é composto por equações diferenciais ordinárias (EDOs), a função de transferência resultante será a razão de polinômios; isto é,

$$H(s) = b(s)/a(s).$$

Assumindo que b e a não tenham fatores em comum (situação muito comum), então os valores de s tais que $a(s) = 0$ representam pontos nos quais $H(s)$ é infinito. Como mostrado na Seção 3.1.5, estes valores de s são chamados de polos de $H(s)$. Valores de s tais que $b(s) = 0$ são pontos nos quais $H(s) = 0$, e os valores correspondentes de s são chamados de zeros. Os efeitos dos zeros na resposta transiente serão discutidos na Seção 3.5. Esses polos e zeros descrevem completamente $H(s)$, exceto por uma constante multiplicadora. Em virtude da resposta ao impulso ser dada pela função no tempo correspondente à função de transferência, chamamos a resposta ao impulso de **resposta natural** do sistema. Podemos usar polos e zeros para calcular a resposta temporal correspondente e, assim, identificar o histórico temporal sabendo a localização dos polos no plano- s . Por exemplo, os polos identificam as classes dos sinais contidos na resposta ao impulso, como pode ser visto por uma expansão em fração parcial de $H(s)$. Para um polo de primeira ordem,

$$H(s) = \frac{1}{s + \sigma}.$$

A Tabela A.2, linha 7, indica que a resposta ao impulso será uma função exponencial; isto é,

$$h(t) = e^{-\sigma t} 1(t).$$

Quando $\sigma > 0$, o polo está localizado em $s < 0$, então a função exponencial decai, e dizemos que a resposta ao impulso é **estável**. Se $\sigma < 0$, o polo está à direita da origem. Como a função exponencial cresce à medida que o tempo cresce, a resposta ao impulso é dita **instável** (Seção 3.6). A Figura 3.13(a) mostra uma típica resposta estável e define uma **constante de tempo**

$$\tau = 1/\sigma \quad (3.51)$$

corresponde ao tempo quando a resposta é $1/e$ vezes o valor inicial. Por isso, é uma medida da taxa de decaimento. A reta é tangente à curva exponencial em $t = 0$ e termina em $t = \tau$. Esta característica de uma função exponencial é útil para esboçar a resposta temporal ou para verificar resultados do computador.

A Figura 3.13(b) mostra as respostas ao impulso e ao degrau de um sistema de primeira ordem calculadas usando o MATLAB.

Polos zeros

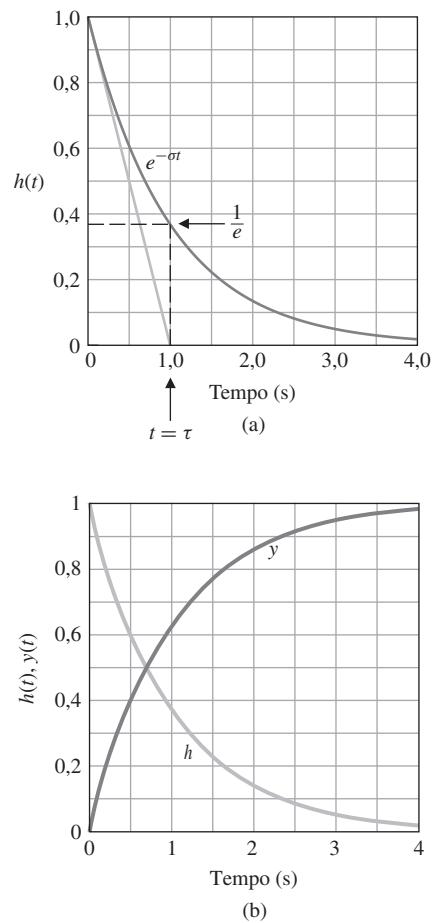
A resposta ao impulso é a resposta natural

Resposta ao impulso de um sistema de primeira ordem

Estabilidade

Constante de tempo

Figura 3.13 Resposta de um sistema de primeira ordem: (a) resposta ao impulso; (b) resposta ao impulso e ao degrau usando o MATLAB.



EXEMPLO 3.23 Resposta versus localização dos polos, raízes repetidas

Compare a resposta temporal com a localização dos polos para o sistema com função de transferência entre a entrada e a saída dada por

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2}. \quad (3.52)$$

Solução. O numerador é

$$b(s) = 2 \left(s + \frac{1}{2} \right),$$

e o denominador é

$$a(s) = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2).$$

Portanto, os polos de $H(s)$ são $s = -1$ e $s = -2$ e o único (finito) zero é $s = -1/2$. Uma descrição completa da função de transferência está mostrada pelo gráfico da localização dos polos e zeros no plano-s usando a função `pzmap(num,den)` do MATLAB, sendo

```
num=[2 1];
den=[1 3 2];
```

(veja a Fig. 3.14). Expandindo $H(s)$ em frações parciais, temos

$$H(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}.$$

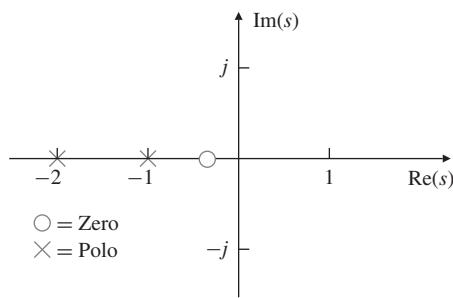


Figura 3.14 Plano-s destacando os polos e zeros.

A partir da Tabela A.2, podemos obter a transformada inversa de cada termo em $H(s)$, o que nos fornece $h(t)$, a resposta ao impulso do sistema. Neste caso,

$$h(t) = \begin{cases} -e^{-t} + 3e^{-2t} & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

A forma dos componentes de $h(t)$, que são e^{-t} e e^{-2t} , são determinadas pelo polos em $s = -1$ e -2 . Isto é verdade também para casos mais complicados: em geral, as formas dos componentes da resposta natural são determinadas pela localização dos polos da função de transferência.

Um esboço da localização destes polos e da correspondente resposta natural é dado na Fig. 3.15, em que também são apresentados outros polos, incluindo polos complexos, que serão discutidos em breve.

O papel do numerador no processo de expansão em frações parciais é influenciar o tamanho do coeficiente que multiplica cada componente. Como e^{-2t} decai mais rápido que e^{-t} , o sinal correspondente ao polo em -2 decai mais rápido que o sinal que corresponde ao polo em -1 . Para abreviar, basta dizer que o polo em -2 é mais rápido que o polo em -1 . Em geral, os polos mais à esquerda no plano-s estão associados a sinais naturais que decaem mais rápido que aqueles associados aos polos mais próximos do eixo imaginário. Se os polos estivessem localizados em valores positivos de s (na metade direita do plano-s), a resposta teria sido uma função de crescimento exponencial e, portanto, instável. A Fig. 3.16 mostra que o termo rápido $3e^{-2t}$ domina a primeira parte do histórico temporal e que o termo e^{-t} é o principal contribuinte para a parte seguinte.

“Polos rápidos”
e “polos lentos”
referem-se à taxa de
decaimento relativa
ao sinal

O objetivo deste exemplo é ilustrar a relação entre os polos e as características da resposta, o que pode ser feito de forma precisa apenas encontrando a transformada inversa de Laplace e examinando cada termo como feito anteriormente. No entanto, se o objetivo é simplesmente

A resposta ao impulso
utilizando o MATLAB

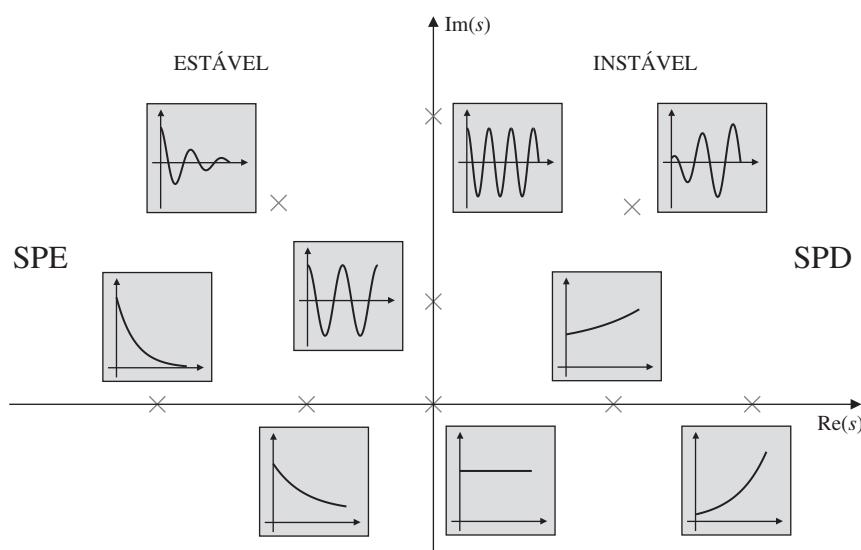
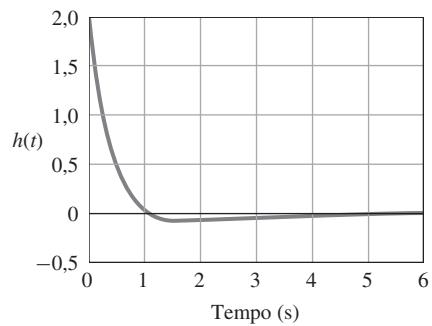


Figura 3.15 Respostas temporais associadas com pontos no plano-s (SPE, semiplano esquerdo; SPD, semiplano direito).

Figura 3.16 Resposta ao impulso do Exemplo 3.23 [Eq. (3.52)].



traçar a resposta ao impulso para este exemplo, um modo adequado seria usar as instruções no MATLAB

```
numH = [2 1]; % forma do numerador
denH = [1 3 2]; % forma do denominador
sysH = tf(numH,denH); % define o sistema
impulse(sysH); % calcula a resposta ao impulso
```

O resultado é mostrado na Fig. 3.16.

Polos complexos podem ser definidos em termos de suas partes real e imaginária, tradicionalmente referenciadas como

$$s = -\sigma \pm j\omega_d.$$

Isso significa que um polo tem parte real imaginária negativa se σ é positivo. Como polos complexos sempre vêm em pares complexos conjugados, o denominador corresponde a um par complexo

$$a(s) = (s + \sigma - j\omega_d)(s + \sigma + j\omega_d) = (s + \sigma)^2 + \omega_d^2. \quad (3.54)$$

Ao obter a função de transferência a partir da equação diferencial, o resultado normalmente é escrito na forma polinomial

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (3.55)$$

Multiplicando a forma dada na Eq. (3.54) e comparando-a com os coeficientes do denominador de $H(s)$ na Eq. (3.55), encontramos a correspondência entre os parâmetros

$$\sigma = \zeta\omega_n \quad \text{e} \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (3.56)$$

sendo que o parâmetro ζ é o **coeficiente de amortecimento**⁷ e ω_n é a **frequência natural não amortecida**. Os polos da função de transferência estão localizados em um raio de ω_n no plano-s e em um ângulo $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\zeta$, como mostrado na Fig. 3.17. Portanto, o coeficiente de amortecimento reflete o nível de amortecimento como uma fração do valor crítico de amortecimento, ponto onde os polos se tornam reais. Em coordenadas retangulares, os polos estão em $s = -\sigma \pm j\omega_d$. Quando $\zeta = 0$, não temos amortecimento, $\theta = 0$, e a frequência natural amortecida $\omega_d = \omega_n$, a frequência natural não amortecida.

Para encontrar a resposta temporal usando a Tabela A.2 correspondente a uma função de transferência complexa, o método mais simples é manipular $H(s)$, de modo que os polos com-

Coeficiente de amortecimento; frequência natural amortecida e não amortecida

⁷ Em comunicações e filtragem na engenharia, a função de transferência de segunda ordem padrão é escrita como $H = 1/[1+Q(s/\omega_n + \omega_n/s)]$. Sendo que ω_n é chamado de **centro da banda** e Q é o **fator de qualidade**. A comparação com a Eq. (3.55) mostra que $Q = 1/2\zeta$.

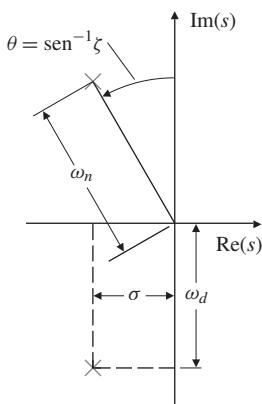


Figura 3.17 Um par de polos complexos no plano-s.

plexos fiquem na forma da Eq. (3.54), porque então a resposta temporal pode ser encontrada diretamente na tabela. A equação (3.55) pode ser reescrita como

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)}. \quad (3.57)$$

Portanto, a partir da linha 20 na Tabela A.2 e das definições na Eq. (3.56), a resposta ao impulso é

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t} (\sen \omega_d t) 1(t). \quad (3.58)$$

Resposta ao impulso padrão de um sistema de segunda ordem

A Figura 3.18(a) apresenta $h(t)$ para vários valores de ζ , sendo que o tempo foi normalizado para a frequência natural não amortecida ω_n . Note que a frequência real ω_d diminui ligeiramente com o aumento da taxa de amortecimento. Note também que, para um coeficiente de amortecimento muito baixo, a resposta é oscilatória, enquanto para valores grandes (ζ próximo de 1) a resposta não mostra qualquer oscilação. Algumas dessas respostas estão esboçadas na Fig. 3.15 para mostrar qualitativamente como a alteração dos locais dos polos no plano-s afetam a resposta ao impulso. Para um projetista de controle, a Fig. 3.15 é útil para entender como as mudanças instantâneas nos locais dos polos podem influenciar a resposta temporal.

As localizações de três polos são mostradas na Fig. 3.19 para comparação com as respostas ao impulso na Fig. 3.18(a). A parte real negativa do polo, σ , determina a taxa de decaimento exponencial de um envelope que multiplica a senoide, como mostrado na Fig. 3.20. Note que se $\sigma < 0$ (o polo está na SPD), então a resposta natural irá crescer com o tempo, por isso, tal como definido anteriormente, o sistema é dito instável. Se $\sigma = 0$, a resposta natural não cresce nem decai, de modo que a estabilidade está aberta à discussão. Se $\sigma > 0$, a resposta natural decai, então o sistema é estável.

A resposta ao degrau de $H(s)$ também é interessante de ser analisada; ou seja, a resposta do sistema $H(s)$ para a entrada sendo o degrau unitário $u = 1(t)$, com $U(s) = 1/s$. A transformada da resposta ao degrau é dada por $Y(s) = H(s)U(s)$, a qual é encontrada na Tabela A.2, linha 21. A Figura 3.18(b), que traça $y(t)$ em função de vários valores de ζ , mostra que as características básicas da resposta transiente entre a resposta ao degrau e a resposta ao impulso são muito similares, a diferença entre as respostas é que o valor final da resposta ao degrau é o degrau unitário.

A estabilidade depende de se a resposta natural cresce ou decai

Resposta ao degrau

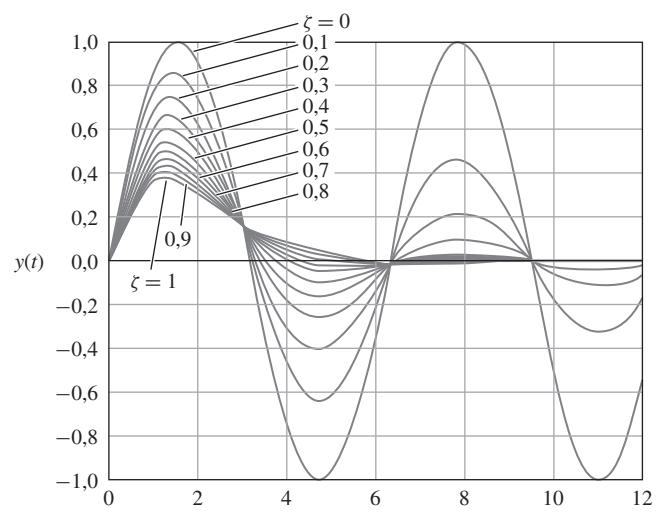
EXEMPLO 3.24 Resposta temporal oscilatória

Discuta a correlação entre os polos de

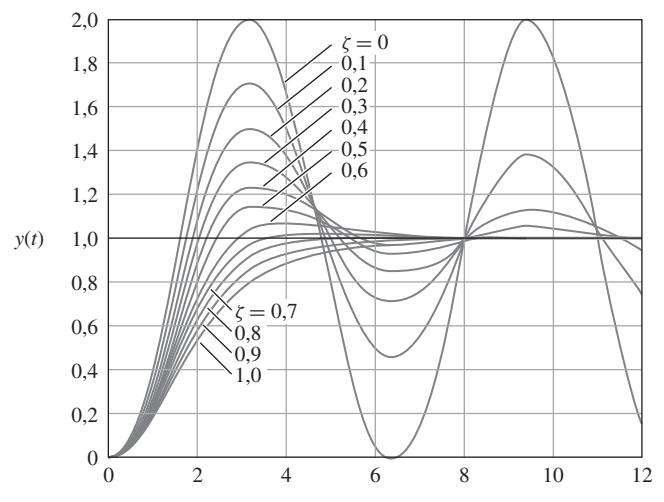
$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 5} \quad (3.59)$$

e a resposta ao impulso do sistema e encontre a resposta exata ao impulso.

Figura 3.18 Respostas de sistemas de segunda ordem em função de ζ : (a) respostas ao impulso, (b) respostas ao degrau.



(a)



(b)

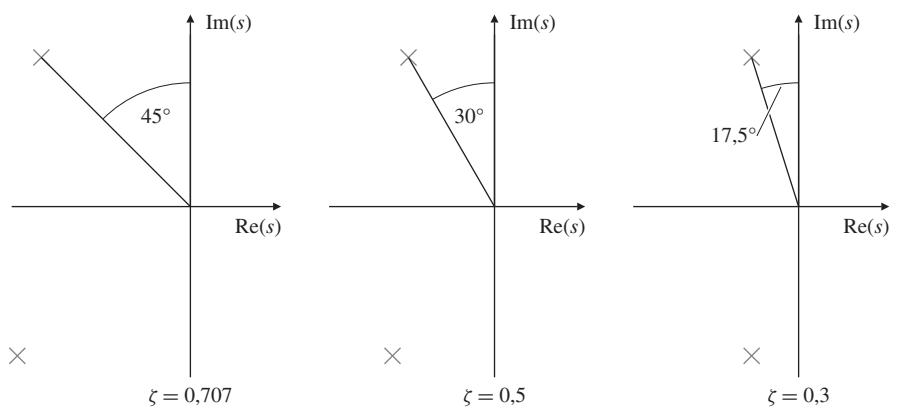


Figura 3.19 Localização dos polos correspondente a três valores de ζ .

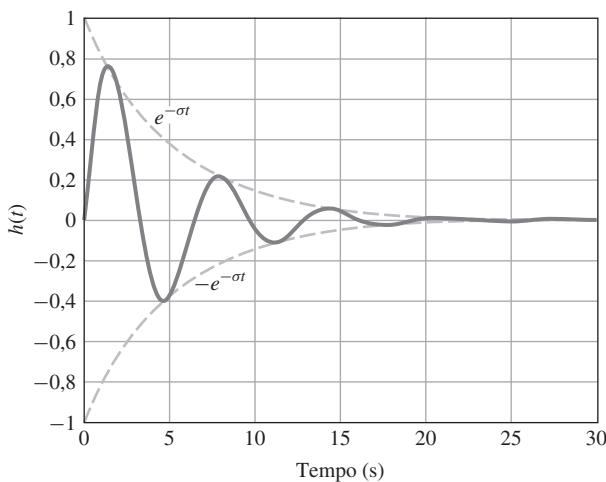


Figura 3.20 Resposta de um sistema de segunda ordem com um envelope exponencial.

Solução. A partir da forma de $H(s)$ dada na Eq. (3.55), temos que

$$\omega_n^2 = 5 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{5} = 2,24 \text{ rad/s}$$

e

$$2\zeta\omega_n = 2 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447.$$

Isso indica que devemos esperar uma frequência em torno de 2 rad/s com muito pouco movimento oscilatório. Para obter a resposta exata, $H(s)$ deve ser manipulada até que o denominador esteja na forma da Eq. (3.54):

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}.$$

A partir desta equação, vemos que os polos da função de transferência são complexos, com parte real -1 e partes imaginárias $\pm 2j$. A Tabela A.2 contém dois itens, linhas 19 e 20, que correspondem ao denominador. O lado direito da equação precedente precisa ser dividido em duas partes, de modo que elas coincidam com os numeradores das entradas na tabela:

$$H(s) = \frac{2s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} = 2 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} - \frac{1}{2} \frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}.$$

Assim, a resposta ao impulso é

$$h(t) = \left(2e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t \right) 1(t).$$

A Figura 3.21 apresenta a resposta e mostra como o envelope atenua a senoide, o termo dominante $2\cos 2t$, e o deslocamento de fase causado pelo termo $-1/2 \sin 2t$.

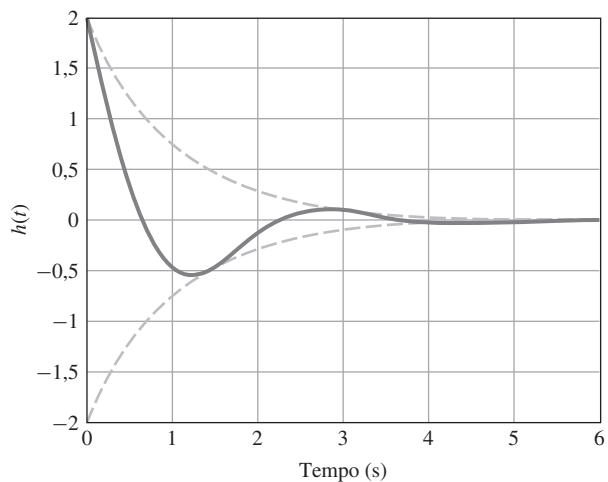
Como no exemplo anterior, a maneira conveniente de determinar a resposta ao impulso seria usar as instruções no MATLAB

```
numH = [2 1]; % forma do numerador
denH = [1 2 5]; % forma do denominador
sysH = tf(numH,denH); % define o sistema por seu numerador e denominador
t = 0:0.1:6; % vetor de tempo
y = impulse(sysH,t); % cálculo da resposta ao impulso
plot(t,y); % traça a resposta ao impulso
```

como mostrado na Fig. 3.21.

**Resposta ao impulso
pelo MATLAB**

Figura 3.21 Exemplo 3.24, resposta do sistema.



3.4 Especificações no domínio do tempo

Definição de tempo de subida, tempo de acomodação, sobressinal e tempo de pico

Tempo de subida t_r

1. O **tempo de subida** (rise time) t_r é o tempo que leva para o sistema atingir as proximidades de sua referência.
2. O **tempo de acomodação** (settling time) t_s é o tempo necessário para os transitórios do sistema terminarem.
3. O **sobressinal** (M_p) é o valor máximo que o sistema supera seu valor final dividido pelo seu valor final (e muitas vezes é expresso em porcentagem).
4. O **tempo de pico** (peak time) t_p é o tempo necessário para o sistema alcançar seu ponto máximo.

3.4.1 Tempo de subida

Para um sistema de segunda ordem, as respostas temporais apresentadas na Fig. 3.18(b) fornecem informações sobre as especificações que são muito complexas para serem lembradas, a não ser que sejam convertidas em uma forma mais simples. Ao examinar essas curvas, tendo em conta as definições dadas na Fig. 3.22, podemos relacionar as curvas com as localizações dos polos em função dos parâmetros ζ e ω_n . Por exemplo, todas as curvas se elevam praticamente ao mesmo tempo. Se considerarmos a curva com $\zeta = 0,5$ como uma média, o tempo de subida a partir de $y = 0,1$ a $y = 0,9$ é de aproximadamente $\omega_n t_r = 1,8$. Assim, podemos dizer que

$$t_r \cong \frac{1,8}{\omega_n}. \quad (3.60)$$

Embora essa relação possa ser melhorada, incluindo o efeito do coeficiente de amortecimento, é importante manter em mente que a Eq. (3.60) é normalmente usada.

Esta equação é precisa apenas para sistemas de segunda ordem sem zeros; para todos os outros sistemas, é uma aproximação grosseira para a relação entre t_r e ω_n . A maioria dos sistemas que estão sendo analisados para projetar sistemas de controle são mais complicados do que o sistema de segunda ordem puro, então projetistas utilizam a Eq. (3.60) sabendo que ela é apenas uma aproximação grosseira.

3.4.2 Sobressinal e tempo de pico

O sobressinal M_p pode ser calculado de forma mais analítica. Esse valor ocorre quando a derivada é zero, o que pode ser encontrado a partir de cálculos. O histórico temporal das curvas na Fig. 3.18(b), encontrado a partir da transformada inversa de Laplace de $H(s)/s$, é

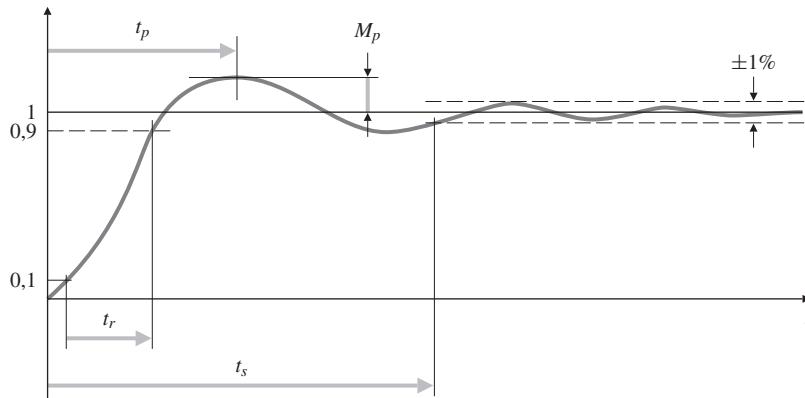


Figura 3.22 Definição do tempo de subida t_p , tempo de acomodação t_s e sobressinal M_p .

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right), \quad (3.61)$$

sendo $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ e $\sigma = \zeta \omega_n$. A equação precedente pode ser reescrita usando a identidade trigonométrica

$$A \sin(\alpha) + B \cos(\alpha) = C \cos(\alpha - \beta)$$

ou

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \\ \beta &= \tan^{-1} \left(\frac{A}{B} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right), \end{aligned}$$

sendo $A = \sigma/\omega_d$, $B = 1$ e $\alpha = \omega_d t$, em uma forma mais compacta

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \beta). \quad (3.62)$$

Resposta ao degrau padrão de sistema de segunda ordem

Quando $y(t)$ atinge seu valor máximo, sua derivada será zero:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \sigma e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) - e^{-\sigma t} (-\omega_d \sin \omega_d t + \sigma \cos \omega_d t) = 0 \\ &= e^{-\sigma t} \left(\frac{\sigma^2}{\omega_d} + \omega_d \right) \sin \omega_d t = 0. \end{aligned}$$

Isso ocorre quando $\sin \omega_d t = 0$, então

$$\omega_d t_p = \pi$$

e, assim,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}. \quad (3.63)$$

Substituindo a Eq. (3.63) na expressão de $y(t)$, temos

Tempo de pico t_p

$$\begin{aligned} y(t_p) &\triangleq 1 + M_p = 1 - e^{-\sigma \pi / \omega_d} \left(\cos \pi + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \pi \right) \\ &= 1 + e^{-\sigma \pi / \omega_d}. \end{aligned}$$

Então, temos a fórmula

Sobressinal M_p

$$M_p = e^{-\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad 0 \leq \zeta < 1, \quad (3.64)$$

a qual corresponde ao gráfico na Fig. 3.23. Dois valores frequentemente usados dessa curva são $M_p = 0,16$ para $\zeta = 0,5$ e $M_p = 0,05$ para $\zeta = 0,7$.

3.4.3 Tempo de acomodação

O parâmetro final de interesse a partir da resposta transitória é o tempo de acomodação t_s . Esse é o tempo necessário para o transiente decair para um valor pequeno, de modo que $y(t)$ esteja quase em estado estacionário. Várias medidas são possíveis. Para ilustração, vamos utilizar 1% como uma medida razoável; em outros casos 2% ou 5% são usados. Como um cálculo analítico, observa-se que o desvio de y a partir de 1 é consequência do decaimento exponencial $e^{-\sigma t}$ e das funções seno e cosseno. A duração desse erro é essencialmente decidida pelo transiente exponencial; assim, podemos definir o tempo de acomodação t_s quando o decaimento exponencial atinge 1%:

$$e^{-\zeta\omega_n t_s} = 0,01.$$

Portanto,

$$\zeta\omega_n t_s = 4,6,$$

ou

$$t_s = \frac{4,6}{\zeta\omega_n} = \frac{4,6}{\sigma}, \quad (3.65)$$

sendo σ a parte real negativa do polo, como é mostrado na Fig. 3.17.

As Equações (3.60), (3.64) e (3.65) caracterizam a resposta transitória de um sistema sem zeros finitos e dois polos complexos e com frequência natural não amortecida ω_n , coeficiente de amortecimento ζ e parte real negativa σ . Na análise e no projeto, elas são usadas para estimar o tempo de subida, sobressinal e tempo de acomodação, respectivamente, para praticamente qualquer sistema. Em síntese, especifica-se t_r , M_p e t_s e analisa-se onde os polos precisam estar localizados para que a resposta real satisfaça as especificações desejadas. Para os valores especificados de t_r , M_p e t_s , as formas das equações de síntese são

$$\omega_n \geq \frac{1,8}{t_r}, \quad (3.66)$$

$$\zeta \geq \zeta(M_p) \quad (\text{a partir da Fig. 3.23}), \quad (3.67)$$

$$\sigma \geq \frac{4,6}{t_s}. \quad (3.68)$$

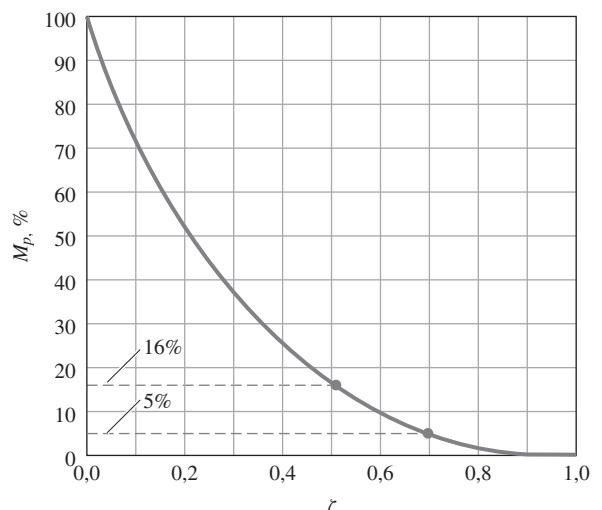


Figura 3.23 Sobressinal M_p em função do coeficiente de amortecimento ζ para um sistema de segunda ordem.

Tempo de acomodação t_s :

Síntese de projeto

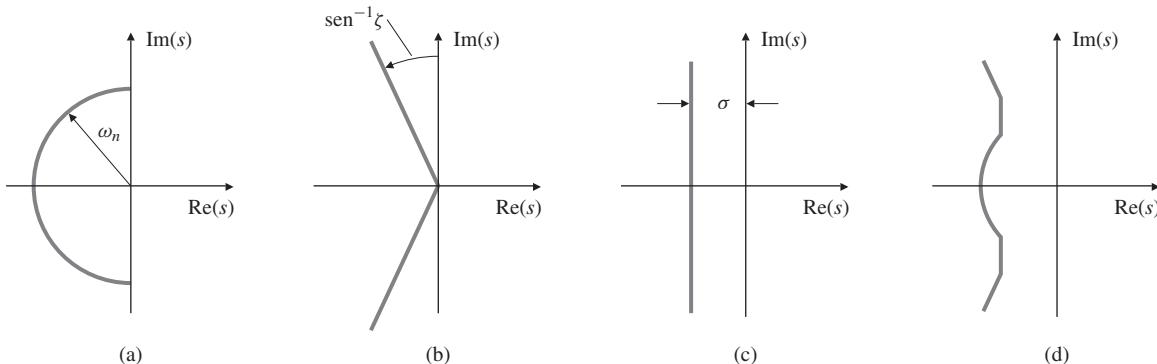


Figura 3.24 Regiões no plano- s delimitadas por especificações na resposta transitória: (a) tempo de subida; (b) sobressinal; (c) tempo de acomodação; (d) composição das três especificações.

Estas equações, representadas no plano- s como mostrado na Fig. 3.24(a-c), serão usadas nos capítulos posteriores para indicar a localização dos polos e zeros que atendem às especificações da resposta dinâmica desejada para o sistema de controle.

É importante ter em mente que as Eqs. (3.66)–(3.68) são guias qualitativos e não fórmulas precisas para o projeto. Elas são destinadas a fornecer um ponto de partida para o projeto. Após o projeto de controle ser completado, a resposta temporal deve ser sempre verificada por um cálculo exato, geralmente por meio de simulação numérica, para verificar se as especificações de tempo foram realmente cumpridas. Se não, outra iteração do projeto é necessária.

Para um sistema de primeira ordem,

$$H(s) = \frac{\sigma}{s + \sigma},$$

**Resposta ao degrau
de um sistema de
primeira ordem**

a transformada da resposta ao degrau é

$$Y(s) = \frac{\sigma}{s(s + \sigma)}.$$

Podemos ver na linha 11 da Tabela A.2 que $Y(s)$ corresponde a

$$y(t) = (1 - e^{-\sigma t})u(t). \quad (3.69)$$

Comparando com o desenvolvimento para a Eq. (3.65), temos que o valor de t_s para um sistema de primeira ordem é o mesmo:

$$t_s = \frac{4,6}{\sigma}.$$

Não haver sobressinal é possível, então $M_p = 0$. O tempo de subida para $y = 0,1$ até $y = 0,9$ pode ser visto a partir da Fig. 3.13,

$$t_r = \frac{\ln 0,9 - \ln 0,1}{\sigma} = \frac{2,2}{\sigma}.$$

No entanto, é mais comum descrever um sistema de primeira ordem em termos de sua constante tempo, que foi definida na Fig. 3.13 como $\tau = 1/\sigma$.

Constante tempo τ

EXEMPLO 3.25 Transformação das especificações para o plano- s

Encontre a região admissível no plano- s para os polos da função de transferência de um sistema, se as exigências para a resposta do sistema são $t_r \leq 0,6$ s, $M_p \leq 10\%$ e $t_s \leq 3$ s.

Solução. Sem saber se o sistema é de segunda ordem sem zeros ou não, é impossível localizar a região admissível com precisão. Independentemente do sistema, podemos obter uma primeira aproximação com as relações de um sistema de segunda ordem. A Eq. (3.66) indica que

$$\omega_n \geq \frac{1,8}{t_r} = 3,0 \text{ rad/s},$$

A Eq. (3.67) e a Fig. 3.23 indicam que

$$\zeta \geq 0,6,$$

e a Eq. (3.68) indica que

$$\sigma \geq \frac{4,6}{3} = 1,5 \text{ s.}$$

A região admissível está à esquerda da linha sólida na Fig. 3.25. Note que qualquer polo que satisfaça ambas as restrições impostas por ζ e ω_n irá, automaticamente, satisfazer a restrição imposta por σ .

3.5 Efeitos de zeros e polos adicionais

As relações mostradas na Fig. 3.24 estão corretas para sistemas de segunda ordem simples; para sistemas mais complexos, elas podem ser usadas apenas como orientação. Se um determinado projeto tem um tempo de subida inadequado (muito lento), devemos aumentar a frequência natural; se o transitório tem um sobressinal muito grande, então o coeficiente de amortecimento deve ser aumentado; se o transitório persistir por muito tempo, os polos precisam ser deslocados para a esquerda no plano-s.

Até agora, apenas os polos de $H(s)$ entraram na discussão. Contudo, $H(s)$ também pode possuir zeros.⁸ A nível de análise transiente, os zeros exercem influência modificando os coeficientes dos termos exponenciais, cuja forma é decidida pelos polos, como pode ser visto no Exemplo 3.23. Para ilustrar isso, considere as duas funções de transferência seguintes, que têm os mesmos polos, mas zeros diferentes:

Efeitos de zeros

O efeito de zeros perto dos polos

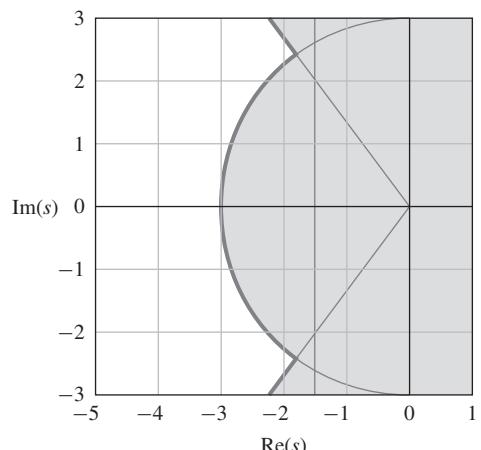


Figura 3.25 Exemplo 3.25, região admissível no plano-s.

⁸ Supomos que $b(s)$ e $a(s)$ não têm fator algum em comum. Se isso não é satisfeito, é possível que $b(s)$ e $a(s)$ sejam zero no mesmo local, mas $H(s)$ pode não ser igual a zero nesse local. As implicações deste caso serão discutidas no Capítulo 7, no qual temos uma descrição de espaço de estado.

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} H_2(s) &= \frac{2(s+1,1)}{1,1(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{2}{1,1} \left(\frac{0,1}{s+1} + \frac{0,9}{s+2} \right) \\ &= \frac{0,18}{s+1} + \frac{1,64}{s+2}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Elas são normalizadas para terem o mesmo ganho DC (ou seja, o ganho em $s = 0$). Observe que o coeficiente do termo $(s+1)$ foi modificado de 2 em $H_1(s)$ para 0,18 em $H_2(s)$. Essa redução drástica é causada pelo zero em $s = -1,1$ em $H_2(s)$, o que quase cancela o polo em $s = -1$. Se colocarmos o zero exatamente em $s = -1$, esse termo irá desaparecer completamente. Em geral, um zero perto de um polo reduz a influência desse termo na resposta total. A partir da equação para obter os coeficientes de uma expansão em frações parciais, Eq. (3.43),

$$C_1 = (s - p_1)F(s)|_{s=p_1},$$

temos que se $F(s)$ tem um zero perto do polo em $s = p_1$, o valor de $F(s)$ será pequeno, porque o valor de s está próximo do zero. Portanto, o coeficiente C_1 , que reflete o quanto deste termo aparece na resposta, será pequeno.

A fim de levar em conta como os zeros afetam a resposta transitória ao projetar um sistema de controle, consideremos as funções de transferência com dois polos complexos e um zero. Para facilitar a análise de uma ampla variedade de casos, escrevemos a função de transferência em uma forma normalizada em relação ao tempo e à localização do zero:

$$H(s) = \frac{(s/\alpha\zeta\omega_n) + 1}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1}. \quad (3.72)$$

O zero está localizado em $s = -\alpha\zeta\omega_n = -\alpha\sigma$. Se α for grande, o zero será afastado dos polos e, assim, o zero terá pouco efeito sobre a resposta. Se $\alpha \geq 1$, o valor do zero estará próximo da parte real dos polos e deverá ter uma influência significativa sobre a resposta. As curvas de resposta ao degrau unitário para $\zeta = 0,5$ e para vários valores de α são apresentadas na Fig. 3.26. Vemos que o efeito principal do zero é aumentar o sobressinal M_p , enquanto ele tem muito

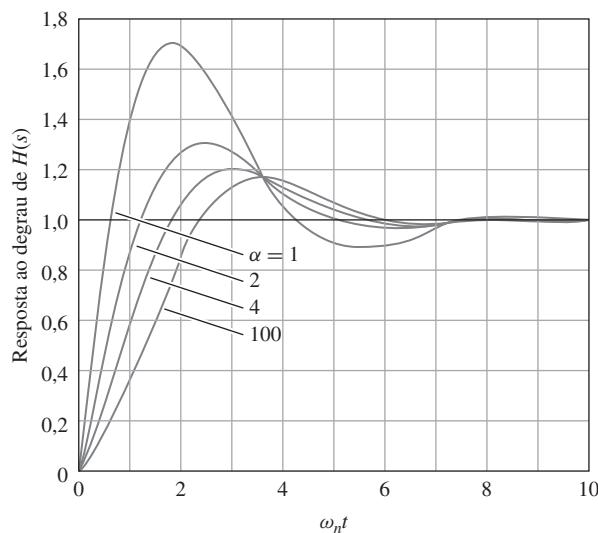
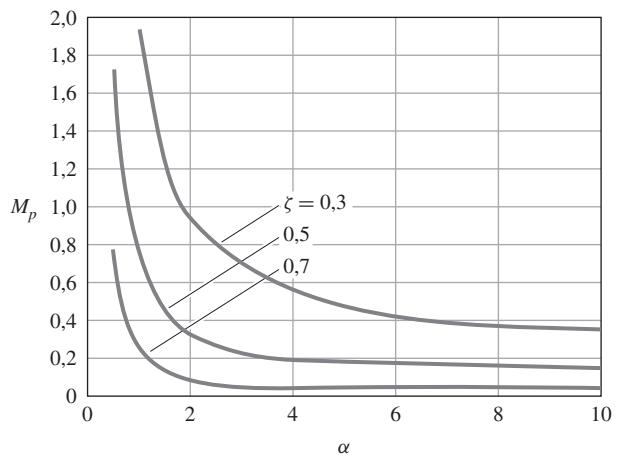


Figura 3.26 Respostas ao degrau unitário de um sistema de segunda ordem com um zero ($\zeta = 0,5$).

Figura 3.27 Curvas do sobressinal M_p em função da localização normalizada do zero α . Em $\alpha = 1$, a parte real do zero é igual à parte real dos polos.



pouca influência sobre o tempo de acomodação. Um gráfico apresentando curvas do M_p em função de α é dado na Fig. 3.27. O gráfico mostra que o zero tem muito pouco efeito sobre o M_p se $\alpha > 3$, mas à medida que α assume valores inferiores a 3, o efeito aumenta, especialmente quando $\alpha = 1$ ou menor.

A Figura 3.26 pode ser explicada em termos da análise da transformada de Laplace. Inicialmente substituindo s/ω_n por s :

$$H(s) = \frac{s/\alpha\zeta + 1}{s^2 + 2\zeta s + 1}.$$

O efeito disto é normalizar a frequência na função de transferência e o tempo na resposta ao degrau; assim $\tau = \omega_n t$. Em seguida, reescrevendo a função de transferência como a soma de dois termos:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} + \frac{1}{\alpha\zeta} \frac{s}{s^2 + 2\zeta s + 1}. \quad (3.73)$$

O primeiro termo, que chamamos de $H_0(s)$, é o termo original (sem zero finito), e o segundo termo $H_d(s)$, que possui o zero, é o produto de uma constante ($1/\alpha\zeta$) vezes s vezes o termo original. A transformada de Laplace de df/dt é $sF(s)$, então $H_d(s)$ corresponde ao produto de uma constante vezes a derivada do termo original, i. e.,

$$y(t) = y_0(t) + y_d(t) = y_0(t) + \frac{1}{\alpha\zeta} \dot{y}_0(t).$$

As respostas ao degrau de $H_0(s)$ denotada por $y_0(t)$ e de $H_d(s)$ denotada por $y_d(t)$ são apresentadas na Fig. 3.28. Olhando para estas curvas, podemos ver que o zero resultou no aumento do sobressinal: a derivada tem uma grande corcova na parte inicial da curva, e, somando-a à resposta de $H_0(s)$, chegamos à resposta total de $H(s)$ para produzir o sobressinal. Essa análise também é muito informativa para o caso em que $\alpha < 0$ e o zero está no SPD onde $s > 0$. (Isso é normalmente chamado de **zero de fase não mínima**, um tema a ser discutido com mais detalhes na Seção 6.1.1.) Neste caso, o termo derivativo é subtraído em vez de ser adicionado. Um caso típico é esboçado na Fig. 3.29.

Zero de fase
não mínima

EXEMPLO 3.26 Efeito de zeros nas proximidades dos polos na resposta transitória

Considere o sistema de segunda ordem com um zero finito e ganho DC unitário,

$$H(s) = \frac{24}{z} \frac{(s+z)}{(s+4)(s+6)}.$$

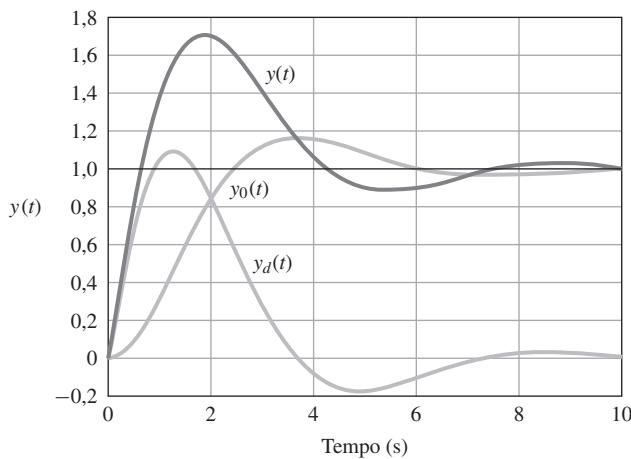


Figura 3.28 Respostas ao degrau de segunda ordem das funções de transferência $H(s)$, $H_0(s)$ e $H_d(s)$.

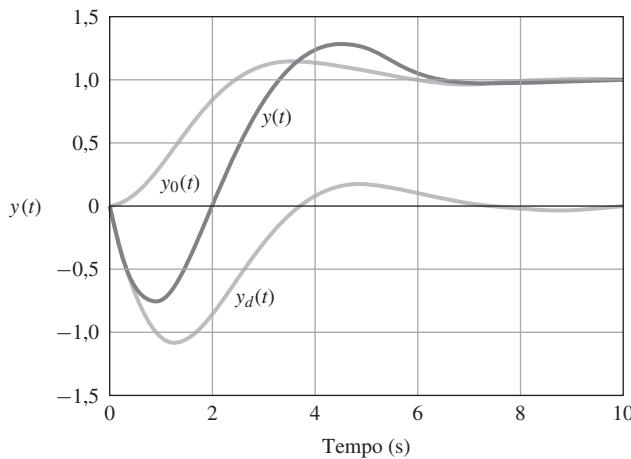


Figura 3.29 Respostas ao degrau de um sistema de segunda ordem com zero no SPD: um sistema de fase não mínima.

Determine o efeito da localização do zero ($s = -z$) na resposta ao degrau unitário quando $z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Solução. A resposta ao degrau é a transformada inversa de Laplace de

$$H_1(s) = H(s) \frac{1}{s} = \frac{24}{z} \frac{(s+z)}{s(s+4)(s+6)} = \frac{24}{z} \frac{s}{s(s+4)(s+6)} + \frac{24}{s(s+4)(s+6)}$$

e é a soma das duas partes

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t),$$

sendo

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{12}{z} e^{-4t} - \frac{12}{z} e^{-6t}, \\ y_2(t) &= z \int_0^t y_1(\tau) d\tau = -3e^{-4t} + 2e^{-6t} + 1, \end{aligned}$$

e

$$y(t) = 1 + \left(\frac{12}{z} - 3 \right) e^{-4t} + \left(2 - \frac{12}{z} \right) e^{-6t}.$$

Pode-se ver que, se $z = 4$ ou $z = 6$, um dos modos do sistema estará ausente da saída, e a resposta será de primeira ordem devido ao cancelamento polo-zero. As respostas ao degrau do sistema são mostradas na Fig. 3.30 ($z = 4$, tracejada, $z = 6$, traço-ponto). Vê-se que o efeito do zero é maior em termos de sobressinal para $z = 1$ (zero mais próximo da origem). O sistema também apresenta sobressinal para $z = 2, 3$. Para $z = 4$ ou $z = 6$, as respostas são de primeira ordem, como esperado. É interessante observar que para $z = 5$, onde o zero está localizado entre os dois polos, não existe sobressinal.

EXEMPLO 3.27 Efeito da proximidade dos zeros complexos aos polos levemente amortecidos

Considere o sistema realimentado de terceira ordem com um par de polos levemente amortecidos e um par de zeros complexos com função de transferência,

$$H(s) = \frac{(s + \alpha)^2 + \beta^2}{(s + 1)[(s + 0,1)^2 + 1]}.$$

Determine o efeito dos zeros complexos ($s = -\alpha \pm j\beta$) na resposta ao degrau unitário do sistema para três zeros diferentes $(\alpha; \beta) = (0,1; 1,0)$, $(\alpha; \beta) = (0,25; 1,0)$ e $(\alpha; \beta) = (0,5; 1,0)$, como mostrado na Fig. 3.31.

Solução. As três respostas ao degrau unitário são traçadas usando o MATLAB, como mostrado na Fig. 3.32. O efeito dos modos levemente amortecidos são claramente vistos como oscilações nas respostas ao degrau para os casos em que $(\alpha; \beta) = (0,25; 1,0)$, $(\alpha; \beta) = (0,5; 1,0)$, ou seja, quando os zeros complexos não estão próximos aos polos levemente amortecidos, como mostrado na Fig. 3.31. Por outro lado, se os zeros complexos cancelam exatamente os polos levemente amortecidos, como é o caso de $(\alpha; \beta) = (0,1; 1,0)$, as oscilações são completamente eliminadas na resposta ao degrau. Na prática, os polos levemente amortecidos não são conhecidos com precisão e o cancelamento exato não é possível. No entanto, colocar os zeros complexos perto dos polos levemente amortecidos pode trazer melhorias ao desempenho da resposta ao degrau. Voltaremos a essa técnica nos Capítulos 5, 7 e 10, no contexto de projeto do compensador dinâmico.

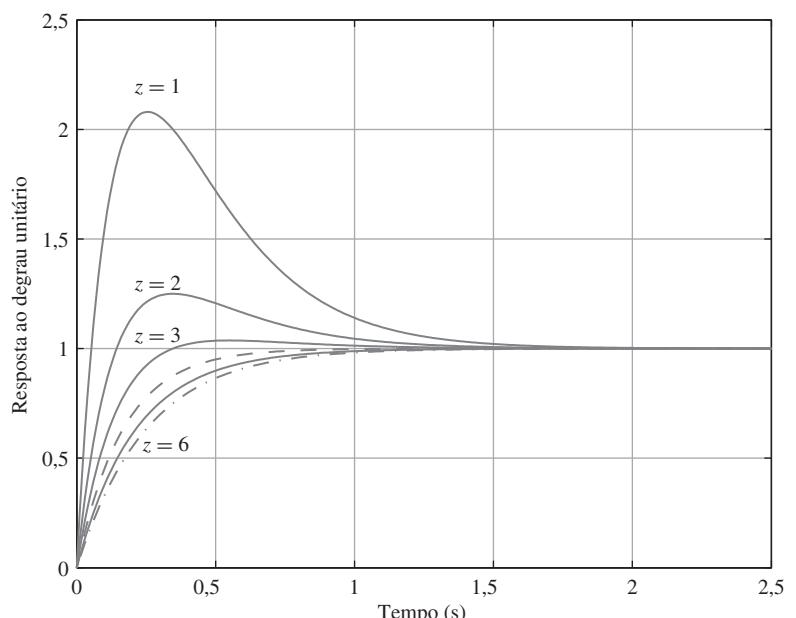


Figura 3.30 Efeito do zero na resposta transitória.

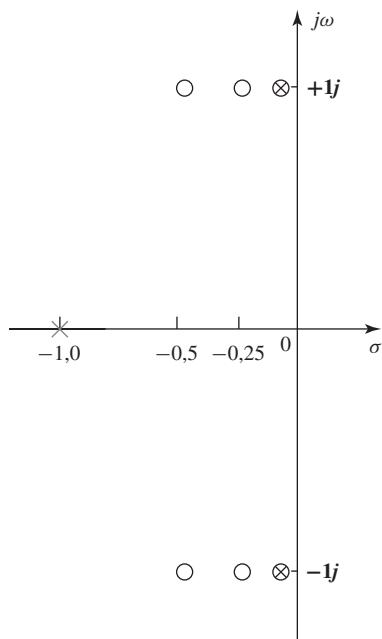


Figura 3.31 Localização dos zeros complexos.

EXEMPLO 3.28 *Resposta de aeronaves usando o MATLAB*

A função de transferência entre o profundo e a altitude das aeronaves Boeing 747 descrita na Seção 10.3.2 pode ser aproximada como

$$\frac{h(s)}{\delta_e(s)} = \frac{30(s-6)}{s(s^2+4s+13)}.$$

1. Use o MATLAB para traçar a resposta temporal da altitude para uma entrada impulsiva de 1° no profundo. Explique a resposta, observando as razões físicas para a natureza de fase não mínima da resposta.
2. Examine a precisão das aproximações para t_r , t_s e M_p [Eqs. (3.60) e (3.65) e Fig. 3.23].

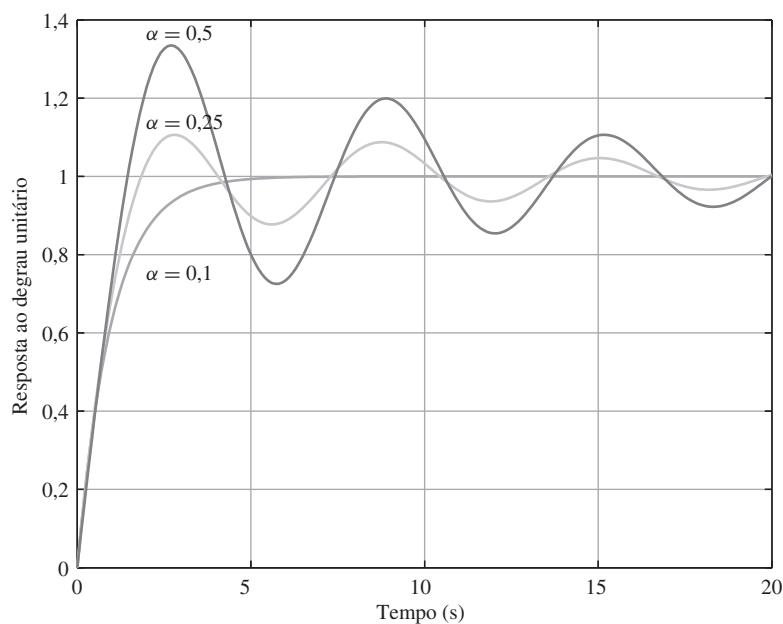


Figura 3.32 Efeito dos zeros complexos na resposta transitória.

Solução.

1. As instruções no MATLAB para obter a resposta ao impulso para este caso são

```

u = -1; % u = delta
numG = u*30*[1 -6]; % forma do numerador
denG = [1 4 13 0]; % forma do denominador
sysG = tf(numG,denG); % define o sistema por seu numerador e denominador
y=impulse(sysG); % calcula a resposta ao impulso; y = h
plot(y); % traça a resposta ao impulso

```

O resultado é apresentado na Fig. 3.33. Observe como a altitude cai inicialmente e depois sobe para um novo valor final. O valor final é previsto pelo Teorema do Valor Final:

$$h(\infty) = s \left. \frac{30(s-6)(-1)}{s(s^2 + 4s + 13)} \right|_{s=0} = \frac{30(-6)(-1)}{13} = +13,8.$$

Resposta de um sistema de fase não mínima

O fato de que a resposta tem um valor final finito para uma entrada impulsiva se deve ao termo s no denominador. Isso representa uma integração pura, e a integral da função impulsivo é um valor finito. Se a entrada fosse um degrau, a altitude teria continuado a aumentar com o tempo; em outras palavras, a integral de uma função degrau é uma função rampa.

A queda inicial é prevista pelo zero de fase não mínima na função de transferência. A deflexão negativa no profundo é definida como sendo para cima, por convenção (ver Fig. 10.30). A deflexão para cima no profundo move a cauda para baixo, o que movimenta o nariz para cima e produz a elevação. A deflexão no instante inicial provoca uma força para baixo antes de a aeronave rotacionar, portanto, a resposta inicial da altitude é para baixo. Após a rotação, o aumento da elevação resulta em um ângulo de ataque das asas que faz o avião subir.

2. O tempo de subida dado pela Eq. (3.60) é

$$t_r = \frac{1,8}{\omega_n} = \frac{1,8}{\sqrt{13}} = 0,5 \text{ s.}$$

O coeficiente de amortecimento ζ é encontrado pela relação

$$2\zeta\omega_n = 4 \Rightarrow \zeta = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0,55.$$

Da Fig. 3.23, podemos encontrar o sobressinal M_p como 0,14. Devido a $2\zeta\omega_n = 2\sigma = 4$, a [Eq. (3.65)] mostra que

$$t_s = \frac{4,6}{\sigma} = \frac{4,6}{2} = 2,3 \text{ s.}$$

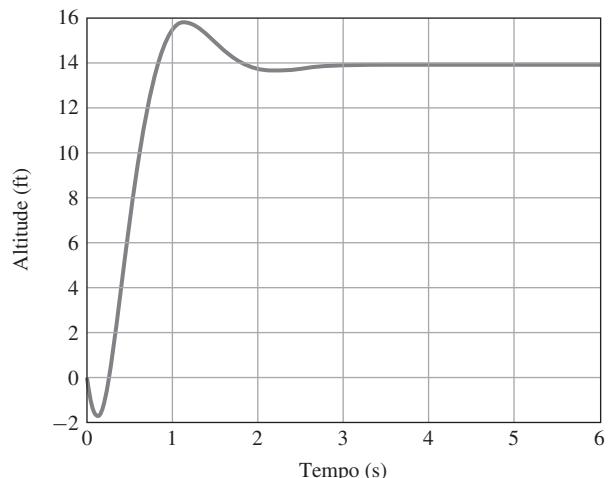


Figura 3.33 Resposta da altitude de uma aeronave a uma entrada impulsiva no profundo.

O exame mais detalhado na resposta temporal $h(t)$ obtida pelo MATLAB mostra que $t_r \cong 0,43$ s, $M_p \cong 0,14$ e $t_s \cong 2,6$ s, o que é razoavelmente próximo das estimativas. O único efeito significativo do zero de fase não mínima era fazer com que a resposta inicial fosse na “direção errada” e tornar a resposta um pouco mais lenta.

Além de estudar os efeitos dos zeros, é útil considerar os efeitos de um polo extra na resposta de um sistema de segunda ordem padrão. Neste caso, tomamos a função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{(s/\alpha\zeta\omega_n + 1)[(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1]}. \quad (3.74)$$

Respostas ao degrau são mostradas na Fig. 3.34 para $\zeta = 0,5$ e vários valores de α . Neste caso, o maior efeito é aumentar o tempo de subida. A curva do tempo de subida em função de α é mostrada na Fig. 3.35 para vários valores de ζ .

A partir dessa discussão, podemos tirar várias conclusões sobre a resposta dinâmica de um sistema simples, como revelado por seus polos-zeros:

Efeitos do polo extra

Efeitos de polo-zero na resposta dinâmica

1. Para um sistema de segunda ordem sem zeros finitos, os parâmetros da resposta transitória são aproximadas como:

$$\text{Tempo de subida: } t_r \cong \frac{1,8}{\omega_n},$$

$$\text{Sobressinal: } M_p \cong \begin{cases} 5\%, & \zeta = 0,7, \\ 16\%, & \zeta = 0,5 \\ 35\%, & \zeta = 0,3, \end{cases} \quad (\text{veja Fig. 3.23}),$$

$$\text{Tempo de acomodação: } t_s \cong \frac{4,6}{\sigma}.$$

2. Um zero no semiplano esquerdo (SPE) irá aumentar o sobressinal se o zero é menor que 4 vezes a parte real dos polos complexos. A curva é dada na Fig. 3.27.
3. Um zero no semiplano direito (SPD) irá diminuir o sobressinal (e pode fazer com que a resposta ao degrau comece na direção errada).
4. Um polo adicional no SPE irá aumentar significativamente o tempo de subida, se o polo extra é menor que 4 vezes a parte real dos polos complexos. A curva é dada na Fig. 3.35

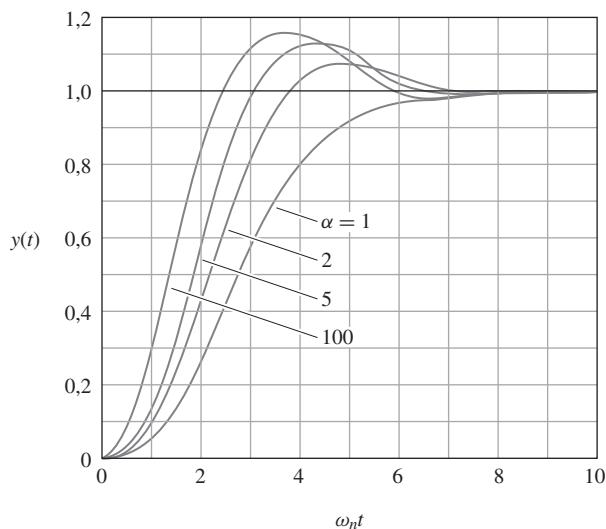
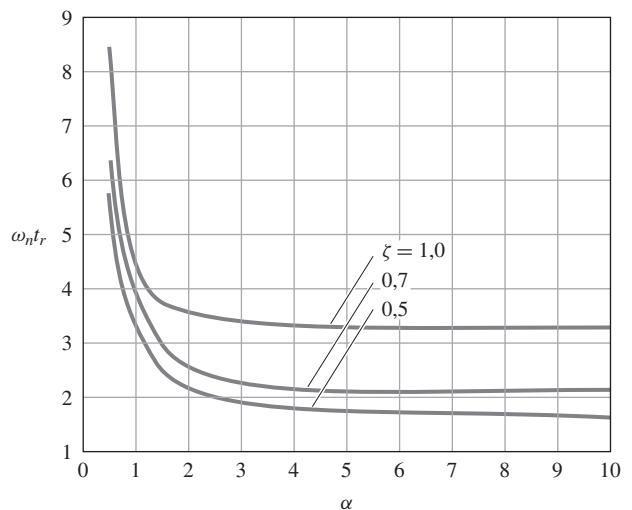


Figura 3.34 Respostas ao degrau para vários sistemas de terceira ordem com $\zeta = 0,5$.

Figura 3.35 Tempo de subida normalizado para vários valores de polos adicionais.



3.6 Estabilidade

Para um sistema não linear e variante no tempo, o estudo da estabilidade é um tópico complexo e complicado. Nesta seção, vamos considerar apenas sistemas LIT para os quais temos a seguinte condição de estabilidade:

Um sistema LIT é dito estável se todas as raízes do polinômio no denominador de sua função de transferência têm parte real negativa (isto é, todas raízes estão no lado esquerdo do plano- s) e é instável em caso contrário.

Sistema estável

Um sistema é estável se suas condições iniciais decaem para zero e é instável se elas divergem. Como se verificou, um sistema LIT (parâmetros constantes) é **estável** se *todos* os polos do sistema estão estritamente no semiplano esquerdo do plano- s [i.e., todos os polos têm parte real negativa ($s = -\sigma + j\omega$, $\sigma > 0$)]. Se *qualquer* polo do sistema estiver no semiplano direito do plano- s (i.e., tiver parte real positiva, $s = -\sigma + j\omega$, $\sigma < 0$), então o sistema é **instável**, como mostrado na Fig. 3.15. Com qualquer polo simples no eixo $j\omega$ ($\sigma = 0$), condições iniciais pequenas irão persistir. Para qualquer outro polo com $\sigma = 0$, um movimento oscilatório irá persistir. Portanto, um sistema é estável se sua resposta transitória decai e instável se ela não decai. A Figura 3.15 mostra a resposta temporal de um sistema devido à localização dos polos.

Nos capítulos seguintes, vamos abordar noções mais avançadas de estabilidade, como o teste de estabilidade de Nyquist (Capítulo 6) e a estabilidade de Lyapunov (Capítulo 9).

3.6.1 Estabilidade entrada limitada-saída limitada

Um sistema é dito **estável no sentido entrada limitada-saída limitada** (BIBO estabilidade: *Bounded Input-Bounded Output*) se cada entrada limitada resulta em uma saída limitada (independentemente do que acontece internamente no sistema). Um teste para verificar essa propriedade está disponível quando a resposta do sistema é dada em termos da convolução. Se o sistema tem entrada $u(t)$, saída $y(t)$ e resposta ao impulso $h(t)$, então

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau. \quad (3.75)$$

Se $u(t)$ é limitado, então existe uma constante M tal que $|u| \leq M < \infty$, e a saída é limitada por

$$|y| = \left| \int hu d\tau \right|$$

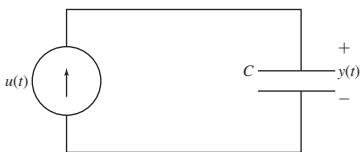


Figura 3.36 Capacitor ligado a uma fonte de corrente.

$$\begin{aligned} &\leq \int |h||u| d\tau \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Assim, a saída será limitada se $\int_{-\infty}^{\infty} |h| d\tau$ for limitado.

Por outro lado, suponha que a integral não é limitada e a entrada é limitada $u(t - \tau) = +1$ se $h(\tau) > 0$ e $u(t - \tau) = -1$ se $h(\tau) < 0$. Neste caso,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau, \quad (3.76)$$

e a saída não é limitada. Concluímos que

O sistema com resposta ao impulso $h(t)$ é BIBO estável se, e somente se,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty.$$

Definição matemática da BIBO estabilidade

EXEMPLO 3.29 BIBO estabilidade para um capacitor

Determine se o capacitor ligado a uma fonte de corrente como apresentado na Fig. 3.36 é estável. A tensão no capacitor é a saída e a corrente é a entrada.

Solução. A resposta ao impulso é o degrau unitário, $h(t) = 1(t)$. Para essa resposta,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} d\tau \quad (3.77)$$

não é limitada. O capacitor não é BIBO estável. Note que a função de transferência do sistema é $1/s$ e tem um polo no eixo imaginário. Fisicamente, podemos ver que a entrada de corrente constante fará com que a tensão cresça, e, assim, a resposta do sistema não será limitada, nem estável. Em geral, se um sistema LIT tem algum polo no eixo imaginário ou no SPD, a resposta não será BIBO estável; se todos os polos estiverem no interior do SPE, então a resposta será BIBO estável. Assim, para estes sistemas, a localização dos polos da função de transferência pode ser utilizada para verificar a estabilidade.

Determinação da BIBO estabilidade pela localização dos polos

Uma alternativa para calcular a integral da resposta ao impulso ou até mesmo para calcular as raízes da equação característica é dada pelo critério de estabilidade de Routh, que discutiremos na Seção 3.6.3.

3.6.2 Estabilidade de sistemas LIT

Considere o sistema LIT cujo denominador da função de transferência é a equação característica

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n = 0. \quad (3.78)$$

Suponha que as raízes $\{p_i\}$ da equação característica sejam reais ou complexas, mas distintas. Note que a Eq. (3.78) aparece como o denominador da função de transferência do sistema *antes que qualquer cancelamento de polos por zeros ocorra*:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \\ &= \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad m \leq n. \end{aligned} \quad (3.79)$$

A solução para a equação diferencial cuja equação característica é dada pela Eq. (3.78) pode ser escrita usando expansão em frações parciais como

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}, \quad (3.80)$$

sendo $\{p_i\}$ as raízes da Eq. (3.78) e $\{K_i\}$ dependente das condições iniciais e da localização dos zeros. Se em uma função de transferência um zero cancelar um polo no SPD, o K_i correspondente seria igual a zero na saída, mas um transiente instável poderá aparecer em algum intervalo.

O sistema é estável se, e somente se (condição necessária e suficiente), cada termo na Eq. (3.80) tender a zero quando $t \rightarrow \infty$:

$$e^{p_i t} \rightarrow 0 \quad \text{para todos os } p_i.$$

Isto irá acontecer se todos os polos do sistema estiverem estritamente no SPE, sendo

$$\operatorname{Re}\{p_i\} < 0. \quad (3.81)$$

Estabilidade interna ocorre quando todos os polos estão estritamente no SPE

O eixo $j\omega$ é o limite da estabilidade

Se alguns polos são repetidos, a resposta deve ser alterada a partir da Eq. (3.80) incluindo um polinômio em t no lugar do K_i , mas a conclusão é a mesma. Isso é chamado de **estabilidade interna**. Portanto, a estabilidade de um sistema pode ser determinada calculando o posicionamento das raízes da equação característica e verificando se todas elas estão no SPE. Se o sistema possuir qualquer polo no SPD, ele é **instável**. Assim, o eixo $j\omega$ é o limite entre a resposta assintoticamente estável e instável. Se o sistema não tem polos repetidos no eixo $j\omega$, então é dito ser **neutralmente estável**. Por exemplo, um polo na origem (integrador) resulta em uma resposta que não decai. Um par de polos complexos no eixo $j\omega$ resulta em uma resposta oscilante (com amplitude constante). Se o sistema tem polos repetidos no eixo $j\omega$, então ele é **instável** [uma vez que ele resulta em termos $t e^{\pm j\omega_0 t}$ na Eq. (3.80)]. Por exemplo, um par de polos na origem (integrador duplo) resulta em uma resposta sem limites. O MATLAB calcula os polos e, portanto, determina a estabilidade do sistema, relativamente simples.

Uma alternativa para determinar a localização das raízes da equação característica é dada pelo critério de estabilidade de Routh, que discutiremos a seguir.

3.6.3 Critério de estabilidade de Routh

Existem vários métodos para obtenção de informações sobre a localização das raízes de um polinômio sem realmente calculá-las. Estes métodos foram desenvolvidos no século 19 e foram especialmente úteis antes da disponibilidade do programa MATLAB. Eles ainda são úteis para determinarem a estabilidade de polinômios, especialmente quando os coeficientes estão na forma simbólica (não numérica). Considere a equação característica de um sistema de n -ésima ordem:⁹

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n. \quad (3.82)$$

É possível fazer certas afirmações sobre a estabilidade do sistema sem realmente calcular as raízes do polinômio. Este é um problema clássico e existem vários métodos para a solução.

Uma condição necessária para a estabilidade do sistema é que todas as raízes da Eq. (3.82) tenham partes reais negativas, o que exige que todos os coeficientes $\{a_i\}$ sejam positivos.¹⁰

Uma condição necessária para a estabilidade de Routh

⁹ Sem perda de generalidade, podemos supor que o polinômio seja mônico (ou seja, o coeficiente da maior potência de s é 1).

¹⁰ Isso é fácil de ser visto se construirmos um polinômio como o produto de fatores de primeira e segunda ordem.

Uma condição necessária (mas não suficiente) para a estabilidade é que todos os coeficientes do polinômio característico sejam positivos.

Se algum dos coeficientes estiver faltando (for zero) ou for negativo, então o sistema terá polos localizados fora do SPE. Essa condição pode ser verificada por inspeção. Uma vez que as condições necessárias básicas forem satisfeitas, precisamos de um teste mais poderoso. Testes equivalentes foram propostos independentemente por Routh em 1874 e por Hurwitz em 1895; vamos discutir a primeira versão. A formulação de Routh exige o cálculo de um arranjo triangular, em função dos coeficientes $\{a_i\}$. Ele mostrou que uma *condição necessária e suficiente para a estabilidade* é que todos os elementos da primeira coluna desse arranjo sejam positivos.

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade

Um sistema é estável se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna do arranjo de Routh forem positivos.

Para determinar o arranjo de Routh, primeiro organize os coeficientes do polinômio característico em duas linhas, começando com o primeiro e segundo coeficientes seguidos pelos coeficientes pares e ímpares

$$\begin{array}{rccccc} s^n & : & 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ s^{n-1} & : & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \end{array}$$

Arranjo de Routh

Em seguida, adicione as seguintes linhas para completar a **arranjo de Routh**:

Linha	n	$s^n:$	1	a_2	a_4	\dots
Linha	$n - 1$	$s^{n-1}:$	a_1	a_3	a_5	\dots
Linha	$n - 2$	$s^{n-2}:$	b_1	b_2	b_3	\dots
Linha	$n - 3$	$s^{n-3}:$	c_1	c_2	c_3	\dots
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Linha	2	$s^2:$	*	*		
Linha	1	$s:$		*		
Linha	0	$s^0:$		*		

Calcule os elementos das linhas $(n - 2)$ e $(n - 3)$ como a seguir:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}, \\ b_2 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1}, \\ b_3 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1}, \\ c_1 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \\ c_2 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \\ c_3 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}. \end{aligned}$$

Note que os elementos da linha $(n - 2)$ e das linhas abaixo dela são obtidos a partir das duas fileiras anteriores usando determinantes, com os dois elementos na primeira coluna e outros elementos das colunas sucessivas. Normalmente, há $n + 1$ elementos na primeira coluna do arranjo pronto. Se estes são todos positivos, então todas as raízes do polinômio característico estão no SPE. No entanto, se os elementos da primeira coluna não são todos positivos, então o número de raízes no SPD é igual ao número de mudanças de sinal na coluna. Um padrão $+, -, +$ é contado como *duas* mudanças de sinal: uma mudança de $+$ para $-$ e outra de $-$ para $+$. Uma simples demonstração do teste de Routh é encontrada em Ho e outros (1998).

EXEMPLO 3.30 Teste de Routh

O polinômio

$$a(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

satisfaz a condição necessária para estabilidade desde que todos os $\{a_i\}$ sejam positivos e não nulos. Determine se alguma das raízes do polinômio está no SPE.

Solução. O arranjo de Routh para esse polinômio é

$$\begin{array}{rccccc} s^6: & 1 & 3 & 1 & 4 \\ s^5: & 4 & 2 & 4 & 0 \\ s^4: & \frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{4} & 0 = \frac{4 \cdot 1 - 4 \cdot 1}{4} & 4 = \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 0}{4} & \\ s^3: & 2 = \frac{\frac{5}{2} \cdot 2 - 4 \cdot 0}{\frac{5}{2}} & -\frac{12}{5} = \frac{\frac{5}{2} \cdot 4 - 4 \cdot 4}{\frac{5}{2}} & 0 & \\ s^2: & 3 = \frac{2 \cdot 0 - \frac{5}{2} \left(-\frac{12}{5} \right)}{2} & 4 = \frac{2 \cdot 4 - \left(\frac{5}{2} \cdot 0 \right)}{2} & \\ s: & -\frac{76}{15} = \frac{3 \left(-\frac{12}{5} \right) - 8}{3} & 0 & \\ s^0: & 4 = \frac{-\frac{76}{15} \cdot 4 - 0}{-\frac{76}{15}}. & & \end{array}$$

Concluímos que o polinômio tem raízes no SPD, desde que os elementos da primeira coluna não sejam todos positivos. Na verdade, existem dois polos no SPD devido às duas mudanças de sinais.¹¹

Note que, no cálculo do arranjo de Routh, podemos simplificar o resto dos cálculos, multiplicando ou dividindo uma linha por uma constante positiva. Observe também que as duas últimas linhas têm um elemento diferente de zero.

O método de Routh também é útil para determinar a faixa de valores dos parâmetros na qual um determinado sistema realimentado é estável.

¹¹ As raízes do polinômio calculadas usando o MATLAB são $-3,2644$, $0,7797 \pm 0,7488j$, $-0,6046 \pm 0,9935j$ e $-0,8858$, o que está de acordo com as conclusões do exemplo.

EXEMPLO 3.31 Estabilidade em função de valores dos parâmetros

Considere o sistema mostrado na Fig. 3.37. As propriedades de estabilidade do sistema estão em função do ganho de realimentação proporcional K . Determine os valores de K para os quais o sistema é estável.

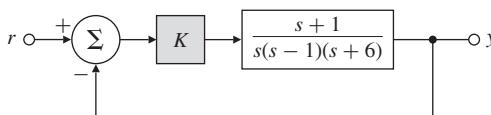


Figura 3.37 Sistema realimentado para teste de estabilidade.

Solução. A equação característica do sistema é

$$1 + K \frac{s+1}{s(s-1)(s+6)} = 0,$$

ou

$$s^3 + 5s^2 + (K - 6)s + K = 0.$$

O arranjo de Routh correspondente é

$s^3:$	1	$K - 6$
$s^2:$	5	K
$s:$	$(4K - 30)/5$	
$s^0:$	K .	

Para o sistema ser estável, é necessário que

$$\frac{4K - 30}{5} > 0 \quad \text{e} \quad K > 0,$$

ou

$$K > 7,5 \quad \text{e} \quad K > 0.$$

Assim, o método de Routh fornece uma resposta analítica à questão da estabilidade. Embora qualquer ganho que satisfaça a desigualdade estabilize o sistema, a resposta dinâmica poderia ser completamente diferente, dependendo do valor específico de K . Com base em um valor específico do ganho, podemos calcular os polos de malha fechada encontrando as raízes do polinômio característico. O polinômio característico é representado por seus coeficientes em um vetor linha (em ordem decrescente dos fatores de s)

$$\text{denT} = [1 \ 5 \ K - 6 \ K],$$

e podemos calcular suas raízes no MATLAB usando o comando

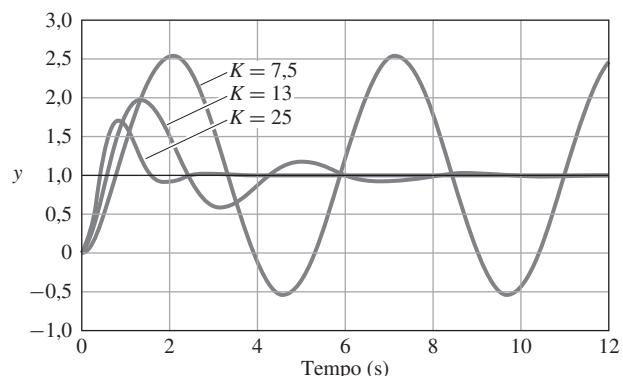
$$\text{roots}(\text{denT}).$$

Calculando raízes no MATLAB

Para $K = 7,5$ as raízes são -5 e $\pm 1,22j$ e o sistema tem estabilidade neutra. Note que o método de Routh prevê a presença de polos no eixo imaginário para $K = 7,5$. Se fizermos $K = 13$, os polos de malha fechada são $-4,06$ e $-0,47 \pm 1,7j$; e para $K = 25$, os polos são $-1,90$ e $-1,54 \pm 3,27j$. Em ambos os casos, o sistema é estável como previsto pelo método de Routh. A Figura 3.38 mostra a resposta transitória para os três valores do ganho. Para obter a resposta transitória, calculamos a função de transferência em malha fechada

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)}{s^3 + 5s^2 + (K-6)s + K},$$

Figura 3.38 Resposta transitória para o sistema da Fig. 3.37.



então o numerador do polinômio é expresso como

$$\text{numT} = [K \ K]; \quad \% \text{ forma do numerador}$$

e denT é como definido anteriormente. Os comandos no MATLAB são

$$\begin{aligned} \text{sysT} &= \text{tf}(\text{numT}, \text{denT}); \quad \% \text{ define o sistema} \\ \text{step}(\text{sysT}); & \quad \% \text{ calcula a resposta ao degrau} \end{aligned}$$

produzindo a resposta ao degrau unitário.

EXEMPLO 3.32 Estabilidade em função de valores de dois parâmetros

Encontre os valores possíveis para os ganhos do controlador (K, K_I) tal que o sistema realimentado na Fig. 3.39 com um controlador PI (proporcional-integral; veja o Capítulo 4) seja estável.

Solução. A equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + \left(K + \frac{K_I}{s} \right) \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$s^3 + 3s^2 + (2 + K)s + K_I = 0.$$

O arranjo de Routh correspondente é

$$\begin{array}{ccc} s^3: & 1 & 2 + K \\ s^2: & 3 & K_I \\ s: & (6 + 3K - K_I)/3 & \\ s^0: & K_I & \end{array}$$

Para estabilidade interna, temos que

$$K_I > 0 \quad \text{e} \quad K > \frac{1}{3}K_I - 2.$$

A região permitida para os ganhos pode ser traçada no MATLAB usando os comandos

```
fh=@(ki,k) 6+3*k-ki;
ezplot(fh)
```

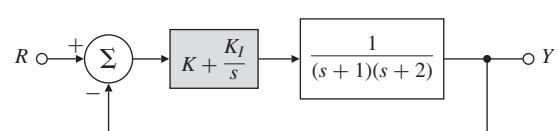
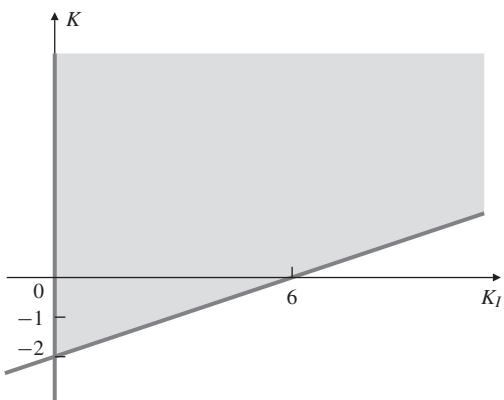


Figura 3.39 Sistema com controle proporcional-integral (PI).

**Figura 3.40** Região de estabilidade.

```
hold on;
f=@(ki,k) ki;
ezplot(f);
```

esta região é a área sombreada no plano (K_I, K) mostrada na Fig. 3.40, representando uma solução analítica para o problema de estabilidade. Este exemplo ilustra o verdadeiro valor do método de Routh e o motivo pelo qual ele é superior às abordagens numéricas. Teria sido mais difícil chegar a esses limites nos ganhos usando técnicas de busca numérica. A função de transferência em malha fechada é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Ks + K_I}{s^3 + 3s^2 + (2 + K)s + K_I}.$$

Como no Exemplo 3.31, podemos calcular os polos de malha fechada para diferentes valores dos ganhos do compensador dinâmico usando a função `roots` do MATLAB, na qual o argumento é o denominador da função de transferência

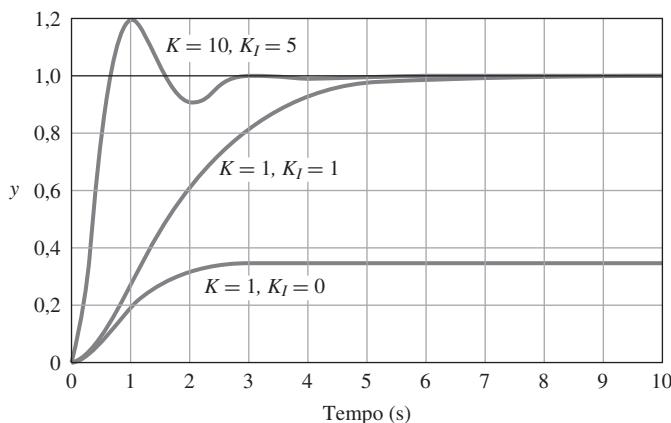
```
denT = [1 3 2+K KI]; % forma do denominador
```

Similarmente, podemos encontrar o zero calculando a raiz do polinômio no numerador

```
numT = [K KI]; % forma do numerador
```

Função roots do MATLAB

O zero do sistema em malha fechada é $-K_I/K$. A Figura 3.41 mostra a resposta transitória para três pares de ganhos de realimentação. Para $K = 1$ e $K_I = 0$, os polos de malha fechada são 0 e $-1,5 \pm 0,86j$, e o zero está na origem. Para $K = K_I = 1$, os polos e zeros estão localizados em -1 .

**Figura 3.41** Respostas transitórias para o sistema na Fig. 3.39.

Para $K = 10$ e $K_I = 5$, os polos de malha fechada são $-0,46$ e $-1,26 \pm 3,3j$, e o zero é $-0,5$. A resposta ao degrau foi novamente obtida usando o MATLAB

```
sysT=tf(numT,denT); % define o sistema
step=(sysT) % calcula a resposta ao degrau
```

Existe um erro grande em estado estacionário quando $K_I = 0$. (Veja o Capítulo 4.)

Se o primeiro termo em uma das linhas é zero ou se toda a linha é zero, então o arranjo de Routh padrão não pode ser formado, por isso temos de usar uma das técnicas especiais descritas a seguir.

Δ Casos especiais

Caso especial I

Se apenas o primeiro elemento em uma das linhas é zero, então podemos substituir o zero por uma constante pequena e positiva $\epsilon > 0$ e continuar o procedimento como antes. Em seguida, aplicamos o critério de estabilidade, tomando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$.

EXEMPLO 3.33 Teste de Routh para o caso especial I

Considere o polinômio

$$a(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9.$$

Determine se alguma das raízes está no SPD.

Solução. O arranjo de Routh é

$s^5:$	1	2	6	
$s^4:$	3	6	9	
$s^3:$	0	3	0	
Novo $s^3:$	ϵ	3	0	← Substitua o zero por ϵ
$s^2:$	$\frac{6\epsilon - 9}{\epsilon}$	9	0	
$s:$	$3 - \frac{3\epsilon^2}{2\epsilon - 3}$	0	0	
$s^0:$	9	0		

Existem duas mudanças de sinal na primeira coluna do arranjo, o que significa que existem dois polos que não estão no SPE.¹²

Caso especial II

Outro caso especial ocorre quando uma linha inteira do arranjo de Routh é zero. Isso indica que há pares de raízes complexos conjugados, que são imagens espelhadasumas das outras em relação ao eixo imaginário. Se a i -ésima linha é zero, formamos uma equação auxiliar da linha anterior (diferente de zero):

$$a_1(s) = \beta_1 s^{i+1} + \beta_2 s^{i-1} + \beta_3 s^{i-3} + \dots \quad (3.83)$$

Sendo que $\{\beta_i\}$ são os coeficientes da linha $(i+1)$ do arranjo. Então, substituímos a i -ésima linha pelos coeficientes da *derivada* do polinômio auxiliar e completamos o arranjo. Portanto, as raízes do polinômio auxiliar na Eq. (3.83) são também raízes da equação característica e devem ser testadas separadamente.

EXEMPLO 3.34 Teste de Routh para o caso especial II

Considere o polinômio

$$a(s) = s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12,$$

determine se existem raízes no eixo $j\omega$ ou no SPD.

¹² As raízes calculadas pelo MATLAB são $-2,9043$, $0,6567 \pm 1,2881j$, $-0,7046 \pm 0,9929j$.

Solução. O arranjo de Routh é

$s^5:$	1	11	28	
$s^4:$	5	23	12	
$s^3:$	6,4	25,6	0	
$s^2:$	3	12		
$s:$	0	0		$\leftarrow a_1(s) = 3s^2 + 12$
Novo $s:$	6	0		$\leftarrow \frac{da_1(s)}{ds} = 6s$
$s^0:$	12,			

Não há troca de sinais na primeira coluna. Então, todas as raízes têm parte real negativa, exceto por um par no eixo imaginário. Podemos deduzir isso da seguinte maneira: quando substituirmos o zero na primeira coluna por $\epsilon > 0$, não há mudança de sinal. Se deixarmos $\epsilon < 0$, então há duas mudanças de sinal. Assim, se $\epsilon = 0$, existem dois polos no eixo imaginário, que são as raízes de

$$a_1(s) = s^2 + 4 = 0,$$

ou

$$s = \pm j2.$$

O que está de acordo com o fato de que as raízes calculadas usando o MATLAB são $-3, \pm 2j, -1$ e -1 .

O resultado de Routh-Hurwitz assume que os coeficientes do polinômio característico são precisamente conhecidos. Sabe-se que as raízes de um polinômio podem ser muito sensíveis até mesmo a pequenas perturbações nos coeficientes do polinômio. Se o intervalo de variação de cada um dos coeficientes do polinômio é conhecido, então existe um notável resultado chamado teorema de Kharitonov (1978) que permite verificar a estabilidade de um polinômio com coeficientes que não são precisamente conhecidos apenas verificando a estabilidade de quatro polinômios, chamados de Kharitonov, utilizando o teste de Routh.

Δ 3.7 Obtenção de modelos a partir de dados experimentais

Existem várias razões para o uso de dados experimentais para obter um modelo do sistema dinâmico a ser controlado. Em primeiro lugar, o melhor modelo teórico construído a partir das equações de movimento ainda é apenas uma aproximação da realidade. Às vezes, como no caso de uma nave espacial muito rígida, o modelo teórico é extremamente bom. Outras vezes, como em muitos processos químicos tal como a fabricação de papel, o modelo teórico é muito aproximado. Em todo caso, antes do projeto de controle final ser feito, é importante e prudente testar o modelo teórico com dados experimentais. Por outro lado, em situações nas quais o modelo teórico é especialmente complicado ou a física do processo é mal compreendida, a única informação confiável em que se basear o projeto de controle está nos dados experimentais. Finalmente, o sistema pode estar sujeito a variações a qualquer momento, o que ocorre quando o ambiente no qual sistema está muda. Exemplos incluem uma aeronave que muda de altitude ou velocidade, uma máquina de papel em que se utiliza uma diferente composição de fibras ou um sistema não linear que é alterado para um novo ponto de operação. Nessas ocasiões, é preciso “reajustar” o controlador, alterando os parâmetros de controle. Isto exige um modelo para as novas condições, e os dados experimentais frequentemente são mais eficazes, se não são as únicas informações disponíveis para o novo modelo.

Existem quatro tipos de dados experimentais para se gerar um modelo:

1. **resposta transitória**, gerada por um impulso ou degrau unitário;
2. **resposta em frequência**, que resulta da excitação de um sistema por uma entrada senoidal em muitas frequências;
3. **informações do estado estacionário estocástico**, que podem ser obtidas no voo de uma aeronave durante um tempo turbulento ou de alguma outra fonte natural de aleatoriedade;
4. **dados por ruído artificial aleatório**, que podem ser gerados em um computador digital.

Quatro fontes de dados experimentais

	Cada classe de dados experimentais tem suas propriedades, vantagens e desvantagens.
Resposta transitória	Dados da resposta transitória são relativamente fáceis e simples de serem obtidos. Eles também são representativos dos sinais naturais aos quais o sistema está sujeito. Assim, um modelo gerado a partir desses dados pode ser confiável para a concepção do sistema de controle. Por outro lado, para que a relação sinal/ruído seja suficientemente alta, a resposta transitória deve ser altamente visível. Consequentemente, o método é raramente adequado para as condições normais de operação; assim, os dados devem ser coletados em testes especiais. A segunda desvantagem é que os dados não são obtidos em uma forma apropriada para o projeto padrão de um sistema de controle, e algumas partes do modelo, como os polos e zeros, devem ser calculadas a partir dos dados. ¹³ Este cálculo pode ser simples em casos especiais ou complexo em casos gerais.
Resposta em frequência	Dados de resposta em frequência (ver Capítulo 6) são simples de serem obtidos, mas muito mais demorados do que a informação da resposta transitória. Isso é especialmente verdade se as constantes de tempo do processo são grandes, como muitas vezes ocorre em indústrias de processos químicos. Tal como acontece com os dados da resposta transitória, é importante ter uma boa relação sinal/ruído, de modo que a obtenção de dados da resposta em frequência não seja muito cara. Por outro lado, como veremos no Capítulo 6, os dados da resposta em frequência estão na forma correta para utilizar os métodos de projeto baseados na resposta em frequência; assim, uma vez que os dados tenham sido obtidos, o projeto do controlador pode proceder de imediato.
Estado estacionário estocástico	Registros do funcionamento normal em um ambiente naturalmente estocástico, à primeira vista, parecem ser uma base atrativa para modelagem de sistemas, uma vez que tais registros são, por definição, ininterruptos e baratos de serem obtidos. Infelizmente, a qualidade desses dados é inconsistente, tendendo a ser pior exatamente quando o controle é melhor, porque as ações de controle são mínimas e os sinais são suaves. Em tais momentos, alguns sistemas dinâmicos são dificilmente excitados, porque contribuem pouco para a saída do sistema. O resultado é um modelo que representa apenas uma parte do sistema e pode ser inadequado para o controle. Em alguns casos, como ocorre quando se tenta modelar a dinâmica do eletroencefalograma (ondas cerebrais) de uma pessoa dormindo ou anestesiada para localizar a frequência e a intensidade das ondas alfa, os registros normais são a única possibilidade. Normalmente, eles são a última opção para fins de controle.
Ruído artificial aleatório	Finalmente, sinais artificiais aleatórios podem ser construídos utilizando a lógica digital. Especialmente interessante para o modelamento é o sinal artificial aleatório binário (SAAB). O SAAB assume o valor $+A$ ou $-A$ de acordo com a saída (1 ou 0) com a mudança de um registrador realimentado. O registrador é realimentado com uma soma binária de vários estados do registrador que foram selecionados para fazer o período de saída o maior possível. Por exemplo, com um registrador de 20 bits, $2^{20} - 1$ (mais de um milhão) de etapas são produzidas antes da repetição de padrões. A análise para além do escopo deste texto revelou que o sinal resultante é parecido com um sinal aleatório de banda larga. No entanto, este sinal está inteiramente sob o controle do engenheiro, que pode definir o nível (A) e o comprimento (bits do registrador) do sinal. Os dados obtidos a partir de testes com um SAAB devem ser analisados por computador, e programas foram desenvolvidos para realizar esta análise.

3.7.1 Modelos a partir de dados da resposta transitória

Para obter um modelo a partir de dados transitórios, assumimos que a resposta ao degrau está disponível. Se a resposta transitória é uma simples combinação de transientes elementares, então, um modelo de baixa ordem razoável pode ser estimado por meio de cálculos manuais. Por exemplo, considere a resposta ao degrau mostrada na Fig. 3.42. A resposta é monótona e suave. Se assumirmos que ela é dada por uma soma de exponenciais, podemos escrever

$$y(t) = y(\infty) + Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + \dots \quad (3.84)$$

¹³ Ziegler e Nichols (1943), com base nos trabalhos anteriores do Callender e outros (1936), usaram diretamente a resposta ao degrau para a concepção do controle em certas classes de processos. Veja o Capítulo 4 para mais detalhes.

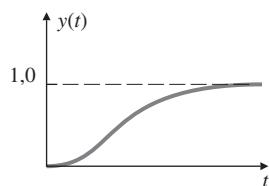


Figura 3.42 Resposta ao degrau característica de muitos processos químicos.

Subtraindo-se o valor final e assumindo-se que $-\alpha$ é o polo mais lento, temos

$$\begin{aligned} y - y(\infty) &\cong Ae^{-\alpha t}, \\ \log_{10}[y - y(\infty)] &\cong \log_{10}A - \alpha t \log_{10}e, \\ &\cong \log_{10}A - 0,4343\alpha t. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Essa é a equação de uma reta cuja inclinação determina α e a interceptação determina A . Se adicionarmos uma reta à curva de $\log_{10}[y - y(\infty)]$ (ou $\log_{10}[y(\infty) - y]$, se A é negativo), então podemos estimar A e α . Uma vez que estes são estimados, traçamos a curva $y - [y(\infty) + Ae^{-\alpha t}]$, que é como uma curva aproximada $B e^{-\beta t}$ e, em um gráfico logarítmico, é equivalente a $\log_{10}B - 0,4345\beta t$. Repete-se este processo, removendo o polo mais lento remanescente, até que o resultado seja preciso. Então, traçamos a resposta do modelo final e a comparamos com os dados para que possamos avaliar a qualidade do modelo calculado. É possível obter um bom ajuste para a resposta ao degrau e ainda estar longe das constantes de tempo reais (polos) do sistema. No entanto, o método permite uma boa aproximação para o controle de processos, cuja resposta ao degrau aparece como a resposta apresentada na Fig. 3.42.

EXEMPLO 3.35 Determine o modelo a partir da resposta transitória

Encontre a função de transferência que gera os dados apresentados na Tabela 3.1, os quais também são apresentados graficamente na Fig. 3.43

Solução. A Tabela 3.1 mostra e a Fig. 3.43 implica que o valor final dos dados é $y(\infty) = 1$. Sabemos que A é negativo porque $y(\infty)$ é maior que $y(t)$. Portanto, o primeiro passo no processo é traçar o gráfico $\log_{10}[y(\infty) - y]$, mostrado na Fig. 3.44. A partir da reta (ajustada visualmente) os valores são

$$\begin{aligned} \log_{10}|A| &= 0,125, \\ 0,4343\alpha &= \frac{1,602 - 1,167}{\Delta t} = \frac{0,435}{1} \Rightarrow \alpha \cong 1. \end{aligned}$$

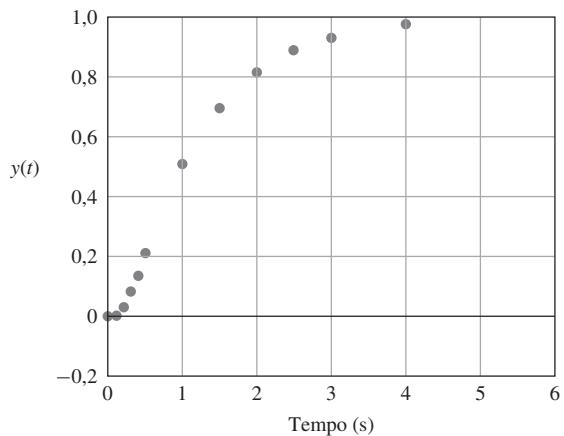
Assim

$$\begin{aligned} A &= -1,33, \\ \alpha &= 1,0. \end{aligned}$$

TABELA 3.1 Dados da resposta ao degrau

t	$y(t)$	t	$y(t)$
0,1	0,000	1,0	0,510
0,1	0,005	1,5	0,700
0,2	0,034	2,0	0,817
0,3	0,085	2,5	0,890
0,4	0,140	3,0	0,932
0,5	0,215	4,0	0,975
		∞	1,000

Figura 3.43 Dados da resposta ao degrau na Tabela 3.1.



Se subtrairmos $1 + Ae^{\alpha t}$ dos dados e traçarmos o gráfico do log do resultado, obtemos a Fig. 3.45. Estimando

$$\log_{10} B = -0,48,$$

$$0,4343\beta = \frac{-0,48 - (-1,7)}{0,5} = 2,5,$$

$$\beta \cong 5,8,$$

$$B = 0,33.$$

Combinando esses resultados, obtemos y aproximado

$$\hat{y}(t) \cong 1 - 1,33e^{-t} + 0,33e^{-5,8t}. \quad (3.86)$$

A Eq. (3.63) é representada pela curva colorida na Fig. 3.46 e traz uma aproximação razoável dos dados, apesar de algum erro próximo de $t = 0$.

A partir de $\hat{y}(t)$, temos

$$\begin{aligned} \hat{Y}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1,33}{s+1} + \frac{0,33}{s+5,8} \\ &= \frac{(s+1)(s+5,8) - 1,33s(s+5,8) + 0,33s(s+1)}{s(s+1)(s+5,8)} \\ &= \frac{-0,58s + 5,8}{s(s+1)(s+5,8)}. \end{aligned}$$

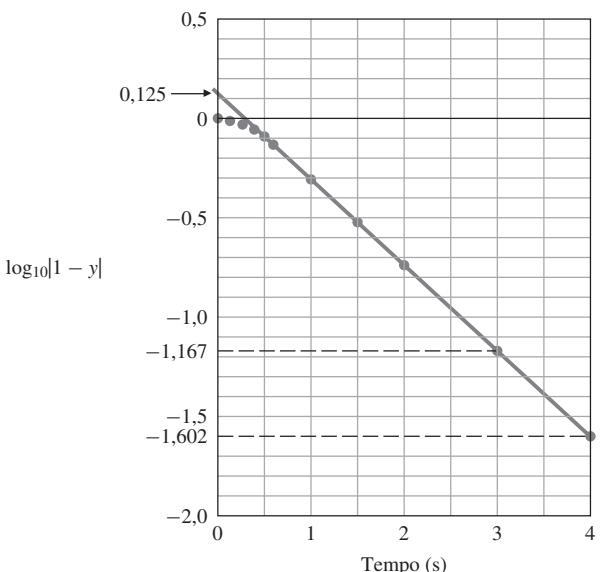


Figura 3.44 $\log_{10} [y(\infty) - y]$ em função do t .

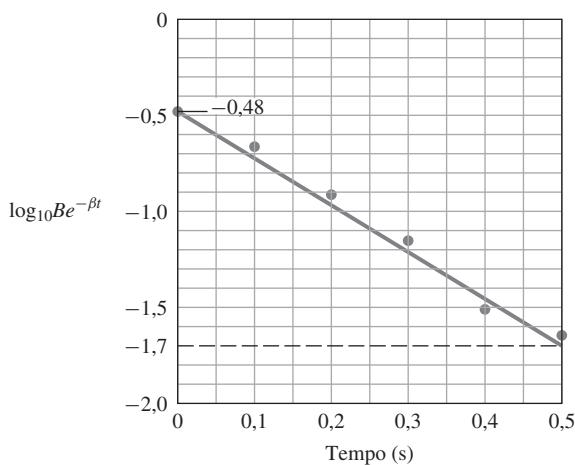


Figura 3.45 $\log_{10}[y - (1 + Ae^{-\alpha t})]$ em função do t .

A função de transferência resultante é

$$G(s) = \frac{-0,58(s - 10)}{(s + 1)(s + 5,8)}.$$

Observe que esse método nos forneceu um sistema com um zero no SPD, embora os dados não tenham apresentado valores de y negativos. Diferenças muito pequenas no valor estimado de A , as quais ajustam-se bem aos dados, podem causar valores de β variando entre 4 e 6. Isso ilustra a sensibilidade das posições dos polos para a qualidade dos dados e enfatiza a necessidade de uma boa relação sinal/ruído.

Utilizando um computador para traçar gráficos, temos uma capacidade maior para iterar os quatro parâmetros a fim de conseguir o melhor ajuste global. A apresentação dos dados nas Figs. 3.44 e 3.45 podem ser obtida diretamente por meio de um gráfico semi-log. Isso elimina a necessidade de calcular \log_{10} e a expressão exponencial para encontrar os valores dos parâmetros. As equações das curvas para ajustarem os dados são $y(t) = Ae^{\alpha t}$ e $y(t) = Be^{\beta t}$, que são linhas retas em um gráfico semi-log. Os parâmetros A e α , ou B e β , são selecionados iterativamente de modo que a linha reta se aproxime o melhor possível dos dados. Este processo produz um ajuste melhor como mostrado pela linha preta tracejada na Fig. 3.46. Os parâmetros reajustados são, $A = -1,37$, $B = 0,37$ e $\beta = 4,3$, resultando na função de transferência

$$G(s) = \frac{-0,22s + 4,3}{(s + 1)(s + 4,3)}.$$

O zero no SPD ainda está presente, mas agora está localizado em $s \cong +20$ e não tem efeito notório na resposta temporal.

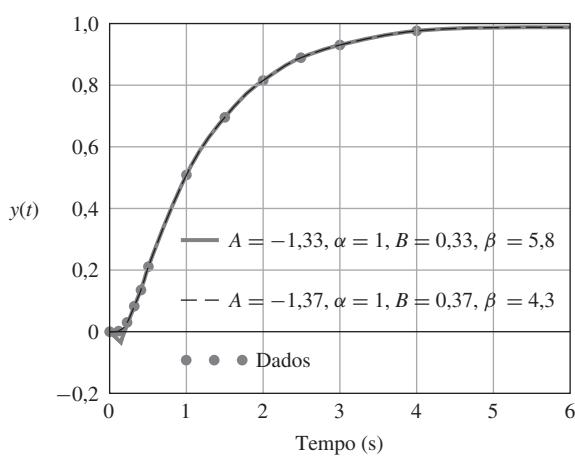


Figura 3.46 Modelo ajustado para os dados experimentais.

Esse conjunto de dados foi muito bem aproximado por um modelo de segunda ordem. Em muitos casos, um modelo de ordem superior é necessário e os modos podem não ser tão bem separados.

Mínimos quadrados de identificação de sistemas

Se a resposta transitória tem modos oscilatórios, então estes podem ser às vezes estimados comparando-os com os gráficos padrões da Fig. 3.18. O período fornece a frequência ω_d e o decaimento de um período para o próximo vai permitir uma estimativa do coeficiente de amortecimento. Se a resposta é uma mistura de modos que não são bem separados em frequência, métodos mais sofisticados devem ser utilizados. Uma deles é o método de **mínimos quadrados de identificação de sistemas**, em que uma rotina de otimização numérica seleciona a melhor combinação de parâmetros do sistema de modo a minimizar o erro de ajuste. O erro de ajuste é definido para ser uma função **de custo escalar**

$$J = \sum_i (y_{dados} - y_{modelo})^2, i = 1, 2, 3, \dots, \text{ para todos os dados,}$$

assim, o erro de ajuste leva em conta todos os pontos dos dados na determinação dos melhores valores para os parâmetros do sistema.

3.7.2 Modelos de outros dados

Como mencionado na Seção 3.1.2, também podemos gerar um modelo usando dados de resposta em frequência, que são obtidos excitando o sistema com um conjunto de senoides e traçando o gráfico $H(j\omega)$. No Capítulo 6, iremos mostrar como estes gráficos podem ser usados diretamente para o projeto. Como alternativa, podemos usar a resposta em frequência para estimar os polos e zeros de uma função de transferência usando assíntotas em linha reta em um gráfico logarítmico.

A construção de modelos dinâmicos a partir de registros do funcionamento estocástico normal ou a partir da resposta a um SAAB poderá basear-se no conceito de correlação cruzada ou no ajuste por mínimos quadrados de um modelo discreto equivalente, ambos temas do campo de **identificação de sistemas**. Eles exigem uma apresentação substancial e um estudo que estão fora do escopo deste texto. Uma introdução à identificação de sistemas pode ser encontrada no Capítulo 8 de Franklin e outros (1998), e um estudo completo é dado em Ljung (1999).

Baseado em grande parte no trabalho do professor Ljung, um pacote de ferramentas do MATLAB fornece um ótimo auxílio para realizar identificação de sistemas e verificar a qualidade dos modelos propostos.

△ 3.8 Escalonamento em amplitude e no tempo

As magnitudes dos valores das variáveis em um problema são geralmente muito diferentes, tanto que surgem dificuldades numéricas. Este era um problema sério quando as equações eram resolvidas usando computadores analógicos, e era necessário dimensionar as variáveis de modo que todas tivessem magnitudes similares. Hoje, o uso generalizado de computadores digitais para resolver equações diferenciais eliminou a necessidade de dimensionar um problema, a menos que o número de variáveis seja muito grande, porque os computadores são capazes de manipular números com grandes variações de magnitude com precisão. No entanto, precisamos entender o princípio de escalonamento para poucos casos, nos quais existem variações extremas de magnitude e o escalonamento é necessário ou o tamanho da palavra do computador é limitada.

3.8.1 Escalonamento de amplitude

Existem dois tipos de escalonamento: em amplitude e no tempo, como já vimos na Seção 3.1.4. O **escalonamento em amplitude** geralmente é realizado naturalmente, basta escolher as unidades que façam sentido para o problema em questão. Para o levitador magnético, expressar o movimento em milímetros e a corrente em miliampères irá manter os números dentro de intervalos fáceis de serem trabalhados. Equações dinâmicas são algumas vezes desenvolvidas em unidades padrões do SI, como metros, quilogramas e ampères, mas para o cálculo do movimento de

um foguete entrando em órbita, o uso de quilômetro faz mais sentido. As equações dinâmicas são normalmente resolvidas utilizando ferramentas computacionais, que muitas vezes são capazes de trabalhar em qualquer unidade. Para sistemas de ordem superior, torna-se importante dimensionar o problema para que as variáveis do sistema tenham variações numéricas similares. Um método para realizar o melhor dimensionamento de um sistema complexo é primeiro estimar os valores máximos para cada variável do sistema e, em seguida, dimensionar o sistema para que cada variável varie entre -1 e $+1$.

Em geral, podemos realizar o escalonamento em amplitude, definindo variáveis escalonadas para cada elemento de estado. Se

$$\dot{x}' = S_x \dot{x}, \quad (3.87)$$

então

$$\dot{x}' = S_x \dot{x} \quad \text{e} \quad \ddot{x}' = S_x \ddot{x}. \quad (3.88)$$

Em seguida, escolha S_x para resultar em uma mudança de escala adequada, substitua as Eqs. (3.87) e (3.88) nas equações dinâmicas e recalcule os coeficientes.

EXEMPLO 3.36 Escalonamento para o levitador magnético

A equação dinâmica linearizada para o levitador magnético (veja o Exemplo 9.2, Capítulo 9) é

$$\delta \ddot{x} = 1667\delta x + 47,6\delta i, \quad (3.89)$$

sendo δ_x em metros e δ_i em ampères. Escalone as variáveis para o levitador magnético para resultar unidades em milímetros e miliampères.

Solução. Utilizando a Eq. (3.87), definimos

$$\delta x' = S_x \delta x \quad \text{e} \quad \delta i' = S_i \delta i$$

tal que S_x e S_i tenham o valor de 1000 para converter δ_x e δ_i em metros e ampères para δ'_x e δ'_i em milímetros e miliampères. Substituindo essas relações na Eq. (3.89) e tomando nota da Eq. (3.88), temos

$$\delta \ddot{x}' = 1667\delta x' + 47,6 \frac{S_x}{S_i} \delta i'.$$

Neste caso $S_x = S_i$, então a Eq. (3.89) permanece inalterada. Se tivéssemos escalonado as duas quantidades por valores diferentes, poderia ter havido uma mudança no último coeficiente na equação.

3.8.2 Escalonamento no tempo

A unidade de tempo usada no sistema internacional de medidas ou no sistema de unidades inglesas é o segundo. O auxílio computacional geralmente fornece um método para se calcular com precisão os resultados, sem importar o quanto rápido ou lento é o problema em questão. No entanto, se um sistema dinâmico responde em poucos microssegundos, ou se existem frequências características no sistema da ordem de vários megahertz, o problema pode tornar-se mal condicionado, de modo que as rotinas numéricas poderão produzir erros. Isso pode ser um problema em sistemas de alta ordem. O mesmo vale para um sistema extremamente lento. Por isso, é útil saber como mudar as unidades de tempo em um problema mal-condicionado.

Definindo a nova escala de tempo para

$$\tau = \omega_o t \quad (3.90)$$

tal que, se t é medido em segundos e $\omega_o = 1000$, então τ será medido em milisegundos. O efeito do **escalonamento no tempo** é alterar a diferenciação tal que

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d(\tau/\omega_o)} = \omega_o \frac{dx}{d\tau} \quad (3.91)$$

e

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \omega_o^2 \frac{d^2x}{d\tau^2}. \quad (3.92)$$

EXEMPLO 3.37 Escalonamento em um oscilador

A equação para um oscilador foi obtida no Exemplo 2.5. Para o caso com uma frequência natural muito rápida $\omega_n = 15000$ rad/s (aproximadamente 2 kHz), a Eq. (2.23) pode ser rescrita como

$$\ddot{\theta} + 15000^2 \cdot \theta = 10^6 \cdot T_c.$$

Determine a equação escalonada para que a unidade do tempo seja milisegundos.

Solução. O valor de ω_o na Eq. (3.90) é 1000. A Eq. (3.92) mostra que

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 10^{-6} \cdot \ddot{\theta},$$

e a equação com o tempo escalonado torna-se

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 15^2 \cdot \theta = T_c.$$

Na prática, podemos resolver a equação

$$\ddot{\theta} + 15^2 \cdot \theta = T_c \quad (3.93)$$

e nomear os eixos do gráfico em milisegundos no lugar de segundos.

3.9 Perspectiva histórica

Oliver Heaviside (1850-1925) foi um excêntrico engenheiro elétrico, matemático e físico inglês. Ele era autodidata e abandonou a escola aos 16 anos de idade para trabalhar como operador de telégrafo. Atuou principalmente fora da comunidade científica, que não lhe via com bons olhos. Ele reformulou as equações de Maxwell para a forma em que são usadas hoje e também lançou as bases das telecomunicações e da hipótese sobre a existência da ionosfera. Desenvolveu o processo simbólico conhecido como cálculo operacional de Heaviside para resolver equações diferenciais. O cálculo de Heaviside foi largamente utilizado entre os engenheiros eletricistas nas décadas de 1920 e 1930 e, mais tarde, foi demonstrado que era equivalente à rigorosa transformada de Laplace, que levou esse nome em virtude do matemático francês Pierre-Simon Laplace (1749-1827), que tinha trabalhado no cálculo operacional.

Laplace também foi astrônomo e matemático, sendo muitas vezes referenciado como “O Newton da França”. Ele estudou a origem e a estabilidade dinâmica do sistema solar, completando o trabalho de Newton em seus cinco volumes *Méchanique céleste* (Mecânica Celeste). Laplace inventou o conceito geral de potencial em um campo gravitacional ou elétrico descrito pela equação de Laplace. Laplace teve uma breve carreira política como ministro do Interior de Napoleão. Durante uma conversa na qual Napoleão perguntou para Laplace por que ele não havia mencionado Deus em *Méchanique céleste*, Laplace respondeu “Senhor, não havia necessidade alguma dessa hipótese”. Ele era um oportunista e mudava de lado conforme os ventos políticos. A vantagem operacional da transformada de Laplace é transformar uma equação diferencial em uma operação algébrica, que é muito mais fácil de ser manipulada em aplicações de engenharia. Ela também é aplicável a soluções de equações diferenciais parciais, o problema original no qual Laplace estava trabalhando quando desenvolveu a transformada. Ele formulou a equação de Laplace com aplicações na teoria eletromagnética, dinâmica de fluidos e astronomia. Também fez contribuições fundamentais à teoria da probabilidade.

As transformadas de Laplace e Fourier estão intimamente relacionadas (veja o Apêndice A). A série e a transformada de Fourier, desenvolvidas nessa ordem, provêm métodos para

representar sinais em termos de funções exponenciais. As séries de Fourier são usadas para representar sinais periódicos com espectros discretos nos termos de uma série. As transformadas de Fourier são usadas para representar sinais não periódicos com espectro contínuo em termo de uma integral. A transformada de Fourier tem esse nome por causa do matemático francês Jean Batiste Joseph Fourier (1768-1830), que usou as séries de Fourier para resolver problemas de condução de calor. Laplace e Fourier foram contemporâneos e se conheciam muito bem. Na verdade, Laplace foi um dos professores de Fourier. Fourier acompanhou Napoleão em uma expedição egípcia em 1798 como conselheiro científico e a ele também é creditada a descoberta do efeito estufa.

Os métodos de transformadas fornecem um método unificado em aplicações para a resolução de muitos problemas de engenharia. Transformadas lineares, como a transformada de Laplace e de Fourier, são úteis para o estudo de sistemas lineares. Enquanto as transformadas de Fourier são úteis para estudar o comportamento estacionário, as transformadas de Laplace são usadas para estudar o comportamento transitório e sistemas dinâmicos em malha fechada. O livro de Gardner e Barnes, de 1942, foi influente na popularização da transformada de Laplace nos Estados Unidos.

RESUMO

- A transformada de Laplace é a principal ferramenta utilizada para determinar o comportamento de sistemas lineares. A transformada de Laplace de uma função no tempo $f(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (3.94)$$

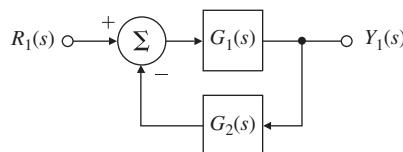
- Essa relação leva à propriedade fundamental da transformada de Laplace, ou seja,

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0^-). \quad (3.95)$$

- Essa propriedade permite encontrar a função de transferência de uma EDO linear. Dada a função de transferência $G(s)$ de um sistema e a entrada $u(t)$, com transformada $U(s)$, a saída transformada do sistema é $Y(s) = G(s)U(s)$.
- Normalmente, as transformadas inversas são encontradas utilizando tabelas como a Tabela A.2 no Apêndice A ou utilizando o computador. As propriedades das transformadas de Laplace e suas inversas estão resumidas na Tabela A.1 no Apêndice A.
- O Teorema do Valor Final é útil para encontrar erros em estado estacionário para sistemas estáveis: se todos os polos de $sY(s)$ estão no SPE, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s). \quad (3.96)$$

- Diagrama de blocos é uma maneira conveniente de mostrar as relações entre os componentes de um sistema. Eles geralmente podem ser simplificados utilizando as relações na Fig. 3.9 e na Eq. (3.50); isto é, a função de transferência do diagrama de blocos



é equivalente a

$$Y_1(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} R_1(s). \quad (3.97)$$

- A localização dos polos no plano-s determinam o caráter da resposta, como mostrado na Fig. 3.15.

- A localização de um polo no plano- s é definida pelos parâmetros mostrados na Fig. 3.22. Esses parâmetros estão relacionados às quantidades no domínio do tempo, tempo de subida t_r , tempo de acomodação t_s e sobressinal M_p , os quais são definidos na Fig. 3.22. As correspondências entre eles, para um sistema de segunda ordem sem zeros, são dadas por

$$t_r \cong \frac{1,8}{\omega_n}, \quad (3.98)$$

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (3.99)$$

$$t_s = \frac{4,6}{\zeta\omega_n}. \quad (3.100)$$

- Quando um zero está presente no SPE, o sobressinal aumenta. Este efeito é resumido nas Figs. 3.26 e 3.27.
- Quando um polo adicional estável estiver presente, a resposta do sistema é mais lenta. Este efeito é resumido nas Figs. 3.34 e 3.35.
- Para um sistema estável, todos os polos em malha fechada devem estar no SPE.
- Um sistema é estável se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna do arranjo de Routh forem positivos. Para determinar o arranjo de Routh, referem-se as fórmulas na Seção 3.6.3.
- A Regra de Mason é uma técnica útil para determinar as funções de transferência de sistemas interligados complicados.
- Determinar um modelo a partir de dados experimentais, ou a verificação de um modelo analítico baseado em experimentos, é um passo importante no projeto do sistema.
- **Escalonamento de Amplitude e Tempo** (Seção 3.8) são métodos que minimizam certas complicações ao lidar com equações diferenciais. O escalonamento de variáveis resulta em valores numéricos que caem dentro de uma faixa de magnitude suficiente para minimizar erros e permitir que a computação seja mais fácil.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. Qual é a definição de “função de transferência”?
2. Quais são as propriedades dos sistemas cujas respostas podem ser descritas por funções de transferência?
3. Qual é a transformada de Laplace de $f(t - \lambda)1(t - \lambda)$ se a transformada de $f(t)$ é $F(s)$?
4. Declare o Teorema do Valor Final.
5. Qual é o uso mais comum do Teorema do Valor Final em controle?
6. Dada uma função de transferência de segunda ordem com coeficiente de amortecimento ζ e frequência natural ω_n , qual é a estimativa do tempo de subida da resposta ao degrau? Qual é a estimativa do percentual de sobressinal da resposta ao degrau? Qual é a estimativa do tempo de acomodação?
7. Qual é o maior efeito de um zero no SPE na resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem?
8. Qual é o efeito mais notado de um zero no SPD na resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem?
9. Qual é o principal efeito de um polo real extra na resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem?
10. Por que a estabilidade é uma importante consideração no projeto de sistemas de controle?
11. Qual é o principal uso do critério de Routh?
12. Em que condições poderia ser importante saber como estimar uma função de transferência de dados experimentais?

PROBLEMAS

Problemas da Seção 3.1: revisão da transformada de Laplace

- 3.1** Mostre que, em uma expansão em frações parciais, polos complexos conjugados têm coeficientes que também são complexos conjugados. (O resultado dessa relação é que, sempre quando pares de polos complexos conjugados estão presentes, apenas um dos coeficientes deve ser computado.)
- 3.2** Encontre a transformada de Laplace das seguintes funções:
- $f(t) = 1 + 2t$
 - $f(t) = 3 + 7t + t^2 + \delta(t)$
 - $f(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} + te^{-3t}$
 - $f(t) = (t + 1)^2$
 - $f(t) = \operatorname{senh} t$
- 3.3** Encontre a transformada de Laplace das seguintes funções:
- $f(t) = 3 \cos 6t$
 - $f(t) = \operatorname{sen} 2t + 2 \cos 2t + e^{-t} \operatorname{sen} 2t$
 - $f(t) = t^2 + e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$
- 3.4** Encontre a transformada de Laplace das seguintes funções:
- $f(t) = t \operatorname{sen} t$
 - $f(t) = t \cos 3t$
 - $f(t) = te^{-t} + 2t \cos t$
 - $f(t) = t \operatorname{sen} 3t - 2t \cos t$
 - $f(t) = 1(t) + 2t \cos 2t$
- 3.5** Encontre a transformada de Laplace das seguintes funções (* denota convolução):
- $f(t) = \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t$
 - $f(t) = \operatorname{sen}^2 t + 3 \cos^2 t$
 - $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$
 - $f(t) = \operatorname{sen} t * \operatorname{sen} t$
 - $f(t) = \int_0^t \cos(t - \tau) \operatorname{sen} \tau d\tau$
- 3.6** Dado que a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$, encontre a transformada de Laplace das funções:
- $g(t) = f(t) \cos t$
 - $g(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau dt_1$
- 3.7** Encontre a função no domínio do tempo que corresponde a cada uma das seguintes transformadas de Laplace, utilizando expansão em frações parciais:
- $F(s) = \frac{2}{s(s+2)}$
 - $F(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$
 - $F(s) = \frac{3s+2}{s^2+4s+20}$
 - $F(s) = \frac{3s^2+9s+12}{(s+2)(s^2+5s+11)}$
 - $F(s) = \frac{1}{s^2+4}$
 - $F(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+4)}$
 - $F(s) = \frac{s+1}{s^2}$
 - $F(s) = \frac{1}{s^6}$
 - $F(s) = \frac{4}{s^4+4}$
 - $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}$
- 3.8** Encontre a função no domínio do tempo que corresponde a cada uma das seguintes transformadas de Laplace:
- $F(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$

- (b) $F(s) = \frac{2s^2+s+1}{s^3-1}$
 (c) $F(s) = \frac{2(s^2+s+1)}{s(s+1)^2}$
 (d) $F(s) = \frac{s^3+2s+4}{s^4-16}$
 (e) $F(s) = \frac{2(s+2)(s+5)^2}{(s+1)(s^2+4)^2}$
 (f) $F(s) = \frac{(s^2-1)}{(s^2+1)^2}$
 (g) $F(s) = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$

3.9 Resolva as seguintes EDOs usando a transformada de Laplace:

- (a) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = 0; y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
 (b) $\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 4y(t) = 0; y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
 (c) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \sin t; y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
 (d) $\ddot{y}(t) + 3y(t) = \sin t; y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
 (e) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = e^t; y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
 (f) $\ddot{y}(t) + y(t) = t; y(0) = 1, \dot{y}(0) = -1$

3.10 Usando a integral de convolução, encontre a resposta ao degrau do sistema cuja resposta ao impulso é dada abaixo e mostrada na Fig. 3.47:

$$h(t) = \begin{cases} te^{-t} & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

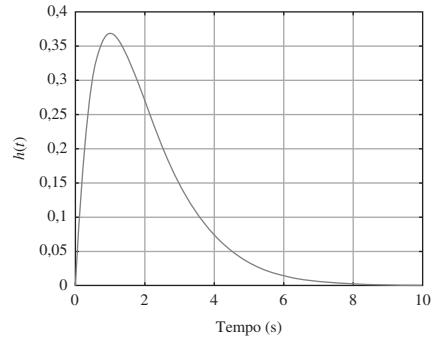
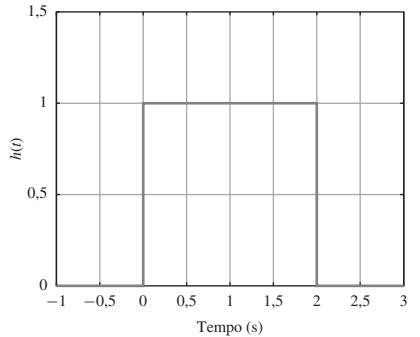


Figura 3.47 Resposta ao impulso para o Problema 3.10.

3.11 Usando a integral de convolução, encontre a resposta do degrau do sistema cuja resposta ao impulso é dada abaixo e mostrada na Fig. 3.48:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t < 0 \text{ e } t > 2. \end{cases}$$

Figura: 3.48 Resposta ao impulso para o Problema 3.11.



3.12 Considere o sistema de segunda ordem padrão

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

- (a) Escreva a transformada de Laplace do sinal na Fig. 3.49.
 (b) Qual é a transformada da saída se esse sinal é aplicado a $G(s)$?
 (c) Encontre a saída do sistema para a entrada mostrada na Fig. 3.49.

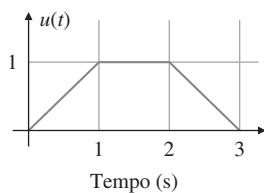


Figura 3.49 Sinal de entrada para o Problema 3.12.

- 3.13** Uma carga de giro é ligada a um motor CC com indutância insignificante. Um resultado de teste na saída indica que a carga alcança uma velocidade de 1 rad/s em 1/2 s quando uma entrada constante de 100 V é aplicada aos terminais do motor. A velocidade da saída em estado estacionário no mesmo teste é de 2 rad/s. Determine a função de transferência do motor $\theta(s)/V_f(s)$.

- 3.14** Um esboço simplificado de uma unidade de fita de computador é apresentado na Fig. 3.50.

- (a) Escreva as equações dinâmicas em termos dos parâmetros indicados abaixo. K e B representam a constante da mola e de amortecimento do estiramento, respectivamente, e ω_1 e ω_2 são velocidades angulares. Uma corrente positiva aplicada ao motor CC irá fornecer um torque no eixo tracionador no sentido horário como indicado pela seta. Encontre o valor de corrente que apenas anula a força F ; em seguida, elimine a corrente constante e sua força de equilíbrio, F ; a partir de suas equações. Suponha velocidades angulares positivas nas duas rodas de acordo com as direções indicadas pelas setas.

$$J_1 = 5 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \text{ inércia do motor e do eixo tracionador}$$

$$B_1 = 1 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}, \text{ amortecimento do motor}$$

$$r_1 = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$K_t = 3 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}/\text{A}, \text{ constante de torque do motor}$$

$$K = 2 \times 10^4 \text{ N/m}$$

$$B = 20 \text{ N/m}\cdot\text{s}$$

$$r_2 = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$J_2 = 2 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$B_2 = 2 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}, \text{ amortecimento viscoso, tensor}$$

$$F = 6 \text{ N, força constante}$$

$$\dot{x}_1 = \text{velocidade da fita m/s (velocidade a ser controlada)}$$

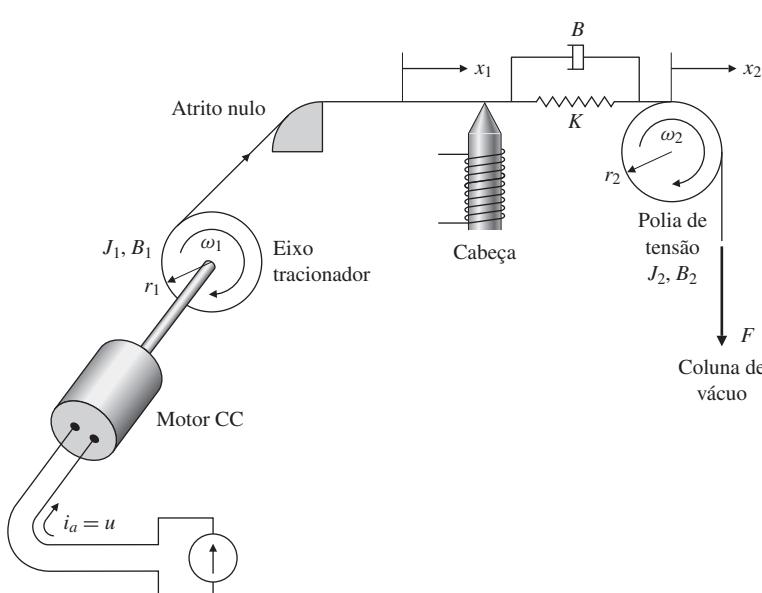


Figura 3.50 Esboço simplificado de uma unidade de fita.

- (b) Encontre a função de transferência da corrente no motor para a posição da fita.
 (c) Encontre os polos e zeros da função de transferência do item (b).
 (d) Use o MATLAB para encontrar a resposta de x_1 para uma entrada em degrau i_a .

3.15 Para o sistema na Fig. 2.51, calcule a função de transferência da tensão do motor para a posição θ_2 .

3.16 Calcule a função de transferência do sistema de dois tanques acoplados na Fig. 2.55 com os orifícios A e C.

3.17 Para o sistema de segunda ordem com função de transferência

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 2s - 3},$$

determine:

- (a) O ganho DC
 (b) O valor final para um entrada em degrau

3.18 Considere a fresa de rolamento contínuo representada na Fig. 3.51. Suponha que o movimento do cilindro ajustável tem um coeficiente de amortecimento b , e que a força exercida pelo material laminado no cilindro ajustável é proporcional à mudança na espessura do material: $F_s = c(T - x)$. Suponha ainda que o motor de corrente contínua tem um torque constante K_t e uma força eletromotriz constante K_e , e que o pinhão ligado à cremalheira tem raio efetivo R .

- (a) Quais são as entradas deste sistema? E a saída?
 (b) Sem esquecer os efeitos da gravidade sobre o cilindro ajustável, desenhe um diagrama de blocos do sistema que demonstre claramente as seguintes quantidades: $V_s(s)$, $I_0(s)$, $F(s)$ (a força que o motor exerce sobre o cilindro ajustável) e $X(s)$.
 (c) Simplifique o seu diagrama de blocos tanto quanto possível e identifique cada saída e entrada separadamente.

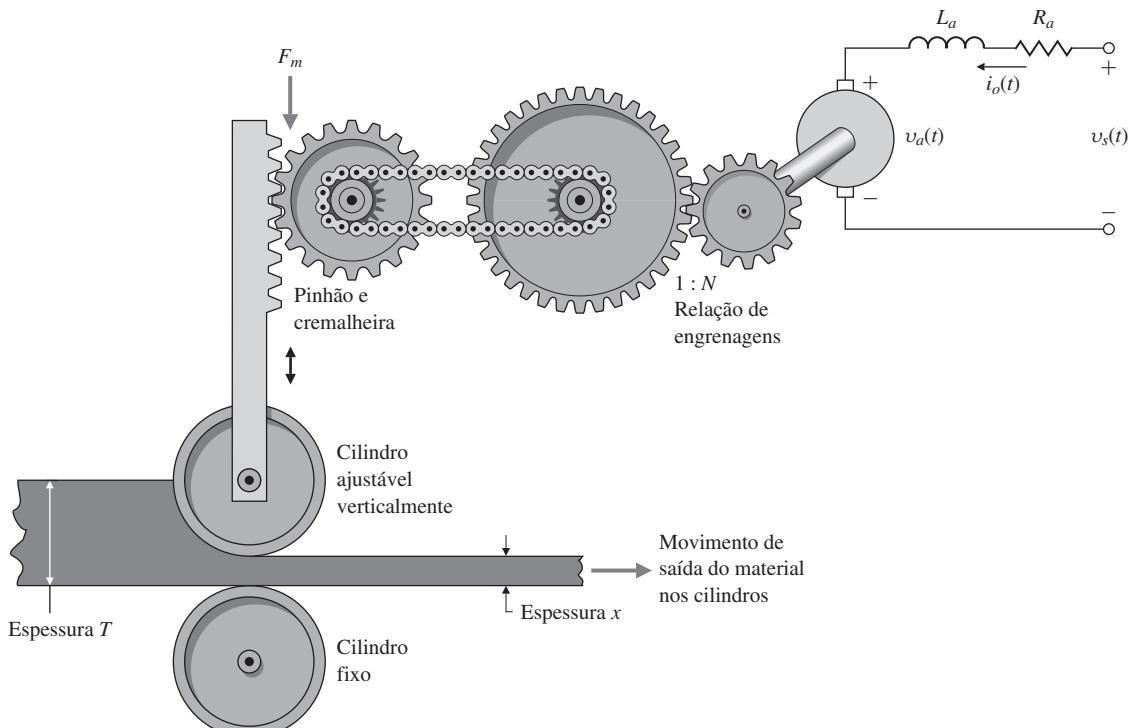


Figura 3.51 Fresadora de rolo contínuo.

Problemas da Seção 3.2: diagramas de modelagem de sistemas

- 3.19** Considere o diagrama de blocos mostrado na Fig. 3.52. Note que a_i e b_i são constantes. Calcule a função de transferência para este sistema. Esta estrutura especial é chamada de “forma canônica controlável” e será discutida no Capítulo 7.

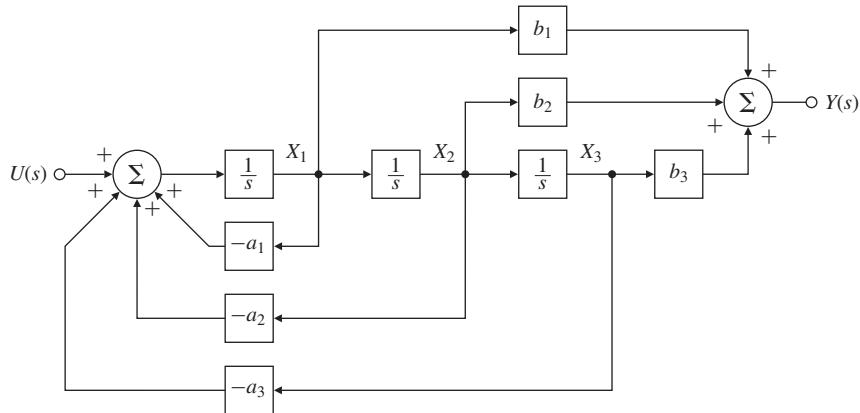


Figura 3.52 Diagrama de blocos para o Problema 3.19.

- 3.20** Encontre as funções de transferência para os diagramas de blocos na Fig. 3.53.

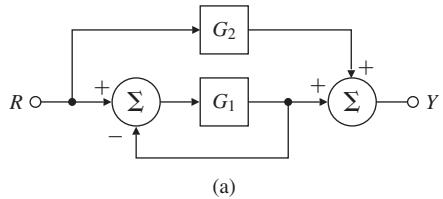
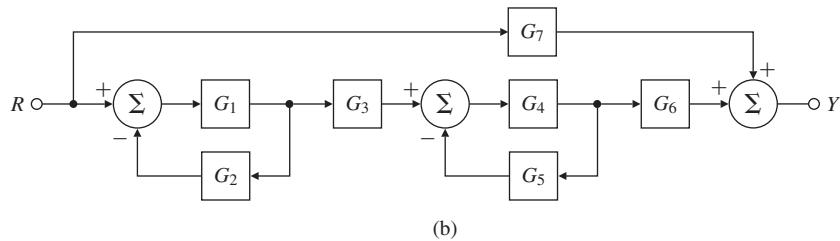
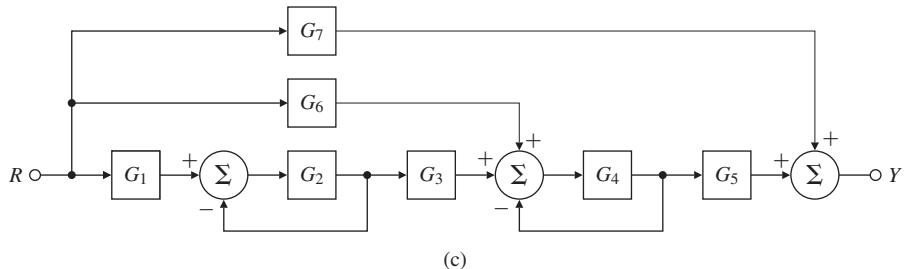


Figura 3.53 Diagramas de blocos para o Problema 3.20.



(b)



(c)

- 3.21** Encontre as funções de transferência para os diagramas de blocos na Fig. 3.54 utilizando as ideias de simplificação de diagramas de blocos. A estrutura especial na Fig. 3.54(b) é chamada de “forma canônica observável” e será discutida no Capítulo 7.

- 3.22** Use a álgebra de diagramas de bloco para determinar a função de transferência entre $R(s)$ e $Y(s)$ na Fig. 3.55

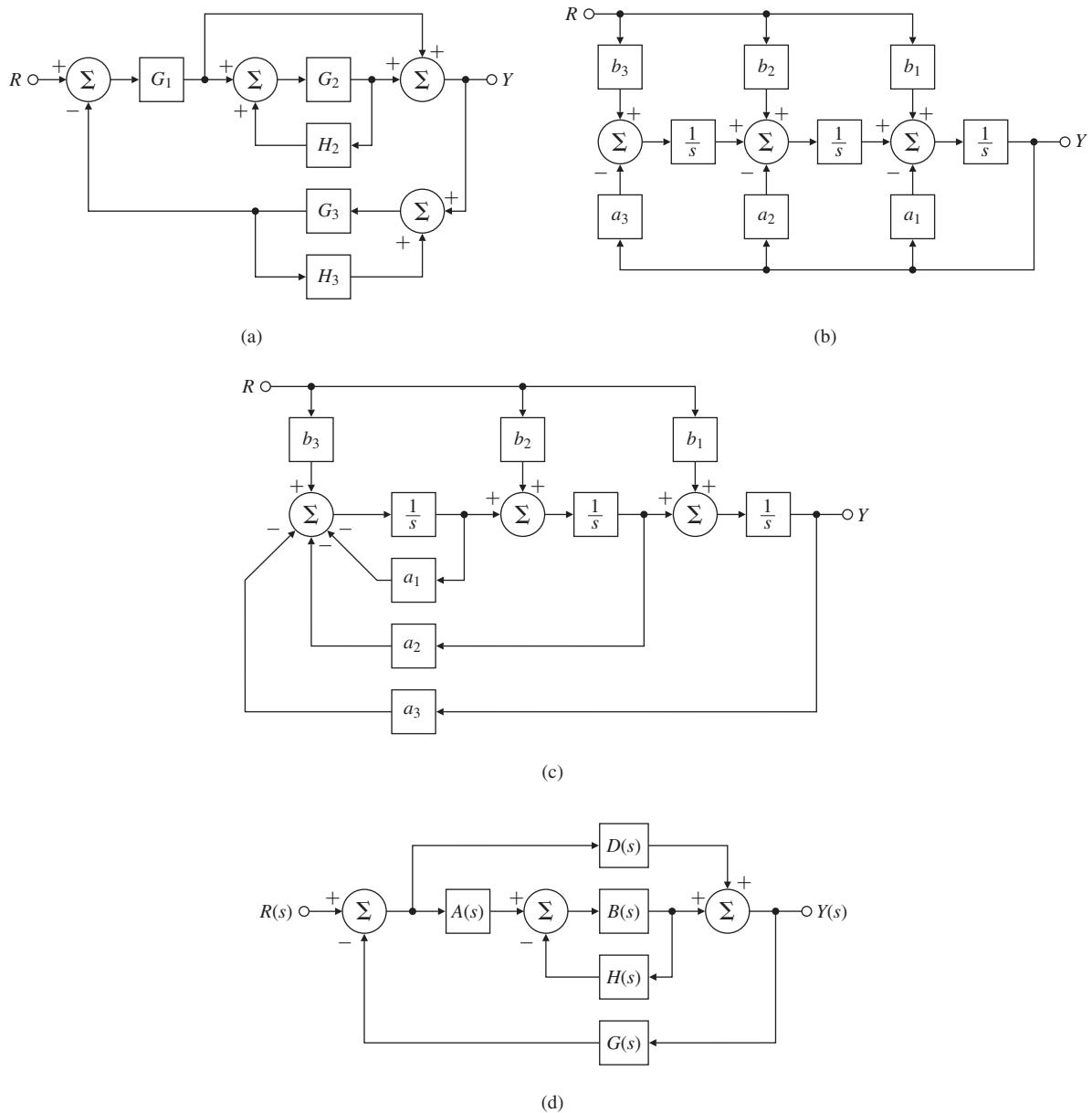
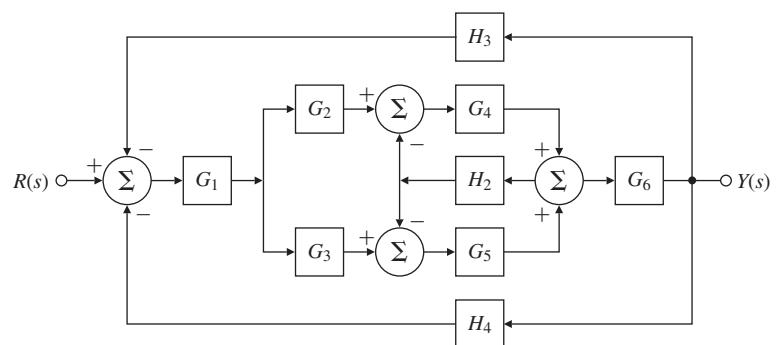


Figura 3.54 Diagramas de blocos para o Problema 3.21.

Figura 3.55 Diagrama de blocos para o Problema 3.22.



Problemas da Seção 3.3: efeito da localização de polos e zeros

3.23 Para o circuito elétrico mostrado na Fig. 3.56 encontre:

- A equação no domínio do tempo relacionando $i(t)$ e $v_1(t)$.
- A equação no domínio do tempo relacionando $i(t)$ e $v_2(t)$.
- A função de transferência $V_2(s)/V_1(s)$, o coeficiente de amortecimento ζ e a frequência natural do sistema ω_n , assumindo condições iniciais nulas.
- O valor de R que resultará em $v_2(t)$ tendo um sobressinal não maior que 25%, assumindo que $v_1(t)$ é um degrau unitário, $L = 10\text{mH}$ e $C = 4\text{\mu F}$.

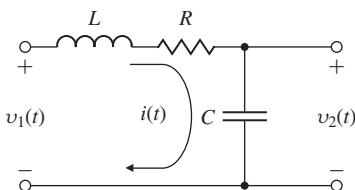


Figura 3.56 Circuito do Problema 3.23.

3.24 Para o sistema com realimentação unitária apresentado na Fig. 3.57, especifique o ganho K do controlador proporcional para que a saída $y(t)$ tenha um sobressinal não maior que 10% na resposta a um degrau unitário.

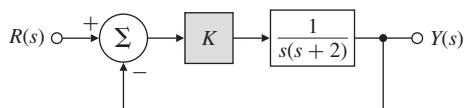


Figura 3.57 Sistema com realimentação unitária para o Problema 3.24.

3.25 Para o sistema com realimentação unitária apresentado na Fig. 3.58, especifique o ganho e a localização dos polos do compensador tal que a resposta ao degrau do sistema em malha fechada tenha um sobressinal não maior que 25% e um tempo de acomodação (1%) não maior que 0,1 s. Verifique seu projeto usando o MATLAB.

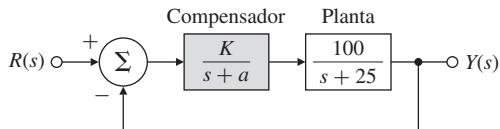


Figura 3.58 Sistema com realimentação unitária para o Problema 3.25.

Problemas da Seção 3.4: especificações no domínio do tempo

3.26 Deseja-se que o tempo de pico de um sistema de segunda ordem seja inferior a t'_{p^*} . Desenhe a região no plano-s para os valores correspondentes dos polos que atendam às especificações $t_p < t'_{p^*}$.

3.27 Um sistema de servomecanismo tem uma dinâmica dominada por um par de polos complexos e não possui zeros finitos. As especificações no domínio do tempo sobre o tempo de subida (t_r), sobressinal (M_p) e tempo de acomodação (t_s) são dadas por

$$\begin{aligned} t_r &\leq 0,6 \text{ s}, \\ M_p &\leq 17\%, \\ t_s &\leq 9,2 \text{ s}. \end{aligned}$$

- Esboce a região no plano-s, na qual os polos podem ser alocados de modo que o sistema irá atender a *todas* as três especificações.
 - Indique em seu esboço os locais específicos (denotados por \times) que resultarão no menor tempo de subida e também atendam exatamente à especificação do tempo de acomodação.
- 3.28** Suponha que você irá projetar um controlador por realimentação unitária para uma planta de primeira ordem apresentada na Fig. 3.59. (Como você vai aprender no Capítulo 4, a configuração mostrada é referida como um controlador proporcional-integral.) Você deve projetar o controlador de modo que os polos de malha fechada estejam dentro das regiões sombreadas indicadas na Fig. 3.60.

Figura 3.59 Sistema com realimentação unitária para o Problema 3.28.

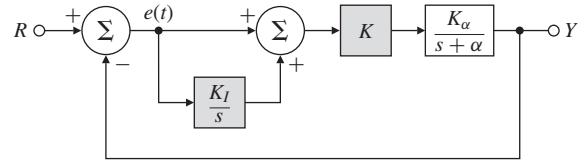
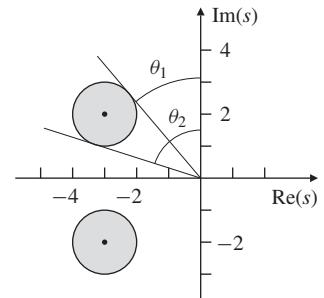


Figura 3.60 Localização desejada para os polos do sistema em malha fechada para o Problema 3.28.



- (a) Quais são os valores de ω_n e ζ correspondentes às regiões sombreadas na Fig. 3.59? (Uma simples estimativa na figura é suficiente.)
- (b) Seja $K_\alpha = \alpha = 2$. Encontre os valores de K e K_I tal que os polos do sistema de malha fechada estejam dentro das regiões sombreadas.
- (c) Prove que não importa os valores K_α e α , o controlador fornece flexibilidade suficiente para alocar os polos em qualquer lugar plano complexo (semiplano esquerdo).

3.29 A função de transferência em malha aberta de um sistema com realimentação unitária é

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}.$$

A resposta ao degrau desejada do sistema é especificada para ter tempo de pico $t_p = 1$ s e sobressinal $M_p = 5\%$.

- (a) Determine se ambas as especificações podem ser atendidas simultaneamente, selecionando o valor correto de K .
- (b) Esboce a região associada no plano-s em que ambas as especificações são atendidas, e indique locais possíveis para as raízes considerando valores prováveis de K .
- △ (c) Atenue as especificações do item (a) pelo mesmo fator e escolha um valor adequado para K ; use o MATLAB para verificar se as novas especificações são satisfeitas.

3.30 As equações dinâmicas do motor CC mostrado na Fig. 2.32 são dadas nas Eqs. (2.52-2.53) como

$$J_m \ddot{\theta}_m + \left(b + \frac{K_t K_e}{R_a} \right) \dot{\theta}_m = \frac{K_t}{R_a} v_a.$$

sendo

$$J_m = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2,$$

$$b = 0,001 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s},$$

$$K_e = 0,02 \text{ V}\cdot\text{s},$$

$$K_t = 0,02 \text{ N}\cdot\text{m/A},$$

$$R_a = 10\Omega.$$

- (a) Encontre a função de transferência entre a tensão aplicada v_a e a velocidade do motor $\dot{\theta}_m$.
- (b) Qual é a velocidade em estado estacionário do motor após a tensão $v_a = 10$ V ter sido aplicada?
- (c) Encontre a função de transferência entre a tensão aplicada v_a e o ângulo do eixo θ_m .
- (d) Suponha que realimentação é adicionada ao sistema ao item (c) de modo que ele torna-se um servomecanismo de posição de tal forma que a tensão aplicada é dada por

$$v_a = K(\theta_r - \theta_m),$$

sendo K o ganho de realimentação. Encontre a função de transferência entre θ_r e θ_m .

- (e) Qual o máximo valor de K que pode ser usado, caso seja desejado que o sobressinal $M_p < 20\%$?
- (f) Quais valores de K irão prover um tempo de subida menor que 4 s? (Ignore a restrição de sobressinal M_p .)
- (g) Use o MATLAB para traçar a resposta ao degrau do servo sistema de posição para os valores de ganho $K = 0,5, 1$ e 2 . Encontre o tempo de subida e o sobressinal para cada uma das três respostas ao degrau examinando seus gráficos. Os gráficos estão de acordo com seus cálculos nos itens (e) e (f)?

- 3.31** Deseja-se controlar a elevação da antena de rastreamento de satélite mostrada nas Figs. 3.61 e 3.62. A antena e as partes móveis têm momento de inércia J e amortecimento B , que surgem em alguma medida devido ao atrito aerodinâmico e de rolamento, mas principalmente a partir da força eletromotriz do motor de acionamento CC. As equações dinâmicas são

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = T_c,$$

sendo T_c o torque do motor. Assuma que

$$J = 600.000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad B = 20.000 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}.$$

- (a) Encontre a função de transferência entre o torque do motor T_c e o ângulo da antena θ .



Figura 3.61 Antena de rastreamento de satélite.

Fonte: cortesia Space Systems/Loral.

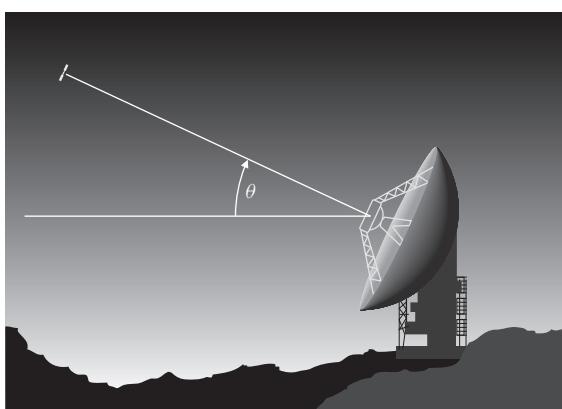


Figura 3.62 Esquema da antena para o Problema 3.31.

- (b) Suponha que o torque aplicado é calculado para que θ siga o comando de referência θ_r de acordo com a seguinte lei de realimentação

$$T_c = K(\theta_r - \theta),$$

sendo K o ganho de realimentação. Encontre a função de transferência entre θ_r e θ .

- (c) Qual valor máximo de K que pode ser usado se se deseja o sobressinal $M_p < 10\%$
 (d) Quais valores de K irão prover um tempo de subida menor que 80 s? (Ignore a restrição em M_p)
 △ (e) Use o MATLAB para traçar a resposta ao degrau do sistema da antena para $K = 200, 400, 1000$ e 2000 . Encontre o sobressinal e o tempo de subida para as quatro respostas ao degrau examinando seus gráficos. Esses gráficos confirmam os cálculos nos itens (c) e (d)?

3.32 Mostre que o sistema de segunda ordem

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0,$$

tem a resposta

$$y(t) = y_0 \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \cos^{-1} \zeta).$$

Mostre que para o caso subamortecido ($\zeta < 1$), as oscilações na resposta decaem a uma taxa previsível (ver Fig. 3.63) chamada de **decaimento logarítmico**

$$\begin{aligned} \delta &= \ln \frac{y_0}{y_1} = \ln e^{\sigma \tau_d} = \sigma \tau_d = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ &= \ln \frac{\Delta y_1}{y_1} \cong \ln \frac{\Delta y_i}{y_i}, \end{aligned}$$

sendo

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

o período natural de vibração amortecida. O coeficiente de amortecimento em termos do decaimento logarítmico é

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}.$$

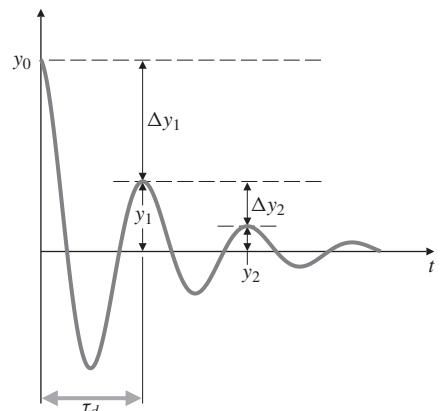


Figura 3.63 Definição do decaimento logarítmico.

Problemas da Seção 3.5: efeitos dos zeros e polos adicionais

- 3.33** Em sistemas de controle de aeronaves, uma resposta ideal de arfagem (q_o) em função do comando de arfagem (q_c) é descrita pela função de transferência

$$\frac{Q_o(s)}{Q_c(s)} = \frac{\tau \omega_n^2 (s + 1/\tau)}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}.$$

A resposta da aeronave real é mais complicada do que esta função de transferência ideal; no entanto, o modelo ideal é usado como um guia para o projeto piloto automático. Suponha que t_r é o tempo de subida desejado e que

$$\omega_n = \frac{1,789}{t_r},$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1,6}{t_r},$$

$$\zeta = 0,89.$$

Mostre que essa resposta ideal possui um rápido tempo de acomodação e um sobressinal mínimo traçando a resposta ao degrau para $t_r = 0,8, 1,0, 1,2$ e $1,5$ s.

- 3.34** Considere o sistema mostrado na Fig. 3.64, sendo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)} \quad \text{e} \quad D(s) = \frac{K(s+z)}{s+p}. \quad (3.101)$$

Encontre K, z e p tal que o sistema em malha fechada tenha um sobressinal de 10% a uma entrada em degrau e um tempo de acomodação de 1,5 s (critério 1%)

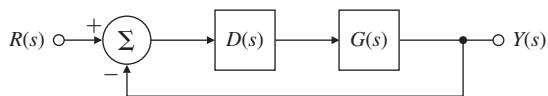


Figura 3.64 Sistema com realimentação unitária para o Problema 3.34.

- △ **3.35** Esboce a resposta ao degrau de um sistema com função de transferência

$$G(s) = \frac{s/2 + 1}{(s/40 + 1)[(s/4)^2 + s/4 + 1]}.$$

Justifique sua resposta em função da localização dos polos e zeros. (Não encontre a transformada inversa de Laplace.) Então, compare sua resposta com a resposta ao degrau calculada usando o MATLAB.

- 3.36** Considere os dois sistemas de fase não mínima

$$G_1(s) = -\frac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)}, \quad (3.102)$$

$$G_2(s) = \frac{3(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}. \quad (3.103)$$

- (a) Esboce a resposta ao degrau unitário para $G_1(s)$ e $G_2(s)$, preste atenção ao traçar a parte transiente da resposta.
 - (b) Explique a diferença no comportamento das duas respostas ao que se refere à localização dos zeros.
 - (c) Considere um sistema estável e estritamente próprio (isto é, m zeros e n polos, sendo $m < n$). Seja $y(t)$ a resposta ao degrau do sistema. A resposta ao degrau é dita ter um sobressinal negativo se ela comece na direção “errada”. Prove que um sistema estável e estritamente próprio tem um sobressinal negativo se, e somente se, sua função de transferência tem um número ímpar de zeros reais SPD.
- 3.37** Encontre as relações entre a resposta ao impulso e a resposta ao degrau correspondendo à Eq. (3.57) para os casos em que
 - (a) as raízes são repetidas
 - (b) as raízes são reais (Expresse suas respostas em termos de funções hiperbólicas [senh, cosh] para melhor mostrar as propriedades da resposta do sistema.)
 - (c) o valor do coeficiente de amortecimento, ζ , é negativo

3.38 Considere o seguinte sistema de segunda ordem com um polo extra

$$H(s) = \frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}.$$

Mostre que a resposta ao degrau unitário

$$y(t) = 1 + Ae^{-pt} + Be^{-\sigma t} \sin(\omega_d t - \theta),$$

sendo

$$\begin{aligned} A &= \frac{-\omega_n^2}{\omega_n^2 - 2\zeta\omega_n p + p^2}, \\ B &= \frac{p}{\sqrt{(p^2 - 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2)(1 - \zeta^2)}}, \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} + \tan^{-1} \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{p - \zeta\omega_n}. \end{aligned}$$

- (a) Qual termo domina $y(t)$ quando p se torna maior?
- (b) Encontre valores aproximados de A e B para valores pequenos de p .
- (c) Qual termo domina $y(t)$ quando p se torna menor? (Pequeno em relação a quê?)
- (d) Usando a expressão anterior para $y(t)$ ou o comando `step` no MATLAB e assumindo $\omega_n = 1$ e $\zeta = 0,7$, trace a resposta ao degrau do sistema anterior para vários valores de p variando-o de um valor muito pequeno a um valor muito grande. Até que ponto o polo extra deixa de ter efeito sobre a resposta do sistema?

3.39 Considere um sistema de segunda ordem com ganho DC unitário com um zero extra

$$H(s) = \frac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}.$$

- (a) Mostre que a resposta ao degrau unitário é dada por

$$y(t) = 1 - \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega_n^2}{z^2} - \frac{2\zeta\omega_n}{z}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \beta_1),$$

sendo

$$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{-\zeta + \frac{\omega_n}{z}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

- (b) Derive uma expressão para o sobressinal da resposta ao degrau, M_p .
- (c) Para um dado valor do sobressinal, M_p , como obtemos ζ e ω_n ?

3.40 O diagrama de blocos de um piloto automático projetado para manter a inclinação de altitude θ de uma aeronave é mostrado na Fig. 3.65. A função de transferência que relaciona o ângulo do profundor δ_e e a arfagem de altitude θ é

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = G(s) = \frac{50(s+1)(s+2)}{(s^2 + 5s + 40)(s^2 + 0,03s + 0,06)},$$

sendo θ a arfagem de altitude em graus e δ_e é o ângulo do profundor também em graus. O controle do piloto automático usa o erro de arfagem de altitude e para ajustar o profundor de acordo com a função de transferência

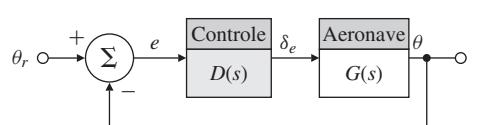


Figura 3.65 Diagrama de blocos do piloto automático.

$$\frac{\delta_e(s)}{E(s)} = D(s) = \frac{K(s+3)}{s+10}.$$

Usando o MATLAB, encontre um valor de K que irá proporcionar um sobressinal menor que 10% e um tempo de subida mais rápido que 0,5 segundos para uma mudança em degrau unitário de θ_r . Depois de analisar a resposta ao degrau do sistema para vários valores de K , comente sobre as dificuldades associadas ao ajuste do tempo de subida e ao sobressinal para sistemas complexos.

Problemas da Seção 3.6: estabilidade

- 3.41** Uma medida do grau de instabilidade na resposta instável de uma aeronave é o tempo que leva para a *amplitude* da resposta dobrar (ver Fig. 3.66), dada uma condição inicial diferente de zero.

- (a) Para um sistema de primeira ordem, mostre que o **tempo necessário para a resposta dobrar** é

$$\tau_2 = \frac{\ln 2}{p},$$

sendo p a localização do polo no SPD.

- (b) Para um sistema de segunda ordem (com dois polos no SPD), mostre que

$$\tau_2 = \frac{\ln 2}{-\zeta\omega_n}.$$

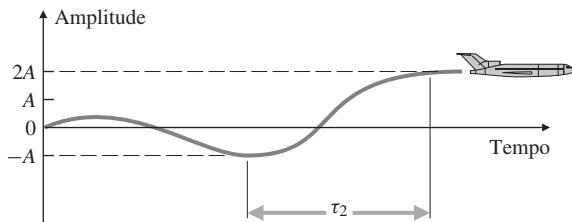


Figura 3.66 Tempo necessário para a resposta dobrar.

- 3.42** Suponha que a realimentação unitária será aplicada nos sistemas em malha aberta listados. Use critério de estabilidade de Routh para determinar se os sistemas resultantes em malha fechada serão estáveis

(a) $KG(s) = \frac{4(s+2)}{s(s^3+2s^2+3s+4)}$

(b) $KG(s) = \frac{2(s+4)}{s^2(s+1)}$

(c) $KG(s) = \frac{4(s^3+2s^2+s+1)}{s^2(s^3+2s^2-s-1)}$

- 3.43** Use critério de estabilidade de Routh para determinar quantas raízes com partes reais positivas têm as equações seguintes:

(a) $s^4 + 8s^3 + 32s^2 + 80s + 100 = 0$.

(b) $s^5 + 10s^4 + 30s^3 + 80s^2 + 344s + 480 = 0$.

(c) $s^4 + 2s^3 + 7s^2 - 2s + 8 = 0$.

(d) $s^3 + s^2 + 20s + 78 = 0$.

(e) $s^4 + 6s^2 + 25 = 0$.

- 3.44** Encontre a faixa de valores de K para a qual todas as raízes do seguinte polinômio estejam no SPE:

$$s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + K = 0.$$

Use o MATLAB para verificar sua resposta traçando as raízes do polinômio no plano- s para vários valores de K .

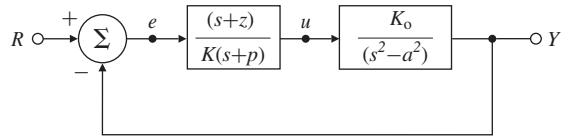
- 3.45** A função de transferência de um típico sistema de unidade de fita é dada por

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s[(s+0,5)(s+1)(s^2+0,4s+4)]},$$

na qual o tempo é medido em milisegundos. Usando o critério de Routh de estabilidade, determine o intervalo de K para o qual este sistema é estável quando a equação característica é $1 + G(s) = 0$.

- 3.46** Considere um sistema de levitação magnética em malha fechada mostrado na Fig. 3.67. Determine as condições sobre as quais os parâmetros do sistema (a , K , z , p , K_0) garantem a estabilidade do sistema em malha fechada.

Figura 3.67 Sistema de levitação magnética.



- 3.47** Considere o sistema mostrado na Fig. 3.68.

- (a) Calcule a equação característica do sistema em malha fechada.
 (b) Para quais valores de (T , A) o sistema é estável? *Dica:* uma resposta aproximada pode ser encontrada usando

$$e^{-Ts} \approx 1 - Ts$$

ou

$$e^{-Ts} \approx \frac{1 - \frac{T}{2}s}{1 + \frac{T}{2}s}$$

para o atraso puro de tempo. Como uma alternativa, pode-se usar o MATLAB (SIMULINK[®]) para simular o sistema ou encontrar as raízes da equação característica do sistema para vários valores de T e A .

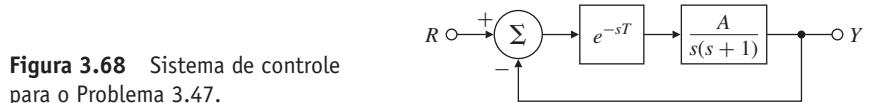


Figura 3.68 Sistema de controle para o Problema 3.47.

- 3.48** Modifique o critério de Routh para que ele se aplique ao caso em que todos os polos devem estar à esquerda de $-\alpha$ quando $\alpha > 0$. Aplique o teste modificado para o polinômio

$$s^3 + (6 + K)s^2 + (5 + 6K)s + 5K = 0,$$

encontre os valores de K para os quais todos os polos tenham parte real menor que -1 .

- 3.49** Suponha que o polinômio característico de um sistema em malha fechada é dado por

$$s^4 + (11 + K_2)s^3 + (121 + K_1)s^2 + (K_1 + K_1K_2 + 110K_2 + 210)s + 11K_1 + 100 = 0.$$

Encontre as restrições sobre os dois ganhos K_1 e K_2 que garantam um sistema em malha fechada estável e trace a(s) região(ões) admissível(eis) no plano (K_1 , K_2). O computador pode ajudar a resolver este problema.

- 3.50** As linhas de energia elétrica suspensas às vezes experiem oscilações de baixa frequência e alta amplitude vertical, ou um **galope**, durante as tempestades de inverno, quando os condutores de linha ficam cobertos de gelo. Na presença de vento, o gelo pode assumir sustentação aerodinâmica e as forças de arraste podem resultar em um galope de até vários metros de amplitude. Um galope de grande amplitude pode causar confronto de condutores e danos estruturais nos suportes da linha, causados pela grandes cargas dinâmicas. Esses efeitos, por sua vez, podem levar a quedas de energia. Suponha que o condutor de linha é uma haste rígida, restrita a movimento vertical e suspenso por molas e amortecedores, como mostrado na Fig. 3.69. Um simples modelo desse galope no condutor é

$$m\ddot{y} + \frac{D(\alpha)\dot{y} - L(\alpha)v}{(y^2 + v^2)^{1/2}} + T \left(\frac{n\pi}{\ell} \right) y = 0,$$

sendo

m = massa do condutor

y = deslocamento vertical do condutor

D = força de arrasto aerodinâmico

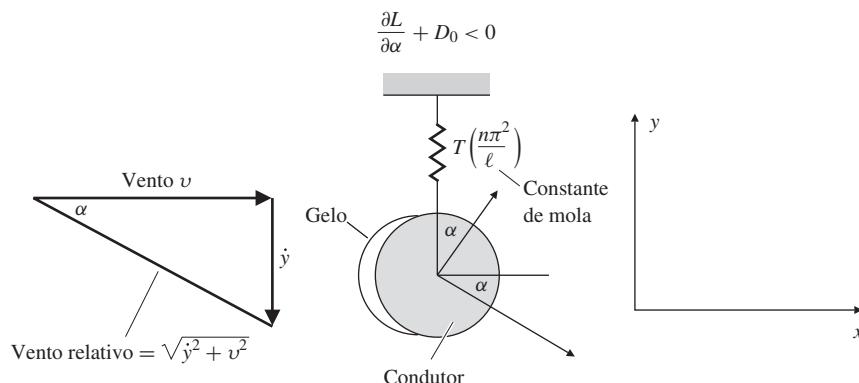


Figura 3.69 Condutor de energia elétrica.

L = força de sustentação aerodinâmica

v = velocidade do vento

α = ângulo aerodinâmico de ataque = $-\tan^{-1}(\dot{y}/v)$

T = tensão no condutor

n = número de frequências harmônicas

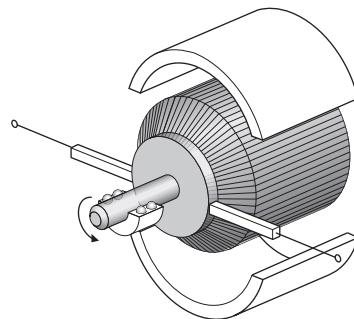
ℓ = comprimento do condutor

Suponha que $L(0) = 0$ e $D(0) = D_0$ (uma constante), e linearize a equação em torno do valor $y = \dot{y} = 0$. Use o critério de estabilidade de Routh para mostrar que pode ocorrer o galope sempre que

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} + D_0 < 0.$$

4

Uma Primeira Análise da Realimentação



Nos próximos três capítulos, vamos apresentar três técnicas para o projeto de controladores. Antes de fazer isso, é útil desenvolver as premissas a serem utilizadas e derivar as equações que são comuns a cada uma das abordagens de projeto que descrevemos. Como observação geral, as dinâmicas dos sistemas de controle geralmente são muito complexas e são não lineares. No entanto, nesta análise inicial, vamos supor que a planta a ser controlada, assim como o controlador, pode ser representada como sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo (LIT). Assumimos também que cada sistema só tem uma entrada e uma saída; portanto, pode ser representado por uma simples função de transferência escalar. Como mencionado no Capítulo 1, as preocupações básicas para o controle são **estabilidade, rastreamento, regulação e sensibilidade**. O objetivo da análise deste capítulo é revisitar cada um desses requisitos em um ambiente dinâmico linear e desenvolver equações que iram expor as restrições impostas aos controladores e identificar os objetivos elementares a serem sugeridos aos controladores.

Controle em malha aberta e em malha fechada

As duas estruturas fundamentais para a realização do controle são a estrutura em malha aberta, como mostrado na Fig. 4.1, e a estrutura em malha fechada, também conhecida como controle realimentado, como mostrado na Fig. 4.2. A definição de controle em malha aberta é que não há caminho de sinal fechado em que a saída influencie o esforço de controle. Na estrutura mostrada na Fig. 4.1, a função de transferência do controlador modifica o sinal de referência antes de ser aplicada à planta. Esse controlador pode cancelar a dinâmica indesejada de uma planta e substituí-la por uma dinâmica mais desejável ao controlador. Em outros casos, as ações de controle em malha aberta são tomadas à medida que o ambiente muda, calibradas para fornecer uma boa resposta, mas não dependentes da medida atual da resposta. Um exemplo seria o piloto automático de aeronaves cujos parâmetros são alterados com a altitude ou a velocidade, mas não por informações sobre o movimento da aeronave. O controle realimentado, por outro lado, usa um sensor para medir a saída e, por meio da realimentação, modifica indiretamente a dinâmica do sistema. Embora seja possível um sistema estável tornar-se instável devido à realimentação (um círculo vicioso), a realimentação dá flexibilidade ao projetista e fornece uma resposta mais desejável para cada um de nossos objetivos em relação ao controle em malha aberta.

Visão geral do capítulo

O capítulo começa discutindo equações básicas de uma estrutura de malha aberta simples e de uma estrutura de malha fechada elementar. Na Seção 4.1, as equações para as duas estruturas são apresentadas na forma geral e comparadas em relação à **estabilidade, rastreamento, regulação e sensibilidade**. Na Seção 4.2, o erro em estado estacionário na resposta devido a entradas polinomiais é analisado com mais detalhes. Na análise de desempenho em regime permanente são atribuídos números que correspondem ao **tipo** do sistema de controle, de acordo com o grau máximo do polinômio de entrada, para o qual o erro em regime permanente é constante. Para cada tipo, uma constante de erro apropriada é definida, o que permite ao projetista calcular facilmente o tamanho do erro.

Embora Maxwell e Routh tenham desenvolvido uma base matemática para assegurar a estabilidade de um sistema realimentado, o projeto de controladores era baseado na experiência do projetista e em tentativa e erro. A partir dessa tradição, surgiu um controlador quase universal, a estrutura **proporcional-integral-derivativo (PID)**, considerada na Seção 4.3. Este dispositivo é composto por: um termo **Proporcional** para fechar a malha de realimentação, um termo **Integral** para garantir erro nulo à referência constante e às entradas de perturbação, e um termo **Derivativo** para melhorar (ou permitir!) a estabilidade e a boa resposta dinâmica. Nesta seção, estes termos são considerados e seus respectivos efeitos são ilustrados. Como parte da evolução do projeto do controlador PID, um passo importante foi o desenvolvimento de um procedimento simples para selecionar os três parâmetros, um processo chamado de “sintonia do controlador”. Ziegler e Nichols desenvolveram e publicaram um conjunto de experimentos para serem executados, características para serem medidas e valores de ajuste recomendados. Esses procedimentos são discutidos nesta seção. Finalmente, na Seção 4.4, é apresentada uma breve introdução para a aplicação de controladores digitais, cada vez mais comum. A sensibilidade da resposta temporal às mudanças dos parâmetros é discutida no Apêndice W4, disponível (em inglês) no site do Grupo A.

4.1 Equações básicas de controle

Começamos a coletar um conjunto de equações e funções de transferência que será usado durante todo o restante do texto. Para o sistema de malha aberta da Fig. 4.1, se considerarmos a perturbação como entrada da planta, a saída é dada por

$$Y_{ol} = GD_{ol}R + GW \quad (4.1)$$

e o erro, a diferença entre a entrada de referência e o sinal de saída do sistema, é dado por

$$E_{ol} = R - Y_{ol} \quad (4.2)$$

$$= R - [GD_{ol}R + GW] \quad (4.3)$$

$$= [1 - GD_{ol}]R - GW. \quad (4.4)$$

A função de transferência em malha aberta neste caso é $T_{ol}(s) = G(s)D_{ol}(s)$.

Para o controle realimentado, a Fig. 4.2 apresenta a estrutura básica de realimentação unitária. Há três entradas externas: a referência, R , a qual deve ser rastreada pela saída, a perturbação da planta, W , a qual deve ser rejeitada pelo controle para não atrapalhar a saída, e o ruído do sensor, V , que o controlador deve ignorar.

Para o diagrama de blocos da Fig. 4.2, as equações para a saída e controle são dadas pela superposição das respostas às três entradas individualmente, como a seguir:

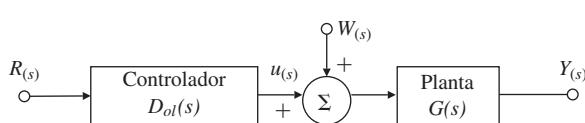
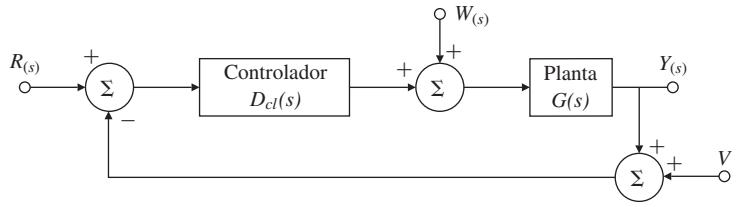


Figura 4.1 Sistema em malha aberta destacando a referência, R , o sinal de controle, U , a perturbação, W , e a saída Y .

Figura 4.2 Sistema em malha fechada destacando a referência, R , o sinal de controle, U , a perturbação, W , a saída, Y , e o ruído do sensor, V .



$$Y_{cl} = \frac{GD_{cl}}{1 + GD_{cl}}R + \frac{G}{1 + GD_{cl}}W - \frac{GD_{cl}}{1 + GD_{cl}}V. \quad (4.5)$$

$$U = \frac{D_{cl}}{1 + GD_{cl}}R - \frac{GD_{cl}}{1 + GD_{cl}}W - \frac{D_{cl}}{1 + GD_{cl}}V. \quad (4.6)$$

Talvez mais importante que essas equações seja a equação do erro, $E_{cl} = R - Y_{cl}$.

$$E_{cl} = R - \left[\frac{GD_{cl}}{1 + GD_{cl}}R + \frac{G}{1 + GD_{cl}}W - \frac{GD_{cl}}{1 + GD_{cl}}V \right] \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{1 + GD_{cl}}R - \frac{G}{1 + GD_{cl}}W + \frac{GD_{cl}}{1 + GD_{cl}}V. \quad (4.8)$$

Nesse caso, a função de transferência de malha fechada é $T_{cl} = \frac{GD_{cl}}{1 + GD_{cl}}$.

Com essas equações, exploramos os quatro objetivos básicos de **estabilidade, rastreamento, regulação e sensibilidade** para os casos em malha aberta e malha fechada.

4.1.1 Estabilidade

Como vimos no Capítulo 3, a condição de estabilidade é simplesmente declarada como: todos os polos da função de transferência devem estar no semiplano esquerdo (SPE). No caso de malha aberta descrito pela Eq. (4.1), estes são os polos de GD_{ol} . Para ver como as restrições impostas por este requisito influenciam o controlador, são definidos os polinômios $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ e $d(s)$, sendo $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ e $D_{ol}(s) = \frac{c(s)}{d(s)}$. Portanto, $GD_{ol} = \frac{bc}{ad}$. Com estas definições, o requerimento de estabilidade é que $a(s)$ e $d(s)$ não tenham raízes no semiplano direito (SPD). Um engenheiro ingênuo pode acreditar que se a planta é instável com $a(s)$ tendo uma raiz no SPD, o sistema pode ser estável pelo cancelamento deste polo com um zero de $c(s)$. No entanto, o polo permanece instável, e ao menor ruído ou perturbação, fará com que a saída cresça até que ocorra uma saturação ou falha do sistema. Da mesma forma, se a planta apresenta resposta pobre por causa de um zero de $b(s)$ no SPD, a tentativa de consertar isso com um cancelamento usando uma raiz de $d(s)$ também irá resultar em um sistema instável. Conclui-se que uma estrutura de malha aberta *não pode* ser usada para estabilizar uma planta e, portanto, não pode ser usada se a planta é instável.

Para o sistema realimentado, Eq. (4.8), os polos do sistema são as raízes de $1 + GD_{cl} = 0$. Novamente usando os polinômios definidos acima, a equação característica do sistema é

$$1 + GD_{cl} = 0 \quad (4.9)$$

$$1 + \frac{b(s)c(s)}{a(s)d(s)} = 0 \quad (4.10)$$

$$a(s)d(s) + b(s)c(s) = 0. \quad (4.11)$$

A partir dessa equação, fica claro que o processo de realimentação concede mais liberdade para o projeto do controlador do que o caso de malha aberta. No entanto, ainda é preciso evitar cancelamentos instáveis. Por exemplo, se a planta é instável e, portanto, $a(s)$ tem uma raiz no SPD, poderemos cancelar este polo, colocando um zero de $c(s)$ no mesmo lugar. No entanto, a Eq. (4.11) mostra que, como resultado, o polo instável continua a ser um polo do sistema, e

esse método não irá funcionar. No entanto, diferentemente da estrutura em malha aberta, um polo de $a(s)$ no SPD NÃO impede que um controlador por realimentação estabilize o sistema. Por exemplo, no Capítulo 2 obtemos a função de transferência do pêndulo invertido, a qual, para valores simples, pode ser $G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$ para a qual temos $b(s) = 1$ e $a(s) = s^2 - 1 = (s + 1)(s - 1)$. Suponha $D(s) = \frac{K(s+\gamma)}{s+\delta}$. A equação característica resultante é

$$(s + 1)(s - 1)(s + \delta) + K(s + \gamma) = 0. \quad (4.12)$$

Este é o problema que enfrentou Maxwell em seu estudo sobre governadores, ou seja, sob quais condições impostas aos parâmetros todas as raízes desta equação estarão no SPE? O problema foi resolvido por Routh. No nosso caso, uma solução simples é fazer $\gamma = 1$, e a equação de segunda ordem pode ser facilmente resolvida para colocar os outros dois polos na posição desejada.

Exercício. Se desejarmos forçar que a equação característica seja $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = 0$, resolva para K e δ em termos de ζ e ω .

4.1.2 Rastreamento

O problema de rastreamento é fazer com que a saída siga a entrada de referência tanto quanto possível. No caso de malha aberta, se a planta é estável e não tem nem polos nem zeros no SPD, então, em princípio, o controlador pode ser selecionado para cancelar a função de transferência da planta e substituí-la por qualquer outra que o engenheiro deseje. Essa aparente liberdade, no entanto, vem com três ressalvas. Em primeiro lugar, a fim de implementar o controlador fisicamente, a função de transferência deve ser *própria*, o que significa que a função de transferência não pode ter mais zeros do que polos. Em segundo lugar, o engenheiro não deve ser ganancioso e requerer um projeto irrealisticamente rápido. Esta análise foi toda baseada na suposição de que a planta é linear e o objetivo é uma resposta rápida que exigirá entradas amplas na planta, que por certo irão saturar o sistema se o objetivo for muito exigente. Novamente, é da responsabilidade do engenheiro conhecer os limites da planta e definir a função de transferência para um valor razoável de seu conhecimento. Em terceiro e último lugar, embora seja possível, em princípio, cancelar *qualquer* polo no SPE, a próxima seção, sobre sensibilidade, destaca o fato de que a função de transferência da planta está sujeita a alterações, e uma tentativa de cancelamento de um polo no SPE poderá resultar em um desastre quando esse polo se mover um pouco e expor o sistema de resposta a transientes inaceitáveis.

Exercício. A planta com função de transferência $\frac{1}{s^2 + 3s + 9}$ é controlada por um controlador em malha fechada com função de transferência $\frac{c_2s^2 + c_1s + c_0}{s(s+d_1)}$. Encontre os valores dos parâmetros deste controlador para que o sistema em malha fechada tenha a equação característica $(s + 6)(s + 3)(s^2 + 3s + 9) = 0^1$.

$$\{\text{resposta: } c_2 = 18, c_1 = 54, c_0 = 162, d_1 = 9\}$$

Exercício. Mostre que se a entrada de referência do sistema no exercício acima for um degrau de amplitude A , o erro em estado estacionário será zero.

4.1.3 Regulação

O problema da regulação é manter o erro pequeno quando a referência é no máximo um sinal de referência constante e podem existir distúrbios. Uma rápida olhada no diagrama de blocos em malha aberta revela que o controlador não tem influência na resposta do sistema para qualquer um dos distúrbios, w ou v , então essa estrutura é inútil para a regulação. Voltamo-nos para o caso de realimentação. Da Eq. (4.8), encontramos um conflito entre w e v na busca de um bom controlador. Por exemplo, o termo relacionado à contribuição da perturbação na planta para o erro do sistema é $\frac{G}{1+GD_{cl}}W$. Para selecionar D_{cl} de forma que este termo seja pequeno, devemos

¹ Este processo é chamado de “alocação de polos” e será discutido no Capítulo 7.

fazer D_{cl} tão grande quanto possível e infinito se isso for viável. Por outro lado, o termo de erro para o ruído do sensor é $\frac{GD_{cl}}{1+GD_{cl}}V$. Neste caso, infelizmente, se selecionarmos um D_{cl} grande, a função de transferência tende para a unidade, e o ruído do sensor não é reduzido completamente! O que devemos fazer? A solução do dilema é observar que cada um desses termos é uma função na frequência, então uma delas pode ser grande para algumas frequências e pequena para outras. Também notamos que os distúrbios em muitas plantas ocorrem em frequências muito baixas! Por outro lado, um bom sensor é aquele que pode ser construído para ter muito pouco ruído em toda a gama de baixas frequências de interesse. Assim, usando essa informação, nós projetamos a função de transferência do controlador para ser grande em baixas frequências, reduzindo o efeito de w , e pequena em altas frequências, reduzindo o efeito do ruído do sensor em alta frequência. O engenheiro de controle deve determinar a melhor faixa de frequência para que ocorra a transição de amplificação para atenuação.

Exercício. Mostre que se w é um distúrbio constante e se D_{cl} tem um polo em $s = 0$, então, o erro devido a este distúrbio será zero. No entanto, mostre que se G possuir um polo em zero, ele não ajudará com uma perturbação.

4.1.4 Sensibilidade

Suponha que uma planta é projetada com ganho G em uma frequência particular, mas em operação ela muda para $G + \delta G$. Isso representa uma mudança fracionária ou percentual do ganho de $\delta G/G$. Para fins de análise, a frequência é ajustada para zero e é tomado o ganho do controlador em malha aberta $D_{ol}(0)$. No caso de malha aberta, o ganho nominal global é, portanto, $T_{ol} = GD_{ol}$, e com a perturbação do ganho da planta, o ganho total seria

$$T_{ol} + \delta T_{ol} = D_{ol}(G + \delta G) = D_{ol}G + D_{ol}\delta G = T_{ol} + D_{ol}\delta G.$$

Portanto, a mudança no ganho é $\delta T_{ol} = D_{ol}\delta G$. A sensibilidade, S_G^T , de uma função de transferência, T_{ol} , para o ganho da planta, G , é *definida* como a razão da mudança fracionária em T_{ol} definida como $\frac{\delta T_{ol}}{T_{ol}}$ para a mudança fracional em G . Em forma de equação

$$S_G^T = \frac{\frac{\delta T_{ol}}{T_{ol}}}{\frac{\delta G}{G}} \quad (4.13)$$

$$= \frac{G}{T_{ol}} \frac{\delta T_{ol}}{\delta G}. \quad (4.14)$$

Substituindo os valores, temos

$$\frac{\delta T_{ol}}{T_{ol}} = \frac{D_{ol}\delta G}{D_{ol}G} = \frac{\delta G}{G}. \quad (4.15)$$

Isso significa que um erro de 10% em G pode resultar em um erro de 10% em T_{ol} . No caso em malha aberta, portanto, calculamos que $S = 1$.

A partir da Eq. (4.5) para o caso em malha fechada, a mesma mudança em G resulta em um novo ganho em malha fechada como

$$T_{cl} + \delta T_{cl} = \frac{(G + \delta G)D_{cl}}{1 + (G + \delta G)D_{cl}},$$

sendo T_{cl} o ganho em malha fechada. Podemos calcular diretamente a sensibilidade deste ganho do sistema em malha fechada usando cálculos diferenciais. O ganho em estado estacionário em malha fechada é

$$T_{cl} = \frac{GD_{cl}}{1 + GD_{cl}}.$$

A variação de primeira ordem é proporcional à derivada e é dada por

$$\delta T_{cl} = \frac{dT_{cl}}{dG} \delta G.$$

A expressão geral para sensibilidade da Eq. (4.13) é dada por

$$\begin{aligned} S_G^{T_{cl}} &\triangleq \text{sensibilidade de } T_{cl} \text{ em relação a } G \\ S_G^{T_{cl}} &\triangleq \frac{G}{T_{cl}} \frac{dT_{cl}}{dG}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

então

$$\begin{aligned} S_G^{T_{cl}} &= \frac{G}{GD_{cl}/(1+GD_{cl})} \frac{(1+GD_{cl})D_{cl} - D_{cl}(GD_{cl})}{(1+GD_{cl})^2} \\ &= \frac{1}{1+GD_{cl}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Esse resultado apresenta a maior vantagem da realimentação:²

No controle realimentado, o erro no ganho global da função de transferência é menos sensível às variações no ganho de planta por um fator de $S = \frac{1}{1+DG}$ em relação ao erro no ganho de controle em malha aberta.

Se o ganho é tal que $1 + DG = 100$, uma mudança de 10% no ganho da planta G causará apenas uma mudança de 0,1% no ganho em estado estacionário. O controlador em malha aberta é 100 vezes mais sensitivo a mudanças no ganho que o controlador em malha fechada com ganho 100. O caso de realimentação unitária no exemplo é tão comum que iremos nos referenciar ao resultado da Eq. (4.17) simplesmente como sensibilidade, S , sem sobrescritos e subscritos.

Até este momento, os resultados desta seção foram computados assumindo erros de estado estacionário na presença de entradas constantes, tanto para sinais de referência quanto para perturbação. Resultados muito semelhantes podem ser obtidos para o comportamento em estado estacionário na presença de uma referência ou sinal de distúrbio senoidal. Isso é importante porque há momentos em que esses sinais ocorrem naturalmente, como, por exemplo uma perturbação de 60 Hertz devido à interferência da linha de transmissão de energia elétrica em um sistema eletrônico. O conceito também é importante porque sinais mais complexos podem ser descritos como uma combinação de componentes senoidais em uma faixa de frequência e analisados para outras frequências utilizando a superposição. Por exemplo, sabe-se que a audição humana está restrita aos sinais na frequência no intervalo de cerca de 60 a 15.000 Hertz. Um sistema de amplificador realimentado e alto-falante projetado para fornecer um som de alta fidelidade deve acompanhar com precisão qualquer tipo de sinal (tom puro) senoidal neste intervalo. Se considerarmos o controlador de realimentação do sistema mostrado na Fig. 4.2 como tendo a função de transferência $D(s)$ e o processo com função de transferência $G(s)$, então, o ganho de malha aberta em estado estacionário do sinal senoidal de frequência ω_0 será $|G(j\omega_0)D(j\omega_0)|$ e o erro do sistema realimentado será

$$|E(j\omega_0)| = |R(j\omega_0)| \left| \frac{1}{1 + G(j\omega_0)D(j\omega_0)} \right|. \quad (4.18)$$

Assim, para reduzir erros a 1% com a entrada na frequência ω_0 , devemos fazer $|1 + DG| \geq 100$ ou, efetivamente, $|D(j\omega_0)G(j\omega_0)| \gtrsim 100$ e um bom amplificador de áudio deve ter ganho de malha no intervalo de $2\pi 60 \leq \omega \leq 2\pi 15000$. Nós vamos rever esse conceito no Capítulo 6, como parte do projeto baseado em técnicas de resposta em frequência.

² Bode, que desenvolveu a teoria da sensibilidade, bem como muitas outras propriedades da realimentação, definiu a sensibilidade como $S = 1 + GD$, o inverso de nossa escolha.

O caso filtrado

Até agora, a análise foi baseada nas estruturas em malha aberta e malha fechada mais simples. Um caso mais geral inclui um filtro dinâmico na entrada e também dinâmica no sensor. A estrutura filtrada de malha aberta é mostrada na Fig. 4.3 como tendo a função de transferência $T_{ol} = GD_{ol}F$. Neste caso, a função de transferência do controlador em malha aberta foi simplesmente substituída pelo DF e a discussão do caso de malha aberta não filtrado é facilmente aplicada a essa mudança.

Para o caso realimentação filtrada mostrado na Fig. 4, as mudanças são mais significativas. Nesse caso, a transformação da saída do sistema é dada por

$$Y = \frac{GD_{cl}F}{1 + GD_{cl}H}R + \frac{G}{1 + GD_{cl}H}W - \frac{HGD_{cl}}{1 + GD_{cl}H}V. \quad (4.19)$$

Como é evidente a partir desta equação, a dinâmica do sensor, H , é parte da função de transferência e entra na questão da estabilidade com $D_{cl}H$ substituindo D_{cl} no caso de realimentação unitária. De fato, se $F = H$ no que diz respeito a estabilidade, controle e regulação, o caso filtrado é idêntico ao caso de realimentação unitária com $D_{cl}H$ substituindo D_{cl} . Por outro lado, a função de transferência do filtro F pode desempenhar o papel do controlador em malha aberta, exceto que, aqui, o filtro F iria modificar a função de transferência de todo o laço, $\frac{GD_{cl}}{1 + GD_{cl}H}$, ao invés de simplesmente GD_{ol} . Portanto, a estrutura filtrada de malha fechada pode realizar melhores propriedades que as estruturas de malha aberta e de realimentação unitária. O controlador, D_{cl} , pode ser projetado para efetivamente regular o sistema para a perturbação W e para o ruído do sensor, V , enquanto o filtro F é projetado para melhorar a precisão de rastreamento. Se a dinâmica do sensor, H , é acessível ao projetista, este termo também pode ser projetado para melhorar a resposta ao ruído de sensor. A questão remanescente diz respeito à sensibilidade.

Usando a fórmula na Eq.(4.13), com mudanças nos parâmetros de interesse, temos

$$\mathcal{S}_F^{T_{cl}} = 1,0, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{S}_G^{T_{cl}} = \frac{1}{1 + GD_{cl}H}, \quad (4.21)$$

$$-\mathcal{S}_H^{T_{cl}} = \frac{GD_{cl}H}{1 + GD_{cl}H}. \quad (4.22)$$

Destas, a mais interessante é a última. Observe que em relação a H , a sensibilidade atinge a unidade à medida que o ganho de malha cresce. Portanto, é particularmente importante que a função de transferência do sensor não seja apenas pequena em relação ao ruído, mas seja também muito estável em ganho. O dinheiro gasto com sensor é um dinheiro bem gasto.

Figura 4.3 Sistema filtrado em malha aberta.

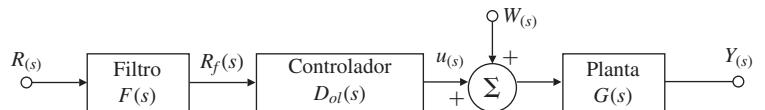
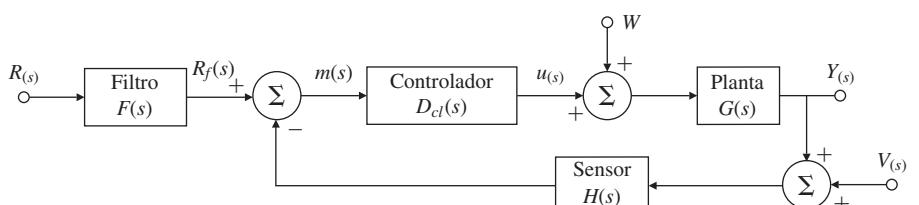


Figura 4.4 Sistema filtrado em malha fechada. R = referência, u = controle, Y = saída e V = ruído do sensor.



4.2 Controle de erro em estado estacionário para entradas polinomiais: tipo de sistemas

No estudo do problema de regulação, a entrada de referência é tomada como uma constante. É também um caso comum que a perturbação na planta seja uma tendência constante. Mesmo no problema de rastreamento, a entrada de referência é geralmente constante para longos períodos de tempo ou pode ser adequadamente aproximada, como se fosse um polinômio no tempo, normalmente de baixo grau. Por exemplo, quando uma antena está seguindo o ângulo de elevação de um satélite, o histórico temporal do sinal é uma curva em forma S como esquematizado na Fig. 4.5. Este sinal pode ser aproximado por uma função linear do tempo (chamada de entrada em rampa ou velocidade) por um tempo significativo em relação à velocidade de resposta do servomecanismo. Como outro exemplo, o controle de posição de um elevador tem uma rampa de entrada de referência, que vai dirigir o elevador para se mover com velocidade constante até chegar perto do próximo andar. Em casos raros, a entrada pode mesmo ser aproximada por um período substancial como tendo uma aceleração constante. Esses casos nos levam a considerar os erros de estado estacionário em sistemas estáveis com entradas polinomiais.

Como parte do estudo dos erros de estado estacionário para entradas polinomiais, uma terminologia foi desenvolvida para expressar os resultados. Por exemplo, podemos classificar os sistemas como “**tipo**” de acordo com o grau do polinômio que ele pode razoavelmente seguir. Por exemplo, um sistema que possa controlar um polinômio de grau 1 com um erro constante é chamada de *Tipo 1*. Além disso, para quantificar o erro de rastreamento, várias “**constantes de erro**” são definidas. Em todas as análises a seguir, supõe-se que os sistemas são estáveis; caso contrário, a análise não faz sentido algum.

4.2.1 Tipo de sistema para rastreamento

No caso de realimentação unitária mostrado na Fig. 4.2, o erro do sistema é dado pela Eq. (4.8). Se considerarmos o rastreamento da entrada de referência e definirmos $W = V = 0$, a equação para o erro é simplesmente

$$E = \frac{1}{1 + GD_{cl}} R = SR. \quad (4.23)$$

Ao considerar entradas polinomiais, temos $r(t) = t^k/k!1(t)$, cuja transformada é $R = \frac{1}{s^{k+1}}$. Tomando um sistema mecânico como base para a nomenclatura de referência genérica, a entrada ao degrau para $k = 0$ é chamada de entrada de “**posição**”, a entrada em rampa para $k = 1$ é chamada de entrada de “**velocidade**”, e se $k = 2$, a entrada é chamada de entrada de “**aceleração**”, independentemente das unidades dos sinais reais. A aplicação do Teorema do Valor Final com a fórmula de erro dá o resultado

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (4.24)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + GD_{cl}} R(s) \quad (4.25)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + GD_{cl}} \frac{1}{s^{k+1}}. \quad (4.26)$$

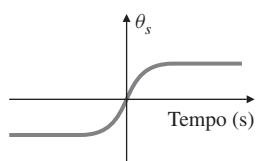


Figura 4.5 Sinal de rastreamento do satélite.

Inicialmente, considera-se um sistema para o qual GD_{cl} não tem polo na origem e tem uma entrada em degrau para que $R(s)=1/s$. Assim, $r(t)$ é um polinômio de grau 0. Neste caso, a Eq. (4.26) se reduz a

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + GD_{cl}} \frac{1}{s} \quad (4.27)$$

$$= \frac{1}{1 + GD_{cl}(0)}. \quad (4.28)$$

Este sistema é definido como *Tipo 0*, e a constante $GD_{cl}(0) \triangleq K_p$ é definida como a *constante de erro de posição*. Observe que se a entrada for um polinômio de grau superior a 1, o erro resultante crescerá sem limites. Um polinômio de grau 0 é o mais alto grau que um sistema do *Tipo 0* pode rastrear. Se $GD_{cl}(s)$ tem um polo na origem, podemos continuar nesta linha e considerar entradas polinomiais de primeiro grau, mas é bastante simples analisar a Eq. (4.26) em uma configuração geral. Para este caso, é necessário descrever o comportamento do controlador e da planta quando s se aproxima de 0. Para este fim, coletamos todos os termos, exceto o(s) polo(s) na origem na função $GD_{clo}(s)$, que é finita em $s = 0$ para que possamos definir a constante $GD_{clo}(0) = K_n$ e escrever a função de transferência como

$$GD_{cl}(s) = \frac{GD_{clo}(s)}{s^n}. \quad (4.29)$$

Por exemplo, se GD_{cl} não tem integrador, então $n = 0$. Se o sistema tem um integrador, então $n = 1$ e assim por diante. Substituindo esta expressão na Eq. (4.26),

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{GD_{clo}(s)}{s^n} \frac{1}{s^{k+1}}} \quad (4.30)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^n}{s^n + K_n s^k}. \quad (4.31)$$

A partir dessa equação, podemos ver que, se $n > k$, então $e = 0$, e se $n < k$, então $e \rightarrow \infty$. Se $n = k = 0$, então $e_{ss} = \frac{1}{1+K_0}$, e se $n = k \neq 0$, então $e_{ss} = 1/K_n$. Como vimos, se $n = k = 0$, a entrada é um polinômio de grau zero, como um degrau ou posição, a constante K_0 é chamada de *constante de posição* definida por K_p , e o sistema é classificado como *Tipo 0*. Se $n = k = 1$, a entrada é um polinômio de primeiro grau, como uma rampa ou entrada de velocidade, e a constante K_1 é chamada de *constante de velocidade* definida como K_v . Esse sistema é classificado como *Tipo 1*. De forma similar, sistemas do *Tipo 2* e de tipos superiores podem ser definidos. A Fig. 4.6 representa claramente esta situação para um sistema do *Tipo 1* no qual a referência é uma entrada em rampa. O erro entre a entrada e a saída $\frac{1}{K_v}$ é claramente destacado.

Usando a Eq. (4.29), esses resultados podem ser resumidos pelas equações:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GD_{cl}(s), \quad n = 0, \quad (4.32)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s GD_{cl}(s), \quad n = 1, \quad (4.33)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 GD_{cl}(s), \quad n = 2. \quad (4.34)$$

A informação sobre o tipo do sistema também pode ser útil para determinar os valores do erro em função do grau de uma entrada polinomial, como mostrado na Tabela 4.1

EXEMPLO 4.1 *Tipo do sistema para controle de velocidade*

Determine o tipo do sistema e a constante de erro relevante para o controle de velocidade com realimentação proporcional dada por $D(s) = k_p$. A função de transferência da planta é $G = \frac{A}{\tau s + 1}$.

Solução. Neste caso, $GD_{cl} = \frac{k_p A}{\tau s + 1}$, e aplicando a Eq. (4.32) temos que $n = 0$, pois não há polo em $s = 0$. Assim, o sistema é Tipo 0 e a constante de erro é uma constante de posição dada por $K_p = k_p A$.

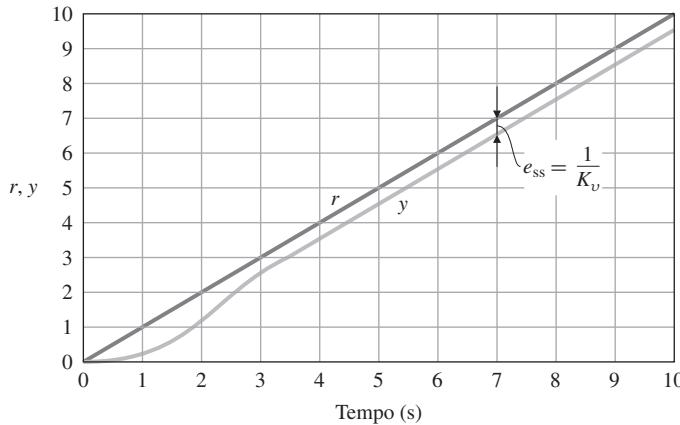


Figura 4.6 Relação entre K_v e a resposta à rampa.

TABELA 4.1 Erro em função do tipo do sistema

Tipo de entrada	Degrau (posição)	Rampa (velocidade)	Parábola (aceleração)
Tipo 0	$\frac{1}{1 + K_p}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

EXEMPLO 4.2 *Tipo do sistema e controle integral*

Determine o tipo do sistema e a constante de erro relevante para controle de velocidade com controlador proporcional e integral dado por $D_c = k_p + k_I/s$. A função de transferência da planta é $G = \frac{A}{\tau s + 1}$.

Solução. Neste caso, a função de transferência de malha é $GD_{cl} = \frac{A(k_p s + k_I)}{s(\tau s + 1)}$ e, como um sistema com realimentação unitária com um único polo em $s = 0$, o sistema é do Tipo 1. A constante de velocidade é dada pela Eq. (4.33) como $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s GD_{cl}(s) = Ak_I$.

A definição do tipo de sistema nos ajuda a identificar rapidamente a capacidade de um sistema rastrear polinômios. Na estrutura de realimentação unitária, se os parâmetros do processo mudam sem retirar o polo na origem de um sistema do Tipo 1, a velocidade constante vai mudar, mas o sistema continuará tendo erro nulo em estado estacionário para uma entrada. Afirmações semelhantes podem ser feitas para sistemas do Tipo 2 ou superiores. Assim, podemos dizer que tipo do sistema é uma **propriedade robusta** com relação às variações dos parâmetros na estrutura de realimentação unitária. A robustez é uma das principais razões para a preferência da realimentação unitária em relação a outros tipos de estrutura de controle.

Outra forma para a fórmula da constante de erro pode ser desenvolvida diretamente em termos da função de transferência em malha fechada. A partir da Fig. 4.4, a função de transferência incluindo um sensor é

Robustez do tipo do sistema

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathcal{T}(s) = \frac{GD}{1 + GDH}, \quad (4.35)$$

e o sistema de erro é

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \mathcal{T}(s)R(s).$$

A função de transferência em relação ao erro é

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \mathcal{T}(s),$$

e o sistema de erro transformado é

$$E(s) = [1 - \mathcal{T}(s)]R(s).$$

Assumimos que as condições do Teorema do Valor Final são satisfeitas, ou seja, que todos os polos de $sE(s)$ estão no SPE. Neste caso, o erro em estado estacionário é encontrado aplicando o Teorema do Valor Final para chegarmos a

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - \mathcal{T}(s)]R(s). \quad (4.36)$$

Se a entrada de referência for um polinômio de grau k , a transformada do erro será

$$E(s) = \frac{1}{s^{k+1}}[1 - \mathcal{T}(s)]$$

e o erro em estado estacionário é encontrado novamente aplicando o Teorema do Valor Final:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 - \mathcal{T}(s)}{s^{k+1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \mathcal{T}(s)}{s^k}. \quad (4.37)$$

Como anteriormente, o resultado de avaliar o limite na Eq. (4.37) pode ser zero, uma constante não nula ou infinito, e se a solução da Eq. (4.37) é uma constante não nula, o sistema é referenciado como *Tipo k*. Note que um sistema do Tipo 1 ou maior tem um ganho DC de 1,0, o que significa que $\mathcal{T}(0) = 1$ nestes casos.

EXEMPLO 4.3 *Tipo do sistema para o controle de um servo com tacômetro realimentado*

Considere o problema de controle de posição de um motor elétrico, incluindo um sistema sem realimentação unitária causado por ter um tacômetro fixo ao eixo do motor, e sua tensão (que é proporcional à velocidade do eixo) realimentada como parte do controle. Os parâmetros são

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s(\tau s + 1)}, \\ D(s) &= k_p, \\ H(s) &= 1 + k_t s, \\ F(s) &= 1. \end{aligned}$$

Determine o tipo do sistema e a constante de erro relevante à respectiva entrada de referência.

Solução. O sistema de erro é

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ &= R(s) - \mathcal{T}(s)R(s) \\ &= R(s) - \frac{DG(s)}{1 + HDG(s)}R(s) \\ &= \frac{1 + (H(s) - 1)DG(s)}{1 + HDG(s)}R(s). \end{aligned}$$

O erro do sistema em estado estacionário a partir da Eq. (4.37) é

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)[1 - T(s)].$$

Para uma entrada polinomial de referência, $R(s) = 1/s^{k+1}$, temos

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[1 - T(s)]}{s^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^k} \frac{s(\tau s + 1) + (1 + k_t s - 1)k_p}{s(\tau s + 1) + (1 + k_t s)k_p} \\ &= 0, \quad k = 0 \\ &= \frac{1 + k_t k_p}{k_p}, \quad k = 1; \end{aligned}$$

então o sistema é do Tipo 1 e a constante de velocidade é $K_v = \frac{k_p}{1+k_t k_p}$. Note que se $k_t > 0$, talvez a estabilidade ou a resposta dinâmica possam ser melhoradas, a constante de velocidade é menor que k_p . A conclusão é que se o tacômetro realimentado é usado para melhorar a resposta dinâmica, o erro em estado estacionário é geralmente maior.

4.2.2 Tipo do sistema para regulação e rejeição de distúrbios

Um sistema também pode ser classificado em relação à sua capacidade de rejeitar entradas de perturbações polinomiais de uma maneira análoga ao esquema de classificação baseado em entradas de referências. A função de transferência da perturbação de entrada $W(s)$ para o erro $E(s)$ é

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{-Y(s)}{W(s)} = T_w(s) \quad (4.38)$$

porque, se a referência for igual a zero, a saída é o erro. De um modo semelhante às entradas de referência, o sistema é do Tipo 0 se uma perturbação em degrau resulta em uma constante de erro em estado estacionário não nula, e é do Tipo 1 se uma perturbação em rampa resulta em uma constante de erro em estado estacionário não nula, etc.

De um modo geral, seguindo a mesma abordagem utilizada no desenvolvimento da Eq. (4.31), assumimos que uma constante n e uma função $T_{o,w}(s)$ podem ser definidas com as propriedades que $T_{o,w}(0) = 1/K_{n,w}$ e que a função de transferência da perturbação para o erro pode ser escrita como

$$T_w(s) = s^n T_{o,w}(s). \quad (4.39)$$

Então, o erro em estado estacionário em relação a uma entrada de perturbação polinomial de grau k é

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s T_w(s) \frac{1}{s^{k+1}} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[T_{o,w}(s) \frac{s^n}{s^k} \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

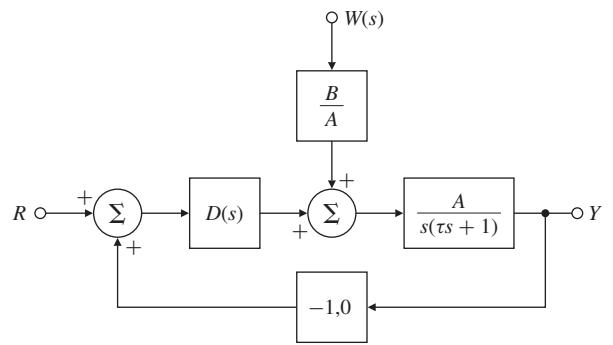
A partir da Eq. (4.40), se $n > k$, então o erro é zero, e se $n < k$, o erro é ilimitado. Se $n = k$, o sistema é do tipo k e o erro é dado por $1/k_{n,w}$.

EXEMPLO 4.4 Tipo do sistema para o controle de posição de um motor CC

Considere o modelo simplificado de um motor CC em realimentação unitária, como mostrado na Fig. 4.7, no qual o torque de distúrbio é indicado por $W(s)$. Este caso foi considerado no Exemplo 2.11.

- (a) Use o controlador

Figura 4.7 Motor CC com realimentação unitária.



$$D(s) = k_p, \quad (4.41)$$

e determine o tipo do sistema e as propriedades do erro em estado estacionário em relação às entradas de distúrbio.

(b) Considere a função de transferência dada por

$$D(s) = k_p + \frac{k_I}{s}, \quad (4.42)$$

e determine o tipo do sistema e as propriedades do erro em estado estacionário em relação às entradas de distúrbio.

Solução. (a) A função de transferência de malha fechada de W para E (com $R = 0$) é

$$\begin{aligned} T_w(s) &= \frac{-B}{s(\tau s + 1) + Ak_p} \\ &= s^0 T_{o,w}, \\ n &= 0, \\ K_{o,w} &= \frac{-Ak_p}{B}. \end{aligned}$$

Aplicando a Eq. (4.40), vemos que o sistema é do Tipo 0 e o erro em estado estacionário para uma entrada em degrau unitário é $e_{ss} = -B/Ak_p$. Como visto na seção anterior, esse sistema é do Tipo 1 para entradas de referência, ilustrando que um mesmo sistema pode ter diferentes tipos para diferentes entradas.

(b) Para este controlador, a função de transferência do erro em virtude do distúrbio é

$$T_w(s) = \frac{-Bs}{s^2(\tau s + 1) + (k_p s + k_I)A}, \quad (4.43)$$

$$n = 1, \quad (4.44)$$

$$K_{n,w} = \frac{Ak_I}{-B}, \quad (4.45)$$

e, portanto, o sistema é do Tipo 1 e o erro a uma entrada de distúrbio em rampa é

$$e_{ss} = \frac{-B}{Ak_I}. \quad (4.46)$$

Fórmula de Truxal para as constantes de erro

Truxal (1955) obteve uma fórmula para o cálculo da constante de velocidade de um sistema do Tipo 1 em termos dos polos e zeros de malha fechada, uma fórmula que conecta o erro de estado estacionário à resposta dinâmica do sistema. Como o projeto de controle muitas vezes exige

uma relação de compromisso entre essas duas características, pode ser útil conhecer a fórmula Truxal. Sua obtenção é bastante direta. Suponha que a função de transferência em malha fechada $\mathcal{T}(s)$ de um sistema do um Tipo 1 é

$$\mathcal{T}(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}. \quad (4.47)$$

Já que o erro em estado estacionário na resposta devida a uma entrada em degrau em um sistema do Tipo 1 é zero, o ganho DC é unitário; assim,

$$\mathcal{T}(0) = 1. \quad (4.48)$$

O erro do sistema é dado por

$$E(s) \triangleq R(s) - Y(s) = R(s) \left[1 - \frac{Y(s)}{R(s)} \right] = R(s)[1 - \mathcal{T}(s)]. \quad (4.49)$$

O erro do sistema devido a uma entrada em rampa é

$$E(s) = \frac{1 - \mathcal{T}(s)}{s^2}. \quad (4.50)$$

Usando o Teorema do Valor Final, temos

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \mathcal{T}(s)}{s}. \quad (4.51)$$

Usando a regra de L'Hôpital, a Eq. (4.51) pode ser reescrita como

$$e_{ss} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\mathcal{T}}{ds} \quad (4.52)$$

ou

$$e_{ss} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\mathcal{T}}{ds} = \frac{1}{K_v}. \quad (4.53)$$

A equação (4.53) implica que $1/K_v$ está relacionada com a inclinação da função de transferência na origem, um resultado que também será mostrado na Seção 6.1.2. Usando a Eq. (4.48), podemos reescrever a Eq. (4.53) como

$$e_{ss} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\mathcal{T}}{ds} \frac{1}{\mathcal{T}} \quad (4.54)$$

ou

$$e_{ss} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [\ln \mathcal{T}(s)]. \quad (4.55)$$

Substituindo a Eq. (4.47) na Eq. (4.55), temos que

$$e_{ss} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left\{ \ln \left[K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \right] \right\} \quad (4.56)$$

$$= - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[K + \sum_{i=1}^m \ln(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \ln(s - p_i) \right] \quad (4.57)$$

ou

$$\frac{1}{K_v} = - \frac{d \ln \mathcal{T}}{ds} \Big|_{s=0} = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i}. \quad (4.58)$$

Observa-se a partir da Eq. (4.58) que K_v aumenta à medida que os polos de malha fechada se afastam da origem. Existem relações similares para outros coeficientes de erro, e estas serão exploradas nos problemas.

EXEMPLO 4.5 Fórmula de Truxal

Fórmula de Truxal

Um sistema de terceira ordem do Tipo 1 tem os polos de malha fechada $-2 \pm 2j$ e $-0,1$. O sistema tem apenas um zero em malha fechada. Onde o zero deve estar para obter $K_v = 10$?

Solução. A partir da fórmula de Truxal, temos

$$\frac{1}{K_v} = -\frac{1}{-2+2j} - \frac{1}{-2-2j} - \frac{1}{-0,1} + \frac{1}{z}$$

ou

$$\begin{aligned} 0,1 &= 0,5 + 10 + \frac{1}{z}, \\ \frac{1}{z} &= 0,1 - 0,5 - 10, \\ &= -10,4 \end{aligned}$$

Portanto, o zero de malha fechada deve estar em $z = 1/(-10,4) = -0,0962$.

4.3 Controlador de três termos: controlador PID

Nos capítulos seguintes, vamos estudar três técnicas gráficas de análise e projeto baseadas no lugar das raízes, na resposta em frequência e na formulação em espaço de estado das equações. Aqui, nós descrevemos um método de controle com antiga relevância histórica que foi desenvolvido por meio de experiência e por tentativa e erro. Partindo do controle proporcional realimentado, os primeiros engenheiros descobriram a ação de controle integral como forma de eliminar o erro em regime permanente. Entretanto, encontravam, em muitos casos, uma resposta dinâmica pobre; assim, um termo de “antecipação” baseado na derivada foi adicionado. O resultado é chamado de controlador de três termos, ou PID, e tem a função de transferência³

$$D(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s, \quad (4.59)$$

sendo k_p o termo proporcional, k_I o termo integral e k_D o termo derivativo. Vamos discutir um de cada vez.

4.3.1 Controlador proporcional (P)

Quando o sinal de controle realimentado é linearmente proporcional ao erro do sistema, chamamos o resultado de **realimentação proporcional**. Esse foi o caso de realimentação usado no controlador de velocidade na Seção 4.1 para o qual a função de transferência do controlador é

$$\frac{U(s)}{E(s)} = D_{cl}(s) = k_p. \quad (4.60)$$

Se a planta é de segunda ordem, como, por exemplo, um motor quando se leva em conta a indutância, então a função de transferência da planta pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + a_1 s + a_2}. \quad (4.61)$$

³ O termo derivativo sozinho faz com que a função de transferência se torne imprópria e impraticável. No entanto, a adição de um polo de alta frequência torna o termo próprio e somente altera ligeiramente o desempenho.

Nesse caso, a equação característica com o controlador proporcional é

$$1 + k_p G(s) = 0, \quad (4.62)$$

$$s^2 + a_1 s + a_2 + k_p A = 0. \quad (4.63)$$

O projetista pode controlar o termo constante nesta equação, o qual determina a frequência natural, mas não pode controlar o coeficiente de amortecimento. O sistema é Tipo 0 e, se fizermos k_p grande o suficiente para obtermos o erro em regime permanente pequeno, o coeficiente de amortecimento pode ser muito pequeno para uma resposta transitória satisfatória usando apenas o controlador proporcional.

4.3.2 Controle proporcional mais controle integral (PI)

Adicionando um termo integral ao controlador, temos, no domínio do tempo, a equação de controle **proporcional mais integral**:

$$u(t) = k_p e + k_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau, \quad (4.64)$$

Controle proporcional
mais integral

para o qual $D_{cl}(s)$ na Fig. 4.2 torna-se

$$\frac{U(s)}{E(s)} = D_{cl}(s) = k_p + \frac{k_I}{s}. \quad (4.65)$$

A introdução do termo integral aumenta o tipo do sistema e, portanto, pode rejeitar totalmente perturbações constantes. Por exemplo, considere o controle PI, no exemplo de controle de velocidade, no qual a planta é descrita por

$$Y = \frac{A}{\tau s + 1} (U + W). \quad (4.66)$$

A transformada da equação do controlador é

$$U = k_p(R - Y) + k_I \frac{R - Y}{s}, \quad (4.67)$$

e a transformada da equação do sistema com este controlador é

$$(\tau s + 1)Y = A \left(k_p + \frac{k_I}{s} \right) (R - Y) + AW, \quad (4.68)$$

e, se multiplicarmos a Eq (4.68) por s e colocarmos os termos em evidência,

$$(\tau s^2 + (Ak_p + 1)s + Ak_I)Y = A(k_p s + k_I)R + sAW. \quad (4.69)$$

Como o controlador PI inclui dinâmicas, a utilização deste controlador vai mudar a resposta dinâmica. É o que podemos entender considerando a equação característica dada por

$$\tau s^2 + (Ak_p + 1)s + Ak_I = 0. \quad (4.70)$$

As duas raízes desta equação podem ser complexas e, em caso afirmativo, a frequência natural será $\omega_n = \sqrt{Ak_I/\tau}$ e o coeficiente de amortecimento é $\zeta = \frac{Ak_p + 1}{2\tau\omega_n}$. Estes dois parâmetros podem ser determinados pelos ganhos do controlador. Por outro lado, se a planta é de segunda ordem,

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + a_1 s + a_2}, \quad (4.71)$$

então a equação característica do sistema é

$$1 + \frac{k_p s + k_I}{s} \frac{A}{s^2 + a_1 s + a_2} = 0, \quad (4.72)$$

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + A k_p s + A k_I = 0. \quad (4.73)$$

Neste caso, os parâmetros do controlador podem ser usados para ajustar dois coeficientes, mas não o terceiro. Para isso, precisamos do controle derivativo.

4.3.3 Controle PID

O último termo deste clássico controlador é o derivativo, **D**. Um efeito importante desse termo é suavizar a resposta devido a sinais instantâneos. Portanto, o termo “D” às vezes é introduzido no caminho de realimentação, como mostrado na Fig.4.8(a). Ele pode ser uma parte do controlador padrão ou pode representar um sensor de velocidade, como um tacômetro no eixo de um motor. A equação característica de malha fechada é a mesma que teríamos se o termo estivesse na malha direta como dado pela Eq. (4.59) e desenhado na Fig. 4.8(b). É importante notar que os zeros da referência para a saída são diferentes nos dois casos. Com o termo derivativo na realimentação, a referência não é derivada, o que mostra como as respostas indesejadas devido a mudanças instantâneas são evitadas.

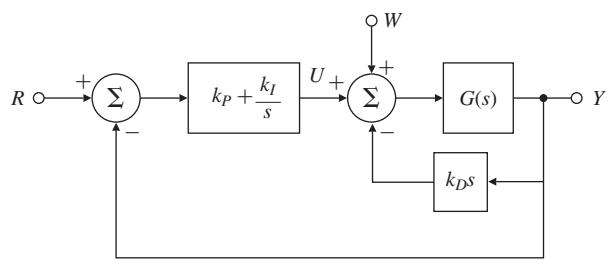
Para ilustrar o efeito do termo derivativo no controlador PID, considere o controle de velocidade, mas com uma planta de segunda ordem. Neste caso, a equação característica é

$$\begin{aligned} s^2 + a_1 s + a_2 + A(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s) &= 0, \\ s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + A(k_p s + k_I + k_D s^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Colocando os termos em evidência, temos

$$s^3 + (a_1 + A k_D) s^2 + (a_2 + A k_p) s + A k_I = 0. \quad (4.75)$$

O ponto aqui é que nesta equação, na qual as três raízes determinam a natureza da resposta dinâmica do sistema, os três parâmetros k_p , k_I e k_D selecionados apropriadamente determinam, em teoria, as raízes arbitrariamente. Sem o termo derivativo, existiriam apenas dois parâmetros de ajuste, mas ainda existiriam três raízes; assim, a escolha das raízes da equação característica seria restrita. Para ilustrar o efeito deste termo de forma mais concreta, um exemplo numérico é utilizado.



(a)

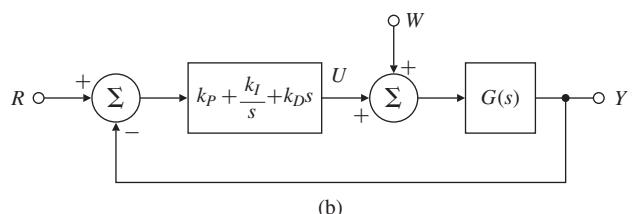


Figure 4.8 Diagrama de blocos do controlador PID: (a) com o termo **D** na realimentação; e (b) com o termo **D** na malha direta.

EXEMPLO 4.6 Controle PID de velocidade em um motor

Considere o controle de velocidade de um motor CC com os parâmetros⁴

⁴ Esses valores foram escalonados para medir o tempo em milisegundos, multiplicando os valores de L_a e J_m por 1.000.

$$\begin{aligned} J_m &= 1,13 \times 10^{-2} & b &= 0,028 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}, & L_a &= 10^{-1} \text{ henry,} \\ && &\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2/\text{rad}, && \\ R_a &= 0,45 \text{ ohms,} & K_t &= 0,067 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{amp}, & K_e &= 0,067 \text{ volt}\cdot\text{s}/\text{rad} \end{aligned} \quad (4.76)$$

Estes parâmetros foram definidos no Exemplo 2.11 do Capítulo 2. Use os parâmetros do controlador

$$k_p = 3, \quad k_I = 15 \text{ s,} \quad k_D = 0,3 \text{ s.} \quad (4.77)$$

Discuta os efeitos dos controladores P, PI e PID na resposta do sistema considerando o distúrbio de torque e entrada de referência como ambos sendo degrau unitário. Os parâmetros não usados devem ser nulos.

Solução. A Figura 4.9(a) ilustra os efeitos dos controladores P, PI e PID na resposta do sistema a um distúrbio em degrau. Note que adicionando o termo integral, a oscilação aumenta, mas elimina o erro em regime permanente, e a adição do termo derivativo reduz a oscilação enquanto o erro em regime permanente é mantido nulo. A Figura 4.9(b) ilustra os efeitos dos controladores P, PI e PID na resposta do sistema a uma entrada de referência em degrau. A resposta ao degrau pode ser computada representando o numerador e o denominador em vetores com seus coeficientes (na ordem descendente das potências de s) e usando a função step no MATLAB®.

EXEMPLO 4.7 Controle PI para o controle de posição de motor CC

Considere o modelo simplificado de um motor CC ligado a uma realimentação unitária como mostrado na Fig. 4.7, na qual o distúrbio está representado por $W(s)$. Considere que o sensor seja $-h$ e não -1 .

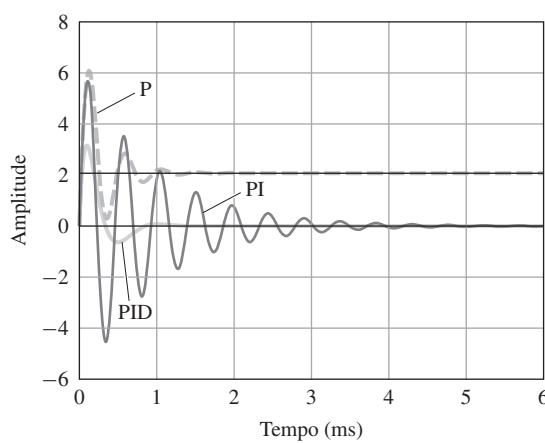
- (a) Use o controlador proporcional

$$D(s) = k_p \quad (4.78)$$

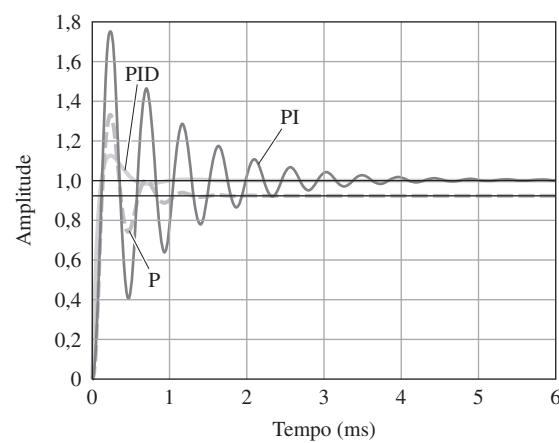
e determine o tipo do sistema e as propriedades em regime permanente em relação à entrada de distúrbio.

- (b) Use o controlador PI

$$D(s) = k_p + \frac{k_I}{s} \quad (4.79)$$



(a)



(b)

Figura 4.9 Respostas considerando os controladores P, PI e PID a (a) entrada de distúrbio em degrau e (b) entrada de referência em degrau.

e determine o tipo do sistema e as propriedades em regime permanente em relação à entrada de distúrbio.

Solução. (a) A função de transferência em malha fechada de W para E (sendo $R=0$) é

$$\begin{aligned} T_w(s) &= \frac{-B}{s(\tau s + 1) + Ak_p h} \\ &= s^0 T_{o,w}, \\ n &= 0, \\ K_{o,w} &= \frac{-Ak_p h}{B}. \end{aligned}$$

Aplicando a Eq. (4.40), vemos que o sistema é do Tipo 0 e o erro em regime permanente para uma entrada em degrau é $e_{ss} = -B/Ak_{ph}$. Na seção anterior, este sistema foi visto como sendo do Tipo 1 para entradas de referência e ilustra que o tipo do sistema pode ser diferente para diferentes entradas. Entretanto, neste caso, o sistema é do Tipo 0 para entradas de referência.

(b) Se o controlador é PI, a função de transferência do erro de distúrbio é

$$T_w(s) = \frac{-Bs}{s^2(\tau s + 1) + (k_p s + k_I)Ah}, \quad (4.80)$$

$$n = 1 \quad (4.81)$$

$$K_{n,w} = \frac{Ak_I h}{-B}, \quad (4.82)$$

e, portanto, o sistema é do Tipo 1 e o erro a um distúrbio em rampa será

$$e_{ss} = \frac{-B}{Ak_I h}. \quad (4.83)$$

EXEMPLO 4.8 Controle de atitude do satélite

Considere o modelo de controle de atitude de um satélite mostrado na Fig. 4.10(a) sendo

J = momento de inércia,

W = torque de distúrbio,

K = sensor e ganho de referência,

$D(s)$ = compensador.

O filtro e o sensor têm os mesmos fatores de escala, o sistema com controlador PD pode ser redesenhadado com realimentação unitária como na Fig. 4.10(b) e como controlador PID, desenhado como na Fig. 4.10(c). Assuma que o controle resulta em um sistema estável e determine os tipos do sistema e erros na resposta para distúrbios do sistema de controle sendo

- (a) Sistema na Fig. 4.10(b) controle proporcional e derivativo, sendo $D(s) = k_p + k_D s$
- (b) Sistema na Fig. 4.10(c) controle proporcional, integral e derivativo, sendo $D(s) = k_p + k_I/s + K_D s^5$.

Solução. (a) Analisando a Fig. 4.10(b), vemos que a planta tem dois polos na origem, portanto, o sistema é do Tipo 2 em relação a entradas de referência. A função de transferência do distúrbio para o erro é

⁵ Note que as funções de transferência destes controladores têm mais zeros que polos e, portanto, não são práticas. Na prática, o termo derivativo deve possuir um polo de frequência muito alta, o qual foi omitido nestes exemplos, por simplicidade.

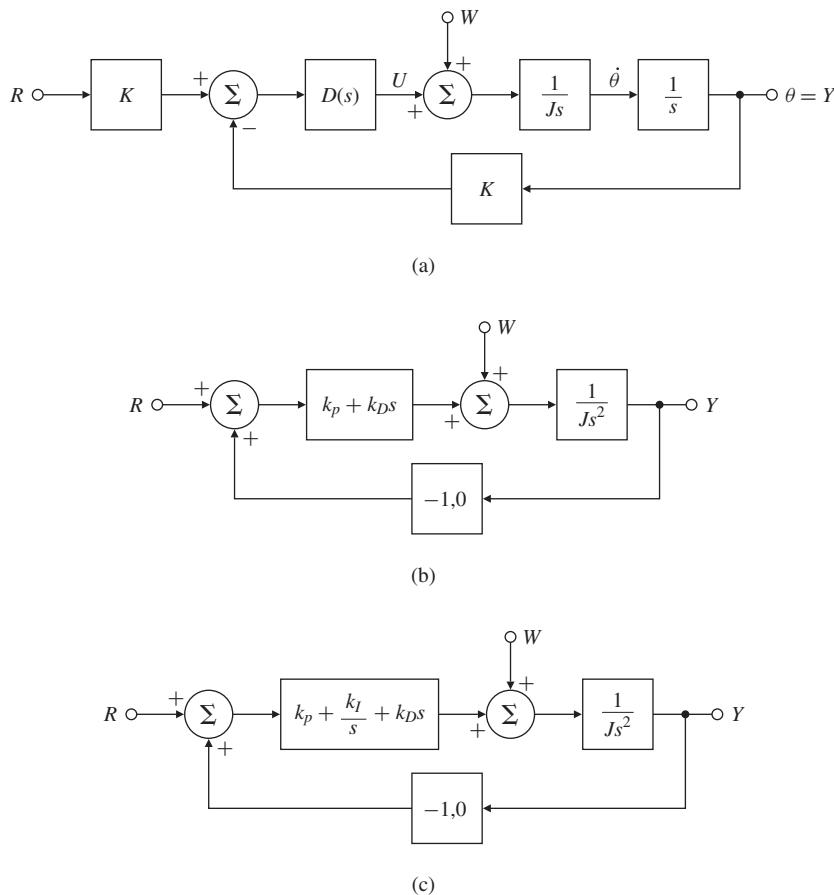


Figura 4.10 Modelo de controle de altitude de um satélite: (a) sistema básico; (b) controle PD; (c) controle PID.

$$T_w(s) = \frac{1}{Js^2 + k_Ds + k_p} \quad (4.84)$$

$$= T_{o,w}(s) \quad (4.85)$$

na qual $n = 0$ e $K_{o,w} = k_p$. O sistema é do Tipo 0 e o erro a um distúrbio em degrau é $1/k_p$.

(b) Para o controle PID, o ganho de malha direta tem três polos na origem, então o sistema é do Tipo 3 para entradas de referência, mas a função de transferência do distúrbio é

$$T_w(s) = \frac{s}{Js^3 + k_Ds^2 + k_ps + k_I}, \quad (4.86)$$

$$n = 1, \quad (4.87)$$

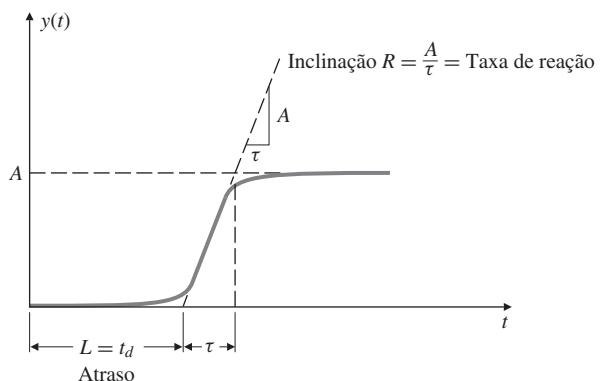
$$T_{o,w}(s) = \frac{1}{Js^3 + k_Ds^2 + k_ps + k_I} \quad (4.88)$$

da qual temos que o sistema é do Tipo 1 e a constante de erro é k_I , então o erro a um distúrbio em rampa terá uma inclinação de $1/k_I$.

4.3.4 Método de Ziegler-Nichols para sintonia de controladores PID

Quando o controlador PID foi desenvolvido, a seleção de valores para os vários termos (“sintonia” do controlador) era uma tarefa realizada sem utilizar um procedimento bem definido. Assim, para facilitar a vida dos operadores de plantas, os engenheiros de controle procuraram

Figura 4.11 Curva de reação do processo.



maneiras de tornar este procedimento mais sistemático. Callender e outros (1936) propuseram um método de projeto de controladores PID, especificando valores satisfatórios para os parâmetros do controlador com base nas estimativas dos parâmetros da planta, os quais um engenheiro pode obter a partir de experimentos no próprio processo.

Esta abordagem foi estendida por J. G. Ziegler e N. B. Nichols (1942, 1943), que observaram que as respostas ao degrau de um grande número de sistemas de controle apresentam uma **curva de reação do processo**, como mostrado na Fig. 4.11, que pode ser gerada a partir dos dados experimentais. A curva em forma de S é característica de muitos sistemas e pode ser aproximada pela resposta ao degrau de um planta com função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ae^{-st_d}}{\tau s + 1}, \quad (4.89)$$

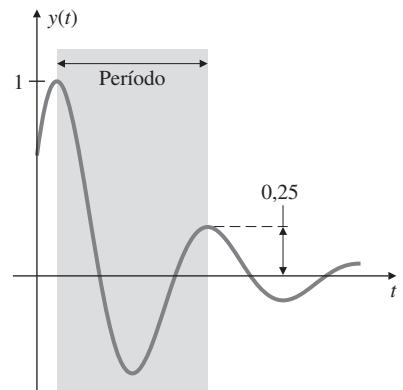
que representa um sistema de primeira ordem com retardamento no tempo ou “atraso de transporte” de t_d s. As constantes na Eq. (4.89) podem ser determinadas a partir da resposta do processo ao degrau unitário. Se uma reta tangente é traçada no ponto de inflexão da curva de reação do processo, então a inclinação da reta será $R = A/\tau$, a interseção da reta tangente com o eixo do tempo identifica o retardamento no tempo $L = t_d$ e o valor final da curva fornece o valor de A .⁶

Ziegler e Nichols propuseram dois métodos de sintonia para o controlador PID. No primeiro, a escolha dos parâmetros do controlador resulta em uma resposta ao degrau em malha fechada com taxa de decaimento de aproximadamente 0,25. Isso significa que o transiente decai para um quarto de seu valor depois de um período de oscilação, como mostrado na Fig. 4.12. Um

Função de transferência para um sistema de alta ordem com uma curva de reação característica do processo

Sintonia com taxa de decaimento de 0,25

Figura 4.12 Taxa de decaimento de 0,25.



⁶ K. J. Astrom e outros indicaram que a constante de tempo, τ , também pode ser estimada a partir da curva e alegaram que um ajuste mais eficiente pode ser feito incluindo este parâmetro.

quarto de decaimento corresponde a $\zeta = 0,21$, um tanto quanto baixo para muitas aplicações, mas visto como um compromisso razoável entre a resposta rápida e as margens de estabilidade para os processos de controle considerados. Os autores simularam as equações para o sistema em um computador analógico e ajustaram os parâmetros do controlador até que os transientes decaíssem em 25% em um período. Os parâmetros do regulador sugeridos por Ziegler e Nichols são definidos para o controlador

$$D_c(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (4.90)$$

dados na Tabela 4.2.

No **método da sensibilidade crítica**, os ajustes nos parâmetros são baseados em avaliar a amplitude e a frequência do sistema no limite da estabilidade, e não na resposta ao degrau. Para usar este método, o ganho proporcional é aumentado até que o sistema se torne marginalmente estável com oscilações persistentes, as quais podem ter amplitudes limitadas pela saturação do atuador. Este ganho é definido como K_u (chamado de **ganho crítico**), e o período de oscilação é P_u (chamado de **período crítico**). Estes são determinados como mostrado nas Figs. 4.13 e 4.14. P_u deve ser medido quando a amplitude das oscilações é a menor possível. Então, os valores dos parâmetros são escolhidos de acordo com a Tabela 4.3.

Resultados experimentais têm mostrado que a sintonia do controlador de acordo com as regras de Ziegler-Nichols fornecem respostas em malha fechada aceitáveis para muitos sistemas. O operador do processo irá geralmente fazer um ajuste final no controlador para obter um controlador satisfatório.

Sintonia pela avaliação no limite da estabilidade (método da sensibilidade crítica)

TABELA 4.2 Sintonia do regulador
 $D(s) = K(1 + 1/T_I s + T_D s)$ por Ziegler-Nichols,
para taxa de decaimento de 0,25

Tipo do controlador	Ganho ótimo
<i>P</i>	$k_p = 1/RL$
<i>PI</i>	$\begin{cases} k_p = 0,9/RL \\ T_I = L/0,3 \end{cases}$
<i>PID</i>	$\begin{cases} k_p = 1,2/RL \\ T_I = 2L \\ T_D = 0,5L \end{cases}$

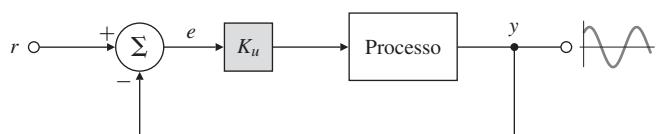


Figura 4.13 Determinação do período e ganho crítico.

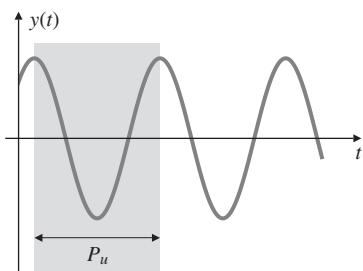


Figura 4.14 Sistema neutramente estável.

TABELA 4.3 Sintonia do regulador $D_c(s) = k_p(1 + 1/(T_IS + T_DS))$ por Ziegler-Nichols, baseado no método de sensibilidade crítica

Tipo do controlador	Ganho ótimo
<i>P</i>	$k_p = 0,5K_u$
<i>PI</i>	$\begin{cases} k_p = 0,45K_u \\ T_I = \frac{P_u}{1,2} \end{cases}$
<i>PIB</i>	$\begin{cases} k_p = 1,6K_u \\ T_I = 0,5P_u \\ T_D = 0,125P_u \end{cases}$

EXEMPLO 4.9 Ajuste de um trocador de calor: um quarto de taxa de decaimento

Considere o trocador de calor discutido no Capítulo 2. A curva de reação do processo é mostrada na Fig. 4.15. Determine um controlador proporcional e um controlador PI para esse sistema usando as regras de Zeigler-Nichols de taxa de decaimento de um quarto. Esboce as respostas ao degrau correspondentes.

Solução. A partir da curva de reação do processo, podemos medir a inclinação máxima como $R \cong 1/90$ e o retardo no tempo como $L \cong 13$ s. De acordo com as regras de Zeigler-Nichols na Tabela 4.2, os parâmetros são

$$\text{Proporcional : } k_p = \frac{1}{RL} = \frac{90}{13} = 6,92,$$

$$\text{PI : } k_p = \frac{0,9}{RL} = 6,22 \quad \text{e} \quad T_I = \frac{L}{0,3} = \frac{13}{0,3} = 43,3.$$

A Fig. 4.16(a) apresenta as respostas do sistema em malha fechada destes dois reguladores. Note que o regulador proporcional resulta em um erro em regime permanente, enquanto o regulador PI rastreia exatamente a entrada em regime permanente. Ambos os reguladores resultam em oscilações com sobressinal considerável. Se reduzirmos arbitrariamente o ganho k_p por um fator de 2 em cada caso, o sobressinal e a oscilação são substancialmente reduzidos, como mostrado na Figura 4.16(b).

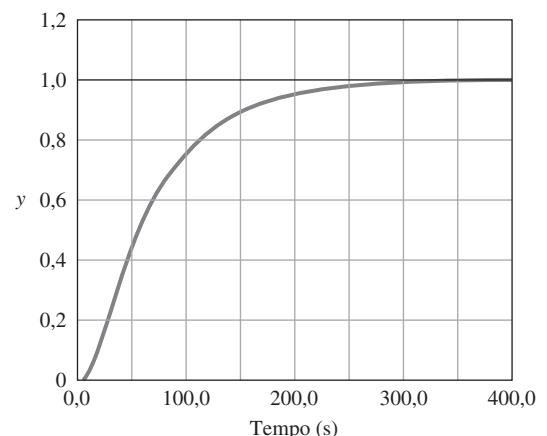


Figura 4.15 Curva de reação medida de um processo.

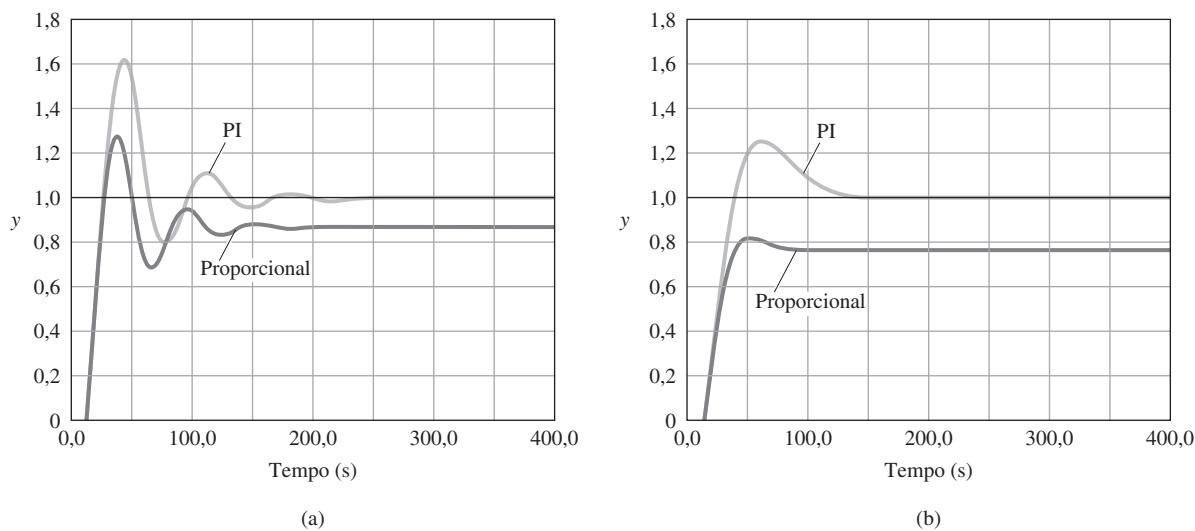


Figura 4.16 Respostas ao degrau em malha fechada.

EXEMPLO 4.10 Ajuste de um trocador de calor: comportamento oscilatório

O ganho proporcional foi aplicado ao trocador de calor do exemplo anterior até que o sistema apresentasse uma resposta com oscilações persistentes devido a um curto pulso (impulso) na entrada, como mostrado na Fig. 4.17. O ganho crítico é medido como $K_u = 15,3$, e o período crítico foi medido como $P_u = 42$ s. Determine o regulador proporcional e o regulador PI de acordo com as regras de Ziegler-Nichols baseadas no método de sensibilidade crítica. Esboce as respostas correspondentes.

Solução. Os reguladores, de acordo com a Tabela 4.3, são

Proporcional : $k_p = 0,5K_u$, $K_u = 7,65$,

$$\text{PI : } k_p = 0,45K_u, \quad K_u = 6,885 \quad \text{e} \quad T_I = \frac{1}{12}P_u = 35.$$

As respostas ao degrau do sistema em malha fechada são mostradas na Fig. 4.18(a). Note que as respostas são similares àquelas no Exemplo 4.9. Se reduzirmos k_p em 50%, então o sobressinal é substancialmente reduzido, como mostrado na Fig. 4.18(b).

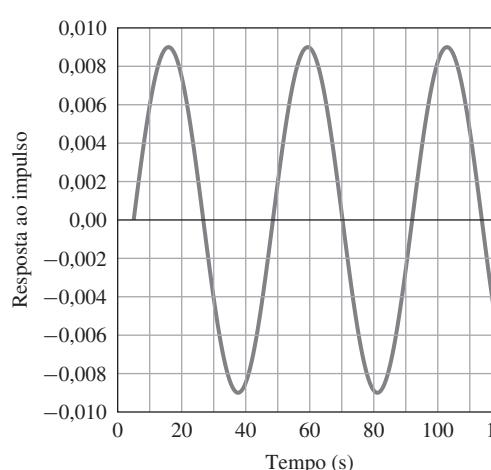


Figura 4.17 Período crítico de um trocador de calor.

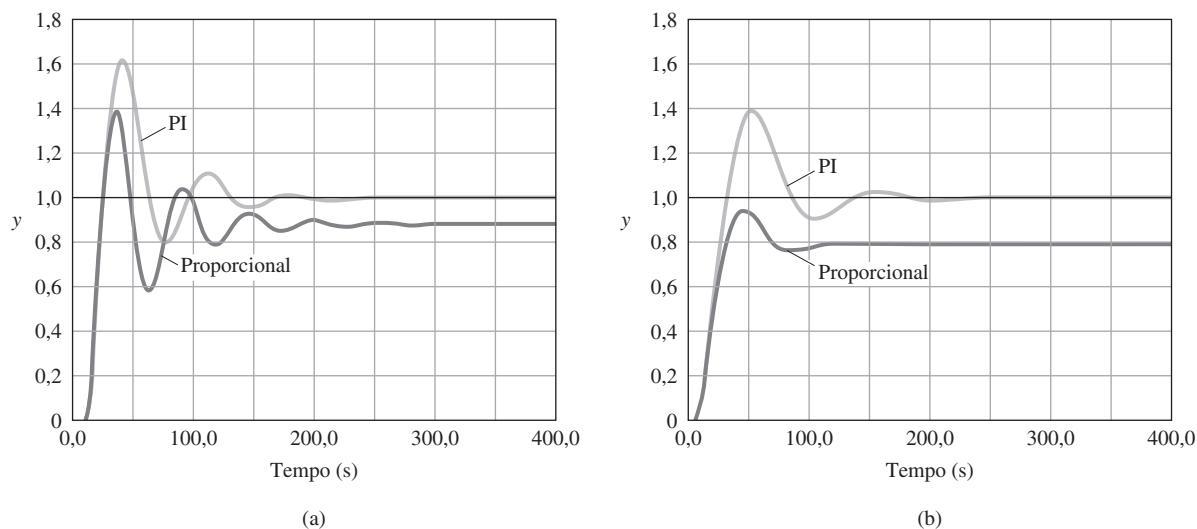


Figura 4.18 Resposta ao degrau de malha fechada.

4.4 Introdução ao controle digital

Como resultado da revolução dos computadores digitais e de sua relação custo-benefício, houve um aumento do uso da lógica digital em aplicativos embarcados, como controladores de sistemas realimentados. Um controlador digital fornece ao projetista muito mais flexibilidade para fazer alterações na lei de controle após o projeto, pois a fórmula para o cálculo do sinal de controle é um programa, em vez de um circuito analógico. Em muitos casos, isso significa que os projetistas de controladores digitais e os programadores dos controladores podem trabalhar quase independentemente, economizando uma grande quantidade de tempo. Além disso, é relativamente fácil incluir a lógica binária e as operações não lineares em um controlador digital, em comparação com um controlador analógico. Processadores especiais projetados para processamento de sinais em tempo real, conhecidos como processadores de sinais digitais (*Digital Signal Processors – DSPs*), são particularmente adequados para o uso em controladores de tempo real. O Capítulo 8 inclui uma introdução mais ampla à matemática e aos conceitos associados à análise e projeto de controladores digitais. No entanto, a fim de comparar os modelos analógicos dos próximos três capítulos com relação aos equivalentes digitais, damos aqui uma breve introdução às técnicas mais simples para o projeto de controladores digitais.

Um controlador digital difere de um controle analógico, no qual os sinais devem ser **amostrados** e **quantizados**.⁷ Um sinal para ser usado em lógica digital precisa ser amostrado em primeiro lugar e, em seguida, as amostras precisam ser convertidas por um conversor analógico-digital ou A/D⁸ em um número quantizado digital. Uma vez que o computador digital, calculou o valor do sinal de controle adequado, esse valor precisa ser convertido novamente em uma tensão e manter-se constante ou extrapolado por um conversor digital-analógico ou D/A⁹, a fim de ser aplicado ao atuador do processo. O sinal de controle não será alterado até o período de amostragem seguinte. Como resultado da amostragem, não há limites rígidos sobre a largura de banda e velocidade do controlador digital. Métodos de projeto discreto, que tendem a minimizar estas limitações, são descritos no Capítulo 8, os quais tendem a minimizar estas limitações. Uma regra empírica razoável para selecionar o período de amostragem é que durante o tempo de subida da resposta ao degrau, a entrada do controlador discreto deve ser amostrada aproximadamente seis vezes. Isto corresponde a uma frequência de amostragem que é de 10 a 20 vezes a largura de ban-

⁷ Um controlador que opera sinais que são amostrados, mas *não* quantizados, é chamado de controlador **discreto**; um controlador que opera sinais que são amostrados e quantizados é chamado de **digital**.

⁸ “Conversor Analógico-Digital”.

⁹ “Conversor Digital-Analógico”.

da do sistema em malha fechada. O quantizador dos sinais do controlador introduz ruídos extra no sistema e mantém esta interferência em um nível aceitável, o conversor A/D normalmente tem a precisão de 10 a 12 bits, embora os sistemas de baixo custo tenham sido concebidos com apenas 8 bits. Para uma primeira análise, os efeitos da quantização são geralmente ignorados. Um diagrama de blocos simplificado de um sistema com um controlador digital é mostrado na Fig. 4.19.

Nesta introdução ao controle digital, iremos descrever uma técnica simplificada para encontrar um controlador discreto equivalente (amostrado, mas não quantizado) para um determinado controlador contínuo. O método depende do período de amostragem, T_s , o qual deve ser curto o suficiente para que o sinal de controle reconstruído seja o mais próximo do sinal de controle analógico original. Assumimos também que a lógica digital tenha bits o suficiente para que a quantização implícita nos processos de conversões A/D e D/A possa ser ignorada. Embora existam boas ferramentas de análise para determinar o quanto bem estes requisitos são cumpridos, aqui vamos testar nossos resultados por meio de simulação.

Encontrar um controlador discreto que seja equivalente a um controlador analógico é equivalente a encontrar uma equação de recorrência para as amostras do controle, o que irá aproximar a equação diferencial do controlador. O pressuposto é que temos a função de transferência de um controlador analógico e que desejamos substituí-la por um controlador discreto que receberá amostras na entrada do controlador, $e(kT_s)$, a partir de uma amostra e , usando os valores passados do sinal de controle, $u(kT_s)$, e amostras atuais e passadas da entrada, $e(kT_s)$, irá calcular o próximo sinal de controle a ser enviado para o atuador. Por exemplo, considere um controlador PID com a função de transferência

$$U(s) = (k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s)E(s), \quad (4.91)$$

que é equivalente à expressão de três termos no domínio do tempo

$$u(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \dot{e}(t) \quad (4.92)$$

$$= u_P + u_I + u_D. \quad (4.93)$$

Baseado nesses termos e no fato de que o sistema é linear, a próxima amostra do sinal de controle pode ser computada termo por termo. O termo proporcional é imediato

$$u_P(kT_s + T_s) = k_p e(kT_s + T_s). \quad (4.94)$$

O termo integral pode ser computado dividindo a integral em duas partes e aproximando a segunda, a qual é a integral em um período de amostragem, como segue.

$$u_I(kT_s + T_s) = k_I \int_0^{kT_s + T_s} e(\tau) d\tau \quad (4.95)$$

$$= k_I \int_0^{kT_s} e(\tau) d\tau + k_I \int_{kT_s}^{kT_s + T_s} e(\tau) d\tau \quad (4.96)$$

$$= u_I(kT_s) + \{\text{área sob a curva } e(\tau) \text{ durante um período}\} \quad (4.97)$$

$$\cong u_I(kT_s) + k_I \frac{T_s}{2} \{e(kT_s + T_s) + e(kT_s)\}. \quad (4.98)$$

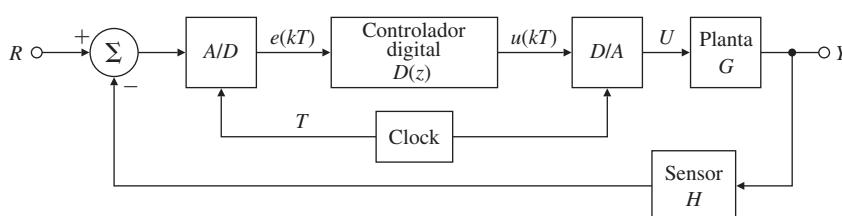


Figura 4.19 Diagrama de blocos de um controlador digital.

Na Eq. (4.98), a área em questão foi aproximada por um trapézio formado pela base T_s e vértices $e(kT_s + T_s)$ e $e(kT_s)$, como mostrado pela linha tracejada na Fig. 4.20.

A área pode também ser aproximada por um retângulo de amplitude $e(kT_s)$ e largura T_s , mostrado pela linha sólida na Fig. 4.20, obtendo-se $u_l(kT_s + T_s) = u_l(kT_s) + k_I T_s e(kT_s)$. Essas e outras possibilidades são consideradas no Capítulo 8.

No termo derivativo, os papéis de u e e são o inverso de seus papéis na integração, e uma aproximação consistente pode ser escrita a partir da Eq. (4.98) e da Eq.(4.92) como

$$\frac{T_s}{2} \{u_D(kT_s + T_s) + u_D(kT_s)\} = k_D \{e(kT_s + T_s) - e(kT_s)\}. \quad (4.99)$$

Como no tempo contínuo, essas relações podem ser extremamente simplificadas e generalizadas usando a ideia das transformadas. Neste momento, a transformada discreta será introduzida como um operador de previsão z de forma similar à variável, s , na transformada de Laplace como um operador diferencial. Aqui, o operador z é definido como o operador de deslocamento para a frente, no sentido de que, se $U(z)$ é a transformação de $u(kT_s)$, então $zU(z)$ será a transformação de $u(kT_s + T_s)$. Com esta definição, o termo integral pode ser escrito como

$$zU_I(z) = U_I(z) + k_I \frac{T_s}{2} [zE(z) + E(z)], \quad (4.100)$$

$$U_I(z) = k_I \frac{T_s}{2} \frac{z+1}{z-1} E(z), \quad (4.101)$$

e a partir Eq. (4.99), o termo derivativo torna-se

$$U_D(z) = k_D \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} E(z). \quad (4.102)$$

O controlador PID discreto é descrito por

$$U(z) = \left(k_p + k_I \frac{T_s}{2} \frac{z+1}{z-1} + k_D \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \right) E(z). \quad (4.103)$$

Comparando estes termos discretos equivalentes à integração e diferenciação com os termos correspondentes analógicos, vê-se que o efeito da aproximação discreta no domínio z é como se em toda a função de transferência analógica, o operador s fosse substituído pelo operador composto presente $\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$. Esta é a regra trapezoidal¹⁰ para equivalentes discretos.

Regra trapezoidal

O equivalente discreto de $D_a(s)$ é

$$D_d(z) = D_a \left(\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (4.104)$$

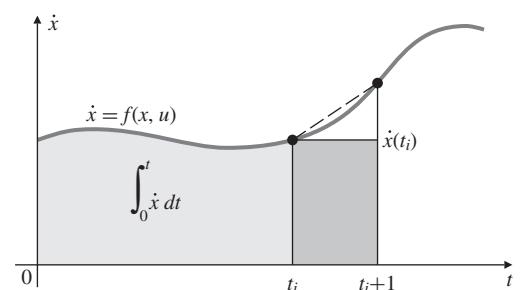


Figura 4.20 Interpretação gráfica da integração numérica.

¹⁰ Esta fórmula também é chamada de Fórmula de Tustin, em homenagem ao engenheiro inglês que usou essa técnica para estudar respostas de circuitos não lineares.

EXEMPLO 4.11 *Equivalente discreto*

Encontre o equivalente discreto para o controlador analógico, tendo a função de transferência

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{11s + 1}{3s + 1} \quad (4.105)$$

usando o período de amostragem $T_s = 1$.

Solução. O operador discreto é $\frac{2(z-1)}{z+1}$, assim, a função de transferência é

$$D_d(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = D(s)|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}} \quad (4.106)$$

$$= \frac{11 \left[\frac{2(z-1)}{z+1} \right] + 1}{3 \left[\frac{2(z-1)}{z+1} \right] + 1}. \quad (4.107)$$

De forma simplificada, temos

$$D_d(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{23z - 21}{7z - 5}. \quad (4.108)$$

Esta função de transferência discreta pode ser convertida para uma equação de diferenças por meio da definição de z como um operador de deslocamento. Considerando a Eq. (4.108), temos

$$(7z - 5)U(z) = (23z - 21)E(z) \quad (4.109)$$

e, interpretando z como um operador de deslocamento, esta é equivalente à equação de diferença¹¹

$$7u(k+1) - 5u(k) = 23e(k+1) - 21e(k), \quad (4.110)$$

na qual substituímos $kT_s + T_s$ por $k + 1$ para simplificar a notação. Para computar o próximo sinal de controle no instante de tempo $kT_s + T_s$, devemos resolver a equação de diferença

$$u(k+1) = \frac{5}{7}u(k) + \frac{23}{7}e(k+1) - \frac{21}{7}e(k). \quad (4.111)$$

Agora, vamos aplicar esses resultados a um problema de controle. Felizmente, o MATLAB® nos fornece o SIMULINK® para simular sistemas contínuos e discretos, permitindo-nos comparar as respostas dos sistemas com controladores contínuos e discretos.

EXEMPLO 4.12 *Controlador discreto equivalente para o controle de velocidade*

A função de transferência do motor é

$$\frac{Y}{U} = \frac{45}{(s+9)(s+5)}. \quad (4.112)$$

Um controlador PI projetado para esse sistema tem a função de transferência

$$D(s) = \frac{U}{E} = 1,4 \frac{s+6}{s}. \quad (4.113)$$

O sistema em malha fechada tem um tempo de subida de aproximadamente 0,2 s e um sobresinal de aproximadamente 20%. Projete um controlador discreto equivalente para este controlador e compare as respostas ao degrau e os sinais de controle dos dois sistemas. (a) Compare as

¹¹ O processo é semelhante ao utilizado no Capítulo 3 para encontrar a equação diferencial ordinária a qual uma transformada de Laplace racional corresponde.

respostas se o período de amostragem é $T_s = 0,07$, o que corresponde a aproximadamente três amostras durante o tempo de subida. (b) Compare as respostas com um tempo de amostragem de $T_s = 0,035$, o que corresponde aproximadamente a seis amostras durante o tempo de subida.

Solução. (a) Usando a substituição dada na Eq. (4.104), o controlador discreto equivalente para $T_s = 0,07$ é dado pela substituição de s por $s \leftarrow \frac{2}{0,07} \frac{z-1}{z+1}$ em $D(s)$, como mostrado a seguir.

$$D_d(z) = 1,4 \frac{\frac{2}{0,07} \frac{z-1}{z+1} + 6}{\frac{2}{0,07} \frac{z-1}{z+1}} \quad (4.114)$$

$$= 1,4 \frac{2(z-1) + 6 * 0,07(z+1)}{2(z-1)} \quad (4.115)$$

$$= 1,4 \frac{1,21z - 0,79}{(z-1)}. \quad (4.116)$$

Baseada nesta expressão, a equação do controle é (com o período de amostragem suprimido)

$$u(k+1) = u(k) + 1,4 * [1,21e(k+1) - 0,79e(k)]. \quad (4.117)$$

(b) Para $T_s = 0,035$, a função de transferência discreta é

$$D_d = 1,4 \frac{1,105z - 0,895}{z - 1}, \quad (4.118)$$

sendo a equação discreta

$$u(k+1) = u(k) + 1,4[1,105 e(k+1) - 0,895 e(k)].$$

Um diagrama de blocos no SIMULINK é construído para simular estes dois sistemas, como mostrado na Fig. 4.21, e as respostas ao degrau são mostradas na Fig. 4.22(a). Os sinais de controle são mostrados na Fig. 4.22(b). Note que o controlador discreto para $T_s = 0,07$ resulta em um aumento substancial do sobressinal, enquanto com $T_s = 0,035$ o controlador digital tem um desempenho razoavelmente próximo ao análogo de tempo contínuo.

Para controladores com muitos polos e zeros, fazer a substituição de conversão de contínuo para discreto na Eq. (4.104) pode ser uma tarefa tediosa. Felizmente, o MATLAB fornece um comando que faz esta substituição. Uma função de transferência dada por $D_c(s) = \frac{\text{numD}}{\text{denD}}$ é representada no MATLAB como $\text{sysDa} = \text{tf}(\text{numD}, \text{denD})$, então a função de transferência discreta equivalente com período de amostragem T_s é dada por

$$\text{sysDd} = \text{c2d}(\text{sysDa}, T_s, 't'). \quad (4.119)$$

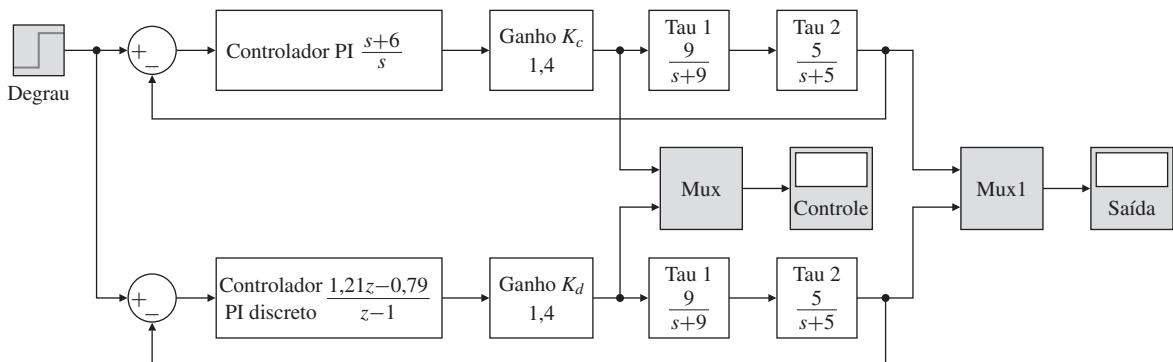


Figura 4.21 Diagrama de blocos no SIMULINK para comparar as respostas dos controladores de tempo contínuo e discreto.

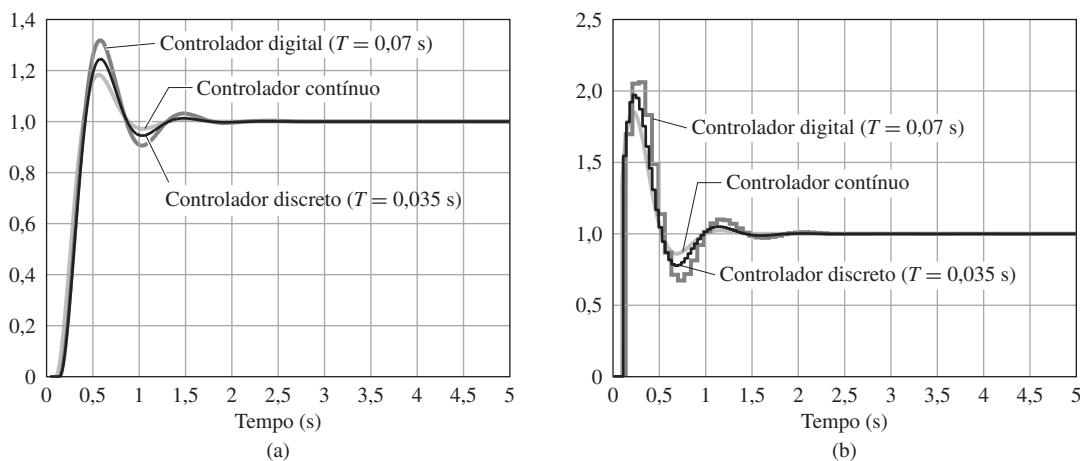


Figura 4.22 Comparação da velocidade no sistema com os controladores contínuo e discreto: (a) respostas de saída e (b) sinais de controle.

Nesta expressão, é claro, os polinômios estão representados na forma correta para o MATLAB. O último parâmetro na função `c2d`, ‘*t*’, refere-se ao tipo de conversão a ser feita e ‘*t*’ representa o método trapezoidal. As alternativas podem ser encontradas usando o comando `help` no MATLAB, `help c2d`. Por exemplo, para o sistema discreto equivalente para $T_s = 0,07$ do exemplo acima, os comandos são

```
numDa = [1 6];
denDa=[1-0];
sysDa = tf(numD,denD)
sysDd = c2d( sysDa,0.07,'t')
```

4.5 Perspectiva histórica

A área de controle é caracterizada em teoria e prática. Teoria de controle é basicamente a aplicação da matemática para resolver problemas de controle, enquanto o controle prático, como utilizado aqui, é a aplicação prática da realimentação em dispositivos nos quais ela será útil. Historicamente, as aplicações práticas vieram antes, e o controle foi introduzido por tentativa e erro. Embora a matemática aplicável seja conhecida, a teoria que descreve como funciona o controle e aponta o caminho para melhorias foi aplicada mais tarde. Por exemplo, a companhia de James Watt iniciou a fabricação de motores a vapor usando o governador de bolas flutuantes em 1788, mas apenas em 1840 G. B. Airy descreveu a instabilidade de um sistema semelhante, e apenas em 1868 J. C. Maxwell publicou um artigo com a descrição matemática do problema desse dispositivo. Então, apenas em 1877, quase 100 anos após o controle do motor a vapor, E. J. Routh publicou uma solução fornecendo requerimentos para a estabilidade. Essa situação tem sido chamada de “lacuna entre teoria e prática” e continua até hoje como uma fonte de criatividade, estimulando tanto um campo quanto o outro.

Regulação é fundamental para as indústrias de processo, desde a fabricação de cerveja à fabricação de gasolina. Nessas indústrias, há uma série de variáveis que precisam ser mantidas constantes. Exemplos típicos são temperatura, pressão, volume, vazão, composição e propriedades químicas como o nível de pH. No entanto, antes que a regulação seja feita por meio da realimentação, é preciso ser capaz de medir a variável de interesse e, portanto, não há controle sem sensores. Em 1851, George Taylor e David Kendall fundaram a companhia que mais tarde se tornou a Taylor Instrument Company, em Rochester, Nova York, que fabricava termômetros e barômetros para a previsão meteorológica. Em 1855, eles estavam fabricando termômetros para diversas indústrias, incluindo uma indústria cervejeira, na qual os instrumentos foram utilizados para o controle manual. Outras industriais que surgiram no campo de instrumentação foram a Companhia Bristol, fundada em Naugatuck, Connecticut, em 1889 por William Bristol, e a Companhia Foxboro, fun-

dada em Foxboro, Massachusetts, em 1908 pelo pai de William e dois de seus irmãos. Por exemplo, um dos instrumentos de Bristol foi utilizado por Henry Ford para medir (e, presumivelmente, controlar) a pressão do vapor, enquanto trabalhou na Companhia Detroit Edison. A Companhia Bristol foi pioneira na telemetria, que permitiu que instrumentos fossem colocados a certa distância do processo para que um gerente de fábrica pudesse monitorar diversas variáveis de uma vez. Enquanto os instrumentos se tornavam mais sofisticados e dispositivos como motores se tornavam disponíveis, eles passaram a ser utilizados para o controle realimentado, muitas vezes utilizando métodos simples, como o descrito no Capítulo 1 para o controle de temperatura em uma sala. Um fato importante foi que as empresas de vários instrumentos entraram em acordo sobre as normas para as variáveis utilizadas; assim, uma planta poderia misturar e combinar instrumentos e controladores de diferentes fornecedores. Em 1920, Foxboro introduziu um controlador baseado em ar comprimido com ação integral. Em um dado momento, cada uma dessas empresas introduziu instrumentos e controladores que poderiam implementar controladores PID. Um passo importante para sintonizar controladores PID foi dado em 1942, quando Ziegler e Nichols, que trabalhavam para a Taylor Instruments, publicaram o seu método de sintonia com base em dados experimentais.

Um problema desafiador de controle foi um problema de rastreamento, para uma arma anti-aérea que poderia estar na terra ou no mar. A ideia era usar um radar para rastrear o alvo e ter um controlador que poderia prever o caminho da aeronave e apontar a arma a uma posição tal que o projétil acertaria o alvo quando ele chegasse lá. O Laboratório de Radiação foi instalado no MIT durante a Segunda Guerra Mundial para desenvolver esses radares, um dos quais foi o SCR-584. Curiosamente, um dos principais contribuintes para os métodos de controle desenvolvidos para este projeto foi ninguém menos que Nick Nichols, que já havia trabalhado com a sintonia de controladores PID. Quando o registro do Laboratório de Rad foi escrito, Nichols foi selecionado para ser um dos editores do volume 25 em controle.

H. S. Black se juntou ao Bell Laboratories em 1921 e foi designado para encontrar um projeto de um amplificador eletrônico repetidor adequado para as linhas de longa distância da companhia telefônica. O problema básico é que o ganho dos componentes do tubo de vácuo que ele tinha disponível variava ao longo do tempo, e ele precisava de um projeto que, em uma faixa de frequência de áudio, mantivesse um ganho específico com grande precisão. Nos anos seguintes, ele tentou vários métodos, incluindo uma técnica projetada para cancelar a distorção do tubo. Isto até funcionou no laboratório, mas era sensível demais para ser aplicado no campo. Finalmente, em agosto de 1927¹², enquanto estava em um barco que fazia a travessia de Staten Island para Manhattan, ele suspeitou que a realimentação negativa poderia funcionar e logo escreveu as equações em um papel disponível, uma página do jornal *New York Times*. Ele registrou patente em 1928, mas ela não foi usada até dezembro de 1937¹³. A teoria de sensibilidade e muitas outras teorias de realimentação foram desenvolvidas por H. W. Bode.

RESUMO

- A medida mais importante do desempenho de um sistema de controle é o erro do sistema para todas as entradas.
- Comparada com o controle em malha aberta, a realimentação pode ser usada para estabilizar um sistema instável, para reduzir erros da planta devido a distúrbios, para melhorar o rastreamento de sinais de entrada e para reduzir a sensibilidade da planta à variação dos parâmetros.
- O ruído do sensor introduz um conflito entre os esforços para reduzir o erro causado por distúrbios da planta e para reduzir os erros causados pelo ruído do sensor.
- Um sistema pode ser classificado de acordo com um Tipo k , que indica a capacidade do sistema de alcançar erro em regime permanente nulo para entradas polinomiais de grau menor que não igual a k . Um sistema com realimentação unitária estável é do Tipo k , em relação à entrada de referência, se o ganho de malha $G(s)D(s)$ tem k polos na origem:

¹² Nesta época, Black tinha 29 anos.

¹³ De acordo com a história, muitos dos colegas de Black no Bell Laboratories não acreditavam que era possível realimentar um sinal 100 vezes maior que a entrada e ainda manter o sistema estável. Como será discutido no Capítulo 6, esse dilema foi resolvido por H. Nyquist, também nesse laboratório.

$$G(s)D(s) = \frac{A(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^k(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

e o erro constante dado por

$$K_k = \lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s)D(s) \quad (4.120)$$

- Os erros em estado estacionário para sistemas com realimentação unitária do Tipos 0, 1 e 2 são relacionados na Tabela 4.1.
- Sistemas podem ser classificados em tipo em relação à sua capacidade de rejeição de distúrbios; para isto, basta calcular o erro do sistema para entradas de distúrbio polinomiais. O sistema é do Tipo k em relação aos distúrbios se o erro é zero para todos os distúrbios polinomiais de grau menor que k , mas diferente de zero para um polinômio de grau k .
- Aumentar o ganho proporcional reduz o erro em regime permanente, mas ganhos muito altos sempre tornam o sistema instável. O controle integral provê robustez no erro em regime permanente, mas também pode tornar o sistema menos estável. O controle derivativo aumenta o amortecimento e torna o sistema mais estável. Esses três tipos de controles combinados formam o controlador PID clássico.
- O controlador PID padrão é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} U(s) &= \left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s \right) E(s) \quad \text{ou} \\ U(s) &= k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) E(s) = D(s)E(s). \end{aligned}$$

A segunda forma acima para o controlador PID é encontrada em muitos sistemas de controle industriais.

- Diretrizes úteis para a sintonia de controladores PID foram apresentadas nas Tabelas 4.2 e 4.3.
- Uma equação de diferença que representa um controlador digital equivalente a um determinado controlador analógico pode ser obtida substituindo s por $2/T_s(z-1)/(z+1)$ na função de transferência e usando z como um operador de deslocamento para frente. Assim, se $U(z)$ corresponde a $u(kT_s)$, então $zU(z)$ corresponde a $u(kT_s + T_s)$.
- O MATLAB pode computar o discreto equivalente por meio do comando c2d.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. Dê três vantagens da realimentação para o controle.
2. Dê duas desvantagens da realimentação para o controle.
3. Um sistema de controle de temperatura é projetado para ter erro nulo a uma entrada constante e um erro de $0,5^\circ\text{C}$ a uma entrada de controle linear no tempo, com uma taxa de crescimento de 40°C/s . Qual é o tipo do sistema de controle e qual é a constante de erro relevante (K_p ou K_v ou etc.)?
4. Quais são as unidades para K_p , K_v e K_a ?
5. Qual é a definição de tipo de sistemas em relação à entrada de referência?
6. Qual é a definição de tipo de sistemas em relação à entrada de distúrbio?
7. Por que o tipo do sistema depende de onde está a entrada de sinal externo no sistema?
8. Qual é o principal objetivo em adicionar o controle integral?
9. Qual é o principal objetivo em adicionar o controle derivativo?
10. Por que um projetista pode desejar adicionar o termo derivativo em realimentação e não no caminho direto do erro?
11. Qual é a vantagem em ter uma “regra de sintonia” para controladores PID?
12. Dê duas razões para o uso do controlador digital no lugar do controlador analógico.
13. Dê duas desvantagens do uso do controlador digital.
14. Dê a substituição do operador discreto z para o operador de Laplace s se a aproximação da integral na Eq. (4.98) é feita por um retângulo de altura $e(kT_s)$ e base T_s .

PROBLEMAS

Problemas da Seção 4.1: as equações básicas de controle

4.1 Se S é a sensibilidade de um sistema com realimentação unitária a mudanças na função de transferência da planta e T é a função de transferência da entrada para a saída, mostre que $S + T = 1$.

4.2 Definimos a sensibilidade de uma função de transferência G a um dos seus parâmetros k como a proporção de variação percentual em G para a variação percentual em k .

$$S_k^G = \frac{dG/G}{dk/k} = \frac{d \ln G}{d \ln k} = \frac{k}{G} \frac{dG}{dk}.$$

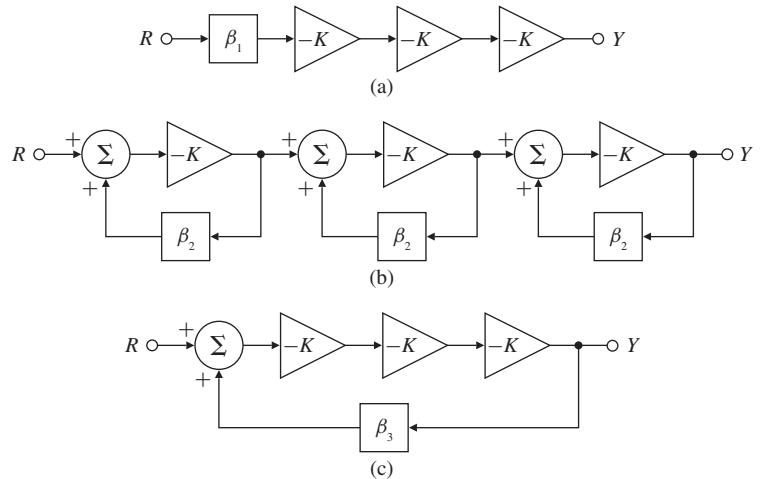
O propósito deste problema é examinar o efeito da realimentação na sensibilidade. Em particular, gostaríamos de comparar as topologias mostradas na Fig. 4.23 conectando três amplificadores com ganho $-K$ para obter um único amplificador de ganho -10 .

(a) Para cada topologia na Fig. 4.23, calcule β_i se $K = 10$ e $Y = -10R$.

(b) Para cada topologia, calcule S_k^G quando $G = Y/R$. [Use os valores de β_i encontrados na parte (a).] Qual é o caso *menos* sensível?

(c) Calcule a sensibilidade dos sistemas na Fig. 4.23(b,c) para β_2 e β_3 . Usando seus resultados, comente sobre a precisão necessária para os sensores e atuadores.

Figura 4.23 Topologias com três amplificadores para o Problema 4.2.



4.3 Compare as duas estruturas mostradas na Fig. 4.24 com respeito à sensibilidade a mudanças no ganho total devido à mudanças no ganho do amplificador. Use a relação

$$S = \frac{d \ln F}{d \ln K} = \frac{K}{F} \frac{dF}{dK}$$

como uma medida. Selecione H_1 e H_2 tal que a saída do sistema nominal satisfaça $F_1 = F_2$, e assuma que $KH_1 > 0$.

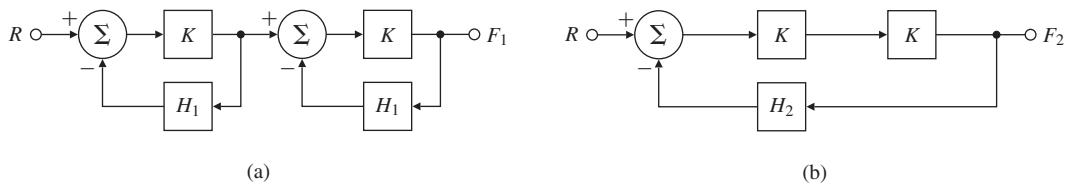


Figura 4.24 Diagrama de blocos para o Problema 4.3.

4.4 Um sistema de controle com realimentação unitária tem função de transferência em malha aberta

$$G(s) = \frac{A}{s(s+a)}.$$

- (a) Calcule a sensibilidade da função de transferência em malha fechada a variações no parâmetro A .
 (b) Calcule a sensibilidade da função de transferência em malha fechada a variações no parâmetro a .
 (c) Se o ganho unitário na realimentação é alterado para $\beta \neq 1$, calcule a sensibilidade da função de transferência em malha fechada com relação a β .
- 4.5** Calcule a equação para o erro do sistema com realimentação filtrado mostrado na Fig. 4.4
- 4.6** Se S é a sensibilidade do sistema realimentado filtrado em relação a variações na função de transferência da planta e T é a função de transferência da entrada para a saída, calcule a soma $S + T$. Mostre que $S + T = 1$ se $F = H$.
- (a) Calcule a sensibilidade do sistema realimentado filtrado mostrado na Fig. 4.4 em relação às mudanças na função de transferência da planta, G .
 (b) Calcule a sensibilidade do sistema realimentado filtrado mostrado na Fig. 4.4 em relação às mudanças na função de transferência do controlador, D_{cl} .
 (c) Calcule a sensibilidade do sistema realimentado filtrado mostrado na Fig. 4.4 em relação às mudanças na função de transferência do filtro, F .
 (d) Calcule a sensibilidade do sistema realimentado filtrado mostrado na Fig. 4.4 em relação às mudanças na função de transferência do sensor, H .

Problemas da Seção 4.2: controle do erro em estado estacionário

- 4.7** Considere o sistema de controle do motor CC com realimentação (tacômetro), mostrado na figura. 4.25 (a).
- (a) Encontre os valores para K' e k'_t para que o sistema da Fig. 4.25(b) tenha a mesma função de transferência do sistema da Fig. 4.25(a).
 (b) Determine o tipo do sistema em relação a θ_r e calcule K_v em relação aos parâmetros K' e k'_t .
 (c) A adição do tacômetro na realimentação com k_t positivo aumenta ou diminui K_v ?

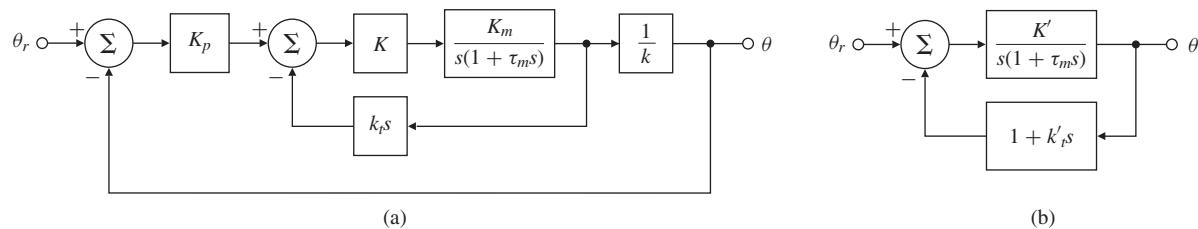


Figura 4.25 Sistema de controle para o Problema 4.7.

- 4.8** Considere o sistema mostrado na Fig. 4.26, sendo

$$D(s) = K \frac{(s + \alpha)^2}{s^2 + \omega_0^2}.$$

- (a) Mostre que se o sistema é estável, ele é capaz de rastrear uma entrada de referência senoidal $r = \sin \omega_o t$ com erro em estado estacionário nulo. (Veja a função de transferência de R para E e considere o ganho em ω_o .)
 (b) Use o critério de Routh para encontrar a faixa de valores de K tal que o sistema em malha fechada permaneça estável se $\omega_o = 1$ e $\alpha = 0,25$.

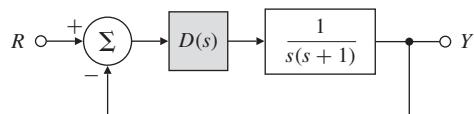
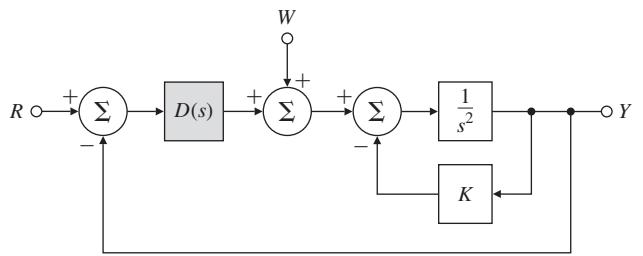


Figura 4.26 Sistema de controle para o Problema 4.8.

- 4.9** Considere o sistema mostrado na Fig. 4.27, o qual representa o controle do ângulo de um pêndulo sem amortecimento.

Figura 4.27 Sistema de controle para o Problema 4.9.



- (a) A qual condição $D(s)$ deve satisfazer para que o sistema possa rastrear um sinal em rampa na entrada de referência com erro em regime permanente constante?
- (b) Para uma função de transferência $D(s)$ que estabiliza o sistema e satisfaz a condição na parte (a), encontre uma classe de distúrbios $w(t)$ para que o sistema possa rejeitá-los com erro em regime permanente nulo.

4.10 Um sistema com realimentação unitária tem uma função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathcal{T}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Dê o tipo do sistema e a constante de erro equivalente em relação à entrada de referência em termos de ζ e ω_n .

4.11 Considere o sistema de segunda ordem

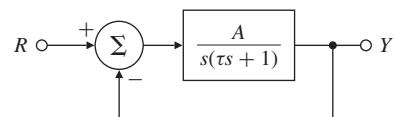
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}.$$

Deseja-se adicionar uma função de transferência na forma $D(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)}$ em série com $G(s)$ em uma estrutura de realimentação unitária.

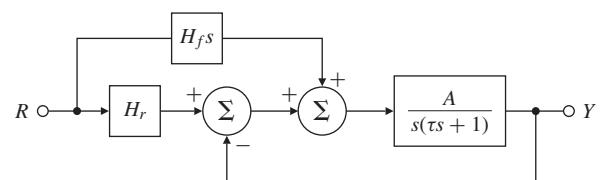
- (a) Ignorando a estabilidade por um momento, quais são os valores de K , a e b tal que o sistema seja do Tipo 1?
- (b) Quais são as restrições em K , a e b tal que o sistema seja estável e do Tipo 1?
- (c) Quais são as restrições em a e b tal que o sistema seja do Tipo 1 e permaneça estável para todo valor de K ?

4.12 Considere o sistema mostrado na Fig. 4.28 (a)

- (a) Qual é o tipo do sistema? Calcule o erro em estado estacionário para uma entrada em rampa $r(t) = r_0 t_1(t)$.
- (b) Para o sistema modificado como mostrado na Fig. 4.28(b), dê um valor para H_f tal que o sistema seja do Tipo 2 em relação a entradas de referências e calcule K_a neste caso.
- (c) A propriedade do Tipo 2 desse sistema é robusta em relação a mudanças em H_f ? Isto é, o sistema permanecerá do Tipo 2 se H_f variar levemente?



(a)



(b)

Figura 4.28 Sistema de controle para o Problema 4.12.

- 4.13** Considere que um controlador que faz o controle de altitude de um satélite com função de transferência $G = 1/s^2$ foi projetado em uma estrutura de realimentação unitária e com função de transferência $D(s) = \frac{10(s+2)}{s+5}$.

- (a) Encontre o tipo do sistema em relação à entrada de referência e a constante de erro correspondente.
- (b) Se um distúrbio de torque é adicionado ao controlador tal que a entrada do processo seja $u + w$, qual será o tipo do sistema e a constante de erro correspondente em relação à rejeição de distúrbio?

- 4.14** Um sistema de controle de posição de um motor é mostrado na Fig. 4.29. Assuma que a dinâmica do sensor seja $H(s) = 1$.

- (a) O sistema pode rastrear um sinal de referência constante r com erro em estado estacionário nulo? Se sim, qual é o valor da constante de velocidade?
- (b) O sistema pode rejeitar uma entrada de distúrbio em degrau w com erro em estado estacionário nulo? Se sim, qual é o valor da constante de velocidade?
- (c) Calcule a sensibilidade da função de transferência em malha fechada para mudanças no polo em -2 da planta.
- (d) Em alguns casos, existem dinâmicas no sensor. Repita as questões de (a) a (c) para $H(s) = 20/(s+20)$ e compare as constantes de velocidade.

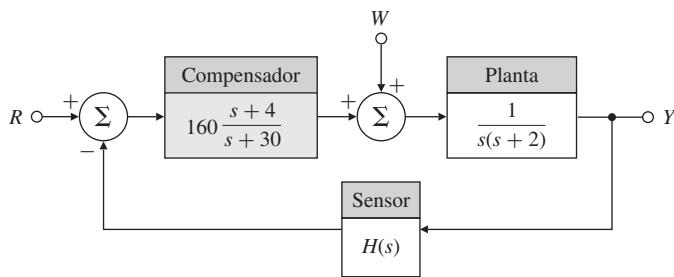


Figura 4.29 Sistema de controle para o Problema 4.14.

- 4.15** A estrutura geral de um sistema realimentado mostrado na Fig. 4.30 tem entradas de distúrbio w_1 , w_2 e w_3 e é assintoticamente estável. Também,

$$G_1(s) = \frac{K_1 \prod_{i=1}^{m_1} (s + z_{1i})}{s^{l_1} \prod_{i=1}^{m_1} (s + p_{1i})}, \quad G_2(s) = \frac{K_2 \prod_{i=1}^{m_2} (s + z_{2i})}{s^{l_2} \prod_{i=1}^{m_2} (s + p_{2i})}.$$

- (a) Mostre que o sistema é do Tipo 0, Tipo l_1 e Tipo $(l_1 + l_2)$ em relação às entradas de distúrbio w_1 , w_2 e w_3 , respectivamente.

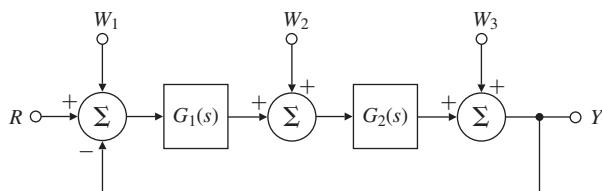
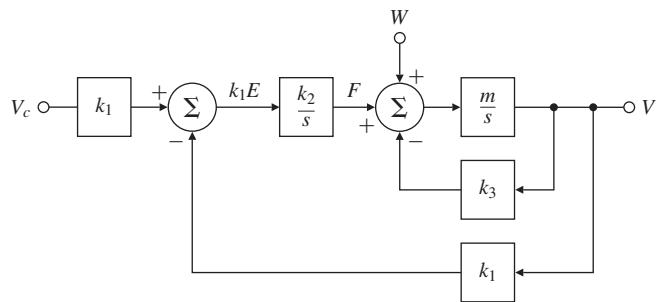


Figura 4.30 Sistema com realimentação unitária e com entradas de distúrbio.

- 4.16** Uma possível representação para um sistema de controle de velocidade de um automóvel com um integrador é mostrado na Fig. 4.31.

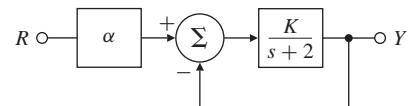
- (a) Com uma entrada de referência nula ($v_c = 0$), encontre a função de transferência relacionada à saída de velocidade v com a entrada de distúrbio do vento w .
- (b) Qual é a resposta em estado estacionário de v se w é uma rampa unitária?
- (c) Qual é o tipo do sistema em relação à entrada de referência? Qual é o valor da constante de erro correspondente?
- (d) Qual é o tipo e a constante de erro correspondentes ao sistema em relação à entrada de distúrbio w ?

Figura 4.31 Sistema usando controle integral.



- 4.17** Para o sistema realimentado mostrado na Fig. 4.32, encontre o valor de α tal que o sistema seja do Tipo 1 para $K = 5$. Encontre a constante de velocidade correspondente. Mostre que o sistema não é robusto usando este valor de α e calcule o erro $e = r - y$ para uma entrada de referência em degrau para $K = 4$ e $K = 6$.

Figura 4.32 Sistema de controle para o Problema 4.17.



- 4.18** Considere o sistema na Fig. 4.33(a), na qual a parâmetro a da planta está sujeito a variações.

- Encontre $G(s)$ tal que o sistema mostrado na Fig. 4.33(b) tenha a mesma função de transferência de r para y do sistema mostrado na Fig. 4.33(a).
- Assuma que $a = 1$ é o valor nominal do parâmetro da planta. Qual é o tipo do sistema e a constante de erro neste caso?
- Agora assuma que $a = 1 + \delta a$, sendo δa uma perturbação no parâmetro da planta. Qual é o tipo e a constante de erro para o sistema perturbado?

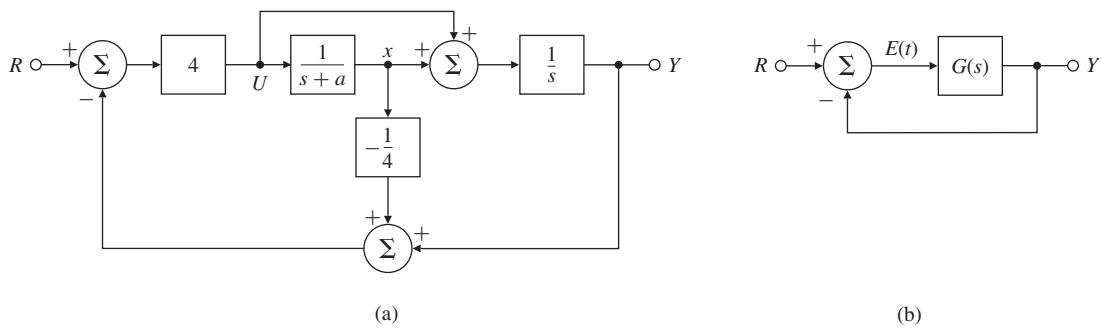


Figura 4.33 Sistema de controle para o Problema 4.18.

- 4.19** Dois sistemas realimentados são mostrados na Fig. 4.34.

- Determine valores para K_1 , K_2 e K_3 tal que
 - ambos os sistemas apresentem erro nulo em estado estacionário para entradas em degrau (isto é, ambos sejam do Tipo 1), e
 - as constantes de velocidade dos sistemas sejam $K_v = 1$ quando $K_0 = 1$.
- Suponha que K_0 está sujeito a uma pequena perturbação: $K_0 \rightarrow K_0 + \delta K_0$. Qual será o efeito resultante no tipo do sistema em cada caso? Qual sistema tem um tipo mais robusto? Qual sistema você prefere?

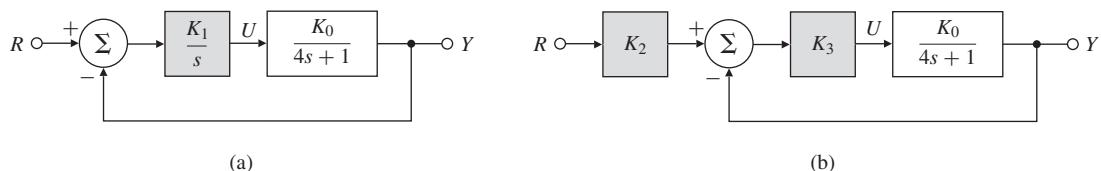


Figura 4.34 Dois sistema de controle para o Problema 4.19.

- 4.20** Considere o sistema mostrado na Fig. 4.35, no qual o ganho de realimentação β está sujeito a variações. Projete um controlador para este sistema de forma que a saída $y(t)$ rastreie com precisão a entrada de referência $r(t)$.

(a) Seja $\beta = 1$. Considere as três opções de controladores $D_i(s)$:

$$D_1(s) = k_p, \quad D_2(s) = \frac{k_ps + k_I}{s}, \quad D_3(s) = \frac{k_ps^2 + k_Is + k_2}{s^2}.$$

Escolha o controlador (incluindo valores para os parâmetros do controlador) no qual o sistema resultante seja do Tipo 1 com um erro em estado estacionário para uma entrada de referência em rampa unitária menor que $\frac{1}{10}$.

- (b) Agora, suponha que exista uma atenuação no caminho de realimentação modelada por $\beta = 0,9$. Encontre o erro em estado estacionário devido a uma rampa na entrada para sua escolha de $D_i(s)$ na questão (a).
- (c) Se $\beta = 0,9$, qual é o tipo do sistema na questão (b)? Quais são os valores da constante de erro apropriada?

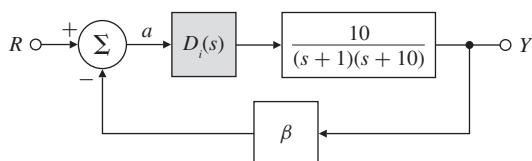


Figura 4.35 Sistema de controle para o Problema 4.20.

- 4.21** Considere o sistema mostrado na Fig. 4.36.

- (a) Encontre a função de transferência da entrada de referência para o erro de rastreamento.
- (b) Para este sistema responder a entradas da forma $r(t) = t^n 1(t)$ (quando $n < q$) com erro em estado estacionário nulo, quais restrições são colocadas nos polos em malha aberta p_1, p_2, \dots, p_q ?

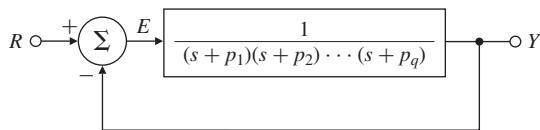


Figura 4.36 Sistema de controle para o Problema 4.21.

- 4.22** Um modelo linear de um motor CC com a indutância de armadura negligenciada ($L_a = 0$) e com um distúrbio de torque w foi dado anteriormente neste capítulo e será novamente considerado, com uma pequena diferença

$$\frac{JR_a}{K_t} \ddot{\theta}_m + K_e \dot{\theta}_m = v_a + \frac{R_a}{K_t} w,$$

sendo θ_m medido em radianos. Dividindo esta equação pelo coeficiente de $\ddot{\theta}_m$, obtém-se

$$\ddot{\theta}_m + a_1 \dot{\theta}_m = b_0 v_a + c_0 w,$$

com

$$a_1 = \frac{K_t K_e}{JR_a}, \quad b_0 = \frac{K_t}{JR_a}, \quad c_0 = \frac{1}{J}.$$

Usando potômetros, é possível determinar o erro de posição entre θ_m e o ângulo de referência θ_{ref} , ou seja, $e = \theta_{ref} - \theta_m$. E, usando um tacômetro, é possível medir a velocidade do motor $\dot{\theta}_m$. Considere a realimentação do erro e e da velocidade do motor $\dot{\theta}_m$ na forma

$$v_a = K(e - T_D \dot{\theta}_m),$$

sendo K e T_D os ganhos do controlador a serem determinados.

- (a) Desenhe o diagrama de blocos do sistema realimentado resultante mostrando as variáveis θ_m e $\dot{\theta}_m$.

- (b) Considere os parâmetros $a_1 = 65$, $b_0 = 200$ e $c_0 = 10$. Caso não exista distúrbio de torque ($w = 0$), qual velocidade (em rpm) é obtida com $v_a = 100$ V?
- (c) Usando os valores dos parâmetros dados no item (b), considere um controlador da forma $D = k_p + k_D s$ e encontre k_p e k_D tal que, usando os resultados do Capítulo 3, quando não há distúrbio de torque, um degrau em θ_{ref} resulta em uma resposta que tem um sobressinal de aproximadamente 17% e um tempo de acomodação menor que 0,05 s considerando uma faixa tolerável de 5%.
- (d) Encontre a expressão do erro em regime permanente para um ângulo de entrada de referência e calcule seu valor considerando seu projeto do item (c). Assuma $\theta_{ref} = 1$ rad.
- (e) Encontre a expressão para o erro em regime permanente em relação a um distúrbio de torque constante quando $\theta_{ref} = 0$ e calcule seu valor usando o projeto do item (c), assumindo $w = 1,0$.
- 4.23** Deseja-se projetar um controle automático de velocidade para um automóvel. Assuma que (1) a massa do carro é $m = 1.000$ kg, (2) o controle U é feito pelo acelerador, que fornece uma força ao automóvel de 10 N por grau de movimento no acelerador, e (3) o ar provê uma força de atrito proporcional à velocidade de 10 N s/m.
- Obtenha a função de transferência do sinal de controle U para a velocidade do automóvel.
 - Assuma que a mudança de velocidade é dada por

$$V(s) = \frac{1}{s + 0,02} U(s) + \frac{0,05}{s + 0,02} W(s),$$

sendo que V é dado em metros por segundo, U em graus e W é a inclinação da estrada em porcentagem. Projete um controlador proporcional $U = -k_p V$ que irá manter o erro de velocidade menor que 1 m/s na presença de uma constante de 2% de inclinação.

- Discuta qual vantagem (se houver) o controle integral pode ter para este problema.
 - Assumindo que o controle integral puro (isto é, sem o termo proporcional) é vantajoso, selecione o ganho de realimentação tal que as raízes tenham coeficiente de amortecimento crítico ($\zeta = 1$).
- 4.24** Considere o sistema de controle de velocidade do automóvel mostrado na Fig. 4.37.
- Encontre a função de transferência de $W(s)$ e de $R(s)$ para $Y(s)$.
 - Assuma que a velocidade desejada seja uma constante de referência r , tal que $R(s) = r_o/s$. Assuma que a estrada seja plana, $w(t) = 0$. Calcule os valores dos ganhos k_p , H_r e H_y para garantir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r_o.$$

Discuta sobre o caso em malha aberta ($H_y = 0$) e o caso realimentado ($H_y \neq 0$).

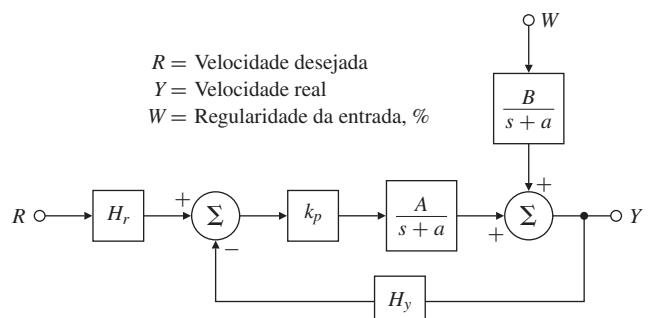


Figura 4.37 Sistema de controle de velocidade.

- (c) Repita o item (b) assumindo uma inclinação constante $W(s) = w_o/s$ está presente *em adição* à entrada de referência. Em particular, encontre a variação na velocidade devido à mudança de inclinação em ambos os casos, não realimentado e realimentado. Use seus resultados para explicar (1) por que o controle realimentado é necessário e (2) como o ganho k_p pode ser escolhido para reduzir o erro em regime permanente.

- (d) Assuma que $w(t) = 0$ e que A está sujeito a perturbações $A + \delta A$. Determine o erro na velocidade devido a uma mudança no ganho para ambos os casos, não realimentado e realimentado. Neste caso, como os ganhos devem ser escolhidos para reduzir os efeitos de δA ?
- 4.25** Considere o sistema multivariável mostrado na Fig. 4.38. Assuma que o sistema é estável. Encontre as funções de transferência de cada entrada de distúrbio para cada saída e determine os valores em regime permanente de y_1 e y_2 para distúrbios constantes. Definimos um sistema multivariável do tipo k em relação a entradas polinomiais em w_i se o valor em regime permanente de *cada* saída é zero para cada combinação das entradas de grau menor que k e ao menos uma entrada seja uma constante diferente de zero para um entra de grau k . Qual é o tipo do sistema em relação à rejeição de distúrbios em w_1 e w_2 ?

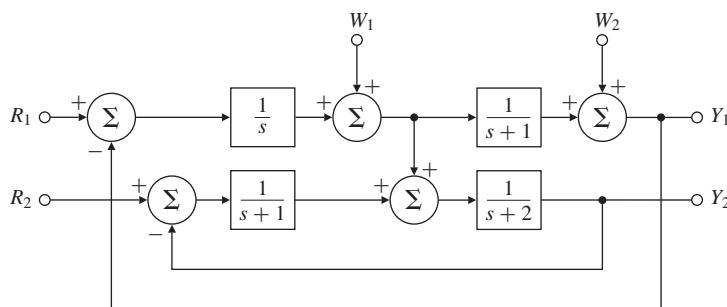


Figura 4.38 Sistema multivariável.

Problemas da Seção 4.3: o controlador de três termos, controlador PID

- 4.26** As funções de transferência de controle de velocidade para um sistema de acionamento de fita magnética são mostrados na Fig. 4.39. O sensor de velocidade é rápido o suficiente para que sua dinâmica possa ser desconsiderada, assim o diagrama tem realimentação unitária.
- Assumindo a referência nula, qual é o erro em regime permanente devido a um distúrbio de torque em degrau de $1 \text{ N} \cdot \text{m}$? Qual deve ser o ganho do amplificador K para que o erro em regime permanente satisfaça $e_{ss} \leq 0,01 \text{ rad/s}$?
 - Marque os polos do sistema em malha fechada no plano complexo e esboce com precisão a resposta temporal para uma entrada de referência em degrau usando o ganho K calculado no item (a).
 - Marque a região aceitável no plano complexo para os polos de malha fechada que satisfaçam as especificações de $t_s \leq 0,1 \text{ s}$ para uma faixa tolerável de 1% e um sobressinal de $M_p \leq 5\%$.
 - Encontre os valores de k_p e k_D para um controlador PD que satisfaça as especificações.
 - Como é que a perturbação induzida no erro em estado estacionário pode alterar com o novo sistema de controle do item (d)? Como poderia eliminar totalmente o erro de estado estacionário com um torque de perturbação?

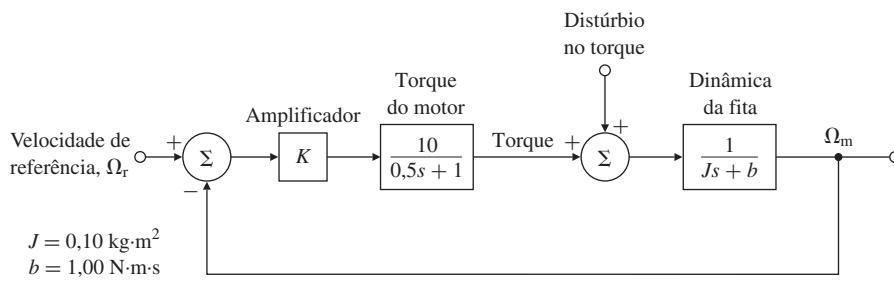
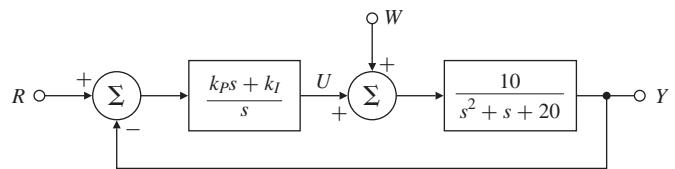


Figura 4.39 Sistema de controle de velocidade de um acionamento de fita magnética.

- 4.27** Considere o sistema mostrado na Fig. 4.40 com controle PI.
- Determine a função de transferência de R para Y .
 - Determine a função de transferência de W para Y .
 - Qual é o tipo do sistema e a constante de erro em relação à referência?
 - Qual é o tipo do sistema e a constante de erro em relação ao distúrbio?

Figura 4.40 Sistema de controle para o Problema 4.27.



4.28 Considere a planta de segunda ordem com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(5s+1)}$$

em uma estrutura de realimentação unitária.

- (a) Determine o tipo do sistema e a constante de erro em relação à entrada de referência considerando os controladores P [$D = k_p$], PD [$D = k_p + k_D s$] e PID [$D = k_p + k_p/s + k_D s$]. Faça $k_p = 19$, $k_I = 0,5$ e $k_D = 4/19$.
- (b) Determine o tipo do sistema e a constante de erro em relação à entrada de distúrbio considerando os reguladores no item (a) com relação a rejeição de distúrbios polinomiais $w(t)$ na entrada da planta.
- (c) Esse sistema melhor rastreia as entradas ou rejeita os distúrbios? Explique sua resposta.
- (d) Verifique suas respostas dos itens (a) e (b) usando o MATLAB traçando a resposta do sistema para entradas em degrau e em rampa na referência e no distúrbio.

4.29 O sistema de controle de velocidade de um motor CC mostrado na Fig. 4.41 é descrito pelas equações diferenciais

$$\dot{y} + 60y = 600v_a - 1500w,$$

sendo y a velocidade do motor, v_a a tensão de armadura do motor e w o distúrbio no toque. Assuma que a tensão de armadura é calculada usando um controlador PI

$$v_a = -\left(k_p e + k_I \int_0^t e dt\right),$$

com $e = r - y$.

- (a) Calcule a função de transferência de W para Y em função de k_p e k_I .
- (b) Calcule os valores de k_p e k_I tal que a equação característica do sistema em malha aberta tenha raízes em $-60 \pm 60j$.

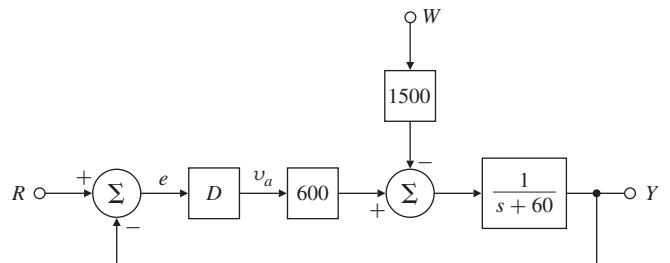


Figura 4.41 Diagrama de blocos do controle de velocidade de um motor CC para os Problemas 4.29 e 4.30.

4.30 Para o sistema no Problema 4.29, calcule os erros em regime permanente:

- (a) para uma entrada de referência em degrau;
- (b) para uma entrada de referência em rampa;
- (c) para uma entrada de distúrbio em degrau;
- (d) para uma entrada de distúrbio em rampa.
- (e) Verifique suas respostas dos itens (a) e (d) usando o MATLAB. Note que a resposta a rampa pode ser gerada como a resposta ao degrau de um sistema modificado que adiciona um integrador ao sistema original.

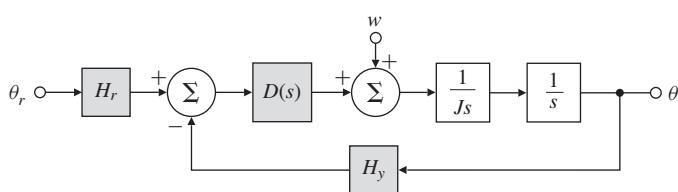


Figura 4.42 Controle de altitude de satélite.

- 4.31** Considere o problema de controle de altitude de um satélite mostrado na Fig. 4.42, os parâmetros normalizados são

$$J = 10 \text{ inércia do satélite, N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2/\text{rad.}$$

θ_r = altitude de referência do satélite, rad.

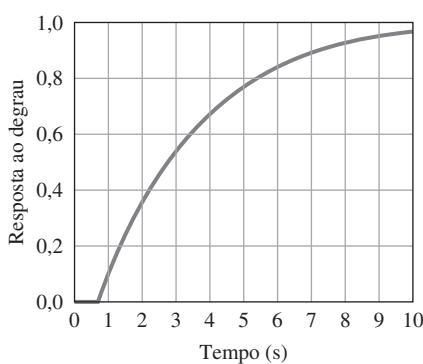
θ = altitude atual do satélite, rad.

H_y = 1 sensor de escala, fator V/rad.

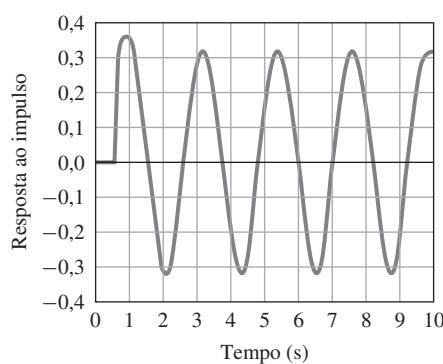
H_r = 1 sensor de escala da referência, V/rad.

w = torque no distúrbio, N·m

- (a) Use o controle proporcional, P, com $D(s) = k_p$, e encontre a faixa de valores para k_p tal que o sistema seja estável.
 - (b) Use o controle PD, com $D(s) = (k_p + k_D s)$, e determine o tipo do sistema e a constante de erro em relação à entrada de referência.
 - (c) Use o controle PD, com $D(s) = (k_p + k_D s)$, e determine o tipo do sistema e a constante de erro em relação à entrada de distúrbios.
 - (d) Use o controle PI, com $D(s) = (k_p + k_I/s)$, e determine o tipo do sistema e a constante de erro em relação à entrada de referência.
 - (e) Use o controle PI, com $D(s) = (k_p + k_I/s)$, e determine o tipo do sistema e a constante de erro em relação à entrada de distúrbios.
 - (f) Use o controle PID, com $D(s) = (k_p + k_I/s + k_D s)$, e determine o tipo do sistema e a constante de erro em relação à entrada de referência.
 - (g) Use o controle PID, com $D(s) = (k_p + k_I/s + k_D s)$, e determine o tipo do sistema e a constante de erro em relação à entrada de distúrbios.
- 4.32** A resposta ao degrau unitário de uma máquina de papel é mostrada na Fig. 4.43(a), na qual a entrada no sistema é o fluxo de estoque e a saída é a espessura. O retardamento no tempo e a inclinação da resposta transiente podem ser determinados a partir da figura.
- (a) Encontre os parâmetros dos controladores P, PI e PID usando o método da resposta transiente de Zeigler-Nichols.
 - (b) Usando o controle proporcional realimentado, projetistas obtiveram um sistema em malha fechada com a resposta ao impulso mostrada na Fig. 4.43(b). Quando o ganho $k_u = 8,556$, o sistema está na margem da estabilidade. Determine os parâmetros dos controladores P, PI e PID usando o método da sensibilidade crítica de Zeigler-Nichols.



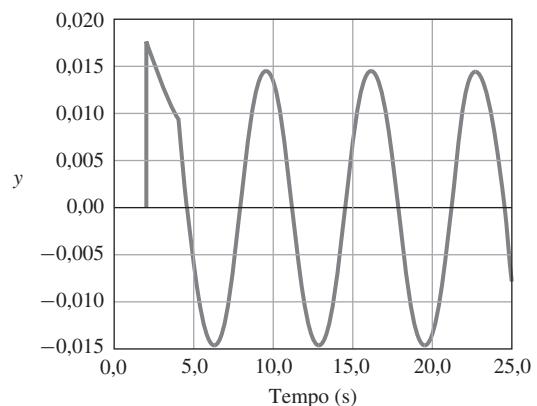
(a)



(b)

Figura 4.43 Respostas de uma máquina de papel para o Problema 4.32.

Figura 4.44 Resposta ao impulso de uma máquina de papel para o Problema 4.33.



4.33 Uma máquina de papel tem a função de transferência

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{3s + 1},$$

na qual a entrada é o fluxo de estoque e a saída é a espessura do papel.

- (a) Encontre os parâmetros do controlador PID usando as regras de Zeigler-Nichols.
- (b) O sistema torna-se marginalmente estável para um ganho proporcional de $k_u = 3,044$ como mostrado pela resposta ao impulso na Fig. 4.44. Encontre os parâmetros do controlador PID usando as regras de sintonia de Zeigler-Nichols.

Problemas da seção 4.4: introdução ao controle digital

4.34 Calcule os controladores discretos equivalentes usando a regra trapezoidal na Eq. (4.104) com $T_s = 0,05$ para

(a) $D_1(s) = (s + 2)/2$

(b) $D_2(s) = 2\frac{s + 2}{s + 4}$

(c) $D_3(s) = 5\frac{(s + 2)}{s + 10}$

(d) $D_4(s) = 5\frac{(s + 2)(s + 0,1)}{(s + 10)(s + 0,01)}$

4.35 Encontre as equações de diferença correspondentes aos controladores discretos encontrados no Problema 4.34.

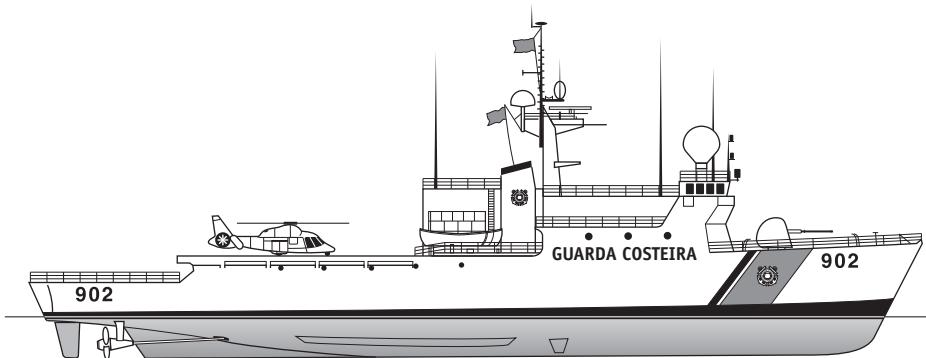
(a) Controlador discreto encontrado no item (a) no Problema 4.34

(b) Controlador discreto encontrado no item (b) no Problema 4.34

(c) Controlador discreto encontrado no item (c) no Problema 4.34

(d) Controlador discreto encontrado no item (d) no Problema 4.34

O Método do Lugar das Raízes



No Capítulo 3, foram relacionadas características da resposta ao degrau, como o tempo de subida, sobressinal e tempo de acomodação, a localização do polo no plano-s da transformada de um sistema de segunda ordem, caracterizada pela frequência natural ω_n , coeficiente de amortecimento ζ e pela parte real do polo σ . Essa relação é apresentada graficamente na Fig. 3.15. Também analisamos as mudanças causadas nessas características da resposta transitória quando um polo ou um zero é adicionado à função de transferência. No Capítulo 4, vimos como a realimentação pode melhorar os erros em regime permanente e influenciar a resposta dinâmica de um sistema alterando a localização dos polos. Neste capítulo, é apresentada uma técnica específica que mostra como mudanças em um dos parâmetros do sistema irá modificar as *raízes da equação característica*, as quais são os polos de malha fechada, e assim alterar a resposta dinâmica do sistema. O método foi desenvolvido por W. R. Evans propondo regras para traçar a localização das raízes, um gráfico chamado por ele de **lugar das raízes**. Com o desenvolvimento do MATLAB® e programas similares, as regras não são mais necessárias para se obter um gráfico preciso, mas é essencial para um engenheiro projetista de controle entender como o controlador dinâmico proposto irá influenciar a localização dos polos, como um guia para o processo de projeto. Também é importante entender as regras básicas de como o lugar das raízes é gerado, a fim de realizar checagens sobre os resultados do computador. Por essas razões, o estudo das regras de Evans é importante.

O lugar das raízes é usado normalmente para o estudo do efeito da variação de um ganho de malha; entretanto, o método é geral e pode ser usado para traçar o gráfico das raízes de qualquer polinômio em relação a um parâmetro real que age linearmente na equação. Por exemplo, o método do lugar das raízes pode ser usado para traçar gráficos das raízes da equação característica quando o ganho de um sensor de velocidade em realimentação é alterado, ou o parâmetro pode ser um parâmetro físico do sistema como a inércia ou a indutância de armadura de um motor. Finalmente, o lugar das raízes pode ser obtido para uma equação característica que resulta da análise do controle digital de sistemas usando a transformada z , um tópico que foi introduzido no Capítulo 4 e será discutido no Capítulo 8.

Visão geral do capítulo

Iniciamos, na Seção 5.1, ilustrando o lugar das raízes para alguns sistemas realimentados simples obtendo equações que podem ser resolvidas diretamente. Na Seção 5.2, será mostrado como colocar uma equação na forma adequada para o desenvolvimento das regras para traçar o gráfico do lugar das raízes. Na Seção 5.3, este método é aplicado para determinar o lugar das raízes para uma série de problemas típicos de controle, que ilustram os fatores que moldam a forma final. O MATLAB é utilizado para a execução detalhada do lugar das raízes de casos específicos. Quando apenas o ajuste do parâmetro selecionado não pode produzir um projeto satisfatório, projetistas estudam a utilização de outros parâmetros ou de elementos dinâmicos, como compensadores de atraso, avanço ou de atraso-avanço, como descrito na Seção 5.4. Na Seção 5.5, é descrito o uso do lugar das raízes para se compreender o projeto de controle de atitude de uma pequena aeronave. Na Seção 5.6, o método do lugar das raízes é estendido para se considerar um parâmetro negativo, sistemas com mais de um parâmetro variável e sistemas com retardo no tempo. Finalmente, a Seção 5.7 fornece notas históricas da origem do método do lugar das raízes.

5.1 Lugar das raízes de um sistema realimentado básico

Iniciamos com o sistema realimentado básico mostrado na Fig. 5.1. Para este sistema, a função de transferência de malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}, \quad (5.1)$$

e a equação característica, na qual suas raízes são os polos da função de transferência, é

$$1 + D(s)G(s)H(s) = 0. \quad (5.2)$$

Para colocar a equação na forma apropriada para o estudo de suas raízes quando um parâmetro variar, a equação é colocada na forma polinomial e o parâmetro de interesse é selecionado, definindo este parâmetro como K . Assume-se que a equação característica pode ser definida por meio de componentes polinomiais $a(s)$ e $b(s)$. Então, define-se a função de transferência $L(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ tal que a equação característica pode ser reescrita como¹

$$1 + KL(s) = 0. \quad (5.3)$$

Se, como frequentemente é o caso, o parâmetro é o ganho do controlador, então $L(s)$ é simplesmente proporcional a $D(s)G(s)H(s)$. Evans sugeriu que todas as possíveis raízes da Eq. (5.3) fossem traçadas graficamente para K variando de zero a infinito, e, então, o gráfico obtido é utilizado como auxílio para se selecionar o melhor valor de K . Além disso, ao estudar os

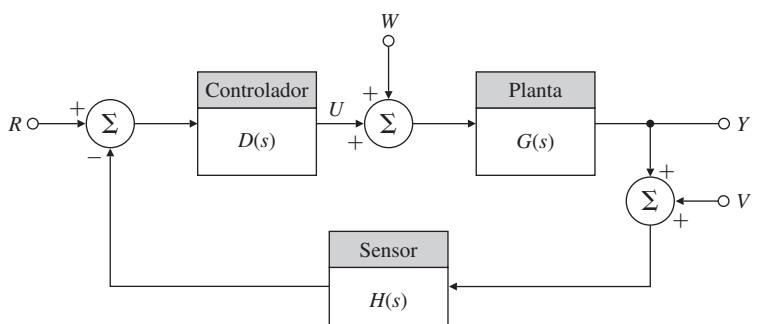


Figura 5.1 Diagrama básico de blocos em malha fechada.

¹ No caso mais comum, $L(s)$ é a função de transferência de malha aberta do sistema realimentado e K é o ganho do controlador. Entretanto, o lugar das raízes é um método geral apropriado para o estudo de qualquer polinômio, e qualquer parâmetro que pode ser colocado na forma da Eq. (5.3)

efeitos dos polos e zeros adicionais sobre este gráfico, podemos determinar as consequências adicionais na dinâmica devido ao acréscimo de um compensador $D(s)$ na malha. Assim, este é um método não apenas para a seleção do valor de um parâmetro específico, mas também para o projeto de um compensador dinâmico. O gráfico de todas as possíveis raízes da Eq. (5.3) relativo ao parâmetro K é chamado de **lugar das raízes**, e o conjunto de regras para construir este gráfico é chamado de **método do lugar das raízes de Evans**. Iniciamos a discussão deste método estudando o mecanismo de construção do lugar das raízes, usando a equação na forma da Eq. (5.3) e K sendo um parâmetro variável.

Método de Evans

Para definir a notação de estudo, assume-se que a função de transferência $L(s)$ é racional, sendo seu numerador um polinômio mônico² $b(s)$ de grau m , e seu denominador, um polinômio mônico $a(s)$ de grau n tal que³ $n \geq m$. Assim, estes polinômios podem ser fatorados como

$$\begin{aligned} b(s) &= s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m \\ &= (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m) \\ &= \prod_{i=1}^m (s - z_i), \\ a(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= \prod_{i=1}^n (s - p_i). \end{aligned} \tag{5.4}$$

As raízes de $b(s) = 0$ são os zeros de $L(s)$ e são nomeadas como z_i , e as raízes de $a(s) = 0$ são os polos de $L(s)$ e são nomeadas como p_i . As raízes da própria equação característica são nomeadas como r_i , da forma fatorada ($n > m$)

$$a(s) + Kb(s) = (s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_n). \tag{5.5}$$

Agora, o problema do lugar das raízes expresso na Eq. (5.3) pode ser enunciado de várias maneiras equivalentes e úteis. Cada uma das seguintes equações tem as mesmas raízes

$$1 + KL(s) = 0, \tag{5.6}$$

$$1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = 0, \tag{5.7}$$

$$a(s) + Kb(s) = 0, \tag{5.8}$$

$$L(s) = -\frac{1}{K}. \tag{5.9}$$

As equações (5.6)-(5.9) às vezes são referenciadas como as **formas do lugar das raízes** ou as formas da equação característica de Evans. O lugar das raízes é um conjunto de valores de s para os quais as Eqs. (5.6)-(5.9) são satisfeitas para algum valor positivo real de K^4 . Devido às soluções das Eqs. (5.6)-(5.9) serem as raízes da equação característica em malha fechada e, assim, os polos do sistema em malha fechada, o método do lugar das raízes pode ser entendido como um método para inferir propriedades dinâmicas do sistema em malha fechada quando o parâmetro K é variado.

Formas do lugar das raízes

² Mônico significa que o coeficiente do termo de grau mais alto é 1.

³ Se $L(s)$ é a função de transferência de um sistema físico, é necessário que $n \geq m$, ou então o sistema poderá ter uma resposta infinita a uma entrada finita. Se o parâmetro puder ser escolhido tal que $n < m$, considera-se a equação equivalente $1 + K^{-1}L(s)^{-1} = 0$.

⁴ Se K é positivo, o lugar das raízes é chamado de lugar das raízes “positivo”. Mais adiante, serão consideradas algumas simples mudanças se $K < 0$, resultando no lugar das raízes “negativo”.

EXEMPLO 5.1 Lugar das raízes do controle de posição de um motor

No Capítulo 2, a função de transferência normalizada de um motor CC tensão-para-posição foi expressa como

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{A}{s(s + c)}.$$

Encontre o lugar das raízes dos polos em malha fechada do sistema, sendo que a saída Θ_m é realimentada como mostrado na Fig. 5.1 em relação ao parâmetro A se $D(s) = H(s) = 1$ e $c = 1$.

Solução. Considerando a notação utilizada, os valores são

$$L(s) = \frac{1}{s(s + 1)}, \quad b(s) = 1, \quad m = 0, \quad z_i = \{\text{vazio}\}, \quad (5.10)$$

$$K = A, \quad a(s) = s^2 + s, \quad n = 2, \quad p_i = 0, -1.$$

Da Eq. (5.6), o lugar das raízes é um gráfico das raízes da equação

$$a(s) + Kb(s) = s^2 + s + K = 0. \quad (5.11)$$

Assim, as raízes da Eq. (5.11) podem ser expressas como

$$r_1, r_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 4K}}{2}. \quad (5.12)$$

O gráfico do lugar das raízes correspondente é mostrado na Fig. 5.2. Para $0 \leq K \leq 1/4$, as raízes são reais e estão entre -1 e 0 . Para $K = 1/4$, existem duas raízes em $-1/2$, e para $K > 1/4$, as raízes se tornam complexas com parte real constante em $-1/2$ e partes imaginárias que aumentam em proporção com a raiz quadrada de K . A linha tracejada na Fig. 5.2 corresponde às raízes com coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$. Os polos de $L(s)$ em $s = 0$ e $s = -1$ são marcados pelo símbolo \times , e os pontos onde o lugar das raízes cruzam as linhas do coeficiente de amortecimento igual a $0,5$ são marcados com (\bullet) . Então, podemos calcular o valor de K neste ponto onde o lugar das raízes cruza $\zeta = 0,5$, porque sabemos que, se $\zeta = 0,5$, então $\theta = 30^\circ$ e a magnitude da parte imaginária da raízes é $\sqrt{3}$ vezes a magnitude da parte real. Assim, o valor da parte real é $\frac{1}{2}$ e, da Eq. (5.12), temos

$$\frac{\sqrt{4K - 1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

e, portanto, $K = 1$.

Pode-se observar várias características neste simples lugar raízes por meio das Eqs. (5.11) e (5.12) e da Fig. 5.2. Inicialmente, existem duas raízes e, então, existem dois ramos no lugar das raízes. Para $K = 0$, estes ramos partem dos polos de $L(s)$ (que são 0 e -1), pois com $K = 0$ o sistema está em malha aberta e a equação característica é $a(s) = 0$. À medida que K aumenta, as raízes se movem na direção uma da outra até assumirem o mesmo valor em $s = -\frac{1}{2}$, e, neste ponto, as duas raízes deixam o eixo real. Depois desse ponto, as raízes se movem para o infinito com partes reais iguais, então a soma das duas raízes será sempre igual a -1 . Do ponto de vista de projeto, vemos que alterando o valor do parâmetro K , podemos alocar os polos do sistema em malha fechada em qualquer ponto no lugar das raízes na Fig. 5.2. Se alguns pontos neste lugar das raízes correspondem satisfatoriamente à especificação da resposta transitória, então o projeto pode ser concluído escolhendo o valor de K correspondente; caso nenhum ponto satisfaça as especificações, é necessário considerar um controlador mais complexo. Como indicado anteriormente, a técnica do lugar das raízes não é limitada ao ganho do sistema ($K = A$ no Exemplo 5.1); as mesmas ideias são aplicáveis para se obter o lugar das raízes em função de outro parâmetro qualquer que aparece relacionado linearmente na equação característica.

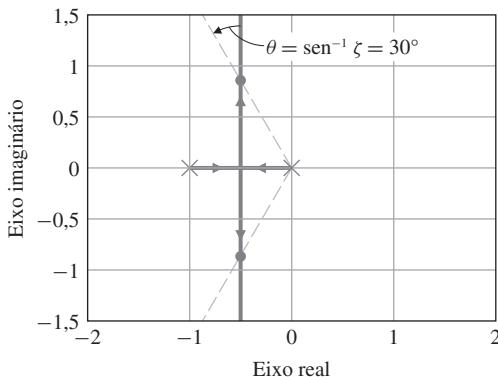


Figura 5.2 Lugar das Raízes de $L(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.

EXEMPLO 5.2 Lugar das raízes em relação a um polo da planta

Considere a equação característica como no Exemplo 5.1, exceto que $D(s) = H(s) = 1$ e também que $A = 1$. Selecione c como o parâmetro de interesse na equação

$$1 + G(s) = 1 + \frac{1}{s(s+c)}. \quad (5.13)$$

Encontre o lugar das raízes da equação característica em relação a c .

Solução. A equação característica de malha fechada na forma polinomial correspondente é

$$s^2 + cs + 1 = 0. \quad (5.14)$$

As formas alternativas da Eq. (5.6) com as definições associadas aos polos e zeros serão aplicadas fazendo

$$\begin{aligned} L &= \frac{s}{s^2 + 1}, & b(s) &= s, & m &= 1, & z_t &= 0, \\ K &= c, & a(s) &= s^2 + 1, & n &= 2, & p_i &= +j, -j. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Assim, a forma para o lugar das raízes da equação característica é

$$1 + c \frac{s}{s^2 + 1} = 0.$$

As soluções da Eq. (5.14) são calculadas facilmente como

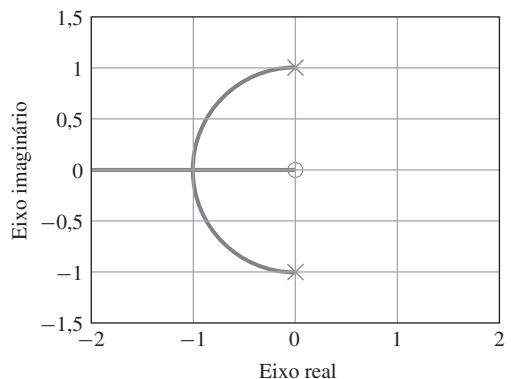
$$r_1, r_2 = -\frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4}}{2}. \quad (5.16)$$

O local das soluções é mostrado na Fig. 5.3, com os polos [raízes de $a(s)$] indicados por \times e o zero [raiz de $b(s)$] indicado por (O). Note que quando $c = 0$, as raízes estão nos pontos marcados com \times sobre o eixo imaginário e a resposta temporal correspondente é oscilatória. O coeficiente de amortecimento ζ aumenta à medida que c aumenta a partir de 0. Em $c = 2$, existem duas raízes em $s = -1$, e os dois ramos do lugar das raízes mudam de direção abruptamente e se movem em direções opostas ao longo do eixo real. Este ponto de múltiplas raízes onde duas ou mais raízes chegam ao eixo real é chamado de **ponto de chegada**.

Ponto de chegada

É claro que calcular o lugar das raízes para uma equação quadrática é fácil, pois podemos calcular as raízes da equação característica, como feito nas Eqs. (5.12) e (5.16), e representá-las graficamente em função do parâmetro K . Para o método ser útil, ele precisa ser aplicável a sistemas de alto grau, para os quais é difícil obter explicitamente as soluções. As regras gerais para obter o lugar das raízes foram desenvolvidas por Evans. Com a disponibilidade do MATLAB, estas regras não são mais necessárias para traçar o lugar das raízes de um sistema específico, o

Figura 5.3 Lugar das raízes versus $1 + G(s) = 1 + \frac{1}{s(s+c)} = 0$.



comando `rlocus(sys)` faz isto. Entretanto, no projeto de controladores não estamos interessados apenas no lugar das raízes, mas também em como modificar a dinâmica do sistema de forma que as especificações da resposta dinâmica sejam atendidas, obtendo um controlador de bom desempenho. Com este propósito, é muito útil ser capaz de esboçar grosseiramente o lugar das raízes e assim avaliar as consequências de se considerar as possíveis alternativas de compensadores. Também é importante ser capaz de avaliar rapidamente se um gráfico do lugar das raízes gerado computacionalmente está correto. É fácil utilizar uma constante errada ou esquecer de adicionar um termo, a primeira regra bem conhecida da computação GIGO⁵.

5.2 Diretrizes gerais para determinar o lugar das raízes

Começamos com uma definição formal do lugar das raízes. A partir da Eq. (5.6), o lugar das raízes pode ser definido como

Definição I. O lugar das raízes é o conjunto de valores de s tais que $1 + KL(s) = 0$ é satisfeita quando o parâmetro real K varia de 0 a $+\infty$. Geralmente, $1 + KL(s) = 0$ é a equação característica de um sistema e, neste caso, as raízes no lugar das raízes são os polos desse sistema.

Agora, considere a Eq. (5.9). Se K é um valor real e positivo, $L(s)$ deve ser real e negativo. Em outras palavras, se $L(s)$ é expresso na forma polar, em módulo e fase, então a fase de $L(s)$ deve ser 180° para satisfazer a Eq. (5.9). Assim, podemos definir o lugar das raízes em termos desta **condição de fase** como segue.

Regra básica do lugar das raízes; a fase de $L(s) = 180^\circ$

Definição II. O lugar das raízes de $L(s)$ é o conjunto de pontos no plano-s tal que a fase de $L(s)$ é 180° . Definindo ψ_i como o ângulo entre um ponto de teste e um zero e φ_i como o ângulo entre um ponto de teste e um polo, então a Definição II é expressa na seguinte forma, sendo l um inteiro,

$$\sum \psi_i - \sum \varphi_i = 180^\circ + 360^\circ(l - 1). \quad (5.17)$$

O imenso mérito da Definição II é que, enquanto é muito difícil resolver manualmente um polinômio de alto grau, calcular a fase de uma função de transferência é relativamente fácil. O caso comum é quando K é real e positivo, e este caso é conhecido como lugar das raízes **positivo** ou de **180°**. Quando K é real e negativo, $L(s)$ deve ser real e positivo com a fase de 0° , e este caso é conhecido como lugar das raízes **negativo** ou de **0°**.

⁵ Do inglês: *Garbage in, Garbage out.*

A partir da Definição II, podemos, em princípio, determinar o lugar das raízes positivo para uma função de transferência complexa medindo a fase e marcando os pontos nos quais encontramos 180° . Esta abordagem direta pode ser ilustrada considerando o exemplo

$$L(s) = \frac{s + 1}{s(s + 5)[(s + 2)^2 + 4]}. \quad (5.18)$$

Na Fig. 5.4, os polos de $L(s)$ são marcado com \times e o zero, com \circ . Suponha que o ponto de teste seja $s_0 = -1 + 2j$. Pode-se testar se o s_0 está ou não no lugar das raízes para algum valor de K . Para este ponto estar no lugar das raízes, precisamos que $\angle L(s_0) = 180^\circ + 360^\circ(l - 1)$ para algum valor inteiro de l , ou equivalentemente, a partir da Eq. (5.18),

$$\angle(s_0 + 1) - \angle s_0 - \angle(s_0 + 5) - \angle[(s_0 + 2)^2 + 4] = 180^\circ + 360^\circ(l - 1). \quad (5.19)$$

O ângulo do termo $s_0 + 1$ pode ser calculado⁶ traçando uma linha da posição do zero em -1 até o ponto de teste s_0 . Neste caso, a linha é vertical e tem o ângulo de fase marcado com $\psi_1 = 90^\circ$ na Fig. 5.4. De maneira similar, o vetor do polo em $s = 0$ até o ponto de teste s_0 é mostrado com o ângulo ϕ_1 , e os ângulos dos dois vetores de $-2 \pm 2j$ até s_0 são mostrados com ângulos ϕ_2 e ϕ_3 . A fase do vetor $s_0 + 5$ é mostrada com ângulo ϕ_4 . A partir da Eq. (5.19), encontramos a fase total de $L(s)$ em $s = s_0$ como a soma das fases do termo no numerador correspondendo ao zero menos as fases dos termos no denominador correspondendo aos polos:

$$\begin{aligned} \angle L &= \psi_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 \\ &= 90^\circ - 116,6^\circ - 0^\circ - 76^\circ - 26,6^\circ \\ &= -129,2^\circ. \end{aligned}$$

Como a fase de $L(s)$ não é 180° , concluímos que s_0 não está no lugar das raízes, então devemos escolher outro ponto e testar novamente. Apesar de a medição de fase não ser difícil, medir a fase de todo ponto no plano- s não é prático. Portanto, para fazer com que o método seja prático, precisamos utilizar algumas diretrizes gerais para determinar o lugar das raízes. Evans desenvolveu um conjunto de regras para este propósito, as quais iremos ilustrar considerando a função de transferência

$$L(s) = \frac{1}{s[(s + 4)^2 + 16]}. \quad (5.20)$$

Começamos considerando o lugar das raízes positivo, que é o caso mais comum.⁷ As primeiras três regras são relativamente simples e são essenciais para qualquer esboço razoável. As outras duas regras são usadas ocasionalmente. Como sempre, assumimos que o MATLAB, ou outra ferramenta equivalente, esteja sempre disponível para se traçar o lugar das raízes com precisão.

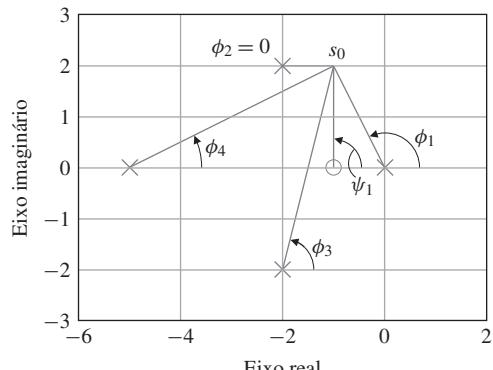


Figura 5.4 Medindo a fase da Equação (5.18).

⁶ A avaliação gráfica do módulo e da fase de um número complexo é revisado no Apêndice WD, Seção 3, disponível (em inglês) no site do Grupo A.

⁷ O lugar das raízes negativo será tratado na Seção 5.6.

5.2.1 Regras para traçar o lugar das raízes positivo (180°)

REGRA 1. Os n ramos do lugar das raízes partem dos polos de $L(s)$, e m destes ramos terminam nos zeros de $L(s)$.

A partir da equação $a(s) + Kb(s) = 0$, se $K = 0$, a equação se reduz a $a(s) = 0$, sendo as raízes destas os polos de $L(s)$. Quando K se aproxima do infinito, s deve satisfazer $b(s) = 0$ ou $s \rightarrow \infty$. Como existem m zeros tal que $b(s) = 0$, m ramos podem terminar nestes pontos. O caso em que $s \rightarrow \infty$ é considerado na Regra 3.

REGRA 2. O lugar das raízes está no eixo real à esquerda de um número ímpar de polos e zeros.

Se considerarmos um ponto de teste no eixo real, como s_0 na Fig. 5.5, vemos que os ângulos ϕ_1 e ϕ_2 dos dois polos complexos se cancelam, assim como irão cancelar também os ângulos de dois zeros complexos. Ângulos de polos e zeros reais são 0° se o ponto de teste estiver à direita deles e serão de 180° se o ponto de teste estiver à esquerda de um polo ou zero. Portanto, para que o ângulo total seja $180^\circ + 360^\circ(l - 1)$, o ponto de teste deve estar à esquerda de um número ímpar de polos mais zeros no eixo real, como mostrado na Fig. 5.5.

REGRA 3. Para valores grandes de s e K , $n - m$ ramos do lugar das raízes tendem assintoticamente a retas centradas em $s = \alpha$ e com ângulo ϕ_l , sendo

$$\begin{aligned}\phi_l &= \frac{180^\circ + 360^\circ(l - 1)}{n - m}, \quad l = 1, 2, \dots, n - m, \\ \alpha &= \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}.\end{aligned}\quad (5.21)$$

À medida que $K \rightarrow \infty$, a equação

$$L(s) = -\frac{1}{K}$$

pode ser satisfeita somente se $L(s) = 0$. Isso, aparentemente, pode ocorrer em dois casos diferentes. No primeiro caso, como discutido na Regra 1, m raízes serão os zeros de $L(s)$. No segundo caso, $L(s)$ tende a zero se $s \rightarrow \infty$; então, por suposição, n é maior que m . As assíntotas descrevem como estas $n - m$ raízes aproximam do ∞ . Para valores grandes de s , a equação

$$1 + K \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = 0 \quad (5.22)$$

Pode ser aproximada⁸ por

$$1 + K \frac{1}{(s - \alpha)^{n-m}} = 0. \quad (5.23)$$

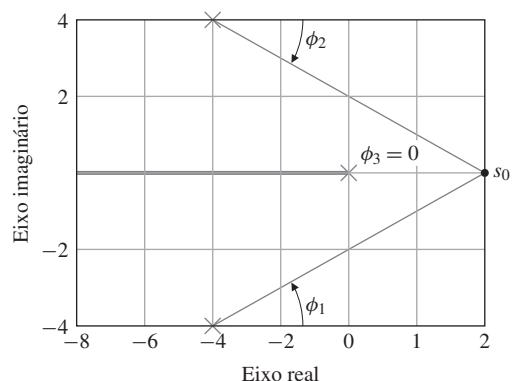


Figura 5.5 Regra 2. O trecho do eixo real do lugar das raízes está à esquerda de um número ímpar de polos e zeros.

⁸ Esta aproximação pode ser obtida dividindo $a(s)$ por $b(s)$ e selecionando os dois termos dominantes (potências de s de maior grau) obtendo a expansão de $(s - \alpha)^{n-m}$.

Essa é a equação para um sistema com $n - m$ polos, todos alocados em $s = \alpha$. Outra forma de visualizar este mesmo resultado é considerar a imagem que teremos se observarmos os polos e os zeros de uma distância muito grande, ou seja, de um ponto s muito grande: os polos e zeros irão parecer estar alocados na origem do plano- s . Assim, m zeros irão cancelar o efeito de m polos, e os outros $n - m$ polos irão parecer estar no mesmo lugar. Dizemos que o lugar das raízes da Eq. (5.22) é assintótico ao lugar das raízes da Eq. (5.23) para valores grandes de K e s . Precisamos calcular α e encontrar o lugar das raízes para o sistema resultante. Para encontrar o lugar das raízes, escolhemos o ponto de teste tal que $s_0 = Re^{j\phi}$ para algum valor grande de R e ϕ variável. Como todos os polos deste simples sistema estão localizados no mesmo lugar, o ângulo da função de transferência é 180° se todos os $n - m$ ângulos, cada um igual a ϕ_l , somam-se 180° . Portanto, ϕ_l é dado por

$$(n - m)\phi_l = 180^\circ + 360^\circ(l - 1)$$

para algum l inteiro. Assim, o lugar das raízes assintótico consiste em retas radiais nos $n - m$ ângulos dados por

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l - 1)}{n - m}, \quad l = 1, 2, \dots, n - m. \quad (5.24)$$

0 ângulo dos assintóticos

Para o sistema descrito pela Eq. (5.20), $n - m = 3$ e $\phi_{1,2,3} = 60^\circ, 180^\circ$ e 300° ou $\pm 60^\circ, 180^\circ$.

As linhas do lugar das raízes assintótico partem de $s_0 = \alpha$ no eixo real. Para determinar α , podemos usar uma simples propriedade de polinômios. Considere o polinômio $a(s)$ com coeficientes a_i e raízes p_i , como na Eq. (5.4); igualando o polinômio com sua forma fatorada, tem-se

$$s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n).$$

Se multiplicarmos os fatores do lado direito da equação, temos que o coeficiente de s^{n-1} é $-p_1 - p_2 - \dots - p_n$. No lado esquerdo da equação, este coeficiente é a_1 . Assim, $a_1 = -\sum p_i$; em outras palavras, o coeficiente do *segundo* termo de mais alto grau em um polinômio mônico é a soma de suas raízes com sinal negativo – neste caso, os polos de $L(s)$. Aplicando este resultado ao polinômio $b(s)$, encontramos a soma negativa dos zeros como sendo b_1 . Estes resultados podem ser escritos como

$$\begin{aligned} -b_1 &= \sum z_i, \\ -a_1 &= \sum p_i. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Finalmente, aplicando este resultado ao polinômio característico de malha fechada obtido na Eq. (5.22):

$$\begin{aligned} s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n + K(s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m) \\ = (s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_n) = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Note que a soma das raízes é o valor do coeficiente de s^{n-1} de sinal trocado e é **independente de K** se $m < n - 1$. Portanto, se $L(s)$ tem ao menos dois polos a mais que zeros, temos que $a_1 = -\sum r_i$. Mostramos que o ponto central das raízes *não depende de K* se $m < n - 1$, e que a soma em malha aberta e malha fechada é a mesma e é igual a $-a_1$, o que pode ser expresso como

$$-\sum r_i = -\sum p_i. \quad (5.27)$$

Para valores grandes de K , temos que m das raízes r_i se aproximam dos zeros z_i , e $n - m$ das raízes se aproximam dos ramos do sistema assintótico $\frac{1}{(s - \alpha)^{n-m}}$, o qual tem a soma dos polos igual a $(n - m)\alpha$. Combinando estes resultados, podemos concluir que a soma de todas as raízes é igual à soma das raízes que vão para o infinito mais a soma daquelas raízes que vão para os zeros de $L(s)$:

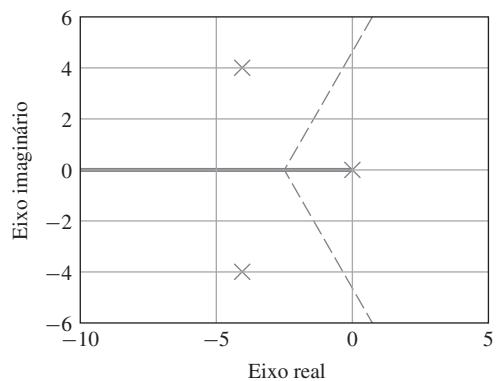
$$-\sum r_i = -(n - m)\alpha - \sum z_i = -\sum p_i.$$

Isolando α , temos

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}. \quad (5.28)$$

0 centro dos assintóticos

Figura 5.6 As assíntotas são $n - m$ linhas radiais partindo de α com ângulos iguais.



Note que os somatórios $\sum p_i$ e $\sum z_i$ sempre têm partes imaginárias nulas, pois os polos e zeros complexos sempre ocorrem em pares complexos conjugados. Assim, a Eq. (5.28) requer informação apenas das partes reais. Para a Eq. (5.20),

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-4 - 4 + 0}{3 - 0} \\ &= -\frac{8}{3} = -2,67.\end{aligned}$$

As assíntotas em $\pm 60^\circ$ estão tracejadas na Fig. 5.6. Note que elas cruzam o eixo imaginário em $\pm(2,67)j\sqrt{3} = \pm 4,62j$. A assíntota em 180° já foi encontrada no eixo real pela Regra 2.

REGRA 4. O(s) ângulo(s) de partida de um ramo no lugar das raízes em um polo de multiplicidade q é dado por

$$q\phi_{l,dep} = \sum_{i \neq l} \psi_i - \sum_{i \neq l} \phi_i - 180^\circ - 360^\circ(l-1), \quad (5.29)$$

e o(s) ângulos de chegada de um braço em um zero de multiplicidade q é dado por

$$q\psi_{l,arr} = \sum_{i \neq l} \phi_i - \sum_{i \neq l} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ(l-1). \quad (5.30)$$

Se um sistema tem polos próximos do eixo imaginário, pode ser importante determinar se o ramo do lugar das raízes que parte deste polo, parte em direção à estabilidade, semi plano esquerdo (SPE), ou em direção à instabilidade, semi plano direito (SPD). Para calcular o ângulo de partida em um polo, utilizamos um ponto de teste s_0 muito próximo do polo em questão, definindo o ângulo entre o polo e o ponto de teste como $\phi_{l,dep}$ e movendo todos os outros termos da Eq. (5.17) para o lado direito. Podemos ilustrar este processo colocando um ponto de teste s_0 próximo do polo em $-4 + 4j$ do nosso exemplo e calculando os ângulos de $L(s_0)$. A situação está ilustrada na Fig. 5.7, e o ângulo entre $-4 + 4j$ e o ponto de teste é definido como ϕ_1 . Selecionando o ponto de teste muito próximo do polo em questão, podemos considerar os ângulos ϕ_2 e ϕ_3 para o ponto de teste iguais aos ângulos para o polo. Assim, $\phi_2 = 90^\circ$, $\phi_3 = 135^\circ$ e ϕ_1 pode ser calculado da condição de ângulo assumindo qualquer valor para que a soma total seja 180° . O cálculo é ($l = 1$)

$$\phi_1 = -90^\circ - 135^\circ - 180^\circ \quad (5.31)$$

$$= -405^\circ \quad (5.32)$$

$$= -45^\circ. \quad (5.33)$$

Pela simetria do lugar das raízes, o ângulo de partida próximo ao polo $-4 - 4j$ será 45° .

Se $L(s)$ possuir zeros, os ângulos do polo para os zeros deverão ser adicionados ao lado direito da Eq. (5.31). Para o caso geral, podemos observar da Eq. (5.31) que o ângulo de partida de um polo é

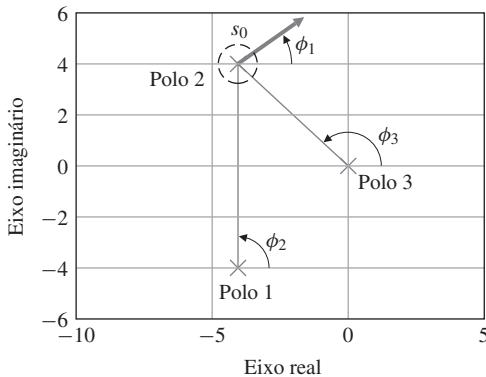


Figura 5.7 Os ângulos de partida e chegada são encontrados considerando um ponto de teste próximo a um polo ou zero.

$$\phi_{1,dep} = \sum \psi_i - \sum_{i \neq 1} \phi_i - 180^\circ, \quad (5.34)$$

sendo $\sum \phi_i$ a soma dos ângulos dos polos restantes e $\sum \psi_i$ a soma dos ângulos de todos os zeros. Para um polo de multiplicidade q , devemos contar o ângulo deste polo q vezes. Isto altera a Eq. (5.34) para

$$q\phi_{l,dep} = \sum \psi_i - \sum_{i \neq l} \phi_i - 180^\circ - 360^\circ(l-1), \quad (5.35)$$

sendo que l assume valores para todo q porque existem q ramos partindo de um polo múltiplo.

O processo de cálculo do ângulo de partida para pequenos valores de K , como mostrado na Fig. 5.7, também é válido para calcular o ângulo pelo qual um lugar das raízes chega a um zero de $L(s)$ para grandes valores de K . A fórmula geral resultante é

$$q\psi_{l,arr} = \sum \phi_i - \sum_{i \neq l} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ(l-1) \quad (5.36)$$

sendo $\sum \phi_i$ a soma dos ângulos de todos os polos, $\sum \psi_i$ a soma dos ângulos dos zeros restantes e l um inteiro, como anteriormente.

REGRA 5. O lugar das raízes pode ter múltiplas raízes em alguns pontos, e os ramos atingirão um ponto de q raízes em ângulos separados por

$$\frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{q} \quad (5.37)$$

e partirão em ângulos com a mesma separação. Como acontece com qualquer polinômio, é possível que um polinômio característico de grau maior que 1 tenha múltiplas raízes. Por exemplo, no lugar das raízes do polinômio de segunda ordem na Fig. 5.2, há duas raízes em $s = -1/2$ quando $K = 1/4$. Aqui, os ramos horizontais do lugar das raízes se aproximam até partirem do eixo real, tornando-se complexos para $K > 1/4$. O lugar das raízes chega com 0° e 180° e parte em $+90^\circ$ e -90° .

Para calcular os ângulos de chegada e partida de um ponto com múltiplas raízes, é útil usar um truque que chamamos de **continuação do lugar das raízes**. Podemos imaginar um traçado de um lugar das raízes para uma primeira série de K , talvez para $0 \leq K \leq K_1$. Se deixarmos $K = K_1 + K_2$, podemos traçar um novo lugar das raízes para o parâmetro K_2 , um lugar das raízes que é a *continuação do lugar das raízes original* e cujos polos de partida são as raízes do sistema original em $K = K_1$. Para ver como isso funciona, voltamos para o lugar das raízes em um sistema de segunda ordem da Eq. (5.11), e seja K_1 o valor correspondente ao ponto de partida em que $K_1 = 1/4$. Se fizermos $K = 1/4 + K_2$, temos o lugar das raízes da equação $s^2 + s + 1/4 + K_2 = 0$, ou

$$\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + K_2 = 0. \quad (5.38)$$

Regra para ângulos de chegada

Continuação do lugar das raízes

Os passos para traçar esse lugar das raízes são, naturalmente, os mesmos para traçar qualquer outro, exceto que agora a partida inicial do lugar da raízes da Eq. (5.38) corresponde ao ponto em que o lugar das raízes original sofre um rompimento do lugar das raízes original da Eq. (5.11). Aplicando a regra para os ângulos de partida [Eq. (5.35)] a partir do polo duplo em $s = -1/2$, temos que

$$2\phi_{dep} = -180^\circ - 360^\circ(1 - 1), \quad (5.39)$$

$$\phi_{dep} = -90^\circ - 180^\circ(1 - 1), \quad (5.40)$$

$$\phi_{dep} = \pm 90^\circ \text{ (ângulos de partida no ponto de rompimento)} \quad (5.41)$$

Neste caso, os ângulos de chegada em $s = -1/2$ do lugar das raízes do sistema original são claramente 0° e 180° .

O lugar das raízes completo para o nosso exemplo de terceira ordem é desenhado na Fig. 5.8. Ele combina todos os resultados encontrados até o momento, o segmento do eixo real, o centro das assíntotas e seus ângulos e os ângulos de partida dos polos. Geralmente, é suficiente para traçar o lugar das raízes usar apenas as regras de 1 a 3, que devem ser memorizadas. A Regra 4 às vezes é útil para entender como os segmentos partem, especialmente se houver um polo perto do eixo $j\omega$. A Regra 5 às vezes é útil para ajudar a interpretar gráficos traçados pelo computador e, como veremos na próxima seção, para explicar as mudanças qualitativas em alguns ramos quando um polo ou zero é movimentado. O lugar das raízes na Fig. 5.8 foi traçado utilizando os comandos no MATLAB

```
numL = [1];
denL = [1 8 32 0];
sysL = tf(numL, denL);
rlocus(sysL)
```

A seguir, as regras para traçar o lugar das raízes são resumidas.

5.2.2 Resumo das regras para determinar o lugar das raízes

REGRA 1. n ramos do lugar das raízes partem dos polos de $L(s)$ e m ramos terminam nos zeros de $L(s)$.

REGRA 2. O lugar das raízes no eixo real está à esquerda de um número ímpar de polos e zeros.

REGRA 3. Para valores grandes de s e K , $n - m$ dos ramos são assintóticos a retas radiais com ângulos ϕ_l e centralizadas em $s = \alpha$ no eixo real, sendo

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l - 1)}{n - m}, \quad l = 1, 2, \dots, n - m, \quad (5.42)$$

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}. \quad (5.43)$$

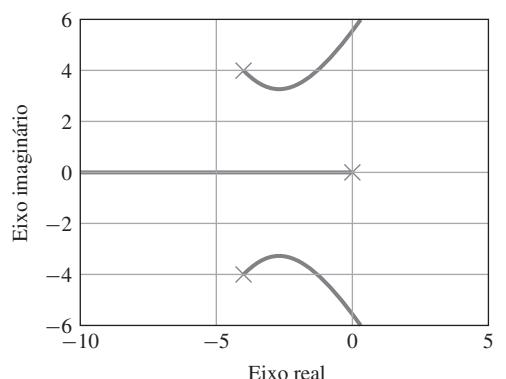


Figura 5.8 Lugar das raízes para $L(s) = \frac{1}{s(s^2 + 8s + 32)}$.

REGRA 4. O(s) ângulo(s) de partida de um ramo do lugar das raízes em um polo de multiplicidade q é dado por

$$q\phi_{l,dep} = \sum \psi_i - \sum \phi_i - 180^\circ - 360^\circ(l-1), \quad (5.44)$$

e o(s) ângulo(s) de chegada de um ramo em um zero de multiplicidade q é dado por

$$q\psi_{l,arr} = \sum \phi_i - \sum \psi_i + 180^\circ + 360^\circ(l-1). \quad (5.45)$$

REGRA 5. O lugar das raízes pode ter múltiplas raízes em pontos no lugar das raízes com multiplicidade q . Os ramos irão se aproximar a um ponto de q raízes em ângulos separados por

$$\frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{q} \quad (5.46)$$

e partirão em ângulos com a mesma separação, formando um arranjo de $2q$ raios equidistantes. Se o ponto estiver sobre o eixo real, então a orientação deste arranjo é dada pela regra do eixo real. Se o ponto estiver no plano complexo, então a regra do ângulo de partida deve ser aplicada.

5.2.3 Seleção do valor do parâmetro

O lugar das raízes positivo é um gráfico de *todas as localizações possíveis* para as raízes da equação $1 + KL(s) = 0$ para algum valor real positivo de K . O objetivo do projeto é selecionar um determinado valor de K que atenda às especificações da resposta estática e dinâmica. Voltemos agora à questão de selecionar K a partir de um determinado lugar das raízes de modo que as raízes estejam localizadas em lugares específicos. Apesar de mostrar como a seleção do ganho pode ser feita por cálculos manuais a partir de um gráfico do lugar das raízes, isto quase nunca é feito à mão, porque a determinação pode ser realizada facilmente pelo MATLAB. É útil, contudo, ser capaz de realizar uma checagem manual dos resultados obtidos por computador.

Partindo da Definição II do lugar das raízes, foram desenvolvidas regras para esboçar um lugar das raízes a partir apenas da fase de $L(s)$. Se a equação possuir uma raiz em um lugar específico quando a fase de $L(s)$ é 180° , então a **condição de magnitude** também deve ser satisfeita. Esta condição é dada pela Eq. (5.9), que pode ser reescrita como

$$K = -\frac{1}{L(s)}.$$

Para valores de s que pertencem ao lugar das raízes, a fase de $L(s)$ é 180° ; então, pela condição de magnitude, temos

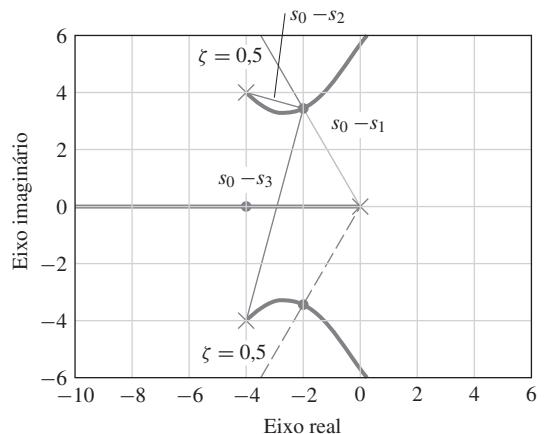
$$K = \frac{1}{|L|}. \quad (5.47)$$

A Equação (5.47) tem interpretações algébrica e gráfica. Para ver a interpretação gráfica, consideraremos o lugar das raízes de $1 + KL(s)$, sendo

$$L(s) = \frac{1}{s[(s+4)^2 + 16]}. \quad (5.48)$$

Para esta função de transferência, o lugar das raízes é traçado na Fig. 5.9, as linhas correspondendo ao coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$ são esboçadas e os pontos onde o lugar das raízes cruza estas linhas são marcados com pontos (•). Suponha que queremos definir o ganho de modo que as raízes estejam localizadas nos pontos (•). Isso corresponde à seleção do ganho de forma que dois dos polos do sistema em malha fechada tenham coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$. (Nós vamos encontrar o terceiro polo em breve.) Qual é o valor de K , quando a raiz está no ponto desejado? Da Eq. (5.47), o valor de K é dado por 1 dividido pela magnitude de $L(s_0)$, onde s_0 é a coordenada do ponto desejado. Na figura, temos três vetores traçados $s_0 - s_1$, $s_0 - s_2$ e $s_0 - s_3$, que são os vetores dos polos de $L(s)$ ao ponto s_0 . (Como $s_1 = 0$, o primeiro vetor é igual a s_0 .) Algebricamente, temos

Figure 5.9 Lugar das raízes para $L(s) = \frac{1}{s[(s+4)^2+16]}$ mostrando o cálculo de K .



$$L(s_0) = \frac{1}{s_0(s_0 - s_2)(s_0 - s_3)}. \quad (5.49)$$

Usando a Eq. (5.47), temos

$$K = \frac{1}{|L(s_0)|} = |s_0||s_0 - s_2||s_0 - s_3|. \quad (5.50)$$

Cálculo gráfico do ganho desejado

A interpretação gráfica da Eq. (5.50) mostra que as três magnitudes são os comprimentos dos vetores desenhados na Fig. 5.9 (veja o Apêndice WD, disponível em inglês no site do Grupo A). Assim, podemos calcular o ganho para posicionar as raízes no ponto ($s = s_0$), medindo o comprimento destes vetores e multiplicando estes comprimentos, *desde que as escalas dos eixos imaginário e real sejam idênticas*. Usando a escala da figura, estimamos que

$$\begin{aligned} |s_0| &\cong 4,0, \\ |s_0 - s_2| &\cong 2,1, \\ |s_0 - s_3| &\cong 7,7. \end{aligned}$$

Assim, o ganho estimado é

$$K = 4,0(2,1)(7,7) \cong 65.$$

Concluímos que se K é definido como o valor 65, então uma raiz de $1 + KL$ estará em s_0 , que tem o coeficiente de amortecimento de 0,5 desejado. Outra raiz está no conjugado de s_0 . Onde está a terceira raiz? O terceiro ramo do lugar das raízes parte ao longo do eixo real negativo. Se executarmos os cálculos à mão, seria preciso ter um ponto de teste, calcular um ganho e repetir esse processo até que tenhamos encontrado o ponto onde $K = 65$. No entanto, se executarmos uma verificação sobre a determinação do MATLAB, basta apenas utilizar o procedimento acima para verificar o ganho referente ao local indicado pela raiz.

Para usar o MATLAB, trace o lugar das raízes usando o comando `rlocus(sysL)`, por exemplo, e então o comando `[K, p] = rlocfind(sysL)` irá produzir uma cruz no gráfico e, quando posicionada no local desejado da raiz e selecionada com um clique no mouse, o valor do ganho K é devolvido, bem como as raízes correspondentes ao K na variável p . O uso de `rltool` torna isso ainda mais fácil e será discutido em detalhes no Exemplo 5.7.

Finalmente, com o ganho selecionado, é possível calcular a constante de erro do sistema de controle. Um processo com a função de transferência dada pela Eq. (5.48) tem um integrador e, em uma configuração de realimentação unitária, é um sistema de controle de Tipo 1.

Neste caso, o erro de estado estacionário no rastreamento de uma entrada em rampa é dada pela “constante de velocidade”:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKL(s) \quad (5.51)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s[(s+4)^2 + 16]} \quad (5.52)$$

$$= \frac{K}{32}. \quad (5.53)$$

Com o ganho ajustado para raízes complexas com amortecimento $\zeta = 0,5$, o ganho do lugar das raízes é $K = 65$, então, a partir de Eq. (5.53), obtemos $K_v = 65/32 \cong 2$. Se a resposta dinâmica do sistema em malha fechada, como determinado pela localização da raiz, é satisfatória e a precisão de erro em estado estacionário, como medida por K_v , é boa o suficiente, então o projeto pode ser completado apenas pela seleção do ganho.

No entanto, se nenhum valor de K satisfaz todas as restrições, geralmente é o caso, então, modificações adicionais são necessárias para atender às especificações do sistema.

5.3 Lugar das raízes ilustrativo

Um número de importantes problemas de controle são caracterizados por um processo com o simples “integrador duplo” função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (5.54)$$

O controle de atitude de um satélite é descrito por essa equação. Além disso, o sistema de leitura/gravação de uma unidade de disco rígido de computador está geralmente flutuando no ar, então o atrito é desprezado. O motor é normalmente acionado por uma fonte de corrente, então a força contra eletromotriz não afeta o torque. O resultado é uma planta descrita pela Eq. (5.54). Se obtemos um sistema de realimentação unitária com esta planta, e um controlador proporcional, o lugar das raízes em relação ao ganho do controlador é

$$1 + k_p \frac{1}{s^2} = 0. \quad (5.55)$$

Se aplicarmos as regras (triviais) neste caso, o resultado é:

REGRA 1. O lugar das raízes tem dois ramos que partem de $s = 0$.

REGRA 2. Nenhuma parte do eixo real pertence ao lugar das raízes.

REGRA 3. As duas assíntotas têm origem em $s = 0$ e seus ângulos são $\pm 90^\circ$.

REGRA 4. O lugar das raízes partem de $s = 0$ com ângulos de $\pm 90^\circ$.

Conclusão: O lugar das raízes consiste do eixo imaginário e a resposta deve ser oscilatória para todo valor de k_p . Um projeto mais útil resulta do uso do controle proporcional mais o controle derivativo.

EXEMPLO 5.3 Lugar das raízes do controle de atitude de um satélite com o controlador PD

A equação característica com o controlador PD é

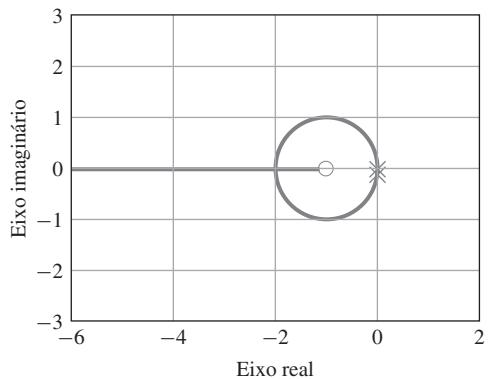
$$1 + [k_p + k_D s] \frac{1}{s^2} = 0. \quad (5.56)$$

Para colocar a equação característica na forma do lugar das raízes, definimos $K = k_D$, e, no momento, selecionamos o valor arbitrário da razão dos ganhos⁹ como $k_p/k_D = 1$, o que resulta no lugar das raízes da forma

$$1 + K \frac{s + 1}{s^2} = 0. \quad (5.57)$$

⁹ Dado um sistema físico específico, esse número é selecionado considerando o tempo de subida especificado no projeto ou o sinal de controle máximo do atuador.

Figura 5.10 Lugar da raízes de $L(s) = G(s) = \frac{(s+1)}{s^2}$.



Solução. Novamente, obtemos os resultados do uso das regras:

REGRA 1. O lugar das raízes tem dois ramos que partem de $s = 0$, um deles termina no zero em $s = -1$ e o outro se aproxima do infinito.

REGRA 2. O trecho do eixo real à esquerda de $s = -1$ pertence ao lugar das raízes.

REGRA 3. Desde que $n - m = 1$, existe uma assíntota ao longo do eixo real negativo.

REGRA 4. Os ângulos de partida dos polos duplos em $s = 0$ são $\pm 90^\circ$.

REGRA 5. Das Regras 1-4, deve ficar claro que o lugar das raízes vai passar em torno do zero, voltar ao eixo real à esquerda do zero e terminar como indicado pela Regra 1. Acontece que os segmentos do lugar das raízes voltam ao eixo real em $s = -2$, o que cria um ponto de múltiplas raízes. Avaliando o ângulo de chegada neste ponto vemos que os segmentos chegam em $\pm 90^\circ$, e que, a partir da Regra 2: este é um ponto de raízes múltiplas. Concluímos que os dois ramos do lugar das raízes deixam a origem indo para o norte e sul e que se curvam¹⁰ sem passar no SPD e voltam ao eixo real em $s = -2$; a partir deste ponto, um ramo vai para o oeste em direção ao infinito e o outro vai para o leste, até encontrar com o zero em $s = -1$. O lugar da raízes é traçado na Fig. 5.10 usando os comandos

```
numS = [1 1];
denS = [1 0 0];
sysS = tf(numS,denS);
rlocus(sysS)
```

Comparando este caso com aquele simples $1/s^2$, temos que

Efeito de um zero em SPE

A adição do zero atraiu o lugar das raízes para o SPE, um ponto de muita importância para a construção de um compensador.

No caso anterior, consideramos um controlador PD puro. No entanto, como já mencionado anteriormente, a operação física de diferenciação não é prática, então o controle PD é aproximado por

$$D(s) = k_p + \frac{k_D s}{s/p + 1}, \quad (5.58)$$

¹⁰ Você pode provar que o caminho é um círculo assumindo que $s + 1 = e^{j\theta}$ e mostrando que a equação tem uma solução para uma série de K positiva e θ real. (Veja o Problema 5.18.)

a qual pode ser colocada na forma do lugar das raízes definindo $K = k_p + pk_D$ e $z = pk_p/K$ então¹¹

$$D(s) = K \frac{s+z}{s+p}. \quad (5.59)$$

Por razões que veremos quando considerarmos projeto usando a resposta em frequência, o controlador com esta função de transferência é chamado de um “compensador de avanço” ou, referindo-se à frequente aplicação de componentes elétricos, uma “rede de avanço.” A equação característica para a planta $1/s^2$ com este controlador é

$$\begin{aligned} 1 + D(s)G(s) &= 1 + KL(s) = 0, \\ 1 + K \frac{s+z}{s^2(s+p)} &= 0. \end{aligned}$$

EXEMPLO 5.4 Lugar das raízes de um satélite com um controlador PD modificado ou compensador de avanço

Para avaliar o efeito do polo acrescentado, vamos novamente definir $z = 1$ e considerar três diferentes valores de p . Começamos com um valor grande, $p = 12$, e consideraremos o lugar das raízes para

$$1 + K \frac{s+1}{s^2(s+12)}. \quad (5.60)$$

Solução. Novamente aplicando as regras para o traçado do lugar das raízes:

REGRA 1. O lugar das raízes tem três ramos, dois partem de $s = 0$ e um parte de $s = -12$.

REGRA 2. O trecho no eixo real $-12 \leq s \leq -1$ pertence ao lugar das raízes.

REGRA 3. Existem $n - m = 3 - 1 = 2$ assíntotas centradas em $\alpha = \frac{-12-(-1)}{2} = -11/2$ e com ângulos de $\pm 90^\circ$.

REGRA 4. Os ângulos de partida dos ramos do lugar das raízes que partem de $s = 0$ são novamente $\pm 90^\circ$. O ângulo de partida do polo em $s = -12$ é 0° .

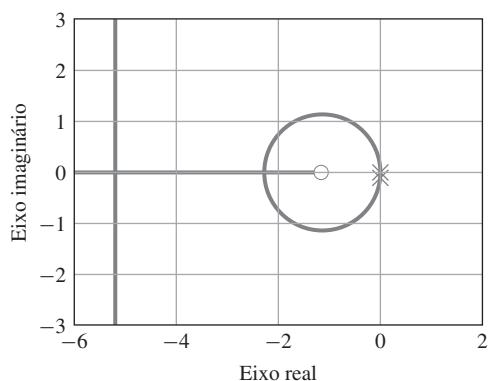
Existem várias possibilidades sobre como se comportam os ramos ainda atendendo às orientações acima. O MATLAB é o modo adequado para descobrir os caminhos. Os comandos no MATLAB

```
numL = [1 1];
denL = [1 12 0 0];
sysL = tf(numL,denL);
rlocus(sysL)
```

mostram que dois dos ramos do lugar das raízes partem verticalmente de $s = 0$, curvam-se para esquerda sem passar pelo SPD e retornam ao eixo real em $s = -2,3$, onde um ramo vai para direita em direção do zero em $s = -1$ e o outro vai para esquerda, ao encontro do ramo que parte do polo em $s = -12$. Estes dois ramos atingem um ponto de raízes múltiplas $s = -5,2$ e partem do eixo real se aproximando verticalmente das assíntotas localizadas em $s = -5,5$. O lugar das raízes está traçado na Fig. 5.11.

Considerando esse lugar das raízes, vemos que o efeito do polo acrescentado foi distorcer o simples círculo do controle PD, mas, para pontos próximos à origem, o local é bastante semelhante ao caso anterior. A situação muda quando o polo é trazido para mais próximo.

¹¹ Aqui o uso de z para zero não deve ser confundido com o uso do operador z , usado para definir a função de transferência discreta necessária na descrição de controladores digitais.

Figura 5.11 Lugar da raízes de $L(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s+12)}$.

EXEMPLO 5.5 *Lugar das raízes de um satélite com um compensador de avanço com um polo relativamente pequeno*

Agora, considere $p = 4$ e esboce o lugar das raízes para

$$1 + K \frac{s+1}{s^2(s+4)} = 0. \quad (5.61)$$

Solução. Novamente aplicando as regras para o traçado do lugar das raízes:

REGRA 1. O lugar das raízes tem três ramos, dois partem $s = 0$ e um parte de $s = -4$.

REGRA 2. O trecho no eixo real $-4 \leq s \leq -1$ pertence ao lugar das raízes.

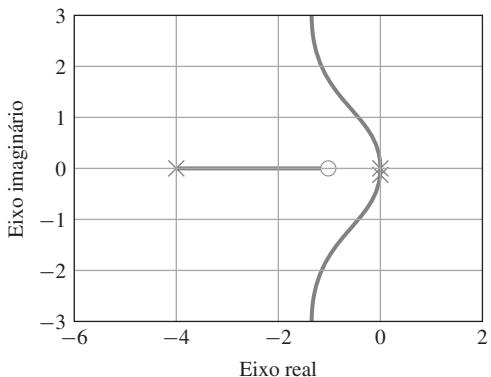
REGRA 3. Existem duas assíntotas centradas em $\alpha = -3/2$ e com ângulos de $\pm 90^\circ$.

REGRA 4. Os ângulos de partida dos ramos do lugar das raízes que partem de $s = 0$ são $\pm 90^\circ$.

REGRA 5. Os comandos do MATLAB

```
numL = [1 1];
denL = [1 4 0 0];
sysL = tf(numL,denL);
rlocus(sysL)
```

mostram que dois dos ramos do lugar das raízes partem verticalmente de $s = 0$, curvam-se levemente para esquerda e se aproximam das assíntotas indo para o norte e sul. O ramo do lugar das raízes que parte de $s = -4$ parte em direção ao zero. Neste caso, o lugar das raízes difere do caso quando $p = 12$. O gráfico do lugar das raízes é apresentado na Fig. 5.12.

Figura 5.12 Lugar da raízes de $L(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s+4)}$.

Nestes dois casos, temos sistemas similares, mas em um caso, $p = +12$, existem pontos de partida e chegado no eixo real; entretanto, para $p = +4$, estas características desaparecem. Uma questão lógica a ser feita é em qual ponto elas desaparecem. É fato que isto ocorre em $p = 9$, e nós vamos ver este lugar das raízes em seguida.

EXEMPLO 5.6 Lugar das raízes de um satélite alterando a posição do polo

Esboce o lugar das raízes de

$$1 + K \frac{s+1}{s^2(s+9)} = 0. \quad (5.62)$$

Solução.

REGRA 1. O lugar das raízes tem três ramos, dois partem de $s = 0$ e um parte de $s = -9$.

REGRA 2. O trecho no eixo real $-9 \leq s \leq -1$ pertence ao lugar das raízes.

REGRA 3. Existem duas assíntotas centradas em $\alpha = -8/2 = -4$.

REGRA 4. Os ângulos de partida são, como anteriormente, $\pm 90^\circ$ em $s = 0$

REGRA 5. Os comando do MATLAB são

```
numL = [1 1];
denL = [1 9 0 0];
sysL = tf(numL,denL);
rlocus(sysL)
```

produzindo o lugar das raízes na Fig. 5.13. Ela mostra que dois ramos partem verticalmente do polo em $s = 0$ e se curvam até se encontrarem novamente no eixo real em $s = -3$ com um ângulo de chegada dos $\pm 60^\circ$, enquanto o ramo do polo em $s = -9$ parte para o leste e junta-se aos dois outros polos em $s = -3$ com um ângulo de chegada de 0° . Estes três ramos se dividem em $s = -3$ com ângulos de partida 0° e $\pm 120^\circ$, um deles parte em direção ao zero e os outros em direção ao noroeste para se juntarem às assíntotas. Usando a Regra 5, pode-se confirmar esses ângulos de chegada e partida¹².

Da Fig. 5.11 até a Fig. 5.13, é evidente que quando o terceiro polo está próximo do zero (p próximo de 1), há uma distorção do lugar das raízes que resultaria em equação, que consiste de dois ramos em linha reta partindo dos dois polos em $s = 0$ com $\pm 90^\circ$. Então, à medida que au-

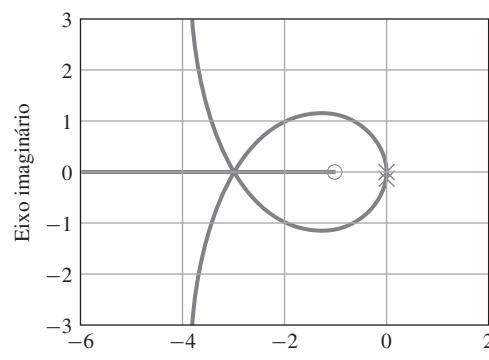


Figura 5.13 Lugar das raízes de $L(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s+9)}$.

¹² A forma deste lugar das raízes especial é a Trissecriz de Maclaurin, uma curva plana que pode ser usada para trisecionar um ângulo.

mentarmos p , o lugar das raízes se altera até que em $p = 9$ o lugar das raízes apresenta um ponto de raízes múltiplas em -3 , ponto de quebra. À medida que o polo é deslocado para a esquerda de -9 , o lugar das raízes apresenta diferentes pontos de quebra, aproximando-se, quando p é muito grande, do lugar das raízes circular de um zero e dois polos. Então, a Figura 5.13, quando $p = 9$, é a transição entre os dois extremos de segunda ordem, que ocorrem em $p = 1$ (quando o zero é cancelado) e $p \rightarrow \infty$ (onde o polo extra não tem nenhum efeito).

EXEMPLO 5.7 Repita os exemplos anteriores utilizando a RLTOOL

Repita os Exemplos 5.3 – 5.6 usando a ferramenta RLTOOL do MATLAB.

Solução. RLTOOL é uma ferramenta interativa do MATLAB para traçar o lugar das raízes que fornece uma interface gráfica (GUI) para análise e projeto. A RLTOOL fornece uma maneira fácil de projetar controladores realimentados porque permite a visualização rápida dos efeitos causados no lugar das raízes. Para ilustrar o uso desta ferramenta, considere os comandos no MATLAB

```
numL = [1 1];
denL = [1 0 0];
sysL = tf(numL,denL);
rltool(sysL)
```

irá inicializar a interface gráfica e produzir o lugar das raízes mostrado na Fig. 5.10, que é similar aos obtidos nos Exemplos 5.4, 5.5 e 5.6, mas sem o polo no eixo real negativo, que foi movido com o propósito de ilustração nos três exemplos anteriores. Clicando em “Compensa-

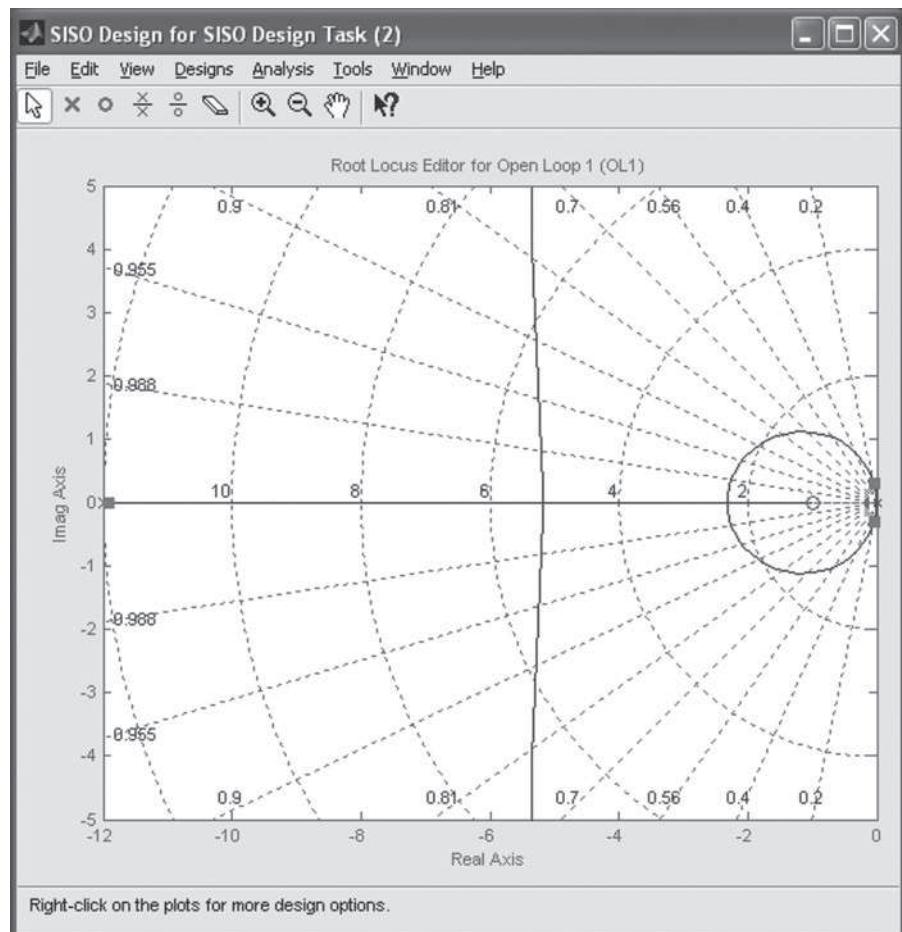


Figura 5.14 Interface gráfica da RLTOOL.

dor Editor” na janela “Control and Estimation Tools Manager” e, em seguida, clicando com o botão direito sobre a janela “Dynamics” e selecionando “add pole/zero”, você pode adicionar um polo na posição $s = -12$. Isto irá produzir o lugar das raízes que é mostrado na Fig. 5.11 e Fig. 5.14. Agora, coloque o mouse sobre o polo em $s = -12$, mantenha pressionado o botão do mouse e deslize-o lentamente a partir de $s = -12$ até $s = -4$, para que possa examinar as formas do lugar das raízes em todos os pontos intermediários. Tenha cuidado especial (e calma), quando você passar por $s = -9$, porque o lugar das raízes muda muito rapidamente com um polo nesta região. Note que você também pode colocar o mouse em um dos polos de malha fechada e movimentá-lo ao longo do lugar das raízes. Será mostrada a localização das outras raízes que correspondem a esse valor do ganho, K , bem como a frequência e o coeficiente de amortecimento das raízes do sistema em malha fechada, quando forem raízes complexas. Mais detalhes podem ser encontrados no Tutorial RLTOOL, no Apêndice WR.

Uma conclusão útil deste exemplo é a seguinte:

Um polo adicional localizado à esquerda do lugar das raízes e movendo-se para a direita tende a empurrar os ramos do lugar das raízes para a direita à medida que se aproxima deles.

O integrador duplo é o modelo mais simples dos exemplos, assumindo um corpo rígido, sem fricção. Um caso mais realista seria incluir os efeitos da flexibilidade no controle de satélites, onde pelo menos os painéis solares seriam flexíveis. No caso do mecanismo de leitura/gravação da unidade de disco, o conjunto cabeça e suporte do braço sempre tem flexibilidade e, geralmente, um comportamento muito complexo, com um número de modos levemente amortecidos, que muitas vezes pode ser aproximado por um único modo dominante. Na Seção 2.1, foi demonstrado que a flexibilidade em uma unidade de disco adiciona um conjunto de polos complexos no modelo $1/s^2$. Geralmente, há duas possibilidades, dependendo de se o sensor está no mesmo corpo rígido que o atuador, que é chamado de caso justaposto¹³, ou se está em outro corpo, caso não justaposto¹⁴. Começamos considerando o caso justaposto semelhante ao que é dado pela Eq. (2.20). Como vimos no Capítulo 2, a função de transferência no caso justaposto não só tem um par de polos complexos, mas também um par de zeros complexos localizados em uma frequência menor do que a frequência natural dos polos. Os números nos exemplos que se seguem são escolhidos mais para ilustrar as propriedades do lugar das raízes do que para representar determinados modelos físicos.

EXEMPLO 5.8 Lugar das raízes de um sistema de controle de satélite para o caso justaposto

Trace o lugar das raízes da equação característica $1 + G(s)D(s) = 0$, sendo

$$G(s) = \frac{(s + 0,1)^2 + 6^2}{s^2[(s + 0,1)^2 + 6,6^2]} \quad (5.63)$$

em um estrutura de realimentação unitária com o controlador

$$D(s) = K \frac{s + 1}{s + 12}. \quad (5.64)$$

¹³ Típico do controle de atitude de satélites, no qual a flexibilidade surge a partir de painéis solares, e o atuador e o sensor agem sobre o corpo principal do satélite.

¹⁴ Típico do satélite, no qual a flexibilidade surge devido ao fato de a atitude ser controlada a partir de um corpo de comando acoplado por um suporte flexível. Esse também é o caso do controle da cabeça do mecanismo de leitura/gravação de disco rígido de um computador, em que o motor está em uma extremidade do braço e a cabeça está na outra.

Solução. Neste caso,

$$L(s) = \frac{s+1}{s+12} \frac{(s+0,1)^2 + 6^2}{s^2[(s+0,1)^2 + 6,6^2]}$$

tem polos e zeros próximos do eixo imaginário, assim, os ângulos de partida são de grande importância.

REGRA 1. O lugar das raízes tem cinco ramos, três que se aproximam dos zeros finitos e dois que se aproximam de assíntotas.

REGRA 2. O segmento do eixo real $-12 \leq s \leq -1$ é parte do lugar das raízes.

REGRA 3. O centro das duas assíntotas é

$$\alpha = \frac{-12 - 0,1 - 0,1 - (-0,1 - 0,1 - 1)}{5 - 3} = -\frac{11}{2}.$$

E os ângulos das assíntotas são $\pm 90^\circ$.

REGRA 4. Cálculo do ângulo de partida do polo em $s = -0,1 + j6,6$. O ângulo neste polo é definido para ser ϕ_1 . Os outros ângulos estão marcados na Fig. 5.15. A condição do lugar das raízes é

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - (\phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5) - 180^\circ, \\ \phi_1 &= 90^\circ + 90^\circ + \tan^{-1}(6,6) - [90^\circ + 90^\circ + 90^\circ \\ &\quad + \tan^{-1}\left(\frac{6,6}{12}\right)] - 180^\circ, \\ \phi_1 &= 81,4^\circ - 90^\circ - 28,8^\circ - 180^\circ, \\ &= -217,4^\circ = 142,6^\circ, \end{aligned} \quad (5.65)$$

assim, o ramo do lugar das raízes neste polo parte para cima e para a esquerda, no sentido da região de estabilidade do plano. Um exercício interessante seria calcular os ângulos de chegada no zero localizado em $s = -0,1 + j6$.

Usando o MATLAB, o lugar das raízes é traçado na Fig. 5.16. Note que todas as características determinadas usando as simples regras foram exibidas pelo gráfico, assim verificando, em parte, que os dados foram fornecidos corretamente.

O exemplo anterior mostrou que

No caso justaposto, a presença de um único modo flexível introduz uma raiz levemente amortecida na equação característica, mas não causa instabilidade no sistema.

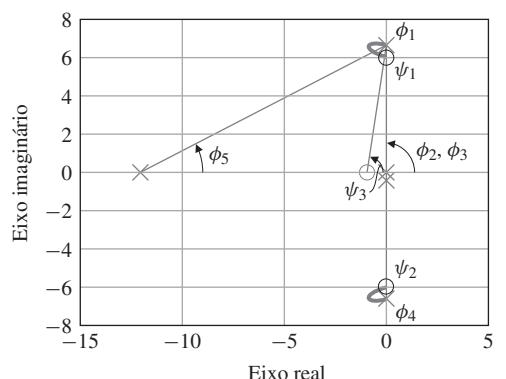


Figura 5.15 Figura para o cálculo do ângulo de partida para $L(s) = \frac{s+1}{s+12} \frac{(s+0,1)^2 + 6^2}{s^2[(s+0,1)^2 + 6,6^2]}$.

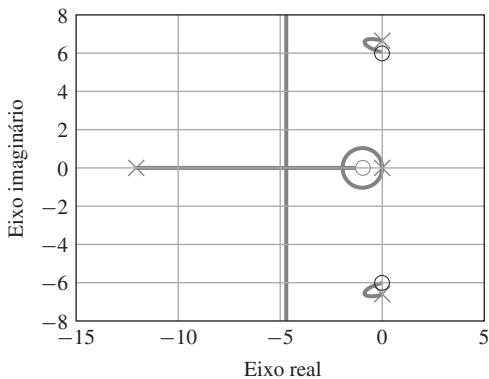


Figura 5.16 Lugar das raízes para
 $L(s) = \frac{s+1}{s+12} \frac{(s+0,1)^2 + 6^2}{s^2[(s+0,1)^2 + 6,6^2]}.$

O ângulo de partida calculado mostra que o lugar das raízes parte dos polos introduzidos por um modo flexível em direção ao SPE. Em seguida, é considerado o caso não justaposto, para o qual a função de transferência da planta é

$$G(s) = \frac{1}{s^2[(s + 0,1)^2 + 6,6^2]}, \quad (5.66)$$

compensado novamente por

$$D(s) = K \frac{s + 1}{s + 12}. \quad (5.67)$$

Como estas equações mostram, a função de transferência do caso não justaposto tem os polos complexos, mas não tem os zeros complexos associados, como ocorreu no exemplo anterior e no caso justaposto do Capítulo 2, na Eq. (2.20). Isso tem um efeito substancial, como ilustrado pelo Exemplo 5.9.

EXEMPLO 5.9 Lugar das raízes para o caso não justaposto

Aplicando as regras do lugar das raízes para

$$KL(s) = DG = K \frac{s + 1}{s + 12} \frac{1}{s^2[(s + 0,1)^2 + 6,6^2]}, \quad (5.68)$$

prestando atenção especial aos ângulos de partida nos polos complexos.

REGRA 1. Existem cinco ramos no lugar das raízes, dos quais um se aproxima do zero e quatro se aproximam das assíntotas.

REGRA 2. O seguimento no eixo real $-12 \leq s \leq -1$ é parte do lugar das raízes.

REGRA 3. O centro das assíntotas está localizado em

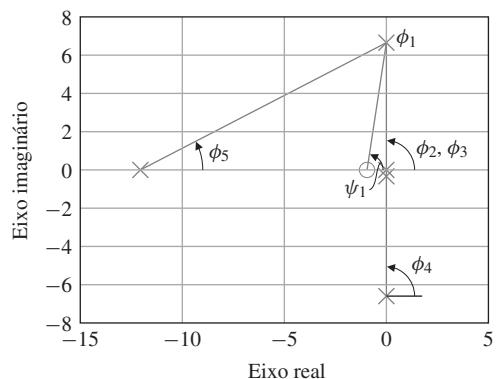
$$\alpha = \frac{-12 - 0,2 - (-1)}{5 - 1} = \frac{-11,2}{4},$$

e os ângulos para as quatro assíntotas são $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$.

REGRA 4. Calculamos o ângulo de partida do polo em $s = -0,1 + j6,6$. O ângulo neste polo é definido para ser ϕ_1 . Os outros ângulos estão marcados na Fig. 5.17. A condição do lugar das raízes é

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \psi_1 - (\phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5) - 180^\circ, \\ \phi_1 &= \tan^{-1}(6,6) - \left[90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{6,6}{12}\right) \right] - 180^\circ, \\ \phi_1 &= 81,4^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 28,8^\circ - 180^\circ, \\ \phi_1 &= 81,4^\circ - 90^\circ - 28,8^\circ - 360^\circ, \\ \phi_1 &= -37,4^\circ. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Figura 5.17 Figura para o cálculo do ângulo de partida para $L(s) = \frac{s+1}{s+12} \frac{1}{s^2[(s+0,1)^2+6,6^2]}$.



Neste caso, o ramo do lugar das raízes neste polo parte para baixo e para a direita, no sentido da região de instabilidade do plano. Assim, deve-se esperar que o sistema se torne instável à medida que o ganho aumenta.

REGRA 5. O lugar das raízes é traçado na Fig. 5.18 com

```
numG = 1;
denG = [1.0 0.20 43.57 0 0];
sysG = tf(numG,denG);
numD = [1 1];
denD = [1 12];
sysD = tf(numD,denD);
sysL = sysD*sysG;
rlocfind(sysL)
```

o qual concorda com os cálculos acima. Usando a RLTOOL, vemos que os ramos que partem dos polos complexos entram no SPD quase imediatamente quando o ganho é aumentado. Além disso, selecionando o ganho para que todas as raízes fiquem à esquerda do eixo imaginário, pode-se observar que as raízes dominantes estão próximas da origem onde o coeficiente de amortecimento é extremamente baixo. Portanto, esse sistema terá uma resposta muito lentamente amortecida com modos flexíveis muito oscilatórios. Não seria considerada aceitável com o compensador de avanço escolhido para este exemplo.

Lugar das raízes com múltiplas raízes complexas

Vimos lugares das raízes com pontos de chegada e partida no eixo real. É claro que uma equação de quarta ordem ou superior pode ter múltiplas raízes complexas. Embora tal característica

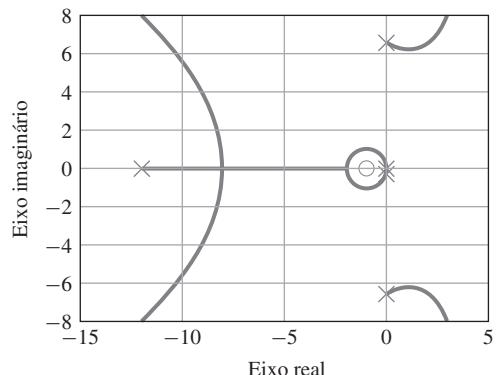


Figura 5.18 Lugar das raízes para $L(s) = \frac{s+1}{s+12} \frac{1}{s^2[(s+0,1)^2+6,6^2]}$.

de um lugar das raízes seja um evento raro, é uma curiosidade interessante ilustrada pelo próximo exemplo.

EXEMPLO 5.10 Lugar das raízes com múltiplas raízes complexas

Esboce o lugar das raízes de $1 + KL(s) = 0$, sendo

$$L(s) = \frac{1}{s(s+2)[(s+1)^2 + 4]}.$$

Solução

REGRA 1. Existem quatro ramos no lugar das raízes, todos eles se aproximam das assíntotas.

REGRA 2. O seguimento no eixo real $-2 \leq s \leq 0$ é parte do lugar das raízes.

REGRA 3. O centro das assíntotas está localizado em

$$\alpha = \frac{-2 - 1 - 1 - 0 + 0}{4 - 0} = -1$$

e os ângulos são $\phi_l = 45^\circ, 135^\circ, -45^\circ, -135^\circ$.

REGRA 4. O ângulo de partida ϕ_{dep} do polo em $s = -1 + j2$, baseado na Fig. 5.19, é

$$\begin{aligned}\phi_{\text{dep}} &= \phi_3 = -\phi_1 - \phi_2 - \phi_4 + 180^\circ \\ &= -\tan^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) - 90^\circ + 180^\circ \\ &\quad - 116,6^\circ - 63,4^\circ - 90^\circ + 180^\circ \\ &= -90^\circ.\end{aligned}$$

Podemos observar que, ao longo da linha $s = -1 + j\omega$, ϕ_2 e ϕ_1 são ângulos de um triângulo isósceles e somam 180° . Assim, a linha de um polo complexo para o outro está no lugar das raízes *neste caso especial*.

REGRA 5. Usando o MATLAB, podemos ver que existem múltiplas raízes em $s = -1 \pm 1,22j$, e ramos do lugar das raízes passam em $-1 \pm 1,22j$. Usando a Regra 5, verificamos que os segmentos do lugar das raízes partem com ângulos de 0° e 180° , como mostrado pelo MATLAB.

O lugar das raízes neste exemplo é uma transição entre dois casos: um em que os polos complexos estão à esquerda de suas posições no exemplo e aproximam-se das assíntotas em 135° , e outro em que os polos complexos estão à direita de suas posições no exemplo e aproximam-se das assíntotas em 45° .

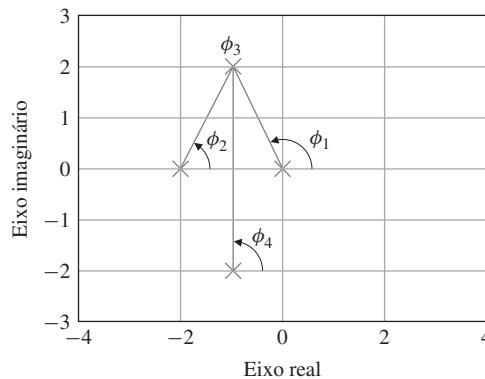
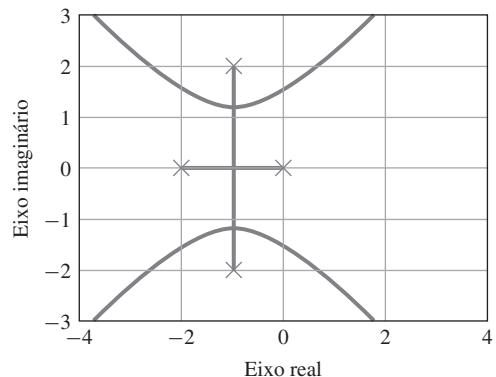


Figura 5.19 Figura para o cálculo do ângulo de partida para $L(s) = \frac{1}{s(s+2)[(s+1)^2+4]}$.

Figura 5.20 Lugar das raízes para $L(s) = \frac{1}{s(s+2)[(s+1)^2+4]}$



5.4 Projeto usando compensadores dinâmicos

O projeto de controle começa com a concepção do próprio processo. A consideração inicial de potenciais problemas de controle no projeto do processo e a seleção tanto do atuador quanto do sensor são de suma importância. Não é incomum, em um primeiro estudo de controle, sugerir que o próprio processo seja alterado, por exemplo, pela adição de amortecimento ou rigidez em uma estrutura para tornar o processo mais fácil de ser controlado. Uma vez que esses fatores sejam levados em conta, o projeto do controlador começa. Se a dinâmica do processo for de tal natureza que um projeto satisfatório não possa ser obtido apenas pelo ajuste do ganho proporcional, então alguma modificação ou compensação da dinâmica é indicada. Com a grande variedade de possíveis esquemas de compensação, três categorias foram consideradas particularmente simples e eficazes. Existem os compensadores de avanço, atraso e de rejeição de faixa (*notch*).¹⁵ **Compensador de avanço** aproxima a ação de controle PD e atua principalmente para acelerar uma resposta, diminuindo o tempo de subida e diminuindo o sobressinal. **Compensador de atraso** aproxima um controlador PI e é normalmente usado para melhorar a resposta em regime estacionário de um sistema. **Compensador de rejeição de faixa** é utilizado para estabilizar sistemas com modos flexíveis levemente amortecidos, como vimos com o controle de atitude de satélites com atuador e sensor não justapostos. Nesta seção, examinaremos técnicas para selecionar os parâmetros desses três esquemas. Compensadores de avanço, de atraso e de rejeição de faixa têm sido historicamente implementados utilizando eletrônica analógica e, portanto, eram muitas vezes referidos como redes. Atualmente, no entanto, a maioria dos novos projetos de sistemas de controle usa a tecnologia da computação digital, em que a compensação é implementada em programas computacionais. Neste caso, é preciso calcular funções de transferência discretas que sejam equivalentes às funções de transferência analógicas, conforme descrito no Capítulo 4 e discutido no Capítulo 8 e em Franklin *et al.* (1998).

O compensador com função de transferência da forma

$$D(s) = K \frac{s+z}{s+p} \quad (5.70)$$

é chamado de compensador de avanço se $z < p$, e de compensador de atraso se $z > p$. O compensador é tipicamente colocado em série com a planta em seu caminho direto, como mostrado na Fig. 5.21. Ele também pode ser colocado no caminho de realimentação e, nesta localização, ele tem o mesmo efeito sobre os polos do sistema como um todo, mas resulta em diferentes respostas transitórias. A equação característica do sistema na Fig. 5.21 é

¹⁵ Os nomes destes esquemas de compensação derivam de suas respostas em frequência, em que a saída é adiantada em relação à entrada em um caso (uma mudança de fase positiva) e é atrasada em relação à entrada em outro (uma mudança de fase negativa). Na resposta em frequência do terceiro caso, parece que um trecho da resposta foi cortado. Consulte o Capítulo 6.

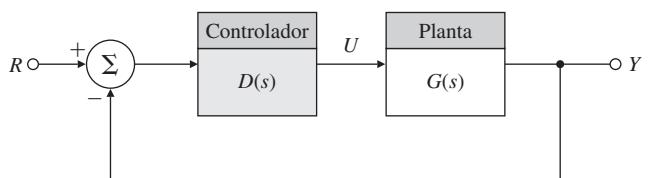


Figura 5.21 Sistema realimentado com compensador.

$$1 + D(s)G(s) = 0,$$

$$1 + KL(s) = 0,$$

sendo que K e $L(s)$ são selecionados para colocar a equação na forma apropriada para o lugar das raízes como feito anteriormente.

5.4.1 Projeto usando o compensador de avanço

Para explicar o efeito básico estabilizante do compensador de avanço em um sistema, considere inicialmente o controle proporcional $D(s) = K$. Se aplicarmos esse compensador em um sistema de controle de segunda ordem com a função de transferência normalizada

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

o lugar das raízes em relação a K é representado pela linha sólida na Fig. 5.22. Também na Fig. 5.22 é mostrado o lugar das raízes produzido pelo controle proporcional mais derivativo, sendo $D(s) = K(s+2)$. O lugar das raízes modificado é o círculo desenhado com linha tracejada. Como vimos nos exemplos, o efeito do zero é mover o lugar das raízes para a esquerda, em direção à parte mais estável do plano-s. Se, agora, a nossa especificação de velocidade de resposta exige $\omega_n \geq 2$, então o controle proporcional ($D = K$) só pode produzir um valor muito baixo de coeficiente de amortecimento ζ quando as raízes são colocadas no valor especificado de ω_n . Assim, no ganho especificado, o sobressinal será substancial. No entanto, adicionando o zero do controlador PD, podemos mover o lugar das raízes para uma posição em que as raízes de malha fechada estão em $\omega_n = 2$ e coeficiente de amortecimento $\zeta \geq 0,5$. Nós “compensamos” a dinâmica usando $D(s) = K(s+2)$.

Como observamos anteriormente, o controle derivativo puro normalmente não é prático, pois amplifica ruídos do sensor, devido à diferenciação, e precisa ser aproximado. Se o polo do compensador em avanço é posicionado fora da faixa de projeto de ω_n , então não é de se esperar uma perturbação significativa na resposta dinâmica. Por exemplo, considere o compensador em avanço

$$D(s) = K \frac{s+2}{s+p}.$$

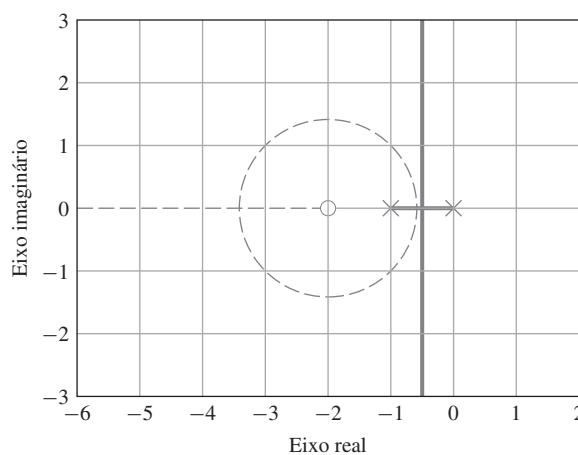


Figura 5.22 Lugares das raízes para $1 + D(s)G(s) = 0$, $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$: com compensador $D(s) = K$ (linha contínua) e com $D(s) = K(s+2)$ (linhas tracejadas).

Os lugares das raízes para dois casos com $p = 10$ e $p = 20$ são mostrados na Fig. 5.23, junto com o lugar das raízes do controle PD. O fato importante sobre estes lugares das raízes é que para pequenos ganhos, antes da verdadeira raiz partindo de $-p$ aproximar-se de -2 , os lugares das raízes com os compensadores em avanço são quase idênticos ao lugar das raízes para $D(s) = K(s + 2)$. Note-se que o efeito do polo é reduzir o amortecimento, mas para a parte inicial do lugar das raízes, o efeito da polo não é grande, se $p > 10$.

Seleção do zero e do polo de um compensador de avanço

Normalmente, a escolha dos valores de z e p na Eq. (5.70) para casos particulares é feita por tentativa e erro, o que pode ser agilizado com a experiência. Em geral, o zero é colocado na vizinhança da ω_n em malha fechada, determinada pelas especificações de tempo de subida e de acomodação, e o polo é posicionado a uma distância de 5 a 20 vezes o valor da localização zero. A escolha da localização exata do polo é um compromisso entre os efeitos contraditórios de supressão de ruído, para o qual se quer um valor pequeno de p , e eficácia da compensação, para a qual se quer um valor grande de p . Em geral, se o polo é muito próximo do zero, então, como pode ser visto na Fig. 5.23, o lugar das raízes se move para trás em direção à sua forma sem compensação e a função do zero não é bem sucedida. Por outro lado, por razões que são, talvez, mais fáceis de serem entendidas a partir da resposta em frequência, quando o polo está muito longe para a esquerda, a ampliação do ruído do sensor que aparece na saída do $D(s)$ é muito grande e o motor ou outro atuador do processo pode sobreaquecer pela energia do ruído no sinal de controle, $u(t)$. Com um grande valor de p , a compensação aproxima o controle PD puro. Um exemplo simples irá ilustrar a abordagem.

EXEMPLO 5.11 Projeto usando compensador de avanço

Encontre um compensador para $G(s) = 1/[s(s+1)]$ que resulte em um sobressinal que não seja maior que 20% e em um tempo de subida que não seja maior que 0,3 segundos.

Solução. A partir do Capítulo 3, estimamos que um coeficiente de amortecimento $\zeta \geq 0,5$ e uma frequência natural de $\omega_n \cong \frac{1.8}{0.3} \cong 6$ devem satisfazer os requerimentos. Para fornecer alguma margem de segurança, escolhemos $\zeta \geq 0,5$ e $\omega_n \geq 7$ rad/s. Considerando o lugar das raízes traçado na Fig. 5.23, considere inicialmente,

$$D(s) = K \frac{s + 2}{s + 10}.$$

A Figura 5.24 mostra que $K = 70$ irá resultar em $\zeta \geq 0,56$ e $\omega_n \geq 7,7$ rad/s, os quais satisfazem os requerimentos baseados em estimativas iniciais. O terceiro polo vai estar em $s = -2,4$ com $K = 70$. Como este terceiro polo está muito próximo do zero em -2 , o sobressinal não deve aumentar muito comparado ao caso de segunda ordem. Entretanto, a Fig. 5.25 mostra que a resposta ao degrau do sistema excede a especificação de sobressinal por um pequeno valor.

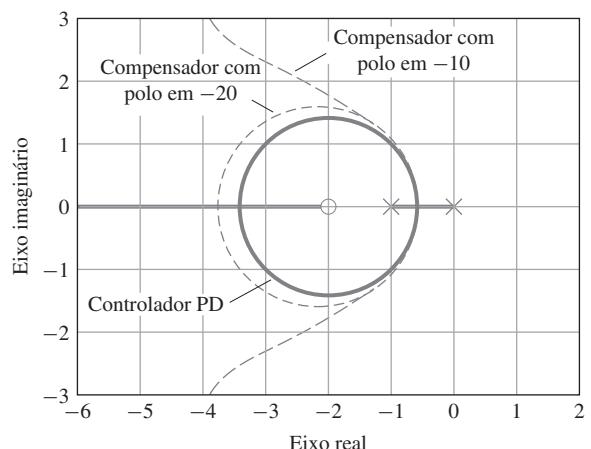


Figura 5.23 Lugares das raízes para três casos com $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$:
(a) $D(s) = \frac{(s+2)}{(s+20)}$; (b) $D(s) = \frac{(s+2)}{(s+10)}$;
(c) $D(s) = s + 2$ (linha contínua).

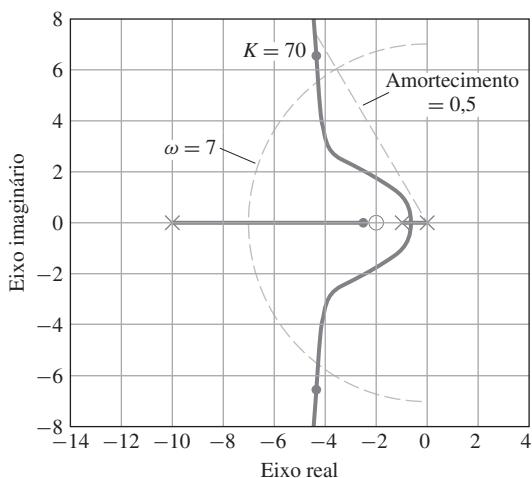


Figura 5.24 Lugar das raízes para o compensador de avanço.

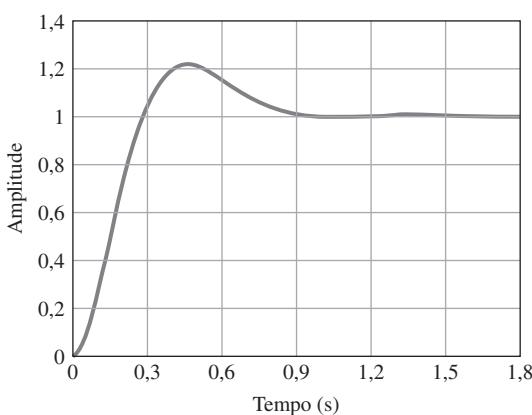


Figura 5.25 Resposta ao degrau para o Exemplo 5.11.

Normalmente, o compensador em avanço no caminho direto aumenta o sobressinal em uma resposta ao degrau em virtude do zero do compensador ter um efeito de diferenciação, como discutido no Capítulo 3. O requerimento de tempo de subida foi atingido, pois o tempo gasto para a amplitude da resposta variar de 0,1 a 0,9 é menor que 0,3 s.

Queremos ajustar o compensador para conseguir um amortecimento melhor, a fim de reduzir o sobressinal na resposta transitória. A maneira conveniente de fazer isso é usar o RLTOOL,

```
sysG = tf(1,[1 1 0]);
sysD = tf([1 2],[1 10]);
rltool(sysG,sysD)
```

Movimentando o polo do compensador de avanço mais para a esquerda a fim de puxar o lugar das raízes nesta direção

$$D(s) = 91 \frac{(s + 2)}{(s + 13)},$$

irá fornecer mais amortecimento que o projeto anterior. A Figura 5.26 mostra o lugar das raízes com as regiões no plano-s na mesma figura do RLTOOL. A resposta transitória obtida a partir do RLTOOL é mostrada na Fig. 5.27 e demonstra que a especificação de sobressinal agora é satisfeita com $M_p = 17\%$, e o tempo de subida é um pouco degradado em relação à iteração anterior, mas ainda satisfaz à especificação de 0,3 s.

Figura 5.26 Ilustração do ajuste de um compensador de avanço dinâmico usando a RLTOL.

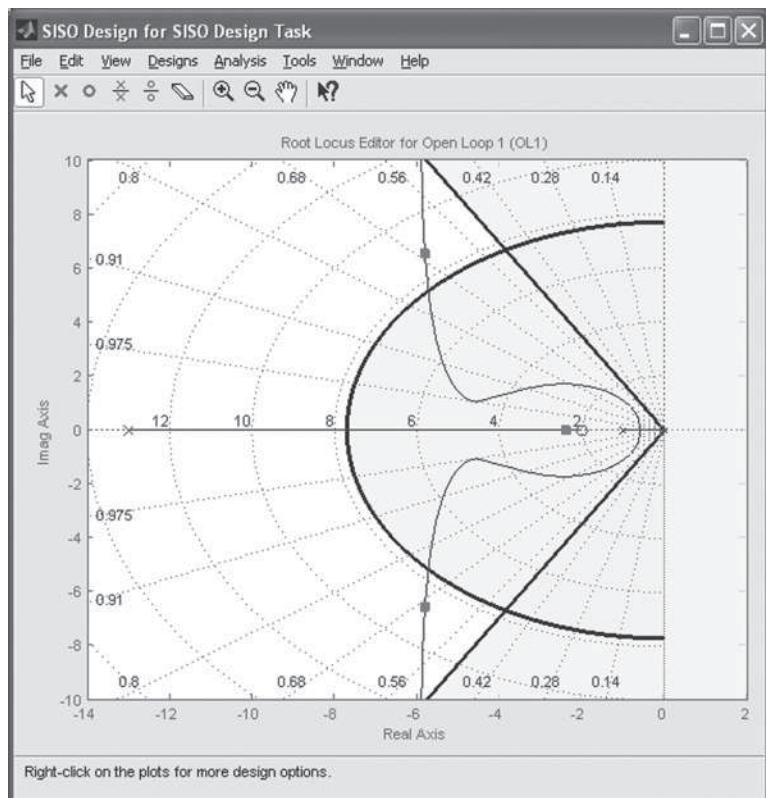
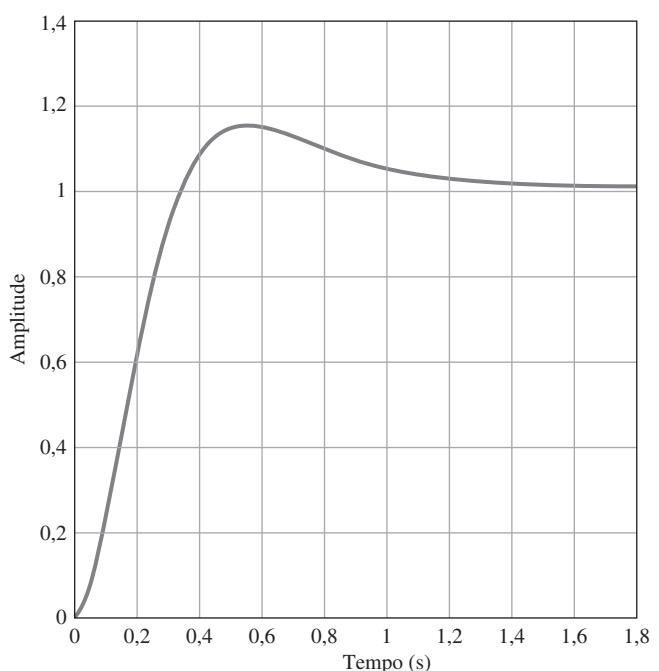


Figura 5.27 Resposta ao degrau para $K = 91$ e
 $L(s) = \frac{(s+2)}{(s+13)} \frac{1}{s(s+1)}$.



Como afirmado anteriormente, o nome *compensador de avanço* é reflexo do fato de que, para sinais senoidais, estas funções de transferência resultam em um aumento de fase. Por exemplo, a fase da Eq. (5.70) para $s = j\omega$ é dada por

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{z} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{p} \right). \quad (5.71)$$

Se $z < p$, então ϕ é positivo, o que, por definição, indica um avanço de fase. Os detalhes de projeto usando o ângulo de fase do compensador de avanço serão tratados no Capítulo 6.

5.4.2 Projeto usando o compensador de atraso

Obtida uma resposta dinâmica satisfatória, talvez usando um ou mais compensadores de avanço, podemos descobrir que o ganho para baixa frequência – o valor da constante de erro em estado estacionário relevante, como K_v – ainda é muito baixo. Como vimos no Capítulo 4, o tipo de sistema, que determina o grau do polinômio que o sistema é capaz de seguir, é determinado pela ordem do polo da função transferência $D(s)G(s)$ em $s = 0$. Se o sistema é do Tipo 1, a constante de erro de velocidade, que determina a magnitude do erro a uma entrada da rampa, é dada por $\lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s)$. Para aumentar essa constante, é necessário manter a resposta dinâmica satisfatória já obtida. Assim, queremos uma expressão para $D(s)$ que trará um ganho significativo em $s = 0$ para aumentar K_v (ou alguma outra constante erro em estado estacionário), mas que seja quase unitária (sem efeito) em alta frequência, onde a resposta dinâmica é determinada. O resultado é

$$D(s) = \frac{s + z}{s + p}, \quad z > p, \quad (5.72)$$

na qual os valores de z e p são pequenos comparados com ω_n , mas $D(0) = z/p = 3$ a 10 (o valor depende do grau em que o ganho em estado estacionário deve ser aumentado). Como $z > p$, a fase ϕ dada pela Eq. (5.71) é negativa, correspondendo a um atraso de fase. Portanto, um dispositivo com essa função de transferência é chamado de compensador de atraso.

Os efeitos do compensador de atraso na resposta dinâmica podem ser estudados olhando o lugar das raízes correspondente. Mais uma vez, consideramos $G(s) = \frac{1}{[s(s+1)]}$, incluindo o compensador de avanço $KD_1(s) = \frac{K(s+2)}{(s+13)}$ que produz o lugar das raízes na Fig. 5.26. Com o ganho de $K = 91$ do exemplo anterior, vemos que a constante de velocidade é

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sKD_1G \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s(91) \frac{s+2}{s+13} \frac{1}{s(s+1)} \\ &= \frac{91 * 2}{13} = 14. \end{aligned}$$

Um exemplo de compensador de atraso

Suponha que exigimos $K_v = 70$. Para obter isso, precisamos de um compensador de atraso com $z/p = 5$, a fim de aumentar a constante de erro velocidade por um fator de 5. Isso pode ser feito com um polo em $p = -0,01$ e um zero em $z = -0,05$, o que mantém os valores de z e p muito pequenos para que $D_2(s)$ tenha pouco efeito sobre a região no lugar das raízes que representa a dinâmica dominante em torno $\omega_n = 7$. O resultado é um compensador com a função de transferência $D_2(s) = \frac{(s+0,05)}{(s+0,01)}$. O lugar das raízes com ambos os compensadores é apresentado na Fig. 5.28, e vemos que, em grande escala, à esquerda, não se nota diferença em relação à Fig. 5.26. Este foi o resultado da seleção de valores muito pequenos para o polo e zero. Com $K = 91$, as raízes dominantes estão em $-5,8 \pm j6,5$. O efeito do compensador de atraso pode ser visto através da expansão da região no lugar das raízes em torno da origem, como mostrado no lado direito da Fig. 5.28. Aqui, podemos ver o lugar geométrico circular que é um resultado do polo e zero pequenos. Uma raiz de malha fechada continua muito perto do zero do compensador de atraso em $-0,05 + 0j$; portanto, a resposta transitória correspondente a esta raiz vai ser um termo com decaimento muito lento, que terá uma magnitude pequena, pois o zero quase cancela o polo na função de transferência. Ainda assim, o decaimento é tão lento que este termo pode influenciar seriamente o tempo de acomodação. Além disso, o zero *não* vai estar presente na resposta ao degrau para um torque de perturbação, e o transiente lento será muito mais evi-

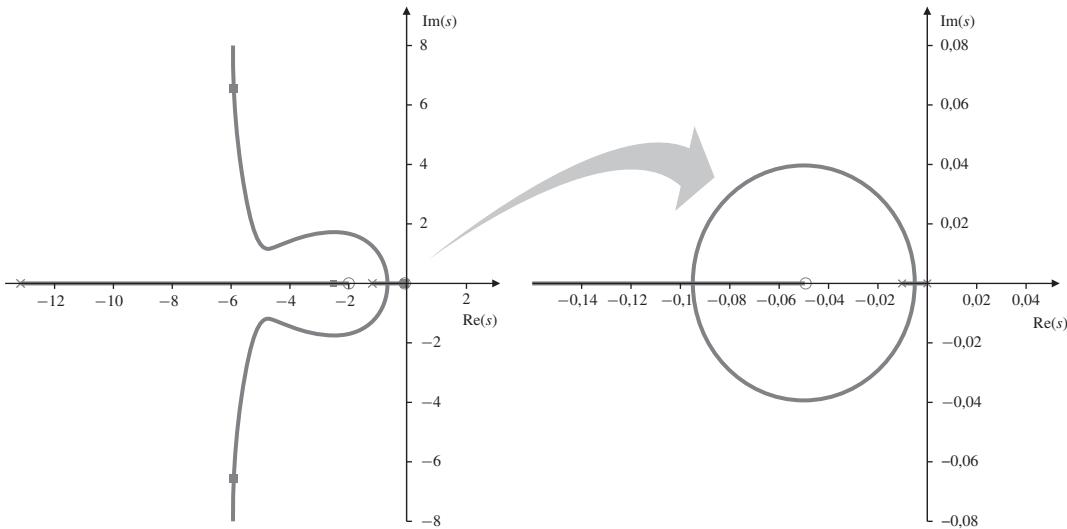


Figura 5.28 Lugar das raízes com os compensadores de atraso e de avanço.

dente. Devido a este efeito, é importante posicionar a combinação polo-zero tão alta quanto possível, sem causar grandes mudanças na região dominante do lugar das raízes.

5.4.3 Projeto usando o compensador de rejeição de faixa

Suponha que o projeto tenha completado com o compensador de atraso e avanço dado por

$$KD(s) = 91 \frac{s + 2}{s + 13} \frac{s + 0,05}{s + 0,01}, \quad (5.73)$$

mas quando testado, notou-se uma grande oscilação em torno de 50 rad/s, devido à existência de uma insuspeita flexibilidade do tipo não justaposto na frequência natural de $\omega_n = 50$. Feito o ajuste necessário, a função de transferência da planta, incluindo o efeito da flexibilidade, é estimada como

$$G(s) = \frac{2500}{s(s + 1)(s^2 + s + 2500)}. \quad (5.74)$$

Um engenheiro mecânico afirma que o controle tem alterado excessivamente o amortecimento do modo flexível. Em outras palavras, como vimos a partir do sistema semelhante, cujo lugar das raízes é mostrado na Fig. 5.18, as raízes levemente amortecidas em 50 rad/s se tornaram ainda menos amortecidas ou talvez instáveis devido à realimentação. O melhor método para corrigir esta situação é modificar a estrutura para que haja um aumento no amortecimento mecânico. Infelizmente, isso nem sempre é possível, porque este problema é encontrado muito tarde na etapa de projeto. Se não for possível, de que outra forma esta oscilação pode ser corrigida? Há pelo menos duas possibilidades. Adicionar mais um compensador de atraso para diminuir o ganho de malha suficientemente para que a oscilação seja eliminada. Reduzir o ganho em alta frequência é chamado de **ganho de estabilização**. Se o tempo de resposta resultante a partir do ganho de estabilização for muito longo, uma segunda alternativa é adicionar um zero perto da ressonância, de modo a mudar os ângulos de partida dos polos de ressonância para que as raízes de malha fechada passem para o SPE, fazendo eliminar o transiente associado. Esta abordagem é chamada de **estabilização de fase** e sua ação é semelhante à da flexibilidade no controle de movimento justaposto discutido anteriormente. Estabilização de ganho e fase são explicados mais precisamente por seus efeitos na resposta em frequência (Capítulo 6), no qual esses métodos de estabilização serão mais bem discutidos. Para a estabilização de fase, o

resultado é chamado de compensador de rejeição de faixa (notch), e um exemplo tem a função de transferência

$$D_{notch}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2}{(s + \omega_o)^2}. \quad (5.75)$$

Uma decisão necessária para o projeto é selecionar onde colocar a frequência de rejeição acima ou abaixo da ressonância natural da flexibilidade a fim de obter a fase necessária. Uma verificação do ângulo de partida mostra que, com a planta compensada pela Eq. (5.73) e o compensador de rejeição como dado, é necessário colocar a frequência de rejeição *acima* da ressonância para obter um ângulo de saída apontando para o SPE. Assim, a compensação adicionada tem a função de transferência

$$D_{notch}(s) = \frac{s^2 + 0,8s + 3600}{(s + 60)^2}. \quad (5.76)$$

O ganho do compensador em $s = 0$ foi mantido em 1 de modo a não alterar o K_v . O novo lugar das raízes é mostrado na Fig. 5.29 e a resposta ao degrau é mostrada na Fig. 5.30. Note, da resposta ao degrau, que as oscilações são bem amortecidas, a especificação de tempo de subida é satisfeita, mas o sobressinal aumentou. Para retificar o sobressinal e atender rigorosamente a todas as especificações, uma nova iteração deve ser realizada a fim de proporcionar um maior amortecimento nas raízes rápidas nas proximidades de $\omega_n = 7$ rad/s.

Ao considerar a rejeição de faixa ou a estabilização de fase, é importante compreender que seu sucesso depende da manutenção da fase correta na frequência de ressonância. Se esta frequência está sujeita a alterações significativas, como é comum em muitos casos, então a frequência de rejeição precisa ser posicionada longe o suficiente da frequência nominal, a fim de funcionar para todos os casos. Como regra geral, a estabilização de ganho é substancialmente mais robusta a mudanças na planta do que a estabilização de fase.

5.4.4 Implementação analógica e digital

Compensador de avanço pode ser realizado de duas maneiras. Em eletrônica analógica, um método comum é usar um amplificador operacional, cujo exemplo está mostrado na Fig. 5.31.

Compensador de avanço pode ser implementado usando eletrônica analógica, mas computadores digitais são preferidos.

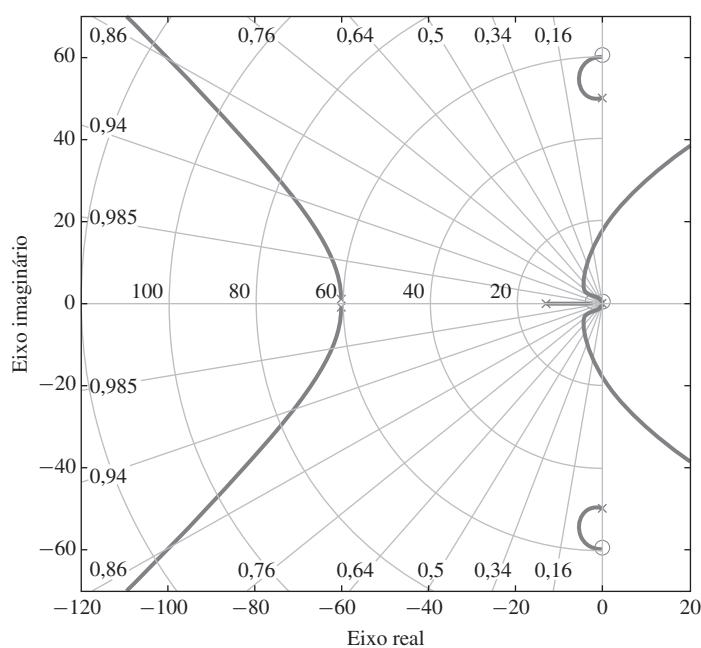
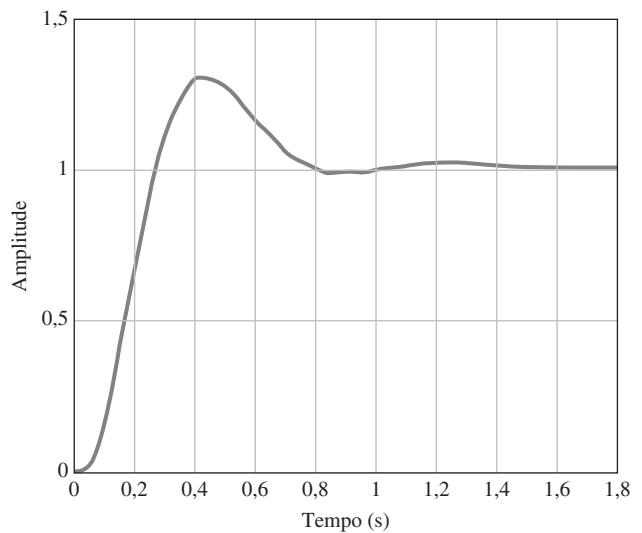


Figura 5.29 Lugar das raízes com os compensadores de avanço, de atraso e de rejeição.

Figura 5.30 Resposta ao degrau com os compensadores de avanço, de atraso e de rejeição.



A função de transferência do circuito na Fig. 5.31 é facilmente encontrada pelos métodos do Capítulo 2 como sendo

$$D_{avanç}o(s) = -a \frac{s+z}{s+p}, \quad (5.77)$$

sendo

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{z}, \quad \text{se } R_f = R_1 + R_2, \\ z &= \frac{1}{R_1 C}, \\ p &= \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{1}{R_1 C}. \end{aligned}$$

Se o projeto de $D(s)$ estiver completo e se for desejado implementá-lo de forma digital, então a técnica do Capítulo 4 pode ser usada selecionando um período de amostragem T_s e então fazendo a substituição de $\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$ por s . Por exemplo, considere o compensador de avanço $D(s) = \frac{s+2}{s+13}$. Escolhendo o período de amostragem como um sexto do tempo de subida, como o tempo de subida é aproximadamente 0,3, temos $T_s = 0,05$ s. Com a substituição de $\frac{2}{0,05} \frac{z-1}{z+1}$ por s na função de transferência, temos a função de transferência discreta

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{E(z)} &= \frac{40 \frac{z-1}{z+1} + 2}{40 \frac{z-1}{z+1} + 13} \\ &= \frac{1,55z - 1,4}{1,96z - 1}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Usando a operação no domínio do tempo $zu(kT_s) = u(kT_s + T_s)$, vemos que a Eq. (5.78) é equivalente à fórmula do controlador dada por

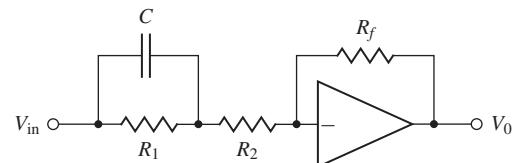


Figura 5.31 Possível circuito para um compensador de avanço.

$$u(kT_s + T_s) = \frac{1}{1,96}u(kT_s) + \frac{1,55}{1,96}e(kT_s + T_s) - \frac{1,4}{1,96}e(kT_s). \quad (5.79)$$

Os comandos no MATLAB para gerar o controlador equivalente discreto são

```
sysC = tf([1 2],[1 13]);
sysD = c2D(sysC,0.05);
```

A Fig. 5.32 apresenta o diagrama no SIMULINK para a implementação digital do controlador. O resultado da simulação é apresentado na Fig. 5.33, a qual compara as respostas com os controladores analógico e digital, e na Fig. 5.34, que apresenta os sinais de controle dos controladores analógico e digital.

Como os compensadores de avanço, os de atraso ou de rejeição de faixa podem ser implementados usando um computador digital e seguindo o mesmo procedimento. No entanto, eles também podem ser implementados utilizando eletrônica analógica, e um circuito de uma rede de atraso é dado na Fig. 5.35. A função de transferência desse circuito pode ser obtida como

$$D(s) = -a \frac{s+z}{s+p},$$

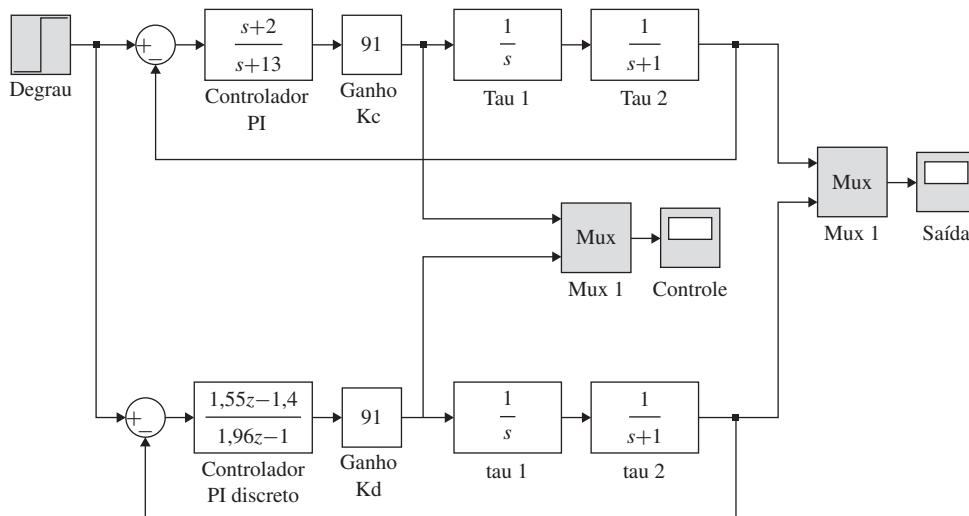


Figura 5.32 Diagrama no SIMULINK para a comparação dos controles digital e analógico.

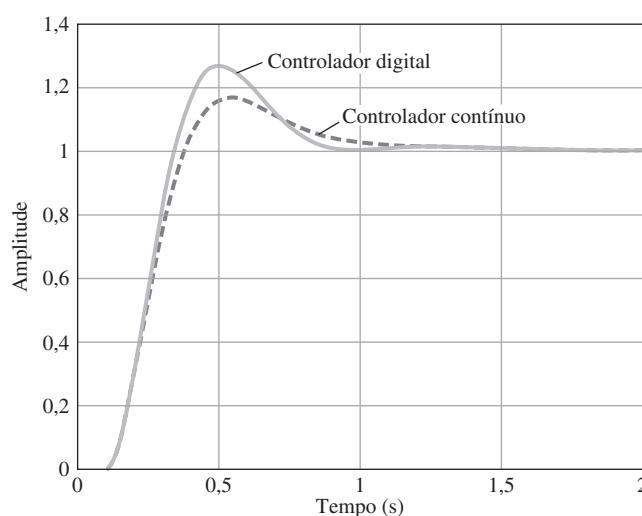


Figura 5.33 Comparação das respostas com os controladores analógico e digital.

Figura 5.34 Comparação dos sinal de controle dos controladores analógico e digital.

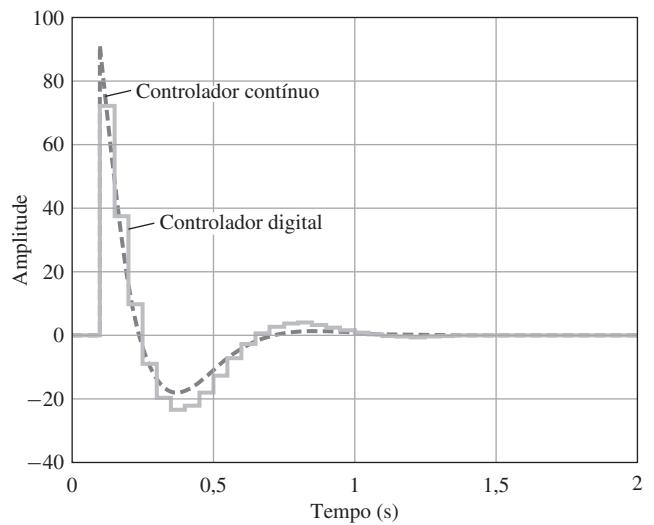
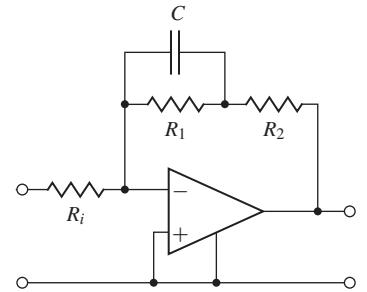


Figura 5.35 Possível circuito para o compensador de atraso.



sendo

$$\begin{aligned} a &= \frac{R_2}{R_i}, \\ z &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}, \\ p &= \frac{1}{R_1 C}. \end{aligned}$$

Geralmente, $R_i = R_2$, assim, o ganho de alta frequência é unitário, ou $a = 1$, e o ganho de baixa frequência é aumentado melhorando K_v , ou outra constante de erro é feita como $k = a \frac{z}{p} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$.

5.5 Um exemplo de projeto usando o lugar das raízes

EXEMPLO 5.12 Controle de um avião pequeno

Para o Dakota Piper mostrado na Fig. 5.36, a função de transferência entre o profundor e a altitude de inclinação é

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{160(s + 2,5)(s + 0,7)}{(s^2 + 5s + 40)(s^2 + 0,03s + 0,06)}, \quad (5.80)$$

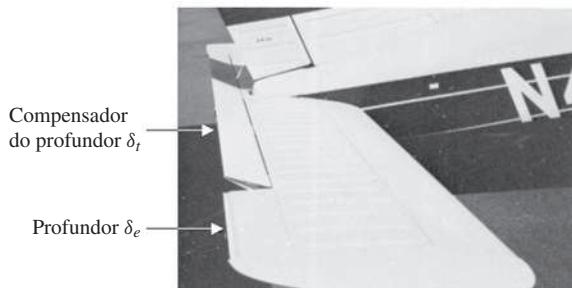
sendo

θ = ângulo de inclinação em graus (veja a Fig. 10.30),

δ_e = ângulo do profundor



(a)



(b)

Figura 5.36 Projeto de piloto automático no Piper Dakota, mostrando o profundor e o compensador do profundor.

Fonte: foto cortesia de Denise Freeman.

(Para uma discussão mais detalhada sobre o movimento longitudinal de aeronaves, veja a a Seção 10.3.)

1. Projete um piloto automático para que a resposta a uma entrada em degrau no profundor tenha um tempo de subida de 1 s ou menos e um sobressinal menor que 10%.
2. Quando há um distúrbio de momento constante atuando na aeronave e o piloto deve fornecer uma força constante sobre os controles para um voo estável, diz-se estar sem compensação. A função de transferência entre o distúrbio de momento e a atitude é a mesma em virtude do profundor; ou seja,

$$\frac{\theta(s)}{M_d(s)} = \frac{160(s + 2,5)(s + 0,7)}{(s^2 + 5s + 40)(s^2 + 0,03s + 0,06)}, \quad (5.81)$$

sendo M_d o momento atuando na aeronave. Existe uma superfície aerodinâmica separada para compensação, δ_t , que pode ser acionada para alterar o momento sobre o avião. A cauda do avião é mostrada em detalhe na Fig. 5.36. Sua influência é representada no diagrama de blocos mostrado na Fig. 5.37(a). Para ambos os voos, manual e automático, é desejável ajustar o compensador (trim) de modo que não haja esforço de controle exigido em regime permanente do profundor (que é, então, $\delta_e = 0$). No voo manual, isso significa que nenhuma força é exigida para o piloto manter o avião a uma altitude constante, enquanto que no piloto automático, o controle significa reduzir a quantidade de energia elétrica necessária no servomotor que conduz o profundor. Projete um piloto automático para comandar o profundor δ_t de modo a impulsionar o valor de estado estacionário de δ_e de zero para um momento constante arbitrário M_d , bem como para atender às especificações do item (a).

Solução

1. Para satisfazer à especificação de tempo de subida $t_r \leq 1$ s, a Eq. (3.60) indica que ω_n , para o caso ideal de segunda ordem, deve ser maior que 1,8 rad/s. Para fornecer um sobressinal

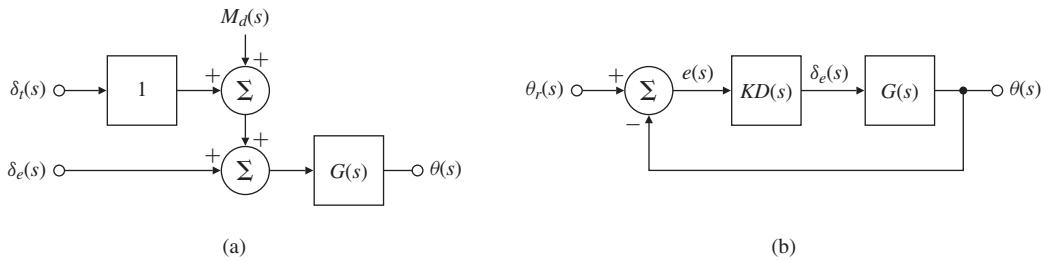


Figura 5.37 Diagrama de blocos para o projeto do piloto automático: (a) malha aberta; (b) esquema realimentado excluindo o compensador do profundo.

menor que 10%, a Fig. (3.23) indica que ζ deve ser maior que 0,6, novamente, para o caso ideal de segunda ordem. No processo de projeto, podemos examinar um lugar das raízes para um compensador candidato de realimentação e, em seguida, olhar a resposta temporal que resulta quando as raízes parecem satisfazer às diretrizes de projeto. No entanto, uma vez que este é um sistema de quarta ordem, as diretrizes de projeto podem não ser suficientes ou podem ser excessivamente restritivas.

Para iniciar o processo de projeto, muitas vezes é instrutivo olhar para as características do sistema com realimentação proporcional, isto é, onde $D(s) = 1$ na Fig. 5.37(b). Os comandos no MATLAB para criar um lugar das raízes com relação a K e a resposta temporal para o caso de realimentação proporcional com $K = 0,3$ são:

```
numG = 160*conv([1 2.5],[1 0.7]);
denG = conv([1 5 40],[1 0.03 0.06]);
sysG = tf(numG,denG);
rlocus(sysG)
K = 0.3
sysL = K*sysG
sysH = tf(1,1);
[sysT] = feedback(sysL,sysH)
step(sysT)
```

O lugar das raízes e a resposta temporal resultantes são mostrados com linhas tracejadas nas Figs. 5.38 e 5.39. Note que, a partir da Fig. 5.38, as duas raízes mais rápidas sempre terão um coeficiente de amortecimento ζ que é menor que 0,4; portanto, a realimentação proporcional não será aceitável. Além disso, as raízes mais lentas têm algum efeito sobre a resposta temporal mostrada na Fig. 5.39 (curva tracejada), com $K = 0,3$, causando um longo tempo de acomodação. No entanto, o comportamento nos primeiros segundos é a característica dominante da resposta que determina se a compensação atende às especificações, o que é imposto pelas raízes rápidas. O amortecimento baixo das raízes rápidas faz com que a resposta temporal seja oscilatória, o que leva a um sobressinal excessivo e a um tempo de acomodação maior que o especificado.

Vimos na Seção 5.4.1 que o compensador de avanço faz com que o lugar das raízes se move para a esquerda; aqui, esta é uma mudança necessária para aumentar o amortecimento. Algumas tentativas e erros serão necessários para se chegar às posições adequadas para o zero e polo. Valores de $z = 3$ e $p = 20$ na Eq. (5.70) têm um efeito substancial para movimentar os ramos rápidos do lugar das raízes para a esquerda, assim

$$D(s) = \frac{s + 3}{s + 20}.$$

Tentativas e erros também são necessários para se chegar a um valor de K que atenda às especificações. Os comandos no MATLAB para adicionar essa compensação são

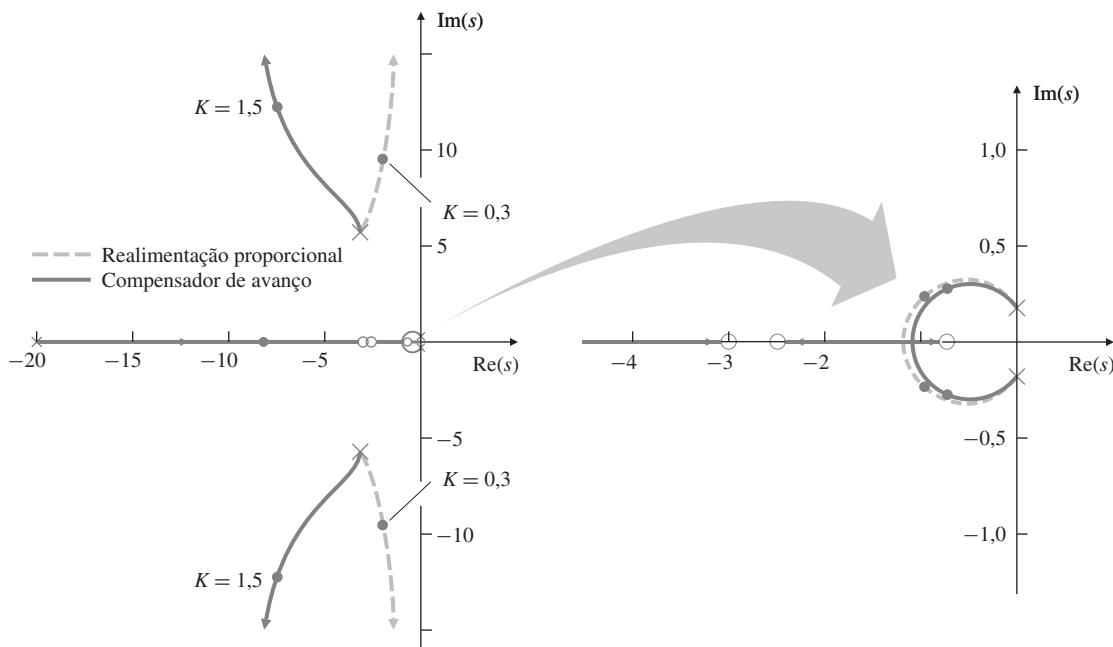


Figura 5.38 Lugar das raízes para o projeto do piloto automático.

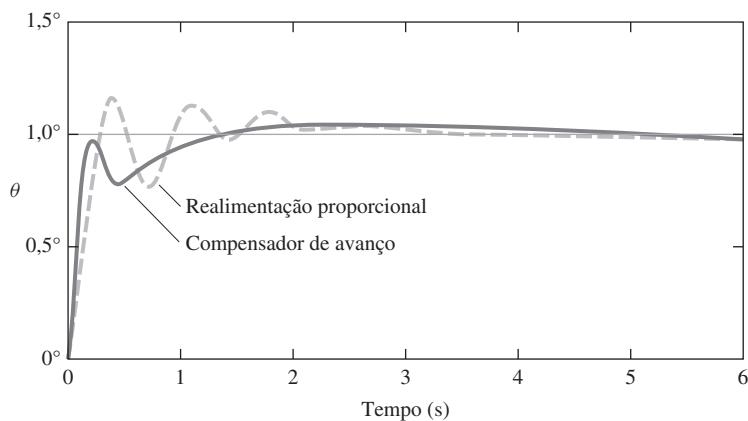


Figura 5.39 Respostas temporais do piloto automático.

```

numD = [1 3];
denD = [1 20];
sysD = tf(numD,denD);
sysDG= sysD*sysG
rlocus(sysDG)
K= 1.5;
sysKDG= K*sysDG;
sysH= tf(1,1)
sysT= feedback(sysKDG,sysH)
step(sysT)

```

O lugar das raízes para este caso e a resposta temporal correspondente também são mostrados nas Figs. 5.38 e 5.39 por linhas contínuas. Note que o amortecimento das raízes rápidas que correspondem a $K = 1,5$ é $\zeta = 0,52$ ligeiramente menor do que gostaríamos; além disso, a frequência natural é $\omega_n = 15$ rad/s, muito mais rápida do que precisamos. No entanto, estes valores estão próximos o suficiente para satisfazer às diretrizes de projeto,

sugerindo verificar a resposta temporal. Na verdade, a resposta temporal mostra que $t_r \cong 4.9$ s e $M_p \cong 8\%$, dentro das especificações, embora por uma margem muito pequena.

Em suma, o primeiro passo do projeto consistiu em ajustar a compensação para influenciar as raízes rápidas, examinando seus efeitos sobre a resposta temporal e continuando as iterações de projeto até que as especificações de tempo estivessem satisfeitas.

- O objetivo do dispositivo de compensação da aeronave é proporcionar um momento que vai eliminar um valor em estado estacionário diferente de zero do profundo. Portanto, se integrar o δ_e de comando do profundo e alimentar o dispositivo de compensação com este resultado, o compensador deve proporcionar o momento necessário para manter uma altitude arbitrária, eliminando, assim, a necessidade de um estado estacionário δ_e . Esta ideia é mostrada na Fig. 5.40(a). Se o ganho do termo integral K_I é pequeno, o suficiente, o efeito desestabilizador de adicionar o integrador deve ser pequeno, e o sistema deve se comportar aproximadamente como antes, uma vez que a realimentação foi deixada intacta. Com o propósito de análise o diagrama de blocos na Fig. 5.40(a) pode ser reduzido àquele na Fig. 5.40(b) com o compensador incluindo o termo PI da forma

$$D_I(s) = KD(s) \left(1 + \frac{K_I}{s} \right).$$

No entanto, é importante manter em mente que, fisicamente, haverá duas saídas da compensação: δ_e (usada pelo servomotor do profundo) e δ_t (usada pelo servomotor do compensador do profundo).

A equação característica do sistema com o termo integral é

$$1 + KDG + \frac{K_I}{s} KDG = 0.$$

Para auxiliar no processo de projeto, é desejável encontrar o lugar das raízes em relação a K_I , mas a equação característica não está em qualquer uma das formas dadas pelas Eqs. (5.6)-(5.9). Portanto, dividindo por $1 + KDG$, temos

$$1 + \frac{(K_I/s) KDG}{1 + KDG} = 0.$$

Para colocar o sistema na forma do lugar das raízes, definimos

$$L(s) = \frac{1}{s} \frac{KDG}{1 + KDG}. \quad (5.82)$$

No MATLAB, com $\frac{KDG}{1+KGD}$ já computado como `sysT`, construímos o integrador como `sysIn = tf(1,[1 0])`, o ganho de malha do sistema em relação a K_I como `sysL = sysIn*sysT` e o lugar das raízes com relação a K_I é encontrado usando o comando `rltool(sysL)`.

Pode-se ver a partir do lugar das raízes, na Fig. 5.41, que o amortecimento das raízes rápidas diminui com o aumento K_I , o caso típico quando o controle integral é adicionado. Isto

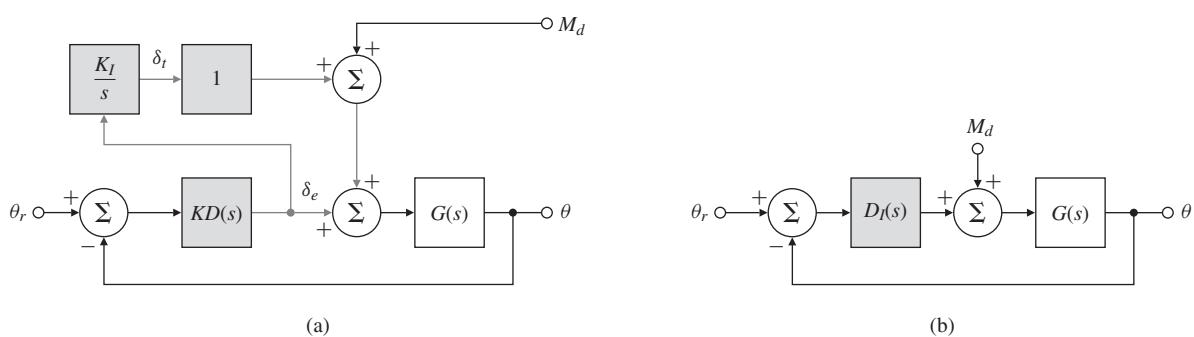


Figura 5.40 Diagrama de blocos apresentando o compensador do profundo.

mostra a necessidade de manter o valor de K_I tão baixo quanto possível. Depois de algumas tentativas e erros, é selecionado $K_I = 0,15$. Este valor tem pouco efeito sobre as raízes – note as raízes estão praticamente “em cima” das raízes anteriores obtidas sem o termo integral – e pouco efeito sobre o comportamento de curto prazo da resposta ao degrau, como mostrado na Fig. 5.42(a); então, as especificações continuam a ser atendidas. $K_I = 0,15$ faz com que a atitude de longo prazo se aproxime do valor de referência sem erro, como seria de se esperar com o controle integral. Isto também faz com que δ_e se aproxime de zero [a Fig. 5.42(b) mostra que o tempo de acomodação é aproximadamente 30 s], o que é a boa razão de se considerar em primeiro lugar o controle integral. O tempo para o termo integral encontrar o valor correto é previsto pela nova raiz lenta, que é adicionada pelo termo integral em $s = -0,14$. A constante de tempo associada a esta raiz é $\tau = 1/0,14 = 7$ s. O tempo de acomodação, considerando 1% para uma raiz com $\sigma = 0,14$, é mostrado pela Eq. (3.65) como sendo $t_s = 33$ s, o que está de acordo com o comportamento na Fig. 5.42(b).

5.6 Extensões do método do lugar das raízes

Como vimos neste capítulo, a técnica do lugar das raízes é um esquema gráfico para mostrar as localizações das possíveis raízes de uma equação algébrica quando um único parâmetro real varia. O método pode ser estendido para considerar valores negativos do parâmetro, uma consideração sequencial de mais de um parâmetro e sistemas com retardo no tempo. Nesta seção, vamos examinar essas possibilidades. Outra extensão interessante para sistemas não lineares está no Capítulo 9.

5.6.1 Regras para esboçar um lugar das raízes negativo (0°)

Vamos considerar agora modificar o procedimento do lugar das raízes para permitir a análise dos valores negativos do parâmetro. Em vários casos importantes, a função de transferência da planta tem um zero no SPD e é dito ser de fase não mínima. O resultado é geralmente um lugar das raízes da forma $1 + A(z_i - s)G'(s) = 1 + (-A)(s - z_i)G'(s) = 0$, e na forma padrão, o pa-

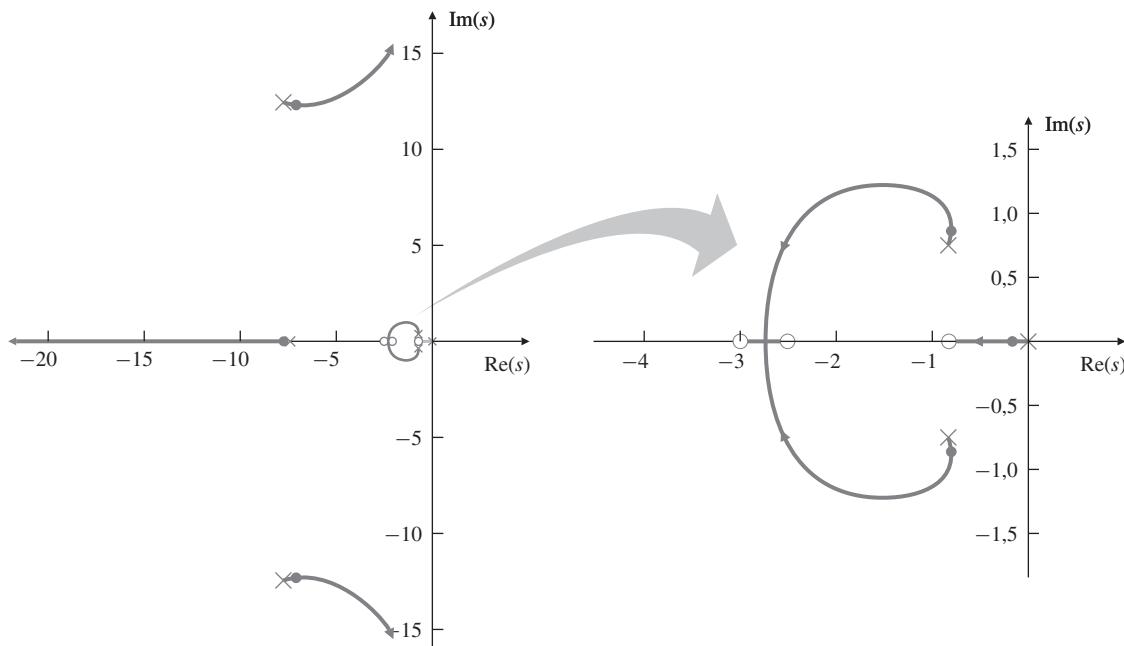
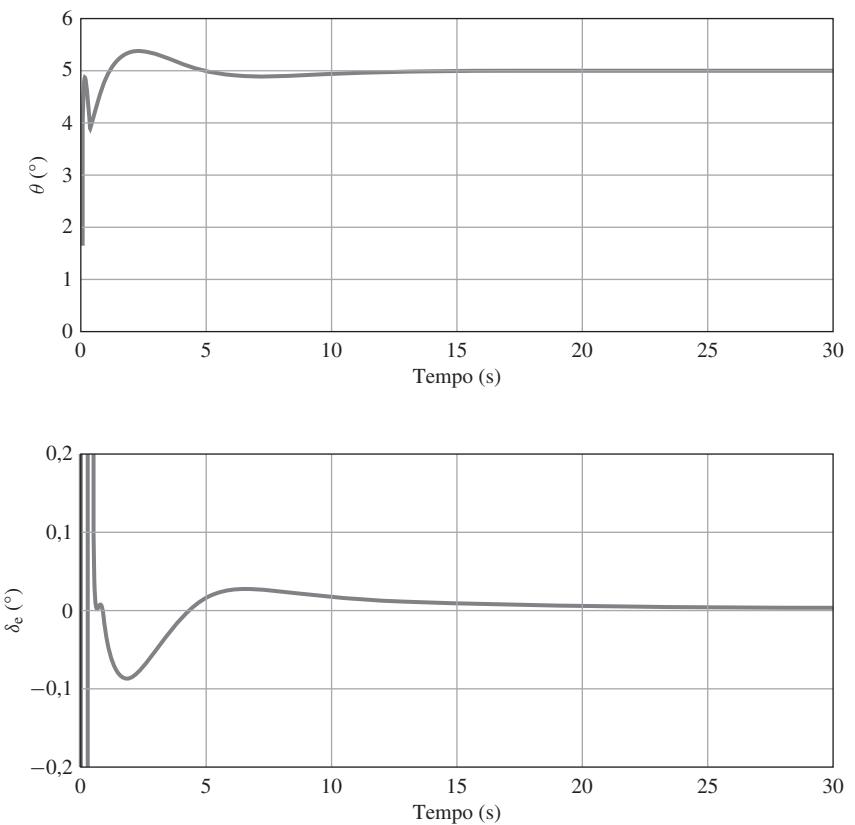


Figura 5.41 Lugar das raízes em relação a K_I : assume a adição de um termo integral e do compensador em avanço com um ganho $K = 1,5$; as raízes para $K_I = 0,15$ são marcadas com •.

Figura 5.42 Resposta ao degrau para o caso com um termo integral e comando de 5° .



râmetro $K = -A$ deve ser negativo. Outra questão importante para a compreensão do lugar das raízes negativo está na construção de um sistema de controle. Em qualquer implementação física de um sistema de controle, há inevitavelmente uma série de amplificadores e componentes cujo sinal do ganho deve ser selecionado. Pela Lei de Murphy¹⁶, quando a malha for fechada, o sinal vai estar errado e o comportamento será inesperado, a menos que o engenheiro entenda como a resposta vai ser se o ganho for positivo em vez de negativo.

Então, quais são as regras para o lugar das raízes negativo (lugar das raízes em relação a um parâmetro negativo)? Em primeiro lugar, as Eqs.(5.6) – (5.9) devem ser satisfeitas para valores negativos de K , o que implica que $L(s)$ é real e *positivo*. Em outras palavras, para o lugar das raízes negativo, a condição de fase é

Definição do lugar das raízes negativo

O ângulo de $L(s)$ é $0^\circ + 360^\circ(l - 1)$ para s no lugar das raízes negativo.

Os passos para traçar um lugar das raízes negativo são essencialmente os mesmos que para o lugar das raízes positivo, exceto o fato de procurar lugares onde o ângulo de $L(s)$ é $0^\circ + 360^\circ(l - 1)$ em vez de $180^\circ + 360^\circ(l - 1)$. Por esta razão, um lugar das raízes negativo é também referido como um lugar das raízes 0° . Dessa vez, descobrimos que o lugar está à esquerda de um número par de polos mais zeros reais. O cálculo das assíntotas para grandes valores de s é, como antes, dado por

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}, \quad (5.83)$$

mas os ângulos são modificados

¹⁶ Qualquer coisa que *pode* dar errado, *vai* dar errado.

$$\phi_l = \frac{360^\circ(l-1)}{n-m}, l = 1, 2, 3, \dots, n-m$$

(deslocado por $\frac{180^\circ}{(n-m)}$ do lugar das raízes de 180°). A seguir, estão as diretrizes para traçar o lugar das raízes de 0° :

REGRA 1. (Como antes) Os n ramos do lugar das raízes partem dos polos, e m destes ramos se aproximam dos zeros, e $n-m$ se aproximam das assíntotas no infinito.

REGRA 2. O lugar das raízes no eixo real está à esquerda de um número par de polos e zeros.

REGRA 3. As assíntotas são descritas por

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{-a_1 + b_1}{n-m},$$

$$\phi_l = \frac{360^\circ(l-1)}{n-m}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, n-m.$$

Observe que a condição de ângulo aqui é medida a partir 0° em vez de 180° como no lugar das raízes positivo.

REGRA 4. Os ângulos de partida dos polos e os ângulos de chegada nos zeros são encontrados por meio da análise na vizinhança próxima do polo ou zero, onde a fase de $L(s)$ é 0° , para que

$$q\phi_{\text{dep}} = \sum \psi_i - \sum \phi_i - 360^\circ(l-1),$$

$$q\psi_{\text{arr}} = \sum \phi_i - \sum \psi_i + 360^\circ(l-1),$$

onde q é a ordem do polo ou zero e l assume valores para os q inteiros tal que os ângulos estejam entre $\pm 180^\circ$.

REGRA 5. O lugar das raízes pode ter múltiplas raízes em determinados pontos, e os ramos se aproximam a um ponto de q raízes em ângulos separados por

$$\frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{q}$$

e partem em ângulos com a mesma separação.

O resultado de estender as diretrizes para a construção do lugar das raízes incluindo parâmetros negativos é que podemos visualizar o lugar das raízes como um conjunto de curvas contínuas mostrando a localização de possíveis soluções da equação $1 + KL(s) = 0$ para *todos os valores reais de K*, tanto positivos quanto negativos. Um ramo do lugar das raízes se afasta de um polo em uma direção para valores positivos de K , e um outro ramo de afasta do mesmo polo em outra direção para valores negativos de K . Da mesma forma, todos os zeros terão dois ramos chegando neles, um relacionado com valores positivos de K e outro, com valores negativos de K . Para os outros $n-m$ polos, haverá $2(n-m)$ ramos do lugar das raízes se aproximando assintoticamente ao infinito, enquanto K se aproxima ao infinito nos sentidos negativo e positivo. Para um único polo ou zero, os ângulos de partida ou de chegada para os dois ramos do lugar das raízes serão separados por 180° . Para um polo ou zero duplo, os dois ramos positivos serão separados por 180° e os dois ramos negativos serão separados por 90° dos ramos positivos.

O lugar das raízes negativo é muitas vezes necessário quando se estuda uma função de transferência de fase não mínima. Um exemplo bem conhecido é o de controle de nível de líquido na caldeira de vapor. Se o nível for muito baixo, a válvula de atuador acrescenta (relativamente) água fria à água fervendo no reservatório. O efeito inicial da adição é diminuir a taxa de ebulação, o que reduz o número e o tamanho das bolhas e causa o decaimento do nível momentaneamente, antes que o novo nível aumente. Este sistema de nível é um exemplo típico de sistemas de fase não mínima. Outra função de transferência típica de fase não mínima é a do controle de altitude de um avião. Para fazer a subida do avião, a deflexão para cima dos profundores, inicialmente, faz com que o avião desça antes de subir. Um Boeing 747 neste modo pode ser descrito pela função de transferência escalonada e normalizada

$$G(s) = \frac{6-s}{s(s^2 + 4s + 13)}. \quad (5.84)$$

Para colocar $1 + KG(s)$ na forma do lugar das raízes, precisamos multiplicá-la por -1 , obtendo

$$G(s) = -\frac{s-6}{s(s^2 + 4s + 13)}. \quad (5.85)$$

EXEMPLO 5.13 Lugar das raízes negativo para um avião

Esoce o lugar das raízes negativo para a equação

$$1 + K \frac{s-6}{s(s^2 + 4s + 13)} = 0. \quad (5.86)$$

Solução.

REGRA 1. O lugar das raízes tem três ramos e duas assíntotas.

REGRA 2. Os trechos do eixo real à direita de $s = 6$ e à esquerda de $s = 0$ pertencem ao lugar das raízes.

REGRA 3. Os ângulos das assíntotas são $\phi_l = \frac{(l-1)360^\circ}{2} = 0^\circ, 180^\circ$ e o centro das assíntotas é $\alpha = \frac{-2-2-(6)}{3-1} = -5$.

REGRA 4. O ramo parte do polo em $s = -2 + j3$ no ângulo

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\left(\frac{3}{-8}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3}{-2}\right) - 90^\circ + 360^\circ(l-1), \\ \phi &= 159,4 - 123,7 - 90 + 360^\circ(l-1), \\ \phi &= -54,3^\circ.\end{aligned}$$

O lugar das raízes é traçado na Fig. 5.43 pelo MATLAB, o qual é consistente com os estes valores.

Δ 5.6.2 Considerando dois parâmetros

Uma importante técnica para o controle prático é considerar uma estrutura com duas malhas, uma malha interna em torno do atuador ou parte da dinâmica do processo e uma malha externa em torno da planta inteira. O processo é chamado de **malha fechada sucessiva**. O controlador para a malha interna é selecionado para ser robusto e dar boa resposta sozinho e, então, a malha externa pode ser projetada para ser mais simples e mais eficaz do que se todo o controle fosse feito sem o auxílio da malha interna. O uso do lugar das raízes para estudar tal sistema com dois parâmetros pode ser ilustrado por um exemplo simples.

Malha fechada sucessiva

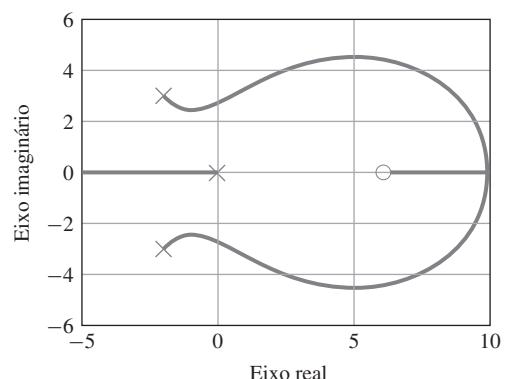


Figura 5.43 Lugar da raízes negativo de $L(s) = (s-6)/s(s^2 + 4s + 13)$.

EXEMPLO 5.14 *Lugar das raízes usando dois parâmetros em sucessão*

Um diagrama de blocos de uma estrutura relativamente comum de servomecanismo é mostrado na Fig. 5.44. Aqui, um dispositivo de medição de velocidade (um tacômetro) está disponível e o problema é usar o lugar das raízes para guiar a seleção do ganho do tacômetro K_T , bem como o ganho do amplificador K_A . A equação característica do sistema na Fig. 5.44 é

$$1 + \frac{K_A}{s(s+1)} + \frac{K_T}{s+1} = 0,$$

que não está na forma $1 + KL(s)$. Assim, após algumas manipulações, a equação característica torna-se

$$s^2 + s + K_A + K_T s = 0, \quad (5.87)$$

que é uma função de dois parâmetros, enquanto que a técnica do lugar das raízes pode considerar apenas um parâmetro por vez. Neste caso, definimos o ganho K_A para um valor nominal de 4 e consideramos primeiro o lugar das raízes em relação a K_T . Com $K_A = 4$, a Eq. (5.87) pode ser colocada na forma para o estudo do lugar das raízes em relação a K_T com $L(s) = \frac{s}{s^2+s+4}$, ou

$$1 + K_T \frac{s}{s^2 + s + 4} = 0. \quad (5.88)$$

Neste caso, o zero está em $s = 0$ e os polos estão nas raízes de $s^2 + s + 4 = 0$ ou $s = -\frac{1}{2} \pm 1,94j$. Um esboço do lugar das raízes usando as regras anteriores é mostrado na Fig. 5.45.

A partir deste lugar das raízes, podemos selecionar K_T para que as raízes complexas tenham um coeficiente específico de amortecimento ou escolher qualquer outro valor de K_T que resultaria em raízes satisfatórias para a equação característica. Considere $K_T = 1$. Tendo selecionado um valor de avaliação para K_T , podemos agora reformar a equação para considerar os efeitos de mudança em $K_A = 4$, tendo o novo parâmetro K_1 , tal que $K_A = 4 + K_1$. O lugar das raízes em relação a K_1 é governado pela Eq. (5.50), agora com $L(s) = \frac{1}{s^2+2s+4}$, de modo que o lugar das raízes seja para a equação

$$1 + K_1 \frac{1}{s^2 + 2s + 4} = 0. \quad (5.89)$$

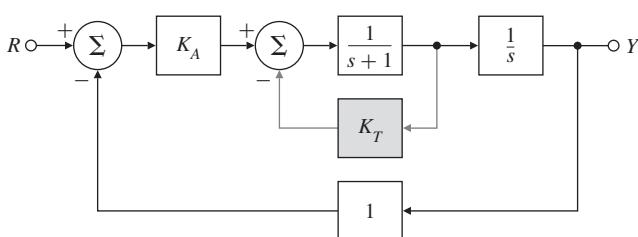


Figura 5.44 Diagrama de blocos de uma estrutura de servomecanismo, incluindo um tacômetro em realimentação.

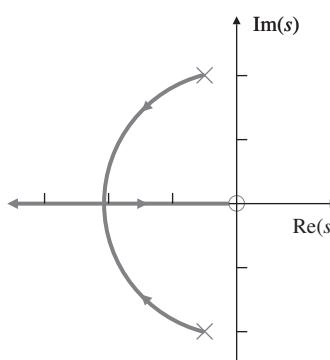


Figura 5.45 Lugar da raízes dos polos em malha fechada do sistema na Fig. 5.44 em relação a K_T .

Note-se que os *polos* do novo lugar das raízes correspondentes à Eq. (5.89) são as *raízes* do lugar das raízes anterior, que foi elaborado em relação a K_T , e as raízes foram obtidas com $K_T = 1$. O lugar das raízes é esboçado na Fig. 5.46, com o lugar das raízes anterior em relação a K_T em linha tracejada.

Poderíamos momentaneamente esboçar um lugar das raízes em relação ao K_1 , parar, resolver a equação, e continuar o lugar das raízes com relação a K_T , em uma espécie de gangorra entre os parâmetros K_A e K_T , e, portanto, usar o lugar das raízes para estudar os efeitos de dois parâmetros sobre as raízes de uma equação característica. Note que também podemos traçar o lugar das raízes para valores negativos de K_1 e, portanto, considerar os valores de K_A menores que 4.

Δ 5.6.3 Retardo no tempo

Retardos no tempo muitas vezes surgem em sistemas de controle devido a atrasos do próprio processo e a atrasos no processamento dos sinais detectados. Fábricas de produtos químicos, muitas vezes, têm processos sujeitos a retardo no tempo, representando o tempo do material ser transportado através de tubulações ou outros meios. Na medição da atitude de uma nave espacial rumo a Marte, há um atraso de tempo significativo para uma informação chegar à Terra devido à velocidade da luz. Há também um pequeno retardo no tempo em qualquer sistema de controle digital, devido ao tempo de ciclo do computador e ao fato de que os dados são processados em intervalos discretos. Um retardo no tempo *sempre* reduz a estabilidade de um sistema e, portanto, é importante ser capaz de analisar o seu efeito. Nesta seção, vamos discutir como usar o lugar das raízes para tal análise. Apesar de um método exato de analisar o retardo no tempo estar disponível nos métodos de resposta em frequência descritos no Capítulo 6, saber maneiras diferentes de analisar um projeto fornece ao projetista de controle mais flexibilidade e uma capacidade de verificar as possíveis soluções.

Considere o problema de projetar um sistema de controle para a temperatura do trocador de calor descrito no Capítulo 2. A função de transferência entre o controle A_s e a saída de temperatura medida T_m é descrita por dois termos de primeira ordem, mais um tempo de atraso T_d de 5 s. O retardo no tempo surge porque o sensor de temperatura está fisicamente localizado abaixo do trocador, de modo que há um atraso em sua leitura. A função de transferência é

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(10s + 1)(60s + 1)}, \quad (5.90)$$

sendo que o termo e^{-5s} é devido à existência do retardo no tempo.¹⁷

As equações do lugar das raízes correspondentes em relação ao ganho proporcional K são

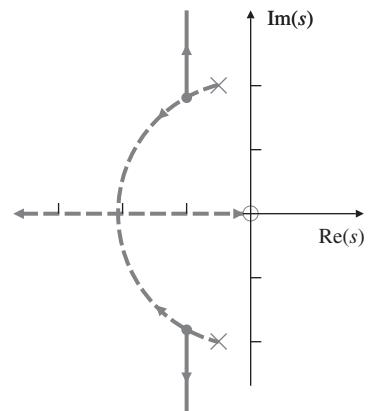


Figura 5.46 Lugar da raízes em relação a $K_1 = K_A + 4$ depois de escolher $K_T = 1$.

¹⁷ Retardo no tempo geralmente é referenciado como “atraso de transporte” em processos industriais.

$$\begin{aligned}
1 + KG(s) &= 0, \\
1 + K \frac{e^{-5s}}{(10s+1)(60s+1)} &= 0, \\
600s^2 + 70s + 1 + Ke^{-5s} &= 0. \tag{5.91}
\end{aligned}$$

Como podemos esboçar o lugar das raízes correspondente à Eq. (5.91)? Como não é um polinômio, não podemos prosseguir com os métodos utilizados nos exemplos anteriores. Então, reduzimos o problema dado a um problema já resolvido anteriormente por aproximação da função não racional e^{-5s} por uma função racional. Uma vez que estamos preocupados com sistemas de controle e, portanto, tipicamente com baixas frequências, queremos uma aproximação que vai ser boa para valores pequenos de s .¹⁸ A maneira mais comum para encontrar essa aproximação é atribuída a H. Padé. Ela consiste em substituir a função transcendental e^{-5s} por uma expansão em série de uma função racional cujo numerador é um polinômio de grau p e cujo denominador é um polinômio de grau q . O resultado é chamado de (p,q) **aproximação de Padé**¹⁹ para e^{-5s} . Vamos inicialmente calcular a aproximação para e^{-s} e, no resultado final, vamos substituir T_{ds} por s para permitir qualquer atraso desejado.

O resultado da $(1, 1)$ aproximação de Padé ($p = q = 1$) é (veja o Apêndice W5, disponível em inglês no site do Grupo A, para detalhes)

$$e^{-T_{ds}} \cong \frac{1 - (T_{ds}/2)}{1 + (T_{ds}/2)}. \tag{5.92}$$

Se assumirmos que $p = q = 2$, temos cinco parâmetros, e uma aproximação melhor é possível. Neste caso, temos a aproximação $(2,2)$, que tem a função de transferência

$$e^{-T_{ds}} \cong \frac{1 - T_{ds}/2 + (T_{ds})^2/12}{1 + T_{ds}/2 + (T_{ds})^2/12}. \tag{5.93}$$

A comparação dessas aproximações pode ser vista a partir de suas configurações de polo e zero como traçado na Fig. 5.47. Os locais dos polos estão no SPE e os zeros estão no SPD na reflexão dos polos.

Em alguns casos, uma aproximação muito grosseira é aceitável. Para pequenos atrasos, a aproximação $(0, 1)$ pode ser usada, o que é simplesmente uma defasagem de primeira ordem dada por

$$e^{-T_{ds}} \cong \frac{1}{1 + T_{ds}}. \tag{5.94}$$

Aproximação de Padé

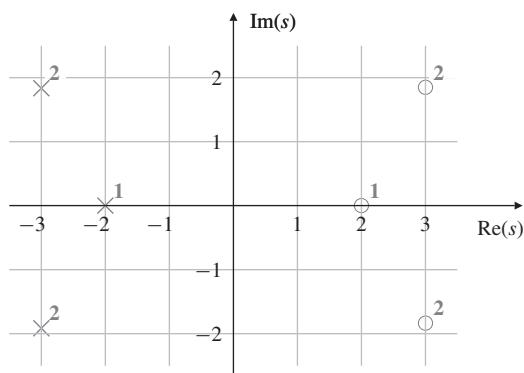


Figura 5.47 Polos e zeros das aproximações de Padé para e^{-s} , com índices identificando a aproximação correspondente; por exemplo, x^1 representa a aproximação $(1,1)$.

¹⁸ A função não racional e^{-5s} é analítica para todos os valores finitos de s e, assim, pode ser aproximada por uma função racional. Se funções não analíticas como \sqrt{s} estivessem envolvidas, uma grande cautela seria necessária na seleção de uma aproximação válida próxima a $s = 0$.

¹⁹ A aproximação (p, p) de Padé para um atraso de T segundos é mais comumente usada e é calculada no MATLAB com o comando $[num,den] = \text{pade}(T, P)$.

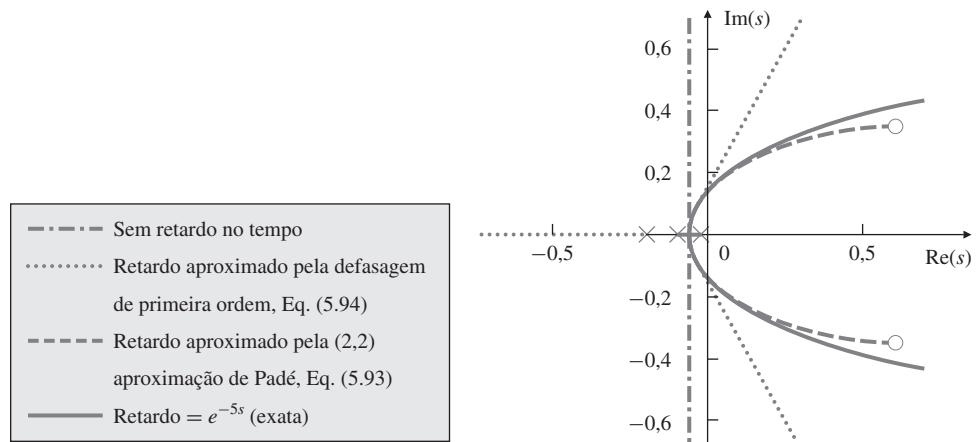


Figura 5.48 Lugar das raízes para o trocador de calor com e sem retardo no tempo.

Para ilustrar o efeito de um atraso e da precisão das diferentes aproximações, os lugares das raízes para o trocador de calor considerando quatro casos são desenhados na Fig. 5.48. Observe que, para ganhos baixos até o ponto onde os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário, as curvas aproximadas estão muito próximas do exato. No entanto, a curva (2, 2) de Padé segue a curva exata por mais tempo que a curva de primeira ordem e sua maior precisão seria útil se o atraso fosse maior. Todas as análises do atraso mostram o seu efeito instabilizador e como ele limita o tempo de resposta possível do sistema.

Enquanto a aproximação de Padé resulta em uma função de transferência racional, na teoria isto não é necessário para traçar o lugar das raízes. A aplicação direta da condição de fase pode ser usada para traçar o lugar exato das raízes para um sistema com retardo no tempo. A condição de fase-ângulo não é alterada se a função de transferência do processo não for racional, então ainda é necessário procurar por valores de s para os quais a fase seja $180^\circ + 360^\circ l$. Se escrevermos a função de transferência como

$$G(s) = e^{-T_d s} \tilde{G}(s),$$

a fase de $G(s)$ é a fase de $\tilde{G}(s)$ menos $\lambda\omega$ para $s = \sigma + j\omega$. Assim, podemos formular o lugar das raízes como procurar por localização onde a fase de $\tilde{G}(s)$ é $180^\circ + T_d\omega + 360^\circ(l-1)$. Para traçar tal lugar das raízes, fixamos ω e procuramos ao longo de uma linha horizontal no plano- $-s$ um ponto que pertence ao lugar das raízes; então, o valor de ω é incrementado, mudando o ângulo alvo, e o procedimento é repetido. Da mesma forma, os ângulos de partida são modificados por $T_d\omega$, sendo ω a parte imaginária do polo a partir da qual a partida está sendo calculada. O MATLAB não fornece um programa para traçar o lugar das raízes de sistemas com atraso, por isso, aqui, devemos nos satisfazer com as aproximações de Padé. Uma vez que é possível traçar a resposta em frequência (ou Bode) do atraso exatamente e com facilidade, se o projetista considera que a aproximação de Padé não é satisfatória, os métodos de resposta em frequência de projeto descritos no Capítulo 6 podem ser utilizados.

5.7 Perspectiva histórica

No Capítulo 1, foi dada uma visão geral do desenvolvimento inicial do controle realimentado e do projeto de controle, incluindo resposta em frequência e lugar das raízes. O projeto baseado no lugar das raízes foi introduzido em 1948 por Walter R. Evans, que estava trabalhando no campo de orientação e controle de aeronaves e mísseis na Autonetics Division of North American Aviation (agora parte da The Boeing Co.).

Muitos de seus problemas envolviam dinâmica instável ou neutramente estável, o que tornou difícil a aplicação de métodos baseados na resposta em frequência, então ele sugeriu voltar para o estudo da equação característica que tinha sido a base do trabalho de Maxwell e Routh quase

70 anos antes. No entanto, em vez de tratar o problema algébrico, Evans tratou um problema gráfico no plano- s . Evans também estava interessado em caracterizar a resposta dinâmica dos veículos aeroespaciais controlados; por isso, estudou as raízes do sistema em malha fechada a fim de compreender seu comportamento dinâmico. Para facilitar esse entendimento, Evans desenvolveu técnicas e regras que permitem seguir graficamente os caminhos das raízes da equação característica quando um parâmetro é alterado. Seu método é apropriado para o projeto, bem como para a análise de estabilidade, e continua sendo uma importante técnica hoje. Originalmente, esse método permitiu que as soluções fossem obtidas à mão, já que os computadores não estavam disponíveis para os engenheiros de projeto durante a década de 1940; no entanto, eles continuam sendo uma ferramenta importante hoje para ajudar no processo de projeto. Como aprendemos neste capítulo, o método de Evans envolve encontrar um lugar geométrico dos pontos onde os ângulos para os outros polos e zeros se adicionam até um determinado valor. Para ajudar nessa determinação, Evans inventou o “Spirule” que é mostrado na Fig. 5.49. O dispositivo poderia ser usado para medir os ângulos e para executar a adição ou subtração deles rapidamente. Um engenheiro de controle habilidoso poderia avaliar se o critério de ângulo foi atendido por um problema de projeto bastante complexo em poucos segundos. Além disso, a curva espiral na parte retangular do dispositivo permite ao projetista multiplicar distâncias a fim de determinar o ganho em um ponto selecionado no lugar das raízes, de forma semelhante a uma régua de cálculo.

Evans foi claramente motivado a ajudar o engenheiro que não tinha auxílio de um computador na sua tarefa de análise e controle de sistemas. Computadores eram praticamente inexistentes na década de 1940. Computadores de grande porte começaram a ser usados para processamento de dados em grande escala por empresas na década de 1950, mas até 1960 não havia cursos sobre programas de engenharia que ensinava a usar os computadores para análise e projeto. O uso de computadores na engenharia tornou-se comum na década de 1960, mas o processo envolvido em enviar um trabalho para um computador era feito através de um grande número de cartões perfurados, além da espera pelos resultados por horas ou por toda a noite, uma situação que não era propícia para qualquer tipo de iteração de projeto. Computadores de grande porte daquela época tiveram suas válvulas substituídas por transistores, a memória de acesso tinha em torno de 32k(!) e os dados eram transmitidos por uma unidade de fita magnética. Unidades de discos surgiram durante essa década, acelerando significativamente o processo de recuperação de dados. Um grande passo na computação para os engenheiros ocorreu quando o processamento de dados baseado em cartões perfurados foi substituído pelo compartilhamento de tempo com muitos usuários de terminais remotos durante o final dos anos 1960 e início de 1970. Calculadoras mecânicas também estavam disponíveis nos anos de 1940, 1950 e 1960, e elas podiam somar, subtrair, multiplicar e dividir e custavam cerca de 2.000 dólares em 1960. Algumas calculadoras podiam também fazer o cálculo de raiz quadrada. Essas máquinas foram a base para os cálculos complexos feitos em Los Alamos durante a Segunda Guerra Mundial. Elas eram do tamanho de uma máquina de escrever, tinham um grande cabeçote que ia e voltava durante os cálculos e, de vez em quando, tocavam um sino ao final do curso do cabeçote (veja a Fig. 5.50). Elas tinham precisão de oito ou mais casas decimais e eram frequentemente usadas após o advento dos computadores para realizar checagem dos resultados; contudo, uma raiz quadrada podia demorar dezenas de segundos para ser concluída, as máquinas eram barulhentas e o processo era tedioso. Engenheiros empreendedores desenvolveram cálculos especiais que geravam certas músicas, e não era incomum ouvir músicas como *Jingle Bells*.

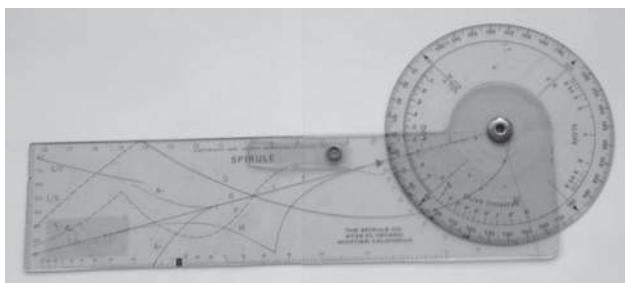


Figura 5.49 Spirule: dispositivo usado para o esboço do lugar das raízes antes dos computadores.
Fonte: foto cortesia de David Powell.

Figura 5.50 A calculadora mecânica de Frieden.

Fonte: cortesia do Museu Histórico do Computador.



O computador pessoal chegou no final de 1970, embora utilizasse uma fita cassete para armazenamento de dados e tivesse uma memória muito limitada, geralmente menor que 16k. Contudo, essas máquinas amadureceram ao longo da década que se seguiu, quando o computador entrou para o projeto de engenharia. Primeiro, veio o disquete de armazenamento de dados, seguido pelo disco rígido nos meados e no final da década de 1980. Inicialmente, as linguagens BASEC e APL foram um dos principais métodos de programação. O MATLAB foi introduzido por Cleve Moler em 1970. Duas coisas aconteceram em 1984: a Apple introduziu o MacIntosh aponte e clique, e o PC-MATLAB foi introduzido pela The Mathworks, que foi especificamente fundado para comercializar o MATLAB em computadores pessoais. Inicialmente, o MATLAB da Mathworks foi escrito para análise e controle de sistemas, mas começou a envolver muitos outros campos após seu lançamento. Nesse ponto da evolução, o engenheiro poderia realmente realizar iterações de projeto com pouco ou nenhum tempo entre os ensaios. Outros programas similares estavam disponíveis para os computadores, dois deles, CTRL-C e MATRIXx, no entanto, não se adaptaram à revolução do computador pessoal e estão caindo em desuso.

RESUMO

- Um lugar das raízes é um gráfico de valores de s que são soluções da equação

$$1 + KL(s) = 0$$

com relação ao parâmetro real K .

1. Quando $K > 0$, s está no lugar das raízes se $\angle L(s) = 180^\circ$, produzindo um lugar das raízes de 180° ou K positivo.
 2. Quando $K < 0$, s está no lugar das raízes se $\angle L(s) = 0^\circ$, produzindo um lugar das raízes de 0° ou K negativo.
- Se $KL(s)$ é a função de transferência do ramo direto de um sistema, então a equação característica do sistema com realimentação negativa é

$$1 + KL(s) = 0,$$

e o método do lugar das raízes mostra o efeito de alterar o valor do ganho K nas raízes do sistema em malha fechada.

- Um lugar das raízes *específico* a um sistema $sysL$ em notação do MATLAB pode ser traçado pelos comandos `rlocus(sysL)` e `rltool(sysL)`.
- Um conhecimento prático de como determinar um lugar das raízes é útil para verificar os resultados computacionais e para sugerir alternativas de projeto.
- As instruções fundamentais de auxílio para esboçar um lugar das raízes de 180° são as seguintes:
 1. O lugar das raízes no eixo real está à esquerda de um número ímpar de polos e zeros.
 2. Dos n ramos, m se aproximam dos zeros de $L(s)$ e $n - m$ ramos se aproximam de assíntotas centradas em α e com ângulo de partida de ϕ_l :

n = número de polos,
 m = número de zeros,
 $n - m$ = número de assintotas,

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m},$$

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l - 1)}{n - m}, \quad l = 1, 2, \dots, n - m.$$

3. Os ramos do lugar das raízes partem dos polos de ordem q e chegam aos zeros de ordem q com ângulos

$$\phi_{l,dep} = \frac{1}{q} \left(\sum \psi_i - \sum_{i \neq l} \phi_i - 180^\circ - 360^\circ(l - 1) \right),$$

$$\psi_{l,arr} = \frac{1}{q} \left(\sum \phi_i - \sum_{i \neq l} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ(l - 1) \right),$$

com

$$q = \text{ordem do polo ou zero},$$

$$\psi_i = \text{ângulos medidos a partir dos zeros},$$

$$\phi_i = \text{ângulos medidos a partir dos polos}.$$

- O parâmetro K correspondente a uma raiz em um ponto particular s_0 no lugar das raízes pode ser encontrado a partir de

$$K = \frac{1}{|L(s_0)|},$$

sendo que $|L(s_0)|$ pode ser encontrado graficamente medindo as distâncias de s_0 para cada polo e zero.

- Com um lugar das raízes obtido com `rlocus(sysL)`, o parâmetro e e as raízes correspondentes podem ser encontradas com $[K, p] = \text{rlocfind}(\text{sysL})$ ou com `rltool`.
- O compensador de avanço, dado por

$$D(s) = \frac{s + z}{s + p}, \quad z < p,$$

aproxima um controlador proporcional derivativo (PD). Para um coeficiente de erro fixo, geralmente move o lugar das raízes para a esquerda e melhora o amortecimento do sistema.

- Compensador de atraso, dado por

$$D(s) = \frac{s + z}{s + p}, \quad z > p,$$

aproxima um controlador proporcional integral (PI). Em geral, melhora o erro em estado estacionário para uma resposta de velocidade fixa incrementando o ganho de baixa frequência e degrada a estabilidade.

- O lugar das raízes pode ser usado para analisar sucessivas malhas fechadas estudando dois (ou mais) parâmetros em sucessão.
- O lugar das raízes pode ser usado para aproximar o efeito do retardo no tempo.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. Dê duas definições para o lugar das raízes.
2. Defina o lugar das raízes negativo.
3. Onde estão as partes do lugar das raízes (positivo) no eixo real?
4. Quais são os ângulos de partida a partir de dois polos coincidentes em $s = -a$ no eixo real? Não há polos ou zeros à direita de $-a$.
5. Quais são os ângulos de partida a partir de três polos coincidentes em $s = -a$ no eixo real? Não há polos ou zeros à direita de $-a$.
6. Qual é o principal efeito de uma compensação de avanço no lugar das raízes?
7. Qual é o principal efeito de uma compensação de atraso em um lugar das raízes nas imediações das raízes dominantes de malha fechada?
8. Qual é o principal efeito de uma compensação de atraso no erro de estado estacionário para uma entrada de referência polinomial?
9. Por que o ângulo de partida de um polo próximo ao eixo imaginário é especialmente importante?
10. Defina um sistema condicionalmente estável.
11. Mostre, com um argumento baseado no lugar das raízes, que um sistema com três polos na origem deve ser condicionalmente estável.

PROBLEMAS

Problemas da Seção 5.1: lugar das raízes de um sistema realimentado básico

- 5.1** Rescreva as equações características listadas abaixo na forma adequada ao método do lugar das raízes de Evans. Dê $L(s)$, $a(s)$ e $b(s)$ e o parâmetro K em termos de parâmetros originais em cada caso. Certifique-se de selecionar K para que $a(s)$ e $b(s)$ sejam mônicos em cada caso e que o grau de $b(s)$ não seja maior que o grau de $a(s)$.
- (a) $s + (1/\tau) = 0$ em relação ao parâmetro τ
 - (b) $s^2 + cs + c + 1 = 0$ em relação ao parâmetro c
 - (c) $(s + c)^3 + A(Ts + 1) = 0$
 - (i) em relação ao parâmetro A ,
 - (ii) em relação ao parâmetro T ,
 - (iii) em relação ao parâmetro c , se possível. Diga a razão pela qual você pode ou não. Para valores fixos de A e T , o lugar das raízes pode ser traçado em relação ao parâmetro c ?
 - (d) $1 + \left[k_p + \frac{k_I}{s} + \frac{k_D s}{\tau s + 1} \right] G(s) = 0$. Assuma que $G(s) = Ac(s)/d(s)$, sendo $c(s)$ e $d(s)$ polinômios mônicos com o grau de $d(s)$ maior que o grau de $c(s)$.
 - (i) em relação ao parâmetro k_p
 - (ii) em relação ao parâmetro k_I
 - (iii) em relação ao parâmetro k_D
 - (iv) em relação ao parâmetro τ

Problemas da Seção 5.2: diretrizes para o esboço de um lugar das raízes

- 5.2** Esboce o lugar das raízes para os mapas de polo-zero mostrados na Fig. 5.51 sem o auxílio de um computador. Mostre suas estimativas do centro e dos ângulos das assíntotas, uma estimativa aproximada dos ângulos de chegada e partida para os polos e zeros complexos e o lugar das raízes para valores positivos do parâmetro K . Cada mapa de polo-zero é obtido a partir de uma equação característica da forma

$$1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = 0,$$

onde as raízes do numerador $b(s)$ são mostradas como pequenos círculos \circ e as raízes do denominador $a(s)$ são mostradas como \times sobre o plano-s. Note que na Fig. 5.51(c) existem dois polos na origem.

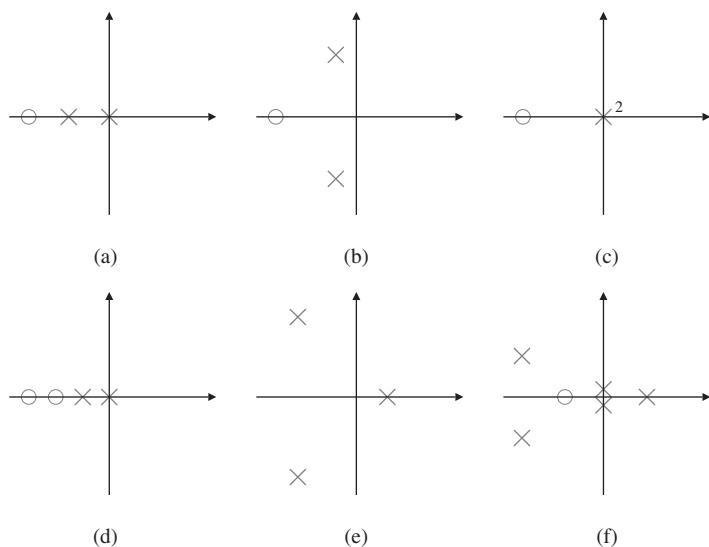


Figura 5.51 Mapas de polo-zero.

5.3 Para a equação característica

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+5)} = 0,$$

- (a) Desenhe os seguimentos no eixo real que correspondem ao lugar das raízes.
- (b) Esboce as assíntotas de um lugar das raízes para $K \rightarrow \infty$.
- (c) Esboce o lugar das raízes
- (d) Verifique seu esboço usando o MATLAB.

5.4 *Polos e zeros reais.* Esboce o lugar das raízes com respeito a K para a equação $1 + KL(s) = 0$ com as escolhas de $L(s)$ listadas. Certifique-se de apresentar as assíntotas e os ângulos de chegada e partida em qualquer zero ou polo complexo. Depois de completar cada esboço à mão, verifique os resultados usando o MATLAB. Apresente seus esboços e os resultados do MATLAB na mesma escala.

- (a) $L(s) = \frac{(s+2)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$
- (b) $L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$
- (c) $L(s) = \frac{(s+2)(s+6)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$
- (d) $L(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$

5.5 *Polos e zeros complexos.* Esboce o lugar das raízes com respeito a K para a equação $1 + KL(s) = 0$ com as escolhas de $L(s)$ listadas. Certifique-se de apresentar as assíntotas e os ângulos de chegada e partida em qualquer zero ou polo complexo. Depois de completar cada esboço à mão, verifique os resultados usando o MATLAB. Apresente seus esboços e os resultados do MATLAB na mesma escala.

- (a) $L(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 10}$
- (b) $L(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 10)}$
- (c) $L(s) = \frac{(s^2 + 2s + 8)}{s(s^2 + 2s + 10)}$
- (d) $L(s) = \frac{(s^2 + 2s + 12)}{s(s^2 + 2s + 10)}$
- (e) $L(s) = \frac{(s^2 + 1)}{s(s^2 + 4)}$
- (f) $L(s) = \frac{(s^2 + 4)}{s(s^2 + 1)}$

5.6 Múltiplos polos na origem. Esboce o lugar das raízes com respeito a K para a equação $1 + KL(s) = 0$ com as escolhas de $L(s)$ listadas. Certifique-se de apresentar as assíntotas e os ângulos de chegada e partida em qualquer zero ou polo complexo. Depois de completar cada esboço à mão, verifique os resultados usando o MATLAB. Apresente seus esboços e os resultados do MATLAB na mesma escala.

(a) $L(s) = \frac{1}{s^2(s+8)}$

(b) $L(s) = \frac{1}{s^3(s+8)}$

(c) $L(s) = \frac{1}{s^4(s+8)}$

(d) $L(s) = \frac{(s+3)}{s^2(s+8)}$

(e) $L(s) = \frac{(s+3)}{s^3(s+4)}$

(f) $L(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3(s+4)}$

(g) $L(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3(s+10)^2}$

5.7 Polos reais e complexos. Esboce o lugar das raízes com respeito a K para a equação $1 + KL(s) = 0$ com as escolhas de $L(s)$ listadas. Certifique-se de apresentar as assíntotas e os ângulos de chegada e partida em qualquer zero ou polo complexo. Depois de completar cada esboço à mão, verifique os resultados usando o MATLAB. Apresente seus esboços e os resultados do MATLAB na mesma escala.

(a) $L(s) = \frac{(s+2)}{s(s+10)(s^2+2s+2)}$

(b) $L(s) = \frac{(s+2)}{s^2(s+10)(s^2+6s+25)}$

(c) $L(s) = \frac{(s+2)^2}{s^2(s+10)(s^2+6s+25)}$

(d) $L(s) = \frac{(s+2)(s^2+4s+68)}{s^2(s+10)(s^2+4s+85)}$

(e) $L(s) = \frac{[(s+1)^2+1]}{s^2(s+2)(s+3)}$

5.8 SPD e zeros. Esboce o lugar das raízes com respeito a K para a equação $1 + KL(s) = 0$ com as escolhas de $L(s)$ listadas. Certifique-se de apresentar as assíntotas e os ângulos de chegada e partida em qualquer zero ou polo complexo. Depois de completar cada esboço à mão, verifique os resultados usando o MATLAB. Apresente seus esboços e os resultados do MATLAB na mesma escala.

(a) $L(s) = \frac{s+2}{s+10} \frac{1}{s^2-1}$; modelo para o caso de levitação magnética com o compensador de avanço.

(b) $L(s) = \frac{s+2}{s(s+10)} \frac{1}{(s^2-1)}$; sistema de levitação magnética com um controlador integral e com um compensador de avanço.

(c) $L(s) = \frac{s-1}{s^2}$;

(d) $L(s) = \frac{s^2+2s+1}{s(s+20)^2(s^2-2s+2)}$. Qual é o maior valor que pode ser obtido para o coeficiente de amortecimento das raízes estáveis complexas no lugar das raízes?

(e) $L(s) = \frac{(s+2)}{s(s-1)(s+6)^2}$

(f) $L(s) = \frac{1}{(s-1)[(s+2)^2+3]}$

5.9 Coloque a equação característica do sistema mostrado na Fig. 5.52 na forma do lugar das raízes com relação ao parâmetro α e identifique os correspondentes $L(s)$, $a(s)$ e $b(s)$. Esboce o lugar das

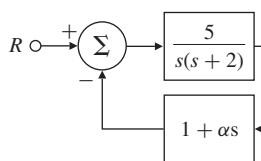


Figura 5.52 Sistema de controle para o Problema 5.9.

raízes com relação ao parâmetro α , estime os polos de malha fechada e esboce as respostas ao degrau correspondentes a $\alpha = 0$, $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 2$. Use o MATLAB para verificar suas respostas.

- 5.10** Use a função `rltool` do MATLAB para estudar o comportamento do lugar das raízes de $1 + KL(s)$ para

$$L(s) = \frac{(s+a)}{s(s+1)(s^2+8s+52)}$$

quando o parâmetro a é variado de 0 a 10, tendo particular atenção para a região entre 2,5 e 3,5. Verifique a ocorrência de raízes múltiplas em um valor de s complexo para valores de a neste intervalo.

- 5.11** Use o critério de Routh para encontrar o intervalo de valores do ganho K para o qual os sistemas na Fig. 5.53 sejam estáveis e use o lugar das raízes para confirmar seus cálculos.

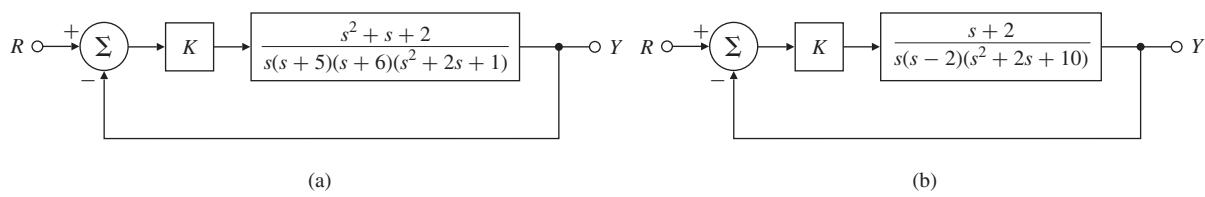


Figura 5.53 Sistema realimentado para o Problema 5.11.

- 5.12** Esboce o lugar das raízes para a equação característica do sistema com

$$L(s) = \frac{(s+2)}{s(s+1)(s+5)},$$

e determine os valores do ganho do lugar das raízes para o qual os polos complexos conjugados tenham coeficiente de amortecimento igual a 0,5.

- 5.13** Para o sistema na Fig. 5.54,

- (a) Encontre o lugar das raízes do sistema em malha fechada em relação ao parâmetro K .
- (b) Existe um valor de K para o qual todas as raízes tenham um coeficiente de amortecimento maior que 0,5?
- (c) Encontre um valor de K para o qual os polos de malha fechada tenham coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,707$.
- (d) Use o MATLAB para traçar a resposta ao degrau do sistema com o controlador resultante.

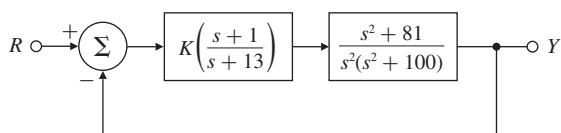


Figura 5.54 Sistema realimentado para o Problema 5.13.

- 5.14** Para o sistema realimentado mostrado na Fig. 5.55, encontre o valor do ganho K para que os polos do sistema em malha fechada tenham coeficiente de amortecimento de $\zeta = 0,5$.

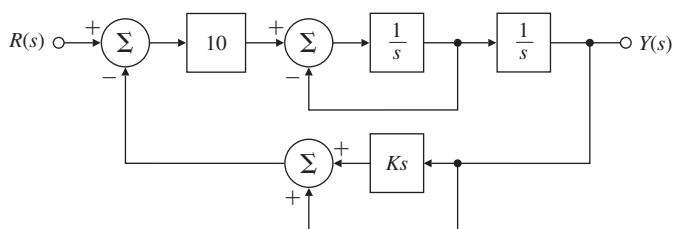


Figura 5.55 Sistema realimentado para o Problema 5.14.

Problemas da Seção 5.3: lugar das raízes ilustrativo selecionado

5.15 Modelo simplificado do movimento longitudinal de um helicóptero tem a função de transferência

$$G(s) = \frac{9,8(s^2 - 0,5s + 6,3)}{(s + 0,66)(s^2 - 0,24s + 0,15)}$$

e equação característica $1 + D(s)G(s) = 0$. Inicialmente, faça $D(s) = k_p$.

- (a) Calcule os ângulos de partida e chegada nos polos e zeros complexos.
- (b) Esboce o lugar das raízes para este sistema com o parâmetro $K = 9,8k_p$. Use os eixos $-4 \leq x \leq 4; -3 \leq y \leq 3$.
- (c) Verifique sua resposta usando o MATLAB. Use o comando `axis([-4 4 -3 3])` para obter as escalas corretas.
- (d) Sugira uma alternativa prática de compensação $D(s)$ que irá resultar, pelo menos, em um sistema estável.

5.16 (a) Para o sistema dado na Fig. 5.56, trace o lugar das raízes da equação característica quando o parâmetro K_1 é variado de 0 a ∞ com $\lambda = 2$. Forneça os valores correspondentes de $L(s)$, $a(s)$ e $b(s)$.

- (b) Repita o item (a) com $\lambda = 5$. Existe algo de especial em relação a esse valor?
- (c) Repita o item (a) para $K_1 = 2$ fixo, com o parâmetro $K = \lambda$ variando de 0 a ∞ .

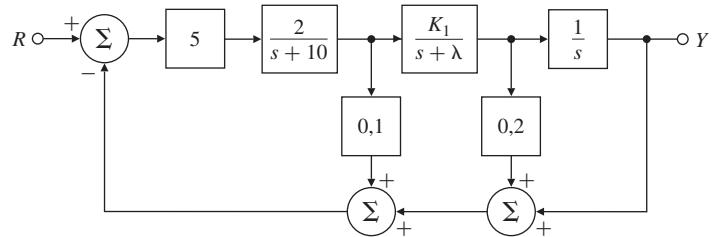


Figura 5.56 Sistema de controle para o Problema 5.16.

5.17 Para o sistema mostrado na Fig. 5.57, determine a equação característica e esboce o lugar das raízes em relação a valores positivos do parâmetro c . Encontre $L(s)$, $a(s)$ e $b(s)$ e indique o sentido em que c aumenta no lugar das raízes.

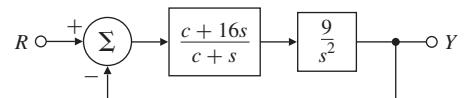


Figura 5.57 Sistema de controle para o Problema 5.17.

5.18 Considere o sistema com função de transferência

$$L(s) = \frac{(s+z)}{(s+p)^2},$$

com z e p reais e $z > p$. Mostre que o lugar das raízes $1 + KL(s) = 0$ com respeito a K é um círculo centrado em z com raio dado por

$$r = (z - p).$$

Dica: Assuma que $s + z = re^{j\phi}$ e mostre que $L(s)$ é real e negativo para ϕ real.

5.19 A malha de transmissão de um sistema tem dois polos em $s = -1$ e um zero em $s = -2$. Há um terceiro polo p no eixo real, localizado em algum lugar à esquerda do zero. Vários lugares das raízes diferentes são possíveis, dependendo da localização exata do terceiro polo. Casos extremos ocorrem quando o polo está localizado no infinito ou quando ele está localizado em $s = -2$. Dê valores para p e esboce três tipos distintos de lugares das raízes.

5.20 Para a configuração de realimentação da Fig. 5.58, use assíntotas, centro de assíntotas, ângulos de partida e de chegada e o arranjo de Routh para esboçar os lugares das raízes para as equações

características dos sistemas de controle listados em relação ao parâmetro K . Use MATLAB para verificar seus resultados.

- (a) $G(s) = \frac{1}{s(s+1+3j)(s+1-3j)}$, $H(s) = \frac{s+2}{s+8}$
- (b) $G(s) = \frac{1}{s^2}$, $H(s) = \frac{s+1}{s+3}$
- (c) $G(s) = \frac{(s+5)}{(s+1)}$, $H(s) = \frac{s+7}{s+3}$
- (d) $G(s) = \frac{(s+3+4j)(s+3-4j)}{s(s+1+2j)(s+1-2j)}$, $H(s) = 1 + 3s$

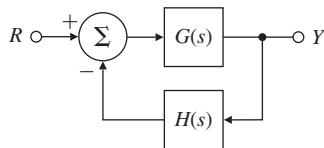


Figura 5.58 Sistema de realimentação para o Problema 5.20.

5.21 Considere o sistema na Fig. 5.59.

- (a) Usando o critério de estabilidade de Routh, determine todos os valores de K para os quais o sistema é estável.
- (b) Use o MATLAB para traçar o lugar das raízes em relação a K e encontre os valores de K onde o lugar das raízes cruza o eixo imaginário.

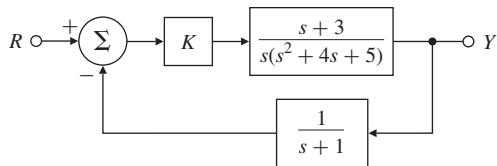


Figure 5.59 Sistema de realimentação para o Problema 5.21.

Problemas da Seção 5.4: projeto usando compensação dinâmica

5.22 Considere

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \quad \text{e} \quad D(s) = K \frac{s+a}{s+b}.$$

Usando as técnicas do lugar das raízes, encontre os valores para os parâmetros a , b e K do compensador $D(s)$ que irá produzir polos de malha fechada em $s = -1 \pm j$ para o sistema mostrado na Fig. 5.60.

5.23 Considere a Fig. 5.60 com

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)} \quad \text{e} \quad D(s) = \frac{K}{s+2}.$$

Esboce o lugar das raízes em relação a K da equação característica para o sistema em malha fechada; tenha atenção nos pontos que são geradas raízes múltiplas se $KL(s) = D(s)G(s)$.

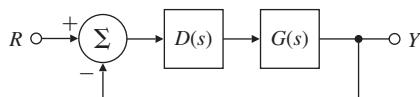


Figura 5.60 Sistema com realimentação unitária para os Problema 5.22 a 5.28 e 5.33.

5.24 Considere que o sistema de realimentação unitária da Fig. 5.60 tenha uma planta de malha aberta dada por $G(s) = 1/s^2$. Projete um compensador de avanço $D(s) = K \frac{s+z}{s+p}$ para ser adicionado em série com a planta tal que os polos dominantes do sistema em malha fechada sejam localizados em $s = -2 \pm 2j$.

5.25 Assuma que o sistema de realimentação unitária da Fig. 5.60 tenha a planta de malha aberta

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+6)}.$$

Projete um compensador de atraso que atenda às seguintes especificações:

- Tempo de acomodação da resposta ao degrau menor que 5 s.
- Sobressinal da resposta ao degrau menor que 17%.
- Erro em estado estacionário a uma entrada em rampa que não exceda 10%.

5.26 Uma máquina de controle numérico para o posicionamento de um servomecanismo tem uma função de transferência normalizada e escalado dada por

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

As especificações do sistema em configuração de realimentação unitária na Fig. 5.60 são atendidas se os polos em malha fechada estiverem localizados em $s = -1 \pm \sqrt{3}$.

- (a) Mostre que essas especificações não podem ser atendidas com apenas um controlador puramente proporcional, $D(s) = K_p$.
- (b) Projete um compensador de avanço de fase $D(s) = K \frac{s+z}{s+p}$ que irá satisfazer às especificações.

5.27 Um sistema de controle de posição de um servomecanismo tem a função de transferência

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}.$$

O objetivo é projetar a função de transferência de um compensador em série $D(s)$ a ser utilizado na estrutura de realimentação unitária para satisfazer às seguintes especificações:

- Sobressinal não maior que 16% para uma entrada em degrau.
- Tempo de subida não maior que 0,4 s para uma entrada em degrau.
- Erro em estado estacionário menor que 0,02 para uma entrada em rampa unitária.
- (a) Projete um compensador de avanço para que o sistema atenda às especificações da resposta dinâmica.
- (b) Se $D(s)$ for um controlador proporcional, $D(s) = k_p$, qual será a constante de erro de velocidade K_v ?
- (c) Projete um compensador de atraso para ser usado em série com o compensador de avanço projetado anteriormente para que o sistema atenda à especificação de erro em estado estacionário.
- (d) Trace o lugar das raízes do projeto final usando o MATLAB.
- (e) Trace a resposta ao degrau do projeto final usando o MATLAB.

5.28 Assuma que o sistema em malha fechada da Fig. 5.60 tenha a função de transferência no ramo direto

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

Projete um compensador de atraso tal que os polos dominantes em malha fechada estejam localizados em $s = -1 \pm j$ e que o erro em estado estacionário para uma entrada em rampa seja menor que 0,2.

5.29 Um esquema elementar de suspensão magnética é apresentado na Fig. 5.61. Para pequenos movimentos próximos da posição de referência, a tensão e no fotodetector está relacionada ao deslocamento x da bola (em metros) por $e = 100x$. A força para cima (em newtons) sobre a bola, causada

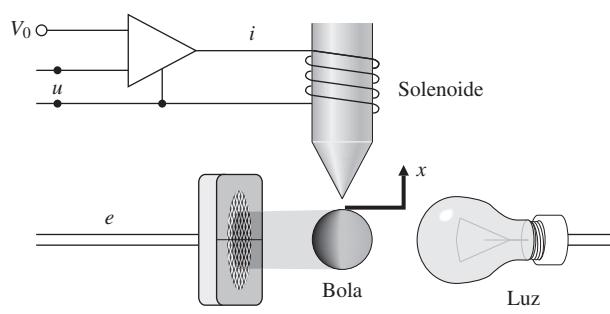


Figura 5.61 Suspensão magnética elementar.

pela corrente i (em ampères) pode ser aproximada por $f = 0,5i + 20x$. A massa da bola é de 20 g e a força gravitacional é de 9,8 N/kg. O amplificador de potência é um dispositivo de tensão para corrente com uma saída (em ampères) de $i = u + V_0$.

- Escreva as equações de movimento para esse sistema.
- Encontre os valores de V_0 para que a bola esteja em equilíbrio em $x = 0$.
- Qual é a função de transferência de u para e ?
- Suponha que a entrada de controle u é dada por $u = -Ke$. Esboce o lugar das raízes do sistema em malha fechada em relação ao parâmetro K .
- Assuma que um compensador de avanço está disponível na forma $\frac{U}{E} = D(s) = K \frac{s+z}{s+p}$. Forneça os valores de K , z e p que melhorem o desempenho proposto no item (d).

5.30 Um planta de fase não mínima tem a função de transferência

$$G(s) = \frac{4 - 2s}{s^2 + s + 9}$$

que está em um sistema de controle por realimentação negativa com um controlador de função de transferência $D(s)$.

- Use o MATLAB para determinar um valor (negativo) de $D(s) = K$ tal que o sistema em malha fechada com realimentação negativa tenha um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,707$.
- Use o MATLAB para traçar a resposta ao degrau do sistema.

5.31 Considere o sistema de posicionamento de foguete mostrado na Fig. 5.62.

- Mostre que se o sensor, que mede x , tem uma função de transferência unitária, o compensador de avanço

$$H(s) = K \frac{s+2}{s+4}$$

estabiliza o sistema.

- Assuma que o sensor tenha função de transferência modelada com um único polo com constante de tempo igual a 0,1 s e ganho DC unitário. Usando o procedimento do lugar das raízes, encontre um valor para o ganho K que forneça o máximo coeficiente de amortecimento.

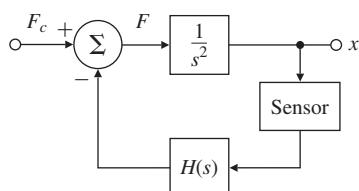


Figura 5.62 Diagrama de blocos para o sistema de controle de posicionamento de foguete.

5.32 Considere o sistema na Fig. 5.63,

- Encontre o lugar das raízes em relação ao parâmetro K .
- Encontre o máximo valor de K para o qual o sistema é estável. Assuma $K = 2$ para os itens restantes deste problema.
- Qual é o erro em estado estacionário ($e = r - y$) para uma mudança de degrau em r ?
- Qual é o erro em estado estacionário em y para um distúrbio constante w_1 ?
- Qual é o erro em estado estacionário em y para um distúrbio constante w_2 ?
- Se for desejado ter maior amortecimento, quais mudanças devem ser feitas no sistema?

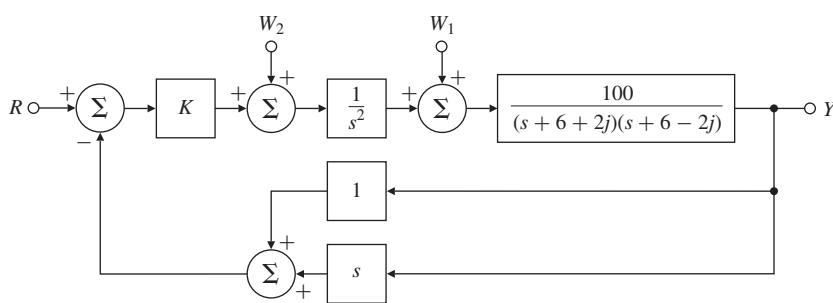


Figura 5.63 Sistema de controle para o Problema 5.32.

5.33 Considere a função de transferência

$$G(s) = \frac{bs + k}{s^2[mMs^2 + (M + m)bs + (M + m)k]}$$

para ser colocada na realimentação unitária da Fig. 5.60. Esta é a função de transferência relacionando a força de entrada $u(t)$ e de posição $y(t)$ da massa M em um problema com sensor e atuador não justapostos. Neste problema, serão usadas as regras do lugar das raízes para projetar o controlador $D(s)$ tal que a resposta ao degrau do sistema em malha fechada tenha tempo de subida menor que 0,1 s e um sobressinal menor que 10%. Caso desejado, use o MATLAB em qualquer uma das seguintes questões:

- (a) Aproxime $G(s)$ assumindo que $m \approx 0$, $M = 1$, $k = 1$, $b = 0,1$ e $D(s) = K$. K pode ser escolhido para satisfazer às especificações de desempenho? Por quê?
- (b) Repita o item (a) assumindo que $D(s) = K(s + z)$ e mostre que K e z podem ser escolhidos para satisfazer às especificações.
- (c) Repita o item (b), mas com um controlador prático dado pela função de transferência

$$D(s) = K \frac{p(s + z)}{s + p}.$$

Selecione p para que os valores de K e z calculados no item (b) permaneçam mais ou menos válidos.

- (d) Suponha agora que a pequena massa m não é desprezada, mas é dada por $m = M/10$. Verifique se o controlador projetado no item (c) ainda satisfaz às especificações. Caso contrário, ajuste os parâmetros do controlador para que às especificações sejam atendidas.

5.34 Considere o sistema do Tipo 1 apresentado na Fig. 5.64. É desejado um compensador $D(s)$ que satisfaça às especificações: (1) O valor de y em estado estacionário deve ser menor que 4/5 para um distúrbio w em forma de uma constante unitária, e (2) o coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,7$. Use as técnicas do lugar das raízes para,

- (a) Mostre que um controlador puramente proporcional não é adequado.
- (b) Mostre que um controlador proporcional derivativo é adequado.
- (c) Encontre valores para os ganhos k_p e k_D para $D(s) = k_p + k_D s$ tal que as especificações sejam satisfeitas.

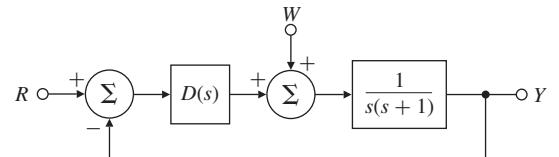


Figure 5.64 Sistema de controle para o Problema 5.34.

Problemas da Seção 5.5: um exemplo de projeto usando o lugar das raízes

5.35 Considere um sistema de posicionamento de um servomecanismo mostrado na Fig. 5.65, sendo

$$e_i = K_{pot}\theta_i, \quad e_o = K_{pot}\theta_o, \quad K_{pot} = 10 \text{ V/rad},$$

$$T = \text{torque do motor} = K_t i_a,$$

$$k_m = K_t = \text{constante de torque} = 0,1 \text{ N}\cdot\text{m/A},$$

$$R_a = \text{resistência de armadura} = 10 \Omega,$$

Razão de engrenamento = 1 : 1,

$$J_L + J_m = \text{inércia total} = 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2,$$

$$C = 200 \mu\text{F},$$

$$v_a = K_A(e_i - e_f).$$

- (a) Qual é o intervalo do ganho de amplificação K_A tal que o sistema seja estável? Estime o limite superior graficamente usando o gráfico do lugar das raízes.

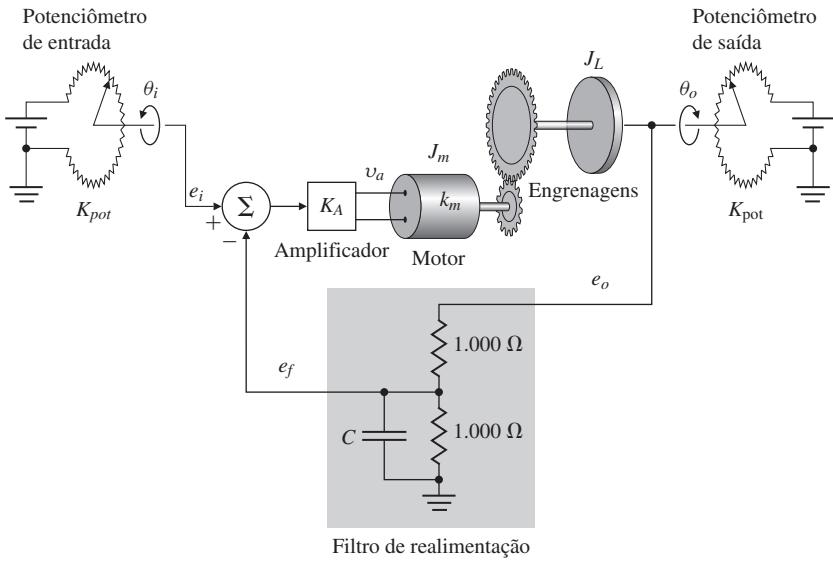


Figura 5.65 Servomecanismo de posicionamento.

Fonte: reproduzido de Clark, 1962, com permissão.

- (b) Escolha o ganho que resulta em raízes com $\zeta = 0,7$. Onde estão todas as três raízes para este valor de K_A ?

- 5.36** Deseja-se projetar o controle de velocidade de um servomecanismo para uma unidade de fita. A função de transferência a partir da corrente $I(s)$ para a velocidade da fita $\Omega(s)$ (em milímetros por milisegundo por ampères) é

$$\frac{\Omega(s)}{I(s)} = \frac{15(s^2 + 0,9s + 0,8)}{(s + 1)(s^2 + 1,1s + 1)}.$$

Deseja-se projetar um sistema realimentado do Tipo 1 tal que a resposta a um degrau na referência satisfaça

$$t_r \leq 4\text{ms}, \quad t_s \leq 15 \text{ ms}, \quad M_p \leq 0,05.$$

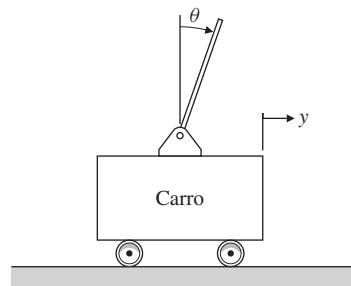
- (a) Use um compensador integral k_I/s para obter um sistema com dinâmica do Tipo 1 e esboce o lugar das raízes em relação a k_I . Mostre no mesmo gráfico a região aceitável para as localizações dos polos que atende as especificações.
 (b) Assuma um compensador proporcional-integral da forma $k_p(s + \alpha)/s$ e selecione os melhores valores possíveis para k_p e α encontrados. Esboce o lugar das raízes do seu projeto, fornecendo valores para k_p e α e a constante de velocidade K_v fornecida pelo seu projeto. No mesmo gráfico, indique a localização dos polos de malha fechada com pontos (\bullet) e inclua os limites da região aceitável para as raízes.
5.37 As equações normalizadas e escaladas do carro desenhado na Fig. 5.66 de massa m_c que sustenta um pêndulo invertido uniforme de massa m_p e comprimento l e sem atrito são

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \theta &= -v, \\ \ddot{y} + \beta\theta &= v, \end{aligned} \tag{5.95}$$

sendo $\beta = \frac{3m_p}{4(m_c+m_p)}$ uma relação de massa limitada por $0 < \beta < 0,75$. O tempo é medido em termos de $\tau = \omega_0 t$, sendo $\omega_0^2 = \frac{3g(m_c+m_p)}{\ell(4m_c+m_p)}$. O movimento do carro y é medido em unidades do comprimento do pêndulo $y = \frac{3x}{4\ell}$ e a força de entrada é normalizada pela massa do sistema $v = \frac{u}{g(m_c+m_p)}$. Essas equações podem ser usadas para obter as funções de transferência

$$\frac{\Theta}{V} = -\frac{1}{s^2 - 1}, \tag{5.96}$$

$$\frac{Y}{V} = \frac{s^2 - 1 + \beta}{s^2(s^2 - 1)}. \tag{5.97}$$

Figura 5.66 Figura do carro com o pêndulo para o Problema 5.37.

Neste problema, pede-se para projetar um controle para o sistema fechando uma malha em torno do pêndulo, Eq. (5.96) e, então, com esta malha fechada, fechando a segunda malha em torno do carrinho mais o pêndulo, Eq. (5.97). Para este problema, deixe a relação massa ser $m_c = 5m_p$.

- Desenhe um diagrama de blocos para o sistema com entrada V e duas saídas Y e Θ .
- Projete um compensador de avanço $D(s) = K_p(s + z)/(s + p)$ para malha de Θ cancelar o polo em $s = -1$ e aloque os dois polos restantes em $-4 \pm j4$. O novo controle é $U(s)$, sendo a força $V(s) = U(s) + D(s)\Theta(s)$. Esboce o lugar das raízes da malha do ângulo.
- Com $D(s)$, calcule a função de transferência da nova planta de U para Y .
- Projete um controlador $D_c(s)$ para a posição do carro com o pêndulo em malha fechada. Esboce o lugar das raízes em relação ao ganho de $D_c(s)$.
- Use o MATLAB para traçar a posição do carro e a posição do pêndulo para uma mudança em degrau da posição do carro.

- 5.38** Considere o 270-ft U.S. Coast Guard cutter *Tampa* (902) mostrado na Fig. 5.67. A identificação de parâmetros com base em dados de ensaios no mar (Trankle, 1987) foi utilizada para estimar os coeficientes hidrodinâmicos nas equações de movimento. O resultado é que a resposta do ângulo de direcionamento ψ do navio para o ângulo do leme δ e mudanças de vento w podem ser descritos por funções de transferência de segunda ordem

$$G_\delta(s) = \frac{\psi(s)}{\delta(s)} = \frac{-0,0184(s + 0,0068)}{s(s + 0,2647)(s + 0,0063)},$$

$$G_w(s) = \frac{\psi(s)}{w(s)} = \frac{0,0000064}{s(s + 0,2647)(s + 0,0063)},$$

sendo

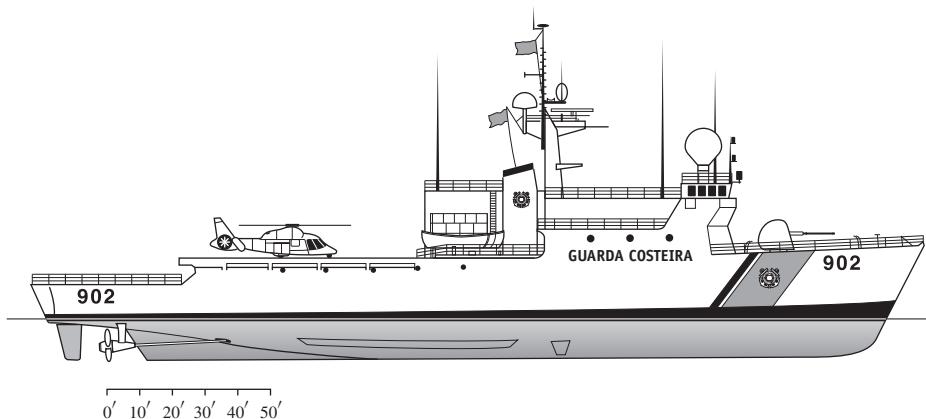
ψ = ângulo de direcionamento, rad,

r = referência para o ângulo de direcionamento, rad,

ψr = taxa de guinada, rad/s,

δ = ângulo do leme, rad,

w = velocidade do vento, m/s.

**Figura 5.67** USCG cutter *Tampa* (902) para o Problema 5.38.

- (a) Determine o tempo de acomodação em malha aberta de r para uma mudança de degrau em δ .
- (b) A fim de regular o ângulo de direcionamento ψ , projete um compensador que usa ψ e a medição fornecida por um giroscópio taxa de guinada (isto é, por, $\dot{\psi} = r$). O tempo de estabilização ψ a uma mudança de degrau em ψ_r é especificado para ser menor que 50 s, e para uma mudança de 5° na direção, a deflexão angular máxima permitida no leme é especificada para ser inferior a 10° .
- (c) Verifique a resposta do sistema em malha fechada com o projeto feito no item (b) a uma perturbação de rajada de vento de 10 m/s. (Modele a perturbação como uma entrada em degrau.) Se o valor em estado estacionário do ângulo do direcionamento devido a esta rajada de vento é maior que $0,5^\circ$, modifique seu projeto para que ele também atenda a esta especificação.
- 5.39** A Golden Nugget Airlines abriu um bar gratuito na cauda de seus aviões, em uma tentativa para atrair clientes. A fim de ajustar automaticamente para a mudança repentina de peso em função de os passageiros andarem para o bar quando ele abre pela primeira vez, a companhia aérea está mecanizando um piloto automático de campo atitude. A Figura 5.68 mostra o diagrama de blocos da estrutura proposta. Este momento será modelado como uma perturbação em degrau $M_p(s) = M_0/s$, com um valor máximo esperado para M_0 de 0,6.
- (a) Qual valor de K é necessário para manter o erro em estado estacionário em θ menor que 0,02 rad ($\approx 1^\circ$)? (Assuma que o sistema é estável.)
- (b) Esboce o lugar das raízes em relação a K .
- (c) Baseado no lugar das raízes obtido, qual é o valor de K quando o sistema se torna instável?
- (d) Suponha que o valor de K necessário para o comportamento aceitável em estado estacionário seja 600. Mostre que este valor resulta em um sistema instável com as raízes em
- $$s = -2,9, -13,5, +1,2 \pm 6,6j.$$
- (e) Considere uma caixa preta com um *giroscópio* que forneça uma medida perfeita de $\dot{\theta}$, com a saída $K_T\dot{\theta}$. Suponha $K = 600$ como no item (d) e desenhe um diagrama de blocos indicando como você deve incorporar o giroscópio ao piloto automático. (Inclua as funções de transferências nas caixas.)
- (f) Considerando a caixa preta com giroscópio no item (e), esboce o lugar das raízes com K_T .
- (g) Qual é o máximo coeficiente de amortecimento das raízes complexas obtidas com a configuração do item (e)?
- (h) Qual é o valor de K_T no item (g)?
- (i) Suponha que você não está satisfeito com o erro em estado estacionário e com o coeficiente de amortecimento do sistema considerando a caixa preta com giroscópio dos itens (e)-(h). Discuta as vantagens e desvantagens da adição de um termo integral e redes de avanço extras na lei de controle. Apoie seus comentários utilizando o MATLAB ou um esboço do lugar das raízes.

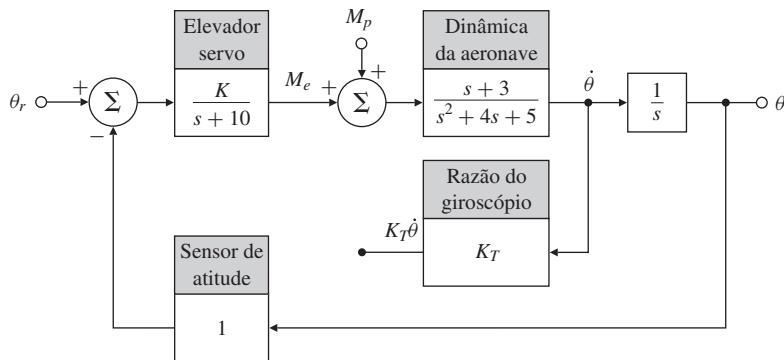


Figura 5.68 Piloto automático da Golden Nugget Airlines.

- 5.40** Considere o servomecanismo com os parâmetros dados na Fig. 5.69. Para cada um dos casos a seguir, desenhe um lugar das raízes com respeito ao parâmetro K e indique a localização das raízes correspondentes ao seu projeto final:

(a) *Rede de avanço:*

$$H(s) = 1, \quad D(s) = K \frac{s+z}{s+p}, \quad \frac{p}{z} = 6.$$

Selecione z e K tal que as raízes próximas à origem (as raízes dominantes) forneçam

$$\zeta \geq 0,4, \quad -\sigma \leq -7, \quad K_v \geq 16\frac{2}{3} s^{-1}.$$

- (b) *Velocidade de saída (tacômetro) realimentada:*

$$H(s) = 1 + K_T s \quad \text{e} \quad D(s) = K.$$

Selecione K_T e K tal que as raízes dominantes estejam nas mesmas localizações que as do item (a). Calcule K_v . Você sabe qual é a razão física que explica a redução em K_v quando é usada a realimentação da derivada da saída?

- (c) *Rede de atraso:*

$$H(s) = 1 \quad \text{e} \quad D(s) = K \frac{s+1}{s+p}.$$

Considerando um controlador proporcional, é possível obter $K_v = 12$ com $\zeta = 0,4$. Selecione K e p tal que as raízes dominantes correspondam às raízes do caso anterior com o controlador proporcional, mas com $K_v = 100$ e não $K_v = 12$.

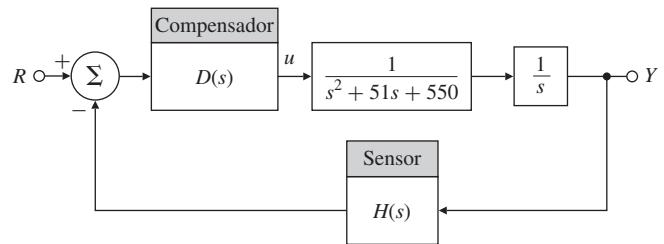


Figura 5.69 Sistema de controle para o Problema 5.40.

Problemas da Seção 5.6: extensões do método do lugar das raízes

- 5.41** Trace o lugar das raízes de 0° ou o lugar das raízes para valores negativos de K para os seguintes casos:

- (a) Os exemplos dados no Problema 5.3
- (b) Os exemplos dados no Problema 5.4
- (c) Os exemplos dados no Problema 5.5
- (d) Os exemplos dados no Problema 5.6
- (e) Os exemplos dados no Problema 5.7
- (f) Os exemplos dados no Problema 5.8

- 5.42** Suponha que a seguinte planta é fornecida

$$L(s) = \frac{1}{s^2 + (1+\alpha)s + (1+\alpha)},$$

sendo α um parâmetro do sistema sujeito a variações. Use os lugares das raízes positivo e negativo para determinar quais variações no parâmetro podem ser toleradas antes de o sistema se tornar instável.

- 5.43** Considere o sistema na Fig. 5.70.

- (a) Use o critério de Routh para determinar as regiões no plano (K_1, K_2) para os quais o sistema é estável.
- (b) Use o RLTOOL para verificar sua resposta do item (a).

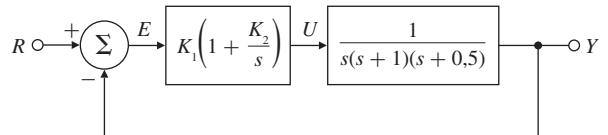


Figure 5.70 Sistema de controle para o Problema 5.43.

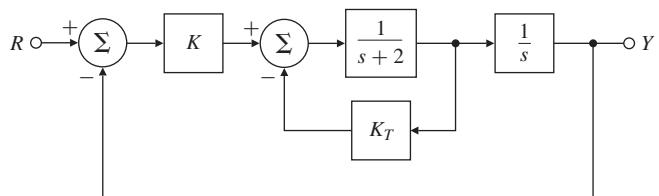


Figura 5.71 Sistema de controle para o Problema 5.44.

- △ **5.44** O diagrama de blocos de um servomecanismo de posicionamento é mostrado na Fig. 5.71.
- Esboce o lugar das raízes em relação ao parâmetro K quando não há realimentação do tacômetro ($K_T = 0$).
 - Indique os locais das raízes correspondente a $K = 16$ no lugar das raízes do item (a). Para estes locais, estime os parâmetros de resposta transitória t_r , M_p e t_s . Verifique suas estimativas de medidas usando o comando step no MATLAB.
 - Para $K = 16$, desenhe o lugar das raízes com relação ao parâmetro K_T .
 - Para $K = 16$ e com K_T ajustado para que $M_p = 0,05$ ($\zeta = 0,707$), estime t_r e t_s . Verifique suas estimativas de medidas usando o comando step no MATLAB.
 - Para os valores de K e K_T no item (d), qual é a constante de velocidade K_v deste sistema?
- △ **5.45** Considere o sistema mecânico mostrado na Fig. 5.72, quando g e a_0 são ganhos. O caminho de realimentação contendo g_s controla a quantidade de taxa de realimentação. Para um valor fixo de a_0 , ajustar g corresponde a variar a localização de um zero no plano- s .
- Com $g = 0$ e $\tau = 1$, encontre um valor de a_0 tal que os polos sejam complexos.
 - Fixe a_0 neste valor e construa o lugar das raízes que demonstrem o efeito da variação do parâmetro g .

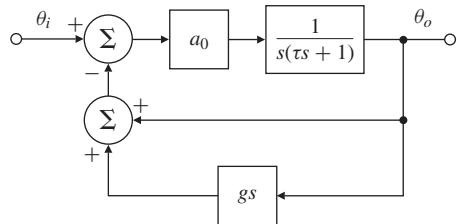


Figura 5.72 Sistema de controle para o Problema 5.45.

- △ **5.46** Esboce o lugar das raízes com respeito a K para o sistema na Fig. 5.73 usando a aproximação Padé (1,1) e a aproximação de primeira ordem para o atraso. Para ambas as aproximações, qual é o intervalo de valores de K para os quais o sistema é instável?

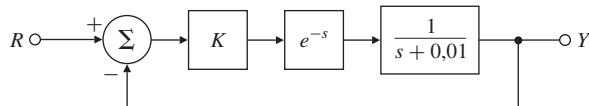


Figura 5.73 Sistema de controle para o Problema 5.46.

- △ **5.47** Prove que a planta $G(s) = 1/s^3$ não pode ser feita incondicionalmente estável se o cancelamento do polo for proibido.
- △ **5.48** Para a equação $1 + KG(s)$, com

$$G(s) = \frac{1}{s(s+p)[(s+1)^2 + 4]},$$

use o MATLAB para examinar o lugar das raízes em função do parâmetro K para p no intervalo de $p = 1$ a $p = 10$, certificando-se de incluir o ponto $p = 2$.

6

O Método de Projeto Baseado na Resposta em Frequência



O Projeto de sistemas de controle realimentados na indústria é, provavelmente, mais realizado usando métodos de resposta em frequência do que qualquer outro. O método de projeto baseado na resposta em frequência é popular principalmente porque proporciona bons projetos perante incertezas no modelo da planta. Por exemplo, para sistemas pouco conhecidos ou que sofrem mudanças a altas frequências, é possível ajustar a compensação de realimentação para aliviar os efeitos dessas incertezas. Atualmente, esse ajuste é realizado mais facilmente usando o método de projeto baseado na resposta em frequência do que usando qualquer outro método.

Outra vantagem de usar a resposta em frequência é a facilidade com que informações experimentais podem ser usadas para fins de projeto. Medidas de amplitude e fase de saída de uma planta para uma excitação de entrada senoidal são suficientes para projetar um controle por realimentação apropriado. Nenhum processamento intermediário de dados (como encontrar os polos e zeros ou determinar matrizes do sistema) é necessário para chegar ao modelo do sistema. A ampla disponibilidade de computadores tornou essa vantagem menos importante atualmente do que era anos atrás; no entanto, para sistemas relativamente simples, usar a resposta em frequência ainda é muitas vezes o método de projeto mais rentável. O método é mais eficaz para os sistemas que são estáveis em malha aberta.

Mais uma vantagem é que esse método é o mais fácil de ser usado para a concepção de compensação. Uma regra simples pode ser usada para fornecer projetos razoáveis com um mínimo de tentativas e erro.

Embora a teoria subjacente seja um pouco desafiadora e requeira um conhecimento bastante amplo de variáveis complexas, a metodologia de resposta em frequência para projeto é fácil, e os conhecimentos adquiridos por meio da aprendizagem da teoria compensam o esforço.

Visão geral do capítulo

O capítulo é iniciado com uma discussão sobre como obter a resposta em frequência de um sistema por meio da análise de seus polos e zeros. Uma extensão importante dessa discussão é como

usar os diagramas de Bode para exibir graficamente a resposta em frequência. Nas Seções 6.2 e 6.3, discutimos brevemente a estabilidade e, em seguida, o uso do critério de estabilidade de Nyquist.

Nas Seções 6.4 a 6.6, introduzimos noções de margens de estabilidade, discutimos a relação de ganho-fase de Bode e estudamos a resposta em frequência de sistemas dinâmicos em malha fechada. A relação de ganho-fase sugere uma regra muito simples para o projeto de compensadores: modele a magnitude da resposta em frequência de forma que ela atravesse a magnitude 1 com inclinação de -1 . Assim como fizemos para o método do lugar das raízes, descrevemos como a adição da compensação dinâmica pode ajustar a resposta em frequência (Seção 6.7) e melhorar características de erro e/ou estabilidade do sistema. Mostramos também como implementar compensação digital em um exemplo.

Nas seções opcionais 6.7.7 e 6.7.8, discutimos questões sobre sensibilidade que se relacionam com a resposta em frequência, incluindo material sobre funções de sensibilidade e estabilidade robusta. As duas seções seguintes analisam o retardo no tempo em sistemas e os gráficos de Nichols, que representam material avançado que, de certa forma, pode ser considerado opcional. A última Seção 6.10 é um breve histórico do método de projeto baseado em resposta em frequência.

6.1 Resposta em frequência

Os conceitos básicos da resposta em frequência foram discutidos na Seção 3.1.2. Nesta seção, vamos revisá-los e estendê-los para o projeto de sistemas de controle.

A resposta de um sistema linear a uma entrada senoidal – chamada de **resposta em frequência** do sistema – pode ser obtida a partir do conhecimento da localização de seus polos e zeros.

Para revisar essas ideias, considere o sistema descrito por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s),$$

sendo $u(t)$ uma onda senoidal com amplitude A :

$$u(t) = A \operatorname{sen}(\omega_o t) 1(t).$$

Essa onda senoidal tem a transformada de Laplace

$$U(s) = \frac{A\omega_o}{s^2 + \omega_o^2}.$$

Com condições iniciais nulas, a transformada de Laplace da saída é

$$Y(s) = G(s) \frac{A\omega_o}{s^2 + \omega_o^2}. \quad (6.1)$$

Expandindo em frações parciais a Eq. (6.1) [assumindo que os polos de $G(s)$ são distintos], temos

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s - p_n} + \frac{\alpha_o}{s + j\omega_o} + \frac{\alpha_o^*}{s - j\omega_o}, \quad (6.2)$$

sendo p_1, p_2, \dots, p_n os polos de $G(s)$, α_0 pode ser encontrado calculando a expansão em frações parciais, e α_0^* é o complexo conjugado de α_0 . A resposta temporal correspondente a $Y(s)$ é

$$y(t) = \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \cdots + \alpha_n e^{p_n t} + 2|\alpha_o| \cos(\omega_o t + \phi), \quad t \geq 0, \quad (6.3)$$

sendo

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\operatorname{Im}(\alpha_o)}{\operatorname{Re}(\alpha_o)} \right].$$

Resposta em frequência

Expansão em frações parciais

Se todos os polos do sistema representam um comportamento estável (as partes reais de $p_1, p_2, \dots, p_n < 0$), a resposta natural não forçada tende a zero e, portanto, a resposta em regime permanente do sistema dependerá somente do termo senoidal na Eq. (6.3), o qual é causado pela excitação senoidal. O Exemplo 3.5 determinou a resposta do sistema $G(s) = \frac{1}{(s+1)}$ para a entrada $u = \text{sen } 10t$ e mostrou esta resposta na Fig. 3.4, repetida aqui na Fig. 6.1. Isso mostra que e^{-t} , a parte da resposta natural associada com $G(s)$, desaparece depois de algumas constantes de tempo, e a resposta senoidal pura é essencialmente todos os termos restantes. O Exemplo 3.5 mostrou que o termo senoidal restante na Eq. (6.3) pode ser expresso como

$$y(t) = AM \cos(\omega_o t + \phi), \quad (6.4)$$

sendo

$$M = |G(j\omega_o)| = |G(s)|_{s=j\omega_o} = \sqrt{\{\text{Re}[G(j\omega_o)]\}^2 + \{\text{Im}[G(j\omega_o)]\}^2}, \quad (6.5)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}[G(j\omega_o)]}{\text{Re}[G(j\omega_o)]} \right] = \angle G(j\omega_o). \quad (6.6)$$

Na forma polar,

$$G(j\omega_o) = Me^{j\phi}. \quad (6.7)$$

A Eq. (6.4) mostra que um sistema estável com função de transferência $G(s)$ excitado por uma entrada senoidal com amplitude A e frequência ω_0 irá, depois de a resposta do sistema atingir seu estado estacionário, exibir uma saída senoidal com a magnitude $M(\omega_0)$ e com uma fase $\phi(\omega_0)$ na frequência ω_0 . Os fatos de que a saída y é uma senoide com a *mesma* frequência que a entrada u e que a magnitude M e a fase ϕ da saída são independentes da amplitude A da entrada são consequências de $G(s)$ ser um sistema linear constante. Se o sistema excitado for não linear ou variante no tempo, a saída poderá conter frequências diferentes da frequência de entrada, e a razão saída-entrada poderá ser dependente da magnitude da entrada.

De forma mais geral, a **magnitude** M é dada por $|G(j\omega)|$ e a **fase** ϕ é dada por $\angle G(j\omega)$; isto é, a magnitude e o ângulo da quantidade complexa $G(s)$ são avaliadas com s assumindo valores ao longo do eixo imaginário ($s = j\omega$). A resposta em frequência de um sistema é composta por estas funções de frequência que nos dizem como um sistema irá responder a uma entrada senoidal de qualquer frequência. Estamos interessados em analisar a resposta em frequência, não só porque ela vai nos ajudar a entender como um sistema responde a uma entrada senoidal, mas também porque avaliar $G(s)$ com s assumindo valores ao longo do eixo $j\omega$ irá provar ser muito útil para determinar a estabilidade de um sistema em malha fechada. Como vimos no Capítulo 3, o eixo $j\omega$ é a fronteira entre a estabilidade e a instabilidade; veremos na Seção 6.4 que avaliar $G(j\omega)$ fornece informações que nos permitem determinar a estabilidade de um sistema em malha fechada a partir da função de transferência em malha aberta $G(s)$.

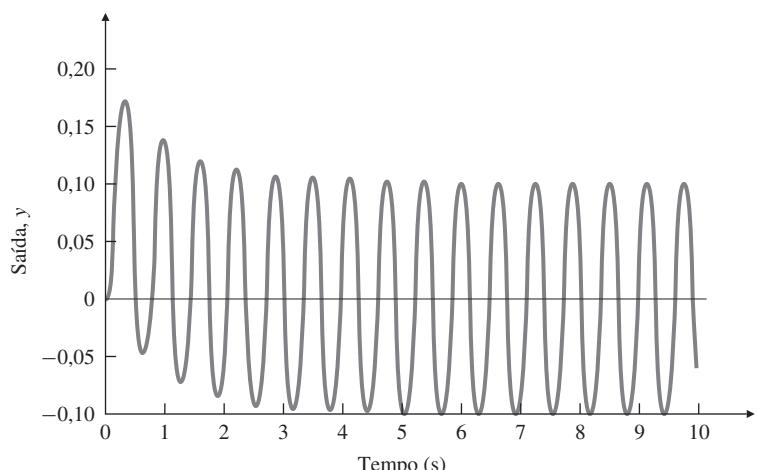


Figura 6.1 Resposta de $G(s) = \frac{1}{(s+1)}$ para a entrada $u = \text{sen } 10t$.

Gráfico da resposta em frequência

Magnitude e fase

EXEMPLO 6.1 Características da resposta em frequência de um capacitor

Considere o capacitor descrito pela equação

$$i = C \frac{dv}{dt},$$

sendo v a entrada e i a saída. Determine a resposta senoidal em regime permanente do capacitor.

Solução. A função de transferência do circuito é

$$\frac{I(s)}{V(s)} = G(s) = Cs,$$

então,

$$G(j\omega) = Cj\omega.$$

Calculando a magnitude e a fase, temos

$$M = |Cj\omega| = C\omega \quad \text{e} \quad \phi = \angle(Cj\omega) = 90^\circ.$$

Para um entrada senoidal com amplitude unitária v , a saída i será uma senoide com amplitude $C\omega$, e a fase da saída será avançada em 90° . Note que, para esse exemplo, a magnitude é proporcional à frequência de entrada enquanto a fase é independente da frequência.

EXEMPLO 6.2 Características da resposta em frequência de um compensador de avanço

Do Capítulo 5 [Eq. (5.70)], a função de transferência de um compensador de avanço é equivalente a

$$D(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad \alpha < 1. \quad (6.8)$$

1. Analiticamente, determine as características da resposta em frequência e discuta o que se pode esperar deste resultado.
2. Use o MATLAB para traçar $D(j\omega)$ com $K = 1$, $T = 1$ e $\alpha = 0,1$ para $0,1 \leq \omega \leq 100$, e verifique as características previstas no item anterior.

Solução

1. **Avaliação analítica:** substituindo $s = j\omega$ na Eq. (6.8), temos

$$D(j\omega) = K \frac{Tj\omega + 1}{\alpha Tj\omega + 1}.$$

A partir das Eqs. (6.5) e (6.6), a amplitude é

$$M = |D| = |K| \frac{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}{\sqrt{1 + (\alpha\omega T)^2}},$$

e a fase é dada por

$$\begin{aligned} \phi &= \angle(1 + j\omega T) - \angle(1 + j\alpha\omega T) \\ &= \tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}(\alpha\omega T). \end{aligned}$$

Em frequências muito baixas, a amplitude é apenas $|K|$, e em frequências muito altas, é $|k/\alpha|$. Portanto, a amplitude é maior em frequências mais altas. A fase é zero em baixa frequência e volta a ser zero em alta frequência. Em valores intermediários de frequência, a avaliação da função $\tan^{-1}(\cdot)$ deve revelar que ϕ se torna positivo. Essas são as características gerais do compensador de avanço.

2. Avaliação numérica: um código para o MATLAB para a avaliação da resposta em frequência é mostrado no Exemplo 3.5. Um código similar para o compensador de avanço:

```

num = [1 1];
den = [0.1 1];
sysD = tf(num,den);
w = logspace(-1,-2); % determina a faixa de frequências de interesse
[mag,phase] = bode(sysD,w); % calcula a magnitude e fase nas frequências
                             de interesse
loglog(w,squeeze(mag)),grid;
semilogx(w,squeeze(phase)), grid;

```

produz o gráfico da magnitude e fase da resposta em frequência mostradas na Fig. 6.2.

A análise indica que a magnitude de baixa frequência deve ser $K (=1)$ e a magnitude de alta frequência deve ser $K/\alpha (=10)$, as quais são confirmadas pelo gráfico de magnitude. O gráfico da fase também mostra que valor se aproxima de zero em altas e baixas frequências e que os valores intermediários são positivos.

Para os casos nos quais não há bons modelos do sistema e deseja-se determinar a resposta em frequência experimentalmente, podemos excitar o sistema com uma senoide variando em frequência. A magnitude $M(\omega)$ é obtida medindo a razão da saída senoidal para a entrada em estado estacionário em cada frequência. A fase $\phi(\omega)$ é a diferença de fase entre a entrada e a saída.¹

Muito pode ser aprendido sobre a resposta dinâmica de um sistema conhecendo a magnitude $M(\omega)$ e fase $\phi(\omega)$ de sua função de transferência. No caso óbvio, se o sinal for uma senoide, então M e ϕ descrevem completamente a resposta. Além disso, se a entrada é periódica, então uma série de Fourier pode ser construída para decompor a entrada em uma soma de senoides, e novamente M e ϕ podem ser usados com cada componente para construir a resposta total. Para entradas transitórias, o melhor caminho para a compreensão do significado de $M(\omega)$ e $\phi(\omega)$ é relacionar a resposta em frequência $G(j\omega)$ com as respostas transientes calculadas pela transformada de Laplace. Por exemplo, na Fig. 3.18(b) é traçada a resposta ao degrau de um sistema que tem a função de transferência

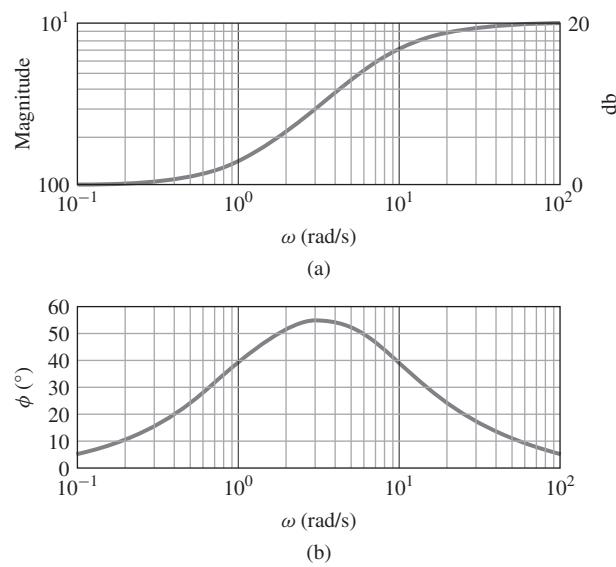


Figura 6.2 (a) Magnitude; (b) fase do compensador de avanço no Exemplo 6.2.

¹ A Agilent Technologies produz instrumentos chamados de analisadores de espectro, que automatizam este procedimento experimental e aceleram o processo.

$$G(s) = \frac{1}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1}, \quad (6.9)$$

para vários valores de ζ . Estas curvas transitórias foram normalizadas em relação ao tempo como ωt . Na Fig. 6.3, são traçados $M(\omega)$ e $\phi(\omega)$ para estes valores de ζ , para nos ajudar a entender quais características da resposta em frequência correspondem a características da resposta transitória. Especificamente, as Figs. 3.18(b) e 6.3 indicam o efeito de amortecimento na resposta temporal do sistema e o efeito correspondente na resposta em frequência. Elas mostram que o amortecimento do sistema pode ser determinado a partir do sobressinal na resposta transitória ou a partir do pico da magnitude na resposta em frequência [Fig. 6.3 (a)]. Além disso, a partir da resposta em frequência, vemos que ω_n , é aproximadamente igual à largura de banda – a frequência em que a magnitude começa a cair abaixo de seu valor em baixa frequência. (A largura de banda é melhor definida no próximo parágrafo.) Portanto, o tempo de subida pode ser estimado a partir da largura de banda. Vemos também que o sobressinal na frequência é de aproximadamente $1/2\zeta$ para $\zeta < 0,5$, então o sobressinal na resposta ao degrau pode ser estimado a partir do sobressinal na resposta em frequência. Assim, vemos essencialmente que a mesma informação está contida na curva da resposta em frequência como é encontrada na curva de resposta transitória temporal.

Uma especificação natural para o desempenho do sistema em termos de resposta em frequência é a **largura de banda**, definida como a frequência máxima com que a saída de um sistema vai rastrear uma senoide de entrada de forma satisfatória. Por convenção, para o sistema mostrado na Fig. 6.4 com uma entrada senoidal r , a largura de banda é a frequência de r em que a saída y é atenuada por um fator de 0,707 vezes a entrada.² A Fig. 6.5 apresenta graficamente esta ideia para a resposta em frequência da função de transferência em *malha fechada*

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \triangleq \mathcal{T}(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}.$$

Largura de banda

O gráfico é típico da maioria dos sistemas em malha fechada em que (1) a saída segue a entrada ($|\mathcal{T}| \approx 1$) para excitações de baixas frequências, e (2) a saída não segue a entrada ($|\mathcal{T}| < 1$) para altas frequências de excitação. O valor máximo da magnitude da resposta em frequência é referenciado como o **pico de ressonância** M_r .

A largura de banda é a medida da velocidade da resposta e é, portanto, similar às medidas no domínio do tempo, tais como tempo de subida e tempo de pico ou a medidas no plano- s como a frequência natural das raízes dominantes. De fato, se $KG(s)$ na Fig. 6.4 é tal que a resposta em malha fechada é dada pela Fig. 6.3, podemos ver que a largura de banda será igual à frequência natural das raízes de malha fechada (isto é, $\omega_{BW} = \omega_n$ para o coeficiente de amortecimento de malha fechada igual a $\zeta = 0,7$). Para outros coeficientes de amortecimento, a largura de banda é aproximadamente igual à frequência natural das raízes de malha fechada, com um erro tipicamente menor que um fator de 2.

A definição de largura de banda apresentada aqui é significativa para sistemas que tem comportamento de filtros passa-baixa, como é o caso de qualquer sistema físico de controle. Em outras aplicações, a largura de banda pode ser definida de forma diferente. Também, se o modelo ideal do sistema não tem um roll-off em alta frequência (por exemplo, se ele tem um número igual de polos e zeros), a largura de banda é infinita; entretanto, isto não ocorre na natureza, pois nada responde bem à frequência infinita.

Em muitos casos, a principal preocupação do projetista é o erro no sistema devido a perturbações, mais do que a capacidade de rastrear uma entrada. Na análise do erro, estamos interessados em uma das funções de sensibilidade definidas na Seção 4.1, $S(s)$, no lugar de $\mathcal{T}(s)$. Para a maioria dos sistemas em malha aberta com alto ganho em baixas frequências, $S(s)$ para uma entrada de perturbação terá valores muito baixos em baixas frequências e crescerá à medida que a frequência da entrada ou da perturbação se aproximar da largura de banda. Para analisar $\mathcal{T}(s)$ ou $S(s)$, é típico

² Se a saída é a tensão em um resistor de $1-\Omega$, a potência é v^2 , e quando $|v| = 0,707$, a potência é reduzida por um fator de 2. Por convenção, este é chamado de ponto de meia potência.

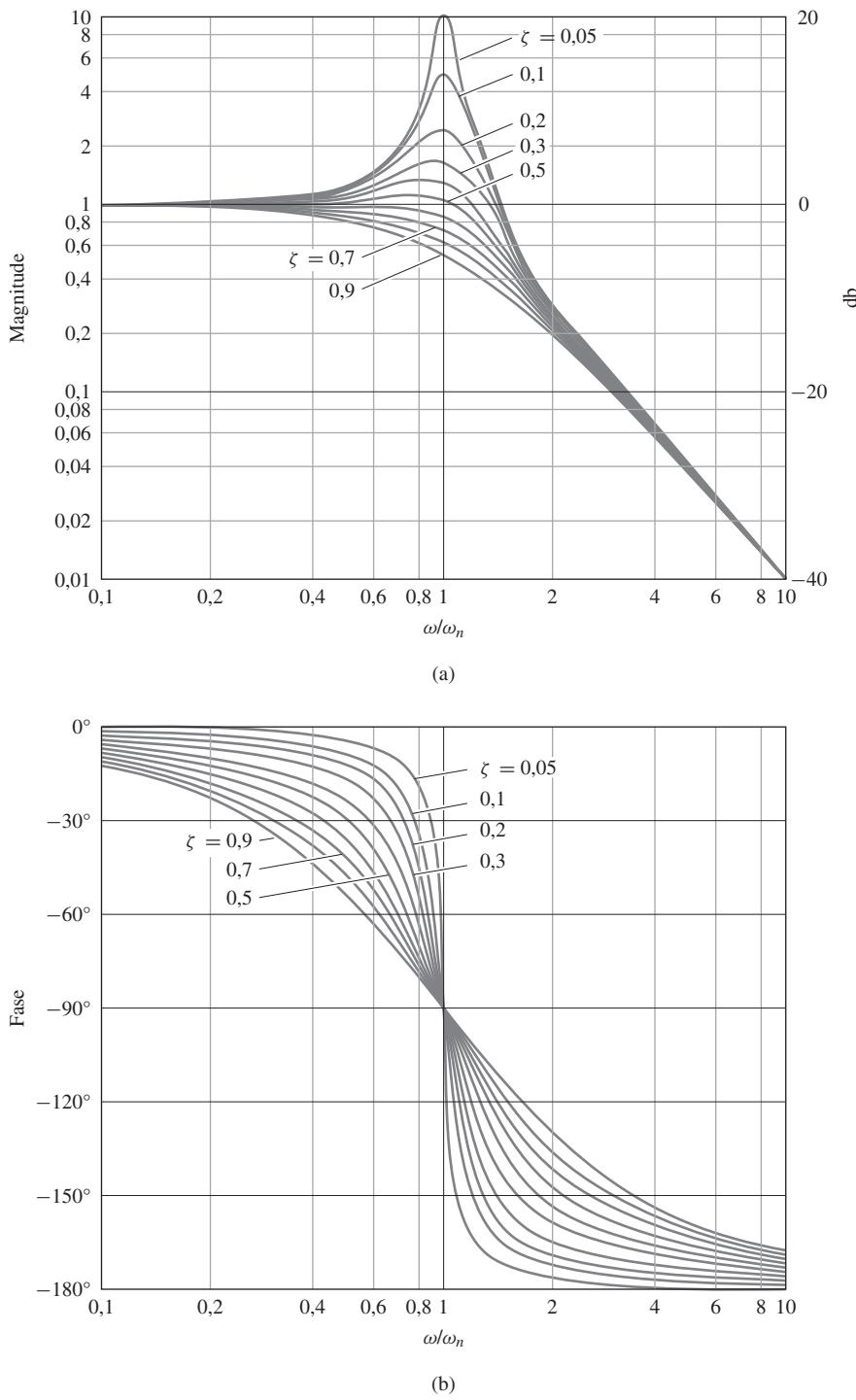


Figura 6.3 (a) Magnitude; (b) fase da Eq. (6.9).

traçar suas respostas em função da frequência da entrada. Ambas as respostas em frequência para o projeto de controle podem ser avaliadas usando o computador ou podem ser rapidamente esboçadas para sistemas simples utilizando os métodos eficientes descritos na Seção 6.1.1

Os métodos descritos a seguir também são úteis para agilizar o processo do projeto, assim como para fazer uma checagem de validade da saída do computador.

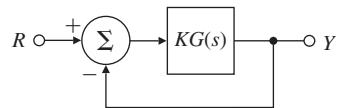


Figura 6.4 Definição do sistema simplificado.

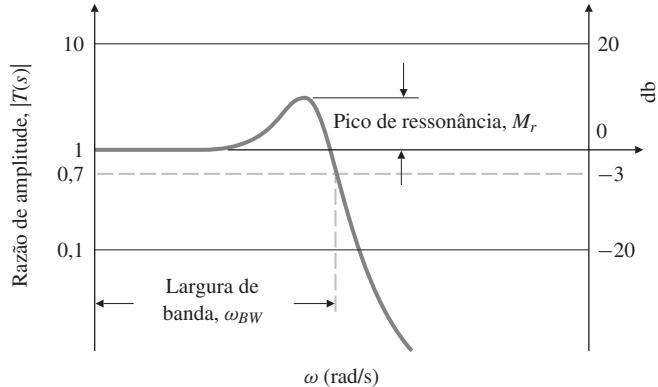


Figura 6.5 Definições de largura de banda e pico de ressonância.

6.1.1 Técnicas para traçar o diagrama de Bode

Apresentar a resposta em frequência é um problema que tem sido estudado há muito tempo. Antes dos computadores, isso era feito à mão, por isso era útil ser capaz de apresentar a resposta em frequência rapidamente. A técnica manual mais útil foi desenvolvida por H. W. Bode no Bell Laboratories entre 1932 e 1942. Essa técnica permite um traçado rápido e, ainda assim, preciso o suficiente para o projeto de sistemas de controle. Os projetistas de controle atuais têm acesso a programas de computador que diminuem a necessidade de produzir este gráfico à mão; entretanto, mesmo assim é importante desenvolver uma boa intuição para que você possa rapidamente identificar resultados computacionais errados, e para isso você precisa da habilidade de desenvolver uma checagem de resultados e, em alguns casos, de determinar este traçado manualmente.

A ideia do método de Bode é traçar a curva de magnitude usando a escala logarítmica e a curva de fase usando a escala linear. Esta estratégia nos permite traçar $G(j\omega)$ para altas frequências simplesmente adicionando graficamente os termos separados, como discutido no Apêndice B. Esta adição é possível porque uma expressão complexa com fatores de zeros e polos pode ser escrita na forma polar (ou fasorial) na forma

$$G(j\omega) = \frac{\vec{s}_1 \vec{s}_2}{\vec{s}_3 \vec{s}_4 \vec{s}_5} = \frac{r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2}}{r_3 e^{j\theta_3} r_4 e^{j\theta_4} r_5 e^{j\theta_5}} = \left(\frac{r_1 r_2}{r_3 r_4 r_5} \right) e^{j(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5)}. \quad (6.10)$$

(A seta sobreescrita indica um fasor.) Note, da Eq. (6.10), que a fase dos termos individuais são somados diretamente para obter como a fase da expressão composta, $G(j\omega)$. Além disso,

$$|G(j\omega)| = \frac{r_1 r_2}{r_3 r_4 r_5},$$

temos que

$$\log_{10} |G(j\omega)| = \log_{10} r_1 + \log_{10} r_2 - \log_{10} r_3 - \log_{10} r_4 - \log_{10} r_5. \quad (6.11)$$

Vemos que a adição dos logaritmos dos termos individuais fornece o logaritmo da magnitude da expressão composta. A resposta em frequência é tipicamente apresentada em duas curvas; o logaritmo da magnitude versus $\log \omega$ e a fase versus $\log \omega$. Juntas, estas duas curvas constituem o **diagrama de Bode** do sistema. Como

$$\log_{10} M e^{j\phi} = \log_{10} M + j\phi \log_{10} e, \quad (6.12)$$

Gráfico composto a partir de termos individuais

Diagrama de Bode

Decibéis

vemos que o diagrama de Bode nos apresenta as partes real e imaginária do logaritmo de $G(j\omega)$. Em comunicações, é padrão medir o ganho da potência em decibéis (db):³

$$|G|_{\text{db}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}. \quad (6.13)$$

Aqui, P_1 e P_2 são as potências de entrada e saída. Devido ao fato da potência ser proporcional ao quadrado da tensão, o ganho de potência também é dado por

$$|G|_{\text{db}} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1}. \quad (6.14)$$

Portanto, podemos apresentar o diagrama de Bode como a magnitude em decibéis versus $\log \omega$, e a fase em graus versus $\log \omega$.⁴

Neste livro, o diagrama de Bode é dado na forma $\log |G|$ versus $\log \omega$; também, no lado direito do gráfico da magnitude, o eixo é marcado em decibéis para fornecer a possibilidade da escolha para trabalhar com a representação desejada. Entretanto, para gráficos da resposta em frequência, não estamos traçando potência, e o uso da Eq. (6.14) pode ser um pouco enganador. Se os dados de magnitude são derivados em termos de $\log |G|$, é convencional traçá-los em uma escala logarítmica, mas identificar a escala de $|G|$ somente (sem o “log”). Se a magnitude é dada em decibéis, a escala vertical é linear tal que cada década de $|G|$ represente 20 db.

Vantagens em trabalhar com resposta em frequência usando diagramas de Bode

Vantagens do diagrama de Bode

1. O projeto de compensadores dinâmicos pode ser completamente baseado em diagramas de Bode.
2. Diagramas de Bode podem ser determinados experimentalmente.
3. Diagramas de Bode de sistemas em série são simplesmente somados, o que é bastante conveniente.
4. O uso da escala log permite que uma faixa de frequência muito mais larga seja apresentada em um único diagrama, o que não seria possível usando a escala linear.

É importante que o engenheiro de controle de sistemas entenda as técnicas de traçado do diagrama de Bode por muitos motivos: este conhecimento permite ao engenheiro não apenas lidar com problemas simples, mas também executar uma verificação nos resultados computacionais para os casos mais complicados. Muitas vezes, aproximações podem ser usadas para esboçar rapidamente a resposta em frequência e deduzir a estabilidade, bem como para determinar a forma das compensações dinâmicas necessárias. Finalmente, uma compreensão do método de traçado é útil na interpretação de resposta em frequência de dados que foram gerados experimentalmente.

No Capítulo 5, escrevemos a função de transferência em malha aberta na forma

$$KG(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots} \quad (6.15)$$

porque esta forma é muito mais conveniente para determinar o grau de estabilidade a partir do lugar das raízes em relação ao parâmetro K . Quando estamos trabalhando com resposta em frequência, é mais conveniente substituir s por $j\omega$ e escrever a função de transferência na **forma apropriada para o diagrama de Bode**

$$KG(j\omega) = K_o \frac{(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1) \cdots}{(j\omega\tau_a + 1)(j\omega\tau_b + 1) \cdots} \quad (6.16)$$

devido ao fato de o ganho K_o nesta forma estar diretamente relacionado com a magnitude da função de transferência em frequências muito baixas.

Forma apropriada da função de transferência para o diagrama de Bode

³ Os pesquisadores da Bell Laboratories definiram pela primeira vez a unidade de ganho de potência como **bel** (nomeado por Alexander Graham Bell, o fundador da empresa). No entanto, essa unidade provou ser muito grande; portanto, um **decibel** ou **db** (1/10 de um bel) foi selecionado como uma unidade mais útil. A sigla dB também é usada; no entanto, Bode utilizou db e, portanto, escolhemos usar db.

⁴ Doravante, iremos suprimir a base do logaritmo; ela é assumida como sendo 10.

De fato, para sistemas de Tipo 0, K_o é o ganho em $\omega = 0$ na Eq. (6.16) e também é igual ao ganho DC do sistema. Apesar de um simples cálculo converter uma função de transferência na forma da Eq. (6.15) para uma função de transferência equivalente, na forma da Eq. (6.16), note que K e K_o , não costumam ter o mesmo valor nas duas expressões.

Funções de transferência também podem ser reescritas de acordo com as Eqs. (6.10) e (6.11). Como um exemplo, suponha que

$$KG(j\omega) = K_o \frac{j\omega\tau_1 + 1}{(j\omega)^2(j\omega\tau_a + 1)}. \quad (6.17)$$

Então,

$$\angle KG(j\omega) = \angle K_o + \angle(j\omega\tau_1 + 1) - \angle(j\omega)^2 - \angle(j\omega\tau_a + 1) \quad (6.18)$$

e

$$\log |KG(j\omega)| = \log |K_o| + \log |j\omega\tau_1 + 1| - \log |(j\omega)^2| - \log |j\omega\tau_a + 1|. \quad (6.19)$$

Em decibéis, a Eq. (6.19) torna-se

$$\begin{aligned} |KG(j\omega)|_{\text{db}} &= 20 \log |K_o| + 20 \log |j\omega\tau_1 + 1| - 20 \log |(j\omega)^2| \\ &\quad - 20 \log |j\omega\tau_a + 1|. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Todas funções de transferência dos tipos de sistemas que tratamos até agora são compostas de três classes de termos:

1. $K_o(j\omega)^n$.
2. $(j\omega\tau + 1)^{\pm 1}$.
3. $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{\pm 1}$.

Classes de termos das funções de transferência

Primeiro, vamos tratar do traçado de cada termo individualmente e de como cada termo afeta o diagrama composto por todos os termos; então vamos discutir como desenhar a curva composta.

1. $K_o(j\omega)^n$. Devido

$$\log K_o |(j\omega)^n| = \log K_o + n \log |j\omega|,$$

Classe 1:
singularidades de origem

a magnitude desse termo é uma linha reta com uma inclinação $n \times (20 \text{ db por década})$. Exemplos para diferentes valores de n são mostrados na Fig. 6.6. $K_o(j\omega)^n$ é a única classe dos termos que afeta a inclinação em baixas frequências, porque todos os outros termos são cons-

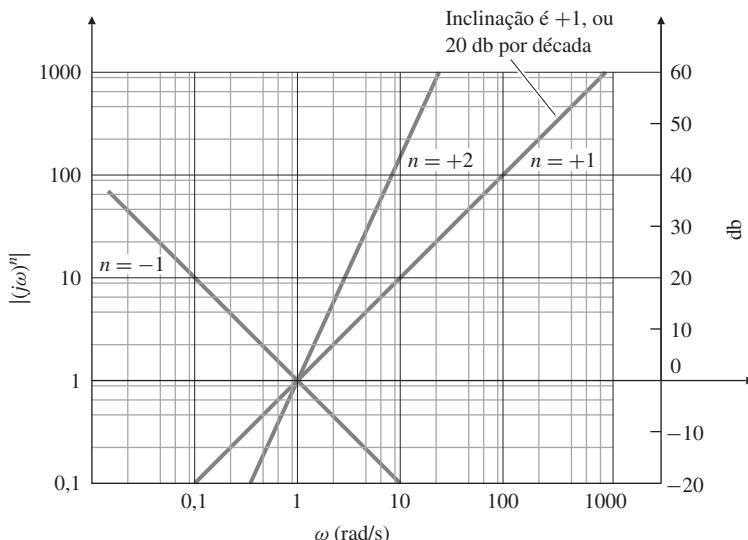


Figura 6.6 Magnitude de pegar $(j\omega)^n$.

tantes naquela região. A maneira mais simples de desenhar a curva é localizar $\omega = 1$ e traçar o $\log K_o$ nesta frequência. Então, desenhar uma linha com inclinação n passando por este ponto.⁵ A fase de $(j\omega)^n$ é $\phi = n \times 90^\circ$, independentemente da frequência, e, portanto, é uma linha horizontal: -90° para $n = -1$, -180° para $n = -2$, $+90^\circ$ para $n = +1$ e assim por diante.

2. $j\omega\tau + 1$. A magnitude deste termo se aproxima de uma assíntota em frequências muito baixas e de outra assíntota em frequências muito altas:

- (a) Para $\omega\tau \ll 1$, $j\omega\tau + 1 \cong 1$.
- (b) Para $\omega\tau \gg 1$, $j\omega\tau + 1 \cong j\omega\tau$.

Classe 2: termo de primeira ordem

Ponto de quebra

Se chamarmos $\omega = 1$ de **ponto de quebra**, então vemos que abaixo do ponto de quebra a magnitude da curva é aproximadamente constante ($= 1$), enquanto acima do ponto de quebra, a magnitude da curva se comporta aproximadamente como um termo de classe 1, $K_o(j\omega)$. O exemplo apresentado na Fig. 6.7, $G(s) = 10s + 1$, mostra como as duas assíntotas cruzam o ponto de quebra e como a magnitude atual da curva está acima deste ponto por um fator de 1,4 (ou +3 db). (Se o termo estiver no denominador, ele estará abaixo do ponto de quebra por um fator de 0,707 ou -3 db.) Note que esse termo irá ter apenas um pequeno efeito na composição das curvas de magnitude, em razão deste valor ser igual a 1 ($= 0$ db) nesta região. A inclinação em altas frequências é $+1$ (ou +20 db por década). A fase da curva pode ser também facilmente desenhada usando as seguintes assíntotas para baixas e altas frequências:

- (a) Para $\omega\tau \ll 1$, $\angle = 0^\circ$.
- (b) Para $\omega\tau \gg 1$, $\angle j\omega\tau = 90^\circ$.
- (c) Para $\omega\tau \cong 1$, $\angle (j\omega\tau + 1) \cong 45^\circ$.

Para $\omega\tau \cong 1$, a $\angle(j\omega + 1)$ da curva tangente a uma assíntota vai de 0° em $\omega\tau = 0,2$ para 90° em $\omega\tau = 5$, como mostrado na Fig. 6.8. A figura também ilustra as três assíntotas (linhas

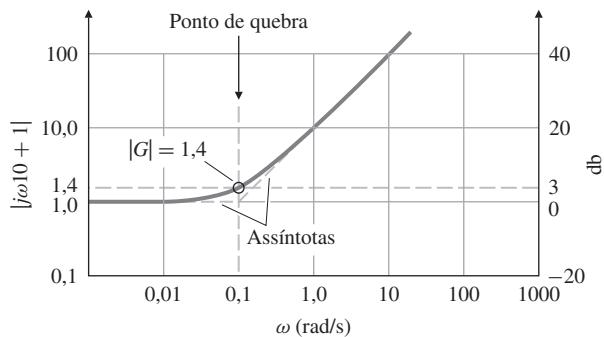


Figura 6.7 Gráfico da magnitude de $j\omega\tau + 1$; $\tau = 10$.

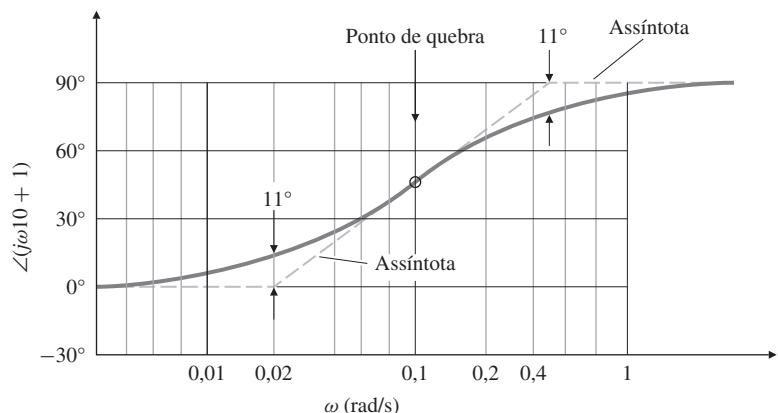


Figura 6.8 Gráfico da fase de $j\omega\tau + 1$; $\tau = 10$.

⁵ Em decibéis, as inclinações são $n \times 20$ db por década ou $n \times 6$ db por oitava (uma oitava é uma mudança na frequência por um fator de 2).

tracejadas) usadas para traçar a curva de fase e como a curva real se desvia das assíntotas por 11° em suas interseções. Tanto as curvas compostas de fase e de magnitude não são afetadas por esta classe de termos em frequências abaixo do ponto de quebra por um fator maior que 10, porque a magnitude do termo é 1 (ou 0 db) e sua fase é menor que 5° .

3. $[(j\omega/\omega_n)^2 + 2\angle(j\omega/\omega_n) + 1]^{\pm 1}$ Este termo se comporta de forma semelhante ao termo de classe 2, com as diferenças: o ponto de quebra é $\omega = \omega_n$. A magnitude muda com um coeficiente de inclinação de +2 (ou +40 db por década) no ponto de quebra (e -2, ou -40 db por década, quando o termo está no denominador). A fase muda de $\pm 180^\circ$, e a transição na região do ponto de quebra varia com o coeficiente de amortecimento ζ . A Figura 6.3 mostra a magnitude e a fase em relação a diferentes valores para o coeficiente de amortecimento, quando este termo está no denominador. Note que a magnitude da assíntota para frequências acima do ponto de quebra tem inclinação de -2, (ou -40 db por década), e que a transição na região de ponto de quebra tem larga dependência do coeficiente de amortecimento. A determinação aproximada desta transição pode ser feita observando que

Classe 3: termo de segunda ordem

Pico de amplitude

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{em } \omega = \omega_n \quad (6.21)$$

para este termo de segunda ordem no denominador. Se o termo estiver no numerador, a magnitude seria o inverso da curva apresentada na Fig. 6.3(a).

Não há regra como a Eq. (6.21) para esboçar a transição para a curva de fase, portanto, precisamos recorrer à Fig. 6.3(b) para um traçar um gráfico de fase com boa precisão. No entanto, uma noção aproximada da transição pode ser obtida observando-se que ela é uma função degrau para $\zeta = 0$, ao mesmo tempo em que obedece à regra de dois termos de primeira ordem (classe 2) quando $\zeta = 1$ com frequências de quebra simultâneas. Todos os valores intermediários de ζ estão entre estes dois valores. A fase de um termo de segunda ordem é sempre $\pm 90^\circ$ em ω_n .

Quando o sistema tem vários polos e vários zeros, a resposta em frequência do sistema exige que as componentes sejam combinadas em uma curva composta. Para traçar a curva de magnitude composta, é útil observar que as inclinações das assíntotas compostas são iguais à soma das inclinações das curvas individuais. Portanto, a curva da assíntota composta tem mudanças de inclinação em cada frequência de ponto de quebra: +1 para um termo de primeira ordem no numerador, -1 para um termo de primeira ordem no denominador e ± 2 para termos de segunda ordem. Além disso, na região de baixas frequências a assíntota tem uma inclinação determinada pelo valor de n no termo $(j\omega)^n$ e é localizada traçando o ponto $K_o\omega^n$ em $\omega = 1$. Portanto, o procedimento completo consiste em traçar a parte de baixas frequências da assíntota, sequencialmente mudar a inclinação da assíntota em cada ponto de quebra na ordem crescente das frequências e, finalmente, desenhar a curva real usando as regras de transição discutidas anteriormente para as classes 2 e 3.

Curva composta

A curva de fase composta é a soma das curvas individuais. A adição gráfica das curvas de fase individuais é possível, localizando as curvas de fase individuais de forma que a fase composta se aproxime da adição das curvas individuais tanto quanto possível. Um esboço rápido, mas sem precisão, da fase composta pode ser encontrado iniciando-se pelo menor ponto de quebra e o definindo igual a $n \times 90^\circ$. A fase, então, é traçada em cada ponto de quebra na ordem ascendente de frequências. O valor da quantidade de fase é $\pm 90^\circ$ para um sistema de primeira ordem e $\pm 180^\circ$ para um sistema de segunda ordem. Os pontos de quebra no numerador indicam um degrau positivo na fase, enquanto os pontos de quebra no denominador indicam um degrau de fase negativo⁶. As regras de traçado apresentadas até agora têm considerado apenas polos e zeros no semiplano esquerdo (SPE). Mudanças para singularidades no semiplano direito (SPD) serão discutidas no final da seção.

⁶ Este método aproximado nos foi apontado pelos nossos colegas parisienses.

Resumo das regras para traçar o diagrama de Bode

1. Manipular a função de transferência para a forma de Bode dada pela Eq. (6.16).
2. Determinar o valor de n para o termo $K_o(j\omega)^n$ (classe 1). Traçar a magnitude de baixas frequências através do ponto K_o em $\omega = 1$ com uma inclinação de n (ou $n \times 20$ db por década).
3. Obter a curva composta de assíntotas: estenda a assíntota de baixas frequências até o primeiro ponto de quebra. Então, mude a inclinação em ± 1 ou ± 2 dependendo se o ponto de quebra se deve um termo de primeira ou segunda ordem e se está no numerador ou no denominador. Continue este procedimento em ordem crescente até passar por todos os pontos de quebra.
4. A curva de magnitude aproximada é adicionada por um fator de 1,4 (+3 db) nos pontos de quebra devido a termos de primeira ordem no numerador, e é reduzida de um fator de 0,707 (-3 db) nos pontos de quebra devido a termos de primeira ordem no denominador. Em pontos de quebra devido a termos de segunda ordem, o pico de ressonância (ou vale) ocorre de acordo com a Fig. 6.3(a), usando a relação $|G(j\omega)| = 1/(2\zeta)$ no denominador (ou $|G(j\omega)| = 2\zeta$ no numerador).
5. Trace a assíntota da curva de fase para baixas frequências, $\phi = n \times 90^\circ$.
6. A curva de fase aproximada muda em $\pm 90^\circ$ ou $\pm 180^\circ$ em cada ponto de quebra em ordem crescente. Para termos de primeira ordem no numerador, a mudança de fase é 90° ; para os no denominador, a mudança é -90° . Para termos de segunda ordem, a mudança é de $\pm 180^\circ$.
7. Localize as assíntotas para cada curva de fase de modo que sua mudança de fase corresponda aos pontos de mudança de direção na curva aproximada de fase indicada pelo Passo 6. Cada curva individual de fase ocorre conforme indicado pela Fig. 6.8 ou pela Fig. 6.3(b).
8. Adicione graficamente cada curva de fase. Use uma régua se uma precisão em torno de 5° for desejada. Se uma precisão menor for aceitável, a curva composta pode ser feita a olho nu. Tenha em mente que a curva começará na assíntota de baixas frequências e irá terminar em uma assíntota de altas frequências, e as assíntotas intermediárias serão determinadas em relação a quão próximos estão os pontos de quebra um do outro.

EXEMPLO 6.3 *Diagrama de Bode para polos e zeros reais*

Trace o diagrama de Bode para a fase e magnitude do sistema com função de transferência

$$KG(s) = \frac{2000(s + 0,5)}{s(s + 10)(s + 50)}.$$

Solução

1. Converta a função para a forma de Bode na Eq. (6.16):

$$KG(j\omega) = \frac{2[(j\omega/0,5) + 1]}{j\omega[(j\omega/10) + 1][(j\omega/50) + 1]}.$$

2. Note que o termo $j\omega$ é de primeira ordem e está no denominador, então $n = -1$. Portanto, a assíntota de baixa frequência é definida pelo termo de primeira ordem:

$$KG(j\omega) = \frac{2}{j\omega}.$$

Esta assíntota é válida para $\omega < 0,1$, em razão de o menor ponto de quebra estar em $\omega = 0,5$. A magnitude da curva deste termo tem uma inclinação de -1 (ou -20 db por década). Localizamos a magnitude, passando pelo valor de 2 em $\omega = 1$, mesmo que a curva composta não passe por este ponto devido ao ponto de quebra em $\omega = 0,5$. Isso é mostrado na Fig. 6.9(a).

3. Obtemos o restante das assíntotas, também apresentadas na Fig. 6.9(a): o primeiro ponto de quebra está em $\omega = 0,5$ devido a um termo de primeira ordem no numerador, o qual resulta em uma mudança de inclinação de $+1$. Portanto, desenhamos uma linha com inclinação 0 que intercepta a reta inicial de inclinação -1 . Então, é desenhada uma reta com inclinação -1 que intercepta a anterior em $\omega = 10$. Finalmente, é desenhada uma linha com inclinação $n = -2$ que intercepta a anterior com inclinação $n = -1$ em $\omega = 50$.

4. A curva aproximada é obtida por uma curva tangente às assíntotas, as quais se distanciam nos pontos de quebra por um fator de 1,4 (+3 db) acima da assíntota no ponto de quebra em $\omega = 0,5$ e por um fator de 0,7 (-3 db) abaixo da assíntota nos pontos de quebra em $\omega = 10$ e $\omega = 50$.
5. Devido ao fato de a fase de $2/j\omega$ ser -90° , a curva de fase na Fig. 6.9(b) inicia em -90° nas baixas frequências.
6. O resultado é apresentado na Fig. 6.9(c).
7. As curvas de fase individuais, mostradas em tracejado na Fig. 6.9(b), têm a mudança de fase correta para cada termo e estão alinhadas verticalmente de modo que sua mudança de fase corresponda aos degraus na fase a partir da curva aproximada na Fig. 6.9(c). Note que a curva composta aproxima cada termo individual.
8. A adição gráfica de cada curva tracejada resulta a curva sólida composta na Fig. 6.9(b). Como pode-se ver na figura, a colocação vertical de cada curva de fase faz com que a adição gráfica seja fácil, porque a curva composta aproxima cada curva de fase individual.

EXEMPLO 6.4 Diagrama de Bode com polos complexos

Como um segundo exemplo, trace a resposta em frequência do sistema

$$KG(s) = \frac{10}{s[s^2 + 0,4s + 4]}. \quad (6.22)$$

Solução. Para um sistema como este, é mais difícil traçar a resposta em frequência do que no sistema do exemplo anterior, porque a transição entre as assíntotas é dependente do coeficiente de amortecimento; no entanto, as mesmas ideias básicas ilustradas no Exemplo 6.3 são aplicas.

Este sistema possui um termo de segunda ordem no denominador. Procedendo com os passos apresentados, a Eq. (6.22) é reescrita na forma de Bode na Eq. (6.16):

$$KG(s) = \frac{10}{4} \frac{1}{s(s^2/4 + 2(0,1)s/2 + 1)}.$$

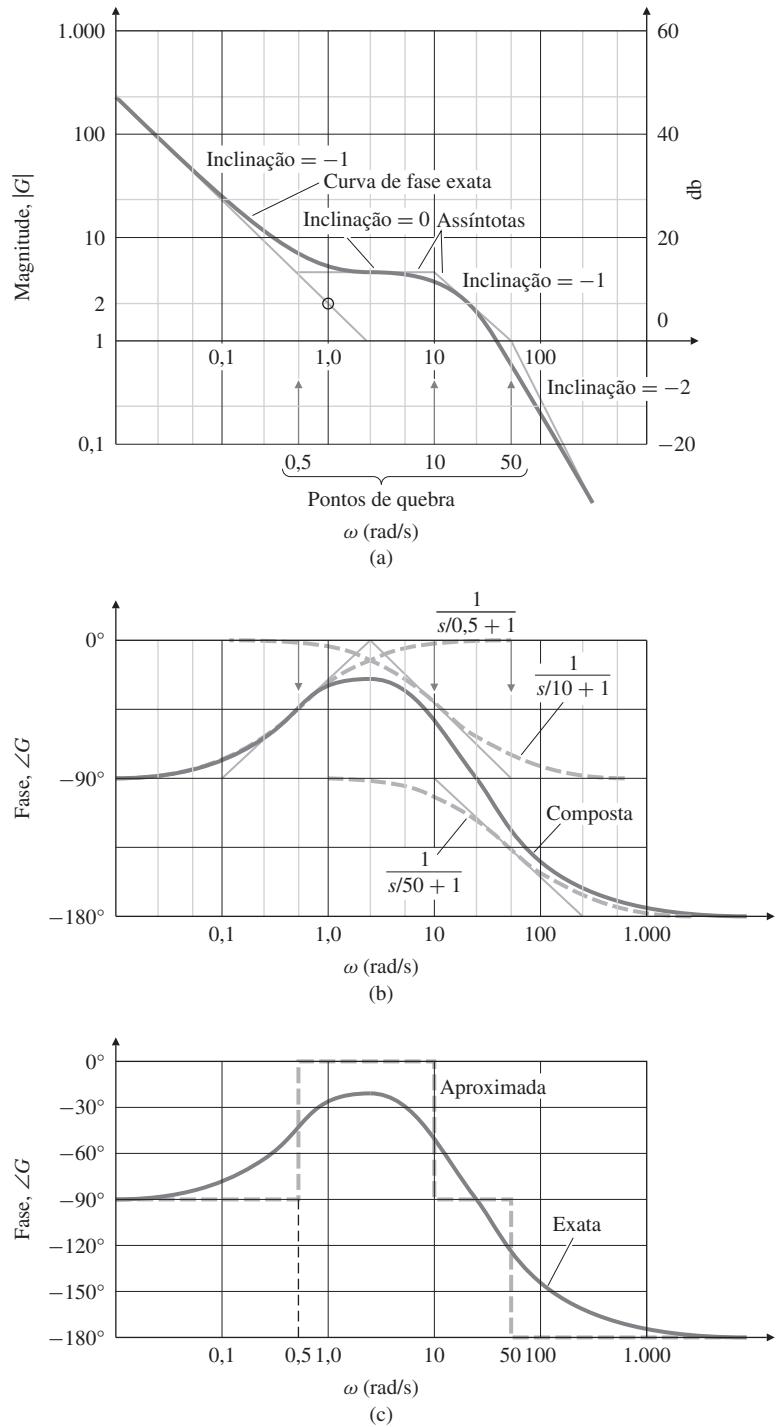
Iniciando com a assíntota de baixa frequência, temos $n = -1$ e $|G(j\omega)| \cong 2,5/\omega$. A curva de magnitude deste termo tem uma inclinação de -1 (ou -20 db por década) e passa pelo valor de $2,5$ em $\omega = 1$, como mostrado na Fig. 6.10(a). Para o polo de segunda ordem, note que $\omega_n = 2$ e $\zeta = 0,1$. Na frequência do ponto de quebra dos polos, $\omega = 2$, a inclinação muda para -3 (ou -60 db por década). No ponto de quebra do polo, a razão da magnitude acima da assíntota é $1/2\zeta = 1/0,2 = 5$. A curva de fase para este caso começa em $\phi = -90^\circ$, correspondendo ao termo $1/s$, caindo para $\phi = -180^\circ$ em $\omega = 2$ devido ao polo, como mostrado na Fig. 6.10(b), e então, aproximando-se de $\phi = -270^\circ$ para altas frequências. Devido ao fato de o amortecimento ser pequeno, a aproximação é muito boa. A curva de fase verdadeira composta é mostrada na Fig. 6.10(b).

EXEMPLO 6.5 Diagrama de Bode para polos e zeros complexos: satélite com partes flexíveis

Como um terceiro exemplo, trace o diagrama de Bode para um sistema com termos de segunda ordem. A função de transferência representa um sistema mecânico com duas massas iguais acopladas a uma mola levemente amortecida. A força aplicada e a medição de posição são coloca das na mesma massa. Para a função de transferência, a escala de tempo foi escolhida de modo que a frequência de ressonância dos zeros complexos seja igual a 1. A função de transferência é

$$KG(s) = \frac{0,01(s^2 + 0,01s + 1)}{s^2[(s^2/4) + 0,02(s/2) + 1]}.$$

Figura 6.9 Curvas compostas: (a) magnitude; (b) fase; (c) fase aproximada.



Solução. Iniciando com a assíntota de baixa frequência, temos $0,01/\omega^2$. A qual tem uma inclinação de -2 (ou -40 db por década) e passa pelo valor de magnitude $0,01$ em $\omega = 1$, como mostrado na Fig. 6.11(a). Na frequência do ponto de quebra do zero, $\omega = 1$, a inclinação muda para zero até o ponto de quebra do polo, o qual está localizado em $\omega = 2$, quando a inclinação retorna para -2 . Para interpolar a curva verdadeira, marcamos o ponto de quebra do zero, $\omega = 1$, com a uma variação da magnitude abaixo de $2\zeta = 0,01$. No ponto de quebra do polo, a variação da magnitude acima da assíntota é $1/(2\zeta) = 1/0,02 = 50$. A curva de magnitude é um

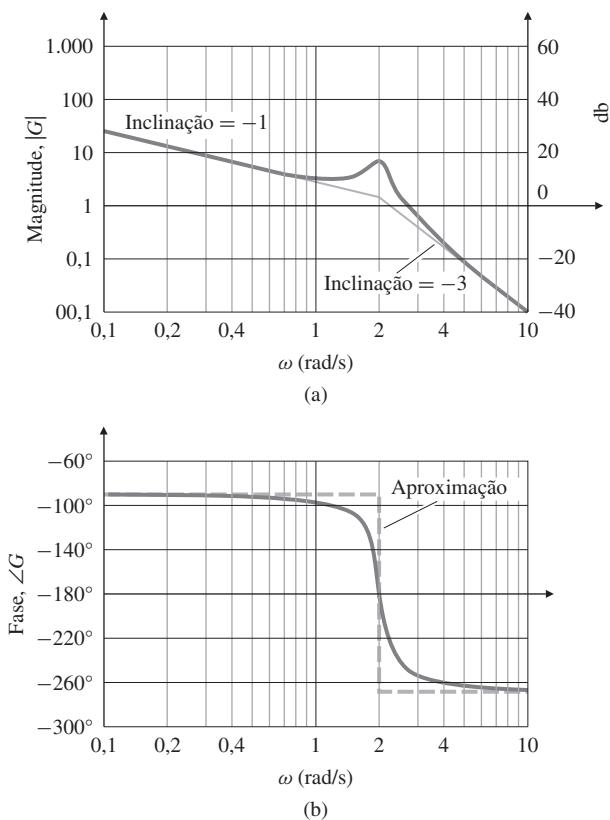


Figura 6.10 Diagrama de Bode para uma função de transferência com polos complexos: (a) magnitude; (b) fase.

pulso negativo seguido por um pulso positivo. A Figura 6.11(b) mostra que a curva de fase do sistema inicia em -180° (correspondendo ao termo $1/s^2$), muda para $\phi = 0^\circ$ em $\omega = 1$, devido aos zeros, e então cai 180° de volta para $\phi = -180^\circ$ em $\omega = 2$, devido ao polo. Com estes pequenos coeficientes de amortecimento, a aproximação é muito boa. (Não apresentamos isso na Fig. 6.11(b) porque não seria facilmente distinguível a partir da curva de fase verdadeira.) Assim, a curva de fase verdadeira composta é um pulso quase quadrado entre $\omega = 1$ e $\omega = 2$.

Em projetos reais, os diagramas de Bode são feitos com um computador. No entanto, adquirir a capacidade de determinar como o diagrama de Bode se comporta é uma habilidade útil, pois dá a visão ao projetista de como as mudanças nos parâmetros de compensação irão afetar a resposta. Isso permite que o projetista desenvolva os melhores projetos mais rapidamente.

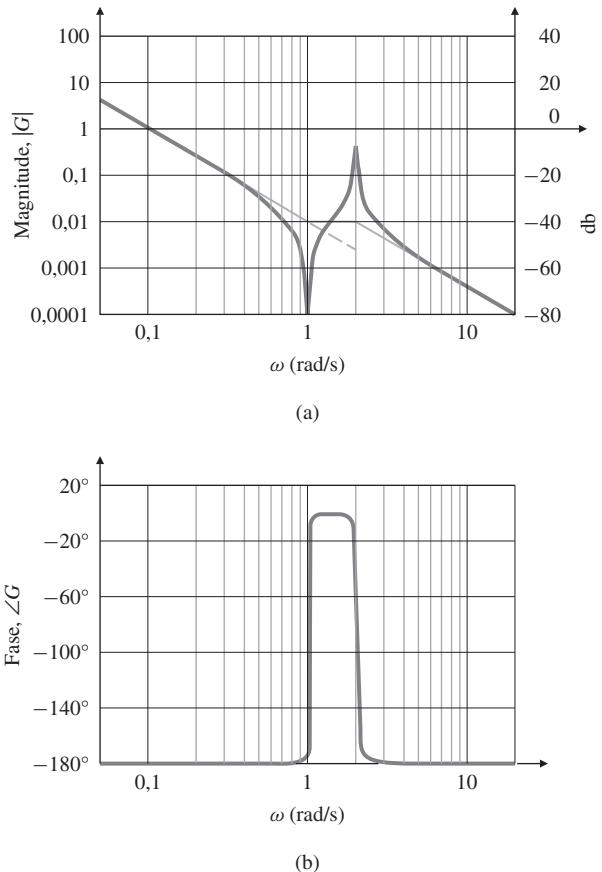
EXEMPLO 6.6 Diagrama de Bode para polos e zeros complexos com o auxílio de um computador

Repita o Exemplo 6.5 usando o MATLAB.

Solução. Para obter o diagrama de Bode usando o MATLAB, usamos a função `bode` como segue:

```
numG = 0.01*[1 0.01 1];
denG = [0.25 0.01 1 0 0];
sysG = tf(numG,denG);
[mag, phase, w] = bode(sysG);
loglog(w,squeeze(mag))
semilogx(w,squeeze(phase))
```

Figura 6.11 Diagrama de Bode para uma função de transferência com polos e zeros complexos: (a) magnitude; (b) fase.



Esses comandos irão resultar em um diagrama de Bode muito parecido com o da Fig. 6.11. Para obter o gráfico com amplitude em decibéis, as últimas três linhas podem ser substituídas por

```
bode(sysG)
```

Sistemas de fase não mínima

Um sistema com um zero no SPD, quando avaliado para as entradas de frequência entre zero e infinito, sofre uma variação líquida de fase maior, para um gráfico de magnitude associado, do que se todos os seus polos e zeros estivessem no SPE. Tal sistema é chamado de sistema de **fase não mínima**. Como pode ser visto na Fig. WD.3, no Apêndice WD (disponível em inglês no site do Grupo A), se o zero está no SPD, então a fase *diminui* no ponto de quebra do zero em vez de exibir o aumento normal de fase que ocorre para um zero no SPE. Considere as funções de transferência

$$G_1(s) = 10 \frac{s + 1}{s + 10},$$

$$G_2(s) = 10 \frac{s - 1}{s + 10}.$$

Ambas as funções de transferência têm a mesma magnitude para todas frequências, isto é,

$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)|,$$

como mostrado na Fig. 6.12(a). Contudo, as fases das duas funções de transferência são drasticamente diferentes [Fig. 6.12(b)]. Um sistema de fase mínima (todos os zeros no SPE) para uma

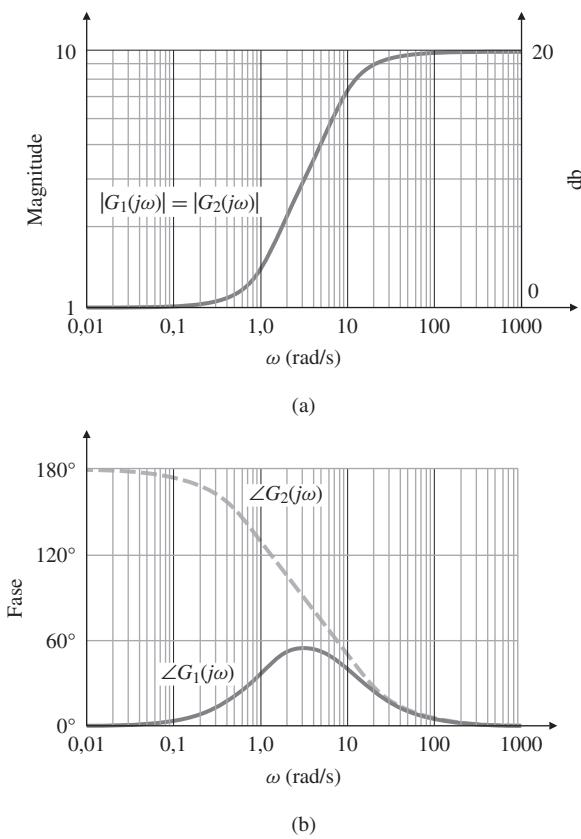


Figura 6.12 Diagramas de Bode para um sistema de fase mínima e outro de fase não mínima: (a) magnitude; (b) fase.

dada curva de magnitude associada produzirá menor variação líquida na fase, como mostrado em G_1 , do que a variação de fase que o sistema de fase não mínima irá produzir, como mostrado pela fase de G_2 . Por conseguinte, G_2 é de fase não mínima. A discrepância entre G_1 e G_2 em relação à mudança de fase seria maior se dois ou mais zeros da planta estivessem no SPD.

6.1.2 Erro em regime permanente

Vimos na Seção 4.2 que o erro em estado estacionário de um sistema realimentado diminui à medida que o ganho da função de transferência em malha aberta aumenta. Na representação da curva de magnitude composta, vimos, na Seção 6.1.1, que uma função de transferência em malha aberta para frequências muito baixas pode ser aproximada por

$$KG(j\omega) \cong K_o(j\omega)^n. \quad (6.23)$$

Portanto, podemos concluir que quanto maior o valor da magnitude da assíntota de baixa frequência, menor será o erro em regime permanente para o sistema em malha fechada. Esta relação é muito útil no projeto do compensador: muitas vezes, queremos avaliar várias maneiras alternativas para melhorar a estabilidade e, para isso, queremos ser capazes de ver rapidamente como as mudanças na compensação afetarão o erro em regime permanente.

Para um sistema da forma dada pela Eq. (6.16) – isto é, quando $n = 0$ na Eq. (6.23) (um sistema do Tipo 0) – a assíntota de baixas freqüências é uma constante, e o ganho K_o de um sistema de malha aberta é igual à constante de erro de posição K_p . Para um sistema com realimentação unitária com uma entrada em degrau unitário, o Teorema do Valor Final (Seção 3.1.6) foi usado na Seção 4.2.1 para mostrar que o erro em estado estacionário *steady-state* é dado por

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}.$$

Constante erro de posição

Constante de erro de velocidade

Para um sistema em realimentação unitária com $n = -1$ na Eq. (6.23), definido como Tipo 1 na Seção 4.2.1, a assíntota de baixa frequência tem uma inclinação de -1 . A magnitude da assíntota de baixa frequência está relacionada com o ganho de acordo com a Eq. (6.23); portanto, podemos ler o ganho, K_v/ω , diretamente a partir da magnitude no diagrama de Bode. A Equação (4.33) nos diz que a constante de erro de velocidade

$$K_v = K_o,$$

onde, para um sistema com realimentação unitária com uma entrada em degrau unitário, o erro em regime permanente é

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}.$$

A maneira mais fácil de determinar o valor de K_v em um sistema do tipo 1 é ler a magnitude da assíntota de baixas freqüências na frequência $\omega = 1$ rad/s, porque esta assíntota é $A(\omega) = K_v/\omega$. Em alguns casos, o ponto de quebra de menor freqüência estará abaixo de $\omega = 1$ rad/s; portanto, a assíntota precisa ser estendida até $\omega = 1$ rad/s para que possa ser possível obter o valor de K_v diretamente. Uma maneira alternativa seria obter a magnitude da assíntota de baixas freqüências em qualquer freqüência e calcular $K_v = \omega A(\omega)$.

EXEMPLO 6.7 Cálculo de K_v

Como um exemplo de determinar erros em regime permanente, a curva de magnitude do diagrama de Bode de um sistema em malha aberta é apresentada na Fig. 6.13. Assumindo realimentação unitária como na Fig. 6.14, encontre a constante de erro de velocidade K_v .

Solução. Devido ao fato de a inclinação para baixas freqüências ser -1 , sabemos que o sistema é do Tipo 1. A extensão da assíntota de baixas freqüências cruza $\omega = 1$ rad/s na magnitude igual a 10. Portanto, $K_v = 10$ e o erro em estado estacionário para uma entrada em rampa unitária para o sistema com realimentação unitária será de 0,1. De maneira alternativa, em $\omega = 0,01$ rad/s temos que $|A(\omega)| = 1.000$; portanto, a partir da Eq. (6.23) temos

$$K_o = K_v \cong \omega |A(\omega)| = 0,01(1000) = 10.$$

6.2 Estabilidade neutra

Nos primeiros passos da eletrônica de comunicações, muitos instrumentos eram avaliados em termos de suas respostas em freqüência. Portanto, nada mais natural que, quando o amplificador realimentado foi desenvolvido, técnicas para determinar a estabilidade na presença de realimentação eram baseadas em sua resposta.

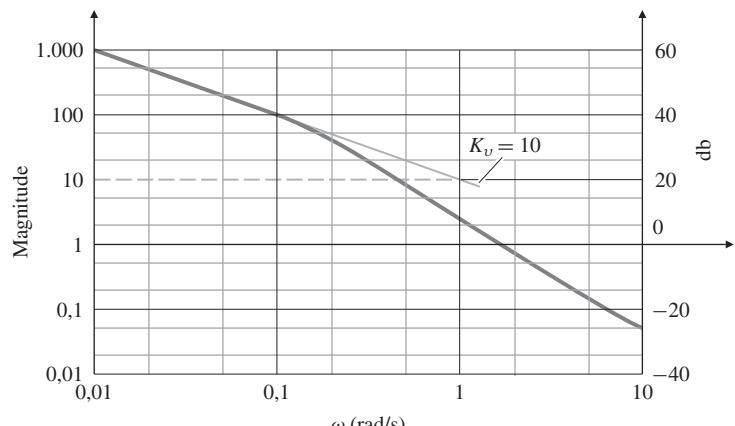


Figura 6.13 Determinação de K_v a partir do diagrama de Bode para o sistema $KG(s) = \frac{10}{s(s+1)}$.

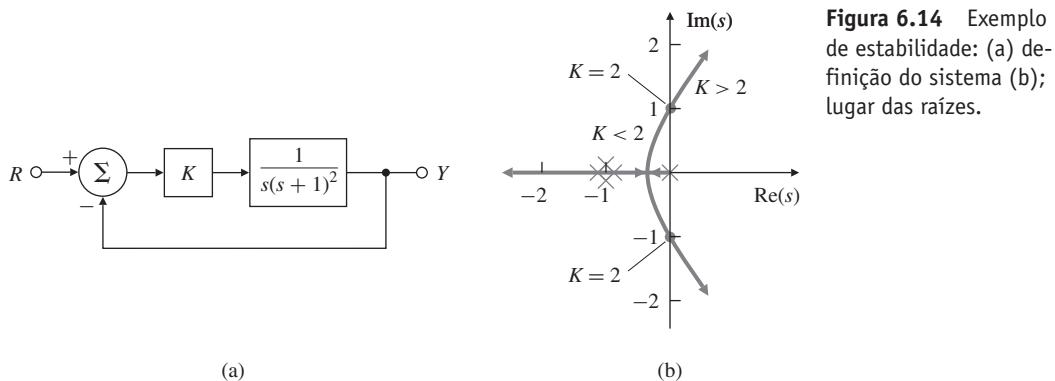


Figura 6.14 Exemplo de estabilidade: (a) definição do sistema (b); lugar das raízes.

Suponha que a função de transferência em malha fechada de um sistema é conhecida. Podemos determinar a estabilidade de um sistema simplesmente inspecionando seu denominador na forma fatorada (já que os fatores fornecerem as raízes do sistema diretamente) para observar se as partes reais são positivas ou negativas. No entanto, a função de transferência de malha fechada normalmente não é conhecida; na verdade, todo o propósito por trás da compreensão da técnica do lugar das raízes é ser capaz de encontrar os fatores do denominador da função de transferência em malha fechada conhecendo apenas a função de transferência em malha aberta. Outra maneira de determinar a estabilidade em malha fechada é avaliar a resposta em frequência da função de transferência em *malha aberta*, $KG(j\omega)$ e, em seguida, realizar um teste sobre esta resposta. Note que este método também não requer fatoração do denominador da função de transferência em malha fechada. Nesta seção, vamos explicar os princípios deste método.

Suponha que temos o sistema definido pela Fig. 6.14(a), o qual está relacionado ao lugar das raízes apresentado na Fig. 6.14(b); então, o sistema é instável se K é maior que 2. Os pontos de estabilidade neutra estão sobre o eixo imaginário – o que ocorre quando $K = 2$, e temos $s = j1.0$. Além disso, vimos na Seção 5.1 que todos os pontos no lugar das raízes satisfazem as propriedades

$$|KG(s)| = 1 \quad \text{e} \quad \angle G(s) = 180^\circ.$$

No ponto de estabilidade neutra, as condições do lugar das raízes são satisfeitas para $s = j\omega$, então,

$$|KG(j\omega)| = 1 \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega) = 180^\circ. \quad (6.24)$$

Assim, um diagrama de Bode de um sistema que é neutralmente estável (isto é, com K definido de tal forma que uma raiz em malha fechada esteja sobre o eixo imaginário) irá satisfazer às condições da Eq. (6.24). A Figura 6.15 mostra a resposta em frequência para o sistema, cujo seu lugar das raízes está apresentado na Fig. 6.14 para vários valores de K . A resposta em magnitude corresponde a $K = 2$ passa através de uma mesma frequência ($\omega = 1 \text{ rad/s}$) em que a fase passa por 180° , como previsto pela Eq. (6.24).

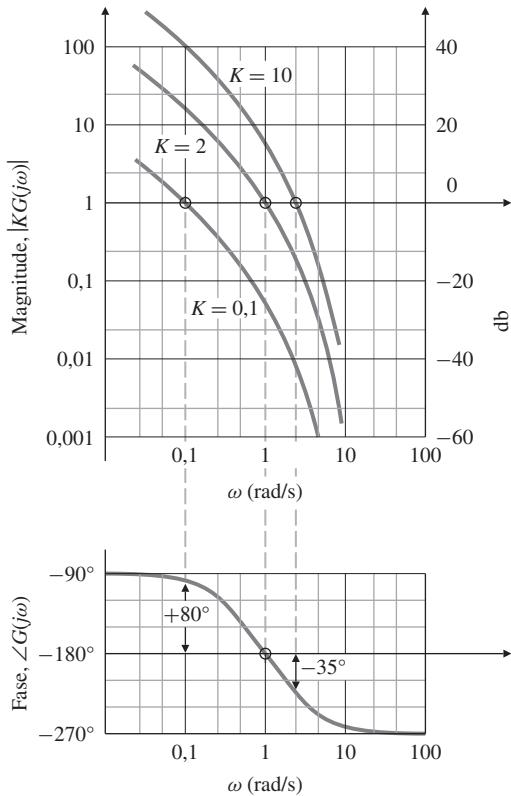
Tendo determinado o ponto de estabilidade neutra, voltamo-nos para uma questão fundamental: será que, aumentando o ganho, a estabilidade do sistema aumenta ou diminui? Podemos ver a partir do lugar das raízes na Fig. 6.14(b) que qualquer valor de K menor que o valor no ponto de estabilidade neutra irá resultar em um sistema estável. Na frequência ω onde a fase $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ ($\omega = 1 \text{ rad/s}$), a magnitude $|KG(j\omega)| < 1,0$ para valores de K estáveis e $|KG(j\omega)| > 1,0$ para valores de K instáveis. Portanto, temos a seguinte condição de teste de análise de estabilidade, baseada na característica da resposta em frequência em malha aberta:

$$|KG(j\omega)| < 1 \quad \text{em} \quad \angle G(j\omega) = -180^\circ. \quad (6.25)$$

Este critério de estabilidade é válido para todos os sistemas que se tornam instáveis quando o ganho é aumentado e $|KG(j\omega)|$ cruza a magnitude (=1) uma vez, a situação mais comum. Entretanto, existem sistemas que se tornam estáveis quando o ganho é aumentado; neste caso, a condição de estabilidade é

Condição de estabilidade

Figura 6.15 Magnitude e fase da resposta em frequência do sistema da Fig. 6.14.



$$|KG(j\omega)| > 1 \text{ em } \angle G(j\omega) = -180^\circ. \quad (6.26)$$

Existem também os casos em que quando $|KG(j\omega)|$ cruza a magnitude ($=1$) mais de uma vez. Uma maneira geralmente suficiente de resolver esta ambiguidade é traçar um esboço do lugar das raízes. Outra maneira, mais rigorosa, de resolver esta ambiguidade é usar o critério de estabilidade de Nyquist, o assunto da próxima seção. No entanto, em razão de o critério de Nyquist ser bastante complexo, é importante estudá-lo e manter em mente o tema desta seção, ou seja, que para a maioria dos sistemas existe uma relação simples entre a estabilidade em malha fechada e a resposta em frequência em malha aberta.

6.3 O critério de estabilidade de Nyquist

Para a maioria dos sistemas, como vimos na seção anterior, o aumento do ganho eventualmente causa instabilidade. Quando se iniciou o projeto de controle realimentado, esta relação entre o ganho e as margens de estabilidade foi assumida como sendo universal. No entanto, projetistas descobriram, ocasionalmente, que em laboratório a relação se inverte, ou seja, o amplificador iria tornar-se instável quando o ganho diminui. A confusão causada por estas observações conflitantes motivaram Harry Nyquist, do Bell Telephone Laboratories, a estudar este problema em 1932. Seu estudo explicou as reversões ocasionais e resultou em uma análise mais sofisticada, sem brechas. Não é de surpreender que seu teste tenha passado a se chamar **critério de estabilidade de Nyquist**. É baseado em um resultado da teoria de variável complexa conhecido como **o princípio do argumento**⁷, explicado brevemente nesta seção e em mais detalhes no Apêndice WD (disponível em inglês no site do Grupo A).

O critério de estabilidade de Nyquist relaciona a resposta em frequência de malha aberta com o número de polos de malha fechada do sistema no SPD. Um estudo do critério de Nyquist lhe permitirá determinar a estabilidade de um sistema complexo a partir de sua resposta em

⁷ Às vezes referido como “Princípio do argumento de Cauchy”.

frequência, talvez com uma ou mais ressonâncias, onde a curva de magnitude cruza 1 várias vezes e/ou a fase cruza 180° várias vezes. Também é muito útil para lidar com sistemas em malha aberta, instáveis, de fase não mínima e sistemas com atrasos puros (atrasos de transporte).

6.3.1 Princípio do argumento

Considere a função de transferência $H_1(s)$ cujos polos e zeros estão indicados no plano- s na Fig. 6.16(a). Queremos avaliar H_1 para valores de s no contorno C_1 no sentido horário. (Assim, esse contorno é chamado de **contorno de avaliação**.) Escolhemos o ponto de teste s_0 para avaliação. A quantidade complexa resultante tem a forma $H_1(s_0) = \vec{v} = |\vec{v}|e^{j\alpha}$. O valor do argumento de $H_1(s_0)$ é

$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 - (\phi_1 + \phi_2).$$

Quando s percorre C_1 no sentido horário a partir de s_0 , o ângulo α de $H_1(s)$ na Fig. 6.16(b) vai variar (diminuir ou aumentar), mas não vai sofrer uma variação líquida de 360° , já que não há polos ou zeros no interior de C_1 . Isso acontece porque nenhum dos ângulos que compõem α passam por uma volta completa. Os ângulos θ_1 , θ_2 , ϕ_1 e ϕ_2 aumentam ou diminuem à medida que s percorre C_1 , mas retornam aos seus valores originais quando s retorna a s_0 sem girar em 360° . Isto significa que o gráfico de $H_1(s)$ [Fig. 6.16(b)] não vai envolver a origem. Esta conclusão decorre do fato de que α é a soma dos ângulos indicados na Fig. 6.16(a), então a única maneira que α variar em 360° depois de s percorrer completamente C_1 é C_1 envolver um polo ou zero.

Agora, considere a função $H_2(s)$, cujos polos e zeros estão indicados na Fig. 6.16(c). Note que ela tem uma singularidade (polo) no interior de C_1 . Novamente, começamos no ponto de teste s_0 . À medida que s percorre o contorno C_1 no sentido horário, as contribuições dos ângulos θ_1 , θ_2 e ϕ_1 mudam, mas retornam aos seus valores originais logo que s retorna a s_0 . Em contraste, ϕ_2 , o ângulo do polo no interior de C_1 , sofre uma mudança líquida de -360° , após um percurso completo em C_1 . Portanto, o argumento de $H_2(s)$ sofre a mesma alteração, fazendo com que $H_2(s)$ envolva a origem no sentido anti-horário, como mostrado na Fig. 6.16(d). O

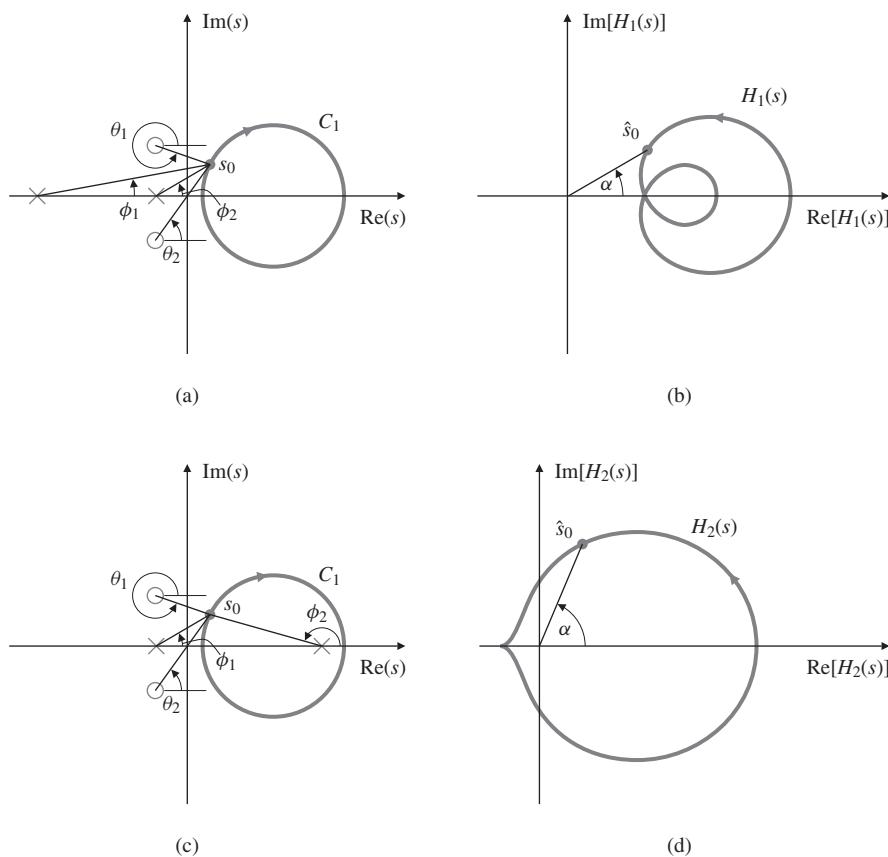


Figura 6.16 Avaliação dos contornos:
 (a) polos e zeros de $H_1(s)$ no plano- s e o contorno C_1 ; (b) $H_1(s)$ para s no contorno C_1 ; (c) polos e zeros de $H_2(s)$ no plano- s e o contorno C_1 ; (d) $H_2(s)$ para s no contorno C_1 .

comportamento seria semelhante se o contorno C_1 envolvesse um zero em vez de um polo. O mapeamento de C_1 envolveria novamente a origem no plano- $H_2(s)$, exceto que este envolvimento ocorreria no sentido horário.

Assim, temos a essência do princípio do argumento:

Princípio do argumento

O mapeamento do contorno de uma função complexa irá envolver a origem $Z - P$ vezes, onde Z é o número de zeros e P é o número de polos da função no interior do contorno.

Por exemplo, se o número de polos e zeros no interior de C_1 for o mesmo, os ângulos irão se cancelar e não haverá envolvimento da origem.

6.3.2 Aplicação em controle

Para aplicar o princípio em controle, deixamos o contorno C_1 no plano- s envolver todo o SPD, a região no plano- s onde um polo causaria um sistema instável (Fig. 6.17). A avaliação resultante de $H(s)$ irá envolver a origem somente se $H(s)$ tiver um polo ou zero no SPD.

Como afirmado anteriormente, o que faz todo esse comportamento do contorno útil é que a avaliação de um contorno de uma função de transferência em *malha aberta* $KG(s)$ pode ser usada para determinar a estabilidade do sistema em *malha fechada*. Especificamente para o sistema na Fig. 6.18, a função de transferência em malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}.$$

Portanto, as raízes de malha fechada são as soluções de

$$1 + KG(s) = 0,$$

e nós iremos aplicar o princípio do argumento para a função $1 + KG(s)$. Se o contorno de avaliação dessa função, envolvendo o SPD inteiro, contiver um zero ou polo de $1 + KG(s)$, então o contorno avaliado em $1 + KG(s)$ irá envolver a origem. Note que $1 + KG(s)$ é simplesmente $KG(s)$ deslocado para a direita de 1, como mostrado na Fig. 6.19. Portanto, se o gráfico de $1 + KG(s)$ envolver a origem, o gráfico de $KG(s)$ irá envolver -1 no eixo real. Portanto, podemos

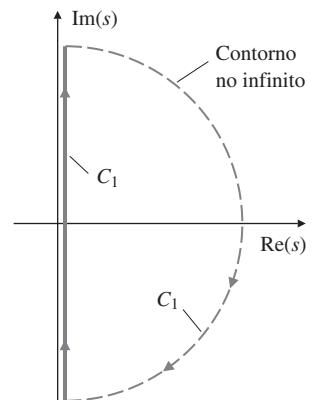


Figura 6.17 Contorno C_1 no plano- s que envolve o SPD inteiro.

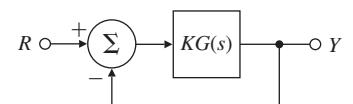


Figura 6.18 Diagrama de blocos para $Y(s)/R(s) = KG(s)/[1 + KG(s)]$.

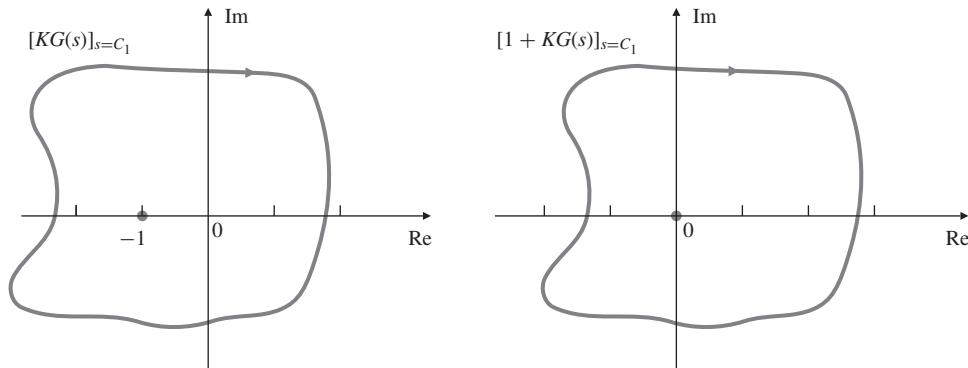


Figura 6.19 Avaliação de $KG(s)$ e $1 + KG(s)$: diagrama de Nyquist.

traçar o contorno de avaliação da função de transferência em malha aberta $KG(s)$; examinar os envolvimentos em -1 e tirar conclusões sobre os envolvimentos na origem da função de transferência em malha fechada $1 + KG(s)$. A apresentação da avaliação de $KG(s)$ desta maneira é muitas vezes referida como **diagrama de Nyquist**, ou **polar**, porque traçamos a magnitude de $KG(s)$ em função do ângulo de $KG(s)$.

Para determinar se um envolvimento se deve a um polo ou a um zero, escrevemos $1 + KG(s)$ em termos dos polos e zeros de $KG(s)$:

$$1 + KG(s) = 1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{a(s) + Kb(s)}{a(s)}. \quad (6.27)$$

A Eq. (6.27) mostra que os polos de $1 + KG(s)$ são também os polos de $G(s)$. Assumindo conhecer os polos de $G(s)$ [ou fatores de $a(s)$], a existência (rara) de qualquer um destes polos no SPD poderá ser contabilizada. Assumindo, por enquanto, que não há polos de $G(s)$ no SPD, um envolvimento de -1 por $KG(s)$ indica um zero de $1 + KG(s)$ no SPD e, portanto, uma raiz instável do sistema em malha fechada.

Podemos generalizar essa ideia básica observando que um contorno no sentido horário C_1 envolvendo um zero de $1 + KG(s)$ – ou seja, uma raiz do sistema em malha fechada – resultará em $KG(s)$ envolvendo o ponto -1 no sentido horário. Da mesma forma, se C_1 envolver um polo de $1 + KG(s)$ – isto é, se existe um polo de malha aberta instável – haverá um envolvimento de $KG(s)$ no sentido anti-horário em -1 . Além disso, se dois polos ou dois zeros estão no SPD, $KG(s)$ irá envolver -1 duas vezes e assim por diante. O número líquido de envolvimentos no sentido horário, N , é igual ao número de zeros (raízes do sistema em malha fechada) no SPD, Z , menos o número de polos do sistema em malha aberta, P :

$$N = Z - P.$$

Este é o conceito-chave do critério de estabilidade de Nyquist.

A simplificação para representar $KG(s)$ graficamente resulta do fato de que qualquer $KG(s)$ que representa um sistema físico tem resposta nula para frequência infinita (i.e., tem mais polos que zeros). Isto significa que o grande arco C_1 correspondente a s no infinito (Fig. 6.17) resulta num valor de $KG(s)$ infinitesimalmente pequeno perto da origem para estes valores de C_1 . Portanto, obtemos uma avaliação completa de um sistema físico $KG(s)$, fazendo s percorrer o eixo imaginário de $-j\infty$ a $+j\infty$ (na verdade, de $-j\omega_h$ a $+j\omega_h$, onde ω_h é grande o suficiente tal que $|KG(j\omega)|$ seja muito menor que 1 para todo $\omega > \omega_h$). A avaliação de $KG(s)$ de $s = 0$ a $s = j\infty$ já foi discutida na Seção 6.1, sob o contexto de encontrar a resposta em frequência de $KG(s)$. Em virtude de $G(-j\omega)$ ser o complexo conjugado de $G(j\omega)$, podemos obter facilmente o gráfico completo de $KG(s)$, refletindo a parte de $0 \leq s \leq +j\infty$ sobre o eixo real, para obter a parte de $(-j\infty \leq s < 0)$. Assim, vemos que a estabilidade em malha fechada pode ser determinada em todos os casos examinando a resposta em frequência da função de transferência de malha aberta em um gráfico polar. Em algumas aplicações, os

Diagrama de Nyquist;
diagrama polar

modelos de sistemas físicos são simplificados de modo a eliminar algumas dinâmicas de alta frequência. Assim, a função de transferência de ordem reduzida resultante pode ter um número igual de polos e zeros. Nesse caso, o grande arco C_1 no infinito precisa ser considerado.

Na prática, muitos sistemas se comportam como os discutidos na Seção 6.2, então não é preciso realizar uma avaliação completa de $KG(s)$ e, subsequentemente, inspecionar os envolvimentos no ponto -1 ; um simples olhar para a resposta em frequência pode ser suficiente para determinar a estabilidade. No entanto, no caso de um sistema complexo, para os quais as simples regras dadas na Seção 6.2 se tornam ambíguas, é preciso realizar uma análise completa, resumida como:

Processo para determinar a estabilidade de Nyquist

1. Obtenha o gráfico de $KG(s)$ para $-j\infty \leq s \leq +j\infty$. Para fazer isso, avalie $KG(j\omega)$ de $\omega = 0$ para ω_h , sendo ω_h grande o suficiente de forma que a magnitude de $KG(j\omega)$ seja pequena para $\omega > \omega_h$; em seguida, reflita a imagem em relação ao eixo real e a adicione à imagem anterior.
2. Avalie o número de envolvimentos do ponto -1 no sentido horário e nomeie esse número de N . Para isso, desenhe de uma linha reta em qualquer direção a partir de -1 a ∞ . Em seguida, conte o número de cruzamentos da esquerda para a direita de $KG(s)$ na linha reta. Se os envolvimentos estão no sentido anti-horário, N é negativo.
3. Determine o número de polos instáveis (SPD) de $G(s)$ e nomeie esse número de P .
4. Calcule o número de raízes instáveis de malha fechada, Z :

$$Z = N + P. \quad (6.28)$$

Para ter estabilidade, desejamos ter $Z = 0$; isto é, não existem raízes da equação característica no SPD.

Examinemos agora uma aplicação rigorosa do procedimento para determinar a estabilidade usando o critério de Nyquist em alguns exemplos.

EXEMPLO 6.8 Diagrama de Nyquist para um sistema de segunda ordem

Determine a estabilidade do sistema definido na Fig. 6.20.

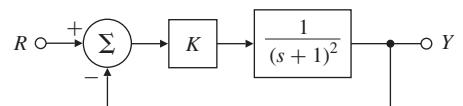


Figura 6.20 Sistema de controle para o Exemplo 6.8.

Solução. O lugar das raízes do sistema na Fig. 6.20 é apresentado na Fig. 6.21. Ele mostra que o sistema é estável para todo valor de K . A magnitude da resposta em frequência de $KG(s)$ é traçada na Fig. 6.22(a) para $K = 1$, e a fase é traçada na Fig. 6.22(b); este é o típico método de Bode para representar a resposta em frequência, e representa a avaliação de $G(s)$ em um intervalo de frequências de interesse. A mesma informação também é apresentada na Fig. 6.23⁸ no gráfico na forma de Nyquist (polar). Note como os pontos, A , B , C , D e E são mapeados do diagrama de Bode para o diagrama de Nyquist na Fig. 6.23. A curva de $G(s) = +1$ ($\omega = 0$) até $G(s) = 0$ ($\omega = \infty$) que está abaixo do eixo real é obtida a partir da Fig. 6.22. A parte do arco C_1 no infinito da Fig. 6.17 transforma-se em $G(s) = 0$ na Fig. 6.23; portanto, a avaliação contínua de

⁸ O diagrama de Nyquist com esta forma é um cardioide, que significa “em forma de coração”. Esse nome foi usado pela primeira vez por De Castillon na *Philosophical Transactions of the Royal Society*, em 1741. O cardioide é também usado em óptica.

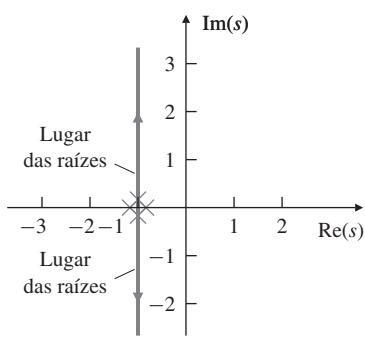


Figura 6.21 Lugar das raízes de $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ em relação a K .

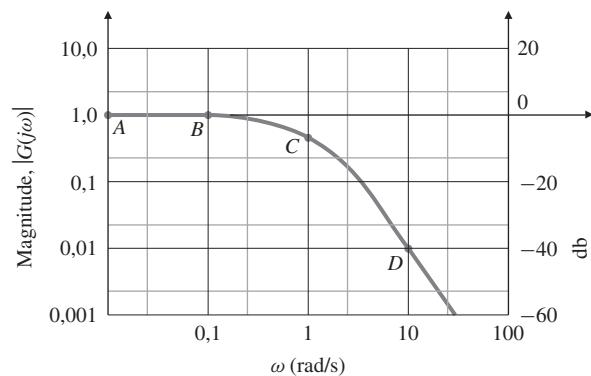
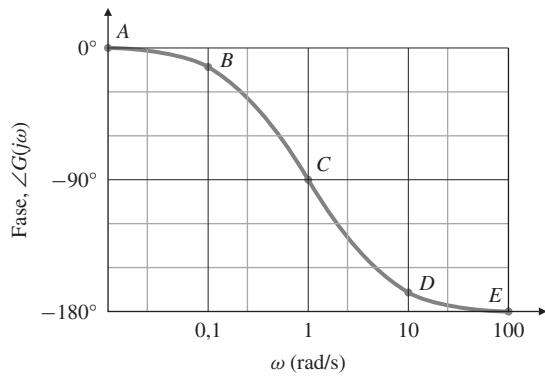


Figura 6.22 Diagrama de Bode em malla aberta de $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$.

(a)



(b)

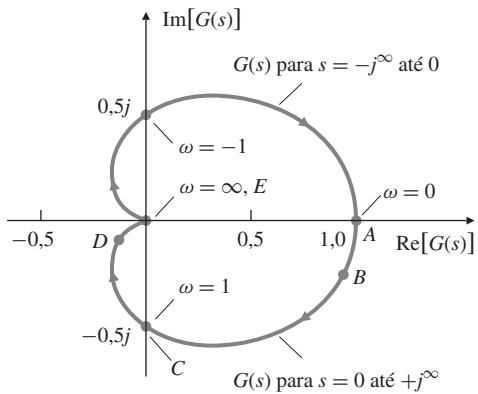


Figura 6.23 Diagrama de Nyquist da avaliação de $KG(s)$ para $s = C_1$ e $K = 1$.

$G(s)$ com s percorrendo C_1 é completada simplesmente refletindo a curva obtida abaixo do eixo real. Isso cria a parte do contorno acima do eixo real e completa o diagrama de Nyquist (polar). Como o contorno não envolve o ponto -1 , $N = 0$. Além disso, não existem polos de $G(s)$ no RHP, então $P = 0$. A partir da Eq. (6.28), concluímos que $Z = 0$, o que indica que não há raízes instáveis no sistema em malha fechada para $K = 1$. Além disso, diferentes valores de K iriam simplesmente alterar a magnitude do diagrama polar, mas nenhum valor positivo de K faria a curva envolver -1 , porque o gráfico polar sempre cruza o eixo real negativo quando $KG(s) = 0$. Assim, o critério de estabilidade de Nyquist confirma o que o lugar das raízes indica: o sistema em malha fechada é estável para todos os $K > 0$.

Os comandos no MATLAB que irão produzir o diagrama de Nyquist são

```
numG = 1;
denG = [1 2 1];
sysG = tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
nyquist(sysG,w);
```

Muitas vezes, o engenheiro de sistemas de controle está mais interessado em determinar uma série de ganhos K para os quais o sistema é estável do que em testar a estabilidade para um valor específico de K . Para acomodar essa exigência, mas para evitar o desenho de múltiplos diagramas de Nyquist para vários valores de ganho, o teste pode ser ligeiramente modificado. Para isso, escalonamos $KG(s)$ por K e examinamos $G(s)$ para determinar a estabilidade para uma série de ganhos K . Isso é possível porque um envolvimento de -1 por $KG(s)$ é equivalente a um envolvimento de $-1/K$ por $G(s)$. Portanto, em vez de ter que lidar com $KG(s)$, basta considerar $G(s)$ e contar o número de envolvimentos no ponto $-1/K$.

Aplicando essa ideia ao Exemplo 6.8, podemos ver que o diagrama de Nyquist não pode envolver o ponto $-1/K$. Para K positivo, o ponto irá se mover ao longo do eixo real negativo, então não haverá envolvimentos de $G(s)$ para quaisquer valores de $K > 0$.

(Também existem valores de $K < 0$ para os quais o diagrama de Nyquist mostra que o sistema é estável; especialmente, $-1 < K < 0$. Este resultado pode ser verificado desenhando o lugar das raízes de 0° .)

EXEMPLO 6.9 Diagrama de Nyquist para um sistema de terceira ordem

Como um segundo exemplo, considere o sistema $G(s) = 1/s(s + 1)^2$, para o qual o sistema em malha fechada é definido na Fig. 6.24. Determine a estabilidade deste sistema utilizando as propriedades do critério de Nyquist.

Solução. Este é o mesmo sistema discutido na Seção 6.2. O lugar das raízes na Fig. 6.14(b) mostra que este sistema é estável para pequenos valores de K , mas instável para grandes valores de K . A magnitude e a fase de $G(s)$ na Fig. 6.25 são transformados no diagrama de Nyquist mostrado na Fig. 6.26. Note como os pontos A, B, C, D e E no diagrama de Bode na Fig. 6.25 são mapeados no diagrama de Nyquist na Fig. 6.26. Observe também o grande arco no infinito que surge a partir do polo de malha aberta em $s = 0$.

Este polo cria uma magnitude infinita de $G(s)$ em $\omega = 0$; de fato, um polo em qualquer parte do eixo imaginário criará um arco no infinito. Para determinar corretamente o número de envolvimentos em $-1/K$, devemos desenhar este arco no semiplano apropriado: ele deve cruzar

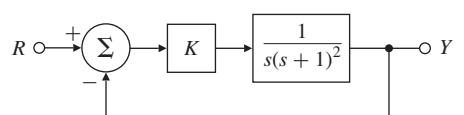


Figura 6.24 Sistema de controle para o Exemplo 6.9.

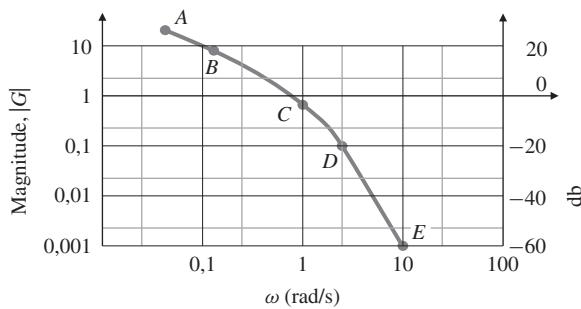
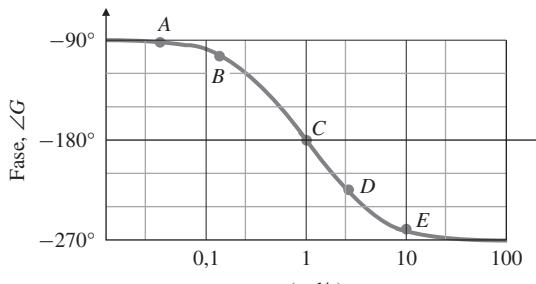


Figura 6.25 Diagrama de Bode para $G(s) = 1/s(s + 1)^2$.

(a)



(b)

o eixo real positivo, como mostrado na Fig. 6.26, ou o negativo? Também é necessário avaliar se o arco deve variar em 180° (como na Fig. 6.26), 360° ou 540° .

Um artifício simples é suficiente para responder a essas perguntas. Modificar o contorno C_1 tomando um pequeno desvio em torno do polo, seja para a direita (Fig. 6.27) ou para a esquerda.

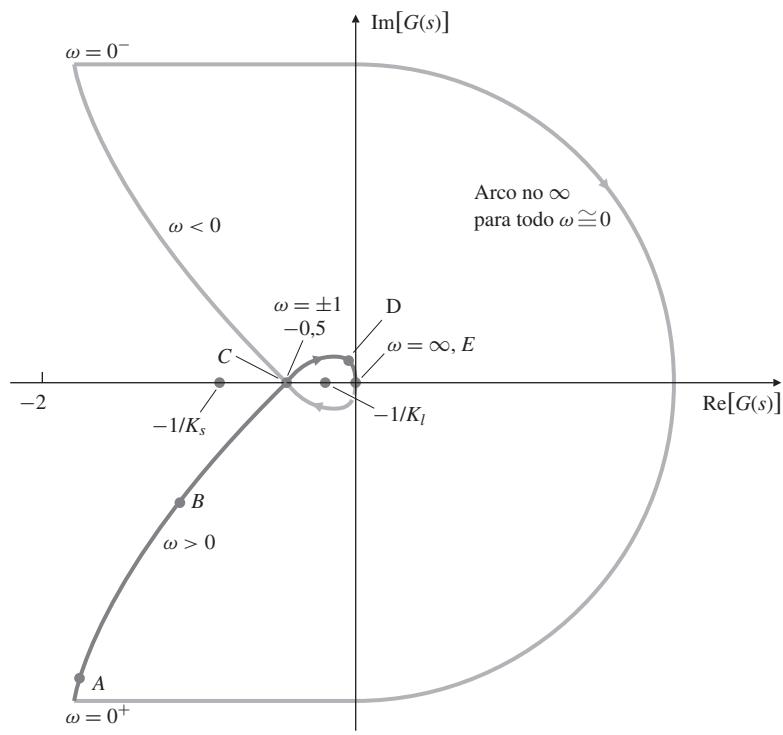
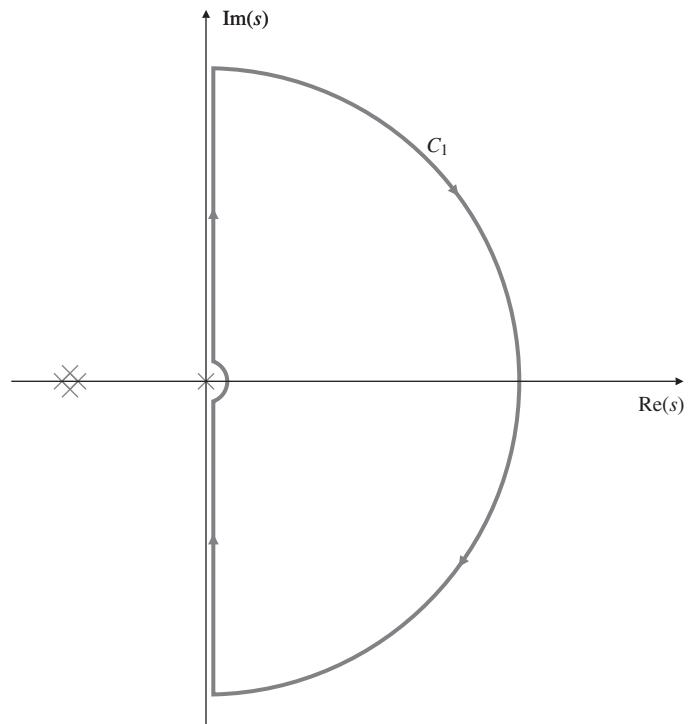


Figura 6.26 Diagrama de Nyquist⁹ para $G(s) = 1/s(s + 1)^2$.

⁹ A forma deste diagrama de Nyquist é traduzida em uma curva plana estrofoide, o que significa “um cinto com uma torção”. A curva foi estudada por Barrow em 1670.

Figura 6.27 Contorno C_1 envolvendo o SPD para o sistema do Exemplo 6.9.



Isso não faz diferença alguma para a questão da estabilidade final, mas é mais conveniente ir para a direita, porque, então, não são introduzidos polos dentro do contorno de C_1 , mantendo o valor de P igual a 0. Como a fase de $G(s)$ é a soma negativa de todos os ângulos dos polos, vemos que os resultados da avaliação resultam em um diagrama de Nyquist se movendo de $+90^\circ$ para s , logo abaixo do polo em $s = 0$, atravessando o eixo real positivo para -90° para s logo acima do polo. Se houvesse dois polos em $s = 0$, a curva de Nyquist no infinito teria executado um arco de 360° e assim sucessivamente para três ou mais polos. Além disso, para um polo a mais em qualquer ponto no eixo imaginário, o resultado também é um arco de 180° no sentido horário, mas poderia ser orientado de maneira diferente do exemplo mostrado na Fig. 6.26.

A curva do diagrama de Nyquist cruza o eixo real em $\omega = 1$ com $|G| = 0,5$, como indicado pelo diagrama de Bode. Para $K > 0$, existem duas possibilidades para a localização de $-1/K$: dentro dos dois laços do diagrama de Nyquist ou fora do contorno de Nyquist completamente. Para grandes valores de K (K_l na Fig. 6.26), $-0,5 < -1/K_l < 0$ vai estar dentro dos dois laços, portanto $N = 2$, e, portanto, $Z = 2$, indicando que há duas raízes instáveis. Isso acontece para $K > 2$. Para valores pequenos de K (K_s na Fig. 6.26), $-1/K$ está fora dos laços, portanto $N = 0$, e todas as raízes são estáveis. Toda esta informação está de acordo com o lugar das raízes na Fig. 6.14(b). (Quando $K < 0$, $-1/K$ está sobre o eixo real positivo, então $N = 1$, o que significa $Z = 1$, e o sistema tem uma raiz instável. O lugar das raízes de 0° irá verificar este resultado.)

Para este e muitos sistemas similares, podemos ver que o critério de envolvimento se reduz a um teste muito simples para a estabilidade com base na resposta em frequência de malha aberta: o sistema é estável se $|KG(j\omega)| < 1$ quando a fase de $G(j\omega) = 180^\circ$. Note que esta relação é idêntica ao critério de estabilidade dado na Eq. (6.25); porém, usando o critério de Nyquist, não precisamos do lugar das raízes para determinar se $|KG(j\omega)| < 1$ ou $|KG(j\omega)| > 1$.

O diagrama de Nyquist pode ser traçado usando o MATLAB, com os comandos

```
numG = 1 ;
denG = [1 2 1 0];
sysG = tf(numG,denG);
nyquist(sysG)
axis([-3 3 -3 3]);
```

O comando `axis` escalona o diagrama, para que apenas os pontos entre $+3$ e -3 sobre os eixos real e imaginário sejam incluídos. Sem escala manual, o diagrama seria escalado com base nos valores máximos calculados pelo MATLAB, e as características essenciais nas proximidades da região -1 seriam perdidas.

Para os sistemas instáveis em malha aberta, é preciso ter cuidado, porque agora $P \neq 0$ na Eq. (6.28). Vemos que as simples regras vistas na Seção 6.2 precisam ser revistas, neste caso.

EXEMPLO 6.10 Diagrama de Nyquist para um sistema instável em malha aberta

O terceiro exemplo é definido na Fig. 6.28. Determine suas propriedades de estabilidade usando o critério de Nyquist.

Solução. O lugar das raízes é esboçado na Fig. 6.29. O sistema em malha aberta é instável porque tem um polo no SPD. O diagrama de Bode do sistema em malha aberta é apresentado na Fig. 6.30. Note no Bode que $|KG(j\omega)|$ comporta-se exatamente da mesma forma como se o polo estivesse no SPE. No entanto, a $\angle G(j\omega)$ aumenta em 90° , em vez do decréscimo comum em um polo. Qualquer sistema com um polo no SPD é instável; assim, seria impossível determinar sua resposta em frequência experimentalmente, porque o sistema nunca iria chegar a uma resposta em estado estacionário senoidal para uma entrada senoidal. É, no entanto, possível calcular a magnitude e a fase da função de transferência de acordo com as regras na Seção 6.1. Um polo no SPD afeta o critério de Nyquist, porque o valor de P na Eq. (6.28) é $+1$.

Nós convertemos as informações de resposta em frequência da Fig. 6.30 no diagrama de Nyquist (Fig. 6.31) como nos exemplos anteriores. Como antes, C_1 apresenta um desvio em torno do polo em $s = 0$ na Fig. 6.32, criando um grande arco no infinito na Fig. 6.31. Este arco atravessa o eixo real negativo devido à contribuição de fase de 180° do polo no SPD.

O cruzamento no eixo real ocorre em $|G(s)| = 1$ devido ao diagrama de Bode $|G(s)| = 1$ quando $\angle G(s) = 180^\circ$, o que acontece em $\omega \approx 3$ rad/s.

O contorno mostra dois comportamentos diferentes, dependendo dos valores de $K (> 0)$. Para grandes valores de K (K_1 na Fig. 6.31), há um envolvimento no sentido anti-horário, portanto, $N = -1$. No entanto, como $P = 1$ polo no SPD, $Z = N + P = 0$, então não há raízes instáveis e o sistema é estável para $K > 1$. Para valores pequenos de K (K_s na Fig. 6.31), $N = 1$ devido ao envolvimento no sentido horário, e $Z = 2$, indicando duas raízes instáveis. Isso acontece se $K < 1$. Esses resultados podem ser verificados qualitativamente pelo lugar das raízes na Fig. 6.29. (Se $K < 0$, $-1/K$ está no eixo real positivo, então $N = 0$ e $Z = 1$, indicando

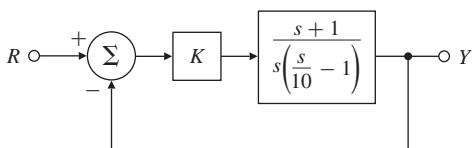


Figura 6.28 Sistema de controle para o Exemplo 6.10.

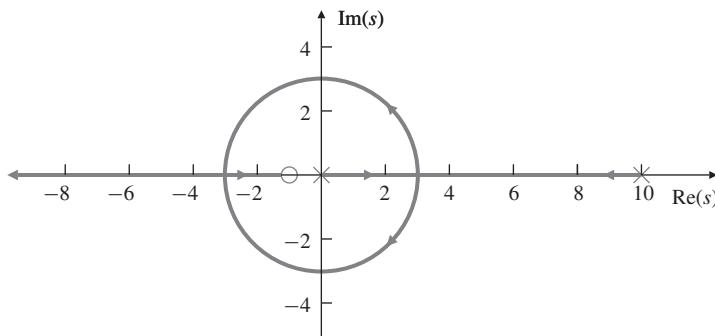
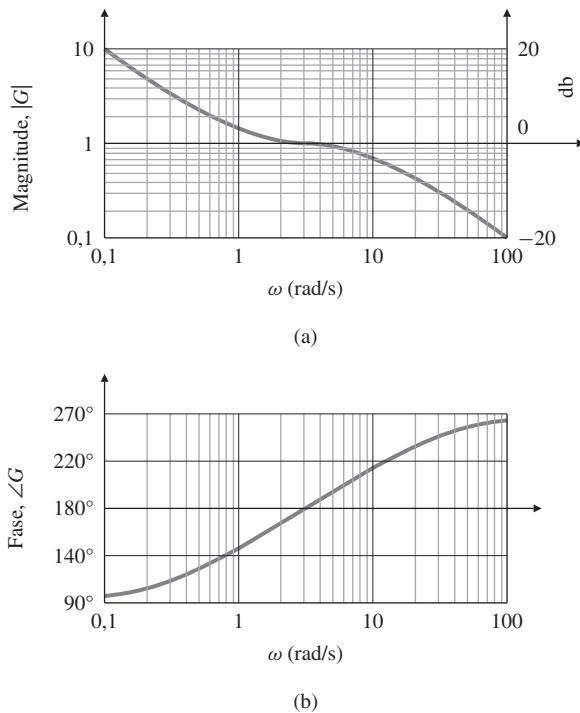


Figura 6.29 Lugar das raízes para $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s/10-1)}$.

Figura 6.30 Diagrama de Bode para $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s/10-1)}$.



que o sistema em malha fechada terá um polo instável, o que pode ser verificado pelo lugar das raízes de 0° .)

Como acontece com todos os sistemas, o limite da estabilidade ocorre em $|KG(j\omega)| = 1$ para a fase de $\angle G(j\omega) = 180^\circ$. No entanto, neste caso, $|KG(j\omega)|$ deve ser superior a 1 para que ocorra o número correto de envolvimentos no ponto -1 para alcançar a estabilidade.

Para traçar o diagrama de Nyquist usando o MATLAB, use os seguintes comandos:

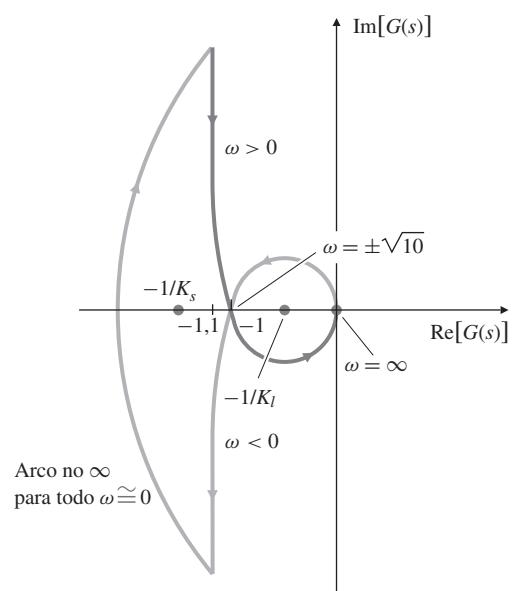
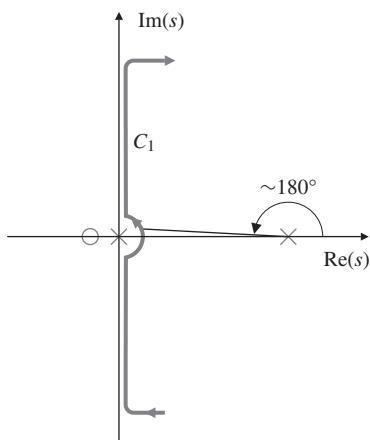


Figura 6.31 Diagrama de Nyquist¹⁰ para $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s/10-1)}$.

¹⁰ A forma deste diagrama de Nyquist é um estrofoide.

**Figura 6.32** Contorno C_1 para o Exemplo 6.10.

```

numG = [1 1];
denG = [0.1 -1 0];
sysG = tf(numG,denG);
nyquist(sysG)
axis([-3 3 -3 3])

```

A existência do polo no SPD no Exemplo 6.10 afetou as regras de traçado da curva de fase do diagrama de Bode e afetou a relação entre os envolvimentos e as raízes instáveis em malha fechada, porque $P = 1$ na Eq. (6.28). No entanto, nós aplicamos o critério de estabilidade de Nyquist sem qualquer modificação. O mesmo é verdadeiro para sistemas com um zero SPD; ou seja, um zero de fase não mínima não tem efeito sobre o critério de estabilidade de Nyquist, mas afeta as regras de esboço do diagrama de Bode.

EXEMPLO 6.11 Características do diagrama de Nyquist

Encontre o diagrama de Nyquist para o sistema de terceira ordem

$$G(s) = K \frac{s^2 + 3}{(s + 1)^2}$$

e concilie o diagrama de Nyquist com as características de $G(s)$. Se $G(s)$ for incluído em um sistema realimentado, como mostrado na Fig. 6.18, determine se o sistema é estável para todos os valores positivos de K .

Solução. Para traçar o diagrama de Nyquist usando o MATLAB, use os seguintes comandos:

```

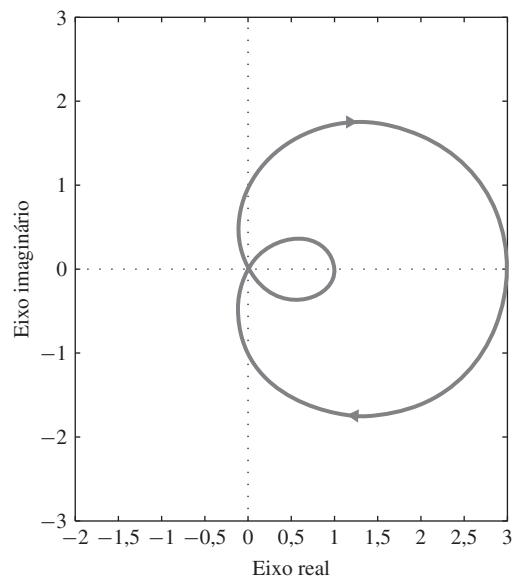
numG = [1 0 3];
denG = [1 2 1];
sysG = tf(numG,denG);
nyquist(sysG)
axis([-2 3 -3 3])

```

O resultado é apresentado na Fig. 6.33.¹¹ Note que não há arcos no infinito para este caso, devido ao fato de não haver polos na origem ou no eixo $j\omega$. Além disso, note que a curva de Nyquist associada com o diagrama de Bode ($s = +j\omega$) começa em $(3,0)$, termina em $(1,0)$, e,

¹¹ A forma deste diagrama de Nyquist é um *limaçon*, fato apontado pelo filho de 17 anos de idade do terceiro autor, que tinha recentemente aprendido sobre ele em sua aula de trigonometria. Limaçon significa “caracol” em francês, do latim “Limax”, e foi inicialmente investigada por Dürer em 1525.

Figura 6.33 Diagrama de Nyquist para o Exemplo 6.11.



portanto, começa e termina com um ângulo de fase de 0° . É assim que deve ser, pois o numerador e o denominador de $G(s)$ são de ordens iguais e não existem singularidades na origem. Assim, a curva de Bode deve começar e terminar com uma fase nula. Observe também que o diagrama de Nyquist passa por $(0, 0)$ quando s passa por $s = +j\sqrt{3}$, como deveria já que a magnitude é igual a zero quando s está em um zero. Além disso, note que a fase vai de -120° quando s aproxima $(0, 0)$ para $+60^\circ$ quando s se afasta de $(0, 0)$. Esse comportamento ocorre em razão de a fase do diagrama de Bode se alterar em 180° instantaneamente quando s passa por um zero no eixo $j\omega$. A fase inicial diminui à medida que a curva deixa o ponto de partida em $(3, 0)$, porque a mais baixa frequência de singularidade é o polo em $s = -1$.

Mudar o ganho, K , irá aumentar ou diminuir a magnitude do diagrama de Nyquist, mas ela nunca irá cruzar o eixo real negativo. Portanto, o sistema em malha fechada será sempre estável para valores positivos de K .

Exercício: Verifique esse resultado fazendo um esboço do lugar das raízes à mão.

6.4 Margens de estabilidade

Uma grande parte dos sistemas de controle se comporta em um padrão mais ou menos semelhante ao do sistema na Seção 6.2 e do Exemplo 6.9, na Seção 6.3; isto é, o sistema é estável para todos os valores pequenos de ganho e torna-se instável se o ganho aumentar mais que um certo valor crítico. Duas quantidades usadas que medem a margem de estabilidade de tais sistemas estão diretamente relacionadas com o critério de estabilidade da Eq. (6.25): margem de ganho e margem de fase. Nesta seção, vamos definir e usar esses dois conceitos para estudar projeto de sistemas de controle. Outra medida de estabilidade, originalmente definida por O. J. M. Smith (1958), combina estas duas margens em uma única e fornece uma indicação melhor de estabilidade para casos complicados.

A **margem de ganho (GM)** é o fator pelo qual o ganho pode ser aumentado antes do sistema atingir a instabilidade. Para o caso típico, ela pode ser lida diretamente do diagrama de Bode (por exemplo, veja a Fig. 6.15), medindo a distância vertical entre a curva do $|KG(j\omega)|$ e a linha $|KG(j\omega)| = 1$ na frequência em que $\angle G(j\omega) = 180^\circ$. Vemos, a partir da figura, que quando $K = 0,1$, o sistema é estável e $GM = 20$ (ou 26 db). Quando $K = 2$, o sistema é neutramente estável com $GM = 1$ (0 db), e quando $K = 10$, resulta em um sistema instável com a $GM = 0,2$ (-14 db). Note-se que a GM é o fator pelo qual o ganho K pode ser aumentado antes de resultar na instabilidade; portanto, $|GM| < 1$ (ou $|GM| < 0$ db) indica um sistema instável. A GM também

pode ser determinada a partir de um lugar das raízes em relação a K , anotando dois valores de K : (1) no ponto onde o lugar das raízes cruza o eixo $j\omega$, e (2) os polos do sistema nominal em malha fechada. A GM é a relação entre esses dois valores.

Outra medida usada para indicar a margem de estabilidade em um sistema é a **margem de fase (PM)**. É o montante pelo qual a fase de $G(j\omega)$ excede -180° quando $|KG(j\omega)| = 1$, que é uma forma alternativa de medir o grau em que as condições de estabilidade da Eq. (6.25) são satisfeitas. Para o caso na Fig. 6.15, vemos que $PM \cong 80^\circ$ para $K = 0,1$, $PM = 0^\circ$ para $K = 2$ e $PM = -35^\circ$ para $K = 10$. A PM positiva é necessária para a estabilidade.

Margem de fase

Note que as duas medidas de estabilidade, PM e GM, juntas determinam a distância em que a quantidade complexa $G(j\omega)$ passa do ponto -1 , que é outra maneira de representar o ponto de estabilidade neutra especificado pela Eq. (6.24).

As margens de estabilidade também podem ser definidas em termos do diagrama de Nyquist. A Figura 6.34 mostra que GM e PM são medidas em relação à distância que a curva do diagrama de Nyquist está de envolver o ponto -1 . Mais uma vez, podemos ver que a GM indica o quanto o ganho pode ser aumentado antes de resultar na instabilidade de um sistema como o do Exemplo 6.9. A PM é a diferença entre a fase de $G(j\omega)$ e 180° quando $KG(j\omega)$ cruza o círculo $|KG(s)| = 1$; o valor positivo da PM é designado para o caso estável (ou seja, sem envolvimentos no diagrama de Nyquist).

É mais fácil determinar estas margens diretamente do diagrama de Bode do que do diagrama Nyquist. O termo **frequência de cruzamento**, ω_c , é usado frequentemente para se referir à frequência com que o ganho é a unidade, ou 0 db. A Figura 6.35 mostra os mesmos dados traçados na Fig. 6.25, mas para o caso de $K = 1$. Os mesmos valores de PM ($= 22^\circ$) e GM ($= 2$) podem ser obtidos a partir do diagrama de Nyquist mostrado na Fig. 6.26. O cruzamento no eixo real em $-0,5$ corresponde a uma GM de $1/0,5$ ou 2, e a PM pode ser calculada graficamente por meio da medição do ângulo de $G(j\omega)$ quando $G(j\omega)$ cruza o círculo unitário $|G(j\omega)| = 1$.

Frequência de cruzamento

Um dos aspectos úteis do projeto em resposta em frequência é a facilidade com que podemos avaliar os efeitos das mudanças no ganho. Na verdade, podemos determinar a PM da Fig. 6.35 para qualquer valor de K sem redesenhar as informações de magnitude ou fase. Precisamos apenas indicar na figura onde $|KG(j\omega)| = 1$ para valores selecionados de K , como feito com linhas tracejadas na Fig. 6.36. Agora, podemos ver que $K = 5$ produz uma PM instável de -22° , enquanto um ganho de $K = 0,5$ produz um PM de $+45^\circ$. Além disso, se quisermos um certo valor da PM (por exemplo 70°), podemos simplesmente ler o valor do $|G(j\omega)|$ correspondente à frequência que criaria a PM desejada (aqui, $\omega = 0,2$ rad/s resulta em 70° , onde $|G(j\omega)| = 5$), e observe que a magnitude nessa frequência é $1/K$. Portanto, uma PM de 70° será alcançada com $K = 0,2$.

A PM é mais comumente usada para especificar o desempenho do sistema de controle, porque está intimamente relacionada com a taxa de amortecimento do sistema. Isso pode ser visto para o sistema de segunda ordem em malha aberta

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}, \quad (6.29)$$

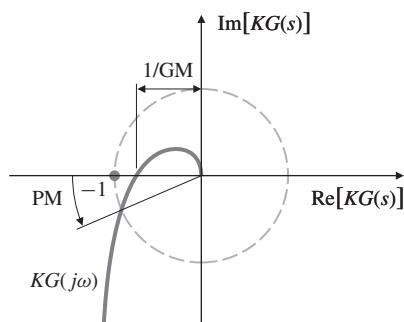
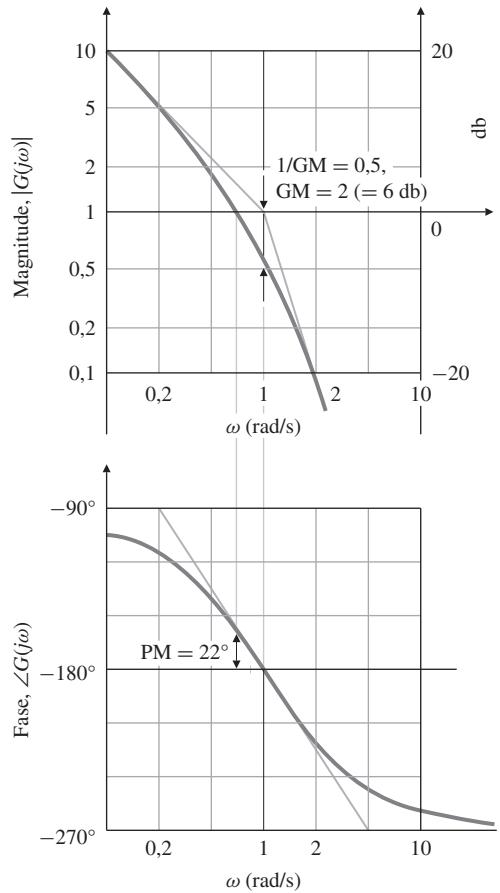


Figura 6.34 Diagrama de Nyquist definindo GM e PM.

Figura 6.35 GM e PM a partir dos gráficos de magnitude e fase.



o qual, com realimentação unitária, produz o sistema em malha fechada

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (6.30)$$

Pode ser mostrado que a relação entre a PM e ζ nesse sistema é

$$\text{PM} = \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}} \right], \quad (6.31)$$

essa função é traçada na Fig. 3.37. Note que a função é aproximadamente uma linha reta até cerca de $\text{PM} = 60^\circ$. A linha tracejada mostra uma aproximação linear para a função, onde

$$\zeta \cong \frac{\text{PM}}{100}. \quad (6.32)$$

É claro que essa aproximação é válida apenas para PM abaixo de 70° . Além disso, a Eq. (6.31) só é precisa para o sistema de segunda ordem com a Eq. (6.30). Apesar dessas limitações, a Eq. (6.32) é frequentemente utilizada como uma regra de ouro para relacionar o coeficiente de amortecimento do sistema em malha fechada com a PM. Ela é útil como ponto de partida; no entanto, é importante sempre verificar o amortecimento real de um projeto, bem como outros aspectos de desempenho, antes de terminar o projeto.

A margem de ganho para o sistema de segunda ordem [dado pela Eq. (6.29)] é infinita ($\text{GM} = \infty$), porque a curva da fase não atravessa -180° à medida que a frequência aumenta. Isso também seria verdade para qualquer sistema de primeira ou de segunda ordem.

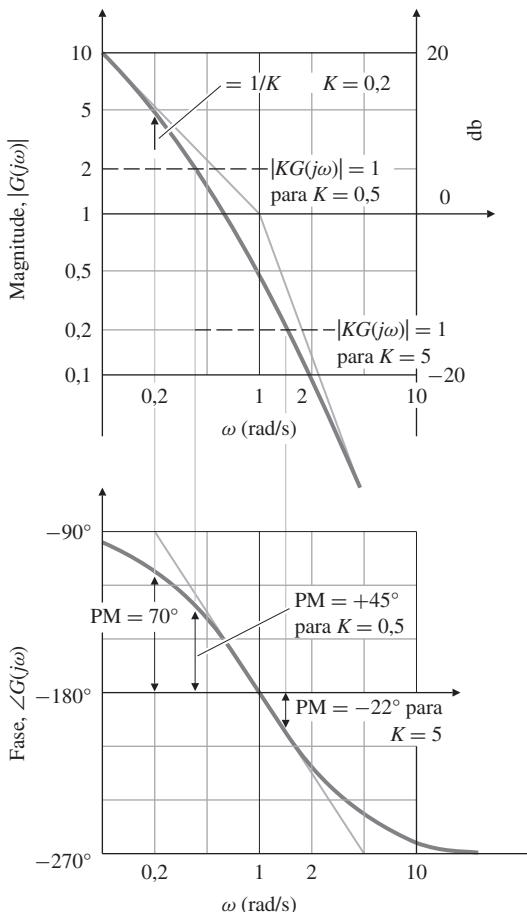


Figura 6.36 PM em relação a K a partir da resposta em frequência.

Dados adicionais para auxiliar a avaliação de um sistema de controle com base na sua PM podem ser obtidos da relação entre o pico de ressonância M_r e ζ visto na Fig. 6.3. Note que este valor foi obtido para o mesmo sistema [Eq. (6.9)] dado na Eq. (6.30). Podemos converter as informações da Fig. 6.37 em uma forma relacionando M_r com a PM. Isto é descrito na Fig. 6.38, junto com o sobressinal a uma entrada ao degrau M_p . Portanto, vemos que, dada a PM, podemos inferir informações em relação ao sobressinal na resposta ao degrau em um sistema em malha fechada.

Muitos engenheiros pensam diretamente em termos de PM quando estão analisando se um sistema de controle está devidamente estabilizado. Nestes termos, a $PM = 30^\circ$ é muitas vezes considerada como a menor PM adequada. Além de testar a estabilidade de um sistema utilizando a PM, um projetista normalmente também se preocupa com a especificação da velocidade de resposta, como largura de banda, como discutido na Seção 6.1. Em termos dos parâmetros

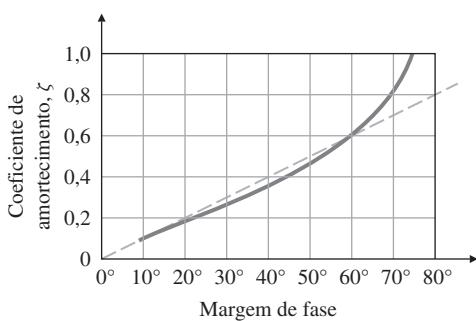
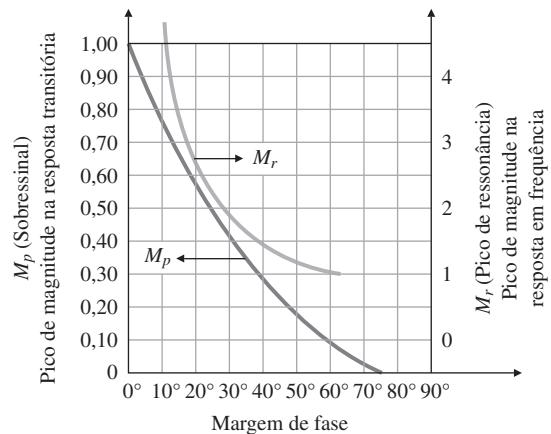


Figura 6.37 Coeficiente de amortecimento em relação à PM.

Figura 6.38 Sobressinal (M_p) e pico de ressonância (M_r) em relação a $T(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$.



de resposta em frequência discutidos até agora, a frequência de cruzamento seria a melhor para descrever a velocidade da resposta de um sistema. Essa ideia será discutida nas Seções 6.6 e 6.7.

Em alguns casos, a PM e a GM não são indicadores úteis de estabilidade. Para sistemas de primeira e de segunda ordem, a fase nunca atravessa a linha de 180°; portanto, a GM é sempre ∞ e não é um parâmetro de projeto útil. Para sistemas de ordem superior, é possível ter mais de uma frequência onde $|KG(j\omega)| = 1$ ou $\angle KG(j\omega) = 180^\circ$, e as margens como definidas previamente precisam de esclarecimentos. Um exemplo disso pode ser visto na Fig. 10.12, onde a magnitude cruza 1 três vezes. Decidiu-se definir a PM pelo primeiro cruzamento porque o valor da PM neste cruzamento foi o menor dos três valores e, assim, é a avaliação de estabilidade mais conservadora. Um diagrama de Nyquist com base nos dados da Fig. 10.12 mostraria que a parte da curva de Nyquist mais próxima de -1 seria o ponto crítico de indicação de estabilidade e, portanto, o uso da frequência de cruzamento que resultaria no valor mínimo da PM é a escolha lógica. Na melhor das hipóteses, um projetista precisa ser criterioso ao aplicar as definições de margens descritas na Fig. 6.34. Na verdade, a margem de estabilidade real de um sistema pode ser rigorosamente avaliada apenas através da análise da proximidade do diagrama de Nyquist com o ponto -1 .

Vetor de margem

Para ajudar nessa análise, O. J. M. Smith (1958) introduziu o **vetor de margem**, que foi definido como a distância mais próxima do diagrama de Nyquist e o ponto -1 .¹² A Figura 6.39 ilustra esta ideia graficamente. Devido ao fato de o vetor de margem ser um parâmetro único de margem, ele remove todas as ambiguidades na avaliação da estabilidade usando a combinação de GM e PM. Mais antigamente, ele não era amplamente utilizado devido às dificuldades de calculá-lo. No entanto, com a ampla disponibilidade de auxílio computacional, a ideia de usar o vetor de margem para descrever o grau de estabilidade é muito mais viável.

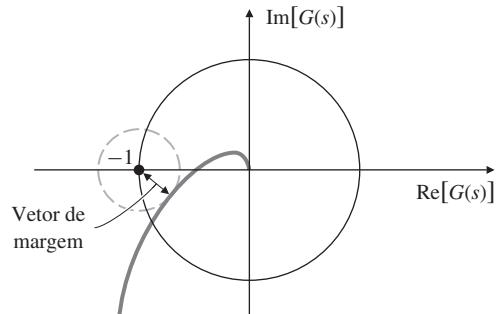


Figura 6.39 Definição do vetor de margem no diagrama de Nyquist.

¹² Este valor está bastante relacionado ao uso da função de sensibilidade para projetos e ao conceito de robustez de estabilidade, que serão discutidos na Seção 6.7.7.

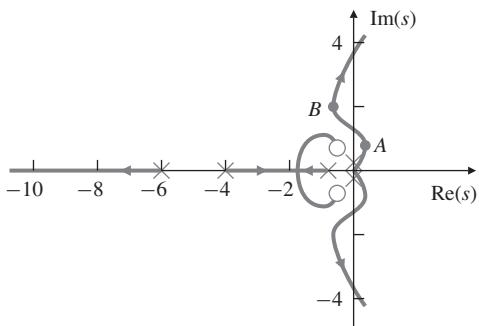


Figura 6.40 Lugar das raízes para um sistema condicionalmente estável.

Há certos exemplos práticos em que um aumento no ganho pode tornar o sistema estável. Como vimos no Capítulo 5, estes sistemas são chamados de **condicionalmente estáveis**. Um lugar das raízes que representa tais sistemas é apresentado na Fig. 6.40. Para um ponto no lugar das raízes, como *A*, um aumento no ganho torna o sistema estável, trazendo as raízes instáveis para o SPE. Para o ponto *B*, aumentar ou diminuir o ganho pode tornar o sistema instável. Portanto, existem várias margens de ganho que podem corresponder à redução ou ao aumento do ganho, e a definição da GM na Fig. 6.34 não é válida.

Sistema de condicionamento estável

EXEMPLO 6.12 Propriedades da estabilidade de um sistema condicionalmente estável

Determine as propriedades da estabilidade em função do ganho K para o sistema com a função de transferência em malha aberta

$$KG(s) = \frac{K(s+10)^2}{s^3}.$$

Solução. Este é um sistema no qual o acréscimo do ganho causa a transição da instabilidade para a estabilidade. O lugar das raízes na Fig. 6.41(a)¹³ mostra que o sistema é instável para $K < 5$ e estável para $K > 5$. O diagrama de Nyquist na Fig. 6.41(b) foi traçado para o valor estável $K = 7$. A determinação das margens de acordo com a Fig. 6.34 resulta em $\text{PM} = +10^\circ$ (estável) e $\text{GM} = 0,7$ (instável). De acordo com as regras para a estabilidade discutidas anteriormente, estas duas margens fornecem sinais conflitantes sobre a estabilidade do sistema.

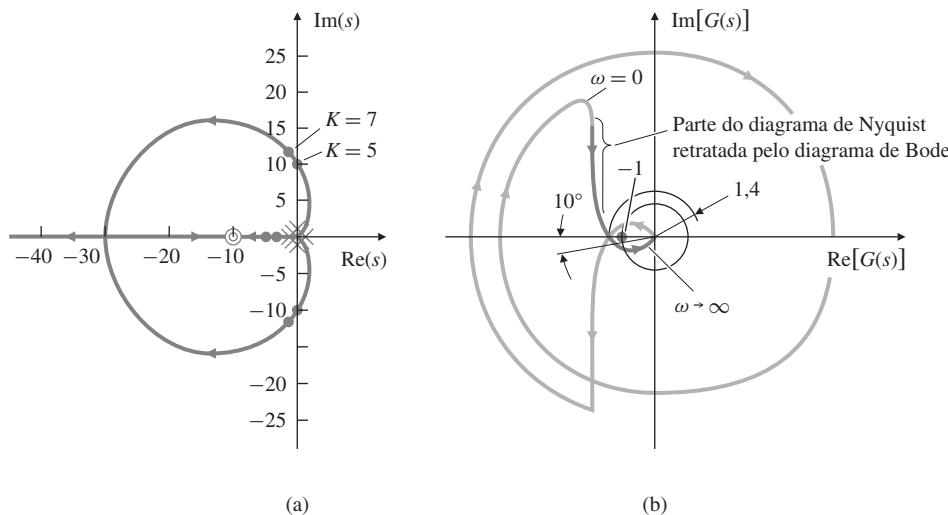


Figura 6.41 Sistema no qual aumentar o ganho causa a transição da instabilidade para estabilidade: (a) lugar das raízes; (b) diagrama de Nyquist.

¹³ A forma deste lugar das raízes é a curva plana limaçon.

Este conflito é resolvido contando os envolvimentos do diagrama de Nyquist na Fig. 6.41(b). Há um envolvimento do ponto -1 no sentido horário e um no sentido anti-horário. Portanto, o sistema é estável para $K = 7$. Para sistemas como estes, é melhor recorrer ao lugar das raízes e/ou diagrama de Nyquist (em vez do diagrama de Bode) para determinar a estabilidade.

EXEMPLO 6.13 Diagrama de Nyquist para um sistema com múltiplas frequências de cruzamento

Trace o diagrama de Nyquist para o sistema

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{85(s+1)(s^2 + 2s + 43,25)}{s^2(s^2 + 2s + 82)(s^2 + 2s + 101)} \\ &= \frac{85(s+1)(s+1 \pm 6,5j)}{s^2(s+1 \pm 9j)(s+1 \pm 10j)}, \end{aligned}$$

e determine as margens de estabilidade.

Solução. O diagrama de Nyquist (Fig. 6.42) mostra que existem três frequências de cruzamento ($\omega = 0,75, 9,0$ e $10,1$ rad/s) com três valores correspondentes de PM, $37^\circ, 80^\circ$ e 40° , respectivamente. No entanto, o indicador chave da estabilidade é a proximidade do diagrama de Nyquist ao ponto -1 no eixo real. Neste caso, apenas a GM indica uma margem pobre de estabilidade para este sistema. O diagrama de Bode para este sistema (Fig. 6.43) mostra os mesmos três cruzamentos de magnitude = 1 em $0,75, 9,0$, e $10,1$ rad/s. O valor da GM 1,26 a partir do diagrama de Bode correspondente a $\omega = 10,4$ rad/s qualitativamente está de acordo com a GM a partir do diagrama de Nyquist e seria a margem mais útil e inequívoca para este exemplo.

Em resumo, muitos sistemas se comportam aproximadamente como o Exemplo 6.9 e, para eles, a GM e a PM são bem definidas e úteis. Há também casos frequentes de sistemas mais complexos com múltiplos pontos de cruzamento na magnitude 1 ou sistemas instáveis em malha aberta para os quais os critérios de estabilidade definidos pela Fig. 6.34 são ambíguos ou incorretos; por isso, precisamos verificar como a GM e a PM foram definidas anteriormente e/ou modificá-las, voltando para o critério de estabilidade de Nyquist.

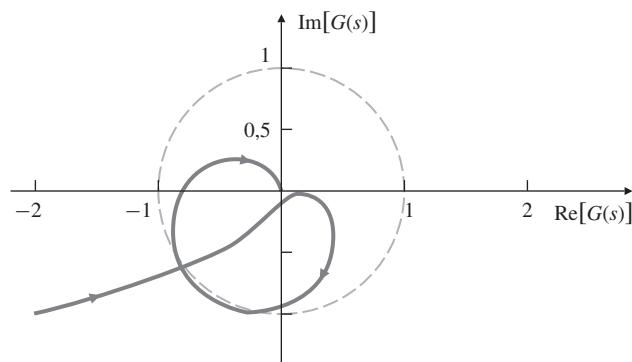
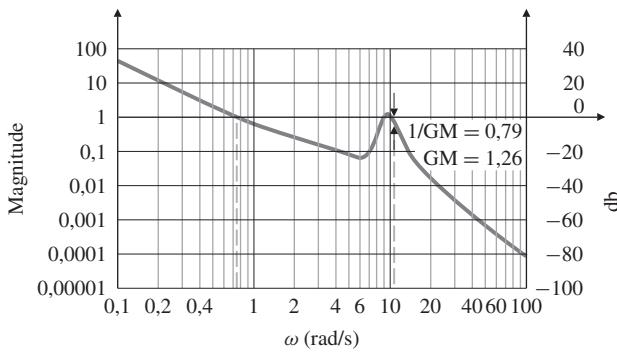
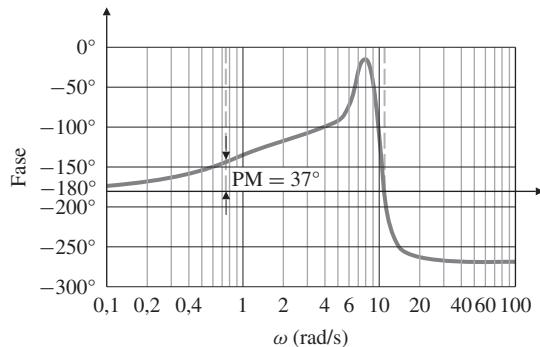


Figura 6.42 Diagrama de Nyquist do sistema complexo no Exemplo 6.13.



(a)



(b)

Figura 6.43 Diagrama de Bode do Sistema do Exemplo 6.13.

6.5 Relação entre ganho e fase no diagrama de Bode

Umas das contribuições mais importantes de Bode é o seguinte teorema:

Para qualquer sistema de fase mínima estável (ou seja, sem zeros ou polos SPD), a fase de $G(j\omega)$ está exclusivamente relacionada com a magnitude de $G(j\omega)$.

Teorema de Bode

Quando a inclinação de $|G(j\omega)|$ em função de ω em uma escala log-log persiste em um valor constante por aproximadamente uma década de frequência, a relação é particularmente simples e é dada por

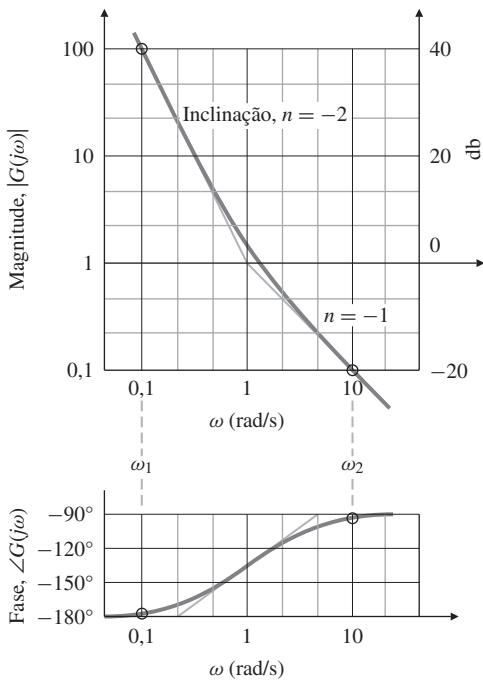
$$\angle G(j\omega) \cong n \times 90^\circ, \quad (6.33)$$

sendo que n é a inclinação de $|G(j\omega)|$ em unidades de década de amplitude por década de frequência. Por exemplo, ao considerar apenas a curva de magnitude da Fig. 6.44, vemos que a Eq. (6.33) pode ser aplicada para as duas frequências $\omega_1 = 0,1$ (onde $n = -2$) e $\omega_2 = 10$ (onde $n = -1$), que são obtidas a uma década da mudança de inclinação, para produzir os valores aproximados de fase, -180° e -90° . A curva de fase exata mostrada na figura verifica que, na verdade, a aproximação é bastante boa. Também mostra que a aproximação irá degradar se a avaliação for realizada em frequências mais próximas da mudança de inclinação.

Uma declaração exata do teorema de ganho e fase de Bode é

$$\angle G(j\omega_o) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dM}{du} \right) W(u) du \quad (\text{em radianos}), \quad (6.34)$$

Figura 6.44 Demonstração de uma relação de ganho de fase aproximada.



sendo

$$M = \text{Magnitude em log} = \ln |G(j\omega)|,$$

$$u = \text{frequência normalizada} = \ln(\omega/\omega_0)$$

$dM/du \cong$ inclinação, como definido na Eq. (6.33),

$$W(u) = \text{função de ponderação} = \ln(\coth|u|/2).$$

A Figura 6.45 é um gráfico da função de ponderação $W(u)$ e mostra como a fase é mais dependente da inclinação em ω_0 ; ela é também dependente, embora em menor grau, das frequências vizinhas. A figura também sugere que a ponderação pode ser aproximada por uma função impulso centrada em ω_0 . Podemos aproximar a função de ponderação por

$$W(u) \cong \frac{\pi^2}{2} \delta(u),$$

que é precisamente a aproximação feita para chegar à Eq. (6.33) usando a propriedade de “penear” da função de impulso (e a conversão de radianos para graus).

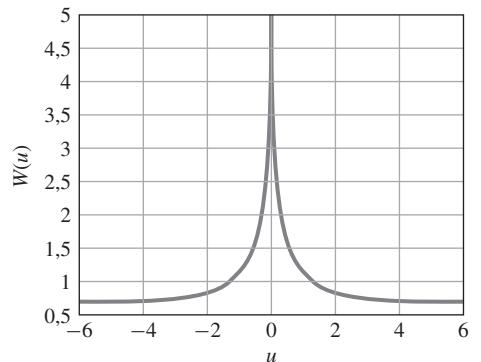


Figura 6.45 Função de ponderação no teorema de ganho e fase de Bode.

Na prática, a Eq. (6.34) nunca é usada, mas a Eq. (6.33) é usada como um guia para inferir sobre a estabilidade usando apenas $|G(\omega)|$. Quando $|KG(j\omega)| = 1$,

$$\angle G(j\omega) \cong -90^\circ \text{ se } n = -1,$$

$$\angle G(j\omega) \cong -180^\circ \text{ se } n = -2.$$

Para a estabilidade, desejamos que $\angle G(j\omega) > -180^\circ$ para $PM > 0$. Portanto, ajustamos a curva de $|KG(j\omega)|$ para que ela tenha uma inclinação de -1 na frequência de cruzamento, ω_c , (ie, onde $|KG(j\omega)| = 1$). Se a inclinação for -1 para uma década acima e abaixo da frequência de cruzamento, então $PM \cong 90^\circ$; no entanto, para garantir uma PM razoável, normalmente é necessário apenas que a inclinação -1 (-20 db por década) persista por uma década da frequência centrada na frequência de cruzamento. Portanto, vemos que há um critério de projeto muito simples:

Frequência de cruzamento

Ajuste a inclinação da magnitude da curva $|KG(j\omega)|$ de modo que ela cruze a magnitude 1 com inclinação -1 e mantenha essa inclinação para uma década de ω_c .

Cruzamento na inclinação -1

Este critério será geralmente suficiente para fornecer uma PM aceitável e, portanto, fornecerá um amortecimento adequado ao sistema. Para atingir a velocidade desejada da resposta, o ganho do sistema é ajustado para que o ponto de cruzamento esteja em uma frequência que vá fornecer a largura de banda desejada ou a velocidade da resposta, conforme determinado pela Eq. (3.60). Lembre-se de que a frequência natural ω_n , largura de banda e frequência de cruzamento são aproximadamente iguais, como será discutido mais adiante na Seção 6.6.

EXEMPLO 6.14 Uso de um critério simples para o controle de atitude de uma aeronave

Para o problema de controle de atitude de uma aeronave definido na Fig. 6.46, encontre uma expressão adequada para $KD(s)$ que irá proporcionar um bom amortecimento e uma largura de banda de aproximadamente de $0,2$ rad/s. Determine também o valor da função de sensibilidade, S , em $\omega = 0,05$ rad/s, a fim de avaliar a magnitude do erro de rastreamento para uma entrada de referência naquela frequência.

Solução. A magnitude da resposta em frequência da aeronave (Fig. 6.47) claramente requer alguma reformulação, pois ela tem uma inclinação de -2 (ou -40 db por década) em todos os lugares. A compensação mais simples para fazer o trabalho consiste na utilização dos termos proporcional e derivativo (um compensador PD), que produz a relação

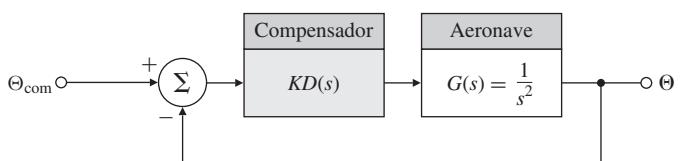


Figura 6.46 Sistema de controle de atitude de uma aeronave.

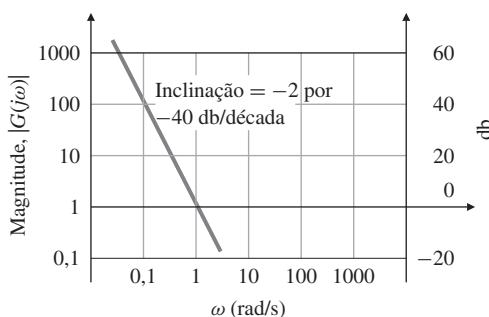


Figura 6.47 Magnitude de resposta em frequência da aeronave.

$$KD(s) = K(T_D s + 1). \quad (6.35)$$

Vamos ajustar o ganho K para produzir a largura de banda desejada e ajustar o ponto de quebra $\omega_1 = 1/T_D$ para fornecer a inclinação de -1 na frequência de cruzamento. O processo de projeto real para alcançar as especificações desejadas é muito simples: escolhemos um valor de K para proporcionar um cruzamento em $0,2$ rad/s e um valor de ω_1 que seja cerca de quatro vezes menor do que a frequência de cruzamento, de modo que a inclinação seja -1 nas proximidades do cruzamento. A Figura 6.48 mostra os passos que tomamos para chegar à compensação final:

1. Trace $|G(j\omega)|$.
2. Modifique o traçado adicionando $|D(j\omega)|$, com $\omega_1 = 0,05$ rad/s ($T_D = 20$), tal que a inclinação seja aproximadamente -1 em $\omega = 0,2$ rad/s.
3. Determine $|DG| = 100$, onde a curva $|DG|$ cruza a linha $\omega = 0,2$ rad/s, que é onde desejamos que a magnitude 1 seja cruzada.
4. Para que a frequência de cruzamento seja $\omega = 0,2$ rad/s, calcule

$$K = \frac{1}{[|DG|]_{\omega=0,2}} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Portanto,

$$KD(s) = 0,01(20s + 1)$$

irá atender às especificações, completando assim o projeto.

Se fôssemos desenhar a curva de fase de KDG , veríamos que $PM = 75^\circ$, o que certamente é bastante adequado. O diagrama da resposta em frequência em malha fechada (Fig. 6.49) mostra que, de fato, a frequência de cruzamento e a largura de banda são quase idênticas neste caso. A função de sensibilidade foi definida pela Eq. (4.17) para este problema e é

$$\mathcal{S} = \frac{1}{1 + KDG}.$$

A resposta da saída em relação ao comando de entrada é mostrada no gráfico junto com $T(s)$. A resposta em frequência de T confirma que o projeto alcançou a largura de banda desejada de $0,2$ rad/s, e também pode-se ver que \mathcal{S} tem o valor de $0,2$ em $\omega = 0,05$ rad/s. A resposta ao degrau do sistema em malha fechada é mostrada na Fig. 6.50 e seu sobressinal de 14% confirma o amortecimento adequado.

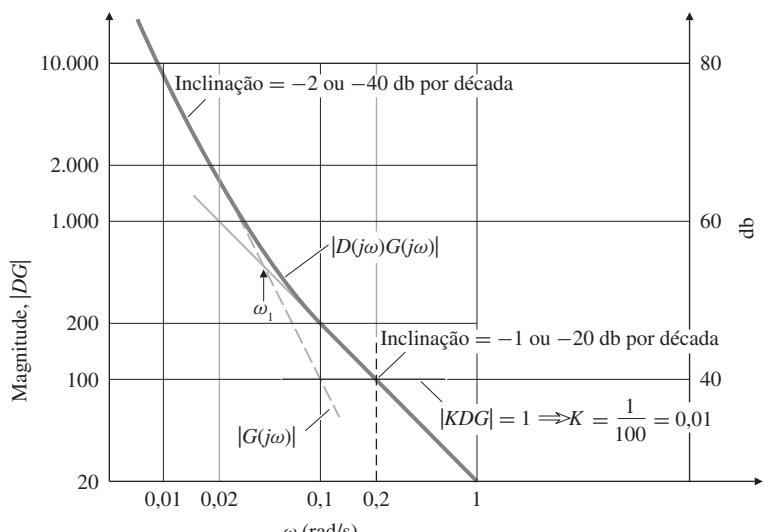


Figura 6.48 Função de transferência compensada em malha aberta.

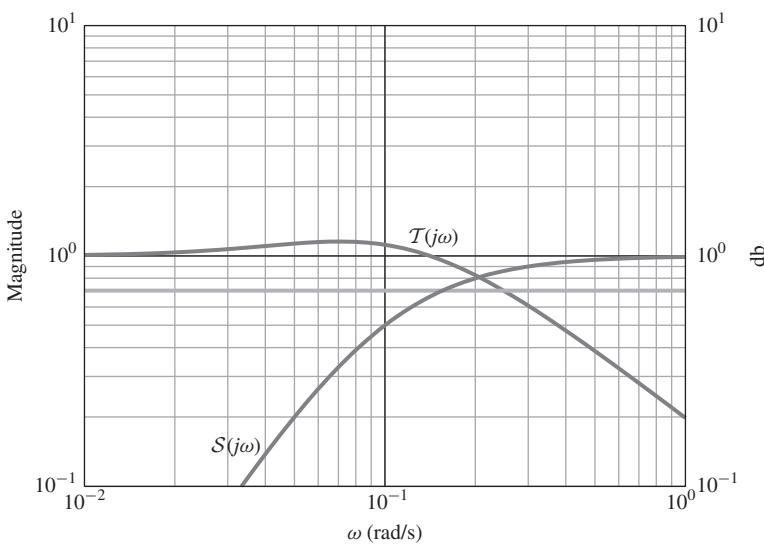


Figura 6.49 Resposta em frequência em malha fechada de $\mathcal{T}(s)$ e $\mathcal{S}(s)$.

6.6 Resposta em frequência de malha fechada

A largura de banda em malha fechada foi definida na Seção 6.1 e na Fig. 6.5. A Figura 6.3 mostrou que a frequência natural está sempre dentro de um fator de dois da largura de banda para um sistema de segunda ordem. No Exemplo 6.14, projetamos a compensação de modo que a frequência de cruzamento estivesse na largura de banda desejada, e foi verificado por cálculo que a largura de banda foi idêntica à frequência de cruzamento.

Geralmente, a relação entre a frequência de cruzamento e a largura de banda não é tão boa como no Exemplo 6.14. Podemos ajudar a estabelecer uma correspondência mais exata fazendo algumas observações. Considere um sistema no qual $|KG(j\omega)|$ apresenta o comportamento típico

$$\begin{aligned} |KG(j\omega)| &\gg 1 \text{ para } \omega \ll \omega_c, \\ |KG(j\omega)| &\ll 1 \text{ para } \omega \gg \omega_c, \end{aligned}$$

sendo ω_c a frequência de cruzamento. A magnitude da resposta em frequência em malha fechada é aproximadamente dada por

$$|\mathcal{T}(j\omega)| = \left| \frac{KG(j\omega)}{1 + KG(j\omega)} \right| \cong \begin{cases} 1, & \omega \ll \omega_c, \\ |KG|, & \omega \gg \omega_c. \end{cases} \quad (6.36)$$

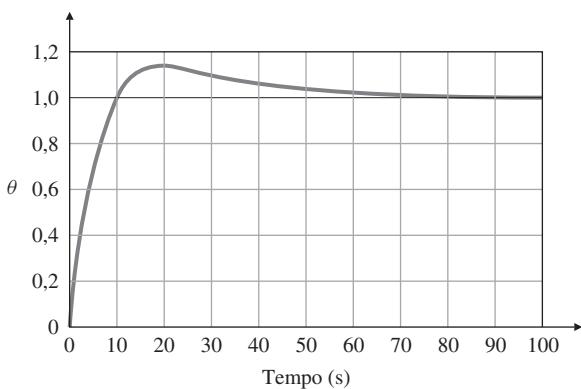


Figura 6.50 Resposta ao degrau para o compensador PD.

Nas imediações do cruzamento, onde $|KG(j\omega)| = 1$, $|\mathcal{T}(j\omega)|$ depende fortemente da PM. A PM de 90° significa que $\angle G(j\omega_c) = -90^\circ$, e, portanto, $|\mathcal{T}(j\omega_c)| = 0,707$. Por outro lado, PM = 45° resulta que $|\mathcal{T}(j\omega_c)| = 1,31$.

A avaliação exata da Eq. (6.36) foi usada para gerar as curvas de $|\mathcal{T}(j\omega)|$ na Fig. 6.51. Ela mostra que a largura de banda para valores menores de PM é tipicamente um pouco maior do que ω_c , embora geralmente seja menor que $2\omega_c$; assim,

$$\omega_c \leq \omega_{BW} \leq 2\omega_c.$$

Outra especificação referente à resposta em frequência de malha fechada é o pico de ressonância da magnitude M_r , definido na Fig. 6.5. As figuras 6.3 e 6.38 mostram que, para sistemas lineares, o M_r está geralmente relacionado ao amortecimento do sistema. Na prática, o M_r é raramente usado; a maioria dos projetista prefere usar a PM para especificar o amortecimento de um sistema, porque as imperfeições, que tornam os sistemas não lineares ou causam atrasos, geralmente corroem mais significativamente na fase do que na magnitude.

Conforme demonstrado no último exemplo, também é importante que o projeto atinja certas características de erro, e estas são, muitas vezes, avaliadas em função da entrada ou da frequência de perturbação. Em alguns casos, a principal função do sistema de controle é regular a saída para uma entrada constante na presença de distúrbios. Para essas situações, o item chave de interesse para o projeto seria a resposta em frequência de malha fechada do erro com respeito a entradas de perturbação.

6.7 Compensação

Conforme discutimos nos Capítulos 4 e 5, elementos dinâmicos (ou compensadores) são normalmente adicionados aos controladores realimentados para melhorar a estabilidade e as características de erro do sistema, porque o processo em si não pode ter as características aceitáveis apenas com a realimentação proporcional.

A Seção 4.3 discutiu os tipos básicos de ação de controle: proporcional, derivativa e integral. A Seção 5.4 discutiu três tipos de compensação dinâmica: compensador de avanço, que se aproxima de controle proporcional-derivativo (PD), compensador de atraso, que se aproxima de controle proporcional-integral (PI), e compensador rejeita faixa, que tem características especiais para lidar com ressonâncias. Nesta seção, vamos discutir esses e outros tipos de compensação em termos de características da resposta em frequência. Na maioria dos casos, a compensação será implementada em um microprocessador. Técnicas para converter o compensador contínuo $D(s)$ em uma forma que pode ser codificada no computador foram brevemente discutidas na Seção 4.4. Elas serão ilustradas mais adiante nesta seção e serão discutidas em mais detalhes no Capítulo 8.

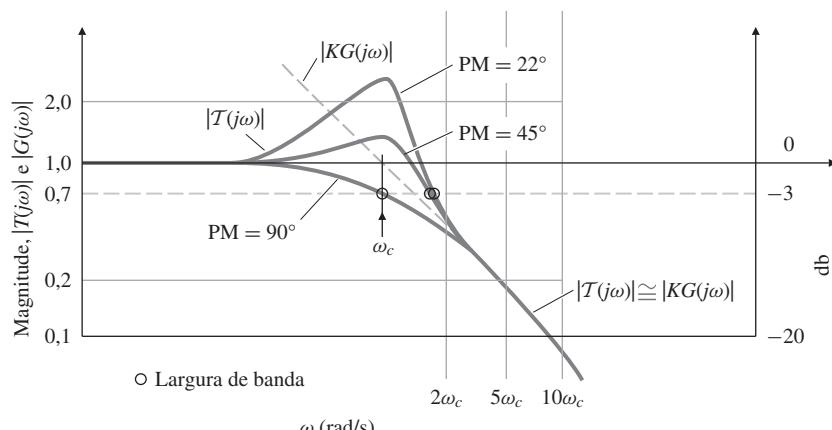


Figura 6.51 Largura de banda em malha fechada em relação à PM.

A análise da estabilidade baseada na resposta em frequência até este ponto tem geralmente considerado o sistema em malha fechada que tem a equação característica $1 + KG(s) = 0$. Com a introdução da compensação, a equação característica de malha fechada torna-se $1 + KD(s)G(s) = 0$, e toda a discussão anterior neste capítulo relativa à resposta em frequência de $KG(s)$ se aplica diretamente ao caso com compensador se nós a aplicarmos à resposta em frequência de $KD(s)G(s)$. Chamamos esta quantidade de $L(s)$ de o “ganho de malha”, ou função de transferência do sistema em malha aberta, onde $L(s) = KD(s)G(s)$.

6.7.1 Compensador PD

Vamos começar a discussão do projeto de compensadores usando a resposta em frequência do controlador PD. A função de transferência do compensador, dada por

$$D(s) = (T_D s + 1), \quad (6.37)$$

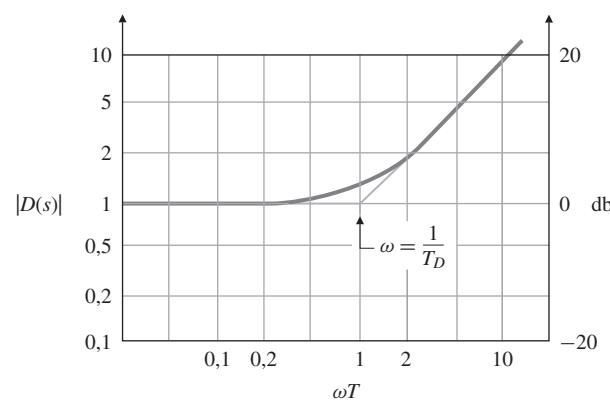
apresentada na Fig. 5.22, tem um efeito estabilizante no lugar das raízes de um sistema de segunda ordem. As características de resposta em frequência da Eq. (6.37) são mostradas na Fig. 6.52. A influência estabilizadora é aparente, dada pelo aumento da fase e pela inclinação +1 nas frequências acima do ponto de quebra $1/T_D$. Esta compensação é usada posicionando $1/T_D$ de modo que o acréscimo de fase ocorra nas proximidades da frequência de cruzamento (ou seja, onde $|KD(s)G(s)| = 1$), aumentando, assim, a PM.

Note que a magnitude do compensador continua a crescer à medida que a frequência cresce. Esse recurso é indesejável, porque amplifica o ruído de alta frequência que normalmente está presente em qualquer sistema real e, como uma função de transferência contínua, não pode ser realizada com elementos físicos. Essa é também a razão pela qual afirmamos, na Seção 5.4, que a compensação derivativa pura resulta em problemas.

6.7.2 Compensador de avanço

A fim de aliviar a amplificação de alta frequência da compensação PD, um polo de primeira ordem é adicionado no denominador em frequências substancialmente mais altas do que o

Compensador PD



Compensação de avanço

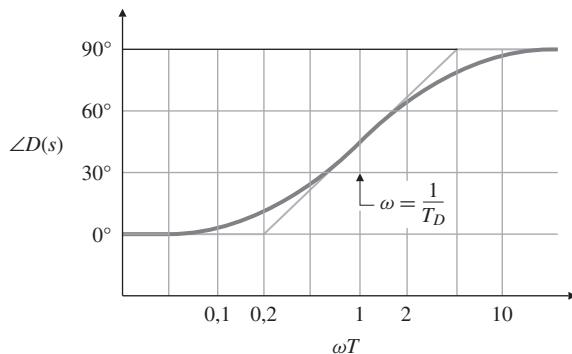


Figura 6.52 Resposta em frequência do controlador PD.

ponto de quebra do compensador PD. Assim, o aumento de fase (ou avanço) ainda ocorre, mas a amplificação em altas frequências é limitada. A **compensação de avanço** resultante tem a função de transferência

$$D(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad \alpha < 1, \quad (6.38)$$

onde $1/\alpha$ é a razão entre as frequências de quebra polo/zero. A Figura 6.53 mostra a resposta em frequência do compensador de avanço. Note que uma quantidade significativa de avanço de fase ainda é fornecida, mas com uma amplificação muito menor em altas frequências. Um compensador de avanço geralmente é usado quando uma melhoria substancial de amortecimento do sistema é necessária.

A contribuição de fase do compensador de avanço na Eq. (6.38) é dada por

$$\phi = \tan^{-1}(T\omega) - \tan^{-1}(\alpha T\omega).$$

Pode-se demonstrar (veja o Problema 6.44) que a frequência na qual a fase é máxima é dada por

$$\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}. \quad (6.39)$$

A contribuição de fase máxima – isto é, o pico da curva de $\angle D(s)$ na Fig. 6.53 – corresponde a

$$\sin \phi_{\max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad (6.40)$$

ou

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{\max}}{1 + \sin \phi_{\max}}.$$

Outra maneira de considerar isto é a seguinte: a fase máxima ocorre em uma frequência que se encontra no meio do caminho entre as duas frequências de quebra (às vezes chamadas de frequências de canto) em uma escala logarítmica,

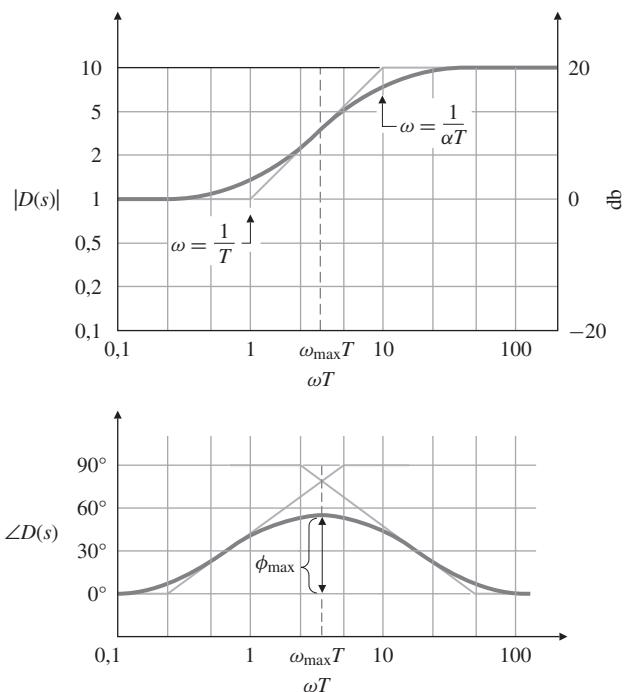


Figura 6.53 Resposta em frequência do compensador de avanço com $1/\alpha = 10$.

$$\begin{aligned}
\log \omega_{\max} &= \log \frac{1/\sqrt{T}}{\sqrt{\alpha T}} \\
&= \log \frac{1}{\sqrt{T}} + \log \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \\
&= \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{1}{T} \right) + \log \left(\frac{1}{\alpha T} \right) \right], \tag{6.41}
\end{aligned}$$

como mostrado na Fig. 6.53. Alternativamente, podemos afirmar estes resultados em termos da localização do polo-zero. Reescrevendo $D(s)$ na forma utilizada para a análise do lugar das raízes, temos

$$D(s) = \frac{s+z}{s+p}. \tag{6.42}$$

O Problema 6.44 mostra que

$$\omega_{\max} = \sqrt{|z| |p|} \tag{6.43}$$

e

$$\log \omega_{\max} = \frac{1}{2} (\log |z| + \log |p|). \tag{6.44}$$

Estes resultados estão de acordo com os resultados anteriores se fizermos $z = -1/T$ e $p = -1/\alpha T$ nas Eqs. (6.39) e (6.41).

Por exemplo, um compensador de avanço com um zero em $s = -2$ ($T = 0,5$) e um polo em $s = -10$ ($\alpha T = 0,1$) (e, assim, $\alpha = 1/5$) terá fase máxima em

$$\omega_{\max} = \sqrt{2 \cdot 10} = 4,47 \text{ rad/s.}$$

A quantidade de avanço de fase no ponto médio depende apenas de α na Eq. (6.40) e é representada na Fig. 6.54. Para $\alpha = 1/5$, a Fig. 6.54 mostra que $\phi_{\max} = 40^\circ$. Note, a partir da figura, que a fase poderia ser aumentada até 90° utilizando valores mais elevados da **razão de avanço**, $1/\alpha$; no entanto, a Fig. 6.53 mostra que os valores crescentes de $1/\alpha$ também produzem amplificações maiores em frequências mais altas. Assim, nossa tarefa é selecionar um valor de $1/\alpha$ que seja um bom compromisso entre uma PM aceitável e uma sensibilidade de ruído aceitável em altas frequências. Normalmente, sugere-se que a compensação deve contribuir com um avanço de fase máximo de 70° . Se um avanço de fase maior for necessário, então um compensador de avanço de fase duplo é sugerido, sendo

$$D(s) = \left(\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \right)^2.$$

Razão de avanço = $\frac{1}{\alpha}$

Mesmo se um sistema estiver sujeito a quantidades insignificantes de ruído e a compensação derivativa pura da Eq. (6.37) for aceitável, uma compensação contínua pareceria mais com

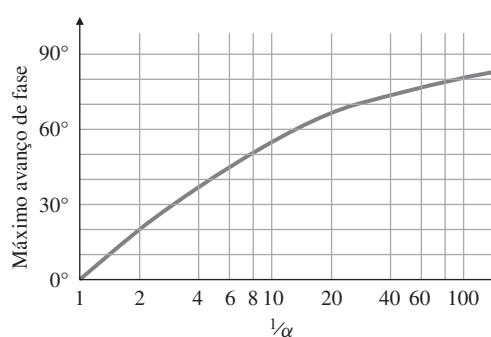


Figura 6.54 Máximo acréscimo de fase de um compensador de avanço.

a Eq. (6.38) do que com a Eq. (6.37), devido à impossibilidade de construir um diferenciador puro. Nenhum sistema físico – mecânico ou elétrico – responde com amplitude infinita na frequência infinita, então haverá um limite na faixa de frequência (ou largura de banda) para o qual a derivada da informação (ou avanço de fase) possa ser fornecida. Isto também é verdade em uma implementação digital, pois a taxa de amostragem limita a amplificação de alta frequência e, essencialmente, coloca um polo na função de transferência do compensador.

EXEMPLO 6.15 Compensador de avanço para um motor CC

Como exemplo de projeto de um compensador de avanço, vamos repetir o projeto de compensador para o motor CC com a função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

que foi obtida na Seção 5.4.1. Isso também representa o modelo de uma antena de localização por satélite (veja a Fig. 3.61). Dessa vez, queremos obter um erro em estado estacionário inferior a 0,1 para uma entrada de rampa unitária. Além disso, desejamos um sobressinal $M_p < 25\%$.

1. Determine o compensador de avanço que satisfaça às especificações.
2. Determine a versão digital do compensador com $T_s = 0,05$ s.
3. Compare as respostas ao degrau e à rampa em ambas as implementações.

Solução

1. O erro em estado estacionário é dado por

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + KD(s)G(s)} \right] R(s), \quad (6.45)$$

sendo $R(s) = 1/s^2$ para uma entrada em rampa, então a Eq. (6.45) se reduz a

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{s + KD(s)[1/(s+1)]} \right\} = \frac{1}{KD(0)}.$$

Portanto, vemos que $KD(0)$, o ganho de estado estacionário da compensação, não pode ser inferior a 10 ($K_v \geq 10$) para satisfazer o critério de erro, por isso escolhemos $K = 10$. Para relacionar a especificação de sobressinal com a PM, a Fig. 6.38 mostra que uma PM de 45° deve bastar. A resposta em frequência de $KG(s)$ na Fig. 6.55 mostra que a PM = 20° sem adicionar o compensador de avanço de fase. Se fosse possível simplesmente adicionar a fase sem alterar a magnitude, precisaríamos de uma fase adicional de apenas 25° em $KG(s)$ na frequência de cruzamento de $\omega = 3$ rad/s. No entanto, manter o mesmo ganho de baixa frequência e adicionando um zero do compensador resultaria em uma frequência de cruzamento maior; portanto, a contribuição de fase requerida para o compensador de avanço será maior do que 25° . Por segurança, vamos projetar um compensador que fornece um avanço de fase máximo de 40° . A Fig. 6.54 mostra que $1/\alpha = 5$ atinge este objetivo. Para obter o maior benefício da compensação, a máxima fase do compensador deve ocorrer na frequência de cruzamento. Com algumas tentativas e erros, determinamos que posicionar o zero em $\omega = 2$ rad/s e o polo em $\omega = 10$ rad/s faz com que o avanço de fase máximo ocorra na frequência de cruzamento. A compensação, portanto, é

$$KD(s) = 10 \frac{s/2 + 1}{s/10 + 1}.$$

As características da resposta em frequência de $L(s) = KD(s)G(s)$ na Fig. 6.55 mostra a produção de uma PM de 53° , o que satisfaz às metas de projeto.

O lugar das raízes para esse projeto, originalmente dado na Fig. 5.24, é repetido aqui na Fig. 6.56, com a localização das raízes para $K = 10$ marcadas. O lugar das raízes não é necessário para o procedimento de projeto em resposta em frequência e é apresentado aqui apenas para comparação com o método de projeto baseado no lugar das raízes apresentado

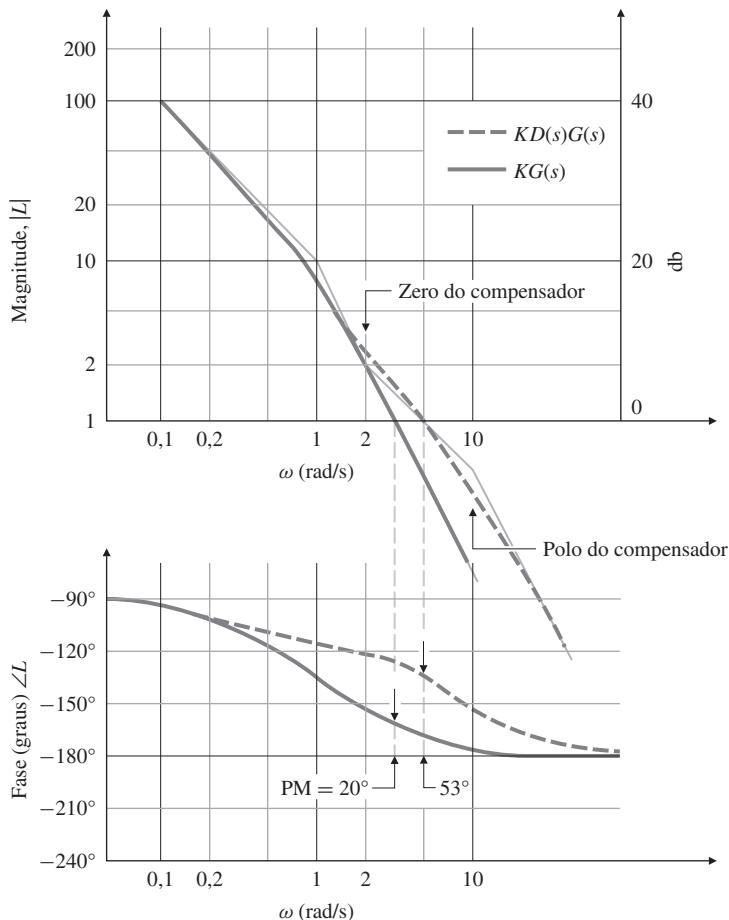


Figura 6.55 Resposta em frequência para o compensador de avanço.

no Capítulo 5. Todo o processo pode ser acelerado usando a rotina SISOTOOL do MATLAB, que fornece simultaneamente o lugar das raízes e o diagrama de Bode através de uma interface interativa. Para este exemplo, os comandos no MATLAB são

```
G=tf(1,[1 1 0]);
D=tf(10*[1/2 1],[1/10 1]);
sisotool(G,D)
```

fornecerá os gráficos, conforme mostrado na Fig. 6.57. Também pode ser usado para gerar o diagrama de Nyquist e a resposta temporal, se desejado.

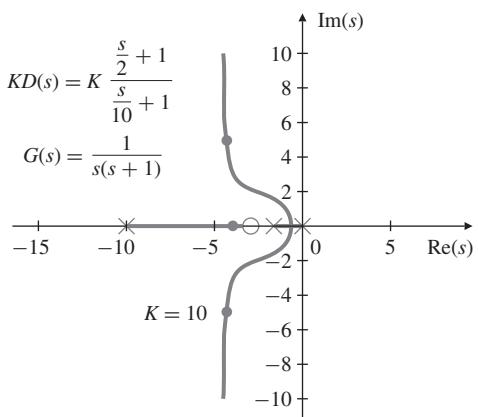
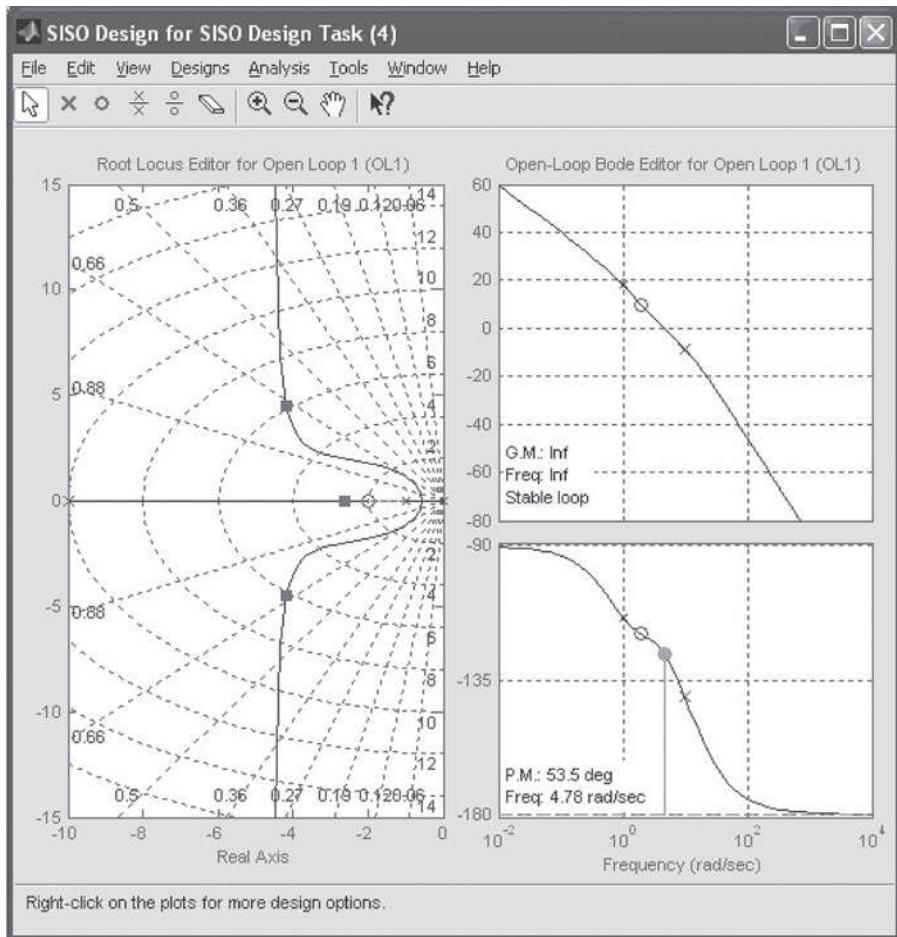


Figura 6.56 O lugar das raízes para o compensador de avanço.

Figura 6.57 Interface gráfica do SISOTOOL para o Exemplo 6.15.



2. Para encontrar o equivalente discreto de $D(s)$, usamos a regra trapezoidal dada na Eq. (4.104). Isto é,

$$D_d(z) = \frac{\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}/2 + 1}{\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}/10 + 1}, \quad (6.46)$$

a qual, com $T_s = 0,05$ s, reduz-se a

$$D_d(z) = \frac{4,2z - 3,8}{z - 0,6}. \quad (6.47)$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido usando os comandos no MATLAB

```
sysD = tf([0.5 1],[0.1 1]);
sysDd = c2d(sysD, 0.05, 'tustin');
```

Como

$$\frac{U(z)}{E(z)} = KD_d(z), \quad (6.48)$$

a equação do controlador discreto resultante é

$$u(k+1) = 0,6u(k) + 10(4,2e(k+1) - 3,8e(k)). \quad (6.49)$$

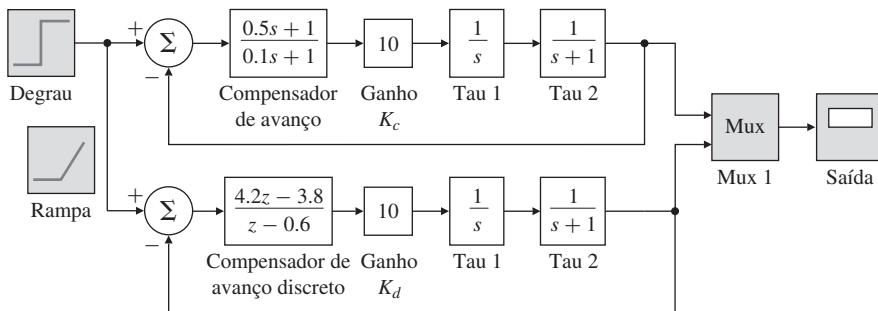


Figura 6.58 Diagrama de blocos no SIMULINK® para a resposta transitória do compensador de avanço projetado.

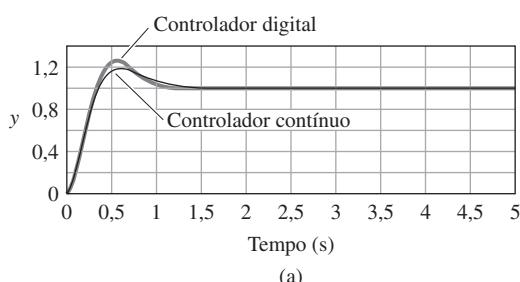
3. O diagrama de blocos no SIMULINK® para as versões contínua e discreta do controlador $D(s)$ para o motor CC é mostrado na Fig. 6.58. As respostas ao degrau dos dois controladores são traçadas juntas na Fig. 6.59(a) e são razoavelmente próximas uma da outra; no entanto, o controlador discreto apresenta um ligeiro aumento no sobressinal, como ocorre frequentemente. Ambos os sobressinais são menores que 25%, e portanto atendem às especificações. As respostas à rampa dos dois controladores, mostradas na Fig. 6.59(b), são essencialmente idênticas, e ambas apresentam um erro de 0,1, como especificado.

O processo de projeto no Exemplo 6.15 pode ser resumido como se segue:

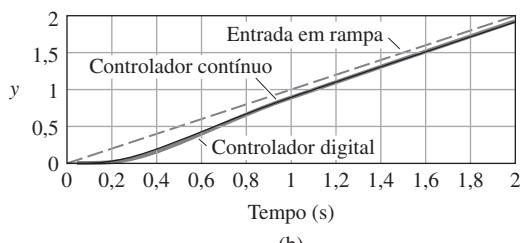
1. Determine o ganho de baixa frequência, de modo que os erros de estado estacionário estejam dentro das especificações.
2. Selecione a combinação a razão de avanço $1/\alpha$ e os valores do zero ($1/T$) que atinge uma PM aceitável.
3. A localização do polo é, então, $(1/\alpha T)$.

Esse procedimento de projeto será aplicado a muitos casos; no entanto, tenha em mente que o procedimento em qualquer projeto particular pode precisar ser adaptado ao seu conjunto particular de especificações.

No Exemplo 6.15, havia duas especificações: o pico do sobressinal e o erro em estado estacionário. A especificação de sobressinal foi transformada em uma PM, mas a especificação



(a)



(b)

Figura 6.59 Compensador de avanço projetado: (a) resposta ao degrau; (b) resposta à rampa.

de erro em estado estacionário foi utilizada diretamente. Nenhum tipo de especificação de velocidade da resposta foi dada; no entanto, isto teria impactado o projeto da mesma forma que a especificação de erro em estado estacionário impactou. A velocidade de resposta ou largura de banda de um sistema está diretamente relacionada à frequência de cruzamento, como foi apontado anteriormente na Seção 6.6. A Figura 6.55 mostra que a frequência de cruzamento foi ~ 5 rad/s. Ela poderia ser aumentada elevando o ganho K e aumentando as frequências do polo e do zero do compensador de avanço para manter a inclinação de -1 na frequência de cruzamento. Elevar o ganho também diminui o erro de estado estacionário, melhorando o limite especificado. A margem de ganho foi introduzida no problema porque a estabilidade foi devidamente especificada apenas pela PM. Além disso, a margem de ganho não teria sido útil para este sistema, porque a fase nunca cruzou a linha 180° e a GM sempre foi infinita.

No projeto de compensadores de avanço, há três parâmetros principais de projeto:

1. A frequência de cruzamento ω_c , que determina a largura de banda ω_{BW} , o tempo de subida, t_r e o tempo de acomodação t_s .
2. A PM, que determina o coeficiente de amortecimento ζ e o sobressinal M_p .
3. O ganho de baixa frequência, que determina as características do erro em estado estacionário.

O problema de projeto é encontrar os melhores valores dos parâmetros, dadas as especificações. Em essência, a compensação de avanço aumenta o valor de $\omega_c/L(0)$ ($= \omega_c/K_v$ para um sistema tipo 1). Isso significa que, se o ganho de baixa frequência for mantido o mesmo, a frequência de cruzamento irá aumentar. Ou se a frequência de cruzamento é mantida a mesma, o ganho de baixa frequência diminui. Mantendo essa interação em mente, o projetista pode assumir um valor fixo para um destes três parâmetros de projeto e, em seguida, ajustar os outros dois iterativamente, até que as especificações sejam atendidas. Uma abordagem é definir o ganho de baixa frequência para atender às especificações de erro e adicionar um compensador de avanço para aumentar a PM na frequência de cruzamento. Uma alternativa é selecionar a frequência de cruzamento para atender a uma especificação de tempo de resposta e, em seguida, ajustar o ganho e as características de avanço tal que a especificação de PM seja atendida. Um procedimento passo a passo é descrito a seguir para esses dois casos. Eles se aplicam a uma classe considerável de problemas para os quais uma compensação é suficiente. Como em todos os procedimentos de projeto, eles fornecem apenas um ponto de partida; o projetista normalmente achará necessário passar por várias iterações de projeto a fim de atender todas as especificações.

Procedimento de projeto para compensação de avanço

1. Determine o ganho de malha aberta K para atender à especificação de erro ou de largura de banda.
 - (a) para atender à especificação de erro, selecione K para satisfazer às constantes de erro (K_p , K_y ou K_a), ou alternativamente,
 - (b) para atender à especificação de largura de banda, selecione K tal que a frequência de cruzamento de malha aberta seja um fator de dois abaixo da largura de banda desejada.
2. Calcule a PM do sistema não compensado usando o valor de K obtido a partir do item 1.
3. Forneça uma margem extra (de aproximadamente 10°) e determine o avanço de fase necessário ϕ_{\max} .
4. Determine α a partir da Eq. (6.40) ou da Fig. 6.54.
5. Selecione ω_{\max} que ocorra na frequência de cruzamento; assim, o zero será $1/T = \omega_{\max}\sqrt{\alpha}$ e o polo estará em $1/\alpha T = \omega_{\max}/\sqrt{\alpha}$.
6. Trace a resposta em frequência compensada e verifique a PM.
7. Iterativamente, ajuste o compensador. Ajuste os parâmetros do compensador (polos, zeros e ganho) até que todas as especificações sejam atendidas. Adicione um compensador extra (ou seja, uma compensação de avanço dupla), se necessário.

Embora essas diretrizes não sejam aplicadas a todos os sistemas que podem ser encontrados na prática, elas sugerem um processo de tentativa e erro sistemático para buscar um compensador que, geralmente, será suficiente.

EXEMPLO 6.16 Compensador de avanço para um sistema de controle de temperatura

O sistema de terceira ordem

$$KG(s) = \frac{K}{(s/0,5 + 1)(s + 1)(s/2 + 1)}$$

representa um sistema típico de controle de temperatura. Projete um compensador de avanço tal que $K_p = 9$ e a PM seja de pelo menos 25° .

Solução. Procedimento de projeto:

1. Dada a especificação para K_p , calculamos K :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} KG(s) = K = 9.$$

2. O diagrama de Bode do sistema não compensado, $KG(s)$, com $K = 9$ pode ser obtido usando os comandos do MATLAB abaixo e é mostrado na Fig. 6.60, juntamente com os dois casos compensados.

```
numG = 9;
den2 = conv([2 1],[1 1]);
denG = conv(den2,[0.5 1]);
sysG = tf(numG,denG);
w=logspace(-1,1);
[mag,phase] = bode(sysG,w);
loglog(w,squeeze(mag)),grid;
semilogx(w,squeeze(phase)),grid;
```

É difícil obter a PM e as frequências de corte com precisão por meio dos diagramas de Bode; portanto, o comando no MATLAB

```
[GM,PM,Wcg,Wcp] = margin(mag,phase,w)
```

pode ser usado.

A quantidade PM é a margem de fase e Wcp é a frequência em que o ganho cruza a magnitude 1. (A GM e Wcg são a margem de ganho em malha aberta e a frequência com que a fase cruza 180° .) Para este exemplo, a saída é

$GM = 1.25$, $PM = 7.12$, $Wcg = 1.87$, $Wcp = 1.68$,

portanto, a PM do sistema não compensado é de 7° e isso ocorre em uma frequência de cruzamento de $1,7$ rad/s.

3. Usando uma margem de fase extra de 10° , o compensador de avanço deve contribuir com $25^\circ + 10^\circ - 7^\circ = 28^\circ$ na frequência de cruzamento. A margem de fase extra é tipicamente necessária, porque o compensador de avanço irá aumentar a frequência de cruzamento do sistema em malha aberta, no ponto em que um acréscimo maior de fase será necessário.
4. A partir da Fig. 6.54, vemos que $\alpha = 1/3$ fornecerá aproximadamente 30° de acréscimo de fase no ponto entre o zero e o polo.
5. Como uma primeira tentativa, posicionamos o zero em 1 rad/s ($T = 1$) e o polo em 3 rad/s, ($\alpha T = 1/3$), suportando a frequência de cruzamento em malha aberta e preservando o fator de 3 entre polo e zero, como indicado por $\alpha = 1/3$. O compensador de avanço é

$$D_1(s) = \frac{s+1}{s/3+1} = \frac{1}{0,333} \left(\frac{s+1}{s+3} \right).$$

6. O diagrama de Bode do sistema com $D_1(s)$ (Fig. 6.60, curva do meio) tem uma PM de 16° . Não obtemos a PM de 30° desejada, porque o compensador mudou a frequência de cruzamento de $1,7$ rad/s para $2,3$ rad/s, aumentando assim o acréscimo fase necessário do compensador. A resposta ao degrau do sistema com $D_1(s)$ (Fig. 6.61) mostra uma resposta muito oscilatória, como poderíamos esperar da pequena PM de 16° .
7. Repetimos o projeto com um aumento da fase extra e movendo a posição do zero levemente para a direita, para que a frequência de cruzamento não seja muito alterada. Nós escolhemos $\alpha = 1/10$ com o zero em $s = -1,5$, de modo que

$$D_2(s) = \frac{s/1,5 + 1}{s/15 + 1} = \frac{1}{0,1} \left(\frac{s + 1,5}{s + 15} \right).$$

Este compensador produz uma PM = 38° , e a frequência de cruzamento baixou ligeiramente para $2,2$ rad/s. A Figura 6.60 (curva superior) mostra a resposta em frequência do projeto revisado. A Figura 6.61 mostra uma redução substancial nas oscilações, o que você deve ter esperado a partir do valor mais elevado da PM.

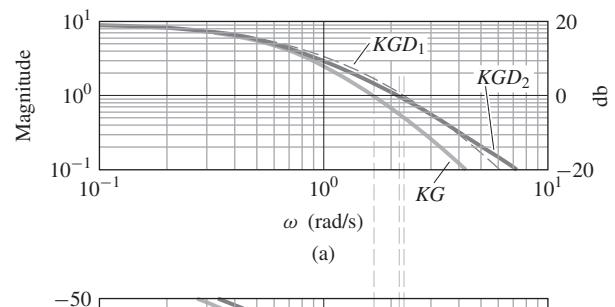


Figura 6.60 Diagrama de Bode para o compensador de avanço no Exemplo 6.16.

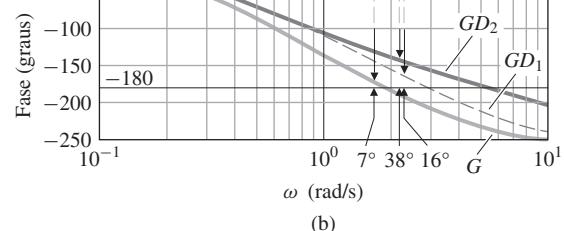


Figura 6.61 Resposta ao degrau para o projeto do compensador de avanço.

EXEMPLO 6.17 Projeto de um compensador de avanço para um servomecanismo do Tipo 1

Considere o sistema de terceira ordem

$$KG(s) = K \frac{10}{s(s/2,5 + 1)(s/6 + 1)}.$$

Esse tipo de sistema seria o resultado de um motor CC com um atraso no sensor de posição do eixo. Projete um compensador de avanço para que obtenha PM = 45° e $K_v = 10$.

Solução. Novamente, seguimos o procedimento de projeto anterior:

- Como dado, $KG(s)$ fornece $K_v = 10$ se $K = 1$. Portanto, a especificação de K_v é atendida para $K = 1$, e o ganho de baixa frequência do compensador deve ser 1.
- O diagrama de Bode do sistema é mostrado na Fig. 6.62. A PM do sistema não compensado (curva inferior) é de aproximadamente -4° , e a frequência de cruzamento está em $\omega_c = 4$ rad/s.
- Considerando uma PM extra de 5° , precisamos de $PM = 45^\circ + 5^\circ - (-4^\circ) = 54^\circ$, a ser fornecida pelo compensador de avanço.
- A partir da Fig. 6.54, encontramos que α deve ser de 0,1 para atingir um avanço de fase máximo de 54° .
- A nova frequência de cruzamento será maior que o valor em malha aberta de $\omega_c = 4$ rad/s, então vamos selecionar o polo e o zero do compensador posicionados em 20 e 2 rad/s, respectivamente. Assim, o compensador candidato é

$$D_1(s) = \frac{s/2 + 1}{s/20 + 1} = \frac{1}{0,1} \frac{s + 2}{s + 20}.$$

- O diagrama de Bode do sistema compensado (Fig. 6.62, curva do meio) mostra uma PM de 23° . O compensador de avanço único não atende à especificação devido à inclinação de alta frequência de -3 .
- Precisamos de um compensador de avanço duplo neste sistema. Se tentarmos um compensador da forma

$$D_2(s) = \frac{1}{(0,1)^2} \frac{(s + 2)(s + 4)}{(s + 20)(s + 40)} = \frac{(s/2 + 1)(s/4 + 1)}{(s/20 + 1)(s/40 + 1)},$$

obtemos $PM = 46^\circ$. O diagrama de Bode para este caso é mostrado na curva superior da Fig. 6.62.

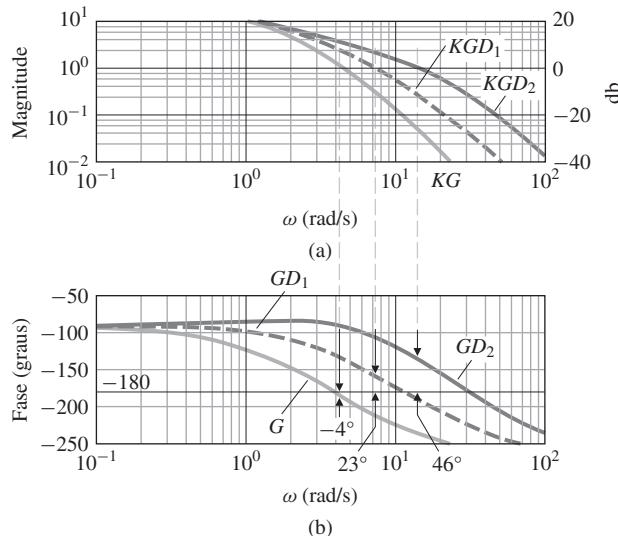
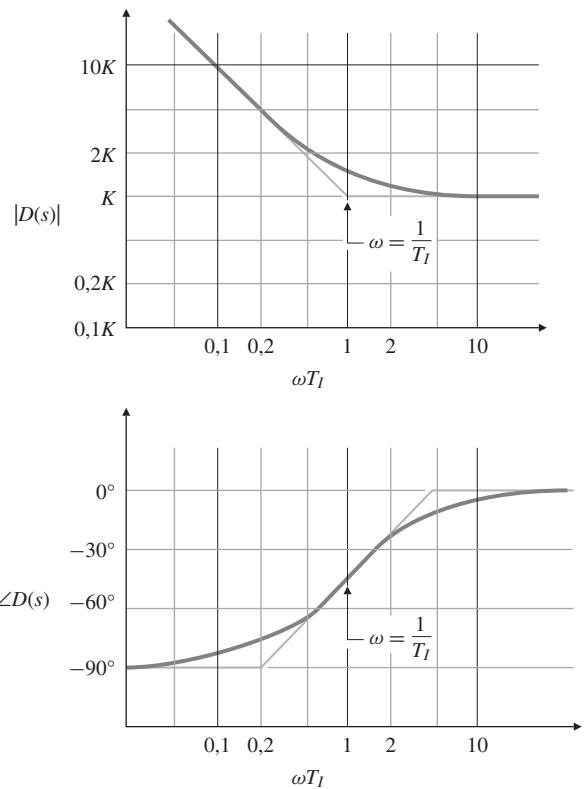


Figura 6.62 Diagrama de Bode para o compensador de avanço no Exemplo 6.17.

Os Exemplos 6.16 e 6.17 são de terceira ordem. No Exemplo 6.17, foi mais difícil de projetar o compensador, porque a exigência de erro, K_v , forçou a frequência de cruzamento, ω_c , a ser tão alta que um único compensador de avanço não poderia fornecer a PM suficiente.

Figura 6.63 Resposta em frequência do compensador PI.



6.7.3 Compensador PI

Compensador PI

Em muitos problemas, é importante manter a baixa largura de banda e reduzir o erro de estado estacionário. Para essa finalidade, um compensador proporcional-integral (PI) ou de atraso é útil. Da Eq. (4.65), vemos que o controlador PI tem a função de transferência

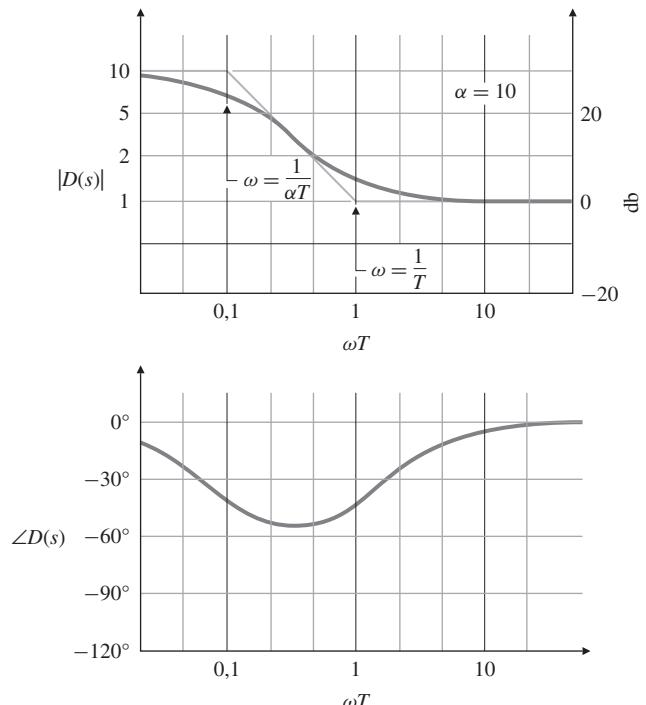


Figura 6.64 Resposta em frequência do compensador de atraso com $\alpha = 10$.

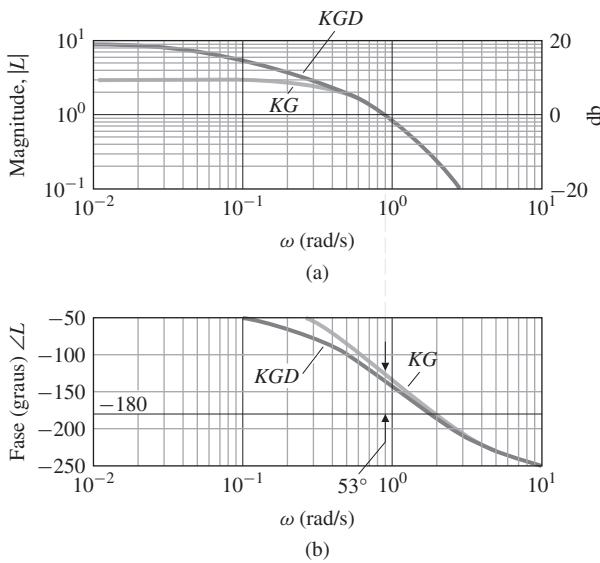


Figura 6.65 Resposta em frequência do projeto do compensador de atraso no Exemplo 6.18.

$$D(s) = \frac{K}{s} \left(s + \frac{1}{T_I} \right), \quad (6.50)$$

o que resulta na característica da resposta em frequência apresentada na Fig. 6.63. O aspecto desejável da compensação é o ganho infinito na frequência nula, o que reduz os erros de estado estacionário. Isto é realizado, porém, à custa de uma diminuição de fase nas frequências mais baixas do que a frequência do ponto de quebra em $\omega = 1/T_I$. Portanto, $1/T_I$ geralmente está localizado em uma frequência significativamente menor que a frequência de cruzamento, para que a PM do sistema não seja afetada significativamente.

6.7.4 Compensador de atraso

Como discutimos na Seção 5.4, a **compensação de atraso** aproxima o controle PI. Sua função de transferência foi dada na Eq. (5.72) para o projeto baseado no lugar das raízes, mas para o projeto em resposta em frequência, é mais conveniente escrever *apenas* a função de transferência do compensador de atraso na forma Bode

$$D(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad \alpha > 1, \quad (6.51)$$

com α sendo a relação entre as frequências de quebra zero/polo. O controlador completo quase sempre inclui um ganho global K e, talvez, outras dinâmicas, além da compensação de atraso. Embora a Eq. (6.51) seja muito parecida com o compensador de avanço na Eq. (6.38), o fato é que $\alpha > 1$ faz com que o polo tenha uma frequência de ponto de quebra menor que do zero. Esta relação produz o aumento da amplitude em baixa frequência e uma redução de fase (atraso) aparente na resposta em frequência na Fig. 6.64, e dá à compensação a característica essencial do controle integral – um aumento de ganho em baixa frequência. O objetivo típico do projeto

Compensação de atraso

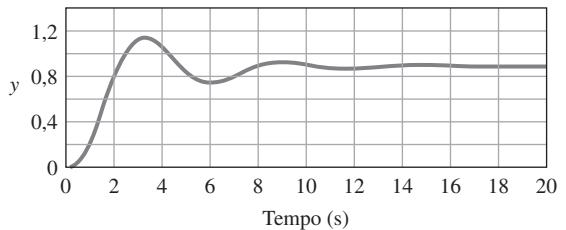


Figura 6.66 Resposta ao degrau do projeto do compensador de atraso no Exemplo 6.18.

de um compensador de atraso é proporcionar um ganho adicional de α na faixa de baixas frequências para dar ao sistema PM suficiente. Claro que o atraso de fase não é um efeito útil, e o polo e zero do compensador de atraso são selecionados para estar em frequências muito mais baixas do que a frequência de cruzamento do sistema não compensado, a fim de que o efeito sobre a PM seja mínimo. Assim, o compensador de atraso aumenta o ganho de malha aberta DC, melhorando, assim, as características da resposta em estado estacionário sem alterar a resposta transitória de forma significativa. Se o polo e o zero estão relativamente próximos um do outro e próximos da origem (isto é, se o valor de T é grande), podemos aumentar o ganho de baixa frequência (e, portanto, K_p , K_v ou K_a) por um fator α sem mover sensivelmente os polos de malha fechada. Assim, a resposta transitória permanece aproximadamente a mesma, enquanto a resposta em estado estacionário é melhorada.

Agora, o procedimento de projeto de um compensador de atraso de fase é resumido passo a passo.

Procedimento de projeto para compensação de atraso

1. Determine o ganho K em malha aberta que irá satisfazer à especificação de PM sem o compensador.
2. Trace o diagrama de Bode do sistema não compensado com a frequência de cruzamento do item 1 e avalie o ganho de baixa frequência.
3. Determine α para atender à especificação de erro, ganho em baixa frequência.
4. Escolha a frequência de corte, $\omega = 1/T$ (o zero do compensador de atraso) para estar entre uma oitava e uma década abaixo da nova frequência cruzamento ω_c .
5. A outra frequência de corte (a localização do polo do compensador de atraso) será, então, $\omega = 1/(\alpha T)$.
6. Iterativamente, ajuste o projeto. Ajustando os parâmetros do compensador (polos, zeros e ganho) para atender a todas as especificações.

EXEMPLO 6.18 Projeto de um compensador de atraso para um sistema de controle de temperatura

Novamente, considere o sistema de terceira ordem do Exemplo 6.16:

$$KG(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{0.5}s + 1\right)(s + 1)\left(\frac{1}{2}s + 1\right)}.$$

Projete um compensador de atraso tal que a PM seja de pelo menos 40° e $K_p = 9$.

Solução. Seguiremos o procedimento de projeto anterior:

1. A partir do gráfico de $KG(s)$ em malha aberta, temos que para $K = 9$ na Fig. 6.60, percebe-se que uma $PM > 40^\circ$ será alcançada se a frequência de cruzamento $\omega_c \lesssim 1$ rad/s. Este será o caso se $K = 3$. Então, escolhemos $K = 3$, a fim de atender à especificação de PM.
2. O diagrama de Bode para $KG(s)$ apresentado na Fig. 6.65 com $K = 3$ mostra que a PM é de aproximadamente 50° e o ganho de baixa frequência é agora 3. O cálculo exato da PM usando o comando margin no MATLAB mostra que $PM = 53^\circ$.
3. O ganho de baixa frequência deve ser aumentado por um fator de três, o que significa que a compensação de atraso precisa ter $\alpha = 3$.
4. Escolhemos a frequência de canto do zero para ser de aproximadamente um fator 5 vezes mais lento do que a frequência de cruzamento esperada, ou seja, em 0,2 rad/s. Assim, $1/T = 0,2$ ou $T = 5$.
5. Temos, então, o valor para a outra frequência de canto: $\omega = 1/(\alpha T) = \frac{1}{(3)(5)} = 1/15$ rad/s. O compensador é, portanto,

$$D(s) = 3 \frac{5s + 1}{15s + 1}.$$

A resposta em frequência compensada também é mostrada na Fig. 6.65. O ganho de baixa frequência de $KD(0)G(0) = 3K = 9$, portanto, $K_p = 9$ e a PM cai ligeiramente para 44° , o que satisfaz à especificação da resposta ao degrau. O sistema, mostrado na Fig. 6.66, ilustra um amortecimento razoável que seria de se esperar com $PM = 44^\circ$.

6. Nenhuma iteração é necessária neste caso.

Note que os Exemplos 6.16 e 6.18 são para a mesma planta e têm a mesma exigência de erro em estado estacionário. Um foi compensado com um compensador de avanço e o outro, com um compensador de atraso. O resultado é que a largura de banda do projeto do compensador de avanço é maior do que para o projeto do compensador de atraso por cerca de um fator de 3. Esse resultado pode ser visto por meio da comparação das frequências de cruzamento dos dois projetos.

Um efeito benéfico da compensação de atraso, aumentar o ganho em baixa frequência para melhores características de erro, foi apenas apresentado no Exemplo 6.18. No entanto, em essência, a compensação de atraso reduz o valor de $\omega_c/L(0)$ ($= \omega_c/K_v$, para um sistema do Tipo 1). Isso significa que, se a frequência de cruzamento for mantida a mesma, o ganho de baixa frequência irá aumentar. Da mesma forma, se o ganho de baixa frequência é mantido o mesmo, a frequência de cruzamento irá diminuir. Portanto, a compensação de atraso também pode ser interpretada como a redução da frequência de cruzamento para obter uma melhor PM. O procedimento para o projeto, neste caso, será parcialmente modificado. Primeiro, escolha o ganho de baixa frequência para atender às exigências de erro; em seguida, posicione o polo e o zero do compensador de atraso de modo a proporcionar uma frequência de cruzamento com PM adequada. O próximo exemplo ilustra este procedimento de projeto. O resultado final do projeto será o mesmo, não importa qual procedimento é seguido.

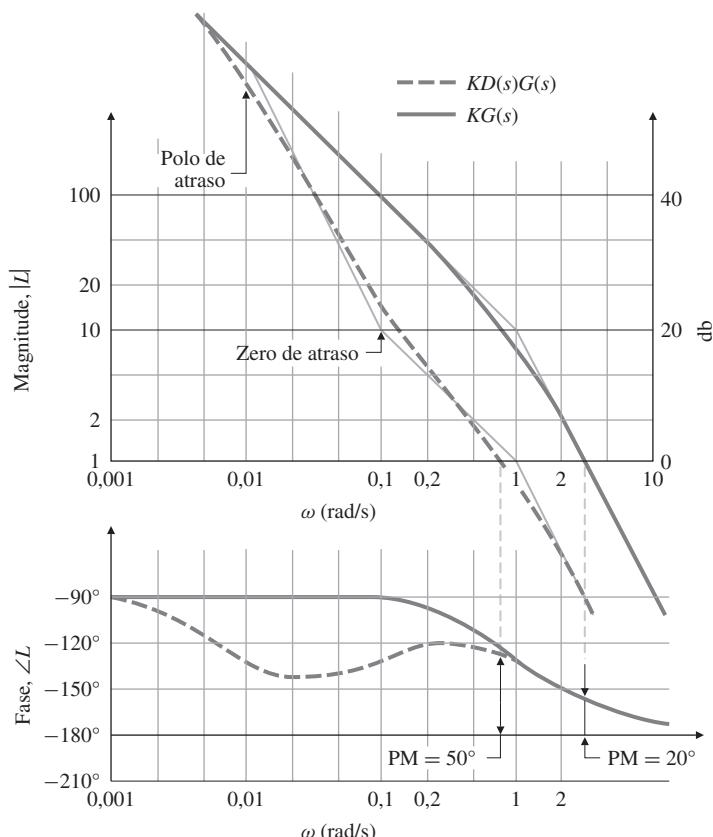
EXEMPLO 6.19 Compensador de atraso para um motor CC

Repita o projeto para o controle do motor CC no Exemplo 6.15, desta vez usando o compensador de atraso. Corrija o ganho de baixa frequência a fim de atender à especificação de erro com $K_v = 10$; então, use a compensação de atraso para cumprir a exigência de $PM = 45^\circ$.

Solução. A resposta em frequência do sistema de $KG(s)$, com o ganho necessário $K = 10$, é apresentada na Fig. 6.67. O sistema não compensado tem uma frequência de cruzamento de aproximadamente 3 rad/s, onde a PM = 20° . A tarefa do projetista é selecionar os pontos de quebra do compensador para que a frequência de cruzamento seja reduzida para obter resultados mais favoráveis de PM. Para evitar efeitos prejudiciais do compensador de atraso de fase, os valores das posições do polo e do zero do compensador devem ser substancialmente inferiores à nova frequência de cruzamento. Uma escolha possível é mostrada na Fig. 6.67: O zero do compensador de atraso está em 0,1 rad/s, e o polo está em 0,01 rad/s. Esta seleção de parâmetros produz uma PM de 50° , satisfazendo assim às especificações. Aqui, a estabilização é atingida, mantendo a frequência de cruzamento para uma região onde $G(s)$ tem características de fase favoráveis. O critério para selecionar as posições do polo e do zero $1/T$ é torná-las suficientemente baixas para minimizar os efeitos do atraso de fase na frequência do cruzamento. Geralmente, no entanto, o polo e o zero não estão localizados em frequências mais baixas que o necessário, devido ao fato de a raiz adicional do sistema (compare com o lugar das raízes de um projeto de um sistema semelhante na Fig. 5.28) introduzida pelo compensador de atraso estar na mesma faixa de frequências do zero do compensador e ter algum efeito sobre a resposta, especialmente a resposta a entradas de perturbação.

A resposta ao degrau de um sistema é mostrada na Fig. 6.68. Ela não mostra erro algum de estado estacionário para uma entrada em degrau, porque esse é um sistema do Tipo 1. No entanto, a introdução da raiz lenta do compensador de atraso faz com que a resposta exija cerca de 25 segundos para se estabelecer no valor de estado estacionário nulo. O M_p é um pouco maior

Figura 6.67 Resposta em frequência do compensador de atraso projetado no Exemplo 6.19.



do que seria esperado pelas diretrizes, com base em um sistema de segunda ordem mostrado na Fig. 6.38 para uma $PM = 50^\circ$; no entanto, o desempenho é adequado.

Como vimos anteriormente para uma situação semelhante, os Exemplos 6.15 e 6.19 atendiam a um conjunto idêntico de especificações para a mesma planta, mas de maneiras muito diferentes. No primeiro caso, as especificações são atendidas com uma compensação de avanço, resultando em uma frequência de cruzamento $\omega_c = 5$ rad/s ($\omega_{BW} \approx 6$ rad/s). No segundo caso, as mesmas especificações são atendidas com uma compensação de atraso, resultando em $\omega_c \approx 0,8$ rad/s ($\omega_{BW} \approx 1$ rad/s). Claramente, se houvesse especificações para o tempo de subida ou para a largura de banda, elas teriam influenciado na escolha do compensador (de avanço ou de atraso). Da mesma forma, se o tempo de acomodação fosse um problema, poderia ser sugerido o uso de um compensador de avanço em vez de um compensador de atraso.

Em sistemas mais realistas, elementos dinâmicos geralmente representam o atuador e o sensor, bem como o processo em si, por isso é normalmente impossível aumentar a frequência de cruzamento muito além do valor que representa a velocidade de resposta dos componentes a serem utilizados. Embora a análise linear sugira que qualquer sistema pode ser compensado, de fato, se

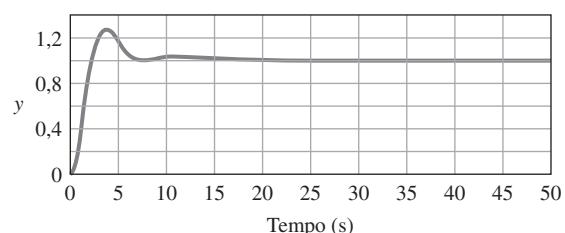


Figura 6.68 Resposta ao degrau do compensador de atraso projetado no Exemplo 6.19.

tentar conduzir um conjunto de componentes a frequências muito mais rápidas que suas frequências naturais, o sistema vai saturar, e a hipótese de linearidade não será mais válida. Com esse comportamento em mente, vemos que simplesmente aumentar o ganho de um sistema e adicionar compensadores de avanço para alcançar uma PM adequada pode não ser sempre possível. Pode ser preferível, para satisfazer às especificações de erro, adicionar um compensador de atraso de modo que a largura de banda em malha fechada seja mantida em uma frequência mais razoável.

6.7.5 Compensador PID

Para problemas que precisam melhorar a PM em ω_c e o ganho de baixa frequência, é eficaz usar o controle derivativo e o controle integral. Combinando as Eqs. (6.37) e (6.50), obtém-se o controle PID. Sua função de transferência é

$$D(s) = \frac{K}{s} \left[(T_D s + 1) \left(s + \frac{1}{T_I} \right) \right], \quad (6.52)$$

Compensador PID

e sua resposta em frequência é apresentada na Fig. 6.69. Essa forma é um pouco diferente daquela dada pela Eq. (4.59); porém, o efeito da diferença é inconsequente. Esta compensação é aproximadamente equivalente ao combinar compensadores de avanço e atraso no mesmo projeto e, assim, às vezes ele é referido como um **compensador de avanço e atraso**. Dessa forma, ele pode proporcionar melhoria simultânea nas respostas transitória e de estado estacionário.

EXEMPLO 6.20 Projeto de um compensador PID para o sistema de controle de atitude de uma aeronave

Um projeto simplificado para o controle de atitude de aeronave foi apresentado na Seção 6.5; no entanto, aqui temos uma situação mais realista que inclui o atraso do sensor e um distúrbio de torque. A Figura 6.70 define o sistema. Projete um controlador PID para ter erro em estado estacionário nulo a um torque de perturbação constante, uma PM de 65° e largura de banda

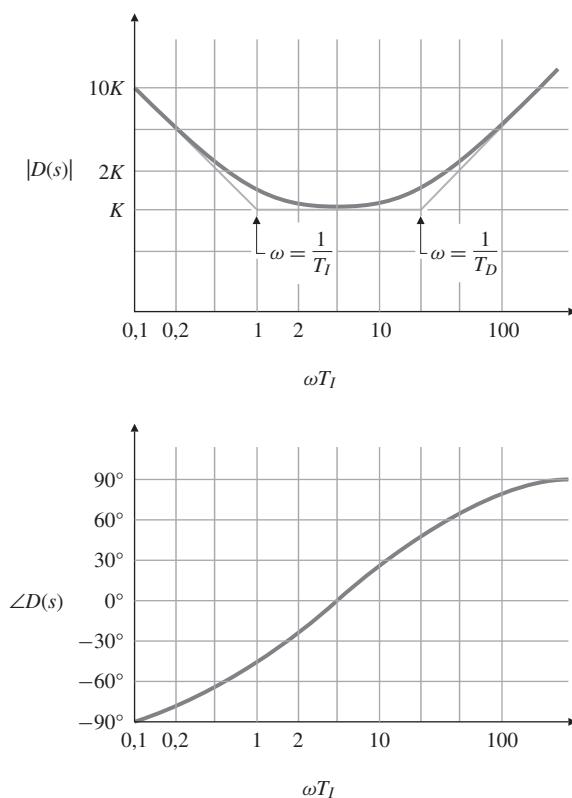
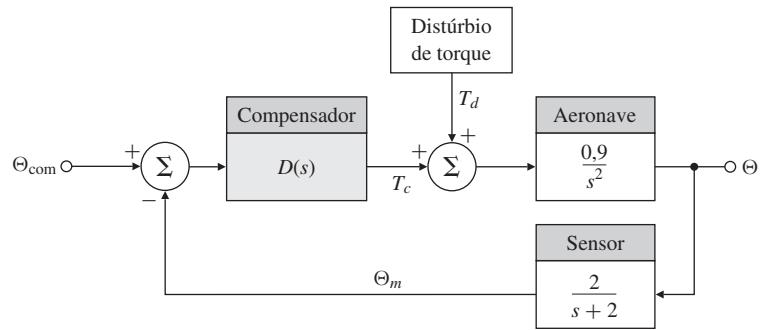


Figura 6.69 Resposta em frequência do compensador PID com $T_I/T_D = 20$.

Figura 6.70 Diagrama de blocos para o sistema de controle de aeronave usando um controlador PID, Exemplo 6.20.



tão alta quanto razoavelmente possível. Avalie também os erros em relação à frequência e os compare com os erros que se obteria com o sistema em malha aberta. Para uma perturbação de torque de pressão solar que atua como uma senoide com taxa orbital ($\omega = 0,001$ rad/s ou ≈ 100 período de um minuto), determine a melhoria obtida pelo sistema realimentado.

Solução. Primeiro, vamos cuidar do erro em estado estacionário. O erro em estado estacionário da aeronave deve ser zero para a entrada total de torque $T_d + T_c$. Portanto, se $T_d \neq 0$, então $T_c = -T_d$. A única maneira disso ser verdade sem erro ($e = 0$) é se $D(s)$ contiver um termo integral. Assim, o controle integral é incluído no compensador para atender ao requisito de erro estado estacionário. Isso também poderia ser verificado matematicamente usando o Teorema do Valor Final (veja o Problema 6.47).

A resposta em frequência da aeronave e do sensor

$$G(s) = \frac{0.9}{s^2} \left(\frac{2}{s+2} \right), \quad (6.53)$$

é apresentada na Fig. 6.71. As inclinações de -2 (ou seja, -40 db por década) e -3 (-60 db por década) mostram que o sistema seria instável para qualquer valor de K , se não for usado um termo derivado realimentado. Isso fica claro usando a relação de ganho e fase de Bode, que mostra que a fase seria -180° para a inclinação -2 e -270° para a inclinação -3 , e que corresponderia a uma PM de 0° ou -90° . Portanto, o controle derivativo é necessário para que a inclinação seja -1 na frequência de cruzamento, o que foi mostrado na Seção 6.5 como um requisito para o problema de estabilidade. Agora, o problema é selecionar os valores dos três parâmetros na Eq. (6.52) – K , T_D e T_I – que satisfaça às especificações.

A abordagem mais fácil é trabalhar primeiro na fase de modo para que $PM = 65^\circ$ seja obtida com uma frequência razoavelmente alta. Isso pode ser feito principalmente através do ajuste de T_D , notando que T_I tem um efeito menor se este for suficientemente maior do que T_D . Assim que a fase for ajustada, a frequência de cruzamento é estabelecida; então, podemos facilmente determinar o ganho K .

Examinando a fase do controlador PID na Fig. 6.69 para determinar o que aconteceria com o sistema compensado da aeronave, $D(s)G(s)$, à medida que T_D é variado. Se $1/T_D \geq 2$ rad/s, o avanço de fase do controlador PID seria simplesmente cancelado com o atraso de fase do sensor, e a fase composta nunca seria superior a -180° , uma situação inaceitável. Se $1/T_D \leq 0,01$, a fase composta se aproximaria de -90° para algumas faixas de frequências e seria superior a -115° para uma faixa ainda mais ampla de frequências; o último limiar proporcionaria uma PM de 65° . Na curva de fase compensada mostrada na Fig. 6.71, $1/T_D = 0,1$, o que é o maior valor de $1/T_D$ que pode fornecer a PM especificada de 65° . A fase nunca cruza a linha -115° ($PM 65^\circ$) para qualquer $1/T_D > 0,1$. Para $1/T_D = 0,1$, a frequência de cruzamento ω_c que produz a PM 65° é de $0,5$ rad/s. Para um valor de $1/T_D \ll 0,05$, a fase essencialmente segue a curva pontilhada na Fig. 6.71, o que indica que a ω_c máxima possível é de cerca de 1 rad/s e é fornecida por $1/T_D = 0,05$. Portanto, $0,05 < 1/T_D < 0,1$ é o intervalo sensato para $1/T_D$; qualquer valor menor que $0,05$ não ocasionaria qualquer aumento significativo na largura de banda, enquanto algo maior do que $0,1$ poderia não atender à especificação de PM. Embora a escolha final seja arbitrária, optamos por $1/T_D = 0,1$ para o nosso projeto final.

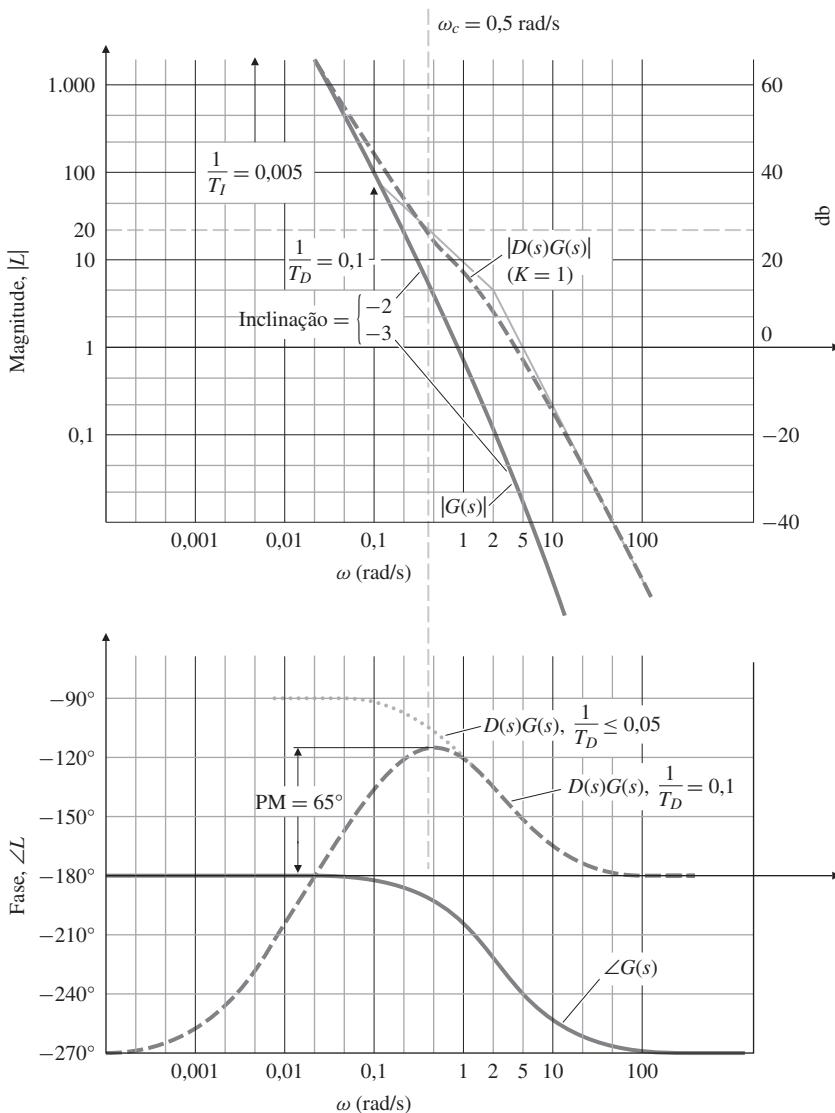


Figura 6.71 Projeto do compensador PID no Exemplo 6.20.

A escolha para $1/T_I$ é um fator 20 vezes menor do que $1/T_D$; isto é, $1/T_I = 0,005$. Um fator menor de 20 teria um impacto negativo na fase na frequência de cruzamento, reduzindo assim a PM. Além disso, é geralmente desejável manter a magnitude compensada tão grande quanto possível em frequências abaixo da ω_c , a fim de uma resposta transitória mais rápida e menores erros; manter $1/T_D$ e $1/T_I$ nas frequências mais altas possíveis trará estas características.

Agora, falta determinar a parte proporcional do controlador PID, ou K . Ao contrário do sistema do Exemplo 6.18, no qual K foi selecionado para atender a uma especificação de erro em estado estacionário, aqui o valor de K é selecionado para obter a frequência de cruzamento no ponto correspondente à PM 65°. O procedimento básico para encontrar K , discutido na Seção 6.6, consiste em traçar a amplitude do sistema compensado com $K = 1$, encontrar o valor da amplitude na frequência de cruzamento, então, em seguida, definir $1/K$ como igual a esse valor. A Figura 6.71 mostra que quando $K = 1$, $|D(s)G(s)| = 20$ na frequência de cruzamento desejada $\omega_c = 0,5$ rad/s. Portanto,

$$\frac{1}{K} = 20, \quad \text{então} \quad K = \frac{1}{20} = 0,05.$$

A equação do compensador que satisfaz todas as especificações está completa:

$$D(s) = \frac{0,05}{s}[(10s + 1)(s + 0,005)].$$

É interessante notar que esse sistema se torna instável se o ganho for reduzido tal que $\omega_c \leq 0,02$ rad/s, a região na Fig. 6.71 onde a fase do sistema compensado é inferior a -180° . Como mencionado na Seção 6.4, esta situação é referida como um sistema condicionalmente estável. O lugar das raízes em relação a K para este e qualquer outro sistema condicionalmente estável apresenta a parte do lugar das raízes correspondente a ganhos muito baixos no SPD. A resposta do sistema para um degrau unitário θ_{com} é mostrada na Fig. 6.72(a) e apresenta um comportamento bem amortecido, como seria de se esperar de uma PM de 65° .

A resposta do sistema para um torque de distúrbio em degrau $T_d = 0,1$ N é mostrada na Fig. 6.72(b). Note que o termo integral de controle eventualmente conduz o erro a zero; no entanto, isto acontece lentamente devido à presença de um polo de malha fechada nas proximidades do zero em $s = -0,005$. Lembre-se, do processo de projeto, de que este zero foi localizado de forma que o termo integral não impacte a PM indevidamente. Então, se a resposta lenta à perturbação não é aceitável, acelerar esse polo irá diminuir a PM e o amortecimento do sistema. Compromisso é muitas vezes uma necessidade no projeto de um sistema de controle!

A resposta em frequência das características de erro é apresentada na Fig. 6.73. A curva superior apresenta as características do erro em malha aberta, e a curva inferior é a resposta

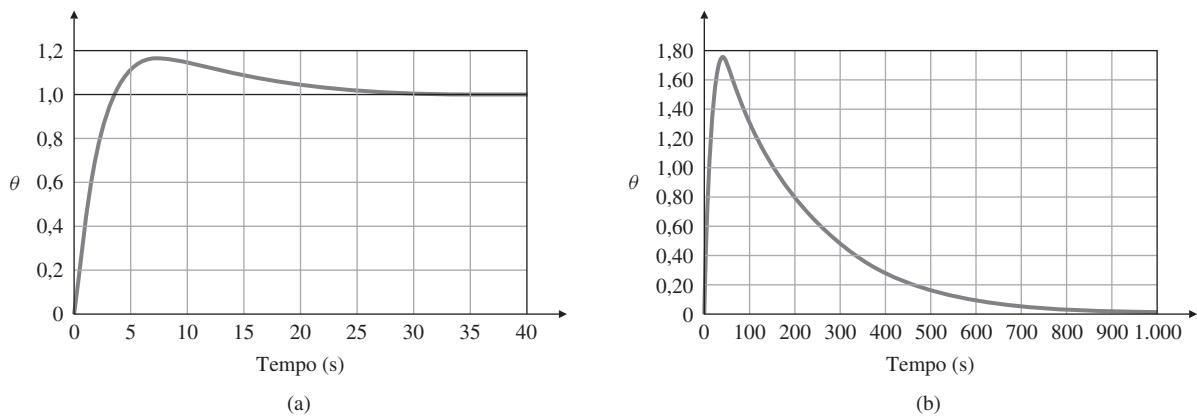


Figura 6.72 Resposta transitória para o exemplo do PID: (a) resposta ao degrau; (b) resposta a um distúrbio em degrau.

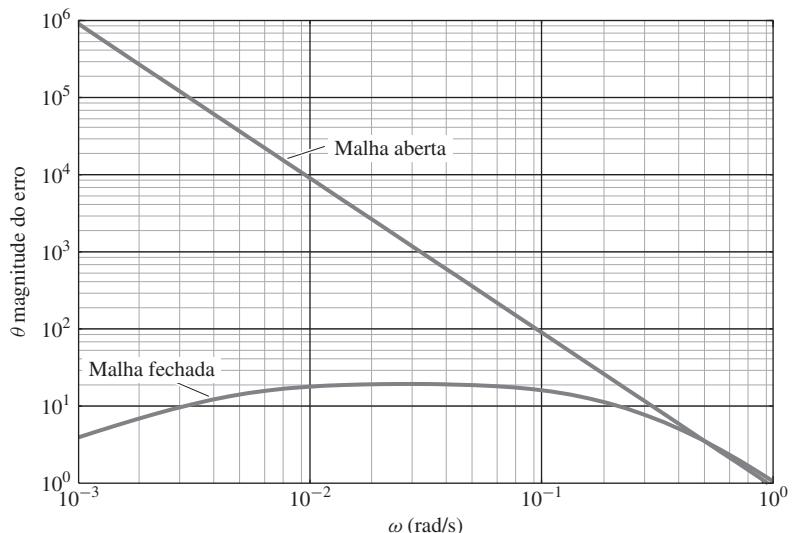


Figura 6.73 Resposta em frequência do erro devido a um distúrbio em degrau, malha aberta e malha fechada.

em malha fechada. O erro é atenuado por um fator de quase 10^6 pela realimentação, há diminuição de atenuação do erro com o aumento da frequência de perturbação e quase não há atenuação de erro na largura de banda do sistema de $\approx 0,5$ rad/s, como seria de se esperar. Note, do processo de projeto, que a largura de banda foi limitada pelas características de resposta do sensor, que tinha uma largura de banda em 2 rad/s. Portanto, a única maneira de melhorar as características de erro seria aumentar a largura de banda do sensor. Por outro lado, o aumento da largura de banda do sensor pode introduzir jitter para ruído de alta frequência. Assim, temos o dilema clássico: o projetista tem que fazer uma escolha em relação a qual recurso (erros devido a perturbações ou devido a ruído no sensor) é o mais importante para o desempenho geral do sistema.

1. O *controle PD* adiciona avanço de fase em todas as frequências acima do ponto de quebra. Se não houver mudança no ganho na assíntota de baixa frequência, o compensador PD irá aumentar a frequência de cruzamento e a velocidade da resposta. O aumento na magnitude da resposta em frequência nas frequências mais altas vai aumentar a sensibilidade do sistema ao ruído.
2. A *compensação de avanço* acrescenta fase em uma faixa de frequências entre os dois pontos de quebra, que são geralmente selecionados para suporte da frequência de cruzamento. Se não houver mudança no ganho da assíntota de baixa frequência, a compensação de avanço vai aumentar tanto a frequência de cruzamento quanto a velocidade de resposta em relação ao sistema não compensado.
3. O *controle PI* aumenta a magnitude de resposta em frequência em frequências abaixo do ponto de quebra, diminuindo os erros de estado estacionário. Também contribui com atraso de fase abaixo do ponto de quebra, que deve ser mantido em uma frequência baixa o suficiente para evitar a degradação em excesso da estabilidade.
4. A *compensação de atraso* aumenta a magnitude de resposta em frequência nas frequências abaixo dos dois pontos de quebra, diminuindo, assim, os erros de estado estacionário. Alternativamente, com ajustes adequados em K , a compensação de atraso pode ser usada para diminuir a magnitude de resposta em frequência em frequências acima dos dois pontos de quebra, de modo que ω_c produzirá uma PM aceitável. A compensação de atraso também contribui com o atraso fase entre os dois pontos, que deve ser mantido em frequências suficientemente baixas para manter a diminuição da fase sem degradar a PM excessivamente. Essa compensação normalmente fornecerá uma resposta mais lenta do que o uso da compensação de avanço.

**Resumo das
características de
compensação**

6.7.6 Considerações de projeto

Vimos nos projetos anteriores que as características do diagrama de Bode em malha aberta, $L(s)$ ($= KDG$), determinam o desempenho em relação a erros de estado estacionário, erros de baixa frequência e resposta dinâmica. Outras propriedades da realimentação, desenvolvidas no Capítulo 4, incluem a redução dos efeitos do ruído no sensor e das mudanças de parâmetros sobre o desempenho do sistema.

A consideração do erro em estado estacionário ou erro de baixa frequência devido a entradas de comandos e distúrbios tem sido um componente importante nos diferentes métodos de projetos apresentados.

O projeto para erros aceitáveis devido a entradas de comando e distúrbios pode ser pensando como a colocação de um limite inferior no ganho de baixa frequência do sistema de malha aberta. Outro aspecto da questão de sensibilidade diz respeito à parcela de alta frequência do sistema. Até agora, o Capítulo 4 e as Seções 5.4 e 6.7 discutiram brevemente a ideia de que, para aliviar os efeitos do ruído no sensor, o ganho do sistema em altas frequências deve ser mantido baixo. De fato, no desenvolvimento do compensador de avanço, nós adicionamos um polo no controlador derivativo puro especificamente para reduzir os efeitos do ruído no sensor

nas frequências mais altas. Não é incomum para os projetistas colocar um polo extra na compensação, isto é, usar a relação

$$D(s) = \frac{Ts + 1}{(\alpha Ts + 1)^2},$$

para introduzir mais atenuação no efeito do ruído.

A segunda consideração em relação aos ganhos de alta frequência é que muitos sistemas apresentam fenômenos dinâmicos em altas frequências, como ressonâncias mecânicas, que podem impactar a estabilidade de um sistema. Em projetos de alto desempenho, estas dinâmicas de alta frequência são incluídas no modelo da planta, e o compensador é projetado com o conhecimento específico dessas dinâmicas. A abordagem padrão de projeto para dinâmicas desconhecidas de alta frequência é manter o ganho de alta frequência baixo, assim como fizemos para redução de ruído no sensor. A razão para isto pode ser vista a partir da relação entre ganho e frequência de um sistema típico, mostrada na Fig. 6.74. A única maneira da instabilidade ser resultado da dinâmica de alta frequência é se uma frequência de ressonância desconhecida fizer com que a magnitude suba acima de 1. Por outro lado, se existe a garantia de que a magnitude de todos os fenômenos desconhecidos de alta frequência permanece abaixo de 1, a estabilidade pode ser garantida. A probabilidade de uma ressonância desconhecida na planta G chegar acima de 1 pode ser reduzida se o ganho de malha nominal em alta frequência (L) for reduzido pela adição de polos extras em $D(s)$. Quando a estabilidade de um sistema com ressonâncias é assegurada mediante a adaptação para que as magnitudes de alta frequência nunca excedam a 1, este processo é referido como **estabilização de amplitude ou ganho**. Claro que se as características de ressonância são conhecidas exatamente, uma compensação especialmente apropriada, como uma rejeita faixa na frequência de ressonância, pode ser usada para mudar a fase em uma frequência específica para evitar envolvimento do -1 , estabilizando o sistema ainda que a amplitude exceda a magnitude 1. Este método de estabilização é referido como **estabilização de fase**. Uma desvantagem para a estabilização de fase é que a informação da ressonância frequentemente não está disponível com a precisão adequada ou varia com o tempo; portanto, o método é mais suscetível a erros no modelo da planta utilizado no projeto. Assim, vemos que a sensibilidade à incerteza da planta e ao ruído no sensor foram reduzidas suficientemente com o baixo ganho de malha em alta frequência.

Estes dois aspectos da sensibilidade – o comportamento em alta e em baixa frequência – podem ser representados graficamente, como mostrado na Fig. 6.75. Existe um ganho de baixa frequência mínimo permitido, para o erro em estado estacionário aceitável e para o desempenho em baixa frequência, e um ganho de alta frequência máximo permitido, para o desempenho aceitável frente ao ruído e para baixa probabilidade de instabilidade causada por erros de modelagem da planta. Definimos o limite inferior de baixa frequência da resposta em frequência como W_1 e o limite superior como W_2^{-1} , como mostrado na figura. O engenheiro de controle deve encontrar, entre esses dois limites, o ganho para o cruzamento próximo da largura de banda necessária; como vimos, o cruzamento deve ocorrer com uma inclinação de -1 ou um pouco mais íngreme para uma boa PM e, portanto, um bom amortecimento.

Estabilização de ganho

Estabilização de fase

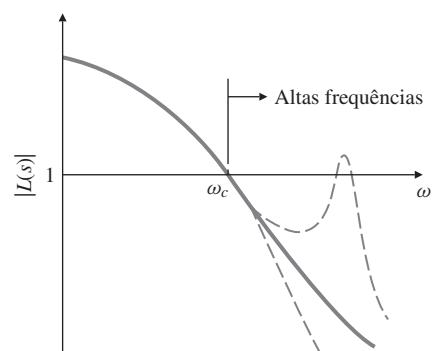


Figura 6.74 Efeito em altas frequências das incertezas na planta.

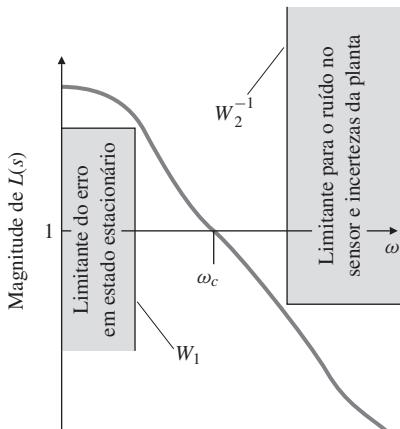


Figura 6.75 Critério de projeto para a sensibilidade em baixas freqüências.

Por exemplo, se é exigido que um sistema de controle siga uma entrada de referência senoidal com freqüências de 0 a ω_1 com erros não superiores a 1%, a função W_1 seria 100 para $\omega = 0$ até ω_1 . Noções semelhantes são usadas para definir possíveis valores para a função W_2^{-1} , que restringe o ganho de malha aberta para estar abaixo de W_2^{-1} para freqüências acima de ω_2 . Essas noções serão discutidas mais adiante, nas subseções a seguir.

△ 6.7.7 Especificações em termos da função de sensibilidade

Vimos que as margens de ganho e fase fornecem informações úteis sobre a estabilidade relativa de sistemas nominais e podem ser usadas para orientar o projeto de compensadores de avanço e atraso. No entanto, a GM e a PM são apenas dois números e têm limitações como guias para o projeto de problemas de controle realistas. Podemos expressar as especificações de projeto de forma mais completa no domínio da freqüência se fornecermos descrições em termos de freqüência para os sinais externos, tais como a referência e a perturbação, e se considerarmos a função de sensibilidade definida na Seção 4.1. Por exemplo, até agora descrevemos o desempenho dinâmico da resposta transitória para entradas em degraus e rampas. Uma descrição mais realista para sinais de entrada mais complexos é representá-los como processos aleatórios com os correspondentes espectros de freqüência. Uma descrição menos sofisticada, que é adequada aos nossos propósitos, é assumir que os sinais podem ser representados como uma soma de senoides com freqüências em um intervalo especificado. Por exemplo, geralmente podemos descrever a entrada de referência em termos de freqüência como uma soma de senoides com amplitudes dadas por uma função de magnitude $|R|$ como aquela traçada na Fig. 6.76, o que representa um sinal com componentes senoidais com amplitudes aproximadamente iguais até ω_1 e amplitudes muito pequenas para freqüências superiores ω_1 . Com este pressuposto, a especificação de rastreamento da resposta pode ser expressa como “a magnitude do sistema de erro deve ser menor do que o limite e_b (um valor como 0,01) para qualquer senoide de freqüência ω_0 na faixa de $0 \leq \omega_0 \leq \omega_1$ e de amplitude dada por $|R(j\omega_0)|$.” Para expressar uma especificação de desempenho de uma forma que poderá ser usada no projeto, consideraremos novamente o sistema com realimentação unitária elaborado na Fig. 6.77. Para este sistema, o erro é dado por

$$E(j\omega) = \frac{1}{1 + DG} R \triangleq S(j\omega)R, \quad (6.54)$$

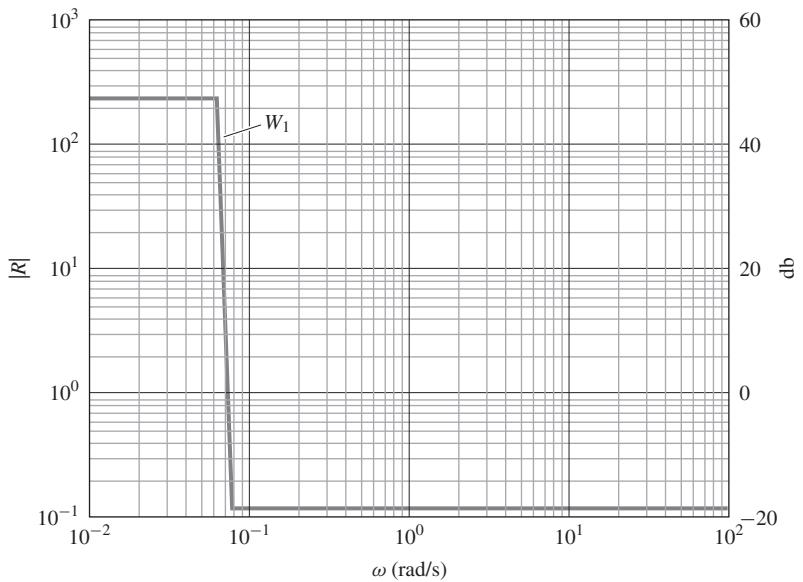
onde foi usada a **função de sensibilidade**

$$S \triangleq \frac{1}{1 + DG}. \quad (6.55)$$

Função de sensibilidade

Além de ser o fator de multiplicação do sistema de erro, a função de sensibilidade também é o inverso da distância da curva de Nyquist, DG , ao ponto crítico -1 .

Figura 6.76 Diagrama do espectro de uma entrada típica.



Um grande valor de \mathcal{S} indica que a curva do diagrama de Nyquist está próxima do ponto de instabilidade.

A especificação de erro baseado na frequência na Eq. (6.54) pode ser expressa como $|E| = |\mathcal{S}| |R| \leq e_b$. A fim de normalizar o problema sem a necessidade de sempre definir o espectro R e o limite do erro, a função real da frequência $W_1(\omega) = |R|/e_b$ é definida, e a especificação pode ser escrita como

$$|\mathcal{S}| W_1 \leq 1. \quad (6.56)$$

EXEMPLO 6.21 Limitante da função desempenho

Deseja-se que um sistema com realimentação unitária tenha erro inferior a 0,005 para todas as senoides com amplitude unitária e frequências abaixo de 100 Hertz. Trace a função de desempenho na frequência $W_1(\omega)$ para este projeto.

Solução. O espectro do problema descrito é unitário para $0 \leq \omega \leq 200\pi$ rad/s. Devido a $e_b = 0,005$, a função pretendida é dada por um retângulo de amplitude $1/0,005 = 200$ no intervalo dado. A função é traçada na Fig. 6.78.

A expressão na Eq. (6.56) pode ser traduzida em uma forma mais familiar em termos do diagrama de Bode e em relação à especificação sobre o ganho de malha, observando que, ao longo da faixa de frequências, os erros são pequenos quando o ganho de malha é grande. Neste caso, $|\mathcal{S}| \approx 1/|DG|$, e a especificação é aproximadamente

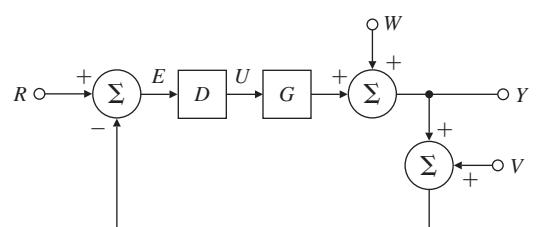


Figura 6.77 Diagrama de blocos em malha fechada.

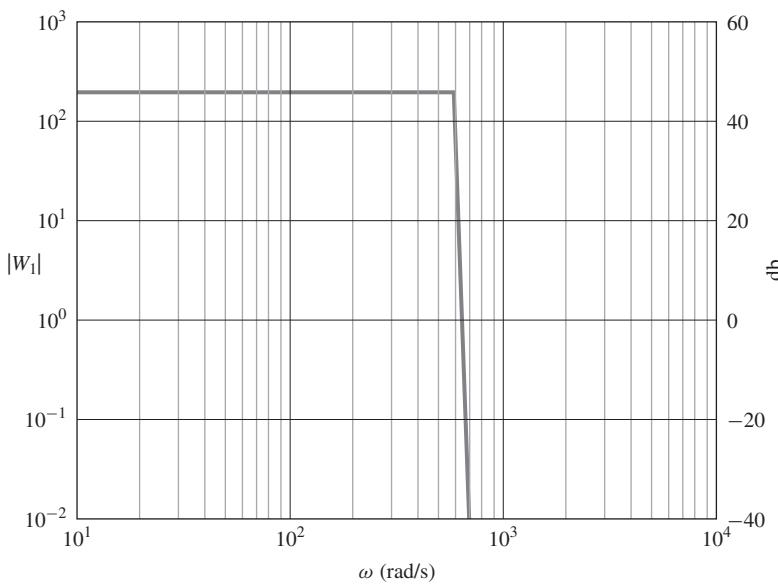


Figura 6.78 Diagrama da função de desempenho, W_1 .

$$\frac{W_1}{|DG|} \leq 1,$$

$|DG| \geq W_1.$

(6.57)

Esta especificação pode ser vista como uma extensão da especificação do erro em estado estacionário de $\omega = 0$ para a faixa $0 \leq \omega_o \leq \omega_1$.

Além da exigência do desempenho dinâmico, o projetista também precisa atender à especificação em termos de **estabilidade robusta**. Isto significa que, enquanto o projeto é feito para uma função de transferência nominal da planta, na realidade espera-se que o sistema seja estável para toda uma classe de funções de transferência que representam alterações que o sistema nominal deve enfrentar, como envelhecimento, temperatura e outros fatores operacionais e ambientais. Uma forma realista para expressar essa incerteza é descrever a função de transferência da planta usando uma incerteza multiplicativa:

$$G(j\omega) = G_o(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]. \quad (6.58)$$

Na Eq. (6.58), a função real W_2 é uma magnitude que expressa o tamanho das mudanças na função da frequência, prevista para a função de transferência experienciar. Em termos de G e G_o , a expressão é

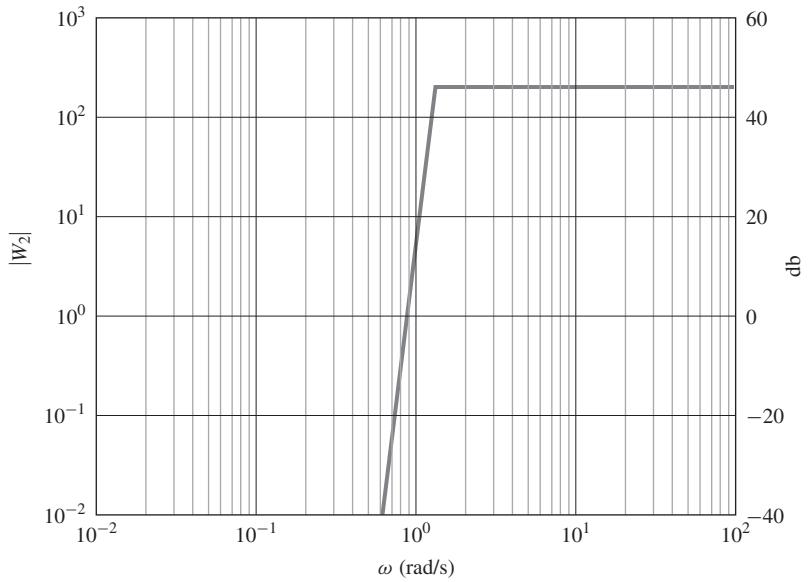
$$W_2 = \left| \frac{G - G_o}{G_o} \right|. \quad (6.59)$$

A forma de W_2 é quase sempre muito pequena para baixas frequências (em que o modelo é bem conhecido) e aumenta substancialmente à medida que avançamos para as altas frequências, nas quais os parâmetros parasitas aparecem e a flexibilidade estrutural não modelada é comum. Uma forma típica é esboçada na Fig. 6.79. A função complexa, $\Delta(j\omega)$, representa a incerteza na fase e está limitada apenas pela restrição

$$0 \leq |\Delta| \leq 1. \quad (6.60)$$

Assumimos que o projeto nominal foi feito e é estável, de modo que o diagrama de Nyquist DG_o satisfaz o critério de estabilidade de Nyquist. Nesse caso, a equação característica nominal $1 + DG_o = 0$ nunca é satisfeita para qualquer frequência real. Se o sistema é robustamente estável, a equação característica da planta incerta, como descrito pela Eq. (6.58), não deve ser

Figura 6.79 Típico gráfico da incerteza na planta, W_2 .



zero para qualquer frequência real e para qualquer valor de Δ . A especificação pode ser escrita como

$$1 + DG \neq 0, \quad (6.61)$$

$$1 + DG_o[1 + W_2\Delta] \neq 0,$$

$$(1 + DG_o)(1 + TW_2\Delta) \neq 0,$$

onde definimos a **função de sensibilidade complementar** como

$$T(j\omega) \triangleq DG_o/(1 + DG_o) = 1 - S. \quad (6.62)$$

Devido ao fato de o sistema nominal ser estável, o primeiro termo na Eq. (6.61), $(1 + DG_o)$, nunca é zero. Assim, se a Eq. (6.61) não deve ser zero para qualquer frequência e qualquer Δ , então é necessário e suficiente que

$$|TW_2\Delta| < 1,$$

que se reduz a

$$|T| W_2 < 1, \quad (6.63)$$

fazendo uso da Eq. (6.60). Como acontece com a especificação de desempenho, para um sistema de única entrada e única saída com realimentação unitária, esta especificação pode ser aproximada por uma forma mais conveniente. Ao longo da faixa de altas frequências onde W_2 não é desprezível, porque há incerteza significativa modelo, DG_o é pequeno. Portanto, podemos aproximar $T \approx DG_o$, e a restrição se reduz a

$$|DG_o| W_2 < 1,$$

$|DG_o| < \frac{1}{W_2}.$

(6.64)

A questão de robustez é importante para projetar e pode afetar a resposta em frequência de malha aberta em altas frequências, como discutido acima. No entanto, como discutido anteriormente, também é importante limitar a magnitude de alta frequência para atenuar os efeitos de ruído.

EXEMPLO 6.22 Típica planta incerta

A incerteza no modelo da planta é descrita pela função W_2 , que vale zero até $\omega = 3.000$, e aumenta linearmente até o valor de 100 para $\omega = 10.000$, e permanece em 100 para frequências maiores. Trace a restrição de $|DG_o|$ para satisfazer a esta restrição.

Solução. Para $W_2 = 0$, não há restrição sobre a magnitude do ganho de malha; acima de $\omega = 3.000$, $1/W_2 = DG_o$ é uma hipérbole de ∞ até 0,01 em $\omega = 10.000$ e permanece em 0,01 para $\omega > 10.000$. O limitante é esboçado na Fig. 6.80.

Na prática, a magnitude do ganho de malha é traçada em coordenadas log-log (Bode), e as restrições das Eqs. (6.57) e (6.64) são incluídas no mesmo gráfico. Um esboço típico é mostrado na Fig. 6.75. Espera-se que o projetista construa um ganho de malha que fique acima de W_1 para frequências abaixo de ω_1 , cruze a magnitude 1 ($|DG| = 0$) na faixa $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ e fique abaixo de $1/W_2$ para as frequências acima de ω_2 .

△ 6.7.8 Limitações no projeto em termos da função de sensibilidade

Uma das grandes contribuições de Bode foi obter importantes limitações nas funções de transferência que estabelecem limites para as especificações de projeto. Por exemplo, a especificação poderia ser manter o erro do sistema pequeno para o maior número possível de frequências e ainda ter um sistema que seja robustamente estável para uma planta muito incerta. Em termos do gráfico na Fig. 6.81, queremos que W_1 e W_2 sejam muito grandes em suas respectivas faixas de frequência e que ω_1 seja posicionada próximo de ω_2 . Assim, espera-se que o ganho de malha tenha uma grande inclinação negativa que seja maior do que W_1 e menor que $1/W_2$ em um período muito curto, mantendo uma PM boa para assegurar a estabilidade e um bom desempenho dinâmico. A fórmula de ganho-fase de Bode dada anteriormente mostra que isso é impossível com um controlador linear, mostrando que a fase mínima possível é determinada por uma integral dependendo da inclinação da curva de magnitude. Se a inclinação foi constante para uma substancial faixa em torno de ω_o , então a Eq. (6.34) pode ser aproximada por

$$\phi(\omega_o) \approx \frac{\pi}{2} \left. \frac{dM}{du} \right|_{u=0}, \quad (6.65)$$

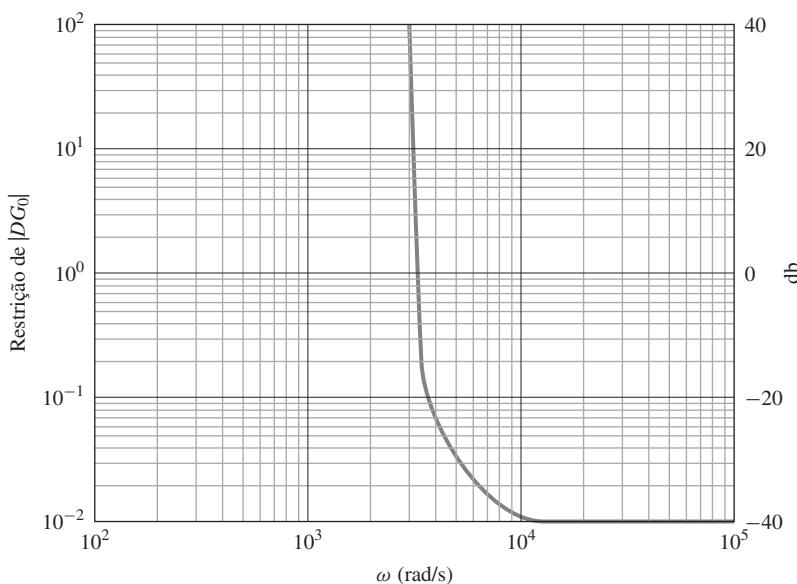
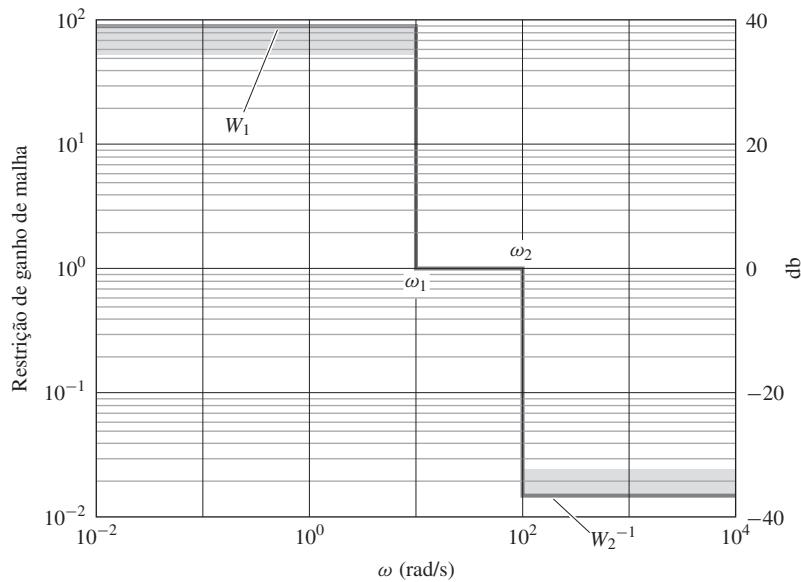


Figura 6.80 Esboço do limitante de $|DG_o| (= |W_2^{-1}|)$.

Figura 6.81 Restrições no diagrama de Bode para rastreamento e estabilidade robusta; um exemplo com restrições impossíveis.



sendo M a magnitude em log e $u = \log \omega/\omega_o$. Se, por exemplo, a fase fosse mantida acima de -150° para manter uma PM de 30° , então a inclinação da magnitude perto de ω_o , é estimada em

$$\begin{aligned}\frac{dM}{du} &\approx \frac{2}{\pi} \left(-150 \frac{\pi}{180} \right) \\ &\approx -1,667.\end{aligned}$$

Se tentarmos fazer com que a inclinação média fique mais acentuada (mais negativa) do que isso, perderemos a PM. A partir desta condição, desenvolveu-se a regra de projeto de que as assíntotas da magnitude do diagrama de Bode, que são restritas a serem o valor da integral de funções racionais, devem ser feitas para atravessar a linha de zero db com uma inclinação de -1 em uma faixa de frequência de cerca de uma década em torno da frequência de cruzamento, como já discutido na Seção 6.5. Modificações desta regra têm de ser feitas em casos particulares, é claro, mas a limitação implícita pela Eq. (6.65) é um limite rígido que não pode ser evitado. Assim, é claro que seria impossível estabilizar o sistema da Fig. 6.81.

EXEMPLO 6.23 Restrições de Robustez

Se $W_1 = W_2 = 100$, e é desejado PM = 30° , qual é a razão mínima de ω_2/ω_1 ?

Solução. A inclinação é

$$\frac{\log W_1 - \log \frac{1}{W_2}}{\log \omega_1 - \log \omega_2} = \frac{2 + 2}{\log \frac{\omega_1}{\omega_2}} = -1,667.$$

Assim, o log da razão é $\log \omega_1/\omega_2 = -2,40$ e $\omega_2 = 251 \omega_1$.

Uma alternativa para o diagrama de Bode padrão, como um guia de projeto, pode ser baseada em um gráfico da função de sensibilidade em função da frequência. Nesse formato, a Eq. (6.56) exige que $|S| < 1/W_1$ na faixa de $0 \leq \omega \leq \omega_1$ para o desempenho, e a Eq. (6.64) exige que $|S| \approx 1$ no intervalo $\omega_2 \leq \omega$ para a estabilidade robusta. Não surpreende, então, que Bode tenha encontrado uma limitação neste caso também.

A restrição, estendida por Freudenberg e Looze, mostra que um integrante da função de sensibilidade é determinado pela presença de polos no SPD. Suponha que o ganho de malha

DG_o tem n_p polos, p_i , no SPD e “rolls off” em altas frequências em uma inclinação mais rápida do que -1 . Para funções racionais, isto significa que há um excesso de pelo menos dois polos a mais do que zeros finitos. Então, pode-se demonstrar que

$$\int_0^\infty \ln(|\mathcal{S}|) d\omega = \pi \sum_{i=1}^{n_p} \operatorname{Re}\{p_i\}. \quad (6.66)$$

Se não houver polos no SPD, então a integral é zero. Isso significa que, se fizermos o log da função de sensibilidade muito negativo em alguma banda de frequência para reduzir os erros nessa banda, então, por *necessidade*, o $\ln |\mathcal{S}|$ será positivo em relação a outra parte da banda, e os erros serão amplificados nessa banda. Se houver polos instáveis, a situação é pior, porque a área positiva onde a sensibilidade amplifica o erro deve *exceder* a área negativa, onde o erro é reduzido pela realimentação. Se o sistema for de fase mínima, então, em princípio, é possível manter a magnitude da sensibilidade pequena espalhando o aumento da sensibilidade em todas as frequências positivas até o infinito, mas tal projeto exige uma largura de banda excessiva e é pouco prático. Se uma largura de banda específica é imposta, então a função de sensibilidade é obrigada a assumir um valor finito, possivelmente grande e positivo em algum ponto abaixo da largura de banda. Como implica a definição do vetor de margem de (VM) na Seção 6.4 (Fig. 6.39), um grande \mathcal{S}_{\max} corresponde à proximidade do diagrama de Nyquist do ponto crítico -1 e a um sistema que tem um vetor de margem pequeno, porque

$$\text{VM} = \frac{1}{\mathcal{S}_{\max}}. \quad (6.67)$$

Vetor de margem

Se o sistema for de fase não mínima, a situação é pior. Uma alternativa para a Eq. (6.66) é verdadeira se houver um zero de fase não mínima de DG_o , um zero no SPD. Suponha que o zero está localizado em $z_o = \sigma_o + j\omega_o$, com $\sigma_o > 0$. Novamente, assumimos que há polos n_p no SPD localizados em p_i com valores conjugados \bar{p}_i . Agora, a condição pode ser expressa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(|\mathcal{S}|) \frac{\sigma_o}{\sigma_o^2 + (\omega - \omega_o)^2} d\omega = \pi \sum_{i=1}^{n_p} \ln \left| \frac{\bar{p}_i + z_o}{p_i - z_o} \right|. \quad (6.68)$$

Nesse caso, não temos a restrição “roll-off”, e não há possibilidade de espalhar a área positiva sobre as altas frequências, pois a função de ponderação vai para zero com a frequência. O ponto importante nesta integral é que se o zero de fase não mínima estiver perto de um polo no SPD, o lado direito da integral pode ser muito grande, e o excesso na área positiva deve ser correspondentemente grande. Baseado neste resultado, espera-se grande dificuldade especialmente para atender às especificações de rastreamento e robustez sobre a sensibilidade em um sistema com polos e zeros no SPD.

EXEMPLO 6.24 Função de sensibilidade para a antena

Calcule e trace o gráfico da função de sensibilidade para o projeto da antena para a qual $G(s) = 1/s(s + 1)$ e $D(s) = 10(0,5s + 1)/(0,1s + 1)$.

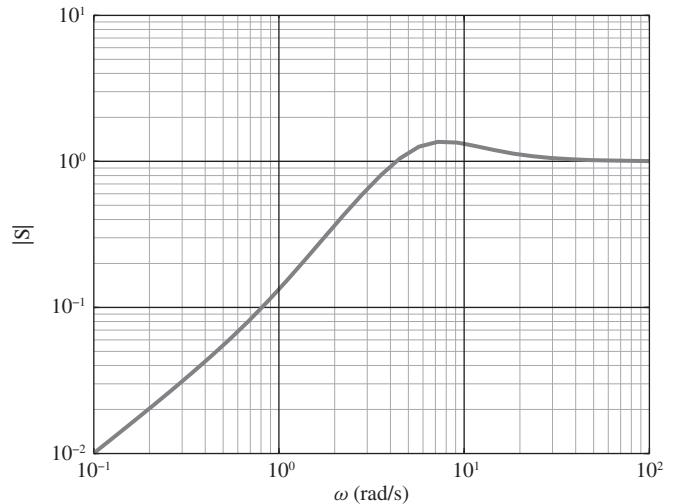
Solução. A função de sensibilidade para este caso é

$$\mathcal{S} = \frac{s(s + 1)(s + 10)}{s^3 + 11s^2 + 60s + 100}, \quad (6.69)$$

e o gráfico da função mostrado na Fig. 6.82 é obtido pelos comandos no MATLAB

```
numS = [1 11 10 0];
denS = [1 11 60 100];
sysS = tf(numS,denS);
[mag,ph,w] = bode(sysS);
loglog(w,squeeze(mag)),grid
```

Figura 6.82 Função de sensibilidade para o Exemplo 6.24.



O maior valor de \mathcal{S} é dado por $M = \max(\text{mag})$ e é 1,366, assim o vetor de margem é $VM = 3,73$.

△ 6.8 Retardo no tempo

A transformada de Laplace de um retardo no tempo puro é $G_D(s) = e^{-sT_d}$ e foi aproximada por uma função racional (aproximação de Padé) em nossa discussão anterior sobre o lugar das raízes no Capítulo 5. Embora a aproximação possa ser usada nos métodos do domínio da frequência, uma análise exata do retardo é possível com o critério de Nyquist e o diagrama de Bode.

A resposta em frequência do retardo no tempo é dada pela magnitude e fase de $e^{-sT_d}|_{s=j\omega}$. A magnitude é

$$|G_D(j\omega)| = |e^{-j\omega T_d}| = 1, \quad \text{para todo } \omega. \quad (6.70)$$

Magnitude de retardo no tempo

Fase de retardo no tempo

Esse resultado é esperado, porque um atraso de tempo apenas desloca o sinal no tempo e não tem efeito sobre sua magnitude. A fase é

$$\angle G_D(j\omega) = -\omega T_d \quad (6.71)$$

em radianos, e cresce negativamente à medida que a frequência cresce. Isto também é esperado, pois um retardo no tempo fixo T_d torna-se uma fração maior ou múltiplos de uma onda senoidal, devido à frequência cada vez maior. O gráfico de $\angle G_D(j\omega)$ é apresentado na Fig. 6.83. Note que o atraso de fase é maior do que 270° para valores de ωT_d maiores do que cerca

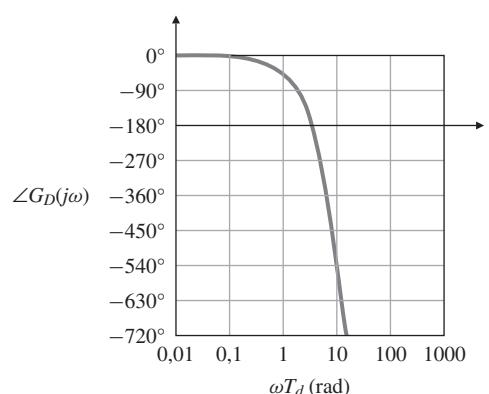


Figura 6.83 Atraso de fase devido ao retardo puro de tempo.

de 5 rad. Essa tendência implica que seria virtualmente impossível estabilizar um sistema (ou conseguir uma PM positiva) com uma frequência maior do que $\omega = 5/T_d$, e seria difícil para frequências maiores que $\omega \approx 3/T_d$. Essas características, essencialmente, colocam uma restrição na largura de banda alcançável de qualquer sistema com retardo no tempo. (Veja o Problema 6.69 para uma ilustração dessa restrição.)

Os conceitos no domínio da frequência, como o critério de Nyquist, aplicam-se diretamente a sistemas com atraso puro de tempo. Isso significa que não são necessárias aproximações (tipo Padé ou qualquer outra) e o efeito exato do atraso no tempo pode ser aplicado a um diagrama de Bode, como mostrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 6.25 Efeito da amostragem na estabilidade

Determine o atraso de fase adicional devido à amostragem digital no Exemplo 6.15 e reconcilie essa diferença com o desempenho observado das implementações contínua e digital mostradas no exemplo. Quão devagar poderia ser a amostragem se fosse necessário limitar o decréscimo da PM em 20°?

Solução. A taxa de amostragem no Exemplo 6.15 foi escolhida como $T_s = 0,05$ s. A partir da Fig. 4.22, vemos que o efeito da amostragem é manter a aplicação do controle sobre um período de amostragem; assim, o atraso real varia entre zero e um período de amostragem completo. Portanto, em média, o efeito da amostragem é injetar um atraso de tempo de $T_s/2 = 0,05/2 = 0,025 = T_d$ s. Da Eq. (6.71), vemos que o atraso de fase devido a esta amostragem na frequência de cruzamento de 5 rad/s, onde medimos a PM, é $\angle G_D = -\omega T_d = -(5)(0,025) = -0,125$ rad = -7° . Portanto, a PM irá diminuir de 45° na implementação contínua para 38° na implementação digital. A Fig. 6.59(a) mostra que o sobressinal, M_p , degradou de 1,2 no caso contínuo para $\approx 1,27$ no caso digital, o que é previsto pela Eq. (6.32) e pela Fig. 6.38.

A fim de limitar o atraso de fase em 20° em $\omega = 5$ rad/s, vemos na Eq. (6.71) que o máximo tolerável $T_d = 20/(5 * 57,3) = 0,07$ s, de modo que a mais lenta amostragem aceitável seria $T_s = 0,14$ s. Note, no entanto, que essa grande queda na PM resultaria no aumento do sobressinal de $\approx 20\%$ para $\approx 40\%$.

O exemplo mostra que um retardo no tempo, seja introduzido por amostragem digital ou por qualquer outra fonte, tem um efeito muito grave sobre a largura de banda alcançável. A avaliação do efeito usando a Eq. (6.71) ou a Fig. 6.83 é simples e direta, dando assim uma rápida análise das limitações impostas por qualquer atraso no sistema. Pode-se também avaliar o efeito de um atraso ao utilizar um diagrama de Nyquist, e isso é mostrado no material complementar W6, disponível (em inglês) no site do Grupo A.

△ 6.9 Representação alternativa dos dados

Antes de os computadores serem amplamente disponíveis, outras maneiras de apresentar dados da resposta em frequência foram desenvolvidas para auxiliar na compreensão do projeto e para aliviar a carga de trabalho do projetista. A ampla disponibilidade de computadores praticamente eliminou a necessidade destes métodos. Uma técnica utilizada foi o gráfico Nichols, o qual examinamos nesta seção por causa de sua importância histórica. Para os interessados, apresentamos também o método de Nyquist inverso no material complementar W6.

6.9.1 Carta de Nichols

Um gráfico de $\log |G(j\omega)|$ versus $\angle G(j\omega)$ pode ser obtido diretamente, simplesmente transferindo as informações da magnitude e da fase em um diagrama de Bode; um ponto na nova curva é obtido de um valor da frequência ω . Isso significa que a nova curva é parametrizada em função da frequência. Tal como acontece no diagrama de Bode, a informação de magnitude é traçada em uma escala logarítmica, enquanto que a informação de fase é traçada em uma escala

linear. Esse modelo foi sugerido por N. Nichols e é normalmente referido como uma **Carta de Nichols**.

A ideia de traçar a magnitude de $G(j\omega)$ versus a sua fase é semelhante ao conceito de traçar as partes real e imaginária de $G(j\omega)$, que formaram a base para o diagrama de Nyquist mostrado nas Seções 6.3 e 6.4. No entanto, é difícil capturar todas as características pertinentes de $G(j\omega)$ na escala linear do diagrama de Nyquist. A escala logarítmica para a magnitude no gráfico Nichols alivia essa dificuldade, permitindo que esse tipo de apresentação seja útil para o projeto.

Para qualquer valor da função completa $G(j\omega)$, a Seção 6.6 mostrou que existe um mapeamento único para a função de transferência em malha fechada, com realimentação unitária,

$$\mathcal{T}(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}, \quad (6.72)$$

ou na forma polar,

$$\mathcal{T}(j\omega) = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}, \quad (6.73)$$

sendo $M(\omega)$ a magnitude da função de transferência em malha fechada e $\alpha(\omega)$ a fase da função de transferência em malha fechada. Especificamente,

$$M = \left| \frac{G}{1 + G} \right|, \quad (6.74)$$

$$\alpha = \tan^{-1}(N) = \angle \frac{G}{1 + G}. \quad (6.75)$$

Pode ser demonstrado que os contornos de magnitude constante e os contornos de fase constante em malha fechada são círculos quando $G(j\omega)$ é apresentado no gráfico *linear* de Nyquist. Estes círculos são referidos como os **círculos M e N**, respectivamente.

O gráfico Nichols também contém contornos de magnitude constante e de fase constantes em *malha fechada* com base nessas relações, como mostrado na Fig. 6.84; no entanto, eles não são círculos, porque as Cartas de Nichols são gráficos da magnitude em escala semilog versus a fase em escala linear. Um projetista pode, portanto, determinar graficamente a largura de banda de um sistema em malha fechada a partir do gráfico dos dados de malha aberta em uma Carta de Nichols, observando onde a curva de malha aberta atravessa o contorno de malha fechada com magnitude de 0,70 e determinando a frequência correspondente a este ponto. Da mesma forma, um projetista pode determinar a amplitude do pico de ressonância M_r , observando o valor da magnitude do maior contorno de malha fechada tangente à curva. A frequência associada com a magnitude e a fase no ponto de tangência às vezes é referida como **frequência de ressonância** ω_r .

Da mesma forma, um projetista pode determinar a GM observando o valor do ganho onde o gráfico de Nichols cruza a linha de -180° , e a PM observando a fase em que o gráfico cruza a linha de amplitude 1¹⁴. O MATLAB fornece o arquivo-m nichols, que permite o fácil traçado da Carta de Nichols.

EXEMPLO 6.26 Carta de Nichols para o exemplo do PID

Determine a largura de banda e o pico de ressonância na magnitude do sistema compensado cuja resposta em frequência está apresentada na Fig. 6.71.

Solução. As informações de magnitude e fase do projeto de compensador no exemplo visto na Fig. 6.71 são mostradas em uma Carta de Nichols na Fig. 6.85. Ao comparar as duas figuras, é importante dividir as magnitudes na Fig. 6.71 por um fator de 20, a fim de obter $|D(s)G(s)|$ em vez de os valores normalizados usados na Fig. 6.71. Como a curva cruza o contorno de malha

Círculos M e N

Frequência de ressonância

¹⁴ James, H. M., N. B. Nichols, and R. S. Phillips (1947).

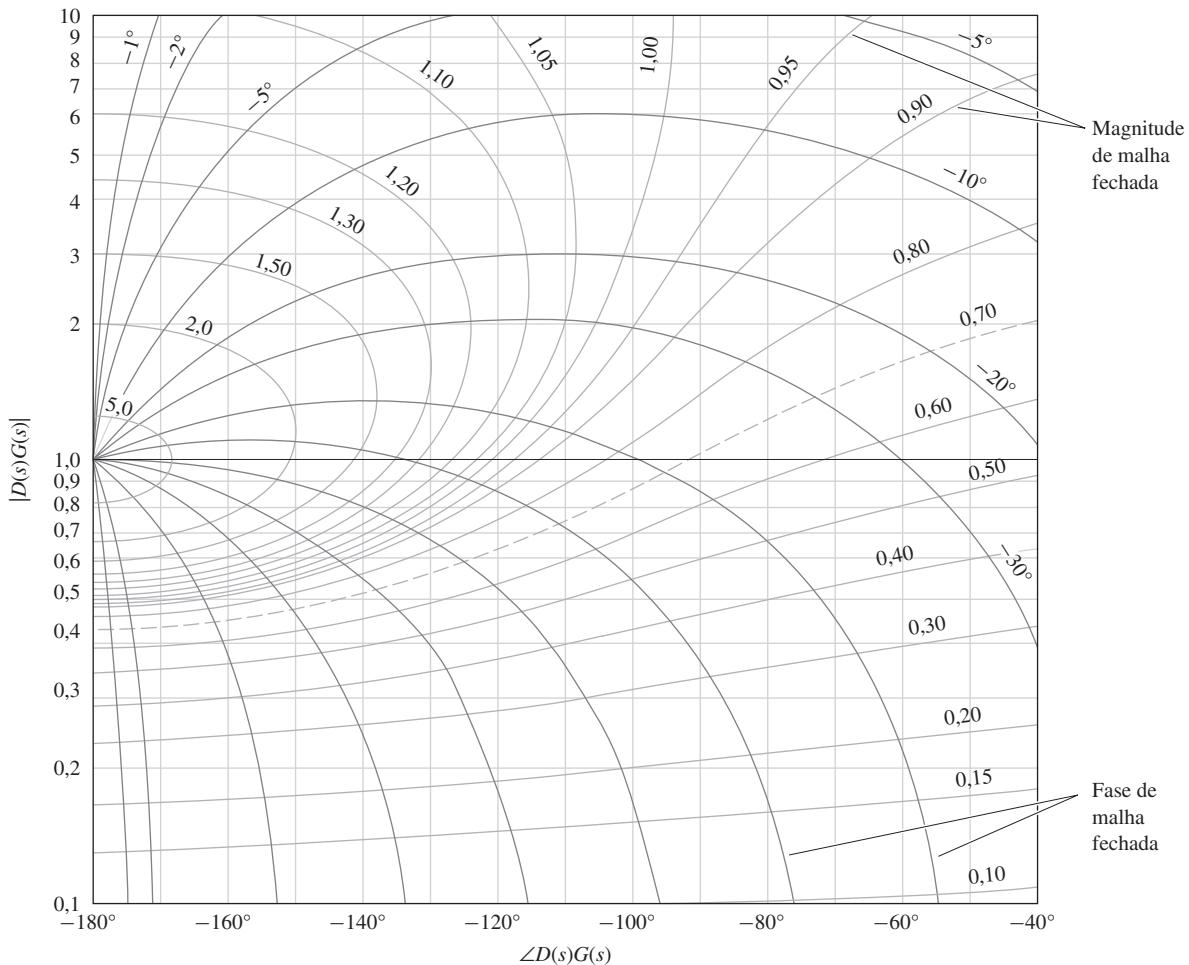


Figura 6.84 Carta de Nichols.

fechada com magnitude de 0,70 em $\omega = 0,8$ rad/s, vemos que a largura de banda do sistema é de 0,8 rad/s. Como a magnitude do maior contorno tocado pela curva é 1,20, também vemos que o $M_r = 1,2$.

Essa forma de apresentação de dados era particularmente valiosa quando um projetista precisava gerar gráficos e realizar cálculos à mão. Uma mudança no ganho, por exemplo, pode ser avaliada deslizando a curva verticalmente em papel transparente sobre uma Carta de Nichols padrão como mostrada na Fig. 6.84. Então, GM, PM e largura de banda eram de fácil leitura fora do gráfico, permitindo avaliações para vários valores de ganho com um mínimo de esforço. Com o acesso à métodos computacionais, no entanto, podemos agora calcular a largura de banda e realizar muitas avaliações repetitivas do ganho ou qualquer outro parâmetro usando apenas alguns comandos. Atualmente, a Carta de Nichols é usada principalmente como uma forma alternativa de apresentar as informações em um diagrama de Nyquist. Para sistemas complexos nos quais os envolvimentos do -1 precisam ser avaliados, a magnitude em escala log na carta de Nichols nos permite examinar uma gama de frequências mais amplas do que em um diagrama de Nyquist, bem como nos permite ler as margens de ganho e de fase diretamente. Embora o MATLAB calcule diretamente a PM e a GM, o algoritmo pode levar a resultados suspeitos em casos muito complexos, e o analista pode querer verificar o resultado usando o arquivo-m nichols no MATLAB para que os envolvimentos reais possam ser melhor examinados e as PM e

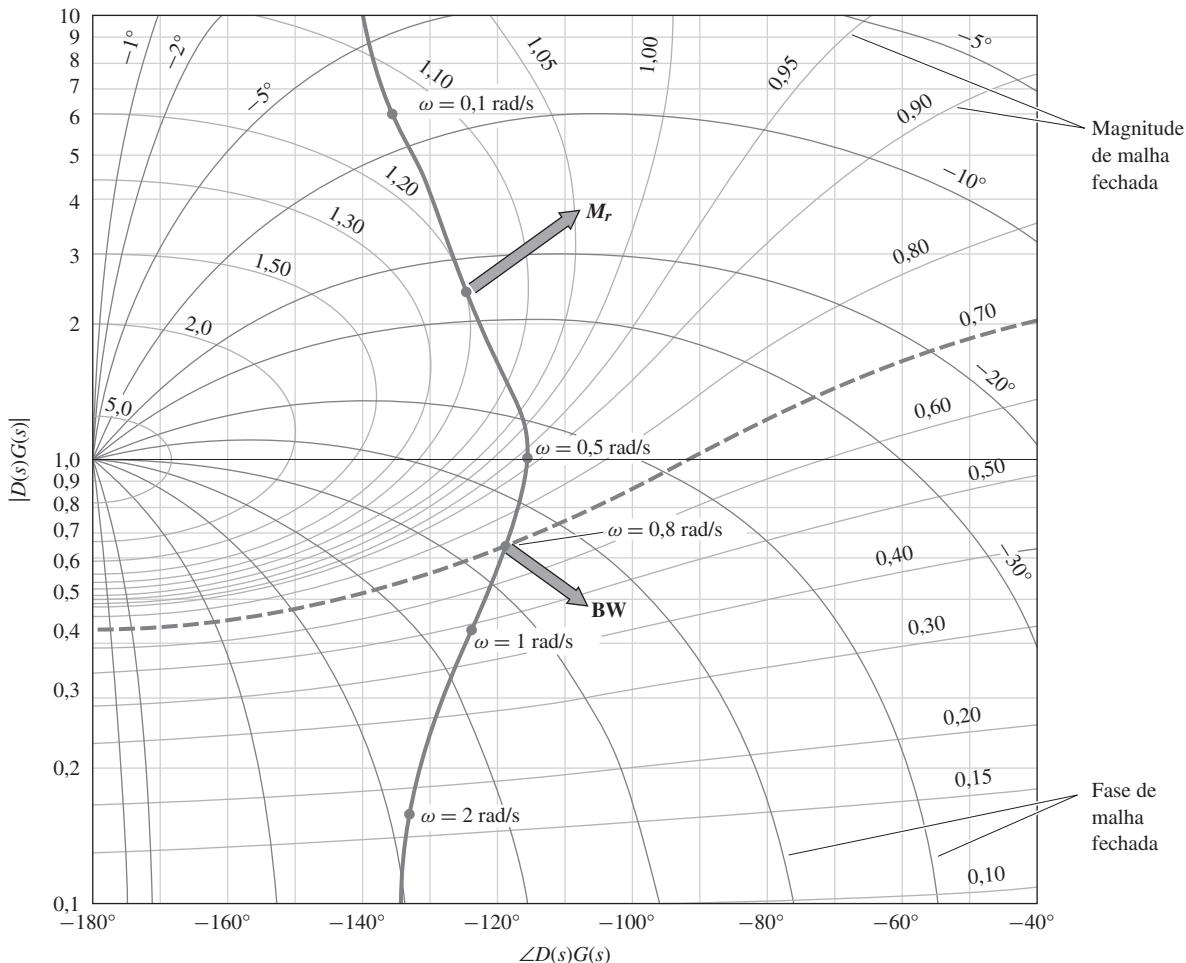


Figura 6.85 Exemplo de gráfico na carta de Nichols para determinar a largura de Banda M_r .

GM possam ser melhor compreendidas. Um exemplo do uso da Carta de Nichols para um caso complexo é mostrado no material complementar W6, disponível (em inglês) no site do Grupo A.

Outra forma de apresentação de dados é o Diagrama de Nyquist Inverso, que simplifica a determinação da GM. Ele é descrito em mais detalhes no material complementar W6.

6.10 Perspectiva histórica

Como discutido no Capítulo 5, antes de 1960 os engenheiros não tinham acesso aos computadores para ajudá-los em suas análises. Portanto, qualquer método que permitia a determinação da estabilidade ou da resposta característica e não exigia a fatoração da equação característica era muito útil. A invenção do amplificador realimentado eletrônico por H. S. Black, em 1927, no Bell Telephone Laboratories, forneceu um incentivo extra para o desenvolvimento de métodos, e o método de resposta em frequência foi o primeiro método de projeto de controle realimentado.

O desenvolvimento do amplificador realimentado é brevemente descrito em um interessante artigo baseado nas palavras de Hendrik W. Bode (1960), reproduzidas em Bellman e Kalaba (1964). Com a introdução dos amplificadores eletrônicos, telefonemas de longa distância tornaram-se possíveis nas décadas seguintes à Primeira Guerra Mundial. No entanto, como as distâncias aumentaram, as perdas de energia elétrica também cresceram; apesar do uso de um fio com diâmetro maior, um número crescente de amplificadores era necessário

para substituir a energia perdida. Infelizmente, um número grande de amplificadores causa-va maior distorção já que a pequena não linearidade das válvulas usadas em amplificadores eletrônicos naquele período era multiplicada várias vezes. Para reduzir a distorção, Black propôs o amplificador realimentado. Como discutido anteriormente no Capítulo 4, quanto mais deseja-se reduzir os erros (ou distorção), maior precisa ser a realimentação. O ganho de malha, do atuador para a planta para o sensor para o atuador, precisa ser muito grande. No entanto, os projetistas descobriram que o ganho muito alto tornava a malha realimentada instável. Nesta tecnologia, a dinâmica era muito complexa (com equações diferenciais de ordem 50 sendo comuns), e o critério de Routh, a única maneira de resolver a questão da estabilidade naquele momento, não foi muito útil. Então, os engenheiros de comunicação no Bell Telephone Laboratories, familiarizados com o conceito de resposta em frequência e com matemática de variáveis complexas, voltaram-se à análise complexa. Em 1932, H. Nyquist publicou um artigo descrevendo como determinar a estabilidade de uma representação gráfica da resposta de frequência em malha aberta. Bode, então, desenvolveu estes métodos gráficos em 1938, tornando-os fáceis de serem criados, sem cálculos extensos ou ajuda de computadores. Dos métodos gráficos e da teoria de estabilidade de Nyquist, desenvolveu-se uma extensa metodologia de projeto de amplificador realimentado descrita por Bode (1945) e ainda amplamente utilizada no projeto de controle realimentado. Hoje, as razões para a utilização do método são principalmente para que se consiga um bom projeto sem considerar a presença de dinâmicas não modeladas e para agilizar o processo de projeto, mesmo quando realizado com um computador totalmente capaz de resolver a equação característica. Depois de desenvolver os métodos de projeto baseados na resposta em frequência antes da Segunda Guerra Mundial, Bode passou a colaborar com dispositivos eletrônicos de controle de tiro durante a guerra. Os métodos que ele tinha desenvolvido para amplificadores realimentados demonstraram ser altamente aplicáveis a servomecanismos. Bode caracterizou esse cruzamento de métodos de projeto de controle como sendo uma “espécie de casamento forçado”.

RESUMO

- O **diagrama de Bode** da resposta em frequência é um gráfico da magnitude da função de transferência em escala logarítmica e da fase em escala linear versus a frequência em escala logarítmica. Para uma função de transferência $G(s)$,

$$\begin{aligned} A &= |G(j\omega)| = |G(s)|_{s=j\omega} \\ &= \sqrt{\{\text{Re}[G(j\omega)]\}^2 + \{\text{Im}[G(j\omega)]\}^2} \\ \phi &= \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \right] = \angle G(j\omega). \end{aligned}$$

- Para uma função de transferência na forma de Bode,

$$KG(\omega) = K_0 \frac{(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)\dots}{(j\omega\tau_a + 1)(j\omega\tau_b + 1)\dots},$$

a resposta em frequência pode ser facilmente traçada em um diagrama de Bode usando as regras descritas na Seção 6.1.1.

- O diagrama de Bode pode ser obtido usando algoritmos de computador (bode no MATLAB), mas a habilidade de traçar à mão ainda são extremamente úteis.
- Para um sistema de segunda ordem, o pico da curva de magnitude no diagrama de Bode está relacionado com o amortecimento,

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{em } \omega = \omega_n.$$

- Um método de determinação da estabilidade de um sistema em malha fechada com base na resposta em frequência da função de transferência do sistema em malha aberta é o **critério**

de estabilidade de Nyquist. Regras para traçar o **diagrama de Nyquist** estão descritas na Seção 6.3. O número de raízes de malha fechada no SPD é dado por

$$Z = N + P,$$

sendo

N = o número de envolvimentos no sentido horário do ponto -1 ,

P = o número de polos em malha aberta no SPD.

- O diagrama de Nyquist pode ser obtido usando algoritmos de computador (nyquist no MATLAB).
- A **margem de ganho** (GM) e a **fase de margem** (PM) podem ser determinadas diretamente inspecionando os diagramas de malha aberta de Bode ou Nyquist. Além disso, o uso da função margin no MATLAB determina os valores diretamente.
- Para um sistema de segunda ordem, a PM está relacionada com o amortecimento de malha fechada pela Eq. (6.32),

$$\zeta \cong \frac{PM}{100}.$$

- A **largura de banda** do sistema é uma medida de velocidade da resposta. Em sistemas de controle, é definida como a frequência correspondente a $0,707$ (-3 db) da magnitude no diagrama de Bode de malha fechada e é aproximadamente dada pela frequência de cruzamento ω_c , que é a frequência na qual a curva de ganho em malha aberta atravessa a magnitude 1.
- O **vetor de margem** é um parâmetro único de margem de estabilidade baseado no ponto mais próximo do diagrama de Nyquist e do ponto crítico $-1/K$.
- Para um sistema de fase mínima estável, a relação de ganho-fase de Bode relaciona a fase com o ganho do sistema e é aproximada pela Eq. (6.33),

$$\angle G(j\omega) \cong n \times 90^\circ,$$

onde n é a inclinação de $|G(j\omega)|$ em unidades de década de amplitude por década de frequência. A relação mostra que, na maioria dos casos, a estabilidade é garantida se a curva de ganho atravessar a linha de magnitude 1 com uma inclinação de -1 .

- Dados experimentais da resposta em frequência do sistema em malha aberta podem ser usados diretamente para análise e projeto de um sistema de controle em malha fechada sem nenhum modelo analítico.
- Para o sistema mostrado na Fig. 6.86, o diagrama de Bode de malha aberta é a resposta em frequência de GD , e a resposta em frequência de malha fechada é obtida a partir de $T(s) = GD/(1 + GD)$.
- As características da resposta em frequência de vários tipos de compensadores foram descritas, e exemplos de projeto usando essas características foram discutidas. Procedimentos de projeto foram dados para os compensadores de avanço e de atraso na Seção 6.7. Os exemplos nesta seção mostram a facilidade de selecionar valores específicos das variáveis de projeto, um resultado do uso de métodos de resposta em frequência. Um resumo foi apresentado ao final da Seção 6.7.5.

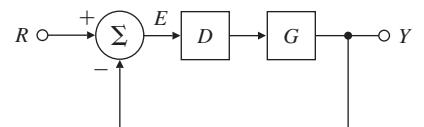


Figura 6.86 Sistema típico.

- O **compensador de avanço** é dado pela Eq. (6.38)

$$D(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad \alpha < 1,$$

é um filtro passa-alta e se aproxima do controle PD. É usado quando uma melhoria substancial no amortecimento do sistema é necessária. Ele tende a aumentar a velocidade de resposta de um sistema para um ganho de baixa frequência fixo.

- O **compensador de atraso** é dado pela Eq. (6.51),

$$D(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad \alpha > 1, \quad (6.76)$$

é um filtro passa-baixa e aproxima o controle PI. Geralmente, é usado para aumentar o ganho de baixa frequência do sistema de modo a melhorar a resposta em regime permanente para uma largura de banda fixa. Para um ganho de baixa frequência fixo, ele vai diminuir a velocidade de resposta de um sistema.

- Redução de erro e rejeição de distúrbio podem ser especificados em termos do ganho de baixa frequência no diagrama de Bode. Rejeição do ruído no sensor pode ser especificada em termos da atenuação de alta frequência no diagrama de Bode (ver Fig. 6.75).
- △ • O **gráfico de Nichols** é uma representação alternativa da resposta em frequência como um gráfico do ganho versus a fase, parametrizado em função da frequência.
- △ • Um retardo no tempo pode ser analisado de forma exata nos diagramas de Bode ou Nyquist.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. Por que Bode sugeriu traçar a magnitude de uma resposta em frequência em coordenadas log-log?
2. Defina um decibel.
3. Qual é a magnitude da função de transferência se o ganho é listado como 14 db?
4. Defina frequência de cruzamento de ganho.
5. Defina frequência de cruzamento de fase.
6. Defina margem de fase, PM.
7. Defina margem de ganho, GM.
8. Qual característica no diagrama de Bode melhor indica o sobressinal na resposta ao degrau de malha fechada?
9. Qual característica no diagrama de Bode melhor indica o tempo de subida na resposta ao degrau de malha fechada?
10. Qual é o principal efeito de um compensador de avanço nas medidas de desempenho em um diagrama de Bode?
11. Qual é o principal efeito de um compensador de atraso nas medidas de desempenho em um diagrama de Bode?
12. Como você encontra a K_v de um sistema de Tipo 1 em seu diagrama de Bode?
13. Por que precisamos saber de antemão o número de polos instáveis em malha aberta para analisar a estabilidade a partir do diagrama Nyquist?
14. Qual é a principal vantagem da contagem dos envolvimentos em $-1/K$ de $D(j\omega)G(j\omega)$ no projeto de controle ao invés da contagem dos envolvimentos em -1 de $K D(j\omega)G(j\omega)$?
15. Defina um sistema realimentado condicionalmente estável. Como se identifica este tipo de sistema em um diagrama de Bode?
- △ 16. Exige-se que um certo sistema de controle siga senoides, que podem ter qualquer frequência na faixa de $0 < \omega_\ell < 450$ rad/s e ter amplitudes de até 5 unidades, com erro em estado estacionário (senoidal) nunca maior do que 0,01. Esboce (ou descreva) a função de desempenho correspondente $W_1(\omega)$.

PROBLEMAS

Problemas da Seção 6.1: resposta em frequência

- 6.1 (a)** Mostre que α_0 na Eq. (6.2), com $A = U_o$ e $\omega_o = \omega$, é

$$\alpha_0 = \left[G(s) \frac{U_0 \omega}{s - j\omega} \right] \Big|_{s=-j\omega} = -U_0 G(-j\omega) \frac{1}{2j},$$

e

$$\alpha_0^* = \left[G(s) \frac{U_0 \omega}{s + j\omega} \right] \Big|_{s=+j\omega} = U_0 G(j\omega) \frac{1}{2j}.$$

- (b)** Assumindo que a saída pode ser escrita como

$$y(t) = \alpha_0 e^{-j\omega t} + \alpha_0^* e^{j\omega t},$$

derive as Eqs. (6.4)-(6.6).

- 6.2 (a)** Calcule a magnitude e a fase de

$$G(s) = \frac{1}{s + 10}$$

à mão para $\omega = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 rad/s.

- (b)** Esboce as assíntotas para $G(s)$ de acordo com as regras de Bode e compare-as com o resultado obtido no item (a).

- 6.3** Esboce as assíntotas da magnitude e fase no diagrama de Bode para cada uma das seguintes funções de transferência em malha aberta. Depois de completar os desenhos à mão, verifique o seu resultado usando o MATLAB. Use a mesma escala em seus esboços e nos resultados do MATLAB.

(a) $L(s) = \frac{2000}{s(s + 200)}$

(b) $L(s) = \frac{100}{s(0,1s + 1)(0,5s + 1)}$

(c) $L(s) = \frac{1}{s(s + 1)(0,02s + 1)}$

(d) $L(s) = \frac{1}{(s + 1)^2(s^2 + 2s + 4)}$

(e) $L(s) = \frac{10(s + 4)}{s(s + 1)(s^2 + 2s + 5)}$

(f) $L(s) = \frac{1000(s + 0,1)}{s(s + 1)(s^2 + 8s + 64)}$

(g) $L(s) = \frac{(s + 5)(s + 3)}{s(s + 1)(s^2 + s + 4)}$

(h) $L(s) = \frac{4s(s + 10)}{(s + 100)(4s^2 + 5s + 4)}$

(i) $L(s) = \frac{s}{(s + 1)(s + 10)(s^2 + 2s + 2500)}$

- 6.4 Polos e zeros reais.** Esboce as assíntotas da magnitude e fase no diagrama de Bode para cada uma das seguintes funções de transferência em malha aberta. Depois de completar os desenhos à mão, verifique o seu resultado usando o MATLAB. Use a mesma escala em seus esboços e nos resultados do MATLAB.

(a) $L(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 5)(s + 10)}$

(b) $L(s) = \frac{(s + 2)}{s(s + 1)(s + 5)(s + 10)}$

(c) $L(s) = \frac{(s + 2)(s + 6)}{s(s + 1)(s + 5)(s + 10)}$

(d) $L(s) = \frac{(s + 2)(s + 4)}{s(s + 1)(s + 5)(s + 10)}$

6.5 Polos e zeros complexos. Esboce as assíntotas da magnitude e fase no diagrama de Bode para cada uma das seguintes funções de transferência em malha aberta e aproxime a transição no ponto de quebra de segunda ordem baseado no coeficiente de amortecimento. Depois de completar os desenhos à mão, verifique o seu resultado usando o MATLAB. Use a mesma escala em seus esboços e nos resultados do MATLAB.

(a) $L(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 10}$

(b) $L(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 10)}$

(c) $L(s) = \frac{(s^2 + 2s + 8)}{s(s^2 + 2s + 10)}$

(d) $L(s) = \frac{(s^2 + 2s + 12)}{s(s^2 + 2s + 10)}$

(e) $L(s) = \frac{(s^2 + 1)}{s(s^2 + 4)}$

(f) $L(s) = \frac{(s^2 + 4)}{s(s^2 + 1)}$

6.6 Múltiplos polos na origem. Esboce as assíntotas da magnitude e fase no diagrama de Bode para cada uma das seguintes funções de transferência em malha aberta. Depois de completar os desenhos à mão, verifique o seu resultado usando o MATLAB. Use a mesma escala em seus esboços e nos resultados do MATLAB.

(a) $L(s) = \frac{1}{s^2(s + 8)}$

(b) $L(s) = \frac{1}{s^3(s + 8)}$

(c) $L(s) = \frac{1}{s^4(s + 8)}$

(d) $L(s) = \frac{(s + 3)}{s^2(s + 8)}$

(e) $L(s) = \frac{(s + 3)}{s^3(s + 4)}$

(f) $L(s) = \frac{(s + 1)^2}{s^3(s + 4)}$

(g) $L(s) = \frac{(s + 1)^2}{s^3(s + 10)^2}$

6.7 Polos reais e complexos juntos. Esboce as assíntotas da magnitude e fase no diagrama de Bode para cada uma das seguintes funções de transferência em malha aberta. Ajuste as assíntotas com a estimativa aproximada das transições em cada ponto de quebra. Depois de completar os desenhos à mão, verifique o seu resultado usando o MATLAB. Use a mesma escala em seus esboços e nos resultados do MATLAB.

(a) $L(s) = \frac{(s + 2)}{s(s + 10)(s^2 + 2s + 2)}$

(b) $L(s) = \frac{(s + 2)}{s^2(s + 10)(s^2 + 6s + 25)}$

(c) $L(s) = \frac{(s + 2)^2}{s^2(s + 10)(s^2 + 6s + 25)}$

(d) $L(s) = \frac{(s + 2)(s^2 + 4s + 68)}{s^2(s + 10)(s^2 + 4s + 85)}$

(e) $L(s) = \frac{[(s + 1)^2 + 1]}{s^2(s + 2)(s + 3)}$

- 6.8 Polos e zeros no semiplano direito.** Esboce as assíntotas da magnitude e fase no diagrama de Bode para cada uma das seguintes funções de transferência em malha aberta. Certifique-se de que a assíntota de fase leve em conta devidamente a singularidade no SPD esboçando o plano complexo para ver como o $\angle L(s)$ muda quando s vai de 0 a $+j\infty$. Depois de completar os desenhos à mão, verifique o seu resultado usando o MATLAB. Use a mesma escala em seus esboços e nos resultados do MATLAB.

(a) $L(s) = \frac{s+2}{s+10} \frac{1}{s^2 - 1}$ (modelo para o caso do levitador magnético com o compensador de avanço)

(b) $L(s) = \frac{s+2}{s(s+10)} \frac{1}{(s^2 - 1)}$ (O sistema magnético de levitação com o controlador integral e compensador de avanço)

(c) $L(s) = \frac{s-1}{s^2}$

(d) $L(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s(s+20)^2(s^2 - 2s + 2)}$

(e) $L(s) = \frac{(s+2)}{s(s-1)(s+6)^2}$

(f) $L(s) = \frac{1}{(s-1)[(s+2)^2 + 3]}$

- 6.9** Um determinado sistema é representado pelo diagrama de Bode assintótico mostrado na Fig. 6.87. Encontrar e esboce a resposta deste sistema a uma entrada de degrau unitário (supondo condições iniciais nulas).

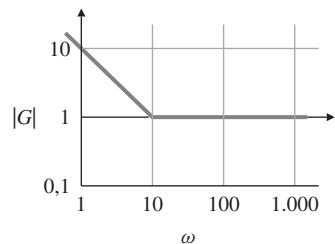


Figura 6.87 Gráfico da magnitude de um diagrama de Bode para o Problema 6.9.

- 6.10** Demonstre que a inclinação -1 da magnitude em um diagrama de Bode corresponde a -20 db por década ou -6 db por oitava.

- 6.11** Um sistema de segunda ordem normalizado com um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$ e um zero adicional é dado por

$$G(s) = \frac{s/a + 1}{s^2 + s + 1}.$$

Use o MATLAB para comparar o M_p da resposta ao degrau do sistema com $a = 0,01, 0,1, 1, 10$ e 100 com M_r da resposta em frequência em cada caso. Existe uma relação entre M_r e M_p ?

- 6.12** Um sistema de segunda ordem normalizado com um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$ e um polo adicional é dado por

$$G(s) = \frac{1}{[(s/p) + 1](s^2 + s + 1)}.$$

Esboce o diagrama de Bode para $p = 0,01, 0,1, 1, 10$ e 100 . Quais conclusões podem ser tiradas sobre o efeito de um polo extra sobre a largura de banda em comparação com a largura de banda para o sistema de segunda ordem sem polo extra?

- 6.13** Para a função de transferência de malha fechada

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

obtenha a seguinte expressão para a largura de banda ω_{BW} de $T(s)$ em tremos de ω_n e ζ :

$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 + 4\zeta^4 - 4\zeta^2}}.$$

6.14 Considere o sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{A_0 \omega_0 s}{Q s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2 Q}.$$

Este é um modelo de um circuito sintonizado com *fator de qualidade* Q .

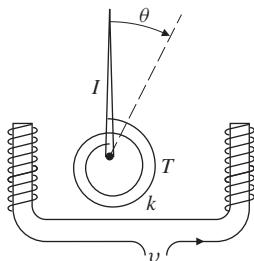
- (a) Calcule a magnitude e a fase da função de transferência analiticamente e trace-as para $Q = 0,5, 1, 2$ e 5 em uma função da frequência normalizada ω/ω_0 .
- (b) Defina a largura de banda como a distância entre as frequências de cada lado de ω_0 onde a magnitude cai 3 db abaixo do seu valor em ω_0 , e mostre que a largura de banda é dada por

$$BW = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega_0}{Q} \right).$$

(c) Qual é a relação entre Q e ζ ?

6.15 Um esquema de um voltímetro CC é mostrado na Fig. 6.88. O ponteiro é amortecido para que seu sobressinal máximo para uma entrada em degrau seja de 10% .

- (a) Qual é a frequência natural não amortecida do sistema?
- (b) Qual é a frequência natural amortecida do sistema?
- (c) Trace a resposta em frequência usando o MATLAB para determinar qual frequência de entrada produzirá a saída de maior magnitude?
- (d) Suponha que esse medidor seja usado para medir uma entrada de 1-V AC com uma frequência de 2 rad/s. Qual será a amplitude que o medidor irá indicar depois dos transientes iniciais terem desaparecido? Qual é o atraso de fase da saída com relação à entrada? Use a análise de um diagrama de Bode para responder a estas perguntas. Use o comando `lsim` no MATLAB para verificar sua resposta no item (d).



$$I = 40 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$k = 4 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$T = \text{entrada de torque} = K_m v$$

$$v = \text{entrada de tensão}$$

$$K_m = 1 \text{ N} \cdot \text{m/V}$$

Figura 6.88 Esquema de um voltímetro.

Problemas da Seção 6.2: estabilidade neutra

6.16 Determine o intervalo de K para que os sistemas de malha fechada (ver Fig. 6.18) sejam estáveis para cada um dos casos abaixo, traçando o diagrama de Bode para $K = 1$ e imaginando o gráfico da magnitude deslizando para cima ou para baixo até resultar em instabilidade. Verifique suas respostas usando um esboço básico de um lugar das raízes.

$$(a) KG(s) = \frac{K(s+2)}{s+20}$$

$$(b) KG(s) = \frac{K}{(s+10)(s+1)^2}$$

$$(c) KG(s) = \frac{K(s+10)(s+1)}{(s+100)(s+5)^3}$$

- 6.17** Determine o intervalo de K para que cada um dos sistemas listados seja estável, traçando o diagrama de Bode para $K = 1$ e imaginando o gráfico da magnitude deslizando para cima ou para baixo até resultar em instabilidade. Verifique suas respostas usando um esboço básico de um lugar das raízes.

$$(a) KG(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+5)}$$

$$(b) KG(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+10)}$$

$$(c) KG(s) = \frac{K}{(s+2)(s^2+9)}$$

$$(d) KG(s) = \frac{K(s+1)^2}{s^3(s+10)}$$

Problemas da Seção 6.3: critério de estabilidade de Nyquist

- 6.18** (a) Esboce o diagrama de Nyquist para um sistema em malha aberta com função de transferência $1/s^2$; que é esboçado

$$\left. \frac{1}{s^2} \right|_{s=C_1},$$

sendo C_1 um contorno envolvendo todo o SPD, como mostrado na Fig. 6.17. (Dica: Assuma que C_1 tome um pequeno contorno em torno do polo em $s = 0$, como mostrado na Fig. 6.27.)

- (b) Repita o item (a) para um sistema de malha aberta com a função de transferência $G(s) = 1/(s^2 + \omega_0^2)$.

- 6.19** Esboce o diagrama de Nyquist baseado no diagrama de Bode para cada um dos seguintes sistemas e então compare o resultado com o obtido usando o comando nyquist no MATLAB:

$$(a) KG(s) = \frac{K(s+2)}{s+10}$$

$$(b) KG(s) = \frac{K}{(s+10)(s+2)^2}$$

$$(c) KG(s) = \frac{K(s+10)(s+1)}{(s+100)(s+2)^3}$$

- (d) Usando suas curvas, estime a faixa de K para a qual cada sistema é estável e, qualitativamente, verifique o seu resultado usando um esboço do lugar das raízes.

- 6.20** Esboce o diagrama de Nyquist para

$$KG(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+3)}, \quad (6.77)$$

faça o contorno estar à direita da singularidade no eixo $j\omega$. Em seguida, usando o critério de Nyquist, determine o intervalo de K para o qual o sistema é estável. Em seguida, refaça o diagrama de Nyquist, desta vez fazendo o contorno estar à esquerda da singularidade no eixo imaginário. Novamente, utilizando o critério de Nyquist, verifique o intervalo de K para o qual o sistema é estável. As respostas são as mesmas? Deveriam ser?

- 6.21** Desenhe o diagrama de Nyquist para o sistema na Fig. 6.89. Usando o critério de estabilidade de Nyquist, determine o intervalo de K para o qual o sistema é estável. Considere tanto valores positivos e negativos de K .

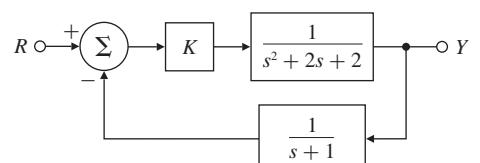


Figura 6.89 Sistema de controle para o Problema 6.21.

- 6.22** (a) Para $\omega = 0,1$ até 100 rad/s, esboce a fase de um sistema de fase mínima

$$G(s) = \frac{s+1}{s+10} \Big|_{s=j\omega}$$

e para o sistema de fase não mínima

$$G(s) = -\frac{s-1}{s+10} \Big|_{s=j\omega},$$

note que $\angle(j\omega - 1)$ diminui com ω ao invés de aumentar.

- (b) Um zero no SPD afeta a relação entre os envolvimentos no ponto -1 em um gráfico polar e o número raízes instáveis em malha fechada na Eq. (6.28)?
(c) Esboce a fase do seguinte sistema instável para $\omega = 0,1$ até 100 rad/s:

$$G(s) = \frac{s+1}{s-10} \Big|_{s=j\omega}.$$

- (d) Analise a estabilidade dos sistemas em (a) e (c) utilizando o critério de Nyquist em $KG(s)$. Determine o intervalo de K para o qual o sistema em malha fechada é estável e verifique seus resultados qualitativamente usando um esboço do lugar das raízes.
6.23 *Diagrama de Nyquist e curvas planas clássicas.* Determine o diagrama de Nyquist, usando o MATLAB, para os sistemas dados abaixo, com $K = 1$, e verifique que o ponto inicial e final para $j\omega > 0$ têm a magnitude e a fase corretas:

- (a) A curva clássica chamada de Sextic de Cayley, descoberta por Maclaurin em 1718:

$$KG(s) = K \frac{1}{(s+1)^3}.$$

- (b) A curva clássica chamada de Cissoid, ou seja, em forma de hera:

$$KG(s) = K \frac{1}{s(s+1)}.$$

- (c) A curva clássica chamada de Folium de Kepler, estudada por Kepler em 1609:

$$KG(s) = K \frac{1}{(s-1)(s+1)^2}.$$

- (d) A curva clássica chamada de Folium (não é a de Kepler):

$$KG(s) = K \frac{1}{(s-1)(s+2)}.$$

- (e) A curva clássica chamada de Nephroid, ou seja, em forma de rim:

$$KG(s) = K \frac{2(s+1)(s^2 - 4s + 1)}{(s-1)^3}.$$

- (f) A curva clássica chamada de Nephroid de Freeth, em homenagem ao matemático inglês T. J. Freeth:

$$KG(s) = K \frac{(s+1)(s^2 + 3)}{4(s-1)^3}.$$

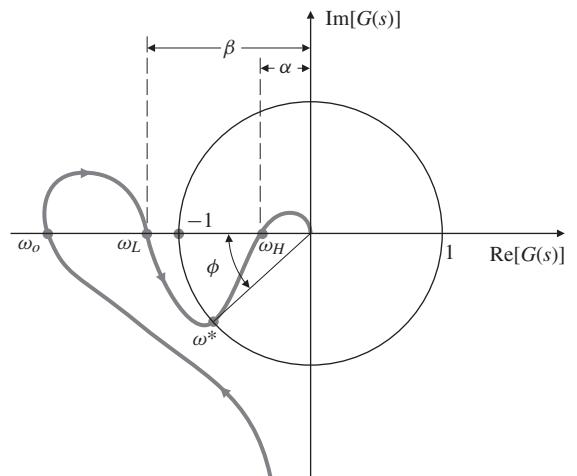
- (g) A Nephroid deslocada de Freeth:

$$KG(s) = K \frac{(s^2 + 1)}{(s-1)^3}.$$

Problemas da Seção 6.4: margens de estabilidade

- 6.24** O diagrama de Nyquist para alguns sistemas de controle reais é semelhante ao mostrado na Fig. 6.90. Quais são as margens de ganhos e fase do sistema da Fig. 6.90, sendo $\alpha = 0,4$, $\beta = 1,3$ e

Figura 6.90 Diagrama de Nyquist para o Problema 6.24.



$\phi = 40^\circ$. Descreva o que acontece com a estabilidade do sistema quando o ganho vai de zero a um valor muito grande. Esboce o lugar das raízes correspondente a tal sistema. Além disso, esboce o diagrama de Bode correspondente ao sistema.

6.25 O diagrama de Bode para

$$G(s) = \frac{100[(s/10) + 1]}{s[(s/1) - 1][(s/100) + 1]}$$

é mostrado na Fig. 6.91.

- (a) Por que a fase inicia em -270° nas baixas freqüências?
- (b) Esboce o diagrama de Nyquist para $G(s)$.
- (c) O sistema em malha fechada mostrado na Fig. 6.91 é estável?

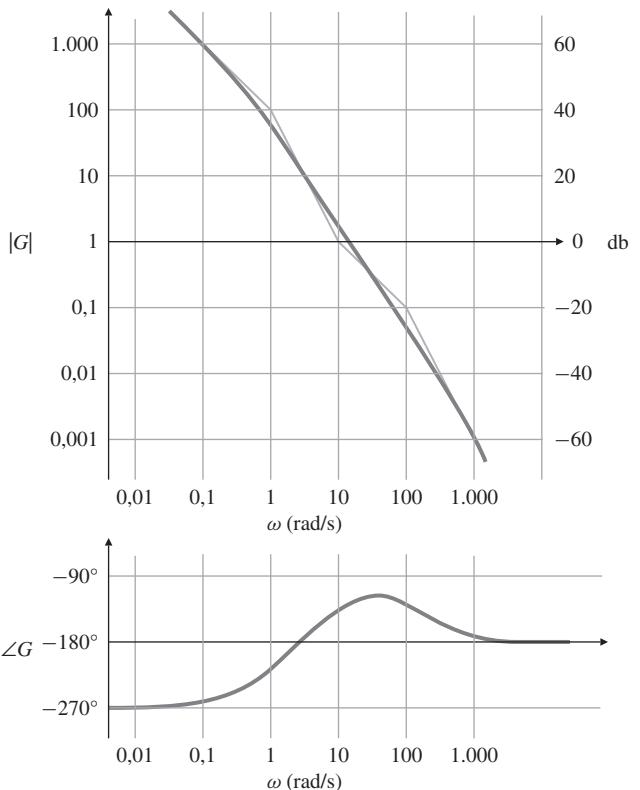


Figura 6.91 Diagrama de Bode para o Problema 6.25.

- (d) O sistema será estável se o ganho for reduzido por um fator de 100? Faça um esboço do lugar das raízes para o sistema e, qualitativamente, confirme sua resposta.

6.26 Suponha que na Fig. 6.92,

$$G(s) = \frac{25(s+1)}{s(s+2)(s^2+2s+16)}.$$

Use o comando margin do MATLAB para calcular a PM e a GM de $G(s)$ e, com base no diagrama de Bode, conclua qual margem fornece uma informação mais útil para o projetista de controle para este sistema.

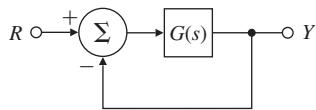


Figura 6.92 Sistema de controle para o Problema 6.26.

6.27 Considere o sistema dado na Fig. 6.93.

- (a) Use o MATLAB para obter o diagrama de Bode para $K = 1$ e use os gráficos para estimar a faixa de valores de K na qual o sistema será estável.
- (b) Verifique a faixa de estabilidade de K usando o comando margin para determinar a PM dos valores selecionados de K .
- (c) Use o comando rlocus para determinar os valores de K nos limites da estabilidade.
- (d) Esboce o diagrama de Nyquist para o sistema e use-o para verificar o número de raízes instáveis para a faixa de valores instáveis de K .
- (e) Usando o critério de Routh, determine a faixa de valores de K para a estabilidade do sistema em malha fechada.

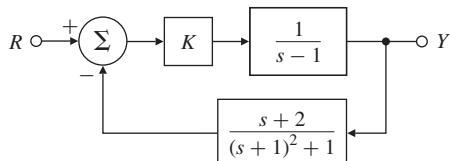


Figura 6.93 Sistema de controle para o Problema 6.27.

6.28 Suponha que, na Fig. 6.92,

$$G(s) = \frac{3,2(s+1)}{s(s+2)(s^2+0,2s+16)}.$$

Use o comando margin do MATLAB para calcular a PM e a GM de $G(s)$ e comente se o sistema terá raízes de malha fechada bem amortecidas.

6.29 Para um dado sistema, mostre que o período crítico P_u e o ganho crítico correspondente K_u para o método de Zeigler-Nichols podem ser encontrados usando:

- (a) Diagrama de Nyquist
- (b) Diagrama de Bode
- (c) Lugar das raízes

6.30 Se um sistema tem a função de transferência de malha fechada

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

com realimentação unitária, então a função de transferência em malha fechada do sistema é

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Verifique os valores da PM mostrados na Fig. 6.37 para $\zeta = 0,1, 0,4$ e $0,7$.

6.31 Considere o sistema com realimentação unitária e função de transferência em malha aberta

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)[(s^2/25) + 0,4(s/5) + 1]}.$$

- (a) Use o MATLAB para traçar o diagrama de Bode para $G(j\omega)$, assumindo $K = 1$.
- (b) Qual ganho K é necessário para uma PM de 45° ? Qual é a GM para este valor de K ?
- (c) Qual é o K_v quando K é ajustado para PM = 45° ?
- (d) Crie um lugar das raízes em relação a K e indique as raízes para uma PM de 45° .

6.32 Para o sistema apresentado na Fig. 6.94(a), as funções de transferência são

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s+4)} \quad \text{e} \quad H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

- (a) Usando os comandos `rlocus` e `rlocfind`, determine o valor de K no limite da estabilidade.
- (b) Usando os comandos `rlocus` e `rlocfind`, determine o valor de K que irá produzir raízes com amortecimento $\zeta = 0,707$.
- (c) Qual é a margem de ganho do sistema se o ganho é definido como o valor determinado no item (b)? Responda a esta pergunta *sem* usar métodos de resposta em frequência.
- (d) Obtenha o diagrama de Bode para o sistema e determine a margem de ganho que resulta em PM = 65° . Qual é a taxa de amortecimento esperada para esta PM?
- (e) Esboce um lugar das raízes para o sistema mostrado na Fig. 6.94(b). Como esta difere da do item (a)?
- (f) Para os sistemas nas Figs. 6.94(a) e (b), como a função de transferência $Y_2(s)/R(s)$ difere de $Y_1(s)/R(s)$? Espera-se que as respostas ao degrau para $r(t)$ sejam diferentes para os dois casos?

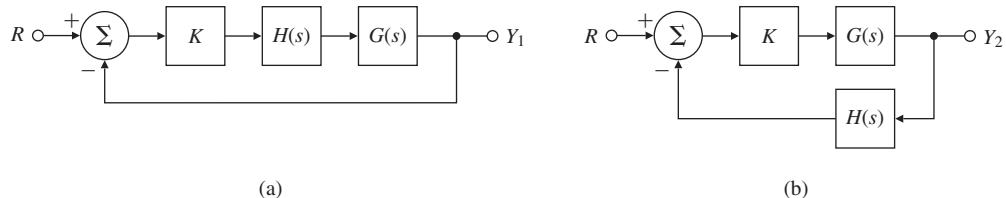


Figura 6.94 Diagramas de blocos para o Problema 6.32: (a) realimentação unitária; (b) $H(s)$ na realimentação.

6.33 Para o sistema mostrado na Fig. 6.95, use o diagrama de Bode e o gráfico do lugar das raízes para determinar o ganho e a frequência nas quais a instabilidade ocorre. Qual ganho (ou ganhos) resulta em uma PM de 20° ? Qual é a margem de ganho quando PM = 20° ?

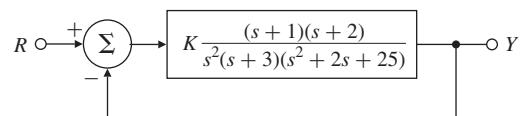


Figura 6.95 Sistema de controle para o Problema 6.33.

6.34 Uma sistema de controle de velocidade de uma fita magnética é mostrado na Fig. 6.96. O sensor de velocidade é lento o suficiente para que sua dinâmica precise ser incluída. A constante de tem-

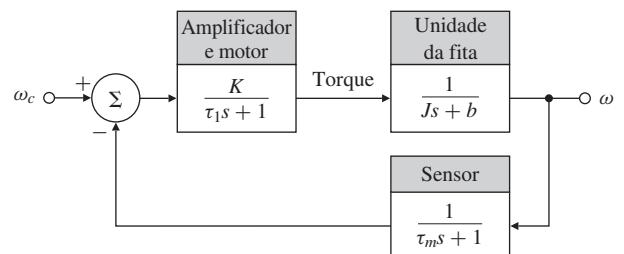


Figura 6.96 Controle de velocidade de uma fita magnética.

po de medição da velocidade é $\tau_m = 0,5$ s, a constante de tempo real é $\tau_r = J/b = 4$ s, sendo $b =$ a constante de amortecimento do eixo de saída = 1 N.m.s, e a constante de tempo do motor é $\tau_1 = 1$ s.

(a) Determine o ganho K necessário para manter o erro de velocidade em estado estacionário menor que 7% da configuração de referência de velocidade.

(b) Determine as margens de ganho e fase do sistema. Esse é um bom projeto?

6.35 Para o sistema na Fig. 6.97, determine o diagrama de Nyquist e aplique o critério de Nyquist

- (a) para determinar a faixa de valores de K (positivos e negativos) para a qual o sistema será estável, e
- (b) para determinar o número de raízes no SPD para os valores de K nos quais o sistema é instável. Verifique sua resposta usando um esboço do lugar das raízes.

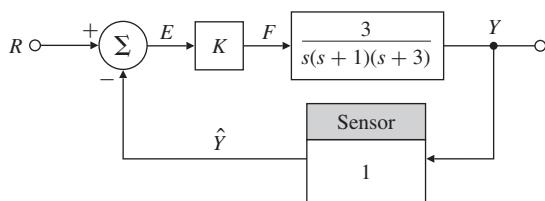


Figura 6.97 Sistema de controle para os Problemas 6.35, 6.62 e 6.63.

6.36 Para o sistema na Fig. 6.98, determine o diagrama de Nyquist e aplique o critério de Nyquist

- (a) para determinar a faixa de valores de K (positivos e negativos) para a qual o sistema será estável, e
- (b) para determinar o número de raízes no SPD para os valores de K nos quais o sistema é instável. Verifique sua resposta usando um esboço do lugar das raízes.

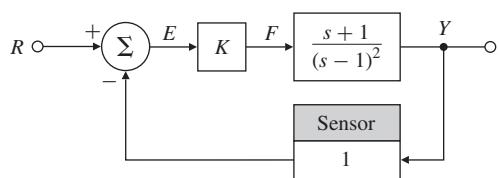


Figura 6.98 Sistema de controle para o Problema 6.36.

6.37 Para o sistema na Fig. 6.99, determine o diagrama de Nyquist e aplique o critério de Nyquist

- (a) para determinar a faixa de valores de K (positivos e negativos) para a qual o sistema será estável, e
- (b) para determinar o número de raízes no SPD para os valores de K nos quais o sistema é instável. Verifique sua resposta usando um esboço do lugar das raízes.

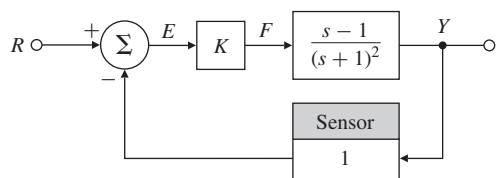


Figura 6.99 Sistema de controle para o Problema 6.37.

6.38 Os diagramas de Nyquist para os dois sistemas estáveis em malha aberta estão esboçados na Fig. 6.100. O ganho operacional proposto é indicado como K_0 , e as setas indicam o aumento da frequência. Em cada caso, encontre uma estimativa aproximada das quantidades a seguir para o sistema em malha fechada (realimentação unitária):

- (a) Margem de fase
- (b) Coeficiente de amortecimento
- (c) Faixa de valores do ganho para a estabilidade (se existir)
- (d) Tipo do sistema (0, 1 ou 2)

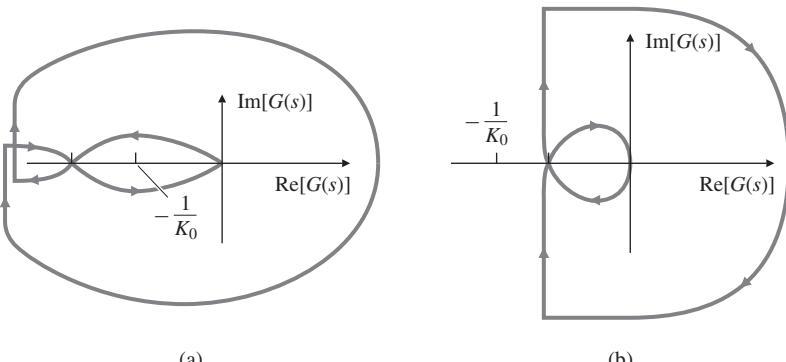


Figura 6.100 Diagramas de Nyquist para o Problema 6.38.

(a)

(b)

6.39 A dinâmica de direcionamento de um navio é representada pela função de transferência

$$\frac{V(s)}{\delta_r(s)} = G(s) = \frac{K[-(s/0,142) + 1]}{s(s/0,325 + 1)(s/0,0362 + 1)},$$

sendo V a velocidade lateral do navio em metros por segundo e δ_r o ângulo do leme em radianos.

- (a) Use o comando bode no MATLAB para traçar a magnitude em log e a fase de $G(j\omega)$ para $K = 0,2$.
- (b) No seu gráfico, indique a frequência de cruzamento, a PM e a GM.
- (c) O sistema de direção do navio é estável com $K = 0,2$?
- (d) Qual o valor de K que resulta em uma PM de 30° , e qual seria a frequência de cruzamento?

6.40 Para o sistema em malha aberta

$$KG(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+10)^2},$$

determine o valor de K no limite da estabilidade e os valores de K nos pontos onde a PM = 30° .

Problemas da Seção 6.5: relação ganho-fase de Bode

- 6.41** A resposta em frequência de uma planta em uma configuração de realimentação unitária é esboçada na Fig. 6.101. Suponha que a planta seja estável em malha aberta e de fase mínima.
- (a) Qual é a constante de velocidade K_v do sistema?
 - (b) Qual é a taxa de amortecimento dos polos complexos em $\omega = 100$?
 - (c) Qual é o erro de rastreamento (seguimento) aproximado para uma entrada senoidal de $\omega = 3$ rad/s?
 - (d) Qual é a PM do sistema como esboçado? (Estime com uma margem de $\pm 10^\circ$.)

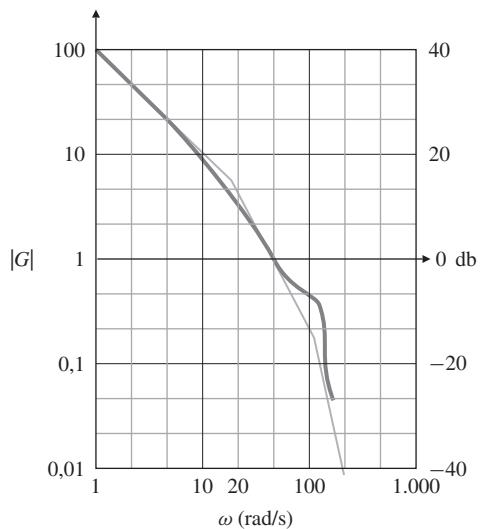


Figura 6.101 Magnitude da resposta em frequência para o Problema 6.41.

6.42 Para o sistema

$$G(s) = \frac{100(s/a+1)}{s(s+1)(s/b+1)},$$

com $b = 10a$, encontre o valor aproximado de a que irá fornecer a melhor PM; para isso, esboce apenas valores possíveis da magnitude da resposta em frequência.

Problemas da Seção 6.6: resposta em frequência de malha fechada

6.43 Para o sistema em malha aberta

$$KG(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+10)^2},$$

determine o valor de K que irá fornecer $\text{PM} \geq 30^\circ$ e a maior largura de banda possível. Use o MATLAB para encontrar a largura de banda.

Problemas da Seção 6.7: projeto de compensador

6.44 Para o compensador de avanço

$$D(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1},$$

com $\alpha < 1$,

(a) Mostre que a fase do compensador de avanço é dada por

$$\phi = \tan^{-1}(T\omega) - \tan^{-1}(\alpha T\omega).$$

(b) Mostre que a frequência na qual a fase é máxima é dada por

$$\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

e que a fase máxima corresponde a

$$\sin \phi_{\max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

(c) Reescreva a expressão de ω_{\max} para que a fase máxima ocorra na frequência que é dada pela média geométrica de duas frequências de canto na escala logarítmica:

$$\log \omega_{\max} = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right).$$

(d) Para obter os mesmos resultados em termos das localização do polo e do zero, reescreva $D(s)$ como

$$D(s) = \frac{s+z}{s+p},$$

e, então, mostre que a fase é dada por

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{|z|} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{|p|} \right),$$

tal que

$$\omega_{\max} = \sqrt{|z||p|}.$$

Então, a frequência na qual a fase é máxima é a raiz quadrada do produto das localizações do polo e do zero.

6.45 Para o servo sistema de terceira ordem

$$G(s) = \frac{50.000}{s(s+10)(s+50)},$$

use esboços do diagrama de Bode para projetar um compensador de avanço tal que $\text{PM} \geq 50^\circ$ e $\omega_{\text{BW}} \geq 20 \text{ rad/s}$. Então, verifique e refine seu projeto usando o MATLAB.

6.46 Para o sistema mostrado na Fig. 6.102, suponha que

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)(s/5+1)}.$$

Use esboços do diagrama de Bode para projetar um compensador de avanço $D(s)$ com ganho DC unitário tal que $\text{PM} \geq 40^\circ$. Então, verifique e refine seu projeto usando o MATLAB. Qual é a largura de banda aproximada do sistema?

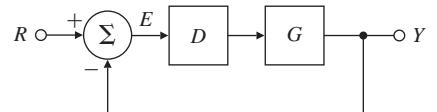


Figura 6.102 Sistema de controle para o Problema 6.46.

6.47 Obtenha a função de transferência de T_d para θ do sistema mostrado na Fig. 6.70. Então, aplique o Teorema do Valor Final (assumindo $T_d = \text{constante}$) para determinar se $\theta(\infty)$ é diferente de zero para os dois casos seguintes:

- (a) Quando $D(s)$ não tem termo integrador: $\lim_{s \rightarrow 0} D(s) = \text{constante}$;
- (b) Quando $D(s)$ tem um termo integrador:

$$D(s) = \frac{D'(s)}{s}.$$

Neste caso, $\lim_{s \rightarrow 0} D'(s) = \text{constante}$.

6.48 O pêndulo invertido tem uma função de transferência dada pela Eq. (2.31), a qual é similar a

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}.$$

- (a) Use esboços do diagrama de Bode para projetar um compensador de avanço que forneça uma PM de 30° . Então, verifique e refine seu projeto usando o MATLAB.
- (b) Esboce o lugar das raízes e correlacione-o com o diagrama de Bode do sistema.
- (c) É possível obter a resposta em frequência deste sistema experimentalmente?

6.49 A função de transferência em malha aberta de um sistema com realimentação unitária é

$$G(s) = \frac{K}{s(s/5+1)(s/50+1)}.$$

- (a) Use esboços do diagrama de Bode para projetar um compensador de avanço para $G(s)$ tal que o sistema em malha fechada satisfaça às especificações:
 - (i) Erro em regime permanente para uma rampa como entrada de referência menor que 0,01.
 - (ii) $\text{PM} \geq 40^\circ$.
- (b) Verifique e refine seu projeto usando o MATLAB.

6.50 A função de transferência em malha aberta de um sistema com realimentação unitária é

$$G(s) = \frac{K}{s(s/5+1)(s/200+1)}.$$

- (a) Use esboços do diagrama de Bode para projetar um compensador de avanço para $G(s)$ tal que o sistema em malha fechada satisfaça às especificações:
 - (i) Erro em regime permanente para uma rampa como entrada de referência menor que 0,01.
 - (ii) Coeficiente de amortecimento $\zeta \geq 0,4$ para os polos dominantes de malha fechada.
- (b) Verifique e refine seu projeto usando o MATLAB, incluindo uma computação direta do coeficiente de amortecimento dos polos dominantes em malha fechada.

6.51 Um motor CC com a indutância de armadura desprezada é usado em um sistema de controle de posição. A sua função de transferência em malha aberta é dada por

$$G(s) = \frac{50}{s(s/5 + 1)}.$$

- (a)** Use esboços do diagrama de Bode para projetar um compensador para o motor, tal que o sistema em malha fechada satisfaça às especificações:
- Erro em regime permanente para uma entrada em rampa menor que 1/200.
 - Sobressinal menor que 20% para um entrada ao degrau.
 - A largura de banda do sistema compensado não seja menor que a largura de banda do sistema sem o compensador.
- (b)** Verifique e/ou refine seu projeto usando o MATLAB, incluindo uma computação direta do sobressinal da resposta ao degrau.

6.52 A função de transferência de um sistema com realimentação unitária é

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + s/5)(1 + s/20)}.$$

- (a)** Esboce o diagrama de blocos do sistema, incluindo os comandos de entrada de referência e de ruído no sensor.
- (b)** Use esboços do diagrama de Bode para projetar um compensador para $G(s)$ tal que o sistema em malha fechada satisfaça às especificações:
- Erro em regime permanente para uma entrada em rampa menor que 0,01.
 - $PM \geq 45^\circ$.
 - Erro em regime permanente para entradas senoidais com $\omega < 0,2$ rad/s menor que 1/250.
 - Componentes de ruído são introduzidas ao sinal do sensor em frequências superiores a 200 rad/s e devem ser atenuadas na saída por pelo menos um fator de 100.
- (c)** Verifique e/ou refine seu projeto usando o MATLAB, incluindo uma computação da resposta em frequência em malha fechada para verificar o item (iv).

6.53 Considere um sistema do Tipo 1 com realimentação unitária sendo

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)}.$$

Use esboços do diagrama de Bode para projetar um compensador de avanço tal que $K_v = 20 \text{ s}^{-1}$ e $PM > 40^\circ$. Use o MATLAB para verificar e/ou refinar seu projeto tal que as especificações sejam atendidas.

6.54 Considere um sistema de controle de atitude de satélite com a função de transferência

$$G(s) = \frac{0,05(s + 25)}{s^2(s^2 + 0,1s + 4)}.$$

Estabilize o sistema em amplitude usando um compensador de avanço tal que a $GM \geq 2$ (6 db), e a $PM \geq 45^\circ$, mantendo a largura de banda tão alta quanto possível com um único compensador.

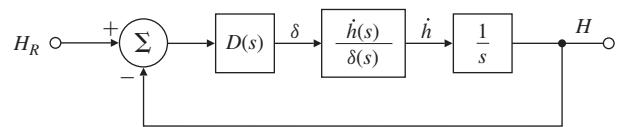
6.55 Em um modo de operação, o piloto automático de um jato de transporte é utilizado para controlar a altitude. Com a finalidade de projetar a malha de controle de altitude do piloto automático, apenas as dinâmicas de longo período do avião são importantes. A relação linearizada entre a altitude e o ângulo do profundo para dinâmica de longo período é

$$G(s) = \frac{h(s)}{\delta(s)} = \frac{20(s + 0,01)}{s(s^2 + 0,01s + 0,0025)} \frac{\text{pés/s}}{\text{grau}}.$$

O piloto automático recebe do altímetro um sinal elétrico proporcional à altitude. Este sinal é comparado com um sinal de comando (proporcional à altitude selecionada pelo piloto), e a diferença fornece um sinal de erro. O sinal de erro é processado por meio de uma compensação, e o resultado é usado para comandar os atuadores nos profundos. Um diagrama de blocos deste sistema é mostrado na Fig. 6.103. Considere que lhe foi dada a tarefa de projetar um compensador. Comece considerando uma lei de controle proporcional $D(s) = K$.

- (a)** Use o MATLAB para esboçar o diagrama de Bode do sistema em malha aberta para $D(s) = K = 1$.
- (b)** Qual valor de K fornece uma frequência de cruzamento (i.e. onde $|G| = 1$) de 0,16 rad/s?

Figura 6.103 Sistema de controle para o Problema 6.55.



- (c) Para esse valor de K , o sistema pode ficar estável se a malha for fechada?
- (d) Qual é a PM para este valor de K ?
- (e) Esboce o diagrama de Nyquist para o sistema e localize cuidadosamente pontos onde o ângulo da fase seja 180° ou a magnitude seja unitária.
- (f) Use o MATLAB para traçar o lugar das raízes em relação a K e localize as raízes para o valor de K selecionado no item (b).
- (g) Qual poderia ser o erro em estado estacionário resultante se o comando fosse alterado para um degrau de altitude de 1000 pés?

Para os itens (h) e (i), assuma um compensador da forma

$$D(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}.$$

- (h) Escolha os parâmetros K , T e α tal que a frequência de cruzamento seja $0,16 \text{ rad/s}$ e a PM seja maior que 50° . Verifique seu projeto sobrepondo ao diagrama de Bode obtido no item (a) o diagrama de Bode de $D(s)G(s)/K$ e meça a PM diretamente.
- (i) Use o MATLAB para traçar o lugar das raízes em relação a K , incluindo o compensador projetado no item (h). Localize as raízes para o seu valor de K do item (h).
- (j) Pilotos automáticos de altitude têm um modo no qual a taxa de subida é sentida diretamente e comandada pelo piloto.
 - (i) Esboce o diagrama de blocos para este modo.
 - (ii) Defina a $G(s)$ pertinente.
 - (iii) Projete $D(s)$ tal que o sistema tenha a mesma frequência de cruzamento do sistema de altitude e a PM seja superior a 50° .

6.56 Para um sistema com função de transferência em malha aberta

$$G(s) = \frac{10}{s[(s/1,4) + 1][(s/3) + 1]},$$

projete um compensador de atraso com ganho DC unitário tal que $\text{PM} \geq 40^\circ$. Qual é a largura de banda, aproximadamente, para este sistema?

6.57 Para o sistema de direcionamento de navio no Problema 6.39,

- (a) Projete um compensador que atenda às seguintes especificações:
 - (i) Constante de velocidade $K_v = 2$;
 - (ii) $\text{PM} \geq 50^\circ$,
 - (iii) Estabilidade incondicional ($\text{PM} > 0$ para todo $\omega \leq \omega_c$, a frequência de cruzamento)
- (b) Para o seu projeto final, trace o lugar das raízes em relação a K e indique a localização dos polos de malha fechada.

6.58 Considere o sistema de realimentação unitária com

$$G(s) = \frac{1}{s(s/20 + 1)(s^2/100^2 + 0,5s/100 + 1)}. \quad (6.78)$$

- (a) Um compensador de avanço é introduzido com $\alpha = 1/5$ e um zero em $1/T = 20$. Em quanto o ganho deve ser alterado para obter uma frequência de cruzamento $\omega_c = 31,6 \text{ rad/s}$ e qual é o valor resultante de K_v ?
- (b) Com o compensador de avanço instalado, qual é o valor de K necessário para um compensador de atraso reajustar o valor de K_v para 100?
- (c) Escolha a posição do polo do compensador de atraso em $3,16 \text{ rad/s}$ e a localização do zero que mantém a frequência de cruzamento em $\omega_c = 31,6 \text{ rad/s}$. Trace a resposta em frequência compensada no mesmo gráfico.

(d) Determine a PM do projeto compensado.

- 6.59** A companhia aérea Golden Nugget Airlines teve grande sucesso com seu bar próximo à cauda do avião. (Veja o Problema 5.39.) No entanto, quando eles compraram um avião muito maior para lidar com a demanda de passageiros, descobriram que havia uma certa flexibilidade na fuselagem da aeronave que causava uma grande quantidade de movimentos desagradáveis na parte traseira do avião quando em turbulência, o que causou o derramamento das bebidas dos passageiros. A função de transferência aproximada para a oscilação de guinada acoplada a um rolamento (Seção 10.3.1) é

$$\frac{r(s)}{\delta_r(s)} = \frac{8,75(4s^2 + 0,4s + 1)}{(s/0,01 + 1)(s^2 + 0,24s + 1)},$$

sendo r a taxa de guinada do avião e δ_r o ângulo do leme. Na realização de uma análise de elementos finitos (FEA) na estrutura da fuselagem, e adicionando essa dinâmica ao movimento de guinada acoplada a um rolamento, foi descoberto que a função de transferência necessitava de termos adicionais que refletem a flexão na fuselagem lateral devido à excitação do leme e turbulência. A função de transferência revista é

$$\frac{r(s)}{\delta_r(s)} = \frac{8,75(4s^2 + 0,4s + 1)}{(s/0,01 + 1)(s^2 + 0,24s + 1)} \cdot \frac{1}{(s^2/\omega_b^2 + 2\zeta s/\omega_b + 1)},$$

sendo ω_b a frequência no modo de flexão ($= 10$ rad/s) e ζ é o coeficiente de amortecimento no modo de flexão ($= 0,02$). Muitos aviões têm um “amortecimento de guinada”, que essencialmente realimenta a taxa de guinada medida por um giroscópio para o leme com uma lei de controle simplesmente proporcional. Para o novo avião Golden Nugget, o ganho de realimentação proporcional $K = 1$, onde

$$\delta_r(s) = -Kr(s). \quad (6.79)$$

- (a) Faça um diagrama de Bode do sistema em malha aberta, determine a PM e a GM para o projeto nominal e trace a resposta ao degrau e a curva de magnitude de Bode para o sistema em malha fechada. Qual é a frequência no modo levemente amortecido que está causando a dificuldade?
- (b) Investigue formas de reduzir as oscilações, mas mantendo o mesmo ganho de baixa frequência para não afetar a qualidade do amortecimento no movimento de guinada acoplada a um rolamento fornecida pela realimentação da taxa de guinada. Especificamente, investigue cada um dos seguintes itens, um de cada vez:
- (i) Aumente o coeficiente de amortecimento no modo de flexão de $\zeta = 0,02$ até $\zeta = 0,04$ (é necessário a adição de materiais de absorção de energia na estrutura da fuselagem).
 - (ii) Aumente a frequência no modo de flexão de $\omega_b = 10$ rad/s até $\omega_b = 20$ rad/s (são necessários elementos estruturais mais fortes e mais pesados)
 - (iii) Adicione um filtro passa-baixa na realimentação – isto é, substitua K na Eq. (6.79) por $KD(s)$, com

$$D(s) = \frac{1}{s/\tau_p + 1}. \quad (6.80)$$

Selecione τ_p tal que os objetivos desejados no modo de flexão sejam reduzidos enquanto a margem de fase satisfaz $PM \geq 60^\circ$.

- (iv) Adição de um filtro de rejeição de faixa, tal como descrito na Seção 5.4.3. Escolha a frequência do zero em ω_b com um amortecimento de $\zeta = 0,04$, e faça os polos do denominador serem $(s/100 + 1)^2$, mantendo o ganho DC do filtro = 1.

(c) Investigue a sensibilidade dos últimos dois compensadores projetados (iii e iv) determinando o efeito de uma redução na frequência no modo de flexão de -10% . Especificamente, reexamine os dois projetos tabulando GM, PM, o coeficiente de amortecimento no modo de flexão em malha fechada e o pico de ressonância da magnitude, e descreva qualitativamente as diferenças na resposta ao degrau.

(d) Faça uma recomendação para a Golden Nugget de modo que seus clientes deixem de derramar suas bebidas. (Recomendar que os clientes voltem a seus acentos não é uma resposta aceitável para este problema! Faça a recomendação em termos de melhorias para o amortecimento de guinada.)

△ **6.60** Considere um sistema com função de transferência em malha aberta (ganho de malha)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s/10+1)}.$$

- (a) Trace o diagrama de Bode para este sistema e encontre a PM e a GM.
- (b) Obtenha a função de sensibilidade e trace a curva de magnitude de sua resposta em frequência.
- (c) Calcule o vetor de margem (VM).

△ **6.61** Demonstre que a função de sensibilidade $S(s)$ tem magnitude superior a 1 dentro de um círculo com raio 1 centrado no ponto -1 . O que isso implica na forma do diagrama de Nyquist se o controle de malha fechada for melhor que o controle em malha aberta em todas as freqüências?

△ **6.62** Considere o sistema na Fig. 6.104 com a função de transferência

$$G(s) = \frac{10}{s(s/10+1)}.$$

- (a) Deseja-se um compensador $D(s)$ que satisfaça às seguintes especificações de projeto:
 - (i) $K_v = 100$
 - (ii) $PM \geq 45^\circ$
 - (iii) Seguimento de entradas senoidais até 1 rad/s com erro $\leq 2\%$
 - (iv) Atenuação de $\leq 5\%$ na saída das entradas senoidais com frequências maiores que 100 rad/s.
- (b) Trace o diagrama de Bode de $G(s)$, escolhendo o ganho de malha aberta tal que $K_v = 100$.
- (c) Mostre que uma condição suficiente para atender à especificação das entradas senoidais é que a curva da magnitude esteja fora das regiões sombreadas na Fig. 6.104. Lembre-se de que

$$\frac{Y}{R} = \frac{KG}{1+KG} \quad \text{e} \quad \frac{E}{R} = \frac{1}{1+KG}.$$

- (d) Explique por que a introdução de uma rede de avanço sozinha não satisfaz às especificações de projeto.
- (e) Explique por que uma rede de atraso sozinha não satisfaz às especificações de projeto.
- (f) Desenvolva um compensador completo de atraso e avanço que satisfaz a todas as especificações de projeto sem alterar o ganho de baixas freqüências escolhido anteriormente.

△ Problemas da Seção 6.8: retardo no tempo

6.63 Assuma que o sistema

$$G(s) = \frac{e^{-T_d s}}{s + 10}$$

tenha um retardo no tempo de 0,2 s ($T_d = 0,2$ s). Mantendo a margem de fase $\geq 40^\circ$, encontre a largura de banda máxima usando:

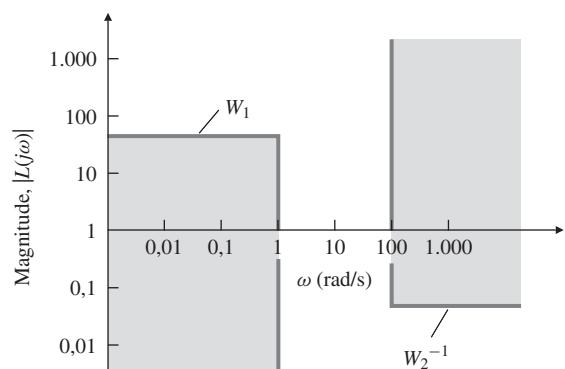


Figura 6.104 Restrições do sistema de controle para o Problema 6.62.

(a) Um compensador de avanço

$$D(s) = K \frac{s + a}{s + b},$$

com $b/a = 100$;

(b) Dois compensadores de avanço

$$D(s) = K \left(\frac{s + a}{s + b} \right)^2,$$

com $b/a = 10$;

(c) Comente sobre as características apresentadas no texto sobre as limitações na largura de banda imposta por um atraso.

6.64 Determine a faixa de valores de K para os quais os seguintes sistemas são estáveis:

(a) $G(s) = K \frac{e^{-4s}}{s}$

(b) $G(s) = K \frac{e^{-s}}{s(s+2)}$

6.65 No Capítulo 5, usamos várias aproximações para o retardo no tempo; uma delas é a aproximação de primeira ordem de Padé:

$$e^{-T_d s} \cong H_1(s) = \frac{1 - T_d s/2}{1 + T_d s/2}.$$

Usando os métodos de resposta em frequência, o valor exato do retardo no tempo

$$H_2(s) = e^{-T_d s}$$

pode ser obtido. Trace a fase de $H_1(s)$ e $H_2(s)$ e discutas suas implicações.

6.66 Considere o trocador de calor do Exemplo 2.15 com a função de transferência em malha aberta

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(10s+1)(60s+1)}.$$

(a) Projete um compensador de avanço que forneça $PM \geq 45^\circ$ e a máxima largura de banda possível.

(b) Projete um compensador PI que forneça $PM \geq 45^\circ$ e a máxima largura de banda possível.

Δ Problemas da Seção 6.9: representação alternativa dos dados

6.67 Um sistema de controle realimentado é mostrado na Fig. 6.105. O sistema em malha fechada é especificado para ter um sobressinal menor que 30% para uma entrada em degrau.

(a) Determine a especificação correspondente em PM no domínio da frequência e o valor do pico de ressonância M_r em malha fechada correspondente. (Veja a Fig. 6.38.)

(b) A partir do diagrama de Bode do sistema, determine o valor máximo de K que satisfaça às especificações de PM.

(c) Trace os dados do diagrama de Bode [ajustado para o valor de K obtido no item (b)] em uma cópia da Carta de Nichols da Fig. 6.84, e determine o pico de ressonância na magnitude M_r . Compare com o valor aproximado obtido no item (a).

(d) Use a Carta de Nichols para determinar a frequência de ressonância ω_r e a largura de banda em malha fechada.

6.68 As curvas de Nichols de um sistema não compensado e de um sistema compensado são mostradas na Fig. 6.106.

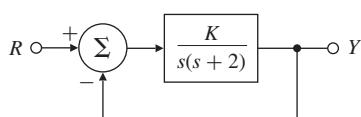


Figura 6.105 Sistema de controle para o Problema 6.67.

- (a) Quais são os picos de ressonância de cada sistema?
- (b) Quais são as PM e GM de cada sistema?
- (c) Quais são as larguras de banda de cada sistema?
- (d) Qual tipo de compensador é usado?

6.69 Considere o sistema mostrado na Fig. 6.97.

- (a) Construa o diagrama de Nyquist inverso de $[Y(j\omega)/E(j\omega)]^{-1}$. (Veja o material complementar W6, disponível (em inglês) no site do Grupo A.)
- (b) Mostre como o valor de K para um sistema neutramente estável pode ser lido diretamente do diagrama de Nyquist inverso.
- (c) Para $K = 4,2$, e 1, determine as margens de fase e ganho.
- (d) Construa o lugar das raízes do sistema e identifique os pontos correspondentes nos dois gráficos. Para quais coeficientes de amortecimento ζ as GM e PM correspondem aos valores no item (c)?

6.70 Uma planta instável tem a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s+1}{(s-1)^2}.$$

Uma malha de controle simples será fechada em volta dela, como mostrado no diagrama de blocos na Fig. 6.97.

- (a) Construa o diagrama de Nyquist inverso de Y/F . (Veja o material complementar W6.)

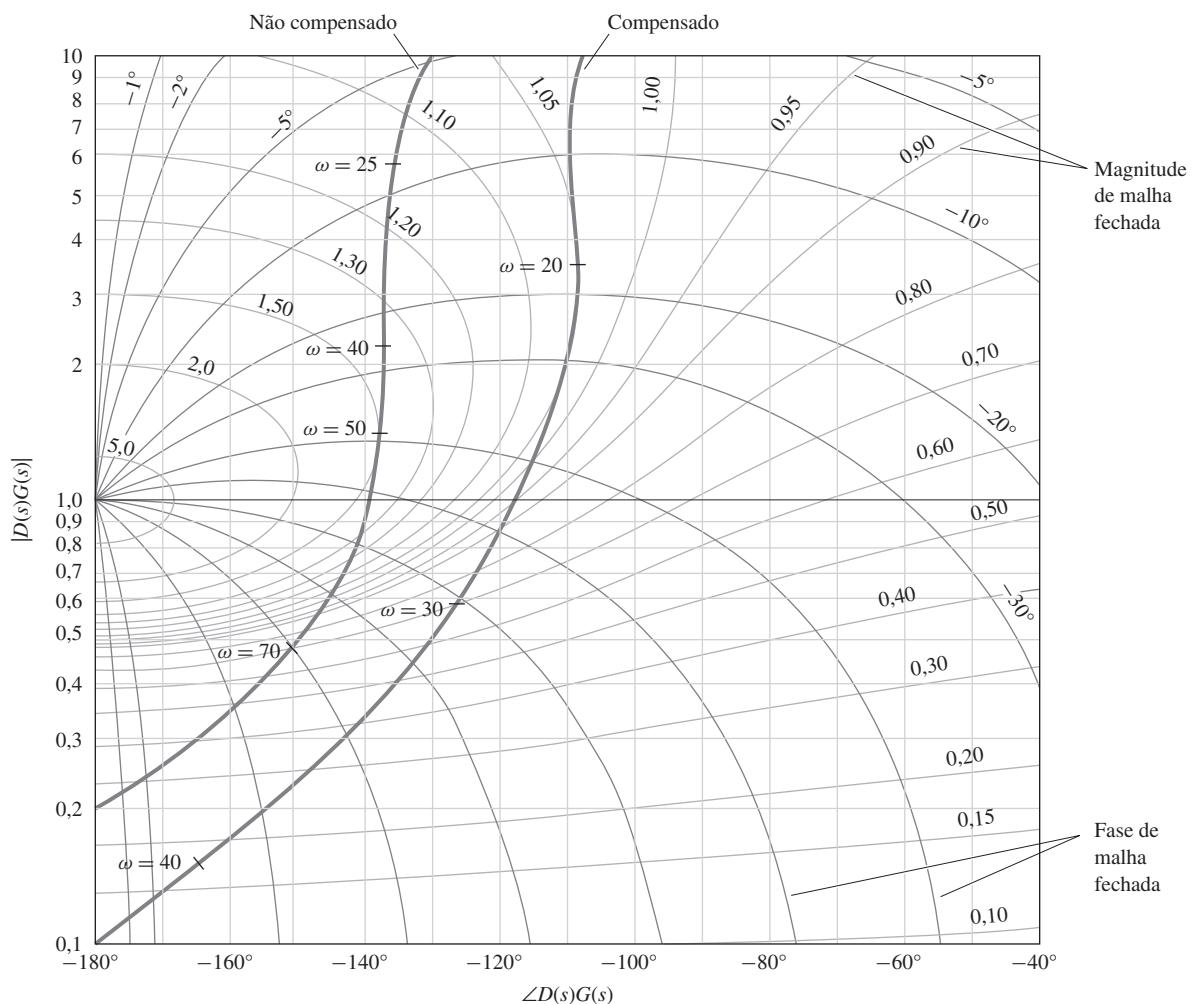


Figura 6.106 Curvas de Nichols para o Problema 6.68.

- (b) Escolha um valor de K que forneça uma PM de 45° . Qual é a GM correspondente?
- (c) O que pode ser inferido do gráfico sobre a estabilidade do sistema quando $K < 0$?
- (d) Construa o gráfico do lugar das raízes para o sistema e identifique os pontos correspondentes nos dois gráficos. Nesse caso, qual valor de ζ corresponde à PM = 45° ?
- 6.71** Considere o sistema mostrado na Fig. 6.107 (a)
- Construa um diagrama de Bode para o sistema.
 - Use seu diagrama de Bode para esboçar o diagrama de Nyquist inverso. (Veja o material complementar W6, disponível [em inglês] no site do Grupo A.)
 - Considere $G(s)$ em malha fechada, como mostrado na Fig. 6.107(b). Usando o diagrama de Nyquist inverso como um guia, leia no diagrama de Bode os valores da GM e PM quando $K = 0,7, 1,0, 1,4$ e 2 . Qual valor de K fornece a PM = 30° ?
 - Construa o gráfico do lugar das raízes e marque os mesmos valores de K . Para qual valor de ζ corresponde cada par de PM/GM? Compare ζ com a PM usando a aproximação na Fig. 6.37.

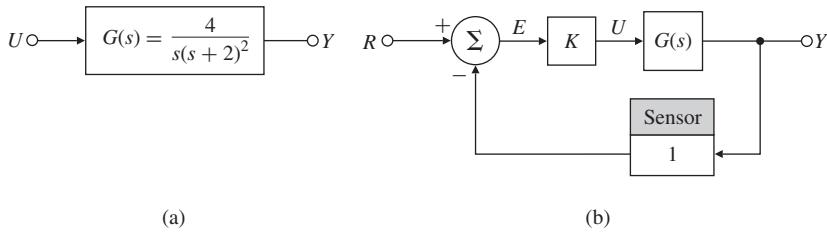
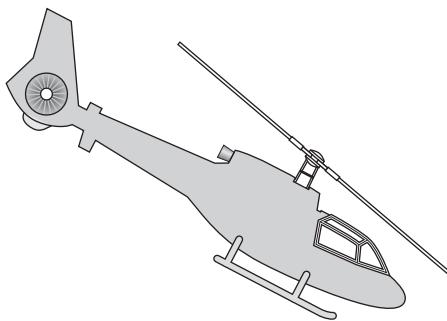


Figura 6.107 Sistema de controle para o Problema 6.71.

Projeto no Espaço de Estados



Além das técnicas de transformadas – lugar das raízes e resposta em frequência –, há um terceiro importante método de projeto de sistemas de controle realimentado: o método de espaço de estado. Introduziremos o método de variáveis de estado para descrever equações diferenciais. No projeto em espaço de estados, o engenheiro de controle projeta uma compensação dinâmica, trabalhando diretamente com a descrição do sistema em variáveis de estado. Como as técnicas de transformadas, o objetivo do método em espaço de estado é encontrar uma compensação $D(s)$, como mostrado na Fig. 7.1, que satisfaça às especificações do projeto. O método, no espaço de estados, de descrever a planta e calcular o compensador é tão diferente das técnicas de transformadas que, à primeira vista, pode parecer, que se está resolvendo um problema totalmente diferente. Selecionamos exemplos e analisamos dados para, ao final deste capítulo, ajudar a convencê-lo de que, na realidade, um compensador com função de transferência $D(s)$ resultante do projeto no espaço de estados é equivalente aos compensadores $D(s)$ obtidos com os outros dois métodos.

Como o método de espaço de estados é particularmente bem adequado para o uso de técnicas computacionais, o projeto no espaço de estados é cada vez mais estudado e usado por engenheiros de controle.

Visão geral do capítulo

Este capítulo começa considerando os propósitos e vantagens da utilização do projeto no espaço de estados. Discutimos a seleção das variáveis de estado e do modelo em espaço de estado para vários sistemas dinâmicos por meio dos vários exemplos na Seção 7.2. Modelos em espaço de

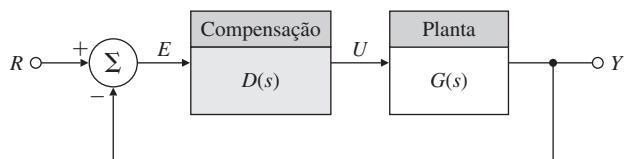


Figura 7.1 Definição de um sistema de controle.

estado fornecem uma forma adequada para aplicar ferramentas computacionais eficientes de projeto assistido por computador, tais como o MATLAB®. Na Seção 7.3, mostramos que é benéfico considerar modelos em variáveis de estado em termos de um modelo analógico de simulação computacional. Na Seção 7.4, estudamos o desenvolvimento de equações em variáveis de estado a partir de diagramas de blocos. Em seguida, realizando cálculos manuais e computacionais e analisamos a resposta dinâmica usando equações de estado. Após percorrido esses fundamentos preliminares, procede-se à principal tarefa de projeto de controle do sistema via espaço de estados. As etapas do método de projeto são as seguintes:

1. Selecione a localização dos polos de malha fechada (raízes, como referido nos capítulos anteriores) e desenvolva a lei de controle para o sistema em malha fechada que corresponda à resposta dinâmica satisfatória (Seções 7.5 e 7.6).
2. Projete um estimador (Seção 7.7).
3. Combine a lei de controle e o estimador (Seção 7.8).
4. Introduza a entrada de referência (Seções 7.5.2 e 7.9).

Depois analisar as etapas centrais de projeto, exploraremos brevemente o uso do controle integral em espaço de estados (Seção 7.10). As próximas três seções deste capítulo consideram alguns conceitos adicionais relativos ao método de espaço de estado; em razão de serem relativamente avançados, podem ser considerados opcionais para alguns cursos ou leitores. Finalmente, a Seção 7.14 fornece uma perspectiva histórica do material neste capítulo.

7.1 Vantagens do espaço de estados

A noção de **espaço de estado** vem do método de variáveis de estado para descrever equações diferenciais. Nesse método, as equações diferenciais que descrevem um sistema dinâmico são organizadas como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem no vetor de estados do sistema, e a solução é visualizada como uma trajetória desse vetor de estados no espaço. O **projeto de controle no espaço de estados** é a técnica em que o engenheiro de controle projeta uma compensação dinâmica, trabalhando diretamente com a descrição do sistema em variáveis de estado. Até agora, vimos que as equações diferenciais ordinárias (EDOs) da física dos sistemas dinâmicos podem ser manipuladas na forma de variáveis de estado. No campo da matemática, no qual as EDOs são estudadas, a forma de variáveis de estado é chamada de **forma normal** para as equações. Existem várias boas razões para estudar equações desta forma, três das quais estão listadas aqui:

- *Estudar modelos mais gerais:* as EDOs não precisam ser lineares ou estacionárias. Assim, estudando-se as equações, podemos desenvolver métodos muito gerais. Portanto, a descrição em variáveis estado nos fornece uma forma compacta padrão para o estudo. Além disso, as técnicas de análise e projeto em espaço de estados podem ser facilmente estendidas para sistemas com múltiplas entradas e/ou múltiplas saídas. É claro que, neste texto, estudamos principalmente modelos lineares invariantes no tempo com única entrada e única saída (pelas razões dadas anteriormente).
- *Introduzir noções de geometria em equações diferenciais:* na física, o plano da posição versus velocidade de uma partícula ou corpo rígido é chamado de **plano de fase**, e a trajetória do movimento pode ser traçada como uma curva nesse plano. O estado é uma generalização da noção de incluir mais de duas dimensões. Embora não possamos traçar mais de três dimensões, os conceitos de distância, de linhas ortogonais e paralelas e outros conceitos da geometria podem ser úteis para visualizar a solução de uma EDO como um caminho no espaço de estados.
- *Conectar as descrições interna e externa:* o estado de um sistema dinâmico, muitas vezes, descreve diretamente a distribuição da energia interna do sistema. Por exemplo, é comum selecionar as seguintes variáveis de estado: posição (energia potencial), velocidade (energia cinética), tensão no capacitor (energia elétrica) e corrente no indutor (energia magnética). A

Forma normal

Plano de fase

energia interna pode sempre ser calculada a partir das variáveis de estado. Para um sistema ser descrito brevemente, pode-se relacionar o estado às entradas e saídas do sistema e, assim, conectar as variáveis internas às entradas externas e saídas. Em contraste, a função de transferência relaciona apenas a entrada com a saída e não mostra o comportamento interno. A forma de estado mantém a última informação, o que às vezes é importante.

A abordagem de espaço de estado tem sido muitas vezes referida como **projeto de controle moderno**, e o uso do método baseado em função de transferência, como lugar das raízes e resposta em frequência, é conhecido como **projeto de controle clássico**. No entanto, devido ao método de espaço de estado para descrição de EDOs ter sido usado por mais de 100 anos e ter sido introduzido para projetos de controle no final dos anos 1950, parece um tanto enganador nos referirmos a ele como moderno. Assim, preferimos fazer referência às duas abordagens de projeto como método de espaço de estados e métodos de transformadas.

As vantagens do espaço de estados para o projeto são especialmente evidentes quando o sistema a ser controlado tem mais de uma entrada de controle ou mais de uma saída. No entanto, neste livro examinaremos as noções de espaço de estados de projeto usando os mais simples sistemas de única entrada e única saída (SISO). A abordagem de projeto usada para sistemas descritos em forma de estado é “dividir e conquistar”.

Primeiro, vamos criar o controle como se todos os estados fossem medidos e disponíveis para uso na lei de controle. Isto proporciona a possibilidade de atribuir ao sistema uma dinâmica arbitrária. Tendo uma lei de controle satisfatória com base na realimentação completa dos estados, introduziremos o conceito de um observador e construiremos estimativas do estado com base na saída medida. Em seguida, mostraremos que estas estimativas podem ser usadas no lugar das variáveis de estado atuais. Finalmente, introduziremos comandos de referência externos, e a estrutura estará completa. Somente neste ponto podemos reconhecer que a compensação resultante tem a mesma estrutura essencial como a desenvolvida com os métodos de transformadas.

Antes de podermos começar o projeto utilizando descrições de estado, é necessário desenvolver alguns resultados analíticos e ferramentas a partir da álgebra matricial para uso em todo o capítulo. Assumimos que você está familiarizado com conceitos elementares como matriz identidade, triangular, diagonal e transposta. Também assumimos que você tem alguma familiaridade com a mecânica da álgebra matricial, incluindo a adição, multiplicação e inversão de matrizes. Resultados mais avançados serão desenvolvidos na Seção 7.4, no contexto da resposta dinâmica de um sistema linear. Todos os resultados de álgebra linear utilizados neste capítulo são repetidos no Apêndice WE (disponível em inglês no site do Grupo A).

7.2 Descrição de sistemas no espaço de estados

O movimento de qualquer sistema dinâmico finito pode ser expresso como um conjunto de EDOs de primeira ordem. Isto é muitas vezes referido como a representação por variáveis de estado. Por exemplo, o uso da lei de Newton e o diagrama de corpo livre na Seção 2.1 normalmente levam a equações diferenciais de segunda ordem – isto é, equações que contêm a segunda derivada, como \ddot{x} na Eq. (2.3) ou $\ddot{\theta}$ na Eq. (2.15). A última equação pode ser expressa como

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (7.1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{I}, \quad (7.2)$$

sendo

$$u = F_c d + M_D,$$

$$x_1 = \theta,$$

$$x_2 = \dot{\theta},$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}.$$

A saída deste sistema é θ , a atitude do satélite.

Essas equações podem ser representadas na **forma de variáveis de estado** como a equação vetorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u, \quad (7.3)$$

em que u é a entrada e a saída é

$$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju. \quad (7.4)$$

Forma padrão de equações lineares diferentes

O vetor coluna \mathbf{x} é chamado de **estado do sistema** e contém n elementos para um sistema de n -ésima ordem. Para os sistemas mecânicos, os elementos no vetor de estados geralmente consistem das posições e velocidades dos corpos separados, como é o caso do exemplo nas Eqs. (7.1) e (7.2). A quantidade \mathbf{F} é uma **matriz do sistema** $n \times n$, \mathbf{G} é uma **matriz de entrada** $n \times 1$, \mathbf{H} é uma matriz linha $1 \times n$ referida como **matriz de saída**, e J é um escalar chamado de **termo de transmissão direta**.¹ Para economizar espaço, às vezes vamos nos referir a um vetor de estado por seu transposto,

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \dots]^T,$$

o que é equivalente a

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Os modelos em equações diferenciais de sistemas mais complexos, como os desenvolvidos no Capítulo 2 em sistemas mecânicos, elétricos e eletromecânicos, podem ser descritos por variáveis de estado por meio da seleção de posições, velocidades, tensões nos capacitores e correntes nos indutores como variáveis de estado adequadas.

Neste capítulo, vamos considerar o projeto de controle de sistemas utilizando a forma de variáveis de estado. Para o caso em que as relações são não lineares [como é o caso nas Eqs. (2.22), (2.75) e (2.79)], a forma linear não pode ser usada diretamente. Deve-se linearizar as equações como fizemos no Capítulo 2 para se adequar ao formato (veja também o Capítulo 9).

O método de variáveis de estado para especificar equações diferenciais é usado por pacotes computacionais para projeto de sistemas de controle (por exemplo, MATLAB). Portanto, a fim de especificar equações diferenciais lineares no computador, precisa-se saber os valores das matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} e da constante J .

EXEMPLO 7.1 *Modelo do controle de atitude de satélite na forma em espaço de estados*

Determine as matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} , J na forma de variáveis de estado para o modelo de controle de atitude de satélite no Exemplo 2.3 com $M_D = 0$.

Solução. Defina a atitude e a velocidade angular do satélite como as variáveis de estado tal que $\mathbf{x} \triangleq [\theta \ \omega]^T$.² A equação de segunda ordem (2.15) pode, então, ser escrita em uma forma equivalente como duas equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \frac{d}{I} F_c. \end{aligned}$$

Essas equações são expressas, usando a Eq. (7.3), $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$, como

¹ Também é comum usar a notação \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e D no lugar de \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} e J . Usaremos normalmente \mathbf{F} , \mathbf{G} para representar dinâmicas da planta e \mathbf{A} , \mathbf{B} para representar um sistema linear geral.

² O símbolo \triangleq significa “é definido como”.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d/I \end{bmatrix} F_c.$$

A saída do sistema é a atitude do satélite, $y = \theta$. Usando a Eq. (7.4), $y = \mathbf{Hx} + Ju$, essa relação é expressa como

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Portanto, as matrizes na forma de variáveis de estado são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ d/I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [1 \ 0], \quad J = 0,$$

e a entrada $u \triangleq F_c$.

Para este exemplo muito simples, a forma de variáveis de estado é uma forma mais pesada de escrever a equação diferencial que a versão de segunda ordem na Eq. (2.15). No entanto, o método não é mais complicado para a maioria dos sistemas, e as vantagens de ter uma forma padrão para o uso de ferramentas computacionais de auxílio para o projeto levaram ao uso generalizado da forma de variáveis de estado.

Os próximos exemplos são mais complexos e mostram como usar o MATLAB para encontrar a solução das equações diferenciais.

EXEMPLO 7.2 Resposta ao degrau de um sistema de controle de velocidade em cruzeiro

- Reescreva a equação de movimento do Exemplo 2.1 na forma de variáveis de estado, sendo a saída a posição do carro x .
- Use o MATLAB para encontrar a resposta da velocidade do carro para o caso no qual a entrada muda de $u = 0$ em $t = 0$ para uma constante $u = 500$ N em seguida. Assuma que a massa do carro m é 1.000 kg e $b = 50$ N·s/m.

Solução.

- Equações de movimento:** primeiro, precisamos expressar a equação diferencial que descreve a planta, Eq. (2.3), como um conjunto de equações de primeira ordem. Para isto, definimos a posição e a velocidade do carro como as variáveis de estado \dot{x} e v , tal que $\dot{x} = [x \ v]^T$. A equação de segunda ordem, Eq. (2.3), pode, então, ser escrita como um conjunto de duas equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{b}{m}v + \frac{1}{m}u. \end{aligned}$$

Em seguida, usamos a forma padrão da Eq. (7.3), $\dot{x} = \mathbf{Fx} + \mathbf{Gu}$, para expressar estas equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u. \quad (7.5)$$

A saída do sistema é a posição do carro $y = x_1 = x$, expressa na forma matricial como

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix},$$

ou

$$y = \mathbf{Hx}.$$

Então, as matrizes na forma de variáveis em espaço de estados são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [1 \ 0], \quad J = 0.$$

(b) Resposta temporal: as equações de movimento são as dadas no item (a), exceto que agora a saída é $v = x_2$. Portanto, a matriz de saída é

$$\mathbf{H} = [0 \ 1].$$

Os coeficientes são $b/m = 0,05$ e $1/m = 0,001$. Os valores numéricos das matrizes que definem o sistema são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [0 \ 1], \quad J = 0.$$

A função `step` no MATLAB calcula a resposta temporal de um sistema linear para um degrau unitário na entrada. Devido ao fato de o sistema ser linear, a saída para este caso pode ser multiplicada pela magnitude do degrau na entrada para obter a resposta ao degrau de qualquer amplitude. Equivalentemente, a matriz \mathbf{G} pode ser multiplicada pela magnitude do degrau na entrada.

Os comandos

```
F = [0 1;0 -0.05];
G = [0;0.001];
H = [0 1];
J = 0;
sys = ss(F, 500*G,H,J); % step calcula a resposta ao degrau unitário, então 500*G fornece
                           u = 500 N.
step(sys); % traça a resposta ao degrau
```

Resposta ao degrau por meio de MATLAB

calculam e traçam o gráfico da resposta temporal para uma entrada em degrau com amplitude de 500-N.

A resposta temporal é apresentada na Fig. 7.2.

EXEMPLO 7.3 Descrição de um circuito em espaço de estados

Determine as equações de espaço de estados para o circuito mostrado na Fig. 2.25.

Solução. Para escrever as equações na forma de espaço de estados (i.e., um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem simultâneas), selecionamos as tensões nos capacitores

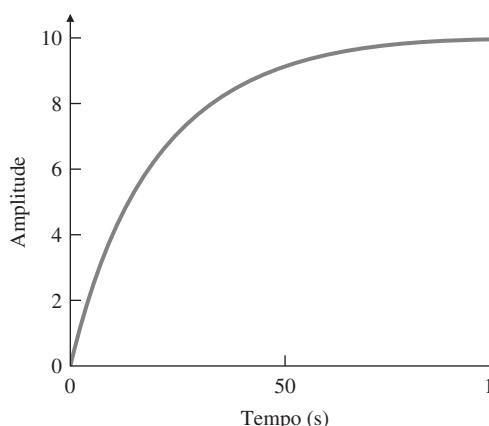


Figura 7.2 Resposta da velocidade do carro para um degrau em u .

como v_1 e v_2 como os elementos de estado (i.e., $\mathbf{x} = [v_1 \ v_2]^T$) e v_i como a entrada (i.e., $u = v_i$). Aqui, $v_1 = v_2$, $v_2 = v_1 - v_3$ e, ainda, $v_1 = v_i$. Assim, $v_1 = v_i$, $v_2 = v_1$ e $v_3 = v_i - v_2$. Em termos de v_1 e v_2 , a Eq. (2.34) é

$$\frac{v_1 - v_i}{R_1} + \frac{v_1 - (v_i - v_2)}{R_2} + C_1 \frac{dv_1}{dt} = 0.$$

Reorganizando essa equação na forma padrão, temos

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_1 - \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_2} \right) v_2 + \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_i. \quad (7.6)$$

Em termos de v_1 e v_2 , a Eq. (2.35) é

$$\frac{v_i - v_2 - v_1}{R_2} + C_2 \frac{d}{dt}(v_i - v_2 - v_1) = 0.$$

Na forma padrão, a equação é

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{v_1}{C_2 R_2} - \frac{v_2}{C_2 R_2} + \frac{v_i}{C_2 R_2}. \quad (7.7)$$

As Equações (2.34) e (2.35) são inteiramente equivalentes à forma no espaço de estados, as Eqs. (7.6) e (7.7), para a descrição do circuito. As formas das matrizes padrões são

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_2} \right) \\ -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ \frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H} &= [0 \ -1], J = 1. \end{aligned}$$

EXEMPLO 7.4 Alto-falante e circuito na forma de espaço de estados

Para o alto-falante na Fig. 2.29 e o circuito para conduzi-lo na Fig. 2.30, encontre as equações de espaço de estado relativas à tensão V_a de entrada para a saída de deslocamento no cone x . Suponha que a resistência do circuito é R e a indutância é L .

Solução. Lembre-se das duas equações acopladas (2.44) e (2.48), que constituem o modelo dinâmico para o alto-falante:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} = 0,63i,$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v_a - 0,63\dot{x}.$$

Um vetor de estados lógico para este sistema de terceira ordem pode ser $\mathbf{x} \triangleq [x \ \dot{x} \ i]^T$, o que fornece as matrizes na forma padrão

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/M & 0,63/M \\ 0 & -0,63/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [1 \ 0 \ 0], \quad J = 0,$$

sendo a entrada agora $u \triangleq v_a$.

EXEMPLO 7.5 *Modelando um motor CC na forma de espaço de estados*

Encontre as equações em espaço de estados para o motor CC com o circuito elétrico equivalente mostrado na Fig. 2.32(a).

Solução. Lembre-se das equações de movimento [Eqs. (2.52) e (2.53)] do Capítulo 2:

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m &= K_t i_a, \\ L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a &= v_a - K_e \dot{\theta}_m. \end{aligned}$$

Um vetor de estado para este sistema de terceira ordem é $\mathbf{x} \triangleq [\theta_m \quad \dot{\theta}_m \quad i_a]^T$, o que fornece as matrizes na forma padrão

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J_m} & \frac{K_t}{J_m} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = 0,$$

sendo a entrada $u \triangleq v_a$.

A forma em variáveis de estado pode ser aplicada a um sistema de qualquer ordem. O Exemplo 7.6 ilustra o método para um sistema de quarta ordem.

EXEMPLO 7.6 *Unidade disco com flexibilidade na forma de espaço de estados*

Encontre a forma de espaço de estados para as equações diferenciais do Exemplo 2.4, sendo a saída θ_2 .

Solução. Defina o vetor de estados como

$$\mathbf{x} = [\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2]^T.$$

Então, resolva as Eqs. (2.17) e (2.18) para $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$ tal que a forma em espaço de estados seja mais aparente. O resultado são as matrizes

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{I_1} & -\frac{b}{I_1} & \frac{k}{I_1} & \frac{b}{I_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{I_2} & \frac{b}{I_2} & -\frac{k}{I_2} & -\frac{b}{I_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = 0. \end{aligned}$$

Dificuldades surgem se a equação diferencial contiver derivadas da entrada u . Técnicas para lidar com esta situação serão discutidas na Seção 7.4.

7.3 Diagrama de blocos e espaço de estados

Talvez a forma mais eficaz de entender as equações de variáveis de estado é através da representação do diagrama de blocos de um computador analógico. A estrutura da representação usa integradores como o elemento central, que são bastante adequados para a representação de primeira ordem, variáveis de estado das equações de movimento de um sistema. Mesmo que os computadores analógicos estejam quase extintos, a implementação do computador analógico

ainda é um conceito útil para o projeto em variáveis de estado e no projeto de circuito analógico de compensação.³

O computador analógico era um dispositivo composto de componentes elétricos projetados para simular EDOs. O componente dinâmico básico do computador analógico é um **integrador**, construído a partir de um amplificador operacional com um capacitor no laço de realimentação e um resistor no ramo direto, como mostrado na Fig. 2.28. Como o integrador é um dispositivo cuja entrada é a derivada da saída, como mostrado na Fig. 7.3, se, em uma simulação em um computador analógico, identificarmos as saídas dos integradores como o estado, automaticamente vamos ter, então, as equações na forma de variáveis de estado. Por outro lado, se um sistema é descrito por variáveis de estado, podemos construir uma simulação desse sistema em um computador analógico, tendo um integrador para cada variável de estado e conectando sua entrada de acordo com a equação dada para a variável de estado. O diagrama do computador analógico é um retrato das equações de estado.

Os componentes de um computador analógico típico usado para realizar essas funções são mostradas na Fig. 7.4. Observe que o amplificador operacional tem uma mudança de sinal que lhe dá um ganho negativo.

EXEMPLO 7.7 Implementação de um computador analógico

Encontre a descrição em espaço de estados e a função de transferência para o sistema de terceira ordem na Fig. 7.5, cuja equação diferencial é

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6y = 6u.$$

Solução. Resolvemos para o termo com o grau da derivada mais alto na EDO para obter

$$\ddot{y} = -6\dot{y} - 11y - 6y + 6u. \quad (7.8)$$

Agora, assumimos que temos essa maior derivada e observamos que os termos de mais baixa ordem podem ser obtidos por integração, como mostrado na Fig. 7.6(a). Finalmente, aplicamos a Eq. (7.8) para completar a realização mostrada na Fig. 7.6(b). Para obter a descrição do estado, simplesmente definimos as variáveis de estado, como a saída dos integradores $x_1 = \dot{y}$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = y$, para obter

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2,\end{aligned}$$

Figura 7.3 Um integrador.

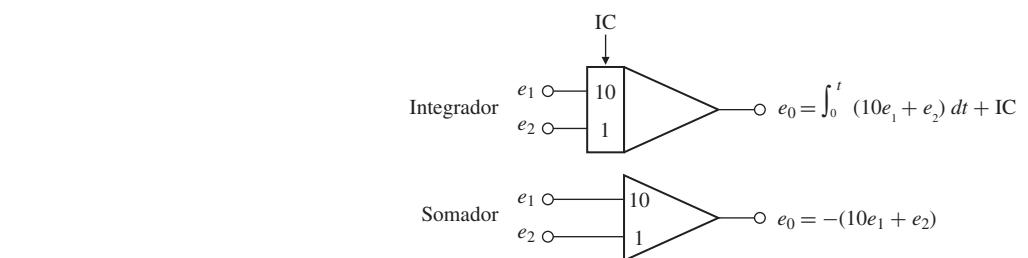
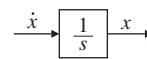


Figura 7.4 Componentes de um computador analógico.

Potenciômetro $e_1 \circ \text{---} \bigcirc k \text{---} \circ e_0 = ke_1 \quad 0 \leq k \leq 1$

³ Devido também à sua relevância histórica.

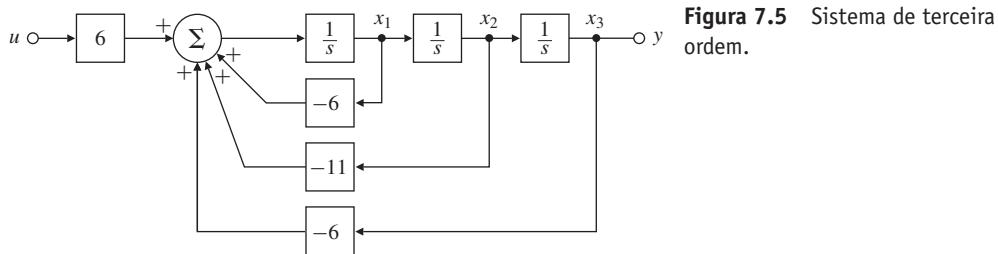
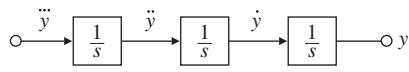
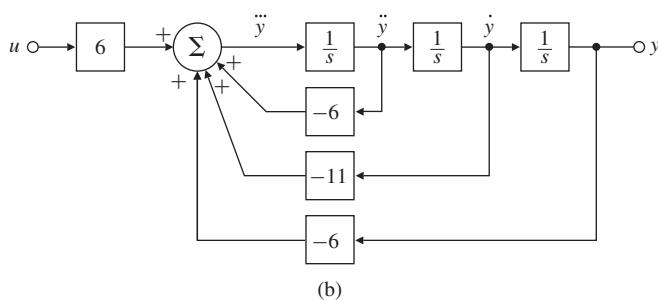


Figura 7.5 Sistema de terceira ordem.



(a)



(b)

Figura 7.6 Diagrama de blocos para um sistema que resolve $\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6y = 6u$ usando apenas integradores como elementos dinâmicos: (a) diagrama intermediário; (b) diagrama final.

o que fornecem a descrição em espaço de estados

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [0 \ 0 \ 1], \quad J = 0.$$

Os comandos no MATLAB são

`[num,den] = ss2tf(F,G,H,J);`

que fornecem a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}.$$

Se for desejada a função de transferência na forma fatorada, isto pode ser obtido transformando as descrições ss ou tf. Portanto, se os comandos no MATLAB forem

`% converte a realização em espaço de estados para a forma de polo e zero
[z,p,k] = ss2zp(F,G,H,J)`

e

`% converte a função de transferência para a forma de polo e zero
[z,p,k] = tf2zp(num,den)`

fornecendo o resultado.

$$z = [], \quad p = [-3 \ -2 \ -1]', \quad k = 6.$$

Isso significa que a função de transferência também pode ser escrita na forma fatorada como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

7.3.1 Escalonamento de tempo e amplitude em espaço de estados

O escalonamento de tempo e amplitude já foi discutido no Capítulo 3. Agora, estas noções são estendidas para a forma de variáveis de estado. Escalonamento no tempo com $\tau = \omega_o t$ substitui a Eq. (7.3) por

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{1}{\omega_o} \mathbf{F}\mathbf{x} + \frac{1}{\omega_o} \mathbf{G}u = \mathbf{F}'\mathbf{x} + \mathbf{G}'u. \quad (7.9)$$

Escalonamento de amplitude do estado corresponde a substituir \mathbf{x} por $\mathbf{z} = \mathbf{D}_x^{-1}\mathbf{x}$, sendo \mathbf{D}_x uma matriz diagonal de fatores de escala. Escalonamento da entrada corresponde a substituir u por $v = \mathbf{D}_u^{-1}u$. Com estas substituições,

$$\mathbf{D}_x \dot{\mathbf{z}} = \frac{1}{\omega_o} \mathbf{F}\mathbf{D}_x \mathbf{z} + \frac{1}{\omega_o} \mathbf{G}\mathbf{D}_u v. \quad (7.10)$$

Então,

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{1}{\omega_o} \mathbf{D}_x^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D}_x \mathbf{z} + \frac{1}{\omega_o} \mathbf{D}_x^{-1} \mathbf{G} \mathbf{D}_u v = \mathbf{F}'\mathbf{z} + \mathbf{G}'v. \quad (7.11)$$

A Eq. (7.11) compactamente expressa as operações de escalonamento de tempo e amplitude. Lamentavelmente, isso não exime o engenheiro da responsabilidade de realmente pensar em bons fatores de escala de modo que as equações escalonadas apresentem boa formatação.

EXEMPLO 7.8 Escalonamento de tempo em um oscilador

A equação de um oscilador foi obtida no Exemplo 2.5. Para o caso de uma frequência natural muito rápida $\omega_n = 15.000$ rad/s (aproximadamente 2 kHz), a Eq. (2.23) pode ser escrita como

$$\ddot{\theta} + 15000^2 \cdot \theta = 10^6 \cdot T_c.$$

Determine a equação escalonada no tempo tal que a unidade de tempo seja milisegundos.

Solução. Na forma de variáveis de estado com um vetor de estados $\mathbf{x} = [\theta \ \dot{\theta}]^T$, as matrizes sem o escalonamento são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15000^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^6 \end{bmatrix}.$$

Aplicar a Eq. (7.9) resulta em

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1000} \\ -\frac{15000^2}{1000} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^3 \end{bmatrix},$$

o que resulta nas equações de variáveis de estados que estão escalonadas.

7.4 Análise das equações de estado

Na seção anterior, introduzimos e ilustramos o processo de seleção de um estado e a organização das equações em forma de estado. Nesta seção, vamos rever esse processo e descrever como analisar a resposta dinâmica utilizando a descrição de estado. Na Seção 7.4.1, começamos relacionando a descrição de estado com diagramas de blocos e descrição em transformada de Laplace, e consideramos o fato de que, para um determinado sistema, a escolha do estado não é única. Mostramos como usar esta característica não única para selecionar, entre várias formas canônicas, a que vai ajudar a resolver um problema específico; uma forma canônica de controle torna fácil o projeto dos ganhos de realimentação. Depois de estudar a estrutura das equações de estado na Seção 7.4.2, consideraremos a resposta dinâmica e mostramos como os polos e zeros

da função de transferência estão relacionados com as matrizes das descrições de estado. Para ilustrar os resultados com cálculos manuais, oferecemos um exemplo simples que representa o modelo de um sistema térmico. Para exemplos mais realistas, um pacote de auxílio computacional para projeto de sistemas de controle como o MATLAB é especialmente útil; comandos relevantes do MATLAB serão descritos de tempos em tempos.

7.4.1 Diagrama de blocos e formas canônicas

Iniciamos com um sistema térmico que tem a função de transferência térmica simples

$$G = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 7s + 12} = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}. \quad (7.12)$$

As raízes do polinômio no numerador $b(s)$ são os zeros da função transferência, e as raízes do polinômio no denominador $a(s)$ são os polos. Repare que temos representado a função de transferência em duas formas, como uma razão de polinômios e como o resultado de uma expansão em frações parciais. A fim de desenvolver uma descrição em espaço de estado deste sistema (e esta é uma técnica geralmente útil), construímos um diagrama de blocos que corresponde à função de transferência (e às equações diferenciais), *utilizando apenas integradores isolados como os elementos dinâmicos*. Um destes diagramas de blocos, estruturado na **forma canônica de controle**, é desenhado na Fig. 7.7. A característica central dessa estrutura é que cada variável de estado é conectada por realimentação à entrada de controle.

Uma vez que temos o diagrama de blocos desenhado desta forma, podemos identificar as matrizes para descrição em espaço de estado simplesmente por inspeção; isso é possível porque quando a saída de um integrador é uma variável de estado, a entrada do integrador é a derivada dessa variável. Por exemplo, na Fig. 7.7, a equação para a primeira variável de estado é

$$\dot{x}_1 = -7x_1 - 12x_2 + u.$$

Continuando dessa forma, obtemos

$$\dot{x}_2 = x_1,$$

$$y = x_1 + 2x_2.$$

Essas três equações podem ser reescritas na forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_c u, \quad (7.13)$$

$$y = \mathbf{C}_c \mathbf{x}, \quad (7.14)$$

com

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.15a)$$

$$\mathbf{C}_c = [1 \ 2], \quad D_c = 0, \quad (7.15b)$$

sendo que o subscrito c se refere a uma forma canônica controlável.

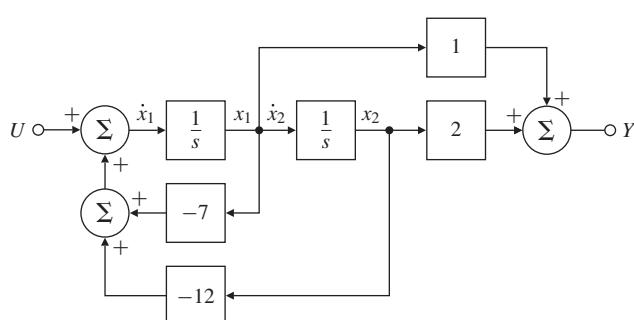


Figura 7.7 Um diagrama de bloco representando a Eq. (7.12) na forma canônica.

tf2ss no MATLAB

Dois fatos importantes sobre essa forma são que os coeficientes 1 e 2 do polinômio no numerador $b(s)$ aparecem na matriz \mathbf{C}_c , e (exceto para o termo inicial) os coeficientes de 7 e 12 do polinômio no denominador $a(s)$ aparecem (com sinais opostos) como a primeira linha da matriz \mathbf{A}_c . Armados com este conhecimento, podemos, assim, obter por *inspeção* as matrizes de estado na forma canônica controlável para qualquer sistema cuja função de transferência é conhecida como uma razão de polinômios. Se $b(s) = b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n$ e $a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n$, então os passos no MATLAB são

```
num = b = [b1 b2 ... bn]
den = a = [1 a1 a2 ... an]
[Ac, Bc, Cc, Dc] = tf2ss(num,den).
```

Lemos tf2ss como “função de transferência para espaço de estados”. O resultado será

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.16a)$$

$$\mathbf{C}_c = [b_1 \ b_2 \ \dots \ \dots \ b_n], \quad \mathbf{D}_c = 0. \quad (7.16b)$$

O diagrama de blocos da Fig. 7.7 e as matrizes correspondentes da Eq. (7.15) não são a única maneira de representar a função de transferência $G(s)$. Um diagrama de blocos correspondente à expansão em frações parciais de $G(s)$ é dado na Fig. 7.8. Usando a mesma técnica de antes, com as variáveis de estado marcadas como na figura, podemos determinar as matrizes diretamente a partir do diagrama de blocos como sendo

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_m \mathbf{z} + \mathbf{B}_{mu},$$

$$y = \mathbf{C}_m \mathbf{z} + D_{mu},$$

sendo

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.17a)$$

$$\mathbf{C}_m = [2 \ -1], \quad D_m = 0, \quad (7.17b)$$

Forma modal

e o m subscrito refere-se à **forma canônica modal**. O nome para esta forma vem do fato de que às vezes os polos da função de transferência do sistema são chamados de **modos normais** do sistema. O fato importante sobre as matrizes nesta forma é que os polos do sistema (aqui -4 e -3) aparecem como os elementos ao longo da diagonal da matriz A_m , e os resíduos, os termos no numerador na expansão em frações parciais (aqui 2 e -1), aparecem na matriz C_m .

Expressar um sistema na forma canônica modal pode ser complicado por dois fatores: (1) os elementos das matrizes serão complexos quando os polos do sistema são complexos, e (2)

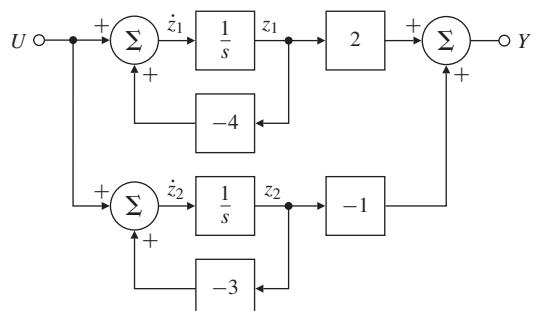


Figura 7.8 Diagrama de blocos para a Eq. (7.12) na forma canônica modal.

a matriz do sistema *não pode* ser diagonal quando a expansão em frações parciais tem polos repetidos. Para resolver o primeiro problema, expressamos os polos complexos da expansão em frações parciais como pares conjugados em termos de segunda ordem para que todos os elementos permaneçam reais. A matriz A_m correspondente terá, então, blocos 2×2 ao longo da diagonal principal representando o acoplamento local entre as variáveis do conjunto de polos complexos. Para lidar com a segunda dificuldade, as variáveis de estado também são acopladas, de modo que os polos apareçam ao longo da diagonal com termos fora da diagonal indicando o acoplamento. Um exemplo simples deste último caso é o sistema de satélite do Exemplo 7.1, cuja função de transferência é $G(s) = 1/s^2$. As matrizes do sistema para esta função de transferência na forma modal são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [1 \ 0], \quad J = 0. \quad (7.18)$$

EXEMPLO 7.9 Equações de estado na forma canônica modal

Um “modelo de um carro de quatro rodas” [ver Eq. (2.12)] com um modo de ressonância tem função de transferência dada por

$$G(s) = \frac{2s + 4}{s^2(s^2 + 2s + 4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 2s + 4}. \quad (7.19)$$

Encontre as matrizes de estado na forma modal descrevendo o sistema.

Solução. A função de transferência é dada na forma de frações parciais reais. Para obter as matrizes da descrição de estado, traçamos um diagrama de blocos correspondente apenas com integradores, atribuímos o estado e anotamos as matrizes correspondentes. Esse processo não é único, então existem várias soluções aceitáveis para o problema como ele foi apresentado, mas elas se diferem apenas em maneiras triviais. Um diagrama de blocos com uma atribuição satisfatória das variáveis é dado na Fig. 7.9.

Repare que o termo de segunda ordem para representar os polos complexos foi realizado na forma canônica controlável. Há uma série de outras possibilidades que podem ser usadas como alternativas para esta parte. Esta forma particular nos permite escrever as matrizes do sistema por inspeção:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [0 \ 1 \ 0 \ -1], \quad J = 0. \quad (7.20)$$

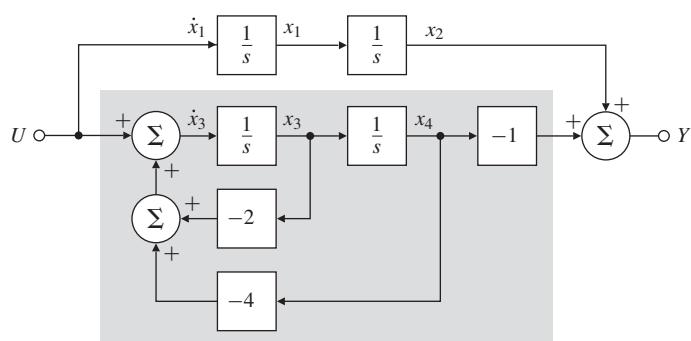


Figura 7.9 Diagrama de blocos para um sistema de quarta ordem na forma canônica modal com a forma canônica controlável sombreada.

Até o momento, vimos que podemos obter a descrição de estado a partir de uma função de transferência em qualquer forma controlável ou modal. Em razão de estas matrizes representarem o mesmo sistema dinâmico, podemos perguntar, qual é a relação entre as matrizes nas duas formas (e suas correspondentes variáveis de estado)? Mais genericamente, suponha que temos um conjunto de equações de estado que descrevem algum sistema físico sem nenhuma forma particular, e nos é dado um problema para o qual a forma canônica controlável seria útil. (Veremos um problema na Seção 7.5.) É possível calcular a forma desejada canônica sem obter a função de transferência antes? Para responder a estas questões, é necessário olhar para o tema de transformações do estado.

Descrição de estado e equação de saída

Considere um sistema descrito pelas equações de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u, \quad (7.21a)$$

$$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju. \quad (7.21b)$$

Como vimos, esta não é uma descrição única do sistema dinâmico. Consideramos uma mudança do vetor de estados \mathbf{x} para um novo estado \mathbf{z} que é uma transformação linear de \mathbf{x} . Para uma matriz não singular \mathbf{T} , temos

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}. \quad (7.22)$$

Substituindo a Eq. (7.22) na Eq. (7.21a), temos as equações de movimento em termos da nova variável de estado \mathbf{z} :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{FT}\mathbf{z} + \mathbf{Gu}, \quad (7.23a)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{FT}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Gu}, \quad (7.23b)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu}. \quad (7.23c)$$

Transformação de estado

Na Eq. (7.23c),

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{FT}, \quad (7.24a)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}. \quad (7.24b)$$

Então, substituímos a Eq. (7.22) na Eq. (7.21b) para obter a saída em termos do novo estado \mathbf{z} :

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{HT}\mathbf{z} + Ju \\ &= \mathbf{C}\mathbf{z} + Du. \end{aligned}$$

Aqui,

$$\mathbf{C} = \mathbf{HT}, \quad D = J. \quad (7.25)$$

Dadas as matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} e o escalar J , gostaríamos de encontrar a matriz de transformação \mathbf{T} tal que \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e D estejam em uma forma particular, por exemplo, forma canônica controlável. Para encontrar um tal \mathbf{T} , assumimos que \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e D estejam na forma exigida, assumimos ainda que a transformação \mathbf{T} tenha uma forma geral e combinando os termos. Aqui, vamos trabalhar no caso de terceira ordem; a maneira como estender a análise para o caso geral deve ficar clara a partir do desenvolvimento.

Inicialmente, reescrevemos a Eq. (7.24a) como

$$\mathbf{AT}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}.$$

Se \mathbf{A} está na forma canônica controlável, e descrevemos \mathbf{T}^{-1} como uma matriz com linhas \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 e \mathbf{t}_3 , então

$$\left[\begin{array}{ccc} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{t}_1\mathbf{F} \\ \mathbf{t}_2\mathbf{F} \\ \mathbf{t}_3\mathbf{F} \end{array} \right]. \quad (7.26)$$

Trabalhando com a terceira e a segunda linha, temos as equações matriciais

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_3 \mathbf{F}, \quad (7.27a)$$

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \mathbf{F} = \mathbf{t}_3 \mathbf{F}^2. \quad (7.27b)$$

A partir da Eq. (7.24b), assumindo que \mathbf{B} também está na forma canônica controlável, temos a relação

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{G} = \mathbf{B},$$

ou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \mathbf{G} \\ \mathbf{t}_2 \mathbf{G} \\ \mathbf{t}_3 \mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.28)$$

Combinando as Eqs. (7.27) e (7.28), temos

$$\mathbf{t}_3 \mathbf{G} = 0,$$

$$\mathbf{t}_2 \mathbf{G} = \mathbf{t}_3 \mathbf{F} \mathbf{G} = 0,$$

$$\mathbf{t}_1 \mathbf{G} = \mathbf{t}_3 \mathbf{F}^2 \mathbf{G} = 1.$$

Essas equações podem ser reescritas na forma matricial como

$$\mathbf{t}_3 [\mathbf{G} \quad \mathbf{F}\mathbf{G} \quad \mathbf{F}^2\mathbf{G}] = [0 \quad 0 \quad 1]$$

ou

$$\mathbf{t}_3 = [0 \quad 0 \quad 1] \mathcal{C}^{-1}, \quad (7.29)$$

sendo $\mathcal{C} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{F}\mathbf{G} \quad \mathbf{F}^2\mathbf{G}]$ a **matriz de controlabilidade**. Tendo \mathbf{t}_3 , podemos voltar à Eq. (7.27) e construir todas as linhas de \mathbf{T}^{-1} .

Em suma, a receita para converter uma descrição geral de estado de dimensão n para a forma canônica controlável é a seguinte:

- A partir de \mathbf{F} e \mathbf{G} , forme a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{F}\mathbf{G} \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G}]. \quad (7.30)$$

- Calcule a última linha da inversa da matriz de transformação como

$$\mathbf{t}_n = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] \mathcal{C}^{-1}. \quad (7.31)$$

- Construa a matriz de transformação como

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_n \mathbf{F}^{n-1} \\ \mathbf{t}_n \mathbf{F}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n \end{bmatrix}. \quad (7.32)$$

- Calcule as novas matrizes a partir de \mathbf{T}^{-1} , usando as Eqs. (7.24a), (7.24b) e (7.25).

Quando a matriz de controlabilidade \mathcal{C} é não singular, as matrizes correspondentes \mathbf{F} e \mathbf{G} são ditas serem **controláveis**. Esta é uma propriedade técnica, que geralmente vale para sistemas físicos e será importante quando considerarmos realimentação de estados na Seção 7.5. Também vamos estudar algumas ilustrações física de perda de controlabilidade.

Como o cálculo da transformação dado pela Eq. (7.32) é numericamente difícil de se feito com precisão, ele quase nunca é feito. A razão para desenvolver essa transformação detalhadamente é mostrar como essas mudanças de estado poderiam ser feitas, em teoria, e para fazer a seguinte importante observação:

Transformação da matriz de controlabilidade para a forma canônica de controle

Sistemas de controlabilidade

Sempre se pode transformar uma descrição de estado para a forma canônica controlável se (e somente se) a matriz controlabilidade \mathcal{C} for não singular.

Se precisarmos testar a controlabilidade em um caso real com números, usamos um método numericamente estável que depende da conversão das matrizes do sistema para a forma “escada”, em vez de tentar calcular a matriz de controlabilidade. O Problema 7.29 no final do capítulo considera este método.

Uma questão importante sobre controlabilidade decorre diretamente de nossa discussão: qual é o efeito de uma transformação de estado na controlabilidade? Nós podemos mostrar o resultado usando as Eqs. (7.30), (7.24a) e (7.24b). A matriz de controlabilidade do sistema (\mathbf{F}, \mathbf{G}) é

$$\mathcal{C}_x = [\mathbf{G} \quad \mathbf{FG} \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G}]. \quad (7.33)$$

Depois da transformação de estados, as novas descrições das matrizes são dadas pelas Eqs. (7.24a) e (7.24b), e a matriz de controlabilidade muda para

$$\mathcal{C}_z = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (7.34a)$$

$$= [\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{FTT}^{-1}\mathbf{G} \quad \cdots \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}^{n-1}\mathbf{TT}^{-1}\mathbf{G}] \quad (7.34b)$$

$$= \mathbf{T}^{-1}\mathcal{C}_x. \quad (7.34c)$$

Assim vemos que \mathcal{C}_z é não singular se, e somente se, \mathcal{C}_x for não singular, fornecendo a seguinte observação:

A mudança de estado por uma transformação linear não singular *não* muda a controlabilidade.

Forma canônica observável

Retornamos novamente à função de transferência da Eq. (7.12), desta vez para representá-la no diagrama de blocos com a estrutura conhecida como **forma canônica observável** (Fig. 7.10). As matrizes correspondentes para esta forma são

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (7.35a)$$

$$\mathbf{C}_o = [1 \quad 0], \quad D_o = 0. \quad (7.35b)$$

O fato significativo sobre essa forma canônica é que toda a realimentação é a partir da saída para as variáveis de estado.

Vamos, agora, considerar o que acontece com a controlabilidade do sistema quando o zero em -2 é variado. Para este fim, podemos substituir o segundo elemento 2 de \mathbf{B}_o com a localização variável do zero $-z_o$ e formar a matriz de controlabilidade:

$$\mathcal{C}_x = [\mathbf{B}_o \quad \mathbf{A}_o\mathbf{B}_o] \quad (7.36a)$$

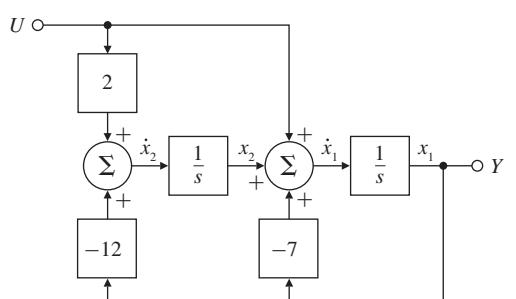


Figura 7.10 Forma canônica observável.

$$= \begin{bmatrix} 1 & -7-z_o \\ -z_o & -12 \end{bmatrix}. \quad (7.36b)$$

O determinante dessa matriz é uma função de z_o :

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{C}_x) &= -12 + (z_o)(-7 - z_o) \\ &= -(z_o^2 + 7z_o + 12). \end{aligned}$$

Esse polinômio é zero para $z_o = -3$ ou -4 , o que implica que a controlabilidade é perdida para esses valores. O que isso significa? Em termos do parâmetro z_o , a função de transferência é

$$G(s) = \frac{s - z_o}{(s + 3)(s + 4)}.$$

Se $z_o = -3$ ou -4 , há um cancelamento de polo e zero, o que reduz a função de transferência de um sistema de segunda ordem para uma de primeira ordem. Quando $z_o = -3$, por exemplo, o modo em -3 é desacoplado da entrada e o controle deste modo é perdido.

Repare que obtemos, para a função de transferência dada pela Eq. (7.12), duas realizações, uma na forma canônica controlável e outra na forma canônica observável. A forma canônica controlável é sempre controlável para qualquer valor do zero, enquanto a forma canônica observável perde a controlabilidade se o zero cancela um dos polos. Assim, essas duas formas podem representar a mesma função de transferência, mas pode não ser possível transformar o estado de uma para o estado da outra (neste caso, da forma canônica observável para a forma canônica controlável). Enquanto uma transformação de estado não pode afetar a controlabilidade, a escolha particular do estado de uma função de transferência pode:

Controlabilidade é uma função do *estado* do sistema e não pode ser analisada a partir de uma função de transferência.

Discutir mais a controlabilidade neste momento nos levaria muito longe. A propriedade intimamente relacionada com a observabilidade e com a forma canônica observável será retomada na Seção 7.7.1. Uma discussão mais detalhada dessas propriedades de sistemas dinâmicos é dada no Apêndice WF, disponível (em inglês) no site do Grupo A.

Voltamos agora à forma modal para as equações, dadas nas Eqs. (7.17a) e (7.17b) para a função de transferência do exemplo. Como mencionado anteriormente, nem sempre é possível encontrar uma forma modal para as funções de transferência que têm polos repetidos, então, assumimos que nosso sistema tenha apenas polos distintos. Além disso, assumimos que as equações na forma geral de espaço de estados dadas pelas Eqs. (7.21a) e (7.21b) se aplicam. Queremos encontrar uma matriz de transformação \mathbf{T} definida pela Eq. (7.22) tal que as equações transformadas pelas Eqs. (7.24a) e (7.25) estejam na forma modal. Neste caso, assumimos que a matriz \mathbf{A} é diagonal e que \mathbf{T} é composto pelas *colunas* \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 e \mathbf{t}_3 . Com esse pressuposto, a transformação de estado Eq. (7.24a) torna-se

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{A} &= \mathbf{FT} \\ [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3] \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{F}[\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3]. \end{aligned} \quad (7.37)$$

A Eq. (7.37) é equivalente a três equações vetoriais

$$p_i \mathbf{t}_i = \mathbf{F} \mathbf{t}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.38)$$

Em álgebra matricial, a Eq. (7.38) é uma equação famosa, cuja solução é conhecida como o **problema autovetor/autovalor**. Lembre-se de que \mathbf{t}_i é um vetor, \mathbf{F} é uma matriz e p_i é um escalar. O vetor \mathbf{t}_i é chamado de **autovetor** de \mathbf{F} , e p_i é chamado de **autovalor** correspondente. Como vimos que a forma modal é equivalente a uma representação em expansão em frações parciais

Transformação para a forma modal

Autovetores
Autovalores

Função eig no MATLAB

com os polos do sistema ao longo da diagonal da matriz de estado, deve ficar claro que esses “autovalores” são precisamente os polos do nosso sistema. A matriz de transformação que irá converter as matrizes de descrição do estado para a forma modal tem como colunas os autovetores de \mathbf{F} , como mostrado na Equação. (7.37) para o caso de terceira ordem. À medida que isso acontece, existem algoritmos computacionais robustos e confiáveis para calcular os autovalores e os autovetores de sistemas muito grandes usando o algoritmo QR⁴. No MATLAB, o comando $p = \text{eig}(\mathbf{F})$ é a maneira de calcular os polos se as equações do sistema estão em forma de estado.

Observe também que a Eq. (7.38) é homogênea e que, se \mathbf{t}_i é um autovetor, então $\alpha\mathbf{t}_i$ também é um autovetor para qualquer escalar α . Na maioria dos casos, o fator de escala é selecionado de modo que o comprimento (raiz quadrada da soma dos quadrados das magnitudes dos elementos) seja uma unidade. O MATLAB irá realizar esta operação. Outra opção é selecionar os fatores de escala para que a matriz de entrada \mathbf{B} seja composta por todos os 1. A última opção é sugerida por uma expansão em frações parciais com cada parte realizada na forma canônica controlável. Se o sistema for real, então cada elemento de \mathbf{F} é real, e se $p = \sigma + j\omega$ for um polo, então seu conjugado, $p^* = \sigma - j\omega$, também será um polo. Para estes autovalores, os autovetores são igualmente complexos e conjugados. É possível compor a matriz de transformação usando as partes real e complexa dos autovetores separadamente, então a forma modal é real, mas tem blocos 2×2 para cada par de polos complexos. Mais tarde, vamos ver a função no MATLAB que faz isso, mas primeiro vamos olhar para o caso simples de polos reais.

EXEMPLO 7.10 Transformação da forma canônica controlável do sistema térmico para a forma modal

Encontre a matriz de transformação para transformar as matrizes na forma controlável na Eq. (7.15) na forma modal da Eq. (7.17).

Solução. De acordo com as Eqs. (7.37) e (7.38), precisamos inicialmente encontrar os autovalores e autovetores da matriz \mathbf{A}_c . Selecionamos os autovetores como

$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix}.$$

As equações usando os autovetores são

$$\begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix}, \quad (7.39a)$$

$$-7t_{11} - 12t_{21} = pt_{11}, \quad (7.39b)$$

$$t_{11} = pt_{21}. \quad (7.39c)$$

Substituindo a Eq. (7.39c) na Eq. (7.39b), temos

$$-7pt_{21} - 12t_{21} = p^2t_{21}, \quad (7.40a)$$

$$p^2t_{21} + 7pt_{21} + 12t_{21} = 0, \quad (7.40b)$$

$$p^2 + 7p + 12 = 0, \quad (7.40c)$$

$$p = -3, -4. \quad (7.40d)$$

Descobrimos (novamente!) que os autovalores (polos) são -3 e -4 ; além disso, a Eq. (7.39c) nos diz que os dois autovetores são

$$\begin{bmatrix} -4t_{21} \\ t_{21} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -3t_{22} \\ t_{22} \end{bmatrix},$$

⁴ Este algoritmo é parte do MATLAB e de todos os outros bem conhecidos pacotes computacionais de projeto. Ele está documentado cuidadosamente no pacote computacional LAPACK (Anderson *et al.*, 1999). Veja também Strang (1988).

sendo que t_{21} e t_{22} são fatores de escala não nulos. Queremos selecionar os dois fatores de escala tal que ambos os elementos de \mathbf{B}_m na Eq. (7.17a) sejam a unidade. A equação para \mathbf{B}_m em termos de \mathbf{B}_c é $\mathbf{T}\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_c$, e sua solução é $t_{21} = -1$ e $t_{22} = 1$. Portanto, a matriz de transformação e sua inversa⁵ são

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (7.41)$$

Multiplicações matriciais elementares mostram que, usando \mathbf{T} como definido pela Eq. (7.41), as matrizes das Eqs. (7.15) e (7.17) são relacionadas como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_c \mathbf{T}, & \mathbf{B}_m &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_c, \\ \mathbf{C}_m &= \mathbf{C}_c \mathbf{T}, & \mathbf{D}_m &= \mathbf{D}_c. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Esses cálculos podem ser realizados usando os comandos no MATLAB

```
T = [4 -3; -1 1];
Am = inv(T)*Ac*T;
Bm = inv(T)*Bc;
Cm = Cc*T;
Dm = Dc;
```

O próximo exemplo tem cinco variáveis de estado e, na forma de espaço de estados, é muito complicado realizar os cálculos manualmente. No entanto, é um bom exemplo para ilustrar o uso de programas computacionais desenvolvidos com esta finalidade. O modelo que será usado é baseado em um estado físico após os escalonamentos de amplitude e tempo terem sido feitos.

EXEMPLO 7.11 Uso do MATLAB para encontrar os polos e zeros do sistema de unidade de fita

Encontre os autovalores da matriz do sistema descrito abaixo para o controle da unidade de fita (veja a Fig. 3.50). Além disso, calcule a transformação das equações da unidade de fita em sua forma dada para a forma canônica modal. As matrizes do sistema são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.35 & 0.1 & 0.1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & -0.4 & -1.4 & 0 \\ 0 & -0.03 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.43)$$

$\mathbf{H}_2 = [0.0 \ 0.0 \ 1.0 \ 0.0 \ 0.0]$ Saída sendo posição do servomotor,

$\mathbf{H}_3 = [0.5 \ 0.0 \ 0.5 \ 0.0 \ 0.0]$ Saída sendo a posição da cabeçote de leitura/escrita,

$\mathbf{H}_T = [-0.2 \ -0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.0]$ Saída sendo a tensão,

$$J = 0.0.$$

O vetor de estados é definido como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & (\text{posição da fita no cabeçote}) \\ \omega_1 & (\text{velocidade de rotação do eixo}) \\ x_3 & (\text{posição da fita na cabeçote de leitura/gravação}) \\ \omega_2 & (\text{velocidade de saída}) \\ i & (\text{corrente no motor}) \end{bmatrix}.$$

⁵ Para encontrar a inversa de uma matriz 2×2 , é preciso apenas trocar a posição dos elementos “11” e “22,” mudar o sinal dos elementos “12” e “21” e dividir pelo determinante [= 1 na Eq. (7.41)].

A matriz \mathbf{H}_3 corresponde a fazer x_3 (a posição da fita na cabeçote de leitura/gravação) a saída, e a matriz \mathbf{H}_T corresponde a fazer a tensão a saída.

Solução. Para calcular os autovalores usando o MATLAB, escrevemos

$$\mathbf{P} = \text{eig}(\mathbf{F}),$$

o que resulta em

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0.6371 + 0.6669i \\ -0.6371 - 0.6669i \\ 0.0000 \\ -0.5075 \\ -0.9683 \end{bmatrix}.$$

Observe que o sistema tem todos os polos no semiplano esquerdo (LHP), exceto um polo na origem. Isso significa que uma entrada em degrau irá resultar em uma saída em rampa, então podemos concluir que o sistema tem um comportamento do Tipo 1.

Para transformar a forma modal, usamos a função canon no MATLAB:

Função canon no
MATLAB

```
sysG = ss(F,G,H3,J)
[sysGm, TI] = canon(sysG, 'modal')
[Am,Bm,Cm,Dm]=ssdata(sysGm)
```

O resultado é

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -0.6371 & 0.6669 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.6669 & -0.6371 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5075 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9683 \end{bmatrix}.$$

Note que os polos complexos aparecem em blocos 2×2 no canto superior esquerdo de \mathbf{A}_m e os polos reais aparecem na diagonal principal desta matriz. Os outros resultados dos cálculos da função canon são

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 0.4785 \\ -0.6274 \\ -1.0150 \\ -3.5980 \\ 4.9133 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_m = [1.2569 \quad -1.0817 \quad -2.8284 \quad 1.8233 \quad 0.4903],$$

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{D}_m = 0,$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3439 & -0.3264 & 0.3439 & 0.7741 & 0.4785 \\ 0.1847 & -0.7291 & -0.1847 & 0.0969 & -0.6247 \\ -0.1844 & -1.3533 & -0.1692 & -0.3383 & -1.0150 \\ 0.3353 & -2.3627 & -0.3353 & -1.0161 & -3.5980 \\ -0.0017 & 0.2077 & 0.0017 & 0.0561 & 4.9133 \end{bmatrix}.$$

Acontece que a função canon foi escrita para calcular a *inversa* da transformação com a qual estávamos trabalhando (como você pode ver a partir de \mathbf{T}^{-1} na equação anterior), por isso precisamos de inverter nossos resultados do MATLAB. O inverso é calculado a partir de

$$\mathbf{T} = \text{inv}(\mathbf{T}^{-1})$$

e o resultado é

$$\mathbf{T} = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.3805 & 0.8697 & -2.8284 & 1.3406 & 0.4714 \\ -0.4112 & -0.1502 & 0.0000 & -0.3402 & -0.2282 \\ 2.1334 & -3.0330 & -2.8284 & 2.3060 & 0.5093 \\ 0.3317 & 1.6776 & 0.0000 & -0.5851 & -0.2466 \\ 0.0130 & -0.0114 & -0.0000 & 0.0207 & 0.2160 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores computados com $[V, P] = \text{eig}(F)$ são

$$\mathbf{V} = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.1168 + 0.1925i & -0.1168 - 0.1925i & -0.7071 & 0.4871 & 0.5887 \\ -0.0270 - 0.1003i & -0.0270 + 0.1003i & -0.0000 & -0.1236 & -0.2850 \\ 0.8797 & 0.8797 & -0.7071 & 0.8379 & 0.6360 \\ -0.2802 + 0.2933i & -0.2802 - 0.2933i & -0.0000 & -0.2126 & -0.3079 \\ 0.0040 + 0.0010i & 0.0040 - 0.0010i & 0.0000 & 0.0075 & 0.2697 \end{bmatrix}.$$

Observe que as duas primeiras colunas da transformação real \mathbf{T} são compostas pelas partes real e imaginária do primeiro autovetor na primeira coluna de \mathbf{V} . É esta etapa que faz com que as raízes complexas apareçam em blocos 2×2 na parte superior esquerda da matriz \mathbf{A}_m . Os vetores em \mathbf{V} são normalizados para terem comprimento unitário, o que resulta em valores não normalizados em \mathbf{B}_m e \mathbf{C}_m . Se for desejável, poderíamos facilmente encontrar novas transformações para fazer com que cada elemento de \mathbf{B}_m seja igual a 1 ou trocar a ordem em que os polos aparecem.

7.4.2 Resposta dinâmica a partir das equações de estado

Tendo considerado a estrutura das equações de variáveis de estado, agora nos voltamos a encontrar a resposta dinâmica a partir da descrição de estado e as relações entre a descrição de estado e nossa discussão anterior no Capítulo 6 sobre resposta em frequência e polos e zeros. Vamos começar com as equações gerais de estado dadas pelas Eqs. (7.21a) e (7.21b), e considerar o problema no domínio da frequência. Tomando a transformada de Laplace de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{Gu}, \quad (7.44)$$

temos

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{Fx}(s) + \mathbf{Gu}(s), \quad (7.45)$$

que agora é uma equação algébrica. Se agruparmos os termos envolvendo $\mathbf{X}(s)$ no lado esquerdo da Eq. (7.45), mantendo em mente que a ordem de multiplicação de matrizes é muito importante, descobrimos que⁶

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{X}(s) = \mathbf{GU}(s) + \mathbf{x}(0).$$

Se multiplicarmos ambos os lados pela inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{F})$, então

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{GU}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0). \quad (7.46)$$

A saída do sistema é

$$Y(s) = \mathbf{H}\mathbf{X}(s) + JU(s), \quad (7.47a)$$

$$= \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{GU}(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s). \quad (7.47b)$$

Essa equação expressa a resposta na saída para uma condição inicial e para uma entrada externa. O coeficiente da entrada externa é a função de transferência do sistema, que neste caso é dada por

Função de transferência de equações de estado

⁶ A matriz identidade \mathbf{I} é uma matriz com uns na diagonal e zeros nas outras posições; portanto, $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + J. \quad (7.48)$$

EXEMPLO 7.12 Função de transferência a partir da descrição em espaço de estados do sistema térmico

Use a Eq. (7.48) para encontrar a função de transferência do sistema térmico descrito pelas Eqs. (7.15a) e (7.15b).

Solução. As matrizes da descrição em espaço de estados do sistema são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [1 \ 2], \quad J = 0.$$

Para calcular a função de transferência de acordo com a Eq. (7.48), fazemos

$$s\mathbf{I} - \mathbf{F} = \begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

e calculamos

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s & -12 \\ 1 & s+7 \end{bmatrix}}{s(s+7)+12}. \quad (7.49)$$

Substituindo a Eq. (7.49) na Eq. (7.48), temos

$$G(s) = \frac{[1 \ 2] \begin{bmatrix} s & -12 \\ 1 & s+7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{s(s+7)+12} \quad (7.50)$$

$$= \frac{[1 \ 2] \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}}{s(s+7)+12} \quad (7.51)$$

$$= \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)}. \quad (7.52)$$

Os resultados também podem ser encontrados usando o comando no MATLAB

`[num,den] = ss2tf(F,G,H,J)`

e fornecendo `num = [0 1 2]` e `den = [1 7 12]`, o que está de acordo com os cálculos manuais.

Devido à Eq. (7.48) expressar a função de transferência em termos da descrição geral de espaço de estados com as matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} e J , somos capazes de expressar os polos e zeros em termos dessas matrizes. Já vimos que, transformando as matrizes de estado para a forma diagonal, os polos aparecem como os autovalores na diagonal principal da matriz \mathbf{F} . Vamos agora tomar um ponto de vista da teoria dos sistemas e considerar como os polos e zeros estão envolvidos na resposta transitória de um sistema.

Como vimos no Capítulo 3, um polo da função de transferência $G(s)$ é um valor de frequência generalizada s tal que, se $s = p_i$, então o sistema pode responder a uma condição inicial como $K_i e^{p_i t}$, sem função forçante. Neste contexto, p_i é chamado de **frequência natural** ou

modo natural do sistema. Se tomarmos as equações de espaço de estados (7.21a e 7.21b) e definir a função forçante u como zero, temos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x}. \quad (7.53)$$

Se assumirmos alguma (mesmo que desconhecida) condição inicial

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.54)$$

e que o movimento do estado completo se comporta de acordo com a mesma frequência natural, então o estado pode ser escrito como $\mathbf{x}(t) = e^{p_i t} \mathbf{x}_0$. Decorre da Eq. (7.53) que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = p_i e^{p_i t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{F}e^{p_i t} \mathbf{x}_0, \quad (7.55)$$

ou

$$\mathbf{F}\mathbf{x}_0 = p_i \mathbf{x}_0. \quad (7.56)$$

Podemos reescrever a Eq. (7.56) como

$$(p_i \mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{x}_0 = 0. \quad (7.57)$$

As Equações (7.56) e (7.57) constituem o problema de autovetor/autovalor visto na Eq. (7.38) com autovalores p_i e, neste caso, autovetores \mathbf{x}_0 da matriz \mathbf{F} . Se estamos apenas interessados nos autovalores, podemos usar o fato de que para um \mathbf{x}_0 diferente de zero, a Eq. (7.57) tem uma solução se, e somente se,

$$\det(p_i \mathbf{I} - \mathbf{F}) = 0. \quad (7.58)$$

Polos de função de transferência de equações de estado

Essas equações mostram mais uma vez que os *polos* da função de transferência são os autovalores da matriz do sistema \mathbf{F} . A equação do determinante (7.58) é um polinômio nos autovalores p_i conhecida como a **equação característica**. No Exemplo 7.10, calculamos os autovalores e autovetores de uma matriz específica na forma canônica controlável. Como uma alternativa para a computação dos polos do sistema, podemos resolver a equação característica (7.58). Para o sistema descrito pelas Eqs. (7.15a) e (7.15b), podemos encontrar os polos da Eq. (7.58), resolvendo

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}) = 0, \quad (7.59a)$$

$$\det \begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix} = 0, \quad (7.59b)$$

$$s(s+7) + 12 = (s+3)(s+4) = 0. \quad (7.59c)$$

Isso confirma novamente que os polos do sistema são os autovalores de \mathbf{F} .

Podemos também determinar os zeros de um sistema a partir das matrizes da descrição em espaço de estados \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} e J usando um ponto de vista da teoria de sistemas. A partir desta perspectiva, um zero é um valor de frequência generalizada s tal que o sistema pode ter uma entrada diferente de zero e ainda ter uma saída nula. Se a entrada é exponencial na frequência do zero z_i , dada por

$$u(t) = u_0 e^{z_i t}, \quad (7.60)$$

então a saída é identicamente nula:

$$y(t) \equiv 0. \quad (7.61)$$

A descrição em espaço de estado das Eqs. (7.60) e (7.61) será

$$u = u_0 e^{z_i t}, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{z_i t}, \quad y(t) \equiv 0. \quad (7.62)$$

Assim,

$$\dot{\mathbf{x}} = z_i e^{z_i t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{F} e^{z_i t} \mathbf{x}_0 + \mathbf{G} u_0 e^{z_i t}, \quad (7.63)$$

ou

$$\begin{bmatrix} z_i \mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.64)$$

e

$$y = \mathbf{Hx} + Ju = \mathbf{H}e^{z_i t} \mathbf{x}_0 + Ju_0 e^{z_i t} \equiv 0 \quad (7.65)$$

Combinando as Eqs. (7.64) e (7.65), temos

$$\begin{bmatrix} z_i \mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.66)$$

Zeros da função de transferência de equações de estado

Da Eq. (7.66), podemos concluir que um zero do sistema em espaço de estados é um valor de z_i , onde Eq. (7.66) tem uma solução não trivial. Com uma entrada e uma saída, a matriz é quadrada, e uma solução para a Eq. (7.66) é equivalente a uma solução para

$$\det \begin{bmatrix} z_i \mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix} = 0. \quad (7.67)$$

EXEMPLO 7.13 Zeros de um sistema térmico a partir de sua descrição em espaço de estados

Calcule o(s) zero(s) do sistema térmico descrito pela Eq. (7.15).

Solução. Usamos a Eq. (7.67) para calcular os zeros:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} s+7 & 12 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} &= 0, \\ -2-s &= 0, \\ s &= -2. \end{aligned}$$

Note que este resultado está de acordo com o zero da função de transferência dada pela Eq. (7.12). O resultado pode também ser encontrado usando o comando no MATLAB:

```
sysG = ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
z = tzero(sysG)
```

e fornece $z = -2.0$.

A Eq. (7.58) para a equação característica e a Eq. (7.67) para o polinômio dos zeros podem ser combinadas para expressar a função de transferência em uma forma compacta a partir da descrição em espaço de estados como

$$G(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F})}. \quad (7.68)$$

(Veja o Apêndice WE, disponível em inglês no site do Grupo A, para mais detalhes.) Enquanto a Eq. (7.68) é uma fórmula compacta para estudos teóricos, ela é muito sensível a erros numéricos. Um algoritmo numericamente estável para calcular a função de transferência é descrito em Emami-Naeini e Van Dooren (1982). Dada a função de transferência, podemos calcular a resposta em frequência de $G(j\omega)$ e, como discutido anteriormente, podemos usar as Eqs. (7.57) e (7.66) para encontrar os polos e zeros, dos quais a resposta transitória depende, como vimos no Capítulo 3.

EXEMPLO 7.14 Análise das equações de estado de uma unidade de fita

Calcule os polos, zeros e a função de transferência para as equações do servomecanismo da unidade de fita dada no Exemplo 7.11.

Solução. Há duas maneiras diferentes para calcular a resposta deste problema. A mais direta é usar a função `ss2tf` no MATLAB (espaço de estados para função de transferência), que dará os polinômios do numerador e do denominador diretamente. Esta função permite múltiplas entradas e saídas; o quinto argumento da função indica qual entrada será usada. Temos apenas uma entrada aqui, mas ainda é necessário fornecer o argumento. O cálculo da função de transferência com a entrada sendo a corrente e a saída a posição do servomotor é

$$[N2, D2] = ss2tf(F, G, H2, J, 1)$$

o que resulta em

$$N2 = [0 \ 0 \ 0.0000 \ 0 \ 0.6000 \ 1.2000],$$

$$D2 = [1.0000 \ 2.7500 \ 3.2225 \ 1.8815 \ 0.4180 \ -0.0000].$$

Função `ss2tf` do MATLAB

Da mesma forma, para a posição da cabeçote de leitura/escrita, os polinômios da função de transferência são calculados por

$$[N3, D3] = ss2tf(F, G, H3, J, 1),$$

o que resulta em

$$N3 = [0 \ -0.0000 \ -0.0000 \ 0.7500 \ 1.3500 \ 1.2000],$$

$$D3 = [1.0000 \ 2.7500 \ 3.2225 \ 1.8815 \ 0.4180 \ -0.0000].$$

Finalmente, a função de transferência para a tensão é

$$[NT, DT] = ss2tf(F, G, HT, J, 1)$$

produzindo

$$NT = [0 \ -0.0000 \ -0.1500 \ -0.4500 \ -0.3000 \ 0.0000],$$

$$DT = [1.0000 \ 2.7500 \ 3.2225 \ 1.8815 \ 0.4180 \ -0.0000].$$

É interessante verificar se os polos e zeros determinados desta forma estão de acordo com os encontrados por outros meios. Para um polinômio, usamos as raízes da função:

$$\text{roots}(D3) = \begin{bmatrix} -0.6371 + 0.6669i \\ -0.6371 - 0.6669i \\ -0.9683 \\ -0.5075 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

Raízes do MATLAB

Checando com o Exemplo 7.11, confirmamos que eles estão de acordo.

Onde estão os zeros? Podemos encontrá-los calculando as raízes do polinômio no numerador. Calculamos as raízes do polinômio N3:

$$\text{roots}(N3) = \begin{bmatrix} -1.6777 \times 10^7 \\ 1.6777 \times 10^7 \\ -0.9000 + 0.8888i \\ -0.9000 - 0.8888i \end{bmatrix}.$$

Nota-se que raízes com magnitude de 10^7 são dadas, o que parece inconsistente com os valores apresentados para o polinômio. O problema é que o MATLAB tem usado valores muito pequenos para os termos de pivô como valores reais e, assim, introduziu raízes estranhas que estão, para todos os fins práticos, no infinito. Os zeros de verdade são encontrados truncando o polinômio em valores significativos usando o comando

$$N3R = N3(4 : 6)$$

obtendo

$$N3R = [\begin{array}{ccc} 0.7499 & 1.3499 & 1.200 \end{array}],$$

$$\text{roots}(N3R) = \left[\begin{array}{c} -0.9000 + 0.8888i \\ -0.9000 - 0.8888i \end{array} \right].$$

Outra abordagem é calcular os polos e zeros separadamente e, se desejado, combiná-los em uma função de transferência. Os polos foram computados com `eig` no Exemplo 7.11 e são

$$P = \left[\begin{array}{c} -0.6371 + 0.6669i \\ -0.6371 - 0.6669i \\ 0.0000 \\ -0.5075 \\ -0.9683 \end{array} \right].$$

Função `tzero` do MATLAB

Os zeros podem ser computados de forma equivalente à Eq. (7.66) com a função `tzero` (zeros de transmissão). Os zeros dependem de qual saída está sendo usada e, claro, são, respectivamente, dados abaixo. Para a posição da fita no servomotor como a saída, usamos os comandos

$$\text{sysG2} = \text{ss}(F, G, H2, J)$$

$$\text{ZER2} = \text{tzero}(\text{sysG2})$$

fornecendo

$$\text{ZER2} = -2.0000.$$

Para a posição da fita no cabeçote de leitura/escrita como a saída, usamos a declaração

$$\text{sysG3} = \text{ss}(F, G, H3, J)$$

$$\text{ZER3} = \text{tzero}(\text{sysG3})$$

$$\text{ZER3} = \left[\begin{array}{c} -0.9000 + 0.8888i \\ -0.9000 - 0.8888i \end{array} \right].$$

Nota-se que esses resultados concordam com os valores previamente calculados a partir do polinômio no numerador $N3$. Finalmente, para a tensão na saída, usamos

$$\text{sysGT} = \text{ss}(F, G, H1, J)$$

$$\text{ZERT} = \text{tzero}(\text{sysGT})$$

obtendo

$$\text{ZERT} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -1.9999 \\ -1.0000 \end{array} \right].$$

Com esses resultados, podemos escrever, por exemplo, a função de transferência para x_3 como

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{X_3(s)}{E_1(s)} \\ &= \frac{0,75s^2 + 1,35s + 1,2}{s^5 + 2,75s^4 + 3,22s^3 + 1,88s^2 + 0,418s} \\ &= \frac{0,75(s + 0,9 \pm 0,8888j)}{s(s + 0,507)(s + 0,968)(s + 0,637 \pm 0,667j)}. \end{aligned} \tag{7.69}$$

7.5 Projeto de lei de controle para realimentação completa de estados

Um dos atrativos do método de projeto no espaço de estado é que ele consiste em uma sequência de etapas independentes, conforme mencionado na visão geral do capítulo. O primeiro passo, discutido na Seção 7.5.1, é determinar o controle. O propósito da lei de controle é permitir que se atribua um conjunto de posições para os polos do sistema em malha fechada que corresponderá à resposta dinâmica satisfatória em termos de tempo de subida e outras medidas da resposta transitória. Na Seção 7.5.2, vamos mostrar como introduzir a entrada de referência com a realimentação completa de estados e, na Seção 7.6, vamos descrever o processo de encontrar os polos para um bom projeto.

O segundo passo – necessário se o vetor de estados não estiver completamente disponível – é o projeto de um **estimador** (às vezes chamado de **observador**), que calcula uma estimativa do vetor de estado inteiro quando recebe as medições do sistema indicadas pela Eq. (7.21b). Vamos examinar o projeto do estimador na Seção 7.7.

O terceiro passo consiste em combinar a lei de controle e do estimador. A Figura 7.11 mostra como a lei de controle e do estimador se encaixam e como a combinação toma o lugar daquilo a que temos previamente nos referido como **compensação**. Nesta fase, os cálculos de lei de controle são baseados nos estados estimados em vez de nos estados reais. Na Seção 7.8 vamos mostrar que essa substituição é razoável, e também que o uso da combinação da lei de controle e do estimador resultante fornece os mesmos polos em malha fechada que aqueles determinados no projeto do controle e do estimador separadamente.

O quarto e último passo de projeto no espaço de estados é introduzir a entrada de referência de tal forma que a saída da planta siga comandos externos com valores aceitáveis de tempo de subida, sobressinal e tempo de acomodação. Neste momento no projeto, todos os polos de malha fechada foram selecionados, e o projetista se preocupa com os zeros da função de transferência global. A Figura 7.11 mostra a entrada de comando r introduzida na mesma posição relativa como foi feito com os métodos de projeto baseados em transformadas; no entanto, na Seção 7.9 vamos mostrar como introduzir a referência em outro local, resultando em diferentes zeros e (geralmente) em um controle superior.

7.5.1 A lei de controle

O primeiro passo para o método de projeto no espaço de estados, como mencionado anteriormente, é encontrar a lei de controle que realimenta uma combinação linear das variáveis de estado, isto é,

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -[K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (7.70)$$

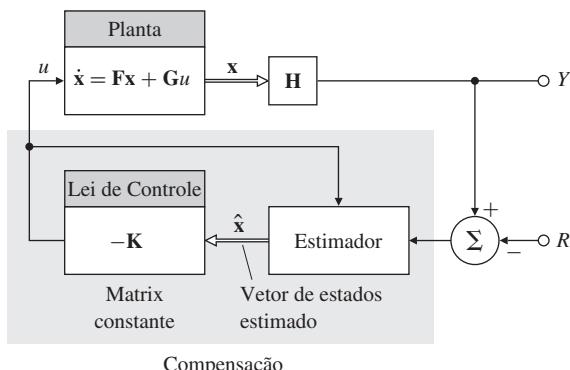


Figura 7.11 Diagrama esquemático dos elementos de projeto no espaço de estados.

Estimador/observador

Lei de controle e estimador juntos formam a compensação

Lei de controle

Assumimos, para efeitos de realimentação, que todos os elementos do vetor de estado estejam à nossa disposição. Na prática, é claro, isso normalmente seria uma suposição absurda; além disso, um projetista de controle bem treinado sabe que outros métodos de projeto não requerem tantos sensores. A suposição de que todas as variáveis de estado estejam disponíveis apenas nos permite prosseguir com este primeiro passo.

A Eq. (7.70) nos diz que o sistema tem uma matriz constante na trajetória de realimentação do vetor de estados, como mostrado na Fig. 7.12. Para um sistema de n -ésima ordem, haverá n ganhos de realimentação, K_1, \dots, K_n , e como existem n raízes do sistema, é possível que existam graus de liberdade suficientes para escolher arbitrariamente qualquer local desejado para a raiz, escolhendo os valores adequados de K_i . Esta liberdade contrasta fortemente com o projeto baseado no lugar das raízes, em que temos apenas um parâmetro, e os polos de malha fechada estão restritos no lugar das raízes.

Substituindo a lei de realimentação dada pela Eq. (7.70) no sistema descrito pela Eq. (7.21a), temos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{GKx}. \quad (7.71)$$

Equação característica de controle

A equação característica para este sistema em malha fechada é

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{GK})] = 0. \quad (7.72)$$

Quando avaliado, isso gera um polinômio de n -ésima ordem em s contendo os ganhos K_1, \dots, K_n . O projeto da lei de controle consiste, então, em escolher os ganhos \mathbf{K} para que as raízes da Eq. (7.72) estejam nos locais desejados. Selecionar a localização desejada para as raízes é uma ciência inexata que pode exigir alguma iteração do projetista. Questões em sua seleção são consideradas nos Exemplos 7.15 ao 7.17, bem como na Seção 7.6. Por ora, assumimos que os locais desejados são conhecidos, digamos,

$$s = s_1, s_2, \dots, s_n.$$

Então, a equação característica desejada (controle) correspondente é

$$\alpha_c(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0. \quad (7.73)$$

Assim, os elementos necessários de \mathbf{K} são obtidos combinando os coeficientes nas Eqs. (7.72) e (7.73). Isso força a equação característica do sistema a ser idêntica à equação característica desejada, e os polos de malha fechada a serem posicionados nos locais desejados.

EXEMPLO 7.15 Lei de controle para um pêndulo

Suponha que você tenha um pêndulo com frequência ω_0 e uma descrição em espaço de estado dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (7.74)$$

Encontre a lei de controle que posiciona ambos os polos de malha fechada do sistema em $-2\omega_0$. Em outras palavras, deseja-se o dobro da frequência natural e o aumento do coeficiente de amortecimento ζ de 0 a 1.

Solução. Da Eq. (7.73), temos que

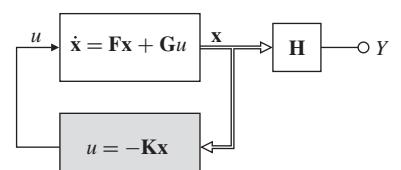


Figura 7.12 Sistema considerado para o projeto da lei de controle.

$$\alpha_c(s) = (s + 2\omega_0)^2 \quad (7.75a)$$

$$= s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2. \quad (7.75b)$$

A Eq. (7.72) fornece

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{GK})] = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \ K_2] \right) \right\},$$

ou

$$s^2 + K_2 s + \omega_0^2 + K_1 = 0. \quad (7.76)$$

Igualar os coeficientes de mesma potência em s nas Eqs. (7.75b) e (7.76) fornece as equações

$$\begin{aligned} K_2 &= 4\omega_0, \\ \omega_0^2 + K_1 &= 4\omega_0^2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$K_1 = 3\omega_0^2,$$

$$K_2 = 4\omega_0.$$

De forma mais concisa, a lei de controle é

$$\mathbf{K} = [K_1 \ K_2] = [3\omega_0^2 \ 4\omega_0].$$

A Figura 7.13 mostra a resposta do sistema em malha fechada para as condições iniciais $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $\omega_0 = 1$. Ela mostra uma resposta muito bem amortecida, como seria de se esperar devido às duas raízes em $s = -2$. O comando impulse no MATLAB foi utilizado para gerar este gráfico.

Calcular os ganhos usando a técnica ilustrada no Exemplo 7.15 torna-se um pouco entediante quando a ordem do sistema é superior a 3. Há, no entanto, formas “canônicas” especiais das equações de variáveis de estado para as quais a álgebra para encontrar os ganhos é especialmente simples. Uma tal forma canônica que é útil no projeto da lei de controle é a forma canônica controlável. Considere o sistema de terceira ordem⁷

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2\dot{y} + a_3y = b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3u, \quad (7.77)$$

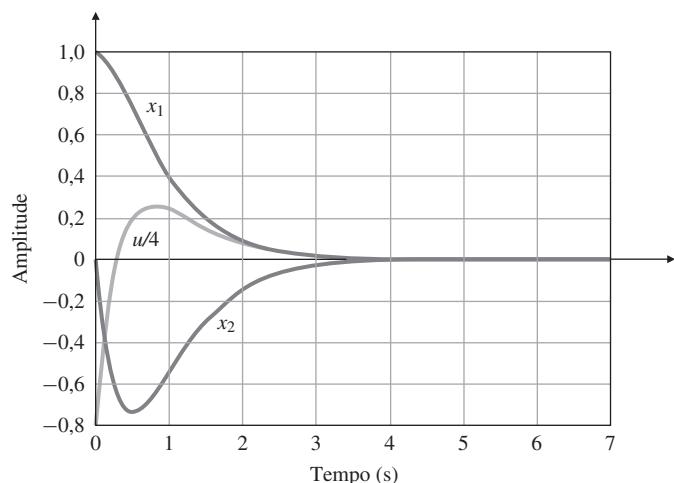


Figura 7.13 Resposta ao impulso de um oscilador não amortecido com realimentação completa de estados ($\omega_0 = 1$).

⁷ Este desenvolvimento é exatamente o mesmo para sistemas de ordem superior.

que corresponde à função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{b(s)}{a(s)}. \quad (7.78)$$

Suponha que introduzimos uma variável auxiliar (referida como *estado parcial*) ξ , que relaciona $a(s)$ e $b(s)$ como mostrado na Fig. 7.14(a). A função de transferência de U para ξ é

$$\frac{\xi(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)}, \quad (7.79)$$

ou

$$\ddot{\xi} + a_1 \ddot{\xi} + a_2 \dot{\xi} + a_3 \xi = u. \quad (7.80)$$

É fácil desenhar um diagrama de blocos correspondente à Eq. (7.80) se a equação for organizada da seguinte forma:

$$\ddot{\xi} = -a_1 \ddot{\xi} - a_2 \dot{\xi} - a_3 \xi + u. \quad (7.81)$$

O somatório é indicado na Fig. 7.14(b), na qual cada $\ddot{\xi}$ no lado direito é obtido pela integração sequencial de $\ddot{\xi}$. Para obter a saída, volte à Fig. 7.14(a) e note que

$$Y(s) = b(s)\xi(s), \quad (7.82)$$

o que significa que

$$y = b_1 \ddot{\xi} + b_2 \dot{\xi} + b_3 \xi. \quad (7.83)$$

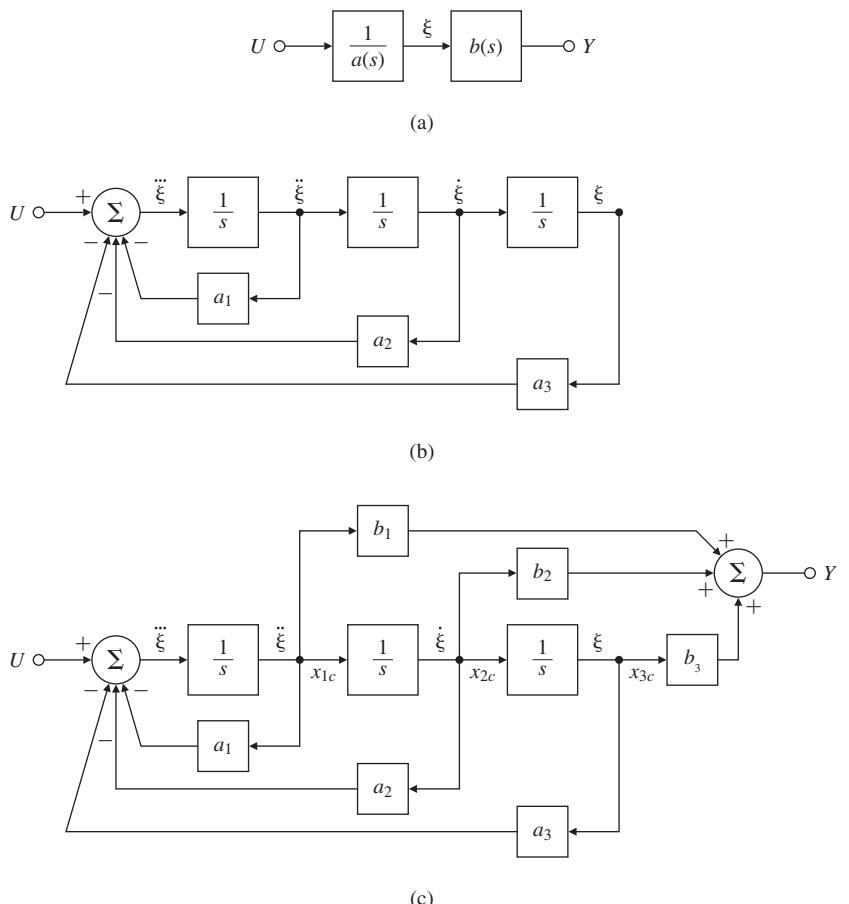


Figura 7.14 Derivação da forma canônica controlável.

Novamente, as saídas dos integradores são usadas, multiplicando-as pelos $\{b_i\}$ s e formando o lado direito da Eq. (7.77) usando um somador, que produz a saída como mostrado na Fig. 7.14(c). Neste caso, todos os laços de realimentação retornam ao ponto de aplicação da entrada, ou variável de “controle”, e, portanto, esta forma é referida como a *forma canônica controlável*. A redução da estrutura pela regra de Mason ou por operações elementares de diagrama de blocos verifica que esta estrutura tem a função de transferência dada por $G(s)$.

Tomando o estado como as saídas dos três integradores numerados, por convenção a partir da esquerda, temos

$$x_1 = \ddot{\xi}_1, x_2 = \dot{\xi}, x_3 = \xi, \quad (7.84)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \ddot{\xi} = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Podemos, agora, escrever as matrizes que descrevem a forma canônica controlável em geral:

$$\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.86a)$$

$$\mathbf{H}_c = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ \cdots \ b_n], \quad J_c = 0. \quad (7.86b)$$

A estrutura especial da matriz do sistema é conhecida como **forma companheira superior**, porque a equação característica é $a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n$ e os coeficientes deste polinômio mônico “companheiro” são os elementos da primeira linha de \mathbf{F}_c . Se formarmos a matriz do sistema de malha fechada $\mathbf{F}_c - \mathbf{G}_c \mathbf{K}_c$, descobriremos que

$$\mathbf{F}_c - \mathbf{G}_c \mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} -a_1 - K_1 & -a_2 - K_2 & \cdots & \cdots & -a_n - K_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.87)$$

**Matriz de forma
companheira**

Visualmente comparando as Eqs. (7.86a) e (7.87), vemos que a equação característica em malha fechada é

$$s^n + (a_1 + K_1)s^{n-1} + (a_2 + K_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + K_n) = 0. \quad (7.88)$$

Portanto, se a posição desejada dos polos resulta na equação característica dada por

$$\alpha_c(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0, \quad (7.89)$$

então os ganhos de realimentação necessários podem ser encontrados igualando os coeficientes nas Eqs. (7.88) e (7.89):

$$K_1 = -a_1 + \alpha_1, \quad K_2 = -a_2 + \alpha_2, \dots, \quad K_n = -a_n + \alpha_n. \quad (7.90)$$

Agora, temos a base para um procedimento de projeto. Dado um sistema de ordem n descrito de forma arbitrária por (\mathbf{F}, \mathbf{G}) e dado um polinômio característico mônico de ordem n $\alpha_c(s)$, então (1) (\mathbf{F}, \mathbf{G}) é transformada na forma canônica controlável $(\mathbf{F}_c, \mathbf{G}_c)$ fazendo uma mudança de estado $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$, e (2) os ganhos de controle são resolvidos por inspeção usando a Eq. (7.90) para obter a lei de controle $u = -\mathbf{K}_c \mathbf{z}$. Em virtude de este ganho ser obtido para o

Fórmula de Ackermann para localização do polo

estado sob a forma canônica controlável, devemos (3) transformar o ganho de volta ao estado original para obter $\mathbf{K} = \mathbf{K}_c \mathbf{T}^{-1}$.

Uma alternativa a este método de transformação é dada pela **fórmula de Ackermann** (1972), que organiza o processo de três etapas – conversão para $(\mathbf{F}_c, \mathbf{G}_c)$, calcular os ganhos e convertê-los de volta – em uma forma muito compacta

$$\mathbf{K} = [\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}] \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(\mathbf{F}), \quad (7.91)$$

tal que

$$\mathcal{C} = [\begin{array}{ccccc} \mathbf{G} & \mathbf{FG} & \mathbf{F}^2 \mathbf{G} & \cdots & \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{G} \end{array}], \quad (7.92)$$

onde \mathcal{C} é a matriz de controlabilidade vista na Seção 7.4, n é a ordem do sistema e o número de variáveis de estado e $\alpha_c(\mathbf{F})$ é uma matriz definida como

$$\alpha_c(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^n + \alpha_1 \mathbf{F}^{n-1} + \alpha_2 \mathbf{F}^{n-2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{I}, \quad (7.93)$$

onde α_i são os coeficientes da equação característica desejada Eq. (7.89). Note que a Eq. (7.93) é uma equação matricial. Consulte o Apêndice WG (disponível em inglês no site do Grupo A) para a derivação da fórmula de Ackermann.

EXEMPLO 7.16 Fórmula de Ackermann para um oscilador não amortecido

- (a) Use a fórmula de Ackermann para calcular os ganhos do oscilador não amortecido do Exemplo 7.15. (b) Verifique os cálculos com o MATLAB para $\omega_0 = 1$.

Solução.

- (a) A equação característica desejada é $\alpha_c(s) = (s + 2\omega_0)^2$. Portanto, os coeficientes do polinômio característico

$$\alpha_1 = 4\omega_0, \quad \alpha_2 = 4\omega_0^2,$$

são substituídos na Eq. (7.93), e o resultado é

$$\alpha_c(\mathbf{F}) = \left[\begin{array}{cc} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 \end{array} \right] + 4\omega_0 \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{array} \right] + 4\omega_0^2 \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \quad (7.94a)$$

$$= \left[\begin{array}{cc} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \\ -4\omega_0^3 & 3\omega_0^2 \end{array} \right]. \quad (7.94b)$$

A matriz de controlabilidade é

$$\mathcal{C} = [\begin{array}{cc} \mathbf{G} & \mathbf{FG} \end{array}] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right],$$

que fornece

$$\mathcal{C}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (7.95)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (7.95) e (7.94a) na Eq. (7.91), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\begin{array}{cc} K_1 & K_2 \end{array}] \\ &= [\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}] \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \\ -4\omega_0^3 & 3\omega_0^2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{K} = [\begin{array}{cc} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \end{array}],$$

que é o mesmo resultado obtido anteriormente.

(b) Os comandos no MATLAB são

```
wo = 1;
F = [0 1; -wo*wo 0];
G = [0;1];
pc = [-2*wo;-2*wo];
K = acker(F,G,pc)
```

fornecendo $\mathbf{K} = [3 \ 4]$, o que está de acordo com os cálculos manuais.

Como mencionado anteriormente, o cálculo da matriz de controlabilidade tem precisão numérica muito pobre, e isto influencia a fórmula de Ackermann. A Eq. (7.91), implementada no MATLAB na função `acker`, pode ser usada para o projeto em sistemas com única entrada e única saída (SISO) e com número de variáveis de estado pequeno (≤ 10). Para os casos mais complexos, uma fórmula mais confiável está disponível no MATLAB com o nome `place`. Uma limitação modesta na função `place` é que, em razão de ela se basear na atribuição dos autovetores de malha fechada, nenhum dos polos de malha fechada desejados pode ser repetido, ou seja, os polos devem ser distintos⁸, uma exigência que não se aplica na função `acker`.

Funções acker, place do MATLAB

O fato de que podemos posicionar os polos de um sistema por realimentação de estados em qualquer local desejado é um resultado bastante notável. O desenvolvimento desta seção revela que essa mudança é possível se pudermos transformar (\mathbf{F}, \mathbf{G}) na forma controlável $(\mathbf{F}_c, \mathbf{G}_c)$, que, por sua vez, é possível se o sistema é controlável. Em casos raros, o sistema pode ser incontrolável, caso em que não há controle possível para posicionar os polos em posições arbitrárias. **Sistemas incontroláveis** têm certos modos, ou subsistemas, que não são afetados pelo controle.

Isso geralmente significa que partes do sistema estão fisicamente desconectadas da entrada. Por exemplo, na forma canônica modal para um sistema com polos distintos, uma das variáveis estado modais não é ligada à entrada se houver um valor nulo na matriz \mathbf{B}_m . Uma boa compreensão física do sistema a ser controlado impediria qualquer tentativa de projetar um controlador para um sistema incontrolável. Como vimos anteriormente, existem testes algébricos para a controlabilidade; no entanto, nenhum teste matemático pode substituir o entendimento do engenheiro de controle sobre o sistema físico. Muitas vezes, a situação física é tal que todos os modos são controláveis até certo ponto, e, enquanto os testes matemáticos indicam que o sistema é controlável, certos modos são tão fracamente controláveis que os projetos para controlá-los são virtualmente inúteis. O controle de um avião é um bom exemplo de controlabilidade fraca em certos modos. O movimento de arfagem \mathbf{x}_p é principalmente afetado pelo profundo δ_e e fracamente afetado pelo movimento de rolagem \mathbf{x}_r . O movimento de rolagem é essencialmente afetado apenas pelos ailerons δ_a . A descrição de espaço de estado dessas relações é

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p & \varepsilon \\ 0 & \mathbf{F}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_a \end{bmatrix}, \quad (7.96)$$

Um exemplo de controlabilidade fraca

em que o pequeno número na matriz ε representa o acoplamento fraco entre o movimento de rolagem e o movimento de arfagem. Um teste matemático de controlabilidade para este sistema poderia concluir que o movimento de arfagem (e, portanto, a altitude) é controlável pelos ailerons, bem como pelo profundo! No entanto, é impraticável a tentativa de controlar a altitude de um avião impondo o movimento de rolagem no avião pelos ailerons.

Outro exemplo irá ilustrar as propriedades do posicionamento dos polos por realimentação de estados e os efeitos da perda de controlabilidade no processo.

⁸ Pode-se contornar esta restrição movendo os polos repetidos por quantidades bem pequenas para torná-los distintos.

EXEMPLO 7.17 Como a posição do zero pode afetar a lei de controle

Um sistema térmico específico é descrito pela Eq. (7.35a) na forma canônica observável com um zero em $s = z_0$. (a) Encontre os ganhos de realimentação de estados necessários para colocar os polos deste sistema nas raízes de $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ (i.e., em $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$). (b) Repita o cálculo com o MATLAB, usando os valores dos parâmetros $z_0 = 2$, $\zeta = 0,5$ e $\omega_n = 2$ rad/s.

Solução.

(a) As matrizes de estado são

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_0 = [1 \ 0], \quad D_0 = 0.$$

Primeiro, vamos substituir essas matrizes na Eq. (7.72) para obter a equação característica de malha fechada em termos dos ganhos desconhecidos e da posição do zero:

$$s^2 + (7 + K_1 - z_0 K_2)s + 12 - K_2(7z_0 + 12) - K_1 z_0 = 0.$$

Em seguida, comparando esta equação com a equação característica desejada, obtém-se as equações

$$K_1 - z_0 K_2 = 2\zeta\omega_n - 7,$$

$$-z_0 K_1 - (7z_0 + 12)K_2 = \omega_n^2 - 12.$$

As soluções destas equações são

$$K_1 = \frac{z_0(14\zeta\omega_n - 37 - \omega_n^2) + 12(2\zeta\omega_n - 7)}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)},$$

$$K_2 = \frac{z_0(7 - 2\zeta\omega_n) + 12 - \omega_n^2}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)}.$$

(b) Os seguintes comandos do MATLAB podem ser usados para encontrar a solução:

```
Ao = [-7 1;-12 0];
zo = 2;
Bo = [1;-zo];
pc = roots([1 2 4]);
K = place(Ao,Bo,pc)
```

Estes comandos fornecem $K = [-3.80 \ 0.60]$, os quais estão de acordo com os cálculos manuais. Se o zero estiver perto de um dos polos de malha aberta, digamos $z_0 = -2,99$, então encontramos $K = [2052.5 \ -688.1]$.

Duas importantes observações devem ser feitas a partir deste exemplo. A primeira é que os ganhos crescem quando o zero z_0 se aproxima de -3 ou -4 , valores nos quais este sistema perde a controlabilidade. Em outras palavras, quando a controlabilidade é quase perdida, os ganhos de controle se tornam muito grandes.

O sistema tem que trabalhar com mais força para conseguir o controle quando a controlabilidade é fraca.

A segunda observação importante ilustrada pelo exemplo é que tanto K_1 quanto K_2 crescem quando a largura de banda desejada em malha fechada dada por ω_n aumenta. A partir disso, podemos concluir que

Mover os polos em um longo caminho requer grandes ganhos.

Estas observações nos levam a uma discussão de como podemos escolher a localização desejada para os polos de forma geral. Antes de iniciar esse tópico, iremos completar o projeto com realimentação completa dos estados, mostrando como a entrada de referência pode ser aplicada a esse sistema e quais são as características da resposta resultante.

7.5.2 Introdução de uma entrada de referência com realimentação completa de estados

Até o momento, o controle foi dado pela Eq. (7.70), ou $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. A fim de estudar a resposta transitória dos projetos de alocação de polos para entradas de comando, é necessário introduzir a entrada de referência no sistema. Uma maneira óbvia de fazer isso é mudar o controle para $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + r$. No entanto, o sistema irá quase certamente apresentar um erro em estado estacionário não nulo para uma entrada em degrau. A maneira de corrigir este problema é calcular os valores em estado estacionário do estado e da entrada de controle que irão resultar em erro nulo na saída, e então, forçá-los a assumir estes valores. Se os valores desejados finais do estado e da entrada de controle forem \mathbf{x}_{ss} e \mathbf{u}_{ss} , respectivamente, então a nova fórmula de controle deve ser

$$u = u_{ss} - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss}), \quad (7.97)$$

de modo que quando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$ (erro nulo), $u = u_{ss}$. Para selecionar os valores finais corretos, devemos resolver as equações de modo que o sistema tenha erro nulo em estado estacionário para *qualquer* entrada constante. As equações diferenciais do sistema são as padrões:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u, \quad (7.98a)$$

$$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju. \quad (7.98b)$$

Em estado estacionário constante, as Eqs. (7.98a) e (7.98b) se reduzem a

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{G}u_{ss}, \quad (7.99a)$$

$$y_{ss} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{ss} + Ju_{ss}. \quad (7.99b)$$

Queremos resolvê-las para os valores nos quais $y_{ss} = r_{ss}$, para qualquer valor de r_{ss} . Para fazer isso, fazemos $\mathbf{x}_{ss} = \mathbf{N}_x r_{ss}$ e $u_{ss} = N_u r_{ss}$. Com estas substituições, podemos escrever as Eqs. (7.99) como uma equação matricial; o fator comum de r_{ss} anula-se, fornecendo a equação para os ganhos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.100)$$

Esta equação pode ser resolvida para \mathbf{N}_x e N_u obtendo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Com estes valores, finalmente temos a base para a introdução da entrada de referência de modo a obter erro em estado estacionário nulo para uma entrada em degrau:

$$u = N_u r - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{N}_x r) \quad (7.101a)$$

$$= -\mathbf{K}\mathbf{x} + (N_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x)r. \quad (7.101b)$$

O coeficiente de r entre parênteses é uma constante que pode ser calculada de antemão. Dando a este termo o símbolo \tilde{N} , então

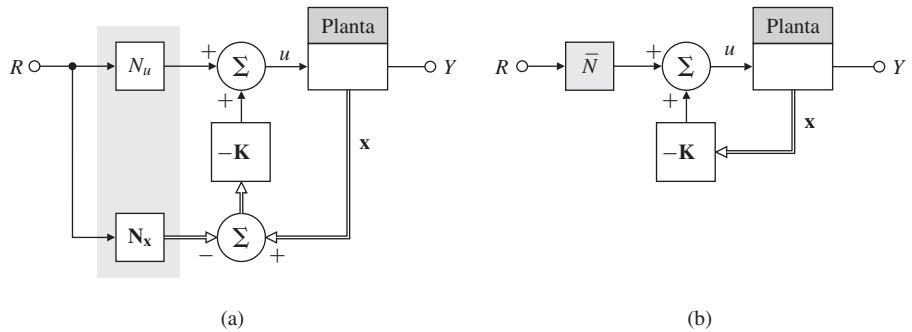
$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \tilde{N}r. \quad (7.102)$$

O diagrama de blocos do sistema é mostrado na Fig. 7.15.

Cálculo de ganho para
entrada de referência

Equação de controle
com entrada de
referência

Figura 7.15 Diagramas de blocos com realimentação completa de estados introduzindo a entrada de referência: (a) com ganhos de estado e controle; (b) com um único ganho composto.



EXEMPLO 7.18 Introdução da entrada de referência

Calcule os ganhos necessários para obter erro em estado estacionário nulo para uma entrada em degrau em x_1 e trace a resposta ao degrau unitário resultante do oscilador no Exemplo 7.15 com $\omega_0 = 1$.

Solução. Substituindo as matrizes da Eq. (7.74) (com $\omega_0 = 1$ e $\mathbf{H} = [1 \ 0]$ porque $y = x_1$) na Eq. (7.100), temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.103)$$

A solução é ($\mathbf{x} = \mathbf{a}\backslash\mathbf{b}$ no MATLAB onde as matrizes \mathbf{a} e \mathbf{b} estão no lado esquerdo e no lado direito, respectivamente),

$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_u = 1,$$

e, para a entrada de controle dada, $\mathbf{K} = [3\omega_0^2 \ 4\omega_0] = [3 \ 4]$,

$$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x = 4. \quad (7.104)$$

A resposta ao degrau correspondente (usando o comando step no MATLAB) é traçada na Fig. 7.16.

Note que existem duas equações para o controle: Eqs. (7.101b) e (7.102). Embora essas expressões sejam equivalentes na teoria, elas se diferem na aplicação prática, a Eq. (7.101b) é geralmente mais robusta a erros paramétricos do que a Eq. (7.102), principalmente quando a planta inclui um polo na origem e o comportamento do Tipo 1 é possível. Esta diferença é ilustrada de forma mais clara no exemplo seguinte.

EXEMPLO 7.19 Entrada de referência em um sistema do Tipo 1: motor CC

Calcule os ganhos de entrada necessários para introduzir uma entrada de referência com erro em estado estacionário nulo para um degrau no motor CC do Exemplo 5.1, o qual em espaço de estados é descrito pelas matrizes:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [1 \ 0], \quad \mathbf{J} = 0.$$

Assuma que o ganho de realimentação de estados é $[K_1 \ K_2]$.

Eq. (2.52) do motor CC

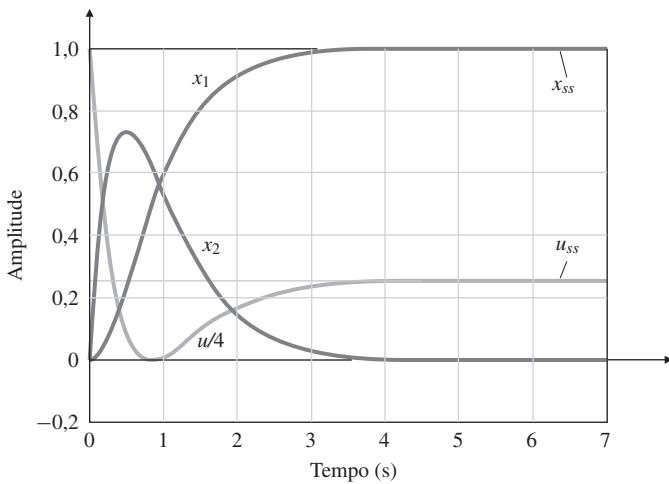


Figura 7.16 Resposta ao degrau do oscilador com uma entrada de referência.

Solução. Se substituirmos as matrizes do sistema desse exemplo na equação para os ganhos de entrada, Eq. (7.100), descobrimos que a solução é

$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ N_u = 0, \\ \bar{N} = K_1.$$

Com esses valores, a expressão para o controle usando \mathbf{Nx} e N_u [Eq. (7.101b)] se reduz a

$$u = -K_1(x_1 - r) - K_2x_2,$$

enquanto o uso de \bar{N} [Eq. (7.102)] se torna

$$u = -K_1x_1 - K_2x_2 + K_1r.$$

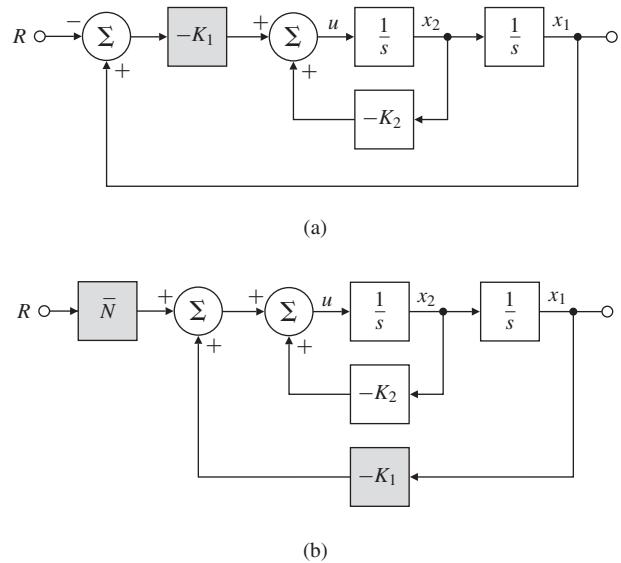
Os diagramas de blocos para os sistemas usando cada uma das equações de controle são apresentados na Fig. 7.17. Quando se está usando a Eq. (7.102), como mostrado na Fig. 7.17(b), é necessário multiplicar a entrada por um ganho $K_1 (= \bar{N})$ exatamente igual ao usado na realimentação. Se esses dois ganhos não forem exatamente iguais, haverá um erro em estado estacionário. Por outro lado, se usarmos a Eq. (7.101b), como mostrado na Fig. 7.17 (a), só há um ganho para ser usado na diferença entre a entrada de referência e o primeiro estado, e haverá erro em estado estacionário nulo mesmo que este ganho seja ligeiramente errado. O sistema da Fig. 7.17(a) é mais robusto do que o sistema da Figura. 7.17(b).

Com a entrada de referência no lugar, o sistema em malha fechada terá entrada r e saída y . A partir da descrição em espaço de estados, sabemos que os polos do sistema são os autovalores da matriz de malha fechada do sistema, $\mathbf{F} - \mathbf{GK}$. Para calcular a resposta transitória em malha fechada, é necessário saber onde os zeros de malha fechada da função de transferência de r para y estão. Eles podem ser encontrados aplicando-se a Eq. (7.67) na descrição em malha fechada, a qual assumimos não ter caminho direto da entrada u para a saída y , de modo que $J = 0$. Os zeros são valores de s tais que

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{GK}) & -\bar{N}\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (7.105)$$

Podemos usar dois fatos elementares sobre determinantes para simplificar a Eq. (7.105). Em primeiro lugar, se dividirmos a última coluna de \bar{N} , que é um escalar, então o ponto em que o determinante é zero permanece inalterado. O determinante também não é alterado se multipli-

Figura 7.17 Estruturas alternativas para introduzir a entrada de referência: (a) Eq. (7.101b); (b) Eq. (7.102).



carmos a última coluna de \mathbf{K} e adicioná-la à primeira coluna (bloco); como resultado, o termo \mathbf{GK} é cancelado. Assim, a equação matricial para os zeros se reduz a

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (7.106)$$

A Eq. (7.106) é a mesma que a Eq. (7.67) para os zeros da planta *antes* da realimentação ser aplicada. A conclusão importante é que

Quando a realimentação completa de estados é usada como na Eq. (7.101b) ou na (7.102), os zeros permanecem inalterados pela realimentação.

7.6 Seleção da localização dos polos para um bom projeto

O primeiro passo no projeto por alocação de polos é decidir a localização dos polos de malha fechada. Ao selecionar a localização dos polos, é sempre útil ter em mente que o esforço de controle necessário está relacionado com o quanto os polos de malha aberta serão movidos pela realimentação. Além disso, quando um zero está próximo de um polo, o sistema pode ser quase incontrolável, e como vimos na Seção 7.5, movimentar tais polos exige grandes ganhos de controle e, portanto, um grande esforço de controle; no entanto, o projetista é capaz de moderar as escolhas para levar em conta o esforço de controle. Portanto, uma filosofia de alocação de polos, que visa corrigir os aspectos indesejáveis da resposta em malha aberta e evitar tanto grandes aumentos na largura de banda quanto esforços para movimentar os polos que estão próximos aos zeros, irá geralmente permitir ganhos menores e, assim, menores atuadores de controle, do que uma filosofia que arbitrariamente escolhe a localização dos polos sem levar em conta as localizações dos polos e zeros de malha aberta originais.

Nesta seção, vamos discutir duas técnicas de auxílio no processo de seleção dos polos. A primeira abordagem – polos dominantes de segunda ordem – lida com a seleção dos polos sem levar explicitamente em conta seu efeito sobre o esforço de controle; no entanto, o projetista é capaz de moderar as escolhas para levar em conta o esforço de controle. O segundo método (chamado de controle ótimo ou lugar das raízes simétrico) aborda especificamente a questão de alcançar um equilíbrio entre uma boa resposta do sistema e o esforço de controle.

7.6.1 Polos dominantes de segunda ordem

A resposta ao degrau correspondente à função de transferência de segunda ordem com polos complexos com raio ω_n e taxa de amortecimento ζ foi discutida no Capítulo 3. O tempo de subida, o sobressinal e o tempo de acomodação podem ser deduzidos diretamente das localizações dos polos. Podemos escolher os polos de malha fechada para um sistema de ordem superior como um par desejado de polos dominantes de segunda ordem e selecionando o resto dos polos com partes reais correspondentes aos modos suficientemente amortecidos, de forma que o sistema simule uma resposta de segunda ordem com um esforço de controle razoável. Também devemos nos certificar de que os zeros estejam longe o suficiente no SPE para evitar que tenham qualquer efeito significativo sobre o comportamento de segunda ordem. Um sistema com vários modos de vibração em alta frequência levemente amortecidos mais dois corpos rígido, modos de baixa frequência, está de acordo com esta filosofia. Aqui, podemos escolher os modos de baixa frequência para alcançar os valores desejados de ω_n e ζ e selecionar o resto dos polos para aumentar o amortecimento dos modos de alta frequência, mantendo a sua frequência constante a fim de minimizar o esforço de controle. Para ilustrar este método de projeto, evidentemente precisamos de um sistema com ordem superior a dois; vamos usar o servomotor da unidade de fita descrita no Exemplo 7.11.

EXEMPLO 7.20 Alocação de polos como um sistema de segunda ordem dominante

Projete o servomotor da unidade de fita pelo método de polos dominante de segunda ordem, tal que o sistema não tenha mais de 5% de sobressinal e que o tempo de subida não seja maior que 4 s. Mantenha a tensão de pico o mais baixa possível.

Solução. A partir dos gráficos dos transientes de segunda ordem na Fig. 3.18, um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,7$ irá cumprir a especificação de sobressinal e, para este coeficiente de amortecimento, um tempo de subida de 4 s sugere uma frequência natural de cerca de 1/1,5. Há cinco polos no total, então os outros três precisam ser posicionados longe e à esquerda do par dominante. Para nossos propósitos, “longe” significa que os transientes devido aos polos rápidos devem terminar bem antes dos transientes devido aos polos dominantes, e assumimos que um fator de 4 nas respectivas frequências naturais não amortecidas seja adequado. A partir destas considerações, os polos desejados são dados por

$$pc = [-0.707 + 0.707 * j; -0.707 - 0.707 * j; -4; -4; -4] / 1,5; \quad (7.107)$$

Com estes polos desejados, podemos usar a função acker com **F** e **G** do Exemplo 7.11, Eq. (7.70), para encontrar os ganhos de controle

$$\mathbf{K}_2 = [8.5123 \quad 20.3457 \quad -1.4911 \quad -7.8821 \quad 6.1927]. \quad (7.108)$$

Encontrados com os seguintes comandos no MATLAB:

```
F = [0 2 0 0 0;-1 -35 .1 .175;0 0 0 2 0;.4 .4 -.4 -1.4 0;0 -.03 0 0 -1];
G = [0;0;0;0;1];
pc = [-.707+.707*j;-.707-.707*j;-4;-4;-4]/1.5;
K2 = acker(F,G,pc)
```

Função acker do
MATLAB

A resposta ao degrau e os gráficos correspondentes à tensão para este e outro projeto (a ser discutido na Seção 7.6.2) são dadas na Fig. 7.18 e Fig. 7.19. Observe que o tempo de subida é de aproximadamente 4 s e o sobressinal é de cerca de 5%, conforme especificado.

Como o processo de projeto é iterativo, os polos selecionados devem ser vistos apenas como um primeiro passo, a ser seguido por outras modificações para atender às especificações com precisão, se necessário.

Para este exemplo, aconteceu uma seleção adequada para os polos na primeira tentativa.

7.6.2 Lugar das raízes simétrico (LRS)

A técnica mais eficaz e amplamente utilizada para projeto de controle de sistemas lineares é o **regulador linear quadrático ótimo (LQR)**. A versão simplificada do problema LQR é encontrar o controle de tal forma que o índice de desempenho

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty [\rho z^2(t) + u^2(t)] dt \quad (7.109)$$

é minimizado para o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u, \quad (7.110a)$$

$$z = \mathbf{H}_1\mathbf{x}, \quad (7.110b)$$

sendo ρ na Eq. (7.109) um fator de peso escolhido pelo projetista. Um fato notável é que a lei de controle que minimiza \mathcal{J} é dada por uma realimentação de estados linear.

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}. \quad (7.111)$$

Aqui, o valor ótimo de \mathbf{K} é o que coloca os polos de malha fechada em raízes estáveis (no SPE) da equação do lugar das raízes simétrica (LRS) (Kailath, 1980)

$$1 + \rho G_0(-s)G_0(s) = 0, \quad (7.112)$$

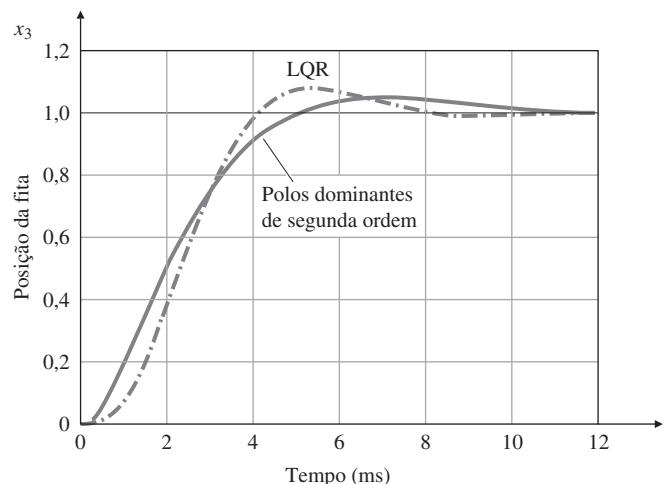


Figura 7.18 Respostas ao degrau dos projetos para o servomotor da unidade de fita.

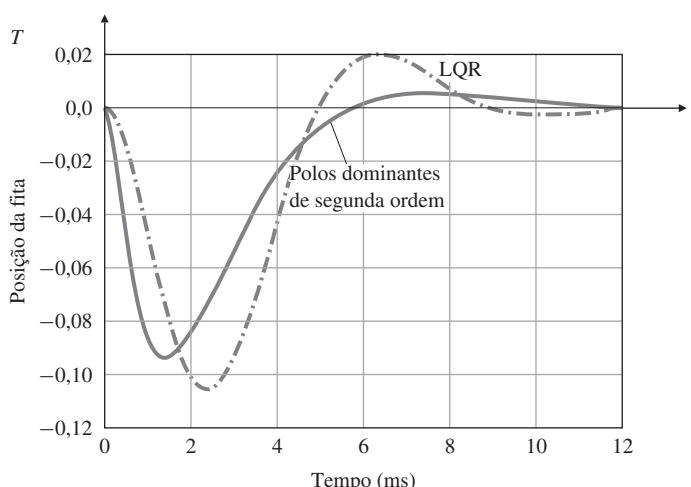


Figura 7.19 Gráficos das respostas ao degrau da tensão no servomotor da unidade de fita.

sendo G_0 a função de transferência de malha aberta de u para z :

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \mathbf{H}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (7.113)$$

Note que este é um problema de lugar das raízes, discutido no Capítulo 5 com relação ao parâmetro ρ , que pesa a relação de (erro de rastreamento) z^2 com o esforço de controle u^2 no índice de desempenho da Eq. (7.109). Note também que s e $-s$ afetam a Eq. (7.112) de forma idêntica e, portanto, para qualquer raiz s_0 da Eq. (7.112) também haverá uma raiz em $-s_0$. Chamamos o lugar das raízes resultante de **LRS**, uma vez que o lugar das raízes no SPE terá imagem refletida no semiplano direito (SPD); isto é, há simetria em relação ao eixo imaginário. Podemos, assim, escolher os melhores polos de malha fechada selecionando primeiro a matriz \mathbf{H}_1 , que define o erro de rastreamento que o projetista deseja manter pequeno, e depois escolher ρ , que equilibra a importância deste erro de rastreamento com o esforço de controle. Observe que a saída escolhida como erro de rastreamento *não* precisa ser a saída do sensor da planta. É por isso que chamamos a saída na Eq. (7.110) de z e não y .

Selecionar um conjunto de polos estáveis da solução da Eq. (7.112) resulta nos polos de malha fechada desejados, os quais podemos usar no cálculo de alocação de polos tais como a fórmula de Ackermann (Eq. 7.91) para obter \mathbf{K} . Como em todo lugar das raízes para funções de transferência reais G_0 , o lugar das raízes também é simétrico em relação ao eixo real; assim, há simetria em relação a ambos os eixos, real e imaginário. Podemos escrever a equação do LRS na forma padrão do lugar das raízes

$$1 + \rho \frac{N(-s)N(s)}{D(-s)D(s)} = 0, \quad (7.114)$$

a localização dos polos e zeros é obtida refletindo os polos e zeros de malha aberta da função de transferência a partir de U para Z em todo o eixo imaginário (o que dobra o número de polos e zeros) e, depois, esboçando o lugar das raízes. Note que o lugar das raízes pode ser de 0° ou de 180° , dependendo do sinal de $G_0(-s)G_0(s)$ na Eq. (7.112). Uma maneira rápida de determinar qual tipo de lugar das raízes usar (0° ou 180°) é escolher aquele que *não tem parte no eixo imaginário*. A regra de esboço no eixo real do lugar das raízes vai revelar isso imediatamente. Considerando a suposição de controlabilidade que fizemos, mais a suposição de que todos os modos do sistema estão presentes na saída z escolhida, o sistema em malha fechada ótimo é garantido como sendo estável; portanto, nenhuma parte do lugar das raízes pode estar no eixo imaginário.

Equação LRS

EXEMPLO 7.21 LRS para controle de velocidade de um servomecanismo

Trace o LRS para o seguinte sistema de controle de velocidade de servomecanismo com $z = y$:

$$\dot{y} = -ay + u, \quad (7.115a)$$

$$G_0(s) = \frac{1}{s + a}. \quad (7.115b)$$

Solução. A equação do LRS [Eq. (7.112)] para este exemplo é

$$1 + \rho \frac{1}{(-s + a)(s + a)} = 0. \quad (7.116)$$

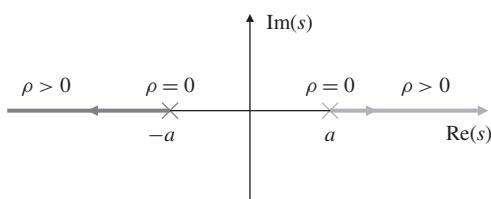


Figura 7.20 LRS para um sistema de primeira ordem.

O LRS, mostrado na Fig. 7.20, é um lugar das raízes de 0° . O polo (estável) ótimo pode ser determinado explicitamente neste caso como

$$s = -\sqrt{a^2 + \rho}. \quad (7.117)$$

Assim, a localização da raiz de malha fechada que minimiza o índice de desempenho da Eq. (7.109) está no eixo real na distância dada pela Eq. (7.117) e está sempre à esquerda da raiz de malha aberta.

EXEMPLO 7.22 LRS para projeto de controle de atitude de satélite

Trace o LRS o sistema do satélite com $z = y$.

Solução. As equações de movimento são

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (7.118)$$

$$y = [1 \ 0] \mathbf{x}. \quad (7.119)$$

Então, calculando das Eqs. (7.118) e (7.119), temos

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (7.120)$$

O lugar das raízes simétrico de 180° é mostrado na Fig. 7.21. Os comandos no MATLAB para gerar o LRS são

```
numGG = [1];
denGG = conv([1 0 0],[1 0 0]);
sysGG = tf(numGG,denGG);
rlocus(sysGG);
```

É interessante notar que os polos de malha fechada (estáveis) têm coeficiente de amortecimento de $\zeta = 0,707$. Poderíamos escolher duas raízes estáveis para um dado valor de ρ , por exemplo, $s = -1 \pm j1$ para $\rho = 4,07$, no LRS e usá-las para alocação dos polos e no projeto da lei de controle.

Escolher diferentes valores de ρ pode fornecer posições dos polos que atingem variações na relação entre uma resposta rápida (pequenos valores de $\int z^2 dt$) e um esforço controle baixo (pe-

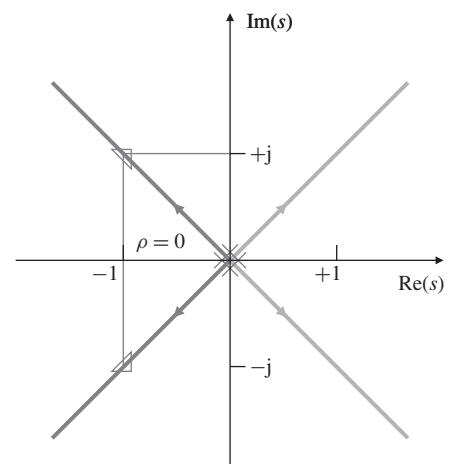


Figura: 7.21 LRS para o satélite.

quenos valores de $\int u^2 dt$). A curva na Figura 7.22 mostra esta relação de projeto para a planta do satélite (integrador duplo) [Eq.(7.18)] para vários valores de ρ , variando de 0,01 a 100. A curva tem duas assíntotas (linhas tracejadas) correspondente a baixa (ρ grande) e alta (ρ pequeno) penalidade sobre o uso do controle. Na prática, geralmente um valor de ρ é escolhido em um ponto próximo ao joelho da curva, porque ele fornece um compromisso razoável entre o uso do controle e a velocidade da resposta. Para a planta do satélite, o valor de $\rho = 1$ corresponde ao joelho da curva. Neste caso, os polos de malha fechada têm um coeficiente de amortecimento de $\zeta = 0,707$! A Figura 7.23 mostra o gráfico de Nyquist associado, que tem uma margem de fase $PM = 65^\circ$ e margem de ganho infinita. Estas excelentes propriedades de estabilidade são características gerais de projetos LQR.

Também é possível alocar polos ótimos em projetos de sistemas instáveis em malha aberta usando o LRS e o método LQR.

EXEMPLO 7.23 LRS para projeto de um pêndulo invertido

Trace o LRS para as equações linearizadas do simples pêndulo invertido com $\omega_0 = 1$. Faça a saída, z , como a soma de duas vezes a posição mais a velocidade (assim como o peso para penalizar a posição e a velocidade).

Solução. As equações de movimento são

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u. \quad (7.121)$$

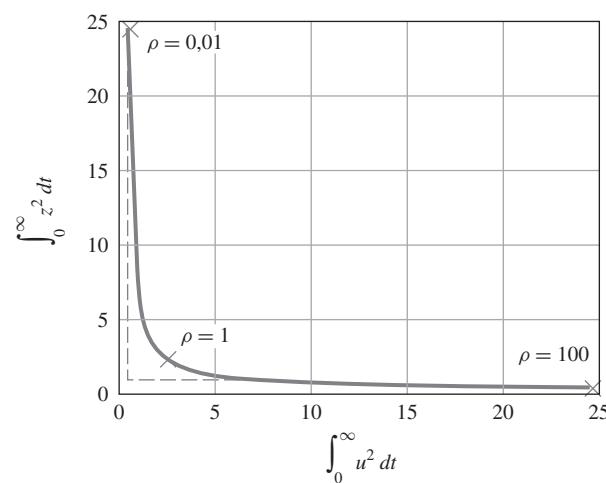


Figura 7.22 Curva de compromisso para o projeto da planta do satélite.

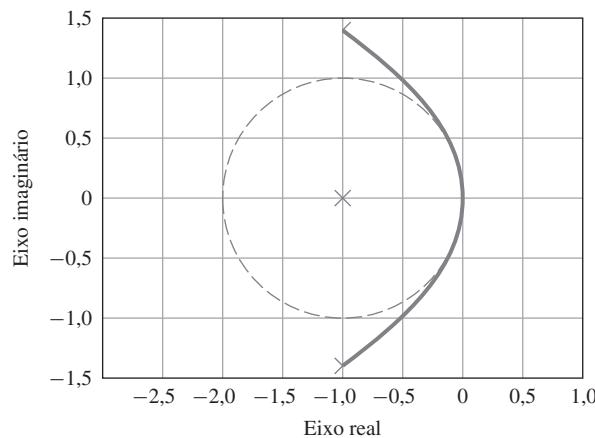


Figura 7.23 Diagrama de Nyquist para o projeto LQR.

Para a saída especificada $2 \times$ posição + velocidade, temos o erro de rastreamento

$$z = [\begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix}] \mathbf{x}. \quad (7.122)$$

Então, a partir das Eqs. (7.121) e (7.122) temos

$$G_0(s) = -\frac{s+2}{s^2 - \omega_0^2}. \quad (7.123)$$

O lugar das raízes simétrico a 0° é mostrado na Fig. 7.24. Os comandos no MATLAB para gerar o LRS são (para $\omega_0 = 1$),

```
numGG=conv([-1 2],-[-1 2]);
denGG=conv([1 0 -1],[1 0 -1]);
sysGG=tf(numGG,denGG);
rlocus(sysGG);
```

Para $\rho = 1$, vemos que os polos de malha fechada estão em $-1,36 \pm j0,606$, correspondendo a $\mathbf{K} = [-2,23 \ -2,73]$. Se substituirmos as matrizes do sistema deste exemplo na equação para o ganho de entrada, Eq. (7.100), descobrimos que a solução é

$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ N_u = 1, \\ \bar{N} = -1,23.$$

Com esses valores, a expressão de controle usando \mathbf{N}_x e N_u (Eq. 7.101b) se reduz a

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \bar{N}r.$$

A resposta ao degrau correspondente à posição é mostrada na Fig. 7.25

Como último exemplo desta seção, consideramos novamente o servomotor da unidade de fita e apresentamos o projeto LQR usando diretamente o computador para resolver a lei de controle ótima. A partir das Eqs. (7.109) e (7.111), sabemos que a informação necessária para encontrar o controle ótimo é dada pelo sistema de matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} e a matriz de saída \mathbf{H}_1 . A maioria dos pacotes de programas assistidos por computador, incluindo o MATLAB, usam uma forma mais geral da Eq. (7.109):

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt. \quad (7.124)$$

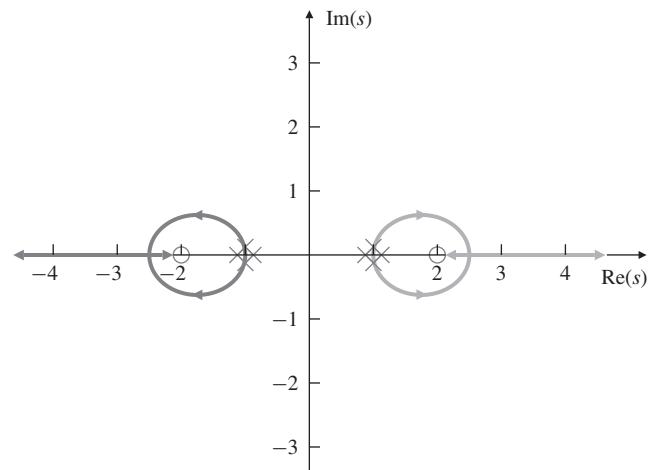


Figura 7.24 LRS para o pêndulo invertido.

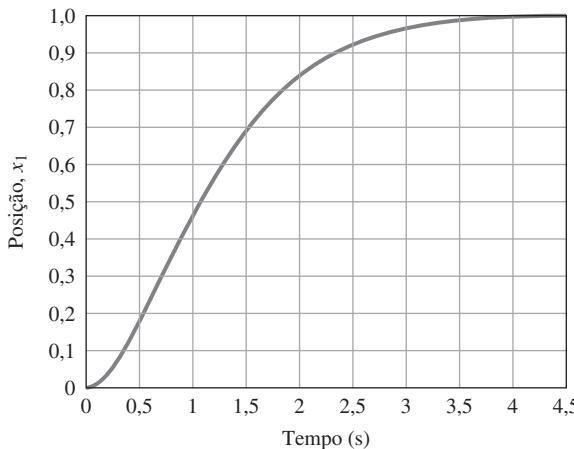


Figura 7.25 Resposta ao degrau para o pêndulo invertido.

A Eq. (7.124) reduz a forma simples da Eq. (7.109) se fizermos $\mathbf{Q} = \rho \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1$ e $\mathbf{R} = 1$. A solução direta para o ganho do controle ótimo é obtido pelo comando no MATLAB

Função LQR do MATLAB

$$\mathbf{K} = \text{lqr}(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}). \quad (7.125)$$

Um método razoável para iniciar a iteração do projeto LQR é sugerido pela regra de Bryson (Bryson e Ho, 1969). Na prática, uma escolha apropriada para obter valores aceitáveis de \mathbf{x} e \mathbf{u} é inicialmente escolher matrizes diagonais \mathbf{Q} e \mathbf{R} tais que

Regra de Bryson

$$Q_{ii} = 1/\text{maior valor aceitável de } [x_i^2],$$

$$R_{ii} = 1/\text{maior valor aceitável de } [u_i^2].$$

As matrizes de ponderação são, então, modificadas durante as iterações subsequentes para conseguir uma relação aceitável entre o desempenho e o esforço de controle.

EXEMPLO 7.24 Projeto LQR para uma unidade de fita

- (a) Encontre o controle ótimo para a unidade de fita do Exemplo 7.11 usando a posição x_3 como a saída para o índice de desempenho. Faça $\rho = 1$. Compare os resultados com os de dominância de segunda ordem obtido antes.
- (b) Compare o projeto LQR para $\rho = 0,1, 1, 10$.

Solução.

- (a) Tudo que precisamos fazer é substituir as matrizes na Eq. (7.125), formar o sistema realimentado e traçar a resposta. A matriz de índice de desempenho é o escalar $R = 1$; a parte mais difícil do problema é encontrar a matriz de custo do estado \mathbf{Q} . Com a variável de custo de saída $z = x_3$, a matriz de saída do Exemplo 7.11 é

$$\mathbf{H}_3 = [\begin{array}{ccccc} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{array}],$$

e com $\rho = 1$, a matriz especificada é

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{H}_3^T \mathbf{H}_3 \\ &= \left[\begin{array}{ccccc} 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

O ganho é dado pelo MATLAB, usando os seguintes comandos:

```
F=[0 2 0 0 0; -1 -35 .1 .1.75;0 0 0 2 0;.4 .4 -.4 -1.4;0 -.03 0 0 -1];
G=[0; 0; 0; 0; 1];
H3=[.5 0 .5 0 0];
R=1;
rho=1;
Q=rho*H3'*H3;
K=lqr(F,G,Q,R)
```

O ganho calculado no MATLAB é

$$\mathbf{K} = [\begin{array}{ccccc} 0.6526 & 2.1667 & 0.3474 & 0.5976 & 1.0616 \end{array}]. \quad (7.126)$$

Os resultados de um degrau na posição e a tensão correspondente são traçados nas Figs. 7.18 e 7.19 (usando o comando `step`) como as respostas anteriores para comparação. Obviamente, há uma vasta gama de escolhas para os elementos de \mathbf{Q} e \mathbf{R} , então uma experiência substancial é necessária, a fim de usar o método LQR eficientemente.

- (b) Os projetos LQR podem ser repetidos como no item (a) com os mesmos \mathbf{Q} e \mathbf{R} , mas com $\rho = 0,1,10$. A Figura 7.26 mostra uma comparação de um degrau na posição e a tensão correspondente para os três projetos. Como pode ser visto a partir dos resultados, os menores valores de ρ correspondem ao maior custo no controle e à resposta mais lenta, enquanto que os maiores valores de ρ correspondem ao menor custo no controle e à resposta relativamente rápida.

Limitando o comportamento dos polos do regulador LQR

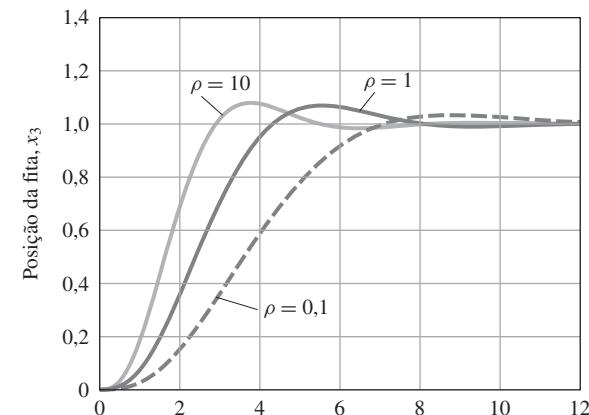
É interessante considerar a limitação no comportamento dos polos ótimos de malha fechada em função do parâmetro do lugar das raízes (i.e., ρ), embora, na prática, nenhum dos dois casos fosse usado.

Caso “*controle caro*” ($\rho \rightarrow 0$): a Eq. (7.109) penaliza principalmente o uso da energia de controle. Se o controle é caro, então o controle ótimo não move qualquer um dos polos de malha aberta, exceto para aqueles que estão no SPD. Os polos no SPD são simplesmente movidos para suas imagens refletidas no SPE. O controle ótimo faz isso para estabilizar o sistema usando o esforço de controle mínimo e não faz nenhuma tentativa para mover qualquer um dos polos do sistema no SPE. As localizações dos polos de malha fechada são simplesmente os pontos de partida no LRS no SPE. O controle ótimo não acelera a resposta do sistema neste caso. Para a planta do satélite, a linha vertical tracejada na Fig. 7.22 corresponde ao caso “*controle caro*” e ilustra que o uso muito baixo do controle resulta em um erro muito grande em z .

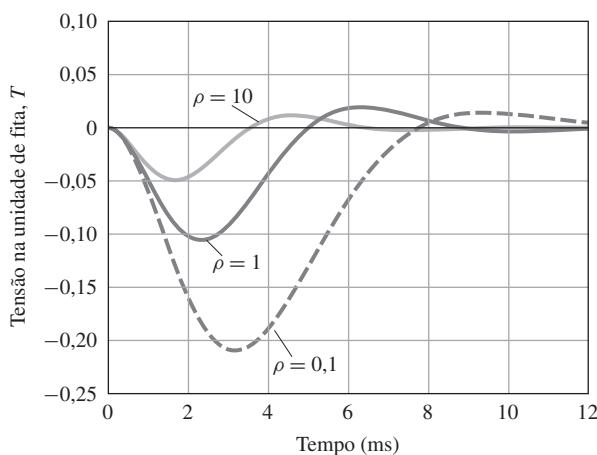
Caso “*controle barato*” ($\rho \rightarrow \infty$): neste caso, a energia de controle não é restrita, e um esforço em controle arbitrário pode ser utilizado pela lei de controle ótimo. A lei de controle, então, move alguns dos polos em malha fechada para cima dos zeros no SPE. O resto é movido para o infinito ao longo das assintotas do LRS. Se o sistema é de fase não mínima, alguns dos polos de malha fechada são movidos para as imagens refletidas destes zeros no SPE, como mostrado no Exemplo 7.23. O resto dos polos vai para o infinito com uma característica padrão de um polo do filtro de Butterworth, como mostrado no Exemplo 7.22. A lei de controle ótimo fornece o tempo de resposta mais rápido possível consistente com a função de custo LQR. A matriz de ganho de realimentação \mathbf{K} torna-se ilimitada neste caso. Para a planta de integrador duplo, a linha horizontal tracejada na Fig. 7.22 corresponde ao caso de “*controle barato*”.

Propriedades de robustez do regulador LQR

Foi provado (Anderson e Moore, 1990) que o diagrama de Nyquist para o projeto LQR evita um círculo de raio unitário centrado no ponto -1 como mostrado na Fig. 7.23. Isso leva a extraor-



(a)



(b)

dinárias propriedades de margens de fase e ganho. Pode-se demonstrar (Problema 7.32) que a diferença deve satisfazer

$$|1 + \mathbf{K}(j\omega \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G}| \geq 1. \quad (7.127)$$

Vamos reescrever o ganho da malha como a soma de suas partes real e imaginária:

$$L(j\omega) = \mathbf{K}(j\omega \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G} = \text{Re}(L(j\omega)) + j\text{Im}(L(j\omega)). \quad (7.128)$$

A Eq. (7.127) implica que

$$([\text{Re}(L(j\omega))] + 1)^2 + [\text{Im}(L(j\omega))]^2 \geq 1, \quad (7.129)$$

o que significa que o diagrama de Nyquist deve realmente evitar um círculo centrado em -1 com raio unitário. Isso implica que $\frac{1}{2} < \text{GM} < \infty$, o que significa que a margem de ganho “superior” é $\text{GM} = \infty$ e a margem de ganho “inferior” é $\text{GM} = \frac{1}{2}$ (veja também o Problema 6.24 do Capítulo 6). Assim, a matriz de ganho LQR, \mathbf{K} , pode ser multiplicada por um grande escalar ou reduzida pela metade com a estabilidade do sistema em malha fechada garantida. A margem de fase, PM, é, pelo menos $\pm 60^\circ$. Essas margens são notáveis, e não é realista assumir que podem ser alcançadas na prática, por causa da presença de erros de modelagem e falta de sensores!

Ganho LQR e margens de fase

7.6.3 Comentários sobre os métodos

Os dois métodos de seleção de polos descritos nas Seções 7.6.1 e 7.6.2 são alternativas que o projetista pode usar para um projeto inicial de alocação de polos. Note que o primeiro método (dominância de segunda ordem) sugere a seleção dos polos de malha fechada sem levar em conta o efeito sobre o esforço de controle necessário para alcançar essa resposta. Em alguns casos, portanto, o esforço de controle resultante pode ser ridiculamente alto. O segundo método (LRS), por outro lado, seleciona polos que resultam de algum equilíbrio entre os erros do sistema e do esforço de controle. O projetista pode facilmente examinar a relação entre as variações deste equilíbrio (variando ρ) e a localização das raízes do sistema, o tempo de resposta e os ganhos de realimentação. Seja qual for o método inicial de seleção de polos usado, algumas alterações são quase sempre necessárias para alcançar o equilíbrio desejado de largura de banda, sobressinal, sensibilidade, esforço de controle e outras especificações de projeto prático. Uma visão mais aprofundada sobre a seleção dos polos será adquirida a partir dos exemplos que ilustram a compensação na Seção 7.8 e dos estudos de caso no Capítulo 10.

7.7 Projeto de estimador

A lei de controle projetada na Seção 7.5 assume que todas as variáveis de estado estão disponíveis para realimentação. Na maioria dos casos, nem todas as variáveis de estado são medidas. O custo dos sensores necessários pode ser proibitivo ou pode ser fisicamente impossível medir todas as variáveis de estado, como, por exemplo, em uma usina de energia nuclear. Nesta seção, vamos demonstrar como reconstruir todas as variáveis de estado de um sistema a partir de algumas medidas. Se a estimativa do estado é denotada por \hat{x} , seria conveniente se pudéssemos substituir o estado verdadeiro na lei de controle dada pela Eq. (7.102) pelas estimativas, tal que o controle se torne $u = -K\hat{x} + \bar{N}r$. Isso é certamente possível, como veremos na Seção 7.8, então a construção de uma estimativa do estado é uma parte fundamental do projeto de controle no espaço de estados.

7.7.1 Estimadores de ordem completa

Um método de estimativa do estado é construir um modelo de ordem completa da dinâmica da planta,

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu, \quad (7.130)$$

na qual \hat{x} é a estimativa do estado real x . Conhecemos F , G e $u(t)$. Assim, este estimador será satisfatório se obtivermos a condição inicial correta $x(0)$ e definirmos $\hat{x}(0)$ igual a ela. A Figura 7.27 mostra este estimador em malha aberta. No entanto, a informação de $x(0)$ pode não ser precisa para a construção de um estimador. Caso contrário, o estimador de estados iria rastrear o estado de forma exata. Assim, se fizermos uma pobre estimativa da condição inicial, o estado estimado teria um erro com crescimento constante ou um erro que tende a zero muito lentamente. Além disso, pequenos erros no nosso conhecimento do sistema (F , G) também fariam a estimativa divergir do estado verdadeiro.

Para estudar a dinâmica deste estimador, definimos o erro de estimação como

$$\tilde{x} \triangleq x - \hat{x}. \quad (7.131)$$

Então, a dinâmica desse sistema de erro é dada por

$$\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x}, \quad \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0). \quad (7.132)$$

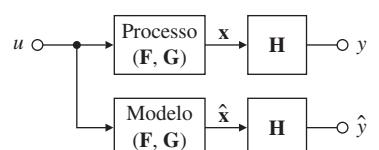


Figura 7.27 Estimador de malha aberta.

O erro converge para zero em um sistema estável (\mathbf{F} estável), mas não temos capacidade de influenciar a taxa em que a estimativa de estado converge para o estado verdadeiro. Além disso, o erro está convergindo para zero na mesma taxa que a dinâmica natural de \mathbf{F} . Se essa taxa de convergência for satisfatória, o controle e a estimativa poderiam não ser necessários.

Invocamos agora a regra de ouro: quando estiver em apuros, use a realimentação. Considere a realimentação da diferença entre as saídas medidas e estimadas, corrigindo o modelo continuamente com este sinal de erro. A equação para este esquema, mostrado na Fig. 7.28, é

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{F}\hat{x} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{x}). \quad (7.133)$$

Sendo que \mathbf{L} é proporcional ao ganho definido como

$$\mathbf{L} = [l_1, l_2, \dots, l_n]^T \quad (7.134)$$

e é escolhido para alcançar características de erro satisfatórias. A dinâmica do erro pode ser obtida subtraindo a estimativa [Eq. (7.133)] do estado [Eq. (7.44)], para obter a equação de erro

$$\dot{\tilde{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\tilde{x}. \quad (7.135)$$

A equação característica do erro é dada por

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})] = 0. \quad (7.136)$$

Realmente o erro de saída para corrigir a equação de estimativa de estado.

Se pudermos escolher \mathbf{L} de modo que $\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H}$ tenha autovalores estáveis e razoavelmente rápidos, então \tilde{x} irá decair para zero e permanecerá em zero – independente da função forçante $u(t)$ e de seu efeito sobre o estado $x(t)$ e independentemente da condição inicial $\tilde{x}(0)$. Isso significa que $\hat{x}(t)$ irá convergir para $x(t)$, independentemente do valor de $\hat{x}(0)$; além disso, podemos fazer com que a dinâmica do erro seja estável, bem como muito mais rápida do que a dinâmica em malha aberta determinada por \mathbf{F} .

Note que, na obtenção da Eq. (7.135), assumimos que \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} fossem idênticas na planta física e na implementação computacional do estimador. Se não tivermos um modelo preciso da planta (\mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H}), a dinâmica do erro já não seria regida pela Eq. (7.135). No entanto, podemos escolher \mathbf{L} tal que o sistema de erro ainda seja, pelo menos, estável e que o erro permaneça aceitavelmente pequeno, mesmo com erros (pequenos) de modelagem e entradas de distúrbios. É importante ressaltar que a natureza da planta e do estimador é bastante diferente. A planta é um sistema físico, como um processo químico ou servomecanismo, enquanto o estimador é geralmente um processador digital de computação do estado estimado de acordo com a Eq. (7.133).

A seleção de \mathbf{L} pode ser feita exatamente da mesma forma como foi feita a seleção de \mathbf{K} no projeto da lei de controle. Se especificarmos a localização desejada dos polos do erro do estimador como

$$s_i = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n,$$

então, a equação característica desejada do estimador é

$$\alpha_e(s) \stackrel{\Delta}{=} (s - \beta_1)(s - \beta_2) \cdots (s - \beta_n). \quad (7.137)$$

Podemos, então, calcular \mathbf{L} comparando os coeficientes nas Eqs. (7.136) e (7.137).

Estimativa de erro da equação característica

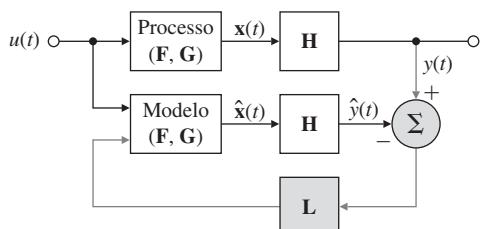


Figura 7.28 Estimador de malha fechada.

EXEMPLO 7.25 Projeto de um estimador para um pêndulo simples

Projete um estimador para o pêndulo simples. Calcule a matriz de ganho do estimador que vai colocar ambos os polos do erro do estimador em $-10\omega_0$ (cinco vezes mais rápidos que os polos do controlador selecionado no Exemplo 7.15). Verifique o resultado usando o MATLAB para $\omega_0 = 1$. Avalie o desempenho do estimador.

Solução. As equações de movimento são

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (7.138a)$$

$$y = [1 \ 0] \mathbf{x}. \quad (7.138b)$$

Pede-se que os dois polos do erro do estimador sejam alocados em $-10\omega_0$. A equação característica correspondente é

$$\alpha_e(s) = (s + 10\omega_0)^2 = s^2 + 20\omega_0 s + 100\omega_0^2. \quad (7.139)$$

A partir da Eq. (7.136), temos

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})] = s^2 + l_1 s + l_2 + \omega_0^2. \quad (7.140)$$

Comparando os coeficientes nas Eqs. (7.139) e (7.140), descobrimos que

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\omega_0 \\ 99\omega_0^2 \end{bmatrix}. \quad (7.141)$$

O resultado pode ser encontrado usando o MATLAB para $\omega_0 = 1$, usando os seguintes comandos:

```
wo=1;
F=[0 1;-wo*wo 0];
H=[1 0];
pe=[-10*wo;-10*wo];
Lt=acker(F,H',pe);
L=Lt'
```

Isso fornece $\mathbf{L} = [20 \ 99]^T$ e está de acordo com os cálculos manuais.

O desempenho do estimador pode ser testado adicionando a realimentação do estado real na planta e traçando os erros de estimativa. Note que essa não é a forma final como o sistema será construído, mas essa abordagem fornece um meio de validar o desempenho do estimador. Combinando a Eq. (7.71) da planta com realimentação de estados com a Eq. (7.133) do estimador com a saída realimentada, as seguintes equações gerais do sistema são obtidas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{GK} & \mathbf{0} \\ \mathbf{LH} - \mathbf{GK} & \mathbf{F} - \mathbf{LH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad (7.142)$$

$$y = [\mathbf{H} \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad (7.143)$$

$$\tilde{y} = [\mathbf{H} \ -\mathbf{H}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}. \quad (7.144)$$

Um diagrama de blocos para essa configuração é desenhado na Fig. 7.29.

A resposta deste sistema em malha fechada com $\omega_0 = 1$ para uma condição inicial $\mathbf{x}_0 = [1,0 \ 0,0]^T$ e $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0 \ 0]^T$ é mostrada na Fig. 7.30, em que \mathbf{K} é obtido a partir Exemplo 7.15 e \mathbf{L} vem da Eq. (7.141). A resposta pode ser obtida usando as funções impulse ou initial no MATLAB. Note que as estimativas de estado convergem para o valor real das variáveis de

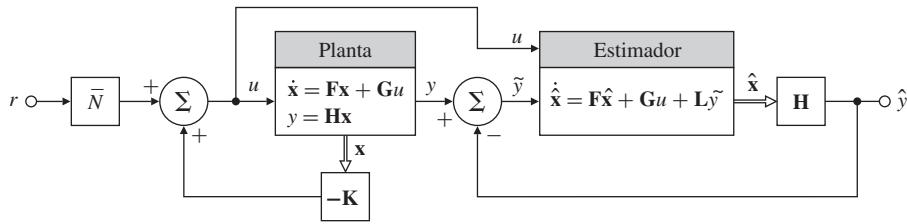


Figura 7.29 Estimador conectado à planta.

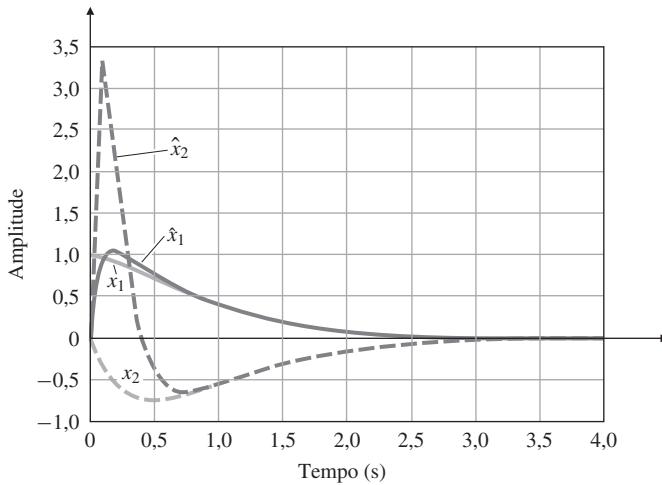


Figura 7.30 Resposta à condição inicial do oscilador mostrando x e \hat{x} .

estado após um transiente inicial, embora o valor inicial de \hat{x} tenha um grande erro. Observe também que o erro de estimativa decai aproximadamente cinco vezes mais rápido que o próprio estado, como foi projetado para fazer.

Forma canônica observável

Como foi o caso para o projeto da lei de controle, há uma forma canônica para a qual as equações de projeto do ganho do estimador são particularmente simples e a existência de uma solução é óbvia. Introduzimos esse formulário na Seção 7.4.1. As equações estão na forma canônica observável e têm a estrutura:

$$\dot{x}_o = F_o x_o + G_o u, \quad (7.145a)$$

$$y = H_o x_o, \quad (7.145b)$$

sendo

$$F_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}, \quad G_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$H_o = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0].$$

Um diagrama de blocos para o caso de terceira ordem é mostrado na Fig. 7.31. Na forma canônica observável, todos os laços de realimentação vêm da saída, ou sinal observado. Como a forma canônica controlável, a forma canônica observável é uma forma “direta”, porque os valores dos elementos significativos nas matrizes são obtidos diretamente a partir dos coeficientes dos polinômios no numerador e no denominador da correspondente função de transferência $G(s)$. A

Forma canônica
observável

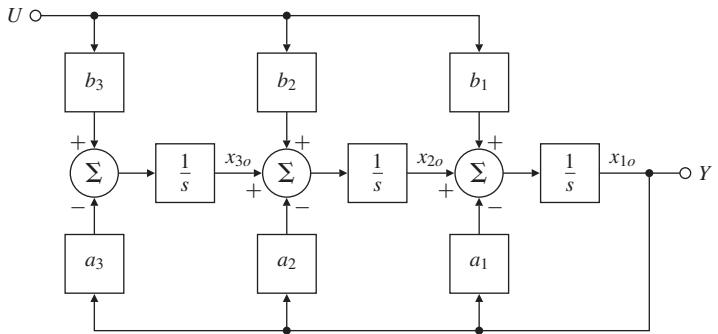


Figura 7.31 Diagrama de blocos para a forma canônica observável de um sistema de terceira ordem.

matriz \mathbf{F}_0 é chamada de **matriz companheira da esquerda** para a equação característica, pois os coeficientes da equação aparecem no lado esquerdo da matriz.

Uma das vantagens da forma canônica observável é que os ganhos do estimador podem ser obtidos a partir dela por inspeção. A matriz de erro de estimação em malha fechada para o caso de terceira ordem é

$$\mathbf{F}_0 - \mathbf{LH}_0 = \begin{bmatrix} -a_1 - l_1 & 1 & 0 \\ -a_2 - l_2 & 0 & 1 \\ -a_3 - l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.146)$$

a qual tem a equação característica

$$s^3 + (a_1 + l_1)s^2 + (a_2 + l_2)s + (a_3 + l_3) = 0, \quad (7.147)$$

e o ganho do estimador pode ser encontrado por meio da comparação dos coeficientes da Eq. (7.147) com $\alpha_e(s)$ da Eq. (7.137).

Observabilidade

Em um desenvolvimento exatamente paralelo ao caso de controle, podemos encontrar uma transformação para levar um determinado sistema à forma canônica observável se, e somente se, o sistema tiver uma característica estrutural, que neste caso chamamos de **observabilidade**. Grosseiramente falando, observabilidade se refere à capacidade de deduzir informações sobre todos os modos do sistema, monitorando apenas as saídas medidas. Inobservabilidade é quando algum modo ou subsistema é desconectado fisicamente da saída e, portanto, não aparece mais nas medições. Por exemplo, se apenas derivadas de determinadas variáveis de estado são medidas, e estas variáveis de estado não afetam a dinâmica, uma constante de integração é obscurecida. Esta situação ocorre com uma planta tendo a função de transferência $1/s^2$ se apenas a velocidade é medida, pois então é impossível deduzir o valor inicial da posição. Por outro lado, em um oscilador, a medição de velocidade é suficiente para estimar a posição, porque a aceleração e, consequentemente, a velocidade observada, são afetadas pela posição. O teste matemático para determinar a observabilidade é que a **matriz de observabilidade**

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.148)$$

tenha colunas independentes. No caso de uma única saída que vamos estudar, \mathcal{O} é quadrado, então a exigência é que \mathcal{O} seja não singular ou tenha determinante diferente de zero. Em geral, podemos encontrar uma transformação para a forma canônica observável se, e somente se, a matriz de observabilidade for não singular. Note que isso é análogo às nossas conclusões anteriores para transformar matrizes do sistema para a forma canônica controlável.

Como no projeto da lei de controle, poderíamos encontrar a transformação para a forma observável, calcular os ganhos com a Eq. (7.147) e realizar a transformação de volta. Um método alternativo do cálculo de \mathbf{L} é usar de fórmula Ackermann na forma para o estimador, que é

Matriz da observabilidade

Fórmula de Ackermann para o estimador

$$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.149)$$

sendo \mathcal{O} a matriz de observabilidade dada na Eq. (7.148).

Dualidade

A partir dessa discussão, a semelhança considerável entre os problemas de controle e estimação já deve ter sido notada. Na verdade, os dois problemas são matematicamente equivalentes. Essa propriedade é chamada de **dualidade**. A Tabela 7.1 mostra as relações de dualidade entre os problemas de controle e estimação. Por exemplo, a fórmula de Ackermann para controle [Eq. (7.91)] transforma-se na fórmula do estimador Eq. (7.149) se fizermos as substituições dadas na Tabela 7.1.

Dualidade entre controle e estimação

Podemos demonstrar isso diretamente usando álgebra matricial.

O problema de controle é selecionar a matriz linha \mathbf{K} para a alocação satisfatória dos polos da matriz do sistema $\mathbf{F} - \mathbf{GK}$; o problema de estimação é selecionar a matriz coluna \mathbf{L} para a alocação satisfatória dos polos de $\mathbf{F} - \mathbf{LH}$. No entanto, os polos de $\mathbf{F} - \mathbf{LH}$ são iguais aos polos de $(\mathbf{F} - \mathbf{LH})^T = \mathbf{F}^T - \mathbf{H}^T \mathbf{L}^T$ e, dessa forma, a álgebra do projeto de \mathbf{L}^T é idêntica à de \mathbf{K} . Portanto, onde usamos a fórmula de Ackermann ou o algoritmo de alocação nas formas

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \text{acker}(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{p}_c), \\ \mathbf{K} &= \text{place}(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{p}_c), \end{aligned}$$

Funções acker, place do MATLAB

para o problema de controle, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \text{acker}(\mathbf{F}', \mathbf{H}', \mathbf{p}_e), \\ \mathbf{L} &= \text{place}(\mathbf{F}', \mathbf{H}', \mathbf{p}_e), \\ \mathbf{L} &= \mathbf{L}'', \end{aligned}$$

com \mathbf{p}_e sendo um vetor contendo os polos desejados para a dinâmica de erro do estimador.

Assim, a dualidade nos permite usar as mesmas ferramentas de projeto para problemas de estimação e para o problema de controle com as devidas substituições. As duas formas canônicas também são duais, como podemos ver, comparando as triplas $(\mathbf{F}_c, \mathbf{G}_c, \mathbf{H}_c)$ e $(\mathbf{F}_o, \mathbf{G}_o, \mathbf{H}_o)$.

7.7.2 Estimadores de ordem reduzida

O método de projeto de estimador descrito na Seção 7.7.1 reconstrói o vetor de estado inteiro usando medições de algumas das variáveis de estado. Se os sensores não têm ruído, então um estimador de ordem completa contém redundâncias, e parece razoável questionar a necessidade de estimar as variáveis de estado que são medidas diretamente. Podemos reduzir a complexidade do estimador usando as variáveis de estado, que são medidas diretamente e exatamente? Sim. No entanto, é melhor implementar um estimador de ordem completa se houver ruído significativo nas medições, porque, além de estimar variáveis de estado não medidas, o estimador filtra as medições.

O **estimador de ordem reduzida** reduz a ordem do estimador pelo número de saídas medidas (1 neste texto). Para projetar este estimador, começamos com a suposição de que a saída

TABELA 7.1 Dualidade

Controle	Estimação
\mathbf{F}	\mathbf{F}^T
\mathbf{G}	\mathbf{H}^T
\mathbf{H}	\mathbf{G}^T

é igual ao primeiro estado, por exemplo, $y = x_a$. Se isso não for verdade, um passo preliminar é necessário. Transformar para a forma observável é possível, mas é um exagero; qualquer transformação não singular com \mathbf{H} na primeira linha é suficiente. Agora, o vetor de estado é particionado em duas partes: x_a , que é medido diretamente, e x_b , que representa o restante das variáveis de estado que precisam ser estimadas. Se particionarmos as matrizes do sistema adequadamente, a descrição completa do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{aa} & \mathbf{F}_{ab} \\ \mathbf{F}_{ba} & \mathbf{F}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_a \\ \mathbf{G}_b \end{bmatrix} u, \quad (7.150a)$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}. \quad (7.150b)$$

As dinâmicas das variáveis de estado não medidas são dadas por

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{F}_{bb}\mathbf{x}_b + \underbrace{\mathbf{F}_{ba}x_a + \mathbf{G}_bu}_{\text{entrada conhecida}}, \quad (7.151)$$

onde os dois termos mais à direita são conhecidos e podem ser considerados como uma entrada na dinâmica de $\dot{\mathbf{x}}_b$. Como $\dot{x}_a = y$, a dinâmica medida é dada pela equação escalar

$$\dot{x}_a = \dot{y} = F_{aa}y + \mathbf{F}_{ab}\mathbf{x}_b + G_a u. \quad (7.152)$$

Se agruparmos os termos conhecidos da Eq. (7.152) em um lado, temos

$$\underbrace{\dot{y} - F_{aa}y - G_a u}_{\text{medidas conhecidas}} = \mathbf{F}_{ab}\mathbf{x}_b, \quad (7.153)$$

obtendo uma relação entre as quantidades conhecidas do lado esquerdo, que consideramos como as medições, e as variáveis de estado desconhecidas, à direita. Portanto, as Eqs. (7.152) e (7.153) têm a mesma relação com o estado \mathbf{x}_b que a equação original [Eq. (7.150b)] tinha com todo o estado \mathbf{x} . Seguindo essa linha de raciocínio, podemos estabelecer as seguintes substituições nas equações de estimativa original para obter um estimador (ordem reduzida) de \mathbf{x}_b :

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_b, \quad (7.154a)$$

$$\mathbf{F} \leftarrow \mathbf{F}_{bb}, \quad (7.154b)$$

$$\mathbf{Gu} \leftarrow \mathbf{F}_{ba}y + \mathbf{G}_bu, \quad (7.154c)$$

$$y \leftarrow \dot{y} - F_{aa}y - G_a u, \quad (7.154d)$$

$$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{F}_{ab}. \quad (7.154e)$$

Portanto, as equações do estimador de ordem reduzida são obtidas substituindo as Eqs. (7.154) no estimador de ordem completa [Eq. (7.133)]:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_b = \mathbf{F}_{bb}\hat{\mathbf{x}}_b + \underbrace{\mathbf{F}_{ba}y + \mathbf{G}_bu}_{\text{entrada}} + \mathbf{L}(\underbrace{\dot{y} - F_{aa}y - G_a u - \mathbf{F}_{ab}\hat{\mathbf{x}}_b}_{\text{medições}}). \quad (7.155)$$

Se definirmos o erro de estimação como

$$\tilde{\mathbf{x}}_b \triangleq \mathbf{x}_b - \hat{\mathbf{x}}_b, \quad (7.156)$$

então as dinâmicas do erro são dadas subtraindo a Eq. (7.151) da Eq. (7.155)

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{LF}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b, \quad (7.157)$$

e sua equação característica é dada por

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{LF}_{ab})] = 0. \quad (7.158)$$

As dinâmicas do estimador são estimadas selecionando \mathbf{L} tal que a Eq. (7.158) corresponda à equação de ordem reduzida $\alpha_e(s)$. Agora, a Eq. (7.155) pode ser reescrita como

$$\dot{\hat{x}}_b = (\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{LF}_{ab})\hat{x}_b + (\mathbf{F}_{ba} - \mathbf{LF}_{aa})y + (\mathbf{G}_b - \mathbf{LG}_a)u + \mathbf{L}\dot{y}. \quad (7.159)$$

O fato de que precisamos derivar as medições na Eq. (7.159) indica uma dificuldade prática. Sabe-se que a diferenciação amplifica o ruído, por isso, se y é ruidoso, o uso de \dot{y} é inaceitável. Para contornar essa dificuldade, é definido o novo estado

$$\mathbf{x}_c \triangleq \hat{\mathbf{x}}_b - \mathbf{Ly}. \quad (7.160)$$

Em termos desse novo estado, a implementação do estimador de ordem reduzida é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_c = (\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{LF}_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{F}_{ba} - \mathbf{LF}_{aa})y + (\mathbf{G}_b - \mathbf{LG}_a)u, \quad (7.161)$$

na qual \dot{y} não aparece diretamente. A representação em diagramas de blocos do estimador de ordem reduzida é mostrada na Fig. 7.32.

EXEMPLO 7.26 Projeto de estimador de ordem reduzida para um pêndulo

Projete um estimador de ordem reduzida para o pêndulo que tem o polo de erro em $-10\omega_0$.

Solução. As matrizes do sistema são

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Estimador de ordem reduzida

As matrizes particionadas são

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{aa} & F_{ab} \\ F_{ba} & F_{bb} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} G_a \\ G_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A partir da Eq. (7.158), encontramos a equação característica em termos de L :

$$s - (0 - L) = 0.$$

Comparando esta equação com a equação desejada,

$$\alpha_e(s) = s + 10\omega_0 = 0,$$

temos que

$$L = 10\omega_0.$$

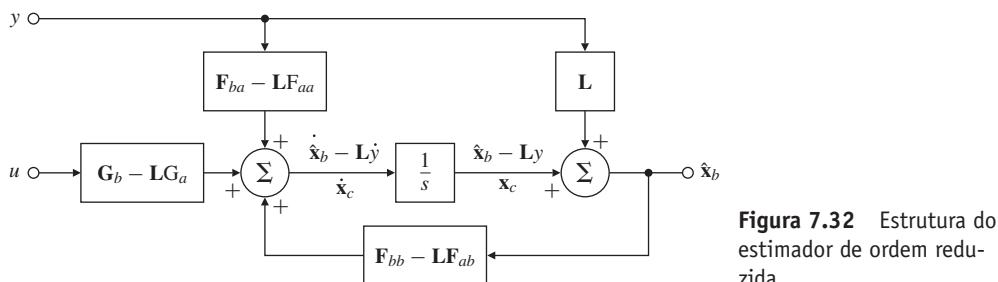


Figura 7.32 Estrutura do estimador de ordem reduzida.

A equação do estimador, a partir da Eq. (7.161), é

$$\dot{x}_c = -10\omega_0 \hat{x}_2 - \omega_0^2 y + u,$$

e o estado estimado, a partir da Eq. (7.160), é

$$\hat{x}_2 = x_c + 10\omega_0 y.$$

Usamos a lei de controle dada nos exemplos anteriores. A resposta do estimador para a condição inicial da planta $\mathbf{x}_0 = [1, 0]^T$ e para condição inicial do estimador $x_{c0} = 0$ é mostrada na Fig. 7.33 para $\omega_0 = 1$. A resposta pode ser obtida usando as funções impulse ou initial no MATLAB. Observe a semelhança da resposta devido à condição inicial do estimador de ordem completa na Fig. 7.30.

**Funções impulse,
initial do MATLAB**

Os ganhos do estimador de ordem reduzida podem ser encontrados usando o MATLAB:

$$\text{Lt} = \text{acker}(F'_{bb}, F'_{ab}, p_e),$$

$$\text{Lt} = \text{place}(F'_{bb}, F'_{ab}, p_e),$$

$$L = Lt'.$$

As condições para a existência do estimador de ordem reduzida são as mesmas do estimador de ordem completa – ou seja, observabilidade de (F, G) .

7.7.3 Seleção dos polos do estimador

**Regra geral para a
seleção dos polos do
estimador**

Podemos basear a seleção das localizações dos polos do estimador nas técnicas discutidas na Seção 7.6 para o caso dos polos do controlador. Como regra geral, os polos do estimador podem ser selecionados para serem mais rápidos que os polos do controlador por um fator de 2 a 6. Isso garante uma rápida deterioração do erro do estimador em comparação com a dinâmica desejada, fazendo, assim, com que os polos do controlador dominem a resposta total. Se o ruído no sensor é suficientemente grande para ser uma grande preocupação, podemos escolher os polos do estimador para serem duas vezes mais lentos que os polos do controlador, o que produziria um sistema com largura de banda menor e maior atenuação do ruído. No entanto, podemos esperar que, neste caso, a resposta total do sistema seja fortemente influenciada pela localização dos polos do estimador. Se os polos do estimador são mais lentos que os polos do controlador, seria de se esperar que a resposta do sistema às perturbações fosse dominada pelas características dinâmicas do estimador e não pelas que foram selecionadas pela lei de controle.

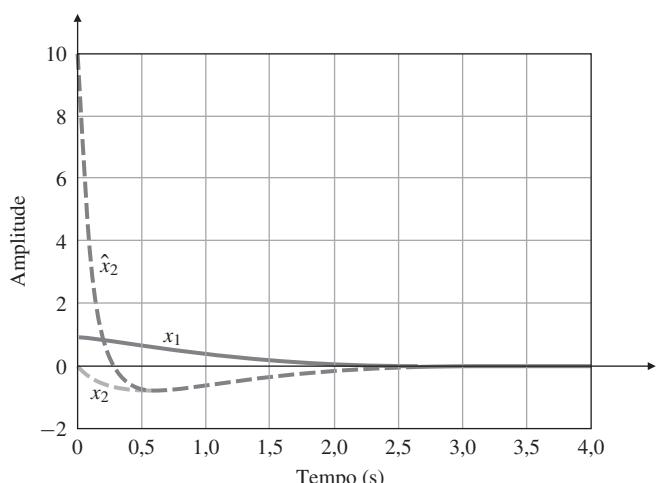


Figura 7.33 Resposta à condição inicial do estimador de ordem reduzida.

Em comparação com a seleção de polos do controlador, a seleção de polos do estimador requere que nos preocupemos com uma relação muito diferente do que o esforço de controle. Como no controlador, há um termo de realimentação no estimador que cresce em magnitude quando aumenta a velocidade solicitada da resposta. No entanto, o crescimento da magnitude da realimentação, na forma de um sinal eletrônico ou de uma palavra digital em um computador, não causa nenhuma dificuldade especial.

No controlador, aumentar a velocidade da resposta aumenta o esforço de controle, o que implica no uso de um atuador maior que, por sua vez, aumenta tamanho, peso e custo. A importante consequência do aumento da velocidade da resposta de um estimador é que a largura de banda do estimador torna-se maior, fazendo com que mais ruído no sensor passe para o atuador de controle. Claro que, se (F, H) não são observáveis, então nenhuma quantidade de ganho do estimador pode produzir uma estimativa razoável do estado. Assim, como no projeto do controlador, o melhor projeto de estimador é um equilíbrio entre a boa resposta transitória e uma largura de banda baixa o suficiente para que o ruído no sensor não prejudique significativamente a ação do atuador. Tanto a dominância de segunda ordem e as ideias sobre protótipo da equação característica podem ser usadas para satisfazer a estas especificações.

Há também um resultado para o projeto dos ganhos do estimador baseado no LRS. Na teoria de estimação ideal, a melhor escolha para os ganhos do estimador é dependente da razão entre a intensidade do ruído no sensor v e a intensidade do ruído do processo (perturbação) [w na Eq. (7.163)]. Isso é melhor compreendido reexaminando a equação do estimador

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu + L(y - H\hat{x}) \quad (7.162)$$

para ver como isso interage com o sistema quando o ruído de processo w está presente. A planta com ruído de processo é descrita por

$$\dot{x} = Fx + Gu + G_1w, \quad (7.163)$$

e a equação de medição com ruído no sensor v é dada por

$$y = Hx + v. \quad (7.164)$$

A equação do erro do estimador com estas entradas adicionais é encontrada diretamente subtraindo a Eq. (7.162) da Eq. (7.163) e substituindo a Eq. (7.164) por y :

$$\dot{\hat{x}} = (F - LH)\hat{x} + G_1w - Lv. \quad (7.165)$$

Na Eq. (7.165) o ruído no sensor é multiplicado por L . Se L for muito pequeno, então o efeito do ruído no sensor é removido, mas a resposta dinâmica do estimador será “lenta”, de modo que o erro não rejeite muito bem os efeitos de w . O estado de um estimador de baixo ganho não irá rastrear as entradas de uma planta incerta muito bem. Esses resultados podem, com algum sucesso, ser aplicados também a erros no modelo, por exemplo, erros em F ou G . Esses erros de modelagem irão adicionar termos na Eq. (7.165) e agirão como um ruído adicional no processo. Por outro lado, se L é grande, então a resposta do estimador será rápida e o ruído de perturbação ou de processo será rejeitado, mas o ruído no sensor, multiplicado por L , resultará em grandes erros. Claramente, um equilíbrio entre estes dois efeitos é necessário. A solução ideal para esse equilíbrio pode ser encontrada com suposições razoáveis resolvendo uma equação do LRS para o estimador, que é muito semelhante à formulação para o controle ótimo [Eq. (7.112)]. A equação do LRS para o estimador é

$$1 + qG_e(-s)G_e(s) = 0, \quad (7.166)$$

sendo q a razão entre a intensidade da entrada de distúrbio e a intensidade do ruído no sensor e G_e a função de transferência do ruído de processo para a saída do sensor, dada por

$$G_e(s) = H(sI - F)^{-1}G_1. \quad (7.167)$$

Note, a partir das Eqs. (7.112) e (7.166), que $G_e(s)$ é semelhante a $G_0(s)$. No entanto, uma comparação das Eqs. (7.113) e (7.167) mostra que $G_e(s)$ tem a matriz de entrada G_1 em vez de

Ruído de processo

Ruído no sensor

Equação do LRS para o estimador

\mathbf{G} , e que G_0 é a função de transferência da entrada de controle u para a saída *de custo* z e tem a matriz de saída \mathbf{H}_1 vez de \mathbf{H} .

O uso da equação do **LRS** do estimador [Eq. (7.166)] é idêntico ao uso do **LRS** do controlador. Um lugar das raízes com respeito a q é gerado, obtendo conjuntos de polos ideais do estimador correspondendo mais ou menos à relação entre a intensidade do ruído de processo e a intensidade do ruído no sensor. O projetista, então, escolhe o conjunto de polos (estáveis) que lhe parece melhor, considerando todos os aspectos do problema. Uma importante vantagem de usar a técnica **LRS** é que, após a matriz de entrada de ruído no processo \mathbf{G}_1 ser selecionada, a arbitrariedade é reduzida a um grau de liberdade, a seleção q , em vez de aos muitos graus de liberdade necessários para selecionar os polos diretamente em um sistema de ordem superior.

Um comentário final diz respeito ao estimador de ordem reduzida. Devido à presença de um termo de transmissão direta de y para \mathbf{x}_b através de \mathbf{L} (veja Fig. 7.32), o estimador de ordem reduzida tem uma largura de banda do sensor para o controlador muito maior do que o estimador de ordem completa. Portanto, se o ruído no sensor é um fator significativo, o estimador de ordem reduzida é menos atraente, pois a potencial simplicidade em termos de complexidade é menos relevante que o aumento da sensibilidade ao ruído.

EXEMPLO 7.27 LRS para o projeto de um estimador para pêndulo simples

Desenhe o LRS do estimador para as equações linearizadas do pêndulo invertido simples com $\omega_0 = 1$. Selecione a saída como o ruído de medição da posição com razão de intensidade q .

Solução. São dadas as equações do sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w,$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v.$$

Então, calculando a partir da Eq. (7.167) que

$$G_e(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}.$$

O lugar das raízes simétrico de 180° é mostrado na Fig. 7.34. Os comandos no MATLAB para gerar o LRS são (para $\omega_0 = 1$)

```
numGG=1;
denGG=conv([1 0 1],[1 0 1]);
sysGG=tf(numGG,denGG);
rlocus(sysGG);
```

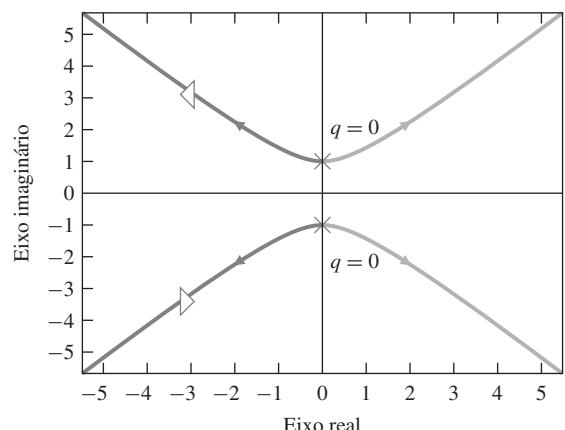


Figura 7.34 Lugar das raízes simétrico para o projeto de um estimador para o pêndulo invertido.

Poderíamos escolher duas raízes estáveis para um dado valor de q , por exemplo $s = -3 \pm j3,18$ para $q = 365$, e usá-las para a alocação de polos do estimador.

7.8 Projeto do compensador: lei de controle e estimador combinados

Se combinarmos o projeto da lei de controle descrito na Seção 7.5 com o projeto do estimador descrito na Seção 7.7 e implementarmos a lei de controle usando as variáveis de estado estimadas, o projeto de um **regulador** que é capaz de rejeitar distúrbios está completo, mas não tem entrada de referência a ser seguida. No entanto, devido ao fato de a lei de controle ser projetada para realimentar o estado real (e não o estimado), preocupamo-nos com o efeito de usar \hat{x} no lugar do x na dinâmica do sistema. Nesta seção, vamos calcular esse efeito. Ao fazê-lo, vamos calcular a equação característica de malha aberta e de malha fechada da função de transferência do compensador. Vamos usar esses resultados para comparar os projetos em espaço de estados com os projetos baseados no lugar das raízes e na resposta em frequência.

Agora a equação da planta com realimentação é

$$\dot{\hat{x}} = Fx - GK\hat{x}, \quad (7.168)$$

a qual pode ser reescrita em termos do estado de erro \tilde{x} como

$$\dot{\tilde{x}} = Fx - GK(x - \tilde{x}). \quad (7.169)$$

A dinâmica total do sistema na forma de espaço de estados é obtida pela combinação da Eq. (7.169) com o erro de estimativa (Eq. 7.135), obtendo

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - GK & GK \\ 0 & F - LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}. \quad (7.170)$$

A equação característica desse sistema em malha fechada é

$$\det \begin{bmatrix} sI - F + GK & -GK \\ 0 & sI - F + LH \end{bmatrix} = 0. \quad (7.171)$$

Como a matriz é um bloco triangular (veja o Apêndice WE, disponível em inglês no site do Grupo A) podemos reescrever a Eq. (7.171) como

$$\det(sI - F + GK) \cdot \det(sI - F + LH) = \alpha_c(s)\alpha_e(s) = 0. \quad (7.172)$$

Em outras palavras, o conjunto de polos do sistema combinado consiste na união dos polos do controlador e dos polos do estimador. Isso significa que os projetos da lei de controle e do estimador podem ser realizados de forma independente, todavia, quando eles são utilizados em conjunto desta forma, os polos se mantêm inalterados.⁹

Regulador

Para comparar o método de projeto em variáveis de estado com os métodos de transformadas discutidos nos Capítulos 5 e 6, note, a partir da Fig. 7.35, que a parte sombreada em azul corresponde ao compensador. A equação de estado para este compensador é obtida incluindo a lei de controle $u = -K\hat{x}$ (porque ela é parte do compensador) no estimador Eq. (7.133), obtendo

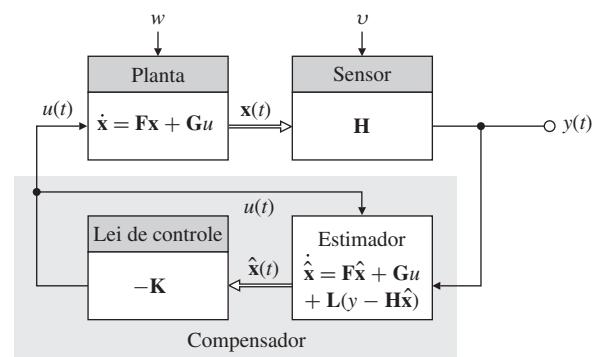
$$\dot{\hat{x}} = (F - GK - LH)\hat{x} + Ly, \quad (7.173a)$$

$$u = -K\hat{x}. \quad (7.173b)$$

Polos de combinação entre lei de controle e estimador

⁹ Este é um caso especial do princípio da separação (Gunckel e Franklin, 1963), que se detém a contextos muito mais genéricos e nos permite obter um projeto global ótimo combinando os projetos separados da lei de controle e do estimador em certos casos estocásticos.

Figura 7.35 Esquematização do estimador e do controlador.



Note que a Eq. (7.173a) tem a mesma estrutura da Eq. (7.21a), repetida aqui:

$$\dot{x} = Fx + Gu. \quad (7.174)$$

Devido ao fato de a equação característica da Eq. (7.21a) ser

$$\det(sI - F) = 0, \quad (7.175)$$

a equação característica do compensador é encontrada comparando as Eqs. (7.173a) e (7.174) e substituindo as matrizes equivalentes na Eq. (7.175), obtendo

$$\det(sI - F + GK + LH) = 0. \quad (7.176)$$

Note que nunca especificamos as raízes da Eq. (7.176), nem a utilizamos em nossa discussão sobre a técnica de projeto no espaço de estados. (Note também que o compensador não é garantido como sendo estável; as raízes da Eq. (7.176) podem estar no SPD.) A função de transferência de y para u representando o compensador dinâmico é obtida inspecionando a Eq. (7.48) e substituindo nas matrizes correspondentes da Eq. (7.173):

$$D_c(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - F + GK + LH)^{-1}L. \quad (7.177)$$

O mesmo desenvolvimento pode ser utilizado para o estimador de ordem reduzida. Aqui, a lei de controle é

$$u = -[K_a \quad \mathbf{K}_b] \begin{bmatrix} x_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} = -K_a y - \mathbf{K}_b \hat{x}_b. \quad (7.178)$$

Substituindo a Eq. (7.178) na Eq. (7.174), usando a Eq. (7.161) e um pouco de álgebra, obtemos

$$\dot{x}_c = \mathbf{A}_r x_c + \mathbf{B}_r y, \quad (7.179a)$$

$$u = \mathbf{C}_r x_c + D_r y, \quad (7.179b)$$

sendo

$$\mathbf{A}_r = F_{bb} - LF_{ab} - (\mathbf{G}_b - LG_a)\mathbf{K}_b, \quad (7.180a)$$

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{L} + F_{ba} - LF_{aa} - (\mathbf{G}_b - LG_a)K_a, \quad (7.180b)$$

$$\mathbf{C}_r = -\mathbf{K}_b, \quad (7.180c)$$

$$D_r = -K_a - \mathbf{K}_b \mathbf{L}. \quad (7.180d)$$

A dinâmica do compensador agora tem a função de transferência

$$D_{cr}(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \mathbf{C}_r(sI - \mathbf{A}_r)^{-1} \mathbf{B}_r + D_r. \quad (7.181)$$

Quando calculamos $D_c(s)$ ou $D_{cr}(s)$ para um caso específico, vemos que eles são muito semelhantes aos compensadores clássicos dados nos Capítulos 5 e 6, apesar do fato de que são conseguidos por meios completamente diferentes.

Função de transferência do compensador

Função de transferência do compensador de ordem reduzida

EXEMPLO 7.28 *Projeto do compensador de ordem completa para o controle de atitude do satélite*

Projete um compensador usando alocação de polos para a planta de satélite com função de transferência $1/s^2$. Aloque os polos do controlador em $s = -0,707 \pm 0,707j$ ($\omega_n = 1$ rad/s, $\zeta = 0,707$) e aloque os polos do estimador em $\omega_n = 5$ rad/s, $\zeta = 0,5$.

Solução. A descrição em variáveis de estado dada pela função de transferência $G(s) = 1/s^2$ é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Se alocarmos as raízes do controlador em $s = -0,707 \pm 0,707j$ ($\omega_n = 1$ rad/s, $\zeta = 0,7$), então

$$\alpha_c(s) = s^2 + s\sqrt{2} + 1. \quad (7.182)$$

A partir de $K = \text{place}(F, G, pc)$, o ganho de realimentação de estados é encontrado

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Se as raízes do erro do estimador estão em $\omega_n = 5$ rad/s e $\zeta = 0,5$, então o polinômio característico do estimador desejado é

$$\alpha_e(s) = s^2 + 5s + 25 = s + 2,5 \pm 4,3j, \quad (7.183)$$

e, a partir de $Lt = \text{place}(F', H', pe)$, a matriz de ganhos de realimentação do estimador é encontrada

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

A função de transferência do compensador dada pela Eq. (7.177) é

$$D_c(s) = -40,4 \frac{(s + 0,619)}{s + 3,21 \pm 4,77j}, \quad (7.184)$$

que se parece muito com um compensador de avanço, já que ela tem um zero no eixo real à direita de seus polos; no entanto, ao invés de um polo real, a Eq. (7.184) tem dois polos complexos. O zero fornece um termo derivativo na realimentação com avanço de fase, e os dois polos fornecem alguma suavização do ruído no sensor.

O efeito da compensação nos polos de malha fechada do sistema pode ser avaliada exatamente da mesma forma que avaliamos a compensação nos Capítulos 5 e 6 utilizando as ferramentas lugar das raízes ou resposta em frequência. O ganho de 40,4 na Eq. (7.184) é resultado da seleção dos polos inerentes nas Eqs. (7.182) e (7.183). Se substituirmos este valor específico de ganho do compensador na variável K , então a equação característica do sistema em malha fechada mais o compensador torna-se

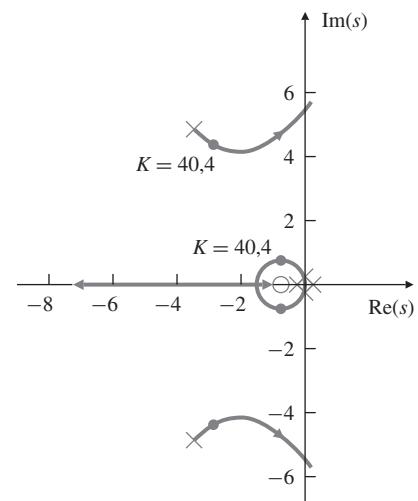
$$1 + K \frac{(s + 0,619)}{(s + 3,21 \pm 4,77j)s^2} = 0. \quad (7.185)$$

A técnica do lugar das raízes nos permite avaliar as raízes desta equação com relação a K , como mostrado na Fig. 7.36. Note que o lugar das raízes passa pelas raízes selecionadas para as Eqs. (7.182) e (7.183) e, quando $K = 40,4$, as quatro raízes do sistema em malha fechada são iguais às especificadas.

Os gráficos da resposta em frequência dados na Fig. 7.37 mostram que a compensação projetada usando espaço de estados chega aos mesmos resultados que poderiam ser alcançados usando o projeto baseado na resposta em frequência. Especificamente, a margem de fase não compensada de 0° aumenta para 53° no caso compensado, e o ganho $K = 40,4$ produz uma frequência de cruzamento $\omega_c = 1,35$ rad/s. Ambos os valores são aproximadamente consistentes

Resultados idênticos dos métodos de projeto espaço de estados e resposta em frequência

Figura 7.36 Lugar das raízes da combinação do controlador com o estimador, com o ganho do processo como parâmetro.



com as raízes do controlador em malha fechada, com $\omega_n = 1$ rad/s e $\zeta = 0,7$, como era de se esperar, porque esses polos lentos do controlador são dominantes na resposta do sistema sobre os polos rápidos do estimador.

Agora, consideramos um estimador de ordem reduzida para o mesmo sistema.

EXEMPLO 7.29 Projeto do compensador de ordem reduzida para o controle de atitude de um satélite

Repita o projeto para a plando do satélite $1/s^2$, mas use um estimador de ordem reduzida. Aloque os polos em -5 rad/s.

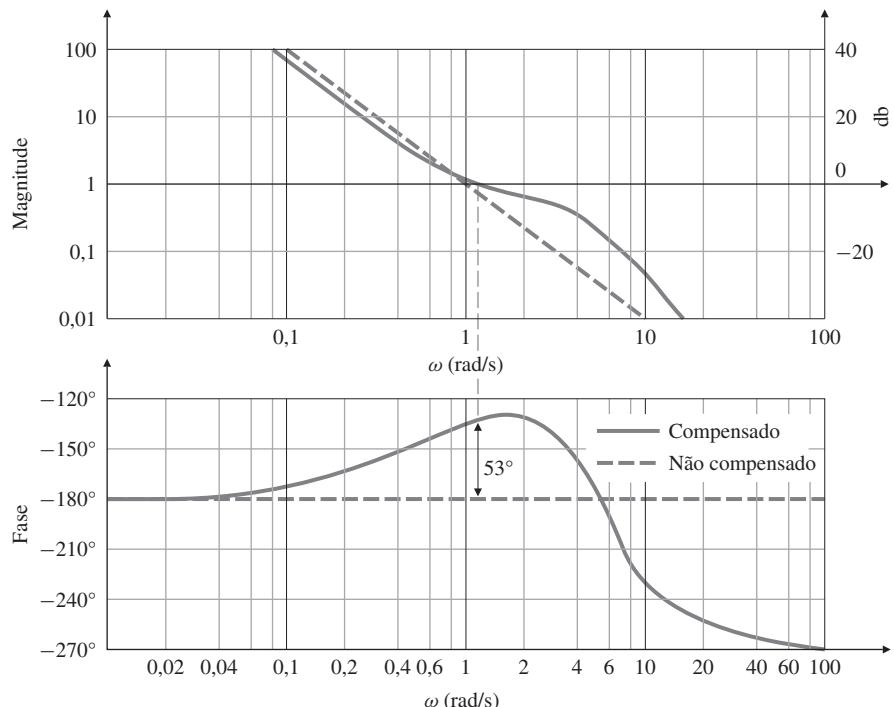


Figura 7.37 Resposta em frequência para $G(s) = 1/s^2$.

Solução. A partir da Eq. (7.158), temos que o ganho do estimador é

$$L = 5,$$

e, a partir das Eqs. (7.179a, b), as equações escalares do compensador são

$$\dot{x}_c = -6,41x_c - 33,1y,$$

$$u = -1,41x_c - 8,07y,$$

sendo que, a partir da Eq. (7.160),

$$x_c = \hat{x}_2 - 5y.$$

O compensador tem a função de transferência calculada a partir da Eq. (7.181) como

$$D_{cr}(s) = -\frac{8,07(s + 0,619)}{s + 6,41}$$

e é mostrada na Fig. 7.38

O compensador de ordem reduzida, aqui, é precisamente uma rede de avanço. Essa é uma descoberta agradável, pois mostra que as técnicas de transformadas e de variáveis de estado podem resultar exatamente no mesmo tipo de compensação. O lugar das raízes da Fig. 7.39 mostra que os polos de malha fechada ocorrem nos locais designados. A resposta em frequência do sistema compensado visto na Fig. 7.40 mostra uma margem de fase de cerca de 55° . Tal como acontece com o estimador de ordem completa, a análise por outros métodos confirma as localizações selecionadas das raízes.

Propriedades mais sutis do método de alocação de polos podem ser ilustradas por um sistema de terceira ordem.

EXEMPLO 7.30 Projeto do compensador de ordem completa para o servo CC

Use o método de alocação de polos no espaço de estados para projetar um compensador para o sistema de servo CC com função de transferência

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}.$$

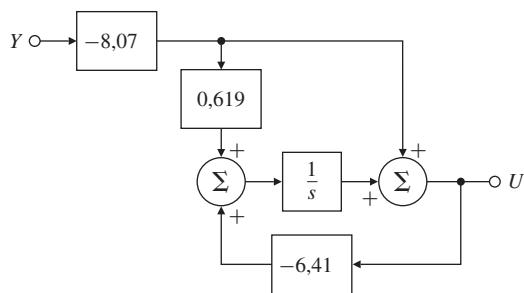


Figura 7.38 Diagramas de blocos simplificado de um controlador de ordem reduzida que é uma rede de avanço.

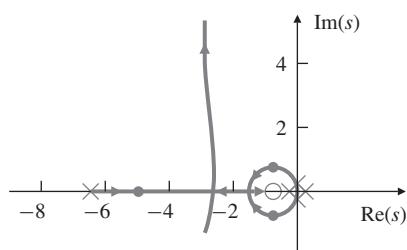


Figura 7.39 Lugar das raízes para um controlador de ordem reduzida e processo $1/s^2$, localização das raízes para $K = 8,07$ mostradas com pontos.

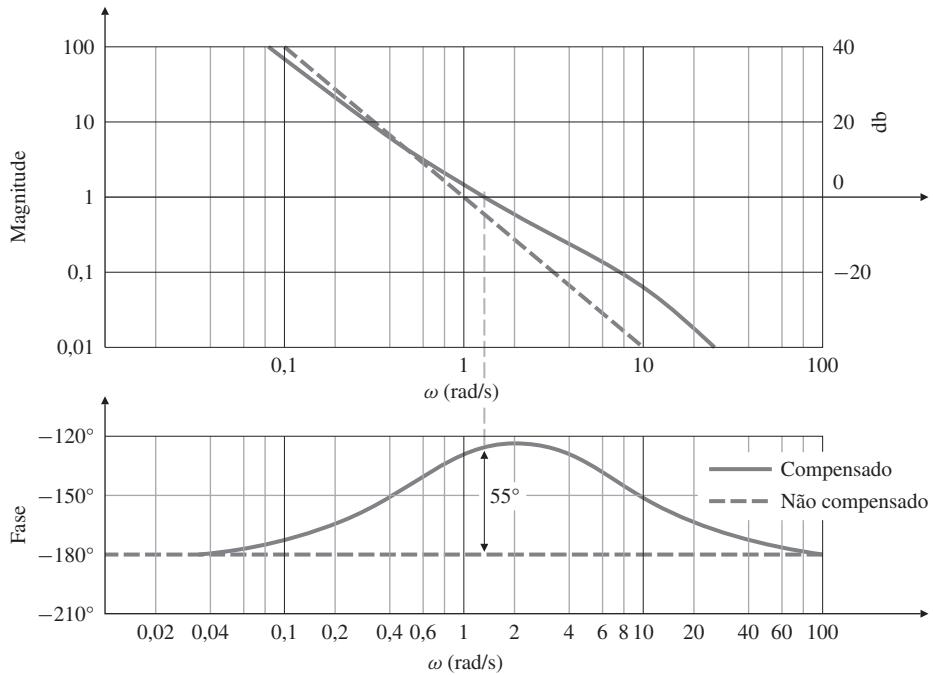


Figura 7.40 Resposta em frequência para $G(s) = 1/s^2$ com o estimador de ordem reduzida.

Usando a descrição em estado na forma canônica observável, aloque os polos do controlador nas localizações $pc = [-1.42; -1.04 \pm 2.14j]$ e os polos do estimador de ordem completa em $pe = [-4.25; -3.13 \pm 6.41j]$.

Solução. Um diagrama de blocos desse sistema na forma canônica observável é mostrado na Fig. 7.41. As matrizes em espaço de estado correspondentes são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [1 \ 0 \ 0], \quad J = 0.$$

Os polos desejados são

$$pc = [-1.42; -1.04 + 2.14 * j; -1.04 - 2.14 * j].$$

Calculando os ganhos de realimentação de estados usando $K = (F, G, pc)$,

$$K = [-46.4 \ 5.76 \ -0.65].$$

Os polos do erro de estimação estão em

$$pe = [-4.25; -3.13 + 6.41 * j; -3.13 - 6.41 * j];$$

Calculando os ganhos do estimador como $L = place(F', H', pe)$, $L = Lt'$,

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 61.4 \\ 216 \end{bmatrix}.$$

A função de transferência do compensador, dada pelas substituições na Eq. (7.177), é

$$D_c(s) = -190 \frac{(s + 0,432)(s + 2,10)}{(s - 1,88)(s + 2,94 \pm 8,32j)}.$$

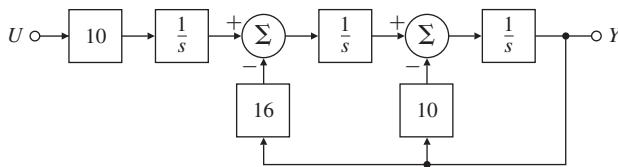


Figura 7.41 Servo CC na forma canônica observável.

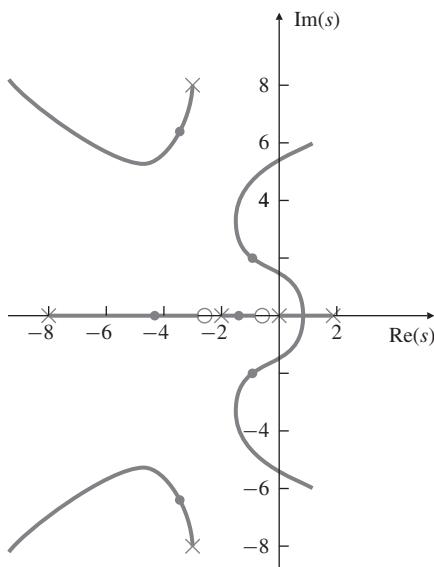


Figura 7.42 Lugar das raízes para o servo CC com os polos especificados.

A Figura 7.42 mostra o lugar das raízes do sistema com o compensador e planta em série, traçado com o ganho do compensador como o parâmetro. Ele verifica se as raízes estão nos locais desejados quando o ganho $K = 190$, apesar da peculiar (instável) compensação resultante. Mesmo que este compensador tenha uma raiz instável em $s = +1,88$, todos os polos do sistema em malha fechada (controlador e estimator) são estáveis.

Um compensador instável normalmente não é aceitável por causa da dificuldade dos testes do compensador sozinho ou do sistema em malha aberta. Em alguns casos, no entanto, um melhor controle pode ser conseguido com um compensador instável; então, a inconveniência de testá-lo pode valer a pena.¹⁰

A Figura 7.33 mostra uma consequência direta do compensador instável: o sistema se torna instável quando o ganho é reduzido a seu valor nominal. Tal sistema é chamado de **condicionalmente estável** e deve ser evitado, se possível. Como veremos no Capítulo 9, a saturação do atuador em resposta a grandes sinais tem o efeito de diminuir o ganho efetivo e, em um sistema condicionalmente estável, pode surgir a instabilidade.

Compensador
condicionalmente
estável

Além disso, se os componentes eletrônicos são tais que o ganho amplificador do controle aumenta continuamente de zero até o valor nominal durante a inicialização, tal sistema seria inicialmente instável. Essas considerações nos levam a considerar projetos alternativos para esse sistema.

EXEMPLO 7.31 Reprojeto do estimador de ordem reduzida de um sistema de servo CC

Projete um compensador para o sistema de servo CC do Exemplo 7.30 usando os mesmos polos do controle, mas com um estimador de ordem reduzida. Aloque os polos do estimador nas posições $-4,24 \pm 4,24j$ com $\omega_n = 6$ e $\zeta = 0,707$.

¹⁰ Existem até mesmo sistemas que não podem ser estabilizados com um compensador estável.

Solução. O estimador de ordem reduzida corresponde a

$$\mathbf{pe} = [-4.24 + 4.24 * j; -4.24 - 4.24 * j]$$

Depois do particionamento, temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{aa} & \mathbf{F}_{ab} \\ \mathbf{F}_{ba} & \mathbf{F}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{G}_a \\ \mathbf{G}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Encontrando o polinômio característico do erro,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab}) = \alpha_e(s),$$

temos (usando place) que

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 36 \end{bmatrix}.$$

A função de transferência do compensador, dada pela Eq. (7.181), é obtida como

$$D_{cr}(s) = 20,93 \frac{(s - 0,735)(s + 1,871)}{(s + 0,990 \pm 6,120j)}.$$

Compensador de fase não mínima

O lugar das raízes associado a esse sistema é mostrado na Fig. 7.43. Note que, dessa vez, temos um compensador estável, mas de fase não mínima, e um lugar das raízes zero grau.

A parte do lugar das raízes no SPD não vai causar dificuldades, porque o ganho tem que ser selecionado para manter todos os polos de malha fechada no SPE.

Como um passo seguinte de projeto para esse sistema, tentamos um projeto com o LRS.

EXEMPLO 7.32 Reprojeto do compensador do servo CC usando o LRS

Projete um compensador para o sistema de servo CC no Exemplo 7.30 usando a alocação dos polos baseada no LRS. Para a lei de controle, escolha a saída de custo z igual à saída da planta; para o projeto do estimador, suponha que o ruído do processo entre no mesmo lugar que o sinal de controle do sistema. Selecione as raízes para que a largura de banda do controle seja cerca de 2,5 rad/s e escolha as raízes do estimador para uma largura de banda cerca de 2,5 vezes mais rápida de a largura de banda do controlador (6,3 rad/s). Obtenha um controlador discreto equivalente com um período de amostragem $T_s = 0,1$ s (10 vezes o polo mais rápido) e compare as saídas do controle contínuo e digital e os esforços de controle.

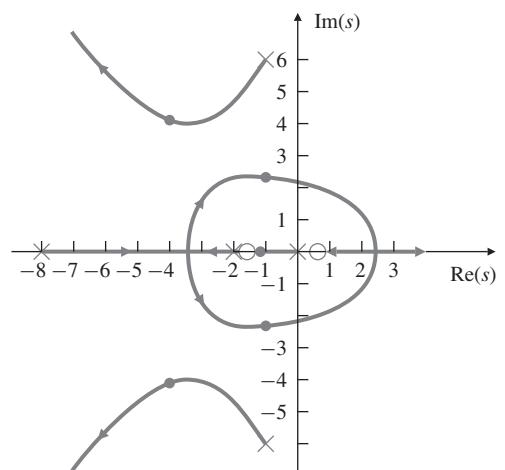


Figura 7.43 Lugar das raízes para o controlador de ordem reduzida do servo CC.

Solução. Devido ao fato de o problema especificar que $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}$ e $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$, então o LRS é o mesmo para o controle e para o estimador; por isso, precisamos gerar apenas um lugar das raízes com base na função de transferência da planta. O LRS para o sistema é mostrado na Fig. 7.44. Do lugar das raízes, selecionamos $-2 \pm 1,56j$ e $-8,04$ como os polos desejados de controle ($pc = [-2+1.56*j; -2-1.56*j; -8.04]$) e $-4 \pm 4,9j$ e $-9,169$ ($pe = [-4+4.9*j; -4-4.9*j; -9.169]$), como os polos desejados do estimador. O ganho de realimentação de estados é $K = place(F, G, pc)$, ou

$$\mathbf{K} = [-0.285 \quad 0.219 \quad 0.204],$$

e o ganho do estimador é $L_t = place(F', H', pe)$, $L = Lt'$, ou

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 7.17 \\ 97.4 \\ 367 \end{bmatrix}.$$

Note que os ganhos de realimentação são muito menores que antes. A função de transferência do compensador resultante computada da Eq. (7.177) é

$$D_c(s) = -\frac{94,5(s + 7,98)(s + 2,52)}{(s + 4,28 \pm 6,42j)(s + 10,6)}.$$

Agora, pegamos esse compensador, colocamos ele em série com a planta e usamos o ganho do compensador como o parâmetro. O lugar das raízes elementar resultante do sistema em malha fechada é mostrado na Fig. 7.45. Quando o ganho do lugar das raízes é igual ao ganho nominal de 94,5, as raízes estão nas localizações de malha fechada selecionadas a partir do LRS, como deveria ser.

Note que o compensador agora é estável e de fase mínima. Isso melhorou o projeto em grande parte porque o polo da planta em $s = -8$ é praticamente inalterado pelo controlador e pelo estimador. Ele não precisa ser alterado para um bom desempenho; na verdade, a única característica que necessita de reparação no $G(s)$ original é o polo em $s = 0$. Usando a técnica do LRS descobrimos essencialmente que, para o melhor uso do esforço de controle, deve-se mudar os dois polos de baixa frequência em $s = 0$ e -2 e manter praticamente inalterado o polo em $s = -8$. Como resultado, os ganhos do controlador são muito mais baixos e o projeto do compensador é menos radical. Este exemplo ilustra por que o projeto LQR é normalmente preferível do que a alocação de polos.

O equivalente discreto para o controlador é obtido a partir do MATLAB com o comando c2d, como o seguinte código:

```
nc=94.5*conv([1 7.98],[1 2.52]); % numerador do controlador
dc=conv([1 8.56 59.5348],[1 10.6]); % denominador do controlador
sysDc=tf(nc,dc); % descrição do controlador
ts=0.1;% tempo de amostragem de 0,1 s
sysDd=c2d(sysDc,ts,'zoh'); % conversão do controlador para forma discreta
```

O controle resultante tem a função de transferência discreta

Controlador discreto

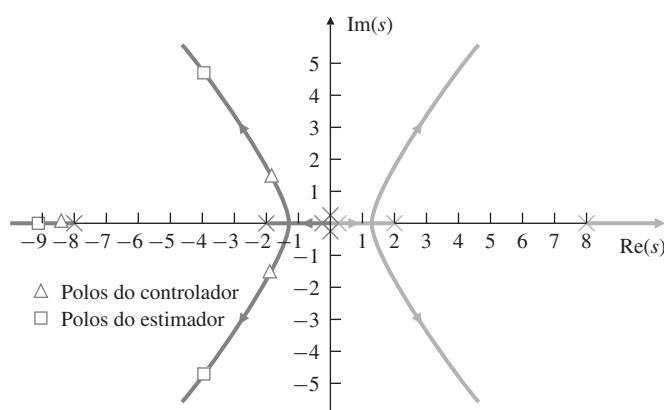
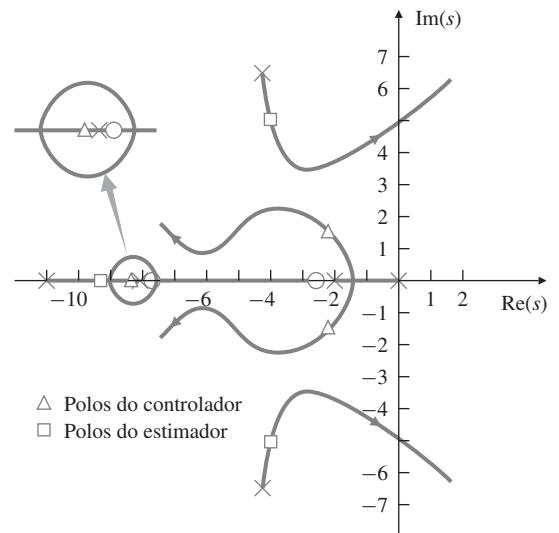


Figura 7.44 Lugar das raízes simétrico.

Figura 7.45 Lugar das raízes para a especificação dos polos a partir do LRS.



$$D_d(z) = \frac{5,9157(z + 0,766)(z + 0,4586)}{(z - 0,522 \pm 0,3903j)(z + 0,3465)}.$$

A equação da lei de controle (com o período de amostragem suprimido para fins de simplicidade) é

$$\begin{aligned} u(k+1) = & 1,3905u(k) - 0,7866u(k-1) + 0,1472u(k-2) \\ & + e(k) - 7,2445e(k-1) + 2,0782e(k-2). \end{aligned}$$

Simulação no SIMULINK

Um diagrama no SIMULINK® para simulação de ambos os sistemas, contínuo e discreto, é mostrado na Fig. 7.46. A comparação das respostas ao degrau contínua e discreta e o sinal de controle é mostrada na Fig. 7.47. Uma concordância melhor entre as duas respostas pode ser obtida se o período de amostragem for reduzido.

Baseado no conhecimento adquirido a partir do Exemplo 7.32, vamos voltar, com uma seleção de polos melhor, para investigar o uso da alocação de polos neste exemplo. Inicialmente, foram utilizadas localizações de terceira ordem, que produziram três polos com frequência natural de cerca de 2 rad/s. Este projeto moveu o polo em $s = -8$ para $s = -1,4$, assim violando o princípio de que os polos de malha aberta não devem ser movidos a menos que sejam um problema.

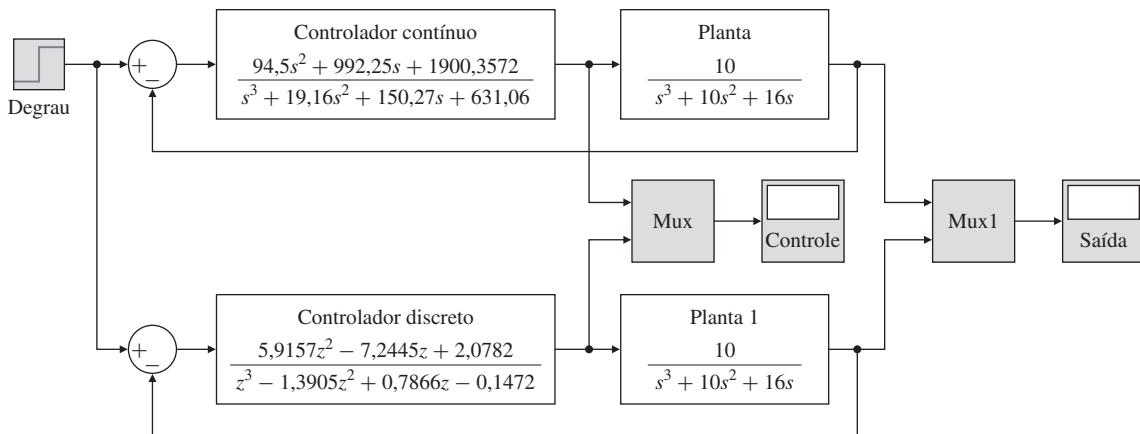
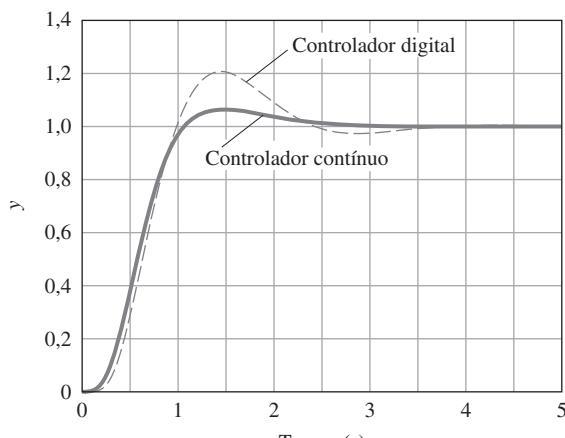
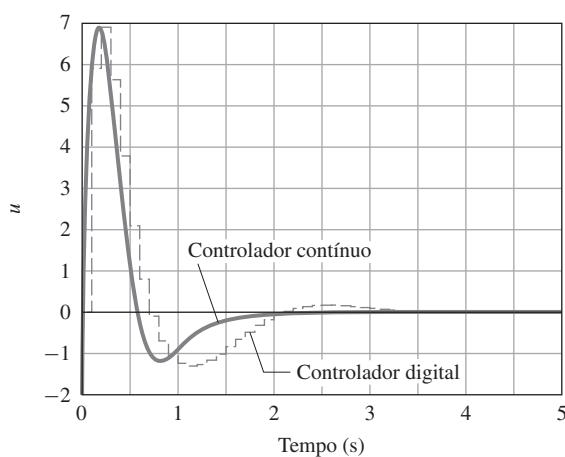


Figura 7.46 Diagrama de blocos no SIMULINK® para comparar os controladores contínuo e discreto.



(a)



(b)

Figura 7.47 Comparação das respostas ao degrau e sinais de controle para os controladores contínuo e discreto: (a) resposta ao degrau; (b) sinais de controle.

Agora, vamos tentar novamente, desta vez usando localizações dominantes de segunda ordem para deslocar os polos lentos e deixando o polo rápido sozinho em $s = -8$.

EXEMPLO 7.33 Reprojeto do servo CC com localização dominante de segunda ordem para os polos

Projete um compensador para o sistema do servo CC do Exemplo 7.30 usando alocação de polos com os polos do controle dados por

$$pc = [-1.41 \pm 1.41j; -8]$$

e os polos do estimador dados por

$$pe = [-4.24 \pm 4.24j; -8]$$

Solução Com essas localizações para os polos, descobrimos que a especificação do ganho de realimentação é (usando $K = place(F, G, pc)$)

$$K = [-0.469 \quad 0.234 \quad 0.0828],$$

a qual tem uma magnitude menor do que o caso onde o polo em $s = -8$ foi movido.

O ganho do estimador é encontrado como (usando $L_t = \text{place}(F', H', pe)$, $L = Lt'$)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 6.48 \\ 87.8 \\ 288 \end{bmatrix}.$$

A função de transferência do compensador é

$$D_c(s) = -\frac{414(s + 2,78)(s + 8)}{(s + 4,13 \pm 5,29j)(s + 9,05)},$$

que é estável e de fase não mínima. Esse exemplo ilustra o valor da seleção criteriosa do polo e da técnica do LRS.

A seleção inicial pobre dos polos resultou em um grande esforço de controle e em um compensador instável. Estas características indesejáveis são eliminadas usando o LRS (ou LQR) ou selecionando melhor os polos. No entanto, nós realmente precisamos usar o LRS para orientar a seleção adequada dos polos. Em suma, *o LRS (ou LQR) é o método de escolha!*

Como se pôde ver a partir de alguns exemplos anteriores, temos mostrado o uso do projeto ideal por meio do LRS. No entanto, é mais comum, na prática, pular essa etapa e usar o LQR diretamente.

7.9 Introdução da entrada de referência com o estimador

O controlador obtido pela combinação da lei de controle estudada na Seção 7.5 com o estimador discutido na Seção 7.8 é essencialmente um **projeto de regulador**. Isso significa que as equações características do controle e do estimador são escolhidas para boa rejeição à perturbação – isto é, para fornecer transitórios satisfatórios para distúrbios como $w(t)$. No entanto, essa abordagem de projeto não considera uma entrada de referência, nem prevê **rastreamento de comando**, o que é evidenciado por uma boa resposta transitória do sistema combinado às mudanças de comando. Em geral, boa rejeição à perturbação e bom rastreamento de comando precisam ser levados em conta na concepção de um sistema de controle. O bom rastreamento de comando é feito através da introdução correta da entrada de referência nas equações do sistema.

Vamos repetir as equações da planta e do controlador para o estimador de ordem completa; o caso de ordem reduzida é o mesmo em termos de conceito, diferindo apenas em detalhes:

$$\text{Planta: } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{Gu}, \quad (7.186a)$$

$$y = \mathbf{Hx}; \quad (7.186b)$$

$$\text{Controlador: } \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{GK} - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Ly}, \quad (7.187a)$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}. \quad (7.187b)$$

A Figura 7.48 mostra duas possibilidades para introduzir o comando de entrada r no sistema. Essa figura ilustra a questão geral de saber se a compensação deve ser colocada na realimentação ou no ramo direto. A resposta do sistema para entradas de comando é diferente, dependendo da configuração, porque os zeros das funções de transferência são diferentes. Os polos de malha fechada são idênticos, no entanto, o que pode ser facilmente verificado fazendo $r = 0$ e notando, então, que os sistemas são idênticos.

A diferença nas respostas das duas configurações pode ser vista com bastante facilidade. Considere o efeito de um degrau na entrada r . Na Fig. 7.48(a), o degrau vai excitar o estimador exatamente da mesma forma que excita a planta; assim, o erro do estimador permanecerá zero durante e após o degrau. Isso significa que a dinâmica do estimador não é excitada com a entrada de comando, então a função de transferência de r para y deve ter zeros nas localizações dos polos do estimador para cancelar esses polos. Como resultado, um comando em degrau irá

excitar o comportamento do sistema que é consistente com os polos do controlador sozinho – isto é, com as raízes de $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK}) = 0$.

Na Fig. 7.48(b), um comando step em r entra diretamente apenas no estimador, causando, assim, um erro de estimativa que decai com as características dinâmicas do estimador. Portanto, um comando em degrau irá excitar o comportamento do sistema consistente com as raízes do controlador e do estimador – isto é, as raízes de

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK}) \cdot \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{LH}) = 0.$$

Por essa razão, a configuração mostrada na Fig. 7.48(a) é normalmente a maneira superior para comandar do sistema, onde \bar{N} é encontrado usando as Eqs. (7.100)-(7.102).

Na Seção 7.9.1, vamos mostrar uma estrutura geral para a introdução da entrada de referência com três opções de parâmetros que implementam os casos com e sem realimentação. Vamos analisar as três opções do ponto de vista dos zeros do sistema e as implicações que os zeros têm na resposta transitória do sistema. Finalmente, na Seção 7.9.2, mostraremos como selecionar os parâmetros restantes para eliminar as constantes de erros.

7.9.1 Estrutura geral para uma entrada de referência

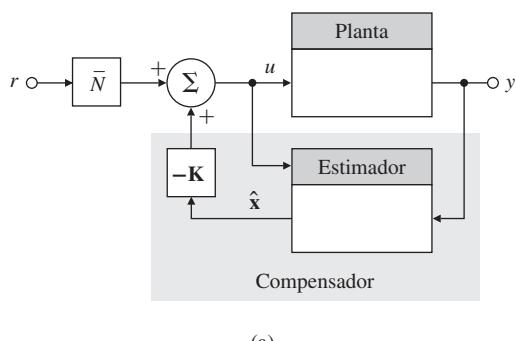
Dada uma entrada de referência $r(t)$, a forma linear mais geral de introduzir r nas equações do sistema é adicionar termos proporcionais a ela nas equações do controlador. Podemos fazer isso adicionando $\bar{N}r$ à Eq. (7.187b) e \mathbf{Mr} à Eq. (7.187a). Note que, neste caso, \bar{N} é um escalar e \mathbf{M} é um vetor $n \times 1$. Com essas adições, as **equações do controlador** se tornam

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{GK} - \mathbf{LH})\hat{x} + \mathbf{Ly} + \mathbf{Mr}, \quad (7.188a)$$

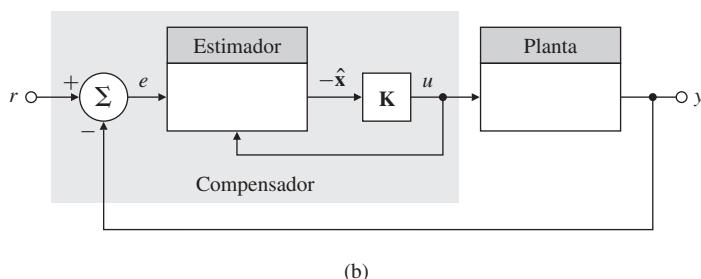
$$u = -\mathbf{K}\hat{x} + \bar{N}r. \quad (7.188b)$$

Equações do controlador

O diagrama de blocos é mostrado na Fig. 7.49(a). As alternativas mostradas na Fig. 7.48 correspondem a diferentes escolhas de \mathbf{M} e \bar{N} . Como $r(t)$ é um sinal externo, é claro que \mathbf{M} e \bar{N} afetam a equação característica do sistema combinado entre o controlador e o estimador. Em termos da função de transferência, a seleção de \mathbf{M} e \bar{N} afetará apenas os zeros de transmissão de r para y , e, como consequência, pode afetar significativamente a resposta transitória, mas não a estabilidade. Como podemos escolher \mathbf{M} e \bar{N} para obter uma resposta transitória satisfatória?



(a)



(b)

Figura 7.48 Possíveis localizações para introduzir o comando de entrada: (a) compensação no caminho de realimentação; (b) compensação no ramo direto.

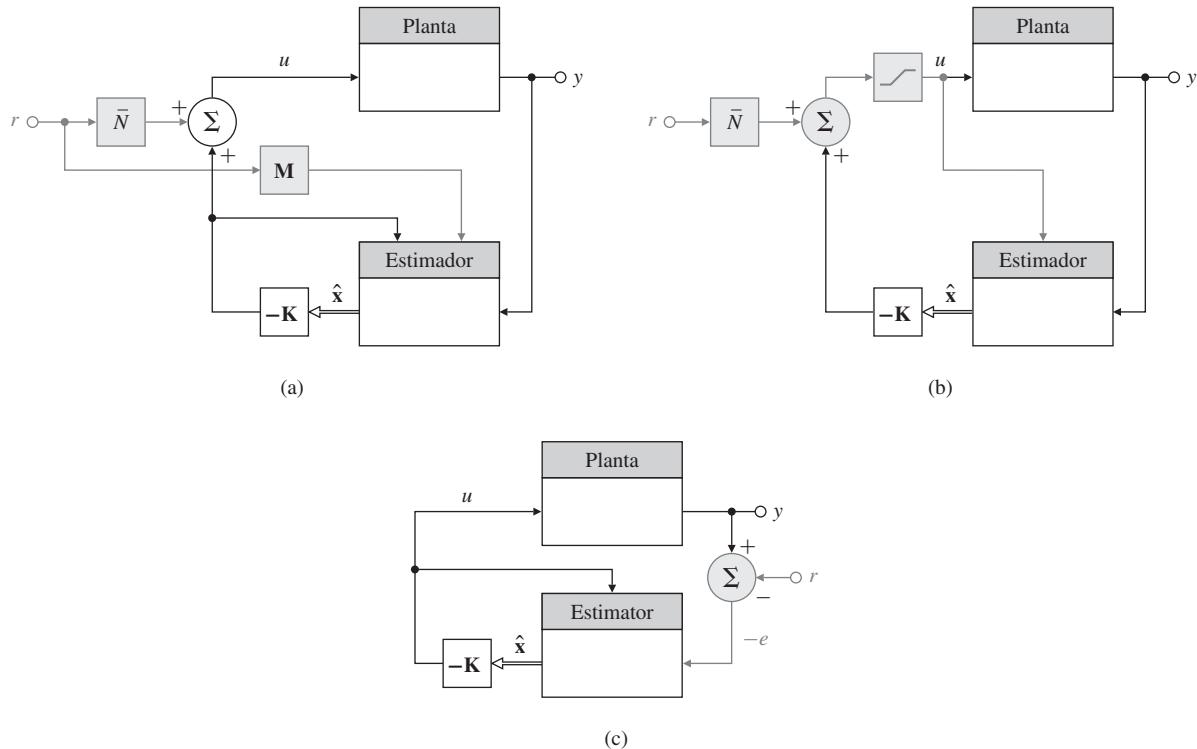


Figura 7.49 Formas alternativas de introduzir a entrada de referência: (a) caso geral – atribuição do zero; (b) caso padrão – estimador não excitado, zeros = $\alpha_e(s)$; (c) caso erro de controle – compensação clássica.

Devemos salientar que os polos do sistema foram atribuídos por meio dos ganhos de realimentação \mathbf{K} e \mathbf{L} , e agora vamos atribuir os zeros pelos ganhos \mathbf{M} e \bar{N} .

Existem três estratégias para selecionar \mathbf{M} e \bar{N} :

1. *Estimador autônomo:* selecione \mathbf{M} e \bar{N} para que a equação de erro do estimador de estados seja independente de r [Fig. 7.49(b)].
2. *Estimador rastreamento de erro:* selecione \mathbf{M} e \bar{N} de modo que apenas o erro de rastreamento, $e = (r - y)$, seja usado no controle [Fig. 7.49(c)].
3. *Estimador atribuição de zero:* selecione \mathbf{M} e \bar{N} de modo que n dos zeros da função de transferência geral sejam atribuídos em lugares de escolha do projetista [Fig. 7.49(a)].

CASO 1. Do ponto de vista do desempenho do estimador, o primeiro método é bastante atraente e é a alternativa mais amplamente utilizada. Se \hat{x} deve gerar uma boa estimativa de x , então certamente \hat{x} deve ser tão livre de excitações externas quanto possível; isto é, \hat{x} deve ser incontrolável em relação a r . O cálculo de \mathbf{M} e \bar{N} para que isso aconteça é bastante fácil. A equação de erro do estimador é encontrada subtraindo a Eq. (7.188a) da Eq. (7.186a), com a saída da planta [Eq. (7.186b)] substituída no estimador [Eq. (7.187a)] e o controle [Eq. (7.187b)] substituído na planta [Eq. (7.186a)]:

$$\dot{\hat{x}} - \dot{\hat{x}} = \mathbf{F}\hat{x} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{x} + \bar{N}r) - [(\mathbf{F} - \mathbf{GK} - \mathbf{LH})\hat{x} + \mathbf{Ly} + \mathbf{Mr}], \quad (7.189a)$$

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{LH})\hat{x} + \mathbf{G}\bar{N}r - \mathbf{Mr}. \quad (7.189b)$$

Se r não deve aparecer na Eq. (7.189a), então deve ser escolhido

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}\bar{N}. \quad (7.190)$$

Como \bar{N} é um escalar, \mathbf{M} é fixo dentro de um fator constante. Note que, com essa escolha de \mathbf{M} , podemos escrever as equações do controlador como

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r, \quad (7.191a)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Gu} + \mathbf{Ly}, \quad (7.191b)$$

que corresponde à configuração na Fig. 7.49(b). O efeito líquido desta escolha é que o controle é calculado a partir do ganho de realimentação e da entrada de referência *antes* dela ser aplicada e, então, o mesmo controle é a entrada da planta e do estimador. Nesta forma, se o controle da planta está sujeito à saturação (como mostrado pela inclusão da não linearidade de saturação na Fig. 7.49(b) e discutido no Capítulo 9), os mesmos limites de controle podem ser aplicados na Eq. (7.191) para o controle entrar na equação da estimativa de $\hat{\mathbf{x}}$, e a não linearidade desaparece da equação de $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$. Este comportamento é essencial para o desempenho adequado do estimador. O diagrama de blocos correspondente a esta técnica é mostrado na Fig. 7.49(b). Vamos voltar à seleção do fator de ganho na entrada de referência, \bar{N} , na Seção 7.9.2, após discutir os outros dois métodos de seleção de \mathbf{M} .

CASO 2. A segunda abordagem sugerida anteriormente é usar o erro de rastreamento. Esta solução é algumas vezes forçada pelo projeto de controle quando o sensor mede apenas a saída de erro. Por exemplo, em muitos termostatos a saída é a diferença entre a temperatura a ser controlada e a temperatura de referência, e não há indicação absoluta da temperatura de referência disponível para o controlador. Além disso, alguns sistemas de rastreamento de radar têm uma leitura que é proporcional ao erro apontado, e este sinal de erro só deve ser usado para controle realimentado. Nestas situações, devemos selecionar \mathbf{M} e \bar{N} de modo que as Eqs. (7.188) sejam governadas apenas pelo erro. Este requisito é satisfeito se selecionarmos

$$\bar{N} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = -\mathbf{L}. \quad (7.192)$$

Então, a equação do estimador é

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{GK} - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}(y - r). \quad (7.193)$$

O compensador neste caso, para projetos de baixa ordem, é um compensador de avanço padrão no ramo direto. Como vimos em capítulos anteriores, este projeto pode ter uma quantidade considerável de sobressinal devido ao zero do compensador. Este projeto corresponde exatamente aos compensadores projetados pelos métodos de transformadas dados nos Capítulos 5 e 6.

CASO 3. O terceiro método de seleção de \mathbf{M} e \bar{N} é escolher os valores de forma a atribuir os zeros do sistema em localizações arbitrárias de escolha do projetista. Este método fornece ao projetista o máximo de flexibilidade para satisfazer às restrições de ganho, de resposta transitória e de regime permanente. Os outros dois métodos são casos especiais deste terceiro método. Todos os três métodos dependem dos zeros. Como vimos na Seção 7.5.2, quando não há estimador e a entrada de referência é adicionada ao controle, os zeros de malha fechada do sistema permanecem fixos como os zeros da planta em malha aberta. Vamos agora examinar o que acontece com os zeros quando um estimador está presente. Para fazer isso, reconsideraremos o controlador das Eqs. (7.188). Se existe um zero de transmissão de r para u , então existe necessariamente um zero de transmissão de r para y , a menos que haja um polo no mesmo local do zero. Portanto, é suficiente tratar o controlador sozinho para determinar o efeito que as escolhas de \mathbf{M} e \bar{N} terão sobre os zeros do sistema. As equações para um zero de r para u a partir das Eqs. (7.188) são dadas por

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} + \mathbf{LH} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{K} & \bar{N} \end{bmatrix} = 0. \quad (7.194)$$

(Fazemos $y = 0$ porque nos preocupamos apenas com o efeito do r .) Se dividimos a última coluna por um escalar \bar{N} (diferente de zero) e, então, adicionamos ao restante o produto de \mathbf{K} vezes a última coluna, descobrimos que os zeros são os valores de s tais que

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} + \mathbf{LH} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K} & -\frac{\mathbf{M}}{\bar{N}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

ou

$$\det \left(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} + \mathbf{LH} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}} \mathbf{K} \right) = \gamma(s) = 0. \quad (7.195)$$

Agora, a Eq. (7.195) está exatamente na forma da Eq. (7.136) para a seleção de \mathbf{L} fornecer as localizações desejadas para os polos do estimador. Aqui, nós temos de selecionar \mathbf{M}/\bar{N} para um polinômio do zero desejado $\gamma(s)$ na função de transferência da entrada de referência para o controle. Assim, a seleção de \mathbf{M} fornece uma quantidade substancial de liberdade para influenciar a resposta transitória. Podemos acrescentar um polinômio de n -ésima ordem para a função de transferência de r para u e, portanto, de r para y ; ou seja, podemos atribuir n zeros, além de todos os polos que foram atribuídos anteriormente. Se as raízes de $\gamma(s)$ não são canceladas pelos polos do sistema, então eles serão incluídos nos zeros de transmissão de r para y .

Duas considerações podem nos guiar na escolha do \mathbf{M}/\bar{N} – isto é, na localização dos zeros. A primeira é a resposta dinâmica. Vimos no Capítulo 3 que os zeros influenciam a resposta transitória significativamente, e as orientações heurísticas dadas podem sugerir localizações úteis para os zeros disponíveis. A segunda consideração, que conectará o projeto no espaço de estados a outro resultado das técnicas de transformadas, é o erro em estado estacionário ou as constantes de erro de velocidade. No Capítulo 4, obteve-se a relação entre a precisão em estado estacionário de um sistema de Tipo 1 e dos polos e zeros de malha fechada. Se o sistema é do Tipo 1, então o erro em estado estacionário para uma entrada em degrau será zero e para uma entrada em rampa unitária será

$$e_{\infty} = \frac{1}{K_v}, \quad (7.196)$$

sendo K_v a constante de velocidade. Além disso, foi demonstrado que, se os polos de malha fechada estão em $\{p_i\}$ e os zeros de malha fechada estão em $\{z_i\}$, então (para um sistema do Tipo 1) a **fórmula de Truxal** fornece

$$\frac{1}{K_v} = \sum \frac{1}{z_i} - \sum \frac{1}{p_i}. \quad (7.197)$$

A Eq. (7.197) constitui a base para uma seleção parcial de $\gamma(s)$ e, portanto, de \mathbf{M} e \bar{N} . A escolha é baseada em duas observações:

1. Se $|z_i - p_i| \ll 1$, então o efeito deste par polo-zero na resposta dinâmica será pequeno, porque o polo quase é cancelado pelo zero, e qualquer transitório do resíduo do polo em p_i será muito pequeno.
2. Mesmo que $z_i - p_i$ seja pequeno, é possível que $1/z_i - 1/p_i$ seja substancial e, portanto, tenha uma influência significativa em K_v de acordo com a Eq. (7.197).

A aplicação dessas duas diretrizes para a seleção de $\gamma(s)$, e, portanto, \mathbf{M} e \bar{N} , resulta no projeto de uma rede de atraso. Ilustramos isso com um exemplo.

EXEMPLO 7.34 Aumento da constante de velocidade por meio da alocação do zero

Considere o sistema de segunda ordem de um servomecanismo descrito por

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

e com a descrição em espaço de estados

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u. \end{aligned}$$

Projete um controlador usando alocação de polos de modo que ambos os polos estejam em $s = -2$ e o sistema tenha uma constante de velocidade $K_v = 10$. Obtenha um controlador discreto equivalente com período de amostragem $T_s = 0,1$ s ($20 \times \omega_n = 20 \times 0,05 = 0,1$ s) e compare as saídas dos controles contínuo e digital, bem como os esforços de controle.

Solução. Para este problema, o ganho de realimentação de estados é

$$\mathbf{K} = [\begin{array}{cc} 8 & 3 \end{array}]$$

que resulta nos polos de controle desejados. No entanto, com este ganho, $K_v = 2$, e precisamos $K_v = 10$. Qual será o efeito neste projeto se usarmos estimadores projetados de acordo com os três métodos para a seleção de \mathbf{M} e $\bar{\mathbf{N}}$? Usando a primeira estratégia (o estimador autônomo), descobrimos que o valor de K_v não muda. Se usarmos o segundo método (controle de erro), introduzimos um zero em uma localização desconhecida de antemão, e o efeito sobre K_v não estará sob controle direto do projeto. No entanto, se usarmos a terceira opção (alocação de zero) juntamente com a fórmula de Truxal [Eq. (7.197)], podemos satisfazer à resposta dinâmica e às exigências de estado estacionário.

Primeiro, devemos selecionar o polo p_3 e o zero z_3 do estimador para satisfazer à Eq. (7.197) para $K_v = 10$. Queremos manter $z_3 - p_3$ pequeno, de modo que haja pouco efeito sobre a resposta dinâmica e ainda se mantenha $1/z_3 - 1/p_3$ grande o suficiente para aumentar o valor de K_v . Para fazer isso, arbitrariamente fazemos p_3 pequeno comparado com as dinâmicas de controle. Por exemplo, fazemos

$$p_3 = -0,1.$$

Observe que essa abordagem é oposta à filosofia comum de projeto de estimador, na qual a exigência é a resposta rápida. Agora, usando a Eq. (7.197), temos

$$\frac{1}{K_v} = \frac{1}{z_3} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3},$$

onde $p_1 = -2 + 2j$, $p_2 = -2 - 2j$ e $p_3 = -0,1$, resolvemos para z_3 tal que $K_v = 10$, obtendo

$$\frac{1}{K_v} = \frac{4}{8} + \frac{1}{0,1} + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{10},$$

ou

$$z_3 = -\frac{1}{10,4} = -0,096.$$

Assim, projetamos um estimador de ordem reduzida para ter um polo em $-0,1$ e escolhemos $\mathbf{M}/\bar{\mathbf{N}}$ tal que $\gamma(s)$ tenha um zero em $-0,096$. Um diagrama de blocos do sistema resultante é mostrado na Fig. 7.50(a). Você pode facilmente verificar que este sistema tem a função de transferência global

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{8,32(s + 0,096)}{(s^2 + 4s + 8)(s + 0,1)}, \quad (7.198)$$

para a qual $K_v = 10$, como especificado.

A compensação mostrada na Fig. 7.50(a) não é clássica, no sentido de que ela tem duas entradas (e e y) e uma saída. Se resolvermos as equações para fornecer compensação de erro puro encontrando a função de transferência de e e u , o que daria a Eq. (7.198), obteríamos o sistema mostrado na Fig. 7.50(b). Isso pode ser visto da seguinte forma:

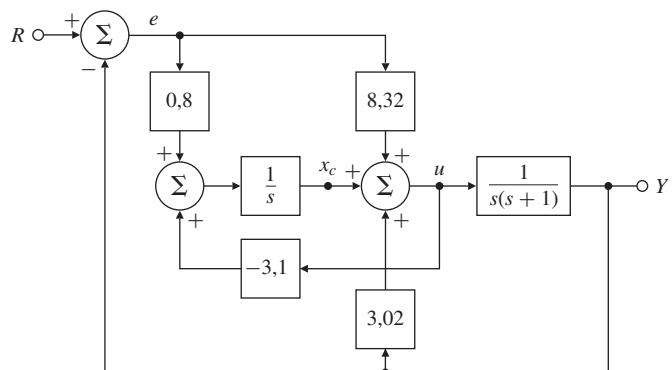
As equações relevantes do controlador são

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= 0,8 e - 3,1 u, \\ u &= 8,32 e + 3,02 y + x_c, \end{aligned}$$

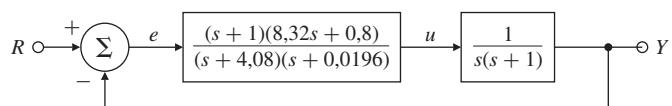
sendo x_c o estado do controlador. Aplicando a transformada de Laplace nestas equações, eliminando $X_c(s)$ e substituindo na saída [$Y(s) = G(s)U(s)$], descobrimos que o compensador é descrito por

$$\frac{U(s)}{E(s)} = D_c(s) = \frac{(s + 1)(8,32s + 0,8)}{(s + 4,08)(s + 0,0196)}.$$

Figura 7.50 Servomecanismo com zeros alocados (uma rede de atraso): (a) compensador com duas entradas; (b) sistema com realimentação unitária equivalente.



(a)



(b)

Essa compensação é uma rede de atraso-avanço clássica. O lugar das raízes no sistema na Fig. 7.50(b) é mostrado na Fig. 7.51. Observe o padrão de polo-zero perto da origem, que é característico de uma rede de atraso. O diagrama de Bode na Fig. 7.52 mostra o atraso de fase em baixas frequências e o avanço de fase em altas frequências. A resposta ao degrau do sistema é apresentada na Fig. 7.53 e mostra a presença de uma “cauda” na resposta devido ao polo lento em $-0,1$. É claro, o sistema é do Tipo 1 e eventualmente terá erro de rastreamento nulo.

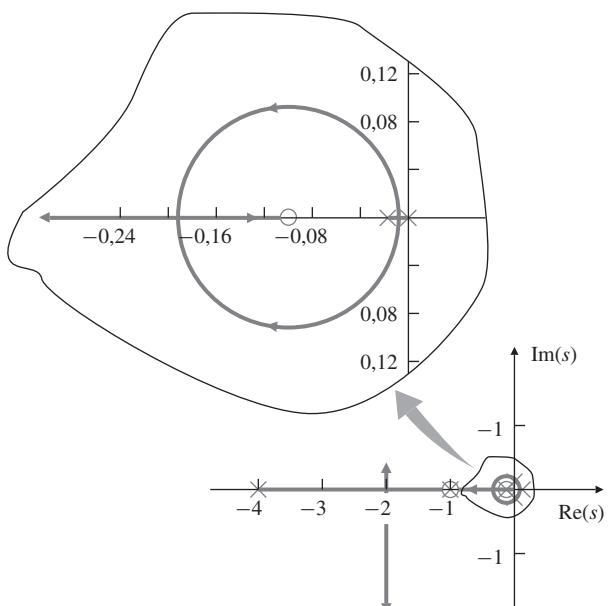
O controlador discreto equivalente é obtido no MATLAB usando o comando `c2d`, como descrito a seguir:

Função c2d do MATLAB

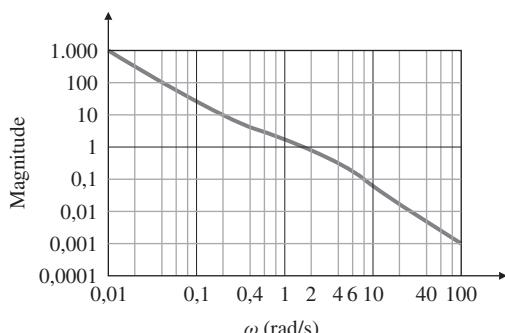
```

nc=conv([1 1],[8.32 0.8]); % numerador do controlador
dc=conv([1 4.08],[1 0.0196]); % denominador do controlador
sysDc=tf(nc,dc); % descrição do controlador
ts=0.1; % tempo de amostragem de 0,1 s
sysDd=c2d(sysDc,ts,'zoh'); % conversão para o controlador discreto

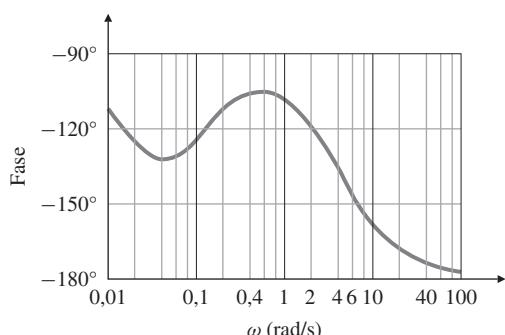
```



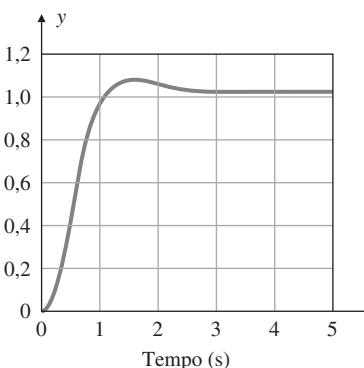
Fgura 7.51 Lugar das raízes do compensador de atraso-avanco.



(a)



(b)

**Figura 7.53** Resposta ao degrau do sistema com compensador de atraso.

O controlador discreto tem a função de transferência discreta

$$D_d(z) = \frac{8,32z^2 - 15,8855z + 7,5721}{z^2 - 1,6630z + 0,6637} = \frac{8,32(z - 0,9903)(z - 0,9191)}{(z - 0,998)(z - 0,6665)}.$$

A equação da lei de controle (com período de amostragem suprimido para fins de simplicidade) é

$$\begin{aligned} u(k+1) &= 1,6630u(k) + 0,6637u(k-1) + 8,32e(k+1) \\ &\quad - 15,8855e(k) + 7,5721e(k-1). \end{aligned}$$

Um diagrama no SIMULINK para simulação de ambos os sistemas, contínuo e discreto, é mostrado na Fig. 7.54. Uma comparação das respostas ao degrau e dos sinais de controle, contínuos e discretos é mostrada na Fig. 7.55. Uma relação melhor entre as duas respostas pode ser alcançada se o período de amostragem for reduzido.

Simulação no
SIMULINK

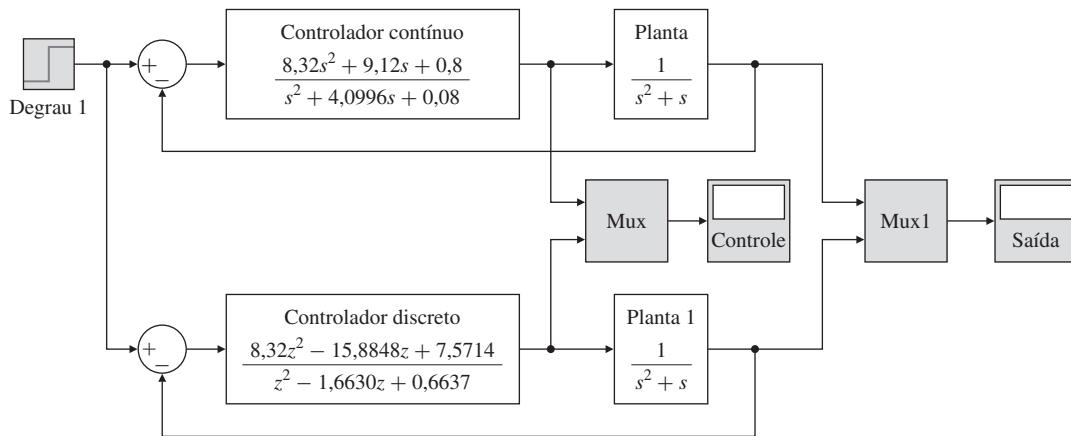
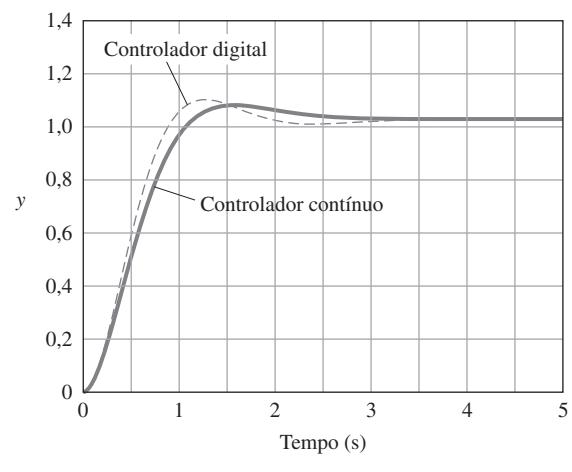
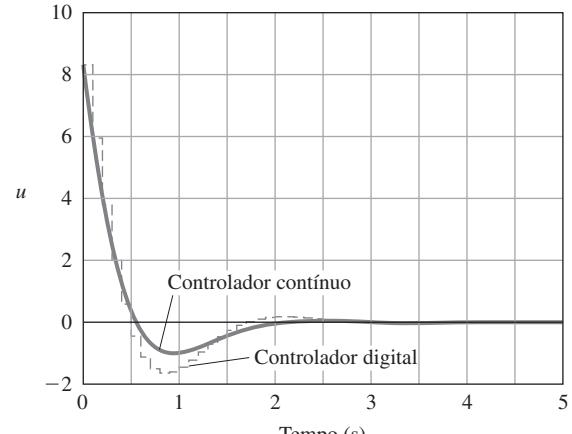


Figura 7.54 Diagrama de blocos no SIMULINK® para comparar os controladores contínuo e discreto.

Figura 7.55 Comparação entre as respostas ao degrau e entre os sinais de controle para os controladores contínuo e discreto: (a) respostas ao degrau; (b) sinais de controle.



(a)



(b)

Agora, reconsideramos os dois primeiros métodos para a escolha de \mathbf{M} e \bar{N} , desta vez para examinar suas implicações em termos dos zeros. De acordo com a primeira regra (para o estimador autônomo), fazemos $\mathbf{M} = \mathbf{G}\bar{N}$. Substituindo esta na Eq. (7.195) chegamos, para os zeros do controlador, a

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{LH}) = 0. \quad (7.199)$$

Esta é exatamente a equação na qual \mathbf{L} foi selecionado para fazer a equação do polinômio característico do estimador igual a $\alpha_e(s)$. Assim, criamos n zeros exatamente nas mesmas localizações dos n polos do estimador. Devido a este cancelamento polo-zero (que causa “incontro-labilidade” dos modos do estimator), os polos da função transferência global consistem apenas nos polos do controlador por realimentação de estados.

A segunda regra (para o erro de rastreamento do estimador) seleciona $\mathbf{M} = -\mathbf{L}$ e $\tilde{N} = 0$. Se estes são substituídos na Eq. (7.194), então os zeros são dados por

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} + \mathbf{LH} & \mathbf{L} \\ -\mathbf{K} & 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (7.200)$$

Se multiplicarmos a última coluna de \mathbf{H} , subtrairmos o resultado das n primeiras colunas e, então, pré multiplicarmos a última linha por \mathbf{G} e adicionarmos as n primeiras linhas, então a Eq. (7.200) se reduz a

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & \mathbf{L} \\ -\mathbf{K} & 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (7.201)$$

Se compararmos a Eq. (7.201) com as equações dos zeros de um sistema na descrição em espaço de estados, Eq. (7.66), vemos que os zeros adicionados são os obtidos por meio da substituição da matriz de entrada por \mathbf{L} e da matriz de saída por \mathbf{K} . Assim, se quisermos usar o controle de erro, temos de aceitar a presença desses zeros do compensador que dependem da escolha de \mathbf{K} e \mathbf{L} , e sobre os quais não temos controle direto. Para casos de baixa ordem, isso resulta, como dissemos antes, em um compensador de avanço como parte de uma topologia de realimentação unitária.

Agora, vamos resumir as nossas conclusões sobre o efeito de introduzir a entrada de referência. Quando o sinal de entrada de referência está incluído no controlador, a função de transferência global do sistema de malha fechada é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_s \gamma(s) b(s)}{\alpha_e(s) \alpha_c(s)}, \quad (7.202)$$

sendo K_s o ganho total do sistema e $\gamma(s)$ e $b(s)$ os polinômios mônicos. O polinômio $\alpha_c(s)$ resulta em um ganho de controle \mathbf{K} tal que $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK}] = \alpha_c(s)$. O polinômio $\alpha_e(s)$ resulta em um ganho do estimador \mathbf{L} tal que $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{LH}] = \alpha_e(s)$. Em razão de, como projetistas, termos de escolher $\alpha_c(s)$ e $\alpha_e(s)$, temos total liberdade na atribuição dos polos do sistema de malha fechada. Há três maneiras de lidar com o polinômio $\gamma(s)$: podemos selecioná-lo de modo que $\gamma(s) = \alpha_e(s)$ usando a implementação da Fig. 7.49(b), caso em que \mathbf{M}/\tilde{N} é dado pela Eq. (7.190); podemos aceitar $\gamma(s)$ como dado pela Eq. (7.201), de modo que o controle de erro seja usado; ou podemos escolher $\gamma(s)$ com coeficientes arbitrários, selecionando \mathbf{M}/\tilde{N} a partir da Eq. (7.195). É importante salientar que os zeros planta representados por $b(s)$ não são movidos por esta técnica e permanecem como parte da função de transferência de malha fechada, a menos que α_c ou α_e sejam selecionados para cancelar alguns desses zeros.

Função de transferência para um sistema de malha fechada quando a entrada de referência está incluída no controlador

7.9.2 Selecionando o ganho

Passamos agora para o processo de determinar o ganho \tilde{N} para os três métodos de seleção de \mathbf{M} . Se escolhermos o método 1, o controle é dado pela Eq. (7.191a) e $\hat{x}_{ss} = x_{ss}$. Portanto, podemos usar $\tilde{N} = N_u + \mathbf{KN}_x$, como na Eq. (7.102), ou $u = N_u r - \mathbf{K}(\hat{x} - \mathbf{N}_x r)$. *Essa é a escolha mais comum.* Se usarmos o segundo método, o resultado é trivial; lembrando que $\tilde{N} = 0$ para o controle de erro. Se usarmos o terceiro método, escolhemos \tilde{N} tal que o ganho DC total em malha fechada seja unitário.¹¹

¹¹ Uma alternativa razoável é selecionar \tilde{N} de modo que, quando r e y são imutáveis, o ganho DC de r para y é o negativo do ganho DC de y para u . As consequências dessa escolha são que nosso controlador pode ser estruturado como uma combinação de controle de erro e do controle derivativo generalizado, e, se o sistema for capaz de um comportamento de Tipo 1, esta capacidade será efetuada.

Então, as equações do sistema global são

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{GK} & \mathbf{GK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} - \mathbf{LH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G} - \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \bar{N}r, \quad (7.203a)$$

$$y = [\mathbf{H} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad (7.203b)$$

sendo $\bar{\mathbf{M}}$ o resultado da seleção das localizações dos zeros com qualquer Eq. (7.195) ou Eq. (7.190). O sistema em malha fechada tem ganho DC unitário se

$$-[\mathbf{H} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{GK} & \mathbf{GK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} - \mathbf{LH} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G} - \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \bar{N} = 1. \quad (7.204)$$

Se resolvermos a Eq. (7.204) para \bar{N} , temos¹²

$$\bar{N} = -\frac{1}{\mathbf{H}(\mathbf{F} - \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{G}[1 - \mathbf{K}(\mathbf{F} - \mathbf{LH})^{-1}(\mathbf{G} - \bar{\mathbf{M}})]}. \quad (7.205)$$

As técnicas nesta seção podem ser facilmente estendidas para estimadores de ordem reduzida.

7.10 Controle integral e rastreamento robusto

As escolhas do ganho de \bar{N} na Seção 7.9 irão resultar em erro de estado estacionário nulo para um comando em degrau, mas o resultado não é robusto porque qualquer mudança nos parâmetros da planta fará com que o erro seja diferente de zero. Precisamos usar controle integral para obter rastreamento robusto.

Nos métodos de projeto no espaço de estados discutidos até agora, nenhuma menção foi feita ao controle integral, e não foram produzidos exemplos de projeto com uma compensação contendo um termo integral. Na Seção 7.10.1, mostramos como o controle integral pode ser introduzido por um método direto de adicionar a integral do erro do sistema nas equações de movimento. Controle integral é um caso especial de rastreamento de um sinal que não vai para zero em estado estacionário. Nós introduzimos (na Seção 7.10.2) um método geral para o rastreamento robusto que irá apresentar o princípio do modelo interno, o qual resolve uma classe inteira de problemas de controle de rastreamento e rejeição de distúrbio. Finalmente, na Seção 7.10.3, mostramos que se o sistema tiver um estimador e precisar rejeitar uma perturbação de estrutura conhecida, podemos incluir um modelo da perturbação nas equações do estimador e usar a estimativa computada da perturbação para cancelar os efeitos da perturbação na saída da planta real.

7.10.1 Controle integral

Começamos com uma solução específica para o controle integral, aumentando o vetor de estado com a dinâmica desejada. Para o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{Gu} + \mathbf{G}_1 w, \quad (7.206a)$$

$$y = \mathbf{Hx}, \quad (7.206b)$$

podemos realimentar a integral do erro,¹³ $e = y - r$, bem como o estado da planta, \mathbf{x} , aumentando o estado da planta com o estado extra (integral) x_I , que obedece à equação diferencial

$$\dot{x}_I = \mathbf{Hx} - r (= e).$$

¹² Nós usamos o fato de que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}.$$

¹³ Cuidado com o sinal aqui; estamos usando o negativo da convenção normal.

Assim,

$$x_I = \int^t e dt.$$

As equações de estado aumentadas se tornam

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w, \quad (7.207)$$

Equações de estado aumentadas com controle integral

e a lei de realimentação é

$$u = -[K_1 \quad \mathbf{K}_0] \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix},$$

Lei de realimentação com controle integral

ou, simplesmente,

$$u = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix}.$$

Com essa nova definição do sistema, podemos aplicar as técnicas de projeto da Seção 7.5 de uma forma similar, pois elas vão resultar na estrutura de controle mostrada na Fig. 7.56.

EXEMPLO 7.35 Controle integral de um sistema de velocidade de motor

Considere o sistema de velocidade do motor descrito por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3};$$

ou seja, $F = -3$, $G = 1$ e $H = 1$. Projete o sistema para ter controle integral e dois polos em $s = -5$. Projete um estimador com polos em $s = -10$. O distúrbio entra no mesmo lugar que o controle. Avalie as respostas de rastreamento e de rejeição.

Solução. A restrição de alocação de polos é equivalente a

$$pc = [-5; -5].$$

A descrição do sistema aumentado, incluindo o distúrbio w , é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + w) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r.$$

Portanto, podemos encontrar \mathbf{K} de

$$\det \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{K} \right) = s^2 + 10s + 25,$$

ou

$$s^2 + (3 + K_0)s + K_1 = s^2 + 10s + 25.$$

Consequentemente,

$$\mathbf{K} = [K_1 \quad K_0] = [25 \quad 7].$$

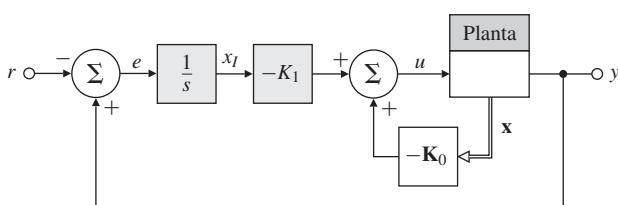
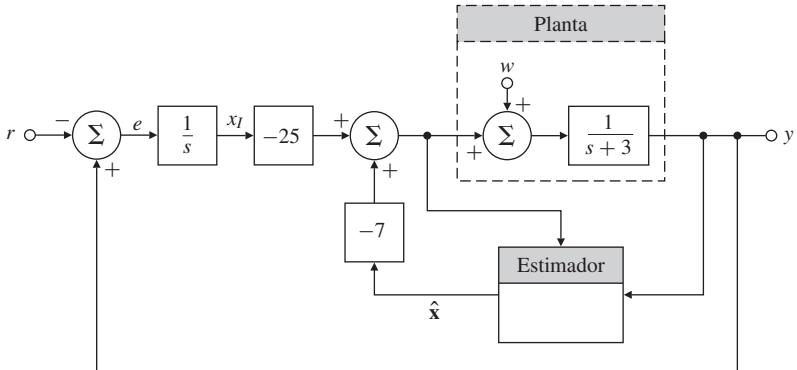


Figura 7.56 Estrutura de controle integral.

Figura 7.57 Exemplo de controle integral.



Podemos verificar este resultado usando acker. O sistema com realimentações é mostrado na Fig. 7.57, com a entrada de distúrbios w .

O ganho $L = 7$ do estimador é obtido de

$$\alpha_e(s) = s + 10 = s + 3 + L.$$

A equação do estimador é da forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (F - LH)\hat{x} + Gu + Ly \\ &= -10\hat{x} + u + 7y,\end{aligned}$$

e

$$u = -K_0 \hat{x} = -7\hat{x}.$$

A resposta ao degrau y_1 devido a uma entrada de referência em degrau r e a saída da resposta de perturbação y_2 devido a uma entrada de perturbação em degrau w são mostradas na Fig. 7.58(a), e os esforços de controle associados (u_1 e u_2) são mostrados na Fig. 7.58(b). Como esperado, o sistema é do Tipo 1, acompanha a entrada de referência em degrau e rejeita a perturbação em degrau assintoticamente.

△ 7.10.2 Controle robusto de rastreamento: abordagem no espaço do erro

Na Seção 7.10.1, introduzimos o controle integral de uma forma direta e selecionamos a estrutura de implementação de modo a obter a ação integral em relação às entradas de referência e de perturbação. Apresentamos, agora, uma abordagem mais analítica para fornecer a um sistema de controle a capacidade de rastrear (com erro em estado estacionário nulo) uma entrada persistente e rejeitar (com erro em estado estacionário nulo) uma perturbação persistente, como um degrau, rampa ou uma entrada senoidal. O método é baseado na inclusão de equações satisfeitas pelos sinais externos, como parte da formulação do problema e resolvendo o problema de controle no **espaço do erro**, por isso estamos certos de que o erro se aproxima de zero, mesmo que a saída esteja rastreando um comando persistente, ou mesmo um sinal crescente (como um sinal de rampa), e ainda que haja alguma mudanças nos parâmetros (propriedade de robustez). O método é ilustrado em detalhes para sinais que satisfazem às equações diferenciais de ordem 2, mas a extensão a sinais mais complexos não é difícil.

Suponha que temos as equações de estado do sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u + \mathbf{G}_1w, \quad (7.208a)$$

$$y = \mathbf{H}\mathbf{x}, \quad (7.208b)$$

e um sinal de referência que sabemos que satisfaz uma equação diferencial específica. As condições iniciais na equação que gera a entrada são desconhecidas. Por exemplo, a entrada pode

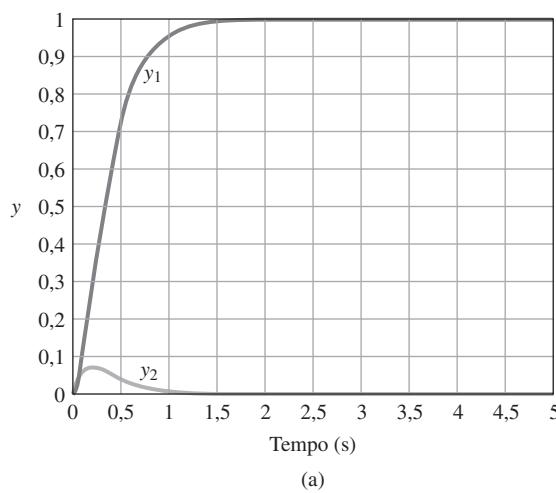
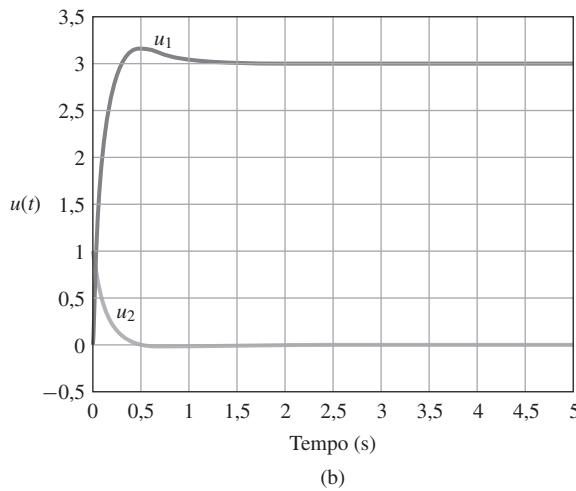


Figura 7.58 Resposta transitória do sistema de velocidade do motor: (a) respostas ao degrau; (b) esforços de controle.



ser uma rampa cuja inclinação e seu valor inicial são desconhecidos. Distúrbios na planta de mesma classe também podem estar presentes. Queremos projetar um controlador para esse sistema de modo que o sistema em malha fechada tenha os polos especificados e possa rastrear os sinais de comando na entrada e rejeitar distúrbios do tipo descrito, sem erro em estado estacionário. Vamos desenvolver os resultados apenas para equações diferenciais de segunda ordem. Definimos a entrada de referência para satisfazer à relação

$$\ddot{r} + \alpha_1 \dot{r} + \alpha_2 r = 0 \quad (7.209)$$

e a perturbação satisfaz exatamente à mesma equação:

$$\ddot{w} + \alpha_1 \dot{w} + \alpha_2 w = 0. \quad (7.210)$$

O erro (rastreamento) é definido como

$$e = y - r. \quad (7.211)$$

O problema de rastreamento de r e de rejeição de w pode ser visto como um exercício de projetar uma lei de controle para fornecer *regulação do erro*, o que significa dizer que o erro e tende a zero quando o tempo se torna grande. O controle também deve ser **estruturalmente estável** ou **robusto**, no sentido de que a regulação do erro e para zero, em estado estacionário, ocorre mesmo na presença de “pequenas” perturbações dos parâmetros do sistema original. Note que, na prática, nunca teremos um modelo perfeito da planta, e os valores dos parâmetros são praticamente sempre sujeitos a alguma mudança, por isso robustez é sempre muito importante.

0 significado de controle robusto

Sabemos que a entrada de comando satisfaz à Eq. (7.209) e gostaríamos de eliminar a referência das equações em favor do erro. Começamos substituindo r na Eq. (7.209) com o erro da Eq. (7.211). Quando fazemos isso, a referência cancela-se devido à Eq. (7.209), e temos a fórmula para o erro em termos do estado:

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_2 e = \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y \quad (7.212a)$$

$$= \mathbf{H}\ddot{\mathbf{x}} + \alpha_1 \mathbf{H}\dot{\mathbf{x}} + \alpha_2 \mathbf{H}\mathbf{x}. \quad (7.212b)$$

Agora, vamos substituir o vetor de estado da planta pelo estado de espaço do erro, definido por

$$\xi \triangleq \ddot{\mathbf{x}} + \alpha_1 \dot{\mathbf{x}} + \alpha_2 \mathbf{x}. \quad (7.213)$$

Similarmente, substituímos o controle pelo controle no espaço do erro, definido como

$$\mu \triangleq \ddot{u} + \alpha_1 \dot{u} + \alpha_2 u. \quad (7.214)$$

Com estas definições, podemos substituir a Eq. (7.212b) por

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_2 e = \mathbf{H}\xi. \quad (7.215)$$

A equação de estados para ξ é dada por¹⁴

$$\dot{\xi} = \ddot{\mathbf{x}} + \alpha_1 \dot{\mathbf{x}} + \alpha_2 \mathbf{x} = \mathbf{F}\xi + \mathbf{G}\mu. \quad (7.216)$$

Note que a perturbação, bem como a referência, se cancela a partir da Eq. (7.216). As Eqs. (7.215) e (7.216) agora descrevem todo o sistema em um espaço de erro. Na forma de variáveis de estado padrão, as equações são

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mu, \quad (7.217)$$

sendo $\mathbf{z} = [e \quad \dot{e} \quad \xi^T]^T$ e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}. \quad (7.218)$$

Ao sistema de erro (\mathbf{A} , \mathbf{B}) podem ser dadas dinâmicas arbitrárias por realimentação de estados, se ele for controlável. Se a planta (\mathbf{F} , \mathbf{G}) for controlável e não possuir um zero em qualquer uma das raízes da equação característica do sinal de referência,

$$\alpha_r(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2,$$

então o sistema de erro (\mathbf{A} , \mathbf{B}) é controlável.¹⁵ Assumimos que essas condições são satisfeitas; portanto, existe uma lei de controle da forma

$$\mu = -[K_2 \quad K_1 \quad \mathbf{K}_0] \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \xi \end{bmatrix} = -\mathbf{K}\mathbf{z}, \quad (7.219)$$

de tal forma que o sistema tenha uma dinâmica de erro arbitrária por alocação de polos. Agora, precisamos expressar essa lei de controle em termos do estado real do processo \mathbf{x} e do controle real. Combinamos as Eqs. (7.219), (7.213) e (7.214) para obter a lei de controle em termos de u e \mathbf{x} ($u^{(2)}$ significa $\frac{d^2u}{dt^2}$):

$$(u + \mathbf{K}_0 \mathbf{x})^{(2)} + \sum_{i=1}^2 \alpha_i (u + \mathbf{K}_0 \mathbf{x})^{(2-i)} = - \sum_{i=1}^2 K_i e^{(2-i)}. \quad (7.220)$$

A estrutura para a implementação da Eq. (7.220) é muito simples para rastreamento de entradas constantes. Nesse caso, a equação para entrada referência é $\dot{r} = 0$. Em termos de u e \mathbf{x} , a lei de controle [Eq. (7.220)] se reduz a

$$\dot{u} + \mathbf{K}_0 \dot{\mathbf{x}} = -K_1 e. \quad (7.221)$$

¹⁴ Observe que este conceito pode ser estendido a equações mais complexas em r e para sistemas multivariáveis.

¹⁵ Por exemplo, não é possível adicionar um controle integral a uma planta que tem um zero na origem.

Aqui, precisamos apenas integrar para revelar a lei de controle e a ação de controle integral:

$$u = -K_1 \int^t e d\tau - \mathbf{K}_0 \mathbf{x}. \quad (7.222)$$

Um diagrama de blocos do sistema, apresentado na Fig. 7.59, mostra claramente a presença de um integrador puro no controlador. Neste caso, a única diferença entre o método de modelo interno da Fig. 7.59 e o método da Fig. 7.57 é a localização relativa do integrador e do ganho.

Um problema mais complexo, que mostra claramente o poder da abordagem no espaço do erro para rastreamento robusto, decorre da exigência de rastreamento de uma senoide com erro em estado estacionário nulo. O problema surge, por exemplo, no controle de um sistema de armazenamento de dados em disco.

EXEMPLO 7.36 Servomecanismo de uma unidade de disco: controle robusto para seguir uma senoide

Um modelo simples normalizado do servomecanismo de unidade de disco em um computador é dado pelas equações

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{H} &= [1 \ 0], \quad J = 0. \end{aligned}$$

Devido ao fato de os dados no disco não estarem exatamente em um círculo centrado, o servo deve seguir uma senoide de frequência ω_0 em radianos determinada pela velocidade de rotação.

- Encontre a estrutura de um controlador para este sistema que seguirá à entrada de referência dada com erro em estado estacionário nulo.
- Suponha que $\omega_0 = 1$ e que os polos de malha fechada estejam em $-1 \pm j\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3} \pm j1$.
- Demonstre as propriedades de rastreamento e de rejeição de distúrbio no sistema usando o MATLAB ou SIMULINK.

Solução.

- A entrada de referência satisfaz à equação diferencial $\ddot{r} = -\omega_0^2 r$ tal que $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \omega_0^2$. Com esses valores, as matrizes de erro de estado, de acordo com Eq. (7.218), são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ é

$$s^4 + (1 + K_{02})s^3 + (\omega_0^2 + K_{01})s^2 + [K_1 + \omega_0^2(1 + K_{02})]s + K_{01}\omega_0^2 K_2 = 0,$$

a partir do qual o ganho pode ser selecionado pela alocação de polos. A implementação do compensador da Eq. (7.220) tem a estrutura mostrada na Fig. 7.60, que mostra claramente

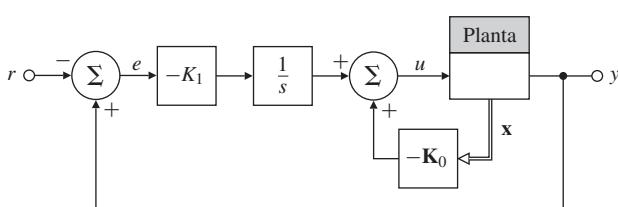
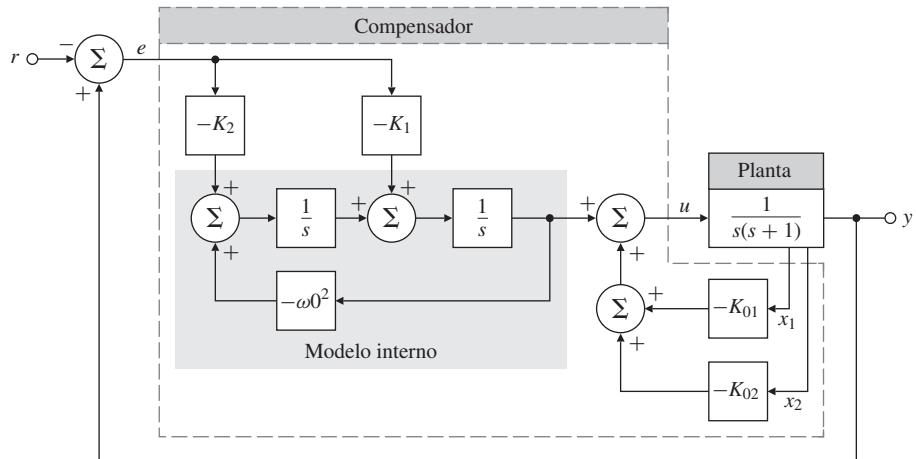


Figura 7.59 Controle integral usando a abordagem do modelo interno.

Figura 7.60 Estrutura do compensador para o servomecanismo que rastreia exatamente a senoide de frequência ω_0 .



Princípio do módulo interno

a presença do oscilador com frequência ω_0 (conhecido como **modelo interno do gerador de entrada**) no controlador.¹⁶

- (b) Agora, assuma que $\omega_0 = 1$ rad/s e que os polos de malha fechada desejados sejam dados como

$$\text{pc} = [-1 + j * \sqrt{3}; -1 - j * \sqrt{3}; -\sqrt{3} + j; -\sqrt{3} - j].$$

Então, o ganho de realimentação é

$$\mathbf{K} = [K_2 \ K_1 : \mathbf{K}_0] = [2,0718 \ 16,3923 : 13,9282 \ 4,4641],$$

o qual resulta no controlador

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c e, \\ u &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c,\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_c &= \begin{bmatrix} -16.3923 \\ -2.0718 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_c &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Os comandos relevantes no MATLAB são

```
% matrizes da planta
F=[0 1; 0 -1];
G=[0;1];
H=[1 0];
J=[0];
% matrizes do espaço do erro
omega=1;
A=[0 1 0 0;-omega*omega 0 1 0;0 0 0 1;0 0 0 -1];
B=[0;0;G];
% polos de malha fechada desejados
pc=[-1+sqrt(3)*j ;-1-sqrt(3)*j; -sqrt(3)+j; -sqrt(3)-j];
K=place(A,B,pc);
% matrizes do controlador
K1=K(:,1:2);
Ko=K(:,3:4);
```

¹⁶ Este é um caso particular do **princípio do modelo interno**, que exige que um modelo do sinal externo ou exógeno esteja no controlador para o rastreamento robusto e rejeição de distúrbios.

```

Ac=[0 1; -omega*omega 0];
Bc=[K(2);K(1)];;
Cc=[1 0];
Dc=[0];

```

A resposta em frequência do controlador é mostrada na Fig. 7.61 e mostra um ganho infinito na frequência de rotação $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$. A resposta em frequência de r para e [ou seja, a função de sensibilidade $S(s)$], é mostrada na Fig. 7.62 e revela um recorte acentuado na frequência de rotação $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$. O mesmo recorte também está presente na resposta em frequência da função de transferência de w para y .

- (c) A Fig. 7.63 mostra o diagrama de simulação no SIMULINK para o sistema. Embora as simulações também possam ser feitas no MATLAB, é mais instrutivo usar o ambiente gráfico interativo do SIMULINK. O SIMULINK também fornece a capacidade de adicionar não linearidades (veja o Capítulo 9) e realizar estudos de robustez de forma eficiente.¹⁷ As propriedades de rastreamento do sistema são mostradas na Fig. 7.64(a), mostrando a propriedade de rastreamento assintótico do sistema. O esforço de controle associado e o sinal de erro de rastreamento são mostrados na Fig. 7.64(b) e (c), respectivamente. As propriedades de rejeição à perturbação do

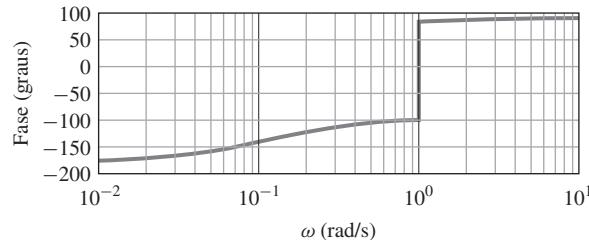
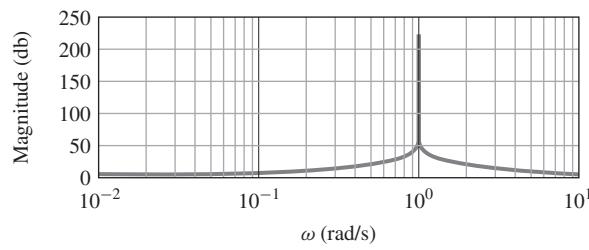


Figura 7.61 Resposta em frequência do controlador.

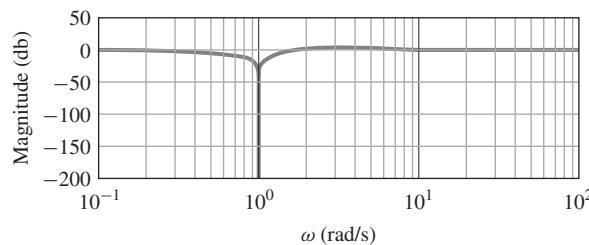


Figura 7.62 Resposta em frequência da função de sensitividade.

¹⁷ Em geral, o projeto pode ser feito no MATLAB, e simulações (não lineares) podem ser realizadas no SIMULINK.

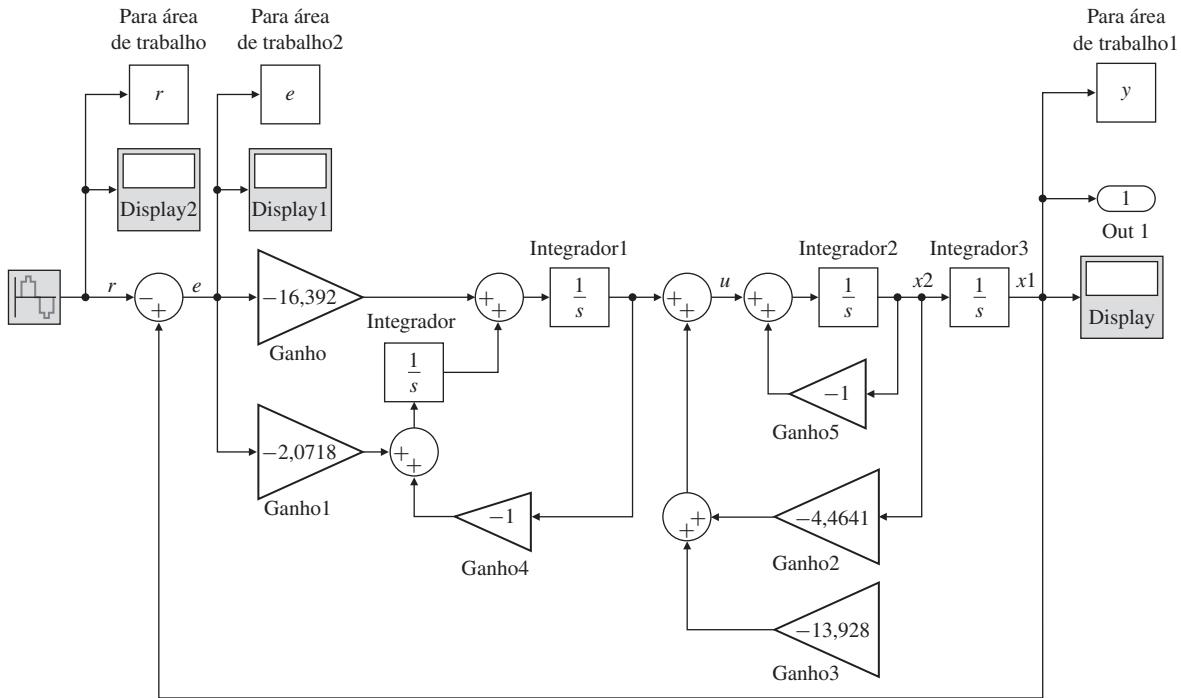


Figura 7.63 Diagrama de blocos no SIMULINK® para o servomecanismo robusto.

sistema são ilustradas na Fig. 7.65(a), exibindo rejeição assintótica de distúrbios para entrada de perturbação senoidal. O esforço de controle associado é mostrado na Fig. 7.65(b). A resposta em frequência de malha fechada [ou seja, a função de transferência complementar $T(s)$] para o servomecanismo robusto é mostrado na Fig. 7.66. Como pode ser visto na figura, a resposta em frequência de r para y é a unidade em $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$, como era esperado.

Os zeros do sistema de r para e estão localizados em $\pm j$, $-2,7321 \pm j2,5425$. As propriedades de rastreamento robusto se devem à presença dos zeros de bloqueamento em $\pm j$. Os zeros de w para y , ambos zeros de bloqueamento, estão localizados em $\pm j$. As propriedades de rejeição robusta à perturbação se devem à presença desses zeros de bloqueamento.

Simulação no **SIMULINK**

Bloqueio de zeros

A partir da natureza do problema de alocação de polos, o estado \mathbf{z} na Eq. (7.217) tenderá a zero para todas as perturbações nos parâmetros do sistema, enquanto $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ permanece estável. Observe que os sinais que são rejeitados são aqueles que satisfazem às equações com os valores de α_i realmente implementados no modelo dos sinais externos. O método assume que eles são conhecidos e implementados exatamente. Se os valores implementados estão errados, então o resultado será um erro no estado estacionário.

Agora, vamos repetir o exemplo da Seção 7.10.1 para o controle integral.

EXEMPLO 7.37 Controle integral usando o projeto no espaço do erro

Para o sistema

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

com a descrição em variáveis de estado

$$F = -3, \quad G = 1, \quad H = 1,$$

construa um controlador com os polos em $s = -5$ para rastrear uma entrada que satisfaça $i = 0$.

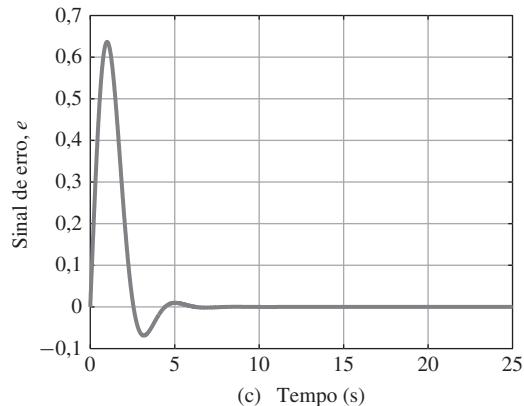
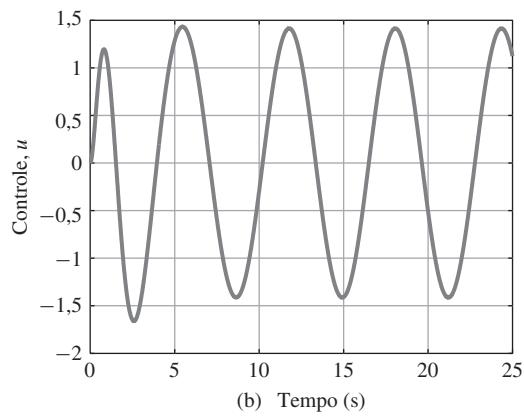
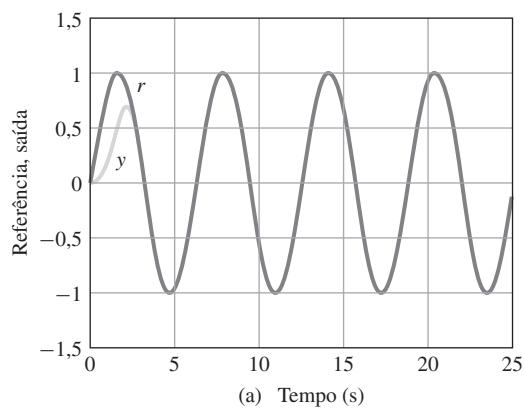


Figura 7.64 (a) Propriedades de rastreamento para o servomecanismo robusto; (b) esforço de controle; (c) sinal de erro de rastreamento.

Solução. O sistema de erro é

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu.$$

Se escolhemos a equação característica como

$$\alpha_c(s) = s^2 + 10s + 25,$$

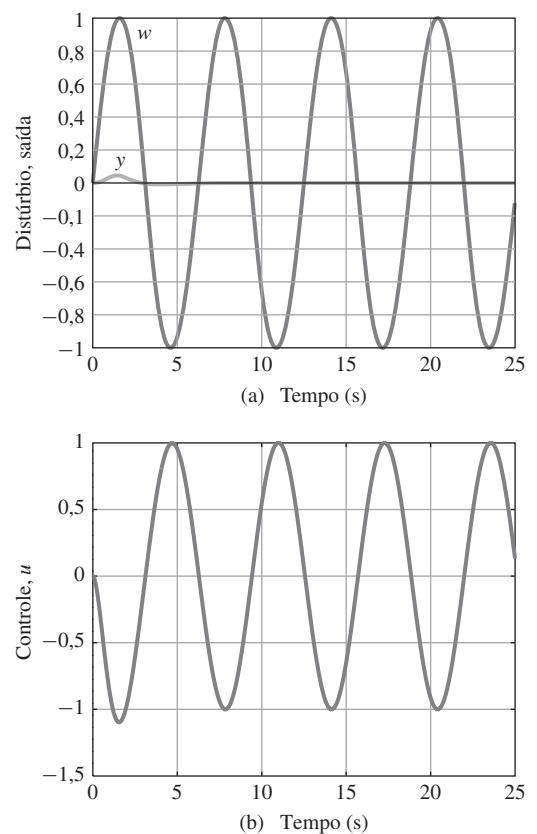
então a equação de alocação de polos para \mathbf{K} é

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}] = \alpha_c(s). \quad (7.223)$$

Em detalhes, a Eq. (7.223) é

$$s^2 + (3 + K_0)s + K_1 = s^2 + 10s + 25,$$

Figura 7.65 (a) Propriedades de rejeição de distúrbios para servomecanismo robusto; (b) esforço de controle.



que fornece

$$\mathbf{K} = [\begin{array}{cc} 25 & 7 \end{array}] = [\begin{array}{cc} K_1 & K_0 \end{array}],$$

e o sistema é implementado como mostrado na Fig. 7.67. A função de transferência de r para e para esse sistema, a função de sensibilidade,

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \mathcal{S}(s) = -\frac{s(s+10)}{s^2 + 10s + 25},$$

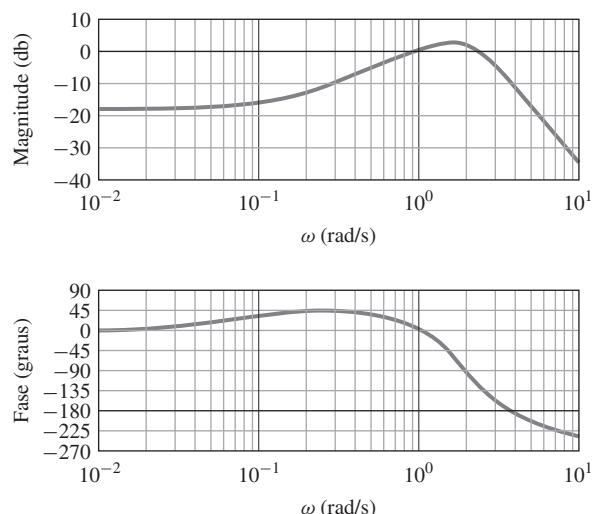


Figura 7.66 Resposta em frequência de malha fechada para o servomecanismo robusto.

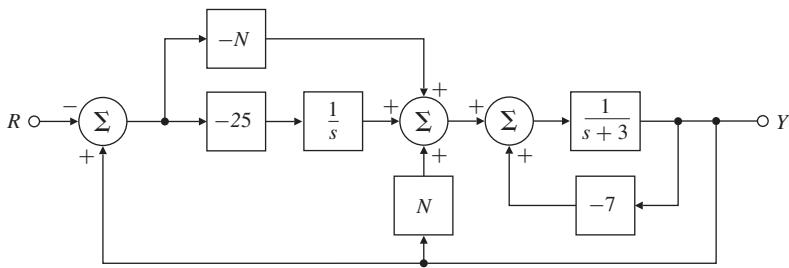


Figura 7.67 Exemplo de um modelo interno com alimentação à frente.

mostra um zero de bloqueamento em $s = 0$, o que impede que uma entrada constante afete o erro. A função de transferência de malha fechada – ou seja, a função de sensibilidade complementar – é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{25}{s^2 + 10s + 25}.$$

A estrutura da Fig. 7.68 nos permite adicionar uma alimentação da entrada de referência, que fornece um grau de liberdade extra na atribuição do zero. Se adicionarmos um termo proporcional a r na Eq. (7.222), então

$$u = -K_1 \int^t e(\tau) d\tau - \mathbf{K}_0 \mathbf{x} + Nr. \quad (7.224)$$

Essa relação tem o efeito de criar um zero em $-K_1/N$. A localização deste zero pode ser escolhida para melhorar a resposta transitória do sistema. Para a implementação real, podemos reescrever a Eq. (7.224) em termos de e para obter

$$u = -K_1 \int^t e(\tau) d\tau - \mathbf{K}_0 \mathbf{x} + N(y - e). \quad (7.225)$$

O diagrama de blocos para o sistema é mostrado na Fig. 7.68. Para nosso exemplo, a função de transferência global se torna

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Ns + 25}{s^2 + 10s + 25}.$$

Observe que o ganho DC é unitário para qualquer valor de N e que, pela nossa escolha de N , podemos alocar o zero em qualquer valor real para melhorar a resposta dinâmica. A estratégia natural para alocar o zero é cancelar um dos polos do sistema, neste caso em $s = -5$. A resposta ao degrau do sistema é mostrada na Fig. 7.69 para $N = 5$, bem como para $N = 0$ e 8. Com o entendimento de que um polo pode ser cancelado em projetos de controle integral, certifique-se de escolher um dos polos desejados do controle de tal forma que ele seja real e que possa ser cancelado por meio da escolha adequada de N .

△ 7.10.3 O estimador estendido

Até agora, em nossa discussão sobre controle robusto, usamos um controle baseado em re-alimentação completa dos estados. Se um dos estados não estiver disponível, como no caso do

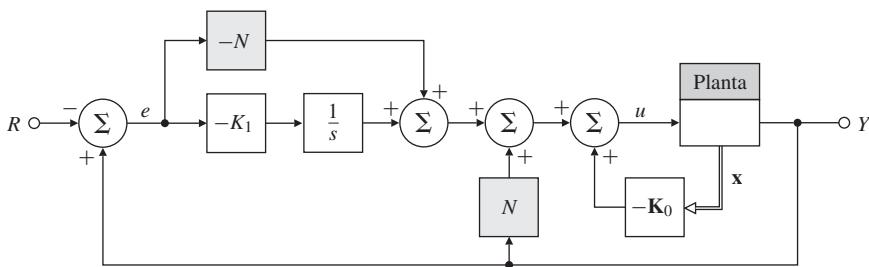
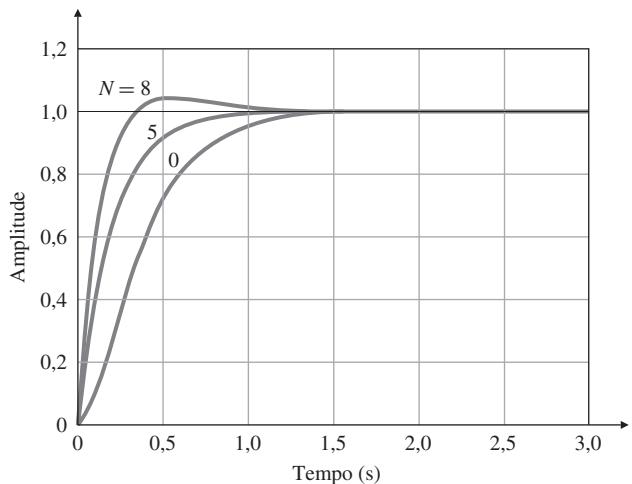


Figura 7.68 Modelo interno como controle integral com alimentação à frente.

Figura 7.69 Respostas ao degrau com controle integral e alimentação à frente.



regulador, a realimentação completa dos estados, \mathbf{Kx} , pode ser substituída pela realimentação das estimativas, $\hat{\mathbf{Kx}}$, onde o estimador é construído como antes. Como um último olhar para as formas de projetar controle com entradas externas, nesta seção desenvolvemos um método para rastrear uma entrada de referência e rejeitar distúrbios. O método baseia-se no estimador estendido para incluir estimativas dos sinais externos de uma forma que nos permita cancelar seus efeitos sobre o erro no sistema.

Suponha que a planta é descrita pelas equações

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{Gu} + \mathbf{Gw}, \quad (7.226a)$$

$$y = \mathbf{Hx}, \quad (7.226b)$$

$$e = \mathbf{Hx} - r. \quad (7.226c)$$

Além disso, suponha que tanto a referência r como a perturbação w são conhecidas para satisfazer às equações¹⁸

$$\alpha_w(s)w = \alpha_\rho(s)w = 0, \quad (7.227)$$

$$\alpha_r(s)r = \alpha_\rho(s)r = 0, \quad (7.228)$$

com

$$\alpha_\rho(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2,$$

correspondendo aos polinômios $\alpha_w(s)$ e $\alpha_r(s)$ na Fig. 7.70(a). Em geral, devemos selecionar o polinômio equivalente de perturbação $\alpha_p(s)$ na Fig. 7.70(b) para ser o *mínimo múltiplo comum* de $\alpha_w(s)$ e $\alpha_r(s)$. O primeiro passo é reconhecer que, no que tange à resposta em estado estacionário da saída, há um sinal de entrada equivalente ρ que satisfaz a mesma equação quando r e w entram no sistema no mesmo lugar do sinal de controle, como mostrado na Fig. 7.70(b). Como antes, devemos supor que a planta não tem um zero em qualquer uma das raízes da Eq. (7.227). Para os nossos propósitos, podemos substituir as Eqs. (7.226) por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{G}(u + \rho), \quad (7.229a)$$

$$e = \mathbf{Hx}. \quad (7.229b)$$

Se for possível estimar esta entrada equivalente, podemos acrescentar ao controle um termo $-\hat{\rho}$ que vai cancelar os efeitos da perturbação real e da referência e fazer com que a saída rastreie r .

¹⁸ Novamente desenvolvemos os resultados para uma equação de segunda ordem nos sinais externos; a discussão pode ser estendida para equações de ordem superior.

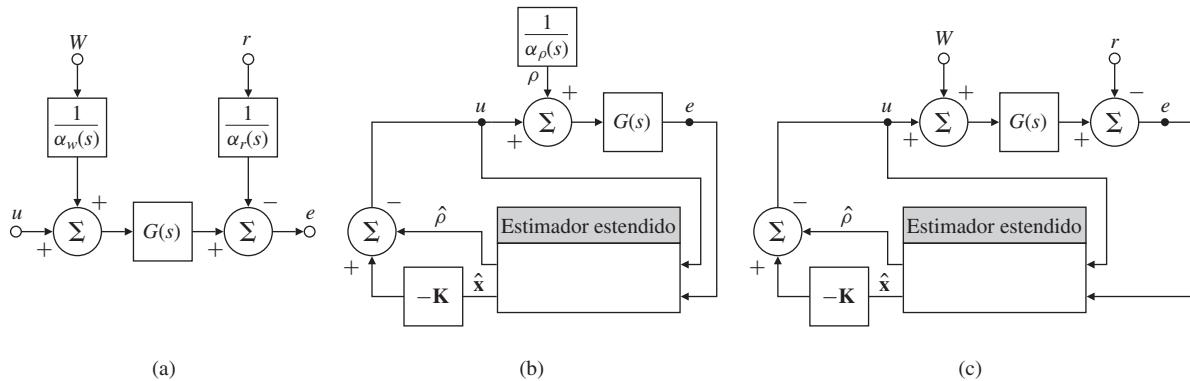


Figura 7.70 Diagrama de blocos de um sistema de rastreamento e rejeição de distúrbio com o estimador estendido: (a) perturbação equivalente; (b) diagrama de blocos para o projeto; (c) diagrama de blocos para a implementação.

em estado estacionário. Para fazer isso, combinamos as Eqs. (7.226) e (7.227) em uma descrição de estado para obter

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu}, \quad (7.230a)$$

$$e = \mathbf{Cz}, \quad (7.230b)$$

sendo $\mathbf{z} = [\rho \quad \dot{\rho} \quad \mathbf{x}^T]^T$. As matrizes são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad (7.231a)$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad \mathbf{H}]. \quad (7.231b)$$

O sistema dado pelas Eqs. (7.231) não é controlável, uma vez que não podemos influenciar ρ a partir de u . No entanto, se \mathbf{F} e \mathbf{H} são observáveis e se o sistema $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ não tiver um zero, que também é uma raiz da Eq. (7.227), então o sistema da Eq. (7.231) será observável, e podemos construir um observador que irá calcular as estimativas do estado da planta e de ρ . As equações do estimador são as padrões, mas o controle não é:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{L}(e - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}), \quad (7.232a)$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\rho}. \quad (7.232b)$$

Em termos das variáveis originais, as equações do estimador são:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\rho}} \\ \ddot{\hat{\rho}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \dot{\hat{\rho}} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{bmatrix} [e - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}]. \quad (7.233)$$

O diagrama de blocos geral do sistema para o projeto é mostrado na Fig. 7.70(b). Se escrevermos a última equação para $\hat{\mathbf{x}}$ na Eq. (7.233) e a substituirmos na Eq. (7.232b), surge uma simplificação dos resultados, porque o termo $\hat{\rho}$ cancela:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{G}\hat{\rho} + \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\rho}) + \mathbf{L}_3(e - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{L}_3(e - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\bar{u} + \mathbf{L}_3(e - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Com o estimador da Eq. (7.233) e o controle da Eq. (7.232b), a equação de estado é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\rho}) + \mathbf{G}\rho. \quad (7.234)$$

Em termos dos erros de estimativa, a Eq. (7.234) pode ser reescrita como

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{GK})\mathbf{x} + \mathbf{GK}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\tilde{\rho}. \quad (7.235)$$

Em razão de projetarmos o estimador para ser estável, os valores de $\tilde{\rho}$ e \tilde{x} tendem a zero em estado estacionário, e o valor final do estado não é afetado pela entrada externa. O diagrama de blocos do sistema para *implementação* é desenhado na Fig. 7.70(c). Um exemplo muito simples ilustrará as etapas deste processo.

EXEMPLO 7.38 Rastreamento em estado estacionário e rejeição de distúrbios para velocidade de um motor pelo estimador estendido

Construa um estimador para controlar o estado e cancelar um fator constante na saída e rastrear uma referência constante no sistema de rotação do motor descrito por

$$\dot{x} = -3x + u, \quad (7.236a)$$

$$y = x + w, \quad (7.236b)$$

$$\dot{w} = 0, \quad (7.236c)$$

$$\dot{r} = 0. \quad (7.236d)$$

Aloque o polo do controle em $s = -5$ e os dois polos do estimador estendido em $s = -15$.

Solução. Para começar, projetamos a lei de controle ignorando a perturbação equivalente. Notamos, por inspeção, que um ganho de -2 irá mover o único polo de -3 para a posição desejada -5 , portanto, $K = 2$. O sistema aumentado com a entrada externa equivalente ρ , que substitui a perturbação real w e a referência r , é dado por

$$\dot{\rho} = 0,$$

$$\dot{x} = -3x + u + \rho,$$

$$e = x.$$

As equações do estimador estendido são

$$\dot{\hat{\rho}} = l_1(e - \hat{x}),$$

$$\dot{\hat{x}} = -3\hat{x} + u + \hat{\rho} + l_2(e - \hat{x}).$$

O ganho do estimador de erro é encontrado como $\mathbf{L} = [\begin{matrix} 225 & 27 \end{matrix}]^T$ a partir da equação característica

$$\det \begin{bmatrix} s & l_1 \\ 1 & s + 3 + l_2 \end{bmatrix} = s^2 + 30s + 225.$$

Um diagrama de blocos do sistema é dado na Fig. 7.71(a), e as respostas para o degrau na entrada de comando r (aplicada em $t = 0$ s) e na perturbação w (aplicada em $t = 0,5$ s) são mostradas na Fig. 7.71(b).

△ 7.11 Recuperação de função de transferência de malha (RFTM)

A introdução de um estimador em uma malha de controle por realimentação de estados pode afetar adversamente as propriedades de estabilidade robusta do sistema [isto é, as propriedades de margem de fase (PM) e de margem de ganho (GM) podem se tornar arbitrariamente pobres, como mostrado pelo famoso exemplo de Doyle (Doyle, 1978)]. No entanto, é possível modificar o projeto do estimador de forma a tentar “recuperar” as propriedades da estabilidade robusta LQR em certa medida. Esse processo é chamado de recuperação de função de transferência de malha (RFTM) e é especialmente eficaz para sistemas de fase mínima. Para realizar a recuperação, alguns dos polos do estimador são colocados nos zeros da planta (ou próximo deles) e os polos restantes são movidos para o SPE (suficientemente longe). A ideia por trás da RFTM é reprojetar o estimador de forma a moldar as propriedades do ganho de malha, aproximando-as das propriedades do LQR.

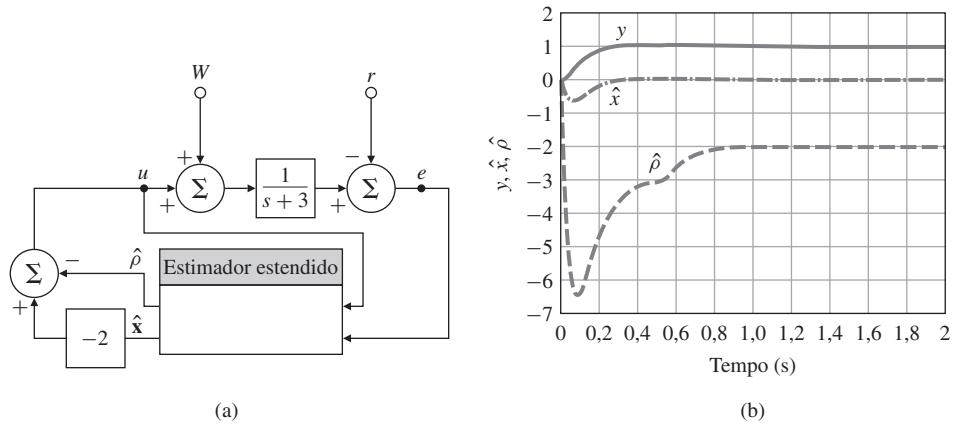


Figura 7.71 Sistema de rotação do motor com um estimador estendido: (a) diagrama de blocos; (b) respostas ao degrau no comando e no distúrbio.

O uso da RFTM significa que os controladores por realimentação podem ser projetados para alcançar as funções desejadas de sensibilidade $[S(s)]$ e de sensibilidade complementar $[T(s)]$ nos pontos críticos (pontos de quebra da malha) do sistema realimentado (por exemplo, em uma entrada ou em uma saída da planta). Claro, há um preço a ser pago por esta melhoria em termos da estabilidade robusta! O novo sistema de controle projetado pode ter piores propriedades de sensibilidade ao ruído no sensor. Intuitivamente, pode-se pensar em fazer (alguns) os polos do estimador arbitrariamente rápidos para que o ganho de malha seja aproximadamente o ganho do LQR. De forma alternativa, essencialmente pode-se pensar em “inverter” a função de transferência da planta de modo que todos os polos no SPE da planta sejam cancelados pelo compensador dinâmico para obter a forma da malha desejada. Obviamente há custos, e o projetista precisa ter o cuidado de fazer a escolha correta para o problema dado, dependendo das especificações do sistema de controle.

Hoje, a técnica RFTM é bem conhecida, e procedimentos específicos para o projeto prático foram identificados (Athans, 1986; Stein e Athans, 1987; Saberi *et al.*, 1993). Os mesmos procedimentos também podem ser aplicados a sistemas de fase não mínima, mas não há garantia sobre a extensão da possível recuperação. A técnica RFTM pode ser vista como um procedimento sistemático para estudar os custos de projeto do compensador linear quadrático (Doyle e Stein, 1981). Agora, vamos formular o problema RFTM.

Considere o sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u + w, \quad (7.237a)$$

$$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + v, \quad (7.237b)$$

sendo w e v processos Gaussianos brancos não correlacionados e com média zero e ruído no sensor com matrizes de covariância $\mathbf{R}_w \geq 0$ e $\mathbf{R}_v \geq 0$. O projeto do estimador fornece

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \hat{y}), \quad (7.238a)$$

$$\hat{y} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}, \quad (7.238b)$$

resultando no compensador dinâmico usual

$$D_c(s) = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} + \mathbf{LH})^{-1}\mathbf{L}. \quad (7.239)$$

Agora, vamos tratar os parâmetros de ruído, \mathbf{R}_w e \mathbf{R}_v , como projeto das “arrestas” no projeto do compensador dinâmico. Sem perda de generalidade, vamos escolher $\mathbf{R}_w = \Gamma\Gamma^T$ e $\mathbf{R}_v = 1$. Para a RFTM, assuma que $\Gamma = q\mathbf{G}$, onde q é um parâmetro de projeto escalar. O projeto do estimador,

então, é baseado no projeto específico dos parâmetros \mathbf{R}_w e \mathbf{R}_v . Pode-se demonstrar que, para um sistema de fase mínima, à medida que q se torna grande (Doyle e Stein, 1979),

$$\lim_{q \rightarrow \infty} D_c(s)G(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}, \quad (7.240)$$

Inversão da planta

a convergência é pontual em s e o grau de recuperação pode ser arbitrariamente bom. O efeito deste procedimento de projeto é “inverter” a função de transferência da planta no limite quando $q \rightarrow \infty$:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} D_c(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}(s). \quad (7.241)$$

Esta é precisamente a razão da recuperação plena da função de transferência de malha não ser possível para um sistema de fase não mínima. Este comportamento limitador pode ser explicado usando o lugar das raízes simétrico. Quando $q \rightarrow \infty$, alguns dos polos do estimador se aproximam dos zeros de

$$G_e(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}, \quad (7.242)$$

RFTM para sistemas de fase não mínima

e os restantes tendem ao infinito¹⁹ [veja as Eqs. (7.166) e (7.167)]. Na prática, o procedimento de projeto RFTM ainda pode ser aplicado a uma planta de fase não mínima. O grau de recuperação vai depender da localização específica dos zeros de fase não mínima. Uma recuperação suficiente pode ser possível em muitas frequências se os zeros no SPD estiverem localizados fora da largura de banda em malha fechada especificada. Limites no desempenho de sistemas realimentados em razão dos zeros no SPD são discutidos em Freudenberg e Looze (1985). Vamos ilustrar o procedimento RFTM no exemplo simples seguinte.

EXEMPLO 7.39 Projeto RFTM para o controle de atitude de satélite

Considere o sistema do satélite na descrição em espaço de estados

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H} &= [1 \ 0], & J &= 0. \end{aligned}$$

- Projete um controlador LQR com $\mathbf{Q} = \rho\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ e $R = 1$, $\rho = 1$, e determine o ganho de malha.
- Então, projete um compensador que recupere o ganho de malha LQR do item (a) usando a técnica RFTM para $q = 1, 10, 100$.
- Compare os diferentes projetos candidatos no item (b) com relação à atividade do atuador e devido ao ruído branco Gaussiano no sensor.

Solução. Usando lqr, os pesos LQR selecionados resultam no ganho de realimentação $\mathbf{K} = [1 \ 1,414]$. A função de transferência de malha é

$$\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} = \frac{1,414(s + 0,707)}{s^2}.$$

A magnitude da resposta em frequência do ganho de malha deste LQR é mostrada na Fig. 7.72. Para o projeto do estimador usando lqe, faça $\boldsymbol{\Gamma} = q\mathbf{G}$, $\mathbf{R}_w = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}^T$, $\mathbf{R}_v = 1$, e escolha $q = 10$, resultando no ganho do estimador

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 14.142 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

A função de transferência do compensador é

$$\begin{aligned} D_c(s) &= \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} + \mathbf{LH})^{-1}\mathbf{L} \\ &= \frac{155,56(s + 0,6428)}{(s^2 + 15,556s + 121)} = \frac{155,56(s + 0,6428)}{(s + 7,77 + j7,77)(s + 7,77 - j7,77)}, \end{aligned}$$

¹⁹ Em uma configuração de Butterworth.

e a função de transferência de malha é

$$D_c(s)G(s) = \frac{155,56(s + 0,6428)}{s^2(s + 7,77 + j7,77)(s + 7,77 - j7,77)}.$$

A Fig. 7.72 mostra a resposta em frequência da função de transferência de malha para vários valores de q ($q = 1, 10, 100$), junto com a resposta em frequência da função de transferência de malha LQR ideal. Como pode ser visto a partir desta figura, o ganho da malha tende a se aproximar do LQR quando o valor de q aumenta. Como pode ser visto na Fig. 7.72, para $q = 10$, a margem de ganho “recuperada” é de $GM = 11,1 = 20,9$ db e a $PM = 55,06^\circ$. Exemplos de declarações no MATLAB para realizar o procedimento de projeto RFTM anterior são:

```
F=[0 1; 0 0];
G=[0;1];
H=[1 0];
J=[0];
sys0=ss(F,G,H,J);
H1=[1 0];
sys=ss(F,G,H1,J);

w=logspace(-1,3,1000);
rho=1.0;
Q=rho*H1'*H1;
r=1;
[K]=lqr(F,G,Q,r)
sys1=ss(F,G,K,0);
[maggk1,phasgk1,w]=bode(sys1,w);
```

Função lqr do MATLAB

```
q=10;
gam=q*G;
Q1=gam*gam;
rv=1;
[L]=lqe(F,gam,H,Q1,rv)
```

Função lqe do MATLAB

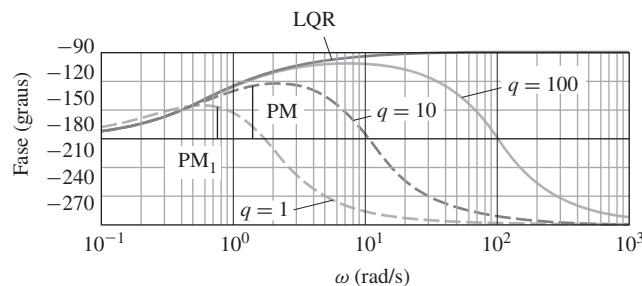
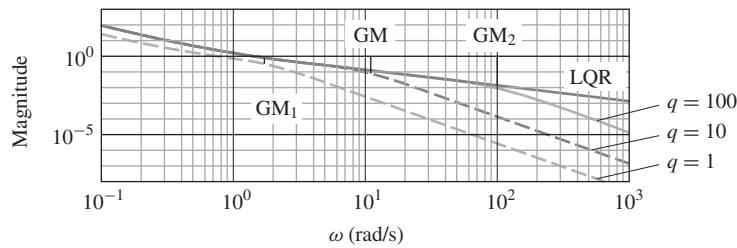


Figura 7.72 Gráficos da resposta em frequência para projeto RFTM.

```

aa=F-G*K-L*H;
bb=L;
cc=K;
dd=0;
sysk=ss(aa,bb,cc,dd);
sysgk=series(sys0,sysk);
[maggk,phsgk,w]=bode(sysgk,w);
[gm,phm,wcg,wcp]=margin(maggk,phsgk,w)
loglog(w,[maggk1(:) maggk(:)]);
semilogx(w,[phasgk1(:) phsgk(:)]);

```

Função bode do MATLAB**Função margin do MATLAB**

Para determinar o efeito do ruído do sensor, v , na ação do atuador, determinamos a função de transferência de v para u como mostrado na Fig. 7.73. Para o valor selecionado do parâmetro RFTM de projeto, $q = 10$, temos

$$\frac{U(s)}{V(s)} = H(s) = \frac{-D_c(s)}{1 + D_c(s)G(s)} = \frac{-155,56s^2(s + 0,6428)}{s^4 + 15,556s^3 + 121s^2 + 155,56s + 99,994}.$$

Valor RMS

Uma medida razoável do efeito do ruído no sensor na ação do atuador é o valor quadrático médio (RMS) do controle, u , devido ao ruído aditivo, v . O valor RMS do controle pode ser computado como

$$\|u\|_{\text{rms}} = \left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (7.243)$$

sendo T_0 a duração do sinal. Assumindo um ruído Gaussiano branco v , o valor RMS do controle também pode ser determinado analiticamente (Boyd e Barratt, 1991). O diagrama de malha fechada no SIMULINK com limitação de banda da excitação do ruído branco no sensor é mostrado na Fig. 7.74. Os valores de controle RMS foram calculados para diferentes valores do parâmetro de projeto RFTM q , usando as simulações SIMULINK, e são tabulados na Tabela 7.2. Os resultados sugerem maior vulnerabilidade devido ao desgaste do atuador à medida que q aumenta. Use os comandos no MATLAB ltry e ltru para os cálculos RFTM.

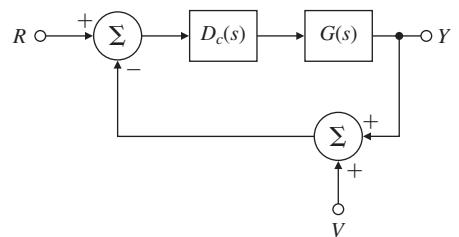
Simulação no SIMULINK

Figura 7.73 Sistema de malha fechada para o RFTM.

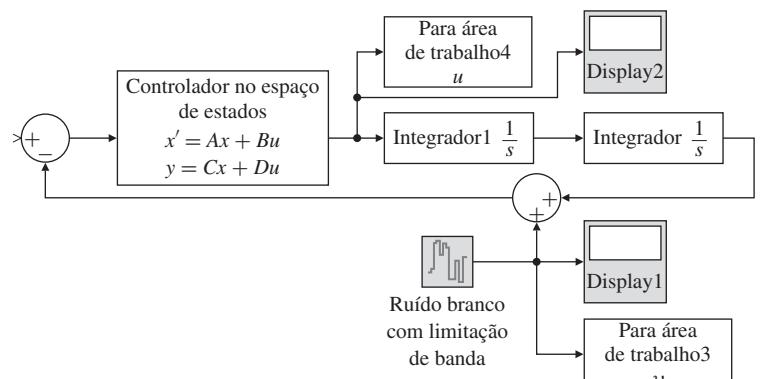


Figura 7.74 Diagramas de blocos RFTM no SIMULINK.

TABELA 7.2 Valores de controle RMS calculados para vários valores do parâmetro de ajuste RFTM q

q	$\ u \ \text{ rms}$
1	0,1454
10	2,8054
100	70,5216

Δ 7.12 Projeto direto via funções de transferência racionais

Uma alternativa para os métodos no espaço de estados discutidos até agora é postular uma estrutura geral do controlador dinâmico com duas entradas (r e y) e uma saída (u) e resolver a função de transferência do controlador para fornecer uma função específica de transferência geral de r para y . Um diagrama de blocos da situação é mostrado na Fig. 7.75. Modelamos a planta como a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad (7.244)$$

ao contrário das equações de estado. O controlador também é modelado por sua função de transferência, neste caso uma função de transferência com duas entradas e uma saída:

$$U(s) = -\frac{c_y(s)}{d(s)}Y(s) + \frac{c_r(s)}{d(s)}R(s). \quad (7.245)$$

Aqui, $d(s)$, $c_y(s)$ e $c_r(s)$ são polinômios. Para o controlador da Fig. 7.75 e Eq. (7.245) a ser implementado, as ordens dos polinômios nos numeradores $c_y(s)$ e $c_r(s)$ não devem ser superiores à ordem do polinômio do denominador $d(s)$.

Para realizar o projeto, é necessário que a função de transferência de malha fechada definida pelas Eqs. (7.244) e (7.245) estejam de acordo com a função de transferência desejada

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{c_r(s)b(s)}{\alpha_c(s)\alpha_e(s)}. \quad (7.246)$$

A Eq. (7.246) nos diz que os zeros da planta devem ser os zeros do sistema global. A única maneira de mudar isso é ter fatores de $b(s)$ aparecendo em α_c ou α_e . Combinamos as Eqs. (7.244) e (7.245) para obter

$$a(s)Y(s) = b(s) \left[-\frac{c_y(s)}{d(s)}Y(s) + \frac{c_r(s)}{d(s)}R(s) \right], \quad (7.247)$$

a qual pode ser reescrita como

$$[a(s)d(s) + b(s)c_y(s)]Y(s) = b(s)c_r(s)R(s). \quad (7.248)$$

Comparando a Eq. (7.246) com a Eq. (7.247), imediatamente vemos que o projeto pode ser realizado se pudermos resolver a **equação Diofantina**

Controlador geral na forma polinomial

Equação Diofantina

$$a(s)d(s) + b(s)c_y(s) = \alpha_c(s)\alpha_e(s) \quad (7.249)$$

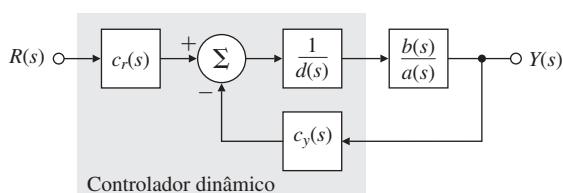


Figura 7.75 Formulação direta da função de transferência.

para dados arbitrários a, b, α_c e α_e . Em virtude de cada função de transferência ser uma razão de polinômios, podemos assumir que $a(s)$ e $d(s)$ são **polinômios mônicos**; isto é, o coeficiente da maior potência de s em cada polinômio é a unidade.

A pergunta é: quantas equações e quantas incógnitas existem, se compararmos os coeficientes das potências iguais a s na Eq. (7.249)? Se $a(s)$ é de grau n (dado) e $d(s)$ é de grau m (a ser selecionado), então uma contagem direta fornece $2m + 1$ incógnitas em $d(s)$ e $c_y(s)$ e $n + m$ equações a partir dos coeficientes de potências de s . Assim, a exigência é que

$$2m + 1 \geq n + m,$$

ou

$$m \geq n - 1.$$

Uma possibilidade para uma solução é escolher $d(s)$ de grau n e $c_y(s)$ de grau $n - 1$. Nesse caso, que corresponde ao projeto no espaço de estados para um estimador de ordem completa, há $2n$ equações e $2n$ incógnitas com $\alpha_c \alpha_e$ de grau $2n$. As equações resultantes terão, então, uma solução para α_i arbitrário se, e somente se, $a(s)$ e $b(s)$ não tiverem fatores comuns.²⁰

EXEMPLO 7.40 Alocação de polos para uma função de transferência polinomial

Usando o método polinomial, projete um controlador de ordem n para a planta de terceira ordem no Exemplo 7.30. Note que, se os polinômios $\alpha_c(s)$ e $\alpha_e(s)$ do Exemplo 7.30 estão multiplicados, o resultado é a equação característica em malha fechada desejada:

$$\alpha_c(s)\alpha_e(s) = s^6 + 14s^5 + 122,75s^4 + 585,2s^3 + 1505,64s^2 + 2476,8s + 1728. \quad (7.250)$$

Solução. Usando a Eq. (7.249) com $b(s) = 10$, encontramos

$$(d_0s^3 + d_1s^2 + d_2s + d_3)(s^3 + 10s^2 + 16s) + 10(c_0s^2 + c_1s + c_2) \equiv \alpha_c(s)\alpha_e(s). \quad (7.251)$$

Expandimos o polinômio $d(s)$ com coeficientes d_i e o polinômio $c_y(s)$ com coeficientes c_i .

Agora, igualamos os coeficientes de mesma potência em s na Eq. (7.251) para descobrir que os parâmetros devem satisfazer²¹

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 122.75 \\ 585.2 \\ 1505.64 \\ 2476.8 \\ 1728 \end{bmatrix}. \quad (7.252)$$

A solução da Eq. (7.252) é

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, & c_0 &= 190,1, \\ d_1 &= 4, & c_1 &= 481,8, \\ d_2 &= 66,75, & c_2 &= 172,8, \\ d_3 &= -146,3, \end{aligned}$$

[A solução pode ser encontrada usando o comando no MATLAB $x = a \backslash b$, no qual a é a matriz de Sylvester e b é o lado direito na Eq. (7.252).] Assim, a função de transferência do controlador é

$$\frac{c_y(s)}{d(s)} = \frac{190,1s^2 + 481,8s + 172,8}{s^3 + 4s^2 + 66,75s - 146,3}. \quad (7.253)$$

²⁰ Se eles têm um fator comum, ele vai aparecer no lado esquerdo da Eq. (7.249); para que haja uma solução, o mesmo fator deve estar no lado direito da Eq. (7.249), e, portanto, um fator de α_c ou α_e .

²¹ A matriz do lado esquerdo da Eq. (7.252) é chamada de matriz de Sylvester e é não singular se, e somente se, $a(s)$ e $b(s)$ não têm nenhum fator em comum.

Note que os coeficientes da Eq. (7.253) são os mesmos do controlador $D_c(s)$ (que obtivemos usando as técnicas de variáveis de estado), uma vez que os fatores de $D_c(s)$ são multiplicados.

O compensador de ordem reduzida também pode ser obtido usando uma solução polinomial.

EXEMPLO 7.41 Projeto de ordem reduzida para um modelo de função de transferência polinomial

Projete um controlador de ordem reduzida para o sistema de terceira ordem no Exemplo 7.30. A equação característica desejada é

$$\alpha_c(s)\alpha_e(s) = s^5 + 12s^4 + 74s^3 + 207s^2 + 378s + 288.$$

Solução. As equações necessárias para resolver este problema são as mesmas que usamos para obter a Eq. (7.251), exceto que usamos $d(s)$ e $c_y(s)$ com o grau $n - 1$. Precisamos resolver

$$(d_0s^2 + d_1s + d_2)(s^3 + 10s^2 + 16s) + 10(c_0s^2 + c_1s + c_2) \equiv \alpha_c(s)\alpha_e(s). \quad (7.254)$$

Equacionando os coeficientes de mesmas potências em s na Eq. (7.254), obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 74 \\ 207 \\ 378 \\ 288 \end{bmatrix}. \quad (7.255)$$

A solução é (novamente usando o comando no MATLAB $x = a \setminus b$)

$$d_0 = 1, \quad c_0 = -20,8,$$

$$d_1 = 2,0, \quad c_1 = -23,6,$$

$$d_2 = 38, \quad c_2 = 28,8,$$

Função `ab\` do MATLAB

e o controlador resultante é

$$\frac{c_y(s)}{d(s)} = \frac{-20,8s^2 - 23,6s + 28,8}{s^2 + 2,0s + 38}. \quad (7.256)$$

Novamente, a Eq. (7.256) é exatamente a mesma de $D_{cr}(s)$ obtida utilizando as técnicas de variáveis de estado no Exemplo 7.31, uma vez que os polinômios de $D_{cr}(s)$ são multiplicados, e diferenças numéricas mínimas são consideradas.

Observe que o polinômio de entrada de referência $c_r(s)$ não entra na análise dos Exemplos 7.40 e 7.41. Podemos selecionar $c_r(s)$ para que ele atribua zeros na função de transferência de $R(s)$ para $Y(s)$. Este é o mesmo papel desempenhado pelo $\gamma(s)$ na Seção 7.9. Uma opção é selecionar $c_r(s)$ para cancelar $\alpha_e(s)$ para que a função de transferência global seja

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_s b(s)}{\alpha_c(s)}.$$

Isto corresponde à primeira e mais comum escolha de \mathbf{M} e \bar{N} para a introdução da entrada de referência descrita na Seção 7.9.

Também é possível introduzir controle integral e, ainda, rastreamento robusto baseado no modelo interno no método de projeto polinomial. É necessário é que tenhamos controle de erro e que o controlador tenha polos nas localizações do modelo interno. Para obter controle de erro com a estrutura da Fig. 7.75, precisamos fazer apenas $c_r = c_y$. Para obter os polos desejados no

Adição de controle integral à solução polinomial

controlador, precisamos exigir que um fator específico seja parte da $d(s)$. Para controle integral – o caso mais comum – isto é quase trivial. O polinômio $d(s)$ terá uma raiz em zero se definirmos o último termo, d_m , como nulo. As equações resultantes podem ser resolvidas se $m = n$. Para um modelo interno mais geral, definimos $d(s)$ como o produto de um polinômio de grau reduzido e um polinômio especificado como a Eq. (7.227) e comparamos os coeficientes na equação Diofantina como antes. O processo é simples, mas tedioso. Mais uma vez, alertamos que, enquanto o método de projeto polinomial pode ser eficaz, os problemas numéricos deste método são geralmente piores do que os associados a métodos baseados em equações de estado. Para sistemas de ordem superior, os métodos de espaço de estado são preferíveis.

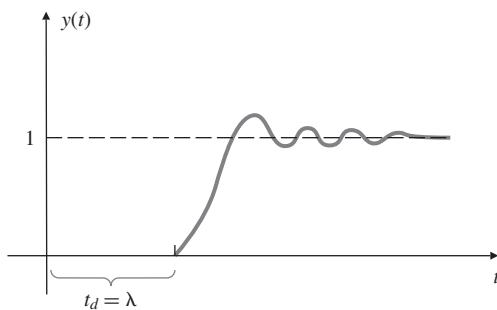
Δ 7.13 Projeto para sistemas com atraso puro de tempo

Em qualquer sistema linear composto por elementos aglomerados, a resposta do sistema aparece imediatamente após uma excitação no sistema. Em alguns sistemas realimentados – por exemplo, sistemas de controle de processos, seja controlado por um operador humano na malha ou por computador – há um **atraso puro de tempo** (também chamado de **atraso de transporte**) no sistema. Como resultado da natureza distribuída destes sistemas, a resposta permanece identicamente nula até um atraso de λ segundos. A resposta ao degrau típica é mostrada na Fig. 7.76(a). A função de transferência de um atraso de transporte puro é $e^{-\lambda s}$. Podemos representar uma função de transferência global de uma única entrada e uma única saída (SISO) com atraso de tempo como

$$G_I(s) = G(s)e^{-\lambda s}, \quad (7.257)$$

sendo que $G(s)$ não tem atraso puro de tempo. Como $G_I(s)$ não tem uma descrição de estado finita, o uso dos métodos padrões de variáveis de estado é impossível. No entanto, Smith (1958) mostrou como construir uma estrutura de realimentação que efetivamente tira o atraso da malha e permite um projeto realimentado com base apenas em $G(s)$, o que pode ser feito com métodos padrões. O resultado desse método de projeto é uma função de transferência em malha fechada com atraso λ , mas que apresenta a mesma resposta de um projeto de malha fechada sem se

Função de transferência global para um sistema com atraso de tempo



(a)

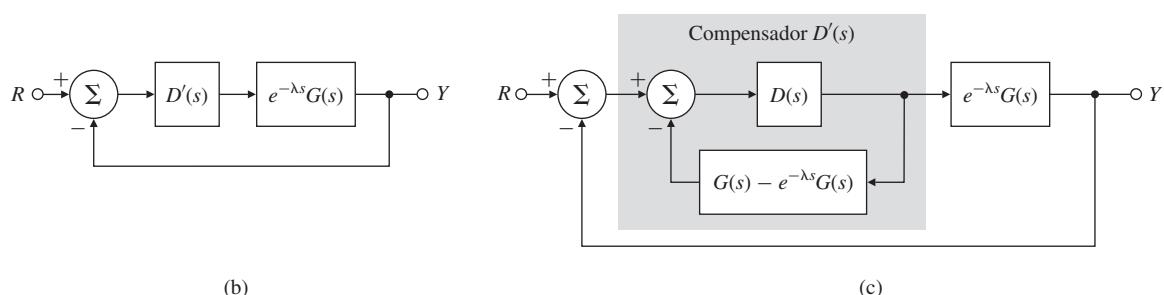


Figura 7.76 Um regulador de Smith para sistemas com atraso de tempo.

basear no atraso. Para ver como o método funciona, vamos considerar a estrutura de realimentação mostrada na Fig. 7.76(b). A função de transferência global é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathcal{T}(s) = \frac{D'(s)G(s)e^{-\lambda s}}{1 + D'(s)G(s)e^{-\lambda s}}. \quad (7.258)$$

Smith sugeriu o cálculo de $D'(s)$ criando uma função de transferência global fictícia na qual a função de transferência do controlador $D(s)$ está em uma malha com $G(s)$ *sem atraso*, mas com um atraso global de λ :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathcal{T}(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)}e^{-\lambda s}. \quad (7.259)$$

Então, equacionamos as Eqs. (7.258) e (7.259) para encontrarmos $D'(s)$:

$$D'(s) = \frac{D(s)}{1 + D(s)[G(s) - G(s)e^{-\lambda s}]} \quad (7.260)$$

O compensador de Smith

Se a função de transferência da planta e o atraso são conhecidos, $D'(s)$ pode ser implementado com componentes reais, como mostrado no diagrama de blocos da Fig. 7.76(c). Com esse conhecimento, podemos projetar o compensador $D(s)$ da forma comum, baseado na Eq. (7.259), como se não houvesse atraso, e implementá-lo como na Fig. 7.76(c). O sistema resultante em malha fechada deve apresentar o comportamento de um sistema finito em malha fechada, exceto pelo atraso de tempo λ . Essa abordagem de projeto é particularmente adequada quando o atraso puro, λ , é significativo quando comparado com a constante de tempo do processo, por exemplo, em aplicações com processo de papel e celulose.

Observe que, conceitualmente, o compensador de Smith está realimentando a saída simulada da planta para cancelar a saída verdadeira da planta e, assim, adicionando a saída simulada da planta sem atraso. Pode-se demonstrar que $D'(s)$ na Fig. 7.76(c) é equivalente a um regulador comum, alinhado com um compensador que fornece um significativo avanço de fase. Para implementar tais compensadores em sistemas analógicos, geralmente é necessário aproximar o atraso necessário em $D'(s)$ por uma aproximação de Padé; com compensadores digitais, o atraso pode ser implementado de forma exata (veja o Capítulo 8). Também é fato que o compensador $D'(s)$ é uma forte função de $G(s)$, e um pequeno erro no modelo da planta usado no controlador poderia levar a grandes erros em malha fechada, talvez até à instabilidade. Este projeto é muito sensível. Se $D(s)$ é implementado como um controlador PI, então se poderia dessintonizar (isto é, reduzir o ganho) para tentar garantir a estabilidade e um desempenho razoável. Para o ajuste automático do regulador de Smith e uma aplicação recente em um torno hidráulico de precisão de controle de temperatura de fluido, o leitor é remetido a Huang e DeBra (2000).

EXEMPLO 7.42 Trocador de calor: projeto com retardo puro de tempo

A Fig. 7.77 mostra o trocador de calor do Exemplo 2.15. A temperatura do produto é controlada por meio do controle da vazão de vapor no trocador. O sensor de temperatura está a vários metros da válvula de controle do vapor, que introduz um atraso de transporte no modelo. Um modelo adequado é dado por

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(10s + 1)(60s + 1)}.$$

Projete um controlador para o trocador de calor usando o compensador de Smith e alocação de polos. Os polos de controle devem estar em

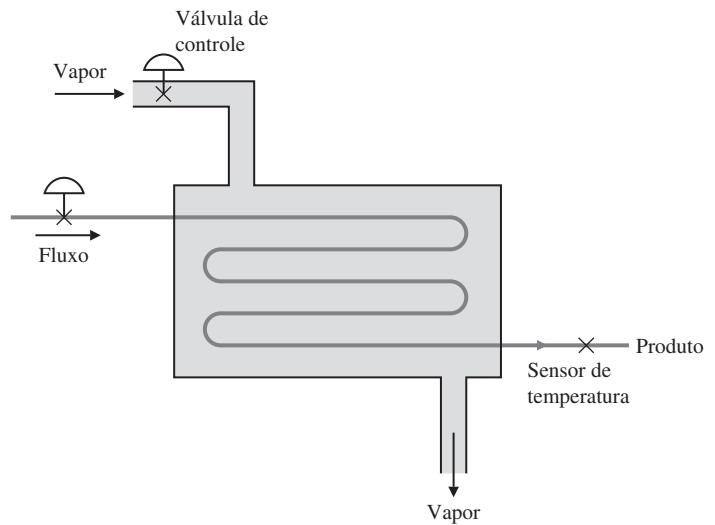
$$p_c = -0,05 \pm 0,087j,$$

e os polos do estimador estão em três vezes a frequência dos polos de controle natural:

$$p_e = -0,15 \pm 0,26j.$$

Simule a resposta do sistema com o SIMULINK.

Figura 7.77 Um trocador de calor.



Solução. Uma descrição adequada em espaço de estado é

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -0.017 & 0.017 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t-5),$$

$$y = [1 \ 0] \mathbf{x},$$

$$\lambda = 5.$$

Para as localizações dos polos de controle especificadas, e no momento ignorando o atraso de tempo, encontramos o ganho de realimentação de estados

$$\mathbf{K} = [5.2 \ -0.17].$$

Considerando os polos dados para o estimador, a matriz de ganho do estimador para um estimador de ordem completa é

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 4.2 \end{bmatrix}.$$

A função de transferência do controlador resultante é

$$D(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{-0,25(s+1,8)}{s+0,14 \pm 0,27j}.$$

Se escolhermos ajustar para a unidade o ganho DC de malha fechada, então

$$\bar{N} = 1,2055.$$

O diagrama no SIMULINK para o sistema é mostrado na Fig. 7.78. As respostas ao degrau de malha aberta e malha fechada do sistema e o esforço de controle são mostrados nas Figs. 7.79 e 7.80, e o lugar das raízes do sistema (sem retardo) é mostrado na Fig. 7.81. Note que o atraso no tempo de 5 segundos nas Figs. 7.79 e 7.80 é muito pequeno comparado com a resposta do sistema, e é pouco perceptível neste caso.

7.14 Perspectiva histórica

A abordagem de variáveis de estado para a resolução de equações diferenciais em problemas de engenharia foi defendida por R. E. Kalman enquanto ele estava no MIT. Isso era revolucionário e causou alguma agitação, pois estava indo contra a corrente. Os acadêmicos bem esta-

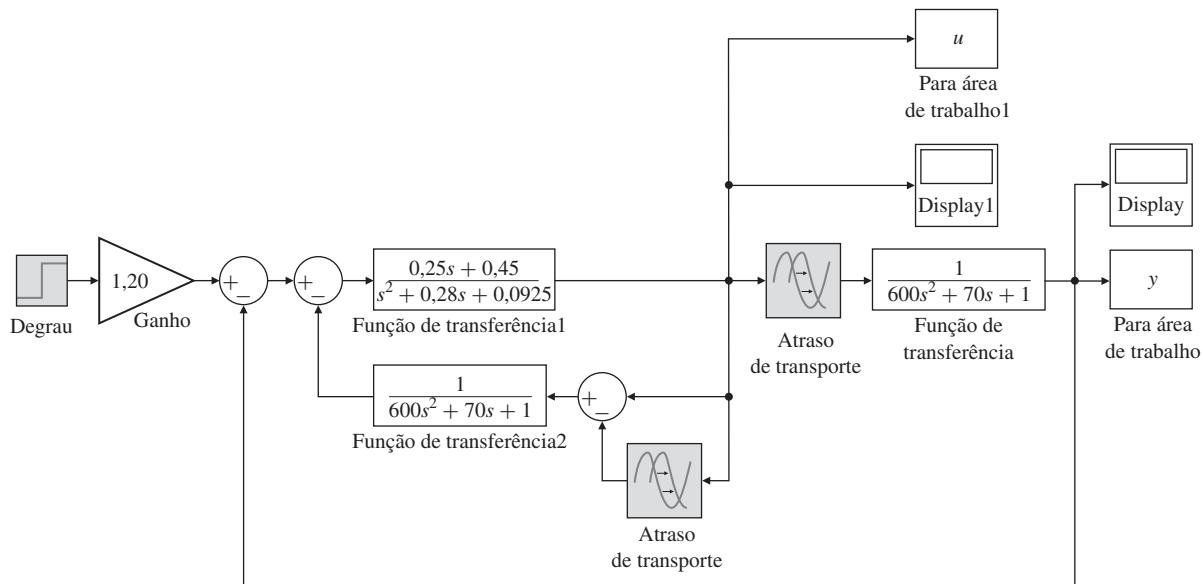


Figura 7.78 Diagrama em malha fechada no SIMULINK para o trocador de calor.

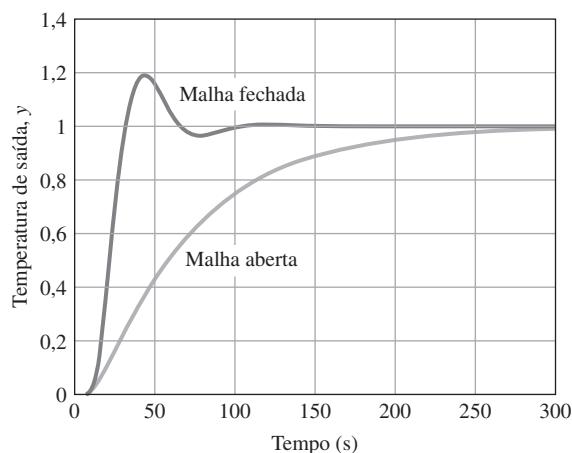


Figura 7.79 Resposta ao degrau para o trocador de calor.

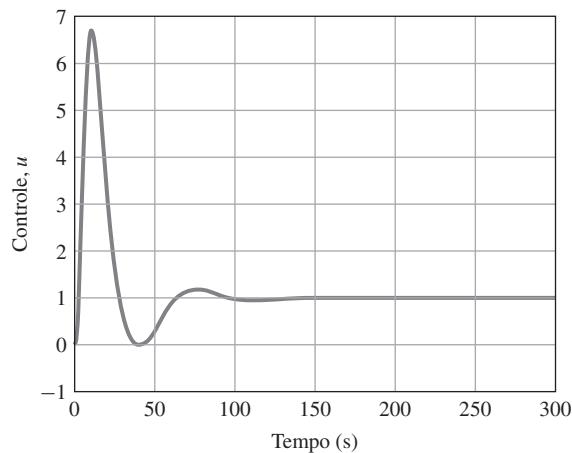
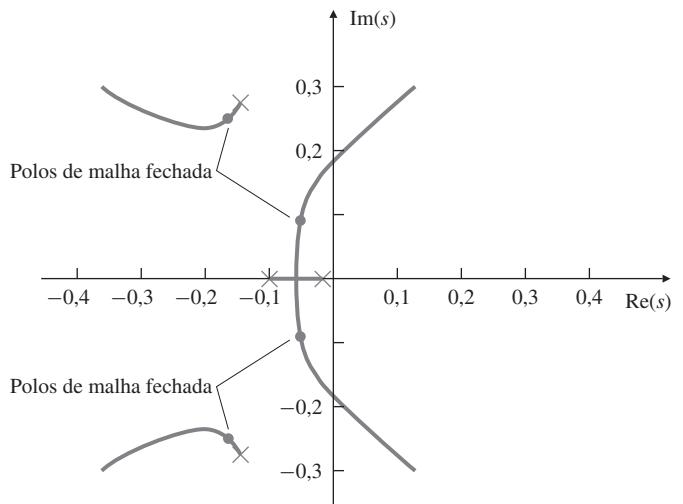


Figura 7.80 Esforço de controle para o trocador de calor.

Figura 7.81 Lugar das raízes para o trocador de calor.



belecidos, professores de Kalman, estavam bem familiarizados com as técnicas no domínio da frequência e eram seus firmes defensores. Iniciando no final dos anos 1950 e no início dos anos 1960, Kalman escreveu uma série de artigos seminais introduzindo as ideias de variáveis de estado, de controlabilidade, de observabilidade, do Linear Quadrático (LQ) e do filtro de Kalman (FK). Gunkel e Franklin (1963) e Joseph e Tou (1961), de forma independente, apresentaram o teorema da separação, que tornou possível o problema do Linear Quadrático Gaussiano (LQG), hoje conhecido como a formulação H_2 . O teorema da separação é um caso especial do teorema da equivalência de Simon (1956). As soluções para ambos os problemas, LQ e LQG, podem ser expressas de forma elegante em termos de soluções para as equações de Riccati. D. G. Luenberger, que estava fazendo um curso com Kalman na Universidade de Stanford, desenvolveu o observador de ordem reduzida ao longo de um fim de semana, depois de ouvir Kalman sugerir este problema em uma palestra. Kalman, Bryson, Athans e outros contribuíram para o campo da teoria de controle ótimo que foi amplamente empregada em problemas aeroespaciais, incluindo o programa Apollo. O livro de Zadeh e Desoer publicado em 1962 também foi influente na promoção do método de espaço de estados. Na década de 1970, a robustez dos métodos LQ e LQG foi estudada, resultando no celebrado e influente artigo de Doyle e Stein, em 1981. Uma das contribuições mais significativas de Doyle e Safonov foi estender a ideia do ganho no domínio da frequência para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas usando decomposição em valores singulares (DVS). Outro que contribuiu para essa pesquisa foi G. Zames, que introduziu os métodos H_∞ , extensões dos métodos H_2 . As técnicas de projeto resultantes são conhecidas como procedimentos H_∞ e síntese- μ . Durante a década de 1980, métodos numéricos confiáveis foram desenvolvidos para lidar com projetos de variáveis de estado e programas de auxílio computacional para o projeto de controle foram desenvolvidos. A invenção do MATLAB por Cleve Moler e sua ampla distribuição pela The Mathworks teve um enorme impacto não só no campo de projeto de controle, mas em toda computação científica.

Enquanto os métodos de variáveis de estado estavam ganhando força principalmente nos Estados Unidos, grupos de pesquisa na Europa, especialmente na Inglaterra, liderados por Rosenbrock, MacFarlane, Munro e outros estenderam a técnicas clássicas para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Assim, os métodos do lugar das raízes e do domínio da frequência, como as técnicas de Nyquist (inverso), poderiam ser usados para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Eventualmente, na década de 1980, houve uma percepção de que o poder de ambos os métodos, domínio da frequência e espaço de estados, devia ser combinado para um método de projeto de controle eclético, empregando o melhor de ambas as abordagens.

Vimos neste capítulo que, em contraste com os métodos de resposta em frequência de Bode e Nyquist, o método de variáveis de estado não lida apenas com as variáveis de entrada e saída do sistema, mas também com as variáveis físicas internas a ele. Os métodos de variáveis

de estado podem ser usados para estudar sistemas lineares e não lineares, bem como sistemas variantes no tempo. Além disso, o método de variáveis de estado manipula problemas com sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas e de alta ordem com a mesma facilidade. De uma perspectiva computacional, os métodos de variáveis de estado são muito superiores às técnicas de domínio da frequência que exigem manipulações polinomiais.

RESUMO

- Para qualquer função de transferência que não tenha mais zeros que polos, corresponde uma equação diferencial na forma de espaço de estados.
- A descrição em espaço de estados pode estar em várias formas. Entre elas temos: **controlável, observável e canônica modal**.
- Os polos e zeros de malha aberta podem ser calculados a partir das matrizes da descrição de estados (\mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} , J):

$$\text{Polos: } p = \text{eig}(\mathbf{F}), \quad \det(p\mathbf{I} - \mathbf{F}) = 0,$$

$$\text{Zeros: } \det \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix} = 0.$$

- Para qualquer sistema controlável de ordem n existe uma lei de realimentação de estados que irá alocar os polos de malha fechada nas raízes de uma **equação característica do controle** arbitrária de ordem n .
- A entrada de referência pode ser introduzida de forma a resultar em erro de estado estacionário nulo para uma entrada em degrau. Não se espera que essa propriedade seja robusta às mudanças nos parâmetros.
- A boa localização dos polos de malha fechada depende da resposta transitória desejada, da robustez às mudanças nos parâmetros e da relação entre desempenho dinâmico e esforço de controle.
- As localizações dos polos de malha fechada podem ser selecionadas para resultar em uma resposta de segunda ordem dominante, para coincidir com uma resposta dinâmica pré-definida ou para minimizar uma medida de desempenho quadrática.
- Para qualquer sistema observável de ordem n , um estimador (ou observador) pode ser construído apenas com as entradas dos sensores e com um estado que estima o estado da planta. Os n polos do sistema de erro do estimador podem ser alocados de forma arbitrária.
- Cada função de transferência pode ser representada por uma realização mínima, ou seja, um modelo no espaço de estado que é ao mesmo tempo controlável e observável.
- Um sistema com uma única entrada e uma única saída é completamente controlável se, e somente se, a entrada excita todas as frequências naturais do sistema, ou seja, não há cancelamento de polos na função de transferência.
- A lei de controle e o estimador podem ser combinados em um controlador de tal forma que os polos do sistema em malha fechada sejam apenas os polos da lei de controle e do estimador.
- Com o controlador baseado no estimador, a **entrada de referência** pode ser introduzida de forma a permitir a atribuição de n zeros arbitrários. A escolha mais comum é atribuir os zeros para cancelar os polos do estimador, assim não excitando um erro de estimativa.
- O **controle integral** pode ser introduzido para obter rastreamento de estado estacionário robusto de um degrau pelo estado aumentado da planta. O projeto também é robusto em relação à rejeição de distúrbios constantes.
- **Controle robusto** geral pode ser realizado através da combinação das equações da planta e do modelo de referência em um **espaço de erro** e projetando uma lei de controle para o sistema estendido. A implementação do projeto robusto demonstra o princípio do **modelo interno**. Um estimador dos estados da planta pode ser adicionado, mantendo as propriedades de robustez.

- O estimador pode ser estendido para incluir estimativas do controle equivalente de perturbação e, assim, resultar em rastreamento robusto e rejeição de distúrbios.
- Projetos por alocação polos, incluindo o controle integral, podem ser calculados usando os polinômios da função de transferência da planta no lugar das descrições do estado. Projetos usando polinômios frequentemente têm problemas com a precisão numérica.
- Controladores para as plantas que incluem atraso puro de tempo podem ser projetados como se não houvesse atraso, e, em seguida, um controlador pode ser implementado para a planta com atraso. O projeto pode vir a ser sensível a mudanças paramétricas.
- A Tabela 7.3 apresenta as equações importantes discutidas neste capítulo. Os triângulos indicam equações retiradas das seções opcionais no texto.
- A determinação de um modelo a partir de dados experimentais, ou a verificação de um modelo analítico baseado em experimentos, é um passo importante no projeto do sistema pela análise no espaço de estados, um passo que não é necessário para o projeto do compensador por meio dos métodos de resposta em frequência.

QUESTÕES DE REVISÃO

As questões a seguir são baseadas em um sistema em variáveis de estado com as matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{J} , entrada u , saída y e estado \mathbf{x} .

1. Por que é conveniente escrever as equações de movimento na forma de variáveis de estado?
2. Dê uma expressão para a função de transferência deste sistema.
3. Dê duas expressões para os polos da função de transferência do sistema.
4. Dê uma expressão para os zeros da função de transferência do sistema.
5. Em que condições o estado do sistema será controlável?
6. Em que condições o sistema será observável a partir da saída y ?
7. Dê uma expressão para os polos de *malha fechada* se a realimentação de estados da forma $u = -\mathbf{Kx}$ é usada.
8. Em que condições a matriz de realimentação \mathbf{K} pode ser selecionada para que as raízes de $\alpha_c(s)$ sejam arbitrárias?
9. Qual é a vantagem de usar o LQR ou o LRS no projeto da matriz de realimentação \mathbf{K} ?
10. Qual é a principal razão para usar um estimador no controle realimentado?
11. Se o ganho \mathbf{L} do estimador é usado, dê uma expressão para os polos de malha fechada devido ao estimador.
12. Em que condições o ganho \mathbf{L} do estimador pode ser selecionado de modo que as raízes de $\alpha_e(s) = 0$ sejam arbitrárias?
13. Se a entrada de referência é organizada de modo que a entrada do estimador seja idêntica à entrada do processo, qual será a função de transferência em malha fechada global?
14. Se a entrada de referência é apresentada de tal forma a permitir que os zeros sejam atribuídos como as raízes de $\gamma(s)$, qual será a função de transferência em malha fechada global?
15. Quais são as três técnicas padrões para a introdução do controle integral no método de projeto por realimentação de estados?

PROBLEMAS

Problemas da Seção 7.3: diagramas de blocos e espaço de estados

- 7.1** Escreva as equações dinâmicas que descrevem o circuito na Fig. 7.82. Escreva as equações como uma equação diferencial de segunda ordem em $y(t)$. Assumindo uma entrada nula, resolva a equação diferencial para $y(t)$ usando os métodos de transformada de Laplace para os valores dos parâmetros e das condições iniciais mostrados na figura. Verifique suas respostas usando o comando `initial` no MATLAB.
- 7.2** Um esquema para o satélite e para a sonda científica do experimento Gravity Probe-B (GP-B) que foi lançado no dia 30 de abril de 2004 é esboçado na Fig. 7.83. Suponha que a massa da nave es-

TABELA 7.3 Equações importantes no Capítulo 7

Nome	Equação	Página
Forma canônica controlável	$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$ $\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_c = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad b_n], \quad D_c = 0.$	368
Descrição em estados	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$	370
Equação da saída	$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju$	370
Transformação do estado	$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{FT}$ $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$ $y = \mathbf{HTz} + Ju = \mathbf{Cz} + Du,$ <p>onde $\mathbf{C} = \mathbf{HT}$, $D = J$</p>	370
Matriz de controlabilidade	$\mathcal{C} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{FG} \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G}]$	371
Função de transferência das equações de estado	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + J$	378
Polos da função de transferência	$\det(p_i\mathbf{I} - \mathbf{F}) = 0$	379
Zeros da função de transferência	$\det \begin{bmatrix} z_j\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix} = 0$	380
Equação característica do controle	$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{GK})] = 0$	384
Fórmula de Ackermann de controle para alocação de polos	$\mathbf{K} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$	388
Ganhos da entrada de referência	$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N_x} \\ \mathbf{N_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$	391
Equação de controle com entrada de referência	$u = N_ur - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{N_x}r)$ $= -\mathbf{Kx} + (N_u + \mathbf{KN_x})r$ $= -\mathbf{Kx} + \tilde{N}r$	391
Lugar das raízes simétrico	$1 + \rho G_0(-s)G_0(s) = 0$	396
Equação característica do erro de estimativa	$\alpha_e(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{LH})] = 0$	405
Forma canônica observável	$\dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{F}_o\mathbf{x}_o + \mathbf{G}_o u,$ <p>onde</p> $\mathbf{F}_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & 1 \\ -a_n & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix},$ $\mathbf{G}_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_o = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0],$	407
Matriz de observabilidade	$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n-1} \end{bmatrix},$	408

(continua)

TABELA 7.3 Equações importantes no Capítulo 7 (Continuação)

Nome	Equação	Página
Fórmula de Ackermann para o estimador	$L = \alpha_e(F)O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$	409
Função de transferência do compensador	$D_c(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - F + GK + LH)^{-1}L$	416
Função de transferência do compensador de ordem reduzida	$D_{cr}(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r$	416
Equações do controlador	$\dot{\hat{x}} = (F - GK - LH)\hat{x} + Ly + Mr$ $u = -K\hat{x} + \bar{N}r$	427
Equações de estado aumentadas com o controle integral	$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ G_1 \end{bmatrix} w$	437
△ Controlador geral na forma polinomial	$U(s) = -\frac{c_y(s)}{d(s)} Y(s) + \frac{c_r(s)}{d(s)} R(s)$	455
△ Equação Diofantina da equação característica em malha fechada	$a(s)d(s) + b(s)c_y(s) = \alpha_c(s)\alpha_e(s)$	455

pacial mais do tanque de hélio, m_1 , é de 2.000 kg e a massa da sonda, m_2 , é de 1.000 kg. Um rotor flutua dentro da sonda e será forçado a seguir a sonda com um mecanismo capacitivo forçante. A constante da mola de acoplamento k é de $3,2 \times 10^6$. O amortecimento viscoso b é de $4,6 \times 10^3$.

- (a) Escreva as equações de movimento do sistema que consiste das massas m_1 e m_2 utilizando as variáveis de posição inercial, y_1 e y_2 .
- (b) A perturbação u real é um micrometeorito, e o movimento resultante é muito pequeno. Portanto, reescreva as equações com as variáveis escalares $z_1 = 10^6y_1$, $z_2 = 10^6y_2$, e $v = 1000u$.
- (c) Coloque as equações na forma de variáveis de estado usando o estado $x = [z_1 \ z_1 \ z_2 \ z_2]^T$, a saída $y = z_2$ e a entrada de impulso, $u = 10^{-3}\delta(t)$ N·s na massa m_1 .
- (d) Usando valores numéricos, entre com as equações de movimento no MATLAB na forma

$$\dot{x} = Fx + Gv, \quad (7.261)$$

$$y = Hx + Jv. \quad (7.262)$$

e defina o sistema no MATLAB: $sysGPB = ss(F,G,H,J)$. Trace a resposta em y causada por um impulso, com o comando no MATLAB $impulse(sysGPB)$. Este é o sinal que o rotor deve seguir.

- (e) Use os comandos no MATLAB $p = eig(F)$ para encontrar os polos (raízes) do sistema e $z = tzero(F,G,H,J)$ para encontrar os zeros do sistema.

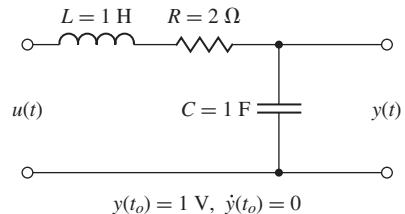


Figura 7.82 Circuito para o Problema 7.1.

Problemas da Seção 7.4: análise das equações de estado

- 7.3 Escreva as matrizes da descrição de estados na forma canônica controlável para as seguintes funções de transferência:

(a) $\frac{1}{4s + 1}$

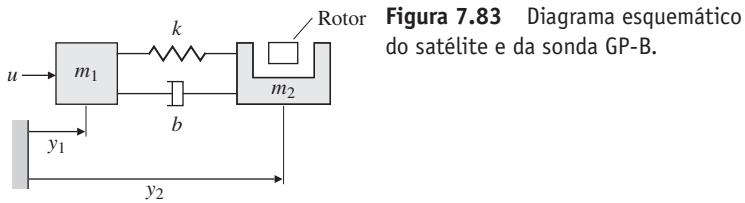


Figura 7.83 Diagrama esquemático do satélite e da sonda GP-B.

- (b) $\frac{5(s/2 + 1)}{(s/10 + 1)}$
- (c) $\frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2}$
- (d) $\frac{s + 3}{s(s^2 + 2s + 2)}$
- (e) $\frac{(s + 10)(s^2 + s + 25)}{s^2(s + 3)(s^2 + s + 36)}$

7.4 Use a função no MATLAB tf2ss para obter as matrizes de estado no Problema 7.3.

7.5 Escreva as matrizes da descrição de estados na forma normal para as funções de transferência do Problema 7.3. Certifique-se de que todas as entradas nas matrizes de estado sejam valores reais, mantendo os pares de polos complexos conjugados juntos, e faça com que elas sejam um sub-bloco separado na forma canônica controlável.

7.6 Um certo sistema com estado \mathbf{x} é descrito pelas matrizes de estado

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{J} = 0.$$

Encontre a transformação \mathbf{T} de modo que se $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$, as matrizes de estado descrevendo as dinâmicas de \mathbf{z} estejam na forma canônica controlável. Calcule as novas matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} .

7.7 Mostre que a função de transferência não é alterada por uma transformação linear de estado.

7.8 Use a redução em diagrama de blocos ou regra de Mason para encontrar a função de transferência do sistema na forma canônica observável representada pela Fig. 7.31.

7.9 Suponha que é dado um sistema com as matrizes de estado \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} ($J = 0$ neste caso). Encontre a transformação \mathbf{T} para que, sob as Eqs. (7.24) e (7.25), as novas matrizes de descrição de estados esteja na forma canônica observável.

7.10 Use a matriz de transformação na Eq. (7.41) para explicitamente multiplicar as equações no final do Exemplo 7.10.

7.11 Encontre a transformação de estado que assume a forma canônica observável da Eq. (7.35) para a forma canônica modal.

7.12 (a) Encontre a transformação \mathbf{T} que irá manter a descrição do sistema da unidade de fita do Exemplo 7.11 na forma canônica modal, mas irá converter cada elemento da matriz de entrada \mathbf{B}_m à unidade.

(b) Use o MATLAB para verificar se a sua transformação realiza a tarefa.

7.13 (a) Encontre a transformação de estado que irá manter a descrição do sistema da unidade de fita do Exemplo 7.11 na forma canônica modal, mas fará com que os polos de \mathbf{A}_m sejam exibidos em ordem crescente da magnitude.

(b) Use o MATLAB para verificar o seu resultado no item (a) e dê o conjunto completo das matrizes no novo estado como \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} .

7.14 Encontre a equação característica da matriz na forma modal \mathbf{A}_m da Eq. (7.17a), usando a Eq. (7.58).

7.15 Dado o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com condições iniciais nulas, encontre o valor de \mathbf{x} em estado estacionário para uma entrada em degrau u .

7.16 Considere o sistema mostrado na Fig. 7.84:

- (a) Encontre a função de transferência de U para Y .
- (b) Escreva as equações de estado para o sistema usando as variáveis de estado indicadas.

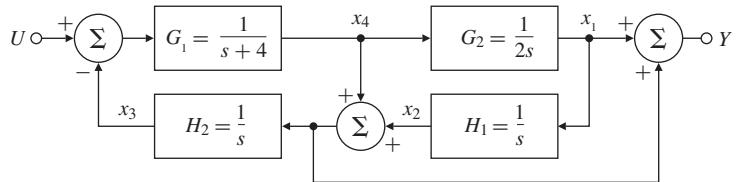
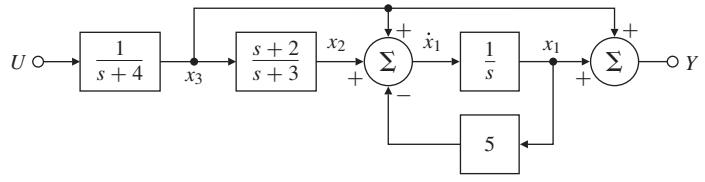
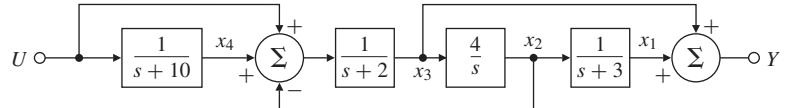


Figura 7.84 Diagrama de blocos para o Problema 7.16.

7.17 Usando as variáveis de estado indicadas, escreva as equações de estado para cada um dos sistemas mostrados na Fig. 7.85. Encontre a função de transferência para cada sistema usando a manipulação nos diagrama de blocos e a álgebra matricial [como na Eq. (7.48)].



(a)



(b)

Figura 7.85 Diagrama de blocos para o Problema 7.17.

7.18 Para cada uma das funções de transferência listadas, escreva as equações de estado nas formas canônicas controlável observável. Em cada caso, desenhe um diagrama de blocos e dê as expressões apropriadas para \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} .

- (a) $\frac{s^2 - 2}{s^2(s^2 - 1)}$ (controle de um pêndulo invertido pela força no carro).
- (b) $\frac{3s + 4}{s^2 + 2s + 2}$.

7.19 Considere a função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+5s+6}. \quad (7.263)$$

- (a) Rescrevendo a Eq. (7.236) na forma

$$G(s) = \frac{1}{s+3} \left(\frac{s+1}{s+2} \right),$$

encontre a **realização em série** de $G(s)$ como uma cascata de dois sistemas de primeira ordem.

- (b) Usando a expansão em frações parciais de $G(s)$, encontre a **realização em paralelo** de $G(s)$.
- (c) Faça $G(s)$ na forma canônica controlável.

Problemas da Seção 7.5: projeto da lei de controle por realimentação completa dos estados

7.20 Considere a planta descrita por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \ 3] \mathbf{x}.$$

- (a) Desenhe um diagrama de blocos para a planta com um integrador para cada variável de estados.
- (b) Encontre a função de transferência usando álgebra matricial.
- (c) Encontre a equação característica de malha fechada se a realimentação for
 - (i) $u = -[K_1 \ K_2] \mathbf{x}$;
 - (ii) $u = -Ky$.

7.21 Para o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

projete um controlador por realimentação de estados que satisfaça às seguintes especificações:

- (a) Polos de malha fechada com coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,707$.
- (b) Tempo de pico da resposta ao degrau menor que 3,14 s.

Verifique seu projeto usando o MATLAB.

7.22 (a) Projete um controlador por realimentação de estados para que o sistema a seguir apresente a resposta ao degrau em malha fechada com um sobressinal menor que 25% e um tempo de acomodação (1%) menor que 0,115 s:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

- (b) Use o comando step no MATLAB para verificar se o projeto atende às especificações. Se isso não acontecer, modifique os ganhos de realimentação em conformidade.

7.23 Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

- (a) Projete um controlador por realimentação de estados para que o sistema a seguir apresente a resposta ao degrau em malha fechada com um sobressinal menor que 5% e um tempo de acomodação (1%) menor que 4,6 s.
- (b) Use o comando step no MATLAB para verificar se o projeto atende às especificações. Se isso não acontecer, modifique os ganhos de realimentação em conformidade.

7.24 Considere o sistema na Fig. 7.86.

- (a) Escreva um conjunto de equações que descreva este sistema na forma canônica controlável padrão como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$ e $y = \mathbf{Hx}$.
- (b) Projete uma lei de controle na forma

$$u = -[K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

para alocar os polos de malha fechada em $s = -2 \pm 2j$.

7.25 Controlabilidade da saída. Em muitas situações, um engenheiro de controle pode estar interessado em controlar a saída y ao invés do estado \mathbf{x} . Um sistema é dito de **saída controlável** se a qual-

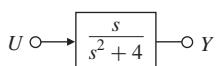


Figura 7.86 Sistema para o Problema 7.24.

quer momento for possível transferir a saída de zero para qualquer saída desejada y^* em um tempo finito usando um sinal de controle apropriado u^* . Obtenha as condições necessárias e suficientes para um sistema contínuo (\mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H}) ter a saída controlável. As controlabilidades da saída e do estado estão relacionadas? Se sim, como?

7.26 Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

(a) Encontre os autovalores do sistema. (Dica: Note a estrutura bloco-triangular.)

(b) Encontre os modos controláveis e não controláveis deste sistema.

(c) Para cada modo não controlável, encontre um vetor \mathbf{v} tal que

$$\mathbf{v}^T \mathbf{G} = 0, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{F} = \lambda \mathbf{v}^T.$$

(d) Mostre que há um número infinito de ganhos de realimentação \mathbf{K} que vai reallocar os modos do sistema em $-5, -3, -2$ e -2 .

(e) Encontre a única matriz \mathbf{K} que resulta nestas localizações dos polos e impede que as condições iniciais na parte não controlável do sistema afetem a parte controlável.

7.27 Dois pêndulos, acoplados por uma mola, serão controlados por duas forças iguais e opostas u , que são aplicadas nos pesos dos pêndulos como mostrado na Fig. 7.87. As equações de movimento são

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgl\theta_1 - lu,$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 + lu.$$

(a) Mostre que o sistema não é controlável. É possível associar um significado físico aos modos controláveis e não controláveis?

(b) Existe alguma maneira de tornar o sistema controlável?

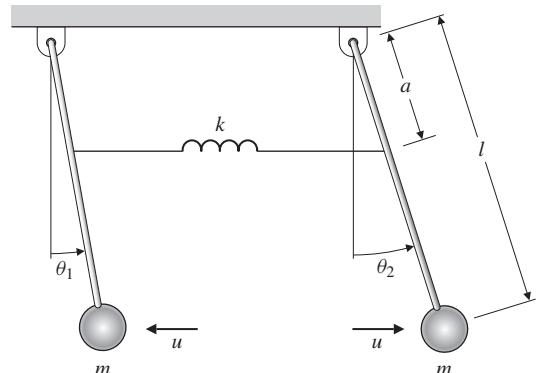


Figura 7.87 Pêndulos acoplados para o Problema 7.27.

7.28 O modelo em espaço de estados para uma determinada aplicação é dado com as seguintes matrizes:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0,174 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,157 & 0,645 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -0,207 \\ -0,005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

(a) Desenhe um diagrama de blocos da realização com um integrador para cada variável de estado.

(b) Um estudante calculou $\det \mathcal{C} = 2,3 \times 10^{-7}$ e afirma que o sistema é não controlável. O estudante está certo ou errado? Por quê?

(c) A realização é observável?

- 7.29 Algoritmo Staircase (Van Dooren et al, 1978).** Qualquer realização $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ pode ser transformada por uma **transformação de similaridade ortogonal** para $(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{H}})$, sendo $\tilde{\mathbf{F}}$ uma **matriz superior de Hessenberg** (tem uma diagonal diferente de zero acima da diagonal principal) dada por

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^T \mathbf{F} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} * & \alpha_1 & \mathbf{0} & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & \ddots & \alpha_{n-1} \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^T \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1 \end{bmatrix},$$

sendo $g_1 \neq 0$, e

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \mathbf{T} = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n], \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T.$$

Transformações ortogonais correspondem a uma **rotação** nos vetores (representados pelas matrizes coluna) sendo transformados, sem qualquer alteração em sua magnitude.

- (a) Demonstre que se $\alpha_i = 0$ e $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1} \neq 0$ para algum i , então os modos controláveis e não controláveis do sistema podem ser identificados após esta transformação ter sido feita.
- (b) Como você usaria essa técnica para identificar os modos observáveis e não observáveis de $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$?
- (c) Qual vantagem esta abordagem para determinar os modos controláveis e não controláveis tem sobre transformar o sistema em outra forma qualquer?
- (d) Como podemos usar essa abordagem para determinar uma base para os subespaços controláveis e não controláveis, como no Problema 7.43?

Este algoritmo também pode ser usado para projetar um algoritmo numericamente estável para alocação de polos [veja Minimis e Paige (1982)]. O nome do algoritmo vem da versão de múltiplas entradas na qual α_i são os blocos que fazem $\tilde{\mathbf{F}}$ se assemelhar a uma escada. Consulte os comandos `ctrbf` e `obsvf` no MATLAB.

Problemas da Seção 7.6: seleção das localizações dos polos para um bom projeto

- 7.30** As equações normalizadas do movimento de um pêndulo invertido com ângulo θ em um carro são

$$\ddot{\theta} = \theta + u, \quad \ddot{x} = -\beta\theta - u,$$

sendo x a posição do carro, e a entrada de controle u sendo uma força atuando no carro.

- (a) Com o estado definido como $\mathbf{x} = [\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T$, encontre o ganho de realimentação \mathbf{K} que aloca os polos de malha fechada em $s = -1, -1, -1 \pm 1j$. Para os itens (b) ao (d), assuma $\beta = 0,5$.
- (b) Use o LRS para selecionar os polos com largura de banda o mais próximo possível daquela no item (a), e encontre a lei de controle que irá alocar os polos de malha fechada nos pontos que você selecionou.
- (c) Compare as respostas dos sistemas em malha fechada nos itens (a) e (b) com uma condição inicial de $\theta = 10^\circ$. Você pode usar o comando `initial` no MATLAB.
- (d) Calcule N_x e N_u para obter erro em estado estacionário nulo para uma entrada de comando constante sobre a posição carrinho e compare as respostas ao degrau de cada um dos dois sistemas em malha fechada.

- 7.31** Considere o sistema realimentado na Fig. 7.88. Encontre a relação entre K , T e ξ tal que a função de transferência em malha fechada minimize a integral do tempo multiplicada pelo valor absoluto do erro (ITAE),

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} t|e| dt,$$

para uma entrada em degrau.

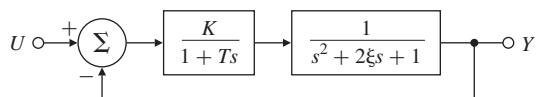
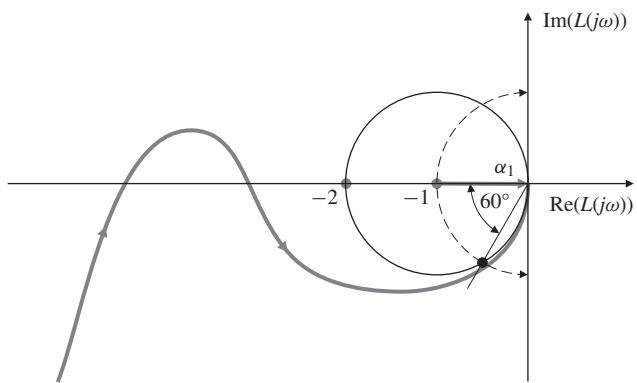


Figura 7.88 Sistema de controle para o Problema 7.31.

Figura 7.89 Diagrama de Nyquist para um regulador ótimo.



- 7.32** Demonstre que o diagrama de Nyquist para o projeto LQR evita um círculo de raio unitário com centro no ponto -1 , como mostrado na Fig. 7.89. Mostre que isto implica que $1/2 < GM < \infty$, a margem de ganho “superior” é $GM = \infty$, e a “inferior” é $GM = 1/2$, e margem de fase é pelo menos $PM = \pm 60^\circ$. Então, a matriz de ganho LQR, \mathbf{K} , pode ser multiplicada por um escalar grande ou reduzida pela metade com a estabilidade do sistema em malha fechada garantida.

Problemas da Seção 7.7: projeto de estimador

- 7.33** Considere o sistema

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = [1 \quad 2],$$

e assuma que você esteja usando a realimentação da forma $u = -\mathbf{Kx} + r$, com r sendo um sinal de referência.

- (a) Mostre que (\mathbf{F}, \mathbf{H}) é observável.
- (b) Mostre que existe um \mathbf{K} tal que $(\mathbf{F} - \mathbf{GK}, \mathbf{H})$ é inobservável.
- (c) Calcule um \mathbf{K} da forma $\mathbf{K} = [1, K_2]$ que torne o sistema não observável como no item (b); ou seja, encontre K_2 para que o sistema em malha fechada não seja observável.
- (d) Compare a função de transferência em malha aberta com a função de transferência do sistema em malha fechada do item (c). A não observabilidade se deve a quê?

- 7.34** Considere um sistema com função de transferência

$$G(s) = \frac{9}{s^2 - 9}.$$

- (a) Encontre $(\mathbf{F}_0, \mathbf{G}_0, \mathbf{H}_0)$ para este sistema na forma canônica observável.
- (b) $(\mathbf{F}_0, \mathbf{G}_0)$ é controlável?
- (c) Calcule \mathbf{K} para que os polos de malha fechada sejam atribuídos em $s = -3 \pm 3j$.
- (d) O sistema em malha fechada no item (c) é observável?
- (e) Projete um estimador de ordem completa com polos do erro do estimador em $s = -12 \pm 12j$.
- (f) Suponha que o sistema modificado tenha um zero:

$$G_1(s) = \frac{9(s+1)}{s^2 - 9}.$$

Demonstre que se $u = -\mathbf{Kx} + r$, existe um ganho de realimentação \mathbf{K} que torna o sistema em malha fechada não observável. [Mais uma vez, assuma uma realização canônica observável para $G_1(s)$.]

- 7.35** Explique como as propriedades de controlabilidade, observabilidade e estabilidade de um sistema linear estão relacionadas.

- 7.36** Considere o circuito elétrico mostrado na Fig. 7.90.

- (a) Escreva as equações (estado) internas para o circuito. A entrada $u(t)$ é a corrente e a saída y é a tensão. Faça $x_1 = i_L$ e $x_2 = v_c$.

- (b) Em que(ais) condição(ões) R , L e C garantem que o sistema seja controlável?
 (c) Em que(ais) condição(ões) R , L e C garantem que o sistema seja observável?

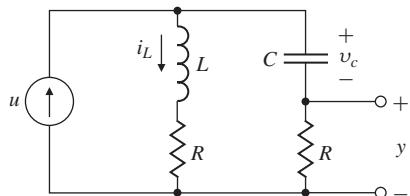


Figura 7.90 Circuito elétrico para o Problema 7.36.

7.37 O diagrama de blocos para o sistema realimentado é mostrado na Fig. 7.91. O estado do sistema é

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_f \end{bmatrix},$$

e as dimensões das matrizes são as seguintes:

$$\mathbf{F} = n \times n, \quad \mathbf{L} = n \times 1,$$

$$\mathbf{G} = n \times 1, \quad \mathbf{x} = 2n \times 1,$$

$$\mathbf{H} = 1 \times n, \quad r = 1 \times 1,$$

$$\mathbf{K} = 1 \times n, \quad y = 1 \times 1.$$

(a) Escreva as equações de estado para o sistema.

(b) Faça $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$, sendo

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Mostre que o sistema não é controlável.

(c) Encontre a função de transferência do sistema de r para y .

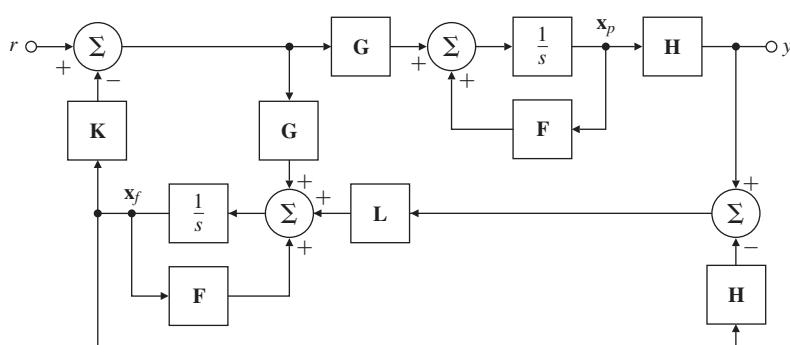
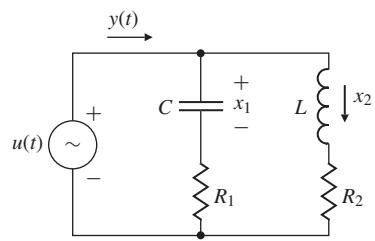


Figura 7.91 Diagrama de blocos para o Problema 7.37.

7.38 Este problema foi elaborado para lhe fornecer mais detalhes sobre controlabilidade e observabilidade. Considere o circuito da Fig. 7.92, com uma entrada de tensão $u(t)$ e uma saída $y(t)$.

- (a) Usando a tensão no capacitor e corrente no indutor como as variáveis de estado, escreva o estado e a saída para o sistema.
 (b) Encontre as condições relativas R_1 , R_2 , C e L que tornam o sistema não controlável. Encontre um conjunto de condições que resultam em um sistema não observável.
 (c) Interprete fisicamente as condições encontradas no item (b) em termos das constantes de tempo do sistema.
 (d) Encontre a função de transferência do sistema. Mostre que há um cancelamento de polo e zero nas condições obtidas no item (b) (isto é, quando o sistema é não controlável ou não observável).

Figura 7.92 Circuito elétrico para o Problema 7.38.



7.39 As equações linearizadas de movimento para um satélite são

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{Gu},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x},$$

sendo

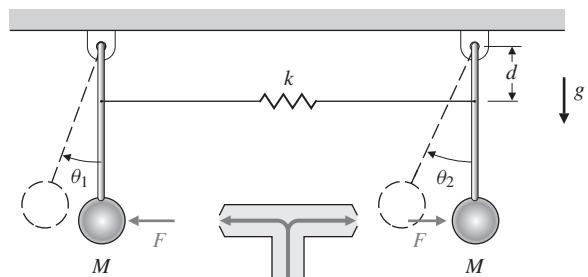
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As entradas u_1 e u_2 são forças radial e tangencial, as variáveis de estado x_1 e x_3 são os desvios radial e angular da referência (circular) orbital, e as saídas y_1 e y_2 são as medidas radial e angular, respectivamente.

- (a) Mostre que o sistema é controlável com as duas entradas de controle.
- (b) Mostre que o sistema é controlável utilizando apenas uma única entrada. Qual delas?
- (c) Mostre que o sistema é observável com as duas medições.
- (d) Mostre que o sistema é observável usando apenas uma medição. Qual delas?

7.40 Considere o sistema na Fig. 7.93

- (a) Escreva as equações de variáveis de estado para o sistema, usando $[\theta_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$ como o vetor de estados e F como a única entrada.
- (b) Mostre que todas as variáveis de estado são observáveis usando medições apenas de θ_1 .
- (c) Mostre que o polinômio característico do sistema é o produto dos polinômios de dois osciladores. Primeiro escreva um novo conjunto de equações para o sistema envolvendo as variáveis de estado



Injetor de gás

$$K = kd$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\omega^2\theta_1 - K(\theta_1 - \theta_2) + F/m_1$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\omega^2\theta_2 + K(\theta_1 - \theta_2) - F/m_1$$

Figura 7.93 Pêndulos acoplados para o Problema 7.40.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_1 - \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}.$$

Dica: se \mathbf{A} e \mathbf{D} são matrizes inversíveis, então

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

- (d) Deduza o fato de que o modo da mola é controlável com F , mas o modo do pêndulo não é.
- 7.41** Um certo sistema de quinta ordem tem uma equação característica com raízes em $0, -1, -2$ e $-1 \pm 1j$. A decomposição nas partes controlável e não controlável revela que a parte controlável possui uma equação característica com raízes 0 e $-1 \pm 1j$. A decomposição em partes observável e não observável revela que os modos observáveis são $0, -1$ e -2 .
- (a) Onde estão os zeros de $b(s) = \text{Hadj}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{G}$ para este sistema?
 - (b) Quais são os polos da função de transferência de ordem reduzida que inclui apenas os modos controláveis e observáveis?
- 7.42** Considere os sistemas mostrados na Fig. 7.94, empregando as configurações em série, paralelo e com realimentação.
- (a) Suponha que tenhamos realizações controláveis-observáveis para cada subsistema:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{F}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{G}_i u_i, \\ y_i &= \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i, \quad \text{com } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Encontre um conjunto de equações de estado para os sistemas combinados na Fig. 7.94.

- (b) Para cada caso, determine qual(is) condição(ões) é(são) necessária(s) para que as raízes dos polinômios N_i e D_i de cada sistema sejam controláveis e observáveis. Dê uma razão para a sua breve resposta em termos de cancelamentos de polo e zero.
- 7.43** Considere o sistema $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + u$.
- (a) Encontre as matrizes de estado \mathbf{F}_c , \mathbf{G}_c , e \mathbf{H}_c na forma canônica controlável que correspondem à equação diferencial dada.
 - (b) Esboce os autovetores de \mathbf{F}_c no plano (x_1, x_2) e desenhe os vetores que correspondem às variáveis de estado completamente observáveis (\mathbf{x}_0) e completamente não observáveis ($\mathbf{x}_{\bar{0}}$).
 - (c) Expresse \mathbf{x}_0 e $\mathbf{x}_{\bar{0}}$ em termos da matriz de observabilidade matriz \mathcal{O} .
 - (d) Encontre as matrizes de estado na forma canônica observável e repita os itens (b) e (c) em termos de controlabilidade em vez de observabilidade.

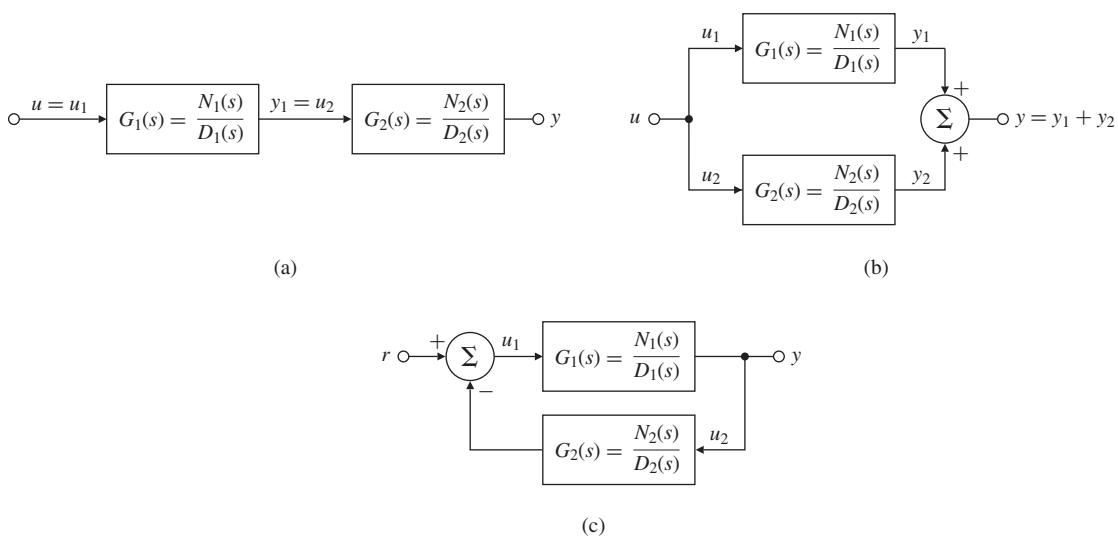


Figura 7.94 Diagrama de blocos para o Problema 7.14: (a) série; (b) paralelo; (c) realimentado.

- 7.44** As equações de movimento para uma estação de manutenção de satélite (como um satélite meteorológico) são

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2x = 0, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = u,$$

sendo

x = perturbação radial,

y = perturbação de posição longitudinal,

u = motor de propulsão de direção y ,

conforme ilustrado na Fig. 7.95. Se a órbita é sincronizada com a rotação da Terra, então $\omega = 2\pi / (3600 \times 24)$ rad/s.

- (a) O estado $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y}]^T$ é observável?
- (b) Escolha $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y}]^T$ como o vetor de estados e y como a medição e projete um observador de ordem completa com os polos alocados em $s = -2\omega, -3\omega$ e $-3\omega \pm 3\omega j$.

- 7.45** As equações linearizadas de movimento do pêndulo simples na Fig. 7.96 são

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = u.$$

- (a) Escreva as equações de movimento na forma de espaço de estados.
- (b) Projete um estimador (observador) que reconstrua o estado do pêndulo dada as medições de e . Assuma $\omega = 5$ rad/s e escolha as raízes do estimador em $s = -10 \pm 10j$.
- (c) Escreva a função de transferência do estimador entre o valor medido de $\dot{\theta}$ e do valor estimado de θ .
- (d) Projete um controlador (isto é, determine o ganho de realimentação de estados \mathbf{K}) para que as raízes da equação característica em malha fechada sejam $s = -4 \pm 4j$.

- 7.46** Uma análise do erro de um navegador inercial leva ao conjunto de equações de estado normalizadas

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

sendo

x_1 = leste – erro velocidade,

x_2 = inclinação da plataforma em relação ao eixo norte,

x_3 = norte – desvio no giroscópio,

u = mudança no coeficiente de desvio no giroscópio.

Projete um estimador de ordem reduzida, com $y = x_1$ sendo a medição, e aloque os polos do observador em $-0,1$ e $-0,1$. Certifique-se de fornecer todas as equações relevantes do estimador.

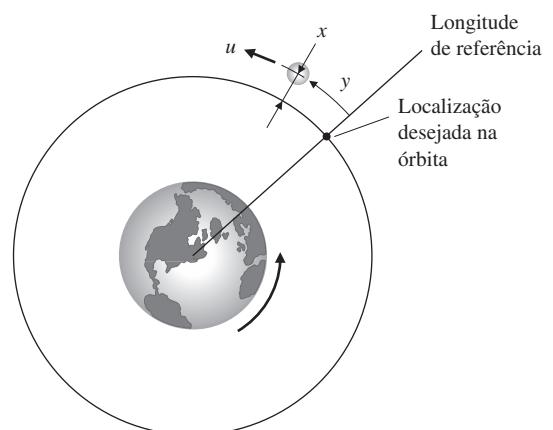


Figura 7.95 Diagrama de uma estação de manutenção de satélite em órbita para o Problema 7.44.

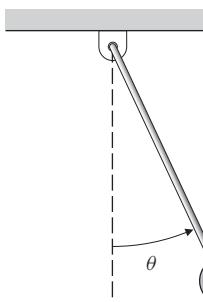


Figura 7.96 Diagrama do pêndulo para o Problema 7.45.

Problemas da Seção 7.8: projeto de compensador: lei de controle e estimador combinados

7.47 Um certo processo tem a função de transferência $G(s) = \frac{4}{(s^2 - 4)}$.

- (a) Encontre \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} para este sistema na forma canônica observável.
- (b) Se $u = -\mathbf{Kx}$, calcule \mathbf{K} para que os polos de malha fechada do controle estejam localizados em $s = -2 \pm 2j$.
- (c) Calcule \mathbf{L} de modo que os polos do erro de estimativação estejam localizados em $s = -10 \pm 10j$.
- (d) Encontre a função de transferência do controlador resultante [por exemplo, usando a Eq. (7.177)].
- (e) Quais as margens de ganho e de fase do controlador e do sistema em malha aberta dado?

7.48 O movimento linear longitudinal de um helicóptero perto de pairar (veja a Fig. 7.97) pode ser modelado pelo sistema de terceira ordem normalizada

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 & 0 & -0,01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1,4 & 9,8 & -0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \theta \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,3 \\ 0 \\ 9,8 \end{bmatrix} \delta,$$

q = taxa de arfagem,

θ = ângulo de arfagem da fuselagem,

u = velocidade horizontal (notação padrão de aeronaves),

δ = ângulo de inclinação do rotor (variável de controle).

Suponha que nossos sensores estejam medindo a velocidade horizontal u como a saída; isto é, $y = u$.

- (a) Encontre as localizações dos polos de malha aberta.
- (b) O sistema é controlável?
- (c) Encontre o ganho de realimentação que aloca os polos do sistema em $s = -1 \pm 1j$ e $s = -2$.
- (d) Projete um estimador de ordem completa para o sistema e aloque os polos do estimador em -8 e $-4 \pm 4\sqrt{3}j$.

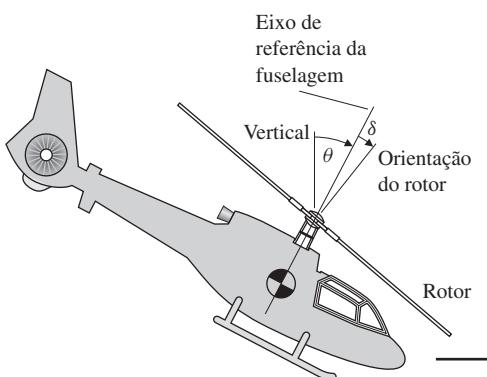


Figura 7.97 Helicóptero para o Problema 7.48.

- (e) Projete um estimador de ordem reduzida com ambos os polos em -4 . Quais são as vantagens e desvantagens do estimador de ordem reduzida em comparação com o de ordem completa?
- (f) Calcule a função de transferência do compensador usando o ganho de controle e o estimador de ordem completa projetado no item (d) e trace a sua resposta em frequência usando o MATLAB. Desenhe um diagrama de Bode para o projeto em malha fechada e indique as correspondentes margens de ganho e de fase.
- (g) Repita o item (f) usando o estimador de ordem reduzida.
- (h) Esboce o LRS e selecione as raízes de uma lei de controle que fornecerá uma largura de banda de controle de acordo com o projeto no item (c), selecione as raízes para um estimador de ordem completa que irá resultar em uma largura de banda do erro de estimação de acordo com o projeto no item (d). Desenhe o diagrama de Bode correspondente e compare o posicionamento dos polos e os projetos LRS em relação à largura de banda, as margens de estabilidade, a resposta ao degrau e o esforço de controle para uma entrada em degrau unitário no ângulo do rotor. Use o MATLAB para os cálculos.

7.49 Suponha que um motor de acionamento CC com a corrente no motor u está conectado às rodas de um carro a fim de controlar o movimento de um pêndulo invertido montado sobre o carro. As equações linearizadas e normalizadas do movimento correspondente deste sistema podem ser colocadas na forma

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \theta + v + u, \\ \dot{v} &= \theta - v - u,\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}\theta &= \text{ângulo do pêndulo}, \\ v &= \text{velocidade do carro}.\end{aligned}$$

- (a) Deseja-se controlar θ realimentando u da forma

$$u = -K_1\theta - K_2\dot{\theta} - K_3v.$$

Encontre os ganhos de realimentação tal que os polos de malha fechada resultantes estejam em $-1, -1 \pm \sqrt{3}j$.

- (b) Assuma que θ e v sejam medidos. Construa um estimador de θ e $\dot{\theta}$ da forma

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{F}\hat{x} + \mathbf{L}(y - \hat{y}),$$

sendo $\mathbf{x} = [\theta \quad \dot{\theta}]^T$ e $y = \theta$. Considere v e u conhecidos. Selecione \mathbf{L} de modo que os polos do estimador estejam em -2 e -2 .

- (c) Encontre a função de transferência do controlador e trace o diagrama de Bode do sistema em malha fechada, indicando as correspondentes margens de ganho e de fase.
- (d) Usando o MATLAB, trace a resposta do sistema para uma condição inicial em θ e encontre uma explicação física para o movimento inicial do carrinho.

7.50 Considere o controle de

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s(s+1)}.$$

- (a) Seja $y = x_1$ e $\dot{x}_1 = x_2$, escreva as equações de estado para o sistema.
- (b) Encontre K_1 e K_2 tal que $u = -K_1x_1 - K_2x_2$ forneça polos de malha fechada com frequência natural $\omega_n = 3$ e coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$.
- (c) Projete um estimador de estado para o sistema que forneça polos de erro de estimação com $\omega_{n1} = 15$ e $\zeta_1 = 0,5$.
- (d) Qual é a função de transferência do controlador obtida pela combinação dos itens (a) ao (c)?
- (e) Esboce o lugar das raízes do sistema resultante em malha fechada quando o ganho da planta (nominalmente 10) é variado.

7.51 Equações de movimento instáveis da forma

$$\ddot{x} = x + u$$

surgem em situações nas quais o movimento de um pêndulo de cabeça para baixo (como um foguete) deve ser controlado.

- (a) Seja $u = -Kx$ (apenas realimentação da posição), esboce o lugar das raízes em relação ao ganho escalar K .
- (b) Considere um compensador de avanço da forma

$$U(s) = K \frac{s + a}{s + 10} X(s).$$

Selecione a e K tal que o sistema exiba um tempo de subida em torno de 2 s e sobressinal não maior que 25%. Esboce o lugar das raízes com relação a K .

- (c) Trace o diagrama de Bode (magnitude e fase) da planta sem o compensador.
- (d) Trace o diagrama de Bode do projeto compensado e estime a margem de fase.
- (e) Projete uma realimentação de estados de modo que os polos em malha fechada estejam nos mesmos locais do projeto no item (b).
- (f) Projete um estimador para x e \dot{x} usando a medição de $x = y$ e selecione o ganho do observador L de modo que a equação para \ddot{x} tenha raízes características com um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$ e uma frequência natural $\omega_n = 8$.
- (g) Desenhe um diagrama de blocos do seu estimador combinado com a lei de controle e indique onde \dot{x} e \ddot{x} aparecem. Desenhe um diagrama de Bode para o sistema em malha fechada e compare a largura de banda resultante e as margens de estabilidade com as obtidas utilizando o projeto no item (b).

7.52 Um modelo simplificado para o controle de um braço robótico flexível é mostrado na Fig. 7.98, onde

$$k/M = 900 \text{ rad/s}^2,$$

y = saída, posição da massa,

u = entrada, posição do fim da mola.

- (a) Escreva as equações de movimento na forma de espaço de estados.
- (b) Projete um estimador com raízes em $s = -100 \pm 100j$.
- (c) Ambas as variáveis de estado do sistema podem ser estimadas se apenas a medida de y estiver disponível?
- (d) Projete um controlador por realimentação completa de estados com as raízes em $s = -20 \pm 20j$.
- (e) Seria razoável projetar uma lei de controle para o sistema com raízes em $s = -200 \pm 200j$? Apresente suas razões.
- (f) Escreva as equações para o compensador, incluindo uma entrada de comando para y . Trace o diagrama de Bode para o sistema em malha fechada projetado e encontre as margens de ganho e de fase.

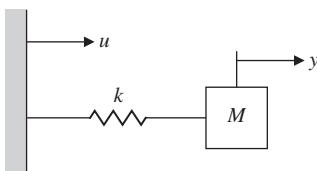


Figura 7.98 Braço robótico simples para o Problema 7.52.

7.53 As equações diferenciais linearizadas que regem a dinâmica do fluxo de fluidos para os dois tanques em cascata na Fig. 7.99 são

$$\delta\dot{h}_1 + \sigma\delta h_1 = \delta u,$$

$$\delta\dot{h}_2 + \sigma\delta h_2 = \sigma\delta h_1,$$

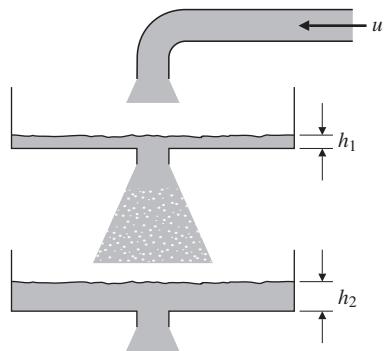
sendo

δh_1 = desvio de profundidade em relação ao nível nominal do tanque 1,

δh_2 = desvio de profundidade em relação ao nível nominal do tanque 2,

δu = desvio na taxa de fluxo de fluido para o tanque 1 (controle).

Figura 7.99 Dois tanques para o Problema 7.53.



- (a) *Controle de nível para dois tanques em cascata.* Usando realimentação de estados da forma

$$\delta u = -K_1 \delta h_1 - K_2 \delta h_2,$$

escolha os valores de K_1 e K_2 que irão alocar os autovalores de malha fechada em

$$s = -2\sigma(1 \pm j).$$

- (b) *Estimador de nível para dois tanques em cascata.* Suponha que apenas o desvio no nível do tanque 2 seja medido (isto é, $y = \delta h_2$). Usando essa medida, projete um estimador que fornecerá estimativas contínuas e suaves dos desvios nos níveis dos tanques 1 e 2, com polos de erro de estimação em $-8\sigma(1 \pm j)$.
- (c) *Estimador/Controlador para os dois tanques em cascata.* Esboce um diagrama de blocos (apresentando os integradores individuais) do sistema em malha fechada obtido pela combinação do estimador do item (b) com o controlador do item (a).
- (d) Usando o MATLAB, calcule e trace a resposta em y para um desvio inicial em δh_1 . Assuma que $\sigma = 1$ para traçar o gráfico.

- 7.54** Os movimentos laterais de um navio com 100 m de comprimento, movendo-se a uma velocidade constante de 10 m/s, são descritos por

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0895 & -0.286 & 0 \\ -0.0439 & -0.272 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0145 \\ -0.0122 \\ 0 \end{bmatrix} \delta,$$

sendo

β = ângulo de derrapagem (graus),

ψ = ângulo de orientação (graus),

δ = ângulo do leme (graus),

r = taxa de guinada (veja a Fig. 7.100).

- (a) Determine a função de transferência de δ para ψ e as raízes características do navio sem controlador.
- (b) Usando realimentação completa de estados da forma

$$\delta = -K_1 \beta - K_2 r - K_3 (\psi - \psi_d),$$

sendo ψ_d a orientação desejada, determine os valores de K_1 , K_2 e K_3 que irão alocar as raízes de malha fechada em $s = -0,2, -0,2 \pm 0,2j$.

- (c) Projete um estimador de estados baseado na medição de ψ (obtida a partir de uma bússola, por exemplo). Aloque as raízes da equação de erro de estimação em $s = -0,8$ e $-0,8 \pm 0,8j$.
- (d) Encontre as equações de estado e a função de transferência do compensador $D_c(s)$ na Fig. 7.101 e trace sua resposta em frequência.
- (e) Desenhe o diagrama de Bode para o sistema em malha fechada e calcule as correspondentes margens de ganho e de fase.
- (f) Calcule os ganhos para uma entrada de referência e trace a resposta ao degrau do sistema para uma mudança na orientação de 5° .

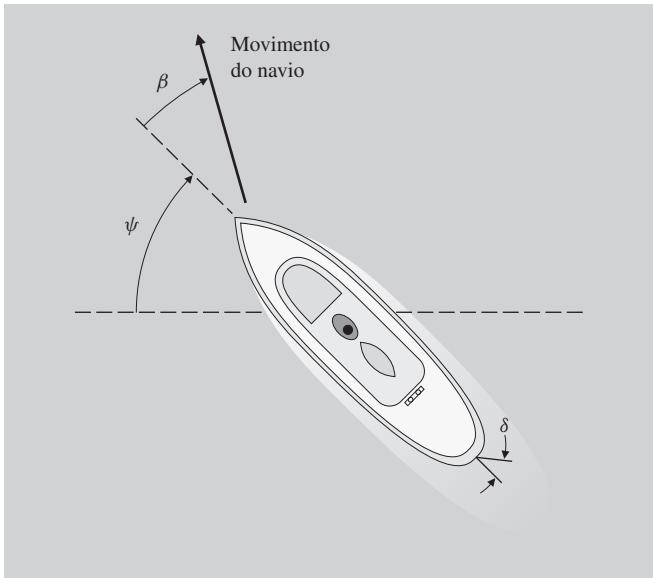


Figura 7.100 Vista de cima do navio para o Problema 7.54.

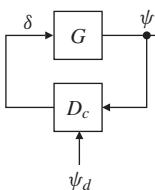


Figura 7.101 Diagrama de blocos de controle para o navio para o Problema 7.54.

Problemas da Seção 7.9: introdução da entrada de referência com o estimador

- △ **7.55** Conforme mencionado na nota de rodapé 11 na Seção 7.9.2, uma abordagem razoável para selecionar o ganho na Eq. (7.205) é escolher \bar{N} tal que, quando r e y são imutáveis, o ganho DC de r para u seja o negativo do ganho DC de y para u . Obtenha uma fórmula para \bar{N} com base nesta regra de seleção. Mostre que se a planta é do Tipo 1, esta escolha é a mesma dada pela Eq. (7.205).

Problemas da Seção 7.10: controle integral e rastreamento robusto

- 7.56** Suponha que a equação de movimento linearizada e escalonada no tempo para o dispositivo de levitação de esferas é $\ddot{x} - x = u + w$. Aqui, w é um distúrbio constante devido ao amplificador de potência. Introduza controle integral do erro e selecione três ganhos de controle $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3]$ para que os polos de malha fechada estejam em -1 e $-1 \pm j$ e para que o erro em estado estacionário para w e para um comando de posição (degrau) seja nulo. Faça $y = x$ e a entrada de referência $r \triangleq y_{\text{ref}}$ uma constante. Desenhe um diagrama de blocos do seu projeto mostrando as localizações dos ganhos de realimentação K_i . Suponha que ambos, \dot{x} e x , possam ser medidos. Trace a resposta do sistema em malha fechada para uma entrada de comando em degrau e a resposta para uma mudança em degrau na entrada de distúrbio. Verifique se o sistema é do Tipo 1. Use o MATLAB (SIMULINK) para simular as respostas do sistema.

- 7.57** Considere o sistema com as matrizes de estado

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [1 \ 3].$$

- (a) Use realimentação da forma $u(t) = -\mathbf{Kx}(t) + \bar{N}r(t)$, onde \bar{N} é um escalar diferente de zero, para mover os polos para $-3 \pm 3j$.
- (b) Escolha \bar{N} de modo que se r é constante, o sistema apresente erro em estado estacionário nulo, ou seja $y(\infty) = r$.

- (c) Mostre que se \mathbf{F} mudar para $\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}$, sendo $\delta\mathbf{F}$ uma matriz 2×2 arbitrária, então a sua escala de \tilde{N} no item (b) deixará de fazer $y(\infty) = r$. Portanto, o sistema não é robusto a alterações nos parâmetros em \mathbf{F} do sistema.
- (d) O desempenho do erro em estado estacionário do sistema pode ser robusto aumentando o sistema com um integrador e utilizando uma realimentação unitária – isto é, definindo $\dot{x}_I = r - y$, sendo x_I o estado do integrador. Para checar isto, use primeiro a realimentação de estados da forma $u = -\mathbf{Kx} - K_1x_I$ de modo que os polos do sistema aumentado estejam em $-3, -2 \pm j\sqrt{3}$.
- (e) Mostre que o sistema resultante fornecerá $y(\infty) = r$ não importando o quanto as matrizes \mathbf{F} e \mathbf{G} sejam alteradas, desde que o sistema em malha fechada permaneça estável.
- (f) Para o item (d), use o MATLAB (SIMULINK) para traçar a resposta temporal do sistema para uma entrada constante. Trace o diagrama de Bode para o controlador, bem como para a função de sensibilidade (S) e para a função de sensibilidade complementar (T).

- \triangle 7.58 Considere um servomecanismo para seguir a trilha de dados em um sistema de memória em disco de um computador. Devido a várias imperfeições mecânicas inevitáveis, a trilha de dados não é exatamente um círculo centrado e, assim, o servo radial deve seguir uma entrada senoidal de frequência em radianos ω_0 (a velocidade de rotação do disco). As matrizes de estado para um modelo linearizado de tal sistema são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [1 \quad 3].$$

A entrada de referência senoidal satisfaz $\ddot{r} = -\omega_0^2 r$.

- (a) Faça $\omega_0 = 1$ e aloque os polos do sistema de erro para um modelo interno de projeto em

$$\alpha_c(s) = (s + 2 \pm j2)(s + 1 \pm 1j)$$

e o polo do estimador de ordem reduzida em

$$\alpha_e(s) = (s + 6).$$

- (b) Esboce um diagrama de blocos do sistema e mostre claramente a presença do oscilador com frequência ω_0 (o modelo interno) no controlador. Verifique também a presença dos zeros bloqueando em $\pm j\omega_0$.
- (c) Use o MATLAB (SIMULINK) para traçar a resposta temporal do sistema para uma entrada senoidal com uma frequência $\omega_0 = 1$.
- (d) Trace o diagrama de Bode para mostrar como esse sistema vai responder às entradas senoidais com diferentes frequências, mas próximas de ω_0 .

- \triangle 7.59 Calcule a função de transferência do controlador [de $Y(s)$ para $U(s)$] no Exemplo 7.38. Qual é a característica proeminente do controlador que permite o rastreamento e a rejeição de distúrbios?

- \triangle 7.60 Considere o problema do pêndulo com torque de controle T_c e torque de perturbação T_d :

$$\ddot{\theta} + 4\theta = T_c + T_d.$$

(Aqui, $g/l = 4$). Suponha que exista um potenciômetro no pino que mede o ângulo de saída θ , mas com um erro de medição constante e desconhecido b . Assim, a equação de medição é $y = \theta + b$.

- (a) Selecione o vetor de estado “aumentado” como

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ w \end{bmatrix},$$

sendo w a entrada de erro de medição. Escreva as equações do sistema na forma de espaço de estados. Forneça valores às matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} .

- (b) Usando os métodos de variáveis de estado, mostre que a equação característica do modelo é $s(s^2 + 4) = 0$.

- (c) Mostre que ω é observável se assumirmos que $y = \theta$ e escreva as equações do estimador para

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} \\ \hat{w} \end{bmatrix}.$$

Selecione os ganhos do estimador $[l_1 \ l_2 \ l_3]^T$ para alocar as raízes da equação característica de erro do estimador em -10 .

- (d) Usando realimentação completa das variáveis de estados estimadas (controláveis), obtenha uma lei de controle para alocar os polos de malha fechada em $-2 \pm 2j$.
 (e) Desenhe um diagrama de blocos completo do sistema em malha fechada (estimador, planta, e controlador) utilizando blocos integradores.
 (f) Introduza o erro de medição estimado no controle de modo a produzir erro em estado estacionário nulo para o erro de medição na saída b . Demonstre o desempenho de seu projeto traçando a resposta do sistema a uma mudança em degrau de b , ou seja, b muda de 0 a um valor constante.

Problemas da Seção 7.13: projeto para sistemas com atraso puro de tempo

- △ **7.61** Considere o sistema com função de transferência $e^{-Ts}G(s)$, sendo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

O compensador de Smith para o sistema é dado por

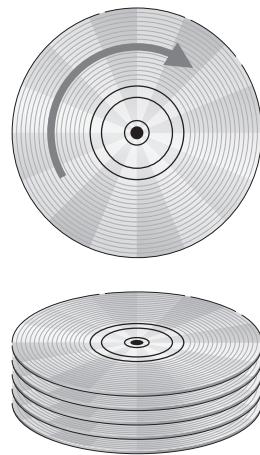
$$D'_c(s) = \frac{D_c}{1 + (1 - e^{-sT})G(s)D_c}.$$

Trace a resposta em frequência do compensador para $T = 5$ e $D_c = 1$ e trace o diagrama de Bode que mostra as margens de fase e ganho do sistema.²²

²² Este problema foi dado por Åström (1977).

8

Controle Digital



A maioria dos controladores que estudamos até o momento foi descrita pela transformada de Laplace ou pelas equações diferenciais e, estritamente falando, assumimos que será construída utilizando eletrônica analógica, como aquelas das Figs. 5.31 e 5.35. Entretanto, como discutido na Seção 4.4, a maioria dos sistemas de controle atualmente usa computadores digitais (geralmente microprocessadores) para implementar os controladores. A intenção deste capítulo é expandir o projeto de sistemas de controle que serão implementados em um computador digital. A implementação resulta em um atraso médio de meio período de amostragem e em um fenômeno chamado de aliasing, e ambos precisam ser abordados no projeto do controlador.

Eletrônica analógica pode integrar e diferenciar sinais. Para que um computador digital realize essas tarefas, as equações diferenciais que descrevem a compensação devem ser aproximadas por meio de sua redução a equações algébricas envolvendo adição, divisão e multiplicação, assim como foi desenvolvido na Seção 4.4. Este capítulo apresenta várias maneiras de realizar essas aproximações. O projeto resultante pode ser ajustado, se necessário, utilizando diretamente análise e projeto digital.

A partir do material neste capítulo, o leitor deve ser capaz de projetar, analisar e implementar um sistema de controle digital. No entanto, o tratamento aqui é uma versão limitada de um tema complexo, abordado com mais detalhes em *Digital Control of Dynamic Systems*, de Franklin *et al.* (1998 3a ed.).

Visão geral do capítulo

Na Seção 8.1, descrevemos a estrutura básica dos sistemas de controle digital e introduzimos as questões que surgem devido à amostragem. A implementação digital descrita na Seção 4.4 é suficiente para a implementação de uma lei de controle por realimentação em um sistema de controle

digital, que pode ser avaliado via SIMULINK® para determinar a degradação em relação ao caso contínuo. No entanto, para entender completamente o efeito da amostragem, é útil aprender sobre ferramentas de análise discreta linear. Isso requer uma compreensão da transformada z , que discutiremos na Seção 8.2. A Seção 8.3 baseia-se nessa compreensão para prover uma base melhor para o projeto usando equivalentes discretos, que foram brevemente discutidos na Seção 4.4. Características em relação aos componentes físicos do controlador e questões sobre a taxa de amostragem são discutidas nas Seções 8.4 e 8.5, e ambas precisam ser abordadas para a implementação de um controlador digital.

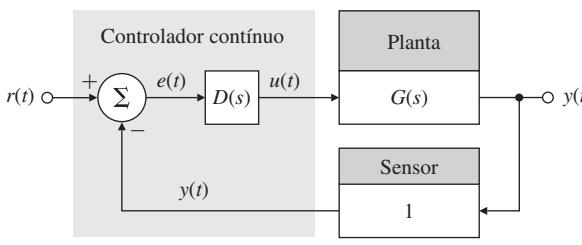
Em contraste com o projeto do controlador discreto equivalente, que é um método aproximado, a Seção 8.6, opcional, explora o projeto do controlador digital de forma direta (também chamado de projeto discreto), que fornece um método exato que é independente de a taxa de amostragem ser rápida ou não.

8.1 Digitalização

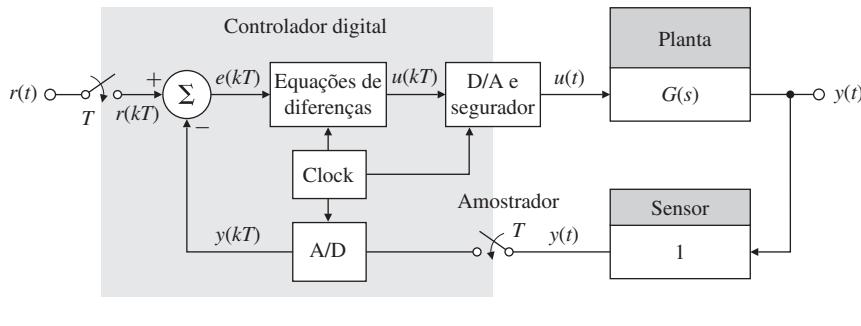
A Fig. 8.1(a) mostra a topologia do sistema contínuo típico que consideramos nos capítulos anteriores. O cálculo do sinal de erro e e da dinâmica do compensador $D(s)$ podem ser realizados em um computador digital como mostrado na Fig. 8.1(b). As diferenças fundamentais entre as duas implementações são que o sistema digital opera com **amostras** da saída medida da planta, em vez do sinal contínuo, e que o controle fornecido por $D(s)$ deverá ser gerado por equações algébricas recursivas.

Inicialmente, consideramos a ação do **conversor analógico-digital (A/D)** em um sinal. Este dispositivo amostra uma variável física, geralmente uma tensão elétrica, e depois converte a amostra em um número binário que normalmente consiste de 10 à 16 bits. A conversão do sinal analógico $y(t)$ para as amostras, $y(kT)$, ocorre repetidamente em instantes de tempo de T segundos. T é o **período de amostragem**, e $1/T$ é a **taxa de amostragem** em Hertz. O sinal amostrado é $y(k)$, com k podendo assumir qualquer valor inteiro. Muitas vezes, ele é escrito simplesmente como $y(k)$. Chamamos esse tipo de variável de **sinal discreto** para distingui-la de um sinal contínuo, $y(t)$, que muda continuamente no tempo. Um sistema com sinais discreto e contínuo é chamado de **sistema de dados amostrados**.

Período de amostragem



(a)



(b)

Figura 8.1 Diagrama de blocos para um sistema de controle básico: (a) sistema contínuo; (b) com um computador digital.

Assumimos aqui que o período de amostragem é fixo. Na prática, sistemas de controle digital às vezes têm diferentes períodos de amostragem e/ou diferentes períodos em diferentes caminhos de realimentação. Normalmente, a lógica do computador inclui um **clock** que fornece um pulso, ou **interrupções**, a cada T segundos, e o conversor A/D envia um número para o computador cada vez que a interrupção chega. Uma implementação alternativa, muitas vezes referida como **livre curso**, é acessar o conversor A/D depois que cada ciclo de execução do código tenha sido concluído. No primeiro caso, o período de amostragem é precisamente fixo; no último caso, o período de amostragem é fixado, essencialmente, pelo comprimento do código, desde que não haja ramos lógicos presentes, o que pode variar a quantidade de código executado.

Também pode haver um amostrador e um conversor A/D para a entrada de comando $r(t)$, que produz $r(kT)$ discreto, do qual a saída medida $y(kT)$ será subtraída para obter o sinal de erro discreto $e(kT)$. Como vimos nas Seções 4.4 e 5.4.4 e no Exemplo 6.15, o compensador contínuo é aproximado por equações de diferenças, que são versões discretas das equações diferenciais e podem substituir o comportamento dinâmico de $D(s)$, caso o período de amostragem seja bastante curto. O resultado das equações de diferenças é um dado discreto $u(kT)$ a cada instante de amostragem. Este sinal é convertido para um sinal contínuo $u(t)$ pelo **conversor digital-analógico (D/A)** e pelo segurador: o conversor D/A altera o número binário para uma tensão analógica, e o **segurador de ordem zero** mantém a mesma tensão durante todo o período de amostragem. O $u(t)$ resultante, então, é aplicado no atuador, precisamente da mesma maneira que a implementação contínua. Existem duas técnicas básicas para encontrar as equações de diferenças para o controlador digital. Uma técnica, chamada **equivalente discreto**, consiste em projetar um compensador contínuo $D(s)$ usando os métodos descritos nos capítulos anteriores, então, $D(s)$ é aproximado usando o método da Seção 4.4 (Método Tustin) ou um dos outros métodos descritos na Seção 8.3. A outra técnica é o **projeto discreto**, descrita na Seção 8.6. Nela, as equações de diferenças são encontradas diretamente, sem projetar $D(s)$ inicialmente.

A taxa de amostragem necessária depende da largura de banda do sistema em malha fechada. Geralmente, as taxas de amostragem devem ser cerca de 20 vezes a largura de banda ou mais rápidas, a fim de assegurar que o controlador digital irá igualar o desempenho do controlador contínuo. Taxas de amostragem mais lentas podem ser usadas se algumas adaptações forem feitas no controlador digital ou alguma degradação do desempenho for aceitável. O uso do método de projeto discreto descrito na Seção 8.6 permite uma taxa de amostragem muito mais lenta, se for desejável minimizar os custos de implementação física; no entanto, o melhor desempenho de um controlador digital é obtido quando a taxa de amostragem é superior a 25 vezes a largura de banda.

Vale a pena notar que o impacto mais importante da implementação de um sistema de controle digital é o atraso associado ao segurador. Como cada valor de $u(kT)$ na Fig. 8.1(b) é mantido constante até o próximo valor do computador estar disponível, o valor contínuo de $u(t)$ consiste de degraus (veja a Fig. 8.2) que, em média, estão atrasados de $u(kT)$ por $T/2$, como mostrado na figura. Se simplesmente incorporarmos este atraso de $T/2$ na análise contínua do sistema, tere-

Segrador de ordem zero

Equivalente discreto

Seleção da taxa de amostragem

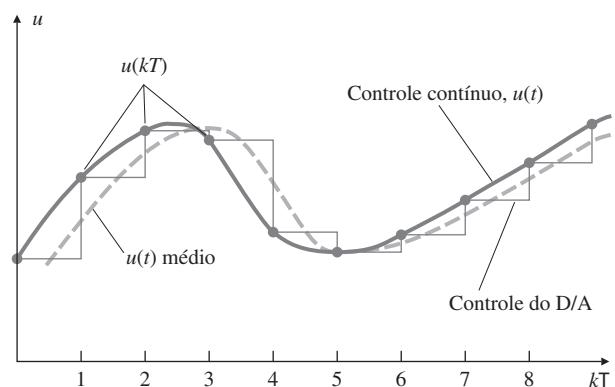


Figura 8.2 Atraso devido à operação do segurador.

mos uma excelente previsão dos efeitos da amostragem para taxas de amostragem muito mais lentas do que 20 vezes a largura de banda. Discutiremos isso mais adiante, na Seção 8.3.3.

8.2 Análise dinâmica de sistemas discretos

A transformada z é a ferramenta matemática para a análise de sistemas lineares discretos. Ela desempenha o mesmo papel para os sistemas discretos que a transformada de Laplace para sistemas contínuos. Esta seção vai dar uma breve descrição da transformada z , descrever seu uso na análise de sistemas discretos e mostrar como ela se relaciona com a transformada de Laplace.

8.2.1 Transformada z

Na análise de sistemas contínuos, usamos a transformada de Laplace, que é definida como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

e fornece diretamente a importante propriedade que (com condições iniciais nulas)

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s). \quad (8.1)$$

A relação (8.1) nos permite facilmente encontrar a função de transferência de um sistema linear contínuo, dada a equação diferencial desse sistema.

Para sistemas discretos, um processo similar está disponível. A **transformada z** é definida por

Transformada z

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}, \quad (8.2)$$

sendo $f(k)$ a versão amostrada de $f(t)$, como mostrado na Fig. 8.3, e $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ refere-se aos tempos de amostragem discretos $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$. Isso fornece diretamente a propriedade análoga à Eq. (8.1), especificamente, que

$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z). \quad (8.3)$$

Esta relação nos permite encontrar facilmente a função de transferência de um sistema discreto, dadas as equações de diferenças do sistema. Por exemplo, a equação de diferenças de segunda ordem geral

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2)$$

pode ser convertida a partir desta forma para a transformada z das variáveis $y(k), u(k), \dots$ invocando a Eq. (8.3) uma ou duas vezes para chegar em

$$Y(z) = (-a_1z^{-1} - a_2z^{-2})Y(z) + (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})U(z). \quad (8.4)$$

A Eq. (8.4), então, resulta na função de transferência discreta

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}.$$

Função de transferência discreta

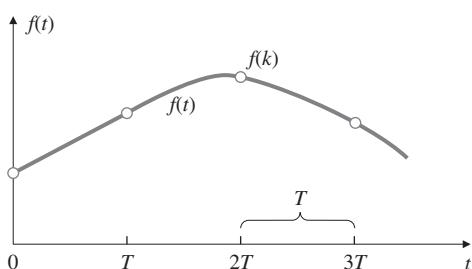


Figura 8.3 Um versão contínua amostrada do sinal f .

8.2.2 Inversão da transformada z

A Tabela 8.1 relaciona simples funções de tempo discreto às suas transformadas z e fornece a transforma de Laplace para as mesmas funções temporais.

Dada uma transformada z qualquer, podemos expandi-la em uma soma de termos elementares usando expansão em frações parciais (veja o Apêndice A) e encontrar a série temporal resultante a partir da tabela. Esses procedimentos são exatamente os mesmos que os utilizados para os sistemas contínuos; como no caso contínuo, a maioria dos projetistas usaria uma avaliação numérica das equações discretas para obter um histórico temporal em vez de inverter a transformada z .

TABELA 8.1 Transformadas de Laplace e transformadas z para funções simples de tempo discreto

Nº	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1		$1, k = 0; 0, k \neq 0$	1
2		$1, k = k_o; 0, k \neq k_o$	z^{-k_o}
3	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2} \left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \right]$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(kT)^3$	$\frac{T^3}{6} \left[\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} \right]$
7	$\frac{1}{s^m}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} e^{-akT} \right)$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} \frac{z}{z-e^{-aT}} \right)$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2 e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2} e^{-aT} z \frac{(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} e^{-akT} \right)$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} \frac{z}{z-e^{-aT}} \right)$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
13	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(akT - 1 + e^{-akT})$	$\frac{z[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
14	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
15	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1 - akT)e^{-akT}$	$\frac{z[z-e^{-aT}(1+aT)]}{(z-e^{-aT})^2}$
16	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - e^{-akT}(1 + akT)$	$\frac{z[z(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})+e^{-2aT}-e^{-aT}+aTe^{-aT}]}{(z-1)(z-e^{-aT})^2}$
17	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bkT} - ae^{-akT}$	$\frac{z[z(b-a)-(be^{-aT}-ae^{-bT})]}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
18	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\operatorname{sen} akT$	$\frac{z \operatorname{sen} aT}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
19	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos akT$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
20	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT} \cos bkT$	$\frac{z(z-e^{-aT} \cos bT)}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}}$
21	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT} \operatorname{sen} bkT$	$\frac{ze^{-aT} \operatorname{sen} bT}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}}$
22	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1 - e^{-akT} (\cos bkT + \frac{a}{b} \operatorname{sen} bkT)$	$\frac{z(Az+B)}{(z-1)[z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}]}$
			$A = 1 - e^{-aT} \cos bT - \frac{a}{b} e^{-aT} \operatorname{sen} bT$
			$B = e^{-2aT} + \frac{a}{b} e^{-aT} \operatorname{sen} bT - e^{-aT} \cos bT$

$F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$, e $F(z)$ é a transformada z de $f(kT)$.

Nota: $f(t) = 0$ para $t = 0$.

A técnica de inversão da transformada z que não tem contrapartida contínua é chamada de **divisão longa**. Dada a transformada z

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad (8.5)$$

simplesmente dividimos o denominador pelo numerador usando a divisão longa. O resultado é uma série (talvez com um número infinito de termos) em z^{-1} , da qual a série temporal pode ser encontrada usando a Eq. (8.2).

Por exemplo, um sistema de primeira ordem descrito pela equação de diferença

$$y(k) = \alpha y(k-1) + u(k)$$

fornecerá a função de transferência discreta

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}.$$

Para uma entrada de pulso unitário definida como

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, \\ u(k) &= 0 \quad k \neq 0, \end{aligned}$$

então, a transformada z é

$$U(z) = 1, \quad (8.6)$$

assim,

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}. \quad (8.7)$$

Portanto, para encontrar a série temporal, dividimos o numerador da Eq. (8.7) pelo seu denominador usando a divisão longa:

$$\begin{array}{r} 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \dots \\ \hline 1 - \alpha z^{-1} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 - \alpha z^{-1} \end{array} \right. \\ \hline \alpha z^{-1} + 0 \\ \alpha z^{-1} - \alpha^2 z^{-2} \\ \hline \alpha^2 z^{-2} + 0 \\ \alpha^2 z^{-2} - \alpha^3 z^{-3} \\ \hline \alpha^3 z^{-3} \\ \ddots \end{array}$$

Isso fornece a série infinita

$$Y(z) = 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \dots \quad (8.8)$$

A partir das Eqs. (8.8) e (8.2), vemos que o histórico temporal amostrado de y é

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \\ y(1) &= \alpha, \\ y(2) &= \alpha^2, \\ &\vdots \quad \vdots \\ y(k) &= \alpha^k. \end{aligned}$$

Inversão da transformada de z : divisão longa

8.2.3 Relação entre s e z

Para sistemas contínuos, vimos, no Capítulo 3, que certos comportamentos resultam das diferentes localizações dos polos no plano-s: comportamento oscilatório para polos próximos do eixo imaginário, decaimento exponencial para polos no eixo real negativo e comportamento instável para os polos com parte real positiva. Também seria útil saber um tipo de associação similar quando se projeta sistemas discretos. Considere o sinal contínuo

$$f(t) = e^{-at}, \quad t > 0,$$

que tem a transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{1}{s + a}$$

e corresponde ao polos em $s = -a$. A transformada z de $f(kT)$ é

$$F(z) = \mathcal{Z}\{e^{-akT}\}. \quad (8.9)$$

A partir da Tabela 8.1, podemos ver que a Eq. (8.9) é equivalente a

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}},$$

que corresponde ao polo em $z = e^{-aT}$. Isso significa que um polo em $s = -a$ no plano-s corresponde a um polo em $z = e^{-aT}$ no domínio discreto. Isso é verdadeiro em geral:

As características equivalentes no plano-z estão relacionados às do plano-s pela expressão

$$z = e^{sT}, \quad (8.10)$$

sendo T o período de amostragem.

Característica da relação entre plano-z e plano-s

A Tabela 8.1 também inclui as transformadas de Laplace, o que demonstra a relação $z = e^{sT}$ para as raízes dos denominadores dos termos da tabela para $F(s)$ e $F(z)$.

A Fig. 8.4 mostra o mapeamento de linhas de amortecimento constante ζ e frequência natural ω_n do plano-s para a metade superior do plano-z, usando a Eq. (8.10). O mapeamento tem várias características importantes (veja o Problema 8.4):

1. O limite de estabilidade é o círculo unitário $|z| = 1$.
2. A pequena vizinhança em torno de $z = +1$ no plano-z é essencialmente idêntica à vizinhança em torno de $s = 0$ no plano-s.
3. As localizações no plano-z fornecem informações da resposta normalizada para a taxa de amostragem, ao invés do tempo como no plano-s.
4. O eixo z real negativo representa sempre uma frequência de $\omega_s/2$, sendo $\omega_s = 2\pi/T$ = taxa de amostragem em radianos por segundo.
5. As linhas verticais na metade esquerda do plano-s (parte real constante) são mapeadas em círculos dentro do círculo unitário do plano-z.
6. As linhas horizontais no plano-s (parte imaginária constante) são mapeadas em linhas radiais no plano-z.
7. Frequências maiores que $\omega_s/2$, chamadas de **frequência de Nyquist**, aparecem no topo do plano-z correspondendo às frequências mais baixas devido ao caráter circular das funções trigonométricas embutidas na Eq. (8.10). Esta sobreposição é chamada de **aliasing** ou **dobramento**. Como resultado, é necessário amostrar, pelo menos duas vezes mais rápido, que a componente de frequência mais alta do sinal, a fim de representar esse sinal com amostras. (Discutiremos aliasing com mais detalhes na Seção 8.4.3.)

Frequência de Nyquist
 $= \omega_s/2$

Para fornecer informações sobre a correspondência entre localizações no plano-z a sequência temporal resultante, a Fig. 8.5 apresenta esboços de respostas temporais que

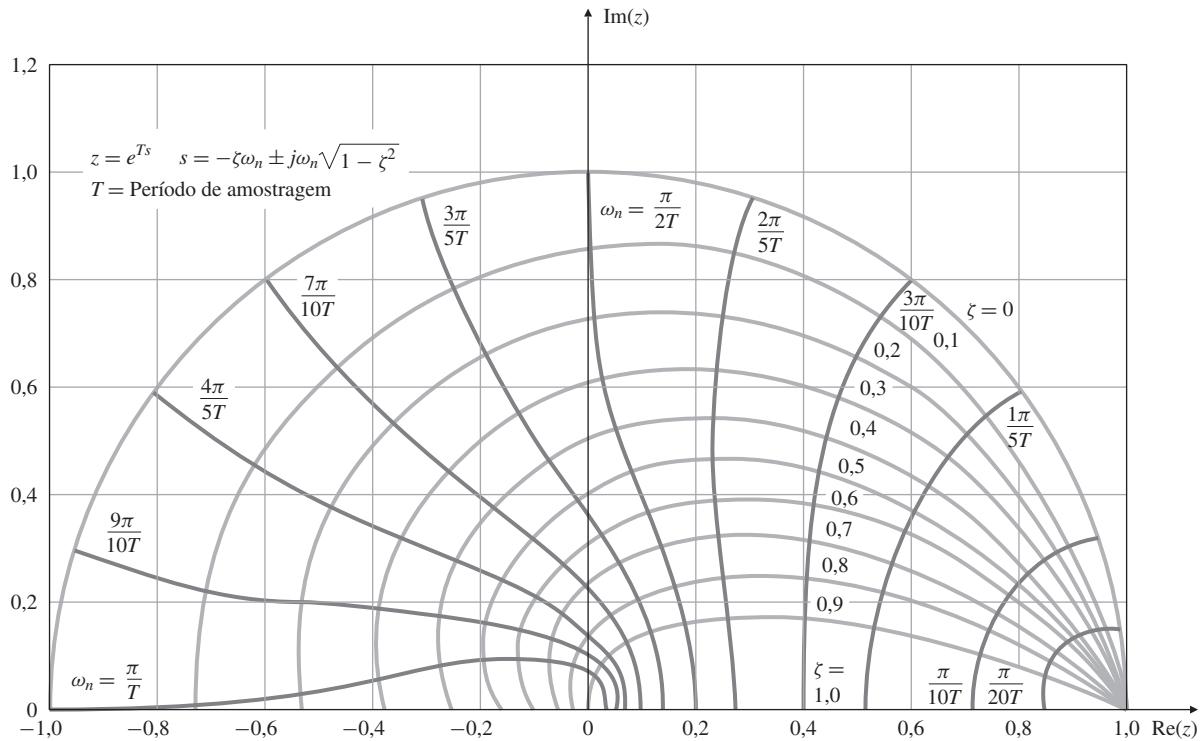


Figura 8.4 Frequência natural (cor sólida) e amortecimento (cor clara) no plano-z; a parte abaixo do eixo $\text{Re}(z)$ (não mostrada) é a imagem espelhada da parte superior mostrada.

resultariam das localizações dos polos indicados. Essa figura é o equivalente discreto da Fig. 3.15.

8.2.4 Teorema do Valor Final

O Teorema do Valor Final para sistemas contínuos, que foi discutido na Seção 3.1.6, afirma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s), \quad (8.11)$$

desde que todos os polos de $sX(s)$ estejam no semiplano esquerdo (SPE). Ele é frequentemente usado para encontrar erros em estado estacionário do sistema e/ou ganhos de estado estacionário de partes de um sistema de controle. Podemos obter uma relação semelhante para sistemas discretos ao observar que uma resposta em estado estacionário contínua e constante é denotada por $X(s) = A/s$ e leva à multiplicação por s na Eq. (8.11). Portanto, como a resposta em estado estacionário constante para sistemas discretos é

$$X(z) = \frac{A}{1 - z^{-1}},$$

o Teorema do Valor Final discreto é

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \quad (8.12)$$

Teorema do Valor Final para sistemas discretos

se todos os polos de $(1 - z^{-1})X(z)$ estiverem dentro no círculo unitário.

Por exemplo, para encontrar o ganho DC da função de transferência

$$G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{0,58(1 + z)}{z + 0,16},$$

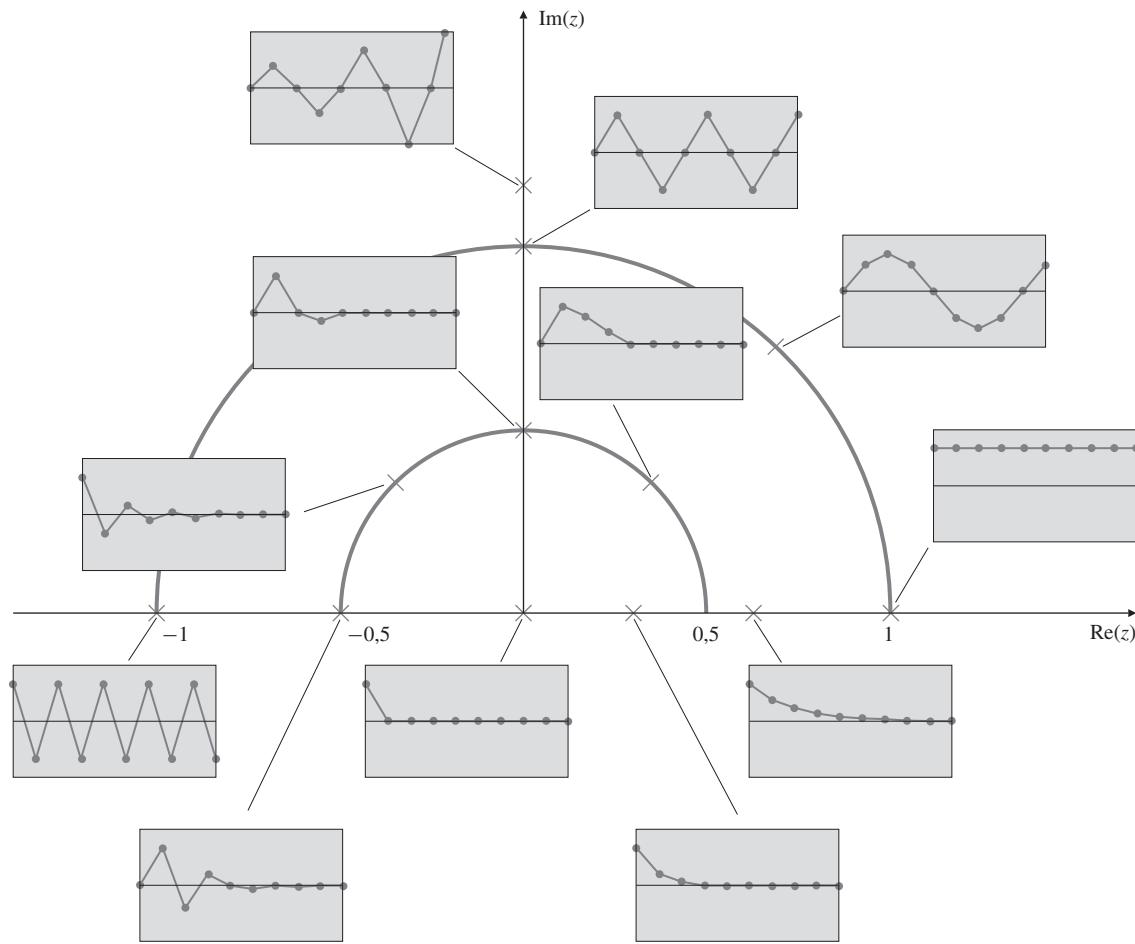


Figura 8.5 Sequências temporais associadas a pontos no plano-z.

fazemos $u(k) = 1$ para $k \geq 0$, tal que

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

e

$$X(z) = \frac{0,58(1+z)}{(1-z^{-1})(z+0,16)}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Final, temos

$$x_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{0,58(1+z)}{z+0,16} \right] = 1,$$

Ganho DC

assim o ganho DC de $G(z)$ é unitário. Para encontrar o ganho DC de qualquer função de transferência estável, basta substituir $z = 1$ e calcular o ganho resultante. Devido ao fato de o ganho DC de um sistema não mudar na representação de forma contínua ou discreta, esse cálculo é uma excelente ajuda para verificar se um controlador discreto equivalente corresponde a um controlador contínuo. Também é uma boa forma de verificação dos cálculos associados à determinação do modelo discreto de um sistema.

8.3 Projeto usando equivalentes discretos

O projeto via equivalente discreto, às vezes chamado de **emulação**, está parcialmente descrito na Secção 4.4 e procede pelas seguintes etapas:

1. Projete um compensador contínuo, como descrito nos Capítulos 1 ao 7.
 2. Digitalize o compensador contínuo.
 3. Use análise discreta, simulação ou experimentação para verificar o projeto.

Etapas de projeto usando equivalentes discretos

Na Seção 4.4, discutimos o método de Tustin para realizar a digitalização. Munidos com uma compreensão da transformada z da Seção 8.2, desenvolvemos agora mais procedimentos de digitalização e de análise do desempenho de sistemas de controle digitalizados.

Suponha que nos é dado um compensador contínuo $D(s)$ como mostrado na Fig. 8.1(a). De-
sejamos encontrar um conjunto de equações de diferenças ou $D(z)$ para a implementação digital
deste do compensador, como na Fig. 8.1(b). Primeiro, vamos reformular o problema como um
problema de encontrar a melhor implementação digital de $D(z)$ mostrada na Fig. 8.6(a) para re-
presentar o sistema contínuo representado por $D(s)$ na Fig. 8.6(b). Nesta seção, vamos examinar
e comparar os três métodos de resolver este problema.

É importante lembrar, como dito antes, que esses métodos são aproximações; não há solução exata para todas as entradas possíveis porque $D(s)$ responde ao histórico temporal completo de $e(t)$, enquanto que $D(z)$ tem acesso apenas às amostras $e(kT)$. Neste sentido, as várias técnicas de digitalização simplesmente fazem suposições diferentes sobre o que acontece com $e(t)$ entre os pontos de amostra.

Método de Tustin

Como discutido na Seção 4.4, uma técnica de digitalização é abordar o problema como uma integração numérica. Suponha

$$\frac{U(s)}{E(s)} = D(s) = \frac{1}{s},$$

a qual é uma integração. Portanto,

$$u(kT) = \int_0^{kT-T} e(t) dt + \int_{kT-T}^{kT} e(t) dt, \quad (8.13)$$

e pode ser reescrita como

$$u(kT) = u(kT - T) + \text{área sob } e(t) \text{ sobre o último } T, \quad (8.14)$$

sendo T o período de amostragem.

Para o método de Tustin, a tarefa em cada passo é usar a integração trapezoidal, ou seja, aproximar $e(t)$ por uma linha reta entre as duas amostras (Fig. 8.7). Escrevendo $u(kT)$ como $u(k)$ e $u(kT - T)$ como $u(k-1)$ por simplicidade, nós convertemos a Eq. (8.14) em

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2}[e(k-1) + e(k)], \quad (8.15)$$

ou, obtendo a transformada z ,

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) = \frac{1}{\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)}. \quad (8.16)$$

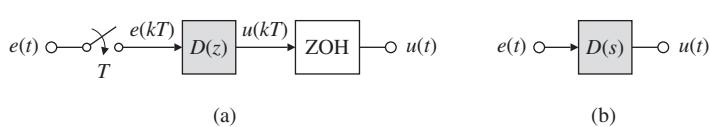
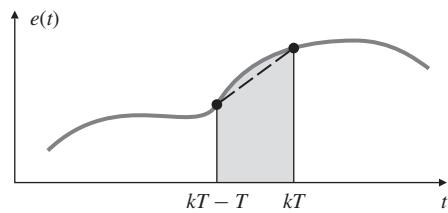


Figura 8.6 Comparação das implementações: (a) digital; (b) contínua.

Figura 8.7 Integração trapezoidal.

Para $D(s) = a/(s + a)$, aplicando a mesma aproximação para integração, temos

$$D(z) = \frac{a}{\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a}.$$

De fato, substituindo

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

Método de Tustin ou aproximação bilinear

em toda ocorrência de s em qualquer $D(s)$, obtemos um $D(z)$ baseado na fórmula de integração trapezoidal. Isso é chamado de **método de Tustin**, ou **aproximação bilinear**. Encontrar aproximação Tustin à mão, mesmo para uma função de transferência simples, requer muita e extensa manipulação algébrica. A função `c2d` do MATLAB® acelera o processo, como mostrado no seguinte exemplo.

EXEMPLO 8.1 Controle digital para o Exemplo 6.15 usando a aproximação de Tustin

Determine as equações de diferenças para a implementação do compensador do Exemplo 6.15,

$$D(s) = 10 \frac{s/2 + 1}{s/10 + 1},$$

com uma taxa de amostragem de 25 vezes a largura de banda, usando a aproximação de Tustin. Compare o resultado obtido com o desempenho do sistema contínuo e a implementação discreta feita no Exemplo 6.15 com uma taxa de amostragem mais lenta.

Solução. A largura de banda (ω_{BW}) para o Exemplo 6.15 é aproximadamente 10 rad/s, como pode ser deduzido observando que a frequência de cruzamento (ω_c) é aproximadamente 5 rad/s e utilizando a relação entre ω_c e ω_{BW} na Fig. 6.51. Portanto, a frequência de amostragem deve ser

$$\omega_s = 25 \times \omega_{BW} = (25)(10) = 250 \text{ rad/s.}$$

Normalmente, quando uma frequência é indicada com unidades de ciclos por segundo, ou Hz, é dado o símbolo f ; assim, com essa convenção, temos

$$f_s = \omega_s / (2\pi) \simeq 40 \text{ Hz,} \quad (8.17)$$

então, o período de amostragem é

$$T = 1/f_s = 1/40 = 0,025 \text{ s.}$$

O compensador discreto é calculado pelos comandos no MATLAB

```
sysDs = tf(10*[0.5 1],[0.1 1]);
sysDd = c2d(sysDs,0.025,'tustin');
```

que fornece

$$D(z) = 10 \frac{4,556 - 4,333 z^{-1}}{1 - 0,7778 z^{-1}}. \quad (8.18)$$

Então, podemos escrever a equação de diferenças inspecionando a Eq. (8.18) para obter

$$u(k) = 0,7778u(k-1) + 45,56e(k) - 43,33e(k-1),$$

ou, de forma equivalente, adicionando 1 a todas as variáveis de tempo,

$$u(k+1) = 0,7778u(k) + 45,56[e(k+1) - 0,9510e(k)]. \quad (8.19)$$

A Eq. (8.19) calcula o novo valor de controle, $u(k+1)$, dado o valor de controle passado, $u(k)$, e os valores novos e passados do sinal de erro, $e(k+1)$ e $e(k)$.

Em princípio, a equação de diferenças é avaliada inicialmente com $k = 0$, então $k = 1, 2, 3, \dots$. No entanto, normalmente não há exigência de que os valores para todos os momentos sejam guardados na memória. Portanto, o computador só precisa ter as variáveis definidas para os valores atuais e passados. As instruções para o computador implementar o laço de realimentação na Fig. 8.1(b) com a equação de diferença a partir da Eq. (8.19) poderia usar um laço contínuo através do seguinte código:

LEIA y, r

$$e = r - y$$

$$u = 0,7778u_p + 45,56 [e - 0,9510e_p]$$

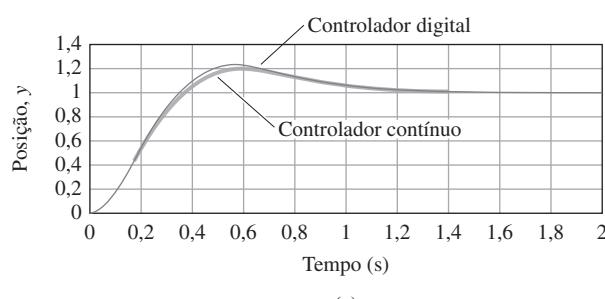
SAÍDA

$$u_p = u \text{ (onde } u_p \text{ será o valor passado para o próximo ciclo)}$$

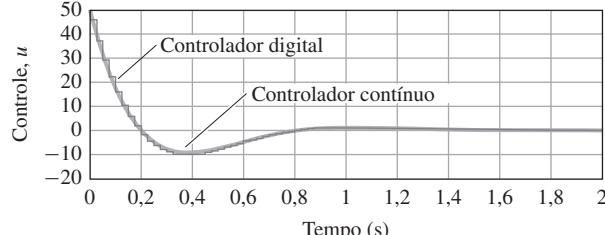
$$e_p = e$$

volte a LEIA quando T s se passarem desde a última LEIA.

Use o SIMULINK para comparar as duas implementações, de maneira semelhante à utilizada no Exemplo 6.15, e obtenha as respostas ao degrau mostradas na Fig. 8.8. Note que a amostragem de 25 vezes a largura de banda faz com que a implementação digital corresponda ao contínuo muito bem. Observe também que o mesmo caso com metade da taxa de amostragem, cuja resposta ao degrau é mostrada na Fig. 6.59, contém uma degradação perceptível no sobressinal (e amortecimento) em relação ao caso contínuo. De modo geral, se é desejado obter um sistema correspondente ao sistema contínuo, com uma aproximação digital da compensação contínua, deve-se amostrar cerca de 25 vezes a largura de banda ou mais rápido.



(a)



(b)

Figura 8.8 Comparação entre as respostas ao degrau para os controladores contínuo e digital com uma taxa de amostragem de 25 vezes a largura de banda: (a) posição; (b) controle.

8.3.1 Método de correspondência polo-zero (MPZ)

Outro método de digitalização, chamado de **método de correspondência polo-zero**, é encontrado por extrapolação a partir da relação entre os planos s e z indicada na Eq. (8.10). Se tomarmos a transformada z de uma função amostrada $x(k)$, então os polos de $X(z)$ estão relacionados com os polos de $X(s)$ de acordo com a relação $z = e^{sT}$. A técnica MPZ aplica-se à relação $z = e^{sT}$ para os polos e zeros de uma função de transferência, embora, estritamente falando, esta relação não se aplique a funções de transferência, e nem mesmo aos zeros, de uma sequência temporal. Como todos os métodos de digitalização de funções de transferência, o método MPZ é uma aproximação; aqui, a aproximação é motivada, em parte, pelo fato de que $z = e^{sT}$ é a transformação correta de s para z dos polos da transformada de uma sequência temporal e, em parte, pela quantidade mínima de álgebra necessária para determinar a função de transferência digitalizada à mão, de modo a facilitar a verificação dos cálculos computacionais.

Em razão de os sistemas físicos geralmente terem mais polos do que zeros, é útil adicionar arbitrariamente zeros em $z = -1$, resultando em um termo $1 + z^{-1}$ em $D(z)$. Isso causa uma média dos valores de entrada atuais e passados, como no método de Tustin. Nós selecionamos o ganho de baixa frequência de $D(z)$, de modo que ele seja igual ao ganho de $D(s)$.

Resumo do método MPZ

1. Mapeie os polos e zeros de acordo com a relação $z = e^{sT}$.
2. Se o numerador tiver ordem menor que o denominador, adicione potências de $(z + 1)$ no numerador até que o numerador e o denominador tenham a mesma ordem.
3. Defina o ganho DC ou de baixa frequência de $D(z)$ igual ao de $D(s)$.

A aproximação MPZ de

$$D(s) = K_c \frac{s + a}{s + b} \quad (8.20)$$

é

$$D(z) = K_d \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}, \quad (8.21)$$

sendo que K_d é encontrado fazendo com que o ganho DC de $D(z)$ se iguale ao ganho DC de $D(s)$ usando as versões contínua e discreta do Teorema do Valor Final. O resultado é

$$K_c \frac{a}{b} = K_d \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}},$$

ou

$$K_d = K_c \frac{a}{b} \left(\frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} \right). \quad (8.22)$$

Para um $D(s)$ com o denominador de ordem mais alta, o Passo 2 do método pede para adicionar o termo $(z + 1)$. Por exemplo,

$$D(s) = K_c \frac{s + a}{s(s + b)} \Rightarrow D(z) = K_d \frac{(z + 1)(z - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-bT})}, \quad (8.23)$$

onde, depois de remover os polos em $s = 0$ e $z = 1$,

$$K_d = K_c \frac{a}{2b} \left(\frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} \right). \quad (8.24)$$

Nos métodos de digitalização descritos até o momento, a mesma potência de z aparece no numerador e no denominador de $D(z)$. Isso implica que a saída da equação de diferença no

tempo k vai exigir uma amostra da entrada no tempo k . Por exemplo, o $D(z)$ na Eq. (8.21) pode ser escrito como

$$\frac{U(z)}{E(z)} = D(z) = K_d \frac{1 - \alpha z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}}, \quad (8.25)$$

sendo $\alpha = e^{-aT}$ e $\beta = e^{-bT}$. Por inspeção, vemos que a Eq. (8.25) resulta na equação de diferenças

$$u(k) = \beta u(k-1) + K_d [e(k) - \alpha e(k-1)]. \quad (8.26)$$

EXEMPLO 8.2 Projeto de um controlador de atitude digital usando o compensador discreto equivalente para uma estação espacial

Um modelo muito simplificado das dinâmicas de controle da atitude de uma estação espacial tem a função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Projete um controlador digital para ter uma frequência natural $\omega_n \cong 0,3$ rad/s e uma taxa de amortecimento $\zeta = 0,7$ em malha fechada.

Solução. O primeiro passo é encontrar o $D(s)$ apropriado para o sistema definido na Fig. 8.9. Depois de algumas tentativas e erros, descobrimos que as especificações podem ser atendidas pela compensação de avanço

$$D(s) = 0,81 \frac{s + 0,2}{s + 2}. \quad (8.27)$$

O lugar das raízes na Fig. 8.10 verifica o uso apropriado da Eq. (8.27).

Para digitalizar esse $D(s)$, primeiro precisamos selecionar uma taxa de amostragem. Para um sistema com $\omega_n = 0,3$ rad/s, a largura de banda também será cerca de 0,3 rad/s, e uma taxa de amostragem aceitável seria cerca de 20 vezes a ω_n . Assim,

$$\omega_s = 0,3 \times 20 = 6 \text{ rad/s}.$$

Uma taxa de amostragem de 6 rad/s é cerca de 1 Hertz; portanto, o período de amostragem deve ser $T = 1$ s. A digitalização MPZ da Eq. (8.27), dada pelas Eqs. (8.21) e (8.22), fornece

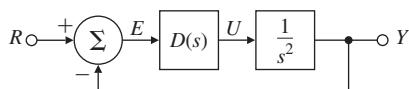


Figura 8.9 Definição do projeto contínuo para o Exemplo 8.2.

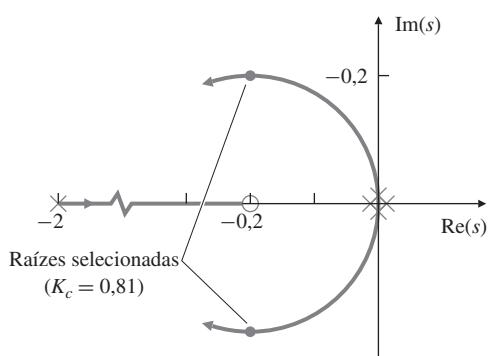


Figura 8.10 Plano-s com o lugar das raízes em relação a K .

$$\begin{aligned}
 D(z) &= 0,389 \frac{z - 0,82}{z - 0,135} \\
 &= \frac{0,389 - 0,319z^{-1}}{1 - 0,135z^{-1}}.
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

A inspeção da Eq. (8.28) nos fornece a equação de diferenças

$$u(k) = 0,135u(k-1) + 0,389e(k) - 0,319e(k-1), \tag{8.29}$$

com

$$e(k) = r(k) - y(k),$$

e isso completa o algoritmo de projeto digital. O sistema digital completo é mostrado na Fig. 8.11.

O último passo no processo de projeto é a verificação, implementando o projeto no computador. A Fig. 8.12 compara a resposta ao degrau do sistema digital usando $T = 1$ s com a resposta ao degrau da compensação contínua. Observe que há um maior sobressinal e um maior tempo de acomodação no sistema digital, o que sugere uma diminuição no amortecimento. O atraso médio $T/2$ mostrado na Fig. 8.2 é a causa da redução do amortecimento. Para uma adequação melhor ao sistema contínuo, pode ser prudente aumentar a taxa de amostragem. A Fig. 8.12 também mostra a resposta com uma amostragem duas vezes mais rápida, e pode-se ver que a resposta se torna muito mais próxima da resposta do sistema contínuo. Note que a compensação discreta tem que ser recalculada para esta taxa de amostragem mais rápida de acordo com as Eqs. (8.21) e (8.22).

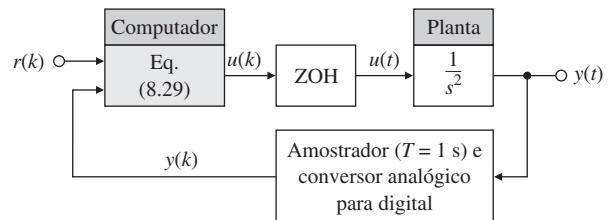


Figura 8.11 Um sistema de controle digital equivalente à Fig. 8.9.

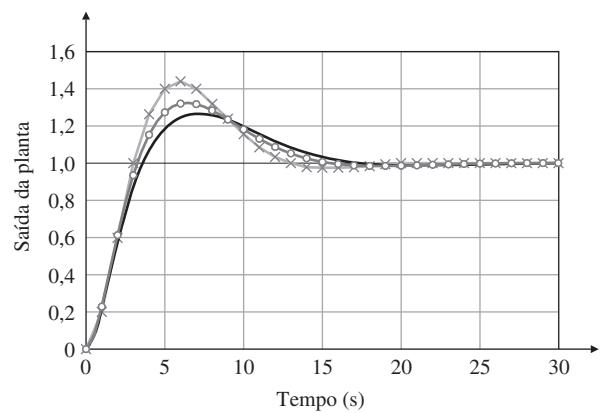


Figura 8.12 Respostas ao degrau para as implementações discrete e contínua.

— Projeto contínuo
x-x-x-x Projeto equivalente discreto, $T = 1$ s
o--o--o Projeto equivalente discreto, $T = 0,5$ s

É impossível amostrar $e(k)$, calcular $u(k)$ e, então, a saída $u(k)$, em um intervalo de tempo nulo; portanto, as Eqs. (8.26) e (8.29) são impossíveis de serem implementadas de forma precisa. No entanto, se a equação é bastante simples e/ou o computador é bastante rápido, um pequeno atraso computacional entre a amostra $e(k)$ e $u(k)$ terá um efeito negligenciável sobre a resposta real do sistema em comparação com o esperado a partir do projeto original. Uma regra de ouro seria manter o atraso computacional da ordem de 1/10 de T . A parte física do computador e o código de tempo real podem ser estruturados de forma que o atraso seja minimizado, certificando-se de que os cálculos entre ler A/D e escrever D/A sejam minimizados e que $u(k)$ seja enviado para o SOZ imediatamente após seu cálculo.

8.3.2 Método modificado de correspondência polo-zero (MMPZ)

O $D(z)$ na Eq. (8.23) também pode resultar em $u(k)$ dependente de $e(k)$, no mesmo instante de tempo. Se a estrutura física do computador proíbe essa relação ou se os cálculos são particularmente longos, pode ser desejável obter um $D(z)$ que tenha a potência de z no numerador menor por uma unidade do que a potência de z no denominador; portanto, a saída de computador $u(k)$ exigiria apenas a entrada a partir do momento anterior, isto é, $e(k - 1)$. Para fazer isso, simplesmente modificamos o Passo 2 no método MPZ de modo que o numerador tenha ordem inferior ao denominador por 1. Por exemplo, se

$$D(s) = K_c \frac{s + a}{s(s + b)},$$

vamos ao Passo 2 para obter

$$\begin{aligned} D(z) &= K_d \frac{z - e^{-aT}}{(z - 1)(z - e^{-bT})}, \\ K_d &= K_c \frac{a}{b} \left(\frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} \right). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Para encontrar a equação de diferenças, multiplicamos o numerador e o denominador da Eq. (8.30) por z^{-2} para obter

$$D(z) = K_d \frac{z^{-1}(1 - e^{-aT}z^{-1})}{1 - z^{-1}(1 + e^{-bT}) + z^{-2}e^{-bT}}. \quad (8.31)$$

Inspecionando a Eq. (8.31), podemos ver que a equação de diferenças é

$$u(k) = (1 + e^{-bT})u(k - 1) - e^{-bT}u(k - 2) + K_d[e(k - 1) - e^{-aT}e(k - 2)].$$

Nesta equação, um período de amostragem inteiro está disponível para realizar o cálculo e obter $u(k)$, pois depende apenas de $e(k - 1)$. A análise discreta deste controlador, portanto, explica com mais precisão o comportamento do sistema real. No entanto, devido ao fato de este controlador usar dados que são do ciclo anterior, ele normalmente não tem desempenho tão bom como o controlador MPZ em termos dos desvios da saída desejada do sistema na presença de perturbações aleatórias.

8.3.3 Comparação dos métodos de aproximação digital

Uma comparação numérica da magnitude da resposta em frequência do sistema

$$D(s) = \frac{5}{s + 5},$$

é feita na Fig. 8.13 para as três técnicas de aproximação e duas taxas de amostragem diferentes. Os $D(z)$ usados para construir a Fig. 8.13 são apresentados na Tabela 8.2.

A Fig. 8.13 mostra que todas as aproximações são muito boas em frequências abaixo de cerca de 1/4 da taxa de amostragem, ou $\omega_s/4$. Se $\omega_s/4$ é suficientemente maior do que a frequê-

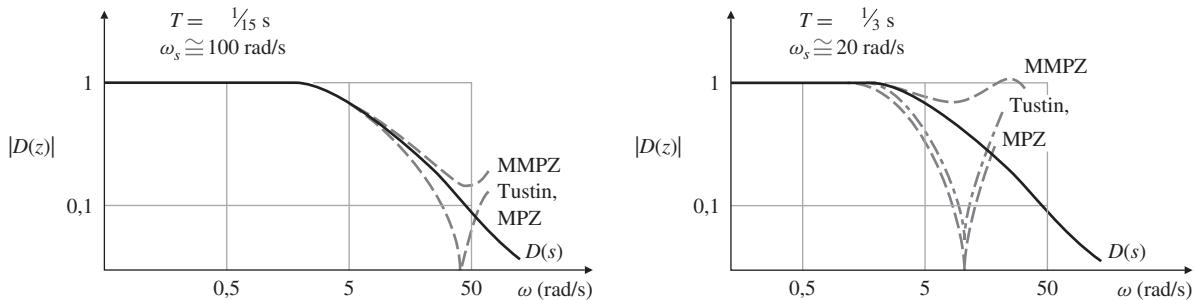


Figura 8.13 Uma comparação da resposta em frequência de três aproximações discretas.

cia de quebra do filtro – ou seja, se a amostragem é rápida o bastante – as características do ponto de quebra do compensador serão reproduzidas com precisão. A técnica de Tustin e o método MPZ mostram um corte aprofundado em $\omega_s/2$ por causa de seu zero em $z = -1$ do termo $z + 1$. Desconsiderando a grande diferença em $\omega_s/2$, que normalmente está fora do intervalo de interesse, os três métodos têm precisão semelhante.

8.3.4 Limites da aplicabilidade do método de projeto equivalente discreto

Se realizamos uma análise discreta exata ou uma simulação de um sistema e determinarmos a digitalização para uma ampla faixa da taxa de amostragem, o sistema seria frequentemente instável para taxas mais lentas do que aproximadamente $5\omega_n$, e o amortecimento poderia ser degradado significativamente para taxas mais lentas que cerca de $10\omega_n$. Para taxas de amostragem $\approx 20\omega_n$ (ou ≈ 20 vezes a largura de banda para sistemas mais complexos), o projeto baseado no compensador discreto equivalente fornece resultados razoáveis; e com taxas de amostragem de 30 vezes a largura de banda ou superior, os compensadores equivalentes discretos podem ser usados com confiança.

Como mostrado na Fig. 8.2, os erros acontecem porque a técnica ignora o efeito do atraso do SOZ que, em média, é $T/2$. Um método para levar o atraso em conta é aproximar o atraso $T/2$ com a Eq. (5.94) incluindo uma aproximação para a função de transferência para o SOZ:¹

$$G_{SOZ}(s) = \frac{2/T}{s + 2/T}. \quad (8.32)$$

Uma vez que o projeto inicial é realizado e a taxa de amostragem é selecionada, podemos melhorar nosso projeto discreto inserindo a Eq. (8.32) no modelo original da planta e ajustando $D(s)$ para que uma resposta satisfatória seja alcançada na presença do atraso de amostragem. Portanto, vemos que o uso da Eq. (8.32) parcialmente alivia a natureza aproximada no uso dos discretos equivalentes.

TABELA 8.2 Comparação das aproximações digitais de $D(z)$ para $D(s) = 5/(s+5)$

Método	ω_s	
	100 rad/s	20 rad/s
Correspondência polo-zero (MPZ)	$0,143 \frac{z + 1}{z - 0,715}$	$0,405 \frac{z + 1}{z - 0,189}$
MPZ Modificado	$0,285 \frac{1}{z - 0,715}$	$0,811 \frac{1}{z - 0,189}$
Tustin	$0,143 \frac{z + 1}{z - 0,715}$	$0,454 \frac{z + 1}{z - 0,0914}$

¹ Ou outra aproximação de Padé, como discutido na Seção 5.6.3.

8.4 Características físicas

Um sistema de controle digital inclui vários componentes exclusivos não encontrados em sistemas de controle contínuo: um **conversor analógico-digital** é um dispositivo que amostra o sinal de tensão contínuo a partir do sensor e converte o sinal para uma palavra digital; um conversor **digital-analógico** é um dispositivo para converter a palavra digital do computador para uma voltagem analógica, um **pré-filtro antialias** é um dispositivo analógico projetado para reduzir os efeitos de aliasing e o **computador** é o dispositivo no qual a compensação $D(z)$ é programada e os cálculos são realizados. Esta seção fornece uma breve descrição de cada uma deles.

8.4.1 Conversores analógico-digital (A/D)

Como discutido na Seção 8.1, conversores A/D são dispositivos que convertem um nível de tensão de um sensor para uma palavra digital usável pelo computador. No nível mais básico, todas as palavras digitais são números binários consistindo em muitos bits que são setados como 1 ou 0. Portanto, a tarefa do conversor A/D em cada tempo de amostragem é converter um nível de tensão para o padrão correto de bits e, muitas vezes, manter esse padrão até o momento da próxima amostra.

Das muitas técnicas de conversão A/D que existem, as mais comuns são baseadas em esquemas de contagem ou em uma técnica de aproximação sucessiva. Em métodos de contagem, a tensão de entrada pode ser convertida em um trem de pulsos cuja frequência é proporcional ao nível de tensão. Os pulsos, então, são contados durante um período fixo utilizando um contador binário, resultando em uma representação binária do nível de tensão. Uma variação deste esquema é começar a contagem simultaneamente com uma tensão que é linear no tempo e parar a contagem quando a tensão atinge a magnitude da tensão de entrada a ser convertida.

A técnica de aproximação sucessiva tende a ser muito mais rápida do que os métodos de contagem. Ela é baseada na comparação sucessiva da tensão de entrada com níveis de referência que representam os vários bits na palavra digital. Inicialmente, a tensão de entrada é comparada com um valor de referência que é a metade do valor máximo. Se a tensão de entrada é maior, o bit mais significativo é setado, e, então, o sinal é comparado com um nível de referência que é 3/4 do máximo para determinar o bit seguinte e assim por diante. Um ciclo de clock é necessário para definir cada bit, por isso um conversor n -bit exige n ciclos. Na mesma frequência de clock, um contador baseado no conversor pode exigir até 2^n ciclos, o que normalmente seria muito mais lento.

Com qualquer técnica, quanto maior o número de bits, mais tempo é necessário para realizar a conversão. O preço de conversores A/D geralmente aumenta com a velocidade e a quantidade de bit. Em 2009, um conversor de 14-bit (resolução de 0,006%), com uma capacidade de desempenho elevado, tempo de conversão 10- n s (100 milhões de amostras por segundo) era vendido por aproximadamente US\$ 25, enquanto, um conversor de 12 bits (0,025%), com uma boa capacidade de desempenho, tempo de conversão de 1 μ s (1 milhão de amostras por segundo), era vendido por aproximadamente US\$ 4. Um conversor de 8 bits (0,4% resolução) com um tempo de conversão 1 μ s era vendido por aproximadamente US\$ 1. O desempenho tem melhorado consideravelmente a cada ano.

Se mais de um canal de dados precisa ser amostrado e convertido em palavras digitais, geralmente se usa um multiplexador em vez de conversores A/D múltiplos. O multiplexador conecta sequencialmente o conversor para o canal que está sendo amostrado.

8.4.2 Conversores digital-analógico (D/A)

Conversores D/A, como mencionado na Seção 8.1, são utilizados para converter as palavras digitais do computador para um nível de tensão e, às vezes, são referidos como dispositivos que **Amostram e Seguram**. Eles oferecem saídas analógicas de um computador para a condução de atuadores ou talvez para um dispositivo de gravação, como um osciloscópio ou registrador gráfico. A ideia básica por trás de sua operação é que os bits binários formem interruptores (portões eletrônicos) para abrir ou fechar, assim encaminhando a corrente elétrica através de

uma rede de resistência adequada para gerar o nível de tensão correto. Como não é necessária a contagem ou iteração para tais conversores, eles tendem a ser muito mais rápidos do que os conversores A/D. Na verdade, os conversores A/D que usam o método de aproximações sucessivas de conversão incluem conversores D/A como componentes.

8.4.3 Pré-filtros antialias

Pré-filtros analógicos reduzem o aliasing

Um **pré-filtro antialias** analógico geralmente é colocado entre o sensor e o conversor A/D. Sua função é reduzir as componentes de alta frequência de ruído no sinal analógico a fim de evitar o aliasing, tendo assim, modulado o ruído para uma frequência mais baixa pelo processo de amostragem.

Um exemplo de aliasing é mostrado na Fig. 8.14, na qual um sinal de 60 Hertz oscilatório está sendo amostrado a 50 Hertz. A figura mostra o resultado das amostras como um sinal de 10 Hertz e mostra também o mecanismo pelo qual a frequência do sinal de 60 Hertz se reduz para 10 Hertz devido ao aliasing. O aliasing vai ocorrer a qualquer momento quando a taxa de amostragem não for pelo menos duas vezes mais rápida que qualquer uma das frequências do sinal que está sendo amostrado. Portanto, para evitar o aliasing em um sinal de 60 Hertz, a taxa de amostragem teria de ser mais rápida que 120 Hertz, claramente muito superior à taxa de 50 Hertz na figura.

Aliasing é uma das consequências do **teorema de amostragem de Nyquist e Shannon**. O teorema basicamente afirma que, para o sinal ser reconstruído com precisão a partir das amostras, não deve haver componente de frequência maior do que a metade da taxa de amostragem ($\omega_s/2$). Outra consequência desse teorema é que a maior frequência que pode ser representada sem ambiguidade por amostras discretas é a taxa de Nyquist $\omega_s/2$, uma ideia que discutimos na Seção 8.2.3.

A consequência do aliasing em um sistema de controle digital pode ser significativa. Em um sistema contínuo, componentes de ruído com frequência muito maior do que a largura de banda do sistema de controle normalmente têm um efeito pequeno, porque o sistema não responderá a altas freqüências. No entanto, em um sistema digital a frequência do ruído pode sofrer uma redução, devido ao aliasing, até a proximidade da largura de banda do sistema, de forma que, o sistema em malha fechada responda ao ruído. Assim, o ruído em um sistema de controle digital mal projetado poderia ter um efeito substancialmente maior do que se o controle tivesse sido implementado utilizando eletrônica analógica.

A solução é colocar um pré-filtro analógico antes do amostrador. Em muitos casos, um simples filtro passa-baixa de primeira ordem faz isso,

$$H_p(s) = \frac{a}{s + a},$$

no qual o ponto de quebra a é selecionado para ser menor que $\omega_s/2$ de modo que qualquer ruído presente com frequências maiores que $\omega_s/2$ seja atenuado pelo pré-filtro. Quanto menor a frequência do ponto de quebra selecionado, mais ruído acima de $\omega_s/2$ é atenuado. No entanto, um ponto de quebra muito pequeno pode forçar o projetista a reduzir a largura de banda do sistema

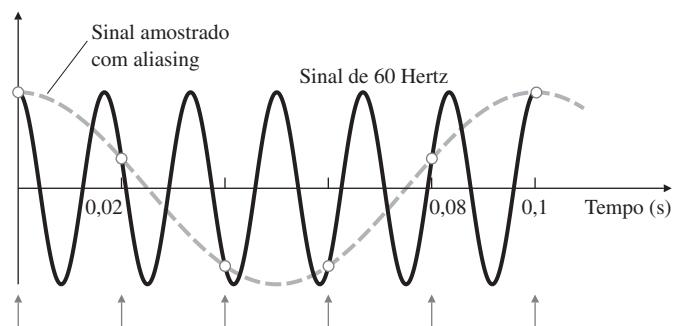


Figura 8.14 Um exemplo de aliasing.

de controle. O pré-filtro não elimina completamente o aliasing, no entanto, por meio da escolha criteriosa do ponto de quebra do pré-filtro e da taxa de amostragem, o projetista tem a capacidade de reduzir a magnitude do ruído sujeito ao aliasing para um nível aceitável.

8.4.4 O computador

O computador é a unidade que realiza todos os cálculos. Atualmente, a maioria dos controladores digitais usados é construída em torno de um microcontrolador que contém um microprocessador e a maioria das outras funções necessárias, incluindo os conversores A/D e D/A. Para fins de desenvolvimento em laboratório, um controlador digital pode ser uma grande estação de trabalho ou um PC. O custo relativamente baixo da tecnologia do microprocessador foi responsável pelo grande aumento no uso de sistemas de controle digital, que começou na década de 1980 e continua até os anos 2000. O computador é composto de uma unidade de processamento central (CPU), que faz os cálculos e fornece a lógica do sistema; um clock, para sincronizar o sistema; módulos de memória para armazenamento de dados e instruções; e uma fonte de alimentação para fornecer as várias tensões necessárias. Os módulos de memória vêm em três variedades básicas:

1. **Memória só de leitura (ROM)** é a menos cara, mas, depois de fabricada, seu conteúdo não pode ser alterado. A maioria das memórias em produtos fabricados em escala é ROM. Ela retém seus valores armazenados quando a energia é removida.
2. **Memória de acesso aleatório (RAM)** é a mais cara, mas seus valores podem ser alterados pela CPU. Ela deve apenas armazenar os valores que serão alterados durante o processo de controle e, normalmente, representa apenas uma pequena fração da memória total de um produto desenvolvido. Ela perde os valores na memória quando a energia é removida.
3. **Memória programável só de leitura (EPROM)** é uma ROM cujos valores podem ser alterados por um técnico usando um dispositivo especial. É normalmente utilizada durante o desenvolvimento do produto para permitir que o projetista experimente diferentes algoritmos e valores dos parâmetros. Ela retém seus valores armazenados quando a energia é removida. Em alguns produtos, é útil ter alguns valores armazenados em EPROM, de modo que calibrações individuais possam ser realizadas em cada unidade.

Microprocessadores para aplicações de controle geralmente vêm com palavra digital de tamanho de 8, 16 ou 32 bits, embora alguns já estejam disponíveis com 12 bits. Tamanhos de palavras maiores fornecem maior precisão, mas têm custos maiores. A solução mais econômica muitas vezes é usar um microprocessador de 8 bits, mas duas palavras, digitais para armazenar um valor (**precisão dupla**) nas áreas do controlador que são fundamentais para a precisão do sistema. Muitos sistemas de controle digitais usam computadores originalmente projetados para aplicações de processamento digital de sinais, os chamados DSP.

8.5 Seleção de taxa de amostragem

A seleção da melhor taxa de amostragem para um sistema de controle digital é o resultado de um compromisso de muitos fatores. Amostragem rápida demais pode causar perda de precisão, enquanto a motivação básica para reduzir a taxa de amostragem ω_s é o custo. Uma diminuição na taxa de amostragem significa mais tempo disponível para os cálculos de controle; portanto, computadores mais lentos podem ser usados para uma dada função de controle ou uma capacidade maior de controle pode ser alcançada a partir de um determinado computador. De qualquer maneira, o custo por função é reduzido. Para sistemas com conversores A/D, uma demanda menor na velocidade de conversão também irá reduzir o custo. Estes argumentos econômicos indicam que a melhor opção de engenharia é a taxa de amostragem mais lenta possível que ainda atenda a todas as especificações de desempenho.

Há vários fatores que poderiam fornecer um limite inferior para a taxa de amostragem aceitável:

1. eficiência de rastreamento como a medida da largura de banda de malha fechada ou pelos requisitos da resposta temporal, como tempo de subida e tempo de acomodação;
2. eficiência de regulação medida pela resposta de erro aos distúrbios aleatórios da planta;
3. erro devido ao ruído de medição e métodos de projeto de pré-filtro associados.

Um limite fictício ocorre quando se utilizam equivalentes discretos. A aproximação inerente no método pode dar origem a uma redução no desempenho ou até mesmo à instabilidades no sistema quando a taxa de amostragem é reduzida. Isso pode levar o projetista a concluir que uma taxa de amostragem mais rápida é necessária. No entanto, existem duas soluções:

1. amostrar mais rápido e
2. reconhecer que as aproximações são inválidas e refinar o projeto com um método de projeto digital direto descrito nas seções subsequentes.

A facilidade de projetar sistemas de controle digital com taxas de amostragem rápidas e o baixo custo de computadores muito eficientes muitas vezes levam o projetista a selecionar uma taxa de amostragem de $40 \times \omega_{BW}$ ou superior. Para computadores com aritmética de ponto fixo, taxas de amostragem muito rápidas podem levar a erros de multiplicação que têm o potencial de produzir deslocamentos significativos ou ciclos limite no controle (ver Franklin *et al.*, 1998).

8.5.1 Eficiência de rastreamento

Um limite inferior absoluto ligado à taxa de amostragem é definido por uma especificação de rastrear uma entrada de comando com uma certa frequência (a largura de banda do sistema). O teorema de amostragem (ver Seção 8.4.3 e Franklin *et al.*, 1998) afirma que, a fim de reconstruir um sinal contínuo desconhecido, banda limitada, a partir de amostras desse sinal, temos de amostrar pelo menos duas vezes mais rápido que a maior frequência contida no sinal. Portanto, para que um sistema em malha fechada rastreie uma entrada a uma certa frequência, ele deve ter uma taxa de amostragem duas vezes mais rápida, ou seja, ω_s deve ser pelo menos duas vezes a largura de banda do sistema ($\omega_s \Rightarrow 2 \times \omega_{BW}$). Vimos também, a partir dos resultados de mapeamento do plano s no plano z ($z = e^{sT}$), que a frequência mais alta que pode ser representada por um sistema discreto é $\omega_s/2$, que suporta a conclusão do teorema.

É importante notar a distinção entre a largura de banda em malha fechada e a maior frequência na dinâmica da planta em malha aberta, porque as duas frequências podem ser bastante diferentes. Por exemplo, larguras de banda em malha fechada podem ter a ordem da magnitude menor do que os modos de ressonância de malha aberta em alguns problemas de controle. Informações sobre os estados de ressonâncias da planta para fins de controle podem ser extraídas a partir da amostragem da saída sem satisfazer o teorema de amostragem, porque um conhecimento a priori sobre essas dinâmicas (embora impreciso) está disponível, e não é preciso que o sistema rastreie essas frequências. Assim, um conhecimento a priori do modelo dinâmico da planta pode ser incluído na compensação sob a forma de um filtro rejeita faixa.

A limitação da largura de banda de malha fechada fornece o limite inferior fundamental da taxa de amostragem. Na prática, porém, o menor limite de amostragem teórica, duas vezes a largura de banda do sinal de referência, não seria considerado suficiente em termos da qualidade desejada para as respostas temporais. Para um sistema com um tempo de subida na ordem de 1 s (fornecendo, assim, uma largura de banda de malha fechada da ordem de 0,5 Hertz), é razoável insistir em uma taxa de amostragem de 10 a 20 Hertz, que é um fator de 20 a 40 vezes a ω_{BW} . Os propósitos de escolher uma taxa de amostragem muito maior do que a largura de banda são reduzir o atraso entre um comando e a resposta do sistema para o comando e, também, suavizar a saída do sistema para sinais de controle em degrau saindo do SOZ.

8.5.2 Rejeição ao distúrbio

Rejeição ao distúrbio é um importante, se não o mais importante, aspecto de qualquer sistema de controle. Distúrbios são introduzidos em um sistema com diversas características de frequência, que vão desde degraus até ruído branco. Para efeitos na seleção da taxa de amostragem, os distúrbios aleatórios de alta frequência são os mais influentes.

A capacidade do sistema de controle de rejeitar distúrbios com um bom controlador contínuo representa o limite inferior da resposta de erro que podemos esperar ao implementar o controlador digital. De fato, alguma degradação em relação ao projeto contínuo deve ocorrer, porque os valores amostrados são ligeiramente diferentes dos dados, exceto precisamente nos instantes de amostragem. No entanto, se a taxa de amostragem é muito rápida comparada com as frequências contidas na perturbação ruidosa, não devemos esperar perda apreciável do sistema digital, em comparação com o controlador contínuo. No outro extremo, se a taxa de amostragem é muito lenta em comparação com as frequências características do ruído, a resposta do sistema devido ao ruído seria essencialmente a mesma resposta que se obteria se o sistema não tivesse controle algum. A seleção de uma taxa de amostragem vai posicionar a resposta em algum lugar entre esses dois extremos. Assim, o impacto da taxa de amostragem sobre a capacidade do sistema de rejeitar distúrbios pode ser muito importante na hora da escolha da taxa de amostragem.

Embora a melhor escolha de taxa de amostragem em termos de múltiplos ω_{BW} seja dependente das características de frequência do ruído e do grau de importância de rejeição de distúrbios aleatórios para a qualidade do controlador, as taxas de amostragem da ordem de 25 vezes ω_{BW} ou superior são típicas.

8.5.3 Efeito do pré-filtro antialias

Sistemas de controle digital com sensores analógicos geralmente incluem um pré-filtro antialias analógico entre o sensor e o amostrador, como descrito na Seção 8.4.3. Os pré-filtros são do tipo passa baixa, e a função de transferência mais simples é

$$H_p(s) = \frac{a}{s + a},$$

de modo que o ruído acima do ponto de quebra do pré-filtro a seja atenuado. O objetivo é oferecer bastante atenuação na metade da taxa de amostragem ($\omega_s/2$) para que o ruído acima de $\omega_s/2$, quando o aliasing ocorre em frequências mais baixas devido ao amostrador, não seja prejudicial ao desempenho do sistema de controle.

Um procedimento de projeto conservador é selecionar ω_s e o ponto de quebra suficientemente maiores que a largura de banda do sistema tal que o atraso de fase do pré-filtro não altere significativamente a estabilidade do sistema. Isso permitiria ignorar o pré-filtro no projeto básico de sistema de controle. Além disso, para uma boa redução do ruído de alta frequência em $\omega_s/2$, escolhemos uma taxa de amostragem cerca de 5 ou 10 vezes maior do que o ponto de quebra do pré-filtro. A implicação deste procedimento de projeto do pré-filtro é que as taxas de amostragens precisam ser da ordem de 30 a 100 vezes mais rápidas que a largura de banda do sistema. Usando este procedimento conservador de projeto, a influência do pré-filtro provavelmente irá fornecer o limite inferior da seleção da taxa de amostragem.

Um procedimento de projeto alternativo é permitir um atraso de fase significativo do pré-filtro na largura de banda do sistema. Isso nos obriga a incluir as características do pré-filtro analógico no modelo da planta ao realizar o projeto de controle, o que nos permite usar taxas de amostragem menores, mas à custa do possível aumento de complexidade na compensação, porque um adicional avanço de fase deve ser fornecido para neutralizar o atraso de fase do pré-filtro. Se esse procedimento for utilizado e se forem permitidos baixos pontos de quebra do pré-filtro, o efeito da taxa de amostragem no ruído do sensor será pequeno, e o pré-filtro, essencialmente, não terá efeito sobre a taxa de amostragem.

Pode parecer contra-intuitivo que colocar um atraso de fase (o pré-filtro analógico) em uma parte do controlador e o avanço de fase [avanço extra em $D(z)$], contrabalanceando, em outra parte do controlador forneça um efeito líquido positivo no sistema global. O ganho líquido é resultado do fato de que o atraso está na parte analógica do sistema, na qual as altas frequências podem existir. A ação contrária de avanço está na parte digital do sistema, na qual as frequências acima da taxa de Nyquist não existem. O resultado é uma redução nas altas frequências antes da amostragem, que não são novamente amplificadas pelo avanço digital, produzindo assim

uma redução líquida em altas frequências. Além disso, essas altas frequências são particularmente insidiosas, com um controlador digital devido ao aliasing que resultaria da amostragem.

8.5.4 Amostragem assíncrona

Como observado nos parágrafos anteriores, separar os projetos do pré-filtro e da lei de controle pode exigir o uso de uma taxa de amostragem mais rápida do que no caso contrário. Esse mesmo resultado pode aparecer em outros tipos de arquitetura. Por exemplo, um sensor inteligente com seu próprio computador rodando de forma assíncrona em relação ao computador de controle primário não será passível de projeto digital direto, porque a função de transferência do sistema global depende da fase entre o sensor inteligente e o controlador digital primário. Esta situação é semelhante ao erros de digitalização discutidos na Seção 8.6. Portanto, se subsistemas digitais assíncronos estão presentes, as taxas de amostragem da ordem de $20 \times \omega_{BW}$ ou mais lentas em qualquer módulo devem ser usadas com cautela, e o desempenho do sistema deve ser checado por meio de simulação ou experimento.

△ 8.6 Projeto discreto

É possível obter um modelo discreto exato que relate as amostras da planta contínua $y(k)$ à entrada da sequência de controle $u(k)$. Esse modelo da planta pode ser usado como parte de um modelo discreto do sistema realimentado incluindo o compensador $D(z)$. Análise e projeto usando este modelo discreto é chamado de **projeto discreto** ou, alternativamente, **projeto digital direto**. As subseções seguintes descrevem como encontrar o modelo discreto da planta (Seção 8.6.1), com o que a compensação realimentada parece quando estamos projetando com um modelo discreto (Seções 8.6.2 e 8.6.3) e como o processo de projeto é realizado (Seção 8.6.4).

8.6.1 Ferramentas de análise

O primeiro passo no desenvolvimento de uma análise discreta de um sistema com alguns elementos discretos é encontrar a função de transferência discreta da parte contínua. Para um sistema semelhante ao mostrado na Fig. 8.1(b), queremos encontrar a função de transferência entre $u(kT)$ e $y(kT)$. Ao contrário dos casos discutidos nas seções anteriores, há um equivalente discreto *exato* para este sistema, porque o SOZ que descreve precisamente o que acontece entre as amostras de $u(kT)$ e a saída $y(kT)$ é dependente apenas da entrada nos instantes de amostragem $u(kT)$.

Para uma planta descrita por $G(s)$ e precedida por um SOZ, a função de transferência discreta é

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}, \quad (8.33)$$

sendo $\mathcal{Z}\{F(s)\}$ a transformada z da série temporal amostrada cuja transformada de Laplace é a expressão de $F(s)$, dados na mesma linha da Tabela 8.1. A Eq. (8.33) possui o termo $G(s)/s$ porque o controle vem do SOZ como uma entrada em degrau durante cada período de amostragem. O termo $1 - z^{-1}$ reflete o fato de que um degrau com duração de uma amostra pode ser visto como um degrau de duração infinita seguido por um degrau negativo com ciclo atrasado. Para um detalhamento mais completo, veja Franklin *et al.* (1998). A Eq. (8.33) nos permite substituir o sistema híbrido (contínuo e discreto) mostrado na Fig. 8.15(a) pelo sistema equivalente puramente discreto mostrado na Fig. 8.15(b).

A análise e projeto de sistemas discretos é muito semelhante à análise e projeto de sistemas contínuos; na verdade, todas as mesmas regras se aplicam. A função de transferência de malha fechada da Figura. 8.15(b) é obtida utilizando as mesmas regras de redução de diagrama de blocos, isto é,

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}. \quad (8.34)$$

O equivalente discreto exato

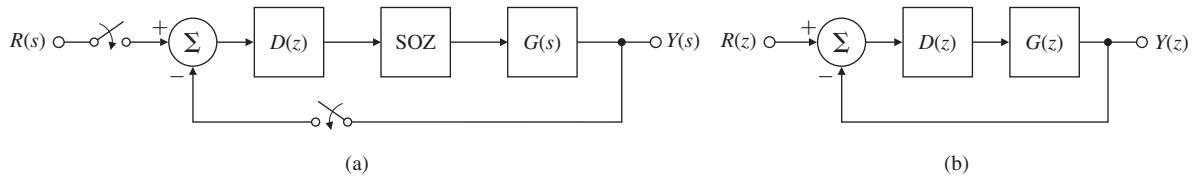


Figura 8.15 Comparação de (a) um sistema de controle híbrido e (b) seu equivalente discreto puro.

Para encontrar o comportamento característico do sistema em malha fechada, precisamos encontrar os fatores no denominador da Eq. (8.34); isto é, as raízes da equação característica discreta

$$1 + D(z)G(z) = 0.$$

As técnicas do lugar das raízes usadas em sistemas contínuos para encontrar as raízes de um polinômio em s se aplicam igualmente bem e sem modificação ao polinômio em z ; no entanto, a interpretação dos resultados é bem diferente, como vimos na Fig. 8.4. A principal diferença é que o limite de estabilidade agora é o círculo unitário em vez do eixo imaginário.

EXEMPLO 8.3 Lugar das raízes discreto

Para o caso em que $G(s)$ na Fig. 8.15(a) é

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

e $D(z) = K$, desenhe o lugar das raízes em relação a K e compare seus resultados com um lugar das raízes de uma versão contínua do sistema. Discuta as implicações dos seus lugares das raízes.

Solução. Segue da Eq. (8.33) que

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\left[\frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT}z^{-1})}\right] \\ &= \frac{1 - \alpha}{z - \alpha}, \end{aligned}$$

sendo

$$\alpha = e^{-aT}.$$

Para analisar o desempenho do sistema em malha fechada, as regras padrões do lugar das raízes se aplicam. O resultado é mostrado na Fig. 8.16(a) para o caso discreto e na Fig. 8.16(b) para o caso contínuo. Em contraste com o caso contínuo, no qual o sistema permanece estável para

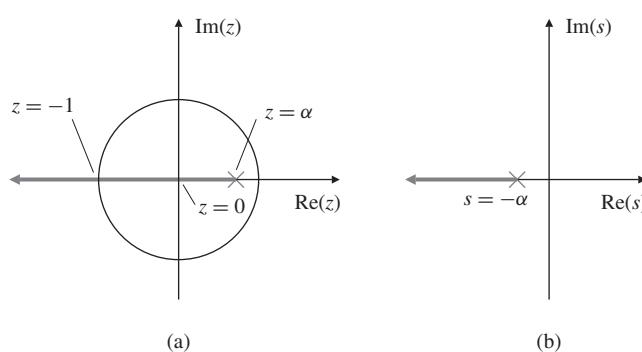


Figura 8.16 Lugares das raízes para (a) o plano-z e (b) o plano-s.

todos os valores de K , no caso discreto o sistema se torna oscilatório com a diminuição do coeficiente de amortecimento quando z vai de 0 a -1 e, em um dado momento, torna-se instável. Essa instabilidade deve-se ao efeito do atraso de SOZ, que é devidamente contabilizado na análise discreta.

8.6.2 Propriedades de realimentação

Em sistemas contínuos, normalmente iniciamos o processo de projeto usando elementos básicos de controle, a saber, as leis de controle: proporcional, derivativa ou integral, ou alguma combinação destas, às vezes com uma compensação de atraso incluída. As mesmas ideias podem ser usadas no projeto discreto. Alternativamente, o $D(z)$ resultante da digitalização de um $D(s)$ projetado contínuo irá produzir esses elementos básicos de projeto que serão, então, utilizados como um ponto de partida em um projeto discreto. As leis de controle discreto são as seguintes:

Leis de controle discreto

Proporcional

$$u(k) = K e(k) \Rightarrow D(z) = K. \quad (8.35)$$

Derivativa

$$u(k) = K T_D [e(k) - e(k-1)], \quad (8.36)$$

para a qual a função de transferência é

$$D(z) = K T_D (1 - z^{-1}) = K T_D \frac{z - 1}{z} = k_D \frac{z - 1}{z}. \quad (8.37)$$

Integral

$$u(k) = u(k-1) + \frac{K_p}{T_I} e(k), \quad (8.38)$$

para a qual a função de transferência é

$$D(z) = \frac{K}{T_I} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right) = \frac{K}{T_I} \left(\frac{z}{z - 1} \right) = k_I \left(\frac{z}{z - 1} \right). \quad (8.39)$$

Compensador de avanço

Os exemplos na Seção 8.3 mostraram que um compensador de avanço contínuo fornece a equação de diferenças da forma

$$u(k+1) = \beta u(k) + K[e(k+1) - \alpha e(k)], \quad (8.40)$$

para a qual a função de transferência é

$$D(z) = K \frac{1 - \alpha z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}}. \quad (8.41)$$

8.6.3 Exemplo de projeto discreto

O projeto de controle digital consiste em utilizar os elementos básicos de realimentação das Eqs. (8.35) a (8.41) e iterar nos parâmetros de projeto até que todas as especificações sejam atendidas.

EXEMPLO 8.4 Projeto discreto direto do controlador digital de uma estação espacial

Projete um controlador digital que atenda às mesmas especificações no Exemplo 8.2 usando o projeto discreto.

Solução. O modelo discreto da planta $1/s^2$, precedido por um SOZ, é encontrado por meio da Eq. (8.33) como

$$G(z) = \frac{T^2}{2} \left[\frac{z+1}{(z-1)^2} \right],$$

a qual, com $T = 1$ s, torna-se

$$G(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{z+1}{(z-1)^2} \right].$$

Realimentação proporcional no caso contínuo gera movimento oscilatório puro, assim, no caso discreto devemos esperar resultados ainda piores. O lugar das raízes na Fig. 8.17 confirma isto. Para valores muito pequenos de K (em que o lugar das raízes representa as raízes em frequências muito baixas em comparação com a taxa de amostragem), o lugar das raízes é tangente ao círculo unitário ($\zeta \cong 0$ indicando o movimento oscilatório puro), que se igualará ao projeto proporcional contínuo.

Para valores mais elevados de K , a Fig. 8.17 mostra que o lugar das raízes diverge na região instável por causa do efeito do SOZ e da amostragem. Para compensar isso, vamos adicionar um termo derivativo ao termo proporcional para que a lei de controle torne-se

$$U(z) = K[1 + T_D(1 - z^{-1})]E(z), \quad (8.42)$$

a qual fornece uma compensação da forma

$$D(z) = K \frac{z - \alpha}{z}, \quad (8.43)$$

sendo que o novo K e α substituem o K e o T_D na Eq. (8.42). Agora, a tarefa é encontrar os valores de α e K que forneçam um bom desempenho. As especificações para o projeto são de que $\omega_n = 0,3$ rad/s e $\zeta = 0,7$. A Fig. 8.4 indica que esta localização da raiz no plano-s é mapeada na localização desejada no plano-z

$$z = 0,78 \pm 0,18j.$$

A Fig. 8.18 é o lugar das raízes em relação a K para $\alpha = 0,85$. A localização do zero (em $z = 0,85$) foi determinada por tentativa e erro até que o lugar das raízes passasse pelo local desejado no plano-z. O valor do ganho quando o lugar das raízes passa por $z = 0,78 \pm 0,18j$ é $K = 0,374$. Agora, a Eq. (8.43) torna-se

$$D(z) = 0,374 \frac{z - 0,85}{z}. \quad (8.44)$$

Normalmente, não é vantajoso alocar de forma precisa as raízes no plano-z, mas é necessário apenas escolher K e α (ou T_D) para obter raízes aceitáveis no plano-z, uma tarefa muito mais fácil. Neste exemplo, queremos fazer a alocação em apenas um local específico para que possamos comparar o resultado com o projeto no Exemplo 8.2.

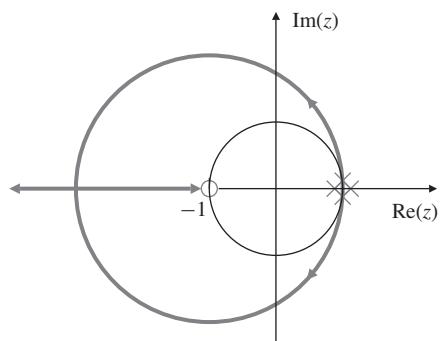
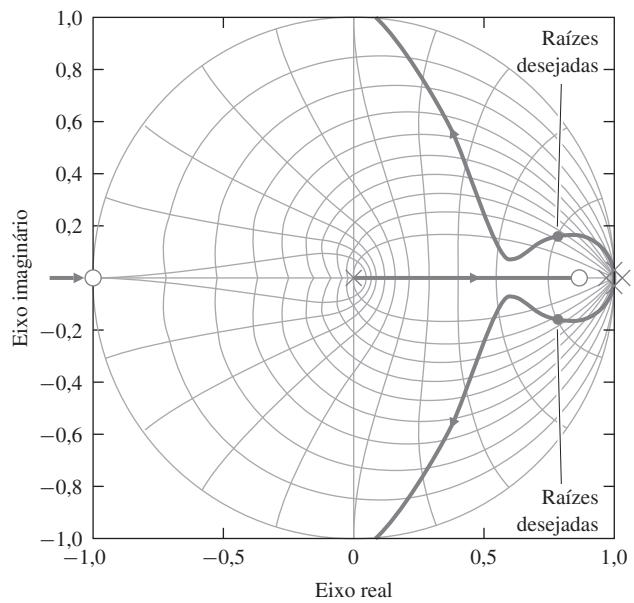


Figura 8.17 Lugar das raízes no plano-z para a planta $1/s^2$ com realimentação proporcional.

Figura 8.18 Lugar das raízes no plano-z para a planta $1/s^2$ com $D(z) = K(z - 0,85)/z$.



A lei de controle resultante é

$$U(z) = 0,374(1 - 0,85z^{-1})E(z),$$

ou

$$u(k) = 0,374e(k) - 0,318e(k-1), \quad (8.45)$$

que é similar à equação de controle (8.29) obtida previamente.

O controlador na Eq. (8.45), basicamente, difere do controlador projetado continuamente [Eq. (8.29)] apenas pela ausência do termo $u(k-1)$. O termo $u(k-1)$ na Eq. (8.29) resulta do termo de atraso ($s + b$) na compensação [Eq. (8.27)]. O termo de atraso é normalmente incluído em ambos os controladores analógicos porque fornece atenuação ao ruído e porque diferenciadores puramente analógicos são difíceis de construir. Algum atraso equivalente no projeto discreto aparece naturalmente como um polo em $z = 0$ (veja a Fig. 8.18) e representa o atraso de uma amostra no cálculo da derivada pela primeira diferença. Para mais atenuação de ruído, poderíamos mover o polo para a direita de $z = 0$, resultando em menos ação derivativa e mais suavidade; o mesmo compromisso existe no projeto de controle contínuo.

8.6.4 Análise discreta de projetos

Qualquer controlador digital, projetado por equivalentes discretos ou diretamente no plano-z, podem ser analisados usando análise discreta, que consiste das seguintes etapas:

1. Encontre o modelo discreto da planta com o SOZ usando a Eq. (8.33).
2. Forme o sistema realimentado incluindo $D(z)$.
3. Analise o sistema discreto resultante.

Podemos determinar as raízes do sistema usando um lugar das raízes, conforme descrito na Seção 8.6.3, ou podemos determinar o histórico temporal (nos instantes de amostragem) do sistema discreto.

EXEMPLO 8.5 Amortecimento e resposta ao degrau digital versus o projeto contínuo

Use a análise discreta para determinar o amortecimento equivalente do plano-s e as respostas ao degrau dos projetos digitais nos Exemplos 8.2 e 8.4 e compare seus resultados com o amortecimento e a resposta ao degrau do caso contínuo no Exemplo 8.2.

Solução. Os comandos no MATLAB para avaliar o amortecimento e a resposta ao degrau do caso contínuo no Exemplo 8.2 são

```
sysGs = tf(1,[1 0 0]);
sysDs = tf(0.81 * [1 0.2],[1 2]);
sysGDs = series(sysGs,sysDs);
sysCLs = feedback(sysGDs,1,1);
step(sysCLs)
damp(sysCLs)
```

Para analisar os casos de controle digital, o modelo da planta precedida pelo SOZ é encontrado usando os comandos

```
T = 1;
sysGz = c2d(sysGs,T,'zoh')
```

A análise do controle digital projetado usando o equivalente discreto [Eq. (8.29)] no Exemplo 8.2 é realizada pelos comandos

```
sysDz = tf([.389 -.319],[1 -.135])
sysDGz = series(sysGz,sysDz)
sysCLz = feedback(sysDGz,1)
step(sysCLz,T)
damp(sysCLz,T)
```

Da mesma forma, o projeto discreto de $D(z)$ da Eq. (8.44) pode ser analisado pela mesma sequência.

As respostas ao degrau resultantes são mostradas na Fig. 8.19. O amortecimento ζ calculado e a frequência natural ω_n das raízes complexas do sistema em malha aberta são

$$\text{Caso contínuo: } \zeta = 0,705, \quad \omega_n = 0,324$$

$$\text{Equivalente discreto: } \zeta = 0,645, \quad \omega_n = 0,441$$

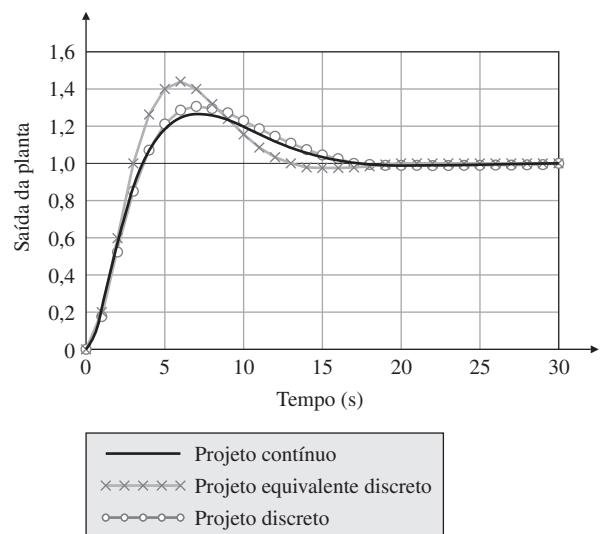
$$\text{Projeto discreto: } \zeta = 0,733, \quad \omega_n = 0,306$$

A figura mostra o sobressinal maior para o método equivalente discreto, o que ocorreu devido à diminuição do amortecimento neste caso. O sobressinal com um pequeno aumento ocorreu no projeto discreto, porque a compensação foi ajustada especificamente para que o amortecimento equivalente ao plano- s do sistema discreto fosse, aproximadamente, o valor desejado de amortecimento $\zeta = 0,7$.

Embora a análise tenha mostrado algumas diferenças entre o desempenho dos controladores digitais projetados pelos dois métodos, nem o desempenho nem as equações de controle [Eqs. (8.29) e (8.45)] são muito diferentes. Esta semelhança ocorre porque a taxa de amostragem é bastante rápida comparada com ω_n ; isto é, $\omega_s \cong 20 \times \omega_n$. Se reduzíssemos a taxa de amostragem, os valores numéricos dos compensadores tornariam cada vez mais diferentes e degradariam o desempenho consideravelmente para o caso equivalente discreto.

Como uma regra geral, o projeto discreto deve ser usado se a frequência de amostragem for mais lenta que $10 \times \omega_n$. No mínimo, um projeto equivalente discreto com amostragem lenta ($\omega_n < 10 \times \omega_n$) deve ser verificado por uma análise discreta ou por simulação, conforme descrito na Seção 4.4, e a compensação deve ser ajustada, se necessário. Uma simulação de um sistema de controle digital é uma boa ideia em qualquer caso. Se ela leva em conta corretamente todos os atrasos e, possivelmente, o comportamento assíncrono de módulos diferentes, ela pode expor instabilidades que são impossíveis de detectar usando análise linear contínua ou discreta. Uma discussão mais completa sobre os efeitos da taxa de amostragem no projeto está na Seção 8.5.

Figura 8.19 Resposta ao degrau dos sistemas contínuo e digital nos Exemplos 8.2 e 8.4.



8.7 Perspectiva histórica

Um dos primeiros exemplos reais de controle de sistemas baseados em dados amostrados veio com o uso de busca por RADAR na Segunda Guerra Mundial. Nesse caso, a posição do alvo estava disponível apenas uma vez a cada rotação da antena. A teoria dos sistemas de dados amostrados foi desenvolvida pelo matemático W. Hurewicz² e publicado como um capítulo em H. M. James, N. B. Nichols e R. S. Phillips, *Theory of Servomechanisms*, vol. 25, Rad Lab Series, New York, McGraw Hill, 1947. A perspectiva histórica para o Capítulo 5 discutiu a introdução dos computadores para os engenheiros exercerem atividades de projeto. A possibilidade de usar computadores para o controle digital direto motivou a continuação do trabalho em sistemas de dados amostrados durante a década de 1950, especialmente na Universidade de Columbia com o Professor J. R. Ragazzini. Esse trabalho foi publicado em J. R. Ragazzini e G. F. Franklin, *Sampled-Data Control Systems*, New York, McGraw Hill, 1958. As primeiras aplicações foram no controle de processos industriais, nos quais o tamanho relativamente grande e o alto custo dos computadores disponíveis no momento poderiam ser justificados. O Professor Karl Astrom introduziu o controle digital direto em uma fábrica de papel na Suécia na década de 1960.

Em 1961, quando o presidente Kennedy anunciou o objetivo de enviar um homem à lua, não existiam pilotos automáticos digitais para veículos aeroespaciais. Na verdade, pequenos computadores digitais adequados para implementação de sistemas de controle eram praticamente inexistentes. A equipe do Laboratório MIT Draper (conhecido como o Laboratório de Instrumentação na época) encarregada de projetar e construir os sistemas de controle da Apollo projetou, inicialmente, os sistemas de controle para os módulos lunar e de comando com eletrônica analógica convencional. No entanto, eles descobriram que esses sistemas seriam demasiadamente pesados e complexos para a missão. Assim, a decisão tomada foi de projetar e construir o primeiro sistema de controle digital aeroespacial. Bill Widnall, Dick Battin e Don Fraser foram os principais responsáveis do bem-sucedido projeto e execução desse sistema de voo da Apollo no final dos anos 1960. O grupo demonstrou um piloto automático digital para o F-8 da NASA na década de 1970, e pilotos automáticos digitais tornaram-se dominantes a partir da década de 1980. Na verdade, com a introdução dos processadores de sinais digitais de baixo custo, a maioria dos sistemas de controle de qualquer espécie tornaram-se digitais e, hoje, muito poucos sistemas de controle estão sendo implementados com eletrônica analógica. Essa evolução afetou a formação dos engenheiros de controle. No passado, a capacidade de projetar

² Hurewicz morreu em 1956 ao cair de um zigurate (pirâmide mexicana) em um passeio de conferência no Simpósio Internacional sobre topologia algébrica no México. Sugere-se que ele foi: "... um paradigma de distração, uma falha provavelmente levou à sua morte".

e construir circuitos especializados para controladores com eletrônica analógica fez com que muitos engenheiros de controle precisassem de uma base de conhecimento em Engenharia Elétrica. Atualmente, com a disponibilidade dos computadores digitais facilmente programáveis, o conhecimento dos engenheiros de controle está mais direcionado às especialidades familiares aos sistemas de controle.

RESUMO

- A técnica de projeto mais simples e mais conveniente é transformar um projeto de controle contínuo em sua forma discreta – ou seja, usar o seu **equivalente discreto**.
- **Projeto usando equivalentes discretos** implica (a) encontrar o compensador contínuo $D(s)$ utilizando as ideias dos Capítulos 1 ao 7, e (b) aproximar $D(s)$ por equações de diferenças utilizando o método de Tustin ou o método de correspondência polo-zero.
- A fim de analisar um projeto de controle discreto, ou qualquer sistema discreto, a **transformada z** é usada para determinar o comportamento do sistema. A transformada z de uma sequência temporal $f(k)$ é dada por

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

e tem a propriedade-chave

$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z).$$

Essa propriedade nos permite encontrar a função de transferência discreta de uma **equação de diferença**, que é o equivalente digital de uma equação diferencial para sistemas contínuos. A análise usando a transforma z é paralela ao uso da transformada de Laplace.

- Normalmente, as transformadas z são encontradas usando um computador (MATLAB) ou a Tabela 8.1.
- O Teorema do Valor Final discreto é

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z),$$

desde que todos os polos de $(1 - z^{-1})X(z)$ estejam dentro do círculo unitário.

- Para um sinal contínuo $f(t)$ cujas amostras são $f(k)$, os polos de $F(s)$ estão relacionados com os polos de $F(z)$ por

$$z = e^{sT}.$$

- Os discretos equivalentes mais comuns estão a seguir

1. Aproximação de Tustin:

$$D(z) = D(s)|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

2. Aproximação de correspondência polo-zero:

- Mapear polos e zeros por $z = e^{sT}$.
- Adicionar potências de $z+1$ ao numerador até que o numerador e o denominador tenham ordem igual ou que o numerador tenha uma ordem menor do que o denominador.
- Ajustar o ganho de baixa frequência de $D(z)$ igual ao de $D(s)$.
- No projeto por equivalentes discretos, é recomendada uma **tакса de amostragem** mínima de 20 vezes a largura de banda. Geralmente, a amostragem ainda mais rápida é útil para um melhor desempenho.
- **Pré-filtros** analógicos são normalmente colocados antes do **amostrador**, a fim de atenuar os efeitos de ruídos de alta frequência. Um amostrador introduz **aliasing** em todas as frequências do sinal que são maiores do que a metade da frequência de amostragem, reduzindo estas

frequências; portanto, os pontos de quebra do pré-filtro devem ser selecionados de modo que nenhuma frequência significativa permaneça acima da metade da taxa de amostragem.

- O modelo discreto de uma planta contínua $G(s)$ precedida por um SOZ é

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}.$$

O modelo discreto da planta mais o controlador discreto podem ser analisados por meio da transformada z ou de simulação usando o SIMULINK.

- **Projeto discreto** é um método de projeto exato e evita aproximações inerentes aos equivalentes discretos. O procedimento de projeto implica (a) encontrar o modelo discreto da planta $G(s)$, e (b) usar o modelo discreto para projetar o compensador na forma discreta diretamente. O processo de projeto é mais complicado do que o projeto equivalente discreto e exige que uma taxa de amostragem seja selecionada antes de iniciar o projeto. Uma abordagem prática é iniciar o projeto usando equivalentes discretos, então sintonizar o resultado usando o método projeto discreto.
- Projeto discreto usando $G(z)$ se aproxima bastante do projeto contínuo, mas o limite da estabilidade e a interpretação das localizações das raízes no plano- z são diferentes. A Fig. 8.5 resume as características da resposta.
- Usando projeto discreto, a estabilidade do sistema pode, teoricamente, ser assegurada quando a **amostragem** é feita em uma taxa mais lenta que o dobro da largura de banda. No entanto, para um bom desempenho transitório e rejeição de distúrbio aleatório, resultados melhores são obtidos por amostragem de 10 vezes a largura de banda de malha fechada ou mais rápida. Em alguns casos problemáticos com modos de vibração, às vezes é útil amostrar duas vezes mais rápido que o modo vibratório.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. Qual é a taxa de Nyquist? Quais são suas características?
2. Descreva o processo de projeto equivalente discreto.
3. Descreva como chegar a um $D(z)$ se a taxa de amostragem é de $30 \times \omega_{BW}$.
4. Para um sistema com largura de banda de 1 rad/s, descreva as consequências de diferentes taxas de amostragem.
5. Cite duas vantagens da seleção de um processador digital, em vez de circuitos analógicos, para implementar um controlador.
6. Dê duas desvantagens da seleção de um processador digital, em vez de circuitos analógicos, para implementar um controlador.
7. Descreva como chegar a um $D(z)$ se a taxa de amostragem é de $5 \times \omega_{BW}$.

PROBLEMAS

Problemas da Seção 8.2: análise dinâmica de sistemas discretos

- 8.1** A transformada z de um filtro de tempo discreto $h(k)$ na frequência de amostragem de 1 Hertz é

$$H(z) = \frac{1 + (1/2)z^{-1}}{[1 - (1/2)z^{-1}][1 + (1/3)z^{-1}]}.$$

- (a) Seja $u(k)$ e $y(k)$ a entrada e saída discreta deste filtro. Encontre uma equação de diferenças relacionando $u(k)$ e $y(k)$.
- (b) Encontre a frequência natural e o coeficiente de amortecimento dos polos do filtro.
- (c) O filtro é estável?

- 8.2** Use a transformada z para resolver a equação de diferença

$$y(k) - 3y(k-1) + 2y(k-2) = 2u(k-1) - 2u(k-2),$$

sendo

$$u(k) = \begin{cases} k, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

$$y(k) = 0, \quad k < 0.$$

8.3 A transformada z unilateral é definida como

$$F(z) = \sum_0^{\infty} f(k)z^{-k}.$$

- (a) Mostre que a transformada unilateral de $f(k+1)$ é $\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = zF(z) - zf(0)$.
- (b) Use a transformada unilateral para obter as transformadas dos números de Fibonacci geradas pela equação de diferença $u(k+2) = u(k+1) + u(k)$. Seja $u(0) = u(1) = 1$. [Dica: você terá de encontrar uma expressão geral para a transformada de $f(k+2)$ em termos da transformada de $f(k)$.]
- (c) Calcule as posições dos polos da transformada dos números de Fibonacci.
- (d) Calcule a transformada inversa dos números de Fibonacci.
- (e) Mostre que, se $u(k)$ representa o k -ésimo número de Fibonacci, então a relação de $u(k+1)/u(k)$ irá aproximar $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Essa é a razão áurea altamente valorizada pelos gregos.

8.4 Demonstre as sete propriedades de mapeamento do plano- s para o plano- z listadas na Seção 8.2.3.

Problemas da Seção 8.3: projeto usando equivalentes discretos

8.5 Um sistema com realimentação unitária tem a função de transferência em malha aberta dada por

$$G(s) = \frac{250}{s[(s/10) + 1]}.$$

O seguinte compensador de atraso adicionado em série com a planta fornece a margem de fase de 50° :

$$D(s) = \frac{s/1,25 + 1}{50s + 1}.$$

Usando o método de aproximação de correspondência polo-zero, determine uma realização discreta equivalente para este compensador.

8.6 A seguinte função de transferência é uma rede de avanço projetada para adicionar uma fase de aproximadamente 60° em $\omega_l = 3$ rad/s:

$$H(s) = \frac{s + 1}{0,1s + 1}.$$

- (a) Suponha um período de amostragem de $T = 0,25$ s e calcule e trace no plano- z as localizações dos polos e zeros das implementações digitais de $H(s)$ obtidas usando (1) método de Tustin e (2) mapeamento de polo e zero. Para cada caso, calcule a quantidade de avanço de fase fornecida pela rede em $z_1 = e^{j\omega_l T}$.
- (b) Utilizando uma escala log-log para a faixa de frequência entre $\omega = 0,1$ a $\omega = 100$ rad/s, trace a curva de magnitude do diagrama de Bode para cada um dos sistemas equivalentes digitais que você encontrou no item (a) e compare-os com $H(s)$. (Dica: as curvas de magnitude do diagrama de Bode são dadas por $|H(z)| = |H(e^{j\omega T})|$.)

8.7 A seguinte função de transferência é uma rede de atraso projetada para introduzir um ganho de atenuação de 10(-20 db) em $\omega = 3$ rad/s:

$$H(s) = \frac{10s + 1}{100s + 1}.$$

- (a) Suponha um período de amostragem de $T = 0,25$ s e calcule e trace no plano- z as localizações do polos e zeros das implementações digitais de $H(s)$ obtidas usando (1) método de Tustin e (2) mapeamento de polo e zero. Para cada caso, calcule a quantidade de avanço de fase fornecida pela rede em $z_1 = e^{j\omega_l T}$.
- (b) Para cada um dos sistemas digitais equivalentes no item (a), trace a curva de magnitude do diagrama de Bode para as frequências de $\omega = 0,01$ a $\omega = 10$ rad/s.

Problemas da Seção 8.5: seleção da taxa de amostragem

8.8 Para o sistema mostrado na Fig. 8.20, encontre os valores de K , T_D e T_I tal que os polos de malha fechada satisfaçam $\zeta > 0,5$ e $\omega_n > 1$ rad/s. Discretize o controlador PID usando

- (a) Método de Tustin
- (b) O método de correspondência polo-zero

Use o MATLAB para simular a resposta ao degrau de cada uma destas implementações digitais usando a taxa de amostragem de $T = 1, 0,1$ e $0,01$ s.

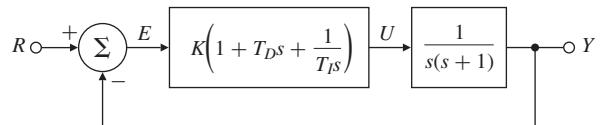


Figura 8.20 Sistema de controle para o Problema 8.8.

\triangle *Problemas da Seção 8.6: projeto discreto*

8.9 Considere a configuração do sistema mostrado na Fig. 8.21, sendo

$$G(s) = \frac{40(s+2)}{(s+10)(s^2 - 1,4)}.$$

- (a) Encontre a função de transferência de $G(z)$ para $T = 1$ assumindo que o sistema é precedido por um SOZ.
- (b) Use o MATLAB para desenhar o lugar das raízes do sistema em relação a K .
- (c) Qual é a faixa de valores de K para a qual o sistema em malha fechada é estável?
- (d) Compare os resultados do item (c) com o caso em que é usado um controlador analógico (isto é, onde a chave de amostragem está sempre fechada). Qual sistema tem um maior valor permitido de K ?
- (e) Use o MATLAB para calcular a resposta ao degrau de ambos os sistemas, contínuo e discreto, com K escolhido para produzir um coeficiente de amortecimento de $\zeta = 0,5$ para o caso contínuo.

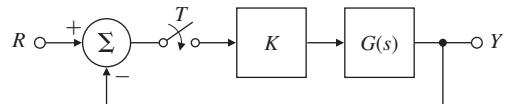


Figura 8.21 Sistema de controle para o Problema 8.9.

8.10 Controle de Atitude de Satélite em um Eixo. Satélites muitas vezes requerem controle de atitude para a orientação adequada de antenas e sensores com relação à Terra. A Fig. 2.7 mostra um satélite de comunicação com um sistema de controle de atitude com três eixos. Para obter mais conhecimento sobre o problema de três eixos, muitas vezes considera-se um eixo de cada vez. A Fig. 8.22 mostra este caso, no qual o movimento é permitido apenas em relação ao eixo perpendicular à página. As equações de movimento do sistema são dadas por

$$I\ddot{\theta} = M_C + M_D,$$

sendo

I = momento de inércia do satélite sobre o centro de massa,

M_C = controle de torque aplicado pelos propulsores,

M_D = torques de distúrbios

θ = ângulo do eixo do satélite em relação a uma referência inercial sem aceleração angular.

Normalizamos as equações de movimento definindo

$$u = \frac{M_C}{I}, \quad w_d = \frac{M_D}{I},$$

obtendo

$$\ddot{\theta} = u + w_d.$$

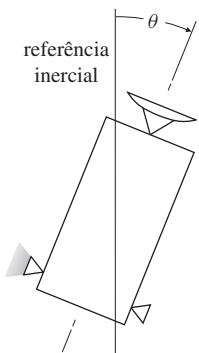


Figura 8.22 Esquema do controle de satélite para o Problema 8.10.

Calculando a transformada de Laplace, temos

$$\theta(s) = \frac{1}{s^2}[u(s) + w_d(s)],$$

a qual, sem distúrbios, torna-se

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2} = G_1(s).$$

No caso discreto em que u é aplicado por meio de um SOZ, podemos usar os métodos descritos neste capítulo para obter a função de transferência discreta

$$G_1(z) = \frac{\theta(z)}{u(z)} = \frac{T^2}{2} \left[\frac{z+1}{(z-1)^2} \right].$$

- (a) Esboce o lugar das raízes desse sistema à mão, assumindo controle proporcional.
- (b) Desenhe o lugar das raízes usando o MATLAB para verificar o esboço à mão.
- (c) Adicione realimentação discreta da velocidade para o seu controlador de modo que os polos dominantes correspondam a $\zeta = 0,5$ e $\omega_n = 3\pi/(10T)$.
- (d) Qual é o ganho de realimentação se $T = 1$ s? Se $T = 2$ s?
- (e) Trace a resposta ao degrau em malha fechada e a história temporal de controle associado a $T = 1$ s.

8.11 É possível suspender uma massa de material magnético por meio de um eletroímã cuja corrente é controlada pela posição da massa (Woodson e Melcher, 1968). O esquema de uma possível configuração é mostrado na Fig. 8.23, e uma foto de um sistema funcionando na Universidade de Stanford é mostrada na Fig. 9.2. As equações de movimento são

$$m\ddot{x} = -mg + f(x, I),$$

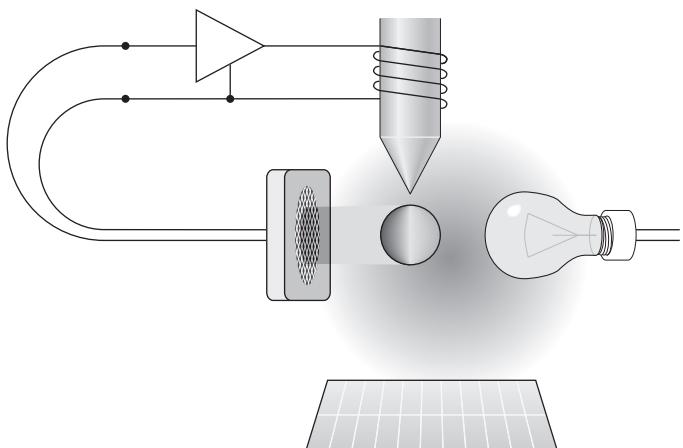
na qual a força sobre a bola devido ao eletroímã é dada por $f(x, I)$. Em equilíbrio, a força magnética equilibra a força da gravidade. Suponha que I_0 represente a corrente em equilíbrio. Se escrevermos $I = I_0 + i$, expandirmos f em $x = 0$ e $I = I_0$ e negligenciarmos os termos de alta ordem, obtemos a equação linearizada

$$m\ddot{x} = k_1x + k_2i. \quad (8.46)$$

Valores razoáveis para as constantes na Eq. (8.46) são $m = 0,02$ Kg, $k_1 = 20$ N/m e $k_2 = 0,4$ N/A.

- (a) Calcule a função de transferência de I para x e trace o lugar das raízes (contínuo) para a realimentação simples $i = -Kx$.
- (b) Suponha que a entrada é passada através de um SOZ, com o período de amostragem de 0,02 s. Calcule a função de transferência da planta equivalente em tempo discreto.
- (c) Projete um controlador digital para o sistema de levitação magnética tal que o sistema em malha fechada satisfaça às seguintes especificações: $t_r \leq 0,1$ s, $t_s \leq 0,4$ s e sobressinal $\leq 20\%$.
- (d) Trace o lugar das raízes para seu projeto em relação a k_1 e discuta a possibilidade de usar seu sistema em malha fechada para equilibrar bolas de várias massas.
- (e) Trace a resposta ao degrau de seu projeto para uma perturbação de deslocamento na bola e mostre x e a corrente de controle i . Se o sensor pode medir x apenas em uma faixa de $\pm 1/4$ cm

Figura 8.23 Esquema do levitador magnético para o Problema 8.11.



e o amplificador pode fornecer uma corrente de apenas 1 A, que é o deslocamento máximo possível para o controle, negligenciando os termos não lineares em $f(x, t)$?

- 8.12** Repita o Problema 5.27 no Capítulo 5 construindo o lugar das raízes discreto e execute os projetos diretamente no plano-z. Suponha que a saída y seja amostrada, a entrada u seja passada através de um SOZ quando ela entra na planta e a taxa de amostragem seja de 15 Hz.
- 8.13** Projete um controlador digital para o sistema da antena mostrado nas Figs. 3.61 e 3.62 e descrito no Problema 3.31. O projeto deve fornecer uma resposta ao degrau com um sobressinal menor que 10% e um tempo de subida menor que 80 s.
- Qual deve ser a taxa de amostragem?
 - Use o projeto equivalente discreto com o método de correspondência polo-zero.
 - Use o projeto discreto e o lugar das raízes no plano-z.

8.14 O sistema

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0,1)(s + 3)}$$

deve ser controlado com um controlador digital, tendo um período de amostragem $T = 0,1$ s. Usando o lugar das raízes no plano-z, projete um compensador que irá responder a um degrau com um tempo de subida $t_r \leq 1$ s e um sobressinal $M_p \leq 5\%$. O que pode ser feito para reduzir o erro de estado estacionário?

- 8.15** A função de transferência do controlador derivativo puro é

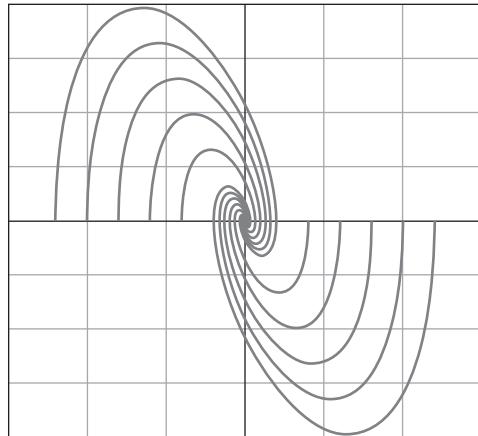
$$D(z) = KT_D \frac{z - 1}{Tz},$$

na qual o polo em $z = 0$ adiciona um pouco de atraso de fase desestabilizante. Este atraso de fase pode ser removido usando um controlador derivativo da forma

$$D(z) = KT_D \frac{(z - 1)}{T} ?$$

Justifique sua resposta com a equação de diferença que seria necessária e discuta os requisitos para sua implementação.

Sistemas não Lineares



Todos os sistemas são não lineares, especialmente se estamos considerando sinais grandes. Por outro lado, quase todos os sistemas físicos podem ser bem aproximados por modelos lineares se os sinais forem pequenos. Por exemplo, se θ é pequeno, então $\sin(\theta) \approx \theta$ e $\cos(\theta) \approx 1$. Da mesma forma, em dispositivos de eletrônica analógica, como amplificadores, a operação será quase linear se os sinais forem pequenos em relação à tensão de alimentação. Finalmente, como iremos considerar mais adiante neste capítulo em uma seção opcional, Lyapunov mostrou que, se a aproximação linear de um sistema for estável próxima a um ponto de equilíbrio, então o sistema não linear realmente será estável em alguma vizinhança do ponto de equilíbrio. Por todas essas razões, os métodos de análise e projeto apresentados neste livro têm considerado apenas técnicas extremamente poderosas para modelos lineares. No entanto, se os sinais fazem com que um dispositivo sature ou o sistema inclui não linearidades que são ativas para pequenos sinais, como alguns tipos de atrito, então os efeitos não lineares devem ser levados em conta para explicar o comportamento do sistema. Neste capítulo, algumas das ferramentas disponíveis para essa finalidade serão descritas.

Visão geral do capítulo

Como cada sistema não linear é único em vários aspectos, um grande número de abordagens é utilizado no projeto de controle não linear. As abordagens de análise e projeto de sistemas não lineares que iremos descrever podem ser classificados em quatro categorias. Na Seção 9.2, são discutidos métodos de reduzir o problema para um modelo linear. Na maioria dos casos, é adequado considerar a aproximação para pequenos sinais. Em alguns casos, existem não linearidades para as quais funções inversas podem ser encontradas, e colocar a função inversa antes da não linearidade física resulta em um sistema global que responde de forma linear. Em outros casos ainda, alguns

modelos não lineares podem ser reduzidos a uma forma linear exata pelo uso inteligente da realimentação, em uma técnica chamada de “torque calculado” no campo da robótica.

A segunda categoria é uma abordagem heurística baseada em considerar a não linearidade como um ganho variável. Na Seção 9.3, são considerados casos nos quais a não linearidade não tem memória, como, por exemplo, um amplificador cuja saída satura quando o sinal se torna grande. A ideia é considerar o amplificador como se seu ganho começasse a reduzir quando o sinal se torna grande. Em razão de o lugar das raízes ser baseado na avaliação das raízes características do sistema quando o ganho muda, esse ponto de vista leva a um uso heurístico do lugar das raízes para prever como um dado sistema irá responder a mudanças no tamanho do sinal de entrada. A Seção 9.4 trata dos casos em que a não linearidade tem dinâmica ou memória; então, o lugar das raízes não é útil. Para esses casos, uma técnica introduzida por Kochenburger em 1950, conhecida como função descritiva, pode ser usada. Para aplicar esse método, uma senoide é aplicada à parte não linear do sistema e o primeiro harmônico da resposta periódica é calculado. A relação da entrada para a saída é obtida como se fosse uma resposta em frequência linear, mas variável. Assim, o diagrama de Nyquist é o domínio natural para considerar o comportamento do sistema.

Enquanto as abordagens heurísticas podem dar uma visão muito útil para o comportamento do sistema, elas não podem ser usadas para decidir se o sistema é seguramente estável. Para isso, devemos voltar para a análise de estabilidade como estudada na teoria de controle. A mais famosa destas teorias é a estabilidade interna desenvolvida por Lyapunov. Como uma introdução à ideia da resposta de um sistema como uma trajetória no espaço, a Seção 9.5 descreve a análise no plano de fase e, em seguida, apresenta a teoria de estabilidade. Exemplos usando o teorema de estabilidade são dados para orientar a elaboração de um controlador para que o sistema seja garantidamente estável se hipóteses iniciais sobre o sistema forem satisfeitas. Com estes métodos, é dado ao engenheiro de controle um caminho inicial para compreender efetivamente e projetar problemas de controle reais. Finalmente, a Seção 9.6 fornece uma perspectiva histórica do conteúdo deste capítulo.

9.1 Introdução e motivação: por que estudar sistemas não lineares?

É intuitivamente claro que, para algum nível de intensidade do sinal, qualquer sistema físico será não linear e alguns sistemas são não lineares para qualquer e todo nível do sinal. Por outro lado, começamos nosso estudo partindo do desenvolvimento de modelos lineares aproximados, e todos nossos métodos de projeto até agora têm sido baseados na suposição de que a planta pode ser representada por uma função de transferência linear. Neste capítulo, daremos algumas das razões para acreditar que todo o tempo gasto estudando técnicas lineares não foi um desperdício, mas vamos também tentar explicar por que é muito importante entender como considerar os efeitos não lineares no projeto de sistemas de controle.

Começamos mostrando que podemos combinar a técnica do lugar das raízes, na qual as raízes da equação característica são traçadas em função de diversos valores do ganho, com a observação de que muitos elementos não lineares podem ser vistos como um ganho que muda conforme o nível do sinal muda. Enquanto o método é, neste momento, inteiramente heurístico, os resultados de simulação são muito promissores. Muitas propriedades de sistemas que contêm elementos não lineares sem memória podem ser previstas traçando um lugar das raízes em função do ganho no ponto de não linearidade. No entanto, o método, tal como apresentado, não é fundamentado em uma base firme, e o projetista fica a se perguntar se existe alguma região inexplorada, do espaço de estado real ou do espaço do sinal, na qual seja possível que ocorra uma catástrofe. Afinal, o modelo é uma aproximação, e não importa o quanto extensa seja a simulação, não é possível cobrir todas as situações.

Após o uso do lugar das raízes, voltamos aos métodos baseados na resposta em frequência. Uma das grandes vantagens da resposta em frequência é que, em muitos casos, é possível obter a função de transferência realizando experimentos no sistema real. Na abordagem mais

básica, um sinal senoidal é aplicado ao sistema e a amplitude e a fase da senoide de saída são medidas. No entanto, ruídos e inevitáveis efeitos não lineares fazem com que a saída seja mais complicada do que uma simples senoide, então o projetista extrai a componente fundamental e a trata como se ela fosse toda a história. O mesmo resultado também é obtido se um analisador de espectro é usado para calcular uma função de transferência. O que se fez foi calcular o que Kochenburger chamou de **função descritiva**. Desse ponto de vista, uma função descritiva pode ser definida para os elementos não lineares, incluindo os com memória. Novamente, as simulações são promissoras e projetos muitos úteis são feitos com essa técnica mas, assim como o uso do lugar das raízes para projeto de sistemas não lineares, esse método também está sobre areia movediça.

Então, o que deve ser feito nessa situação? A única possibilidade é encarar os fatos e considerar o comportamento não linear diretamente. Felizmente, uma base sólida em matemática foi estabelecida quando A. M. Lyapunov publicou seu trabalho sobre a estabilidade do movimento em 1892. Esse trabalho foi traduzido para o francês em 1907 e recuperado em um contexto de controle por Kalman e Bertram em 1960. Lyapunov forneceu dois métodos para o estudo da estabilidade. Para seu primeiro método, considerou a estabilidade com base na aproximação linear, fato muito importante para justificar nossa concentração nessa abordagem. Ele demonstrou o extraordinário resultado de que, se a aproximação linear é estritamente estável, com todas as raízes no semiplano esquerdo (SPE), então o sistema não linear terá uma região de estabilidade em torno do ponto de equilíbrio no qual a aproximação linear se aplica. Além disso, ele provou que, se a aproximação linear tem pelo menos uma raiz no semiplano direito (SPD), então o sistema não linear não pode ter qualquer região de estabilidade na vizinhança do equilíbrio. O tamanho da região de estabilidade no espaço de estados não é dado em termos lineares, mas está incluído na construção usada para a demonstração. Essa construção constituiu o segundo método. O segundo método de Lyapunov é matematicamente equivalente a encontrar uma função escalar que descreve a energia interna armazenada no sistema. Ele demonstrou que, se tal função é construída, e se a derivada da função em relação às trajetórias das equações de movimento é negativa, então a função e o estado do qual ela depende eventualmente irão se dissipar e o estado irá permanecer no ponto de equilíbrio. A função que tem essas propriedades é chamada de *função de Lyapunov*. É claro que essa simples descrição omite uma grande complexidade; por exemplo, existem dezenas de definições de estabilidade. No entanto, o conceito permanece: se uma função de Lyapunov puder ser encontrada, então o sistema em que ela se baseia será estável. Como descrito, a teoria fornece uma condição suficiente para a estabilidade. Se uma função de Lyapunov não for encontrada, o projetista não sabe se ela não existe ou se a pesquisa feita foi inadequada. Uma boa estratégia de investigação tem sido dirigida para encontrar funções de Lyapunov para classes específicas de sistemas não lineares.

Os métodos de Lyapunov são baseados em equações diferenciais na forma normal ou na forma de estado e, portanto, dizem respeito à estabilidade interna. Os métodos de resposta em frequência, por outro lado, são medidas externas, e tem havido interesse em desenvolver resultados de estabilidade com base na resposta externa do sistema. Um desses métodos é o critério de círculo, que também iremos descrever neste capítulo. O método pode ser descrito como considerar a energia vista em um terminal do sistema e observar se ela está sempre fluindo “*para dentro dos terminais*”. Se for assim, é razoável supor que, em um certo momento, toda a energia irá se dissipar e o sistema será estável. Para uma demonstração formal do método, os pesquisadores se voltaram para o segundo método de Lyapunov, mas o resultado é expresso em termos de propriedades externas, como o diagrama de Nyquist da parte linear do sistema que confronta os elementos não lineares. Mais uma vez, essa ferramenta fornece uma base para a criação de um firme alicerce sob um método de projeto para uma classe específica de sistemas não lineares.

Como deve estar claro neste ponto, a teoria de controle não linear é um tema muito vasto e sofisticado, e neste livro podemos dar apenas uma breve introdução a uma pequena parte dela. No entanto, a fundação do projeto de controle recai nessa teoria, e quanto mais o projetista entende da teoria, melhor entende os limites e as possibilidades dos problemas. Nossa esperança

é que, considerando esse material, os alunos sejam estimulados a continuar seus lucrativos estudos nesse tema fascinante.

9.2 Análise por linearização

Três métodos para reduzir alguns sistemas não lineares para um modelo linear adequado são apresentados nesta seção. As equações diferenciais de movimento de quase todos os processos selecionados para o controle são não lineares. Por outro lado, os métodos de análise e projeto de controle que discutimos até agora são muito mais fáceis para modelos lineares do que para modelos não lineares. **Linearização** é o processo de encontrar um modelo linear que se aproxima de um modelo não linear. Felizmente, como Lyapunov provou há mais de 100 anos, se um modelo linear para pequenos sinais é válido próximo a um equilíbrio e é estável, então existe uma região (que pode ser pequena, é claro) que contém o equilíbrio, na qual o sistema não linear é estável. Então, podemos seguramente calcular um modelo linear e projetar um controle linear para ele de tal forma que, pelo menos na vizinhança do equilíbrio, nosso projeto seja estável. Como um papel muito importante do controle realimentado é manter as variáveis do processo próximas ao equilíbrio, tais modelos lineares para sinais pequenos geralmente são um ponto de partida para o projeto de controle.

Uma abordagem alternativa para obter um modelo linear para ser usado como a base do projeto do sistema de controle é usar parte do esforço de controle para cancelar os termos não lineares e para projetar o restante do controle baseado na teoria linear. Esta abordagem – linearização por realimentação – é popular no campo da robótica, onde é chamada de **método de torque calculado**. Este também é um tema de pesquisa para controle de aeronaves. A Seção 9.2.2 apresenta brevemente este método. Finalmente, algumas funções não lineares são tais que uma **não linearidade inversa** pode ser encontrada para ser colocada em série com a não linearidade de modo que a combinação seja linear. Este método é frequentemente usado para corrigir leves características não lineares de sensores ou atuadores que têm pequenas variações em uso, como discutido na Seção 9.2.3.

9.2.1 Linearização por análise de sinais pequenos

Para um sistema com não linearidades suaves e uma derivada contínua, pode-se calcular um modelo linear, que é válido para sinais pequenos. Em muitos casos, esses modelos podem ser usados para projeto. A equação diferencial não linear é uma equação na qual as derivadas do estado têm uma relação não linear com o próprio estado e/ou controle. Em outras palavras, as equações diferenciais *não podem* ser escritas na forma¹

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u,$$

mas na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u). \quad (9.1)$$

Para realizar linearização para sinais pequenos, primeiro temos de determinar os valores de equilíbrio \mathbf{x}_o , u_o , tais que $\dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_o, u_o)$ e fazer $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \delta\mathbf{x}$ e $u = u_o + \delta u$. Então, expandimos a equação não linear em termos de perturbações a partir destes valores de equilíbrio, obtendo

$$\dot{\mathbf{x}}_o + \delta\dot{\mathbf{x}} \cong \mathbf{f}(\mathbf{x}_o, u_o) + \mathbf{F}\delta\mathbf{x} + \mathbf{G}\delta u,$$

com \mathbf{F} e \mathbf{G} sendo termos lineares que melhor se ajustam à função não linear $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ em \mathbf{x}_o e u_o calculados como

$$\mathbf{F} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{x_o, u_o} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right]_{x_o, u_o}. \quad (9.2)$$

¹ Esta equação assume que o sistema é invariante no tempo. Uma expressão mais geral seria $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t)$.

Subtraindo a solução de equilíbrio, temos

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \delta \mathbf{x} + \mathbf{G} \delta u, \quad (9.3)$$

que é uma equação linear que aproxima as dinâmicas de movimento *próximas* ao ponto de equilíbrio. Normalmente, a notação δ é descartada e se entende que \mathbf{x} e u se referem a desvios do equilíbrio.

No desenvolvimento de modelos discutidos até agora neste livro, encontramos equações não lineares em várias ocasiões: o pêndulo no Exemplo 2.5, o guindaste no Exemplo 2.7, o motor de indução na Seção 2.3, o fluxo de água no tanque no Exemplo 2.16 e o atuador hidráulico no Exemplo 2.17.

Em cada caso, assumimos que o movimento era pequeno ou que o movimento em torno de algum ponto de operação era pequeno, para que as funções não lineares fossem aproximadas por funções lineares.

Os passos seguidos nos exemplos essencialmente envolveram encontrar \mathbf{F} e \mathbf{G} , a fim de linearizar as equações diferenciais para a forma da Eq. (9.3), como ilustrado nos exemplos seguintes. As funções de linearização no MATLAB® incluem `linmod` e `linmod2`.

EXEMPLO 9.1 Linearização do pêndulo não linear

Considere as equações não lineares de movimento do pêndulo simples no Exemplo 2.5. Determine os pontos de equilíbrio para o sistema e os modelos lineares para pequenos sinais correspondentes.

Solução. A equação de movimento é

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = \frac{T_c}{m\ell^2}. \quad (9.4)$$

Podemos reescrever a equação de movimento na forma de espaço de estados, com $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [\theta \ \dot{\theta}]^T$, como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\omega_o^2 \sin x_1 + u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, u) \\ f_2(\mathbf{x}, u) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u),$$

sendo $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ e $u = \frac{T_c}{m\ell^2}$. Para determinar o estado de equilíbrio, suponha que a entrada (normalizada) de torque tenha um valor nominal de $u_o = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = 0, \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta = 0, \end{aligned}$$

então, as condições de equilíbrio correspondem a $\theta_o = 0, \pi$ (ou seja, as configurações de repouso com o pêndulo para baixo e na posição invertida, respectivamente). O estado de equilíbrio e a entrada são $\mathbf{x}_o = [\theta_o \ 0]^T$, $u_o = 0$, e as matrizes de espaço de estados são dadas por

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right]_{x_o, u_o} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\omega_o^2 \cos \theta_o & 0 \end{array} \right],$$

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{array} \right]_{x_o, u_o} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right].$$

O sistema linear tem autovalores em $\pm j\omega_o$ e $\pm\omega_o$ correspondente a $\theta_o = 0$ e π , respectivamente, com o último caso invertido sendo instável, como era esperado.

EXEMPLO 9.2 Linearização do movimento no levitador magnético

A Fig. 9.1 mostra um rolamento magnético utilizado em grandes turbinas. A bobina é energizada usando métodos de controle realimentado para que o eixo permaneça sempre no centro e nunca toque as laterais, mantendo, assim, o atrito a um nível quase inexistente. Uma versão simplificada de um rolamento magnético que pode ser construída em um laboratório, como mostrado na Fig. 9.2, é eletroímã usado para levitar uma bola de metal. O esquema físico do levitador é representado na Fig. 9.3. A equação de movimento da bola, derivada da lei de Newton, Eq. (2.1), é

$$m\ddot{x} = f_m(x, i) - mg, \quad (9.5)$$

sendo $f_m(x, i)$ a força causada pelo campo eletromagnético. Teoricamente, a força de um campo magnético está relacionada com a distância do eletroímã, mas a relação exata para o levitador

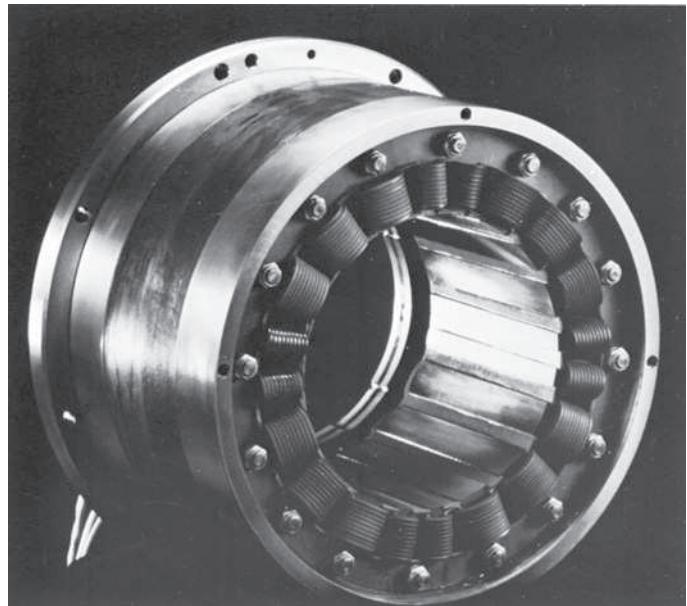


Figura 9.1 Um rolamento magnético.

Fonte: foto cortesia de *Magnetic Bearing, Inc.*

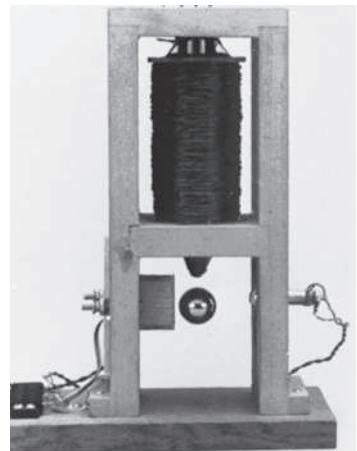


Figura 9.2 Levitador magnético usado em laboratório.

Fonte: foto cortesia de *Gene Franklin*.

de laboratório é difícil de ser obtida usando os princípios físicos, pois seu campo magnético é muito complexo. No entanto, as forças podem ser medidas. A Fig. 9.4 mostra as curvas experimentais com uma bola de 1 cm de diâmetro e uma massa de $8,4 \times 10^{-3}$ kg. Para o valor de corrente de $i_2 = 600$ mA e o deslocamento x_1 mostrado na figura, a força magnética f_m apenas cancela a força da gravidade, $mg = 82 \times 10^{-3}$ N. (A massa da bola é de $8,4 \times 10^{-3}$ kg e a aceleração da gravidade é de $9,8 \text{ m/s}^2$.) Portanto, o ponto (x_1, i_2) representa um equilíbrio. Usando os dados, encontre as equações linearizadas do movimento próximo ao ponto de equilíbrio.

Solução. Inicialmente, escrevemos, na forma expandida, a força em termos dos desvios dos pontos de equilíbrio x_1 e i_2 :

$$f_m(x_1 + \delta x, i_2 + \delta i) \cong f_m(x_1, i_2) + K_x \delta x + K_i \delta i. \quad (9.6)$$

Os ganhos lineares são encontrados como segue: K_x é a inclinação da força versus x ao longo da curva $i = i_2$, como mostrado na Fig. 9.4, e é aproximadamente 14 N/m. K_i é a alteração na força em função da corrente para $x = x_1$ fixo. Descobrimos que, para $i = i_1 = 700$ mA em $x = x_1$, a força é aproximadamente 122×10^{-3} N, e em $i = i_3 = 500$ mA em $x = x_1$, ela é aproximadamente 42×10^{-3} N. Assim,

$$\begin{aligned} K_i &\cong \frac{122 \times 10^{-3} - 42 \times 10^{-3}}{700 - 500} = \frac{80 \times 10^{-3} \text{ N}}{200 \text{ mA}} \\ &\cong 400 \times 10^{-3} \text{ N/A} \\ &\cong 0,4 \text{ N/A}. \end{aligned}$$

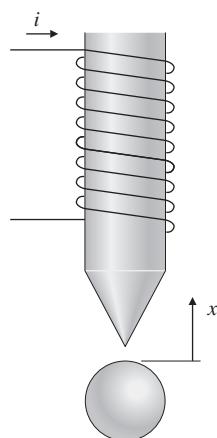


Figura 9.3 Modelo para o levitador magnético.

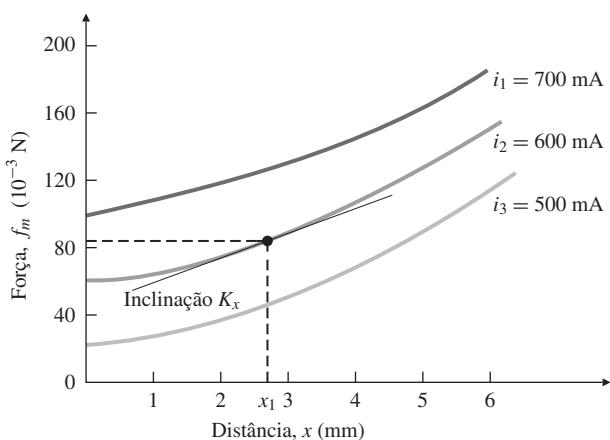


Figura 9.4 Curvas de força determinadas experimentalmente.

Substituindo esses valores na Eq. (9.6), obtemos a seguinte aproximação linear para a força na vizinhança do equilíbrio

$$f_m \cong 82 \times 10^{-3} + 14\delta x + 0,4\delta i.$$

Substituindo essa expressão na Eq. (9.5) e usando valores numéricos para massa e força da gravidade, temos o modelo linearizado

$$(8,4 \times 10^{-3})\ddot{x} = 82 \times 10^{-3} + 14\delta x + 0,4\delta i - 82 \times 10^{-3}.$$

Como $x = x_1 + \delta x$, então, $\ddot{x} = \delta \ddot{x}$. A equação em termos de δx é

$$\begin{aligned} (8,4 \times 10^{-3})\delta \ddot{x} &= 14\delta x + 0,4\delta i, \\ \delta \ddot{x} &= 1667\delta x + 47,6\delta i, \end{aligned} \quad (9.7)$$

o que é a equação linearizada desejada do movimento próximo ao ponto de equilíbrio. Um vetor de estado lógico é $\mathbf{x} = [\delta x \ \delta \dot{x}]^T$, que resulta nas matrizes

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1667 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 47,6 \end{bmatrix}$$

e o controle $u = \delta i$.

EXEMPLO 9.3 Linearização do tanque de água revisitado

Repita a linearização do Exemplo 2.16 usando os conceitos apresentados nesta seção.

Solução. A Eq. (2.75) pode ser escrita como

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (9.8)$$

sendo $x \triangleq h$, $u \triangleq w_{in}$ e $f(x, u) = -\frac{1}{RA\rho}\sqrt{p_1 - p_a} + \frac{1}{A\rho}w_{in} = -\frac{1}{RA\rho}\sqrt{\rho gh - p_a} + \frac{1}{A\rho}w_{in}$.

As equações linearizadas são da forma

$$\delta \dot{x} = F\delta x + G\delta u, \quad (9.9)$$

sendo

$$[F]_{x_o, u_o} = \frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial h} \right]_{h_o, u_o} = \frac{\partial}{\partial h} \left[-\frac{1}{RA\rho}\sqrt{\rho gh - p_a} \right]_{h_o, u_o} \quad (9.10)$$

$$= -\frac{g}{2AR} \frac{1}{\sqrt{\rho gh_o - p_a}} = -\frac{g}{2AR} \frac{1}{\sqrt{p_o - p_a}} \quad (9.11)$$

e

$$[G]_{x_o, u_o} = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial w_{in}} = \frac{1}{A\rho}. \quad (9.12)$$

No entanto, note que algum fluxo é necessário para manter o sistema em equilíbrio, então, a Eq. (9.9) é válida; especificamente, vemos da Eq. (2.75) que

$$u_o = w_{in_o} = \frac{1}{R}\sqrt{p_o - p_a} \quad \text{para} \quad \dot{h} = 0 \quad (9.13)$$

e δu na Eq. (9.9) é δw_{in} , com $w_{in} = w_{in_o} + \delta w_{in}$. Portanto, a Eq. (9.9) torna-se

$$\delta \dot{h} = F\delta h + G\delta w_{in} = F\delta h + Gw_{in} - G\frac{1}{R}\sqrt{p_o - p_a} \quad (9.14)$$

e está precisamente de acordo com a Eq. (2.78).

9.2.2 Linearização por realimentação não linear

A linearização por realimentação é feita subtraindo os termos não lineares das equações de movimento e os adicionando no controle. O resultado é um sistema linear, desde que o computador, no qual o controlador é implementando, tenha capacidade de calcular os termos não lineares rápido o suficiente e que o controle resultante não cause a saturação do atuador. Uma compreensão mais detalhada do método é melhor alcançada com o seguinte exemplo.

Realimentação não linear

EXEMPLO 9.4 Linearização do pêndulo não linear

Considere as equações não lineares de movimento do pêndulo simples no Exemplo 2.5 [Eq. (2.21)]. Linearize o sistema usando realimentação não linear.

Solução. A equação de movimento é

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \operatorname{sen} \theta = T_c. \quad (9.15)$$

Se calcularmos o torque como

$$T_c = mgl \operatorname{sen} \theta + u, \quad (9.16)$$

então, o movimento é descrito por

$$ml^2\ddot{\theta} = u. \quad (9.17)$$

A Eq. (9.17) é uma equação linear *sem importar o tamanho do ângulo* θ . Vamos utilizá-la como modelo para fins de projeto de controle, pois ela nos permite usar técnicas de análise linear. O controle resultante linear fornecerá o valor de u com base em medições de θ ; no entanto, o valor real do torque enviado para o equipamento decorre da Eq. (9.16). Para robôs com duas ou três ligações rígidas, esta abordagem de **torque calculado** leva a um controle eficaz. Esta técnica também está sendo pesquisada para controle de aeronaves, nos quais os modelos lineares mudam consideravelmente com o caráter do regime de voo.

9.2.3 Linearização pela não linearidade inversa

O caso mais simples de introdução de não linearidades em um projeto de controle é a **não linearidade inversa**. Às vezes, é possível reverter o efeito de algumas não linearidades. Por exemplo, suponha que temos um sistema cuja saída é o quadrado do sinal de interesse:

$$y = x^2. \quad (9.18)$$

Não linearidade inversa

Uma técnica inteligente e bastante óbvia é desfazer a não linearidade, precedendo a não linearidade física com uma não linearidade de raiz quadrada,

$$x = \sqrt{(.)}, \quad (9.19)$$

como mostrado no próximo exemplo. Assim, todo o sistema em cascata será linear.

EXEMPLO 9.5 Linearização de um sistema de rápido processamento térmico (RPT)

Considere o sistema RPT que usa uma lâmpada não linear como um atuador, como mostrado na Fig. 9.5. Suponha que a entrada da lâmpada é a tensão V e a saída é a potência P e elas estão relacionados por

$$P = V^2.$$

Projete uma não linearidade inversa para linearizar o sistema.

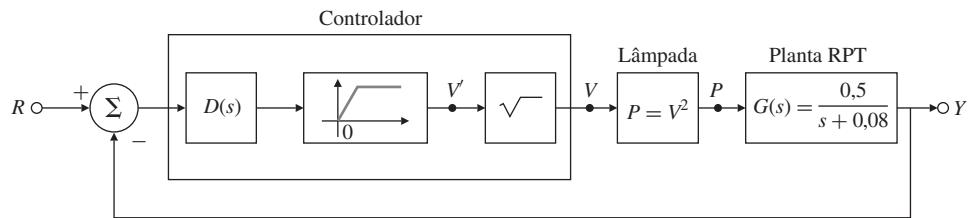


Figura 9.5 Linearização por meio da não linearidade inversa.

Solução. Simplesmente precedemos a entrada da não linearidade da lâmpada com a não linearidade raiz quadrada

$$V = \sqrt{V'}.$$

O sistema de malha aberta em cascata global, agora, será linear para qualquer valor de tensão:

$$Y = G(s)P = G(s)V^2 = G(s)V'.$$

Assim, podemos usar técnicas de projeto linear de controle para o compensador dinâmico, $D(s)$. Note que um elemento não linear foi inserido na frente do elemento de raiz quadrada para garantir que a entrada neste bloco permaneça sempre positiva. Então, o controlador é implementado como mostrado na Fig. 9.5. Para uma aplicação detalhada deste método para projeto de controle, indicamos ao leitor o estudo de caso RPT na Seção 10.6.

9.3 Análise por ganho equivalente usando o lugar das raízes

Como tentamos deixar claro, todo sistema de controle real é não linear, e os métodos de análise e projeto lineares que descrevemos até agora usam aproximações lineares dos modelos reais. Há uma importante categoria de sistemas não lineares para a qual a linearização não é apropriada e para a qual algumas análises (e projeto) significativas podem ser feitas. Essa categoria compreende os sistemas em que a não linearidade não tem dinâmica e é bem aproximada por um ganho que varia conforme o tamanho do seu sinal de entrada. Esboços de alguns destes elementos não lineares em sistemas e seus nomes comuns são mostrados na Fig. 9.6.

Não linearidades sem memória

A estabilidade de sistemas com não linearidades sem memória pode ser estudada heuristicamente usando o lugar das raízes. A técnica consiste em substituir a não linearidade sem memória por um ganho equivalente K , e um lugar das raízes é traçado em função deste ganho. Para uma faixa de amplitudes do sinal de entrada, o ganho equivalente tomará um intervalo de valores, e as raízes de malha fechada do sistema serão examinadas nesta faixa, como se o ganho fosse fixado. Isso é ilustrado pelos exemplos seguintes.

EXEMPLO 9.6 Alteração de sobressinal e saturação de não linearidade

Considere o sistema com saturação mostrado na Fig. 9.7. Determine as propriedades de estabilidade do sistema utilizando a técnica do lugar das raízes.

Solução. O lugar das raízes deste sistema em relação a K com a saturação removida é dado na Fig. 9.8. Em $K = 1$, a taxa de amortecimento é $\zeta = 0,5$. Quando o ganho é reduzido, o lugar das raízes mostra que as raízes se movem para a origem do plano s com cada vez menos amortecimento. Os gráficos das respostas ao degrau deste sistema foram obtidos usando o programa SIMULINK®. Uma série de entradas em degrau r com amplitudes $r_0 = 2, 4, 6, 8, 10$ e 12 foi introduzida ao sistema, e os resultados são mostrados na Fig. 9.9. À medida que o sinal introduzido vai aumentando, a saturação permanece menor que $0,4$, o sistema será linear e deverá se comportar de acordo com as raízes $\zeta = 0,5$. No entanto, note que à medida que a entrada fica ainda maior, a resposta apresenta mais e mais sobressinal, e cada vez a recuperação fica mais

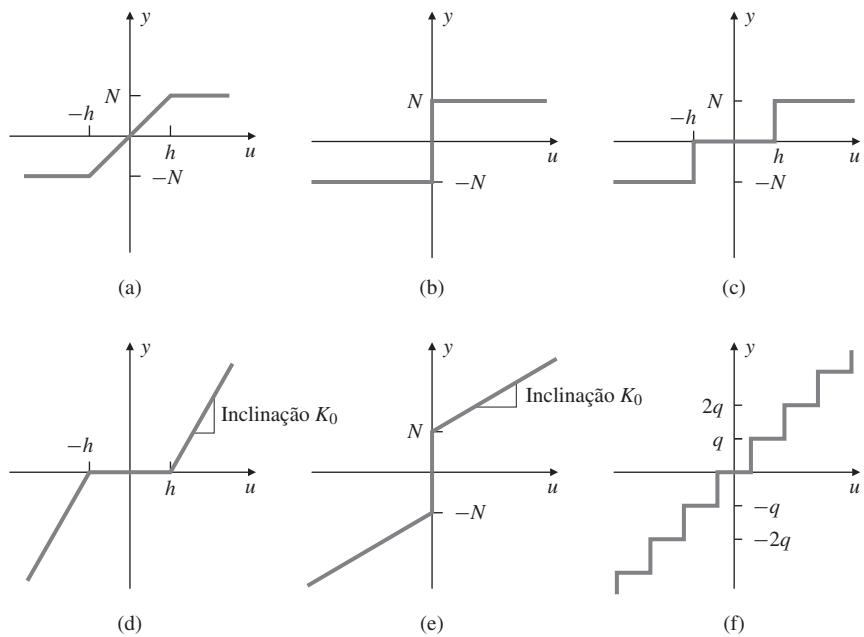


Figura 9.6 Elementos não lineares, sem dinâmica: (a) saturação; (b) relé; (c) relé com zona morta; (d) ganho com zona morta; (e) mola pré-carregada, ou atrito viscoso e atrito de Coulomb; (f) quantização.

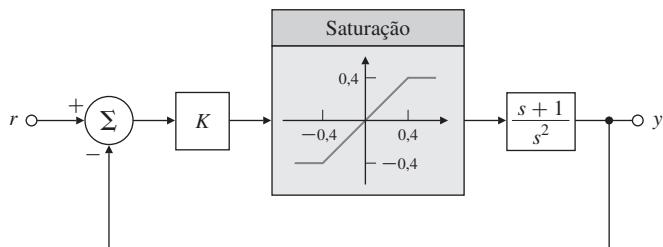


Figura 9.7 Sistema dinâmico com saturação.

lenta. Isso pode ser explicado observando-se que, à medida que os sinais de entrada ficam cada vez maiores, os ganhos K efetivos ficam cada vez menores, como pode ser visto na Fig. 9.10. A partir do gráfico do lugar das raízes da Figura. 9.8, vemos que à medida que K diminui, os polos de malha fechada se aproximam da origem e têm um menor coeficiente de amortecimento ζ . Isso resulta em maiores: tempos de subida e de acomodação, sobressinal e resposta oscilatória.

EXEMPLO 9.7 Estabilidade de um sistema condicionalmente estável usando o lugar das raízes

Como um segundo exemplo de uma resposta não linear descrita por um sinal dependente do ganho, considere o sistema com uma não linearidade de saturação, como mostrado na Fig. 9.11. Determine se o sistema é estável.

Um exemplo de não linearidade: a estabilidade depende da magnitude da entrada

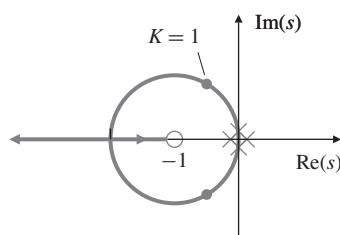


Figura 9.8 Lugar das raízes de $(s + 1)/s^2$, o sistema na Fig. 9.7 com a saturação removida.

Figura 9.9 Respostas ao degrau do sistema na Fig. 9.7 para várias amplitudes do degrau na entrada.

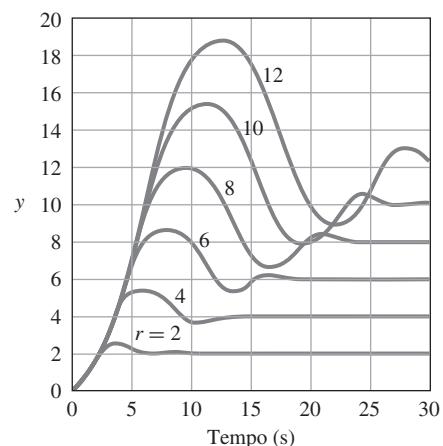


Figura 9.10 Forma geral do ganho efetivo da saturação.

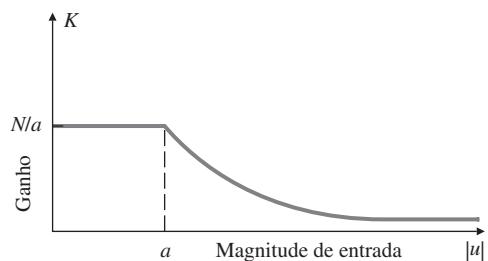
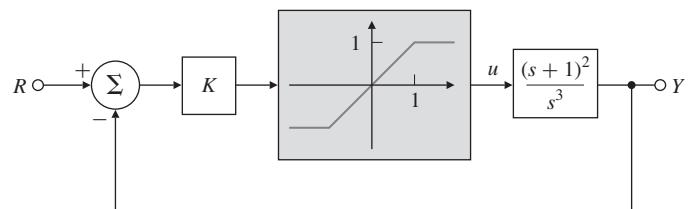


Figura 9.11 Diagrama de blocos para um sistema condicionalmente estável.



Solução. O lugar das raízes para o sistema, excluindo a saturação, é mostrado na Fig. 9.12. A partir deste lugar das raízes podemos facilmente concluir que o cruzamento no eixo imaginário ocorre em $\omega_0 = 1$ e $K = 1/2$. Sistemas como esse, que são estáveis para ganhos (relativamente) grandes, mas instáveis para ganhos menores, são chamados de **sistemas condicionalmente estáveis**. Se $K = 2$, que corresponde a $\zeta = 0,5$ no lugar das raízes, seria de se esperar que o sistema mostrasse respostas consistentes com $\zeta = 0,5$ para sinais de referência pequenos. No entanto, quando o tamanho da entrada de referência fica maior, o ganho equivalente fica menor, devido à saturação, e seria de se esperar que o sistema se tornasse menos bem amortecido. Finalmente, seria de se esperar que o sistema se tornasse instável, em algum momento para entradas grandes. Simulações não lineares de respostas ao degrau do sistema com $K = 2$ para entradas em degrau com amplitudes de $r_0 = 1,0, 2,0, 3,0$ e $3,4$ são mostradas na Fig. 9.9. Essas respostas confirmam nossas previsões. Além disso, o caso marginalmente estável mostra oscilações próximas a 1 rad/s, o que é previsto pela frequência no ponto em que o lugar das raízes cruza para o SPD.

Estabilidade condicional

EXEMPLO 9.8 Análise e projeto do sistema com ciclo limite usando o lugar das raízes

A última ilustração da utilização do lugar das raízes para fornecer uma descrição qualitativa da resposta de um sistema não linear é baseada no diagrama de blocos na Fig. 9.14. Determine se o

Um exemplo não linear: um sistema oscilatório

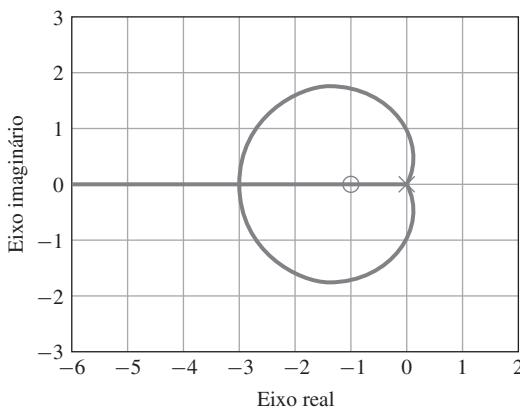


Figura 9.12 Lugar das raízes para $G(s) = (s + 1)^2 / s^3$ do sistema da Fig. 9.11.

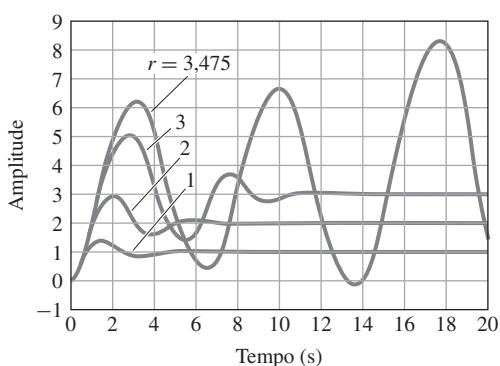


Figura 9.13 Respostas ao degrau do sistema da Fig. 9.11.

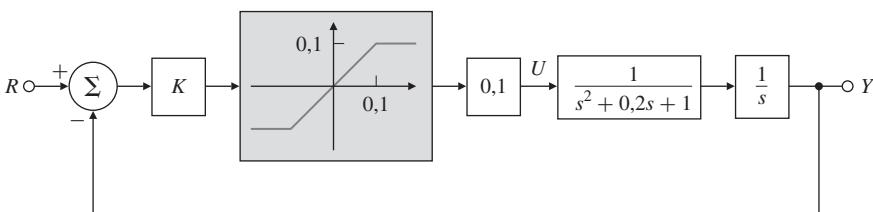


Figura 9.14 Diagrama de blocos para um sistema com um modo oscilatório.

sistema é estável e encontre a amplitude e a frequência do ciclo limite. Modifique o projeto do controlador para minimizar o efeito das oscilações do ciclo limite.

Solução. Esse sistema é típico de problemas de controle eletromecânicos, nos quais talvez o projetista inicialmente não tenha conhecimento do modo de ressonância correspondente ao denominador $s^2 + 0,2s + 1$, ($\omega = 1$, $\zeta = 0,1$). O lugar das raízes para este sistema em relação a K , excluindo a saturação, é esboçado na Fig. 9.15. O cruzamento no eixo imaginário pode ser verificado em $\omega_0 = 1$, $K = 0,2$; assim, o ganho de $K = 0,5$ é suficiente para forçar que as raízes do modo de ressonância estejam no SPD, como mostrado pelos pontos. Se o ganho do sistema for definido como $K = 0,5$, nossa análise prevê um sistema que é inicialmente instável, mas que torna-se estável quando o ganho diminui. Assim, é de se esperar que a resposta do sistema com saturação fortaleça a instabilidade até que a magnitude seja suficientemente grande, o que reduz o ganho efetivo para $K = 0,2$ e, *em seguida, para de crescer!*

Gráficos de respostas ao degrau com $K = 0,5$ para três degraus de amplitudes de $r_0 = 1, 4$ e 8 são mostrados na Fig. 9.16 e, novamente, nossa análise heurística está exatamente correta: o erro se acumula até uma amplitude fixa e, em seguida, começa a oscilar na amplitude fixa. As oscilações têm uma frequência de ≈ 1 rad/s e se mantêm com amplitude constante, independentemente da amplitude do degrau na entrada. Neste caso, a resposta sempre se aproxima de uma

Figura 9.15 Lugar das raízes para o sistema da Fig. 9.14.

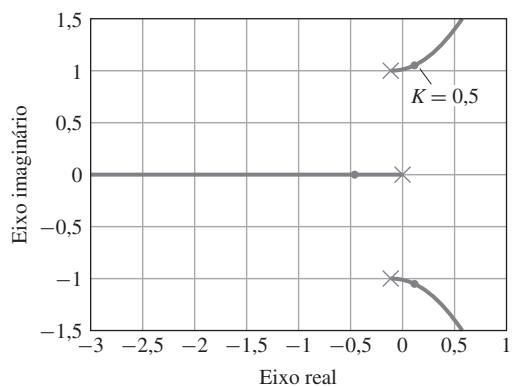
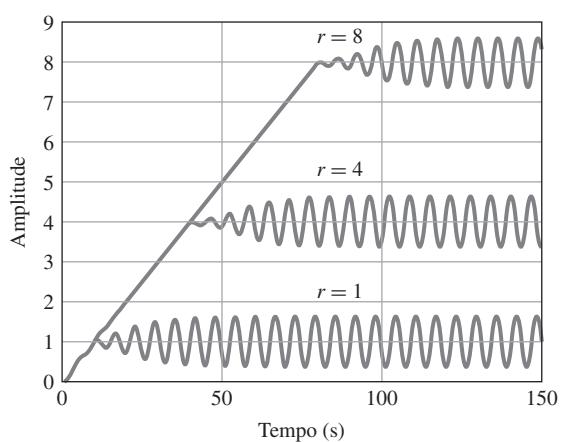


Figura 9.16 Respostas ao degrau do sistema da Fig. 9.14.



solução periódica de amplitude fixa, conhecida como um **ciclo limite**, assim chamado porque a resposta é cíclica à medida que o tempo aumenta.

Ciclo limite

Podemos retornar à Fig. 9.13 e sermos facilmente convencidos de que o primeiro transitório a um degrau de amplitude 3 é quase uma senoide. Podemos prever que o sistema está na fronteira da estabilidade para um ganho equivalente correspondente ao ganho do lugar das raízes de 1/2 quando o lugar das raízes cruza para o SPD. A fim de evitar o ciclo limite, o lugar das raízes tem que ser modificado por compensação de modo que nenhum dos ramos do lugar das raízes vá para o SPD. Um método comum de fazer isso para um modo oscilatório levemente amortecido é alocar os zeros do compensador próximos aos polos em uma frequência tal que o ângulo de partida do ramo do lugar das raízes nestes polos esteja na direção do SPE, um procedimento chamado de estabilização de fase anterior. O Exemplo 5.8 para o movimento mecânico justaposto demonstrou que um par polo-zero localizado desta forma, muitas vezes, faz com que um ramo do lugar das raízes vá do polo para o zero, virando para a esquerda, e, assim, ficando longe do SPD. A Fig. 9.17 mostra o lugar das raízes para o sistema, $1/[s(s^2 + 0,2s + 1,0)]$, incluindo um **compensador rejeita faixa** com zeros localizados, como acabamos de discutir. Além disso, o compensador também inclui dois polos que tornam a compensação fisicamente realizável. Nesse caso, ambos os polos foram colocados em $s = -10$, rápidos o suficiente para não causar problemas de estabilidade com o sistema, mas lentos o suficiente para que o ruído de alta frequência não seja amplificado demais. Assim, o compensador usado para o lugar das raízes é

$$D(s) = 123 \frac{s^2 + 0,18s + 0,81}{(s + 10)^2},$$

sendo o ganho de 123 selecionado para fazer com que o ganho DC da compensação seja igual à unidade. Este filtro rejeita faixa atenua as entradas nas proximidades de $\omega_n^2 = 0,81$ ou $\omega_n = 0,9$

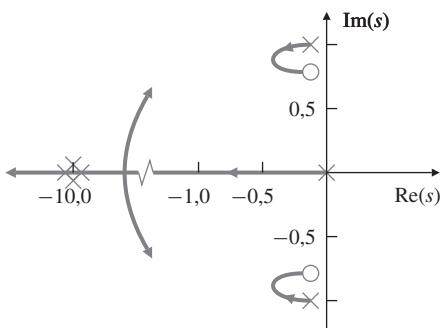


Figura 9.17 Lugar das raízes incluindo o compensador.

rad/s, de modo que qualquer entrada de ressonância da planta seja atenuada e, portanto, impede que a estabilidade do sistema seja prejudicada. A Fig. 9.18 mostra o sistema, incluindo o filtro rejeita faixa, e a Fig. 9.19 mostra a resposta temporal para duas entradas em degrau. Ambas as entradas, $r_0 = 2$ e 4 , têm amplitudes suficientemente altas para que a não linearidade seja saturada; no entanto, devido ao fato de o sistema ser incondicionalmente estável, a saturação resulta apenas na redução do ganho, então a resposta é mais lenta do que o previsto pela análise linear, mas ainda é estável, como também previsto por nossa análise linear por partes. Em ambos os casos, a não linearidade torna-se eventualmente insaturada e estabiliza o sistema para seu novo valor comandado de r .

9.3.1 Integrador antiwindup

Em qualquer sistema de controle, a saída do atuador pode saturar, porque o alcance dinâmico de todos os atuadores reais é limitado. Por exemplo, uma válvula satura quando ela está totalmente aberta ou fechada, as superfícies de controle de uma aeronave não podem ser deflexionadas além de determinados ângulos, amplificadores eletrônicos podem produzir apenas saídas de tensão finitas, etc. Sempre que a saturação do atuador acontece, o sinal de controle do processo para de mudar e o laço de realimentação é efetivamente aberto. Se

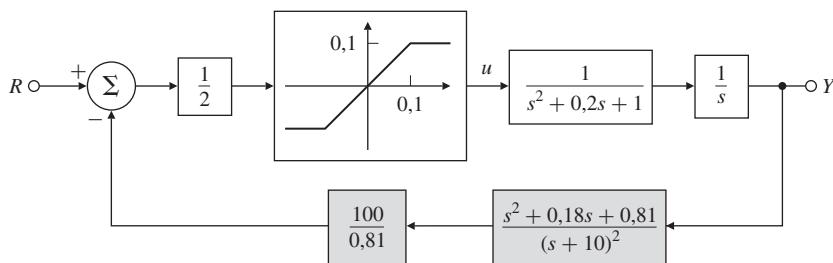


Figura 9.18 Diagrama de blocos para o sistema com o filtro rejeita faixa.

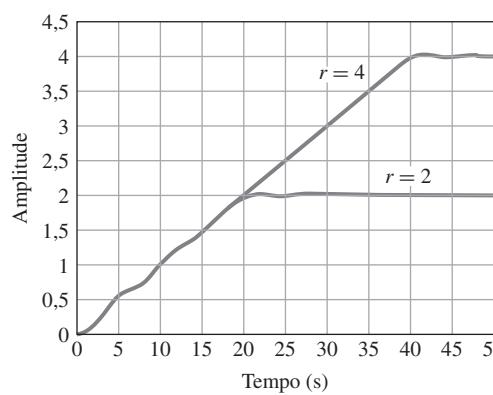


Figura 9.19 Respostas ao degrau do sistema da Fig. 9.18.

o sinal de erro continua a ser aplicado à entrada do integrador sob estas condições, a saída do integrador vai crescer (windup) até que o sinal do erro mude e a integração inverta. O resultado pode ser um sobressinal muito grande, pois a saída deve crescer para produzir o erro antiwindup necessário, resultando na resposta transitória pobre. De fato, o integrador é um elemento instável em malha aberta e deve ser estabilizado quando a saturação ocorre.²

Considere o sistema realimentado mostrado na Fig. 9.20. Suponha um sinal de referência em degrau com amplitude suficiente para fazer o atuador saturar em u_{max} . O integrador continua integrando o erro e , e o sinal de u_c continua crescendo. No entanto, a entrada da planta se mantém em seu valor máximo, ou seja, $u = u_{max}$, assim o erro continua grande até que a saída da planta exceda a referência e o erro mude de sinal. O aumento em u_c não é útil, pois a entrada na planta não é alterada, mas u_c pode se tornar muito grande se a saturação durar um longo tempo. Então, resultará em um considerável erro negativo e e em uma pobre resposta transitória, que trará a saída do integrador de volta para dentro da banda linear, onde o controle não está saturado.

A solução para este problema é um circuito **integrador antiwindup**, que “desliga” a ação integral quando o atuador satura. (Isso pode ser feito facilmente com lógica, se o controlador for implementado digitalmente, por meio da inclusão de um comando tal que “se $|u| = u_{max}, k_I = 0$;” veja o Capítulo 8.) Dois esquemas antiwindup equivalentes são mostrados na Fig. 9.21(a, b) para um controlador PI. O método na Fig. 9.21(a) é um pouco mais fácil de ser entendido, enquanto o esquema na Fig. 9.21(b) é mais fácil de ser implementado, uma vez que não requer uma não linearidade separada, mas usa a própria saturação.³ Nesses esquemas, tão logo o atuador satura, o laço de realimentação em torno do integrador torna-se ativo e age para manter a entrada do integrador em e_1 pequeno. Durante esse tempo, o integrador torna-se essencialmente uma rápida defasagem de primeira ordem. Note que podemos redesenhar a parte do diagrama de blocos na Fig. 9.21(a) de e para a u_c como mostrado na Fig. 9.21(c). A parte do integrador torna-se, então, a defasagem de primeira ordem mostrada na Fig. 9.21(d). O ganho antiwindup, K_a , deve ser ajustado para ser grande o suficiente, de forma que o circuito antiwindup mantenha a entrada do integrador pequena em todas as condições de erro.

O efeito do antiwindup é reduzir tanto o sobressinal quanto o esforço de controle no sistema realimentado. A implementação de tais esquemas antiwindup é uma necessidade em qualquer aplicação prática de controle integral, e a omissão dessa técnica pode levar à grave deterioração da resposta. Do ponto de vista da estabilidade, o efeito da saturação é abrir o laço de realimentação e deixar a planta em malha aberta com uma entrada constante e o controlador como um sistema em malha aberta com o erro do sistema sendo a entrada.

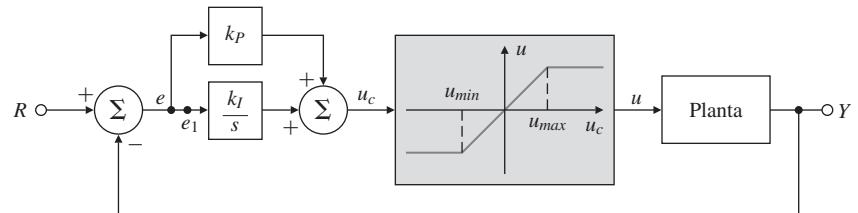


Figura 9.20 Sistema realimentado com saturação no atuador.

² Em controle de processos, o controle integral é normalmente chamado de **controle de reset** e, assim, o integrador windup é geralmente chamado de **reset windup**. Sem controle integral, uma dada referência, digamos, 10 resulta em uma resposta de menor valor, digamos, 9,9. O operador deve, então, *redefinir* (reset) a referência para 10,1 a fim de obter a saída no valor desejado de 10. O controlador com controle integral automaticamente obtém saída de 10 com o valor de referência 10; assim, o integrador faz *reset automático*.

³ Em alguns casos, especialmente com atuadores mecânicos, como superfícies de controle de aeronaves ou uma válvula de controle de fluxo, a parada brusca de um dispositivo físico não é desejável e pode causar danos. Em tais casos, é comum incluir uma saturação eletrônica com limites inferiores aos do dispositivo físico, de modo que o sistema atinja a parada elétrica pouco antes do dispositivo físico saturar.

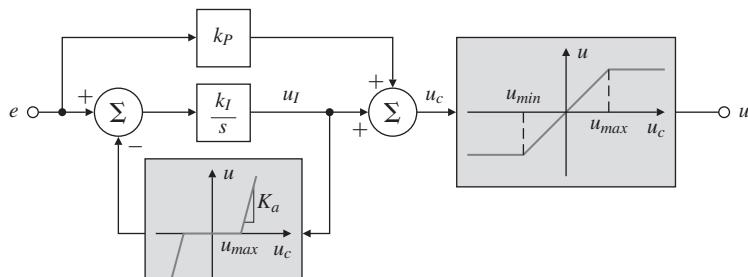
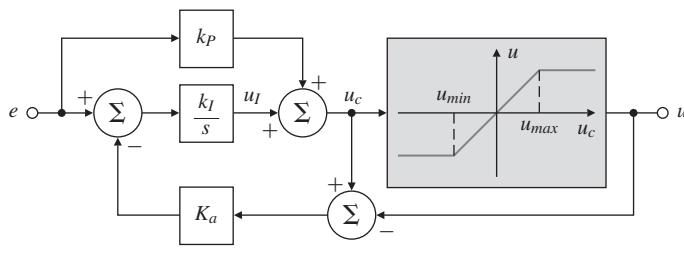
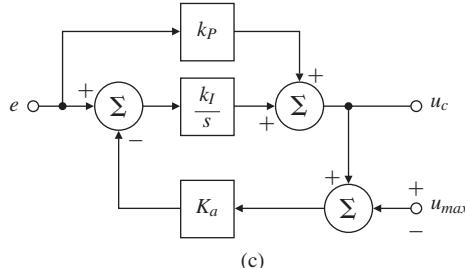


Figura 9.21 Técnicas de integração antiwindup.

(a)



(b)



(c)

$$\text{(d)} \quad \frac{k_p s + k_I}{s + K_a k_I} \rightarrow u_c$$

(d)

O objetivo do antiwindup é proporcionar realimentação local para tornar o controlador estável sozinho quando o laço principal é aberto pela saturação do sinal; qualquer circuito que faça isso vai funcionar como antiwindup.⁴

Objetivo do antiwindup

EXEMPLO 9.9 Compensador antiwindup para um controlador PI

Considere a planta com função de transferência para pequenos sinais,

$$G(s) = \frac{1}{s},$$

e um controlador PI

$$D_c(s) = k_p + \frac{k_I}{s} = 2 + \frac{4}{s},$$

⁴ Um esquema mais sofisticado pode usar um antiwindup realimentado em um nível de saturação mais baixo do que o imposto pelo atuador, assim o controle PD continua por um tempo após a integração ter sido interrompida. Qualquer esquema desse tipo precisa ser cuidadosamente analisado para avaliar seu desempenho e para assegurar a estabilidade.

na configuração de realimentação unitária. A entrada da planta é limitada em $\pm 1,0$. Estude o efeito do antiwindup na resposta do sistema.

Solução. Suponha que estejamos usando um circuito antiwindup com um ganho de realimentação de $K_a = 10$, como mostrado no diagrama de blocos do SIMULINK® na Fig. 9.22. A Fig. 9.23(a) mostra a resposta ao degrau do sistema com e sem o elemento antiwindup. A Fig. 9.23(b) mostra o esforço de controle correspondente. Note que o sistema com antiwindup tem substancialmente menores sobressinal e esforço de controle.

9.4 Análise do ganho equivalente usando resposta em frequência: funções descritivas

O comportamento de sistemas que contêm qualquer uma das não linearidades mostradas na Fig. 9.6 pode ser descrito qualitativamente, considerando o elemento não linear como um ganho variável dependente do sinal. Por exemplo, com o elemento de saturação (Fig. 9.6a), é claro que, para sinais de entrada com magnitudes inferiores a h , a não linearidade é linear com o ganho N/h . No entanto, para sinais maiores que h , o tamanho da saída é limitado por N , enquanto o tamanho da entrada pode ficar muito maior do que h ; uma vez que a entrada excede h , a razão da saída para a entrada diminui. Assim, a saturação tem as características de ganho mostradas na Fig. 9.10. Todos os atuadores saturaram em algum nível. Se não, sua saída poderia aumentar

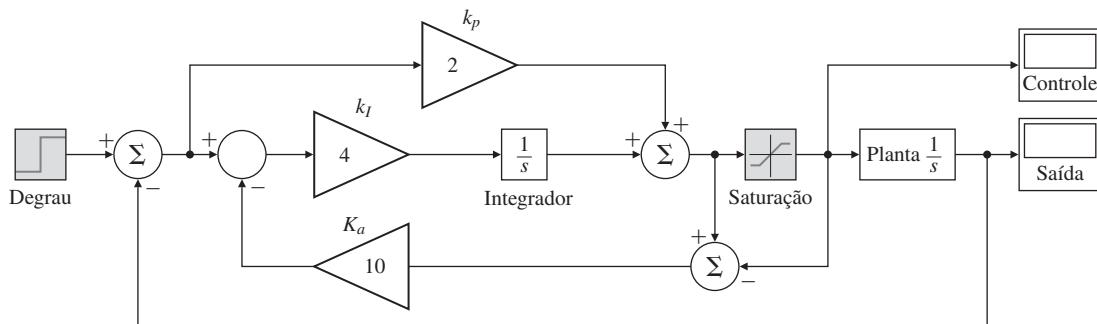


Figura 9.22 Diagrama de blocos no SIMULINK® para o exemplo de antiwindup.

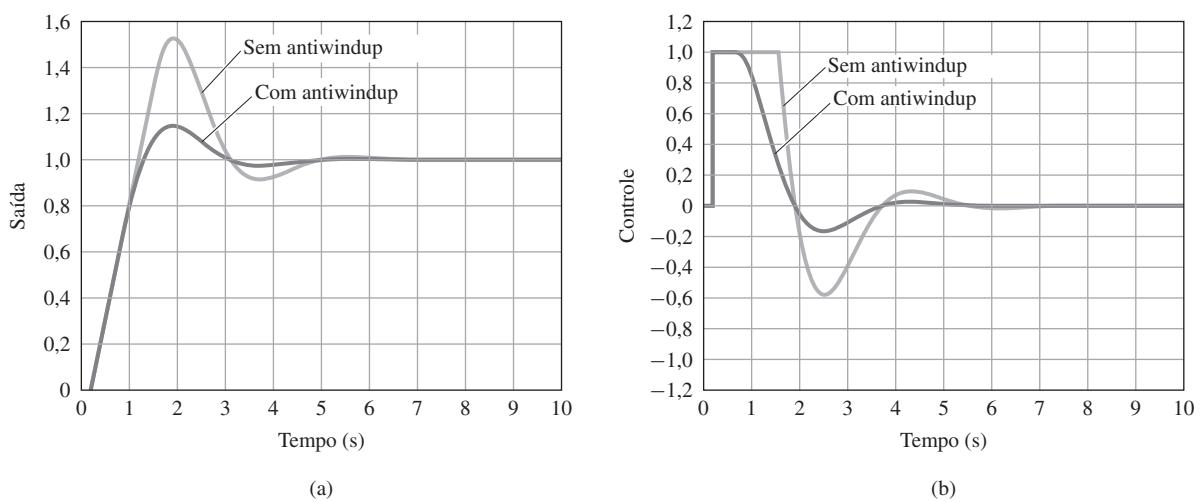


Figura 9.23 Integrador antiwindup: (a) resposta ao degrau; (b) esforço de controle.

até o infinito, o que é fisicamente impossível. Um importante aspecto do projeto de sistema de controle é o **dimensionamento do atuador**, o que significa escolher o tamanho, peso, potência necessária, custo e nível de saturação do dispositivo. Geralmente, níveis de saturação mais elevados requerem atuadores maiores, mais pesados e mais caros. Do ponto de vista de controle, o fator-chave que entra no dimensionamento é o efeito da saturação no desempenho do sistema de controle.

Um método de análise não linear conhecido como **funções descritivas**, baseado no pressuposto de que a entrada da não linearidade é senoidal, pode ser usado para prever o comportamento de uma classe de sistemas não lineares. Um elemento não linear não tem uma função de transferência. No entanto, para uma certa classe de não linearidades, é possível substituir a não linearidade por um ganho equivalente dependente da frequência para fins de análise. Podemos, então, estudar as propriedades da malha, tais como a sua estabilidade. O método de funções descritivas é mais um método heurístico e seu objetivo é tentar encontrar algo semelhante a uma “função de transferência” para um elemento não linear. A ideia é que, em resposta a uma excitação senoidal, a maioria das não linearidades irá produzir um sinal *periódico* (não necessariamente senoidal) com frequências harmônicas da frequência de entrada. Assim, podemos ver a função descritiva como uma extensão da resposta em frequência para não linearidades. Podemos *assumir* que, em muitos casos, a saída pode ser aproximada apenas pelo primeiro harmônico e o restante pode ser negligenciado. Esta suposição básica significa que a planta se comporta aproximadamente como um filtro passa-baixa, e isto é uma boa suposição na maioria das situações práticas. As outras hipóteses por trás das funções descritivas são de que a não linearidade é invariante no tempo e que há um único elemento não linear no sistema. De fato, o método de funções descritivas é um caso especial da mais sofisticada análise de equilíbrio harmônico. Suas raízes remontam aos primeiros estudos na União Soviética e em outros lugares. O método foi introduzido por Kochenburger, em 1950 nos Estados Unidos. Ele propôs usar a série de Fourier para definir um ganho equivalente, K_{eq} (Truxal, 1955, p. 566). Esta ideia provou ser muito útil na prática. O método é heurístico, mas há tentativas de estabelecer uma justificativa teórica para a técnica (Bergen e Franks, 1973; Khalil, 2002; Sastry, 1999). Na verdade o método funciona muito melhor do que é justificado pela teoria existente!

Considere o elemento não linear $f(u)$ mostrado na Fig. 9.24. Se o sinal de entrada $u(t)$ é senoidal com amplitude a , ou

$$u(t) = a \operatorname{sen}(\omega t), \quad (9.20)$$

então a saída $y(t)$ será *periódica* com um período fundamental igual ao da entrada e, consequentemente, com um série de Fourier descrita por

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(j\omega t) + b_i \operatorname{sen}(j\omega t) \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \operatorname{sen}(j\omega t + \theta_i), \end{aligned} \quad (9.21)$$

sendo

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \cos(j\omega t) d(\omega t), \quad (9.22)$$

$$b_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \operatorname{sen}(j\omega t) d(\omega t), \quad (9.23)$$

$$Y_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad (9.24)$$

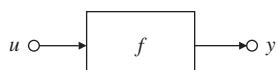


Figura 9.24 Elemento não linear.

Função descritiva

Kochenburger sugeriu que o elemento não linear pode ser descrito pela primeira componente fundamental desta série como se fosse um sistema linear com um ganho de Y_1 e fase de θ_1 . Se a amplitude for variada, os coeficientes de Fourier e as fases correspondentes irão variar em função da amplitude do sinal de entrada devido à natureza não linear do elemento. Ele chamou esta aproximação de **função descritiva (FD)**. A função descritiva é definida como a quantidade (complexa) que é a razão entre a amplitude da componente fundamental da saída do elemento não linear e a amplitude do sinal de entrada senoidal e é essencialmente uma função da “resposta em frequência equivalente”:

$$DF = K_{eq}(a, \omega) = \frac{b_1 + ja_1}{a} = \frac{Y_1(a, \omega)}{a} e^{j\theta_1} = \frac{Y_1(a, \omega)}{a} \angle \theta_1. \quad (9.26)$$

Então, a função descritiva é definida apenas no eixo $j\omega$. No caso de não linearidades sem memória que são também uma função ímpar [i.e., $f(-a) = -f(a)$], os coeficientes da série de Fourier termos cosseno são todos zeros, e a função descritiva é simplesmente

$$DF = K_{eq}(a) = \frac{b_1}{a} \quad (9.27)$$

e é *independente* da frequência ω . Esse é o caso comum em controle, e todas as não linearidades, saturação, relé e zona morta resultam em tais funções descritivas. O cálculo de funções descritivas para as características não lineares da Fig. 9.6 é geralmente simples, mas tedioso. Pode ser feito analiticamente ou numericamente e também pode ser determinado por um experimento. Agora, vamos nos concentrar no cálculo de várias funções descritivas para algumas não linearidades muito comuns.

EXEMPLO 9.10 Função descritiva para uma não linearidade de saturação

A não linearidade de saturação é mostrada na Fig. 9.25(a) e é a não linearidade mais comum em sistemas de controle. A função de saturação (sat) é definida como

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} +1, & x > 1, \\ x, & |x| \leq 1, \\ -1, & x < -1. \end{cases}$$

Se a inclinação da região linear é k e os valores saturados finais são $\pm N$, então a função é

$$y = N \text{ sat}\left(\frac{k}{N}x\right).$$

Encontre a função descritiva para esta não linearidade.

Solução. Considere os sinais de entrada e saída do elemento de saturação mostrado na Fig. 9.25. Para uma senoide de entrada $u = a \sen \omega t$ com amplitude $a \leq \frac{N}{k}$, a saída é tal que a FD é

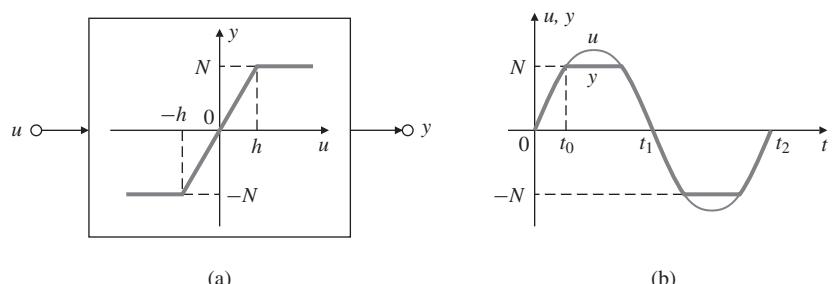


Figura 9.25 (a) Não linearidade de saturação; (b) sinais de entrada e saída.

apenas um ganho unitário. Com $a \geq \frac{N}{k}$, precisamos calcular a amplitude e fase da componente fundamental da saída. Uma vez que a saturação é uma função ímpar, todos os termos cosseno na Eq. (9.21) são zeros e $a_1 = 0$. De acordo com Eq. (9.27),

$$K_{eq}(a) = \frac{b_1}{a},$$

tal que

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi N \operatorname{sat}\left(\frac{k}{N} a \operatorname{sen} \omega t\right) \operatorname{sen} \omega t d(\omega t),$$

desde que a integral para o coeficiente b_1 no intervalo $\omega t = [0, \pi]$ seja simplesmente o dobro do intervalo $\omega t = [0, \pi/2]$. Então,

$$b_1 = \frac{4N}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sat}\left(\frac{k}{N} a \operatorname{sen} \omega t\right) \operatorname{sen} \omega t d(\omega t).$$

Agora, podemos dividir a integral em duas partes que correspondem às partes linear e a saturação. Definindo o tempo de saturação t_s como o tempo em que

$$t_s = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{N}{ak}\right) \quad \text{ou} \quad \omega t_s = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{N}{ak}\right). \quad (9.28)$$

Então,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4N\omega}{\pi a} \left(\int_0^{\omega t_s} \operatorname{sat}\left(\frac{k}{N} a \operatorname{sen} \omega t\right) \operatorname{sen} \omega t dt + \int_{\omega t_s}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \omega t dt \right) \\ &= \frac{4N\omega}{\pi a} \left(\int_0^{\omega t_s} \frac{k}{N} a \operatorname{sen}^2 \omega t dt + \int_{\omega t_s}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \omega t dt \right) \\ &= \frac{4N\omega}{\pi a} \left(\int_0^{\omega t_s} \frac{k}{2N} a (1 - \cos 2\omega t) dt + \int_{\omega t_s}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \omega t dt \right) \\ &= \frac{4N\omega}{\pi a} \left(\frac{k}{2N} a t |_{0}^{t_s} - \frac{k}{2N} a \operatorname{sen} 2\omega t |_{0}^{t_s} - \frac{1}{\omega} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos t_s) \right). \end{aligned}$$

No entanto, usando a Eq. (9.28), temos

$$\operatorname{sen} \omega t_s = \frac{N}{ka} \quad \text{e} \quad \cos \omega t_s = \sqrt{1 - \left(\frac{N}{ka}\right)^2}.$$

Finalmente obtendo

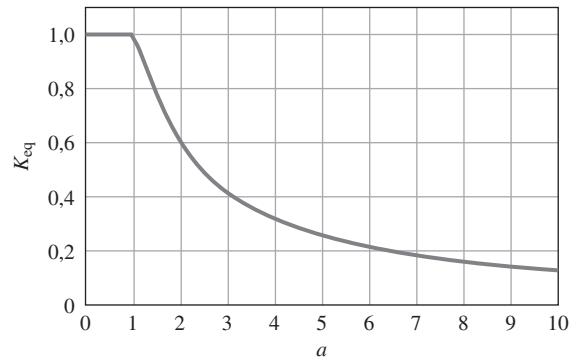
$$K_{eq}(a) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(k \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{N}{ak}\right) + \frac{N}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{N}{ka}\right)^2} \right), & \frac{ka}{N} > 1, \\ k, & \frac{ka}{N} \leq 1. \end{cases} \quad (9.29)$$

A Fig. 9.26 mostra um gráfico de $K_{eq}(a)$ indicando que esta é uma função real independente da frequência e não resulta em mudanças de fase. Pode-se ver que a função descritiva é inicialmente uma constante e, então, se deteriora essencialmente como uma função da recíproca da amplitude do sinal de entrada, a .

EXEMPLO 9.11 Função descritiva para uma não linearidade de relé

Encontre a função descritiva para o relé ou função sgn mostrada na Fig. 9.25(a) e definida como

Figura 9.26 Função descritiva para a não linearidade de saturação com $k = N = 1$.



$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(x) &= 0, & x &= 0, \\ &= \text{sinal de } x, & \text{caso contrário.} \end{aligned}$$

Solução. A saída é uma onda quadrada de amplitude N para *toda* entrada de qualquer tamanho; assim, $Y_1 = \frac{4N}{\pi}$ e $K_{eq} = \frac{4N}{\pi a}$. A solução também pode ser obtida a partir da Eq. (9.29) se fizermos $k \rightarrow \infty$. Para ângulos pequenos,

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{N}{ak}\right) \cong \frac{N}{ak},$$

e, assim, a partir da Eq. (9.27), temos

$$K_{eq}(a) = \frac{2}{\pi} \left(k \left(\frac{N}{ak} \right) + \frac{N}{a} \right) = \frac{4N}{\pi a}. \quad (9.30)$$

As duas últimas não linearidades são sem memória. Em seguida, vamos considerar uma não linearidade com memória. Não linearidades com memória ocorrem em muitas aplicações, incluindo dispositivos de gravação magnética, folgas em sistemas mecânicos e em circuitos eletrônicos. Considere o circuito eletrônico biestável mostrado na Fig. 9.27 que é chamado de um disparador de Schmitt (Sedra e Smith, 1991). Esse circuito tem memória. Considerando a Fig. 9.28, se o circuito está no estado em que $V_{out} = +N$, então os valores positivos de v_{in} não alteraram o estado. Para “disparar” o circuito no estado $V_{out} = -N$, devemos fazer v_{in} negativo o suficiente para fazer v negativo. O valor limiar é $h = NR_1/R_2$. O disparador de Schmitt é empregado comumente em controle de veículos espaciais (Bryson, 1994). A seguir, encontre a função descritiva de uma não linearidade de histerese.

EXEMPLO 9.12 Função descritiva para uma não linearidade de relé com histerese

Considere a função de relé com histerese mostrada na Fig. 9.29(a). Encontre a função descritiva para essa não linearidade.

Solução. Um sistema com histerese tende a permanecer em seu estado atual. Até a entrada da função de sinal ultrapassar o valor h , não é possível determinar a saída unicamente sem conhecer sua história. Isso implica que temos uma não linearidade com memória. A saída será uma onda quadrada com amplitude N , desde que a amplitude de entrada a seja maior do que o nível de histerese h . A partir da Fig. 9.29(b), vemos que a onda quadrada é atrasada em relação à entrada. O atraso de tempo pode ser calculado como o tempo em que

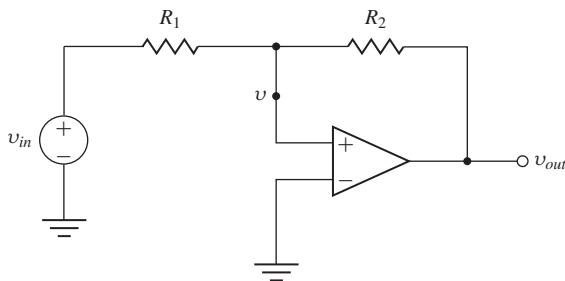


Figura 9.27 Circuito do disparador de Schmitt.

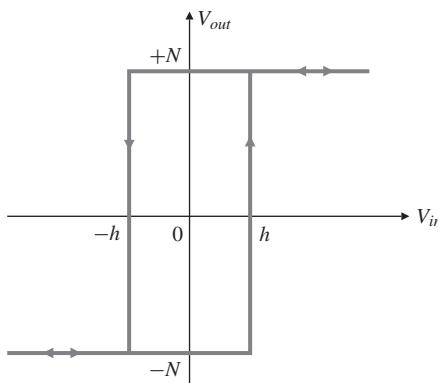
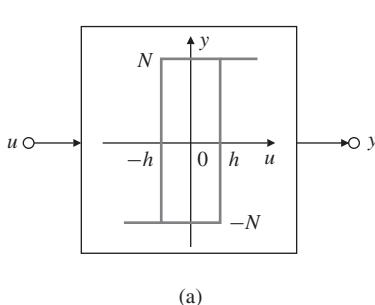
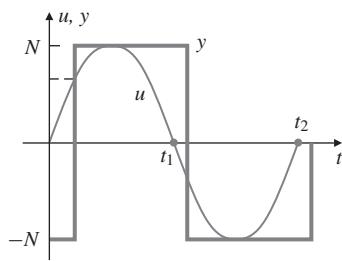


Figura 9.28 Não linearidade de histerese para o circuito do disparador de Schmitt.



(a)



(b)

Figura 9.29 (a) Não linearidade de histerese; (b) entrada e saída da não linearidade.

$$a \sin \omega t = h \quad \text{ou} \quad \omega t = \sin^{-1} \left(\frac{h}{a} \right). \quad (9.31)$$

Como o ângulo de fase é conhecido para todas frequências

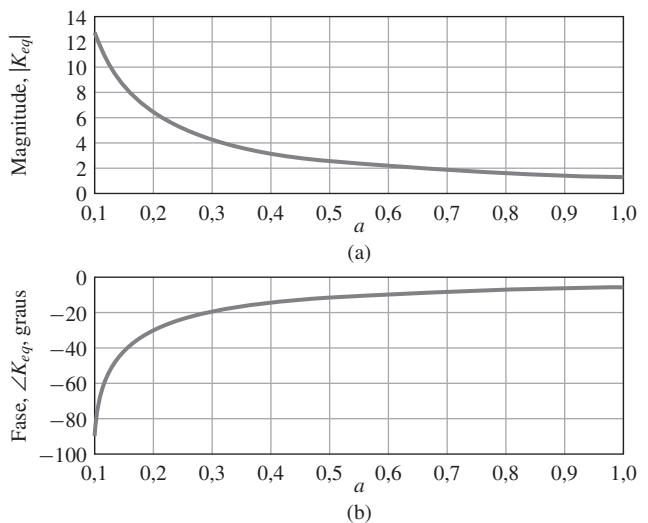
$$K_{eq}(a) = \frac{4N}{\pi a} \angle -\sin^{-1} \left(\frac{h}{a} \right) = \frac{4N}{\pi a} e^{-j \sin^{-1} \left(\frac{h}{a} \right)}, \quad (9.32)$$

$$= \frac{4N}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{h}{a} \right)^2} - j \frac{h}{a} \right). \quad (9.33)$$

A função descritiva é, então, dada por

$$K_{eq}(a) = \begin{cases} \frac{4N}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{h}{a} \right)^2} - j \frac{h}{a} \right), & a \geq h, \\ 0, & a < h. \end{cases} \quad (9.34)$$

Figura 9.30 Função descritiva para a não linearidade de histerese com $h = 0,1$ e $N = 1$; (a) magnitude; (b) fase.



O gráfico da função descritiva é dado na Fig. 9.30. A magnitude é proporcional ao recíproco da amplitude do sinal de entrada, e a fase varia entre -90° e 0° .

9.4.1 Análise de estabilidade usando funções descritivas

O teorema de Nyquist pode ser estendido para lidar com sistemas não lineares, cujas não linearidades foram aproximadas por funções descritivas. Na análise padrão de sistema lineares, a equação característica é $1 + KL = 0$, sendo $L = DG$ o ganho de malha e

$$L = -\frac{1}{K}. \quad (9.35)$$

Conforme descrito na Seção 6.3, olhamos para os envolvimentos do ponto $-1/K$ para determinar a estabilidade. Com uma não linearidade representada pela função descritiva, $K_{eq}(a)$, a equação característica é da forma $1 + K_{eq}(a)L = 0$, e segue-se que

$$L = -\frac{1}{K_{eq}(a)}. \quad (9.36)$$

Agora, temos de olhar para a interseção de L com o gráfico de $-1/K_{eq}(a)$. Se a curva L intercepta $-1/K_{eq}(a)$, então o sistema irá oscilar na amplitude cruzamento, a_l , e na frequência correspondente, ω_l , tendo em mente a natureza aproximada da função descritiva. Em seguida, olhamos os envolvimentos para decidir se o sistema é estável para o determinado valor de ganho, como se ele fosse um sistema linear. Se for o caso, podemos deduzir que o sistema não linear é estável. Caso contrário, podemos inferir que o sistema não linear é instável.

A Fig. 9.31 mostra um exemplo de um sistema linear, exceto por uma não linearidade. De fato, os elementos não lineares podem ter um efeito benéfico e podem limitar a amplitude das oscilações. A análise por função descritiva pode ser usada para determinar a amplitude e a frequência do ciclo limite. Estritamente falando, um sistema em ciclo limite pode ser considerado instável. Na realidade, a trajetória de um ciclo limite está confinada em uma região finita do espaço de estados. Se essa região satisfizer às especificações de desempenho, então a resposta é tolerável. Em alguns casos, o ciclo limite tem efeito benéfico (veja o estudo de caso na Seção 10.4). O sistema não possui estabilidade assintótica, pois o sistema não permanecerá na origem do espaço de estados. A função descritiva pode ser benéfica para determinar quais condições resultarão na instabilidade e pode até propor soluções para eliminar a instabilidade, como ilustrado no próximo exemplo, no qual o diagrama de Nyquist para um ganho de malha linear, L , e a recíproca negativa da função descritiva, $-1/K_{eq}(a)$, se sobreponem. O ponto em que elas se

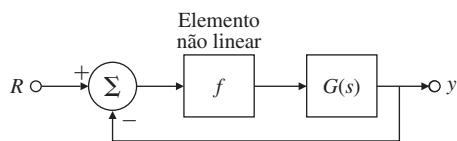


Figura 9.31 Sistema em malha fechada com uma não lineariedade.

cruzam corresponde ao ciclo limite. Para determinar a amplitude e a frequência do ciclo limite, podemos reescrever a Eq. (9.36) como segue:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{L(j\omega)\}\operatorname{Re}\{K_{eq}(a)\} - \operatorname{Im}\{L(j\omega)\}\operatorname{Im}\{K_{eq}(a)\} + 1 &= 0, \\ \operatorname{Re}\{L(j\omega)\}\operatorname{Im}\{K_{eq}(a)\} + \operatorname{Im}\{L(j\omega)\}\operatorname{Re}\{K_{eq}(a)\} &= 0. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Podemos, então, resolver essas duas equações para os dois possíveis valores desconhecidos da frequência do limite de ciclo, ω_l , e a amplitude correspondente, a_l , como ilustrado nos exemplos seguintes.

EXEMPLO 9.13 Sistema condicionalmente estável

Considere o sistema realimentado na Fig. 9.14. Determine a amplitude e a frequência do ciclo limite usando o diagrama de Nyquist.

Solução. O diagrama de Nyquist do sistema é sobreposto em $-1/K_{eq}(a)$ como mostrado na Fig. 9.32. Note que o negativo do inverso da função descritiva, usando a Eq. (9.29), é

$$\begin{aligned} -\frac{1}{K_{eq}(a)} &= -\frac{1}{\frac{2}{\pi} \left(k \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{N}{ak} \right) + \frac{N}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{N}{ka} \right)^2} \right)} \\ &= -\frac{1}{\frac{2}{\pi} \left(\operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{0.1}{a} \right) + \frac{0.1}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{0.1}{a} \right)^2} \right)}, \end{aligned}$$

que é uma linha reta que é coincidente com o eixo real negativo e é parametrizada como uma função da amplitude do sinal de entrada, a . O ponto de interseção das duas curvas em $-0,5$ corresponde à frequência do ciclo limite em $\omega_l = 1$. Um gráfico da função descritiva para $k = 1$ e $N = 0,1$ é mostrado na Fig. 9.33, e uma magnitude de $K_{eq} = 0,2$ corresponde a uma amplitude de entrada de $a_l = 0,63$.

Alternativamente, a partir do lugar das raízes do nosso exemplo mostrado na Fig. 9.15, o ganho no cruzamento do eixo imaginário é 0,2; então, a partir da Eq. (9.29), temos que

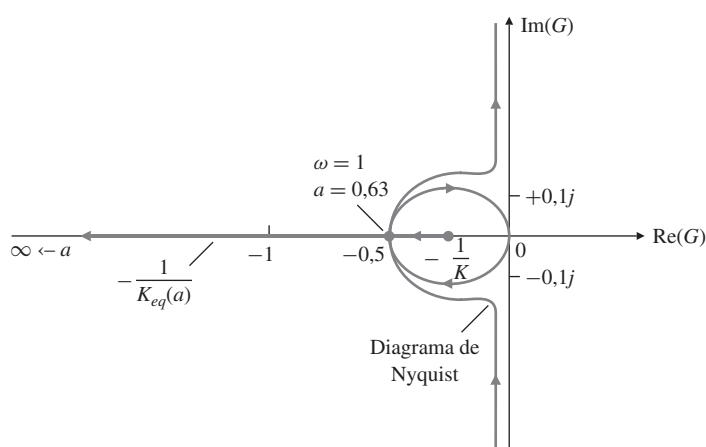


Figura 9.32 Diagrama de Nyquist e função descritiva para determinar o ciclo limite.

$$K_{eq} = \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{0,1}{a} \right) + \frac{0,1}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{0,1}{a} \right)^2} \right) = 0,2.$$

Se aproximarmos a função arco-seno pelo seu argumento como

$$\operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{0,1}{a} \right) \approx \frac{0,1}{a},$$

então

$$\frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{0,1}{a} \right) + \frac{0,1}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{0,1}{a} \right)^2} \right) = 0,2,$$

o que resulta na equação polinomial

$$\pi^2 a^4 - 2\pi a^3 + (0,1)^2 = 0$$

e encontramos a solução relevante como $a = 0,63$. Pela medição do histórico temporal da Fig. 9.16, a amplitude da oscilação é de 0,62, o que está de acordo com a nossa previsão.

Para sistemas com não linearidades que têm memória, também podemos usar a técnica de Nyquist, como ilustrado no exemplo seguinte.

EXEMPLO 9.14 Determinação da estabilidade com uma não linearidade de histerese

Considere o sistema com uma não linearidade de histerese mostrado na Fig. 9.34. Determine se o sistema é estável e encontre a amplitude e a frequência do ciclo limite.

Solução. O diagrama de Nyquist para o sistema é mostrado na Fig. 9.35. O negativo do inverso da função descritiva para a não linearidade de histerese é

$$-\frac{1}{K_{eq}(a)} = -\frac{1}{\frac{4N}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{h}{a} \right)^2} - j \frac{h}{a} \right)} = -\frac{\pi}{4N} \left[\sqrt{a^2 - h^2} + jh \right].$$

Neste caso, $N = 1$ e $h = 0,1$, e temos

$$-\frac{1}{K_{eq}(a)} = -\frac{\pi}{4} \left[\sqrt{a^2 - 0,01} + j0,1 \right].$$

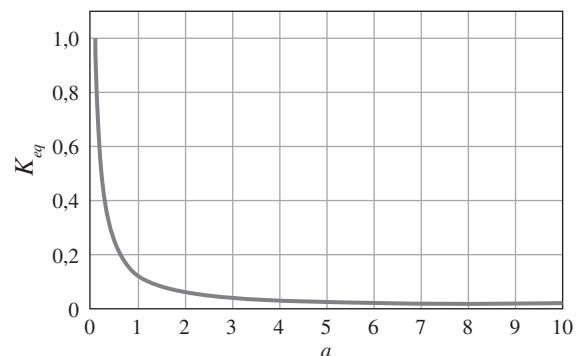


Figura 9.33 Função descritiva para a não linearidade de saturação com $N = 0,1$ e $k = 1$.

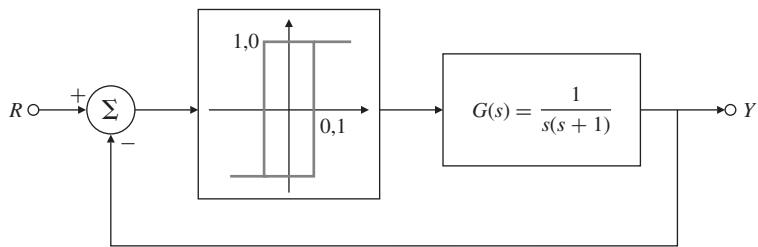


Figura 9.34 Sistema realimentado com não linearidade de histerese.

Essa é uma linha reta paralela ao eixo real que é parametrizada em função da amplitude do sinal de entrada, a , e também é traçada na Fig. 9.35. A interseção dessa curva com o diagrama de Nyquist fornece a frequência e a amplitude correspondente do ciclo limite estável. Também podemos determinar a informação do ciclo limite analiticamente:

$$-\frac{1}{K_{eq}(a)} = -\frac{\pi}{4} \left[\sqrt{a^2 - 0,01} + j0,1 \right] = G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)}.$$

Considerando o denominador da equação anterior, temos

$$\frac{\pi}{4} \sqrt{a^2 - 0,01} \omega^2 + \frac{0,1\pi}{4} \omega - 1 + j \left[\frac{0,1\pi}{4} \omega^2 - \frac{\pi}{4} \sqrt{a^2 - 0,01} \omega \right] = 0.$$

Definindo as partes real e imaginária iguais a zero, temos duas equações e duas incógnitas. A solução relevante é $\omega_l = 2,2$ rad/s e $a_l = 0,24$. A implementação no SIMULINK do sistema em malha fechada é mostrada na Fig. 9.36. A resposta ao degrau do sistema é mostrada na Fig. 9.37, e o ciclo limite tem uma amplitude de $a_l = 0,24$ e uma frequência de $\omega_l = 2,2$ rad/s e é bem previsto por nossa análise.

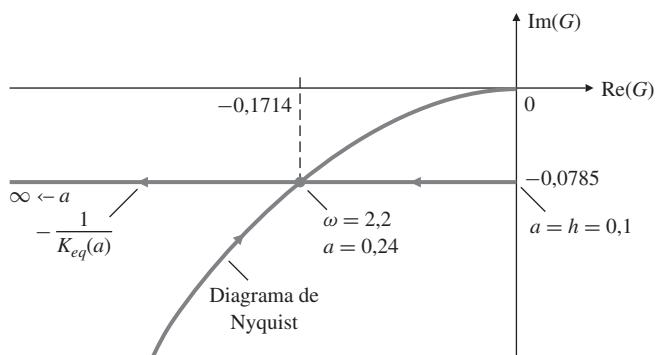


Figura 9.35 Diagrama de Nyquist e FD para determinar as propriedades do ciclo limite.

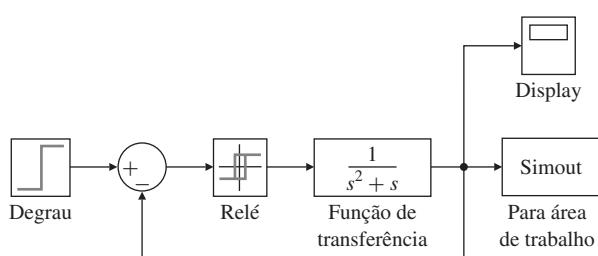


Figura 9.36 Diagrama do SIMULINK para um sistema com histerese.

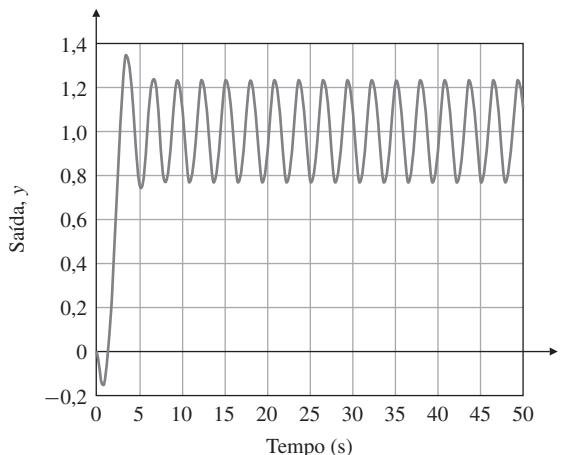


Figura 9.37 Resposta ao degrau mostrando oscilações do ciclo limite.

△ 9.5 Análise e projeto baseados na estabilidade

O requerimento central de qualquer sistema de controle é a estabilidade, e os métodos de projeto que temos estudado são baseados nesse fato. O lugar das raízes é um gráfico dos polos de malha fechada no plano s , e o projetista está sempre ciente do fato de que, se uma raiz está no semiplano direito, o sistema será instável. Projetos baseados na representação de estado incluem a alocação do polo, onde as localizações desejadas dos polos são, naturalmente, selecionadas para estarem na região estável. De forma semelhante, Nyquist demonstrou condições para a estabilidade com base na resposta em frequência, e os projetistas estão cientes dos requerimentos dos envolvimentos de seus gráficos ou, equivalentemente, das margens de ganho e de fase no diagrama de Bode. Antes de qualquer um desses métodos, matemáticos estudaram a estabilidade de equações diferenciais ordinárias (ODE), e essas e outras técnicas sofisticadas são necessárias para enfrentar os problemas de sistemas não lineares. Começamos com uma representação gráfica das soluções de ODE conhecida como o plano de fase e introduzimos o método de Lyapunov e outros como uma introdução a esta área de projeto de controle.

9.5.1 O plano de fase

Enquanto o lugar das raízes e os métodos de resposta em frequência consideraram a resposta do sistema indiretamente através dos polos e zeros da função de transferência ou o ganho e a fase da resposta em frequência, o plano de fase considera a resposta temporal diretamente traçando a trajetória das variáveis de estado. Embora a visualização direta restrinja o método para sistemas de segunda ordem com apenas duas variáveis de estado, a capacidade do método de considerar não linearidades, bem como de dar uma nova visão sobre sistemas lineares, faz um olhar rápido para esta técnica bem interessante.

Para ilustrar as ideias do plano de fase, considere um sistema fictício de um motor mostrado na Fig. 9.38 com a função de transferência em malha aberta

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}.$$

Se assumirmos que $T = 1/6$ e que o amplificador (no momento) não está sujeito à saturação e tem ganho K , com $K = 5T$, as equações de estado para o sistema em malha fechada podem ser escritas como

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9.38)$$

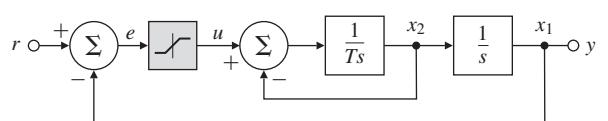


Figura 9.38 Um sistema com atuador não linear e realimentação de posição.

$$\dot{x}_2 = -5x_1 - 6x_2, \quad (9.39)$$

$$y = x_1. \quad (9.40)$$

Visto que essas equações são invariantes no tempo, o tempo pode ser eliminado dividindo a Eq. (9.39) pela Eq. (9.38), resultando em

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-5x_1 - 6x_2}{x_2}. \quad (9.41)$$

A solução dessa equação fornece um gráfico de x_2 versus x_1 ou, em outras palavras, uma trajetória no plano de fases com coordenadas (x_1, x_2) ⁵. Antes de traçar o gráfico da Eq. (9.41), é útil considerar primeiro o sistema de equações na forma matricial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x}$, para a qual

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Se assumirmos nessa equação que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o e^{st}$, na qual tanto s e \mathbf{x}_o são constantes, então $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_o s e^{st}$, e a equação pode ser reduzida como segue:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \quad (9.42)$$

$$\mathbf{x}_o s e^{st} = \mathbf{F}\mathbf{x}_o e^{st}, \quad (9.43)$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{F}]\mathbf{x}_o e^{st} = \mathbf{0}, \quad (9.44)$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{F}]\mathbf{x}_o = \mathbf{0}. \quad (9.45)$$

Aqui deve ser reconhecido que a Eq. (9.45) é a equação do autovetor para a matriz \mathbf{F} , a qual, na forma componente, é

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.46)$$

Conforme descrito no Apêndice WE (disponível em inglês no site do Grupo A), a Eq. (9.46) tem uma única solução, se o determinante da matriz de coeficientes é zero, para a qual

$$s(s+6) + 5 = 0, \quad (9.47)$$

$$(s+1)(s+5) = 0. \quad (9.48)$$

Os dois valores de s para os quais a equação tem uma solução são os autovalores $s = -1$ e $s = -5$. Se substituirmos $s = -1$ na Eq. (9.46), obtemos

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -1+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.49)$$

a partir da qual a solução para o vetor de estado inicial é $x_{02} = -x_{01}$. Essa linha no espaço de estados é o autovetor correspondente ao autovalor $s = -1$. Se repetirmos este processo com $s = -5$, o resultado é

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & -5+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.50)$$

e, neste caso, a solução para o autovetor é $x_{02} = -5x_{01}$.

Considere o que tudo isso significa. Nós começamos com a suposição de que a solução temporal para o estado é uma constante vezes uma exponencial. Descobrimos que isto só é possível se a exponencial é e^{-t} ou e^{-5t} . No primeiro caso, o estado deve estar ao longo do vetor $x_{02} = -x_{01}$, e, no segundo, o estado deve estar ao longo do vetor $x_{02} = -5x_{01}$. Com este conhecimento, calculamos as soluções para a Eq. (9.38) e Eq. (9.39) para diferentes condições iniciais

⁵ Se a inclinação dx_2/dx_1 é definida como constante, a relação entre x_2 e x_1 é uma linha reta. Se os valores conhecidos são marcados ao longo dessas linhas, as trajetórias podem ser facilmente esboçadas. Por exemplo, ao longo do eixo x_1 , onde $x_2 = 0$, a inclinação é ∞ e as trajetórias são verticais. Esse método é chamado de método das isóclinas.

Figura 9.39 Gráfico do plano de fase de um nodo com polos em $s = -1$ e $s = -5$.

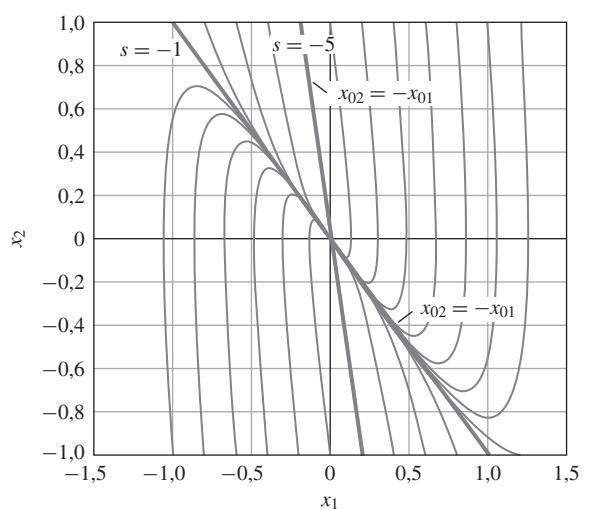


Figura 9.40 Gráfico do plano de fase com saturação.

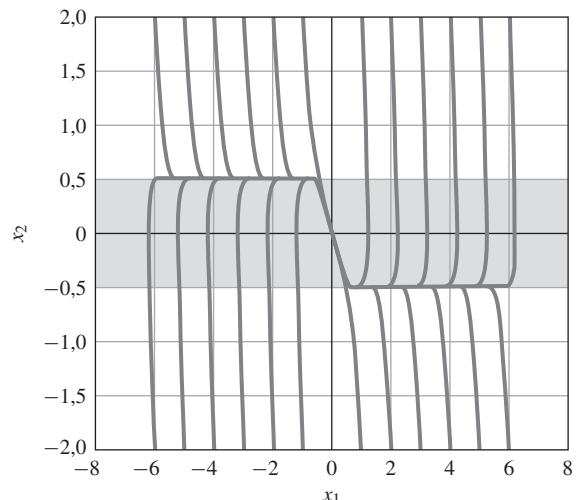
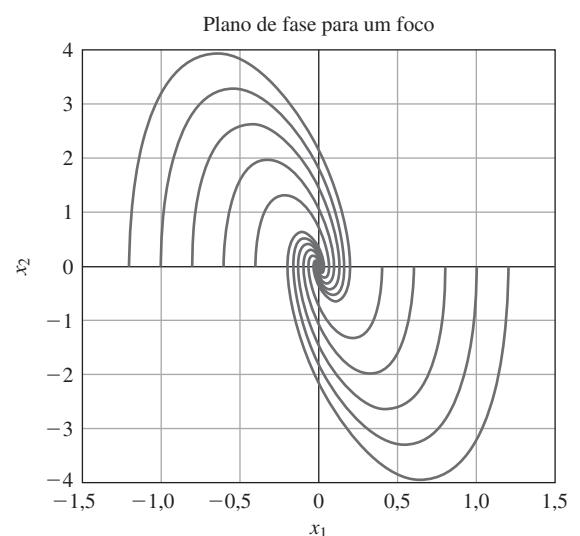


Figura 9.41 Gráfico do plano de fase para um sistema com dois polos complexos.



e traçamos $x_1(t)$ vs. $x_2(t)$ na Fig. 9.39. Na figura, os dois autovetores estão identificados. Quando olhamos para estas curvas, é claro que todos os caminhos começam paralelos ao autovetor (rápido!) correspondente a $s = -5$ e rapidamente se movem ao (lento!) correspondente a $s = -1$. Todas as trajetórias se aproximam do ponto de equilíbrio na origem do espaço de estados.

O gráfico será substancialmente alterado se o amplificador saturar. Por exemplo, se o amplificador satura em um valor de $u = 0,5$, então a velocidade, x_2 , vai rapidamente se aproximar deste valor e ficará presa lá até que a posição atinja um valor que tire o amplificador da saturação. O novo gráfico é mostrado na Fig. 9.40.

Note que, na região linear, o movimento está quase todo ao longo do autovetor lento. Finalmente, note que o plano de fase muda novamente quando os polos são complexos. Nesse caso, o movimento da variável de estado é composto por senoides amortecidas, e o gráfico de x_1 versus x_2 está ao longo de um espiral. Uma coleção de trajetórias para várias condições iniciais é mostrada na Fig. 9.41.

Esses poucos exemplos apenas esboçam a análise da superfície do plano de fase, mas dão uma ideia da utilização desse formato para ajudar um projetista a visualizar respostas dinâmicas.

Controle bang-bang

Um exemplo de projeto para um sistema não linear baseado no plano de fase é o controle ótimo de tempo mínimo em face da saturação de controle. Para os nossos propósitos, a versão mais simples dessa técnica amplamente utilizada é introduzida: considere a planta $1/s^2$. As equações são

$$\ddot{y} = u, \quad (9.51)$$

$$e = y - y_f, \quad (9.52)$$

com $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, y_f e uma constante, e o controle é limitado como $|u| \leq 1$. O problema é conduzir o erro para ser identicamente nulo em tempo mínimo. Se definirmos as variáveis de estado como $x_1 = e$ e $x_2 = \dot{e} = \dot{y}$, as equações se reduzem a

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9.53)$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad (9.54)$$

$$x_1(0) = -y_f, \quad (9.55)$$

$$x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0, \quad (9.56)$$

e o problema é minimizar t_f . Intuitivamente, esse é o problema do motorista ansioso que deseja realizar o percurso entre duas paradas em tempo mínimo. Ele iria acelerar ao máximo por um tempo e depois frear o carro ao máximo para que ele derrapasse até o lugar certo da parada. Um resultado fundamental da teoria de controle ótimo confirma esta ideia intuitiva de que a solução para este problema é, se $y_f > 0$, aplicar o controle positivo pleno por um tempo e depois mudar para controle negativo pleno apenas no momento certo de fazer com que o erro atinja a origem e permaneça nela. Para estudar o caso, um gráfico das trajetórias da planta no plano de fase para os dois casos de $u = 1$ e $u = -1$ é dado na Fig. 9.42. Para $u = +1$, as trajetórias começam no quarto quadrante e sobem para o primeiro. Para $u = -1$, começam no segundo quadrante e descem para o terceiro.

Dois segmentos desta família são de particular interesse: os que passam pela origem. Uma vez que a trajetória chega a um desses, um controle constante trará o estado para o local desejado de repouso final. Portanto, para qualquer condição inicial, uma vez que a trajetória atinja uma das duas curvas passando pela origem, a ação correta é mudar o controle ($u = +1$ para -1 ou $u = -1$ para $+1$) para que a trajetória siga a curva para a origem. A “curva de chaveamento” é traçada na Fig. 9.43.

Para uma planta de segunda ordem, a curva de chaveamento pode ser encontrada invertendo o tempo nas equações de movimento, definindo o estado inicial como zero e aplicando o controle máximo. O processo pode ser repetido com controle mínimo percorrendo outro ramo da curva.

Figura 9.42 Plano de fase da planta $1/s^2$ para controles ± 1 .

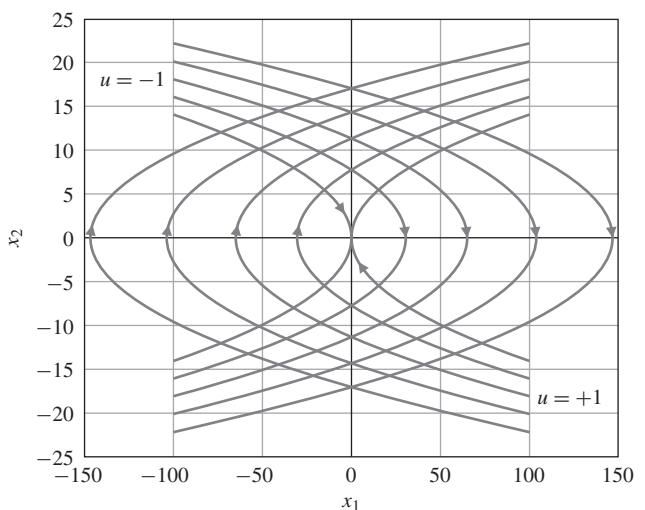
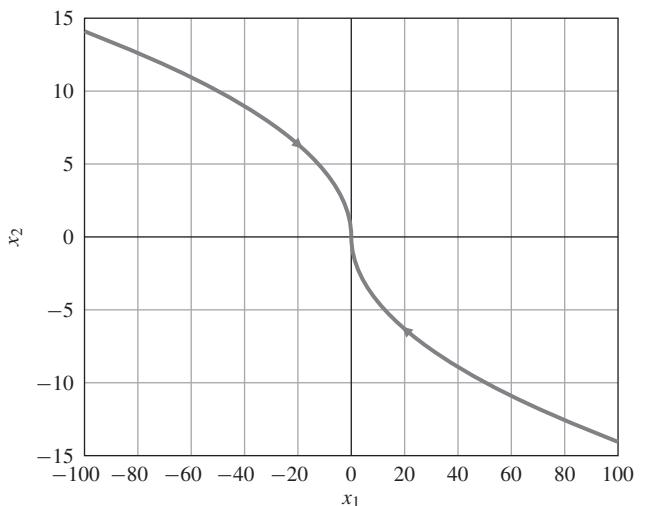


Figura 9.43 Curva de chaveamento para a planta $1/s^2$.



Para qualquer condição inicial acima da curva, $u = -1$ é aplicado, e para qualquer condição inicial abaixo da curva, $u = +1$ é usado. Como descrito, o resultado será uma resposta em tempo mínimo. Observe que a curva tem inclinação vertical na origem; como resultado, a implementação é extremamente sensível nesta vizinhança. Uma versão modificada conhecida como sistema de tempo próximo do ótimo (STPO) usado na indústria de discos rígidos de computador foi estudada por Workman (1987). A modificação consiste em deslocar as curvas um pouco e substituir a inclinação infinita na origem por uma inclinação finita, região de controle linear. O resultado tem sido amplamente utilizado em unidades de disco rígido e sistemas semelhantes.

Respostas típicas de um sistema de tempo ótimo e de um STPO geradas com o SIMULINK são dadas nas Figs. 9.44 e 9.45. Note que as respostas temporais são quase exatamente as mesmas, mas enquanto o sistema de controle de tempo ótimo tem uma vibração violenta no final, onde a curva de chaveamento tem inclinação infinita, a saída do STPO desliza suavemente para seu valor final. Para um estudo mais exato, temos de nos voltar para as equações não lineares.

9.5.2 Análise de estabilidade de Lyapunov

A estabilidade do movimento, como estudada por Lyapunov, envolve matemática sofisticada além do escopo deste texto. Aqui, vamos apresentar argumentos heurísticos fornecendo uma amostra da teoria e alguns dos resultados mais básicos. Lyapunov apresentou dois métodos para

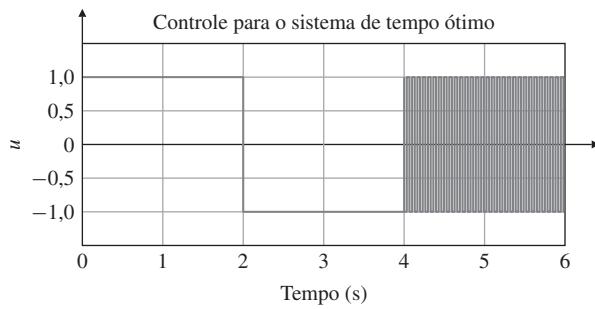


Figura 9.44 Resposta de um sistema de tempo ótimo.

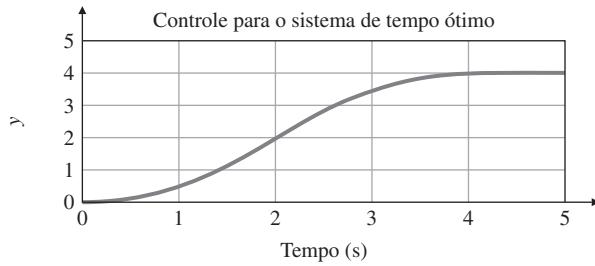


Figura 9.45 Resposta de um STPO.

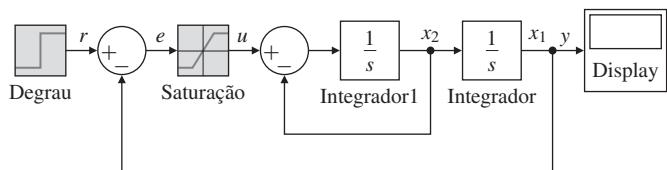
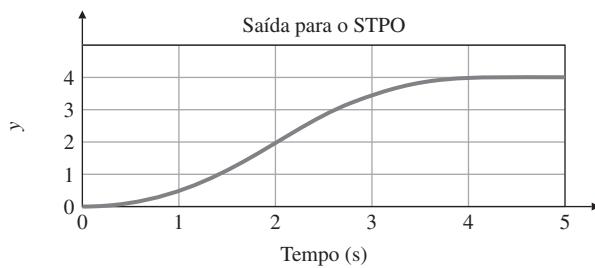
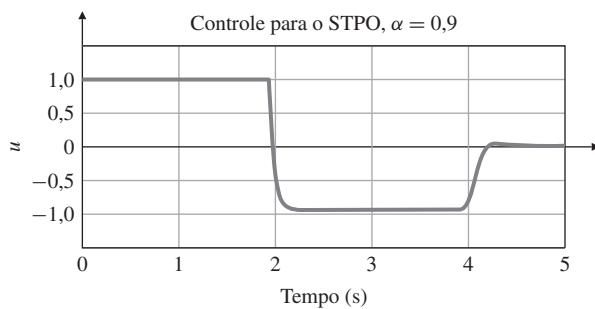


Figura 9.46 Diagrama no SIMULINK para o sistema com realimentação da posição.

o estudo da estabilidade do movimento descrito por sistemas de EDOs. Seu método indireto ou **primeiro método** é baseado na linearização das equações e tira conclusões sobre a estabilidade do sistema não linear, considerando a estabilidade da aproximação linear. Ele provou os resultados do primeiro método usando seu método direto ou **segundo método**, no qual as equações não lineares são consideradas diretamente. Uma discussão sobre o método indireto serve para introduzir os dois métodos. O problema requer uma nova definição de estabilidade adequada para as

equações na forma vetor-matriz. Intuitivamente, dizemos que um sistema é estável se condições iniciais de tamanho moderado resultam em uma resposta que permanece de tamanho moderado. Para expressar isso matematicamente, primeiro precisamos de uma definição de “tamanho”. Essa é a norma de um vetor para a qual o símbolo é $\|\mathbf{x}\|$. Das muitas definições possíveis, selecionamos aqui a familiar medida Euclidiana, definida por seu quadrado como $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Com essa ideia, a definição de estabilidade utilizada é que, para uma dada esfera de raio qualquer ϵ , é possível encontrar uma esfera menor de raio δ , de modo que, se o estado inicial estiver dentro de δ , então a trajetória, para sempre, permanecerá dentro de ϵ . De forma um pouco mais formal, o sistema é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, pode-se encontrar um $\delta > 0$ tal que se $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$, então $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$ para todo t . Se o estado não é apenas estável, mas no limite quando $t \rightarrow \infty$, $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$, o sistema é dito ser **assintoticamente estável**. Se, para qualquer ϵ , é possível selecionar um δ arbitrariamente grande, então o sistema é dito ser **estável em larga escala**.

Estabilidade pela perspectiva de Lyapunov

O estudo destes assuntos começa com a EDO invariante no tempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (9.57)$$

para a qual a aproximação linear é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (9.58)$$

Nesta equação, assume-se que todos os termos lineares estão em $\mathbf{F}\mathbf{x}$ e os termos de ordem alta estão em $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, no sentido de que quando \mathbf{x} torna-se pequeno, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ torna-se pequeno mais rápido, como expresso por

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (9.59)$$

O segundo método de Lyapunov começa com a noção intuitiva de que uma medida do tamanho do estado de um sistema físico é a energia total armazenada no sistema em qualquer instante e com a observação de que quando a energia armazenada não se altera mais, o sistema deve estar em repouso. Para um circuito elétrico, por exemplo, a energia elétrica é proporcional ao quadrado das tensões no capacitor, e a energia magnética é proporcional ao quadrado das correntes no indutor. Lyapunov extraiu a essência dessa ideia abstrata e definiu uma função escalar do estado $V(\mathbf{x})$, chamada de função de Lyapunov, tendo as seguintes propriedades:

1. $V(\mathbf{0}) = 0$;
2. $V(\mathbf{x}) > 0$, $\|\mathbf{x}\| \neq 0$;
3. V é contínuo e tem derivadas contínuas em relação a todos os componentes de \mathbf{x} ;
4. $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$ ao longo das trajetórias da equação.

As três primeiras condições asseguram que na vizinhança da origem a função é como uma bacia lisa situada na origem do espaço de estados. A quarta condição, que obviamente depende das equações de movimento, garante que, se δ é selecionado de modo que as condições iniciais estejam mais profundas na bacia do que qualquer parte da bacia definida por ϵ , a trajetória nunca subirá mais alto na bacia do que era no início e, assim, permanecerá dentro de ϵ , e o sistema será estável. Além disso, se a condição 4 é reforçada para ser $V(\mathbf{x}) < 0$, então o valor da função deve cair para zero e, pela condição 1, o estado também vai para zero. O teorema de estabilidade, que é a base para segundo método de Lyapunov, afirma que

Função de Lyapunov

Segundo método de Lyapunov

Se uma função de Lyapunov pode ser encontrada para um sistema, então o movimento é estável e, além disso, se $V(\mathbf{x}) < 0$, o movimento é assintoticamente estável. O segundo método é procurar por uma função de Lyapunov.

A parte mais difícil para a aplicação desta teoria é a afirmação: “Se uma função de Lyapunov pode ser encontrada.” Apenas no caso linear existe uma receita dada para encontrar uma função de Lyapunov; caso contrário, a teoria dá ao engenheiro apenas uma licença de caça para

procurar por tal função. Estamos agora em posição de considerar o método indireto para a estabilidade da Eq. (9.58).

Talvez porque a energia em sistemas simples seja uma soma dos quadrados das variáveis, para este problema, Lyapunov considera um candidato quadrático para V supondo que uma matriz simétrica definida positiva \mathbf{P} possa ser encontrada, e a função é definida como $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$. Claramente, as três primeiras condições são satisfeitas por essa função; a quarta condição deve ser testada antes de podermos concluir que temos uma função de Lyapunov. O cálculo de \dot{V} é

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad (9.60)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \quad (9.61)$$

$$= (\mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})) \quad (9.62)$$

$$= \mathbf{x}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (9.63)$$

Um resultado matricial básico, conhecido como uma equação de Lyapunov, é

$$\mathbf{F}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F} = -\mathbf{Q}, \quad (9.64)$$

e ele mostrou que, se \mathbf{F} é uma matriz de estabilidade tendo todos os seus autovalores no SPE, então para *qualquer* matriz definida positiva \mathbf{Q} , a solução \mathbf{P} dessa equação também será definida como positiva. O argumento a partir daqui é selecionar \mathbf{Q} e resolver para \mathbf{P} . Então, se os autovalores de \mathbf{F} estão no SPE, \mathbf{P} será definida positiva, então $V(\mathbf{x})$ é uma possível função de Lyapunov e

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{g}. \quad (9.65)$$

A parte final do argumento é notar que, pela Eq. (9.59), se \mathbf{x} é suficientemente pequeno, então o primeiro termo da Eq. (9.65) vai dominar, a quarta condição será satisfeita, V será uma função de Lyapunov, e é provado que o sistema é estável. Note que a exigência de \mathbf{x} de ser suficientemente pequeno garante apenas que há uma *vizinhança* da origem que é estável. Outras condições são necessárias para mostrar que a bacia definida por V se estende para ∞ em todas as direções quando $\|\mathbf{x}\|$ tende a ∞ (e não antes!), para que a estabilidade seja válida em todos os estados e seja “no geral”.

Há também um teorema de instabilidade que mostra que, se *algum* autovalor de \mathbf{F} está no SPE, então a origem será instável. Se todos os polos de \mathbf{F} estão no SPE, com exceção de alguns polos simples no eixo imaginário, então a estabilidade depende de outras propriedades dos termos não lineares, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Com este resultado em mãos, o primeiro método, ou método indireto de Lyapunov, pode ser enunciado como:

1. Encontre a aproximação linear e calcule os autovalores de \mathbf{F} .
2. Se todos os autovalores estão no SPE, então há uma região de estabilidade próxima à origem.
3. Se pelo menos um dos autovalores está no SPD, então a origem é instável.
4. Se existem autovalores simples no eixo imaginário e todos os outros valores estão no SPE, então nenhuma afirmação sobre a estabilidade pode ser feita com base neste método.

Primeiro método de Lyapunov

EXEMPLO 9.15 Estabilidade de Lyapunov para um sistema de segunda ordem

Use o método de Lyapunov para encontrar condições para a estabilidade de um sistema de segunda ordem descrito pela matriz de estado

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Solução. Para o caso linear, podemos selecionar qualquer matriz definida positiva \mathbf{Q} ; a mais simples é $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. A equação de Lyapunov correspondente é

$$\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (9.66)$$

A Eq. (9.66) pode ser reescrita como

$$-\alpha p - \beta q - \alpha p - \beta q = -1, \quad (9.67)$$

$$-\alpha q - \beta r + \beta p - \alpha q = 0, \quad (9.68)$$

$$\beta q - \alpha r + \beta q - \alpha r = -1. \quad (9.69)$$

As Eqs. (9.67) à (9.69) são prontamente resolvidas obtendo $p = r = 1/(2\alpha)$, $q = 0$, tal que

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} \end{bmatrix},$$

e os determinantes são $\frac{1}{2}\alpha > 0$ e $\frac{1}{4}\alpha^2 > 0$. Assim, $\mathbf{P} > 0$, então concluímos que o sistema é estável se $\alpha > 0$.

Para sistemas com muitas variáveis de estado e parâmetros não numéricos, a solução da equação de Lyapunov pode ser onerosa, mas o resultado é uma alternativa equivalente ao método de Routh para a computação das condições de estabilidade em um sistema com parâmetros simbólicos.

EXEMPLO 9.16 Método direto de Lyapunov para um sistema de realimentação da posição

Considere o sistema de realimentação da posição modelado na Fig. 9.38. Ilustre o uso do método direto neste sistema não linear. Simule o sistema usando o SIMULINK, assumindo $T = 1$, e avalie a resposta ao degrau do sistema.

Solução. Assumimos que o atuador, que talvez seja apenas um amplificador neste caso, tenha uma não linearidade significativa, que é mostrada na figura como uma saturação, mas é possivelmente mais complexa. Vamos assumir apenas que $u = f(e)$, onde a função está no primeiro e no terceiro quadrante de modo que $\int_0^e f(\sigma) d\sigma > 0$. Também assumimos que $f(e) = 0$ implica que $e = 0$, e vamos supor que $T > 0$, então o sistema em malha aberta é estável. As equações de movimento são

$$\dot{e} = -x_2, \quad (9.70a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T}x_2 + \frac{f(e)}{T}. \quad (9.70b)$$

Para uma função de Lyapunov, considere algo como energia cinética mais potencial:

$$V = \frac{T}{2}x_2^2 + \int_0^e f(\sigma) d\sigma. \quad (9.71)$$

Claramente, $V = 0$ se $x_2 = e = 0$ e, devido à suposição sobre f , $V > 0$ se $x_2^2 + e^2 \neq 0$. Para verificar se V na Eq. (9.71) é uma função de Lyapunov, calculamos \dot{V} da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Tx_2\dot{x}_2 + f(e)\dot{e} \\ &= Tx_2 \left[-\frac{1}{T}x_2 + \frac{f(e)}{T} \right] + f(e)(-x_2) \\ &= -x_2^2. \end{aligned}$$

Com $\dot{V} \leq 0$ e a origem estáveis no sentido de Lyapunov. Além disso, \dot{V} é sempre decrescente se $x_2 \neq 0$, e a Eq. (9.70b) indica que o sistema não tem trajetória com $x_2 \equiv 0$, exceto $x_2 = 0$. Assim, podemos concluir que o sistema é assintoticamente estável para todo f que satisfaz duas condições: (1) $\int f(\sigma) d\sigma > 0$ e (2) $f(e) = 0$ implica que $e = 0$. O diagrama no SIMULINK para o sistema é mostrado na Fig. 9.46 para $T = 1$. A resposta ao degrau do sistema é mostrada na Fig. 9.47.

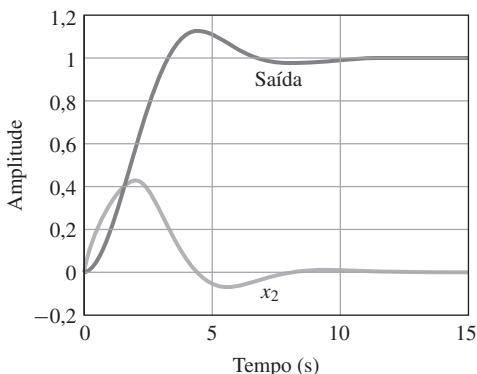


Figura 9.47 Resposta ao degrau para o sistema de controle de posição.

Como mencionamos, o estudo da estabilidade de sistemas não lineares é vasto, por isso temos apenas tangenciado alguns pontos e métodos importantes. Mais material para estudo pode ser encontrado em LaSalle e Lefschetz (1961), Kalman e Bertram (1960), Vidyasagar (1993) Khalil (2002) e Sastry (1999).

Reprojeto de Lyapunov do controle adaptativo

Uma das aplicações clássicas da teoria de estabilidade de Lyapunov para controle é uma técnica conhecida como método de reprojeto de Lyapunov. A ideia é construir o sistema com alguns parâmetros de controle-chave não especificados, propor uma função de Lyapunov candidata e selecionar os componentes disponíveis para forçar que a função candidata tenha sucesso em ser uma função de Lyapunov apropriada a partir da qual a estabilidade pode ser concluída. O método foi aplicado no artigo de Parks (1966) para um sistema de controle adaptativo em um modelo de referência. Um diagrama de blocos do simples sistema considerado inicialmente é desenhado na Fig. 9.48.

Neste sistema, o modelo e a planta têm a mesma dinâmica, mas ganhos diferentes. O objetivo é ajustar o ganho de controle, K_c , de modo que $K_c K_p = K_m$, e a saída da planta, y_p , será igual ao resultado do modelo, y_m . Uma regra heurística proposta, conhecida como a regra “MIT”, foi baseada na ideia de que se definirmos o custo como o quadrado do erro instantâneo e movimentar K_c de modo a tornar este custo menor, o resultado deve conduzir K_c para o valor correto. Se o gradiente do custo for positivo (apontando para cima, por assim dizer), o ganho deve ser reduzido; se o gradiente for negativo, o ganho deve ser aumentado. Assim, a derivada temporal do ganho deve ser proporcional ao *negativo* do gradiente. Na forma de equação,

$$J = e^2, \quad (9.72)$$

$$\frac{\partial J}{\partial K_c} = 2e \frac{\partial e}{\partial K_c}, \quad (9.73)$$

$$\frac{dK_c}{dt} = -Be \frac{\partial e}{\partial K_c}, \quad (9.74)$$

sendo B o “ganho adaptativo” a ser escolhido. A partir do diagrama de blocos,

$$E(s) = \frac{K_c K_p - K_m}{Ts + 1} R(s), \quad (9.75)$$

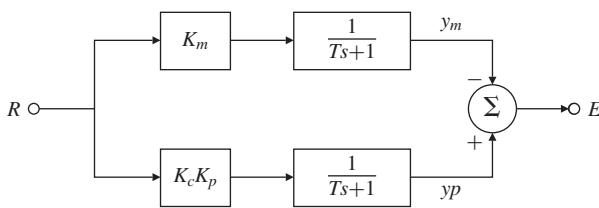


Figura 9.48 Diagrama de blocos de um sistema adaptativo simples de modelo de referência.

$$\frac{\partial E}{\partial K_c} = \frac{K_p}{Ts + 1} R \quad (9.76)$$

$$= \frac{K_p}{K_m} Y_m. \quad (9.77)$$

Se substituímos o resultado da Eq. (9.77) na Eq. (9.74), o resultado é a regra MIT,

$$\frac{dK_c}{dt} = -B' e Y_m, \quad (9.78)$$

com o novo ganho adaptativo, B' . Infelizmente, a estabilidade desta regra não é estabelecida, e algumas análises mostraram que ela pode ser instável em circunstâncias razoáveis, como em quando há dinâmicas não modeladas ou perturbações. Parks propôs que o reprojeto de Lyapunov seria uma ideia melhor e que, em vez de tomar \dot{K}_c dado pela Eq. (9.74), essa escolha fosse feita de uma forma que garanta a estabilidade. Sua ideia começa com as equações diferenciais, sendo $r = r_o$ uma constante:

$$T \dot{e} + e = (K_c K_p - K_m) r_o, \quad (9.79)$$

$$\dot{K}_c = -B' e Y_m. \quad (9.80)$$

Por simplicidade, é feita a definição $x = (K_c K_p - K_m)$ e \dot{x} é encontrado. Parks selecionou $V = e^2 + \lambda x^2$ como uma função de Lyapunov candidata e calculou

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + 2\lambda x\dot{x} \quad (9.81)$$

$$= 2e \left(\frac{x r_o}{T} - \frac{e}{T} \right) + 2\lambda x\dot{x}. \quad (9.82)$$

Se \dot{x} na última equação é selecionado como $\dot{x} = -\frac{er_o}{\lambda T}$, então $\dot{V} = -2\frac{e^2}{T}$, as condições para uma função de Lyapunov são satisfeitas, e a estabilidade é assegurada pelas suposições dadas. Assim, descobrimos que o novo algoritmo é

$$\dot{K}_c = -B'' e r_o. \quad (9.83)$$

Obviamente, esse resultado não responde às questões sobre dinâmica não modelada ou distúrbios, mas o princípio é claro: deixar as equações de controle-chave serem definidas de modo a obter uma função de Lyapunov pode colocar a estabilidade de um sistema sobre uma base firme.

Como um segundo exemplo de reprojeto de Lyapunov, considere o controle adaptativo de um motor mostrado na Fig. 9.49. Definindo a saída do modelo como y_m e a saída planta como y_p , as equações são

$$\ddot{y}_m + 2\zeta \omega_n \dot{y}_m + \omega_n^2 y_m = \omega_n^2 r, \quad (9.84)$$

$$\ddot{y}_p + 2\zeta \omega_n \dot{y}_p + \omega_n^2 y_p = K_c K_p \omega_n^2 (r - y_p) + \omega_n^2 y_p. \quad (9.85)$$

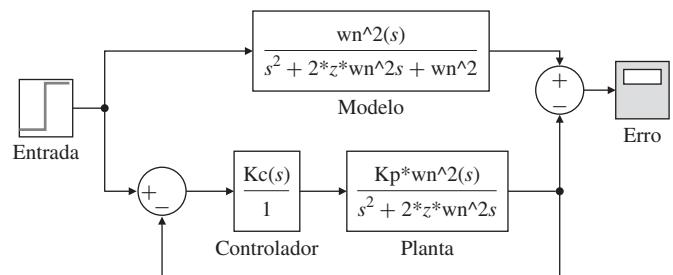


Figura 9.49 Diagrama de blocos para o controle adaptativo de um motor.

(Na equação para y_p , o termo $\omega_n^2 y_p$ foi adicionado em ambos os lados para fazer a equação do erro mais simples.) O erro é definido como $e = y_m - y_p$, e uma equação para o erro pode ser obtida subtraíndo a equação para y_p da equação para y_m . O resultado é

$$\ddot{e} + 2\zeta\omega_n\dot{e} + \omega_n^2ye = \omega_n^2(1 - K_cK_p)(r - y_p). \quad (9.86)$$

A ideia, agora, é encontrar uma equação para K_c que irá resultar em uma função de Lyapunov para a equação de erro. Para simplificar o cálculo, vamos definir o parâmetro como $x = 1 - K_cK_p$, para o qual $\dot{x} = -K_p\dot{K}_c$ e, assim, a equação de erro é

$$\ddot{e}_p + 2\zeta\omega_n\dot{e}_p + \omega_n^2e = \omega_n^2x(r - y_p). \quad (9.87)$$

Neste ponto, Park sugeriu considerar $V = e^2 + \alpha\dot{e}^2 + \beta x^2$ como uma possível função. Precisamos encontrar \dot{x} tal que V seja uma função de Lyapunov. A equação para a derivada é

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + 2\alpha\dot{e}\ddot{e} + 2\beta x\dot{x} \quad (9.88)$$

$$= 2e\dot{e} + 2\alpha\dot{e}\{-2\zeta\omega_n\dot{e} - \omega_n^2e + \omega_n^2x(r - y_p)\} + 2\beta x\dot{x} \quad (9.89)$$

$$= -4\alpha\zeta\omega_n\dot{e}^2 + 2e\dot{e}(1 - \alpha\omega_n^2) + x\{2\alpha\dot{e}\omega_n^2(r - y_p) + 2\beta\dot{x}\}. \quad (9.90)$$

Se fizermos $1 - \alpha\omega_n^2 = 0$ e $2\alpha\dot{e}\omega_n^2(r - y_p) + 2\beta\dot{x} = 0$, então a equação para \dot{V} é simplificada em $\dot{V} = -4\alpha\zeta\omega_n\dot{e}^2$, que é sempre negativa, e V é uma função de Lyapunov, e o sistema é estável. Substituindo x , temos a lei de controle adaptativo

$$\dot{K}_c = -\beta'\dot{e}(r - y_p), \quad (9.91)$$

sendo β' a nova constante igual a $\frac{\alpha\omega_n^2}{K_p\beta}$.

Claramente, apenas tangenciamos a teoria de estabilidade de Lyapunov, e nossos exemplos de reprojeto são da história antiga, a partir de 1966, mas ilustram muito bem o princípio e fornecem um bom começo para um estudo mais aprofundado nesta importante área.

9.5.3 O critério do círculo

Um sistema não linear com apenas uma não linearidade de única entrada e única saída pode ser representado como mostrado na Fig. 9.50 pelo desenho do diagrama de blocos a partir dos pontos de entrada e saída da não linearidade. Na literatura, este caso é referido como o problema de Lur'e em homenagem ao cientista soviético que foi o primeiro a estudar este problema.

Assumimos que o sistema seja não forçado e, portanto, $r \equiv 0$. É possível obter uma condição gráfica suficiente para a estabilidade de tais sistemas. Mesmo sendo prático, este método pode levar, em alguns casos, a resultados conservadores, apesar de existirem extensões que produzem resultados menos conservadores (veja Safonov, *et al.*, 1987). Primeiro, vamos definir as condições de setor da não linearidades sem memória.

Condições de setor

Uma função $f(x)$ com uma entrada escalar e uma saída escalar pertence ao setor $[k_1, k_2]$ se, para toda entrada x ,

$$k_1x^2 \leq f(x)x \leq k_2x^2. \quad (9.92)$$

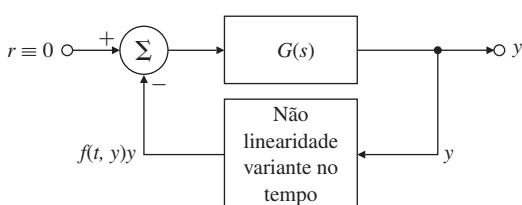


Figura 9.50 Diagrama de blocos de um sistema não linear.

Esta relação pode ser reescrita como

$$k_1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq k_2 \quad x \neq 0. \quad (9.93)$$

Basicamente, a definição diz que o gráfico de $f(x)$ fica entre duas linhas retas de inclinações k_1 e k_2 passando pela origem, como mostrado na Fig. 9.51. Nessa definição, k_1 e k_2 podem ser $-\infty$ ou $+\infty$. Note que as condições de setor não impõem limites sobre o ganho incremental ou na inclinação da função $f(x)$. Os exemplos seguintes ilustram como k_1 e k_2 são determinados.

EXEMPLO 9.17 Cálculo de um setor para a não linearidade de sinal

Determine um setor que contém a função sinal $y = f(u)$ mostrada na Fig. 9.6(b).

Solução. Como $\text{sgn}(0) = 0$, sabemos que a única linha passando pela origem que limita superiormente a função sinal é o eixo y , que corresponde a uma inclinação de $k_2 = \infty$. Da mesma forma, a linha passando pela origem que limita inferiormente a função sinal tem uma inclinação de zero e corresponde ao eixo x e, portanto, $k_1 = 0$. Assim, o setor para a função sinal é $[0, \infty]$.

EXEMPLO 9.18 Setor para uma não linearidade de saturação

Considere a não linearidade de saturação mostrada na Fig. 9.52. Determine um setor para esta função.

Solução. A função é limitada superiormente por uma linha de inclinação 1, $k_2 = 1$, e é limitada inferiormente pelo eixo x , $k_1 = 0$, como mostrado na figura. Portanto, o setor para esta função é $[0, 1]$.

Critério do círculo

Em 1949, o cientista russo Aizermann conjecturou que, se um sistema Lur'e é estável com f substituído por qualquer ganho linear entre os limites $k_1 < k < k_2$, então o sistema será estável, com o ganho substituído por uma não linearidade no setor $[k_1, k_2]$. Isso significa que se um sistema de tempo contínuo (estritamente próprio) com uma única malha de realimentação, como mostrado na Fig. 9.50, com um caminho linear direto (\mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H}) é estável para todos os ganhos de realimentação linear k na faixa de $k_1 < k < k_2$, de tal forma que a matriz do sistema de malha fechada resultante $F + kGH$ é estável, então o sistema não linear com um termo de

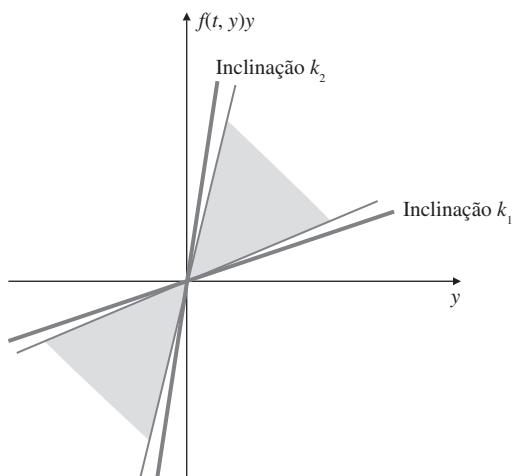


Figura 9.51 Saída da não linearidade confinada no setor.

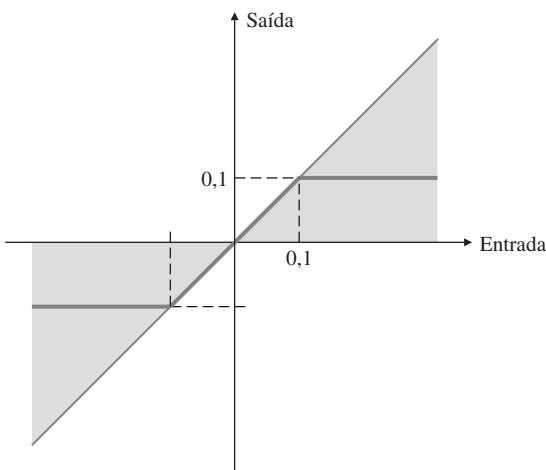


Figura 9.52 Setor para saturação.

realimentação não linear variante no tempo $f(t,y)$ pertencente ao setor $[k_1, k_2]$, mostrado na Fig. 9.50, também é estável. Infelizmente, essa conjectura *não* é verdade, pois contraexemplos existem.⁶ No entanto, uma variação da conjectura de Aizermann é verdadeira e é conhecida como o critério de círculo.

No lugar de apresentar uma demonstração rigorosa do critério, descrevemos um argumento heurístico que fornece um conhecimento melhor do problema e motiva a demonstração. Um circuito elétrico com uma impedância linear, $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$, é descrito pela lei de Ohm como $V = IZ(s)$. Assumimos que Z seja composto de componentes reais, o que significa que a parte real R é par e a parte imaginária X é ímpar; isto é $R(-\omega) = R(\omega)$ e $X(-\omega) = -X(\omega)$. Se $R(\omega) \geq \delta > 0$ para todo ω , a impedância é chamada de estritamente passiva. Ela vai dissipar energia. A potência instantânea no circuito é $p = v(t)i(t)$, e a energia total absorvida pelo circuito é $e = \int_0^\infty v(t)i(t) dt$. Referindo-se à figura, a lei de Ohm é equivalente à equação da planta $Y = UG(s)$ com Y sendo a tensão, U a corrente e $G(s) = R + jX$ sendo a impedância. Aplicando a expressão para a energia da equação da planta e usando o teorema de Parseval⁷ para convertê-la para o domínio da frequência, temos

$$\int_0^\infty y(t)u(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U(j\omega)Y(-j\omega) d\omega \quad (9.94)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U(j\omega)U(-j\omega)G(-j\omega) d\omega \quad (9.95)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |U(j\omega)|^2 (R - jX) d\omega \quad (9.96)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |U(j\omega)|^2 R(\omega) d\omega. \quad (9.97)$$

Na última etapa, o fato de X ser ímpar foi usado. Neste ponto, o uso da notação convencional irá simplificar as equações de forma substancial. Definimos produtos internos e normas,

$$\int_0^\infty y(t)u(t) dt = \langle y, u \rangle, \quad (9.98)$$

⁶ A conjectura de Aizermann estimulou uma série de pesquisas nesta área e levou ao desenvolvimento do lema de Kalman-Yakubovich-Popov, dando condições no espaço de estados para um sistema passivo. O lema é usado em uma demonstração do critério de círculo.

⁷ Veja o Apêndice A.

$$\|u\|^2 = \int_0^\infty [u(t)]^2 dt = \langle u, u \rangle. \quad (9.99)$$

Com essa notação e com a suposição de que $R \geq \delta > 0$, a Eq. 9.97 é reduzida a

$$\langle y, u \rangle \geq \delta \|u\|^2. \quad (9.100)$$

Voltando agora para a componente não linear, utilizando o mesmo conceito de “energia” e assumindo que f está no setor $[0, K]$, temos

$$\int_0^\infty y(t)f(y, t) dt = \int_0^\infty \frac{[f(y, t)]^2}{y(t)} dt \quad (9.101)$$

$$\geq \frac{\|f(y, t)\|^2}{K} \quad (9.102)$$

$$\geq \frac{\|u(t)\|^2}{K}. \quad (9.103)$$

A suposição agora é que se a energia total dada pela soma da Eq. (9.100) e Eq. (9.102) é positiva, então o sistema *deve ser estável*, já que a energia está sendo constantemente perdida. O valor real da energia perdida seria igual à energia inicial armazenada nos elementos do sistema. A partir disto concluímos que, se $\delta \|u\|^2 + \frac{\|u(t)\|^2}{K} > 0$, então o sistema é estável. Assim, o critério é

$$\delta \|u\|^2 + \frac{\|u(t)\|^2}{K} > 0, \quad (9.104)$$

$$\left[\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + \frac{1}{K} \right] \|u(t)\|^2 > 0, \quad (9.105)$$

$$\operatorname{Re}\{KG(j\omega) + 1\} > 0. \quad (9.106)$$

Na obtenção da Eq. (9.106), a suposição feita foi que a não linearidade pertence a um setor zero, $[0, K]$. Se a função está no setor $[k_1, k_2]$, ela pode ser reduzida a um setor zero adicionando e subtraindo k_1 no diagrama de blocos, como mostrado na Fig. 9.53. Com esta alteração, o sistema dinâmico é substituído por $H = \frac{G}{1+k_1G}$ e a função, por $f' = f - k_1$, que está no setor $[k_2 - k_1, 0]$. Com estas mudanças, o critério de estabilidade é transformado em

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + (k_2 - k_1) \frac{G}{1 + k_1 G} \right\} > 0, \quad (9.107)$$

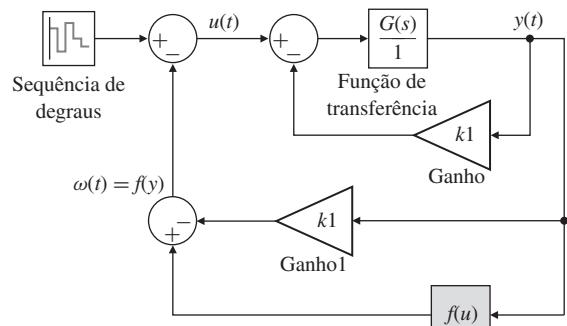


Figura 9.53 Manipulação no diagrama de blocos para o setor.

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + k_1 G + (k_2 - k_1)G}{1 + k_1 G} \right\} > 0, \quad (9.108)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + k_2 G(j\omega)}{1 + k_1 G(j\omega)} \right\} > 0. \quad (9.109)$$

É fato que uma função bilinear como $F = \frac{1+k_2G(j\omega)}{1+k_1G(j\omega)}$ na Eq. (9.109) irá mapear um círculo no plano F em outro círculo no plano G (veja o Apêndice WD, disponível em inglês no site do Grupo A). Neste caso, a região aceitável é $\operatorname{Re}\{F\} > 0$, na qual o limite é o eixo imaginário, de modo que o mapeamento é do eixo *imaginário*, um círculo de raio infinito, em um círculo finito. Devido ao fato de as funções serem reais, o círculo deve ser centrado no eixo real e precisamos localizar apenas dois pontos no eixo real. Por exemplo, quando $F = 0$, temos $1 + k_2 G = 0$ ou $G = -\frac{1}{k_2}$. O outro ponto no eixo real é quando a função é infinita, neste ponto $1 + k_1 G = 0$ ou $G = -\frac{1}{k_1}$. Assim o círculo no plano G é centrado no eixo real e passa pelos pontos $\left[-\frac{1}{k_2}, -\frac{1}{k_1}\right]$ como traçado na Fig. 9.54. Como F teve que evitar o SPE, se definirmos $F = -1$, que está na região proibida, e resolvendo, vemos que $G = \frac{-2}{k_1+k_2}$, que está *dentro* do círculo, a partir do qual podemos concluir que o sistema será estável se a gráfica de $G(j\omega)$ evitar esse círculo.

O teorema real é o seguinte:

O sistema não linear descrito é assintoticamente estável dado que

1. $f(t,y)$ pertence ao setor $[k_1, k_2]$ com $0 \leq k_1 < k_2$ e
2. o diagrama de Nyquist da função de transferência $G(j\omega) = \mathbf{H}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}$ não intercepta ou envolve o “círculo crítico”, que é centrado no eixo real e passa pelos pontos $-1/k_1$ e $-1/k_2$, como mostrado na Fig. 9.54.

Como resultado, o ponto comum “-1” de Nyquist é substituído pelo disco crítico. Esse resultado é conhecido como o **critério do círculo** ou teorema do círculo e se deve a Sandberg (1964) e Zames (1966). Note que essas condições são *suficientes*, mas não necessárias, porque a intersecção da função de transferência $G(s)$ com o círculo como definido não demonstra a instabilidade. O círculo crítico está centrado em

$$c = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] = -\frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2},$$

e tem um raio de

$$\frac{k_2 - k_1}{2k_1 k_2}.$$

Critério do círculo

Se $k_1 = 0$, então o círculo crítico degenera em um semiplano definido por $\operatorname{Re}\{G\} \geq -1/k_2$.

O critério do círculo e a função descritiva estão relacionados. Na verdade, para o caso de não linearidades ímpares invariantes no tempo que estão dentro de um setor e para as quais as funções descritivas são reais, a função descritiva satisfaz à relação

$$k_1 \leq K_{eq}(a) \leq k_2 \quad \text{para todo } a, \quad (9.110)$$

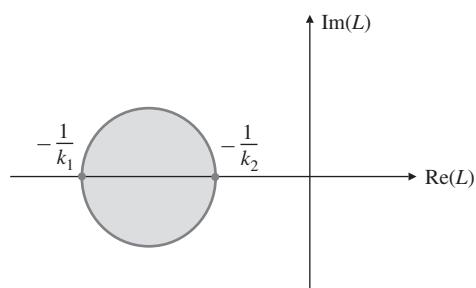


Figura 9.54 Ilustração do critério do círculo.

tal que

$$-\frac{1}{k_1} \leq -\frac{1}{K_{eq}(a)} \leq -\frac{1}{k_2}, \quad (9.111)$$

e o gráfico do negativo do inverso da função descritiva vai estar dentro do círculo crítico. Isso pode ser visto pelos seguintes limites inferior e superior:

$$K_{eq}(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi f(a \operatorname{sen}(\omega t)) \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) \geq \frac{2k_1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}^2(\omega t) d(\omega t) = k_1, \quad (9.112)$$

$$K_{eq}(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi f(a \operatorname{sen}(\omega t)) \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) \leq \frac{2k_2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}^2(\omega t) d(\omega t) = k_2. \quad (9.113)$$

A análise do ganho equivalente e da função descritiva fornecem os mesmos resultados. Se tomarmos o ganho da função descritiva, então a amplitude do ciclo limite pode ser prevista como feito com a funções descritiva. Ambas as técnicas de ganho equivalente podem ser usadas para determinar a estabilidade, mas, como vimos, o critério do círculo permite não linearidades variantes no tempo.

EXEMPLO 9.19 Determinação da estabilidade usando o critério do círculo

Considere o sistema no Exemplo 9.7. Determine as propriedades da estabilidade do sistema usando o critério do círculo.

Solução. O setor relacionado é o mesmo encontrado no Exemplo 9.18. O círculo crítico degenera em um semiplano definido por $\operatorname{Re}(G) \leq -1$, como mostrado na Fig. 9.55. Como o diagrama de Nyquist está inteiramente à direita do círculo crítico, o sistema é estável.

9.6 Perspectiva histórica

Quase todos os sistemas dinâmicos físicos são não lineares; portanto, não é surpreendente que o estudo de sistemas não lineares tenha uma longa e rica história. O estudo de sistemas não lineares remonta à astronomia e ao estudo da estabilidade do sistema solar, que remonta a Torricelli (1608-1647), Laplace e Lagrange. O campo ganhou nova energia com a tese de doutorado de A. M. Lyapunov, na Rússia em 1892. Ele estava tentando resolver o problema de estabilidade em massas fluidas em rotação apresentado por Poincaré e reconheceu que, se pudesse mostrar que a energia armazenada do sistema estava sempre diminuindo, então o sistema poderia ser estável e, em um dado momento, entraria em repouso. O estudo de funções de Lyapunov foi introduzido no campo de controle em 1960 por Kalman e Bertram e evoluiu rapidamente desde então.

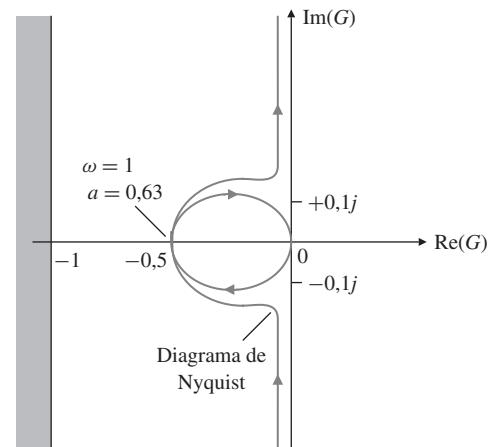


Figura 9.55 Diagrama de Nyquist e critério do círculo.

Maxwell foi o primeiro a estudar a estabilidade por linearização sobre um ponto de equilíbrio derivando o modelo linear para o governador de bolas flutuantes de Watt e afirmou que o sistema seria estável se as raízes características tivessem parte real negativa. Kochenberger derivou o método de função descritiva em uma tentativa de lidar com não linearidades, em 1950, com base nas ideias da resposta em frequência. Lur'e propôs o problema de estabilidade absoluta em 1944 e, em 1961, Popov desenvolveu o critério do círculo para análise da estabilidade não linear. Posteriormente, Yakubovich (1962) e Kalman (1963) estabeleceram conexões entre os resultados de Lur'e e Popov.

O estudo do controle adaptativo recebeu muita atenção durante as décadas de 1960, 1970 e 1980. Controladores adaptativos são, em geral, variantes no tempo e não lineares. Durante a década de 1960, métodos de sensibilidade e a regra MIT para ajustes adaptativos foram desenvolvidos por Draper e outros. Métodos para estudar sistemas adaptativos baseados em métodos de Lyapunov e de passividade foram desenvolvidos na década de 1970. Métodos de controle adaptativo robusto foram estudados na década de 1980. Além disso, tem havido uma série de pesquisas em sistemas, como no clima, em que uma mudança brusca nas condições iniciais ou nos parâmetros pode causar mudanças drásticas na resposta do sistema. Tais sistemas são ditos caóticos. Em todos os estudos recentes de sistemas não lineares, a disponibilidade de computadores poderosos para resolver as equações e produzir os gráficos dos resultados tem sido fundamental. O desenvolvimento de uma teoria geral do controle não linear continua a ser um sonho dos teóricos de controle em uma busca contínua.

RESUMO

- As equações não lineares de movimento podem ser aproximadas por outras lineares, considerando um modelo linear para sinais pequenos que é preciso próximo a um equilíbrio.
- Em muitos casos, o inverso de uma não linearidade pode ser usado para linearizar um sistema.
- Não linearidades sem dinâmica, como a saturação, podem ser analisadas usando o lugar das raízes considerando a não linearidade como um ganho variável.
- A técnica do lugar das raízes pode ser usada para determinar as propriedades do ciclo limite para as não linearidades sem memória e produz os mesmos resultados que a função descritiva.
- A função descritiva é essencialmente um método heurístico com o objetivo de encontrar uma função da resposta em frequência para um elemento não linear.
- A estabilidade de sistemas com uma única não linearidade pode ser estudada usando o método da função descritiva.
- A função descritiva pode ser usada para prever soluções periódicas em sistemas realimentados.
- O diagrama de Nyquist em conjunto com a função descritiva pode ser usado para determinar as propriedades ciclo limite.
- A estabilidade de um sistema não linear no espaço de estados pode ser estudada pelos métodos de **Lyapunov**.
- O critério do círculo fornece uma condição suficiente para a estabilidade.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. Por que aproximamos um modelo físico da planta (que é *sempre* não linear) por um modelo linear?
2. Como você linearizaria a equação não linear do sistema de transferência de calor por radiação $\dot{T} = T^4 + T + u$?
3. Uma lâmpada utilizada como um atuador térmico tem uma não linearidade tal que a potência de saída medida experimentalmente está relacionada à tensão de entrada por $P = V^{1.6}$. Como você lidaria com essa não linearidade em um projeto de controle de realimentação?
4. O que é integrador windup?
5. Por que um circuito antiwindup é importante?

6. Usando a função não linear de saturação com ganho 1 e limites ± 1 , esboce o diagrama de blocos de saturação para um atuador que tem ganho 7 e limites de ± 20 .
7. O que é uma função descritiva e como ela está relacionada a uma função de transferência?
8. Quais são as premissas por trás do uso da função descritiva?
9. O que é um ciclo limite em um sistema não linear?
10. Como se pode determinar a função descritiva para um sistema não linear no laboratório?
11. Qual é a estratégia de controle de tempo mínimo para um controle de atitude de satélite com controlador limitado?
12. Como são usados os dois métodos de Lyapunov?

PROBLEMAS

Problemas da Seção 9.2: Análise por linearização

- 9.1** A Fig. 9.56 mostra um sistema de pêndulo simples no qual um cabo é enrolado em torno de um cilindro fixo. O movimento resultante do sistema é descrito pela equação diferencial

$$(l + R\theta)\ddot{\theta} + g \operatorname{sen} \theta + R\dot{\theta}^2 = 0,$$

sendo

l = comprimento do cabo na posição vertical (para baixo),

R = raio do cilindro.

- Escreva as equações no espaço de estados para esse sistema.
- Linearize a equação em torno do ponto $\theta = 0$ e mostre que para valores pequenos de θ , a equação do sistema se reduz a uma equação para um pêndulo simples, isto é,

$$\ddot{\theta} + (g/l)\theta = 0.$$

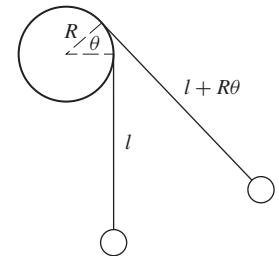


Figura 9.56 Movimento do cabo enrolado em torno de um cilindro fixo.

- 9.2** O circuito mostrado na Fig. 9.57 tem uma condutância não linear G tal que $i_G = g(v_G) = v_G(v_G - 1)(v_G - 4)$. As equações diferenciais de estado são

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= -i + v, \\ \frac{dv}{dt} &= -i + g(u - v),\end{aligned}$$

sendo i e v as variáveis de estado e u , a entrada.

- Um estado de equilíbrio ocorre quando $u = 1$, gerando $i_1 = v_1 = 0$. Encontre os outros dois pares de v e i que irão produzir o equilíbrio.
- Encontre o modelo linearizado do sistema no ponto de equilíbrio $u = 1$, $i_1 = v_1 = 0$.
- Encontre os modelos linearizados nos outros dois pontos de equilíbrio.

- 9.3** Considere o circuito mostrado na Fig. 9.58; u_1 e u_2 são fontes de tensão e corrente, respectivamente, e R_1 e R_2 são resistores não lineares com as seguintes características:

$$\text{Resistor 1: } i_1 = G(v_1) = v_1^3,$$

$$\text{Resistor 2: } v_2 = r(i_2).$$

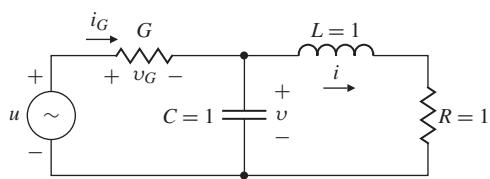


Figura 9.57 Circuito não linear para o Problema 9.2.

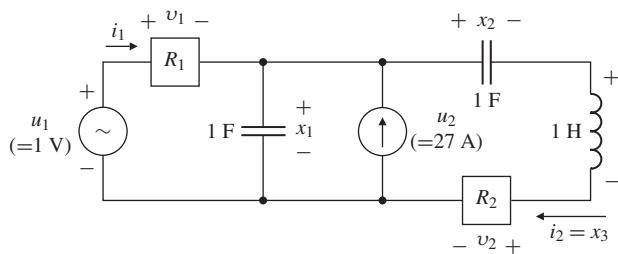


Figura 9.58 Um circuito não linear.

A função r é definida na Fig. 9.59.

- (a) Mostre que as equações do circuito podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= G(u_1 - x_1) + u_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 - r(x_3).\end{aligned}$$

Suponha que tenhamos uma fonte de tensão constante de 1 volt em u_1 e uma fonte de corrente constante de 27 ampères (isto é, $u_1^0 = 1$, $u_2^0 = 27$). Encontre o *estado de equilíbrio* $\mathbf{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0]^T$ para o circuito. Para uma determinada entrada u^0 , um estado de equilíbrio do sistema é definido como sendo qualquer vetor de estados constante cujos elementos satisfazem à relação

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0.$$

Consequentemente, qualquer sistema que parte em um dos seus estados de equilíbrio permanecerá lá indefinidamente até que uma entrada diferente seja aplicada.

- (b) Devido a perturbações, o estado inicial (capacitância, tensão e corrente no indutor) é ligeiramente diferente do equilíbrio e, assim, são fontes independentes, isto é,

$$\begin{aligned}u(t) &= u^0 + \delta u(t), \\ x(t_0) &= x^0(t_0) + \delta x(t_0).\end{aligned}$$

Faça uma análise de sinais pequenos na rede no equilíbrio encontrado em (a), apresentando as equações na forma

$$\delta \dot{x}_1 = f_{11} \delta x_1 + f_{12} \delta x_2 + f_{13} \delta x_3 + g_1 \delta u_1 + g_2 \delta u_2.$$

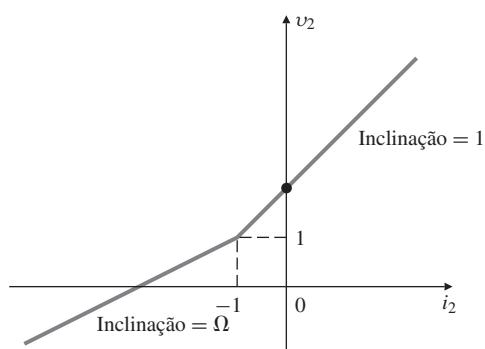


Figura 9.59 Resistência não linear.

- (c) Desenhe o diagrama do circuito que corresponde ao modelo linearizado. Dê valores aos elementos.

9.4 Considere o sistema não linear

$$\dot{x} = -x^2 e^{-\frac{1}{x}} + \sin u, \quad x(0) = 1.$$

- (a) Assuma $u^0 = 0$ e resolva para $x^0(t)$.
 (b) Encontre o modelo linearizado para a solução nominal no item (a).

9.5 *Efeito de linearização da realimentação.* Vimos que a realimentação pode reduzir a sensibilidade da função de transferência entrada-saída em respeito a mudanças na função de transferência da planta e reduzir os efeitos de uma perturbação atuando na planta. Neste problema, vamos explorar uma outra propriedade benéfica da realimentação: ela pode fazer a resposta de entrada-saída *mais linear* do que a resposta em malha aberta da planta sozinha. Para simplificar, vamos ignorar toda a dinâmica da planta e assumir que a planta é descrita pela não linearidade estática

$$y(t) = \begin{cases} u, & u \leq 1, \\ \frac{u+1}{2}, & u > 1. \end{cases}$$

- (a) Suponha a realimentação proporcional

$$u(t) = r(t) + \alpha(r(t) - y(t)),$$

sendo $\alpha \geq 0$ o ganho de realimentação. Encontre uma expressão para $y(t)$ em função de $r(t)$ para o sistema em malha fechada. (Essa função é chamada de *característica não linear* do sistema.) Esboce a característica de transferência não linear para $\alpha = 0$ (que é realmente malha aberta), $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$.

- (b) Suponha o controle integral

$$u(t) = r(t) + \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau.$$

O sistema em malha fechada é, portanto, não linear e dinâmico. Mostre que se $r(t)$ é uma constante, digamos r , então $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r$. Assim, o controle integral faz a característica de transferência em estado estacionário do sistema em malha fechada ser *exatamente linear*. O sistema em malha fechada pode ser descrito por uma função de transferência de r para y ?

9.6 Este problema mostra que a linearização nem sempre funciona. Considere o sistema

$$\dot{x} = \alpha x^3, \quad x(0) \neq 0.$$

- (a) Encontre o ponto de equilíbrio e resolva para $x(t)$.
 (b) Suponha que $\alpha = 1$. O modelo linearizado é uma representação válida do sistema?
 (c) Suponha que $\alpha = -1$. O modelo linearizado é uma representação válida do sistema?

9.7 Considerar o objeto em movimento em uma linha reta com velocidade constante mostrado na Fig. 9.60. A única medida disponível é o alcance do objeto. As equações do sistema são

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ z \end{bmatrix},$$

sendo

$$z = \text{constante},$$

$$\dot{x} = \text{constante} = v_0,$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Obtenha o modelo linearizado para este sistema.

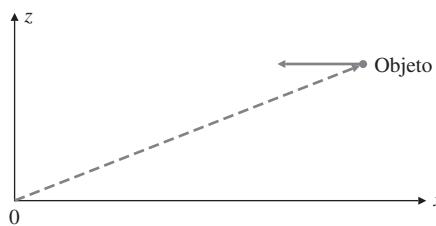


Figura 9.60 Diagrama de movimento de um objeto para o Problema 9.7.

Problemas da Seção 9.3: análise de ganho equivalente usando o lugar das raízes

9.8 Considere o sistema de terceira ordem mostrado na Fig. 9.61.

- Esboce o lugar das raízes para este sistema em relação a K , mostrando seus cálculos para os ângulos das assintotas, ângulos de partida e assim por diante.
- Usando técnicas gráficas, cuidadosamente localize o ponto em que o lugar das raízes cruza o eixo imaginário. Qual é o valor de K neste ponto?
- Suponha que, devido a algum mecanismo desconhecido, a saída do amplificador é dada pela seguinte não linearidade de saturação (em vez de por um ganho proporcional K):

$$u = \begin{cases} e, & |e| \leq 1, \\ 1, & e > 1, \\ -1, & e < -1. \end{cases}$$

Qualitativamente, descreva como seria de se esperar a resposta do sistema para uma entrada em degrau unitário.

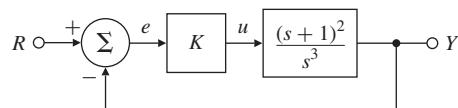


Figura 9.61 Sistema de controle para o Problema 9.8.

Problemas da Seção 9.4: análise de ganho equivalente usando resposta em frequência: funções descritivas

9.9 Calcule a função descritiva para a não linearidade de relé com zona morta mostrada na Fig. 9.6(c).

9.10 Calcule a função descritiva para a não linearidade de ganho com zona morta mostrada na Fig. 9.6(d).

9.11 Calcule a função descritiva para a não linearidade de mola pré-carregada mostrada na Fig. 9.6(e).

9.12 Considere a função do quantizador mostrada na Fig. 9.62 que se assemelha a uma escada. Encontre a função descritiva para esta não linearidade e escreva uma função no MATLAB para gerá-la.

9.13 Derive a função descritiva para o contator controlador ideal mostrado na Fig. 9.63. Ele é dependente da frequência? Ele seria dependente da frequência se tivesse um atraso de tempo ou histerese? Esboce graficamente os históricos temporais da saída para várias amplitudes de entrada e determine os valores da função descritiva para essas entradas.

9.14 Um contator controlador de uma plataforma inercial é mostrado na Fig. 9.64, sendo

$$I = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$\frac{I}{B} = 10 \text{ s},$$

$$\frac{h}{c} = 1,$$

$$\frac{J}{c} = 0,01 \text{ s},$$

Figura 9.62 Não linearidade do quantizador para o Problema 9.12.

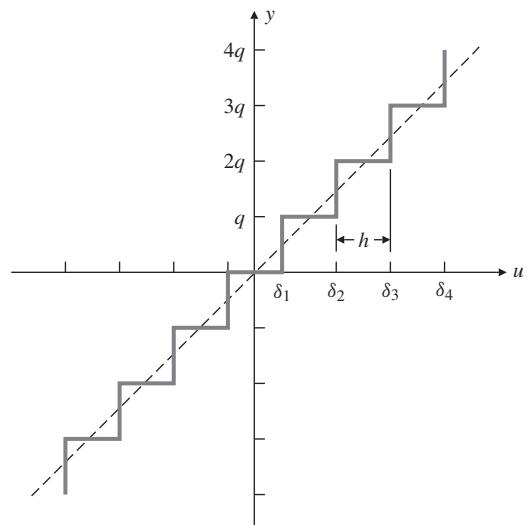


Figura 9.63 Contator para o Problema 9.13.

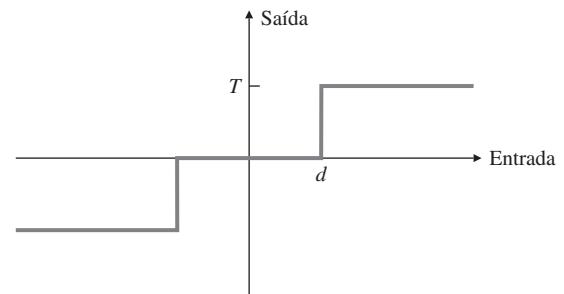
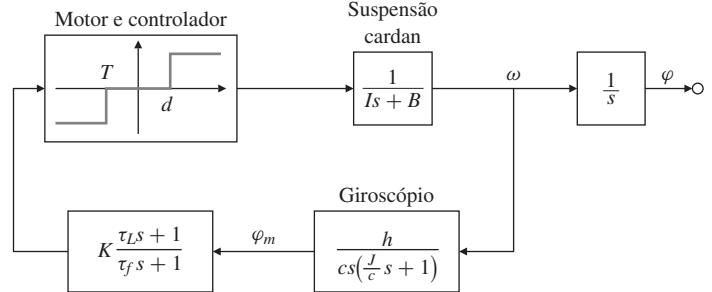


Figura 9.64 Diagramas de blocos para o sistema do Problema 9.14.



$$\tau_L = 0,1 \text{ s},$$

$$\tau_f = 0,01 \text{ s},$$

$$d = 10^{-5} \text{ rad},$$

$$T = 1 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

A resolução especificada é aproximadamente 10^{-6} rad:

$$K\varphi_m > d \quad \text{para } \varphi_m > 10^{-6} \text{ rad.}$$

Discuta a existência, amplitude e frequência de possíveis ciclos limites em função do ganho K e da FD do controlador. Repita o problema para uma banda morta com histerese.

9.15 Integrator não linear de Clegg. Houve, ao longo dos anos, algumas tentativas de melhorar o integrador linear. Um integrador linear tem a desvantagem de ter um atraso de fase de 90° em todas as frequências. Em 1958, J. C. Clegg sugeriu modificar o integrador linear para redefinir seu estado,

x, para zero sempre que a entrada do integrador, e , cruzasse zero (ou seja, mudanças de sinal). O integrador de Clegg tem a propriedade de atuar como um integrador linear sempre que sua entrada e saída tiverem o mesmo sinal. Caso contrário, ele *redefine* a sua saída para zero. O integrador de Clegg pode ser descrito por

$$\begin{aligned} x(t) &= e(t), \quad \text{se } e(t) \neq 0, \\ x(t+) &= 0, \quad \text{se } e(t) = 0, \end{aligned}$$

sendo que a última equação implica que o estado do integrador, x , é *redefinido* como zero imediatamente após e mudar de sinal. Ele pode ser implementado com amp-ops e diodos. A desvantagem potencial do integrador de Clegg é que ele pode induzir oscilações.

(a) Esboce a saída do integrador de Clegg se a entrada é $e = a \sin(\omega t)$.

(b) Demonstre que a FD para o integrador de Clegg é

$$N(a, \omega) = \frac{4}{\pi \omega} - j \frac{1}{\omega}.$$

e o atraso de fase é de apenas 38° .

\triangle *Problemas da Seção 9.5: análise e projeto baseados na estabilidade*

9.16 Calcule e esboce a curva inversa ótima e o controle ótimo para o controle de tempo mínimo da planta

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u, \\ |u| &\leq 1. \end{aligned}$$

Use o método de tempo inverso para eliminar o tempo.

9.17 Esboce a curva inversa ótima para o controle de tempo mínimo com $|u| \leq 1$ da planta linear

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 + u. \end{aligned}$$

9.18 Esboce a lei de controle de tempo ótimo para

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u, \\ |u| &\leq 1, \end{aligned}$$

e mostre a trajetória para $x_1(0) = 3$ e $x_2(0) = 0$.

9.19 Considere o sistema de controle térmico mostrado na Fig. 9.65. A planta física pode ser um quarto, um forno, etc.

(a) Qual é o período do ciclo limite?

(b) Se T_r é comandado por uma função de crescimento lento, esboce a saída do sistema, T . Mostre a solução para T_r “grande”.

9.20 Vários sistemas, como uma aeronave, um sistema massa-mola com frequência de ressonância bem abaixo da frequência de comutação, um grande motor carregado com atrito muito pequeno, etc.,

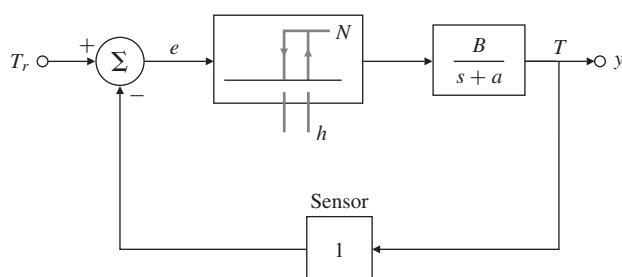


Figura 9.65 Sistema térmico para o Problema 9.19.

podem ser modelados apenas como uma inércia. Para uma curva de comutação ideal, esboce os retratos de fase do sistema. A função de comutação é $e = \theta + \tau\omega$. Suponha que $\tau = 10$ s e o sinal de controle $= 10^{-3}$ rad/s². Agora, esboce os resultados com

- (a) zona morta,
- (b) zona morta mais histerese,
- (c) zona morta mais atraso de tempo T ,
- (d) zona morta mais uma perturbação constante.

9.21 Calcule a amplitude do ciclo limite no caso de controle de atitude de satélite com atraso

$$I \ddot{\theta} = N u(t - \Delta),$$

usando

$$u = -\text{sgn}(\tau\dot{\theta} + \theta).$$

Esboce a trajetória no plano de fase do ciclo limite e o histórico temporal de θ dando o valor máximo de θ .

9.22 Considere o pêndulo de massa pontual com atrito nulo, como mostrado na Fig. 9.66. Usando o método de isóclinas como um guia, esboce o retrato do plano de fase do movimento. Preste especial atenção à vizinhança de $\theta = \pi$. Indique uma trajetória correspondente ao giro contínuo do pêndulo em vez de oscilar para trás e para frente.

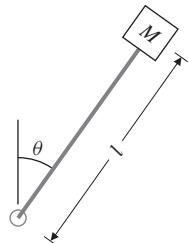


Figura 9.66 Pêndulo para o Problema 9.22.

9.23 Desenhe a trajetória de fase para um sistema

$$\ddot{x} = 10^{-6} \text{ m/s}^2$$

entre $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$ e $x(t) = 1$ mm. Encontre o tempo de transição t_f graficamente, comparando a curva parabólica com a sua solução com dois intervalos de tamanhos diferentes e a solução exata.

9.24 Considere o sistema com as equações de movimento

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin \theta = 0.$$

- (a) Essas equações correspondem a qual sistema físico?
- (b) Desenhe os retratos de fase para este sistema.
- (c) Mostre uma trajetória específica para $\theta_0 = 0,5$ rad e $\dot{\theta} = 0$.

9.25 Considere o pêndulo não linear na vertical com um motor em sua base como um atuador. Projete um controlador de realimentação para estabilizar o sistema.

9.26 Considere o sistema

$$\dot{x} = -\sin x.$$

Demonstre que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

- 9.27** Um sistema de primeira ordem não linear é descrito pela equação $\dot{x} = -f(x)$ sendo $f(x)$ uma função não linear contínua e diferenciável que satisfaz:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(x) &> 0, \quad \text{para } x > 0, \\ f(x) &< 0, \quad \text{para } x < 0. \end{aligned}$$

Use a Função de Lyapunov $V(x) = x^2/2$ para mostrar que o sistema é estável próximo à origem ($x = 0$).

- 9.28** Use a equação de Lyapunov

$$\mathbf{F}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{F} = -\mathbf{Q} = -\mathbf{I}$$

para encontrar o intervalo de K para o qual o sistema da Fig. 9.67 será estável. Compare sua resposta com os valores estáveis de K obtidos utilizando critério de estabilidade Routh.

- 9.29** Considere o sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 u \\ x_2(x_2 + u) \end{bmatrix}, \quad y = x_1.$$

Encontre todos os valores de α e β para os quais a entrada $u(t) = \alpha y(t) + \beta$ vai alcançar o objetivo de manter a saída $y(t)$ próxima a 1.

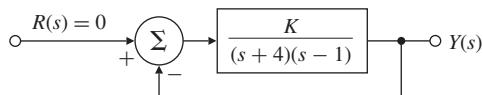


Figura 9.67 Sistema de controle para o Problema 9.28.

- 9.30** Considere o sistema não linear autônomo

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(x_3 - x_1) \\ x_1^2 - 1 \\ -x_1 x_3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Encontre o(s) ponto(s) de equilíbrio(s).
- (b) Encontre o sistema linearizado em cada ponto de equilíbrio.
- (c) Para cada caso no item (b), o que a teoria de Lyapunov nos diz sobre a estabilidade do sistema não linear próximo ao ponto de equilíbrio?

- 9.31** *Equação de Van der Pol.* Considere o sistema descrito pela equação não linear

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 + x^2)\dot{x} + x = 0$$

com a constante $\varepsilon > 0$.

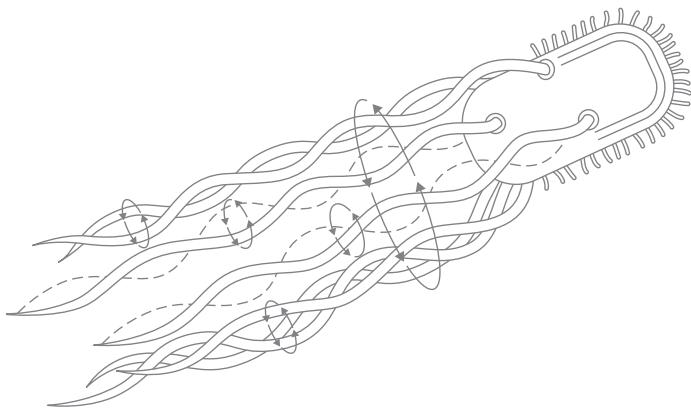
- (a) Mostre que as equações podem ser colocadas na forma [Plano de Liénard ou (x, y)].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \varepsilon \left(\frac{x^3}{3} - x \right), \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned}$$

- (b) Use a função de Lyapunov $V = \frac{1}{2}(x^2 + \dot{x}^2)$ e esboce a *região* de estabilidade como prevista por esse V no plano de Liénard.
- (c) Trace as trajetórias do item (b) e mostre as condições iniciais que tendem para a origem. Simule o sistema no SIMULINK utilizando várias condições iniciais em $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Considere dois casos, com $\varepsilon = 0,5$ e $\varepsilon = 1,0$.

10

Projeto de Sistemas de Controle



Nos Capítulos 5, 6 e 7, apresentamos técnicas para análise e projeto de sistemas realimentados baseadas nos métodos do lugar das raízes, da resposta em frequência e das variáveis de estado. Até agora, tivemos de considerar partes isoladas e aspectos idealizados de sistemas maiores e focamos na aplicação de um método de análise de cada vez. Neste capítulo, voltamos ao tema do Capítulo 4, as vantagens do controle realimentado, para reconsiderar o problema de projeto de controle global com as sofisticadas ferramentas desenvolvidas nos Capítulos 5 ao 7 e 9. Vamos utilizar essas ferramentas em várias aplicações complexas do mundo real no formato de estudo de caso.

Uma abordagem de projeto passo a passo abrangente serve para dois propósitos: fornecer um ponto de partida útil para qualquer problema de controle do mundo real e fornecer pontos de verificação significativos uma vez que o processo de projeto esteja em andamento. Este capítulo desenvolve essa abordagem geral, que será aplicada nos estudos de caso.

Visão geral do capítulo

A Seção 10.1 abre o capítulo com um processo de projeto passo a passo que é suficientemente geral para ser aplicado a qualquer processo de projeto de controle, mas que também fornece definições e direções úteis. Então, aplicamos o processo de projeto em complexas aplicações práticas: projeto do sistema de controle de atitude para um satélite (Seção 10.2), controle lateral e longitudinal de um Boeing 747 (Seção 10.3), controle da razão ar-combustível em um motor automotivo (Seção 10.4), controle de uma unidade de disco (Seção 10.5) e controle de um sistema de processamento térmico rápido (PTR) (Seção 10.6). O estudo de caso do satélite é representativo do controle de sistemas de comunicações de satélites geossíncronos. O estudo aborda o projeto de sistemas de controle robusto, nos quais sabe-se que os parâmetros físicos

variam dentro de um determinado intervalo. Nesse contexto, o sistema de controle precisa atender às especificações do “início da vida” até o “fim da vida”, que se estende por um período de 12-15 anos. O momento de inércia e a massa do satélite irão variar à medida que o combustível for gasto para o controle de altitude e com o desdobramento e a reorientação das antenas do satélite. O estudo de caso do satélite ilustra o uso de um compensador rejeita faixa para um sistema com ressonância levemente amortecida. Veremos, a partir deste estudo de caso, que sistemas com atuadores e sensores justapostos são muito mais fáceis de controlar do que sistemas não justapostos. O estudo de caso do Boeing 747 aborda o familiar sistema de controle de voo da aeronave comercial de passageiros. As equações não lineares de movimento são dadas e linearizadas para uma condição de voo específica. As dinâmicas de corpos rígidos, direções longitudinal e lateral, são cada uma de quarta ordem. Obviamente, os modos flexíveis também precisam ser considerados para um modelo mais preciso. O estudo de caso de estabilização lateral do Boeing 747 irá ilustrar o uso da realimentação como uma malha interna projetada para auxiliar o piloto, que fornecerá o controle primário da malha externa. O controle de altitude irá mostrar como combinar a realimentação da malha interna com o compensador da malha externa para projetar um sistema de controle completo. O estudo de caso da razão ar-combustível em um motor automotivo é um exemplo do mundo real que inclui um sensor não linear e um atraso puro de tempo. Vamos usar o método da função descritiva, do Capítulo 9, para analisar o comportamento desse sistema. Outro problema familiar a todo usuário de PC é o controle dos dados armazenados em um disco. O estudo de caso sobre o controle de posição e a largura de banda será um parâmetro-chave de desempenho. O estudo de caso do PTR na fabricação de pastilhas de semicondutores está muito próximo da aplicação industrial. O problema trata de rastreamento da temperatura e rejeição de distúrbios para um sistema térmico altamente não linear. O atuador (lâmpada) também é não linear, e vamos usar a técnica do Capítulo 9 para tentar cancelar os efeitos dessa não linearidade. Outro aspecto importante desse sistema é a saturação do atuador e o fato de que o sinal de controle não pode ser negativo. Em todos esses estudos de caso, o projetista precisa ser capaz de utilizar várias ferramentas dos capítulos anteriores, incluindo o lugar das raízes, a resposta em frequência, a alocação de polos por realimentação de estados e a simulação (não linear) de respostas temporais para obter um projeto satisfatório. Na Seção 10.7, apresentamos um estudo de caso da área emergente da biologia de sistemas e descrevemos a quimiotaxia ou como a *Escherichia coli* (*E. coli*) se movimenta. A Seção 10.8 fornece uma perspectiva histórica sobre as aplicações de controle realimentado.

10.1 Um esquema de projeto de sistemas de controle

A engenharia de controle é uma parte importante do processo de projeto de muitos sistemas dinâmicos. Como sugerido no Capítulo 4, o uso deliberado da realimentação pode estabilizar um sistema instável, reduzir o erro devido a entradas de perturbação, reduzir o erro de rastreamento enquanto a entrada segue um comando e reduzir a sensibilidade de uma função de transferência em malha fechada para pequenas variações nos parâmetros internos do sistema. Nessas situações, para as quais o controle realimentado é necessário, é possível delinear uma estratégia para o projeto de sistemas de controle que muitas vezes leva a uma solução satisfatória.

Antes de descrever esta abordagem, queremos enfatizar que o objetivo do controle é auxiliar o produto ou processo – o mecanismo, o robô, a fábrica de produtos químicos, a aeronave ou qualquer outro – a realizar seu trabalho. Engenheiros engajados em outras áreas do processo de projeto estão cada vez mais levando em conta a contribuição do controle no início de seus planos. Como resultado, mais e mais sistemas são projetados, para que eles não trabalhem mais sem realimentação. Isso é especialmente importante no projeto de aeronaves de alto desempenho, em que o controle tornou-se essencial, juntamente com a estrutura e aerodinâmica, para garantir que a aeronave realmente voe. É impossível dar uma descrição global de tal projeto neste livro, mas reconhecer a existência de tais casos é importante na perspectiva não só da

tarefa específica do projeto do sistema de controle, mas também do papel central que essa tarefa pode desempenhar em uma empresa.

O projeto de sistemas de controle começa com um produto ou processo proposto cujo desempenho dinâmico satisfatório depende da realimentação para a estabilidade, regulação da perturbação, precisão de rastreamento ou redução dos efeitos das variações dos parâmetros. Vamos dar uma visão geral do processo de projeto que é geralmente bastante útil se o produto é um amplificador eletrônico ou uma grande estrutura para ser colocada em órbita terrestre. Obviamente, para ser tão amplamente aplicável, nosso esquema tem de ser vago no que diz respeito aos detalhes físicos e específicos apenas com relação ao problema de controle realimentado. Para apresentar nossos resultados, vamos dividir o problema de projeto de controle em uma sequência de passos.

Especificações

PASSO 1. *Compreenda o processo e traduza os requisitos de desempenho dinâmico em especificações no tempo, frequência ou na localização de polos e zeros.* A importância de compreender o processo, o que se pretende fazer, quanto erro no sistema é permitido, como descrever a classe dos sinais de comando e perturbação esperados e quais capacidades e limitações físicas dificilmente pode ser subestimada. Lamentavelmente, em um livro como este, é fácil ver o processo como uma função de transferência linear, invariante no tempo e capaz de responder às entradas de tamanho arbitrário, e tendemos a ignorar o fato de que o modelo linear é uma representação muito limitada do sistema real, válido apenas para pequenos sinais, tempos curtos e determinadas condições ambientais. Não confunda a aproximação com a realidade. Você deve ser capaz de usar o modelo simplificado para a finalidade pretendida e voltar para um modelo exato ou para o sistema físico real para realmente verificar o desempenho do projeto.

Resultados típicos deste passo são especificações a que o sistema deve atender: resposta ao degrau dentro de alguns limites (como mostrado na Fig. 10.1a), resposta em frequência de malha aberta que satisfaça a certas restrições (Fig. 10.1b), ou polos de malha fechada à esquerda de alguns limites (Fig. 10.1c).

Sensor

PASSO 2. *Seleção de sensores.* Na seleção do **sensor**, considere quais variáveis são importantes para controlar e quais variáveis podem ser fisicamente medidas. Por exemplo, em um motor a jato existem temperaturas internas críticas que devem ser controladas, mas que não podem ser medidas diretamente quando o motor está em operação. Selecione os sensores que, indiretamente, permitem uma boa estimativa destas variáveis críticas. É importante considerar sensores para o distúrbio. Às vezes, especialmente em processos químicos, é benéfico medir uma perturbação de carga diretamente, porque o desempenho pode ser melhorado se esta informação alimentar o controlador.

Seguem alguns fatores que influenciam a seleção de sensor:

Número de sensores e localizações:	Selecione o número mínimo exigido de sensores e suas localizações ideais
Tecnologia:	Elétrica ou magnética, mecânica, eletromecânica, eletro-óptica, piezoelétrica
Desempenho funcional:	Linearidade, polarização, precisão, largura de banda, resolução, faixa dinâmica, ruído
Propriedades físicas:	Peso, tamanho, força
Fatores de qualidade:	Confiabilidade, durabilidade, manutenção
Custo:	Despesa, disponibilidade, instalações para testes e manutenção

Atuadores

PASSO 3. *Seleção de atuadores.* A fim de controlar um sistema dinâmico, obviamente, você deve ser capaz de influenciar na resposta. O dispositivo que faz isso é o **atuador**. Antes de escolher um atuador específico, considere as variáveis que podem ser influenciadas. Por exemplo, em um veículo aéreo, muitas configurações de superfícies móveis são possíveis, e a influência que elas têm no desempenho e na controlabilidade da aeronave pode se profunda. As localizações dos jatos ou dispositivos de torque também são parte importante do projeto de controle da aeronave.

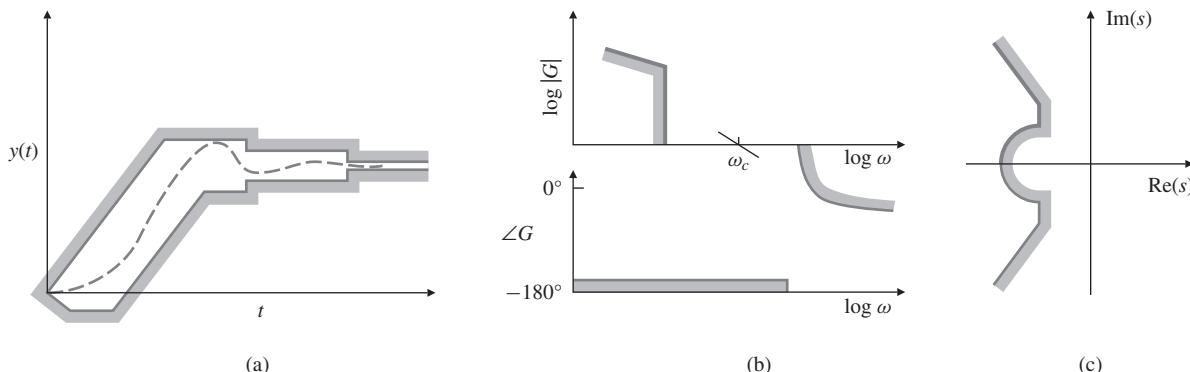


Figura 10.1 Exemplo de (a) resposta no tempo; (b) resposta em frequência; e (c) especificações de polos e zeros resultantes do Passo 1.

Quando uma determinada variável de controle é selecionada, você pode ter de considerar outros fatores:

Número de atuadores e localizações:	Selecione os atuadores necessários e suas localizações ideais
Tecnologia:	Elétrica, hidráulica, pneumática, térmica, outras
Desempenho funcional:	Força máxima possível, extensão da faixa linear, velocidade máxima possível, potência, eficiência
Propriedades físicas:	Peso, tamanho, força
Fatores de qualidade:	Confiabilidade, durabilidade, manutenção
Custo:	Despesa, disponibilidade, instalações para testes e manutenção

PASSO 4. Faça um modelo linear. Considere, aqui, a melhor escolha para o processo, atuador e sensor, identifique o ponto de equilíbrio de interesses e construa um modelo dinâmico para sinais pequenos válido em toda a gama de frequência incluída nas especificações do Passo 1. O modelo deve ser validado com dados experimentais, sempre que possível. Para que se possa fazer uso de todas as ferramentas disponíveis, expresse o modelo nas formas de variáveis de estado, polo-zero, bem como na forma de frequência em resposta. Como vimos, o MATLAB® e outros pacotes computacionais de auxílio ao projeto de sistemas de controle têm meios para realizar as transformações entre essas formas. Simplifique e reduza a ordem do modelo, se necessário. Quantifique a incerteza do modelo.

Linearização

PASSO 5. Tente um projeto simples proporcional-integral-derivativo (PID) ou um projeto de atraso e avanço. Para obter uma estimativa inicial da complexidade do problema de projeto, esboce a resposta em frequência (Bode) e o lugar das raízes com respeito ao ganho da planta. Se o modelo da planta-sensor-atuador for estável e de fase mínima, o diagrama de Bode provavelmente será mais útil; caso contrário, o lugar das raízes mostra informações muito importantes com relação ao comportamento no semiplano direito (SPD). Em qualquer caso, tente atender às especificações com um controlador simples da variedade de atraso e avanço, incluindo o controle integral, se a resposta em estado estacionário exigir. Não negligie os distúrbios se a informação do sensor necessário estiver disponível. Considere o efeito do ruído no sensor e compare uma rede de avanço com um sensor de velocidade direto para ver qual fornece um projeto melhor.

**Compensação simples
PID/projetor de atraso
e avanco**

PASSO 6. Avalie/modifique a planta. Baseado no projeto simples de controle, avalie a origem das características indesejáveis do desempenho do sistema. Reavalie as especificações, a configuração física do processo e as seleções do atuador e do sensor à luz do projeto preliminar, e volte ao Passo 1 se melhorias parecem ser necessárias ou viáveis. Por exemplo, em muitos problemas de controle de movimento, depois de testar o primeiro projeto, você pode encontrar modos de vibração que impedem que o projeto atenda às especificações iniciais do problema.

Pode ser muito mais fácil atender às especificações alterando a estrutura da planta pela adição de reforços ou de amortecimento passivo do que com apenas estratégias de controle. Uma solução alternativa pode ser mover um sensor que está em um nó de um modo de vibração, proporcionando, assim, nenhuma realimentação do movimento. Além disso, algumas tecnologias de atuadores (como a hidráulica) têm muito mais vibrações de baixa frequência que outras (como a elétrica); assim, a alteração da tecnologia dos atuadores pode ser indicada. Em uma implementação digital, pode ser possível rever a estrutura do sistema sensor-atuador-controlador de forma a reduzir o atraso de tempo, que é sempre um elemento desestabilizador. Em sistemas térmicos, muitas vezes é possível mudar a capacidade ou a condutividade térmica pela substituição de materiais que irão melhorar o projeto de controle. É importante considerar todas as partes do projeto, não só a lógica de controle, para atender às especificações com a melhor relação custo-benefício. Se a planta for modificada, volte ao Passo 1. Se o projeto agora parece satisfatório, vá para o Passo 8; caso contrário, tente o Passo 7.

Projeto ótimo

PASSO 7. Teste um projeto ótimo. Se o projeto de compensadores por tentativa e erro não fornece desempenho totalmente satisfatório, considere um projeto baseado em controle ótimo. O lugar das raízes simétrico (LRS) vai mostrar as possíveis localizações das raízes, a partir das quais as localizações dos polos do controlador são selecionadas para atender às especificações da resposta; você pode selecionar as localizações dos polos do estimador que representem um compromisso entre o sensor e o ruído no processo. Trace a resposta em frequência de malha aberta e o lugar das raízes para avaliar as margens de estabilidade deste projeto e sua robustez às mudanças de parâmetros. Você pode modificar as posições dos polos até obter um resultado com melhor compromisso. Retornar ao LRS com diferentes medidas de custo geralmente faz parte deste passo, ou realizar cálculos por meio das funções `lqr` e `lqe`. Outra variação sobre o controle ótimo é propor um controlador de estrutura fixa com parâmetros desconhecidos, formular uma função de custo e usar o parâmetro de otimização para encontrar um bom conjunto de valores dos parâmetros.

Compare o projeto ótimo com o projeto baseado no método de transformadas obtido no Passo 5. Selecione o melhor dos dois antes de prosseguir para a Etapa 8.

PASSO 8. Construa um modelo computacional e calcule (simule) o desempenho do projeto. Depois de conseguir o melhor compromisso entre modificações no processo, seleção do atuador e do sensor e a escolha do projeto do controlador, simule um modelo computacional do sistema. Esse modelo deve incluir não linearidades importantes, como a saturação do atuador, fontes de ruído realísticas e as variações paramétricas previstas durante a operação do sistema. A simulação, muitas vezes, identifica sensibilidades que podem resultar no retorno ao Passo 5 ou até mesmo ao Passo 2. Iterações de projeto devem continuar até que a simulação confirme estabilidade aceitável e robustez. Como parte dessa simulação, muitas vezes é possível incluir otimização dos parâmetros, na qual o computador ajusta os parâmetros livres para o melhor desempenho. Nos estágios iniciais do projeto, o modelo simulado será relativamente simples; à medida que o projeto progride, modelos mais completos e detalhados serão estudados. Neste passo também é possível calcular um controlador digital equivalente ao controlador analógico, como descrito nos Capítulos 4 e 8. Algum refinamento nos parâmetros do controlador pode ser necessário para levar em conta os efeitos da digitalização. Isso permite que o projeto final seja implementado com a lógica do processador digital.

Se os resultados de simulação demonstram que o projeto é satisfatório, vá para o Passo 9; caso contrário, volte ao Passo 1.

Protótipo teste do protótipo

PASSO 9. Construa um protótipo. Como o último teste antes da produção, é comum construir e testar um protótipo. Neste ponto, a qualidade do modelo é verificada, vibrações insuspeitas, outros modos são descobertos e maneiras de melhorar o projeto são consideradas. Implemente o controlador usando programas computacionais e componentes físicos embarcados. Sintonize o controlador, se necessário. Após esses testes, você pode desejar reconsiderar o sensor, atuador e processo e voltar ao Passo 1 – a menos que tempo, dinheiro ou ideias estejam esgotados.

Esse esquema é uma aproximação de boas práticas; outros engenheiros terão variações sobre esses temas. Em alguns casos, pode-se desejar executar os passos em uma ordem diferente, omitir um passo ou adicionar outro. As etapas de simulação e de construção do protótipo variam muito, dependendo da natureza do sistema. Em sistemas para os quais um protótipo é difícil de ser testado e de ser refeito (por exemplo, um satélite), ou quando uma falha é perigosa (por exemplo, a estabilização ativa de uma centrífuga de alta velocidade ou desembarque de um homem na Lua), a maior parte do projeto de verificação é feita através de algum tipo de simulação. A simulação pode ser realizada na forma de uma simulação numérica digital, de um modelo em escala de laboratório ou de um modelo de laboratório de tamanho real com um ambiente simulado. Para os sistemas que são fáceis de construir e modificar (por exemplo, controle realimentado para um sistema de combustível automotivo), a etapa de simulação é muitas vezes ignorada totalmente; a verificação e o refinamento do projeto são realizados, em vez de trabalhar com protótipos.

Uma das questões levantadas na discussão anterior (Passo 6) foi o importante fator de **alterar a própria planta**. Em muitos casos, modificações adequadas nas plantas podem fornecer amortecimento adicional ou aumento de rigidez, mudança nas formas dos modos, redução da resposta do sistema à perturbações, redução do atrito de Coulomb, mudança na capacidade ou na condutividade térmica, etc. Vale a pena mencionar exemplos específicos da experiência dos autores. Em um exemplo de fabricação de pastilhas semicondutoras, a borda do anel que segura a pastilha foi identificada como um fator limitante no controle em malha fechada. A modificação da espessura da borda do anel e a utilização de um material de revestimento diferente reduziram as perdas de calor e, juntamente com a realocação de uns sensores de temperatura para posições mais próximas da borda do anel, resultaram em melhora significativa no desempenho de controle. Em outra aplicação, processamento de filme fino, a simples mudança na ordem dos dois fluxos de entrada resultou em melhora significativa na mistura dos materiais precursor e oxidante e levou a uma melhoria na uniformidade do filme. Em um processo de deposição física de vapor usando RF-plasma, a forma do alvo foi curvada para compensar os efeitos da geometria da câmara, o que resultou em melhorias substanciais na uniformidade da deposição. Como último exemplo, em um problema de controle de eixo hidráulico, a adição de isolamento cerâmico no controle de temperatura do óleo e de um dissipador de temperatura para a carcaça do eixo resultou na redução da magnitude dos distúrbios em várias ordens, algo não realizável apenas pelo controlador.¹ Pode-se também mencionar aplicações aeroespaciais nas quais o controle foi elaborado a posteriori, e o problema de controle realimentado se tornou extremamente difícil e resultou em um desempenho pobre de malha fechada. A moral dessa discussão é que não se deve esquecer a opção de modificar a própria planta para tornar o problema mais fácil de controlar e fornecer o desempenho máximo de malha fechada.

A abordagem usual de projetar o sistema e jogá-la para o grupo de controle mostrou-se insatisfatória e falha. Uma abordagem melhor, que está ganhando força, é ter engenheiros de controle envolvidos desde o início de um projeto para fornecer previamente uma realimentação sobre o quanto difícil é controlar o sistema. O engenheiro de controle pode fornecer informações valiosas sobre a escolha de atuadores e sensores e pode até mesmo sugerir modificações na planta. Muitas vezes, é muito mais eficiente mudar o projeto da planta enquanto ele está na prancheta, antes que “qualquer metal tenha sido dobrado.” Estudos do desempenho em malha fechada podem ser executados em um simples modelo do sistema logo de início.

Implícito no processo de projeto está o fato bem conhecido de que projetos dentro de uma determinada categoria muitas vezes aproveitam a experiência adquirida com modelos anteriores. Assim, bons projetos evoluem em vez de aparecerem em sua melhor forma após a primeira passagem. Vamos ilustrar o método com vários casos (Seções 10.2-10.6). Para fácil referência, resumimos os passos aqui.

¹ Nosso colega, Prof. Daniel DeBra, acredita fortemente que modificar a própria planta é uma opção para melhorar o controle. Ele cita essa aplicação em particular para abordar esse tema. E é claro, concordamos com ele!

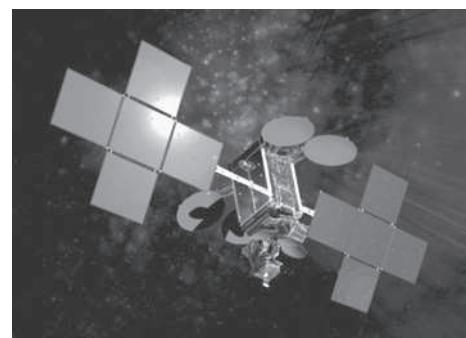
Resumo dos passos de projeto de controle

1. Entenda o processo e suas especificações de desempenho.
2. Selecione os tipos e número de sensores, considerando localização, tecnologia e ruído.
3. Selecione os tipos e número de atuadores considerando localização, tecnologia, ruído e potência.
4. Faça um modelo linear do processo, atuador e sensor.
5. Faça um projeto simples, baseado nos conceitos de compensação de atraso e avanço ou controle PID. Se estiver satisfeito, vá para o Passo 8.
6. Considere modificar a própria planta para que o controle em malha fechada seja melhorado.
7. Faça um teste de projeto por alocação de polos baseado em controle ótimo ou em outros critérios.
8. Simule o projeto, incluindo os efeitos de não linearidade, ruídos e variações paramétricas. Se o desempenho não for satisfatório, volte ao Passo 1 e o repita. Considere modificar a própria planta para que o controle em malha fechada seja melhorado.
9. Construa e teste um protótipo. Se não ficar satisfeito, volte ao Passo 1 e o repita.

10.2 Projeto do controle de atitude de um satélite

Nosso primeiro exemplo, retirado do programa espacial, é sugerido pela necessidade de controlar a direção que aponta, ou atitude, de um satélite na órbita da Terra. A Fig. 10.2(a) mostra uma imagem de um satélite de comunicações geossíncrono. Vamos passar por cada passo de nosso esquema de projeto e tangenciar em alguns dos fatores que podem ser considerados para o controle de tal sistema.

PASSO 1. Compreenda o processo e suas especificações de desempenho. Um satélite é esboçado na Fig. 10.2(b). Imagine que o veículo tenha uma missão de pesquisa astronômica que exige precisão no apontamento de um pacote de sensores científicos. Esse pacote deve ser mantido no ambiente mais silencioso possível, o que implica no isolamento das vibrações e do ruído elétrico do corpo principal e das fontes de potência, dos propulsores e dos equipamentos de comunicação. Modelamos a estrutura resultante como duas massas ligadas por uma haste flexível. Na Fig. 10.2(b), a atitude do satélite θ_2 é o ângulo entre o sensor de estrelas e o pacote de



(a)

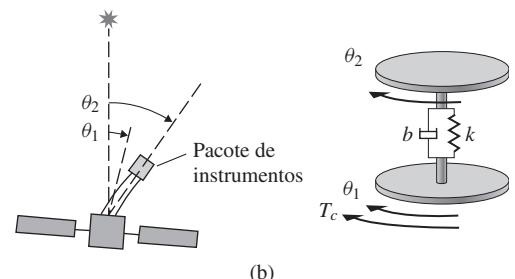


Figura 10.2 (a) Imagem do satélite geossíncrono de telecomunicações IPSTAR; (b) diagrama de um satélite e seu modelo de dois corpos.

Fonte: cortesia de Thaicom plc and Space Systems/Loral.

instrumentos, e θ_1 é o ângulo do corpo principal do satélite em relação à estrela. A Fig. 10.2(b) mostra o diagrama do sistema mecânico equivalente ao satélite, em que o sensor é montado no disco associado a θ_2 . Torques de perturbação devido a pressão solar, micrometeoritos e perturbações da órbita são calculados como sendo negligenciados. A especificação de apontamento surge quando é necessário apontar a unidade em outra direção. Isto pode ser atendido por dinâmicas com um tempo de acomodação de 20 s e um sobressinal não maior que 15%. A dinâmica do satélite inclui parâmetros que podem variar. O controle deve ser satisfatório para qualquer valor dos parâmetros em uma escala predefinida a ser dada quando as equações forem escritas.

PASSO 2. Seleção dos sensores. A fim de orientar o pacote científico, é necessário medir os ângulos de atitude do pacote. Para esta finalidade, propomos o uso de um **rastreador de estrelas**, um sistema baseado na captação da imagem de uma estrela específica e em mantê-la centrada no plano focal de um telescópio. Este sensor fornece uma leitura relativamente ruidosa, mas muito precisa (em média) e proporcional a θ_2 , ângulo de desvio do pacote de instrumentos do ângulo desejado. Para estabilizar o controle, incluímos um giroscópio para fornecer uma leitura limpa de $\dot{\theta}_2$, porque uma rede de avanço no sinal de rastreamento de estrela pode amplificar muito o ruído. Além disso, o giroscópio pode estabilizar movimentos grandes antes do rastreador de estrelas adquirir a imagem da estrela alvo.

PASSO 3. Seleção dos atuadores. As principais considerações na seleção do atuador são confiabilidade, precisão, peso, requisitos de potência e tempo de vida. Alternativas para a aplicação de torque são jatos de gás frio, rodas de reação ou giroscópios, torque magnético e um gradiente de gravidade. Os jatos têm maior potência e são menos precisos. Rodas de reação são precisas, mas podem transferir apenas impulsos, então os jatos ou geradores de torque magnético são obrigados a “descarregar” impulsos de tempos em tempos. Geradores de torque magnético fornecem níveis relativamente baixos de torque e são adequados apenas para algumas missões de baixa altitude do satélite. Um gradiente de gravidade também fornece um torque muito pequeno que limita a velocidade da resposta e coloca severas restrições na forma do satélite. Para os fins desta missão, selecionamos os jatos de gás frio, que são rápidos e adequadamente precisos.

PASSO 4. Faça um modelo linear. Para o satélite, assumimos duas massas conectadas por uma mola com torque constante k e amortecimento viscoso constante b , como mostrado na Fig. 10.2. As equações de movimento são

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T_c, \quad (10.1a)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0, \quad (10.1b)$$

sendo T_c o torque de controle do corpo principal. Com inércias $J_1 = 1$ e $J_2 = 0,1$, a função de transferência é

$$G(s) = \frac{10bs + 10k}{s^2(s^2 + 11bs + 11k)}. \quad (10.2)$$

Se escolhermos

$$\mathbf{x} = [\theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_1]^T$$

como o vetor de estados, então, usando a Eq. (10.1a) e assumindo $T_c \equiv u$, descobrimos que as equações de movimento na forma de variáveis de estado são

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_2} & -\frac{b}{J_2} & \frac{k}{J_2} & \frac{b}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_1} & \frac{b}{J_1} & -\frac{k}{J_1} & -\frac{b}{J_1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (10.3a)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}. \quad (10.3b)$$

A análise física nos leva a supor que os parâmetros k e b variam devido às flutuações de temperatura, mas são limitados por

$$0,09 \leq k \leq 0,4, \quad (10.4a)$$

$$0,038\sqrt{\frac{k}{10}} \leq b \leq 0,2\sqrt{\frac{k}{10}}. \quad (10.4b)$$

Seleção de valores nominais para parâmetros com variação

Como resultado, a frequência natural do veículo ω_n pode variar entre 1 e 2 rad/s, e o coeficiente de amortecimento ζ varia entre 0,02 e 0,1.

Uma abordagem para o projeto de controle quando os parâmetros estão sujeitos a variações é selecionar valores nominais para os parâmetros, construir o projeto para esse modelo e depois testar o desempenho do controlador com outros valores dos parâmetros. No presente caso, optamos pelos valores nominais $\omega_n = 1$ e $\zeta = 0,02$. A escolha é um tanto arbitrária, sendo baseada na experiência e na análise heurística. No entanto, note que estes são valores mais baixos nas suas respectivas faixas e, portanto, correspondem à planta que é, provavelmente, a mais difícil de controlar, de modo a atender às especificações. Assumimos que um projeto para esse modelo também tem boa chance para atender às especificações para outros valores dos parâmetros. (Outra opção seria selecionar um modelo com valores médios para cada parâmetro.) Os valores dos parâmetros selecionados são $k = 0,091$ e $b = 0,0036$; com $J_1 = 1$ e $J_2 = 0,1$, as equações nominais são

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.91 & -0.036 & 0.91 & 0.036 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.091 & 0.0036 & -0.091 & -0.0036 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (10.5a)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}. \quad (10.5b)$$

A função de transferência correspondente, usando a função ss2tf no MATLAB, é

$$G(s) = \frac{0,036(s + 25)}{s^2(s^2 + 0,04s + 1)}. \quad (10.6)$$

Quando um projeto de teste estiver concluído, a simulação computacional deve ser executada na faixa dos valores possíveis dos parâmetros, para garantir que o projeto tenha robustez suficiente para suportar essas mudanças. As Eqs (3.66)–(3.68) dizem que as especificações de desempenho dinâmico serão cumpridas se os polos de malha fechada tiverem uma frequência natural de 0,5 rad/s e coeficiente de amortecimento de malha fechada de 0,5; estes correspondem a uma frequência de cruzamento em malha aberta de $\omega_c \cong 0,5$ e uma margem de fase em torno de $PM = 50^\circ$. Vamos tentar atender a esses critérios de projeto.

PASSO 5. *Teste um compensador de atraso e avanço ou um controlador PID.* O lugar das raízes do ganho proporcional para a planta nominal está desenhado na Fig. 10.3, e o diagrama de Bode

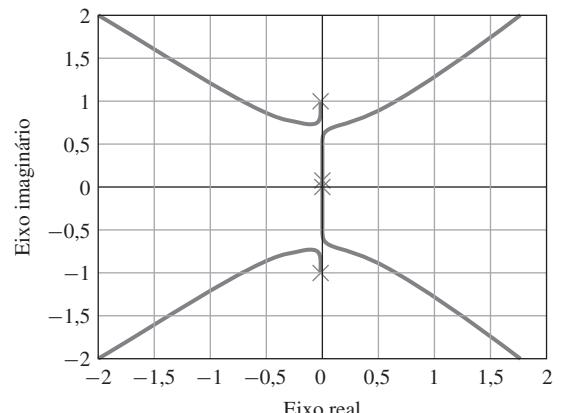


Figura 10.3 Lugar das raízes de $KG(s)$.

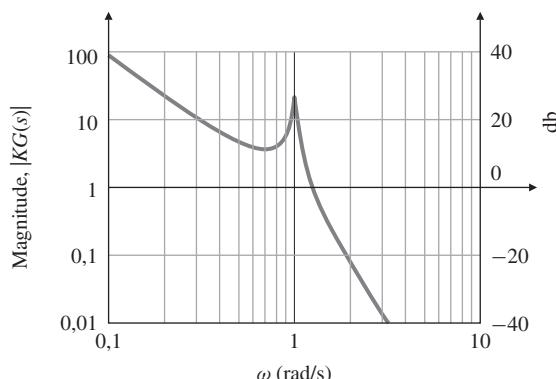
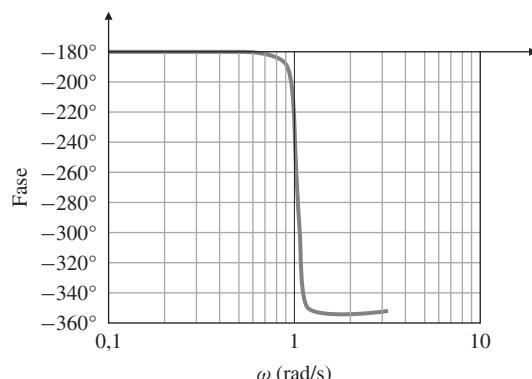


Figura 10.4 Diagrama de Bode de $KG(s)$ para $K = 0,5$.

(a)



(b)

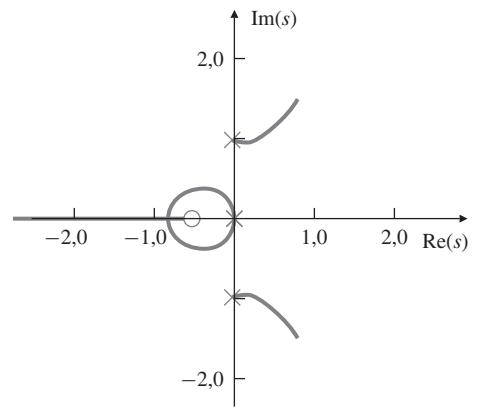
é dado na Fig. 10.4. Podemos ver na Fig. 10.4 que esse pode ser um problema difícil de projeto, pois a frequência da ressonância levemente amortecida é maior que o ponto da frequência de cruzamento de projeto apenas por um fator de 2. Esta situação vai exigir que a compensação possa corrigir o atraso de fase da planta na frequência de ressonância. Tal correção é muito dependente do conhecimento da frequência de ressonância que, neste caso, está sujeita a alterações. Pode haver problemas à frente.

Para ilustrar alguns aspectos importantes do projeto da compensação, vamos, em primeiro lugar, ignorar a ressonância e gerar um projeto que seja aceitável para o corpo rígido sozinho. Consideramos a função de transferência do processo como $1/s^2$, a realimentação com posição mais derivada (rastreador de estrelas mais giroscópio) ou controle PD com a função de transferência $D(s) = K(sT_D + 1)$ e a resposta objetivo como $\omega_n = 0,5$ rad/s e $\zeta = 0,5$. Um controlador adequado seria

$$D_1(s) = 0,25(2s + 1). \quad (10.7)$$

O lugar das raízes para a planta real com D_1 é mostrado na Fig. 10.5 e o diagrama de Bode, na Fig. 10.6. A partir desses gráficos, podemos ver que os polos de baixa frequência são razoáveis, mas que o sistema será instável por causa da ressonância.² Neste ponto, tomamos as simples ações de reduzir nossa expectativa em relação à largura de banda e de retardar lentamente o

² Se este sistema for construído, os jatos atuadores podem saturar quando a resposta crescer. Podemos analisar a resposta usando o método descrito na Seção 9.3 para sistemas não lineares. A partir da análise, podemos esperar que o sinal cresça e que o ganho equivalente do atuador diminua até que as raízes retornem ao eixo imaginário próximo a ω_n . O ciclo limite resultante poderia esgotar rapidamente o fornecimento de gás de controle.

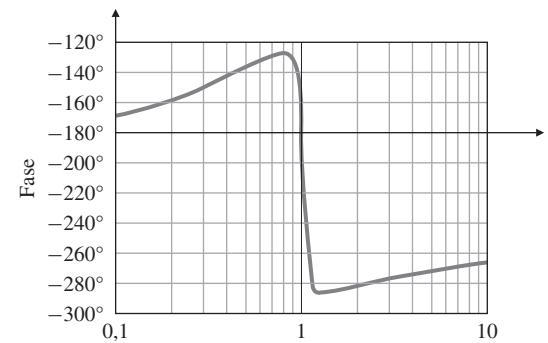
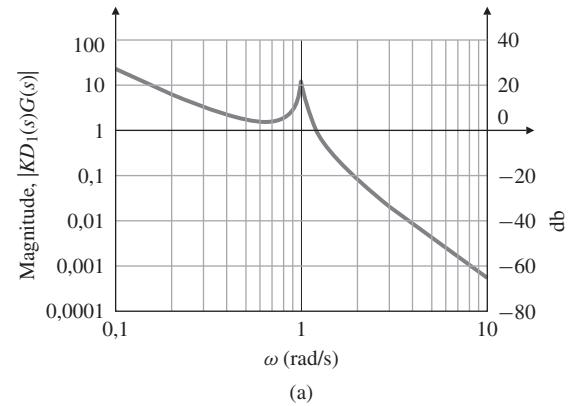
Figura 10.5 Lugar das raízes de $KD_1(s)G(s)$.

sistema, reduzindo o ganho até que o sistema se torne estável. Com muito pouco amortecimento realmente temos que ir devagar. Um pouco de testes leva a

$$D_2(s) = 0,001(30s + 1), \quad (10.8)$$

para o qual o lugar das raízes está desenhado na Fig. 10.7 e o diagrama de Bode, na Fig. 10.8. O diagrama de Bode mostra que temos uma margem de fase de 50° , mas uma frequência de cruzamento de apenas $\omega_c = 0,04$ rad/s. Enquanto isso estiver muito baixo para atender à especificação de tempo de acomodação, uma baixa frequência de cruzamento é inevitável, se esperamos manter o ganho na frequência de ressonância abaixo da unidade para que o sistema seja estabilizado pelo ganho.

Uma abordagem alternativa para o problema é alocar zeros próximo aos polos levemente amortecidos e usá-los para manter esses polos de volta do SPD. Essa compensação tem uma resposta em frequência com um ganho muito baixo, próximo à frequência dos polos ofensivos, e

**Figura 10.6** Diagrama de Bode de $KD_1(s)G(s)$.

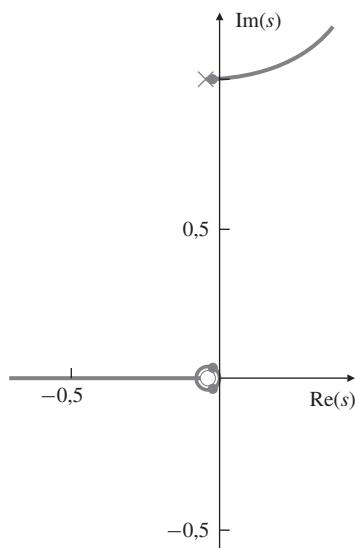


Figura 10.7 Lugar das raízes de $KD_2(s)G(s)$.

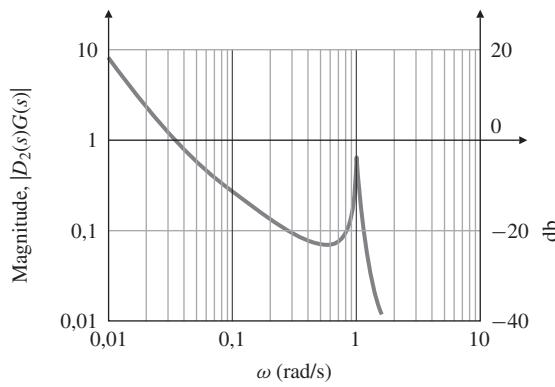
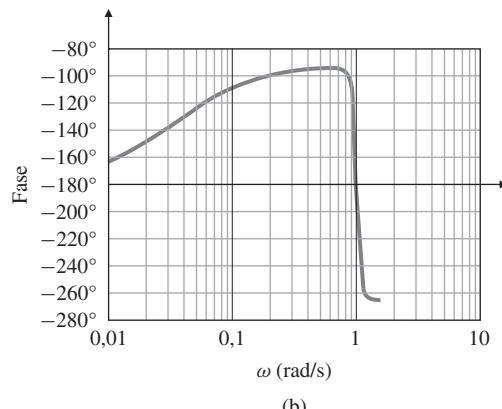


Figura 10.8 Diagrama de Bode de $D_2(s)G(s)$.

(a)



(b)

um ganho razoável em outros lugares. Devido ao fato de a resposta em frequência parecer ter um dente ou entalhe, o dispositivo é chamado de **filtro rejeita faixa**. (É também chamado de **filtro rejeita-banda** na teoria de rede elétrica.) Um circuito RC com uma característica rejeita faixa é mostrado na Fig. 10.9, o seu padrão de polo-zero está na Fig. 10.10 e sua resposta em frequência, na Fig. 10.11. O avanço de fase de $+180^\circ$ do filtro rejeita faixa pode ser usado para corrigir o atraso de fase de 180° da ressonância; se a frequência do filtro rejeita faixa é menor do que a frequência de ressonância da planta, a fase do sistema é mantida acima de 180° perto da ressonância.

Filtro rejeita faixa

Figura 10.9 Realização de um filtro rejeita faixa.

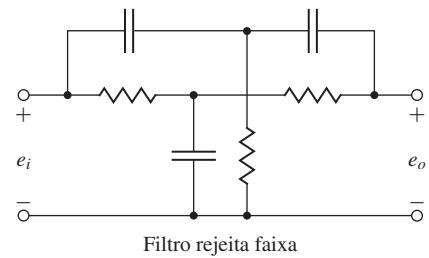


Figura 10.10 Padrão polo-zero do filtro rejeita faixa.

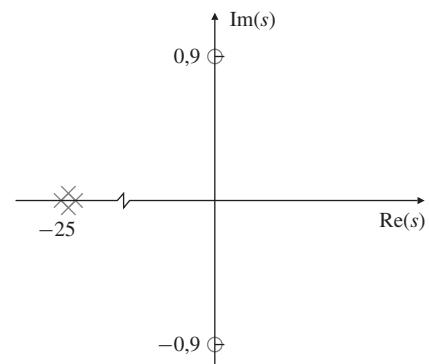
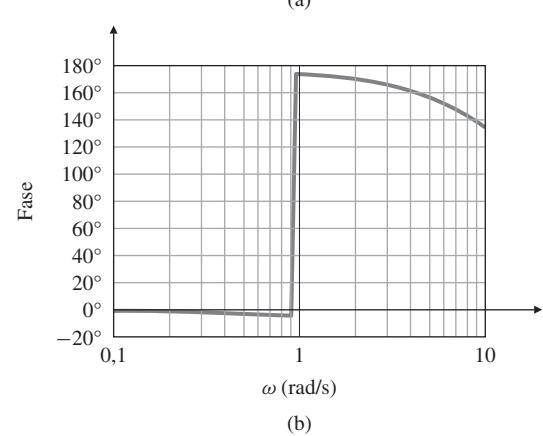
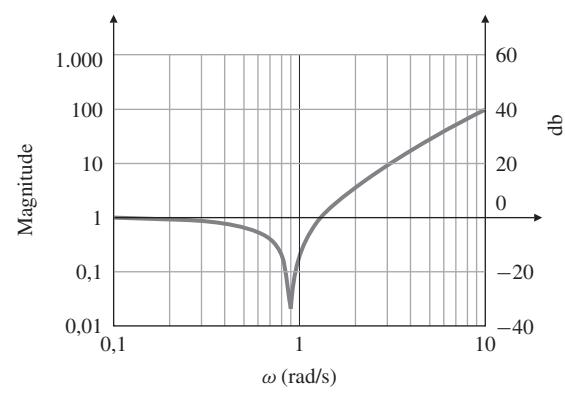


Figura 10.11 Diagrama de Bode do filtro rejeita faixa.



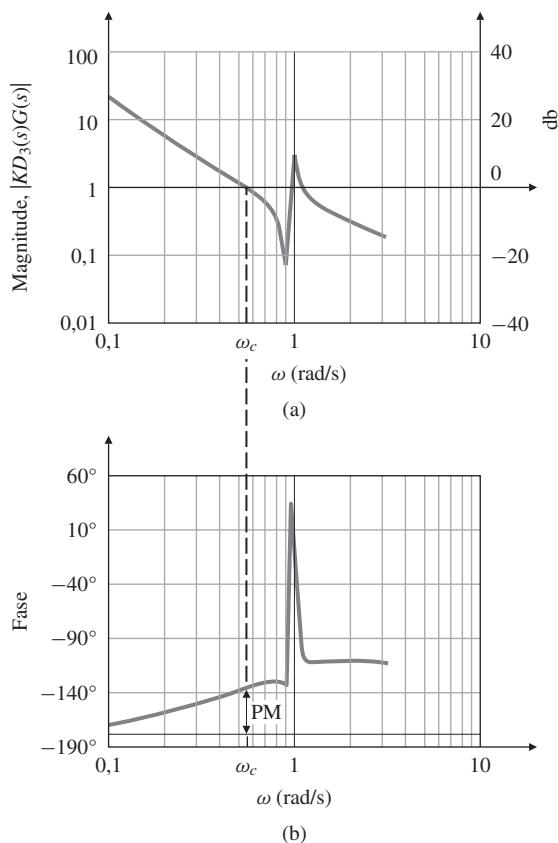


Figura 10.12 Diagrama de Bode de $KD_3(s)G(s)$.

Com essa ideia voltamos à compensação dada pela Eq. (10.7) e adicionamos um filtro rejeita faixa, produzindo a função de transferência do compensador revisado

$$D_3(s) = 0,25(2s + 1) \frac{(s/0,9)^2 + 1}{[(s/25) + 1]^2}. \quad (10.9)$$

O diagrama de Bode para este caso é mostrado na Fig. 10.12, o lugar das raízes está na Fig. 10.13 e a resposta ao degrau, na Fig. 10.14. O tempo de acomodação do projeto é muito longo para a especificação e o sobressinal é muito alto, mas esse projeto parece ser promissor; com algumas iterações, ele pode fornecer um compensador satisfatório.

Lembramos agora que se espera que o compensador forneça desempenho adequado quando os parâmetros variam ao longo de faixas dadas pela Eq. (10.3a). Um exame da robustez do

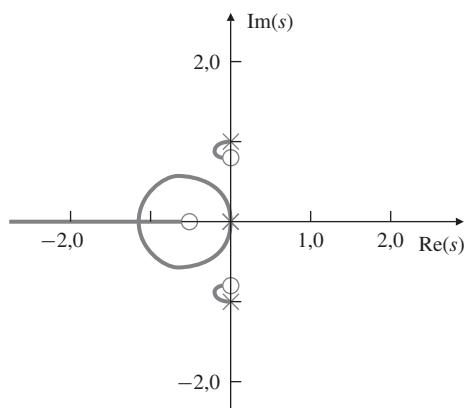
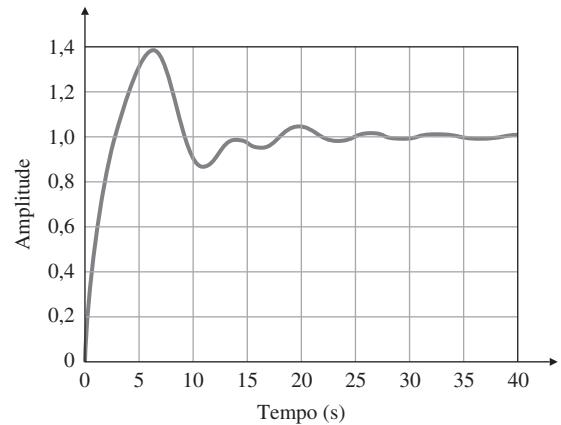


Figura 10.13 Lugar das raízes de $KD_3(s)G(s)$.

Figura 10.14 Resposta ao degrau em malha fechada de $D_3(s)G(s)$, sendo $\theta_2(0) = 0,2$ rad.



projeto pode ser feito olhando para o lugar das raízes mostrado na Fig. 10.15, que é desenhado usando o compensador da Eq. (10.9) e a planta com $\omega_n = 2$, em vez de 1, de forma que

$$\hat{G}(s) = \frac{(s/50 + 1)}{s^2(s^2/4 + 0,02s + 1)}. \quad (10.10)$$

Note, agora, que os polos de baixa frequência têm um coeficiente de amortecimento de apenas 0,02. Combinando os valores de vários parâmetros, obtemos a resposta em frequência e a resposta transitória mostradas nas Figs. 10.16 e 10.17. Poderíamos fazer um pouco mais de iterações com o filtro rejeita faixa e com a taxa de realimentação, mas o sistema é complexo o suficiente para que uma olhada no projeto em espaço de estados agora parece razoável. Vamos para o Passo 7.

PASSO 6. Avalie/modifique a planta. Refere-se à discussão de controle justaposto após o Passo 8.

PASSO 7. Teste um projeto ótimo usando alocação de polos. Usando a formulação de variáveis de estado das equações de movimento na Eq. (10.4a), projetamos um controlador que irá alocar os polos de malha fechada em locais arbitrários. Claro, usado sem pensar, o método de alocação de polos também pode resultar em um projeto que requer níveis razoáveis de esforço de controle ou que é muito sensível a mudanças na função de transferência da planta. Diretrizes para a alocação dos polos são dadas no Capítulo 7; uma abordagem geralmente bem-sucedida é determinar as localizações ideais dos polos utilizando o LRS. A Fig. 10.18 mostra o LRS para o problema em questão. Para obter uma largura de banda em torno de 0,5 rad/s,

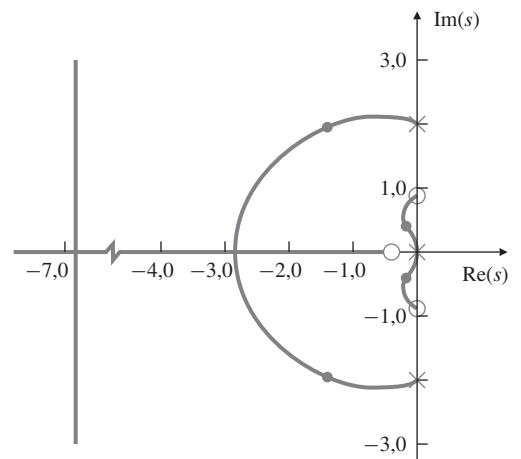


Figura 10.15 Lugar das raízes de $KD_3(s)\hat{G}(s)$.

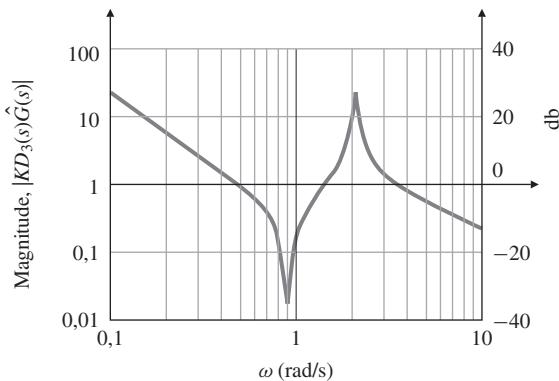
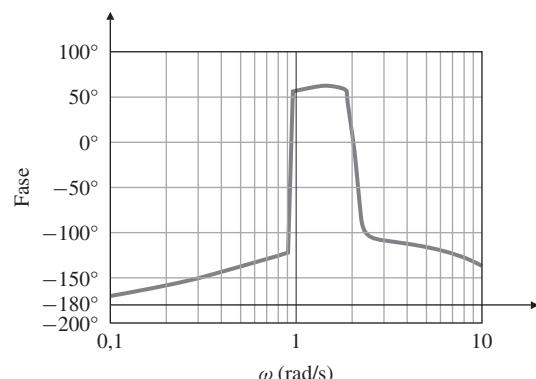


Figura 10.16 Diagrama de Bode de $KD_3(s)\hat{G}(s)$.

(a)



(b)

vamos selecionar os polos de controle em malha fechada a partir deste lugar em $-0,45 \pm 0,34j$ e $-0,15 \pm 1,05j$.

Se selecionarmos $\alpha_c(s)$, como discutido antes, a partir do LRS, o ganho de controle usando a função place no MATLAB é

$$\mathbf{K} = [-0.2788 \quad 0.0546 \quad 0.6814 \quad 1.1655]. \quad (10.11)$$

A Fig. 10.19 mostra as respostas ao degrau para os modelos da planta com parâmetros nominais e com mola rígida. O diagrama de Bode para o controlador projetado usando o LRS com os

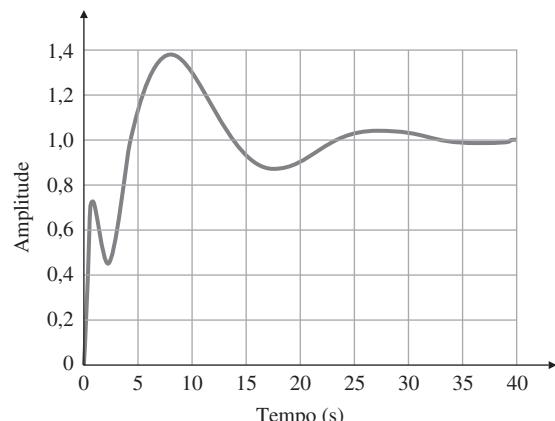
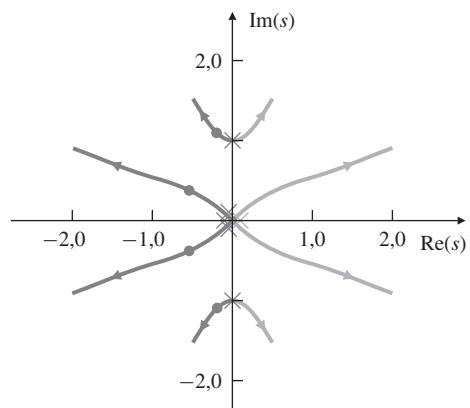


Figura 10.17 Resposta ao degrau em malha fechada de $D_3(s)\hat{G}(s)$.

Figura 10.18 Lugar das raízes simétrico para o satélite.



parâmetros da planta nominal pode ser calculado a partir da função de transferência de malha (quebrando a malha em u)

$$\frac{\mathbf{KX}(s)}{U(s)} = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}$$

resultando em uma margem de fase de cerca de 60° , como mostrado na Fig. 10.20. Enquanto a velocidade da resposta do projeto atende às especificações com a planta nominal, o tempo de acomodação quando a planta tem a mola rígida é um pouco maior do que as especificações. Podemos ser capazes de obter um melhor compromisso entre os casos de valor nominal e de mola rígida selecionando outro ponto no LRS; neste momento, não sabemos. O projetista tem que enfrentar alternativas como essas e escolher o melhor compromisso para o problema em questão.

O projeto da Fig. 10.19 é baseado na realimentação completa dos estados. Para completar o projeto ótimo, precisamos de um estimador. Selecione os polos do erro de estimação em malha fechada para ser cerca de oito vezes mais rápidos que os polos do controle. A razão para isso é evitar que os polos de erro reduzam a robustez do projeto; um estimador rápido quase não terá efeito na resposta. Escolhemos os polos de erro a partir do LRS em $-7,7 \pm 3,12j$ e $-3,32 \pm 7,85j$. A alocação de polos com esses valores resulta em um estimador (filtro) com ganho, usando a função place no MATLAB:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 22 \\ 242.3 \\ 1515.4 \\ 5503.9 \end{bmatrix}. \quad (10.12)$$

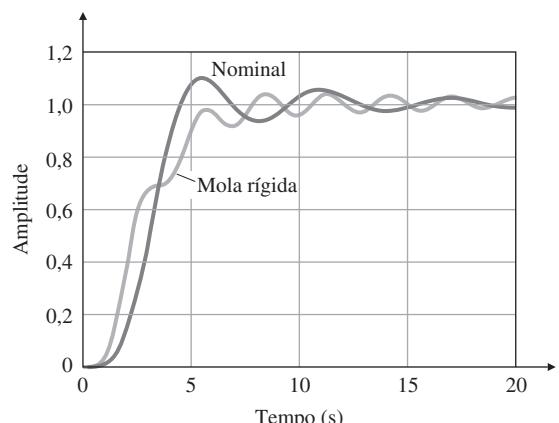


Figura 10.19 Resposta ao degrau em malha fechada para o projeto LRS.

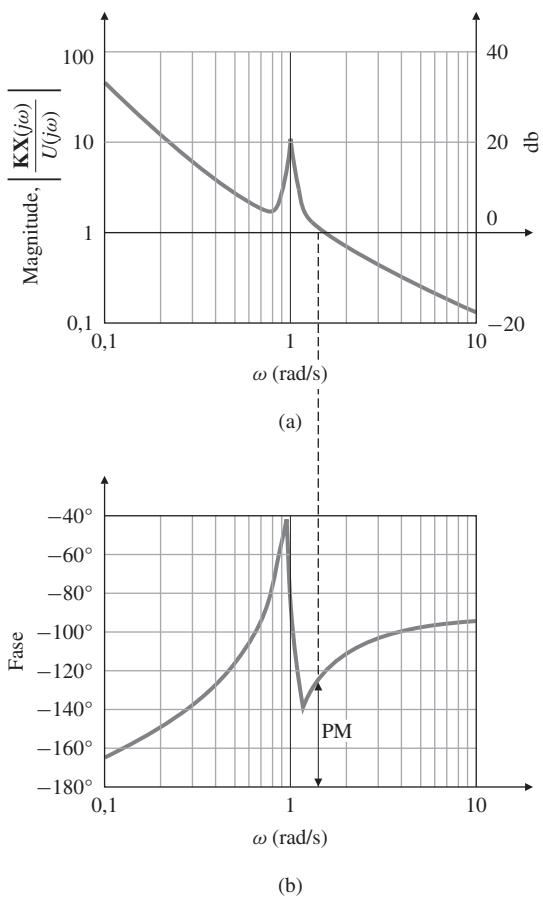


Figura 10.20 Resposta em frequência para o projeto LRS de u para K_x .

Depois de combinar os ganhos do controle e do estimador, conforme descrito na Seção 7.8, a função de transferência do compensador que resulta da Eq. (7.177) é

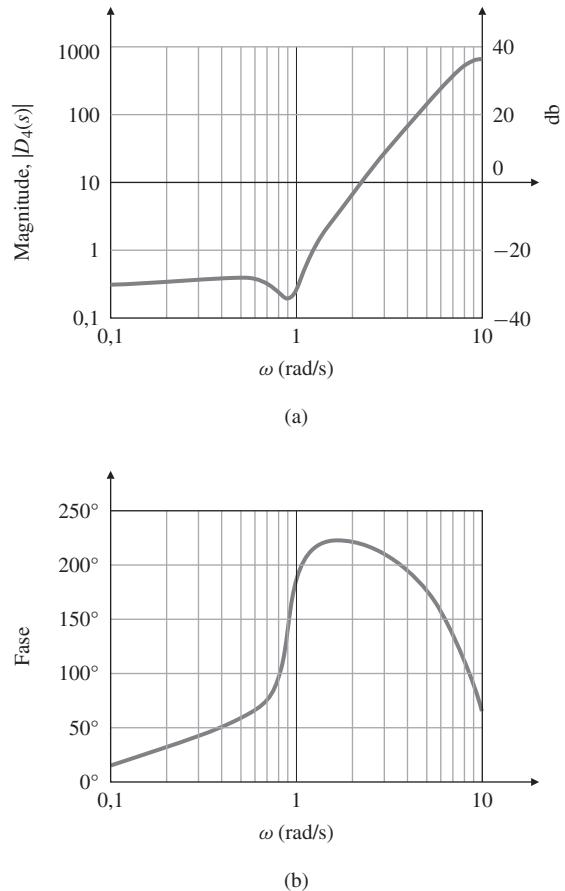
$$D_4(s) = \frac{-745(s + 0,3217)(s + 0,0996 \pm 0,9137j)}{(s + 3,1195 \pm 8,3438j)(s + 8,4905 \pm 3,6333j)}. \quad (10.13)$$

A resposta em frequência desse compensador (Fig. 10.21) mostra que a alocação de polos introduziu um entalhe diretamente. A resposta em frequência e o lugar das raízes do sistema combinado $D_4(s)G(s)$ são dados na Figs. 10.22 e 10.23, enquanto a Fig. 10.24 mostra a resposta ao degrau para a planta nominal e para a planta de mola rígida. Observe que o projeto quase atende às especificações.

PASSO 8. Simulação do projeto e comparação das alternativas. Neste momento, temos dois projetos, com diferentes complexidades e com diferentes propriedades de robustez. O projeto do filtro rejeita faixa pode ser melhorado com mais iterações ou começando com um caso nominal diferente. O projeto LRS atende às especificações para a planta nominal, mas é muito lento para o caso de mola rígida, apesar de seleções alternativas para as posições dos polos poderem levar a um projeto melhor. Em ambos os casos, estudos muito mais extensos são necessários para explorar a robustez e as propriedades da resposta ao ruído. Em vez de seguir qualquer um desses caminhos, consideramos alguns aspectos do sistema físico.

Ambos os projetos são fortemente influenciados pela presença do modo de ressonância levemente amortecido causado pelas massas acopladas. No entanto, a função de transferência deste sistema é fortemente dependente do fato de que o atuador está em um corpo e o sensor está em outro (isto é, não justapostos). Suponha que, no lugar de considerar apontar o rastreador de estrelas para a massa pequena, temos a missão de apontar para a massa principal, talvez na direção de uma estação terrestre para fins de comunicação. Para esse propósito, podemos co-

Figura 10.21 Diagrama de Bode para o compensador ótimo $D_4(s)$.



locar o sensor na *mesma* massa em que está o atuador – fornecendo o controle com o atuador e sensor justapostos. Devido à física da situação, agora temos, na função de transferência do sistema, zeros próximos aos modos flexíveis, e o controle pode ser obtido apenas por meio de um PD em realimentação, porque a planta já tem o efeito de um compensador rejeita faixa. Considere a função de transferência do satélite com o atuador e sensor justapostos (para medir θ_1) para a qual as matrizes de estado são

Atuador e sensor justapostos

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.91 & -0.036 & 0.91 & 0.036 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.091 & 0.0036 & -0.091 & -0.0036 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [0 \ 0 \ 1 \ 0].$$

A função de transferência do sistema usando a função `ss2tf` no MATLAB é

$$G_{\text{co}}(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} = \frac{(s + 0,018 \pm 0,954j)}{s^2(s + 0,02 \pm j)}. \quad (10.14)$$

Note a presença dos zeros próximos aos polos complexos conjugados. Se usarmos agora o mesmo PD como antes, ou seja,

$$D_5(s) = 0,25(2s + 1), \quad (10.15)$$

então, o sistema não será apenas estabilizado, mas também terá uma resposta satisfatória (se considerarmos θ_1 como a saída), porque os polos ressonantes tendem a serem cancelados pelos zeros conjugados.

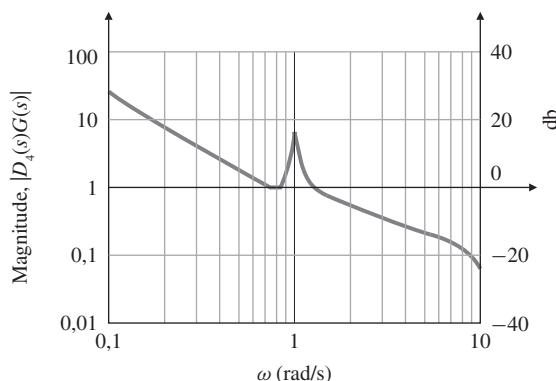
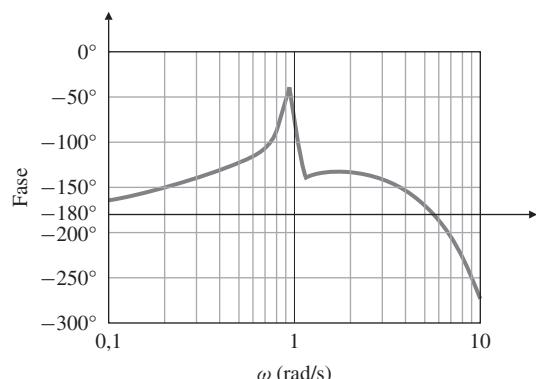


Figura 10.22 Diagrama de Bode do sistema compensado $D_4(s)G(s)$.

(a)



(b)

As Figs. 10.25-10.27 mostram a resposta em frequência, o lugar das raízes e a resposta ao degrau, respectivamente, para esse sistema. Note, a partir da Fig. 10.27, que a resposta do degrau tem excesso de sobressinal associado ao zero do compensador no caminho direto da função de transferência.

O resultado é um projeto robusto muito simples, alcançado pela movimentação do sensor de uma posição não justaposta com o atuador para uma posição justaposta com o atuador. O resultado mostra que, para conseguir um bom controle realimentado, é muito importante considerar a localização dos sensores e outras características do problema físico. No entanto, este último projeto de controle *não* serve para apontar o rastreador de estrelas. Isso é evidente a

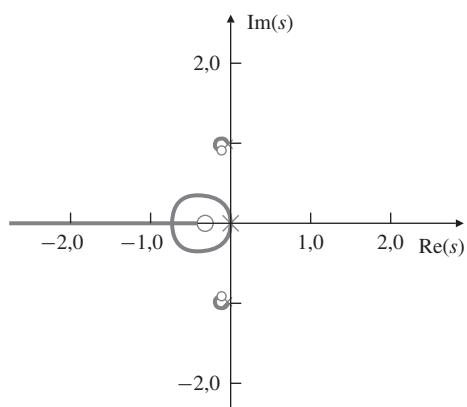
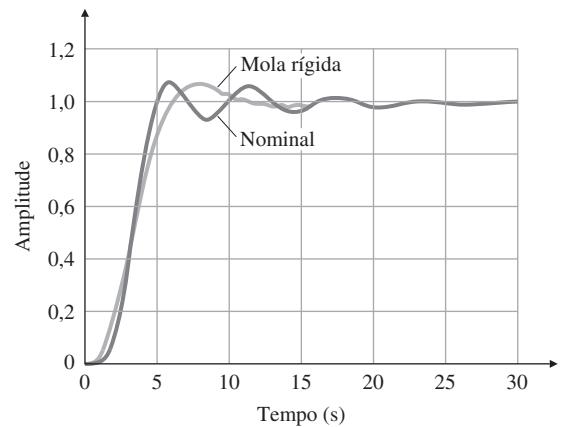


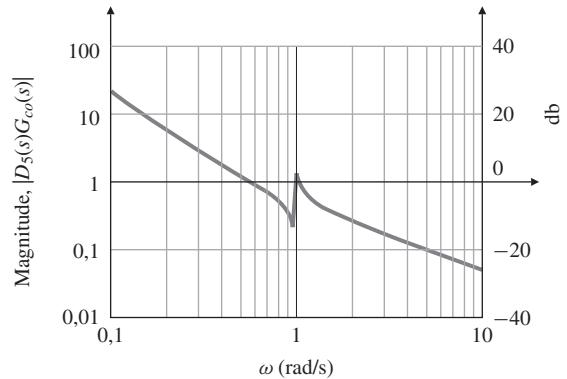
Figura 10.23 Lugar das raízes de $D_4(s)G(s)$.

Figura 10.24 Resposta ao degrau em malha fechada de $D_4(s)G(s)$.



partir do gráfico da saída θ_2 , correspondente à boa resposta ao degrau na Fig. 10.27. O resultado é mostrado na Fig. 10.28.

Uma arquitetura sugerida pelos resultados é colocar um rastreador de estrelas sobre o corpo do satélite para ser utilizado na pesquisa e para a acomodação inicial e, em seguida, usar um rastreador de estrelas sobre o pacote de instrumentos com maior tempo de acomodação para o controle fino.



(a)

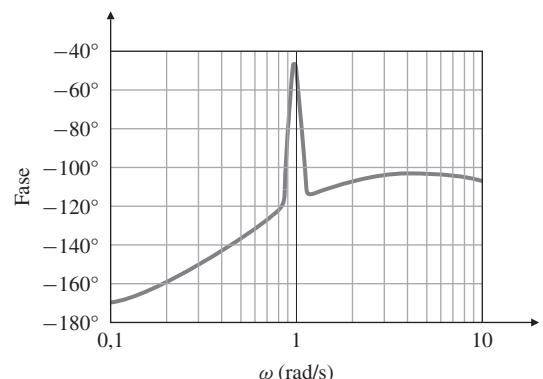
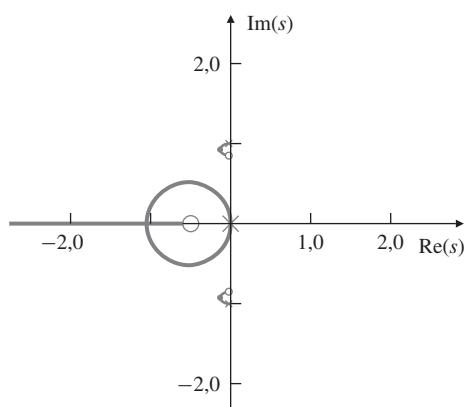
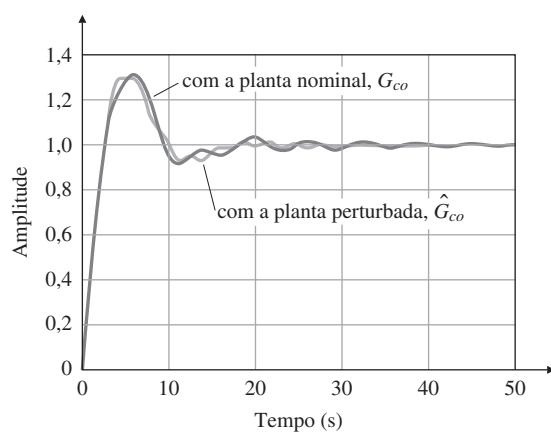
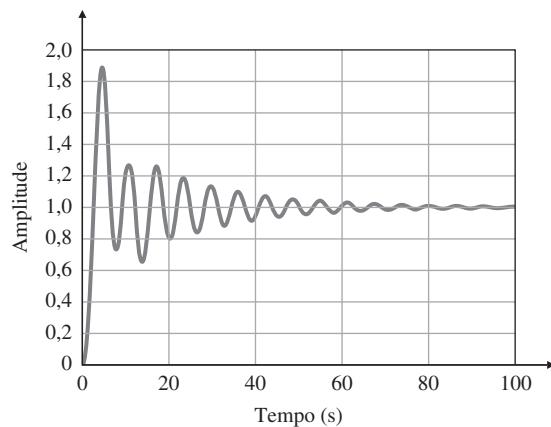


Figura 10.25 Diagrama de Bode de $D_5(s)G_{co}(s)$.

(b)

**Figura 10.26** Lugar das raízes de $D_5(s)G_{co}(s)$.**Figura 10.27** Resposta ao degrau em malha fechada com o controle justaposto, $D_5(s)G_{co}(s)$ e $D_5(s)\hat{G}_{co}(s)$.**Figura 10.28** Resposta de θ_2 no projeto justaposto.

10.3 Controle lateral e longitudinal de um Boeing 747

O Boeing 747 (Fig. 10.29) é um grande jato de transporte. Um esquema com as coordenadas relevantes que se movem com o avião é mostrado na Fig. 10.30. As equações linearizadas de movimento³ (corpo rígido) para o Boeing 747 são de oitava ordem, mas são separadas em dois

³ Para a derivação das equações de movimento de uma aeronave, é indicado ao leitor Bryson (1994), Etkin e Reid (1996) e McRuer *et al.* (1973).

Figura 10.29 Boeing 747

Fonte: cortesia de Boeing Commercial Airplane Co.



conjuntos de quarta ordem que representam as perturbações no movimento longitudinal (U , W , θ e q na Fig. 10.30) e lateral (ϕ , β , r e p). O movimento longitudinal consiste dos movimentos axial (X), vertical (Z) e arfagem (θ , q), enquanto o movimento lateral consiste dos movimentos de rolamento (ϕ , p) e guinada (r , β). O ângulo de derrapagem β é uma medida da direção da velocidade para a frente em relação à direção do nariz do avião. As superfícies de controle do profundo e a aceleração afetam o movimento longitudinal, enquanto que o aileron e o leme afetam principalmente o movimento lateral. Embora haja uma pequena quantidade de acoplamento do movimento lateral no movimento longitudinal, este é geralmente ignorado, por isso as equações de movimento são tratadas como dois conjuntos dissociados de quarta ordem para projetar o controle, ou **aumento da estabilidade**, para a aeronave.

As equações não lineares de movimento do corpo rígido no eixo de coordenadas, sob hipóteses adequadas,⁴ podem ser derivadas como (Bryson, 1994)

$$m(\dot{U} + qW - rV) = X - mg \sin \theta + \kappa T \cos \theta, \quad (10.16)$$

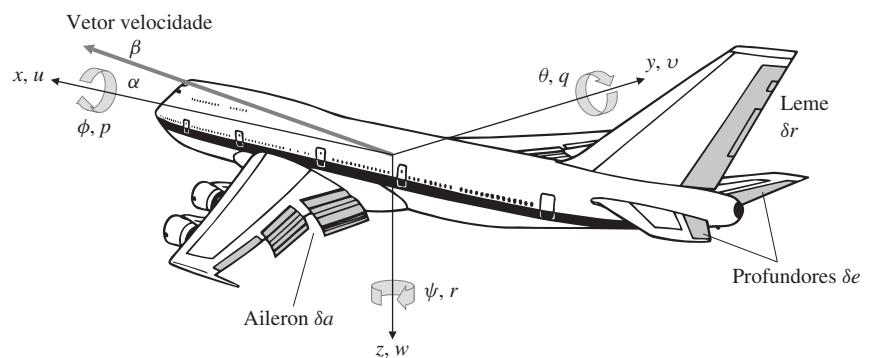
$$m(\dot{V} + rU - pW) = Y + mg \cos \theta \sin \phi,$$

$$m(\dot{W} + pV - qU) = Z + mg \cos \theta \cos \phi - \kappa T \sin \theta,$$

$$I_x \dot{p} + I_{xz} \dot{r} + (I_z - I_y) qr + I_{xz} qp = L, \quad (10.17)$$

$$I_y \dot{q} + (I_x - I_z) pr + I_{xz}(r^2 - p^2) = M,$$

$$I_z \dot{r} + I_{xz} \dot{p} + (I_y - I_x) qp - I_{xz} qr = N,$$



x, y, z = coordenadas de posição	ϕ = ângulo de rolagem
u, v, w = coordenadas de velocidade	θ = ângulo de arfagem
p = taxa de rolagem	ψ = ângulo de guinada
q = taxa de arfagem	β = ângulo de derrapagem
r = taxa de guinada	α = ângulo de ataque

Figura 10.30 Definição das coordenadas da aeronave.

⁴ x–z são os eixos do plano do corpo de massa simétrica.

sendo

m = massa do aeronave,

$[U, V, W]$ = eixos de coordenadas da velocidade do centro de massa (c.m.) do corpo,

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right)$$

$[U_o, V_o, W_o]$ = velocidades de referência

$[p, q, r]$ = eixos de coordenadas da velocidade angular da aeronave (rolamento, arfagem e guinada, respectivamente)

$[X, Y, Z]$ = forças aerodinâmicas nos eixos do corpo sobre o c.m.,

$[L, M, N]$ = torques aerodinâmicos nos eixos do corpo sobre o c.m.,

g_o = força gravitacional por unidade de massa,

I_i = inércias nos eixos do corpo

(θ, ϕ) = ângulos de Euler de arfagem e rolamento nos eixos do corpo da aeronave em relação à horizontal,

V_{ref} = referência de velocidade de voo,

T = impulso resultante do propulsor, e

κ = ângulo entre impulso e o eixo x no corpo.

A linearização destas equações pode ser feita da seguinte forma: em estado estacionário, nível e condição de velocidade de voo constantes, $\dot{U} = \dot{V} = \dot{W} = \dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$. Além disso, não há desvio em qualquer eixo, tal que $p_o = q_o = r_o = 0$, e as asas estão em nível de modo que $\phi = 0$. No entanto, haverá um ângulo de ataque, a fim de fornecer alguma sustentação das asas para neutralizar o peso da aeronave, assim $\theta_o \neq 0$, com

$$U = U_o + u, \quad (10.18)$$

$$V = V_o + v,$$

$$W = W_o + w.$$

A velocidade em estado estacionário das componentes axiais do corpo será

$$U_o = V_{ref} \cos(\theta_o), \quad (10.19)$$

$$V_o = 0 (\beta_o = 0),$$

$$W_o = V_{ref} \sin(\theta_o),$$

como representado na Fig. 10.31. Com estas condições, as *equações de equilíbrio* (ver Capítulo 9) são

$$0 = X_0 - mg_o \sin \theta_0 + \kappa T \cos \theta_0, \quad (10.20)$$

$$0 = Y_0,$$

$$0 = Z_0 + mg_o \cos \theta_0 - \kappa T \sin \theta_0,$$

$$0 = L_0,$$

$$0 = M_0,$$

$$0 = N_0.$$

Com as suposições (Bryson, 1994)

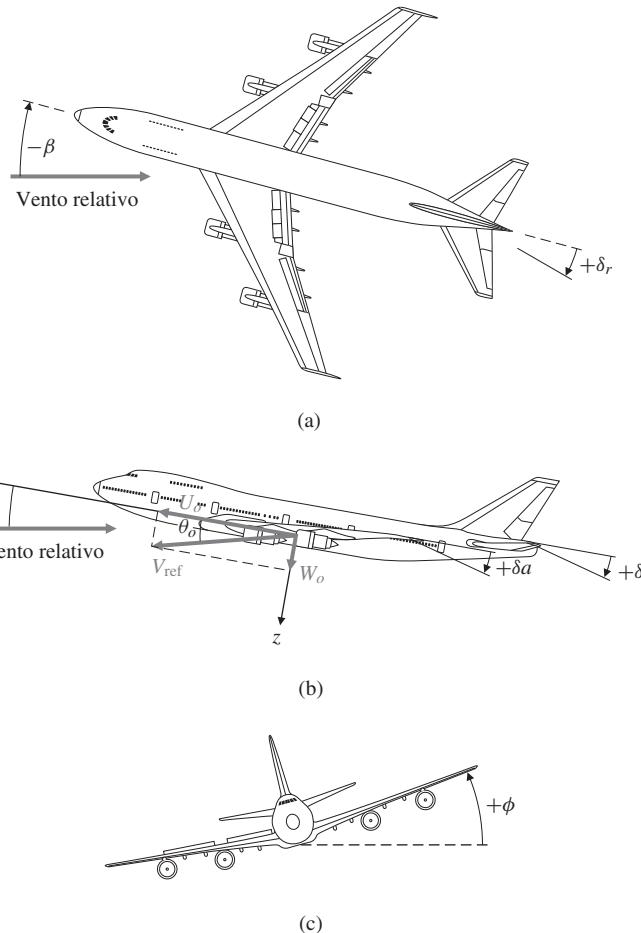
$$(v^2, w^2) \ll u^2, \quad (10.21)$$

$$(\phi^2, \theta^2) \ll 1,$$

$$(p^2, q^2, r^2) \ll \frac{u^2}{b^2},$$

onde b denota a envergadura da asa, muitos dos termos não lineares nas Eqs. (10.16) e (10.17) pode ser negligenciados. A substituição da Eq. (10.20) nas equações não lineares de movimento

Figura 10.31 Voo em condição de estado estacionário.



leva a um conjunto de equações lineares de perturbação que descrevem pequenos desvios no voo de velocidade constante, contínuo e nivelado. As equações de movimento, então, dividem-se em dois conjuntos de equações desacopladas de movimento *longitudinal* e *lateral*.

Para o movimento longitudinal linearizado, os resultados são

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & -W_o & -g_o \cos \theta_o \\ Z_u & Z_w & U_o & -g_o \sin \theta_o \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta e} \\ Z_{\delta e} \\ M_{\delta e} \\ 0 \end{bmatrix} \delta e, \quad (10.22)$$

com

u = perturbação de velocidade para frente da aeronave na direção x (Fig. 10.30),

w = perturbação de velocidade na direção z (também proporcional a perturbações no ângulo de ataque, $\alpha = \frac{w}{U_0}$),

q = taxa de velocidade angular para o lado positivo do eixo y , ou taxa de arfagem,

θ = perturbação do ângulo de arfagem a partir do valor de referência θ_o ,

$X_{u,w,\delta e}$ = derivada parcial da força aerodinâmica na direção x em relação às perturbações em u , w e δe ,⁵

$Z_{u,w,\delta e}$ = derivada parcial da força aerodinâmica na direção z em relação às perturbações em u , w e δe ,

⁵ X, Z, M são derivadas da estabilidade e são identificadas a partir do túnel de vento e de testes de voo.

$M_{u,w,q,\delta e}$ = derivada parcial do momento aerodinâmico (arfagem) em relação às perturbações em u , w , q e δe ,

δe = seções móveis na cauda do avião, ou “profundor”, ângulo para o controle de arfagem.

Os termos $W_o q$ e $U_o q$ nas equações se devem à velocidade angular do corpo fixo (rotativo) na estrutura de referência e surgem diretamente a partir do lado esquerdo da Eq. (10.16).

Para determinar mudanças de altitude, é preciso adicionar a seguinte equação nas equações de movimento longitudinal:

$$\dot{h} = V_{ref} \sin \theta - w \cos \theta. \quad (10.23)$$

Esta equação irá resultar na equação de altitude linearizada

$$\dot{h} = V_{ref} \theta - w, \quad (10.24)$$

que é aumentada com a Eq. (10.22).

Para o movimento lateral, os resultados são

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & -U_o & V_o & g_o \cos \theta_o \\ N_v & N_r & N_p & 0 \\ L_v & L_r & L_p & 0 \\ 0 & \tan \theta_o & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta r} & Y_{\delta a} \\ N_{\delta r} & N_{\delta a} \\ L_{\delta r} & L_{\delta a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta a \end{bmatrix}, \quad (10.25)$$

com

β = ângulo de derrapagem, definido como $\frac{v}{U_o}$,

r = taxa de guinada,

p = taxa de rolagem,

ϕ = ângulo de rolagem,

$Y_{v,\delta r,\delta a}$ = derivada parcial da força aerodinâmica na direção y em relação às perturbações em β , δr e δa ,

$N_{v,r,p,\delta r,\delta a}$ = derivada da estabilidade do momento aerodinâmico (guinada),

$L_{v,r,p,\delta r,\delta a}$ = derivada da estabilidade do momento aerodinâmico (rolagem),

δr = deflexão do leme,

δa = deflexão do aileron.

Em seguida, vamos discutir o projeto de um sistema aumentado para as dinâmicas laterais, chamado de **amortecedor de guinada**, e a influência do piloto automático no comportamento longitudinal.

10.3.1 Amortecedor de guinada

PASSO 1. *Compreenda o processo e suas especificações de desempenho.* A asa em flecha do avião têm uma tendência natural de ser levemente amortecida nos modos de movimento lateral. Em um avião comercial com velocidade e altitude de cruzeiro típicas, este modo dinâmico é tão difícil de controlar que praticamente todos os aviões com asa em flecha tem um sistema de re-alimentação para ajudar o piloto. Portanto, o objetivo de nosso sistema de controle é modificar as dinâmicas naturais de modo que o avião seja aceitável para o piloto voar.⁶ Estudos têm mostrado que os pilotos gostam de frequência natural $\omega_n \lesssim 0,5$ e coeficiente de amortecimento $\zeta \geq 0,5$. Aeronaves com dinâmica que violam essas diretrizes são geralmente consideradas fatigantes e altamente indesejadas. Assim, nossas especificações para o sistema são que a dinâmica lateral que atenda a essas restrições seja alcançada.

PASSO 2. *Selecione os sensores.* A medição mais fácil de movimento de aeronaves é a taxa angular. O ângulo de derrapagem lateral pode ser medido com um dispositivo de palheta, mas é ruidoso e pouco confiável para a estabilização. Duas taxas angulares – de rolamento e guinada – fazem parte do movimento lateral. O estudo do modo lateral levemente amortecido

⁶ O modo é tão difícil de controlar manualmente que, se o amortecedor de guinada falhar em cruzeiro, o piloto é instruído a descer e reduzir a velocidade até o ponto em que o modo é mais controlável.

indica que ele é principalmente um fenômeno guinada, assim a medição da taxa de guinada é um ponto de partida lógico para o projeto. Até o início dos anos 1980, a medição era feita com um **giroscópio** com um pequeno rotor de giro rápido que pode produzir uma saída elétrica proporcional à taxa de guinada angular da aeronave. Desde os 1980, sistemas de aeronaves mais novas têm contado com um dispositivo para a medição a laser (chamado de **anel giroscópio a laser**). Aqui, dois feixes de laser atravessam um caminho fechado (geralmente um triângulo) em sentidos opostos. À medida que o dispositivo triangular rotaciona, as frequências detectadas dos dois feixes parecem mudar, e este desvio de frequência é medido, produzindo uma medida da taxa de rotação. Estes dispositivos têm menos peças móveis e são mais confiáveis a um custo menor do que a variedade de giroscópios com rotores rápidos.

PASSO 3. Selecione os atuadores. Duas superfícies aerodinâmicas normalmente influenciam o movimento lateral da aeronave: o leme e os ailerons (veja a Fig. 10.30). O modo de guinada levemente amortecido que será estabilizado pelo amortecedor de guinada é o mais afetado pelo leme. Portanto, o uso dessa única entrada de controle é um ponto de partida lógico para o projeto. Assim, é melhor escolher o leme como nosso atuador. Dispositivos hidráulicos são universalmente empregados em aviões de grande porte para fornecer a força que movimenta as superfícies aerodinâmicas. Nenhum outro tipo de dispositivo foi desenvolvido para proporcionar a combinação de força elevada, velocidade alta e peso leve, desejáveis para o acionamento das superfícies aerodinâmicas de controle. Por outro lado, os flaps de baixa velocidade, que são estendidos lentamente antes da aterrissagem, são tipicamente acionados por um motor elétrico com uma engrenagem sem fim. Para pequenas aeronaves sem piloto automático, nenhum atuador é necessário; o manche do piloto está ligado diretamente às superfícies aerodinâmicas por meio de cabos, e toda a força necessária para mover as superfícies é fornecida pelo piloto.

PASSO 4. Faça um modelo linear. As equações de perturbação lateral de movimento para um Boeing 747 em voo horizontal a 40.000 pés em velocidade nominal para a frente $U_0 = 774$ pés/s (Mach 0,8) (Heffey e Jewell, 1972), com o leme escolhido como o actuador (Passo 3), são

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0558 & -0.9968 & 0.0802 & 0.0415 \\ 0.598 & -0.115 & -0.0318 & 0 \\ -3.05 & 0.388 & -0.4650 & 0 \\ 0 & 0.0805 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00729 \\ -0.475 \\ 0.153 \\ 0 \end{bmatrix} \delta r, \quad (10.25a)$$

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix},$$

sendo β e ϕ dados em radianos e r e p dados em radianos por segundo. A função de transferência, usando a função no MATLAB ss2tf,

$$G(s) = \frac{r(s)}{\delta r(s)} = \frac{-0,475(s + 0,498)(s + 0,012 \pm 0,488j)}{(s + 0,0073)(s + 0,563)(s + 0,033 \pm 0,947j)}, \quad (10.26)$$

de modo que o sistema tem dois polos reais estáveis e um par de polos complexos estáveis. Observe inicialmente que o ganho de baixa frequência é negativo, o que corresponde ao simples fato físico de que um movimento positivo ou no sentido horário no leme provoca uma taxa de guinada negativa ou anti-horária. Em outras palavras, virar o leme para a esquerda (sentido horário) faz com que a parte dianteira da aeronave rotacione para a esquerda (sentido anti-horário). O movimento natural correspondente aos polos complexos é chamado de **Dutch roll**; o nome vem dos movimentos de uma pessoa patinando nos canais congelados da Holanda. O

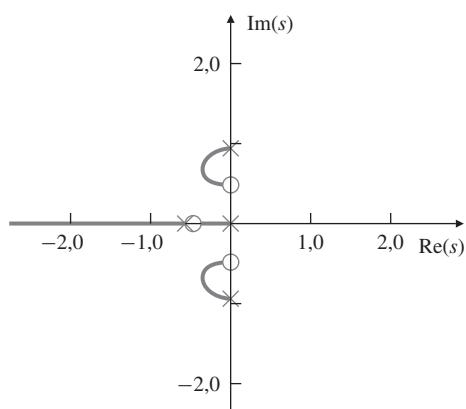
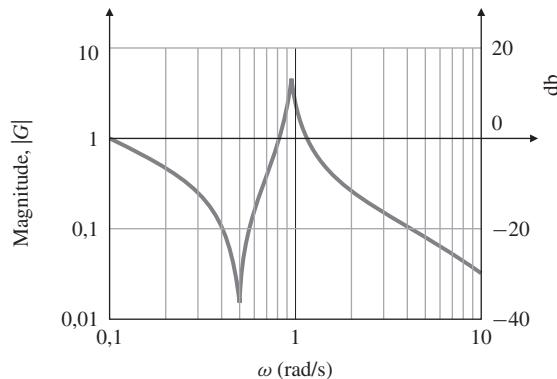


Figura 10.32 Lugar das raízes para o amortecedor de guinada com realimentação proporcional.

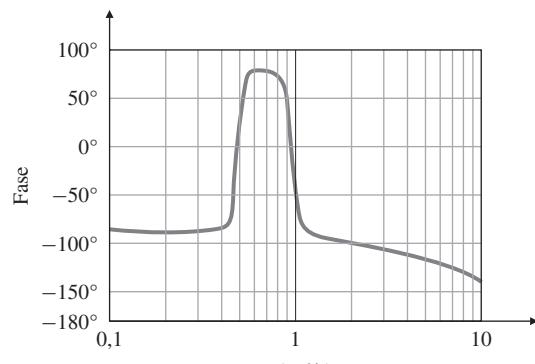
movimento correspondente para os polos reais estáveis é referido como **modo de espiral** ($s_1 = -0,0073$) e **modo de rolagem** ($s_2 = -0,563$). Olhando para os polos do sistema, vemos que o modo ofensor que precisa de reparos para o bom manuseio do piloto é o Dutch roll, com os polos em $s = -0,033 \pm 0,95j$. As raízes têm uma frequência aceitável, mas o coeficiente de amortecimento $\zeta \cong 0,03$ é muito menor que o valor desejado $\zeta \cong 0,5$.

Modo de espiral
Modo de rolagem

PASSO 5. Tente um simples projeto proporcional-integral-derivativo (PID) ou um projeto de atraso e avanço. Como uma primeira tentativa de projeto, vamos considerar a realimentação proporcional da taxa de guinada para o leme. O lugar das raízes em relação ao ganho dessa realimentação é mostrado na Fig. 10.32, e sua resposta em frequência é mostrada na Fig. 10.33. As figuras mostram que $\zeta \cong 0,45$ é alcançável e pode ser calculado para ocorrer em um ganho de



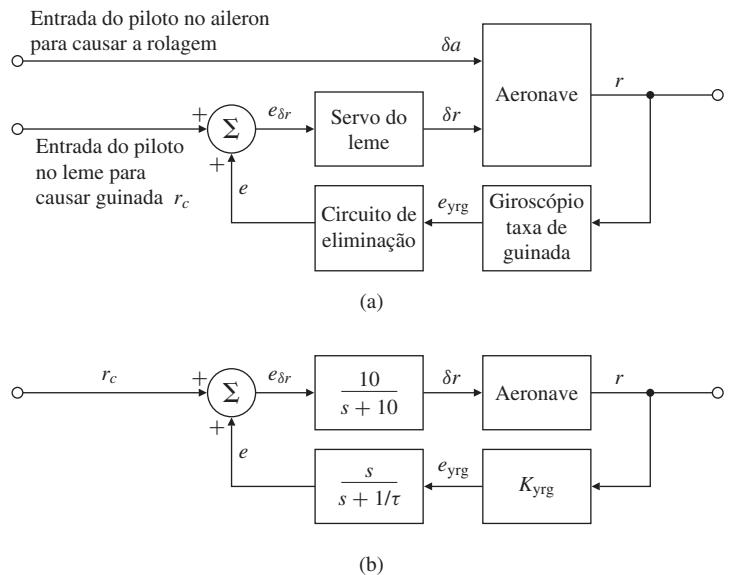
(a)



(b)

Figura 10.33 Diagrama de Bode do amortecedor de guinada com realimentação proporcional.

Figura 10.34 Amortecedor de guinada: (a) diagrama de blocos funcional; (b) diagrama de blocos para análise.



Eliminação

cerca de 3,0. Essa realimentação, no entanto, cria uma situação indesejável durante uma curva estacionária quando a taxa de guinada é constante: como a realimentação produz uma entrada estacionária no leme oposta à taxa de guinada, o piloto deverá introduzir um comando constante muito maior para a mesma taxa de guinada do que é necessário no caso de malha aberta. Esse dilema é resolvido atenuando a realimentação no DC (i.e., “eliminando” a realimentação). Isso é conseguido por meio da inserção de

$$H(s) = \frac{s}{s + 1/\tau}$$

Eliminação

na realimentação, que passa a taxa de guinada realimentada em frequências acima de $1/\tau$ e não fornece nenhuma realimentação no DC. Portanto, numa curva estacionária, o amortecedor não irá fornecer qualquer correção. A Fig. 10.34 mostra um diagrama de blocos do amortecedor de guinada com o termo de eliminação.

Para um modelo mais completo, incluímos o servo do leme, que representa a dinâmica do atuador e tem a função de transferência

$$A(s) = \frac{\delta r(s)}{e_{\delta r}(s)} = \frac{10}{s + 10},$$

que é rápida em comparação com a dinâmica do resto do sistema e não deve alterar muito a resposta. O lugar das raízes, incluindo a dinâmica do atuador e um circuito de eliminação com

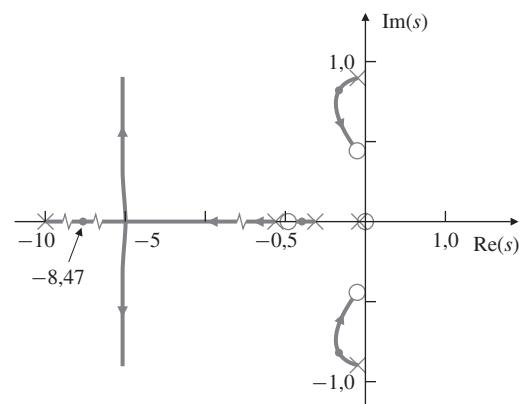


Figura 10.35 Lugar das raízes com o circuito de eliminação, $\tau = 3$.

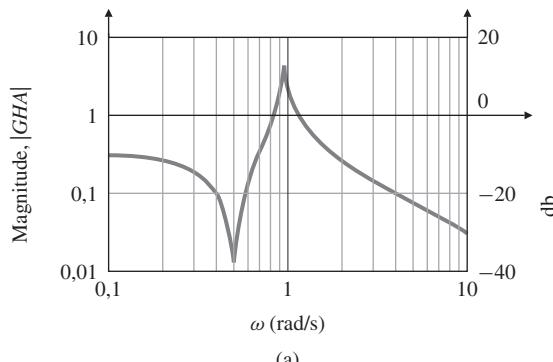
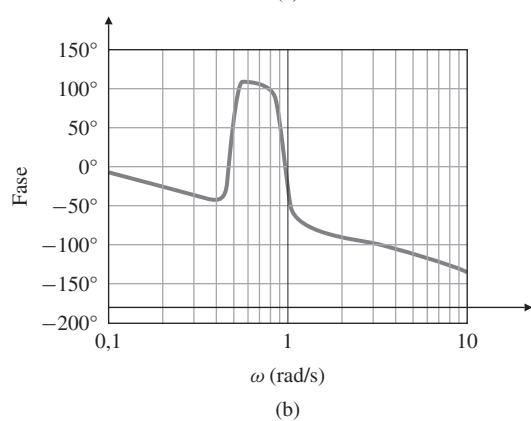


Figura 10.36 Diagrama de Bode do amortecedor de guinada, incluindo o circuito de eliminação e o atuador.



$\tau = 3$, é mostrado na Fig. 10.35. Como foi visto a partir do lugar das raízes, a adição da realimentação da taxa de guinada, incluindo o termo de eliminação, permite que o coeficiente de amortecimento seja aumentado de 0,03 para cerca de 0,35. A resposta em frequência associada ao sistema é mostrada na Fig. 10.36. A resposta do sistema em malha fechada com condição inicial de $\beta_0 = 1^\circ$ é mostrada na Fig. 10.37 para um ganho no lugar das raízes de 2,6. Para referência, a resposta para a taxa de guinada sem realimentação também é dada. Embora a realimentação da taxa de guinada através do circuito de eliminação resulte em uma melhoria considerável no controle original da aeronave, a resposta não é tão boa quanto foi originalmente especificado. Iterações adicionais, não incluídas aqui, poderiam incluir outros valores de ganho ou compensações mais complexas.

PASSO 6. Avalie/modifique a planta. A solução seria não usar as asas em flecha, o que causaria uma grande penalidade de arrasto.

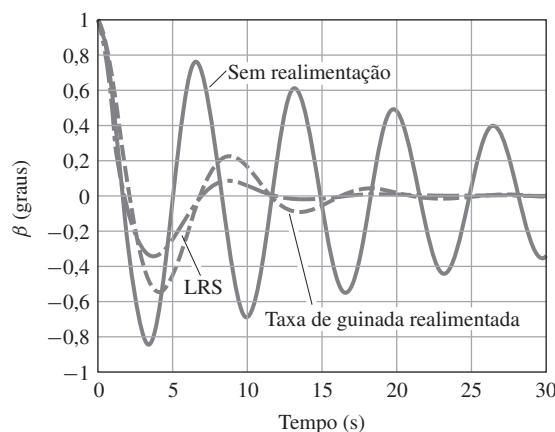


Figura 10.37 Resposta à condição inicial com o amortecedor de guinada, circuito de eliminação e projeto LRS, para $\beta_0 = 1^\circ$.

PASSO 7. Teste um projeto ótimo usando alocação de polos. Se aumentamos o modelo dinâmico do sistema, adicionando o atuador e o filtro de eliminação, obtemos o modelo de variáveis de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \\ \dot{x}_{wo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0729 & -0.0558 & -0.997 & 0.0802 & 0.0415 & 0 \\ -4.75 & 0.598 & -0.1150 & -0.0318 & 0 & 0 \\ 1.53 & -3.05 & 0.388 & -0.465 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0805 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.333 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_A \\ \beta \\ r \\ p \\ \phi \\ \dot{x}_{wo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_{\delta r},$$

$$e = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -0.333] \begin{bmatrix} x_A \\ \beta \\ r \\ p \\ \phi \\ x_{wo} \end{bmatrix},$$

sendo $e_{\delta r}$ a entrada do atuador e e a saída do circuito de eliminação. O LRS para o sistema aumentado é mostrado na Fig. 10.38. Se selecionarmos os polos de realimentação de estados a partir do LRS tal que as raízes complexas tenham máximo amortecimento ($\zeta = 0.4$), encontramos

$$pc = [-0.0051; -0.468; 0.279 + 0.628 * j; 0.279 - 0.628 * j; -1.106; -9.89]$$

Então, podemos calcular o ganho de realimentação de estados, usando a função de alocação de polos como

$$\mathbf{K} = [1.059 \ -0.191 \ -2.32 \ 0.0992 \ 0.0370 \ 0.486].$$

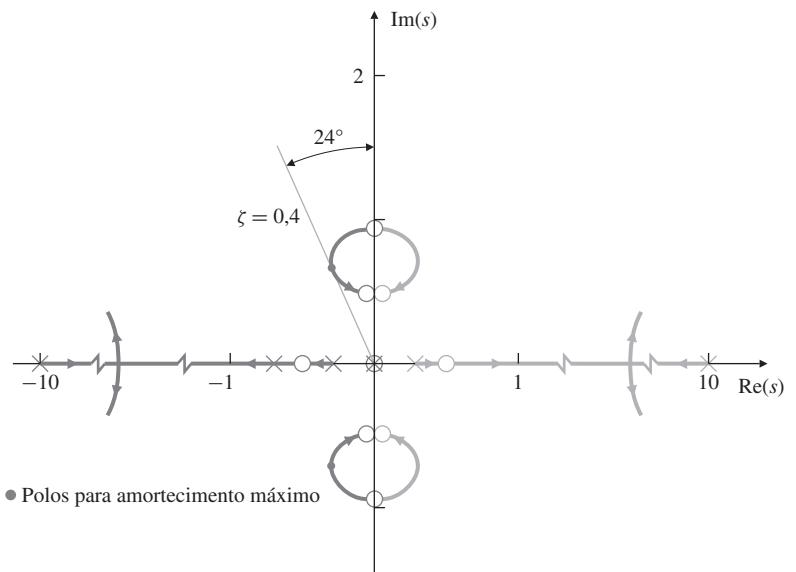


Figura 10.38 LRS das dinâmicas laterais, incluindo o filtro de eliminação e o atuador.

Note que a terceira entrada em \mathbf{K} é maior do que as outras, de modo que a realimentação de todas as seis variáveis de estado é essencialmente a mesma da realimentação proporcional de r . Isso também é evidente a partir da similaridade do lugar das raízes na Fig. 10.31 e do LRS da Fig. 10.38. Se selecionarmos os polos do estimador para serem cinco vezes mais rápidos do que os polos do controlador, então,

$$\mathbf{pe} = [-0.0253; -2.34; -1.39 + 3.14 * j; -1.39 - 3.14 * j; -5.53; -49.5]$$

e o ganho do estimador, novamente usando a função place do MATLAB, é

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 25.0 \\ -2.044 \\ -5.158 \\ -24.843 \\ -40.113 \\ -15.624 \end{bmatrix}. \quad (10.26f)$$

A função de transferência do compensador a partir da Eq. (7.177) é

$$D_c(s) = \frac{-844(s + 10,0)(s - 1,04)(s + 0,974 \pm 0,559j)(s + 0,0230)}{(s + 0,0272)(s + 0,837 \pm 0,671j)(s + 4,07 \pm 10,1j)(s + 51,3)}. \quad (10.27)$$

A Fig. 10.37 também mostra a resposta da taxa de guinada para uma condição inicial de $\beta_0 = 1^\circ$. É claro, a partir do lugar das raízes, que o amortecimento pode ser melhorado pela abordagem LRS, e isto é confirmado pela redução do comportamento oscilatório na resposta transitória do sistema. No entanto, esta melhoria tem um preço considerável. Note que a ordem do compensador aumentou de um, no projeto original (Fig. 10.33), para seis e o filtro de eliminação, no projeto obtido usando a abordagem controlador estimador LRS.

Os amortecedores de guinada de aeronaves em uso hoje geralmente empregam uma realimentação proporcional da taxa de guinada para leme por meio de um filtro de eliminação ou de pequenas modificações neste projeto. O melhor desempenho possível com uma abordagem de projeto ótimo utilizando realimentação completa de estados e estimação não vale a pena em razão do aumento da complexidade.

Talvez uma abordagem mais frutífera para melhorar o projeto fosse adicionar a superfície aileron como uma variável de controle junto ao leme.

PASSOS 8 e 9. Verifique o projeto. Modelos lineares do movimento da aeronave são razoavelmente precisos enquanto o movimento for suficientemente pequeno para que os atuadores e superfícies não saturem. Em razão de os atuadores serem dimensionados para a segurança, a fim de lidar com transientes de grande porte, tal saturação é muito rara. Portanto, o projeto baseado na análise linear é razoavelmente preciso, e não prosseguiremos com uma simulação não linear ou, ainda, uma verificação do projeto. No entanto, fabricantes de aeronaves realizam extensas simulações não lineares e testes de voo em todas as condições possíveis de voo antes de obter a certificação do órgão regulador da aviação civil nos Estados Unidos, a Federal Aviation Administration (FAA), da Aviação para transportar passageiros.

Compromisso de projeto: resposta do sistema VS. Complexidade do sistema

10.3.2 Piloto automático de manutenção de altitude

PASSO 1. Compreenda o processo e suas especificações de desempenho. Uma das muitas tarefas do piloto é manter uma altitude específica. Como um auxílio para evitar colisões entre aeronaves, as que estão num caminho rumo a leste são obrigadas a ficar em um múltiplo ímpar de 1.000 pés e as que estão a um caminho rumo o oeste, em um múltiplo par de 1.000 pés. Assim, o piloto precisa ser capaz de manter a altitude a menos de cem metros. Um piloto bem treinado e atento pode facilmente realizar essa tarefa manualmente a ± 50 pés, e os controladores de tráfego aéreo esperam que os pilotos mantenham este tipo de tolerância. No entanto, uma vez que esta tarefa exige que o piloto seja bastante diligente, aeronaves sofisticadas costumam ter um piloto automático de manutenção de altitude para diminuir o trabalho do piloto. Este sistema difere fundamentalmente do amortecedor de guinada, pois sua função é substituir o piloto

por certos períodos de tempo, enquanto a função do amortecedor de guinada é ajudar o piloto a voar. Especificações dinâmicas, portanto, não precisam exigir que os pilotos “sintam” a aeronave (como ela responde ao manuseio dos controles); em vez disso, o projeto deve fornecer o tipo de voo de que os pilotos e passageiros gostam. O coeficiente de amortecimento ainda deve ser aproximadamente $\zeta \approx 0,5$, mas para um voo suave, a frequência natural deve ser muito mais lenta que $\omega_n = 1$ rad/s.

PASSO 2. Seleção de sensores. Claramente, é necessário um dispositivo para medir a altitude, uma tarefa facilmente realizada por meio da medição da pressão atmosférica. Quase desde o primeiro voo dos irmãos Wright, essa ideia básica tem sido usada em um dispositivo chamado de **altímetro barométrico**. Antes dos pilotos automáticos, o dispositivo consistia de um fole, cuja extremidade livre era ligada a uma agulha que diretamente indicava a altitude em um mostrador. O mesmo conceito dos foles é utilizado atualmente para a exibição de altitude, mas a pressão é medida eletricamente para o piloto automático.

Devido ao fato de a função de transferência da entrada de controle do profundor para o controle de altitude consistir de cinco polos [veja a Eq. (10.30)], a estabilização do laço de realimentação não pode ser realizada pela simples realimentação proporcional. Consequentemente, a taxa de arfagem q também é utilizada como uma realimentação estabilizadora, que é medida por um giroscópio ou giroscópio de anel laser idêntico ao utilizado para medir a taxa de guinada. A estabilização usando a realimentação do ângulo de arfagem também é útil. Isso é obtido a partir de um sistema de referência inercial baseado em um giroscópio de anel laser ou a partir de um giroscópio de integração da taxa. Este último é um dispositivo semelhante ao giroscópio de taxa, mas estruturado de forma diferente a fim de que suas saídas sejam proporcionais aos ângulos de arfagem θ rolagem ϕ da aeronave.

PASSO 3. Seleção de atuadores. A única superfície aerodinâmica normalmente usada para o controle de arfagem na maioria das aeronaves é o profundor δe . Ele está localizado na cauda horizontal, bem posicionado a partir do centro de gravidade da aeronave, de modo que a sua força produza uma taxa de arfagem e , assim, um ângulo de arfagem. Em algumas aeronaves de alto desempenho, existem dispositivos de controle da arfagem direto na asa ou, talvez, pequenas superfícies chamadas canard, que são como pequenas asas que ficam na frente da asa principal e produzem forças verticais na aeronave que são muito mais rápidas que aquelas geradas pelos profundos na cauda. No entanto, para nosso fim de controle de altitude, vamos considerar apenas o caso típico de uma superfície de profundor na cauda.

Assim como para o leme, atuadores hidráulicos são os dispositivos preferidos para movimentar a superfície do profundor, principalmente devido à sua relação de força-peso favorável.

PASSO 4. Faça um modelo linear. As equações de perturbação longitudinal de movimento para o Boeing 747 em voo horizontal a uma velocidade nominal de $U_0 = 830$ pé/s a 20.000 pés (Mach 0,8) com um peso de 637.000 lb são

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\delta e, \\ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{h} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.00643 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0 \\ -0.0941 & -0.624 & 820 & 0 & 0 \\ -0.000222 & -0.00153 & -0.668 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -32.7 \\ -2.08 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta e, \end{aligned} \quad (10.28)$$

sendo a saída desejada para um piloto automático de altitude

$$h = \mathbf{H}\mathbf{x},$$

$$h = [\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}] \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix}, \quad (10.29)$$

e

$$\frac{h(s)}{\delta e(s)} = \frac{32,7(s + 0,0045)(s + 5,645)(s - 5,61)}{s(s + 0,003 \pm 0,0098j)(s + 0,6463 \pm 1,1211j)}. \quad (10.30)$$

O sistema tem dois pares de polos complexos estáveis e um polo em $s = 0$. O par complexo em $-0,003 \pm 0,0098j$ são referidos como o **modo de phugoid**,⁷ e os polos em $-0,6463 \pm 1,1211j$ são os **modos de curto período**, calculados usando o comando `eig` no MATLAB.

PASSO 5. Tente um projeto proporcional-integral-derivativo (PID) ou um projeto de atraso e avanço. Como um primeiro passo de projeto, é tipicamente útil usar uma malha de realimentação interna da taxa de arfagem q para δe , de modo a melhorar o amortecimento do modo de curto período da aeronave (veja a Fig. 10.39). A função de transferência de δe para q , usando a função `ss2tf` no MATLAB, é

$$\frac{q(s)}{\delta e(s)} = -\frac{2,08s(s + 0,0105)(s + 0,596)}{(s + 0,003 \pm 0,0098j)(s + 0,646 \pm 1,21j)}. \quad (10.31)$$

O lugar das raízes da malha interna para a realimentação de q usando a Eq. (10.31) é mostrado na Fig. 10.40. Em razão de k_q ser o parâmetro do lugar das raízes, a matriz do sistema [Eq. (10.28)] é modificada para

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{F} + k_q \mathbf{G} \mathbf{H}_q, \quad (10.32)$$

em que \mathbf{F} e \mathbf{G} são definidas na Eq. (10.28) e $\mathbf{H}_q = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$. O processo de escolha de um ganho k_q adequado é iterativo. O processo de seleção é o mesmo discutido no Capítulo 5. (Lembre-se do exemplo de realimentação com tacômetro na Seção 5.6.2.) Se escolhermos $k_q = 1$, então os polos de malha fechada serão localizados em $-0,0039 \pm 0,0067j$, $-1,683 \pm 0,277j$ sobre o lugar das raízes, e

$$\mathbf{F}_q = \begin{bmatrix} -0,00643 & 0,0263 & 0 & -32,2 & 0 \\ -0,0941 & -0,624 & 787,3 & 0 & 0 \\ -0,000222 & -0,00153 & -2,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.33)$$

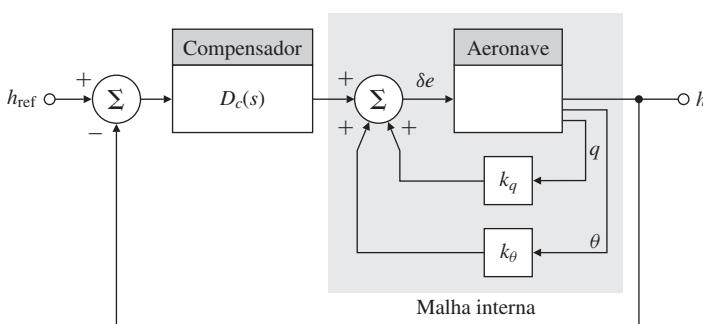
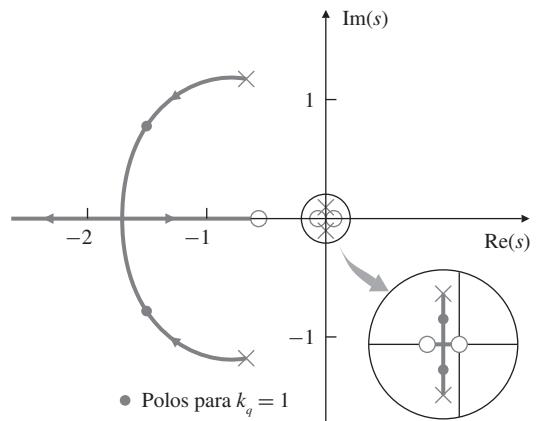


Figura 10.39 Sistema realimentado de manutenção de altitude.

Modo de phugoid
Modos de período curto
Projeto de malha interna

⁷ O nome foi adotado por F. W. Lanchester (1908), o primeiro a estudar a estabilidade dinâmica de aeronaves analiticamente. Aparentemente, é uma versão incorreta de uma palavra grega.

Figura 10.40 Lugar das raízes da malha interna para a dinâmica de manutenção de altitude com q realimentado.



Note que apenas a terceira coluna de \mathbf{F}_q é diferente de \mathbf{F} . Para melhorar ainda mais o amortecimento, é útil realimentar o ângulo de arfagem da aeronave. Por tentativa e erro, selecionamos

$$\mathbf{K}_{\theta q} = [\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -0,8 & -6 & 0 \end{array}]$$

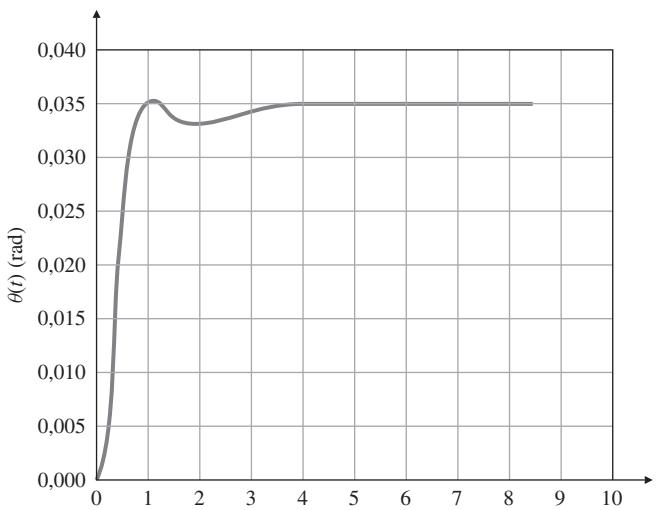
a fim de realimentar θ e q , a matriz do sistema torna-se

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\theta q} &= \mathbf{F}_q - \mathbf{G}\mathbf{K}_{\theta q}, \\ &= \begin{bmatrix} -0.0064 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0 \\ -0.0941 & -0.624 & 761 & -196.2 & 0 \\ -0.0002 & -0.0015 & -4.41 & -12.48 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com polos em $s = 0, -2,25 \pm 2,99j, -0,531, -0,0105$.

Até agora, a malha interna da aeronave foi estabilizada de forma significativa. A aeronave sem controle tem uma tendência natural de retornar ao equilíbrio em nível de voo, tal como evidenciado pelas raízes de malha fechada no SPE. A estabilização da malha interna é necessária para permitir que uma malha externa realimentada de h e \dot{h} seja bem-sucedida; além disso, a realimentação de θ e q pode ser usada por si só em um modo de manutenção de altitude do piloto automático, quando um piloto desejar controlar θ diretamente por meio do comando de entrada. A Fig. 10.41 mostra a resposta da malha interna para um comando em degrau de 2°

Figura 10.41 Resposta do piloto automático de manutenção de altitude para um comando em θ .



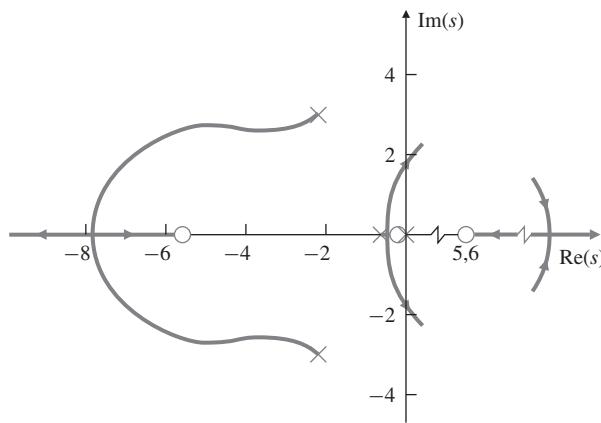


Figura 10.42 Lugar das raízes de 0° com realimentação apenas de h .

(0,035 rad) em θ . Com a malha interna no lugar, a função de transferência do sistema do ângulo do profundo para a altitude é

$$\frac{h(s)}{\delta e(s)} = \frac{32,7(s + 0,0045)(s + 5,645)(s - 5,61)}{s(s + 2,25 \pm 2,99j)(s + 0,0105)(s + 0,0531)}. \quad (10.34)$$

O lugar das raízes para este sistema, dado na Fig. 10.42, mostra que a realimentação proporcional de altitude, por si só, não produz um projeto aceitável. Para a estabilização, podemos também realimentar a taxa de alteração na altitude em um controlador PD. O lugar das raízes do sistema com realimentação em h e \dot{h} é mostrado na Fig. 10.43. Depois de algumas iterações, descobrimos que a melhor razão de \dot{h} para h é 10:1, isto é,

$$D_e(s) = K_h(s + 0,1).$$

O projeto final é o resultado de iterações entre os ganhos de realimentação de q , θ , \dot{h} e h , obviamente, um processo demorado. Embora este projeto experimental tenha sido bem-sucedido, a utilização da abordagem LRS promete agilizar o processo.

PASSO 6. *Avalie/modifique a planta.* Não aplicável aqui.

PASSO 7. *Faça um projeto ótimo.* O LRS do sistema é mostrado na Fig. 10.44. Se escolhermos os polos de malha fechada em

$$pc = [-0.0045; -0.145; -0.513; -2.25 - 2.98 * j; -2.25 + 2.98 * j]$$

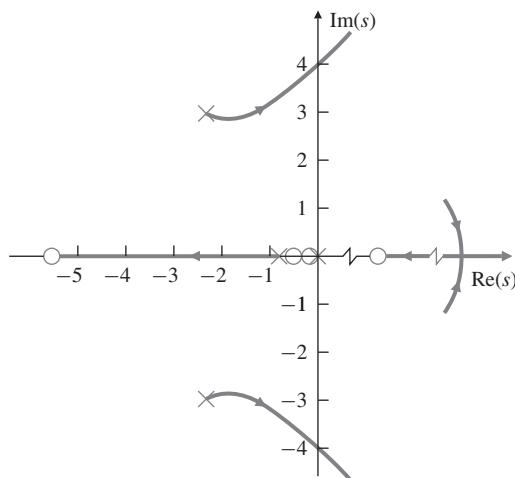
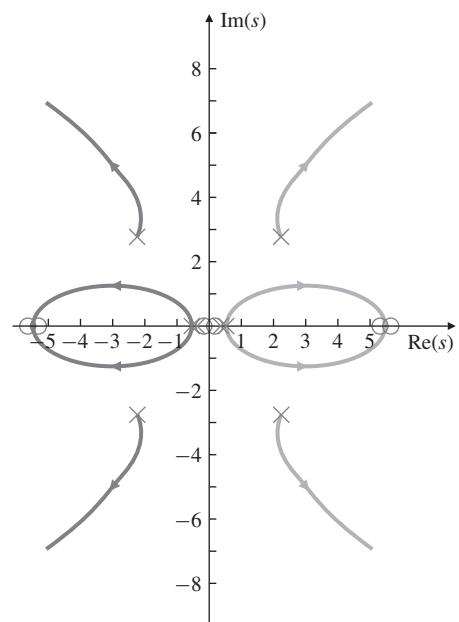


Figura 10.43 Lugar das raízes de 0° com realimentação de h e \dot{h} .

Figura 10.44 LRS para o projeto de manutenção de altitude.



então, o ganho de realimentação requerido, utilizando a função place do MATLAB, é

$$\mathbf{K} = [-0.0009 \quad 0.0016 \quad -1.883 \quad -7.603 \quad -0.001].$$

A resposta ao degrau do sistema a um comando em degrau de 100 pés em h é mostrada na Fig. 10.45, e o esforço de controle associado é mostrado na Fig. 10.46.

Esse projeto foi executado considerando que o modelo linear é válido para as mudanças de altitude consideradas.

Devemos fazer algumas simulações para confirmar isso ou para determinar o alcance da validade do modelo linear.

PASSOS 8 e 9. Verifique o projeto. Os comentários nos Passos 7 e 8 da Seção 10.3.1 também se aplicam a esse projeto. Para pilotos automáticos de aviões pequenos, agora em produção, como descrito no Capítulo 5, é interessante notar que, para a malha interna, alguns fabricantes utilizam apenas a realimentação de θ enquanto outros usam a realimentação de q . O uso de θ permite uma resposta mais rápida, mas o uso de q é menos dispendioso. Ambos, naturalmente, utilizam o altímetro para a realimentação de h .

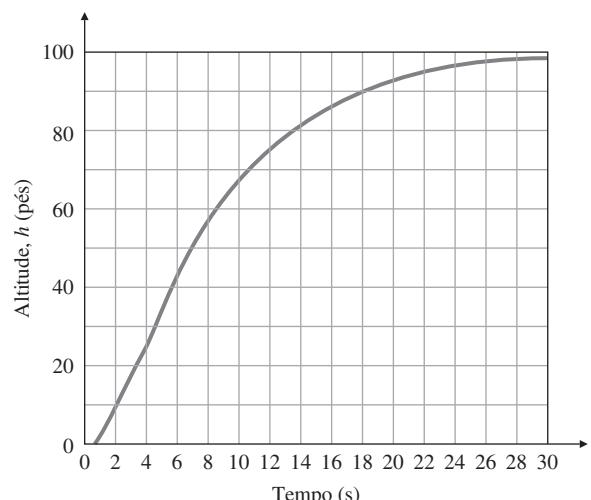


Figura 10.45 Resposta ao degrau do piloto automático de manutenção de altitude a um comando em degrau de 100 pés.

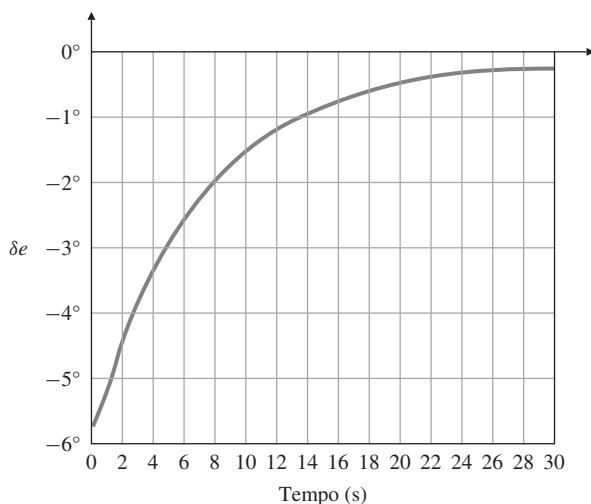


Figura 10.46 Esforço de controle para uma entrada em degrau de 100 pés no comando de altitude.

10.4 Controle da razão ar-combustível em um motor automotível

Até os anos 1980, a maioria dos motores de automóveis tinha um carburador para dosar o combustível, de modo que a razão entre o fluxo de gasolina para o fluxo ar, ou relação combustível-ar (C/A), mantinha-se na vizinhança de 1:15. Esse dispositivo dosa o combustível usando a queda de pressão produzida pelo ar que flui através de um tubo de Venturi. O dispositivo apresenta desempenho adequado em termos de manter o motor funcionando de modo satisfatório, mas historicamente permitiu excursões de até 20% na C/A. Após a implementação da regulamentação federal para a poluição emitida por escapamentos de veículos, este nível de imprecisão na C/A se tornou inaceitável, porque tanto o excesso de hidrocarbonetos (HC) quanto o excesso de oxigênio não podem ser aceitos. Durante a década de 1970, empresas automobilísticas melhoraram o processo de projeto e fabricação dos carburadores para que eles se tornassem mais precisos e fornecessem uma precisão C/A em torno de 3% a 5%.⁸ Por meio de uma combinação de fatores, essa melhoria de precisão na C/A ajudou a baixar os níveis de poluição emitidos pelo escapamento. No entanto, os carburadores ainda estavam em dispositivos de malha aberta, pois o sistema não mede a C/A da mistura que entra no motor para posterior realimentação no carburador. Durante os anos 1980, quase todos os fabricantes voltaram-se para os sistemas de controle realimentados para fornecer um nível muito melhor da precisão C/A, uma ação necessária para atender aos níveis decrescentes admissíveis de poluentes de escape.

Passamos agora para o projeto de um sistema realimentado típico para controle do motor, usando novamente o esquema de projeto passo a passo dado na Seção 10.1.

PASSO 1. Compreenda o processo e suas especificações de desempenho. O método escolhido para cumprir as normas de emissão de poluição tem sido a utilização de um conversor catalítico que oxida simultaneamente níveis excessivos de escape de monóxido de carbono (CO) e HC não queimado, além de reduzir os níveis de excesso de óxidos de nitrogênio (NO e NO₂, ou NO_x). Esse dispositivo é normalmente referido como um catalisador de três vias devido a seu efeito sobre todos os três poluentes. Este catalisador é ineficaz quando a C/A é muito diferente do nível estequiométrico de 1:14;7; portanto, um sistema de controle realimentado é necessário para manter a C/A dentro de $\pm 1\%$ do nível desejado. O sistema é ilustrado na Fig. 10.47.

Os fenômenos dinâmicos que afetam a relação entre a saída medida da C/A e os gases de escape e o comando de dosagem do combustível no coletor de admissão são (1) admissão da mistura de combustível e ar, (2) atrasos de ciclo devido aos cursos dos pistões no motor e (3) o

⁸ Uma revisão sobre controle de motor automotivo está em um livro de Alexander Stotsky, *Automotive Engine: Control Estimation, Statistical Detection*.

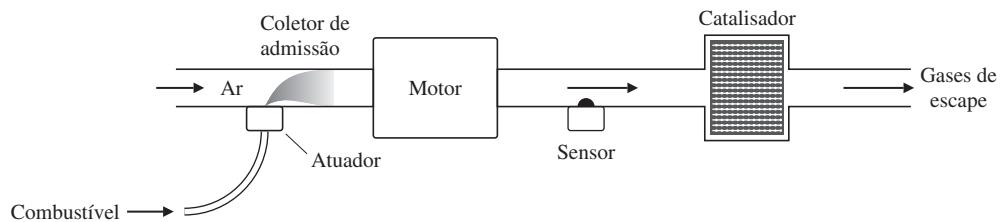


Figura 10.47 Sistema de controle realimentado C/A.

tempo necessário para os gases de escape viajarem do motor até o sensor. Todos esses efeitos são fortemente dependentes da velocidade e da carga do motor. Por exemplo, as velocidades típicas do motor variam de 600-6.000 rpm. O resultado dessas variações é que os atrasos de tempo no sistema que irão afetar o comportamento do sistema de controle realimentado também irão variar de pelo menos 10:1, dependendo da condição operacional. O sistema passa por transientes quanto o motorista exige mais ou menos potência por meio de mudanças no pedal do acelerador, com as mudanças que ocorrem durante frações de segundo. Idealmente, o sistema de controle realimentado deve ser capaz de lidar com esses transientes.

PASSO 2. Seleção de sensores. A descoberta e o desenvolvimento do sensor de gás de escape foi o passo tecnológico fundamental que tornou possível este conceito de redução de emissões de escape pelo controle realimentado. O elemento ativo no dispositivo, óxido de zircônio, é colocado no fluxo de escape, onde ele fornece uma tensão que é uma função monotônica do teor de oxigênio dos gases de escape. A C/A é unicamente relacionada com o nível de oxigênio. A tensão do sensor é altamente não linear em relação à C/A (Fig. 10.48); quase toda mudança na tensão ocorre precisamente no valor da C/A no qual o sistema realimentado deve operar para o desempenho eficaz do catalisador. Portanto, o ganho do sensor será muito elevado quando a C/A estiver no ponto desejado (1:14,7), mas irá cair consideravelmente para excursões de C/A longe de 1:14,7.

Embora outros sensores já estejam em desenvolvimento para possível uso no controle realimentado da C/A, nenhuma relação custo-benefício de outro sensor, até agora, tem demonstrado a capacidade de fornecer o desempenho adequado. Atualmente, todas as linhas de produção de automóveis utilizam sensores de óxido de zircônio em seus sistemas de controle realimentado.

PASSO 3. Seleção de atuadores. A dosagem do combustível pode ser realizada por um carburador ou por uma injeção de combustível. A implementação de um sistema realimentando C/A exige a capacidade de ajustar a medição do combustível eletricamente, porque o sensor utilizado fornece uma saída elétrica. Inicialmente, carburadores foram projetados para proporcionar esta capacidade, incluindo orifícios ajustáveis que modificavam o fluxo de combustível primário, em resposta ao sinal do erro elétrico. No entanto, os fabricantes atualmente realizam a dosagem utilizando a injeção de combustível. Sistemas de injeção de combustível são tipica-

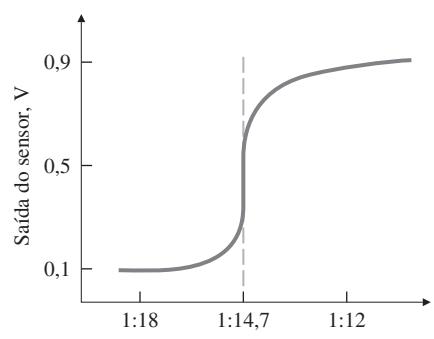


Figura 10.48 Saída do sensor de gás de escape.

mente de natureza elétrica, de modo que podem ser usados para realizar o ajuste de combustível para a realimentação da C/A simplesmente incluindo a capacidade de usar o sinal de realimentação a partir do sensor. Hoje, os injetores de combustível são colocados na entrada de cada cilindro (chamado de **injeção multi-ponto**); no passado, havia um grande injetor sobre todos os cilindros (chamado de **injeção de ponto único** ou **injeção no corpo do acelerador**). A injeção multi-ponto proporciona um desempenho melhorado porque o combustível é introduzido muito mais próximo do motor, com uma melhor distribuição para os cilindros. Estando mais próximos, eles reduzem os atrasos de tempo e, assim, fornecem melhor resposta do motor e permitem menor emissão de poluição.

PASSO 4. Faça um modelo linear. A não linearidade do sensor mostrada na Fig. 10.48 é grave o suficiente para que qualquer esforço do projeto baseado em um modelo linearizado seja usado com cautela. A Fig. 10.49 mostra um diagrama de blocos do sistema, no qual o sensor mostrado tem um ganho de K_s . As constantes de tempo τ_1 e τ_2 indicadas para a dinâmica de admissão no coletor representam, respectivamente, o fluxo rápido de combustível na forma de vapor ou de gotículas e fluxo lento de combustível na forma de uma película líquida nas paredes do coletor. O atraso de tempo é a soma (1) do tempo que os pistões levam para se moverem através dos quatro cursos do processo de admissão até o processo de escape e (2) do tempo necessário para o gás de escape viajar do motor para o sensor localizado aproximadamente a 1 pé de distância. Uma constante de tempo τ do sensor também é incluída no processo para calcular a mistura que ocorre no coletor de escape. Embora as constantes de tempo e o atraso de tempo se alterem consideravelmente, principalmente em função da carga e da velocidade do motor, iremos examinar o projeto em um ponto específico onde os valores são

$$\tau_1 = 0,02 \text{ s}, \quad T_d = 0,2 \text{ s},$$

$$\tau_2 = 1 \text{ s}, \quad \tau = 0,1 \text{ s}.$$

Em um motor real, os projetos seriam realizados para todas as cargas e velocidades.

PASSO 5. Tente um controlador de atraso e avanço ou um PID. Dadas as duras especificações de erro e as grandes variações no comando de combustível necessário u_f devido a variações nas condições de funcionamento do motor, um termo de controle integral é obrigatório. Com o controle integral, qualquer especificação de estado estacionário em u_f pode ser atendida quando o sinal de erro $e = 0$. A adição de um termo proporcional, embora muitas vezes não utilizado, permite um aumento (duplicação) da largura de banda sem degradar as características de estado estacionário. Neste exemplo, vamos usar uma lei de controle proporcional e integral (PI). A saída da lei de controle é uma tensão que impulsiona o injetor a fornecer um pulso de combus-

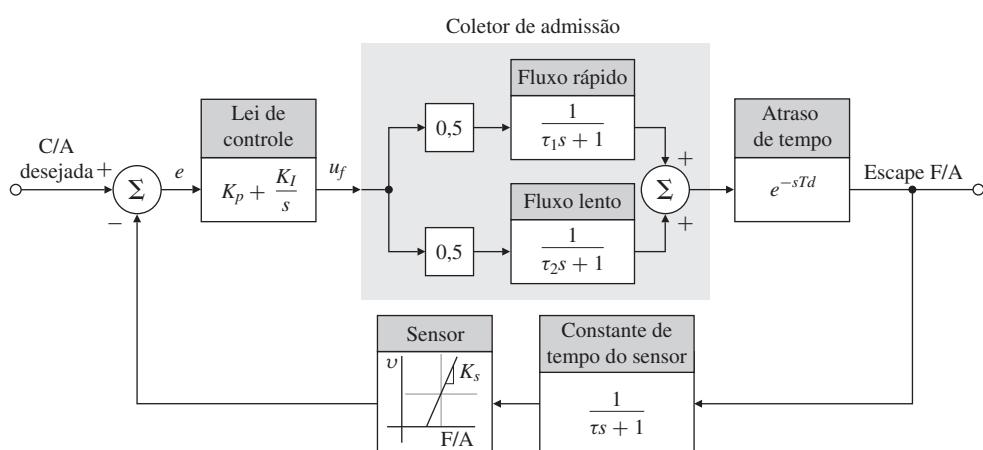


Figura 10.49 Diagrama de blocos para um sistema de controle da C/A.

tível cuja duração é proporcional à tensão. A função de transferência do controlador pode ser escrita como

$$D_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p}{s}(s + z), \quad (10.35)$$

sendo

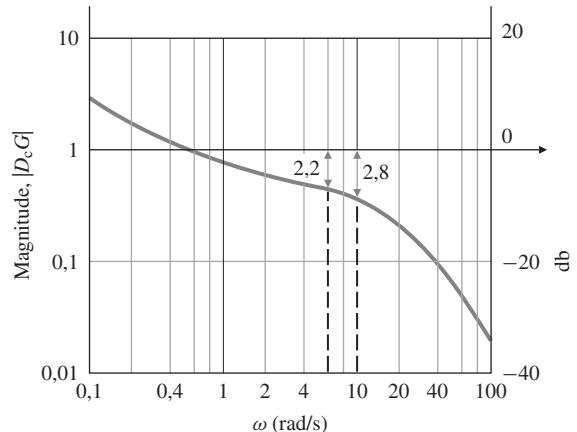
$$z = \frac{K_I}{K_p}$$

e z pode ser escolhido como desejado.

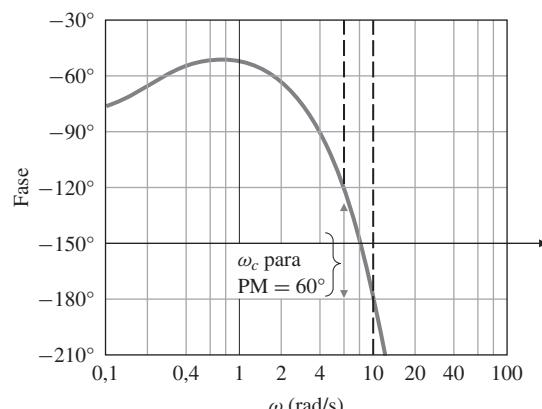
Primeiro, vamos supor que o sensor é linear e pode ser representado por um ganho K_s . Então, podemos escolher z para uma boa estabilidade e uma boa resposta do sistema. A Fig. 10.50 mostra a resposta em frequência do sistema para $K_s K_p = 1,0$ e $z = 0,3$, enquanto que a Fig. 10.51 mostra o lugar das raízes do sistema em relação a $K_s K_p$ com $z = 0,3$. Ambas as análises mostram que o sistema se torna instável para $K_s K_p \geq 2,8$. A Fig. 10.50 mostra que, para alcançar uma margem de fase de aproximadamente 60° , o ganho $K_s K_p$ deve ser $\sim 2,2$. A Fig. 10.50 também mostra que isto produz uma frequência de cruzamento de $6,0$ rad/s (~ 1 Hz). O lugar das raízes na Fig. 10.51 confirma que este projeto candidato vai conseguir amortecimento aceitável ($\zeta \approx 0,5$).

Embora esta análise linear mostre que uma estabilidade aceitável em uma razoável largura de banda (~ 1 Hz) pode ser conseguida com um controlador PI, um olhar para as características não lineares do sensor (Fig. 10.48) mostra que este desempenho pode não ser alcançável. Note que a inclinação da saída do sensor próxima ao ponto de ajuste desejado é extremamente elevada, produzindo assim, um valor muito elevado de K_s . Portanto, os valores mais baixos do ganho

Complicações e não linearidade



(a)



(b)

Figura 10.50 Diagrama de Bode de um controlador PI C/A.

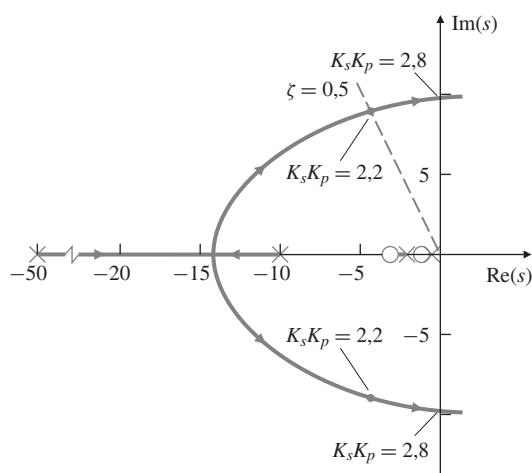


Figura 10.51 Lugar das raízes para um controlador PI C/A.

do controlador K_p precisam ser utilizados para manterem o valor global $K_s K_p$ de 2,2 quando o efeito de alto ganho do sensor é incluído. Por outro lado, um valor suficientemente baixo de K_p produz um sistema estável em C/A = 1: 14,7 (= 0,068) que irá produzir uma resposta muito lenta aos transientes do erro que se desviam muito do ponto de ajuste, porque o ganho efetivo do sensor será reduzido substancialmente. Por conseguinte, é necessário considerar a não linearidade do sensor, a fim de obter características satisfatórias da resposta do sistema exceto para perturbações em torno do ponto de ajuste. Uma primeira aproximação para o sensor é mostrada na Fig. 10.52. Devido ao fato de o ganho do sensor real no ponto de ajuste ainda ser bastante diferente da sua aproximação, esta aproximação irá fornecer conclusões erradas em relação à estabilidade em torno do ponto de ajuste; no entanto, será útil em uma simulação para determinar a resposta às condições iniciais.

PASSO 6. Avalie/modifique a planta. O sensor não linear é indesejável; no entanto, nenhum sensor linear adequado foi encontrado.

PASSO 7. Teste um controlador ótimo. A resposta deste sistema é dominada pela não linearidade do sensor, e qualquer ajuste fino do controlador precisa considerar essa característica. Além disso, as dinâmicas do sistema são relativamente simples, e é improvável que uma abordagem de projeto ótimo produza qualquer melhoria em relação ao controlador PI utilizado. Iremos, assim, omitir este passo.

PASSO 8. Simule o projeto com as não linearidades. A simulação não linear em malha fechada do sistema implementada no SIMULINK® é mostrada na Fig. 10.53. A função do MATLAB (fas) implementa a aproximação das características não lineares do sensor da Fig. 10.53,

```
function y = fas(u)
if u < 0.0606,
```

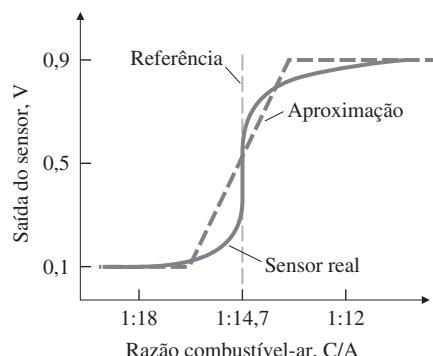


Figura 10.52 Aproximação do sensor.

```

y = 0.1;
elseif u < 0.0741,
    y = 0.1 + (u - 0.0606) * 20;
else y = 0.9;
end

```

A Fig. 10.54(a) é um gráfico do erro do sistema utilizando a aproximação do sensor na Fig. 10.52 e $K_p K_s = 2,0$. A resposta lenta aparenta ter 12,5 s antes do erro sair da saturação e tem uma constante de tempo de cerca de 5 s uma vez que a região linear é atingida. Estes sistemas em automóveis reais são operados com ganhos muito maiores. Para mostrar esses efeitos, uma simulação com $K_p K_s = 6,0$ é apresentada na Fig. 10.54(b, c). Neste ganho, o sistema linear é instável e os sinais crescem até cerca de 5 s. O crescimento para após 5 s, devido ao fato de que, quando a entrada da não linearidade do sensor se torna grande, o ganho efetivo do sensor diminui devido à saturação e, eventualmente, um ciclo de limite é atingido. A frequência deste ciclo limite corresponde ao ponto em que o lugar das raízes cruza o eixo imaginário e tem uma amplitude tal que o ganho total efetivo de $K_{pK_s,eq} = 2,8$. Conforme descrito na Seção 9.3, o ganho efetivo de uma saturação para entradas moderadamente grandes pode ser calculado e é dado pela função descriptiva como sendo aproximadamente $4N/\pi a$, sendo N o nível de saturação e a a amplitude do sinal de entrada. Aqui, $N = 0,4$, e se $K_p = 0,1$, então, $K_{s,eq} = 28$. Assim, podemos prever a amplitude do sinal de entrada de $a = 4(0,4)/28\pi = 0,018$. Este valor é aproximadamente verificado pelo gráfico da Fig. 10.54(c), a entrada da não linearidade neste caso. A frequência de oscilação também é cerca de 10,1 rad/s, como previsto pelo lugar das raízes na Fig. 10.51.

Simulação não linear no SIMULINK

Na implementação real de controladores com realimentação da C/A em motores de automóveis, a degradação do sensor ao longo de milhares de milhas de uso é a grande preocupação, porque o governo federal determina que os motores cumpram as normas de emissão de poluição para as primeiras 50.000 milhas. A fim de reduzir a sensibilidade do ponto de ajuste médio a alterações nas características de saída do sensor, os fabricantes geralmente modificam a estrutura discutida aqui. Uma abordagem é alimentar uma função relé [veja a Fig. 9.6(b)] com a saída do sensor, eliminando completamente qualquer dependência do ganho do sensor no ponto de ajuste. A frequência do ciclo de limite é, então, determinada unicamente pelas constantes do controlador e pelas características do motor. A precisão média em estado estacionário da C/A também é melhorada. As oscilações da C/A são aceitáveis porque não são perceptíveis pelos ocupantes do carro. Na verdade, as excursões C/A são benéficas para a operação do catalisador na redução dos poluentes.

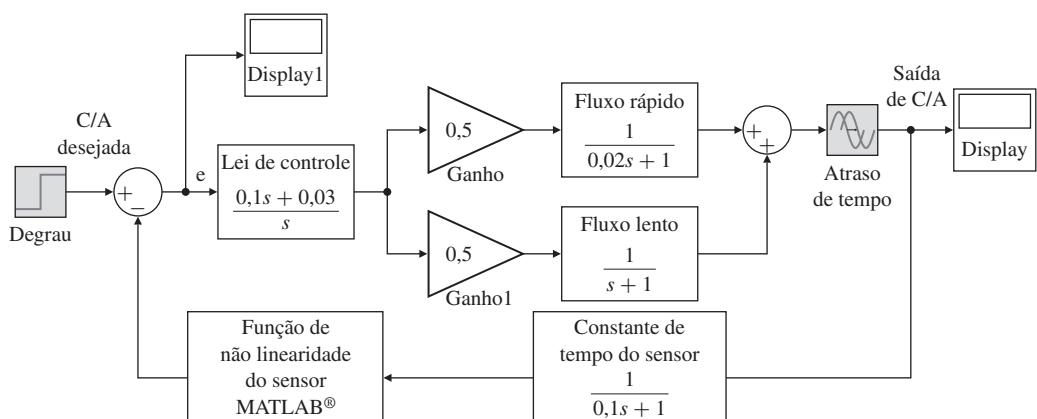


Figura 10.53 Simulação não linear em malha fechada implementada no SIMULINK®.

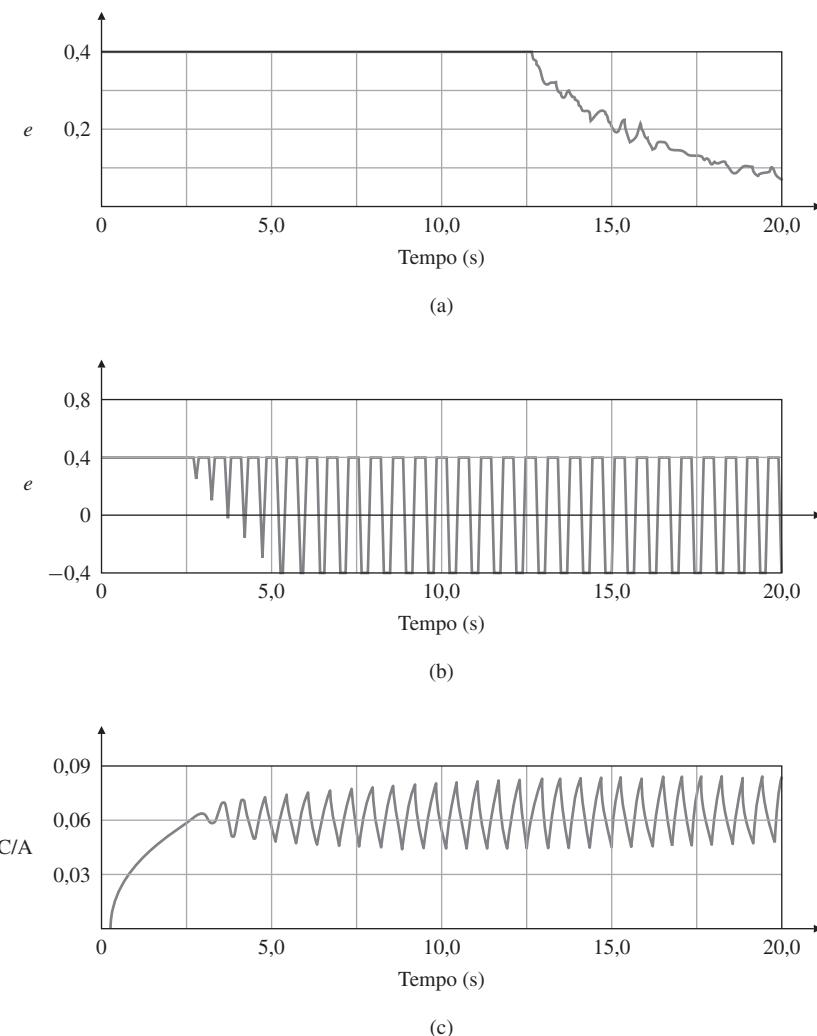


Figura 10.54 Resposta do sistema com a aproximação do sensor não linear.

10.5 Controle do cabeçote de leitura/escrita de um disco rígido

O primeiro dispositivo de armazenamento em massa com base na gravação de dados em discos rígidos foi introduzido pela IBM em 1956 com o modelo 350 RAMAC.⁹ Consistia de uma pilha de cinquenta discos de alumínio com diâmetros de 24 polegadas revestidos com um material magnético, e os dados eram registrados em pistas concêntricas de 100 bytes por polegada sendo 20 pistas por polegada. A velocidade de rotação dos discos era de 1.200 rpm. Havia um único cabeçote de leitura/escrita montada sobre um braço que pode ser movido verticalmente de disco a disco e horizontalmente no disco escolhido para alcançar uma pista de dados desejada. Os cabeçotes eram mantidos acima da superfície do disco por um rolamento de ar gerado por sopro de ar através de buracos no acessório de fixação dos cabeçotes. A montagem era mantida em um disco em particular por um retentor no mecanismo de elevação e mantida em uma trilha em particular por um retentor no braço. Todo mecanismo do cabeçote é implementado com um único motor elétrico. O sistema armazenava 5 MB de dados, e era preciso ter certeza de que o dispositivo final poderia passar por uma porta de 90 cm de largura. Os avanços técnicos neste domínio têm sido tais que, em 2000, a Seagate apresentou um disco rígido de memória magnética que consiste em três discos, cada um com 2,5 cm de diâmetro, girando a 15.000 rpm, projetado para ser incluído em um computador portátil. Esse dispositivo pode

⁹ Random Access Method of Accounting and Control.

armazenar 18.350 megabytes de dados. O mecanismo de leitura/escrita consiste em um único braço movendo um pente de cabeçotes, um por superfície, em um movimento rotacional para mover os cabeçotes de trilha para trilha. Os cabeçotes são montados em um cardan na extremidade do braço e voam acima das superfícies dos discos. Para seguir uma trilha, a montagem utiliza controle realimentado ativo usando amostras de dados de posições registradas entre os setores de dados do usuário em torno de cada trilha. Uma medida econômica do progresso neste campo é que, enquanto o custo do RAMAC era de cerca de US\$10.000 por megabyte, uma unidade moderna custa menos de 1 centavo de dólar por megabyte. Um breve resumo dessa história marcante, com muitas referências, é dado em Abramovitch e Franklin (2002), e uma tabela de alguns parâmetros de discos ao longo do tempo é apresentada na Tabela 10.1. Um grande número de pessoas de instituições industriais e acadêmicas têm contribuído com as muitas tecnologias envolvidas nos avanços dos dispositivos de disco rígido feitas ao longo dos últimos 50 anos, e uma destas tecnologias foi o controle realimentado. Uma foto de uma unidade de disco Seagate 1000-GB é mostrada na Fig. 10.55. Neste breve estudo de caso, vamos apontar uma série de questões que envolvem o controle, mas o exemplo de projeto vai se preocupar apenas com a questão de rastreamento da trilha. Vamos seguir o esquema apresentado na Seção 10.1 na apresentação do caso.

PASSO 1. Compreenda o processo. Uma vista expandida do problema do servo rastreamento de trilha é dada na Fig. 10.56. O mecanismo consiste de um motor voice-coil rotativo movendo uma montagem de um leve braço que suporta cardans deslizantes que incluem os cabeçotes de leitura magneto resistivas e as leves, finas películas indutivas, cabeçotes de escrita. Os cardans deslizam acima da superfície do disco em um rolamento de ar produzido pela rotação do disco. O amplificador de potência é normalmente ligado a um amplificador de corrente, de modo que o movimento básico pode ser modelado como uma inércia simples, descrita por

$$G_o(s) = \frac{A}{Js^2}, \quad (10.36)$$



Figura 10.55 Foto do disco rígido de 1000-GB

Fonte: cortesia Seagate Technology LLC.

TABELA 10.1 Parâmetros de discos ao longo do tempo

Nº.	Ano	Unidade	Capacidade	Tamanho (N/d)	tpi	bpi	rpm	Altura de voo	Tipo de cabeçote	tipo de sensor	tipo de atuador	tempo de busca	Comentário
1	1956	IBM RAMAC	5 MB	50/24"	20	100	1200	20μ	Rolamento de Ar	Retentor	motor CC		O primeiro disco rígido
2	1962	IBM 1301	28 MB	25/24"	50	520	1800	1,2μ	Cabeça voadora	Retentor	Piston Hidráulico	165 ms	
3	1971	IBM 3330	100 MB	11/14"	192	4040			Ferrite,	Superfície Dedicada	Voice coil voador linear	30 ms	O primeiro realimentado
4	1973	3340 Winchester	70 MB	4/14"	270	5600		0,5μ	Ferrite, flying	Superfície Dedicada	Voice coil linear		Baixa massa
5	1979	IBM 3370	571 MB	7/14"	635	12,134	2964	0,324μ	Película fina	Superfície Dedicada	Voice coil linear		
6	1979	IBM 3310	64.5 MB	6/8"	450	8530			Híbrido, servo-setor	Voice coil rotativo		27 MS	
7	1980	Seagate ST506	5 MB	4/5.25"	255	7690			Malha aberta	Motor de passo		170 MS	5.25" discos para PCs
8	1983	Maxtor XT1140	126 MB	8/5.25"					Servo setor	Voice coil rotativo			Motor do eixo centralizado
9	1991	IBM Corsair	1 GB	8/3.5"	2238	58,874			Cabeça MR	Servo setor	Voice coil rotativo		
10	1993	Seagate 12550	2.19 GB	10/3.5"			7200			Servo setor	Voice coil rotativo		
11	1997	IBM Travelstar	4 GB	3/2.5"	12,500	211,000			Servo setor	Voice coil rotativo			
12	2000	Seagate ST318451	18.3 GB	5/2.5"	21.5k	343k	15,000		Película fina/MRG	Servo setor	Voice coil rotativo	3.9(R) 4.5(W)	Primeiro 15.000 Unidade de disco RPM
13	2003	Seagate ST3300007	300 GB	4/3.3"	105k	658k	10,000		Película fina/MRG	Servo setor	Micro-atuador	4.9(R) 5.4(W)	Primeiros micro atuadores
14	2006	Seagate ST3300655	300 GB	4/2.75"	125k	890k	15,000		Película fina/MRG	Servo setor	Voice coil rotativo	3.5(R) 4.0(W)	Primeira unidade de gravação perpendicular
15	2007	Barracuda ES.2	1000 GB	4/3.75"	150k	1090k	7,200		Película fina/MRT	Servo setor	Voice coil rotativo	7.4(R) 8.5(W)	Primeira unidade SAS

MRG = Magnetoresistência gigante; MRT = Magnetoresistência por tunelamento.

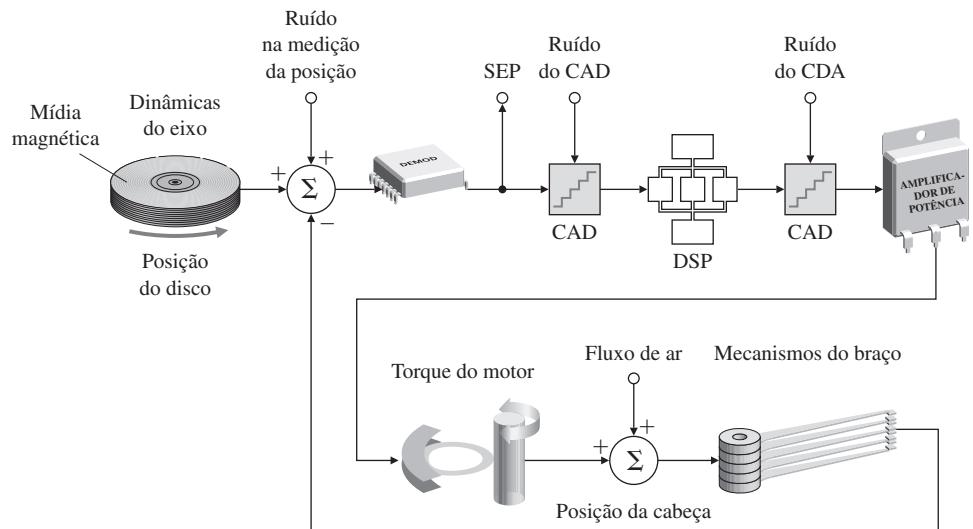


Figura 10.56 Vista generalizada do modelo de rastreamento de trilha.

sendo J a inércia total e A inclui tanto a constante de torque do motor quanto o ganho do amplificador. A estrutura é flexível, no entanto, o movimento detalhado é muito complexo, com muitos modos levemente amortecidos. Também é sujeito à turbulência do fluxo de ar e da vibração causada pelo movimento. Para fins de projeto de controle, um único modo de ressonância irá ser incluído de acordo com o modelo

$$G(s) = \frac{A}{Js^2} \frac{\left(2\zeta \frac{s}{\omega_1} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_1} + 2\zeta \frac{s}{\omega_1} + 1\right)}, \quad (10.37)$$

no qual a frequência de vibração, ω_1 , e o coeficiente de amortecimento, ζ , têm limites conhecidos.

O movimento de controle do mecanismo da cabeça é em dois modos: o movimento de busca para mover a cabeça de trilha para trilha e o movimento de rastreamento de trilha para manter as cabeças sobre o centro da trilha selecionada. No modo de busca, o critério é o tempo mínimo, e a teoria poderia se chamar de controle “liga-desliga” ou “bang-bang”.¹⁰ Para utilizar o mesmo controlador de muitas unidades, que diferem no máximo torque disponível e em outros parâmetros críticos, o método utilizado em unidades de disco é uma técnica de seguimento da curva na qual o conjunto é acelerado com torque total até que a velocidade atinja uma curva de reversão de torque com base na distância da trilha desejada e a desaceleração é feita sob controle realimentado para seguir esta curva, para alcançar a trilha desejada com velocidade nula. A curva se aproxima da curva de comutação de tempo mínimo ótimo com um torque descontado da medida em que o motor mais fraco tenha um torque reservo suficiente para seguir a curva. Quando a trilha selecionada é atingida, o controle transfere para o modo de rastreamento de trilha. Um esquema para evitar a comutação dos modos quando a trilha selecionada está próxima e para fazer com que o servo se move perfeitamente no modo de rastreamento de trilha tem sido chamado de sistema de tempo próximo do ótimo (STPO) (veja o Capítulo 9).¹¹

Como uma tecnologia bastante desenvolvida, muitas tendências influenciaram o problema de controle ao longo dos anos. Por exemplo, como mostrado pela tabela, os discos tornaram-se

¹⁰ Nome comum para o caso em que o controle é saturado com uma polaridade para metade do tempo e, então, é invertido para a metade restante.

¹¹ Workman (1987), Franklin, Powell e Workman (1998).

menores e, assim, mais rígidos e suaves. À medida que o mecanismo do braço se tornou menor, ele teve menos inércia de forma que, para movimentos muito pequenos, como na transferência de uma ou duas trilhas, o atrito é mais importante do que a inércia. Para unidades recentes, a largura de uma trilha é da ordem de 0,2 micron (μ), um valor comparável com as dimensões características de um circuito integrado moderno! Para se opor a esta tendência, existem pesquisas explorando maneiras de adicionar um segundo atuador, seja no braço ou no cardan, para realizar pequenos movimentos, como a ação do punho na extremidade de um braço robótico. Devido à dificuldade de controlar uma flexibilidade muito levemente amortecida, também é considerada a adição de um revestimento no braço para aumentar o amortecimento dos principais modos de vibração. Outras propostas incluem a adição de sensores no braço para permitir uma realimentação adicional ao controle da flexibilidade. Neste estudo de caso, vamos assumir um único atuador voice-coil e que a flexibilidade é descrita como na Eq. (10.37), sendo $\omega_1 \geq 2\pi \times 2,500$ e $\zeta \geq 0,05$. Como os detalhes da ressonância real não são bem conhecidos, a ressonância terá de ser estabilizada por ganho.

PASSO 2. Seleção de sensores. As primeiras unidades foram controladas em malha aberta com uma retenção mecânica para manter o mecanismo em um disco e outra retenção para manter as cabeças em uma trilha. O controle realimentado foi introduzido em 1971 usando informação registrada da posição em uma superfície especial do disco dedicada aos servomecanismos de dados. Todo o pente de cabeças foi posicionado pela informação de superfície do servo. Se o pente inclinasse ou desalinhasse, seria muito mais difícil de ler os dados. Tais questões limitaram o número de discos e da densidade de trilhas possíveis com esta disposição. A informação da posição da trilha em discos modernos é gravada em cada trilha em uma lacuna entre os setores de dados do usuário. Controladores baseados nessa informação são chamados de servo setores, e os dados são amostrados por necessidade. Há um conflito entre o desejo de gravar grandes quantidades de dados, o que exige menos e maiores setores, e a especificação para o controle ter uma alta taxa de amostragem, o que exige setores menores. Cada caso é um compromisso entre essas demandas conflitantes. Como os dados de posição são amostrados, os controladores são dispositivos digitais que fazem o melhor uso possível dos dados de posição. Estudos teóricos têm usado um controle multivariável para aplicar mais de uma correção de controle para cada leitura do sensor, mas este método ainda não é considerado economicamente viável. Para este estudo de caso, vamos projetar um controle analógico.

A informação de posição extraída a partir de dados gravados no disco é sujeita a erros causados por excursões fora do caminho da trilha, o que significa que o raio da trilha não é constante. Em geral, há um componente repetitivo em cada volta da trilha, e este elemento pode ser estimado, geralmente de harmônico por harmônico, e um sinal é utilizado para alimentar o motor que cancela este componente. O sinal de erro de posição (SEP) também contém ruído aleatório de várias fontes. Estas incluem turbulências pelo fluxo de ar nas partes deslizantes, balanço e vibração dos discos, ruído no processamento eletrônico do sinal usado para decodificar a informação da posição, ruído do amplificador de potência utilizado para fornecer o torque ao motor e os erros causados pelos conversores analógico-digital necessários no processo.

PASSO 3. Seleção de atuadores. O RAMAC usou um motor CC como atuador, e dispositivos posteriores usaram atuadores hidráulicos. Quando o disco de 5,25-in. foi introduzido pela Seagate, em 1980, o atuador era um motor de passo. Estes foram utilizados em malha aberta. O primeiro controle realimentado de posicionamento da cabeça estava no IBM 3330 em 1971, e o atuador era um motor voice-coil de movimento linear. Em 1979, um motor rotativo voice-coil foi introduzido, e hoje quase todos os discos rígidos usam um atuador de movimento rotativo. O amplificador de potência é normalmente ligado como um amplificador de corrente para simplificar a dinâmica. A realimentação a partir do resistor de detecção de corrente para o amplificador constitui uma “malha de torque” que é projetada separadamente e cuidadosamente, de modo que a dinâmica do motor possa ser ignorada na maioria das vezes ao considerar a malha externa de controle de posição no rastreamento de trilha.

PASSO 4. Faça um modelo linear. Como mencionado na discussão do processo, o modelo linear tem um modo flexível, a saber

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \frac{(2\zeta s/\omega_1 + 1)}{\left(\frac{s^2}{\omega_1} + 2\zeta \frac{s}{\omega_1} + 1\right)}, \quad (10.38)$$

com $\zeta = 0,05$ e $\omega_1 = 2,5$, correspondente à medição do tempo em milisegundos, em vez de segundo. O ganho A e a inércia J serão absorvidos no ganho do compensador. Assim, o amplificador de potência é tido como sendo um amplificador de corrente ideal. Também estamos considerando apenas o rastreamento de trilha, e não busca.

PASSO 5. Teste um projeto PID ou um compensador de atraso-avanço. Em virtude de o modelo nominal ser muito simples, o primeiro projeto será um compensador de avanço com o objetivo de alcançar a maior largura de banda possível tendo uma margem de fase de 50° e de tal modo que ele seja estabilizado pelo ganho com uma margem de ganho na ressonância de pelo menos 4. Essa abordagem foi já publicada por R. K. Oswald (1974). Vamos tentar dois projetos e compará-los pela largura de banda e pela qualidade da resposta ao degrau. No primeiro caso, usaremos um compensador de avanço simples, selecionado para fornecer margem de fase de 50° e um fator de margem de ganho de 4. Para obter a margem de fase, o avanço será projetado com um α de 0,1, e a frequência de cruzamento será tão alta quanto possível, enquanto será mantida uma margem de ganho de 4 na ressonância, o que aumenta por um fator de $1/2\zeta = 10$ acima da assíntota de Bode. Assim, o cruzamento deve estar localizado de modo que a assíntota seja um fator de $10 \times 4 = 40$ abaixo de 1 em $\omega_1 = 5\pi$. A função de transferência de avanço resultante é

$$D(s) = 0,617 \frac{(2,22s + 1)}{(0,222s + 1)}, \quad (10.39)$$

e o diagrama de Bode para o projeto de avanço é mostrado na Fig. 10.57.

A frequência de cruzamento para esse projeto é $\omega_c = 1,39$ rad/ms, e a resposta ao degrau é apresentada na Fig. 10.58, que mostra um tempo de subida em torno de $t_r = 0,8$ ms com um sobressinal de aproximadamente 25%. Mostramos, anteriormente, que uma margem de fase de 50° deve corresponder a um amortecimento de 0,5 e, assim, a um sobressinal de aproximadamente 17%. No entanto, em razão de o zero do compensador de avanço estar no caminho direto, temos um sobressinal extra.

Como um segundo modelo, um filtro passa-baixa é adicionado para tentar suprimir o pico de ressonância, a fim de melhorar um pouco a velocidade de resposta e a largura de banda. A ideia é colocar a frequência de corte do filtro entre a frequência de cruzamento e a frequência de ressonância e fornecer um coeficiente de amortecimento bastante baixo que não reduza muito

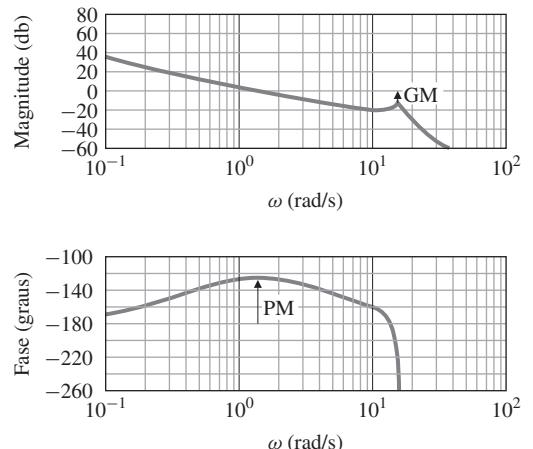


Figura 10.57 Diagrama de Bode do projeto para um avanço.

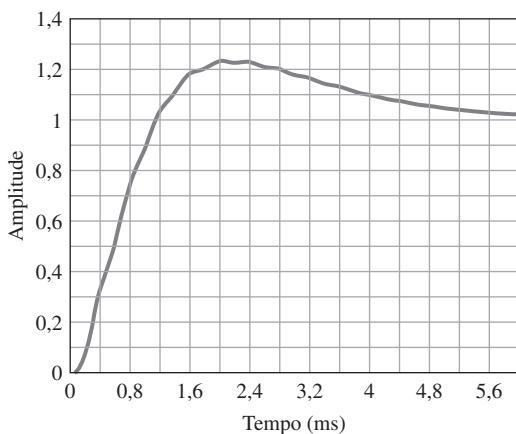


Figura 10.58 Resposta ao degrau do controle do disco com $PM = 50^\circ$.

a margem de fase, mas alto o suficiente para que não interfira na margem de ganho. Depois de algumas tentativas, o projeto de teste

$$D(s) = 1,44 \frac{(1,48s + 1)}{(0,148s + 1)} \quad (10.40)$$

é testado com o filtro

$$F(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{(10,3)^2} + 0,6 \frac{s}{10,3} + 1}. \quad (10.41)$$

Para esse caso, o diagrama de Bode é dado na Fig. 10.59 e a resposta ao degrau, na Fig. 10.60.

Nesse caso, a frequência de cruzamento é 2,13, um aumento de 35%, e o tempo de subida é de 0,3 ms, uma redução de 60% a partir do caso sem o filtro passa-faixa. O sobressinal é um pouco maior neste caso. Embora não estejam apresentadas aqui, outras possibilidades para a compensação de controle podem incluir um filtro rejeita faixa no lugar do filtro passa-baixa projetado aqui. Um filtro rejeita faixa pode ser capaz de suprimir a ressonância e permitir mais um aumento adicional na largura de banda. Um bom projeto depende do grau de entendimento da ressonância e de quanto a incerteza envolve seu comportamento. Em alguns casos, é possível estabilizar a ressonância por fase e aumentar a frequência de cruzamento para ser maior do que a frequência de ressonância.

PASSO 6. Avalie/modifique a planta. Eventuais alterações do processo que envolvem grandes alterações de projeto foram introduzidas na discussão sobre a compreensão do processo no

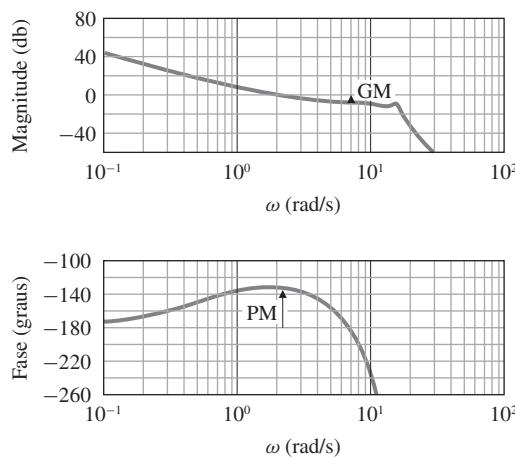
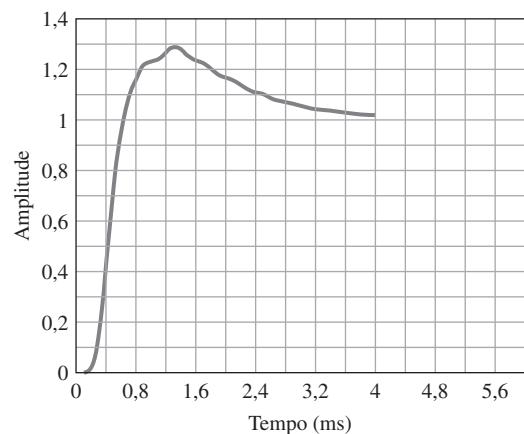


Figura 10.59 Diagrama de Bode do sistema com um compensador de avanço mais o filtro passa-baixa.

Figura 10.60 Resposta ao degrau do sistema com um compensador de avanço mais o filtro passa-baixa.



Passo 1. Uma vez que os principais parâmetros de projeto foram selecionados, as possibilidades restantes de melhoria podem incluir uma mudança na fabricação do braço para adicionar rigidez, o que irá aumentar a frequência de vibração e adicionar um revestimento de amortecimento no braço para aumentar o coeficiente de amortecimento da flexibilidade. Outras possibilidades de melhoria dizem respeito à metodologia de decodificação SEP para reduzir o ruído.

PASSO 7. Teste um controlador ótimo ou um controlador adaptativo. Um projeto foi feito com a medida de desempenho linear quadrático com o índice de desempenho (função de perda) selecionado para obter um tempo de subida de aproximadamente 0,3 ms que coincide com o projeto clássico. O resultado é mostrado na Fig. 10.61. Embora um esforço adicional possa fornecer um projeto aceitável, a resposta claramente oscilatória tolerada por essa técnica em particular não parece promissora. Em particular, um projeto que inclua um custo em \dot{y} e y deve ser considerado. Tais extensões são consideradas em cursos mais avançados.

PASSO 8. Simule o projeto e compare as alternativas. Normalmente feitas em paralelo com o projeto.

PASSO 9. Construa um protótipo. Feito no início do processo de projeto como um modelo de teste para que os esquemas possam ser testados fisicamente enquanto projetados.

Para o projeto e implementação do controle digital em servos de unidades de disco, o leitor é remetido para Franklin, Powell e Workman (1998).

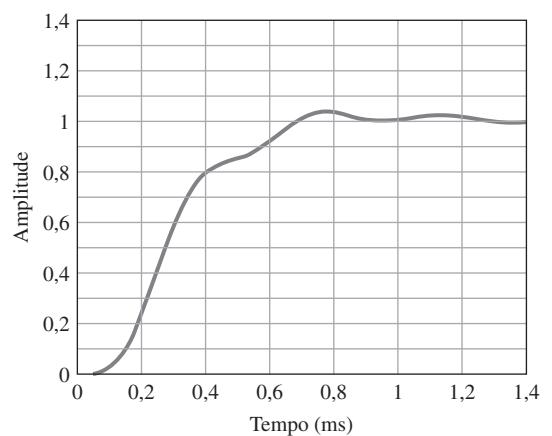


Figura 10.61 Resposta ao degrau para o projeto LQR.

10.6 Controle de sistemas de PTR na fabricação de pastilhas de semicondutores

A Fig. 10.62 diagrama os principais passos, em uma escala ultralarga, da fabricação de um circuito integrado, como um microprocessador e alguns dos aspectos de controle associados. Muitos dos passos descritos no presente processo, como deposição química de vapor ou gravação, devem ser controlados com atenção e realizados em sequências de temperatura temporizadas (Sze, 1988). A prática padrão, por muitos anos, tem sido realizar estes passos em lotes de muitas pastilhas para produzir um grande número de circuitos integrados idênticos. Em resposta à demanda de dimensões críticas cada vez menores para os dispositivos no circuito integrado e

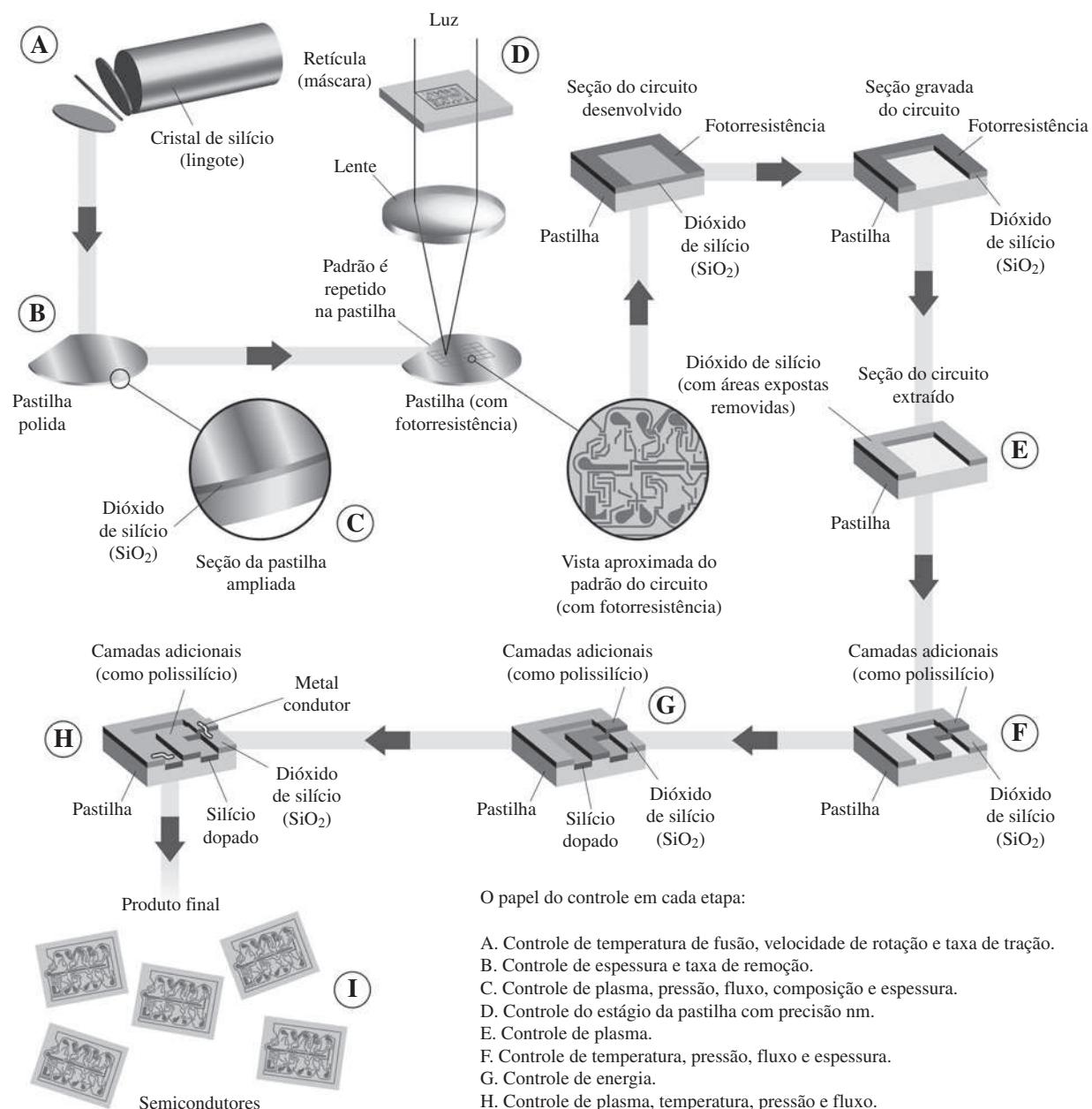


Figura 10.62 Passos na fabricação de um circuito integrado.

Fonte: cortesia da International Sematech.

Figura 10.63 Sistema de radiação PTR da Applied Materials.
Fonte: cortesia Applied Materials.



para dar mais flexibilidade na variedade e fornecer um maior número de circuitos integrados produzidos, os fabricantes de ferramentas para a fabricação dos circuitos foram solicitados a proporcionar um controle cada vez mais preciso de temperatura e perfis temporais durante o processamento térmico. Em resposta a estas exigências, uma importante tendência é realizar as etapas térmicas em uma pastilha de cada vez numa câmara de paredes frias e fonte de calor flexível chamada de processadora térmica rápida (PTR), como mostrado na Fig. 10.63.

PTR

As demandas por um sistema de PTR são ilustradas pela especificação da temperatura da pastilha em seguir um perfil como o mostrado na Fig. 10.64, em que a velocidade aumenta de 25° a 150°C/s, a temperatura varia de 600°C a 1.100°C e pode durar pouco ou muito tempo, como 120 s. O aumento das taxas é limitado pelo perigo de provocar danos na estrutura do cristal se os gradientes de temperatura se tornarem demasiadamente grandes. A capacidade do PTR de mudar a temperatura rapidamente permite a fabricação de dispositivos com pequenos comprimentos críticos pela capacidade de parar o processo, tal como a deposição ou gravação com rapidez e precisão.

Pirômetro

A Fig. 10.65 mostra um reator PTR genérico com lâmpadas halógenas de tungstênio, paredes de aço inoxidável, que são refrigeradas com água, e janelas de quartzo. A medição da temperatura pode ser feita por uma variedade de métodos, incluindo termopares, DTRs e pirômetros. Por várias razões (geração de partículas, perturbação mínima, etc.), é desejável utilizar métodos de detecção de temperatura sem contato e, portanto, as técnicas pirométricas são as mais comumente utilizadas. Um pirômetro é um sensor de temperatura sem contato, que mede a radiação infravermelha (IR) que é, diretamente, uma função da temperatura. Sabe-se que objetos emitem energia radiante proporcional a T^4 , sendo T a temperatura do objeto. Entre as vantagens dos pirômetros estão o tempo de resposta muito rápido e a capacidade de medirem a

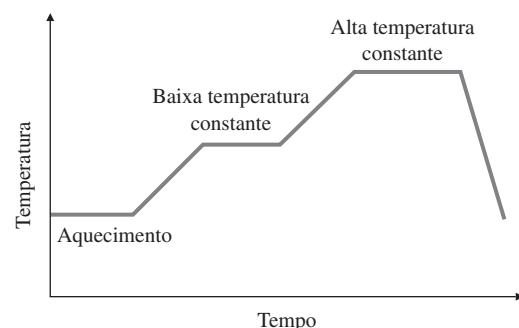


Figura 10.64 Trajetória de temperatura típica do PTR.

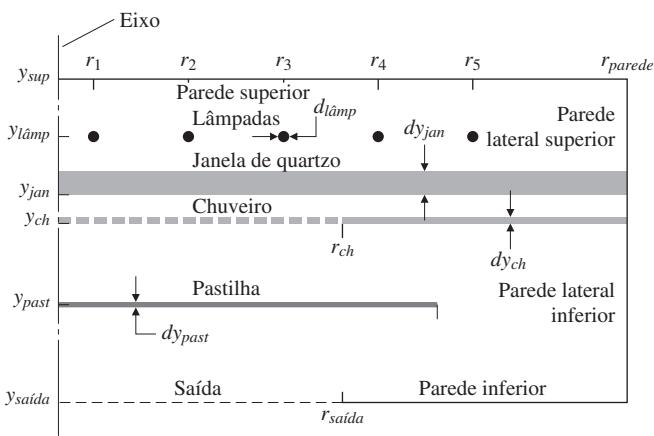


Figura 10.65 Sistema genérico PTR.

temperatura de objetos em movimento (por exemplo, uma pastilha de semicondutores de rotação) e no vácuo para fabricação de semicondutores.

A seleção do atuador depende da escolha das técnicas de fornecimento de energia (lâmpadas halógenas de tungstênio, lâmpadas de arco voltaico, susceptor quente, etc.) para aquecer a pastilha. Atualmente, as lâmpadas halógenas de tungstênio são comumente usadas no PTR na fabricação de semicondutores (Emami-Naeini *et al.*, 2003). A Fig. 10.66(a) mostra um sistema com aquecimento em dois lados por lâmpadas halógenas de tungstênio lineares (típico dos sistemas produzidos por Mattson). Os arranjos das lâmpadas na parte superior e inferior estão em ângulos retos para fornecerem mais de um eixo simétrico. A Fig. 10.66(b) mostra um lado de aquecimento com lâmpadas na configuração de um favo de mel (típico dos sistemas da Applied Materials). Finalmente, a Fig. 10.66(c) mostra uma configuração de lâmpadas dispostas em anéis concêntricos (típico da câmara de Stanford-TI MMST, Gyugyi *et al.*, 1993). As lâmpadas saturam e, por razões práticas, é desejado que operem dentro de 5%–95% das configurações de potência.

Para ilustrar o projeto de um sistema de PTR, são fornecidos os resultados de um projeto específico realizado pela SC Solutions como um modelo de laboratório construído para estudar os problemas associados com o projeto e funcionamento do PTR. O modelo de laboratório é mostrado esquematicamente na Fig. 10.67. Ele é feito de alumínio e é composto de três padrões de lâmpadas halógenas de tungstênio 35-W 12-V aquecendo uma placa retangular que simula a pastilha. A placa mede 4" × 13ó" e é escurecida para aumentar sua absorção de radiação.

A placa é montada em paralelo com as lâmpadas. As lâmpadas são montadas no compartimento de lâmpadas. O conjunto de lâmpadas é montado em um gradeamento de modo que

Lâmpadas halógenas de tungstênio

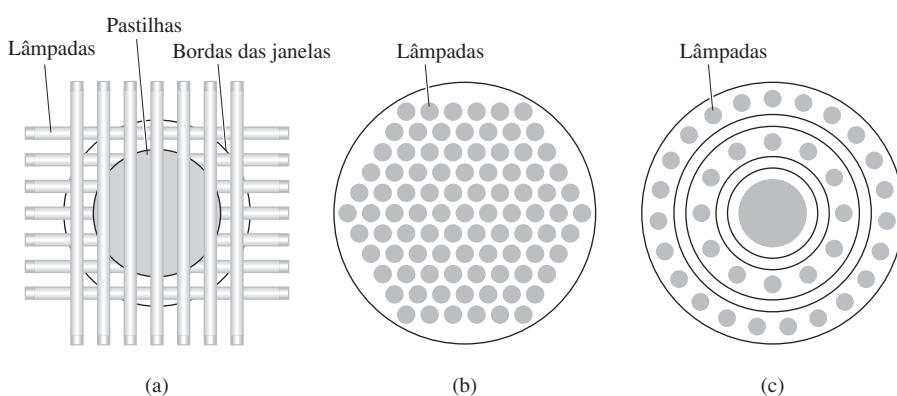


Figura 10.66 Várias geometrias de lâmpadas para o PTR.

Fonte: Norman, 1992.

a distância das lâmpadas para a placa seja ajustável. À medida que as lâmpadas são movidas para fora, o ganho do sistema diminui, mas a interferência da radiação (acoplamento) aumenta. Por outro lado, quando as lâmpadas são movidas para mais perto da placa, o ganho do sistema aumenta e o acoplamento é reduzido. A distância nominal das lâmpadas para a placa é de 1", mas é ajustável para várias polegadas. As lâmpadas são acionadas por um amplificador de modulação de largura de pulso (MLP ou, do inglês, PWM). Existe uma unidade de fonte separada. São montados três indicados para operações no sistema em malha aberta e manual. Existem 14 tiras de detectores de temperatura de resistência (DTR) montadas verticalmente atrás da placa: 12 na placa e 2 em cada suporte de cada lado. Existe um filtro na fonte de ruído que gera ruídos periódicos do sensor em 1,5 Hertz, de modo a representar o ruído visto em sistemas reais de PTR. Toda a eletrônica (i.e., o processador de sinal do sensor e o amplificador PWM) é alocada na parte inferior da unidade. Devido à exposição para o exterior, o ambiente em torno fornece fontes de perturbação.

Modelo de laboratório PTR

PASSO 1. Compreenda o processo e suas especificações de desempenho. O PTR é um processo inherentemente dinâmico e não linear. Entre as propriedades interessantes do sistema estão as múltiplas escalas de tempo (as constantes de tempo para as lâmpadas, pastilha, chuveiro e janelas de quartzo são diferentes); comportamento não linear (radiação dominante), lâmpadas não lineares, efeitos das fontes de alimentação; número e posicionamento de sensores; número, alocação e agrupamento de lâmpadas; e grandes variações de temperatura. O ganho DC no sistema (δ temperatura / δ da fonte) diminui com o aumento da temperatura devido ao aumento não linear em perdas radiativa. Vários tipos de modelos físicos são necessários. Modelos físicos detalhados são necessários para o projeto do equipamento, mas modelos de ordem reduzida são necessários para a avaliação rápida de mudanças de geometria, desenvolvimento de procedimentos e para o projeto de controle realimentado. A transição suave entre o controle manual e automático também é necessária.

PASSO 2. Seleção de sensores. Isso foi discutido anteriormente. Para o modelo de laboratório, os sensores são 14 DTRs em conjunto, mas três (localizados no centro e nas bordas do suporte

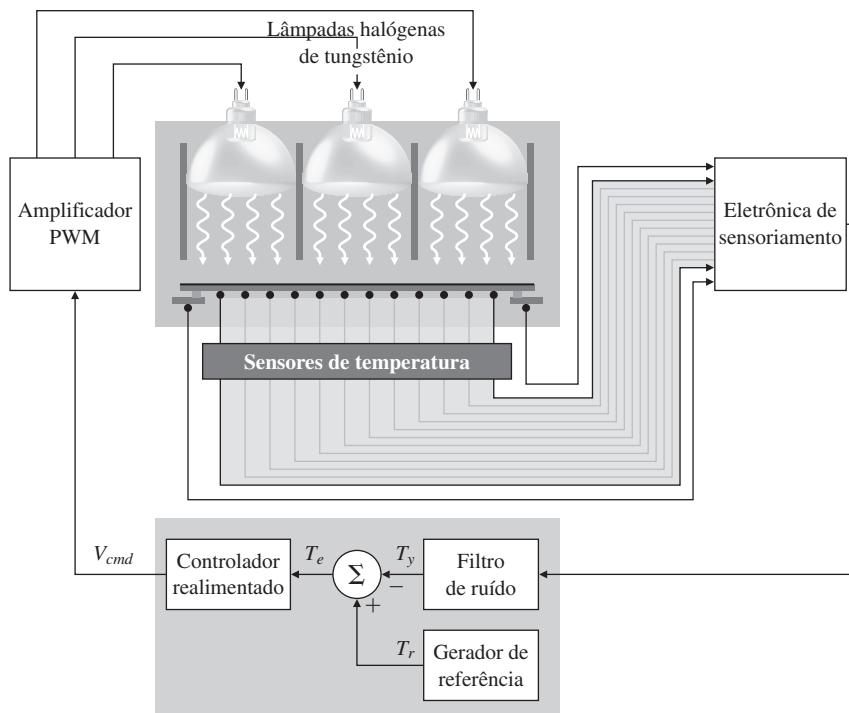


Figura 10.67 Diagrama de blocos do modelo de laboratório do PTR.

da placa) podem ser usados para a realimentação, e o resto pode ser usado para fins de controle de temperatura. No nosso caso, vamos usar apenas a *temperatura do centro* para o controle realimentado. (Outra alternativa seria somar as três temperaturas em um sinal e controlar a temperatura média.)

PASSO 3. Seleção de atuadores. Isso também foi discutido anteriormente. Para o modelo de laboratório, os atuadores foram compostos de três padrões de lâmpadas halógenas de tungstênio descritas anteriormente. No nosso caso, vamos ligar as três lâmpadas *em um atuador* aplicando o mesmo comando de entrada em cada lâmpada.

PASSO 4. Faça um modelo linear. O modelo de laboratório foi construído (veja o Passo 9). As equações não lineares do sistema envolvem tanto a condução (Capítulo 2) quanto os termos de radiação (veja Emami-Naeini *et al.*, 2003). Abordagens de identificação de sistemas não lineares foram usadas para obter um modelo do sistema. Especificamente, foi aplicado nas três lâmpadas um degrau de subida, mantido constante e, então, um degrau de descida, e as três temperaturas de saída foram registradas. Estudos¹² de identificação de sistemas resultaram no seguinte modelo não linear para o sistema que contém os termos de radiação e condução (\mathbf{A}_r e \mathbf{A}_{con} respectivamente):

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_r \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ T_\infty \end{bmatrix}^4 + \mathbf{A}_{con} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ T_\infty \end{bmatrix} + \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (10.42)$$

$\mathbf{T} = [T_1 \ T_2 \ T_3]^T$ denota as temperaturas, T_∞ = temperatura ambiente constante ($\dot{T}_\infty = 0$), $\mathbf{u} = [v_{cmd1} \ v_{cmd2} \ v_{cmd3}]^T$ são as tensões de comando e as matrizes do sistema são

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1.000040 & 0 & 0 \\ 0 & 5.557443 & 0 \\ 0 & 0 & 13.638218 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_r &= \begin{bmatrix} 5.4762e-2 & -8.5706e-3 & -8.2961e-4 & -4.5361e-2 \\ -8.5706e-3 & 8.5709e-3 & -1.6213e-7 & -8.9134e-8 \\ -8.2961e-4 & -1.6213e-7 & 8.2998e-4 & 2.0976e-7 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{con} &= \begin{bmatrix} 3.5599e-7 & -1.1136e-7 & -1.1976e-7 & -4.7011e-8 \\ -1.1136e-7 & 1.1602e-2 & -2.5027e-3 & -9.0992e-3 \\ -1.9761e-7 & -2.5027e-3 & 6.3736e-3 & -3.8707e-3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 3.4600e-1 & 1.1772e-1 & 2.8380e-2 \\ 3.8803e-11 & 8.0249e-2 & 1.8072e-2 \\ 8.0041e-9 & 2.7216e-3 & 3.1713e-2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Um modelo linear para o sistema é obtido sendo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= \mathbf{F}_3 \mathbf{T} + \mathbf{G}_3 \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{H}_3 \mathbf{T} + \mathbf{J}_3 \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (10.43)$$

sendo $\mathbf{y} = [T_{y1} \ T_{y2} \ T_{y3}]^T$ e

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3 &= \begin{bmatrix} -0.0682 & 0.0149 & 0.0000 \\ 0.0458 & -0.1181 & 0.0218 \\ 0.0000 & 0.04683 & -0.1008 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 0.3787 & 0.1105 & 0.0229 \\ 0.0000 & 0.4490 & 0.0735 \\ 0.0000 & 0.0007 & 0.4177 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Transferência de calor
de radiação não linear

Modelo linear PTR

¹² Desenvolvidos por Dr. G. van der Linden.

Os três polos em malha aberta são calculados com o MATLAB e estão localizados em $-0,0527$, $-0,0863$ e $-0,1482$. Para o nosso caso, como ligamos as três lâmpadas em um atuador e estamos usando apenas a temperatura do centro para a realimentação, o modelo linear é, então,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.0682 & 0.0149 & 0.0000 \\ 0.0458 & -0.1181 & 0.0218 \\ 0.0000 & 0.04683 & -0.1008 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.5122 \\ 0.5226 \\ 0.4185 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [0 \ 1 \ 0], \quad \mathbf{J} = [0],$$

resultando na função de transferência

$$G(s) = \frac{T_{y2}(s)}{V_{cmd}(s)} = \frac{0.5226(s + 0.0876)(s + 0.1438)}{(s + 0.1482)(s + 0.0527)(s + 0.0863)}.$$

PASSO 5. *Teste um controlador de atraso e avanço ou um PID.* Podemos testar um controlador PI simples da forma

$$D_c(s) = \frac{(s + 0,0527)}{s},$$

de modo a anular o efeito de um dos polos mais lentos. A resposta linear em malha fechada é mostrada na Fig. 10.68(a) e o esforço de controle associado é mostrado na Fig. 10.68(b). A resposta do sistema segue a trajetória comandada com um atraso de aproximadamente 2 segundos e sem sobressinal. A lâmpada tem a sua resposta normal até 75 s e fica negativa (tracejado) para tentar seguir a queda brusca no comando da temperatura. Este comportamento não é possível no sistema, já que não há meios de arrefecimento ativo e as lâmpadas saturam inferiormente. Note que não há meios explícitos de controlar a não uniformidade da temperatura aqui.

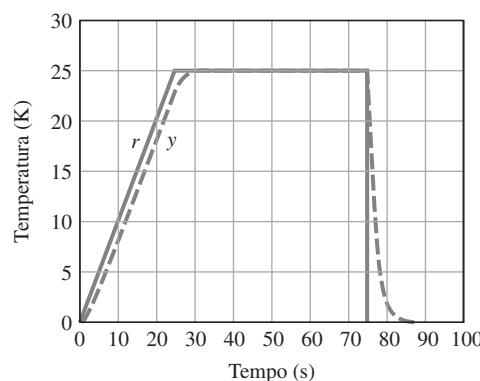
PASSO 6. *Avalie/modifique a planta.* Isso já foi discutido em conexão com a seleção do atuador e do sensor.

PASSO 7. *Teste um projeto ótimo.* Usamos a abordagem de espaço do erro para a inclusão do controle integral e empregamos a técnica linear quadrática Gaussiana do Capítulo 7. O sistema de erro é

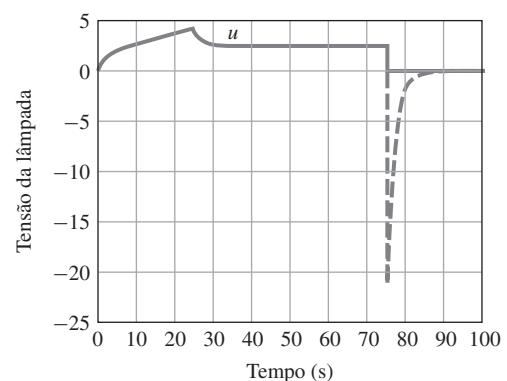
$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mu, \quad (10.44)$$

sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} J \\ \mathbf{G} \end{bmatrix},$$



(a) Resposta do rastreamento de temperatura



(b) Esforço de controle

Figura 10.68 Resposta do PTR linear em malha fechada para o controlador PI.

$e = y - r$, $\xi = \dot{T}$ e $\mu = \dot{u}$. Para o projeto de realimentação de estados, a formulação LQR do Capítulo 7 é usada, isto é,

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty \{\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \rho \mu^2\} dt,$$

com $\mathbf{z} = [e \ \xi^T]^T$. Note que \mathcal{J} precisa ser escolhido de modo que penalize o erro de rastreamento e e o controle u , assim como as diferenças nas três temperaturas. Portanto, o índice de desempenho deve incluir um termo da forma

$$10 \left\{ (T_1 - T_2)^2 + (T_1 - T_3)^2 + (T_2 - T_3)^2 \right\},$$

o que minimiza a *não uniformidade da temperatura*. O fator de 10 foi determinado por tentativa e erro, como a ponderação relativa entre o estado do erro e o estado da planta.

As matrizes de ponderação do estado e do controle, \mathbf{Q} e R , respectivamente, são

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -10 & -10 \\ 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & -10 & -10 & 20 \end{bmatrix}, \quad R = \rho = 1.$$

O seguinte comando no MATLAB é usado para projetar o ganho de realimentação:

`[K] = lqr(A,B,Q,R).`

A matriz de ganho de realimentação resultante computada no MATLAB é

$$\mathbf{K} = [K_1 : \mathbf{K}_0],$$

sendo

$$K_1 = 1, \quad \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 0.1221 & 2.0788 & -0.2140 \end{bmatrix},$$

que resulta em um controlador de modelo interno da forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= B_c e, \\ u &= C_c x_c - \mathbf{K}_0 \mathbf{T}, \end{aligned} \tag{10.45}$$

com x_c representado o estado do controlador e

$$B_c = -K_1 = -1, C_c = 1.$$

Os polos com a realimentação de estados em malha fechada calculados a partir do MATLAB são em $-0,5574 \pm 0,4584j$, $-0,1442$ e $-0,0877$. O estimador de ordem completa foi projetado com as intensidades do ruído no processo e nos sensores selecionadas como os botões do projeto do estimador:

$$R_w = 1, \quad R_v = 0,001.$$

O seguinte comando no MATLAB é usado para projetar o estimador:

`[L] = lqe(F,G,H,Rw,Rv).`

A matriz de ganho do estimador resultante é

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 16.1461 \\ 16.4710 \\ 13.2001 \end{bmatrix},$$

com os polos do erro do estimador em $-16,5268$, $-0,1438$ e $-0,0876$. A equação do estimador é

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{T}} + G u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{T}}). \tag{10.46}$$

Uniformidade da temperatura

Com o estimador, a equação do modelo interno do controlador é modificada

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= B_c e, \\ u &= C_c x_c - \mathbf{K}_0 \hat{\mathbf{T}}.\end{aligned}\quad (10.47)$$

As equações do sistema em malha fechada são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{cl} &= \mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_{cl} + \mathbf{B}_{cl} r, \\ y &= \mathbf{C}_{cl} \mathbf{x}_{cl} + \mathbf{D}_{cl} r,\end{aligned}\quad (10.48)$$

em que r é a entrada de referência da trajetória da temperatura, o vetor de estado em malha fechada é $\mathbf{x}_{cl} = [\mathbf{T}^T \ x_c^T \ \hat{\mathbf{T}}^T]^T$ e as matrizes do sistema são

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{cl} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \mathbf{C}_c & -\mathbf{G} \mathbf{K}_0 \\ \mathbf{B}_c \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L} \mathbf{H} & \mathbf{G} \mathbf{C}_c & \mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_0 - \mathbf{L} \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{cl} &= [\mathbf{H} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}], \quad \mathbf{D}_{cl} = [0],\end{aligned}$$

com os polos de malha fechada (calculados com o MATLAB) localizados, como esperado, em $-0,5574 \pm 0,4584j$, $-0,1442$, $-0,0877$, $-16,5268$, $-0,1438$ e $-0,0876$. A estrutura de controle em malha fechada é mostrada na Fig. 10.69.

O diagrama do sistema de controle em malha fechada implementado no SIMULINK é mostrado na Fig. 10.70. A resposta linear em malha fechada é mostrada na Fig. 10.71(a) e o esforço de controle associado é mostrado na Fig. 10.71(b). O comando da trajetória da temperatura, r , é uma rampa de 0°C a 25°C , com uma inclinação de $1^\circ\text{C}/\text{s}$ seguido por uma constante de duração de 50 s e um retorno para 0°C . (Note que, aqui, a velocidade da rampa é muito lenta, porque temos apenas três lâmpadas em nosso modelo de laboratório do PTR, enquanto um sistema real do PTR tem centenas de lâmpadas e velocidades muito maiores para a rampa, como mencionado anteriormente, seriam relevantes.) O sistema rastreia a trajetória de comandado de temperatura – apesar de um atraso de tempo de aproximadamente 2 s para a rampa e um sobressinal máximo de $0,089^\circ\text{C}$. Como esperado, o sistema rastreia assintoticamente uma entrada constante, com erro em estado estacionário nulo. O sinal de comando da lâmpada aumenta, como esperado, para permitir o rastreamento da entrada em rampa, atinge um valor máximo em 25 s e, então, cai para um valor constante de aproximadamente 35 s. A resposta normal da lâmpada é vista de 0 a 75 s, seguida por uma tensão de comando negativa por alguns segundos correspondentes ao arrefecimento rápido. Mais uma vez, a tensão de esforço de controle negativa (mostrada em linhas tracejadas) é fisicamente impossível, pois não há arrefecimento ativo no sistema. Assim, nas simulações não lineares, o comando de potência da lâmpada deve ser restrito para ser estritamente não negativo (Passo 8). Note que a resposta de 75 a 100 s é a resposta ao degrau (negativo) do sistema.

PASSO 8. *Simule o projeto com as não linearidades.* O sistema não linear em malha fechada foi simulado no SIMULINK como mostrado na Fig. 10.72a. O modelo foi implementado em unidades de temperatura de graus Kelvin e a temperatura ambiente é 301K.¹³ O modelo não

Seguindo a trajetória da temperatura

Simulação não linear no SIMULINK

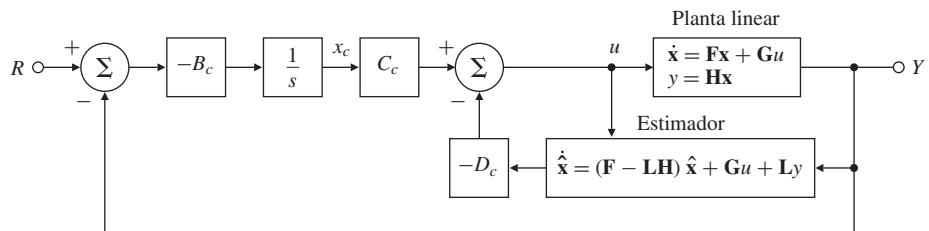


Figura 10.69 Diagrama da estrutura de controle em malha fechada.

¹³ $[K] = [^\circ\text{C}] + 273$.

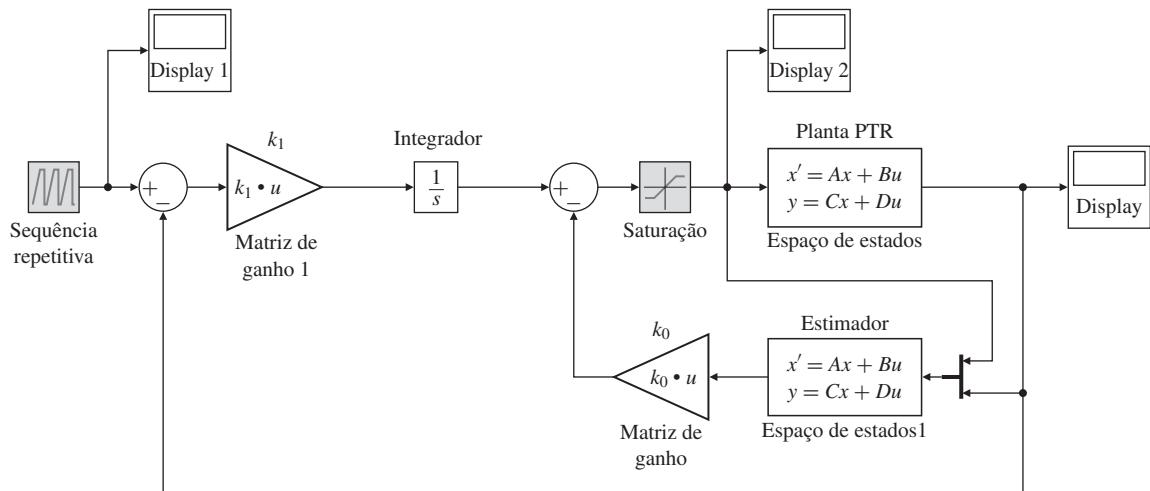


Figura 10.70 Diagrama de blocos no SIMULINK® para o controle em malha fechada do PTR.

linear da planta é a implementação da Eq. (10.42). Existe um pré-filtro seguindo a trajetória da temperatura de referência (para suavizar os cantos) com a função de transferência

$$G_{\text{pf}}(s) = \frac{0,2}{s + 0,2}. \quad (10.49)$$

Note que a conversão entre tensão e potência foi determinada experimentalmente como

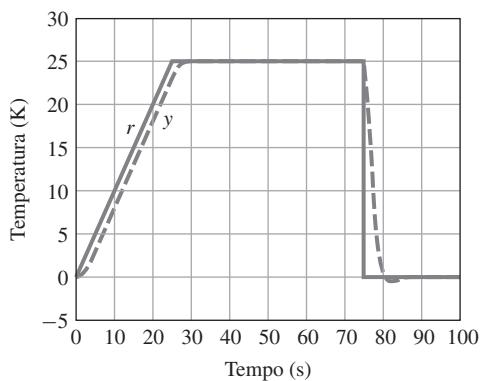
$$P = V^{1,6} \quad (10.50)$$

Não linearidade da lâmpada

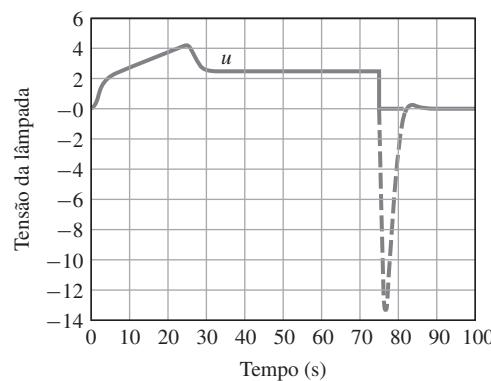
e é implementada como um bloco não linear (nomeado como V2P) no SIMULINK. O modelo inverso da lâmpada estática não linear também é incluído como um bloco (nomeado como InvLamp):

$$V = P^{0,625}. \quad (10.51)$$

Isso irá cancelar a não linearidade da lâmpada. A faixa de tensão de funcionamento do sistema é entre 1 e 4 volts, como pode-se ver a partir do diagrama. A não linearidade de saturação é incluída na lâmpada, bem como a lógica do integrador antiwindup para lidar com a saturação. A resposta dinâmica não linear é mostrada na Fig. 10.73(a) e o esforço de controle é mostrado na Fig. 10.73(b). Note que a resposta não linear está, em geral, de acordo com a resposta linear.



(a) Resposta de rastreamento de temperatura



(b) Esforço de controle

Figura 10.71 Resposta linear do PTR em malha fechada.

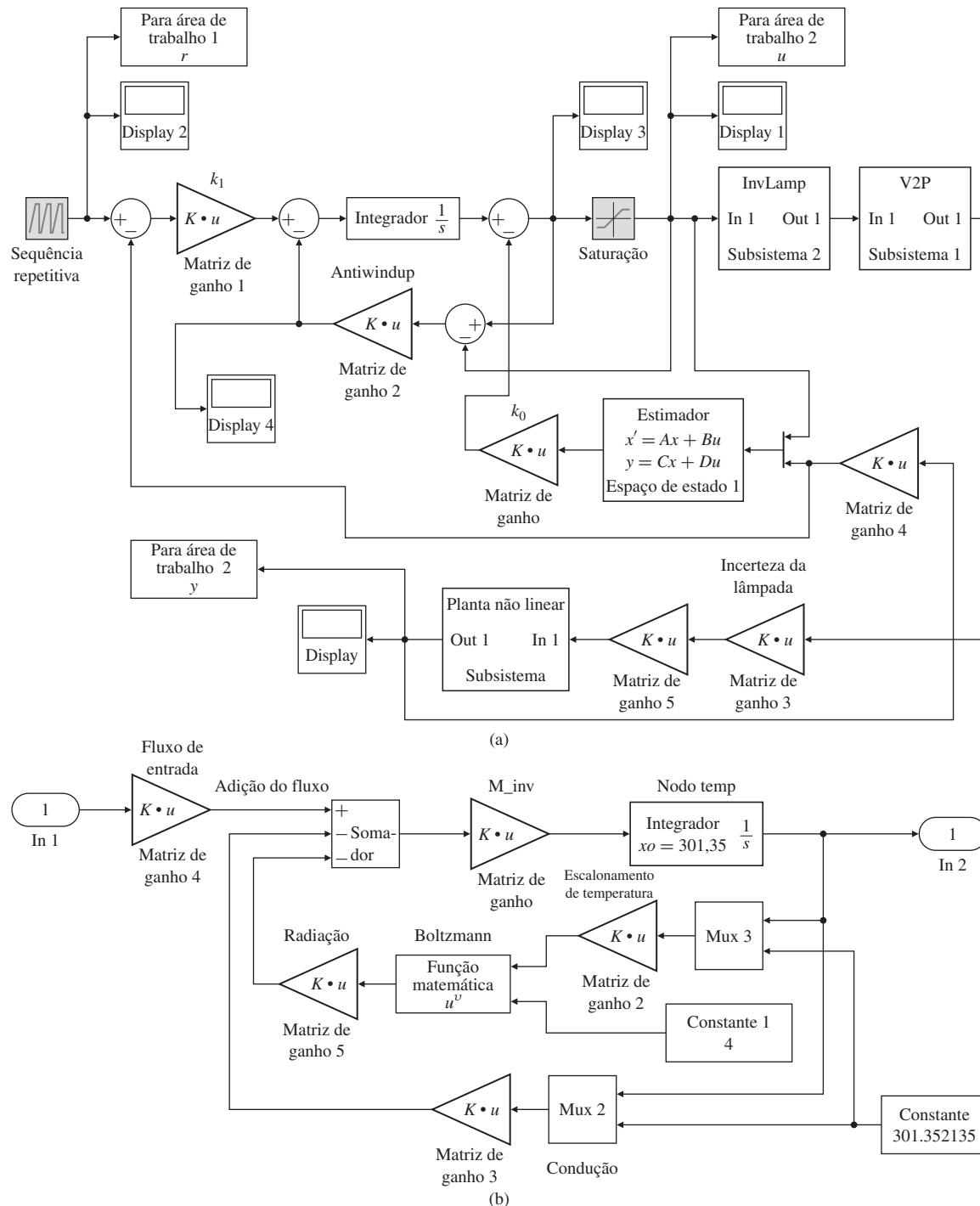


Figura 10.72a Diagrama para o modelo não linear do sistema PTR em malha fechada no SIMULINK®: (a) malha fechada não linear e (b) planta não linear.

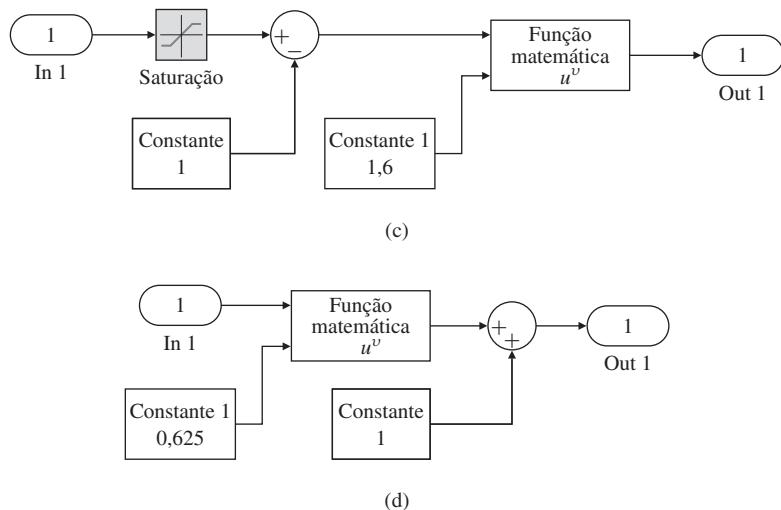


Figura 10.72b Diagrama no SIMULINK® para o sistema PTR não linear em malha fechada: (c) subsistema para converter a tensão em potência; (d) subsistema para a inversão do modelo da lâmpada.

Um protótipo do modelo de laboratório PTR foi projetado, construído¹⁴ e demonstrado na Sematech AEC/APC'98 Conference, em Vail, Colorado. A Fig. 10.74 mostra uma fotografia do sistema operacional. Este sistema é realmente de natureza multivariável. O controlador multivariável, de três entradas e três saídas, utilizado no protótipo do sistema foi projetado utilizando a mesma abordagem discutida no Passo 7 e foi aplicado em uma plataforma de controle embarcada que usa um sistema operacional de tempo real.

O controlador contínuo (isto é, modelo interno combinado do controlador e estimador) é da forma

$$\dot{\mathbf{x}}^c = \mathbf{A}^c \mathbf{x}^c + \mathbf{B}^c \mathbf{e}, \quad (10.52)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^c \mathbf{x}^c,$$

sendo $\mathbf{x}^c = [\mathbf{x}_c^T \hat{\mathbf{T}}^T]^T$,

$$\mathbf{A}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}\mathbf{C}_c & \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_0 - \mathbf{L}\mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad (10.53)$$

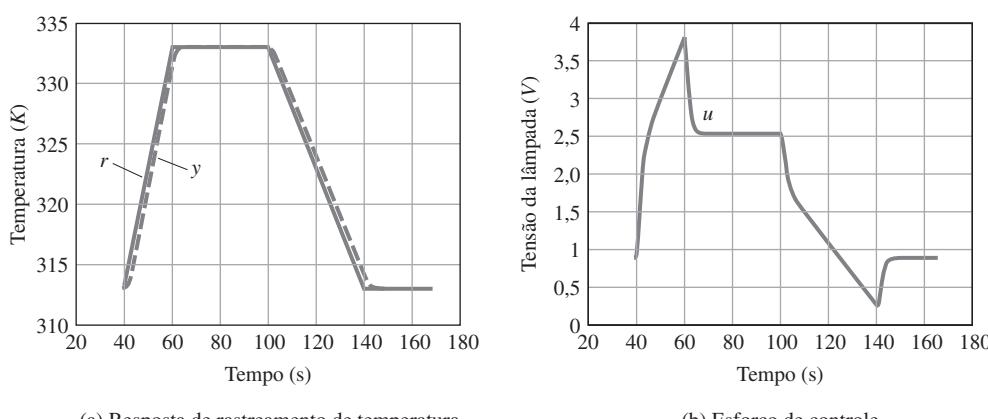


Figura 10.73 Resposta não linear do PTR em malha fechada.

¹⁴ Por Dr. J. L. Ebert.

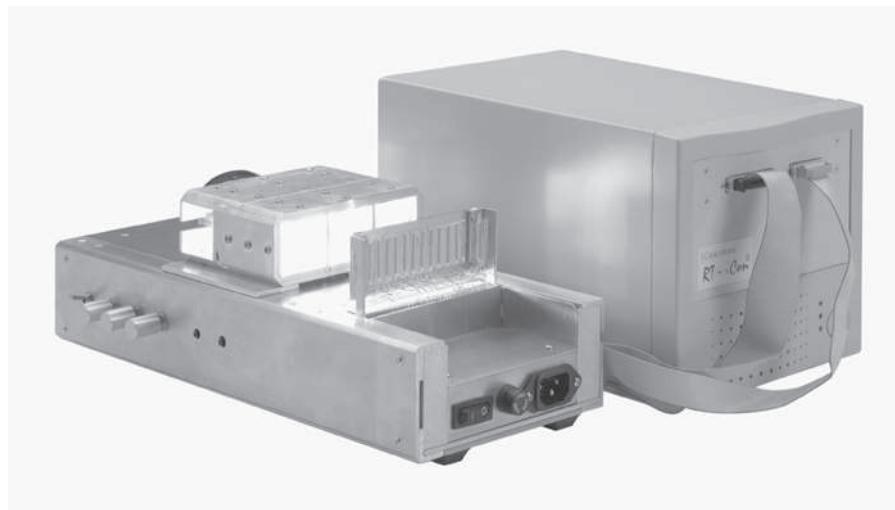


Figura 10.74 O modelo de laboratório do PTR para controle de temperatura.

Fonte: cortesia de Abbas Emami-Naeini.

e

$$\mathbf{C}^c = [\mathbf{C}_c \quad -\mathbf{K}_0].$$

O controlador foi discretizado (veja o Capítulo 8) com um período de amostragem de $T_s = 0,1$ s e implementado digitalmente (com lógica antiwindup apropriada) como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1}^c &= \Phi^c \mathbf{x}_k^c + \Gamma^c \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{u}_k &= \mathbf{C}^c \mathbf{x}_k^c.\end{aligned}\quad (10.54)$$

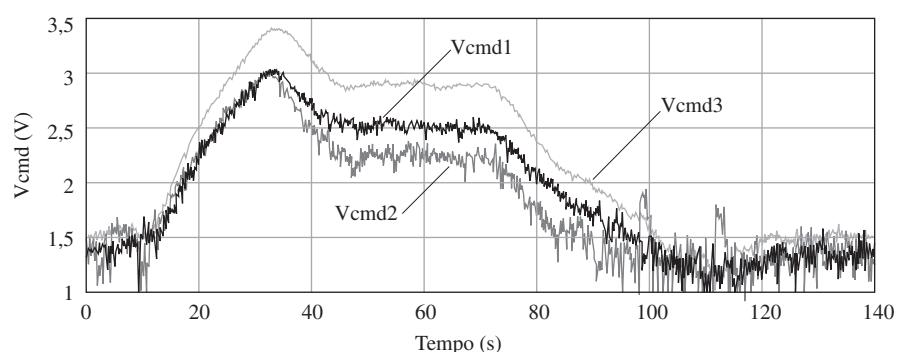
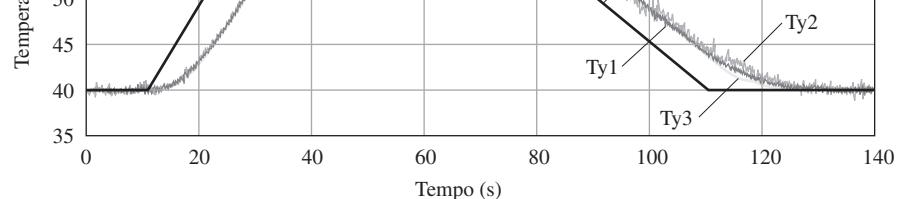
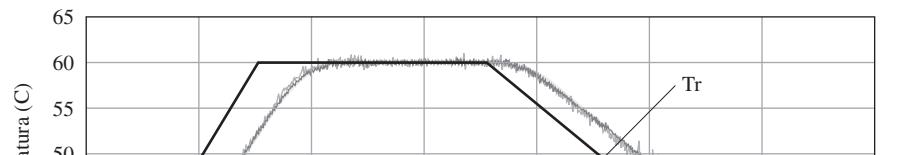


Figura 10.75 Resposta do controle de temperatura do modelo de laboratório PTR.

A resposta do sistema real para a trajetória de temperatura de referência, juntamente com as três tensões das lâmpadas, é mostrada na Fig. 10.75. Ela tem uma boa concordância com a simulação em malha fechada do sistema não linear (uma vez que o ruído é levado em conta).

Para mais informações sobre modelagem e controle de sistemas PTR, é indicado ao leitor Emani-Naeini *et al.* (2003); Ebert *et al.* (1995a,b); de Roover *et al.* (1998) e Gyugyi *et al.* (1993).

10.7 Quimiotaxia ou como a *E. coli* se movimenta

Preâmbulo

A *célula* é o subsistema estrutural e fisiológico básico de todos os organismos vivos e muitas das atividades bioquímicas necessárias para a vida são realizadas dentro dela. Alguns organismos, tais como bactérias, consistem de apenas uma única célula. Uma célula procariota é mostrada na Fig. 10.76. A *Escherichia coli* (*E. coli*), fotografia na Fig. 10.77, é um desses organismos unicelulares que têm sido extensivamente estudados e cujo interessante movimento e controle serão descritos em uma forma altamente simplificada neste estudo de caso. Os resultados técnicos para o estudo vêm do campo da biologia sistêmica. A *biologia sistêmica* é um campo emergente que objetiva criar modelos dinâmicos para descrever os processos incrivelmente complexos em muitos sistemas biológicos. O objetivo é determinar como mudanças nas variáveis em uma parte afetam o todo. Neste estudo de caso, um modelo muito simplificado é apresentado para sugerir como as ideias de controle podem contribuir neste caso. Na elaboração do estudo, tentamos minimizar o uso de termos técnicos de biologia e definir claramente os que são considerados úteis e necessários para a apresentação. Espera-se que esta simples introdução inspire engenheiros de controle a realizar estudos neste importante campo. Inicialmente, uma breve apresentação.

Biologia sistêmica

A *E. coli* foi descoberta pelo pediatra e bacteriologista alemão Theodor Escherich em 1885. A bactéria é um organismo cilíndrico com extremidades hemisféricas semelhantes ao esboço mostrado na Fig. 10.76. Uma fotografia da *E. coli* é mostrada na Fig. 10.77. Ela tem aproximadamente 1 micrôn (μ) de diâmetro e 2 micra (μ) de comprimento e pesa cerca de 1 picograma (pg). A *E. coli* foi extensivamente estudada por geneticistas devido ao tamanho relativamente pequeno de seu genoma e de sua facilidade de crescimento no laboratório. O genoma completo, ou a “biblioteca” da informação genética herdada, foi sequenciado: ele contém 4.639.221 bases nitrogenadas de adenosa (A), citosina (C), guanina (G) e timina (T), dispostas em um total de 4288 genes. Estes genes servem como instruções para a síntese de proteínas específicas e são transcritos e eventualmente traduzidos na estrutura primária, ou sequência de aminoácidos, de uma proteína. A *E. coli* cresce e se divide por fissão binária para criar duas bactérias “filhas”

E. coli

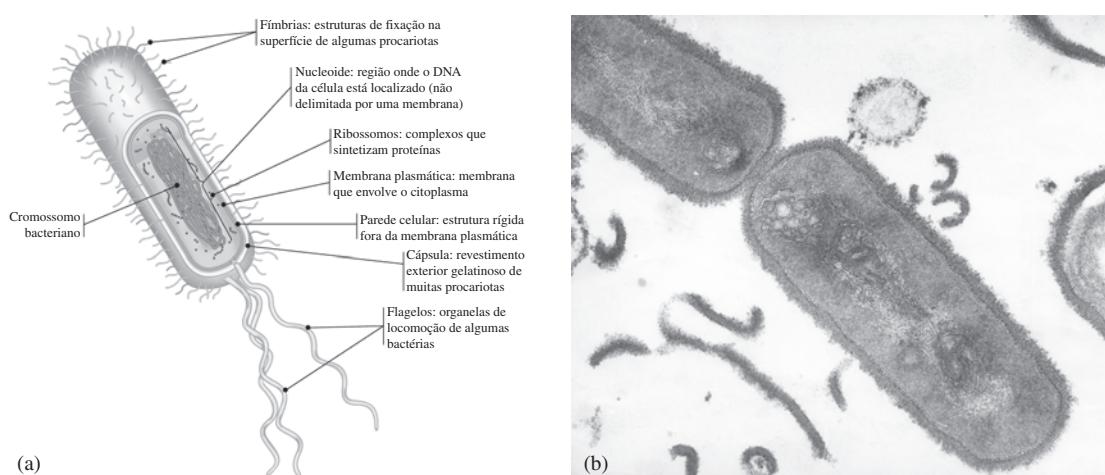
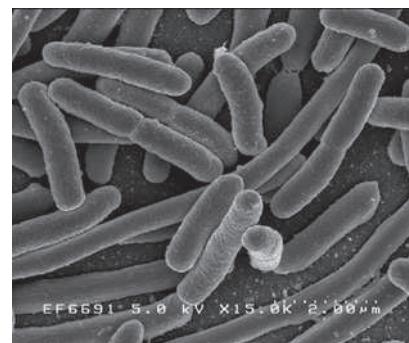


Figura 10.76 Uma estrutura celular: (a) uma bactéria típica; (b) TEM da bactéria *Bacillus coagulans*.

Fonte: (a) Campbell e Reece, página 98, 2008. © Pearson Education; (b) © Stanley C. Holt/Biological Photo Service. Todos os direitos reservados.

Figura 10.77 Fotografia da bactéria *Escherichia coli* (*E. coli*).

Fonte: United States Department of Health and Human Services, National Institutes of Health.



Quimiotaxia

geneticamente idênticas. É uma “máquina de divisão celular” e se divide continuamente de tal forma que, em condições ideais, uma população de *E. coli* pode dobrar a cada 20 minutos. Em 2003, pesquisadores demonstraram que células solitárias da *E. coli* apresentam *quimiotaxia* positiva, o que significa que elas são atraídas para as células que permitem a formação de colônias da *E. coli*. A *E. coli* vive na parte inferior do intestino de animais de sangue quente, incluindo seres humanos, e se alimenta de aminoácidos. A bactéria ajuda na manutenção do equilíbrio da flora intestinal normal (bactéria) contra bactérias prejudiciais e na sintetização ou produção algumas vitaminas. A maioria das linhagens da *E. Coli* são inofensivas, mas uma linhagem particular (*E. coli* O157:H7) pode causar envenenamento alimentar em seres humanos.

A *Escherischia coli* tem um conjunto de 6 a 10 motores rotativos, cada um acionando um fino filamento *helicoidal* de aproximadamente $10 \mu\text{m}$ de comprimento por meio de um gancho curto, flexível e proximal que atua como uma junta universal. Todo este conjunto é chamado de flagelo (Berg, 2003). O motor gira no sentido horário (SH), como visto por um observador fora da célula olhando para o gancho, ou no sentido anti-horário (SAH). Quando todos os motores giram no SAH, os filamentos dos flagelos se agrupam, e a célula nada constantemente para a frente em uma “corrida”, como sugerido na Fig. 10.78. Quando um ou mais motores muda para a rotação SH, o flagelo correspondente se separa e reorienta a célula em uma “cambalhota” resultando em um pequeno deslocamento, como mostrado na Fig. 10.79. Os dois modos de movimento, alternam e, em um estado de equilíbrio com o seu ambiente, as corridas duram aproximadamente 1 s e as cambalhotas, aproximadamente 0,1 s, resultando em um deslocamento 3D aleatório. Por meio do controle da frequência de cambalhota, as bactérias podem orientar seu movimento para uma concentração de moléculas atrativas ou para longe uma concentração de moléculas repelentes, como sugerido na Fig. 10.80.

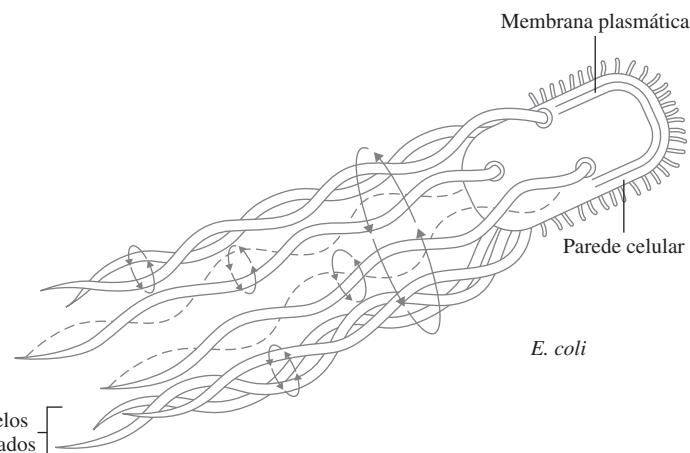


Figura 10.78 Motores dos flagelos girando no sentido AH, resultando em uma corrida.

Fonte: cortesia Nimo Cyrus Emami.

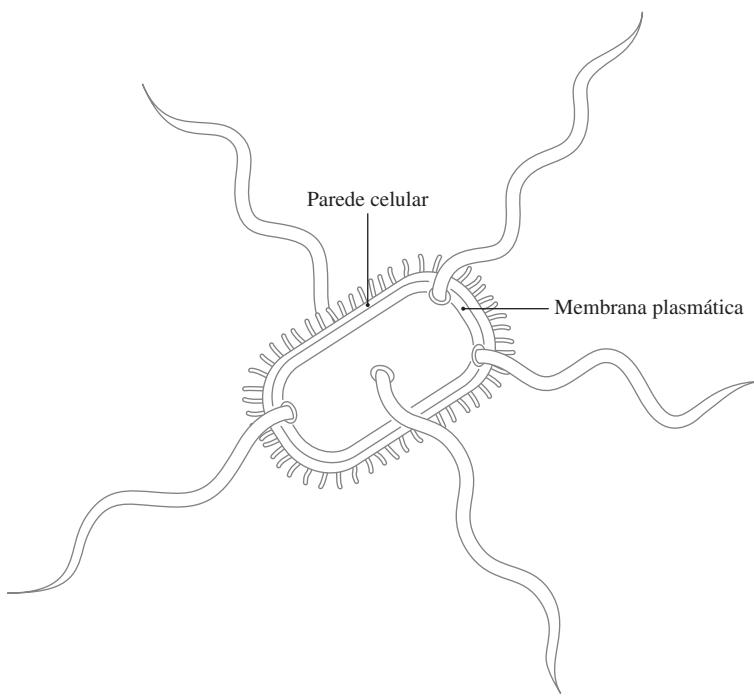


Figura 10.79 Motores dos flagelos girando no SH, resultando em uma cambalhota.
Fonte: cortesia Nimo Cyrus Emami.

O problema

Quimiotaxia é o nome dado ao processo pelo qual uma bactéria móvel sente as mudanças em seu ambiente e se move em direção a lugares com um ambiente mais favorável. Quimiotaxia é importante para o funcionamento apropriado da célula. Uma bactéria *E. coli* compara a concentração atrativa atual com a concentração atrativa passada. Se ela detecta uma mudança positiva na concentração atrativa, ela deve se mover no sentido do gradiente. Para fazer isso, a probabilidade de uma cambalhota é, consequentemente, a sua frequência de cambalhota, é reduzida, e as corridas correspondentes são mais longas. Em contraste, se ela detecta um aumento na concentração repelente, a hipótese parece ser de que ela tenha nadado na direção errada, por isso ela aumenta a sua frequência de cambalhota e tenta mudar de direção, de modo a nadar para longe dos repelentes. A dinâmica desta quimiotaxia é o assunto do nosso estudo de caso.

Vários modelos diferentes de quimiotaxia bacteriana têm sido desenvolvidos por pesquisadores na biologia sistêmica. Nossa discussão é baseada em dois deles (Barkai & Libler, 1997; Yi *et al.*, 2000). As diferentes proteínas envolvidas na resposta quimiotáctica têm sido bem estudadas e suas interações foram caracterizadas com algum detalhe, como mostrado na Fig. 10.81. Os biólogos têm nomeado as proteínas envolvidas na quimiotaxia por letras do alfabeto prefixadas por “Che”. Assim, temos CheA, CheB e assim por diante. Na superfície da bactéria existem receptores complexos, que incluem a CheW e CheA, com os quais as moléculas atrativas ou repelentes podem se ligar. Estes químicos constituem a entrada para o sistema e são chamados coletivamente de *ligantes*. O sistema é configurado para controlar a frequência de

Ligantes

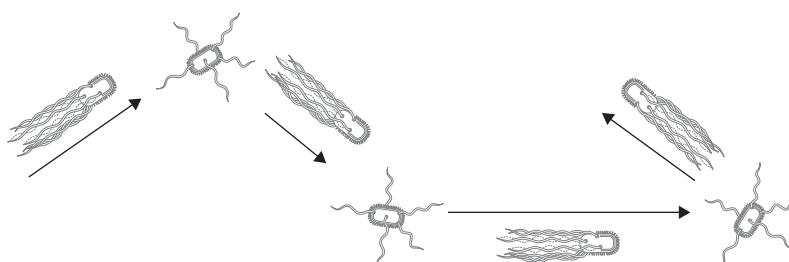
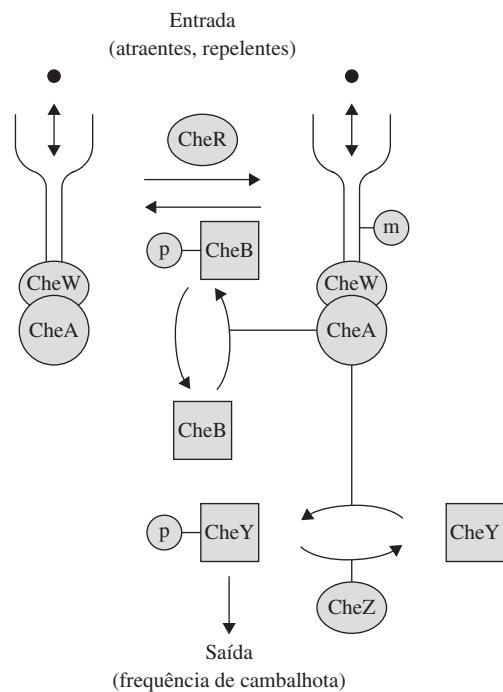


Figura 10.80 Movimentos de *Escherichia coli* se assemelham a um passeio aleatório tendencioso.

Figura 10.81 O sinal da quimiotaxia via transcondução na *E. coli*.



cambalhota, que é feito pela controle da atividade da CheY, a proteína que atua diretamente no motor dos flagelos.

Os receptores estão ativos e aguardando um ligante, ou são inativos e não estão aceitando qualquer ligante. Um receptor complexo torna-se ativo se um grupo metilo ($-CH_3$) é adicionado a ele pela CheR e inativo se o grupo é removido pela CheB. O nível de CheR é principalmente fixado enquanto o nível de CheB é controlado pela atividade do receptor via CheA. Como parte da dinâmica de estado estacionário da quimiotaxia, grupos metil são adicionados regularmente pela CheR e igualmente removidas pela CheB. Este equilíbrio é perturbado quando um ligante se liga a um receptor ativo. Se o ligante é um atraiante, a atividade de CheA é reduzida e, consequentemente, a ação de CheB na desmetilação é reduzida, mas receptores são feitos ativos e a atividade de CheA lentamente retorna ao estado estacionário. Este é o laço de retroalimentação na quimiotaxia. Ao mesmo tempo, uma vez que ele reduz a taxa de ativação de CheB, CheA reduz sua taxa de ativação de CheY e isto faz com que a frequência de cambalhota seja *reduzida*. Como consequência, as bactérias nadam mais e, presumivelmente, nadam em direção à concentração atrativa. Agora, se o ligante é um repelente, a atividade de CheA é aumentada, o que provoca aumento da taxa de atividade de CheY e *aumenta* a frequência de cambalhota. As bactérias nadam menos enquanto “procuram” por uma nova direção, a fim de escapar da concentração de repelentes. Ao mesmo tempo, no laço de retroalimentação, CheB também está mais ativo, os receptores tornam-se inativos a uma taxa maior e, novamente, CheA e a frequência de cambalhota retornam aos seus valores de estado estacionário. O fato da atividade e da concentração do ligante é uma propriedade notável chamada por biólogos sistemáticos de adaptação exata. Como veremos, para um engenheiro de controle, esse é um método de controle muito comum. Um gráfico experimental de quimiotaxia é reproduzido na Fig. 10.82.

0 modelo

O problema, então, é desenvolver um modelo como um diagrama de blocos do sistema de controle que irá descrever o movimento médio desta situação de quimiotaxia. Representamos as médias, como se fossem um receptor complexo com as proteínas relacionadas atuando nos flagelos. Como a pesquisa mostra, as equações são complexas e altamente não lineares. Além

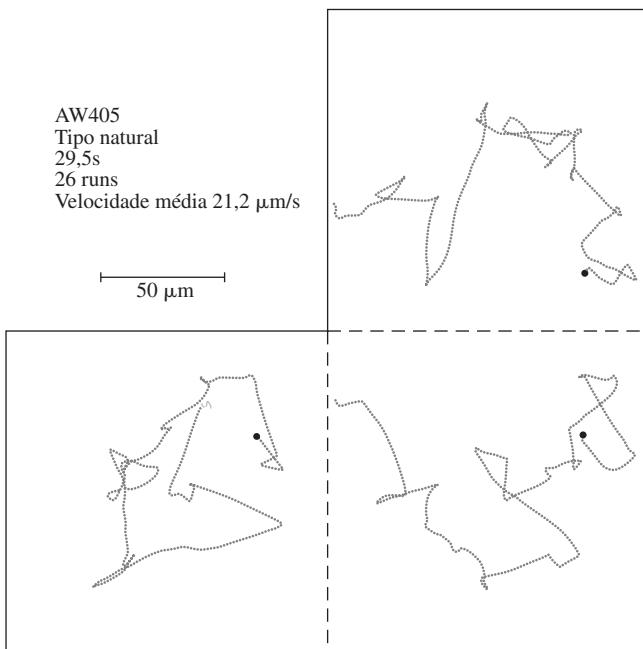


Figura 10.82 Dados experimentais da quimiotaxia da *E. coli* (Berg, 1972). Os gráficos são projeções planas de caminhos 3D.

disso, a superfície da bactéria contém centenas de receptores complexos que interagem como sugerido na Fig. 10.81. Para o nosso estudo, as variáveis do diagrama de blocos são configuradas como lineares, pequenos desvios dos sinais das distâncias médias de seus valores de equilíbrio. A entrada é considerada como sendo a concentração do ligante, com os atrativos sendo positivos e os repelentes sendo negativos. As saídas do sistema são as atividades de CheA-P e o movimento resultante se dá na única direção x . Os parâmetros do nosso modelo foram selecionados de modo que as respostas fossem compatíveis com as curvas dadas na Fig. 10 de (Mello *et al.* 2004). Os mecanismos de movimento unidimensional assumem que o atrito viscoso domina a massa, assim, a dinâmica é um único integrador. O modelo é baseado nos seguintes fatos.

- Observa-se que, quando um ligante se liga a um receptor ativo, as alterações nas concentrações de CheA-P e as CheB e CheY-P resultantes são quase instantâneas.
- No entanto, a mudança na concentração de CheB altera apenas a taxa de desmetilação, não a extensão do próprio desmetil. As alterações no nível de metil são muito mais lentas do que as mudanças na taxa de cambalhota.
- Após a inserção de uma concentração de atraentes, a “atividade” como medida pela concentração de CheA cai rapidamente e, em seguida, lentamente o mesmo nível de estado estacionário é exatamente recuperado. Esta propriedade é chamada de *adaptação* de atividade.

Adaptação

O diagrama de blocos de controle mostrado na Fig. 10.83 implementa esses fatos, incluindo a adaptação. Como se vê, a adaptação resultante é realizada pelo esquema de controle integral padrão. Um esquema no SIMULINK é mostrado na Fig. 10.84, e as respostas para as concentrações fixas de CheR, nas Figuras 10.85, 10.86 e 10.87. Se o valor de CheR for alterado,

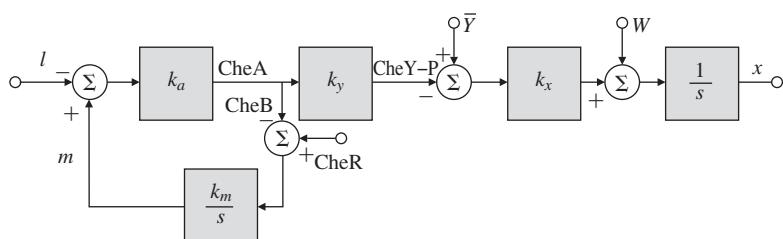


Figura 10.83 Diagrama de blocos simplificado de quimiotaxia da *E. coli*. ℓ representa o ligante, m a metilação, CheR a taxa de metilação em estado estacionário e w o estado estacionário do movimento aleatório.

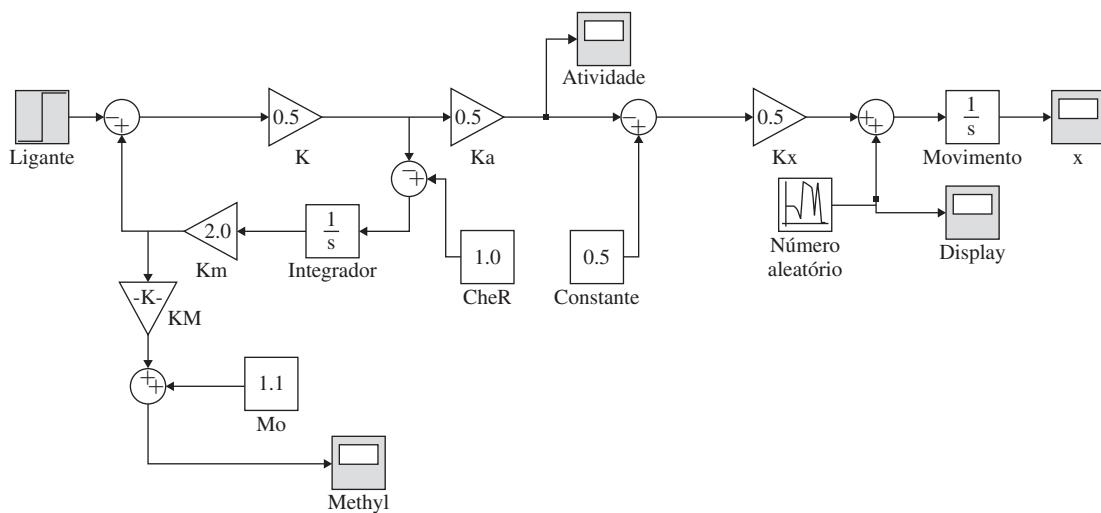


Figura 10.84 Um diagrama esquemático no SIMULINK para simulação da quimiotaxia da *E. coli*.

a intensidade da atividade em estado estacionário muda e a constante de tempo da metilação também.

No final, deixamos este estudo de caso com mais perguntas do que respostas. Por exemplo, deve ser possível a obtenção do modelo pela análise de pequenos sinais a partir das equações químicas e físicas dos processos. O modelo, como apresentado, poderia ser modificado para considerar as variações da concentração de CheR, por exemplo. Finalmente, como o modelo poderia ser estendido para descrever o movimento em três dimensões? Esperamos que alguém que esteja usando este livro seja inspirado a encontrar as respostas dessas perguntas.

Resumo e recapitulação

Durante anos, os biólogos se concentraram no estudo de várias partes dos organismos vivos. Recentemente, o foco mudou para estudar o comportamento de todo o organismo como um sistema de partes interligadas. Desde os anos 1970, sabe-se experimentalmente que muitos sistemas biológicos se ajustam ao seu ambiente de forma adaptativa. Recentemente, modelos analíticos têm sido desenvolvidos para explicar esse fenômeno como discutimos neste estudo

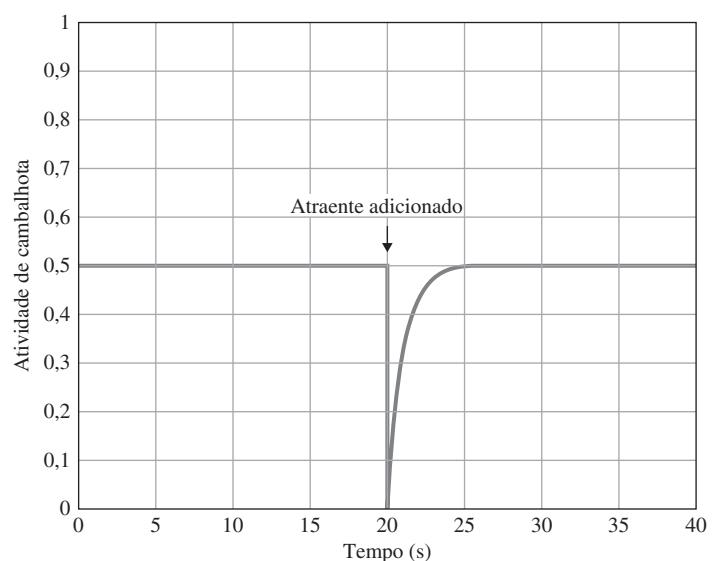


Figura 10.85 Frequência de cambalhota simuada do modelo de quimiotaxia após a inserção do atraente em $t = 20$ s.

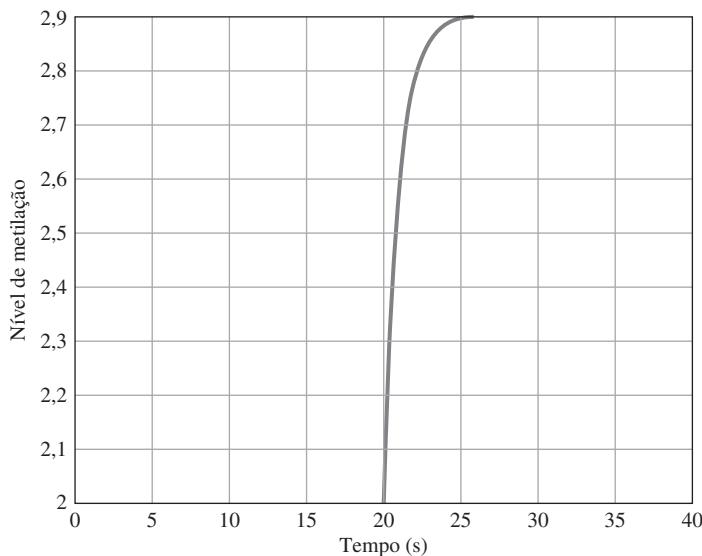


Figura 10.86 A metilação do modelo da quimiotaxia após a inserção do atraente em $t = 20$ s.

de caso. Os novos modelos analíticos podem explicar as propriedades inerentes ao sistema biológico, como a adaptação perfeita robusta obtida pelo controle integral dos locais ativos. Métodos de teoria de controle e interpretações têm se mostrado úteis para aumentar o nível de nossa compreensão do comportamento e das propriedades dos sistemas biológicos. Desejamos que este exemplo simples ajude a estimular o interesse neste emocionante campo.

10.8 Perspectiva histórica

O primeiro piloto automático foi testado em um hidroavião Curtis em 1912, apenas 9 anos após o primeiro voo dos irmãos Wright. Ele consistia em um giroscópio para medir a atitude e de servo motores para ativar as superfícies de controle e foi projetado por Elmer Sperry. Em parte, foi um resultado do projeto dos irmãos Wright para, intencionalmente, tornar a aeronave ligeiramente instável, a fim de torná-la mais controlável pelo piloto. Esse sistema ganhou fama em 1914, quando ganhou um prêmio na França por demonstrar sua capacidade de voar perto do

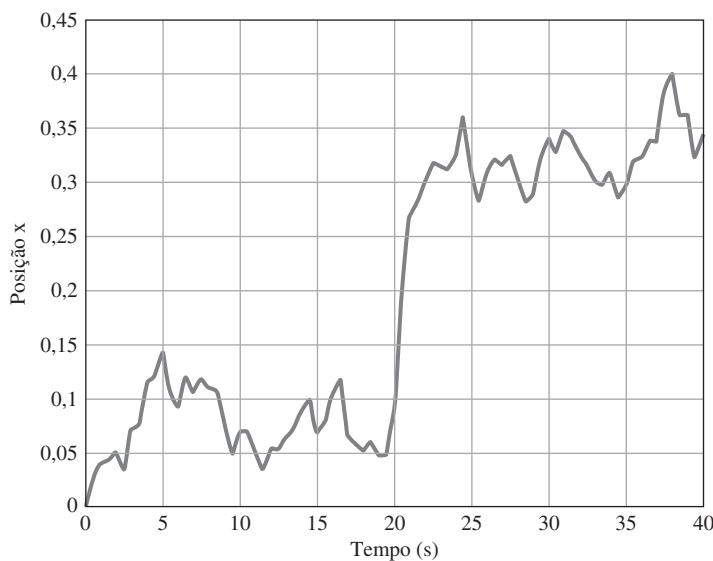


Figura 10.87 Resposta ao movimento do modelo de quimiotaxia após a inserção do atraente em $t = 20$ s.

chão com o mecânico andando para trás e para frente ao longo da asa com o piloto, Lawrence Sperry, de pé na cabine com as mãos no ar.¹⁵

O piloto automático foi desenvolvido clandestinamente em 1915 devido à segurança militar para a Primeira Guerra Mundial. A exibição pública seguinte foi uma adaptação do sistema de Sperry para Wiley Post em seu voo de 1933 ao redor do mundo a bordo do “Winnie Mae”. O voo teria sido quase impossível sem o piloto automático porque ele permitiu a Post repousar. Tem sido relatado que Post tinha um sistema que consistia de uma chave inglesa e uma corda amarrada em seu dedo que poderia acordá-lo caso ele dormisse muito profundamente. O sucesso deste voo levou ao desenvolvimento de um piloto automático que incluiu algumas capacidades de navegação, bem como controle de altitude e, em 1947, a Força Aérea demonstrou um voo transatlântico automático em um avião do tipo DC-3 desde a descolagem até a aterrissagem.

Posteriormente, foram desenvolvidos aviões com asas em flecha e velocidades mais altas, que necessitavam de sistemas de aumento de estabilidade para ajudar o piloto a controlar a aeronave, mesmo quando o piloto automático estivesse desligado. Atualmente, estes sistemas estão em todos aviões de alto desempenho, comerciais e militares. Em 1974, o F-16 se tornou o primeiro avião a ter regimes aerodinâmicos instáveis e era, portanto, altamente dependente do aumento da estabilidade para o voo sustentado. Isso foi implementado para tornar o avião mais manobrável, mas exigiu um sistema *fly-by-wire* e redundância quádrupla para fornecer uma confiabilidade aceitável.

A primeira nave espacial, do final de 1950, não tinha controle de altitude já que sua única missão era fazer medições e transmitir as informações de volta para a terra. No entanto, ela foi seguida no início dos anos 1960 pela nave espacial Corona, cuja missão era tirar fotografias da Terra, o que exigia que a câmera fosse apontada e estabilizada com muita precisão. Na época, essas missões eram secretas, para fins militares, e apresentadas ao público como Discoverer, mas, desde então, foram reveladas e descritas com algum detalhe.¹⁶

Os primeiros pilotos automáticos digitais estavam no módulo lunar e no módulo de comando do programa Apollo no final dos anos 1960. Eles foram desenvolvidos principalmente pelo Laboratório de Instrumentação do MIT, sob a direção de Bill Widnall, Don Fraser e Dick Battin. A decisão de dar o passo corajoso de usar tecnologia digital pela primeira vez, em vez da implementação tradicional analógica, foi feita pela NASA a fim de lidar com a complexidade exigida em um peso razoável.

Antes de 1980, os sistemas de controle de motores automobilísticos consistiam de uma estrutura mecânica no distribuidor para variar o tempo de faísca e de um sistema fluídico no carburador para variar o fluxo de combustível em resposta à taxa de fluxo de ar ou a mudanças bruscas na posição do pedal do acelerador. Esses são sistemas em malha aberta que, essencialmente, são programados para configurar o controle adequado com base na condição de operação do motor. Em 1980, os carros eram obrigados a melhorar suas taxas de emissão de poluentes; por isso, era essencial melhorar os controles usando a realimentação, conforme descrito na Seção 10.4. Atualmente, estes sistemas ainda existem com o tempo de válvulas variável, o tempo de injeção de combustível variável e os níveis de abertura das válvulas variáveis.

A aplicação de controle para a fabricação de pastilhas de semicondutores está ganhando impulso. Muitas etapas importantes do processo, como o PTR, planarização químico-mecânica e litografia, usam avançados controladores em tempo real. Prevê-se que, durante a próxima década muito mais fabricantes de semicondutores empregarão sofisticados controles de realimentação à medida que novos sensores se tornarem disponíveis. Esta adoção de sofisticados sistemas de controle em malha fechada por parte da indústria de semicondutores apresenta novos desafios e oportunidades para engenheiros de sistemas de controle, especialmente para as próximas pastilhas de 450 mm de diâmetro. A aplicação de controle na microscopia de força por ressonância magnética (MFRM) para visualização da estrutura atômica dos materiais (de Roover *et al.*, 2008) pode mudar fundamentalmente nossa compreensão das estruturas atômicas dos aparelhos e permitir a visualização de subsistemas biológicos.

¹⁵ Sem conexão mecânica com as superfícies de controle.

¹⁶ Taubman (2003).

O campo emergente da biologia sistêmica marca a chegada da maturidade das ciências da vida. A abordagem comum de estudar os componentes individuais está sendo substituída por uma nova abordagem, focada na compreensão do comportamento de todo o sistema biológico. Entre as metas admiráveis estão o entendimento do comportamento de sistemas biológicos e da descoberta da cura para doenças como o câncer, bem como o desenvolvimento de novas abordagens para a descoberta de novas drogas e a produção de antibióticos e vacinas.

As aplicações da teoria de controle nunca foram mais emocionantes do que são hoje. Aplicações das ideias do controle realimentado para sistemas biológicos, controle de congestionamento em rede e novos sistemas aeroespaciais estão surgindo. Aplicações em tratamentos genômicos, tratando o corpo humano como um sistema dinâmico, estão em andamento. A internet tem atraído a atenção de muitos pesquisadores de sistemas de controle ávidos em entender o enorme sucesso desta tecnologia e como melhorá-la. Projeto de rede e controle, incluindo a modelagem da internet, e desenvolvimento de roteamento e controle de congestionamento estão em estudo. Vários de nossos colegas estão entusiasmados com a aplicação da teoria de controle no campo financeiro. Se você gosta disso, você vai adorar a bolha imobiliária!

RESUMO

- Neste capítulo, estabelecemos um esquema básico de projeto de sistemas de controle e o aplicamos a seis estudos de casos típicos. O esquema de controle requer um número explícito de passos.
 1. *Faça um modelo do sistema e determine as especificações de desempenho requeridas.* O objetivo deste passo é responder à pergunta: qual é o sistema e o que ele deve fazer?
 2. *Seleção de sensores.* Uma regra básica de controle é que se você não pode observá-lo, você não pode controlá-lo. A seguir, estão alguns fatores a serem considerados na seleção dos sensores:
 - (a) Número e localização dos sensores
 - (b) Tecnologia a ser usada
 - (c) Desempenho do sensor, como sua precisão
 - (d) Dimensões físicas, peso e tamanho
 - (e) Qualidade do sensor, como seu tempo de vida e robustez a mudanças ambientais
 - (f) Custo
 3. *Seleção de atuadores.* Os atuadores devem ser capazes de acionar o sistema de modo a satisfazer às especificações de desempenho exigidas. A seleção é regida pelos mesmos fatores que se aplicam à seleção de sensor.
 4. *Faça um modelo linear.* Todos os nossos métodos de projeto são baseados em modelos lineares. Tanto os modelos de pequenos sinais de perturbação quanto os métodos de linearização por realimentação podem ser usados.
 5. *Teste um controlador PID simples.* Um esforço para atender às especificações com um PID ou com seu primo, o compensador de atraso e avanço, pode ter sucesso; em qualquer caso, tal esforço vai expor a natureza do problema de controle.
 6. *Avalie/modifique a planta.* Avalie se modificações na planta melhoraram o desempenho em malha fechada; em caso afirmativo, retorne ao Passo 1 ou 4.
 7. *Teste um projeto ótimo.* O método do LRS para seleção da lei de controle e projeto do estimador baseado nas equações de estado certamente fornecerá um sistema de controle estável e pode ser estruturado de forma a apresentar um compromisso entre a redução de erros e do esforço de controle. Uma alternativa é a alocação de polos arbitrários, que fornece ao projetista controle direto da resposta dinâmica. Tanto o LRS e os métodos de alocação de polos podem resultar em projetos que não são robustos às alterações dos parâmetros.
 8. *Simule o projeto e verifique seu desempenho.* Todas as ferramentas de análise devem ser usadas aqui, incluindo o lugar das raízes, a resposta em frequência, as medidas da GM e PM e as respostas transitórias. Além disso, o desempenho do projeto pode ser testado com simulações considerando alterações nos parâmetros do modelo e os efeitos da aproximação do compensador por um modelo discreto se o controle digital for usado.

- 9.** *Construa um protótipo e meça o desempenho com sinais de entrada típicos.* Nenhum projeto de controle é aceitável até que tenha sido testado. Nenhum modelo pode incluir todas as características de um dispositivo físico real; assim, o último passo antes da implementação do projeto é experimentá-lo em um protótipo físico, se o tempo e o orçamento permitirem.
- O estudo de caso do satélite ilustra, em particular, a utilização de uma compensação do tipo rejeita faixa para um sistema com ressonância levemente amortecida. Também se demonstrou que sistemas com o atuador e sensor justapostos são muito mais fáceis de controlar do que sistemas não justapostos.
 - O estudo de caso da estabilização lateral do Boeing 747 ilustrou o uso da realimentação como uma malha interna projetada para auxiliar o piloto, que fornece o controle primário em malha externa.
 - O controle de altitude do Boeing 747 mostrou como combinar realimentação na malha interna com compensação na malha externa para projetar um sistema de controle completo.
 - O controle da relação ar-combustível no motor automobilístico ilustrou o uso do diagrama de Bode para projetar um sistema que inclui atraso de tempo. A simulação do projeto com o sensor não linear confirmou nossa análise heurística de ciclos limites, utilizando o conceito de ganho equivalente com um lugar das raízes.
 - O estudo de caso da unidade de disco ilustrou o controle em um ambiente incerto, no qual a largura de banda é muito importante.
 - O estudo de caso PTR ilustrou modelagem e controle de um sistema térmico não linear.
 - O estudo de caso da quimiotaxia da *E. coli* ilustrou um exemplo simples da aplicação das ideias da teoria de controle para o campo emergente da biologia sistêmica.
 - Em todos os casos, o projetista precisa ser capaz de usar várias ferramentas, incluindo o lugar das raízes, a resposta em frequência, alocação de polos por realimentação de estados e simulação da resposta temporal, para obter um bom projeto. Prometemos uma compreensão destas ferramentas no início do texto e agora acreditamos que você esteja pronto para praticar a arte de engenharia de controle.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. Por que uma configuração justaposta do atuador e sensor em uma estrutura levemente amortecida, como um braço robótico, é mais fácil de projetar do que uma configuração não justaposta?
2. Por que o engenheiro de controle deve ser envolvido no projeto do processo a ser controlado?
3. Dê exemplos de um atuador e um sensor para os seguintes problemas de controle:
 - (a) Controle de atitude de um satélite de comunicação geossíncrona.
 - (b) Controle de arfagem em um avião Boeing 747.
 - (c) Controle de rastreamento de trilha em uma unidade de disco.
 - (d) Controle da relação ar-combustível de um motor de automóvel de ignição à faísca.
 - (e) Controle da posição de um braço robótico usado para pintar automóveis.
 - (f) Controle de posição de um navio.
 - (g) Controle de atitude de um helicóptero.

PROBLEMAS

- 10.1** Entre os três tipos de controle PID (proporcional, integral ou derivado), qual é mais eficaz na redução do erro resultante a partir de uma perturbação constante? Explique.
- 10.2** Existe uma maior chance de instabilidade quando o sensor em um sistema de controle realimentado para uma estrutura mecânica não está justaposto com o atuador? Explique.
- 10.3** Considere a planta $G(s) = 1/s^3$. Determine se é possível estabilizar esta planta adicionando o compensador de avanço

$$D_c(s) = K \frac{s + a}{s + b}, \quad (a < b).$$

- (a) Qual é a margem de fase máxima do sistema realimentado resultante?
- (b) É possível que um sistema com esta planta, juntamente com qualquer número de compensadores de avanço, seja incondicionalmente estável? Explique.

10.4 Considere o sistema em malha fechada mostrado na Fig. 10.88

- Qual é a margem de fase se $K = 70.000$?
- Qual é a margem de ganho se $K = 70.000$?
- Qual valor de K fornecerá uma margem de fase de $\sim 70^\circ$?
- Qual valor de K fornecerá uma margem de fase de $\sim 0^\circ$?
- Esboce o lugar das raízes em relação a K para o sistema e determine qual valor de K faz com que o sistema esteja à beira da instabilidade.
- Se a perturbação w é uma constante e $K = 10.000$, qual é o valor máximo permitido para w se $y(\infty)$ permanece inferior a 0,1? (Suponha que $r = 0$).
- Suponha que as especificações exigem que você permita valores maiores de w do que o valor obtido no item (f), mas com a mesma restrição no erro [$|y(\infty)| < 0,1$]. Discuta quais os passos que você pode tomar para aliviar o problema.

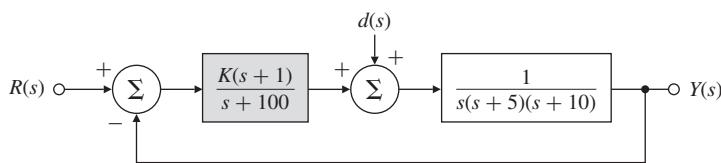


Figura 10.88 Sistema de controle para o Problema 10.4.

10.5 Considere o sistema mostrado na Fig. 10.89, que representa o controle da taxa de atitude para uma certa aeronave.

- Projete um compensador tal que os polos dominantes estejam em $-2 \pm 2j$.
- Esboce o diagrama de Bode para seu projeto e selecione o compensador tal que a frequência de cruzamento seja ao menos $2\sqrt{2}$ rad/s e $PM \geq 50^\circ$.
- Esboce o lugar das raízes para seu projeto e encontre a constante de velocidade quando $\omega_n > 2\sqrt{2}$ e $\zeta \geq 0,5$.

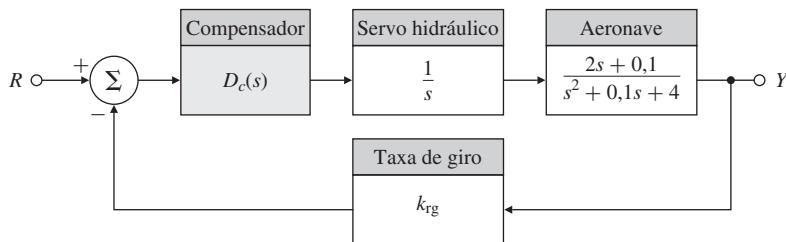


Figura 10.89 Diagrama de blocos para o controle da taxa de atitude de uma aeronave.

10.6 Considere o diagrama de blocos para o servomecanismo desenhado na Fig. 10.90. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- A dinâmica do atuador (polo em 1.000 rad/s) deve ser incluída em uma análise para avaliar o máximo ganho utilizável para o qual o sistema de controle é estável.
- O ganho K deve ser negativo para que o sistema seja estável.
- Existe um valor de K para o qual o sistema de controle oscila a uma frequência entre 4 e 6 rad/s.
- O sistema é instável se $|K| > 10$.
- Se K deve ser negativo para a estabilidade, o sistema de controle não pode neutralizar uma perturbação positiva.
- Uma perturbação constante positiva irá acelerar a carga, tornando o valor final e negativo.
- Apenas com a entrada de comando r positiva e constante, o sinal de erro e deve ter um valor final maior do que zero.
- Para $K = -1$, o sistema em malha fechada é estável, e a perturbação resulta em um erro de velocidade cuja magnitude do erro em estado estacionário é inferior a 5 rad/s.

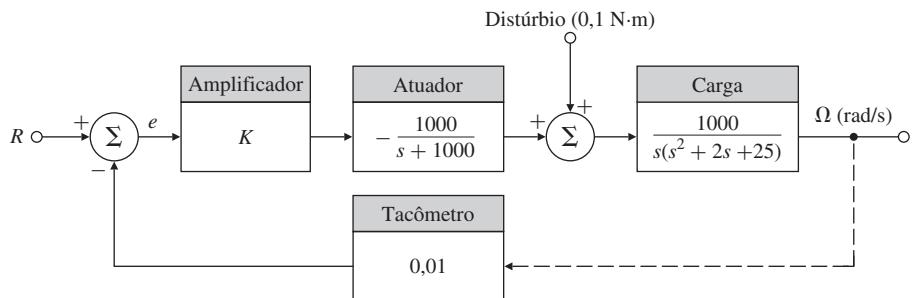
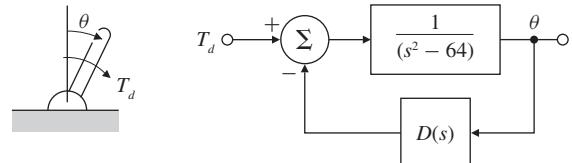


Figura 10.90 Servomecanismo para o Problema 10.6.

- 10.7** Uma balança e o seu diagrama de blocos de controle correspondente são mostrados na Fig. 10.91. O controle é um torque aplicado sobre o pivô.

- (a) Usando as técnicas do lugar das raízes, projete um compensador $D(s)$ que irá alocar as raízes dominantes em $s = -5 \pm 5j$ (correspondente a $\omega_n = 7$ rad/s e $\zeta = 0,707$).
- (b) Use as técnicas de esboço do diagrama de Bode para projetar um compensador $D(s)$ para atender às seguintes especificações:
 - Estado estacionário do deslocamento θ menor de 0,001 para uma constante de entrada de torque $T_d = 1$.
 - Margem de fase $\geq 50^\circ$.
 - Largura de banda de malha fechada de $\cong 7$ rad/s.

Figura 10.91 Servomecanismo para o Problema 10.7.



- 10.8** Considere o sistema realimentado padrão desenhado na Fig. 10.92.

- (a) Suponha

$$G(s) = \frac{2500 K}{s(s + 25)}.$$

Projete um compensador de avanço de modo que a margem de fase do sistema seja maior que 45° ; o erro em estado estacionário devido a uma rampa deve ser menor ou igual a 0,01.

- (b) Usando a função de transferência planta no item (a), projete um compensador de avanço de modo que o sobressinal seja inferior a 25% e o tempo de acomodação (1%), inferior a 0,1 s.
- (c) Suponha

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + 0,1s)(1 + 0,2s)}$$

e considere as especificações de desempenho $K_v = 100$ e $PM \geq 40^\circ$. O compensador de avanço para esse sistema é eficiente? Encontre um compensador de atraso e trace o lugar das raízes do sistema compensado.

- (d) Usando $G(s)$ no item (c), projete um compensador de atraso tal que o pico do sobressinal seja menor que 20% e $K_v = 100$.
- (e) Repita o item (c) usando um compensador de atraso e avanço.
- (f) Encontre o lugar das raízes do sistema compensado no item (e) e compare com seus resultados do item (c).

- 10.9** Considere o sistema na Fig. 10.92, sendo

$$G(s) = \frac{300}{s(s + 0,225)(s + 4)(s + 180)}.$$

O compensador $D_c(s)$ deve ser projetado tal que o sistema em malha fechada satisfaça às seguintes especificações:

- Erro em estado estacionário nulo para entradas em degrau
- $PM = 55^\circ$, $GM \geq 6$ db
- Frequência de cruzamento não seja menor do que a da planta não compensada
- (a) Qual tipo de compensador deve ser usado e por quê?
- (b) Projete um compensador $D_c(s)$ adequado para satisfazer às especificações.

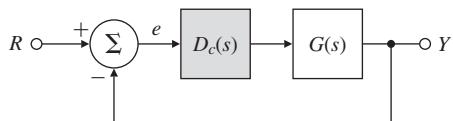


Figura 10.92 Diagrama de blocos para um sistema de controle realimentado padrão.

- 10.10** Discutido três métodos de projeto: o método do lugar das raízes de Evans, o método de resposta em frequência de Bode e o método de alocação de polos no espaço de estados. Explique qual desses métodos é *mais bem* descrito pelas seguintes afirmações (se você sentir que mais de um método se encaixa igualmente bem a uma declaração dada, diga e explique o porquê):
- Este método é o mais comumente utilizado quando a descrição da planta deve ser obtida a partir de dados experimentais.
 - Este método proporciona um controle mais direto sobre as características da resposta dinâmica, tais como o tempo de subida, sobressinal e tempo de acomodação.
 - Este método consegue adequar-se mais facilmente a uma implementação automatizada (por computador).
 - Este método proporciona o controle mais direto sobre as constantes de erro em estado estacionário K_p e K_v .
 - Este é o método mais provável de fornecer o controlador *menos complexo* capaz de atender com precisão às especificações dinâmicas e estáticas.
 - Este método permite que o projetista garanta que o projeto final seja incondicionalmente estável.
 - Este método pode ser usado sem modificação em plantas que incluem termos de atraso de transporte, por exemplo,

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}.$$

- 10.11** Redes de atraso e avanço são tipicamente empregadas em projetos baseados na resposta em frequência (Bode). Assumindo um sistema do Tipo 1, indique o efeito destas redes de compensação em cada uma das especificações de desempenho listadas. Em cada caso, indique o efeito como “um aumento”, “substancialmente inalterada” ou “um decréscimo”. Use a planta de segunda ordem $G(s) = K/[s(s + 1)]$ para ilustrar suas conclusões.

- K_v
- Margem de fase
- Largura de banda em malha fechada
- Percentual de sobressinal
- Tempo de acomodação

- 10.12** *Controle de altitude de um balão de ar quente.* O balonista americano Steve Fossett aterrissou no deserto australiano a bordo do *Spirit of Freedom* em 3 de julho de 2002, tornando-se o primeiro balonista solo a circunavegar o globo (veja a Fig. 10.93). As equações de movimento vertical para um balão de ar quente (Fig. 10.94), linearizadas no equilíbrio vertical, são

$$\delta\dot{T} + \frac{1}{\tau_1}\delta T = \delta q,$$

$$\tau_2\ddot{z} + \dot{z} = a\delta T + w,$$

sendo

δT = desvio da temperatura do ar quente da temperatura de equilíbrio em que a força de flutuação é igual ao peso,

z = altitude do balão,

δq = desvio da taxa de aquecimento do queimador em relação à taxa de equilíbrio (normalizada pela capacidade térmica do ar quente),

Figura 10.93 Balão *Spirit of Freedom*.
Fonte: French Navy/Tahitipresse.



w = componente vertical da velocidade do vento,
 τ_1, τ_2, a = parâmetros das equações.

Um piloto automático de manutenção de altitude é projetado para um balão cujos parâmetros são

$$\tau_1 = 250 \text{ s} \quad \tau_2 = 25 \text{ s} \quad a = 0,3 \text{ m}/(\text{s} \cdot ^\circ\text{C}).$$

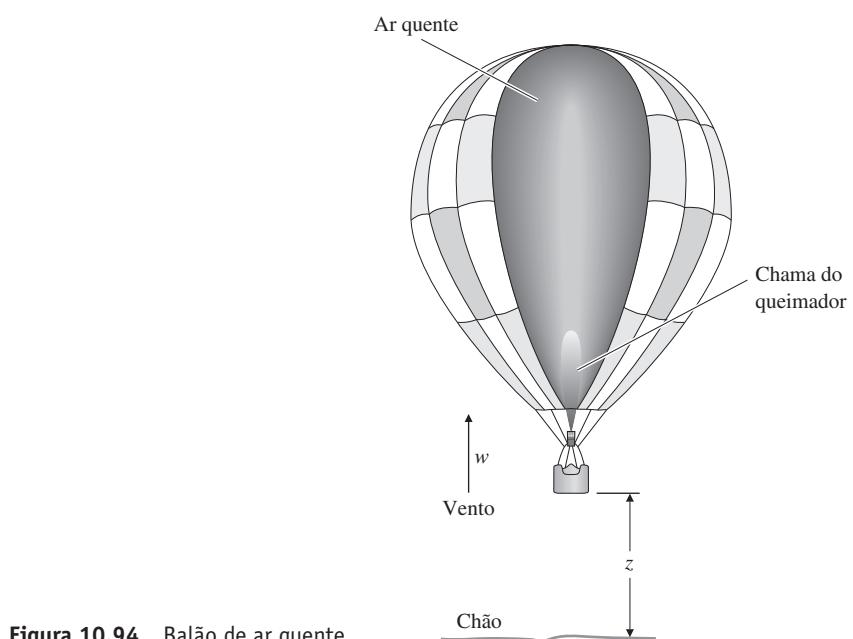


Figura 10.94 Balão de ar quente.

Apenas a altitude é medida, então uma lei de controle da forma

$$\delta q(s) = D(s)[z_d(s) - z(s)]$$

seria usada, sendo z_d a altitude (comandada) desejada.

- (a) Esboce um lugar das raízes dos autovalores de malha fechada com relação ao ganho K para um controlador proporcional com realimentação, $\delta q = -K(z - z_d)$. Use o critério de Routh (ou faça $s = j\omega$ e encontre as raízes do polinômio característico) para determinar o valor do ganho e da frequência associada na qual o sistema é marginalmente estável.
- (b) Nossa intuição e os resultados do item (a) indicam que uma quantidade relativamente grande de compensação de avanço é necessária para projetar um piloto automático satisfatório. Em razão de Steve Fossett ter sido um milionário, ele poderia pagar por uma implementação de controlador mais complexo. Esboce um lugar das raízes dos autovalores de malha fechada em relação ao ganho K para um compensador de avanço duplo, $\delta q = -D(s)(z_d - z)$, sendo

$$D(s) = K \left(\frac{s + 0,03}{s + 0,12} \right)^2.$$

- (c) Esboce as curvas de magnitude dos diagramas de Bode (apenas as assíntotas) para as funções de transferência em malha aberta dos sistemas com realimentação proporcional e com compensador de avanço.
- (d) Selecione um ganho K para que o sistema com o compensador de avanço forneça uma frequência de cruzamento de 0,06 rad/s.
- (e) Com o ganho selecionado no item (d), qual é o erro em estado estacionário na altitude para um vento vertical constante de 1 m/s? (Cuidado: primeiro encontre a função de transferência em malha fechada de w para o erro.)
- (f) Se o erro no item (e) for muito grande, como você pode modificar a compensação para fornecer maior ganho de baixa frequência? (Dê apenas uma resposta qualitativa.)

- 10.13** Sistemas de controle de atitude de satélites muitas vezes usam uma roda de reação para proporcionar movimento angular. As equações de movimento para um sistema desse tipo são

$$\begin{aligned} \text{Satélite: } & I\ddot{\phi} = T_c + T_{ex}, \\ \text{Roda: } & J\dot{r} = -T_c, \\ \text{Medição: } & \dot{Z} = \dot{\phi} - aZ, \\ \text{Controle: } & T_c = -D(s)(Z - Z_d), \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} J &= \text{momento de inércia da roda}, \\ r &= \text{velocidade da roda}, \\ T_c &= \text{controle de torque}, \\ T_{ex} &= \text{distúrbio de torque}, \\ \phi &= \text{ângulo a ser controlado}, \\ Z &= \text{medidação do sensor}, \\ Z_d &= \text{ângulo de referência}, \\ I &= \text{inércia do satélite (1.000 kg/m}^2\text{)}, \\ a &= \text{constante do sensor (1 rad/s)}, \\ D(s) &= \text{compensador}. \end{aligned}$$

- (a) Suponha que $D(s) = K_0$, uma constante. Desenhe o lugar das raízes em relação a K_0 para o sistema em malha fechada resultante.
- (b) Para qual faixa de K_0 o sistema em malha fechada é estável?
- (c) Adicione uma rede de avanço com um polo em $s = -1$ de modo que o sistema em malha fechada tenha uma largura de banda $\omega_{BW} = 0,04$ rad/s, um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$ e o compensador dado por

$$D(s) = K_1 \frac{s + z}{s + 1}.$$

Onde o zero da rede de avanço deve ser posicionado? Desenhe o lugar das raízes do sistema compensado e dê o valor de K_1 que permite que as especificações sejam cumpridas.

- (d) Para qual faixa de K_1 o sistema é estável?
(e) Qual é o erro em estado estacionário (a diferença entre Z e alguma entrada de referência Z_d) para uma constante de torque de distúrbio T_{ex} para o projeto do item (c)?
(f) Qual é o tipo do sistema em relação à rejeição de T_{ex} ?
(g) Desenhe as assíntotas do diagrama de Bode para um sistema em *malha aberta*, com o ganho ajustado para o valor de K_1 calculado no item (c). Adicione o compensador do item (c) e calcule a margem de fase do sistema em malha fechada.
(h) Escreva as equações de estado para o sistema em malha aberta, usando as variáveis, ϕ , $\dot{\phi}$ e Z . Selecione os ganhos do controlador de realimentação de estados $T_c = -K_\phi\phi - K_{\dot{\phi}}\dot{\phi}$ para alocar os polos de malha fechada em $s = -0,02 \pm 0,02j\sqrt{3}$.

10.14 Três projetos alternativos estão esboçados na Fig. 10.95 para o controle em malha fechada de um sistema com a função de transferência da planta $G(s) = 1/(s+1)$. O sinal de w é o ruído da planta e pode ser analisado como se fosse um degrau; o sinal v é o ruído do sensor e pode ser analisado como se contivesse potência para frequências muito elevadas.

- (a) Calcule os valores dos parâmetros K_1, a, K_2, K_T, K_3, d e K_D tal que, em cada caso (assumindo $w = 0$ e $v = 0$),

$$\frac{Y}{R} = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}.$$

Note que, no sistema III, um polo deve ser alocado em $s = -4$.

- (b) Complete a seguinte tabela, expressando as últimas entradas como A/s^k para mostrar quão rápido o ruído de v é atenuado em altas freqüências.

Sistema	K_v	$\left. \frac{y}{w} \right _{s=0}$	$\left. \frac{y}{v} \right _{s \rightarrow \infty}$
I			
II			
III			

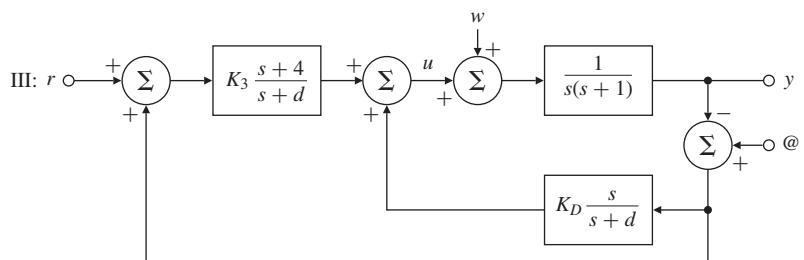
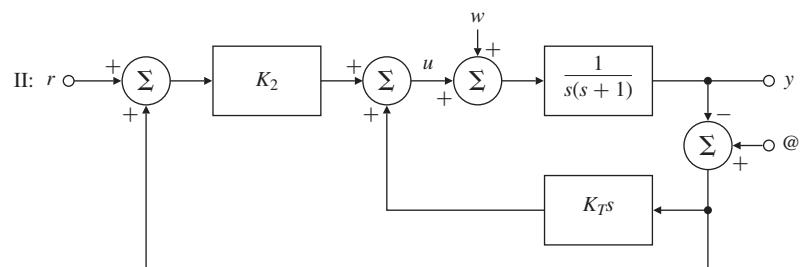
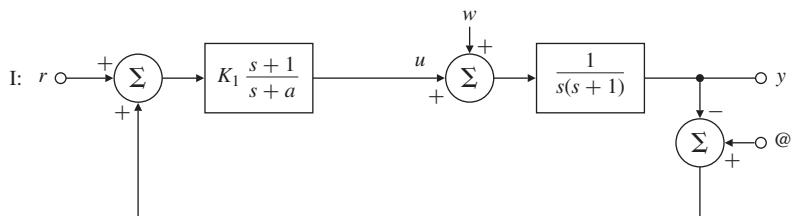


Figura 10.95 Estruturas de realimentação alternativas para o Problema 10.14.

- (c) Ordene os três projetos de acordo com as seguintes características (o melhor como “1”, o pior como “3”):

I	II	III
Rastreamento		
Rejeição de ruído da planta		
Rejeição de ruído do sensor		

- 10.15** As equações de movimento para um pêndulo invertido sobre um carrinho, com as variáveis de estado: ângulo do pêndulo, velocidade angular do pêndulo e a velocidade do carrinho, são

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 31.33 & 0 & 0.016 \\ -31.33 & 0 & -0.216 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.649 \\ 8.649 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [10 \ 0 \ 0] \mathbf{x},$$

sendo o ângulo do pêndulo a saída e a tensão no motor que aciona suas rodas a entrada de controle.

- (a) Calcule a função de transferência de u para y e determine os polos e zeros.
- (b) Determine o ganho de realimentação \mathbf{K} necessário para alocar os polos do sistema em $-2,832$ e $-0,521 \pm 1,068j$, com $\omega_n = 4$ rad/s.
- (c) Determine o ganho do estimador \mathbf{L} necessário para alocar os três polos do estimador em -10 .
- (d) Determine a função de transferência do compensador por realimentação dos estados estimados definido pelos ganhos nos itens (b) e (c).
- (e) Suponha que usemos um estimador de ordem reduzida com polos em -10 e -10 . Qual é o ganho do estimador necessário?
- (f) Repita o item (d) usando o estimador de ordem reduzida.
- (g) Calcule a resposta em frequência dos dois compensadores.

- 10.16** Um Boeing 747 de 282 toneladas está se aproximando do solo ao nível do mar. Se usarmos o estudo dado no estudo de caso (Seção 10.3) e assumirmos uma velocidade de 221 pés/s (Mach 0,198), então as equações de perturbação da direção lateral são

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0890 & -0.989 & 0.1478 & 0.1441 \\ 0.168 & -0.217 & -0.166 & 0 \\ -1.33 & 0.327 & -0.975 & 0 \\ 0 & 0.149 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0148 \\ -0.151 \\ 0.0636 \\ 0 \end{bmatrix} \delta r,$$

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix}.$$

A função de transferência correspondente é

$$G(s) = \frac{r(s)}{\delta r(s)} = \frac{-0,151(s+1,05)(s+0,0328 \pm 0,414j)}{(s+1,109)(s+0,0425)(s+0,0646 \pm 0,731j)}.$$

- (a) Esboce o lugar das raízes não compensado [para $1 + KG(s)$] e a resposta em frequência do sistema. Qual tipo de controlador clássico poderia ser usado para este sistema?
- (b) Teste uma abordagem de projeto em variáveis de estado traçando um LRS para o sistema. Escolha os polos

$$\alpha_c(s) = (s+1,12)(s+0,165)(s+0,162 \pm 0,681j),$$

e escolha os polos do estimador cinco vezes mais rápidos em

$$\alpha_e(s) = (s+5,58)(s+0,825)(s+0,812 \pm 3,40j).$$

- (c) Calcule a função de transferência do compensador baseado no LRS.
- (d) Discuta as propriedades de robustez do sistema em relação às variações dos parâmetros e dinâmicas não modeladas.

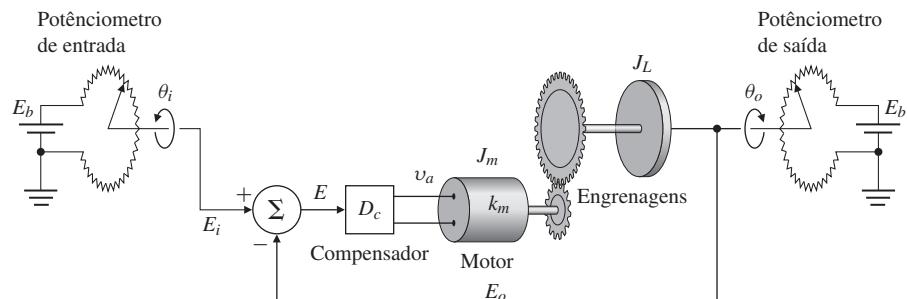
TABELA 10.2 Dados da resposta em frequência para o Problema 10.17

Frequência (rad/s)	$\left \frac{E_0(s)}{V_a(s)} \right $ (db)	Frequência (rad/s)	$\left \frac{E_0(s)}{V_a(s)} \right $ (db)
0,1	60,0	10,0	14,0
0,2	54,0	20,0	2,0
0,3	50,0	40,0	-10,0
0,5	46,0	60,0	-20,0
0,8	42,0	65,0	-21,0
1,0	40,0	80,0	-24,0
2,0	34,0	100,0	-30,0
3,0	30,5	200,0	-48,0
4,0	27,0	300,0	-59,0
5,0	23,0	500,0	-72,0
7,0	19,5		

- (e) Note a similaridade deste projeto com o desenvolvido anteriormente neste capítulo para diferentes condições de voo. O que isso sugere em relação ao uso de um controle (não linear) contínuo ao longo do envelope operacional?

10.17 (Contribuição do Prof L. Swindlehurst). O sistema de controle realimentado mostrado na Fig. 10.96 é proposto como um sistema de controle de posição. Um componente-chave deste sistema é um motor CC controlado pela armadura. O potênciometro de entrada produz uma tensão E_i que é proporcional à posição desejada do eixo: $E_i = K_p\theta_i$. Da mesma forma, o potênciometro de saída produz uma tensão E_0 que é proporcional à posição atual do eixo: $E_0 = K_p\theta_0$. Note que assumimos que os dois potênciometros têm a mesma constante de proporcionalidade. O sinal de erro $E_i - E_0$ aciona um compensador que, por sua vez, produz uma tensão de armadura que aciona o motor. O motor tem uma resistência de armadura R_a , uma indutância de armadura L_a , um torque constante K_t e uma força fem constante K_e . O momento de inércia do eixo do motor é J_m e o amortecimento de rotação devido ao atrito do rolamento é B_m . Finalmente, a relação de engrenagem é N : 1, o momento de inércia da carga é J_L e o amortecimento da carga é B_L .

- (a) Escreva as equações diferenciais que descrevem o funcionamento deste sistema realimentado.
 (b) Encontre a função de transferência relacionando $\theta_0(s)$ e $\theta_i(s)$ para um compensador geral $D_c(s)$.
 (c) Os dados da resposta em frequência de malha aberta apresentados na Tabela 10.2 foram obtidos utilizando a tensão de armadura v_a do motor como uma entrada e a saída de tensão do potênciometro E_0 como a saída. Assumindo que o motor é linear e de fase mínima, faça uma estimativa da função de transferência do motor,



$E_i = \text{tensão de entrada do potênciometro} \\ = K_p\theta_i$ $E_o = \text{tensão de saída do potênciometro} \\ = K_p\theta_o$ $E = E_i - E_o = \text{erro de tensão} = K_p(\theta_i - \theta_o)$ $v_a = \text{tensão de armadura aplicada ao motor}$ $E_b = \text{tensão da bateria aplicada nos potênciometros}$

Figura 10.96 Um servomecanismo com engrenagens no eixo do motor e sensores potênciometros.

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{V_a(s)},$$

sendo θ_m a posição angular do eixo do motor.

- (d) Determine um conjunto de especificações de desempenho que são apropriadas para um sistema de controle de posição e que irão resultar em um bom desempenho. Projete $D_c(s)$ para atender a essas especificações.
- (e) Verifique seu projeto através de análise e simulação usando o MATLAB.

- 10.18** Projete e construa um dispositivo para manter a bola centrada em uma viga balançando livremente. Um exemplo de tal dispositivo é mostrado na Fig. 10.97. Ele utiliza eletroímãs como atuador para mover o feixe, células solares para medir a posição da esfera e um dispositivo de efeito de Hall para medir a posição do feixe. Pesquise outros possíveis atuadores e sensores, como parte de seu trabalho de projeto. Compare a qualidade do controle obtido com a realimentação da posição da bola apenas com a realimentação multimalha das posições da bola e do feixe.

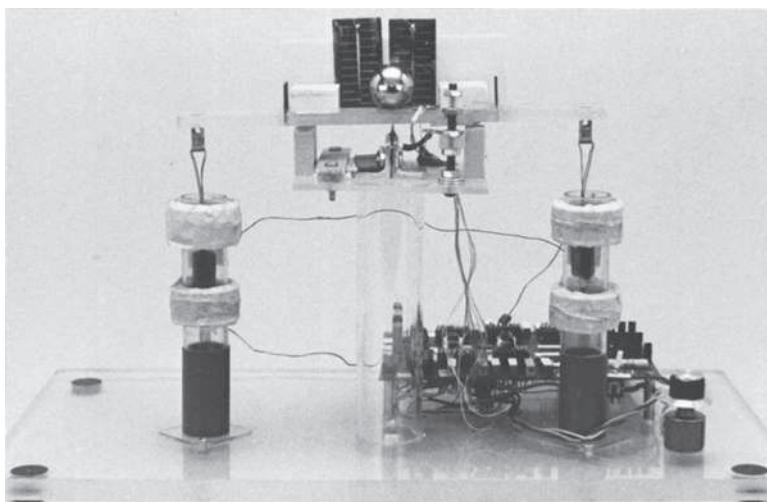


Figura 10.97 Exemplo de projeto do equilibrador de bola.

Fonte: foto cortesia de David Powell.

- 10.19** Projete e construa o dispositivo de levitação magnética mostrado na Fig. 9.2. Você pode desejar usar componentes LEGO em seu projeto.

- 10.20** *Run-to-Run Control.* Considere o sistema PTR mostrado na Fig. 10.98. Queremos aquecer uma pastilha de semicondutores e controlar a temperatura da superfície da pastilha com precisão usando anéis de lâmpadas halógenas de tungstênio. A saída do sistema é a temperatura T em função do tempo: $y = T(t)$. A entrada de referência R no sistema é um degrau desejado na temperatura (700°C), e a entrada de controle é a potência da lâmpada. Um pirômetro é usado para medir a temperatura no centro da pastilha. O modelo do sistema é de primeira ordem, e um controlador integral é usado como mostrado na Fig. 10.98. Normalmente, não há polarização no sensor ($b = 0$).

- (a) Suponha que o sistema de repente desenvolva uma polarização no sensor $b \neq 0$, sendo b conhecido. O que pode ser feito para assegurar erro de rastreamento em estado estacionário da temperatura de comando R nulo, apesar da presença da polarização no sensor?
- (b) Agora, assuma $b = 0$. Na realidade, estamos tentando controlar a espessura de crescimento do filme de óxido (O_x) na pastilha e não a temperatura. No momento, nenhum sensor pode

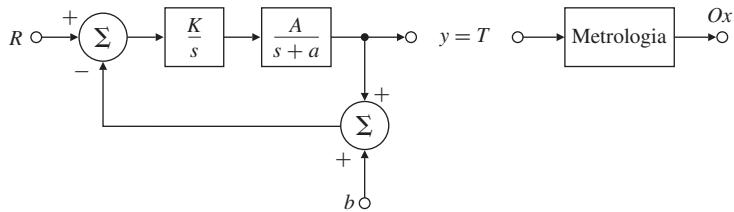


Figura 10.98 Sistema PTR.

medir O_x em tempo real. O engenheiro de processo semicondutor tem de utilizar um equipamento desligado do processo (chamado de *metrologia*) para medir a espessura da película de óxido na pastilha. A relação entre a temperatura de saída do sistema e a O_x é não linear e dada por

$$\text{Espessura do óxido} = \int_0^{t_f} p e^{-\frac{c}{T(t)}} dt,$$

sendo t_f a duração do processo, p e c constantes conhecidas. Sugira um esquema no qual a espessura de óxido no centro da pastilha O_x possa ser controlada para um valor desejado (digamos, $O_x = 5.000 \text{ \AA}$) empregando o controlador de temperatura e da saída da metrologia.

- 10.21** Desenvolva um modelo não linear para uma lâmpada halógena de tungstênio e simule-o no SIMULINK.
- 10.22** Desenvolva um modelo não linear para um pirômetro. Mostre como a temperatura pode ser deduzida a partir do modelo.
- 10.23** Repita o projeto do estudo de caso PTR adicionando três sensores para formar um único sinal para controlar a temperatura média. Demonstre o desempenho do projeto linear e valide o desempenho usando simulação não linear no SIMULINK.
- 10.24** Um dos passos na fabricação da pastilha de semicondutores durante a fotolitografia é realizado posicionando a pastilha sobre uma placa aquecida durante um certo período de tempo. As experiências laboratoriais demonstraram que a função de transferência da potência de aquecimento, u , para a temperatura da pastilha, y , é dada por

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{0,09}{(s + 0,19)(s + 0,78)(s + 0,00018)}.$$

- (a) Esboce um lugar das raízes de 180° para um sistema sem compensação.
- (b) Usando técnicas de projeto do lugar das raízes, projete um compensador *dinâmico*, $D(s)$, tal que o sistema satisfaça às seguintes especificações no domínio do tempo
- $M_p \leq 5\%$
 - $t_r \leq 20 \text{ s}$
 - $t_s \leq 60 \text{ s}$
 - Erro em estado estacionário para um comando de entrada em degrau de $1^\circ \text{C} < 0,1^\circ \text{C}$. Esboce o lugar das raízes de 180° para o sistema compensado.
- 10.25** *Modelo de Excitação-Inibição da Biologia Sistêmica* (Yang e Iglesias, 2005). Em células *Dictyostelium*, a ativação das principais moléculas sinalizadoras envolvidas no sensoriamento quimioatraente pode ser modelada pelo seguinte modelo linearizado de terceira ordem. A perturbação externa para a saída da função de transferência é:

$$\frac{y(s)}{w(s)} = S(s) = \frac{(1 - \alpha)s}{(s + \alpha)(s + 1)(s + \gamma)}$$

sendo w o sinal de perturbação externo proporcional à concentração de quimioatraente e γ a saída, que é a fração de reguladores de resposta ativa. Mostre que existe uma representação alternativa do sistema com a função de transferência “planta”

$$G(s) = \frac{(1 - \alpha)}{s^2 + (1 + \alpha + \gamma)s + (\alpha + \gamma + \alpha\gamma)}$$

e o “regulador realimentado”

$$D(s) = \frac{\alpha\gamma}{(1 - \alpha)s}.$$

Sabe-se que $\alpha \neq 1$ para essa versão do modelo. Desenhe o diagrama de blocos de realimentação do sistema e mostre as localizações da entrada de perturbação e da saída. Qual é o significado desta representação particular do sistema? Qual propriedade oculta do sistema ela revela? A rejeição de perturbação é uma propriedade robusta para este sistema? Trace a resposta de rejeição de perturbação do sistema para uma entrada de perturbação em degrau. Suponha que os valores dos parâmetros do sistema sejam $\alpha = 0,5$ e $\gamma = 0,2$.

Apêndice A Transformada de Laplace

A.1 A transformada de Laplace \mathcal{L}_-

A transformada de Laplace pode ser usada para estudar as características da resposta completa de sistemas realimentados, incluindo a resposta transitória. Isso contrasta com a transformada de Fourier, na qual a resposta em estado estacionário é a preocupação principal. Em muitas aplicações, é útil definir a transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}_-\{f(t)\} = F(s)$, como uma função da variável complexa $s = \sigma + j\omega$, onde

$$F(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (\text{A.1})$$

que utiliza 0^- (isto é, um valor imediatamente antes de $t = 0$) como o limite inferior da integração e é chamada de **transformada de Laplace unilateral**¹ (ou **de um lado**). Uma função $f(t)$ terá uma transformada de Laplace se ela for de **ordem exponencial**, o que significa que existe um número real σ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)e^{-\sigma t}| = 0. \quad (\text{A.2})$$

O termo de decaimento exponencial no integrando de fato fornece um fator de convergência. Isto significa que mesmo se $f(t)$ não desaparece quando $t \rightarrow \infty$, o integrando desaparecerá para valores suficientemente grandes de σ se f não crescer a uma taxa mais rápida que a exponencial. Por exemplo, ae^{bt} é de ordem exponencial, enquanto que e^{t^2} não é. Se $F(s)$ existe para algum $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, então ele existe para todos os valores de s tais que

$$\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0. \quad (\text{A.3})$$

O menor valor de σ_0 para o qual $F(s)$ existe é chamado de **abcissa de convergência**, e a região à direita de $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0$ é chamada de **região de convergência**. Normalmente, a transformada de Laplace bilateral existe para um intervalo específico

$$\alpha < \operatorname{Re}(s) < \beta, \quad (\text{A.4})$$

que define a faixa de convergência. A Tabela A.2 fornece alguns pares da transformadas de Laplace. Cada entrada na tabela é obtida com a aplicação direta da definição da transformada.²

¹ A **transformada de Laplace Bilateral** (ou de **dois lados**) e a transformada \mathcal{L}_+ , na qual o limite inferior da integração é 0^+ , também aparece em outros lugares.

² Em relação à transformada de Laplace unilateral, um leitor perspicaz iria querer saber o que acontece com a validade da transformada de Laplace para o resto do plano- s , ou seja, a região onde $\operatorname{Re}(s) < \sigma_0$. Na verdade, seria decepcionante se $F(s)$ só fosse válida para $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0$ e não em outras partes do plano- s . Felizmente, exceto em alguns casos patológicos (que não surgem na prática), pode-se utilizar um importante resultado da teoria de variáveis complexas conhecido como **Teorema da Continuação Analítica** para estender a região da validade de $F(s)$ para todo o plano- s , excluindo as localizações dos polos.

A.1.1 Propriedades da transformada de Laplace

Nesta seção, iremos abordar e demonstrar cada uma das importantes propriedades da transformada de Laplace, como discutido no Capítulo 3 e na Tabela A.1. Além disso, mostraremos como essas propriedades podem ser usadas por meio de exemplos.

1. Superposição

Uma das propriedades mais importantes da transformada de Laplace é que ela é linear. Podemos demonstrar isso da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} &= \int_0^\infty [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= \alpha \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha F_1(s) + \beta F_2(s).\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

A propriedade de escalonamento é um caso especial da linearidade, isto é,

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\} = \alpha F(s). \quad (\text{A.6})$$

EXEMPLO A.1 Sinal senoidal

Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = 1 + 2 \operatorname{sen}(\omega t)$.

Solução. A transformada de Laplace de $\operatorname{sen}(\omega t)$ é

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Portanto, usando a Eq. (A.5), obtemos

TABELA A.1 Propriedades da transformada de Laplace

Número	Transformada de Laplace	Função no tempo	Comentário
-	$F(s)$	$f(t)$	Par de transformada
1	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	Superposição
2	$F(s)e^{-s\lambda}$	$f(t - \lambda)$	Retardo no tempo ($\lambda \geq 0$)
3	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	Escalonamento no tempo
4	$F(s + a)$	$e^{-at}f(t)$	Deslocamento na frequência
5	$s^m F(s) - s^{m-1}f(0)$ $-s^{m-2}\dot{f}(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)$	$f^{(m)}(t)$	Diferenciação
6	$\frac{1}{s} F(s)$	$\int_0^t f(\zeta) d\zeta$	Integração
7	$F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t) * f_2(t)$	Convolução
8	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$f(0^+)$	Teorema do Valor Inicial
9	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	Teorema do Valor Final
10	$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c-j\infty}^{\sigma_c+j\infty} F_1(\zeta)F_2(s-\zeta) d\zeta$	$f_1(t)f_2(t)$	Produto no tempo
11	$\frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} Y(-j\omega)U(j\omega) d\omega$	$\int_0^\infty y(t)u(t) dt$	Teorema de Parseval
12	$-\frac{d}{ds} F(s)$	$tf(t)$	Multiplicação pelo tempo

TABELA A.2 Tabela de transformadas de Laplace

Número	$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
1	1	$\delta(t)$
2	$1/s$	$1(t)$
3	$1/s^2$	t
4	$2!/s^3$	t^2
5	$3!/s^4$	t^3
6	$m!/s^{m+1}$	t^m
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
9	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2!}t^2e^{-at}$
10	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{-at}$
11	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
12	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(at - 1 + e^{-at})$
13	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$
14	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
15	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - e^{-at}(1+at)$
16	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bt} - ae^{-at}$
17	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\text{sen } at$
18	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
19	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cos bt$
20	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \text{sen } bt$
21	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1 - e^{-at} \left(\cos bt + \frac{a}{b} \text{sen } bt \right)$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s^2 + 2\omega s + \omega^2}{s^3 + \omega^2 s}.$$

Os seguintes comandos do MATLAB® fornecem o mesmo resultado

```
syms s t w
laplace(1+2*sin(w*t)).
```

2. Retardo no tempo

Suponha uma função $f(t)$ atrasada por $\lambda > 0$ unidades de tempo. Sua transformada de Laplace é

$$F_1(s) = \int_0^\infty f(t - \lambda) e^{-st} dt.$$

Defina $t' = t - \lambda$. Então, $dt' = dt$, porque λ é uma constante e $f(t) = 0$ para $t < 0$. Assim,

$$F_1(s) = \int_{-\lambda}^\infty f(t') e^{-s(t'+\lambda)} dt' = \int_0^\infty f(t') e^{-s(t'+\lambda)} dt'.$$

Como $e^{-s\lambda}$ é independente do tempo, ele pode ser retirado do integrando,

$$F_1(s) = e^{-s\lambda} \int_0^\infty f(t') e^{-st'} dt' = e^{-s\lambda} F(s). \quad (\text{A.7})$$

A partir desse resultado, vemos que um retardo no tempo de λ corresponde à multiplicação da transformada por $e^{-s\lambda}$.

EXEMPLO A.2 Sinal senoidal atrasado

Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = A \operatorname{sen}(t - t_d)$.

Solução. A transformada de Laplace de $\operatorname{sen}(t)$ é

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Portanto, usando a Eq. (A.7), temos

$$F(s) = \frac{A}{s^2 + 1} e^{-st_d}.$$

3. Escalonamento no tempo

Se o tempo t é escalonado por um fator a , então a transformada de Laplace de um sinal escalonado no tempo é

$$F_1(s) = \int_0^\infty f(at) e^{-st} dt.$$

Novamente, definimos $t' = at$. Como antes, $dt' = a dt$, e

$$F_1(s) = \int_0^\infty f(t') \frac{e^{-st'/a}}{|a|} dt' = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (\text{A.8})$$

EXEMPLO A.3 Senoide com frequência ω

Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = a \operatorname{sen}(\omega t)$.

Solução. A transformada de Laplace de $\operatorname{sen}(t)$ é

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Portanto, usando a Eq. (A.8), obtemos

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{|\omega|} \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

como esperado. Os seguintes comandos no MATLAB fornecem o mesmo resultado

```
syms s t w A
laplace(A*sin(w*t)).
```

4. Deslocamento na frequência

A multiplicação (modulação) de $f(t)$ por uma expressão exponencial no domínio do tempo corresponde a um deslocamento na frequência:

$$F_1(s) = \int_0^\infty e^{-at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+a)t} dt = F(s+a). \quad (\text{A.9})$$

EXEMPLO A.4 Senoide com decaimento exponencial

Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = A \sin(\omega t) e^{-at}$.

Solução. A transformada de Laplace de $\sin(\omega t)$ é

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Portanto, usando a Eq. (A.9), obtemos

$$F(s) = \frac{A\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}.$$

5. Diferenciação

A transformada da derivada de um sinal está relacionada com sua transformada de Laplace e com sua condição inicial, como segue:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_{0^-}^\infty \left(\frac{df}{dt}\right) e^{-st} dt = e^{-st} f(t)|_{0^-}^\infty + s \int_{0^-}^\infty f(t) e^{-st} dt. \quad (\text{A.10})$$

Devido à suposição de $f(t)$ ter uma transformada de Laplace, $e^{-st} f(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim,

$$\mathcal{L}[\dot{f}] = -f(0^-) + sF(s). \quad (\text{A.11})$$

Outra aplicação da Eq. (A.11) fornecem

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}\} = s^2 F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-). \quad (\text{A.12})$$

Repetidas aplicações da Eq. (A.11) fornece

$$\mathcal{L}\{f^m(t)\} = s^m F(s) - s^{m-1} f(0^-) - s^{m-2} \dot{f}(0^-) - \dots - f^{(m-1)}(0^-), \quad (\text{A.13})$$

sendo que $f^m(t)$ fornece a m -ésima derivada de $f(t)$ em relação ao tempo.

EXEMPLO A.5 Derivada do sinal cosseno

Encontre a transformada de Laplace de $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$, com $f(t) = \cos(\omega t)$.

Solução. A transformada de Laplace de $\cos(\omega t)$ é

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Usando a Eq. (A.11) com $f(0^-) = 1$, temos

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = s \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 1 = -\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}.$$

6. Integração

Vamos supor que queremos determinar a transformada de Laplace da integral de uma função no tempo, isto é, encontrar

$$F_1(s) = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\xi) d\xi \right\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\xi) d\xi \right] e^{-st} dt.$$

Aplicando a integração por partes, com

$$u = \int_0^t f(\xi) d\xi \quad \text{e} \quad dv = e^{-st} dt,$$

temos

$$F_1(s) = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \left(\int_0^t f(\xi) d\xi \right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{s} F(s). \quad (\text{A.14})$$

EXEMPLO A.6 Integração no tempo de um sinal senoidal

Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = \int_0^t \sin \omega \tau d\tau$.

Solução. A transformada de Laplace de $\sin(\omega t)$ é

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Portanto, usando a Eq. (A.14), temos

$$F(s) = \frac{\omega}{s^3 + \omega^2 s}.$$

7. Convolução

Convolução no domínio do tempo corresponde à multiplicação no domínio da frequência. Assuma que $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ e $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$. Então,

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^\infty f_1(t) * f_2(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-st} dt.$$

Vemos que t varia de zero até infinito e τ varia de zero a t . Com o auxílio da Fig. A.1, invertemos a ordem da integração e alteramos os limites de integração apropriadamente, para que τ varie de zero a infinito e $\infty \geq t \geq \tau$, para fornecer

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^\infty \int_\tau^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-st} dt d\tau.$$

Multiplicar por $e^{-s\tau} e^{s\tau}$ resulta em

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-s\tau} \left[\int_\tau^\infty f_2(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \right] d\tau.$$

Se fizermos a mudança de variável $t' \triangleq t - \tau$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_0^\infty f_2(t') e^{-st'} dt', \\ \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= F_1(s) F_2(s). \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t). \quad (\text{A.15})$$

EXEMPLO A.7 Resposta à rampa de um sistema de primeira ordem

Encontre a resposta à rampa de um sistema de primeira ordem com um polo em $+a$.

Solução. Seja $f_1(t) = t$ a entrada em rampa e $f_2(t) = e^{at}$ a resposta ao impulso do sistema de primeira ordem. Então, usando a Eq. (A.15) encontramos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{1}{s-a} \right\} &= f_1(t) * f_2(t) \\ &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1).\end{aligned}$$

Os seguintes comandos do MATLAB fornecem o mesmo resultado:

```
syms s t a
ilaplace(1/(s^3-a*s^2)).
```

8. Produto no tempo

A multiplicação no domínio do tempo corresponde à convolução no domínio da frequência:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c-j\infty}^{\sigma_c+j\infty} F_1(\xi)F_2(s-\xi) d\xi.$$

Para ver isso, considere a relação

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \int_0^\infty f_1(t)f_2(t)e^{-st} dt.$$

Substituindo a expressão para $f_1(t)$ dada pela Eq. (3.25), temos

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c-j\infty}^{\sigma_c+j\infty} F_1(\xi)e^{\xi t} d\xi \right] f_2(t)e^{-st} dt.$$

Alterando a ordem de integração, temos

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c-j\infty}^{\sigma_c+j\infty} F_1(\xi) \int_0^\infty f_2(t)e^{-(s-\xi)t} dt d\xi.$$

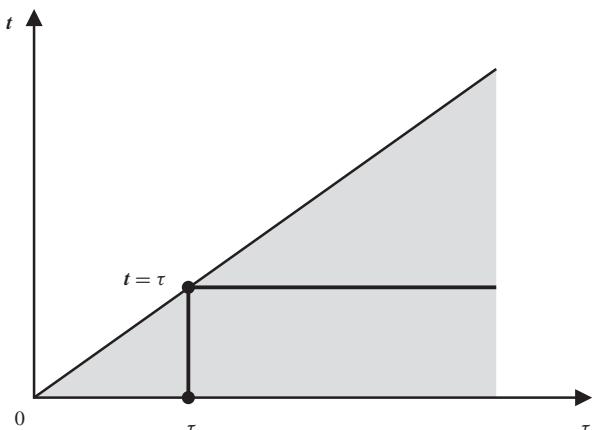


Figura A.1 Diagrama ilustrando a inversão da ordem de integração.

Usando a Eq. (A.9), temos

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c-j\infty}^{\sigma_c+j\infty} F_1(\xi)F_2(s-\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s). \quad (\text{A.16})$$

9. Teorema de Parseval

O famoso teorema de Parseval é usado para calcular a “energia” em um sinal ou “correlação” entre dois sinais. Ele nos diz se as quantidades mencionadas podem ser calculadas no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Se

$$\int_0^\infty |y(t)|^2 dt < 1 \quad \text{e} \quad \int_0^\infty |u(t)|^2 dt < 1 \quad (\text{A.17})$$

(isto é, $y(t)$ e $u(t)$ são quadrados integráveis), então

$$\int_0^\infty y(t)u(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty Y(-j\omega)U(j\omega) d\omega. \quad (\text{A.18})$$

O resultado de Parseval envolve apenas uma substituição da transformada por funções no tempo e uma mudança de integração:

$$\int_0^\infty y(t)u(t) dt = \int_0^\infty y(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \right] dt \quad (\text{A.19})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U(j\omega) \left[\int_0^\infty y(t)e^{j\omega t} dt \right] d\omega \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U(j\omega)Y(-j\omega) d\omega. \quad (\text{A.21})$$

10. Multiplicação pelo tempo

A multiplicação pelo tempo corresponde à diferenciação no domínio da frequência. Definindo

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt \\ &= - \int_0^\infty e^{-st} [tf(t)] dt \\ &= -\mathcal{L}\{tf(t)\}. \end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s), \quad (\text{A.22})$$

que é o resultado desejado.

EXEMPLO A.8 Produto no tempo do sinal senoidal

Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = t \operatorname{sen} \omega t$.

Solução A transformada de Laplace de $\operatorname{sen} \omega t$ é

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Assim, usando a Eq. (A.22), obtemos

$$F(s) = -\frac{d}{ds} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

Os seguintes comandos do MATLAB fornecem o mesmo resultado:

```
syms s t w
laplace(t*sin(w*t)).
```

A.1.2 Transformada inversa de Laplace por expansão em frações parciais

Como vimos no Capítulo 3, a maneira mais fácil de encontrar $f(t)$ a partir de sua transformada de Laplace $F(s)$, se $F(s)$ é racional, é expandir $F(s)$ como uma soma de termos mais simples obtidos via expansão em frações parciais que podem ser encontrados em tabelas. Já discutimos esse método considerando raízes simples na Seção 3.1.5. Nesta seção, discutimos a expansão em frações parciais para casos de raízes complexas e repetidas.

Polos complexos. No caso de fatores quadráticos no denominador, o numerador do fator quadrático é escolhido para ser de primeira ordem, como mostrado no Exemplo A.9. Toda vez que existir um par de polos complexos conjugados, como

$$F(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_1^*},$$

podemos mostrar que

$$C_2 = C_1^*$$

(veja o Problema 3.1) e que

$$f(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_1^* e^{p_1^* t} = 2\operatorname{Re}(C_1 e^{p_1 t}).$$

Assumindo que $p_1 = \alpha + j\beta$, podemos reescrever $f(t)$ em uma forma mais compacta:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\operatorname{Re}\{C_1 e^{p_1 t}\} = 2\operatorname{Re}\{|C_1| e^{j\arg(C_1)} e^{(\alpha+j\beta)t}\} \\ &= 2|C_1| e^{\alpha t} \cos[\beta t + \arg(C_1)]. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

EXEMPLO A.9 Expansão em frações parciais: polos complexos distintos

Encontre a função $f(t)$ para a qual a transformada de Laplace é

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}.$$

Solução. Reescrevemos $F(s)$ como

$$F(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2 s + C_3}{s^2 + s + 1}.$$

Usando o método de encobrimento, encontramos

$$C_1 = sF(s)|_{s=0} = 1.$$

Usando $C_1 = 1$ e, em seguida, igualando os numeradores em relação à expansão em frações parciais, obtemos

$$(s^2 + s + 1) + (C_2 s + C_3)s = 1.$$

Resolvendo, descobrimos que $C_2 = -1$ e $C_3 = -1$. Para torná-la mais adequada para o uso de tabelas de transformadas de Laplace, reescrevemos a fração parcial como

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

A partir da tabela, temos

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(1 - e^{-t/2} \cos \sqrt{\frac{3}{4}} t - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \sqrt{\frac{3}{4}} t\right) 1(t) \\ &= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\pi}{6}\right)\right) 1(t). \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos escrever $F(s)$ como

$$F(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s - p_1} + \frac{C_2^*}{s - p_1^*}, \quad (\text{A.24})$$

sendo $p_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$. $C_1 = 1$. $C_1 = 1$, como antes, e agora

$$C_2 = (s - p_1)F(s)|_{s=p_1} = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$C_2^* = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

e

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 + 2|C_2|e^{\alpha t} \cos[\beta t + \arg(C_2)]) 1(t) \\ &= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \cos \left[\frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{5\pi}{6}\right]\right) 1(t) \\ &= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \cos \left[\frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{5\pi}{6}\right]\right) 1(t). \end{aligned}$$

A expansão em frações parciais pode ser facilmente calculada usando os comandos no MATLAB

```
num = 1; % forma do numerador
den = conv([1 0],[1 1 1]); % forma do denominador
[r,p,k] = residue(num,den) % cálculo dos resíduos
```

o que fornece os resultados

```
r = [-0.5000 + 0.2887i - 0.5000 - 0.2887i 1.0000];
p = [-0.5000 + 0.8660i - 0.5000 - 0.8660i 0]; k = []]
```

que está de acordo com os cálculos manuais anteriores. Observe que, se estamos usando as tabelas, o primeiro método é preferível, enquanto o segundo método é preferível para verificar resultados do MATLAB.

Os seguintes comandos no MATLAB fornecem o mesmo resultado para a transformada inversa de Laplace:

```
syms s t
ilaplace(1/(s*(s^2+s+1))).
```

Polos repetidos. Para o caso em que $F(s)$ tem raízes repetidas, o procedimento para calcular a expansão em frações parciais tem de ser modificado. Se p_1 é repetido três vezes, escrevemos a fração parcial como

$$F(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{(s - p_1)^2} + \frac{C_3}{(s - p_1)^3} + \frac{C_4}{s - p_4} + \cdots + \frac{C_n}{s - p_n}.$$

Determinamos as constantes C_4 até C_n como discutido anteriormente. Se multiplicarmos ambos os lados da equação anterior por $(s - p_1)^3$, obtemos

$$(s - p_1)^3 F(s) = C_1(s - p_1)^2 + C_2(s - p_1) + C_3 + \cdots + \frac{C_n(s - p_1)^3}{s - p_n}. \quad (\text{A.25})$$

Se, então, definimos $s = p_1$, todos os fatores do lado direito da Eq. (A.25) vão para zero, exceto C_3 , que é

$$C_3 = (s - p_1)^3 F(s)|_{s=p_1},$$

como antes. Para determinar os outros fatores, diferenciamos a Eq. (A.25) em relação à variável de Laplace s :

$$\frac{d}{ds}[(s - p_1)^3 F(s)] = 2C_1(s - p_1) + C_2 + \cdots + \frac{d}{ds}\left[\frac{C_n(s - p_1)^3}{s - p_n}\right]. \quad (\text{A.26})$$

Novamente, se definirmos $s = p_1$, temos

$$C_2 = \frac{d}{ds} [(s - p_1)^3 F(s)]|_{s=p_1}.$$

Similarmente, se diferenciarmos a Eq. (A.26) novamente e definirmos $s = p_1$ uma segunda vez, temos

$$C_1 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [(s - p_1)^3 F(s)]|_{s=p_1}.$$

Em geral, podemos calcular C_i para um fator com multiplicidade k como

$$C_{k-i} = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{ds^i} [(s - p_1)^k F(s)] \right]_{s=p_1}, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

EXEMPLO A.10 Expansão em frações parciais: raízes reais repetidas

Encontre a função $f(t)$ para a qual a transformada de Laplace é

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}.$$

Solução. Escrevemos a fração parcial como

$$F(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+2} + \frac{C_3}{(s+2)^2}.$$

Então,

$$C_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{s+3}{(s+2)^2}|_{s=-1} = 2,$$

$$C_2 = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 F(s)]|_{s=-2} = -2,$$

$$C_3 = (s+2)^2 F(s)|_{s=-2} = \frac{s+3}{s+1}|_{s=-2} = -1.$$

A função $f(t)$ é

$$f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t} - te^{-2t})1(t).$$

O cálculo da fração parcial também pode ser realizado usando a função residue do MATLAB,

```
num = [1 3]; % forma do numerador
den = conv([1 1],[1 4 4]); % forma do denominador
[r,p,k] = residue(num,den) % cálculo dos resíduos
```

que resulta em

$$r = [-2 -1 2]', p = [-2 -2 -1]', e k = [];$$

que está de acordo com os cálculos manuais.

Os seguintes comandos no MATLAB fornecem o mesmo resultado para a transformada inversa de Laplace

```
syms s t
ilaplace((s+3)/((s+1)*(s+2)^2)).
```

A.1.3 Teorema do Valor Inicial

Discutimos o Teorema do Valor Final no Capítulo 3. Um segundo teorema valioso da transformada de Laplace é o **Teorema do Valor Inicial**, que indica que sempre é possível determinar o valor inicial da função no tempo $f(t)$ a partir de sua transformada de Laplace. Podemos também afirmar o teorema da seguinte forma:

Teorema do Valor Inicial

Para qualquer par de transformada de Laplace,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+). \quad (\text{A.27})$$

Podemos mostrar isso como segue.

Usando a Eq. (A.11), temos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt. \quad (\text{A.28})$$

Vamos considerar o caso no qual $s \rightarrow \infty$ e reescrever a integral como

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt + \int_{0^-}^{0^+} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt.$$

Calculando o limite da Eq. (A.28) quando $s \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_{0^-}^{0^+} e^0 \frac{df(t)}{dt} dt + \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt \right].$$

O segundo termo no lado direito da equação anterior se aproxima de zero quando $s \rightarrow \infty$, devido a $e^{-st} \rightarrow 0$. Assim,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [f(0^+) - f(0^-)] = f(0^+) - f(0^-)$$

ou

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+).$$

Em contraste com o Teorema do Valor Final, o Teorema do Valor Inicial pode ser aplicado em qualquer função $F(s)$.

EXEMPLO A.11 Teorema do Valor Inicial

Encontre o valor inicial do sinal no Exemplo 3.11.

Solução. Do Teorema do Valor Final, temos

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{3}{s(s-2)} = 0,$$

que está de acordo com a expressão de $y(t)$ calculada no Exemplo 3.11.

A.1.4 Teorema do Valor Final

Se todos os polos de $sY(s)$ estão no lado esquerdo do plano- s , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s). \quad (3.46)$$

Teorema do Valor Final

Demonstração do teorema do valor final

Podemos demonstrar este resultado como segue.

A relação da derivada desenvolvida na Eq. (3.33) é

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{dy}{dt} dt.$$

Assuma que estamos interessados no caso em que $s \rightarrow 0$. Então,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sY(s) - y(0)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dy}{dt} dt \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y(0)],$$

e temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s).$$

Outra forma de ver este mesmo resultado é notar que a expansão em frações parciais de $Y(s)$ [Eq. (3.43)] é

$$Y(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s - p_n}.$$

Digamos que $p_1 = 0$ e que todos os outros p_i estão no SPE tal que C_1 é o valor em estado estacionário de $y(t)$. Usando a Eq. (3.45), vemos que

$$C_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = sY(s)|_{s=0},$$

que é o mesmo resultado anterior.

Para um estudo aprofundado da transformada de Laplace e para tabelas extensas, veja Churchill (1972) e Campbell e Foster (1948); para a transformada bilateral, veja Van der Pol e Bremmer (1955).

Apêndice B Soluções das Questões de Revisão

Capítulo 1

1. Quais são os principais componentes de um sistema de controle realimentado?
O processo, o atuador, o sensor e o controlador.

2. Qual é o propósito do sensor?
Medir a variável de saída e, geralmente, convertê-la para uma tensão elétrica.

3. Cite três propriedades importantes de um bom sensor.

Um bom sensor é linear (a saída é proporcional ao sinal de entrada) ao longo de um grande intervalo de amplitudes e de um grande intervalo de frequências na sua entrada, tem baixo ruído, é imparcial, é fácil de calibrar e tem baixo custo. Os valores relativos destas propriedades variam com a aplicação.

4. Qual é o propósito de um atuador?

O atuador recebe uma entrada, geralmente elétrica, e a converte em um sinal, tal como uma força ou torque que faz com que a saída do processo se mova ou mude ao longo do intervalo desejado.

5. Cite três propriedades importantes de um bom atuador.

Um bom atuador tem uma resposta rápida, potência adequada, energia adequada, velocidade adequada, torque adequado, capacidade de fazer com que a saída do processo satisfaça às especificações de projeto, seja leve, pequeno, barato e assim por diante. Tal como acontece com os sensores, os valores relativos destas propriedades variam com a aplicação.

6. Qual é o propósito do controlador? Qual(is) é(são) a(s) saída(s) e a(s) entrada(s) do controlador?
O controlador recebe a saída do sensor (a entrada para o controlador) e calcula o sinal de controle (a saída do controlador) para ser enviado ao atuador.

7. Que(ais) variável(eis) física(s) de um processo pode(m) ser medida(s) diretamente por um sensor de efeito Hall?

Um dispositivo de efeito Hall mede um campo magnético e pode ser facilmente configurado para medir as posições relativas ou ângulos relativos de dois corpos.

8. Que variável física é medida por um tacômetro?

Um tacômetro mede a velocidade de rotação ou a velocidade angular.

9. Descreva três técnicas diferentes para a medição de temperatura.

Em cada um dos seguintes casos, é importante compreender que os dispositivos mencionados precisam ser calibrados e, muitas vezes, corrigidos para não linearidades, a fim de fornecerem medições confiáveis e precisas da temperatura.

- (a) *Uma técnica antiga e ainda usada em muitos termostatos residenciais baseia-se na tira bimetálica constituída por duas tiras de metais diferentes que se expandem em função da temperatura com diferentes coeficientes. Como resultado, as curvas das tiras se inclinam com a temperatura e o movimento resultante pode ser usado como uma medida da tempe-*

- ratura. Este princípio foi introduzido no século 18 para manter o comprimento de um pêndulo de relógio constante para manter o relógio preciso.*
- (b) *Uma técnica relacionada com a tira bimetálica é baseada no fato de que metais com funções de trabalho diferentes colocados em contato iriam produzir uma tensão proporcional à temperatura. Tal dispositivo é chamado de termopar e é a base de uma técnica de laboratório padrão para a medição de temperatura.*
- (c) *Existem materiais que têm resistência elétrica que é dependente de forma monotônica da temperatura, e uma ponte de resistência pode ser usada com um destes materiais para indicar a temperatura. Tais dispositivos são chamados de termistores.*
- (d) *Para altas temperaturas, sabe-se que a cor da radiação em função do calor depende da temperatura. Um pedaço de ferro colocado no fogo terá brilho laranja, depois vermelho e, finalmente, se tornará branco quente a temperaturas elevadas. Um instrumento de medição da frequência de radiação e, portanto, da temperatura, é o pirômetro.*
- (e) *Em fornos cerâmicos, cones de diferentes materiais que fundem em diferentes temperaturas são colocados próximos aos produtos nos fornos para indicarem quando a temperatura desejada foi atingida. O oleiro observa até que o cone de importância começa a ceder e, em seguida, sabe que os produtos devem ser removidos. Estes dão uma medida quantizada da temperatura.*
10. Por que a maioria dos sensores têm uma saída elétrica, independentemente da natureza física da variável que está sendo medida?
- Os sinais elétricos são os mais fáceis de serem manipulados; portanto, a maioria dos controladores são dispositivos elétricos, sejam analógicos ou digitais. Para proporcionar o sinal de entrada de tal dispositivo, o sensor precisa fornecer uma saída elétrica.*
- ## Capítulo 2
- O que é “diagrama de corpo livre”?
- Para escrever as equações de movimento de um sistema de corpos conectados, é útil desenhar cada corpo com a influência de todos os outros corpos representados por forças e torques sobre o corpo em questão. Um desenho do conjunto de tais corpos isolados é chamado de “diagrama de corpo livre”.*
- Quais são as duas formas para a lei de Newton?
- Movimento de translação descrito por $F = ma$. Movimento de rotação descrito por $M = I\alpha$.*
- Para um processo estrutural ser controlado, tal como um braço de robô, qual é o significado de “controle colado”? E “controle não descolado”?
- Quando o atuador e o sensor estão posicionados no mesmo corpo rígido, o controle é dito ser “colado”. Quando eles estão em corpos diferentes que estão conectados por molas, o controle é “descolado”.*
- Qual é lei de Kirchhoff das correntes?
- A soma algébrica de todas as entradas de corrente em uma junção ou circuito é zero.*
- Qual é lei de Kirchhoff das tensões?
- A soma algébrica das tensões em torno de um caminho fechado em um circuito elétrico é zero.*
- Quando, por que e por quem foi nomeado o dispositivo “amplificador operacional”?
- Em um artigo em 1947, Ragazzini, Randall e Russell nomearam o amplificador de alto ganho e ampla largura de banda usado na realimentação para realizar cálculos operacionais de “operações” de amplificador operacional.*
- Qual é a grande vantagem de não ter entrada de corrente em um amplificador operacional?
- Sem entrada de corrente, o amplificador não carrega o circuito de entrada; assim, a função de transferência do dispositivo não é dependente das características do amplificador. Além disso, a análise do circuito é simplificada neste caso.*

8. Por que é importante que o valor da resistência de armadura R_a em um motor elétrico seja pequeno?

A resistência de armadura provoca perda de potência quando a corrente de armadura flui e, assim, reduz a eficiência do motor.

9. Quais são as definições e unidades da constante elétrica de um motor?

Um motor rotativo produz uma tensão em sua armadura proporcional à velocidade de rotação. A constante elétrica K_e é a razão entre esta tensão e a velocidade, de modo que $e = K_e \dot{\theta}$. As unidades são volt-s/rad.

10. Quais são as definições e as unidades da constante de torque de um motor elétrico?

Quando a corrente i_a flui na armadura de um motor elétrico, um torque τ é produzido e é proporcional à corrente. O torque constante K_t é a constante de proporcionalidade, de modo que $\tau = K_t i_a$. As unidades são Newton-metros/ampères.

11. Por que aproximamos o modelo físico de uma planta (que é sempre não linear) por um modelo linear?

A análise e o projeto para modelos lineares são muito mais simples do que para modelos não lineares. Além disso, foi mostrado (por Lyapunov) que, se a aproximação linear é estável, então existe pelo menos alguma região de estabilidade para o modelo não linear.

- △ 12. Quais são as relações de (a) fluxo de calor através de uma substância e (b) armazenamento de calor em uma substância?

(a) *Fluxo de calor é proporcional à diferença de temperatura dividida pela resistência térmica, isto é,*

$$q = \frac{1}{R} (T_1 - T_2).$$

(b) *A equação diferencial que descreve o armazenamento de calor é*

$$\dot{T} = \frac{1}{C} q,$$

sendo C a capacidade térmica do material.

- △ 13. Nomeie e apresente as equações para as três relações que regulam o fluxo de um fluido.

$$\text{Continuidade: } \dot{m} = w_{in} - w_{out}.$$

$$\text{Força de equilíbrio: } f = pA.$$

$$\text{Resistência: } w = \frac{1}{R} (p_1 - p_2)^{1/\alpha}.$$

Capítulo 3

1. Qual é a definição de “função de transferência”?

A transformada de Laplace da saída de um sistema linear e invariante no tempo, $Y(s)$, é proporcional à transformada de sua entrada, $U(s)$. A função de proporcionalidade é a função de transferência $F(s)$, de modo que $Y(s) = F(s)U(s)$. Assume-se que todas as condições iniciais são nulas.

2. Quais são as propriedades dos sistemas cujas respostas podem ser descritas por funções de transferência?

O sistema deve ser tanto linear (a superposição se aplica) quanto invariante no tempo (os parâmetros não variam com o tempo).

3. Qual é a transformada de Laplace de $f(t - \lambda)1(t - \lambda)$ se a transformada de $f(t)$ é $F(s)$?

$$\mathcal{L}\{f(t - \lambda)1(t - \lambda)\} = e^{-s\lambda} F(s).$$

4. Declare o Teorema do Valor Final.

Se todos os polos de $sF(s)$ estão no SPE, então o valor final de $f(t)$ é dado por $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$.

5. Qual é o uso mais comum do Teorema do Valor Final em controle?

Um teste padrão de um sistema de controle é a resposta ao degrau, e o TVF é usado para determinar o erro em estado estacionário para tal entrada.

6. Dada uma função de transferência de segunda ordem com coeficiente de amortecimento ζ e frequência natural ω_n , qual é a estimativa do tempo de subida da resposta ao degrau? Qual é a estimativa do percentual de sobressinal da resposta ao degrau? Qual é a estimativa do tempo de acomodação?

Elas são dados por $t_r \cong 1,8/\omega_n$, M_p é dado pelo coeficiente de amortecimento (veja curva na Fig. 3.23) e $t_s \cong 4,6/\sigma$.

7. Qual é o maior efeito de um zero no SPE na resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem?

Tal zero causa sobressinal adicional e quanto mais próximo o zero está do eixo imaginário, maior o sobressinal. Se o zero é seis vezes maior que a parte real dos polos complexos, o efeito é negligenciável.

8. Qual é o efeito mais notado de um zero no SPD na resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem?

Tal zero muitas vezes provoca um sobressinal inicial negativo na resposta.

9. Qual é o principal efeito de um polo real extra na resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem?

Um polo desacelera a resposta e torna o tempo de subida mais longo. Quanto mais próximo o polo está do eixo imaginário, mais acentuado é o efeito. Se o polo for maior que seis vezes a parte real dos polos complexos, o efeito é negligenciável.

10. Por que a estabilidade é uma importante consideração no projeto de sistemas de controle?

Praticamente qualquer sistema dinâmico útil deve ser estável para desenvolver sua função. A realimentação em um sistema que normalmente é estável pode torná-lo instável, então os projetistas de controle devem ser capazes de assegurar a estabilidade de seus projetos.

11. Qual é o principal uso do critério de Routh?

Com esse método, podemos encontrar (simbolicamente) a faixa de um parâmetro tal como o ganho de malha para o qual o sistema será estável.

12. Em que condições poderia ser importante saber como estimar uma função de transferência de dados experimentais?

Em muitos casos, as equações de movimento são extremamente complexas ou completamente desconhecidas. Processos químicos, como uma máquina de fabricação de papel, são muitas vezes deste tipo. Nestes casos, se é desejado obter um bom controle, é muito útil ser capaz de utilizar dados transitórios ou dados em estado estacionário da resposta em frequência para estimar uma função de transferência.

Capítulo 4

1. Dê três vantagens da realimentação para o controle.

- (a) Realimentação pode reduzir o erro em estado estacionário em resposta aos distúrbios.
- (b) Realimentação pode reduzir o erro em estado estacionário no rastreamento da referência.
- (c) Realimentação pode reduzir a sensibilidade de uma função de transferência a variações paramétricas.
- (d) Realimentação pode estabilizar um processo instável.

2. Dê duas desvantagens da realimentação para o controle.
 - (a) *Realimentação requer um sensor, que pode ser muito caro e pode introduzir ruído adicional.*
 - (b) *Sistemas realimentados são muitas vezes mais difíceis de projetar e operar que sistemas em malha aberta.*
3. Um sistema de controle de temperatura é projetado para ter erro nulo a uma entrada constante e um erro de $0,5^{\circ}\text{C}$ a uma entrada de controle linear no tempo, com uma taxa de crescimento de 40°C/s . Qual é o tipo do sistema de controle e qual é a constante de erro relevante (K_p ou K_v ou etc.)?
O sistema é do Tipo 1 e a K_v é a razão da taxa de entrada para o erro ou $K_v = 40/0,5 = 80/\text{s}$.
4. Quais são as unidades para K_p , K_v e K_a ?
 K_p é adimensional, a unidade de K_v é s^{-1} e a unidade de K_a é s^{-2} .
5. Qual é a definição de tipo de sistemas em relação à entrada de referência?
Com apenas uma entrada de referência, polinômio de grau k (sem perturbações), o tipo é o maior valor de k para o qual o erro em estado estacionário é uma constante.
6. Qual é a definição de tipo de sistemas em relação à entrada de distúrbio?
Com apenas uma entrada de distúrbio, polinômio de grau k (sem referência), o tipo é o maior valor de k para o qual o erro em estado estacionário é uma constante.
7. Por que o tipo do sistema depende de onde está a entrada de sinal externo no sistema?
Porque o erro depende de onde está a entrada, então o tipo também.
8. Qual é o principal objetivo em adicionar o controle integral?
O controle integral faz com que o erro devido a uma entrada constante vá para zero. Ele remove os efeitos de polarização do ruído do processo. Ele não pode remover os efeitos de polarização do sensor.
9. Qual é o principal objetivo em adicionar o controle derivativo?
O controle derivativo normalmente faz com que o sistema seja melhor amortecido e mais estável.
10. Por que um projetista pode desejar adicionar o termo derivativo em realimentação e não no caminho direto do erro?
Quando uma entrada de referência incluir mudanças bruscas, incluí-la na ação derivativa pode causar controle desnecessariamente grande.
11. Qual é a vantagem em ter uma “regra de sintonia” para controladores PID?
Controladores PID são geralmente encapsulados como uma unidade com botões na frente para várias constantes de ganho. Estes dispositivos são largamente instalados em fábricas e operados por técnicos com modesto conhecimento da teoria de controle. Uma regra de sintonização permite que tal pessoa meça experimentalmente parâmetros do processo e use estes dados para definir os parâmetros de modo a fornecer uma boa resposta.
12. Dê duas razões para o uso do controlador digital no lugar do controlador analógico.
 - (a) *A lei de controle é mais fácil de ser alterada se o controlador for digital.*
 - (b) *Um controlador digital pode realizar operações lógicas e outras operações não lineares mais facilmente que um controlador analógico.*
 - (c) *A parte física de um controlador digital pode ser fixada no projeto antes que os detalhes do projeto de controle efetivo sejam terminados.*
13. Dê duas desvantagens do uso do controlador digital.
 - (a) *A largura de banda de um controlador digital é limitada pela possível frequência de amostragem.*
 - (b) *O controlador digital introduz ruído pelo processo de quantização.*

14. Dê a substituição do operador discreto z para o operador de Laplace s se a aproximação da integral na Eq. (4.98) é feita por um retângulo de altura $e(kT_s)$ e base T_s .

$$s = \frac{z - 1}{T_s}$$

Capítulo 5

1. Dê duas definições para o lugar das raízes.

(a) *O lugar das raízes é o lugar dos pontos no plano-s onde a equação $a(s) + Kb(s) = 0$ tem solução.*

(b) *O lugar das raízes é o lugar dos pontos no plano-s onde o ângulo de $G(s) = b(s)/a(s)$ é 180° .*

2. Defina o lugar das raízes negativo.

O lugar das raízes negativo é o lugar dos pontos onde a equação $a(s) - Kb(s) = 0$ tem solução ou onde o ângulo de $G(s) = b(s)/a(s)$ é 0° .

3. Onde estão as partes do lugar das raízes (positivo) no eixo real?

Segmentos do eixo real à esquerda de um número ímpar de zeros e polos estão no lugar das raízes.

4. Quais são os ângulos de partida a partir de dois polos coincidentes em $s = -a$ no eixo real?

Não há polos ou zeros à direita de $-a$.

O lugar das raízes parte em $\pm 90^\circ$.

5. Quais são os ângulos de partida a partir de três polos coincidentes em $s = -a$ no eixo real?

Não há polos ou zeros à direita de $-a$.

O lugar das raízes parte em $\pm 60^\circ$ e $\pm 180^\circ$.

6. Qual é o principal efeito de uma compensação de avanço no lugar das raízes?

O compensador de avanço geralmente faz com que o lugar das raízes dobre em direção ao SPE, movendo as raízes dominantes para um lugar de maior amortecimento.

7. Qual é o principal efeito de uma compensação de atraso em um lugar das raízes nas imediações das raízes dominantes de malha fechada?

A compensação de atraso é normalmente alocada tão perto da origem que ela tem efeito desprezível no lugar das raízes na vizinhança das raízes dominantes de malha fechada.

8. Qual é o principal efeito de uma compensação de atraso no erro de estado estacionário para uma entrada de referência polinomial?

A compensação de atraso normalmente aumenta o ganho em $s = 0$ e, portanto, aumenta a constante de velocidade de um sistema de Tipo 1 e reduz o erro a entradas polinomiais.

9. Por que o ângulo de partida de um polo próximo ao eixo imaginário é especialmente importante?

Se o lugar das raízes se inicia em direção ao SPD, então a realimentação irá tornar o sistema menos estável. Por outro lado, se o lugar das raízes se inicia em direção ao SPE, a realimentação irá tornar o sistema mais estável.

10. Defina um sistema condicionalmente estável.

Um sistema que torna-se instável quando o ganho é reduzido é considerado condicionalmente estável. Isto é, a sua estabilidade é condicionada em ter um compensador operante com pelo menos um valor mínimo de ganho.

11. Mostre, com um argumento baseado no lugar das raízes, que um sistema com três polos na origem deve ser condicionalmente estável.

Com três polos na origem, os ângulos de partida asseguram que dois polos deixam a origem em 180° , $\pm 60^\circ$, ou, se existem polos no eixo real no SPD, eles podem partir em 0° , \pm

120° , o que significa que pelo menos um polo começa se movendo para o SPD. Quando o ganho é reduzido a partir do nível de operação, pelo menos uma raiz deve passar para o SPD para um ganho suficientemente baixo e, portanto, o sistema deve ser condicionalmente estável.

Capítulo 6

- Por que Bode sugeriu traçar a magnitude de uma resposta em frequência em coordenadas log-log?

Em coordenadas log-log, o gráfico de uma função de transferência racional pode ser bem orientado por assíntotas lineares e, portanto, facilmente traçado e visualizado.

- Defina um decibel.

Se uma razão de potência é P_1/P_2 , então, a medida em decibéis é $10 \log(P_1/P_2)$. Como a potência é proporcional ao quadrado da tensão, e uma função de transferência daria uma razão de tensões, o ganho de uma função de transferência $G(j\omega)$ em decibéis é $G_{db} = 20 \log|G(j\omega)|$.

- Qual é a magnitude da função de transferência se o ganho é listado como 14 db?

$14 = 20 \log M$, portanto, $M = 5,01$.

- Defina frequência de cruzamento de ganho.

A frequência de cruzamento de ganho ω_c é o valor da frequência onde a magnitude é 1 (ou 0 db).

- Defina frequência de cruzamento de fase.

A frequência de cruzamento de fase ω_{cp} é o valor da frequência onde a fase cruza -180° .

- Defina margem de fase, PM.

A margem de fase PM é uma medida de quão longe em fase o diagrama de Nyquist está da instabilidade. No caso típico, se a fase do sistema no ganho de cruzamento é ϕ , então a margem de fase é de $180^\circ + \phi$. Por exemplo, se $\phi = -150^\circ$, então, a margem de fase é 30° .

- Defina margem de ganho, GM.

A margem de ganho é uma medida de quão longe o sistema está da instabilidade apenas por alterações no ganho. Se o ganho na fase de cruzamento, onde a fase do sistema é 180° , é $|G(j\omega_{cp})|$, então a margem de ganho é de $GM = |G(j\omega_{cp})| = 1,0$ ou $GM = 1/|G(j\omega_{cp})|$.

- Qual característica no diagrama de Bode melhor indica o sobressinal na resposta ao degrau de malha fechada?

A margem de fase está relacionada ao coeficiente de malha fechada equivalente aproximadamente por $\zeta_{eq} = PM/100$. Como vimos no Capítulo 3, o sobressinal na resposta ao degrau está monotonicamente relacionado com o coeficiente de amortecimento.

- Qual característica no diagrama de Bode melhor indica o tempo de subida na resposta ao degrau de malha fechada?

O tempo de subida é medido pela frequência natural de malha fechada que, por sua vez, é aproximada adequadamente pelo ganho de cruzamento. Assim, o melhor indicador do tempo de subida é ω_{cg} .

- Qual é o principal efeito de um compensador de avanço nas medidas de desempenho em um diagrama de Bode?

O compensador de avanço geralmente é usado para elevar a margem de fase em uma frequência de cruzamento de ganho desejada.

- Qual é o principal efeito de um compensador de atraso nas medidas de desempenho em um diagrama de Bode?

O compensador de atraso é geralmente usado para aumentar o ganho de baixa frequência para reduzir o erro em estado estacionário para entradas polinomiais ou entradas senoi-

dais de baixa frequência. Ele também pode ser usado para reduzir a frequência de cruzamento ω_c , onde uma fase mais favorável existe.

12. Como você encontra a K_v de um sistema do Tipo 1 em seu diagrama de Bode?

A K_v é determinada pela assíntota de baixa frequência, que tem uma inclinação de -1 para um sistema do Tipo 1 e é dada pela expressão K_v/ω . O valor da constante pode ser encontrado a partir da frequência em que a assíntota atinge 1,0 (ou 0 dB) ou, então, como o valor da assíntota na frequência de $\omega = 1$.

13. Por que precisamos saber de antemão o número de polos instáveis em malha aberta para analisar a estabilidade a partir do diagrama Nyquist?

O número dos envolvimentos do diagrama de Nyquist é a diferença do número de zeros e o número de polos no SPD de $1 + KDG$. Para saber o número de zeros desta função (que são os polos de malha fechada e, assim, os polos de malha fechada instáveis), é preciso saber o número de polos de malha aberta instáveis.

14. Qual é a principal vantagem da contagem dos envolvimentos em $-1/K$ de $D(j\omega)G(j\omega)$ no projeto de controle ao invés da contagem dos envolvimentos em -1 de $K D(j\omega)G(j\omega)$?

Se traçarmos apenas o gráfico de DG , então a estabilidade depende dos envolvimentos em $-1/K$. Assim, o projetista pode facilmente olhar para toda a faixa real de K e determinar o melhor valor do ganho para o projeto sem ter de traçar mais gráficos.

15. Defina um sistema realimentado condicionalmente estável. Como se identifica este tipo de sistema em um diagrama de Bode?

Um sistema condicionalmente estável se torna instável quando o ganho é reduzido. Se a fase de baixa frequência cai abaixo de -180° , então, uma redução no ganho até a frequência de cruzamento de ganho ocorre onde não há margem de fase, e o sistema é quase certamente instável. Um olhar no diagrama de Nyquist é necessário para ter certeza. Esta condição também pode ser vista facilmente a partir do lugar das raízes; o lugar das raízes terá segmentos no SPD para baixos valores de ganho.

- △ 16. Exige-se que um certo sistema de controle siga senoides, que podem ter qualquer frequência na faixa de $0 < \omega_\ell < 450$ rad/s e ter amplitudes de até 5 unidades, com erro em estado estacionário (senoidal) nunca maior do que 0,01. Esboce (ou descreva) a função de desempenho correspondente $W_1(\omega)$.

A magnitude de W_1 é dada pela razão $|R|/e_b = 5/0,01 = 500$. A função de desempenho deveria ter, então, valor de 500 para as frequências de até 450 rad/s. Seria necessário que a magnitude do diagrama de Bode estivesse acima desta curva para estas frequências.

Capítulo 7

As questões a seguir são baseadas em um sistema em variáveis de estado com as matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} , J , entrada u , saída y e estado \mathbf{x} .

1. Por que é conveniente escrever as equações de movimento na forma de variáveis de estado?

Ela fornece uma maneira padrão para descrever as equações diferenciais para qualquer sistema dinâmico, de modo que a análise auxiliada por computador seja realizada mais convenientemente. Também é mais conveniente analisar sistemas lineares em termos da descrição matricial padrão.

2. Dê uma expressão para a função de transferência deste sistema.

$$G(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + J.$$

3. Dê duas expressões para os polos da função de transferência do sistema.

(a) $p = \text{eig}(\mathbf{F})$.

(b) $p = \text{raízes de } \det[s\mathbf{I} - \mathbf{F}] = a(s) = 0$.

4. Dê uma expressão para os zeros da função de transferência do sistema.

$$z = \text{raízes de } \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix} = b(s) = 0.$$

5. Em que condições o estado do sistema será controlável?

(a) Se o par (\mathbf{F}, \mathbf{G}) é controlável – isto é, se a matriz

$$\mathcal{C} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{FG} \quad \dots \quad \mathbf{F}^{n-1}]$$

tem posto completo.

(b) Se o sistema pode ser colocado na forma canônica controlável.

6. Em que condições o sistema será observável a partir da saída y ?

(a) Se as matrizes (\mathbf{F}, \mathbf{H}) são observáveis – isto é, se a matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

tem posto completo.

(b) Se o sistema pode ser colocado na forma canônica observável.

7. Dê uma expressão para os polos de *malha fechada* se a realimentação de estados da forma $u = -\mathbf{Kx}$ é usada.

(a) $p_c = \text{eig}(\mathbf{F} - \mathbf{G} * \mathbf{K})$.

(b) $p_c = \text{raízes de } \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK}) = \alpha_c(s) = 0$.

8. Em que condições a matriz de realimentação \mathbf{K} pode ser selecionada para que as raízes de $\alpha_c(s)$ sejam arbitrárias?

Se o sistema é controlável.

9. Qual é a vantagem de usar o LQR ou o LRS no projeto da matriz de realimentação \mathbf{K} ?

Com LQR, o sistema em malha fechada será mais robusto à variações paramétricas, e o projetista tem algum controle sobre o esforço de controle utilizado pelo sistema de malha fechada.

10. Qual é a principal razão para usar um estimador no controle realimentado?

Quando o estado não está disponível (normalmente, porque é muito caro ou difícil usar sensores em cada variável de estado), então um estimador utilizando apenas a saída y fornece uma estimativa que pode ser usada no lugar do estado real.

11. Se o ganho \mathbf{L} do estimador é usado, dê uma expressão para os polos de malha fechada devido ao estimador.

(a) $p_e = \text{eig}(\mathbf{F} - \mathbf{L} * \mathbf{H})$.

(b) $p_e = \text{raízes de } \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{LH}) = \alpha_e(s) = 0$.

12. Em que condições o ganho \mathbf{L} do estimador pode ser selecionado de modo que as raízes de $\alpha_e(s) = 0$ sejam arbitrárias?

Se o sistema é observável.

13. Se a entrada de referência é organizada de modo que a entrada do estimador seja idêntica à entrada do processo, qual será a função de transferência em malha fechada global?

$$\mathcal{T}(s) = N \frac{b(s)}{\alpha_c(s)}.$$

14. Se a entrada de referência é apresentada de tal forma a permitir que os zeros sejam atribuídos como as raízes de $\gamma(s)$, qual será a função de transferência em malha fechada global?

$$T(s) = N \frac{\gamma(s)b(s)}{\alpha_e(s)\alpha_c(s)},$$

normalmente $\gamma(s) = \alpha_e(s)$.

15. Quais são as três técnicas padrões para a introdução do controle integral no método de projeto por realimentação de estados?
- Aumentando o estado do processo para incluir uma variável de estado integradora.*
 - Pela abordagem do modelo interno.*
 - Utilizando a abordagem do estimador estendido.*

Capítulo 8

1. Qual é a taxa de Nyquist? Quais são suas características?

A taxa de Nyquist é a metade da taxa de amostragem, ou $= \omega_s/2$. Acima desta taxa, nenhuma frequência pode ser representada por um sinal amostrado.

2. Descreva o processo de projeto equivalente discreto.

O controlador para um sistema é projetado como se o controlador fosse analógico. O controlador resultante é, então, aproximado por um controlador equivalente digital.

3. Descreva como chegar a um $D(z)$ se a taxa de amostragem é de $30 \times \omega_{BW}$.

Use o método de projeto discreto equivalente. Ele geralmente produz resultados satisfatórios para uma alta taxa de amostragem. No entanto, depois de usar o equivalente discreto, verifique o resultado usando uma simulação que inclua o efeito de amostragem ou, então, realize uma análise discreta linear exata. O melhor é usar uma simulação que inclua todos os efeitos de amostragem e atrasos conhecidos do sistema.

4. Para um sistema com largura de banda de 1 rad/s, descreva as consequências de diferentes taxas de amostragem.

Uma taxa de amostragem absoluta mínima é 2 rad/s (ou 0,32 Hz e $T = 3$ s). De 2 rad/s para 10 ou 20 rad/s, o controle será brusco com degraus notáveis no controle, e o projeto precisa ser feito com cuidado. Entre 20 e 30 rad/s, a magnitude dos degraus de controle se torna progressivamente menor e o projeto usando equivalentes discretos funciona razoavelmente bem. Acima de 30 rad/s, os degraus de controle são dificilmente perceptíveis e o equivalente discreto pode ser usado com confiança.

5. Cite duas vantagens da seleção de um processador digital, em vez de circuitos analógicos, para implementar um controlador.

- A arquitetura física de um controlador digital pode ser concluída antes que o projeto final esteja completo, muitas vezes concluindo a implementação física do controlador em muito menos tempo do que seria necessário para obter um controle analógico especificado e construído.*
- Um processador digital é mais flexível para realizar alterações de projeto, pois um programa computacional é mais fácil de ser reprogramado do que realizar religação e/ou adição de amps-op em uma placa de circuito impresso.*
- Um processador digital pode incluir mais facilmente termos não lineares e passos da lógica de decisão no projeto do controlador geral para permitir controle adaptativo ou para ganho escalonado, por exemplo.*
- Muitos modelos do mesmo controlador básico podem ser realizados simplesmente usando diferentes PROMS com a mesma arquitetura física de projeto. Por exemplo,*

- um fabricante de automóveis pode ter um projeto físico de controle do motor para sua linha de produtos, mas ter uma diferente PROM para cada combinação motor/veículo.*
- (e) *Controladores digitais são menos sensíveis às variações de temperatura do que os controladores analógicos.*
6. Dê duas desvantagens da seleção de um processador digital, em vez de circuitos analógicos, para implementar um controlador.
- (a) *A taxa de amostragem finita dos conversores A/D e D/A e a velocidade finita de computação do processador limitam a largura de banda do controlador para aproximadamente 1/10 da frequência de amostragem.*
- (b) *A precisão finita ou o pequeno comprimento de bits dos conversores introduzem ruído extra ou deslocamentos na malha de controle se forem usados controladores de qualidade inferior.*
- (c) *Custo. Para os controladores simples, uma implementação digital será tipicamente mais cara do que uma implementação analógica.*
- △ 7. Descreva como chegar a um $D(z)$ se a taxa de amostragem é de $5 \times \omega_{BW}$.
Comece usando o equivalente discreto, mas inclua uma aproximação do efeito do atraso no modelo da planta quando o projeto analógico for realizado. Em seguida, verifique o resultado por meio de uma análise discreta exata, convertendo a planta para o seu equivalente discreto, e combine-o com o controlador discreto. Se o desempenho é degradado em relação ao desejado, modifique o controlador discreto usando métodos de projeto discretos. Termine usando uma simulação que inclua todos os efeitos de amostragem e atrasos conhecidos do sistema.

Capítulo 9

1. Por que aproximamos um modelo físico da planta (que é *sempre* não linear) por um modelo linear?

A análise e o projeto para modelos lineares são muito mais simples do que para modelos não lineares. Além disso, foi mostrado (por Lyapunov) que, se a aproximação linear é estável, então existe pelo menos alguma região de estabilidade para o modelo não linear.

2. Como você linearizaria a equação não linear do sistema de transferência de calor por radiação $\dot{T} = T^4 + T + u$?

$$\delta\dot{T} = (4T_o^3 + 1)\delta T + \delta u,$$

sendo T_o a temperatura nominal de funcionamento. (Veja o estudo de caso PTR no Capítulo 10.)

3. Uma lâmpada utilizada como um atuador térmico tem uma não linearidade tal que a potência de saída medida experimentalmente está relacionada à tensão de entrada por $P = V^{1.6}$. Como você lidaria com essa não linearidade em um projeto de controle de realimentação? *Precedemos a lâmpada com uma não linearidade inversa – isto é, $V = P^{0.625}$ – de forma a linearizar o sistema em cascata (veja o estudo de caso PTR no Capítulo 10).*

4. O que é integrador windup?

Se o sinal de saída do atuador da planta saturar, então, pode demorar um longo tempo para o erro ser trazido de volta a zero a partir de um distúrbio inicial, e durante este tempo a saída do integrador pode crescer ou “windup” muito mais do que seria se o sistema fosse linear. Circuitos especiais “antiwindup” são projetados para evitar o windup.

5. Por que um circuito antiwindup é importante?

Quando um controle inclui uma ação integradora e esta é sujeita à saturação, grandes entradas podem causar grandes sobressinais e retardar a recuperação, a menos que um circuito antiwindup seja incluído.

6. Usando a função não linear de saturação com ganho 1 e limites ± 1 , esboce o diagrama de blocos de saturação para um atuador que tem ganho 7 e limites de ± 20 .

Se a saída do atuador é u_{out} e sua entrada é u_{in} , o controle é dado por

$$u_{out} = 20 \operatorname{sat}\left(\frac{7u_{in}}{20}\right).$$

7. O que é uma função descritiva e como ela está relacionada a uma função de transferência?

O objetivo da abordagem da função descritiva é encontrar algo como uma “função de transferência” para um elemento não linear. A função descritiva pode ser vista como uma extensão da resposta em frequência para não linearidades.

8. Quais são as premissas por trás do uso da função descritiva?

A suposição básica é de que a planta se comporta aproximadamente como um filtro passa-baixa. As outras hipóteses são de que a não linearidade é invariante no tempo e de que há um único elemento não linear no sistema.

9. O que é um ciclo limite em um sistema não linear?

Em alguns sistemas não lineares o erro se acumula e a resposta se aproxima de uma solução periódica de amplitude fixa, o ciclo de limite, à medida que o tempo cresce.

10. Como se pode determinar a função descritiva para um sistema não linear no laboratório?

Podemos injetar sinais senoidais no sistema e colocar um filtro passa-baixa com um corte acentuado na saída do sistema para medir a componente fundamental da saída. A função descritiva é, então, calculada como a razão entre a amplitude da componente fundamental da saída do sistema não linear ao longo da amplitude do sinal senoidal de entrada.

11. Qual é a estratégia de controle de tempo mínimo para um controle de atitude de satélite com controlador limitado?

Bang-bang.

12. Como são usados os dois métodos de Lyapunov?

O seu método indireto, ou primeiro método, baseia-se na linearização das equações de movimento, tirando conclusões sobre a estabilidade do sistema não linear e considerando a estabilidade da aproximação linear. Em seu método direto, ou segundo método, as equações não lineares são consideradas diretamente.

Capítulo 10

1. Por que uma configuração justaposta do atuador e sensor em uma estrutura levemente amortecida, como um braço robótico, é mais fácil de projetar do que uma configuração não justaposta?

No caso não justaposto, o processo naturalmente tem zeros próximos aos polos levemente amortecidos, que mantêm o lugar das raízes no SPE.

2. Por que o engenheiro de controle deve ser envolvido no projeto do processo a ser controlado?

Em muitos casos, as características e as posições dos atuadores e sensores podem ter um grande impacto na complexidade e dificuldade no projeto do controlador. Se as necessidades de controle estão incluídas no projeto do processo, os sistemas finais são geralmente mais eficazes (melhor desempenho de malha fechada) e menos dispendiosos.

3. Dê exemplos de um atuador e um sensor para os seguintes problemas de controle:

- (a) Controle de atitude de um satélite de comunicação geossíncrona.

Atuadores: jatos de gás frio, rodas de momento, torques magnéticos (bobinas, torque da haste), propulsor de plasma.

Sensores: sensor da Terra (rolamento, arfagem), giroscópio (para as taxas), rastreador de estrela.

- (b) Controle de arfagem em um avião Boeing 747.

Atuadores: profundor.

Sensores: taxa de arfagem e/ou ângulo de arfagem é medida usando um giroscópio ou um giroscópio de anel de laser.

- (c) Controle de rastreamento de trilha em uma unidade de disco.

Atuadores: motor CC para mover o mecanismo de braço (trenó de estágio duplo), bobinas magnéticas (duas) para focar nas trilhas.

Sensores: matrizes de fotodiodos.

- (d) Controle da relação ar-combustível de um motor de automóvel de ignição à faísca.

Atuadores: injetor de combustível.

Sensores: sensor de óxido de zircônio.

- (e) Controle da posição de um braço robótico usado para pintar automóveis.

Atuadores: atuadores hidráulicos ou motores elétricos.

Sensores: encoders para medir rotações do braço, sensores de pressão e sensores de força.

- (f) Controle de posição de um navio.

Atuadores: leme.

Sensores: giroscópio.

- (g) Controle de atitude de um helicóptero.

Atuadores: mover a bailarina (via ligação direta ou servo) rotaciona o ângulo de ataque da pás.

Sensores: os mesmos de aviões (tubo de pitot, acelerômetros, giroscópios).

Apêndice C Comandos do MATLAB®

Função (arquivo.m) ou variável do MATLAB	Descrição	Página(s)
angle	Ângulo	
ans	Resposta mais recente	
abs	Valor absoluto	
acker	Fórmula de Ackermann para alocação de polos	387-388,395-396,406-407,409,437-438
atan2	Tangente inversa para quatro quadrantes	
axis	Controla escalonamento do eixo	282-283,285
bilin	Transformação bilinear	
bode	Bode – resposta em frequência	71-72,257-258,269-271,327-328,453
bodemag	Bode – magnitude da resposta em frequência	
c2d	Conversão contínuo para discreto	174-175,303-305,423-424,433-435,494-495
canon	Formas canônicas no espaço de estados	375-376
clear	Limpa as variáveis e funções	
clf	Limpa figura atual	
close	Fecha figura	
close all	Fecha todas as figuras	
conj	Conjugado complexo	
conv	Multiplicação polinomial	79,398-399,400-401,664
cos	Cosseno	
ctrb	Matriz de controlabilidade	
ctrbf	Forma canônica escada, controlabilidade	371-372
damp	Amortecimento e frequência natural	510-512
dcgain	Calcula o ganho DC do sistema LIT	
deconv	Divisão de polinômios	
det	Determinante de uma matriz	
diag	Matriz diagonal, diagonais de uma matriz	
diary	Salva o texto da sessão do MATLAB	
dstep	Resposta ao degrau de um sistema discreto	
eig	Autovalores e autovetores	
exp	Exponencial	373
expm	Matrix exponencial	
eye	Matriz identidade	
ezplot	Função fácil de usar para traçar gráfico	
feedback	Conexão por realimentação de dois sistemas	225-227
figure	Cria janela de figura	
figure(i)	Faça i a figura atual	
find	Encontra índices de elementos diferentes de zero	
format	Define o formato de saída	

(continua)

Função (arquivo.m) ou variável do MATLAB	Descrição	Página(s)
freqresp	Resposta em frequência de sistemas LIT	
gram	Gramianos de controlabilidade/observabilidade	
grid	Linhas de grid	
hold	Mantém a figura atual	
i	$\sqrt{-1}$	
ilaplace	Transformada inversa de Laplace	
imag	Parte imaginária	
impulse	Resposta ao impulso do sistema LIT	95-96, 99, 109-110
inf	Infinito	
initial	Resposta à condição inicial do sistema no espaço de estados	406-4407, 412
inv	Matriz inversa	375, 376-377
j	$\sqrt{-1}$	
laplace	Transformada de Laplace	73-74
linmod	Linearização	537-538
linmod2	Linearização (avançada)	521-522
line	Criar uma linha	
linspace	Vetor linearmente espaçado	
load	Coloque as variáveis no ambiente de trabalho	
log	Logaritmo natural	
log10	Logaritmo na base 10	
loglog	Gráfico log-log	71-72, 257-258, 269-271, 276-277
logspace	Pontos de frequência logaritimicamente espaçados	60-62
lqe	Projeto de Estimador Linear Quadrático	452-453
lqr	Projeto de Regulador Linear Quadrático	402, 402-403, 629
lsim	Simulação de sistema LIT com entrada arbitrária	87, 87-88
ltiview	Abre a interface LIT GUI	
ltru	Recuperação da malha de transferência	
ltry	Recuperação da malha de transferência	
margin	Margens de ganho e de fase	307-308, 343-344, 453
max	Maior componente	327-328
mean	Média ou valor médio	
min	Menor componente	
nan	Não é um número	
nichols	Carta de Nichol	330
norm	Norma de matriz ou vetor	
nyquist	Diagrama de Nyquist	279-280, 282-283, 286
obsv	Matriz de observabilidade	408
obsvf	Forma canônica escada, observabilidade	408
ones	Matriz de uns	87
pade	Aproximação de Pade para o atraso de tempo	235-236
parallel	Conexão em paralelo de dois sistemas LIT	92
place	Alocação de polos	390-391, 409, 420, 425-426, 442-443
pi	3,141592653589793	
plot	Função para traçar gráfico	28-29, 85, 87
pole	Polos de sistema LIT	
poly	Forma polinomial de suas raízes	82-83
polyval	Avalia polinômio	
printsyst	Imprimir o sistema em um formato bonito	84-85
pzmap	Mapa Polo-zero	94
rand	Números aleatórios uniformemente distribuídos	

(continua)

Função (arquivo.m) ou variável do MATLAB	Descrição	Página(s)
randn	Números aleatórios normalmente distribuídos	
rank	Posto da matriz	
real	Parte real	
residue	Resíduos da expansão em frações parciais	79, 82-83, 664
rlocfind	Encontra o ganho do lugar das raízes	212, 344
rlocus	Lugar das raízes	193-194, 344, 398-399, 400-401
rltool	Ferramenta interativa do lugar das raízes	243
roots	Raízes de um polinômio	117-118, 205-206, 381-382, 390-391
save	Salve as variáveis no ambiente de trabalho	
semilogx	Gráfico semi-log	71-72, 257-258, 453
semilogy	Gráfico semi-log	327-328
series	Conexão em série de dois sistemas LIT	92, 453, 510-512
sgrid	Linhas de grid no plano-s	
sin	Seno	
sim	Simula um modelo no SIMULINK	
sisotool	Ferramenta de projeto SISO	
size	Tamanho de uma matriz	
sort	Ordena em ordem crescente ou decrescente	
sqrt	Raiz quadrada	442
squeeze	Remove dimensões únicas	
ss2ss	Transformação de similaridade no espaço de estados	
ss2tf	Conversão espaço de estados para função de transferência	365, 378, 381, 580, 590, 598, 605
ss2zp	Conversão espaço de estados para polo-zero	365
ss	Conversão para espaço de estados	361, 375-376, 380-381, 382-383
ssdata	Criar um modelo no espaço de estados	375-376
std	Desvio padrão	
step	Resposta ao degrau	20-21, 118-119, 119
subplot	Vários gráficos na mesma janela	
sum	Soma dos elementos	
svd	Decomposição em valores singulares	
syms	Declaração de variáveis simbólicas	657
text	Anotação de texto	
tf2ss	Conversão de função de transferência para espaço de estados	368
tf2zp	Conversão de função de transferência para polo-zero	84-85, 86
tf	Criação ou conversão para função de transferência	20-21, 71-72, 92, 95-96, 109-110, 173, 398-399
tfdata	Dados da função de transferência	
title	Título do gráfico	
tzero	Zeros de transmissão	405-406, 415-416
var	Variância	
who	Lista das variáveis atuais	
why	Responde qualquer pergunta que você tenha	
whos	Lista das variáveis atuais, forma longa	
xlabel	Rótulo do eixo x	
xlsread	Obtém dados de uma planilha do Excel	
ylabel	Rótulo do eixo y	
zero	Zeros de transmissão	
zeros	Matriz de zeros	87
zgrid	Linhas de grid no plano-z	
zpk	Zero, polo e ganho	
zp2tf	Conversão zero-polo para função de transferência	

Bibliografia

- Abramovitch, D. and G. F. Franklin, "A brief history of disk drive control," *IEEE Control System Magazine*, Vol. 22, pp. 28–42, June 2002.
- Ackermann, J., "Der entwurf linearer regelungssysteme im zustandsraum," *Regelungstech. Prozess-Datenverarb.*, Vol. 7, pp. 297–300, 1972.
- Airy, G. B., "On the regulator of the clock-work for effecting uniform movement of equatorials," *Mem. R. Astron. Soc.*, Vol. 11, pp. 249–267, 1840.
- Alon, U., *An Introduction to Systems Biology*. Chapman & Hall/CRC, 2007.
- Alon, U., M. G. Surette, N. Barkai, and S. Leibler, "Robustness in bacterial chemotaxis," *Nature*, Vol. 397, pp. 168–171, January 1999.
- Anderson, B. D. O. and J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1990.
- Anderson, E., *et al.*, *LAPACK User's Guide*, 3rd ed., Philadelphia, PA: SIAM, 1999.
- Åström, K. J., "Frequency domain properties of Otto Smith regulators," *Int. J. Control.*, Vol. 26, No. 2, pp. 307–314, 1977.
- Åström, K. J. and T. Hägglund, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, 2nd ed., Research Triangle, NC: International Society for Measurement and Control, 1995.
- Åström, K. J. and T. Hägglund, *Advanced PID Control*. Research Triangle, NC: International Society for Measurement and Control, 2006.
- Athans, M., "A tutorial on the LQG/LTR method," *Proc. American Control Conf.*, pp. 1289–1296, June 1986.
- Barkai, N. and S. Leibler, "Robustness in simple biochemical networks," *Nature*, Vol. 387, pp. 913–917, 1997.
- Bellman, R. and R. Kalaba, eds., *Mathematical Trends in Control Theory*. New York: Dover, 1964.
- Berg, H. C., *E. coli in Motion*. New York: Springer-Verlag, 2004.
- Bergen, A. R. and R. L. Franks, "Justification of the describing function method," *SIAM J. Control*, Vol. 9, pp. 568–589, 1971.
- Blakelock, J. H., *Automatic Control of Aircraft and Missiles*. 2nd ed., New York: John Wiley, 1991.
- Boden, D., $E = MC^2$: A Biography of the World's Most Famous Equation. New York: Walker and Co., 2000.
- Bode, H. W., "Feedback: The history of an idea," *Conference on Circuits and Systems*. New York (1960): Reprinted in Bellman and Kalaba, 1964.
- , *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. New York: Van Nostrand, 1945.
- Boyd, S. P. and C. H. Barratt, *Linear Controller Design: Limits of Performance*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.
- Brennan, R. P., *Heisenberg Probably Slept Here*. New York: John Wiley & Sons, 1997.
- Brown, J. W. and R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*. 6th ed., New York: McGraw-Hill, 1996.

- Bryson, A. E., Jr. and W. F. Denham, "A steepest-ascent method for solving optimum programming problems," *J. Appl. Mech.*, June 1962.
- Bryson, A. E., Jr. and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*. Waltham, MA: Blaisdell, 1969.
- Bryson, A. E., Jr., *Control of Spacecraft and Aircraft*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
- Callender, A., D. R. Hartree, and A. Porter, "Time lag in a control system," *Philos. Trans. R. Soc. London A*, London: Cambridge University Press, 1936.
- Campbell, G. A. and R. N. Foster, *Fourier Integrals for Practical Applications*. New York: Van Nostrand, 1948.
- Campbell, N. A. and J. B. Reece, *Biology*, 8th ed., Benjamin Cummings, 2008.
- Cannon, R. H., Jr., *Dynamics of Physical Systems*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- Churchill, R. V., *Operational Mathematics*, 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 1972.
- Clark, R. N., *Introduction to Automatic Control Systems*. New York: John Wiley, 1962.
- Clegg, J. C., "A nonlinear integrator for servomechanisms," *Trans. AIEE*, Pt. II, Vol. 77, pp. 41–42, 1958.
- de Roover, D., L. Porter, A. Emami-Naeini, J. A. Marohn, S. Kuehn, S. Garner, and D. Smith, "An all-digital cantilever controller for MRFM and scanned probe microscopy using a combined DSP/FPGA design," *Am. Lab.*, Vol. 40, No. 8, pp. 12–17, 2008.
- de Roover, D., A. Emami-Naeini, and J. L. Ebert, "Model-based control of fast-ramp RTP systems," *Sixth International Conference on Advanced Thermal Processing of Semiconductors*, pp. 177–186, Kyoto, Japan, September 1998.
- de Vries, G., T. Hillen, M. Lewis, J. Muller, and B. Schonfisch, *A Course in Mathematical Biology*. SIAM, 2006.
- Dorato, P., *Analytic Feedback System Design: An Interpolation Approach*, Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000.
- Doyle, J. C., B. A. Francis, and A. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*. New York: Macmillan, 1992.
- Doyle, J. C. and G. Stein, "Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-26, No. 1, pp. 4–16, February 1981.
- Doyle, J. C., "Guaranteed margins for LQG regulators," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-23, pp. 756–757, 1978.
- Doyle, J. C. and G. Stein, "Robustness with observers," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-24, pp. 607–611, August 1979.
- Ebert, J. L., A. Emami-Naeini, H. Aling, and R. L. Kosut, "Thermal modeling of rapid thermal processing systems," *Third International Rapid Thermal Processing Conference*, pp. 343–355, Amsterdam, August 1995a.
- Ebert, J. L., A. Emami-Naeini, and R. L. Kosut, "Thermal Modeling and control of rapid thermal processing systems," *Proceeding 34th IEEE Conference Decision and Control*, pp. 1304–1309, December 1995b.
- Elgerd, O. I., *Electric Energy Systems Theory*. New York: McGraw-Hill, 1982.
- and W. C. Stephens, "Effect of closed-loop transfer function pole and zero locations on the transient response of linear control systems," *Trans. Am. Inst. Electr. Eng. Part I*, Vol. 42, pp. 121–127, 1959.
- Emami-Naeini, A., "The shapes of Nyquist plots: Connections with classical plane curves," *IEEE Control Systems Magazine*, October 2009.
- Emami-Naeini, A., J. L. Ebert, D. de Roover, R. L. Kosut, M. Dettori, L. Porter, and S. Ghosal, "Modeling and control of distributed thermal systems," *Proc. IEEE Trans. Control Systems Technol.*, Vol. 11, No. 5, pp. 668–683, September 2003.
- Emami-Naeini, A. and G. F. Franklin, "Zero assignment in the multivariable robust servomechanism," *Proc. IEEE Conf. Dec. Control*, pp. 891–893, December, 1982.

- Emami-Naeini, A., and P. Van Dooren, "Computation of zeros of linear multivariable systems," *Automatica*, Vol. 18, No. 4, pp. 415–430, 1982.
- "On computation of transmission zeros and transfer functions," *Proc. IEEE Conf. Dec. Control*, pp. 51–55, December 1982.
- Etkin, B. and L. D. Reid, *Dynamics of Flight: Stability and Control*, 3rd ed., New York: John Wiley, 1996.
- Evans, G. W., "Bringing root locus to the classroom," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 24, pp. 74–81, 2004.
- Freudenberg, J. S. and D. P. Looze, "Right half plane zeros and design tradeoffs in feedback systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-30, pp. 555–561, June 1985.
- Fuller, A. T., "The Early development of control theory," *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, Vol. 98, pp. 109–118 and 224–235, 1976.
- Gardner, M. F. and J. L. Barnes, *Transients in Linear Systems*. New York: John Wiley, 1942.
- Gunckel, T. L., III and G. F. Franklin, "A general solution for linear sampled data control," *J. Basic Eng.*, Vol. 85-D, pp. 197–201, 1963.
- Gyugyi, P., Y. Cho, G. F. Franklin, and T. Kailath, "Control of rapid thermal processing: A system theoretic approach," *Proceedings of IFAC World Congress*, 1993.
- Hanselman, D. C. and B. C. Littlefield, *Mastering MATLAB 7*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2005.
- Heffley, R. K. and W. F. Jewell, *Aircraft Handling Qualities*, Technical Report 1004-1, System Technology, Inc., Hawthorne, CA, May 1972.
- Higham, D. J. and N. J. Higham, *MATLAB Guide*, 2nd ed., Philadelphia: SIAM, 2005.
- Ho, M.-T., A. Datta, and S. P. Bhattacharyya, "An elementary derivation of the Routh-Hurwitz criterion," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 43, No. 3, pp. 405–409, 1998.
- Huang, J-J. and D. B. DeBra, "Automatic tuning of Smith-predictor design using optimal parameter mismatch," *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 3307–3312, December 2000.
- Hubbard, M., Jr., and J. D. Powell, "Closed-loop control of internal combustion engine exhaust emissions," SUDAAR No. 473, Department of Aero/Astro, Stanford University, Stanford, CA, February 1974.
- James, H. M., N. B. Nichols, and R. S. Phillips, *Theory of Servomechanisms*, Radiation Lab. Series, 25. New York: McGraw-Hill, 1947.
- Johnson, R. C., Jr., A. S. Foss, G. F. Franklin, R. V. Monopoli, and G. Stein, "Toward development of a practical benchmark example for adaptive control," *IEEE Control System Magazine*, Vol. 1, No. 4, pp. 25–28, December 1981.
- Joseph, P. D. and J. T. Tou, "On linear control theory," *AIEE Transactions*, Vol. 80, pp. 193–196, 1961.
- Kailath, T., *Linear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1980.
- Kalman, R. E., "A new approach to linear filtering and prediction problems," *J. Basic Eng.*, Vol. 85, pp. 34–45, 1960a.
- Kalman, R. E. and J. E. Bertram, "Control system analysis and design via the second method of Lyapunov. II. Discrete Systems," *J. Basic Eng.*, Vol. 82, pp. 394–400, 1960.
- Kalman, R. E., Y. C. Ho, and K. S. Narendra, "Controllability of linear dynamical systems," *Contributions to Differential Equations*, Vol. 1. New York: John Wiley, 1962.
- Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, 3rd ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- Kharitonov, V. L., "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations," *Differential'nye Uravneniya*, Vol. 14, pp. 1483–1485, 1978.
- Kochenburger, R. J., "A frequency response method for analyzing and synthesizing contactor servomechanisms," *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.*, Vol. 69, pp. 270–283, 1950.

- Kuo, B. C., ed., *Incremental Motion Control, Vol. 2: Step Motors and Control Systems*, Champaign, IL: SRL Publishing, 1980.
- *Proceedings of the Symposium Incremental Motion Control Systems and Devices, Part. I: Step Motors and Controls*, Champaign-Urbana, IL: University of Illinois, 1972.
- Lanchester, F. W., *Aerodonetics*. London: Archibald Constable, 1908.
- LaSalle, L. P. and S. Lefschetz, *Stability by Lyapunov's Direct Method*. New York: Academic Press, 1961.
- Lyapunov, A. M., “Problème général de la stabilité du mouvement,” *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, Vol. 9, pp. 203–474, 1907; original paper published in 1892 in *Commun. Soc. Math. Kharkow*, 1892; reprinted as Vol. 17 in *Annals of Math Studies*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1949.
- Ljung, L., *System Identification: Theory for the User*, 2nd ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
- Luenberger, D. G., “Observing the state of a linear system,” *IEEE Trans. Mil. Electron.*, Vol. MIL-8, pp. 74–80, 1964.
- Mahon, B., *The Man who Changed Everything: The Life of James Clerk Maxwell*, UK: Wiley, 2003.
- Marsden, J. E. and M. J. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, 3rd ed., Freeman, 1999.
- Mason, S. J., “Feedback theory: Some properties of signal flow graphs,” *Proc. IRE*, Vol. 41, pp. 1144–1156, 1953.
- “Feedback theory: Further properties of signal flow graphs,” *Proc. IRE*, Vol. 44, pp. 920–926, 1956.
- Maxwell, J. C., “On governors,” *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. 16, pp. 270–283, 1868.
- Mayr, O., *The Origins of Feedback Control*. Cambridge, MA: MIT Press, 1970.
- McRuer, D.T., I. Askenas, and D. Graham, *Aircraft Dynamics and Automatic Control*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1973.
- Mello, B. A., L. Shaw, and Y. Tu, “Effects of receptor interaction in bacterial chemotaxis,” *Biophysical Journal*, Vol. 87, pp. 1578–1595, September 2004.
- Messner, W. C. and D. M. Tilburry, *Control Tutorials for MATLAB and Simulink: A Web-Based Approach*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
- Minimis, G. S. and C. C. Paige, “An algorithm for pole assignment of time invariant systems,” *Int. J. Control.*, Vol. 35, No. 2, pp. 341–354, 1982.
- Moler, C. B., “Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twentyfive years later,” *SIAM Rev.*, Vol. 45, No. 1, pp. 3–49, 2003.
- *Numerical Computing with MATLAB*, Philadelphia, PA: SIAM, 2004.
- Norman, S. A., “Wafer temperature control in rapid thermal processing,” Ph.D. Dissertation, Stanford University, Stanford, CA, 1992.
- Nyquist, H., “Regeneration theory,” *Bell Systems Technical J.*, Vol. 11, pp. 126–147, 1932.
- Oswald, R. K., “Design of a disk file head positioning servo,” *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 18, pp. 506–512, November 1974.
- Parks, P., “Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems,” *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-11, No. 3, 1966.
- Perkins, W. R., P. V. Kokotovic, T. Boureret, and J. L. Schiano, “Sensitivity function methods in control system education,” *IFAC Conference on Control Education*, June 1991.
- Ragazzini, J. R., R. H. Randall, and F. A. Russell, “Analysis of problems in dynamics by electronic circuits,” *Proc. IRE*, Vol. 35, No. 5, pp. 442–452, May 1947.
- Ragazzini, J. R. and G. F. Franklin, *Sampled-Data Control Systems*, New York: McGraw-Hill, 1958.

Reliance Motion Control Corp., *DC Motor Speed Controls Servo Systems*, 5th ed., Eden Prairie, MN: Reliance Motion Control Corp., 1980.

Routh, E. J., *Dynamics of a System of Rigid Bodies*. London: MacMillan, 1905.

Saberi, A., B. M. Chen, P. Sannuti, *Loop Transfer Recovery: Analysis and Design*. New York: Springer-Verlag, 1993.

Safonov, M. G. and G. Wyetzner, "Computer-aided stability analysis renders Popov criterion obsolete," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-32, pp. 1128–1131, 1987.

Sandberg, I. W., "A frequency domain condition for stability of feedback systems containing a single time varying nonlinear element," *Bell Systems Technical J.*, Vol. 43, pp. 1581–1599, 1964.

Sastry, S. S., *Nonlinear Systems; Analysis, Stability, and Control*. New York: Springer-Verlag, 1999.

Schmitz, E., "Robotic arm control," Ph.D. Dissertation, Stanford University, Stanford, CA, 1985.

Sedra, A. S., and K. C. Smith, *Microelectronics Circuits*, 3rd ed., New York: Oxford University Press, 1991.

Simon, H. A., "Dynamic programming under uncertainty with a quadratic function," *Econometrica*, Vol. 24, pp. 74–81, 1956.

Sinha, N. K. and B. Kuszta, *Modeling and Identification of Dynamic Systems*. New York: Van Nostrand, 1983.

Smith, O. J. M., *Feedback Control Systems*. New York: McGraw-Hill, 1958.

Sobel, D., *Galileo's Daughter*. New York: Penguin Books, 2000.

Stein, G. and M. Athans, "The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-32, pp. 105–114, February 1987.

Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, 3rd ed., New York: Harcourt Brace, 1988.

Swift, J., *On Poetry: A Rhapsody*, 1973, J. Bartlett, ed., *Familiar Quotations*, 15th ed., Boston: Little Brown, 1980.

Sze, S. M., ed. *VLSI Technology*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1988.

Taubman, P., *Secret Empire: Eisenhower, the CIA, and the Hidden Story of America's Space Espionage*, New York: Simon and Schuster, 2003.

Thomson, W. T. and M. D. Dahleh, *Theory of Vibration with Applications*, 5th ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.

Trankle, T. L., "Development of WMEC Tampa maneuvering model from sea trial data," Report MA-RD-760-87201. Palo Alto, CA: Systems Control Technology, March 1987.

Truxal, J. G., *Control System Synthesis*. New York: McGraw-Hill, 1955.

van der Linden, G., J. L. Ebert, A. Emami-Naeini, and R. L. Kosut "RTP robust control design: Part II: controller synthesis," Fourth *International Rapid Thermal Processing Conference*, pp. 263–271, September 1996.

Van der Pol, B., and H. Bremmer, *Operational Calculus*. New York: Cambridge University Press, 1955.

Van Dooren, P., A. Emami-Naeini, and L. Silverman, "Stable extraction of the kronecker structure of pencils," *Proc. IEEE Conf. Dec. Control*, San Diego, CA, pp. 521–524, December 1978.

Vidyasagar, M., *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993.

Wiener, N., "Generalized harmonic analysis," *Acta Math.*, Vol. 55, pp. 117, 1930.

Woodson, H. H. and J. R. Melcher, *Electromechanical Dynamics, Part I: Discrete Systems*. New York: John Wiley, 1968.

Workman, M. L., "Adaptive proximate time-optimal servomechanisms," Ph.D. Dissertation, Stanford University, Stanford, CA, 1987.

- Yi, T.-M., Y. Huang, M. I. Simon, and J. C. Doyle, “Robust perfect adaptation in bacterial chemotaxis through integral feedback control,” *PNAS*, Vol. 97, No. 9, pp. 4649–4653, April 2000.
- Zames, G., “On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems—Part I: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity and positivity,” *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-11, pp. 465–476, 1966.
- “On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems—Part II: Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities,” *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-11, pp. 228–238, 1966.
- Ziegler, J. G. and N. B. Nichols, “Optimum settings for automatic controllers,” *Trans. ASME*, Vol. 64, pp. 759–768, 1942.
- “Process lags in automatic control circuits,” *Trans. ASME*, Vol. 65, No. 5, pp. 433–444, July 1943.

Índice

A

Abcissa de convergência, 655-656
Abordagem do modelo interno,
 controle integral, 441
acker.m, 388-389, 395-396, 406-407
Adaptação, 638-639
Aeronave
 controle lateral e longitudinal
 equações não lineares, 593-597
 procedimento de projeto do sistema de
 controle, 593
 resposta usando o MATLAB, 109-111
Agilent Technologies, 258-259
Airy, G. B. 9-10, 175-176
Ajuste no trocador de calor, 167-169
Algoritmo QR, 374
Algoritmo Staircase, 471
Aliasing
 exemplo, 502-503
 planos s e z , 491
Alimentação
 de distúrbios, 575-576
 exemplo de modelo integral, 447
Alocação de polos
 lugar das raízes
 LRS, 423-424
 servo CC, 421
Alocação do zero
 do estimador
 descrição, 428
 exemplo, 430-431
 incremento de velocidade constante, servo-
 mecanismo, 430-435
Altímetro barométrico, 604
Alto-falante
 com circuito, 40-41
 geometria, 38-40
 modelagem, 38-40
Altura da água no tanque, equação descritiva,
46-47
Altura da água no tanque e fluxo de saída,
linearização da, 48-49
Amortecedor de arfagem, 597-604
Amortecedor de guinada Dutch roll, 599-600
Amortecimento do lugar das raízes no plano-
- z , 491
Amortecimento na resposta do projeto digital
versus o contínuo, 510-512

Amostragem assíncrona, 505-506
Amplitude, tensão de armadura, 42
Amp-op
 círculo simplificado, 36-37
 como integrador, 37-39
 esquema símbolo, 36-37
 somador, 37-38
Analisadores espetrais, 258-259
Análise de estabilidade, 10-11
Análise de estabilidade de Lyapunov, 550-552
 assintoticamente estável, 550-552
 estável em larga escala, 550-552
 primeiro método, 550-553
 reprojeto de controle adaptativo, 555
 segundo método, 550-553
Análise de ganho equivalente
 lugar das raízes, 527
 resposta em frequência, 536-537
Análise dinâmica de sistemas discretos, 486-487
 inversão da transformada z , 489
 relação s e z , 489-491
 Teorema do Valor Final, 491-493
 transformada z , 486-487
Anel giroscópio a laser, 598
Ângulo de arfagem, 594
Ângulos de chegada, regra para, 199-200
Ângulos de partida, projeto no lugar das raízes, 211
Apollo, 642-643
Aproximação bilinear, 493-494
Aproximação de Padé, 235-236
Armadura, 41
Arranjo de Routh, 114-116
Assíntotas
 ângulos das, 197
 centro do lugar das raízes positivo, 197-198
 lugar das raízes positivo, 197
 resposta em frequência, 264-265
Åström, Karl, 15-16, 500-501, 511-512
Athans, M. 461-462
Atividade, *E. coli*, 638-639
Atraente, 636-637
Atraso
 contrastando com métodos de aproximação,
 235-236
 operação do segurador, 485-487
Atraso de fase
 entre a saída e a entrada, 72-73
 versus tempo de atraso, 328-329
Atraso de tempo, 76, 234-237, 658
 fase, 328-329
 função de transferência, 457-458
 lugar das raízes, 234-235
 trocador de calor, 236
 magnitude, 328-329
 método de projeto em resposta em frequência, 328-329
 problemas relacionados a, 352-353
 regulador de Smith, 458-459
 trocador de calor, 459-460
Atraso puro de tempo
 projeto de sistema, 457-460
 problemas relacionados a, 482-483
 trocador de calor, 459-460
Atuadores, 2-4
 dimensionamento, 536-537
 procedimento de projeto do sistema de
 controle, 574-575
Atuadores de motores CC, 40
Atuadores hidráulicos, modelagem, 49-52
Autovalor, 373
Autovetor, 373
Auxílio computacional, 13
Avaliação no contorno, 274-276
Avaliação/modificação na planta, 575-576

B

Bactéria, 634-635
Baixa sensibilidade, critérios de projeto para,
320-321
Balão de ar quente, 647
Barkai, N., 637
Battin, Dick, 513, 642-643
Bell, Alexander Graham, 261-262
Bellman, R., 12
Berg, H., 636-637
Bertram, J. E., 555, 563
BIBO estabilidade, 112-113
Biologia de sistemas, 634-635
Black, H. S., 10-11, 176-177, 332-333
Bobina de voz, 38-40
Bode, H. W., 10-12, 176-177, 332-333
bode.m, 71-72, 257-258, 269-271
Boeing, 648
 controle lateral e longitudinal de, 593-609
 coordenadas da aeronave, 594
Boyd, S. P., 454

Brahe, Tycho, 52-53
 Bremmer, H., 74-75
 Bristol, Companhia, 175-176
 Brystol, A. E., 461-462

C

c2d.m, 423-424
 Calculadora de Frieden, 237-238
 Cálculo de ganho para entrada de referência, 391-392
 Calor específico, 43-44
Cambalhota, E. coli, 636-637
 Campbell, G. A., 74-75
 Cancelamento, função de transferência, 83-84
 Cancelamento polo-zero, 434-435
 Canon, R. H., Jr., 44-45
 canon.m, 375-376
 Capacidade térmica, 43-44
 Capacitor
 características da resposta em frequência, 256-257
 estabilidade, 113
 símbolo e equação, 36
 Características físicas, 500-504
 Carburador, 609
 Carta de Nichols, 329-330
 contornos de magnitude de malha fechada constante, 330
 exemplo PID, 330-332
 Caso não justaposto, lugar das raízes para, 211
 Célula, 634-635
 Célula procariótica, 634-635
 Centro de banda, 96-97
 Ciclo limite, 530-531
 Circuito de Schmitt, 541
 Circuito em ponte-T, 36-38
 Circuitos elétricos
 determinação das equações diferenciais, 36-37
 elementos, 36
 equações e funções de transferência, 37-39
 modelos dinâmicos de, 35-39
 problemas relacionados a, 59-61
 Círculos M e N, 330
 Clark, R. N., 249-250
 Coeficiente de amortecimento, 96-97
 versus margem de fase, 288-289
 versus sobressinal, 102
 Coeficiente de erro de velocidade, 271-272
 Comando no profundo, 228-229
 Comparação da resposta ao degrau de sistemas contínuo e discreto, 223, 425-426
 Comparador, 4-5
 Compensação
 lei de controle e estimador, 383
 lugar das raízes, 213-214, 532-533
 método de projeto em resposta em frequência, 298-321
 problemas relacionados à, 346-353
 procedimento de projeto do sistema de controle, 575-576
 Compensação antiwindup para controladores PI, 535-537

Compensação de atraso, 217-218
 característica da, 318-319
 definição, 213-214
 ilustração do circuito, 225
 método de espaço de estado, 430-435
 método de resposta em frequência, 310-315
 motor CC, 311-315
 procedimento de projeto, 310-312
 projeto usando, 219-220
 Compensação de avanço, 214-215, 299-302
 característica da, 318-319
 definição, 213-214
 ilustração do circuito, 223
 implementações analógica e digital, 222-223
 leis de controle discretas, 508-509
 máximo aumento de fase, 301
 para motor CC, 302-307
 principais parâmetros de projeto, 305-306
 procedimento de projeto, 306-307, 575-576
 projeto usando, 214-219
 resposta em frequência, 300
 usando o MATLAB, 226-228
 Compensação dinâmica, 213-214
 problemas relacionados à, 245-246, 248-249
 característica de compensação, 318-319
 resposta em frequência, 299
 Compensação rejeita faixa
 definição, 214-215
 extensão do método do lugar das raízes, 532-533
 projeto usando, 219-222
 Compensador de avanço, 204-205
 características da resposta em frequência, 257-259
 exemplo, 204-206
 exemplo de espaço de estado, 419
 projeto para o sistema tipo 1 de servomecanismo, 307-309
 sistema de controle de temperatura, 306-308
 Compensador de Smith, 458-459
 Compensador estável, 421
 Compensador proporcional-derivativo (PD), 299
 Complexidade do sistema versus a resposta do sistema, 603-604
 Complicações de não linearidades, 611-612
 Compromisso de projeto, 7-8
 amortecedor de guinada, 603-604
 satélite, 400-401
 Computador, controle digital, 502-504
 Computador analógico
 componentes, 363-364
 implementação, 364-366
 Comunicação via satélite, 23-24
 Condição de estabilidade, resposta em frequência, 273-274
 Condição de fase, 194-195
 Condição de Magnitude, 201
 valor do parâmetro, 243
 Condutividade térmica, 43-44
 Configuração Butterworth, 451-452
 Conjectura de Aizerman, 558-559
 Considerações de projeto,
 projeto em resposta em frequência, 319-320
 Constante de erro de posição, 153-154, 271
 Constante de tempo, 93
 Constantes de erro, 154-155
 Continuação do lugar das raízes, 199-200
 Continuidade analítica, 655-656
 Controlabilidade, 373
 Controlabilidade fraca, 389-390
 Controlador de três termos, 160
 Controlador digital
 atitude de uma estação espacial, 497-498
 diagrama de blocos, 485-486
 implementação digital, 170-171
 Método de Tustin, 494-496
 Controlador digital da estação espacial, 508-510
 Controlador discreto, 423-424
 Controladores, 4-5
 contínuo e discreto, gráficos de comparação, 223, 305-306
 diagrama Simulink, 304-305, 424-425
 dimensões, 455-456
 equações, 427, 429
 forma polinomial, 455
 função de transferência, 209-211
 Controle adaptativo, 555
 Controle bang-bang, 548-549
 Controle barato, 402-403
 Controle caro, 402-404
 Controle clássico, 12
 projeto, 357-358
 Controle da relação ar-combustível, 643-644
 Controle de altitude de aeronave
 projeto de compensador PID para, 315-320
 simples critério de projeto para, 294-298
 Controle de altitude de satélite, 164-165
 aplicação, 578-593
 exemplo de projeto compensador de ordem completa, 416-418
 forma de espaço de estados, 359-361
 LRS, 398-399
 movimento de rotação, 23-26
 projeto de compensador de ordem reduzida, 418-419
 RFTM, 452-453
 Controle de atitude digital da estação espacial, 497-499
 Controle em malha fechada, 7, 146
 Controle de nível de líquido, 7-8
 Controle de posição de motor CC
 controle PI para, 163-165
 tipo de sistema para, 157-158
 Controle de rastreamento, 13-14
 Controle de satélite
 lugar das raízes
 compensador de avanço, 204-206
 esquema, 24-25
 flexibilidade de justaposta, 209-210
 pequeno valor para o polo, 205-207
 valor de transição para o polo, 206-207
 Controle de velocidade do servo, LRS, 398-399
 Controle digital, 170-175, 484-514
 análise dinâmica de sistemas discretos, 168-170, 486-493

- digitalização de PID, 171
 discretos equivalentes, 166-167, 492-501
 projeto discreto, 505-512
 regra trapezoidal, 166-167
 seleção de taxa de amostragem, 503-506
- Controle em malha aberta, 6
 sistema, 146-148
- Controle integral, 436-451
 abordagem do modelo interno, 441
 descrição, 436-438
 diagramas de blocos, 437-438
 equações de estado aumentadas, 436-437
 estrutura, 436-437
 lei de realimentação, 436-437
 problemas relacionados a, 481-483
 sistema de velocidade do motor, 436-439
 solução polinomial, 457-458
 usando o projeto no espaço do erro, 447-447
- Controle moderno, 12
- Controle ótimo, 396-397
- Controle PD modificado, 204-206
- Controle PID, 10-12
- Controle proporcional (P), 160-161
 leis de controle discreto, 507-508
- Controle proporcional mais integral (PI), 160-162
- Controle proporcional-integral-derivativo (PID), 161-163
 formato digital, 165
- Controle realimentado, 1-2
 componentes, 2-3
- Controle robusto
 definição, 439-440
 equações no espaço de erro, 439-440
 senoide, 441-447
- conv.m, 79, 398-399
- Conversor catalítico, 609
- Conversor digital para analógico (D/A), 501-502
- Conversores analógico para digital (A/D), 484-486, 500-502
- Convolução, 77, 660-661
- Coordenadas da aeronave, 594
- Copérnico, Nicolau 52-53
- Corpos rígidos, desenvolvimento de equações de movimento, 34-35
- Correspondência polo-zero (MPZ)
 método, 499
 MMPZ comparação, 500
 projeto por emulação, 495-496
- Critério de estabilidade de Nyquist, 273-285
 problemas relacionados ao, 339-342
- Critério de estabilidade de Routh, 114-116
- Critério de projeto para o controle de atitude de aeronave, 294-298
- Critério do círculo, 556-559, 561
 condições de setor, 557-558
 determinação da estabilidade usando, 562
 relação com funções descritivas, 562
 setor para a não linearidade de sinal, 557-558
- Cruzamentos em -1, 294-295, 326
- Curva composta, 265-266
- Curva de reação do processo, 166-167
- Curva de torque-velocidade para o servomotor, 42
- D**
- Dados de resposta em frequência
 fonte de dados experimentais, 121-122
 margem de fase, 288
- Dados experimentais
 fontes, 121-122
 obtendo modelos, 120-121, 126-127
- damp.m, 510-512
- Década, 261-262
- Decibel, 261-262
- Decremento logarítmico, 139
- Demonstração da relação de ganho-fase, 292
- Derivada do sinal coseno, 659-660
- Derivativo, leis de controle discreto, 507-508
- Descrição de estado
 equação, 376-377
 função de transferência do sistema térmico, 377-379
 zeros para sistemas térmicos, 379-380
- Desempenho de rastreamento, 504
- Desenvolvimento da equação de movimento para corpos rígidos, 34
- Deslocamento em frequência, 77, 659
- desmetilação, 638
- Desoer, C. A., 461-462
- Diagrama de blocos, 5, 87-92
 álgebra, 90-91
 equações de estado, 366-377
 exemplo de simplificação, 91
 função de transferência, 90-92
 redução usando o MATLAB, 92-93
 sistemas de terceira ordem, 365
- Diagrama de blocos de filtro rejeita faixa, 533
- Diagrama de blocos elementar, 89-90
- Diagrama de Bode
 auxiliado por computador, 269-271
 polos complexos, 267-269
 polos e zeros complexos, 267-271
 polos e zeros reais, 266-267
 regras, 265-266
 resposta em frequência, vantagens, 261-262
 sistemas com múltiplas frequências de cruzamento, 291-292
 sistemas de fase mínima e não mínima, 271
 SPD, 285
- Diagrama de corpo livre
 Leis de Newton, 18-19
 mecanismo de leitura/escrita em disco, 26-27
 sistema de suspensão, 22
- Diagrama de Nyquist, 277-278
 avaliação, 276-277
 características, 285-286
 definição de margens de ganho e de fase, 286-287
 posições dos polos, 399
 procedimento de esboço, 278
 projeto LQR, 400-401
 sistema de múltiplas frequências de cruzamento, 291
 sistema de segunda ordem, 278-280
 sistema de terceira ordem, 280-283
 sistema instável em malha aberta, 283-285
 usando o MATLAB, 282-283
 vetor de margem, 289-290
- Diferenciação, 77, 659
 Digitalização, 484-487
 Dimensionando o atuador, 536-537
- Dirac, Paul, 66-67
- Distúrbio, 2-4
- Divisão longa na transformada z inversa, 487-488
- Dobramento nos planos s e z , 491
- Doyle, J. C., 451-452, 461-462
- Dualidade da estimativa e controle, 409
- E**
- E. Coli*, 634-635
 genoma, 635-636
 movimento, 635-636
- Efeito do zero usando o MATLAB, 106-108
- eig.m, 374-376
- Einstein, Albert, 53
- Elementos de projeto no espaço de estado, 383
- Eletroímã, 38-40
- Emulação, 492-493
- Entrada de referência
 equação de ganho, 391-392
 estimador, 426-427
 estrutura geral, 427-435
 seleção de ganho, 434-435
 estruturas alternativas, 394
 exemplo, 391-393
 métodos de seleção, 428
 realimentação completa de estados, 390-394
 sistema de Tipo 1, 392-393
- Envelope exponencial,
 resposta de sistema de segunda ordem, 97-99
- EPROM, 503-504
- Equação característica, 379-380
 sistema em malha fechada, 384
- Equação característica de controle, 384
- Equação característica do erro de estimativa, 404-405
- Equação de estimativa do estado,
 realimentação de saída de erro, 404-405
- Equação de Lyapunov, 552-553
- Equação de saída, 377-378
 descrição de estado, 369-370
- Equação de Van der Pol, 571
- Equação Diofantina, 455
- Equação do erro de estimativa, 428
- Equação LRS do estimador, 413-414
- Equações de estado
 diagramas de blocos, 366-377
 exemplos, 368-370 e 374-377 e 380-383
 formas canônicas, 366-377
 problemas relacionados a, 464-468
 respostas dinâmicas, 376-378
- Equações de estado aumentadas com o controle integral, 436-437
- Equações de segunda ordem, sinais externos, 447-448
- Equações diferenciais
 geometria, 357-358
 problemas relacionados a, 56-57, 59

- variável de estado de modelos dinâmicos, 359-360
- Equações diferenciais lineares**
forma padrão, 358-359
soluções, 521-522
- Equações diferenciais não lineares**, 521-522
- Equações do estimador**, 448-449
- Equilíbrio**, 521-522, 596
- Equivalente discreto do controle de velocidade de motor**, 173
- Equivalente discreto exato**, 505-506
- Equivalente discreto puro versus sistema controle misto**, 506-507
- Equivalentes discretos**, 172
projeto usando, 492-501
- Erro em estado estacionário**, 269-272
entradas de comando e distúrbios, 319-320
exemplo de determinação, 272
- Escalonamento**
levitador magnético, 126-128
modelos dinâmicos, 520-522
- Escalonamento de amplitude**, 126-127
- Escalonamento de tempo**, 76, 127-128, 658
oscilador, 366
- Espaço de erro**
abordagem, rastreamento robusto, 438-447
definição, 438-439
equações de controle robusto, 439-440
projeto, 447-447
- Espaço de estado e métodos de projeto em resposta em frequência**, 417
- Espaço de estado para função de transferência (ss2tf) função do MATLAB**, 380-381
- Especificações no domínio do tempo**, 100-105
problemas relacionados a, 137, 139
- Esquema de realimentação para o projeto de piloto automático**, 225-226
- Estabilidade**, 1, 93, 111-121, 148-149
condição necessária, 114-115
critério de Routh, 199-200
de sistema, 234-235
definição do sistema e do lugar das raízes, 273
Lyapunov, 550-552
magnitude de entrada, resposta não linear, 528-529
problemas relacionados à, 142, 145
respostas naturais, 97-99
sistema realimentado, 116-117
sistemas lineares e invariantes no tempo, 111-114
versus faixas de dois parâmetros, 118-120
versus intervalo dos parâmetros, 116-119
- Estabilidade, robustez**, 322
- Estabilidade assintótica, Lyapunov**, 550-552
- Estabilidade aumentada**, 594
- Estabilidade de Lyapunov**, 550-557
definição, 550-552
problemas relacionados à, 568-569, 571
sistema de segunda ordem, 553-554
sistema não linear, 554
- Estabilidade em malha fechada, determinação em resposta em frequência**, 273
- Estabilidade do sistema**, 112-113
- Estabilidade entrada limitada-saída limitada (BIBO), 112-113
- Estabilidade interna, 114
- Estabilização de amplitude, 319-320
- Estabilização em fase, 220-221, 319-320
- Estado do sistema, 358-359
- Estado estacionário estocástico, informações, 121-122
- Estimador**, 383
e mecanismo de controle, 415-416
estendido, 447
lei de controle combinada, 414-425
- Estimador autônomo**
descrição, 428
exemplo, 428, 429
- Estimador de malha aberta**, 404-405
- Estimador de malha fechada**, 405-406
- Estimador de ordem completa**, 403-404
- Estimador de ordem reduzida**, 409-412
estrutura, 411
exemplo de reprojeto de servo CC, 421-423
para o pêndulo, 411-412
- Estimador do erro de rastreamento**
descrição, 428
exemplo, 429
- Estimador estendido**, 447-451
rastreamento em estado estacionário, 449-451
sistema de velocidade de motor, diagrama de blocos para, 450-451
sistema para rastreamento, diagrama de blocos para, 448-449
- Estimador ótimo**, 413-414
- Estrutura de realimentação**, 209-211
- Estrutura de realimentação unitária**, 209-210
- Estruturalmente estável**, 439-440
- Estudo de casos**
atitude de um satélite, 579
cabeçote de leitura/escrita de um disco rígido, 614-615
controle lateral e longitudinal de um Boeing 648, 593
PTR na fabricação de pastilhas de semicondutores, 622-623
quimiotaxia *E. coli*, 634-635
relação automotiva ar-combustível, 609
- Evans, W. R.**, 10-12, 189, 237
- Exemplo de máquina de papel**, 14-15
- Exemplo de motor CC**, 157-158
- Expansão em frações parciais**
raízes complexas distintas, 663-665
raízes reais repetidas, 665-666
resposta em frequência, 255-256
transformada inversa de Laplace, 78-79, 663-666
- F**
- Fabricação de pastilhas de semicondutores**, 622-623
- Faixa do parâmetro versus estabilidade**, 116-120
- Faraday, Michael**, 52-53
- Fase**, 71
resposta em frequência, 256-257
- Fator de qualidade**, 96-97
feedback.m, 92, 226-227, 510
- FEM**
leis e equações, 40
tensão, 40-42
- Ferramentas de análise**, 505-508
- Filamento**, 636-637
- Filtro de entrada**, 4-5, 152
- Filtro de rejeição de banda**, 583-584
- Fissão binária**, 635-636
- Flagelo**, 636-637
- Fluxo de calor**, 43
equações, 43-45
modelos
dinâmicos, 43
problemas relacionados, 60-62
- Fluxo de fluidos incomprensíveis**, 46-52
- Fly-by-wire**, 642-643
- Forma canônica controlável**, 366-367
derivação, 386-387
diagrama de blocos, 366-367
equações, 368
função de transferência para espaço de estados (tf2ss), 368
sistema de terceira ordem, 385
transformação para a matriz de controlabilidade, 371-372
- Forma canônica de controle de estado parcial**, 385-387
- Forma canônica modal**
diagrama de blocos, 368-369
diagrama de blocos para sistema de quarta ordem, 369-370
equações de estado, 368-370
transformação para forma Modal, 373-375
- Forma canônica observável**, 372, 406-408
diagrama de blocos, 407-408
equação, 407-408
ilustração, 372
servo CC, 421
sistema de terceira ordem, 407-408
- Formacompanheira superior**, 386-387
- Forma de Evans da equação característica**, 191-192
- Forma de variáveis de estado**
circuito de alto-falante, 362-364
equações diferenciais de modelos dinâmicos, 359-360
exemplo de controle de atitude de satélite, 359-360
modelagem de motor CC, 362-364
- Forma fatorada de zero e polo**, 83-84
- Forma geral do controlador na forma polinomial**, 455
- Forma normal**, 383
projeto no espaço de estados, 356-357
- Formas canônicas**,
controle, 366-367
diagramas de blocos e, 366-369
equações de estado, 366-377
observador, 407-408
- Formas do lugar das raízes**, 191-192
- Fórmula de estimador de Ackermann**, 408
alocação de polos, 387-388
- LRS**, 397-398

- oscilador não amortecido, exemplo de, 387-388
- Fórmula de Truxal, 158-160, 429-430
- Formulação direta da função de transferência, 455-456
- Fotolitografia, 654
- Fourier, 129
- Foxboro, Companhia, 175-176
- Franklin, G. F., 460
- Fraser, Don, 513, 642-643
- Frequência de acrobacia, 638
- Frequência de cruzamento, 287-288
margens de estabilidade, 286-287
- Frequência de Nyquist, 491
- Frequência de ressonância, 330
- Frequência natural amortecida, 96-97
- Frequência natural não amortecida, 96-97
- Frequência natural, 378-379
plano-z, 491
- Fresa de rolamento contínuo, 134
- Fuller, 8-9
- Função de custo, 125-126, 576-577
- Função de desempenho limitada
exemplo, 322-325
gráfico, 323
- Função de Lyapunov, 520-521, 552-553
- Função de ponderação no teorema de ganho e fase de Bode, 294-295
- Função de sensibilidade, 321-322
especificações, 321-329
problemas relacionados à, 353-354
gráfico e cálculo, 327-329
limitações de projeto, 325-329
para antena, 327-328
- Função de sensibilidade complementar, 324
- Função de transferência, 68-70
cancelamentos, 83-84
classes de termos, 262-263
de equações de estado, 377-378, 385-387
diagrama de blocos, 91
do simples sistema usando o MATLAB, 92-93
exemplo, 69-70
forma de Bode, 262-263
para sistema em malha fechada, 434-435
retardo de tempo, 457-458
sistemas lineares, 72-75
- Função de transferência de compensador de ordem reduzida, 416-417
- Função de transferência em malha fechada, 259, 275-277
- Função de transferência discreta, 506-507
- Função de transferência do controle de velocidade de cruzeiro usando o MATLAB, 84-85
- Função de transferência em malha aberta, 273, 546-547
- Função de transferência para espaço de estados (tf2ss), formas canônicas controláveis, 368
- Função de transferência para o satélite usando o MATLAB, 87-88
- Função descritiva, 519-520, 536-538
análise de estabilidade, 542
análise de estabilidade para a não linearidade de histerese, 544-545
método de extensão do lugar das raízes, 17
- não linearidade para saturação, 538
para a não linearidade de histerese, 541
para a não linearidade de relé, 539-540
sistema condicionalmente estável, 542-543
- Função do degrau unitário, 68-69
- Função forçante, 378-379
- Funções, tempo discreto simples, 487-488
- Funções de tempo discreto para transformada-z e transformada de Laplace, 487-488
- Funções de transferência polinomiais
alocação de polos, 455-457
projeto de ordem reduzida, 456-458
- Funções de transferência racionais,
projeto direto com, 454-458
- G**
- Galileu Galilei, 52-53
- Ganho crítico, 166-167
- Ganho DC
plano-z, 492-493
Teorema do Valor Final, 81
- Ganho de estabilização, 220-320
- Ganho desejado, cálculo gráfico de, 202
- Gardner e Barnes, 129
- Gerador de entrada, princípio do modelo interno, 441
- Giroscópio, 597
- GM, 286-287
- Governador centrífugo, 8-9
- Governador centrífugo de Watt, 8-10, 563
- Gráfico composto, 261-262
- Gráfico da magnitude
classe de função de transferência, 264-265
margens de ganho e fase, 287-288
- Gráfico de fase
classe de função de transferência, 264-265
margens de ganho e fase, 287-288
- Gráfico do espectro de referência, 321-322
- Gráfico do plano de fase com saturação, 548-549
- Gráfico Polar, 277-278
- Gráficos da resposta ao degrau, sistema de segunda ordem, 105-106
- Gráficos de resposta em frequência, 256-257
Projeto RFTM, 453
- Gráficos de tensão para as respostas da fita do servomotor, 396-397
- Guindaste de suspensão para movimento de rotação, 30-32
- Gunkel, T. L., 460
- H**
- Halley, Edumund, 51-52
- Heaviside, Oliver, 35, 128
- Helicóptero, 243-244, 477
- Hurewicz, W., 511-512
- Huygens, Christian, 9-10
- I**
- Ilustração do lugar das raízes, 203
- Implementação analógica, 221-224
- Implementação digital, 221-224
atraso, 532-533
- avanço, 321-322
- PID, 165
- 1/s₂, 548-549
- Implementações contínua e digital, comparação das, 492-493
- impulso.m, 95, 99, 109-110
- Incerteza na planta de alta frequência, efeito da, 320-321
- Incerteza típica da planta, 325
- Incontrolabilidade dos modos do estimador, 434-435
- Incubadora de Drebbel, 8-9
- Informações de estado estacionário, estocástico, 121-122
- inicial.m, 406-407, 412
- Injeção multiponto, 610-611
- Injeção no corpo do acelerador, 610-611
- Injetor de combustível, 610-611
- Instável, resposta ao impulso, 93
- Integração, 77, 659-660
- Integração trapezoidal, 493-494
- Integrador, 363-364
amp-op, 37-39
- Integrador antiwindup, 533-536
- Integrador de Clegg, 568-569
- Integrador não linear, 568-569
- Integral, leis de controle discreto da, 508-509
- Integral de convolução, 67-69
- Integral de superposição, 67-68
- Interrupção, 484-486
- inv.m, 375-377
- Invariância no tempo, 64-66
- Inversão de planta, 451-452
- Isóclinas, 546-547
- J**
- James, H. M., 511-512
- Jatos de reação, 579
- Joseph, P. D., 460
- K**
- Kalman, R. E., 12, 460, 555, 563
- Kepler, Johannes, 52-53
- Keynes, John Maynard, 52-53
- Khalil, H., 537-538, 555
- Kochenberger, R. J., 563
- Kuo, B., 43
- L**
- Laboratório de Radiação, 175-176
- Laboratórios Bell, 261-262
- “Lacuna entre teoria e prática”, 175-176
- Lagrange, 562
- Lâmpada de tungstênio, 624-625
- Lancaster, F. W., 604-605
- LAPACK, 374
- Largura de banda, 259
- Largura de banda de malha fechada
margem de fase, 298-299
seleção de taxa de amostragem, 504
- LaSalle, L. P., 555

- Lei de controle
e estimador, 414-425
efeito da localização dos zeros, 389-391
encontrando, 383-384
para o pêndulo, 385-388
- Lei de Kirchhoff das correntes (LKC), 35
- Lei de Kirchhoff das tensões (LKT), 35
- Lei de realimentação com controle integral, 436-437
- Lei dos geradores, 40
- Lei dos motores, 38-39
- Leis de controle discretas, 507-508
- Leis de Newton, 51-52
movimento de rotação, 23
movimento de translação, 17-18
- Leme, 594
- Levitação magnética, 653
- Levitador magnético
escalonamento, 126-128
linearização do movimento, 522-525
- Libler, S., 637
- Ligante, 637
- Limaçon, 286
- Linearização, 520-521
altura da água do tanque e saída, 48-49
definição, 520-521
exemplo de processamento térmico rápido, 527
exemplo do pêndulo não linear, 522-523
modelos dinâmicos, 520-522
movimento do levitador magnético, 522-525
pela análise de sinais pequenos, 521-522
por não linearidade inversa, 526
por realimentação, 520-522
procedimento de projeto do sistema de controle, 575-576
realimentação não linear, 526
- Linha de transmissão de energia elétrica, 144
- Livre curso, 484-486
- Localização do zero e lei de controle, 389-390
- Localização/alocação de polos, 93, 99
fórmula de Ackermann, 387-388
funções de transferência polinomiais, 455-457
problemas relacionados, 136
resposta ao impulso correspondente, 97-99
seleção, 394
exemplo, 395-403
LRS, 396-404
métodos, 394, 403-404
polos dominantes de segunda ordem, 394-397
problemas relacionados à, 471-472
- Localizações modificadas para os polos de segunda ordem com reprojeto do servo CC, 424-425
- loglog.m, 71-72, 257-258, 269-271, 452-453
- logspace.m, 71-72
- LQ, 460
- lqe.m, 452-453, 629
- LQF, 460
- LQG, 461-462
- LQR (*veja* Regulador linear quadrático (LQR))
- lqr.m, 402, 629
- LRS (*veja* Lugar das raízes simétrico (LRS))
- lsim.m, 87,339
- Luenberger, D. G., 461-462
- Lugar das raízes, 12, 189
alocação de polos LRS, 423-424
atraso de tempo, 234-235
trocador de calor, 236
atraso e avanço, 221-222
caso não justaposto, 211-213
combinação de controlador e estimador, 418
compensação, 532-533
compensações rejeita faixa, 221-222
controlador de ordem reduzida, 419
controle de posição do motor, 191-192
controle de satélite
compensador de avanço, 204-206
flexibilidade justaposta, 209-210
pequeno valor para o polo, 205-207
valor de transição para o polo, 206-210
definição, 194-195
diretrizes de esboço, 194-195
problemas relacionados a, 240
exemplo de aplicação das regras, 211
exemplo de projeto, 224-229
exemplos de estabilidade, 273
ilustração, 203-214
lugar das raízes de 0° (*veja* Lugar das raízes negativo)
lugar das raízes de 180° (*veja* Lugar das raízes positivo)
método de Evans, 190-191
múltiplas raízes complexas, 212-213
orientações para a determinação, 194-195
para o controle de atitude de satélite, 203-205
polo da planta de malha aberta, 192-193
polos de malha fechada, 233-234
problemas relacionados a, 240, 243, 248-252
projeto de avanço, 216-217
projeto de piloto automático, 226-227
regras de esboço, 200-201
regras para traçar um positivo, 196-201
servo CC
alocação de polos, 421
estimador de ordem reduzida, 421-422
sistema condicionalmente estável, 290-291
sistema realimentado, 189-190, 194-195
usando dois parâmetros em sucessão, 232-235
- Lugar das raízes, parte no eixo real, 196
- Lugar das raízes discreto, 506-508
- Lugar das raízes negativo, 194-195
definição, 231
esboçando, 231-232
regras, 229-232
- Lugar das raízes positivo, 191-192, 194-195
regras de esboço, 196-201
- Lugar das raízes simétrico (LRS), 396-404
alocação de polos, 422-423
equação, 397-398
seleção de polos do estimador, 413-414
- exemplo de projeto do estimador para o pêndulo, 413-414
- exemplo de reprojeto do compensador do servo CC, 422-425
- para controle de velocidade do servo, 398-399
- para o controle de atitude do satélite, 398-399
- para o pêndulo invertido, 399-401
- seleção de polos, 424-425
- sistema de primeira ordem, 398-399
- Lyapunov, A. M., 10-11, 519-520
- M**
- MacFarlane, A. G. J., 461-462
- Magnitude
classe de função de transferência, 263-264
resposta em frequência, 256-257
- Magnitude de entrada, exemplo não linear de estabilidade, 528-529
- Magnitude de malha fechada constante, contornos de, 330
- Malha de realimentação, 638
- Manutenção de atitude, 606-607
- Máquina a vapor, 8-9
- Margem de fase
dados de resposta em frequência, 288
gráfico de amplitude e fase, 287-288
largura de banda de malha fechada, 298-299
método de projeto baseado na resposta em frequência, 286-287
RFTM, 450-451
versus coeficiente de amortecimento, 288-289
versus resposta em frequência
pico de ressonância, 288-289
versus resposta transitória
sobressinal, 288-289
- Margem de ganho
gráfico de magnitude e fase, 287-288
projeto em resposta em frequência, 286-287
RFTM, 450-451
- Margens de estabilidade
método de projeto em resposta em frequência, 286, 292
problemas relacionados, 341-346
- margin.m, 307-308, 342-343, 452-453
- MathWorks, 13
- MATLAB
acker, 388-389, 409
localização do polo, 395-396
análise de sistemas lineares, 83-88
axis, 282-283, 285
bode, 71, 257-258, 269-271
c2d, 423-424
cálculo das raízes para, 117-118
canon, 375-376
comandos, 681-683
conv, 79, 398-399
eig, 374-376
ezplot, 118-119
feedback, 92, 226-227, 510
impulso inicial, 95, 99, 109-110
initial, 406-407, 412
inv, 375-377

- linmod, 521-522
 linmod2, 521-522
 loglog, 71-72, 257-258, 269-271
 logspace, 71
 lqe, 452-453, 629
 lqr, 402
 lsim, 87, 339
 margin, 307-308, 342-343, 452-453
 max, 327-328
 nichols, 330
 nyquist, 279-280, 282-283, 285
 ones, 87
 pade, 235-236
 parallel, 92
 place, 388-389, 409
 plot, 28-29, 87
 poly, 82-83
 printsyst, 84-85
 pzmap, 94
 residue, 79, 82-83
 resposta ao degrau, 20-21
 resposta ao impulso, 99
 rlocfind, 212, 344
 rlocus, 193-194, 343-344, 398-399
 rltool, 243
 roots, 381-382
 semilogx, 71-72, 257-258, 452-453
 semilog, 327-328
 series, 92, 452-453, 510
 sqrt, 442
 ss2tf, 365, 378-379
 ss2zp, 365
 step, 28-29, 85
 tf, 28-29, 71-72, 92
 tf2ss, 368
 tf2zp, 86, 365
 tzero, 380-383
 Matrizcompanheira da esquerda, 408
 Matriz de controlabilidade, 371-372
 Matriz de entrada, 358-359
 Matriz de formacompanheira, 386-387
 Matriz de observabilidade, 408
 Matriz de saída, 358-359
 Matriz de Sylvester, 455-456
 Matriz do sistema, 358-359
 Matriz Hessenberg, 471
 max.m, 327-328
 Maxwell, James Clerk, 9-10, 53, 175-176, 237, 563
 Mayr, O., 7-8
 Mecanismo de leitura/gravação em disco esquema, 26-27
 ilustração gráfica, 25-26
 Mecanismo flexível de leitura/escrita em disco, 25-28
 Méchanique céleste, 128
 Mello, B. A., 638-639
 Memória de acesso aleatório (RAM), 503-504
 Memória programável somente de leitura (EPROM), 503-504
 Memória somente de leitura (ROM), 503-504
 Método de alocação de polos no espaço de estado, 419
 Método de encobrimento para determinação dos coeficientes, 78
 Método de espaço de estado, compensador de atraso, 430-435
 Método de Evans, 190-191
 Método de projeto em resposta em frequência, 254-335
 atraso de tempo, 328-330
 compensação, 298-328
 compensação de atraso, 310-315
 compensação PI, 310-311
 critério de estabilidade de Nyquist, 273-286
 dados, apresentação alternativa de, 329-332
 estabilidade neutra, 272-273
 margens de estabilidade, 286-292
 perspectiva, 254-255
 perspectiva histórica, 332-333
 problemas relacionados à, 335-355
 projeto de sistema de controle, 254-272
 relação de ganho-fase de Bode, 292-298
 resposta em frequência de malha fechada, 297-299
 Método de projeto no lugar das raízes, 189, 239-240
 compensação dinâmica, projeto usando, 213-224
 exemplo de projeto, 224-229
 extensões de, 229-236
 lugar das raízes ilustrativo, 203-214
 orientações para a determinação do lugar das raízes, 194-203
 perspectiva, 189
 perspectiva histórica, 236-238
 problemas relacionados a, 240-253
 sistema realimentado básico, 189-195
 Método de sensibilidade crítica, 166-167
 Método de torque calculado, 521-522
 Método de Tustin, 493-494
 comparação entre MPZ e MMPZ, 500
 controlador digital, 494-496
 projeto por emulação, 492-493
 Método direto de Lyapunov para o sistema de posição realimentado, 554-555
 Método do lugar das raízes,
 de Evans, 190-191
 extensões, 232-235
 problemas relacionados a, 252
 Método indireto de Lyapunov, 553
 Método MMPZ
 comparação MPZ, 500
 projeto de emulação, 499
 Método MPZ
 comparação MMPZ, 500
 projeto por emulação, 495-499
 Métodos antiwindup, 534-535
 Microfone, 59-60
 Microprocessadores para aplicações de controle, 503-504
 Mínimo múltiplo comum, estimador estendido, 447-448
 Mínimos quadrados de
 identificação de sistemas, 125-126
 Modelagem da internet, 643
 Modelagem de sistemas por diagramas, 87-88
 problemas relacionados à, 134, 137
 Modelo, definição, 17
 Modelo de carro, 21-22
 Modelo de controle de velocidade de cruzeiro, 18-21
 Modelo de excitação-inibição, 654
 Modelo de laboratório de PTR, 626-627
 Modelo de parâmetro concentrado, 34
 Modelo de suspensão, sistema de duas massas, 21-23
 Modelo integral, 447
 Modelo linear de PTR, 627-628
 Modelo matemático, 5
 Modelos de fluxo de fluido, 43
 Modelos dinâmicos, 17-54
 circuitos elétricos, 35-39
 equações diferenciais na forma de variáveis de estado, 359-360
 equações para, 54
 escalonamento, 520-522
 linearização, 520-522
 modelos de fluxo de calor e fluido, 43-52
 modelos de fluxo de fluidos, 43
 perspectiva histórica, 51-53
 problemas relacionados à, 54-55
 sistemas eletromecânicos, 38-43
 sistemas mecânicos, 17-35
 temperatura na sala, 43-44
 Modo de período curto, 604-605
 Modo de phugoid, 604-605
 Modo de rolagem, 599-600
 Modo espiral, 599-600
 Modo natural, 378-379
 Modos do estimador não controláveis, 434-435
 Modos do sistema, 83-84
 Modos Normais, 368-369
 Moler, Cleve, 238-239, 461-462
 Mônico, 190-191
 Motor
 CA, 42
 CC, 40
 controle de posição, lugar das raízes, 191-193
 Motor automotivo, controle da razão ar-combustível no, 609-615
 Motor CC
 compensador de atraso, 311-315
 compensador de avanço, 302-307
 entrada de referência, 392-393
 esboço, 40
 função de transferência usando o MATLAB, 84-85
 modelagem, 41-43
 Motores CA atuadores, 42
 Movimento da *E. coli*, 636-637
 Movimento de rotação
 Leis de Newton, 23
 modelo de controle de atitude de satélite, 23-26
 pêndulo, 27-28
 Movimento de translação, a lei de Newton para, 17-18
 Mudança na frequência, 659
 Mudanças na planta, 577-578
 Multiplicação pelo tempo, 78, 662
 Munro, N., 461-462

N

Não linearidade da lâmpada, 630-631
 Não linearidade inversa, 521-522
 Napoleão, 128
 Neutramente estável, 114
 método de projeto de resposta em frequência, 272-274
 problemas relacionados a, 339-340
 Newton, Isaac, 51-52
 Nichols, N. B., 511-512
 nichols.m, 330
 Números de Fibonacci, 514-515
 Nyquist, H., 10-12, 332-333
 nyquist.m, 279-280, 282-283, 285

O

Observabilidade, 408
 Observador, 383
 ones.m, 87
 Operação do segurador, atraso devido à, 485-487
 Ordem exponencial, transformada de Laplace, 655-656
 Oscilador, escalonamento no tempo, 366
 Oscilador não amortecido, fórmula de Ackermann para, 387-390

P

pade.m, 235-236
 Padrões polo-zero, efeitos de, 110-112
 parallel.m, 92
 Parâmetros, considerando dois, 232-235
 Parâmetros de projeto para redes de avanço, 305-306
 Passecio aleatório, 638
 Pêndulo
 exemplo
 equações não lineares, 27-28
 estimadores de ordem reduzida, 411-412
 lei de controle, 385
 movimento de rotação, 27-28
 projeto de estimador, 405-407
 projeto LRS de estimador, 413-414
 resposta linear e não linear, 522-523
 movimento de rotação à entrada em degrau, 29
 Pêndulo duplo, 55-56
 Pêndulo invertido, 31-32, 471
 equações, 32-33
 resposta ao degrau, 401
 LRS
 exemplo, 399-401
 projeto de estimador, 413-414
 Período crítico, 166-167
 Período de amostragem, digitalização, 484-486
 Perturbações, 439-440
 Pico de amplitude, 265-266
 Pico de ressonância, 259
 Pico de ressonância versus margem de fase na resposta em frequência, 288-289
 PID digital, 171

Piloto automático de manutenção de altitude, 603-609
 Piloto automático digital, 513
 Piloto automático Piper Dakota, 225-226
 Pirômetro, 624-625
 Pistão hidráulico, modelagem, 47-48
 place.m, 390-391, 409, 424-425
 Plano de fase, 546-547
 projeto no espaço de estado, 357-358
 Plano-s
 contorno no SPD, 276-277
 e relação com o plano-z, 490-491
 especificação no domínio do tempo, 102-103
 polos complexos, 96-97
 transformação de especificação, 103-105
 plano-z
 e plano-s
 características, 490
 controle digital
 relação, 489-491
 frequência natural e amortecimento, 491
 sequência temporal, 492
 Planta, 4-5
 estimador conectado, 406-407
 Planta de integração dupla, 209-210
 função de transferência, 203
 modelo discreto, 548-549
 Planta incerteza
 exemplo, 325
 gráfico, 324
 plot.m, 28-29, 87
 PM, 286-287
 Poincaré, 562
 Polinômios mônicos, 455
 Polo
 correlação, 99
 definição, 83-84
 diagrama de Bode, 266-267
 do sistema, 83-84
 e zeros, encontrando via MATLAB, 376-377
 expansão em frações parciais, 665
 função de transferência racional, 82-83
 indicação da resposta característica, 82-83
 projeto de compensador, 477
 transformada inversa de Laplace, 78
 Polo da planta em malha aberta, lugar das raízes, 192-194
 Polo extra, efeito de, 110-111
 Polos adicionais
 efeito de, 103-111
 ramos do lugar das raízes, 209-210
 Polos complexos,
 diagrama de Bode, 267-271
 gráfico no plano-s, 97-99
 Polos da função de transferência a partir da equação de estado, 378-379
 Polos de malha fechada
 fórmula de Truxal, 429-430
 lugar das raízes, 233-234
 Polos dominantes de segunda ordem, 395-397
 Polos lentos, 95
 Polos rápidos, 95
 Polos repetidos, 665

poly.m, 82-83
 Ponto de chegada, 193-194
 Ponto de partida, 192-193
 Ponto de quebra, 263-264
 Ponto fixo aritmético, 504
 Ponto único, 610-611
 Pontryagin, L. S., 12
 Popov, 563
 Precisão dupla, 503-504
 Pré-filtro, 630-631
 Pré-filtros analógicos, 501-502
 Pré-filtros antialias, 501-503
 efeito de, 505-506
 Prêmio Adams, 10-11
 Primeiro método de Lyapunov, 553
 Princípio do argumento, 274-276
 Princípio do argumento de Cauchy, 274-275
 Princípio do modelo interno, 441
 printsys.m, 84-85
 Problema Golden Nugget Airlines, 251, 351
 Procedimento de projeto de sistema de controle, 573-574
 Procedimento de projeto do sistema de controle de disco rígido, 614-615, 622-623
 Processamento térmico rápido (PTR)
 modelo de laboratório, 626-627
 modelo linear, 627-628
 procedimento de projeto do sistema de controle, 622-623
 Processo, 2-4
 Produto de tempo
 transformada de Laplace, 77
 exemplo de sinal senoidal, 662
 propriedade, 661
 Projeto compensador de ordem reduzida para o controle de altitude de satélite, 418-419
 Projeto da lei de controle para a realimentação completa de estados, 382-394
 diagrama do sistema, 384
 encontrando, 383-391
 entrada de referência, 390-394
 exemplo de localização de zero, 389-390
 exemplo do pêndulo, 385
 fórmula de Ackermann, 387-392
 problemas relacionados ao, 468, 471
 Projeto de compensador (espaço de estados), 477
 condicionalmente estável, 421
 função de transferência, 452-453
 ordem reduzida, 418-419
 problemas relacionados ao, 477, 481
 Projeto de compensador de ordem completa para o controle de altitude de satélite, 416-418
 para o servo CC, 419-422
 Projeto de compensador linear quadrático, 451-452
 Projeto de controle moderno, 357-358
 Projeto de controle no espaço de estados, 356-357
 Projeto de estimador, 403-414
 ordem completa, 403-409
 ordem reduzida, 409-412
 exemplo de pêndulo, 411-412
 para o pêndulo simples, 405-407

- problemas relacionados a, 471-472, 477
 projeto LRS de estimador para o pêndulo, 413-414
 seleção de polos, 412-414
Projeto de malha interna, 604-605
Projeto de ordem reduzida para modelo de função de transferência polinomial, 456-458
Projeto de piloto automático
 diagrama de blocos, 225-226
 gráficos da resposta temporal, 226-228
 lugar das raízes, 226-227
Projeto de piloto automático de malha aberta, 225-226
Projeto de sistema de controle, 572-645
 estudos de casos, 578-642
 passos do esquema do, 573-578
 perspectiva histórica, 641-642
 resumo, 577-578
Projeto digital versus contínuo, amortecimento e resposta ao degrau, 510-512
Projeto direto com funções de transferência racionais, 455-458
Projeto discreto, 505-512
 exemplo, 506-510
 ferramentas de análise, 505-506
 propriedades de realimentação, 507-509
Projeto do servomotor da fita, respostas ao degrau, 396-397
Projeto no espaço de estados, 356-465
 análise de equações de estado, 366-383
 atraso de tempo puro, 457-460
 controle integral e rastreamento robusto, 436-451
 descrição de sistema, 358-364
 diagramas de blocos, 363-366
 entrada de referência com estimador, 426-436
 escalonamento de tempo e amplitude, 366
 estabilidade de Lyapunov, 550-557
 funções de transferência racionais, 454-458
 perspectiva, 356
 perspectiva histórica, 460-463
 problemas relacionados ao, 464-483
 projeto de compensador, 414-425
 projeto de estimador, 403-414
 projeto de lei de controle para realimentação completa de estados, 382-394
Recuperação de Função de Transferência de Malha (RFTM), 450-455
 seleção de ganho, 434-436
 seleção de posição de polo para um bom projeto, 394-404
 vantagens, 356-359
Projeto no espaço de estados dividir e conquistar, 357-358
Projeto ótimo, 575-576
Projeto por emulação, 492-501
 controlador digital da altitude de uma estação espacial, 497-498
 estágios, 492-493
 exemplo de amortecimento e resposta ao degrau, 510-512
 limites de aplicabilidade, 500
Método MMPZ, 499
Método MPZ, 495-496
 métodos de aproximação digital, comparação de, 499-500
 métodos de Tustin, 492-496
Proporcional integral (PI)
 característica de compensação, 318-319
 compensação, 310-311
 compensação antiwindup, 535-536
 sistema de controle, 118-119
Proporcional-integral-derivativo (PID), 146-147
 Carta de Nichols como exemplo para, 330-331
 controlador, 160
 controle de altitude de aeronave, 314-320
 método de projeto baseado na resposta em frequência, 314-320
 projeto no espaço de estados, 575-576
Propriedade de peneiramento, 66-67
Propriedades de estabilidade para sistema condicionalmente estável, 290-291
Propriedades de rastreamento robusto para servomecanismo, 445
Propriedades de realimentação
 exemplo de projeto discreto, 507-508
 projeto discreto, 508-509
Propriedades robustas, 154-155, 439-440
 reguladores LQR, 403-404
 tipo de sistema, 154-155
Pulso, digitalização, 484-486
Pulso curto, 65-66
pzmap.m, 94
- Q**
- Quimiotaxia**, 636-637
 dinâmica da, 637
 modelo da, 638-639
- R**
- Ragazzini, J. R., 35, 511-512
Raízes reais distintas, 79
Raízes reais repetidas, expansão em frações parciais, 665-666
RAM, 503-504
Rastreador de estrela, 579
Rastreamento, 146-150
Rastreamento de estado estacionário e rejeição de distúrbios, 449-451
Rastreamento de referência, 146-147
Rastreamento robusto, 436-451
 abordagem espaço de erro, 438-447
 problemas relacionados, 481-483
Razão de amplitude, 71
Realimentação
 amplificador, 35, 332-333
 análise, 5
 compromisso de projeto, 7-8
 controle de nível de líquido, 7-8
 equações, 147-148
 incubadora de Drebbel, 237
 perspectiva, 146
 vantagem, 151
Realimentação de estado, 383
Realimentação de saída do erro para o estado da equação de estimação, 404-405
Realimentação negativa, 89-90
Realimentação positiva, 89-90
Receptor, 637, 638
Recuperação de Função de Transferência de Malha (RFTM), 450-454
 diagramas de resposta em frequência, 453
 exemplo, 452-453
 projeto para controle de altitude de satélites, 452-455
Redefinir controle, 534
Redefinir windup, 534
Referência, 2-4
Região de convergência, 655-656
Regra de Bryson, 402
Regra de PM para o coeficiente de amortecimento, 288-289
Regra MIT, 556, 563
Regra trapezoidal, 172, 303-305
Regulação, 146-147, 149-150
Regulação com perturbação na entrada para o tipo do sistema, 157
Regulador, 13-14
 projeto de compensador, 477
Regulador linear quadrático (LQR)
 diagrama de Nyquist, 400-401
 margens de ganho e fase, 403-404
 polos do regulador, limitando o comportamento do, 402-404
 reguladores, propriedades de robustez, 403-404
 unidade de fita, 402-403
Regulador Smith para atraso do tempo, 458-459
Rejeição de distúrbio, 1
 controle digital, 504-505
 propriedades para o servomecanismo robusto, 446
 rastreamento em regime permanente pelo estimador estendido, 449-451
 seleção da taxa de amostragem, 504-505
Relação de avanço, 301
Relação de continuidade, 46-47
Relação ganho e fase de Bode, 292-298
 frequência de cruzamento, 294-295
 problemas relacionados com, 346-347
Relé, 527-528
Repelente, 636-637
residue.m, 79, 82-83
Resistência térmica, 43-44
Resposta
 à senoide, 70
 por convolução, 64-68
 versus as posições dos polos e raízes reais, 94-96
Resposta à rampa de sistema de primeira ordem, 660-661
Resposta ao degrau, 97-98, 361
 compensação de atraso, 433-435
 compensações de atraso, avanço e rejeita faixa, 222-223
MATLAB, 20-21
 projeto digital versus contínuo, 510-512
 sistema de primeira ordem, 102-103
 sistema de segunda ordem padrão, 100-101

- Resposta ao degrau do controle de velocidade de cruzeiro, 360-361
 Resposta ao degrau unitário, 361
 Resposta ao impulso, 66-67, 93, 97-98
 usando o MATLAB, 95
 Resposta dinâmica, 64-130
 dados experimentais, obtendo modelos de, 120-127
 efeitos dos zeros e polos adicionais, 103-112
 equações de estado, 376-383
 escalonamento de amplitude e tempo, 126-128
 especificações no domínio do tempo, 100-104
 estabilidade, 112-121
 localização dos polos, efeitos da, 93-100
 perspectiva, 63
 perspectiva histórica, 128-129
 problemas relacionados à, 130
 representando sistemas com diagramas, 87-93
 Transformada de Laplace, 64-88
 Resposta em frequência, 10-12, 70, 254-272
 características
 do capacitor, 249-258
 do compensador de avanço, 257-261
 compensação de avanço, 300
 compensação PD, 299
 compensador de atraso e avanço, 432-433
 exemplo, 70-72
 métodos de projeto no espaço de estado, 417
 problemas relacionados à, 335-339
 procedimento de projeto de sistema de controle, 574-575
 Resposta em frequência de malha fechada, 297-298
 exercícios relacionados à, 346-347
 servomecanismos robustos, 446
 Resposta temporal, 574-575
 Resposta temporal oscilatória, 99
 Resposta transitória
 dados, 121-122
 definição, 73-74
 fonte de dados experimentais, 121-122
 motor CC, 86
 sistema de velocidade do motor, 438-439
 sobressinal versus margem de fase, 288-289
 Resposta transitória completa, 72-73
 Resposta versus a complexidade do sistema, 603-604
 Respostas ao degrau de funções de transferência de segunda ordem, 107-108
 Respostas dos controles de implementações analógica e digital, 224
 Respostas naturais, 93
 estabilidade, 97-99
 Ressonância no óleo, 51-52
 Restrições de robustez, 326-327
 RFTM, 642-643
rlocfind.m, 212, 344
rlocus.m, 193-194, 343-344, 398-399
 RLTOOL, 243
 Robustez, 1-2
 Robusto, 439-440
 Rodas de reação, 579
 ROM, 503-504
roots.m, 117-118, 381-382
 Rosenbrock, H. H., 461-462
 guindaste, rotação e translação, 30-31
 Rotor, diagrama de corpo livre, 41
 Routh, E. J., 10-11, 175-176, 237
 Ruído de processo para seleção do polo do estimador, 412-413
 Ruído no sensor, 319-320
 seleção do polo do estimador, 412-413
 Run-to-run control, 653
- S**
- Saberí, A., 451-452
 Safonov, M., 461-462
 Saída de resposta, implementações analógica e digital, 223
 Sandberg, I. W., 561
 Sastry, S., 555
 Satélite com anexos flexíveis, 267-271
 Satélite GP-B, 466
 Saturação
 sistema dinâmico, 527-528
 sistemas oscilatórios, exemplo não linear, 530-531
 Saturação no atuador, sistema realimentado com, 534
 Schmitz, E., 34
 Seguidor de ordem zero, 485-486
 digitalização, 486-487
 seleção da taxa de amostragem, 504
 Segway, 32-33
 Seleção de ganho, 434-436
 Seleção de parâmetro, 579-580
 Seleção de polo LRS, 425-427
 Seleção de taxa de amostragem
 controle digital, 503-506
 amostragem assíncrona, 505-506
 eficiência de rastreamento, 504
 pré-filtro antialias, 505-506
 rejeição de distúrbio, 504-505
 digitalização, 485-486
 Seleção do polo do estimador, 412-415
 Seleção do valor do parâmetro, 201, 203
semilogx.m, 71-72, 257-258, 452-453
semilogy.m, 327-328
 Semiplano direito (SPD), 96-97
 diagrama de Bode, 285
 estabilidade de Lyapunov, 553
 extensão do método do lugar das raízes, 235-236
 função de transferência do compensador, 416-417
 LRS, 397-398
 RFTM, 451-452
 zeros, 106-107
 exemplo, 109-110
 sistemas de fase não mínima, 269-271
 Semiplano esquerdo (SPE)
 efeito do zero no, 204-205
 extensão do método do lugar das raízes, 235-236
 LRS, 397-398
- RFTM, 450-451
 Teorema do Valor Final, 491
 zeros, 269-271
 Senoide
 com frequência, 658-659
 controle robusto, 441-447
 Senoide com decaimento exponencial, 659
 Senoide de frequência, estrutura do compensador, 442
 Sensibilidade, 146-147, 150-153
 Sensor, 4-5
 procedimento de projeto do sistema de controle, 573-574
 Sensor não justaposto, 210, 212
 Sensor não linear, 610-611
 Sensores para controle, 175-176
 Sequências temporária com plano-z, 492
series.m, 92, 452-453, 510
 Servo CC
 estimador de ordem reduzida, 421-423
 exemplo, 419-422
 lugar das raízes, polos atribuídos, 421
 polos de segunda ordem com localizações modificadas, 424-425
 Servo CC compensador,
 reprojeto de, 422-425
 Servo com tacômetro realimentado, tipo de sistema, 156
 Servomecanismo de unidade de disco, 441-447
 Servomecanismo de segunda ordem, 430-435
 Servomecanismo robusto
 diagrama de blocos no SIMULINK, 443-444
 propriedades de rastreamento, 445
 propriedades de rejeição de distúrbios, 446
 resposta em frequência de malha fechada, 446
 Servomecanismos, 10-12
 estrutura de diagrama de blocos, 233-234
 incremento constante de velocidade, 430-435
 sistema, projeto de compensador de avanço, 307-309
 Servomotor, curvas de torque-velocidade, 42
 Símbolo e equação da fonte de corrente, 36
 Símbolo e equação de fonte de tensão, 36
 Símbolo e equação do indutor, 36
 Símbolo e equação do resistor, 36
 Simon, H. A., 461-462
 Simples critério de projeto para controle de altitude de aeronave, 294-298
 Simulação
 diagrama de blocos de função de transferência, 364-366
 procedimento de projeto de sistema de controle, 576-577
 Simulação não linear no SIMULINK
 definição, 614-615
 sistema PTR, 630-631
 Simulação no SIMULINK de sistemas discretos e contínuos, 424-425
 análise dinâmica de, 486-493
 comparação da resposta ao degrau, 425-426

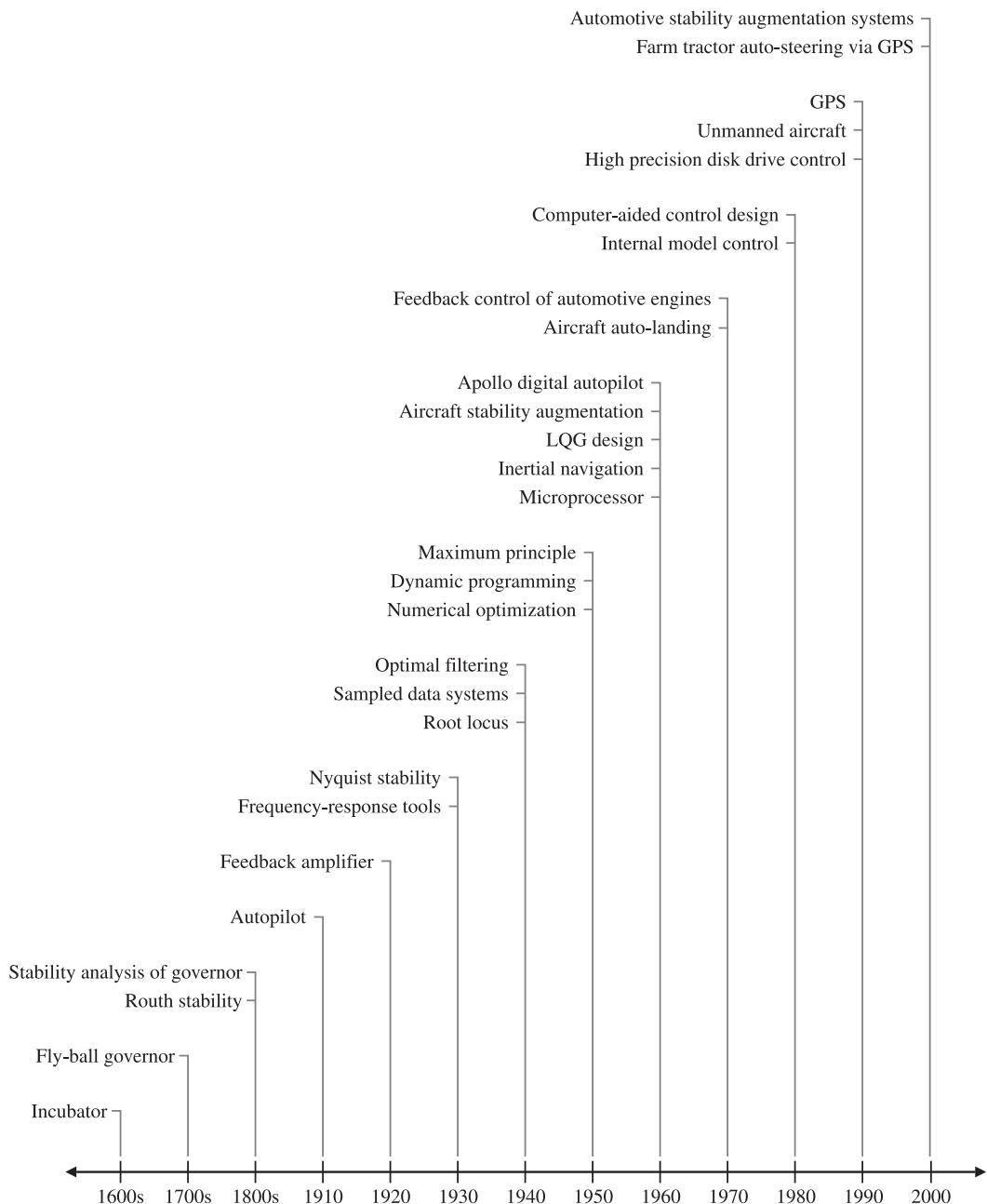
- SIMULINK, 639-640
 diagrama de blocos para RFTM, 454
 diagrama de blocos para servomecanismo robusto, 443-444
 para o movimento não linear, 30-31
 Sinais amostrados, 170-171
 Sinais discretos, 484-486
 Sinais quantizados, 170-171
 Sinal de impulso, 65-66
 Sinal de rampa, rastreamento robusto, 439-440
 Sinal senoidal, 656
 produto de tempo, 662-663
 tempo integral, 659-660
 Sinal senoidal atrasado, 658
 Síntese de projeto, 102-103
Sistema
 definição, 261
 modelo de controle de cruzeiro, 17-21
 Sistema com múltiplas frequências de cruzamento, diagrama de Nyquist para, 291-292
 Sistema com realimentação unitária, 89-90
 desenho, 321-322
 Sistema condicionalmente estável
 diagrama de blocos, 529-530
 lugar das raízes, 290-291
 método de projeto de resposta em frequência, 290-291
 métodos de extensão do lugar das raízes, 529-530
 propriedades de estabilidade para, 290-291
 Sistema contínuo, diagrama de blocos para, 485-486
 Sistema de controle de temperatura
 compensador de avanço para, 306-308
 projeto do compensador de atraso para, 311-313
 Sistema de controle híbrido versus equivalente discreto puro, 506-507
 Sistema de dados amostrados, 484-486
 Sistema de duas massas, modelo de suspensão, 21-23
 Sistema de fase mínima estável, 292
 Sistema de identificação, 17, 125-126
 Sistema de primeira ordem, LRS para, 398-399
 Sistema de PTR, 622-634
 Sistema de quarta ordem na forma modal canônica, 369-370
 Sistema de radiação não linear PTR, 626-627
 Sistema de realimentação de posição, método direto de Lyapunov, 554-555
 Sistema de suspensão, diagrama de corpo livre, 22
 Sistema de tempo próximo do ótimo (STPO), 549-551
 Sistema de terceira ordem
 computador analógico, 364-365
 diagrama de blocos, 365
 diagrama de Nyquist, 280-283
 forma canônica controlável, 385
 forma canônica observável, 407-408
 projeto de compensador de avanço, 307-309
 respostas ao degrau, 111-112
 Sistema de transferência de calor PTR, 626-627
 Sistema de velocidade do motor
 controle integral, 436-438
 estimador estendido, 450-451
 Sistema em malha fechada, 146-148
 equação característica, 384
 função de transferência, 434-435
 RFTM, 454
 Sistema estável
 definição, 112-113
 diagrama de blocos, 529-530
 Sistema instável, 112-113
 Sistema instável em malha aberta, diagrama de Nyquist, 283-285
 Sistema neutramente estável, 114
 Sistema realimentado, 89-90
 desenho, 321-322
 saturação do atuador, 534
 Sistema sujeito a retardos no atraso, 328-329
 Sistemas biológicos, 643
 Sistemas com parâmetros distribuídos, 32-34
 Sistemas contínuo e discreto
 comparação da resposta ao degrau, 425-426
 simulação no SIMULINK, 424-425
 Sistemas controláveis, 371-372
 Sistemas de fase mínima e diagrama Bode, 271
 Sistemas de fase não mínima
 diagrama de Bode, 269-271
 resposta, 109-110
 resposta em frequência 269-271
 RFTM, 451-452
 Sistemas de rastreamento, 1
 Sistemas de segunda ordem
 diagrama de blocos, 90-91
 diagrama de Nyquist, 278-280
 estabilidade de Lyapunov, 553-554
 gráfico da resposta ao degrau, 105-106
 respostas, 97-98
 envelope exponencial, 97-99
 Sistemas dinâmicos com saturação, 527-528
 Sistemas eletromecânicos,
 modelos dinâmicos de, 38-43
 Sistemas incontroláveis, 389-390
 Sistemas lineares,
 análise usando o MATLAB, 83-88
 formas de representação, 84-85
 Sistemas lineares invariantes no tempo para estabilidade, 111-114
 Sistemas LIT, estabilidade de, 113-114
 Sistemas mecânicos
 modelos dinâmicos, 17-21
 problemas relacionados a, 56-57
 Sistemas não lineares, 519-520
 análise de ganho equivalente usando resposta em frequência, 536-546
 análise de ganho equivalente utilizando o lugar das raízes, 527-537
 análise e projeto baseados na estabilidade, 545-562
 estabilidade de Lyapunov, 554
 linearização, 520-527
 métodos de extensão do lugar das raízes, 535-542
 perspectiva histórica, 562-563
 Sistemas oscilatórios
 com saturação, 530-531
 exemplo com blocos, 530-531
 Sistemas térmicos a partir da descrição de estado, zeros para, 379-381
 Sobressinal
 definição, 100
 especificação no domínio do tempo, 100-102
 gráfico, 105-106
 versus coeficiente de amortecimento, 102
 Solução de equação forçada com condições iniciais nulas, 81-83
 Solução de equações diferenciais forçadas, 81-82
 Solução de equações diferenciais homogêneas, 81-82
 Solução de problema usando a transformada de Laplace, 81
 Solução polinomial, controle integral, 457-458
 Soluções das questões do final do capítulo, 668
 Sperry, L., 641-642
 Spirule, 237
 sqrt.m, 442
 ss.m, 87, 375-376
 ss2tf.m, 365, 369-370
 ss2zp.m, 365
 Stein, G., 461-462
 step.m, 28-29, 85, 360-361
 Sucessivas malhas fechadas, 232-235
 Superposição, 76, 656
 exemplo, 64-65
 princípio, 64-65
 Suspensão automotiva, 21-22
- T**
- Tanques em cascata, 479-480
 Taxa de amostragem
 digitalização, 484-486
 limite inferior, 503-504
 Taxa de decaimento de 1/4, 166-167
 Taxa de decaimento do sinal, 95
 Taylor Instrument, Companhia, 175-176
 Técnica do diagrama de Bode, resposta em frequência, 261
 Temperatura da sala, modelo dinâmico, 43-44
 Tempo de acomodação
 definição, 100
 especificação no domínio do tempo, 102-104
 Tempo de dobra, 142
 Tempo de pico, 100
 Tempo de subida, 100
 Tempo integral e sinal senoidal, 659-661
 Tensão de armadura, amplitudes de, 42
 Teorema da relação ganho e fase de Bode declaração, 293
 função de ponderamento, ilustrado graficamente, 294-295
 Teorema de Amostragem de Nyquist e Shannon, 501-502
 Teorema de estabilidade Lyapunov, 552-553
 Teorema de Kharitonov, 120-121
 Teorema de Parseval, 559-560, 662
 Teorema do Valor Final, 79-81
 exemplo, 79-80
 ganho DC, 81

- sistema estável, 79-80
uso incorreto de, 79-81
- T**orema do Valor Inicial, 666-667
Teoria de controle e prática, 174-177
Termo de eliminação, 599-600
Termo de primeira ordem, 263-264
Termo de segunda ordem, classe de função de transferência, 264-265
Termo de transmissão direta, 358-359
Termostato, 4-5
Tesla, N., 42
Testando o protótipo, 576-577
Teste de Routh, 116-117, 120
tf.m, 28-29, 71-72, 92
tf2ss.m, 368
tf2zp.m, 86, 365
Thomson, W. T., 34
Tipo 1, sistema de servomecanismo, projeto de compensador de avanço para, 307-309
Tipo de k, definição de, 156
Tipo de sistema, 152-153
definição, 152-153
para controle de velocidade, 154-155
para rastreamento, 153-155
para regulação e rejeição de distúrbios, 157-160
propriedade robusta, 154-155
rastreamento de referência, 157
usando o controle integral, 154-155
Torque, 41
Torque calculado, 519-522
Torricelli, 562
Tou, J. T., 460
Trajetória de temperatura, 630-631
Trankle, T., 250
Transformação de equações de estado, 370-371
Transformação do sistema térmico da forma controlável para a forma modal, 374-375
Transformações degrau e rampa, 75
Transformações usando o MATLAB, 86-87
Transformada da função impulso, 75
Transformada da senoide, 75-76
Transformada de Laplace bilateral, 74-75, 655-656
Transformada de Laplace de sinal contínuo, 490-491
Transformada de Laplace unilateral, 74-75, 655-656
Transformada inversa, 73-74
Transformada inversa de Laplace por expansão em frações parciais, 78-79, 663-666
Transformadas de Laplace, 64-88, 376-377, 655-667
análise dinâmica, 486-487
definição, 74-75
problemas relacionados a, 134
propriedades, 73-74, 76-78, 655-663
resolvendo equações diferenciais, 82-83
resolvendo problemas, 81
resolvendo problemas, 81-83
simples funções de tempo discreto, 487-488
sinal contínuo, 489-491
solução de equações diferenciais homogêneas, 81-82
tabela, 656
transformada da função impulso, 75
transformada da senoide, 75
transformadas do degrau e da rampa, 75
transformada-z
análise dinâmica, 486-488
inversa, 487-489
tabelas, 488
Transposto, 358-359
Trocador de calor
atraso puro de tempo, 459-460
equações de modelagem, 44-47
ilustrado, 44-45
lugar das raízes, 236
tzero.m, 380-383
- U**nitade de fita, 132-133
análise da equação de estado, 380-383
análise de equações de estado da, 380-383
exemplo, 375-377
projeto LQR, 402-403
Uniformidade de temperatura, 628-629
Unilateral, transformada de Laplace, 74-75, 655-656
USCG cutter *Tampa*, 250
- V**alor quadrático médio (RMS), 454
Valor RMS, 454
Válvula de boia, 7-8
- Van der Pol, B., 74-75
Variável auxiliar, 385-387
Velocidade constante, 154-155
Velocidade do motor, controle PID da, 162-163
Vetor margem, 326-327
Via de transcondução, 637
Vidyasagar, M., 555
- W**att, James, 175-176
Widnall, Bill, 513, 642-643
Wiener, N., 10-12
Winnie Mae, 641-642
Woodson, H. H., 517
Wright, Irmãos, 641-642
- Y**akubovich, 563
Yi, T.-M., 637
- Z**Zadeh, L., 461-462
Zames, G., 461-462, 561
Zero, 93
definição, 83-84
diagrama de Bode, 266-271
efeito de, 103-111
SPE, 204-205
extensão do método do lugar das raízes, 236
função de transferência racional, 82-84
problemas relacionados a, 139, 142
RFTM, 451-452
SPD, 107-109, 269-271
transformada inversa de Laplace, 78
usando o MATLAB para encontrar, 375-377
Zero de fase não mínima, 109-110
Zeros atribuídos, 429
Zeros complexos, diagrama de Bode, 267-271
Zeros da função de transferência a partir das equações de estado, 379-380
Zeros de bloqueio, 445, 447
Zeros de malha fechada, 429-430
Zeros de transmissão (tzero), 382-383
Zeros finitos, 83-84
Ziegler-Nichols, sintonia de PID, 165-168
Zirconia, sensor, 610

Table of Laplace Transforms

Number	$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	$1(t)$
3	$\frac{1}{s^2}$	t
4	$\frac{2!}{s^3}$	t^2
5	$\frac{3!}{s^4}$	t^3
6	$\frac{m!}{s^{m+1}}$	t^m
7	$\frac{1}{(s+a)}$	e^{-at}
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
9	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2!}t^2e^{-at}$
10	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{-at}$
11	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
12	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(at - 1 + e^{-at})$
13	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$
14	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
15	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - e^{-at}(1+at)$
16	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-at} - ae^{-at}$
17	$\frac{a}{(s^2+a^2)}$	$\sin at$
18	$\frac{s}{(s^2+a^2)}$	$\cos at$
19	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cos bt$
20	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \sin bt$
21	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1 - e^{-at} \left(\cos bt + \frac{a}{b} \sin bt \right)$

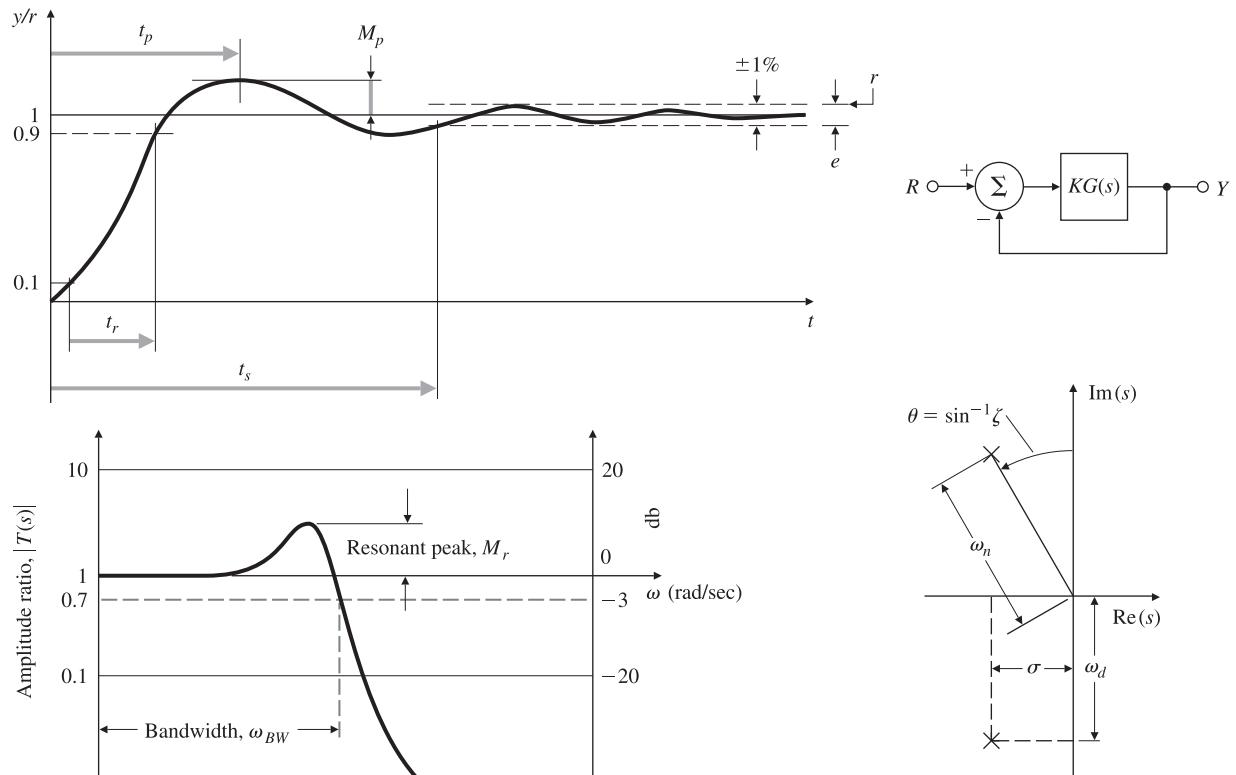
Chronological History of Feedback Control



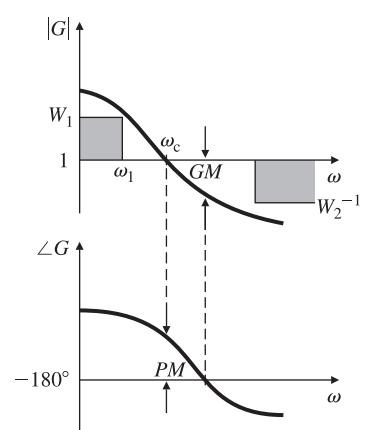
MATLAB Function (.m file)	Description	Page (s)
acker	Ackermann's formula for pole placement	449, 456, 469, 472
bode	Bode frequency response	84, 300, 315, 380, 522
c2d	Continuous-to-discrete conversion	203, 353, 488, 499, 570
canon	State-space canonical forms	435
conv	Polynomial multiplication	92, 459, 461, 767
damp	Damping and natural frequency	588–589
eig	Eigenvalues and eigenvectors	432, 433, 439
feedback	Feedback connection of two systems	262–263
impulse	Impulse response	111, 115, 127
initial	Initial condition response	469, 475
inv	Matrix inverse	434, 436
logspace	Logarithmically spaced frequency points	84
lqe	Linear Quadratic Estimator design	521
lqr	Linear Quadratic Regulator design	463, 464, 725
lsim	Linear system simulation	101, 102
margin	Gain and phase margins	357, 398, 522
nyquist	Nyquist plot	326, 329, 333
pade	Padé approximation for time delay	273
parallel	Parallel connection of two systems	107
place	Pole placement	451, 472, 484, 490, 510
plot	Plot function	33, 99, 101
poly	Form polynomial from its roots	96
pzmap	Pole–zero map	109
residue	Residues in partial fraction expansion	92, 96, 767
rlocfind	Find root-locus gain	246, 399
rlocus	Root locus	225, 399, 459, 461
rltool	Interactive root-locus tool	282
roots	Roots of a polynomial	136, 239, 441, 451
series	Series connection of two systems	107, 522, 588–889
sqrt	Square root	510
ss2tf	State space to transfer function	438, 440, 441
ss2zp	State space to pole–zero conversion	423
ss	Conversion to state space	419, 435, 440, 442
ssdata	Create a state-space model	435
step	Step response	24, 137, 138, 142, 285
tf2ss	Transfer function to state space	426
tf2zp	Transfer function to pole–zero conversion	98, 100
tf	Conversion to transfer function	24, 84, 107, 111, 127
tzero	Transmission zeros	459, 468, 470

Design Aids

Closed Loop



Open Loop



Design Relations

$$\begin{aligned}
 t_s &= \frac{4.6}{\sigma} & t_r &= \frac{1.8}{\omega_n} \\
 \sigma &= \zeta \omega_n & \omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \\
 e_{ss} &= \frac{1}{1 + K_0}, \quad K_0 = |G(j\omega)|_{\omega=0} \\
 |E| &< \frac{1}{1 + W_1}, \quad \omega < \omega_1 \\
 \omega_{BW} &= \omega_c \quad \text{for } PM = 90^\circ \\
 \omega_{BW} &= 2\omega_c \quad \text{for } PM = 45^\circ \\
 M_r &\cong \frac{1}{2 \sin(PM/2)} \\
 M_p &= 5\%, \quad \zeta = 0.7 \\
 M_p &= 15\%, \quad \zeta = 0.5 \\
 M_p &= 35\%, \quad \zeta = 0.3 \\
 \zeta &\cong \frac{PM}{100} \quad \text{for } PM < 70^\circ
 \end{aligned}$$