



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO**

**RELATÓRIO DE LABORATÓRIO DE SISTEMA DE CONTROLE I**  
**PARTE II**

ANA JÚLIA PEREIRA CORRÊA  
DANIEL SILVEIRA GONZALEZ  
JÚLIO MELO CAMPOS  
REBECA DA SILVA CAMPOS  
STEPHESON CLAYTON DO ROSÁRIO CUSTÓDIO  
VENICIO CONDE CONCEIÇÃO

**MANAUS, AM**

**2024**

ANA JÚLIA PEREIRA CORRÊA  
DANIEL SILVEIRA GONZALEZ  
JÚLIO MELO CAMPOS  
REBECA DA SILVA CAMPOS  
STEPHESON CLAYTON DO ROSÁRIO CUSTÓDIO  
VENICIO CONDE CONCEIÇÃO

## RELATÓRIO DE LABORATÓRIO DE SISTEMA DE CONTROLE I

Bloco de relatórios apresentado para obtenção de nota parcial da disciplina Laboratório de Sistema de Controle I ministrado por Prof. Dr. Florindo Antonio de Carvalho Ayres Junior .

MANAUS, AM

2024

# Resumo

Este relatório aborda a implementação de um sistema de controle utilizando um filtro passa-baixa em topologia Sallen-Key, integrado com um arduíno para monitoramento e controle de sinais. O circuito é alimentado por uma fonte simétrica e utiliza amplificadores operacionais para processar o sinal de entrada, filtrando frequências e ruídos indesejados. Diferente do sistema analisado anteriormente, há a troca de resistores para aquisição de novos dados de entrada e saída. Esse sistema foi projetado então para controlar e condicionar o sinal, aplicando-o em diferentes condições de operação e, dessa forma, identificar o modelo como de primeira ou segunda ordem. Assim, ao final, é feita uma análise de qual modelo define melhor a resposta do sistema dinâmico estudado.

**Palavras-chave:** Filtro passa-baixa, Sistema de Controle, Amplificadores, Fonte de Alimentação Simétrica, Modelo de Primeira Ordem, Modelo de Segunda Ordem.

## Lista de Figuras

1	Resposta em frequência de um filtro de 1º ordem . . . . .	9
2	Resposta em frequência de filtros Butterworth de diversas ordens . . . . .	9
3	Um filtro passa-baixa de ganho unitário implementado com uma topologia Sallen-Key . . . . .	11
4	Exemplo de Super diodo . . . . .	14
5	Fonte de alimentação simétrica . . . . .	15
6	Circuito da prática de controle . . . . .	23
7	Circuito Separado da Alimentação Simétrica . . . . .	24
8	Circuito Separado da captação do sinal de V1 . . . . .	24
9	Circuito Separado da captação do sinal de VC1 . . . . .	25
10	Circuito Separado do Sallen Key . . . . .	25
11	Montagem do Experimento . . . . .	26
12	Comportamento das saídas de resistor de 10k sem aplicação de mínimos quadrados . . . . .	27
13	Comportamento das saídas de resistor de 180k sem aplicação de mínimos quadrados . . . . .	27
14	Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 10k . . . . .	28
15	Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 10k com zoom . . . . .	28
16	Função de Transferência com resistor 10k . . . . .	29
17	Resposta ao Degrau da Função de transferência de resistor 10k . . . . .	29
18	Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 180k . . . . .	30
19	Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 180k com zoom . . . . .	30
20	Função de Transferência com resistor 180k . . . . .	30
21	Resposta ao Degrau da Função de transferência de resistor 180k . . . . .	31
22	Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 10k . . . . .	31
23	Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 10k com zoom . . . . .	32
24	Função de Transferência com resistor 10k . . . . .	32
25	Resposta ao Degrau da Função de transferência de resistor 10k . . . . .	32
26	Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 180k . . . . .	33
27	Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 180k com zoom . . . . .	33

---

28	Função de Transferência com resistor 180k . . . . .	34
29	Resposta ao Degrau da Função de transferência de resistor 180k . . . . .	34

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	Objetivos . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>8</b>
2.1	Filtro Passa-Baixa . . . . .	8
2.2	Método Sallen-Key . . . . .	10
2.3	Espaço de Estados . . . . .	12
2.4	Super Diodo . . . . .	13
2.5	Fonte de Alimentação Simétrica . . . . .	14
2.6	Equações de Diferenças . . . . .	15
2.7	Sistemas de Primeira Ordem . . . . .	16
2.8	Sistemas de Segunda Ordem . . . . .	18
2.9	Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>22</b>
3.1	Descrição da Prática . . . . .	22
3.1.1	Materiais . . . . .	22
3.1.2	Montagem . . . . .	23
3.1.3	Experimento . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>27</b>
4.1	Sem utilização dos mínimos quadrados . . . . .	27
4.2	Sistema de Primeira Ordem . . . . .	28
4.2.1	Prática . . . . .	28
4.2.1.1	Para resistores de 10K . . . . .	28
4.2.1.2	Para resistores de 180K . . . . .	29
4.3	Sistema de Segunda Ordem . . . . .	31
4.3.1	Prática . . . . .	31
4.3.1.1	Para resistores de 10K . . . . .	31
4.3.1.2	Para resistores de 180K . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>36</b>



# 1 Introdução

Este relatório apresenta os resultados experimentais obtidos na implementação de um filtro passa-baixas com topologia Sallen-Key, tendo feito a troca de resistores, para aquisição de dados. O objetivo principal deste trabalho é explorar a aplicação prática dos conceitos de sistemas de controle e identificar o modelo como de primeira ou segunda ordem.

Aplicam-se então para prática esses filtros passa-baixas que, como estudados, desempenham um papel crucial no processamento de sinais, já que permitem a passagem de componentes de baixa frequência e atenuam as altas frequências. Basicamente, eles são utilizados para eliminar ruídos de alta frequência, suavizar sinais e proteger componentes sensíveis. Já a topologia Sallen-Key foi escolhida para implementação do sistema proposto por suas características de estabilidade e flexibilidade de projeto. Ela é uma aplicação que tem se destacado como uma das mais utilizadas na implementação de filtros ativos de segunda ordem, já que resulta em uma maior facilidade de utilização em aplicações diversas.

Em tese, ao longo deste trabalho, são investigados aspectos como a resposta em frequência do filtro, a influência da variação dos componentes na frequência de corte e no fator de qualidade, além da análise do comportamento do filtro em presença de ruídos. Ainda, com os dados obtidos, é feita identificação da ordem do sistema.

Com os resultados obtidos então é analisado a eficácia da topologia Sallen-Key na implementação de filtros passa-baixas e a importância da integração entre circuitos analógicos e digitais em sistemas de controle modernos, além da identificação de qual modelo define melhor a resposta do sistema dinâmico estudado.

## 1.1 Objetivos

Este relatório tem como objetivo apresentar uma análise sobre filtro passa-baixa e analisar o comportamento dinâmico desse sistema.



## 2 Fundamentação Teórica

Para compreender melhor o sistema implementado sobre filtro passa-baixa, é fundamental entender os elementos utilizados nele. Para isso, é necessário ter um entendimento sucinto sobre o método Sallen-Key, espaço de estados, amplificadores operacionais, fonte de alimentação simétrica, modelos de primeira ordem, modelos de segunda ordem e outros conceitos teóricos importantes que são abordados ao longo dessa seção.

### 2.1 Filtro Passa-Baixa

Um filtro passa-baixa é um tipo de circuito utilizado para permitir a passagem de sinais de baixa frequência e atenuar sinais de alta frequência. A característica de resposta de frequência desse filtro é determinada pelos componentes passivos, como resistores (R) e capacitores (C), ou indutores (L) e capacitores, que formam a base para a implementação desses sistemas.

Existem diversos tipos de filtros passa-baixa, mas o mais comum é o filtro RC de 1º ordem, no qual a frequência de corte é definida pela relação entre a resistência e capacitância. O comportamento do filtro é caracterizado pela seguinte fórmula de frequência de corte:

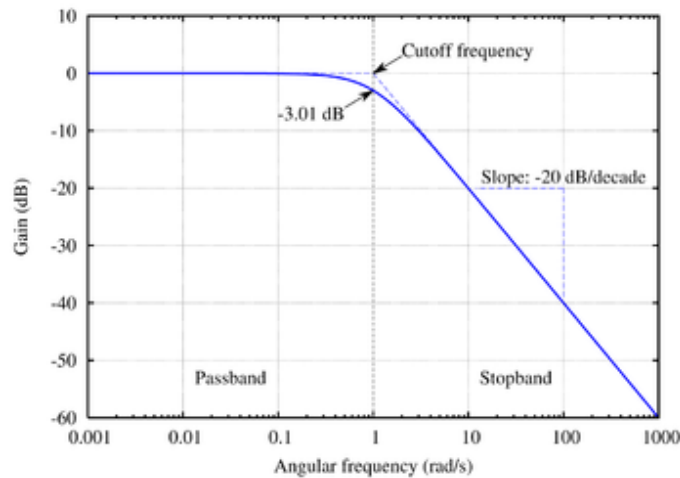
$$F_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (1)$$

Onde:

- $F_c$  é a frequência de corte, que define a fronteira entre as frequências que passam e as que são atenuadas.
- $R$  é o valor da resistência.
- $C$  é o valor da capacitância.

Um gráfico que expressa o comportamento desse tipo de filtro passa-baixa de 1º ordem, mostrando sua resposta em frequência, é ilustrado abaixo:

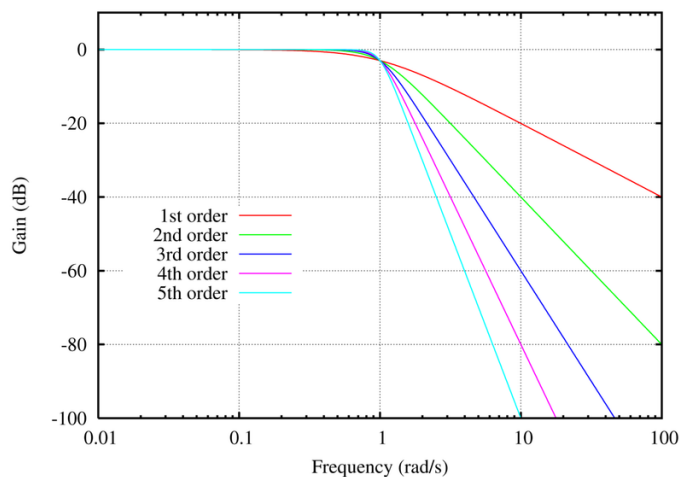
Figura 1: Resposta em frequência de um filtro de 1º ordem



Fonte: Wikipédia

Outro tipo de filtro passa-baixa são os filtros de 2º ordem, como o circuito RLC, que possuem maior atenuação às frequências mais altas. O gráfico deste tipo de filtro é semelhante ao gráfico do filtro de 1º ordem, com a diferença de que a variação na queda da amplitude com o aumento da frequência é mais acentuada.

Figura 2: Resposta em frequência de filtros Butterworth de diversas ordens



Fonte: Wikipédia

Apesar da implementação desse tipo de filtro ser feita geralmente em cima de componentes passivos, também é possível implementá-la através de componentes "ativos" de 1º ordem. Basicamente, componentes ativos, como amplificadores operacionais (amp-ops), são usados para melhorar as características do filtro em comparação com os filtros passi-

vos, que utilizam apenas resistores e capacitores. Por exemplo, um amplificador de áudio pode ser montado como um filtro passa-baixa com frequência de corte igual a 100kHz para reduzir o ganho nas frequências que o fariam oscilar. Como a banda audível vai até cerca de 20kHz, todas as frequências de interesse estão inclusas na banda passante, e o amplificador atua da mesma forma para os sinais de áudio.

## 2.2 Método Sallen-Key

O filtro passa-baixa em topologia Sallen-Key é uma configuração muito popular em circuitos eletrônicos devido à sua simplicidade, estabilidade e desempenho. Esse tipo de filtro utiliza amplificadores operacionais (amp-ops) em conjunto com componentes passivos, como resistores e capacitores, para filtrar sinais de alta frequência, permitindo a passagem de frequências mais baixas.

O filtro Sallen-Key é um filtro ativo, o que significa que ele utiliza um amplificador operacional para aumentar o desempenho do circuito. Ele é normalmente projetado em versões de segunda ordem, oferecendo uma atenuação de 40dB por década (duas vezes mais do que um filtro de primeira ordem) acima da frequência de corte.

Daí, temos que a frequência de corte do filtro passa-baixa em topologia Sallen-Key é determinada pela combinação dos resistores  $R_1$  e  $R_2$ , e dos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , conforme a equação:

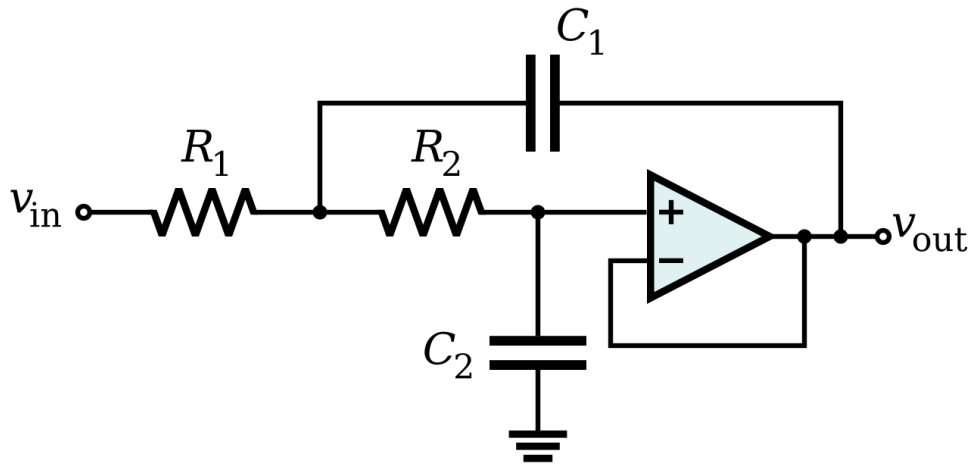
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (2)$$

Esse método para circuitos, em tese, usa um amplificador de tensão com impedância de entrada praticamente infinita e impedância de saída zero para implementar uma resposta passa-baixa, passa-alta, passa-faixa, etc. Esse filtro permite alto fator  $Q$  e ganho de banda passante sem o uso de indutores, além de ter a vantagem da independência, em que os filtros podem ser colocados em cascata sem que os estágios afetem a sintonia uns dos outros. Basicamente, um filtro Sallen-Key é uma variação de um filtro VCVS (Topologia de filtro de fonte de tensão controlada por tensão) que usa um amplificador de ganho

unitário (ou seja, um amplificador de buffer).

A aplicação dessa topologia em filtro passa-baixa pode ser demonstrada a partir da configuração apresentada na figura 3, donde há um amplificador operacional usado como buffer, embora um seguidor de emissor também seja eficaz.

Figura 3: Um filtro passa-baixa de ganho unitário implementado com uma topologia Sallen-Key



Fonte: Wikipédia

Este circuito é equivalente ao caso genérico de ganho unitário, com:

$$Z1 = R1, Z2 = R2, Z3 = \frac{1}{sC1}, Z4 = \frac{1}{sC2} \quad (3)$$

A função de transferência para este filtro passa-baixa de ganho unitário de segunda ordem é:

$$H(s) = \frac{W0^2}{s^2 + 2\alpha s + W0^2} \quad (4)$$

Onde a frequência natural não amortecida  $f0$ , atenuação  $\alpha$ , fator  $Q$  e taxa de amorte-

cimento  $\zeta$ , são dadas por:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (5)$$

$$2\alpha = 2\zeta\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{C_1} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right). \quad (6)$$

Que nos permitem concluir a seguinte equação:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{C_2 (R_1 + R_2)}. \quad (7)$$

O  $Q$  é o fator que determina a altura e a largura do pico da resposta de frequência do filtro. À medida que esse parâmetro aumenta, o filtro tenderá a "tocar" em uma única frequência ressonante próxima a  $f_0$ .

## 2.3 Espaço de Estados

A noção de espaço de estado vem do método de variáveis de estado para descrever equações diferenciais. Nesse método, as equações diferenciais que descrevem um sistema dinâmico são organizadas como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem no vetor de estados do sistema, e a solução é visualizada como uma trajetória desse vetor de estados no espaço. O projeto de controle no espaço de estados é a técnica em que o engenheiro de controle projeta uma compensação dinâmica, trabalhando diretamente com a descrição do sistema em variáveis de estado. Essa abordagem tem sido muitas vezes referida como projeto de controle moderno, sendo que além de permitir a análise de sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output) com mais facilidade, pode ser utilizada para modelar também as relações entre as variáveis internas ao sistema, sendo estas duas características limitações na representação por Funções de Transferência (AGUIRRE, 2007) (OGATA, 2010). Um modelo linear típico representado em forma de Espaço de Estados

apresenta as equações a seguir:

$$\{\dot{x}(t)\} = \{A\}\{x(t)\} + \{B\}\{u(t)\} \quad (8)$$

$$\{y(t)\} = \{C\}\{x(t)\} + \{D\}\{u(t)\} \quad (9)$$

Onde:

- $\{x\}$  é o vetor de estado;
- $\{u\}$  é o vetor de entrada;
- $\{y\}$  é o vetor de saída;
- $[A]$  é a matriz da dinâmica do sistema;
- $[B]$  é a matriz dos atuadores no sistema;
- $[C]$  e  $[D]$  são as matrizes dos sensores e da perturbação dos sensores devido aos atuadores.

Duas observações importantes sobre a representação em forma de espaço de estados são apresentadas neste momento (AGUIRRE, 2007):

- O conhecimento dos vetores de estado em qualquer instante  $t_0$  especifica o estado ou condição do sistema neste instante;
- A representação em espaço de estados não é única, ou seja, um sistema pode ser representado por mais de um modelo no espaço de estados

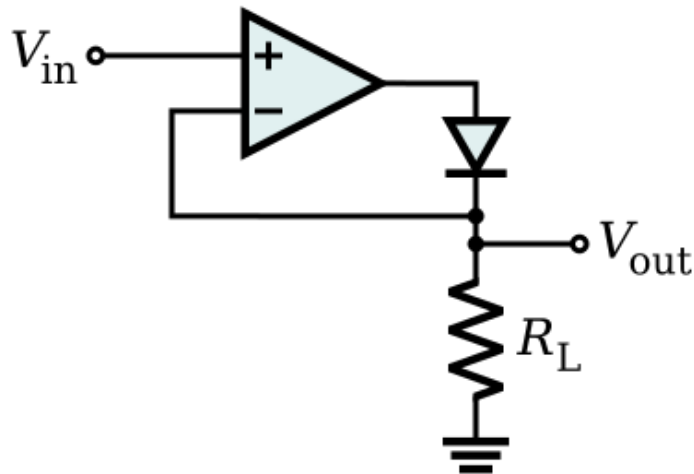
## 2.4 Super Diodo

O superdiodo, também conhecido como retificador de precisão, é um circuito que combina um amplificador operacional com um diodo convencional para simular o comportamento de um diodo ideal. Em um diodo comum, há uma queda de tensão significativa durante a condução direta (0,7 V para diodos de silício), o que pode ser problemático em aplicações que exigem alta precisão. O superdiodo elimina essa queda de tensão, permitindo uma condução mais precisa e eficiente.

O funcionamento do superdiodo é baseado na realimentação negativa do amplificador operacional, que ajusta sua saída para compensar as perdas de tensão do diodo. Isso

faz com que a tensão de saída do circuito seja praticamente igual à tensão de entrada, mesmo para sinais de baixa amplitude. Essa característica torna o superdiodo essencial em aplicações como retificação de precisão, onde é necessário converter sinais de corrente alternada em corrente contínua sem distorção.

Figura 4: Exemplo de Super diodo



Fonte: Wikipédia

Em termos de aplicações, o superdiodo é amplamente utilizado em circuitos de instrumentação, medição de sinais de baixa amplitude e em sistemas de proteção de circuitos. Ele oferece uma solução eficiente para manter a precisão em condições onde diodos convencionais falhariam devido à queda de tensão direta, garantindo maior exatidão em ambientes eletrônicos sensíveis.

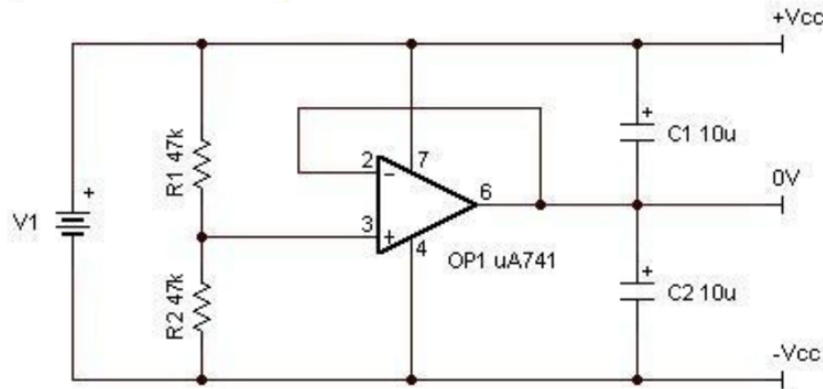
## 2.5 Fonte de Alimentação Simétrica

Uma fonte de alimentação simétrica fornece tensões contínuas de polaridades opostas em relação a um ponto de referência, geralmente o terra. Ela é amplamente utilizada em circuitos eletrônicos que requerem tensões positivas e negativas para operar corretamente, como amplificadores operacionais e circuitos de áudio. A principal função é oferecer duas tensões, uma positiva (+V) e outra negativa (-V), ambas em relação ao terra.

O funcionamento da fonte simétrica envolve a conversão de corrente alternada (CA) em corrente contínua (CC) por meio de transformadores, retificadores e reguladores. Primeiramente, um transformador ajusta a tensão CA, que é retificada para converter em

CC. Em seguida, o sinal é filtrado e regulado, garantindo uma saída estável e simétrica.

Figura 5: Fonte de alimentação simétrica



Fonte: bratfich

Fontes de alimentação simétricas são essenciais para circuitos que exigem alta precisão e estabilidade. A simetria das tensões reduz distorções e interferências, além de melhorar o desempenho do sistema ao fornecer uma tensão de referência central. Por isso, são comumente usadas em sistemas de áudio, instrumentação e sistemas de controle.

## 2.6 Equações de Diferenças

Em circuitos contendo capacitores e indutores, as variáveis de tensão e corrente são frequentemente relacionadas por equações diferenciais, pois a resposta desses componentes depende da taxa de variação (derivada) da tensão ou da corrente ao longo do tempo.

No caso de circuitos RC (resistor-capacitor) e amplificadores operacionais, o comportamento de um filtro passa-baixa é descrito por uma equação diferencial de segunda ordem, que relaciona a tensão de saída  $V_{out}(t)$  com a tensão de entrada  $V_{in}(t)$ . Em um circuito RC básico, a relação entre tensão e corrente no capacitor é dada por:

$$i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} \quad (10)$$

Essa equação descreve que a corrente no capacitor  $C$  é proporcional à taxa de variação da tensão  $V_C(t)$  ao longo do tempo. Combinando isso com a Lei de Ohm para o resistor  $R$ , a equação diferencial completa para um filtro passa-baixa pode ser derivada.



No circuito Sallen-Key, o comportamento da saída em função da entrada envolve o uso de amplificadores operacionais e componentes RC, então a equação diferencial que descreve o comportamento desse tipo de filtro é dada por:

$$\frac{d^2V_{\text{out}}(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dV_{\text{out}}(t)}{dt} + \omega_n^2 V_{\text{out}}(t) = \omega_n^2 V_{\text{in}}(t) \quad (11)$$

Onde:

- $\omega_n$  é a frequência natural do sistema, que depende dos valores de  $R$  e  $C$ .
- $\zeta$  é o fator de amortecimento, que pode ser ajustado pelo ganho do amplificador operacional.
- $V_{\text{in}}(t)$  é a tensão de entrada aplicada ao filtro.
- $V_{\text{out}}(t)$  é a tensão de saída.

Essa equação diferencial de segunda ordem governa o comportamento dinâmico do filtro, ou seja, como o filtro responde a uma variação de entrada ao longo do tempo. Em geral, o uso dessas equações diferenciais em circuito de filtro passa-baixa em topologia Sallen-Key é fundamental para modelar e prever o comportamento dinâmico do filtro, já que permitem determinar a resposta temporal e de frequência do sistema, ajudando no projeto e otimização de filtros para aplicações em sistemas de controle, processamento de sinais, e eletrônica de potência.

## 2.7 Sistemas de Primeira Ordem

Os sistemas de primeira ordem são amplamente utilizados na modelagem e análise de sistemas dinâmicos em diferentes áreas da engenharia, física e ciência. Caracterizados por uma única constante de tempo e uma equação diferencial de primeira ordem, esses sistemas oferecem uma abordagem simplificada, mas eficaz, para descrever processos reais, como circuitos RC, sistemas térmicos e mecânicos. A análise desses sistemas permite

compreender comportamentos como o tempo de resposta, a estabilidade e a relação entre entrada e saída, que são essenciais para o design e controle de sistemas dinâmicos.

Matematicamente, um sistema de primeira ordem pode ser descrito pela equação diferencial linear:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot u(t),$$

onde:

- $\tau$  é a constante de tempo do sistema, relacionada à rapidez com que o sistema responde a mudanças na entrada;
- $K$  é o ganho estático do sistema;
- $u(t)$  é a entrada, e  $y(t)$  é a saída.

A solução dessa equação diferencia a resposta em duas componentes principais: Resposta transitória, que decai exponencialmente com uma taxa determinada por  $\tau$ ; e resposta em regime permanente, que reflete o comportamento de longo prazo do sistema.

Um exemplo prático, como citado anteriormente, é o circuito RC, onde a tensão no capacitor responde a uma entrada de tensão com uma dinâmica governada pela constante de tempo  $\tau = R \cdot C$ , sendo  $R$  a resistência e  $C$  a capacitância. A resposta de um sistema de primeira ordem a uma entrada em degrau pode ser expressa como:

$$y(t) = K \cdot u(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

A característica marcante desse comportamento é a suavidade com que o sistema atinge o valor final, com 63,2% da variação ocorrendo no tempo  $t = \tau$ .

Em tese, esses sistemas de primeira ordem são populares por sua simplicidade e capacidade de capturar o comportamento essencial de processos lentos ou com baixa complexidade dinâmica. No entanto, em situações onde a dinâmica inclui oscilações ou múltiplas constantes de tempo significativas, modelos de segunda ordem ou superiores podem ser necessários.

## 2.8 Sistemas de Segunda Ordem

Os sistemas de segunda ordem desempenham um papel crucial na modelagem e análise de sistemas dinâmicos mais complexos, onde fenômenos como oscilações, amortecimento e múltiplas constantes de tempo são relevantes.

Tais sistemas são amplamente utilizados para representar a dinâmica de sistemas mecânicos com massas e molas, circuitos RLC e sistemas de controle de processos industriais. Por meio de sua análise, é possível compreender melhor a interação entre a velocidade de resposta, a estabilidade e a precisão de sistemas reais.

Matematicamente, um sistema de segunda ordem é descrito por uma equação diferencial linear da forma:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t),$$

onde:

- $\omega_n$  é a frequência natural do sistema, que define a rapidez inerente do sistema sem amortecimento;
- $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento, que determina se o sistema é subamortecido ( $\zeta < 1$ ), criticamente amortecido ( $\zeta = 1$ ) ou superamortecido ( $\zeta > 1$ );
- $u(t)$  é a entrada do sistema, e  $y(t)$  é a saída do sistema.

A resposta de um sistema de segunda ordem a uma entrada em degrau depende do valor de  $\zeta$ , podendo apresentar as seguintes características:

- Para  $\zeta < 1$  (subamortecido), o sistema apresenta oscilações antes de atingir o valor final, com uma frequência de oscilação dada por  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ;
- Para  $\zeta = 1$  (criticamente amortecido), o sistema alcança o valor final sem oscilações e com a menor duração possível;
- Para  $\zeta > 1$  (superamortecido), o sistema atinge o valor final de forma lenta, sem oscilações.

A análise de sistemas de segunda ordem é frequentemente realizada em termos de parâmetros como o tempo de pico, o tempo de acomodação e o overshoot percentual. Essas métricas permitem avaliar o desempenho do sistema e são amplamente utilizadas no projeto e na sintonia de controladores.

Um exemplo clássico de sistema de segunda ordem, como citado anteriormente, é o circuito RLC série, onde a corrente elétrica no circuito exibe comportamento dinâmico descrito pela equação diferencial acima, com  $\omega_n$  e  $\zeta$  dependentes dos valores de  $R$  (resistência),  $L$  (indutância) e  $C$  (capacitância).

Basicamente, os sistemas de segunda ordem são fundamentais para descrever a dinâmica de processos reais com comportamentos mais complexos que os de primeira ordem. Sua análise fornece insights sobre oscilações, amortecimento e estabilidade, elementos críticos no design de sistemas de controle. O entendimento dessas características permite ajustar sistemas para alcançar um desempenho otimizado, garantindo estabilidade e resposta eficiente às mudanças na entrada.

## 2.9 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), também conhecido como Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) ou *OLS* (*Ordinary Least Squares*), é uma técnica de otimização matemática utilizada para ajustar modelos a conjuntos de dados. O objetivo principal é minimizar a soma dos quadrados das diferenças (resíduos) entre os valores estimados pelo modelo e os valores observados.

Essa técnica é amplamente utilizada em campos como Geodésia, Econometria e Estatística devido à sua simplicidade e eficiência no ajuste de modelos. O Teorema Gauss-Markov garante que, sob certas condições, o estimador de mínimos quadrados é o melhor estimador linear imparcial (BLUE).

Para que o método seja válido, algumas premissas devem ser atendidas:

- **Erro aleatório:** O fator imprevisível (erro) deve ser distribuído aleatoriamente e ter distribuição normal.
- **Linearidade nos parâmetros:** O modelo deve ser linear em relação aos parâmetros. Caso contrário, uma abordagem de regressão não linear ou linearização (ex.: Série

de Taylor) pode ser necessária.

- **Homoscedasticidade:** A variância dos erros é constante.
- **Independência dos erros:** Os erros das observações não devem ser correlacionados.

O método foi desenvolvido e aplicado no final do século XVIII em problemas de Astronomia e Geodésia. A seguir, estão destacados os marcos históricos mais relevantes:

- **1750-1788:** Tobias Mayer e Pierre-Simon Laplace aplicaram métodos de médias e combinações de observações para reduzir erros em estudos de órbitas celestes.
- **1795:** Carl Friedrich Gauss desenvolveu os fundamentos do método, mas não os publicou imediatamente.
- **1805:** Adrien-Marie Legendre foi o primeiro a publicar o método em *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*.
- **1809:** Gauss formalizou o método, conectando-o à distribuição normal e expandindo sua aplicação à probabilidade.
- **1810:** Pierre-Simon Laplace utilizou o Teorema do Limite Central para justificar o método estatisticamente.

Uma aplicação marcante do método foi a previsão da localização do asteroide Ceres em 1801, utilizando dados observados por Giuseppe Piazzi e análises conduzidas por Gauss.

Para entender essa técnica, pode-se analisar um conjunto de  $n$  pontos  $(x_i, y_i)$ , o objetivo desse método é encontrar os parâmetros  $\beta$  que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos:

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, \beta)]^2,$$

onde  $f(x, \beta)$  é a função modelo linear (ex.: reta  $y = \beta_0 + \beta_1 x$ ).

## Etapas

1. Definir a função modelo.
2. Calcular os resíduos  $r_i = y_i - f(x_i, \beta)$ .
3. Determinar  $\beta$  minimizando  $S(\beta)$ , geralmente por derivação.

Algumas aplicações desse método são mostrados abaixo.

### 1. Regressão Linear Simples:

Um modelo linear simples é definido como:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon,$$

onde:

- $\beta_0$ : constante do modelo;
- $\beta_1$ : coeficiente da variável explicativa  $x$ ;
- $\varepsilon$ : erro aleatório.

### 2. Regressão Linear Múltipla

Na regressão múltipla, várias variáveis explicativas  $x_1, x_2, \dots, x_k$  são usadas para estimar  $y$ . O modelo geral é representado por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon.$$

Em forma matricial:

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

onde  $X$  é a matriz de variáveis explicativas.

Em tese, essa é uma ferramenta poderosa para ajuste de modelos e análise de dados. Sua aplicação é sustentada por fundamentos teóricos sólidos, como o Teorema Gauss-Markov, e sua flexibilidade permite utilizá-lo em diversas áreas da ciência e engenharia. No entanto, a aplicação correta do método exige o cumprimento das premissas fundamentais para garantir a validade dos resultados.

## 3 Metodologia

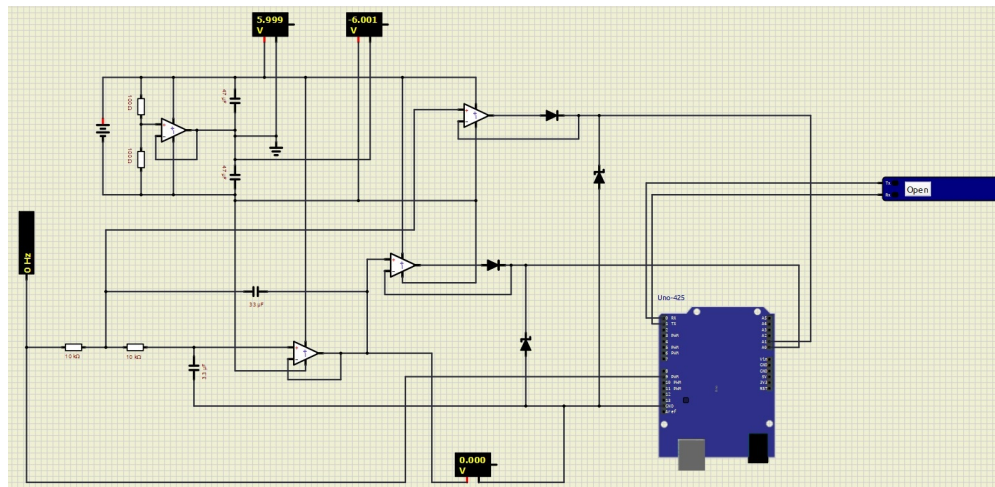
Nesta seção, são apresentados os procedimentos e materiais utilizados para a realização do experimento prático sobre filtro passa-baixa com arduíno e fonte de alimentação simétrica para aquisição de dados para identificar modelo de primeira ou segunda ordem.

### 3.1 Descrição da Prática

#### 3.1.1 Materiais

- 4 Amplificadores, LM 741CN
- 2 de  $10k\Omega$
- 2 de  $180k\Omega$
- 2 de  $1k\Omega$
- 1 Capacitor de  $3.3\mu F$
- 1 Capacitor de  $33\mu F$
- 2 Diodos 0.7V
- 2 Diodos Zenner 5.1V
- 1 Fonte de Alimentação de 18V
- 1 Arduíno UNO
- 1 Cabo de Arduíno
- Fios condutores
- Protoboard

Figura 6: Circuito da prática de controle



Fonte: Autoria própria

### 3.1.2 Montagem

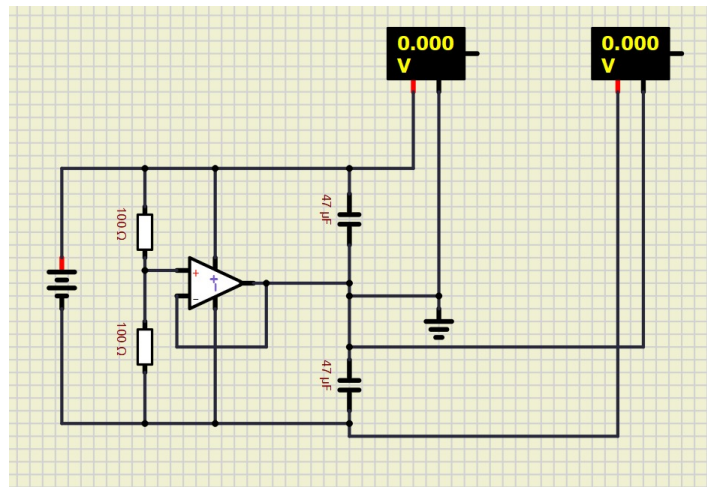
Na prática do experimento sobre filtro Sallen-Key, que tem como objetivo montar um modelo de circuito com arduino e fonte de alimentação simétrica, foram seguidos os seguintes passos para montagem:

1. Utilizar o código do MATLAB para estipular os materiais utilizados durante o experimento, ou seja, as especificações;
2. Utilizar o código disponibilizado para o arduino;
3. Montar o circuito com base na figura 6;
4. Alimentar o circuito com 18V

Em mais detalhes e explicando também o que cada parte em específico faz na figura 6, abaixo foi quebrado em partes o circuito para análise da ponte simétrica, captação do sinal de VI e VCI e circuito Sallen-Key.



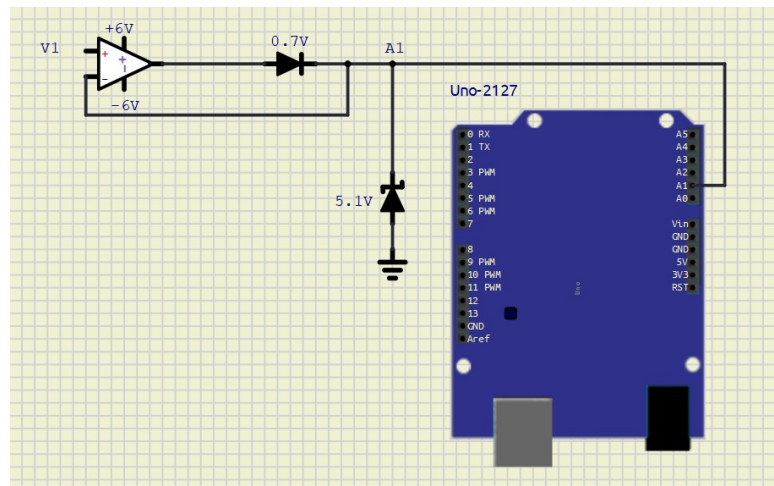
Figura 7: Circuito Separado da Alimentação Simétrica



Fonte: Autoria própria

No circuito da figura 8, apresenta-se o circuito de Alimentação Simétrica onde será dado como alimentação positiva  $V_{cc+} = +6V$  e negativa  $V_{cc-} = -6V$  nos amplificadores presentes do sistema.

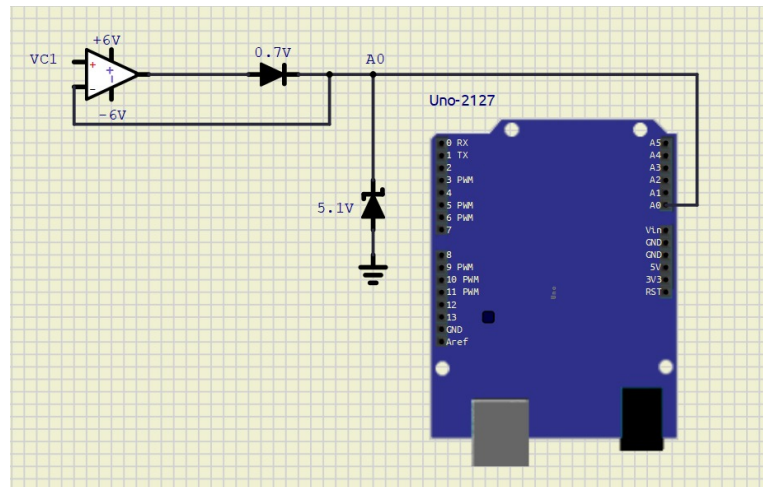
Figura 8: Circuito Separado da captação do sinal de V1



Fonte: Autoria própria

No circuito da figura 9, apresenta-se o circuito de Super Diodo que capta o sinal de tensão  $V1$  no circuito para ser utilizado no código e lido na entrada analógica A1.

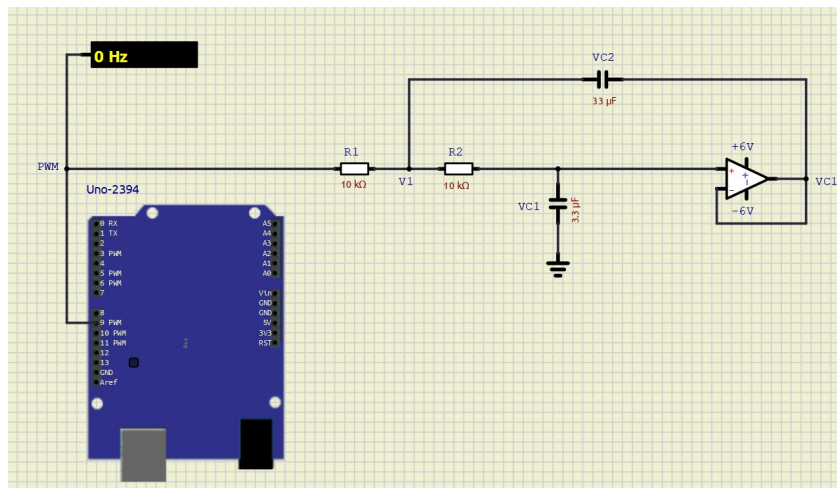
Figura 9: Circuito Separado da captação do sinal de VC1



Fonte: Autoria própria

No circuito da figura 10, apresenta-se o circuito de Super Diodo que capta o sinal de tensão do capacitor  $VC1$  no circuito para ser utilizado no código e lido na entrada analógica  $A0$ .

Figura 10: Circuito Separado do Sallen Key



Fonte: Autoria própria

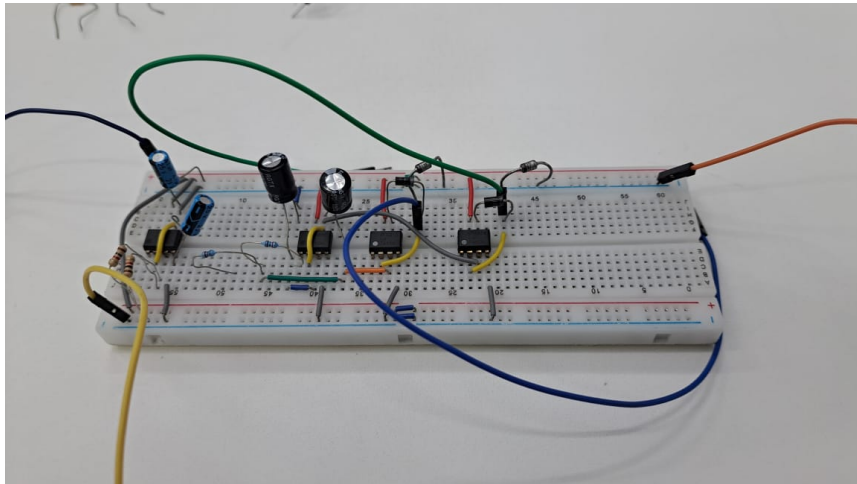
### 3.1.3 Experimento

Na execução prática do experimento, após a montagem do circuito, foram seguidos os passos abaixo:

1. Conectar as portas do arduíno com o circuito;

2. Ligar a fonte de tensão;
3. Utilizar o plotter serial e plotter monitor para analisar o comportamento dos sinais;
4. Registrar o comportamento dos sinais;
5. Fazer a aquisição de dados obtidos;
6. Identificar modelo de primeira ou segunda ordem;
7. Desligar a fonte de alimentação.

Figura 11: Montagem do Experimento



Fonte: Autoria própria

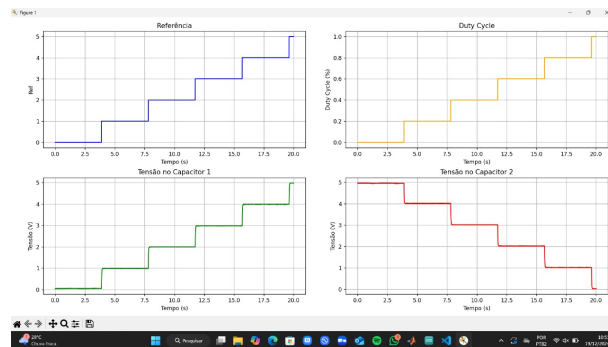
## 4 Resultados

Nesta seção, conforme mencionado na metodologia, foram utilizados códigos no arduíno para aquisição de dados, com o objetivo de, após essa aquisição, aplicar a técnica de mínimos quadrados para realizar um comparativo e verificar qual sistema apresenta o melhor desempenho.

### 4.1 Sem utilização dos mínimos quadrados

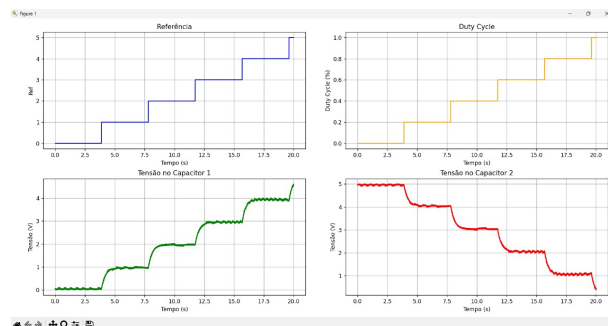
Para comparação é feita uma codificação sem o uso de mínimos quadrados em cima do circuito, daí os seguintes resultados são obtidos para os resistores de 10K e 180K:

Figura 12: Comportamento das saídas de resistor de 10k sem aplicação de mínimos quadrados



Fonte: Autoria própria

Figura 13: Comportamento das saídas de resistor de 180k sem aplicação de mínimos quadrados



Fonte: Autoria própria

Nestas figuras 12 e 13, pode-se observar o comportamento dinâmico das saídas do

arduíno UNO, onde há a presença de saídas como referência em relação ao PWM, o sinal de controle (dutycycle) que cresce em 20% em 20% baseado na referência, e as tensões dos dois capacitores que, observa-se uma relação de dependência entre si, tendo a somatória de tensões sempre próximo de 5V.

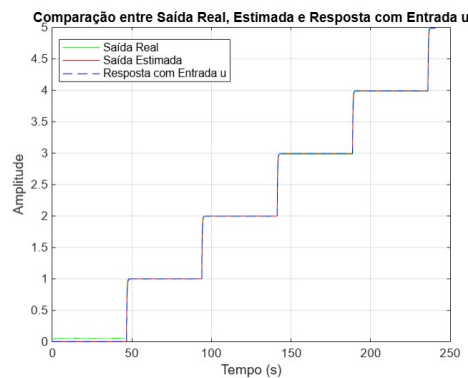
## 4.2 Sistema de Primeira Ordem

### 4.2.1 Prática

#### 4.2.1.1 Para resistores de 10K

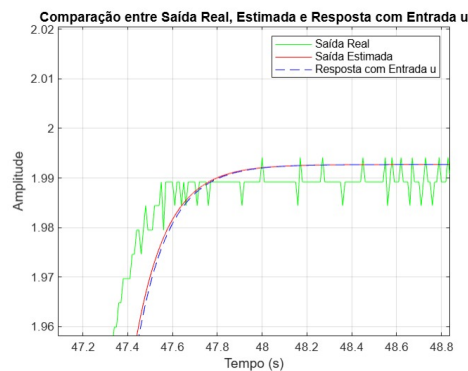
Utilizando a codificação de mínimos quadrados em cima de um sistema de primeira ordem para resistores de 10K, os seguintes resultados são obtidos:

Figura 14: Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 10k



Fonte: Autoria própria

Figura 15: Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 10k com zoom



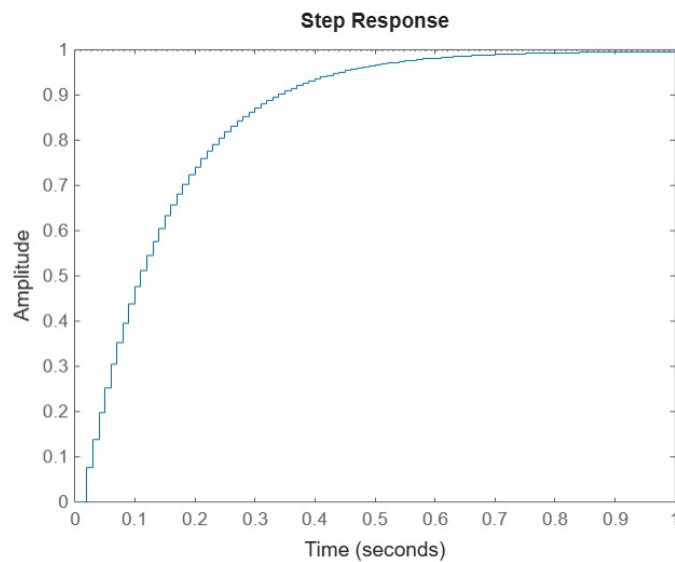
Fonte: Autoria própria

Figura 16: Função de Transferência com resistor 10k

```
Função de transferência estimada G(z):  
  
G =  
  
    0.07014  
-----  
z - 0.9296
```

Fonte: Autoria própria

Figura 17: Resposta ao Degrau da Função de transferência de resistor 10k

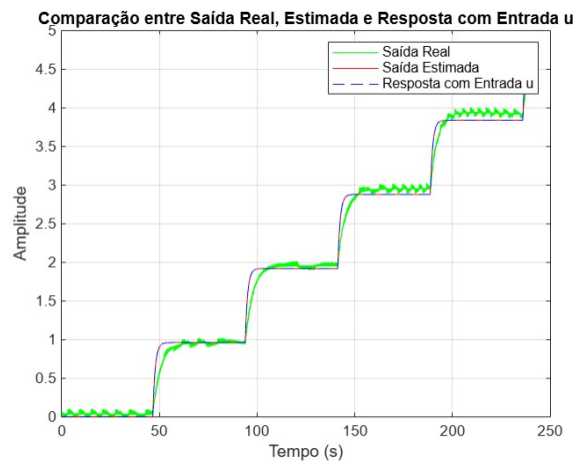


Fonte: Autoria própria

#### 4.2.1.2 Para resistores de 180K

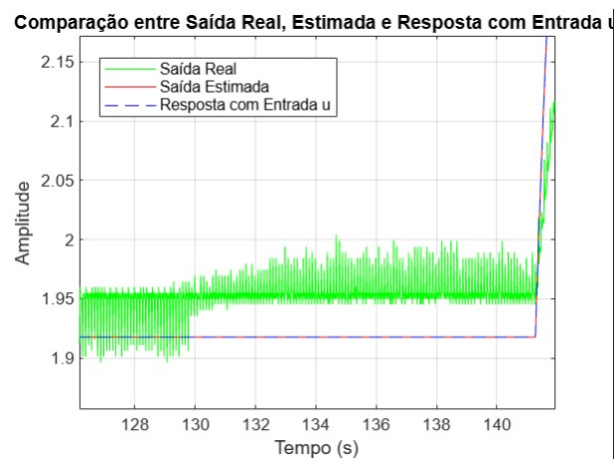
Utilizando a codificação de mínimos quadrados em cima de um sistema de primeira ordem para resistores de 180K, os seguintes resultados são obtidos:

Figura 18: Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 180k



Fonte: Autoria própria

Figura 19: Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 180k com zoom



Fonte: Autoria própria

Figura 20: Função de Transferência com resistor 180k

```

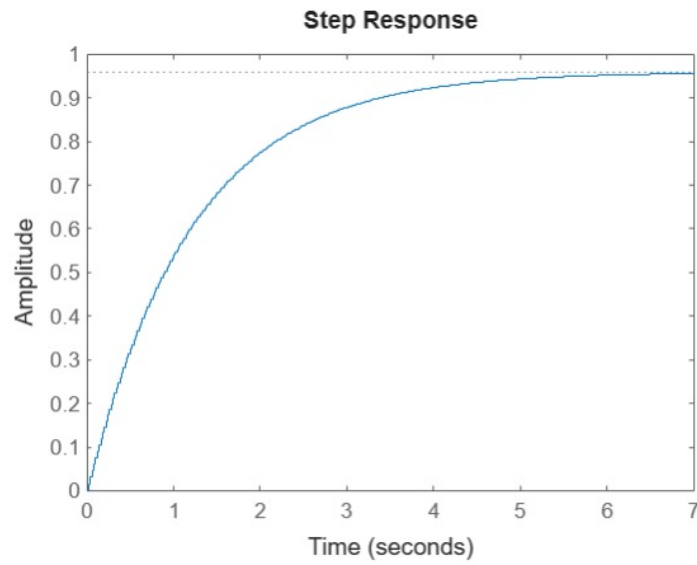
Função de transferência estimada G(s):

G =

    0.01574
    -----
    z - 0.9836
  
```

Fonte: Autoria própria

Figura 21: Resposta ao Degrau da Função de transferência de resistor 180k



Fonte: Autoria própria

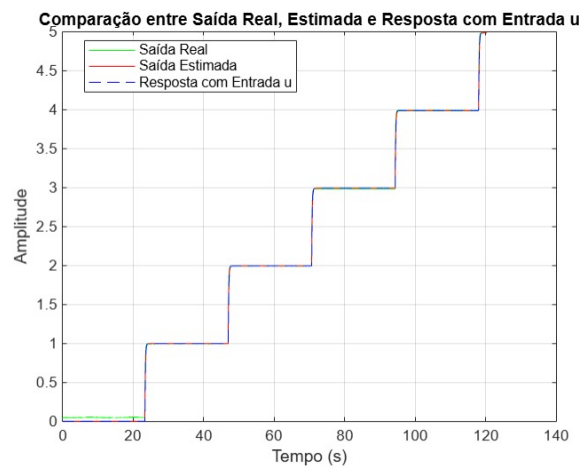
## 4.3 Sistema de Segunda Ordem

### 4.3.1 Prática

#### 4.3.1.1 Para resistores de 10K

Utilizando a codificação de mínimos quadrados em cima de um sistema de segunda ordem para resistores de 10K, os seguintes resultados são obtidos:

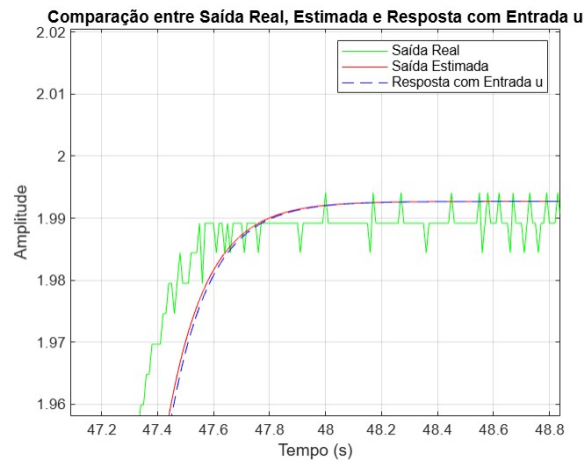
Figura 22: Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 10k



Fonte: Autoria própria



Figura 23: Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 10k com zoom



Fonte: Autoria própria

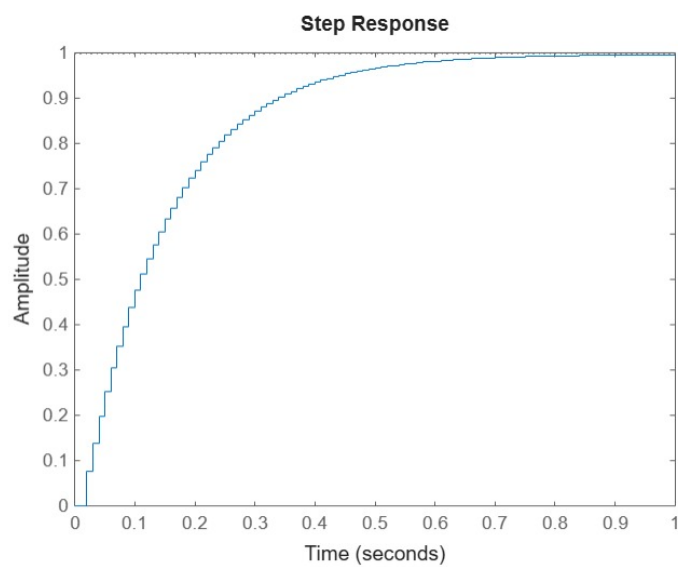
Figura 24: Função de Transferência com resistor 10k

Função de transferência estimada  $G(z)$ :

$$G = \frac{0.07666}{z^2 - 0.813z - 0.1101}$$

Fonte: Autoria própria

Figura 25: Resposta ao Degrau da Função de transferência de resistor 10k

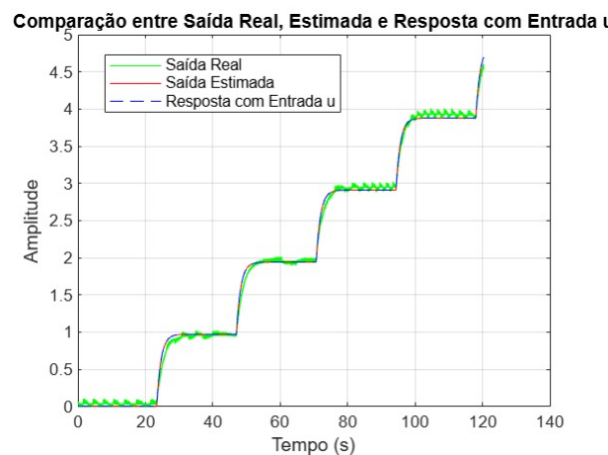


Fonte: Autoria própria

#### 4.3.1.2 Para resistores de 180K

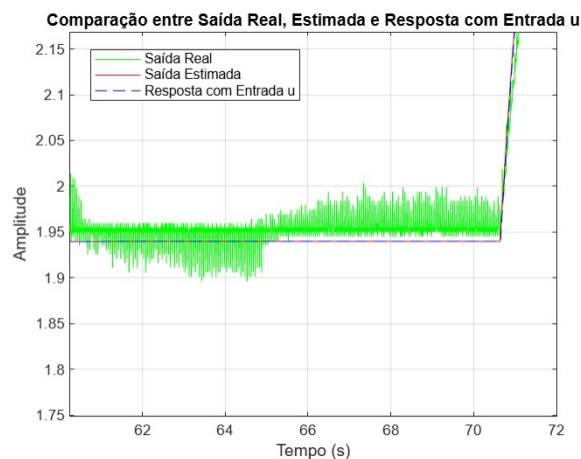
Utilizando a codificação de mínimos quadrados em cima de um sistema de segunda ordem para resistores de 180K, os seguintes resultados são obtidos:

Figura 26: Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 180k



Fonte: Autoria própria

Figura 27: Comparação entre Saída Real e Estimada com resistor de 180k com zoom



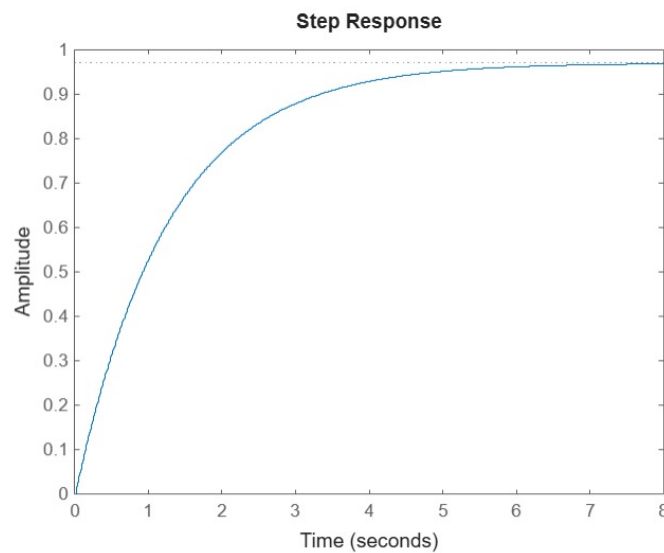
Fonte: Autoria própria

Figura 28: Função de Transferência com resistor 180k

```
Função de transferência estimada G(z):  
  
G =  
  
      0.01227  
-----  
z^2 - 0.3866 z - 0.6008
```

Fonte: Autoria própria

Figura 29: Resposta ao Degrau da Função de transferência de resistor 180k



Fonte: Autoria própria

Após o resultado da aplicação dos mínimos quadrados para identificação de sistemas de primeira e segunda ordem, tem-se a seguinte análise.

### 1. Comparação entre Saída Real e Estimada

- Os resultados dos resistores de 10k evidenciam uma resposta significativamente mais rápida devido à menor resistência, o que torna a comparação entre os sistemas de primeira ordem (Figura 14) e de segunda ordem (Figura 22) consideravelmente mais desafiadora, porém há uma oscilação bem menor e mais rápida (Figuras 15 e 23).
- Para contornar esse problema, foi realizada a substituição dos resistores por outros de 180k, permitindo uma identificação e análise mais clara do sistema construído.

- Após a troca, os resultados obtidos com os resistores de 180k mostraram-se mais representativos e relevantes (Figuras 18e 26). Devido ao uso de uma resistência maior, a resposta do sistema tornou-se mais lenta, como evidenciado pelo comportamento oscilatório mais acentuado (Figuras 19 e 27). Isso ocorre porque a maior resistência amplifica as oscilações, tornando-as mais intensas e prolongadas.
- Por fim, com base nas comparações dos efeitos das resistências, conclui-se que o sistema construído é de segunda ordem. Essa conclusão se deve ao fato de que, ao analisar o comportamento dinâmico da resposta, a saída real de segunda ordem apresenta melhor correspondência com a saída estimada em comparação à de primeira ordem.

## 2. Função de Transferência

- Com a análise das funções de transferência de primeira ordem, tem-se que o resistor de 180k (Figura 20) torna o sistema mais lento em comparação ao de 10k (Figura 16), evidenciado pelo pólo mais próximo de 1, confirmando os resultados do tópico "Comparação entre Saída Real e Estimada".
- Com a análise das funções de transferência de segunda ordem, tem-se que resistor de 180k (Figura 28) aumenta a complexidade e deixa o sistema marginalmente estável ( $z_1 = 1.00$ ), enquanto o de 10k (Figura 24) apresenta estabilidade com uma dinâmica levemente oscilatória ( $z_1 = 0.917, z_2 = -0.104$ ).
- O aumento da resistência afeta diretamente a velocidade de resposta e a estabilidade do sistema, tornando-o mais inercial (primeira ordem) ou potencialmente mais instável e oscilatório (segunda ordem).

## 3. Resposta ao Degrau

- Como a dinâmica do sistema é mais lenta com o resistor de 180k, o efeito da discretização (causado pelo intervalo de amostragem do sistema) torna-se mais aparente. Isso faz com que cada pequeno incremento na resposta ao degrau (as "escadas") seja mais visível, tornando uma curva da resposta mais suave no resistor de 180k (Figura 29) do que no resistor de 10k (Figura 17).

## 5 Conclusão

Com base no circuito estudado no primeiro projeto, realizamos a troca dos resistores e adquirimos os dados de entrada e saída para identificar se o modelo é de primeira ou segunda ordem. Após comparar os resultados de simulação dos gráficos do MATLAB, obtidos utilizando técnicas de mínimos quadrados, podemos concluir que o nosso sistema é de segunda ordem.

Essa conclusão baseia-se na análise do comportamento do sistema, onde o modelo de segunda ordem segue mais precisamente a referência. Isto é claramente observado nos gráficos das 22 (com resistor de 10k) e 26 (com resistor de 180k), identificados pela legenda "Comparação entre Saída Real e Estimada". Notou-se que, com o resistor de 10k, os gráficos apresentam um comportamento mais quadrado e pouco significativo devido à baixa resistência, porém com resposta mais rápida. Em contraste, com o resistor de 180k, mesmo sem zoom, já é possível perceber um comportamento que segue mais de perto a referência, o que demonstra um desempenho mais eficaz e uma melhor correspondência com o modelo de segunda ordem, como também a resposta mais lenta.

Portanto, é possível afirmar que os objetivos foram atendidos, visto que os resultados obtidos confirmam que o modelo de segunda ordem é mais adequado para descrever o sistema dinâmico estudado, proporcionando uma representação mais precisa e detalhada do comportamento real do sistema.

## 6 Referências

1. Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A. **Sistemas de Controle para Engenharia**. 6<sup>a</sup> ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
2. OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5<sup>a</sup> ed. São Paulo: Prentice Hall, 2010.
3. GOMES, Pablo José T. **Identificação de Estruturas em espaço de estados utilizando o algoritmo ERA/OKID**. 2019. 209 f. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação de Engenharia de Estruturas) - Universidade Federal da Bahia, Escola Politécnica, 2019.
4. Wikipédia. **Filtro passa-baixo**. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Filtro\\_passa-baixo](https://pt.wikipedia.org/wiki/Filtro_passa-baixo). Acessado em: 28 setembro de 2024.
5. Wikipédia. **Sistemas de primeira ordem**. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistemas\\_de\\_primeira\\_ordem](https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistemas_de_primeira_ordem). Acessado em: 10 de Dezembro de 2024.
6. Wikipédia. **Sistemas de segunda ordem**. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistemas\\_de\\_segunda\\_ordem](https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistemas_de_segunda_ordem). Acessado em: 10 de Dezembro de 2024.