Вопрос 6. Рациональные дроби. Простейшие дроби, их интегрирование

Рациональной дробью $R(x)$ называются отношение двух многочленов $P_m(x)$, $Q_n(x)$:

$$\boxed{R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}}, \quad (6.1)$$

где $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$. Рациональная дробь называется ***правильной***, если $m<n$ и ***неправильной***, если $m\geq n$.

Если рациональная дробь $R(x)$ является неправильной, то ее можно единственным образом представить в виде

$$\boxed{R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=S_{m-n}(x)+\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}}, \quad (6.2)$$

где $S_{m-n}(x)$, $R_r(x)$ – многочлены степеней $m-n$ и r соответственно, $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ – правильная рациональная дробь ($r<n$).

Равенство (6.2) для неправильной рациональной дроби $R(x)$ можно получить, если разделить столбиком многочлен $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$, в результате чего выделятся неполное частное $S_{m-n}(x)$ и остаток $R_r(x)$ ($r<n$).

Пример 6.1. Представить рациональную дробь

$$R(x)=\frac{2x^4+3x^3+3x^2-1}{x^3+x^2+x}$$

в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Решение. Дробь $R(x)$ является неправильной рациональной дробью ($m=4,\ n=3,\ m\geq n$). Разделим столбиком числитель дроби на знаменатель:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+3x^3+3x^2-1 & x^3+x^2+x \\
\cline{2-2}
\underline{2x^4+2x^3+2x^2} & 2x+1 \\
x^3+x^2-1 & \\
\underline{x^3+x^2+x} & \\
-1-x &
\end{array}
$$

$S_1(x)=2x+1$, $R_1(x)=-x-1$ и по формуле (6.2)

$$
R(x)=\frac{2x^4+3x^3+3x^2-1}{x^3+x^2+x}=2x+1+\frac{-x-1}{x^3+x^2+x},
$$

где $R_1(x)=\dfrac{-x-1}{x^3+x^2+x}$ – правильная рациональная дробь.

Простейшие дроби, их интегрирование

Среди правильных рациональных дробей выделяют так называемые ***простейшие дроби***:

I тип:	$\dfrac{A}{x-\alpha}$	$(A,\ \alpha=const)$
II тип:	$\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$	$(A,\ \alpha=const,\ k\in N,\ k>1)$
III тип:	$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$	$(M,\ N,\ p,\ q=const,\ p^2-4q<0)$
IV тип:	$\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$	$\begin{pmatrix} M,\ N,\ p,\ q=const, \\ p^2-4q<0,\ k\in N,\ k>1 \end{pmatrix}$

Условие $p^2-4q<0$ для простейших дробей третьего и четвертого типов означает, что квадратный трехчлен x^2+px+q нельзя разложить на линейные множители $(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Схемы интегрирования простейших дробей

Первый тип простейших дробей интегрируется подведением под табличный интеграл $T3$:

$$\int\frac{A}{x-\alpha}dx=\begin{vmatrix}t=x-\alpha,\\ dt=dx\end{vmatrix}=A\int\frac{dt}{t}=A\ln|t|+C=A\ln|x-\alpha|+C.$$

Второй тип простейших дробей интегрируется подведением под табличный интеграл $T2$:

$$\int\frac{A}{(x-\alpha)^k}dx=\begin{vmatrix}t=x-\alpha,\\ dt=dx\end{vmatrix}=A\int\frac{dt}{t^k}=A\int t^{-k}dt=$$

$$=A\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{-k+1}(x-\alpha)^{-k+1}+C.$$

Интеграл от простейшей дроби **третьего типа** имеет тот же самый вид, что и интеграл, который рассматривался в вопросе 5.

Выделим полный квадрат трехчлена в знаменателе:

$$x^2+px+q=\left(x+{}^{p}\!/_{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}-q.$$

Обозначив $t=x+\frac{p}{2}$, $\alpha^2=\frac{p^2}{4}-q>0$, получим

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{(x+p/2)^2+\alpha^2}dx=\begin{vmatrix}t=x+p/2,\\ x=t-p/2,\\ dx=dt\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{M(t-p/2)+N}{t^2+\alpha^2}dt=$$

$$= M\int \frac{tdt}{t^2+\alpha^2} + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+\alpha^2} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+\alpha^2\right) +$$

$$+\left(N - M\frac{p}{2}\right)\frac{1}{\alpha}arctg\left(\frac{t}{\alpha}\right) + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(\left(x+p/2\right)^2+\alpha^2\right) + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\frac{1}{\alpha}arctg\left(\frac{x+p/2}{\alpha}\right) + C.$$

Интеграл от простейшей дроби **четвертого типа** на примере:

$$\int \frac{2x+3}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx = \int \frac{2x+3}{\left(\left(x+1\right)^2+1\right)^2}dx = \begin{vmatrix} t = x+1, \\ dt = dx, \\ x = t-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{2\left(t-1\right)+3}{\left(t^2+1\right)^2}dt = \int \frac{2t+1}{\left(t^2+1\right)^2}dt = \int \frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2} + \int \frac{dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)^2}.$$

Вычисляем первый интеграл методом замены переменной (подведением функции под знак дифференциала)

$$I_1 = \int \frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2} = \begin{vmatrix} u = t^2+1, \\ 2tdt = d\left(t^2+1\right) \end{vmatrix} = \int \frac{d\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C =$$

$$= -\frac{1}{2\left(t^2+\alpha^2\right)} + C.$$

Вычисляем второй интеграл:

$$I_2 = \int \frac{1 \cdot dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \int \frac{\left(t^2+1\right)-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt = \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{t^2}{\left(t^2+\alpha^2\right)^2}dt =$$

$$= arctg\left(t\right) - \int \frac{t^2}{\left(t^2+\alpha^2\right)^2}dt.$$

Оставшийся интеграл находим методом интегрирования по частям.

$$\int t\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=\left|\begin{matrix} u=t, & dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}, \\ du=dt, & v=\displaystyle\int\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)} \end{matrix}\right|=$$

$$=t\cdot\left(-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}\right)-\int-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}dt=-\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}\cdot arctg\left(t\right)+C.$$

Вопрос 7. Теорема о разложении правильной рациональной дроби на простейшие дроби

Пусть необходимо разложить рациональную дробь

$$\boxed{R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}} \qquad (7.1)$$

($P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m, n соответственно), являющуюся правильной рациональной дробью ($m<n$), на сумму простейших дробей.

Теорема (о разложении правильной рациональной дроби на простейшие дроби). Пусть знаменатель $Q_n(x)$ правильной дроби (7.1) представлен в виде произведения линейных $(x-\alpha)^k$ и квадратичных $(x^2+px+q)^l$ множителей (α – есть k-кратный корень уравнения $Q_n(x)=0$, причем $p^2-4q<0$).

Тогда рациональную дробь (7.1) можно единственным образом представить в виде суммы простейших дробей:

при этом каждому множителю $(x-\alpha)^k$ в разложении знаменателя $Q_n(x)$ на множители будет соответствовать сумма k простейших дробей вида

$$\underbrace{\frac{A_1}{x-\alpha}}_{I\text{ тип}}+\underbrace{\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}}+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}}_{II\text{ тип}},$$

каждому множителю $(x^2+px+q)^l$ *будет соответствовать сумма* l *простейших дробей вида*

$$\underbrace{\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}}_{III\text{ тип}}+\underbrace{\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{\left(x^2+px+q\right)^l}}_{IV\text{ тип}}.$$

Теорема показывает, какой вид будет иметь правильная рациональная дробь в разложении на простейшие дроби.

Пример. Разложить рациональную дробь

$$R(x)=\frac{2x-1}{\left(x^3+x^2+x\right)^2}$$

на простейшие дроби (коэффициенты разложения не вычислять).

Решение: Дробь $R(x)$ является правильной рациональной дробью, так как $P_1(x)=2x-1,\ Q_6(x)=\left(x^3+x^2+x\right)^2$.

Разложим на неприводимые (неразложимые) множители знаменатель дроби:

$$Q_6(x)=\left(x^3+x^2+x\right)^2=\left(x\left(x^2+x+1\right)\right)^2=x^2\cdot\left(x^2+x+1\right)^2.$$

При этом квадратичный многочлен x^2+x+1 является неразложимым, так как соответствующее условие $p^2-4q<0$ выполняется, где $p=1,\ q=1$.

Тогда в соответствии с теоремой получаем следующее разложение на простейшие дроби:

$$R(x)=\frac{2x-1}{x^2\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+x+1\right)^2},$$

$A_i,\ M_i,\ N_i$ – некоторые (пока неизвестные) постоянные ($i=1,2$).

Вопрос 8. Схема интегрирования рациональной дроби. Метод неопределенных коэффициентов

Вычисление интеграла

$$\boxed{\int R(x)\,dx = \int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx} \tag{8.1}$$

от рациональной дроби ($P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m, n соответственно) сводится к следующему:

1) проверяют, является ли рациональная дробь правильной ($m < n$). Если она не является правильной ($m \geq n$), то необходимо разделить столбиком многочлен $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$

$$\boxed{R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}}, \quad r < n \tag{8.2}$$

2) раскладывают исходную рациональную дробь $R(x)$ (если она являлась правильной) или полученную правильную рациональную дробь $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ (если $R(x)$ являлась неправильной) на сумму простейших дробей.

3) вычисляют интегралы от многочлена $S_{m-n}(x)$ (интегралы от степенных функций) и интегралы от простейших дробей.

Пример 8.1. Вычислить неопределенный интеграл

$$I = \int \frac{8x^2+5x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx.$$

Решение. Дробь является правильной рациональной дробью. Разложим ее на сумму простейших дробей. Исходное разложение имеет вид

$$\frac{8x^2+5x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}, \quad A, B, C, D = const. \tag{8.3}$$

Найдем коэффициенты A, B, C, D по ***методу неопределенных коэффициентов***.

Правую часть (8.3) приведем к общему знаменателю:

$$\frac{8x^2+5x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+2)(x-1)^2+D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

Приравняем числитель полученной дроби к числителю исходной функции $R(x)$:

$$A(x-1)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+2)(x-1)^2+D(x-1)^2=$$
$$=8x^2+5x+5 \qquad (*)$$

Существуют два способа нахождения этих коэффициентов: ***способ сравнения коэффициентов и способ частных значений***

Способ частных значений. Он состоит в том, что в левую и правую части равенства (*) подставляют какие-то частные (удобные) значения аргумента x (такими являются часто корни знаменателя в дроби или еще какие-то значения). В данном случае в равенство (*) удобно подставить значения $x=1,\ x=-2$ (корни знаменателя функции $R(x)$), $x=0,\ x=-1$.

Получим

$$x=1:\ \ 9B=8(1)^2+5\cdot1+5=18\ \Rightarrow\ B=2,$$

$$x=-2:\ \ 9D=8(-2)^2+5(-2)+5=27\ \Rightarrow\ D=3,$$

$$x=0:\ \ A(-1)(2)^2+B(2)^2+C(2)(-1)^2+D(-1)^2=$$
$$-4A+4B+2C+D=-4A+8+2C+3=5\ \Rightarrow\ -4A+2C=-6,$$

$$x=-1:\ \ A(-1-1)(-1+2)^2+B(-1+2)^2+C(-1+2)(-1-1)^2+D(-1-1)^2=$$
$$=-2A+B+4C+4D=-2A+2+4C+12=8\ \Rightarrow\ -2A+4C=-6.$$

Система для определения коэффициентов $A,\ C$:

$$\begin{cases} -4A+2C=-6, \\ -2A+4C=-6 \end{cases} \Leftrightarrow A=1,\ C=-1.$$

Разложение (8.3) примет вид

$$\frac{8x^2+5x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}.$$

Вычисляем интеграл

$$I=\int\frac{8x^2+5x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}\right)dx=$$

$$\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+2|-\frac{3}{x+2}+C.$$

Пример 4.2. Вычислить неопределенный интеграл

$$I=\int\frac{2x^4+3x^3+3x^2-1}{x^3+x^2+x}dx.$$

Решение: Подынтегральная функция $R(x)$ не является правильной рациональной дробью ($m \geq n$, $m=4$, $n=3$). Используя метод выделения целой части (делим уголком), получим

$$R(x)=\frac{2x^4+3x^3+3x^2-1}{x^3+x^2+x}=2x+1+\frac{-x-1}{x^3+x^2+x}.$$

Разложим правильную рациональную дробь

$$\frac{P_r(x)}{Q_n(x)}=\frac{-x-1}{x^3+x^2+x}$$

на простейшие дроби. Соответствующее разложение будет иметь вид

$$\frac{\overline{P}_r(x)}{Q_n(x)}=\frac{-x-1}{x\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad (A,B,C=const). \tag{8.4}$$

Найдем коэффициенты A, B, C по методу неопределенных коэффициентов (***методом сравнения коэффициентов***). Для этого приведем правую часть равенства (8.4) к общему знаменателю

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{A\left(x^2+x+1\right)+x\left(Bx+C\right)}{x\left(x^2+x+1\right)}=\frac{\left(A+B\right)x^2+\left(A+C\right)x+A}{x\left(x^2+x+1\right)},$$

откуда получим равенство

$$\left(A+B\right)x^2+\left(A+C\right)x+A=-x-1\equiv 0\cdot x^2+\left(-1\right)\cdot x+\left(-1\right)$$

для нахождения коэффициентов A,B,C. Переходя от последнего равенства к системе (приравняв коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x)

$$\begin{cases} x^2: & A+B=0, \\ x^1: & A+C=-1, \\ x^0: & A \qquad =-1, \end{cases} \Leftrightarrow A=-1,\ B=1,\ C=0$$

Итак, имеем окончательно,

$$R(x)=2x+1-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+x+1}.$$

Вычисляем неопределенный интеграл

$$\int R(x)dx=\int\left(2x+1-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+x+1}\right)dx=x^2+x-\ln|x|+\int\frac{\frac{1}{2}\left(2x+1\right)-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx=x^2+x-$$

$$-\ln\left(x\right(+\frac{1}{2}\int\frac{\left(2x+1\right)dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=x^2+x-\ln\left(x\right(+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=x^2+x-\ln\left(x\right(+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.$$