

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**М.А. БУРОБИН, М.В. ДУБКОВ, О.В. РОЖКОВ**

# **ФИЗИКА. КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ЧАСТЬ 1**

Учебное пособие

Рязань 2016

УДК 530.1

Физика. Краткий курс лекций. Часть 1: учеб. пособие / М.А. Буробин, М.В. Дубков, О.В. Рожков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2016. 100 с.

Описаны этапы становления научного метода познания, история возникновения современной физики и ее роль в научно-техническом прогрессе. Рассмотрены законы классической и релятивистской механики, основы статистической физики и термодинамики.

Предназначено для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки бакалавров и специальностей, изучающих дисциплину «Физика».

Табл. 3. Ил. 61. Библиогр.: 9 назв.

*Естествознание, физика, механика, статистическая физика, термодинамика*

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра общей и экспериментальной физики РГРТУ  
(д-р техн. наук, профессор А.Н. Власов)

Буробин Михаил Анатольевич,  
Дубков Михаил Викторович,  
Рожков Олег Васильевич

Физика. Краткий курс лекций. Часть 1

Редактор М.Е. Цветкова

Корректор Р.К. Мангутова

Подписано в печать 08.09.16. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 6,25.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

© Рязанский государственный  
радиотехнический университет, 2016

# 1. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ

## 1.1. Физика: ее место в естествознании

Человеческое общество живет и развивается в материальной среде, обеспечивающей возможность его жизни и развития. Действуя и развиваясь в материальной среде, человек, в отличие от животных, не приспосабливается к ней, а активно, сознательно (со знанием) воздействует на материальные условия своего существования. В этом активном воздействии человек создает материальные блага – пищу, одежду, жилище, орудия производства и т.д., то есть весь комплекс условий, которые обеспечивают существование и постоянное развитие человеческого общества. Производство материальных благ – назначение техники, которая представляет собой совокупность орудий труда и комплекса материальных условий, обеспечивающих их функционирование. Таким образом, чтобы существовать, человек сознательно воздействует на природу (на предмет труда) с помощью орудий труда, используя их физические, химические, биологические и иные свойства. Получается, что человек воздействует на природу, используя свойства самой природы.

Однако, чтобы эти свойства использовать, их необходимо познать (человеческое воздействие сознательно). В этом и проявляется тесная связь между существованием человеческого общества как такового, техникой и совокупностью наук о природе – **естествознанием** (знанием о естестве, т.е. о природе, ее сущности). Эта связь носит характер постоянного влияния развития естествознания на развитие техники и наоборот. Графически это можно выразить так, как на рис.1.1.

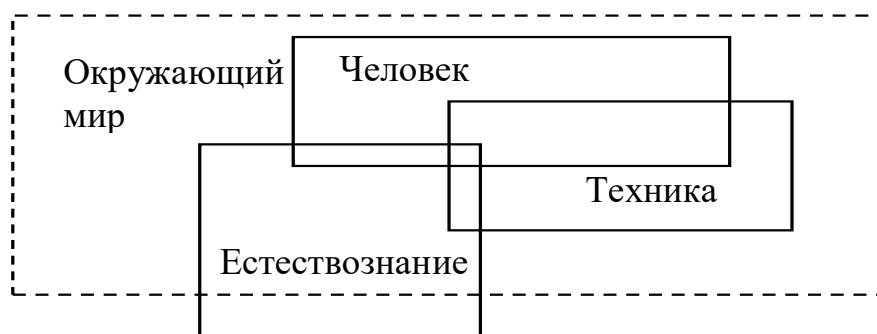


Рис. 1.1

При этом естествознание несколько выходит за рамки окружающего мира, так как, являясь продуктом человеческого разума, не всегда адекватно отражает его (фантазии, гипотезы, модели и т.д.).

Таким образом, прослеживается следующая логическая цепочка:

- чтобы жить, человек должен создавать материальные блага;
- для этого должна развиваться техника;

– развитие техники невозможно без развития естествознания.

Могут возникнуть вопросы: какова при этом роль физики? Где ее место в технике и естествознании?

Сам термин «**физика**» происходит от греческого «*physis*» – «**природа**». Таким образом, по большому счету понятия «физика» и «естествознание» очень близки по смыслу, то есть синонимы.

Впервые термин «физика» был введен Аристотелем. Все науки, относящиеся к изучению природных явлений, он назвал «физика», остальные – «*meta ta physika*», буквально «то, что идет за физикой»: «метафизика», или «первая философия». Так что **физика** по Аристотелю – **первична**, все остальное – **следует за ней**. Однако еще долго понятия «философия» и «физика» смешивались. Так, в 17-м веке И. Ньютон свою знаменитую работу по механике называет «Математические начала натуральной философии».

Современное определение звучит так: «**Физика – наука о простейших и в то же самое время о наиболее общих закономерностях и явлениях природы, свойствах, строении материи и законах ее движения. Понятия физики лежат в основе всего естествознания**».

Таким образом, физики пытаются рассмотреть и осознать самые элементарные, базовые процессы и системы в природе. В связи с этим сделанные физиками открытия не только расширяют наши знания об основных физических закономерностях, но и часто играют решающую роль в развитии других наук. Так, например:

- теория движения газовых и жидких потоков оказалась исключительно важной не только для метеорологии, океанографии, но и для корабле-, самолето- и ракетостроения;
- сформулированные физиками законы распространения волн в различных средах (газах, жидкостях и твердых телах) позволили геологам использовать методы сейсмологии для поиска полезных ископаемых и изучения строения Земли, технологам – разработать методы формирования и дефектоскопии различных изделий, медикам – создать методы воздействия на биологические объекты с целью их исследования и лечения;
- бурное развитие химии во многом предопределено объяснением физиками природы химической связи отдельных частиц;
- огромное значение для биологии имел открытый физиками принцип записи генного кода в молекуле ДНК;
- понятийный и математический аппарат статистической физики, разработанный для исследования систем, состоящих из большого количества микрообъектов, в последние десятилетия успешно используется в социологии и экономике.

Эти примеры можно продолжать до бесконечности.

Также и по охвату объектов изучения физика далеко опережает все остальные естественные науки (астрофизика и геофизика, биофизика, физика макротел, атомарная и молекулярная физика, физика элементарных частиц и т.д.). Схематично это можно представить следующим образом. На рис. 1.2 показаны материальные объекты, условно выстроенные в порядке изменения их геометрических размеров. Здесь же указаны некоторые из разделов естествознания и стрелками показаны объекты их исследования.

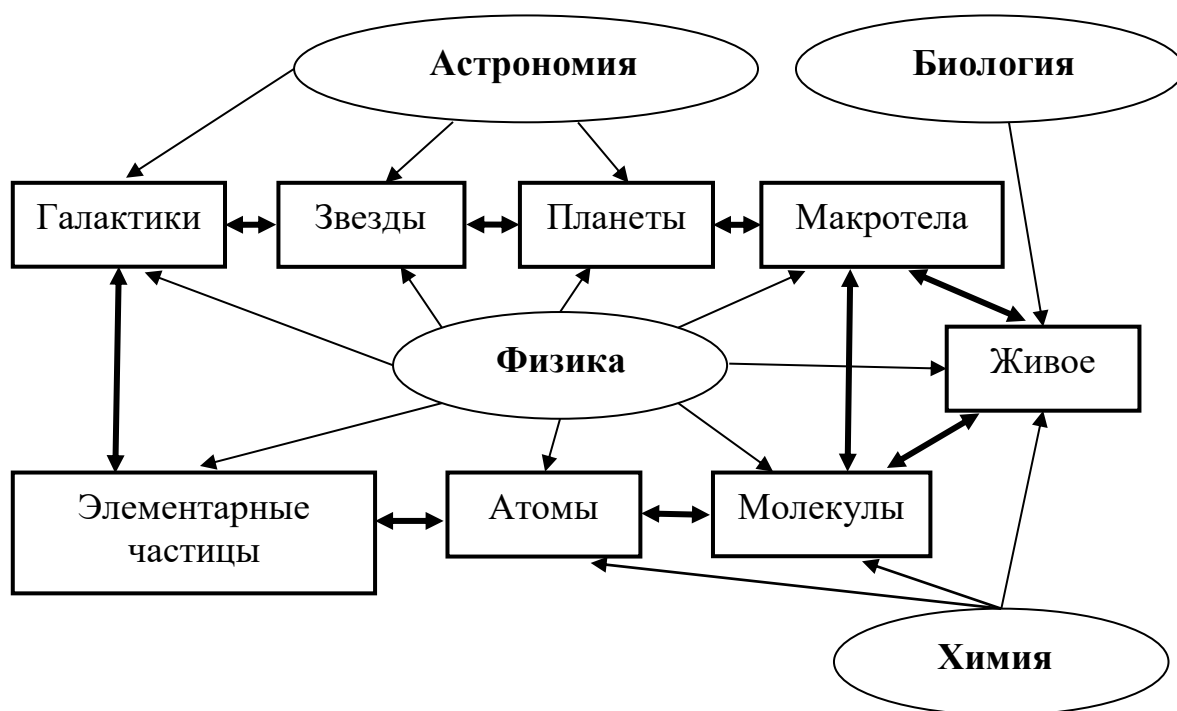


Рис. 1.2

Естественно, влияние физики на другие науки не является односторонним. Зачастую успехи других наук служат катализатором для развития отдельных разделов физики.

Теперь о практической роли физики, то есть о соотношении физики и техники. Конечно, физики не создают новых зданий, не лечат непосредственно болезни, не улучшают качество пищевых продуктов. Физика расширяет наши знания об окружающем мире, о его составных элементах, их поведении и взаимодействии. Архитекторы, машиностроители и технологи постоянно пользуются законами физики. Холодильная техника, радио, телевидение – результат открытий физики. Разработка транзистора, произведенная в лаборатории физики твердого тела, привела к новой эре в электронике, в вычислительной технике и, как следствие, к огромному прогрессу в других науках, в том числе и в самой физике.

Однако хотя вклад физики в технику совершенно очевиден, имеется еще одна не менее важная причина столь большого значения физики. Кроме

технических достижений, повышающих материальное благосостояние человека, не последнюю роль играют и интеллектуальные стимулы. В физике, как и в любой другой сфере человеческой деятельности (живописи, музыке, литературе), проявляется творческая сущность человека. Физика предоставляет человеку великолепную возможность удовлетворить собственную любознательность, проявить себя при решении задач и загадок мироздания. При этом по своей природе, на основе своего подхода к исследованию объектов, как никакая другая наука, физика прививает навыки видеть при решении конкретной задачи ее основу, базис, ее взаимосвязь с другими проблемами, что позволяет найти наиболее оптимальный и эффективный путь решения.

После окончания «холодной войны» отмечается массовая миграция физиков, в том числе в офисы банков и брокерских компаний, где они немало преуспели. Здесь сыграли роль не только свойственное физикам стремление докапываться до истины, но и умение формулировать проблемы реального мира в виде точных количественных соотношений и уравнений. При этом в отличие от математиков, построения которых зачастую абстрактны, они стремятся устанавливать соответствие моделей реальному миру. В обзорной статье «Физики начинают и выигрывают на бирже», помещенной в журнале «*Physics Today*» за январь 1997 г., приводится впечатляющая статистика, подтверждающая, что указанные способности позволяют физикам точнее и быстрее оценивать рыночную ситуацию, распознавать проблемы и управлять рисками, чем это делают представители других специальностей. Это доказано опытом, и во многих университетах уже думают, как перенести идеологию и методы, принятые при подготовке физиков, на преподавание дисциплин финансово-экономического круга.

В связи с этим коротко остановимся на том методе познания окружающего мира, который используется в физике, да и во всем естествознании.

## 1.2. Становление научного метода познания

К 16 веку н.э. среди естествоиспытателей господствовали взгляды Аристотеля на устройство мира и на то, каким образом этот мир можно познать.

1. Все вещества состоят из четырех основных элементов: земля, вода, воздух, огонь.

2. Каждый из этих элементов стремится занять свое «естественное» положение: земля и вода – внизу, огонь и воздух – вверху.

3. В связи с этим камень, состоящий главным образом из «земли», падает вниз. Чем крупнее и тяжелее камень, тем быстрее он падает, тем больше скорость его падения.

4. Все процессы (все движение) делятся на «естественные» (божественное) и «неестественные» (насильственное, искусственное), которое определяется действиями человека. Для всех видов «насильственного» движения необходимо воздействие (сила).

5. Изучение естественных процессов возможно лишь путем логического описания на основе стороннего наблюдения, так как любой опыт означал насильственное вмешательство в «божественный» процесс и, как следствие, – искажение его.

Однако развитие общества, его практических потребностей привело к росту промышленности, к необходимости повсеместного внедрения «насильственных» процессов, при этом они тесно переплетались с «естественными»; уже непонятно было, где заканчиваются одни и начинаются другие.

Понятно, что это никак не уживалось с традиционным аристотелевским учением и его методологией познания. Необходим был новый метод исследований окружающего мира, отличный от описательно-логического метода Аристотеля.

Родоначальниками, создателями этого метода, который в настоящее время называется **научным методом исследования**, можно считать двух ученых, внесших наибольший вклад в его становление: *Фрэнсиса Бэкона* (1561 – 1626 гг.) и *Рене Декарта* (1596 – 1650 гг.).

Бэкон – английский ученый-философ, а также крупный государственный деятель, уделял большое внимание вопросам методологии науки. По этой тематике опубликовал в 1620 г. только первую часть «Новый органон» из большого задуманного сочинения «Великое восстановление». В нем Бэкон:

1) показал несоответствие существующих в то время теории и практики и то, что обращение к наследию древних не может устранить это несоответствие;

2) вскрыл причины плачевного положения наук, важнейшими из которых являются неправильная цель и метод познания. По мнению Бэкона, цель науки не бесполезное умствование, а наделение человечества «новыми открытиями и благами»;

3) доказал, что для этого науке необходимо дать новую методологию и правильно ее организовать. Без правильного метода, по Бэкону, человеческий ум не может познать окружающий его мир, так как его осаждают «призраки», свойственные человеческому разуму и приводящие к заблуждениям:

- а) «призраки рода» – обусловленные самой природой человека:
  - ум склонен обобщать единичные разрозненные факты и отсюда приходиться к неверным выводам;
  - человеческому разуму присуща инерция, он нелегко расстается со сложившимися убеждениями;
  - ум более активно реагирует на эффекты, на то, что «сразу и внезапно может его поразить»;
  - человек субъективен, он «скорее верит в истинность того, что предпочитает»;

– человеческие чувства несовершенны, благодаря чему, например, остаются скрытыми «тонкие перемещения частиц в телах»;

б) «призраки пещеры» – обусловленные индивидуальными склонностями людей. Одни склонны к почитанию древности, другие – к восприятию нового и т.д.;

в) «призраки рынка» – порожденные обычным словоупотреблением, общественным мнением;

г) «призраки театра» – обусловлены господствующими теориями, предвзятым мнением и суеверием.

Правильный метод должен помочь преодолению этих «призраков». Бэкон разделяет ученых своего времени на две группы: «эмпириков» и «догматиков». Эмпирики подобно муравьям тащат в свою кучу всевозможные факты; догматики подобно паукам ткут паутину умозаключений из самих себя. По Бэкону же в науке необходимо действовать подобно пчелам: извлекать материал из внешнего мира и рационально его перерабатывать.

В основе методологии Бэкона лежит опыт. Наука должна опираться на опыт, практику, строя из них выводы методом **индукции**, то есть переходя от частных фактов к обобщениям. Эти обобщения вновь проверяются опытом и практикой. «Наш путь и наш метод, – писал Бэкон, – состоит в следующем: мы извлекаем не практику из практики и опыт из опыта (как эмпирики), а причины и аксиомы из практики и опытов и из причин и аксиом – снова практику и опыты, как верные толкователи природы».

Кроме правильного метода, Бэкон уделял большое внимание организации и финансированию научных исследований. В своих работах он описывает устройство, задачи и значение научных учреждений. Впоследствии подобного рода учреждения (академии) создаются: первая – Флорентийская академия опыта (1657 г.) была организована учениками Галилея и состояла из 9 академиков. Была закрыта по папскому указу, что явилось одной из главных причин того, что Италия (итальянская наука) уступила пальму первенства другим странам, в первую очередь, Франции и Англии, где подобные академии процветали.

Индуктивный метод Бэкона сыграл огромную роль в развитии естествознания. Долгое время естественные науки называли «индуктивными», противопоставляя их гуманитарным. Однако уже сам Бэкон считал, что индукция неполна и несовершенна без теоретического анализа, без использования математики: «Лучше всего продвигаются вперед естественные исследования тогда, когда физическое завершается математическим».

Родоначальником теоретического (дедуктивного) метода принято считать Рене Декарта. Создавая свой метод, Декарт решил отбросить как безусловно ложное все, в чем мог вообразить малейший повод к сомнению. «Можно ли найти истину, которую никто не может опровергнуть?» Эту истину Декарт решил положить в основу своей философии: *«Je pense, donc je*



*suis*» или «*Cogito ergo sum*» – «Я мыслю – следовательно, существую». Эта мысль вытекает непосредственно из опыта, будучи одной из наиболее ясных и определенных идей, которые когда-либо были высказаны человеком. Справедливость остальных положений, по Декарту, следует оценивать по отношению к главному принципу. В связи с этим метод Декарта состоит в расчленении сложных восприятий на отдельные составляющие до тех пор, пока эти составляющие не сведутся к простым, ясным и отчетливым идеям. Метод, получивший название «**дедукция**», впервые изложен в книге «Рассуждения о методе», вышедшей в 1637 г. При этом расчленение должно осуществляться на базе строго последовательной цепочки выводов: «если остерегаться принимать за истинное, что таковым не является, и всегда соблюдать порядок, в каком следует выводить одно из другого, то не может существовать истин ни столь отдаленных, чтобы они были недостижимыми, ни столь сокровенных, чтобы их нельзя было раскрыть». Эту цепочку выводов Декарт позаимствовал у математиков и геометров. Для математического метода по Декарту нет недостижимых истин.

Здесь необходимо отметить, что Декарт не отрицал роли индукции в познании, как и Бэкон – дедуктивного метода. Бэкон лишь подчеркивал ведущую роль опыта и индукции, Декарт же – логического анализа и правильных умозаключений; а современный научный метод основан на диалектическом единстве индукции и дедукции, и какой из них первичен, а какой вторичен – зависит в каждом конкретном случае от множества объективных и субъективных причин. Так, Иоганн Кеплер, обрабатывая огромное количество экспериментальных данных, пришел путем рассуждений к выводам, что планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, что впоследствии подтвердилось на практике. С другой стороны, Эрвин Шредингер вместо того, чтобы связать между собой множество экспериментальных данных, получил наиболее эстетически совершенное математическое описание общих тенденций микромира. В этой погоне за совершенством математического описания Шредингер внес колоссальный вклад в становление современной квантовой теории.

### 1.3. Эволюция идей. Опыт, закон, теория

Всякий раз, когда ученый сталкивается с новой группой фактов, перед ним появляется задача: простейшим путем установить взаимосвязь между ними. Если это удастся, то появляется **теория**. Теорию в ее зачаточном (эмбриональном) состоянии часто называют **моделью**. В физике модель может быть математической, но чаще всего она является механистической, так как большинству людей проще уяснить суть какой-либо проблемы с помощью конкретных образов, а не путем абстрактных рассуждений. Если фактов мало, то модель получается грубой, но по мере увеличения объема информа-

ции модель постепенно усложняется и в конечном счете (но не всегда) становится завершенной теорией. К «хорошей» теории предъявляются следующие требования.

1. Теория должна исходить из небольшого числа фундаментальных положений. Почти всегда можно создать теорию настолько сложную, что она может объяснить любое заданное число фактов. Однако такая теория в высшей степени искусственна и ее выводы оказываются неверными.

2. Теория должна быть достаточно общей. Теория, созданная для объяснения всего лишь одного или нескольких фактов и неспособная объяснить другие, – бесполезна. «Хорошая» теория не должна быть чрезмерно ограничена в своих следствиях, она должна попытаться объяснить по возможности наибольшее число фактов.

3. Теория должна быть точной. Теория не представляет какой-либо ценности, если она не дает точных и четких предсказаний. В таком случае ее выводы не могут быть проверены экспериментально.

4. Теория должна допускать возможность усовершенствования. Она должна расширяться и развиваться по мере получения новой информации, иначе она оказывается полностью несостоятельной при первой же незначительной неудаче.

Развитие теории можно представить следующим образом. Рождаясь из экспериментов, теории должны предсказывать результаты новых экспериментов. Иногда теория предсказывает эффекты, которые нельзя обнаружить в настоящее время. Тогда проверку приходится отложить на будущее. Если между теорией и экспериментом наблюдается какое-либо несоответствие, то следует изменить теорию так, чтобы она объясняла новые данные и т.д. Таким образом, теория развивается путем последовательных уточнений и усовершенствований.

Ценность теории, пожалуй, больше всего определяется тем, насколько четко можно установить предел, за которым она оказывается несправедливой, что позволяет нам избежать ошибок, провести усовершенствование теории (если это возможно) или создать новую теорию, которая будет более общей и обязательно будет включать старую как частный случай.

Стало традицией, что теорию, проверенную и подтвержденную многочисленными экспериментами, начинают рассматривать как **закон**. Однако термин «закон» используется несколько произвольно, и многие «законы» в настоящее время признаны не совсем точными. Так, закону Ома подчиняется только небольшой класс материалов и лишь при определенных условиях. Законы Ньютона тоже в некоторых отношениях должны быть видоизменены согласно требованиям теории относительности. При этом просматривается явная непоследовательность в терминологии: теория Ньютона, которая не во

всем точна, - «закон», в то время как более общая и точная теория относительности – всего лишь «теория».

По мере развития и обобщения появляются настолько общие теории, что они позволяют **на данный момент** объяснить всю (или большую часть) совокупность имеющихся данных, причем в разных областях знаний (физика, химия, биология и т.д.). В этом случае мы можем говорить о **системе теорий** или, в более общем виде, о мировоззрении, системе представлений о принципе устройства мира (механистическом, квантово-механическом и т.д.).

#### 1.4. История развития естествознания (физики)

В истории развития физики, а значит, и естествознания можно несколько условно, но все же довольно явственно выделить несколько этапов.

**1. Период первоначального накопления научных знаний.** Границы этапа: 5 млн лет до н.э. ~1000 лет до н.э. (зарождение греческой науки). Этот период - «младенческий» этап науки, «младенческий» период человечества.

По современным данным человеку как виду около 5 млн лет. Этот факт основывается на результатах археологических раскопок в Восточной Африке (бассейн реки Омо, ущелье Олдувей; граница современных Эфиопии и Кении). Наиболее древним из найденных там же орудий труда около 2 млн лет.

К основным итогам этого периода можно отнести следующее: человек выделил себя из окружающего мира (это «Я» – человек, все остальное – «НЕ-Я» – окружающий мир, который можно и нужно познавать и изучать). В это время начинают формироваться и использоваться абстрактные понятия.

Венец этого этапа – развитие знаний древнеегипетской и древнеави-лонской цивилизаций. К конкретным достижениям можно отнести:

- 1) развитие астрономии;
- 2) развитие математики;
- 3) зарождение письменности.

Однако необходимо отметить, что при этом как таковых отдельных отраслей знаний не существует, все знания перемешаны. Не существует и наук как таковых, так как любая наука основана на доказанных достоверных утверждениях, сформулированных на основе определенных методов исследований, а как раз доказательства на данном этапе отсутствовали. Все построения сводились к сумме практических рецептов, замешанных на мифологии.

**2. Античный (древний) период науки.** Границы этапа: около 7 - 6 вв. до н.э. (первый греческий ученый Фалес Милетский [625 - 547 гг. до н.э.]) – 16 в.н.э. Главный итог периода – формирование воззрений на природу в целом и установление взаимосвязи всех явлений природы (мир – единое целое). В то же время античной науке не доставало частных сведений, не было детального анализа конкретных явлений. Большую роль в науке получают до-

казательства того или иного утверждения (именно поэтому этот период – зарождение науки как таковой). В это время происходит деление естествознания на отдельные науки (физика, алхимия, медицина и т.д.).

В отдельных отраслях знаний наибольшее развитие получают геометрия, астрономия и статика (раздел механики).

Физика на этом этапе – философия природы. Ее метод – метод отвлеченных логических рассуждений, базирующийся на первичном наблюдении, непосредственном созерцании (опыт практически полностью отсутствует).

Итог развития физики: в это время были заложены все основные физико-философские формы воззрений, которые развивались впоследствии.

**3. Классический период.** Границы периода: 17 в. н.э. (работы Н. Коперника, Г. Галилея с учениками, И. Ньютона) – конец 19 в. (зарождение квантовой теории). На этом этапе формируется научный метод познания окружающего мира: индукция – Ф. Бэкон и дедукция – Р. Декарт.

К концу 19 в. были подробно изучены такие разделы физики, как механика, термодинамика, электромагнетизм, оптика и гидростатика. Совокупность этих разделов – классическая физика. Эти разделы практически полностью описывают весь доступный человеческим чувствам окружающий мир, так что, казалось, никаких новых глобальных открытий не предвидится (по словам Майкельсона, «...физикам осталось уточнить шестой знак после запятой»).

**4. Новый период.** Границы периода: конец 19 в. – 40 - 50-е гг. 20-го в. Создание теории относительности заставило пересмотреть наши представления о пространстве и времени. Открытие радиоактивности привело к пересмотру взглядов на строение атома (неделимый ли?), а таким образом, и всей материи в целом. Попытка описать поведение микрообъектов привела к созданию квантовой теории. Принципы, понятия, подходы к описанию явлений, а главное, выводы квантовой теории зачастую в значительной степени отличаются от выводов классической физики.

Кроме того, в это же время (30-е годы 20-го века) впервые были обнаружены радиоизлучение звезд, нейтрон, а также элементарные частицы, не являющиеся частью атома.

Все это вместе привело к коренному изменению наших представлений об окружающем мире, т.е. к формированию нового мировоззрения (пониманию основ устройства мира). Необходимо отметить, что все значительные открытия в это время были совершены молодыми учеными-исследователями (до 35 лет), представления которых не были отягощены классическим механистическим мировоззрением.

**5. Современный период.** Границы периода: 50 - 60-е гг. 20 в. по настоящее время. В принципе его можно включить в рамки нового периода развития естествознания (физики) в качестве особого этапа. Он характеризуется большим количеством новых открытий, которые не укладываются в рамки

существующего мировоззрения. Назревает необходимость возникновения новой теории, которая объединила бы большинство существующих с единой точки зрения (в физике, например, давно назревают разработка единой теории поля, классификация с единой точки зрения элементарных частиц и т.д.). Таким образом, назревает новая смена наших представлений об основах устройства мира, т.е. смена мировоззрения.

## 2. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

**Механика** – раздел физики, изучающий простейший вид движения материи, который так и называется – «механическое движение».

Механическое движение – **перемещение тел или частей тел в пространстве относительно друг друга.**

**Основная задача механики** – зная состояние тела (или нескольких тел) в некоторый фиксированный момент времени  $t_0$ , а также законы, управляющие движением, определить состояние рассматриваемой системы во все последующие моменты времени  $t$ .

Для решения этой задачи необходимо:

- уметь по известному закону движения определять положение тела;
- уметь в каждом конкретном случае определять этот закон.

На основании этого всю механику можно разделить:

на **кинематику** – раздел, который занимается описанием движения тела по известному заранее закону;

**динамику** – раздел, который занимается нахождением закона движения тела, рассматривая причины, вызывающие это движение.

### 2.1. Кинематика

#### 2.1.1. Материальная точка. Система отсчета

Итак, задача кинематики – научиться описывать движение любого тела или, другими словами, находить параметры движения тела в любой наперед заданный момент времени безотносительно к причинам, вызывающим его движение.

Прежде чем приступить к решению задачи, введем некоторые понятия, которые будем использовать при ее решении.

Совокупность тел, поведение которых мы рассматриваем, – **механическая система**. Выбор той или иной системы определяется условиями задачи. Зачастую рассматриваемая система состоит из одного-единственного тела.

Рассматривая движение механической системы, важно абстрагироваться от всех ее свойств, не имеющих отношения к решению поставленной

задачи. Этот принцип – один из основных элементов научного подхода к решению любой проблемы. Впервые применен Г. Галилеем при рассмотрении движения тел в поле силы тяжести Земли. Он заметил, что тела различной формы и размеров падают по-разному, что было им отнесено к влиянию силы сопротивления воздуха. Чтобы сосредоточиться на главном, Галилей стал использовать в своих опытах тела одной формы и размеров – шары.

Так, зачастую при описании движения тела можно абстрагироваться от его формы и физической сущности и принять его за **материальную точку (МТ)**. Решение вопроса, можно ли принимать каждое конкретное тело за МТ или нет, определяется условиями каждой конкретной задачи.

К материальной точке движущееся тело можно свести и в случае, когда оно может быть принято за **абсолютно твердое** тело, все точки которого движутся совершенно идентичным образом. Такое движение называется **поступательным**. При этом абсолютно твердым называется тело, расстояние между двумя любыми точками которого в любой момент времени остается неизменным. Тогда нет смысла рассматривать все точки тела. Можно выбрать лишь одну из них, описать ее движение, и это описание будет справедливо для любой другой точки.

Рассмотрим поступательно движущееся абсолютно твердое тело, которое примем за МТ, и попробуем рассмотреть его движение.

В первоначальном определении механического движения мы задали его как изменение положения тела **относительно** другого тела. В связи с этим мы должны выбрать тело, которое будем считать неподвижным и относительно которого будем рассматривать движение всех остальных. Это тело назовем **телом отсчета**.

Кроме того, изменение положения тела в пространстве происходит за какое-то время. Потому для описания движения МТ к телу отсчета необходимо добавить устройство, задающее начальный момент и масштаб отсчета времени – **часы**.

При характеристике движения МТ нам необходимо не просто указать: движется тело или нет. Нас практически всегда интересует вопрос: «Как быстро оно движется, насколько удалилось от тела отсчета и т.д.?», то есть нас интересуют количественные параметры движения. Для выяснения этого с телом отсчета связывают **систему координат** (прямоугольную декартовую, цилиндрическую, сферическую и т.д.). Любая система координат задает в пространстве определенные направления (оси), относительно которых мы будем рассматривать движение МТ, а также масштабные (единичные) отрезки для измерения расстояния.

В совокупности тело отсчета, связанная с ним система координат и часы дают **систему отсчета**. Выбор системы отсчета определяется опять же условиями каждой конкретной задачи, и в принципе она может быть связана с любым телом, однако оптимальный выбор системы отсчета значительно

упрощает решение задачи.

### 2.1.2. Кинематика точки. Путь. Перемещение

При своем движении МТ описывает в пространстве заданной системы отсчета некую воображаемую линию, которая называется **траекторией движения (ТД)** или просто **траекторией**.

Расстояние между начальной и конечной точками движения, измеренное вдоль траектории, – **длина пути** или **путь ( $S$ )**. Длина пути, пройденного телом за время движения от начального положения МТ до конечного, является скалярной функцией от времени  $S=S(t)$ , причем, как видно из самого определения пути, его значение не может быть отрицательной величиной.

Однако, как показано на рис. 2.1, разные по виду ТД  $S_1$  и  $S_2$ , соединяющие точки 1 и 2, могут иметь одну и ту же длину пути. Таким образом, для характеристики движения одного этого параметра явно недостаточно. Необходимо описать еще и вид траектории. Это сделать достаточно просто, воспользовавшись введенной ранее системой координат. Движение МТ вдоль ТД можно представить как бесконечную последовательность сменяемых во времени фиксированных положений, каждое из которых характеризуется тремя пространственными координатами (в декартовой системе –  $x, y, z$ ).

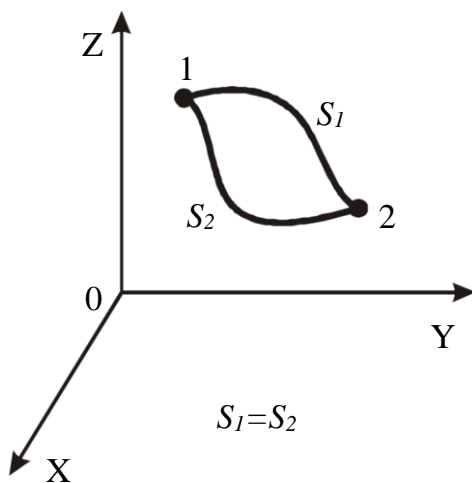


Рис. 2.1

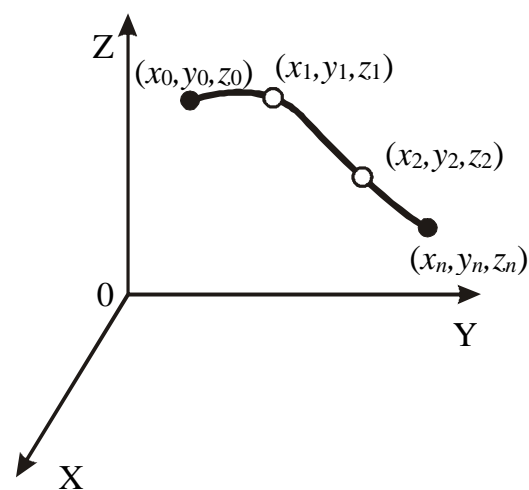


Рис. 2.2

Если мы будем знать, как меняется с течением времени каждая из этих координат, то есть нам будут известны зависимости

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

то мы будем иметь полное описание траектории.

Эти уравнения называются **кинематическими уравнениями движения** или **уравнениями траектории в параметрическом виде** с параметром

$t$ . Задавая с любым шагом значение параметра  $t$ , мы получаем соответствующие наборы значений координат  $(x, y, z)$  и тем самым можем построить в системе координат траекторию (рис. 2.2). Однако по этому виду уравнения не всегда можно заранее без построения представить форму траектории.

Эта проблема легко преодолевается, если в уравнении траектории исключить параметр  $t$ , то есть получить зависимость вида

$$f(x, y, z) = 0. \quad (2.2)$$

В этом случае мы получим уравнение ТД в **каноническом (явном) виде**. Однако опять же рассмотренные выше уравнения траектории не дают исчерпывающего описания движения, так как, например, из них явно не видно, в каком направлении движется МТ. Для указания направления движения МТ при его описании необходимо использовать вместо скалярной величины векторную.

Для того чтобы это сделать, заметим, что координаты точки траектории  $(x, y, z)$  являются проекциями  $(r_x, r_y, r_z)$  на соответствующие координатные оси вектора, проведенного из начала координат в данную точку (рис. 2.3). Этот вектор называется **радиусом-вектором**  $(\vec{r})$ .

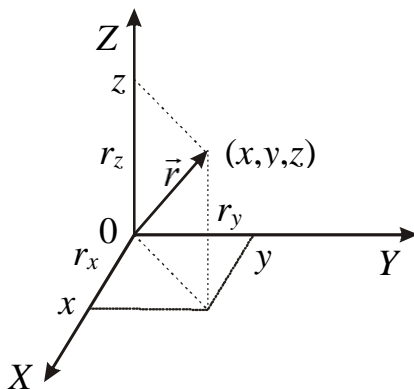


Рис. 2.3

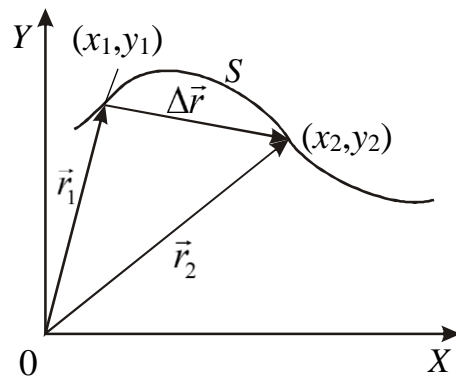


Рис. 2.4

Радиус-вектор можно представить в виде разложения по соответствующему координатному базису:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.3)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  – направляющие орты системы координат.

При этом

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.4)$$

Изменение  $\vec{r}$  с течением времени дает вектор  $\Delta\vec{r}$  (см. рис. 2.4):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (2.5)$$

который называется **вектором перемещения** или просто **перемещением**. Он может характеризовать не только расстояние, на которое переместилась МТ, но и направление движения.



Представляя радиусы-векторы  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  аналогично (2.3) в разложении по координатному базису и подставляя в (2.5), получаем

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \quad (2.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta r_x &= x_2 - x_1; \\ \Delta r_y &= y_2 - y_1; \\ \Delta r_z &= z_2 - z_1 - \end{aligned} \quad (2.7)$$

проекции перемещения на соответствующие оси координат. При этом, если проекция положительна, то МТ перемещается в положительном направлении оси, если отрицательна – то в отрицательном. Зная проекции вектора перемещения на оси координат, можно найти и модуль вектора перемещения как

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2 + \Delta r_z^2}. \quad (2.8)$$

На практике (см. рис. 2.4)  $S \geq |\Delta\vec{r}|$ . Равенство возможно в случае, если траектория движения – прямая линия, по которой МТ движется в одном направлении, а также в случае любой криволинейной траектории, если движение рассматривать за промежуток времени  $\Delta t \rightarrow 0$ . Действительно, сколь не искривлена была бы траектория, за бесконечно малый промежуток времени тело пройдет бесконечно малый ее участок длиной  $dS$ , который можно представить в виде отрезка прямой, и тогда

$$dS = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta\vec{r}|. \quad (2.9)$$

### 2.1.3. Скорость

На практике одни и те же расстояния МТ может проходить за различные промежутки времени. В связи с этим введем понятие **скорости** движения как быстроты прохождения пути или изменения вектора  $\vec{r}$ .

В первом случае под скоростью понимают скаляр

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} - \quad (2.10)$$

**среднюю путевую скорость** за время  $\Delta t$ .

Во втором случае скорость – вектор

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} - \quad (2.11)$$

**средняя скорость перемещения** за время  $\Delta t$ .

В последнем случае направление вектора скорости совпадает с направлением вектора перемещения.

Согласно записанным выражениям средняя скорость движения – это та скорость, которую должна иметь МТ, чтобы пройти определенное расстояние, двигаясь равномерно, с неизменной во времени скоростью ( $v = \text{const}$ ). Однако на практике обычно этого не бывает. В общем случае всегда  $v = v(t)$ , и на каждом временном интервале  $v \neq v_{CP}$ . Тогда, чтобы более детально характеризовать поведение МТ, введем понятие мгновенной скорости, рассматривая ее движение в течение бесконечно малого промежутка времени  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тогда

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = S'(t) \quad (2.12)$$

**мгновенная путевая скорость и**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) \quad (2.13)$$

**мгновенная скорость перемещения.**

Таким образом, мгновенные скорости являются первыми производными: путевая – от пройденного пути по времени, перемещения – от радиус-вектора по времени.

Как указывалось ранее, при  $\Delta t \rightarrow 0$   $dS = |d\vec{r}|$ , и тогда

$$v = |\vec{v}| \quad \text{или} \quad \frac{dS}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|, \quad (2.14)$$

то есть по модулю мгновенная путевая скорость и мгновенная скорость перемещения совпадают. Однако для описания движения использование мгновенной скорости перемещения явно предпочтительнее, так как, помимо численного значения, она как вектор задает еще и направление движения МТ. В связи с этим на практике ее называют просто скоростью движения.

Как видно из (2.13), мгновенная скорость совпадает по направлению с вектором перемещения на очень малом участке траектории (практически стягивающемся в точку). Тогда мгновенная скорость всегда направлена по касательной к траектории в данной точке (рис. 2.5).

Как и вектор перемещения, скорость можно представить через проекции на координатные оси:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}. \quad (2.15)$$

С другой стороны, из (2.13)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}. \quad (2.16)$$

Сравнивая (2.15) и (2.16), получаем

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.17)$$

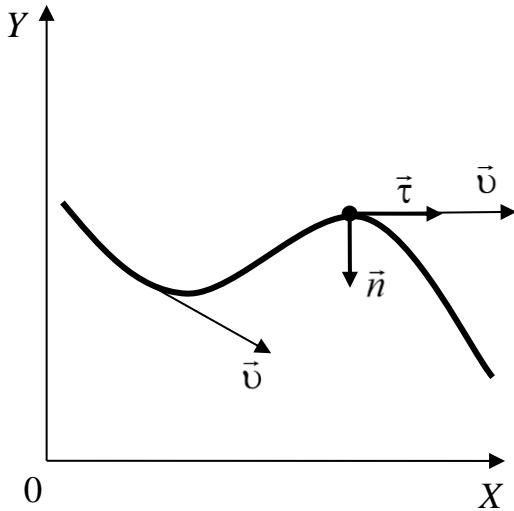


Рис. 2.5

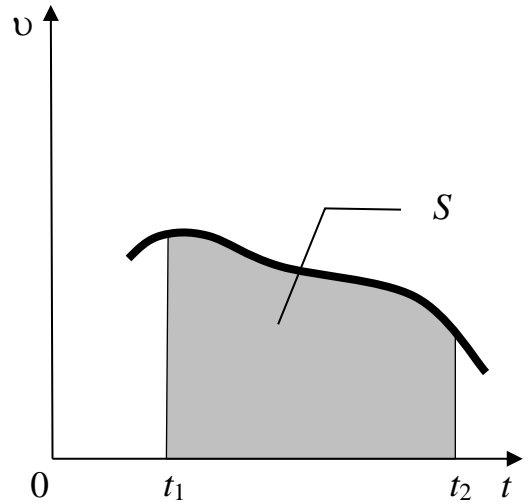


Рис. 2.6

Соответственно для модуля вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}. \quad (2.18)$$

Кроме разложения по ортам фиксированной системы координат, вектор скорости можно разложить и по ортам «скользящей» системы, направленным по нормали ( $\vec{n}$ ) и по касательной ( $\vec{\tau}$ ) к траектории (рис. 2.5), то есть

$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_\tau = v_n \vec{n} + v_\tau \vec{\tau}. \quad (2.19)$$

Однако так как ранее было показано, что вектор скорости лежит на касательной в каждой точке траектории, то нормальная составляющая скорости будет всегда равна нулю, то есть

$$\vec{v} = \vec{v}_\tau = v_\tau \vec{\tau}. \quad (2.20)$$

Зная зависимость модуля мгновенной скорости от времени  $v(t) = dS/dt$ , можно найти и путь, пройденный МТ за заданный отрезок времени:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (2.21)$$

При этом на графике зависимости  $v(t)$  пройденный путь будет определяться площадью криволинейной трапеции (рис. 2.6).

Среднюю путевую скорость движения в этом случае можно определить из соотношения

$$v_{CP} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (2.22)$$

#### 2.1.4. Ускорение

В общем случае при неравномерном криволинейном движении скорость с течением времени может меняться как по модулю, так и по направлению. Для характеристики быстроты изменения скорости в кинематике вво-

дят еще одну величину, которая называется **ускорением**. Ускорение соотносится со скоростью так же, как и скорость с вектором перемещения. Таким образом, совершенно аналогично записываем выражение для среднего ускорения за время  $\Delta t$ :

$$\vec{a}_{CP} = \Delta \vec{v} / \Delta t . \quad (2.23)$$

Для мгновенного ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) . \quad (2.24)$$

Точно так же, как и ранее для векторов скорости и перемещения, вектор ускорения можно представить в виде разложения по проекциям на координатные оси выбранной системы координат:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} , \quad (2.25)$$

и, используя (2.24), получаем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} . \quad (2.26)$$

Подставляя вместо проекций скорости на соответствующие оси их значения, выраженные через изменение координат, имеем

$$\vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} . \quad (2.27)$$

Тогда проекции ускорения на координатные оси представим в виде

$$\begin{aligned} a_x &= v'_x = x''; \\ a_y &= v'_y = y''; \\ a_z &= v'_z = z'', \end{aligned} \quad (2.28)$$

а модуль вектора ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2} = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2} . \quad (2.29)$$

Как и для вектора скорости, мы можем при рассмотрении вектора ускорения использовать в любой точке траектории и другой базис  $(\vec{\tau}, \vec{n})$ . Учитывая, что

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

и

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{\tau} ,$$

получаем

$$\vec{a} = (v(t) \vec{\tau})' = v'(t) \vec{\tau} + v(t) \vec{\tau}' . \quad (2.30)$$

Таким образом, в этом случае вектор  $\vec{a}$  является суммой двух составляющих. Первая составляющая коллинеарна с прямой, касательной в данной

точке к траектории движения, и называется **тангенциальной составляющей ускорения** или просто **тангенциальным ускорением**:

$$\vec{a}_\tau = v'(t)\vec{\tau}. \quad (2.31)$$

Это ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю в данный момент времени, так как значение ускорения определяется производной от модуля скорости.

Теперь определим модуль и направление второй составляющей вектора ускорения. Два этих параметра определяются, в первую очередь, быстротой изменения во времени орта  $\vec{\tau}$ . Ясно, что эта быстрота будет тем больше, чем больше искривлена траектория.

Степень искривления траектории на практике характеризуют с помощью параметра, который называется **кривизной** ( $C$ ) и определяется соотношением

$$C = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}, \quad (2.32)$$

где  $\Delta\varphi$  – угол между ортами  $\vec{\tau}$ , выходящими из точек, расположенных на траектории на расстоянии  $\Delta S$  друг от друга. Кривизна характеризует скорость поворота касательной при ее перемещении вдоль кривой.

Величина, обратная кривизне, называется **радиусом кривизны** ( $R$ ) в данной точке кривой:

$$R = \frac{1}{C} = \frac{dS}{d\varphi}. \quad (2.33)$$

Радиус кривизны определяет собой радиус окружности, которая совпадает с кривой на данном бесконечно малом ее участке.

Для определения быстроты изменения во времени орта  $\vec{\tau}$  рассмотрим малый участок траектории, задав касательные в его граничных точках через орты  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\tau} + \Delta\vec{\tau}$ . Совместив орты параллельным переносом в одной точке, получим треугольник (рис. 2.7), из которого следует, что при  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  справедливо  $\sin \Delta\varphi \approx \text{tg } \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$  и:

$$|\Delta\vec{\tau}| \approx |\vec{\tau}| \Delta\varphi = \Delta\varphi. \quad (2.34)$$

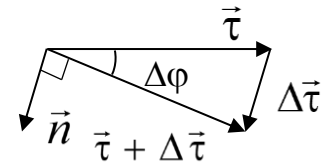


Рис. 2.7

Из рис. 2.7 видно, что вектор  $\Delta\vec{\tau}$  направлен перпендикулярно к вектору  $\vec{\tau}$ , то есть по нормали  $\vec{n}$  к касательной в данной точке кривой, и определяет

направление **нормальной составляющей вектора ускорения** или просто **нормальное ускорение**.

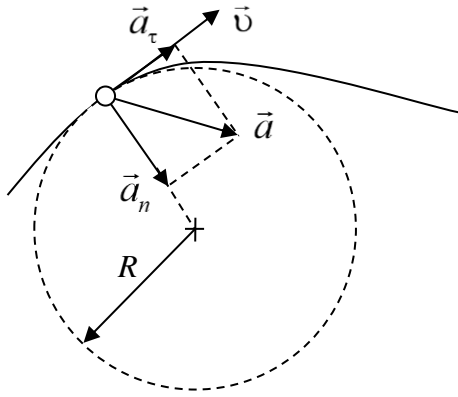


Рис. 2.8

Теперь определим модуль вектора  $\vec{a}_n$ . За малый интервал времени  $\Delta t$  точка проходит путь  $\Delta S = v(t)\Delta t$ . Если этот путь достаточно мал, то можно считать, что точка движется по окружности радиусом  $R$  (рис. 2.8). Согласно (2.33) элементу дуги  $\Delta S$  этой окружности соответствует центральный угол  $\Delta\varphi$ :

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R} = \frac{v(t)}{R} \Delta t.$$

Таким образом,

$$|\Delta\vec{\tau}| = \Delta\varphi = \frac{v(t)}{R} \Delta t.$$

Согласно формуле (2.30)

$$|\vec{a}_n| = |v(t)\vec{\tau}'| = v(t)|\vec{\tau}'|. \quad (2.35)$$

Приняв  $\Delta t \rightarrow 0$ , определим  $|\vec{\tau}'|$  как

$$|\vec{\tau}'| = \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta t} = \frac{v(t)}{R}. \quad (2.36)$$

Подставив (2.36) в (2.35), получим

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2(t)}{R}. \quad (2.37)$$

Окончательно для вектора ускорения можем записать:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}, \quad (2.38)$$

и соответственно его модуль может быть найден как

$$|\vec{a}| = \sqrt{(v')^2 + v^4/R^2}. \quad (2.39)$$

Аналогично тому, как это имело место при рассмотрении скорости, по известной временной зависимости  $a(t)$  можно определить приращение скорости за указанный промежуток времени:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt, \quad (2.40)$$

а также ее среднее значение:

$$v_{CP} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt. \quad (2.41)$$

### 2.1.5. Кинематика твердого тела. Вращение вокруг неподвижной оси. Угловые скорость и ускорение

Рассматривая параметры движения МТ при перемещении ее по криволинейной траектории в разложении векторных характеристик по ортам  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$ , мы использовали аппроксимацию кривой на бесконечно малом ее участке дугой окружности. Однако довольно часто на практике приходится рассматривать ситуацию, в которой все точки, принадлежащие некоторому твердому телу, описывают траектории, представляющие концентрические окружности, центры которых лежат на некой неподвижной прямой. Такое движение называют **вращательным**, а прямую, вокруг которой происходит движение, – **осью вращения**. Ось вращения может как проходить через вращающееся тело, так и лежать вне его (рис. 2.9).

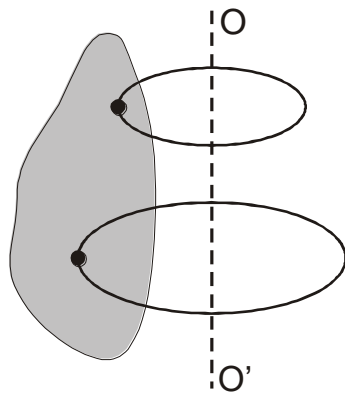


Рис. 2.9

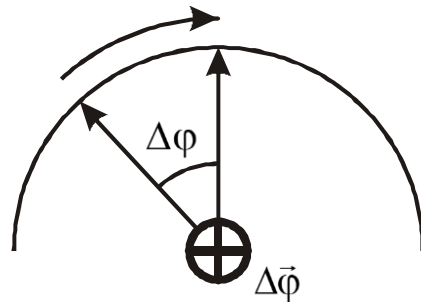


Рис. 2.10

В принципе для описания вращения можно использовать все ранее рассмотренные нами параметры поступательного движения. Однако на практике удобнее ввести новые, которые в отличие от прежних (перемещение, скорость, ускорение и т.д.) – линейных – называют угловыми. Дело в том, что если для различных точек вращающегося тела линейные параметры от точки к точке меняются, то, например, угол поворота будет совершенно одинаков.

В связи с этим для характеристики вращения тела введем **вектор углового перемещения (вектор поворота)**, по модулю равный углу поворота точки ( $\Delta\varphi$ ) за время  $\Delta t$  и направленный вдоль оси вращения по правилу «правого винта» (рис. 2.10): если, глядя вдоль оси, мы видим вращение МТ по часовой стрелке, то вектор  $\Delta\vec{\varphi}$  направлен от нас, если же против часовой стрелки, то – к нам.

Вектор поворота аналогичен по смыслу вектору перемещения при поступательном движении. Однако по характеру его определения это – псевдовектор, так как в принципе он может быть введен и по правилу «левого винта» и не складывается по «правилу параллелограмма».

Точно так же, по аналогии с линейной, можно ввести и вектор **угловой скорости**: средняя угловая скорость за время  $\Delta t$

$$\vec{\omega}_{cp} = \frac{\Delta \vec{\phi}}{\Delta t}, \quad (2.42)$$

мгновенная угловая скорость

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\phi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}. \quad (2.43)$$

Вектор угловой скорости так же, как и вектор углового перемещения, направлен вдоль оси вращения, а направление его определяется изменением вектора поворота.

Если  $\omega = const$ , то мы имеем дело с равномерным вращательным движением, при котором за равные промежутки времени МТ поворачивается на один и тот же угол  $\Delta\phi$ . Время совершения полного оборота ( $\Delta\phi = 2\pi$ ) при этом остается неизменным и называется **периодом вращения (T)**:

$$T = 2\pi/\omega, \quad (2.44)$$

а число таких оборотов, совершаемых в единицу времени, – **частотой вращения (v)**:

$$v = 1/T = \omega/2\pi. \quad (2.45)$$

Если же  $\omega$  меняется, то это изменение можно характеризовать с помощью величины, называемой **угловым ускорением ( $\vec{\varepsilon}$ )**:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.46)$$

Это также псевдовектор, ориентированный вдоль оси вращения, направление которого определяется вектором  $\Delta\vec{\omega}$ .

### 2.1.6. Связь между угловыми и линейными скоростями и ускорениями

Для возможности перехода от одной формы описания к другой установим связь между угловыми и линейными параметрами при вращательном движении. Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  МТ повернулась на угол  $\Delta\phi$  (рис. 2.11). При этом она совершила перемещение  $d\vec{r}$  и прошла путь  $dS$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$   $\Delta\phi$  стремится к нулю, тогда  $v = const$  и  $|d\vec{r}| \rightarrow dS$ .



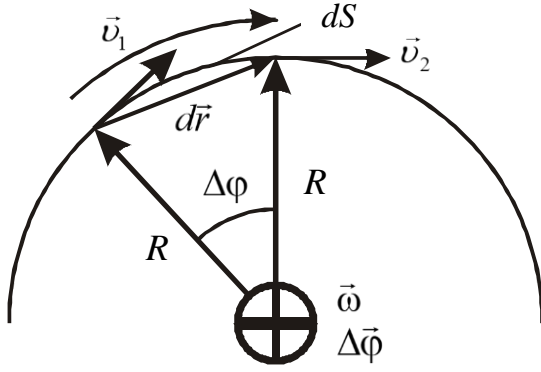


Рис. 2.11

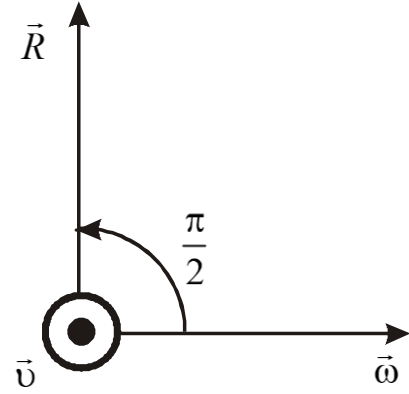


Рис. 2.12

Таким образом, можно записать:  $dr = v dt$ . Кроме того,

$$dr \approx R d\varphi, \quad (2.47)$$

где  $R$  – радиус окружности вращения, и тогда

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt} = \frac{R d\varphi}{dt} = R\omega. \quad (2.48)$$

Если за центр системы координат принять центр окружности, то  $R$  – модуль радиуса-вектора, определяющий положение точки на траектории.

Так как угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{R}$  всегда  $90^\circ$ , то соотношение (2.48) можно переписать следующим образом:

$$v = R\omega \sin(\pi/2).$$

Из рис. 2.12 видно, что при вращении тела векторы  $\vec{v}$ ,  $\vec{\omega}$  и  $\vec{R}$  для каждой его точки образуют правую тройку. Тогда

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]. \quad (2.49)$$

Если взять производную от (2.48), то для модуля  $\vec{a}_\tau$  получим

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R. \quad (2.50)$$

Для модуля же нормальной составляющей из (2.48) получаем

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R. \quad (2.51)$$

## 2.2. Динамика материальной точки

### 2.2.1. Сила. Масса и импульс

В кинематике лишь описывается движение выбранного тела безотносительно причин, определяющих характер движения. Теперь попробуем перейти к решению второй части основной задачи механики – рассмотрим, каким образом в каждом конкретном случае можно найти закон движения тела. Как и ранее, вначале рассмотрим поступательное движение абсолютно твердого тела, которое в этом случае можно свести к материальной точке. Впервые подобного рода задача была решена в знаменитой работе И. Ньютона

«Математические начала натуральной философии», опубликованной в 1687 г.

Начнем с вопроса, который достался И. Ньютону «по наследству» от Г. Галилея. По Аристотелю любое искусственное движение (не возникающее по божественному умыслу) было бы невозможным без наличия внешнего воздействия, которое и обеспечивало бы это движение. В современной физике обобщенной характеристикой воздействия одного материального объекта на другой является вектор, называющийся **силой** ( $\vec{F}$ ). Он определяется и величиной внешнего воздействия, и его направлением. Если же на рассматриваемую механическую систему оказывается одновременно несколько воздействий (действует несколько сил), то их можно свести к одному эквивалентному, суммарному воздействию и ввести понятие **равнодействующей силы**, которая равна сумме всех отдельных сил:

$$\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n . \quad (2.52)$$

Механическое воздействие может осуществляться как между непосредственно контактирующими телами, так и между удаленными телами посредством особых форм материи, называемой **физическим полем** или просто **полем**.

Галилей же первым доказал, что тело может механически перемещаться довольно долго (в принципе бесконечно долго), причем с неизменной скоростью и без действия на него каких-либо сил.

Ньютон полностью согласен с этим и поэтому в разделе «Определения» «Начал...» пишет: «Врожденное свойство материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено само себе, удерживает состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения».

Это свойство количественно характеризуется величиной, которая получила название **«инертная масса»**, и называется **инертностью**.

Таким образом, в данном случае **масса** – скалярная физическая величина, количественно характеризующая способность тел сохранять текущее состояние движения или покоя.

Свойства массы в классической механике (механике Ньютона):

- масса тела не зависит от параметров движения и остается неизменной при их изменении;
- масса обладает свойством аддитивности, то есть масса системы тел равна сумме масс отдельных составляющих системы;
- масса замкнутой системы (границы которой не пересекают ни тела, входящие в систему, ни внешние тела) остается неизменной (закон сохранения массы).

Понятие «масса» напрямую связано с понятием «**плотность**», которая определяется как отношение массы  $\Delta m$  тела к объему  $\Delta V$ , занимаемому телом (средняя плотность тела):

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad (2.53)$$

или бесконечно малой массы  $dm$  тела к величине элементарного объема  $dV$  (плотность):

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \quad (2.54)$$

Соответственно

$$m = \int_V \rho dV. \quad (2.55)$$

Аналогично введем понятия линейной плотности  $\tau$  – массы  $dm$  единицы длины  $dl$ :

$$\tau = \frac{dm}{dl}, \quad (2.56)$$

и поверхностной плотности  $\sigma$  – массы  $dm$  единицы площади  $dS$ :

$$\sigma = \frac{dm}{dS}. \quad (2.57)$$

Для любой системы тел, обладающих массой, существует особая точка, называемая **центром масс**. Ее положение определяет радиус-вектор  $\vec{r}_c$ , который, в свою очередь, равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (2.58)$$

где  $m_i$  и  $\vec{r}_i$  – масса и радиус-вектор  $i$ -й материальной точки,  $n$  – число МТ, на которые можно разбить систему.

Кроме массы, по Ньютону всякое движущееся материальное тело обладает запасом некоего **количества движения** или **импульсом**. Импульс тела определяется как массой тела, так и скоростью его перемещения, то есть это вектор, определяемый соотношением

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.59)$$

Импульс также обладает свойством аддитивности, то есть суммарный импульс механической системы равен геометрической сумме импульсов отдельных тел, составляющих ее:

$$\vec{p}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (2.60)$$

### 2.2.2. Первый закон Ньютона. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета

### Формулировка закона

**Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока оно не будет выведено из этого состояния внешним воздействием (силой).**

Так как любое механическое движение относительно, то ясно, что этот закон выполняется не всегда. Справедливость или несправедливость закона связана с выбором системы отсчета. Так, например, рассматривая две системы отсчета, движущиеся относительно друг друга с неким ускорением, мы получаем, что если в одной из них тело покоится, то в другой оно движется ускоренно, даже если на него нет никакого возмущающего воздействия. Таким образом, одновременно в обеих системах этот закон не выполняется.

В связи с этим все системы отсчета можно подразделить:

- на движущиеся относительно друг друга с одинаковыми и по модулю, и по направлению скоростями – **инерциальные системы**, в каждой из которых по отдельности и во всех вместе взятых первый закон Ньютона выполняется, то есть в которых свободное от внешних воздействий тело (материальная точка) имеет ускорение, равное нулю;
- движущиеся по отношению друг к другу с ускорением – **неинерциальные системы**, в которых первый закон Ньютона не выполняется и свободное тело без какого-то ни было воздействия движется ускоренно.

Однако на практике невозможно выбрать систему, которая была бы строго инерциальна. Дело в том, что строго прямолинейного поступательного движения практически не бывает, так как все тела так или иначе взаимодействуют друг с другом, что, естественно, нарушает равномерность движения.

В настоящее время на практике в качестве эталонной инерциальной системы выбирают систему отсчета, связанную с Солнцем (гелиоцентрическая система), хотя из-за вращения Солнца вокруг ядра нашей Галактики она также строго не является инерциальной. Однако если ошибка, связанная с выбором системы, лежит в допустимых пределах, в качестве инерциальной системы можно выбрать любую другую, пусть даже движущуюся с ускорением (например, связанную с поверхностью Земли).

### 2.2.3. Второй закон Ньютона как уравнение движения

Итак, если на тело нет никаких внешних воздействий или эти воздействия компенсируют друг друга, то тело движется с постоянной скоростью или покоится. Тогда каким же будет характер движения, если равнодействующая всех сил, действующих на тело, будет отлична от нуля? Ответ на этот вопрос Ньютон дает в следующем утверждении (второй закон Ньютона).

Ускорение, приобретенное телом вследствие внешнего воздействия (действия силы), прямо пропорционально этому действию, направлено вдоль линии действия и обратно пропорционально массе тела, то есть

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.61)$$

Ньютон записывал этот закон несколько иначе: **изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит в направлении той прямой, вдоль которой эта сила действует**, то есть

$$d\vec{p} = \vec{F}dt, \quad (2.62)$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.63)$$

Величина  $\vec{F}dt$  носит название **импульса силы**. Если на тело действует одновременно несколько сил, то во всех случаях речь идет о равнодействующей (геометрической сумме) этих сил.

Второй закон Ньютона часто называют **основным законом динамики поступательного движения** (основным законом динамики материальной точки), а оба записанных выше уравнения называются **уравнениями движения тела**, так как, раскладывая векторы, входящие в них, в проекциях на оси выбранной системы координат, можно получить зависимости кинематических параметров от времени, то есть получить закон движения.

#### 2.2.4. Третий закон Ньютона

Остается ответить на последний вопрос, который является логическим продолжением двух первых: если некоторое первое тело действует на второе, то чем оно лучше или хуже его? Ведь в принципе с точки зрения физики все тела равноправны. Тогда, согласно принципу симметрии, который играет большую роль в естествознании, если есть прямое действие, то должно быть и обратное.

В связи с этим третий закон Ньютона гласит: **любому действию есть равное по величине и противоположное по направлению противодействие, или все тела взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположными по направлению**. Математически это записывается так:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (2.64)$$

где  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  – силы, с которыми первое тело действует на второе и второе – на первое соответственно (рис. 2.13).

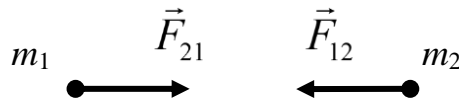


Рис. 2.13

Третий закон Ньютона справедлив не всегда. Он строго выполняется в случае контактного взаимодействия и в случае дистантного взаимодействия покоящихся тел.

Стержнем всей ньютоновской механики является второй закон. Из него следует как частный случай первый закон. Действительно, если суммарное действие на тело равно нулю, то из второго закона имеем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = 0,$$

то есть  $d\vec{v} = 0$  и  $\vec{v} = const$ .

Это означает, что в этом случае движение прямолинейное и равномерное. Более того, можно утверждать, что вся без исключения классическая механика – следствие второго и третьего законов:

- второй закон дает количественное соотношение между параметрами движения тела и суммарным воздействием, производимым на него извне (действием внешних сил);
- третий закон определяет характер взаимодействия тел (связывает воздействие отдельных тел друг на друга в единую систему).

Рассмотрев общие принципы подхода к решению механической задачи, рассмотрим конкретные виды воздействия одних тел на другие.

### 2.2.5. Закон Всемирного тяготения. Сила тяжести и вес тела

Закон Всемирного тяготения (гравитации), установленный и сформулированный Ньютоном, является фундаментальным законом механики: **два любых тела (МТ) взаимодействуют с силой, пропорциональной произведению их масс ( $m_1$  и  $m_2$ ) и обратно пропорциональной расстоянию ( $r$ ) между их центрами масс, то есть**

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.65)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная ( $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{кг} \cdot \text{с}^2$ ).

В данном случае масса, входящая в закон Всемирного тяготения, называется **гравитационной массой** и является мерой гравитационного взаимодействия тел. В настоящее время с достаточной точностью доказано равенство инертной и гравитационной масс, и, таким образом, в дальнейшем будем использовать единое понятие «масса».

Сила, определяющая гравитационное притяжение МТ, направлена вдоль прямой, проходящей через эти точки в полном соответствии с третьим законом Ньютона, как показано на рис. 2.12. В векторном виде математическая запись закона гравитации выглядит как

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (2.66)$$

и аналогичным образом:

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}, \quad (2.67)$$

где  $\vec{r}_{12}$  и  $\vec{r}_{21}$  – соответствующие радиусы-векторы, проведенные от первой материальной точки ко второй и наоборот.

Если же мы имеем объемные тела, то нахождение сил гравитационного взаимодействия сводится к суммированию по всем МТ, на которые можно разбить тела. Математически эта процедура записывается следующим образом:

$$\vec{F}_{12} = \iint_{V_1 V_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} dV_1 dV_2. \quad (2.68)$$

В результате получаем общую силу тяготения, приложенную к центру масс рассматриваемого тела. Ситуация значительно упрощается, если взаимодействующие тела однородны и правильной формы, т.е. обладают тем или иным видом симметрии. Тогда их центры масс совпадают с геометрическим центром тел.

Земля, согласно закону Всемирного тяготения, притягивает все остальные тела с силой

$$\vec{F}_T = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}, \quad (2.69)$$

где  $M$  – масса Земли;  $r$  – расстояние между центром Земли и центром масс данного тела, обладающего массой  $m$ .

Действие этой силы сообщает любому свободному телу ускорение

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}, \quad (2.70)$$

которое называют **ускорением свободного падения**. Так как вблизи поверхности Земли  $r$  может быть принято равным радиусу Земли ( $r \approx R_3$ ), то  $g = \text{const}$  ( $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ ), и силу тяготения, которую называют в этом случае **силой тяжести**, можно переписать в виде

$$\vec{F}_T = m\vec{g}. \quad (2.71)$$

Однако, находясь на поверхности опоры или будучи закрепленным на подвесе, тело находится в состоянии покоя, что согласно первому закону Ньютона свидетельствует о том, что действие силы тяжести компенсируется действием силы реакции опоры или подвеса. По третьему закону Ньютона, если опора или подвес действуют на тело, то и тело, в свою очередь, действует на них с некой равной по модулю, но противоположной по направлению силой, которую называют **весом тела**.

Необходимо помнить, что как модуль веса тела, так и направление этой силы не всегда равны силе тяжести. Это может быть, например, в случае, когда на рассматриваемое тело, помимо этих сил, действуют и другие силы (силы внешней тяги, силы трения и т.д.).

### 2.2.6. Упругие силы

Обычно в механике, производя замену некоторого физического тела материальной точкой, мы пользуемся абстрактным понятием абсолютно твердого тела. Однако в реальности под действием приложенных сил любое тело **деформируется**, то есть изменяет свои геометрические размеры и форму.

Если после прекращения деформирующего действия деформация тела исчезает, то есть тело возвращается в первоначальное состояние, то такая деформация называется **упругой**. Деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются **пластическими** (или **остаточными**). Деформации реального тела всегда пластические, так как они после прекращения действия внешних сил никогда полностью не исчезают. Однако если остаточные деформации малы, то ими можно пренебречь и рассматривать упругие деформации.

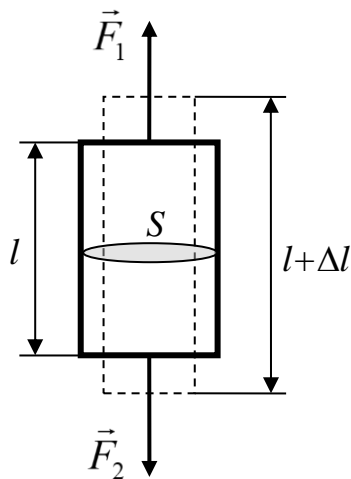


Рис. 2.14

В механике выделяют несколько простейших видов деформации: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб. В теории упругости доказывается, что все перечисленные виды деформации могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения (сжатия) и сдвига.

Рассмотрим однородный стержень длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  (рис. 2.14), к краям которого приложены направленные вдоль его оси силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (при этом  $F_1 = F_2 = F$ ), в результате чего длина стержня меняется на величину  $\Delta l$ , называемую **абсолютной деформацией** растяжения (сжатия).

Естественно, что при растяжении  $\Delta l$  положительна, а при сжатии – отрицательна.

Величина ( $\sigma$ ), равная модулю силы, приходящейся на единицу площади поперечного сечения стержня, называется **механическим напряжением**:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (2.72)$$



Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется **нормальным**, если же по касательной к поверхности – **тангенциальным**.

Величиной, характеризующей степень деформации тела, является его **относительная деформация**. При этом относительная продольная деформация ( $\varepsilon$ ) характеризует изменение длины стержня:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.73)$$

Роберт Гук экспериментально установил закон, согласно которому для малых деформаций относительное удлинение  $\varepsilon$  и механическое напряжение  $\sigma$  прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.74)$$

где коэффициент  $E$  зависит от упругих свойств материала и называется **модулем Юнга**.

Из формул (2.72), (2.73) и (2.74) следует, что

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l. \quad (2.75)$$

Если ввести новую величину

$$k = \frac{ES}{l_0} \quad (2.76)$$

и назвать ее **коэффициентом упругости** или **коэффициентом жесткости** тела, то закон Гука переписывается в виде

$$F = k\Delta l. \quad (2.77)$$

Этот закон выполняется для твердых тел, если деформирующая сила, а таким образом и механическое напряжение, не превышают некоторого максимального предела.

Изменение механического напряжения, возникающего в твердом теле при деформации, представляется в виде диаграммы напряжений, качественный ход которой показан на рис. 2.15. Из рисунка видно, что линейная зависимость напряжения от деформации, соответствующая закону Гука, выполняется лишь до так называемого **предела пропорциональности** ( $\sigma_{пр}$ ). При дальнейшем увеличении напряжения деформация остается еще упругой [хотя зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  становится нелинейной], и до так называемого **предела упругости** ( $\sigma_y$ ) остаточные деформации пренебрежимо малы. За пределом

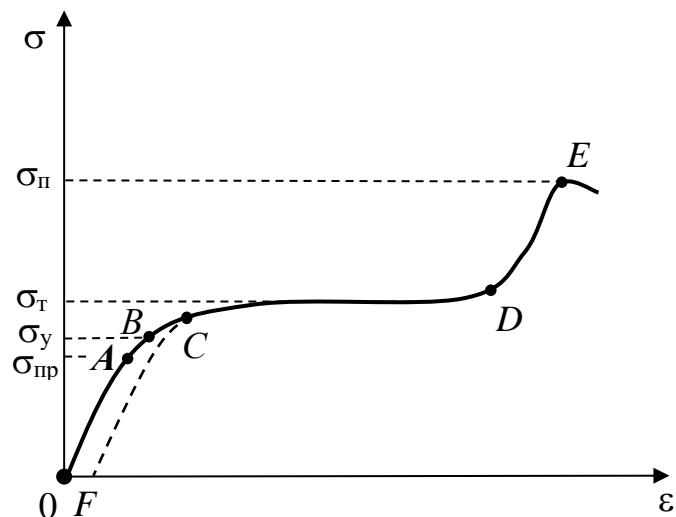


Рис. 2.15

зависимость напряжения от деформации, соответствующая закону Гука, выполняется лишь до так называемого **предела пропорциональности** ( $\sigma_{пр}$ ). При дальнейшем увеличении напряжения деформация остается еще упругой [хотя зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  становится нелинейной], и до так называемого **предела упругости** ( $\sigma_y$ ) остаточные деформации пренебрежимо малы. За пределом

упругости в теле возникают заметные остаточные деформации, и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изобразится не кривой  $CO$ , а параллельной ей –  $CF$ . Механическое напряжение, при котором появляется заметная остаточная деформация, называется **пределом текучести** ( $\sigma_T$ ). Ей соответствует точка  $D$  на диаграмме напряжений. В области  $CD$  деформация возрастает практически без увеличения напряжения (тело как бы «течет»). Эта область называется областью текучести (или областью пластических деформаций). Материалы, для которых область текучести значительна, называются вязкими, для которых же она практически отсутствует, – хрупкими. При дальнейшем растяжении (за точку  $E$ ) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется **пределом прочности** ( $\sigma_n$ ).

Если же присутствует деформация сдвига, то для того же самого стержня можно записать:

$$\sigma = G\gamma, \quad (2.78)$$

где  $G$  – модуль сдвига (аналогичен по смыслу модулю Юнга),  $\gamma$  – относительный сдвиг, определяемый как  $\gamma = \tan \varphi = \Delta l / l_0$  (см. рис. 2.16).

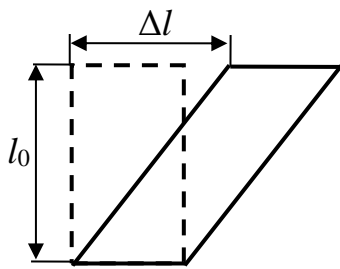


Рис. 2.16

В технике важную роль играют все виды деформации – как упругие, так и неупругие. Рассмотрение упругих деформаций необходимо, например, при расчете конструкций зданий, корпусов и несущих элементов радиоаппаратуры, при изготовлении инструментов.

Наибольшее напряжение, которое устойчиво выдерживает материал на деформацию данного вида, проявляя долговечность в работе, называют допустимым напряжением. Минимальное напряжение, при котором наступает разрушение тела, называется разрушающим напряжением. Отношение разрушающего напряжения к допустимому – запас прочности тела. Зная (оценивая) силу, которая будет действовать на изделие в процессе эксплуатации, и зная допустимое напряжение, можно с учетом необходимого запаса прочности выбрать геометрические размеры (поперечное сечение), форму тела, а также конструктивный материал. При этом необходимо оценивать и характер внешнего воздействия, так как диаграмма напряжений для реальных твердых тел зависит от различных факторов. Одно и то же твердое тело может при кратковременном действии сил проявлять себя как хрупкое, а при длительных, но слабых силах – являться текучим. Также широкое использование получили и неупругие деформации тел: штамповка, чеканка, формовка, прокатка и т.д.

### 2.2.7. Силы трения

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей относительно друг друга или при попытке вызвать такое перемещение. Схематично классификацию сил трения можно представить следующим образом (рис. 2.17).

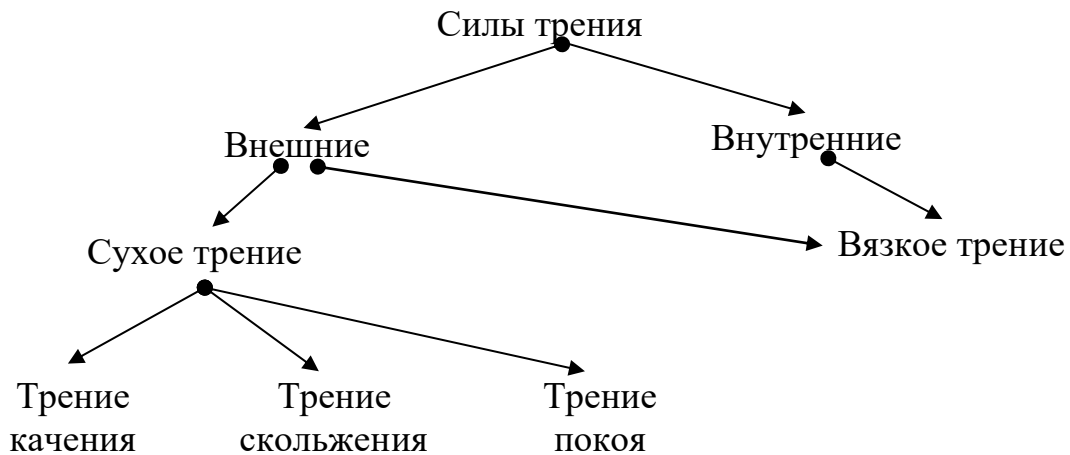


Рис. 2.17

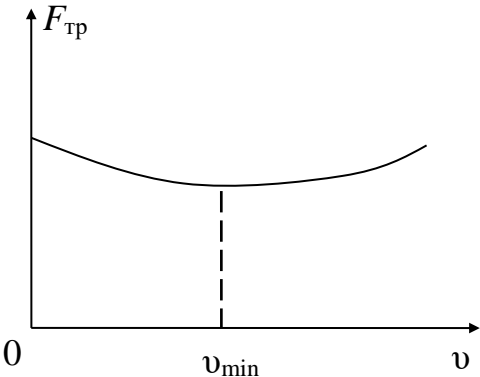
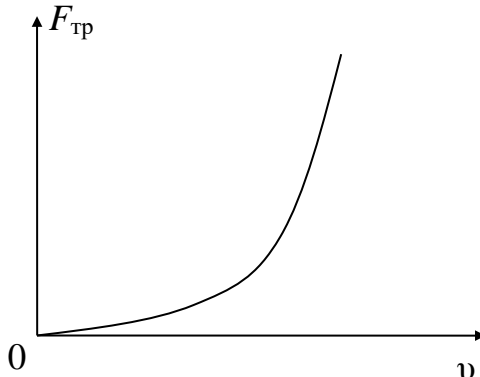
**Внешние силы трения** возникают между поверхностями двух различных тел («твердое тело – твердое тело», «твердое тело – жидкость», «твердое тело – газ» и т.д). **Внутренние** – между частями одного и того же сплошного тела («жидкость – жидкость», «газ – газ»).

Если силы трения возникают в системе «твердое тело – твердое тело» (без жидкости или газа), то это **сухое трение**. Его можно подразделить на трение покоя, скольжения или качения. Все остальные виды представляют собой **вязкое трение**.

Любая сила трения направлена по касательной к трущимся поверхностям (слоям) и препятствует относительному смещению этих поверхностей (слоев). Таким образом, в принципе сила трения является функцией относительной скорости. Однако для сухого трения эта зависимость слабо выражена, и в большинстве случаев, встречающихся на практике, ею можно пренебречь. Для вязкого же трения эта зависимость во многом определяет величину силы.

Примерный вид зависимостей сил трения от относительной скорости движения взаимодействующих тел, а также основные соотношения представлены в таблице. Более подробно явление вязкого трения будет рассмотрено позднее.

Силы трения и в обыденной жизни человека, и в технике играют двойственную роль. Наличие сил трения обуславливает саму возможность передвижения человека, и различных машин по поверхности земли, а также возможность передачи движения в различных устройствах (фрикционные, ременные передачи и т.д.).

<p style="text-align: center;"><b>СУХОЕ ТРЕНИЕ</b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>ВЯЗКОЕ ТРЕНИЕ</b></p> 
<p style="text-align: center;"><b>Трение покоя</b>  <math>F_{тр}=kN</math>,  <math>N</math> – сила нормального давления;  <math>k</math> – коэффициент трения, зависит от материала и состояния поверхности.</p> <p style="text-align: center;"><b>Трение скольжения</b>  <math>F_{тр}=\mu N</math>,  <math>\mu</math> – коэффициент трения, зависит от материала и состояния поверхности.</p> <p style="text-align: center;"><b>Трение качения</b>  <math>F_{тр}=kN/R</math>,  <math>k</math> – коэффициент трения качения;  <math>R</math> – радиус катящегося тела</p>	<p style="text-align: center;"><b>Вязкое трение</b>  <math>F_{тр} = -kv^n</math>,  <math>k</math> – коэффициент вязкого трения;  <math>v</math> – относительная скорость соприкасающихся поверхностей.</p> <p style="text-align: center;">Если:</p> <p style="text-align: center;"><math>v</math> – до нескольких м/с, то <math>n=1</math>;  <math>v</math> – (10 м/с <math>&lt; v &lt; 330</math> м/с), то <math>n=2</math>;  <math>v &gt; v_{звук}</math>, то <math>n=3</math></p>

Для уменьшения проскальзывания трущихся поверхностей силу трения стремятся как можно больше увеличить. Так, в ременных передачах ремни натирают канифолью, увеличивая тем самым коэффициент трения, а также используют специальные прижимные устройства для увеличения силы давления.

Однако все равно, несмотря на все усилия, передаваемая мощность для цилиндрических фрикционных передач не превышает 20 кВт с КПД 80÷95 %, для ременных – 50 кВт с КПД 90÷98 %. Явление трения используется при обработке металлов: вальцовке, волочении, сварке, полировке, заточке и т.д.

Однако неизбежным следствием трения являются:

- износ трущихся поверхностей;
- необходимость затрат усилий на преодоление сил трения, что снижает КПД устройств.

Ежегодно трение «съедает» до 50 % мирового производства каучука. КПД обычного металлообрабатывающего станка порядка 65 %, то есть почти половина всех усилий двигателя идет на преодоление сил трения.

В связи с этим в современной технике наблюдается тенденция избавления от использования механического движения, которое неизбежно сопровождается трением, в тех случаях, когда механическое движение – не цель, а средство достижения цели: в холодильных установках перекачка фреона заменяется использованием электрических элементов Пельтье, механическая обработка материалов – электрической и т.д.

Если такая замена невозможна, принимают меры по снижению трения:

- при изготовлении трущихся поверхностей применяют материалы с минимально возможным коэффициентом трения;
- трущиеся поверхности полируют;
- трение скольжения заменяют трением качения, для чего используют различного рода подшипники (от 1 мм диаметром и массой 0,04 г для наручных часов до диаметра в несколько метров и массы в сотни тонн для барабанов цементных печей);
- сухое трение заменяют вязким, для чего широко используют различного рода смазки, уменьшающие трение;
- в случае вязкого трения оптимизируют форму поверхности тела, делая ее более «обтекаемой» и т.д.

После того как были сформулированы аксиомы механики (законы Ньютона) и рассмотрено, чем определяются конкретные силы, входящие в эти законы, рассмотрим принципы использования законов Ньютона на практике.

При этом может возникнуть несколько вопросов. Для описания движения механической системы мы выбрали некоторую, как нам кажется, наиболее подходящую систему отсчета. Но если по каким-либо причинам необходимо будет ее изменить, то при переходе из одной системы в другую это описание останется таким же или изменится? Если изменится, то как меняются при этом параметры движения: ускорение, скорость и т.д.? Что делать в случае необходимости использования неинерциальной системы отсчета?

### **2.3. Динамика твердого тела**

При рассмотрении поступательного движения тела мы ввели некую абстракцию (МТ), которая в значительной мере упрощает решение задачи. Однако в некоторых случаях понятием МТ воспользоваться затруднительно, то есть необходимо рассматривать тело, обладающее конечным объемом. В этом случае мы использовали другое абстрактное понятие – абсолютно твердое тело.

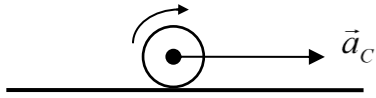


Рис. 2.18

Пусть имеется перемещающееся в пространстве абсолютно твердое тело. Можно показать, что любое, сколь угодно сложное движение такого тела можно представить как комбинацию двух одновременных движений: поступательного со скоростью  $v_0$  какой-либо произвольно выделенной

точки тела, называемой **полюсом**, и вращательного относительно мгновенной оси, проходящей через полюс. При этом удобнее всего в качестве полюса принять центр масс движущегося тела (рис. 2.18).

Тогда поступательное движение твердого тела можно рассматривать как движение только его центра масс с ускорением  $\vec{a}_c$ :

$$m\vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.79)$$

### уравнение движения центра масс.

Несколько иначе обстоит дело при вращательном движении. Здесь, как было показано ранее, для описания движения твердого тела необходимо использовать угловые параметры (вектор поворота, угловую скорость, ускорение и т.д.).

Кроме того, отличается от рассмотренного ранее и причина, вызывающая изменение характера движения тела. Если ранее для изменения характера движения было необходимо наличие отличной от нуля равнодействующей силы, то в данном случае этого условия явно недостаточно.

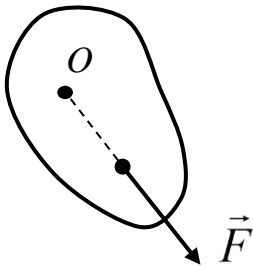


Рис. 2.19

Так, например, пусть имеется твердое покоящееся тело, которое может вращаться без трения относительно неподвижной оси, проходящей через точку  $O$ , принадлежащую телу (рис. 2.19). Если приложить силу  $\vec{F}$ , действующую вдоль прямой, проходящей через точку  $O$ , то простейший опыт показывает, что тело останется в состоянии покоя. В то же время действие этой силы вдоль любой прямой, не проходящей через  $O$ , приведет к вращению. Таким образом, просто наличие силы не выводит

тело из состояния покоя.

Изменение состояния механической системы при вращательном движении возможно при наличии **момента силы**.

#### 2.3.1. Момент силы

**Момент силы** – векторная величина, характеризующая способность силы поворачивать тело вокруг точки (полюса), относительно которой он рассматривается.

Момент силы определяется как

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (2.80)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из полюса в точку приложения силы  $\vec{F}$ .

### Свойства момента силы

1. Момент силы – псевдовектор, направление которого определяется правой тройкой векторов  $\vec{M}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  (рис. 2.20).

2. Модуль момента силы определяется модулем векторного произведения:

$$|\vec{M}| = |[\vec{r}, \vec{F}]| = Fr \sin(\varphi) = F_\tau r = Fl,$$

где  $l$  – плечо действия силы относительно точки  $O$ .

3. Момент силы – величина аддитивная, то есть

$$\vec{M}_\Sigma = \sum_i \vec{M}_i.$$

Действительно, если на тело действует несколько сил, то, как известно,  $\vec{F}_\Sigma = \sum_i \vec{F}_i$ . Тогда

$$\vec{M}_\Sigma = [\vec{r}, \vec{F}_\Sigma] = [\vec{r}, \sum_i \vec{F}_i] = \sum [\vec{r}, \vec{F}_i] = \sum \vec{M}_i.$$

4. Проекция вектора  $\vec{M}$  на некую ось  $z$ , проходящую через точку  $O$ , называется **моментом силы относительно данной оси**. Таким образом, это скаляр, определяемый как

$$M_z = [\vec{r}_i, \vec{F}]_z. \quad (2.81)$$

Попробуем найти его значение. Для этого разложим вектор силы на три составляющие:  $\vec{F}_r$  – перпендикулярную к оси  $z$ ;  $\vec{F}_\parallel$  – параллельную оси  $z$  и  $\vec{F}_\tau$  – перпендикулярную к плоскости, в которой лежат ось  $z$  и радиус-вектор  $\vec{r}$  (рис. 2.21).

Последняя составляющая направлена по касательной к окружности с центром на оси  $z$ , проходящей через точку приложения силы. Пусть радиус этой окружности  $R$ .

Согласно аддитивности момента силы суммарный момент силы  $\vec{M} = \vec{M}_r + \vec{M}_\tau + \vec{M}_\parallel$ . Из рисунка видно, что составляющие  $\vec{M}_r$  и  $\vec{M}_\parallel$  перпендикулярны к оси  $z$  и поэтому их проекция на эту ось равна нулю. Модуль же вектора  $\vec{M}_\tau$  равен  $rF_\tau$ , и этот вектор образует с осью  $z$  угол  $\alpha$ . Тогда проекция этого вектора, а, таким образом, и проекция всего вектора момента силы на ось  $z$ , равна

$$M_z = rF_\tau \cos(\alpha) = F_\tau R, \quad (2.82)$$

где  $R$  – **плечо силы относительно оси  $z$** . Естественно, как любая проекция, она может иметь как положительное, так и отрицательное значение.

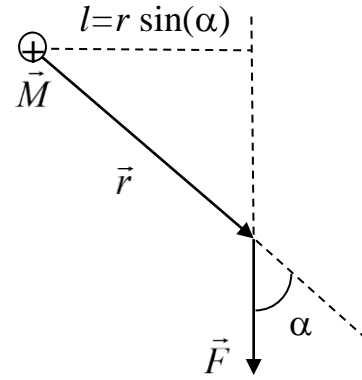


Рис. 2.20

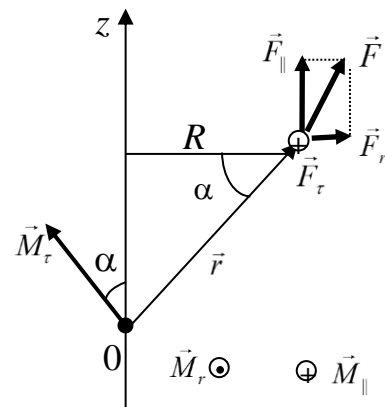


Рис. 2.21

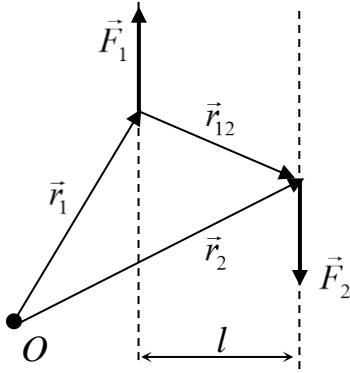


Рис. 2.22

Момент силы относительно оси  $z$  характеризует способность силы поворачивать тело относительно именно этой оси. Причем эта способность определяется только тангенциальной составляющей силы, а все другие составляющие роли не играют.

Две равные по величине и противоположные по направлению силы, не действующие вдоль одной прямой, называются **парой сил** (рис. 2.22). Расстояние между прямыми, вдоль которых действуют силы, называется **плечом пары сил**. Суммарный момент сил, образующих пару, равен

$$\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2].$$

С учетом того, что  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , можем записать:

$$\vec{M} = -[\vec{r}_1, \vec{F}_2] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \vec{F}_2] = [\vec{r}_{12}, \vec{F}_2],$$

где  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  — вектор, проведенный из точки приложения силы  $F_1$  в точку приложения силы  $F_2$ .

Получается, что соотношение для момента пары сил не зависит от выбора точки  $O$ . То есть для любого полюса (центра вращения) момент заданной пары сил будет одним и тем же по величине и направлен перпендикулярно к плоскости, в которой лежат силы.

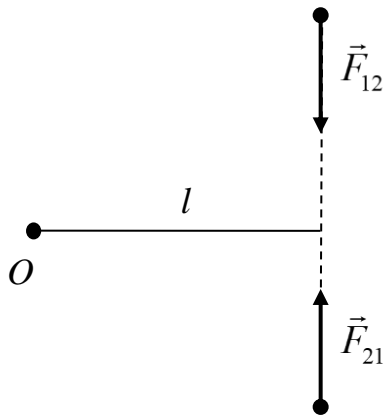


Рис. 2.23

Если рассмотреть некую систему из  $N$  материальных точек, то силы взаимодействия между любыми двумя частицами направлены вдоль одной и той же прямой, равны по модулю и противоположны по направлению (рис. 2.23).

Тогда их моменты относительно произвольной точки вращения  $O$  также равны по модулю и противоположны по направлению. Суммируя по всем точкам, получаем, что моменты внутренних сил попарно компенсируют друг друга и сумма моментов всех внутренних сил в любой механической системе равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_i = 0. \quad (2.83)$$

### 2.3.2. Основной закон динамики вращательного движения

Пусть имеется твердое тело, которое вращается вокруг точки  $O$ , лежащей на неподвижной оси. Описание движения всего тела сведем к анализу движения совокупности МТ, на которые его можно разбить. Рассмотрим движение одной МТ массой  $m_i$ , которая движется по окружности, определяемой



радиусом-вектором  $\vec{r}_i$ , проведенным из точки  $O$ , под действием равнодействующей силы  $\vec{F}_i$  (рис. 2.24). В этом случае на МТ относительно точки  $O$  действует момент сил

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

С учетом второго закона Ньютона это выражение можем переписать в виде

$$\vec{M}_i = \frac{d}{dt} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]. \quad (2.84)$$

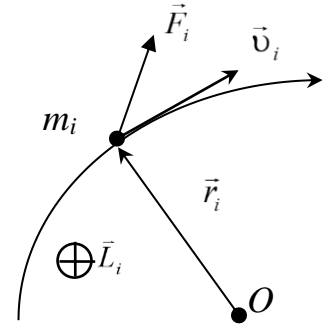


Рис. 2.24

Векторное произведение, стоящее в правой части, называется **моментом импульса МТ относительно неподвижного полюса** (точки)  $O$ :

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]. \quad (2.85)$$

Тогда

$$\vec{M}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt}. \quad (2.86)$$

Так же, как момент сил и импульс, момент импульса – величина аддитивная, то есть **момент импульса тела (механической системы) относительно неподвижной точки определяется геометрической суммой моментов импульсов всех МТ этой системы относительно того же полюса:**

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i. \quad (2.87)$$

Тогда, суммируя выражение (2.86) по всем  $N$  материальным точкам, получаем

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (2.88)$$

**Изменение с течением времени момента импульса механической системы относительно неподвижной точки определяется результирующим моментом внешних сил относительно той же точки.**

Это утверждение – **основной закон динамики вращательного движения относительно неподвижного полюса (закон изменения момента импульса).**

Если же мы рассматриваем движение относительно неподвижной оси (оси  $z$ ), проходящей через точку  $O$ , то нас будут интересовать момент сил и момент импульса относительно этой оси. Как и ранее, моментом сил относительно оси ( $M_z$ ) называется проекция вектора  $\vec{M}$  на эту ось. Аналогичным образом момент импульса относительно оси  $z$  ( $L_z$ ) определяется как проекция на нее момента импульса относительно точки, принадлежащей оси. При этом значение обеих проекций не зависит от положения полюса.

Тогда основное уравнение вращательного движения относительно неподвижной оси имеет вид

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}. \quad (2.89)$$

Преобразуем это выражение, введя в рассмотрение угловые параметры движения. С учетом аддитивности момента импульса, а также перпендикулярности радиуса окружности и вектора скорости МТ при вращении вокруг оси запишем:

$$M_z = \frac{d}{dt} \omega \sum_{i=1}^N (r_i^2 m_i).$$

При этом было учтено, что угловая скорость  $\omega = v_i / r_i$  для всех материальных точек тела одинакова. Величина

$$I_{iz} = m_i r_i^2 \quad (2.90)$$

называется **моментом инерции** материальной точки относительно неподвижной оси. Тогда сумма моментов инерции всех МТ данного тела определяет результирующий момент инерции тела относительно заданной оси:

$$I_z = \sum_{i=1}^N (r_i^2 m_i).$$

Получаем

$$M_z = \frac{dI_z \omega}{dt}. \quad (2.91)$$

Сравнение последнего выражения с соотношением (2.88) показывает, что момент импульса тела относительно неподвижной оси равен

$$L_z = I_z \omega. \quad (2.92)$$

Окончательно

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} - \quad (2.93)$$

математическая запись **основного закона динамики вращательного движения относительно неподвижной оси**.

Подробнее рассмотрим свойства и особенности нахождения момента инерции тела.

### 2.3.3. Момент инерции

**Момент инерции** – скалярная физическая величина, характеризующая инерционные свойства тела при вращательном движении. Таким образом, при вращении способность тела сохранять текущее состояние движения количественно определяется не только значением массы, как это было при поступательном движении, но и тем, как эта масса распределена относительно оси вращения.

#### Свойства момента инерции

1. Момент инерции материальной точки массой  $m$ , расположенной на расстоянии  $r$  от оси вращения, определяется как  $I = mr^2$ .

2. Момент инерции - величина аддитивная. Если имеем систему материальных точек, то  $I_{\Sigma} = \sum I_i = \sum m_i r_i^2$ , то есть **момент инерции тела (механической системы) определяется суммой моментов инерции отдельных его материальных точек.**

3. В случае непрерывного распределения массы по какой-то области пространства с объемной плотностью  $\rho$  момент инерции тела можно определить следующим образом:

– разбиваем все тело на бесконечно малые (элементарные) объемы ( $dV$ ), каждый из которых обладает массой ( $dm$ ) и с большой степенью точности может быть принят за МТ (рис. 2.25);

– для любого выделенного элемента получившейся системы момент инерции определяется как  $dI = r^2 dm$ ;

– воспользовавшись введенным ранее понятием плотности, перепишем:

$$dI = \rho r^2 dV, \quad (2.94)$$

и тогда

$$I = \int_{(V)} \rho(r) r^2 dV. \quad (2.95)$$

Если плотность тела во всех точках одинакова, то есть тело однородное, то

$$I = \rho \int_{(V)} r^2 dV. \quad (2.96)$$

Таким образом, даже в случае однородного тела задача нахождения момента инерции твердого тела относительно произвольной оси нетривиальна.

Ситуация упрощается, если воспользоваться **теоремой Штейнера**: **момент инерции абсолютно твердого тела относительно произвольной оси равен сумме моментов инерции тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через его центр масс, и момента инерции центра масс относительно данной оси, то есть**

$$I = I_C + m r_a^2, \quad (2.97)$$

где  $I_C$  – момент инерции относительно оси ( $C-C'$ ), проходящей через центр масс (точка  $C$ ) параллельно заданной ( $O-O'$ );  $r_a$  – расстояние между осями;  $m$  – масса тела (рис. 2.26).

**Доказательство теоремы.** Рассмотрим ось  $OO'$ , проходящую через центр масс тела, и ось  $CC'$ , параллельную данной и расположенную от нее на расстоянии  $a$  (рис. 2.27), оси расположены перпендикулярно к плоскости

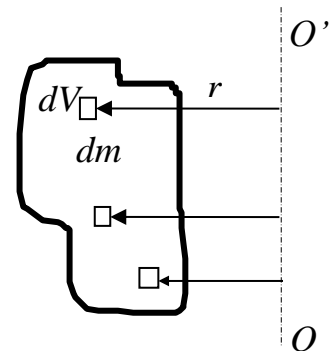


Рис. 2.25

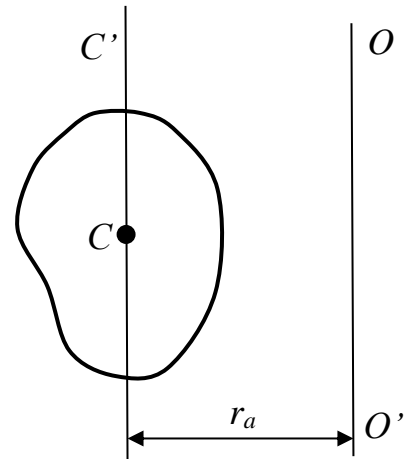


Рис. 2.26

чертежа. Свяжем с этими осями системы координат  $xuz$  и  $x'y'z'$  соответственно. Радиус-вектор элементарной массы  $\Delta m_i$  относительно оси  $CC'$  будет равен

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{a}.$$

В проекциях на оси координат это соотношение примет вид

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i + a, \\ y'_i &= y_i. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Момент инерции тела относительно оси  $CC'$  будет равен

$$I = \sum_i (r'_i)^2 \Delta m_i.$$

Используя соотношения (2.98), определим квадрат модуля радиуса-вектора

тора  $\vec{r}'_i$  как

$$|\vec{r}'_i|^2 = (x'_i)^2 + (y'_i)^2 = x_i^2 + 2x_i a + a^2 + y_i^2 = r_i^2 + 2x_i a + a^2.$$

Таким образом, выражение для момента инерции можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$I = \sum_i \Delta m_i (r_i^2 + 2x_i a + a^2) = \sum_i \Delta m_i r_i^2 + 2a \sum_i \Delta m_i x_i + a^2 \sum_i \Delta m_i. \quad (2.99)$$

Первая сумма в выражении (2.99) – это момент инерции тела относительно оси  $OO'$ :  $I_0 = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ ; вторая сумма определяет координату  $x$  центра

масс тела:  $x_C = \frac{1}{m} \sum_i \Delta m_i x_i$ , которая в системе координат  $xuz$  равна нулю; и,

наконец, третья сумма – это масса тела:  $m = \sum_i \Delta m_i$ . Таким образом, полу-

чаем:  $I = I_0 + ma^2$ . Теорема доказана.

### 2.3.4. Примеры вычисления момента инерции

**Момент инерции тонкого стержня.** Определим момент инерции  $I_0$

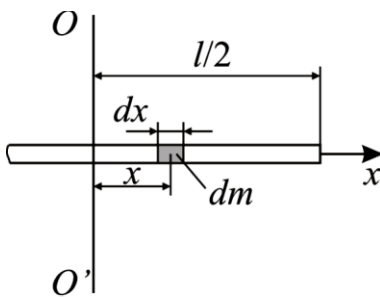


Рис. 2.28

этого стержня относительно оси  $OO'$ , перпендикулярной к нему и проходящей через центр масс (рис. 2.28). Выделим элемент стержня массой  $dm$ , расположенный на расстоянии  $x$  от оси вращения. Поскольку стержень тонкий, можно считать, что его масса равномерно распределена по его длине с линейной плотностью  $\tau = m/l$ . Тогда элементарная масса будет равна  $dm = \tau dx = (m/l) dx$ .

Момент инерции элемента стержня будет равен

$$dI = x^2 dm = \frac{m}{l} x^2 dx. \quad (2.100)$$

Момент инерции всего стержня определим, интегрируя (2.100) по всей длине стержня от  $-l/2$  до  $l/2$ :

$$I_0 = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{3l} \left( \left( \frac{l}{2} \right)^3 - \left( -\frac{l}{2} \right)^3 \right) = \frac{1}{12} ml^2. \quad (2.101)$$

**Момент инерции кольца (полого цилиндра).** Определим момент инерции  $I_0$  кольца относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно к плоскости (рис. 2.29). Выделим элементарный объем  $dV$  в виде тонкого кольца радиусом  $r$ , шириной  $dr$ , высотой  $h$ . Тогда элементарная масса будет равна

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r h dr,$$

где  $\rho$  – плотность материала кольца.

Момент инерции элемента кольца определим как

$$dI = r^2 dm = \rho 2\pi h r^3 dr. \quad (2.102)$$

Момент инерции всего кольца определим, интегрируя (2.102) по радиусу в пределах от  $R_1$  до  $R_2$ :

$$I_0 = 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{2\pi h}{4} (R_2^4 - R_1^4). \quad (2.103)$$

Перейдем от плотности к массе, для этого определим объем кольца по формуле  $V = \pi h (R_2^2 - R_1^2)$ . Тогда плотность будет равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi h (R_2^2 - R_1^2)}.$$

Подставляя плотность в (2.103), получаем

$$I_0 = \frac{\pi h}{2} (R_2^4 - R_1^4) \frac{m}{\pi h (R_2^2 - R_1^2)} = \frac{m}{2} (R_2^2 + R_1^2). \quad (2.104)$$

Из выражения (2.104) видно, что момент инерции не зависит от толщины  $h$  кольца, следовательно, эта формула будет также справедлива и для полого цилиндра. Если же имеем дело со сплошным цилиндром или диском, то для него  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = R$ , тогда

$$I_0 = \frac{1}{2} m R^2. \quad (2.105)$$

В случае тонкостенного кольца (обруча, трубки)  $R_1 = R_2 = R$ , тогда

$$I_0 = m R^2. \quad (2.106)$$

## 2.4. Механическая энергия. Законы сохранения в механике

### 2.4.1. Механическая энергия

Как указывалось ранее, физика рассматривает наиболее общие и простейшие виды движения материи, которые могут весьма существенно различаться как по внутренней природе, так и по внешним проявлениям. В связи с

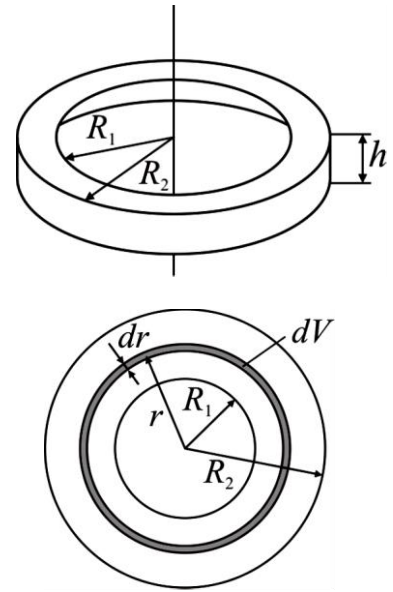


Рис. 2.29

этим для описания каждого конкретного вида движения материи вводятся свои специфические величины: механическое движение – перемещение, скорость, ускорение, импульс и т.д.; электрическое движение – заряд, емкость, сила тока и т.д. Все эти величины отражают качественные особенности конкретной формы движения. Однако практика показывает взаимосвязь различных форм движения. Таким образом, их можно описывать с учетом некоторого общего подхода, вводя в рассмотрение, помимо специфических величин, величину, которая с равным правом может относиться ко всем формам движения материи и отражает их взаимную превращаемость друг в друга. Такая общая физическая величина называется **энергией**.

**Энергия - скалярная физическая величина, являющаяся общей мерой различных форм движения материи. Энергия количественно характеризует механическую систему в отношении возможных в ней превращений различных форм движения.**

Для анализа качественно различных форм движения (для учета специфичности каждого вида движения) в физике вводят и различные виды энергии: механическую, внутреннюю, электромагнитную, ядерную и т.д.

Нас пока будет интересовать только механическая энергия: **кинетическая** и **потенциальная**. Первая является **мерой механического движения** рассматриваемой системы, вторая – **мерой механического взаимодействия** тел системы как друг с другом, так и с внешними телами.

Изменение характера механического движения тела происходит в процессе воздействия на него других тел, количественной мерой которого является сила. Таким образом, при силовом взаимодействии тел может меняться механическая энергия системы. Для количественного описания процесса изменения механической энергии системы при наличии силового взаимодействия вводят понятие работы силы.

#### 2.4.2. Работа силы. Мощность

Вначале рассмотрим поступательное движение тела, которое можно свести к рассмотрению движения материальной точки  $M$ .

**Элементарной работой** ( $\delta A$ ) силы  $\vec{F}$  при бесконечно малом перемещении  $d\vec{r}$  точки  $M$  называют величину

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \varphi = F_r dr, \quad (2.107)$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ ,  $F_r$  – проекция силы на направление перемещения (рис. 2.30).

Если работа силы не зависит от вида траектории, по которой движется МТ, а определяется лишь ее начальным и конечным положением, то такая сила называется **консервативной** или **потенциальной**. В противном случае сила называется **неконсервативной** или **диссипативной**.

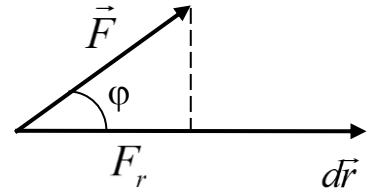


Рис. 2.30

В математике символом  $df$  принято обозначать полный дифференциал функции  $f$ , т.е. бесконечно малое ее приращение. При этом изменение функции не зависит от характера перехода от одной точки к другой. Так как в принципе на тело могут действовать как консервативные, так и диссипативные силы, то работа силы в общем случае зависит от пройденного пути и использование обозначения  $dA$  не совсем корректно. В связи с этим для элементарной работы в (2.107) введено обозначение  $\delta A$ .

Из определения работы следует, что:

- если  $|\varphi| < \pi/2$ , то  $\delta A > 0$ ,
- если  $\pi/2 < |\varphi| < \pi$ , то  $\delta A < 0$ ,
- если  $|\varphi| = \pi/2$ , то  $\delta A = 0$ .

Работа – величина аддитивная: **общая работа нескольких сил, действующих на МТ, определяется суммой работ, совершаемых каждой из них в отдельности:**

$$\delta A_{\Sigma} = \vec{F}_{\Sigma} d\vec{r} = \sum_i \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_i \delta A_i. \quad (2.108)$$

Аналогичным образом, если за какое-то время МТ перемещается из положения 1 в положение 2, то общая работа силы при этом определяется суммой элементарных работ на каждом из элементарных перемещений:

$$\Delta A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F}(r) d\vec{r} = \int_1^2 F_{\tau}(r) dr. \quad (2.109)$$

Если зависимость  $F_{\tau}(r)$  представлена графически (рис. 2.31), то определение работы сводится (согласно геометрическому смыслу определенного интеграла) к нахождению площади фигуры, ограниченной графиком функции в пределах от 1 до 2.

В случае прямолинейного движения тела при  $\vec{F} = \text{const}$  получаем

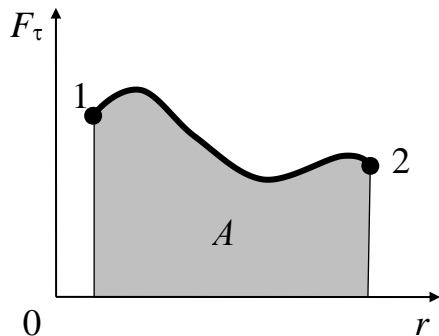


Рис. 2.31

$$\Delta A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 F(r) dr \cos(\alpha) = F(r) \cos(\alpha) \int_1^2 dr = F(r) S \cos(\alpha) = \vec{F} \vec{S},$$

где  $\vec{S}$  – вектор перемещения.

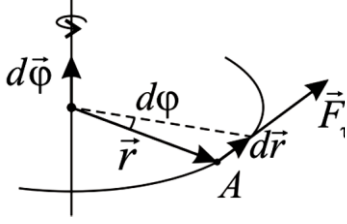


Рис. 2.32

При вращательном движении МТ работа может быть выражена через угловые величины (рис. 2.32). Под действием касательной силы  $\vec{F}_\tau$  точка A совершает элементарное перемещение  $d\vec{r} = [d\vec{\phi}, \vec{r}]$ . Тогда элементарная работа силы  $\vec{F}_\tau$  будет равна

$$\delta A = \vec{F}_\tau d\vec{r} = \vec{F}_\tau [d\vec{\phi}, \vec{r}] = d\vec{\phi} [\vec{F}_\tau, \vec{r}] = \vec{M}_z d\vec{\phi}.$$

Так как  $\vec{M}_z \parallel d\vec{\phi}$ , то

$$\delta A = M_z d\phi. \quad (2.110)$$

Полная работа силы  $\vec{F}_\tau$  при повороте от точки 1 до точки 2 будет равна

$$A_{12} = \int_1^2 M_z d\phi. \quad (2.111)$$

Для характеристики быстроты совершения работы вводят понятие новой скалярной величины – **мощности** как

$$N_{cp} = \frac{\Delta A}{\Delta t} - \quad (2.112)$$

средняя мощность за время  $\Delta t$  или

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} - \quad (2.113)$$

мгновенная мощность в момент времени  $t$ .

Если учесть, что за время  $dt$  сила совершает работу  $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$ , то для мощности, развиваемой этой силой, получаем

$$N = \frac{\vec{F}(r) d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(r) \vec{v}. \quad (2.114)$$

Таким образом, мощность равна скалярному произведению вектора силы и вектора скорости, с которой движется тело в данный момент времени.

### 2.4.3. Кинетическая энергия тела

Пусть материальная точка массой  $m$  движется под действием силы  $\vec{F}$ . Найдем элементарную работу, совершаемую этой силой на перемещении  $d\vec{r}$ :

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \vec{v} d\vec{v}.$$

Поскольку  $\vec{v} \uparrow \uparrow d\vec{v}$ , то



$$\delta A = m v dv = d \left( \frac{mv^2}{2} \right). \quad (2.115)$$

Таким образом, работа – приращение величины  $mv^2 / 2$ , которая называется **кинетической энергией**:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (2.116)$$

Тогда формулу (2.115) можно переписать в виде

$$\delta A = dT. \quad (2.117)$$

Работа, совершаемая при конечном перемещении из точки 1 в точку 2:

$$A_{1-2} = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k. \quad (2.118)$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий ее составляющих:

$$E_k = \sum_i E_{ki}. \quad (2.119)$$

Кинетическую энергию вращающегося тела можно определить как сумму кинетических энергий элементарных масс  $\Delta m_i$ , движущихся с линейными скоростями  $\vec{v}_i$ :

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2. \quad (2.120)$$

Линейная скорость  $\vec{v}_i$  элементарной массы связана с угловой скоростью вращения тела:  $v_i = \omega_z r_i$ , где  $r_i$  – радиус окружности, описываемой элементарной массой. Тогда кинетическая энергия будет равна:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (\omega_z r_i)^2 = \frac{\omega_z^2}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \frac{I \omega_z^2}{2}. \quad (2.121)$$

Если тело движется сложным образом, то это движение можно представить в виде суперпозиции поступательного и вращательного движения, и выражение для кинетической энергии примет вид

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \quad (2.122)$$

где  $v_c$  – скорость перемещения центра масс,  $I_c$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

#### 2.4.4. Потенциальная энергия. Виды потенциальной энергии

Как указывалось ранее, работа, совершаемая консервативными (потенциальными) силами при изменении конфигурации системы, то есть взаимного расположения всех ее составляющих, не зависит от вида перехода от начального состояния к конечному, а определяется лишь этими состояниями. Таким образом, эта работа может быть представлена в виде разности двух значений некой функции состояния системы

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (2.123)$$

Эта функция ( $E_p$ ) называется **потенциальной энергией** системы.

**Потенциальная энергия – один из видов энергии, определяющийся взаимным расположением тел и характером их взаимодействия.**

Потенциальная энергия – скаляр, обладающий свойством аддитивности, то есть, если тело находится под воздействием нескольких потенциальных сил одновременно, то общая потенциальная энергия системы определяется суммой потенциальных энергий тела для каждого отдельного взаимодействия:

$$E_p = \sum_{i=1}^N E_{pi} . \quad (2.124)$$

Консервативная сила, действующая на тело, может быть выражена через его потенциальную энергию:

$$\vec{F} = - \left( \frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (2.125)$$

В сокращенном виде эту запись представляют так:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p ,$$

где  $\vec{\nabla}$  – векторный дифференциальный оператор.

С математической точки зрения векторный оператор – это определенная последовательность воздействий на скалярную функцию, которая в результате дает вектор:

$$\vec{\nabla} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } E_p ,$$

называемый **градиентом** скалярной функции.

Градиент указывает направление максимально быстрого возрастания скалярной функции. Таким образом, **консервативная сила направлена в сторону максимально быстрого уменьшения потенциала.**

Конкретный же вид потенциальной энергии зависит от характера воздействия на тела системы:

– для гравитационного взаимодействия материальных точек массами  $m_1$  и  $m_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга, потенциальная энергия определяется как

$$E_p(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} + C ; \quad (2.126)$$

– при упругой деформации тела жесткостью  $k$  на величину  $x$

$$E_p(x) = \frac{kx^2}{2} + C , \quad (2.127)$$

где  $C$  – постоянная, определяемая выбором системы отсчета.

### 2.4.5. Законы сохранения в механике. Понятие интегралов движения

Ранее было показано, что с помощью законов Ньютона можно описать как поступательное, так и вращательное движение, получить уравнения движения в принципе любой механической системы. Однако практическое использование законов Ньютона в ряде случаев затруднено. Например, это имеет место при ударном взаимодействии тел: в течение удара силы могут изменяться весьма сложным образом, и в этом случае характеристики движения механической системы находятся из второго закона Ньютона путем достаточно сложных математических вычислений. Кроме того, не редки на практике ситуации, когда закон изменения сил взаимодействия вообще неизвестен.

Возникает вопрос: нельзя ли получить эти параметры движения каким-либо образом, помимо законов Ньютона? Оказывается, такой путь существует. Если найти такие комбинации параметров движения, которые во время движения тел системы не изменяются, то, зная их значения в какой-то (начальный) момент времени и задавая или измеряя некоторые из них в интересующий нас момент времени, можно получить значения остальных параметров. Такие комбинации параметров системы, не изменяющиеся со временем, называются **интегралами движения**.

Поиск интегралов движения – одна из важнейших задач любого раздела естествознания, так как позволяет в некоторых случаях эффективно описывать соответствующий вид движения материи. В механике используются три закона сохранения: **импульса, энергии и момента импульса**.

Законы сохранения указанных величин могут быть получены из законов динамики. Однако в классической механике эти законы являются следствием особенностей пространства и времени.

В ньютоновой механике пространство и время **однородны**, к тому же пространство еще и **изотропно**.

**Однородность пространства** означает, что при произвольном переходе из одной точки в другую его свойства не меняются. Тогда, если мы перенесем замкнутую механическую систему, ничего не изменяя в ней, из одной точки пространства в другую, то все механические свойства системы и, естественно, параметры, их описывающие, останутся неизменными. Иначе **все механические системы инвариантны (безразличны) к выбору инерциальной системы отсчета**. Если это так, то при любом пространственном переносе замкнутой системы работа всех сил по переносу будет равна нулю (все механические процессы в ней протекают точно так же):

$$\delta A = \vec{F}_\Sigma d\vec{S} = 0.$$

Так как  $d\vec{S} \neq 0$ , то  $\vec{F}_\Sigma = 0$ . Однако по второму закону Ньютона

$$\vec{F}_\Sigma = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0.$$

Получается, что в данном случае  $d\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = 0$  или

$$\sum_i \vec{p}_i = const - \quad (2.128)$$

**закон сохранения импульса: суммарный импульс замкнутой механической системы не изменяется с течением времени при любом взаимодействии тел системы.**

Таким образом, закон сохранения импульса является следствием однородности пространства.

Аналогичным образом однородность времени проявляется в том, что свойства любой консервативной системы не зависят от выбора начала отсчета времени. То есть, если такую систему поставить в два различных момента времени в совершенно одинаковые условия, то в отсутствие диссипативных сил полный запас энергии системы ( $E_\Sigma$ ) не будет изменяться со временем:  $dE_\Sigma/dt = 0$  или

$$E_\Sigma = const - \quad (2.129)$$

**закон сохранения механической энергии: в системе тел, в которой действуют только консервативные силы (в консервативных механических системах), полная механическая энергия сохраняется.**

Таким образом, закон сохранения энергии – следствие однородности времени.

То, что пространство является изотропным, означает, что его свойства по всем направлениям одинаковы. Для механической системы это значит, что физические свойства, а, таким образом, и законы, их описывающие, для любой замкнутой системы при повороте всей системы целиком на произвольный угол не изменятся и не зависят от выбора направления осей системы координат.

Опять же, раз параметры системы не меняются, то работа по повороту системы будет равна нулю:  $\delta A = \vec{M}_\Sigma d\vec{\varphi} = 0$ . Раз  $d\varphi \neq 0$ , то остается  $\vec{M}_\Sigma = 0$ . Согласно основному закону динамики вращательного движения

$$\vec{M}_\Sigma = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = 0.$$

Тогда

$$\sum_i \vec{L}_i = const - \quad (2.130)$$

**закон сохранения момента импульса: в замкнутой механической системе при любом взаимодействии тел внутри системы суммарный момент импульса системы остается неизменным.**

## 2.5. Основы релятивистской механики

### 2.5.1. Законы Ньютона в инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Преобразования Галилея, принцип относительности Галилея

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся относительно друг друга (рис. 2.33). Одну систему ( $K$ ) будем условно считать неподвижной. Тогда, естественно, другая, подвижная ( $K'$ ), будет двигаться относительно ее со скоростью  $v_0$ . Выберем начало отсчета времени в момент, когда центры систем координат совпадают. Наша задача – описать, как меняются параметры движения некой материальной точки  $P$ , движущейся относительно системы  $K$  со скоростью  $v$ , а в системе  $K'$  – со скоростью  $v'$ , при переходе из одной системы отсчета в другую.

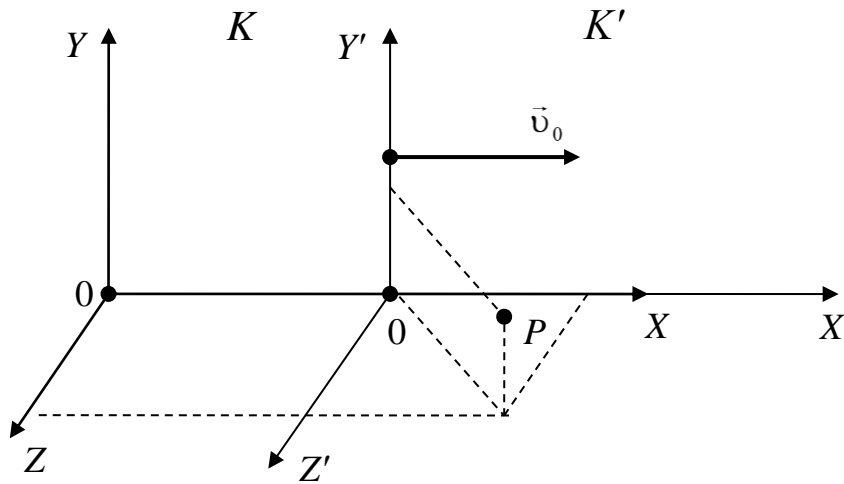


Рис. 2.33

Представляя движение точки  $P$  в обеих системах, можем записать:

$$\begin{cases} x = x' + v_{0x}t; \\ y = y' + v_{0y}t; \\ z = z' + v_{0z}t; \\ t = t'. \end{cases} \quad (2.131)$$

Эта система уравнений получила название «преобразования Галилея».

Дифференцируя уравнения системы (2.131) по времени и складывая правые и левые части, получаем математическую запись классического закона сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0. \quad (2.132)$$

**Скорость тела в неподвижной системе отсчета определяется векторной суммой скорости тела в подвижной системе отсчета и скорости перемещения подвижной системы относительно неподвижной.**

В случае, если системы  $K$  и  $K'$  инерциальные, то есть  $v_0 = const$ , то, еще раз дифференцируя (2.132), получаем

$$\vec{a} = \vec{a}'.$$

Так как по второму закону Ньютона ускорение в инерциальной системе отсчета вызывается действием сил, то

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}'}{m} \text{ или } \vec{F} = \vec{F}'.$$

Таким образом, силы, действующие в обеих системах, будут одинаковы и уравнения движения не изменятся при переходе из одной системы в другую. Получается, что **никакими механическими опытами нельзя определить, покоится ли эта система или движется прямолинейно и равномерно. Иначе: законы Ньютона неизменны (инвариантны) во всех инерциальных системах отсчета (принцип относительности Галилея).**

Если же рассматриваемые системы отсчета неинерциальные, то есть система  $K'$  движется относительно системы  $K$  с ускорением  $\vec{a}'$ , то, дифференцируя по времени соотношение (2.132) и учитывая, что теперь  $v_0 \neq const$ , получаем

$$\vec{a} = \vec{\omega} + \vec{a}', \quad (2.133)$$

где  $\vec{\omega}$  – ускорение, которое вызывает равнодействующая сила  $\vec{F}$ , действующая на материальную точку  $P$  в неподвижной системе отсчета.

С учетом второго закона Ньютона (2.133) можем записать в виде

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}'. \quad (2.134)$$

Таким образом, даже если  $\vec{F} = 0$ , то в неинерциальной системе тело будет двигаться с ускорением  $\vec{\omega} = -\vec{a}'$ , что можно представить так, что на него действует некая сила  $-m\vec{a}'$ , а система стала инерциальной.

Из этих рассуждений вытекает следующее заключение: **в неинерциальной системе можно формально пользоваться законами Ньютона, если ввести в рассмотрение дополнительную силу, называемую силой инерции:**

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}', \quad (2.135)$$

где  $\vec{a}'$  – ускорение, с которым движется неинерциальная система отсчета относительно инерциальной.

В этом случае второй закон Ньютона будет иметь вид

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{F} + \vec{F}_i}{m}. \quad (2.136)$$

### 2.5.2. Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца, следствия из них

Специальная теория относительности Эйнштейна (релятивистская механика) основана на двух постулатах (утверждениях), которые носят названия – принцип относительности Эйнштейна и принцип постоянства скорости света.

**Принцип относительности Эйнштейна** является распространением принципа относительности Галилея на все физические явления. Согласно этому принципу **все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета**. Следовательно, уравнения, выражающие законы природы, инварианты по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.

**Принцип постоянства скорости света** утверждает, что **скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приёмников света**.

Снова возьмём две инерциальных системы отсчета  $K$  и  $K'$  (см. рис. 2.33). Для того чтобы выполнялись постулаты Эйнштейна, переход от координат и времени, отсчитанных в системе  $K'$ , к координатам и времени, отсчитанным в системе  $K$ , должен выполняться согласно следующим соотношениям:

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x' v_0/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad (2.137)$$

где  $c$  – скорость света.

Уравнения (2.137) называются **преобразованиями Лоренца**.

При  $v_0 \ll c$  величину  $v_0/c$  можно принять равной нулю. В таком случае преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Следовательно, преобразования Галилея можно применять при скоростях, малых по сравнению со скоростью света (это же утверждение относится и ко всей нерелятивистской физике).

Рассмотрим ряд следствий, вытекающих из преобразований Лоренца.

**I. Длительность событий в разных системах отсчёта.** Пусть в точке, двигающейся относительно системы  $K$ , происходит некоторое событие, продолжающееся определённый промежуток времени. Свяжем с этой точкой систему отсчета  $K'$  (точка относительно системы  $K'$  покоится). Началу события в системе  $K'$  соответствует некоторый момент времени  $t'_1$ , концу события –  $t'_2$ , событие происходит в одной и той же точке с координатой  $x'$ . Длительность события в этой системе координат равна  $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ . Время  $\Delta t_0$  – это время, измеренное по часам, движущимся со скоростью тела, в котором происходит событие. Это время называют **собственным временем** тела.

Найдем длительность этого события в системе  $k$ . В этом случае длительность события определяется по неподвижным часам. Началу события в этой системе отсчёта соответствует момент времени  $t_1$ , концу события –  $t_2$ . Моменты  $t_1$  и  $t_2$  согласно преобразованиям Лоренца (2.137) равны

$$t_1 = \frac{t'_1 + x'v_0/c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + x'v_0/c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}. \quad (2.138)$$

Длительность события в системе отсчета  $K$ :

$$\Delta t = t_2 - t_1. \quad (2.139)$$

Подставим уравнения (2.138) в (2.139):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}. \quad (2.140)$$

Из уравнения (2.140) следует, что  $\Delta t > \Delta t_0$ , поэтому можно сказать, что движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся, а собственное время – наименьшее.

**II. Длина тел в разных системах.** Пусть имеется стержень, расположенный вдоль оси  $x$  и покоящийся в системе отсчета  $K'$ . Аналогично пункту I можно показать, что длина  $l_0$  покоящегося стержня и длина  $l$  стержня, измеренная в системе отсчета  $K$ , относительно которой он движется, разные. Повторяя рассуждения пункта I, получаем:

$$l = l_0 \sqrt{1-v_0^2/c^2}. \quad (2.141)$$

Видно, что  $l < l_0$ , т.е. у движущихся тел размеры их в направлении движения меньше, чем у покоящихся. Это явление называется **лоренцевым сокращением длины**.

**III. Сложение скоростей.** Для упрощения формул будем считать, что скорость частицы параллельна оси  $x$ . Тогда модули скоростей частицы в системе  $K$  и  $K'$  соответственно равны:

$$v = v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v' = v'_x = \frac{dx'}{dt'}. \quad (2.142)$$

Продифференцируем первое и последнее уравнения преобразований Лоренца (2.137):

$$dx = \frac{dx' + v_0 dt'}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = dt' \frac{dx'/dt' + v_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = dt' \frac{v' + v_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}, \quad (2.143)$$

$$dt = \frac{dt' + dx'v_0/c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = dt' \frac{1 + (dx'/dt')(v_0/c^2)}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = dt' \frac{1 + v'v_0/c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}. \quad (2.144)$$

Разделим уравнение (2.143) на (2.144) и учтём (2.142):

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + v'v_0/c^2}. \quad (2.145)$$

В случае малых скоростей  $v_0 \ll c$  формула (2.145) переходит в формулу сложения скоростей классической (нерелятивистской) механики.

Пусть скорость  $v' = c$ . Тогда

$$v = \frac{c + v_0}{1 + cv_0/c^2} = c,$$



что согласуется со вторым постулатом Эйнштейна.

### 2.5.3. Основные понятия релятивистской динамики

В релятивистской динамике импульс частицы равен:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m \vec{v}, \quad (2.146)$$

где  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

В этих уравнениях  $v$  – скорость частицы;  $m_0$  – масса, не зависящая от скорости частицы, – масса покоя;  $m$  – релятивистская масса.

Релятивистское выражение второго закона Ньютона имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (2.147)$$

При малых скоростях  $v \ll c$  выражение (2.147) принимает вид  $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_0 \vec{v})$ , что совпадает с основным законом поступательного движения в классической механике.

При протекании различных процессов в природе одни виды энергии могут преобразовываться в другие. Например, кинетическая энергия сталкивающихся частиц может преобразоваться во внутреннюю энергию образовавшейся частицы. Поэтому естественно ожидать, что масса тела будет возрастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но и вообще при любом увеличении общего запаса энергии тела независимо от того, за счет какого конкретного вида энергии это увеличение происходит. Отсюда Эйнштейн пришел к следующему фундаментальному выводу: **общая энергия тела (или системы тел), из каких бы видов энергии она ни состояла (кинетической, электрической, химической и т. д.), связана с массой этого тела соотношением**

$$E = mc^2. \quad (2.148)$$

Эта формула выражает один из наиболее фундаментальных законов природы – **закон взаимосвязи массы и полной энергии тела**. Следует отметить, что в полную энергию  $E$  не включена потенциальная энергия тела во внешнем поле, если таковое действует на тело.

Соотношение для полной энергии можно записать и в другой форме:

$$E = m_0 c^2 + E_k, \quad (2.149)$$

где  $E_k$  – кинетическая энергия тела.

Отсюда следует, что покоящееся тело ( $E_k = 0$ ) также обладает энергией  $m_0 c^2$ . Эту энергию называют **энергией покоя**. Масса тела, которая в нерелятивистской механике выступала как мера инертности (во втором законе Ньютона) или как мера гравитационного действия (в законе Всемирного тяготения), теперь выступает в новой функции – как мера энергосодержания тела. Изменение полной энергии тела (системы) сопровождается эквивалентным изменением его массы, и наоборот. При обычных макроскопических

процессах изменение массы тел оказывается чрезвычайно малым, недоступным для измерений.

Ясно, что как энергия, так и импульс частицы имеют различные значения в разных системах отсчета. Оказывается, однако, что существует величина – некоторая комбинация  $E$  и  $p$ , которая является инвариантной, т. е. имеет одно и то же значение в разных системах отсчета. Эта величина есть  $E^2 - p^2 c^2$ .

Воспользовавшись формулами  $E = mc^2$  и  $p = m\upsilon$ , запишем:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 - m^2 \upsilon^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - (\upsilon / c)^2} (1 - (\upsilon / c)^2) = m_0^2 c^4. \quad (2.150)$$

Тот факт, что скорость  $\upsilon$  в правой части сократилась, означает независимость величины  $E^2 - p^2 c^2$  от скорости частицы, а следовательно, и от системы отсчета.

Перепишем формулу (2.150) в виде

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Из (2.149) следует, что

$$E^2 = (m_0 c^2 + E_k)^2.$$

Тогда

$$p^2 c^2 = m_0^2 c^4 + 2m_0 c^2 E_k + E_k^2 - m_0^2 c^4 = E_k (E_k + 2m_0 c^2).$$

В итоге получаем связь импульса и кинетической энергии:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k (E_k + 2m_0 c^2)}. \quad (2.151)$$

## 2.6. Механические колебания

**Колебаниями** называются процессы, отличающиеся определенной степенью повторяемости (например, качание маятника, колебания струны, изменение тока в колебательном контуре и т.п.).

**Свободными или собственными колебаниями** называют такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе, после того как ее вывели из положения равновесия.

В процессе **вынужденных колебаний** колебательная система подвергается воздействию внешней периодической силы. Частный случай вынужденных колебаний – **автоколебания**, при которых колебательная система сама управляет внешним воздействием (маятниковые часы).

Колебания, которые совершаются по закону синуса или косинуса, называются **гармоническими**, в противном случае колебания называются **ангармоническими**.

### 2.6.1. Гармонические колебания

Рассмотрим колебательную систему, обладающую одной степенью свободы, называемую **одномерным осциллятором**. Примером такой системы является **пружинный маятник**, представляющий собой шарик массой  $m$ , подвешенный на пружине жесткостью  $k$  (рис. 2.34). В состоянии равновесия сила тяжести  $mg$  уравнивается силой упругости  $k\Delta l$ , где  $\Delta l$  – удлинение пружины относительно исходного состояния, направленной в противоположную сторону:

$$mg = k\Delta l.$$

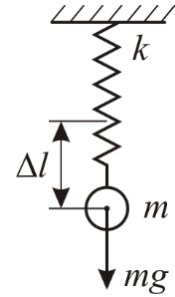


Рис. 2.34

Если сместить шарик относительно положения равновесия на величину  $x$ , то удлинение пружины станет равным  $\Delta l + x$ . В этом случае сила упругости увеличится на величину  $kx$ . Таким образом, сила упругости всегда пропорциональна смещению шарика из положения равновесия и направлена к положению равновесия. Однако перечисленными свойствами могут обладать силы иного происхождения, которые называют **квазиупругими**.

Для того чтобы сместить колебательную систему из положения равновесия, нужно совершить работу против квазиупругой силы

$$A = -\int_0^x \vec{F} d\vec{r} = -\int_0^x (-kx) dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (2.152)$$

Эта работа идет на создание запаса потенциальной энергии:

$$E_p(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (2.153)$$

Рассмотрим преобразование энергии при колебаниях пружинного маятника. Сообщим шарiku смещение из положения равновесия на величину  $A$ , после чего предоставим самому себе. В начальный момент времени его потенциальная энергия будет равна  $kA^2 / 2$ . Под действием силы упругости шарик будет двигаться к положению равновесия со все возрастающей скоростью  $v$ , т.е. с возрастающей кинетической энергией  $E_k = mv^2 / 2$ . При этом потенциальная энергия системы будет убывать (рис. 2.35). Придя в положение равновесия, шарик продолжит двигаться по инерции, но уже равнозамедленно. Он остановится в положении  $-A$ , когда кинетическая энергия полностью перейдет в потенциальную. Затем такой же процесс будет продолжаться в обратном направлении. Таким образом, шарик будет совершать колебания в пределах потенциальной ямы в диапазоне координат  $-A \leq x \leq A$ .

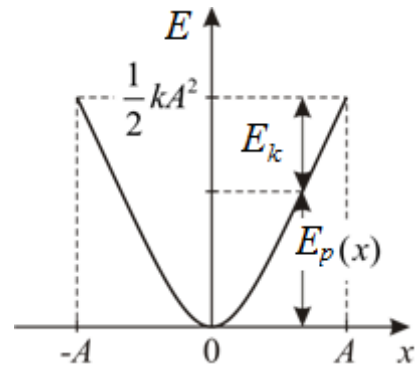


Рис. 2.35

В отсутствие трения в системе энергия будет сохраняться, и шарик будет двигаться бесконечно долго. Уравнение движения шарика будет иметь вид

$$mx'' = -kx,$$

или

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0. \quad (2.154)$$

Обозначим положительный коэффициент при  $x$  как  $\omega_0^2 = k / m$ , тогда (2.154) примет вид

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.155)$$

Уравнение (2.155) называется **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**. Решение этого уравнения можно представить в виде

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (2.156)$$

Из уравнения (2.156) видно, что величина  $\omega_0$  является собственной циклической частотой колебаний пружинного маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.157)$$

Учитывая связь циклической частоты и периода колебаний  $T = \omega_0 / 2\pi$ , можно записать:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.158)$$

Выражение для скорости можно получить, продифференцировав уравнение (2.156):

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = -v_m \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (2.159)$$

где  $v_m = A\omega_0$  – амплитуда скорости.

Учитывая, что  $\sin(\omega_0 t + \alpha) = -\cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ , получаем

$$v(t) = v_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.160)$$

Из выражений (2.156) и (2.160) видно, что в тех точках, где  $x = 0$ , скорость максимальна  $v = v_m$ .

Аналогичным образом можно получить выражение для ускорения:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega_0 v_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = -a_m \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (2.161)$$

где  $a_m = v_m \omega_0 = A\omega_0^2$  – амплитуда ускорения.

Учитывая (2.156), выражение (2.161) можно переписать в виде

$$a(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 x(t). \quad (2.162)$$

Из выражения (2.162) следует, что, когда смещение достигает максимального значения, ускорение достигает наибольшего по величине отрицательного значения и наоборот.

При гармонических колебаниях энергия будет также изменяться со временем. Выражения для кинетической и потенциальной энергии будут иметь вид:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha),$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha).$$

Полная энергия будет равна

$$E = T + U = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} [\sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \cos^2(\omega_0 t + \alpha)] = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2}, \quad (2.163)$$

т.е. полная энергия свободного гармонического колебания остается постоянной.

### 2.6.2. Математический и физический маятники

**Математический маятник** представляет собой материальную точку, совершающую колебания на невесомом нерастяжимом подвесе. Хорошим приближением математического маятника считается маленький шарик массой  $m$ , подвешенный на длинной нити (рис. 2.36).

При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает вращательный момент  $M = -mgl \sin \varphi$ , где  $l$  — длина нити, стремящейся вернуть маятник в положение равновесия. Основной закон динамики вращательного движения для маятника можно записать в виде

$$I\varphi'' = -mgl \sin \varphi. \quad (2.164)$$

При малых углах отклонения маятника  $\sin \varphi \approx \varphi$ , тогда

$$I\varphi'' + mgl\varphi = 0. \quad (2.165)$$

Маленький шарик, вращающийся на длинной нити можно рассматривать как материальную точку, тогда его момент инерции  $I$  будет равен  $ml^2$ . Поделив обе части (2.165) на  $ml^2$ , получим

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = 0. \quad (2.166)$$

Как было показано ранее, отношение  $g/l$  будет определять собственную циклическую частоту колебаний  $\omega_0$ . В этом случае период колебаний математического маятника будет равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.167)$$

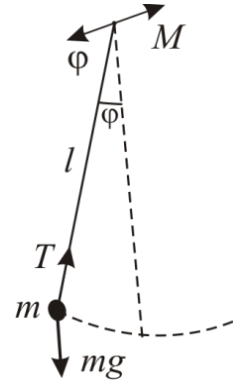


Рис. 2.36

**Физический маятник** – это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр тяжести (рис. 2.37).

Для малых колебаний физического маятника будет также справедливо уравнение (2.165). Момент инерции физического маятника будет определяться его формой, массой, расстоянием от центра масс до точки подвеса. В итоге дифференциальное уравнение колебаний примет вид

$$\varphi'' + \frac{mgl}{I} \varphi = 0. \quad (2.168) \quad \text{Рис. 2.37}$$

Собственная циклическая частота колебаний будет равна  $\omega_0 = \sqrt{mgl / I}$ , тогда период колебаний можно определить как

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (2.169)$$

При сопоставлении выражений (2.167) и (2.169) получается, что математический маятник длиной  $l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml}$  будет иметь такой же период колебаний, что и данный физический маятник. Величину  $l_{\text{пр}}$  называют **приведенной длиной физического маятника**. Точка  $O'$ , лежащая на прямой, соединяющей центр масс  $C$  с точкой подвеса  $O$  на расстоянии  $l_{\text{пр}}$  от нее, называется центром качания.

Точка подвеса и центр качания обратимы, т.е. при подвешивании маятника в центре качания приведенная длина  $l_{\text{пр}}$ , а следовательно, и период колебаний  $T$  не изменяются. Покажем это. Момент инерции физического маятника относительно точки  $O$  равен  $I = I_0 + ml^2$ , тогда приведенная длина маятника будет равна

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{ml} + l.$$

Если подвесить маятник в точке  $O'$ , то приведенная длина будет равна

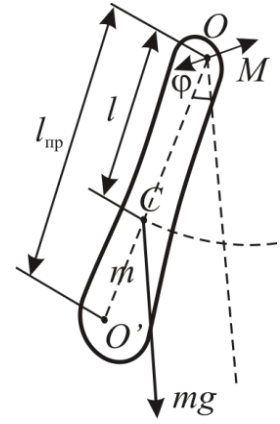
$$l'_{\text{пр}} = \frac{I_0}{ml'} + l'.$$

Учитывая, что  $l' = l_{\text{пр}} - l$ , получаем

$$l'_{\text{пр}} = \frac{I_0}{m(l_{\text{пр}} - l)} + l_{\text{пр}} - l = l_{\text{пр}} + \frac{1}{m(l_{\text{пр}} - l)} [(I_0 + ml^2) - lml_{\text{пр}}]. \quad (2.170)$$

Так как  $lml_{\text{пр}} = lm \frac{I}{ml} = I$  и  $I_0 + ml^2 = I$ , то выражение в квадратных скобках (2.170) равно нулю. В итоге

$$l'_{\text{пр}} = l_{\text{пр}}. \quad (2.171)$$



### 2.6.3. Затухающие колебания

В любой реальной колебательной системе, наряду с квазиупругой силой, действуют силы сопротивления. В результате этого происходит потеря энергии при колебаниях, т.е. колебания становятся затухающими.

Как известно, сила сопротивления пропорциональна скорости:  $\vec{F}_c = -r\vec{v} = -rx'$ , где  $r$  – положительный коэффициент. С учетом силы сопротивления уравнение движения примет вид

$$mx'' = -kx - rx'. \quad (2.172)$$

Уравнение (2.172) можно переписать как

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.173)$$

где  $\beta = r/2m$  – коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – собственная циклическая частота колебаний.

Решение дифференциального уравнения (2.173) можно записать в виде:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.174)$$

где  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда затухающих колебаний (см. рис. 2.38),  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – циклическая частота затухающих колебаний,  $\alpha$  – начальная фаза колебаний.

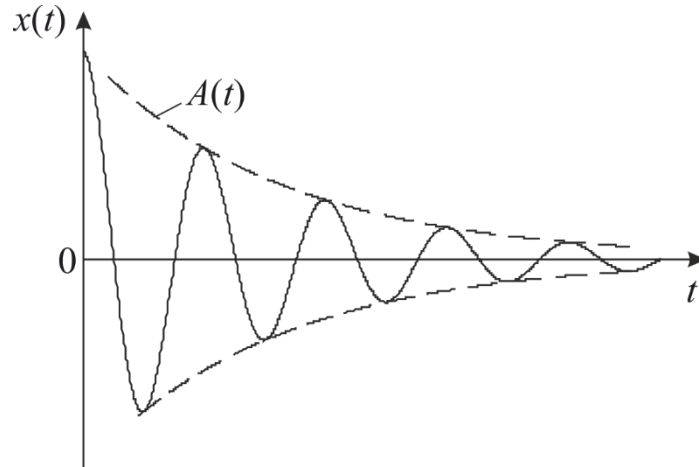


Рис. 2.38

Скорость затухания колебаний будет характеризоваться коэффициентом затухания  $\beta$ . Он определяет промежуток времени  $\tau$ , за который амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, т.е.  $\beta = 1/\tau$ .

Период затухающих колебаний будет равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (2.175)$$

Для характеристики затухания колебаний также используют безразмерную величину  $\delta$ , называемую **логарифмическим декрементом затухания**:

$$\delta = \ln \left( \frac{A(t)}{A(t+T)} \right). \quad (2.176)$$

Используя выражение для амплитуды затухающих колебаний, можно записать:

$$\delta = \ln(e^{-\beta t} / e^{-\beta(t+T)}) = \ln(e^{\beta T}) = \beta T.$$

Так как  $\beta = 1/\tau$ , а за время  $\tau$  система успевает совершить  $N_e = \tau / T$  колебаний, то

$$\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (2.177)$$

т.е. логарифмический декремент затухания обратно пропорционален количеству колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшится в  $e$  раз.

Потеря энергии в колебательной системе характеризуется **добротностью**  $Q$ :

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E(t+T)}, \quad (2.178)$$

где  $E(t)$  – энергия, накопленная в колебательной системе к моменту времени  $t$ ,  $\Delta E(t+T)$  – энергия, теряемая за период колебаний.

В случае слабого затухания колебаний добротность примерно равна

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e. \quad (2.179)$$

Для идеальной колебательной системы (без потерь энергии) добротность стремится к бесконечности.

#### 2.6.4. Вынужденные колебания

Рассмотрим колебания, когда на систему, кроме квазиупругой силы и силы сопротивления, действует и вынуждающая сила, меняющаяся по гармоническому закону с частотой  $\Omega$ :

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad (2.180)$$

где  $F_0$  – амплитуда вынуждающей силы.

Тогда уравнение движения запишется следующим образом:

$$mx'' = -rx' - kx + F_0 \cos \Omega t, \quad (2.181)$$

а дифференциальное уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (2.182)$$

В этом случае установившиеся колебания будут гармоническими с частотой, равной частоте вынуждающей силы:

$$x(t) = A(\Omega) \cos(\Omega t + \alpha). \quad (2.183)$$

Расчет показывает, что амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\alpha$  вынужденных колебаний определяются соотношениями:



$$A(\Omega) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (2.184)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta \Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}.$$

Из уравнений (2.184) следует, что амплитуда вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы и зависит от частоты этой силы  $\Omega$ . На рис. 2.39 показана совокупность зависимостей  $A(\Omega)$  для различных значений  $\beta$ , которые называются **резонансными кривыми**.

Видно, что при некоторой частоте  $\Omega_p$  амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум. Это явление называется **резонансом**, а частота  $\Omega_p$  – **резонансной частотой**. Так как при  $\Omega_p$  амплитуда имеет максимум, то в этой точке производная  $A$  по  $\Omega$  должна равняться нулю:

$$\left. \frac{dA}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_p} = 0.$$

Отсюда можно найти  $\Omega_p$ :

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (2.185)$$

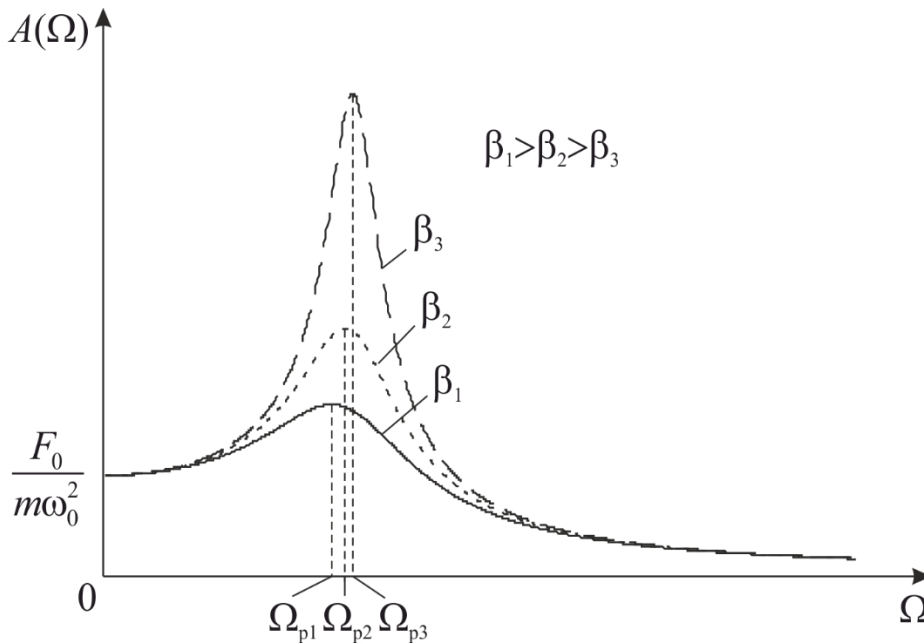


Рис. 2.39

Чем больше  $\beta$ , тем меньше  $\Omega_p$ . При небольших значениях  $\beta$  резонанс наступает тогда, когда частота вынуждающей силы близка к собственной частоте, т.е.  $\Omega_p \approx \omega_0$ . При стремлении частоты  $\Omega$  к нулю все кривые приходят к одному и тому же предельному значению  $F_0 / m\omega_0^2$ . Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы  $F_0$ . При стремлении  $\Omega$  к бесконечности все кривые стремятся к нулю. Это значит, что при большой частоте сила так

быстро изменяет свое направление, что из-за инерционности система не успевает сместиться из положения равновесия.

### 3. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

#### 3.1. Статистический и термодинамический методы исследования

Ранее было рассмотрено, каким образом можно решить основную задачу механики: «Определение параметров движения тела по известным начальным условиям в любой наперед заданный момент времени». Это можно сделать, либо получив на основе законов Ньютона уравнения движения и решив их (силовой подход), либо рассмотрев трансформацию различных видов энергии при смене одного вида движения другим (энергетический подход). Использование обоих подходов позволяет на практике в подавляющем большинстве случаев получить искомый результат.

Так как с древних времен в физике сложилось представление о том, что все тела состоят из большого количества отдельных частиц (атомов и молекул), которые движутся и взаимодействуют друг с другом, то возникает вопрос: нельзя ли использовать эти методы для описания свойств вещества? Для этого «*всего лишь*» необходимо описать поведение всех частиц данного тела с учетом взаимодействия их друг с другом. Математически эта задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.

Однако при ближайшем рассмотрении возникают серьезные проблемы:

■ таких частиц в макротеле – огромное количество ( $\sim 10^{26} \text{ м}^{-3}$ ), т.е. необходимо будет решать систему из такого количества уравнений;

■ кроме того, в теоретической механике доказывается, что строгого (аналитического) решения для системы, состоящей всего из трех взаимодействующих друг с другом тел, в общем виде не существует.

Однако задачу все же можно решить, если ввести в рассмотрение некоторые упрощения, заменив реальную систему приближенной к ней моделью:

- реальные молекулы представляются в виде совершенно одинаковых гладких шариков;
- силы дистантного взаимодействия между частицами отсутствуют;
- все частицы движутся хаотически;
- молекулы взаимодействуют друг с другом и с окружающими телами только при соударении, которое происходит по модели упругих шаров.

Определенно ни твердые, ни жидкие тела этой модели не соответствуют, хотя бы потому, что в них нельзя пренебречь силами дистантного взаимодействия между частицами. Ближе всего этой модели соответствуют

газообразные среды, в связи с чем данная модель получила название – **идеальный газ**.

При этом для рассмотрения системы не обязательно определять поведение каждой частицы. Так как все частицы совершенно идентичны и движутся хаотически (в среднем одинаково), то в принципе можно описать движение одной частицы (определить параметры ее движения – **микропараметры**). Все остальные будут вести себя в среднем аналогичным образом. Статистически усредняя по всем частицам, можно охарактеризовать движение всего ансамбля частиц и таким образом получить сведения о **макропараметрах** – величинах, характеризующих свойства всего вещества.

Такой метод определения параметров системы, состоящей из большого количества элементов, называется **статистическим**. Раздел физики, использующий статистический метод исследования свойств тел, находящихся в различных агрегатных состояниях, на основе представления об их атомарно-молекулярном строении, называется **молекулярно-кинетической теорией (МКТ)**.

Однако к рассмотрению данной проблемы можно подойти и с другой стороны, используя понятие «энергия», которое количественно характеризует различные формы движения материи и переходы одной формы в другую. Для того чтобы любая материальная система могла существовать, она должна обладать неким запасом энергии. Эта энергия может быть сообщена системе различным способом и в зависимости от свойств системы и внешних условий характеризовать поведение системы, трансформируясь в различные виды. Различные виды энергии характеризуются различными макропараметрами. Таким образом, рассматривая определенные состояния системы с точки зрения соотношения различных видов энергии (форм движения материи), а также рассматривая переходы между этими состояниями и происходящую при этом трансформацию различных видов энергии (их переход друг в друга), можно проследить и изменение различных макропараметров, характеризующих систему. При этом нам совершенно неважно, как физически устроена система, нас не интересуют микропараметры отдельных ее элементов.

Такой подход к рассмотрению свойств системы, при котором исследуются лишь некие состояния системы и энергетические превращения при переходе из одного состояния в другое, называется **термодинамическим методом**, а раздел физики, использующий этот метод, – **термодинамикой (ТД)**. При этом термодинамика не рассматривает микропроцессы, лежащие в основе таких переходов. Базой термодинамики являются фундаментальные законы (начала), основанные на обобщении опытных данных.

В принципе термодинамический метод по подходу более общий, нежели статистический, так как понятие «энергия» используется практически во всех разделах физики и естествознания (химия, биология и т.д.). Зачастую этот метод используется в качестве «эталонного», выводами которого проверяется «правомочность» той или иной гипотезы или теории. Однако недостаток такой «универсальности» очевиден - отсутствие сведений о физическом строении системы, о «движущих силах» происходящих в ней процессов.

В свою очередь, такие сведения предоставляет статистический метод (МКТ), недостатки которого проявляются в ограниченности области применения (количественные соотношения получаются лишь для газов, имеющих макропараметры, находящиеся в некотором диапазоне значений, при которых может быть использована модель идеального газа).

В тех случаях, когда оба метода могут быть использованы совместно, они являются мощным инструментом исследования. В первую очередь, это относится к газам.

### **3.2. Термодинамическая система и ее параметры. Равновесные состояния и процессы, их изображение на термодинамических диаграммах**

Под **термодинамической системой** понимают выделенную совокупность тел, которые взаимодействуют между собой и с внешними по отношению к ним телами, обмениваясь при этом энергией.

Для описания состояния термодинамической системы и происходящих при этом процессов используются **термодинамические параметры** или **параметры состояния**: масса или плотность ( $m$  или  $\rho$ ), объем ( $V$ ), давление ( $P$ ), температура ( $T$ ).

Если первые три параметра использовались и при рассмотрении механических систем, то понятие «температура» является новым. Этот параметр – один из наиболее важных и в то же время один из наиболее сложных и неоднозначных как в термодинамике, так и в физике в целом.

**Температура – термодинамическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия системы и имеющая смысл только для равновесных состояний.**

**Термодинамическая система называется равновесной, если параметры состояния либо одинаковы, либо закономерно изменяются от точки к точке, оставаясь в каждой точке неизменными сколь угодно долгий промежуток времени при неизменных внешних условиях. Все остальные системы – неравновесные.**

Таким образом, равновесное состояние – это состояние, в которое при неизменных внешних условиях самопроизвольно приходит ТД система и дальше остается в этом состоянии сколь угодно долго. Если другие ТД параметры при этом от точки к точке могут изменяться, то для равновесного состояния температура в каждой точке одинакова.

На некую искусственность понятия «температура» указывает то, что измерить ее можно лишь косвенным путем, используя зависимость от нее различных свойств тел, которые, в свою очередь, можно измерить напрямую (изменение объема, электропроводности, плотности, упругости и т.д.).

При изменении внешних условий или каких-либо отдельных параметров системы ее ТД состояние, характеризуемое совокупностью всех ТД параметров, изменяется.

Такого рода изменение состояния системы, при котором происходит изменение ее ТД параметров, называется **термодинамическим процессом**. При этом, если в ходе процесса система проходит через бесконечный непрерывный ряд ТД равновесных состояний, параметры которых отличаются друг от друга на бесконечно малые значения, то такой процесс называется **равновесным**.

Равновесные процессы – понятие абстрактное. Связано это с тем, что для того чтобы установилось строго равновесное состояние системы, необходим бесконечно большой отрезок времени. Реальные же процессы всегда протекают с конечной скоростью и поэтому **неравновесны**. Однако при очень малых скоростях протекания реальные процессы с некой погрешностью можно принимать за равновесные. Такие процессы называются **квазистационарными** или **квазистатическими**.

Равновесные процессы графически могут быть представлены в виде соответствующей совокупности точек в системе координат, по осям которой отложены ТД параметры ( $P$ ,  $V$ ,  $T$ ). В этом случае имеем дело с **термодинамическими диаграммами** или **диаграммами состояний** (рис. 3.1). Простейшими или элементарными равновесными ТД процессами могут быть процессы (перечисленные в таблице), происходящие в системе при постоянной ее массе. М.В. Ломоносовым было доказано, что масса изолированной ТД системы не изменяется в ходе любого ТД процесса.

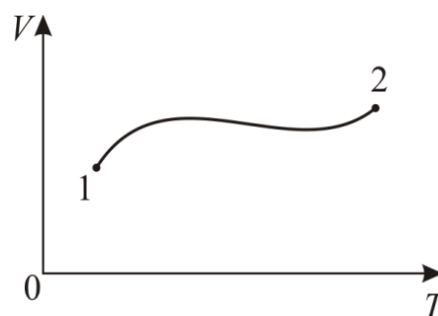


Рис. 3.1

Название процесса	Условия протекания
Изотермический	$T=const$ , $PV=const$ (закон Бойля – Мариотта)
Изобарный	$P=const$ , $V/T=const$ (закон Гей-Люссака)
Изохорный	$V=const$ , $P/T=const$ (закон Шарля)
Адиабатный	Теплоизолированная система, $PV^\gamma = const$ (уравнение Пуассона)

Параметры состояния связаны друг с другом. Соотношение, определяющее связь между параметрами состояния макросистемы, называется **урав-**

**нением состояния** этой системы. В простейшем случае равновесное состояние системы определяется значениями трех параметров: давления  $P$ , объема  $V$  и температуры  $T$  (масса системы предполагается известной). Связь между этими параметрами может быть выражена уравнением состояния вида

$$f(P, V, T) = 0, \quad (3.1)$$

где  $f(P, V, T)$  – некоторая функция.

### 3.3. Уравнение состояния идеального газа

Обобщая три первых изопроцесса (указанных в таблице из п.3.2), Клапейрон вывел между ними взаимосвязь:

$$\frac{PV}{T} = \text{const} \quad - \quad (3.2)$$

**уравнение Клапейрона.**

Позже Менделеев доказал, что для одного моля газа

$$\frac{PV_{\mu}}{T} = R,$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная [ $R = 8,31$  Дж/(моль·К),  $V_{\mu}$  – молярный объем].

Если же система состоит из  $\nu$  молей, то получаем общее выражение для газа с массой  $m$  и молярной массой  $\mu$  ( $\nu = m/\mu$ ):

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \quad - \quad (3.3)$$

**уравнение Клапейрона – Менделеева.**

После некоторых преобразований это уравнение можно переписать в виде

$$P = nkT, \quad (3.4)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К),  $n$  – концентрация молекул газа.

### 3.4. Основное уравнение МКТ идеального газа

Уравнение Клапейрона – Менделеева определяет взаимосвязь между параметрами ТД системы при осуществлении равновесного процесса. Однако при этом еще не решена основная задача МКТ – определение макропараметров системы на основе рассмотрения микропараметров. Данная задача решается путем применения законов Ньютона при рассмотрении процессов взаимодействия частиц газа со стенками сосуда.

Поскольку давление газа обусловлено ударами молекул о стенки сосуда, вычислим импульс, сообщаемый стенке сосуда ударяющимися молекулами. При упругом ударе о стенку вектор импульса  $\vec{K}$  молекул изменяет направление на противоположное (рис. 3.2), тогда, по II закону Ньютона, сила, действующая на молекулу со стороны стенки за время  $\Delta t$ , будет равна

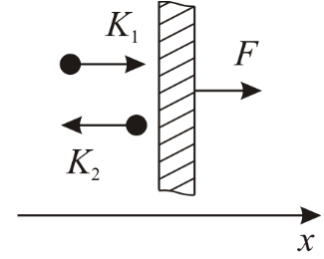


Рис. 3.2

$$\vec{F}_1 = \frac{\Delta \vec{K}}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

По III закону Ньютона, сила, действующая на стенку со стороны молекул,

$$\vec{F} = -\vec{F}_1 = -\frac{\Delta \vec{K}}{\Delta t} = -\frac{\vec{K}_2 - \vec{K}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{K}_1 - \vec{K}_2}{\Delta t}. \quad (3.6)$$

В проекции на ось  $Ox$ :

$$F_x = \frac{K_{1x} - K_{2x}}{\Delta t} = \frac{N_0 m_0 v - (-N_0 m_0 v)}{\Delta t} = \frac{2N_0 m_0 v}{\Delta t}, \quad (3.7)$$

где  $m_0$  – масса молекулы,  $v$  – скорость молекулы,  $N_0$  – число молекул, ударившихся о стенку за время  $\Delta t$ .

Определим  $N_0$ . Для облегчения решения поставленной задачи введем некоторые упрощения: будем считать, что молекулы движутся только вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений с одинаковыми по величине скоростями. Если газ содержит  $N$  молекул, то в любой момент времени вдоль каждого из трех направлений будет двигаться  $N/3$  молекул. Вследствие того, что все направления движения молекул равновероятны, половина из них будет двигаться в одну сторону, половина – в другую. Таким образом, в направлении стенки будет двигаться в среднем  $N/6$  молекул (рис. 3.3).

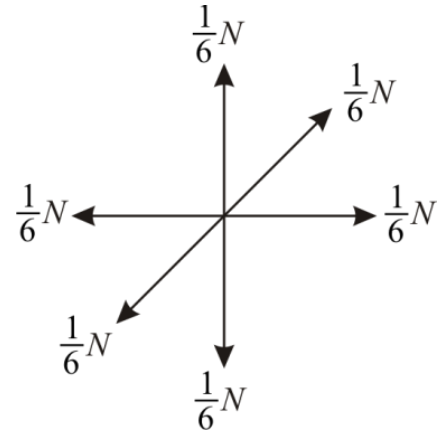


Рис. 3.3

За время  $\Delta t$  до элемента стенки площадью  $\Delta S$  долетят все молекулы, движущиеся к стенке, заключенные в объеме  $v\Delta t\Delta S$  (рис. 3.4). Число молекул в этом объеме  $nv\Delta t\Delta S$ , где  $n$  – концентрация молекул газа. К стенке движется  $1/6$  часть этих молекул, поэтому число молекул, ударившихся о стенку за время  $\Delta t$ , будет равно

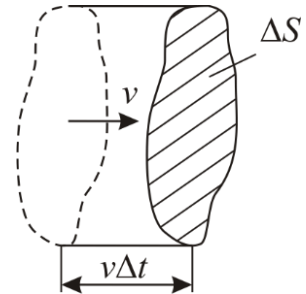


Рис. 3.4

$$N_0 = \frac{1}{6}nv\Delta t\Delta S. \quad (3.8)$$

Часть этих молекул на своем пути к стенке столкнется с другими молекулами, вследствие чего изменит направление движения, не достигнув  $\Delta S$ . Однако соударения не нарушают хаотического характера движения молекул:

переход некоторого количества молекул из группы, движущейся по направлению к стенке, в группы, движущиеся в других направлениях, сопровождается одновременным переходом такого же числа молекул из других групп в группу, движущуюся по направлению к стенке. Поэтому при вычислении количества молекул, долетающих до стенки, соударения молекул друг с другом можно не принимать во внимание.

Выражение (3.7) с учетом (3.8) примет вид

$$F_x = \frac{2m_0 \Delta t \Delta S m_0 v}{6 \Delta t} = \frac{1}{3} n m_0 v^2 \Delta S. \quad (3.9)$$

Давление, оказываемое молекулами на стенки сосуда, можно определить как

$$P = \frac{F_x}{\Delta S} = \frac{1}{3} n m_0 v^2 = \frac{2}{3} n \frac{m_0 v^2}{2}. \quad (3.10)$$

В этой формуле  $m_0 v^2 / 2$  – кинетическая энергия поступательного движения молекулы. Но необходимо учесть то, что молекулы имеют самые разные по величине и направлению скорости. Поэтому имеет смысл говорить о средней кинетической энергии  $\bar{\epsilon} = m_0 \bar{v}^2 / 2$  вне зависимости от конкретного вида распределения молекул по скоростям. Таким образом, выражение (3.10) следует записать в виде

$$P = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) называется **основным уравнением МКТ** идеального газа.

Это же выражение можно записать в виде

$$P = \frac{1}{3} n \bar{v}^2 m_0. \quad (3.12)$$

Сравнивая с уравнением Клапейрона – Менделеева в виде  $P = nkT$ , получаем

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT. \quad (3.13)$$

Из последнего соотношения следует вывод, что абсолютное значение температуры определяет среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул.

В связи с этим в классической физике абсолютный ноль температуры приобретает особый смысл. При  $T = 0$  К, так как  $\bar{v} = \sqrt{3kT/m_0}$ , то  $\bar{v} = 0$  – прекращается поступательное движение молекул.

Если же  $T \neq 0$ , то каждая молекула обладает энергией поступательного движения, среднее значение которой определяется соотношением (3.13). Просуммировав по энергиям все молекулы, можно рассчитать общую кинетическую энергию поступательного движения всех частиц системы. Помимо поступательного движения, частицы системы участвуют в других видах движения, то есть система может характеризоваться и другими видами энергии.



Обобщенной характеристикой всевозможных видов энергии, которыми могут обладать молекулы, является понятие **внутренней энергии**.

### 3.5. Внутренняя энергия термодинамической системы (газа).

#### **Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул**

Под **внутренней энергией** любой системы (физического тела) понимают кинетическую энергию хаотического движения молекул (поступательного и вращательного), потенциальную энергию взаимодействия молекул, энергию колебательного движения атомов в молекуле, энергию электронных оболочек атомов и ионов, энергию связи ядер, а также энергию всех частиц системы во внешних потенциальных полях.

Так как классическая термодинамика не рассматривает процессы, происходящие в ядрах и электронных оболочках, то под внутренней энергией в ТД понимаются **суммарная энергия движения частиц системы и потенциальная энергия их взаимодействия**.

Для того чтобы определить внутреннюю энергию ТД системы с точки зрения МКТ, необходимо описать поведение всех ее частиц. Для этого необходимо задать положение каждой частицы относительно выбранной системы отсчета.

Минимальное число независимых координат, полностью определяющих поведение некоего объекта в пространстве, называется **числом степеней свободы ( $i$ )**.

Необходимость задания для описания положения тела данной координаты свидетельствует о том, что тело может двигаться вдоль этой координатной оси. Таким образом, оно будет обладать определенной составляющей энергии, связанной с этим движением (энергией поступательного, вращательного, колебательного движения и т.д.).

Получается, что число степеней свободы можно трактовать и как количество различных видов энергии, которой может обладать тело.

Так, положение одноатомной молекулы в пространстве полностью описывается тремя координатами ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Иначе ее кинетическую энергию поступательного движения можно разложить на три составляющие по каждой из координатных осей (энергия потенциального взаимодействия, вращательного и колебательного движения при этом отсутствует). Получаем, что в данном случае частица имеет три степени свободы ( $i=3$ ).

Если рассматривается двухатомная молекула, атомы которой жестко связаны между собой (рис. 3.5, а), то в этом случае  $i=5$ , так как она может двигаться по трем координатам и вращаться вокруг двух осей  $O_1O_1$  и  $O_2O_2$ , перпендикулярных к оси молекулы. Вращение двух материальных точек вокруг оси, проходящей через них, не характеризуется энергией, и, таким образом, степенью свободы, связанной с этим видом движения, молекула не обладает.

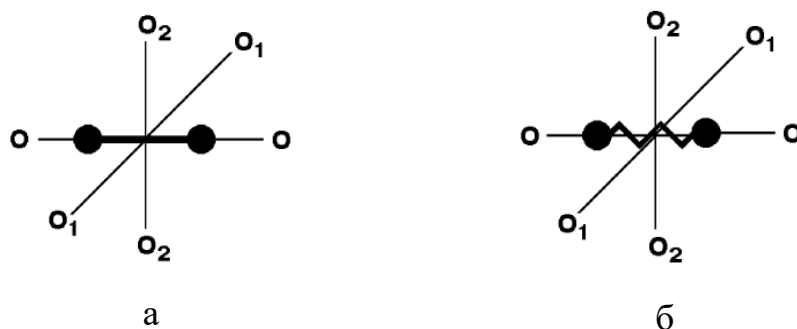


Рис. 3.5

Во многих случаях необходимо принимать во внимание относительные смещения атомов в молекуле, то есть вводить в рассмотрение колебательные степени свободы (рис. 3.5, б). Колебательная степень свободы должна обладать вдвое большей энергетической емкостью по сравнению с поступательной и вращательной. Это объясняется тем, что поступательное и вращательное движение молекулы связано с наличием только кинетической энергии, в то время как колебательное движение связано с наличием и кинетической, и потенциальной энергии.

Если же имеем трехатомную молекулу с жесткими связями между атомами, то в этом случае она будет обладать 6-ю степенями свободы (3 степени, характеризующие поступательное движение, 3 – вращательное).

Согласно МКТ движение молекул носит хаотический (неупорядоченный) характер, и ни один из видов движения молекул (поступательный, вращательный или колебательный) не имеет преимущества перед другим. Тогда в состоянии термодинамического равновесия энергия, которой будет обладать частица, равномерно распределится между всеми видами движения, т.е. справедлив закон равномерного распределения энергии между степенями свободы молекул: **статистически в среднем в состоянии термодинамического равновесия на каждую степень свободы молекулы приходится одинаковая энергия  $kT/2$ .**

Таким образом, если молекула имеет  $i$  степеней свободы, то ее средняя энергия будет определяться как

$$\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT. \quad (3.14)$$

Так как в одном моле любого вещества содержится  $N_a$  молекул ( $N_a = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> – число Авогадро), то внутренняя молярная энергия вещества

$$U_{\mu} = \frac{i}{2} kT N_a = \frac{i}{2} RT.$$

Если же имеем  $\nu$  молей вещества, то соответственно

$$U = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT. \quad (3.15)$$

Как и потенциальная энергия в механике, внутренняя энергия ТД системы является ее функцией состояния.

Изменение внутренней энергии ТД системы может быть осуществлено различными способами. Один из способов изменения энергии мы уже рассматривали при исследовании механических систем. Изменение энергии системы осуществляется за счет работы, совершаемой внешними силами над системой. При этом система также совершает работу против внешних сил.

### 3.6. Работа газа при изменении его объема

Если внутренняя энергия характеризует конкретное состояние ТД системы, то при совершении работы над системой ее энергия и, тем самым, параметры состояния меняются. Таким образом, понятие работы является энергетической характеристикой ТД процесса изменения состояния.

Рассматривая элементарное изменение объема такое, что давление в пределах этого изменения остается постоянным, для элементарной работы можно записать:

$$\delta A = PdV. \quad (3.16)$$

Работа, совершаемая газом в каком-то конечном процессе 1-2, равна алгебраической сумме работ, совершаемых на каждом элементарном участке этого процесса (по свойству аддитивности работы). Тогда

$$A_{12} = \int_1^2 PdV. \quad (3.17)$$

Графически это соотношение описывает площадь фигуры в координатах  $P$ - $V$  под графиком равновесного ТД процесса, в ходе которого совершается работа (рис. 3.6). Если же система совершает замкнутый ТД процесс, то общая работа определяется площадью фигуры, ограниченной замкнутым контуром.

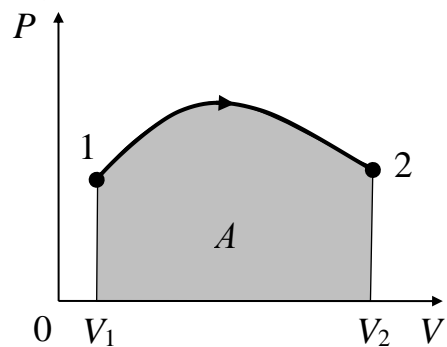


Рис. 3.6

### 3.7. Количество теплоты. Теплоемкость

Вторым из возможных способов изменения внутренней энергии ТД системы является сообщение ей некоторого количества теплоты.

**Теплотой (тепловой энергией)** называется энергия, передаваемая ТД системе внешними телами за счет теплообмена.

**Теплообменом** называется процесс обмена энергией телами (участками тел), имеющими различные температуры.

Так же, как и работа, теплота является характеристикой процесса, в ходе которого она получается или отдается. Таким образом, подобно работе теплота не является функцией состояния, зависит от вида процесса, в ходе которого она сообщается, и не может быть представлена полным дифференциалом.

Так же, как работа, теплота обладает свойством аддитивности: **общее количество теплоты, сообщенное системе в ходе какого-либо процесса,**

равно алгебраической сумме количеств теплоты, переданных системе на всех участках процесса, то есть

$$Q_{12} = \int_1^2 \delta Q. \quad (3.18)$$

Количественной характеристикой ТД системы, а также процесса сообщения ей некоторого количества теплоты является **теплоемкость**.

**Теплоемкостью тела** в данном ТД процессе называется физическая величина, равная количеству теплоты, которую необходимо передать ему в ходе процесса для того, чтобы изменить температуру на 1К.

Таким образом, математически

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (3.19)$$

Теплоемкость ТД системы зависит как от ее строения, так и от массы (количества частиц, входящих в систему), а также от вида ТД процесса, в ходе которого передается теплота.

Однако при использовании только понятия «теплоемкость тела» идентичные по строению и свойствам тела, различающиеся по размерам и массе, будут характеризоваться различными ее значениями. Для однообразного описания тепловых свойств вещества вводят понятия удельной и молярной теплоемкостей.

Под **удельной теплоемкостью** понимают теплоемкость однородного тела единичной массы, то есть

$$C_m = \frac{C}{m} = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}, \quad (3.20)$$

таким образом

$$C = C_m m \quad (3.21)$$

и тогда

$$\delta Q = C_m m dT. \quad (3.22)$$

**Молярной теплоемкостью** называется теплоемкость одного моля однородного вещества, то есть

$$C_\mu = \frac{C}{\nu} = \frac{\mu}{m} C. \quad (3.23)$$

Теперь, введя понятие количества теплоты и теплоемкости, мы можем сформулировать один из основных законов термодинамики, который в связи со своей значимостью часто называется **первым началом термодинамики**.

### 3.8. Первое начало термодинамики

Первое начало (первый закон) термодинамики по своей сути является законом сохранения энергии применительно к термодинамическим системам: **изменение внутренней энергии системы можно осуществить, либо совершая над системой работу ( $\delta A'$ ), либо передав ей некое количество теплоты ( $\delta Q$ ):**

$$dU = \delta A' + \delta Q. \quad (3.24)$$

Учитывая, что  $dA' = -dA$ , первый закон ТД можно сформулировать и по-другому: **теплота, переданная ТД системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы против внешних сил:**

$$\delta Q = \delta A + dU. \quad (3.25)$$

Используя полученные ранее соотношения для внутренней энергии и работы, последнее выражение можем переписать:

$$\delta Q = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R dT + P dV. \quad (3.26)$$

Это соотношение связывает между собой термодинамические параметры и показывает их изменение в ходе каких-либо ТД процессов, сопровождающихся энергетическими превращениями.

Внутренняя энергия – функция состояния, работа – функция процесса. Тогда из равенства (3.25) следует, что количество теплоты  $Q$  – функция процесса, т.е.

$$\oint dQ \neq 0, \quad \int_1^2 dQ = Q_{12}. \quad (3.27)$$

Рассмотрим замкнутый процесс (цикл). Запишем первое начало термодинамики для этого процесса:

$$\oint dQ = \oint dU + \oint dA.$$

Поскольку  $\oint dU = 0$ , то  $\oint dQ = \oint A$ , таким образом, для цикла  $A = Q$ .

Применим первое начало термодинамики к различным изопроцессам.

1. Изотермический процесс ( $T = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ). Уравнение изотермического процесса (закон Бойля – Мариотта) имеет вид  $PV = \text{const}$ .

Так как  $T = \text{const}$ , то  $dT = 0 \Rightarrow dU = 0$ . Тогда равенство (3.26) примет вид

$$\delta Q = \delta A = P dV. \quad (3.28)$$

Интегрируя выражение (3.28), получаем:

$$Q = A = \int_{V_1}^{V_2} P dV. \quad (3.29)$$

Из уравнения Клапейрона – Менделеева следует, что  $P = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$ . Тогда

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{\mu V} dV = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT (\ln V_2 - \ln V_1),$$

$$Q = A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (3.30)$$

2. Изохорный процесс ( $V = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ). Уравнение изохорного процесса (закон Шарля) имеет вид  $P/T = \text{const}$ . Так как  $V = \text{const}$ , то  $dV = 0 \Rightarrow \delta A = 0$ . Тогда равенство (3.26) примет вид

$$\delta Q = dU = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R dT. \quad (3.31)$$

Интегрируя последнее равенство, получаем:

$$Q = \Delta U = \int_{T_1}^{T_2} \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R dT = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \int_{T_1}^{T_2} dT. \quad (3.32)$$

$$Q = \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1). \quad (3.33)$$

3. Изобарный процесс ( $P = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ). Уравнение изобарного процесса (закон Гей-Люссака) имеет вид  $V/T = \text{const}$ . Интегрируя равенство (3.25), получаем первое начало термодинамики в виде

$$Q = \Delta U + A.$$

В этой формуле

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1), \quad (3.34)$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P \int_{V_1}^{V_2} dV,$$

$$A = P(V_2 - V_1). \quad (3.35)$$

4. Адиабатный процесс. Адиабатным называется процесс, происходящий без теплообмена с внешней средой:  $\delta Q = 0$ . Для адиабатного процесса первое начало термодинамики примет вид

$$\delta A = -dU. \quad (3.36)$$

Интегрируя это равенство, получаем:

$$A = -(U_2 - U_1).$$

Учитывая, что для конечных состояний изменение внутренней энергии равно  $\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T$ , получаем

$$A = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R (T_1 - T_2). \quad (3.37)$$

При адиабатном расширении газа  $A > 0$ , тогда из равенства (3.37) следует, что  $T_1 - T_2 > 0$ , а  $T_2 < T_1$ , т.е. температура газа уменьшается. При адиабатном сжатии газа наоборот,  $A < 0$ , тогда температура газа увеличивается.

Рассмотрим идеальный газ при адиабатном процессе. Масса газа при протекании процесса не изменяется ( $m = \text{const}$ ). Перепишем выражение (3.36) в виде

$$\frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R dT = -P dV. \quad (3.38)$$

Исключим из уравнения  $dT$ . Для этого продифференцируем уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$PdV + VdP = \frac{m}{\mu} R dT. \quad (3.39)$$

Из уравнений (3.38) и (3.39) следует, что

$$\frac{i}{2}(PdV + VdP) = -PdV,$$

$$PdV \frac{i+2}{i} = -VdP.$$

Отношение  $\frac{i+2}{i} = \gamma$  называется **постоянной Пуассона**. Тогда

$$\gamma PdV = -VdP.$$

Разделим переменные в полученном дифференциальном уравнении:

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}. \quad (3.40)$$

Проинтегрируем уравнение (3.40):

$$\int \frac{dP}{P} = -\gamma \int \frac{dV}{V},$$

$$\ln P = -\gamma \ln V + \ln const.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\ln PV^\gamma = \ln const,$$

откуда следует, что

$$PV^\gamma = const. \quad (3.41)$$

Для двух равновесных состояний 1 и 2 уравнение (3.41) можно записать как

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma. \quad (3.42)$$

Равенства (3.41) и (3.42) называются **уравнениями Пуассона**.

Уравнение Пуассона можно записать, используя и другие параметры состояния:

$$TV^{\gamma-1} = const, \quad (3.43)$$

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const.$$

Для работы газа при переходе из состояния 1 в состояние 2 с учетом (3.40) получаем:

$$\begin{aligned} A_{1-2} &= P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = -\frac{P_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{P_1 V_1^\gamma}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{P_1 V_1^\gamma}{V_1^{\gamma-1}} \right) = -\frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{P_2 V_2^\gamma}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{P_1 V_1^\gamma}{V_1^{\gamma-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\gamma-1} (P_1 V_1 - P_2 V_2). \end{aligned}$$

Вычислим производную  $dP/dV$  для изотермического и адиабатного процесса в одной и той же точке  $(P, V)$ .

Продифференцируем уравнение изотермы  $PV = \text{const}$ :

$$VdP + PdV = 0,$$

$$VdP = -PdV.$$

Разделив это равенство на  $VdV$ , получим:

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V} \quad (\text{для изотермы}). \quad (3.44)$$

Продифференцируем уравнение адиабаты (3.41):

$$V^\gamma dP + P\gamma V^{\gamma-1} dV = 0,$$

$$V^\gamma dP = -\gamma P V^{\gamma-1} dV.$$

Разделив это равенство на  $V^\gamma dV$ , получаем

$$\frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V} \quad (\text{для адиабаты}). \quad (3.45)$$

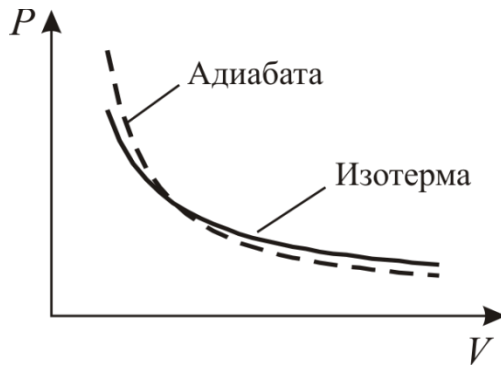


Рис. 3.7

Таким образом, из уравнений (3.44) и (3.45) следует, что тангенс угла наклона у адиабаты в  $\gamma$  раз больше, чем у изотермы – адиабата идет круче, чем изотерма (рис. 3.7).

При выводе уравнений адиабатного процесса подразумевалось, что рассматриваемые процессы являются обратимыми (иначе параметры состояния не имели бы определенных значений и уравнения утрачивали бы смысл). Обратимыми могут быть только процессы, протекающие бесконечно медленно. Однако осуществить бесконечно медленный адиабатный процесс невозможно, поскольку совершенно не проводящих теплоту материалов для изготовления адиабатной оболочки не существует. Вместе с тем количество теплоты, которым обменивается система с внешней средой, будет тем меньше, чем быстрее протекает процесс. Следовательно, близкими к адиабатному могут быть только быстро протекающие процессы, в частности в пределах небольших объемов газа, в котором распространяется звуковая волна.

### 3.9. Теплоемкость идеального газа

Так как количество теплоты  $Q$  – это функция процесса, то из (3.19) следует, что величина теплоемкости зависит от условий, при которых происхо-



дит нагревание. Наибольший интерес представляет теплоемкость для случаев, когда нагревание происходит при постоянном объеме или при постоянном давлении, т.е.  $C_V$  и  $C_P$ .

Определим молярные теплоемкости идеального газа при  $V=const$  и при  $P=const$ .

а)  $V=const$ . Так как при изохорном процессе  $\delta A = PdV = 0$ , то согласно выражению (3.31)

$$dQ = dU = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R dT.$$

Тогда молярная теплоемкость будет равна

$$C_V = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} = \frac{M}{m} \frac{1}{dT} \frac{i}{2} \frac{m}{M} R dT \Rightarrow C_V = \frac{i}{2} R. \quad (3.46)$$

б)  $P=const$ . В отличие от изохорного процесса при изобарном процессе происходит расширение газа, следовательно, для повышения его температуры на один градус понадобится больше тепла. Поэтому теплоемкость при постоянном давлении должна быть выше. Первое начало термодинамики для данного процесса запишем в виде

$$dQ = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R dT + PdV. \quad (3.47)$$

Продифференцировав уравнение Клапейрона – Менделеева, с учетом того, что  $P=const$ , получим

$$PdV = \frac{m}{M} R dT. \quad (3.48)$$

Подставляя последнее выражение в формулу (3.47), получаем

$$dQ = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R dT + \frac{m}{M} R dT = \frac{i+2}{2} \frac{m}{M} R dT. \quad (3.49)$$

Тогда молярная теплоемкость будет равна

$$C_P = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT} = \frac{M}{m} \frac{1}{dT} \frac{i+2}{2} \frac{m}{M} R dT \Rightarrow C_P = \frac{i+2}{2} R. \quad (3.50)$$

Как следует из формул (3.46) и (3.50), молярные теплоемкости  $C_V$  и  $C_P$  идеального газа не зависят от параметров состояния газа, в частности от температуры.

Вычитая из выражения (3.50) выражение (3.46), получаем

$$C_P - C_V = \frac{i+2}{2} R - \frac{i}{2} R = \frac{i}{2} R + R - \frac{i}{2} R,$$

откуда

$$C_P = C_V + R. \quad (3.51)$$

Равенство (3.51) называется **уравнением Майера**.

Для газов вычисление теплоемкости сводится к вычислению средней энергии теплового движения отдельных молекул. Ранее было показано, что молекула одноатомного газа обладает всего тремя поступательными степенями свободы, тогда его молярная теплоемкость  $C_V = 3R/2$ , что хорошо со-

гласуется с опытом. Молекула двухатомного газа обладает тремя поступательными, двумя вращательными и одной колебательной степенями свободы, и закон равнораспределения приводит к значению  $C_V = 3R$ . Между тем опыт показывает, что  $C_V$  двухатомного газа (при обычных температурах) составляет всего  $R$ .

В общем случае теплоемкость системы зависит от температуры, и наши результаты имеют ограниченную область применимости. При температурах ниже  $100\text{ K}$  теплоемкость  $3R/2$ , что указывает на отсутствие вращательных степеней свободы (рис. 3.8). Далее с ростом температуры теплоемкость быстро возрастает до классического значения  $5R/2$ , характерного для двухатомной молекулы с жесткой связью, в которой нет колебательных степеней свободы. При температурах свыше  $2000\text{ K}$  теплоемкость обнаруживает новый скачок до значения  $7R/2$ . Этот результат свидетельствует о появлении еще и колебательной степени свободы.

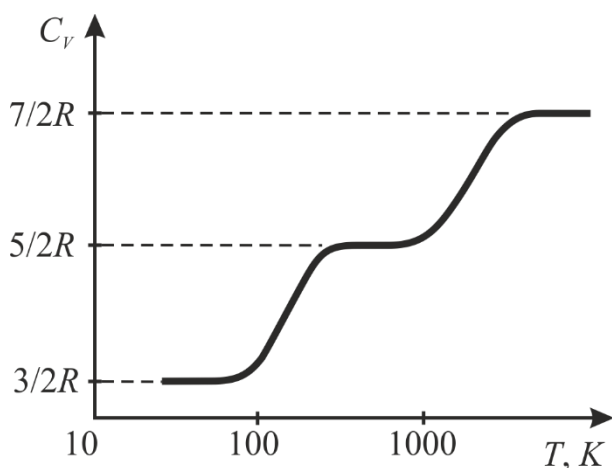


Рис. 3.8

Отсутствие колебательных степеней свободы молекулы при низких температурах объясняется специфическими квантовыми явлениями, необъяснимыми с позиций классической физики. При вычислении теплоемкости необходимо пользоваться статистикой, основанной на квантовой механике, согласно которой всякая система частиц, совершающих колебания или вращения (в том числе молекула газа), может обладать лишь определёнными дис-

кретными значениями энергии. Если энергия теплового движения в системе недостаточна для возбуждения колебаний определённой частоты, то эти колебания не вносят своего вклада в теплоемкость системы (соответствующая степень свободы оказывается «замороженной» — к ней неприменим закон равнораспределения). Температура  $T$ , при достижении которой закон равнораспределения оказывается применимым к вращательной или колебательной степени свободы, определяется квантово-механическим соотношением  $T \gg hv/k$ , где  $h$  — постоянная Планка,  $\nu$  — частота колебаний,  $k$  — постоянная Больцмана.

### 3.10. Законы распределения частиц во внешнем потенциальном поле и по энергиям (скоростям) движения

При более детальном описании свойств ТД системы использование только усредненных величин не всегда дает результаты, согласующиеся с практикой. Для более точного определения параметров необходимо знать законы распределения частиц по энергиям (по скоростям) и в пространстве при наличии внешнего воздействия.

Вначале поставим задачу определения зависимости концентрации частиц вдоль направления действия однородного силового поля, в качестве которого может выступать поле силы тяжести (силы гравитации). Необходимо отметить что, так как ТД и МКТ рассматривают только равновесные состояния, будем считать, что температура газа по всей высоте столба одинакова ( $T = \text{const}$ ).

Атмосферное давление на какой-либо высоте  $h$  обусловлено весом вышележащих слоев воздуха. Обозначим буквой  $P$  давление на высоте  $h$ ,  $P_0$  – давление на высоте  $h=0$ . Тогда давление на высоте  $h+dh$  будет  $P+dP$ . Разность давлений  $P$  и  $P+dP$  равна весу воздуха, заключенного в объеме цилиндра площадью  $S$  и высотой  $dh$  (см. рис. 3.9), поэтому

$$P - (P + dP) = \frac{mg}{S} = \frac{\rho S dh g}{S} = \rho g dh, \quad (3.52)$$

где  $\rho$  – плотность воздуха на высоте  $h$ .

Из последнего равенства получаем:

$$dP = -\rho g dh. \quad (3.53)$$

Плотность воздуха определим из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$\rho = PM/RT$ . Тогда формула (3.53) примет вид

$$\begin{aligned} dP &= -\frac{PMg}{RT} dh, \\ \frac{dP}{P} &= -\frac{Mg}{RT} dh. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Будем считать, что температура воздуха не зависит от высоты, зависимостью  $g(h)$  также пренебрежем. Интегрируем уравнение (3.54):

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} &= -\frac{Mg}{RT} \int_0^h dh, \\ \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) &= -\frac{Mgh}{RT}. \end{aligned}$$

Потенцируя последнее равенство, получаем:

$$P = P_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}. \quad (3.55)$$

Эта формула называется **барометрической**. Из нее следует, что атмосферное давление убывает с высотой.

Преобразуем барометрическую формулу. С учетом того, что  $M = mN_A$  и  $R = kN_A$ , а также  $P = nkT$ ,  $P_0 = n_0 kT$ , где  $n$  и  $n_0$  – концентрации молекул газа на высоте  $h$  и  $h=0$ . Тогда барометрическая формула преобразуется в равенство

$$nkT = n_0 kT e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

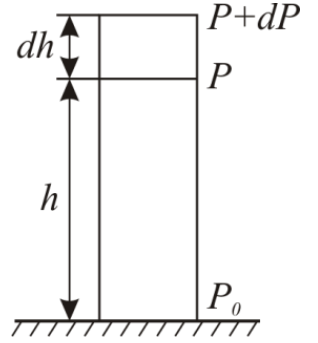


Рис. 3.9

$$n = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}, \quad (3.56)$$

где  $E_p = mgh$  – потенциальная энергия молекулы на высоте  $h$ .

Больцман доказал, что распределение (3.56) справедливо не только в случае потенциального поля сил земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения. Поэтому формулу (3.56) называют **распределением Больцмана**.

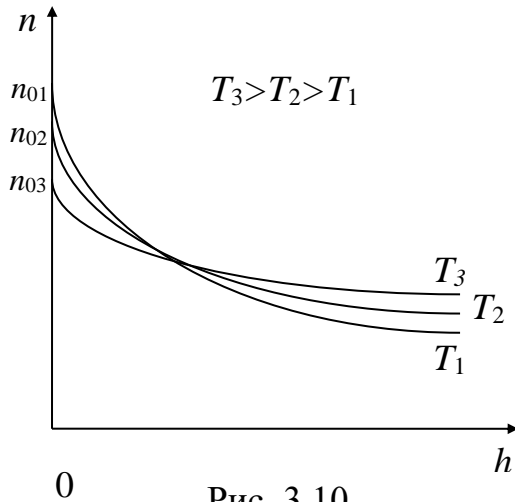


Рис. 3.10

Графически полученное распределение представлено на рис. 3.10. Из представленных соотношений видно, что на больших высотах при равных условиях преобладают легкие газы, концентрация молекул которых более плавно меняется с высотой.

Остался еще один вопрос: каково распределение частиц по скоростям (по энергиям) движения в случае идеального газа? При этом задачу, стоящую перед нами, можно сформулировать следующим образом: «Какая часть общего числа молекул имеет скорость в интервале ско-

ростей от  $v$  до  $v+dv$ », потому что **из конечного числа** молекул ни одна не будет двигаться **точно** с наперед заданной скоростью.

Для этого нам необходимо найти функцию, описывающую плотность распределения частиц по скоростям  $F(v)$ , под которой мы будем понимать **относительное количество частиц, имеющих скорость в единичном интервале скоростей в окрестности скорости  $v$** . Произведение этой функции и диапазона скоростей и даст искомое значение. Математически

$$\frac{N(v \div v + dv)}{N} = \frac{N(dv)}{N} = F(v)dv.$$

С точки зрения одной частицы данное выражение определяет вероятность попадания скорости частицы в интервал скоростей  $v \div v+dv$ .

В случае модели идеального газа распределение частиц по скоростям поступательного движения характеризуется **функцией Максвелла**:

$$F(v) = 4\pi v^2 \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (3.57)$$

Тогда, если необходимо определить долю молекул, имеющих скорости, заключенные между  $v_1$  и  $v_2$ , это можно сделать, воспользовавшись соотношением:

$$\frac{N(v_1 \div v_2)}{N} = \int_{v_1}^{v_2} F(v)dv. \quad (3.58)$$

Вид функции  $F(v)$  показан на рис. 3.11, на котором площадь заштрихованной области определяет искомую долю молекул.

При изменении температуры функция  $F(v)$  изменяется. С увеличением температуры она становится более полой, однако площадь под кривой остается при этом неизменной, так как определяется общим количеством частиц. Это выражается условием **нормировки** функции распределения

$$\int_0^{\infty} F(v) dv = 1. \quad (3.59)$$

На практике для характеристики системы частиц используются не конкретные скорости каждой частицы, а значения, усредненные по всем частицам:

– **среднеквадратичная скорость**

$$\bar{v}_{KB} = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \quad (3.60)$$

– **среднеарифметическая скорость**

$$\bar{v}_{CP} = \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}; \quad (3.61)$$

– **наиболее вероятная скорость**

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}, \quad (3.62)$$

соответствующая положению максимума функции  $F(v)$ .

Используя соотношение для энергии молекулы  $E = m_0 v^2 / 2$ , справедливое для модели идеального газа, полученное распределение по скоростям можно переписать в виде распределения по энергиям поступательного движения:

$$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{kT} \right)^{3/2} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (3.63)$$

Соответственно нахождение средней энергии поступательного движения частиц системы для модели идеального газа можно осуществить как

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} E F(E) dE = \frac{3}{2} kT. \quad (3.64)$$

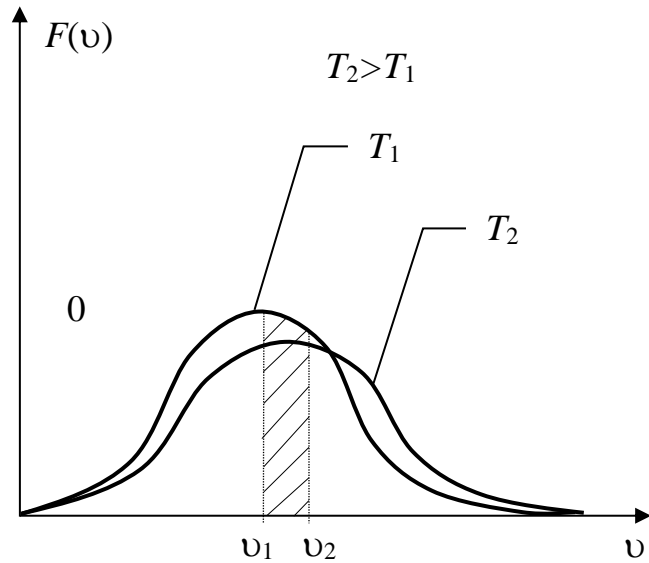


Рис. 3.11

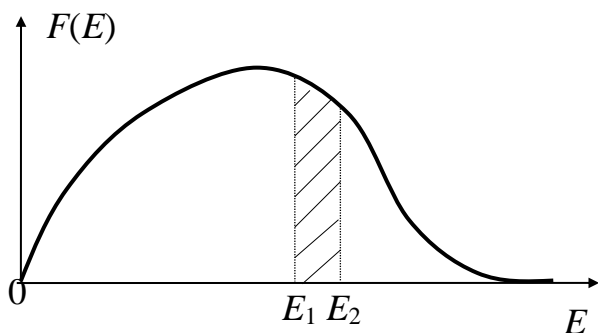


Рис. 3.12

Вид функции  $F(E)$  представлен на рис. 3.12, на котором площадь заштрихованной области определяет относительное количество частиц с энергиями от  $E_1$  до  $E_2$ .

Справедливость распределений Больцмана и Максвелла была подтверждена в опытах Ж. Перрена, О. Штерна и Б. Ламмерта.

**В опыте Штерна (1920)** в объеме  $V$  находится газ в равновесном состоянии. Выходящий из отверстия в стенке молекулярный пучок проходит коллиматор  $K$  из последовательных отверстий, который образует почти параллельный пучок  $P$  (рис. 3.13). Селектор  $C$  и детектор  $D$  совмещены во вращающемся цилиндре с щелью  $S$ . Когда в щель попадает пучок  $P$ , через нее в цилиндр входит порция молекул.

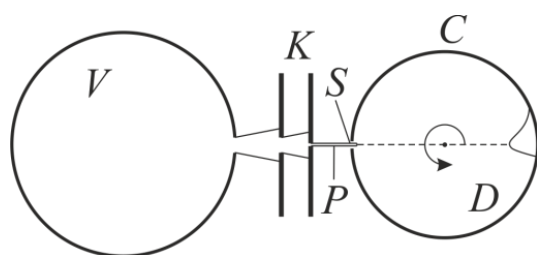


Рис. 3.13

Молекулы с разными скоростями достигают противоположной стенки цилиндра в разное время и поэтому попадают на различные участки  $D$  противоположной стенки цилиндра. Измерив степень почернения различных участков детектора, можно определить распределение молекул в пучке по скоростям.

**В опыте Ламмерта (1929)** левая часть установки, формирующая параллельный пучок молекул, остается той же. Далее пучок попадает на устройство, сортирующее молекулы по скоростям, и детектор для регистрации молекул после сортировки.

Сортирующее устройство представляет собой два вращающихся диска

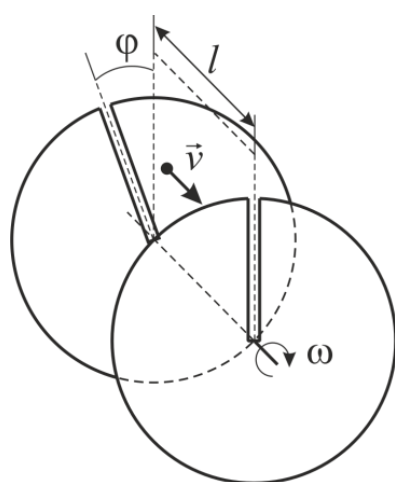


Рис. 3.14

(на одной оси) с щелями вдоль радиусов (рис. 3.14). Если щели повернуты на угол  $\varphi$  относительно друг друга, то при угловой скорости  $\omega$  диски повернутся на угол  $\varphi$  в течение промежутка времени  $t = \varphi / \omega$ . Поэтому через обе щели, расстояние между которыми  $l$ , пройдут молекулы со скоростью  $v = l / t = l\omega / \varphi$ . Меняя угловую скорость  $\omega$  или угол  $\varphi$  между радиальными щелями, можно выделить из пучка молекулы разных скоростей. Улавливая детектором эти молекулы в течение одинакового времени, можно найти их относительное

количество в пучке.

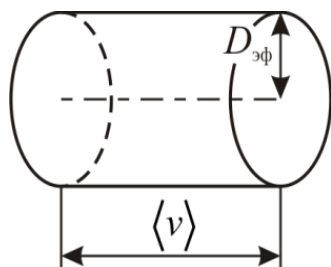


Рис. 3.16

### 3.11. Среднее число столкновений и средняя длина пробега молекул газа

Молекулы газа при своем движении сталкиваются друг с другом. Под столкновением молекул подразумевается процесс их взаимодействия, в результате которого изменяются направление движения и модуль скорости молекул. Минимальное расстояние  $D_{\text{эф}}$ , на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется *эффективным диаметром молекулы* (рис. 3.15). Он зависит от скоростей сталкивающихся молекул, т.е. от температуры газа.

Между двумя последовательными столкновениями молекула пролетает некоторое расстояние  $l$ , которое называется *длиной свободного пробега*. Эти расстояния могут быть самыми разными (см. рис. 3.15). Поэтому вводится понятие средней длины свободного пробега молекул  $\langle l \rangle$ , которая является характеристикой всей совокупности молекул газа при заданных значениях давления и температуры. Она зависит от эффективного диаметра и концентрации молекул.

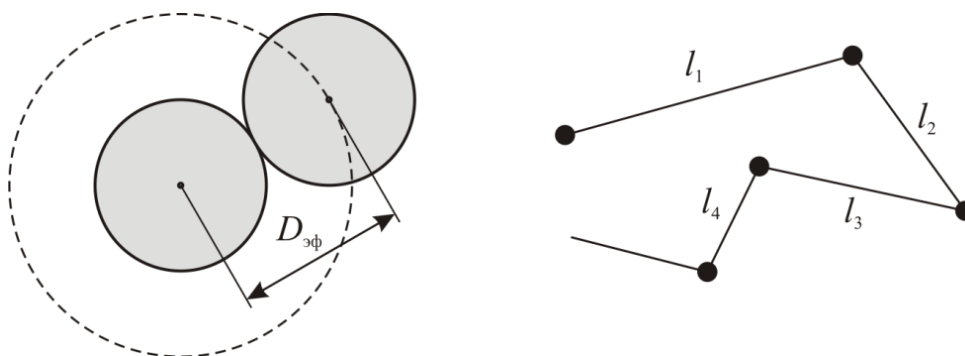


Рис. 3.15

Так как за 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости  $\langle v \rangle$ , и если  $\langle z \rangle$  – среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа за 1 секунду, то средняя единица свободного пробега определится по формуле

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}. \quad (3.65)$$

Подсчитаем  $\langle z \rangle$ . Для упрощения предположим, что все остальные молекулы, кроме рассматриваемой, неподвижны, а эта одна движется со скоростью  $\langle v \rangle$ . При своем движении молекула будет сталкиваться со всеми молекулами газа, центры которых отстоят от траектории движения ее центра на расстояниях, меньших или равных эффективному диаметру молекул  $D_{\text{эф}}$  (рис. 3.16). За единицу времени рассматриваемая молекула столкнется со всеми молекулами, центры которых лежат внутри цилиндра длиной  $\langle v \rangle$  и

радиусом основания  $D_{эф}$ . Умножив объем  $\langle v \rangle \pi D_{эф}^2$  этого цилиндра на концентрацию  $n$  молекул, найдем число молекул в этом цилиндре, т. е. число столкновений в единицу времени:

$$\langle z \rangle = \langle v \rangle \pi D_{эф}^2 n. \quad (3.66)$$

На самом деле все молекулы движутся, вследствие чего число столкновений определяется не средней скоростью  $\langle v \rangle$  движения молекул относительно стенок сосуда, а средней скоростью  $\langle v_{отн} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$  движения молекул друг относительно друга. Тогда:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle \pi D_{эф}^2 n. \quad (3.67)$$

Из равенств (3.65) и (3.67) получаем:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi D_{эф}^2 n}. \quad (3.68)$$

### 3.12. Реальные газы и пары

Свойства не сильно разреженных газов отличаются от свойств идеальных газов, подчиняющихся уравнению Клапейрона – Менделеева. Более того, приближенная теория, основанная на законах идеальных газов, часто не в состоянии объяснить даже качественно характер зависимости свойств газов от их параметров состояния.

Причина этих трудностей кроется в том, что поведение молекул реальных газов отлично от того, какое приписывается частицам идеальных газов. Во всех телах молекулы взаимодействуют друг с другом, причем силы взаимодействия между частицами в сильной степени зависят от расстояния между ними. Между молекулами вещества в любом агрегатном состоянии, в том числе и в газообразном, действуют одновременно как силы взаимного притяжения, так и силы взаимного отталкивания. Причем зависимость этих сил от расстояния различна.

Силы межмолекулярного притяжения имеют электрическую природу и зависят от расстояния  $r$  между молекулами по закону  $F = \text{const}/r^7$ , а силы взаимного отталкивания обратно пропорциональны  $r^{13}$ , то есть на очень близких расстояниях преобладают силы отталкивания, на более далеких – силы взаимного притяжения.

В первом приближении молекулы реального газа можно уподобить абсолютно твердым шарикам, между которыми действуют только силы взаимного притяжения. Такая модель газа, принятая нидерландским физиком Я.Д. Ван-дер-Ваальсом, позволила ему получить уравнение состояния реального газа, более совершенное, чем уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$\left( P + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT, \quad (3.69)$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты Ван-дер-Ваальса, зависящие от давления, температуры и химической природы газа.



Уравнение Ван-дер-Ваальса качественно правильно описывает некоторые особенности процесса сжижения газов. При этом оно охватывает не только область, в которой вещество находится в газовой фазе, но также и области перехода газа в жидкость и промежуточные состояния, при которых присутствуют вещества в различных фазах, например смесь кипящей жидкости и пара.

**Фазой** называют совокупность всех частей системы, обладающих одинаковым химическим составом, находящихся в одинаковом состоянии и ограниченных поверхностями раздела. Переход вещества из одного состояния в другое (например, из жидкости в пар) называют **фазовым переходом**.

Фазовые превращения подразделяются на фазовые переходы **первого и второго рода**. К фазовым переходам первого рода относятся: плавление, затвердевание расплавов, парообразование, конденсация, сублимация и пр. При этом скачкообразно изменяются такие характеристики вещества, как плотность, концентрации компонентов, выделяется или поглощается теплота. Фазовый переход первого рода лежит в основе получения сжиженных газов путем их изотермического сжатия. **Сжиженные газы** – жидкости, находящиеся при так называемых криогенных температурах – температурах ниже 120 К. Они находят все более широкое применение в современной физике и энергетике, химии и металлургии, биологии и медицине, электронике и радиотехнике, авиации и космонавтике и т.д. для охлаждения различных элементов и устройств до криогенных температур. При значительном понижении температуры проявляются новые специфические свойства вещества. Образовалась самостоятельная отрасль промышленности – криогенное машиностроение, обеспечивающая оборудованием новые технологические процессы.

В основе фазовых переходов второго рода лежит изменение симметрии кристаллической решетки вещества без изменения типа этой решетки. Свойства таких переходов существенно отличны от свойств фазовых переходов первого рода. При этом теплота не поглощается и не выделяется, плотность вещества изменяется непрерывно. Примером фазового перехода второго рода может служить изменение магнитных свойств вещества при переходе из ферромагнитного состояния в парамагнитное, что будет рассмотрено далее.

### **3.13. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах**

Теперь, представив поведение ТД системы изнутри, описав движение частиц, составляющих эту систему, можем приступить к рассмотрению процессов, происходящих в таких системах. Однако до сих пор мы рассматривали равновесные системы, в которых термодинамические параметры во всех точках системы одинаковы. Ясно, что в подобных системах никаких процессов быть не может.

Если же систему вывести из состояния равновесия, изменив в какой-либо области один или несколько параметров, то возникнут необратимые

процессы, которые называются **процессами переноса**. При этом может происходить пространственный перенос энергии, импульса или массы до тех пор, пока ТД не сравняются и система не вернется в равновесное состояние.

Процесс возвращения системы в состояние равновесия называется **релаксацией**. В принципе процесс выравнивания ТД параметров бесконечно долгий. Для определенности время, в течение которого первоначальное отклонение ТД параметра от равновесного уменьшается в  $e$  раз, называется **временем релаксации**.

### 3.13.1. Перенос энергии (теплопроводность)

Если в одной из областей пространства средняя кинетическая энергия больше, чем в другой, то с течением времени из-за столкновений молекул и происходящего при этом обмена теплотой произойдет выравнивание энергий, которое выразится в выравнивании температур. Этот процесс описывается **законом Фурье**:

$$q = -\aleph \frac{dT}{dx} S, \quad (3.70)$$

где  $q$  – поток тепла (энергия, переносимая через площадку в направлении ее нормали за единицу времени) через поверхность  $S$ , перпендикулярную к оси  $x$ ;  $dT/dx$  – проекция градиента температуры на ось  $x$  (перепад температуры вдоль оси  $x$ );  $\aleph$  – коэффициент теплопроводности, зависящий от тепловых свойств среды.

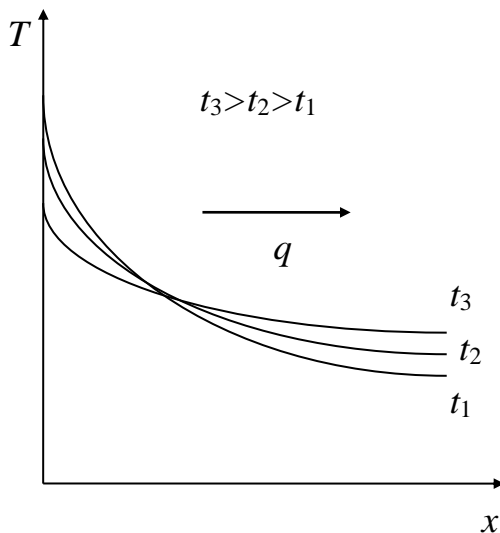


Рис. 3.17

Знак « $-$ » в (3.70) означает, что перенос тепла осуществляется в сторону убывания температуры.

Зависимость изменения температуры в процессе теплопереноса для различных моментов времени ( $t$ ) вдоль заданного направления  $x$  представлена на рис. 3.17.

Иногда закон Фурье записывается через плотность потока теплоты (поток теплоты, приходящийся на единицу поверхности), то есть

$$j_s = \frac{q}{S} = \left[ \frac{dq}{dS} \right] = -\aleph \frac{dT}{dx}. \quad (3.71)$$

В МКТ доказывается, что

$$\aleph = \frac{1}{3} c_v \rho v_{cp} \lambda, \quad (3.72)$$

где  $c_V$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $\rho$  – плотность вещества,  $v_{cp}$  – среднеквадратичная скорость теплового движения,  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега частиц вещества.

### 3.13.2. Перенос массы (диффузия)

Если в ТД системе создать в пространстве перепад концентрации частиц (градиент плотности), то со временем будет происходить **диффузия** – самопроизвольное выравнивание концентрации частиц, которое сопровождается перемешиванием частиц газа, жидкости и твердых тел. Таким образом, диффузия характеризуется переносом массы вещества из одной точки пространства в другую. МКТ в рамках модели идеального газа имела некоторые затруднения при объяснении явления диффузии, так как по теории из-за большой скорости движения частиц явление диффузии должно было бы происходить довольно быстро. На практике же наблюдается обратное явление: процесс диффузии достаточно медленный. Однако, если учесть процессы столкновения частиц и то, что средняя длина свободного пробега порядка  $10^{-5}$  см, то получим для диффузии время релаксации, совпадающее по порядку величины с наблюдаемым на практике.

Явление диффузии для химически однородного газообразного вещества описывается **законом Фика**:

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} S, \quad (3.73)$$

где  $M$  – поток массы вещества, то есть масса, переносимая за единицу времени через площадку площадью  $S$ , перпендикулярную к оси  $x$ ;  $d\rho/dx$  – проекция градиента плотности на ось  $x$ ;  $D$  – коэффициент диффузии.

Зависимость изменения плотности в процессе массопереноса для различных моментов времени ( $t$ ) вдоль заданного направления  $x$  представлена на рис. 3.18.

В другой форме записи:

$$j_m = \frac{dM}{dS} = -D \frac{d\rho}{dx}, \quad (3.74)$$

где  $j_m$  – плотность потока массы.

Для коэффициента диффузии МКТ дает соотношение

$$D = \frac{1}{3} v_{cp} \lambda. \quad (3.75)$$

### 3.13.3. Перенос импульса (внутреннее трение)

Если имеем некое вещество (жидкость или газ), различные слои которого движутся относительно друг друга с различными скоростями, то есть существует градиент скоростей (или импульсов, так как слои имеют

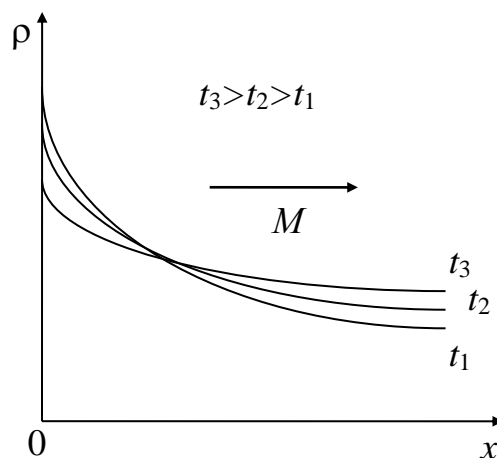


Рис. 3.18

определенную массу), то вследствие хаотичного движения частиц вещества происходит непрерывный обмен частицами между слоями. В результате этого импульс слоя, движущегося медленно, будет увеличиваться, соответственно импульс более быстрого слоя будет уменьшаться. Такое изменение импульса материи со временем в механике согласно второму закону Ньютона определяется действием силы, которая в данном случае называется силой вязкого трения:

$$F_x = -\eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S, \quad (3.76)$$

где  $dv/dz$  – проекция градиента скорости на ось  $z$ , перпендикулярную к направлению движения слоев;  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости (коэффициент вязкости);  $F_x$  – сила, действующая между слоями площадью  $S$ .

Если рассматривать этот процесс как перенос импульса, то получаем:

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dz}, \quad (3.77)$$

где  $j_p$  – плотность потока импульса.

В МКТ доказывается, что

$$\eta = \frac{1}{3} \rho v_{cp} \lambda. \quad (3.78)$$

Итак, для коэффициентов, определяющих различные виды переноса, имеем:

– коэффициент теплопроводности  $\kappa = \frac{1}{3} c_v \rho v_{cp} \lambda$ ;

– коэффициент диффузии  $D = \frac{1}{3} v_{cp} \lambda$ ;

– коэффициент вязкого трения  $\eta = \frac{1}{3} \rho v_{cp} \lambda$ .

Тогда

$$\kappa = c_v \rho D = c_v \eta. \quad (3.79)$$

Эта взаимосвязь коэффициентов определяется принципиальной общностью рассматриваемых процессов, различающихся лишь переносимым параметром.

### 3.14. Круговой процесс (цикл). КПД цикла

Исходной посылкой для развития ТД метода исследования свойств различных систем являлось стремление получить механическую работу за счет восполнения убыли механической энергии, происходящей вследствие неконсервативности всех реальных механических систем, другим видом энергии, например внутренней энергией системы. При этом, согласно первому началу ТД, часть внутренней энергии какого-либо тела можно преобразовать в механическую работу, например при сжигании топлива:

$$dU = \delta Q + \delta A' = \delta Q - \delta A,$$

где  $\delta A = PdV$ .

Понятно, что при этом для осуществления длительного процесса получения большого количества работы ( $A \rightarrow \infty$ ) необходимо, чтобы  $\Delta V \rightarrow \infty$ , что на практике явно непригодно.

Для достижения поставленной цели в ограниченном объеме ТД системе необходимо периодически возвращать в исходное состояние, то есть совершать колебательный процесс.

В термодинамике такие процессы, при которых ТД система, выйдя из исходного состояния, проходит ряд промежуточных и снова возвращается в исходное, называются **круговыми ТД процессами** или **ТД циклом**.

На диаграмме состояний такие процессы изображаются замкнутой линией (рис. 3.19).

Цикл, совершаемый ТД системой, можно разбить на участки расширения ( $AaB$ ) и сжатия ( $BbA$ ).

Работа расширения определяется площадью фигуры  $V_A AaB V_B$  и положительна ( $\Delta V > 0$ ), то есть  $A_a > 0$ . Работа же сжатия, определяемая площадью фигуры  $V_A AbB V_B$ , – отрицательна ( $\Delta V < 0$ ), то есть  $A_b < 0$ .

Полная работа ( $A_\Sigma$ ), совершаемая газом во всем цикле, определяется площадью фигуры, ограниченной замкнутой кривой  $AaBb$ :

$$A_\Sigma = A_a - A_b.$$

Если в ходе цикла суммарная совершаемая работа положительна ( $A_\Sigma > 0$ ), то цикл – прямой, если же отрицательна ( $A_\Sigma < 0$ ) – то обратный.

Прямой цикл используется в тепловых двигателях, устройствах для получения механической работы за счет полученной извне теплоты.

Обратный цикл – в холодильных машинах, которые за счет работы внешних сил совершают передачу теплоты от более холодного тела к более нагретому.

В любом случае в результате кругового процесса система возвращается в первоначальное состояние, и, таким образом, суммарное изменение внутренней энергии равняется нулю. Тогда, согласно первому началу термодинамики,  $Q = A$ . Так как в ходе процесса система получает и отдает определенное количество теплоты, то  $Q = Q_1 - Q_2$ , где  $Q_1$  – количество теплоты, полученное системой;  $Q_2$  – количество теплоты, системой отданное. Так как внутренняя

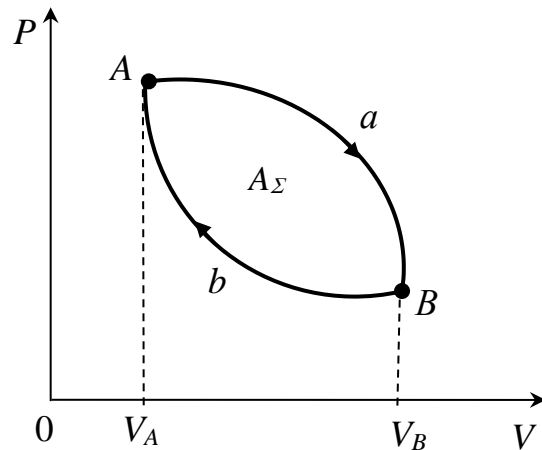


Рис. 3.19

энергия системы не меняется, то по закону сохранения энергии  $Q_1 - Q_2 = A_\Sigma$ , где  $A_\Sigma$  – работа, совершаемая в ходе замкнутого цикла.

Для характеристики эффективности использования полученного количества теплоты введем понятие **коэффициента полезного действия (КПД)** теплового двигателя как отношение полученной в ходе цикла работы к количеству полученной (затраченной) энергии (теплоты):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_\Sigma}{Q_1}. \quad (3.80)$$

### 3.15. Обратимые и необратимые процессы

Механическое движение тел в отсутствие сил трения обладает следующим свойством: каково бы ни было механическое движение тела, всегда возможно аналогичное обратное движение, то есть движение, при котором тело проходит те же точки пространства, с теми же скоростями, что и в прямом движении, но в обратном направлении.

Так, пренебрегая силой сопротивления воздуха, траектория тела, брошенного под углом к горизонту вблизи поверхности земли, будет представлять собой параболу. Абсолютно такой же траектория будет и в случае, если из точки падения бросить это же тело обратно под тем же углом. Упадет при этом тело в точке первоначального бросания.

Таким образом, при данных условиях механическое движение **обратимо**. Эту обратимость можно сформулировать как симметричность механического движения по отношению к замене направления протекания времени (замене знака величины времени), замене прошлого будущим и наоборот.

Совершенно иная ситуация наблюдается в области тепловых процессов. Если привести в соприкосновение два тела с разной температурой, то более нагретое тело будет отдавать тепло вследствие теплопередачи менее нагретому, но обратный самопроизвольный переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому никогда не наблюдается. Таким же необратимым процессом является процесс расширения газа из некоторого резервуара в другой, в котором первоначально газа нет. Газ, расширяясь, займет оба объема, но самопроизвольно обратно в первый резервуар полностью никогда не вернется.

Вообще всякая предоставленная себе система тел (совокупность термодинамических систем), способная обмениваться энергией, стремится перейти в состояние термодинамического равновесия, в котором тела покоятся относительно друг друга, обладая одинаковыми температурами и давлением. Достигнув этого состояния, система сама по себе из него уже не выйдет. Другими словами, все тепловые явления, сопровождающиеся процессами приближения к тепловому равновесию, **необратимы**.

Применительно к круговому процессу понятие обратимости и необратимости можно определить следующим образом.

В ходе кругового процесса система получает извне и отдает в окружающую среду теплоту. За счет этого в окружающей среде могут произойти некоторые изменения, которые приведут к изменениям в системе так, что возвращение системы в исходное состояние через промежуточные состояния первоначального процесса будет невозможным. Такого рода процессы называются **необратимыми**.

Обобщаем: все реальные процессы (механические, тепловые и т.д.) – необратимы, так как они всегда сопровождаются процессами рассеяния энергии системы в окружающее пространство за счет наличия процессов трения, теплопередачи (теплопроводность, лучеиспускание) и т.д. Однако в некоторых случаях степень необратимости может оказаться настолько незначительной, что процесс можно с достаточной точностью считать обратимым.

**Обратимым** называют процесс, в котором изменением параметров окружающих тел (окружающей среды) можно пренебречь. При этом и прямое, и обратное направления процесса равновероятны, равнозначны и равновозможны. Для достижения обратимости в системе должны отсутствовать процессы, имеющие характер приближения к равновесному состоянию, то есть не должно быть непосредственной передачи теплоты от нагретого тела к холодному и не должно быть трения при движении тел. Естественно, такие системы идеализированы и на практике не встречаются.

Приближением к обратимому процессу могут быть очень медленно протекающие процессы, в принципе – бесконечно долгие, состоящие из бесконечного ряда равновесных состояний. Из каждого такого состояния все равно, куда двигаться: в прямом направлении или обратном.

Несмотря на идеализированный характер обратимых процессов, изучение их представляет особый практический интерес, так как они являются наиболее экономичными и имеют максимальный при заданных исходных параметрах КПД, что позволяет указать пути увеличения КПД реальных тепловых машин и холодильников.

### 3.16. Идеальная тепловая машина. Цикл Карно

Анализируя работу тепловых машин, французский инженер Сади Карно (1824 г.) пришел к выводу, что наивыгоднейшим круговым тепловым процессом (циклом) является обратимый процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, показанный на рис. 3.20, так как он имеет максимально возможный при данных условиях КПД. Такой цикл получил название «**цикл Карно**».

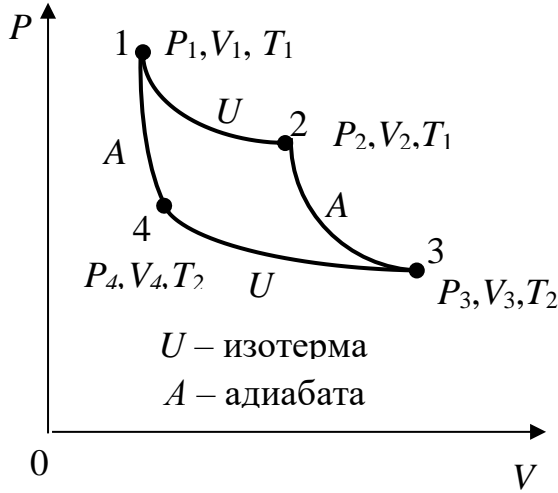


Рис. 3.20

Пусть имеется система из двух тел с различными температурами, условно называемых «нагреватель» и «холодильник» («охладитель»). Если их просто привести в тепловой контакт, то тепло напрямую перейдет от нагретого тела к холодному и никакой работы совершаться не будет. Если мы желаем извлечь из имеющихся тел максимальную работу, то мы должны привлечь еще одно промежуточное тело – **рабочее тело** (обычно газ) и использовать только обратимые процессы, в которых отсутствует потеря энергии.

В ходе кругового обратимого процесса нагреватель передает термодинамической системе теплоту  $Q_1$  в процессе 1-2, а охладитель отбирает от системы теплоту  $Q_2$  в процессе 3-4. Тогда для КПД цикла с учетом того, что для изотермического процесса

$$Q_1 = A_1 = RT_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \text{ и } Q_2 = A_2 = RT_2 \ln \left( \frac{V_3}{V_4} \right), \text{ получаем}$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{RT_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) - RT_2 \ln \left( \frac{V_3}{V_4} \right)}{RT_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)}. \quad (3.81)$$

Применяя уравнение адиабаты  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$  для участков 2-3 и 4-1, выражение для КПД цикла Карно можно переписать в виде

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (3.82)$$

Из него видно, что даже в идеальном случае  $\eta < 1$ . Равенство  $\eta = 1$  достигается только в случае  $T = 0$  К, что в принципе недостижимо. Для реальных машин, работающих по циклам, состоящим из необратимых процессов, КПД еще меньше, чем у цикла Карно.

При выводе формулы (3.82) не делалось никаких предположений о свойствах рабочего тела и устройстве тепловой машины. Поэтому можно утверждать, что КПД всех обратимых машин (КПД цикла Карно), работающих в одинаковых условиях (при одинаковой температуре нагревателя и холодильника), одинаково и определяется только температурами нагревателя и холодильника. Это утверждение носит название **леммы Карно**.



### 3.17. Второе начало термодинамики. Энтропия

Первое начало термодинамики по сути представляет собой закон сохранения энергии в изолированной системе в случае, если в ней происходят механические и тепловые процессы. Из него следует, что без расходования энергии совершение механической работы невозможно (невозможен так называемый вечный двигатель первого рода).

Однако этот закон не указывает направление протекания процессов. Так, из него следует, что возможно **полностью** преобразовать тепловую энергию в механическую и наоборот.

Опыт конструирования тепловых двигателей показал, что это не так. Ранее указывалось, что коэффициент полезного действия любого реального двигателя всегда меньше единицы, так как часть энергии системы обязательно рассеивается в окружающую среду.

Обобщая эти факты, в 1850 г. немецкий физик Р. Клаузиус сформулировал следующее утверждение: **невозможен процесс, в ходе которого происходит самопроизвольный переход теплоты от более холодных тел к более нагретым (второе начало термодинамики).**

Независимо от него в 1851 г. У. Томсон (лорд Кельвин) дал второму началу несколько другую формулировку: **невозможно построить периодически действующую тепловую машину, вся деятельность которой сводилась бы к совершению механической работы и охлаждению теплового резервуара.**

Для количественной характеристики направленности термодинамических процессов в 1854 г. Клаузиус ввел новую функцию состояния – **энтропию**, элементарное изменение которой определяется как

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (3.83)$$

В интегральной форме:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (3.84)$$

При обратимых процессах полное изменение энтропии равно нулю, при необратимых –  $\Delta S > 0$ . В общем случае  **$\Delta S \geq 0$ : энтропия изолированной системы при любом происходящем в ней процессе не может убывать.**

Так как все реальные процессы (тепловые, механические и т.д.) являются необратимыми, то в результате их протекания энтропия системы возрастает. Таким образом, с чисто практической точки зрения изучение распределения энтропии позволяет определить направление естественных процессов, которые могут происходить в системе.

Все вышесказанное можно выразить следующей формулировкой второго начала **термодинамики**: **в изолированной системе при всех реальных процессах энтропия возрастает, или невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение в работу теплоты, полученной от нагревателя.**

При приближении температуры к абсолютному нулю энтропия макросистемы также стремится к нулю:

$$S \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow 0. \quad (3.85)$$

Данное выражение носит название **теоремы Нернста**, которая не может быть логически выведена из первых двух начал, поэтому ее часто называют **третьим началом термодинамики**.

Математически первое и второе начала ТД можно объединить **одним** выражением:

$$dU + \delta A \leq TdS. \quad (3.86)$$

Произведение  $TdS$  (произведение температуры, при которой происходит процесс, и приращения энтропии в этом процессе) определяет рассеяние энергии системы и называется **связанной энергией**. Разность  $dU - TdS = dF$  называется **свободной энергией системы**.

Таким образом, внутренняя энергия системы состоит из двух слагаемых:

- **свободной энергии**, которая может превращаться в другие виды энергии и работу без компенсации;
- **связанной энергии**, которая может превращаться в другие виды энергии только ценой компенсации (восполнения), а эта компенсация приводит к возрастанию энтропии системы.

Другими словами, если электропечь израсходовала на нагревание комнаты 100 кВт/ч электроэнергии, то это тепло без потерь и добавления энергии извне вновь перевести в 100 кВт/ч электроэнергии невозможно.

### 3.18. Статистический смысл энтропии. Термодинамическая вероятность

Все естественные процессы направлены к состоянию равновесия. Так как при этом энтропия возрастает, то устойчивому (равновесному) состоянию изолированной системы соответствует максимальное значение энтропии. Из этого положения можно выяснить статистический смысл энтропии.

С точки зрения молекулярно-кинетической теории (с точки зрения статистического метода исследования) каждому ТД состоянию системы соответствует некоторое распределение ее молекул по объему и скоростям (энергиям) теплового движения. Характеристикой возможности осуществления именно такого распределения при заданных условиях в статистике служит

величина, которая называется вероятностью данного события ( $w$ ). Например, если при данных условиях могут осуществляться  $N$  равновозможных состояний (распределений), то вероятность нахождения системы в каком-то одном из них будет  $w=1/N$ . Однако так как все частицы в ТД системе принимаются совершенно идентичными, то вследствие неразличимости каждой отдельно взятой частицы вероятность осуществления данного ТД состояния будет выше, чем вероятность осуществления данного распределения в том случае, когда каждая из частиц различима (помечена). Таким образом, вероятность  $W$  какого-либо состояния системы в  $P$  раз больше вероятности отдельного распределения, то есть

$$W = wP. \quad (3.87)$$

Величина  $P$  называется термодинамической **вероятностью состояния системы**. Она равна **числу возможных микрораспределений частиц по координатам и скоростям, соответствующих данному ТД состоянию (макросостоянию)**. В отличие от  $W$  и  $w$ , которые всегда не превышают единицы,  $P$  всегда больше или равна единице.

Л. Больцман показал (1875 г.), что между энтропией системы и ТД вероятностью состояния существует связь, выражаемая формулой

$$S = k \ln(P), \quad (3.88)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Таким образом, максимальное значение энтропии соответствует наиболее вероятному состоянию системы. Так как все системы, естественно, переходят из состояния, характеризуемого меньшей вероятностью осуществления, в состояние с большей вероятностью, то из формулы Больцмана также следует второе начало ТД (возрастание энтропии).

## Библиографический список

1. Физическая энциклопедия / под ред. А.М. Прохорова. Т. 1 – 5. М.: Сов. энциклопедия; Большая российская энциклопедия, 1988 – 1998.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – М.: Академия, 2009. 8-е изд., стереотип. – 720 с.
3. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – М.: Академия, 2010. 18-е изд., стереотип. – 560 с.
4. Иродов И.Е. Механика. Основные законы: учебник. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. 12-е изд. – 309 с.
5. Иродов И.Е. Физика макросистем. Основные законы: учебник. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015. 4-е изд. – 207 с.
6. Савельев И.В. Курс физики: учебник. Том 1: Механика. Молекулярная физика. – М.: Лань, 2008. 4-е изд., стереотип. – 354 с.
7. Орир Дж. Физика: учебник / пер. с англ. и научная редакция Ю.Г. Рудого и А.В. Беркова. – М.: КДУ, 2010. – 752 с.
8. Купер Л.Н. Физика для всех. Введение в сущность и структуру физики. Т.1, 2. – М.: Мир, 1973-1974.
9. Гнедина Т.Е. Физика и творчество в твоей профессии: книга для учащихся старших классов. – М.: Просвещение, 1988. – 160 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	Введение в дисциплину .....	1
1.1.	Физика: ее место в естествознании .....	1
1.2.	Становление научного метода познания .....	4
1.3.	Эволюция идей. Опыт, закон, теория .....	7
1.4.	История развития естествознания (физики) .....	9
2.	Основы механики .....	11
2.1.	Кинематика .....	11
2.1.1.	Материальная точка. Система отсчета .....	11
2.1.2.	Кинематика точки. Путь. Перемещение .....	13
2.1.3.	Скорость .....	15
2.1.4.	Ускорение .....	17
2.1.5.	Кинематика твердого тела. Вращение вокруг неподвижной оси. Угловые скорость и ускорение .....	21
2.1.6.	Связь между угловыми и линейными скоростями и ускорениями .....	22
2.2.	Динамика материальной точки .....	23
2.2.1.	Сила. Масса и импульс .....	23
2.2.2.	Первый закон Ньютона. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета .....	25
2.2.3.	Второй закон Ньютона как уравнение движения .....	26
2.2.4.	Третий закон Ньютона .....	27
2.2.5.	Закон Всемирного тяготения. Сила тяжести и вес тела .....	28
2.2.6.	Упругие силы .....	30
2.2.7.	Силы трения .....	33
2.3.	Динамика твердого тела .....	35
2.3.1.	Момент силы .....	36
2.3.2.	Основной закон динамики вращательного движения .....	38
2.3.3.	Момент инерции .....	40
2.3.4.	Примеры вычисления момента инерции .....	42
2.4.	Механическая энергия. Законы сохранения в механике .....	43
2.4.1.	Механическая энергия .....	43
2.4.2.	Работа силы. Мощность .....	44
2.4.3.	Кинетическая энергия тела .....	46
2.4.4.	Потенциальная энергия. Виды потенциальной энергии .....	47
2.4.5.	Законы сохранения в механике. Понятие интегралов движения .....	49
2.5.	Основы релятивистской механики .....	51
2.5.1.	Законы Ньютона в инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Преобразования Галилея, принцип относительности Галилея 51	
2.5.2.	Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца, следствия из них. 53	
2.5.3.	Основные понятия релятивистской динамики .....	55

2.6. Механические колебания .....	56
2.6.1. Гармонические колебания .....	57
2.6.2. Математический и физический маятники .....	59
2.6.3. Затухающие колебания .....	61
2.6.4. Вынужденные колебания.....	62
3. Основы статистической физики и термодинамики.....	64
3.1. Статистический и термодинамический методы исследования .....	64
3.2. Термодинамическая система и ее параметры. Равновесные состояния и процессы, их изображение на термодинамических диаграммах.....	66
3.3. Уравнение состояния идеального газа.....	68
3.4. Основное уравнение МКТ идеального газа.....	68
3.5. Внутренняя энергия термодинамической системы (газа). Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул .....	71
3.6. Работа газа при изменении его объема .....	73
3.7. Количество теплоты. Теплоемкость .....	73
3.8. Первое начало термодинамики .....	74
3.9. Теплоемкость идеального газа .....	78
3.10. Законы распределения частиц во внешнем потенциальном поле и по энергиям (скоростям) движения .....	80
3.11. Среднее число столкновений и средняя длина пробега молекул газа .....	85
3.12. Реальные газы и пары .....	86
3.13. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах 87	
3.13.1. Перенос энергии (теплопроводность).....	88
3.13.2. Перенос массы (диффузия).....	89
3.13.3. Перенос импульса (внутреннее трение).....	89
3.14. Круговой процесс (цикл). КПД цикла .....	90
3.15. Обратимые и необратимые процессы .....	92
3.16. Идеальная тепловая машина. Цикл Карно .....	93
3.17. Второе начало термодинамики. Энтропия .....	95
3.18. Статистический смысл энтропии. Термодинамическая вероятность .....	96
Библиографический список .....	98