## Вопрос 3. Интегрирование путем замены переменной

Существуют два варианта вычисления неопределенного интеграла ***методом замены переменной*: *метод подстановки* и *метод подведения под знак дифференциала***, в которых одна и та же формула используется слева направо и справа налево.

### 3.1. Интегрирование путем замены переменной (подведение функции под знак дифференциала)

Инвариантность формы записи неопределенного интеграла

$$\int f(x)dx = \int f(u)du = \int f(z)dz = \ldots$$

Пусть подынтегральная функция в неопределенном интеграле может быть представлена в виде

$$f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Введем новую переменную. Заменим функцию $\varphi(x)$ за новую переменную $u=\varphi(x)$. Тогда дифференциал $du=\varphi'(x)dx$.

В результате получим схему вычисления неопределенного интеграла:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left|\begin{array}{l} u=\varphi(x), \\ du=\varphi'(x)dx \end{array}\right| = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du}. \quad (3.1)$$

Свое название этот метод получил потому, что в процессе преобразования

$$\varphi'(x)dx = d\varphi(x) = du$$

функция $\varphi(x)$ подводится под знак дифференциала.

**Пример 3.1.** Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx.$$

**Решение.** Замечая, что $\frac{1}{x}=(\ln x)'$, применим формулу (3.1):

$$\int \sin(\ln x)\frac{dx}{x} = \left|\begin{array}{l} u=\varphi(x)=\ln x, \\ du=\varphi'(x)dx=\dfrac{dx}{x} \end{array}\right| = \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos(\ln x) + C,$$

или же

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int \sin(\ln x)\cdot(\ln x)'\,dx = \int \sin(\ln x)\,d(\ln x) = -\cos(\ln x) + C.$$

**Пример 3.2.** Вычислить неопределенный интеграл

$$I = \int e^{\sin x}\cdot \cos x dx.$$

**Решение.** Замечая, что $\cos x = (\sin x)'$, применим (3.1):

$$I = \int e^{\sin x}\cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = \varphi(x) = \sin x, \\ du = \varphi'(x)dx = \cos x dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int e^u du = e^u + C = e^{\sin x} + C$$

или же

$$I_1 = \int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

**Пример 3.3.** Вычислить неопределенный интеграл

$$I = \int e^{\cos^2 x}\cdot \sin(2x)dx.$$

**Решение.** Если обозначить $u = \varphi(x) = \cos^2 x$, то

$$du = \varphi'(x)dx = 2\cos x\cdot(-\sin x)dx = -\sin(2x)dx.$$

Применяя формулу (3.1), получим

$$I = \int e^{\cos^2 x}\cdot \sin(2x)dx = \left| \begin{matrix} u = \varphi(x) = \cos^2 x, \\ du = -\sin(2x)dx, \\ \sin(2x)dx = -du \end{matrix} \right| =$$

$$= \int e^u(-du) = -\int e^u du = -e^{\cos^2 x} + C$$

или по-другому

$$I = \int e^{\cos^2 x}\cdot \sin(2x)dx = -\int e^{\cos^2 x}\cdot d(\cos^2 x) = -\int e^u du = -e^{\cos^2 x} + C.$$

**Пример 3.4.** Вычислить неопределенный интеграл

$$I=\int \frac{ctg\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx.$$

**Решение.** Замечаем, что $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, т.е. в подынтегральном выражении не хватает множителя 1/2.

$$I=\int \frac{ctg\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{c} u=\varphi(x)=\sqrt{x}, \\ du=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}\Rightarrow\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2du \end{array}\right|=\int ctg(u)\cdot 2du=$$

$$=2\underbrace{\int ctg(u)du}_{T13}=2\ln\left|\sin u\right|+C=2\ln\left|\sin\sqrt{x}\right|+C.$$

## 3.2. Интегрирование путем замены переменной (метод подстановки)

Пусть требуется вычислить неопределенный интеграл $\int f(x)dx$. Введем новую переменную $t$ путем замены (подстановки) $x=\varphi(t)$ таким образом, чтобы функция $\varphi$ была дифференцируемой и имела обратную функцию $t=\varphi^{-1}(x)$. Далее, справедливой оказывается следующая формула:

$$\boxed{\int f(x)dx=\left|\begin{array}{c} x=\varphi(t), \\ dx=\varphi'(t)dt, \end{array}\right|=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,} \tag{3.2}$$

где интеграл справа может оказаться проще исходного интеграла. После вычисления интеграла справа следует вернуться к исходной переменной $x$.

**Пример 3.5.** Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}.$$

**Решение.** Обозначим знаменатель подынтегральной функции буквой $t$, т.е. введем сначала обратную функцию $t=e^x+1$. Тогда $e^x=t-1 \Rightarrow x=\ln(t-1)=\varphi(t)$, $dx=\dfrac{dt}{t-1}$. Заметим, что $e^{2x}=(t-1)^2$. Применяем формулу (3.2):

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}=\left|\begin{array}{l} t=e^x+1, \\ x=\varphi(t)=\ln(t-1), \\ dx=\varphi'(t)dt=\dfrac{dt}{t-1} \end{array}\right|=\int \frac{(t-1)^2}{t}\cdot\frac{dt}{t-1}=\int\frac{(t-1)dt}{t}=\int dt-\int\frac{dt}{t}=$$

$$=t-\ln t+C_1=e^x+1-\ln\left(e^x+1\right)+C_1=e^x-\ln\left(e^x+1\right)+C,$$

где $C=C_1+1$ (введена новая произвольная постоянная).

**Пример 3.6.** Вычислить неопределенный интеграл

$$\boxed{\int\sqrt{4-x^2}dx}.$$

**Решение.** Введем подстановку

$$\boxed{x=2\sin t=\varphi(t).}$$

При этом $t=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $dx=d(2\sin t)=2\cos t\cdot dt$. Подставим:

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\sqrt{4-(2\sin t)^2}\cdot 2\cos t\cdot dt=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\cdot dt=$$

$$=\int\sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}\cdot 2\cos t\cdot dt=4\int\sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\cdot dt=4\int\cos^2 t\cdot dt=$$

$$=4\int\frac{1+\cos 2t}{2}\cdot dt=2\int(1+\cos 2t)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=2t+\sin 2t+C,$$

где $t=\arcsin(x/2)$.