Тема 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения

11.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Вопрос 1. Задача, приводящая к понятию дифференциального уравнения

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту или иную задачу, с какой-либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

Задача. Предположим, что материальная точка P движется по прямой, которую принимаем за ось x, так что в момент времени t точка занимает положение x (рис. 1.а).

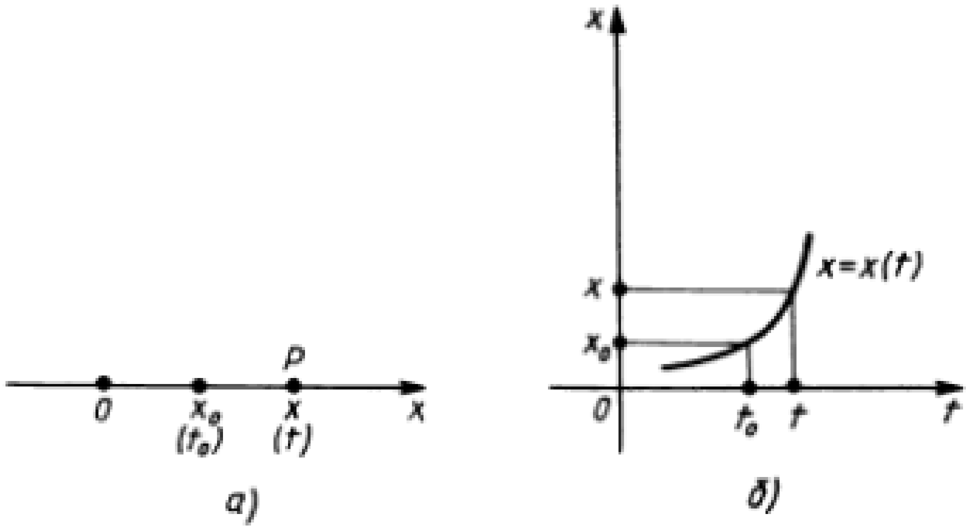

Рис. 1.

Пусть известна скорость движения $f(t)$ как непрерывная функция от времени t. Требуется найти закон движения точки - зависимость x от времени t, $x = x(t)$ (рис. 1.б), если известно, что в некоторый момент времени t_0 точка занимает начальное положение $x_0 = x(t_0)$.

Решение. Известно, что скорость движения рассматриваемой точки в момент времени t равна производной $x'(t)$:

$$x'(t) = f(t). \tag{1}$$

Уравнение (1) называется **дифференциальным уравнением движения**. Интегрирование этого уравнения состоит в нахождении всех первообразных для функции $f(t)$ в общем виде

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + C \quad (C = const). \tag{2}$$

Чтобы найти интересующее решение (движение материальной точки), удовлетворяющее начальному условию $x_0 = x(t_0)$, подставим в равенство (2) значения t_0, x_0:

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_0} f(t)\,dt + C \Leftrightarrow x_0 = 0 + C \Leftrightarrow C = x_0.$$

Искомым решением задачи является функция

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + x_0. \tag{3}$$

Формула (3) дает закон движения материальной точки. Условие $x_0 = x(t_0)$ называется **начальным условием**, а числа t_0, x_0 — начальными данными решения (движения).

Вопрос 2. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое содержит производные от искомой функции и может содержать искомую функцию и независимую переменную. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Например, уравнение

$$x^3 y'' + 8y' - xy^2 + 5 = 0 \tag{1}$$

есть обыкновенное дифференциальное уравнение, а уравнение

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}x^3+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}y-x=0$$

есть дифференциальное уравнение в частных производных.

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

В общем виде обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка записывается в виде

$$F\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}\right)=0, \tag{2}$$

где $F-$ некоторая заданная функция от своих аргументов.

В большинстве случаев рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной:

$$y^{(n)}=f\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right). \tag{3}$$

(**уравнение задано в нормальной форме**).

Например, нормальной формой записью уравнения второго порядка $(1+x^3)y''+xy^2y'-5=0$ является уравнение

$$y''=-\frac{xy^2}{1+x^3}\cdot y'+\frac{5}{1+x^3}.$$

Вопрос 3. Понятие решения обыкновенного дифференциального уравнения

Задано дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$F\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}\right)=0. \qquad (1)$$

Определение 1. Всякая функция $y=y(x)$, определенная и непрерывная в интервале (a,b) вместе со своими производными до n -го порядка, и обращающая уравнение (1) в тождество, называется **решением** уравнения (1) в (a,b):

$$F\left(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)\right)\equiv 0, \quad x\in(a,b).$$

График решения дифференциального уравнения (1) называется **интегральной кривой** уравнения.

Пример 1. Функция $y=y(x)=\sin x$ является решением дифференциального уравнения

$$y''+y=0$$

на любом интервале $x\in(a,b)$, так как $(\sin x)''+\sin x\equiv 0$.

Заметим, что решениями данного уравнения являются следующие функции

$$y=\cos x, \quad y=C_1\sin x+C_2\cos x \quad (C_1,C_2=const).$$

Пример 2. Функция $y=\dfrac{1}{1-x}$ является решением дифференциального уравнения $y'=y^2$ на любом из интервалов $x\in(-\infty,1)$, $x\in(1,+\infty)$, так как

$$y'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}=y^2.$$

Вопрос 4. Уравнение первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид (общий вид записи)

$$\boxed{F(x, y, y') = 0}, \tag{1}$$

где $F -$заданная функция от своих аргументов.

Нормальная форма записи уравнения 1-го порядка:

$$\boxed{y' = f(x, y)}. \tag{2}$$

Функция $y = y(x)$, определенная и непрерывная в интервале (a, b) вместе со своей производной, и обращающая это уравнение в тождество, справедливое при всех значениях переменной $x \in (a, b)$, называется **решением** уравнения (1):

$$\boxed{F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b)}.$$

Задача Коши (**начальная задача**): найти решение $y = y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию (условию Коши) $y = y_0$ при $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0.$$

Геометрически речь идет о нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Пусть дано дифференциальное уравнение, записанное в нормальной форме

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{2}$$

и начальное условие $y(x_0) = y_0$.

Теорема (**Пикар**). Если правая часть $f(x,y)$ уравнения (1) непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и имеет в ней непрерывную частную производную $f_y'(x,y)$, то в этой окрестности уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение $y=\varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Пример. Дано уравнение $y'=-\dfrac{y}{x}$.

Это уравнение задано на всей координатной плоскости переменных x, y, кроме оси ординат ($x=0$). В окрестности любой точки $M_0(x_0,y_0)$ ($x_0\neq 0$) для функции

$$f(x,y)=-\frac{y}{x}$$

выполняются оба условия теоремы Пикара. Поэтому через любую точку $M_0(x_0,y_0)$ ($x_0\neq 0$) проходит одна, и только одна интегральная кривая $y=\varphi(x)$. Непосредственно проверяется, что интегральными кривыми являются равнобокие гиперболы

$$y=\varphi(x)=\frac{C}{x}\ \ (C=const).$$

Вопрос 5. Общее и частное решения дифференциального уравнения первого порядка

Дано дифференциальное уравнение, записанное в нормальной форме

$$y' = f(x, y). \qquad (1)$$

Пусть D – некоторая область переменных x, y, в которой выполняются условия теоремы Пикара (через каждую точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ проходит одна единственная интегральная кривая уравнения (1)).

Определение 1. **Общим решением** уравнения (1) называется такая дифференцируемая функция

$$y = \varphi(x,\ C) \ (C = const), \qquad (2)$$

которая при подстановке в уравнение (1) вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество:

$$\varphi'(x,\ C) \equiv f(x,\ \varphi(x,\ C)).$$

Знание общего решения (2) дает возможность решить задачу Коши с любыми начальными данными $M_0(x_0, y_0) \in D$ за счет выбора соответствующего значения постоянной C.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y' = 2x.$$

Общим решением уравнения является функция

$$y = \varphi(x, C) = x^2 + C \quad (C = const).$$

Возьмем произвольное начальное условие x_0, y_0. Подставляя его в общее решение, получим значение постоянной:

$$y_0 = x_0^{\ 2} + C \Rightarrow C_0 = y_0 - x_0^{\ 2}.$$

При этом решение задачи Коши с начальным условием x_0, y_0 имеет вид

$$y = \varphi(x) = x^2 + y_0 - x_0^{\ 2}.$$

Определение 2. Общее решение уравнения (1), записанное в виде, не разрешенном относительно искомой функции:

$$\Phi(x,y,C)=0 \quad (C=const), \tag{3}$$

называется **общим интегралом** уравнения (1).

Пример 2. Для дифференциального уравнения 1-го порядка

$$x\cdot y'+y=0$$

общим интегралом является равенство

$$\ln y+\ln x=C \ \ (C=const).$$

<u>**Покажем это**</u>. Продифференцируем обе части последнего равенства по переменной x:

$$(\ln y)'+(\ln x)'=(C)' \Leftrightarrow \frac{1}{y}\cdot y'+\frac{1}{x}=0.$$

Выражая производную y', получим $y'=-\dfrac{y}{x}$. Подставив полученную производную в дифференциальное уравнение, получим тождество:

$$x\cdot y'+y=0 \Leftrightarrow x\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)+y=0 \Leftrightarrow -y+y\equiv 0.$$

Определение 3. Решение, содержащееся в формуле общего решения $y=\varphi(x,C)$ ($C=const$) уравнения (1), т. е. получающееся из нее при конкретном допустимом числовом значении постоянной C, называется **частным решением** уравнения (1).

Пример 3. Для уравнения первого порядка

$$y'=2y$$

его общим решением является функция

$$y=\varphi(x,\ C)=Ce^{2x} \ \ (C=const).$$

Задавая начальное условие $x_0=0,\ y_0=1$, найдем частное решение уравнения (решим задачу Коши с заданным начальным условием). Для этого подставляем в общее решение значения $x_0=0,\ y_0=1$, получим:

$$y_0=Ce^{2x_0} \Leftrightarrow 1=C\cdot e^{2\cdot 0} \Leftrightarrow 1=C\cdot 1 \Leftrightarrow C=1.$$

В результате частное решение имеет вид

$$y = 1 \cdot e^{2x} = e^{2x}.$$

Пример 2. Для дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y' + \cos x \cdot y = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

его общим решением является функция

$$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1 \quad (C = const).$$

Найдем частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $(x_0, y_0) = (0, 2)$.

$$2 = Ce^{-\sin 0} + \sin 0 - 1 \Leftrightarrow 2 = C - 1 \Leftrightarrow C = 3.$$

В результате частное решение имеет вид

$$y = 3e^{-\sin x} + \sin x - 1.$$