М.В. Дубков, М.А. Буробин,
В.В. Иванов, А.Е. Малютин,
А.П. Соколов

ОБЩАЯ ФИЗИКА

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

ЧАСТЬ 3

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

М.В. ДУБКОВ, М.А. БУРОБИН, В.В. ИВАНОВ,
А.Е. МАЛЮТИН, А.П. СОКОЛОВ

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Часть 3
ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом РГРТУ
в качестве учебного пособия для студентов,
изучающих дисциплину «Физика» по всем направлениям
подготовки инженерного профиля (уровни: 3, 5)
(квалификации: «бакалавр», «специалист»)*

Москва
КУРС
2021

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
Д79

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

Рецензенты:

Волков С.С. — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры автомобильной техники Федерального государственного казенного военного образовательного учреждения высшего образования «Рязанское гвардейское высшее воздушно-десантное ордена Суворова дважды Краснознаменное командное училище имени генерала армии В.Ф. Маргелова»;

Степанов В.А. — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры «Общая и теоретическая физика и МПФ» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»

Дубков М.В.,

Д79 Общая физика. Ч. 3. Практические занятия : учеб. пособие / М.В. Дубков, М.А. Буробин, В.В. Иванов, А.Е. Малютин, А.П. Соколов. — М.: КУРС, 2021. — 240 с.

ISBN 978-5-907228-76-4

Настоящее издание представляет собой учебное пособие для проведения практических занятий по курсу физики. В пособии рассматриваются основные методы решения задач по различным разделам физики: механике, молекулярной физике и термодинамике, волновой и квантовой оптике, квантовой и ядерной физике. По каждому разделу приведены основные законы и теоретические соотношения и предложен ряд задач для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для изучения дисциплины «Физика» студентами, обучающимися по направлениям подготовки бакалавров и специальностям, относящимся к разделу «Инженерное дело, технологии и технические науки» Общероссийского классификатора специальностей по образованию, и соответствует требованиям соответствующих федеральных государственных образовательных стандартов.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-5-907228-76-4

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1.1. Основные формулы

Положение материальной точки в пространстве задается радиусом-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \tag{1.1}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы направлений (орты); x, y, z — координаты точки.

Уравнение траектории в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Вектор перемещения:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\,. \tag{1.3}$$

Средняя скорость перемещения:

$$\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\,, \tag{1.4}$$

где $\Delta\vec{r}$ — вектор перемещения материальной точки за интервал времени Δt.

Средняя скорость перемещения:

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}\,, \tag{1.5}$$

где ΔS — путь, пройденный материальной точкой за интервал времени Δt.

Мгновенная скорость:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,. \tag{1.6}$$

Модуль мгновенной скорости:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\,, \tag{1.7}$$

где $\upsilon_x = dx/dt$, $\upsilon_y = dy/dt$, $\upsilon_z = dz/dt$ — проекции вектора $\vec{\upsilon}$ на оси x, y, z.

Зная зависимость модуля мгновенной скорости от времени $\upsilon(t)$, можно найти путь, пройденный материальной точкой за заданный отрезок времени $t_2 - t_1$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt\,. \tag{1.8}$$

Среднее ускорение:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}\,, \tag{1.9}$$

где $\Delta\vec{\upsilon}$ — изменение вектора скорости материальной точки за интервал времени Δt.

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\,. \tag{1.10}$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \tag{1.11}$$

где $a_x = d\upsilon_x/dt$, $a_y = d\upsilon_y/dt$, $a_z = d\upsilon_z/dt$ — проекции вектора $\vec{a}$ на оси x, y, z.

При криволинейном движении ускорение в каждой точке можно представить как сумму нормальной $\vec{a}_n$ и тангенциальной $\vec{a}_\tau$ составляющих:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau\,. \tag{1.12}$$

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,, \tag{1.13}$$

где $a_\tau = d\upsilon/dt$, $a_n = \upsilon^2/R$; R — радиус кривизны траектории в данной точке.

Кинематическое уравнение для равноускоренного (a = const) движения:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,, \tag{1.14}$$

где $\vec{r}_0$ и $\vec{\upsilon}_0$ — радиус-вектор и вектор скорости точки соответственно в начальный момент времени.

Скорость при равноускоренном движении:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t\,. \tag{1.15}$$

В случае равномерного (a = 0, υ = const) движения уравнение (1.14) имеет вид

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}t\,. \tag{1.16}$$

1.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Движение материальной точки задано уравнением

$$x(t) = At + Bt^2\,,$$

где A = 4 м/с; B = –0,05 м/с^2.

Определить координату в момент времени, в который скорость точки равна нулю.

Решение.

В данной задаче рассматривается одномерное движение, поэтому мгновенную скорость в зависимости от времени найдем как

$$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A + 2Bt\,.$$

Теперь определим момент времени t_0, в который скорость равна нулю:

$$\upsilon(t_0) = 0;$$
$$A + 2Bt_0 = 0;$$
$$t_0 = -A/(2B).$$

В итоге координата в момент времени t_0 равна

$$x(t_0) = At_0 + Bt_0^2 = -\frac{A^2}{2B} + \frac{A^2}{4B} = -\frac{A^2}{4B} = 80 \text{ м}.$$

Ответ: 80 м.

Задача 2.

Движение материальной точки задано уравнением

$$x(t) = At + Bt^2,$$

где $A = 2$ м/с; $B = -0{,}5$ м/с^2.

Определить среднюю путевую скорость $\upsilon_{\text{ср}}$ движения точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

Решение.

Среднюю путевую скорость найдем из выражения

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{S}{t_2 - t_1}.$$

Для того чтобы определить пройденный путь S, построим график зависимости $x(t)$. Из графика (рис. 1.1) видно, что начальный участок пути равен длине отрезка $S_1 = x_{\max} - x_1$, который точка прошла за интервал времени $t_{\max} - t_1$. Затем координата x материальной точки убывает, путь же продолжает расти по такому же закону. Тогда конечный участок пути равен длине отрезка $S_2 = x_{\max} - x_2$, который точка прошла за интервал $t_2 - t_{\max}$.

Момент времени $t_{\max}$ определим из условия экстремума функции $x(t)$:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_{\max}} = 0,$$

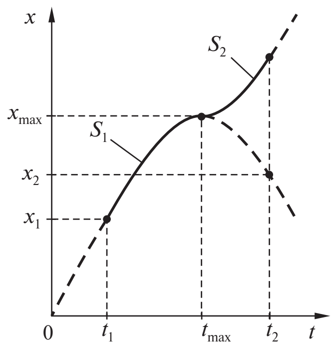


Рис. 1.1

решив уравнение

$$A + 2Bt_{max} = 0 .$$

Отсюда

$$t_{max} = -A/(2B) = 2 \text{ с}.$$

Значения x_1, x_2 и x_{max} определим, подставив соответствующие значения t_1, t_2 и t_{max} в уравнение траектории $x(t)$.

Таким образом, весь пройденный путь равен

$$S = S_1 + S_2 = (x_{max} - x_1) + (x_{max} - x_2) = 2x_{max} - x_1 - x_2 = 1 \text{ м}.$$

В итоге средняя путевая скорость материальной точки будет равна

$$\upsilon_{ср} = 1/(3-1) = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

Ответ: 0,5 м/с.

Задача 3.

Движение материальной точки по кривой задано уравнением зависимости радиус-вектора точки от времени

$$\vec{r}(t) = \vec{i}A_1t^3 + \vec{j}A_2t ,$$

где A_1 = 1 м/с^3; A_2= 16 м/с.

Найти, в какой момент времени скорость точки равна 20 м/с.

Решение.

Радиус-вектор может быть представлен через проекции на оси координат:

$$\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot x(t)+\vec{j}\cdot y(t),$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — зависимости координат точки от времени.

В нашем случае $x(t)=A_1t^3$, $y(t)=A_2t$.

Определим проекции вектора скорости на соответствующие оси координат:

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=3A_1t^2;$$

$$\upsilon_y=\frac{dy}{dt}=A_2.$$

Модуль скорости материальной точки равен

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\sqrt{\left(3A_1t^2\right)^2+A_2^2}.$$

Отсюда $\upsilon^2=\left(3A_1t^2\right)^2+A_2^2 \Rightarrow t^4=\left(\upsilon^2-A_2^2\right)/\left(9A_1^2\right)$.

В итоге

$$t=\sqrt{\frac{\sqrt{\upsilon^2-A_2^2}}{3A_1}}=2\text{ с}.$$

Ответ: 2 с.

Задача 4.

Пистолетная пуля пробила два вертикально закрепленных листа бумаги, расстояние l между которыми равно 30 м. Пробоина во втором листе оказалась на h = 10 см ниже, чем в первом. Определить начальную скорость υ_0 пули, если к первому листу она подлетела, двигаясь горизонтально.

Решение.

Движение тела под действием силы тяжести является равноускоренным, так как тело движется с постоянным ускорением $\vec{a}=\vec{g}$ свободного падения. Кинематические уравнения для перемещений Δx и Δy при равноускоренном движении имеют вид:

$$\Delta x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2};$$

$$\Delta y = \upsilon_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Выберем декартову систему координат так, что координатные оси направлены горизонтально (Ox) и вертикально вниз (Oy), а начало координат совпадает с пробоиной от пули в первом листе, что соответствует начальному моменту времени (рис. 1.2). Тогда с учетом $a_x = 0, a_y = g$ и $\upsilon_{0x} = \upsilon_0, \upsilon_{0y} = 0$ кинематические уравнения примут вид:

$$\Delta x = \upsilon_0 t; \quad \Delta y = \frac{gt^2}{2}.$$

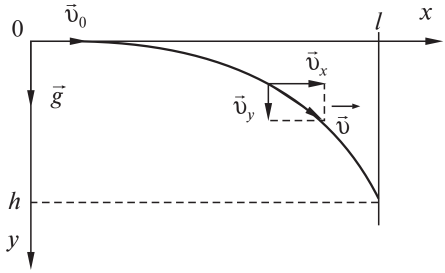


Рис. 1.2

Так как пуля пробила второй лист бумаги на h ниже, а расстояние между листами равно l, то $\Delta y = h$, $\Delta x = l$. Тогда

$$l = \upsilon_0 t, \quad h = \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда $t = \sqrt{2h/g}$ и $\upsilon_0 = l/t$. В итоге получаем

$$\upsilon_0 = l\sqrt{\frac{g}{2h}} \approx 212 \text{ м/с}.$$

Ответ: 212 м/с.

Задача 5.

С какой скоростью тело брошено под углом к горизонту, если в начальный момент движения тангенциальное ускорение $a_\tau = 8$ м/с, а радиус кривизны траектории $R = 24$ м?

Решение.

Тело движется в поле земного тяготения, поэтому полное ускорение в любой момент времени равно ускорению свободного падения: $\vec{a} = \vec{g}$ (рис. 1.3). Разложив вектор $\vec{a}$ на тангенциальную и нормальную составляющие к траектории в точке начала движения, получим:

$$a = g = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .$$

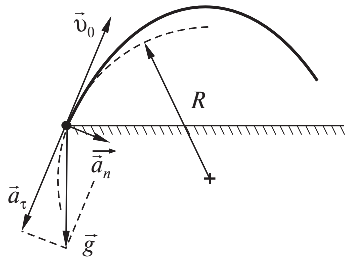


Рис. 1.3

Радиус кривизны траектории в данной точке связан с нормальным ускорением соотношением

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}\ .$$

Решая совместно эти уравнения относительно υ, получаем:

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2};$$

$$\upsilon = \sqrt{Ra_n};$$

$$\upsilon = \sqrt{R\sqrt{g^2 - a_\tau^2}} = 12 \text{ м / с}.$$

Ответ: 12 м/с.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. Высота балкона над поверхностью земли $h = 12{,}5$ м. Определить среднюю путевую скорость от момента бросания до падения на землю.

1.2. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = At + Bt^3$, где $A = 6$ м/с; $B = -2$ м/с^3. Найти ускорение в момент, когда скорость равна нулю.

1.3. Движение точки по кривой задано уравнением $\vec{r} = \vec{i}A_1t^3 + \vec{j}(A_2t^2 + B_2t)$, где $A_1 = 1$ м/с^3; $A_2 = -1$ м/с^2; $B_2 = 4$ м/с. Найти скорость и ускорение материальной точки в тот момент времени, когда ее скорость параллельна оси Ox.

1.4. Снаряд, выпущенный из орудия под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, дважды был на одной и той же высоте h: спустя время $t_1 = 10$ с и $t_2 = 50$ с после выстрела. Определить начальную скорость υ_0.

1.5. Пуля пущена с начальной скоростью $\upsilon_0 = 200$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определить радиус R кривизны траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. Основные формулы

Положение твердого тела или материальной точки при вращательном движении определяется вектором углового перемещения (вектором поворота) $\Delta\vec{\varphi}$, по модулю равного углу поворота точки ($\Delta\varphi$) за время $\Delta t = t_2 - t_1$ и направленного вдоль оси вращения по правилу «правого винта» (рис. 2.1).

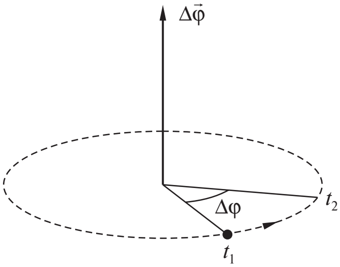


Рис. 2.1

Средняя угловая скорость:

$$\vec{\omega}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \qquad (2.1)$$

Мгновенная угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \qquad (2.2)$$

где $d\vec{\varphi}$ — элементарный вектор углового перемещения точки (тела) за время dt.

Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (2.3)$$

Частота вращения:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}, \tag{2.4}$$

где N — число оборотов, совершаемых точкой (телом) за время t; T — время одного полного оборота (период вращения).

Учитывая, что N полных оборотов соответствует углу $\varphi = 2\pi N$, то справедливо равенство

$$\omega = \frac{2\pi N}{t} = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.5}$$

Кинематическое уравнение равнопеременного вращения (ε =const) в проекции на ось вращения:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{2.6}$$

где φ_0 и ω_0 — угловое перемещение и угловая скорость соответственно в начальный момент времени.

Угловая скорость при равноускоренном вращении:

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{2.7}$$

В случае равномерного ($\varepsilon = 0$, $\omega = \text{const}$) вращения уравнение (2.6) имеет вид

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t. \tag{2.8}$$

Путь, пройденный точкой по дуге окружности радиусом R:

$$S = \varphi R, \tag{2.9}$$

где φ — угловое перемещение (в радианах).

Связь линейной и угловой скорости:

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \ \upsilon = \omega R. \tag{2.10}$$

Связь тангенциального и нормального ускорений с угловой скоростью и угловым ускорением:

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{R}\right], \; a_\tau = \varepsilon R; \tag{2.11}$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}, \; a_n = \omega^2 R. \tag{2.12}$$

2.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Диск вращается согласно уравнению

$$\varphi(t) = A + Bt + Ct^3,$$

где $A = 1$ рад; $B = -2$ рад/с; $C = 0{,}5$ рад/с^3.

Найти угловое ускорение в момент времени $t = 2$ с.

Решение.

Учитывая, что мгновенная угловая скорость — это производная углового перемещения по времени: $\omega = d\varphi/dt$, угловое ускорение определим по формуле

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 6Ct = 6 \text{ рад/с.}$$

Ответ: 6 рад/с.

Задача 2.

Определить линейную скорость точек, лежащих на земной поверхности на широте Москвы $\varphi = 56°$. Радиус Земли считать равным $R = 6400$ км.

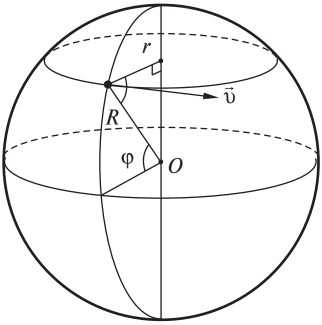


Рис. 2.2.

Решение.

Географическая широта — это угол φ между плоскостью экватора и отвесной линией в данной точке земной поверхности (рис. 2.2). Линейная скорость точек, движущихся по окружности радиусом r с угловой скоростью ω, равна

$$\upsilon = \omega r .$$

Из рис. 2.2 видно, что $r = R\cos\varphi$. Угловую скорость вращения Земли определим через известный период T = 24 ч: $\omega = 2\pi/T$. Таким образом, получаем

$$\upsilon = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T} = 260 \text{ м/с}.$$

Ответ: 260 м/с.

Задача 3.

Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав N = 50 полных оборотов, оно изменило частоту вращения от n_1 = 4 с$^{-1}$ до n_2 = 6 с$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε колеса.

Решение.

Так как колесо вращается равноускоренно, то угловая скорость изменяется со временем по закону $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. Время t вращения определим, используя соотношение

$$\langle\omega\rangle = \frac{2\pi N}{t} ,$$

где $\langle\omega\rangle = (\omega + \omega_0)/2$ — среднее значение угловой скорости.

Тогда

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\frac{2\pi N}{\langle\omega\rangle} = \omega_0 + \varepsilon\frac{4\pi N}{\omega + \omega_0} ,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{4\pi N} .$$

Учитывая, что угловая скорость связана с частотой n вращения как $\omega = 2\pi n$, получаем

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{4\pi N} = 4\pi^2 \frac{n_2^2 - n_1^2}{4\pi N} = \pi \frac{n_2^2 - n_1^2}{N} = 1{,}26 \text{ рад/с.}$$

Ответ: 1,26 рад/с.

Задача 4.

Диск, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}25$ рад/с^2. Через сколько времени угол между векторами скорости и ускорения составит $\alpha = 45°$?

Решение.

Из рис. 2.3 видно, что угол α можно выразить из геометрического соотношения

$$\mathrm{tg}\,\alpha = a_n / a_\tau \ ,$$

где $a_\tau = \varepsilon R$; $a_n = \omega^2 R$.

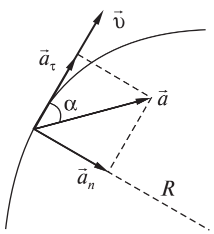


Рис. 2.3

Угловая скорость при равноускоренном вращении изменяется со временем по закону

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \ .$$

По условию задачи угловая скорость в начальный момент времени равна нулю: $\omega_0 = 0$. Таким образом,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon t)^2} = \frac{1}{\varepsilon t^2} \ .$$

Отсюда искомое время вращения равно

$$t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\alpha}} = 2 \text{ с.}$$

Ответ: 2 с.

Задача 5.

Диск радиусом $R = 10$ см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0,5$ рад/с^2. Найти полное ускорение точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.

Решение.

Полное ускорение точек на окружности диска складывается из тангенциальной и нормальной составляющих:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \varepsilon R$; $a_n = \omega^2 R$.

При равноускоренном вращении с нулевой начальной угловой скоростью справедливо соотношение $\omega = \varepsilon t$. В итоге получаем

$$a = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + \left([\varepsilon t]^2 R\right)^2} = \varepsilon R\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4} = 0,11 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 0,11 м/с^2.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Диск вращается согласно уравнению $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$, где $A =$ $= 1$ рад; $B = 12$ рад/с; $C = -1$ рад/с^3. В какой момент времени угловая скорость диска будет равна нулю?

2.2. Линейная скорость υ_1 точек на окружности вращающегося диска равна 3 м/с. Точки, расположенные на $\Delta R = 10$ см ближе к оси, имеют линейную скорость $\upsilon_2 = 2$ м/с. Определить угловую скорость вращения диска.

2.3. Диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = -2$ рад/с^2. Сколько оборотов N сделает диск при изменении частоты вращения от $n_1 = 240$ мин$^{-1}$ до $n_2 = 90$ мин$^{-1}$?

2.4. Найти угловое ускорение диска, если в тот момент, когда его угловая скорость $\omega = 2$ рад/с, угол между векторами скорости и ускорения $\alpha = 30°$.

2.5. Точка движется по окружности радиусом $R = 3$ м, так что путь определяется согласно уравнению $\xi = At^3$, где $A = 0,25$ м/с^3. В какой момент времени t нормальное ускорение a_n точки будет равно тангенциальному $a\tau$?

3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

3.1. Основные формулы

Второй закон Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{3.1}$$

где $\vec{a}$ — ускорение; $\vec{F}$ — результирующая сила, действующая на материальную точку массой m.

Формулировка второго закона Ньютона через импульс:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{3.2}$$

где $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ — импульс материальной точки.

Закон всемирного тяготения:

$$F_{\text{гр}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3.3}$$

где $F_{\text{гр}}$ — сила гравитационного притяжения материальных точек массами m_1 и m_2; $G = 6{,}67$ м^3·кг$^{-1}$/с^2 — гравитационная постоянная; r — расстояние между точками.

Сила тяжести:

$$F_{\text{т}} = mg, \tag{3.4}$$

где $g = 9{,}8$ м·с$^{-2}$ — ускорение свободного падения (при решении задач можно принимать $g \approx 10$ м/с^2).

Сила трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \tag{3.5}$$

где μ — коэффициент трения скольжения; N — сила нормального давления.

Закон Гука для деформации растяжения или сжатия:

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{3.6}$$

где σ — нормальное напряжение; E — модуль Юнга; ε — относительная деформация.

Закон Гука для деформации сдвига:

$$\sigma = G\gamma , \tag{3.7}$$

где σ — тангенциальное напряжение; G — модуль сдвига; γ — относительный сдвиг.

3.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Веревка разрывается при подвешивании к ней тела массой 36 кг. Тело какой наибольшей массы можно поднимать на этой веревке с ускорением 2 м/с^2?

Решение.

Силу натяжения нити, при которой нить разрывается, найдем из условия

$$T_{\max} = m_1 g ,$$

где m_1 = 36 кг (по условию задачи).

Используя второй закон Ньютона, запишем уравнение движения тела массой m_2, поднимаемого вверх с ускорением a:

$$m_2 a = T - m_2 g .$$

В задаче требуется определить максимальную массу тела, которое можно поднимать с заданным ускорением, следовательно, в этой формуле в качестве силы натяжения нити нужно взять $T_{\max}$, т.е.

$$m_2 a = T_{\max} - m_2 g,$$
$$m_2 a = m_1 g - m_2 g.$$

В итоге

$$m_2 = \frac{m_1 g}{g + a} = 30 \text{ кг.}$$

Ответ: 30 кг.

Задача 2.

Маленький шарик массой 10 г, летящий со скорость 10 м/с, ударяется о стенку под углом 30° к нормали и упруго отскакивает от нее. Найти среднюю силу удара, если его длительность 0,05 с.

Решение.

Согласно второму закону Ньютона сила, с которой стенка действует на шарик при их соударении, равна

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Если время Δt соударения достаточно мало, то средняя сила удара будет равна

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}.$$

Из рис. 3.1 видно, что вектор изменения импульса шарика $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ направлен вдоль оси Ox. Тогда, учитывая, что удар абсолютно упругий, в проекции Ox получаем

$$\Delta p_x = p_{2x} - p_{1x} = m\upsilon\cos\alpha - (-m\upsilon\cos\alpha) = \\ = 2m\upsilon\cos\alpha.$$

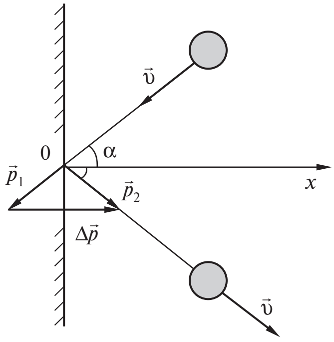


Рис. 3.1

В итоге средняя сила удара равна

$$\langle F_x \rangle = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2m\upsilon\cos\alpha}{\Delta t} = 3{,}5 \text{ Н}.$$

Ответ: 3,5 Н.

Задача 3.

Искусственный спутник движется вокруг планеты по эллиптической орбите с эксцентриситетом $\varepsilon = 0{,}4$. Во сколько раз линейная скорость спутника в ближайшей точке траектории больше, чем скорость в наиболее удаленной точке?

Решение.

Для эллиптических орбит эксцентриситет определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p},$$

где r_a — радиус орбиты в апогее (наиболее удаленной точке); r_p — радиус орбиты в перигее (в ближайшей точке).

Согласно закону сохранения момента импульса в каждой точке траектории момент импульса $L = m\upsilon r$ спутника одинаков, т.е.

$$m\upsilon_a r_a = m\upsilon_p r_p.$$

Таким образом, отношение скорости искусственного спутника в ближайшей точке траектории к скорости в наиболее удаленной точке равно

$$\frac{\upsilon_p}{\upsilon_a} = \frac{r_a}{r_p}.$$

С другой стороны, из самой первой формулы следует:

$$\frac{r_a}{r_p} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

В итоге

$$\frac{\upsilon_p}{\upsilon_a} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 2{,}3.$$

Ответ: 2,3.

Задача 4.

Два тела массами 300 и 600 г связаны нитью, переброшенной через невесомый блок, установленный на наклонной плоскости с коэффициентом трения 0,2, составляющей 45° с горизонтом. Первый груз поднимается вертикально вверх, а второй опускается по наклонной плоскости. Найти ускорение грузов.

Решение.

Используя второй закон Ньютона, запишем уравнения движения каждого груза (рис. 3.2):

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + m_1\vec{g};$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + m_2\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N}.$$

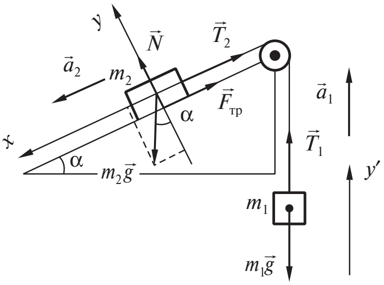


Рис. 3.2

Запишем уравнение движения первого груза в проекции на ось Oy':

$$m_1a_1 = T_1 - m_1g\,.$$

В проекции на оси Ox и Oy для второго груза получаем

$$Ox:\ m_2a_2 = -T_2 + m_2g\sin\alpha - F_{тр};$$
$$Oy:\ 0 = N - m_2g\cos\alpha.$$

Сила трения скольжения определяется по формуле $F_{тр} = \mu N$, тогда для второго груза имеем

$$m_2a_2 = -T_2 + m_2g\sin\alpha - \mu m_2g\cos\alpha\,.$$

Учитывая нерастяжимость нити, а также наличие легкого блока без учета трения, принимаем

$$a_1 = a_2 = a,$$
$$T_1 = T_2 = T.$$

Тогда

$$m_1 a = T - m_1 g,$$
$$m_2 a = -T + m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$a = g\frac{m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}44 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 0,44 м/с^2.

Задача 5.

Определить относительное удлинение ε стального стержня длиной $l = 1$ м, диаметром $d = 1$ см при подвешивании на нем груза массой $m = 500$ кг.

Решение.

Механическое напряжение определяется законом Гука $\sigma = E\varepsilon$. С другой стороны, из условия равновесия груза массой m следует, что

$$mg = F_{\text{упр}} = \sigma S\ ,$$

где $F_{\text{упр}}$ — сила упругости, действующая вдоль стержня; S — площадь поперечного сечения стержня.

Тогда с учетом табличного значения модуля Юнга для стали $E =$ $= 200$ ГПа получаем

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{mg}{SE} = \frac{4mg}{\pi d^2 E} = 3{\cdot}10^{-4}.$$

Ответ: $3{\cdot}10^{-4}$.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

3.1. Тело, движущееся со скоростью 10 м/с по гладкой горизонтальной поверхности, попадает на шероховатый участок и останавливается за 4 с. Найти коэффициент трения.

3.2. Мяч, летящий со скоростью $\upsilon_1 = 12$ м/с, ударяется о стену и отскакивает от нее в обратном направлении со скоростью $\upsilon_2 =$ $= 8$ м/с. Определить изменение кинетической энергии мяча, если изменение импульса равно 3 кг·м/с.

3.3. Комета движется вокруг Солнца по эллиптической орбите с эксцентриситетом $\varepsilon = 0{,}5$. Во сколько раз максимальное расстояние от Солнца до кометы больше минимального расстояния?

3.4. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой $m_1=1$ кг. На доске лежит брусок массой $m_2 = 100$ г. Коэффициент трения между доской и бруском $\mu = 0{,}3$. При какой максимальной силе, приложенной к доске, брусок начнет соскальзывать?

3.5. Определить относительный сдвиг алюминиевого параллелепипеда с площадью основания 0,02 м^2, когда его нижнее основание закреплено, а на верхнее основание действует по касательной сила $F = 30$ кН. Модуль сдвига для алюминия равен 24 ГПа.

4. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Основные формулы

Момент инерции материальной точки:

$$I = mr^2, \tag{4.1}$$

где m — масса материальной точки; r — расстояние от точки до оси вращения.

Момент инерции системы, состоящей из N материальных точек или твердых тел:

$$I = \sum_{k=1}^{N} I_k, \tag{4.2}$$

где I_k — момент инерции k-й материальной точки (твердого тела).

Момент инерции твердого тела с непрерывным распределением массы:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV, \tag{4.3}$$

где $dm = \rho dV$ — элементарная масса тела, находящаяся на расстоянии r от оси вращения.

Теорема Штейнера:

$$I = I_C + ma^2, \tag{4.4}$$

где I — момент инерции тела относительно произвольной оси; I_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной оси; m — масса тела; a — расстояние между осями.

Момент силы относительно неподвижной оси z:

$$M_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z, \tag{4.5}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы $\vec{F}$.

Момент импульса тела относительно неподвижной оси z:

$$L_z = I\omega_z\ , \qquad (4.6)$$

где I — момент инерции тела относительно оси z; ω_z — проекция вектора угловой скорости на ось z.

Основной закон динамики вращательного движения:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I\varepsilon\ , \qquad (4.7)$$

где M_z — проекция вектора момента силы на неподвижную ось z; L_z — проекция вектора момента импульса на неподвижную ось z; I — момент инерции тела относительно оси z; ε — угловое ускорение тела.

4.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Найти момент инерции тонкой однородной сплошной пластинки размером $a \times b$, массой m относительно оси, проходящей через сторону b.

Решение.

Для нахождения момента инерции пластины выделим полоску шириной dx (рис. 4.1) настолько тонкую, что расстояние от всех ее точек до оси вращения было бы примерно одинаково и равно x. Тогда по теореме Штейнера момент инерции dI такой полоски будет равен

$$dI = dI_C + dm \cdot x^2\ ,$$

где dm — элементарная масса; dI_C — момент инерции полоски относительно оси, проходящей через ее центр масс.

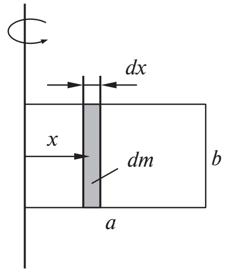


Рис. 4.1

Поскольку масса выделенного элемента пластины распределена преимущественно вдоль его оси вращения, то $dI_C = 0$. Элементарную массу dm определим по формуле

$$dm = \sigma b dx ,$$

где σ — поверхностная плотность массы.

В нашем случае $\sigma = m/(ab)$. Таким образом, момент инерции всей пластины равен

$$I = \int_m x^2 dm = \frac{m}{a}\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} m a^2 .$$

Ответ: $ma^2/3$.

Задача 2.

В диске радиусом R = 14 см и массой m = 50 г сделали сквозное отверстие радиусом $r = R/2$ (рис. 4.2). Определить момент инерции получившейся фигуры относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости фигуры.

Решение.

Для решения задачи воспользуемся свойством аддитивности момента инерции. В нашем случае момент инерции фигуры с вырезом будет равен

$$I = I_1 - I_2 ,$$

где I_1 — момент инерции диска без выреза; I_2 — момент инерции вырезанной части.

Момент инерции диска без выреза относительно оси, проходящей перпендикулярно диску через точку O, равен

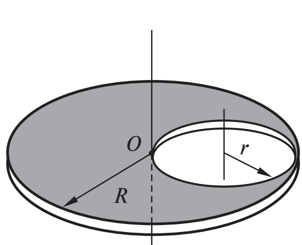


Рис. 4.2

$$I_1 = \frac{1}{2} mR^2 .$$

Для нахождения момента инерции вырезанной части воспользуемся теоремой Штейнера:

$$I_2 = I_{2C} + m'r^2 = \frac{1}{2} m'r^2 + m'r^2 = \frac{3}{2} m'r^2 ,$$

где m' — масса вырезанной части; $r = R/2$ — радиус выреза.

В случае тонкого диска массу вырезанной части определим как $m' = \sigma\pi r^2$, где $\sigma = m/\left(\pi R^2\right)$ — поверхностная плотность массы.

Таким образом,

$$I_2 = \frac{3}{2}\sigma\pi r^4 = \frac{3}{2}\frac{mr^4}{R^2} = \frac{3}{32} mR^2 .$$

В итоге

$$I = \frac{1}{2} mR^2 - \frac{3}{32} mR^2 = \frac{13}{32} mR^2 = 4\cdot 10^{-4}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $4\cdot 10^{-4}$ кг·м^2.

Задача 3.

Маховик в виде цилиндра массой 5 кг и радиусом 20 см за 4 с от начала равноускоренного вращения достиг частоты 10 об/с. Найти момент сил, действующих на маховик.

Решение.

Согласно основному закону динамики вращательного движения момент действующих на маховик сил равен

$$M = I\varepsilon .$$

Здесь момент инерции маховика в виде цилиндра равен $I = mR^2/2$. Угловое ускорение при равноускоренном вращении маховика определим как

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = 2\pi\frac{n - n_0}{t} ,$$

где n и n_0 — частота вращения маховика в момент времени t и начальная частота вращения соответственно.

По условию задачи $n_0 = 0$. В итоге получаем

$$M = \frac{mR^2\pi n}{t} = 1{,}57 \text{ Н·м}.$$

Ответ: 1,57 Н·м.

Задача 4.

Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузики массой m_1=100 г и m_2=110 г. С каким ускорением будут двигаться грузики, если масса блока равна m=400 г? Трение при вращении блока ничтожно мало.

Решение.

Для того чтобы определить ускорение движения грузов (рис. 4.3), запишем уравнения их движения, используя второй закон Ньютона:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1;$$
$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2.$$

В проекции на ось Oy данная система уравнений примет вид:

$$m_1 a_1 = -m_1 g + T_1;$$
$$-m_2 a_2 = -m_2 g + T_2.$$

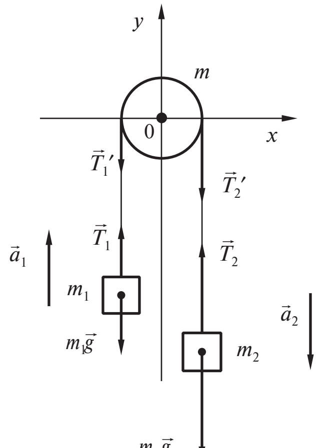


Рис. 4.3

Учитывая нерастяжимость и невесомость нити, примем $a_1 = a_2 = a$. Вычтем из первого уравнения системы второе:

$$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1) + T_1 - T_2 \ .$$

Для того чтобы найти разность $T_1 - T_2$ сил натяжения нити, рассмотрим вращательное движение блока. Результирующий момент действующих на блок сил равен

$$M = (T_2' - T_1')R \ ,$$

где R — радиус блока.

По третьему закону Ньютона $T_1' = T_1$ и $T_2' = T_2$. Момент инерции блока в форме диска массой m и радиусом R равен $I = mR^2/2$. Угловое ускорение вращения блока связано с тангенциальным ускорением точек, лежащих на краю диска: $\varepsilon = a_\tau / R$. Наконец, при движении грузов $a = a_\tau$.

Основное уравнение динамики вращательного движения $M = I\varepsilon$ в нашем случае примет вид

$$(T_2' - T_1')R = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a_\tau}{R},$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} ma.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1) + ma/2 \ ,$$

из которого ускорение движения грузов равно

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 - m/2} = 9{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 9,8 м/с^2.

Задача 5.

По наклонной плоскости, составляющей угол 30° к горизонту, без проскальзывания скатывается шар. Найти ускорение центра масс шара.

Решение.

Согласно основному закону динамики поступательного движения (второму закону Ньютона) уравнение движение центра масс шара имеет вид (рис. 4.4)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} .$$

Запишем данное уравнение в проекции на оси *Ox* и *Oy*:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}};$$

$$0 = N - mg\cos\alpha.$$

При качении шара без проскальзывания сила трения $F_{\text{тр}}$ скольжения создает вращающий момент, равный

$$M = F_{\text{тр}}R .$$

С другой стороны, согласно основному уравнение динамики вращательного движения $M = I\varepsilon$, где момент инерции шара $I = (2/5)mR^2$ и угловое ускорение $\varepsilon = a_\tau / R$. При качении шара ускорение его центра масс $a = a_\tau$.

Таким образом,

$$F_{\text{тр}} = \frac{2}{5}ma .$$

В итоге уравнение движения центра масс шара примет вид

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{2}{5}ma .$$

Отсюда

$$a = \frac{5}{7}g\sin\alpha = 3{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 3,5 м/с^2.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

4.1. Найти момент инерции куба массой 1,2 кг и длиной ребра 10 см относительно оси, проходящей через середины противоположных граней.

4.2. В центре квадратной пластины со стороной 8 см и массой 300 г закреплено небольшое тело массой 100 г. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей перпендикулярно к пластине через один из углов.

4.3. На колесо, которое можно представить в виде тонкого кольца радиусом 70 см и массой 2 кг, действует момент силы, равный

20 Н·м. С какой угловой скоростью будет вращаться колесо через 1 с после начала движения?

4.4. Вал в виде сплошного цилиндра массой 5 кг насажен на горизонтальную ось. На цилиндр намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массой 2 кг. С каким линейным ускорением будет опускаться гиря, если ее предоставить самой себе?

4.5. Шар массой 4 кг катится по шероховатой горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы, приложенной к оси вращения шара. Максимальная сила, при которой шар катится без проскальзывания, равна 35 Н. Найти коэффициент трения.

5. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

5.1. Основные формулы

Кинетическая энергия поступательного движения тела массой m:

$$E_k^{\text{пос}} = \frac{m\upsilon^2}{2}, \tag{5.1}$$

где υ — скорость поступательного движения.

Кинетическая энергия вращательного движения материальной точки (твердого тела):

$$E_k^{\text{вр}} = \frac{I\omega^2}{2}, \tag{5.2}$$

где I — момент инерции; ω — угловая скорость.

Работа, совершаемая при конечном перемещении тела из положения 1 в положение 2:

$$A = E_{k2} - E_{k1}. \tag{5.3}$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга:

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{5.4}$$

Потенциальная энергия тела массой m, находящегося в однородном поле силы тяжести:

$$E_p = mgh, \tag{5.5}$$

где h — высота положения тела относительно уровня, на котором потенциальную энергию считают равной нулю.

Потенциальная энергия упругой деформации пружины жесткостью k на величину x:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}. \qquad (5.6)$$

Работа, совершаемая консервативными силами при конечном перемещении тела из положения 1 в положение 2:

$$A = E_{p1} - E_{p2}. \qquad (5.7)$$

5.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Маховик в виде диска массой 80 кг и радиусом 30 см находится в состоянии покоя. Какую работу нужно совершить, чтобы сообщить маховику частоту 10 об/с?

Решение.

Работа, как известно, равна приращению кинетической энергии:

$$A = E_{k2} - E_{k1}.$$

При раскручивании маховика $E_{k1} = 0$, а $E_{k2} = I\omega^2/2$. Момент инерции маховика в виде диска равен $I = mR^2/2$, а его угловая скорость ω связана с частотой n вращения по формуле $\omega = 2\pi n$.

В итоге получаем

$$A = \frac{I\omega^2}{2} = m(\pi R n)^2 = 7106 \text{ Дж}.$$

Ответ: 7106 Дж.

Задача 2.

Плывут две лодки массой 150 кг каждая в одном направлении. Первая лодка, плывущая со скоростью 3 м/с, догоняет вторую, плывущую со скоростью 1 м/с. Когда лодки поравнялись, из первой во вторую переложили груз массой 50 кг. С какой скоростью стала двигаться вторая лодка? Трением пренебречь.

Решение.

Из-за того что сила трения равна нулю, а архимедова сила скомпенсирована силой тяжести, лодки образуют замкнутую систему тел. Следовательно, справедлив закон сохранения импульса. Запишем этот закон в проекции на направление движения лодок для системы «груз — вторая лодка»:

$$m\upsilon_1 + M\upsilon_2 = (M + m)u_2 \,,$$

где M — масса лодки; m — масса груза; υ_1 и υ_2 — исходные скорости первой и второй лодки соответственно; u_2 — скорость второй лодки после перекладывания груза.

Отсюда

$$u_2 = \frac{m\upsilon_1 + M\upsilon_2}{M + m} = 1{,}5 \text{ м/с}.$$

Ответ: 1,5 м/с.

Задача 3.

Пуля массой 10 г, летящая горизонтально, попадает в баллистический маятник массой 290 г и застревает в нем. Длина подвеса маятника 1,6 м. Найти скорость пули, если маятник отклонился на 60°.

Решение.

Поскольку взаимодействие пули и маятника длится короткое время, систему «маятник — пуля» можно считать замкнутой. В этом случае применим закон сохранения импульса (рис. 5.1):

$$m\upsilon = (M + m)u \,.$$

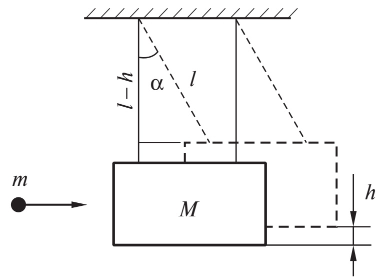


Рис. 5.1

После попадания пули маятник начнет движение в поле сил земного тяготения. Закон сохранения полной механической энергии запишем в виде

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = (M + m)gh \,,$$

где h — максимальная высота подъема маятника относительно исходного положения.

Высоту h определим из прямоугольного треугольника: $h = l(1 - \cos\alpha)$. Тогда

$$u = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}.$$

В итоге скорость пули равна

$$\upsilon = u\frac{M + m}{m} = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 120 \text{ м/с}.$$

Ответ: 120 м/с.

Задача 4.

Определить линейную скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости с высоты 7 м.

Решение.

Находясь в верхней точке наклонной плоскости, шар обладал только потенциальной энергией относительно основания. Скатившись с наклонной плоскости, шар приобрел кинетическую энергию, включающую в себя энергию поступательного движения центра масс и энергию вращательного движения. Тогда согласно закону сохранения полной механической энергии справедливо уравнение

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где m — масса шара; h — высота наклонной плоскости; υ – скорость центра масс шара; $I = 2mR^2/5$ — момент инерции шара; ω — угловая скорость.

Скорость движения центра масс шара связана с угловой скоростью вращения формулой $\upsilon = \omega R$.

В итоге получаем уравнение

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{5}.$$

Отсюда

$$\upsilon = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = 9{,}9 \text{ м/с}.$$

Ответ: 9,9 м/с.

Задача 5.

Платформа в виде диска массой 4 кг и радиусом 12 см вращается по инерции вокруг вертикальной оси. Во сколько раз уменьшится частота вращения, если на нее положить кольцо массой 1 кг и радиусом 10 см?

Решение.

Изменение угловой скорости вращения системы будет происходить согласно закону сохранения момента импульса:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 ,$$

где I_1 — момент инерции платформы; ω_1 — исходная угловая скорость вращения платформы; I_2 — момент инерции платформы вместе с кольцом; ω_2 — конечная угловая скорость вращения платформы.

Момент инерции платформы в виде диска равен $I_1 = m_1 R_1^2 / 2$, а момент инерции платформы вместе с кольцом определим как $I_2 = I_1 + m_2 R_2^2$. Поскольку угловая скорость ω пропорциональна частоте n вращения, получаем

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{I_2}{I_1} = 1 + \frac{m_2 R_2^2}{m_1 R_1^2} = 1{,}7.$$

Ответ: 1,7.

5.3. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Вычислить работу, совершаемую при равноускоренном подъеме груза массой 100 кг на высоту 4 м за время 2 с.

5.2. Человек массой 60 кг стоит на корме покоящейся лодки массой 120 кг и длиной 3 м. На какое расстояние переместится лодка, если человек перейдет с кормы на нос?

5.3. Шар массой 1,2 кг, упруго столкнувшись с покоящимся шаром большей массы, потерял 36% своей кинетической энергии. Определить массу большего шара.

5.4. Стержень длиной 30 см, поставленный вертикально, падает на стол. Найти линейную скорость верхнего конца стержня в конце падения. Нижний конец стержня не проскальзывает.

5.5. Однородный тонкий стержень массой 0,1 кг и длиной 1 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей на расстоянии 0,25 м от его края. В верхний край стержня попадает пластилиновый шарик массой 10 г, летящий горизонтально со скоростью 20 м/с, и прилипает к нему. Определить угловую скорость стержня в начальный момент времени после удара.

6. ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

6.1. Основные формулы

Длительность событий в разных системах отсчета:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \upsilon_0^2 / c^2}}, \tag{6.1}$$

где Δt — длительность события, измеренная по неподвижным часам системы отсчета K; Δt_0 — время, измеренное по часам системы K', движущимся со скоростью тела, в котором происходит событие; υ_0 — скорость системы K' относительно системы K; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Длина стержня в разных системах отсчета:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \upsilon_0^2 / c^2}, \tag{6.2}$$

где l — длина стержня, измеренная в неподвижной системе отсчета K; l_0 — собственная длина стержня, расположенного вдоль оси x', измеренная в системе K', в которой он покоится; υ_0 – скорость системы K', движущийся вдоль оси x' относительно системы K.

Релятивистский закон сложения скоростей:

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0}{1 + \upsilon' \upsilon_0 / c^2}, \tag{6.3}$$

где υ — скорость тела относительно неподвижной системы отсчета K; υ' — скорость тела относительно системы отсчета K, движущийся со скоростью υ_0 относительно системы K'.

Релятивистский импульс:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \tag{6.4}$$

где m_0 — масса покоя.

Взаимосвязь массы и полной энергии:

$$E = mc^2 = m_0c^2 + E_к , \qquad (6.5)$$

где $E_к$ — кинетическая энергия; m_0c^2 — энергия покоя.

Связь между релятивистским импульсом и кинетической энергией:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к + 2m_0c^2\right)}. \qquad (6.6)$$

6.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Куб располагается в системе K' так, что одна из его граней параллельна оси x'.Определить, во сколько раз объем куба, измеренный в системе K, движущейся относительно системы K' параллельно оси x' со скоростью $\upsilon = 0,7c$, меньше объема, измеренного в системе K'.

Решение.

Пусть объем куба, измеренный в системе K', равен $V' = a_0^3$, где a_0 — длина ребра. В системе K ребро, расположенное вдоль оси x, уменьшится согласно формуле

$$a = a_0\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2} .$$

Тогда объем куба в системе K будет равен

$$V = a_0^2 a = a_0^3\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2} .$$

Искомое отношение V'/V будет равно

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

Задача 2.

Собственное среднее время жизни одной из нестабильных элементарных частиц $\tau_0 = 2,2$ мкс. Пучок таких частиц движется со скоростью $\upsilon = 0{,}95c$. Какова средняя длина l их пробега в отсутствие столкновений?

Решение.

Длину пробега частицы в отсутствие столкновений определим как расстояние, проходимое частицей за время жизни:

$$l = \tau\upsilon,$$

где τ — время жизни, измеренное наблюдателем (в системе K):

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.$$

Таким образом,

$$l = \frac{\upsilon\tau_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = 3c\tau_0 = 2000 \text{ м}.$$

Ответ: 2000 м.

Задача 3.

Две релятивистские частицы вылетают одновременно из ускорителя со скоростями $\upsilon_1 = 0{,}5c$ и $\upsilon_2 = 0{,}6c$ относительно лабораторной системы отсчета в противоположных направлениях. Определить расстояние между ними через 1 мс после вылета.

Решение.

Свяжем одну из частиц с системой отсчета K, а другую — с K'. Тогда проекция их относительной скорости на направление движения первой частицы будет равна

$$\upsilon_{12} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{1+\upsilon_1\upsilon_2/c^2}.$$

Расстояние между частицами будет увеличиваться со временем как $l = \upsilon_{12}t$. В итоге

$$l = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)t}{1+\upsilon_1\upsilon_2/c^2} = 2{,}55\cdot 10^5 \text{ м}.$$

Ответ: $2{,}55\cdot 10^5$ м.

Задача 4.

Определить скорость нейтрона, обладающего кинетической энергией 100 МэВ.

Решение.

Выразим кинетическую энергию нейтрона из соотношения

$$mc^2 = m_0c^2 + E_{\text{к}}:$$

$$E_{\text{к}} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right).$$

Отсюда

$$\frac{\upsilon}{c} = \frac{\sqrt{\left(2m_0c^2 + E_{\text{к}}\right)E_{\text{к}}}}{m_0c^2 + E_{\text{к}}}.$$

Масса покоя нейтрона $m_0 = 1{,}68 \cdot 10^{-27}$ кг. Тогда его скорость при энергии $E_{\text{к}} = 100$ МэВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-11}$ Дж равна $\upsilon = 0{,}43c$.

Ответ: $0{,}43c$.

Задача 5. Определить импульс релятивистской частицы, кинетическая энергия которой в 2 раза превышает энергию покоя. Ответ дать в единицах m_0c.

Решение.

Импульс релятивистской частицы определим по формуле

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_{\text{к}}\left(E_{\text{к}} + 2m_0c^2\right)}$$

при условии $E_{\text{к}} = 2m_0c^2$. Тогда

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{m_0c^2\left(m_0c^2 + 2m_0c^2\right)} = \frac{1}{c}\sqrt{3m_0^2c^4} = m_0c\sqrt{3} \approx 1{,}7m_0c.$$

Ответ: $1{,}7m_0c$.

6.3. Задачи для самостоятельного решения

6.1. При какой скорости υ тела релятивистское сокращение длины в направлении движения составляет 50%?

6.2. Пи-мезон (собственное время жизни $\tau_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ с) пролетел от места своего рождения до места распада 500 м. Оцените, на сколько процентов его скорость отличается от скорости света в вакууме.

6.3. В лабораторной системе отсчета удаляются друг от друга две частицы с одинаковыми по модулю скоростями. Их относительная скорость в той же системе отсчета равна $0{,}5c$. Определить скорости частиц.

6.4. При какой скорости υ движения частицы ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

6.5. Импульс p релятивистского электрона равен m_0c (m_0 — масса покоя). Определить скорость υ частицы (в долях скорости света).

7. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ

7.1. Основные формулы

Количество вещества:

$$\nu = \frac{N}{N_A}, \tag{7.1}$$

где N — число частиц (атомов, молекул); $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро.

Молярная масса вещества:

$$\mu = \frac{m}{\nu}, \tag{7.2}$$

где m — масса вещества.

Концентрация молекул:

$$n = \frac{N}{V}, \tag{7.3}$$

где N — число частиц (атомов, молекул); V — объем вещества.

Средняя кинетическая энергия молекулы:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT, \tag{7.4}$$

где i — число степеней свободы молекулы; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

Число степеней свободы i складывается из степеней свободы поступательного ($i_{\text{п}}$), вращательного ($i_{\text{вр}}$) и колебательного ($i_{\text{кол}}$) движений:

$$i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}. \tag{7.5}$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа:

$$p = \frac{2}{3} n \overline{\varepsilon}_{\text{п}}, \tag{7.6}$$

где p — давление; n — концентрация молекул; $\bar{\varepsilon}_п = (3/2)kT$ — средняя энергия поступательного движения молекулы.

Функция распределение Максвелла молекул идеального газа по скоростям:

$$F(\upsilon) = 4\pi\upsilon^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right), \tag{7.7}$$

где υ — скорость молекулы; m — масса молекулы.

Число молекул, имеющих скорости в интервале от υ_1 до υ_2:

$$\Delta N = N \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} F(\upsilon) d\upsilon, \tag{7.8}$$

где N — общее число молекул.

Средняя арифметическая скорость молекулы:

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \tag{7.9}$$

Наиболее вероятная скорость молекулы:

$$\upsilon_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{7.10}$$

Средняя квадратичная скорость молекулы:

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \tag{7.11}$$

Барометрическая формула:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right), \tag{7.12}$$

где p — давление газа на высоте h относительно уровня, принятого за нулевой; p_0 — давление на нулевом уровне; m — масса частицы; g — ускорение свободного падения.

Среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа за 1 секунду:

$$\overline{z} = \sqrt{2}\overline{\upsilon}\pi D_{эф}^2 n , \tag{7.13}$$

где $\overline{\upsilon}$ — средняя арифметическая скорость молекул; $D_{эф}$ — эффективный диаметр молекулы; n — концентрация молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул газа:

$$\overline{l} = \frac{\overline{\upsilon}}{\overline{z}} . \tag{7.14}$$

Уравнение состояния идеального газа — уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT , \tag{7.15}$$

где m — масса газа; μ — молярная масса молекул; $R = kN_A$ = = 8,31 Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.

Закон Дальтона:

$$p = \sum_{i=1}^{N} p_i , \tag{7.16}$$

где p — давление смеси газов; p_i — парциальное давление i-го компонента смеси.

Молярная масса смеси газов, состоящей из n компонентов:

$$\mu_{см} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\mu_i} , \tag{7.17}$$

где m_i и μ_i — масса и молярная масса i-го компонента смеси соответственно.

7.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Определить примерный диаметр атомов ртути, считая, что атомы представляют собой шарики, плотно соприкасающиеся друг с другом. Плотность ртути ρ =13 600 кг/м^3.

Решение.

Объем, занимаемый одним атомом, определим по формуле

$$V_0 = m_0/\rho ,$$

где m_0 — масса атома.

Массу атома можно определить через молярную массу μ как $m_0 = \mu/N_A$. В случае плотного расположения каждый атом занимает объем V_0 — объем ячейки в виде куба со стороной d, т.е.

$$V_0 = d^3 .$$

В итоге

$$d = \sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}} .$$

Молярная масса ртути μ = 0,201 кг/моль. Тогда $d \approx 2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.

Ответ: $2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.

Задача 2.

Найти вероятность того, что модули скоростей молекул идеального газа лежат в интервале, не превышающем δ = 1% от наиболее вероятной скорости.

Решение.

Вероятность того, что скорость молекул лежат в интервале от υ_1 до υ_2, определим по формуле

$$W = \frac{\Delta N}{N} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} F(\upsilon) d\upsilon ,$$

где $F(\upsilon)$ — функция распределения Максвелла.

Ввиду малости рассматриваемого интервала $\Delta\upsilon = 2\delta\upsilon_{\text{вер}} = 0{,}02\upsilon_{\text{вер}}$ скоростей искомую вероятность можно рассчитать и по приближенной формуле

$$W \approx F\left(\upsilon_{\text{вер}}\right)\Delta\upsilon = 8\pi\delta\upsilon^3_{\text{вер}}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon^2_{\text{вер}}}{2kT}\right).$$

Наиболее вероятная скорость молекул равна $\upsilon_{\text{вер}} = \sqrt{2kT/m}$. Тогда

$$W \approx \frac{8\delta}{\sqrt{\pi}} e^{-1} = 0{,}017 = 1{,}7\,\% .$$

Ответ: 1,7%.

Задача 3.

Определить среднюю продолжительность $\overline{\tau}$ свободного пробега молекул водорода при температуре 27 °C и давлении 5 кПа. Эффективный диаметр молекулы водорода равен 0,28 нм.

Решение.

Среднюю продолжительность свободного пробега молекул определим как

$$\overline{\tau} = 1/\overline{z} ,$$

где $\overline{z} = \sqrt{2}\overline{\upsilon}\pi D_{эф}^2 n$ — среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа за 1 с.

Средняя арифметическая скорость молекул равна

$$\overline{\upsilon} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m N_A}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} ,$$

где μ — молярная масса молекул.

Концентрацию молекул определим, используя уравнение состояния идеального газа в виде $p = nkT$, откуда $n = p/(kT)$.

В итоге

$$\overline{\tau} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi D_{эф}^2 p}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} = \frac{1}{D_{эф}^2 p}\sqrt{\frac{\mu kT}{16\pi N_A}} .$$

Молярная масса молекул водорода μ = 0,002 кг/моль. Тогда $\overline{\tau} = 1{,}3\cdot10^{-9}$ с.

Ответ: $1{,}3\cdot10^{-9}$ с.

Задача 4.

Определить плотность насыщенного водяного пара в воздухе при температуре 300 K. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре равно 3,55 кПа.

Решение.

Плотность водяного пара найдем по формуле

$$\rho = \frac{m}{V} .$$

Перепишем уравнение Клапейрона–Менделеева в виде соотношения

$$\frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$$

В итоге

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Молярная масса молекул водяного пара $\mu = 0{,}018$ кг/моль. Тогда $\rho = 0{,}026$ кг/м^3.

Ответ: 0,026 кг/м^3.

Задача 5.

Газовая смесь, состоящая из кислорода и азота, находится в баллоне под давлением 1 МПа. Определить парциальное давление кислорода, если массовая доля кислорода в смеси равна 0,2.

Решение.

По закону Дальтона давление смеси равно

$$p = p_1 + p_2.$$

Из уравнения Клапейрона–Менделеева парциальное давление каждого компонента смеси найдем по формуле

$$p_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{\mu_{1,2}} \frac{RT}{V}.$$

С учетом известной массовой доли ω кислорода

$$m_1 = \omega m,$$
$$m_2 = (1-\omega)m,$$

где m — масса смеси.

Молярные массы кислорода и азота также известны: $\mu_1 = 0{,}032$ кг/моль; $\mu_2 = 0{,}028$ кг/моль.

Тогда

$$p_1 = \frac{\omega m}{\mu_1} \frac{RT}{V}, \quad p_2 = \frac{(1-\omega)m}{\mu_2} \frac{RT}{V}.$$

Отсюда

$$p_2 = p_1 \frac{\mu_1 (1-\omega)}{\mu_2 \omega}.$$

Из закона Дальтона выражаем p_1:

$$p_1 = p - p_2 = p - p_1 \frac{\mu_1(1-\omega)}{\mu_2\omega}.$$

В итоге парциальное давление кислорода равно

$$p_1 = \frac{p}{1+\mu_1(1-\omega)/(\mu_2\omega)} = 0{,}18 \text{ МПа}.$$

Ответ: 0,18 МПа.

7.3. Задачи для самостоятельного решения

7.1. Сколько атомов содержится в $m = 2$ г углекислого газа (CO_2)?

7.2. Определить среднюю кинетическую энергию молекул азота, находящихся в количестве 10 моль в объеме $V = 10$ м^3 под давлением $p = 3$ кПа.

7.3. Сосуд с воздухом, находящийся при температуре 17 °С, откачан до давления $1{,}33 \cdot 10^{-4}$ Па. Эффективный диаметр молекул воздуха равен 0,3 нм. Найти среднюю длину свободного пробега молекул.

7.4. В баллоне содержится газ при температуре 120 °С. До какой температуры нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в 1,5 раза?

7.5. Каково давление воздуха в шахте на глубине 1 км, если считать, что температура по всей высоте постоянна и равна 22 °С, а ускорение свободного падения не зависит от высоты? Давление воздуха у поверхности $p_0 = 0{,}1$ МПа.

8. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

8.1. Основные формулы

Связь между молярной и удельной теплоемкостями газа:

$$C = c\mu \,, \tag{8.1}$$

где c — удельная теплоемкость газа; μ — молярная масса газа.

Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R \,, \tag{8.2}$$

где i — число степеней свободы молекул газа; R — универсальная газовая постоянная.

Уравнение Майера:

$$C_p - C_V = R \,. \tag{8.3}$$

Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = \frac{i}{2}\nu RT \,. \tag{8.4}$$

Работа газа при изменении объема:

$$A_{1-2} = \int_1^2 p dV \,. \tag{8.5}$$

Первое начало (закон) термодинамики для элементарных процессов:

$$\delta Q = dU + \delta A \,, \tag{8.6}$$

где δQ — элементарное количество теплоты, подводимое к газу; dU — элементарное приращение внутренней энергии; δA — элементарная работа, совершаемая газом.

Первое начало термодинамики для конечных состояний 1–2:

$$Q = \Delta U_{1-2} + A \,, \tag{8.7}$$

где Q — подводимое к газу количество теплоты; ΔU_{1-2} — приращение внутренней энергии в процессе 1–2; A — работа, совершаемая газом.

Уравнение Пуассона для адиабатного процесса:

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \text{ или } TV^{\gamma-1} = \text{const}, \text{ или } Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}, \quad (8.8)$$

где $\gamma = (i+2)/i$ — постоянная Пуассона.

Изменение энтропии идеального газа в обратимом процессе 1–2:

$$\Delta S_{1-2} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (8.9)$$

где δQ — элементарное количество теплоты, полученное телом при температуре T.

Термический коэффициент полезного действия (КПД) цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (8.10)$$

где A — полезная работа, совершенная рабочим телом за цикл; Q_1 — количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 — количество теплоты, переданное рабочим телом охладителю.

Коэффициент полезного действия цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (8.11)$$

где T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура охладителя.

8.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Один моль идеального газа изотермически расширился в 2 раза при температуре $T = 350$ К. Определить работу по расширению газа.

Решение.

Работа при изменении объема идеального газа определяется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV.$$

Используя уравнение Клапейрона–Менделеева $pV = \nu RT$, выразим зависимость давления газа от объема при T = const:

$$p = \frac{\nu RT}{V} .$$

Тогда работа будет равна

$$A = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) .$$

По условию задачи $V_2/V_1 = 2$. Тогда A = 2016 Дж ≈ 2 кДж.

Ответ: 2 кДж.

Задача 2.

Определить изменение внутренней энергии кислорода при его адиабатном расширении от объема V_1 = 100 см^3 до V_2 = 200 см^3. Начальное давление газа p_1 = 0,1 МПа.

Решение.

При адиабатном процессе работа совершается за счет убыли внутренней энергии:

$$A = -\Delta U .$$

С другой стороны, при адиабатном переходе идеального газа из стационарного состояния 1 в состояние 2 совершается работа

$$A = \frac{1}{\gamma - 1}\left(p_1 V_1 - p_2 V_2\right) .$$

Для молекулы кислорода число степеней свободы i=5, следовательно $\gamma = (i+2)/i$ = 7/5. Конечное давление кислорода определим через уравнение Пуассона:

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} ,$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} .$$

В итоге изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = -\frac{1}{\gamma - 1}\left(p_1 V_1 - p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} V_2\right) = -\frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right) = -6{,}1 \text{ Дж.}$$

Ответ: –6,1 Дж.

Задача 3.

Найти удельную теплоемкость при постоянном давлении смеси газов, содержащей ν_1 = 500 молей азота и ν_2 = 1000 молей водорода.

Решение.

Удельную теплоемкость смеси при постоянном давлении определим по формуле

$$c_p = \frac{C_{p1} + C_{p2}}{m_1 + m_2},$$

где C_{p1}, C_{p2} — молярные теплоемкости при постоянном давлении компонентов смеси массами m_1 и m_2 соответственно.

Теплоемкость идеального газа при постоянном давлении определяется по формуле

$$C_p = \frac{i + 2}{2}\nu R.$$

Молекулы азота и водорода являются 2-атомными, и для них число степеней свободы равно пяти: $i_1 = i_2 = 5$.

Массы азота m_1 и водорода m_2 выразим через их количества вещества ν_1, ν_2 и молярные массы M_1, M_2:

$$m_1 = \nu_1 M_1;$$
$$m_2 = \nu_2 M_2.$$

Здесь молярная масса азота M_1 = 0,028 кг/моль, молярная масса водорода M_2 = 0,002 кг/моль.

В итоге

$$c_p = \frac{(i_1 + 2)\nu_1 + (i_2 + 2)\nu_2}{2(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2)} R = 2727 \text{ Дж/кг.}$$

Ответ: 2,7 кДж/кг.

Задача 4.

При изохорном нагреве 10 молей некоторого газа с 293 К до 373 К энтропия увеличилась на 30 Дж/К. Найти число степеней свободы газа.

Решение.

Изменение энтропии определим как

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} .$$

При изохорном (V = const) нагреве газа первое начало термодинамики имеет вид

$$\delta Q = dU = \frac{i}{2} \nu R dT .$$

Тогда

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{i}{2} \nu R \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \nu R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Отсюда

$$i = \frac{2\Delta S}{\nu R \ln\left(T_2/T_1\right)} = 3.$$

Ответ: 3.

Задача 5.

Найти термический КПД цикла, состоящего из двух изохор и двух адиабат, если в пределах цикла объем идеального газа меняется в 6 раз. Рабочим веществом является одноатомный идеальный газ.

Решение.

Определим термический КПД цикла по формуле

$$\eta = \frac{A}{Q_1} ,$$

где A — полезная работа, совершаемая рабочим телом за цикл; Q_1 — количество теплоты, получаемое от нагревателя.

Очевидно, что в рассматриваемом цикле (рис. 8.1) подводимое количество теплоты $Q_1 = Q_{4-1}$. Первое начало термодинамики для изохорного процесса 4–1 имеет вид

$$Q_{4-1} = \Delta U_{4-1} = \frac{i}{2}\nu R\left(T_1 - T_4\right).$$

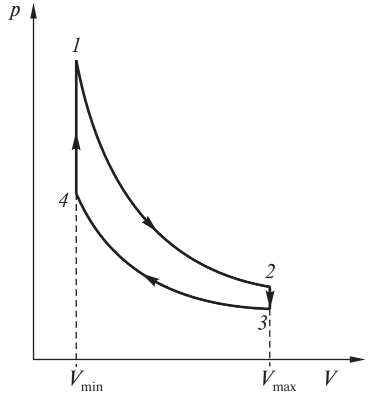


Рис. 8.1

Работа за цикл будет складываться из работы при адиабатных процессах 1–2 и 3–4:

$$A = A_{1-2} + A_{3-4}.$$

Работу на участке 1–2 определим как

$$A_{1-2} = -\Delta U_{1-2} = \frac{i}{2}\nu R\left(T_1 - T_2\right).$$

Согласно уравнению Пуассона $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$, откуда $T_2 = T_1\left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1} = T_1\left(V_{min}/V_{max}\right)^{\gamma-1}$. Тогда

$$A_{1-2} = \frac{i}{2}\nu R T_1\left(1 - \left(V_{min}/V_{max}\right)^{\gamma-1}\right).$$

Аналогично на участке 3–4:

$$A_{3-4} = -\Delta U_{3-4} = \frac{i}{2}\nu R\left(T_3 - T_4\right);$$

$$T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1};$$

$$T_3 = T_4 \left(V_4 / V_3\right)^{\gamma-1} = T_4 \left(V_{\min} / V_{\max}\right)^{\gamma-1};$$

$$A_{3-4} = \frac{i}{2} \nu R T_4 \left(\left(V_{\min} / V_{\max}\right)^{\gamma-1} - 1\right).$$

В итоге

$$\eta = \frac{T_1 \left(1 - \left(V_{\min} / V_{\max}\right)^{\gamma-1}\right) + T_4 \left(\left(V_{\min} / V_{\max}\right)^{\gamma-1} - 1\right)}{T_1 - T_4} =$$

$$= \frac{T_1 \left(1 - \left(V_{\min} / V_{\max}\right)^{\gamma-1}\right) - T_4 \left(1 - \left(V_{\min} / V_{\max}\right)^{\gamma-1}\right)}{T_1 - T_4} = 1 - \left(V_{\min} / V_{\max}\right)^{\gamma-1}.$$

Для одноатомного идеального газа постоянная адиабаты равна $\gamma = (i+2)/i = 5/3$. По условию задачи $V_{\max} / V_{\min} = 6$. Тогда термический КПД цикла равен 0,7 = 70%.

Ответ: 70%.

8.3. Задачи для самостоятельного решения

8.1. При каком давлении происходило изобарное расширение азота, если на увеличение его объема на 12 л было затрачено количество теплоты, равное 21 кДж?

8.2. Определить работу при адиабатном расширении m = 5 г гелия, если его температура увеличилась на ΔT = 20 К.

8.3. Найти удельную теплоемкость при постоянном объеме смеси газов, содержащей гелий и азот, взятых в одинаковых условиях и в одинаковых объемах.

8.4. При изобарном нагреве 5 молей водорода объем увеличивается в 2,72 раза. Найти приращение энтропии.

8.5. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из последующих процессов: изобарного, адиабатного и изотермического. В результате изобарного процесса газ нагревается от T_1 = 350 К до T_2 = 700 К. Определить термический КПД цикла.

9. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

9.1. Основные формулы

Сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов q_1 и q_2 (закон Кулона):

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r, \tag{9.1}$$

где $k = 9\cdot 10^9$ м/Ф — электрическая постоянная; r — модуль радиуса-вектора, проведенного от одного точечного заряда к другому; $\vec{e}_r$ — орт радиуса-вектора $\vec{r}$.

Вектор напряженности электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \tag{9.2}$$

где $\vec{F}$ — сила, действующая на положительный точечный заряд q_0, помещенный в данную точку поля.

Вектор напряженности электрического поля точечного заряда q:

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{e}_r, \tag{9.3}$$

где r — модуль радиуса-вектора, проведенного от точечного заряда до точки, в которой определяется вектор напряженности электрического поля.

Вектор напряженности электрического поля элементарного заряда dq:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\vec{e}_r. \tag{9.4}$$

Принцип суперпозиции электрических полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i, \tag{9.5}$$

где $\vec{E}_i$ — напряженность электрического поля, созданного i-м электрическим зарядом, входящим в систему из N зарядов, в отдельности.

Поток вектора напряженности электрического поля через поверхность площадью S:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E_n dS, \tag{9.6}$$

где $E_n = E\cos\alpha$ — проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к элементу поверхности площадью dS; α — угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$.

Если в каждой точке поверхности S напряженность электрического поля одинакова (например, если поле однородное), то поток вектора $\vec{E}$ можно определить как

$$\Phi_E = ES\cos\alpha. \tag{9.7}$$

Теорема Остроградского–Гаусса для вектора $\vec{E}$ в случае дискретных зарядов:

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\ , \tag{9.8}$$

где S — площадь замкнутой поверхности, охватывающей заряды $q_1, q_2, \ldots, q_N$; $\varepsilon_0 = 1/(36\pi\cdot 10^9) \approx 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды (в вакууме $\varepsilon = 1$).

Теорема Остроградского–Гаусса для вектора $\vec{E}$ в случае распределенных зарядов:

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV\ , \tag{9.9}$$

где ρ — объемная плотность электрических зарядов; V — объем области распределенных зарядов.

На основании теоремы Остроградского–Гаусса можно рассчитать напряженность электрического поля любой системы зарядов, причем заряды могут быть как дискретными, так и распределенными в пространстве с известной плотностью.

9.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Металлический шарик массой 10 г, несущий электрический заряд 20 мкКл, подвешен на изолирующей нити. При внесении его в однородное горизонтальное электрическое поле нить отклонилась на угол 45°. Определить напряженность электрического поля.

Решение.

Сумма векторов сил Кулона $\vec{F}_k$ и тяжести $m\vec{g}$ образует прямоугольный треугольник (рис. 9.1), гипотенуза которого равна по модулю и противоположна по направлению вектору силы натяжения нити $\vec{T}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_k}{mg}.$$

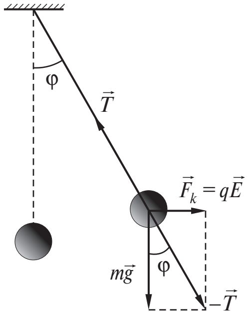


Рис. 9.1

Выражаем силу $\vec{F}_k$ и, подставив ее в соотношение (9.2), получаем

$$E = \frac{mg\operatorname{tg}\varphi}{q}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля равна $E = 500$ В/м.

Ответ: 500 В/м.

Задача 2.

Точечный заряд 40 нКл находится на расстоянии 30 см от бесконечной проводящей заземленной плоскости. Определить силу, действующую на заряд со стороны плоскости.

Решение.

Систему «заряд + проводящая заземленная плоскость», используя метод зеркальных отображений (рис. 9.2, *а*), можно представить как систему из двух равных по модулю и противоположных по знаку зарядов q, расположенных на расстоянии $2a$ друг от друга (рис. 9.2, *б*).

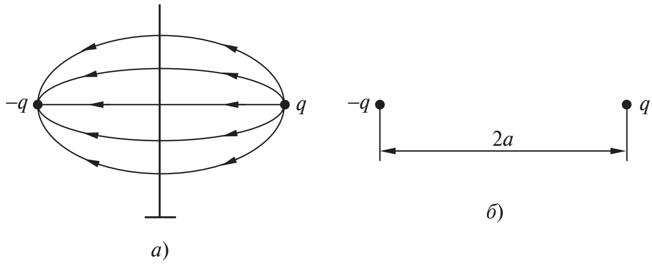


Рис. 9.2

Тогда в соответствии с законом Кулона получаем

$$F_k = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = k\frac{q^2}{(2a)^2}.$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $F_k = 40$ мкН.

Ответ: 40 мкН.

Задача 3.

Расстояние между точечными зарядами +2 нКл и −2 нКл равно 20 см. Определить напряженность электрического поля, созданного этими зарядами в точке, находящейся на расстоянии 15 см от первого и 10 см от второго заряда.

Решение.

Результирующую напряженность поля в рассматриваемой точке определим по принципу суперпозиции (9.5):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Изобразим графически расположение этих векторов для системы двух разноименных зарядов (рис. 9.3). Для определения модуля вектора $\vec{E}$ используем теорему косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\varphi}.$$

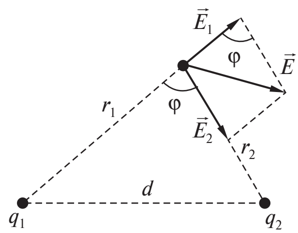


Рис. 9.3

Из рис. 9.3 видно, что угол φ может быть определен в соответствии с теоремой косинусов из треугольника со сторонами r_1, r_2, d:

$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}.$$

Используя соотношение (9.3), записываем выражения для напряженности поля точечных зарядов:

$$E_1 = k\frac{q_1}{r_1^2};\ E_2 = k\frac{q_2}{r_2^2}.$$

Тогда для модуля вектора напряженности электрического поля получаем

$$E = k\sqrt{\left(\frac{q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{r_2^2}\right)^2 - |q_1 q_2|\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{r_1^3 r_2^3}}\ .$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $E \approx 2{,}1$ кВ/м.

Ответ: 2,1 кВ/м.

Задача 4.

На отрезке тонкого прямого проводника длиной 10 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью 0,2 мкКл/м. Определить напряженность электрического поля в точке, лежащей на перпендикуляре к проводнику, проведенному через один из его концов, на расстоянии 10 см от этого конца.

Решение.

Разбиваем заряженный проводник длиной *l* на элементарные отрезки *dl*. Элементарный заряд отрезка *dl* равен произведению линейной плотности заряда τ и его длины: $dq = \tau dl$. Тогда модуль вектора напряженности в искомой точке может быть найден на основе соотношения (9.4):

$$d\vec{E} = k\frac{\tau dl}{r^2}\vec{e}_r.$$

Из рис. 9.4, *а* следует, что $dl = \frac{x}{\sin\varphi} = \frac{rd\varphi}{\sin\varphi}$ и $a = r\sin\varphi$. Подставляем это в формулу вектора напряженности:

$$d\vec{E} = k\frac{\tau d\varphi}{a}\vec{e}_r.$$

Проецируем вектор напряженности на координатные оси (рис. 9.4, *б*) и интегрируем полученные выражения по углу φ в пределах от φ_1 до $\pi/2$:

$$E_x = \int_{\varphi_1}^{\pi/2} k\frac{\tau}{a}\cos\varphi d\varphi = k\frac{\tau}{a}(1-\sin\varphi_1);$$

$$E_y = \int_{\varphi_1}^{\pi/2} k\frac{\tau}{a}\sin\varphi d\varphi = k\frac{\tau}{a}\cos\varphi_1.$$

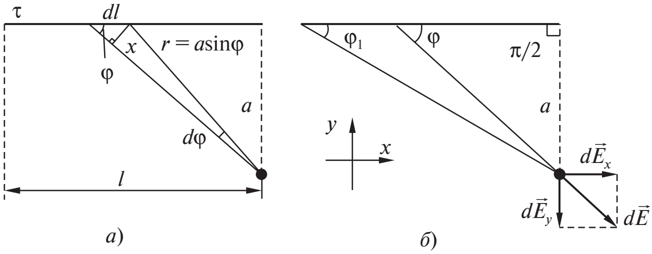


Рис. 9.4

Результирующую напряженность электрического поля определим по теореме Пифагора:

$$E = k\frac{\tau}{a}\sqrt{2(1-\sin\varphi_1)}.$$

Заменив $\sin\varphi_1$ на $a/\sqrt{l^2+a^2}$, получаем окончательную расчетную формулу:

$$E = k\frac{\tau}{a}\sqrt{2\left(1-\frac{a}{\sqrt{l^2+a^2}}\right)}.$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $E \approx 27$ кВ/м.

Ответ: 28 кВ/м.

Задача 5.

Кольцо радиусом 5 см из тонкой проволоки равномерно заряжено с линейной плотностью 14 нКл/м. Определить напряженность поля на оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно к его плоскости, в точке, удаленной на расстояние 10 см от центра.

Решение.

Разбиваем заряженное кольцо на элементарные отрезки *dl*. Элементарный заряд отрезка *dl* равен произведению линейной плотности заряда τ и его длины: $dq = \tau dl$. Тогда модуль вектора напряженности может быть найден на основе соотношения (9.4):

$$dE = k\frac{\tau dl}{r^2}.$$

Обозначим на рис. 9.5 вектор $d\vec{E}$ от двух взаимно противоположных участков *dl* и проекции этих векторов $d\vec{E}_{\parallel}$ и $d\vec{E}_{\perp}$. Результирующую напряженность электрического поля в соответствии с принципом суперпозиции можно найти путем суммирования (интегрирования) элементарных векторов. Из рис. 9.5 видно, что векторная

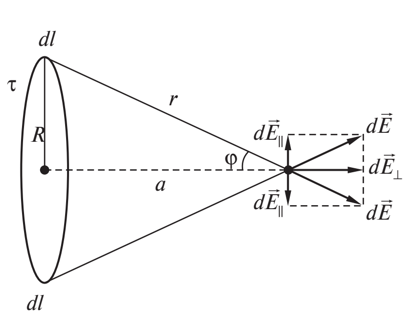


Рис. 9.5

сумма проекций $d\vec{E}_{\parallel}$ вследствие симметрии расположения элементарных зарядов обращается в ноль:

$$\vec{E}_{\parallel} = \oint d\vec{E}_{\parallel} = 0 .$$

В то же время проекций $d\vec{E}_{\perp}$ от всех элементарных зарядов равны друг другу и совпадают по направлению. Тогда искомая напряженность электрического поля

$$E = \oint dE_{\perp} = \oint dE = \oint\limits_{l=2\pi R} k\frac{\tau\cos\varphi}{r^2}dl .$$

С учетом того, что $\cos\varphi = a/r$ и $r = \left(a^2 + R^2\right)^{1/2}$, получаем

$$E = k\frac{\tau a}{\left(a^2 + R^2\right)^{3/2}}\oint\limits_{2\pi R} dl = k\frac{2\pi\tau a R}{\left(a^2 + R^2\right)^{3/2}} .$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $E \approx 2{,}8$ кВ/м.

Ответ: 2,8 кВ/м.

Задача 6.

Электрическое поле создано точечным электрическим зарядом 200 нКл. На расстоянии 1 м от точечного заряда находится центр круглой площадки радиусом 1 см, плоскость которой составляет угол 30° с радиусом-вектором, проведенным от заряда к ее центру. Найти поток вектора напряженности через площадку.

Решение.

Так как расстояние от точечного заряда до площадки много больше ее геометрических размеров: $r << R$ $(r \gg R)$, то электростатическое поле считаем однородным.

В соответствии с соотношением (9.7) поток вектора напряженности

$$\Phi_E = ES\cos\alpha.$$

Из рис. 9.6 $\alpha = \pi/2 - \varphi$. Площадь круга $S = \pi R^2$. Модуль вектора напряженности найдем на основе соотношения (9.3):

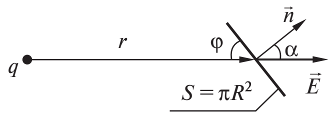


Рис. 9.6

$$E = k\frac{q}{r^2}.$$

Тогда поток вектора напряженности

$$\Phi_E = \pi k \frac{qR^2}{r^2}\cos(\pi/2 - \varphi).$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $\Phi_E = 0{,}09\pi$ В·м.

Ответ: $\Phi_E = 0{,}09\pi$ В·м.

Задача 7.

Построить график зависимости напряженности электростатического поля от расстояния до центра металлической сферы радиусом 15 см, несущей электрический заряд величиной 2 нКл (рис. 9.7).

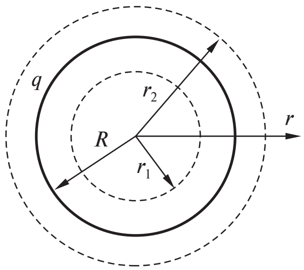


Рис. 9.7

Решение.

Воспользуемся теоремой Остроградского—Гаусса (9.8):

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\,.$$

Рассмотрим три ситуации: поле внутри сферы, вне ее и на поверхности.

Внутри сферы $(r_1 < R)$ мысленно размещаем сферическую поверхность радиусом r_1. Внутри этой поверхности электрические заряды отсутствуют. Таким образом,

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = 0\,.$$

Так как площадь поверхности воображаемой сферы не равна нулю, то получаем напряженность электростатического поля внутри проводящей сферы $E = 0$.

Вне сферы $(r_2 > R)$ мысленно размещаем сферическую поверхность радиусом r_2. Векторы напряженности электростатического поля в любой точке этой поверхности сонаправлены с векторами нормалей $\left(\vec{E}\uparrow\uparrow\vec{n}\right)$ и при $r = \text{const}$ постоянны по модулю. Следовательно, скалярное произведение в левой часть теоремы $\vec{E}d\vec{S}$ можно заменить на произведение их модулей и E вынести за знак интеграла:

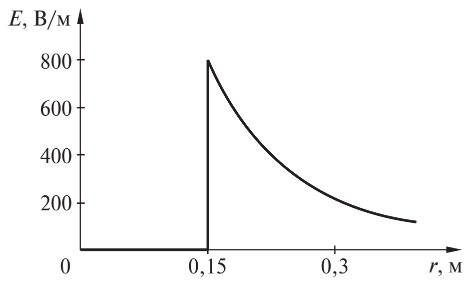
$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = E\oint_S d\vec{S} = ES = E\cdot 4\pi r_2^2\,.$$

Пространство внутри воображаемой сферы содержит заряд q. Тогда

$$E\cdot 4\pi r_2^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2} = k\frac{q}{r_2^2}\,.$$

На поверхности сферы $(r = R)$: а) изнутри: $\lim\limits_{r\to R} E = 0$; б) снаружи: $\lim\limits_{r\to R} E(r) = k\dfrac{q}{R^2} = 800$ В/м.

Ответ: График зависимости $\vec{E} = f(r)$:



Задача 8.

Построить график зависимости напряженности электростатического поля от расстояния до центра шара радиусом 5 см. Электрический заряд равномерно распределен по его объему с объемной плотностью 100 нКл/м^3 (рис. 9.8).

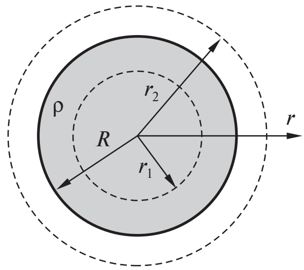


Рис. 9.8

Решение.

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса (9.9):

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV .$$

Рассмотрим три ситуации: поле внутри шара, вне его и на поверхности.

Внутри шара $(r_1 < R)$ мысленно размещаем сферическую поверхность радиусом r_1. Векторы напряженности электростатического поля в любой точке этой поверхности сонаправлены с векторами нормалей $\left(\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{n}\right)$ и при $r = \text{const}$ постоянны по модулю. Следовательно, скалярное произведение в левой часть теоремы $\vec{E}d\vec{S}$ можно заменить на произведение их модулей и E вынести за знак интеграла:

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = E\oint_S d\vec{S} = ES = E\cdot 4\pi r_1^2 .$$

Пространство внутри воображаемой сферы содержит заряд

$$\int_V \rho dV = \rho\int_V dV = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho r_1^3 .$$

Тогда

$$E \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{4}{3\varepsilon\varepsilon_0}\pi\rho r_1^3 \Rightarrow E = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Вне шара $(r_2 > R)$ мысленно размещаем сферическую поверхность радиусом r_2. Аналогично получаем

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = E\oint_S d\vec{S} = ES = E \cdot 4\pi r_2^2$$

Пространство внутри воображаемой сферы содержит заряд, равный заряду всего шара:

$$\int_V \rho dV = \rho\int_V dV = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3.$$

Тогда

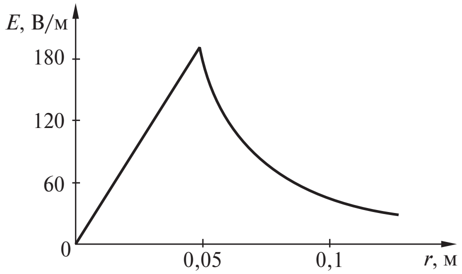
$$E \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{4}{3\varepsilon\varepsilon_0}\pi\rho R^3 \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2}.$$

На поверхности сферы $(r = R)$:

изнутри: $\lim\limits_{r\to R} E = \frac{\rho R}{3\varepsilon\varepsilon_0} \approx 188$ В/м;

снаружи: $\lim\limits_{r\to R} E(r) = \frac{\rho R}{3\varepsilon\varepsilon_0} \approx 188$ В/м.

Ответ: График зависимости $\vec{E} = f(r)$:



Задача 9.

Система представляет собой прямую бесконечно длинную нить, заряженную с линейной плотностью −10 нКл/м, и соосную с ней бесконечно длинную цилиндрическую поверхность радиуса 5 см, по которой равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью 50 нКл/м^2. Построить график зависимости напряженности электростатического поля от расстояния до оси системы.

Решение.

Воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса (9.8):

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\ .$$

Рассмотрим четыре ситуации: поле внутри цилиндра, вне его, на поверхности и при стремлении к заряженной нити.

Внутри цилиндра $(r_1 < R)$ мысленно размещаем цилиндрическую поверхность радиусом r_1 и высотой h (рис. 9.9, *а*). Воображаемый цилиндр состоит из двух оснований и боковой поверхности. Тогда теорему можем записать в виде

$$2\int_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i .$$

Векторы напряженности электростатического поля перпендикулярны векторам нормалей оснований. Следовательно, скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ от первого слагаемого обращается в ноль и $\int_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} = 0.$

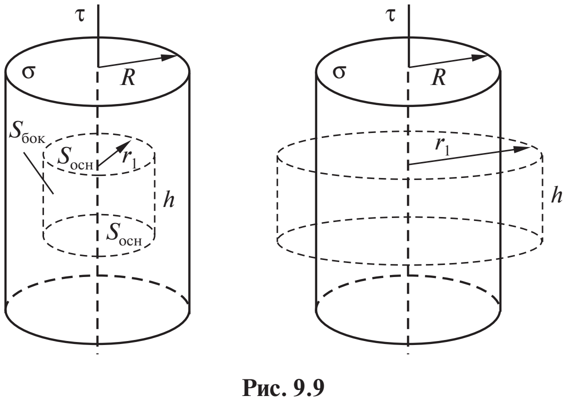


Рис. 9.9

Векторы напряженности электростатического поля параллельны векторам нормалей к элементам боковой поверхности $\left(\vec{E} \parallel \vec{n}\right)$ и при $r = \text{const}$ постоянны по модулю. Тогда скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ можно заменить на произведение модулей EdS и E вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{E}d\vec{S} = E \int\limits_{S_{\text{бок}}} dS = ES_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r_1 h.$$

Пространство внутри воображаемого цилиндра содержит заряд

$$\sum q = \int\limits_0^h \tau dl = \tau \int\limits_0^h dl = \tau h.$$

Тогда

$$E \cdot 2\pi r_1 h = \tau h \Rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon r_1} = \frac{2k\tau}{\varepsilon r_1}.$$

Вне заряженного цилиндра $\left(r_2 > R\right)$ мысленно размещаем цилиндрическую поверхность радиусом r_2 и высотой h (рис. 9.9, *б*). Аналогично получаем

$$\int\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{E}d\vec{S} = E \int\limits_{S_{\text{бок}}} dS = ES_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r_2 h.$$

Пространство внутри воображаемого цилиндра содержит заряд

$$\sum q = \int\limits_0^h \tau dl + \int\limits_{S=2\pi Rh} \sigma dS = \tau \int\limits_0^h dl + \sigma \int\limits_{2\pi Rh} dS = \tau h + 2\pi Rh\sigma.$$

Тогда

$$E \cdot 2\pi r_2 h = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(\tau h + 2\pi Rh\sigma\right) \Rightarrow E = \frac{\tau + 2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} = 2k\frac{\tau + 2\pi R\sigma}{\varepsilon r}.$$

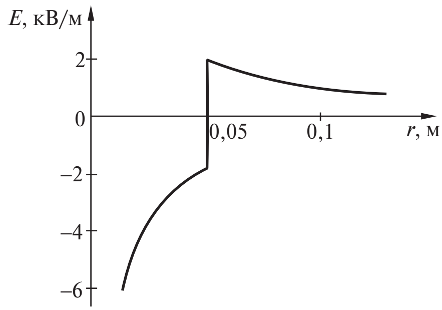
На поверхности цилиндра $\left(r = R\right)$:

изнутри: $\lim\limits_{r \to R} E\left(r\right) = \dfrac{2k\tau}{\varepsilon R} = -3600$ В/м;

снаружи: $\lim\limits_{r \to R} E\left(r\right) = 2k\dfrac{\tau + 2\pi R\sigma}{\varepsilon R} \approx 2055$ В/м.

При $r \to 0$: $\lim\limits_{r\to 0} E(r) = \dfrac{2k\tau}{\varepsilon \cdot 0} = -\infty.$

Ответ: График зависимости $E = f(r)$:



Задача 10.

Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд 1 нКл/м^2. Определить напряженность электрического поля между пластинами и вне пластин.

Решение.

Воспользуемся теоремой Остроградского—Гаусса (9.8):

$$\oint\limits_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \ .$$

Найдем формулу для оценки напряженности электростатического поля от одной бесконечно протяженной заряженной плоскости. Мысленно размещаем цилиндрическую поверхность радиусом r и высотой h, как показано на рис. 9.10, *а*. Воображаемый цилиндр состоит из двух оснований и боковой поверхности. Тогда теорему можем записать в виде

$$2 \int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E} d\vec{S} + \int\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \ .$$

Векторы напряженности электростатического поля перпендикулярны к заряженной плоскости и перпендикулярны векторам нормалей к элементам боковой поверхности воображаемого цилиндра.

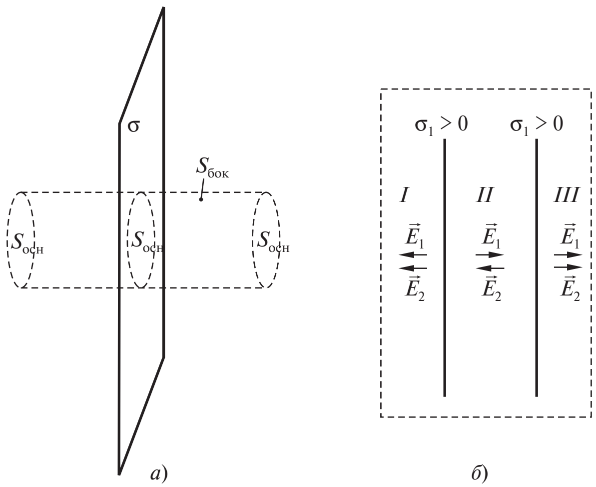


Рис. 9.10

Следовательно, скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ от первого слагаемого обращается в ноль и $\int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} = 0.$

Векторы напряженности электростатического поля параллельны векторам нормалей к основаниям воображаемого цилиндра $\left(\vec{E} \parallel \vec{n}\right)$ и постоянны по модулю. Тогда скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ можно заменить на произведение модулей EdS и E вынести за знак интеграла:

$$2\int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} = 2E\int\limits_{S_{\text{осн}}} dS = 2ES_{\text{осн}}.$$

Пространство внутри воображаемого цилиндра содержит заряд

$$\sum q = \int\limits_{S_{\text{осн}}} \sigma dS = \sigma\int\limits_{S_{\text{осн}}} dS = \sigma S_{\text{осн}}.$$

Тогда

$$2ES_{\text{осн}} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Из полученной формулы следует, что вокруг бесконечной плоскости, несущей равномерно распределенный заряд, поле во всех точках одно и то же.

Рассмотрим теперь две параллельные плоскости (рис. 9.10, *б*):

1) в области *II*: $E = E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 0$;

2) в областях *I* и *III*: $E = E_2 + E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = 36\pi$ В/м;

Ответ: 1) между пластинами: $E = 0$; 2) вне пластин: $E = 36\pi$ В/м.

9.3. Задачи для самостоятельного решения

9.1. Два маленьких металлических шарика массой 5 г подвешены на изолирующих нитях длиной 50 см так, что они касаются друг друга. После сообщения каждому шарику одинакового заряда нити отклонились от вертикали на угол 30°. Определить величину заряда, сообщенного каждому шарику.

9.2. Точечный заряд 40 нКл находится на расстоянии 30 см от бесконечной проводящей заземленной плоскости. Определить напряженность электрического поля в точке, лежащей на середине перпендикуляра, опущенного от заряда на плоскость.

9.3. В вершинах квадрата со стороной 5 см находятся одинаковые положительные заряды 2 нКл. Определить напряженность электрического поля в середине одной из сторон.

9.4. Два точечных заряда $q_1 = 2q$ и $q_2 = -q$ находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Определить положение точки, в которой напряженность равна нулю.

9.5. На отрезке тонкого прямого проводника длиной 10 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью 2 мкКл/м. Определить напряженность электрического поля в точке, лежащей на оси проводника на расстоянии 10 см от ближайшего конца проводника.

9.6. В однородном электрическом поле находится небольшая квадратная площадка со стороной 2 см, нормаль к которой составляет угол 60° с силовыми линиями электрического поля. Найти напряженность электрического поля, если поток вектора напряженности через площадку составляет 400 мВ·м.

9.7. Точечный электрический заряд величиной –2 нКл окружен концентрической сферой радиусом 10 см, по которой равномерно распределен электрический заряд величиной 3 нКл. Построить график зависимости напряженности электростатического поля от расстояния до центра системы.

9.8. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами 6 см и 12 см несут соответственно электрические заряды –1 нКл и 0,5 нКл. Построить график зависимости напряженности электростатического поля от расстояния до центра системы.

9.9. Две коаксиальные заряженные цилиндрические поверхности радиусами 2 см и 8 см несут соответственно электрические заряды с поверхностной плотностью 12 нКл/м^2 и 4 нКл/м^2. Построить график зависимости напряженности электростатического поля от расстояния до оси системы.

9.10. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд 2 нКл/м^2 и –1 нКл/м^2. Определить напряженность электрического поля между пластинами и вне пластин.

10. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

10.1. Основные формулы

Потенциал электрического поля точечного положительного заряда q_0:

$$\varphi = \frac{W}{q_0}, \tag{10.1}$$

где W — потенциальная энергия заряда q_0, помещенного в рассматриваемую точку пространства.

Работа сил электрического поля по перемещению заряда q из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = W_1 - W_2. \tag{10.2}$$

Потенциал поля, созданного системой электрических зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i, \tag{10.3}$$

где φ_i — потенциал поля каждого заряда в отдельности.

Потенциал электрического поля точечного заряда:

$$\varphi = k\frac{q}{r}, \tag{10.4}$$

где r — расстояние от заряда до рассматриваемой точки пространства.

Вектор напряженности $\vec{E}$ и значение потенциала φ в рассматриваемой точке связаны соотношением

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{10.5}$$

где grad φ — градиент потенциала.

В декартовой системе координат последнее выражение имеет вид

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right). \qquad (10.6)$$

Тогда модуль вектора $\vec{E}$ можно определить как

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2}. \qquad (10.7)$$

Для сферически-симметричного поля (поле точечного заряда, заряженной сферы) связь между E и φ выглядит как

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}. \qquad (10.8)$$

10.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Кольцо радиусом 5 см из тонкой проволоки равномерно заряжено с линейной плотностью 14 нКл/м. Определить потенциал электрического поля на оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно к его плоскости, в точке, удаленной на расстояние 10 см от центра.

Решение.

Разбиваем заряженное кольцо на элементарные отрезки dl. Элементарный заряд отрезка dl равен произведению линейной плотности заряда τ и его длины: $dq = \tau dl$. Элементарный потенциал электростатического поля может быть найден на основе соотношения (10.4):

$$d\varphi = k\frac{dq}{r} = k\frac{\tau dl}{r}.$$

В соответствии с рис. 10.1 $r = \sqrt{R^2 + a^2}$. Тогда искомый потенциал электростатического поля

$$\varphi = \oint\limits_{l=2\pi R} k\frac{\tau}{\sqrt{R^2 + a^2}} dl = k\frac{\tau}{\sqrt{R^2 + a^2}} \oint\limits_{l=2\pi R} dl = k\frac{2\pi R\tau}{\sqrt{R^2 + a^2}}.$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $\varphi \approx 354$ В.

Ответ: 354 В.

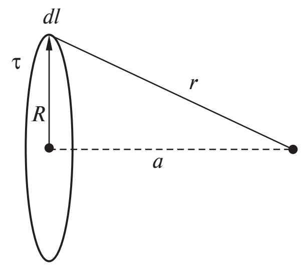


Рис. 10.1

Задача 2.

α-частица движется вдоль прямой, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр (рис. 10.2). Кольцо имеет радиус 3 см и электрический заряд 20 нКл. Какую скорость должна иметь α-частица на большом удалении от кольца, чтобы она смогла преодолеть кольцо?

Решение.

Работа по торможению заряженной частицы в электростатическом поле в нерелятивистском случае равна изменению ее кинетической энергии, с одной стороны, и в соответствии с формулой (10.2) произведению ее заряда q' на разность потенциалов — с другой:

$$A = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = q'(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Скорость α–частицы в центре кольца равна нулю $(\upsilon = 0)$. Потенциал на большом удалении примем тоже за ноль $(\varphi_1(r \to \infty) = 0)$. Для нахождения потенциала в центре кольца воспользуемся формулой из предыдущей задачи:

$$\varphi_2 = k\frac{2\pi R\tau}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \left| \begin{matrix} q = 2\pi R\tau \\ a = 0 \end{matrix} \right| = k\frac{q}{R}.$$

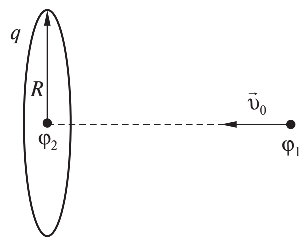


Рис. 10.2

Тогда

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = q\varphi_2 \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2q\varphi_2}{m}} = \sqrt{\frac{2qq'k}{mR}}.$$

Принимая заряд α-частицы равным по модулю двум зарядам электрона и подставляя исходные данные в расчетную формулу, получаем $\upsilon_0 \approx 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с.

Ответ: 1,5 Мм/с.

Задача 3.

На плоском кольце внутренним радиусом 80 см и внешним радиусом 1 м равномерно распределен электрический заряд с поверхностной плотностью 10 нКл/м^2. Определить потенциал электрического поля в центре кольца.

Решение.

Разбиваем заряженное кольцо на элементарные сегменты радиусом r и толщиной dr (рис. 10.3). Элементарный заряд сегмента равен произведению линейной плотности заряда σ и его площади: $dq = \sigma dS = 2\pi r\sigma dr$. Элементарный потенциал электростатического поля может быть найден на основе соотношения (10.4):

$$d\varphi = k\frac{dq}{r} = 2\pi\sigma k dr.$$

Тогда искомый потенциал электростатического поля

$$\varphi = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\sigma k dr = 2\pi\sigma k \int_{R_1}^{R_2} dr = 2\pi\sigma k\left(R_2 - R_1\right).$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $\varphi \approx 113$ В.

Ответ: 113 В.

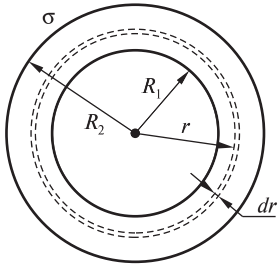


Рис. 10.3

Задача 4.

Электрическое поле создано бесконечно длинной цилиндрической поверхностью радиусом 10 см, заряженной с поверхностной плотностью 40 нКл/м^2. Построить график зависимости потенциала электрического поля от расстояния до оси системы.

Решение.

Для начала определим зависимость вектора напряженности электростатического поля от расстояния до оси системы. Воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса (9.8):

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \,.$$

Рассмотрим две ситуации: поле внутри цилиндра и вне его.

Внутри цилиндра $(r_1 < R)$ мысленно размещаем цилиндрическую поверхность радиусом r_1 и высотой h (рис. 10.4, *а*). Внутри этой поверхности электрические заряды отсутствуют. Таким образом,

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = 0 \,.$$

Так как площадь поверхности воображаемой сферы не равна нулю, то получаем напряженность электростатического поля внутри заряженной цилиндрической поверхности $E = 0$.

Вне заряженного цилиндра $(r_2 > R)$ мысленно размещаем цилиндрическую поверхность радиусом r_2 и высотой h (рис. 10.4, *б*). Воображаемый цилиндр состоит из двух оснований и боковой поверхности. Тогда теорему можем записать в виде

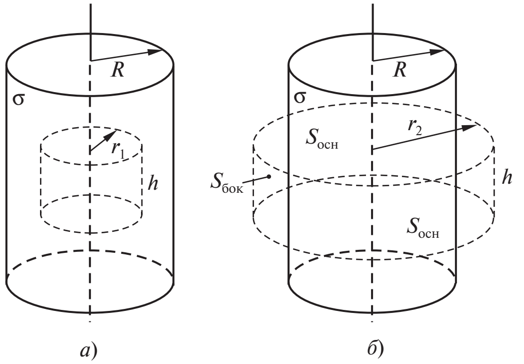


Рис. 10.4

$$2\int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i.$$

Векторы напряженности электростатического поля перпендикулярны векторам нормалей оснований. Следовательно, скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ от первого слагаемого обращается в ноль и $\int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} = 0.$

Векторы напряженности электростатического поля параллельны векторам нормалей к элементам боковой поверхности $\left(\vec{E} \parallel \vec{n}\right)$ и при $r = \text{const}$ постоянны по модулю. Тогда скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ можно заменить на произведение модулей EdS и E вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{E}d\vec{S} = E\int\limits_{S_{\text{бок}}} dS = ES_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r_2 h.$$

Пространство внутри воображаемого цилиндра содержит заряд

$$\sum q = \int\limits_{S=2\pi Rh} \sigma dS = \sigma \int\limits_{2\pi Rh} dS = 2\pi Rh\sigma.$$

Тогда

$$E \cdot 2\pi r_2 h = \frac{2\pi Rh\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

В соответствии с соотношением (10.5) потенциал можно определить как

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{dr}\vec{e}_r \Rightarrow \varphi = -\int Edr.$$

Потенциал электростатического поля вне заряженного цилиндра $\left(r_2 > R\right)$:

$$\varphi(r) = -\int \frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0 r}dr = -\frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r} = -\frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0}\ln r + \text{const}.$$

Потенциал на поверхности $(r = R)$ при приближении к ней извне:

$$\lim_{r \to R} \varphi(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0} \ln R + \text{const}.$$

Примем потенциал поверхности цилиндра за ноль $(\varphi = 0)$ и определим константу:

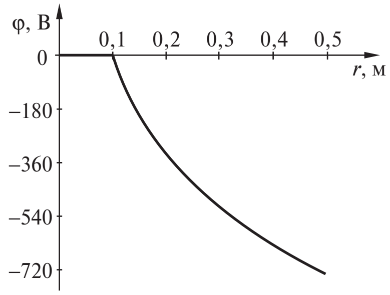
$$-\frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0} \ln R + \text{const} = 0 \Rightarrow \text{const} = \frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0} \ln R.$$

Тогда потенциал снаружи заряженного цилиндра $(r \geq R)$:

$$\varphi(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0} \ln r + \frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0} \ln R = \frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r}.$$

Внутри цилиндра напряженность электростатического поля равна нулю, и следовательно, $\varphi = \int E dr = \text{const} = \varphi(R) = 0$.

Ответ: График зависимости $E = f(r)$:



Задача 5.

Потенциал электрического поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид $\varphi = a(y^3 - 3yx^2)$, где $a = 1$ В/м^3. Найти модуль вектора напряженности электрического поля в точке с координатами $x = 0{,}5$ м, $y = 0{,}5$ м.

Решение.

Модуль вектора напряженности электростатического поля в соответствии с выражением (10.7) можно определить как

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Определим частные производные:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -6ayx; \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a\left(3y^2 - 3x^2\right).$$

Тогда модуль вектора напряженности

$$E = a\sqrt{\left(-6yx\right)^2 + \left(3y^2 - 3x^2\right)^2}.$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $E \approx 1{,}5$ В/м.

Ответ: 1,5 В/м.

10.3. Задачи для самостоятельного решения

10.1. Определить потенциал электрического поля в центре полукольца радиусом 10 см, равномерно заряженного зарядом 20 нКл.

10.2. В вершинах квадрата со стороной 4 см находятся заряды 1 нКл. Какую скорость приобретет протон, если он, двигаясь из центра квадрата вдоль прямой, перпендикулярной плоскости квадрата, пройдет расстояние 1 см?

10.3. На отрезке тонкого прямого проводника длиной 10 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью 2 мкКл/м. Определить потенциал электрического поля в точке, лежащей на оси проводника на расстоянии 10 см от ближайшего конца проводника.

10.4. Электрическое поле создано сферой радиусом 10 см, заряженной с поверхностной плотностью 40 нКл/м^2. Построить график зависимости потенциала электрического поля от расстояния до центра сферы.

10.5. Потенциал электрического поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид $\varphi = a(x^2 - y^2)$, где $a = 1$ В/м^2. Найти модуль напряженности электрического поля в точке с координатами $x = 0{,}5$ м, $y = 1$ м.

11. ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ И ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

11.1. Основные формулы

Электрический момент диполя:

$$\vec{p} = |q|\vec{l}, \tag{11.1}$$

где q — заряд диполя; $\vec{l}$ — вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному (рис. 11.1).

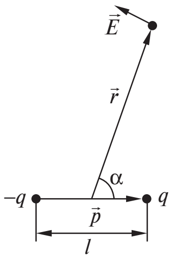


Рис. 11.1

Напряженность электрического поля точечного ($r{>>}l$) диполя:

$$E = k\frac{p}{\varepsilon r^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}, \tag{11.2}$$

где α — угол между векторами $\vec{l}$ и $\vec{r}$; ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Потенциал электрического поля точечного диполя:

$$\varphi = k\frac{p}{\varepsilon r^2}\cos\alpha. \tag{11.3}$$

Потенциальная энергия диполя во внешнем электрическом поле:

$$W_n = -\vec{p}\vec{E}. \tag{11.4}$$

Механический момент, действующий на диполь со стороны однородного электрического поля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E} \right]. \tag{11.5}$$

Проекция силы на ось *OX*, действующей на диполь со стороны неоднородного электрического поля, изменяющегося вдоль оси *OX*:

$$F_x = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha. \tag{11.6}$$

Поляризованность однородного диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_i \vec{p}_i, \tag{11.7}$$

где ΔV — физически бесконечно малый объем диэлектрика; $\vec{p}_i$ – дипольный момент i-й молекулы.

Напряженность среднего макроскопического поля в диэлектрике:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}, \tag{11.8}$$

где E_0 — напряженность внешнего электрического поля.

Связь поляризованности и напряженности среднего макроскопического поля:

$$P = \chi\varepsilon_0 E, \tag{11.9}$$

где χ — диэлектрическая восприимчивость среды.

Вектор электрического смещения:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}. \tag{11.10}$$

Связь диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости среды:

$$\varepsilon = 1 + \chi. \tag{11.11}$$

Теорема Остроградского–Гаусса для вектора $\vec{D}$:

$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} q_i, \tag{11.12}$$

где $\sum_{i=1}^{N} q_i$ — сумма свободных зарядов внутри замкнутой поверхности S.

11.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Определить напряженность и потенциал электрического поля, созданного точечным диполем с электрическим дипольным моментом, равным 1 пКл·м, в точке, удаленной от него на расстояние 15 см, если угол между направлением дипольного момента и направлением на данную точку равен 45°.

Решение.

Напряженность электростатического поля диполя может быть найдена на основе соотношения (11.2):

$$E = k\frac{p}{\varepsilon r^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}.$$

Потенциал на основе соотношения (11.3):

$$\varphi = k\frac{p}{\varepsilon r^2}\cos\alpha.$$

Подстановка исходных данных в расчетные формулы дает ответ $E \approx 4{,}2$ В/м, $\varphi \approx 0{,}28$ В.

Ответ: 4,2 В/м, 0,28 В.

Задача 2.

Два точечных диполя с электрическими моментами 1 пКл·м и 4 пКл·м находятся на расстоянии 2 см друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой (рис. 11.2).

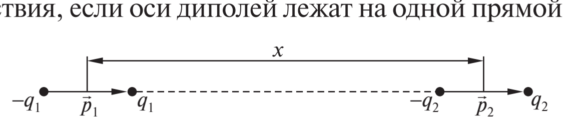


Рис. 11.2

Решение.

Проекция силы на ось OX, действующей на первый диполь со стороны неоднородного электрического поля, создаваемого вторым диполем и изменяющегося вдоль оси OX, можно определить по формуле (11.6):

$$F_x = p_1 \frac{\partial E_2}{\partial x} \cos\alpha.$$

Напряженность электростатического поля второго диполя может быть найдена на основе соотношения (11.2):

$$E_2 = k \frac{p_2}{\varepsilon r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}.$$

С учетом того что оси диполей лежат на одной прямой на расстоянии x (см. рис. 11.2), получаем

$$E_2 = 2k \frac{p_2}{\varepsilon x^3}.$$

Находим частную производную:

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = -6k \frac{p_2}{x^4}.$$

Тогда сила взаимодействия диполей

$$F_x = -6k \frac{p_1 p_2}{x^4}.$$

Подстановка исходных данных дает ответ $F = -1{,}35$ мкН.

Ответ: $-1{,}35$ мкН.

Задача 3.

Диполь с электрическим моментом 75 пКл·м свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью 80 кВ/м. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол 90°.

Решение.

Работа, необходимая для того, чтобы повернуть диполь на заданный угол α, может быть найдена как изменение потенциальной энергии диполя в электрическом поле:

$$A = -\Delta W_{\text{п}} = -\left(W_{\text{п}2} - W_{\text{п}1}\right).$$

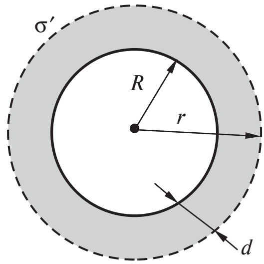


Рис. 11.3

С учетом выражения для потенциальной энергии диполя во внешнем электрическом поле (11.4)

$$W_n = -\vec{p}\vec{E} = -pE\cos\alpha$$

получаем расчетную формулу

$$A = pE\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right).$$

Диполь свободно устанавливается в однородном электрическом поле в положении с минимумом потенциальной энергии $W_{\text{п}1} = -pE$. Следовательно, начальный угол $\alpha_1 = 0°$, а конечный относительно него $\alpha_2 = \alpha_1 + 90° = 90°$. Тогда подстановка исходных данных дает ответ $A = -6$ мкДж.

Ответ: –6 мкДж.

Задача 4.

Металлический шар радиусом 5 см окружен равномерно слоем фарфора ($\varepsilon = 5$) толщиной 2 см. Определить поверхностную плотность σ' связанных зарядов на внешней поверхности диэлектрика. Заряд шара равен 10 нКл.

Решение.

Воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса для $\vec{D}$ (11.12):

$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} q_i .$$

Мысленно по поверхности диэлектрика размещаем сферическую поверхность радиусом $r = R + d$ (рис. 11.3). Векторы электрического смещения в любой точке этой поверхности сонаправлены с векторами нормалей $\left(\vec{D} \uparrow\uparrow \vec{n}\right)$ и при $r = \text{const}$ постоянны по модулю. Следовательно, скалярное произведение в левой часть теоремы $\vec{D}d\vec{S}$ можно заменить на произведение их модулей и D вынести за знак интеграла:

$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = D\oint_S dS = DS = D\cdot 4\pi r^2 .$$

Пространство внутри воображаемой сферы содержит полный заряд шара q. Тогда

$$D\cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Поверхностная плотность σ' связанных зарядов равна поляризованности диэлектрика:

$$\sigma' = P.$$

С учетом соотношений (11.9), (11.10) и (11.11) получаем

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}D.$$

Тогда

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\cdot\frac{q}{4\pi r^2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\cdot\frac{q}{4\pi\left(R + d\right)^2}.$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $\sigma' \approx 0{,}13$ мкКл/м^2.

Ответ: 0,13 мкКл/м^2.

Задача 5.

Определить диэлектрическую восприимчивость стекла, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью 5 МВ/м и обладающего поляризованностью 37,9 мкКл/м^2.

Решение.

Поляризованность и напряженность среднего макроскопического поля связаны соотношением (11.9):

$$P = \chi\varepsilon_0 E.$$

С учетом (11.8) и (11.11) формулу можно записать в виде

$$P = \frac{\chi\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon} = \frac{\chi\varepsilon_0 E_0}{\chi+1}.$$

Выражаем из полученного соотношения диэлектрическую восприимчивость стекла, получаем

$$\chi = \frac{P}{\varepsilon_0 E_0 - P}.$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $\chi \approx 5{,}97$.

Ответ: 5,97.

11.3. Задачи для самостоятельного решения

11.1. Определить напряженность и потенциал электрического поля, созданного точечным диполем с электрическим дипольным моментом, равным 20 пКл·м, в точке, лежащей на оси диполя и удаленной от него на расстояние 1 м.

11.2. На расстоянии 30 см от точечного электрического заряда величиной 100 нКл находится точечный диполь с электрическим моментом 5 пКл·м, свободно установившийся в электрическом поле заряда. Найти силу взаимодействия заряда и диполя.

11.3. Диполь с электрическим моментом 75 пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью 9 кВ/м. Определить изменение потенциальной энергии диполя при повороте его на угол 45°.

11.4. Эбонитовая ($\varepsilon = 3$) плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E_0 = 2$ МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности. Определить модуль поверхностной плотности σ' связанных зарядов на гранях пластины.

11.5. В некоторой точке изотропного диэлектрика смещение имеет значение 6 мкКл/м^2, а поляризованность 5 мкКл/м^2. Чему равна диэлектрическая восприимчивость диэлектрика?

12. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

12.1. Основные формулы

Электроемкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{U}, \tag{12.1}$$

где q — модуль заряда на обкладке конденсатора; U — разность потенциалов (напряжение) между обкладками.

Электроемкость батареи, состоящей из n последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}. \tag{12.2}$$

Если батарея образована конденсаторами одинаковой емкости C_1, то емкость батареи равна $C = C_1 / n$.

Электроемкость батареи, состоящей из n параллельно соединенных конденсаторов:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i. \tag{12.3}$$

Если батарея образована конденсаторами одинаковой емкости C_1, то емкость батареи равна $C = nC_1$.

Энергия неоднородного электрического поля, заключенного в объеме пространства V:

$$W = \int_V \varpi dV, \tag{12.4}$$

где ϖ – объемная плотность энергии:

$$\varpi = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{DE}{2}. \tag{12.5}$$

Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \qquad (12.6)$$

12.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Определить электроемкость плоского воздушного конденсатора. Площадь обкладок $S = 20$ см^2, расстояние между ними 2 мм.

Решение.

Найдем формулу для оценки напряженности электростатического поля заряженной плоскости, габаритные размеры которой такие, что краевыми эффектами можно пренебречь. Воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса (9.8):

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \, .$$

Мысленно размещаем цилиндрическую поверхность, как показано на рис. 12.1. Воображаемый цилиндр состоит из двух оснований и боковой поверхности. Тогда теорему можем записать в виде

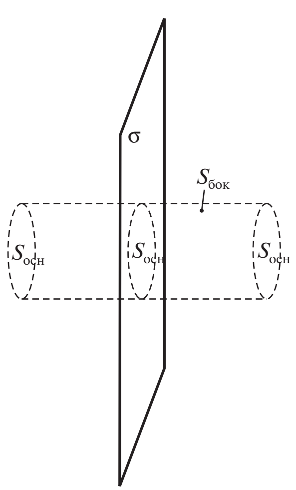


Рис. 12.1

$$2\int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i.$$

Векторы напряженности электростатического поля перпендикулярны к заряженной плоскости и перпендикулярны векторам нормалей к элементам боковой поверхности воображаемого цилиндра. Следовательно, скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ от первого слагаемого обращается в ноль и $\int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} = 0.$

Векторы напряженности электростатического поля параллельны векторам нормалей к основаниям воображаемого цилиндра $\left(\vec{E} \parallel \vec{n}\right)$ и постоянны по модулю. Тогда скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ можно заменить на произведение модулей EdS и E вынести за знак интеграла:

$$2\int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} = 2E\int\limits_{S_{\text{осн}}} dS = 2ES_{\text{осн}}.$$

Пространство внутри воображаемого цилиндра содержит заряд

$$\Sigma q = \int\limits_{S_{\text{осн}}} \sigma dS = \sigma\int\limits_{S_{\text{осн}}} dS = \sigma S_{\text{осн}}.$$

Тогда

$$2ES_{\text{осн}} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Рассмотрим теперь конденсатор, обкладки которого представляют собой две параллельные плоскости, несущие равные по величине, но противоположные по знаку заряды (рис. 12.2), в приближении, что расстояние между плоскостями d много больше линейных размеров обкладок конденсатора:

1) в области *II*:

$$E = \left|\vec{E}_2\right| + \left|\vec{E}_1\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

где S — площадь одной обкладки; q — ее заряд по модулю;

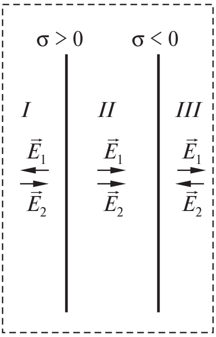


Рис. 12.2

2) в областях *I* и *III*:

$$E = \left|\vec{E}_2\right| - \left|\vec{E}_1\right| = 0.$$

Найдем разность потенциалов внутри конденсатора:

$$U = \Delta\varphi = \int_0^d E dr = \int_0^d \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} dr = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\int_0^d dr = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Подставим полученный результат в соотношение (12.1) и определим емкость для цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $C \approx 8{,}85$ пФ.

Ответ: 8,85 пФ.

Задача 2.

Определить электроемкость цилиндрического воздушного конденсатора длиной 10 см с радиусами обкладок 1 см и 2 см.

Решение.

Найдем напряженность электростатического поля между обкладками цилиндрического конденсатора, расстояние между которыми таковы по отношению к габаритным размерам, что краевыми эффектами можно пренебречь. Воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса (9.8):

$$\oint\limits_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\ .$$

Между обкладками мысленно размещаем цилиндрическую поверхность радиусом $r\ (R_1 > r > R_2)$ и высотой h (рис. 12.3). Воображаемый цилиндр состоит из двух оснований и боковой поверхности. Теорему можем записать в виде

$$2\int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i .$$

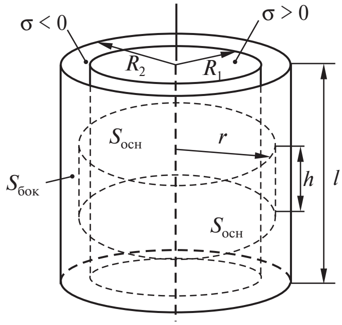


Рис. 12.3

Векторы напряженности электростатического поля перпендикулярны векторам нормалей оснований. Следовательно, скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ от первого слагаемого обращается в ноль и $\int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S} = 0.$

Векторы напряженности электростатического поля параллельны векторам нормалей к элементам боковой поверхности $\left(\vec{E} \parallel \vec{n}\right)$ и при $r = \text{const}$ постоянны по модулю. Тогда скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ можно заменить на произведение модулей EdS и E вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{E}d\vec{S} = E\int\limits_{S_{\text{бок}}} dS = ES_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi rh.$$

Пространство внутри воображаемого цилиндра содержит заряд

$$\sum q = \int\limits_{S=2\pi R_1 h} \sigma dS = \sigma \int\limits_{2\pi R_1 h} dS = 2\pi R_1 h\sigma.$$

Тогда

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{2\pi R_1 h\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

С учетом того что поверхностная плотность заряда $\sigma = \dfrac{q}{2\pi R_1 l}$, получаем формулу для расчета напряженности электрического поля между обкладками цилиндрического конденсатора:

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 rl}.$$

Вне обкладок напряженность электрического поля обращается в ноль.

Найдем разность потенциалов внутри конденсатора:

$$U = \Delta\varphi = \int\limits_{R_1}^{R_2} Edr = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 rl} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} \ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Подставим полученный результат в соотношение (12.1) и определим емкость для цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(R_2/R_1\right)}.$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $C \approx 8{,}0$ пФ.

Ответ: 8,0 пФ.

Задача 3.

В плоский конденсатор вдвинули плитку парафина ($\varepsilon = 2$) толщиной 1 см, которая вплотную прилегает к его обкладкам. Насколько нужно увеличить расстояние между обкладками, чтобы получить прежнюю емкость?

Решение.

Начальная емкость плоского воздушного конденсатора может быть найдена из соотношения

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Получившийся во втором случае конденсатор можно заменить моделью из двух последовательно соединенных конденсаторов (рис. 14.4). Емкость первого равна

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

второго

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{\Delta d}.$$

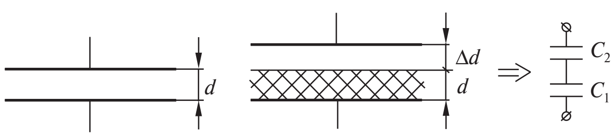


Рис. 12.4

Для последовательно соединенных конденсаторов в соответствии с соотношением (12.2) получаем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{\varepsilon\varepsilon_0 S} + \frac{\Delta d}{\varepsilon_0 S}.$$

Заменяя в этом выражении начальную емкость воздушного конденсатора C, получаем

$$\frac{d}{\varepsilon_0 S} = \frac{d}{\varepsilon\varepsilon_0 S} + \frac{\Delta d}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow \Delta d = d\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $\Delta d = 5$ мм.

Ответ: 5 мм.

Задача 4.

Между обкладками плоского конденсатора емкости 200 пФ находится плотно прилегающая стеклянная ($\varepsilon = 7$) пластинка. Конденсатор заряжен до разности потенциалов 100 В и отключен от источника. Какую работу нужно совершить, чтобы вытащить стеклянную пластинку из конденсатора?

Решение.

Работу по изъятию стеклянной пластинки можно найти как разницу энергий заряженного конденсатора во конечной и начальной ситуациях:

$$A = W_2 - W_1.$$

Энергии в соответствии с (12.6) можно определить как

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2}, \quad W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2}.$$

На основе известного выражения для емкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

получаем $C_2 = C_1 / \varepsilon$.

Конденсатор был отключен от источника питания. Следовательно, заряд его оставался неизменным. Тогда, приравняв заряды $q = C_1 U_1 = C_2 U_2$, записываем напряжение на обкладках: $U_2 = \varepsilon U_1$.

Собирая вышесказанное в единое выражение, получаем

$$A = \frac{C_1 U_1^2}{2}(\varepsilon - 1).$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ A = 6 мкДж.

Ответ: 6 мкДж.

Задача 5.

Электрическое поле создано заряженной зарядом 0,1 мкКл сферой радиусом 10 см (рис. 12.5). Какова энергия поля, заключенная в объеме, ограниченном концентрическими со сферой сферическими поверхностями, радиусы которых в 2 и 3 раза больше радиуса сферы?

Решение.

Энергию поля, заключенную в заданном объеме, можно найти на основе соотношений (12.4) и (12.5):

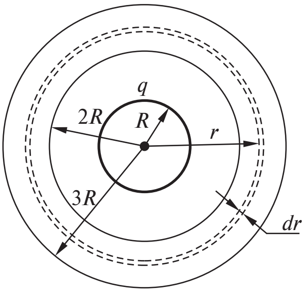


Рис. 12.5

$$W = \int_V \varpi dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV.$$

Напряженность электростатического поля вне заряженной сферы определим на основе теоремы Остроградского–Гаусса (9.8):

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \, .$$

Мысленно сферу окружаем сферической поверхностью радиусом $r \ (r > R)$. Векторы напряженности электростатического поля параллельны векторам нормалей к элементам поверхности воображаемой сферы $\left(\vec{E} \parallel \vec{n}\right)$ и при $r = \text{const}$ постоянны по модулю. Тогда скалярное произведение $\vec{E} d\vec{S}$ можно заменить на произведение модулей EdS и E вынести за знак интеграла:

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = E \oint_S dS = ES = E \cdot 4\pi r^2 \, .$$

Пространство внутри воображаемого цилиндра содержит заряд q. Тогда

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Подставляем полученное выражение в формулу для энергии электростатического поля и с учетом $dV = 4\pi r^2 dr$ получаем

$$W = \int_{2R}^{3R} \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = k \frac{q^2}{2\varepsilon} \int_{2R}^{3R} \frac{dr}{r^2} = k \frac{q^2}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R} \right) = k \frac{q^2}{12\varepsilon R}.$$

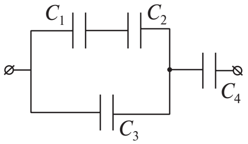
Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $W = 75$ мкДж.

Ответ: 75 мкДж.

12.3. Задачи для самостоятельного решения

12.1. Определить электроемкость воздушного сферического конденсатора с радиусами обкладок 1 см и 2 см.

12.2. Определить емкость батареи конденсаторов: $C_1 = 2$ пФ; $C_2 = 2$ пФ; $C_3 = 2$ пФ; $C_4 = 6$ пФ.



12.3. Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 600 В, находятся два слоя диэлектриков: стекла ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 7$ мм и эбонита ($\varepsilon_2 = 3$) толщиной $d_2 = 3$ мм. Площадь каждой обкладки конденсатора равна 200 см^2. Найти электроемкость конденсатора.

12.4. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов 200 В. После отключения от источника тока расстояние между обкладками конденсатора было увеличено в 3 раза. Определить начальную емкость конденсатора, если работа внешних сил по раздвижению обкладок равна 0,4 мДж.

12.5. Пластину из эбонита ($\varepsilon = 3$) толщиной 5 мм и площадью 300 см^2 внесли в однородное электрическое поле напряженностью 1 кВ/м таким образом, что силовые линии перпендикулярны поверхности пластины. Определить энергию электрического поля, сосредоточенную в пластине.

13. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

13.1. Основные формулы

Сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt}, \tag{13.1}$$

где dq — электрический заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за время dt.

В случае постоянного электрического тока сила тока может быть определена как

$$I = \frac{q}{t}. \tag{13.2}$$

Плотность постоянного тока:

$$\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{k}, \tag{13.3}$$

где S — площадь поперечного сечения проводника; $\vec{k}$ — единичный вектор, указывающий направление движения положительных зарядов в проводнике.

Электрическое сопротивление однородного проводника:

$$R = \rho\frac{l}{S}, \tag{13.4}$$

где ρ — удельное сопротивление материала проводника; l — его длина.

Зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$\rho = \rho_0\left(1 + \alpha t\right), \tag{13.5}$$

где ρ_0 — удельное сопротивление при температуре 0 °C; α — температурный коэффициент сопротивления; t — температура проводника в градусах Цельсия.

Сопротивление *n* последовательно соединенных проводников:

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n . \tag{13.6}$$

Если все проводники имеют одинаковые сопротивления R_1, то результирующее сопротивление равно $R = nR_1$.

Сопротивление *n* параллельно соединенных проводников:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} . \tag{13.7}$$

Если все проводники имеют одинаковые сопротивления R_1, то результирующее сопротивление равно $R = R_1 / n$.

Закон Ома для участка цепи:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}, \tag{13.8}$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов на концах участка цепи.

Закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon}{R + r}, \tag{13.9}$$

где ε — ЭДС источника тока; *r* — внутреннее сопротивление источника тока.

Знак «+» ставится тогда, когда источник ЭДС способствует протеканию тока в цепи под действием разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, знак «–» — в противном случае.

Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \tag{13.10}$$

Правила Кирхгофа для разветвленной электрической цепи.

Первое правило: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0, \tag{13.11}$$

где *n* — количество токов.

Второе правило: алгебраическая сумма напряжений на всех участках замкнутой электрической цепи равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этой цепи, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k, \tag{13.12}$$

где m — количество источников тока.

Мощность постоянного тока:

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R, \tag{13.13}$$

где dA — работа сил электростатического поля и сторонних сил в проводнике при протекании постоянного тока за время dt.

Закон Джоуля–Ленца:

$$dQ = I^2 R dt, \tag{13.14}$$

где dQ — количество теплоты, выделяющееся в проводнике сопротивлением R при протекании по нему тока силой I за время dt.

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \tag{13.15}$$

где σ — удельная электропроводность проводника: $\sigma = \frac{1}{\rho}$; $\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля в проводнике.

Закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме:

$$\varpi = \sigma E^2 = \rho j^2, \tag{13.16}$$

где ϖ — объемная плотность тепловой мощности.

13.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону $I(t) = kt$, где $k = 0{,}5$ А/с. Найти заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за время $\tau = 1$ с.

Решение.

В соответствии с (13.1) заряд, протекающий через поперечное сечение проводника, можно определить как

$$q = \int I(t)dt.$$

Подставляя силу тока, получаем расчетную формулу

$$q = \int_0^\tau ktdt = k\int_0^\tau tdt = \frac{k\tau^2}{2}.$$

Подстановка исходных данных в формулу дает ответ $q = 0{,}25$ Кл.

Ответ: 0,25 Кл.

Задача 2.

Определить ток короткого замыкания источника ЭДС, если при внешнем сопротивлении 50 Ом ток в цепи 0,2 А, а при 110 Ом — 0,1 А.

Решение.

Запишем закон Ома для замкнутой цепи (13.10):

$$I = \frac{\xi}{R+r}.$$

ЭДС в обоих случаях одинакова. Следовательно,

$$\xi = I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r) \Rightarrow r = \frac{I_1R_1 - I_2R_2}{I_2 - I_1}.$$

Подставляя результат в любую из формул для ЭДС, получаем

$$\xi = I_1\left(R_1 + \frac{I_1R_1 - I_2R_2}{I_2 - I_1}\right) = I_2I_1\frac{R_1 - R_2}{I_2 - I_1}.$$

Ток короткого замыкания равен отношению ЭДС источника к его внутреннему сопротивлению:

$$I_k = \frac{\xi}{r} = \frac{I_2I_1(R_1 - R_2)}{I_1R_1 - I_2R_2}.$$

Подстановка исходных данных в формулу дает ответ $I = 1{,}2$ А.

Ответ: 1,2 А.

Задача 3.

ЭДС батареи аккумуляторов 12 В, сила тока короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

Решение.

Запишем закон Ома для замкнутой цепи (13.10):

$$I = \frac{\xi}{R + r}.$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи на сопротивлении *R*, согласно (13.13):

$$P = I^2 R = \frac{\xi^2 R}{(R + r)^2}.$$

Для нахождения максимальной мощности исследуем полученную функцию на экстремум:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{d}{dR}\left[\frac{\xi^2 R}{(R + r)^2}\right] = \xi^2\left[\frac{r - R}{(R + r)^3}\right] = 0.$$

Производная мощности обращается в ноль только при $r = R$. Тогда максимальная мощность равна

$$P_{\max} = \frac{\xi^2 r}{(r + r)^2} = \frac{\xi^2}{4r}.$$

Ток короткого замыкания равен отношению ЭДС источника к его внутреннему сопротивлению:

$$I_k = \frac{\xi}{r}.$$

Выражаем внутреннее сопротивление источника и подставляем его в формулу максимальной мощности:

$$r = \frac{\xi}{I_k} \Rightarrow P_{\max} = \frac{\xi^2}{4r} = \frac{\xi I_k}{4}.$$

Подстановка исходных данных в полученную формулу дает ответ $P_{\max} = 15$ Вт.

Ответ: 15 Вт.

Задача 4.

По медному проводнику сечением 0,8 мм^2 течет ток 80 мА. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди 8,9 г/см^3.

Решение.

Сила тока определяется соотношением (13.1):

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Заряд запишем через концентрацию свободных электронов n, их элементарный заряд e и объем проводника $dV = Sdl = S\langle\upsilon\rangle dt$ (рис. 13.1):

$$dq = neSdl = neS\langle\upsilon\rangle dt.$$

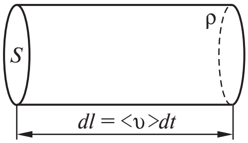


Рис. 13.1

Подставим полученное в соотношение для силы тока и выразим среднюю скорость:

$$I = neSdl = neS\langle\upsilon\rangle \Rightarrow \langle\upsilon\rangle = \frac{I}{neS}.$$

На один атом вещества приходится один свободный электрон. Тогда концентрация электронов равна концентрации атомов

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N\rho}{m} = \frac{\rho}{m_{ат}},$$

где ρ — плотность меди; $m_{ат}$ — масса одного атома меди.

Тогда получаем окончательное расчетное соотношение

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{I \cdot m_{\text{ат}}}{\rho e S}.$$

Подстановка исходных данных в полученную формулу дает ответ $\langle \upsilon \rangle \approx 7{,}45$ мкм/с.

Ответ: 7,45 мкм/с.

Задача 5.

Напряженность электрического поля в стальном проводнике равна 0,2 В/м. Найти плотность тока в проводнике. Удельное сопротивление стали 100 нОм·м.

Решение.

Закон Ома в дифференциальной форме (13.15) задает плотность электрического тока

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Удельная проводимость вещества обратно пропорциональна удельному сопротивлению:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

Тогда концентрация электронов равна концентрации атомов:

$$j = \frac{E}{\rho}.$$

Подстановка исходных данных в полученную формулу дает ответ $j \approx 2$ А/мм^2.

Ответ: 2 А/мм^2.

Задача 13.6.

В схеме, представленной на рис. 13.2, $\varepsilon_1 = 1{,}5$ В, $\varepsilon_2 = 4{,}5$ В, $\varepsilon_3 = 2{,}5$ В, $R_1 = 32$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 50$ Ом. Найти ток через сопротивление R_1. Внутренние сопротивления источников считать пренебрежимо малыми.

Решение.

Для поиска искомого тока воспользуемся правилами Кирхгофа. В схеме присутствуют $n_{\text{уз}} = 2$ узла, поэтому по первому правилу

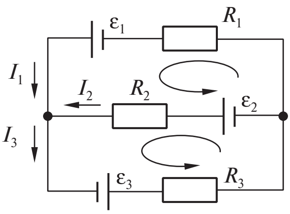


Рис. 13.2

Кирхгофа (13.11) записываем на одно уравнение для узлов меньше, т.е. число уравнений равно $n_{уз} - 1 = 1$. Обозначаем токи на левом узле схемы и суммируем их:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

В схеме имеются три контура обхода. Для любых двух указываем стрелками направление обхода контуров и записываем два уравнения по второму правилу Кирхгофа (13.12):

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = \xi_1 - \xi_2;$$
$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \xi_2 + \xi_3.$$

Объединяем полученные уравнения в систему, подставляя числовые значения:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ 32 I_1 - 20 I_2 = -3, \\ 20 I_2 + 50 I_3 = 7. \end{cases}$$

Решаем ее любым из известных методов, например методом Крамера. Записываем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 32 & -20 & 0 & -3 \\ 0 & 20 & 50 & 7 \end{array}\right).$$

Находим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 32 & -20 & 0 \\ 0 & 20 & 50 \end{vmatrix} = -3240; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & -20 & 0 \\ 7 & 20 & 50 \end{vmatrix} = 70.$$

Поделив определители, находим искомый ток через резистор R_1:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{70}{3240} \approx -21{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

Знак «минус» означает, что найденный ток направлен противоположно выбранному нами направлению.

Ответ: 21,6 мА.

13.3. Задачи для самостоятельного решения

13.1. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону $I(t) = kt^2$, где $k = 2$ А/с^2. Найти число электронов, проходящих через поперечное сечение проводника за время $\tau = 0{,}5$ с.

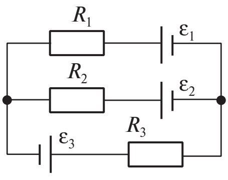
13.2. Два элемента ($\xi_1 = 1{,}2$ В, $r_1 = 0{,}1$ Ом; $\xi_2 = 0{,}9$ В, $r_2 = 0{,}3$ Ом) соединены одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов равно 0,2 Ом. Определить силу тока в цепи.

13.3. Элемент замыкают сначала на внешнее сопротивление 2 Ом, а затем на внешнее сопротивление 0,5 Ом. Найти ЭДС элемента и его внутреннее сопротивление, если известно, что в каждом из этих случаев мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова и равна 2,45 Вт.

13.4. Определить суммарный импульс всех электронов в прямом проводнике длиной 500 м, по которому течет ток 20 А.

13.5. Определить напряженность электрического поля в проводнике, если объемная плотность тепловой мощности равна 4 кВт/м^3, а плотность тока 2 А/мм^2.

13.6. В схеме, показанной на рисунке, $\varepsilon_1 = 6{,}5$ В, $\varepsilon_2 = 2{,}5$ В, $\varepsilon_3 = 1{,}5$ В, $R_1 = 90$ Ом, $R_2 = 25$ Ом, $R_3 = 50$ Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Найти ток через сопротивление R_1.



14. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

14.1. Основные формулы

Закон Био–Савара–Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}, \qquad (14.1)$$

где $d\vec{B}$ — вектор индукции магнитного поля, создаваемого элементом dl проводника с током I на расстоянии r; μ — магнитная проницаемость среды; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

Связь между вектором индукции $\vec{B}$ и вектором напряженности $\vec{H}$ магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \qquad (14.2)$$

Принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N}\vec{B}_i, \qquad (14.3)$$

где $\vec{B}_i$ — индукция магнитного поля, созданного i-м током, входящим в систему из N токов, в отдельности.

Вектор магнитной индукции поля, создаваемого зарядом, движущимся со скоростью υ, на расстоянии на расстоянии r от него:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{q\left[\vec{\upsilon},\vec{r}\right]}{r^3}. \qquad (14.4)$$

14.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

По тонкому проводящему кольцу радиуса 30 см течет ток 20 А. Найти напряженность магнитного поля на оси кольца на расстоянии 40 см от его центра.

Решение.

Разбиваем кольцо на элементарные отрезки *dl*. Модуль вектора напряженности от каждого из таких участков может быть найден на основе соотношений (14.1) и (14.2):

$$dH = \frac{Idl\sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где α — угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

Обозначим на рис. 14.1 векторы $d\vec{H}$ от двух взаимно противоположных участков *dl* и проекции этих векторов $d\vec{H}_{\parallel}$ и $d\vec{H}_{\perp}$. Результирующую напряженность магнитного поля в соответствии с принципом суперпозиции можно найти путем суммирования (интегрирования) элементарных векторов. Из рис. 14.1 видно, что векторная сумма проекций $d\vec{H}_{\parallel}$ вследствие симметрии расположения элементарных отрезков *dl* обращается в ноль:

$$\vec{H}_0 = \oint d\vec{H}_0 = 0 .$$

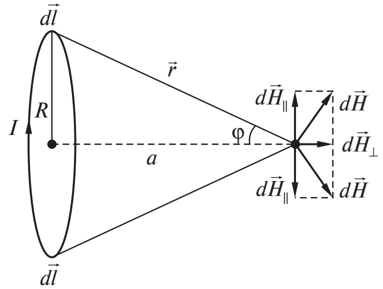


Рис. 14.1

В то же время проекции $d\vec{H}_{\perp}$ равны друг другу и совпадают по направлению. Тогда искомая напряженность магнитного поля

$$H = \oint dH_{\perp} = \oint dH\sin\varphi = \oint\limits_{l=2\pi R} \frac{I\sin\alpha\sin\varphi}{4\pi r^2}dl .$$

С учетом того что $\sin\alpha = 1$, $\sin\varphi = R/r$ и $r = \left(R^2 + a^2\right)^{1/2}$, получаем

$$H = \frac{IR}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \oint\limits_{l=2\pi R} dl = \frac{IR^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}} .$$

Подстановка исходных данных в расчетную формулу дает ответ $H = 7{,}2$ А/м.

Ответ: 7,2 А/м.

Задача 2.

Два бесконечно длинных прямых провода скрещены под прямым углом (рис. 14.2). По проводам текут токи I_1=80 А и I_2=60 А. Расстояние между проводами равно 10 см. Определить магнитную индукцию в точке O, одинаково удаленной от обоих проводников.

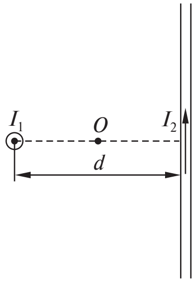


Рис. 14.2

Решение.

Для начала найдем формулу расчета индукции магнитного поля от прямого проводника с током (рис. 14.3, *а*). Разбиваем проводник на элементарные отрезки *dl*. Модуль вектора магнитной индукции от каждого из таких участков может быть найден на основе соотношения

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2},$$

где α — угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

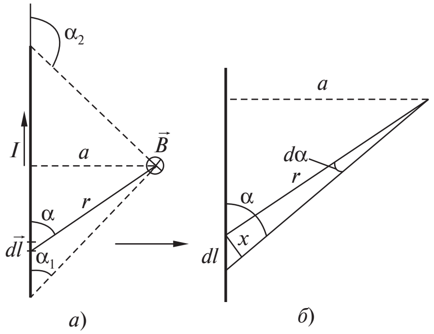


Рис. 14.3

Вектор $d\vec{B}$ от любого участка прямолинейного проводника с током dl в заданной точке направлен в одну сторону. Поэтому результирующую индукцию магнитного поля в данном случае можно найти путем прямого алгебраического суммирования (интегрирования) модулей элементарных векторов.

Из рис. 14.2, *б* следует, что $dl = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha}$ и $a = r\sin\alpha$. Подставляем это в формулу модуля вектора магнитной индукции, получаем

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\sin\alpha d\alpha.$$

Интегрируем полученное выражение по углу φ в пределах от φ_1 до φ_2:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right).$$

В случае бесконечно длинного проводника ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$) получаем

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}.$$

Вернемся к условию задачи. В точке *O* вектор магнитной индукции от первого проводника будет направлен вертикально вверх, а от второго — из плоскости чертежа к нам. Тогда модуль результирующего вектора можно найти по теореме Пифагора:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d/2}\right)^2 + \left(\frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{d/2}\right)^2} = \frac{\mu\mu_0}{\pi d}\sqrt{\left(I_1\right)^2 + \left(I_2\right)^2}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $B = 0{,}4$ мТл.

Ответ: 0,4 мТл.

Задача 3.

Расстояние между двумя длинными параллельными проводами равно 10 см. По проводам в одном направлении текут одинаковые токи 40 А каждый. Найти индукцию магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии 5 см от одного и 8 см от другого провода.

Решение.

Для решения воспользуемся формулой для индукции магнитного поля бесконечно длинного прямого тока, полученной в предыдущей задаче:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}.$$

На рисунке обозначаем направления векторов индукции от каждого проводника (рис. 14.4) и суммируем их по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos(\pi - \varphi)} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\varphi}.$$

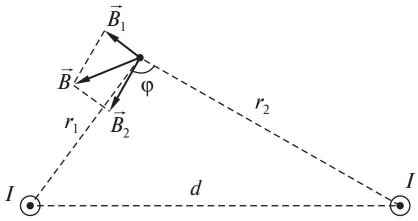


Рис. 14.4

Косинус угла можно определить из треугольника, образованного сторонами d, r_1 и r_2, выразив косинус угла из теоремы косинусов:

$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Собирая вышеприведенные формулы в одну, получаем

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{r_1^2} + \frac{2}{r_2^2} - \frac{d^2}{r_1^2r_2^2}}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $B \approx 0{,}18$ мТл.

Ответ: 0,18 мТл.

Задача 4.

По проводнику, форма которого изображена на рис. 14.5, течет ток 10 А. Найти магнитную индукцию в точке O, если $R = 1$ см.

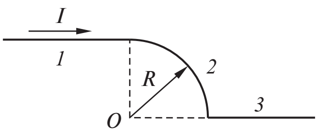


Рис. 14.5

Решение.

Разобьем проводник на три части: два прямых провода и сектор. Индукцию магнитного поля, создаваемую первой частью проводника, можно оценить при помощи формулы, полученной в задаче 2. Приняв $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, $a = R$, получаем

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}.$$

Вторую часть проводника (сектор) разбиваем на элементарные отрезки dl. Модуль вектора напряженности от каждого из таких отрезков может быть найден на основе соотношения

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2},$$

где α — угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

Направление векторов $d\vec{B}$ в точке O от всех элементарных участков совпадает. Угол $\alpha = \pi/2$ и $r = R$. Интегрируем и получаем модуль вектора магнитной индукции на втором участке:

$$B_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int\limits_0^{\pi R/2} dl = \frac{\mu\mu_0}{8}\frac{I}{R}.$$

Третья часть проводника расположена таким образом, что точка O лежит на продолжении его оси, и поэтому индукция магнитного поля от третьего участка равна нулю ($B_3 = 0$).

Тогда суммарный модуль вектора магнитной индукции в точке O равен

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R} + \frac{\mu\mu_0}{8}\frac{I}{R} = \frac{\mu\mu_0}{8}\frac{I}{R}\left(\frac{2}{\pi} + 1\right).$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $B \approx 0{,}26$ мТл.

Ответ: 0,26 мТл.

Задача 5.

Определить максимальную магнитную индукцию поля, создаваемую электроном, движущимся прямолинейно со скоростью 10 Мм/с, в точке, отстоящей от траектории на 1 нм.

Решение.

Модуль вектора магнитной индукции поля, создаваемого зарядом, движущимся со скоростью υ, на расстоянии r от него запишем на основе соотношения

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{q\upsilon\sin\alpha}{r^2},$$

где α — угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$ (рис. 14.6). Магнитная индукция будет максимальна, если $\sin\alpha = 1$. Тогда

$$B_{max} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{q\upsilon}{r^2}.$$

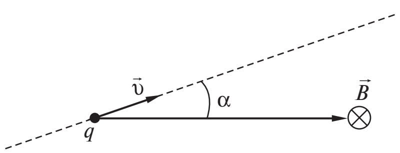


Рис. 14.6

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $B_{max} = 0{,}16$ Тл.

Ответ: 0,16 Тл.

14.3. Задачи для самостоятельного решения

14.1. При какой силе тока, текущего по тонкому проводящему кольцу радиусом 0,2 м, магнитная индукция в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние 0,3 м, станет равной 20 мкТл?

14.2. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи $I_1 = 50$ А и $I_2 = 100$ А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами равно 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на $r_1 = 25$ см от первого и на $r_2 = 40$ см от второго провода.

14.3. Два бесконечно длинных прямых провода скрещены под прямым углом (рис. 14.7). По проводам текут токи I_1 = 80 А и I_2 = 60 А. Расстояние между проводами равно 10 см. Определить магнитную индукцию в точке O, одинаково удаленной от обоих проводников.

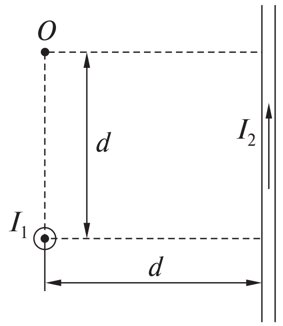


Рис. 14.7

14.4. По проводнику, форма которого изображена на рис. 14.8, течет ток 10 А. Найти магнитную индукцию в точке O, если R =1 см.

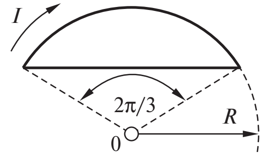


Рис. 14.8

14.5. На расстоянии 10 нм от траектории прямолинейно движущегося электрона максимальное значение магнитной индукции составляет 160 мкТл. Определить скорость электрона.

15. СИЛЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

15.1. Основные формулы

Сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся со скоростью υ в магнитном поле с индукцией B (магнитная составляющая силы Лоренца):

$$\vec{F}_{\text{Л}} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right], \tag{15.1}$$

где q — заряд частицы.

Сила (сила Ампера), действующая на элемент dl проводника с током I со стороны магнитного поля с индукцией B:

$$d\vec{F}_{\text{А}} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]. \tag{15.2}$$

В случае однородного магнитного поля и прямолинейного отрезка проводника

$$\vec{F}_{\text{А}} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right]. \tag{15.3}$$

Магнитный момент контура с током:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \tag{15.4}$$

где S — площадь контура; $\vec{n}$ — нормаль к плоскости контура.

Вектор механического момента, действующего на контур с током, находящийся в магнитном поле:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right]. \tag{15.5}$$

Потенциальная энергия магнитного диполя во внешнем магнитном поле:

$$W_n = -\vec{p}_m\vec{B}. \tag{15.6}$$

Сила, действующая на магнитный диполь со стороны неоднородного магнитного поля, изменяющегося вдоль оси OX:

$$F_x = p_m \frac{\partial B}{\partial x}\cos\alpha, \tag{15.7}$$

где $\dfrac{\partial B}{\partial x}$ — скорость изменения индукции магнитного поля в направлении оси OX; α — угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.

15.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Квадратный контур со стороной 50 см и бесконечный прямой провод с током 5 А расположены в одной плоскости. Расстояние от провода до ближайшей стороны контура 10 см. Определить силу, действующую на контур, если сила тока в нем 1 А.

Решение.

Прямой проводник с током создает вокруг себя магнитное поле, действующее на элементы контура. По правилу левой руки определяем направление действия сил Ампера на стороны контура и указываем их (рис. 15.1). Из рисунка видно, что силы $F_{\text{A},2}$ и $F_{\text{A},4}$ противоположны друг другу. Причем эти проводники расположены симметрично друг другу. Поэтому равнодействующая сумма сил $F_{\text{A},2}$ и $F_{\text{A},4}$ обращается в ноль.

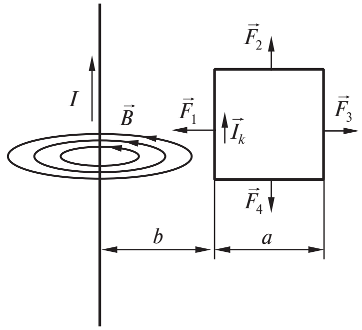


Рис. 15.1

Силы $F_{\text{A},1}$ и $F_{\text{A},3}$ также направлены противоположно, но не равны друг другу, так как находятся на разном расстоянии от проводника. Для поиска значения модуля этих сил воспользуемся законом Ампера:

$$F_{\text{A}} = I_k a B.$$

Индукцию магнитного поля от бесконечно длинного проводника найдем по формуле, полученной в задаче 2 предыдущего раздела:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\ .$$

Тогда результирующая сила, действующая на контур с током, равна

$$F = F_{\text{A},1} - F_{\text{A},2} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} I_k a I\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+a}\right) = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I_k Ib}{b+a}.$$

$$F = F_{\text{A},1} - F_{\text{A},2} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} I_k a I\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+a}\right) = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I_k Ia^2}{b+a}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $F =$ $= 0{,}42$ мкН.

Ответ: 0,42 мкН.

Задача 2.

Рамка гальванометра длиной 4 см и шириной 1,5 см, содержащая 200 витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Найти механический момент, действующий на рамку, когда по витку течет ток 1 мА.

Решение.

Вектор механического момента, действующего на контур с током, находящийся в магнитном поле, определяется как векторное произведение магнитного момента контура и индукции внешнего магнитного поля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right].$$

Помножив эту формулу на число витков N и раскрыв векторное произведение, определим суммарный момент рамки гальванометра:

$$M_\Sigma = Np_m B\sin\alpha.$$

Магнитный момент одного витка определяется соотношением

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}.$$

С учетом того что площадь витка $S = ab$, угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ $\alpha = \pi/2$, получаем

$$M_\Sigma = NIabB.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $M_\Sigma =$ $= 12$ мкН·м.

Ответ: 12 мкН·м.

Задача 3.

На горизонтальных рельсах лежит проводящая перемычка массой 1 кг и активной длиной 20 см. Система находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 0,2 Тл. Если по перемычке пропустить ток силой 10 А, то перемычка будет двигаться с ускорением 0,2 м/с^2. Найти коэффициент трения между рельсами и перемычкой.

Решение.

Запишем уравнение движение в проекциях на картезианскую инерциальную систему отсчета (рис. 15.2).

$$\begin{cases} F_A - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{\text{тр}} = F_A - ma, \\ N = mg. \end{cases}$$

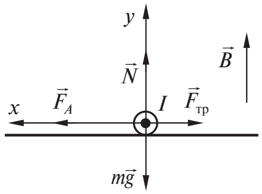


Рис. 15.2

Сила трения

$$F = \mu N = \mu mg.$$

Сила Ампера

$$F_{\text{А}} = IlB.$$

Объединяя вышеприведенные формулы в одну и выражая коэффициент трения, получаем

$$\mu = \frac{Ilb - ma}{mg}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $\mu \approx 0,2$.

Ответ: 0,2.

Задача 4.

В однородном магнитном поле с индукцией 100 мкТл движется электрон по винтовой линии. Определить скорость υ электрона, если шаг винтовой линии равен 20 см, а радиус — 5 см.

Решение.

Вектор скорости электрона складывается из двух векторов скоростей $\vec{\upsilon}_\perp$ и $\vec{\upsilon}_\parallel$ (рис. 15.3). Приравнивая модуль вектора центробежной силы $F_ц = ma_n = m\upsilon_\perp^2 / R$ к модулю магнитной составляющей силы Лоренца $F_Л$, выражаем модуль $\vec{\upsilon}_\perp$:

$$m\frac{\upsilon_\perp^2}{R} = q\upsilon_\perp B \Rightarrow \upsilon_\perp = \frac{qBR}{m}.$$

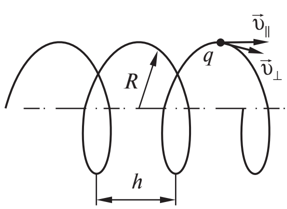


Рис. 15.3

Модуль вектора скорости $\vec{\upsilon}_\parallel$ можно найти, поделив шаг винтовой линии h одного оборота электрона, т.е. период T:

$$\upsilon_\parallel = \frac{h}{T} = \frac{h\upsilon_\perp}{2\pi R} = \frac{hqB}{2\pi m}.$$

Тогда суммарная скорость

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_\perp^2 + \upsilon_\parallel^2} = \sqrt{\left(\frac{qBR}{m}\right)^2 + \left(\frac{hqB}{2\pi m}\right)^2} = \frac{qB}{m}\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $\upsilon \approx$ $\approx 1{,}0$ Мм/с.

Ответ: 1,0 Мм/с.

Задача 5.

Перпендикулярно магнитному полю с индукцией 0,1 Тл возбуждено электрическое поле напряженностью 100 кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость υ частицы.

Решение.

Заряженная частица будет двигаться в скрещенных стационарных электромагнитных полях с постоянным вектором скорости в случае равенства нулю равнодействующей силы (первый закон Ньютона). В данном случае на заряженную частицу действует только сила Лоренца. Поэтому записываем формулу силы Лоренца и приравниваем ее к нулю:

$$\vec{F}_{\text{Л}} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] = 0.$$

С учетом противоположного направления электрической и магнитной составляющей силы $\left(\vec{E} \uparrow\downarrow \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]\right)$ и перпендикулярности вектора скорости и вектора индукции магнитного поля $\left(\vec{\upsilon} \perp \vec{B}\right)$ получаем

$$qE - q\upsilon B = 0 \Rightarrow \upsilon = \frac{E}{B}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ υ = 1 Мм/с.

Ответ: 1 Мм/с.

15.3. Задачи для самостоятельного решения

15.1. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии 10 см друг от друга, текут одинаковые токи 10 А. Токи во всех проводах направлены одинаково. Вычислить силу, действующую на единицу длины каждого провода.

15.2. Виток диаметром 20 см может вращаться около вертикальной оси, совпадающей с одним из диаметров витка. Виток установили в плоскости магнитного меридиана и пустили по нему ток 5 А. Механический момент, который нужно приложить к витку, чтобы удержать его в начальном положении, равен 3,14 мкН·м. Найти горизонтальную составляющую магнитной индукции поля Земли.

15.3. Проводящая перемычка массой 1 кг и активной длиной 30 см лежит на гладких рельсах, составляющих угол 45° с горизонтом. Система находится в вертикальном однородном магнитном поле индукцией 2 Тл. Какой ток нужно пропустить по перемычке, чтобы она находилась в покое?

15.4. В однородном магнитном поле электрон движется по винтовой линии радиуса 5 см с шагом 31,4 см. Определить угол, который скорость электрона составляет с силовыми линиями магнитного поля.

15.5. Протон влетает со скоростью 100 км/с в область пространства, где имеются электрическое (E = 210 В/м) и магнитное (B = = 3,3 мТл) поля. Векторы напряженности электрического и индукции магнитного полей совпадают по направлению. Определить ускорение протона для начального момента движения в поле, если направление вектора его скорости перпендикулярно направлению векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

16. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

16.1. Основные формулы

Закон полного тока:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} I_i \,, \qquad (16.1)$$

где $\sum_{i=1}^{N} I_i$ — алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром L.

Закон полного тока для вектора индукции магнитного поля:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i \,. \qquad (16.2)$$

Магнитный поток через контур:

$$\Phi_{\text{м}} = \int_S \vec{B}d\vec{S}. \qquad (16.3)$$

Вектор намагниченности вещества представляет собой суммарный магнитный момент в единице объема:

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{V}. \qquad (16.4)$$

Связь векторов намагниченности и напряженности магнитного поля:

$$\vec{J} = \chi\vec{H}, \qquad (16.5)$$

где χ — магнитная восприимчивость вещества.

Связь векторов индукции, напряженности магнитного поля и намагниченности:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{J}\right) = \mu_0(\chi + 1)\vec{H} = \mu\mu_0\vec{H}. \qquad (16.6)$$

16.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Определить циркуляцию вектора напряженности магнитного поля вдоль контуров *a*, *b* и *c*, если перпендикулярно плоскости контуров текут одинаковые по величине токи 8 А (рис. 16.1).

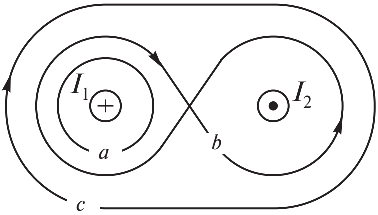


Рис. 16.1

Решение.

Воспользуемся законом полного тока:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} I_i \ .$$

При суммировании токов знак тока определяем по правилу правого винта. Тогда

$$\oint_a \vec{H}d\vec{l} = I_1 = 8 \text{ А},$$

$$\oint_b \vec{H}d\vec{l} = I_1 + I_2 = 16 \text{ А},$$

$$\oint_c \vec{H}d\vec{l} = I_1 + I_2 = 0 \ .$$

Ответ: a) 8 А; b) 16 А; c) 0.

Задача 2.

По сечению проводника равномерно распределен ток плотностью 2 МА/м^2. Найти циркуляцию вектора напряженности магнитного поля вдоль окружности радиусом 5 мм, проходящей внутри проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол 30° с вектором плотности тока.

Решение.

По закону полного тока циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна сумме токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} I_i \,.$$

Сумму токов можно определить через вектор плотности тока, т.е.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} \,.$$

Раскрывая скалярное произведение с учетом того, что угол между векторами плотности тока и нормалью к плоскости, в которой лежит окружность, составляет $\pi/2-\alpha$, получаем

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = j\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\int_S dS = j\pi R^2 \sin\alpha \,.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 78{,}5 \text{ А.}$$

Ответ: 78,5 А.

Задача 3.

Найти магнитный поток, создаваемый соленоидом сечением 10 см^2 при силе тока 5 А, если он имеет 10 витков на каждый сантиметр длины.

Решение.

Считая магнитное поле внутри соленоида однородным, магнитный поток можно определить как

$$\Phi = BS.$$

Находим индукцию магнитного поля на оси соленоида. Запишем закон полного тока для контура, изображенного на рис. 16.2:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

Левый интеграл можно разбить на четыре интеграла:

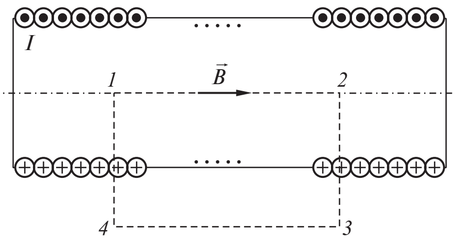


Рис. 16.2

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B}d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B}d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B}d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B}d\vec{l} .$$

Вектор индукции параллелен элементарным векторам $d\vec{l}$ на участках 2–3 и 4–1. Следовательно,

$$\int_2^3 \vec{B}d\vec{l} = \int_4^1 \vec{B}d\vec{l} = 0.$$

Участок 3–4 мы можем расположить на любом расстоянии от соленоида. Отодвигаем его в область, где магнитное поле отсутствует ($B = 0$). Тогда

$$\int_3^4 \vec{B}d\vec{l} = 0.$$

Циркуляция вектора индукции магнитного поля

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B}d\vec{l} = B\int_1^2 dl = Bl_{12} .$$

Сумма токов внутри воображаемого контура равна произведению плотности упаковки витков n на ширину контура l_{12} и на ток одного витка:

$$\sum_{n=1}^{N} I_i = nl_{12}I.$$

Подставляем полученные формулы в закон полного тока и выражаем индукцию:

$$Bl_{12} = \mu\mu_0 nl_{12}I \Rightarrow B = \mu\mu_0 nI.$$

Магнитный поток

$$\Phi = \mu\mu_0 nIS.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $\Phi \approx$ $\approx 6{,}28$ мкВб.

Ответ: 6,28 мкВб.

Задача 4.

Плоская квадратная рамка со стороной 20 см лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток 5 А. Рамка расположена так, что ближайшая к проводу сторона параллельна проводу и находится на расстоянии 10 см от него. Определить магнитный поток через рамку.

Решение.

Находим формулу для оценки модуля индукции магнитного поля на расстоянии r от прямого бесконечно длинного проводника. Окружаем проводник воображаемым контуром в виде окружности (рис. 16.3). В соответствии с законом полного тока

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = B\int_{2\pi r} dl = 2\pi rB = \mu\mu_0 I \Rightarrow B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

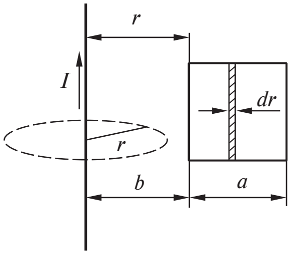


Рис. 16.3

Разобьем рамку на элементарные участки площадью $dS = adr$. Элементарный магнитный поток через такой участок равен

$$d\Phi = BdS = \mu\mu_0 \frac{Iadr}{2\pi r}.$$

Тогда полный магнитный поток через рамку

$$\Phi = \mu\mu_0 \frac{Ia}{2\pi}\int_b^{b+a}\frac{dr}{r} = \mu\mu_0 \frac{Ia}{2\pi}\ln\frac{b+a}{b}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $\Phi \approx$ $\approx 0{,}22$ мкВб.

Ответ: 0,22 мкВб.

Задача 5.

Висмутовый шарик радиусом 1 см помещен в однородное магнитное поле с индукцией 0,5 Тл. Определить магнитный момент, приобретенный шариком, если магнитная восприимчивость висмута равна $-1{,}5\cdot10^{-4}$.

Решение.

Магнитный момент шарика можно определить из соотношения

$$p_m = JV = \frac{4}{3}\pi R^3 J.$$

Намагниченность вещества

$$J = \chi H = \chi\frac{B}{\mu\mu_0} = \frac{\chi B}{(\chi+1)\mu_0}.$$

Тогда

$$p_m = JV = \frac{4\pi R^3 \chi B}{3(\chi+1)\mu_0}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $p_m \approx$ $\approx -0{,}25$ А·м^2.

Ответ: $-0{,}25$ А·м^2.

16.3. Задачи для самостоятельного решения

16.1. Вычислить циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль контура, охватывающего токи $I_1 = 10$ А, $I_2 = 15$ А, текущие в одном направлении, и ток $I_3 = 20$ А, текущий в противоположном направлении.

16.2. Диаметр тороида без сердечника по средней линии равен 30 см. В сечении тороид имеет круг радиусом 5 см. По обмотке тороида, содержащей 2000 витков, течет ток 5 А. Пользуясь законом полного тока, определить минимальное значение напряженности магнитного поля в тороиде.

16.3. Соленоид длиной 1 м и сечением 16 см^2 содержит 2000 витков. Определить потокосцепление соленоида при силе тока 10 А.

16.4. Плоская квадратная рамка лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом. Определить, во сколько раз отличаются магнитные потоки, пронизывающие рамку при двух ее положениях, представленных на рис. 16.4.

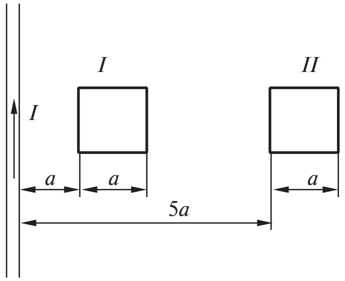


Рис. 16.4

16.5. Напряженность магнитного поля в меди равна 1 МА/м. Определить намагниченность меди и магнитную индукцию в ней, если удельная восприимчивость меди равна $-1{,}1 \cdot 10^{-9}$ м^3/кг, а плотность — 8,9 г/см^3.

17. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

17.1. Основные формулы

Магнитный поток индукции неоднородного магнитного поля через плоский контур площадью S:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \tag{17.1}$$

Магнитный поток индукции однородного магнитного поля через плоский контур:

$$\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS\cos\alpha, \tag{17.2}$$

где α — угол между вектором $\vec{B}$ и вектором нормали $\vec{n}$ к поверхности контура.

Полный магнитный поток (потокосцепление) через поперечное сечение катушки:

$$\Psi = N\Phi = LI, \tag{17.3}$$

где N — число витков; L — индуктивность катушки.

Индуктивность длинного соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V, \tag{17.4}$$

где μ — магнитная проницаемость сердечника; n — количество витков на единицу длины; V — объем сердечника.

Работа силы Ампера, совершаемая по перемещению контура с током I в магнитном поле из положения 1 в положение 2:

$$A = I\left(\Phi_2 - \Phi_1\right). \tag{17.5}$$

Закон электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{17.6}$$

Закон электромагнитной индукции для контура, состоящего из N однотипных витков:

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}, \qquad (17.7)$$

где ε_i — ЭДС индукции, возникающая в замкнутом контуре при изменении магнитного потока через его поперечное сечение.

ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_{si} = -L\frac{dI}{dt}, \qquad (17.8)$$

где dI/dt — скорость изменения силы тока в контуре.

Закон изменения силы тока в цепи, содержащей индуктивность:

а) после замыкания цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \qquad (17.9)$$

где ε — ЭДС источника тока; R — активное сопротивление цепи;

б) после размыкания цепи:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \qquad (17.10)$$

где I_0 — значение силы тока при $t = 0$ (в момент размыкания цепи).

Энергия магнитного поля:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \qquad (17.11)$$

Объемная плотность энергии магнитного поля:

$$\varpi = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \qquad (17.12)$$

17.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Плоский контур, площадь которого равна 300 см^2, находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается неизменный ток 10 А. Определить работу внешних сил по перемещению контура с током в область пространства, магнитное поле в котором отсутствует.

Решение.

Работа силы Ампера, совершаемая по перемещению контура с током I в магнитном поле, равна

$$A = I\left(\Phi_2 - \Phi_1\right).$$

Внешняя сила противоположна силе Ампера, поэтому в формуле работы внешних сил мы ставим знак «минус»:

$$A_{\text{вн}} = -I\left(\Phi_2 - \Phi_1\right).$$

Магнитный поток через плоский контур в начальном положении определим по формуле

$$\Phi_1 = \vec{B}\vec{S}.$$

Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. Следовательно, в скалярном произведении угол между векторами индукции магнитного поля и нормалью к плоскости контура равен нулю. Тогда

$$\Phi_1 = BS.$$

Поток магнитной индукции во втором случае из-за отсутствия магнитного поля обращается в ноль $\left(\Phi_2 = 0\right)$. И окончательная формула

$$A_{\text{вн}} = IBS.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $A_{\text{вн}} = 3$ мДж.

Ответ: 3 мДж.

Задача 2.

Горизонтальный стержень длиной 1 м вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Ось вращения параллельна магнитному полю, индукция которого 50 мкТл. При какой частоте вращения стержня разность потенциалов на концах этого стержня равна 1 мВ?

Решение.

Закон электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Элементарный магнитный поток через площадь, которую описывает стержень при своем вращении (рис. 17.1), за время *dt*

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = \vec{B}\vec{n}\frac{l^2 d\varphi}{2}.$$

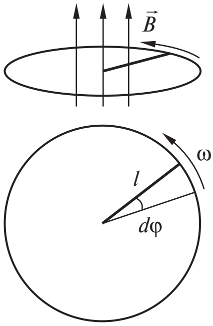


Рис. 17.1

Ось вращения параллельна линиям индукции. Следовательно, в скалярном произведении угол между векторами индукции магнитного поля и нормалью к плоскости, в которой вращается стержень, равен нулю. Тогда

$$d\Phi = \frac{1}{2}Bl^2 d\varphi$$

и ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{Bl^2 d\varphi}{2dt} = -\frac{1}{2}Bl^2\omega.$$

Частота вращения

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|\varepsilon_i|}{\pi B l^2}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $\nu \approx$ $\approx 63{,}7$ об/с.

Ответ: 63,7 об/с.

Задача 3.

Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой проводник с током I находятся в одной плоскости. Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью υ. Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x между проводом и рамкой.

Решение.

Закон электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Изменение магнитного потока через контур при его движении можно определить как разность магнитных потоков через область 1, оставляемую контуром за время dt, и область 2, присоединяемую им за то же время (рис. 17.2), в соответствии с соотношением

$$d\Phi = d\Phi_2 - d\Phi_1 = \vec{B}_2 d\vec{S} - \vec{B}_1 d\vec{S} = \left(\vec{B}_2 \vec{n} - \vec{B}_1 \vec{n}\right) a dr.$$

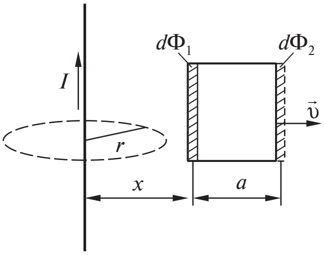


Рис. 17.2

Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. Следовательно, в скалярных произведениях угол между векторами индукции магнитного поля и нормалью к плоскости, в которой вращается стержень, равен нулю. Тогда

$$d\Phi = \left(B_2 - B_1\right) a dr$$

и ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\left(B_2 - B_1\right) a \frac{dr}{dt} = \left(B_1 - B_2\right) a \upsilon.$$

Для оценки модуля индукции магнитного поля на расстоянии r от прямого бесконечно длинного проводника окружаем проводник воображаемым контуром в виде окружности (рис. 17.2). В соответствии с законом полного тока

$$\oint_L \vec{B}d\vec{L} = B\oint_{2\pi r} dl = 2\pi r B = \mu\mu_0 I \Rightarrow B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = \frac{\mu\mu_0 Ia}{2\pi r}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right)\upsilon = \frac{\mu\mu_0 Ia^2}{2\pi x(x+a)}\upsilon.$$

Ответ: $\varepsilon_i(\upsilon) = \dfrac{\mu\mu_0 Ia^2}{2\pi x(x+a)}$.

Задача 4.

В однородном магнитном поле с индукцией 1 Тл находится прямой провод длиной 20 см, концы которого замкнуты вне поля. Сопротивление всей цепи равно 0,1 Ом. Определить силу, которую нужно приложить к проводу, чтобы перемещать его перпендикулярно к линиям магнитной индукции со скоростью 2,5 м/с.

Решение.

Закон электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Элементарный магнитный поток через площадь, которую описывает стержень при своем поступательном движении (рис. 17.3), за время dt

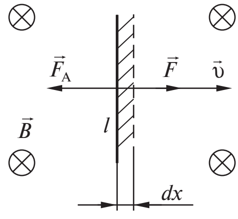


Рис. 17.3

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = \vec{B}\vec{n}ldx.$$

Ось вращения параллельна линиям индукции. Следовательно, в скалярном произведении угол между векторами индукции магнитного поля и нормалью к плоскости, в которой вращается стержень, равен нулю. Тогда

$$d\Phi = Bldx$$

и ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{Bldx}{dt} = -Bl\upsilon.$$

Запишем уравнение движения стержня на основе второго закона Ньютона:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{А}} = m\vec{a}.$$

Стержень перемещают с постоянной скоростью. Тогда ускорение равно нулю и с учетом проекции уравнения движения на ось OX инерциальной системы отсчета проекция приложенной силы F равна проекции силы Ампера. То есть с учетом выражения и взаимной перпендикулярности индукции магнитного поля и самого стержня

$$F = F_{\text{А}} = IlB.$$

По закону Ома для участка цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$

В данном случае разность потенциалов возникает как следствие закона электромагнитной индукции и равна $\varphi_1 - \varphi_2 = -\varepsilon_i$. Собираем полученные формулы вместе и получаем

$$F = \frac{B^2 l^2 \upsilon}{R}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $F = 1$ Н.

Ответ: 1 Н.

Задача 5.

Проволочное кольцо радиусом 4 см, имеющее сопротивление 0,01 Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,04 Тл. Плоскость кольца составляет угол 30° с линиями индукции поля. Какое количество электричества протечет по кольцу, если магнитное поле исчезнет?

Решение.

Закон электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Элементарный магнитный поток через площадь кольца

$$d\Phi = d\vec{B}\vec{S}.$$

Плоскость кольца составляет угол 30° с линиями индукции поля. Следовательно, в скалярном произведении угол между векторами индукции магнитного поля и нормалью к плоскости кольца равен $\pi/2 - \alpha$. Тогда

$$d\Phi = dB\pi r^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

и ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\pi r^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{dB}{dt}.$$

В соответствии с законом Ома для участка цепи

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\pi r^2}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{dB}{dt}.$$

С другой стороны, сила электрического тока

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Приравниваем токи:

$$dq = \frac{\pi r^2}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)dB.$$

Интегрируем и получаем окончательную формулу:

$$\int_0^q dq = \frac{\pi r^2}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\int_B^0 dB;$$

$$q = -\frac{\pi r^2}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)B.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $q \approx 0{,}01$ Кл.
Ответ: 0,01 Кл.

Задача 6.

Найти индуктивность соленоида длины l, обмоткой которого является медная проволока массы m. Сопротивление обмотки R. Диаметр соленоида значительно меньше его длины.

Решение.

Индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l},$$

где N — число его витков; S –площадь поперечного сечения; l — длина.

Сопротивление провода, из которой он изготовлен, можно определить из соотношения

$$R = \rho_{\text{пр}} \frac{l_{\text{пр}}}{S_{\text{пр}}}.$$

Длина провода может быть определена как произведение числа витков на длину витка:

$$l_{\text{пр}} = N \cdot 2\pi r.$$

Площадь сечения соленоида связана с радиусом витка соотношением

$$S = \pi r^2.$$

С учетом этого квадрат длины провода

$$l_{\text{пр}}^2 = 4\pi N^2 S.$$

Масса провода

$$m = \rho_{\text{Cu}} V_{\text{пр}} = \rho_{\text{Cu}} S_{\text{пр}} l_{\text{пр}}.$$

Выражаем из последней формулы $S_{\text{пр}}$ и подставляем в формулу сопротивления:

$$R = \rho_{\text{пр}} \rho_{\text{Cu}} \frac{l_{\text{пр}}^2}{m}.$$

Заменяем квадрат длины провода и выражаем произведение N^2S:

$$R = \rho_{\text{пр}} \rho_{\text{Cu}} \frac{4\pi N^2 S}{m} \Rightarrow N^2 S = \frac{mR}{4\pi \rho_{\text{пр}} \rho_{\text{Cu}}}.$$

Тогда индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 \frac{mR}{4\pi \rho_{\text{пр}} \rho_{\text{Cu}} l}.$$

Ответ: $L = \mu\mu_0 \dfrac{mR}{4\pi \rho_{\text{пр}} \rho_{\text{Cu}} l}$.

Задача 7.

Две катушки намотаны на один сердечник. Индуктивность первой катушки 0,12 Гн, а второй — 3 Гн. Сопротивление в цепи второй катушки 60 Ом. Определите силу тока во второй катушке, если за время 0,01 с силу тока в первой катушке равномерно уменьшить от 1 А до нуля.

Решение.

Ток в первой катушке равномерно уменьшают от 1 А до нуля за время 0,01 с. Следовательно, этот ток меняется по закону

$$I_1 = I_0 - kt,$$

где $k = 1/0{,}01 = 100$ А/с.

ЭДС взаимной индукции катушек можно определить из соотношения

$$\varepsilon_{si} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} = -L_{12} \cdot k.$$

Тогда ток во второй катушке по закону Ома для участка цепи

$$I_2 = \frac{U}{R} = -\frac{\varepsilon_{si}}{R} = \frac{L_{12}k}{R}.$$

Определим взаимную индуктивность катушек на основе их индуктивностей. Индуктивности каждой из них в отдельности:

$$L_1 = \mu\mu_0 n_1^2 V; \quad L_2 = \mu\mu_0 n_2^2 V.$$

Общая индуктивность

$$L_{21} = \mu\mu_0 n_1 n_2 V.$$

Из приведенных формул получаем

$$L_{21}^2 = L_1 L_2 \Rightarrow L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Ток во второй катушке

$$I_2 = \frac{\sqrt{L_1 L_2} \cdot k}{R}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $I_2 = 1$ А.

Ответ: 1 А.

Задача 8.

Катушку индуктивности 300 мГн и сопротивления 140 мОм подключили к источнику постоянного напряжения. Через сколько времени ток через катушку достигнет $n = 50\%$ установившегося значения.

Решение.

Закон изменения силы тока в цепи, содержащей индуктивность, после замыкания цепи

$$I = I_0\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right).$$

Выражаем время:

$$t = -\frac{L}{R}\ln\left(1 - \frac{I}{I_0}\right) = -\frac{L}{R}\ln(1-n).$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $t \approx 1{,}5$ с.

Ответ: 1,5 с.

Задача 9.

Обмотка электромагнита, находясь под постоянным напряжением, имеет сопротивление 10 Ом и индуктивность 0,3 Гн. Определить время, за которое в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии магнитного поля в сердечнике.

Решение.

Закон Джоуля–Ленца в случае постоянного тока можно записать в виде

$$Q = I^2 Rt.$$

Энергия магнитного поля в сердечнике

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Приравниваем теплоту к энергии магнитного поля и выражаем время:

$$t = \frac{L}{2R}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $t = 15$ мс.

Ответ: 15 мс.

Задача 10.

Индуктивность соленоида при длине 1 м и площади поперечного сечения 20 см^2 равна 0,4 мГн. Определить силу тока в соленоиде, при которой объемная плотность энергии магнитного поля равна 0,1 Дж/м^3.

Решение.

Объемная плотность энергии магнитного поля равна отношению энергии поля к его объему:

$$\varpi = \frac{W}{V}.$$

Энергия магнитного поля в сердечнике

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объединяем оба соотношения и выражаем силу тока:

$$I = \sqrt{\frac{2Sl\varpi}{L}}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ $t = 15$ мс.
Ответ: 15 мс.

17.3. Задачи для самостоятельного решения

17.1. По кольцу, сделанному из тонкого гибкого провода радиусом 10 см, течет ток 10 А. Перпендикулярно к плоскости кольца возбуждено магнитное поле с индукцией 0,1 Тл, по направлению совпадающее с направлением собственного магнитного поля кольца. Определить работу внешних сил, которые, деформируя контур, придали ему форму квадрата. Работой против упругих сил пренебречь.

17.2. В однородном магнитном поле, индукция которого 0,8 Тл, равномерно вращается рамка с угловой скоростью 15 рад/с. Площадь рамки равна 150 см^2. Ось вращения находится в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Найти максимальную ЭДС индукции во вращающейся рамке.

17.3. Проволочный контур площадью 100 см^2 и сопротивлением 0,01 Ом находится в однородном магнитном поле. Плоскость контура составляет угол 30° с линиями магнитной индукции. Определить тепловую мощность, выделяющуюся в контуре при изменении магнитного поля со скоростью $dB/dt = 0{,}2$ Тл/с.

17.4. В однородном магнитном поле с индукцией 1 Тл находится прямой провод длиной 10 см, концы которого замкнуты вне поля. Сопротивление всей цепи равно 0,4 Ом. Какая мощность потребуется для того, чтобы перемещать провод перпендикулярно к линиям магнитной индукции со скоростью 20 м/с?

17.5. Проволочное кольцо радиусом 10 см, имеющее сопротивление 1 Ом, лежит на столе. Какое количество электричества протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна 50 мкТл.

17.6. Сколько метров тонкого провода надо взять для изготовления соленоида длины 100 см с индуктивностью 1 мГн, если диаметр сечения соленоида значительно меньше его длины?

17.7. Две катушки намотаны на один сердечник. Индуктивность первой катушки 1 Гн, а второй — 4 Гн. Определить максимальную ЭДС, возбуждаемую во второй катушке, если сила тока в первой катушке меняется по закону $I_1=I_0\cos(2\pi\nu t)$, где $I_0 = 1$ А, а $\nu = 50$ Гц.

17.8. Активное сопротивление катушки индуктивности составляет 0,2 Ом. Если катушку отсоединить от источника тока и замкнуть накоротко, то ток уменьшается в 10 раз в течение 3 с. Определить индуктивность.

17.9. Сила тока в обмотке соленоида, содержащего 1500 витков, равна 5 А. Магнитный поток через сечение соленоида составляет 50 мкВб. Определить энергию магнитного поля в соленоиде.

17.10. Обмотка тонкого тороида с немагнитным сердечником содержит 10 витков на каждый сантиметр длины. Чему равна объемная плотность энергии магнитного поля в тороиде при силе тока 5 А?

18. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

18.1. Основные формулы

Уравнения свободных гармонических колебаний в LC-контуре без активного сопротивления:

$$q(t) = q_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \text{ – заряд на обкладках конденсатора;}$$

$$U(t) = \frac{q(t)}{C} = U_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \text{ – напряжение на конденсаторе;} \qquad (18.1)$$

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \text{ – ток в контуре,}$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота LC-контура; L — его индуктивность; C — емкость; φ_0 — начальная фаза колебаний; q_m — амплитуда заряда; $U_m = q_m/C$ — амплитуда напряжения; $I_m = q_m\omega_0$ — амплитуда тока.

Полная энергия в LC-контуре:

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{м}} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}. \qquad (18.2)$$

Уравнение свободных колебаний в LCR-контуре с активным сопротивлением R:

$$q(t) = q_m e^{-\beta t} \sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \qquad (18.3)$$

где $\beta = R/2L$ — коэффициент затухания; ω — частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (18.4)$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \beta T, \qquad (18.5)$$

где T — период затухающих колебаний.

Добротность *LCR*-контура:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \tag{18.6}$$

При слабых затуханиях ($\lambda << 1$) добротность с точностью до 2π принимает значение отношения запасенной в *LCR*-контуре энергии к ее потере за один период колебаний:

$$Q \approx 2\pi \frac{W(t)}{\Delta W} = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - \exp(-2\lambda)}. \tag{18.7}$$

Уравнение установившихся вынужденных колебаний при включении в *LCR*-контур источника гармонического сигнала $U = U_m \sin(\omega t)$:

$$I = I_m \sin(\omega t - \varphi). \tag{18.8}$$

Амплитуда тока:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{18.9}$$

Фаза колебания:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \tag{18.10}$$

18.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

В контуре, состоящем из конденсатора емкости C и катушки с индуктивностью L, совершаются свободные незатухающие колебания, при которых амплитуда напряжения на конденсаторе равна U_m. Найти связь между током в контуре и напряжением на конденсаторе в виде $f(I, U)=\text{const}$.

Решение.

Воспользуемся соотношением для полной энергии *LCR*-контура:

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Сокращаем знаменатели и получаем искомую зависимость:

$$CU^2 + LI^2 = CU_m^2.$$

Ответ: $CU^2 + LI^2 = CU_m^2$.

Задача 2.

Колебательный контур состоит из конденсатора емкости C, катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением и ключа. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения U_m и затем замкнули ключ. Определить отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля в момент времени, равный $T/8$.

Решение.

Энергия электрического поля конденсатора

$$W_{\text{эл}} = \frac{CU^2}{2}.$$

Энергия магнитного поля в катушке индуктивности

$$W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}.$$

Делим одно на другое:

$$\frac{W_{\text{м}}}{W_{\text{эл}}} = \frac{LI^2}{CU^2}.$$

Напряжение на конденсаторе в момент времени $T/8$

$$U = U_m \sin\left(\frac{\omega_0 T}{8}\right) = U_m \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Ток в контуре в момент времени $T/8$

$$I = I_m \cos\left(\frac{\omega_0 T}{8}\right) = I_m \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Отношение энергий

$$\frac{W_{\text{м}}}{W_{\text{эл}}}=\frac{LI_m^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{CU_m^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{LI_m^2}{CU_m^2}.$$

Числитель и знаменатель полученного соотношения равны удвоенной полной энергии колебательного контура:

$$2W=LI_m^2=CU_m^2.$$

Тогда

$$\frac{W_{\text{м}}}{W_{\text{эл}}}=1.$$

Ответ: 1.

Задача 3.

Частота свободных затухающих колебаний в колебательном контуре 1 кГц. Найти собственную частоту колебаний, если добротность контура равна 2.

Решение.

Выразим собственную частоту колебаний из соотношения для частоты свободных затухающих колебаний:

$$\omega_0=\sqrt{\omega^2+\beta^2}.$$

Коэффициент затухания выразим из формул добротности и логарифмического декремента затухания:

$$Q=\frac{\pi}{\lambda}=\frac{\pi}{\beta T}=\frac{\omega}{2\beta}\Rightarrow\beta=\frac{\omega}{2Q}.$$

Тогда собственная частота колебаний

$$\omega_0=\omega\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)}.$$

Заменяя циклические частоты, получаем

$$\nu_0 = \nu\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ ν_0 = 1031 Гц.

Ответ: 1031 Гц.

Задача 4.

Определить логарифмический декремент, при котором энергия колебательного контура за 5 периодов уменьшается в n = 8 раз.

Решение.

Энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Тогда для затухающих колебаний

$$n = \frac{W(t_0)}{W(t_0+t)} = \frac{\exp\left(-2\beta t_0\right)}{\exp\left(-2\beta(t_0+t)\right)} = \exp\left(2\beta t\right).$$

Выразим коэффициент затухания и учтем условие задачи $t = 5T$:

$$\beta = \frac{\ln n}{10T}.$$

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \beta T = \frac{\ln n}{10}.$$

Подстановка данных в расчетную формулу дает ответ λ = 0,21.

Ответ: 0,21.

Задача 5.

Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора и катушки с активным сопротивлением, подсоединена к генератору синусоидального напряжения, частоту которого можно менять, не изменяя его амплитуды. При частотах ω_1 и ω_2 амплитуды тока оказались одинаковыми. Определить резонансную частоту.

Решение.

Амплитуда силы тока вынужденных колебаний

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Из равенства токов при частотах ω_1 и ω_2 записываем равенство с точностью до знака реактивных составляющих сопротивления:

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -\left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right).$$

После преобразования получаем

$$\omega_1\omega_2 = 1/LC.$$

В случае малых активных сопротивлений (активное сопротивление катушки индуктивности достаточно мало) резонансная частота близка к собственной частоте контура:

$$\omega_0 = \sqrt{LC}.$$

Следовательно, искомая резонансная частота

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}.$$

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

18.3. Задачи для самостоятельного решения

18.1. Ток в колебательной системе зависит от времени как

$$I = I_m \sin(\omega_0 t),$$

где $I_m = 9$ мА; $\omega_0 = 4{,}5 \cdot 10^4$ с$^{-1}$.

Емкость конденсатора 0,5 мкФ. Определить индуктивность контура и напряжение на конденсаторе в момент времени $t = 0$.

18.2. Колебательный контур состоит из конденсатора емкости C, катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением и ключа. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения U_m и затем замкнули ключ. Определить ЭДС самоиндукции в катушке в моменты времени, когда энергия электрического поля в конденсаторе равна энергии магнитного поля в катушке.

18.3. Определить минимальное активное сопротивление при разрядке конденсатора емкости 1,2 нФ, при котором разряд будет апериодическим, если индуктивность проводов 3 мкГн.

18.4. Частота затухающих колебаний в колебательном контуре с добротностью 2500 равна 550 Гц. Определить время, за которое амплитуда тока в этом контуре уменьшится в 4 раза.

18.5. Какой должна быть добротность контура, чтобы частота, при которой наступает резонанс тока, отличалась от частоты, при которой наступает резонанс напряжения на конденсаторе, не более чем на 1%?

19. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

19.1. Основные формулы

Длина волны:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}, \qquad (19.1)$$

где υ – фазовая скорость волны; T — период колебаний; ν— частота.

Уравнение плоской волны:

$$\xi = a\sin\left(\omega t \mp kx + \varphi_0\right), \qquad (19.2)$$

где ξ — смещение колеблющейся частицы от положения равновесия; $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ — циклическая частота колебаний; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, знак «–» соответствует распространению волны в направлении оси x, знак «+» — против оси.

Уравнение сферической волны, создаваемой точечным изотропным источником:

$$\xi = \frac{a_0}{r}\sin\left(\omega t - kr + \varphi_0\right). \qquad (19.3)$$

Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \text{ или } \nabla^2\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad (19.4)$$

где $\upsilon = \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость волны.

Фазовая скорость продольной волны в упругой среде:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (19.5)$$

где E — модуль Юнга; ρ — плотность.

Фазовая скорость поперечной волны в упругой среде:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \qquad (19.6)$$

где G — модуль сдвига; ρ — плотность.

Фазовая скорость поперечной волны в натянутой струне:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \qquad (19.7)$$

где σ — механическое напряжение в струне; ρ — плотность струны; F — сила натяжения струны; S — площадь сечения струны.

Фазовая скорость звука в газе:

$$\upsilon = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}, \qquad (19.8)$$

где T — температура; M — молярная масса; γ — показатель адиабаты газа.

Средняя объемная плотность энергии упругой волны:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho a^2 \omega^2, \qquad (19.9)$$

где ρ — плотность среды; a — амплитуда волны; ω — циклическая частота колебаний.

Вектор плотности потока энергии упругой волны (вектор Умова):

$$\vec{j} = w\vec{\upsilon}, \qquad (19.10)$$

где w — объемная плотность энергии упругой волны; υ — фазовая скорость.

Интенсивность упругой волны:

$$I = \left|\langle \vec{j} \rangle\right| = \frac{1}{2}\rho \omega^2 \upsilon a^2. \qquad (19.11)$$

Полный поток энергии, переносимый волной:

$$\Phi = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \qquad (19.12)$$

Групповая скорость (скорость переноса энергии волновым пакетом):

$$u = \frac{d\omega}{dk}, \tag{19.13}$$

где ω — циклическая частота; k — волновое число.

Уравнение стоячей волны:

$$\xi = 2a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\sin(\omega t). \tag{19.14}$$

Условия пучностей и узлов стоячей волны:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n\frac{\lambda}{2}\ (n = 0,1,2,...) \text{ и } x_{\text{узл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}\ (n = 0,1,2,...). \tag{19.15}$$

Уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad &&\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_{\text{см}} + \vec{j};\\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho; &&\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0;\\ &\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}; &&\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \end{aligned} \tag{19.16}$$

где $\vec{j}_{\text{см}} = \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ — плотность тока смещения; $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ — плотность тока проводимости; σ — удельная проводимость; ρ — объемная плотность заряда.

Волновые уравнения плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \tag{19.17}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряженности переменного электрического и магнитного полей соответственно; $\upsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — фазовая скорость электромагнитной волны; c — скорость света в вакууме; ε и μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемость среды.

Уравнения плоской электромагнитной волны:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0);$$
$$\vec{H}(x,t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \qquad (19.18)$$

Связь между модулями амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей:

$$E_0 \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_0 \sqrt{\mu\mu_0}. \qquad (19.19)$$

Объемная плотность энергии электромагнитной волны:

$$w_{\text{эм}} = w_{\text{э}} + w_{\text{м}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \qquad (19.20)$$

Вектор плотности потока энергии электромагнитной волны (вектор Пойнтинга):

$$\vec{S} = w_{\text{эм}}\, \vec{\upsilon} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right], \qquad (19.21)$$

где w — объемная плотность энергии упругой волны; υ — фазовая скорость.

Интенсивность электромагнитной волны:

$$I = \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0. \qquad (19.22)$$

19.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Плоская продольная волна с амплитудой a = 50 мкм и длиной волны λ = 2,5 см распространяется в меди. Плотность меди ρ = 8,9 г/см^3, а модуль Юнга E = 125 ГПа. Найти максимальную скорость смещения частиц меди.

Решение.

Смещение частиц среды определяется уравнением плоской волны:

$$\xi = a \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Скорость смещения частиц среды есть производная смещения по времени:

$$\upsilon_\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a \sin\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)\right) = \omega a \cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right).$$

Максимальная скорость смещения

$$\upsilon_{\xi \max} = \omega a.$$

Фазовая скорость волны

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad \omega = k\upsilon = \frac{2\pi}{\lambda}\upsilon.$$

С другой стороны, фазовая скорость поперечной упругой волны

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

В итоге максимальная скорость смещения равна

$$\upsilon_{\xi \max} = a\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Рассчитываем значение:

$$\upsilon_{\xi \max} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{2 \cdot 3{,}14}{2{,}5 \cdot 10^{-2}}\sqrt{\frac{125 \cdot 10^9}{8{,}9 \cdot 10^3}} = 47 \ \text{м/с}.$$

Ответ: 47 м/с.

Задача 2.

Если подуть в трубку, то можно извлечь звук, высота которого определяется минимальной частотой возможных колебаний воздуха. Трубку какой длины нужно взять, чтобы получить ноту ля первой октавы (ν = 440 Гц), если трубка закрыта с одного из концов. Трубка заполнена воздухом в нормальных условиях, молярная масса воздуха M = 29 г/моль.

Решение.

В трубке возбуждаются такие стоячие волны, что на открытом конце находится пучность, а на закрытом — узел. Расстояние между соседним узлом и пучностью равно

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{\upsilon T}{4} = \frac{\upsilon}{4\nu}.$$

Скорость звука в воздухе

$$\upsilon = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}.$$

Таким образом, получаем длину трубки:

$$l = \frac{1}{4\nu}\sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}.$$

Считая воздух двухатомным газом $\left(\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1{,}4\right)$ и учитывая, что в нормальных условиях $T = 273$ K, получим длину трубки:

$$l = \frac{1}{4 \cdot 440}\sqrt{1{,}4 \frac{8{,}31 \cdot 273}{29 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}19 \text{ м}.$$

Ответ: 19 см.

Задача 3.

У одного из концов длинной трубы, заполненной гелием в нормальных условиях, расположен источник звука, создающий плоскую звуковую волну интенсивностью $I = 25$ мВт/м^2. Найти энергию звукового поля в трубе, если она имеет диаметр $d = 3$ см и длину $l = 50$ см.

Решение.

Интенсивность звуковой волны

$$I = \langle w \rangle \upsilon.$$

Средняя объемная плотность энергии

$$\langle w \rangle = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sl} = \frac{4W}{\pi d^2 l}.$$

Скорость звука в гелии

$$\upsilon = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{4W}{\pi d^2 l} \cdot \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}},$$

откуда

$$W = \frac{\pi d^2 l I}{4} \cdot \sqrt{\frac{M}{\gamma RT}}.$$

Учитывая, что гелий — одноатомный газ $\left(\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{3+2}{3} = 1{,}67 \right)$ и в нормальных условиях $T = 273$ K, получим значение энергии:

$$W = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}5 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-3}}{1{,}67 \cdot 8{,}31 \cdot 273}} = 9 \cdot 10^{-9} \text{ Дж.}$$

Ответ: 9 нДж.

Задача 4.

В слабо проводящей немагнитной среде (удельная проводимость $\sigma = 30$ мСм/м, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 9$) распространяется плоская электромагнитная волна. Во сколько раз амплитуда плотности тока смещения больше амплитуды плотности тока проводимости, если длина волны $\lambda = 10$ см?

Решение.

Напряженность плоской электромагнитной волны

$$E = E_0 \cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right).$$

Плотность тока смещения

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\varepsilon_0 E\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\varepsilon_0 E_0 \cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)\right) =$$
$$= -\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_0 \sin\left(\omega t - kx + \varphi_0\right).$$

Фазовая скорость волны

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad \omega = k\upsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Таким образом, амплитуда плотности тока смещения

$$j_{\text{см}0} = \omega\varepsilon\varepsilon_0 E_0 = \frac{2\pi c}{\lambda\sqrt{\varepsilon}} \cdot \varepsilon\varepsilon_0 E_0 = \frac{2\pi c\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} \cdot E_0 .$$

Плотность тока проводимости согласно закону Ома в локальной форме

$$j = \sigma E = \sigma E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Амплитуда плотности тока проводимости

$$j_0 = \sigma E_0 .$$

Отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения

$$\frac{j_{\text{см}0}}{j_0} = \frac{2\pi c\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon} E_0}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sigma E_0} = \frac{2\pi c\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon}}{\sigma\lambda}.$$

Находим отношение:

$$\frac{j_{\text{см}0}}{j_0} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\sqrt{9}}{30 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1} = 16{,}7 \text{ раза}.$$

Ответ: 16,7 раза.

Задача 5.

В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой магнитной составляющей H_0 = 12 мА/м. Найти интенсивность волны.

Решение.

Интенсивность электромагнитной волны

$$I = \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0 .$$

Связь между модулями амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей

$$E_0\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_0\sqrt{\mu\mu_0} .$$

Учитывая, что в вакууме $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$, получаем

$$E_0 = H_0\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = H_0\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,.$$

Отсюда интенсивность электромагнитной волны

$$I = \frac{1}{2}H_0^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

Подставляя данные, получаем

$$I = \frac{1}{2}\left(12\cdot 10^{-3}\right)^2\sqrt{\frac{1{,}26\cdot 10^{-6}}{8{,}85\cdot 10^{-12}}} = 27\cdot 10^{-3}\ \text{Вт/м}^2.$$

Ответ: 27 мВт/м^2.

19.3. Задачи для самостоятельного решения

19.1. В воздухе при температуре $T = 300$ К распространяется звуковая волна с частотой $\nu = 1$ кГц. Амплитуда смещения частиц среды составляет $a = 0{,}25$ мм. Найти максимальное ускорение частиц среды.

19.2. На сколько процентов изменится частота основного тона натянутой струны, если ее длину уменьшить на 25%, а силу натяжения увеличить на 44%?

19.3. Интенсивность звука точечного изотропного источника на расстоянии $r = 5$ м от него равна $I = 0{,}25$ Вт/м^2. Найти мощность источника звука.

19.4. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой электрической составляющей $E_m = 0{,}15$ В/м и длиной волны $\lambda = 30$ см. Найти среднее за период значение модуля плотности тока смещения.

19.5. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой электрической составляющей $E_m = 0{,}15$ В/м и частотой $\nu = 100$ МГц. Найти среднее за период значение плотности потока энергии.

19.6. В немагнитной диэлектрической среде распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой электрической составляющей $E_0 = 2$ В/м и амплитудой магнитной составляющей $H_0 = 15$ мА/м. Найти фазовую скорость электромагнитной волны.

19.7. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с интенсивностью $I = 5$ мВт/м^2. Найти амплитуду напряженности электрического поля.

20. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

20.1. Основные формулы

Оптическая разность хода двух когерентных волн, распространяющихся в прозрачной однородной среде:

$$\Delta = n\left(l_1 - l_2\right), \qquad (20.1)$$

где l_1 и l_2 — геометрические длины путей первой и второй волны соответственно; n — абсолютный показатель преломления среды.

Условия *максимума* интерференции:

$$\Delta = \pm 2k\frac{\lambda}{2} \quad \left(k = 0, 1, 2, \ldots\right), \qquad (20.2)$$

где λ — длина световой волны.

Условия *минимума* интерференции:

$$\Delta = \pm\left(2k + 1\right)\frac{\lambda}{2}. \qquad (20.3)$$

Ширина Δx интерференционной полосы определяется как расстояние между соседними максимумами или минимумами интерференционной картины (рис. 20.1).

Формулы для вычисления ширины интерференционной полосы в различных интерференционных схемах приведены на рис. 20.2.

Интерференционную картину можно также наблюдать либо при отражении света от тонких пленок, либо при прохождении света через них (рис. 20.3).

Оптическая разность хода волн 1′ и 2′ при отражении света от тонкой пленки (рис. 20.3, *а*):

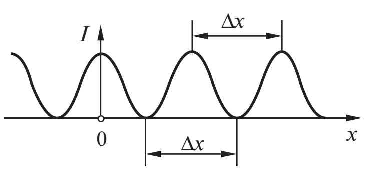


Рис. 20.1

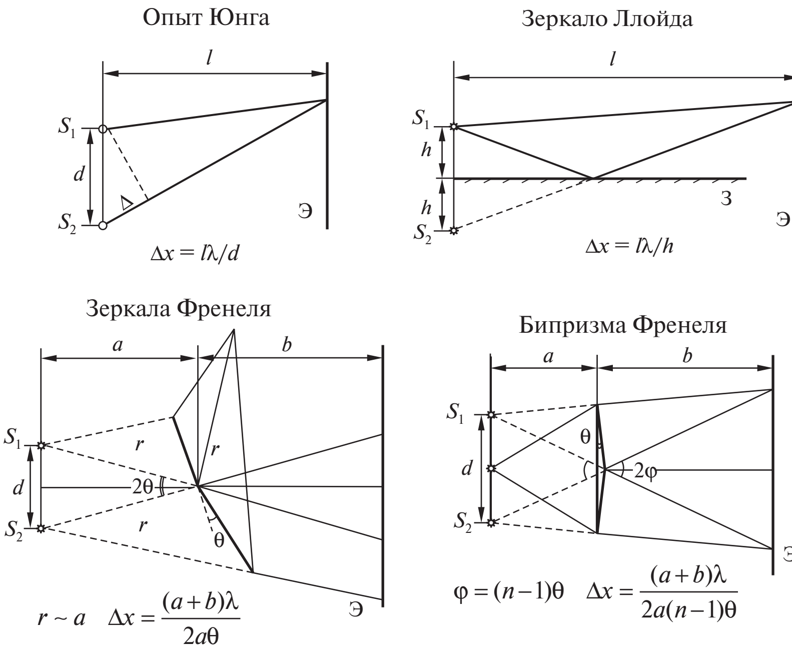


Рис. 20.2

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \frac{\lambda}{2}, \qquad (20.4)$$

где $\frac{\lambda}{2}$ — дополнительная разность хода, учитывающая отражение от оптически более плотной среды.

Оптическая разность хода волн 1″ и 2″ при прохождении света через тонкую пленку (рис. 20.3, *б*):

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}. \qquad (20.5)$$

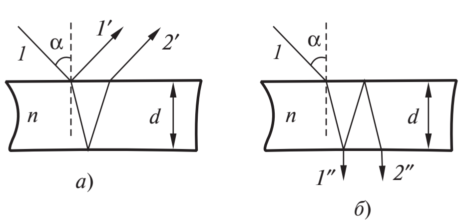


Рис. 20.3

Интерференционная картина наблюдается и при нормальном падении света на плоскую поверхность плосковыпуклой линзы (рис. 20.4), которая выпуклой стороной соприкасается с плоскопараллельной пластиной. Интерференционные полосы будут видны в виде концентрических колец — *колец Ньютона*.

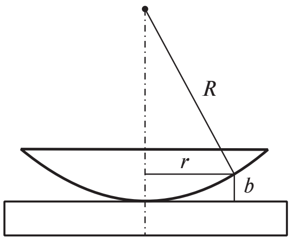


Рис. 20.4

Радиус k-го темного кольца в отраженном (или светлого в проходящем) свете:

$$r_k = \sqrt{kR\lambda / n}\ , \tag{20.6}$$

где n — относительный показатель преломления среды между линзой и пластиной.

Радиус m-го светлого кольца в отраженном (или темного в проходящем) свете:

$$r_m = \sqrt{(2m-1)R\lambda / 2n}\ . \tag{20.7}$$

20.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Белый свет пропускается через светофильтр с номинальной длиной волны пропускания $\lambda = 540$ нм. Для определения ширины полосы пропускания светофильтра наблюдают интерференцию пропущенного света с помощью схемы Юнга. Определить ширину полосы пропускания, если на экране можно наблюдать только $N = 19$ четких полос.

Решение.

Интерференционная картина схемы Юнга симметрична, поэтому число наблюдаемых полос

$$N = 2k_{\max} + 1,$$

где $k_{\max}$ — наибольший номер наблюдаемого максимума, т.е.

$$k_{\max} = \frac{N-1}{2} = \frac{19-1}{2} = 9.$$

Ширина интерференционной полосы зависит от длины волны:

$$\Delta x = l\lambda / d.$$

Интерференционная картина создается светом с длинами волн от λ до $\lambda+\Delta\lambda$. Полосы разных длин волн накладываются друг на друга, и различить их станет невозможно, если полоса $k_{\max}$ света с длиной волны $\lambda+\Delta\lambda$ накладывается на полосу $k_{\max}+1$ света с длиной волны λ, т.е.

$$k_{\max}(\lambda + \Delta\lambda) = (k_{\max} + 1)\lambda.$$

Преобразуя выражение, получаем

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{k_{\max}} = \frac{540\ \text{нм}}{9} = 60\ \text{нм}.$$

Ответ: 60 нм.

Задача 2.

Интерференционную картину наблюдают с помощью схемы Юнга с расстоянием между двумя щелями $d = 1{,}0$ мм, освещаемым источником монохроматического света, длину волны которого можно изменять. На каком расстоянии находится экран, если при увеличении длины волны на $\Delta\lambda = 50$ нм ширина интерференционных полос на экране увеличилась на $b = 0{,}15$ мм?

Решение.

Ширина полосы в схеме Юнга для света с длиной волны λ

$$\Delta x_1 = \frac{l\lambda}{d}.$$

Ширина полосы в схеме Юнга для света с длиной волны $\lambda+\Delta\lambda$

$$\Delta x_2 = \frac{l(\lambda + \Delta\lambda)}{d}.$$

Изменение ширины полосы составит

$$b = \Delta x_2 - \Delta x_1 = \frac{l(\lambda + \Delta\lambda)}{d} - \frac{l\lambda}{d} = \frac{l\Delta\lambda}{d}.$$

Отсюда

$$l = \frac{db}{\Delta\lambda} = \frac{10^{-3} \cdot 0{,}15 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-9}} = 3 \text{ м}.$$

Ответ: 3 м.

Задача 3.

На поверхность стекла с показателем преломления $n_1 = 1{,}7$ нанесена тонкая пленка вещества с показателем преломления $n_2 = 1{,}5$. Стекло освещается падающим по нормали светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм. При какой наименьшей толщине пленки отражение света будет максимально?

Решение.

Так как от оптически более плотной среды отражается как луч 1′, так и луч 2′ (см. рис. 20.3, *а*), то оптическая разность хода не содержит дополнительной $\lambda/2$:

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha} = 2dn_2.$$

Условие максимумов интерференции:

$$\Delta = \pm 2k\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$2dn_2 = 2k\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{k\lambda}{2n_2} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Наименьшая толщина пленки

$$d = \frac{\lambda}{2n_2} = \frac{600}{2 \cdot 1{,}5} = 200 \text{ нм}.$$

Ответ: 200 нм.

Задача 4.

Поверхности стеклянного клина ($n = 1{,}5$) образуют между собой угол $\theta = 36''$. На клин нормально к его поверхности падает пучок лучей монохроматического света. Определить длину волны λ света, если ширина интерференционной полосы $b = 1{,}0$ мм.

Решение.

Сделаем рисунок, изобразив поверхности клина и два параллельных луча, падающих на поверхность клина в точках A и B на расстоянии, равном ширине полосы (рис. 20.5).

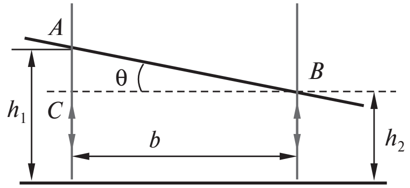


Рис. 20.5

Оптические разности хода в точках A и B соответственно:

$$\Delta_1 = 2h_1\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \frac{\lambda}{2} = 2h_1 n + \frac{\lambda}{2};$$

$$\Delta_2 = 2h_2 n + \frac{\lambda}{2}.$$

Так как в точках A и B наблюдаются соседние минимумы, то оптические разности хода отличаются на длину волны:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \lambda;$$

$$\left(2h_1 n + \frac{\lambda}{2}\right) - \left(2h_2 n + \frac{\lambda}{2}\right) = \lambda;$$

$$2(h_1 - h_2)n = \lambda.$$

В соответствии с рисунком

$$h_1 - h_2 = |AC| = b\,tg\theta \approx b\theta\,.$$

Таким образом,

$$\lambda = 2nb\theta.$$

Находим числовое значение, переводя угол из секунд в радианы:

$$\lambda = 2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{36}{3600} \cdot \frac{3{,}14}{180} = 5{,}23 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Ответ: 523 нм.

Задача 5.

Кольца Ньютона наблюдаются с помощью плосковыпуклой стеклянной линзы с показателем преломления $n = 1{,}5$, освещаемой нормально падающим светом с длиной волны $\lambda = 720$ нм. Определить оптическую силу D линзы, если диаметр d_2 второго темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете равен 1,2 мм.

Решение.

Диаметр второго темного кольца Ньютона в отраженном свете, учитывая, что в промежутке между линзой и пластиной находится воздух, равен

$$d_2 = 2r_2 = 2\sqrt{2R\lambda}.$$

Отсюда радиус кривизны линзы

$$R = \frac{d_2^2}{8\lambda}.$$

Оптическая сила плосковыпуклой линзы в воздухе

$$D = \frac{n-1}{R} = \frac{8\lambda(n-1)}{d_2^2}.$$

Находим числовое значение:

$$D = \frac{8 \cdot 720 \cdot 10^{-9}(1{,}5-1)}{\left(1{,}2 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 2{,}0 \text{ дптр.}$$

Ответ: 2,0 дптр.

20.3. Задачи для самостоятельного решения

20.1. Найдите все длины волн видимого света, которые будут максимально ослаблены при разности хода интерферирующих волн $\Delta = 3{,}6$ мкм.

20.2. Если экран в опыте Юнга сместить на расстояние $\Delta l = 1$ м, то ширина интерференционных полос на экране увеличится на $\Delta b = 0{,}5$ мм. Определить расстояние d между двумя щелями, если длина волны λ, испускаемой источником монохроматического света, равна 0,6 мкм.

20.3. На каком максимальном расстоянии друг от друга могут быть расположены отверстия диафрагмы в схеме Юнга, чтобы можно было наблюдать интерференцию света длиной волны 0,56 мкм, используя в качестве источника света Солнце? Угловой диаметр Солнца равен 32 угловые минуты.

20.4. Источник света с длинной волны $\lambda = 600$ нм находится на расстоянии $a = 10$ см от бипризмы с преломляющим углом $\theta = 0{,}018$ рад. Ширина интерференционной полосы на экране, находящемся на расстоянии $b = 140$ см от бипризмы, равна $\Delta x = 0{,}5$ мм. Найти коэффициент преломления бипризмы.

20.5. Рассеянный монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм падает на тонкую пленку толщиной $d = 0{,}25$ мкм, находящуюся в воздухе. Определить показатель преломления пленки, если интерференционный максимум первого порядка в *проходящем* свете наблюдается под углом $\alpha = 45°$.

20.6. Для измерения толщины тонкой проволоки ее положили на одну стеклянную пластину и накрыли другой так, что проволока располагается параллельно линии соприкосновения пластин на расстоянии $a = 50$ мм от нее. При освещении пластин монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм наблюдается $m = 10$ светлых полос, занимающих область длиной $b = 25$ мм от линии соприкосновения пластин. Чему равен диаметр проволоки?

20.7. При заполнении жидкостью пространство между плоскопараллельной пластиной и линзой в установке для наблюдения колец Ньютона интерференционная картина сжалась так, что вместо третьего темного кольца оказалось четвертое кольцо. Чему равен показатель преломления n жидкости?

21. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

21.1. Основные формулы

Метод зон Френеля заключается в разбиении волнового фронта на такие кольцевые зоны (зоны Френеля), что расстояние от соседних зон до точки наблюдения P при этом будет отличаться на половину длины волны $\lambda/2$ (рис. 21.1).

Радиус m-й зоны Френеля:

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda ab}{a+b}}, \qquad (21.1)$$

где a — расстояние от точечного источника до центральной зоны; b — расстояние от центральной зоны до точки наблюдения P.

Если размеры препятствия сопоставимы с размерами зон Френеля (ближняя зона), то наблюдается дифракция Френеля. Если на препятствие падает плоская волна, а характерный размер препятствия ρ много меньше первой зоны Френеля ($\rho << \sqrt{b\lambda}$ – дальняя зона) либо точка наблюдения находится в фокальной плоскости собирающей линзы, то наблюдается дифракция Фраунгофера.

Если при ***дифракции Френеля*** диафрагма с круглым отверстием открывает *нечетное* количество зон Френеля, то в точке P наблюдается *максимум*, а если *четное — минимум*.

При ***дифракции Фраунгофера на щели*** шириной a на экране наблюдается распределение интенсивности в виде полос (рис. 21.2).

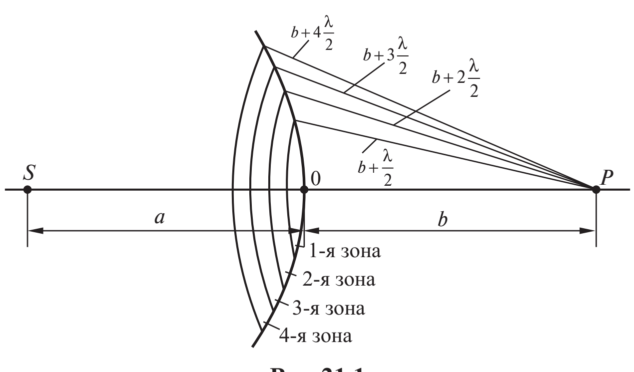


Рис. 21.1

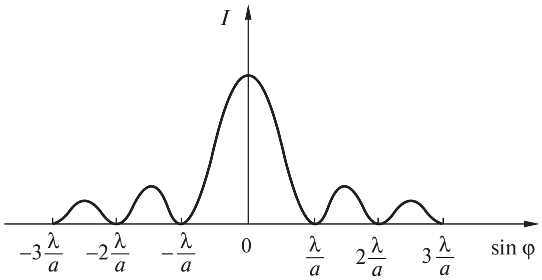


Рис. 21.2

Угловое положение φ минимумов интенсивности определяется условием

$$a\sin\varphi = \pm k\lambda \ (k = 1,\ 2,\ldots), \tag{21.2}$$

где λ — длина световой волны.

Одномерной дифракционной решеткой называется система параллельных щелей равной ширины *a*, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками *b*. Величина $d = (a + b)$ — постоянная (период) решетки. В дифракционной решетке осуществляется *многолучевая интерференция* когерентных *дифрагированных* пучков света, идущих от всех щелей. Угловое положение φ *главных максимумов* задается условием

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2,\ldots). \tag{21.3}$$

Дифракционная решетка используется как спектральный прибор, пространственно разделяющий свет различных длин волн. Разрешающая способность дифракционной решетки:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN, \tag{21.4}$$

где δλ — минимальная разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и λ + δλ), при которой эти линии воспринимаются раздельно; *N* — число действующих штрихов решетки; *m* — порядок спектра.

Угловая дисперсия дифракционной решетки:

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}, \tag{21.5}$$

где $\delta\varphi$ — угловое расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длинам волн на $\delta\lambda$ (рис. 21.3).

Линейная дисперсия дифракционной решетки:

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda} \approx f D_\varphi \approx f\frac{m}{d}, \tag{21.6}$$

где δl — линейное расстояние между спектральными линиями на экране, отличающимися по длинам волн на $\delta\lambda$; f — фокусное расстояние собирающей линзы (см. рис. 21.3).

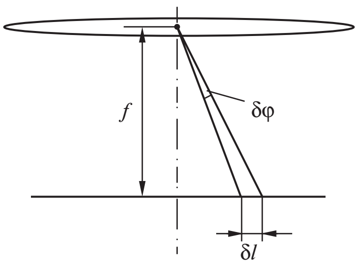


Рис. 21.3

Дифракция также наблюдается при отражении рентгеновского излучения от кристаллов. Углы скольжения θ, под которыми наблюдаются максимумы отражения, удовлетворяют *формуле Вульфа–Брэгга*:

$$2d\sin\theta = k\lambda\left(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\right), \tag{21.7}$$

где d — расстояние между кристаллическими плоскостями.

21.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Дифракция Френеля на круглом отверстии диаметром $d = 4{,}0$ мм наблюдается на экране, находящемся на расстоянии $b = 1{,}0$ м от диафрагмы. Какое пятно (темное или светлое) будет находиться в центре дифракционной картины, если диафрагму с отверстием осветить параллельным пучком лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм?

Решение.

Радиус m-й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda ab}{a+b}}.$$

Так как пучок лучей параллельный, то источник удален бесконечно далеко ($a \to \infty$). Таким образом,

$$r_m = \sqrt{m\lambda b}.$$

Число открытых отверстием зон Френеля

$$m = \frac{r^2}{\lambda b} = \frac{d^2}{4\lambda b} = \frac{\left(4{,}0 \cdot 10^{-3}\right)^2}{4 \cdot 500 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}0} = 8.$$

Так как число открытых зон Френеля четное, будет наблюдаться минимум.

Ответ: темное.

Задача 2.

Дифракцию Фраунгофера наблюдают, освещая щель нормально падающим монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}50$ нм. За щелью помещена собирающая линза с оптической силой $D = 1{,}0$ дптр, в фокальной плоскости которой находится экран. Найти ширину щели a, если ширина ее изображения на экране $b = 1{,}0$ см.

Решение.

Ширина изображения щели представляет собой расстояние между первыми минимумами дифракции Фраунгофера, находящимися на расстоянии $F = 1/D$ (рис. 21.4).

Условие минимумов дифракции Фраунгофера:

$$a \sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда синус угла дифракции, соответствующего первому минимуму,

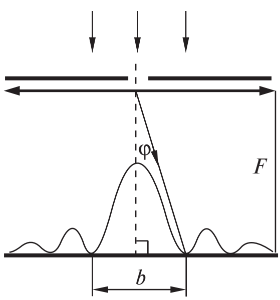


Рис. 21.4

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}.$$

Из рисунка тангенс угла дифракции

$$\text{tg}\varphi = \frac{b/2}{F} = \frac{1}{2}bD.$$

Учитывая, что для малых углов

$$\sin\varphi \approx \text{tg}\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{a} \approx \frac{1}{2}bD.$$

Получаем ширину щели:

$$a = \frac{2\lambda}{bD}.$$

Находим числовое значение:

$$a = \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{1{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}0} = 1{,}0 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Ответ: 0,10 мм.

Задача 3.

Дифракционная решетка содержит n = 2000 штрихов на сантиметр. Сколько главных максимумов дает эта решетка при освещении ее нормально падающим монохроматическим светом с длиной волны 0,65 мкм?

Решение.

Постоянная дифракционной решетки

$$d = \frac{l}{n} = \frac{10^{-2}}{2000} = 5 \cdot 10^{-6}\text{ м} = 5 \text{ мкм}.$$

Условие главных дифракционных максимумов:

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Синус наибольшего угла дифракции определяется условием

$$\sin\varphi_{\max} = \frac{m_{\max}\lambda}{d} < 1.$$

Таким образом, номер последнего максимума

$$m_{\max} < \frac{d}{\lambda} = \frac{5\ \text{мкм}}{0{,}65\ \text{мкм}} = 7{,}69 \quad \Rightarrow \quad m_{\max} = 7.$$

Учитывая симметричность дифракционной картины, получаем количество максимумов:

$$N = 2m_{\max} + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15.$$

Ответ: 15.

Задача 4.

При какой наименьшей длине решетки L можно разрешить дублет натрия (λ_1 = 589,00 нм и λ_2 = 589,59 нм) в спектре второго порядка, если период дифракционной решетки d = 20 мкм?

Решение.

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN,$$

где $\lambda = \dfrac{589{,}00 + 589{,}59}{2} = 589{,}30\ \text{нм}$ и $\delta\lambda = 589{,}59 - 589{,}00 = 0{,}59\ \text{нм}$.

Действующее число штрихов, необходимых для разрешения дублета натрия во втором порядке, составляет

$$N = \frac{\lambda}{m\delta\lambda} = \frac{589{,}30}{2 \cdot 0{,}59} = 499{,}4 = 500.$$

Наименьшая длина дифракционной решетки составит

$$L = Nd = 500 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 10 \cdot 10^{-3}\ \text{м} = 10\ \text{мм}.$$

Ответ: 10 мм.

Задача 5.

Для определения расстояния между атомными плоскостями кристалла его облучают параллельным пучком рентгеновского излучения с длиной волны λ = 0,15 нм. Чему равно это расстояние, если дифракционный максимум второго порядка наблюдается, когда излучение падает под углом $\theta = 30^\circ$ к поверхности кристалла?

Решение.

Согласно формуле Вульфа–Брэгга

$$2d\sin\theta = k\lambda\left(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\right).$$

Таким образом, расстояние между атомными плоскостями кристалла составляет

$$d = \frac{k\lambda}{2\sin\theta} = \frac{2\cdot 0{,}15\text{ нм}}{2\sin 30^\circ} = 0{,}30\ \text{ нм}.$$

Ответ: 0,30 нм.

21.3. Задачи для самостоятельного решения

21.1. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на диафрагму с круглым отверстием радиусом $r = 0{,}25$ мм. На каком максимальном расстоянии от диафрагмы может быть расположен экран, чтобы в центре дифракционной картины наблюдалось темное пятно?

21.2. В установке для наблюдения дифракции Френеля расстояния от диафрагмы до точечного источника и экрана равны $a = 1{,}0$ м и $b = 1{,}5$ м соответственно. При радиусе отверстия диафрагмы $r_1 = 1{,}0$ мм в центре дифракционной картины наблюдается максимум. Определить длину волны света, если наименьший диаметр отверстия диафрагмы, при котором наблюдается следующий максимум, равен $r_2 = 1{,}3$ мм.

21.3. На щель шириной $a = 0{,}10$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 500$ нм). За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Определить угловую ширину второго максимума (в минутах).

21.4. На дифракционную решетку, содержащую $n = 5000$ штрихов на сантиметр, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определить угол φ дифракции (в градусах), соответствующий последнему максимуму.

21.5. Дифракционная решетка шириной $L = 2{,}5$ см содержит $N = 10^4$ штрихов. Найти угловую ширину максимума второго порядка (в минутах) при освещении этой решетки светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм.

21.6. Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на дифракционную решетку. Дифракционная картина, создаваемая решеткой, наблюдается на экране, расположенном в фокальной плоскости собирающей линзы. При каком фокусном расстоянии линзы линейная дисперсия $D_l = 1{,}0$ мм/нм в области углов дифракции порядка $\varphi = 30°$?

21.7. Свет падает нормально на дифракционную решетку ширины $l = 3{,}0$ см, имеющую 200 штрихов на миллиметр. В каком наименьшем порядке спектра будет разрешен спектральный дублет в области длин волн $\lambda = 600$ нм, компоненты которого различаются на $\Delta\lambda = 0{,}03$ нм?

21.8. Параллельный пучок рентгеновского излучения падает на поверхность кристалла, расстояние между атомными плоскостями которого $d = 280$ пм. Определить длину волны рентгеновского излучения, если дифракционный максимум первого порядка наблюдается под углом $\alpha = 54°$ к поверхности кристалла.

22. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ

22.1. Основные формулы

Закон Брюстера:

$$\operatorname{tg}\alpha_{\text{Б}} = n_{21}, \tag{22.1}$$

где $\alpha_{\text{Б}}$ — угол Брюстера — угол падения, при котором отраженная световая волна полностью поляризована; n_{21} — относительный показатель преломления.

Закон Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi , \tag{22.2}$$

где I_0 — интенсивность плоскополяризованного света на входе в анализатор; I — интенсивность света, прошедшего анализатор; φ — угол между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора (рис. 22.1).

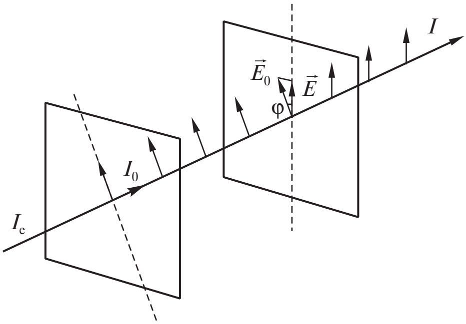


Рис. 22.1

При падении на поляризатор естественного света интенсивностью I_e через поляризатор пройдет свет интенсивностью

$$I_0 = \frac{1}{2} I_e. \tag{22.3}$$

Степень поляризации частично поляризованного света:

$$P = \frac{I_{п}}{I_{общ}} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \tag{22.4}$$

где $I_{п}$ — интенсивность поляризованной компоненты; $I_{общ}$ — общая интенсивность светового потока; I_{max} и I_{min} — максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

Угол поворота плоскости поляризации для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей:

$$\varphi = \alpha d, \tag{22.5}$$

где d — расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе; α — удельное вращение, численно равное углу поворота плоскости поляризации света слоем оптически активного вещества единичной толщины.

Оптически активные вещества делятся на правовращающие (поворот плоскости поляризации осуществляется по часовой стрелке, если смотреть навстречу ходу лучей) и левовращающие (против часовой стрелки).

Угол поворота плоскости поляризации для оптически активных растворов:

$$\varphi = [\alpha] C d, \tag{22.6}$$

где d — расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе; $[\alpha]$ — удельное вращение, численно равное углу поворота плоскости поляризации света слоем оптически активного вещества единичной толщины и единичной концентрации; C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе, кг/м^3.

Магнитное вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея):

$$\varphi = VHd, \tag{22.7}$$

где d — расстояние, пройденное светом в веществе; H — напряженность магнитного поля; V — постоянная Верде. Направление вращения зависит от направления магнитного поля и не связано с направлением распространения света.

Положительным считается поворот плоскости поляризации по часовой стрелке, если смотреть вдоль силовой линии магнитного поля.

Поглощение света в среде описывается законом Бугера–Ламберта:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \qquad (22.8)$$

где I_0 и I — интенсивности света на входе и выходе из слоя толщиной x; α — показатель поглощения среды, который зависит от химической природы и состояния поглощающей среды, а также от длины волны света.

Для разбавленных растворов поглощающего вещества в непоглощающем растворителе показатель поглощения подчиняется закону Бера:

$$\alpha = AC, \qquad (22.9)$$

где C — концентрация раствора; A — коэффициент, характерный для поглощающего вещества.

22.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Под каким углом падения луча света из воздуха на поверхность жидкости отраженный свет будет полностью поляризован, если предельный угол полного внутреннего отражения на границе этой жидкости с воздухом $\alpha_{пр} = 45°$?

Решение.

Отраженный свет будет полностью поляризован при падении под углом Брюстера $\alpha_Б$. Согласно закону Брюстера при падении света из воздуха на жидкость

$$\operatorname{tg}\alpha_Б = \frac{n_ж}{n_{возд}} = n_ж.$$

Полное внутреннее отражение наблюдается при падении света из оптически более плотной среды на менее плотную. Для предельного угла согласно закону Снеллиуса

$$\frac{\sin\alpha_{пр}}{\sin 90°} = \frac{n_{возд}}{n_ж} \;\Rightarrow\; \sin\alpha_{пр} = \frac{1}{n_ж} \;\Rightarrow\; n_ж = \frac{1}{\sin\alpha_{пр}}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha_Б = \frac{1}{\sin\alpha_{пр}} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}.$$

Соответственно, угол Брюстера

$$\alpha_Б = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\right) = 55^\circ.$$

Ответ: 55°.

Задача 2.

Естественный свет проходит через два поляризатора, угол между главными плоскостями которых $\alpha = 45^\circ$, затем падает на зеркало и, отразившись, вновь проходит через пленки в обратном направлении. Пренебрегая поглощением света, определить, во сколько раз уменьшилась интенсивность света после прохождения системы.

Решение.

После прохождения естественного света интенсивностью $I_е$ через первый поляризатор он поляризуется и его интенсивность будет

$$I_1 = \frac{1}{2} I_е .$$

После прохождения поляризованного света через второй поляризатор плоскость поляризации соответствует плоскости пропускания второго поляризатора, а его интенсивность будет определяться по закону Малюса:

$$I_2 = I_1 \cos^2\alpha = \frac{1}{2} I_е \cos^2\alpha.$$

При отражении поляризованного света от зеркала плоскость его поляризации не изменяется, поэтому после повторного прохождения второго поляризатора его интенсивность также не изменяется. После повторного прохождения поляризованного света через первый поляризатор его интенсивность будет определяться по закону Малюса:

$$I_3 = I_2 \cos^2\alpha = \frac{1}{2} I_е \cos^4\alpha.$$

Уменьшение интенсивности составит

$$\frac{I_e}{I_3} = \frac{2}{\cos^4 \alpha} = \frac{2}{\cos^4 45^\circ} = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 = 8.$$

Ответ: 8 раз.

Задача 3.

Во сколько раз при вращении поляризатора изменяется интенсивность прошедшего через него света, если степень поляризации падающего света $P = 0{,}6$?

Решение.

Если максимальная и минимальная интенсивности прошедшего через поляризатор света различаются в k раз, то

$$I_{\max} = kI_{\min}.$$

Степень поляризации света определяется по формуле

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{kI_{\min} - I_{\min}}{kI_{\min} + I_{\min}} = \frac{k-1}{k+1}.$$

Отсюда

$$k = \frac{1+P}{1-P} = \frac{1+0{,}6}{1-0{,}6} = 4.$$

Ответ: в 4 раза.

Задача 4.

Для наблюдения эффекта Фарадея в оптически активной жидкости трубку с веществом длиной $l = 20$ см поместили в продольное магнитное поле соленоида, расположенного между двумя поляризаторами. Оказалось, что при одном направлении тока в соленоиде поворот плоскости поляризации составил $\varphi_1 = +3^\circ 30'$, а при противоположном — $\varphi_2 = -2^\circ 10'$. Найти постоянную Верде (в угл. мин/А), если напряженность магнитного поля в соленоиде в обоих случаях $H = 25$ кА/м.

Решение.

Угол поворота плоскости поляризации обусловлен как естественной оптической активностью вещества, так и эффектом Фарадея. При изменении направления тока в соленоиде и, следовательно, изменении направления магнитного поля меняется направление поворота плоскости поляризации для эффекта Фарадея. Таким образом,

$$\begin{cases}\varphi_1 = \alpha l + VHl,\\ \varphi_2 = \alpha l - VHl.\end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2VHl.$$

Отсюда постоянная Верде

$$V = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2Hl} = \frac{(3\cdot 60 + 30) + (2\cdot 60 + 10)}{2\cdot 25\cdot 10^3\cdot 20\cdot 10^{-2}} = 3{,}4\cdot 10^{-2} \text{ угл. мин/А.}$$

Ответ: $3{,}4\cdot 10^{-2}$ угл. мин/А.

Задача 5.

При прохождении пучка света через стопу стеклянных пластин его интенсивность уменьшается в $n = 2$ раза. Стопа состоит из $N = 4$ одинаковых пластин толщиной $l = 5$ мм каждая. Свет падает по нормали к пластинам, при этом коэффициент отражения $\rho = 4\%$. Пренебрегая вторичными отражениями, определить линейный показатель поглощения.

Решение.

При прохождении пластины интенсивность света меняется следующим образом. За счет частичного отражения света на передней поверхности:

$$I' = I_0(1-\rho).$$

За счет поглощения света, при прохождении слоя стекла:

$$I'' = I'e^{-\alpha l} = I_0(1-\rho)e^{-\alpha l}.$$

На выходе из пластины за счет частичного отражения света на задней поверхности:

$$I_1 = I''(1-\rho) = I_0(1-\rho)^2 e^{-\alpha l}.$$

После второй пластины:

$$I_2 = I_1(1-\rho)^2 e^{-\alpha l} = I_0(1-\rho)^{2\cdot 2} e^{-2\alpha l}.$$

После N-й пластины:

$$I_N = I_0(1-\rho)^{2N} e^{-N\alpha l}.$$

Уменьшение интенсивности после прохождения стопы пластин

$$n = \frac{I_0}{I_N} = \frac{e^{N\alpha l}}{(1-\rho)^{2N}}.$$

Выражаем показатель поглощения:

$$n(1-\rho)^{2N} = e^{N\alpha l};$$

$$N\alpha l = \ln\left(n(1-\rho)^{2N}\right);$$

$$\alpha = \frac{\ln(n) + 2N\ln(1-\rho)}{Nl}.$$

Находим численное значение показателя поглощения:

$$\alpha = \frac{\ln(2) + 2\cdot 4\ln(1-0{,}04)}{4\cdot 5\cdot 10^{-3}} = \frac{0{,}693 + 8\cdot(-0{,}041)}{2\cdot 10^{-2}} = 18\ \text{м}^{-1}.$$

Ответ: 18 м^{-1}.

22.3. Задачи для самостоятельного решения

22.1. Параллельный пучок естественного света падает на шар из стекла с коэффициентом преломления n = 1,6. Под каким углом к первоначальному распространению пучка будет наблюдаться полностью поляризованный отраженный свет?

22.2. Естественный свет падает на систему из двух поляризаторов, скрещенных под углом α = 15°. Во сколько раз уменьшится интенсивность прошедшего света при увеличении угла вдвое?

22.3. Степень поляризации частично поляризованного света P = 0,20. Найти отношение интенсивности естественной составляющей этого света к интенсивности поляризованной составляющей.

22.4. Кювета длиной L = 40 см, имеющая частично зеркальные торцы, заполнена правовращающим положительным веществом (постоянная вращения α = 1,5 угл. мин/мм и постоянная Верде V = 1,0 угл. мин/А) и помещена в магнитное поле напряженностью H = 5 кА/м (рис. 22.2). На какой угол (в минутах) повернется плоскость поляризации пучка света, вышедшего из кюветы, после двух отражений от зеркал на торцах?

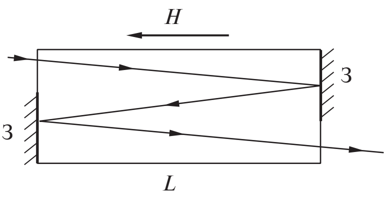


Рис. 22.2

22.5. Если пучок света пропустить через пластинку толщиной $d_1 = 2{,}0$ мм, то через нее пройдет $\tau_1 = 80\%$ светового потока. Если пучок света пропустить через пластинку из того же вещества, но толщиной $d_2 = 5{,}0$ мм, то через нее пройдет $\tau_2 = 70\%$ светового потока. Чему равен линейный показатель поглощения этого вещества?

23. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

23.1. Основные формулы

Тепловое излучение

Энергетическая светимость — поток энергии, излучаемый во всех направлениях с единицы площади поверхности тела на всем диапазоне длин волн:

$$R = \frac{d\Phi}{dS}, \qquad (23.1)$$

где $\Phi = \dfrac{dW}{dt}$ — поток энергии, т.е. энергия, излучаемая в единицу времени.

Испускательная способность — спектральная плотность энергетической светимости:

$$r_{\lambda T} = \frac{d\Phi_\lambda}{dS d\lambda}, \qquad (23.2)$$

где $d\Phi_\lambda$ — поток энергии в диапазоне длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, излученный элементом поверхности dS.

Поглощательная способность:

$$a_{\lambda T} = \frac{d\Phi'_\lambda}{d\Phi_\lambda}, \qquad (23.3)$$

где $d\Phi_\lambda$ — поток энергии в диапазоне длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, падающий на элемент поверхности dS; $d\Phi'_\lambda$ — поток энергии в диапазоне длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$, поглощенный элементом поверхности dS. Тело называется ***абсолютно черным***, если $a_{\lambda T} \equiv 1$. Тело называется серым, если $a_{\lambda T} = \text{const}$.

Закон Кирхгофа:

$$\frac{r_{\lambda T}}{a_{\lambda T}} = r^*_{\lambda T}, \qquad (23.4)$$

где $r^*_{\lambda T}$ — испускательная способность абсолютно черного тела (рис. 23.1).

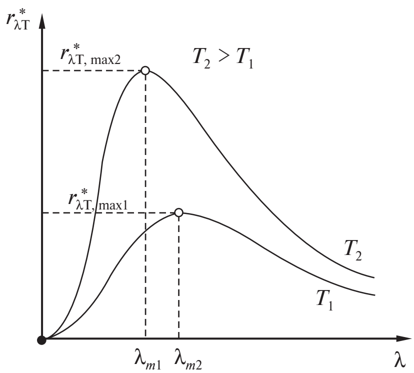


Рис. 23.1

Закон Стефана — Больцмана:

$$R^* = \sigma T^4, \tag{23.5}$$

где R^* — энергетическая светимость абсолютно черного тела; T — абсолютная температура тела; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) — постоянная Стефана–Больцмана.

Первый закон Вина (закон смещения):

$$\lambda_m T = C_1 = \text{const}, \tag{23.6}$$

где λ_m — длина волны, соответствующая максимуму испускательной способности абсолютно черного тела; T — абсолютная температура тела; $C_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К — постоянная смещения Вина.

Второй закон Вина:

$$r^*_{\max} = C_2 T^5, \tag{23.7}$$

где $r^*_{\max}$ — максимум испускательной способности абсолютно черного тела; T — абсолютная температура тела; $C_2 = 1{,}29 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3·К^5).

Фотоны

Энергия фотона:

$$E_ф = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \tag{23.8}$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка; ν — частота света; λ — длина волны; c — скорость света в вакууме.

Масса фотона:

$$m_ф = \frac{E_ф}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}. \qquad (23.9)$$

Импульс фотона:

$$p_ф = m_ф c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad (23.10)$$

Фотоэффект

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$E_ф = A + \frac{m\upsilon_{max}^2}{2}, \qquad (23.11)$$

где $E_ф$ — энергия фотона, поглощенного фотокатодом; A — работа выхода материала фотокатода; υ_{max} – максимальная скорость фотоэлектрона; m — масса электрона.

Работа выхода:

$$A = h\nu_{кр} = \frac{hc}{\lambda_{кр}}, \qquad (23.12)$$

где $\nu_{кр}$ и $\lambda_{кр}$ — частота и длина волны красной границы фотоэффекта.

Давление света

Давление света на поверхность при его нормальном падении:

$$P = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho), \qquad (23.13)$$

где E_e — энергетическая освещенность поверхности, т.е. энергия, падающая в единицу времени на единицу площади поверхности тела; w — объемная плотность энергии; ρ — коэффициент отражения поверхности ($0 \le \rho \le 1$).

Эффект Комптона

Комптоновское смещение длины волны фотона при рассеянии его на свободном электроне:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}, \qquad (23.14)$$

где λ_0 — длина волны фотона до рассеяния; λ — длина волны фотона после рассеяния; θ — угол рассеяния; $\Lambda = \dfrac{h}{m_{эл}c} = 2{,}43$ пм — комптоновская длина волны электрона.

23.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Радиоактивный препарат помещен в свинцовую оболочку в форме шара диаметром $d = 50$ мм. Температура поверхности оболочки оказалась на $\Delta T = 2{,}0$ °C выше температуры окружающей среды $T_0 = 27$ °C. Считая, что тепловые потери обусловлены только излучением и поглощательная способность свинца $a = 0{,}6$, определить, какая тепловая мощность выделяется внутри оболочки.

Решение.

В состоянии теплового равновесия мощность испускаемого телом теплового излучения равна сумме мощности поглощаемого излучения и мощности, выделяющейся внутри оболочки:

$$P_{исп} = P_{погл} + P_{вн}.$$

Таким образом, мощность, выделяющаяся внутри оболочки:

$$P_{вн} = P_{исп} - P_{погл}.$$

Мощность поглощаемого телом теплового излучения определяется площадью тела и энергетической светимостью, которая, в свою очередь, в соответствии с законом Стефана–Больцмана зависит от температуры окружающей среды T_0:

$$P_{погл} = SR_0 = \pi d^2 \cdot a\sigma T_0^4.$$

Мощность испускаемого телом теплового излучения определяется аналогично, но зависит от температуры тела $T_0 + \Delta T$:

$$P_{исп} = SR = \pi d^2 \cdot a\sigma \left(T_0 + \Delta T\right)^4.$$

Отсюда мощность, выделяющаяся внутри оболочки:

$$P_{\text{вн}} = \pi d^2 \cdot a\sigma\left(T_0 + \Delta T\right)^4 - \pi d^2 \cdot a\sigma T_0^4 = \pi d^2 \cdot a\sigma\left(\left(T_0 + \Delta T\right)^4 - T_0^4\right).$$

Для расчетов полученную формулу удобно упростить, учитывая, что $\Delta T << T_0$:

$$P_{\text{вн}} = \pi d^2 \cdot a\sigma\left(\left(T_0^4 + 4T_0^3\Delta T + \ldots\right) - T_0^4\right) \approx \pi d^2 \cdot a\sigma \cdot 4T_0^3\Delta T.$$

Находим численное значение мощности:

$$P_{\text{вн}} = 3{,}14 \cdot \left(50 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 0{,}6 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 300^3 \cdot 2 = 5{,}8 \cdot 10^{-2}\ \text{Вт}.$$

Ответ: 58 мВт.

Задача 2.

Чему равна температура T абсолютно черного тела, если при увеличении ее в 3 раза длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 2{,}5$ мкм?

Решение.

Связь между температурой тела и длиной волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, задается законом смещения Вина:

$$\lambda_m T = C_1 = \text{const}.$$

Для начальной температуры длина волны

$$\lambda_{m1} = \frac{C_1}{T}.$$

Для конечной температуры длина волны

$$\lambda_{m2} = \frac{C_1}{3T} < \lambda_{m1}.$$

Изменение длины волны составило

$$\Delta\lambda = \lambda_{m1} - \lambda_{m2} = \frac{C_1}{T} - \frac{C_1}{3T} = \frac{2C_1}{3T}.$$

Отсюда начальная температура

$$T = \frac{2C_1}{3\Delta\lambda}.$$

Численное значение

$$T = \frac{2 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}} = 773 \text{ K}.$$

Ответ: 773 K.

Задача 3.

До какого максимального потенциала φ может зарядиться уединенный металлический шарик при облучении его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 124$ нм, если работа выхода электрона из данного металла составляет $A = 4{,}5$ эВ?

Решение.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$E_\text{ф} = A + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}.$$

При вылете электронов шарик заряжается положительно, и электроны, покинувшие металл, находятся в задерживающем электрическом поле. Если максимальной скорости электрона недостаточно, чтобы удалиться от шарика на достаточно большое (бесконечное) расстояние, то электроны возвращаются назад и рост потенциала прекращается. Таким образом, получаем

$$\frac{hc}{\lambda} = A + e\varphi.$$

Отсюда максимальный потенциал шарика

$$\varphi = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{A}{e}.$$

Учитывая, что работа выхода дана в эВ, получаем

$$\varphi = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 124 \cdot 10^{-9}} - 4{,}5 = 5{,}5 \text{ В}.$$

Ответ: 5,5 В.

Задача 4.

Давление P монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на зеркальную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, составляет 5,5 мкПа. Определить концентрацию n фотонов в световом пучке.

Решение.

Давление света на поверхность определяется объемной плотностью энергии электромагнитного излучения w:

$$P = w(1+\rho) = 2w.$$

Учитывая, что для зеркальной поверхности $\rho = 1$, получаем

$$P = 2w.$$

Так как объемная плотность энергии — это энергия единицы объема, а также учитывая, что энергия излучения есть сумма энергий отдельных фотонов, получаем

$$P = 2\frac{W}{V} = 2\frac{NE_{\text{ф}}}{V} = 2nE_{\text{ф}} = 2n\frac{hc}{\lambda}.$$

Выражаем отсюда концентрацию фотонов:

$$n = \frac{P\lambda}{2hc} = \frac{5{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 500\cdot 10^{-9}}{2\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}} = 6{,}9\cdot 10^{12}\ \text{м}^{-3}$$

Ответ: $6{,}9\cdot 10^{12}$ м$^{-3}$.

Задача 5.

Для наблюдения эффекта Комптона образец облучают пучком рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda_0 = 2{,}57$ пм. Какую часть своей энергии (в процентах) передают электрону фотоны, рассеянные под углом $\theta = 90°$?

Решение.

Падающие на образец фотоны имеют энергию

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}.$$

При комптоновском рассеянии длина волны фотона увеличивается:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

а энергия, соответственно, уменьшается:

$$E = \frac{hc}{\lambda_0 + 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Часть начальной энергии (в процентах), переданная электрону отдачи, составит

$$\eta = \frac{E_0 - E}{E_0} \cdot 100\,\% = \left(1 - \frac{E}{E_0}\right) 100\,\% = \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right) 100\,\%.$$

Находим численный результат:

$$\eta = \left(1 - \frac{2{,}57}{2{,}57 + 2 \cdot 2{,}43 \cdot \sin^2 \frac{90^\circ}{2}}\right) 100\,\% = \left(1 - \frac{2{,}57}{2{,}57 + 2{,}43}\right) 100\,\% = 48{,}6\,\%.$$

Ответ: 48,6%.

23.3. Задачи для самостоятельного решения

23.1. Спираль лампы накаливания изготовлена из вольфрамовой проволоки диаметром $d = 0{,}50$ мм. Удельное сопротивление вольфрама $\rho = 0{,}92$ мкОм·м, а поглощательная способность $a = 0{,}343$. Считая, что потери энергии обусловлены только тепловым излучением, определить, какую силу тока требуется пропускать по проволоке, чтобы поддерживать ее температуру равной $T = 2500$ °С.

23.2. При увеличении температуры черного тела длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности, уменьшилась с $\lambda_1 = 2{,}0$ мкм до $\lambda_2 = 1{,}0$ мкм. Во сколько раз изменилась максимальная испускательная способность?

23.3. При исследовании фотоэлемента с платиновым катодом установлено, что фототок прекращается при задерживающем напряжении $U_1 = 3{,}7$ В. При исследовании фотоэлемента с катодом из неизвестного металла установлено, что фототок прекращается при задерживающем напряжении $U_2 = 5{,}3$ В. Определить работу A_2 выхода электронов с поверхности этого металла, если работа выхода для платины $A_1 = 5{,}29$ эВ.

23.4. Давление P монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,4 мкПа. Определить число фотонов, падающих на поверхность площадью $S = 30$ см^2 за одну секунду.

23.5. При рассеянии излучения на свободных электронах энергия электрона отдачи составляет 20% от энергии падающего излучения. Длина волны рассеянного излучения составляет 1,5 пм. Определить длину волны падающего излучения.

24. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

24.1. Основные формулы

Волны де Бройля

Длина волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{24.1}$$

где p — импульс частицы.

Длина волны де Бройля частицы массой m, движущейся со скоростью υ и кинетической энергией T, для нерелятивистского $(\upsilon << c)$ и релятивистского $(\upsilon \to c)$ случаев:

$$\begin{aligned} \upsilon << c:\ \lambda &= \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mT}}; \\ \upsilon \to c:\ \lambda &= \frac{h}{mv}\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2} = \frac{hc}{\sqrt{T\left(T+2m_0c^2\right)}}. \end{aligned} \tag{24.2}$$

Соотношения неопределенностей Гейзенберга

Соотношение неопределенностей для координаты и импульса частицы:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar, \tag{24.3}$$

где Δp_x — неопределенность проекции импульса частицы на ось; Δx — неопределенность координаты частицы; $\hbar = h/2\pi$.

Соотношение неопределенностей для энергии и времени:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar, \tag{24.4}$$

где ΔE — неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt — время пребывания системы в этом состоянии.

Уравнение Шрёдингера

Одномерное стационарное уравнение Шрёдингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0, \tag{24.5}$$

где E — полная энергия частицы; U — потенциальная энергия; $\psi(x)$ — часть волновой функции (ψ-функции), зависящая только от координаты x.

Условие нормировки волновой функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2\,dV=1. \tag{24.6}$$

Вероятность нахождения частицы W в определенном конечном объеме пространства (V):

$$W=\int_{(V)}|\psi|^2\,dV. \tag{24.7}$$

Собственные значения волновой функции для одномерной потенциальной ямы шириной l с бесконечно высокими стенками (рис. 24.1):

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\quad(n=1,2,\ldots). \tag{24.8}$$

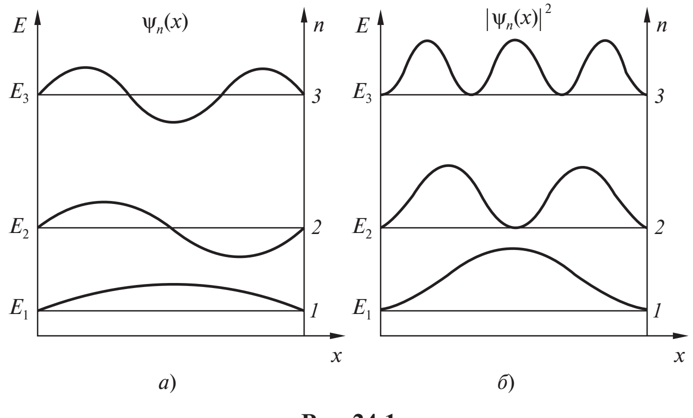


Рис. 24.1

Собственное значение энергии частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2. \tag{24.9}$$

Коэффициент преломления волн де Бройля на границе потенциального барьера (рис. 24.2):

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}, \tag{24.10}$$

где λ_1, λ_2 и k_1, k_2 — длины волн и волновые числа в области 1 и 2 соответственно.

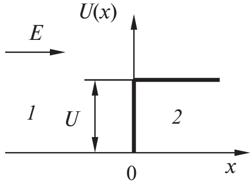


Рис. 24.2

Коэффициент отражения волн де Бройля от потенциального барьера:

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2. \tag{24.11}$$

Коэффициент прохождения волнами де Бройля потенциального барьера:

$$\tau = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \tag{24.12}$$

Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера шириной l и высотой U_0 (рис. 24.3):

$$D \approx \exp\left(-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \right). \tag{24.13}$$

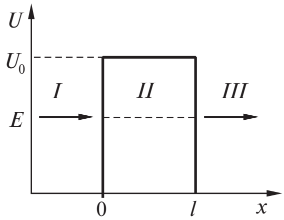


Рис. 24.3

24.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

При каком значении кинетической энергии электрона (в кэВ) его дебройлевская длина волны равна комптоновской? Энергия покоя электрона $W_0 = 511$ кэВ.

Решение.

Поскольку скорость электрона неизвестна, используем наиболее общую формулу длины волны де Бройля для релятивистского случая:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon}\sqrt{1-(\upsilon/c)^2} = \frac{hc}{\sqrt{T\left(T+2m_0c^2\right)}}.$$

Комптоновская длина волны

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 c}.$$

Таким образом,

$$\frac{hc}{\sqrt{T\left(T+2m_0c^2\right)}} = \frac{h}{m_0 c}.$$

Выражаем кинетическую энергию, учитывая, что энергия покоя $W_0 = m_0c^2$:

$$\sqrt{T\left(T+2m_0c^2\right)} = m_0c^2;$$

$$T\left(T+2W_0\right) = W_0^2;$$

$$T^2 + 2W_0T - W_0^2 = 0;$$

$$T = -W_0 \pm \sqrt{W_0^2 + W_0^2} = W_0\left(-1 \pm \sqrt{2}\right).$$

Отрицательное значение кинетической энергии не имеет физического смысла, поэтому

$$T = W_0\left(\sqrt{2}-1\right) = 511\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = 212 \ \text{кэВ}.$$

Ответ: 212 кэВ.

Задача 2.

Время жизни атома в возбужденном состоянии составляет $\tau = 10^{-8}$ с, после чего он переходит в основное состояние, испуская фотон с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Используя соотношение неопределенностей, определить естественную ширину $\Delta\lambda$ спектральной линии при этом переходе.

Решение.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга для энергии имеет вид

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Отсюда энергетическая ширина спектральной линии

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau}.$$

С другой стороны,

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}.$$

Учитывая, что $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda$, получаем

$$\Delta E = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2}.$$

Таким образом, ширина спектральной линии

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta E\lambda^2}{hc} = \frac{\hbar\lambda^2}{hc\tau} = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau}.$$

Численное значение

$$\Delta\lambda = \frac{\left(500\cdot 10^{-9}\right)^2}{2\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 10^8\cdot 10^{-8}} = 1{,}33\cdot 10^{-14}\ \text{м}.$$

Ответ: $1{,}33\cdot 10^{-14}$ м.

Задача 3.

Волновая функция некоторой частицы зависит только от расстояния частицы до силового центра: $\psi(r) = \frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, где $a = 0{,}1$ нм. Определить коэффициент A.

Решение.

Условие нормировки волновой функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2\, dV = 1.$$

Ввиду сферической симметрии задачи dV можно рассматривать как объем бесконечно тонкого сферического слоя толщиной dr:

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Условие нормировки приобретает вид

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right|^2 4\pi r^2 dr = 1.$$

Берем интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right|^2 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = 4\pi A^2 \cdot \frac{a}{2} = 2\pi A^2 a.$$

Получаем условие нормировки:

$$2\pi A^2 a = 1.$$

Таким образом, нормировочный коэффициент

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} = \sqrt{\frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 10^{-10}}} = 4\cdot 10^4\ \text{м}^{-1/2}.$$

Ответ: $4\cdot 10^4$ м$^{-1/2}$.

Задача 4.

В одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками находится электрон на нижнем энергетическом уровне. Какова вероятность обнаружить электрон в области шириной $l/4$, равноудаленной от краев ямы?

Решение.

Вероятность нахождения частицы W в определенном конечном объеме пространства (V)

$$W = \int_{(V)} |\psi|^2 \, dV.$$

Так как яма одномерная, то вероятность обнаружить электрон в области шириной $l/4$, равноудаленной от краев ямы,

$$W = \int_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} |\psi|^2 \, dx.$$

Волновая функция электрона в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками на нижнем энергетическом уровне

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right).$$

Таким образом, вероятность

$$W = \int_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} \left| \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) \right|^2 dx =$$

$$= \frac{2}{l} \int_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{l} x\right)}{2} \right) dx = \frac{1}{l} \left(x - \frac{l}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{l} x\right) \right) \Bigg|_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} =$$

$$= \frac{1}{l} \left(\frac{5}{8} l - \frac{l}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot \frac{5}{8} l\right) - \frac{3}{8} l + \frac{l}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot \frac{3}{8} l\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi + 2\sqrt{2}}{4\pi} = 0{,}475.$$

Ответ: 0,475.

Задача 5.

Электрон с энергией E = 25 эВ падает на прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 = 30 эВ. При какой ширине l барьера коэффициент прозрачности D для электронов составит 0,02?

Решение.

Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера шириной l и высотой U_0

$$D = \exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}\right).$$

Решаем это уравнение относительно l:

$$\ln D = -\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)};$$

$$l = -\frac{\hbar \ln D}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}} = \frac{h \ln\left(\frac{1}{D}\right)}{4\pi\sqrt{2m(U_0 - E)}}.$$

Находим численное значение ширины барьера, учитывая перевод энергии в Дж:

$$l = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \ln\left(\frac{1}{0{,}02}\right)}{4 \cdot 3{,}14\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}(30 - 25) \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 0{,}17 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Ответ: 0,17 нм.

24.3. Задачи для самостоятельного решения

24.1. Определить длину волны де Бройля λ электрона, движущегося со скоростью υ = 270 Мм/с.

24.2. Параллельный пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов U = 100 В, проходит через узкую щель шириной a = 1 мкм. Учитывая волновые свойства электронов, определить ширину центрального дифракционного максимума, полученного на экране, отстоящем от щели на расстояние L = 10 см.

24.3. На грань кристалла с расстоянием между атомными плоскостями a = 0,2 нм под углом $\alpha = 60°$ к его поверхности падает параллельный моноэнергетический пучок электронов. Определить скорость электронов, если в этих условиях наблюдается максимум первого порядка для отраженных электронов.

24.4. Используя соотношение неопределенностей, оценить, какую наименьшую энергию может иметь электрон в атоме водорода, если размер атома порядка 0,1 нм.

24.5. Волновая функция некоторой частицы зависит только от расстояния частицы до силового центра:

$$\psi = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{-\frac{r}{a}},$$

где a = 0,1 нм. Определить коэффициент A.

24.6. Электрон находится в потенциальном ящике. Определить ширину l потенциальной ямы, если разность $\Delta E_{5,4}$ между пятым и четвертым энергетическими уровнями электрона составляет 2 эВ.

24.7. Частица находится в потенциальном ящике на энергетическом уровне n = 5. На сколько процентов увеличится энергия частицы при ее переходе на следующий уровень?

24.8. Вычислить коэффициент прохождения τ электрона с энергией E = 81 эВ через потенциальный барьер высотой U = 80,75 эВ бесконечной ширины.

24.9. Протон и электрон, имеющие одинаковую кинетическую энергию E = 20 кэВ, падают на потенциальный барьер высотой U = 25 кэВ и шириной d = 0,1 пм. Во сколько раз коэффициент прозрачности D_e для электрона больше коэффициента прозрачности D_p для протона?

25. ОСНОВЫ АТОМНОЙ ФИЗИКИ

25.1. Основные формулы

Момент импульса электрона на стационарной орбите в теории Бора (правило квантования):

$$L = m\upsilon r = n\hbar, \tag{25.1}$$

где m — масса электрона; υ — скорость электрона; r — радиус орбиты; $\hbar = h/2\pi$.

Собственные значения энергии электрона в водородоподобном атоме:

$$E_n = -\frac{Zme^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}, \tag{25.2}$$

где Z — зарядовое число иона; m — масса электрона.

Орбитальный момент импульса и магнитный момент электрона:

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}; \quad L_\mu = \mu_B\sqrt{l(l+1)}, \tag{25.3}$$

где l — орбитальное квантовое число ($l = 0,1,2,\ldots,n-1$, соответствующие состояниям *s, p, d, f, …*); $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m} = 0{,}927\cdot 10^{-23}$ Дж/Тл — магнетон Бора.

Проекции орбитального момента импульса и магнитного момента на ось z (направление внешнего магнитного поля):

$$L_{lz} = \hbar m_l; \quad L_{\mu z} = \mu_B m_l, \tag{25.4}$$

где m_l — магнитное квантовое число $(m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l)$.

Обобщенная формула Бальмера для водородоподобного атома:

$$\nu = Z^2 R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{25.5}$$

где ν — частота света, излучаемого (или поглощаемого) атомом при переходе из одного стационарного состояния в другое; R — постоянная Ридберга: $R = 3{,}29\cdot10^{15}$ с$^{-1}$.

В данной формуле индекс m — номер спектральной серии:

$m = 1$ — серия Лаймана;

$m = 2$ — серия Бальмера;

$m = 3$ — серия Пашена.

Индекс n определяется по формуле

$$n = m + k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где k — номер спектральной линии в m-й серии.

Закон Мозли для характеристического рентгеновского излучения:

$$\nu = (Z - \sigma)^2 R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \qquad (25.6)$$

где σ — постоянная экранирования; n_1, n_2 — номера энергетических уровней (для K_α-линии: $n_1 = 1$, $n_2 = 2$).

Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра:

$$\lambda_{\min} = \frac{ch}{eU}, \qquad (25.7)$$

где U — разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке.

25.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Определить линейную скорость движения электрона на первом боровском уровне в ионе гелия He^+.

Решение.

В соответствии с теорией Бора электрон в атоме движется по окружности вокруг ядра и к нему можно применить второй закон Ньютона:

$$ma = F.$$

Учитывая, что ускорение электрона является центростремительным, а сила взаимодействия его с ядром, имеющим электрический заряд $+2e$, — кулоновская, получаем

$$m\frac{\upsilon^2}{r} = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Выразим радиус орбиты:

$$r = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 m\upsilon^2}.$$

В соответствии с правилом квантования электрон на первом боровском уровне должен иметь момент импульса, равный

$$m\upsilon r = \hbar.$$

Подставляя радиус орбиты, получаем

$$m\upsilon \cdot \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 m\upsilon^2} = \hbar.$$

Выражаем скорость:

$$\upsilon = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 h}.$$

Находим числовое значение:

$$\upsilon = \frac{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}} = 4{,}4 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Ответ: $4{,}4 \cdot 10^6$ м/с.

Задача 2.

Какой наименьший угол α может образовать с направлением внешнего магнитного поля вектор L момента импульса орбитального движения электрона, находящегося в атоме в f-состоянии?

Решение.

Модуль орбитального момента импульса электрона, находящегося в f-состоянии с орбитальным квантовым числом l, равен

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}.$$

Проекция орбитального момента импульса электрона на направление внешнего поля может принимать значения

$$L_{lz} = \hbar m_l,$$

где m_l — магнитное квантовое число $(m_l = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l)$.

Таким образом, косинус угла, который вектор орбитального момента импульса может составлять с направлением внешнего поля, равен

$$\cos\alpha = \frac{L_{lz}}{L_l} = \frac{\hbar m_l}{\hbar\sqrt{l(l+1)}} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}.$$

Наименьшему значению угла соответствует наибольшее значение косинуса, т.е.

$$\cos\alpha_{\min} = \frac{l}{\sqrt{l(l+1)}} = \sqrt{\frac{l}{l+1}}.$$

f-состоянию соответствует орбитальное квантовое число $l = 3$, таким образом,

$$\cos\alpha_{\min} = \sqrt{\frac{3}{3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

что соответствует

$$\alpha_{\min} = 30°.$$

Ответ: 30°.

Задача 3.

Атомарный водород возбуждают оптическим излучением такой длины волны, что в спектре его излучения наблюдаются только три линии. К каким спектральным сериям относятся эти линии и какова их длина волны?

Решение.

При поглощении кванта света электрон в атоме водорода должен переходить на энергетический третий уровень, чтобы в спектре испускания наблюдалось только три линии: переход 3→1 непосредственно в основное состояние и переход через промежуточное состояние 3→2 и 2→1. Переходы в основное состояние 3→1 и 2→1 относятся к серии Лаймана, а переход на второй энергетический уровень 2→1 — к серии Бальмера (рис. 25.1).

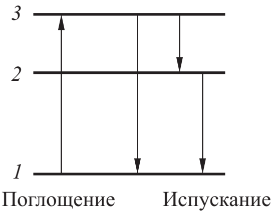


Рис. 25.1

Формула Бальмера для водорода

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда длина волны

$$\lambda_{nm} = \frac{c}{\nu} = \frac{cm^2n^2}{R\left(n^2 - m^2\right)} = \lambda_0 \frac{m^2n^2}{n^2 - m^2},$$

где $\lambda_0 = \frac{c}{R} = \frac{3{\cdot}10^8}{3,29{\cdot}10^{15}} = 0,912{\cdot}10^{-7}$ м $= 91,2$ нм.

Получаем:

$$\lambda_{31} = 91,2\frac{1^2 \cdot 3^2}{3^2 - 1^2} = 103 \text{ нм};$$

$$\lambda_{21} = 91,2\frac{1^2 \cdot 2^2}{2^2 - 1^2} = 122 \text{ нм};$$

$$\lambda_{32} = 91,2\frac{2^2 \cdot 3^2}{3^2 - 2^2} = 657 \text{ нм}.$$

Ответ: 103 нм и 122 нм в серии Лаймана и 657 нм в серии Бальмера.

Задача 4.

При каком наименьшем напряжении $U_{\min}$ на рентгеновской трубке начинают появляться K_α-линии цинка ($Z = 30$)? Постоянную экранирования σ принять равной единице.

Решение.

Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра:

$$\lambda_{\min} = \frac{ch}{eU}.$$

Закон Мозли для характеристического рентгеновского излучения:

$$\nu = (Z - \sigma)^2 R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Для K_α-линии: $n_1 = 1$, $n_2 = 2$:

$$\nu = (Z - \sigma)^2 R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}(Z - \sigma)^2 R.$$

Соответствующая длина волны

$$\lambda_{K\alpha} = \frac{c}{\nu} = \frac{4c}{3(Z - \sigma)^2 R}.$$

Характеристическая линия появится, когда

$$\lambda_{K\alpha} = \lambda_{\min}.$$

Таким образом,

$$\frac{4c}{3(Z - \sigma)^2 R} = \frac{ch}{eU}.$$

Находим напряжение:

$$U = \frac{3(Z - \sigma)^2 Rh}{4e} = \frac{3(30 - 1)^2 3{,}29 \cdot 10^{15} \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 8{,}6 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

Ответ: 8,6 кВ.

Задача 5.

Напряжение, приложенное к рентгеновской трубке, U = 40 кВ. Насколько сместится коротковолновая граница рентгеновского спектра при увеличении напряжения в 2 раза?

Решение.

Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра:

$$\lambda_{\min 1} = \frac{ch}{eU}.$$

При увеличении напряжения в 2 раза новая граница будет

$$\lambda_{\min 2} = \frac{ch}{e \cdot 2U}.$$

Смещение составит

$$\Delta\lambda_{\min} = \lambda_{\min 1} - \lambda_{\min 2} = \frac{ch}{eU} - \frac{ch}{e \cdot 2U} = \frac{ch}{2eU}.$$

Численное значение

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 40 \cdot 10^3} = 0{,}155 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Ответ: 15,5 пм.

25.3. Задачи для самостоятельного решения

25.1. Электрон в водородоподобном ионе находится на орбите радиуса $r = 119$ пм и имеет момент импульса $L = 3{,}17 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Найти порядковый номер элемента.

25.2. Чему равно изменение момента импульса ΔL орбитального движения электрона в атоме водорода при переходе из $3s$-состояния в $2p$-состояние?

25.3. Возбужденный ион гелия He^+ при переходе в основное состояние испустил два фотона с длинами волн 320,63 и 25,65 нм. Чему было равно главное квантовое число n возбужденного иона?

25.4. Определить порядковый номер элемента в Периодической системе элементов Д.И. Менделеева, если длина волны λ линии K_α характеристического рентгеновского излучения составляет 72 пм. Постоянную экранирования σ принять равной единице

25.5. Определить постоянную экранирования σ для L-серии характеристического рентгеновского излучения вольфрама ($Z = 74$), если длина волны L_α-линии составляет 140 пм.

25.6. Чему равно экспериментальное значение постоянной Планка, если для рентгеновской трубки, работающей при напряжении $U = 30$ кВ, коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра составляет 41 пм?

26. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

26.1. Основные формулы

Теплоемкость твердого тела

Закон Дюлонга и Пти. Молярная теплоемкость химически простых тел:

$$C_M = 3R, \tag{26.1}$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Закон Неймана–Коппа. Молярная теплоемкость химически сложных тел:

$$C_M = 3Rn, \tag{26.2}$$

где n — общее число частиц в химической формуле.

Молярная внутренняя энергия кристалла по Дебаю:

$$U_M = U_{0M} + 3RT \cdot 3\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \tag{26.3}$$

где $U_{0M} = 9R\Theta_D / 8$ — молярная нулевая энергия; $\Theta_D = \hbar\omega / k$ — характеристическая температура Дебая; k — постоянная Больцмана.

При $T = \Theta_D$ $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0{,}225$; при $T = 0{,}5\Theta_D$ $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0{,}18$.

В области низких температур ($T / \Theta_D < 0{,}1$):

$$C_M = \frac{12\pi^4}{5} R\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3. \tag{26.4}$$

Электропроводность твердого тела

Распределение Ферми по энергиям для свободных электронов в металле при $T = 0$ K и $\varepsilon < \varepsilon_F$ (ε_F — энергия Ферми):

$$dn = 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon, \qquad (26.5)$$

где $dn(\varepsilon)$ — концентрация свободных электронов с энергиями в диапазоне от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$.

Энергия Ферми в металле при $T = 0$ K:

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}, \qquad (26.6)$$

где n — концентрация свободных электронов.

Температурная зависимость удельной проводимости собственного полупроводника:

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right), \qquad (26.7)$$

где E_g — ширина запрещенной зоны.

Средняя дрейфовая скорость носителей заряда:

$$\langle \upsilon \rangle = E\mu, \qquad (26.8)$$

где E — напряженность электрического поля; μ — подвижность носителей заряда.

Удельная проводимость полупроводника:

$$\sigma = e\left(n_p\mu_p + n_e\mu_p\right), \qquad (26.9)$$

где n_p и n_e — концентрация носителей заряда (дырок и электронов соответственно); μ_n и μ_p — подвижность электронов и дырок.

Холловская разность потенциалов:

$$U_H = R_H Bjl, \qquad (26.10)$$

где R_H — постоянная Холла; B — индукция внешнего магнитного поля; j — плотность тока; l — поперечный размер полупроводника.

Постоянная Холла для полупроводника:

$$R_H = \frac{3\pi}{8e}\cdot\frac{n_p\mu_p^2 - n_e\mu_e^2}{\left(n_p\mu_p + n_e\mu_e\right)^2}, \qquad (26.11)$$

где n_p и n_e — концентрация носителей заряда (дырок и электронов соответственно); μ_n и μ_p — подвижность электронов и дырок.

26.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

При нагревании арсенида галлия (GaAs) от $t_1 = 0$ °C до $t_2 = 50$ °C его внутренняя энергия изменилась на 86 Дж. Определить массу арсенида галлия.

Решение.

Для химически сложного тела вблизи нормальных условий применим закон Неймана–Коппа:

$$C_M = 3Rn.$$

Приращение внутренней энергии

$$\Delta U = C_M \nu \Delta T = 3Rn\frac{m}{M}\left(T_2 - T_1\right).$$

Выражаем массу:

$$m = \frac{M\Delta U}{3Rn\left(T_2 - T_1\right)}.$$

Находим численное значение, определяя молярную массу по таблице Менделеева:

$$m = \frac{\left(69{,}7 + 74{,}9\right)\cdot 10^{-3}\cdot 86}{3\cdot 8{,}31\cdot 2\cdot\left(50 - 0\right)} = 5{,}0\cdot 10^{-3}\text{ кг.}$$

Ответ: 5,0 г.

Задача 2.

При нагревании 1 моля некоторого вещества от $T_1 = 10$ K до $T_2 = 20$ K ему было сообщено количество теплоты $Q = 2{,}0$ Дж. Найти температуру Дебая для данного вещества. Считать температуры T_1 и T_2 много меньше Θ.

Решение.

Для области низких температур, много меньших температуры Дебая, молярная теплоемкость

$$C_M = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 .$$

Количество теплоты, переданное телу при нагревании:

$$Q = \nu \int_{T_1}^{T_2} C_M dT = \nu \int_{T_1}^{T_2} \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 dT = \nu \frac{3\pi^4 R}{5\Theta_D^3} \left(T_2^4 - T_1^4 \right).$$

Выражаем температуру Дебая:

$$\Theta_D = \sqrt[3]{\nu \frac{3\pi^4 R}{5Q} \left(T_2^4 - T_1^4 \right)}.$$

Находим численное значение температуры Дебая:

$$\Theta_D = \sqrt[3]{1 \cdot \frac{3 \cdot 3{,}14^4 \cdot 8{,}31}{5 \cdot 2{,}0} \left(20^4 - 10^4 \right)} = 331 \text{ K}.$$

Ответ: 331 K.

Задача 3.

Во сколько раз число электронов, кинетическая энергия которых превышает половину энергии Ферми, больше числа электронов, кинетическая энергия которых меньше половины энергии Ферми? Металл находится при температуре $T = 0$ K.

Решение.

Распределение свободных электронов в металле по кинетическим энергиям (распределение Ферми) при температуре $T = 0$ K:

$$dn = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Число электронов в единице объема, кинетическая энергия которых превышает половину энергии Ферми:

$$N_1 = \int_{\varepsilon_f/2}^{\varepsilon_f} 4\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \left(\varepsilon_f^{3/2} - \left(\frac{\varepsilon_f}{2} \right)^{3/2} \right) =$$

$$= \frac{8}{3} \pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \varepsilon_f^{3/2} \frac{2\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

Число электронов в единице объема, кинетическая энергия которых меньше половины энергии Ферми:

$$N_2 = \int_0^{\varepsilon_f/2} 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon = \frac{8}{3}\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\left(\left(\frac{\varepsilon_f}{2}\right)^{3/2}-0\right)=$$

$$=\frac{8}{3}\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\varepsilon_f^{3/2}\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Отношение числа электронов, кинетическая энергия которых превышает половину энергии Ферми, к числу электронов, кинетическая энергия которых меньше половины энергии Ферми, равно

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{\frac{8}{3}\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\varepsilon_f^{3/2}\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{8}{3}\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\varepsilon_f^{3/2}\frac{1}{2\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}-1=1{,}83.$$

Ответ: 1,83 раза.

Задача 4.

Удельная проводимость чистого беспримесного полупроводника при нагревании от T_1 = 300 К до T_2 = 400 К увеличилась в N = = 5,2 раза. Определить ширину запрещенной зоны полупроводника. Ответ привести в эВ.

Решение.

Удельная проводимость чистого беспримесного полупроводника при температуре T_1:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_g}{2kT_1}\right).$$

Удельная проводимость чистого беспримесного полупроводника при температуре T_2:

$$\sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_g}{2kT_2}\right).$$

Отношение удельных проводимостей составляет

$$N=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{\sigma_0\exp\left(-\frac{E_g}{2kT_2}\right)}{\sigma_0\exp\left(-\frac{E_g}{2kT_1}\right)}=\exp\left(\frac{E_g}{2kT_1}-\frac{E_g}{2kT_2}\right)=\exp\left(\frac{E_g\left(T_2-T_1\right)}{2kT_1T_2}\right).$$

Выражаем ширину запрещенной зоны:

$$\ln N=\frac{E_g\left(T_2-T_1\right)}{2kT_1T_2};$$

$$E_g=\frac{2kT_1T_2\ln N}{T_2-T_1}.$$

Находим численное значение ширины запрещенной зоны:

$$E_g=\frac{2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300\cdot 400\cdot \ln(5{,}2)}{400-300}=5{,}46\cdot 10^{-20}\text{ Дж}=$$

$$=\frac{5{,}46\cdot 10^{-20}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}=0{,}34\text{ эВ}.$$

Ответ: 0,34 эВ.

Задача 5.

Определить подвижность дырок в сильно легированном полупроводнике p-типа с постоянной Холла $R_H = 0{,}1$ м^3/Кл, если при протекании по нему тока плотностью $j = 1$ кА/м^2 напряженность E электрического поля составляет 100 В/м.

Решение.

В соответствии с законом Ома в дифференциальной форме

$$j=\sigma E.$$

В случае сильно легированного полупроводника p-типа можно считать, что проводимость обусловлена только дырками ($n_e \ll n_p$). Тогда

$$\sigma=e\left(n_p\mu_p+n_e\mu_e\right)\approx en_p\mu_p.$$

Концентрацию дырок можно определить из постоянной Холла:

$$R_H = \frac{3\pi}{8e} \cdot \frac{n_p\mu_p^2 - n_e\mu_e^2}{\left(n_p\mu_p + n_e\mu_e\right)^2} \approx \frac{3\pi}{8en_p} \quad \Rightarrow \quad n_p = \frac{3\pi}{8eR_H}.$$

Подставляя в закон Ома, получаем

$$j = e\frac{3\pi}{8eR_H}\mu_p E = \frac{3\pi E}{8R_H}\mu_p.$$

Выражаем подвижность:

$$\mu_p = \frac{8R_H j}{3\pi E} = \frac{8 \cdot 0{,}1 \cdot 10^3}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 100} = 0{,}85\ \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Ответ: $0{,}85\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$.

26.3. Задачи для самостоятельного решения

26.1. Вычислить по классической теории теплоемкости удельную теплоемкость золота. Молярная масса золота M = 197 г/моль.

26.2. Найти отношение изменения внутренней энергии кристалла к нулевой энергии при нагревании его от нуля до температуры Дебая.

26.3. Какое количество теплоты потребуется для нагревания 1 моля платины от 0 K до $0{,}1\Theta_D$? Температура Дебая Θ_D для платины равна 230 K.

26.4. Какое число свободных электронов приходится на один атом алюминия при температуре T = 0 K, если уровень Ферми алюминия ε_f = 12 эВ, а плотность ρ = 2,7 г/см^3? Молярная масса алюминия M = 27 г/моль.

26.5. Чистый беспримесный полупроводник с шириной запрещенной зоны E_g = 1,1 эВ нагрели от T_1 = 300 K до T_2 = 310 K. Во сколько раз уменьшилось сопротивление полупроводника?

26.6. Определить напряженность электрического поля Холла в полупроводниковом образце, помещенном в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,2 Тл, при пропускании тока плотностью j = 2 кА/м^2. Постоянная Холла R_H = 0,15 м^3/Кл.

27. ОСНОВЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

27.1. Основные формулы

Дефект массы и энергия связи атомного ядра

Дефект массы атомного ядра:

$$\Delta m = Zm_p + \left(A - Z\right)m_n - m_я, \tag{27.1}$$

где Z — зарядовое число; A — массовое число; m_p — масса протона; m_n — масса нейтрона; $m_я$ — масса атомного ядра как единого целого.

Часто расчет удобнее проводить по формуле

$$\Delta m = Zm_{\mathrm{H}} + \left(A - Z\right)m_n - m_{ат}, \tag{27.2}$$

где Z — зарядовое число; A — массовое число; m_{H} — масса атома водорода; m_n — масса нейтрона; $m_{ат}$ — масса нейтрального атома изотопа.

Энергия связи атомного ядра:

$$E_{св} = \Delta mc^2, \tag{27.3}$$

где c — скорость света в вакууме.

Для выражения энергии в мегаэлектронвольтах (МэВ) удобно использовать соотношение

$$E\left[\text{МэВ}\right] = 931{,}4 \cdot \Delta m\left[\text{а.е.м.}\right]. \tag{27.4}$$

Удельная энергия связи:

$$E_{уд} = \frac{E_{св}}{A}, \tag{27.5}$$

где A — массовое число.

Ядерные реакции

Энергия ядерной реакции:

$$Q = c^2\left[\left(m_1 + m_2\right) - \left(m_3 + m_4\right)\right], \tag{27.6}$$

где m_1 и m_2 — массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; m_3 и m_4 — сумма масс покоя ядер продуктов реакции.

Радиоактивный распад

Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{27.7}$$

где N — число нераспавшихся ядер в момент времени t; N_0 — исходное число радиоактивных ядер; λ — постоянная распада.

Период полураспада:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{27.8}$$

Активность изотопа:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = A_0 e^{-\lambda t}, \tag{27.9}$$

где $A_0 = \lambda N_0$ — активность в начальный момент времени. Единица активности — беккерель (1 Бк = 1 распад/с). Часто применяется внесистемная единица активности — кюри (1 Ки = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк).

Удельная (массовая) активность изотопа:

$$a = \frac{A}{m}, \tag{27.10}$$

где m — масса радиоактивного препарата.

Дозиметрия

Ослабление интенсивности γ-излучения в веществе:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \tag{27.11}$$

где I — интенсивность излучения в веществе на глубине x; I_0 — интенсивность излучения, падающего на поверхность вещества; μ — коэффициент поглощения вещества.

Поглощенная доза излучения:

$$D = \frac{\Delta W}{\Delta m}, \tag{27.12}$$

где ΔW — энергия ионизирующего излучения, переданная элементу облучаемого вещества; Δm — масса этого элемента. Единица поглощенной дозы излучения — грей (1 Гр = 1 Дж/кг).

Экспозиционная доза γ- и рентгеновского излучения:

$$X = \frac{\Delta Q}{\Delta m}, \tag{27.13}$$

где ΔQ — сумма электрических зарядов всех ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе. Наиболее часто применяется внесистемная единица экспозиционной дозы излучения — рентген (1 Р = $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Дж/кг).

27.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.

Определить, какая часть (в %) радиоактивного изотопа $^{225}_{89}Ac$ распадается в течение 6 сут. Период полураспада $T_{1/2}$ = 10 сут.

Решение.

В соответствии с законом радиоактивного распада количество нераспавшихся ядер

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Доля распавшихся ядер

$$\eta = \frac{N_0 - N}{N_0} 100\,\% = \frac{N_0 - N_0 e^{-\lambda t}}{N_0} 100\,\% = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) 100\,\%.$$

Постоянная распада

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}69}{10} = 0{,}069 \text{ сут.}^{-1}$$

Таким образом, доля распавшихся ядер составляет

$$\eta = \left(1 - e^{-0{,}069 \cdot 6}\right) 100\,\% = 34\,\%.$$

Ответ: 34%.

Задача 2.

Найти отношение массовой активности a_1 стронция ^{90}Sr к массовой активности a_2 радия ^{226}Ra. Периоды полураспада стронция и радия равны 28 лет и $1{,}62 \cdot 10^3$ лет соответственно.

Решение.

Активность изотопа

$$A = \lambda N.$$

Массовая активность изотопа

$$a = \frac{A}{m} = \frac{\lambda N}{m}.$$

Выражая массу изотопа через молярную массу M и количество вещества ν, получим:

$$a = \frac{\lambda N}{M\nu} = \frac{\lambda N_A}{M}.$$

Постоянная распада:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Таким образом, массовая активность изотопа

$$a = \frac{N_A \ln 2}{M T_{1/2}}.$$

Отношение массовой активности a_1 стронция к массовой активности a_2 радия

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{N_A \ln 2}{M_1 T_1} \cdot \frac{M_2 T_2}{N_A \ln 2} = \frac{M_2 T_2}{M_1 T_1} = \frac{226 \cdot 1{,}62 \cdot 10^3}{90 \cdot 28} = 145.$$

Ответ: 145.

Задача 3.

Точечный изотропный радиоактивный источник создает на расстоянии $r = 1$ м интенсивность γ-излучения, равную $I = 1{,}6$ мВт/м^2. Принимая, что при каждом распаде ядра излучается один γ-квант с энергией $E = 1{,}33$ МэВ, определить активность A источника в Ки.

Решение.

Так как источник является изотропным, то энергия γ-излучения, испускаемая в единицу времени во всех направлениях (мощность источника), равна

$$P = IS = I \cdot 4\pi r^2.$$

Учитывая, что при одном распаде ядра испускается один γ-квант, определяем количество распадов в единицу времени, т.е. активность:

$$A = \frac{P}{E} = \frac{I \cdot 4\pi r^2}{E}.$$

Находим численное значение активности, переводя энергию γ-кванта в Дж:

$$A = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 1^2}{1{,}33 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 9{,}4 \cdot 10^{10}\ \text{Бк} = \frac{9{,}4 \cdot 10^{10}}{3{,}7 \cdot 10^{10}} = 2{,}5\text{Ки}.$$

Ответ: 2,5 Ки.

Задача 4.

Вычислить энергию связи $E_{\text{св}}$ ядра ${}_2^3\text{He}$.

Решение.

Энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2.$$

Дефект массы

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_{\text{ат}}.$$

При использовании массы в а.е.м, а энергии в МэВ получаем

$$E_{\text{св}} = 931{,}4\left(Zm_H + (A - Z)m_n - m_{\text{ат}}\right).$$

Для изотопа гелия ${}_2^3\text{He}$ зарядовое число $Z = 2$, а массовое — $A = 3$. Используя табличные данные масс изотопов, получаем

$$E_{\text{св}} = 931{,}4\left(2 \cdot 1{,}00783 + (3 - 2) \cdot 1{,}00867 - 3{,}01603\right) =$$
$$= 931{,}4 \cdot 0{,}0083 = 7{,}73\text{МэВ}.$$

Ответ: 7,73 МэВ.

Задача 5.

Ядерная реакция имеет вид ${}^6\text{Li} + ? \rightarrow {}^9\text{Be} + {}^4\text{He}$. Определить недостающий элемент и рассчитать энергию ядерной реакции.

Решение.

Пользуясь таблицей Менделеева, определяем зарядовые числа:

$$ {}^{6}_{3}\mathrm{Li} + {}^{A}_{Z}X \to {}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. $$

По закону сохранения зарядовых чисел определяем зарядовое число неизвестного элемента:

$$ 3 + Z = 4 + 2 \;\; \Rightarrow \;\; Z = 3. $$

По закону сохранения массовых чисел определяем массовое число неизвестного элемента:

$$ 6 + A = 9 + 4 \;\; \Rightarrow \;\; A = 7. $$

Неизвестный элемент — изотоп лития ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$.

Итоговое уравнение реакции:

$$ {}^{6}_{3}\mathrm{Li} + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \to {}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. $$

Формула для энергии реакции в МэВ при использовании масс в а.е.м:

$$ Q = c^2\left[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)\right] = 931{,}4\left[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)\right]. $$

Используя табличные данные масс изотопов, получаем

$$ Q = 931{,}4\left[(6{,}01513 + 7{,}01693) - (9{,}01219 + 4{,}00260)\right] = 16 \text{ МэВ}. $$

Ответ: 16 МэВ.

27.3. Задачи для самостоятельного решения

27.1. Активность радиоактивного препарата за сутки уменьшилась на $\eta = 1{,}0\%$. Чему равен период полураспада?

27.2. Природный уран представляет собой естественную смесь долгоживущего изотопа урана ${}^{238}\mathrm{U}$ с периодом полураспада $T_1 = 4{,}5 \cdot 10^9$ лет и продуктов его распада, находящихся в радиоактивном равновесии. Определить период полураспада T_2 урана

^{234}U, если его массовая доля в смеси $\omega_2 = 0{,}006\%$, а массовая доля урана ^{238}U — $\omega_1 = 99{,}28\%$.

27.3. При дозиметрическом контроле источника гамма-излучения установлено, что мощность экспозиционной дозы составила $X' = 1{,}5$ мкА/кг. Измерения проводились на расстоянии $r = 0{,}5$ м от источника. Какое максимальное время t_{max} (в минутах) можно безопасно находиться на расстоянии $R = 10$ м от этого источника, если предельно допустимая доза составляет $X_{пр} = 20$ мР? Источник считать точечным, коэффициент поглощения гамма-излучения для воздуха $\mu = 2 \cdot 10^{-4}$ см$^{-1}$.

27.4. Воздух в нормальных условиях облучается γ-излучением. Определить дозу излучения, если экспозиционная доза излучения составила 35 мР. На образование одной пары ионов в воздухе необходима энергия 34 эВ.

27.5. Во сколько раз удельная энергия связи изотопа гелия ^{4}He больше удельной энергии связи изотопа гелия ^{3}He?

27.6. Ядерная реакция имеет вид $^{17}O + {}^{6}Li \rightarrow ? + {}^{4}He$. Определить недостающий элемент и рассчитать энергию ядерной реакции.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.1. 7,8 м/с. **1.2.** –12 м/с^2. **1.3.** 12 м/с, 12,2 м/с^2. **1.4.** 600 м/с.
1.5. 1000 м.

2.1. 2 с. **2.2.** 10 рад/с. **2.3.** 21,6. **2.4.** 6,9 рад/с^2. **2.5.** 2 с.

3.1. 0,25. **3.2.** 6 Дж. **3.3.** 3. **3.4.** 3,3 Н. **3.5.** $6{,}25\cdot10^{-5}$.

4.1. $2\cdot10^{-3}$ кг·м^2. **4.2.** $1{,}6\cdot10^{-3}$ кг·м^2. **4.3.** 20,4 рад/с. **4.4.** 4,4 м/с^2.
4.5. 0,25.

5.1. 4,8 кДж. **5.2.** 1 м. **5.3.** 10,8 кг. **5.4.** 3 м/с. **5.5.** 3,3 рад/с.

6.1. 0,87c. **6.2.** 0,011%. **6.3.** 0,268c. **6.4.** 0,87c. **6.5.** 0,707c.

7.1. $2{,}7\cdot10^{22}$. **7.2.** $1{,}25\cdot10^{-20}$ Дж. **7.3.** 75,3 м. **7.4.** 317 °C. **7.5.** $1{,}1\cdot10^5$ Па.

8.1. $5\cdot10^5$ Па. **8.2.** 312 Дж. **8.3.** 1039 Дж/кг. **8.4.** 145,5 Дж/К. **8.5.** 31%.

9.1. 0,85 мкКл. **9.2.** 18 кВ/м. **9.3.** 10,3 кВ/м. **9.4**. 24 см. **9.5.** 90 кВ/м.
9.6. 2,0 кВ/м. **9.7.** См. рис. 28.1. **9.8.** См. рис. 28.2. **9.9.** См. рис. 28.3.
9.10. 56 В/м; 169 В/м.

10.1. 1,8 кВ. **10.2.** 0,69 Мм/с. **10.3.** 12,5 кВ. **10.4.** См. рис. 28.4.
10.5. 2,2 В/м.

11.1. 0,36 В/м. 0,18 В. **11.2.** 0,33 мкН. **11.3.** 0,2 мкДж.
11.4. 12 мкКл/м. **11.5.** 5.

12.1. 2,2 нФ. **12.2.** 2,0 пФ. **12.3.** 89 пФ. **12.4.** 10 нФ. **12.5.** 2,0 нДж.

13.1. $5{,}2\cdot10^{17}$. **13.2.** 0,5 А. **13.3.** 3,32 В, 1 Ом. **13.4.** 57 нН·с.
13.5. 2,0 мВ/м. **13.6.** 0,05 А.

14.1. 21,5 А. **14.2.** 88 мкТл. **14.3.** 0,2 мТл. **14.4.** 0,14 мТл.
14.5. 1,0 Мм/с.

15.1. 0,35 мН. **15.2.** 20 мкТл. **15.3.** 17 А. **15.4.** 45°. **15.5.** 37,5 Тм/с^2.

16.1. 6,3 мкТл·м. **16.2.** 8,0 кА/м. **16.3.** 80 мВб. **16.4.** В 3,8 раза.

16.5. 9,8 А/м, 1,26 Тл.

17.1. 6,7 мДж. **17.2.** 0,18 В. **17.3.** 0,1 мВт. **17.4.** 10 Вт. **17.5.** 3,1 мкКл.
17.6. 100 м. **17.7.** 628 В. **17.8.** 0,26 Гн. **17.9.** 0,375 Дж.
7.10. 16 Дж/м^3.

18.1. 0,4 В. **18.2.** $U_m/\sqrt{2}$. **18.3.** 100 Ом. **18.4.** 2 с. **18.5.** 5.

19.1. $9{,}9\cdot10^3$ м/с^2. **19.2.** Увеличится на 60%. **19.3.** 78,5 Вт.
19.4. 5,3 мА/м^2. **19.5.** 30 мкВт/м^2. **19.6.** 106 Мм/с. **19.7.** 1,94 В/м.

20.1. 655 нм, 554 нм, 480 нм, 423 нм. **20.2.** 1,2 мм. **20.3.** 60 мкм. **20.4.** 1,5. **20.5.** 1,4. **20.6.** 6 мкм. **20.7.** 1,33.

21.1. 62,5 мм. **21.2.** 556 нм. **21.3.** 17 угл. мин. **21.4.** 56°. **21.5.** 0,0016 угл. мин. **21.6.** 866 мм. **21.7.** 4. **21.8.** 453 пм.

22.1. 64°. **22.2.** 1,24. **22.3.** 4. **22.4.** 6000 угл. мин. **22.5.** 44,5 $м^{-1}$.

23.1. 16 А. **23.2.** Увеличилась в 32 раза. **23.3.** 3,69 эВ. **23.4.** $1{,}1\cdot10^{18}$. **23.5.** 1,2 пм.

24.1. 1,18 пм. **24.2.** 25 мкм. **24.3.** 2,1 Мм/с. **24.4.** $1{,}5\cdot10^{-19}$ Дж. **24.5.** 5,6 $нм^{-1}$. **24.6.** 1,3 нм. **24.7.** 30,6%. **24.8.** 0,20. **24.9.** 21.

25.1. 4. **25.2.** $1{,}5\cdot10^{-34}$ Дж·с. **25.3.** 5. **25.4.** 42. **25.5.** 5,5. **25.6.** $6{,}56\cdot10^{-34}$ Дж·с.

26.1. 127 Дж/(кг·К). **26.2.** 1,8. **26.3.** 11,2 Дж. **26.4.** 3,1. **26.5.** 2,0. **26.6.** 60 В/м.

27.1. 69 сут. **27.2.** $2{,}8\cdot10^{5}$ лет. **27.3.** 28 мин. **27.4.** 31 мГр. **27.5.** 2,75. **27.6.** Фтор ${}^{19}_{9}F$, 12,35 МэВ

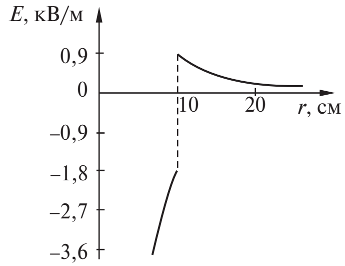


Рис. 28.1

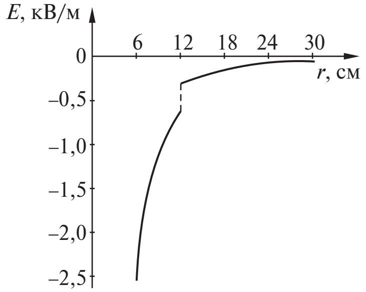


Рис. 28.2

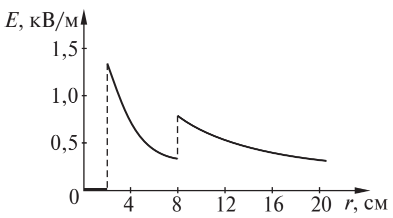


Рис. 28.3

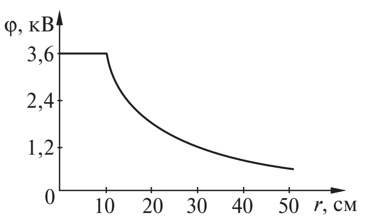


Рис. 28.4

Библиографический список

1. *Детлаф А.А.* Курс физики [Текст]: учеб. пособие / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. — М.: Академия, 2009. — 720 с.
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики [Текст]: учебник. В 3 т: Т. 1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. — СПб.: Лань, 2020. — 436 с.
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики [Текст]: учебник. В 3 т: Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И.В. Савельев. — СПб.: Лань, 2019. — 500 с.
4. *Савельев И.В.* Курс общей физики [Текст]: учебник. В 3 т: Т. 3: Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц / И.В. Савельев. — СПб.: Лань, 2019. — 320 с.
5. *Трофимова Т.И.* Сборник задач по курсу физики [Текст]: учеб. пособие / Т.И. Трофимова. — М.: Высшая школа, 2008. — 405 с.
6. *Чертов А.Г.* Задачник по физике [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. — М.: Альянс, 2019. — 640 с.
7. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике [Текст]: учеб. пособие для вузов / И.Е. Иродов. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. — 431 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

Диэлектрическая проницаемость вещества

Вещество	Диэлектрическая проницаемость ε
Воздух	≈1
Вода	81
Парафин	2
Эбонит	3
Фарфор	5
Стекло, слюда	7

Таблица П2

Удельное сопротивление проводников

Вещество	Удельное сопротивление ρ (при 20 °С), нОм·м
Медь	17
Алюминий	26
Железо	98
Графит	$3{,}9 \cdot 10^3$

Таблица П3

Показатели преломления сред

Вещество	n
Вода	1,33
Стекло	1,50
Алмаз	2,42

Таблица П4

Работа выхода электронов из металла

Металл	A, эВ
Калий	2,2
Литий	2,3
Натрий	2,5
Платина	6,3
Серебро	4,7
Цинк	4,0

Таблица П5

Масса нейтральных атомов

Элемент	Порядковый номер	Изотоп	Масса, а.е.м.
Водород	1	$^{1}\mathrm{H}$ $^{2}\mathrm{H}$ $^{3}\mathrm{H}$	1,00783 2,01410 3,01605
Гелий	2	$^{3}\mathrm{He}$ $^{4}\mathrm{He}$	3,01603 4,00260
Литий	3	$^{6}\mathrm{Li}$ $^{7}\mathrm{Li}$	6,01513 7,01601
Бериллий	4	$^{7}\mathrm{Be}$ $^{9}\mathrm{Be}$ $^{10}\mathrm{Be}$	7,01693 9,01219 10,01354
Бор	5	$^{9}\mathrm{B}$ $^{10}\mathrm{B}$ $^{11}\mathrm{B}$	9,01333 10,01294 11,00931
Углерод	6	$^{10}\mathrm{C}$ $^{12}\mathrm{C}$ $^{13}\mathrm{C}$ $^{14}\mathrm{C}$	10,00168 12,00000 13,00335 14,00324
Азот	7	$^{13}\mathrm{N}$ $^{14}\mathrm{N}$ $^{15}\mathrm{N}$	13,00574 14,00307 15,00011
Кислород	8	$^{16}\mathrm{O}$ $^{17}\mathrm{O}$ $^{18}\mathrm{O}$	15,99491 16,99913 17,99916
Фтор	9	$^{19}\mathrm{F}$	18,99840
Натрий	11	$^{22}\mathrm{Na}$ $^{23}\mathrm{Na}$	21,99444 22,98977
Магний	12	$^{23}\mathrm{Mg}$	22,99414
Алюминий	13	$^{30}\mathrm{Al}$	29,99817
Кремний	14	$^{31}\mathrm{Si}$	30,97535
Фосфор	15	$^{31}\mathrm{P}$	30,97376
Калий	19	$^{31}\mathrm{K}$	40,96184
Кальций	20	$^{44}\mathrm{Ca}$	43,95549
Свинец	82	$^{206}\mathrm{Pb}$	205,97446
Полоний	84	$^{210}\mathrm{Po}$	209,98297

Таблица П6

Масса покоя некоторых элементарных частиц и легких ядер

Частица	Масса	
	m_0, кг	m_0, а.е.м.
Электрон	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	0,00055
Нейтральный мезон	$2{,}41 \cdot 10^{-28}$	0,145261
Протон	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	1,00728
Нейтрон	$1{,}68 \cdot 10^{-27}$	1,00867
Дейтон	$3{,}35 \cdot 10^{-27}$	2,01355
α-частица	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	4,00149

Таблица П7

Период полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ изотопа	Тип распада	Период полураспада
Актиний	$^{225}_{89}Ac$	α	10 сут
Йод	$^{131}_{53}I$	β^-, γ	8 сут
Иридий	$^{192}_{77}Ir$	β^-, γ	75 сут
Кобальт	$^{60}_{27}Co$	β^-, γ	5,3 года
Магний	$^{27}_{12}Mg$	β^-	10 мин
Радий	$^{219}_{88}Ra$	α	10^{-3} с
Радий	$^{226}_{88}Ra$	α, γ	$1{,}62 \cdot 10^{3}$ лет
Радон	$^{222}_{86}Rn$	α	3,8 сут
Стронций	$^{90}_{38}Sr$	β^-	28 лет
Торий	$^{229}_{90}Th$	α, γ	$7 \cdot 10^{3}$ лет
Уран	$^{238}_{92}U$	α, γ	$4{,}5 \cdot 10^{9}$ лет
Фосфор	$^{32}_{15}P$	β^-	14,3 сут
Натрий	$^{22}_{11}Na$	g	2,6 года

Таблица П8

Основные физические постоянные

Элементарный заряд	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Удельный заряд электрона	$e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Масса протона	$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
Скорость света в вакууме	$c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2)
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Стефана–Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная закона смещения Вина	$b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	$a = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_B = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Энергия ионизации атома водорода	$E_i = 2{,}16 \cdot 10^{-18}$ Дж
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Михаил Викторович Дубков,
Михаил Анатольевич Буробин,
Владимир Васильевич Иванов,
Александр Евгеньевич Малютин,
Александр Павлович Соколов

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Часть 3
Практические занятия

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве «КУРС»

Подписано в печать 21.12.2020.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 15,0.
Тираж 500 экз. Заказ №

ТК 695771-991057-211220

ООО Издательство «КУРС»
127273, Москва, ул. Олонецкая, д. 17А, офис 104.
Тел.: (495) 203-57-83.
E-mail: kursizdat@gmail.com http://www.kursizdat.ru

Для заметок

Для заметок