Тема 7. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков

Вопрос 1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 1 (Ферма). Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in D(f)$, принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение, и в точке $x_0 \in D(f)$ существует конечная производная $f'(x_0)$, то обязательно $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для $f(x_0)$ – наибольшее значение функции в окрестности точки x_0. Тогда при всех $x \in D(f)$ из этой окрестности:

$$f(x) \le f(x_0),$$

следовательно, при $x > x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \Rightarrow f'(x_0) \le 0, \qquad (1.1)$$

а при $x < x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \Rightarrow f'(x_0) \ge 0. \qquad (1.2)$$

Из (1.1), (1.2) следует, что $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана.

Геометрически теорема Ферма означает, что если в точке $x_0 \in D(f)$ функция $f(x)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение и в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$, то касательная, проведенная к графику функции через точку с абсциссой $x_0 \in D(f)$, параллельна оси абсцисс (см. рис.1).

$$f'(x_0) = tg\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$$

(α есть угол наклона касательной к оси абсцисс).

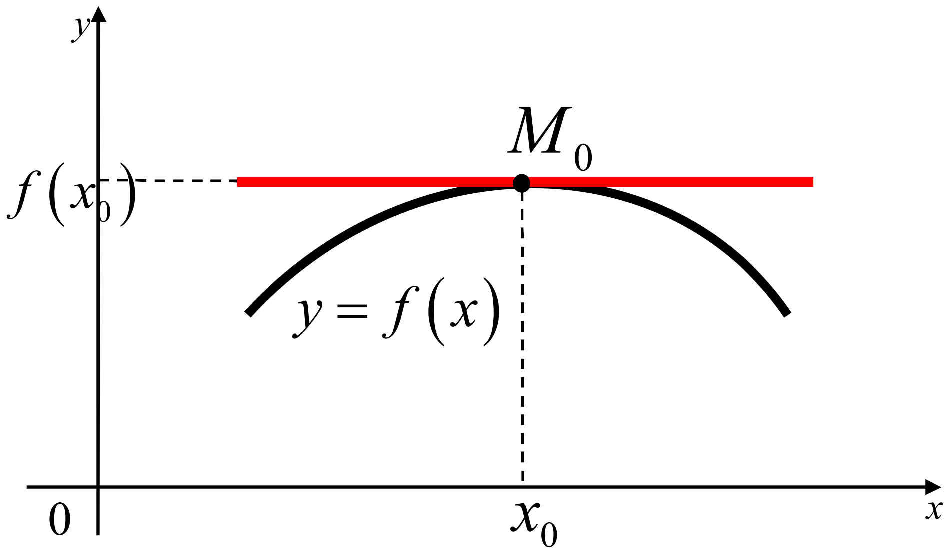


Рис. 1. Теорема Ферма, $f'(x_0)=tg\alpha=0 \;\Rightarrow\; \alpha=0.$
(касательная к графику функции параллельна оси абсцисс).

Теорема 2 (Ролля). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и принимает равные значения $f(a)=f(b)$ на концах промежутка, то существует такая точка $x_0\in(a,b)$, что $f'(x_0)=0$.

Доказательство. По свойству непрерывных функций $f(x)$ принимает на отрезке $[a,b]$ наибольшее $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$ и наименьшее $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$ значения. Возникают два случая.

1) Если $M=m$, то $f(x)=const$ (функция постоянна на отрезке $[a,b]$), следовательно, $f'(x)=C'=0$ (точка x_0 – любая точка из интервала (a,b)).

2) Пусть $M>m$. Так как $f(a)=f(b)$, то по крайней мере, одно из значений (M или m) достигается в некоторой точке x_0 интервала (a,b) (см. рис. 2). На основании теоремы 1 Ферма: $f'(x_0)=0$.

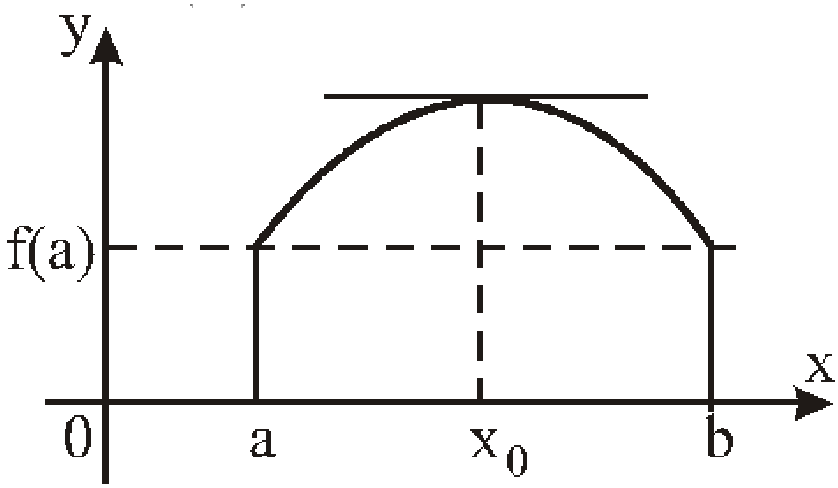


Рис. 2. Теорема Роля. $f(a)=f(b)$, $f'(x_0)=0$.

Пример 1. Выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$ на отрезке $[0,8]$. При каком значении $x_0\in(0,8)$?

Решение. Функция $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$ непрерывна на $[0,8]$, имеет на интервале производную

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{8x-x^2}\right)'=\left[\left(8x-x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{8-2x}{3\left(\sqrt[3]{8x-x^2}\right)^2},$$

причем $f(0)=\sqrt[3]{8\cdot 0-0^2}=0$, $f(8)=\sqrt[3]{8\cdot 8-8^2}=0$. Для функции $f(x)$ выполняются условия теоремы Ролля. При этом

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{8-2x}{3\left(\sqrt[3]{8x-x^2}\right)^2}=0\Leftrightarrow x=4\in(0,8).$$

Замечание. Если хотя бы одно из условий теоремы не выполняется, то теорема несправедлива. Например, функция $f(x)=|x|$ ($x\in[-1,1]$) удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, кроме дифференцируемости в точке $x=0$, и теорема Ролля не справедлива.

Теорема 3 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и имеет конечную производную на интервале $(a;b)$. Тогда существует точка $x_0 \in (a;b)$ такая, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \quad (x \in [a;b]). \tag{1.4}$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b), причем $F(a) = F(b) = 0$, так как

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) =$$

$$= f(b) - f(a) - \big(f(b) - f(a)\big) = 0.$$

Значит, функция (1.4) удовлетворяет всем условиям теоремы 2 Ролля. Следовательно, существует точка $x_0 \in (a;b)$ такая, что

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0,$$

откуда $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Геометрический смысл теоремы (рис. 3). Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет угловой коэффициент, равный

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

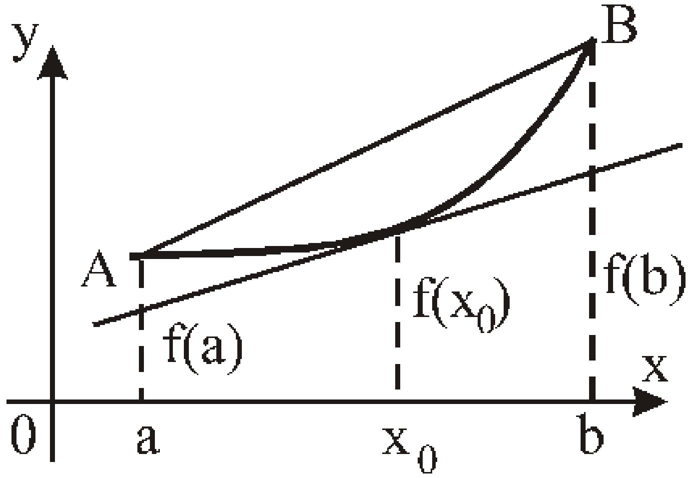


Рис. 3. Теорема Лагранжа.

Касательная к графику функции параллельна прямой *AB*.

Теорема 4 (Коши). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a;b]$ и имеют конечные производные на интервале $(a;b)$, причем $g'(x)\neq 0$. Тогда существует $x_0\in(a;b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{1.5}$$

Тема 7. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков

Вопрос 2. Правило Лопиталя

В дополнении к известным методам нахождения пределов и раскрытия неопределенностей (разложение на множители, метод сопряженных выражений, метод замены, замечательные пределы) приведем простое и удобное ***правило Лопиталя***.

Теорема 1 (Правило Лопиталя).

Пусть дифференцируемые в окрестности точки $x = x_0$ функции $f(x)$, $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ совместно стремятся к нулю или к бесконечности. Если отношение $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ их производных имеет предел L (конечный или бесконечный) при $x \to x_0$, то отношение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ функций $f(x)$, $\varphi(x)$ также имеет предел при $x \to x_0$, равный L.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{0}{0}\right),\ \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = L \ \Rightarrow\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = L.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right),\ \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = L \ \Rightarrow\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = L.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = L$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = L$. Предположим, что $\varphi'(x_0) \neq 0$. Так как функции $f(x)$, $\varphi(x)$ дифференцируемы в точке $x = x_0$, то они непрерывны в точке $x = x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$,

$\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}==\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=L.$$

2) Пусть $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$ ($x_0=\infty$), $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=L$. Сделаем замену переменной $x=1/z$. Тогда при $x\to\infty$ получим $z=1/x\to 0$. Воспользовавшись результатами пункта 1) ($z_0=0$), получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'_z(1/z)\cdot(1/z)'}{\varphi'_z(1/z)\cdot(1/z)'}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{f'_z(1/z)\cdot\left(-1/z^2\right)}{\varphi'_z(1/z)\cdot\left(-1/z^2\right)}==\lim_{x\to\infty}\frac{f'_x(x)}{\varphi'_x(x)}=L.$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(5x)}$.

Решение. Оценим неопределенность $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(5x)}=\left[\dfrac{\ln(1+0)}{\sin 0}\right]=\left(\dfrac{0}{0}\right)$,

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin(5x)=0$,

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $g'(x)=5\cos(5x)$.

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{5\cos(5x)}=\frac{1}{5}=L \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin(5x)}=\frac{1}{5}.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-3x^2+2x}$.

Решение. Оценим неопределенность

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-3x^2+2x}=\frac{2^2-5\cdot 2+6}{2^3-3\cdot 2^2+2\cdot 2}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-3x^2+2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-5x+6\right)'}{\left(x^3-3x^2+2x\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{3x^2-6x+2}=$$

$$=\left[\frac{2\cdot 2-5}{3\cdot 2^2-6\cdot 2+2}\right]=-\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+4x^3+x^2-12x-12}{x^3+5x^2+8x+4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Решение. Применяя правило Лопиталя несколько раз (до тех пор, пока не исчезнет неопределенность $(0/0)$):

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+4x^3+x^2-12x-12}{x^3+5x^2+8x+4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{\left(x^4+4x^3+x^2-12x-12\right)'}{\left(x^3+5x^2+8x+4\right)'}=$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{4x^3 + 12x^2 + 2x - 12}{3x^2 + 10x + 8} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\left(4x^3 + 12x^2 + 2x - 12\right)'}{\left(3x^2 + 10x + 8\right)'} = \lim_{x \to -2} \frac{8x^2 + 24x + 2}{6x + 10} = \frac{-14}{-2} = 7.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - x^2 + 2}$.

Решение. Вычисляем предел, применяя правило Лопиталя до тех пор, пока не исчезнет неопределенность вида (∞ / ∞):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - x^2 + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(2x^3 - 5x^2 + 6x\right)'}{\left(x^3 - x^2 + 2\right)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(6x^2 - 10x + 6\right)'}{\left(3x^2 - 2x\right)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{12x - 10}{6x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(12x - 10\right)'}{\left(6x - 2\right)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{12}{6} = 2.$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^3} = \left(\dfrac{\infty}{\infty} \right)$.

Решение. Вычисляем предел по правилу Лопиталя до исчезновения неопределенности:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{3x}\right)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{3x}}{3x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{3x}\right)'}{\left(x^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{3}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{3x}\right)'}{\left(x\right)'} = \frac{3}{2} \lim_{x \to +\infty} 3e^{3x} = +\infty.$$

Вопрос 3. Использование правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$ и показательно-степенных неопределенностей $(1)^{\infty}, (0)^{0}$

1. Неопределенность $(0\cdot\infty)$ встречается в пределах вида

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=(0\cdot\infty),$$

когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$. Для раскрытия неопределенности достаточно применить схему (создать искусственно дробь)

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

В результате получим неопределенность $(0/0)$, которая раскрывается по правилу Лопиталя (вопрос 2).

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}\cdot x^2$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\cdot x^2=(0\cdot(+\infty))=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{2x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2e^{2x}}=$$

$$=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{2x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0.$$

2. Неопределенность $(\infty-\infty)$ встречается в пределах вида

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=(\infty-\infty),$$

когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$. Для раскрытия неопределенности достаточно применить схему (создать искусственно дробь)

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/\varphi(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\cdot f(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

В результате получим неопределенность $(0/0)$, которая раскрывается по правилу Лопиталя.

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Решение. В данном случае

$$f(x)=\frac{x}{x-1},\ \lim_{x\to 1} f(x)=\infty,\ \varphi(x)=\frac{1}{\ln x},\ \lim_{x\to 1}\varphi(x)=\infty.$$

Создадим дробь в пределе, для чего приведем функции к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}.$$

Оценивая полученный предел, имеем неопределенность $(0/0)$. Тогда можно применить правило Лопиталя (несколько раз):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x\cdot\ln x-x+1)'}{((x-1)\cdot\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}==\left[\frac{\ln 1}{\ln 1+1-1}\right]=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1/x+1/x^2}=\frac{1}{2}.$$

$\boxed{3.}$ Степенно-показательные неопределенности (1^∞), (0^0), (∞^0) встречается в пределах вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$.

Рассмотрим неопределенность (1^∞), когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$. Чтобы раскрыть данную неопределенность требуется применить правило логарифмирования

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{\varphi(x)}}=\lim_{x\to x_0} e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}.$$

Если обозначить число

$$L=\lim_{x\to x_0}\left(\varphi(x)\cdot\ln f(x)\right),$$

то получим неопределенность $(\infty \cdot 0)$, которую можно раскрыть по правилу Лопиталя.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x-1}$.

Решение. В данном случае $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+3}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, $\varphi(x)=4x-1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$. Для раскрытия неопределенности (1^∞) вычислим $L=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\varphi(x)\cdot\ln f(x)\right)$:

$$L=\lim_{x\to\infty}(4x-1)\cdot\ln\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)}{\dfrac{1}{4x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+3)\right)'}{\left(\dfrac{1}{4x-1}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{2}{2x+3}}{-\dfrac{4}{(4x-1)^2}}.$$

Последний полученный предел упрощаем и вычисляем по правилу Лопиталя (раскрываем неопределенность вида (∞/∞)):

$$L=-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(4x-1)^2}{(2x-1)(2x+3)}=-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2-8x+1}{4x^2+4x-3}=-8.$$

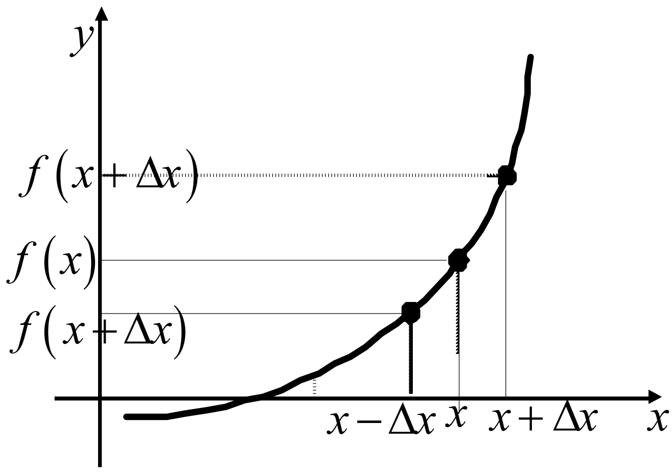
Ответ записываем в виде e^{-8}.

Вопрос 4. Признаки монотонности функции одной переменной

Определение 1. Функция $f(x)$ является ***строго возрастающей*** (***строго убывающей***) на интервале $(a,\ b)$, если при всех $x_1,\ x_2 \in (a,\ b)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 1 (***необходимый признак монотонности, постоянства функции***). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$. Если функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на интервале $(a,\ b)$, то при всех $x \in (a,\ b)$: $f'(x) > 0$ (соответственно $f'(x) < 0$).

Доказательство. Рассмотрим строго возрастающую на $(a,\ b)$ функцию $f(x)$. Покажем, что при всех $x \in (a,\ b)$: $f'(x) > 0$.



Составим для $f(x)$ приращение

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

так, чтобы $(x+\Delta x) \in (a,\ b)$.

а) Если $\Delta x > 0$, то $x + \Delta x > x$. Так как $f(x)$ строго возрастает на $(a,\ b)$, то $f(x+\Delta x) > f(x)$ и производная

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}^{>0}}{\underbrace{\Delta x}_{>0}} > 0}.$$

б) Если $\Delta x<0$, то $x+\Delta x<x$. Функция $f(x)$ строго возрастает на интервале $(a,\ b)$ и $f(x+\Delta x)<f(x)$. Тогда производная

$$\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overbrace{f(x+\Delta x)-f(x)}^{<0}}{\underbrace{\Delta x}_{<0}}>0}.$$

Теорема 2 (***достаточный признак монотонности функции***). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$. Тогда если при всех $x\in(a,\ b)$: $f'(x)>0$ (соответственно $f'(x)<0$), то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на интервале $(a,\ b)$.

Доказательство теоремы проводится таким же способом, как доказательство теоремы 1.

Пример. Найти для функции $f(x)=(2-x)\cdot(1+x)^2$ интервалы монотонности (интервалы возрастания и убывания).

Решение. Для функции $f(x)$ находим производную

$$f'(x)=3(1+x)\cdot(1-x).$$

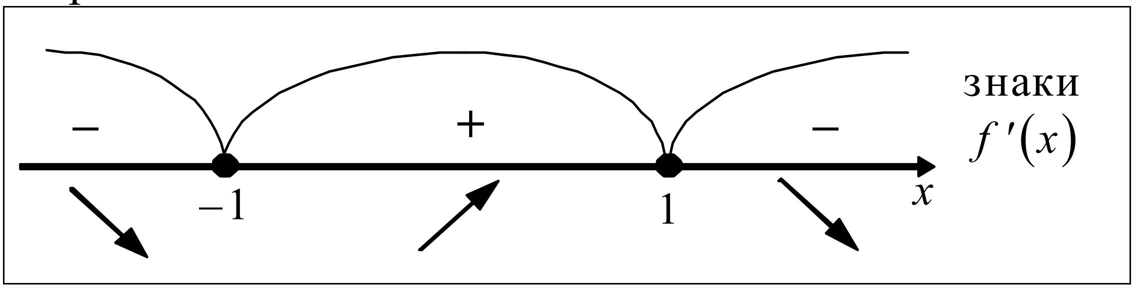
Воспользуемся теоремой 2. Определим интервалы монотонности, на каждом из которых производная больше нуля ($f'(x)>0$) или меньше нуля ($f'(x)<0$). Находим так называемые ***нули производной***, решая уравнение $f'(x)=0$:

$$x=-1,\ x=1.$$

Вся числовая ось разобьется на некоторое количество интервалов, на каждом из которых производная обязательно не меняет свой знак ($f'(x)>0$ или $f'(x)<0$). В нашем случае это:

$$(-\infty,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (1,\ +\infty).$$

Это будут ***интервалы монотонности***. Чтобы узнать, возрастает или убывает функция на данном интервале, достаточно выяснить, какой знак имеет производная $f'(x)$ в какой-либо точке (любой) этого интервала.



Знаки функции $f'(x)$ исследуем методом интервалов:

$$f'(-2) = 3(1+(-2))(1-(-2)) = -9 < 0,$$

при $x \in (-\infty, \ -1)$: $f'(x) > 0$ и функция монотонно убывает,

$$f'(0) = 3(1+0)(1-0) = 3 > 0,$$

при $x \in (-1, \ 1)$: $f'(x) > 0$ и функция монотонно возрастает,

$$f'(2) = 3(1+2)(1-2) = -9 < 0,$$

при $x \in (1, \ +\infty)$: $f'(x) > 0$ и функция монотонно убывает.

Вопрос 5. Экстремум функции одной переменной (определение, необходимый признак)

Определение 1. Точка $x_0 \in D(f)$ называется ***точкой максимума (точкой минимума)*** функции $f(x)$, если найдется такой достаточно малый интервал $(x_0 - a,\, x_0 + a)$ $(a > 0)$, что при всех $x \in (x_0 - a,\, x_0 + a)$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ (соответственно $f(x) \ge f(x_0)$).

Точки максимума (**рис. 1.а**) и минимума (**рис. 1.б)** называются ***точками экстремума***, значения функции в этих точках – ***экстремумами функции.***

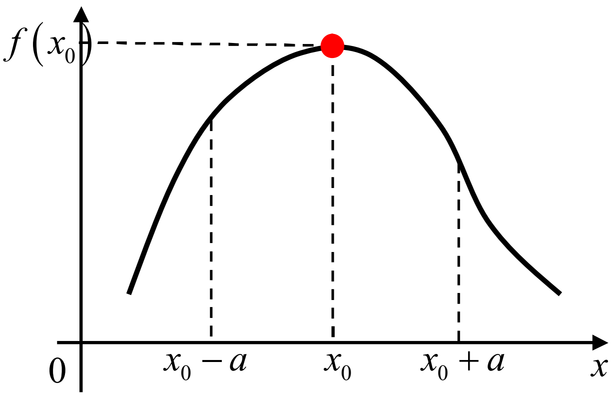


Рис.1.а

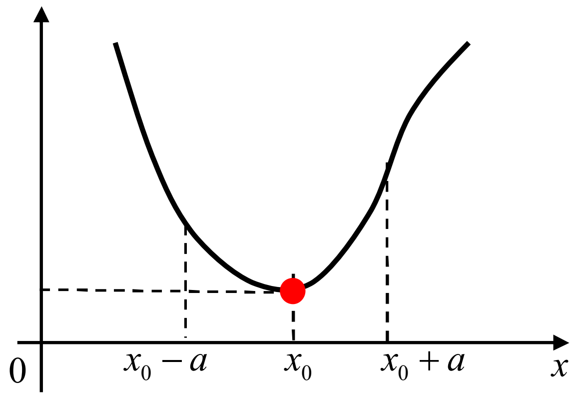


Рис.1.б.

Теорема (*необходимое условие точки экстремума*). Если точка $x_0 \in D(f)$ является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке либо производная $f'(x)$ равна нулю, либо в этой точке не существует конечной производной.

Обратное утверждение к теореме не выполняется. Например, для функции $f(x) = x^3$ производная $f'(x) = 3x^2$ равна нулю в точке $x_0 = 0$. Однако точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума функции (см. график функции).

Определение 2. Точки, в которых производная $f'(x)$ функции $f(x)$ равна нулю, называются ***стационарными точками***.

Стационарные точки и точки из области определения функции $f(x)$, в которых не существует производной $f'(x)$, называются ***точками, подозрительными на экстремум (критическими точками)***.

Согласно определению 2, все точки, подозрительные на экстремум, определяются из необходимого признака экстремума функции. Но не все они обязаны являться точками экстремума функции.

Пример 1. Найти точки возможного экстремума функции

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}.$$

Решение. Область определения функции $D(f)=(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$. Согласно необходимому условию точки экстремума находим производную

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Приравнивая найденную производную к нулю, получаем

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)=0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Точки $x=0,\ x=2\in D(f)$ – стационарные точки (в них производная обращается в нуль). Точка $x=1$ не является точкой, подозрительной на экстремум, так как в ней функция не определена.

Пример 2. Найти точки возможного экстремума функции
$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}.$$

Решение. Область определения функции $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$ (функция определена на всей числовой оси). Согласно необходимому условию точки экстремума находим производную

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2-2x}\right)'=\left(\left(x^2-2x\right)^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^2-2x\right)^{-2/3}\cdot(2x-2)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)^{2/3}}=\frac{1}{3}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}}.$$

Приравнивая найденную производную к нулю, найдем стационарные точки, а также точки, в которых производная не существует:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-2=0,\\ x^2-2x\neq 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ x(x-2)\neq 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ x\neq 0,\\ x\neq 2.\end{cases}$$

Точка $x=1$ есть стационарная точка (в ней производная обращается в нуль). Она же является точкой возможного экстремума. В точках $x=0,\ x=2$ производная $f'(x)$ не существует. Так как в этих двух точках функция определена ($D(f)=(-\infty,\ +\infty)$), то они также являются точками возможного экстремума для исходной функции.

Вопрос 6. Экстремум функции одной переменной (достаточные признаки)

Теорема 1 (***первый достаточный признак точки экстремума***). Пусть $x_0 \in D(f)$ – точка, подозрительная на экстремум функции $f(x)$. Тогда:

1) если при $x \in (x_0 - a,\, x_0)$: $f'(x) > 0$, при $x \in (x_0,\, x_0 + a)$: $f'(x) < 0$, то точка x_0 – точка максимума функции;

2) если при $x \in (x_0 - a,\, x_0)$: $f'(x) < 0$, при $x \in (x_0,\, x_0 + a)$: $f'(x) > 0$, то точка x_0 – точка минимума функции.

Справедливость теоремы следует из предыдущих теорем. Если при $x \in (x_0 - a,\, x_0)$: $f'(x) > 0$, то на интервале $(x_0 - a,\, x_0)$ функция строго возрастает, если при $x \in (x_0,\, x_0 + a)$: $f'(x) < 0$, то на интервале $(x_0,\, x_0 + a)$ функция строго убывает, а это значит, что точка x_0 – точка максимума функции.

Другими словами, если в точке x_0 производная $f'(x) = 0$ (или не существует) и при переходе через эту точку слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с « + » на « – » (соответственно с « – » на « + »), то x_0 – точка максимума функции (соответственно точка минимума функции).

Пример 1. Исследовать функцию на экстремум:

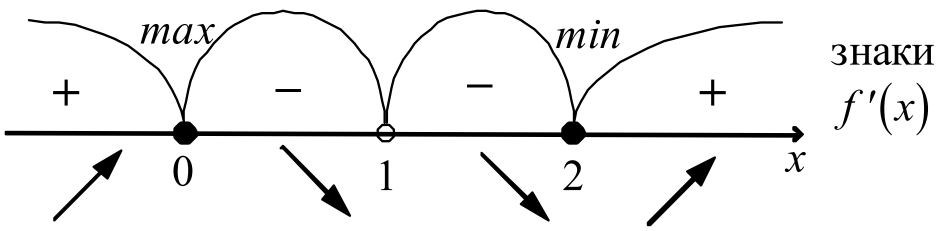
$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

Решение. Производная этой функции имеет вид (см. предыдущий вопрос, $D(f) = (-\infty,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$)

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Точками возможного экстремума (стационарные точки) являются точки $x_0^{(1)} = 0,\ x_0^{(2)} = 2$.

Исследуем знаки производной по методу интервалов.



$$f'(-1)=\frac{(-1)(-1-2)}{(-1-1)^2}=\frac{3}{4}>0, \qquad f'(1/2)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\right)}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=-3<0,$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-2\right)}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=-3<0, \qquad f'(3)=\frac{3(3-2)}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}>0.$$

Из метода интервалов следует, что функция $f(x)$ строго возрастает при $x\in(-\infty,\ 0)\cup(2,\ +\infty)$, строго убывает при $x\in(0,\ 1)\cup(1,\ 2)$.

Согласно первому достаточному признаку точки экстремума
$x_0^{(1)}=0$ – точка максимума ($x_{\max}=0,\ f(x_{\max})=f(0)=-1$),
$x_0^{(2)}=2$ – точка минимума ($x_{\min}=2, f(x_{\min})=f(2)=3$).

Пример 2. Исследовать функцию на экстремум:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}.$$

Решение. Область определения функции $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$. Производная функции имеет вид (см. предыдущий вопрос)

$$f'(x)=\frac{1}{3}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}}=\frac{1}{3}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{x^2\cdot(x-2)^2}}$$

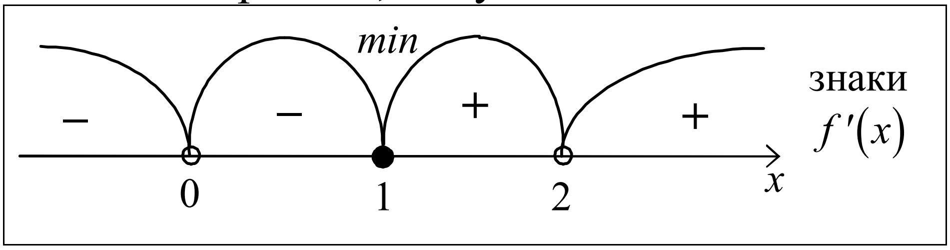
Точками возможного экстремума являются:
$x=1$ (стационарная точка, $f'(1)=0$),
$x=0$, $x=2$ (в этих точках не существует конечной производной).

Для ответа на вопрос о точках экстремума воспользуемся первым достаточным признаком. Знаменатель

$$\sqrt[3]{x^2\cdot(x-2)^2}$$

дроби производной $f'(x)$ при всех значениях $x\neq 0$, $x\neq 2$ положителен. Значит знак производной определяется знаком числителя.

Применяя метод интервалов, получим



Точка $x=1$ является точкой минимума функции ($x_{\min}=1$, $f\left(x_{\min}\right)=f(1)=\sqrt[3]{1^2-2\cdot 1}=\sqrt[3]{-1}=-1$).

Точки $x=0$, $x=2$ не являются точками экстремума, так как при переходе через каждую из этих точек производная $f'(x)$ не меняет своего знака.

Теорема 2 (***второй достаточный признак точки экстремума***). Пусть $x_0\in D(f)$ – стационарная точка функции $f(x)$ (то есть $f'(x_0)=0$). Тогда:

1) если $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$;

2) если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$.

Пример 3. Найти для функции $f(x)=(x-1)\cdot e^x$ точки экстремума, используя второй достаточный признак точки экстремума.

Решение. Вычисляем производную первого порядка функции

$$f'(x)=\left((x-1)\cdot e^x\right)'=e^x+(x-1)\cdot e^x=e^x\cdot(1+x-1)=x\cdot e^x.$$

Применяя необходимое условие точки экстремума, получим стационарную точку функции:

$$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x\cdot e^x=0 \;\Leftrightarrow\; x=0.$$

Вычисляем производную второго порядка

$$f''(x)=\left(x\cdot e^x\right)'=e^x+x\cdot e^x=e^x\cdot(x+1).$$

Находим значение производной второго порядка в $x=0$:

$$f''(0)=e^0\cdot(0+1)=1>0.$$

Так как $f''(0)>0$, то точка $x=0$ есть точка минимума функции.