13. Локальный экстремум функции нескольких переменных Необходимое условие локального экстремума

Функция $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D(f).$

Определение 13.1. Точка $M_0(x_0,\,y_0)\in D(f)$ называется ***точкой локального максимума*** (***локального минимума***) для f, если найдется малая δ-окрестность $U_\delta(M_0)$, для всех точек $M(x,\,y)\in U_\delta(M_0)$ выполняется неравенство

$$f(x,\,y)\le f(x_0,\,y_0)$$

$$\left(\text{соответственно } f(x,\,y)\ge f(x_0,\,y_0)\right).$$

Определение 13.2. Точки локального максимума и локального минимума функции называются ***точками локального экстремума функции***.

Определение 13.3. Значение $z_0=f(x_0,\,y_0)$ функции f в точке $M_0(x_0,\,y_0)$ локального экстремума называется ***локальным экстремумом*** функции (локальным максимумом или локальным минимумом).

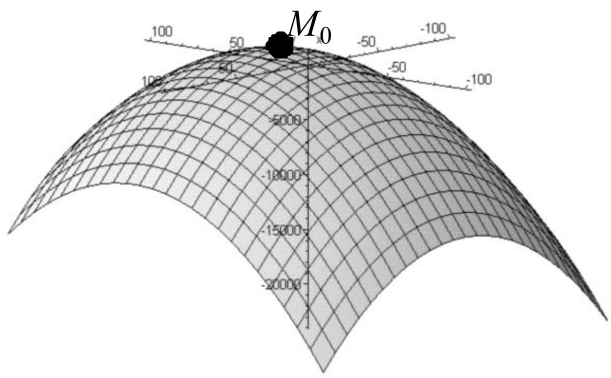


Рис. 1. M_0 – точка локального максимума

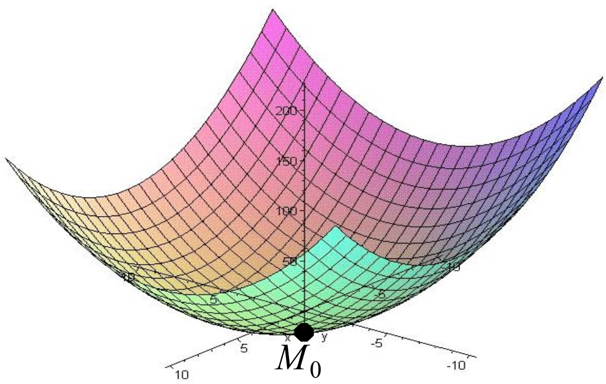


Рис. 2. M_0 – точка локального минимума

Теорема 13.1 (***необходимое условие локального экстремума***). Если точка $M_0(x_0,\,y_0)$ является точкой локального экстремума функции f, то все частные производные первого порядка функции в этой точке либо равны нулю, либо в этой точке хотя бы одна из частных производных первого порядка не существует.

Доказательство теоремы основано на необходимом признаке точки экстремума Ф1П.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ есть точка локального экстремума.

Положим $y = y_0 = const$, тогда функция двух переменных $z = f(x, y_0) = f(x)$ становится функцией одной переменной x. А так как $M_0(x_0, y_0)$ является точкой локального экстремума и Ф1П $f(x)$, то по необходимому признаку точки экстремума $f'_x(x_0) = 0$, либо $f'_x(x_0)$ не существует.

Аналогично при $x = x_0 = const$: $f'_y(y_0) = 0$, либо $f'_y(y_0)$ не существует. Теорема доказана.

Дифференцируемая функция f двух переменных имеет локальный экстремум только в той точке $M_0(x_0, y_0)$, в которой частные производные f'_x, f'_y обращаются в нуль:

$$\boxed{\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}} \qquad (13.1)$$

(градиент $\overrightarrow{grad\, f(M_0)}$ функции есть нулевой вектор).

Определение 13.4. Точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой частные производные первого порядка обращаются в нуль (выполняются условия (13.1)) называется ***стационарной точкой*** функции.

Определение 13.5. Точка $M_0(x_0, y_0)$, которая является стационарной, либо в этой точке хотя бы одна из частных производных f'_x, f'_y не существует, называется ***критической точкой*** (***точкой, подозрительной на локальный экстремум***).

Теорема 13.1 НЕ ОБРАТИМА!

Для функции $z = f(x, y) = xy$ частные производные $z'_x = y,\ z'_y = x$ обращаются в нуль в точке $M_0(0, 0)$. Однако точка $M_0(0,\ 0)$ не является точкой локального экстремума (рис. 3). Такая точка называется ***седловой точкой*** (***точкой минимакса***) функции.

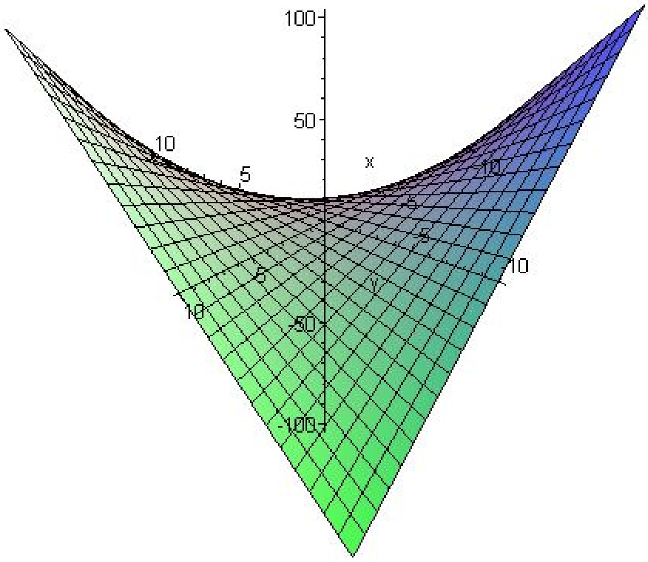


Рис. 3

Пример 13.1. Функция

$$\boxed{z = f(x,\ y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}},$$

(график изображен на рис. 4) имеет точку локального минимума – точку $M_0(0,\ 0)$. Частные производные первого порядка

$$\boxed{z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ z'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

не существуют в точке $M_0(0,\ 0)$ (в точке выполняется необходимое условие точки локального экстремума).

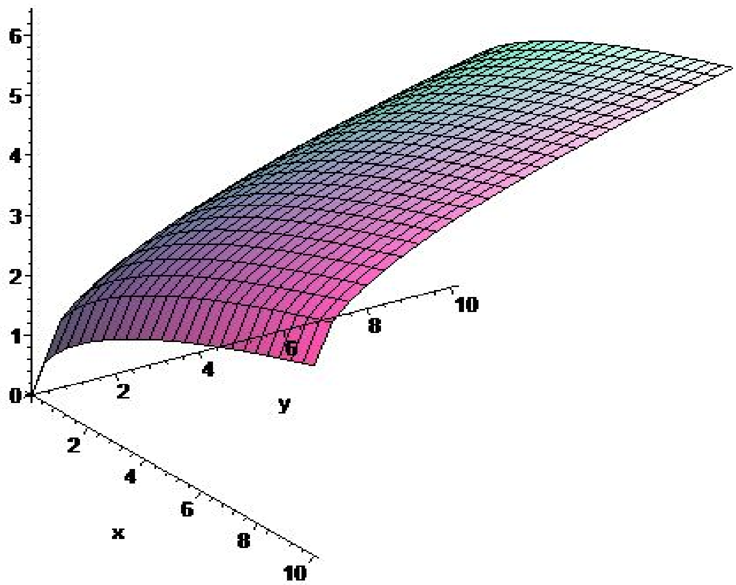


Рис. 4

Пример 13.2. Найти стационарные точки функции

$$z = f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

Решение. Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x.$$

Приравнивая их к нулю, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 24y^2 - 6x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ 4y^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2}, \\ x^4 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2}, \\ x(x^3 - 1) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 0{,}5. \end{cases} \end{array} \right.$$

Стационарные точки функции: $O(0; 0)$, $M_0(1; 0{,}5)$.

Обобщение. Задана функция n переменных

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D(f).$$

Определение 13.6. Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D(f)$ называется ***точкой локального максимума*** (***локального минимума***) функции f, если найдется малая δ-окрестность $U_\delta(M_0)$, для всех точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U_\delta(M_0)$ выполняется:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

$$\textit{соответственно} \quad \left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \right).$$

Теорема 13.2 (***необходимое условие локального экстремума***). Если точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D(f)$ является точкой локального экстремума функции f, то все частные производные первого порядка функции в этой точке либо равны нулю, либо в этой точке хотя бы одна из частных производных первого порядка не существует.

Пример 13.3. Найти стационарные точки функции

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^2+3xy-2z-9x-9y.$$

Решение. Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y-9,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2+3x-9,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z-2$$

Необходимое условие точки локального экстремума:

$$\begin{cases}3x^2+3y-9=0,\\3y^2+3x-9=0,\\2z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y=3,\\y^2+x=3,\\z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x^2,\\(x^2-y^2)+(y-x)=0,\\z=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=3-x^2,\\(x-y)(x+y)-(x-y)=0,\\z=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x^2,\\\left[\begin{array}{l}x-y=0,\\x+y=1,\end{array}\right.\\z=1,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y=3-x^2,\\\left[\begin{array}{l}y=x,\\y=1-x,\end{array}\right.\\z=1,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=3-x^2,\\y=x,\\z=1,\end{cases}\qquad(1)\\\begin{cases}y=3-x^2,\\y=1-x,\\z=1.\end{cases}\qquad(2)\end{array}\right.$$

Решением системы (2) – точки $M_1(2,\ -1,\ 1), M_2(-1,\ 2,\ 1)$.

Решением системы (1) – точки

$$M_3\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2},\ 2\right),\ M_4\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{13}}{2},\ 2\right).$$

Вопрос 14. Достаточное условие экстремума функции двух переменных

Функция $z = f(x, y)$ может иметь точку $M_0(x_0, y_0)$ своей точкой локального экстремума, если только все частные производные первого порядка функции в точке M_0 равны нулю, либо в этой точке хотя бы одна из частных производных не существует.

Теорема 14.1 (достаточное условие точки экстремума). Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ есть стационарная точка для функции $z = f(x, y)$ ($f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0$) и в точке M_0 существуют частные производные второго порядка. Обозначим

$$, A = f''_{xx}(x_0, y_0),\ B = f''_{xy}(x_0, y_0),$$

$$C = f''_{yy}(x_0, y_0), \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда, если:

1. $A > 0,\ \Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка минимума,
2. $A < 0,\ \Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка максимума,
3. $\Delta < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – не является точкой экстремума,
4. $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Доказательство. Формула Тейлора для Ф2П

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + R_3(x,y),$$

в которой $df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dx = 0$,

$$d^2 f(x_0,y_0) = A \cdot dx^2 + 2B \cdot dxdy + C \cdot dy^2,$$

$R_3(x,y) -$ малое выражение (можно пренебречь).

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + R_3(x,y).$$

(знак левой части равенства зависит от знака второго дифференциала $d^2 f\left(x_0, y_0\right)$). Второй дифференциал

$$d^2 f\left(x_0, y_0\right) = A \cdot dx^2 + 2B \cdot dxdy + C \cdot dy^2$$

есть квадратичная форма относительно $dx,\ dy$ с коэффициентами A, B, C. Известно, что если матрица

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

формы есть положительно-определенная матрица, то есть

$$A > 0,\ \Delta = \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2 > 0,$$

то $d^2 f\left(x_0, y_0\right) > 0$. Тогда при этом условии

$$f\left(x, y\right) - f\left(x_0, y_0\right) = \underbrace{\frac{1}{2!}\underbrace{d^2 f\left(x_0, y_0\right)}_{>0} + \underbrace{R_3\left(x, y\right)}_{мало}}_{>0} \Rightarrow$$

$f\left(x, y\right) > f\left(x_0, y_0\right)$, то есть точка M_0 есть точка минимума.

Замечание. В случае, когда $\Delta = 0$, как правило, пользуются определением точки экстремума. Отыскивают такую достаточно малую окрестность точки M_0, в которой могут выполняться как неравенство $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, так и $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$. Тогда точка M_0 не является точкой экстремума.

Пример 14.1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 - 4x - y + 5.$$

Решение. $\boxed{\textbf{1.}}$ Стационарные точки функции. Частные производные первого порядка

$$f'_x(x,\ y) = 4x + y - 4,\quad f'_y(x,\ y) = 2y + x - 1.$$

$$\begin{cases} f'_x(x,\ y) = 4x + y - 4 = 0, \\ f'_y(x,\ y) = 2y + x - 1 = 0, \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} 4x + y - 4 = 0, \\ 2y + x - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 4x, \\ 2(4 - 4x) + x - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 4x, \\ -7x = -7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Точка $M_0(1, 0)$ – точка возможного экстремума.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Достаточный признак точки экстремума (теорема 14.1).

$A = f''_{xx}(x_0, y_0) = 4$,

$B = f''_{xy}(x_0, y_0) = 1$,

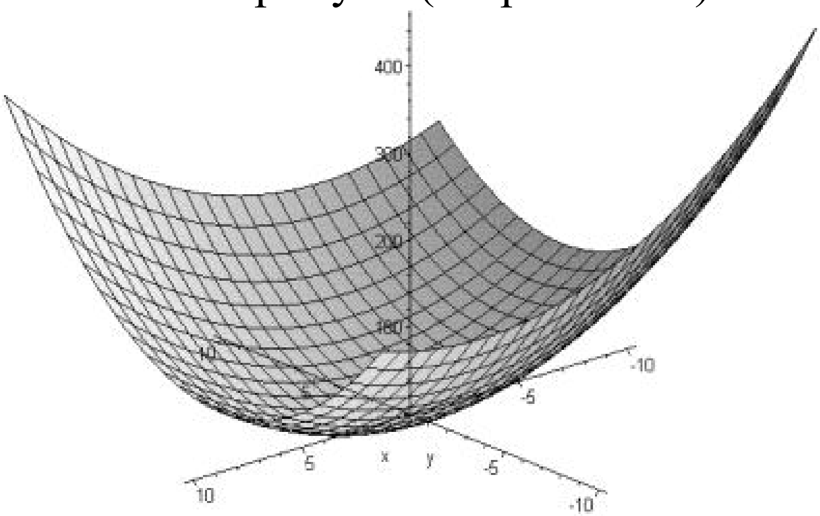
$C = f''_{yy}(x_0, y_0) = 2$,

$\Delta = AC - B^2 =$

$= 4 \cdot 2 - 1 = 7 > 0$,

$A = 4 > 0$,

$M_0(1,\ 0)$ – точка минимума функции.



Обобщение. Задана функция n переменных

$$f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\ldots\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ z=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right),$$

$$\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in D\left(f\right).$$

Теорема 14.2 (достаточное условие локального экстремума). Пусть точка $M_0\left(x_1^0,\ x_2^0,\ldots,x_n^0\right)\in D\left(f\right)$ есть стационарная точка для функции $z=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$:

$$f'_{x_1}\left(M_0\right)=0,\ \ f'_{x_2}\left(M_0\right)=0,\ \ldots,\ \ f'_{x_n}\left(M_0\right)=0,$$

и в точке M_0 существуют непрерывные частные производные второго порядка: $f''_{x_ix_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j}$. Обозначим коэффициент $a_{ij}=f''_{x_ix_j}\left(M_0\right)=a_{ji}\quad\left(i,j=1,2,\ldots,n\right)$ и составим матрицу

$$A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Обозначим угловые миноры матрицы A:

$$\Delta_1=a_{11},\ \ \Delta_2=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix},\ \ \Delta_3=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix},$$

$$\Delta_n=\det A.$$

Тогда:

1) если все угловые миноры матрицы положительны:

$$\Delta_1>0,\ \ \Delta_2>0,\ \ \Delta_3>0,\ \ldots,\ \ \Delta_n>0,$$

то точка M_0 есть **точка локального минимума** функции.

2) если все угловые миноры матрицы отличны от нуля, и их знаки чередуются, начиная со знака минус:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \ldots,\ (-1)^n \cdot \Delta_n > 0,$$

то точка M_0 есть **точка локального максимума** функции.

3) если все угловые миноры матрицы неотрицательны:

$$\Delta_i \ge 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

или же $\Delta_1 \le 0,\ \Delta_2 \ge 0,\ \Delta_3 \le 0,\ \ldots,\ (-1)^n \cdot \Delta_n \ge 0$,

но обязательно какой-нибудь минор равен нулю, то для ответа на вопрос о точке локального экстремума требуется **дополнительное исследование**.

4) В остальных случаях точка M_0 **не является точкой локального экстремума** (в частности, когда какой-нибудь минор четного порядка отрицателен: $\Delta_{2k} < 0$).

Пример 14.2. Исследовать на экстремум стационарные точки $M_1(2,\ -1,\ 1), M_2(-1,\ 2,\ 1)$ функции

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2 + 3xy - 2z - 9x - 9y.$$

Решение. Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 9,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x - 9,\quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2.$$

Частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2.$$

Составляем матрицу из частных производных 2-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} 6x & 3 & 0 \\ 3 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В точке $M_1(2,\ -1,\ 1)$ матрица и главные (угловые) миноры

$$A_{M_1}=\begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \Delta_1=12>0,\ \boxed{\Delta_2=-72-9=-81<0,}$$

$$\Delta_3=2\cdot\Delta_2=-162.$$

Так как минор четного порядка $\boxed{\Delta_2<0}$, то точка M_1 является седловой точкой (не точка локального экстремума).

В точке $M_2(-1,\ 2,\ 1)$ матрица и главные (угловые) миноры

$$A_{M_2}=\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \Delta_1=-3,\ \boxed{\Delta_2=-72-9=-81<0,}$$

$$\Delta_3=2\cdot\Delta_2=-162.$$

Так как минор четного порядка $\boxed{\Delta_2<0}$, то точка M_2 является седловой точкой (не точка локального экстремума).