Тема 8. Неопределенный интеграл функции одной переменной

1. Понятие неопределенного интеграла функции одной переменной. Свойства неопределенного интеграла

Ставится задача: найти для функции $f(x)$ такую функцию $F(x)$, что ее производная $F'(x)$ равна $f(x)$: $F'(x)=f(x)$. Такую задачу назовем ***задачей интегрирования*** функции $f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$, если при всех $x\in(a;\ b)$ выполняется равенство

$$\boxed{F'(x)=f(x)}. \tag{1.1}$$

Например, для функции $f(x)=3x^2$ имеем первообразную $F(x)=x^3$, а также $F_1(x)=x^3+2$, $F_2(x)=x^3-3$, так как $(F_1(x))'=3x^2=f(x)$, $(F_2(x))'=3x^2=f(x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема.

1) Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$, то функция $F(x)+C$ $(C=const)$ также первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$.

2) Если $F_1(x)$, $F_2(x)$ – первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$, то

$$F_1(x)-F_2(x)=C,\ \ C=const. \tag{1.2}$$

Доказательство.

1) $(F(x)+C)'=f(x)+0=f(x)$.

2) $F_1(x)-F_2(x)=C\ \ (C=const)\Leftrightarrow(F_1(x)-F_2(x))'=(C)'\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)-f(x)=0\Leftrightarrow 0=0.$

Определение 2. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a;\, b)$. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ $(C=const)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \qquad (1.3)$$

Функцию $f(x)$ называют ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)dx$ ***подынтегральным выражением***, символ $\int$ – операцией интегрирования (знаком интеграла). Задача нахождения неопределенного интеграла называется ***задачей интегрирования функции***.

Для нахождения неопределенного интеграла функции $f(x)$ достаточно найти хотя бы одну первообразную $F(x)$. Итак,

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C \;\; (C=const) \Leftrightarrow \left(F(x)+C\right)' = f(x)}. \qquad (1.4)$$

Неопределенный интеграл $\int 3x^2dx = x^3+C \;\; (C=const)$.

Свойства неопределенного интеграла

Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $(a,\, b)$. Тогда

1) $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x)+C$,

2) $\int f'(x)dx = f(x)+C$,

3) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

4) постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла: $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx \;\; (k=const)$,

5) неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов:

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx,$$

6) если $\int f(x) = F(x) + C$, то $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$, $k, b = const,\ k \neq 0$ (интеграл с измененным линейным аргументом).

Доказательство 6). Покажем, что

$$\left(\frac{1}{k} F(kx+b) + C \right)' = f(kx+b).$$

Имеем

$$\left(\frac{1}{k} F(kx+b) + C \right)' = \begin{vmatrix} u(x) = kx+b, \\ u'_x(x) = k \end{vmatrix} = \frac{1}{k} \left(F(u(x)) \right)'_x =$$

$$= \frac{1}{k} F'_u(u) \cdot u'_x(x) = \frac{1}{k} F'_u(u) \cdot k = f(u) = f(kx+b).$$

Пример 1. Найти интеграл $\int \cos(2x)\,dx$.

Решение. Для функции $f(x) = \cos x$ первообразной является функция $F(x) = \sin x$. Тогда на основании свойства 6)

$$\int \cos(2x)\,dx = |k = 2| = \frac{1}{2} \sin(2x) + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int e^{x/3} dx$.

Решение. Для функции $f(x) = e^x$ первообразной является функция $F(x) = e^x$. Тогда на основании свойства 6) имеем

$$\int e^{x/3} dx = \left| k = \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{\frac{1}{3}} e^{x/3} + C = 3e^{x/3} + C.$$

2. Таблица неопределенных интегралов. Метод непосредственного интегрирования функций

Приведем таблицу элементарных неопределенных интегралов.

№	Интеграл $\int f(x)dx = F(x)+C$	№	Интеграл $\int f(x)dx = F(x)+C$
Т1	$\int dx = x + C$	**Т2**	$\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
Т3	$\int x^{-1}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**Т4**	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
Т5	$\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$	**Т6**	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$ $a > 0,\quad a \neq 1$
Т7	$\int e^x dx = e^x + C$	**Т8**	$\int \cos x dx = \sin x + C$
Т9	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	**Т10**	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
Т11	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	**Т12**	$\int tgx dx = -\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
Т13	$\int ctg(x)dx = \ln\lvert\sin(x)\rvert + C$	**Т14**	$\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\left(\dfrac{x}{a}\right) + C,$ $a \neq 0$
Т15	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + C,$ $\lvert x\rvert < a,\ a = const \neq 0$	**Т16**	$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert + C,$ $a \neq 0$
Т17	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert + C,$ $\alpha = const,\quad \alpha \neq 0$		

Для доказательства табличных интегралов используем

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ (C = const) \ \Leftrightarrow \ \left(F(x) + C\right)' = f(x).$$

Рассмотрим табличный интеграл **Т14**. Здесь $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$, $F(x) = \dfrac{1}{a} arctg\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$. Очевидно, что

$$F'(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2 + x^2} = f(x).$$

На свойствах неопределенного интеграла и таблицы интегралов основан ***метод непосредственного интегрирования*** (метод подведения под табличные интегралы).

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\left(1 - 3x^2 + 2\sin x - 4e^x\right)dx.$$

Решение. Используем свойства 4), 5), табличные интегралы (подписываем под интегралом номер в таблице):

$$\int\left(1 - 3x^2 + 2\sin x - 4e^x\right)dx = \int 1 \cdot dx - \int 3x^2 dx + \int 2\sin x dx - \int 4e^x dx =$$

$$= \underbrace{\int dx}_{T1} - 3\underbrace{\int x^2 dx}_{T2,\ \alpha=2} + 2\underbrace{\int \sin x dx}_{T9} - 4\underbrace{\int e^x dx}_{T7} = x - 3\frac{x^3}{3} + 2(-\cos x) - 4e^x + C =$$

$$= x - x^3 - 2\cos x - 4e^x + C.$$

Пример 2. Вычислить $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \sqrt[3]{x^2}\right)dx$.

Решение. Учитывая, что $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-3/2}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$, получим

$$\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx=2\underbrace{\int\frac{dx}{x}}_{T3}-\underbrace{\int x^{-3/2}dx}_{T2}+\underbrace{\int x^{2/3}dx}_{T2}=$$

$$=2\ln|x|-\frac{x^{-1/2}}{-1/2}+\frac{x^{5/3}}{5/3}+C=$$

$$=2\ln|x|+\frac{2}{x^{1/2}}+\frac{3x^{5/3}}{5}+C=\ln|x|+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+C.$$

Пример 3. Вычислить $I=\int\left(3\cos(4-3x)-\frac{4}{\cos^2(4x)}\right)dx$.

Решение. Имеем $I=3\int\cos(4-3x)dx-4\int\frac{dx}{\cos^2(4x)}$.

К первому интегралу применяем табличный интеграл $T8$ и свойство 6)

$$\underbrace{3\int\cos(4-3x)dx}_{T8}=3\cdot\frac{\sin(4-3x)}{-3}+C=-\sin(4-3x)+C.$$

Ко второму интегралу применим табличный интеграл $T10$ и свойство 6):

$$4\int\frac{dx}{\cos^2(4x)}=4\cdot\frac{tg(4x)}{4}+C=tg(4x)+C.$$

В результате получим $I=-\sin(4-3x)-tg(4x)+C$.

Пример 4. Вычислить $\int\left(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\right)dx$.

Решение. $I=\int\left(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\right)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

К первому интегралу применим табличный интеграл $T15$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+C.$$

Второй интеграл сначала преобразуем, вынеся коэффициент 9 из-под корня, а затем применим табличный интеграл $T15$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{4}{9}-x^2\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)-x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right)+C.$$

В итоге $I = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right)+C$.