Вопрос 7. Вычисление площадей плоских фигур

7.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат

1. Задана функция $y = f(x)$, непрерывная и неотрицательная ($f(x) \geq 0$) на $[a; b]$ (рис. 1)

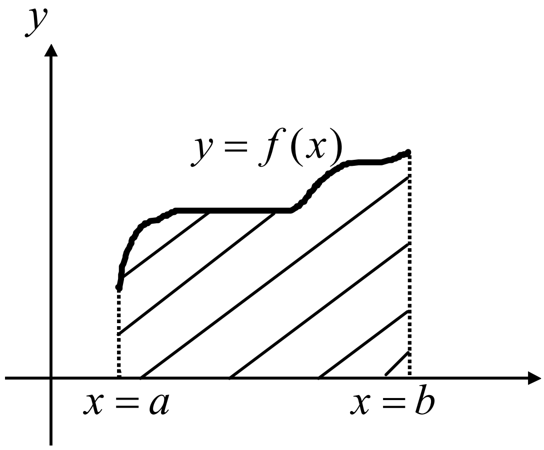


Рис. 1

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox (прямая $y = 0$), вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7.1}$$

2. Если заданы две функции $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, непрерывные на отрезке $[a; b]$, причем на этом отрезке $f_2(x) \geq f_1(x)$ (график функции $y = f_2(x)$ лежит выше графика функции $y = f_1(x)$), то площадь S фигуры, ограниченной графиками этих функций и прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 2), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \tag{7.2}$$

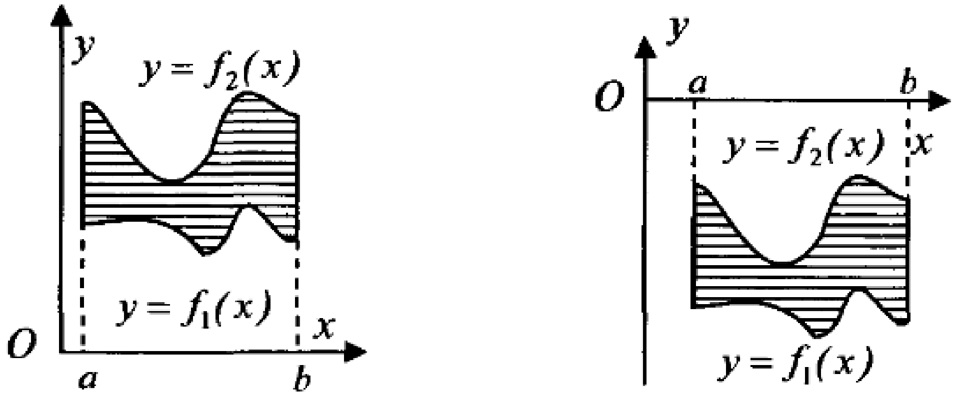


Рис. 2.

Пример 7.1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x e^{\sqrt{x}}}}$, осью Ox, если $x\in[1;\ 4]$.

Решение. В данном случае $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x e^{\sqrt{x}}}}\geq 0$, $a=1,\ b=4$.

Площадь вычисляем по формуле (7.1):

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{x},\ du=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}, \\ x=1\Rightarrow u=1, \\ x=4\Rightarrow u=2 \end{array}\right|=\int_1^2\frac{2du}{e^u}=2\int_1^2 e^{-u}du=$$

$$=-2e^{-u}\Big|_1^2=-2\left(e^{-2}-e^{-1}\right)=2\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)=2\frac{e-1}{e^2}.$$

Пример 7.2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=e^x$, $y=e^{-x}$ и прямой $x=1$.

Решение. Для решения задачи необходимо применить формулу (7.2). Определим функции $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и отрезок интегрирования $[a;\ b]$. Сделаем чертеж (см. рис. 3).

$y=f_2(x)=e^x$, $y=f_1(x)=e^{-x}$, $a=0,\ b=1$. Тогда площадь

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(e^x-e^{-x}\right)dx=$$

$$=\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_0^1=$$

$$=\left(e^1+e^{-1}\right)-\left(e^0+e^0\right)=\frac{(e-1)^2}{e}.$$

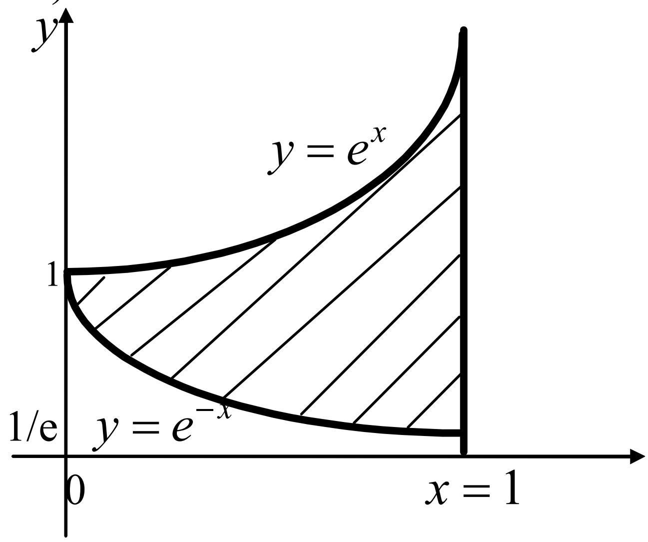


Рис. 3

7.2. Вычисление площадей фигур, заданных в параметрическом виде

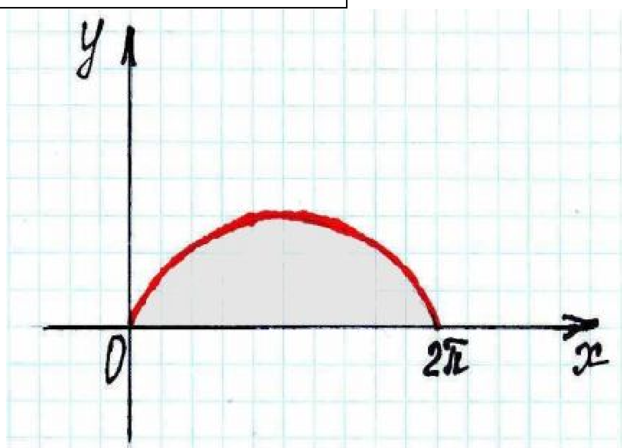
Кривая задана в параметрическом виде (системой уравнений)

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha,\ \beta].}$$

Площадь выражается формулой

$$\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\,dt}. \tag{7.3}$$

Пример 7.3. Найти площадь области, ограниченной одной аркой циклоиды $\boxed{\begin{cases} x = x(t) = a(\sin t - t), \\ y = y(t) = a(\cos t - 1) \end{cases}}$ и осью Ox.



Арка циклоиды описывается при изменении t в пределах от 0 до 2π, так как $y(0) = y(2\pi) = 0$:

$y(0) = a(1 - cos0) = a(1 - 1) = 0,$

$y(2\pi) = a(1 - cos2\pi) = a(1 - 1) = 0$,

а в остальных точках указанного промежутка $y > 0$.

Пределы интегрирования равны соответственно $x(0) = 0$ и $x(2\pi) = 2\pi a$.

Следовательно, искомая площадь равна:

$$S = \int_{0}^{2\pi a} y dx.$$

Пользуясь данными параметрическими уравнениями циклоиды, преобразуем интеграл к переменной t; $x = a(t - sint)$, $dx = a(1 - cost)dt, y = a(1 - cost)$.

Когда x пробегает отрезок $[0; 2\pi a]$, t пробегает отрезок $[0; 2\pi]$.

Поэтому, по формуле $S = \int_{y_1}^{y_2} ydx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, имеем:

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - cost) \cdot a(1 - cost)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - cost)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2cost + cos^2 t)dt =$$

$$= a^2 \left(\int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} 2costdt + \int_0^{2\pi} cos^2 tdt \right) =$$

$$= a^2 \left(\int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} 2costdt + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - cos2t)dt \right) =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} 2costdt - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} cos2td(2t) \right) =$$

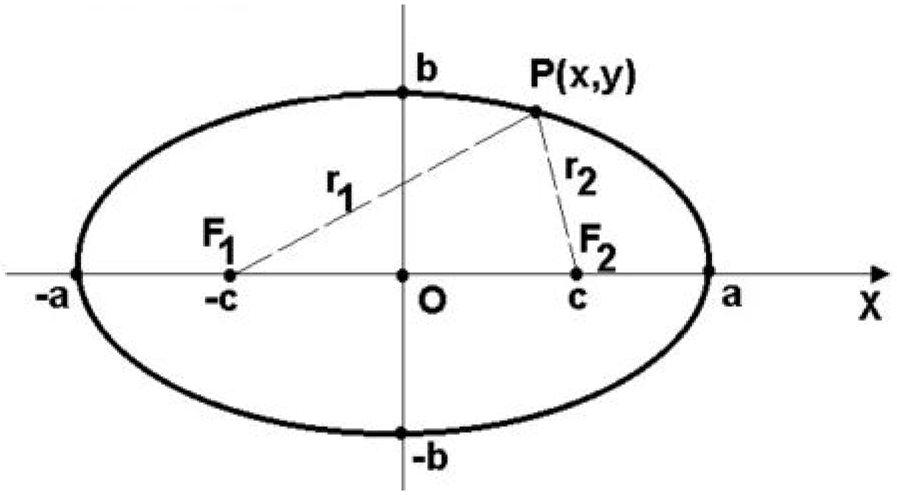
$$= a^2 \left(\frac{3}{2} t \,|_0^{2\pi} - 2cost \,|_0^{2\pi} - \frac{1}{4} sin2t \,|_0^{2\pi} \right) =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}(2\pi - 0) - 2(cos2\pi - cos0) - \frac{1}{4}(sin4\pi - sin0) \right) =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} 2\pi - 2(1 - 1) - \frac{1}{4} \cdot 0 \right) = 3\pi a^2$$

Пример 7.4. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\begin{cases} x = x(t) = a\cdot\cos t, \\ y = y(t) = b\cdot\sin t, \quad t\in[0,2\pi] \end{cases} \quad (a,b = const,\ a,b>0).$$



Решение. Так как эллипс – фигура симметричная, то рассмотрим площадь фигуры, расположенной в первой координатной четверти:

$$\begin{cases} x = x(t) = a\cdot\cos t \ge 0, \\ y = y(t) = b\cdot\sin t \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t \ge 0, \\ \sin t \ge 0, \end{cases} \Rightarrow t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Найдем пределы интегрирования по параметру *t:*

$$x\in[0,a] \Rightarrow \begin{cases} 0 = a\cdot\cos t \Rightarrow \cos t = 0,\ t = \pi/2 \\ a = a\cdot\cos t \Rightarrow \cos t = 1, \quad t = 0. \end{cases} \Rightarrow t\in\left[\frac{\pi}{2},0\right] \ !!!.$$

При этом искомая площадь всей фигуры равна

$$S = 4\cdot\int_{\pi/2}^{0} y(t)\cdot x'(t)\,dt = 4\cdot\int_{\pi/2}^{0} b\cdot\sin t\cdot(a\cdot\cos t)'\,dt =$$

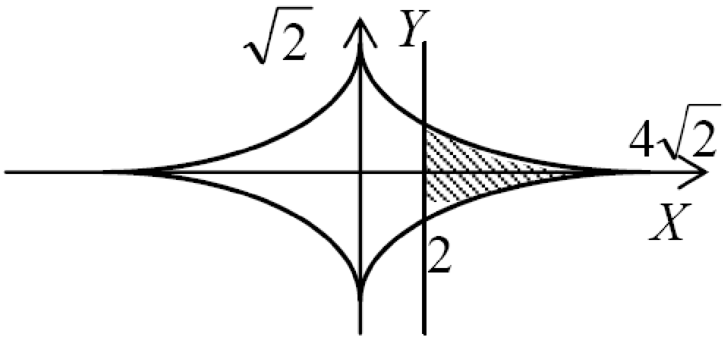
$$= 4\cdot\int_{\pi/2}^{0} b\cdot\sin t\cdot(-a\cdot\sin t)\,dt = -4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt =$$

$$= 4ab\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin(2t)\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\pi/2} = 4ab\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin(\pi)\right) = \pi ab.$$

Пример 7.5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями

$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} \quad x = 2 \quad (x \ge 2).$$



◄ Для вычисления площади воспользуемся симметрией фигуры относительно оси OX. Сначала найдем пределы интегрирования:

$$2 \le x \le 4\sqrt{2},$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow 4\sqrt{2}\cos^3 t = 2 \Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$x_2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow 4\sqrt{2}\cos^3 t = 4\sqrt{2} \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t_2 = 0.$$

Площадь

$$S = 2\int_{\pi/4}^{0} \sqrt{2}\sin^3 t\left(4\sqrt{2}\cos^3 t\right)' dt = -24\int_{\pi/4}^{0} \sin^4 t\cos^2 t dt =$$

$$= 6\int_0^{\pi/4} \sin^2 t\sin^2 2t dt = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/4} (1-\cos 2t)(1-\cos 4t)dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/4} (1-\cos 2t - \cos 4t + \cos 2t\cdot\cos 4t)dt = \frac{3}{2}t\Big|_0^{\pi/4} - \frac{3\sin 2t}{4}\Big|_0^{\pi/4} -$$

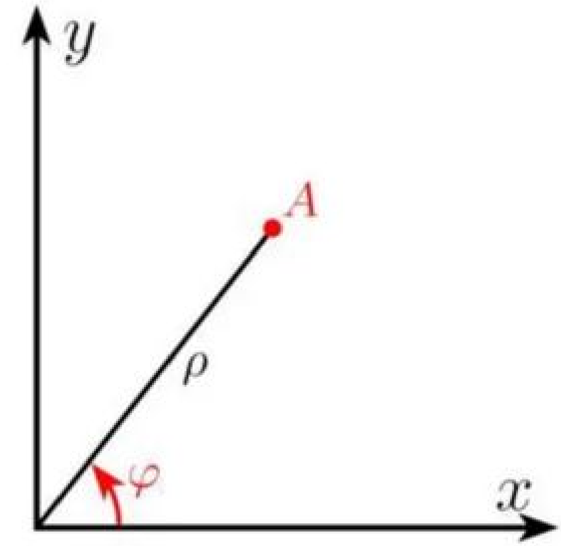
$$-\frac{3\sin 4t}{8}\Big|_0^{\pi/4} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/4}(\cos 6t + \cos 2t)dt = \frac{3\pi}{8} - \frac{3}{4} + \frac{\sin 6t}{8}\Big|_0^{\pi/4} +$$

$$+\frac{3\sin 2t}{8}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{3\pi}{8} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3\pi - 4}{8}.$$ ►

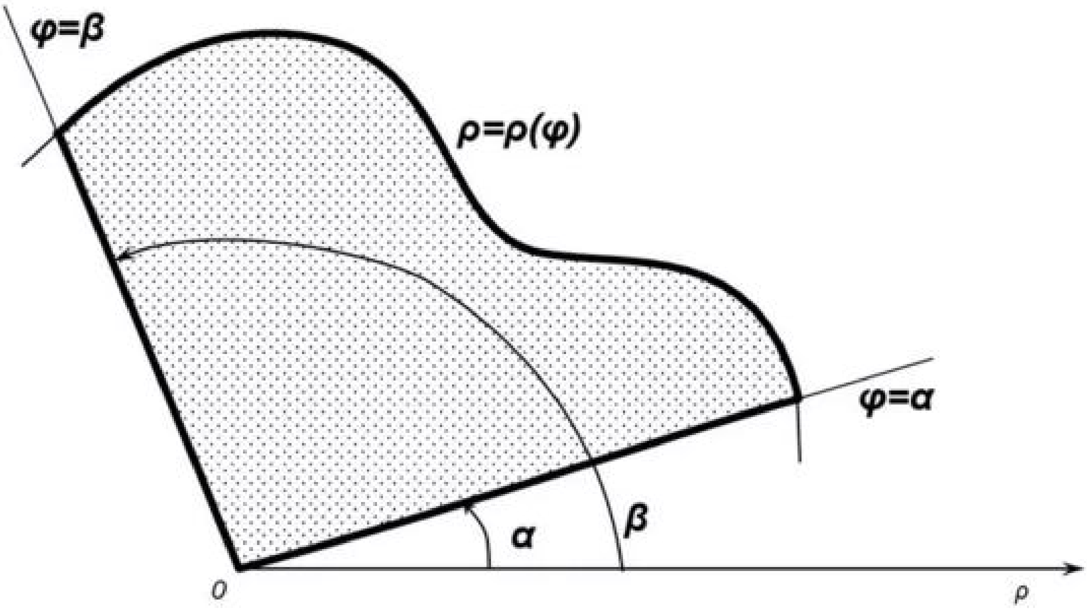
7.3. Вычисление площадей фигур, заданных в полярных координатах

Полярная система координат — двухмерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$\rho^2 = y^2 + x^2$$



Определение. Плоская фигура, ограниченная кривой $\rho = \rho(\varphi)$ ($\rho \geq 0$), двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, выходящими из начала координат (полюса) называется ***криволинейным сектором***.



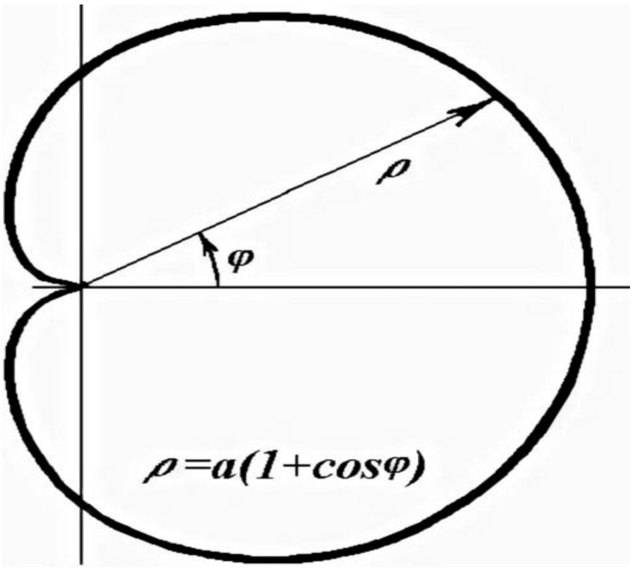
Площадь криволинейного сектора выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{7.4}$$

Пример 7.6. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$\rho=\rho(\varphi)=a\cdot(1+\cos\varphi),\quad a=const>0.$$

Решение.



$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\cdot\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+0,5\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+0,25\sin2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot2\pi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

Пример 7.7. Найти площадь фигуры, ограниченной двумя окружностями, заданными в полярной системе координат уравнениями

$$\rho=\rho_1(\varphi)=6\cdot\sin\varphi,\quad \rho=\rho_2(\varphi)=4\cdot\sin\varphi.$$

Решение. Изобразим окружности

$$\rho=6\cdot\sin\varphi\Leftrightarrow\rho^2=6(\rho\sin\varphi)\Leftrightarrow x^2+y^2=6y\Leftrightarrow x^2+y^2-6y=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=9.$$

Полученное уравнение есть уравнение окружности с центром в точке (0, 3) и радиуса 3 (большая окружность).

Аналогично

$$\rho=4\cdot\sin\varphi\Leftrightarrow\rho^2=4(\rho\sin\varphi)\Leftrightarrow x^2+y^2=4y\Leftrightarrow x^2+y^2-4y=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4.$$

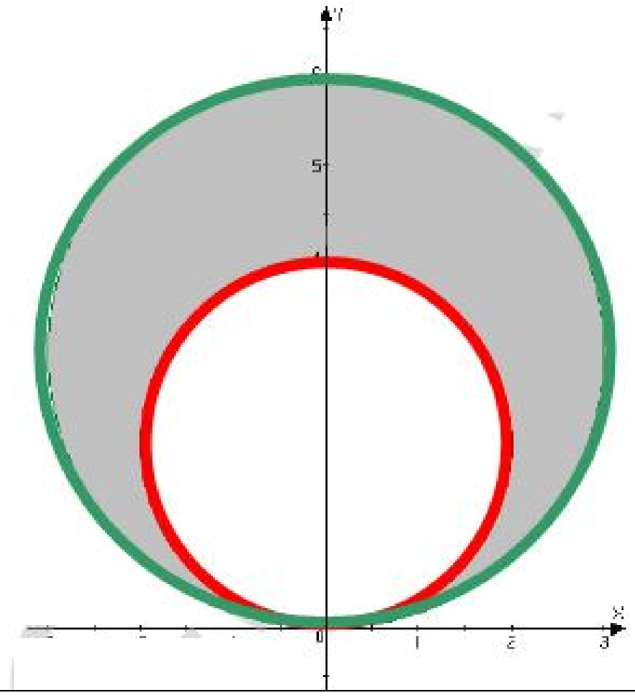
Полученное уравнение есть уравнение окружности с центром в точке (0, 2) и радиуса 2 (меньшая окружность).

Площадь S фигуры имеет вид

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\rho_1{}^2(\varphi)-\rho_2{}^2(\varphi))d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}(36\sin^2\varphi-16\sin^2\varphi)d\varphi=$$

$$=10\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sin^2\varphi\, d\varphi.$$



Находим пределы интегрирования $\alpha,\ \beta$. Так как $\rho\geq 0$, то:

$$\rho\geq 0\Rightarrow\begin{cases}\rho_1(\varphi)=6\cdot\sin\varphi\geq 0,\\ \rho_2(\varphi)=4\cdot\sin\varphi\geq 0\end{cases}\Rightarrow\sin\varphi\geq 0\Rightarrow\varphi\in[0,\ \pi].$$

$$S=10\cdot\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2\varphi\ d\varphi=10\cdot\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1-cos2\varphi}{2}\ d\varphi=5\cdot\int\limits_{0}^{\pi}(1-cos2\varphi)\ d\varphi=$$

$$5\cdot\left(\int\limits_{0}^{\pi}d\varphi-\int\limits_{0}^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi\right)=5\cdot\left(\varphi\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}\right)=5\pi.$$

Вопрос 8. Вычисление длин кривых

8.1. Вычисление длины кривой, заданной прямоугольными координатами

Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная и дифференцируемая (непрерывная) на отрезке $x \in [a;\ b]$. Тогда длина l дуги кривой, определяемой уравнением $y = f(x)$ на $x \in [a;\ b]$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (8.1)$$

Пример 8.1. Найти длину дуги кривой, уравнение которой на отрезке $[0;\ 3]$ имеет вид

$$y = f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 2.$$

Решение: Функция $f(x)$ является дифференцируемой как сумма дифференцируемых степенных функций.

Производная $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x} = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}$, длина дуги кривой:

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{1-2x+x^2}{4x}}\,dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{1+2x+x^2}{4x}}\,dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{(1+x)^2}{4x}} = dx\int_0^3 \frac{1+x}{2\sqrt{x}}dx = \int_0^3 \frac{dx}{2\sqrt{x}} + \int_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{2} =$$

$$= \sqrt{x}\Big|_0^3 + \frac{\sqrt{x^3}}{3}\Bigg|_0^3 = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3^3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Пример 8.2. Найти длину дуги кривой $y = f(x) = \dfrac{2}{\pi} \cdot \ln\left(\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)$ от $x = 1/2$ до $x = 3/2$.

Решение: Данная функция является дифференцируемой на отрезке $\left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}\right]$ по теореме о производной сложной функции.

Производная $f'(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\frac{\pi}{2}=ctg\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, длина дуги кривой

$$l=\int_{1/2}^{3/2}\sqrt{1+ctg^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}dx=\int_{1/2}^{3/2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}dx=\int_{1/2}^{3/2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\frac{\pi x}{2},\ dt=\frac{\pi dx}{2},\ dx=\frac{2dt}{\pi}, \\ x=1/2,\ t=\pi/4,\ x=3/2,\ t=3\pi/4 \end{array}\right|=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{dt}{\sin t}=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\sin tdt}{\sin^2 t}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\sin tdt}{1-\cos^2 t}=\left|\begin{array}{l} u=\cos t, \\ du=-\sin tdt, \\ u_1=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ u_2=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right|=-\frac{2}{\pi}\cdot\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{du}{1-u^2}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{du}{1-u^2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\Bigg|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\ldots=\frac{1}{\pi}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.$$

8.2. Вычисление длины кривой, заданной в параметрическом виде

Кривая задана в параметрическом виде (системой уравнений)

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha,\ \beta].$$

Длина дуги кривой на $t \in [\alpha,\ \beta]$ вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (8.2)$$

Пример 8.3. Найти длину окружности

$$\begin{cases} x = x(t) = R\cos t, \\ y = y(t) = R\sin t, \quad R = const > 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Решение.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt = R\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = R\int_{0}^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

Пример 8.4. Вычислить длину одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = x(t) = a(\sin t - t), \\ y = y(t) = a(\cos t - 1), \quad t \in [0,\ 2\pi] \end{cases}$$

Решение. Производные $x'(t) = a(\cos t - 1),\ \ y'(t) = -a\sin t.$

Длина одной арки циклоиды:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\left(a(\cos t - 1)\right)^2 + (-a\sin t)^2}\, dt =$$

$$= a\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t - 2\cos t + 1 + \sin^2 t}\, dt = a\int_{0}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}a\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = \sqrt{2}a\int_{0}^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = 2a\int_{0}^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt =$$

$$= 2a\int_{0}^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$$

8.3. Вычисление длины кривой, заданной полярными координатами

Кривая задана полярными координатами

$$\boxed{\rho = \rho(\varphi), \quad \rho \ge 0}.$$

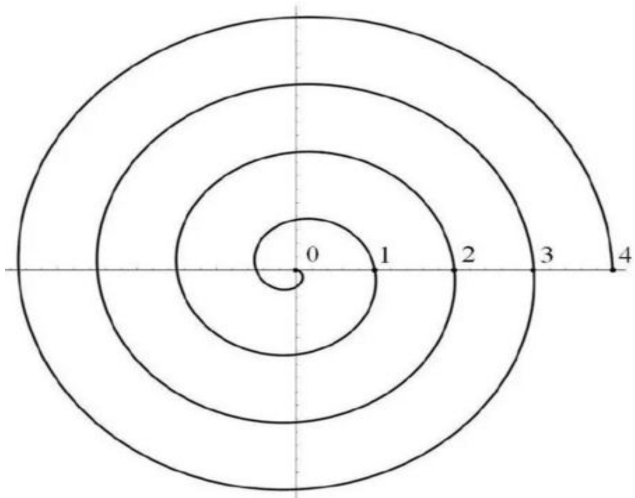
Длина дуги кривой на $\varphi \in [\alpha,\ \beta]$ вычисляется по формуле

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi.} \tag{8.3}$$

Пример 8.5. Найти длину первого витка спирали Архимеда

$$\rho = \rho(\varphi) = a \cdot \varphi, \quad a = const > 0, \quad \varphi \in [0,\ 2\pi].$$

Спираль Архимеда



Решение. Длина первого витка спирали Архимеда

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\varphi)^2 + (a)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi.$$

Находим неопределенный интеграл $I = \int \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi$ методом интегрирования по частям:

$$I = \int \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{\varphi^2 + 1}, \quad dv = d\varphi, \\ du = \dfrac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}, \quad v = \varphi \end{array} \right| = \sqrt{\varphi^2 + 1} \cdot \varphi - \int \varphi \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} =$$

$$= \sqrt{\varphi^2 + 1} \cdot \varphi - \int \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}\, d\varphi = \varphi \cdot \sqrt{\varphi^2 + 1} - \int \frac{\left(\varphi^2 + 1\right) - 1}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}\, d\varphi =$$

$$=\varphi\cdot\sqrt{\varphi^2+1}-\int\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi+\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}=-I+\varphi\cdot\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|.$$

Итак, $I=-I+\varphi\cdot\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|$,

откуда $I=\frac{1}{2}\left(\varphi\cdot\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|\right)$.

Тогда длина дуги

$$l=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=\frac{a}{2}\left(\varphi\cdot\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{a}{2}\left(2\pi\cdot\sqrt{4\pi^2+1}+\ln\left|2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right|\right).$$

Вопрос 9. Вычисление объема тела вращения

Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком интегрируемой функции $y = f(x)$ ($x \in [a;\, b]$), вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 1) вычисляется по формуле

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}. \tag{9.1}$$

Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками двух интегрируемых функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ (при всех $x \in [a;\, b]$: $f_2(x) \le f_1(x)$), вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 2) вычисляется по формуле

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left(f_1^2(x) - f_2^2(x) \right) dx}. \tag{9.2}$$

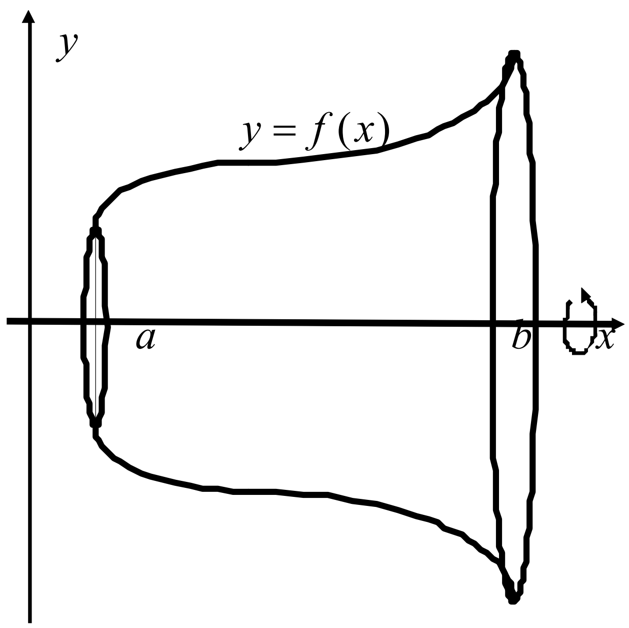


Рис. 1.

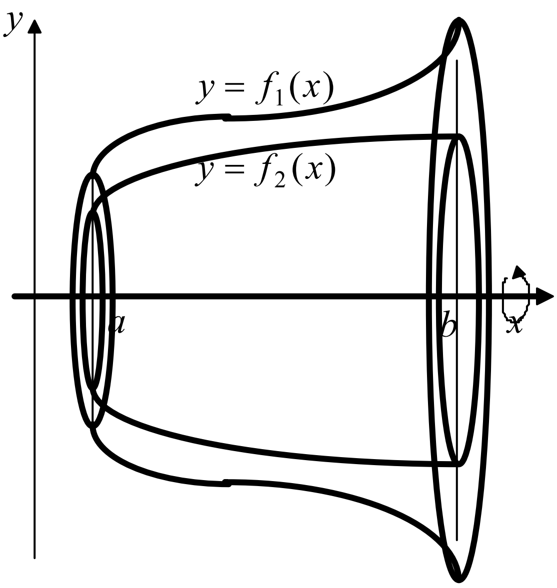


Рис. 2.

Пример 9.1. Найти объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y^2 = f^2(x) = \dfrac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ и вертикальными прямыми $x = 1$, $x = 4$ (см. рис. 3).

Решение: Объем

$$V=\pi\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{x},\, dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}, \\ x=1, t=1, x=4, t=2 \end{array}\right|=$$

$$=2\pi\int_1^2 2^t\,dt=\frac{2\pi}{\ln 2}2^t\Big|_1^2=\frac{2\pi}{\ln 2}(4-2)=\frac{4\pi}{\ln 2}.$$

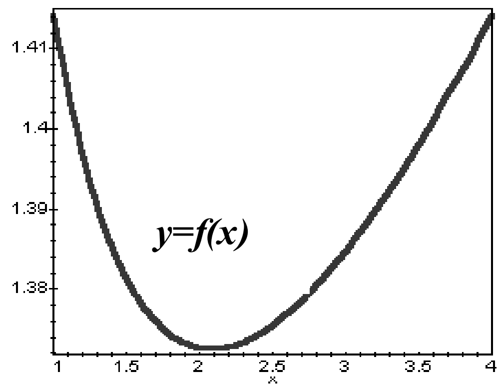


Рис. 3

Пример 9.2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y=(x-2)^2+2,\ y=\sqrt{x}$ на отрезке $x\in[0;\ 4]$.

Решение. Из рисунка 4 видно, что при $x\in[0;\ 4]$

$y=f_1(x)=(x-2)^2+2$,

$y=f_2(x)=\sqrt{x}$.

Для вычисления объема V тела применяем формулу (9.2).

$$V=\pi\int_a^b\left(f_1^2(x)-f_2^2(x)\right)dx=$$

$$=\pi\int_0^4\left[\left((x-2)^2+2\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_0^4\left[x^4-8x^3+28x^2-49x+36\right]dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{28x^3}{3}-\frac{49x^2}{2}+36x\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\pi\frac{632}{15}.$$

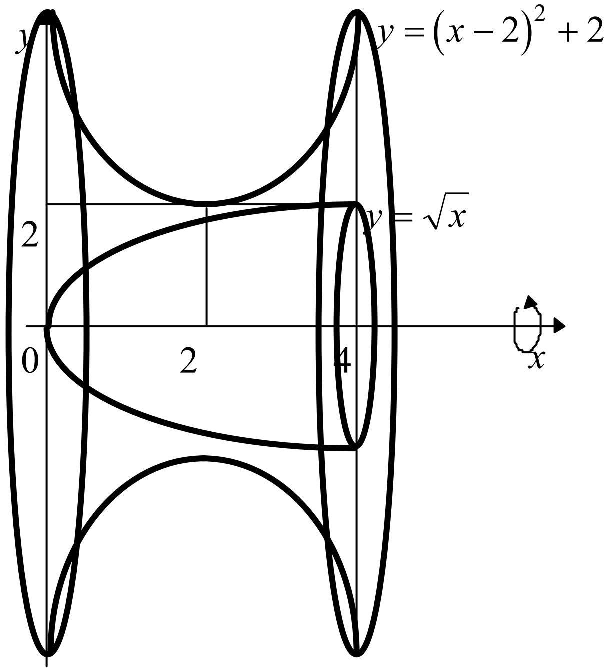


Рис. 4.