Вопрос 7. Условие выпуклости функции одной переменной

Пусть $f(x)$ – функция, дифференцируемая на интервале $(a,\ b)$. График этой функции назовем кривой.

Определение 1. Дуга кривой называется ***выпуклой***, если она целиком лежит по одну сторону от касательной, проведенной в любой точке дуги этой кривой.

Если дуга кривой выпуклая, то ее выпуклость обращена либо вниз (рис. 1), либо вверх (рис. 2). Дуга кривой, обращенная выпуклостью вниз ($\cup$), называется ***выпуклой вниз*** (график функции расположен ***над*** касательной, проведенной в любой точке графика). Дуга кривой, обращенная выпуклостью вверх ($\cap$), называется ***выпуклой вверх*** (график функции расположен ***под*** касательной, проведенной в любой точке графика функции).

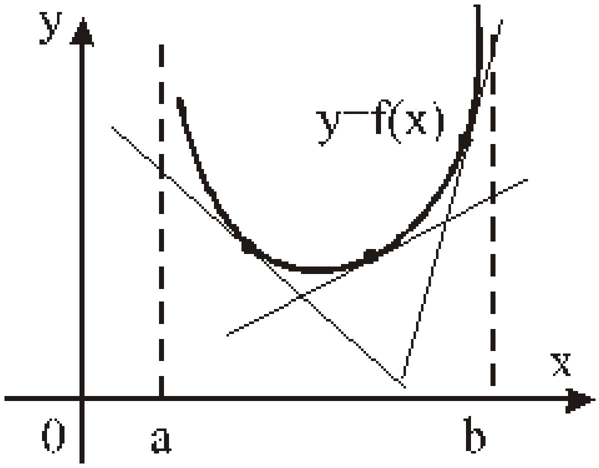


Рис.1

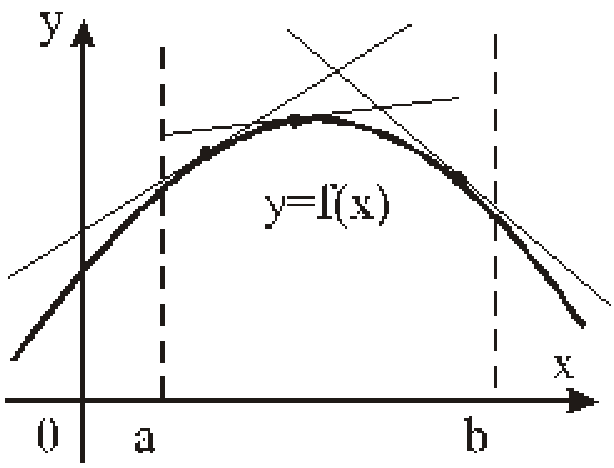


Рис. 2

Понятие выпуклости функции можно связать с производной этой функции. Пусть функция $f(x)$ является выпуклой вниз на интервале $(a,\ b)$ (рис. 1). Проведем через $M_0(x_0,\ y_0)$ касательную к графику этой функции. Уравнение касательной имеет вид

$$y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

где $y_{кас}$ – ордината точки касательной ($x,\ x_0 \in (a,\ b)$).

При всех $x,\ x_0 \in (a,\ b)$ ордината $y = f(x)$ графика функции больше ординаты $y_{кас}$ касательной:

$$y = f(x) > y_{кас},$$

так как график функции на интервале $(a,\ b)$ лежит полностью над касательной. Значит, для функции $f(x)$, выпуклой вниз на интервале $(a,\ b)$ обязательно выполняется условие

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x,\ x_0 \in (a,\ b).$$

Аналогично для функции $f(x)$, выпуклой вверх на $(a,\ b)$:

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x,\ x_0 \in (a,\ b).$$

Теорема (***достаточный признак выпуклости функции на интервале***). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a,\ b)$. Тогда:

1) если при всех $x \in (a,\ b)$: $f''(x) > 0$, то функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a,\ b)$;

2) если при всех $x \in (a,\ b)$: $f''(x) < 0$, то функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале $(a,\ b)$.

Пример. Исследовать функцию на выпуклость:

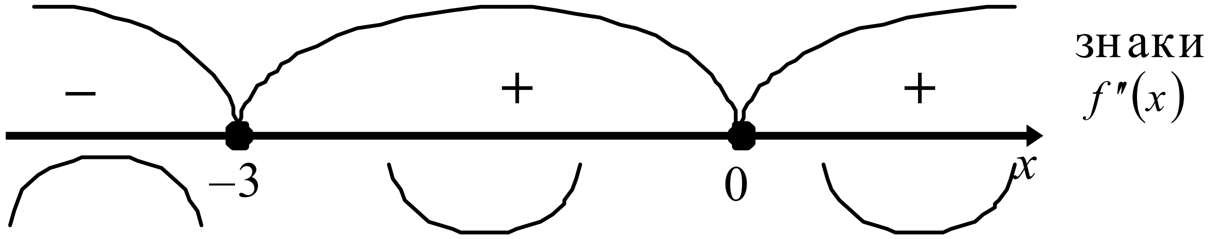
$$\boxed{f(x) = x^5 + 5x^4}.$$

Решение. Находим последовательно производные:

$$f'(x) = 5x^4 + 20x^3, \quad f''(x) = 20x^3 + 60x^2 = 20x^2 \cdot (x + 3).$$

Применим достаточный признак выпуклости функции. Находим нули второй производной:

$$f''(x) = x^2 \cdot (x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -3. \end{array}\right.$$



$$f''(1)=20\cdot1^2\cdot(1+3)=80>0,$$

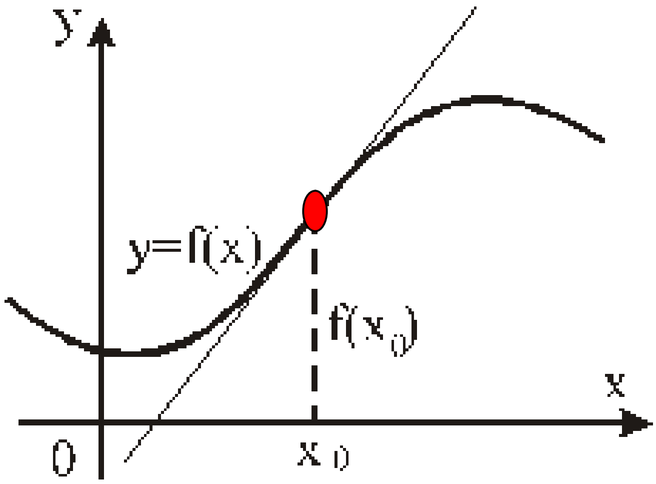
$$f''(-1)=20\cdot(-1)^2\cdot(-1+3)=40>0,$$

$$f''(-4)=20\cdot(-4)^2\cdot(-4+3)=-320<0.$$

На интервалах $x\in(-3,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$ производная второго порядка положительна, то есть на этих интервалах функция выпукла вниз. На интервале $x\in(-\infty,\ -3)$ второго порядка отрицательна, а значит, функция выпукла вверх.

Вопрос 8. Точки перегиба функции

Определение 1. Точка $x_0 \in D(f)$ называется ***точкой перегиба*** функции $f(x)$, если эта точка отделяет один вид выпуклости функции от другого вида выпуклости функции.



Теорема 1 (***необходимый признак точки перегиба функции***). Если точка $x_0 \in D(f)$ является точкой перегиба функции $f(x)$, то обязательно в этой точке вторая производная обращается в нуль ($f''(x_0)=0$), или же в этой точке вообще не существует конечной второй производной $f''(x_0) \in \mathbf{R}$.

Замечание. Не все точки, подозрительные на перегиб, являются точками перегиба. Например, для функции $f(x)=x^4$ вторая производная $f''(x)=12x^2$ обращается в нуль при $x=0$. Однако эта точка не является точкой перегиба, так как функция $f(x)=x^4$ является выпуклой вниз на всей обрасти определения.

Определение 2. Все точки $x_0 \in D(f)$, в которых вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ равна нулю или не существует, называются ***точками, подозрительными на перегиб***.

Пример 1. Найти для функции точки, подозрительные на перегиб:

$$\boxed{f(x)=(x-1)\cdot e^x}.$$

Решение. Производная второго порядка имеет вид

$$f''(x)=e^x\cdot(x+1).$$

Согласно необходимому условию точки перегиба, вторая производная обращается в нуль в точке $x=-1$. Значит, точка $x=-1$ есть точка возможного перегиба функции.

Пример 2. Найти для функции точки, подозрительные на перегиб:

$$\boxed{f(x)=\frac{x}{1+x^2}}.$$

Решение. $D(f)=\mathbf{R}$. Вычисляем производную второго порядка функции:

$$f''(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль при условии

$$2x\cdot\left(x^2-3\right)=0,$$

то есть в точках

$$x=-\sqrt{3},\ \ x=0,\ \ x=\sqrt{3}.$$

Они же и являются, согласно теореме, точками возможного перегиба.

Теорема 2 (***достаточный признак точки перегиба функции***). Пусть точка $x_0\in D(f)$ является точкой, подозрительной на перегиб (см. теорема 1). Если при переходе через эту точку вторая производная $f''(x)$ меняет свой знак, то $x_0\in D(f)$ является точкой перегиба функции.

Доказательство. Действительно, пусть $x_0\in D(f)$ – точка, подозрительная на перегиб; при $x\in(x_0-a,\ x_0)$: $f''(x)>0$, при

$x \in (x_0,\ x_0 + a)$: $f''(x) < 0$. Тогда на интервале $(x_0 - a,\ x_0)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, а на интервале $(x_0,\ x_0 + a)$ функция $f(x)$ выпукла вверх. Значит, точка отделяет один выпуклости от другого, что и доказывает, что она точка перегиба функции.

Пример 3. Найти для функции точки перегиба:

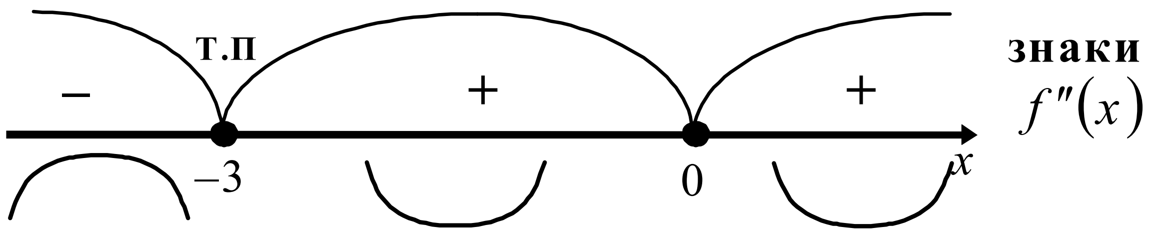
$$\boxed{f(x) = x^5 + 5x^4}.$$

Решение. Вторая производная $f''(x) = 20x^2 \cdot (x+3)$.

Точки, подозрительные на перегиб:

$$f''(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 20x^2 \cdot (x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Применим достаточный признак точки перегиба. Воспользуемся методом интервалов.



На интервалах $x \in (-3,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$: $f''(x) > 0$ (функция выпукла вниз). На интервале $x \in (-\infty,\ -3)$: $f''(x) < 0$ (функция выпукла вверх). При переходе через точку $x = -3$ вторая производная меняет свой знак, следовательно, $x = -3$ есть точка перегиба функции.

При переходе через точку $x = 0$ вторая производная не меняет своего знака, следовательно, $x = 0$ не является точкой перегиба функции.

9. Асимптоты графика функции одной переменной

9.1. Вертикальные асимптоты графика функции

Определение 1. Прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** к графику функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности любого знака:

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty, \\ \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty. \end{array}\right.$$

(x_0 является точкой разрыва второго рода с бесконечным скачком).

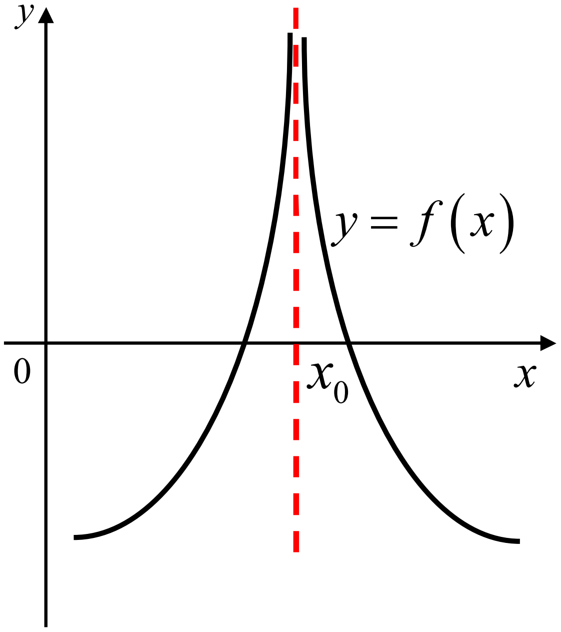


Рис. 1

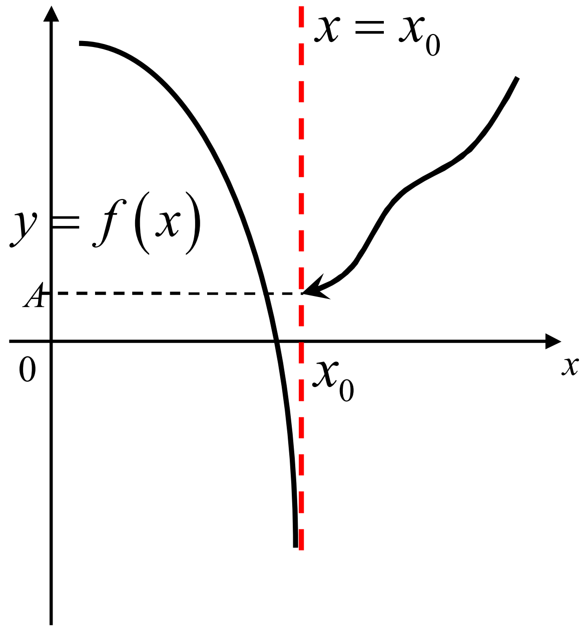


Рис. 2

Точки разрыва отыскиваются среди тех значений переменной x, в которых функция не определена. Например, для дробной функции вида

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

точками разрыва будут являться те точки, в которых знаменатель дроби, функция $f_2(x)$ обращается в нуль. Эти же точки являются точками разрыва второго рода.

Пример 1. Найти для функции

$$\boxed{f(x) = 3 + e^{\frac{1}{x-2}}}$$

вертикальные асимптоты.

Решение. Точкой разрыва функции является точка $x_0 = 2$. Найдем односторонние пределы функции в $x_0 = 2$. Так как

$$\lim_{\substack{x\to 2+0,\\ x>2}} \frac{1}{x-2} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 2-0,\\ x<2}} \frac{1}{x-2} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty,$$

то

$$\lim_{\substack{x\to 2+0,\\ x>2}} e^{\frac{1}{x-2}} = \left(e^{+\infty}\right) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 2-0,\\ x<2}} e^{\frac{1}{x-2}} = \left(e^{-\infty}\right) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 2+0,\\ x>2}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 2-0,\\ x<2}} f(x) = 3 + 0 = 3.$$

Прямая $x = 2$ есть вертикальная асимптота к графику функции.

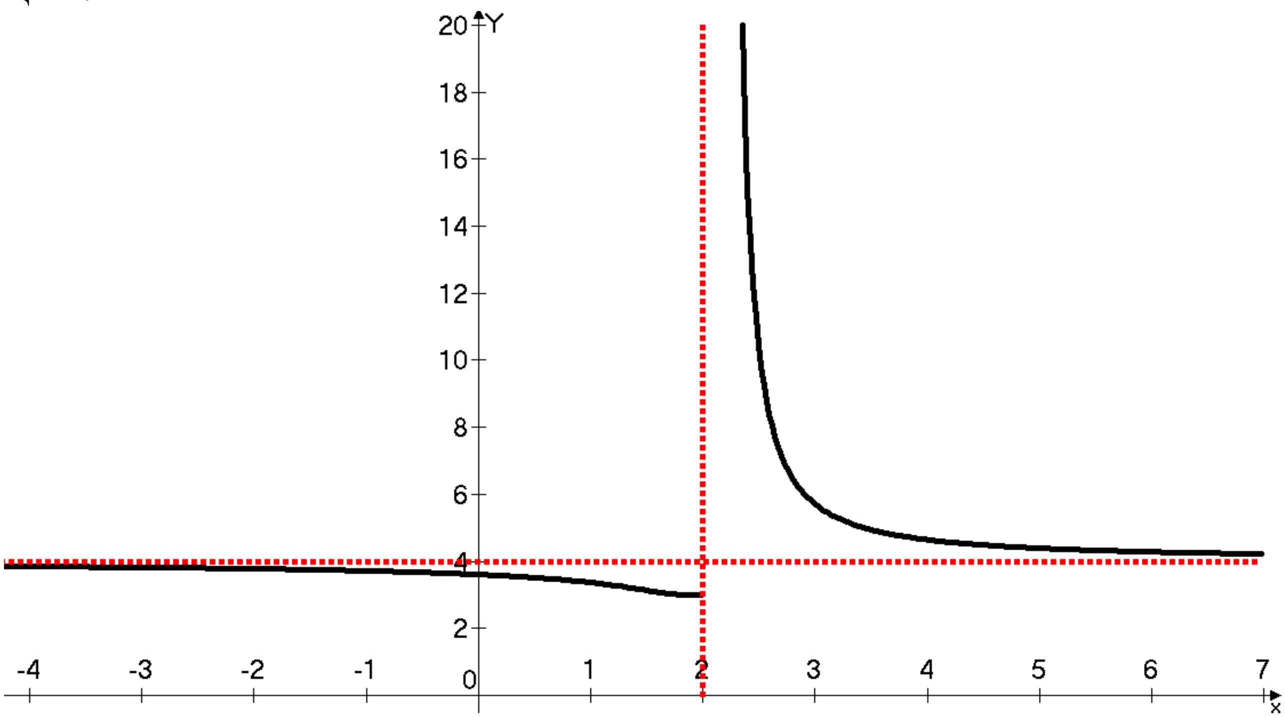


Рис. 3

9.2. Наклонные асимптоты графика функции

Определение 2. Прямая $y = k_1 x + b_1$ (k_1, $b_1 \in \mathbb{R}$, $k_1 \neq 0$) называется ***правой наклонной асимптотой*** к графику функции $f(x)$, если расстояние от этой прямой до графика функции $y = f(x)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Определение 3. Прямая $y = k_2 x + b_2$ (k_2, $b_2 \in \mathbb{R}$, $k_2 \neq 0$) называется ***левой наклонной асимптотой*** к графику функции $f(x)$, если расстояние от этой прямой до графика функции $y = f(x)$ стремится к нулю при $x \to -\infty$.

Согласно определению, расстояние от наклонной асимптоты до графика функции должно стремиться к нулю при удалении точек графика этой функции от начала координат.

В общем случае для одной и той же функции правая и левая наклонные асимптоты различаются друг от друга, рис.4. Правая наклонная асимптота $y = -x - 2$, левая наклонная асимптота – $y = x + 2$.

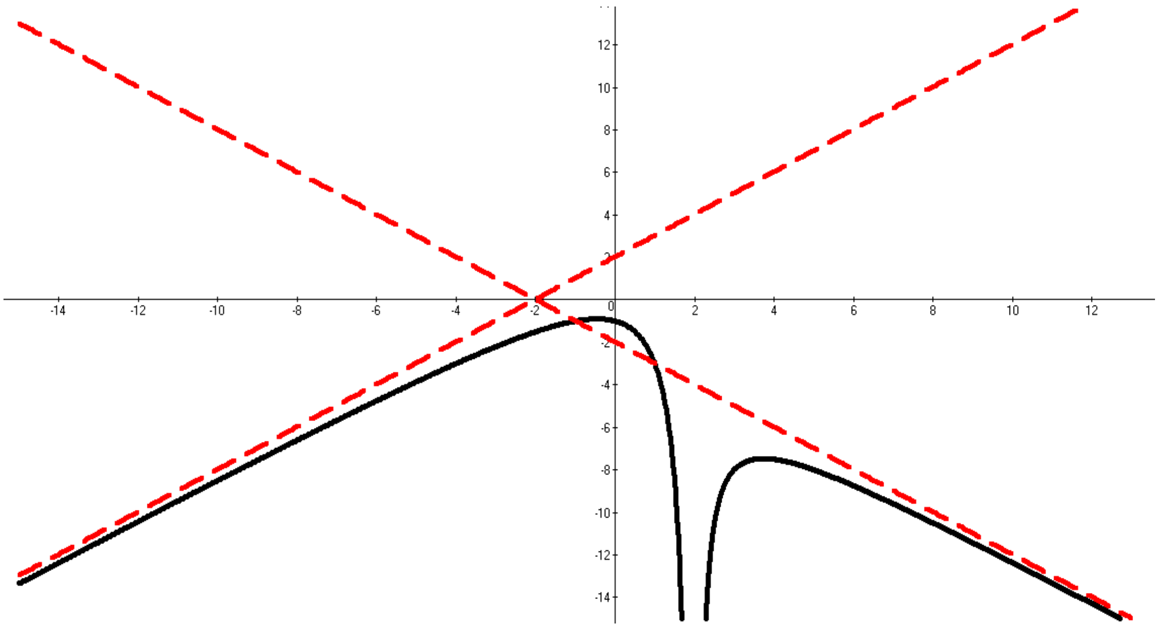


Рис. 4

Встречается большое количество функций, у которых правая и левая наклонная асимптоты совпадают, то есть $k_1 = k_2 = k$, $b_1 = b_2 = b$. В этом случае говорят, что график функции имеет **наклонную асимптоту** $y = kx + b$.

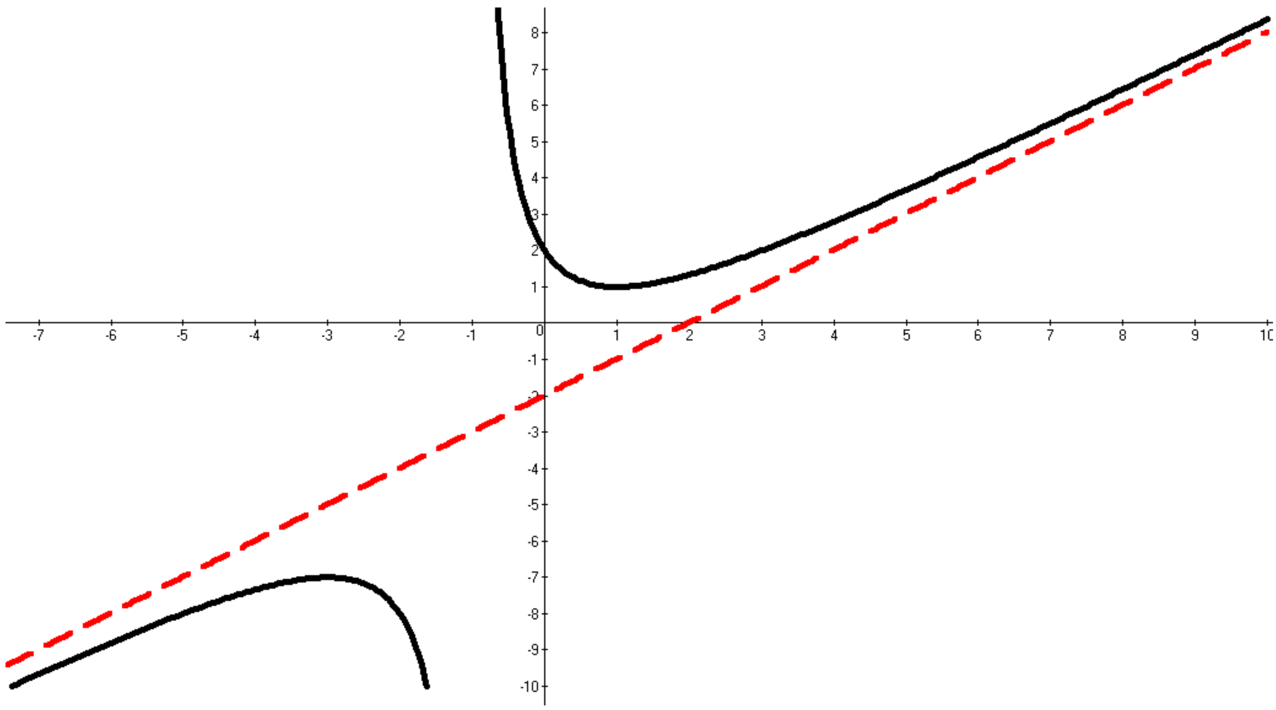


Рис. 5

Теорема. Прямая $y = k_1x + b_1$ $(k_1,\ b_1 \in \mathbb{R},\ k_1 \neq 0)$ является правой наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$ только в том случае, если коэффициенты $k_1,\ b_1$ удовлетворяют условиям

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - k_1x\right). \qquad (1)$$

Прямая $y = k_2x + b_2$ $(k_2,\ b_2 \in \mathbb{R},\ k_2 \neq 0)$ является левой наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$ только в том случае, если коэффициенты $k_2,\ b_2$ удовлетворяют условиям

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - k_2x\right). \qquad (2)$$

В случае, если график функции имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, то справедливы формулы

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right). \qquad (3)$$

Дробно-рациональная функция

$$\boxed{f(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{Q_n(x)}},$$

где $P_{n+1}(x)$, $Q_n(x)$ есть многочлены степеней $n+1$, n соответственно относительно переменной x, имеет правую и левую наклонные асимптоты, совпадающие друг с другом (в этом случае имеется общая наклонная асимптота).

Пример 2. Написать уравнение наклонной асимптоты к графику функции $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-2}$. Построить схематично график функции (по знаниям асимптот).

Решение. 1) Область определения $D(f)$ функции:

$$D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty).$$

Точкой разрыва функции является точка: $x=2$ (знаменатель дроби обращается в нуль). Находим односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{\substack{x\to 2+0,\\ x>2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2+0,\\ x>2}} \frac{x^2+x}{x-2}=\left(\frac{(2+0)^2+(2+0)}{2+0-2}\right)=\left(\frac{6}{+0}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to 2-0,\\ x<2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2-0,\\ x<2}} \frac{x^2+x}{x-2}=\left(\frac{(2-0)^2+(2-0)}{2-0-2}\right)=\left(\frac{6}{-0}\right)=-\infty.$$

Прямая $x=2$ – вертикальная асимптота.

2) Воспользуемся формулами (3) для определения коэффициентов k, b:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+1/x)}{x(1-2/x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x}{1-2/x}=\left(\frac{1+0}{1-0}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)-(x^2-2x)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}=3.$$

Прямая $y=x+3$ – наклонная асимптота к графику функции.

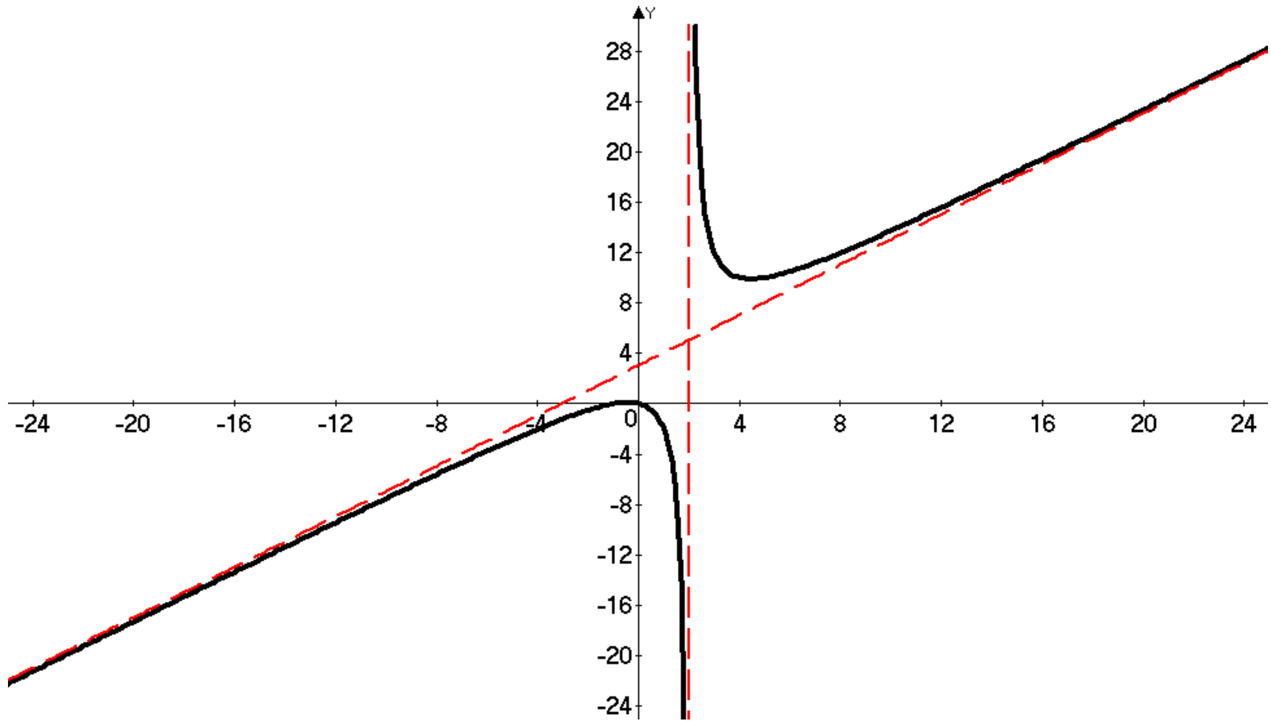


Рис. 6.

Вопрос 10. Общий план исследования функции одной переменной. Построение графиков функций

Общий план исследования функции:

1) Область определения $D(f)$ *функции.*

2) Непрерывность, точки разрыва (их классификация).

3) Четность, нечетность функции.

4) Асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные, горизонтальные).

5) Интервалы монотонности функции, точки экстремумов.

6) Интервалы выпуклости функции, точки перегиба.

7) Контрольные точки (пересечение с осями координат, значения функции в точках экстремумов, точках перегиба, другие удобные точки).

8) Построение графика.

Пример 1. Исследовать функцию

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1},$$

построить график.

Решение.

1) Область определения $D(f)=(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

2) Функция непрерывна на области определения $D(f)$ как дробно-рациональная функция. Так как функция не определена в точке $x=1$, то исследуем поведение функции в этой точке (вычисляем односторонние пределы):

$$\lim_{\substack{x\to 1-0,\\ x<1}} f(x)=\left[\frac{(1-0)^2-(1-0)+1}{1-0-1}\right]=\left[\frac{1}{-0}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to 1+0,\\ x>1}} f(x)=\left[\frac{(1+0)^2-(1+0)+1}{1+0-1}\right]=\left[\frac{1}{+0}\right]=+\infty.$$

Найденные пределы показывают, что $x_0=1-$ точка разрыва второго рода.

3) Исследование $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ на четность, нечетность:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-(-x)+1}{(-x)-1}=\frac{x^2+x+1}{-x-1}=-\frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Функция общего вида, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

4) Прямая $x=1$ – вертикальная асимптота. Находим наклонную асимптоту

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=1,\ k=1\neq 0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0,\ b=0.$$

Прямая $y=kx+b=1\cdot x+0=x$ есть наклонная асимптота.

5) Исследование на монотонность. Производная:

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

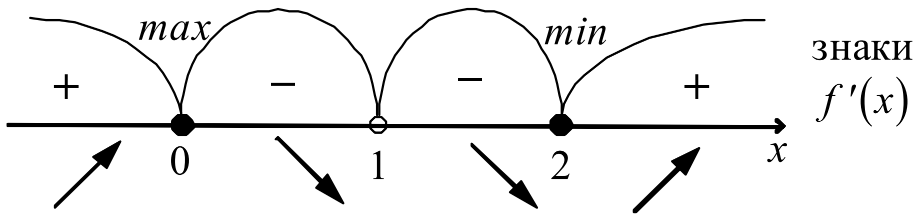
Приравнивая производную к нулю, получаем

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x(x-2)=0,\\ x\neq 1\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2,\end{array}\right.\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Точки $x_0^{(1)}=0$, $x_0^{(1)}=2$ – стационарные точки (в них производная обращается в нуль), точка $x=1$ не является точкой, подозрительной на экстремум, так как $D(f)=\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Исследуем знаки производной $f'(x)$ по методу интервалов:

$$f'(-1)=\frac{(-1)(-1-2)}{(-1-1)^2}=\frac{3}{4}>0,\ f'(1/2)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\right)}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=-3<0,$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-2\right)}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=-3<0,\ f'(3)=\frac{3(3-2)}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}>0.$$



Из метода интервалов видно, что функция $f(x)$ строго возрастает при $x \in (-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$, строго убывает при $x \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2)$. Точка $x_0^{(1)} = 0$ – точка максимума ($x_{\max} = 0$, $f(x_{\max}) = f(0) = -1$), $x_0^{(1)} = 2$ – точка минимума ($x_{\min} = 2$, $f(x_{\min}) = f(2) = 3$).

6) Вычисляем

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)\left[(x-1)^2 - (x^2-2x)\right]}{(x-1)^4} = \frac{2\left[x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x\right]}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

При $x \in (-\infty,\ 1)$: $f''(x) < 0$ (функция выпукла вверх), при $x \in (1,\ +\infty)$: $f''(x) > 0$ (функция выпукла вниз).

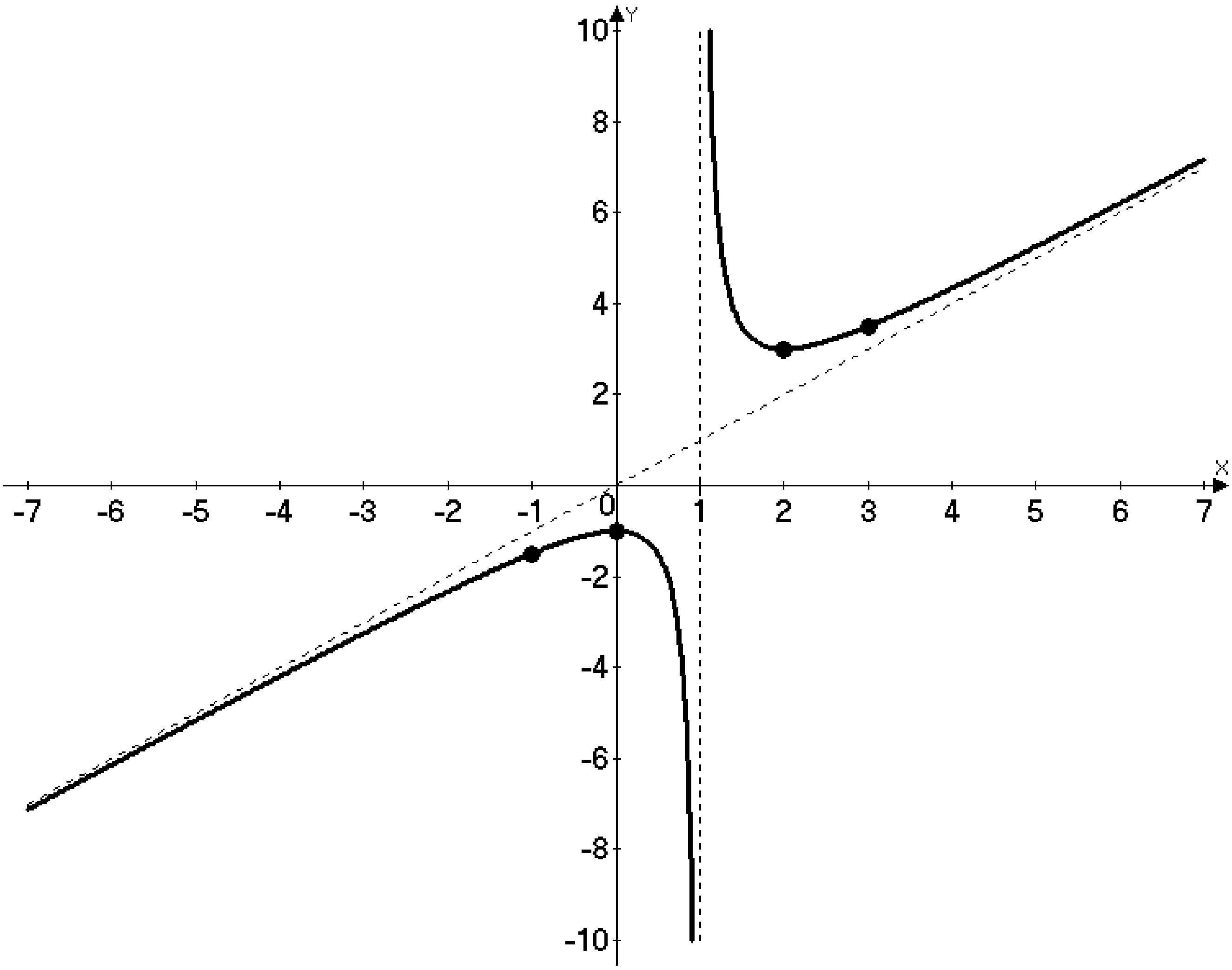
Точек перегиба график функции не имеет.

7) При $x = 0$ имеем $f(0) = -1$ (контрольная точка $A_1(0,\ -1)$ – точка максимума). При $y = 0$ уравнение $x^2 - x + 1 = 0$ не имеет действительных корней (график функции не пересекает ось абсцисс).

Контрольные точки $A_2(2,\ 3)$ (точка минимума), $A_3(3,\ 7/2)$, $A_4(-1,\ -3/2)$.

8) Для построения графика составим сводную таблицу.

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$
Характер моно-тонности	$\uparrow$	***max***	$\downarrow$	**не сущ.**	$\downarrow$	***min***	$\uparrow$
Характер выпук-лости	$\cap$	$\cap$	$\cap$	**не сущ.**	$\cup$	$\cup$	$\cup$
Значения функции	$f(-\infty)=-\infty$	**–1**		$f(1-0)=-\infty$, $f(1+0)=+\infty$		**3**	$f(+\infty)=+\infty$



Пример 2. Исследовать функцию

$$y = x \cdot e^{1/x}$$

и построить ее график.

Решение.

1) Область определения $D(f)=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

2) Функция непрерывна на $D(f)$ как композиция функций $1/x$, $e^{1/x}$, $xe^{1/x}$, непрерывных при $x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

Исследуем поведение функции в точке $x_0=0$ разрыва (вычисляем односторонние пределы):

$$\lim_{\substack{x\to 0-0,\\ x<0}} f(x)=\lim_{x\to 0-0} x\cdot e^{1/x}=\left[(0-0)\cdot e^{\frac{1}{0-0}}\right]=\left[(-0)\cdot e^{-\infty}\right]=\left[(-0)\cdot(+0)\right]=-0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0+0,\\ x>0}} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x\cdot e^{1/x}=\left[(0+0)\cdot e^{\frac{1}{0+0}}\right]=\left[(+0)\cdot e^{+\infty}\right]=(+0)\cdot(+\infty).$$

Имеем неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. Воспользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{e^{1/x}}{1/x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\left(e^{1/x}\right)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+0} e^{1/x}=+\infty .$$

Найденные пределы показывают, что $x_0=0$ – точка разрыва второго рода.

3) Функция общего вида, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

4) Прямая $x=0$ – вертикальная асимптота.

Находим наклонную асимптоту:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{1/x}}{x}=\lim_{x\to+\infty} e^{1/x}=\left[e^{\frac{1}{+\infty}}\right]=\left[e^{+0}\right]=1,\quad k=1\neq 0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)\right)=\left((+\infty)\cdot(+0)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=\left(\frac{+0}{+0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{1/x}-1\right)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty} e^{1/x}=\left[e^{+0}\right]=1.$$

Прямая $y = x + 1$ – наклонная асимптота на $+\infty$ (аналогично можно показать, что прямая $y = x + 1$ – наклонная асимптота на $-\infty$).

5) Исследование на монотонность и экстремумы:

$$y' = e^{1/x} \cdot \frac{x-1}{x}.$$

Знак производной зависит от знака выражения $\dfrac{x-1}{x}$. Методом интервалов непосредственно убеждаемся, что функция строго монотонно возрастает при $x \in (-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty)$, строго монотонно убывает при $x \in (0,\ 1)$, точка $x_0^{(1)} = 1$ – точка минимума ($f(1) = e$, точка $A_1(1,\ e)$).

6) Вычисляем вторую производную:

$$y'' = \left(e^{1/x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)' = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{1/x}\frac{1}{x^2} =$$

$$= e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^3}.$$

При $x \in (-\infty,\ 0)$: $y'' < 0$ (функция выпукла вверх $\cap$), при $x \in (0,\ +\infty)$: $y'' > 0$ (функция выпукла вниз $\cup$), функция не имеет точек перегиба.

7) Контрольные точки: нет пересечений ни с одной из осей координат, на графике функции отмечаем точку минимума $A_1(1,\ e)$.

8) Для построения графика составим сводную таблицу.

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ +\infty)$
Характер монотонности	$\uparrow$	–	$\downarrow$	**min**	$\uparrow$
Характер выпуклости	$\cap$	–	$\cup$	$\cup$	$\cup$
Значения функции	$f(-\infty)=-\infty$	Разрыв 2-го рода, $f(0-0)=-0$, $f(0+0)=+\infty$		$f(1)=e\approx 2{,}71$	$f(+\infty)=+\infty$