Вопрос 4. Метод интегрирования по частям неопределенного интеграла

Известно, что если $u = u(x), v = v(x)$, то

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Взяв интегралы от обеих частей последнего равенства, получим

$$\int d(uv) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv.$$

Учитывая, что $\int d(uv) = uv$, получим формулу

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}, \qquad (4.1)$$

или

Формула (4.1) называется ***формулой интегрирования по частям неопределенного интеграла.***

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение представляется в виде произведения двух множителей: $u = u(x),\ \ dv = v'(x)dx$, затем выполняются два интегрирования:

1) находится функция $v = v(x),\ \ v = \int dv = \int v'(x)dx$ (постоянная C принимается равной нулю),

2) вычисляется интеграл $\int v(x)u'(x)dx$ (который возможно, легче, чем исходный).

При этом следует учитывать, что обычно к функции $u(x)$ следует относить множители, которые упрощаются при дифференцировании, а все остальные множители – к dv.

Виды интегралов, которые можно вычислить, используя метод интегрирования по частям

($P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ – многочлен степени n).

	Вид интеграла	Метод замены
1	$\int P_n(x)\cdot\begin{Bmatrix}\sin\alpha x\\ \cos\alpha x\\ e^{\alpha x}\end{Bmatrix}dx$	$u=P_n(x)$, применять метод интегрирования по частям n-раз, обозначая через u очередную производную от $P_n(x)$
2	$\int\begin{Bmatrix}\arcsin x\\ \arccos x\\ arctgx\\ arcctgx,\\ \ln x\end{Bmatrix}\cdot P_n(x)dx$	$\begin{Bmatrix}u=\arcsin\alpha x, & dv=P_n(x)dx,\\ u=\arccos\alpha x, & dv=P_n(x)dx,\\ u=arctg\alpha x, & dv=P_n(x)dx,\\ u=arcctg\alpha x, & dv=P_n(x)dx,\\ u=\ln\alpha x, & dv=P_n(x)dx\end{Bmatrix}$

Пример 4.1. Найти неопределенный интеграл

$$I=\int(2x+3)\sin 2xdx.$$

Решение. Интеграл относится к интегралу первого типу, где $P_1(x)=2x+3$. Примем $u=u(x)=(2x+3)$, $dv=\sin 2xdx$:

$$I=\int(2x+3)\sin 2xdx=\left|\begin{matrix}u=2x+3, & dv=\sin 2xdx,\\ du=2dx, & v=\int dv=\\ =\int\sin 2xdx=-\dfrac{\cos 2x}{2} & \end{matrix}\right|=(2x+3)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)-$$

$$-\int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)2dx=(2x+3)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)+\int\cos(2x)dx=$$

$$=(2x+3)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)+\frac{\sin 2x}{2}+C,\quad C=const.$$

Ответ:

$$I = (2x+3)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \frac{\sin 2x}{2} + C, \quad C = const.$$

В некоторых случаях приходится несколько раз применять метод интегрирования по частям.

Пример 4.2. Найти неопределенный интеграл

$$I = \int (x^2 + x)e^x dx.$$

Решение: Представленный интеграл относится к интегралу первого типа ($P_2(x) = x^2 + x$). Вычисляем интеграл по формуле (4.1), применяя ее два раза ($n = 2$):

$$\int \underbrace{(x^2+x)}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \begin{vmatrix} u = x^2 + x, & dv = e^x dx, \\ du = (2x+1)dx, & v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2+x)e^x - \int (2x+1)e^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 2x+1, & dv = e^x dx, \\ du = 2dx, & v = \int dv = e^x \end{vmatrix} = (x^2+x)e^x - \left((2x+1)e^x - \int 2e^x dx\right) =$$

$$(x^2+x)e^x - \left((2x+1)e^x - 2e^x + C\right) =$$

$$= (x^2+x)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - x + 1) + C.$$

Ответ: $I = e^x(x^2 - x + 1) + C.$

Пример 4.3. Найти интеграл

$$I = \int x^2 \cdot \ln x dx.$$

Решение: Представленный интеграл относится к интегралу второго типа ($P_2(x) = x^2$).

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x^2 dx}_{dv} = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x^2 dx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, \ v = \int dv = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \underbrace{\int x^2 dx}_{= \frac{x^3}{3}} = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C =$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{9} \cdot x^3 + C.$$

Ответ: $I = \ln x \cdot \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{9} \cdot x^3 + C.$

5. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (a \neq 0), \qquad (5.1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (a \neq 0) \qquad (5.2)$$

в зависимости от знака a и знака дискриминанта квадратного трехчлена ax^2+bx+c приводятся путем выделения полного квадрата с последующей линейной заменой к табличным интегралам **Т14** – **Т17**.

Пример 5.1. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$.

Решение: Выделим полный квадрат квадратного трехчлена $x^2-2x+5=\left(x^2-2x+1\right)+4=(x-1)^2+4$.

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+5}=\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}=\begin{vmatrix} u=x-1 \\ du=dx \end{vmatrix}=\int \frac{d(x+1)}{(x-1)^2+4}=\underbrace{\int \frac{du}{u^2+4}}_{T14}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{u}{2}\right)+C=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$$

Пример 5.2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$.

Решение: Выделяем полный квадрат квадратного трехчлена $x^2-x-2=\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$.

Тогда

$$\int\frac{dx}{x^2-x-2}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\left|\begin{matrix}u=x-\frac{1}{2}\\ du=dx\end{matrix}\right|=\int\frac{du}{u^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{u-\frac{3}{2}}{u+\frac{3}{2}}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

Рассмотрим интегралы вида

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c}\qquad (a\neq 0),\qquad (5.3)$$

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\qquad (a\neq 0).\qquad (5.4)$$

При вычислении интегралов (5.3), (5.4) сначала выделяют полный квадрат в квадратном трехчлене ax^2+bx+c. Затем делают линейную замену, в результате чего исходный интеграл можно разбить на два интеграла, один из которых является табличным интегралом **T14 – T17**, а другой вычисляется методом подведения функции под знак дифференциала.

Пример 5.3. Найти интеграл $I=\int\frac{(5x-1)dx}{x^2-2x+5}$.

Решение: Выделяем полный квадрат $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$. Тогда

$$I=\int\frac{(5x-1)}{(x-1)^2+4}dx=\left|\begin{matrix}t=x-1,\\ x=t+1,\\ dt=dx\end{matrix}\right|=\int\frac{5(t+1)-1}{t^2+4}dt=\int\frac{5t+4}{t^2+4}dt.$$

Полученный интеграл разбиваем на два интеграла

$$I=\int\frac{5t+4}{t^2+4}dt=5\int\frac{tdt}{t^2+4}+4\int\frac{dt}{t^2+4}.$$

Второй интеграл является табличным:

$$4\int \frac{dt}{t^2+4} = \int \frac{dt}{2^2+t^2} = 4\cdot\frac{1}{2}arctg\left(\frac{t}{2}\right) = 2arctg\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

Первый интеграл вычисляем методом подведения функции под знак дифференциала:

$$5\int \frac{tdt}{t^2+4} = \left| \begin{array}{l} u = t^2+4, \\ du = 2tdt, \\ tdt = du/2 \end{array} \right| = \frac{5}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{5}{2}\ln|u| + C = \frac{5}{2}\ln\left|t^2+4\right| + C =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left(\left(x-1\right)^2+4\right) + C.$$

В итоге имеем

$$I = \frac{5}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right) + 2arctg\left(\frac{x-1}{2}\right) + C,\ C = const.$$