Тема 10. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Вопрос 1. Понятие функции одной переменной. Элементы топологии

Представление о функции многих переменных рассмотрим на примерах.

Пример 1.1. Площадь прямоугольника по двум сторонам a,b: $S=a\cdot b$. Если длины сторон a,b рассматривать как независимые переменные, то площадь $S=a\cdot b-$функция двух переменных a,b ($a>0,b>0$).

Пример 1.2. Площадь треугольника по двум сторонам a,b и углу α между ними $S=a\cdot b\cdot\sin\alpha$ есть функция трех переменных a,b,α ($a>0,b>0$).

Определение 1.1. Рассмотрим множество $D(f)$ точек $z=f(x,y)\in\mathbf{R}$ плоскости $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Если каждой точке $M(x,y)\in D(f)$ поставлено в соответствие единственное число $z=f(x,y)\in\mathbf{R}$, то говорят, что на множестве $D(f)$ задана функция двух независимых переменных x,y:

$$\boxed{f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ z=f(x,y),\ (x,y)\in D(f)}.$$

Множество $D(f)$ называется ***областью определения*** функции f. Переменные $x,y-$независимые переменные, число $z=f(x,y)$ называется значением функции f в точке $M(x,y)$.

Функцию $z=f(x,y)$ от двух переменных можно изобразить в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная декартова система координат $OXYZ$ в виде геометрического места точек $(x,y,f(x,y))$, а область определения – на плоскости XOY .

Пример 1.3. Геометрическим местом точек (**графиком поверхности**) для функции

$$z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2},\ \ (x,y)\in D(f)$$

является верхняя половина шаровой поверхности (рис. 1).

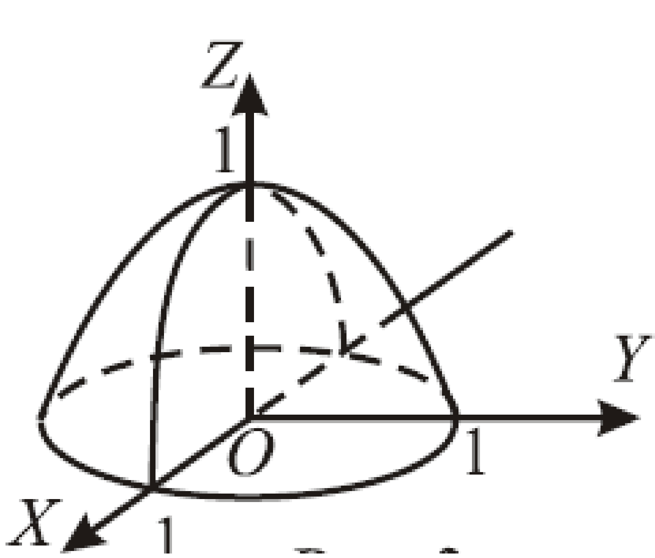

Рис.1.

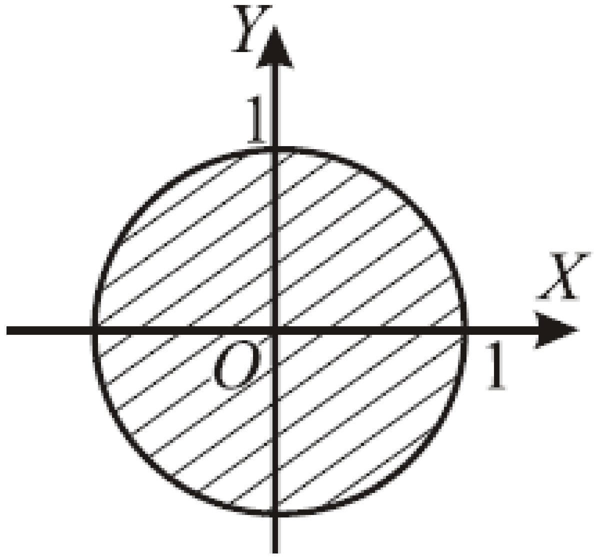

Рис. 2.

Область определения $D(f)$ функции находится, исходя из условия неотрицательности подкоренного выражения (рис. 2):

$$D(f)=\{M(x,y):\ 1-x^2-y^2\geq 0\}=\{M(x,y):\ x^2+y^2\leq 1\}$$

(круг с центром в начале координат, радиуса 1).

Определение 1.2. ***Линией уровня*** функции f называется множество точек $M(x,y)\in D(f)$, в которых функция f принимает одинаковые (постоянные) значения:

$$f(x,y)=c=const.$$

Задавая различные допустимые значения c, получим ***семейство линий уровня***.

Пример 1.4. Построить линии уровня функции

$$z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2},\quad (x,y)\in D(f).$$

По определению линии уровня равенство

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}=c\quad (c=const>0)\Rightarrow$$

$$1-x^2-y^2=c^2\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1-c^2\geq 0 & (*)\\ |c|\leq 1.\end{cases}$$

Уравнение (*) определяет при каждом значении $|c|<1$ круг радиуса 1 (рис. 3). При $|c|=1$ линия уровня вырождается в одну единственную точку (0,0).

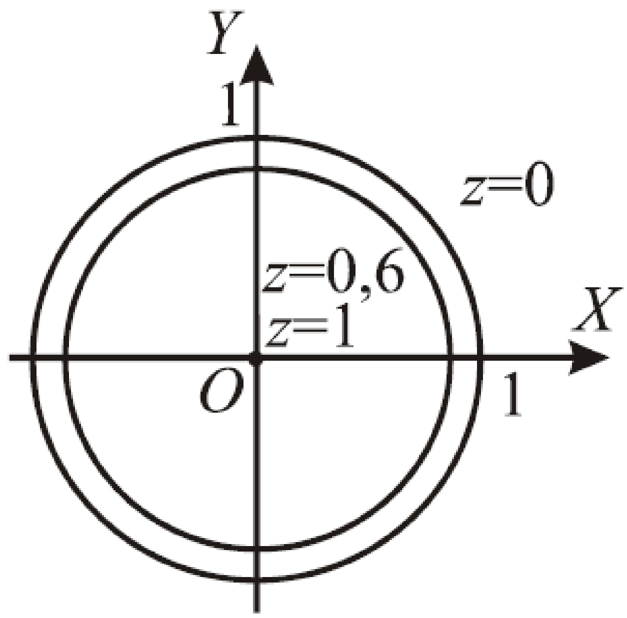

Рис. 3.

Введем определение функции многих переменных (ФМП).

Определение 1.3. Рассмотрим множество точек $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ плоскости $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\ldots\times\mathbf{R}$. Если каждой точке $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D(f)$ поставлено в соответствие единственное число $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}$, то говорят, что на множестве $D(f)$ задана функция n переменных

$$f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\ldots\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

$$M(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D(f).$$

Множество $D(f)$ называется ***областью определения*** функции f. Переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$ − независимые переменные, число $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется значением функции f в точке $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D(f)$.

Рассмотрим элементы топологии на плоскости.

Определение 1.4. ***Расстоянием*** между точками $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ плоскости называется число

$$\boxed{\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}.$$

Определение 1.5. ***Открытым кругом*** радиуса $r>0$ с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется множество точек $M(x,y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2.$$

При этом любой открытый круг радиуса $\delta>0$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется δ***-окрестностью*** этой точки:

$$\boxed{U_\delta(M_0)=\left\{M(x,y):\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\right\}}.$$

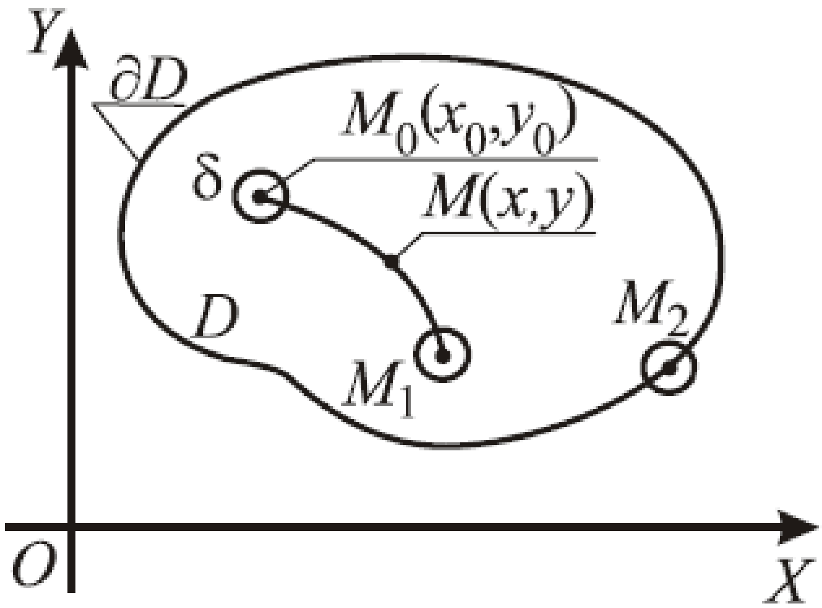

Рис. 4. Топология на плоскости.

Определение 1.6. Точка $M\in D$ называется ***внутренней*** точкой множества D, если существует δ-окрестность $U_\delta(M)$ (малого радиуса) точки M такая, что она полностью включается в множество D (на рисунке 4 это точки M_0, M_1, M).

Определение 1.7. Точка M называется ***граничной*** точкой множества D, если в любой ее δ-окрестности содержатся как точки из множества D, так и точки, не принадлежащие D (на рисунке 4 это точка M_2).

Определение 1.8. Совокупность всех граничных точек множества называется его ***границей*** и обозначается ∂D, или Г.

Определение 1.9. Множество D называется ***открытым***, если все его точки внутренние.

Определение 1.10. Связное открытое множество называется ***областью.***

Определение 1.11. Множество D называется ***ограниченным,*** если существует такая δ-окрестность начала координат $O(0,0)$, что все точки множества D принадлежат ей.

Вопрос 2. Предел функции двух переменных

Пусть функция $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D(f)$ определена в некоторой δ-окрестности $U_\delta(M_0)$ точки $M_0(x_0,y_0)$ (за исключением, быть может, самой этой точки).

Определение 2.1. Число A называется ***пределом*** функции f в точке $M_0(x_0,y_0)$, если для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует δ-окрестность $U_\delta(M_0)$ такая, что при всех $M(x,y)\in U_\delta(M_0)\setminus\{M_0\}$ выполняется неравенство

$$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon.$$

Предел функции f в точке $M_0(x_0,y_0)$ обозначается

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Пример 2.1. Показать, что функция

$$z=\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

имеет в точке (0,0) предел $A=0$.

◄ Функция не определена в точке $x_0=0$, $y_0=0$, но имеет предел в этой точке.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Тогда если $M(x,y)\in U_\delta(0,0)$, то по определению из того, что $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ следует

$$\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le 1,\ x^2+y^2\ge 0\Rightarrow\left|f(x,y)-0\right|=$$

$$=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|<\delta^2.$$

Положив $\varepsilon=\sqrt{\delta}$, получаем необходимое неравенство.►

Пример 2.2. Показать, что функция

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

в точке (0,0) не имеет конечного предела A.

Решение. Сделаем замену переменной $y=kx,\ k=const$. При этом

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2k}{1+k^2}.$$

При разных значениях k получим разные значения предела:

$$k=0:\ \lim_{x\to 0}\frac{2k}{1+k^2}=0,$$

$$k=1:\ \lim_{x\to 0}\frac{2k}{1+k^2}=\frac{2\cdot 1}{1+1}=1.$$

Так как пределы разные, то функция предела в (0,0) не имеет.

Пример 2.3. Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{xy}.$$

◄ Функция не определена на оси абсцисс, но в точке $(0;2)$ имеет предел. В самом деле, сделав замену $z=xy$, имеем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{xy}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1.$$ ►

Рассмотрим поведение функции двух переменных на бесконечности.

Определение 2.2. ***Окрестностью*** $U_\delta(\infty)$ точки “∞” (бесконечно удаленной точки) называется множество точек $M(x,y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>\delta^2,$$

где $\delta>0$ – достаточно большое число.

Определение 2.3. Число A называется ***пределом*** функции f в точке "∞" ($x\to\infty$, $y\to\infty$), если для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует δ-окрестность $U_\delta(\infty)$ точки "∞" такая, что при всех $M(x,y)\in U_\delta(\infty)$ выполняется неравенство

$$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon.$$

Предел функции f в точке "∞" обозначается

$$A=\lim_{\substack{x\to\infty,\\ y\to\infty}} f(x,y).$$

Пример 2.4. Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x\to\infty,\\ y\to\infty}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

◄ Введем полярные координаты $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, тогда $(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=r^2\sin\dfrac{1}{r^2}$.

Из условия $x,y\to\infty$, вытекает, что $r\to\infty$ и

$$\lim_{\substack{x\to\infty,\\ y\to\infty}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{r\to\infty}r^2\sin\frac{1}{r^2}.$$

Делая замену $t=1/r^2$, получим

$$\lim_{r\to\infty}r^2\sin\frac{1}{r^2}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\sin t=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Вопрос 3. Непрерывность функции. Точки разрыва функции

Функция $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D(f)$ определена в δ-окрестности $U_\delta(M_0)$ точки $M_0(x_0,y_0)$ (включая и саму точку).

Определение 3.1. Функция f называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0,y_0)$, если предел функции в этой точке существует, и он равен значению функции в данной точке:

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Функция f называется непрерывной на множестве $D(f)$, если она непрерывна в каждой точке $M(x,y)\in D(f)$.

Условие непрерывности $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) можно записать в эквивалентной форме:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0).$$

Можно ввести приращение Δz функции $z=f(x,y)$:

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y).$$

Это означает, что условие непрерывности функции в точке (x,y) эквивалентно выполнению равенства

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0.$$

Пример 3.1. Показать, что функция $f(x,y)=xy+x+y+1$ **непрерывна** в произвольной точке $M(x,y)\in D(f)$.

Решение. Преобразуем функцию в виде

$$f(x,y)=xy+x+y+1=(x+1)(y+1).$$

Найдем приращение $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$:

$$\Delta z=(x+\Delta x+1)(y+\Delta y+1)-(x+1)(y+1)=$$

$$=(y+1)\Delta x+(x+1)\Delta y+\Delta x\Delta y,$$

При этом предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}} \big((y+1)\Delta x + (x+1)\Delta y + \Delta x\Delta y\big) =$$

$$= (y+1)\cdot 0 + (x+1)\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0.$$

Определение 3.2. Точка $M_0(x_0, y_0)$ множества, в которой функция не является непрерывной, называется ***точкой разрыва***.

Определение 3.3. Точка $M_0(x_0, y_0)$ разрыва функции называется ***точкой устранимого разрыва***, если функция f в данной точке имеет конечный предел, не совпадающий со значением функции f в этой точке:

$$\exists A = \lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} f(x,y) \in \mathbf{R},\ A \neq f(x_0, y_0).$$

Определение 3.4. Точка $M_0(x_0, y_0)$ разрыва функции называется ***точкой неустранимого разрыва***, если функция f в данной точке вообще не имеет конечного предела.

Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва.

Пример 3.2. Для функции $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ точка (0,0) (начало координат) является изолированной точкой разрыва. При этом

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{0} = \infty .$$

Точка (0,0) есть точка неустранимого разрыва (так как предел бесконечный).

Пример 3.3. Для функции $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2}$ точками разрыва являются точки вида (x,x), $(x,-x)$ (функция имеет две линии разрыва – прямые $y = x$, $y = -x$). Все точки – неустранимые точки разрыва функции.

Пример 3.4. Для функции

$$f(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

точка $(0,0)$ есть точка устранимого разрыва, так как предел в точке $(0,0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}=\left[e^{-\frac{1}{0}}\right]=\left[e^{-\infty}\right]=0.$$

Если доопределить функцию

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x\neq 0, y\neq 0,\\ 0 & , \ x=0, y=0\end{cases}$$

то она будет непрерывной в любой точке (включая и точку (0,0)).