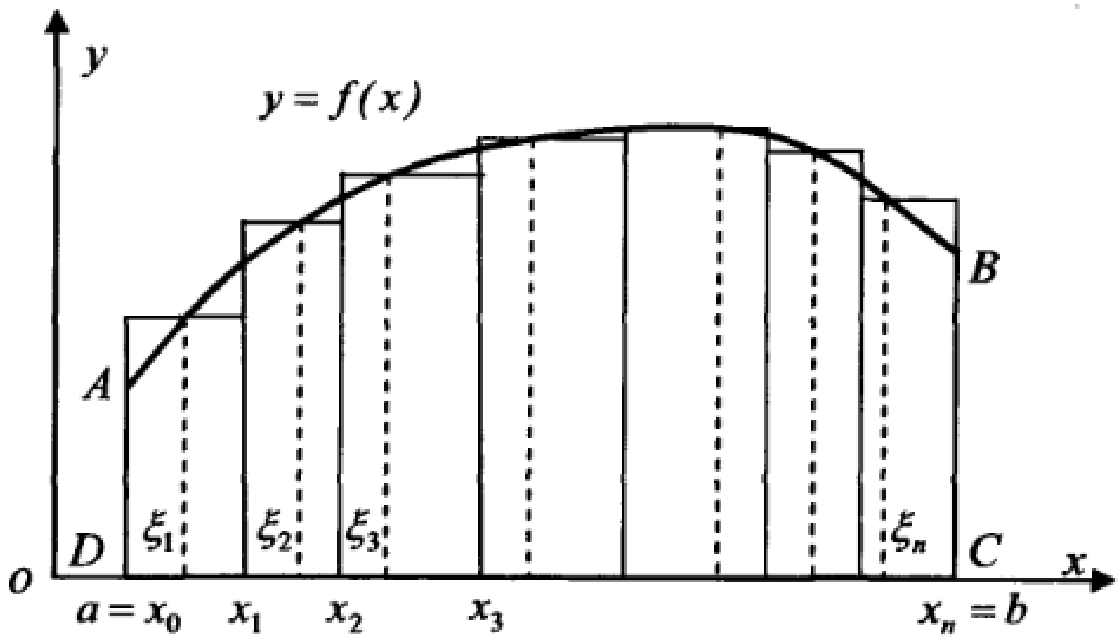
Тема 9. Определенный интеграл функции одной переменной

1. Понятие определенного интеграла функции одной переменной

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b.$$

Набор точек $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ будем называть ***разбиением отрезка*** $[a,b]$. Выберем в каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную промежуточную точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.



Определение 1. ***Интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, соответствующей данному разбиению и выбору промежуточных точек ξ_i $(i = \overline{1, n})$, называют сумму

$$\boxed{\sigma_n \equiv \sigma_n^{[a,b]} \equiv \sigma_n^{(f)} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}.$$

Определение 2. ***Диаметром разбиения*** называют максимальное из длин частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\boxed{\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \{\Delta x_i\}}.$$

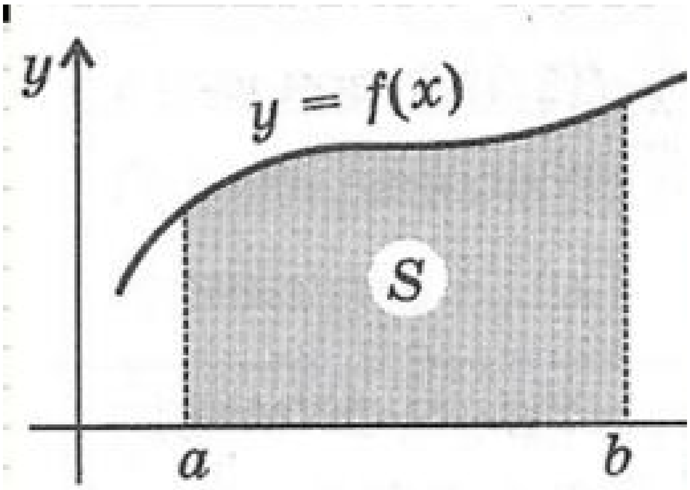
Определение 3. Если существует конечный предел последовательности $\{\sigma_n\}$ интегральных сумм при $n \to \infty$ и $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{\Delta x_i\} \to 0$, который не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и не зависит от выбора точек ξ_i, то он называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на $[a, b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0, \\ n \to \infty}} \sigma_n = \lim_{\substack{\lambda \to 0, \\ n \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right)}. \qquad (1.1)$$

Определение 4. Если определенный интеграл (1.1) существует, то функцию $f(x)$ называют ***интегрируемой*** на отрезке $[a, b]$ ($[a, b]$ – отрезок интегрирования).

Геометрический смысл определенного интеграла функции одной переменной. Если функция $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a, b]$ (при всех $x \in [a, b]$: $f(x) \geq 0$), то площадь соответствующей ***криволинейной трапеции***, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, по бокам вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ равна

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx} \qquad (1.2)$$



2. Свойства определенного интеграла

Свойство 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то для любой точки $c\in[a,b]$: $\int\limits_c^c f(x)dx=0$ (определенный интеграл, у которого верхний и нижний пределы совпадают, равен нулю).

Доказательство. При любом способе разбиения отрезка $[a,b]$ и любом выборе точек $\xi_i\in[x_{i-1},\, x_i]\subset[c,c]$: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=0$, интегральная сумма $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot 0=0$, значит,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\lambda\to0,\\ n\to\infty}}\sigma_n=0.$$

Свойство 2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx.$$

(если поменять пределы интегрирования a,b, то определенный интеграл изменит свой знак на противоположный).

Доказательство. При любом способе разбиения $[a,b]$ и любом выборе точек ξ_i интегральная сумма $\sigma_n^{[a,b]}=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, значит,

$\sigma_n^{[b,a]}=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)(-\Delta x_i)=-\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=-\sigma_n^{[a,b]}$, следовательно,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx.$$

Свойство 3 (аддитивность интеграла). Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то для любого $c\in[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Разбиение отрезка $[a,b]$ проведем таким образом, чтобы точка $c\in[a,b]$ попала в одну из точек x_k, получим два разбиения:

отрезка $[a,c]$: $a=x_0<x_1<\ldots<x_i<\ldots<x_k=c$,

отрезка $[c,b]$: $c=x_k<x_{k+1}<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b$.

Тогда интегральная сумма

$$\sigma_n^{[a,b]}=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sigma_n^{[a,c]}+\sigma_n^{[c,b]},$$

определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$

Пример 1. Пусть функция $f(x)$, интегрируемая на $[0,7]$, задана в

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \textit{при} \quad 0\le x<3; \\ f_2(x) & \textit{при} \quad 3\le x\le 7. \end{cases}$$

Вычислить интеграл $I=\int_2^5 f(x)dx$.

Решение. Применяя свойство 3, получим

$$I=\int_2^5 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx=\int_2^3 f_1(x)dx+\int_3^5 f_2(x)dx.$$

Свойство 4. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $k\neq 0$, то имеет место равенство

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx.$$

(постоянный множитель $k \neq 0$ можно выносить за знак определенного интеграла)

Доказательство. По определению определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0, \\ n \to \infty}} \{k\sigma_n\} = k \cdot \lim_{\substack{\lambda \to 0, \\ n \to \infty}} \{\sigma_n\} = k\int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 5. Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то имеет место равенство

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. По определению определенного интеграла:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0, \\ n \to \infty}} \left\{\sigma_n^{(f)} \pm \sigma_n^{(g)}\right\} = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 6. Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и при всех $x \in [a,b]$: $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Доказательство. Так как при всех $x \in [a,b]$: $f(x) \leq g(x)$, то при любом способе разбиения отрезка $[a,b]$ на части получим

$$\sigma_n^{(f)} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i, \ \sigma_n^{(g)} = \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0, \\ n \to \infty}} \sigma_n^{(f)} \leq \lim_{\substack{\lambda \to 0, \\ n \to \infty}} \sigma_n^{(g)} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 7. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и при всех $x \in [a,b]$: $f(x) \geq 0$ $(f(x) \leq 0)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (≤ 0).

(знак определенного интеграла знакопостоянной функции совпадает со знаком самой функции на этом отрезке)

Свойство 8. Определенный интеграл зависит только от величин нижнего и верхнего пределов интегрирования и от вида подинтегральной функции, и не зависит от переменной интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \ldots = \int_a^b f(u)du.$$

Свойство 9 (об оценке интеграла). Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Доказательство. Так как $m = \min\limits_{[a,b]} f(x),\ \ M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, то при любом способе разбиения отрезка $[a, b]$ на части получим

$$m \le f(\xi_i) \le M.$$

Тогда для интегральной суммы

$$\sigma_n^{(f)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\ge m} \Delta x_i \ge \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a) \Rightarrow \sigma_n^{(f)} \ge m(b-a),$$

$$\sigma_n^{(f)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\le M} \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a) \Rightarrow \sigma_n^{(f)} \le M(b-a),$$

откуда следует оценка интеграла.

Пример 2. Найти нижнюю и верхнюю оценки интеграла

$$I = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{4+3\sin x}dx.$$

Решение. Известно, что $-1 \le \sin x \le 1$.

Тогда получаем следующие неравенства

$$-1 \le \sin x \le 1 \ \Leftrightarrow\ -3 \le 3\sin x \le 3 \ \Leftrightarrow\ 4-3 \le 4+3\sin x \le 4+3 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 1 \le 4+3\sin x \le 7 \ \Leftrightarrow\ 1 \ge \frac{1}{4+3\sin x} \ge \frac{1}{7} \Leftrightarrow\ \frac{1}{7} \le \frac{1}{4+3\sin x} \le 1.$$

Из последнего двойного неравенства заключаем, что

$$m = \frac{1}{7} \le f(x) \le 1 = M.$$

Используя свойство 9, получаем

$$\frac{1}{7}(2\pi-\pi)\le I\le 1(2\pi-\pi)\Leftrightarrow\frac{\pi}{7}\le I\le\pi,$$

то есть нижняя оценка определенного интеграла есть $\frac{\pi}{7}$, а верхней оценкой – число π.

Свойство 10 (теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на $[a,b]$ существует точка $c\in[a,b]$ такая, что

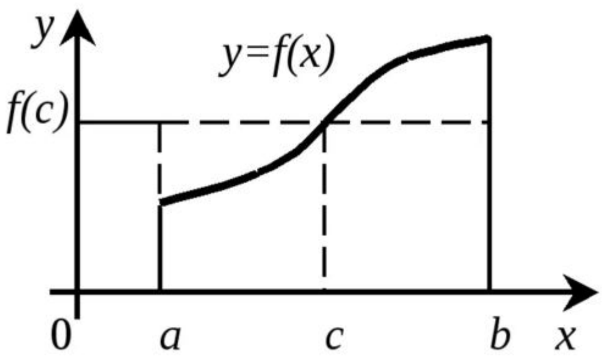
$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(c).$$

Значение

$$\boxed{f(c)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx}$$

называется ***средним значением*** функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Свойство означает, что на $[a,b]$ найдется точка c такая, что площадь под кривой $y=f(x)$ равна площади прямоугольника с высотой $f(c)$.



Свойство 11. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-a,a]$, является **четной** (**нечетной**) на этом отрезке, то

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\cdot\int_0^a f(x)dx}\quad\left(\textbf{соответственно}\ \boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx=0}\right).$$

Пример 3. Пусть функция $f(x)-$ нечетная на отрезке $[-a,a]$, функция $g(x)-$ четная на отрезке $[-a,a]$ (обе функции интегрируемы на данном отрезке). Известно, что

$$\int_0^a f^2(x)dx=1,\quad \int_0^a g^2(x)dx=3.$$

Найти $I=\int_{-a}^{a}\left(f(x)+g(x)\right)^2dx.$

Решение. Вычисляем число

$$I=\int_{-a}^{a}\left(f(x)+g(x)\right)^2dx=\int_{-a}^{a}\left(f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)\right)dx=$$

$$=\int_{-a}^{a}f^2(x)dx+2\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx+\int_{-a}^{a}g^2(x)dx.$$

Так как функции $f^2(x)$, $g^2(x)$ являются <u>**четными**</u> на отрезке $[-a,a]$ (как квадраты исходных функций $f(x)$, $g(x)$), то по свойству 11 получим

$$\int_{-a}^{a}f^2(x)dx=2\int_{0}^{a}f^2(x)dx=2\cdot1=2,\quad \int_{-a}^{a}g^2(x)dx=2\int_{0}^{a}g^2(x)dx=2\cdot3=6.$$

Наоборот, функция $f(x)g(x)$ является <u>**нечетной**</u> (как произведение четной функции $f(x)$ на нечетную функцию $g(x)$):

$$f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot\left(-g(x)\right)=-f(x)\cdot g(x).$$

Поэтому на основании свойства 11 получим

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=0.$$

В результате получим

$$I=\int_{-a}^{a}f^2(x)dx+2\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx+\int_{-a}^{a}g^2(x)dx=2+6=8.$$