16. Условный экстремум функции многих переменных

Задана функция $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. В области D задана кривая L. Требуется найти экстремум (максимум или минимум) функции f для всех точек, которые лежат на кривой L. Такой экстремум называется ***условным экстремумом*** функции f.

Определение 16.1. Точка $M_0(x_0, y_0) \in L$ называется ***точкой условного максимума*** (***условного минимума***) функции f на кривой L, если найдется малая δ-окрестность $U_\delta(M_0)$, для всех точек $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$ и лежащих на кривой L, выполняется неравенство

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0)$$

$$\left(\textit{соответственно } f(x, y) \ge f(x_0, y_0)\right).$$

Пусть кривая L задана уравнением (**уравнением связи**)

$$\varphi(x, y) = 0. \qquad (16.1)$$

Задача условного экстремума – найти точку $M_0(x_0, y_0) \in L$, в которой $\varphi(x_0, y_0) = 0$, и в этой точке функция f принимает наибольшее (наименьшее) значение.

Решение задачи на условный экстремум при помощи метода множителей Лагранжа.

Пусть $M_0(x_0, y_0) \in L$ есть точка условного экстремума функции f при выполнении условия (16.1). Пусть уравнение (16.1) определяет непрерывную кривую, то есть непрерывно-дифференцируемую функцию $y = g(x)$. Тогда

$$\boxed{\left(f(x, g(x))\right)'_{x=x_0} = 0}.$$

Отсюда полный дифференциал

$$\boxed{df(M_0) = 0 \Rightarrow f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy = 0}. \qquad (16.2)$$

Из уравнения связи имеем полный дифференциал

$$\boxed{d\varphi(M_0)=0 \Rightarrow \varphi'_x(M_0)dx+\varphi'_y(M_0)dy=0}. \qquad (16.3)$$

Умножая равенство (16.3) на множитель λ и складывая с (16.2):

$$\left(f'_x(M_0)+\lambda\varphi'_x(M_0)\right)dx+\left(f'_y(M_0)+\lambda\varphi'_y(M_0)\right)dy=0.$$

Если предположить, что значение λ выбрано так, что

$$\boxed{f'_x(M_0)+\lambda\varphi'_x(M_0)=0},$$

то $f'_y(M_0)+\lambda\varphi'_y(M_0)=0$.

Итак, получаем следующую систему уравнений

$$\boxed{\begin{cases} f'_x(M_0)+\lambda\varphi'_x(M_0)=0, \\ f'_y(M_0)+\lambda\varphi'_y(M_0)=0, \\ \varphi(x_0, y_0)=0. \end{cases}} \qquad (16.4)$$

Если рассмотреть функцию трех переменных (**функцию Лагранжа**)

$$\boxed{F(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda\cdot\varphi(x, y)}, \qquad (16.5)$$

то система (16.4) определяет необходимое условие точки экстремума функции (16.5) в точке $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$. Действительно,

$$\begin{cases} F'_x(M_0)=f'_x(M_0)+\lambda\varphi'_x(M_0)=0, \\ F'_y(M_0)=f'_y(M_0)+\lambda\varphi'_y(M_0)=0, \\ F'_\lambda(M_0)=\varphi(x, y)=0. \end{cases}$$

Вывод: если $M_0(x_0, y_0)$ есть точка условного экстремума функции f при уравнении связи $\varphi(x, y)=0$, то точка (x_0, y_0, λ_0) есть стационарная точка функции Лагранжа (16.5) ((x_0, y_0, λ_0) называется **условно-стационарной точкой**).

Алгоритм нахождения условного экстремума Ф2П $z = f(x, y)$ при уравнении связи (16.1): $\varphi(x, y) = 0$.

1) Составить функцию Лагранжа (16.5),

2) найти частные производные

$$F'_x(x,y) = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y),$$

$$F'_y(x,y) = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y)$$

и составить систему уравнений вида (16.4)

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

для нахождения условно-стационарной точки,

3) найти координаты (x_0, y_0, λ_0) условно-стационарной точки,

4) Вопрос о существовании и типе условного экстремума решается на основании знака второго дифференциала $d^2F(M_0)$:

$$d^2F(M_0) = F''_{xx}(M_0)dx^2 + 2F''_{xy}(M_0)dxdy + F''_{yy}(M_0)dy^2$$

функции Лагранжа в точке (x_0, y_0, λ_0) при выполнении условия (16.3):

$$\begin{cases} d\varphi(M_0) = \varphi'_x(M_0)dx + \varphi'_y(M_0)dy = 0, \\ dx^2 + dy^2 \neq 0 \end{cases} \qquad (16.6)$$

(условие $dx^2 + dy^2 \neq 0$ означает, что дифференциалы dx, dy независимых переменных одновременно в нуль не обращаются).

При этом:

$d^2F(M_0) > 0 \;\Rightarrow\; M_0(x_0, y_0) -$ точка условного минимума,

$d^2F(M_0) < 0 \;\Rightarrow\; M_0(x_0, y_0) -$ точка условного максимума.

Пример 1. Функция $f(x,y)=x^2+xy+y^2$, уравнение связи $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$.

Решение.

1) Функция Лагранжа

$$F(x,\ y,\ \lambda)=f(x,\ y)+\lambda\cdot\varphi(x,\ y)=x^2+xy+y^2+$$
$$+\lambda\left(x^2+y^2-1\right).$$

2) Система для нахождения условно-стационарных точек:

$$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=2x+y+2\lambda x, \\ F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=2y+x+2\lambda y, \\ F'_\lambda=\varphi(x,\ y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x=0, \\ F'_y=0, \\ F'_\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2\lambda x=0, & \cdot(-y) \\ 2y+x+2\lambda y=0, & \cdot(x) \\ x^2+y^2 \qquad =1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2\lambda x=0, \\ x^2-y^2=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2\lambda x=0, \\ \left[\begin{array}{l} y=x, \\ y=-x, \end{array}\right. \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2\lambda x=0, \\ y=x, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} (A) \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x+y+2\lambda x=0, \\ y=-x, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} (B)$$

Решение системы (A): условно-стационарные точки

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{2}\right),\ M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{2}\right).$$

3) Вычисление второго дифференциала функции Лагранжа:

$$F''_{xx} = \left(2x + y + 2\lambda x\right)'_x = 2 + 2\lambda,\ \ F''_{yy} = \left(2y + x + 2\lambda y\right)'_y = 2 + 2\lambda,$$

$$F''_{xy} = \left(2x + y + 2\lambda x\right)'_y = 1.$$

В точке $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2}\right)$:

$$F''_{xx}\left(M_1\right) = 2 + 2\cdot\left(-3/2\right) = -1,\ \ F''_{yy}\left(M_1\right) = 2 + 2\cdot\left(-3/2\right) = -1,$$

$$F''_{xy}\left(M_1\right) = 1.$$

Второй дифференциал:

$$d^2F\left(M_0\right) = F''_{xx}\left(M_0\right)dx^2 + 2F''_{xy}\left(M_0\right)dxdy + F''_{yy}\left(M_0\right)dy^2 =$$

$$= \left(-1\right)dx^2 + 2dxdy + \left(-1\right)dy^2 = -\left(dx - dy\right)^2.$$

Условие (16.6):

$$\begin{cases} d\varphi\left(M_0\right) = \varphi'_x\left(M_0\right)dx + \varphi'_y\left(M_0\right)dy = 0, \\ dx^2 + dy^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x\right)_{M_0} dx + \left(2y\right)_{M_0} dy = 0, \\ dx^2 + dy^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}dx + \sqrt{2}dy = 0, \\ dx^2 + dy^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy = -dx, \\ dx^2 + dy^2 \neq 0. \end{cases}$$

При условии $dy = -dx$ (причем $dx \neq 0$) второй дифференциал примет вид

$$d^2F\left(M_0\right) = -\left(dx - dy\right)^2 = -\left(dx - \left(-dx\right)\right)^2 = -4dx^2 < 0.$$

Вывод: точка $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2}\right)$ есть точка условного максимума функции.

Обобщение на случай функции многих (n) переменных.

Опр. Функция $z = f(x_1,...,x_n)$ имеет *условный максимум* (*условный минимум*) в точке $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$, если существует такая окрестность точки M_0, для всех точек M которой $f(x_1,...,x_n) \neq f(x_1^0,...,x_n^0)$ удовлетворяющих уравнениям связи

$$\varphi_k(x_1,...,x_n) = 0, \text{ где } k = \overline{1,m};\ m < n,$$

выполняется неравенство

$$f(x_1^0,...,x_n^0) > f(x_1,...,x_n).$$

(соответственно $f(x_1^0,...,x_n^0) < f(x_1,...,x_n)$).

Задача нахождения условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум *функции Лагранжа*:

$$F(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1,...,x_n);$$

постоянные λ_k называются *множителями Лагранжа*.

При этом знак второго дифференциала d^2F в стационарной точке $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ определяет характер экстремума при условии, что дифференциалы $dx_1, dx_2,...,dx_n$ связаны соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(x_1^0,...,x_n^0)}{dx_i} dx_i = 0,$$

где $k = \overline{1,m}$ при $dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2 \neq 0$.

При этом:

$d^2F(M_0) > 0 \Rightarrow M_0(x_0, y_0) -$ точка условного минимума,

$d^2F(M_0) < 0 \Rightarrow M_0(x_0, y_0) -$ точка условного максимума.