Вопрос 8. Частные производные высших порядков

Дана функция $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D(f)$.

Пусть функция имеет частные производные $z'_x=\dfrac{\partial f}{\partial x},\ z'_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Если у функции $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (у функции $\dfrac{\partial f}{\partial y}$) переменных x,y существует частная производная $(z'_x)'_x=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)'_x$ (соответственно частная производная $(z'_y)'_y=\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)'_y$), то ее называют ***частной производной второго порядка.***

Обозначения частных производных второго порядка

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}=z''_{xx},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}=z''_{yy}.}$$

Если функция имеет следующие частные производные

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x,$$

то они называются ***смешанными производными второго порядка***. Обозначения

$$\boxed{(z'_x)'_y=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy},\quad (z'_y)'_x=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}.}$$

Пример 8.1. Найти для функции $z=f(x,y)=x^2+xy^3$ частные производные второго порядка.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$z'_x=\left(x^2+xy^3\right)'_x=2x+y^3,\quad z'_y=\left(x^2+xy^3\right)'_y=3xy^2.$$

Вычисляем частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2x + y^3\right)'_x = 2,\ z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(3xy^2\right)'_y = 6xy.$$

Смешанные частные производные второго порядка

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(2x + y^3\right)'_y = 3y^2,\ z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(3xy^2\right)'_x = 3y^2.$$

Теорема 8.1. Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они обязательно равны

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

(результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования).

По аналогии с частными производными второго порядка, для функции двух переменных можно ввести частные производные третьего порядка, как частные производные от частных производных второго порядка (если производные вычисляются по одной и той же переменной):

$$\left(z''_{xx}\right)'_x = z'''_{xxx}, \quad \left(z''_{yy}\right)'_y = z'''_{yyy}.$$

Эти частные производные обозначаются также как

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Можно ввести смешанные производные третьего порядка

$$\left(z''_{xx}\right)'_y = z'''_{xxy}, \quad \left(z''_{yy}\right)'_x = z'''_{yyx}, \quad \left(z''_{xy}\right)'_x = z'''_{xyx}, \quad \ldots$$

Имеет место равенство следующих смешанных производных третьего порядка (если все они непрерывны)

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$$

(проводится дифференцирование дважды по y и один раз по x, порядок дифференцирования роли не играет).

Вопрос 9. Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом первого порядка функции $z = f(x, y)$ называется выражение вида

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Определение 9.1. ***Дифференциалом второго порядка*** называется дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2 z = d(dz).$$

При этом при последующих дифференцированиях дифференциалы независимых переменных следует рассматривать как постоянные величины.

$$d^2 z = d(dz) = \left(z'_x dx + z'_y dy\right)'_x \cdot dx + \left(z'_x dx + z'_y dy\right)'_y \cdot dy =$$

$$= z''_{xx} dx^2 + z''_{yx} dy dx + z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2 =$$

$$= z''_{xx} dx^2 + 2 z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2.$$

Дифференциал второго порядка функции имеет вид

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2 z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2. \qquad (9.1)$$

Символическая формула записи дифференциала второго порядка

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z,$$

где в правой части формулы надо раскрыть скобки так, как если бы ∂, ∂x, ∂y, dx, dy были обычными алгебраическими множителями.

Пример 9.1. Найти для функции

$$z = f(x, y) = xy^3 - 3x^2 y^4 - 2x^3 y$$

дифференциал второго порядка в точке $M_0(x_0, y_0) = M_0(2, -1)$.

Решение. Частные производные имеют вид:

$z''_{xx} = -6y^4 - 12xy$, $z''_{yy} = 6xy - 36x^2y^2$,

$z''_{xy} = 3y^2 - 24xy^3 - 6x^2$.

Дифференциал второго порядка функции в точке имеет вид

$$d^2z = z''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2z''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + z''_{yy}(x_0, y_0)dy^2,$$

где $z''_{xx}(x_0, y_0)$, $z''_{xy}(x_0, y_0)$, $z''_{yy}(x_0, y_0)$ – значения частных производных второго порядка в точке (x_0, y_0).

$$z''_{xx}(x_0, y_0) = \left(-6y^4 - 12xy\right)_{\substack{x=2,\\ y=-1}} = 18,$$

$$z''_{yy}(x_0, y_0) = \left(6xy - 36x^2y^2\right)_{\substack{x=2,\\ y=-1}} = -156,$$

$$z''_{xy}(x_0, y_0) = \left(3y^2 - 24xy^3 - 6x^2\right)_{\substack{x=2,\\ y=-1}} = 27.$$

Дифференциал второго порядка в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$d^2z = 18dx^2 + 54dxdy - 156dy^2.$$

Определение 9.2. ***Дифференциалом третьего порядка*** называется дифференциал от дифференциала второго порядка:

$$d^3z = d\left(d^2z\right).$$

Используя символическую форму записи

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z,$$

получим

$$d^3z = z'''_{xxx}(x_0, y_0)dx^3 + 3z'''_{xxy}(x_0, y_0)dx^2dy +$$

$$+3z'''_{xyy}(x_0, y_0)dxdy^2 + z'''_{yyy}(x_0, y_0)dy^3.$$

Определение 9.3. ***Дифференциалом n-го порядка*** называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^nz = d\left(d^{n-1}z\right).$$

По аналогии с формулой Тейлора для Ф1П справедлива формула Тейлора для Ф2П (в виде дифференциалов)

$$f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+df\left(x_0,y_0\right)+\frac{1}{2!}d^2 f\left(x_0,y_0\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}d^n f\left(x_0,y_0\right)+R_{n+1}\left(x,y\right),$$

Вопрос 10. Дифференцирование сложных функций

Случай 1.

Теорема 10.1 (производная сложной функции одной независимой переменной).

Если функция $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $z=f(x,y)$ есть дифференцируемая функция переменных x, y; $x=x(t)$, $y=y(t)$ есть дифференцируемые функции одной независимой переменной t, то сложная функция

$$z(t)=f\big(x(t),\,y(t)\big)$$

также дифференцируема по t, причем ее **полная производная**

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\Leftrightarrow z'_t=f'_x\cdot x'_t+f'_y\cdot y'_t. \qquad (10.1)$$

Доказательство. Составим приращения переменных x, y по независимой переменной t:

$$\Delta x(t)=x(t+\Delta t)-x(t),\quad \Delta y(t)=y(t+\Delta t)-y(t).$$

Так как функция f переменных x, y дифференцируема, то полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y+\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\alpha_2(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y,$$

причем $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\alpha_1(\Delta x,\Delta y)=0,\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\alpha_2(\Delta x,\Delta y)=0.$

При этом по определению производной имеем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=x'(t),\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}=y'(t). \qquad (*)$$

Учитывая, что так как функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ дифференцируемы по переменной t, то $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta x(t)=0,\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta y(t)=0$.

Тогда при $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$:

$$\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\to 0,\ \alpha_2(\Delta x,\Delta y)\to 0. \qquad (**)$$

Найдем предел отношения $\dfrac{\Delta z}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$ (по определению производной $z'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta t}$). Используя (*), (**), получим

$$z'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\alpha_2(\Delta x,\Delta y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\alpha_1(\Delta x,\Delta y)}_{=0}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+$$

$$+\underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\alpha_2(\Delta x,\Delta y)}_{=0}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Пример 10.1. Задана функция двух переменных:

$$z=f(x,y)=\ln(3x+\sin y),$$

где $x=x(t)=t^2$, $y=y(t)=e^t$. Вычислить производную $\dfrac{dz}{dt}$.

Решение. Сначала вычисляем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\ln(3x+\sin y)\right)'_x=\frac{1}{3x+\sin y}\cdot(3x+\sin y)'_x=\frac{3}{3x+\sin y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\ln(3x+\sin y)\right)'_y=\frac{1}{3x+\sin y}\cdot(3x+\sin y)'_y=\frac{\cos y}{3x+\sin y}.$$

Находим производные $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ от функций одной переменной:

$$\frac{dx}{dt}=2t,\ \ \frac{dy}{dt}=e^t.$$

Тогда полная производная, найденная по формуле (10.1)

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{3}{3x+\sin y}\cdot(2t)+\frac{\cos y}{3x+\sin y}\cdot\left(e^t\right)=$$

$$=\frac{1}{3x+\sin y}\left(6t+\cos y\cdot e^t\right).$$

Замечание. Если в функции $z=f(x,y)$ первая переменная является независимой, а вторая переменная y зависит от x:

$$z=z(x)=f\big(x,\,y(x)\big),$$

то полная производная сложной функции (по переменной x)

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}. \tag{10.2}$$

Случай 2. Обобщение случая 1.

Теорема 10.2 (производная сложной функции одной независимой переменной).

Если $z=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ есть дифференцируемая функция <u>**n переменных**</u> $x_1,x_2,\ldots,x_n$, причем

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ \ldots,\ x_n=x_n(t)$$

есть дифференцируемые функции <u>**одной**</u> независимой переменной t, то сложная функция

$$z(t)=f\big(x_1(t),\ x_2(t),\ldots,\ x_n(t)\big)$$

также дифференцируема по t, причем ее **полная производная**

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}. \tag{10.3}$$

(доказательство теоремы 10.2 аналогично доказательству теоремы 10.1).

Случай 3.

Теорема 10.3 (производная сложной функции двух зависимых переменных).

Если $z = f(x, y)$ есть дифференцируемая функция переменных x, y, причем $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ есть дифференцируемые функции двух независимых переменных u, v, то сложная функция

$$z(u,v) = f\big(x(u,v),\, y(u,v)\big)$$

также дифференцируема по каждой переменной u, v, причем ее **частные производные имеют вид**

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}} \qquad (10.4)$$

Пример 10.2. Задана функция двух переменных

$$z = f(x,y) = \sqrt{x} + \ln(2y),$$

где $x = x(u,v) = 2u - 3v, \quad y = y(u,v) = u^2 \cdot \sin v$.

Вычислить частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \ \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

Решение. Сначала вычисляем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\sqrt{x} + \ln(2y)\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\sqrt{x} + \ln(2y)\right)'_y = \frac{1}{y}.$$

Вычисляем частные производные $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \ \dfrac{\partial x}{\partial v}, \ \dfrac{\partial y}{\partial u}, \ \dfrac{\partial y}{\partial v}$:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (2u - 3v)'_u = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (2u - 3v)'_v = -3,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(u^2 \cdot \sin v\right)'_u = 2u \cdot \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \left(u^2 \cdot \sin v\right)'_v = u^2 \cdot \cos v.$$

В результате частные производные по формулам (10.4):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2 + \frac{1}{y} \cdot 2u \cdot \sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (-3) + \frac{1}{y} \cdot u^2 \cdot \cos v.$$

Вопрос 11. Производная по направлению

Пусть задана дифференцируемая функция $z = f(x, y)$, определяющая так называемое ***скалярное поле*** в некоторой области D и некоторая точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ (см. рис. 1).

Важной характеристикой скалярного поля является интенсивность изменения поля в заданном направлении – ***производная по направлению***. Пусть l – луч, исходящий из точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ (луч l назовем ***направлением***).

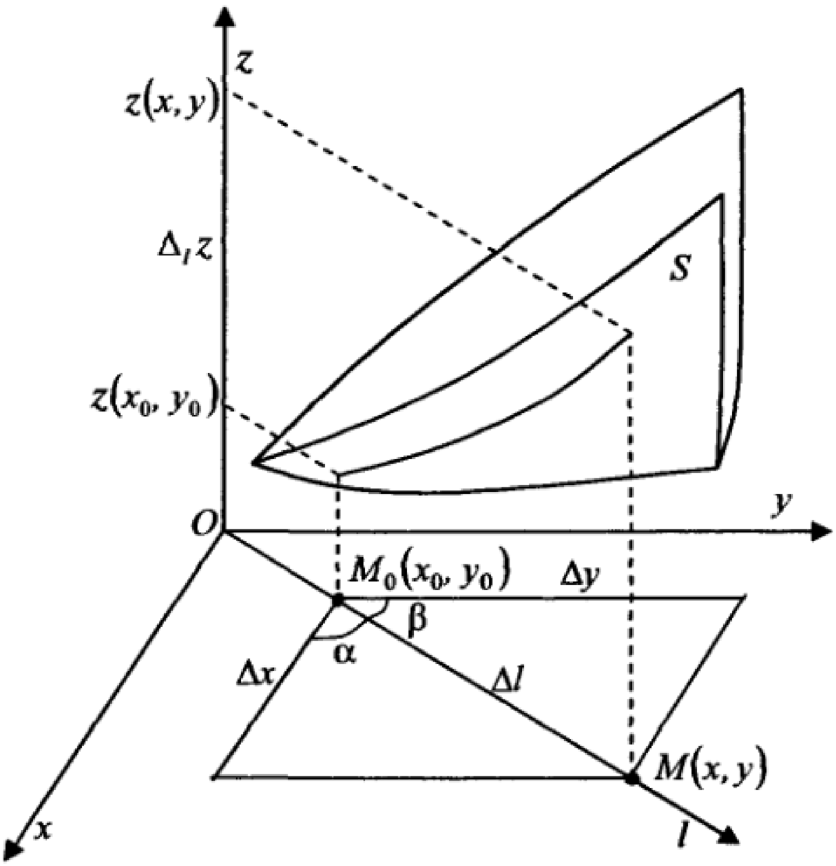

Рис. 1.

Определение 11.1. ***Производной функции*** $z = f(x, y)$ ***в точке*** $M_0(x_0, y_0) \in D$ ***по направлению луча*** l называется число, вычисляемое по формуле

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} \cdot \cos\beta, \qquad (11.1)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы луча l (см. рис. 2), которые вычисляются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_0}{\left|\overline{M_0 M_1}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_0}{\left|\overline{M_0 M_1}\right|}, \quad \left|\overline{M_0 M_1}\right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Если направление луча l задано углом α, то $\beta = \pi/2 - \alpha$ и тогда $\cos\beta = \sin\alpha$. Поэтому формулу (11.1)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} \cdot \sin\alpha. \qquad (11.2)$$

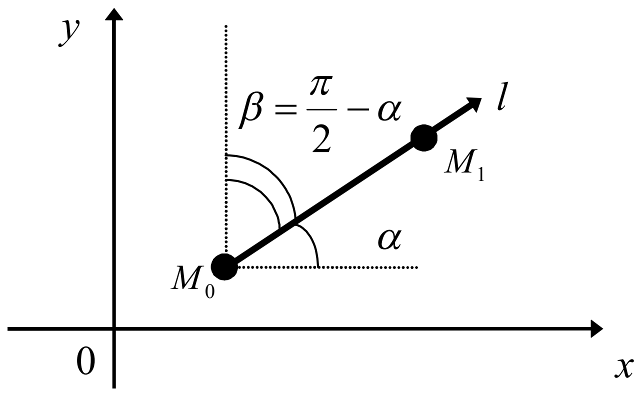

Рис. 2

В трехмерном случае, когда задана функция $u = f(x, y, z)$ производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ по направлению луча l в точке $M_0(x_0, y_0) \in D$ вычисляется по формуле

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} \cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} \cos\beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} \cos\gamma, \qquad (11.3)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы луча l,

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}$ – значения частных производных от функции в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Направляющие косинусы найти, если выбрать на луче точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не совпадающую с точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_0}{\left|\overline{M_0M_1}\right|},\ \cos\beta = \frac{y_1 - y_0}{\left|\overline{M_0M_1}\right|},\ \cos\gamma = \frac{z_1 - z_0}{\left|\overline{M_0M_1}\right|},$$

где $\left|\overline{M_0M_1}\right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$.

Пример. Найти производную функции

$$u = f(x, y, z) = x^3 y + xyz + y^2 + z^2$$

в точке $M_0(1, 0, -1)$ в направлении к точке $M_1(2, 1, 2)$.

Решение. Воспользуемся формулой (11.3). Для этого предварительно найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y + yz,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + xz + 2y,\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy + 2z.$$

Значения частных производных в точке $M_0(1, 0, -1)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} = \left(3x^2 y + yz\right)_{M_0(1,0,-1)} = 0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} = \left(x^3 + xz + 2y\right)_{M_0(1,0,-1)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} = (xy + 2z)_{M_0(1,0,-1)} = -2.$$

Направляющие косинусы ($\overline{M_0M_1}(1; 1; 3)$,
$\left|\overline{M_0M_1}\right| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{11}$):

$$\cos\alpha = \frac{2-1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}},\ \cos\beta = \frac{1-0}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}},\ \cos\gamma = \frac{2+1}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Производная функции в точке $M_0(1, 0, -1)$ в направлении к точке $M_1(2, 1, 2)$ равна

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} \cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} \cos\beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} \cos\gamma =$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} + (-2)\frac{3}{\sqrt{11}} = -\frac{6}{\sqrt{11}}.$$