Вопрос 11. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})dx,\quad \int R(x,\ \sqrt{x^2+a^2})dx,\quad \int R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})dx.$$

Для каждого из полученных интегралов существуют так называемые ***тригонометрические подстановки***, позволяющие свести их к интегралам от тригонометрических функций.

1) Для вычисления интеграла

$$\boxed{\int R\left(x,\ \sqrt{a^2-x^2}\right)dx} \qquad (11.1)$$

удобна подстановка $x = a\sin t$. Тогда

$$dx = a\cos t dt,\quad \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-(a\sin t)^2} = \sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)} = a\cos t.$$

В результате этой подстановки получается в общем случае интеграл, подынтегральная функция которого содержит синусы и косинусы. Найдя интеграл, необходимо перейти от переменной t к переменной x, если учесть, что $t = \arcsin(x/a)$.

(заметим, что здесь подойдет также подстановка $x = a\cos t$).

2) Для вычисления интеграла

$$\boxed{\int R\left(x,\ \sqrt{x^2+a^2}\right)dx} \qquad (11.2)$$

удобно применить подстановку $x = a\cdot tgt$ $(t = arctg(x/a))$. Тогда $dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{x^2+a^2} = \dfrac{a}{\cos t}$. Здесь интеграл (11.2) преобразуется в интеграл от тригонометрических функций.

3) Для вычисления интеграла

$$\boxed{\int R\left(x,\ \sqrt{x^2-a^2}\right)dx} \qquad (11.3)$$

применяется подстановка $x = \dfrac{a}{\cos t}$. Тогда $dx = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{x^2-a^2} = \dfrac{a\sin t}{\cos t}$.

Интеграл (11.3) преобразуется в интеграл от тригонометрических функций.

Пример 11.1. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

Решение: Исходный интеграл относится к интегралам вида (11.1). Используем подстановку $x = 3\sin t$ $(a = 3)$. Тогда

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \left| \begin{matrix} x = 3\sin t,\ dx = 3\cos t dt \\ \sqrt{9-x^2} = 3\cos t \end{matrix} \right| = \int \frac{(3\sin t)^2}{3\cos t} 3\cos t dt =$$

$$= \int 9(\sin^2 t)dt =$$

$$= 9\int \left(\frac{1-\cos(2t)}{2} \right) dt = \frac{9}{2}\left(\int dt - \int \cos(2t)dt \right) = \frac{9}{2}\left(t - \frac{\sin(2t)}{2} \right) + C =$$

$$= \frac{9}{2}\left(t - \sin t \cdot \cos t \right) + C = \left| \begin{matrix} t = \arcsin(x/3), \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \\ = \sqrt{1-(x/3)^2} = \\ \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\arcsin(x/3) - \sin t \cdot \cos t \right) + C = \frac{9}{2}\arcsin(x/3) - \frac{9}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin(x/3) - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C.$$

Пример 11.2. Вычислить $I=\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Решение: Этот интеграл относится к интегралам вида (11.2), так как содержит иррациональность $\sqrt{x^2+1}$.

Сделаем подстановку $x=tgt \quad (a=1)$. Имеем

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}dx=\left|\begin{array}{l} x=tgt,\quad dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}, \\ t=arctgx, \\ x^2+1=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{array}\right|=\int \frac{(tgt)^2}{\dfrac{1}{\cos^2 t}\cdot\dfrac{1}{\cos t}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\int tg^2 t\cdot\cos t dt=$$

$$=\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int\left(\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\right)dt=\int \frac{dt}{\cos t}-\int \cos t dt=$$

$$=\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin t+C.$$

Вернемся к переменной x. Так как $1+ctg^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}$, то

$$\sin^2 t=\frac{1}{1+ctg^2 t}\quad\Rightarrow\quad \sin t=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2 t}}=\frac{1}{\sqrt{1+(1/x)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

В итоге

$$I=\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin t+C=\ln\left|tg\left(\frac{arctgx}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Вопрос 12. Интегрирование простейших иррациональностей

1. Рассмотрим интеграл от иррациональной функции вида

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx,} \tag{12.1}$$

где $R-$ рациональная функция своих аргументов x, $\sqrt[n]{x}$. Сделаем замену (подстановку)

$$x = t^n, \quad dx = nt^{n-1}dt.$$

Подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от одной переменной t

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = t^n, \\ dx = n \cdot t^{n-1}dt \end{matrix} \right| = \int R\left(t^n, t\right)n \cdot t^{n-1}dt = \int \overline{R}(t)dt. \tag{12.2}$$

Пример 12.1. Вычислить интеграл $I = \int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$.

Решение. Подстановка $x = t^2 \;\Rightarrow\; dx = 2tdt$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx = \left| \begin{matrix} x = t^2, \quad \sqrt{x} = t, \\ dx = 2t \cdot dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t+1}2tdt = 2\int \frac{t}{t+1}dt = 2\int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C.$$

---

2. Рассмотрим интеграл от иррациональной функции вида

$$\int R\left(x,\ x^{m/n},\ \ldots,\ x^{r/s}\right)dx, \tag{12.3}$$

где $R-$ рациональная функция своих аргументов.

Пусть наименьшее общее кратное знаменателей $n,\ldots,s$ равно k: $НОК(n,\ldots,s) = k$. Сделаем замену (подстановку)

$$x = t^k, \quad dx = kt^{k-1}dt.$$

Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t. Подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от переменной t.

Пример 12.2. Вычислить интеграл $I=\int \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

Решение: Имеем

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}dx=\int\frac{x^{1/3}}{x^{1/2}+1}dx=\left|\begin{array}{l} HOK(2;3)=6; \\ x=t^6 \;\Rightarrow\; dx=6t^5dt \\ x^{1/3}=\left(t^6\right)^{1/3}=t^2 \\ x^{1/2}=\left(t^6\right)^{1/2}=t^3 \end{array}\right|=\int\frac{t^2}{t^3+1}\cdot 6t^5dt=$$

$$=6\int\frac{t^7}{t^3+1}dt=6\int\overline{R}(t)dt.$$

В подынтегральном выражении делим числитель на знаменатель: $\dfrac{t^7}{t^3+1}=t^4-t+\dfrac{t}{t^3+1}$. Интеграл принимает вид:

$$\boxed{I=6\left(\int\left(t^4-t\right)dt+\int\frac{t}{t^3+1}dt\right).}$$

Подынтегральное выражение во втором интеграле представляем в виде суммы простейших дробей первого и третьего типа:

$$\frac{t}{t^3+1}=\frac{t}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Mt+N}{t^2-t+1}.$$

Коэффициенты A, M, N определяем методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{t}{t^3+1}=\frac{A}{t+1}+\frac{Mt+N}{t^2-t+1}=\frac{A\left(t^2-t+1\right)+(Mt+N)(t+1)}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}\Rightarrow$$

$$t=A\left(t^2-t+1\right)+(Mt+N)(t+1)\Leftrightarrow$$

$$t = At^2 - At + A + Mt^2 + Mt + Nt + N \Leftrightarrow$$

$$0 \cdot t^2 + 1 \cdot t + 0 = \left(A + M\right)t^2 + \left(-A + M + N\right)t + \left(A + N\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A + M \qquad\quad = 0, \\ -A + M + N = 1, \\ A + \qquad\quad N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/3, \\ M = 1/3, \\ N = 1/3. \end{cases}$$

Тогда интеграл

$$\int \frac{t}{t^3 + 1} dt = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}}{t^2 - t + 1} dt = -\frac{1}{3}\ln\left|t + 1\right| + \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2 - t + 1} dt.$$

Отдельно вычислим второй интеграл

$$\int \frac{t+1}{t^2 - t + 1} dt = \left| t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right| = \int \frac{t+1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} p = t - \frac{1}{2}, \\ t = p + \frac{1}{2}, \\ dt = dp \end{array} \right| = \int \frac{p + \frac{1}{2} + 1}{p^2 + \frac{3}{4}} dp = \int \frac{pdp}{p^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int \frac{dp}{p^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(p^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{2p}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) +$$

$$+ \sqrt{3} arctg\left(\frac{t-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Ответ

$$I = 6\left(\int \left(t^4 - t\right)dt + \int \frac{t}{t^3 + 1} dt\right) = \frac{6}{5}t^5 - 3t^2 + 6\int \frac{t}{t^3 + 1} dt =$$

$$=\frac{6}{5}t^5-3t^2+6\left(-\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{t^2-t+1}dt\right)=$$

$$=\frac{6}{5}t^5-3t^2-2\ln|t+1|+\ln\left(t^2-t+1\right)+2\sqrt{3}arctg\left(\frac{t-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

где переменная $t=\sqrt[6]{x}$.

---

3. Рассмотрим интеграл от иррациональной функции вида

$$\boxed{\int R\left(x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}\right)dx}. \qquad (12.4)$$

Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$. При этом выражаем переменную x, находим дифференциал dx. Подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию, зависящую от переменной t.

Пример 12.3. Вычислить интеграл $\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx.$

Решение.

$$\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx=\left|\begin{array}{l} x+1=t^2;\quad x=t^2-1; \\ dx=2tdt \end{array}\right|=2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}=2\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=$$

$$=2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$$

---

4. В интеграле

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (12.5)$$

предпочтительна подстановка $x-\alpha=\frac{1}{t}$, то есть $x=\alpha+\frac{1}{t}$.

Пример 12.4. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}=\left|\begin{array}{l}x=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{x}\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{array}\right|=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{5\frac{1}{t^2}-2\frac{1}{t}+1}}=-\int\frac{dt}{t\cdot\sqrt{\frac{5-2t+t^2}{t^2}}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+4}}=$$

$$=-\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right|+C=-\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\frac{1}{x}+5}\right|+C.$$

Пример 12.5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x+2)^2\cdot\sqrt{3-x^2}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{(x+2)^2\cdot\sqrt{3-x^2}}=\left|\begin{array}{l}x+2=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{x+2},\\ x=\frac{1}{t}-2,\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{array}\right|=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\cdot\sqrt{3-\left(\frac{1}{t}-2\right)^2}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{-t^2+4t-1}{t^2}}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{-(t^2-4t+1)}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{-(t^2-4t+4-3)}}=$$

$$=-\int\frac{tdt}{\sqrt{-((t-2)^2-3)}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{3-(t-2)^2}}=-\int\frac{(t-2)+2}{\sqrt{3-(t-2)^2}}dt=$$

$$=-\int\frac{(t-2)+2}{\sqrt{3-(t-2)^2}}dt=-\int\frac{t-2}{\sqrt{3-(t-2)^2}}dt-2\int\frac{dt}{\sqrt{3-(t-2)^2}}.$$

Первый интеграл вычисляем заменой переменной:

$$\int\frac{(t-2)dt}{\sqrt{3-(t-2)^2}}=\left|\begin{array}{l}u=3-(t-2)^2,\\ du=-2(t-2)dt\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\sqrt{u}+C=$$

$$=-\sqrt{3-(t-2)^2}+C.$$

Второй интеграл подводим под табличный интеграл:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{3-(t-2)^2}} = \left| \begin{matrix} p = t-2, \\ dp = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dp}{\sqrt{3-p^2}} = \arcsin\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right) + C.$$