Тема 9. Определенный интеграл функции одной переменной

3. Интеграл с переменным верхним пределом, его свойства

Определение. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Функция

$$\boxed{\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (x\in[a,b])} \tag{3.1}$$

называется ***интегралом с переменным верхним пределом***.

Очевидно, что $\Phi(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0,\quad \Phi(b)=\int_a^b f(t)\,dt$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $(x\in[a,b])$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Составим приращение

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=$$

$$=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме о среднем на отрезке $[x,x+\Delta x]$ найдется точка c такая, что

$$\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(c)\cdot(x+\Delta x-x)=f(c)\Delta x.$$

Тогда предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c)\Delta x=f(c)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=f(c)\cdot 0=0,$

то есть функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ на $[a,b]$ является одной из первообразных для функции $f(x)$, то есть

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt=F(x),\quad \Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x). \qquad (3.2)$$

(производная от функции (3.1) равна значению подынтегральной функции в верхнем пределе)

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение. Всякая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную, а значит, для этой функции существует неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Но функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ($x\in[a,b]$) также является одной из первообразных для функции $f(x)$, так как $\Phi'(x)=f(x)$. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$. Значит, определенный интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)$ является одной из функций в семействе функций $F(x)+C$, то есть при некотором значении C выполняется равенство

$$\boxed{\Phi(x)\equiv\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+C \quad (C=const)}. \qquad (3.3)$$

4. Формула Ньютона-Лейбница

Докажем одну из основных формул интегрального исчисления, названную в честь двух математиков 17-18 веков – Готфрида Вильгельма Лейбница (1646-1716), Исаака Ньютона (1643-1727).

Теорема (формула Ньютона - Лейбница). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$. Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a), \qquad (4.1)$$

где $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$.

Формула (4.1) называется ***формулой Ньютона-Лейбница*** вычисления определенного интеграла.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$. В соответствии с теоремой 2 предыдущего пункта функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ есть первообразная функции $f(x)$.

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ имеет вид

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \quad C = const.$$

Положив в последней формуле $x = a$ и $x = b$, получим

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a),$$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой подход к нахождению определенных интегралов. Чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$ достаточно вычислить неопределенный интеграл

$$F(x) = \int f(x)dx$$

(взять $C = 0$), затем подставить в найденную функцию $F(x)$ верхний предел $x = b$ и нижний предел $x = a$ и применить формулу (4.1).

Пример 4.1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt[3]{x}dx$.

Решение. В данном случае функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ является непрерывной на $[-1;\ 1]$. Тогда находим первообразную для этой функции

$$F(x)=\int\sqrt[3]{x}dx=\int x^{1/3}dx=\frac{3x^{4/3}}{4}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\qquad(C=0).$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int\limits_{-1}^{1}\sqrt[3]{x}dx=F(x)\Big|_{x=-1}^{x=1}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\Bigg|_{x=-1}^{x=1}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(-1)^4}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0.$$

Пример 4.2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\pi^2-x^2}}dx$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi^2-x^2}}$ непрерывна на области определения $D(f)=(-\pi,\ \pi)$, а отрезок $[0,\ \pi/2]$ является его частью. Находим первообразную:

$$F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{\pi^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right)\qquad(C=0).$$

Применяя формулу (4.1), получим

$$\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\pi^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi/2}=\arcsin\left(\frac{\pi/2}{\pi}\right)-\arcsin\left(\frac{0}{\pi}\right)=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}.$$

Пример 4.3. Задан интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x)=\int\limits_{0}^{x}\left(3t^2+2t\right)dt.$$

Найти значение $\Phi(2)$.

Решение. Значение $\Phi(2)$ равно определенному интегралу

$$\Phi(2)=\int\limits_{0}^{2}\left(3t^2+2t\right)dt=\left(t^3+2t\right)\Big|_{0}^{2}=\left(2^3+2\cdot2\right)-\left(0^3+2\cdot0\right)=12.$$