Тема 6.
«Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Вопрос 1. Задача о касательной к графику, приводящая к понятию производной функции одной переменной

Требуется написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ (рис. 1).

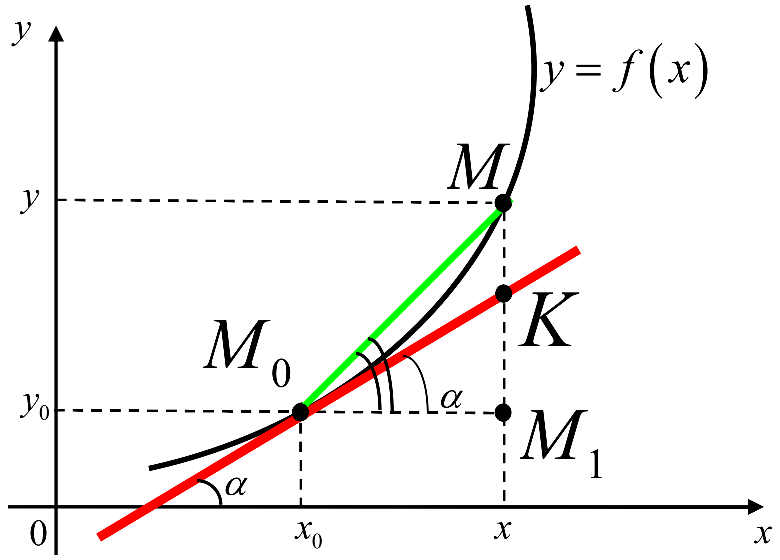


Рис. 1

На графике функции произвольно выберем точку $M(x, y)$. Получим отрезок M_0M – *секущая* к кривой (зеленый цвет).

Пусть точка M, перемещаясь по кривой, приближается к M_0. Если секущая M_0M стремится занять предельное положение M_0K, то прямая M_0K (красный цвет) называется **касательной** к графику функции.

Уравнение прямой, проходящей через $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид

$$y = y_0 + k(x - x_0), \tag{1.1}$$

где $k = tg\alpha$ – угловой коэффициент прямой, α – угол наклона этой прямой к положительному направлению оси абсцисс Ox.

Из ΔM_0MM_1 имеем

$$tg(\angle M_0MM_1) = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Если точка M перемещаясь по графику, приближается к точке M_0 ($M \to M_0$), то $x \to x_0$. При этом $\angle M_0MM_1 \to \alpha$, $tg(\angle M_0MM_1) \to tg\alpha$, следовательно,

$$\boxed{k = tg\alpha = \lim_{M \to M_0} tg(\angle M_0MM_1) = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}}. \quad (1.2)$$

Вывод. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид (1.1), где угловой коэффициент вычисляется по формуле (1.2).

Пример 1.1. Написать уравнение касательной к графику функции

$$y = f(x) = x^2 + 3x - 3,$$

проходящей через точку с абсциссой $x_0 = -2$.

Решение. По формуле (1.2) находим угловой коэффициент касательной

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to (-2)} \frac{(x^2 + 3x - 3) - ((-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 3)}{x - x_0} = \lim_{x \to (-2)} \frac{(x^2 + 3x - 3) - (-5)}{x - (-2)} =$$

$$= \lim_{x \to (-2)} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to (-2)} \frac{(x+2)(x+1)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)} (x + 1) = -1.$$

Уравнение касательной к графику функции имеет вид (1.1):

$$y = y_0 + k(x - x_0) = -5 + (-1)(x - (-2)) = -5 + (-1)(x + 2) = -x - 7.$$

Вопрос 2. Определение производной функции в точке. Геометрический смысл производной функции в точке

Определение 2.1. Пусть $x \in D(f)$. Дадим x приращение аргумента $\Delta x \neq 0$, получим новую точку $(x+\Delta x) \in D(f)$. Разность

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \qquad (2.1)$$

между значением функции в точке $x+\Delta x$ и значением функции в точке x назовем **приращением функции**.

Пример 2.1. Для функции $f(x) = x^3 + 2x^2$ найти приращение $\Delta f(x)$ функции.

Решение. Согласно формуле (2.1), имеем

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \left((x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)^2\right) - \left(x^3 + 2x^2\right) =$$

$$\left(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2\right) - x^3 - 2x^2 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Итак, $\Delta f(x) = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2$.

Определение 2.2. Если существует предел отношения приращения функции $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента $\Delta x \neq 0$ при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется **производной функции** $f(x)$ в точке x и обозначается

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2.2)$$

(читается “эф штрих от x”).

Если функция $f(x)$ в точке x имеет конечную производную (2.2), то $f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** x.

Для обозначения производной в точке x применяются обозначения: $y'(x)$, $f'_x(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

Пример 2.2. Для функции $f(x)=x^3+2x^2$ найти по определению производную.

Решение. Согласно результату примера 2.1, выносим общий множитель Δx за скобки

$$\Delta f(x)=\Delta x\left(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2+4x+2(\Delta x)\right).$$

Применяя формулу (2.2), получим

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2+4x+2(\Delta x)\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2+4x+2(\Delta x)\right)=3x^2+4x.$$

Итак, $f'(x)=3x^2+4x.$

Геометрический смысл производной функции в точке. Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначим $x=x_0+\Delta x$. Тогда $\Delta x=x-x_0$. При этом производная функции примет вид

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Согласно формуле (1.2) имеем

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k=tg\alpha.$$

***Геометрический смысл производной функции в точке*:** производная $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции, проведенной через точку с абсциссой x_0.

Таким образом, для функции $f(x)=x^2+3x-3$ из примера 1.1, производная $f'(x_0)=k=-1$.

Вопрос 3. Связь производной функции с ее непрерывностью. Односторонние производные

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right) = 0. \quad (3.1)$$

Связь производной функции с ее непрерывностью показывается следующей теоремой.

Теорема 3.1. Если функция $f(x)$ в точке $x_0 \in D(f)$ имеет **конечную производную** $f'(x_0)$ (то есть дифференцируема в точке x_0), то она непрерывна в точке x_0.

Доказательство. По условию $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Из этой теоремы вытекает утверждение. Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$ (имеет разрыв любого рода), то в этой точке функция не имеет конечной производной (через точку x_0 нельзя провести касательную).

Утверждение, обратное к теореме 3.1, не выполняется, то есть существуют функции, которые непрерывны в точке, но не имеют в ней конечную производную.

Пример 3.1. Покажем, что для функции $f(x) = |x|$, непрерывной в точке $x_0 = 0$, не существует конечной производной.

Решение.

$$f'(x_0 = 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

При $\Delta x > 0$: $f'(x_0 = 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$

$$\Delta x<0: \quad f'(x_0=0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Вывод: конечной производной в нуле – нет.

Определение 3.1. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[x_0, x_0+a)$ $(a>0)$. Если существует предел

$$f'_+(x_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0+0,\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0+0,\\ \Delta x>0}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (3.2)$$

то он называется ***правосторонней производной*** **в точке** x_0**.**

Определение 3.2. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(x_0-a, x_0]$ $(a>0)$. Если существует предел

$$f'_-(x_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0-0,\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0-0,\\ \Delta x<0}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (3.3)$$

то он называется ***левосторонней производной*** **в точке** x_0**.**

Определение 3.3. Непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ называется ***гладкой (негладкой)***, если в этой точке функция имеет конечную производную $f'(x_0)$ (не имеет конечную производную $f'(x_0)$).

Вопрос 4. Правила дифференцирования функции

Теорема 4.1 (правила дифференцирования функций).

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ в точке x имеют конечные производные $u'(x)$, $v'(x)$.

Тогда функции $y(x)=u(x)\pm v(x)$, $y(x)=u(x)\cdot v(x)$, $y(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ точке x имеют конечные производные:

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)'=u'(x)\pm v'(x), \qquad (4.1)$$

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x), \qquad (4.2)$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x)\neq 0). \qquad (4.3)$$

Доказательство. По условию теоремы имеем производные

$$u'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x},$$

причем $u(x+\Delta x)=\Delta u(x)+u(x)$,

$$v'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x},$$

причем $v(x+\Delta x)=\Delta v(x)+v(x)$.

1) Для функции $y(x)=u(x)+v(x)$ составим приращение:

$$\Delta y(x)=y(x+\Delta x)-y(x)=\left[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)\right]-\left[u(x)+v(x)\right].$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\Delta y(x)=\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]+\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]=\Delta u(x)+\Delta v(x).$$

Тогда производная равна

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)+\Delta v(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}=$$

$$=u'(x)+v'(x).$$

2) Для функции $y(x)=u(x)\cdot v(x)$ приращение $\Delta y(x)$ имеет вид: $\Delta y(x)=y(x+\Delta x)-y(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)$.

Воспользовавшись равенствами $u(x+\Delta x)=\Delta u(x)+u(x)$, $v(x+\Delta x)=\Delta v(x)+v(x)$, получим:

$$\Delta y(x)=\left(\Delta u(x)+u(x)\right)\cdot\left(\Delta v(x)+v(x)\right)-u(x)\cdot v(x)=$$
$$=\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)+\Delta u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot\Delta v(x)+u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)=$$
$$=\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)+\Delta u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot\Delta v(x).$$

Тогда производная функции равна

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)+\Delta u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot\Delta v(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot\Delta v(x)}{\Delta x}=$$
$$=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v(x)}_{0}+$$
$$+v(x)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}}_{u'(x)}+u(x)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}}_{v'(x)}=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

Заметим, что если какая-то из функций является постоянной, то правила дифференцирования значительно упрощаются.

Следствие. Константу можно выносить за знак производной:

$$\left(C\cdot u(x)\right)'=C\cdot u'(x)\ (C=const), \qquad (4.4)$$

$$\left(\frac{u(x)}{C}\right)'=\frac{u'(x)}{C}=\frac{1}{C}\cdot u'(x)\ (C=const). \qquad (4.5)$$

Вопрос 5. Таблица производных основных элементарных функций

Производная функции

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производные основных элементарных функций

№	Производная	№	Производная
1	$(C)' = 0$	2	$(x)' = 1$
3	$(x^2)' = 2x$	4	$(x^k)' = kx^{k-1}$ $(k = const)$
5	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	6	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
7	$(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ a = const)$	8	$(e^x)' = e^x$
9	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ a = const)$	10	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
11	$(\sin x)' = \cos x$	12	$(\cos x)' = -\sin x$
13	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	14	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
15	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	16	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	18	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Пусть $f(x)=x^k$ ($k=const$).

Тогда приращение $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=$

$$=(x+\Delta x)^k-x^k=\left(x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right)^k-x^k=x^k\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^k-x^k=x^k\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^k-1\right)$$

Имеем следующую эквивалентность:

$$\boxed{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^k-1\ \sim\ k\cdot\frac{\Delta x}{x}\ \text{при}\ \Delta x\to 0.}$$

Тогда

$$f'(x)=\left(x^k\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^k k\cdot\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\frac{kx^k}{x}=kx^{k-1}.$$

Для $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ ($k=1/2$) имеем

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Докажем табличную производную **7**. Пусть $f(x)=a^x$. Тогда приращение

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\cdot a^{\Delta x}-a^x=a^x\left(a^{\Delta x}-1\right).$$

Согласно эквивалентности $a^{\Delta x}-1\sim\ln a\cdot\Delta x$ при $\Delta x\to 0$, находим производную

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\cdot\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln a\cdot\Delta x}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Докажем табличную производную **9**. Пусть $f(x)=\log_a x$. Приращение

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) =$$
$$= \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Согласно эквивалентности $\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \sim \log_a e \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)$ при $\Delta x \to 0$, находим производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+{}^{\Delta x}\!/_{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a e\cdot {}^{\Delta x}\!/_{x}}{\Delta x} = \log_a e\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}.$$

Докажем производную **11**. Для функции $f(x) = \sin x$ приращение имеет вид (применяем формулу разности синусов)

$$\Delta f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\sin\left(\frac{x+\Delta x - x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Используя $\sin\left({}^{\Delta x}\!/_{2}\right) \sim \left({}^{\Delta x}\!/_{2}\right)$ при $\Delta x \to 0$, получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Пусть $f(x) = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$. Тогда учитывая, что $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, получим

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример 5.1. Найти производную:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-3\sin x+\log_3 x.$$

Решение. Применяя формулу дифференцирования суммы, разности и правило вынесения константы за знак производной, получаем

$$(f(x))'=\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2-3\sin x+\log_3 x\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'+\left(2x^2\right)'-(3\sin x)'+(\log_3 x)'=$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^3\right)'+2\left(x^2\right)'-3(\sin x)'+(\log_3 x)'=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2+2\cdot 2\cdot x-3\cdot\cos x+\frac{1}{x\ln 3}=$$

$$=x^2+4x-3\cos x+\frac{1}{x\ln 3}.$$

Пример 5.2. Найти для функции производную:

$$f(x)=x^2\cdot\ln x-\frac{x^2}{2}.$$

Решение. Для данной функции необходимо сначала использовать производную разности, а затем производную произведения:

$$f'(x)=\left(x^2\ln x-\frac{x^2}{2}\right)'=\left(x^2\ln x\right)'-\left(\frac{x^2}{2}\right)'=\left(x^2\right)'\cdot\ln x+x^2\cdot(\ln x)'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'=$$

$$=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot 2x=2x\cdot\ln x+x-x=2x\cdot\ln x.$$

Пример 5.3. Найти для функции производную

$$f(x)=e^x(\sin x-\cos x).$$

Решение. Используем производную произведения ($u=e^x$, $v=\sin x-\cos x$), а затем производную разности:

$$f'(x)=\left(e^x\cdot(\sin x-\cos x)\right)'=\left(e^x\right)'\cdot(\sin x-\cos x)+e^x\cdot(\sin x-\cos x)'=$$

$$=e^x\cdot(\sin x-\cos x)+e^x\cdot(\cos x+\sin x)=e^x\cdot(\sin x-\cos x+\cos x+\sin x)=$$

$$=2e^x\sin x.$$

Пример 5.4. Найти для функции производную:

$$f(x)=\frac{e^x-x}{e^x+x}.$$

Решение. Используем производную частного ($u = e^x - x$, $v = e^x + x$), а затем производную суммы и разности:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - x}{e^x + x}\right)' = \frac{\left(e^x - x\right)' \cdot \left(e^x + x\right) - \left(e^x - x\right) \cdot \left(e^x + x\right)'}{\left(e^x + x\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(e^x - 1\right) \cdot \left(e^x + x\right) - \left(e^x - x\right) \cdot \left(e^x + 1\right)}{\left(e^x + x\right)^2}.$$

Упростим найденную производную. Раскрывая скобки, получим

$$f'(x) = \frac{\left(e^{2x} + xe^x - e^x - x\right) - \left(e^{2x} - xe^x + e^x - x\right)}{\left(e^x + x\right)^2} = \frac{2xe^x - 2e^x}{\left(e^x + x\right)^2} = \frac{2e^x\left(x - 1\right)}{\left(e^x + x\right)^2}.$$

Вопрос 6. Производная сложной функции

Пусть даны функции $y = f(u)$, $u = u(x)$. Составим сложную функцию (композицию функций)

$$y = f(u(x)). \tag{6.1}$$

Теорема 6.1 (производная сложной функции).

Пусть функция $y = f(u)$ имеет в точке $u = u_0$ конечную производную $f'_u(u_0)$, функция $u = u(x)$ имеет в точке $x = x_0$ конечную производную $u'_x(x_0)$, причем $u(x_0) = u_0$. Тогда сложная функция (6.1) имеет в точке $x = x_0$ конечную производную:

$$y'_x(x_0) = f'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0). \tag{6.2}$$

Доказательство. Дадим переменной x приращение $\Delta x \neq 0$, составим приращение $\Delta u(x)$ функции $u = u(x)$:

$$\Delta u(x) = u(x + \Delta x) - u(x).$$

Далее составим приращение

$$\Delta y(x) = f(u(x) + \Delta u(x)) - f(u(x)).$$

При этом $\dfrac{\Delta y(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y(x)}{\Delta u(x)} \cdot \dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x}$, тогда производная

$$y'_x(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta u(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0).$$

На практике формула (6.2) переписывается следующим образом

$$\boxed{y'_x(x) = f'_u(u) \cdot u'_x(x)}. \tag{6.3}$$

Формула (6.3) называется **правилом дифференцирования сложной функции, состоящей из двух звеньев.**

Чтобы найти производную $y'_x(x)$ сложной функции $y = f(u(x))$ необходимо найти производную $f'_u(u)$ от внешней функции $f(u)$ по u, и умножить на производную $u'_x(x)$ от внутренней функции $u(x)$ по независимой переменной x.

В соответствии с этим правилом можно составить таблицу дифференцирования сложной функции $y = f(u(x))$, где внешняя функция $f(u)$ – основная элементарная функция.

Таблица дифференцирования сложных функций

1. $(u^2)' = 2u \cdot u'$	**2.** $(u^k)' = ku^{k-1} \cdot u'$ ($k = const$)	**3.** $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	**5.** $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $a = const$)	**6.** $(e^u)' = e^u \cdot u'$
7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	**8.** $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	**9.** $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	**11.** $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	**12.** $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	**14.** $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	**15.** $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
16. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$		

Пример 6.1. Найти для функции $y(x)=\ln(\sin x)$ производную.
Решение. В нашем случае

$$y=f(u)=\ln u,\quad u=u(x)=\sin x.$$

Производная от внешней функции $f(u)=\ln u$ по u равна

$$f'_u(u)=(\ln u)'_u=\frac{1}{u},$$

производная от внутренней функции $u(x)=\sin x$ по x равна

$$u'_x(x)=(\sin x)'_x=\cos x.$$

Тогда применяя формулу (6.3), получим

$$y'_x(x)=f'_u(u)\cdot u'_x(x)=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=ctgx.$$

Найдем производную, пользуясь таблицей и формулой **8**:

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{u}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=ctgx$$

Пример 6.2. Найти для функции $y(x)=\sqrt[3]{x^3-e^x}$ производную.
Решение. Имеем

$$y=f(u)=\sqrt[3]{u}=u^{1/3},\quad u=u(x)=x^3-e^x.$$

Производная от внешней функции $f(u)=u^{1/3}$ по u равна

$$f'_u(u)=\left(u^{1/3}\right)'_u=\frac{1}{3}\cdot u^{-2/3},$$

производная от внутренней функции $u(x)=x^3-e^x$ по x равна

$$u'_x(x)=\left(x^3-e^x\right)'=3x^2-e^x.$$

Применяя формулу (6.3), получим

$$y'_x(x)=f'_u(u)\cdot u'_x(x)=\frac{1}{3}\cdot u^{-2/3}\cdot\left(3x^2-e^x\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(x^3-e^x\right)^{-2/3}\cdot\left(3x^2-e^x\right).$$

Найдем производную, пользуясь таблицей и формулой **2** (производной от степенной функции):

$$y' = \left(u^{1/3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot u^{-2/3} \cdot u' = \frac{1}{3} \cdot u^{-2/3} \cdot \left(x^3 - e^x\right)' = \frac{1}{3} \cdot u^{-2/3} \cdot \left(3x^2 - e^x\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(x^3 - e^x\right)^{-2/3} \cdot \left(3x^2 - e^x\right).$$

Пример 6.3. Найти для $\boxed{y(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x}$ производную.

Решение. Применим формулу дифференцирования произведения двух функций. Получим

$$y'(x) = \left(\sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x\right)' = \left(\sqrt{1 - x^2}\right)' \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} \cdot (\arcsin x)'.$$

Функция $\sqrt{1 - x^2}$ является сложной, ее производная вычисляется по формуле (6.3):

$$\left(\sqrt{1 - x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot \left(1 - x^2\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

При вычислении производной мысленно представляем внутреннюю функцию $u(x) = 1 - x^2$. В результате производная $y'(x)$

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + 1.$$

Рассмотрим $y = f(u),\ u = u(v),\ v = v(x)$. Сложная функция

$$y(x) = f\left(u\left(v(x)\right)\right). \tag{6.4}$$

Производная функции (6.4) вычисляется по формуле

$$\boxed{y'_x(x) = f'_u(u) \cdot u'_v(v) \cdot v'(x)}. \tag{6.5}$$

Пример 6.4. $\boxed{y(x)=\cos\left(\log_2(\arccos x)\right)}$.

Решение. Имеем функции

$$y=f(u)=\cos u,\quad u=u(v)=\log_2 v,\quad v=v(x)=\arccos x.$$

Тогда применение формулы (6.5) дает

$$y'_x(x)=f'_u(u)\cdot u'_v(v)\cdot v'_x(x)=(\cos u)'_u\cdot(\log_2 v)'_v\cdot(\arccos x)'=$$

$$=-\sin u\cdot\frac{1}{v\ln 2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\sin(\log_2\arccos x)\cdot\frac{1}{\arccos x\ln 2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Если мысленно применять формулу (6.5), то получим

$$y'(x)=\left(\cos\left(\log_2(\arccos x)\right)\right)'=-\sin\left(\log_2(\arccos x)\right)\cdot\left(\log_2(\arccos x)\right)'=$$

$$=-\sin\left(\log_2(\arccos x)\right)\cdot\frac{1}{\arccos x\ln 2}\cdot(\arccos x)'=$$

$$=\sin\left(\log_2(\arccos x)\right)\cdot\frac{1}{\arccos x\ln 2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 6.5. $\boxed{y(x)=2^{arctg\sqrt{x}}}$.

Решение. Имеем функции

$$y=f(u)=2^u,\quad u=u(v)=arctgv,\quad v=v(x)=\sqrt{x}.$$

Применение формулы (6.5) дает

$$y'_x(x)=f'_u(u)\cdot u'_v(v)\cdot v'_x(x)=\left(2^u\right)'_u\cdot(arctgv)'_v\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=$$

$$=2^u\ln 2\cdot\frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=2^{arctgv}\ln 2\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\ln 2\cdot 2^{arctg\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

При мысленном применении формулы (6.5) получим

$$y'(x)=\left(2^{arctg\sqrt{x}}\right)'=\ln 2\cdot 2^{arctg\sqrt{x}}\cdot\left(arctg\sqrt{x}\right)'=$$

$$=\ln 2\cdot 2^{arctg\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\ln 2\cdot 2^{arctg\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 6.6. $\boxed{y(x)=\sqrt{1-x^2}-x\cdot\arcsin\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Обозначим $y_1(x)=\sqrt{1-x^2}$, $y_2(x)=x\cdot\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

Тогда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$, $y'(x)=y_1'(x)-y_2'(x)$,

$$y_1'(x)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y_2'(x)=\left(x\cdot\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)'=(x)'\cdot\arcsin\sqrt{1-x^2}+x\cdot\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)'=$$

$$=1\cdot\arcsin\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\arcsin\sqrt{1-x^2}+$$

$$+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\arcsin\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\arcsin\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В итоге производная

$$y'(x)=y_1'(x)-y_2'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=-\arcsin\sqrt{1-x^2}$$

Дифференцирование различных классов функций

Вопрос 7. Формула логарифмического дифференцирования

Пусть задана функция $y = f(x)$. Прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \ln f(x).$$

Найдем производные от обеих частей последнего равенства:

$$(\ln y)'_x = (\ln f(x))'_x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = (\ln f(x))',$$

откуда

$$\boxed{y' = y(\ln f(x))'}. \tag{7.1}$$

Формула (7.1) называется **формулой логарифмического дифференцирования.** Пусть функция имеет вид

$$\boxed{y = u(x)^{v(x)}}, \tag{7.2}$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Функция вида (7.2) называется ***показательно-степенной.*** Применим формулу (7.1):

$$y' = y\left(\ln u(x)^{v(x)}\right)' = y\left(v(x)\cdot \ln u(x)\right)' = y\left(v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right) \tag{7.3}$$

Формула (7.3) показывает схему, по которой необходимо находить производную функции (7.2). По свойству логарифма:

$$\ln u(x)^{v(x)} = v(x)\cdot \ln u(x),$$

затем применяем правило производной произведения двух функций.

Пример 7.2. Найти производную функции $y = \left(1 + x^2\right)^{arctgx}$.

Решение. Применяем формулу (7.1):

$$y' = y\left(\ln f(x)\right)' = y\left(\ln\left(1+x^2\right)^{arctgx}\right)' = y\left(arctgx \cdot \ln\left(1+x^2\right)\right)' =$$

$$= y\left(arctgx \cdot \ln\left(1+x^2\right)\right)' = y\left(\left(arctgx\right)' \cdot \ln\left(1+x^2\right) + arctgx \cdot \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'\right)$$

$$= y\left(\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln\left(1+x^2\right) + arctgx \cdot \frac{2x}{1+x^2}\right).$$

Итак, $y' = y\left(\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln\left(1+x^2\right) + arctgx \cdot \frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Пример 7.3. Найти производную функции

$$y = \frac{\sqrt[4]{e^x}}{arctg\left(x^2\right) \cdot \ln\left(\sin^3 x\right)}.$$

Решение. Формула логарифмического дифференцирования (7.2). Сначала находим логарифм от функции:

$$\ln \frac{\sqrt[4]{e^x}}{arctg\left(x^2\right) \cdot \ln\left(\sin^3 x\right)} = \ln\left(\sqrt[4]{e^x}\right) - \ln\left(arctg\left(x^2\right) \cdot \ln\left(\sin x\right)^3\right) =$$

$$= \ln\left(\sqrt[4]{e^x}\right) - \ln\left(arctg\left(x^2\right)\right) - \ln\left(\ln\left(\sin x\right)^3\right) = \ln e^{x/4} -$$

$$- \ln\left(arctg\left(x^2\right)\right) - \ln\left(3\ln\sin x\right) = \frac{x}{4} - \ln\left(arctg\left(x^2\right)\right) - \ln\left(3\ln\sin x\right).$$

Тогда, применяя формулу (7.2), получим

$$y' = y \cdot \left(\ln f(x)\right)' = y \cdot \left(\frac{x}{4} - \ln\left(arcctg\left(x^2\right)\right) - \ln\left(3\ln\sin x\right)\right)' =$$

$$= y \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{arcctg\left(x^2\right)} \cdot \frac{2x}{1+x^4} - \frac{1}{\ln\sin x} \cdot ctgx\right).$$

Вопрос 8. Производная обратной функции

Пусть дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$. Тогда функция $x = f^{-1}(y)$ также имеет производную $\left(f^{-1}(y)\right)'_y$, причем

$$\left(f^{-1}(y)\right)'_y = \frac{1}{\left(f(x)\right)'_x}. \qquad (8.1)$$

Формулу (8.1) удобнее переписать в следующих формах

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \Leftrightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}. \qquad (8.2)$$

Докажем табличную производную формулу **9**. Пусть $y = f(x) = \log_a x$. Тогда $x = a^y = f^{-1}(y)$. Применяя формулу (8.2),

$$y'_x = \left(\log_a x\right)'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\left(a^y\right)'_y} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Докажем формулу **15**. Пусть $y = f(x) = \arcsin x$. Тогда $x = \sin y = f^{-1}(y)$. Применяя формулу (8.2), получим

$$y'_x = \left(\arcsin x\right)'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\left(\sin y\right)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Вопрос 9. Производная функции, заданной параметрически

Функция $y = f(x)$, где x, y задаются в виде системы

$$\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t), \quad t \in T \end{cases} \qquad (9.1)$$

называется ***параметрически заданной функцией***. Переменная $t \in T$ называется параметром. Предполагаем:

1) функции $x = \alpha(t), y = \beta(t)$ дифференцируемы по $t \in T$,

2) функция $x = \alpha(t)$ имеет обратную функцию $t = \alpha^{-1}(x)$.

Тогда составим сложную функцию $y(x) = \beta(t) = \beta(\alpha^{-1}(x))$, откуда производная сложной функции имеет вид

$$y'(x) = \beta_t'(t) \cdot \frac{1}{\alpha_t'(t)} = \frac{\beta_t'(t)}{\alpha_t'(t)}. \qquad (9.2)$$

<u>**Пример 9.1.**</u> Найти производную для функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = \alpha(t) = arctg\left(e^{t/2}\right), \\ y = \beta(t) = \sqrt{1+e^t}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$

Решение. Применяя формулу (9.2), получим

$$y_x'(x) = \frac{\beta_t'(t)}{\alpha_t'(t)} = \frac{\left(\sqrt{1+e^t}\right)_t'}{\left(arctg\left(e^{t/2}\right)\right)_t'} = \frac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}} : \frac{e^{t/2}}{2\left(1+e^t\right)} = \frac{e^t}{e^{t/2}} \cdot \frac{1+e^t}{\sqrt{1+e^t}} =$$

$$= e^{t/2} \cdot \sqrt{1+e^t}.$$

Вопрос 10. Понятие дифференциала функции, его свойства. Геометрический смысл дифференциала

Пусть $f(x)$ – функция, заданная на области определения $D(f)$. Составим приращение функции

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x), \quad x+\Delta x \in D(f).$$

Определение 10.1. Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке $x \in D(f)$, если приращение можно представить в виде

$$\Delta f(x) = A(x)\cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \qquad (10.1)$$

где $A(x)$ не зависит от Δx, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно-малая функция при $\Delta x \to 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, для которой $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=0$.

При этом выражение $A(x)\cdot\Delta x$ называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке $x\in D(f)$ и обозначается в виде

$$df(x) = A(x)\cdot \Delta x.$$

Пример 10.1. Показать, что функция $f(x)=x^3+2x^2+4$ является дифференцируемой в произвольной точке $x\in\mathbf{R}$.

Решение. Приращение имеет вид

$$\Delta f(x) = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Преобразуем $\Delta f(x)$ к виду (10.1)

$$\Delta f(x) = (\underbrace{3x^2+4x}_{=A(x)})\cdot\Delta x + \underbrace{(3x+2)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}_{\alpha(\Delta x)}.$$

Выражение $A(x)=3x^2+4x$ не зависит от приращения Δx. Функция $\alpha(x)=(3x+2)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$ – бесконечно-малая при $\Delta x\to 0$, причем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(3x+2)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left((3x+2)(\Delta x)+(\Delta x)^2\right)=0.$$

Итак,

$$df(x) = A(x)\cdot\Delta x = \left(3x^2 + 4x\right)\cdot\Delta x$$

функция является дифференцируемой в произвольной точке $x \in \mathbf{R}$.

Связь дифференциала $df(x)$ функции с ее производной $f'(x)$ показывается в следующей теореме.

Теорема 10.1. Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке $x \in D(f)$ тогда и только тогда, когда функция в точке $x \in D(f)$ имеет конечную производную $f'(x) \in \mathbf{R}$, причем

$$df(x) = A(x)\cdot\Delta x = f'(x)\cdot\Delta x. \tag{10.2}$$

Доказательство.

Если функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке $x \in D(f)$, то приращение имеет вид $\Delta f(x) = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)$. Разделим обе части данного равенства на $\Delta x \to 0$, и найдем предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(A(x) + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}\right) = A(x).$$

Но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow f'(x) = A(x)$.

Из теоремы вытекает при $f(x) = x$ по формуле (10.2)

$$df(x) = dx = (x)'\cdot\Delta x = \Delta x, \text{ то есть } \Delta x = dx.$$

В соответствии с этим дифференциал функции (10.2) примет вид

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}. \tag{10.3}$$

Теорема 10.2 (правила вычисления дифференциалов). Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$,

2) $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$,

3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du \cdot v(x) - u \cdot dv}{v^2}$ $\quad (v(x) \neq 0)$.

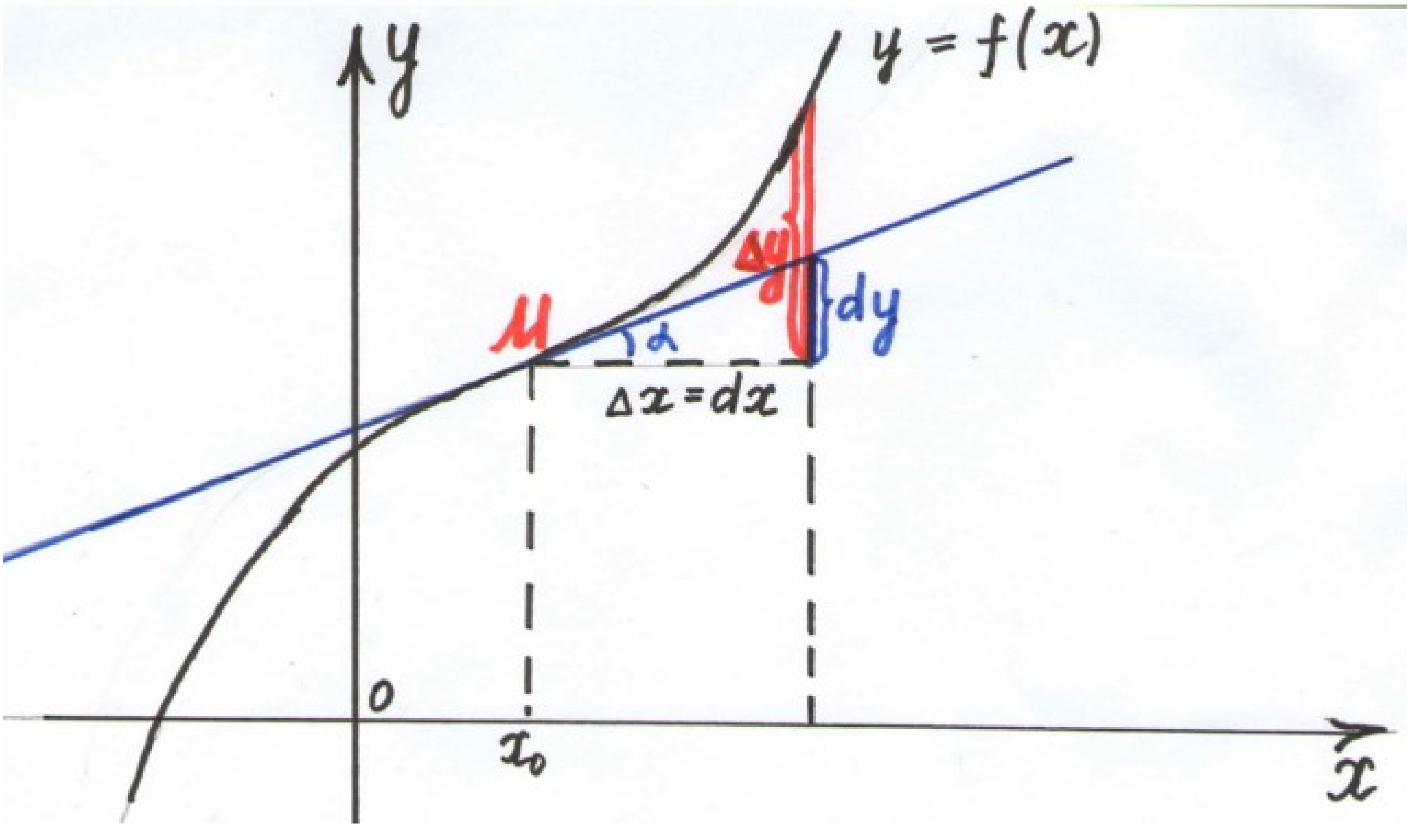
Доказательство.

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = (u' \pm v')dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$,

2) $d(u \cdot v) = (u \cdot v)' dx = (u' \cdot v + u \cdot v')dx = (u'dx) \cdot v + u \cdot (v'dx) =$
$= du \cdot v + u \cdot dv.$

Геометрический смысл дифференциала функции.

Дифференциал $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в точке x_0, если приращение аргумента есть величина Δx.



11. Применение дифференциала при вычислении приближенных значений функций. Линеаризация функции

Пусть функция $f(x)$ является дифференцируемой в интервале $(a,\ b)$, содержащем точку x_0. Тогда при $x_0+\Delta x\in(a,b)$

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x).$$

Так как функция $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно-малая при $\Delta x\to 0$, то этой функцией можно пренебречь (откинуть) и получим

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x.$$

Обозначая $x=x_0+\Delta x$, имеем $f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0)$, или

$$\boxed{f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}. \qquad (11.1)$$

Формула (11.1) называется **формулой линеаризации** функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 (разность $x-x_0$ мала).

Согласно этой формуле исходную дифференцируемую функцию $f(x)$ вблизи точки x_0 можно приближенно заменить линейной функцией $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Пример 11.1. Линеаризовать функцию

$$f(x)=\sin\left(x^2-3x+2\right)+\ln(3x-5)+x$$

в окрестности точки $x_0=2$. Пользуясь полученной формулой, вычислить значение функции $f(x)$ в точке $x=1{,}97$.

Решение. Исходная функция является дифференцируемой в произвольной точке $x\in D(f)$, ее производная

$$f'(x)=(2x-3)\cos\left(x^2-3x+2\right)+\frac{3}{3x-5}+1.$$

Вычисляем

$$f(x_0)=f(2)=\sin\left(2^2-3\cdot 2+2\right)+\ln(3\cdot 2-5)+2=$$

$$=\sin 0+\ln 1+2=2,$$

$$f'(x_0)=f'(2)=(2\cdot 2-3)\cos\left(2^2-3\cdot 2+2\right)+\frac{3}{3\cdot 2-5}+1=5.$$

Применяя формулу (11.1), получаем

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=2+5(x-2)=5x-8.$$

Тогда $f(1{,}97)\approx 5\cdot 1{,}97-8=1{,}85$.

Вычисляя значение $f(1{,}97)$ при помощи калькулятора, получим

$$f(1{,}97)=\sin\left(1{,}97^2-3\cdot 1{,}97+2\right)+\ln(3\cdot 1{,}97-5)+1{,}97\approx 1{,}84659.$$

Сравнивая полученные результаты, видим, что они совпадают с точностью до десятых долей.

Пример 11.2. Линеаризовать функцию

$$f(x)=\ln(1+x)$$

в окрестности точки $x_0=0$ по формуле (11.1).

Решение. Учитывая, что $f(x_0)=f(0)=\ln(1+0)=0$,

$f'(x)=\left(\ln(1+x)\right)'=\dfrac{1}{1+x}$, $f'(x_0)=\dfrac{1}{1+0}=1$, получим

$$f(x)=\ln(1+x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=$$

$$0+1\cdot(x-0)=x.$$

Итак, $f(x)=\ln(1+x)\approx x$ (при малых значениях x).

Вопрос 12. Производные высших порядков. Формула Тейлора для функции одной переменной

Пусть $f'(x)$ – производная для функции $f(x)$. Составим для функции $g(x)=f'(x)$ приращение $\Delta g(x)=g(x+\Delta x)-g(x)$.

Определение 12.1. Если существует предел отношения приращения функции $\Delta g(x)=g(x+\Delta x)-g(x)$ (где $g(x)=f'(x)$) к приращению аргумента $\Delta x\neq 0$ при условии, что $\Delta x\to 0$, то этот предел называется **второй производной функции** $f(x)$ и обозначается

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}. \qquad (12.1)$$

Функция $f'(x)$ называется *производной первого порядка* функции, функция $f''(x)$ называется *производной второго порядка*

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'.$$

Аналогично можно определить *производную третьего порядка*

$$f'''(x)=\left(f''(x)\right)'.$$

И вообще, *производная* n*-го порядка*

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Пример 12.1. Найти производную третьего порядка для функции

$$y=\frac{x-2}{2x-1}+\frac{16}{\sqrt{x}}+4^{-3x}.$$

Решение. Вычисляем первую производную:

$$y'=\left(\frac{x-2}{2x-1}+\frac{16}{\sqrt{x}}+4^{-3x}\right)'=\frac{3}{(2x-1)^2}+16\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+\ln 4\cdot 4^{-3x}\cdot(-3)=$$

$$=3(2x-1)^{-2}-8x^{-\frac{3}{2}}-3\ln 4\cdot 4^{-3x}.$$

Вычисляем вторую производную

$$y''=(y')'=3\cdot(-2)\cdot(2x-1)^{-3}\cdot 2-8\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{5}{2}}-3\ln 4\cdot\ln 4\cdot 4^{-3x}\cdot(-3)=$$

$$=-12(2x-1)^{-3}+12x^{-\frac{5}{2}}+9\ln^2 4\cdot 4^{-3x}.$$

Вычисляем третью производную

$$y'''=(y'')'=-12\cdot(-3)\cdot(2x-1)^{-4}\cdot 2+12\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}}+9\ln^2 4\cdot\ln 4\cdot 4^{-3x}\cdot(-3)=$$

$$=72\cdot(2x-1)^{-4}-30x^{-\frac{7}{2}}-27\ln^3 4\cdot 4^{-3x}.$$

Формула Тейлора для функции одной переменной

Пусть функция $f(x)$ на $(a,\, b)$ имеет производные до n-го порядка включительно. Справедлива **формула Тейлора** разложения функции $f(x)$ по степеням $x-x_0$ $\left(x_0\in(a,\, b)\right)$

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n(x),} \qquad (12.2)$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ – *остаточный член* в форме Лагранжа, $\xi\in(x_0,\, x)$ – некоторая точка интервала $(x_0,\, x)$.

Формула Тейлора (12.2) при $x_0=0$ называется **формулой Маклорена:**

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x)} \qquad (12.3)$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n \quad \left(\xi\in(0,\, x)\right).$

Разложение элементарных функций по формуле Маклорена

Пример 12.2. Разложить по формуле Маклорена функцию

$$\boxed{f(x)=e^x}.$$

Имеем значение $f(0)=e^0=1$. Вычисляем производные:

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=e^x.$$

Тогда $f'(0)=e^0=1,\ f''(0)=e^0=1,\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=e^0=1$.

Применяя формулу Маклорена (12.3), получим

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{e^{\xi}}{n!}x^n,\ \ \xi\in(0,x)$.

Пример 12.3. Разложить по формуле Маклорена функцию

$$\boxed{f(x)=\sin x}.$$

Решение.

Общий вид функции и производных	**Значения функции и производных в точке** $x_0=0$
$f(x)=\sin x$	$f(0)=\sin 0=0$
$f'(x)=\cos x$	$f'(0)=\cos 0=1$
$f''(x)=-\sin x$	$f''(0)=-\sin 0=0$
$f'''(x)=-\cos x$	$f'''(0)=-\cos 0=-1$
$f^{(4)}(x)=\sin x$	$f^{(4)}(0)=\sin 0=0$
$f^{(5)}(x)=\cos x$	$f^{(5)}(0)=\cos 0=1$
$f^{(6)}(x)=-\sin x$	$f^{(6)}(0)=-\sin 0=0$
…………………………….	…………………………………….
	$f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}$

Используя данные таблицы, получим по формуле (12.3)

$$f(x)=\sin x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x)=$$

$$=0+1\cdot x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{0}{6!}x^6-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+$$

$$+\frac{0}{(2k)!}x^{2k}+R_{2k+1}(x).$$

Итак, получаем следующие разложения некоторых основных элементарных функций

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n(x),\qquad R_n(x)=\frac{e^{\xi}}{n!}x^n$$

$$f(x)=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+R_{2k+1}(x),$$

$$R_{2k+1}(x)=\frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

$$f(x)=\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)!}x^{2k-2}+R_{2k}(x),$$

$$R_{2k}(x)=\frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!}x^{2k}.$$

$$f(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1}+R_n(x).$$

Пример 12.4. Разложить $f(x)=2x^4-3x^3+5x^2-x-2$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$.

Решение. Согласно заданию, раскладывать функцию будем по степеням $x=x-(-1)=x+1$.

Общий вид функции и производных	Значения функции и производных в точке $x_0=-1$
$f(x)=2x^4-3x^3+5x^2-x-2$	$f(-1)=2(-1)^4-3(-1)^3+5(-1)^2-(-1)-2=9$
$f'(x)=8x^3-9x^2+10x-1$	$f'(-1)=8(-1)^3-9(-1)^2+10(-1)-1=-28$
$f''(x)=24x^2-18x+10$	$f''(-1)=24(-1)^2-18(-1)+10=52$
$f'''(x)=48x-18$	$f'''(-1)=-66$
$f''''(x)=48$	$f''''(-1)=48$
$f^V(x)=0$, …, $f^{(n)}(x)=0$	$f^V(-1)=0$, …, $f^{(n)}(-1)=0$ $(n\geq 6)$

Используя данные таблицы и применяя формулу (12.2), получим

$$f(x)=9-28(x+1)+\frac{52}{2}(x+1)^2-\frac{66}{6}(x+1)^3+\frac{48}{24}(x+1)^4=$$

$$=9-28(x+1)+26(x+1)^2-11(x+1)^3+2(x+1)^4.$$

Пример 12.5. Дана функция $f(x)=\sqrt{2x+7}+\cos(x^2-1)$, точка $x_0=1$.

1) Вычислить точное значение $f(x)$ функции при $x=0,97$ (пользуясь вычислительными средствами).

2) Представить функцию $f(x)$ приближенно вблизи точки x_0 квадратичной функцией по формуле

$$y=f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2.$$

3) Пользуясь полученной формулой, вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке $x=0,97$.

Решение.

1) Вычисляем точное значение $f(x)$ в точке $x=0,97$ (с точностью до четвертого знака после запятой):

$$f(0,97)=\sqrt{2\cdot 0,97+7}+\cos\left(0,97^2-1\right)=\sqrt{8,94}+\cos(-0,0591)=3,9882.$$

2) Представим функцию $f(x)$ приближенно вблизи точки $x_0=1$ квадратичной функцией по формуле $y=f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$. Эта формула является частным случаем формулы Тейлора (отброшен остаточный член $R_3(x)$). Имеем $f(x_0)=\sqrt{2\cdot 1+7}+\cos\left(1^2-1\right)=\sqrt{9}+\cos(0)=4$,

$$f'(x)=\left(\sqrt{2x+7}+\cos\left(x^2-1\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{2x+7}}-2x\cdot\sin\left(x^2-1\right),$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1+7}}-2\cdot 1\cdot\sin\left(1^2-1\right)=\frac{1}{\sqrt{9}}-2\cdot\sin(0)=\frac{1}{3},$$

$$f''(x)=\left((2x+7)^{-\frac{1}{2}}-2x\cdot\sin\left(x^2-1\right)\right)'=$$

$$=-(2x+7)^{-\frac{3}{2}}-2\sin\left(x^2-1\right)-4x^2\cos\left(x^2-1\right),$$

$$f''(x_0)=-(2\cdot 1+7)^{-\frac{3}{2}}-2\sin\left(1^2-1\right)-4(1)^2\cos\left(1^2-1\right)=-\frac{1}{27}-4=-\frac{109}{27}.$$

Тогда

$$y=f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2=$$

$$=4+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{109}{54}(x-1)^2.$$

Пользуясь полученной формулой, вычислим приближенно значение функции в точке $x=0,97$ (с точностью до четвертого знака после запятой):

$$f(0,97)\approx 4+\frac{1}{3}(0,97-1)-\frac{109}{54}(0,97-1)^2=4-\frac{1}{3}\cdot 0,03-\frac{109}{54}\cdot 0,009=3,9718.$$