Дистанционный курс «Математика 2 семестр»

Решение линейных СДУ с постоянными коэффициентами с помощью матриц

Пусть дана система n линейных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

где $a_{i,j} \in \mathbf{R}, \quad i, j = \overline{1, n}$.

Эту систему можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения $\boxed{\dfrac{dX}{dt} = AX}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Ищем решение системы виде

$$x_1 = p_1 e^{\lambda t}, x_2 = p_2 e^{\lambda t}, \ldots, x_n = p_n e^{\lambda t},$$

где $\lambda = const$, $p_i = const$ $(i = \overline{1, n})$. Подставив значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в СДУ, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n = 0, \\ a_{21}p_1 + (a_{22}-\lambda)p_2 + \ldots + a_{2n}p_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)p_n = 0. \end{cases}$$

Система должна иметь ненулевое решение, поэтому для определения λ получаем уравнение n-ой степени

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\boxed{|A-\lambda E| = 0}$, где E – единичная матрица размером $n \times n$.

Последнее уравнение является характеристическим уравнением матрицы A и в то же время характеристическим уравнением системы.

Предположим, что характеристическое уравнение имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, которые являются характеристическими числами матрицы A. Каждому характеристическому числу соответствует свой собственный вектор. Пусть характеристическому числу λ_k соответствует собственный вектор $P_k = (p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk})$, где $k = \overline{1,n}$, который находится из матричного уравнения $(A-\lambda_k E)\cdot P_k = \theta$, где θ – нулевая матрица размером $n \times 1$.

Тогда СДУ имеет n решений:

1-ое решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_1$:

$$x_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 t}, \quad x_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 t}, \ldots, x_{n1} = p_{n1}e^{\lambda_1 t};$$

2-ое решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_2$:

$$x_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 t}, \quad x_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 t}, \ldots, x_{n2} = p_{n2}e^{\lambda_2 t};$$

……………………………………………………

n-ое решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_n$:

$$x_{1n} = p_{1n}e^{\lambda_n t}, \quad x_{2n} = p_{2n}e^{\lambda_n t}, \ldots, x_{nn} = p_{nn}e^{\lambda_n t}.$$

Мы получили фундаментальную систему решений. Общее решение СДУ таково:

$$x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12} + \ldots + C_n x_{1n},$$
$$x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22} + \ldots + C_n x_{2n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = C_1 x_{n1} + C_2 x_{n2} + \ldots + C_n x_{nn}.$$

Случаи комплексных и кратных корней рассмотрим на примерах.

Решение неоднородной СДУ рассмотрим на примере СДУ 2-го порядка вида:

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

где $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$.

1) Составим и решим однородную систему $\frac{dX}{dt} = AX$ ***методом Эйлера***.

Характеристическое уравнение системы: $|A - \lambda E| = 0$, где E – единичная матрица 2-го порядка. Его решение – собственные числа λ_1 и λ_2.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 \text{ и } \lambda_2.$$

Для каждого собственного числа найдем собственный вектор $P_i = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \end{pmatrix}$ из уравнения $(A - \lambda_i E) \cdot P_i = 0$, где $i = 1, 2$.

Тогда частные решения однородной системы ДУ:

$$x_1 = p_{11}e^{\lambda_1 t}, \; x_1 = p_{21}e^{\lambda_2 t},$$
$$y_1 = p_{12}e^{\lambda_1 t}, \; y_2 = p_{22}e^{\lambda_2 t}.$$

Поэтому **общее решение однородной системы**:

$$\begin{matrix} \bar{x} = C_1 x_1 + C_2 x_2, \\ \bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \boxed{\bar{X} = W \cdot C},$$

где $W = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = const$.

2) Найдем решение неоднородной СДУ ***методом вариации произвольных постоянных***.

Пусть $C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$. Тогда решение неоднородной СДУ будем искать в виде:

$$\begin{matrix} x = C_1(t) x_1 + C_2(t) x_2, \\ y = C_1(t) y_1 + C_2(t) y_2 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \boxed{X = W \cdot C(t)}.$$

Для нахождения неизвестных функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$ составим и решим систему:

$$\begin{cases} C_1'(t) x_1 + C_2'(t) x_2 = f_1(t), \\ C_1'(t) y_1 + C_2'(t) y_2 = f_2(t) \end{cases} \quad \text{или } W \cdot C'(t) = F.$$

Решение этой системы можно найти в матричном виде:

$$\boxed{C'(t) = W^{-1} \cdot F},$$

где W^{-1} – обратная матрица для W (она существует, так как частные решения однородной системы образуют фундаментальную систему решений, то есть линейно независимы). Поэтому:

$$C(t) = \int W^{-1} \cdot F \, dt + C \quad \text{или} \quad \begin{matrix} C_1(t) = \int C_1'(t) dt + C_1, \\ C_2(t) = \int C_2'(t) dt + C_2. \end{matrix}$$

Подставляя $C(t)$ в вид общего решения неоднородной СДУ $X = W \cdot C(t)$, получим искомый результат.

Пример 1. Найти общее решение СДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + 1{,}5t^2. \end{cases}$$

Решение. 1) Однородная система имеет вид: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y, \end{cases}$ для нее $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3.$$

Для $\lambda_1 = 2$ найдем $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix}$ из матричного уравнения $(A - \lambda_1 E) \cdot P_1 = 0$:

$$\begin{cases} (-2-2)p_{11} - 4p_{12} = 0, \\ (-1)p_{11} + (1-2)p_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4p_{11} - 4p_{12} = 0, \\ -p_{11} - p_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{11} = -p_{12} \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = -3$ найдем $P_2 = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ из матричного уравнения $(A - \lambda_2 E) \cdot P_2 = 0$:

$$\begin{cases} (-2-(-3))p_{21} - 4p_{22} = 0, \\ (-1)p_{21} + (1-(-3))p_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{21} - 4p_{22} = 0, \\ -p_{21} + 4p_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{21} = 4p_{22} \Rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение однородной СДУ:

$$\overline{X}=W\cdot C=\begin{pmatrix} e^{2t} & 4e^{-3t} \\ -e^{2t} & e^{-3t} \end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix} C_1e^{2t}+4C_2e^{-3t} \\ -C_1e^{2t}+C_2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

2) Методом вариации решение неоднородной СДУ будем искать в виде:

$$X=W\cdot C(t) \text{ или } \begin{array}{l} x=C_1(t)e^{2t}+4C_2(t)e^{-3t}, \\ y=-C_1(t)e^{2t}+C_2(t)e^{-3t}. \end{array}$$

Будем искать неизвестные функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$C'(t)=W^{-1}\cdot F,$$

где $F=\begin{pmatrix} 1+4t \\ 1{,}5t^2 \end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix} e^{2t} & 4e^{-3t} \\ -e^{2t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу: $W^{-1}=\dfrac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} e^{-2t} & -4e^{-2t} \\ e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}$.

Тогда:

$$W^{-1}\cdot F=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} e^{-2t} & -4e^{-2t} \\ e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+4t \\ 1{,}5t^2 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} e^{-2t}\left(-6t^2+4t+1\right) \\ e^{3t}\left(1{,}5t^2+4t+1\right) \end{pmatrix}.$$

Поэтому $C'(t)=W^{-1}\cdot F=\dfrac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} e^{-2t}\left(-6t^2+4t+1\right) \\ e^{3t}\left(1{,}5t^2+4t+1\right) \end{pmatrix}$. После интегрирования получим:

$$C(t)=\begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-2t}\left(3t^2+t\right)+C_1 \\ \frac{1}{10}e^{3t}\left(t^2+2t\right)+C_2 \end{pmatrix}.$$

В итоге найдем решение неоднородной СДУ:

$$X=W\cdot C(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} & 4e^{-3t} \\ -e^{2t} & e^{-3t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-2t}\left(3t^2+t\right)+C_1 \\ \frac{1}{10}e^{3t}\left(t^2+2t\right)+C_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} C_1e^{2t}+4C_2e^{-3t}+t^2+t \\ -C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-0{,}5t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. ►$$

Пример 2. Найти общее решение СДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, находим

$$(6-\lambda)(\lambda^2-9) - 48 - 12 + 12 + 4\lambda + 72 - 12\lambda + 36 - 12\lambda = 0,$$

или окончательно $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. Это уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Определяем собственные векторы матрицы A.

При $\lambda = 1$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 4p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 + 2p_3 = 0, \end{cases}$$

одно из которых – следствие двух других. Возьмем, например, первые два уравнения:

$$5p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \quad p_1 - 4p_2 - p_3 = 0.$$

Отсюда

$$p_1 = 8C, \quad p_2 = 4C, \quad p_3 = -8C, \quad C = const.$$

Приняв $k = 1/4$, получаем собственный вектор $(2;1;-2)$.

При $\lambda = 2$ имеем систему

$$\begin{cases} 4p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 5p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 + p_3 = 0. \end{cases}$$

Снова используя первые два уравнения (третье – их следствие), находим

$$p_1 = 7C, \quad p_2 = 3C, \quad p_3 = -8C, \; C = const\,.$$

приняв $k = 1$, получаем собственный вектор $(7;3;-8)$.

При $\lambda = 3$ имеем систему

$$\begin{cases} 3p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 6p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $p_1 = 3p_2$. Подставляем это значение p_1 в первое уравнение и находим $p_3 = -3p_2$. Приняв $p_2 = 1$, получаем $p_1 = 3$, $p_3 = -3$, т.е. собственный вектор $(3;1;-3)$.

Фундаментальная система решений:

для $\lambda = 1: x_{11} = 2e^t, x_{21} = e^t, x_{31} = -2e^t$,

для $\lambda = 2: x_{12} = 7e^{2t}, x_{22} = 3e^{2t}, x_{32} = -8e^{2t}$,

для $\lambda = 3: x_{13} = 3e^{3t}, x_{23} = e^{3t}, x_{33} = -3e^{3t}$.

Общее решение записывается в виде

$$x_1 = 2C_1e^t + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t},$$

$$x_2 = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t},$$

$$x_3 = -2C_1e^t - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}. \blacktriangleright$$

Пример 3. Найти общее решение СДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \ (4-\lambda)^2 = -9, \lambda - 4 = \pm 3i, \lambda = 4 \pm 3i .$$

Определяем собственные векторы.

При $\lambda_1 = 4 + 3i$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 + 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

Т.о., $p_2 = ip_1$. Приняв $p_1 = 1$, находим $p_2 = i$, т.е. собственный вектор $(1; i)$.

При $\lambda_2 = 4 - 3i$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 - 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим собственный вектор $(1; -i)$.

Фундаментальная система решений:

для $\lambda_1 = 4 + 3i$:

$$x_{11} = e^{(4+3i)t} = e^{4t}(\cos 3t + i \sin 3t),$$

$$x_{21} = ie^{(4+3i)t} = e^{4t}(-\sin 3t + i \cos 3t);$$

для $\lambda_2 = 4 - 3i$:

$$x_{12} = e^{(4-3i)t} = e^{4t}(\cos 3t - i \sin 3t),$$

$$x_{22} = e^{4t}(-\sin 3t - i \cos 3t).$$

Итак, получаем общее решение

$$x_1 = C_1 e^{4t}(\cos 3t + i\sin 3t) + C_2 e^{4t}(\cos 3t - i\sin 3t),$$

$$x_2 = C_1 e^{4t}(-\sin 3t + i\cos 3t) + C_2 e^{4t}(-\sin 3t - i\cos 3t),$$

т.е.

$$x_1 = e^{4t}[(C_1 + C_2)\cos 3t + (C_1 - C_2)i\sin 3t],$$

$$x_2 = e^{4t}[-(C_1 + C_2)\sin 3t + (C_1 - C_2)i\cos 3t].$$

Полагая $(C_1 + C_2) = C_1^*, \quad (C_1 - C_2)i = C_2^*$, получаем

$$x_1 = e^{4t}(C_1^* \cos 3t + C_2^* \sin 3t),$$

$$x_2 = e^{4t}(-C_1^* \sin 3t + C_2^* \cos 3t).$$

Общее решение может быть найдено и иначе. В решениях, соответствующих одному из комплексных характеристических чисел, отделим действительную и мнимую части (сопряженное характеристическое число мы не рассматриваем, так как решения, соответствующие корню $a - bi$, линейно зависимы с решениями корня $a + bi$):

$$e^{(4+3i)t} = e^{4t}\cos 3t + ie^{4t}\sin 3t,$$

$$ie^{(4+3i)t} = -e^{4t}\sin 3t + ie^{4t}\cos 3t.$$

Получаем два линейно независимых частных решения:

$$x_{11} = e^{4t}\cos 3t,\ x_{21} = -e^{4t}\sin 3t,$$

$$x_{12} = e^{4t}\sin 3t,\ x_{22} = e^{4t}\cos 3t.$$

Общее решение

$$x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12},\ x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22},$$

т.е.

$$x_1 = e^{4t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t),$$

$$x_2 = e^{4t}(-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t)\,.\blacktriangleright$$

Пример 4. Найти общее решение СДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } (1-\lambda)(1+\lambda^2) = 0 .$$

Характеристические числа: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$.

При $\lambda_1 = 1$ для определения собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -p_3 = 0, \\ p_1 - p_2 = 0, \\ p_1 - p_2 - p_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система определяет собственный вектор $(1;1;0)$.

При $\lambda_2 = i$ для определения собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (1-i)p_1 - p_3 = 0, \\ p_1 - ip_2 = 0, \\ p_1 - p_2 - ip_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система определяет собственный вектор $(1;-i;1-i)$.

Собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_3 = -i$, мы рассматривать не будем, так как оно сопряжено с $\lambda_2 = i$.

Значению $\lambda_1 = 1$ соответствуют решения

$$x_{11} = e^t,\ x_{21} = e^t,\ x_{31} = 0.$$

Значению $\lambda_2 = i$ соответствуют решения

$$e^{it} = \cos t + i\sin t, \quad -ie^{it} = \sin t - i\cos t,$$

$$(1-i)e^{it} = (\cos t + \sin t) + i(\sin t - \cos t).$$

Отделяя действительные части, получим решения

$$x_{12} = \cos t,\ x_{22} = \sin t,\ x_{32} = \cos t + \sin t.$$

Отделяя мнимые части, находим решения

$$x_{13} = \sin t,\ x_{23} = -\cos t,\ x_{33} = \sin t - \cos t.$$

Общее решение

$$x_1 = C_1 e^t + C_2\cos t + C_3\sin t,$$

$$x_2 = C_1 e^t + C_2\sin t - C_3\cos t,$$

$$x_3 = C_2(\cos t + \sin t) + C_3(\sin t - \cos t). \blacktriangleright$$

Пример 5. Найти общее решение СДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Решение. Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \ (5-\lambda)(3-\lambda)+1 = -9,\ \ \lambda_1 = \lambda_2 = 4.$$

Если λ_1 – корень характеристического уравнения кратности m, то этому корню соответствует решение

$$x_1 = p_1(t)e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = p_2(t)e^{\lambda_1 t}, \ldots, x_n = p_n(t)e^{\lambda_1 t},$$

где $p_1(t),\ p_2(t), \ldots p_n(t),$ – многочлены степени не выше $m-1$.

Т.о., двукратному корню $\lambda = 4$ соответствует решение:

$$x_1 = e^{4t}(a_1 t + a_2),\ x_2 = e^{4t}(b_1 t + b_2).$$

Дифференцируя x_1 и x_2, получим

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 e^{4t} + 4(a_1 t + a_2)e^{4t}, \quad \frac{dx_2}{dt} = b_1 e^{4t} + 4(b_1 t + b_2)e^{4t}.$$

Значения x_1, x_2, $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{dx_2}{dt}$ подставим в систему уравнений. После сокращения на e^{4t} имеем

$$a_1 + 4(a_1 t + a_2) = 5(a_1 t + a_2) - (b_1 t + b_2),$$
$$b_1 + 4(b_1 t + b_2) = a_1 t + a_2 + 3(b_1 t + b_2).$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, получаем системы уравнений:

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1, \\ 4b_1 = a_1 + 3b_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 4a_2 = 5a_2 - b_2, \\ b_1 + 4b_2 = a_2 + 3b_2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $a_1 = b_1$, $a_2 - b_2 = a_1 = b_1$. Полагая $a_1 = C_1$, $a_2 = C_2$ ($C_1, C_2 = const$), находим $b_1 = C_1$, $b_2 = C_2 - C_1$. Сл–но,

$$x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2), \quad x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1). ▶$$