Вопрос 4. Частные производные функции двух переменных

Пусть дана функция двух переменных

$$f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ z=f\left(x,y\right),\ \left(x,y\right)\in D\left(f\right).$$

Рассмотрим выражения

$$\Delta_x z\equiv\Delta_x f=f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right), \tag{4.1}$$

$$\Delta_y z\equiv\Delta_y f=f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right) \tag{4.2}$$

где $\left(x+\Delta x,y\right),\ \left(x,y+\Delta y\right)\in D\left(f\right)$.

Определение 4.1. Выражения (4.1), (4.2) называются ***частными приращениями функции*** f по переменным x, y соответственно.

Пример 4.1. Найти для функции

$$z=f\left(x,y\right)=x^2y-2x$$

частные приращения $\Delta_x z$, $\Delta_y z$.

Решение. Частное приращение $\Delta_x z$ по формуле (4.1):

$$\Delta_x z=f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)=$$

$$=\left(\left(x+\Delta x\right)^2\cdot y-2\left(x+\Delta x\right)\right)-\left(x^2\cdot y-2x\right)=$$

$$=\left(x^2\cdot y+2x\cdot\Delta x\cdot y+\left(\Delta x\right)^2\cdot y-2x-2\Delta x\right)-\left(x^2\cdot y-2x\right)=$$

$$=\cancel{x^2y}+2x\cdot\Delta x\cdot y+\left(\Delta x\right)^2\cdot y-\cancel{2x}-2\Delta x-\cancel{x^2y}+\cancel{2x}=$$

$$=2x\cdot\Delta x\cdot y+\left(\Delta x\right)^2\cdot y-2\Delta x.$$

Частное приращение $\Delta_y z$ по формуле (4.2):

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) =$$

$$\left(x^2 \cdot (y+\Delta y) - 2x\right) - \left(x^2 \cdot y - 2x\right) =$$

$$= \left(x^2 \cdot y + x^2 \cdot \Delta y - 2x\right) - \left(x^2 \cdot y - 2x\right) =$$

$$= \cancel{x^2 y} + x^2 \Delta y - \cancel{2x} - \cancel{x^2 y} + \cancel{2x} = x^2 \cdot \Delta y.$$

Получили следующие частные приращения

$$\Delta_x z = 2x \cdot \Delta x \cdot y + (\Delta x)^2 \cdot y - 2\Delta x, \ \ \Delta_y z = x^2 \cdot \Delta y.$$

Составим отношения частных приращений к приращениям аргументов:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \ \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Эти отношения являются функциями соответственно переменных Δx, Δy (если учесть x, y постоянными).

Определение 4.2. ***Частной производной*** функции f переменных x, y по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении этого приращения к нулю.

Обозначения частных производных

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}}, \text{ либо } \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}}, \text{ либо } \boxed{f'_x(x, y), \ f'_y(x, y)}.$$

Следовательно, по определению считаем, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}, \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \qquad (4.4)$$

Пример 4.2. Найти частные производные для функции

$$z = f(x, y) = x^2 y - 2x.$$

Решение. Учитывая, что частные приращения функции имеют вид (см. пример 4.1)

$$\Delta_x z = 2x \cdot \Delta x \cdot y + (\Delta x)^2 \cdot y - 2\Delta x, \;\; \Delta_y z = x^2 \cdot \Delta y,$$

составим отношения

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2xy + \Delta x \cdot y - 2)}{\Delta x} = 2x \cdot y + \Delta x \cdot y - 2,$$

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{x^2 \Delta y}{\Delta y} = x^2.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x \cdot y + \Delta x \cdot y - 2) = 2x \cdot y - 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (x^2) = x^2.$$

Итак, частные производные имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 2, \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2.$$

Заметим, что при нахождении частной производной по одной переменной другая переменная считается постоянной. Поэтому при вычислении частных производных справедливы правила дифференцирования функции одной переменной:

$$z'_x = f'_x(x, y) = (x^2 y - 2x)'_x = (x^2 y)'_x - (2x)'_x =$$

$$= y(x^2)'_x - 2(x)'_x = 2xy - 2.$$

(при вычислении частной производной по переменной x аргумент y считали постоянным),

$$z'_y = f'_y(x,y) = \left(x^2 y - 2x\right)'_y = \left(x^2 y\right)'_y - \left(2x\right)'_y = x^2\left(y\right)'_y - 0 = x^2$$

(при вычислении частной производной по y считаем $x = const$).

Пример 4.3. Найти частные производные для функции

$$z = x^y + y^{2x} \quad \left(x > 0,\ y > 0\right).$$

Решение. Находим частную производную по переменной x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^y + y^{2x}\right)'_x = \left(x^y\right)'_x + \left(y^{2x}\right)'_x =$$

$$= yx^{y-1} + y^{2x} \cdot \ln y \cdot \left(2x\right)'_x = yx^{y-1} + y^{2x} \cdot \ln y \cdot 2.$$

Вычисляем частную производную по переменной y:

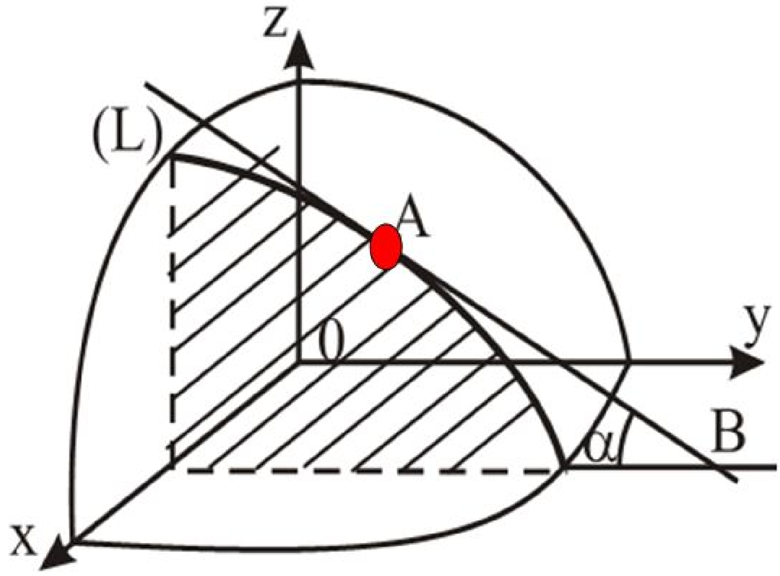
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^y + y^{2x}\right)'_y = \left(x^y\right)'_y + \left(y^{2x}\right)'_y =$$

$$= x^y \cdot \ln x + 2x \cdot y^{2x-1}.$$

Геометрический смысл частных производных

$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D(f).$

Изобразим поверхность, являющуюся графиком этой функции



Построим плоскость $x = const$. Она пересекается с поверхностью по кривой L. Пусть AB – касательная к кривой L в точке *A(x,y,z),* α – угол, образованный этой касательной с положительным направлением оси ординат *OY*. Так как при $x = const$ частная производная

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dy}$$

то на основании геометрического смысла производной функции одной переменной имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = tg\alpha .$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx}\bigg|_{y=const} = tg\beta ,$$

где $\beta -$угол, образованный касательной с положительным направлением оси абсцисс *OX*.

Вопрос 5. Полный дифференциал функции двух переменных. Основные теоремы о дифференцируемости функции

Рассмотрим функцию двух переменных

$$f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ z=f(x,y),\ \ (x,y)\in D(f).$$

Составим выражение

$$\Delta z\equiv\Delta f(x,y)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y). \qquad (5.1)$$

$(x,y),\ (x+\Delta x,y+\Delta y)\in D(f)$.

Определение 5.1. Выражение (5.1) называется ***полным приращением*** функции f в точке $(x,y)\in D(f)$.

Определение 5.2. Функция f называется ***дифференцируемой*** в точке (x,y), если полное приращение можно записать в виде

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha_1\cdot\Delta x+\alpha_2\cdot\Delta y, \qquad (5.2)$$

где $A,\ B$ - постоянные для точки (x,y) числа, $\alpha_1,\ \alpha_2$ - бесконечно малые функции, зависящие от $\Delta x,\ \Delta y$:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\alpha_1(\Delta x,\ \Delta y)=0,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\alpha_2(\Delta x,\ \Delta y)=0.$$

Определение 5.3. Если функция f является дифференцируемой в точке (x,y), то выражение

$$A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$$

в ее полном приращении Δz называется ***полным дифференциалом*** и обозначается в виде

$$dz\equiv df(x,y)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y. \qquad (5.3)$$

(полный дифференциал есть главная часть приращения функции).

Теорема 5.1 (о существовании частных производных у дифференцируемой функции). Если функция f дифференцируема в точке $(x,y)\in D(f)$, то в этой точке функция f имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=B. \tag{5.4}$$

Доказательство. Если функция дифференцируема, то

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha_1\cdot\Delta x+\alpha_2\cdot\Delta y.$$

Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ определяется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x+\alpha_1\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\alpha_1\right)=A+0=A$$

(учли, что при нахождении частной производной: $\Delta y=0$).

Аналогично частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{B\cdot\Delta y+\alpha_2\cdot\Delta y}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(B+\alpha_2\right)=B+0=B$$

(учли, что при нахождении частной производной: $\Delta x=0$).
Теорема доказана.

Согласно теореме 5.3, для дифференцируемой функции в точке ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y+\alpha_1\cdot\Delta x+\alpha_2\cdot\Delta y.$$

Тогда полный дифференциал имеет вид

$$\boxed{dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.} \tag{5.5}$$

Пример 5.1. Найти полный дифференциал функции

$$z = f(x,y) = x^2y^3 - 8\sqrt{xy}$$

в точке $(x_0, y_0) = (4, -1)$.

Решение. Согласно (5.5), полный дифференциал имеет вид

$$dz(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y,$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$ − значения частных производных функции в точке $(x_0, y_0) = (4, -1)$.

Вычисляем частные производные функции в точке (x_0, y_0):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2y^3 - 8\sqrt{xy}\right)'_x = 2xy^3 - \frac{4y}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = 2\cdot 4\cdot(-1)^3 - \frac{4\cdot(-1)}{\sqrt{4}} = -6,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2y^3 - 8\sqrt{xy}\right)'_y = 3x^2y^2 - 8\sqrt{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = 3\cdot 4^2\cdot(-1)^2 - 8\sqrt{4} = 32.$$

Полный дифференциал

$$dz(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y = -6\Delta x + 32\Delta y.$$

Теорема 5.2 (о непрерывности дифференцируемой функции). Если функция f дифференцируема в точке (x, y) ее области определения $D(f)$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Если функция дифференцируема в точке (x, y), то ее полное приращение можно записать в виде (5.2):

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha_1\cdot\Delta x + \alpha_2\cdot\Delta y,$$

где A, B - некоторые постоянные для точки (x, y) числа, α_1, α_2 – бесконечно малые функции, зависящие от $\Delta x, \Delta y$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0}} \alpha_1(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0}} \alpha_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Требуется доказать, что $\boxed{\lim_{\substack{\Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.}$

(бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое полное приращение функции).

Находим предел Δz при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$:

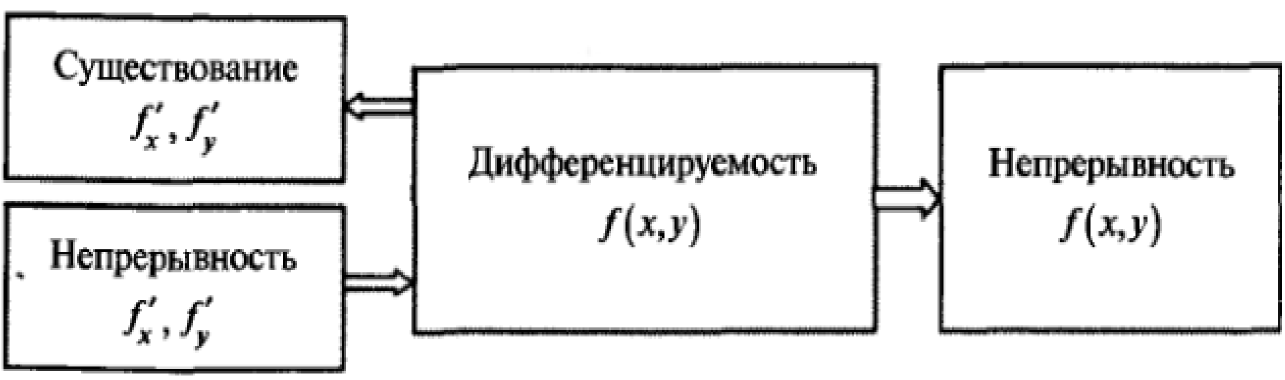
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0}} \left(A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y \right) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.3 (о дифференцируемости функции двух переменных, имеющей непрерывные частные производные).

Если функция f имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в окрестности точки $(x, y) \in D(f)$, причем эти частные производные непрерывны в точке (x, y), то функция f дифференцируема в точке (x, y).

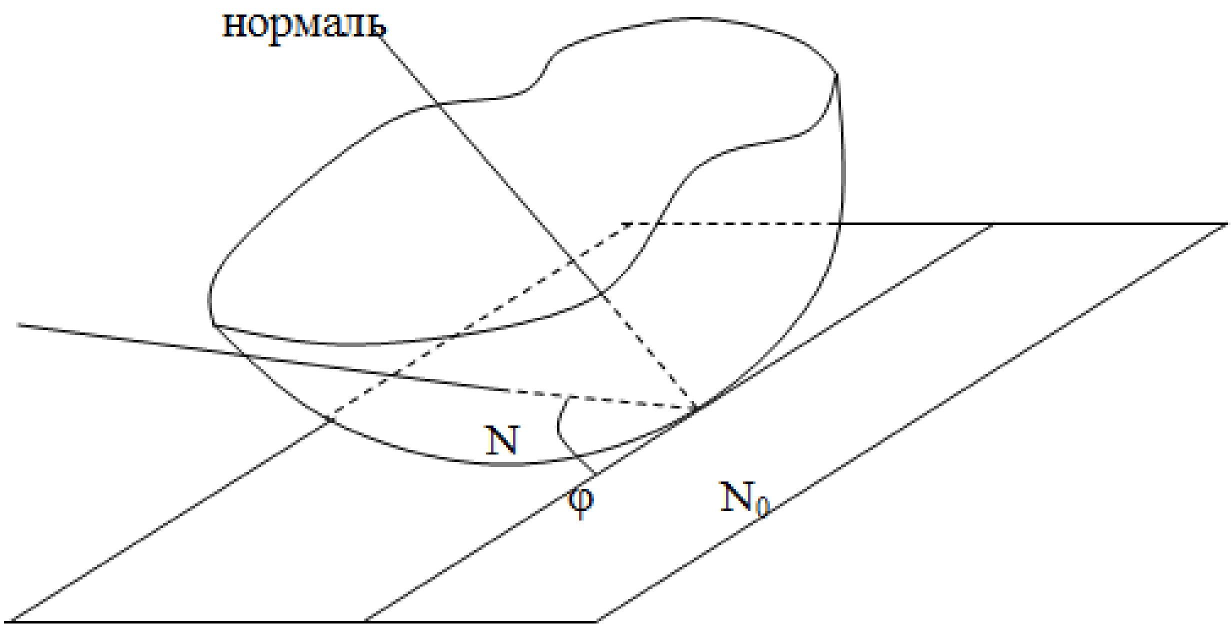
Согласно теоремам 3.1, 3.2, 3.3, связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции двух переменных можно свести к схеме, представленной на рисунке.



6. Геометрический смысл полного дифференциала Ф2П. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

Пусть N и N_0 – точки поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется ***касательной плоскостью*** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Определение 6.1. ***Нормалью*** к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.



Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где f – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ существует и имеет уравнение:

$$\boxed{z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}. \quad (6.1)$$

Уравнение нормали к поверхности в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}. \quad (6.2)$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$ является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Пример 6.1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением

$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y - 1$ в точке $M_0(1,\ 1)$.

Решение. Вычисляем значение $f(x_0, y_0)$ и частные производные в точке $M_0(1,\ 1)$:

$$f(x_0, y_0) = f(1,1) = 0,$$

$$f'_x(x,y) = 2x - 2y - 1, \quad f'_y(x,y) = -2x + 2y + 2,$$

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_x(1,1) = 2\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1 = -1,$$

$$f'_y(x_0, y_0) = f'_y(1,1) = -2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2 = 2.$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z - 0 = -1(x-1) + 2(y-1) \Leftrightarrow z = -x + 1 + 2y - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + z + 1 = 0.$$

Уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

7. Применение полного дифференциала функции двух переменных при вычислении приближенных значений функций

Рассмотрим дифференцируемую функцию двух переменных

$$f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ z=f(x,y),\ \ (x,y)\in D(f).$$

Полное приращение функции можно представить в виде

$$\Delta f(x_0,y_0)\equiv f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$

$$=f'_x(x_0,\,y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,\,y_0)\cdot\Delta y+\alpha_1\cdot\Delta x+\alpha_2\cdot\Delta y,$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2$ - бесконечно малые функции, зависящие от $\Delta x,\ \Delta y$, такие что

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\alpha_1(\Delta x,\ \Delta y)=0,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\alpha_2(\Delta x,\ \Delta y)=0.$$

Отбросив в последней формуле в силу малости выражение $\alpha_1\cdot\Delta x+\alpha_2\cdot\Delta y$, получим

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta f(x_0,y_0)\equiv f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx\\ &\approx f'_x(x_0,\,y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,\,y_0)\cdot\Delta y=df(x_0,y_0)\end{aligned}}. \qquad (7.1)$$

(полное приращение функции в точке приближенно равно полному дифференциалу функции в этой точке).

Обозначим в формуле (7.1) $\Delta x=x-x_0,\ \Delta y=y-y_0$. Тогда

$$x=x_0+\Delta x,\ y=y_0+\Delta y,$$

$$\boxed{f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,\,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,\,y_0)\cdot(y-y_0)}. \quad (7.2)$$

Формула (7.2) называется ***формулой линеаризации функции двух переменных*** в окрестности точки (x_0,y_0).

Она позволяет вычислить значение функции $f(x,\,y)$ в некоторой точке $(x,\,y)$, исходя из значений функции и ее частных производных в так называемой "удобной" точке $(x_0,\,y_0)$.

Пример 7.1. На сколько изменится диагональ прямоугольника со сторонами $x = 6$ *м*, $y = 8$ *м*, если сторона x увеличится на 5 *см*, а сторона y уменьшится на 10 *см*?

Решение. Обозначим диагональ прямоугольника через z, тогда по теореме Пифагора имеем $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Полное приращение функции заменим приближенно полным дифференциалом, получим

$$\Delta z \approx dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \Delta y.$$

Полагая $x = 6, \quad y = 8, \quad \Delta x = 0{,}05, \quad \Delta y = -0{,}1$, получаем

$$\Delta z \approx \frac{6}{\sqrt{36 + 84}} \cdot 0{,}05 + \frac{8}{\sqrt{36 + 84}} \cdot (-0{,}10) = -0{,}05 \ (м).$$