Вопрос 9. Метод универсальной тригонометрической подстановки (УТП)

Рассмотрим неопределенный интеграл вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx, \tag{9.1}$$

где $R(u,\ v)$ – рациональная функция переменных $u,\ v$ (обозначены $u=\sin x,\ v=\cos x$).

Интеграл (9.1) с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки (УТП)***

$$t = tg(x/2) \tag{9.2}$$

преобразуется в интеграл от рациональной функции <u>одной</u> переменной t.

Используя формулы (вытекают из формулы (9.2))

$$\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2tg\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{9.3}$$

получим интеграл

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int \overline{R}(t)dt\ . \tag{9.4}$$

Полученный интеграл (9.4) является интегралом от рациональной функции $\overline{R}(t)$ (обычно рациональной дроби) одной переменной t.

Пример 9.1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3+4\cos x}$.

Решение. Применяя подстановку (9.2) $t = tg(x/2)$, и учитывая формулы (9.3), получим

$$\int \frac{dx}{3+4\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\left(\frac{3+3t^2+4-4t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= 2\underbrace{\int \frac{dt}{7-t^2}}_{=T16} = 2\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+t}{\sqrt{7}-t}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+tg(x/2)}{\sqrt{7}-tg(x/2)}\right| + C$$

С помощью универсальной тригонометрической подстановки (9.2) как правило вычисляются интегралы

$$\int \frac{a_1 \sin x + a_2 \cos x + a_3}{b_1 \sin x + b_2 \cos x + b_3} dx$$

Пример 9.2. Вычислить неопределенный интеграл

$$I = \int \frac{\sin x + \cos x + 2}{1 - \sin x + \cos x} dx$$

при помощи универсальной тригонометрической подстановки.

Решение: Применяя подстановку $t = tg(x/2)$, и учитывая формулы (9.3), получим

$$I = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2}{1 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{2t+1-t^2+2+2t^2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2-2t+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{3+2t+t^2}{2-2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{3+2t+t^2}{(1-t)\cdot\left(1+t^2\right)} dt = \int \overline{R}(t) dt.$$

Последний интеграл является интегралом от правильной рациональной дроби

$$\overline{R}(t)=\frac{t^2+2t+3}{(1-t)\cdot\left(1+t^2\right)}.$$

Раскладывая подынтегральную функцию на простейшие дроби, и применяя метод неопределенных коэффициентов, получим

$$\frac{t^2+2t+3}{(1-t)\cdot\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{1-t}+\frac{Bt+C}{1+t^2}=\frac{A\left(1+t^2\right)+(Bt+C)(1-t)}{(1-t)\cdot\left(1+t^2\right)}=$$

$$=\frac{A+At^2+Bt-Bt^2+C-Ct}{(1-t)\cdot\left(1+t^2\right)}=\frac{(A-B)t^2+(B-C)t+(A+C)}{(1-t)\cdot\left(1+t^2\right)},$$

$$\begin{cases} t^2: & A-B \qquad =1, \\ t^1: & \qquad B-C=2, \Rightarrow A=3,\ B=2,\ C=0. \\ t^0: & A \qquad +C=3 \end{cases}$$

Окончательно интеграл

$$I=\int\frac{3+2t+t^2}{(1-t)\cdot\left(1+t^2\right)}dt=\int\frac{3dt}{1-t}+\int\frac{2tdt}{1+t^2}=-3\ln|1-t|+\ln\left(1+t^2\right),$$

где $t=tg(x/2)$.

Вопрос 10. Частные тригонометрические подстановки

В некоторых случаях подстановка $t = tg(x/2)$ приводит к сложным вычислениям интеграла от рациональной функции (знаменатель полученной дроби трудно разложить на множители). Тогда предпочтительнее использовать некоторые ***частные подстановки***.

Выбор подстановки зависит от структуры подынтегральной функции $R(u,\ v)$, где $u = \sin x,\ v = \cos x$. При этом:

1) если функция $R(u,\ v)$ – нечетная относительно $u = \sin x$ (то есть синуса):

$$R(-u,\ v) \equiv -R(u,\ v),$$

то предпочтительнее подстановка $t = \cos x$;

2) если функция $R(u,\ v)$ – нечетная относительно $v = \cos x$ (то есть косинуса):

$$R(u,\ -v) \equiv -R(u,\ v),$$

то предпочтительнее подстановка $t = \sin x$;

3) если функция $R(u,\ v)$ – четная относительно совокупности своих переменных:

$$R(-u,\ -v) \equiv R(u,\ v),$$

то предпочтительнее подстановка $t = tgx$.

Пример 10.1. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx$.

Решение: Подынтегральная функция

$$R(u,\ v) = \frac{u^3}{v-3}$$

нечетная относительно переменной $u = \sin x$ (синуса). Примем замену (подстановку) $t = \cos x$. Тогда

$$t = \cos x \ \Rightarrow\ x = \arccos t,\quad \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2},\quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Исходный интеграл примет вид

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t-3} \left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right) = -\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2}{t-3} dt = \int \frac{t^2 - 1}{t-3} dt =$$

$$= \int \left(t + 3 + \frac{8}{t-3} \right) dt = \frac{t^2}{2} + 3t + 8\ln|t-3| + C = \frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x +$$

$$+ 8\ln|\cos x - 3| + C.$$

Пример 10.2. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция $R(u,\ v) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$ четная относительно совокупности своих переменных: $R(-u,\ -v) = R(u,\ v)$. Предпочтительнее применить подстановку $t = tgx$:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{matrix} tgx = t, \quad x = arctg\, t, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t^2(1+t^2)^2}{(1+t^2)(1+t^2)} dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Этот же интеграл можно решить и таким образом

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \left| t = tgx,\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \right| = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\boxed{\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx.}$$

Возникают случаи:

1) если хотя бы одно из чисел m или n - нечетное число; пусть $n = 2p + 1$, то

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} x \, dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right)^p \cdot \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \sin x = t; \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int t^m \left(1 - t^2\right)^p dt,$$

получили интеграл от рациональной функции;

2) если m и n - неотрицательные четные числа ($m = 2p$, $n = 2q$). Используя формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - 2\cos x}{2}; \ \cos^2 x = \frac{1 + 2\cos 2x}{2},$$

получим

$$\int \sin^{2p} x \cdot \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1 - 2\cos 2x}{2}\right)^p \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^q dx$$

после преобразований получим интегралы вида $\int \cos(kx) dx$.

Пример 10.3. Вычислить интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$.

Решение. Имеем случай 2. Формулы понижения степени

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x) \cdot (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx =$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 2x-\frac{1+\cos 4x}{2}-\cos^2 2x\cos 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin^3 2x\right)+C=\frac{1}{64}\left(4x-\sin 4x++2\sin^3 2x\right)+C.$$

Для вычисления интегралов вида

$$\int\cos(mx)\cdot\cos(nx)dx,$$

$$\int\sin(mx)\cdot\cos(nx)dx$$

$$\int\sin(nx)\cdot\sin(mx)dx$$

применяем соответственно формулы преобразований произведения функций косинуса и синуса в сумму:

$$\cos(mx)\cdot\cos(nx)=\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right),$$

$$\sin(mx)\cdot\cos(nx)=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right),$$

$$\sin(mx)\cdot\sin(nx)=\frac{1}{2}\left(-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right).$$

Пример 10.4. Вычислить интеграл $\int\sin(2x)\cdot\sin(3x)dx$.

Решение. Имеем

$$\int\sin(2x)\sin(3x)dx=\frac{1}{2}\int\left(-\cos(2+3)x+\cos(2-3)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(-\cos 5x+\cos x\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right)+C.$$