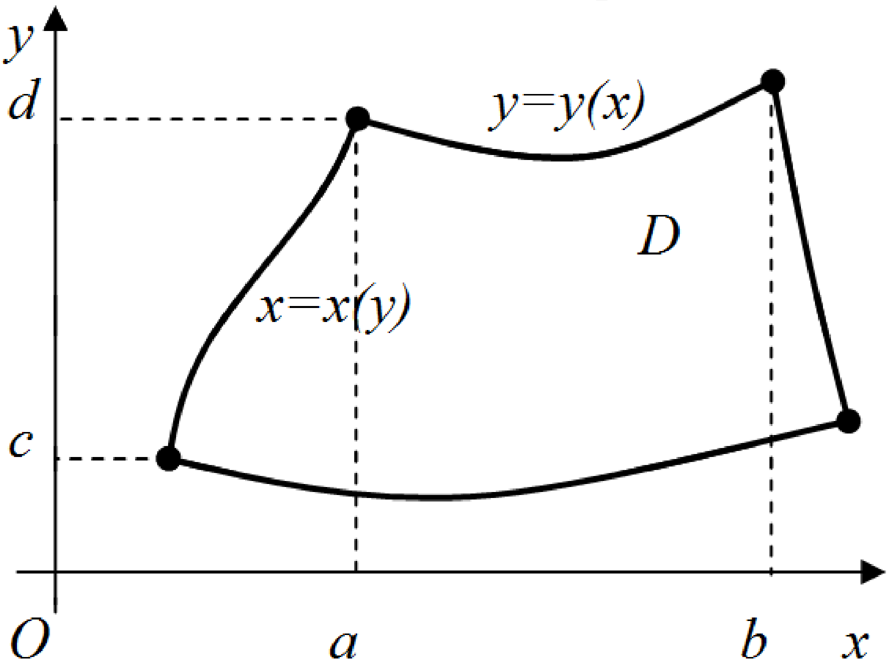
15. Нахождение наибольшего и наименьшего значений Ф2П в замкнутой ограниченной области (глобальные экстремумы)

Справедливо утверждение о том, что если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области D, то она достигает своего наибольшего значения $z_{наиб}$ и своего наименьшего значения $z_{наим}$ в одной из стационарных точек области D, или в одной из точек границы области D.



Алгоритм нахождения и наименьшего значений для того случая, когда граница области D состоит из отдельных участков, отделенных друг от друга ***крайними точками*** участков границы.

1. Находим все ***стационарные точки*** функции, лежащие строго внутри области D, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

2. Если участок границы задан уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то находим ***стационарные точки*** функции одной переменной

$$z = f\left(x,\, y(x)\right),\quad x \in [a, b],$$

решая уравнение $\left[f\left(x,\, y(x)\right)\right]_x' = 0$.

Если участок границы задан уравнением $x = x(y),\ y \in [c, d]$, то ищем ***стационарные точки*** функции одной переменной

$$z = f\left(x(y),\, y\right),\ y \in [c, d],$$

решая уравнение $\left[f\left(x(y),\, y\right)\right]_y' = 0$.

3. Вычисляем значения функции $z = f(x, y)$ во всех ***стационарных точках*** функции, лежащих строго внутри области D, во всех ***крайних точках участков границы***, во всех ***стационарных точках участков границы***, выбираем из них наибольшее значение $z_{наиб.}$ и наименьшее значение $z_{наим.}$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = f(x,\, y) = x^2 + 2y^2 + x - y + 2$$

в замкнутой области D, ограниченной прямыми

$$l_1\colon\ x + y = 1,\ l_2\colon\ x + y = -1,\ l_3\colon\ x - y = 1,\ l_4\colon\ x - y = -1.$$

Решение. Замкнутая ограниченная область имеет вид квадрата.

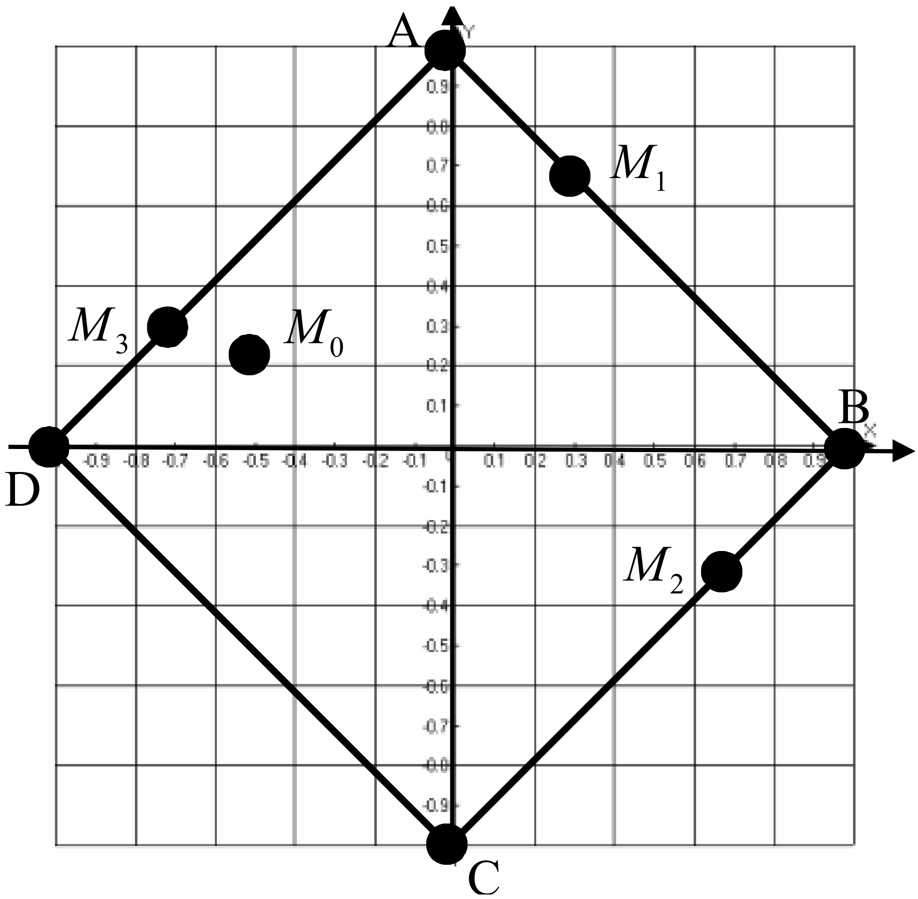
1) Определим стационарные точки функции, лежащие строго внутри области D. Находим частные производные

$$z_x' = f_x'(x,\, y) = 2x + 1,\quad z_y' = f_y'(x,\, y) = 4y - 1.$$

Решением системы

$$\begin{cases} z_x' = 2x + 1 = 0, \\ z_y' = 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

является **стационарная точка** $M_0\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right) \in D$.



2) Исследование функции $z = f(x, y)$ на границе D.

а) Первая граница области задана уравнением прямой AB $l_1\colon x + y = 1$. На границе $l_1\colon y = -x + 1,\ x \in [0,\ 1]$ функция $z = f(x, y)$ двух переменных станет функцией одной переменной

$$f(x, y) = f(x,\ -x+1) =$$

$$= x^2 + 2(-x+1)^2 + x - (-x+1) + 2 = 3x^2 - 2x + 3 = f_1(x),\ x \in [0,\ 1].$$

Находя ее стационарную точку из условия $f_1'(x) = 0$, получим

$$f_1'(x) = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \in (0,\ 1) \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Получили точку $M_1\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, лежащую на границе $l_1\colon x + y = 1$ и являющейся на ней стационарной точкой функции $z = f(x, y)$.

б) Вторая граница DC области задана уравнением прямой $l_2\colon y = -x - 1,\ x \in [-1,\ 0]$. Исследуемая функция примет вид

$$f(x, y) = f(x,\ -x-1) =$$

$$= x^2 + 2(-x-1)^2 + x - (-x-1) + 2 = 3x^2 + 6x + 5 = f_2(x)$$

$f_2(x) = 3x^2 + 6x + 5,\ x \in [-1,\ 0]$. Находя ее стационарную точку, получим

$$f_2'(x) = 6x + 6 = 0,\ x_2 = -1 \notin (-1,\ 0)$$

(полученная точка **не лежит внутри интервала** $(-1,\ 0)$).

в) Для границы l_3: $x - y = 1$ (прямая CB) получим $y = x - 1$:

$$f(x,\ y) = f(x,\ x-1) =$$

$$= x^2 + 2(x-1)^2 + x - (x-1) + 2 = 3x^2 - 4x + 5 = f_3(x),$$

$$f_3(x) = 3x^2 - 4x + 5,\ x \in [0,\ 1],$$

$$f_3'(x) = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} \in (0,\ 1) \Rightarrow y_2 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3},$$

$M_2\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ – стационарная точка функции на участке l_3.

г) Для границы l_4: $x - y = -1$ (прямая DA) получим

$$f(x,\ y) = f(x,\ x+1) =$$

$$= x^2 + 2(x+1)^2 + x - (x+1) + 2 = 3x^2 + 4x + 3$$

$$f_4(x) = 3x^2 + 4x + 3,\ x \in [-1,\ 0],$$

$$f_4'(x) = 6x + 4 = 0 \Rightarrow x_3 = -2/3 \in (-1,\ 0) \Rightarrow$$

$M_3\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ – стационарная точка функции на участке l_4.

3) Вычислим значения функции $z = f(x, y)$ во всех полученных ***стационарных точках***

$$\boxed{M_0\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right),\ M_1\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ M_2\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right),\ M_3\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),}$$

во всех ***крайних точках участков границы:***

$$\boxed{A(0,\ 1),\ B(1,\ 0),\ C(0,\ -1),\ D(-1,\ 0)}$$

$$z_{M_0} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 = \frac{13}{8},$$

$$z_{M_1} = f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = f_1\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{8}{3},$$

$$z_{M_2} = f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = f_3\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 5 = \frac{11}{3},$$

$$z_{M_3} = f\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = f_4\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3},$$

$$z_A = f(0,\ 1) = f_1(0) = 3(0)^2 - 2(0) + 3 = 3,$$

$$z_B = f(1,\ 0) = f_1(1) = 3(1)^2 - 2(1) + 3 = 4,$$

$$z_C = f(0,\ -1) = f_2(0) = 3(0)^2 + 6(0) + 5 = 5,$$

$$z_D = f(-1,\ 0) = f_2(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 2,$$

$$\boxed{\begin{gathered} z_{\max} = \max_D f(x,\ y) = z_C = f(0,\ -1) = 5, \\ z_{\min} = \min_D f(x,\ y) = z_{M_0} = f\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{8}. \end{gathered}}$$