Вопрос 6. Уравнение, не содержащее искомой функции

Рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\boxed{y' = f(x)}, \qquad (1)$$

не содержащее неизвестную функцию $y = y(x)$, правая часть $f(x)$ уравнения непрерывна в интервале (a,b). Тогда все первообразные для функции $f(x)$ и только они, будут являться решениями уравнения (1), то есть

$$y' = f(x) \Leftrightarrow y = \int f(x)dx + C \;\; (C = const). \qquad (2)$$

Функция (2) является **общим решением** уравнения (1).

Если в качестве первообразной взять интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

где нижний предел $x_0 \in (a,b)$, то формула общего решения (2) примет вид

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C \;\; (C = const). \qquad (3)$$

Значение постоянной C можно найти, если подставить в формулу (3) начальные данные $x = x_0$, $y = y_0$:

$$y_0 = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx + C \Leftrightarrow y_0 = 0 + C \Leftrightarrow C = y_0,$$

тогда получим решение уравнения (1) в форме Коши:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0 \qquad (4)$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y' = 6x \cdot \ln x \;\; (x > 0)$$

и выделить его частное решение, удовлетворяющее начальному условию (условию Коши): $y(1) = 2$.

Решение. Уравнение является ОДУ вида (1) с правой частью $f(x) = 6x \cdot \ln x \quad (x > 0)$, непрерывной на интервале $(0, +\infty)$. Интегрируя по формуле интегрирования по частям, получим общее решение

$$y(x) = \int 6x \cdot \ln x dx = 3x^2 \cdot \ln x - \frac{3}{2}x^2 + C .$$

Учитывая начальное условие $y(1) = 2$, находим значение постоянной C:

$$2 = 3(1)^2 \cdot \ln(1) - \frac{3}{2}(1)^2 + C \Leftrightarrow 2 = -\frac{3}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{7}{2}.$$

Тогда частное решение уравнения примет вид

$$y(x) = 3x^2 \cdot \ln x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}.$$

Вопрос к лекции.

Найти общее решение уравнения $y' = (x-1) \cdot e^{x-1}$ и выделить из общего решения его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Ответы

1) $y = (x-2) \cdot e^{x-1} + 3$

2) $y = (x-2) \cdot e^{x-1} + 2$

3) $y = (x-1) \cdot e^{x-1} + 2$

4) $y = x \cdot e^{x-1} + 1$

Вопрос 7. Уравнение первого порядка, не содержащее независимой переменной

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(y), \tag{1}$$

не содержащее независимую переменную x, правая часть $f(y)$ непрерывна в интервале $y \in (c,d)$.

Пусть функция $f(y)$ не обращается в нуль на интервале $y \in (c,d)$. Тогда, записав уравнение (1) в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{f(y)},$$

получим (интегрируем обе части последнего уравнения по переменной y) общий интеграл

$$x = \int \frac{1}{f(y)} dy + C \quad (C = const). \tag{2}$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$y' = \frac{y^2+1}{2y}$$

на интервале $y \in (0,+\infty)$. Найти общее решение уравнения и частное решение с начальным условием $x = x_0 = 1,\ \ y = y_0 = 1$.

Решение. Правая часть $f(y) = \dfrac{y^2+1}{2y}$ непрерывна на $y \in (0,+\infty)$. Переписав уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{2y} \Leftrightarrow dx = \frac{2y}{y^2+1} dy,$$

найдем **общий интеграл** в виде (2):

$$x = \int \frac{2y}{y^2+1} dy + \ln|C| \Leftrightarrow x = \ln\left(y^2+1\right) + \ln|C| \quad (C = const, C \neq 0).$$

Выражая из общего интеграла функцию y, получим

$$x=\ln\left(y^2+1\right)+\ln|C| \;\Leftrightarrow\; x=\ln\left(|C|\left(y^2+1\right)\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; |C|\left(y^2+1\right)=e^x \;\Leftrightarrow\; y^2=\frac{e^x}{C}-1 \Leftrightarrow\; y=\pm\sqrt{\frac{e^x}{C}-1}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y=\pm\sqrt{\frac{e^x}{C}-1} \quad \left(C=const, C\neq 0\right).$$

Взяв начальное условие $x_0=1, y_0=1$, найдем значение постоянной из общего решения (берем корень с плюсом, так как $y_0=1>0$):

$$1=\sqrt{\frac{e^1}{C}-1} \Leftrightarrow \frac{e}{C}=2 \Leftrightarrow C=\frac{e}{2}.$$

Тогда частное решение уравнения имеет вид $y=\sqrt{2e^{x-1}-1}$.

Замечание. Если правая часть $f\left(y\right)$ обращается в нуль на интервале $y\in\left(c,d\right)$ в какой-то точке $y_0\in\left(c,d\right)$, то уравнение (1) имеет очевидное решение $y=y_0$ (так как в этом случае обе части уравнения (1) обращаются в нуль). Это решение есть частное решение уравнения (1). Его следует присоединить к общему интегралу уравнения (1).

Вопрос 8. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Простейшим типом дифференциальных уравнений первого порядка является дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Определение. Уравнение вида

$$f(x)dx = g(y)dy, \tag{1}$$

где $f(x)$, $g(y)$ – заданные функции, непрерывные на интервалах $x \in (a,b), y \in (c,d)$, называется **дифференциальным уравнением с разделенными переменными**.

Говорят, что в уравнении (1) переменные x, y разделены, то есть каждая из них содержится только в той части, где находится ее дифференциал.

В обеих частях уравнения (1) стоят дифференциалы некоторых неизвестных функций. Если считать x – независимой переменной, а y – искомой функцией от x, то решаем уравнение (1) относительно неизвестной функции y. Учитывая это, имеем

$$f(x)dx = g(y(x))dy(x),$$

а тогда, так как равны дифференциалы, то производя интегрирование (по x), получим связь между переменными x, y:

$$\int f_1(x)dx = \int g(y(x))dy(x) + C \quad (C = const),$$

освобожденную от дифференциалов, или в сокращенной записи

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C \quad (C = const). \tag{2}$$

Получили **общий интеграл** дифференциального уравнения (1).

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения с разделенными переменными:

$$y^3 dy = (x + \sin x)dx.$$

Решение. Уравнение является дифференциальным уравнением с разделенными переменными, в котором

$$f(x) = x + \sin x, \quad g(y) = y^3.$$

Пользуясь равенством (2), находим общий интеграл уравнения:

$$\int y^3 dy = \int (x+\sin x)dx + C \iff \frac{y^4}{4} = \frac{x^2}{2} - \cos x + C, C = const.$$

Из полученного общего интеграла можно выразить переменную y через x:

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x^2}{2} - \cos x + C \iff y^4 = 2x^2 - 4\cos x + 4C \iff$$

$$y = \sqrt[4]{2x^2 - 4\cos x + C}, \quad C = const$$

(получили общее решение уравнения).

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \ln y dy.$$

Решение. Уравнение является дифференциальным уравнением с разделенными переменными: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(y) = \ln y$.

Пользуясь равенством (2), находим общий интеграл уравнения:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \ln y dy + C, C = const.$$

Интеграл в правой части вычисляем методом интегрирования по частям:

$$\int \ln y dy = y \cdot \ln y - \int y \cdot \frac{1}{y} dy = y \cdot \ln y - \int dy = y \cdot \ln y - y.$$

В результате получаем общий интеграл уравнения

$$2\sqrt{x} = y \cdot \ln y - y + C, C = const.$$

Вопрос 9. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида

$$\boxed{f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,} \qquad (1)$$

где $f_1(x), f_2(x), g_1(y), g_2(y)$ – заданные функции, непрерывные на интервалах $x \in (a,b), y \in (c,d)$, называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными**.

Уравнение вида (1) можно привести к уравнению с разделенными переменными – разделить переменные. Для этого перенеся второе слагаемое в правую часть, и поделив обе части полученного уравнения на произведение $g_1(y)f_2(x)$ (при условии, что $g_1(y)f_2(x)$ не равно нулю), получим

$$f_1(x)g_1(y)dx = -f_2(x)g_2(y)dy \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}dy, \\ f_2(x) \neq 0,\ g_1(y) \neq 0. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение в последней системе является дифференциальным уравнением с разделенными переменными. Применяя выше рассмотренный прием интегрирования, получим общий интеграл:

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C, \quad (C = const) \\ f_2(x) \neq 0,\ g_1(y) \neq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Замечание. При разделении переменных в уравнении (1) можно потерять некоторые частные решения. Они находятся среди решений уравнений

$$f_2(x) = 0,\ g_1(y) = 0.$$

Найдя решения этих уравнений, необходимо проверить, являются ли они частными решениями исходного дифференциального уравнения (подстановкой этих решений в первоначальное уравнение).

Пример. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x(y+1)dx-\left(x^2+1\right)y^2dy=0.$$

Найти его общий интеграл и частный интеграл, удовлетворяющий начальному условию $y(0)=1$ (решить задачу Коши).

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, в котором

$$f_1(x)=x,\ g_1(y)=y+1,\ f_2(x)=-\left(x^2+1\right),\ g_2(y)=y^2.$$

Разделяя переменные, делим обе части уравнения на произведение $\left(x^2+1\right)(y+1)$. Получим

$$x(y+1)dx=\left(x^2+1\right)y^2dy \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}dx=\dfrac{y^2}{y+1}dy, \\ y+1\neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение – уравнение с разделенными переменными. Интегрируя обе части, получим

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=\int\frac{y^2}{y+1}dy \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)=\int\left(y-1+\frac{1}{y+1}\right)dy \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)=\int ydy-\int dy+\int\frac{dy}{y+1}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)=\frac{y^2}{2}-y+\ln|y+1|+C\quad (C=const).$$

Итак, при $y\neq -1$ общий интеграл

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{y^2}{2}+y-\ln|y+1|=C\ \ (C=const). \qquad (3)$$

Заметим, что одним из частных решений этого уравнения является функция $y=-1$, так как при подстановке его в исходное дифференциальное уравнение получается тождественное равенство.

Найдем частный интеграл из общего интеграла, используя начальное условие $y(0)=1$:

$$\frac{1}{2}\ln(0+1)-\frac{1^2}{2}+1-\ln|1+1|=C,\ C=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

Частный интеграл, удовлетворяющий начальному условию $y(0)=1$, имеет вид

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{y^2}{2}+y-\ln|y+1|=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

Вопрос. Найти общий интеграл уравнения

$$\boxed{x\left(y^2+1\right)dx+y\left(x^2+1\right)dy=0}.$$

Вопрос 10. Дифференциальные уравнения первого порядка, однородные относительно переменных

Определение 1. Функция $f(x, y)$ переменных x, y называется **однородной функцией** m**-го порядка**, если при всех (допустимых) x, y, α выполняется тождественно равенство

$$f(\alpha x, \alpha y) \equiv \alpha^m f(x, y). \quad (1)$$

Пример 1. Функция $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 3y^2}{x - y}$ является однородной функцией 1-го порядка, так как

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha x)^2 + 3(\alpha y)^2}{\alpha x - \alpha y} = \frac{\alpha^2 (x^2 + 3y^2)}{\alpha (x - y)} = \alpha \frac{x^2 + 3y^2}{x - y} = \alpha f(x, y).$$

Пример 2. Функция $f(x, y) = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) + e^{y/x}$ является однородной функцией нулевого порядка:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \sin\left(\frac{\alpha x}{\alpha y}\right) + e^{\alpha y/\alpha x} = \sin\left(\frac{x}{y}\right) + e^{y/x} = f(x, y).$$

Определение 2. Дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

называется уравнением первого порядка, однородным относительно переменных, если функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка:

$$f(\alpha x, \alpha y) \equiv f(x, y).$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$y = ux, \quad (3)$$

где $u = u(x)$ – неизвестная функция переменной x. Дифференцируя решение (3) $y' = (ux)' = u'x + ux' = u'x + u$,
и подставляя его в уравнение (2), получим

$$y' = u'x + u = f(x,\ ux) \Leftrightarrow u'x + u = f(1,\ u) \Leftrightarrow u'x = f(1,\ u) - u \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = f(1,\ u) - u.$$

Последнее уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные:

$$\frac{du}{dx}x = f(1,\ u) - u \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{f(1,\ u) - u} = \dfrac{dx}{x}, \\ x \neq 0, \\ f(1,\ u) - u \neq 0. \end{cases}$$

Предполагая, что интеграл

$$\int \frac{du}{f(1,\ u) - u}$$

по переменной u вычисляется конечным числом операций, получим общий интеграл уравнения (2) в виде

$$\Phi(u) = \ln|x| + \ln|C|,\ \ C = const,\ C \neq 0, \tag{4}$$

где обозначено $\Phi(u) = \int \dfrac{du}{f(1,\ u) - u}$, $u = y / x$.

Не стоит забывать, что при решении однородных уравнений необходимо проверять, являются ли $x = 0$ (то есть $y = 0$) и функция, которая получается при решении уравнения $f(1,\ u) - u = 0$, частными решениями уравнения (2).

Пример 3. Решить уравнение

$$y' = \frac{y}{x} \cdot \left(\ln\frac{y}{x} + 1 \right),\ x \neq 0.$$

Решение. Функция $f(x, y) = \dfrac{y}{x} \cdot \left(\ln\dfrac{y}{x} + 1 \right)$ уравнения является однородной функцией нулевого порядка:

$$f(\alpha x,\ \alpha y) = \frac{\alpha y}{\alpha x} \cdot \left(\ln\left(\frac{\alpha y}{\alpha x} \right) + 1 \right) = \frac{y}{x} \cdot \left(\ln\frac{y}{x} + 1 \right) \equiv f(x,\ y).$$

Введем вспомогательную функцию u.

$$u=\frac{y}{x},\quad y=ux,\quad y'=u'x+u.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x+u=u(\ln u+1) \;\Leftrightarrow\; u'x+u=u\ln u+u \Leftrightarrow\; u'x=u\ln u.$$

Разделяем переменные, получим

$$\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln|\ln u|=\ln|x|+\ln|C|\quad (C=const, C\neq 0),\quad \ln u=Cx,\quad u=e^{Cx}.$$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение:

$$y=xe^{Cx}.$$

Замечание. Уравнение вида

$$\boxed{M(x,\, y)dx+N(x,\, y)dy=0} \tag{5}$$

является однородным, если функции $M(x,\, y)$, $N(x,\, y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка m.

Переписав уравнение (5) в виде

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,\, y)}{N(x,\, y)}$$

получим, что функция $f(x,\, y)=-\dfrac{M(x,\, y)}{N(x,\, y)}$ является однородной функцией нулевого порядка:

$$f(\alpha x,\ \alpha y)=-\frac{M(\alpha x,\ \alpha y)}{N(\alpha x,\ \alpha y)}=-\frac{\alpha^m M(x,\, y)}{\alpha^m N(x,\, y)}=-\frac{M(x,\, y)}{N(x,\, y)}\equiv f(x,\, y).$$