5. Замена переменной в определенном интеграле

5.1. Подведение функции под знак дифференциала в определенном интеграле

Рассмотрим ***метод подведения функции под знак дифференциала*** в определенном интеграле. Схема вычисления определенного интеграла:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} u=\varphi(x), \quad du=\varphi'(x)dx, \\ \text{если } x=a, \ \text{то } u=\varphi(a)=\alpha, \\ \text{если } x=b, \ \text{то } u=\varphi(b)=\beta \end{array} \right| = \int\limits_\alpha^\beta f(u)\,du.} \qquad (5.1)$$

Пример 5.1. Вычислить интеграл $\int\limits_2^{\sqrt{12}} \dfrac{e^{\sqrt{x^2-3}}}{\sqrt{x^2-3}}x\,dx$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x^2-3}}x}{\sqrt{x^2-3}}$ является непрерывной на отрезке $\left[2;\ \sqrt{12}\right]$. Замена $u=\sqrt{x^2-3}=\varphi(x)$, так как

$$du=\varphi'(x)dx=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-3}}.$$

Воспользуемся формулой (5.1):

$$\int\limits_2^{\sqrt{12}} e^{\sqrt{x^2-3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-3}} = \left| \begin{array}{l} \text{замена } \ u=\sqrt{x^2-3}, \ du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-3}}, \\ x=a=2 \quad \Rightarrow u=\varphi(a)=\sqrt{2^2-3}=1=\alpha, \\ x=b=\sqrt{12} \ \Rightarrow u=\varphi(b)=\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2-3}=3=\beta \end{array} \right| =$$

$$=\int\limits_1^3 e^t dt = e^t\Big|_1^3 = e^3-e.$$

Пример 5.2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x + x\cos x}{(x\sin x+2)^2}dx.$

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на $[0;\ \pi]$. Замена $u = x\sin x + 2 = \varphi(x)$. Применение формулы (5.1) дает:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x + x\cos x}{(x\sin x+2)^2}dx = \left| \begin{array}{l} u=\varphi(x)=x\sin x+2, \\ du=(\sin x+x\cos x)dx, \\ x=a=0 \quad \Rightarrow\ u=\varphi(a)=2=\alpha, \\ x=b=\pi/2 \Rightarrow\ u=\varphi(b)=\frac{\pi}{2}+2=\beta \end{array} \right| = \int\limits_2^{\frac{\pi}{2}+2} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\Bigg|_2^{\pi/2+2} =$$

$$= -\left(\frac{1}{\pi/2+2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\pi+4}.$$

5.2. Метод подстановки в определенном интеграле

Теорема. Пусть выполняются условия:

1) функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $x\in[a,b]$;

2) функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $t\in[\alpha,\beta]$;

3) $[a,b]$ – множество значений функции $\varphi(t)$;

4) $\varphi(\alpha)=a,\ \ \varphi(\beta)=b$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (5.2)$$

Доказательство. Согласно условиям теоремы функция $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $t\in[\alpha,\beta]$. Тогда на отрезке $t\in[\alpha,\beta]$ для этой функции существует первообразная

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница (4.1), получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Рассмотрим ***метод подстановки*** в определенном интеграле. Схема вычисления выглядит здесь следующим образом:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left|\begin{array}{l} x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)\,dt,\ t=\varphi^{-1}(x) \\ \text{если } x=a,\ \text{ то } t=\varphi^{-1}(a)=\alpha, \\ \text{если } x=b,\ \text{ то } t=\varphi^{-1}(b)=\beta \end{array}\right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.} \quad (5.3)$$

Пример 5.3. Вычислить интеграл

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

Решение.

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left|\begin{array}{l} \text{замена } t=\sqrt{x} \ \Rightarrow\ x=t^2, \\ dx=2t\,dt, \\ \alpha=\sqrt{1}=1, \quad \beta=\sqrt{4}=2 \end{array}\right| = \int_1^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_1^2 \frac{t+1-1}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\int_1^2 dt - 2\int_1^2 \frac{dt}{1+t} = 2t\,\Big|_1^2 - 2\ln|t+1|\,\Big|_1^1 = 2(2-1) - 2(\ln 3 - \ln 2) = 2 - 2\ln 1{,}5.$$

Пример 5.4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\ln\sqrt{15}}^{\ln\sqrt{24}} \sqrt{1+e^{2x}}\,dx.$$

Решение. Функция $f(x)=\sqrt{1+e^{2x}}$ является непрерывной на отрезке $[a;\ b]=\left[\ln\sqrt{15};\ \ln\sqrt{24}\right]$.

Замена $t=\sqrt{1+e^{2x}}$ и отсюда найдем функцию $x=\varphi(t)$.

$$t^2 = 1+e^{2x} \Rightarrow\ e^{2x} = t^2-1 \ \Rightarrow\ 2x = \ln\left(t^2-1\right) \Rightarrow\ x = \frac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right) = \varphi(t).$$

Далее $dx = \varphi'(t)\,dt = \dfrac{t}{t^2-1}dt$.

Замена пределов

если $x = a = \ln\sqrt{15}$, то

$$t = \sqrt{1+e^{2\cdot\ln\sqrt{15}}} = \sqrt{1+e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln 15}} = \sqrt{1+e^{\ln 15}} = \sqrt{1+15} = 4 = \alpha,$$

если $x = b = \ln\sqrt{24}$, то

$$t = \sqrt{1+e^{2\cdot\ln\sqrt{24}}} = \sqrt{1+e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln 24}} = \sqrt{1+e^{\ln 24}} = \sqrt{1+24} = 5 = \beta.$$

Применяя формулу (5.3), получим

$$\int\limits_{\ln\sqrt{15}}^{\ln\sqrt{24}} \sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1+e^{2x}}, \quad x = \dfrac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right) = \varphi(t), \\ dx = \dfrac{t}{t^2-1}dt, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 5 \end{array} \right| = \int\limits_4^5 t\cdot\frac{t}{t^2-1}dt =$$

$$\int\limits_4^5 \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int\limits_4^5 \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = \int\limits_4^5 \left(1-\frac{1}{1-t^2}\right)dt = \int\limits_4^5 dt - \int\limits_4^5 \frac{dt}{t^2-1} = t\Big|_{t=4}^{t=5} -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_{t=4}^{t=5} = (5-4) - \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+5}{1-5}\right| - \ln\left|\frac{1+4}{1-4}\right|\right) = 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{9}{10}.$$

6. Метод интегрирования по частям определенного интеграла

Теорема. Если функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$ вместе со своими производными, то справедлива формула

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx},$$

или

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}. \qquad (6.1)$$

Пример 6.1. Вычислить интеграл $\int_1^2 (x-1)\cdot e^{x-1}dx$.

Решение. Интеграл 1-го типа:

$$\int_1^2 (x-1)\cdot e^{x-1}dx = \begin{vmatrix} u=x-1, dv=e^{x-1} \\ du=dx, v=e^{x-1} \end{vmatrix} = (x-1)\cdot e^{x-1} - \int_1^2 e^{x-1} = \left((x-1)\cdot e^{x-1} - e^{x-1}\right)\Big|_1^2 = e-e+1=1$$

Пример 6.2. Вычислить интеграл $I=\int_0^{\pi/2} x^2\cdot\sin xdx$.

Решение. Интеграл 1-го типа:

$$I=\int_0^{\pi/2} x^2\cdot\sin xdx = \begin{vmatrix} u=x^2, & dv=\sin xdx, \\ du=2xdx, & v=\int dv=\int\sin xdx=-\cos x, \end{vmatrix} =$$

$$= x^2\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\cdot(-\cos x)dx = -x^2\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\underbrace{\int_0^{\pi/2} x\cdot\cos xdx}_{A} =$$

$$= -\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - 0\cdot\cos 0\right) + 2A = 2A.$$

Вычисляем отдельно интеграл A по формуле (6.1):

$$J_1=\int\limits_0^{\pi/2} x\cdot\cos x dx=\begin{vmatrix} u=x, & dv=\cos x dx, \\ du=dx, & v=\int dv=\int\cos x dx=\sin x\end{vmatrix}=x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2}-$$

$$-\int\limits_0^{\pi/2}\sin x=x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2}+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-0\cdot\sin 0\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos 0=\frac{\pi}{2}-1.$$

Окончательно $I=2A=2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2$.

Пример 6.3. Вычислить интеграл $I=\int_2^3\ln(x-1)\cdot(x-1)dx.$

Решение. Интеграл 2-го типа:

$$\int_2^3\ln(x-1)\cdot(x-1)dx=\begin{vmatrix} u=\ln(x-1), & dv=(x-1)dx \\ du=\dfrac{dx}{x-1}, & v=\dfrac{x^2}{2}-x\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\ln(x-1)\right]\Bigg|_2^3-\int\limits_2^3\frac{\frac{x^2}{2}-x}{x-1}dx=\frac{3\ln 2}{2}-0+\int\limits_2^3\frac{x^2-2x}{2(x-1)}dx=$$

$$=\frac{3\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\int_2^3\left(x-1-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{3\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x-\ln|x-1|\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\frac{3\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-3-\ln 2-\left(\frac{4}{2}-2-\ln 1\right)\right)=\ln(2)+\frac{3}{4}.$$