Вопрос 12. Градиент функции, его свойства

Пусть задана дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функция $u = f(x, y, z)$. Рассмотрим производную $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ по направлению единичного вектора $\vec{n}(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ $(|\vec{n}| = 1)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} \cdot \cos\beta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0} \cdot \cos\gamma}, \quad (12.1)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0}$ – значения частных производных от функции в $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Определение 12.1. **Геометрический вектор**

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{grad\, f(M_0)} &\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0} \cdot \bar{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} \cdot \bar{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0} \cdot \bar{k},\end{aligned}} \quad (12.2)$$

координатами которого являются значения частных производных первого порядка функции в точке M_0, называется **градиентом** функции f в точке M_0.

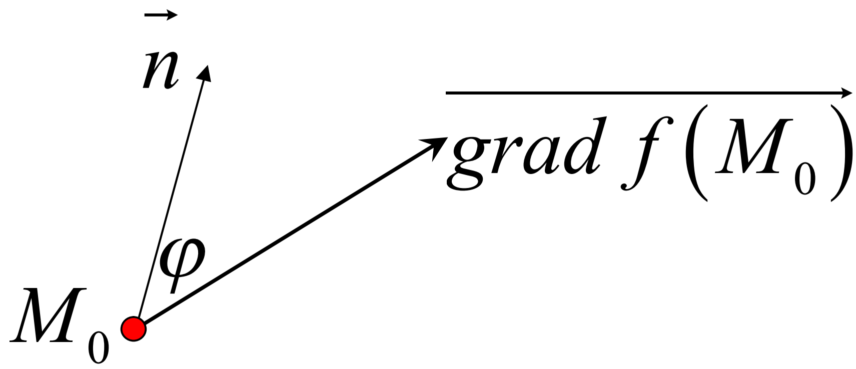
Согласно формулам (12.1), (12.2), получим выражение производной по направлению через скалярное произведение

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}\right)_{M_0} = \left(\overrightarrow{grad\, f(M_0)}, \bar{n}\right)}. \quad (12.3)$$

Свойства градиента функции.

1) $$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}\right)_{M_0} = \left|\overrightarrow{grad\, f(M_0)}\right| \cdot \cos\varphi, \quad (12.4)$$

где φ − угол между векторами $\overrightarrow{grad\, f(M_0)}$, $\bar{n}$.



Действительно, из (12.3) и определения скалярного произведения геометрических векторов:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}\right)_{M_0} = \left(\overrightarrow{grad\, f(M_0)}, \bar{n}\right) = \left|\overrightarrow{grad\, f(M_0)}\right| \cdot \underbrace{\left|\bar{n}\right|}_{=1} \cdot \cos\varphi.$$

2) **Производная по направлению вектора** $\vec{n}$ **имеет наибольшее значение по направлению градиента**:

$$\max\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}\right)_{M_0} = \left|\overrightarrow{grad\, f(M_0)}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{M_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{M_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2_{M_0}}. \quad (12.5)$$

(**направление** $\vec{n}$**, совпадающее с градиентом, является направлением наиболее быстрого возрастания функции**), при этом $\vec{n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{grad\, f(M_0)}$, $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$.

3) **Производная по направлению вектора** $\vec{n}$ **имеет наименьшее значение по направлению противоположному градиенту**:

$$\min\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}\right)_{M_0} = -\left|\overrightarrow{grad\, f(M_0)}\right|. \quad (12.6)$$

при $\vec{n} \uparrow\downarrow \overrightarrow{grad\, f(M_0)}$, $\varphi = 180^\circ$, $\cos\varphi = -1$.

4) **Градиент** $\overrightarrow{grad\, f(M_0)}$ **функции в точке** M_0 **ортогонален любой гладкой кривой, проходящей через точку** M_0 **и принадлежащей поверхности уровня**, то есть если L − гладкая кри-

вая, проходящая через точку M_0 и принадлежащая поверхности уровня, то

$$\left(\overrightarrow{grad\, f\left(M_0\right)}, \bar{\tau}\right) = 0,$$

где $\bar{\tau}$ – вектор, направленный вдоль касательной к кривой L в точке M_0.