11. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка (ЛДУ-1). Метод множителей Бернулли

Определение. ***Линейным дифференциальным уравнением первого порядка*** (ЛДУ-I) называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной:

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x), \qquad (1)}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – заданные функции, непрерывные на (a,b).

При решении ЛДУ-I используют один из двух методов: *метод множителей Бернулли или метод вариации постоянного (метод Лагранжа).*

Метод множителей Бернулли

Общее решение уравнения (1) находим в виде произведения двух функций:

$$y = uv, \qquad (2)$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неизвестные функции, причем одну из них выберем произвольно, а другую определенным образом. Учитывая, что $y = uv$, имеем

$$y' = (uv)' = u'v + uv' \qquad \left(u' = \frac{du}{dx},\ v' = \frac{dv}{dx}\right).$$

Предполагая, что функция (2) должна являться решением уравнения (1), подставим выражения для $y = uv$, $y' = (uv)' = u'v + uv'$ в его левую часть:

$$y' + p(x)y = q(x) \Leftrightarrow u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{u'v + u\big(v' + p(x)v\big) = q(x)}.$$

Подберем функцию $v = v(x)$ таким образом, чтобы выражение, стоящее в скобках обнулилось:

$$\boxed{v' + p(x)v = 0},$$

при этом получим второе уравнение $u'v = q(x)$ для нахождения функции $u = u(x)$. Получаем систему

$$\boxed{\begin{aligned} &v' + p(x)v = 0, && (3)\\ &u'v = q(x). && (4)\end{aligned}}$$

Уравнение (3) –уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $v = v(x)$. Решаем его:

$$v' + p(x)v = 0 \iff \frac{dv}{dx} = -p(x)v \iff \frac{dv}{v} = -p(x)dx \iff$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \iff \ln|v| = -\int p(x)dx \iff v = e^{-\int p(x)dx} = v(x)$$

Частное решение уравнения (3) имеет вид

$$\boxed{v = v(x) = e^{-\int p(x)dx}}.$$

Найдя функцию $v = v(x)$, из уравнения (4) находим функцию $u = u(x)$:

$$u'v(x) = q(x) \iff u' = \frac{q(x)}{v(x)} \iff u = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C = u(x).$$

Используя равенство (2), получаем общее решение уравнения:

$$\boxed{y = u(x)v(x) = \left(\int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad C = const}. \qquad (5)$$

Пример. Найти методом Бернулли общее решение ЛДУ-I

$$xy' - y = x^2 \cdot \cos x.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$y' - \frac{1}{x}y = x \cdot \cos x$$

В данном случае $p(x)=-\dfrac{1}{x},\ q(x)=x\cos x$. Ищем решение в виде (2). Получаем

$$\left(u'v+uv'\right)-\frac{1}{x}\left(uv\right)=x\cos x \;\Leftrightarrow\; u'v+u\left(v'-\frac{1}{x}v\right)=x\cos x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} v'-\dfrac{1}{x}v=0, \\ u'v=x\cos x. \end{cases}$$

Первое уравнение системы дает частное решение

$$v'-\frac{1}{x}v=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}v \;\Leftrightarrow\; \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \ln|v|=\ln|x| \Leftrightarrow v=x.$$

Подставляя во второе уравнение системы (7) найденную функцию $v=x$, получим

$$u'v=x\cos x \;\Leftrightarrow\; u'\cdot x=x\cos x \;\Leftrightarrow u'=\cos x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u=\int\cos x dx=\sin x+C \;\left(C=const\right).$$

В результате общее решение ЛДУ-I имеет вид

$$y=uv=\left(\sin x+C\right)x=x\sin x+Cx.$$

12. Метод вариации постоянного Лагранжа

Рассмотрим другой метод нахождения общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1}$$

называемый ***методом вариации постоянного Лагранжа.***

Определение. Уравнение (1) с правой частью $q(x) \equiv 0$ называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка***, соответствующее ЛДУ-I. Оно имеет вид

$$y' + p(x)y = 0. \tag{2}$$

Метод нахождения общего решения уравнения (1) основан на знании общего решения соответствующего однородного уравнения (2) и состоит из двух этапов.

На первом этапе находим общее решение уравнения (2) (уравнением с разделяющимися переменными):

$$y' + p(x)y = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = -p(x)y \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} = -p(x)dx, \\ y = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (C \neq 0), \\ y = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (C = const).$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (C = const). \tag{3}$$

На втором этапе находим общее решение исходного уравнения в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{4}$$

где $C(x)$ – неизвестная функция (изменяем константу C на функцию $C(x)$). Предполагая, что общее решение уравнения (1) должно иметь вид (4), подставляют в левую часть (1) выражение (4) и выражение для ее производной y'. При такой подстановке получится равенство для определения неизвестной функции $C(x)$.

Пример. Найти методом вариации произвольного постоянного Лагранжа общее решение ЛДУ-I

$$y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}. \tag{5}$$

Решение.

1) Найдем общее решение однородного уравнения $y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0$, соответствующее уравнению (5):

$$y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x^2}, \\ y = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2}, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln(y(= \dfrac{1}{x} + \ln(C(\ \ (C \neq 0), \\ y = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = Ce^{1/x} \ \ (C \neq 0), \\ y = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$y = Ce^{1/x} \ \ (C = const).$$

Итак, $y = Ce^{1/x}$ $(C = const)$ есть общее решение линейного однородного уравнения.

2) Теперь общее решение исходного уравнения (5) необходимо искать в виде

$$y = C(x)e^{1/x}, \tag{6}$$

где функция $C(x)$ подлежит определению. Дифференцируя равенство (6) по *x,* получим

$$y' = \left(C(x)e^{1/x}\right)' = \left(C(x)\right)' e^{1/x} + C(x)e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

и используя исходное уравнение, получим

$$y' + \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(C(x)\right)' e^{1/x} + C(x)e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2}\left(C(x)e^{1/x}\right) = \frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(C(x)\right)' e^{1/x} = \frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(C(x)\right)' = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \quad \Leftrightarrow$$

$$C(x) = \int \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = e^{-1/x} + C_1 \qquad (C_1 = const).$$

Итак, функция $C(x)$ имеет вид

$$C(x) = e^{-1/x} + C_1 \ (C_1 = const).$$

Согласно (6) общее решение уравнения (5) имеет вид

$$y = C(x)e^{1/x} = \left(e^{-1/x} + C_1\right)e^{1/x} = 1 + C_1 e^{1/x} \ (C_1 = const).$$

13. Уравнения Бернулли

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad (n \neq 0,\ n \neq 1) \qquad (1)$$

называется ***уравнением Бернулли***.

Покажем, что при помощи специальной замены уравнение (1) можно свести к линейному уравнению первого порядка. Для этого разделим обе части уравнения (1) на $y^n \neq 0$:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{y}{y^n} = q(x)\frac{y^n}{y^n} \Leftrightarrow y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{1-n} = q(x). \qquad (2)$$

Для уравнения (2) выполним замену переменной:

$$z = y^{1-n}. \qquad (3)$$

В результате замены (3) получим

$$z' = \left(y^{1-n}\right)' = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y',$$

откуда выразим выражение

$$y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n}. \qquad (4)$$

Подставив (3) и (4) в уравнение (2), получим уравнение

$$\frac{z'}{1-n} + p(x) \cdot z = q(x),$$

или уравнение

$$z' + (1-n) \cdot p(x) \cdot z = (1-n) \cdot q(x). \qquad (5)$$

Полученное уравнение (5) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно неизвестной функции $z = z(x)$. Найдя общее решение уравнения (5), получим общее решение уравнения (1), исходя из равенства (3).

Пример. Найти общее решение и частное решение уравнения Бернулли

$$\boxed{y' - 2xy = 3x^3 \cdot y^2, \;\; y(0) = 1.} \tag{6}$$

Решение. 1) Сначала перейдем к уравнению (2), поделив обе части исходного уравнения на y^2:

$$y^{-2} \cdot y' - 2x \cdot y^{-1} = 3x^3.$$

Выполнив замену

$$z = y^{-1}, \;\; z' = \left(y^{-1}\right)' = (-1) \cdot y^{-2} \cdot y' = -y^{-2} \cdot y',$$

получим уравнение $-z' - 2x \cdot z = 3x^3$, или

$$\boxed{z' + 2x \cdot z = -3x^3}. \tag{7}$$

Уравнение (7) есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $z = z(x)$.

Решаем это уравнение *методом множителей Бернулли*. Решение находим в виде $z = u \cdot v$, откуда $z' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Получим уравнение

$$u'v + uv' + 2x \cdot uv = -3x^3 \Leftrightarrow u'v + u\left(v' + 2x \cdot v\right) = -3x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v' + 2x \cdot v = 0, \\ u'v = -3x^3. \end{cases}$$

Сначала найдем общее решение первого уравнения системы:

$$v' + 2x \cdot v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} + 2x \cdot v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -2x \cdot v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -2x \cdot dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -2x \cdot dx \Leftrightarrow \ln v = -x^2 \Leftrightarrow v = e^{-x^2}.$$

Далее решим второе уравнение $u'v = -3x^3$ этой системы, учитывая, что $v = e^{-x^2}$. Получим

$$u'v = -3x^3 \Leftrightarrow u' = \frac{-3x^3}{e^{-x^2}} = -3x^3 e^{x^2}$$, откуда

$$u = \int -3x^3 \cdot e^{x^2} dx = \frac{3}{2} e^{x^2} \left(1 - x^2\right) + C.$$

Тогда общее решение уравнения (7) имеет вид

$$z = u \cdot v = \left(\frac{3}{2} e^{x^2} \left(1 - x^2\right) + C \right) \cdot e^{-x^2} = \frac{3}{2}\left(1 - x^2\right) + Ce^{-x^2}.$$

Учитывая замену $z = y^{-1} = \frac{1}{y}$, получим общее решение исходного уравнения (6):

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{3}{2}\left(1 - x^2\right) + Ce^{-x^2}}.$$

Подставляя в общее решение начальное условие $y(0) = 1$, найдем значение постоянной:

$$1 = \frac{1}{\frac{3}{2}\left(1 - 0^2\right) + Ce^0} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{\frac{3}{2} + C} \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

В итоге частное решение уравнения (7) имеет вид

$$\boxed{y = \frac{1}{\frac{3}{2}\left(1 - x^2\right) - \frac{1}{2} e^{-x^2}}}.$$

14. Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение

$$\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0} \qquad (1)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть представляет полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, т.е.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy\equiv dU(x,y)\equiv\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy.$$

Уравнение (1) есть уравнение в полных дифференциалах, если

$$M(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x},\ N(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}.$$

При этом общий интеграл уравнения (1), которое принимает в этом случае вид $dU(x,y)=0$, имеет вид

$$\boxed{U(x,y)=C,\ C=const.} \qquad (2)$$

Теорема. Пусть функции $M(x,y),N(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой области D переменных x,y и имеют в ней непрерывные частные производные $M'_y(x,y),N'_x(x,y)$. Тогда (1) является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\boxed{M'_y(x,y)=N'_x(x,y)}. \qquad (3)$$

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть уравнение (1) есть уравнение в полных дифференциалах, то есть

$$M(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x},\ N(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}.$$

Продифференцируем функцию $M(x,y)$ по x, а $N(x,y)$ - по y:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y},\\[2ex] \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}.\end{cases}$$

Учитывая равенство смешанных производных второго порядка, получим: $\boxed{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$ (выполнимость равенства (3)).

2) Достаточность. Пусть в области D переменных x,y выполняется равенство (3). Покажем, что существует функция $U(x,y)$, удовлетворяющая равенству

$$dU(x,y)\equiv\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy.$$

Положим $M(x,y)=\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}$. Тогда интегрируя обе части этого равенства по x, получим

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx+\varphi(y)=\int\limits_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)-$ некоторая пока неизвестная функция (аргумента y !). Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$. Для этого продифференцируем обе части равенства $U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y)$ по переменной y:

$$\left(U(x,y)\right)'_y=\left(\int\limits_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y)\right)'_y=\int\limits_{x_0}^{x}M'_y(x,y)dx+\varphi'(y).$$

Но так как $M'_y(x,y)=N'_x(x,y)$ (выполняется равенство (3)), то имеем

$$\left(U(x,y)\right)'_y=\int\limits_{x_0}^{x}N'_x(x,y)dx+\varphi'(y)=N(x,y)\Big|_{x=x_0}^{x=x}+\varphi'(y).$$

Учитывая, что $N(x,y)=\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}$, получим

$$N(x,y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)\Leftrightarrow\varphi'(y)=N(x_0,y),$$

откуда находим функцию

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+C,\quad C=const.$$

В результате функция $U(x,y)$ имеет вид

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y)=$$

$$=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+C\quad (C=const). \tag{4}$$

Пример. Найти общий интеграл уравнения в полных дифференциалах

$$\left(6x^2y^2-8xy^4\right)dx+\left(4x^3y-16x^2y^3\right)dy=0.$$

Решение. В нашем случае функции

$$M(x,y)=6x^2y^2-8xy^4,\ N(x,y)=4x^3y-16x^2y^3.$$

Проверим выполнимость равенства (3) $M'_y(x,y)=N'_x(x,y)$:

$$M'_y(x,y)=\left(6x^2y^2-8xy^4\right)'_y=12x^2y-32xy^3,$$

$$N'_x(x,y)=\left(4x^3y-16x^2y^3\right)'_x=12x^2y-32xy^3.$$

Уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Далее, функцию $U(x,y)$ будем искать в виде

$$U(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)-$ некоторая пока неизвестная функция (аргумента y!). Имеем

$$U(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)=\int\left(6x^2y^2-8xy^4\right)dx+\varphi(y)=$$

$$=6y^2\int x^2dx-8y^4\int xdx=6y^2\frac{x^3}{3}-8y^4\frac{x^2}{2}+\varphi(y)=2x^3y^2-4x^2y^4+\varphi(y).$$

Дифференцируя полученную функцию $U(x,y)$ по y, получим

$$\left(U\left(x,y\right)\right)'_y = \left(2x^3y^2 - 4x^2y^4 + \varphi\left(y\right)\right)'_y = 4x^3y - 16x^2y^3 + \varphi'_y\left(y\right).$$

Полученная производная должна равняться функции $N\left(x,y\right)$:

$$\frac{\partial U\left(x,y\right)}{\partial y} = N\left(x,y\right) \Leftrightarrow$$

$$4x^3y - 16x^2y^3 = 4x^3y - 16x^2y^3 + \varphi'_y\left(y\right) \Leftrightarrow$$

$$\varphi'_y\left(y\right) = 0 \Leftrightarrow \varphi\left(y\right) = C \quad \left(C = const\right),$$

то есть в нашем случае $\varphi\left(y\right) = C = const$.

Итак, получаем общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$U\left(x,y\right) = 2x^3y^2 - 4x^2y^4 + C, \quad C = const.$$