11.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков

15. Дифференциальные уравнения высших порядков (основные понятия). Поставка задачи Коши

Определение 1. **Дифференциальным уравнением *n*-го порядка** называется уравнение вида

$$\boxed{F\left(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0}, \tag{1}$$

где $F-$заданная функция переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, $y=y(x)-$неизвестная функция независимой переменной x.

В некоторых случаях уравнение (1) можно разрешить относительно старшей производной $y^{(n)}$ в виде:

$$\boxed{y^{(n)}=f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).} \tag{2}$$

Определение 2. Уравнение (2) называется уравнением n-го порядка, записанной в нормальной форме.

Пример 1. Уравнение

$$\boxed{(x+1)\cdot y'-y''\cdot \ln x=0}$$

есть уравнение второго порядка, где функция

$$F\left(x, y, y', y''\right)=(x+1) y'-y''\cdot \ln x.$$

Нормальная запись уравнения

$$y''=\frac{(x+1)\cdot y'}{\ln x}.$$

Пример 2. Уравнение

$$\boxed{\left(x+y^2\right) y'+y'''\cdot \sin x=0}$$

есть уравнение третьего порядка, где функция

$$F\left(x, y, y', y''\right)=\left(x+y^2\right) y'+y'''\cdot \sin x.$$

Определение 3. **Решением** уравнения (1) называется функция $y=\varphi(x)$, которая обращает уравнение (1) в тождество:

$$\boxed{F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x), \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0}.$$

Пример 3. Функция $\varphi(x)=\sin x+2\cos x$ является решением уравнения второго порядка:

$$\boxed{y''+y=0}.$$

Действительно, $\varphi'(x)=\cos x-2\sin x$, $\varphi''(x)=-\sin x-2\cos x$. Тогда

$$y''+y=(-\sin x-2\cos x)+(\sin x+2\cos x)\equiv 0.$$

Для уравнения (1)

$$\boxed{F\left(x,y,y',\ldots y^{(n-1)},y^{(n)}\right)=0}, \qquad (1)$$

задача Коши ставится следующим образом: найти функцию (решение) $y=\varphi(x)$, имеющую производные до n-го порядка включительно, удовлетворяющее начальным условиям (условиям Коши)

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

В частности, для уравнения второго порядка

$$\boxed{F(x,y,y',y'')=0}$$

задача Коши формулируется так: найти решение $y=\varphi(x)$, имеющую производные до второго порядка включительно, удовлетворяющее начальным условиям (условиям Коши) $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'$.

Пример. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''=12x^2,\quad y(1)=3,\ y'(1)=5.$$

Решение. Находим последовательно интегралы и используем начальные условия:

$$y'(x)=\int y''(x)dx=12\int x^2dx=4x^3+C_1,$$

$$y'(1)=5\Leftrightarrow 4\cdot 1^3+C_1=5\Leftrightarrow C_1=1,$$

то есть $y'(x)=4x^3+1$,

$$y(x)=\int y'(x)\,dx=\int\left(4x^3+1\right)dx=x^4+x+C_2,$$

$$y(1)=3\Leftrightarrow 1^4+1+C_2=3\Leftrightarrow C_2=1.$$

Ответ. Решением задачи Коши является функция

$$y(x)=x^4+x+1.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной (нормальное уравнение):

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right). \qquad (2)$$

Теорема Пикара (необходимое и достаточное условие существования решения задачи Коши).

Если функция $f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$ переменных $x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}$ в некоторой области D этих переменных непрерывна и имеет непрерывные частные производные по этим переменным, то какова бы ни была начальная точка (начальное условие) $\left(x_0,y_0,y_0',\ldots,y_0^{(n-1)}\right)\in D$, существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (2), определенного в некотором интервале (a,b), содержащем точку x_0, удовлетворяющее начальным условиям $x_0,y_0,y_0',\ldots,y_0^{(n-1)}$.

16. Общее решение дифференциального уравнения высшего порядка

Дано дифференциальное уравнение, записанное в нормальной форме записи:

$$\boxed{y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}\right)}, \qquad (1)$$

где f – заданная функция переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Пусть в каждой точке $M\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \in D$ имеет место существование и единственность решения задачи Коши (теорема Пикара).

Определение. Общим решением уравнения (1) называется n-параметрическое семейство функций

$$\boxed{y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)}, \qquad (2)$$

зависящее от независимой переменной x и n произвольных постоянных (констант) $C_1, C_2, \ldots, C_n$, такое что:

1) при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функция (2) является решением уравнения (1), (обращает уравнение (1) в тождество);

2) каковы бы ни были допустимые начальные данные $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, существует единственный набор $C_1^{\,0}, C_2^{\,0}, \ldots, C_n^{\,0}$ такой, что функция $y = \varphi\left(x, C_1^{\,0}, C_2^{\,0}, \ldots, C_n^{\,0}\right)$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет начальным условиям.

Общее решение (2) содержит в себе все решения уравнения (1) с начальными данными из области D. Каждое из этих решений получается из формулы общего решения (2) при соответствующих значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Чтобы найти решение с заданными начальными данными $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, необходимо решить систему

$$\boxed{\begin{cases} y_0=\varphi\left(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n\right), \\ y_0{}'=\varphi'\left(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}\left(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n\right) \end{cases}} \quad (3)$$

относительно постоянных $C_1,C_2,\ldots,C_n$. Найдя ее решение, подставить в общее решение (2) значения найденных постоянных, и получить частное решение уравнения (1).

Пример. Функция

$$\boxed{\varphi\left(x,C_1,C_2\right)=C_1e^x+C_2e^{-x} \qquad \left(C_1,C_2=const\right)}$$

является общим решением уравнения второго порядка

$$\boxed{y''-y=0}. \quad (4)$$

1) Производные $\varphi'\left(x\right)=C_1e^x-C_2e^{-x}$, $\varphi''\left(x\right)=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Тогда (подставляем в уравнение)

$$y''-y=\left(C_1e^x+C_2e^{-x}\right)-\left(C_1e^x+C_2e^{-x}\right)\equiv 0,$$

то есть функция $\varphi\left(x\right)=C_1e^x+C_2e^{-x}$ удовлетворяет уравнению (4) при всех значениях констант $C_1,C_2=const$.

2) Выберем произвольное начальное условие x_0,y_0,y_0'. Покажем, что найдется единственный набор постоянных $C_1{}^0,C_2{}^0$ такой, что функция

$$y=\varphi\left(x,C_1{}^0,C_2{}^0\right)=C_1{}^0e^x+C_2{}^0e^{-x}$$

является решением уравнения (4). Исходя из начальных условий, имеем

$$y_0=\varphi\left(x_0,C_1{}^0,C_2{}^0\right)=C_1{}^0e^{x_0}+C_2{}^0e^{-x_0},$$

$$y_0{}'=\varphi'\left(x_0,C_1{}^0,C_2{}^0\right)=C_1{}^0e^{x_0}-C_2{}^0e^{-x_0}$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1{}^0,C_2{}^0$:

$$\begin{cases} C_1^0 e^{x_0} + C_2^0 e^{-x_0} = y_0, \\ C_1^0 e^{x_0} - C_2^0 e^{-x_0} = y_0'. \end{cases} \tag{5}$$

Определитель матрицы этой системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{vmatrix} = e^{x_0} \cdot \left(-e^{-x_0}\right) - e^{x_0} \cdot e^{-x_0} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Значит, из системы (5) можно однозначно найти C_1^0, C_2^0.

17. Уравнение высшего порядка, содержащее только производную высшего порядка и функцию независимой переменной

Рассмотрим уравнение n-го порядка, содержащее только производную n-го порядка и некоторую функцию $f(x)$ переменной x:

$$y^{(n)} = f(x), \tag{1}$$

где функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b).

Для уравнения (1) можно найти общее решение в квадратурах (интегралах), последовательно понижая порядок уравнения на единицу.

Общее решение уравнения (1) может быть получено путем n последовательных интегрирований (n квадратур)

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 \ (C_1 = const),$$

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx = \int\left\{\int f(x)dx + C_1\right\}dx + C_2 =$$

$$= \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2 \ (C_1, C_2 = const).$$

$$y^{(n-3)} = \int y^{(n-2)}dx, \ \ldots,$$

$$y(x) = \int\left[\int\left(\ldots\int f(x)dx\ldots\right)dx\right]dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

причем оно будет зависеть от n констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения 3-го порядка

$$y''' = x^2.$$

Решение. Находим последовательно интегралы

$$y''(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

$$y'(x) = \int \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) dx = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2,$$

$$y(x) = \int \left(\frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{x^5}{60} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Пример 2. Решить уравнение с начальными условиями (решить задачу Коши):

$$y''' = e^{2x}, \quad x_0 = 0, y_0 = 1, y_0' = -1, y_0'' = 0.$$

Решение. Последовательно находим интегралы

$$y''(x) = \int e^{2x} dx + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1,$$

$$y'(x) = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2,$$

$$y(x) = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Подставим начальные условия:

$$y(0) = \frac{1}{8} e^0 + \frac{1}{2} C_1 \cdot 0^2 + C_2 \cdot 0 + C_3 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{8} + C_3,$$

$$y'(0) = \frac{1}{4} e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Leftrightarrow -1 = \frac{1}{4} + C_2,$$

$$y''(0) = \frac{1}{2} e^0 + C_1 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} + C_1,$$

откуда находим $C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{5}{4}, \quad C_3 = \frac{7}{8}.$

Частное решение (решение задачи Коши) имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{7}{8}.$$

18. Уравнения высшего порядка, содержащее только производные двух последовательных порядков

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$F\left(x,\, y^{(n-1)},\, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

не содержащее искомой функции $y = y(x)$ и ее производных до $(n-2)$-го порядка включительно (то есть функции производных $y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n-2)}$).

Уравнение (1) введением новой функции

$$z = y^{(n-1)},\; z = z(x) \tag{2}$$

($y^{(n)} = z'$) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$F(x,\, z,\, z') = 0, \tag{3}$$

где неизвестной является функция $z = z(x)$ (x – независимая переменная).

Найдя общее решение уравнения (3), то есть функцию $z = z(x)$, получаем дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n-1)} = z(x) \tag{4}$$

относительно неизвестной функции $y = y(x)$, и являющееся уравнением, рассмотренным в пункте 2. Решение уравнения (4) может быть получено путем последовательных интегрирований.

В частном случае, когда $n = 2$ дифференциальное уравнение (1) является дифференциальным уравнением второго порядка

$$F\left(x,\, y',\, y''\right) = 0.$$

Тогда замена $z = y',\, z = z(x)$ приводит к дифференциальному уравнению первого порядка.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$xy''' = (x+1)\,y''. \tag{5}$$

Решение. Представленное уравнение является дифференциальным уравнением третьего порядка (n=3), которое можно записать в виде

$$F\left(x,\, y'',\, y'''\right) \equiv xy''' - (x+1)\,y'' = 0.$$

Заменой

$$y'' = z\;\; (z = z(x))$$

уравнение (5) приводится к дифференциальному уравнению

$$xz' = (x+1)z \qquad (6)$$

с разделяющимися переменными относительно функции $z = z(x)$.

Решаем его методом разделения переменных:

$$xz' = (x+1)z \iff x\frac{dz}{dx} = (x+1)z \iff \frac{dz}{z} = \frac{x+1}{x}, z \neq 0 \iff \int\frac{dz}{z} = \int\frac{x+1}{x},$$

$$\iff \ln|z| = \int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx, z \neq 0 \iff \ln|z| = x + \ln|x| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0), z \neq 0 \iff$$

$$\iff z = C_1xe^x \ (C_1 \neq 0),\ z \neq 0$$

При $C_1 \neq 0$ получили $z = z(x) = C_1xe^x$. Однако $z = z(x) \equiv 0$ является частным решением уравнения (6). Тогда общее решение уравнения (3.6) можно записать в виде

$$z = C_1xe^x \quad (C_1 = const)$$

(частное решение $z = z(x) \equiv 0$ входит сюда при значении $C_1 = 0$).

Учитывая, что $y'' = z(x)$, находим последовательно функции

$$y' = \int y''dx = \int C_1xe^xdx = C_1\left(xe^x - e^x\right) + C_2 \quad (C_2 = const),$$

$$y = \int y'dx = \int\left\{C_1\left(xe^x - e^x\right) + C_2\right\}dx = C_1\left(xe^x - 2e^x\right) + C_2x + C_3 \quad (C_3 = const).$$

Итак, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1\left(xe^x - 2e^x\right) + C_2x + C_3 \quad (C_1,\ C_2,\ C_3 = const).$$

19. Уравнения высшего порядка, не содержащее независимую переменную

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$F(y, y', y'') = 0, \qquad (1)$$

относительно искомой функции $y = y(x)$, не содержащее независимой переменной x.

Чтобы решить уравнение (1) вводят новую функцию $p = p(y)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,\ p = p(y), \qquad (2)$$

причем ее считают функцией аргумента y.

Применяя теорему для производной сложной функции $y' = p = p(y(x))$, найдем выражение для производной второго порядка функции y''

$$y'' = (y')' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot p. \qquad (3)$$

В результате основная замена (2) и выражение (3) приводят уравнение (1) к следующему виду

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) является дифференциальным уравнением первого порядка, в котором неизвестной функцией является функция $p = p(y)$ аргумента y.

Найдя решение уравнения (4), находят искомое решение $y = y(x)$ уравнения (1):

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{p(y)} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{p(y)} = x + C \ (C = const).$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = 4y'. \qquad (5)$$

Решение. Уравнение (5) является дифференциальным уравнением второго порядка ($n = 2$), не содержащее независимой переменной x. Пользуясь основной заменой (2) и формулой (3), получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $p = p(y)$:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = 4p. \qquad (6)$$

Очевидно, что функция $p=0$ является решением последнего уравнения. Учитывая данный факт, получим, что $y' = p = 0$, откуда функция $y = C_1$ является одним из решений исходного дифференциального уравнения (5).

Предположим теперь, что $p \neq 0$. Тогда уравнение (6) равносильно следующему уравнению с разделяющимися переменными (сокращаем на $p \neq 0$):

$$\frac{dp}{dy} = 4,$$

а оно в свою очередь равносильно уравнению с разделенными переменными:

$$dp = 4dy.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид (интегрируем обе части по своей переменной)

$$p = 4y + C_1.$$

Теперь возвращаемся обратной заменой (2) к уравнению

$$y' = 4y + C_1.$$

Учитывая здесь, что $y' = \frac{dy}{dx}$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, которое решаем путем сведения к уравнению с разделенными переменными:

$$y' = 4y + C_1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 4y + C_1 \Leftrightarrow \frac{dy}{4y + C_1} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{4y + C_1} = \int dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln|4y + C_1| = x + C_2 \ \left(C_1,\ C_2 = const\right).$$

Итак, общий интеграл уравнения (5) имеет вид

$$\frac{1}{4}\ln|4y + C_1| = x + C_2 \ \left(C_1,\ C_2 = const\right).$$

Полученный общий интеграл можно преобразовать в общее решение следующим образом:

$$\frac{1}{4}\ln|4y + C_1| = x + C_2 \Leftrightarrow \ln|4y + C_1| = 4 \cdot \left(x + C_2\right) \Leftrightarrow 4y + C_1 = e^{4\cdot(x+C_2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = e^{4\cdot(x+C_2)} - C_1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}e^{4\cdot(x+C_2)} - \frac{1}{4}C_1.$$

Общее решение можно привести к более простому виду

$$y=\frac{1}{4}e^{4\cdot(x+C_2)}-\frac{1}{4}C_1=\frac{1}{4}e^{4C_2}\cdot e^{4x}-\frac{1}{4}C_1=\overline{C_1}e^{4x}+\overline{C_2},$$

где на наглядности обозначены новые постоянные $\overline{C_1}=\frac{1}{4}e^{4C_2},\overline{C_2}=-\frac{1}{4}C_1$.