

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова



Курсовая работа

на тему

Энергетические оценки ходьбы двуногого аппарата в разных режимах

Energy estimates of walking bipedal apparatus in different regimes

Научный руководитель: в. н. с., к. ф-м. н. Буданов Владимир Михайлович

в. н. с., к. ф-м. н. Лавровский Эдуард Кирович

Автор: Липко Анфиса Игоревна

Группа: 521

Факультет: Механико-математический

Кафедра: Прикладной механики и управления

20 мая 2024 г.

Содержание

Введение.....	4
1. Постановка задачи.....	5
2. Математическая модель ходьбы.....	7
3. Построение программной модели ходьбы.....	13
4. Энергетические оценки.....	25
5. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных.....	33
6. Заключение.....	38
Список литературы.....	39

Введение

В данной курсовой работе будут рассмотрены различные способы получения энергетических оценок движения двуногого аппарата (экзоскелета). Рассматриваются проблемы оценок для его движения как в режиме плоской регулярной ходьбы по ровной горизонтальной поверхности, так и при ходьбе с препятствиями (уступы, лестницы, поверхность с уклоном).

Будет использована математическая модель семизвеного аппарата и реализована программно. Пользователь программы может задать различные скоростные и массовые параметры и получить энергетические затраты при движении заданной модели по разным поверхностям.

Экспериментальная часть состоит из снятия данных с силовых датчиков экзоскелета нижних конечностей в стопе и в нижнем шарнире, угла сгиба колена, а также момента, создаваемого двигателем в колене. После чего эти данные будут сопоставлены с данными, полученными при движении математической модели в тех же режимах.

Одной из задач является поиск траектории (рисунка ходьбы), при движении по которой затрачивается минимальное количество энергии в различных терминах энергетических оценок. При этом будут использованы результаты оценки алгоритмов управления аппаратом с использованием двигателей в коленных и тазобедренных суставах.

Результаты обработки теоретических и экспериментальных данных предполагается исследовать методами математической статистики и численных методов. При обработке данных будут использованы библиотеки с реализацией элементов машинного обучения и численных методов (`scipy`, `numpy`, `pandas`) для среды программирования `python`.

1. Постановка задачи

Рассматривается система: «человек + экзоскелет нижних конечностей с двигателями в коленных суставах». Система имеет 7 звеньев, 2 двигателя и может совершать различные движения в сагиттальной плоскости, в частности, ходьбу и бег. В построенной модели ходьбы человек и экзоскелет неотделимы.

Для проверки теоретических выводов был собран экспериментальный образец (Рис.1.1). С датчиков экзоскелета снимаются показатели: угол сгиба левой ноги, угол сгиба правой ноги, две компоненты силы реакции опоры левой ноги (верхний и нижний датчик), две компоненты силы реакции опоры правой ноги. В дальнейшей работе возможна установка датчика угла наклона корпуса относительно правого бедра.

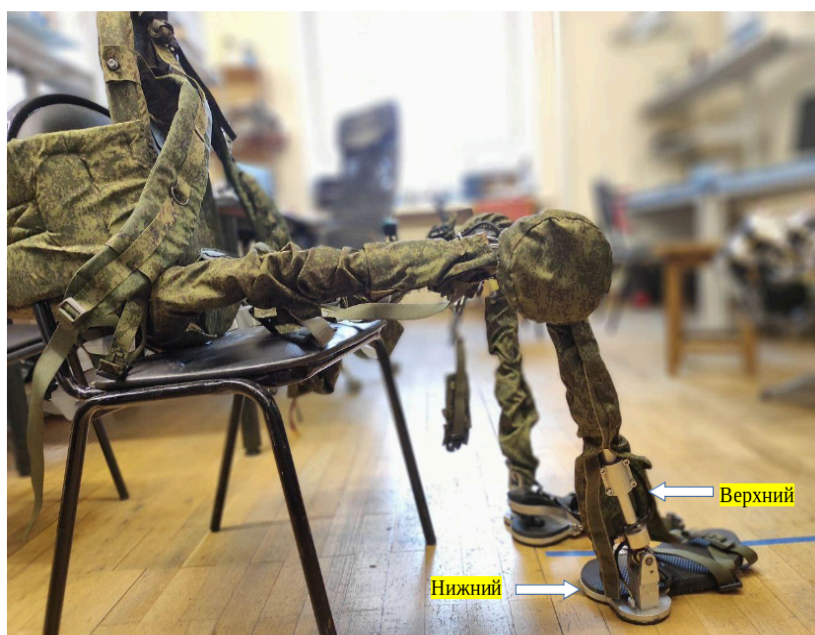


Рис.1.1. Человек в исследуемом экзоскелете (а) и отдельный экзоскелет (б)

Экзоскелет управляется программой, которая обеспечивает обратную связь от снимаемых данных: добавочный момент каждого из двух двигателей задается формулой (1.1):

(1.1)

$$M_{add} = C_1 F_{up} \Omega_{cur} + C_2 ,$$

где M_{add} — добавочный создаваемый момент, F_{up} — значение силы реакции опоры ноги в верхнем датчике, Ω_{cur} — текущий угол сгиба ноги, C_1 — масштабный коэффициент, C_2 — поправочный коэффициент.

Также рассматривается более сложная модель управления:

(1.2)

$$M_{add} = C_1 \Omega_{cur} + C_2 \dot{\Omega}_{cur} + C_3 + C_4 F_{up}$$

Рассматривая динамическую модель двуногой ходьбы семизвеного аппарата (в частности, определяя моменты, возникающие в суставах), требуется реализовать ее программно, задавая траекторию ходьбы и масс-инерционные характеристики аппарата, и получая на вывод моменты, реакции и энергетические оценки. После чего полученные теоретические данные следует сопоставить с экспериментальными и исследовать методами математической статистики.

Новизна задачи состоит в том, чтобы разделить моменты, создаваемые человеком и экзоскелетом и сделать вывод об эффективности аппарата. Для оценки эффективности будет использоваться такие характеристики как расход энергии в секунду (мощность), расход энергии на метр (сила), общая затраченная энергия. Также требуется рассмотреть ходьбу в разных режимах (разная скорость, разная длина шага, поверхность с разным наклоном, баллистическое движение).

2. Математическая модель ходьбы

Модель системы «человек-экзоскелет» состоит из семи инерционных элементов: двух ног из трех звеньев (бедро, голени и стопы) и корпуса-балансира. Стопы полагаются безмассовыми, они вносят только вклад в моменты голень-стопа [6]. Каждая из ног имеет бедро длины $2a$ и голень длины $2b$. В точке O подвеса ног к корпусу расположен также центр масс платформы («таз»), которая в данной схеме моделируется материальной точкой массы m_0 .

Пусть положение таза в пространстве задается двумя декартовыми координатами x, y , а положение ног и корпуса — угловыми координатами $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \psi$. Система имеет 7 степеней свободы. Углы сгиба стоп вычисляются как $(90^\circ + \beta_i)$ в предположении, что стопы на земле стоят горизонтально, а в воздухе их положение не важно, так как в безопорной фазе они не вносят вклад в момент и реакцию опоры. В качестве обобщенных лагранжевых координат возьмем $x, y, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \psi$.

Обозначим моменты сил управления в каждом колене аппарата за u_1, u_2 (M_{12}, M_{22}), моменты сил между бедрами и корпусом за q_1, q_2 (M_{13}, M_{23}), моменты сил между голеньями и стопами за w_1, w_2 (M_{11}, M_{21}).

Также в фиксированной точке стопы приложена сила $R_i, i=1,2$, представляющая сумму всех сил, действующих на опорную точку (реакция опоры, сила трения-сцепления). Назовем R_i силами реакции.

Динамическая схема системы «человек-экзоскелет» изображена на рис.2. Подобная модель также была составлена в источниках [1], [2], [3]. Ниже приведены обозначения, подразумевающие следующие величины для системы человек-экзоскелет (массы суммируются, а длины звеньев экзоскелета регулируются и равны длинам звеньев человека).

Обозначения (введены в соответствии с работами Белецкого [1],[2] и Формальского [6])

m_0 — масса таза

m_k — масса корпуса-балансира

h — высота точки подвеса корпуса-балансира

r — расстояние от O до центра масс корпуса

J — момент инерции корпуса относительно оси z в т. O

m_a — масса бедра

a — расстояние от O до центра масс бедра

J_a — момент инерции бедра относительно оси z в т. O

m_b — масса голени

b — расстояние от колена до центра масс голени

J_b — момент инерции голени относительно оси z в т. колена

R_{ix}, R_{iy} — силы реакций опоры

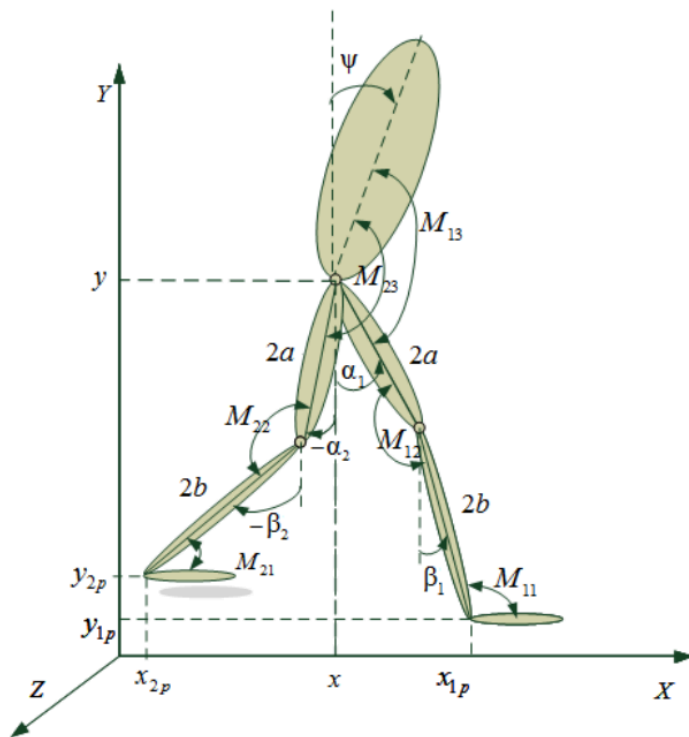


Рис.2.1. Динамическая схема аппарата

Добавим еще некоторые обозначения моментов сил и инерции:

$$M = m_0 + 2m_a + 2m_b + m_k$$

$$J_{ab} = 2m_b ab$$

$$K_r = m_k r$$

В качестве уравнений движения рассмотрим уравнения Лагранжа 2 рода. Для вычисления кинетической энергии T системы используем формулу А. И. Лурье, согласно которой для каждого элемента массы M кинетическая энергия:

(2.1)

$$T = \frac{1}{2} \left[M v_0^2 + 2M \left(\vec{v}_0 * \vec{\omega} \right) \vec{r}_c' + \vec{\omega} \theta^\circ \vec{\omega} \right],$$

где: \vec{v}_0 — скорость полюса О элемента, \vec{r}_c' — радиус-вектор ОС центра инерции С элемента в системе осей, имеющих начало в полюсе О, θ° — тензор инерции элемента в точке О.

Используя формулу (1), вычисляем кинетическую энергию рассматриваемой системы:

(2.2)

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} [M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] + \frac{1}{2} [J\dot{\psi}^2 - 2K_T(\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi)\dot{\psi}] + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[J_6 \dot{\alpha}_i^2 + J_\Gamma \dot{\beta}_i^2 + 2K_6 \dot{\alpha}_i (\dot{x}\cos\alpha_i + \dot{y}\sin\alpha_i) + 2K_\Gamma \dot{\beta}_i (\dot{x}\cos\beta_i + \dot{y}\sin\beta_i) \right. \\ & \left. + 2J_{6\Gamma} \alpha_i \beta_i \cos(\alpha_i - \beta_i) \right] \end{aligned}$$

Силовая функция (отрицательная потенциальная энергия) имеет вид:

(2.3)

$$U = -g \left[m_k y + K_r \cos\psi - \sum_{i=1}^2 [K_a \cos\alpha_i + K_b \cos\beta_i] \right]$$

Обозначим через Q обобщенные силы, q — обобщенные координаты, \dot{q} — обобщенные скорости, и составим уравнения Лагранжа 2 рода:

(2.4)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q} + Q$$

Напомним, что положение платформы (О) в пространстве задается двумя декартовыми координатами x, y, положение ног — угловыми координатами $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, а положение корпуса — угловой координатой ψ .

Отметим, что моменты в этой модели, как и массовые характеристики, являются суммами моментов, созданных совместно человеком и двигателем

экзоскелета. В соответствии с работами [6], [17] уравнения Лагранжа для всех обобщенных координат:

(2.5)

$$M\ddot{x} + K_r (\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi) + \sum_{i=1}^2 \{ K_a (\ddot{\alpha}_i \cos \alpha_i - \dot{\alpha}_i^2 \sin \alpha_i) + K_b (\ddot{\beta}_i \cos \beta_i - \dot{\beta}_i^2 \sin \beta_i) \} = Q_x, \quad (1)$$

$$M\ddot{y} - K_r (\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi) + \sum_{i=1}^2 \{ K_a (\ddot{\alpha}_i \sin \alpha_i + \dot{\alpha}_i^2 \cos \alpha_i) + K_b (\ddot{\beta}_i \sin \beta_i + \dot{\beta}_i^2 \cos \beta_i) \} = Q_y - Mg, \quad (2)$$

$$J\ddot{\psi} - K_r (\ddot{y} \sin \psi - \ddot{x} \cos \psi) - gK_r \sin \psi = Q_\psi, \quad (3)$$

$$J_a^* \ddot{\alpha}_i + J_{ab} \ddot{\beta}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) + K_a (\ddot{x} \cos \alpha_i + \ddot{y} \sin \alpha_i) + J_{ab} \dot{\beta}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i) + gK_a \sin \alpha_i = Q_{ai}, \quad i = 1; 2, \quad (4)$$

$$J_b \ddot{\beta}_i + J_{ab} \ddot{\alpha}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) + K_b (\ddot{x} \cos \beta_i + \ddot{y} \sin \beta_i) - J_{ab} \dot{\alpha}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i) + gK_b \sin \beta_i = Q_{\beta i}, \quad i = 1; 2. \quad (5)$$

где обозначены Q_q — обобщенные силы:

(2.6)

$$Q_x = \sum_{i=1}^2 R_{ix},$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^2 R_{iy},$$

$$Q_\psi = - \sum_{i=1}^2 M_{i3},$$

$$Q_{\alpha_i} = -M_{i2} - M_{i3} + 2a(R_{ix} \cos \alpha_i + R_{iy} \sin \alpha_i),$$

$$Q_{\beta_i} = M_{i2} + 2b(R_{ix} \cos \beta_i + R_{iy} \sin \beta_i) + M_{i1},$$

Имеем для 7 обобщенных координат 7 дифференциальных уравнений 2 порядка.

Прямой метод — поиск координат по заданным моментам — довольно сложная задача, которая решается экспериментальным путем. Для такой реализации необходимо управлять углами сгиба коленных и голеностопных суставов, и, опционально, корпусом-балансиром, сгибая его вперед.

Система (2.5) также не приводится к форме Коши $\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)$ (по крайней мере, без приближения), а значит, судить о ее управляемости нельзя. Также никакое положение системы не является устойчивым, поэтому необходимость исследования ее в такой постановке не имеет смысла.

К решению уравнений (2.5) применяют полуобратный метод — частично задаются координаты как функции времени, иными словами, задается траектория движения. После чего координаты дифференцируются и подставляются в уравнения Лагранжа 2 рода для поиска моментов [1], [6], [17].

В такой постановке задано движение — все координаты $q(t)$, и уравнения можно представить как:

(2.7)

$$A(t) = Q(t)$$

Поэтому, исследовав различные заданные траектории и получив зависимость от времени моментов $Q(t)$ для них, можно подавать на имеющиеся двигатели нужные периодические сигналы в зависимости от вида движения.

Цель создания экзоскелета — разгрузка человека при ходьбе и беге, в частности, уменьшение работы человека по созданию моментов в коленных суставах и возможность переносить тяжелые грузы на рычагах экзоскелета. В механической модели был реализован двигатель для создания дополнительных моментов в коленных суставах, для корпуса-балансира двигатель не реализовывался. Необходимый балансирующий момент при движении создаётся непосредственно человеком.

Рассмотрим ходьбу как периодическое движение с разными фазами опоры на каждую из ног по очереди (рис. 3). Движение человека условно разбиваем на две фазы [4]. В каждом случае модель имеет разное количество степеней свободы, поэтому каждая из фаз будет характеризоваться своим набором уравнений.

Первая фаза — двухопорная. Характеризуется наличием точек контакта с поверхностью в обеих ногах, передняя и задняя ноги опираются на поверхность. Фаза характеризуется 3 степенями свободы. Вторая фаза — одноопорная. Одна нога находится в фазе переноса, другая — в фазе опоры. У системы — 5 степеней свободы.

В исследуемом движении (плоская ходьба) преобладает одноопорная фаза (около 60% от всего цикла ходьбы). Сначала рассмотрим вторую фазу, поскольку в этом случае удастся привести уравнения к достаточно простому и симметричному виду. Цикл моделируем как последовательность периодов опоры на одну ногу с мгновенной сменой ног.

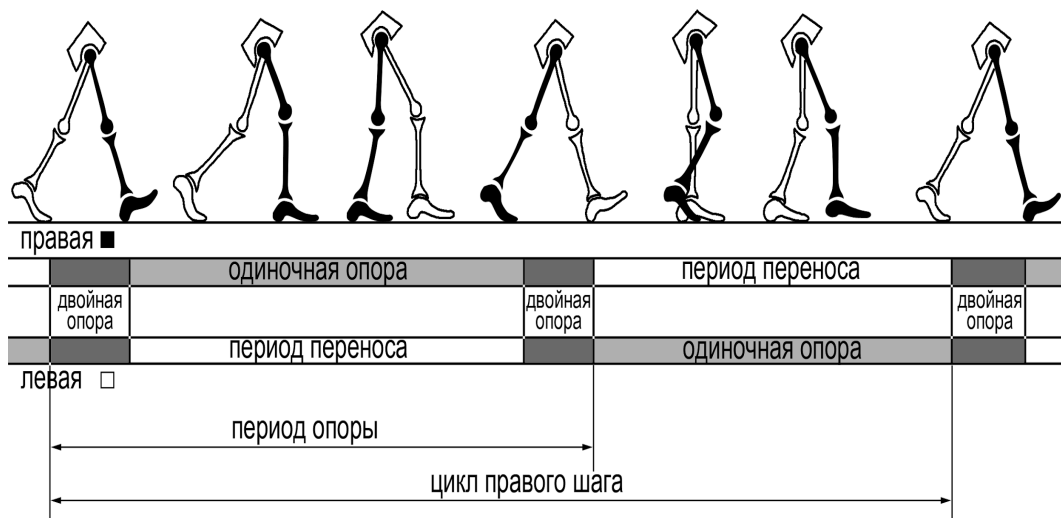


Рис.2.2. Цикл ходьбы человека [4], [5]

Следовательно, мы уменьшили число степеней свободы до 5. Если заданы α_i, β_i , то по опорной ноге однозначно определяется положение таза x, y .

Если мы обозначим через 1 индекс опорной ноги, и через 2 индекс переносимой ноги, то $R_{2x}=0, R_{2y}=0$ — условие отсутствия силы реакции у переносимой ноги.

Из уравнений (2.5), (2.6), задавая законы движения каждой из точек, можно получить выражения для моментов. Законы движения могут быть заданы как аналитически, так и получены из экспериментальных данных. Но так как у нас в экзоскелете всего по одному датчику угла в каждой ноге, который замеряет угол $\Omega_i = 180^\circ - \alpha_i + \beta_i$, то будем применять первый метод.

3. Построение программной модели ходьбы

Программная модель шагающего механизма состоит из 5 отрезков заданных длин, перемещающихся на экране в одной плоскости. Движение всех точек задается нами заранее.

Положим, индекс 1 у той ноги, которая в начале цикла является переносимой, а затем на вторую половину цикла становится опорной. Комфортабельность ходьбы, согласно В. В. Белецкому [7], объединяет два условия, предъявляемых к движению: во-первых, точка подвеса ног должна двигаться на постоянной высоте от поверхности; во-вторых, движение ее осуществляется с постоянной скоростью. Аналитический вид этих условий:

(3.1.1)

$$y_0 - y_1^0 = h$$

$$x_0 - x_1^0 = V(t - t_1) - L_{\text{сдвиг}}, \text{ где } VT = L_{\text{step}}$$

где x_0, y_0 — координаты точки подвеса ног, x_1^0, y_1^0 — координаты точки опоры, h — высота точки подвеса ног над поверхностью, V — скорость движения человека, t_1 — момент начала одноопорной фазы, $L_{\text{сдвиг}}$ — опорный сдвиг (расстояние от точки опоры до проекции точки подвеса ног на горизонтальную плоскость в момент начала одноопорной фазы), положим $L_{\text{сдвиг}} = L_{\text{step}}/2$. Приняв начальный момент времени $x_1^0 = y_1^0 = 0$, получим:

(3.1.2)

$$y_0 = h$$

$$x_0 = V(t - t_1) - L_{\text{step}}/2$$

Для ходьбы по лестнице высоту можно задавать:

(3.1.3)

$$y_0 - y_1^0 = h + Ut(s/L_{\text{step}})$$

где U — вертикальная проекция скорости, s — высота ступеньки.

Для остальных обобщенных координат зададим траектории, опираясь на работу Формальского А. М. (численное моделирование одноопорной фазы, [6]), предположениям Гурфинкеля В. С. о динамике равновесия вертикальной позы человека [10] и наблюдениям за ходьбой человека.

Обозначим x_{i1} — координаты коленей, x_{i2} — координаты пяток, $i=1,2$; x_3, y_3 , — координаты головы.

Точка, отвечающая тазу человека, движется равномерно и прямолинейно на заданной высоте h . Задаются координаты для каждой пятки с помощью параметрического уравнения циклоиды или похожей на нее траектории, причем в первой половине цикла (на первом полушаге) совершает движение одна нога, а вторая стоит на земле, а во второй половине — наоборот. Стояние на земле означает постоянство координат x, y .

Пусть T — время, за которое человек совершает шаг одной ногой и затем другой, возвращаясь в начальную позицию, но дальше начального положения на два шага. То есть, T — период совершения полного цикла движения (двух полушагов). Обозначим $\omega=2\pi/T$ — частота шагов. Тогда координаты одной пятки в течение одного шагового цикла, соответственно (перенос-опора):

(3.2.1)

$$x_{12}(t) = x_{12}^0 - L_{step} \cdot (\cos(\omega t)), \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$$

$$x_{12}(t) = x_{12}\left(\frac{T}{2}\right), \quad t \in \left(\frac{T}{2}, T\right]$$

$$y_{12}(t) = y_{12}^0 + A_{step} \cdot (\sin^2(\omega t)), \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$$

$$y_{12}(t) = 0, \quad t \in \left(\frac{T}{2}, T\right]$$

Вторая нога ($x_{22}(t), y_{22}(t)$) движется по тем же законам, но со сдвигом на $L_{step}/2$, и в начале цикла она стоит, а в конце — движется. Здесь L_{step} — длина шага, A_{step} — высота шага. Эти числовые коэффициенты подбираются вручную в зависимости от режима движения. Координата x_{12}^0 нужна для определения $x_{12}(t)$ в абсолютном пространстве, в начальный момент $x_{12}^0 = 0$, на следующем полушаге первой ноги $x_{12}^0 = 2L_{step}$. Аналогично, y_{12}^0 необходимо для движения

по лестнице, если же поверхность горизонтальна, то $y_{12}^0 = 0$. Для случая движения по лестнице можно полагать [3]:

(3.2.2)

$$y_{2p} = \delta \sin^2(\Omega t) + f(x_{2p}), f(x_{2p}) = B(x_{2p} + L)^2 + (s - 2BL^2)(x_{2p} + L) / L, B = -2s / 3L^2$$

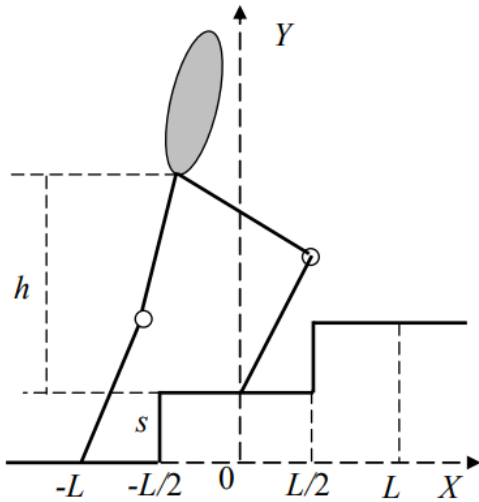


Рис.3.1. Схема движения по лестнице

Координату одного колена находим как одну из точек пересечения двух окружностей, образованных: первая — центром в точке таза и радиусом, равным длине бедра, вторая — центром в точке пятки и радиусом, равным длине голени. Берется точка такая, что угол сгиба колена меньше 180° , или же та, у которой х-координата больше (что одно и то же для положения ноги, не сильнее, чем на 90° отклоняющегося от вертикали).

Алгоритм реализован программно по формулам ниже.

(3.3)

$$d = \sqrt{(x_{i2} - x_0)^2 + (y_{i2} - y_0)^2} A = \frac{(b^2 - a^2 + d^2)}{2} dH = \sqrt{b^2 - A^2}$$

$$x_{ic} = x_0 + a \frac{(x_{i2} - x_0)}{d}$$

$$y_{ic} = y_0 + a \frac{(y_{i2} - y_0)}{d}$$

$$X_A = x_{ic} - H \frac{(y_{i2} - y_0)}{d} Y_A = y_{ic} + H \frac{(x_{i2} - x_0)}{d} X_B =$$

$$= x_{ic} + H \frac{(y_{i2} - y_0)}{d} Y_B = y_{ic} - H \frac{(x_{i2} - x_0)}{d}$$

Итог: $x_{i1} = \max(X_A, X_B)$; $y_{i1} = Y_A$ или Y_B соответственно.

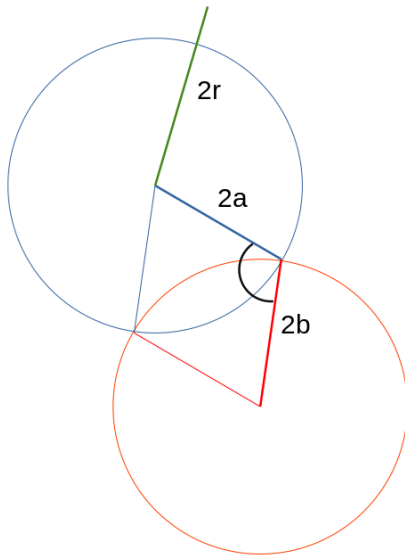


Рис.3.2. Поиск координаты колена

Координаты точки головы задаются 2-периодически подбором со следующим требованием: визуально корпус наклоняется вперед так, чтобы голова не оказывалась дальше, чем передняя пятка, а также производная является 2-периодической. Ниже будет указан график этой координаты от времени. Формула (3.4.1) была предложена в источнике [2] как зависимость от имеющихся масс-инерционных характеристик. В формуле (3.4.2), предложенной в [6], угол ψ численно моделируется в градусах, его максимальное отклонение от вертикали -7° , а минимальное -1.6° .

(3.4.1)

$$\psi(t) = \frac{ML}{2K_r} \left[ch\omega t - \frac{1 + ch\omega T}{sh\omega T} sh\omega t \right] + \frac{Mx}{K_r}, \quad \omega^2 = \frac{K_r g}{J + K_r h}$$

(3.4.2)

$$\psi(t) = -4.3 + 2.7 \cdot \sin(\omega t) - 1.5 \cdot \cos(\omega t)$$

Исходя из геометрии чертежа (1.2) из заданных x , y находим углы:

(3.5)

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{x_{11}(t)-x_0(t)}{y_{11}(t)-y_0(t)}\right), \beta_1 = \arctan\left(\frac{x_{12}(t)-x_{11}(t)}{y_{12}(t)-y_{11}(t)}\right)$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{x_{21}(t)-x_0(t)}{y_{21}(t)-y_0(t)}\right), \beta_2 = \arctan\left(\frac{x_{22}(t)-x_{21}(t)}{y_{22}(t)-y_{21}(t)}\right)$$

Здесь α_1 — угол бедро1-вертикаль, β_1 — угол голень1-вертикаль, α_2 — угол бедро2-вертикаль, β_2 — угол голень2-вертикаль.

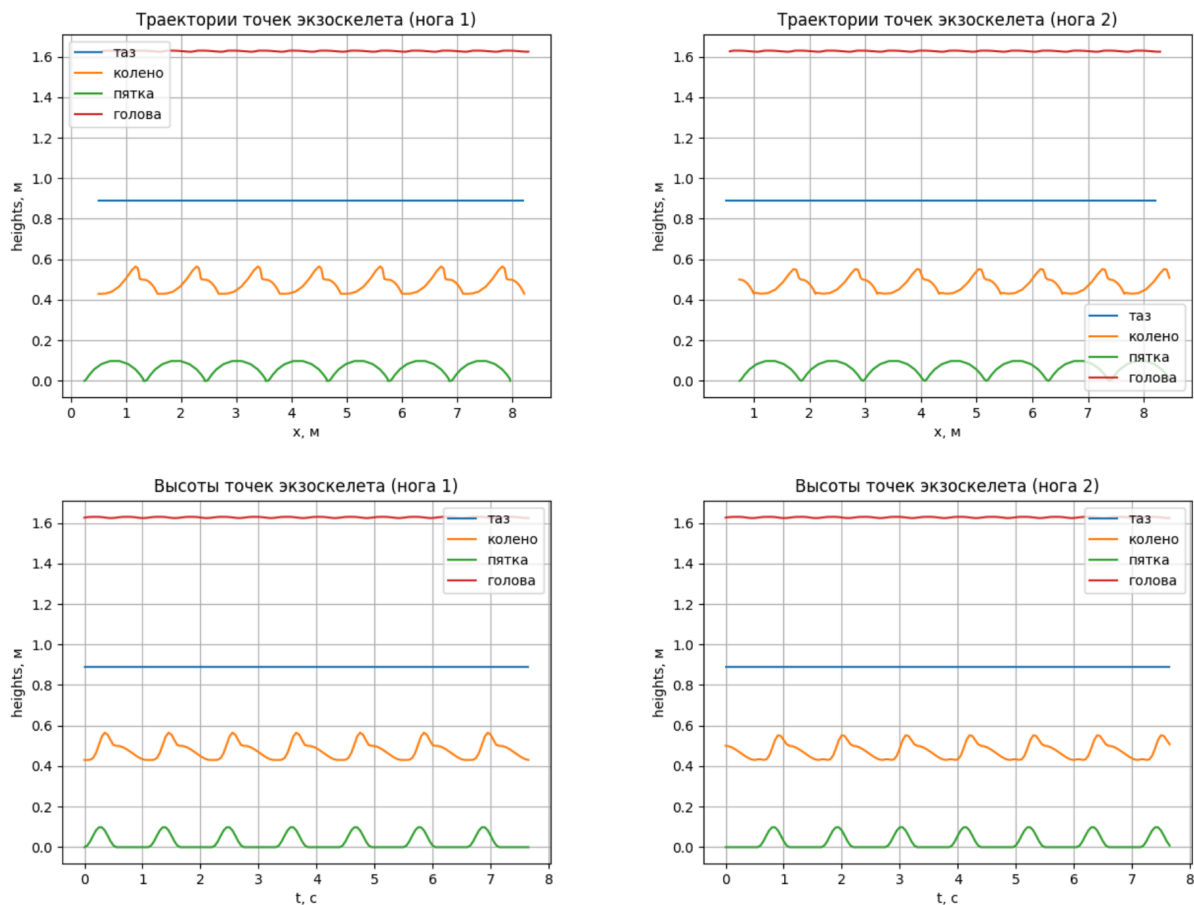


Рис.3.3. Траектории основных точек экзоскелета

Здесь параметры системы взяты из средних антропометрических параметров для человека ростом 170 см [21]:

(3.6)

$M = 65$ кг (масса всего аппарата с человеком)

$m_0 = 5$ кг (масса таза)

$m_k = 30$ кг (масса корпуса)

$m_a = 8.2$ кг (масса бедра)

$m_b = 6.8$ кг (масса голени)

$h = 0.89$ м (расстояние от поверхности до точки подвеса ног)

$r = 0.37$ м (расстояние от О до центра масс корпуса)

$J = 4.69$ кг*м² (момент инерции корпуса относительно оси z в т. О)

$a = 0.25$ м (расстояние от О до центра масс бедра)

$J_a = 1.15$ кг*м² (момент инерции бедра относительно оси z в т. О)

$b = 0.23$ м (расстояние от колена до центра масс голени)

$J_b = 0.66$ кг*м² (момент инерции голени относительно оси z в т. колена)

$L_{\text{step}} = 0.5$ м (длина шага)

$A_{\text{step}} = 0.05$ м (амплитуда синусоиды движения переносимой ноги)

$T = 1.1$ с (период движения – время совершения полного цикла движения, т. е. двух шагов)

$\omega = 2\pi/T = 5.71$ Гц (частота шагов)

Таким образом построена модель ходящего семизвенника. Сохраним значения координат с интервалом в 0,05 сек в файл. В каждой точке времени можно рассчитать обобщенную (Q) энергию звена с помощью систем уравнений (2.5), (2.6).

Предполагая, что таз движется на постоянной высоте, можно записать выражение для потенциальной энергии каждого звена относительно таза.

(3.7)

$$P_{\psi} = Mgh\cos\psi$$

$$P_{\alpha_1} = -m_B g a \cos\alpha_1$$

$$P_{\beta_1} = -m_{\Gamma} g (b \cos\beta_1 + 2a \cos\alpha_1)$$

$$P_{\alpha_2} = -m_B g a \cos \alpha_2$$

$$P_{\beta_2} = -m_{\Gamma} g (b \cos \beta_2 + 2a \cos \alpha_2)$$

Из условий статического равновесия можно найти зависимость сил реакции опоры от обобщенных координат. Можно будет позже сравнить их с динамическими реакциями из уравнений (2.5). Здесь индексы x, y означают горизонтальную и вертикальную компоненты, а численные индексы можно опустить, так как реакции опоры возникают только в опорной ноге в ее фазе опоры.

(3.8)

$$R_x(t) = g \cdot (2m_a \sin(\alpha_i(t)) + 2m_b \sin(\beta_i(t)) + m_k \sin(\psi(t)))$$

$$R_y(t) = g \cdot (2m_a \cos(\alpha_i(t)) + 2m_b \cos(\beta_i(t)) + m_k \cos(\psi(t)))$$

Теперь подставим координаты x_{ij}, y_{ij} в уравнения для обобщенных координат (3.5), нарисуем графики обобщенных координат $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \psi$ (Рис.3.3). В одном режиме движения они получились гладкими и похожими на синусы благодаря гладкости исходных данных (координат точек экзоскелета) и небольшой высоте шага, но так бывает не во всех режимах движения. Например, увеличив амплитуду и длину шага, можно получить график с функциями, непохожими на синусы. Также на рисунке 3.3 изображена углы сгиба ног в течение цикла движения.

Затем полученные обобщенные координаты вместе с x, y подставим в уравнения (2.5), найдем обобщенные силы и построим их графики (Рис.3.4).

Из значений обобщенных сил Q по уравнениям (2.6) найдем также зависимости моментов $u_i (M_{i2}), q_i (M_{i3}), w_i (M_{i4})$, и для заданных точек времени с интервалом 0,05 сохраним их значения.

После подстановки значений в программу, полученные значения энергии, сил реакции и моментов можно выводить на экран интерактивно вместе с движением 5-звенника.

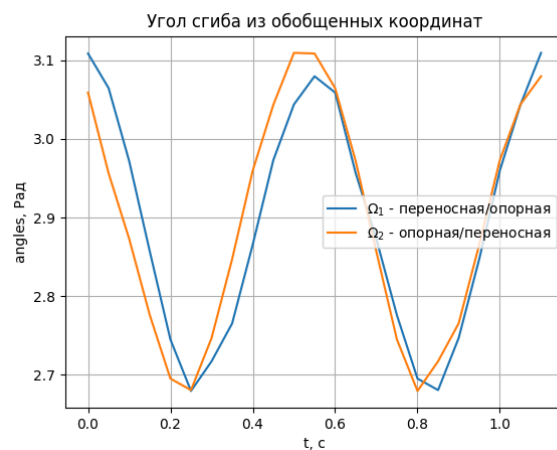
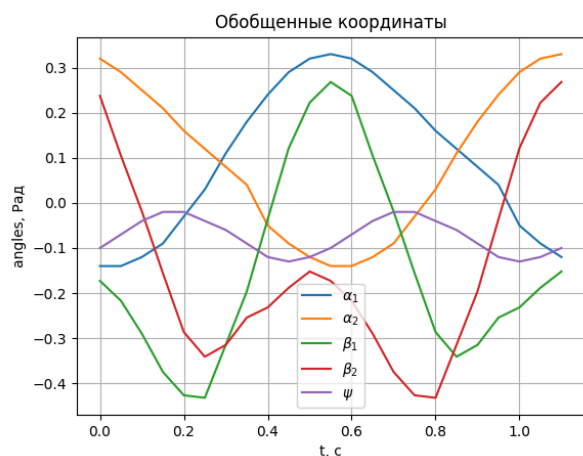


Рис.3.4. Обобщенные координаты. В начале цикла α_1 , β_1 – углы переносимой ноги, в середине становятся углами опорной.

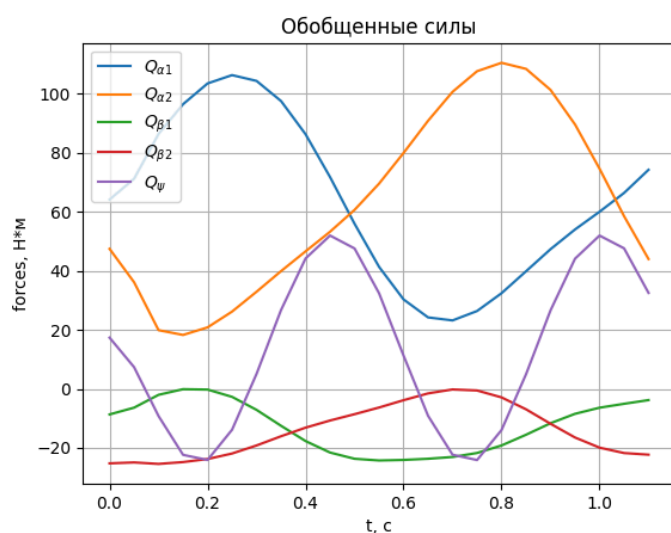


Рис.3.5. Обобщенные силы и их изменение за время одного цикла. $Q_{\alpha 1}$, $Q_{\beta 1}$ - до 0.2 секунды работают на разгибание, до 0.7 - на сгибание, далее снова на разгибание ноги. Соответственно, $Q_{\alpha 1}$, $Q_{\beta 2}$ - до 0.1 секунды работают на сгибание, до 0.8 - на разгибание, далее снова на сгибание ноги.

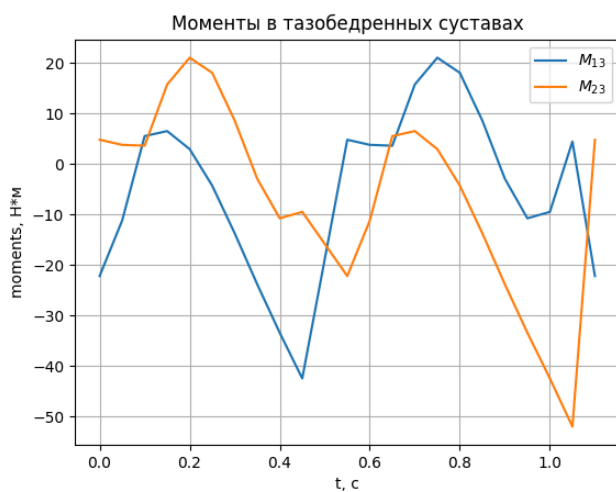
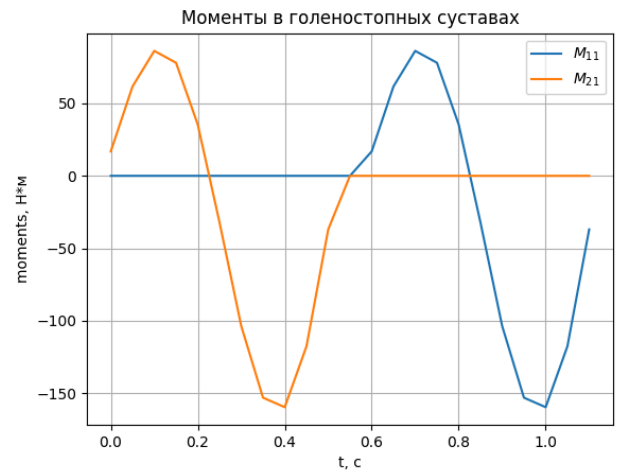
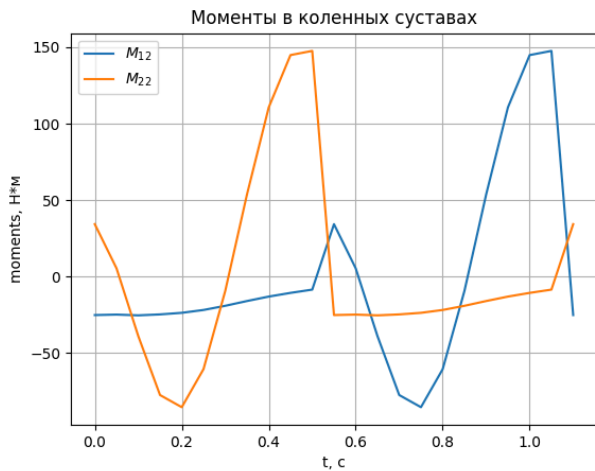


Рис.3.6. Моменты в голеностопных (M_{i1}), коленных (M_{i2}) и тазобедренных (M_{i3}) суставах.

Замечание: M_{11} (момент коленного сустава ноги, которая в начале цикла переносимая, а потом опорная) - до 0.2 секунды работает на разгибание (увеличивается), до 0.5 - на сгибание, до 0.7 - на сгибание, до 1.0 - на разгибание ноги.

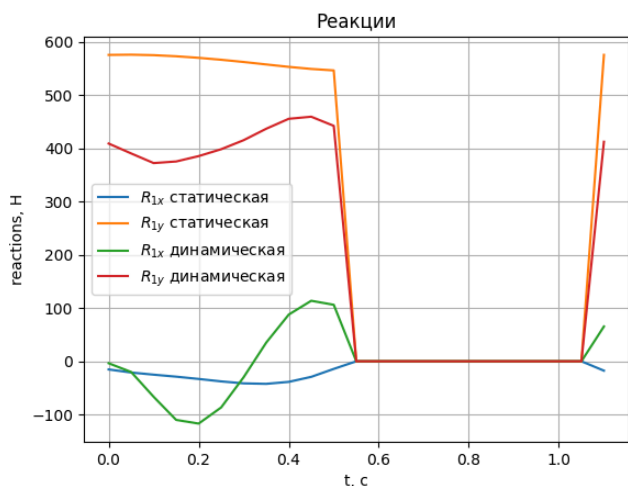


Рис.3.7. Статические и динамические реакции в опоре

Статические и динамические реакции существенно различаются в участках возрастания-убывания. Так как в эксперименте датчик измеряет именно динамические реакции, далее будем рассматривать их.

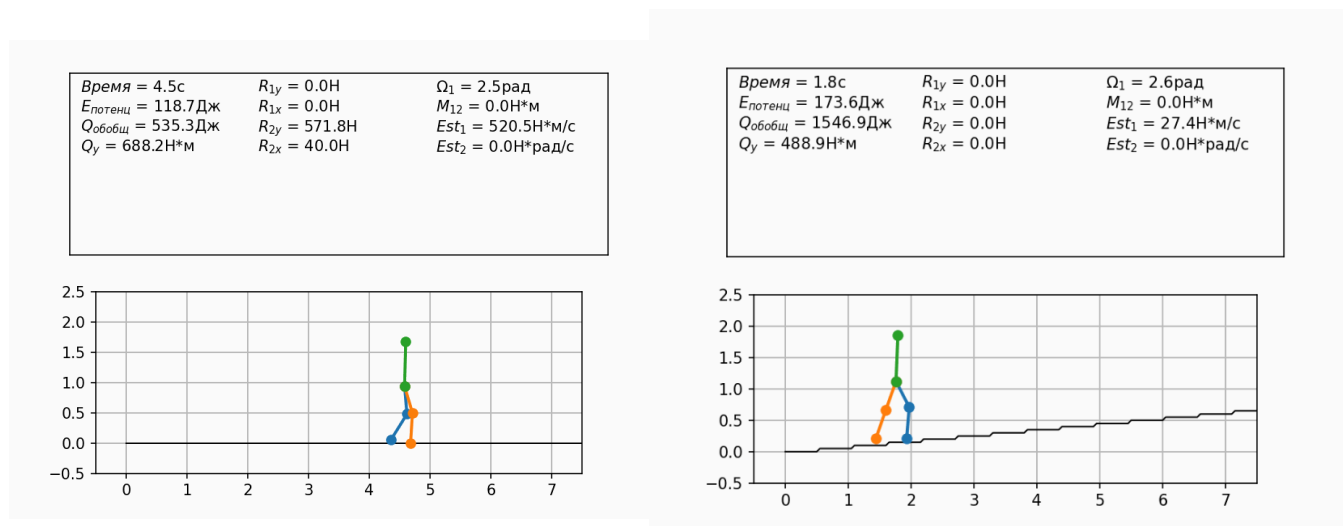


Рис.3.8. Пример демонстрации программы

Так как мы исследуем управление моментом в колене, а именно в опорной ноге, то нас больше интересует момент M_{12} , и ниже отдельно представим зависимость M_{12} и угла сгиба колена $\Omega_1 = 180^\circ - \alpha_1 + \beta_1$, умноженного на силу реакции и на Q_y от времени.

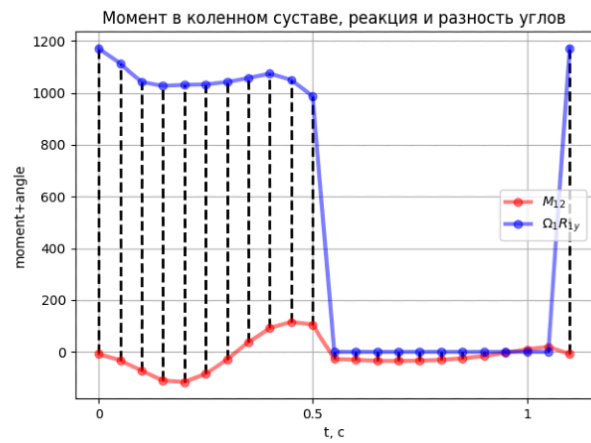
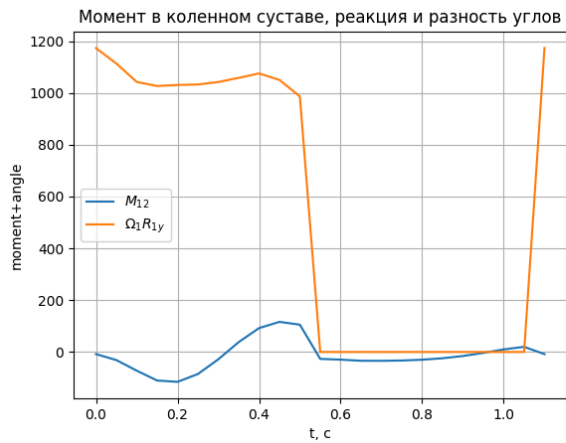


Рис.3.9. Зависимость M_{12} и угла сгиба колена $\Omega_1 = 180^\circ - \alpha_1 + \beta_1$, умноженного на силу реакции R_y от времени

Здесь для сравнения характера функций (экстремумы, возрастание, убывание) используется алгоритм динамической трансформации временной шкалы [19]. Он показывает, насколько похожи 2 функции и находит оптимальное соответствие между ними.

Как видим, некоторое представление управляющего момента может быть аппроксимировано с помощью угла сгиба колена, умноженного на силу динамической реакции опоры или на обобщенную силу Q_y , которая находится из уравнения (2.5.2). Экстремумы у графиков почти совпадают. В нашей модели экзоскелета управляющий момент включает в себя силу реакции на нижнем датчике, которая есть R_{ly} . Эта аппроксимация также может иметь место.

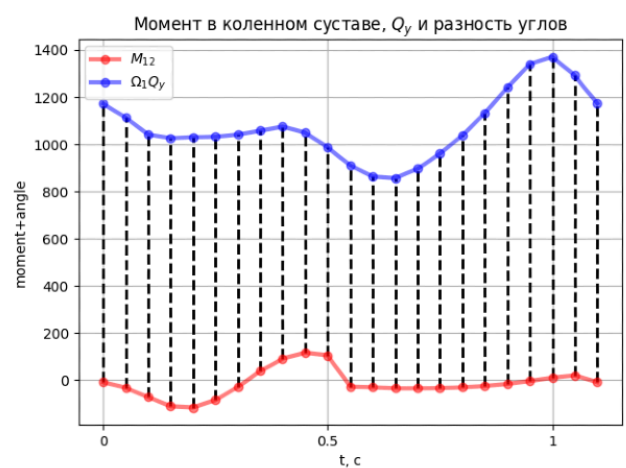
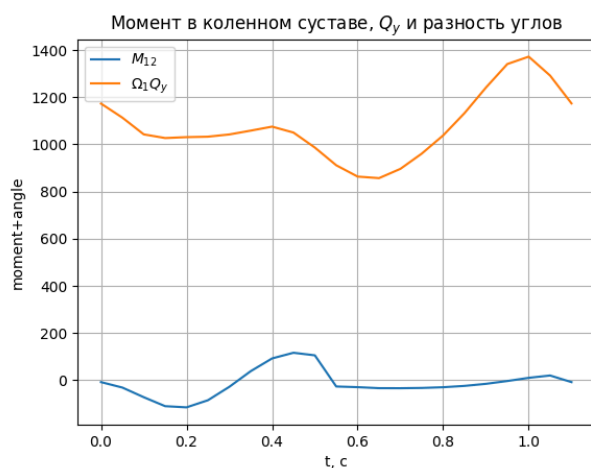


Рис.3.10. Зависимость M_{12} и угла сгиба колена $\Omega_1 = 180^\circ - \alpha_1 + \beta_1$, умноженного на обобщенную силу Q_y от времени

В работе [2] рассмотрены следующие аппроксимации функционала момента:

(3.9)

$$M_{add} = C_1 \Omega_i R_{iy} + C_2$$

(3.10)

$$M_{add} = C_1 \Omega_i + C_2 \dot{\Omega}_i + C_3 + C_4 R_{iy}$$

Размерности коэффициентов: C_1 [Нм], C_2 [Нмс], C_3 [Нм], C_4 [м]. Используя численные значения известных величин M_{add} , Ω_i , $\dot{\Omega}_i$, R_{iy} подберем коэффициенты методом Нелдера-Мида, так как он не использует градиентов функции, а поэтому легко применим к негладким и зашумлённым функциям [24].

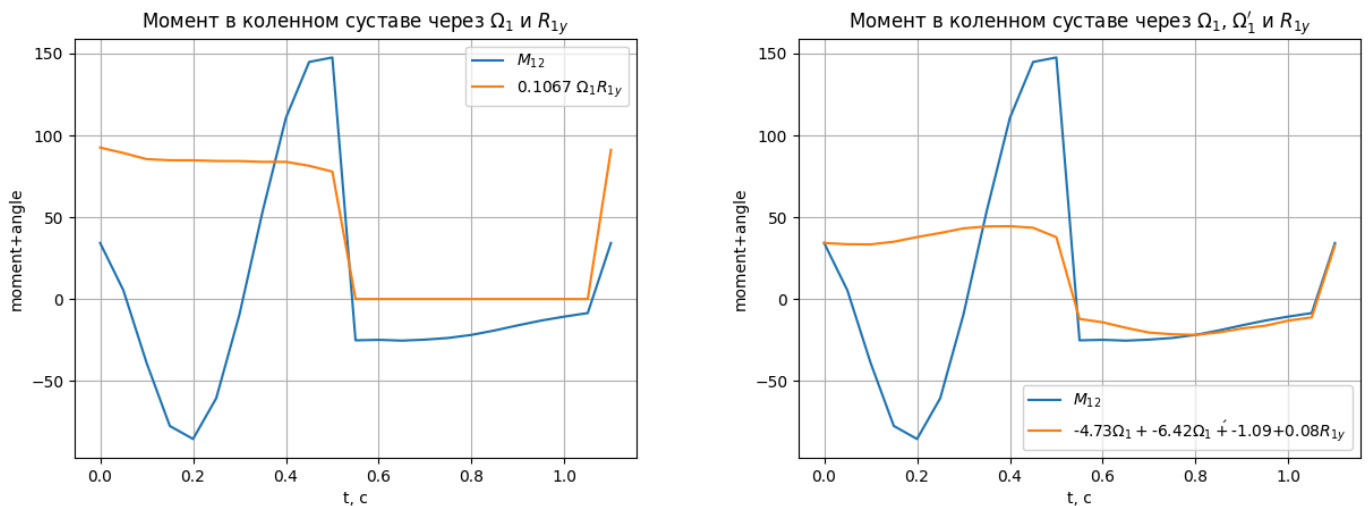


Рис.3.11. Аппроксимация M_{12} способами (3.9) и (3.10)

Для заданного режима движения получились следующие коэффициенты:

$$M_{add} = 0.1067 \Omega_i R_{iy}$$

$$M_{add} = -4.73 \Omega_i - 6.42 \dot{\Omega}_i - 1.09 + 0.08 R_{iy}$$

4. Энергетические оценки

Проведем энергетические оценки и сравнения моментов. В работе [9] предлагается оценивать энергетические затраты по формуле:

(4.1)

$$A = \int_0^T \sum_{i=1}^2 |M_{i2} \dot{\Omega}_i| dt$$

Здесь A – работа, совершаемая электроприводами, M_{i2} – моменты в коленных шарнирах (двигатели есть только там), $\dot{\Omega}_i$ – угловая скорость в i -м шарнире. Для оценки работы двигателя будем оценивать только энергозатраты в коленном суставе. Для общих оценок используем сумму всех моментов:

(4.2)

$$A = \int_0^T \sum_{i=1, j=1}^{2,3} |M_{ij} \dot{\Omega}_i| dt$$

Или, более развернуто:

(4.3)

$$W = \int_0^T \{ |M_{11} \dot{\beta}_1| + |M_{12} (\dot{\beta}_1 - \dot{\alpha}_1)| + |M_{13} (\dot{\psi} + \dot{\alpha}_1)| + |M_{21} \dot{\beta}_2| + |M_{22} (\dot{\beta}_2 - \dot{\alpha}_2)| + |M_{23} (\dot{\psi} + \dot{\alpha}_2)| \} dt$$

Также в работах [6], [9] предлагается оценка момента без умножения на угловую скорость. Такая оценка логична в случае статического удержания одной и той же позиции (например, в положении приседа) и в случае медленного движения:

(4.4)

$$A' = \int_0^T \sum_{i=1}^2 |M_{i2}| dt$$

Графики нормированных по абсолютному значению функций $M_{i2}^2 \dot{\Omega}_i$, $M_{i2} \dot{\Omega}_i$ и M_{i2} со значениями интегралов представлены ниже. Они похожи, совпадают некоторые экстремумы, но функция $M_{i2} \dot{\Omega}_i$ более гладкая и информативная – будем рассматривать ее. Также проведем осреднение оценки по времени $\frac{A(T)}{\Delta T}$ и расстоянию $\frac{A(S)}{\Delta S}$.

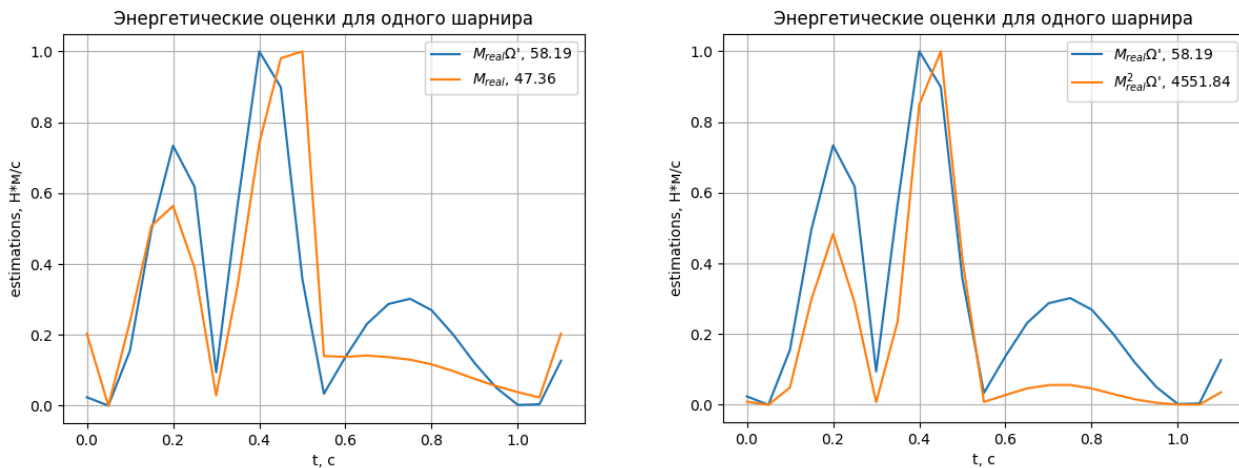


Рис.4.1. Нормированные энергетические оценки в зависимости от времени вместе со значениями интегралов

Далее можно сравнить оценки при настоящем моменте и интеграл подаваемого на двигатель момента, который представлен как угол сгиба, умноженный на силу реакции.

(4.5)

$$\tilde{A} = \int_0^T \sum_{i=1}^2 \left| \Omega_i R_{iy} \dot{\Omega}_i \right| dt$$

У этих функций минимумы и максимумы различаются, однако в первой половине периода есть похожие участки возрастания и убывания функций. Интегральные оценки имеют один порядок, а так как на двигатель можно подавать момент с усилением, то можно найти оптимальный коэффициент усиления для того, чтобы разность между интегральными суммами была наименьшая. Такой коэффициент находится с помощью минимизации модуля разности интегралов. Полученная величина $F(C_y, T) = \left| A - C_y \tilde{A} \right|$ есть усилия, затраченные человеком.

Минимизация функции была произведена методом последовательных наименьших квадратов[18]. Минимизировалась функция $F(C_y, T)$ по размерному коэффициенту C_y [м]:

(4.6)

$$F(C_y, T) = \left| \int_0^T \sum_{i=1}^2 |M_{i2} \dot{\Omega}_i| dt - C_y \int_0^T \sum_{i=1}^2 |\Omega_i R_{iy} \dot{\Omega}_i| dt \right| = \left| \int_0^T \sum_{i=1}^2 (|M_{i2}| - C_y |\Omega_i R_{iy}|) |\dot{\Omega}_i| dt \right|$$

Сравним значения сумм полных затрат коленного сустава (4.2) и затрат двигателя (4.5) на одинаковом интервале времени для следующей стратегии движения: ходьба с различной скоростью, причем при увеличении скорости, например, в N раз, увеличивается в N раз средняя скорость движения таза и в N раз частота шагов. Усредним все значения по времени, поделив интеграл на общее время движения, а также рассмотрим значение энергетических оценок с оптимальным коэффициентом. Для удобства запишем во вторую колонку вклад двигателя как разность общих энергозатрат и вклада человека. Добавим колонку с КПД двигателя в коленном суставе. Среднее значения полезного действия двигателя по таким оценкам – 80%.

Таблица 1.

Режим движения	$\frac{A(T)}{T}$	$\frac{A(T)-F(C_y, T)}{T}$	$\eta = \frac{A(T)-F(C_y, T)}{A(T)}$
Ходьба, v = 1 м/с	182.64	148.36	0.81
Ходьба, v = 1.25м/с	187.37	147.79	0.79
Ходьба, v = 1.5 м/с	219.34	155.68	0.71
Ходьба, v = 1.75м/с	240.93	204.98	0.85
Ходьба, v = 2 м/с	344.57	285.26	0.83

Получаем равномерный рост всех оценок для ходьбы при увеличении скорости. При этом КПД остается примерно одинаковым. Рост оценок с ростом скорости показывает справедливость построенной теории оценивания энергозатрат ходьбы в экзоскелете. Построим зависимость энергетических

оценок от скорости ходьбы.

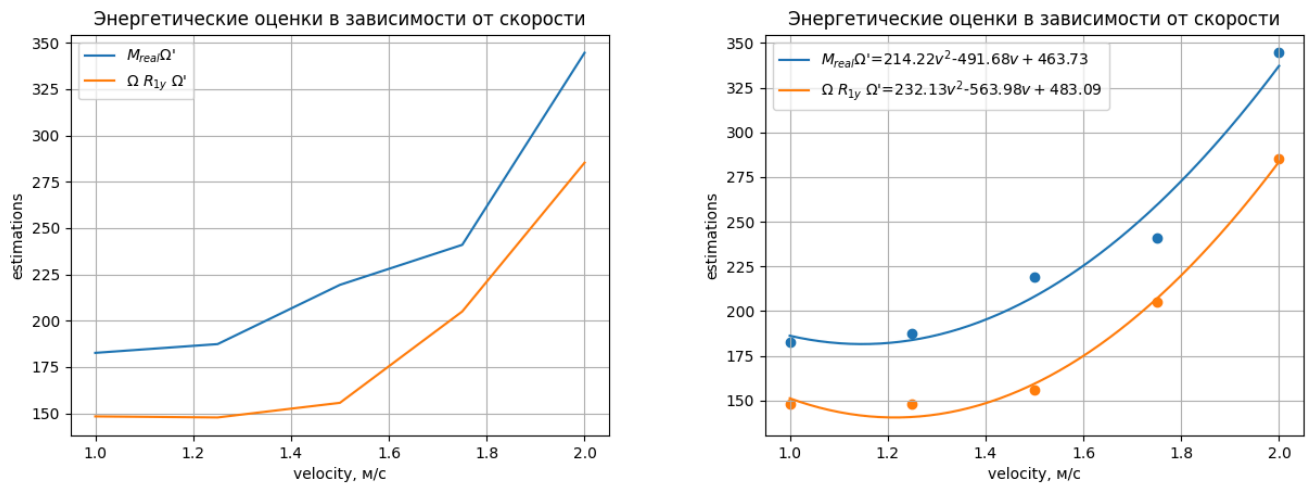


Рис.4.3. Энергетические оценки ходьбы с разной скоростью: реальный момент и подаваемый момент с оптимальным коэффициентом усиления

Видим, что значение оценок увеличивается не линейно, а скорее квадратично. Используя метод полиномиальной регрессии, реализованный в [20] функцией `polyld`, находим подходящие коэффициенты для приблизительного оценивания энергетических затрат при ходьбе с заданной скоростью для данного диапазона скоростей.

(4.6)

$$\left| M_{i2} \dot{\Omega}_i \right| = 214.22 v^2 - 491.68v + 463.73$$

$$\left| \Omega_i R_{iy} \dot{\Omega}_i \right| = 232.13 v^2 - 563.98v + 483.09$$

Рассмотрим также более общий вариант обратной связи:

(4.7)

$$M_{add} = C_1 \Omega_i + C_2 \dot{\Omega}_i + C_3 + C_4 R_{iy}$$

Размерности переменных те же – M_{add} [Нм], R_{iy} [Н]. Принцип, на основании которого выбираются свободные коэффициенты C_1, \dots, C_4 – это минимизация квадратичного функционала

(4.8)

$$\Phi = \int [\mathfrak{M}_* - (C_1 \phi_* + C_2 \dot{\phi}_* + C_3 + C_4 R_y^*)]^2 dt$$

на протяжении одного шага, где переменные со звездочкой означают функции времени вдоль рассматриваемого («номинального») режима движения. Коэффициенты C_1, \dots, C_4 являются тогда решением некоторого линейного, алгебраического уравнения 4-го порядка, коэффициенты которого образуют некие суммы вычисляемых величин вдоль «номинального» режима движения по лестнице. Полученные на основе минимизации коэффициенты определяют в некотором смысле наилучшее в среднем представление момента, обеспечивающего заданное перемещение экзоскелета, видимо, и не только в режиме квазикомфортабельных походок. Размерности коэффициентов: C_1 [Нм], C_2 [Нмс], C_3 [Нм], C_4 [м].

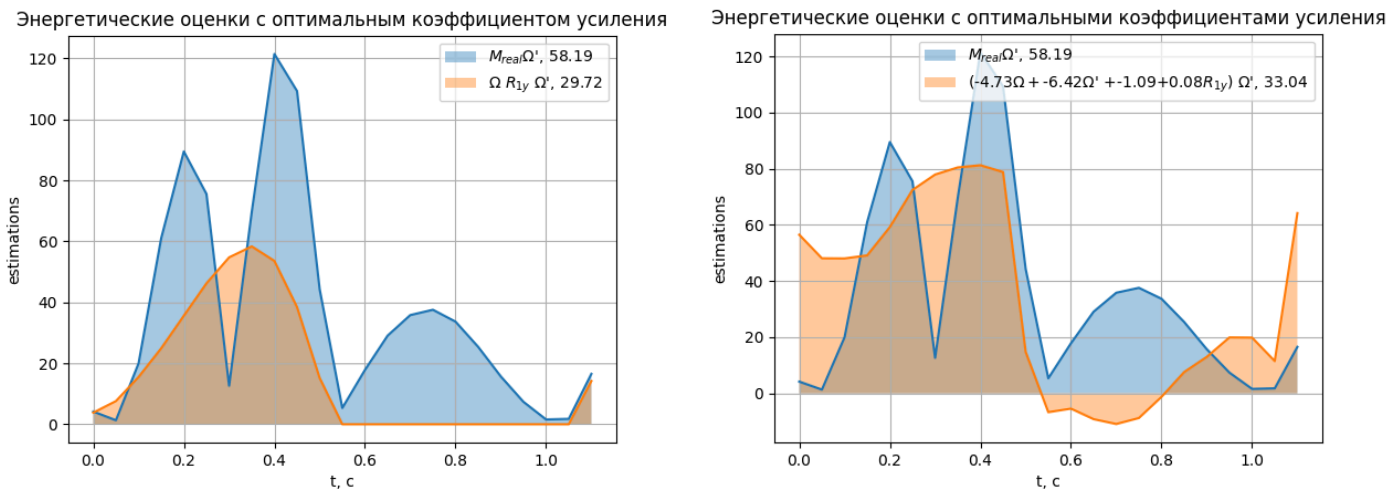


Рис.4.2. Нормированные энергетические оценки с оптимальными коэффициентами усиления. КПД двигателя, оцененный таким образом в данном случае составляет 71% и 75% соответственно.

(4.9)

$$F(C_1, C_2, C_3, C_4, T) = \left| \int_0^T \sum_{i=1}^2 |M_{i2} \dot{\Omega}_i| dt - \int_0^T \sum_{i=1}^2 |(C_1 \Omega_i + C_2 \dot{\Omega}_i + C_3 + C_4 R_{iy}) \dot{\Omega}_i| dt \right|$$

Подберем эти коэффициенты для ходьбы с разной скоростью по горизонтальной поверхности и для ходьбы со скоростью $v=1$ м/с по лестнице.

Таблица 2.

Режим движения	$\frac{A(T)}{T}$	$\frac{A(T)-F(C_i T)}{T}$	C_1	C_2	C_3	C_4	$\eta = \frac{A-F}{A}$
Ходьба, $v = 1$ м/с	182.64	153.72	186	60	240	-20	0.74
Ходьба, $v = 1.25$ м/с	187.37	155.21	91	119	-33	-10	0.73
Ходьба, $v = 1.5$ м/с	219.34	190.53	70	120	58	-31	0.77
Ходьба, $v = 1.75$ м/с	240.93	224.41	103	79	2	14	0.80
Ходьба, $v = 2$ м/с	344.57	278.64	172	9	-35	-99	0.75

Таблица 3.

Режим движения	$\frac{A(T)}{T}$	$\frac{A(T)-F(C_i T)}{T}$	C_1	C_2	C_3	C_4	$\eta = \frac{A-F}{A}$
Ходьба, 0°	182.64	153.72	186	60	240	-20	0.74
Ходьба, 10°	197.55	161.54	104	93	-56	-13	0.72
Ходьба, 20°	357.21	303.45	87	116	59	-27	0.75
Ходьба, 30°	410.89	357.57	99	88	13	20	0.77
Ходьба, 45°	491.38	422.26	155	10	-11	-80	0.76

Теперь от оценок двигателя перейдем к общим энергетическим оценкам.

Наиболее состоятельной будет оценка, учитывающая как угловую скорость вращения, так и величину момента. Рассмотрим также ее удельные оценки.

Таблица 4.

Режим движения	$A = \int_0^T \sum_{i=1}^2 M_{i2} \dot{\Omega}_i dt$	$\frac{A(T)}{\Delta T}$	$\frac{A(S)}{\Delta S}$
Ходьба, v = 1 м/с	182.64	26.09	26.09
Ходьба, v = 1.25м/с	187.37	33.45	26.76
Ходьба, v = 1.5 м/с	219.34	47.00	31.33
Ходьба, v = 1.75м/с	240.93	60.23	34.42
Ходьба, v = 2 м/с	344.57	98.45	49.22

Снова получаем квадратичную зависимость роста энергозатрат при росте скорости.

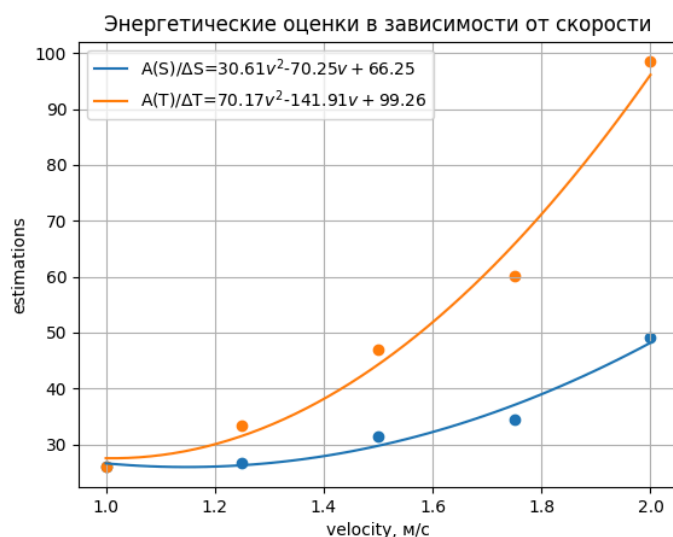


Рис.4.4. Энергетические оценки ходьбы с разной скоростью

Сделаем также расчеты для поднятия и опускания по наклонной плоскости/лестнице. Получаем, что при увеличении наклона расход растет линейно. Передвигаться по наклонной плоскости чуть менее энергозатратно, чем по лестнице.

Таблица 5.

Режим движения	$A = \int_0^T \sum_{i=1}^2 M_{i2} \dot{\Omega}_i dt$	$\frac{A(T)}{\Delta T}$	$\frac{A(S)}{\Delta S}$
Ходьба 0°, v=1 м/с	182.64	26.09	26.09
Ходьба 5.8°, v=1 м/с	212.05	27.26	30.29
Ходьба -5.8°, v=1 м/с	71.81	8.21	10.25
Ходьба 11.6°, v=1 м/с	262.46	33.74	37.49
Ходьба -11.6°, v=1 м/с	5.85	0.68	0.84

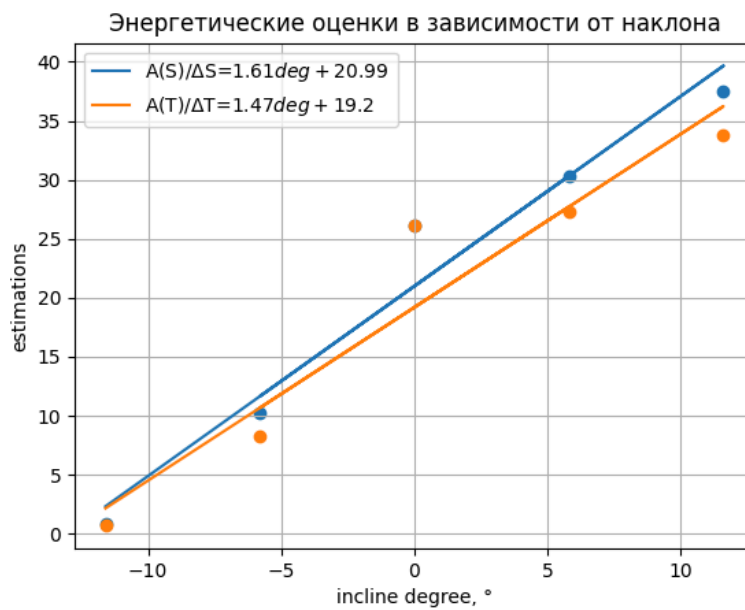


Рис.4.5. Энергетические оценки ходьбы с разным наклоном

$$F(C, T) = \left| \int_0^T \sum_{i=1}^2 (|M_{i2}| - |M_{i2appr}(C)|) |\dot{\Omega}_i| dt \right|$$

5. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных

Устройство экспериментального образца имеет следующую конфигурацию.

Модель экзоскелета имеет 2 силовых датчика: один под предполагаемым местом пятки, второй — в голени экзоскелета. Датчики будут измерять компоненты сил, обусловленных весом тела и переносимых грузов, а также сил трения-сцепления.

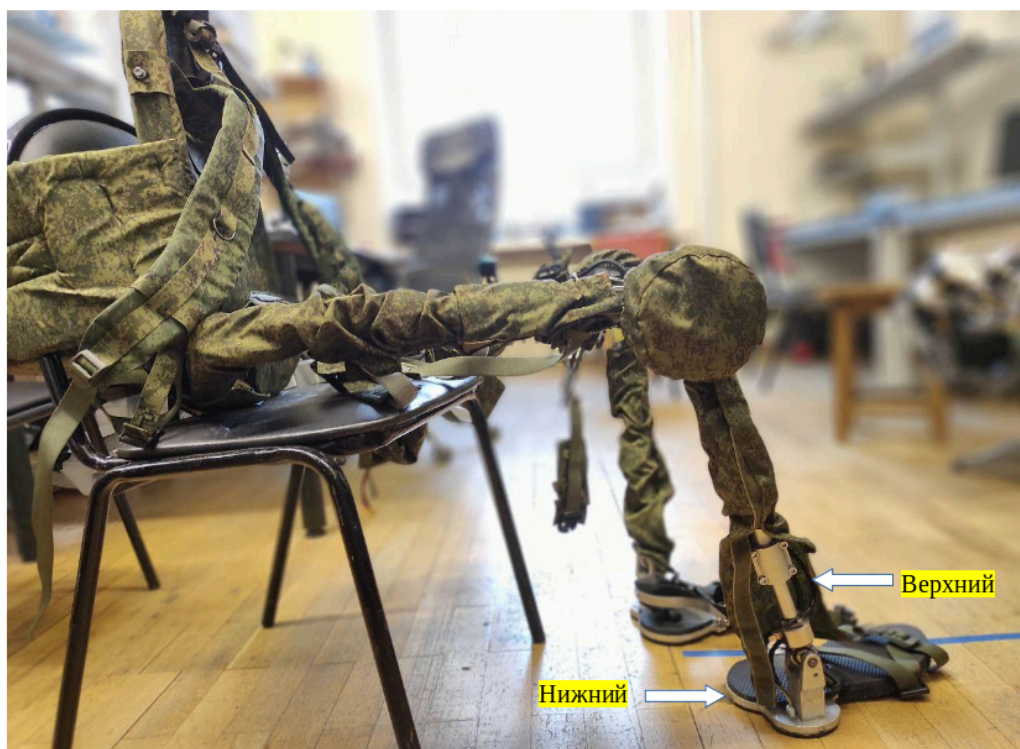


Рис.4.1. Механическая модель экзоскелета

Чтобы понять, какую силу он измеряет в терминах нашей математической модели, рассмотрим динамическую схему на рис.4.2. Заметим, что силовой датчик иногда называют датчиком давления, но в действительности он измеряет силу.

Здесь видно из проекций на оси x , y , что:

(4.1)

$$P_{iv} \cos(\beta_i) + P_{in} = R_{iy}$$

$$P_{iv} \sin(\beta_i) = R_{ix}$$

Также напомним выражение измеряемого угла Ω_i из α_i , β_i :

(4.2)

$$\Omega_i = 180^\circ - \alpha_i + \beta_i$$

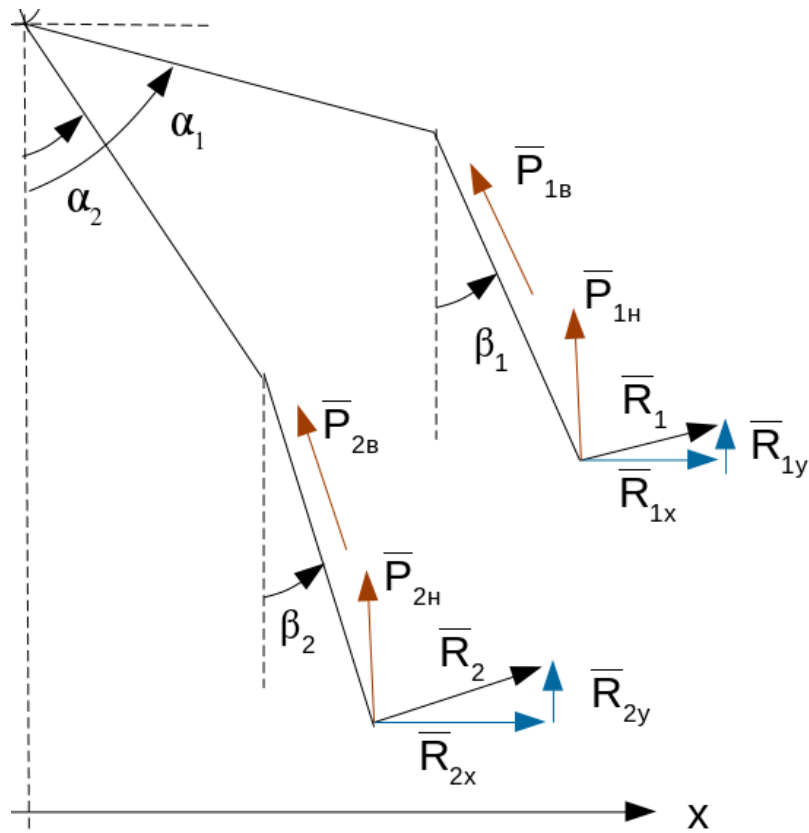


Рис.4.2. Динамическая схема с указанием сил на датчиках

Создаваемые двигателем моменты M_{i2} действуют в коленных суставах. В модели для исследования энергетических оценок и получения рисунков ходьбы мы ограничились использованием углов Ω_i , сил реакции (проекций R_{iy}) и добавочным моментом только в коленных суставах (M_{i2}).

Для различных экспериментов (ходьба + приседания + уступ) построены графики зависимости сил в датчиках от времени и сил друг от друга (нижней силы от верхней).

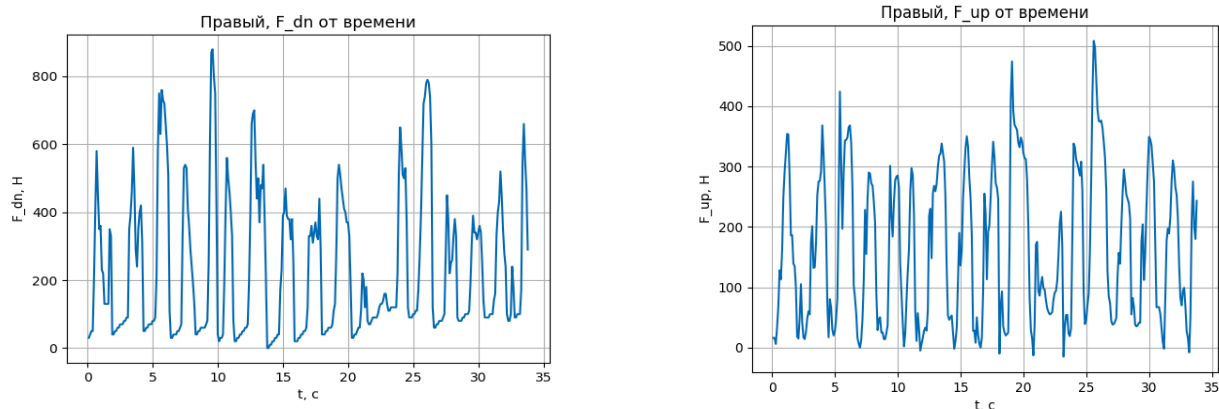


Рис.4.3. Графики зависимости сил в датчиках правой ноги

На графике зависимости верхней силы от нижней, точки не ложатся на одну прямую, что обуславливает целесообразность использования такой конфигурации датчиков.

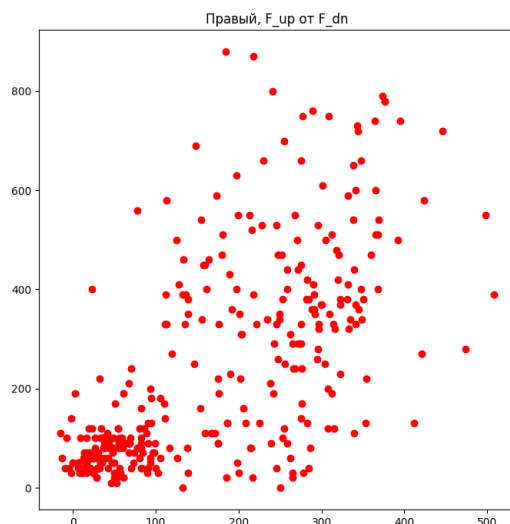


Рис.4.4. График зависимости силы в верхнем датчике от нижней в правой ноге

Так как датчики изначально показывали единицы изменения не в СИ, то проведем их калибровку. Возьмем показания каждого датчика при известной нагрузке и найдем 2 коэффициента (пропорциональности, C_1 и сдвига, C_2).

В итоге из показаний датчика можно получить данные в нужных единицах по формуле:

(4.3)

$$X_{\text{реал}} = C_1 X_{\text{дат}} + C_2$$

Датчик	Показания при образцовой нагрузке	Коэф. пропорциональности	Коэф. сдвига
Угол, левая нога	$90^\circ = -1544$ ед. $180^\circ = 35$ ед.	$1/17.5^\circ$	182°
Угол, правая нога	$90^\circ = -1578$ ед. $180^\circ = -94$ ед.	$1/16.5^\circ$	185°
Сила, левая нога	$0 \text{ Н} = 989$ ед. $700 \text{ Н} = 1059$ ед.	$1/10 \text{ Н}$	989 Н
Сила, правая нога	$0 \text{ Н} = 1010$ ед. $700 \text{ Н} = 1080$ ед.	$1/10 \text{ Н}$	1010 Н
Время	$1 \text{ с} = 10$ ед.	$1/10 \text{ с}$	0 с

Из различных исследований ходьбы, например, [2], можно составить общий порядок действий человека в течение шага. При осуществлении шага в одной ноге:

- 1) пятка отрывается от земли (сила в датчике под стопой $F_{\text{дн}}$ равняется 0)
- 2) сгибается нога (уменьшается угол сгиба колена Ω)
- 3) в воздухе нога разгибается (увеличивается угол сгиба колена Ω)
- 4) нога ставится на землю почти выпрямленной (при почти развернутом угле Ω , сила в датчике под стопой $F_{\text{дн}}$ увеличивается)
- 5) в фазе переноса на другую ногу опора на эту ногу уменьшается (сила в датчике под стопой $F_{\text{дн}}$ уменьшается к нулю до отрыва ноги от земли)

Проверим, корректно ли работают датчики в экзоскелете, используя эти соображения. Проведем эксперимент плоской регулярной ходьбы в экзоскелете, обработаем данные ходьбы и возьмем одну подборку данных для одной ноги между двумя нулями силы (эта подборка означает один шаг), после чего изобразим изменения двух величин на графике в зависимости от времени.

Период одного шагового цикла оказался равен 2.0 секунды. Все предположения 1)-5) об изменении показаний датчиков видим на графике зависимости показаний положения и силы от времени. То есть, наши датчики работают корректно. Также построим аналогичную теоретическую зависимость силы реакции опорной ноги и угла сгиба от времени в течение шага.

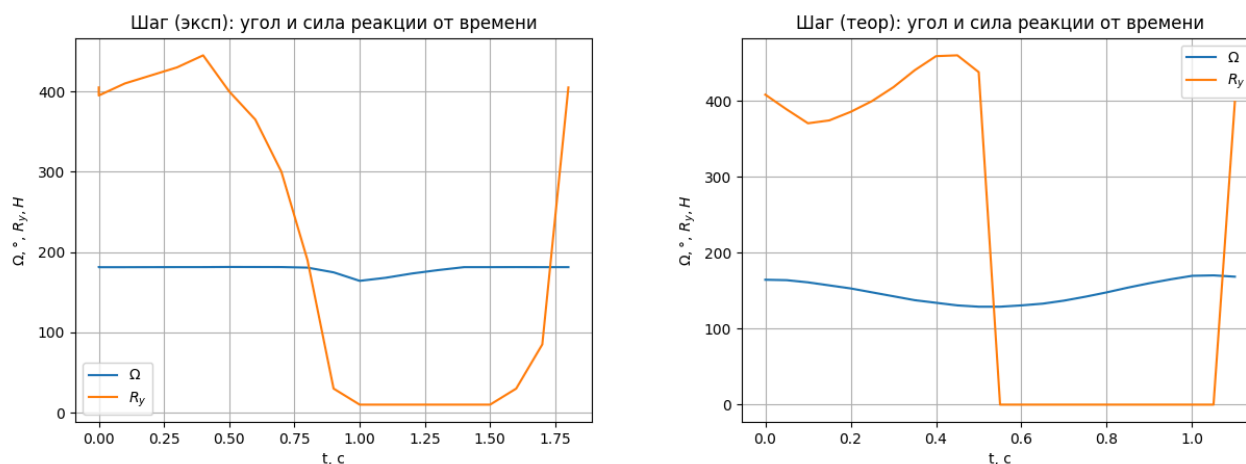


Рис.4.5. График зависимости угла (синий, $^\circ$) и силы на нижнем датчике (оранжевый, Н) от времени (с). Начало – опорная фаза, конец – переносимая.

Как можно заметить, после правильной калибровки экспериментальные данные почти совпадают с теоретическими (одинаковые участки возрастания и убывания, один и тот же порядок величин, разница в периоде может быть убрана интерполяцией или сжатием функции).

6. Заключение

В результате работы был рассмотрен алгоритм управления приводами в коленном суставе экзоскелета нижних конечностей. Изучена математическая модель семизвенной ходьбы и сопоставлена с механической моделью.

Составлена программная модель ходьбы для визуальной проверки корректности задаваемых движений и расчета всех параметров движения (потенциальной и обобщенной энергии всех звеньев, сил реакций опоры, моментов в коленных, голеностопных и тазобедренном суставах) в каждый момент времени.

Найдены теоретические зависимости межзвенных углов и моментов в суставах в зависимости от времени в течение одного шага для заданных режимов ходьбы (с разной скоростью, по наклонной поверхности, по лестнице).

Была проведена серия экспериментов: рассмотрено движение экзоскелета в режиме плоской регулярной ходьбы по ровной горизонтальной поверхности с разной скоростью. При эксперименте фиксировались данные с силовых датчиков в стопе и в нижнем шарнире, угол сгиба колена, а также момент, создаваемый двигателем в колене. По этим данным были создан рисунок ходьбы и сопоставлен с теоретически полученным рисунком.

Проведены сравнительные оценки моментов, полученных теоретически, с моментами, созданными дополнительно. Произведена оценка эффективности экзоскелета, основанная на сравнении работы двигателя и общей работы коленного сустава, и подобраны оптимальные коэффициенты обратной связи для построения момента. Анализ эффективности системы показал, что можно добиться среднего КПД двигателя в 70% для различных скоростей.

Произведены энергетические оценки ходьбы в разных режимах и сопоставлены данные мощностей, затрачиваемых разными суставами в этих режимах. Сделан вывод о том, что наибольшие энергозатраты происходят в коленном суставе.

Полученная программная модель может быть использована для развития управляющего алгоритма при разных видах движения, а математическая модель может быть использована при изучении движений человека и впоследствии уточнена.

Список литературы

1. Белецкий В. В., Кирсанова Т. С. Плоские линейные модели двуногой ходьбы //Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1976. – No. 4. – С. 51.
2. Белецкий В. В., «Двуногая ходьба: модельные задачи динамики и управления». — М.: «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1984. —288 с.
3. В. М. Буданов, Э. К. Лавровский. Об использовании безредукторных электроприводов при реализации регулярной ходьбы экзоскелетона по неровным поверхностям // НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова
4. Витензон А. С. Динамические фазы цикла ходьбы. — В кн.: Биомеханика. Рига, 1975, с. 251—257.
5. Viet Anh Dung Cai. Control of a Self-adjusting Lower Limb Exoskeleton for Knee Assistance. ROMANSY 21 - Robot Design, Dynamics and Control (pp.385-392)
6. Формальский А. М., «Перемещение антропоморфных механизмов» — М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1982. —368 с.
7. Белецкий В.В., Бербюк В. Е. Нелинейная модель двуногого шагающего аппарата, снабженного управляемыми стопами. — М.: Институт прикладной математики АН СССР, 1978, Препринт, С. 54— 67.
8. Лавровский Э. К., Письменная Е. В., Комаров П. А. О задаче организации ходьбы экзоскелетона нижних конечностей при помощи управления в коленных шарнирах //Российский журнал биомеханики. 2015. Т. 19, С. 158–176.
9. Антипов В. М., Карлов А. Е., Фёдоров А. В., Аль М. Х. Х. Распределение энергозатрат в системе человек-экзоскелет // Вопросы методологии естествознания и технических наук: современный контекст. - 2019.- С. 109-112.
10. Гурфинкель В. С., Осовец С. М. Динамика равновесия вертикальной позы человека//Биофизика. – 1972. – т. 17. вып. 3. – С. 478—485.
11. Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. 1971. С. 100 — 113.

12. Вьюгин В. В. Математические основы машинного обучения и прогнозирования //Электронное издание, М.: МЦНМО, 2014. С. 17 — 35.
13. Елистратова Е. А., Иванов Г. В. Онлайн-учебник по машинному обучению от ШАД //Школа анализа данных Яндекс, 2020
14. Бринк Х., Ричардс Дж., Феверолф М. Машинное обучение. -СПб .: Питер, 2017. (Серия «Библиотека программиста»). С. 144 – 152.
15. Gait & Posture Journal, March 2018, p. 12 – 22.
16. Чичерин И. Ю., Погорельский И. П. Симулятор движения Gazebo.
17. Лавровский Э. К., Письменная Е. В. О регулярной ходьбе экзоскелетона нижних конечностей при дефиците управляющих воздействий //Российский журнал биомеханики. 2014. Т. 18, С. 208 – 225.
18. Арушанян И. О. Алгоритмы безусловной минимизации функций многих переменных / МГУ, Мех–мат ф-т, каф. выч. мат., 2017, с. 2 – 20.
19. Z. Zhang, R. Tavenard, A. Bailly, X. Tang, P. Tang, T. Corpetti Dynamic time warping under limited warping path length. Information Sciences, vol. 393, 2017, p. 91–107.
20. Python numpy documentation // <https://numpy.org>
21. Рогинский Я. Я., Левин М. Г. Антропология. Учебник для студентов ун-тов. — 3 изд. — М., Высшая школа, 1978, 528 с.
22. Lee H., Rosen J. Lower limb exoskeleton-energy optimization of bipedal walking with energy recycling-modeling and simulation //IEEE Robotics and Automation Letters. – 2023. – Т. 8. – №. 3. – С. 1579-1586.
23. Алексеева Л. А., Голубев Ю. Ф. Модель динамики шагающего аппарата//Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. – 1975. – No 3. – С. 72—80.
24. Jeffrey C. Lagarias, Bjorn Poonen, Margaret H. Wright. Convergence of the restricted Nelder–Mead algorithm in two dimensions // SIAM J. Optim. 22 (2012), 501–532.